

А. М. Вершик

## К ИСТОРИИ ЭРГОДИЧЕСКОГО СЕМИНАРА В. А. РОХЛИНА (1960–1970 ГГ.)

### 1. ПЕРЕЕЗД В. А. РОХЛИНА В ЛЕНИНГРАД

Владимир Абрамович Рохлин переехал в Ленинград с семьей – женой Анной Александровной Гуревич, сыном Володи (1952 г.р.) и дочкой Лизой (1955 г.р.) – в конце лета 1960 года. До этого они жили под Москвой в Коломне, где В.А. работал в педагогическом институте. В 1959 году ректор ЛГУ А. Д. Александров пригласил В.А. на должность профессора кафедры геометрии Ленинградского государственного университета, которой сам и заведовал. Такой совет дал ему его друг и коллега – известный московский геометр Н. В. Ефимов, семья которого с давних пор дружила с Рохлиными; жена Ефимова была подругой А.А. с 1930-х гг., когда обе были воронежскими аспирантками Л. С. Понтрягина.

Сразу по приезде – в сентябре 1960 г. – В.А. объявил о своем научном семинаре по теории динамических систем (“эргодическом семинаре”). Кроме того, через некоторое время он начал читать курс комбинаторной топологии для желающих. Ни первая область математики (теория динамических систем), ни вторая (современная топология) не были представлены на матмехе до этого. Другой семинар, топологический, В.А. объявил несколько позже, поскольку для его работы необходимо было подготовить хотя бы первую группу участников. Он был начат в 1961 году, стал широко известным и существовал почти до кончины В.А. в 1984 году. О нем необходим отдельный рассказ.

### 2. ПРЕДЫСТОРИЯ СЕМИНАРА

Здесь я хочу написать об истории эргодического семинара. Столь быстрое его учреждение и немедленная активность объяснялись, во-первых, тем, что по времени это совпало с впечатляющим прогрессом в теории динамических систем, связанным с введением колмогоровской энтропии и другими событиями, и последовавшим за этим гигантским

---

*Ключевые слова:* эргодическая теория, энтропия, траекторные разбиения, инвариантные меры.

интересом к предмету. Но было ещё одно обстоятельство, объясняющее естественность и скорость возникновения семинара, — его появление было в большой степени подготовленным. За год до приезда В.А. в Ленинград сюда же переехал его первый аспирант по динамическим системам Леонид Михайлович Абрамов (1932–1995), жена которого была ленинградкой. В 1955 году он окончил Днепропетровский университет по специальности “Теория приближений”, а по распределению попал в Архангельский пединститут, где с 1952 года работал В.А., вынужденный уехать из Москвы после фактического изгнания его директором И. М. Виноградовым из Математического института им. В. А. Стеклова Академии наук.

Л. М. Абрамов по рекомендации В.А. стал учиться эргодической теории и в середине 1950-х гг. стал аспирантом МГУ под его руководством (по согласованию с А. Н. Колмогоровым). Л.М. подготовил диссертацию, которая была первой кандидатской работой по теории энтропии (защита в МГУ в 1960 г.), сам он был первым аспирантом В.А. О планах переезда В.А. в Ленинград было известно многим, а некоторые, в том числе я, от московских друзей знали и о переезде Л.М. Очень непростую по тем временам задачу — устроиться преподавателем в ЛГУ — помогли Л.М. решить несколько человек, в том числе дружившая с В.А с московских университетских времен О. А. Ладыженская. Так совпало, что как раз в то время Л. В. Канторович организовывал на экономическом факультете новое отделение (математической экономики), и поэтому удалось взять Л.М. на должность преподавателя кафедры математической экономики, на которой он и проработал до конца жизни. Такие были тогда времена.

В Ленинграде в семинаре Г. П. Акилова (1921–1986) в те времена существовал интерес к теории меры на локально компактных группах и особенно к теории меры на линейных топологических пространствах (влияние И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова). Основными участниками семинара были Б. М. Макаров, В. П. Хавин, В. Н. Судаков и я. Некоторые из нас уже слышали о колмогоровской энтропии. Осенью 1958 года состоялась вторая всесоюзная конференция по функциональному анализу в Одессе (первая такая конференция прошла в январе 1956 года в Москве). Она, как и первая, собрала много известных специалистов. В частности, на ней выступил С. В. Фомин с докладом о знаменитой и только что вышедшей работе А. Н. Колмогорова об энтропии (ДАН,

1958). На следующей, третьей конференции по функциональному анализу в Баку (весна 1960 года) с докладом о прогрессе в теории динамических систем, связанном с энтропией, выступил В.А. Я был вместе с другими аспирантами из Ленинграда (Б. М. Макаров, В. Н. Судаков) на обеих конференциях. Эти доклады произвели большое впечатление и вызвали естественный интерес к теме.

Интересный эпизод произошел на одесской конференции. После доклада С. В. Фомина о колмогоровской энтропии неожиданно встал никому не известный аспирант Одесского университета Д. З. Аров и заявил, что рассказанные докладчиком результаты А. Н. Колмогорова о применении шенноновской информации к схемам Бернулли содержались в его дипломной работе, о чём он сообщил в письме А. Н. Колмогорову. В своей второй заметке об энтропии (ДАН, 1959) А.Н. действительно упомянул о письме Д. З. Арова. Но что именно сделал Д. З. Аров и как это связано с энтропией Колмогорова–Синая, фактически разъяснилось совсем недавно. Часть его диплома, относящаяся к теории информации, недавно опубликована в нашей серии “Записки научных семинаров ПОМИ” (вып. XXV, т. 436, 2015) с комментариями, сделанными по моей просьбе Б. М. Гуревичем. Таким образом, Д. З. Арова смело можно назвать одним из пионеров энтропийной эргодической теории.

Позже, в 1962 году, Д. З. Аров приехал в Ленинград на стажировку к В.А. и принял активное участие в эргодическом семинаре, но впоследствии он занялся тематикой своего учителя М. Г. Крейна.

В течение 1959–1960 учебного года мы организовали домашний молодежный семинар по теории меры и функциональному анализу, на котором реферировали книги А. Вейля, П. Халмоша и некоторые статьи по теории интегрирования и теории меры.

Здесь уместно вспомнить приезд В.А. в 1957 году для доклада на семинаре Г. М. Фихтенгольца и Л. В. Канторовича. Я посещал этот семинар и запомнил доклад — он состоялся на одном из последних заседаний, вскоре семинар прекратил работу в связи с переездом Л.В. в Новосибирск. Доклад был посвящен недавней работе В.А. в “Успехах” о метрических инвариантах измеримых функций, основанной на его теории измеримых разбиений. Я запомнил этот доклад и через много лет использовал и обобщил его в нескольких направлениях. В этот же (или близкий по времени) приезд В.А. прочитал лекцию в ЛОМИ о

современных достижениях в алгебраической и комбинаторной топологии. Немедленно был выпущен ротапринт с текстом лекции, который долгое время привлекал внимание молодых математиков.

### 3. НАЧАЛО СЕМИНАРА И ЕГО УЧАСТНИКИ

После приезда В.А. попросил Л. М. Абрамова, который к сентябрю 1960 года уже имел неплохие контакты с ленинградскими математиками, связать его с желающими принять участие в эргодическом семинаре. Первое организационное заседание, насколько я помню, прошло не позже октября 1960 года на матмехе. Секретарем семинара стал Л.М.

О том, что В.А. стал профессором матмеха, знали многие; интерес к нему и к новому семинару был велик. Поэтому на первое заседание пришло немало студентов, аспирантов, а также преподавателей. В.А. предложил первое время посвятить изучению теории меры в его понимании, теории колмогоровской энтропии, а также реферированию ряда классических работ по динамике – спектральной теории, автоморфизмам компактных групп, геодезическим потокам, связи со случайными стационарными процессами и т.д. Все это было совершенно ново для большей части собравшейся аудитории. Сейчас можно вспомнить лишь тех, кто посещал семинар достаточно длительное время в первые годы. Среди них назову лишь нескольких: Л. М. Абрамов, И. А. Ибрагимов, В. Н. Судаков, Б. М. Макаров, А. М. Каган, Р. А. Зайдман. Позже, на протяжении 1960-х годов, к участникам присоединились несколько математиков, окончивших университет или аспирантуру, – Р. М. Белинская, С. А. Юзвинский, М. И. Гордин, А. А. Лодкин, А. Н. Лившиц и др. Разумеется, были участники, промелькнувшие и затем исчезнувшие, были, особенно первое время, любопытствующие – их список велик и трудновосстановим.

Первый семинар открыл В.А., который рассказал о своем плане работы семинара и о тематике первых докладов (см. ниже). Предложенные им темы были сравнительно быстро разобраны, и вскоре начались регулярные заседания. В числе первых приглашенных докладчиков были два ведущих ленинградских математика, занимавшихся, в частности, проблемами, близкими к динамике, с которыми В.А. постоянно поддерживал тесный контакт: Д. К. Фаддеев, который рассказал о классификации автоморфизмов решеток, и Ю. В. Линник, изложивший общую схему своей недавней работы о равномерном распределении целых точек на многообразиях. У меня хранится репринт первой

работы (в дальнейшем — книги “Эргодический метод и  $L$ -функции”) Ю.В., подаренный им В.А. и переданный мне в числе других оттисков вдовой В.А. с надписью, сделанной Ю.В.: “Это моя лучшая работа”.

Особенностью семинара было обилие гостей, в основном из Москвы, где в это же время чрезвычайно активно работал семинар Я. Г. Синая и В. М. Алексеева по динамическим системам. Этот семинар наследовал инициативе А. Н. Колмогорова конца 1950-х гг. возродить в Москве теорию динамических систем и, в частности, утвердить в качестве одной из тем зарождавшуюся после его пионерских работ энтропийную теорию. В вероятностном семинаре самого А. Н. Колмогорова эта тематика занимала в тот период некоторое (сравнительно небольшое) место, и в нём принял участие В.А., работавший тогда под Москвой. Он сразу оценил идею А.Н. и стал одним из главных разработчиков этой теории. Напомню, что в своей второй заметке об энтропии А.Н. подчеркивает роль в его рассмотрении теории измеримых разбиений, созданной В.А., цитирует в сноске контрпример, который привел В.А. к одному из утверждений первой заметки. В.А. не раз говорил о сильном впечатлении, которое произвела на него работа Колмогорова об энтропии. С ней он связывал возобновление его собственного интереса к теории динамических систем — теории, которой были посвящены его знаменитые работы конца 1940-х годов, сделавшие (вместе с последующими работами по энтропийной теории) его классиком в этой области.

Все эти вещи в значительной мере предопределили тематику и ленинградского эргодического семинара. И поэтому же среди гостей и докладчиков семинара были все активные московские “динамисты” 1960-х годов — В. И. Арнольд, Я. Г. Синай, Д. В. Аносов, В. М. Алексеев и несколько позже их ученики Б. М. Гуревич, В. И. Оселедец, А. Б. Каток, А. М. Степин, Г. А. Маргулис и др. Бывали гости из других городов — Одессы, Ташкента, Тбилиси, Новосибирска, Горького и др.

Семинар существовал до конца 1960-х годов. Отдельные заседания (например, по случаю приезда гостей или специальных событий) бывали и позже. Помню, что свою докторскую диссертацию я рассказывал в 1971 году. Я затеял свой семинар по гладкой динамике в 1965 году, в нём принимали участие некоторые из тех, кого я перечислил, но ещё и М. Л. Громов, В. Л. Эйдлин, С. М. Белинский и др. Семинар существовал полтора года. В 1968 году я организовал более широкий

семинар по теории меры в линейных пространствах, алгебрам операторов, теории представлений и динамике, который существует до сих пор.

#### 4. О ТЕМЕ ЗАНЯТИЙ СЕМИНАРА

Главной темой эргодического семинара была, разумеется, эргодическая теория, а не вся динамика. В.А. подчеркивал, что он сторонник разделения математических структур и предпочитает не смешивать, например, гладкую динамику с метрической или топологической. В то же время он хорошо знал классическую – и гладкую, и теоретико-числовую – динамику, но они для него существовали по отдельности, и преимущество он отдавал метрической (от термина “мера”) динамике – рискну сказать, что с эстетической точки зрения. Более того, он, например, полагал, что именно методы теории преобразований с инвариантной мерой позволят решить многие проблемы и аналитической теории чисел, и гладкой динамики.

Особо он выделял как естественные примеры динамические системы алгебраического происхождения. Топологическую динамику в сравнении с метрической он рассматривал как менее естественную область математики. Более точно, существование инвариантной меры относительно группы преобразований он ставил на первый план. Разумеется, такая мера не всегда существует, но тогда это скорее недостаток постановки вопроса, и именно инвариантность меры относительно некоторой группы преобразований влечёт содержательность ее рассмотрения. С другой стороны, теорию меры саму по себе он не считал особенно важной наукой, в частности, полагал, что теория несепарабельных пространств с мерой – объект скорее патологический, без которого можно обойтись. Он полагал, что пространства Лебега, введенные и изученные им, исчерпывают потребность анализа и динамики в пространствах с мерой. Широко распространенный штамп “пространство с мерой” без уточнений вызывал его критику. Он предпочитал точный термин “теория преобразования с инвариантной мерой” менее определенному термину “эргодическая теория”. Я предполагаю изложить свою точку зрения на роль основополагающей работы В.А. “Об основных понятиях теории меры” и на современное понимание того, что такое категория пространств с мерой, в другом месте.

Завершая общую характеристику стиля семинара, хочу назвать несколько принципов, которым, как я думаю, следовал В.А. в математике в целом и, в частности, в том, каким должен быть исследовательский семинар по математике. Прежде всего, он настаивал на ясности и по возможности структурной (или категорной) чистоте формулировок. Далее, он настаивал на инвариантности (функториальности) утверждений и опять-таки по возможности доказательств. Он не воспринимал рассуждений, выходящих за рамки данной структуры или категории, что приводило иногда к долгим дискуссиям, которые кончались, как правило, в его пользу. Это можно было бы рассматривать как крайний бурбакизм, но В. И. Арнольд – известный враг Бурбаки – очень поддерживал рекомендации В.А. и следовал им.

Кроме того, В.А. очень умел оценить красоту четких утверждений и оригинальность доводов, а эта черта в некотором смысле противоположна всякому догматизму. Так или иначе, школа семинара В.А. дает много тому, кто её прошел и, возможно, не разделяет всех его принципов.

## 5. О ВЕДЕНИИ СЕМИНАРА И О ПЕРВЫХ ДОКЛАДАХ

К сожалению, не сохранились повестки всех заседаний семинаров за неполных десять лет его существования. Сейчас это кажется удивительным: благодаря современным электронным средствам мы легко сохраняем всё на свете. Но раньше надо было вести тетради, следить за последовательностью докладов, и мало кто был на это способен. Мы (и история науки) лишились в результате очень многого. Я писал об этом в связи со знаменитым семинаром И. М. Гельфанда (см. записи М. А. Шубина докладов семинара, доступные в сети); в той же мере это относится и к другим семинарам.

Упомянутые выше многочисленные гости семинара рассказывали о своих уже опубликованных работах; вряд ли стоит перечислять их или воспроизводить дискуссии по сделанным докладам, что к тому же и невозможно. Разумеется, мнение, высказанное В.А. о существовании результата или доклада, – как правило, он заключал этим семинар – вместе с теми или иными его оценками и комментариями всегда были интересны и слушателям, и докладчикам. Высказывались они всегда веско и сдержанно, независимо от того, воспринят ли доклад с энтузиазмом или, наоборот, с сомнением. Стоит сказать, что В.А. неодобрительно

отзывался о других способах ведения семинаров, на которых руководители, пусть и авторитетные ученые, без ограничений выплескивали свои эмоции в дискуссиях о докладах. Культура ведения математических семинаров в советское время выработывалась постепенно, следуя, видимо, европейским и дореволюционным традициям. В.А. следовал лучшим из них.

Остается лишь выбрать из своей памяти то, что в ней осталось. Неудивительно, что помнятся в основном семинары, которые так или иначе соотносятся с темами, интересовавшими меня самого, и некоторые мои собственные доклады. Сначала я приведу лишь часть списка докладов первого периода об опубликованных результатах, рассказанных на семинаре в основном его участниками.

В первое время – 1960–1961 годы – рассказывались известные работы по эргодической теории и теории меры: о пространстве Лебега (В. Н. Судаков), об определениях энтропии (И. А. Ибрагимов), о спектральной теории (Л. М. Абрамов – квазидискретный спектр; Б. М. Макаров – спектр гауссовских систем); о теореме о мартингалах и эргодической теореме (А. М. Каган) и др.

Напишу чуть подробнее о моих докладах первого периода. Сначала В.А. попросил меня рассказать о его малоизвестной работе об унитарных кольцах, которую он ценил. В ней была сделана попытка в духе Гельфанда–Наймарка и московского функционального анализа изложить теорию меры и понятия эргодической теории в терминах пространства  $L^2$  квадратично интегрируемых функций. Для этого было необходимо чем-то дополнить гильбертову структуру пространства функций, и В.А. избрал структуру, которую он назвал унитарным кольцом (позже ее стали называть унитарной алгеброй). Иначе говоря, рассматривается аксиоматизация неограниченного (т.е. определённого не для всех пар) умножения в  $L^2$  с наложенными очевидными ограничениями. Действительно, таким образом определяется функтор соответствующих категорий (категории пространств Лебега и категории унитарных колец – этих терминов тогда ещё не было) Автоморфизму с инвариантной мерой отвечает мультипликативный унитарный оператор. Это естественный метрический аналог теории нормированных колец Гельфанда. Однако более популярной здесь стала не категория унитарных колец, а категория, в которой объектами были гильбертовы пространства  $L^2$  с конусом – конусом неотрицательных функций. Такой функтор оказался более удобен, например, в работе с операторами

– неотрицательными автоморфизмами или (позже) полиморфизмами и марковскими операторами. Но в моем докладе содержался ответ на конкретный вопрос, косвенно поставленный В.А.: как задать структуру унитарного кольца на бесконечномерном пространстве с гауссовской мерой.

В то время мы В. Н. Судаковым интересовались гауссовскими мерами в основном с геометрической точки зрения (квазиинвариантные меры, продолжения слабых распределений и др.), отчасти под влиянием московской школы (И. М. Гельфанд, Д. А. Райков). Я, в частности, изучал книгу Н. Винера “Nonlinear Problems in Random Theory” (1958). Но интерес к динамике линейных автоморфизмов гауссовских мер, или, как тогда говорили, “нормальных динамических систем”, был инициирован А. Н. Колмогоровым и подхвачен В.А., С. В. Фоминым и др. Это относилось к спектральной теории, энтропии и т.д. Замечательная идея А.Н., реализованная его учеником И. В. Гирсановым, привела к построению автоморфизма с простым сингулярным спектром (в дополнении к константам). В.А. пропагандировал эти исследования, ими занимался Л. М. Абрамов, а позже Я. Г. Синай и многие другие. Я тоже вошел в тот список. В докладе я описал формулы умножения обобщенных эрмитовых полиномов, которые и задавали структуру унитарного кольца. Тогда же и несколько позже я понял, что эти формулы эквивалентны формулам исчисления стохастического анализа Ито–Винера, или формулам регуляризации Вика (у физиков), и др.

Помню, что В.А. эти результаты очень понравились. Позже они вошли в мою кандидатскую диссертацию. Тогда я был аспирантом, и формально моим руководителем был ученик и соавтор Л. В. Канторовича Г. П. Акилов, с которым меня связывает многое, но фактически диссертация была инициирована В.А. В ней среди прочих доказанных результатов анонсировался результат об изоморфизме гауссовских автоморфизмов с абсолютно непрерывным спектром, который доказывался только для некоторых специальных спектров. Полностью он был доказан несколько позже Д. Орнштейном. В дальнейшем я не раз рассказывал об этом на семинаре.

Помню ещё несколько своих докладов, инициированных В.А., о знаменитых работах, например доклад о статье И. М. Гельфанда и С. В. Фомина “Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны” (УМН, т. 7, вып. 1(47), 1952) и дискуссию о

ней; а также реферат замечательной работы С. Смейла об ортогональной группе как ретракте группы гомеоморфизмов.

#### 6. ДОКЛАДЫ УЧАСТНИКОВ СЕМИНАРА О РЕЗУЛЬТАТАХ, ПОЛУЧЕННЫХ ИМИ

Почти все участники семинара одновременно с эргодической теорией занимались и другими математическими темами и даже делали доклады об этих своих занятиях на семинаре. Помню доклады В. Н. Судакова о мерах в функциональных пространствах и свои доклады об аксиоматике мер в линейных пространствах с позиций теории пространств Лебега и др. Я уже начал заниматься теорией представлений, алгебраическими и комбинаторными асимптотиками, все время имея в виду связи и аналогии с динамикой. Но, перечисляя уже не учебные и не “посторонние”, а творческие доклады по тематике семинара, безотносительно ко времени их прочтения, я должен прежде всего упомянуть хотя бы совсем кратко важнейшие результаты 1960–1970-х годов постоянных участников семинара по собственно эргодической теории.

1) В.А.: доказательство существования счетной образующей у любого апериодического эндоморфизма; позже им была доказана теорема о существовании образующей с конечной энтропией для эндоморфизмов с конечной энтропией. Окончательный результат о конечной образующей у таких эндоморфизмов с оценкой был доказан В. Кригером и независимо моим аспирантом А. Н. Лившицем. Но результат В.А. был первым в этом направлении.

2) В.А. и Л. М. Абрамов: формула для энтропии косых произведений, использующая новое понятие смешанной энтропии слоев.

3) В.А. и Я. Г. Синай: доказательство фундаментальной теоремы о совпадении классов  $K$ -автоморфизмов (колмогоровских) и автоморфизмов с вполне положительной энтропией; это один из основополагающих фактов эргодической теории. Позже он был перенесен Д. Орнштейном и Б. Вейссом на действия аменабельных групп.

О следующих двух участниках семинара, начавших посещать его постоянно с середины 1960-х годов, стоит упомянуть особо. У В.А. за все годы работы в ЛГУ было много аспирантов и дипломантов по топологии, но, не считая самого первого его аспиранта Л. М. Абрамова, всего двое аспирантов по эргодической теории. Первый из них — С. А. Юзвинский, который с блеском закончил вечерний матмех (до

этого он закончил Политехнический институт) и которому тем не менее, несмотря на рекомендацию В.А., не удалось поступить в аспирантуру при университете. Он стал аспирантом в институте им. А. И. Герцена, где одно время частично работал В.А., и под руководством В.А. написал и защитил кандидатскую диссертацию (в 1966 г.).

4) Результаты С. А. Юзвинского об энтропийной теории автоморфизмов компактных групп. Эта тема всегда была излюбленной для В.А. И он сам, и многие его ученики и коллеги (Я. Г. Синай и его ученики, Д. З. Аров, Л. М. Абрамов) изучали формулы энтропии для групповых автоморфизмов. Результаты С.А. и последующие работы К. Шмидта и др. (о мере Малера) в определённом смысле закрыли эту тему. Другой конкретный результат С.А. – о типичности автоморфизмов с простым непрерывным спектром – также относится к серии вопросов, традиционных для теории аппроксимации в эргодической теории.

5) Второй аспиранткой В.А. была Р. М. Белинская (Ехилевская, 1938–2011). Её основная тема – замена времени в автоморфизмах и связанные вопросы эргодической теории. Результаты её диссертации (1970 г.) широко используются в литературе. О главной теме, предложенной ей В.А., скажу чуть подробнее. Но стоит сначала упомянуть, что В.А. по нашей просьбе несколько раз делал обзор о нерешенных задачах в эргодической теории – в первый раз около 1962 года и затем в 1965 году в основном по энтропийной тематике.

Задачи были разные, но все они были связаны с занятиями самого В.А. В первом докладе он пропагандировал изучение эндоморфизмов и в качестве их инвариантов предлагал расклассифицировать конечные монотонные последовательности измеримых разбиений. Уместно, в частности, упомянуть по этому поводу участницу семинара первых лет О. В. Гусеву, которая в основном занималась теорией уравнений в частных производных, но посещала эргодический семинар, взяла эту тему и, обобщая классификацию измеримых разбиений, данную В.А., получила полную классификацию в случае конечных последовательностей.

Другая задача была особенно важной: В.А. поставил вопрос о том, когда два эргодических автоморфизма имеют изоморфные траекторные разбиения. Он говорил, что этот вопрос возник у него в 1940-е годы, но не было известно даже, так ли это для двух неизоморфных эргодических поворотов окружности. Сам В.А. считал, что в этом случае

ответ должен быть положительным. А его смелая гипотеза была в том, что если энтропии двух автоморфизмов различны, то их траекторные разбиения неизоморфны. Именно эту задачу долгое время планомерно пыталась решить Р. М. Белинская, попутно открывая интересные факты о замене времени. В частности, она заметила, что траекторное разбиение автоморфизма есть пересечение убывающей диадической последовательности разбиений. Но вопрос оставался открытым. В конце 1966 г. Р.М. и С.А. сообщили мне об этом факте, и вскоре я доказал, что все эргодические диадические последовательности лакунарно изоморфны, а следовательно, их пересечения метрически изоморфны, и гипотеза В.А. тем самым оказалась неверной. В.А. был очень доволен тем, что ответ наконец был получен. Результаты были опубликованы в журнале “Функциональный анализ” в 1968 г. Но ещё при подготовке статьи я, подбирая материалы к нашему обзору с С.А. для “Итогов науки” по динамическим системам и алгебрам операторов, обнаружил, что ещё в 1963 г. американский математик Г. Дай доказал этот факт, используя термины теории алгебр операторов и др. Дай отмечал, что эта задача неявно возникла ещё у фон Неймана, в одной из работ знаменитого цикла статей с Мюрреем, как задача об изоморфизме гиперконечных факторов типа  $\Pi_1$ . Фон Нейман писал, что ответ скорее всего положительный, но что он потребует детального рассмотрения эргодических автоморфизмов. Именно это и доказал Дай. Стоит добавить, что В.А. знал про задачу об изоморфизме факторов, но не знал о ее связи с его вопросом. Теорема Дая является классическим фактом эргодической теории и много цитируется. Моё доказательство с помощью теоремы о лакунарном изоморфизме значительно проще оригинального. Разумеется, на эргодическом и на московском семинарах были доклады об этом.

Как мне показалось сначала, усиление техники доказательства теоремы о лакунарном изоморфизме позволяет доказать полный изоморфизм любых двух эргодических диадических последовательностей. В статье о лакунарном изоморфизме в “Функциональном анализе” я даже сделал такое замечание. Но очень скоро я понял всю сложность вопроса, и только через год мне удалось, с одной стороны, найти “критерий стандартности”, т.е. необходимое и достаточное аппроксимационное условие изоморфизма данной диадической последовательности с простейшей (или стандартной) последовательностью, а с другой, привести континуум попарно неизоморфных эргодических диадических

последовательностей (теперь принят термин “диадическая фильтрация”). Инвариантом послужил некоторый новый метрический инвариант – энтропия фильтрации. Следуя естественной логике предмета, я определил так называемый “основной инвариант” фильтрации, а несколько позже и соответствующий инвариант действия – “шкалу” автоморфизма. Вскоре после доклада о моих результатах на московском эргодическом семинаре А. М. Степин доказал, что и колмогоровская энтропия действия группы  $\sigma_1^\infty Z_2$  есть инвариант диадической последовательности. Энтропия фильтрации, определённая мною, совпадала в этом случае с энтропией действия группы. Любопытно, что в конечном итоге интуиция В.А. почти оправдалась: энтропия действия есть инвариант, близкий к траекторному, но все же не траекторный. Основные результаты вошли в мою докторскую диссертацию “Аппроксимация в теории меры”. Насколько я помню, это был предмет, пожалуй, последнего заседания эргодического семинара (около 1971 года).

В дальнейшем эта тематика (траекторная теория, теория фильтраций и др.) разрослась и получила разнообразные применения в самых разных областях – в теории случайных процессов, в асимптотической комбинаторике и, конечно, в эргодической теории. Теория фильтраций должна служить фундаментом комбинаторного (аппроксимационного) подхода к динамике. Сейчас она далека от завершения.

Несколько слов о других участниках семинара.

Я упоминал о молодых участниках М. И. Гордине, А. А. Лодкине, А. Н. Лившице и др., проявивших интерес к эргодической теории. Из моих аспирантов того времени, работавших в этом направлении, выделялся А. Н. Лившиц (1950–2008) – высоко одаренный и рано созревший математик. Он застал лишь самый конец эргодического семинара и в основном был участником моего последующего семинара, на который пришел ещё первокурсником. Довольно быстро он освоил тематику У-систем и уже на третьем курсе доказал свою знаменитую теорему о когомологиях гиперболических автоморфизмов и потоков. Затем он много занимался кодированием и изоморфизмом, доказал независимо теорему Кригера (см. выше), а позже мы с ним установили прямую связь между адических преобразованиями и подстановками.

Эргодический семинар уже снизил свою активность к моменту нового расцвета теории, связанной с именем Д. Орнштейна, решившего проблему изоморфизма автоморфизмов Бернулли и открывшего колмогоровские, но не бернуллиевские системы. На семинаре эти статьи

не реферировались. Но уместно заметить, что один из участников семинара Р. А. Зайдман ещё до работ Орнштейна утверждал, что он доказал полноту энтропии как инварианта бернуллиевских автоморфизмов. Это его утверждение было достаточно широко известно. Однако неоднократные попытки участников семинара вникнуть в суть рассуждений Р. А. Зайдмана не увенчались успехом. Стоит добавить, что он очень способный и интересный математик, и его соображения о кодировании были позже восприняты А. Н. Лившицем, который далеко развил теорию кодов.

Работы других моих аспирантов, занимавшихся эргодической теорией, были выполнены уже в более поздние времена.

В 1969 году В.А. предложил мне вести вместе с ним малый эргодический семинар для начинающих (1–2 курс), и я с удовольствием согласился. Сам В.А. лишь наметил программу, а на заседания почти не ходил. Семинар был учебным и проработал один семестр. В нем участвовали и делали доклады студенты А. А. Суслин, В. В. Рохлин (сын), А. Г. Рейман, В. М. Харламов и многие другие, ставшие позже хорошо известными математиками. Кстати, этот курс (окончание в 1972 году) был одним из самых сильных на матмехе тех лет (А. Н. Лившиц, Б. С. Цирельсон, А. А. Суслин, В. М. Харламов и др.).

## 7. ШКОЛЫ, КОНФЕРЕНЦИИ, ФИНАЛ

Говоря об эргодическом семинаре в 1960-х годах, нельзя не упомянуть об эргодической школе (август 1965 года) в Хумсане (Узбекистан). Она проходила в период расцвета самой эргодической теории и в относительно либеральные времена в стране. Место и условия проведения школы были безупречными. Организовывали её в основном москвичи (Я. Г. Синай и его ученики) и узбекские математики (Т. А. Сарымсаков и др.). Школа собрала совершенно исключительный состав участников и докладчиков, при этом с очень широким участием математиков иных специальностей. Вот неполное перечисление: В. А. Рохлин, О. А. Ладыженская, Т. А. Сарымсаков, Н. П. Романов, Ю. М. Смирнов, В. П. Маслов, А. Я. Повзнер, И. И. Пятацкий-Шаширо, Я. Г. Синай, А. А. Кириллов, многие с семьями. Кроме того, приехал целый отряд молодых талантов, в основном из Москвы: И. Н. Бернштейн, М. Л. Громов, А. Б. Каток, А. Г. Кушниренко, Л. Г. Макара-Лиманов, Г. А. Маргулис, А. М. Степин и др.

В заключение надо упомянуть ещё о нескольких фактах истории семинара. В августе 1969 года мы организовали однодневную неформальную конференцию, посвященную пятидесятилетию В.А. Многочисленные участники с интересом выслушали доклады В. И. Арнольда, С. П. Новикова, Я. Г. Синая, Д. В. Фукса, М. Л. Громова и А. М. Вершика. Через 10 лет, 10 декабря 1979 года, в честь шестидесятилетия В.А. была организована такая же однодневная конференция с теми же докладчиками, только не было доклада М. Л. Громова, а был доклад В. М. Бухштабера. Дата была выбрана случайно, организатор забыл, что в календаре свободного мира 10 декабря – это День защиты прав человека и что в СССР любое упоминание об этом или тем более проведение каких-то встреч наказуемо. Поэтому, как мне позже рассказал В. А. Залгаллер, конференция страшно напугала партийное начальство факультета и оно побежало консультироваться в райком партии(!). Но в результате было решено, что безопаснее для всех сделать вид, что никакой конференции не было.

Замечу, что вскоре после этого факультетские руководители предложили В.А. выйти на пенсию, тем более что он объявил, что не может по состоянию здоровья ездить в Новый Петергоф, куда переехал факультет, но может вести семинары в городе (например, в ЛОМИ). После многих хлопот и писем в ректорат и на факультет удалось отстоять продолжение его работы на матмехе, но лишь на один год, как предписал тогдашний ректор ЛГУ (В. Б. Алесковский).

В записях В.А., которые я нашел после его смерти (03.12.1984), последняя рукопись, относящаяся к эргодической теории, датировалась 1968 годом (классификация инвариантных разбиений); текст не был закончен. В дальнейшем В.А. занимался только топологией и вещественной алгебраической геометрией, но следил за происходящим в эргодической теории и посещал семинар до самых последних заседаний.

Vershik A. M. The history of V. A. Rokhlin's ergodic seminar (1960–1970).

The paper tells about the main features and events of the ergodic seminar started and headed by V. A. Rokhlin at the Leningrad State University. The seminar was active in 1960–1970.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН,  
С.-Петербург, Россия  
*E-mail:* [avershik@pdmi.ras.ru](mailto:avershik@pdmi.ras.ru)

Поступило 2 декабря 2020 г.