

*На правах рукописи*

Проскурин Александр Викторович

**УСТОЙЧИВОСТЬ  
МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В  
КАНАЛАХ**

*1.1.9 – механика жидкости, газа и плазмы*

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант: д.ф.-м.н., профессор А.М. Сагалаков

Барнаул – 2023

# Оглавление

<b>Оглавление</b>	<b>2</b>
<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1 Анализ современного состояния проблемы ламинарно-турбулентного перехода в МГД-течениях</b>	<b>11</b>
1.1 О исследованиях линейной устойчивости параллельных течений . . .	14
1.2 Применение методов теории линейной устойчивости параллельных течений вязкой жидкости к смежным задачам . . . . .	17
1.3 Линейная устойчивость плоскопараллельных МГД-течений . . . . .	23
1.4 Применение метода Ляпунова-Шмидта для анализа устойчивости параллельных течений . . . . .	28
1.5 Метод функций Рвачева . . . . .	30
1.6 Устойчивость и ламинарно-турбулентный переход в сложной геометрии . . . . .	33
1.7 Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в каналах и вопросы нелинейной устойчивости . . . . .	42
1.8 Программное обеспечение для моделирования магнитогидродинамических течений . . . . .	48
<b>2 Устойчивость параллельных течений</b>	<b>50</b>
2.1 Постановка задачи устойчивости . . . . .	50
2.2 Уравнение Орра-Зоммерфельда . . . . .	51
2.3 Метод коллокаций . . . . .	52
2.4 Метод коллокаций К.И. Бабенко . . . . .	53
2.5 Метод дифференциальной прогонки . . . . .	56
2.6 Устойчивость плоского течения Пуазейля в продольном магнитном поле . . . . .	59
2.7 Устойчивость течения в кольцевом зазоре в продольном магнитном поле . . . . .	76
2.8 Устойчивость течения слабоэлектропроводящей жидкости в кольцевом зазоре в спиральном магнитном поле . . . . .	88

2.9	Программная реализация метода дифференциальной прогонки . . .	103
2.10	Программная реализация метода коллокаций . . . . .	108
2.11	Основные результаты главы 2 . . . . .	112
<b>3</b>	<b>Метод функций Рвачева</b>	<b>114</b>
3.1	Функции Рвачева и краевые задачи . . . . .	114
3.2	Течение в деформируемой трубе . . . . .	116
3.3	Течение в прямоугольной трубе с центральным элементом . . . . .	126
3.4	Магнитогидродинамическое течение в трубе сложной геометрии . .	136
3.5	Устойчивость двумерных течений . . . . .	143
3.6	Устойчивость локализованных возмущений в плоском канале . . .	144
3.7	Устойчивость магнитогидродинамического течения возле круглого цилиндра . . . . .	156
3.8	Программная реализация задачи устойчивости течения возле круг- лого цилиндра . . . . .	165
3.9	Перспективы использования метода функций Рвачева в задачах гидродинамики и гидродинамической устойчивости . . . . .	168
3.10	Основные результаты главы 3 . . . . .	168
<b>4</b>	<b>Спектрально-элементный метод</b>	<b>170</b>
4.1	Постановка задачи . . . . .	170
4.2	Спектрально-элементный метод и численная схема с коррекцией скорости . . . . .	171
4.3	Проблема устойчивости . . . . .	179
4.4	Исследование нелинейной устойчивости . . . . .	182
4.5	Нелинейная устойчивость течения Гартмана в двумерном случае . .	183
4.6	Нелинейная устойчивость течения Гартмана в трехмерном случае .	193
4.7	Основные результаты главы 4 . . . . .	211
<b>5</b>	<b>Магнитогидродинамическое течение в изогнутом канале</b>	<b>213</b>
5.1	Режимы течения в изогнутом канале без магнитного поля . . . . .	213
5.2	Устойчивость течения в изогнутом канале . . . . .	227
5.3	Режимы течения в изогнутом канале в вертикальном магнитном поле	245
5.4	Режимы течения в изогнутом канале в горизонтальном магнитном поле . . . . .	257

5.5	Линейная устойчивость течения в изогнутом канале при наличии вертикального магнитного поля . . . . .	264
5.6	Нелинейная устойчивость течения в изогнутом канале при наличии вертикального магнитного поля . . . . .	273
5.7	Основные результаты главы 5 . . . . .	281
	<b>Заключение</b>	<b>282</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>284</b>

# Введение

**Актуальность и степень разработанности проблемы.** Исследование ламинарно-турбулентного перехода в течениях электропроводящей жидкости представляет значительный интерес, обусловленный использованием жидких металлов в приложениях. Современные программы развития ядерной энергетики предусматривают строительство реакторов на быстрых нейтронах, которые охлаждаются жидкими металлами. Использование жидких металлов перспективно и в термоядерных установках. В программе исследований на термоядерном реакторе ИТЭР, который сейчас находится на стадии сборки, запланированы испытания жидкометаллических тестовых модулей blankets. Эти модули в настоящее время интенсивно разрабатываются, что влечет за собой большой объем исследований, экспериментальных и теоретических. Течения жидких металлов используются также в промышленности, например, в металлургии.

Для проектирования устройств, в которых происходит движение жидких металлов, большое значение имеет взаимодействие металла с магнитным полем. Это поле может быть неотъемлемой частью технологического процесса, например, когда плазма в термоядерном реакторе удерживается сильным магнитным полем. Магнитное поле в жидком металле может возникать спонтанно за счет термоэлектрических токов и усиливаться за счет эффектов динамо. Такие эффекты экспериментально наблюдались в частях реактора БН-600 и даже использовались для исследования течений в реакторе. Магнитное поле может вноситься извне с целью управления движением жидкого металла: его перекачки (МГД-насос), остановки (МГД-клапан), оптимизации течения и так далее.

Для работы магнитогидродинамических устройств большое значение имеют режимы течений, которые будут в них возникать: ламинарный или турбулентный. Эксперименты с жидкими металлами намного сложнее, чем с газами и жидкостями, поэтому в исследованиях и проектировании ведущая роль отводится математическому моделированию с использованием численных методов.

Наиболее разработаны методы исследования устойчивости параллельных течений в каналах. Однако, несмотря на большой объем публикаций этой области, исчерпывающие результаты получены только в единичных случаях. Это связано с тем, что численное решение таких задач сопряжено со значительными трудностями.

ми и требует использования специальных методов. Наиболее хорошо исследована устойчивость течений между параллельными плоскостями: течений Гартмана, Пуазейля, Куэтта и некоторых простейших других.

В технических устройствах жидкие металлы движутся не только прямолинейно, но и в каналах сложной формы. Устойчивость течений электропроводящей жидкости в областях сложной формы в настоящее время изучена очень мало. Исследования устойчивости таких течений намного сложнее, чем параллельных, так как трудности, присущие задаче и описывающим ее уравнениям, увеличиваются за счет нетривиальной геометрии. Работы, посвященные устойчивости непараллельных течений, в заметном количестве стали появляться лишь в 90х годах двадцатого века, после изобретения спектрально-элементного метода, который позволил применять спектральный подход к областям сложной геометрии. В настоящее время это единственный метод высокого порядка точности, который можно широко использовать для исследования течений в реальной геометрии. Большое значение имеет разработка новых ненасыщаемых численных методов, которые позволили бы проводить независимую проверку результатов исследования устойчивости и, возможно, были бы более простыми.

**Цели и задачи исследования.** Целью работы являются исследование устойчивости магнитогидродинамических течений в каналах, разработка соответствующих методов и компьютерных программ. Для этого решаются перечисленные ниже задачи.

1. Исследование устойчивости к малым возмущениям плоского течения Пуазейля и течения в канале кольцевого сечения в присутствии продольного магнитного поля в широком диапазоне параметров. Исследование устойчивости к малым возмущениям течения вязкой электропроводящей жидкости в трубе кольцевого сечения при наличии спирального магнитного поля.
2. Разработка подхода для моделирования течений в трубах на основе функций Рвачева. Исследование течения вязкой жидкости в трубе с внутренним элементом и течения вязкой электропроводящей жидкости в трубе сложного сечения в поперечном магнитном поле. Создание численного метода для исследования устойчивости течений на основе функций Рвачева. Исследования устойчивости локализованных возмущений в плоском канале и магнитогидродинамического течения возле круглого цилиндра.

3. Разработка подхода для исследования течений вязкой электропроводящей жидкости и их устойчивости, линейной и нелинейной, на основе спектрально-элементного метода и создание соответствующей программы для ЭВМ. Верификация численных алгоритмов и программы.
4. Исследование режимов течения вязкой электропроводящей жидкости в изогнутом канале и устойчивости этого течения.

**Научная новизна.** Получены новые данные об устойчивости магнитогидродинамического течения в плоском канале и в канале кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля в случае произвольных магнитных чисел Прандтля: обнаружены области стабилизации при изменении магнитного числа Прандтля, обнаружены скачки критических чисел Рейнольдса при изменении числа Альфвена, найдена новая мода. Впервые показано, что добавление азимутального поля при наличии продольного может дестабилизировать течение в канале кольцевого сечения.

Предложен новый метод на основе функций Рвачева для исследования устойчивости двумерных магнитогидродинамических течений.

Разработана компьютерная программа для моделирования магнитогидродинамических течений с использованием спектрально-элементного подхода и показана корректность ее работы. Программа не имеет аналогов в части возможностей исследования устойчивости МГД-течений. Обоснован новый сценарий потери устойчивости МГД-течений под действием нелинейных возмущений специального вида.

Исследованы режимы течения в изогнутом канале с магнитным полем и без него, обнаружен и изучен новый эффект возникновения противотечения, которое возникает за счет взаимодействия жидкости и магнитного поля в изгибе канала. Показана устойчивость этого противотечения. Впервые определены критические числа Рейнольдса течения в изогнутом канале для двумерных и трехмерных возмущений.

**Теоретическая и практическая значимость.** Теоретическая значимость работы состоит в том, что полученные результаты способствуют более глубокому пониманию вопросов взаимодействия возмущений вязкой несжимаемой жидкости с магнитным полем в плоских каналах и каналах сложной формы. Опираясь на

полученные в работе результаты о зависимости критических чисел Рейнольдса от магнитного числа Прандтля и числа Альфвена, возможно производить оценку параметров перспективных МГД-устройств в случае, если магнитное число Рейнольдса нельзя считать малым. Получен ряд результатов о режимах течения в изогнутом канале, важных для приложений, показана устойчивость этих режимов. Методы, изложенные в работе, решают практическую проблему изучения переходных процессов и оценки параметров устойчивости течений в каналах сложной формы, характерных для технических устройств: элементов термоядерных и ядерных реакторов, частей жидкометаллических батарей и так далее.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Результаты исследования устойчивости плоского течения и течения в трубе кольцевого сечения вязкой электропроводящей жидкости в продольном магнитном поле. Условия, при которых могут наблюдаться скачки критических чисел Рейнольдса и становится неустойчивой найденная в работе новая мода. Особенности дестабилизирующего влияния азимутального магнитного поля на течение в кольцевом зазоре.
2. Бессеточный метод численного исследования устойчивости двумерных течений, разработанный на основе метода функций Рвачева. Результаты исследования устойчивости локализованных возмущений в плоском канале и исследования устойчивости магнитогидродинамического течения возле круглого цилиндра. Выводы об особенностях применения метода функций Рвачева в задачах гидродинамики и гидродинамической устойчивости.
3. Программа для исследования магнитогидродинамических течений и их устойчивости в областях сложной геометрии на основе спектрально-элементного подхода. Верификация численной схемы и программы, произведенная путем сравнения с аналитическими решениями и данными, приведенными в литературе и полученными независимо.
4. Сценарий развития неустойчивости магнитогидродинамических течений за счет действия локализованных возмущений.
5. Результаты исследования устойчивости течения в изогнутом канале без магнитного поля.



6. Эффект возникновения устойчивых противотечений в изогнутом канале за счет действия магнитных сил.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность изложенных в работе результатов достигается использованием хорошо себя зарекомендовавших и обоснованных методов, анализом физической картины развития и стабилизации возмущений, совпадением результатов в частных случаях с данными других авторов. В некоторых случаях вычисления дублировались с использованием независимых численных методов. Основные результаты диссертации докладывались автором на конференциях: тринадцатой зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 2003); международной конференции «Устойчивость и турбулентность течений гомогенных и гетерогенных жидкостей» (Новосибирск, 2004); международной конференции «International conference on Open Magnetic Systems for Plasma Confinement» (Новосибирск, 2004); всероссийских конференциях «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Красноярск, 2020; Барнаул, 2017; Бийск, 2014, 2011, 2008, 2005); всероссийской конференции для молодых ученых «Неравновесные процессы в сплошных средах» (Пермь, 2010); восьмой международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2015); всероссийских съездах по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015; Уфа, 2019); международных конференциях «Russian conference on Magnetohydrodynamics» (Пермь, 2015, 2018, 2021); всероссийской конференции «Пермские гидродинамические научные чтения» (Пермь, 2018, 2019, 2020); всероссийской конференции с международным участием «Математические проблемы механики сплошных сред», посвященной столетию Л.В.Овсянникова (Новосибирск, 2019); международной конференции «8-th International Symposium on Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics» (Ирландия, Лимерик, 2019); всероссийской конференции «Сибирский теплофизический семинар» (Новосибирск, 2019); семинаре «Прикладная гидродинамика» Института гидродинамики СО РАН под руководством чл.-корр РАН В.В. Пухначева и д.ф.-м.н. Е.В. Ерманюка (2019, 2021, 2023); семинаре лаборатории моделирования Института теплофизики СО РАН под руководством д.ф.-м.н. Н.И. Яворского (2019); объединенном семинаре ФИЦ ИВТ СО РАН, кафедры математического моделирования НГУ, кафедры вычислительных технологий НГТУ «Информационно-вычислительные

технологии» под руководством ак. РАН Ю.И. Шокина и д.ф.-м.н. В.М. Ковени (2020), семинаре Томского государственного университета под руководством Г.Р. Шрагера (2021), семинаре Института математики СО РАН под руководством д.ф.-м.н. Д.Л. Ткачева (2021), семинаре «Краевые задачи механики сплошных сред» Института гидродинамики СО РАН под руководством чл.-корр. РАН П.И. Плотникова и д.ф.-м.н. В.Н. Старовойтова (2021), семинаре «Математическое моделирование в механике» Института теоретической и прикладной механики СО РАН под руководством ак. РАН В.М. Фомина (2021), семинаре «Механика реагирующих систем» Института проблем механики РАН под руководством чл.-корр. РАН С.Е. Якуша и д.ф.-м.н. А.Д. Полянина (2021), семинаре «Теоретическая и прикладная механика» Института теоретической и прикладной механики СО РАН (2022), Пермском гидродинамическом семинаре под руководством д.ф.-м.н. Т.П. Любимовой (2022), семинаре «Математическое моделирование в механике» Института вычислительного моделирования СО РАН под руководством д.ф.-м.н. В.К. Андреева (2023).

Проведенные в диссертационной работе исследования были поддержаны федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (14.740.11.0355).

**Личный вклад автора.** В диссертации приведены результаты, полученные лично автором. Все основные компьютерные программы, включая [1-5], созданы единолично автором, автор единолично провел все компьютерные расчеты. Автором выполнена обработка результатов и подготовлены все графические и табличные материалы, приведенные в диссертации. Все положения, выносимые на защиту, получены лично автором. Монография [6] написана совместно с научным консультантом профессором А.М. Сагалаковым. Профессор А.М. Сагалаков участвовал в обсуждении и интерпретации результатов, обсуждении задач, решаемых компьютерной программой [7], работе над текстом публикаций [11-62].

# Глава 1. Анализ современного состояния проблемы ламинарно-турбулентного перехода в МГД-течениях

Хорошо известно, что вязкая жидкость при движении в каналах может образовывать как ламинарное, так и турбулентное течение. Число Рейнольдса определяет, какой из этих типов движения будет реализован: для больших чисел Рейнольдса характерно турбулентное движение, а для малых – ламинарное. Также известно, что реализация того или иного режима в каналах и трубах зависит от действия возмущений на течение. Теория гидродинамической устойчивости изучает эволюцию возмущений в зависимости от числа Рейнольдса и других входящих в задачу параметров. Если эти возмущения являются бесконечно-малыми, то они составляют предмет линейной теории гидродинамической устойчивости. Если амплитуда возмущений играет значительную роль в их развитии, то такие модели и сценарии составляют предмет нелинейной теории.

В настоящее время есть несколько наиболее значимых работ обзорного характера, которые позволяют познакомиться с общим состоянием теории гидродинамической устойчивости. Во-первых, следует упомянуть книгу, написанную М.А. Гольдштиком и В.Н. Штерном [63]. В этой монографии рассмотрена устойчивость плоских течений Пуазейля и Куэтта, устойчивость осесимметричных возмущений, устойчивость МГД-течения в плоском канале. Обсуждается энергетический анализ устойчивости. Изложены основные результаты теории В.И. Юдовича о ветвления решений вблизи нейтральной кривой и приведен пример возникновения автоколебаний в магнитном поле. Также в монографии рассмотрены некоторые другие вопросы, особое внимание уделено численным методам решения задач устойчивости.

Широко известна монография Хеннингсона и Шмидта [64], которая уже выдержала два издания. В этой книге рассмотрен широкий круг вопросов, связанных с устойчивостью сдвиговых течений. В первой части рассматриваются вопросы, связанные с устойчивостью параллельных сдвиговых течений: линейный невязкий анализ, задачи на собственные значения для вязкой жидкости, начально-краевая задача для вязкой жидкости и оптимальный рост возмущений, нелиней-

ные модели устойчивости. Во второй части монографии [64] рассматривается устойчивость и ламинарно-турбулентный переход в пространственно-сложных течениях: механизмы неустойчивости в некоторых типичных пространственных конфигурациях, особенности пространственного роста возмущений, вторичные неустойчивости, сценарии перехода к турбулентности.

Сотрудниками ИТПМ СО РАН написана монография [65]. В первой и второй главах этой книги описаны основы и главные результаты классической теории устойчивости. В главах с третьей по седьмую рассмотрены задачи, которые демонстрируют влияние на устойчивость ряда факторов, таких как искривление, градиент давления, области рециркуляции и так далее. Этими задачами являются: устойчивость плоских потоков и пограничного слоя, потоков возле искривленной поверхности, устойчивость пограничного слоя с областями рециркуляции. В главах с восьмой по одиннадцатую рассмотрены некоторые важные вопросы, связанные с линейной теорией: неустойчивость волновых пакетов, оптимальные возмущения, возбуждение возмущений, вторичная неустойчивость. В двенадцатой и тринадцатой главах обсуждаются нелинейные механизмы развития неустойчивости и генерация турбулентности. В приложении объясняются инженерные аспекты предсказания неустойчивости и использования теоретических результатов.

Монография В.К. Андреева и В.Б. Бекежановой [66] раскрывает широкий круг вопросов теории линейной устойчивости неизотермических жидкостей. В первой, второй и третьей главах монографии вводятся уравнения движения, граничные условия, линеаризованная задача о малых возмущениях, изложены некоторые решения задач конвекции. В четвертой главе рассмотрены вопросы устойчивости системы слоев жидкости: особенности потери устойчивости при нагреве сверху и снизу, возникновении термокапиллярной неустойчивости при наличии границы раздела, особенности марангони-неустойчивости в случае деформируемых межфазных границ, колебательной термокапиллярной конвекции, слабонелинейный подход в системе с деформируемой поверхностью раздела, неустойчивость течения Марангони-Пуазейля и течения в наклонном канале. Пятая глава содержит результаты исследования устойчивости равновесия слабосжимаемой жидкости, а именно, слоя со свободной границей, системы горизонтальных слоев, жидкости со свободной границей при наличии объемных источников тепла, двухслойной системы с объемным тепловыделением, системы вода-лед в условиях радиационного нагрева. В шестой главе изложены результаты исследования устойчивости плоского слоя в модели микроконвекции: равновесного состояния,

стационарного течения в случае особого распределения температуры, случай экспоненциального распределения температуры. В седьмой главе численно исследованы естественная конвекция воды вблизи точки инверсии плотности, конечно-амплитудная и термокапиллярная конвекция в двухслойной системе.

В монографии [67] обсуждаются вопросы течений жидких сред в рамках неклассических моделей конвекции. Две главы этой монографии раскрывают вопросы устойчивости равновесных состояний слоев жидкости в модели Обербека-Буссинеска и в модели микроконвекции.

Монографии и книги не всегда дают представление о самых новых результатах, так как их издание требует значительного времени. В этом их заменяют статьи обзорного характера. В. Теофилис в работе [68] изложил основные достижения в области исследования линейной устойчивости непараллельных течений. Обзор включает краткую теоретическую постановку задачи, объяснение численного метода, примеры течений: пограничные слои в разных частях стреловидных крыльев, течение над обратной ступенькой и полостью, течение в полости с подвижной крышкой, течения в трубах, вихри Гротлера, обтекание цилиндров разной формы. В связи с бурным развитием в области устойчивости непараллельных течений, В. Теофилис написал еще один обзор [69]. По сравнению с работой [68] более подробно изложено состояние разработок численных методов, обновлены результаты в частных примерах. Сделан вывод о возможности промышленного использования методик для исследования устойчивости.

В.К. Андреев и В.Б. Бекежанова написали обзор [70] работ, посвященных исследованию устойчивости течений вязкой жидкости при наличии неоднородностей среды, таких как неоднородности температуры, плотности, концентрации. Перечислены основные результаты, касающиеся устойчивости плоскопараллельных течений, течений со свободной поверхностью, течений в наклонном слое, пленочных и виброконвективных течений, течений при наличии поверхностей раздела, устойчивости конвективных течений в электрическом и магнитном полях.

В серии обзоров [71-73] обсуждаются методология и современные результаты теории ламинарно-турбулентного перехода в рамках модального подхода. Под модами авторы понимают физически важные составляющие компоненты течений жидкости, которые могут быть изучены при помощи описанных в этих обзорах и хорошо обоснованных методов: разложения нестационарного течения по некоторым оптимальным базисам, метода мод Купмана, глобального анализа устойчи-

ности и исследования резольвенты. В статье [71] обсуждаются детали численных методов и экономичной реализации алгоритмов. Работа [72] описывает применение этих методов к течению возле цилиндра, течению в канале, обтеканию крыла, течению поверх выемки. В заключительной статье цикла [73] перечислены наиболее значимые статьи и книги, посвященные модальному анализу течений жидкости.

Приведенный ниже обзор литературы имеет следующую структуру. В разделе 1.1 обсуждаются основные работы, давшие начало линейной теории гидродинамической устойчивости параллельных течений. Сделан обзор наиболее ранних работ по этой теме, проводившихся в Новосибирске. Раздел 1.2 описывает применение методов теории устойчивости вязкой жидкости для анализа смежных задач: сверхзвуковых течений, течений с пористыми и упругими стенками, течений с нагревом или охлаждением и так далее. Обзор работ о применении методов линейной теории устойчивости к магнитогидродинамическим течениям сделан в разделе 1.3, а в разделе 1.4 рассмотрено применение метода Ляпунова-Шмидта. В разделе 1.5 перечислены основные достижения теории функций Рвачева для решения краевых задач гидродинамики. Раздел 1.6 посвящен работам в области устойчивости течений в сложной геометрии. Раздел 1.7 раскрывает некоторые направления нелинейной теории устойчивости. Современное состояние программного обеспечения для расчетов МГД-течений обсуждается в разделе 1.8.

## 1.1 О исследованиях линейной устойчивости параллельных течений

Исследование линейной устойчивости течений несжимаемой вязкой жидкости подразумевает, что скорость и давление, входящие уравнения Навье-Стокса, представлены в виде

$$\{U, P\} + \{v, p\}, \quad (1.1)$$

где  $U, P$ , – стационарное решение, а  $v, p$ , – бесконечно-малое возмущение. После такой подстановки уравнения движения жидкости становятся линейными. Параллельная геометрия подразумевает существование двух однородных координат,

что позволяет упростить уравнения, сведя общую краевую задачу к краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений.

Начало линейной теории гидродинамической устойчивости положено работами Орра [74] и Зоммерфельда [75]. В этих работах была рассмотрена эволюция бесконечно-малых возмущений в плоском течении и сформулировано уравнение, позднее названное уравнением Орра-Зоммерфельда. Это уравнение является базовым в линейной теории гидродинамической устойчивости и подробно описано в разделе 2.2.

Уравнение Орра-Зоммерфельда было исследовано Гейзенбергом при помощи асимптотического метода [76] (в переводе на английский язык [77]). На основании произведенных вычислений была сделана оценка критического числа Рейнольдса и длины волны неустойчивых возмущений.

Достижения в этой области, полученные к началу 50х годов двадцатого века, резюмирует монография Линя [78]. В монографии произведен обзор результатов, касающихся устойчивости течения Куэтта между вращающимися цилиндрами, плоского течения Пуазейля, включая несколько подходов к асимптотическому решению, упомянуты результаты передовых на тот момент численных расчетов. Проанализированы результаты исследований устойчивости пограничного слоя и входной области каналов и труб.

Р.В. Бирих с соавторами в работе [79] рассмотрел устойчивость течения между параллельными плоскостями в случае малых чисел Рейнольдса. Течение было разложено в ряд вблизи  $Re = 0$ . Собственные значения вычислялись в виде суммы ряда. Рассмотрены случаи симметричного и антисимметричного профилей течения. В качестве примеров рассмотрены течения Куэтта и течение с кубическим профилем, характерным для случая конвекции в вертикальном канале. Собственные значения вычислены при  $Re < 100$ .

В работе [80] Р.В. Бирих численно исследовал устойчивость плоского течения Куэтта. Для вычисления собственных значений использовался метод Галеркина, разложение осуществлялось по собственным функциям уравнения Орра-Зоммерфельда для случая неподвижной жидкости. Количество членов разложения равнялось 16 и 17. Были исследованы спектры для  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 2$  и  $\sqrt{\alpha Re} < 32$ . Результаты вычислений показали, что при этих параметрах течение Куэтта устойчиво.

Значительные успехи в исследовании устойчивости численными методами были достигнуты учеными Сибирского отделения Академии наук СССР. В работе

В.Н.Штерна [81] исследована устойчивость течения Куэтта вплоть до  $\alpha R \sim 10^7$  в широком диапазоне волновых чисел  $0 < \alpha < \infty$ . Спектр собственных значений этого течения в зависимости от  $\alpha$  был подробно исследован в работе [82]. Было произведено соединение области применимости асимптотических методов с более ранними численными результатами, полученными при  $\alpha R \sim 10^4$  при выборочных значениях  $\alpha$ . По результатам исследования В.Н. Штерн сделал вывод об устойчивости течения Куэтта к малым возмущениям во всем диапазоне изменения  $\alpha$  и  $Re$ .

В работе [83] исследовалась устойчивость плоского течения Пуазейля. Авторы этой работы использовали численный метод дифференциальной прогонки, практически снимающий ограничения на величину  $\alpha Re$  и позволяющий получать собственные значения с заданной точностью. В работе [83] была доказана эффективность метода путем сравнения вычисленных значений с результатами, полученными численно и с помощью асимптотических методов другими авторами. Изучены зависимости собственных значений от волновых чисел  $\alpha$ . Уточнены данные о параметрах нейтральной кривой, полученные другими исследователями.

М.А. Гольдштик с соавторами [84] исследовал свойства локальности для коротковолновых возмущений, которые позволяют изучать устойчивость отдельных областей течения, например, пристенной зоны. Эти свойства проиллюстрированы на примере течения Пуазейля и локальных деформаций его параболического профиля. Обнаружено, что появление точек перегиба при локальной деформации профиля приводит к появлению нарастающих возмущений с длиной волны порядка ширины зоны деформации. Также показано, что изломы профиля приводят к потере устойчивости при достаточно больших числах Рейнольдса.

А.М. Сагалаков в работах [85; 86] изучил спектр плоского течения Куэтта-Пуазейля, когда движение жидкости производится одновременно движением одной из плоскостей и градиентом давления, и классифицировал возмущения. Были изучены изменения спектра при переходе от течения Пуазейля в течение Куэтта. Обнаружено, что приосевые моды в этом случае переходят в пристенные, связанные с движущейся плоскостью, а течение становится устойчивым к малым возмущениям. Установлено существование критического параметра, связанного с движением ограничивающей жидкость плоскости, после достижения которого течение становится устойчивым.



В работах [87; 88] получены энергетические оценки критического числа Рейнольдса для ряда течений, имеющих профиль скорости с точкой перегиба. Было рассмотрено течение между параллельными вертикальными стенками, нагретыми до разных температур, в этом случае скорость жидкости имеет кубический профиль. Исследована также устойчивость автомодельного решения Шлихтинга для плоской затопленной струи в безграничной области и в канале. В работе сравнивался энергетический подход к определению критических чисел Рейнольдса с результатами линейной теории. Показано, что для течений с точками перегиба в профиле скорости энергетическая теория дает результаты, удовлетворительные для технических приложений.

Разумеется, приведенный анализ литературы, касающийся классической постановки задачи, далеко не является исчерпывающим.

## **1.2 Применение методов теории линейной устойчивости параллельных течений вязкой жидкости к смежным задачам**

Методы, разработанные для классических задач устойчивости течений вязкой жидкости, широко используются для более сложных постановок задач. В этом разделе перечислены примеры таких работ, список которых является только малой частью современных исследований, провести полный обзор которых затруднительно.

О.А. Цвелодуб в работе [89] исследовал устойчивость течения Пуазейля в канале с упругими стенками. Задача эволюции малых возмущений была сведена к уравнению Орра-Зоммерфельда с граничными условиями специального вида. Задача решалась аналитически в приближении малых чисел Рейнольдса и численно для конечных чисел Рейнольдса. В результате проведенного исследования найдено, что при учете пульсаций трения на границах канала появляются области неустойчивости при любых конечных числах Рейнольдса. При этом область неустойчивости волн Толлмина-Шлихтинга смещается в сторону меньших чисел Рейнольдса.

Ю.Н. Григорьев и И.В. Ершов [90] изучали влияние объемной вязкости на энергетические оценки критических чисел Рейнольдса течения Куэтта сжимаемой жидкости. Для оценки критических чисел Рейнольдса использовался энергетический подход и метод коллокаций. Было показано, что минимальные критические числа соответствуют модам продольных возмущений с случае соотношений объемной и сдвиговой вязкостей, характерных для реальных двухатомных газов. Такие моды представляют собой вихри с осями, параллельными основному потоку.

Работа [91] посвящена исследованию устойчивости течения Куэтта колебательно-возбужденного двухатомного газа, описываемого двухтемпературной релаксационной моделью. При помощи асимптотических методов показано, что критические числа Рейнольдса зависят от числа Маха, объемной вязкости, времени релаксации. С помощью метода коллокаций численно показано, что наиболее опасны моды продольных возмущений, критические числа которых увеличиваются в несколько раз при росте параметров течения.

В статье [92] приведены результаты исследования устойчивости сверхзвукового течения Куэтта колебательно-возбужденного двухатомного газа. Чтобы найти критические числа Рейнольдса, использовался энергетический подход. Уравнение Орра-Зоммерфельда решалось численно при помощи метода коллокаций. Было установлено, что в сверхзвуковом диапазоне критические числа Рейнольдса могут быть на два порядка больше, чем в дозвуковом.

Более подробно влияние вязкости на устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного газа при сверхзвуковых режимах исследовано в работе [93]. Обнаружено существование вязких акустических мод, которые в пределе переходят в четные и нечетные невязкие акустические моды, а также существование вязкой быстро затухающей моды, которая не имеет невязкого аналога. Для наиболее неустойчивых вязких акустических мод в пространстве параметров существуют области, где вязкость сильно дестабилизирует течение, однако, термическое возбуждение повышает устойчивость потока во всем диапазоне параметров.

Позднее эти же авторы более подробно исследовали вопросы, связанные с неустойчивостью сверхзвукового течения Куэтта [94; 95] и сверхзвукового пограничного слоя [96-98].

С.А. Гапоновым и Б.В. Смородинским была исследована устойчивость сверхзвукового пограничного слоя на пористой поверхности [99]. Возмущения

были изучены теоретически на линейной и нелинейной стадиях, исследовано влияние проницаемости поверхности на устойчивость и ламинарно-турбулентный переход. Обнаружено, что путем сдвига фазы между возмущением и нормальной компонентой скорости можно управлять началом ламинарно-турбулентного перехода. В работах [100; 101] эти результаты были расширены для случая охлаждаемых поверхностей, непроницаемых и пористых. Оказалось, что охлаждение поверхностей сильно влияет на линейную эволюцию возмущений: вихревые моды стабилизируются, а акустические – дестабилизируются. Пористое покрытие стенки, однако, действует противоположным образом. Нелинейные эффекты значительно ослабевают при охлаждении. Как показано в статье [102], внешний продольный градиент давления оказывает сильное влияние на эволюцию возмущений в сверхзвуковом пограничном слое. В зависимости от числа Маха и величины градиента давления критические числа Рейнольдса может становиться больше или меньше.

В работе [103] исследована устойчивость сверхзвукового пограничного слоя возле гибкой пористой поверхности. Выведены соответствующие граничные условия. Изучено влияние параметров гибкого покрытия на нарастание линейных колебаний разной природы. Обнаружено, что при умеренных числах Маха возмущения стабилизируются, а при больших возможен более ранний переход к развитию неустойчивости.

В работе [104] было рассмотрено влияние сублимации на устойчивость сверхзвукового течения. На примере нафталина было выяснено, что скорость сублимации увеличивается при увеличении температуры торможения потока, а при увеличении испарения происходит уменьшение скоростей роста возмущений. Таким образом, происходит стабилизация течения при увеличении температуры поверхности, максимум стабилизирующего влияния достигается при температуре тройной точки сублимирующегося вещества.

В Перми под руководством профессора Г.З. Гершуни проводились исследования термовибрационной неустойчивости механического равновесия в плоском наклонном слое жидкости [105; 106]. В этих расчетах наклонный слой вязкой жидкости подвергался действию силы тяжести, постоянному градиенту температуры, действию вибрации. Рассматривались разные направления градиента температуры, вибрационного движения, разные углы наклона слоя по отношению к горизонтали. Случаи, когда существовало положение квазиравновесия, то есть, когда средняя скорость жидкости равна нулю, а пульсационная составляющая скоро-

сти не была равна нулю, исследовались на устойчивость по отношению к малым возмущениям. Использовался линейный подход. В работах обсуждается влияние термогравитационного и термовибрационного механизмов на возникновение конвекции. Найдены характеристики критических возмущений в тех случаях, когда существует граница устойчивости.

В.А. Демин с соавторами изучали устойчивость механического квазиравновесия в подогреваемой снизу ячейке Хеле-Шоу [107; 108] при наличии горизонтальных и вертикальных вибраций. Была решена задача линейной устойчивости квазиравновесного состояния. Исследованы нелинейные режимы вибрационной конвекции, определены критические значения параметров, при которых происходит смена режимов течения в ячейке Хеле-Шоу.

Е.А. Колчанова и Т.П. Любимова в работе [109] изучали устойчивость нижней границы гидратов метана в подогреваемом снизу пористом слое при наличии силы тяжести. Рассматривались два типа пористой среды: двухслойная система с фиксированной проницаемостью в каждом слое и однослойная с непрерывным изменением проницаемости. При определенных условиях в слое возникает равновесное состояние, когда в верхней части находится газ и гидраты, а в нижней – газ и лед. При этом формируется равновесная зона устойчивости гидратов. Авторы исследовали линейную устойчивость нижней границы этой области по отношению к малым возмущениям. Показано, что при развитии неустойчивости возникают конвективные потоки газа, которые приводят к разрушению гидратов. Изучены нейтральные зависимости, раскрыта роль коротковолновых и длинноволновых возмущений.

Д.М. Попов и Т.П. Любимова в работе [110] рассмотрели линейную устойчивость плоского течения двух смешивающихся жидкостей в поле высокочастотных горизонтальных вибраций. Найдено квазиравновесное решение с нулевой средней скоростью. Линейная задача устойчивости решалась аналитически в длинноволновом приближении и численно в случае конечных волновых чисел.

Т.П. Любимова с соавторами [111] исследовали устойчивость границы раздела несмешивающихся жидкостей при наличии вертикальных вибраций малой амплитуды и постоянного теплового потока, задаваемого граничными условиями. Уравнения и граничные условия были записаны с помощью модели Буссе-Любимова. Было найдено, что вибрации малой и средней амплитуды не влияют на длинноволновую неустойчивость. Для исследования влияния возмущений с конечной длиной волны были рассмотрены параметры, соответствующие границе

раздела муравьиной кислоты и трансформаторного масла. В этом случае осциллирующие возмущения с конечной длиной волны имеют как области параметров, в которых они стабилизируются, так и области параметров, в которых они дестабилизируются. Вибрации подавляют монотонные возмущения с конечной длиной волны, но становятся наиболее опасны при достаточно большом вибрационном числе Релея.

Т.П. Любимова с соавторами в работе [112] изучали линейную устойчивость плоскопараллельного течения поверх насыщенного пористого слоя. Пористый слой ограничен снизу твердой поверхностью, а верхняя свободная граница принята недеформируемой. Обнаружено, что наиболее неустойчивы две группы возмущений: длинноволновые и коротковолновые. Длинноволновые возмущения захватывают весь объем жидкости, тогда как коротковолновые развиваются возле границы раздела пористой среды и жидкости. Неустойчивы только периодические моды, что, при развитии неустойчивости, приводит к появлению бегущих волн.

В работе [113] изучалась линейная устойчивость в вертикальном канале течения раствора двух нереагирующих добавок в несжимаемой жидкости. Течение возникало под действием конвективных сил, которые возникали за счет разности температур на границах канала. Подробно исследована устойчивость течения в зависимости от параметров. Обнаружено, что могут быть неустойчивы следующие моды: монотонная гидродинамическая, периодическая диффузионная, монотонная термодиффузионная.

Т.П. Любимова и Н.И. Лобов в работе [114] рассмотрели устойчивость течения нереагирующей смеси двух жидкостей, которая течет в плоском вертикальном канале под действием конвективных сил, возникающих за счет разности температуры на стенках. Устойчивость исследовалась в линейном приближении, задача на собственные значения для системы, описывающей возмущения функции тока, температуры и концентрации более легкого компонента решалась при помощи метода дифференциальной прогонки. Был также рассмотрен случай однокомпонентной жидкости для подробного изучения влияния термодиффузии на устойчивость течения. В статье приведены вычисленные авторами зависимости критических чисел Прантля от параметра разделения смеси, которые имеют сложную форму.

С.В. Старченко с соавторами в работе [115] изложили результаты исследования устойчивости толстых вращающихся слоев. Выведена система уравнений, описывающая конвекцию в недрах планет и лун, более точная, чем приближение

Буссинеска. Критические числа, частоты и соответствующие решения были найдены аналитически и численно. Полученные результаты позволяют пересмотреть более ранние оценки, сделанные на основе уравнений Буссинеска. Было обнаружено, что критическое число Релея резко уменьшается при увеличении внутреннего радиуса сферического слоя. Также показано, что в некоторых случаях критические числа Релея могут быть очень большими, сопоставимыми с типичными значениями в численных экспериментах с МГД-динамо.

С.В. Старченко и М.С. Котельникова [116] исследовали линейную устойчивость конвекции в быстро вращающемся широком сферическом слое. Постановка задачи обусловлена интересом к изучению конвективных течений в недрах планет, которые являются источниками планетарных магнитных полей. В работе выведена система уравнений для возмущений. Исследованы предельные случаи больших и малых чисел Прандтля, малого внутреннего радиуса. Получены зависимости критических чисел Релея и критических частот от числа Прандтля в случае, когда внутренний радиус сферического слоя много меньше наружного. Был рассмотрен очень широкий диапазон чисел Прантля, охватывающий все физически возможные пределы его изменения. Исследование собственных функций показало, что источник конвективной неустойчивости располагается возле внутренней границы.

В.К. Андреев и В.Б. Бекежанова [117] изучали устойчивость конвективного течения вязкой подогреваемой жидкости в цилиндре большого радиуса. Они нашли новое точное решение уравнений свободной конвекции в приближении Обербека-Буссинеска, зависящее от параметра. Предложена итерационная процедура, которая позволила обнаружить три класса решений, устойчивость которых исследовалась численно. Была выделена тепловая мода, показано, что при малых числах Прандтля периодическая мода затухает, а при увеличении числа Прандтля возникает новый тип неустойчивости, связанный с тепловыми возмущениями. При этом в области коротковолновых возмущений неустойчивость возникает за счет гидродинамической моды.

### 1.3 Линейная устойчивость плоскопараллельных МГД-течений

Линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики, которые описывают параллельные течения, в некоторых случаях сводятся к модификации уравнения Орра-Зоммерфельда. Поэтому задачи такого типа тесно связаны с задачами устойчивости течений вязкой жидкости без магнитного поля, которые описаны выше.

В работе Локка [118] исследована устойчивость при малых возмущениях двумерного ламинарного течения электропроводящей жидкости в поперечном магнитном поле (течения Гартмана). Установлено, что доминирующим фактором является изменение формы невозмущенного профиля скорости, который зависит только от числа Гартмана. Были найдены нейтральные кривые для диапазона значений числа Гартмана. Обнаружено, что критическое число Рейнольдса очень быстро возрастает с увеличением числа Гартмана, так что поперечное магнитное поле оказывает сильное стабилизирующее влияние на этот тип потока.

Михаэль в статье [119] поставил задачу устойчивости течения вязкой электропроводящей жидкости в плоском канале при продольном направлении магнитного поля. В этой работе выведены уравнения для двумерных и трехмерных возмущений, сформулированы граничные условия, произведен анализ этих уравнений в простейшем частном случае.

Велихов [120] при помощи асимптотических методов исследовал устойчивость течения Пуазейля идеально-электропроводящей жидкости при наличии продольного магнитного поля. Получены нейтральные кривые, сделаны оценки некоторых параметров возмущений.

Случай поля, параллельного плоскостям, но составляющего угол с вектором скорости рассмотрен Стюартом в работе [121]. Проблема устойчивости сведена к решению обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Рассматривались нейтральные возмущения. Нейтральные кривые получены в некотором диапазоне параметра, который определяет действие магнитного поля. Критическое число Рейнольдса возрастает с увеличением напряженности магнитного поля. Получено энергетическое соотношение, которое иллюстрирует баланс между энергией, передаваемой от основного потока к возмущениям, и энергией, рассеиваемой вязкостью и возмущениями магнитного поля.

Какутани исследовал устойчивость течения Куэтта в поперечном магнитном поле [122]. Для решения задачи Орра-Зоммерфельда использовался асимптотический метод. Для различных значений числа Гартмана рассчитаны нейтральные кривые. Обнаружено число Гартмана  $Ha = 3.31$ , меньше которого число Рейнольдса бесконечно, как в случае без магнитного поля. При увеличении числа Гартмана критическое число Рейнольдса быстро уменьшается до величины  $3.8 \cdot 10^5$  при  $Ha = 5.5$ , после чего увеличивается, достигая асимптоты  $50000 \cdot Ha$  при  $Ha > 15$ .

Исследования устойчивости параллельных магнитогидродинамических течений производились в Институте Теплофизики СО АН СССР. А.М. Сагалаковым и В.Н. Штерном в работе [123] была детально проанализирована устойчивость течений в поперечном магнитном поле при малых магнитных числах Рейнольдса. Изучались течения Гартмана и Куэтта. Получены зависимости критического числа Рейнольдса от числа Гартмана в диапазоне  $Ha = 1 \sim 100$ . Детально исследован спектр малых возмущений и построены кривые для симметричных и антисимметричных возмущений. Изучена дестабилизация течения Куэтта магнитным полем. Произведено сравнение с результатами Локка [118], Какутани [122], Павлова [124]. В тех областях параметров, где можно провести сравнение, результаты согласуются с данными Локка и Какутани, но не согласуются с результатами Павлова.

В статье [125] А.М. Сагалаковым приведены результаты исследования устойчивости течения Куэтта с асимметричным профилем скорости. В этом случае магнитное поле направлено перпендикулярно плоскостям и течение жидкости возникает за счет движения верхней пластины. Автором подробно изучен спектр возмущений, которые классифицированы по признаку фазовой скорости при больших волновых числах. Найдено, что неустойчивость вызывает только один тип возмущений. Найдены критические значения параметров и обнаружена аналогия с неустойчивостью течения Гартмана относительно асимметричных возмущений.

Устойчивость течения Гартмана по отношению к малым возмущениям при произвольных магнитных числах Рейнольдса рассмотрена А.М. Сагалаковым в работах [126; 127]. Было найдено несколько типов неустойчивости, которые отличаются волновыми числами, декрементами нарастания, фазовыми скоростями. Эти типы неустойчивости могут развиваться одновременно. Обнаружено взаимодействие магнитных и гидродинамических явлений, приводящее к перемежаемо-



сти зон неустойчивости. Магнитное поле может как уменьшать устойчивость потока, так и увеличивать ее. В некоторых случаях существует наиболее опасное значение напряженности магнитного поля, а в некоторых течение монотонно стабилизируется при увеличении напряженности магнитного поля.

А.М. Сагалаков с соавторами [128; 129] исследовали устойчивость плоского течения Пуазейля в продольном поле при произвольных магнитных числах Рейнольдса. Была изучено влияние проводимости стенок канала на устойчивость. Оказалось, что замена хорошо проводящих стенок на непроводящие дестабилизирует течение. При достаточно сильном магнитном поле и умеренных числах Рейнольдса может возникать новая ветвь неустойчивости, связанная с развитием альфвеновских волн возле стенок канала. При достаточно больших магнитных числах Прандтля эта ветвь неустойчивости может иметь критические числа Рейнольдса, меньшие чем для жидкости без магнитного поля.

А.М. Сагалаков и А.Ю. Юдинцев в статье [130] изложили, в числе прочего, результаты исследования устойчивости напорного течения между коаксиальными цилиндрами в приближении малых магнитных чисел Рейнольдса. Рассматривался достаточно узкий зазор между цилиндрами. Найдены области устойчивости двумерных и трехмерных возмущений. Обсуждается сравнение результатов устойчивости предельного случая очень узкого канала со случаем плоского течения.

Монография [131] суммирует результаты, полученные группой авторов в области устойчивости и автоколебаний в параллельных МГД-течениях. В этой монографии обобщены результаты журнальных публикаций относительно линейной устойчивости течения в кольцевом канале, включая работы [130; 132]. В частности, изложены результаты исследования линейной устойчивости в диапазоне магнитных чисел Прандтля  $P_m$  от  $10^{-7}$  до 10, при этом влияние магнитного поля задавалось числом Гартмана. Использование числа Гартмана приводит к тому, что при увеличении  $P_m$  (на девять порядков!) происходит обратно пропорциональное уменьшение числа Альфвена, которое определяет величину влияния магнитных сил. Таким образом, приведенные в монографии результаты об устойчивости течения при достаточно больших  $P_m$  являются неполными.

Такасима в работе [133] рассмотрел устойчивость течения Гартмана. Для численного решения задачи типа Орра-Зоммерфельда использовался метод коллокаций и полиномы Чебышева. Рассмотрен предельный случай  $P_m \rightarrow 0$  и случай конечных значений магнитного числа Прандтля  $P_m < 0.1$ . Для первого случая исследована зависимость критических чисел Рейнольдса от числа Гартмана при

числах Гартмана, меньших 200. В случае конечных  $P_m$  обнаружено существование двух мод, построены критические зависимости в диапазоне  $10^{-1} < M < 10^3$ . Приведены примеры нейтральных кривых и собственных функций. В результате исследования обнаружено, что, за исключением случая, когда  $P_m$  достаточно мало, магнитное поле оказывает как стабилизирующее, так и дестабилизирующее воздействие на течение, и что при фиксированном значении  $Ha$  течение жидкости становится более неустойчивым по мере увеличения  $P_m$ .

В статье [134] изложены результаты аналогичных расчетов в случае течения Куэтта. Критическое число Рейнольдса, критические волновые числа и критические фазовые скорости волны получены для широких диапазонов магнитного числа Прандтля и числа Гартмана. Обнаружено, что существует две моды: стационарная и бегущая, и что, за исключением случая, когда магнитное число Прандтля достаточно мало, течение жидкости становится более неустойчивым к стационарной моде по мере увеличения  $P_m$ .

Статья [135] описывает теоретическое исследование устойчивости слоя Гартмана в наклонном магнитном поле в приближении малых магнитных чисел Рейнольдса. Произведен линейный и энергетический анализ устойчивости, которые позволяют исследовать устойчивость как к бесконечно-малым, так и к конечным возмущениям. Обнаружено, что между критическими числами Рейнольдса, полученными в результате этих двух подходов, существует разница более чем на три порядка. Интерес авторов статьи [135] к этой проблеме обусловлен экспериментальными результатами по ламинарно–турбулентному переходу магнитогидродинамических течений в каналах. Они считают важным, что во всех существующих на момент написания статьи экспериментах рассматривалась ламинаризация турбулентного потока, а не переход к турбулентности, из чего следует, что эти эксперименты, скорее, описывают действие возмущений конечной амплитуды, что подтверждается тем, что критическое число Рейнольдса по линейной теории для течения Гартмана на два порядка больше экспериментального. Авторы также предположили, что режим течения Гартмана (ламинарный или турбулентный) не определяется устойчивостью или неустойчивостью слоя Гартмана.

В работе [136] исследована устойчивость течения Гартмана в приближении малых магнитных чисел Рейнольдса. Исследуется проблема большой разницы между экспериментальными значениями критического числа Рейнольдса, которые составляют  $\sim 150 - 250$  и результатами линейного анализа, который дает критическое число Рейнольдса  $\sim 50000$ . Автор работы [136] предполагает

существование докритических растущих возмущений, которые могут появляться за счет неортогональности собственных функций линеаризованного оператора. При помощи вычислений было найдено оптимальное усиление малых трехмерных возмущений при отсутствии нелинейных эффектов. Далее определялось, как нелинейные механизмы влияют на развитие возмущения. Было показано, что линейное приближение справедливо только для очень малых амплитуд возмущений.

В работе [137] исследована устойчивость течения Гартмана с проскальзыванием на стенках. Рассмотрен случай межфазного скольжения между текущей жидкостью и твердой стенкой с использованием модели длины скольжения. Задача типа Орра-Зоммерфельда решалась методом коллокаций. Устойчивость исследовалась в рамках линейного модального и немодального подхода для симметричных и асимметричных условий скольжения. В рамках модального подхода было продемонстрировано, что магнитное поле стабилизирует поток, в то время как увеличение длины скольжения значительно увеличивает критическое число Рейнольдса даже при очень малых длинах скольжения по сравнению с толщиной слоя Гартмана. Немодальный анализ устойчивости при некритических числах Рейнольдса показал, что скольжение практически не влияет на рост переходной энергии.

Работа И.Ю. Калашникова [138] посвящена линейному анализу устойчивости течения Гартмана в конвективном приближении. Автором статьи получены и решены уравнения, описывающие рост возмущений. Найдены основные моды возмущений и условия их затухания. Выведено уравнение для инкремента возмущения и показано, что может существовать неустойчивость. Отмечается, что результаты согласуются с экспериментальными данными.

В статье Янга с соавторами [139] описаны результаты исследования линейной устойчивости течения Гартмана. Уравнения для возмущений выведены в приближении малых магнитных чисел Рейнольдса. Уравнения типа Орра-Зоммерфельда решаются численно с использованием разложения по полиномам Чебышева. Получены нейтральные кривые при числах Гартмана, меньших 1.3. Результаты вычислений подтверждают, что магнитное поле оказывает стабилизирующее воздействие на поток, и степень этого воздействия исследована в некотором диапазоне чисел Рейнольдса. При помощи численного моделирования показано, что магнитное поле определенной величины стабилизирует течение Гартмана. Критическое число Рейнольдса быстро увеличивается, когда число Гартмана больше 0.7.

Басаварадж с соавторами [140] исследовал устойчивость плоского течения Пуазейля в продольном магнитном поле. Устойчивость исследовалась при числах Альфвена и магнитных числах Рейнольдса порядка единицы. Числа Рейнольдса в расчетах не превышали  $10^5$ . При этом магнитные числа Прандтля остаются порядка  $10^{-5}$ . Были построены критические и нейтральные зависимости. Обнаружено, что увеличение числа Альфвена и магнитного числа Рейнольдса приводит к стабилизации течения как при увеличении этих параметров по отдельности, так и при одновременном увеличении.

Вей с соавторами в работе [141] независимо подтвердили результаты исследования устойчивости плоского течения в продольном магнитном поле, приведенные в главе 2. Авторы этой работы рассмотрели уравнения магнитной гидродинамики в случае конечных магнитных чисел Рейнольдса, для записи которых использовались функция тока и магнитный потенциал. Линеаризованная задача на собственные значения решалась методом коллокаций. Подтверждена стабилизация течения при магнитных числах Прандтля  $0.1 < P_m < 1$  и существование новой ветви неустойчивости при немалых магнитных числах Рейнольдса  $R_m$  и больших числах Рейнольдса  $Re$ .

## **1.4 Применение метода Ляпунова-Шмидта для анализа устойчивости параллельных течений**

Нарастание возмущений и переход к турбулентному движению обусловлены нелинейными процессами. Строгая теория ветвления решений уравнения Навье-Стокса вблизи нейтральной кривой разработана В.И. Юдовичем на основе метода Ляпунова-Шмидта [142; 143]. Параметры течения представляются в виде

$$\begin{aligned} ReC &= Re_0C_0 + Re_0(\varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \dots), \\ \{\mathbf{v}, p, \mathbf{h}\} &= \varepsilon\{\mathbf{v}, p, \mathbf{h}\} + \varepsilon^2\{\mathbf{v}, p, \mathbf{h}\} + \dots, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где  $Re_0, C_0$  – параметры на нейтральной кривой,  $\varepsilon$  – малый параметр,  $\mathbf{v}$  – скорость,  $\mathbf{h}$  – магнитное поле,  $p$  – давление. Такая подстановка приводит к линейным неоднородным рекуррентным уравнениям, которые решаются последовательно для величин, обозначенных индексами 1, 2 и так далее. При числах Рейнольдса, близких к критическим, существуют автоколебания конечной амплитуды, которые в

точках нейтральной кривой ответвляются от стационарного решения. Энергия автоколебаний зависит от разности между числом Рейнольдса и его критическим значением. Может реализовываться как мягкое возбуждение неустойчивости, когда автоколебания возникают при числах Рейнольдса меньше критических, так и жесткое, когда они возникают при числах Рейнольдса больше критических. Автоколебания, возникающие в плоском канале при наличии продольного магнитного поля исследовались в работах [144-147]. В работах [130; 132; 148-151] исследовано возникновение автоколебаний в трубе кольцевого сечения в продольном магнитном поле, обнаружен эффект спонтанного возникновения вращения при потере устойчивости.

Вопросы, связанные с возникновением автоколебаний в магнитогидродинамических течениях, исчерпывающе изложены в монографии [131]. В первой главе монографии приведены основные положения теории нелинейной устойчивости течений вязкой жидкости, разработанные Л.Д. Ландау и В.И. Юдовичем. Сделан обзор работ, посвященных ответвлению вторичных режимов, бифуркациям, возникновению автоколебаний в разных течениях. На примере двумерного плоского течения в магнитном поле вводится метод Ляпунова-Шмидта и численный метод дифференциальной прогонки. Также в этой главе изучены ветвление двумерных автоколебаний в продольном магнитном поле и режимы возбуждения тиринг-неустойчивости. Вторая глава посвящена трехмерным автоколебаниям в плоскопараллельных МГД-течениях. Изучено ветвление автоколебаний в продольном магнитном поле, устойчивость автоколебательных режимов, обсуждаются преобразования Сквайра, изучены автоколебания в продольном и наклонном магнитном поле при немалых магнитных числах Рейнольдса, обсуждается спонтанная потеря симметрии течения в плоском канале. В третьей главе изложены результаты исследований трехмерных автоколебаний в канале кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля. Изучены области существования двумерных и трехмерных возмущений в приближении малых магнитных чисел Рейнольдса, проанализированы соответствующие автоколебательные режимы. Приведены результаты расчетов параметров автоколебательных режимов в случае конечной проводимости при  $P_m = 10^{-3}$ . Обсуждается возникновение автоколебательного режима с вращением. В четвертой главе обсуждаются обобщенные вопросы, связанные со вторичными режимами с закруткой: система уравнений для пульсационного и среднего движения, средние потоки момента импульса и средние моменты сил, энергетические уравнения среднего и пульсационного

движения, теоремы сравнения. Пятая глава посвящена спонтанному возникновению вращения в канале кольцевого сечения. В этой главе приведены результаты исследования линейной устойчивости в диапазоне магнитных чисел Прандтля  $P_m$  от  $10^{-7}$  до 10. При этом магнитное поле задавалось числом Гартмана, что при увеличении  $P_m$  приводит к уменьшению влияния магнитных сил. Также в этой главе было произведено прямое численное моделирование течения в канале кольцевого сечения, которое позволило обнаружить среднее вращение первоначально не вращающейся жидкости, сделаны выводы о физическом механизме возникновения этого вращения.

В работе [152; 153] в рамках слабонелинейной теории изучено мягкое и жесткое порождение колебаний при умеренных и высоких числах Маха. Уравнения включают эффекты, присущие течению несжимаемой жидкости и сжимаемому газу: порождение стационарных вторичных гармоник, генерацию возмущений двойных частот.

## 1.5 Метод функций Рвачева

Исследование устойчивости течений необходимо проводить не только в случае плоских прямых каналов или труб простых сечений, но и для течений произвольной геометрии. С точки зрения математического моделирования такое исследование включает решение уравнений Навье-Стокса с граничными условиями, заданными на геометрических объектах сложной формы. Алгоритм решения, таким образом, должен учитывать одновременно информацию о задаче, заданную уравнениями, и информацию об области, в которой эти уравнения решаются, и о граничных условиях.

Широко распространенные численные методы сначала приближенно представляют геометрическую информацию путем введения сетки и, далее, дискретизируют уравнения Навье-Стокса и граничные условия. Таким образом, получившаяся аппроксимация соединяет информацию о функциональной и геометрической части задачи. От качества сетки сильно зависит успех решения задачи и ее разработке уделяется очень много внимания. Работа с сетками накладывает определенные ограничения на задачу: изменение формы области, в которой течет

жидкость, требует создания новой сетки. Такие трудности обуславливают интерес к методам, в которых сетка не связана с границами области или вообще не используется.

В работе [154] было показано, что граничные условия Дирихле  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$  могут быть удовлетворены точно при помощи функции  $\omega$ , обращающейся в нуль на границе области  $\Omega$ , если представить решение краевой задаче в виде

$$u = \omega \sum_0^N C_i \psi_i + \varphi, \quad (1.3)$$

где  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$  – система линейно-независимых базисных функций,  $C_i$  – неизвестные коэффициенты, значения которых можно определить каким-либо подходящим способом, например, методом коллокаций.

В.Л. Рвачевым был предложен способ нахождения функций, обращающихся в нуль на границе области, которая может быть составлена путем объединения или пересечения элементарных областей. Метод функций Рвачева позволяет точно удовлетворить многим типам граничных условий, включая условия Дирихле и Неймана, и составить структуры решения, объединяющие геометрическую информацию, базисные функции, неизвестные коэффициенты. Теория метода  $R$ -функций изложена в монографиях [155-159]. Наиболее современным и последовательным изложением основ метода является монография [159]. В ее первой главе изложены базовые понятия:  $H$ -реализуемые функции, функции алгебры логики,  $R$ -функции, введены элементарные достаточно полные системы  $R$ -функций, обсуждаются их логические и дифференциальные свойства, обсуждается понятие локуса и его уравнения, изложены особенности получения уравнений локусов в некоторых особых случаях. Вторая глава этой книги посвящена структурам (пучкам функций), которые конструируются с использованием функций Рвачева для приближенного представления решений краевых задач. В этой главе обсуждаются способы учета краевых условий Дирихле и Неймана, смешанных условий, проблемы полноты структурных формул и поиска неопределенных компонент пучка, обобщенные интерполяционные формулы. Третья и четвертая главы описывают применение атомарных и  $R$ -функций для задач радиофизики и обработки сигналов, они не интересны с точки зрения гидродинамики. Книги [155-157] содержат большое количество примеров применения функций Рвачева для краевых задач теплопроводности, упругости, электродинамики, магнитной гидродинамики.

В.Л. Рвачев и Т.И. Шейко написали обзор [160] результатов использования функций Рвачева для решения краевых задач механики. В этом обзоре авторы рассматривают несколько типов стандартных граничных условий: Дирихле, Неймана, Стефана-Больцмана и другие. Приводится пример решения уравнения Лапласа в областях разных сложных форм при помощи системы ПОЛЕ с использованием языка программирования RL. Также приводятся обзор примеров решения конкретных задач: кручение стержней сложной формы, задачи расчета тонких пластин и оболочек, приложение к теории эластичности и пластичности, задачам теплопередачи, задачам расчета волноводов для СВЧ-излучения. В обзоре отмечается особый интерес к вычислениям контрастных физических полей, то есть, полей с большими градиентами в малой пространственной области. В качестве примеров приведено течения Гартмана в МГД-насосе и элементе blankets термоядерного реактора, сетке топливных элементов, расчет электрического поля в цилиндре с тонкой заряженной мембраной (тест Самарского), моделирование скин-эффекта в диоде Шоттки, задача расчета проводимости кусочно-анизотропной среды в магнитном поле, течение вязкой жидкости в инжекторе.

В. Шапиро в работе [161] сделал обзор работ, касающихся применения  $R$ -функций. В обзоре кратко излагаются основы теории функций Рвачева, использование этих функций в области компьютерной графики и геометрического моделирования. Большое внимание в обзоре [161] уделено вопросам, связанным с решением краевых задач: обобщенному разложению Тейлора, интерполяции, пучкам функций, описываются системы бессеточного моделирования и анализа ПОЛЕ и SAGE.

И. Цуканов с соавторами в работе [162] описывают проведенные ими исследования бессеточного метода для решения задач несжимаемой вязкой жидкости. Они рассмотрели два подхода для двумерных течений: использование функции тока в стационарной формулировке и нестационарные уравнения в естественных переменных в приближении искусственной сжимаемости. В качестве примеров было рассмотрено течение возле обратной ступеньки и обтекание упрощенной модели автомобиля. Для этих примеров при помощи  $R$ -функций были составлены пучки функций. Приближенное представление решений производилось при помощи сплайнов на некомфортной сетке. Сравнение с коммерческими программными комплексами и экспериментальными данными позволило выявить сильные стороны предложенного авторами численного метода. К сильным сторонам ав-



торы относят возможность полной автоматизации всех шагов алгоритма, точный учет граничных условий, независимость от выбора сетки.

С.Н. Ламтюгова и М.В. Сидоров [163] решили задачу обтекания цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью при помощи метода функций Рвачева. Течение жидкости описывалось уравнением Навье-Стокса для функции тока в полярных координатах. Стационарное решение получено путем совместного применения  $R$ -функций, метода Галеркина и метода последовательных приближений. Расчеты производились при  $Re < 30$ .

В задачах гидродинамической устойчивости течений метод функций Рвачева прежде не использовался.

## 1.6 Устойчивость и ламинарно-турбулентный переход в сложной геометрии

Большое значение для прикладных работ имеет анализ устойчивости непараллельных течений. Обзор таких исследований приведен в [68; 69; 72]. Одним из первых таких исследований считается работа [164], в которой была исследована устойчивость вихрей Стюарта в течении с градиентом скорости. Ряд более поздних работ [165; 166] был посвящен устойчивости течений за предметами различной формы. Устойчивость конвективного течения в прямоугольной полости была изучена в работе [167]. В работе [168] исследовалась устойчивость течения в трубе прямоугольного сечения.

Для анализа устойчивости течение скорость и давление, входящие в уравнения Навье-Стокса, можно представить в форме

$$\{U, p\}(x, y, z) + \{v, p\}(x, y, z) \exp^{\lambda t}, \quad (1.4)$$

где второй член предполагается бесконечно-малым, что приводит к линейной задаче. Действительная часть  $\lambda$  определяет нарастание или затухание возмущений, которые могут быть как монотонными, когда мнимая часть  $\lambda$  равна нулю, так и периодическими.

Подстановка (1.4) приводит к линейной задаче на собственные значения для дифференциальных уравнений в частных производных. Дискретизация таких за-

дач требует больших вычислительных ресурсов. В частности, такие задачи приводят к матрицам большого размера, для которых эффективны только итерационные методы, например, метод Арнольди (см. [169], обсуждение в [68]).

Исследования глобальной устойчивости, так же как и устойчивости параллельных течений, требуют использования методов высокого порядка точности. Преимущества такого подхода показаны в работе [170]. Спектрально-элементный метод [171], впервые предложенный в работе [172] преодолевает характерные для таких задач трудности за счет высокого качества представления решения и при этом обладает высокой геометрической гибкостью. В силу своей сеточной натуры, он позволяет производить локальное улучшение разрешающей способности за счет сгущения сетки ( $h$ -рефайнмент). При этом метод сохраняет особенность спектрального метода – погрешность может уменьшаться за счет увеличения порядка используемых полиномов ( $p$ -рефайнмент).

Важным примером применения теории и методов глобальной устойчивости является задача о течении возле передней кромки крыла (см. рисунок 1.1, рассмотренная в работах [173-176]).

Большое число работ посвящено устойчивости трехмерного пограничного слоя, возникающего на стреловидных крыльях (см. рисунок 1.2). В работе [177] устойчивость этого слоя изучена в линейном приближении. Анализ возмущений произведен на основании приближения локальной автомодельности среднего течения в рамках решения Фокнера-Скэн-Кука, обобщенного на случай сжимаемых течений. Рассчитанные характеристики для дозвукового пограничного слоя согласуются с результатами измерений. Однако, в сверхзвуковом пограничном слое вычисленные скорости нарастания отличаются от экспериментальных. Это отличие

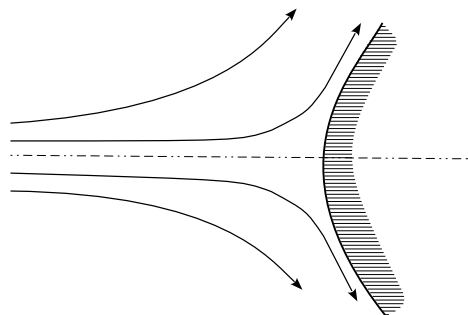


Рис. 1.1 — Течение возле передней кромки крыла

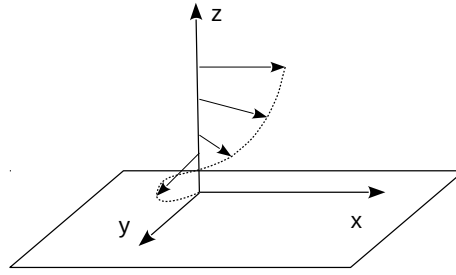


Рис. 1.2 — Трехмерный пограничный слой

обусловлено значительной величиной амплитуды возмущений в эксперименте и при ее уменьшении результаты хорошо описываются теорией.

В работе [178] эта проблема решалась в рамках подхода глобальной устойчивости, а в рамках прямого численного моделирования в работах [179; 180].

Важное значение имеют исследования устойчивости обтекания тел. Наиболее простой конфигурацией является цилиндр (см. рисунок 1.3). Карниадакис и Триантафилоу [181] исследовали возникновение трехмерных движений в следе за цилиндром при помощи прямого численного моделирования вплоть до числа Рейнольдса, равного 500. Ими использовался спектрально-элементный метод и разложение Фурье по однородной поперечной координате. Было найдено, что двумерное периодическое течение в следе за цилиндром становится неустойчивым по отношению к трехмерным возмущениям при числах Рейнольдса, близких к 200. При возникновении трехмерного движения фундаментальная частота течения не меняется. При малой сверхкритичности течение соответствует предска-

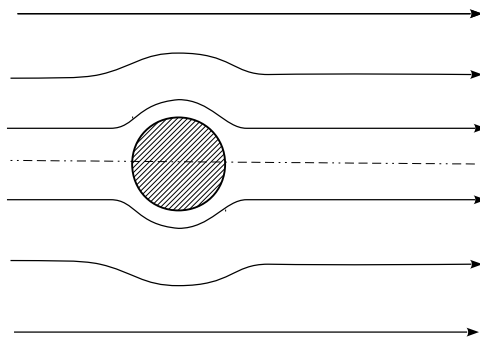


Рис. 1.3 — Течение возле цилиндра

ниям линейной теории. Вихревые нити имеют продольную волнистую форму в ближнем следе и образуют ребристые структуры дальше по течению. При более высоких числах Рейнольдса возникают бифуркации удвоения периода, приводящие к хаотизации течения при  $Re = 500$ .

Устойчивость течения за круглым цилиндром была исследована Баркли и Хендерсоном [182; 183]. Они обнаружили, что в ламинарном двумерном течении при  $Re = 46 \pm 1$  возникает бифуркация Хопфа, которая порождает двумерное периодическое течение – дорожку Кармана в следе за цилиндром. Анализ устойчивости периодического течения, произведенный на основе теории Флоке, показал, что при  $Re = 188.5 \pm 1$  двумерное периодическое течение становится неустойчивым по отношению к трехмерным возмущениям. Эта неустойчивость возникает в длинноволновом диапазоне. Также было обнаружена неустойчивость периодического течения, которая возникает в коротковолновом диапазоне при  $Re = 259 \pm 1$ . В работе [184] изучены бифуркации течения возле цилиндра с точки зрения нелинейной теории. В работе [185] Баркли изучал эти неустойчивости при условии, что они развиваются в ограниченной области за цилиндром. Результаты этой работы позволяют лучше определить физические механизмы трехмерной неустойчивости, так как, в частности, в работе были определены пространственные границы, в которых нарастают трехмерные возмущения. Интересно исследование устойчивости осредненного профиля скорости возле круглого цилиндра, результаты которого изложены в статье [186]. Оказалось, что собственные частоты осредненного профиля при  $46 < Re < 180$  соответствуют частотам вихревой дорожки Кармана в следе за цилиндром. При этом коэффициенты нарастания все время остаются близкими к нулю.

Абдессемед с соавторами [187] исследовал оптимальные возмущения течения возле круглого цилиндра. Было исследовано стационарное течение при  $Re = 45$  (устойчивое) и  $Re = 50$  (неустойчивое). В обоих случаях были обнаружены быстро растущие оптимальные возмущения, при  $Re = 50$  обусловленные линейной неустойчивостью, приводящей к появлению дорожки вихрей Кармана. Также были исследованы оптимальные возмущения при числах Рейнольдса 200 и 300, которые соответствуют периодическому по времени течению. При этих числах Рейнольдса течение линейно неустойчиво, нарастают две моды, соответствующие разным поперечным волновым числам. Максимальный рост оптимальных возмущений наблюдался вблизи цилиндра в противоположность результатам ли-

нейного анализа, который показывает наибольшие амплитуды неустойчивых собственных функций в следе за цилиндром.

Шатров с соавторами [188; 189] изучал устойчивость течения возле круглого цилиндра при наличии продольного магнитного поля. В работе [188] использовался метод конечных разностей как для расчета основного течения, так и для исследования устойчивости. Работа [189] расширяет результаты публикации [188]. Авторы усовершенствовали свои вычисления за счет использования намного более эффективного спектрального метода. В результате расчетов выяснилось, что продольное магнитное поле подавляет поперечные движения в следе за цилиндром, вследствие чего при увеличении магнитного поля подавляется периодическая дорожка вихрей, а стационарные области рециркуляции уплотняются и удлиняются. Также отмечается, что для трехмерных возмущений инкременты нарастания не монотонны при увеличении магнитного поля. В основном это связано с тем, что при увеличении магнитного поля меняется режим основного двумерного течения с периодического на стационарный. Поэтому магнитное поле может как усиливать, так и подавлять неустойчивость, в зависимости от числа Рейнольдса. В некоторых случаях критическое число Рейнольдса для трехмерных возмущений в магнитном поле меньше, чем без магнитного поля. Также авторы обнаружили, что поперечное потоку магнитное поле стабилизирует течение таким образом, что усиление поля монотонно увеличивает его стабилизирующий эффект

Устойчивость течения в канале в обратной ступеньке (рисунок 1.4) обсуждается в работах [190-193]. Каикитис с соавторами [192] исследовал двумерную устойчивость и обнаружил, что поток является глобально устойчивым по

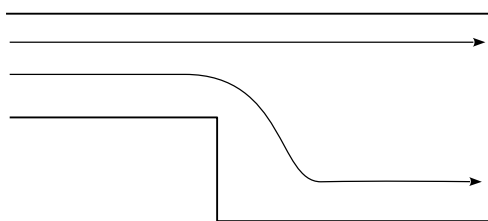


Рис. 1.4 — Обратная ступенька в канале

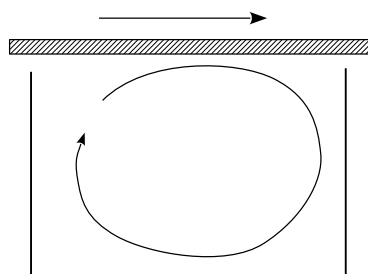


Рис. 1.5 — Прямоугольная полость с подвижной крышкой

линейной теории, если  $Re \leq 1000$ . Этими авторами было показано, что значительная часть области течения конвективно неустойчива к перманентным возмущениям конечной амплитуды, генерируемым на входе в канал, в диапазоне  $700 \leq Re \leq 2500$ . Кроме того, Каикитис с соавторами предположили, что вычисления сами по себе могут демонстрировать глобальную неустойчивость из-за ошибок дискретизации, которые маскируют неустойчивость течения.

Баркли с соавторами в работе [190] представили результаты исследования двух- и трехмерной линейной устойчивости этого течения. Они нашли критическое число Рейнольдса для трехмерных возмущений ( $Re_* = 748$ ) и показали, что нижняя граница критического числа Рейнольдса для двумерных возмущений намного выше ( $Re_{*2D} > 1500$ ), что доказывает ведущую роль трехмерных возмущений. Баркли с соавторами также объяснили, что неустойчивость, согласно линейной теории, связана с первой областью рециркуляции, которая возникает сразу после ступеньки. Механизмом, по мнению этих авторов ответственным за развитие неустойчивости, является центробежный.

Ланцесторфер с соавторами [193] систематически исследовали устойчивость течения возле обратной ступеньки в случае разных величин коэффициента расширения канала. Было обнаружено, что стационарное течение теряет свою устойчивость по отношению к трехмерным режимам различных типов в зависимости от высоты ступеньки. Физическая природа неустойчивостей исследовалась с помощью анализа переноса энергии. При очень большой высоте ступеньки неустойчивость имеет центробежную природу. В случае умеренно высокой ступеньки наиболее интенсивным является эллиптический механизм роста возмущений. Для ступеньки малой высоты устойчивость теряется под действием lift-up

механизма, характерного для сдвиговых течений. Для большой высоты ступеньки ведущая неустойчивая мода является периодической, и, когда высота ступеньки уменьшается, наиболее опасная мода становится монотонной.

Блэкберн с соавторами [191] исследовал оптимальный рост возмущений в канале с обратной ступенькой. Они обнаружили, что трехмерные оптимальные возмущения имеют несколько больший рост по сравнению с двумерными. Трехмерная мода появляется вблизи края ступеньки и увеличивает свою энергию вниз по течению за счет невязкого механизма Орра и взаимодействия неустойчивостей Кельвина–Гельмгольца двух областей рециркуляции. Кроме того, ими было исследовано трехмерное движение, возникающее под действием случайного шума, приложенного на входе в канал. Они наблюдали нестационарное движение с сильным доминированием двумерной динамики.

А.В. Бойко с соавторами в работе [194] теоретически и экспериментально изучали устойчивость течения возле обратной ступеньки, модифицированного полосчатыми структурами. Двумерное течение модифицировалось пространственно-периодическими неровностями, расположенными вдоль края ступеньки. Устойчивость течения исследовалась теоретически в линейном приближении и экспериментально в аэродинамической трубе. Было получено хорошее согласование экспериментальных и численных результатов. На основании полученных результатов авторами был сделан вывод о заметной роли неортогональных механизмов усиления возмущений при переходе от ламинарного течения к турбулентному.

Гриффит с соавторами [195] изучил течение в частично перекрытом канале. На одной стороне канала был полукруглый выступ. Движение жидкости было исследовано в некотором диапазоне высот выступа, обнаружено образование основной области рециркуляции, вторичных областей и образование дорожки вихрей при более высоких числах Рейнольдса. Авторы изучили устойчивость этого течения по отношению к трехмерным возмущениям. Как оказалось, критическое число Рейнольдса уменьшается при более высоких коэффициентах перекрытия канала и что неустойчивость этого течения определяется эллиптическим механизмом, а не центробежным.

Процессы возникновения неустойчивостей возле ступенек имеют сходство в аналогичными явлениями в прямоугольной полости, открытой или с подвижной крышкой (рисунок 1.5). Эти вопросы были изучены в работах [196-201].

Чжан и Потерат [202] исследовали поток в резко изогнутом на 180 градусов канале. В выходном патрубке канала, по мере увеличения числа Рейнольдса, могут существовать следующие типы течения: ламинарное, появление первой области рециркуляции вблизи внутренней стенки и появление второй области рециркуляции вблизи внешней стенки ниже по потоку от первой области. Если число Рейнольдса еще больше увеличится, в выходном патрубке может наблюдаться образование дорожки вихрей. Также было установлено, что основные типы течения аналогичны задаче обтекания круглого цилиндра, за исключением симметрии, и что двумерная динамика определяет основные особенности трехмерного потока. Сапарди с соавторами [203] изучили устойчивость этого течения. Они обнаружили, что течение может быть неустойчивым относительно трехмерных периодических возмущений. Неустойчивые режимы ассоциированы с первой областью рециркуляции. Также было проведено исследование устойчивости течения по отношению к двумерным нелинейным возмущениям и найден гистерезис критических чисел Рейнольдса.

Хескестада [204] экспериментально изучил поток воздуха в резко изогнутом канале и сравнил результаты с предсказаниями теории свободных линий тока. Ямасита с соавторами [205] исследовали поток воды и воздуха в двумерном резко изогнутом на 90 градусов канале. Они получили данные о перепаде давления и распределении средней скорости, флуктуациях скорости, линиях тока и энергетическом спектре флуктуаций скорости, обнаружили ламинарный и турбулентный типы течения, экспериментально наблюдали дорожку вихрей в диапазоне  $Re = 172.5 - 750$ , где первое число было нижней границей для нестационарного движения.

Мацумото с соавторами [206] систематически изучили двумерные режимы течения в резко изогнутом канале для углов менее 90 градусов и описали области рециркуляции во внешнем углу изогнутого канала и вблизи внутренней стенки выходного патрубка сразу после изгиба. Они также наблюдали периодическое вихревое движение в выходном патрубке и описали условия для каждого типа течения. Мацумото и др. [206] особенно отметили, что промежуточные режимы между турбулентным и ламинарным в изогнутом канале слабо изучены.

Херд и Петерс [207], Орланди и Гансоло [208] численно изучили ламинарное течение в плавно изогнутом канале. Херд и Петерс [207] сравнили вычисленные ими профили скоростей с их же экспериментальными результатами. Котб с соавторами [209] представили результаты численного исследования течения в



плавно изогнутом канале, обратив особое внимание на зависимость размеров областей рециркуляции от числа Рейнольдса и радиуса изгиба.

Донхун и Сеун Парки [210] исследовали нелинейную устойчивость плавного изогнутого течения в случае малых углов изгиба, которые были меньше 60 градусов, и большого радиуса изгиба. Для такой малой кривизны режимы неустойчивости близки к случаю плоского течения Пуазейля. Они описывают нелинейное взаимодействие косых волн и усиление продольных полос и вихрей. Амплитуда полос увеличивается на изгибе и выходном патрубке, но продольные вихри увеличиваются только в изгибе.

Р.И. Мулляджанов и Н.И. Яворский в статье [211] описывают результаты исследования устойчивости непараллельного течения – затопленной струи Ландау-Сквайра. Было обнаружено, что амплитуда собственных функций является степенной функцией расстояния от источника. Найдены критические числа Рейнольдса для первых двух азимутальных мод. Обнаружено, что скорость роста осесимметричных возмущения является крайне низкой и выше определенного числа Рейнольдса осесимметричные возмущения становятся менее опасными, чем синусоидальные. Теоретически вычислена функция расстояния от точки истечения, при котором течение становится турбулентным, в зависимости от числа Рейнольдса и проведено сравнение с экспериментальными результатами.

В работе [212] Р.И. Мулляджанов с соавторами исследуют устойчивость струи Ландау в квазипараллельном приближении. Произведено сравнение квазипараллельного и автомодельного подходов. На основании сравнения дисперсионных кривых и графиков собственных функций сделан вывод, что квазипараллельное приближение не подходит для описания ламинарно-турбулентного перехода в затопленной струе, потому что плохо описывает низкочастотные движения и не позволило обнаружить осесимметричную моду.

Р.И. Мулляджанов с соавторами [213] провели прямые расчеты течения возле круглого и эллиптического цилиндров, длинная ось эллипса при этом расположена под небольшим углом к скорости набегающего потока, исследовали линейные и сопряженные моды осредненного по времени течения. При прямом численном моделировании обнаружено, что течение стабилизируется за счет уменьшения зоны рециркуляции при увеличении длинной оси цилиндра. Частоты возмущений, полученные при помощи линейного анализа, совпадают с полученными прямым численным моделированием для дорожки Кармана за цилиндром. Было обнаружено что в некоторых местах линейные и сопряженные моды накладыва-

ются, образуя пространственные области роста возмущений. Эти области имеют тенденцию приближаться к нижней части хвоста эллипса при увеличении его размера по длинной оси вследствие несимметричности области рециркуляции.

Лупи с соавторами [214] исследовали устойчивость потока в круглой трубе с изгибом 90 градусов. Используя прямое численное моделирование, они обнаружили, что поток устойчив при  $Re < 2500$ . Наблюдалась пара вращающихся противоположно вихрей Дина. Внутри изгиба обнаруживается наличие двух областей рециркуляции: одна на внешней стенке в изгибе, а другая на внутренней стороне сразу после изгиба. При  $Re > 2500$  периодические колебания течения вызываются линейной модой, которая становится нарастающей при  $Re = 2531$ . Лупи с соавторами сделали вывод, что возмущения увеличиваются внутри внешней области рециркуляции из-за большого градиента в возвратном течении.

## **1.7 Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в каналах и вопросы нелинейной устойчивости**

К течениям в трубах и каналах можно отнести большой класс ограниченных стенками параллельных течений: течения в круглой и прямоугольной трубах, течение в плоском канале, течение Куэтта. Ламинарно-турбулентный переход в таких течениях носит докритический характер и обусловлен ростом возмущений конечной амплитуды. В последние десять-пятнадцать лет произошло взрывное увеличение возможностей вычислительной техники и это вызвало большой интерес к нелинейным сценариям развития неустойчивости и развития турбулентного движения.

В одной из основополагающих работ [215] Орзаг и Келлс изложили результаты исследования устойчивости течений Пуазейля и Куэтта по отношению к возмущениям конечной амплитуды, которые были комбинацией двумерный и трехмерных собственных функций соответствующих линейных операторов. Переход к турбулентности исследовался при числах Рейнольдса, меньших критических по линейной теории. Было обнаружено, что течение Пуазейля остается нейтрально-устойчивым по отношению к двумерным возмущениям при числах Рейнольдса

больше 2800, при этом для течения Куэтта нейтрально-устойчивые двумерные возмущения найдены не были. Было показано, что трехмерные возмущения оказывают существенный дестабилизирующий эффект и вызывают потерю устойчивости по отношению к возмущениям конечной амплитуды при числе Рейнольдса порядка 1000. Было также найдено, что при числе Рейнольдса менее 500 турбулентность не может поддерживаться.

Аналогичные расчеты были проведены Вреем и Хуссейни в работе [216]. Авторы брали возмущение в виде двумерной собственной функции уравнения Орра-Зоммерфельда, которой была задана некоторая амплитуда, и добавляли к нему пару трехмерных косых волн меньшей амплитуды. Была подробно изучена нелинейная динамика возмущений при  $Re = 1100$  и проведено сравнение с экспериментальными результатами.

Редди с соавторами в работе [217] обсуждают нелинейные сценарии перехода к турбулентности в плоских течениях Куэтта и Пуазейля. Исследована линейная устойчивость полосчатых структур (streaks), которые возбуждались внесением в течение продольных вихрей и косых оптимальных волн. Показано, что косые волны конечной амплитуды приводят к образованию продольных вихрей, а продольные вихри за счет механизма подъема (lift-up) приводят к образованию полос. Неустойчивость полос, в свою очередь, приводит к развитию турбулентного движения. Авторы провели сравнение этих сценариев с другими известными сценариями докритического перехода, в которых турбулентность инициируется двумерными волнами Толлмина-Шлихтинга, двумерными оптимальными возмущениями, случайным шумом. Было обнаружено, что неустойчивость возникает в определенном диапазоне продольных волновых чисел. В неустойчивых случаях наиболее опасная мода локализована вблизи центра канала и ее фазовая скорость примерно равна средней скорости течения. Коэффициенты нарастания возмущения возрастают при увеличении амплитуды возмущения. Найдены нижние границы неустойчивости по амплитуде, они соответствуют полученным прямым численным моделированием.

В.А. Демин и В.П. Смертин [218] исследовали устойчивость вибрационно-конвективных течений жидкости в плоском горизонтальном слое с твердыми границами. Была построена многомодовая модель термовибрационной конвекции, проведен бифуркационный анализ полученной динамической системы, произведены расчеты границ устойчивости различных стационарных режимов по отношению к конечным возмущениям.

В.А. Демин с соавторами в работах [219; 220] изложили результаты теоретического и экспериментального исследования исследования неустойчивости, возникающей при вытеснении легкой жидкости тяжелой жидкостью в тонком горизонтальном слое, в случае, когда изначально был задан горизонтальный скачок плотности. В теоретической части, путем полного трехмерного моделирования авторы изучали спиральные концентрационные структуры, которые возникают вследствие неустойчивости Релея-Тейлора в окрестности границы встречных потоков. Было выяснено, что результаты расчетов хорошо согласуются с результатами линейной теории и экспериментальными данными. Также отмечается, что выявленные неустойчивости ускоряют процесс перемешивания жидкостей в пограничных слоях, но при этом замедляют скорость взаимного вытеснения жидкостей.

В работе [221] Т.П. Любимова при помощи прямого численного моделирования изучила потерю устойчивости стационарного течения в вертикальном канале, которое возникает за счет разности температур на стенках при условии, что вязкость жидкости зависит от температуры. Было обнаружено мягкое возникновение вторичных режимов конвекции. При малых числах Прандтля неустойчивость развивается в виде дрейфующих вихрей возле границы раздела встречных потоков, а при больших числах Прандтля возможен рост как монотонных, так и периодических возмущений, при этом последние более опасны.

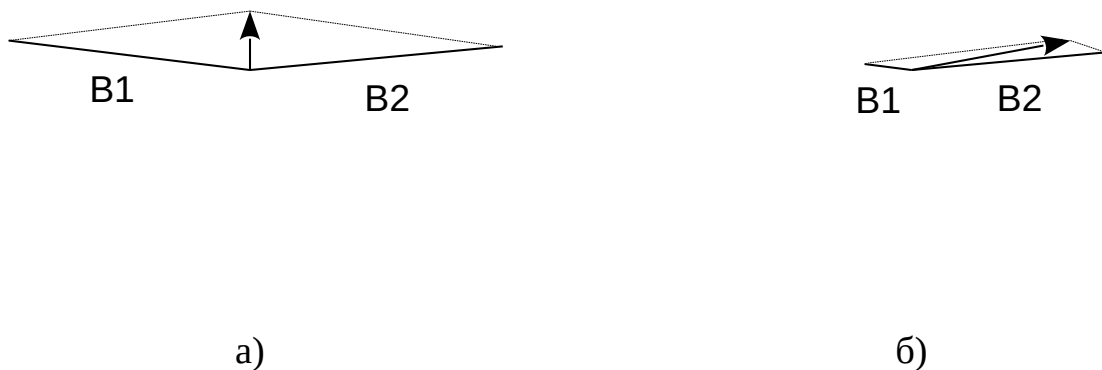


Рис. 1.6 — Иллюстрация роста модуля суперпозиции векторов  $B_1$  и  $B_2$ , амплитуда которых уменьшается

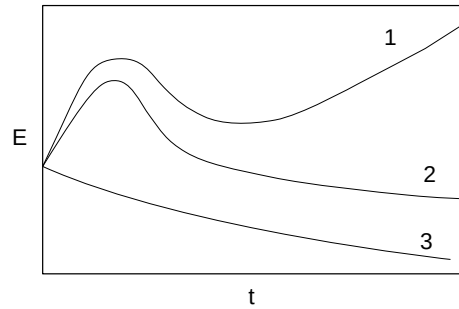


Рис. 1.7 — Графики зависимости энергии от времени: нарастающие оптимальные возмущения(1), затухающие оптимальные возмущения(2), энергия наиболее опасной линейной моды(3)

Важная роль в сценариях возникновения турбулентности отводится оптимальным возмущениям. Как известно, линейная теория хорошо описывает начальные механизмы нарастания возмущений, но критические числа Рейнольдса  $Re_*$  по линейной теории во многих случаях отличаются тех, что наблюдаются в экспериментах. Некоторые течения, например, течение в круглой трубе и течение Куэтта, линейно-устойчивы, что также противоречит экспериментальным данным. Можно предположить, что классическая линейная теория не вполне хорошо описывает ламинарно-турбулентный переход. Давно было замечено, что собственные функции линеаризованной задачи неортогональны и поэтому из затухающих мод можно составить возмущение, энергия которого может нарастать. На рисунке 1.6 изображены векторы  $B1$  и  $B2$ , амплитуда каждого из которых уменьшается от (а) к (б), тогда как их суперпозиция, наоборот, увеличивается. Эти соображения лежат в основе теории оптимальных возмущений, которая получила развитие в последние 30 лет. Основы этой теории изложены в монографии [64] и статьях [222-224]. На рисунке 1.7 приведены типичные графики энергии оптимальных возмущений (1,2) в сравнении с графиком энергии наиболее опасной устойчивой линейной моды (3). Ссылки на более старые работы, раскрывающие роль ненормальности линеаризованного оператора Навье-Стокса, даны в обзоре [225].

Сценарий перехода к турбулентности с участием оптимальных возмущений предложен в работе [226], где изложены результаты исследования течения Гартмана между параллельными плоскостями. Были изучены режимы затухания двумерных оптимальных возмущений и предложен двухступенчатый сценарий

инициации турбулентного движения. В этом сценарии на первом шаге в течение вносится оптимальное двумерное возмущение. Вблизи максимума энергии этого возмущения на течение накладывается трехмерный шум, который возбуждает турбулентное движение. В качестве параметра, который определяет ламинарно-турбулентный переход в течении Гартмана, используется число Рейнольдса, вычисленное на основе толщины пограничного слоя Гартмана

$$R = \frac{U\delta_{Ha}}{\nu} = \frac{Re}{Ha}. \quad (1.5)$$

Обнаружено, что ламинарно-турбулентный переход происходит при  $350 < R < 400$ . Было изучено возникновение полос в течении Гартмана и их раздробление с образованием турбулентного движения, также этот процесс изучен в работе [227].

Исследование переходных режимов в прямоугольной трубе в перпендикулярном магнитном поле были проведены в работе [228]. В таком течении присутствуют два типа пограничных слоев: Гартмана, на стенках, перпендикулярных магнитному полю, и Шерклифа – на стенках, параллельных магнитному полю. Было обнаружено, что неустойчивость развивается в пограничном слое Шерклифа и больше всего усиливаются косые волны, которые могут развиваться в полосы. Двухступенчатый сценарий развития ламинарно-турбулентного перехода приводит к значениям критических параметров, хорошо согласующихся с экспериментом, что подтверждают исследования [217; 229; 230]. Обнаружено также, что переход к турбулентности и ламинаризация турбулентного движения наступают при одних и тех же значениях параметров. В работе [231] путем прямого численного моделирования было показано, что для течения Гартмана в прямоугольной трубе при больших числах Рейнольдса и Гартмана физически реализуемым состоянием является наличие турбулентных пограничных слоев Шерклифа и ламинарного течения в центре канала.

В обзоре [232] поведены итоги исследований ламинарно-турбулентного перехода в прямых трубах и каналах: при переходе не наблюдается четких критических чисел Рейнольдса, но присутствует диапазон чисел Рейнольдса, в котором течение может быть как ламинарным, так и турбулентным в зависимости от значения числа Рейнольдса и амплитуды приложенного возмущения; в течении могут реализовываться режимы, когда ламинарное и турбулентное движение присутствует одновременно в разных частях потока. Результаты исследований ламинарно-турбулентного перехода в магнитном поле позволяют выделить несколько особенностей. Во-первых, магнитное поле сильно влияет на профиль

скорости ламинарного течения. Этот профиль имеет малый градиент в центральной части канала, тогда как в пристенной зоне градиент скорости может быть очень велик, например, пограничный слой Гартмана в плоском канале имеет толщину  $\delta_{Ha} = L/Ha$ . Процесс ламинарно-турбулентного перехода, как показано в работах [226; 232], инициируется именно в этих областях. Второй особенностью является сильное влияние магнитного поля на развитие возмущений в жидкости. Происходит анизотропное подавление возмущений, которое приводит к установлению почти двумерной турбулентности в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

Докритический характер ламинарно-турбулентного перехода обуславливает одновременное существование в фазовом пространстве ламинарного и турбулентного движений. Примером такого движения могут быть порывы и пробки в трубе, рассмотренные в работе [233; 234]. Такие вычисления достаточно трудны для математического моделирования, так требуют длительного наблюдения за турбулентными областями. Практически это выражается в том, что необходимы большие размеры моделируемого канала по длине, необходимо учитывать большое число степеней свободы и проводить длительное интегрирование по времени. Возникновение пробок и порывов является случайным процессом, поэтому требуется также проводить большое число экспериментов и проводить усреднение результатов. Примером такого исследования для магнитогидродинамического течения является работа [235], в которой проведено численное моделирование экспериментов Гартмана в круглой трубе и трубе прямоугольного сечения. Достигнуто хорошее совпадение критических параметров и коэффициентов сопротивления с экспериментальными данными. Исследованы локальные турбулентные структуры в течении, наблюдение которых экспериментально вряд ли возможно.

С.В. Старченко в работе [236] исследовал влияние нелинейностей, которые стабилизируют МГД-динамо. Были рассмотрены уравнения магнитной гидродинамики, состоящие из упрощенного уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в приближении, близком к приближению Буссинеска, и уравнения для магнитной индукции. При помощи ряда обоснованных предположений, справедливых для солнечных пятен и групп солнечных пятен, эти уравнения удалось свести линейному уравнению для квадрата амплитуды магнитного поля. Также предложена линейная модель МГД-динамо, близкого к солнечному, которая описывается двумя однородными линейными дифференциальными уравнениями. В

результате исследований показано, что стабилизирующая нелинейность, обратно пропорциональная величине электрического тока, имеет большое влияние на вращающееся МГД-динамо.

## 1.8 Программное обеспечение для моделирования магнитогидродинамических течений

В настоящее время есть большая потребность в программном обеспечении для моделирования магнитогидродинамических течений, которое позволяет моделировать течения МГД-устройствах при экстремальных значениях параметров, характерных для термоядерных установок. Применимость существующих программных комплексов часто ограничена со стороны больших скоростей, больших напряженностей магнитного поля или геометрической сложности течения. В этом смысле опыт задач устойчивости и ламинарно-турбулентного перехода важен для течений в blankets, так как вычислительные методы гидродинамической теории устойчивости разрабатывались так, чтобы описывать течения с большими градиентами скорости.

В качестве параметра, определяющего сложность задачи моделирования МГД-течений, можно выбрать число Гартмана  $M = B_0 d \sqrt{\frac{\sigma}{\nu \rho}}$ , где  $B_0$  – величина магнитной индукции,  $d$  – ширина канала,  $\sigma$  – электропроводность жидкости,  $\nu$  – вязкость и  $\rho$  – плотность. Число Гартмана характеризует величину градиента скорости в пристеночной области и который очень велик в сильных магнитных полях, характерных для термоядерных устройств. В статье [237] приведены результаты одного из первых численных исследований МГД-течений, где удалось достигнуть чисел Гартмана в несколько десятков [238]. По мере роста вычислительных мощностей доступные числа Гартмана увеличились до нескольких сотен в конце девяностых [239] и нескольких тысяч в настоящее время [240]. Для течений в простой геометрии доступные числа Гартмана выше, порядка  $10^4$ .

Программное обеспечение для моделирования течений достаточно разнообразно. Во-первых, это коммерческие программные комплексы, которые имеют в своем составе модули для моделирования МГД-течений или эти модули могут быть легко добавлены пользователями. Их список таков: ANSYS-FLUENT и ANSYS-



CFX[241-244], COMSOL[245-247], SC/TETRA, FLUIDIN. Перечисленные выше статьи в значительной мере посвящены проверке работы программного обеспечения на тестовых задачах. Из этого следует важный вывод о том, что в научном сообществе нет единодушной уверенности в надежной работе этих программных комплексов для задач магнитной гидродинамики.

Некоторые программы, например OpenFOAM [248], NIMAG [249-251], MTC [252], FEMPAR [253; 254], Nek5000 распространяются с открытым исходным кодом. Свободное программное обеспечение дает большие возможности для научной деятельности, так как снимает ряд серьезных ограничений, характерных для проприетарных программ. Во-первых, становится возможным изучать и оптимизировать работу программы. Во-вторых, становится возможным добавлять в программу новую функциональность. В-третьих, такие программы независимы от различных ограничений на распространение. С другой стороны, программы с открытым исходным кодом часто выпускаются не очень удобными для использования, например, они могут не иметь графического интерфейса. Также такие программы становятся доступны на ранних стадиях разработки, когда они еще содержат ошибки и очень плохо верифицированы.

# Глава 2. Устойчивость параллельных течений

## 2.1 Постановка задачи устойчивости

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в трехмерной области  $\Omega$ . Такое течение описывается системой уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} + \mathbf{F}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость жидкости,  $p$  – давление жидкости,  $\mathbf{F}$  – сила, действующая на жидкость,  $Re = \frac{VL}{\nu}$  – число Рейнольдса,  $\nu$  – вязкость жидкости,  $V$  и  $L$  – характерные величины скорости и расстояния, определяемые задачей. При заданных внешних силах  $\mathbf{F}$  и условиях на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  существует стационарное решение уравнений Навье-Стокса  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ ,  $p_0(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}$  – точка области  $\Omega$ .

Представляя решение системы (2.1) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \\ p &= p_0(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ,  $p(\mathbf{x}, t)$  – возмущения стационарного потока, приходим к системе уравнений для возмущений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

Предполагая возмущение малым, в уравнениях (2.3) можно пренебречь членами второго порядка малости. Линеаризованная система уравнений Навье-Стокса имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{U} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

## 2.2 Уравнение Орра-Зоммерфельда

Рассмотрим течение вязкой жидкости между параллельными плоскостями, которое изображен на рисунке 2.1. Ось  $y$  направим перпендикулярно плоскостям, ось  $x$  – вдоль направления течения. В качестве масштаба длины примем полуширину зазора между плоскостями, в качестве масштаба скорости – среднерасходную скорость  $V_{\text{ср}}$ . При наличии постоянного градиента давления безразмерный профиль скорости имеет следующий вид:  $U(y) = \frac{3}{2}(1 - y^2)$ . Зададим число Рейнольдса в виде  $Re = \frac{V_{\text{ср}}d}{\nu}$ , где  $d$  – полуширина канала,  $\nu$  – кинематическая вязкость.

Уравнения (2.4) допускают элементарные волновые решения вида

$$\{\omega_x(y), \omega_y(y), q(y)\} \exp^{i\alpha(x-Ct)}, \quad (2.5)$$

где  $\omega_x(y)$ ,  $\omega_y(y)$ ,  $q(y)$  – комплексные амплитуды скорости и давления;  $\alpha$  – вещественное волновое число;  $C = X + iY$  – комплексная фазовая скорость. Величина  $X$  – фазовая скорость, а  $\alpha Y$  – декремент затухания возмущения ( $Y < 0$ ) или инкремент его нарастания ( $Y > 0$ ). Таким образом, физическая интерпретация задачи такова, что в начальный момент  $t = 0$  на основное течение наложено синусоидальное поле возмущений с длиной волны  $\alpha$ . Путем решения уравнений для возмущений можно определить фазовую скорость распространения этого возмущения и коэффициент затухания.

Подставляя (2.5) в (2.4), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-i\alpha C\omega_x + i\alpha U\omega_x + \omega_y U' = -i\alpha q + \frac{1}{Re} (\omega_x'' - \alpha^2 \omega_x), \quad (2.6)$$

$$-i\alpha C\omega_y + i\alpha U\omega_y = -q' + \frac{1}{Re} (\omega_y'' - \alpha^2 \omega_y), \quad (2.7)$$

$$i\alpha\omega_x + \omega_y' = 0. \quad (2.8)$$

Легко исключить давление, если продифференцировать (2.6) и вычесть полученное соотношение из (2.7). Используя еще и (2.8), находим

$$\omega^{(4)} - 2\alpha^2\omega'' + \alpha^4\omega = i\alpha Re [(U - C) (\omega'' - \alpha^2\omega) - U''\omega], \quad (2.9)$$

где вместо  $\omega_y$  записано просто  $\omega$ .

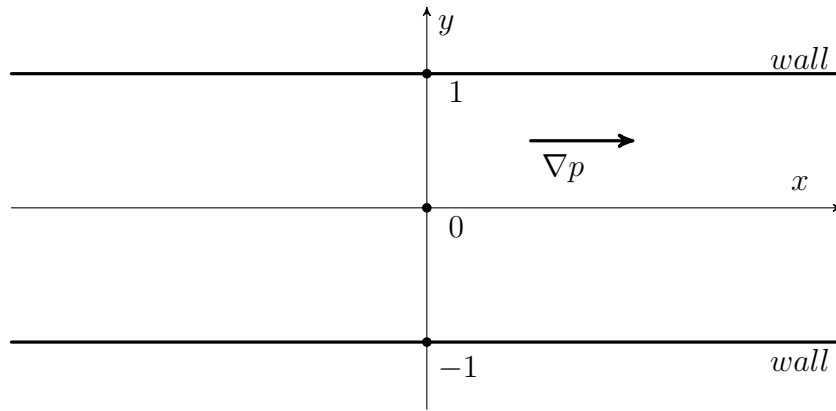


Рис. 2.1 — Плоский канал

Условия непроницаемости и прилипания на границе дают

$$\omega(\pm 1) = \omega'(\pm 1) = 0. \quad (2.10)$$

Решение краевой задачи (2.9)-(2.10), задачи Орра-Зоммерфельда, является классической проблемой теории гидродинамической устойчивости. Эта задача включает основные трудности, встречающиеся при исследовании устойчивости и ламинарно-турбулентного перехода, а теория, связанная с ней, в значительной мере составляет основу теории устойчивости и перехода к турбулентности. Задачу Орра-Зоммерфельда также часто используют в качестве бенчмарка при испытаниях программных кодов для задач устойчивости.

## 2.3 Метод коллокаций

Рассмотрим решение задачи Орра-Зоммерфельда методом коллокаций в соответствии с [64]. Представим (2.9) в виде

$$\begin{aligned} \omega^{(4)} = \omega'' (i\alpha ReU - i\alpha ReC + 2\alpha^2) - \\ - \omega (i\alpha ReU'' + i\alpha^3 ReU - i\alpha^3 ReC + \alpha^4). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подставим в это уравнение решение  $\omega$  в виде ряда по полиномам Чебышева

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{j=0}^n a_j T_j(y), & \omega' &= \sum_{j=0}^n a_j T_j'(y), \\ \omega'' &= \sum_{j=0}^n a_j T_j''(y), & \omega^{(4)} &= \sum_{j=0}^n a_j T_j^{(4)}(y).\end{aligned}\tag{2.12}$$

Получим

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^n a_j T_j^{(4)}(y) &= \sum_{j=0}^n a_j T_j''(y) (i\alpha ReU - i\alpha ReC + 2\alpha^2) - \\ &- \sum_{j=0}^n a_j T_j(y) (i\alpha ReU'' + i\alpha^3 ReU - i\alpha^3 ReC + \alpha^4).\end{aligned}\tag{2.13}$$

Вычисляем выражение (2.13) в точках коллокации Гаусса-Лобатто  $y_k = \cos(\frac{\pi k}{n})$ ,  $k = 2, 3, \dots, n-2$ . Получится  $n-3$  уравнения. Оставшиеся четыре уравнения сформулируем с помощью граничных условий (2.10)

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^n a_j T_j(1) &= 0, & \sum_{j=0}^n a_j T_j(-1) &= 0, \\ \sum_{j=0}^n a_j T_j'(1) &= 0, & \sum_{j=0}^n a_j T_j'(-1) &= 0.\end{aligned}\tag{2.14}$$

В итоге получается алгебраическая задача на собственные значения

$$\mathbf{Aa} = \mathbf{CBa}.\tag{2.15}$$

Здесь  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  – квадратные матрицы,  $\mathbf{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ . Данная задача на собственные значения решается стандартными численными методами, например, с помощью библиотеки *LAPACK*.

## 2.4 Метод коллокаций К.И. Бабенко

Известным специалистом по прикладной математике К.И. Бабенко в книге [255] предложен интересный вариант метода коллокаций. Пусть  $y_j =$

$\cos \frac{\pi(2j-1)}{2n}$  нули многочлена  $T_n(y)$ ,  $\omega_j = \omega(y_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . К.И. Бабенко ввел фундаментальные многочлены интерполяции

$$t_j(y) = \frac{T_n(y)}{(y-y_j)T_n'(y_j)}, v_j(y) = \frac{(1-y^2)t_j(y)}{1-y_j^2}, \theta_j(y) = \frac{(1-y^2)v_j(y)}{1-y_j^2}. \quad (2.16)$$

Обозначим через  $\xi$  вектор  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ . Положим

$$t(y, \xi) = \sum_{j=1}^n \xi_j t_j(y), v(y, \xi) = \sum_{j=1}^n \xi_j v_j(y), \theta(y, \xi) = \sum_{j=1}^n \xi_j \theta_j(y).$$

Интерполяционный многочлен  $\theta(x, \xi)$  удовлетворяет граничным условиям (2.10). Для дальнейших преобразований краевую задачу (2.9)–(2.10) удобно привести к виду

$$\frac{d^4 \omega}{dy^4} = p(y, C) \frac{d^2 \omega}{dy^2} - q(y, C) \omega, \quad (2.17)$$

где  $p(y, C) = i\alpha \operatorname{Re} U - i\alpha \operatorname{Re} C + 2\alpha^2$ ;  $q(y, C) = i\alpha \operatorname{Re} U'' + i\alpha^3 \operatorname{Re} U - i\alpha^3 \operatorname{Re} C + \alpha^4$ .

Подставим в выражение (2.17) интерполяционные многочлены  $\theta(y; \xi)$ ,  $v(y; \xi)$  и  $t(y; \xi)$ . Более подробно это описано в работе [255]. Выражение (2.17) заменяется на уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \theta(y; \omega)}{dy^4} &= \\ &= (2\alpha^2 - i\alpha \operatorname{Re} C) \frac{d^2 v(y; \omega)}{dy^2} + i\alpha \operatorname{Re} U \frac{d^2 t(y; \omega)}{dy^2} - q(y, C) t(y; \omega). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Подставим в (2.18) выражения для  $\theta(y; \omega)$ ,  $v(y; \omega)$ ,  $t(y; \omega)$  при  $y = y_j$ . Получим задачу на собственные значения

$$(A - CB)\omega = 0, \quad (2.19)$$

которая решается с помощью стандартных численных процедур, например, из библиотеки *LAPACK*.

Вычисление фундаментальных многочленов интерполяции (2.16) и особенно производных от них – трудная задача. В работе [256] предложен аналитический метод, который является чрезвычайно трудоемким. Мною использовался численный метод нахождения фундаментальных многочленов интерполяции. Член  $t_j(y)$ , входящий в формулы (2.16), был преобразован к виду

$$t_j(y) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{y - y_i}{y_j - y_i}. \quad (2.20)$$

Выражение (2.20) является быстроосциллирующим полиномом, оно вычислялось численно и для корректного результата приходилось использовать не менее 120 значащих цифр. Для вычислений с высокой точностью использовалась библиотека [257].

Зависимости  $X$ ,  $Y$  от  $\alpha$  первых восьми мод при  $Re = 10^4$  приведены на рисунке 2.2. Эти графики совпадают с приведенными в работе [63]. Метод коллокаций использовался для независимой проверки результатов, полученных методом дифференциальной прогонки.

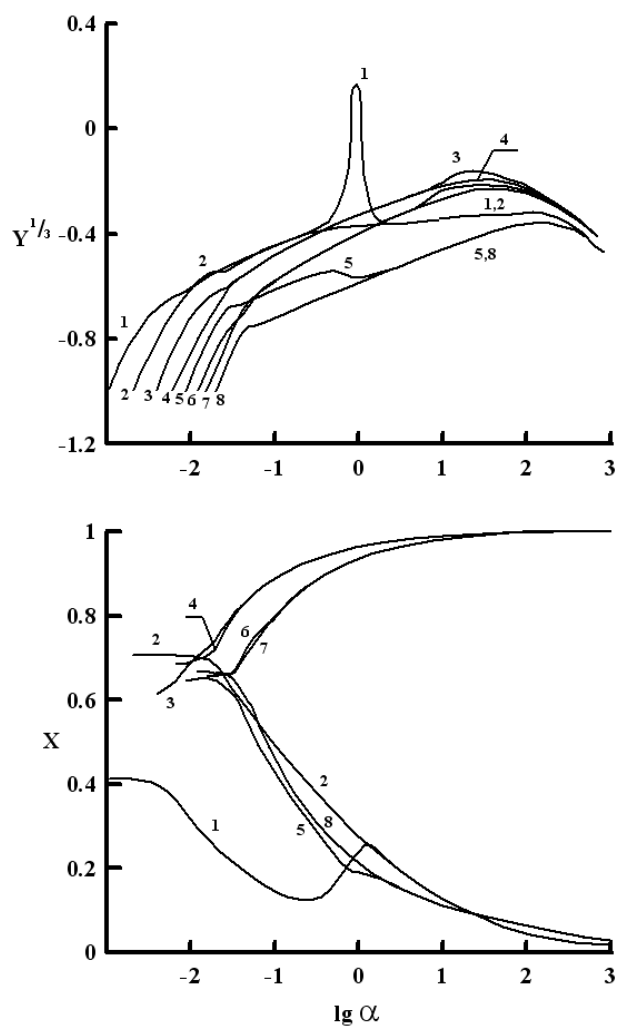


Рис. 2.2 — Зависимости  $X(\alpha)$  и  $Y(\alpha)$  первых восьми спектральных мод при  $Re = 10^4$

## 2.5 Метод дифференциальной прогонки

Рассмотрим метод дифференциальной прогонки в самом общем виде в случае краевой задачи на собственные значения для системы  $n$  линейных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}(y, C)\varphi_j, \quad (2.21)$$

$$L_1\Phi(1) = L_2\Phi(0) = 0, \quad (2.22)$$

$$i=1, \dots, n,$$

где  $L_1, L_2$  – постоянные матрицы;  $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ;  $b_{ij}$  – коэффициенты. В таком виде можно представить, в частности, задачу Орра-Зоммерфельда. В данной постановке подразумевается, что  $y \in [0, 1]$ , но может быть взят любой другой отрезок.

При использовании метода дифференциальной прогонки вводятся уравнения для подпространства решений

$$W = A(y)V, \quad (2.23)$$

где  $W = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ ;  $V = \{\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n\}$ ;  $A$  – матрица размера  $k \times (n - k)$ . В работе [258] показано, что для  $y \in [0, 1]$  данная линейная связь имеет место. Представим (2.21) в виде

$$W' = M_1W + M_2V, \quad (2.24)$$

$$V' = M_3W + M_4V. \quad (2.25)$$

Матрицы  $M_1, M_2, M_3, M_4$  составлены из коэффициентов  $b_{ij}$  уравнения (2.21). Продифференцируем (2.23) и подставим в полученное соотношение (2.24), (2.25). Находим

$$A' = M_1A + M_2 - A(M_3A + M_4). \quad (2.26)$$

Граничные условия (2.22) можно разрешить относительно  $W$  в точках  $y = 0$ ,  $y = 1$  и представить их в виде

$$W = A_0V, \quad (2.27)$$

$$W = A_1V. \quad (2.28)$$



Проинтегрируем систему дифференциальных уравнений (2.26) с начальными условиями (2.27) от 0 до 1. В точке  $y = 1$  получим

$$A(1, C)V - A_1V = 0, \quad (2.29)$$

где  $A_1$  – берется из (2.28);  $A(1, C)$  – решение уравнения (2.26) в точке  $y = 1$ , полученное интегрированием от точки  $y = 0$  с начальными условиями (2.27) и заданным значением  $C$ . Так как  $V$  не равно тождественно нулю, можно записать условие нетривиальной разрешимости уравнения (2.29):

$$\det(A(1, C) - A_1) = 0. \quad (2.30)$$

Соотношение (2.30) представляет собой уравнение для определения величин  $C$ . Это уравнение решалось методом секущих (можно использовать и другие методы). После нахождения  $C$  из уравнения (2.29) находим  $V(1)$ , а из (2.25) с учетом (2.23) находим  $\Phi(y)$  на всем интервале  $[0, 1]$ .

Выбор схемы прогонки (то есть конкретного вида  $A, W, V$ ) неоднозначен. Схема прогонки (2.23) может выбираться разной на разных участках отрезка интегрирования в целях получения более «благоприятных» свойств матрицы  $A(y)$ . В точках смены прогоночных соотношений требуется непрерывность  $\Phi(y)$ . Вопросы выбора схемы прогонки рассмотрены в работе [63].

Рассмотрим решение задачи Орра-Зоммерфельда (2.9)–(2.10) методом дифференциальной прогонки. В работе [63] отмечено, что в течении Пуазейля наиболее опасны симметричные возмущения, поэтому ограничимся рассмотрением только симметричных возмущений, удовлетворяющих условию

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} = 0 \text{ при } y = 0. \quad (2.31)$$

Рассмотрим схему прогонки, заданную соотношениями

$$\begin{pmatrix} \omega' \\ \omega''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \omega'' \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Дифференцируем и, используя (2.9), получим уравнения для прогоночных коэффициентов

$$\begin{aligned} A'_{11} &= -A_{11}^2 - A_{12}A_{21}, \\ A'_{12} &= 1 - A_{11}A_{12} - A_{12}A_{22}, \\ A'_{21} &= b - A_{21}A_{11} - A_{22}A_{21}, \\ A'_{22} &= a - A_{21}A_{12} - A_{22}^2, \end{aligned} \quad (2.33)$$

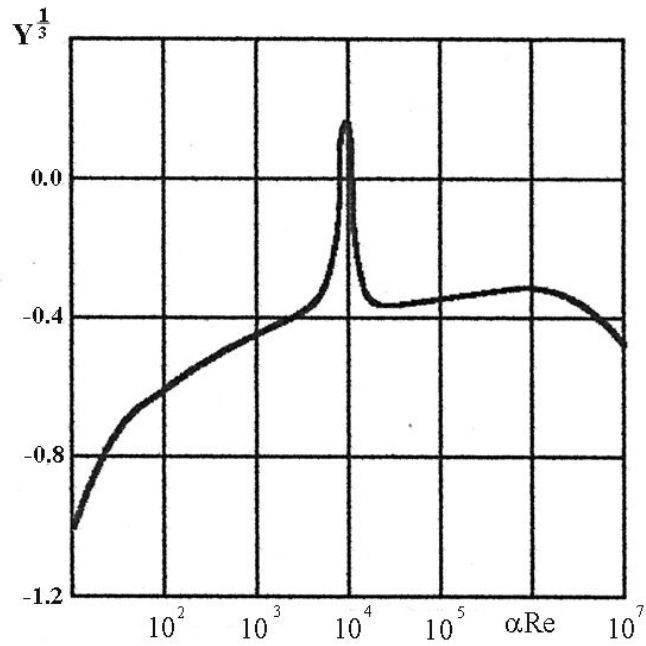


Рис. 2.3 — Зависимости  $Y(\alpha)$  при  $Re = 10000$  для задачи Орра-Зоммерфельда

где  $a = 2\alpha^2 + i\alpha Re(U - C)$ ;  $b = -\alpha^4 - i\alpha Re\alpha^2(U - C) + U''$ .

Используя (2.31) и (2.32), легко получить начальные условия

$$A_{11} = A_{12} = A_{21} = A_{22} = 0 \text{ при } y = 0. \quad (2.34)$$

Из (2.32) и (2.10) следует дисперсионное соотношение для определения собственных значений  $C$

$$A_{12}(C) = 0 \text{ при } y = 1. \quad (2.35)$$

На рисунке 2.3 приведен график зависимости мнимой части  $Y$  фазовой скорости  $C$  от волновых чисел  $\alpha$ . Знак  $Y$  определяет эволюцию возмущений в рамках линейной теории устойчивости, если  $Y < 0$  – возмущения затухают, в противном случае – возмущения нарастают,  $Y = 0$  соответствует нейтральным возмущениям.

## 2.6 Устойчивость плоского течения Пуазейля в продольном магнитном поле

Рассмотрим течение вязкой электропроводящей жидкости с плоском канале, схема которого приведена на рисунке 2.4. Ось  $x$  декартовой системы координат направлена вдоль направления течения, а ось  $y$  – перпендикулярно параллельным плоскостям, ограничивающим жидкость. Ось  $z$  направлена перпендикулярно к  $x$  и  $y$ . Границы канала расположены при  $y = \pm 1$ .

Система уравнений магнитной гидродинамики в безразмерной форме имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{V} + \frac{1}{R_m} \Delta \mathbf{H}, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \left( p + Al \frac{H^2}{2} \right) + Al (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V}, \quad (2.37)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (2.38)$$

где  $Al = \frac{H_0^2}{4\pi\rho V_0^2}$  – число Альфвена,  $Re = \frac{V_0 d}{\nu}$  – число Рейнольдса,  $R_m = V_0 d \frac{4\pi\sigma}{c^2}$  – магнитное число Рейнольдса. В качестве характеристических параметров выбраны: полуширина канала  $d$ , среднерасходная скорость  $V_0$ , величина напряженности внешнего магнитного поля  $H_0$ . Удобно ввести обобщенное давление  $P_g = p + Al \frac{H^2}{2}$ . Таким образом, структура уравнений магнитной гидродинамики такова, что три параметра (например,  $Al$ ,  $Re$ ,  $R_m$ ) полностью определяют поведение системы при заданных геометрии канала и внешнего магнитного поля. При расчетах

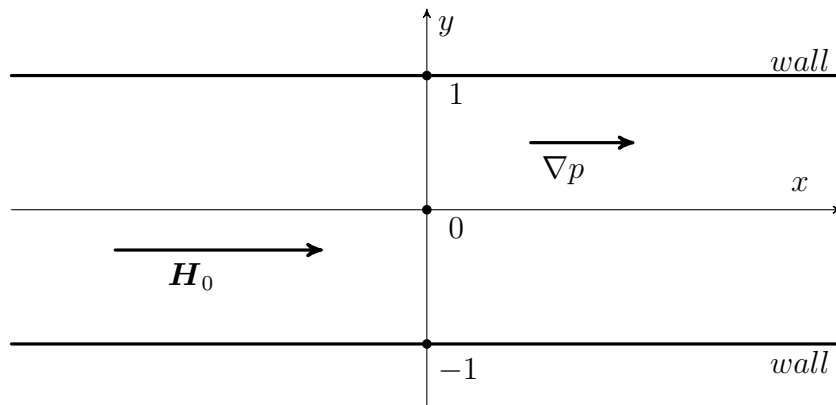


Рис. 2.4 — Плоский канал

вместо магнитного числа Рейнольдса использовалось магнитное число Прандтля  $P_m = \frac{R_m}{Re} = \frac{4\pi\sigma\nu}{c^2}$ , прямо пропорциональное электропроводности и не зависящее от скорости и магнитного поля.

Решение системы уравнений (2.36)-(2.38) представим в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{v}, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad (2.40)$$

$$P_g = P_0 + P, \quad (2.41)$$

где  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{H}_0$ ,  $P_0$  – стационарное решение ( $\mathbf{U} = \{U, 0, 0\}$ ,  $U = \frac{3}{2}(1 - y^2)$ ,  $\mathbf{H} = \{1, 0, 0\}$ ),  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $P$  – возмущения скорости, магнитного поля и давления. Подставим (2.39)-(2.41) в уравнения (2.36)-(2.38). Считая возмущения малыми, получим линеаризованную систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla) \mathbf{h} = (\mathbf{H}_0\nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{R_m} \Delta \mathbf{h}, \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \text{Al} (\mathbf{H}_0\nabla) \mathbf{h} + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}, \quad (2.43)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = 0, \quad \text{div} \mathbf{h} = 0. \quad (2.44)$$

Стенки канала предполагаются непроницаемыми и идеально электропроводящими. Граничные условия для возмущений имеют вид

$$\mathbf{v} = 0, \quad h_y = 0 \quad \text{при } y = \pm 1. \quad (2.45)$$

Решения линеаризованной системы уравнений магнитной гидродинамики (2.42)-(2.44) ищутся в виде

$$\{v_x(y), v_y(y), v_z(y), h_x(y), h_y(y), h_z(y), q(y)\} \exp(i\alpha(x - Ct) + i\beta z), \quad (2.46)$$

где  $v_x, v_y, v_z, h_x, h_y, h_z$ , – проекции амплитуд возмущений скорости и напряженности магнитного поля на соответствующие оси декартовой системы координат,  $q$  – возмущение давления,  $\alpha$  – продольное волновое число,  $\beta$  – поперечное волновое число,  $C = X + iY$  – комплексная фазовая скорость, в которой  $\alpha X$  – собственно фазовая скорость, а  $\alpha Y$  – декремент затухания возмущения ( $Y < 0$ ) или инкремент его нарастания ( $Y > 0$ ). Подставим (2.46) в (2.42)-(2.44). Получим систему дифференциальных уравнений

$$i\alpha (U - C) h_x = i\alpha v_x + h_y U' + \frac{1}{R_m} (h_x'' - h_x(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (2.47)$$

$$i\alpha (U - C) h_y = i\alpha v_y + \frac{1}{R_m} (h_y'' - h_y(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (2.48)$$

$$i\alpha (U - C) h_z = i\alpha v_z + \frac{1}{R_m} (h_z'' - h_z(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (2.49)$$

$$i\alpha (U - C) v_x + v_y U' = -i\alpha q + i\alpha \text{Al} h_x + \frac{1}{\text{Re}} (v_x'' - v_x(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (2.50)$$

$$i\alpha (U - C) v_y = -q' + i\alpha \text{Al} h_y + \frac{1}{\text{Re}} (v_y'' - v_y(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (2.51)$$

$$i\alpha (U - C) v_z = -i\beta q + i\alpha \text{Al} h_z + \frac{1}{\text{Re}} (v_z'' - v_z(\alpha^2 + \beta^2)), \quad (2.52)$$

$$v_y' + i\alpha v_x + i\beta v_z = 0, \quad h_y' + i\alpha h_x + i\beta h_z = 0. \quad (2.53)$$

Введем новые функции  $v = \alpha v_x + \beta v_z$ ,  $h = \alpha h_x + \beta h_z$ . Уравнение (2.47) умножим на  $\alpha$ , уравнение (2.49) умножим на  $\beta$  и сложим эти уравнения. С уравнениями (2.50), (2.52) поступим аналогично. Получим

$$i\alpha (U - C) h = i\alpha v + \alpha h_y U' + \frac{1}{R_m} (h'' - k^2 h), \quad (2.54)$$

$$i\alpha (U - C) h_y = i\alpha v_y + \frac{1}{R_m} (h_y'' - k^2 h_y), \quad (2.55)$$

$$i\alpha (U - C) v + \alpha v_y U' = -ik^2 q + i\alpha \text{Al} h + \frac{1}{\text{Re}} (v'' - k^2 v), \quad (2.56)$$

$$i\alpha (U - C) v_y = -q' + i\alpha \text{Al} h_y + \frac{1}{\text{Re}} (v_y'' - k^2 v_y), \quad (2.57)$$

$$v_y' + iv = 0, \quad h_y' + ih = 0. \quad (2.58)$$

Здесь  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$  – квадрат волнового вектора. С помощью второго соотношения (2.58) в уравнении (2.56) выразим  $h$  через  $h_y$ . Система дифференциальных уравнений (2.54)-(2.58) примет вид

$$i\alpha (U - C) h = i\alpha v + \alpha h_y U' + \frac{1}{R_m} (h'' - k^2 h), \quad (2.59)$$

$$i\alpha (U - C) h_y = i\alpha v_y + \frac{1}{R_m} (h_y'' - k^2 h_y), \quad (2.60)$$

$$i\alpha (U - C) v + \alpha v_y U' = -ik^2 q - \alpha \text{Al} h_y' + \frac{1}{\text{Re}} (v'' - k^2 v), \quad (2.61)$$

$$i\alpha (U - C) v_y = -q' + i\alpha \text{Al} h_y + \frac{1}{\text{Re}} (v_y'' - k^2 v_y), \quad (2.62)$$

$$v_y' + iv = 0, \quad h_y' + ih = 0. \quad (2.63)$$

Легко заметить, что теперь величина  $h$  входит только в уравнение (2.59), которое отщепляется от системы (2.59)-(2.63).

Обозначим

$$D = i\alpha\text{Re}(U - C), \quad \Omega = i\alpha\text{P}_m\text{Re}(U - C). \quad (2.64)$$

Используя формулы (2.64), перепишем далее систему дифференциальных уравнений (2.60)-(2.63) в виде

$$v'_y = -iv, \quad h'_y = \Phi, \quad v' = Z, \quad (2.65)$$

$$\Phi' = k^2 h_y - i\alpha\text{ReP}_m v_y + \Omega h_y, \quad (2.66)$$

$$Z' = k^2 v + \alpha\text{ReAl}\Phi + ik^2\text{Re}q + \alpha U'\text{Re}v_y + Dv, \quad (2.67)$$

$$q' = -\frac{D}{\text{Re}}v_y + i\alpha\text{Al}h_y - \frac{i}{\text{Re}}Z - \frac{k^2}{\text{Re}}v_y. \quad (2.68)$$

Данную систему удобно представить в матричной форме

$$\mathbf{W}' = M_1 \mathbf{W} + M_2 \mathbf{V}, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{V}' = M_3 \mathbf{W} + M_4 \mathbf{V}, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{W} = \{v, v_y, h_y\}, \quad \mathbf{V} = \{\Phi, Z, q\},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i\alpha\text{ReP}_m & k^2 + \Omega \\ k^2 + D & \alpha U'\text{Re} & 0 \\ 0 & -\frac{k^2 + D}{\text{Re}} & i\alpha\text{Al} \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha\text{ReAl} & 0 & ik^2\text{Re} \\ 0 & -\frac{i}{\text{Re}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для рассматриваемой задачи использовался метод дифференциальной прогонки. Я ввел схему прогонки, обусловленную граничными условиями  $\mathbf{W} = 0$  (см. выражение (2.45))

$$\mathbf{W} = A(y)\mathbf{V}, \quad (2.71)$$

где, в данном случае,  $A$  – матрица размера  $3 \times 3$ . Из  $\mathbf{W} = 0$  на границе канала следует, что  $A = 0$  на границе канала.

Численные эксперименты позволили установить, что схема (2.71), определенная непосредственно граничными условиями, неоптимальна при интегрировании в средней части канала. Наиболее экономичным с учетом затрат машинного времени и простоты алгоритма оказался следующий вариант прогонки: на небольших расстояниях от границ канала прогонка велась по схеме (2.71), определенной граничными условиями, а в средней части канала использовалась «обращенная» схема прогонки

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}. \quad (2.72)$$

Используемая схема прогонки проиллюстрирована рисунком 2.5. Системы дифференциальных уравнений для матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^{-1}$  можно получить, продифференцировав (2.71), (2.72) и подставив в них выражения (2.69), (2.70). Находим

$$\mathbf{A}' = M_1\mathbf{A} + M_2 - \mathbf{A}(M_3\mathbf{A} + M_4), \quad (2.73)$$

$$\mathbf{A}'^{-1} = M_4\mathbf{A}^{-1} + M_3 - \mathbf{A}^{-1}(M_2\mathbf{A}^{-1} + M_1). \quad (2.74)$$

Интегрирование уравнений (2.73), (2.74) велось численно от границ канала к некоторой средней точке, в которой, так же как и в точках инверсии схемы прогонки, векторы  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{W}$  должны быть непрерывны, что позволяет записать систему алгебраических уравнений для величин  $\mathbf{W}$

$$(\mathbf{A}_p^{-1} - \mathbf{A}_n^{-1})\mathbf{W} = 0, \quad (2.75)$$

где индексами « $p$ » и « $n$ » обозначены прогоночные коэффициенты  $\mathbf{A}^{-1}$ , полученные интегрированием от разных границ канала. Так как  $\mathbf{W} \neq 0$ , можно записать дисперсионное уравнение

$$\det(\mathbf{A}_p^{-1} - \mathbf{A}_n^{-1}) = 0. \quad (2.76)$$

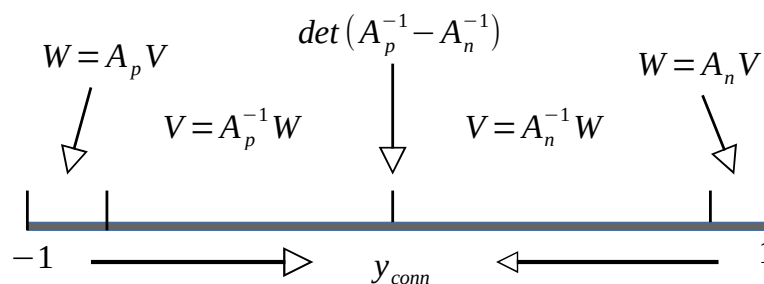


Рис. 2.5 — Схема прогонки в плоском канале

При решении задач данного класса важное значение имеет тщательное тестирование, сопоставление решений, полученных принципиально различными методами и выбор оптимальных схем численного анализа. Поэтому задача была решена независимым методом – методом коллокаций. Чтобы применить метод коллокаций, произведем некоторые преобразования с системой (2.60)-(2.63). Исключив  $q$ , получим задачу на собственные значения

$$h_y'' - k^2 h_y = i\alpha R_m (U - C) h_y - i\alpha R_m v. \quad (2.77)$$

$$v_y^{(4)} - 2k^2 v_y'' + k^4 v_y = i\alpha Re [(U - C)(v_y'' - k^2 v_y) - U'' v_y] - i\alpha Al Re (h_y'' - k^2 h_y). \quad (2.78)$$

Граничные условия имеют вид

$$v_y = 0, \quad v_y' = 0, \quad h_y = 0. \quad (2.79)$$

Решение системы (2.77)-(2.78) представим в виде

$$v_y = \sum_{i=0}^n a_i T_i(y), \quad h_y = \sum_{i=0}^n b_i T_i(y), \quad (2.80)$$

где  $T_i(y)$  – полиномы Чебышева первого рода. Пусть задано множество точек  $y_i = \cos(\pi i/n)$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Подставив (2.80) в (2.77)-(2.78), получим задачу на собственные значения

$$A\omega = \lambda B\omega, \quad (2.81)$$

где  $\omega = \{a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n\}$ . Первое из граничных условий (2.79) представим в виде

$$\xi \sum_{i=0}^n a_i T_i(1) = C \sum_{i=0}^n a_i T_i(1), \quad (2.82)$$

где  $\xi$  произвольное комплексное число. Выражение (2.82) подставим вместо первой строки в (2.81). Легко показать, что  $\xi$  окажется среди собственных значений (2.81) и его следует выбирать в стороне от спектра исходной задачи. С остальными граничными условиями поступим аналогично.

Система (2.60)-(2.63) допускает преобразования Сквайра [63]

$$k Re_{eff} = \alpha Re, \quad \alpha q_{eff} = kq, \quad (2.83)$$

где  $Re_{eff}$  – эффективное число Рейнольдса, соответствующее решению двумерной задачи. Из (2.83) вытекает соотношение

$$Re_* = \frac{(Re_{eff})_*}{\cos \theta}, \quad (2.84)$$



где  $\cos \theta = \frac{\alpha}{k}$ , звездочкой обозначены критические числа Рейнольдса.

На рис. 2.6-2.9 представлены кривые критических зависимостей  $Re_*(P_m)$  при числах Альфвена 0.001, 0.002, 0.003, 0.005 0.02. При  $P_m \rightarrow 0$  критические числа Рейнольдса стремятся к соответствующему значению критического числа Рейнольдса для диэлектрической жидкости. В случае малых магнитных числе Прандтля результаты соответствуют работам [121; 128; 140]. При  $P_m > 10$  критические числа имеют горизонтальные асимптоты, соответствующие случаю  $P_m \rightarrow \infty$ . На рис. 2.6 в точках  $P_m \approx 0.1$  и  $P_m \approx 1.0$  данные зависимости имеют максимумы, высота которых сильно зависит от числа Альфвена. После некоторого предела увеличение числа Альфвена приводит к образованию в этих местах просветы устойчивости.

Наблюдаемые на рис. 2.7-2.9 области неустойчивости имеют сложную форму. При достаточно больших числах Альфвена области неустойчивости могут быть расположены как выше кривой критических зависимостей, так и ниже. Далее на рисунках области неустойчивости двумерных возмущений обозначены штриховкой. Увеличение магнитного числа Прандтля от  $10^{-4}$  до  $10^{-2}$  (рис. 2.7) приводит к небольшому увеличению критических чисел Рейнольдса. Далее, кривая критических зависимостей при некотором магнитном числе Прандтля разворачивается в сторону уменьшения магнитных чисел Прандтля, ограничивая рассматриваемую область неустойчивости сверху. С увеличением числа Альфена данная область неустойчивости сжимается, причем изменение числа Альфвена более сильно влияет на ее верхнюю границу (рис. 2.9). Такая форма кривых критических зависимостей обуславливает скачкообразное увеличение критических чисел Рейнольдса при увеличении величины  $P_m$ . Справа и выше рассмотренной области неустойчивости располагается область устойчивости, которая ограничена другой ветвью критических зависимостей. Критические числа Рейнольдса данной ветви убывают с увеличением магнитного числа Прандтля. На рис. 2.7 при  $P_m \approx 1$  критические зависимости также имеют максимум, который при дальнейшем увеличении числа Альфвена исчезает. При этом на его месте возникает «окно» устойчивости данного течения (рис. 2.9).

Для проверки роли двумерных возмущений был проведен дополнительный анализ трехмерных возмущений, который позволяет судить об их влиянии на картину устойчивости. При этом обнаружены области, в которых трехмерные возмущения являются более опасными. На рисунке 2.8 в качестве примера приведены

зависимости  $Re_*(P_m)$  при  $Al = 0.005$  для  $\cos \theta = 1$  (сплошная линия),  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  (пунктирная линия),  $\cos \theta = \frac{1}{4}$  (штрих-пунктирная линия). Аналогичные графики критических зависимостей для других значений  $\cos \theta \neq 1$  могут быть построены с помощью преобразования Сквайра (2.84). К левой ветви критических зависимостей  $\cos \theta = 1$  (двумерные возмущения) можно провести вертикальную касательную в точке  $A$  (соответствующее магнитное число Прандтля обозначим  $P_{m*}$ ), которая пересекает правую ветвь критических зависимостей  $\cos \theta = 1$  в точке  $B$ . Слева от отрезка  $AB$  расположена область неустойчивости трехмерных возмущений ( $\cos \theta < 1$ ). Такое расположение областей неустойчивости обуславливает скачкообразное увеличение критических чисел Рейнольдса после достижения критического числа Прандтля  $P_{m*}$ .

Таким образом, учет трехмерных возмущений расширяет область неустойчивости, но двумерные возмущения являются наиболее опасными в том смысле, что критические числа Рейнольдса по отношению к ним являются наименьшими по сравнению с критическими числами Рейнольдса для трехмерных возмущений. При этом области неустойчивости для трехмерных возмущений могут быть получены путем простых смещений графиков критических зависимостей для двумерных возмущений в соответствии с формулой (2.84).

На рис. 2.10 представлены критические зависимости  $Re_*(Al)$  при  $P_m = 0.025$ . При  $Al \rightarrow 0$  критические числа Рейнольдса стремятся к величинам, соответствующим случаю плоского течения Пуазейля диэлектрической жидкости. При увеличении числа Альфвена критические числа Рейнольдса монотонно увеличиваются вплоть до  $Al_{*1} \approx 0.006$ , после чего кривая критических зависимостей при  $Al_{*1}$  разворачивается в сторону уменьшения чисел Альфвена, ограничивая область неустойчивости сверху. Область неустойчивости трехмерных возмущений расположена слева от отрезка  $AB$ . Выше при числах Рейнольдса порядка  $10^6$  обнаружена новая ветвь неустойчивости. Ее кривая критических зависимостей справа загибается вверх и при  $Al_{*2} \approx 0.04$  разворачивается влево аналогично нижней ветви критических зависимостей. Область неустойчивости трехмерных возмущений расположена слева от луча  $EF$ . Таким образом, при увеличении числа Альфвена обнаружены два критических числа Альфвена ( $Al_{*1}$  и  $Al_{*2}$ ), при которых происходит скачкообразное увеличение критических чисел Рейнольдса.

На рисунке 2.11(a) приведено расположение точек, в которых построены зависимости коэффициента затухания возмущения  $Y$  в зависимости от волново-

го числа  $\alpha$ , приведенные на рисунке 2.11 (b). Первая точка соответствует гидродинамической моде, а вторая – магнитогидродинамической. Обе неустойчивости проявляются при примерно одинаковых продольных волновых числах. Графики собственных функций приведены на рисунках 2.11 и 2.12. На рисунке 2.11 изображены действительная и мнимая части компоненты скорости  $v_y$  для гидродинамической (a) и магнитогидродинамической (b) мод. На рисунке 2.12 те же моды изображены в виде функций тока. Гидродинамическая мода представляет собой последовательность противовращающихся вихрей, тогда как магнитогидродинамическая имеет достаточно узкие пристенные слои, в которых существуют отдельные вихри. Эти вихри вдоль канала имеют размеры, сопоставимые с вихрями основной цепочки, а в высоту намного меньше.

Увеличение числа Альфвена при определенных значениях параметров может приводить к скачкообразному увеличению критических чисел Рейнольдса. Подтверждено существенное влияние диссипации на устойчивость данного течения. При изменении магнитного числа Прандтля наблюдается существенное изменение критических чисел Рейнольдса, причем может наблюдаться скачкообразная стабилизация. Для данного течения справедливо преобразование Сквайра. Однако существуют области, в которых двумерные возмущения затухают, а трехмерные неустойчивы.

Таким образом, картина устойчивости течения электропроводящей жидкости в плоском канале при наличии продольного магнитного поля достаточно сложна и своеобразна. Выполненный подробный анализ зависимостей критических чисел Рейнольдса от магнитного числа Прандтля позволил обнаружить новую ветвь неустойчивости при больших числах Рейнольдса. Современные возможности вычислительной техники и эффективные численные методы позволили произвести подробные исследования данной ветви неустойчивости при числах Рейнольдса порядка  $10^6 \div 10^8$ .

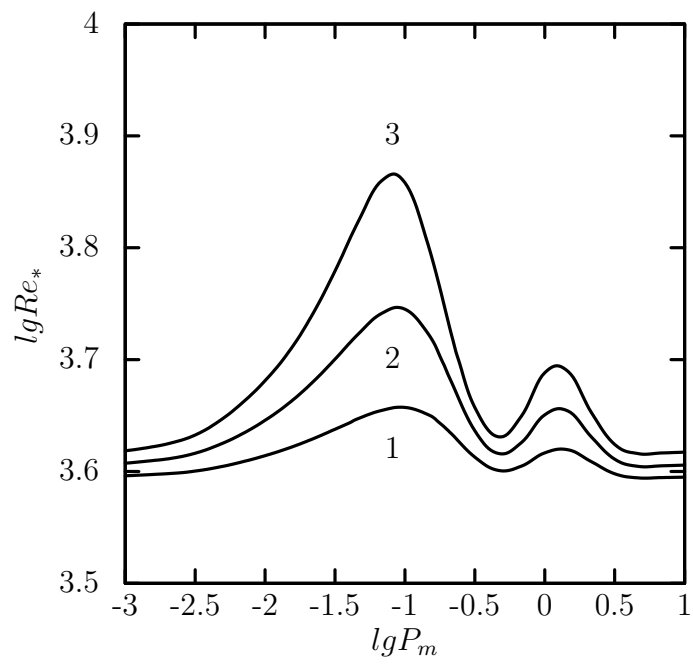


Рис. 2.6 — Зависимости  $Re_*(P_m)$  при  $Al = 0.001(1), 0.002(2), 0.003(3)$

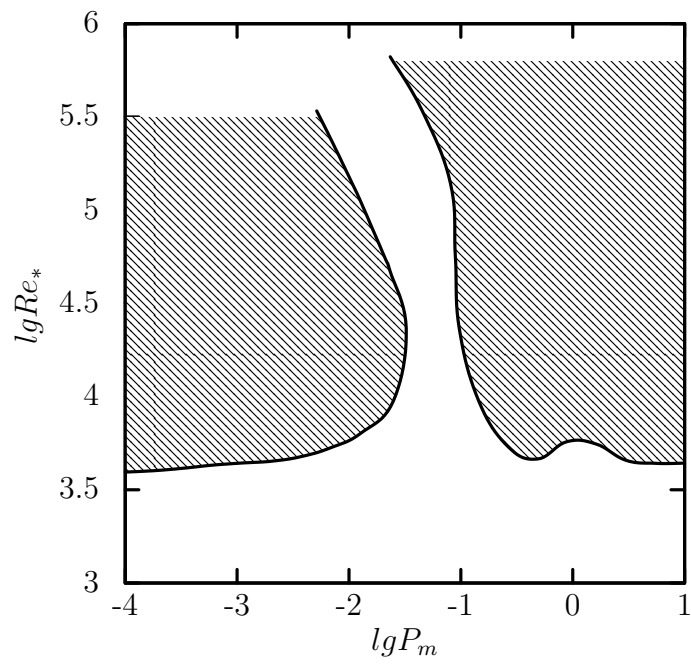


Рис. 2.7 — Зависимости  $Re_*(P_m)$  при  $Al = 0.005$

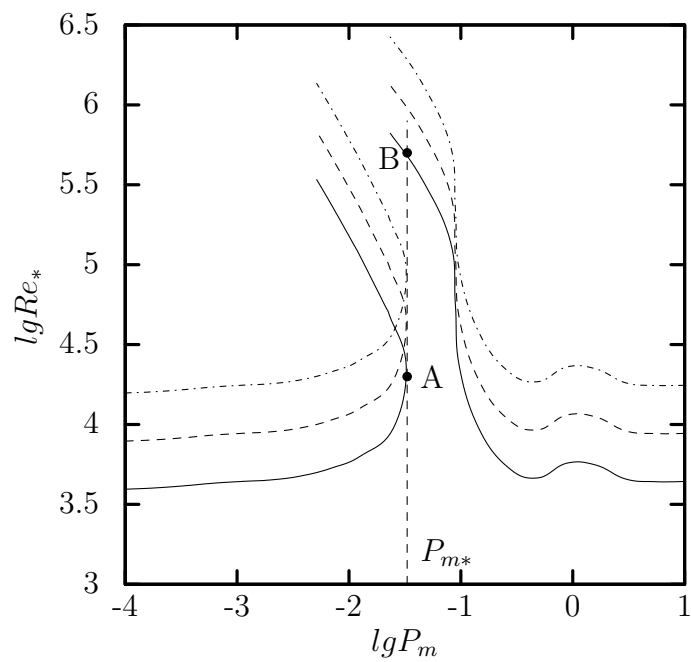


Рис. 2.8 — Зависимости  $Re_*(P_m)$  при  $Al = 0.005$ ,  $\cos \theta = 1$  (сплошная линия),  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  (пунктирная линия),  $\cos \theta = \frac{1}{4}$  (штрих-пунктирная линия)

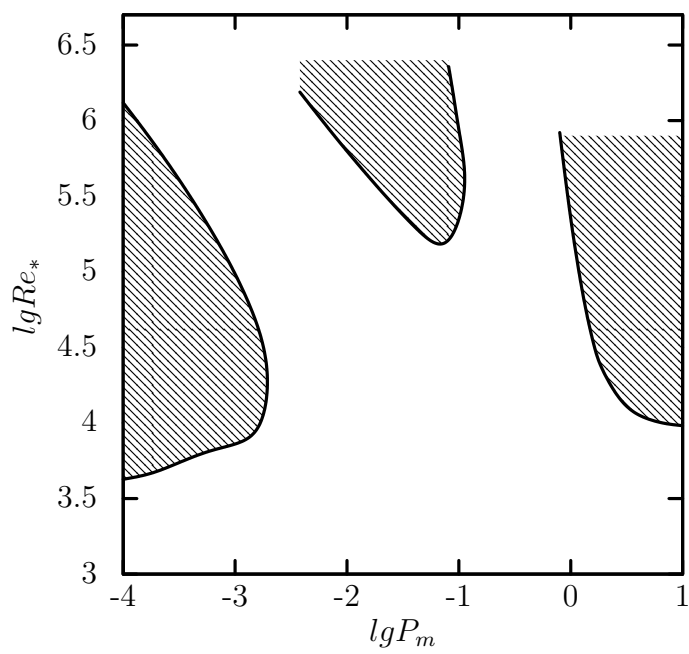


Рис. 2.9 — Зависимости  $Re_*(P_m)$  при  $Al = 0.02$

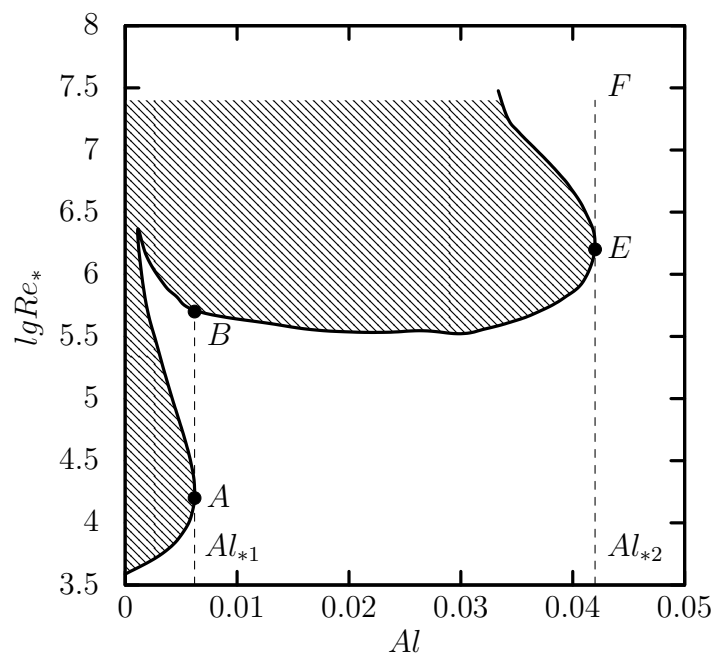


Рис. 2.10 — Зависимости  $Re_*(Al)$  при  $P_m = 0.025$



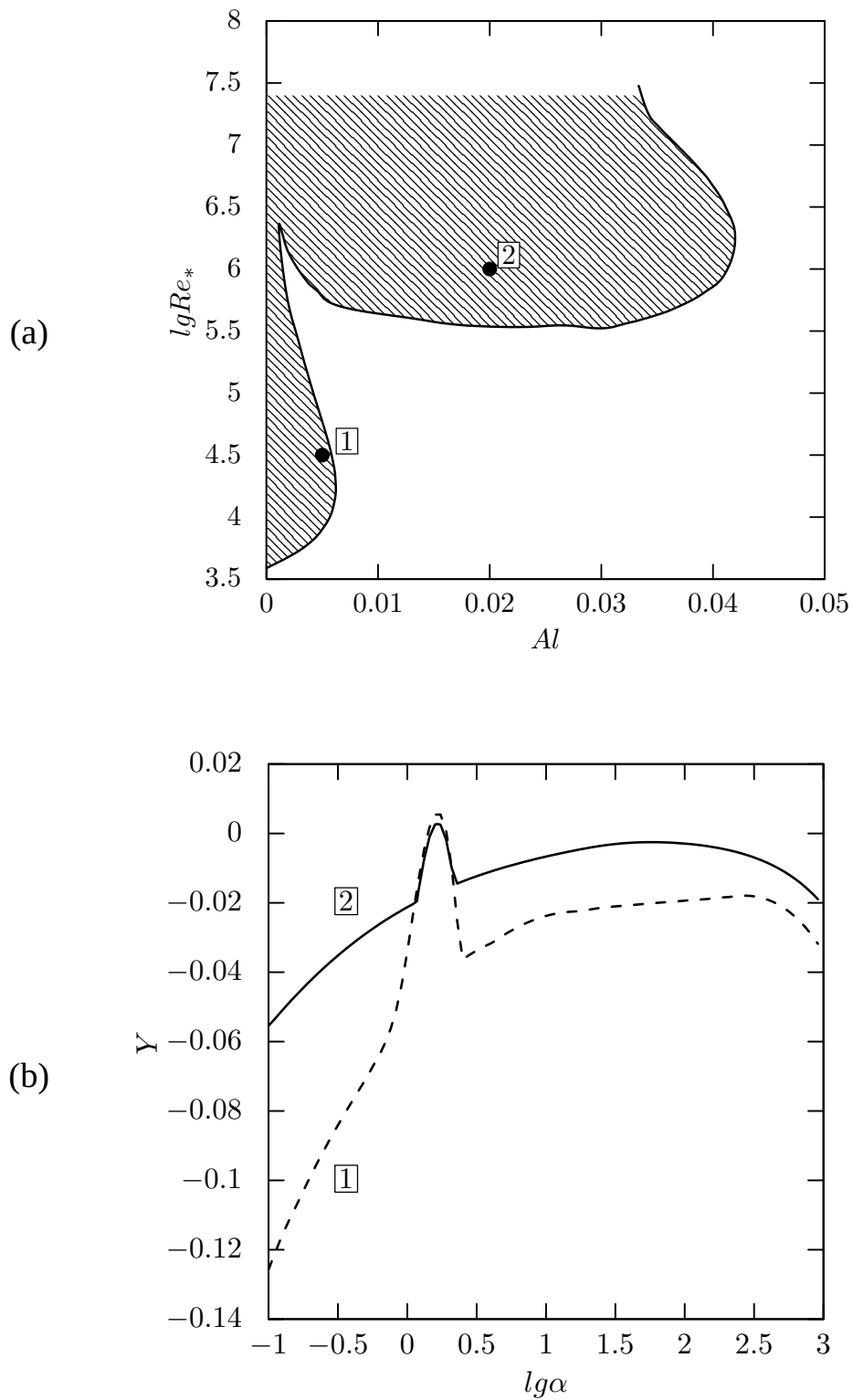


Рис. 2.11 — Расположение на графике  $Re(Al)$  точек  $lgRe = 4.5$ ,  $Al = 0.005$  (1) и  $lgRe = 6.0$ ,  $Al = 0.02$  (2) при  $P_m = 0.025$  (график (a)). Соответствующие верхние огибающие спектральных зависимостей  $Y(\alpha)$  (график (b))

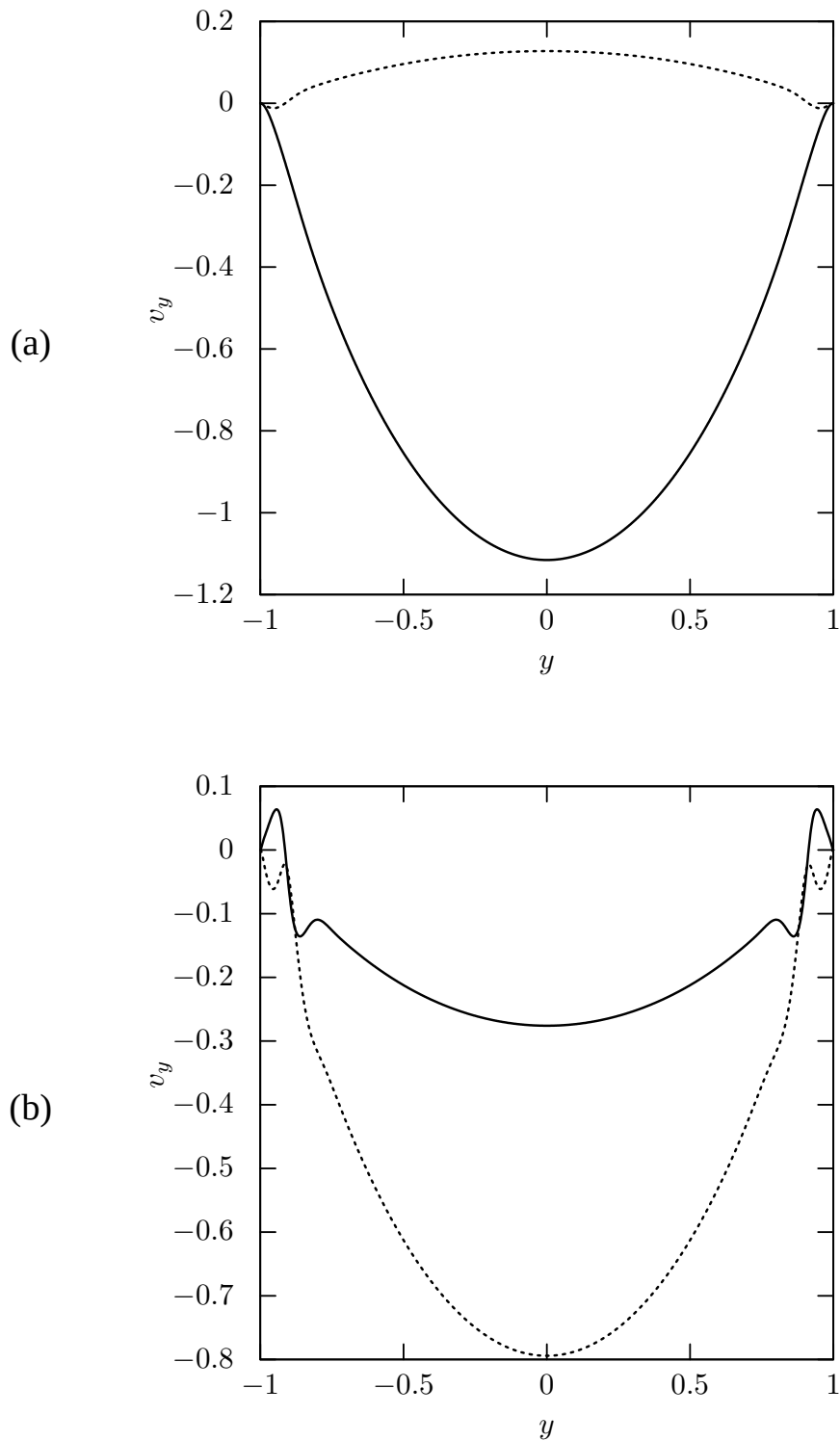
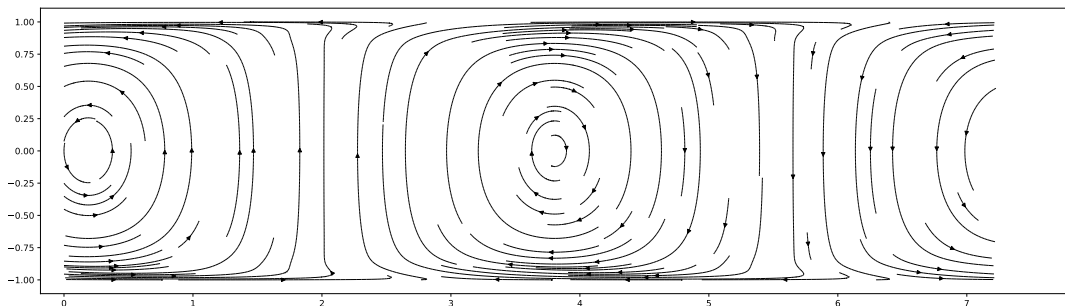


Рис. 2.12 — Графики собственных функций  $v_y$  при  $P_M = 0.025$  в точке максимального значения  $Y$ : гидродинамическая мода при  $lgRe = 4.5$ ,  $Al = 0.005$  (a) и магнитогиродинамическая мода при  $lgRe = 6.0$ ,  $Al = 0.02$  (b)

(a)



(b)

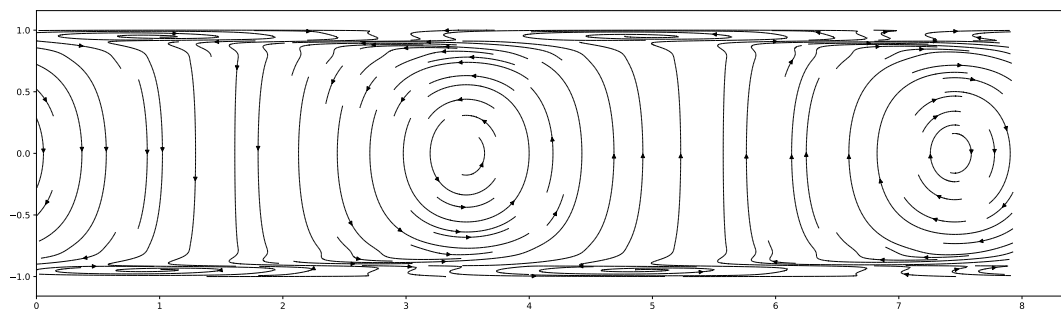


Рис. 2.13 — Линии тока собственных функций при  $P_m = 0.025$  в точке максимального значения  $Y$ : гидродинамическая мода при  $lgRe = 4.5$ ,  $Al = 0.005$  (a) и магнитогидродинамическая мода при  $lgRe = 6.0$ ,  $Al = 0.02$  (b)

## 2.7 Устойчивость течения в кольцевом зазоре в продольном магнитном поле

Рассмотрим течение между коаксиальными цилиндрами, изображенными на рисунке 2.14. Ось  $z$  цилиндрической системы координат совпадает с осью цилиндров,  $r$  – радиальная координата,  $\varphi$  – азимутальная координата. Между цилиндрами находится вязкая электропроводящая жидкость. Эта жидкость течет под действием продольного градиента давления и образует стационарный профиль скорости

$$U = ar^2 + b \ln(r) + c, \quad (2.85)$$

$$a = \frac{2 \ln \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right)}{1 + 2\xi - (1 + 2\xi + 2\xi^2) \ln \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right)}, \quad b = -a \frac{1 + 2\xi}{\ln \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right)},$$

$$c = a \frac{\ln(\xi) (1 + 2\xi)}{\ln \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right)},$$

где  $\xi = \frac{r_{in}}{d}$  – параметр, определяющий геометрию задачи,  $U$  – продольная компонента скорости.

Система уравнений магнитной гидродинамики имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{V} + \frac{1}{R_m} \Delta \mathbf{H}, \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \left( p + Al \frac{H^2}{2} \right) + Al (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V}, \quad (2.87)$$

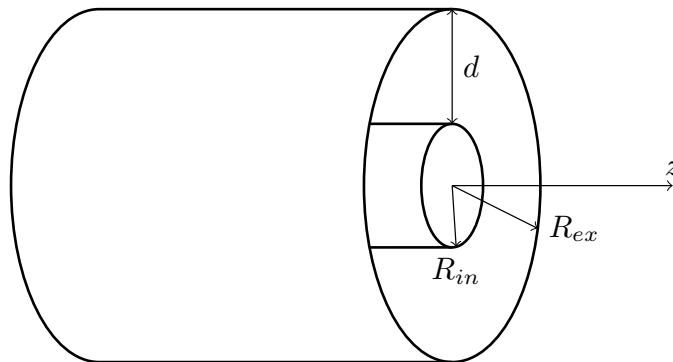


Рис. 2.14 — Коаксиальный канал

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (2.88)$$

где  $R_m = V_m d \frac{4\pi\sigma}{c^2}$  – магнитное число Рейнольдса,  $Al = \frac{H_0^2}{4\pi\rho V_m^2}$  – число Альфвена,  $Re = \frac{V_m d}{\nu}$  – число Рейнольдса,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $d$  – ширина зазора между цилиндрами (принята в качестве масштаба длины),  $\sigma$  – электропроводность жидкости,  $V_m$  – среднерасходная скорость (принята в качестве масштаба скорости),  $c$  – скорость света,  $\rho$  – плотность жидкости,  $H_0$  – напряженность внешнего магнитного поля (принята в качестве масштаба напряженности магнитного поля). При расчетах использовалось магнитное число Прандтля  $P_m = R_m/Re$ , прямо пропорциональное электропроводности, число Альфвена, число Рейнольдса. Выбор числа Гартмана в качестве параметра, определяющего влияние магнитного поля, как в работе [131], был бы менее удачен:  $Al = \frac{Ha^2}{P_m Re^2}$ , поэтому при увеличении  $P_m$  на несколько порядков обратно пропорционально снизится стабилизирующее влияние магнитных сил.

Решение системы уравнений (2.86)-(2.88) представим в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{v}, \quad (2.89)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad (2.90)$$

$$P = P_0 + P, \quad (2.91)$$

где  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{H}_0$ ,  $P_0$  – стационарное решение, а величины  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $P$  – возмущения скорости, магнитного поля и давления. Подставим (2.89)-(2.91) в уравнения (2.86)-(2.88) и, полагая возмущения малыми, получим линеаризованную систему уравнений для возмущений:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla) \mathbf{h} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{H}_0 = (\mathbf{H}_0\nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{R_m} \Delta \mathbf{h}, \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{U} = \\ = -\nabla P + Al (\mathbf{H}_0\nabla) \mathbf{h} + \\ + Al (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{H}_0 + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.94)$$

Решения системы (2.92)-(2.94), будем отыскивать в виде

$$\{\omega_r(r), \omega_\varphi(r), \omega_z(r), h_r(r), h_\varphi(r), h_z(r), q(r)\} \exp^{i\alpha(z-Ct)+im\varphi}, \quad (2.95)$$

где  $q$  – возмущение давления,  $\omega_r, \omega_\varphi, \omega_z$  – амплитуды скорости,  $h_r, h_\varphi, h_z$  – амплитуды напряженности магнитного поля,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  – азимутальное волновое число,  $\alpha$  – осевое волновое число,  $C = X + iY$  – комплексная фазовая скорость. Если  $Y > 0$ , возмущение нарастает.

Подставим (2.95) в (2.92)-(2.94), после чего получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд возмущений

$$D\omega_r = -q' + Ali\alpha h_r + \frac{1}{Re} \left[ \left( \frac{(r\omega_r)'}{r} \right)' - \frac{2\gamma}{r} \omega_\varphi \right], \quad (2.96)$$

$$D\omega_\varphi = -\gamma q' + Ali\alpha h_\varphi + \frac{1}{Re} \left[ \left( \frac{(r\omega_\varphi)'}{r} \right)' + \frac{2\gamma}{r} \omega_r \right], \quad (2.97)$$

$$D\omega_z + \omega_r U' = -i\alpha q + i\alpha Alh_z + \frac{1}{Re} \frac{(r\omega_z)'}{r}, \quad (2.98)$$

$$\Omega h_r = i\alpha \omega_r + \frac{1}{R_m} \left[ \left( \frac{(rh_r)'}{r} \right)' - \frac{2\gamma}{r} h_\varphi \right], \quad (2.99)$$

$$\Omega h_\varphi = i\alpha \omega_\varphi + \frac{1}{R_m} \left[ \left( \frac{(rh_\varphi)'}{r} \right)' + \frac{2\gamma}{r} h_r \right], \quad (2.100)$$

$$\Omega h_z = i\alpha \omega_z + h_r U' + \frac{1}{R_m} \frac{(rh_z)'}{r}, \quad (2.101)$$

$$\frac{(r\omega_r)'}{r} = -\gamma \omega_\varphi - i\alpha \omega_z, \quad (2.102)$$

где  $D = i\alpha(U - C) + \frac{m^2}{Re r^2} + \frac{\alpha^2}{Re}$ ,  $\Omega = i\alpha(U - C) + \frac{m^2}{R_m r^2} + \frac{\alpha^2}{R_m}$ ,  $\gamma = \frac{im}{r}$ .

Порядок уравнения (2.96) понижается при помощи уравнения непрерывности (2.102). Имеем

$$D\omega_r = -q' + Ali\alpha h_r + \frac{1}{Re} \left[ -\frac{im}{r} \omega_\varphi' + \frac{im}{r^2} \omega_\varphi - i\alpha \omega_z' - \frac{2im}{r^2} \omega_\varphi \right], \quad (2.103)$$

$$D\omega_r = -q' + Ali\alpha h_r - \frac{1}{Re} \left[ i\alpha \omega_z' + \frac{im}{r^2} (r\omega_\varphi)' \right], \quad (2.104)$$

С уравнением (2.99) поступим аналогично, используя уравнение  $div \mathbf{h} = 0$ . Тогда система (2.96)-(2.102) преобразуется к виду

$$D\omega_r = -q' + iAl\alpha h_r - \frac{1}{Re} \left[ i\alpha \omega_z' + \frac{\gamma}{r} (r\omega_\varphi)' \right], \quad (2.105)$$

$$D\omega_\varphi = -\gamma q + iAl\alpha h_\varphi + \frac{1}{Re} \left[ \left( \frac{(r\omega_\varphi)'}{r} \right)' + \frac{2\gamma}{r} \omega_r \right], \quad (2.106)$$

$$D\omega_z + \omega_r U' = -i\alpha q + iAl\alpha h_z + \frac{1}{Re} \frac{(r\omega'_z)'}{r}, \quad (2.107)$$

$$\Omega h_r = i\alpha\omega_r - \frac{1}{R_m} \left[ i\alpha h'_z + \frac{\gamma}{r} (rh_\varphi)' \right], \quad (2.108)$$

$$\Omega h_\varphi = i\alpha\omega_\varphi + \frac{1}{R_m} \left[ \left( \frac{(rh_\varphi)'}{r} \right)' + \frac{2\gamma}{r} h_r \right], \quad (2.109)$$

$$\frac{i}{\alpha} \frac{(rh_r)'}{r} = h_z - \frac{i\gamma}{\alpha} h_\varphi, \quad (2.110)$$

$$\frac{(r\omega_r)'}{r} = -\gamma\omega_\varphi - i\alpha\omega_z, \quad (2.111)$$

где уравнение  $div \mathbf{h} = 0$  записано в виде (2.110). Для дальнейшего упрощения задачи удобно ввести новые функции

$$\begin{aligned} B &= r\omega_r, & \Psi &= rh_\varphi, \\ K &= r\omega_\varphi, & M &= \frac{\Psi'}{r} = \frac{(rh_\varphi)'}{r}, \\ Z &= r\omega'_z, & S &= rh_r, \\ \Phi &= \frac{K'}{r} = \frac{(r\omega_\varphi)'}{r}, \end{aligned} \quad (2.112)$$

С учетом обозначений, система (2.105)-(2.111) запишется:

$$\frac{D}{r} B = -q' + \frac{i\alpha Al}{r} S - \frac{i\alpha}{r Re} Z - \frac{\gamma}{Re} \Phi, \quad (2.113)$$

$$\frac{D}{r} K = -\gamma q + \frac{i\alpha Al}{r} \Psi + \frac{1}{Re} \Phi' + \frac{2\gamma}{r^2 Re} B, \quad (2.114)$$

$$D\omega_z + U' \frac{B}{r} = -i\alpha q + i\alpha Al h_z + \frac{1}{r Re} Z', \quad (2.115)$$

$$\frac{\Omega}{r} S = \frac{i\alpha}{r} B - \frac{i\alpha}{R_m} h'_z - \frac{\gamma}{R_m} M, \quad (2.116)$$

$$\frac{\Omega}{r} \Psi = \frac{i\alpha}{r} K + \frac{1}{R_m} M' + \frac{2\gamma}{R_m r^2} S, \quad (2.117)$$

$$\frac{i}{\alpha r} S' = h_z - \frac{i\gamma}{\alpha r} \Psi, \quad (2.118)$$

$$\frac{B'}{r} = -\frac{\gamma}{r} K - i\alpha\omega_z, \quad \omega'_z = \frac{Z}{r}, \quad (2.119)$$

$$K' = \Phi r, \quad \Psi' = Mr. \quad (2.120)$$

Перепишем эти соотношения в матричном виде

$$\mathbf{W}' = \mathbf{M}_1 \mathbf{W} + \mathbf{M}_2 \mathbf{V}, \quad (2.121)$$

$$\mathbf{V}' = \mathbf{M}_3 \mathbf{W} + \mathbf{M}_4 \mathbf{V}, \quad (2.122)$$

$$\mathbf{W} = \{B, K, \omega_z, M, S\}, \quad \mathbf{V} = \{q, \Phi, Z, h_z, \Psi\},$$

где  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4$  – матрицы коэффициентов. Граничные условия для скорости на твердых непроницаемых стенках имеют вид  $v = 0$ . Стенки канала приняты идеально электропроводящими. Условие непрерывности нормальной компоненты магнитного поля дает  $h_r = 0$  на стенке канала, а условие непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля дает  $\frac{(rh_\varphi)'}{r} = 0$ . Запишем граничные условия в виде

$$\mathbf{W} = 0, \quad \text{при } r = \xi, \xi + 1. \quad (2.123)$$

Система уравнений (2.121)-(2.122) с граничными условиями (2.123) определяет задачу на отыскание собственных значений  $C$ .

Введем схему прогонки

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}(y)\mathbf{V}, \quad (2.124)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица размера  $5 \times 5$ . На границах канала заданы граничные условия  $\mathbf{W} = 0$ , отсюда вытекает граничное условие  $\mathbf{A} = 0$ . Аналогично работе [259], была введена обращенная схема прогонки

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}, \quad (2.125)$$

которая использовалась в средней части канала, тогда как вблизи границ использовалась зависящая от граничных условий схема (2.124). В точках смены прогоночных соотношений производилось обращение матрицы  $\mathbf{A}$ . Организация прогонки схематически изображена на рисунке 2.15.

Продифференцируем (2.124), (2.125) и, с использованием (2.121), (2.122), найдем

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}_1 \mathbf{A} + \mathbf{M}_2 - \mathbf{A} (\mathbf{M}_3 \mathbf{A} + \mathbf{M}_4), \quad (2.126)$$

$$(\mathbf{A}^{-1})' = \mathbf{M}_4 \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{M}_3 - \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{M}_2 \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{M}_1). \quad (2.127)$$

Уравнения (2.126), (2.127) интегрировались численно от границ канала к промежуточной точке  $y_{conn}$ , в которой выполняется условие непрерывности векторов  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{W}$ , которое можно записать в виде

$$(\mathbf{A}_p^{-1} - \mathbf{A}_n^{-1})\mathbf{W} = 0, \quad (2.128)$$



где индексами « $p$ » и « $n$ » обозначены матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$ , полученные интегрированием от разных границ канала. Так как  $\mathbf{W}$  не равно тождественно нулю, можно записать условие разрешимости (2.128) в виде

$$\det (\mathbf{A}_p^{-1}(C) - \mathbf{A}_n^{-1}(C)) = 0. \quad (2.129)$$

Это уравнение решается итерационными методами, в данной работе использовался метод секущих.

На рисунке 2.16 приведены зависимости критических чисел Рейнольдса от  $\xi$  при  $P_m = 0.01$ ,  $Al = 0.001$  для азимутальных мод  $m = 0, 1, 2, 3$ . Рассмотрен диапазон изменения  $\xi$  от нуля до четырех. При  $\xi = 4$  зазор между цилиндрами достаточно узкий и критические числа Рейнольдса азимутальных мод примерно равны друг к другу. Этот случай близок к плоскому течению Пуазейля, рассмотренному в работах [259-261] и в разделе 2.6. При уменьшении  $\xi$  критические числа Рейнольдса моды  $m = 0$  монотонно увеличиваются. При этом моды  $m = 1, 2$  становятся более опасны. Критические числа Рейнольдса моды  $m = 1$  при уменьшении  $\xi$  имеют минимум при  $\xi \approx 0.3$ . При  $\xi \rightarrow 0$  моды  $m = 0, 1$  резко нарастают и течение становится устойчиво к малым возмущениям. График для моды  $m = 2$  на рисунке 2.16 такого выраженного минимума не имеет, при уменьшении  $\xi$  критические числа Рейнольдса медленно увеличиваются и при  $\xi \approx 1$  кривая критических зависимостей начинает разворачиваться вверх. Мода  $m = 2$  аналогичным образом нарастает уже при  $\xi < 1.5$ . Таким образом, при  $\xi < 1$  неустойчивость течения определяется азимутальными модами  $m = 1, 2$ .

Рассмотрим зависимости критических чисел Рейнольдса от магнитного числа Прандтля при  $\xi = 1$ ,  $Al = 0.001$ . Кривые критических зависимостей приведены на рисунке 2.17. При  $P_m = 10$  кривые горизонтальны, что соответствует предельному случаю  $P_m \rightarrow \infty$ , а при  $P_m = 10^{-4}$ , близком к предельному случаю  $P_m \rightarrow 0$ , эти кривые имеют слабый наклон. При  $\lg P_m \approx -1$  и  $\lg P_m \approx 0.1$  кривые критических зависимостей имеют максимумы. В этих областях магнитное поле особенно сильно подавляет развитие возмущений.

На рисунке 2.18 приведены зависимости критических чисел Рейнольдса  $Re_*$  от  $Al$  при  $\xi = 1$ ,  $\lg P_m = -1$  для азимутальных мод  $m = 0, 1, 2$ . Кривые критических зависимостей имеют сложный вид, штриховкой на примере моды  $m = 0$  показано расположение области неустойчивости. На начальном участке кривые критических зависимостей нарастают. Когда число Альфвена превышает некоторое значение, свое для каждой моды, скорость нарастания резко уменьшается.

Далее, при некотором значении  $Al_*$ , кривые критических зависимостей разворачиваются в сторону уменьшения чисел Альфвена. Для моды  $m = 2$  эта кривая вскоре становится вертикальной.

На рисунке 2.19 приведены нейтральные зависимости при  $Al = 0.012$ ,  $\xi = 1$ ,  $\lg P_m = -1$ . Мода  $m = 0$  образует замкнутую область неустойчивости, то есть, при числах Рейнольдса выше некоторого значения течение становится устойчивым по отношению к малым осесимметричным возмущениям. Для моды  $m = 1$  такая область неустойчивости тоже существует. При  $Re > 10^{10}$  азимутальная мода  $m = 1$  имеет вторую область роста. Азимутальная мода  $m = 2$  замкнутых нейтральных кривых не имеет, при увеличении числа Рейнольдса область неустойчивости смещается в сторону коротковолновых возмущений.

Таким образом, изучена устойчивость течения при промежуточном значении радиуса внутреннего цилиндра  $\xi = 1$ , достаточно далеко как от плоского случая, рассмотренного ранее, так и от случая очень тонкого внутреннего цилиндра, когда все азимутальные моды устойчивы или, по крайней мере, имеют очень большие критические числа Рейнольдса. Рассмотрены зависимости критических чисел Рейнольдса от магнитного числа Прандтля, которое пропорционально электропроводности. Обнаружено, что при  $P_m > 10$  и  $P_m < 10^{-4}$  критические числа Рейнольдса близки к предельным случаям  $P_m \rightarrow \infty$ ,  $P_m \rightarrow 0$ , соответственно. Обнаружены диапазоны магнитных чисел Прандтля, при которых течение особенно чувствительно к стабилизирующему влиянию магнитного поля. В этих диапазонах при увеличении магнитного поля наблюдается скачкообразное увеличение критических чисел Рейнольдса и существование замкнутых нейтральных кривых.

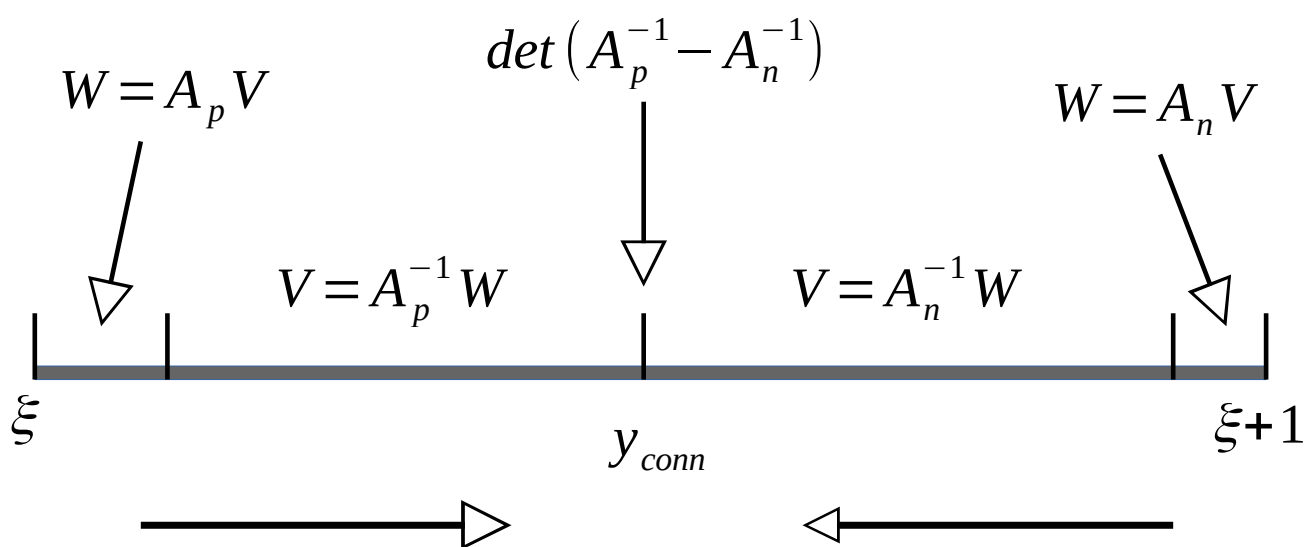


Рис. 2.15 — Схема прогонки

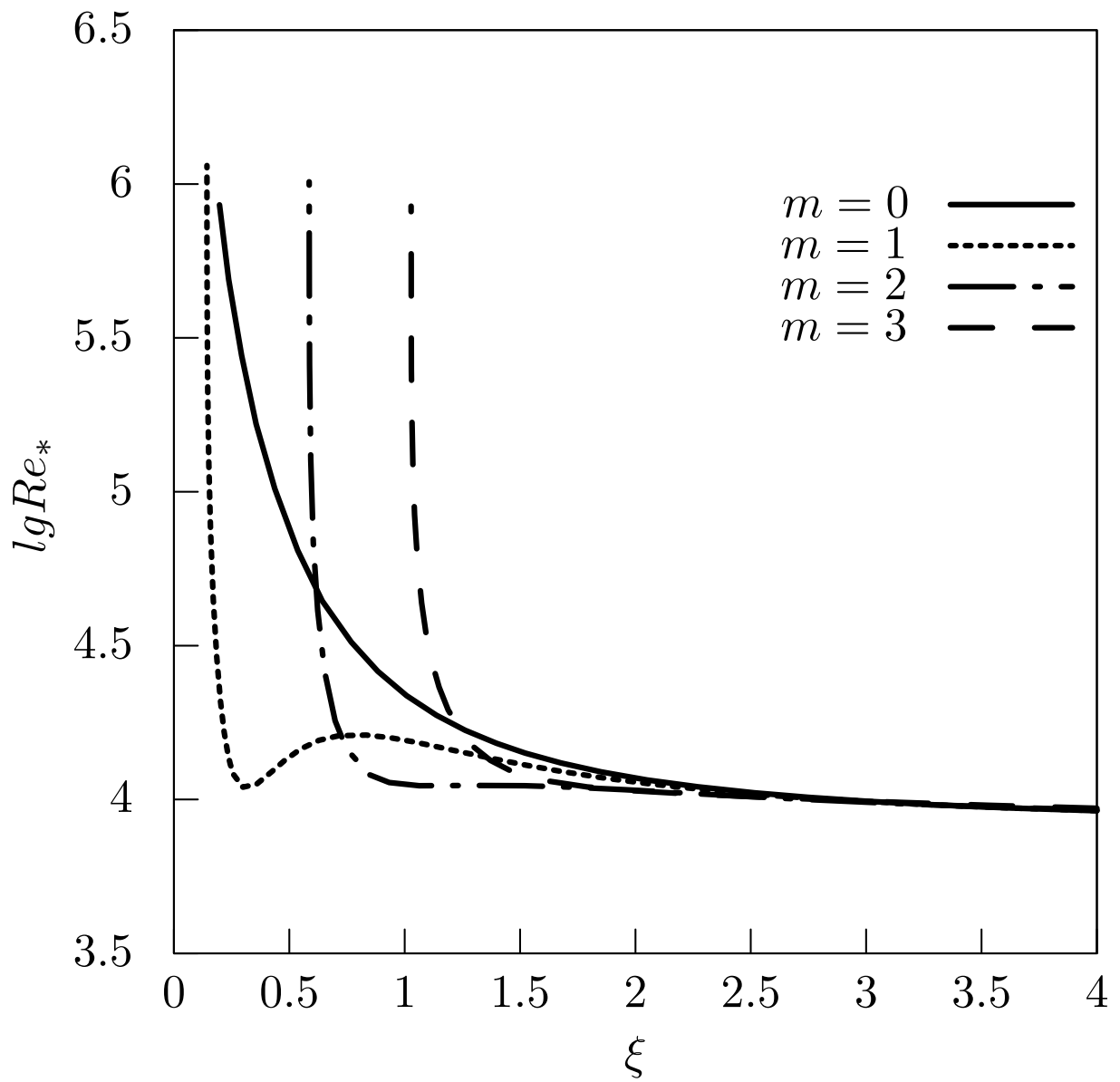


Рис. 2.16 — Зависимости критических чисел Рейнольдса  $Re_*$  от  $\xi$  при  $P_m = 0.01$ ,  $Al = 0.001$

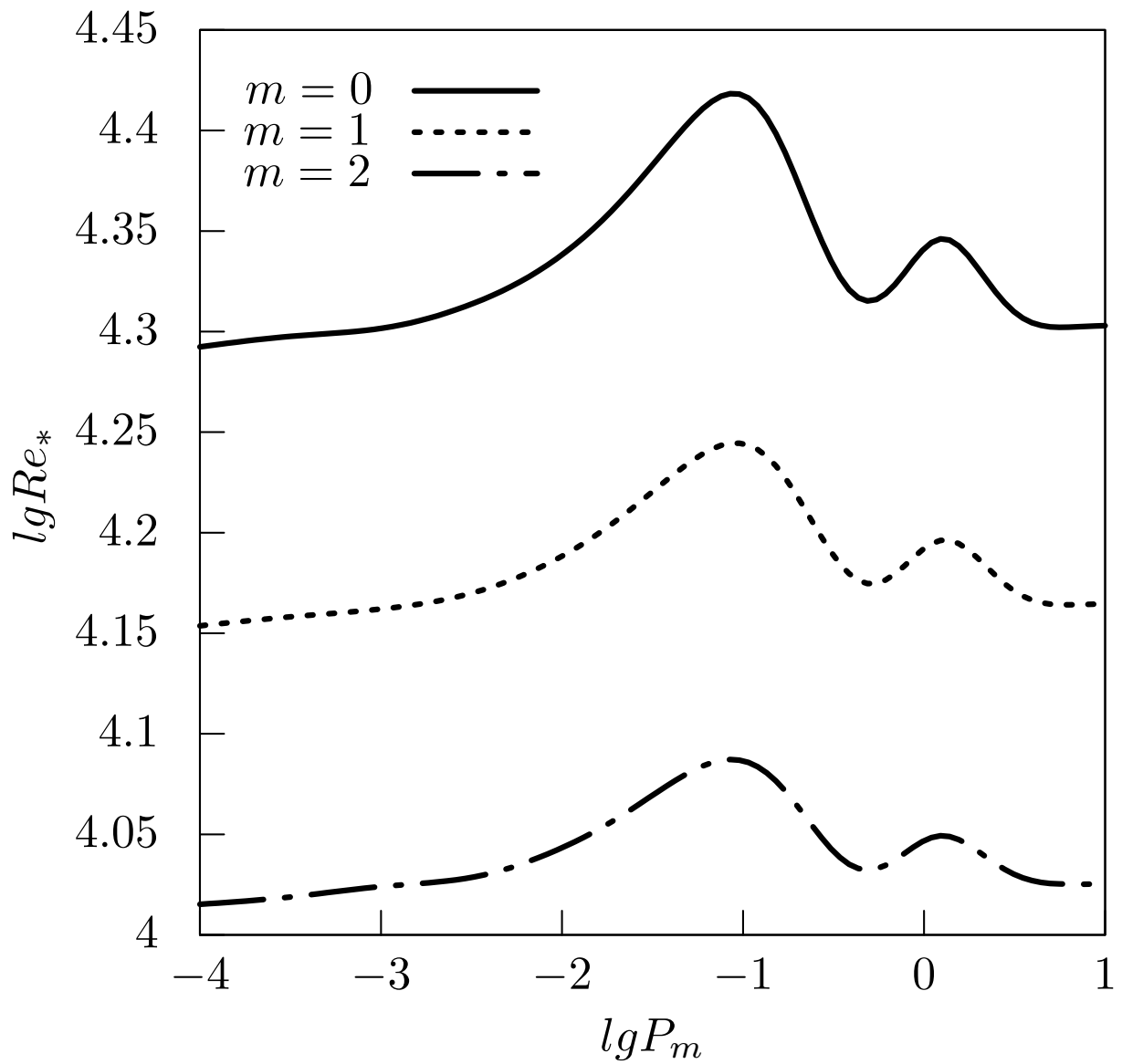


Рис. 2.17 — Зависимости критических чисел Рейнольдса  $Re_*$  от  $P_m$  при  $\xi = 1$ ,  $Al = 0.001$

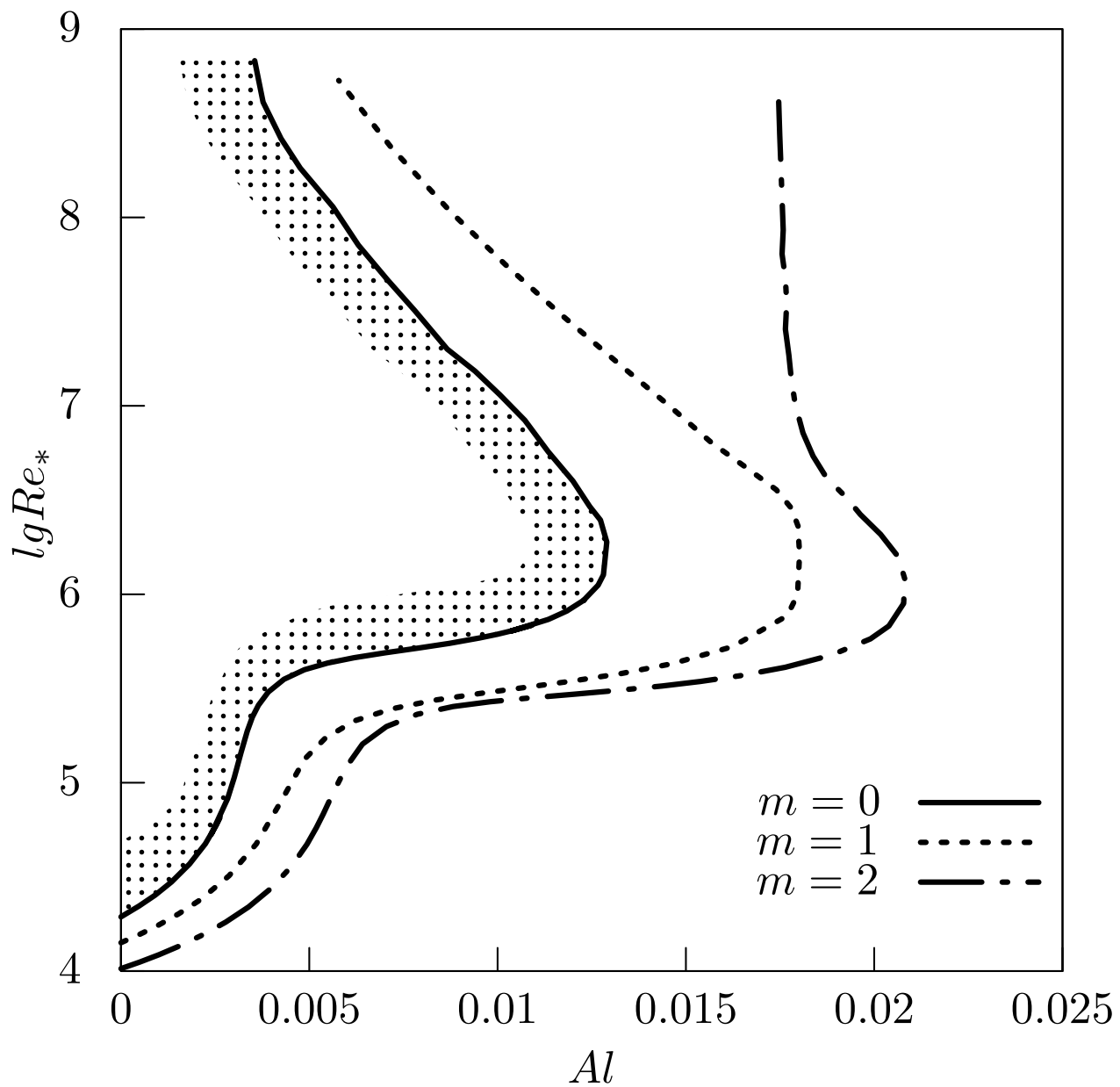


Рис. 2.18 — Зависимости критических чисел Рейнольдса  $Re_*$  от  $Al$  при  $\xi = 1$ ,  $\lg P_m = -1$

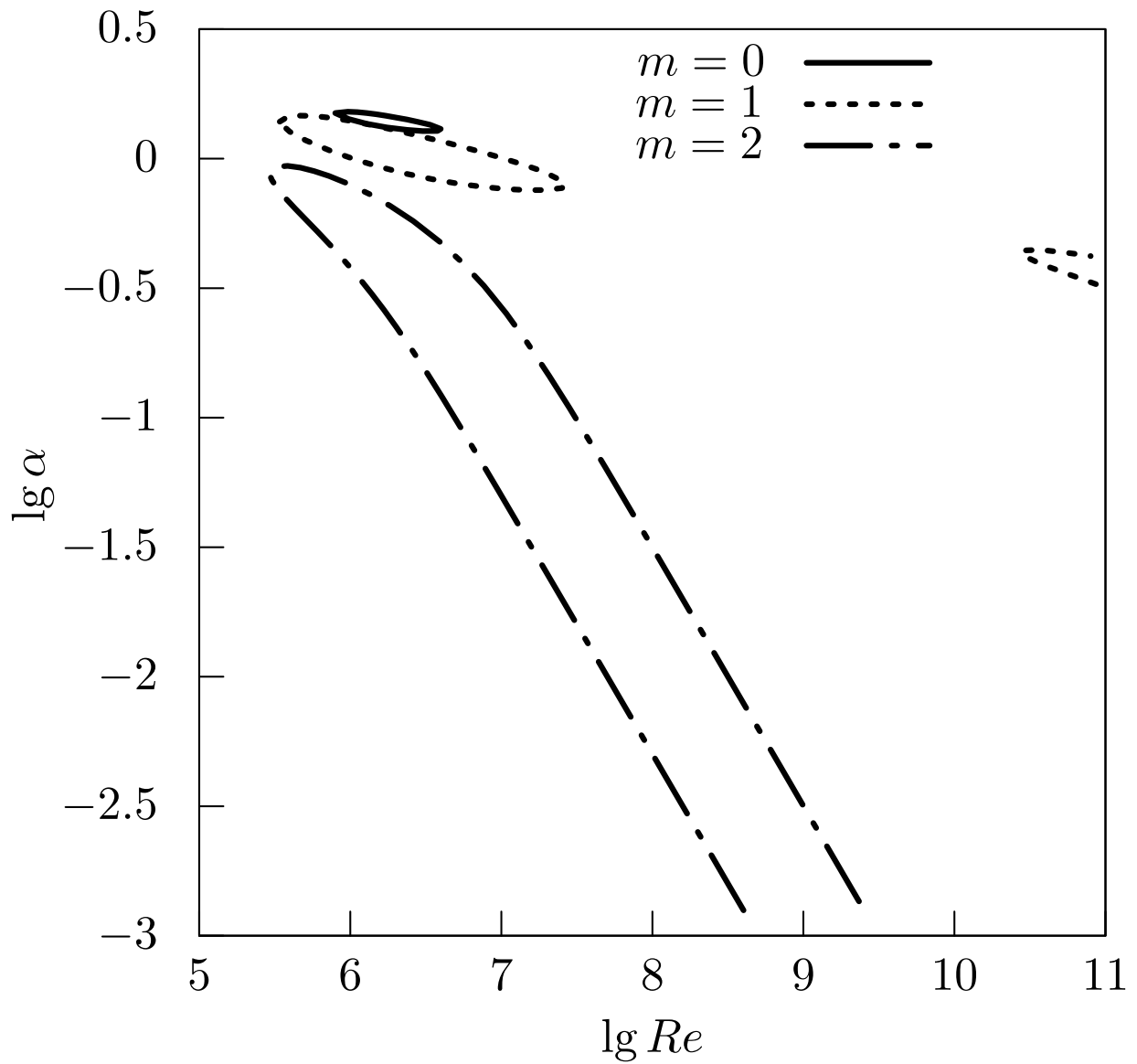


Рис. 2.19 — Нейтральные зависимости при  $Al = 0.012$ ,  $\xi = 1$ ,  $\lg P_m = -1$

## 2.8 Устойчивость течения слабоэлектропроводящей жидкости в кольцевом зазоре в спиральном магнитном поле

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой слабо электропроводящей жидкости в трубе кольцевого сечения, изображенной на рисунке 2.14, при наличии спирального магнитного поля. Геометрия канала полностью совпадает с рассмотренной в разделе 2.7.

На течение действует спиральное магнитное поле. Его продольная составляющая  $H_{0z}$  однородна и направлена вдоль оси цилиндров. Азимутальная составляющая внешнего магнитного поля  $H_{0\varphi}$  создается электрическим током, протекающим по центральному цилиндру. Таким образом, внешнее магнитное поле можно представить в виде

$$H_{0z} = H_0 \cos \theta, \quad (2.130)$$

$$H_{0\varphi} = \frac{H_0 \sin \theta r_{\text{ex}}}{r}, \quad r \in [r_{\text{in}}, r_{\text{ex}}], \quad (2.131)$$

где  $\theta$  – угол между вектором напряженности магнитного поля на внешней стенке и осью трубы,  $H_0$  – модуль напряженности внешнего магнитного поля на внешней границе канала, выбранный в качестве характеристического масштаба напряженности внешнего магнитного поля. Для перехода к безразмерным величинам в формулах (2.130)-(2.131) следует положить  $H_0 = 1$ . Предполагается, что магнитное поле (2.130)-(2.131) не вызывает деформации профиля скорости (2.85).

Система уравнений магнитной гидродинамики (см., например, [262]) имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{V} + \frac{1}{R_m} \Delta \mathbf{H}, \quad (2.132)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \left( p + Al \frac{H^2}{2} \right) + Al (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V}, \quad (2.133)$$

$$\text{div} \mathbf{V} = 0, \quad (2.134)$$

$$\text{div} \mathbf{H} = 0, \quad (2.135)$$

где  $Al = \frac{H_0^2}{4\pi\rho V_a^2}$  – число Альфвена,  $R_m = V_a d \frac{4\pi\sigma}{c^2}$  – магнитное число Рейнольдса,  $Re = \frac{V_a d}{\nu}$  – число Рейнольдса,  $c$  – скорость света,  $d$  – ширина зазора между



цилиндрами (принята в качестве масштаба длины),  $\sigma$  – электропроводность жидкости,  $V_a$  – среднерасходная скорость (принята в качестве масштаба скорости),  $\rho$  – плотность жидкости,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $H_0$  – модуль напряженности внешнего магнитного поля на внешней границе канала (принята в качестве масштаба напряжённости магнитного поля). Таким образом, структура уравнений магнитной гидродинамики такова, что три параметра (например,  $Al$ ,  $Re$ ,  $R_m$ ) полностью определяют поведение системы при заданных граничных условиях. Введем также обобщенное давление  $P = p + Al \frac{H^2}{2}$

Решение системы уравнений (2.132)-(2.135) представим в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{v}, \quad (2.136)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad (2.137)$$

$$P = P_0 + P, \quad (2.138)$$

где  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{H}_0$ ,  $P_0$  – стационарное решение, а вторые слагаемые – возмущения скорости, поля и давления. Подставим (2.136)-(2.138) в уравнения (2.132)-(2.135). После линеаризации получим

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{h} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H}_0 = (\mathbf{H}_0 \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{R_m} \Delta \mathbf{h}, \quad (2.139)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + Al (\mathbf{H}_0 \nabla) \mathbf{h} + Al (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{H}_0 + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}, \quad (2.140)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.141)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0. \quad (2.142)$$

Устойчивость рассматриваемого течения будем исследовать в приближении малых магнитных чисел Рейнольдса. Для перехода к пределу  $R_m \rightarrow 0$  в уравнениях (2.139)-(2.142), следуя [63], представим возмущения магнитного поля, скорости и давления в виде рядов по  $R_m$ :  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + R_m \mathbf{v}_1 + \dots$ ,  $\mathbf{h} = R_m \mathbf{h}_1 + R_m^2 \mathbf{h}_2 + \dots$  ( $\mathbf{h} = 0$  при  $R_m = 0$ ),  $P = P_0 + R_m P_1 + R_m^2 P_2 + \dots$ . Оставляя в уравнениях (2.139)-(2.142) только члены нулевого порядка малости по  $R_m$ , получим

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H}_0 = (\mathbf{H}_0 \nabla) \mathbf{v} + \Delta \mathbf{h}, \quad (2.143)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \frac{Ha^2}{Re} (\mathbf{H}_0 \nabla) \mathbf{h} + \frac{Ha^2}{Re} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{H}_0 + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}, \quad (2.144)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.145)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0. \quad (2.146)$$

Здесь индексы «0» и «1» опущены. Граничные условия для возмущений аналогичны поставленным в разделе 2.7.

Решения системы (2.143)-(2.145) будем отыскивать в виде

$$\{\omega_r(r), \omega_\varphi(r), \omega_z(r), h_r(r), h_\varphi(r), h_z(r), q(r)\} \exp^{i\alpha(z-Ct)+im\varphi}, \quad (2.147)$$

где  $\omega_r, \omega_\varphi, \omega_z, h_r, h_\varphi, h_z$  – радиальная, азимутальная, осевая комплексные компоненты возмущений скорости и напряженности магнитного поля,  $q$  – возмущение давления,  $\alpha$  – продольное волновое число,  $m$  – азимутальное волновое число ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ),  $C = X + iY$  – комплексная фазовая скорость, в которой  $X$  – собственно фазовая скорость, а  $\alpha Y$  – декремент затухания возмущения ( $Y < 0$ ) или инкремент его нарастания ( $Y > 0$ ).  $Y = 0$  соответствует нейтральным возмущениям. Минимальное число Рейнольдса, при котором наблюдаются нейтральные возмущения, называется критическим числом Рейнольдса по линейной теории  $Re_*$ .

В результате получаем (штрихи в формулах означают дифференцирование по  $r$ )

$$D\omega_r = -q' + \frac{Ha^2}{Re} (H_{0\varphi}\gamma + i\alpha H_{0z}) h_r - 2\frac{Ha^2}{Re} \frac{H_{0\varphi}}{r} h_\varphi - \frac{1}{Re} \left[ i\alpha\omega_z' + \frac{\gamma}{r}(r\omega_\varphi)' \right], \quad (2.148)$$

$$D\omega_\varphi = -\gamma q + \frac{Ha^2}{Re} (H_{0\varphi}\gamma + i\alpha H_{0z}) h_\varphi + \frac{Ha^2}{Re} (H_{0\varphi}' + \frac{H_{0\varphi}}{r}) h_r + \frac{1}{Re} \left[ \left( \frac{(r\omega_\varphi)'}{r} \right)' + \frac{2\gamma}{r}\omega_r \right], \quad (2.149)$$

$$D\omega_z + \omega_r U' = -i\alpha q + \frac{Ha^2}{Re} (H_{0\varphi}\gamma + i\alpha H_{0z}) h_z + \frac{1}{Re} \frac{(r\omega_z)'}{r}, \quad (2.150)$$

$$\Omega h_r = (H_{0\varphi}\gamma + i\alpha H_{0z}) \omega_r - \left[ i\alpha h_z' + \frac{\gamma}{r}(rh_\varphi)' \right], \quad (2.151)$$

$$\Omega h_\varphi = (H_{0\varphi}\gamma + i\alpha H_{0z}) \omega_\varphi - \omega_r (H_{0\varphi}' - \frac{H_{0\varphi}}{r}) + \left[ \left( \frac{(rh_\varphi)'}{r} \right)' + \frac{2\gamma}{r} h_r \right], \quad (2.152)$$

$$\Omega h_z = (H_{0\varphi}\gamma + i\alpha H_{0z}) \omega_z + \frac{(rh_z)'}{r}, \quad (2.153)$$

$$\frac{(r\omega_r)'}{r} = -\gamma\omega_\varphi - i\alpha\omega_z, \quad (2.154)$$

где  $D = i\alpha(U - C) + \frac{m^2}{Re r^2} + \frac{\alpha^2}{Re}$ ,  $\Omega = \frac{m^2}{r^2} + \alpha^2$ ,  $\gamma = \frac{im}{r}$ . Как отмечено в [263],  $div \mathbf{h} = 0$  удобно использовать вместо одной из проекций уравнения индукции. Вместо (2.153) запишем

$$\frac{(rh_r)'}{r} = -\gamma h_\varphi - i\alpha h_z, \quad (2.155)$$

и введем обозначения

$$\begin{aligned} B &= r\omega_r, & \Psi &= rh_\varphi, \\ K &= r\omega_\varphi, & M &= \frac{\Psi'}{r} = \frac{(rh_\varphi)'}{r}, \\ Z &= r\omega'_z, & S &= rh_r, \\ \Phi &= \frac{K'}{r} = \frac{(r\omega_\varphi)'}{r}, & E &= H_{0\varphi}\gamma + i\alpha H_{0z} \end{aligned} \quad (2.156)$$

После этого систему (2.148)-(2.154) преобразуем к виду

$$\frac{D}{r}B = -q' + \frac{Ha^2 E}{rRe}S - \frac{i\alpha}{rRe}Z - \frac{\gamma}{Re}\Phi - 2\frac{Ha^2 H_{0\varphi}}{Re r^2}\Psi, \quad (2.157)$$

$$\frac{D}{r}K = -\gamma q + \frac{Ha^2 E}{rRe}\Psi + \frac{Ha^2 (H'_{0\varphi} + \frac{H_{0\varphi}}{r})}{rRe}S + \frac{1}{Re}\Phi' + \frac{2\gamma}{r^2 Re}B, \quad (2.158)$$

$$D\omega_z + U'\frac{B}{r} = -i\alpha q + \frac{Ha^2}{Re}Eh_z + \frac{1}{rRe}Z', \quad (2.159)$$

$$\frac{\Omega}{r}S = \frac{E}{r}B - i\alpha h'_z - \gamma M, \quad (2.160)$$

$$\frac{\Omega}{r}\Psi = \frac{E}{r}K - \frac{(H'_{0\varphi} - \frac{H_{0\varphi}}{r})}{r}B + M' + \frac{2\gamma}{r^2}S, \quad (2.161)$$

$$\frac{S'}{r} = -\frac{\gamma}{r}\Psi - i\alpha h_z, \quad (2.162)$$

$$\frac{B'}{r} = -\frac{\gamma}{r}K - i\alpha\omega_z, \quad \omega'_z = \frac{Z}{r}, \quad (2.163)$$

$$K' = \Phi r, \quad \Psi' = Mr. \quad (2.164)$$

Систему уравнений (2.157)-(2.164) удобно записать в матричной форме

$$W' = M_1 W + M_2 V, \quad (2.165)$$

$$V' = M_3 W + M_4 V, \quad (2.166)$$

$$W = \{B, K, \omega_z, M, S\}, \quad V = \{q, \Phi, Z, h_z, \Psi\},$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & -i\alpha r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & -i\alpha r & 0 \end{pmatrix}, \\
M_3 &= \begin{pmatrix} -\frac{D}{r} & 0 & 0 & 2\frac{Ha^2}{Re} \frac{H_{0\varphi}}{r^2} & \frac{Ha^2}{Re} \frac{E}{r} \\ -\frac{2\gamma}{r^2} & \frac{DRe}{r} & 0 & -\frac{EHa^2 Re}{rRe} & -\frac{Ha^2 Re(H'_{0\varphi} + \frac{H_{0\varphi}}{r})}{rRe} \\ U'Re & 0 & DrRe & 0 & 0 \\ -\frac{iE}{\alpha r} & 0 & 0 & 0 & \frac{i\Omega}{\alpha r} \\ \frac{(H'_{0\varphi} - \frac{H_{0\varphi}}{r})}{r} & -\frac{E}{r} & 0 & \frac{\Omega}{r} & -\frac{2\gamma}{r^2} \end{pmatrix}, \\
M_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\gamma}{Re} & -\frac{i\alpha}{rRe} & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\alpha r Re & 0 & 0 & -E \frac{Ha^2}{Re} r Re & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i\gamma}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Система уравнений (2.165)-(2.166) с граничными условиями  $\mathbf{W} = 0$  определяет задачу на отыскание собственных значений  $C$ . При проведении массовых расчетов использовался метод дифференциальной прогонки. Организация расчетов аналогична описанной в разделе 2.7.

Для сравнения результатов с экспериментом удобно использовать число Гартмана. На рисунке 2.20 приведены зависимости  $Re_*(Ha)$  при  $\theta = 0$  (случай только продольного магнитного поля),  $\xi = 10$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$ . С увеличением числа Гартмана критические числа Рейнольдса увеличиваются, а критические числа мод  $m = 0, 1, 2, 3$  совпадают в пределах погрешности изображения. На рисунке 2.21 представлен случай только азимутального магнитного поля ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) при  $\xi = 10$ . Мода  $m = 0$  с азимутальным магнитным полем не взаимодействует, моды  $m = \pm 1, \pm 2$  монотонно возрастают при увеличении числа Гартмана. На рисунках 2.22 и 2.23 приведены зависимости  $Re_*(\theta)$  при  $\xi = 10$ ,  $Ha = 50, 200$  соответственно. На графиках наблюдается сложное поведение кривых в отличие от случаев только продольного и только азимутального магнитных полей. В частности, критические числа мод с  $m < 0$  заметно меньше, чем  $m > 0$ . При увеличении  $\theta$  кривые  $m \geq 0$  убывают, а кривые  $m < 0$  сначала

также убывают, а потом несколько возрастают и при  $\theta = \frac{\pi}{2}$  сливаются с парными положительными модами. Интересны зависимости  $Re_*(\xi)$  при  $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ , приведенные на рисунках 2.24, 2.25, 2.26. В продольном магнитном поле ( $\theta = 0$ ) кривые критических зависимостей имеют классический вид [63]. В винтовом магнитном поле при  $Ha = 150, \theta = \frac{\pi}{4}$  рассматриваемое течение менее устойчиво за счет дестабилизирующего влияния мод с отрицательными азимутальными волновыми числами. На рисунке 2.25 выборочно приведены моды от  $m = -1$  до  $m = -11$ , по которым можно определить основную закономерность изменения критических чисел при увеличении  $m$ : моды с большими азимутальными номерами стабилизируются при уменьшении параметра  $\xi$ , поэтому для анализа устойчивости при небольших  $\xi$  достаточно ограничиться рассмотрением нескольких первых азимутальных мод с положительными и отрицательными  $m$ . Вид кривых критических зависимостей на рисунке 2.26 существенно отличается от рисунка 2.24, моды  $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$  не имеют характерных минимумов при небольших значениях параметра  $\xi$ . Такое течение более устойчиво к малым возмущениям при малых  $\xi$  по сравнению со случаем винтового поля. На рисунке 2.27 выборочно приведены зависимости  $Re_*(Ha)$  при  $\theta = \frac{\pi}{4}, \xi = 4$ . Анализ устойчивости течения при данных параметрах показал, что наиболее опасны моды  $m = -4$  и  $m = -5$ . При дальнейшем увеличении  $m$  ( $m = -6, -7$ ) азимутальные моды становятся менее опасны. Остальные моды (для сравнения приведена  $m = 0$ ) более устойчивы. На рисунке 2.28 приведены нейтральные зависимости при  $\theta = \frac{\pi}{2}, \xi = 2, Ha = 50$ .

Результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы. В винтовом магнитном поле моды с положительными азимутальными волновыми числами стабилизируются, а моды с отрицательными – дестабилизируются. Поэтому увеличение числа Гартмана в данной постановке задачи не всегда приводит к стабилизации течения. Уменьшение радиуса внутреннего цилиндра приводит к увеличению критических чисел Рейнольдса за счет стабилизации азимутальных мод с большими номерами (как с положительными, так и с отрицательными).

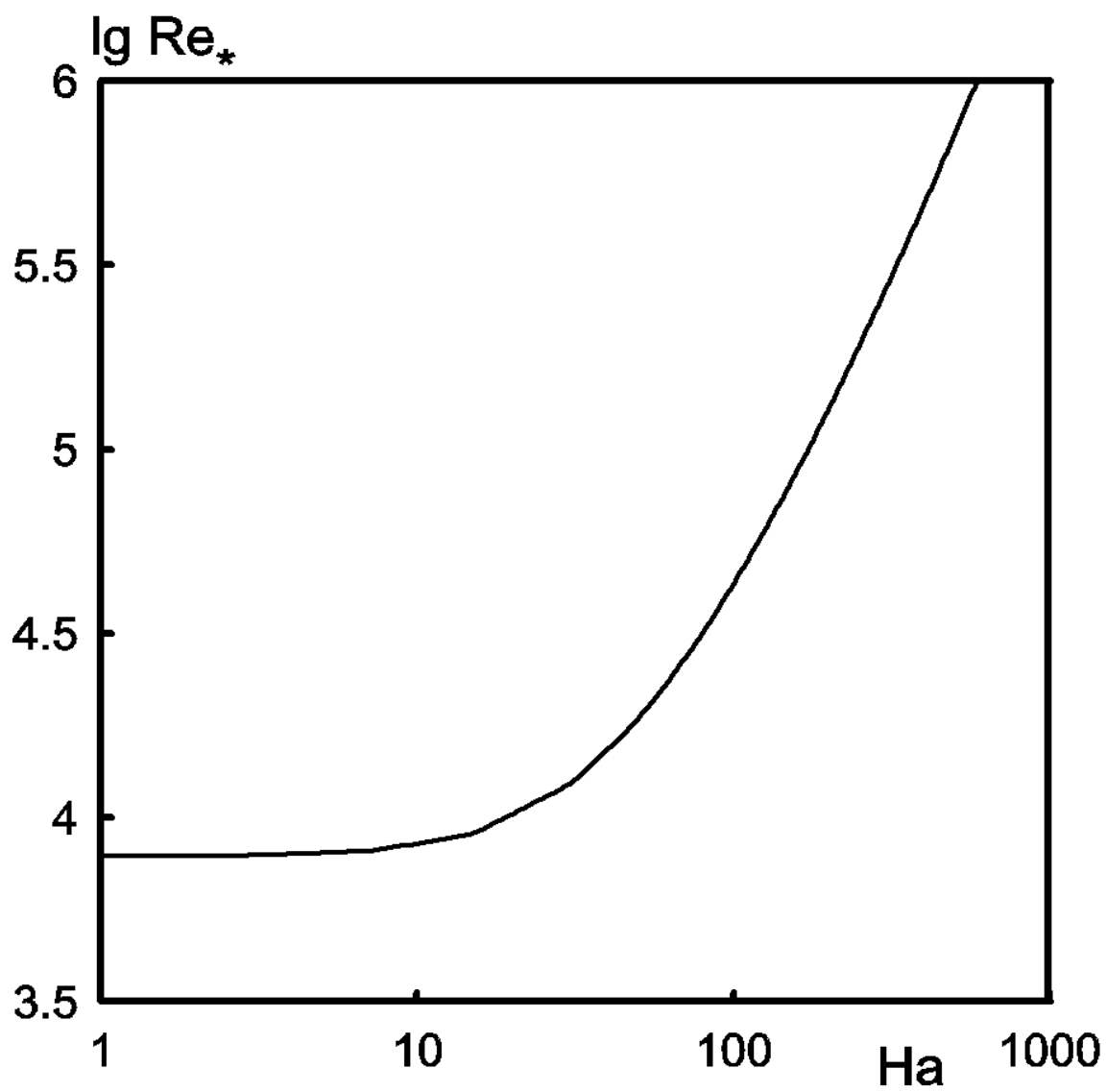


Рис. 2.20 — Зависимости  $Re_*(Ha)$  при  $\theta = 0$ ,  $\xi = 10$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$ .

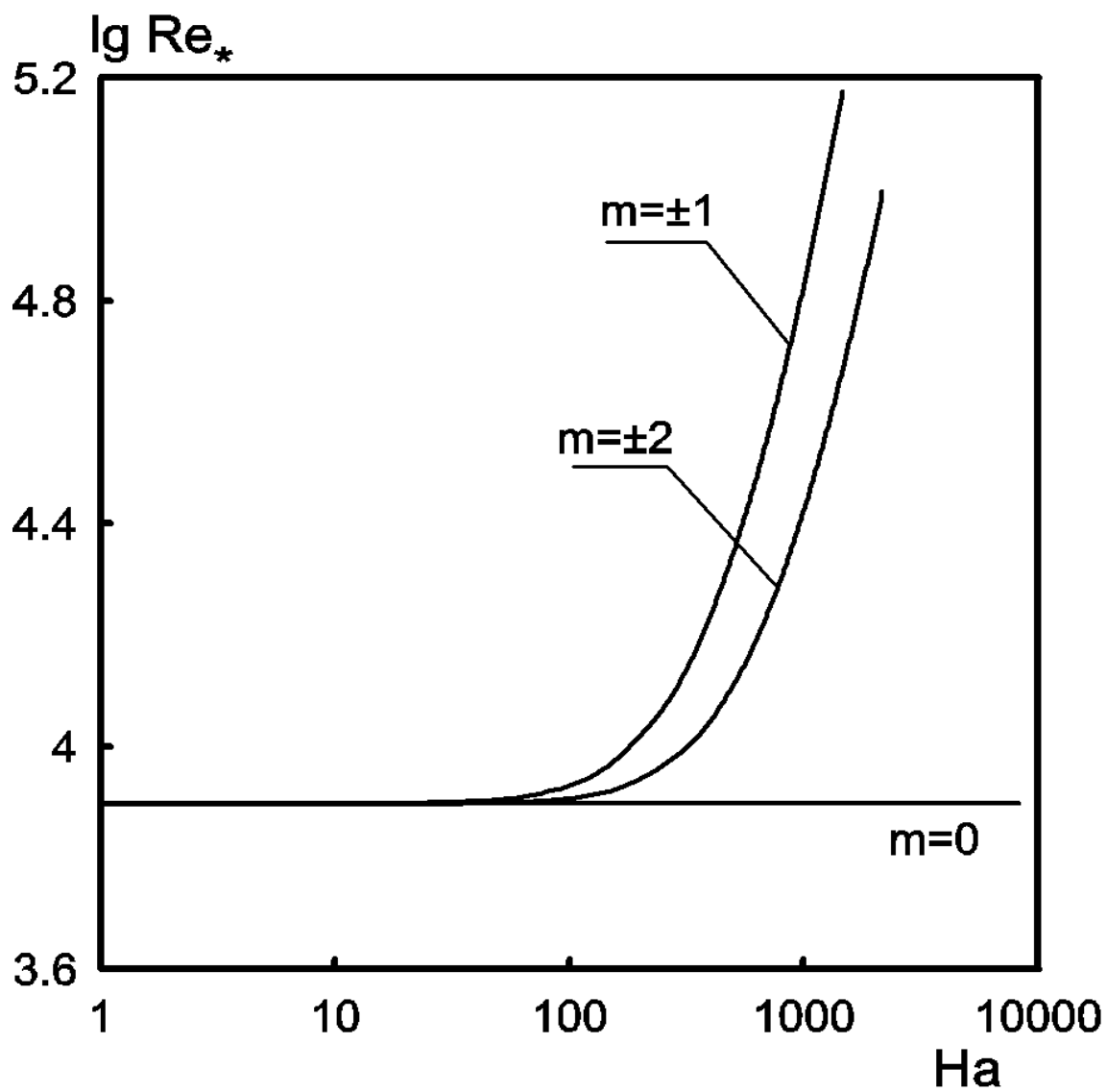


Рис. 2.21 — Зависимости  $Re_*(Ha)$  при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\xi = 10$

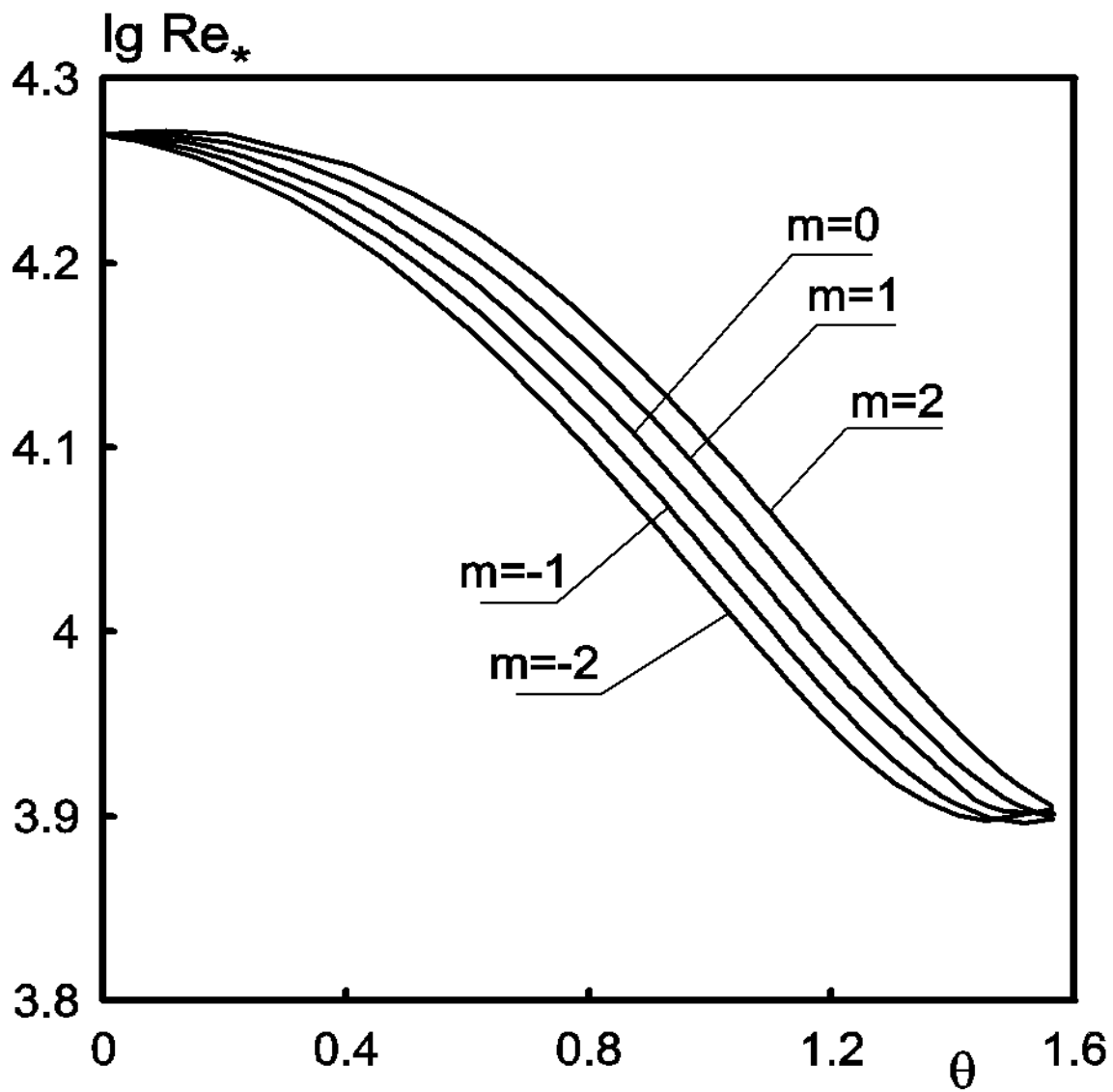


Рис. 2.22 — Зависимости  $Re_*(\theta)$  при  $Ha = 50, \xi = 10$



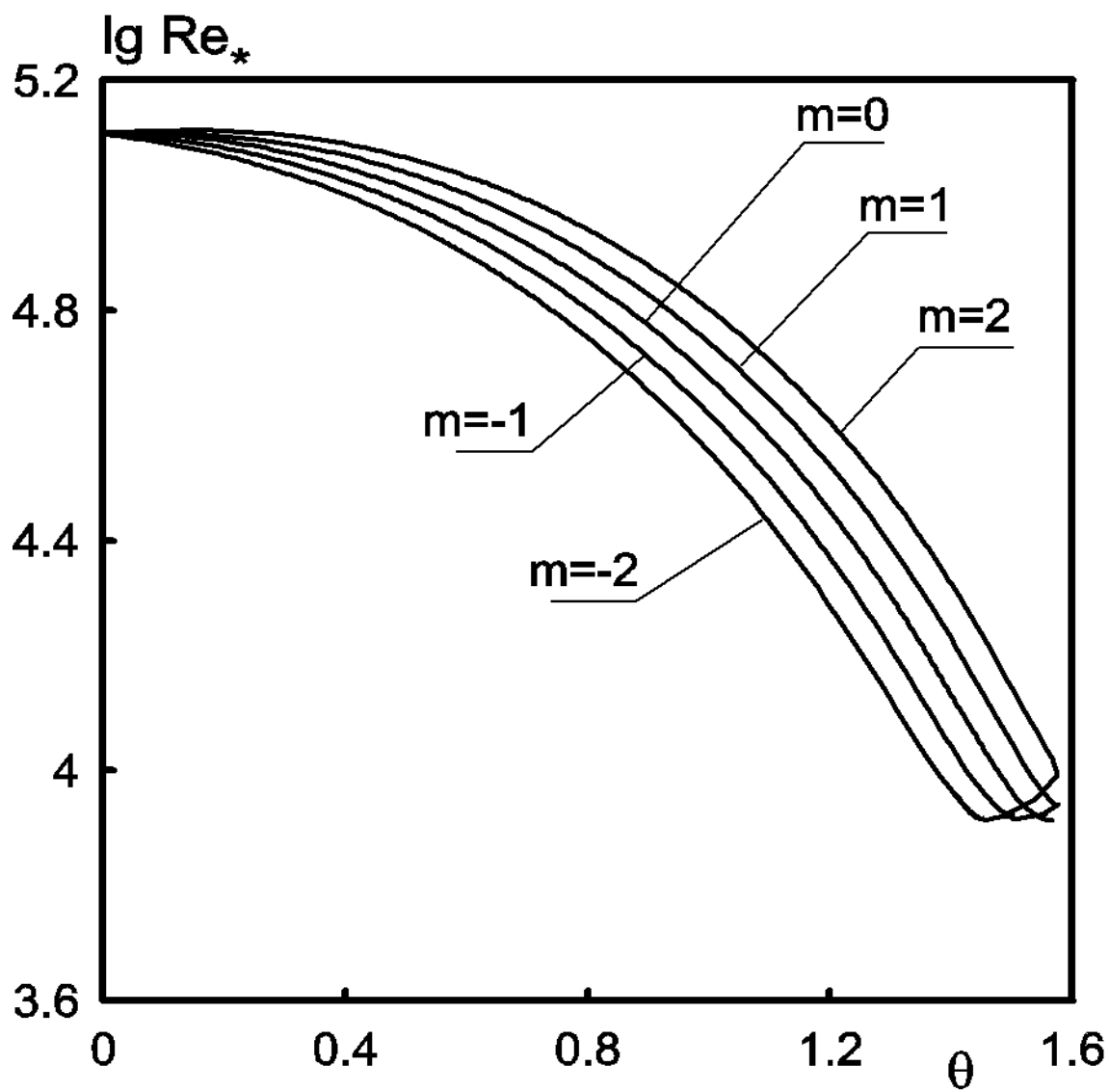


Рис. 2.23 — Зависимости  $Re_*(\theta)$  при  $Ha = 200$ ,  $\xi = 10$ .

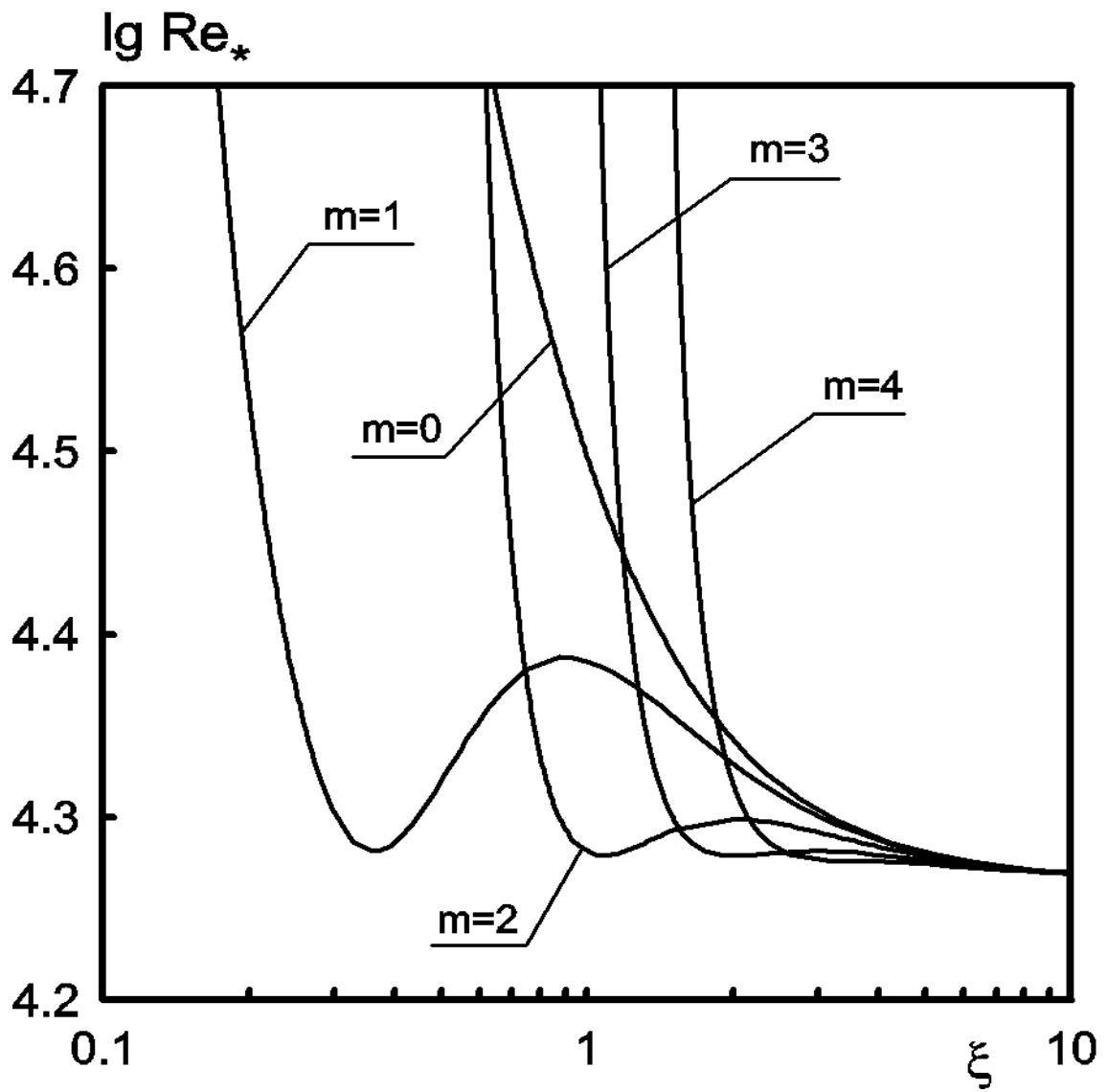


Рис. 2.24 — Зависимости  $Re_*(\xi)$  при  $Ha = 50, \theta = 0$ .

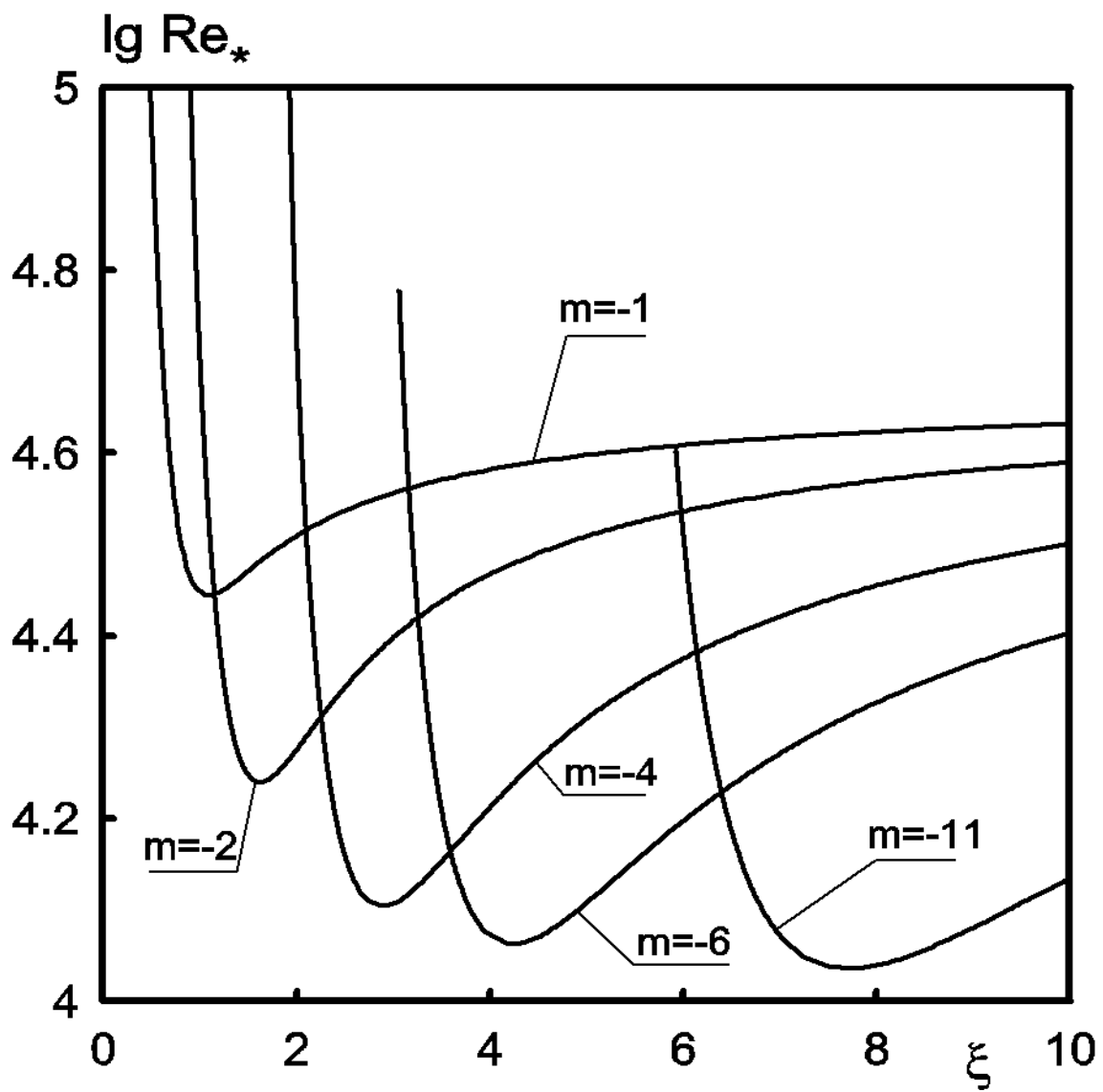


Рис. 2.25 — Зависимости  $Re_*(\xi)$  при  $Ha = 150$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

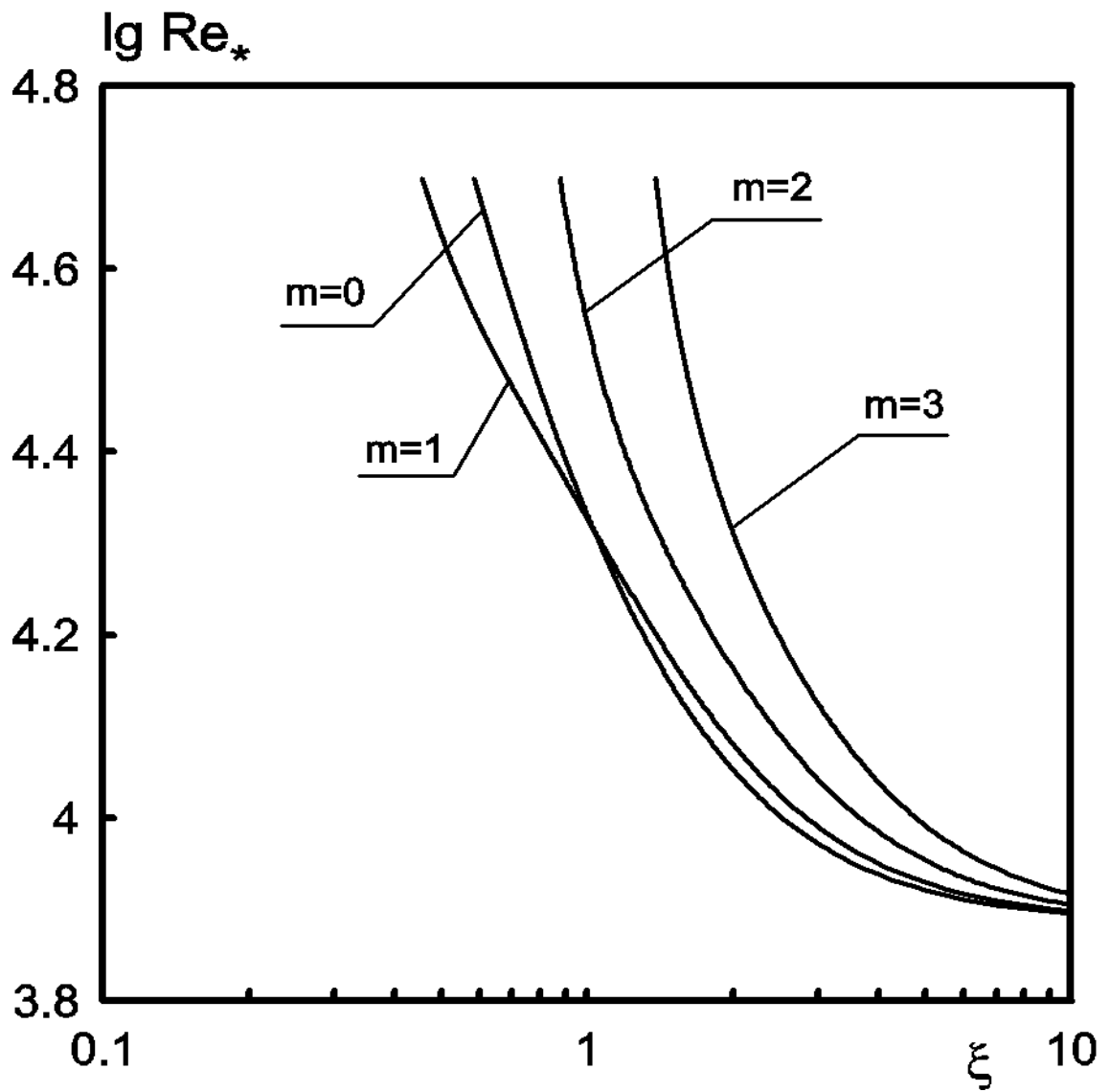


Рис. 2.26 — Зависимости  $Re_*(\xi)$  при  $Ha = 50$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$

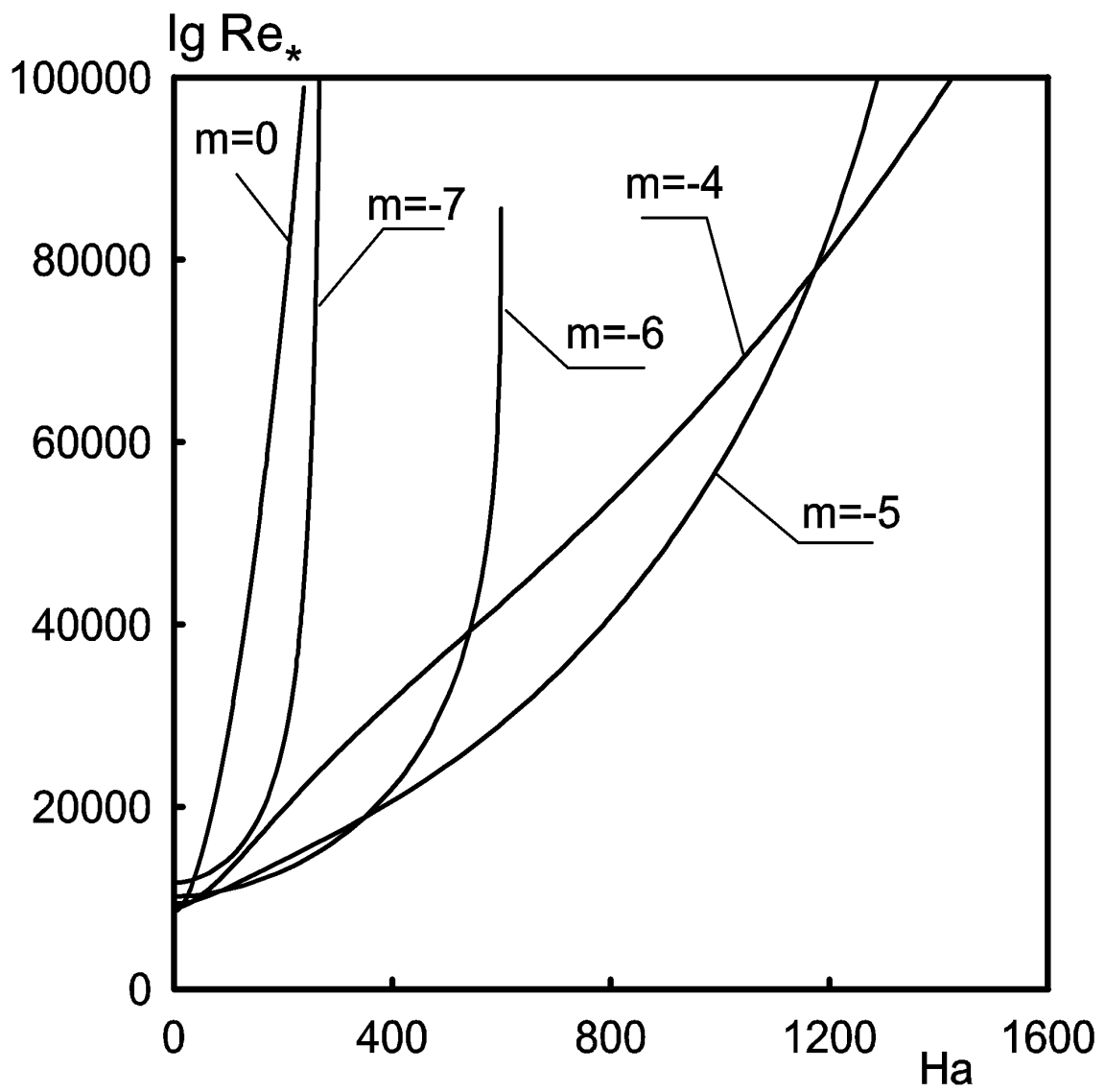


Рис. 2.27 — Зависимости  $Re_*(Ha)$  при  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\xi = 4$

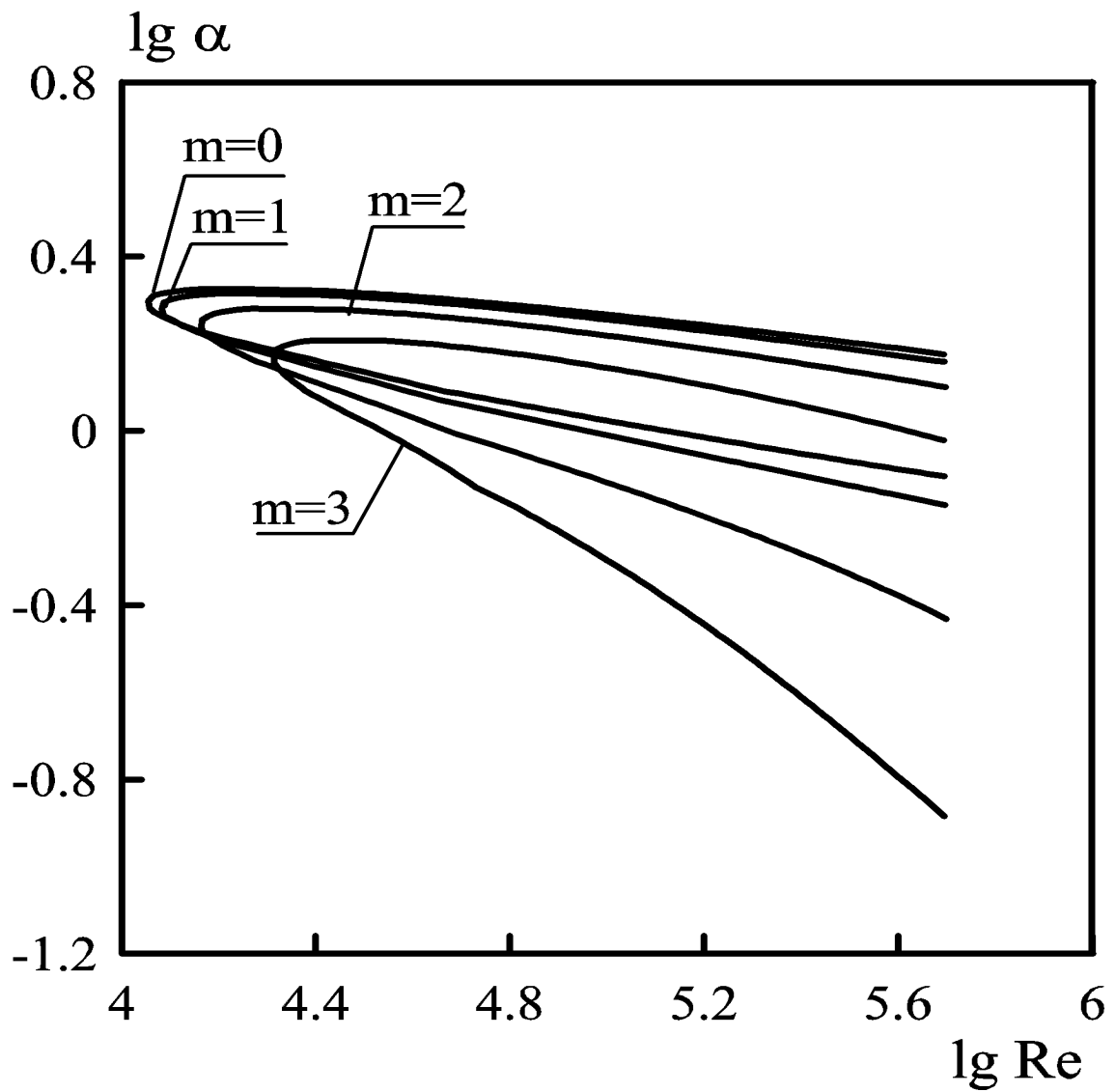


Рис. 2.28 — Нейтральные зависимости при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\xi = 2$ ,  $Ha = 50$

## 2.9 Программная реализация метода дифференциальной прогонки

В процессе проведения исследований устойчивости было написано несколько версий программы, реализующей метод дифференциальной прогонки. Первоначально для разработки программ использовался язык программирования Fortran, а впоследствии – C++. На рисунке 2.29 приведена схема работы программы, написанной на языке C++.

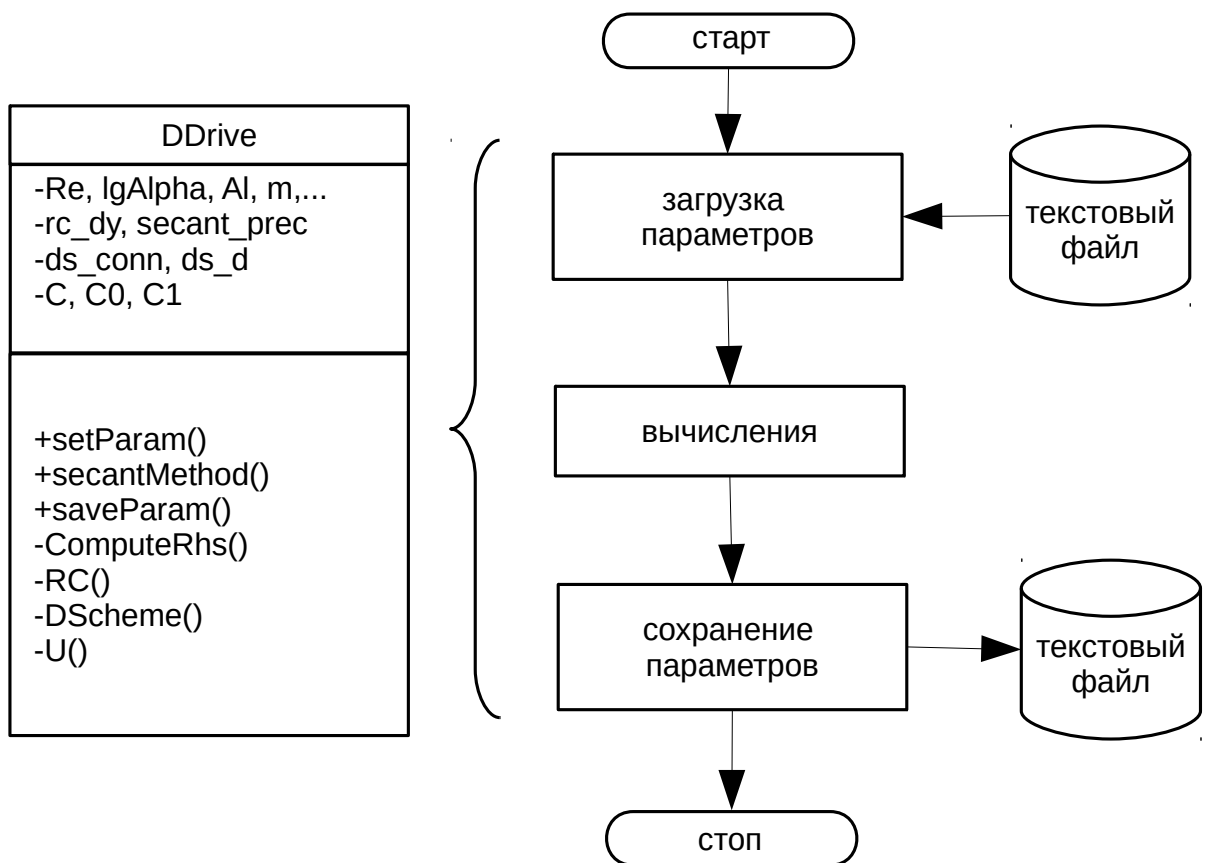
Класс `DDrive` содержит ряд частных переменных, которые можно разделить на группы: физические параметры задачи ( $Re$ ,  $Al, \dots$ ), параметры точности вычислений ( $rc\_dy$  – шаг метода Рунге-Кутты,  $secant\_prec$  – критерий сходимости метода секущих), параметры прогонки ( $ds\_conn$  – точка стыковки,  $ds\_d$  – отступ от краев канала), собственные значения  $S$  и начальные приближения для его вычисления  $S0$ ,  $S1$ . Значения этих переменных считываются из текстового файла при помощи публичного метода `setParam()` и, после окончания работы программы, сохраняются в файл при помощи публичного метода `saveParam()`.

Запуск вычислений осуществляется при помощи публичного метода `secantMethod()`, который реализует метод секущих для уравнения (2.76). Методы `ComputeRhs()` и `U()` отвечают за вычисление правой части уравнений (2.73)–(2.74) и скорости стационарного течения, `RC()` – метод Рунге-Кутты, `DScheme()` – реализация схемы дифференциальной прогонки. В качестве примера на рисунке 2.30 приведен текст функции `DScheme()`. Эта функция была написана с использованием библиотеки шаблонов `Armadillo`, которая обеспечивает простой интерфейс между программой и библиотекой LAPACK. `Armadillo` определяет `arma::Mat` – структуру для хранения матриц, арифметические операции с матрицами, операции линейной алгебры `det()`, `inv()` и другие.

Вычисление собственных, критических и нейтральных значений производилось при помощи программы с графическим интерфейсом, скриншот которой приведен на рисунке 2.31. Программа написана на языке программирования Python с использованием библиотеки `Tkinter` и предназначена для управления вычислениями. В поле слева задаются переменные по осям  $x$  и  $y$ , их диапазоны, значения параметров алгоритма и течения, тип решаемой задачи, расположены кнопки запуска вычислений и сохранения данных. В базовом режиме происходит

вычисление собственных значений. Два начальных приближения задаются указателем мыши на зеленом поле, после чего следует нажать кнопку Calculate. Значения параметров сохраняются в файл и будет запущена программа, производящая вычисления, например, описанная выше. После окончания вычислений собственное значение отобразится в виде точки на зеленом поле, значения параметров слева обновятся. Для вычисления критических и нейтральных зависимостей следует активировать один из пунктов меню: `neutral`, `criticalX`, `criticalY`. Вычисления критических и нейтральных точек производятся аналогично, при этом необходимо придерживаться принципа движения по непрерывности.



Рис. 2.29 — Класс `DDrive` и схема работы программы

```
std::complex<double> DDrive::DScheme(std::complex<double> c) {
    arma::Mat<std::complex<double> > Ap, Am;
    setC(c);
    Ap.zeros(5,5);
    Am.zeros(5,5);
    double yConn = xi+ds_conn, yLeft = xi, yRight = xi+1.0, lInv = yLeft+ds_d, rInv = yRight-ds_d;
    Ap = RC(1,yLeft, lInv, Ap);
    Ap = inv(Ap);
    Ap = RC(2,lInv, yConn, Ap);
    Am = RC(1,yRight, rInv, Am);
    Am = inv(Am);
    Am = RC(2,rInv, yConn, Am);
    std::complex<double> ret;
    ret = det(Ap-Am);
    return ret;
};
```

Рис. 2.30 — Скриншот метода DScheme ( )

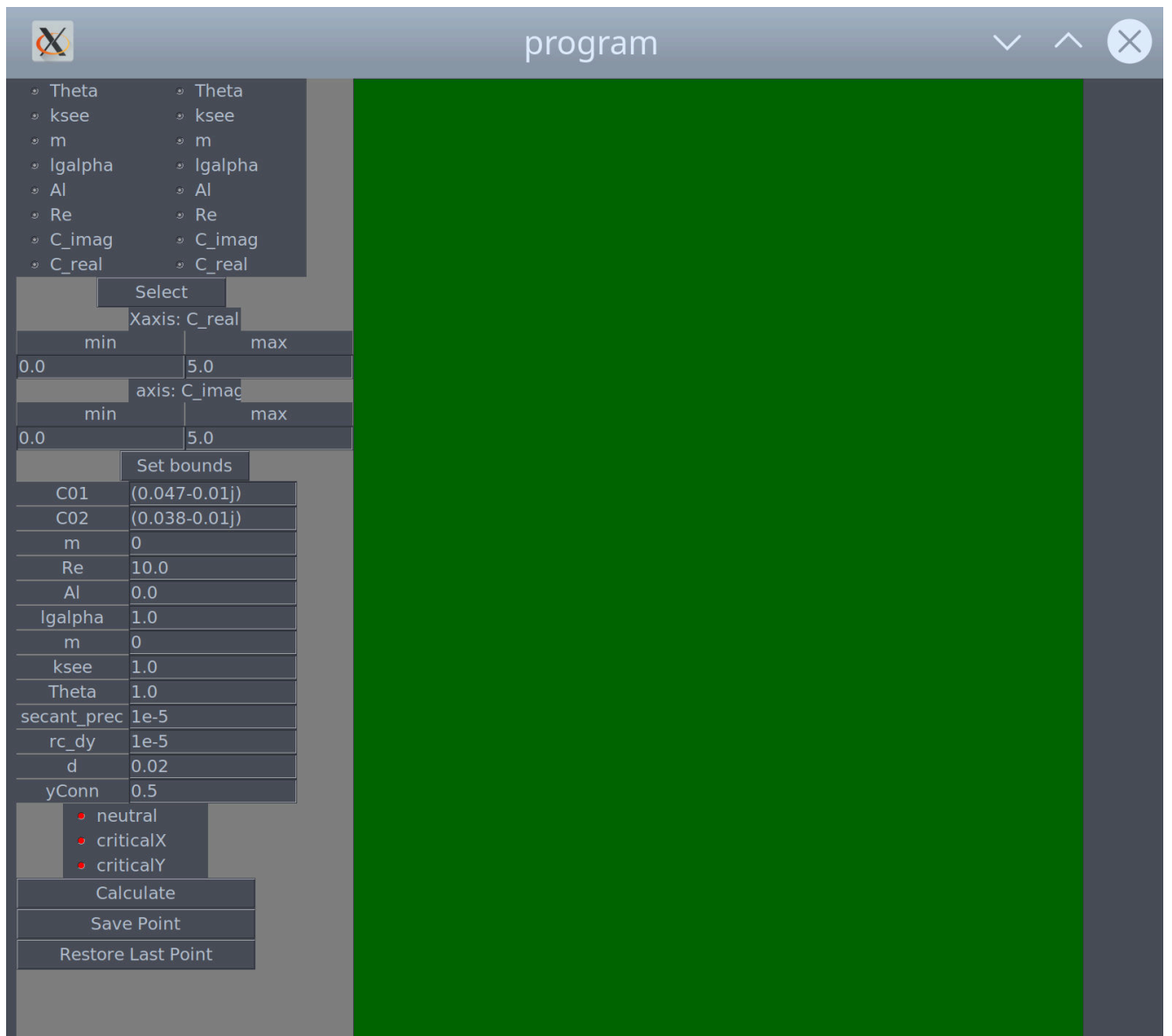


Рис. 2.31 — Программа с графическим интерфейсом для организации вычислений

## 2.10 Программная реализация метода коллокаций

Метод коллокаций для исследования устойчивости плоского течения Пуазейля был реализован на C++. Диаграмма созданных для этого классов приведена на рисунке 2.32. Класс `ChebyshevPolynomials` обеспечивает вычисление значений полиномов Чебышева на заранее заданном множестве точек. При помощи публичного метода `setChebyshevPolynomials` устанавливаются параметры: максимальная степень полиномов `ChebyshevDegree`, точки, в которых они должны вычисляться `*CollocationPoints`, количество сохраняемых в памяти производных `DiffRangeNumber` и их степени `*DiffRange`. Также в этой функции происходит запуск приватного метода `CalculateTheMatrix`, который вычисляет значения полиномов Чебышева и их производных по рекуррентной формуле

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \end{aligned} \quad (2.167)$$

где  $T_n(x)$  – полином Чебышева степени  $n$ . Вычисленные значения сохраняются в массиве `**TheMatrix`. Публичный метод `T(k, n, i)` возвращает значение производной степени  $n$  полинома степени  $k$  в точке с номером  $i$ .

Класс `Poism` обеспечивает вычисление собственных значений и спектральных зависимостей, и их максимумов. Публичные методы `setFlowParam` и `setSchemeParam` присваивают значения параметрам течения и численной схемы, соответственно. В методе `eig_val()` реализовано вычисление матриц и решение алгебраической задачи на собственные значения (2.81). Для этого использовалась функция `zgegv()` из библиотеки `asm1` –реализации LAPACK, оптимизированной для процессоров AMD. Метод `spectr()` реализует вычисление спектральных зависимостей наподобие приведенных на рисунке 2.2, в качестве параметров функция принимает максимальное и минимальное значения параметра  $\lg(\alpha)$ , количество точек и имя файла, в который будут сохранены результаты. Пример программы, вычисляющей спектральные зависимости, приведен на рисунке 2.32: задаются параметры течения  $Re = 1000$ ,  $Al = 1$ ,  $Pm = 1$ , задается число точек коллокации, равное 150, вычисляются спектры при  $0.0 \leq \lg(\alpha) \leq 0.4$  (число точек разбиения по  $\alpha$  равно 30) и результаты сохраняются в текстовый файл `example`.

Также в классе определена публичная функция, которая возвращает максимум мнимой части собственного значения, которого оно достигает при изменении  $\lg(\alpha)$ . Эта функция играет вспомогательную роль при вычислении критических зависимостей, которое обеспечивается классом `2Dgrph`. Пример использования класса `2Dgrph` приведен на рисунке 2.32. Функция `double f(double x, double y)` задает положение кривой  $f(x, y) = 0$ , обозначенной линией на рисунке 2.33. Класс `2Dgrph` разбивает область исследования критических зависимостей при помощи сетки, также показанной на этом рисунке. Сетка задается при помощи метода `setGrid()`. В узлах сетки анализируются значения функции  $f()$ , например, на отрезках АВ и ВС она меняет знак. Для того, чтобы определить положение кривой  $f(x, y) = 0$  точнее, на отрезках АВ и ВС использовался метод дихотомии. Таким образом, при помощи подходящей сетки производились полностью автоматические вычисления кривых критических зависимостей, приведенных в разделе 2.6.

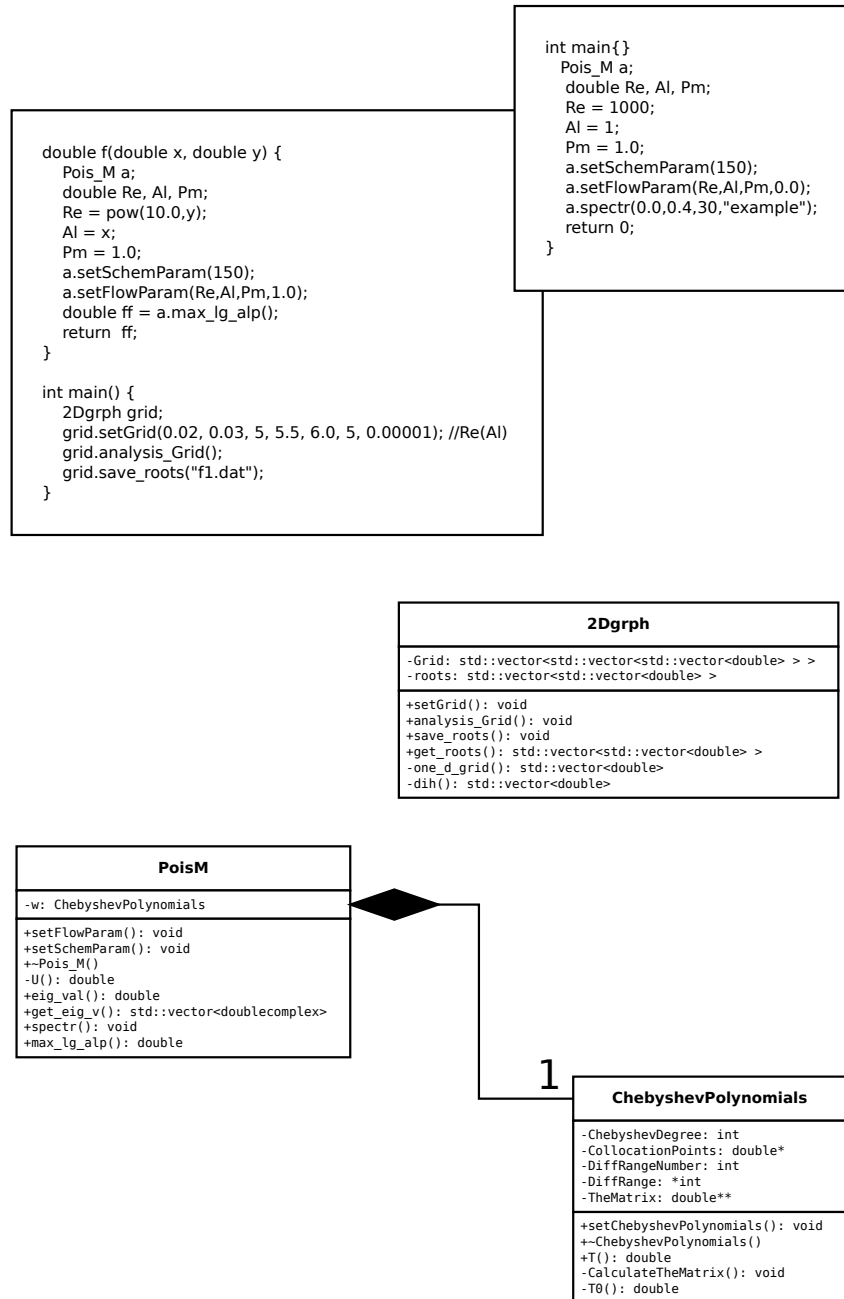


Рис. 2.32 — Диаграмма классов, реализующих метод коллокаций, и примеры использования

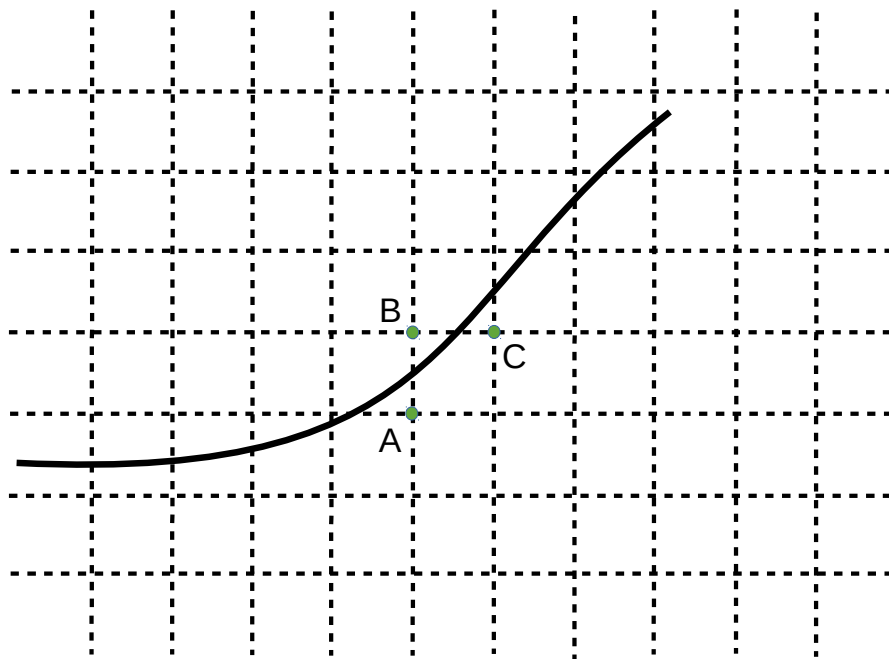


Рис. 2.33 — Схема вычисления критических чисел

## 2.11 Основные результаты главы 2

1. В главе 2 на примере плоского течения Пуазейля объяснена постановка линейной задачи гидродинамической устойчивости, введено уравнение Орра-Зоммерфельда. Также на примере течения Пуазейля объясняются особенности применения численных методов: псевдоспектрального метода, метода коллокаций К.И. Бабенко, метода дифференциальной прогонки.
2. Изучена устойчивость плоского течения вязкой электропроводящей жидкости в продольном магнитном поле. В этом направлении удалось сильно продвинуться по сравнению с более ранними работами. Произведен беспрецедентно большой объем вычислений для случая произвольных магнитных чисел Рейнольдса. Обнаружено существование критических зависимостей сложной формы и скачкообразное изменение критических чисел Рейнольдса при изменении числа Альфвена.
3. Найдена новая магнитогидродинамическая мода. Ее существование подтверждено использованием независимых численных методов коллокаций и дифференциальной прогонки. Также существование этой моды в более позднее время верифицировано группой независимых исследователей [141].
4. Расчеты, аналогичные плоскому случаю, дополнены результатами в цилиндрической геометрии. Результаты исследования линейной устойчивости в плоском канале и канале кольцевого сечения могут быть полезны для работ, связанных с постройкой бланкетов перспективных ядерных и термоядерных реакторов, где магнитное число Рейнольдса нельзя считать малым.
5. Обнаружено, что спиральное магнитное поле может вызывать уменьшение критических чисел Рейнольдса течения в канале кольцевого сечения. Поэтому увеличение числа Гартмана в данной постановке задачи не всегда приводит к стабилизации данного течения. Уменьшение радиуса внутреннего цилиндра приводит увеличению критических чисел Рейнольдса за счет стабилизации азимутальных мод с большими номерами, так же, как и в случае только продольного магнитного поля.



6. В диссертации объясняется структура компьютерных программ и технических приемов вычислений. Сделаны пояснения о возможностях применения современных вычислительных технологий, автоматизации вычислений, путях облегчения взаимодействия человека и компьютера в случае управления расчетами гидродинамической устойчивости.

## Глава 3. Метод функций Рвачева

### 3.1 Функции Рвачева и краевые задачи

Поиск новых численных методов, которые были бы проще и эффективнее существующих, является важным направлением вычислительной гидродинамики. Существует группа мало исследованных методов, основанных на функциях В.Л. Рвачева [157; 159; 161; 264]. Эти методы позволяют вынести работу с геометрией задачи и учет граничных условий за пределы основного рабочего потока численного алгоритма, вследствие чего численный алгоритм и соответствующая программа могут быть существенно упрощены. Современные программные комплексы для расчета течений жидкости чрезмерно сложны и есть неотложная потребность разработки более простых методов и подходов, которые позволили бы, во-первых, независимо проверять уже существующие программы и, во-вторых, быстро разрабатывать программы с использованием новых возможностей вычислительной техники, таких как вычисления на GPU.

Метод функций Рвачева может использоваться с любым численным методом: спектральным, конечных элементов, конечных разностей и так далее. Методы конечных разностей и конечных элементов хорошо разработаны и широко используются в технических приложениях. Однако, они обладают низким порядком точности и неэффективны для задач гидродинамической устойчивости (это показано, например, работе [170]) и моделирования течений при больших числах Рейнольдса. Поэтому наиболее перспективно разрабатывать подходы с использованием функций Рвачева в сочетании с ненасыщаемыми численными методами.

В работе [154] было показано, что граничные условия Дирихле  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$  могут быть удовлетворены точно при помощи функции  $\omega$ , обращающейся в нуль на границе области  $\Omega$ , если представить решение краевой задачи в виде

$$u = \omega \sum_0^N C_i \psi_i + \varphi, \quad (3.1)$$

где  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$  – система линейно-независимых базисных функций,  $C_i$  – неизвестные коэффициенты, значения которых можно определить каким-либо подходящим способом, например, методом коллокаций. Функцию  $\omega$  называют «гранич-

ной функцией» или, что не совсем точно, «функцией расстояния до границ», а правую часть (3.1) называют «пучком функций» или «структурой решения», приближенно представляющими решение краевой задачи.

Чтобы применять метод, описываемый формулой (3.1), нужно владеть способом, который позволил бы находить граничные функции для областей произвольной или почти произвольной формы. Такой способ был предложен и описан в работах [155-161]. Этот способ основан на предположении, что область, в которой нужно найти решение краевой задачи, можно получить путем пересечений и объединений более простых областей, для которых граничные функции известны. В.Л. Рвачевым были введен класс R-операций над граничными функциями, которые соответствуют таким объединениям и пересечениям. Были предложены пучки функций, которые позволяют точно удовлетворить граничным условиям, содержащим функции от независимых переменных и решения краевой задачи, производные первого и более высоких порядков, в том числе по нормали к границе.

Рассмотрим R-операции на примере конъюнкции и дизъюнкции, предложенных в работе [265]

$$\begin{aligned} R_c &= f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 0.01e^{-100f_1^2 - 100f_2^2}}, \\ R_d &= f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 0.01e^{-100f_1^2 - 100f_2^2}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

На рисунке 3.1 показаны диаграммы Венна R-конъюнкции (а) и R-дизъюнкции (с) полос  $f_1 = 1 - x^2$ ,  $f_2 = 1 - y^2$ , графики соответствующих граничных функций (b,d) получены с помощью выражений (3.2).

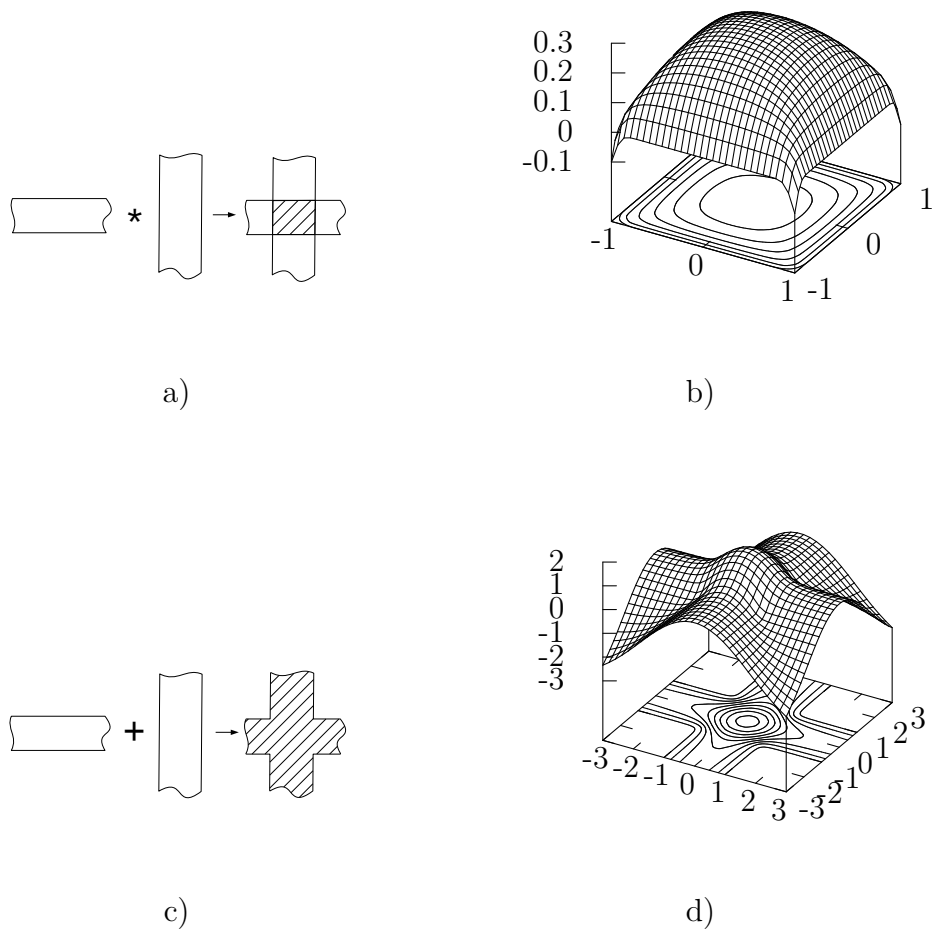


Рис. 3.1 — Примеры R-операций: а) конъюнкция двух полос, б) граничная функция прямоугольника, с) дизъюнкция двух полос, д) граничная функция креста.

### 3.2 Течение в деформируемой трубе

Рассмотрим коаксиальную трубу, сечение которой изображено на рисунке 3.2. Внешняя граница трубы обозначена  $\Omega$ , внутренняя –  $\Omega_{in}$ , обе эти линии вместе обозначим  $\Gamma$ . Исследуем зависимость сопротивления трубы от диаметра внутреннего цилиндра и его перемещений внутри трубы, обозначенных на рисунке 3.2 стрелкой, а также от деформации внешней оболочки трубы.

Запишем систему уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{V} \\ \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0; \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{V}$  – вектор скорости,  $\eta$  – коэффициент вязкости,  $\rho$  – плотность жидкости.

Выберем ось  $z$  прямоугольной системы координат параллельно оси трубы. Будем считать, что градиент давления  $k$  вдоль оси  $z$  постоянный, а скорость  $V$  направлена также вдоль оси  $z$ . Тогда система уравнений (3.3) в стационарном случае примет вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) V = \frac{k}{\eta}, \quad (3.4)$$

Таким образом, параметры течения будут зависеть только от величины  $\frac{k}{\eta}$  и геометрии трубы. Так как уравнение (3.4) линейно, достаточно вычислить поле скоростей только для одного значения правой части. Значения скоростей для всех

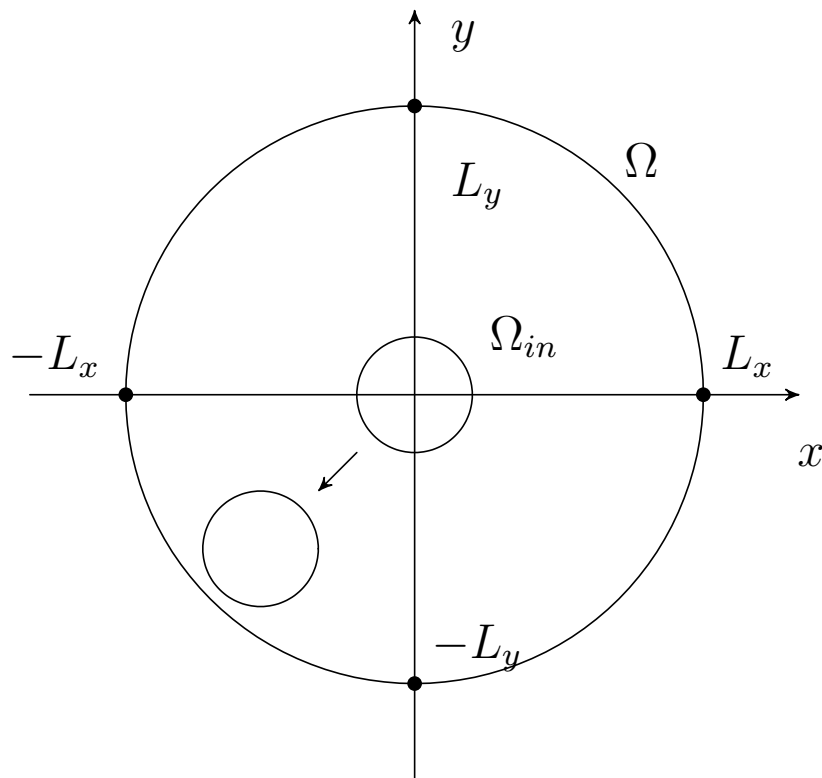


Рис. 3.2 — Поперечное сечение трубы

остальных величин  $\frac{k}{\eta}$  можно получить элементарным преобразованием уже вычисленных скоростей. Для дальнейших вычислений положим правую часть уравнения (3.4) равной  $-1$ . Граничные условия имеют вид

$$V = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (3.5)$$

В данной работе использовалась R-конъюнкция, предложенная в [266]

$$\omega_{\Gamma} = \Omega + \Omega_{in} - \sqrt{\Omega^2 + \Omega_{in}^2 + 0.001e^{-\Omega^2 - \Omega_{in}^2}}, \quad (3.6)$$

где  $\Omega = 1 - \frac{y^2}{Ly^2} - \frac{x^2}{Lx^2}$  и  $\Omega_{in} = (x - x_{in})^2 + (y - y_{in})^2 - r_{in}^2$  – граничные функции для внешнего и внутреннего цилиндров,  $r_{in}$  – радиус внутреннего цилиндра,  $x_{in}, y_{in}$  – координаты его центра. График этой функции приведен на рисунке 3.3,  $r_{in} = 0.2$ ,  $d = \sqrt{x_{in}^2 + y_{in}^2} = 0$ , линии уровня проведены для значений функции, равных 0, 0.2, 0.4. На рисунке 3.4 приведен аналогичный график при радиусе внутреннего цилиндра  $r_{in} = 0.5$  и смещении  $d = 0.7$ . В данном случае границы пересекаются и функция (3.6) обеспечивает скругления границ в местах пересечения с сохранением дифференцируемости  $\omega_{\Gamma}$ .

Ниже приведен код на Python с использованием модуля Sympy для вычисления граничной функции

```
from sympy import *
x,y = symbols('x,y')
f1,f2 = symbols('f1,f2')
k,a,b = symbols('k,a,b')
cS1 = f1+f2-(f1**(2*k)+f2**(2*k))
      +a*exp(-b*(f1**(2*k)+f2**(2*k))))**(1/(2*k))
cS1 = cS1.subs(a,0.001).subs(b,1).subs(k,1)
r_in = 0.5
x0 = 0.7
y0 = 0
Lx,Ly = symbols("Lx,Ly")
Omega_in = -(r_in**2-(x-x0)**2-(y-y0)**2)
Omega = 1-(x/Lx)**2-(y/Ly)**2
Omega_Gamma = cS1.subs(f1,Omega).subs(f2,Omega_in)
plotting.plot3d(Omega_Gamma.subs(Lx,1).
                subs(Ly,1),(x,-1,1), (y,-1,1))
```

Такой способ позволяет эффективно работать с областями простой геометрии, однако выражения для старших производных получаются довольно громоздкие. Тем не менее, этого достаточно для рассматриваемой задачи и не требуется разработка специального программного обеспечения. Процесс вычисления граничной функции может производиться и для областей намного более сложной формы, а также автоматически, как показано в работах [157; 159; 267].

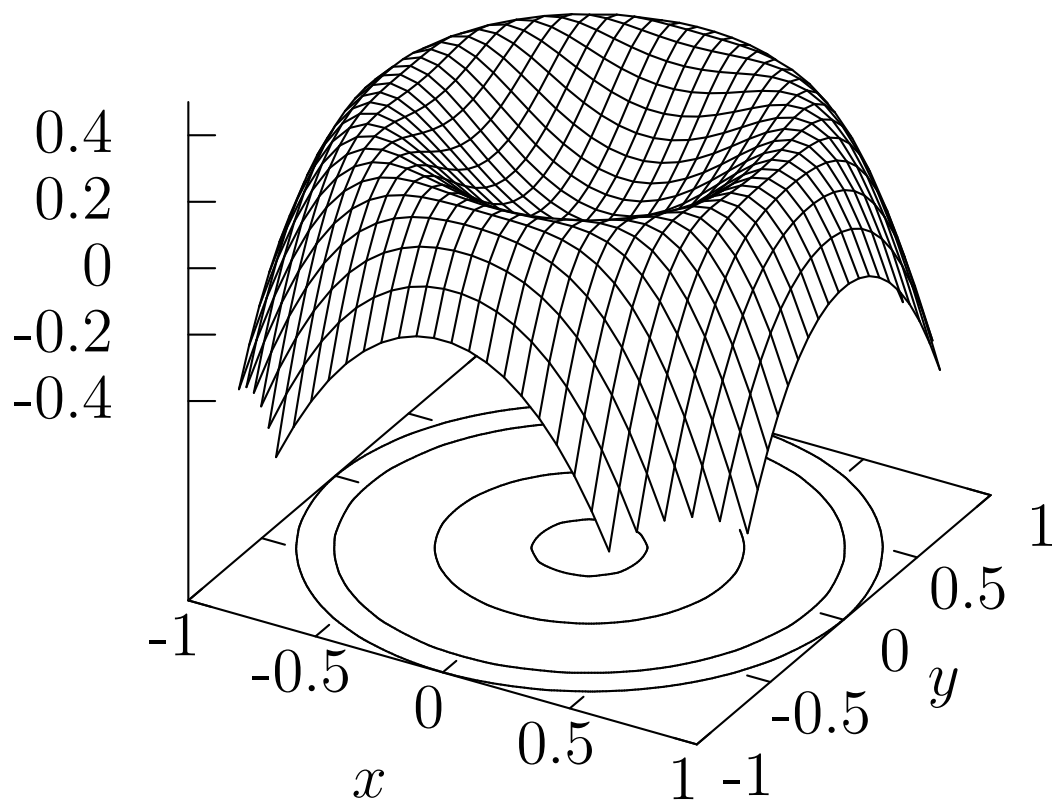


Рис. 3.3 — График функции  $\omega_\Gamma$ ,  $r_{in} = 0.2$ ,  $d = 0$ , линии уровня 0, 0.2, 0.4

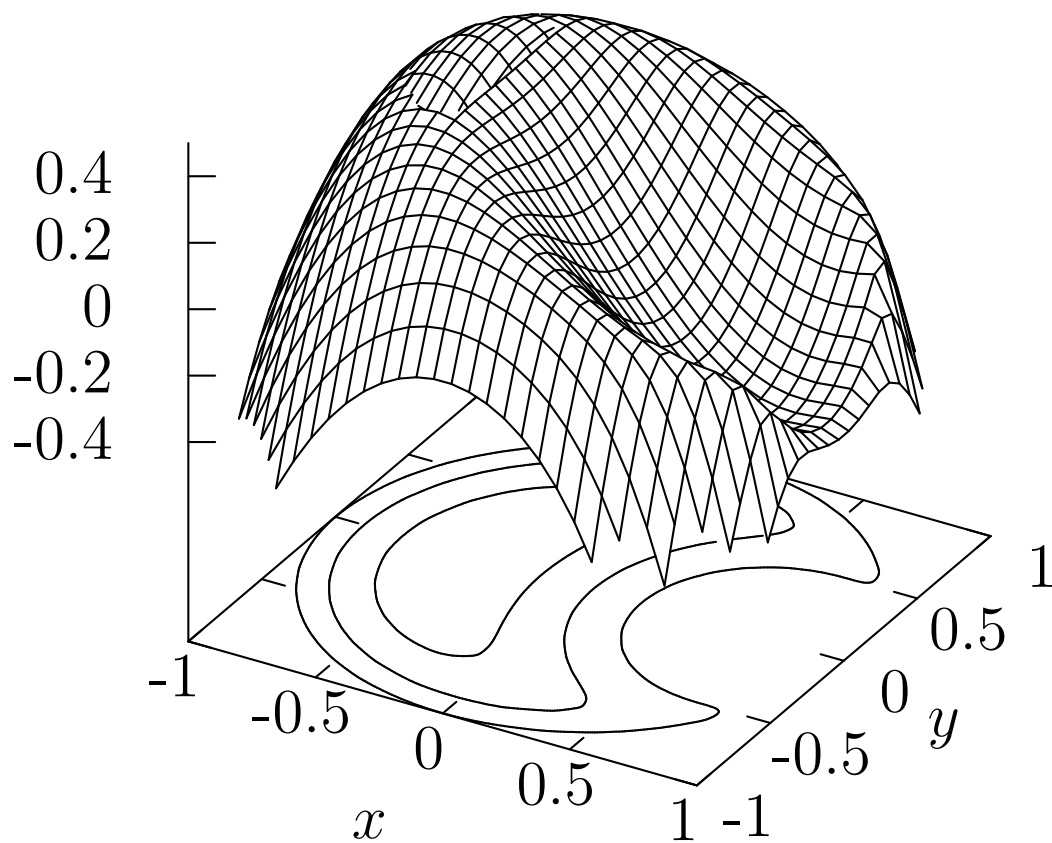


Рис. 3.4 — График функции  $\omega_\Gamma$ ,  $r_{in} = 0.5$ ,  $d = 0.7$ , линии уровня 0, 0.2, 0.4



Структура решения, удовлетворяющая граничным условиям (3.5), согласно [157] имеет вид

$$V = \omega_{\Gamma} \Phi_1, \quad (3.7)$$

где  $\Phi_1 = \sum_{ij} a_{ij} T_i(x) T_j(y)$  – неопределенная компонента пучка, в которой  $a_{ij}$  – коэффициенты,  $T_i(x)$ ,  $T_j(y)$  – полиномы Чебышева первого рода степени  $i$  и  $j$ , приведенные к соответствующему интервалу.

Зададим равномерное разбиение прямоугольной расчетной области по горизонтали  $\{x_0, x_1, \dots, x_{nx}\}$  и по вертикали  $\{y_0, y_1, \dots, y_{ny}\}$ . Упорядочим эти точки построчно  $\mathbf{x} = \{(x_0, y_0), (x_1, y_0), \dots, (x_{nx}, y_{ny})\}$ . Далее в работе будем придерживаться аналогичного порядка: величины, пронумерованные по  $x$  и  $y$  будем обозначать индексами  $i$  и  $j$ , а величины, пронумерованные построчно – индексом  $k$ .

Введем функцию

$$g_k(x, y) = \omega_{\Gamma}(x, y) T_i(x) T_j(y) \quad (3.8)$$

и скалярное произведение

$$\langle l(x, y), g_k(x, y) \rangle = \int_{-L_x}^{L_x} dx \int_{-L_y}^{L_y} dy l(x, y) g_k(x, y), \quad (3.9)$$

где  $l(x, y)$  – произвольная интегрируемая функция, буквой  $L$  с соответствующими индексами обозначены границы области интегрирования.

Введем вектор  $\xi = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ . Здесь  $n = p_x \cdot p_y$ , где  $p_x, p_y$  – максимальная степень полиномов Чебышева по осям  $x$  и  $y$ . Подставим (3.7) в (3.4) и, используя операцию (3.9), получим алгебраическую систему уравнений

$$A\xi = \mathbf{b}, \quad (3.10)$$

где  $A_{km} = \langle (\Delta g_m), g_k \rangle$ ,  $b_k = -\langle 1, g_k \rangle$ . Значения функции  $g_k(x, y)$  заданы в точках множества  $\mathbf{x}$ , для интегрирования использовался метод Симпсона. Система (3.10) решалась численно при помощи *LAPACK*.

Для проверки алгоритма исследуем течение в коаксиальной трубе, для которого известно точное решение

$$V = \frac{kr^2}{4} + \frac{k(-r_0^2 + 1) \ln(r)}{4 \ln(r_0)} - \frac{k}{4}, \quad (3.11)$$

где  $r$  – расстояние от оси трубы.

Таблица 3.1: Значения скорости в точке  $x = 0.0$ ,  $y = 0.6$  при разном количестве членов разложения  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $d = 0$ ,  $r_{in} = 0.2$

$p_x$	$p_y$	
5	5	0.7833
10	10	0.0777
15	15	0.0767
20	20	0.0814
25	25	0.0814
30	30	0.0817
35	35	0.0824
40	40	0.0838
выр. (3.11)		0.0838

В таблице 3.1 приведены значения скорости в точке  $x = 0.0$ ,  $y = 0.6$  при разном количестве членов разложения  $p_x$ ,  $p_y$ . Для сравнения приведены значения, вычисленные по формуле (3.11). Интегралы вычислялись при количестве точек  $n_x = n_y = 100$ . С увеличением  $p_x$  и  $p_y$  точность вычисления значения скорости монотонно увеличивается и достигает значения менее  $10^{-4}$ .

На рисунке 3.5 приведены зависимости расхода жидкости при постоянном градиенте давления от смещения внутреннего цилиндра. Рассмотрены три значения радиуса внутреннего цилиндра  $r_{in} = 0.1, 0.25, 0.5$ . Цилиндр смещался из центрального положения до тех пор, пока не выходил за пределы границы внешнего цилиндра. Значения нормированы по величине потока в трубе без внутреннего элемента. Соппротивление трубы уменьшается при уменьшении диаметра внутреннего цилиндра, оно максимально при его центральном положении и монотонно уменьшается при смещении.

На рисунке 3.6 приведены зависимости расхода жидкости при постоянном градиенте давления от деформации оболочки по оси  $y$ . Труба может сжиматься при изгибе или под действием внешней силы. Предположим, что при таком сжатии внешняя оболочка образует эллипс, периметр которого не меняется при сжатии. Рассмотрены три значения радиуса внутреннего цилиндра  $r_{in} = 0.1, 0.25, 0.5$ , сжатие производилось до смыкания внешней оболочки и внутреннего цилиндра. Расход жидкости нормирован так же, как на предыдущем графике. Сжатие меньше всего влияет на расход жидкости в случае внутреннего цилиндра большего радиуса  $r_{in} = 0.5$ . Коаксиальная труба с тонким центральным элемен-

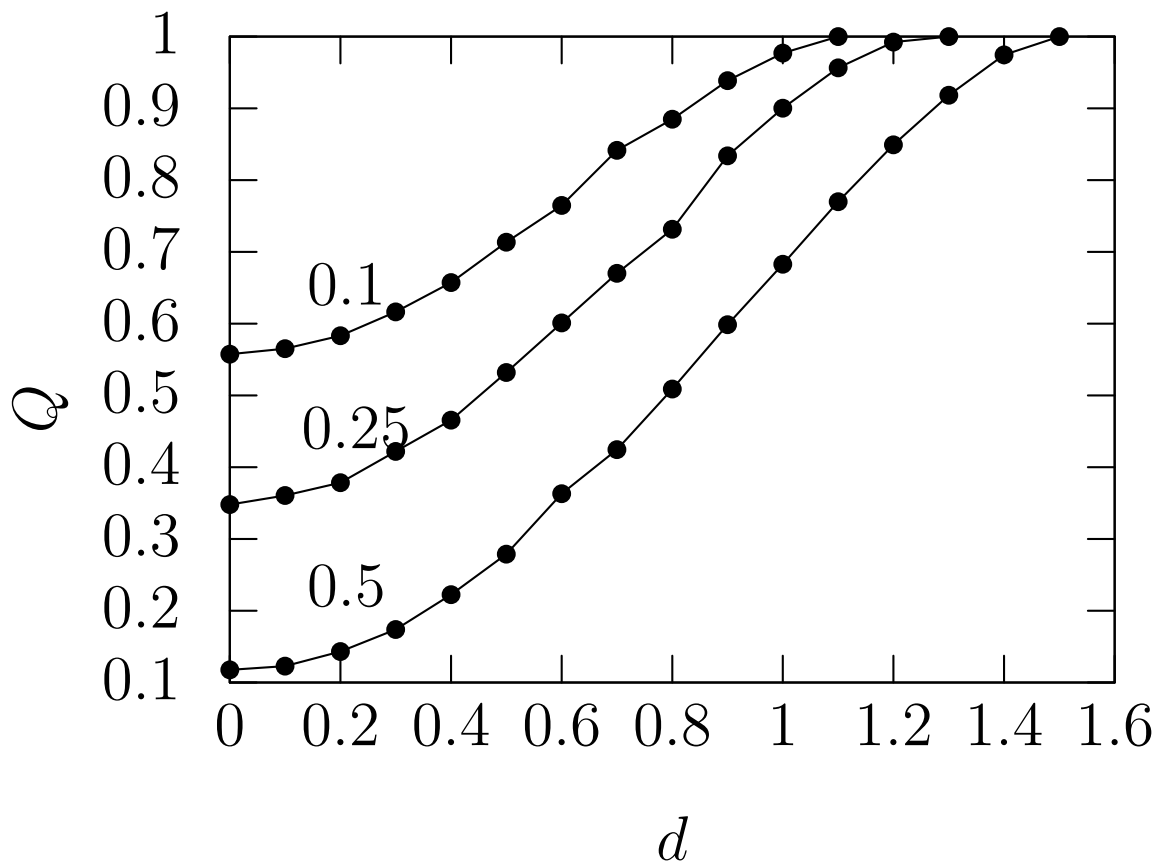


Рис. 3.5 — График зависимости расхода жидкости  $Q$  от смещения центрального элемента  $d$ ,  $r_{in} = 0.1, 0.25, 0.5$

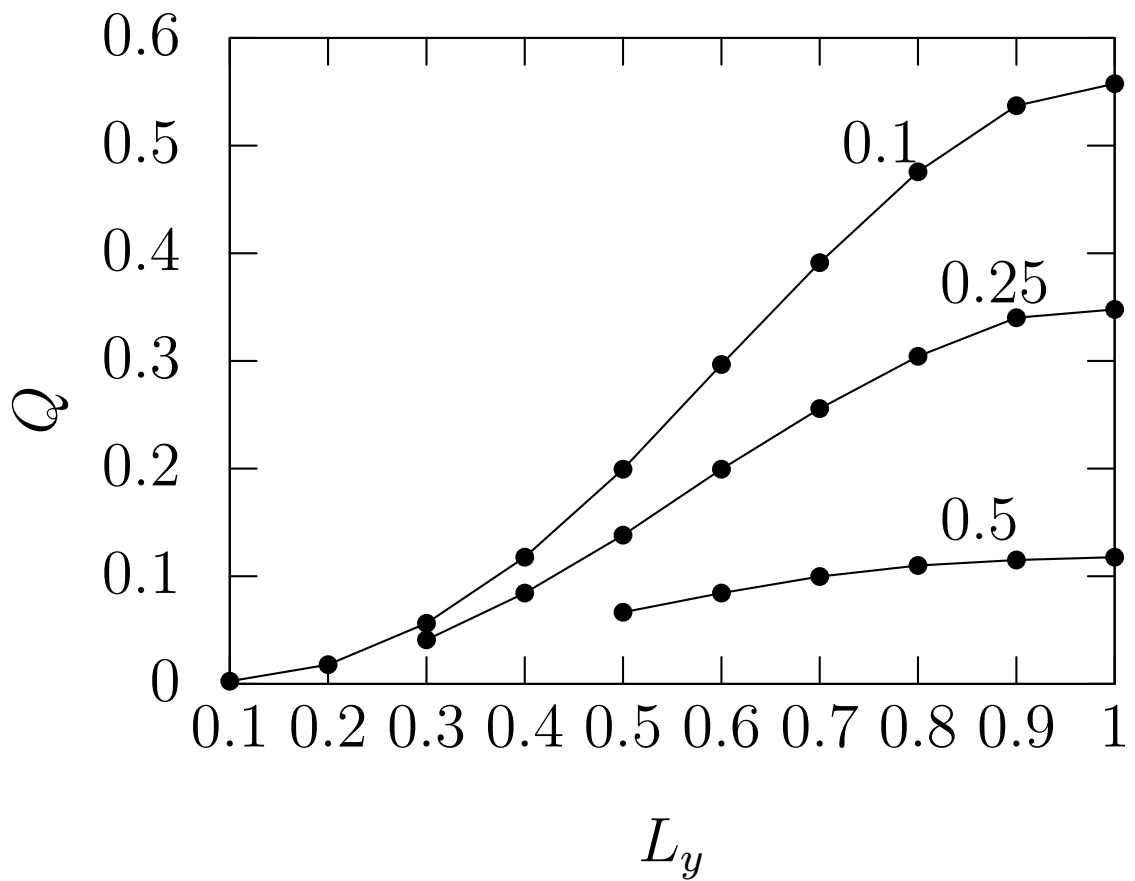


Рис. 3.6 — График зависимости расхода жидкости  $Q$  от деформации внешней оболочки трубы  $L_y$ ,  $r_{in} = 0.1, 0.25, 0.5$

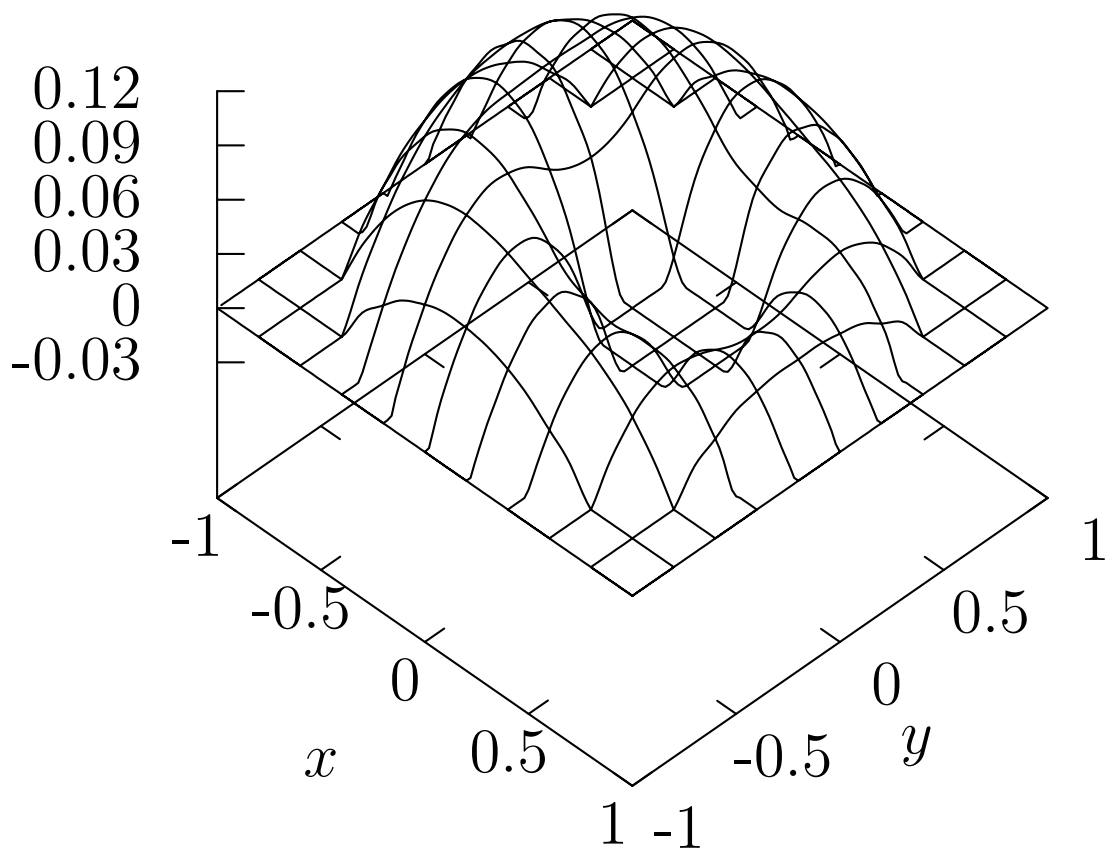


Рис. 3.7 — График поля скоростей в трубе,  $r_0 = 0.25$ ,  $d = 0.2$

том более чувствительна к пережатию. На рисунке 3.7 приведен график поля скорости в круглой трубе при  $r_0 = 0.25$  и смещении  $d = 0.2$ .

Таким образом, была рассмотрена зависимость потока от диаметра центрального цилиндра и от его положения внутри трубы при постоянном градиенте давления, а также от деформации стенки наружной трубы. Установлено, что при смещении внутреннего элемента от центра трубы расход жидкости увеличивается, а сопротивление трубы, таким образом, уменьшается. При сжатии внешней оболочки расход жидкости уменьшается. Эффект сжатия более выражен для малых диаметров внутреннего цилиндра. Предложенный метод удобен для оптимизации параметров течений по сравнению с методом конечных элементов, так как не требует создания сеток для каждого рассмотренного варианта геометрии трубы, изменение геометрии канала может производиться непрерывно. Данный метод можно использовать и при наличии нескольких внутренних цилиндров, а также в тех случаях, когда стенки трубы имеют более сложное сечение.

### 3.3 Течение в прямоугольной трубе с центральным элементом

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в коаксиальной трубе, сечение внутренней стенки которой – круг, а наружной – прямоугольник (см. рисунок 3.8). Внешняя граница трубы обозначена  $\Omega$ , внутренняя –  $\Omega_c$ , обе эти линии вместе обозначим  $\Gamma$ . В этом разделе исследуется зависимость сопротивления трубы от диаметра внутреннего цилиндра и его перемещений внутри трубы, обозначенных на рисунке 3.8 стрелками.

В данной работе использовалась R-конъюнкция

$$R = \omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}, \quad (3.12)$$

а также R-конъюнкция

$$R_S = \omega_1 \wedge_S \omega_2 = -b + a^{\omega_1} + a^{\omega_2} - \sqrt[k]{a^{k\omega_1} + a^{k\omega_2}}, \quad (3.13)$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – граничные функции двух пересекающихся областей,  $a > 1$ ,  $1 \leq b \leq 2 - \sqrt[k]{2}$ . Полагая прямоугольник пересечением двух полос  $\omega_{Sx} = -0.25(x^2 - 1)$ ,

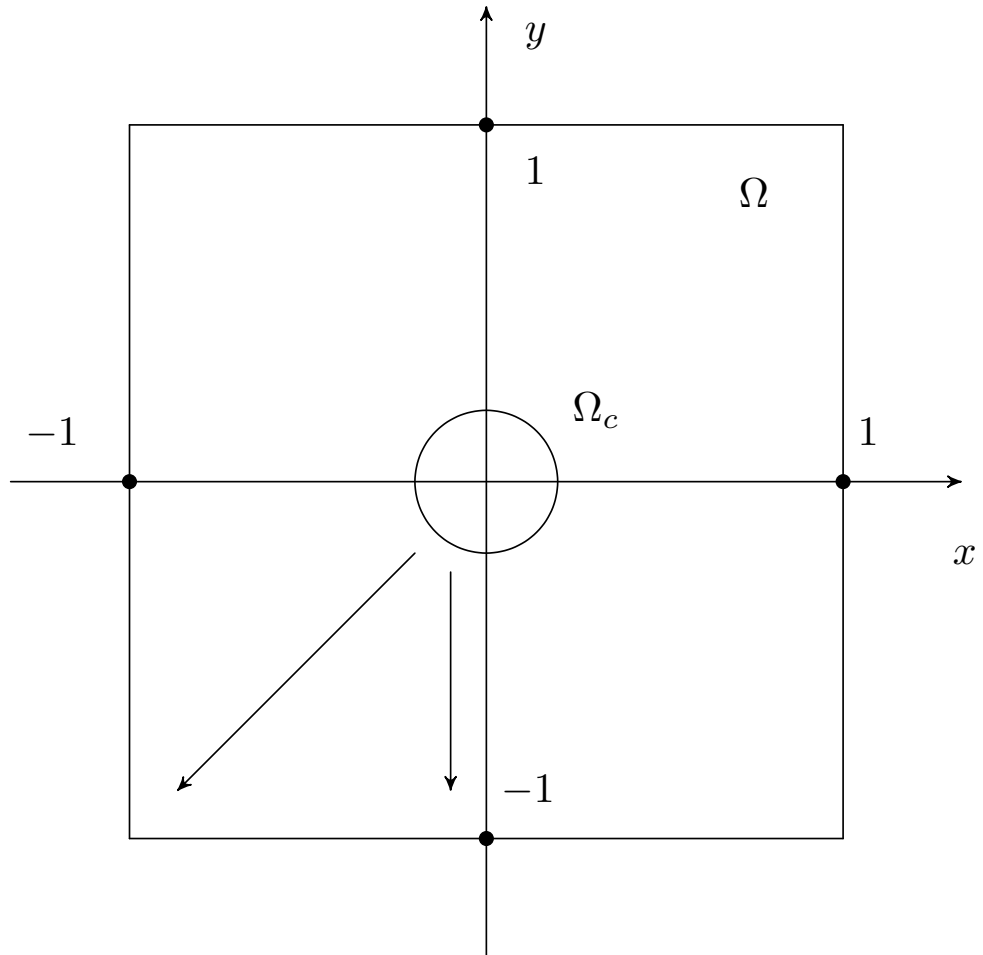


Рис. 3.8 — Поперечное сечение трубы

$\omega_{Sy} = -0.25(y^2 - 1)$ , при помощи (3.13) получим граничную функцию прямоугольника  $\Omega$ , график которой приведен на рисунке 3.9. Параметры  $a$  и  $b$  определяют радиус скругления углов прямоугольника. Большие значения соответствуют меньшим радиусам скругления. В данной работе мы приняли эти значения равными  $a = 50$ ,  $k = 50$ , а  $b = 1$  на основе рекомендаций из статьи [266] и собственных оценок. Для задания прямоугольника конъюнкция (3.6) более удобна, чем (3.12), так как ее производные не имеют особенностей в угловых точках границы. Этот вопрос подробно рассмотрен в статье [265]. Если же границы двух областей не имеют точек пересечения, как в рассматриваемом случае, то предпочтительнее использовать более простое выражение (3.12). Граничную функцию для центрального элемента трубы возьмем в виде  $r_0^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2$ , где  $r_0$  – радиус центрального цилиндра,  $x_0, y_0$  – координаты его центра. С помощью  $R$ -конъюнкции (3.12) получим выражение для функции  $\omega_\Gamma$ . График этой функции приведен на рисунке 3.10.

Для примера ниже приведен код вычисления граничной функции прямоугольника:

```

from sympy import *
x,y = symbols('x,y')
f1,f2 = symbols('f1,f2')
k,a,b = symbols('k,a,b')
cS2 = -b+a**f1+a**f2-(a**(k*f1)+a**(k*f2))**(1/k)
cS2 = cS2.subs(a,50).subs(b,1).subs(k,50)
omega_Sx = -0.25*(x**2-1)
omega_Sy = -0.25*(y**2-1)
Omega = cS2.subs(f1,omega_Sx).subs(f2,omega_Sy)
plotting.plot3d(Omega,(x,-1,1),(y,-1,1))

```

Для проверки алгоритма исследуем течение в квадратной трубе и прямоугольной трубе с соотношением сторон 10. Для данного течения известно аналитическое решение

$$V = 1 - y^2 - 4 \left( \frac{2}{\pi} \right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\cosh \frac{\pi x(2n+1)}{2} \cosh \frac{\pi y(2n+1)}{2}}{\cosh \frac{\pi A(2n+1)}{2}}, \quad (3.14)$$

где  $A$  отношение ширины трубы по оси  $x$  к ширине по оси  $y$ . В таблице 3.2 приведены значения скорости в точке  $x = 0.0$ ,  $y = 0.5$  при разном количестве членов разложения  $p_x, p_y$  в квадратной и прямоугольной трубе с  $A = 10$ . Для сравнения приведены значения, вычисленные по формуле (3.14) с числом членов разложения 5, которое обеспечивает точность  $10^{-8}$ . При  $A = 10$  в сечении  $x = 0$  профиль течения близок параболическому профилю плоского течения Пуазейля. В случае



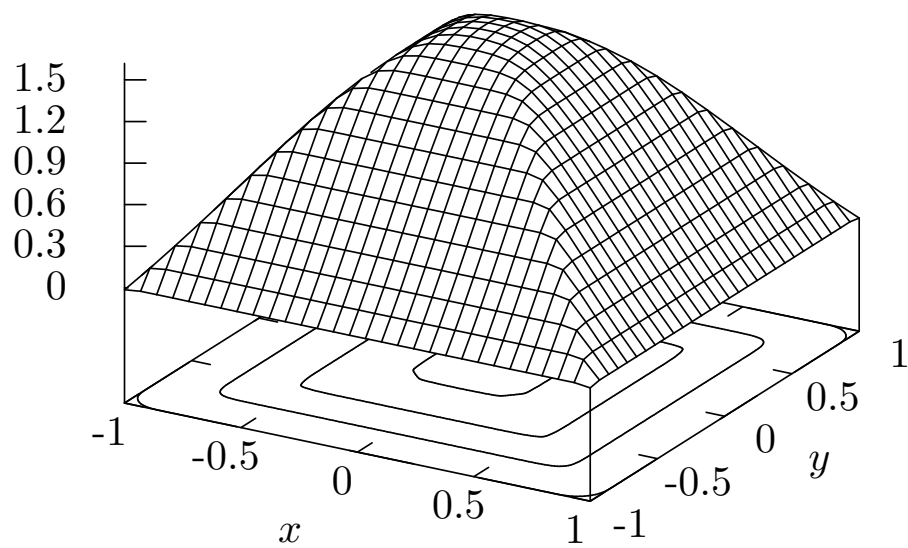


Рис. 3.9 — График функции  $\omega_\Omega$ , линии уровня 0, 0.5, 1.0, 1.5

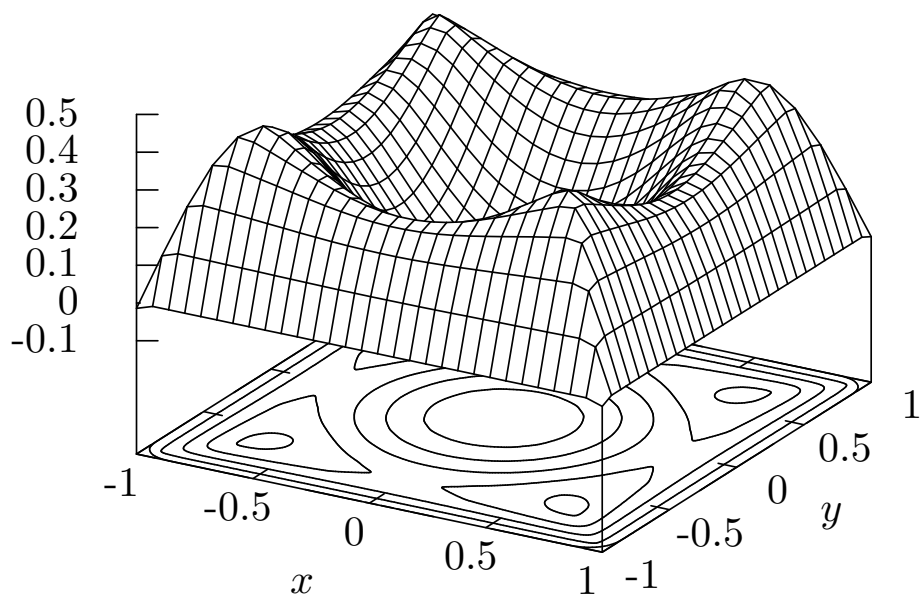


Рис. 3.10 — График функции  $\omega_T$ , линии уровня 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5

квадратного канала были рассмотрены значения  $p_x = p_y$  от 5 до 25, число точек интегрирования составляло 200 по оси  $x$  и  $y$ . В случае прямоугольного канала с  $A = 10$  число точек интегрирования составляло 1000 по оси  $x$  (длинная сторона трубы) и 100 по оси  $y$ . Количество членов разложения по оси  $y$  принято в два раза меньше, чем по оси  $x$ . Производились тестовые вычисления и они показали, что такое соотношение является оптимальным по точности и вычислительным затратам, в рассмотренном диапазоне параметров ужесточение параметров алгоритма дает лишь незначительное увеличение точности. Влияние скруглений углов канала на значения скорости в рассмотренных точках меньше точности вычислений.

Таблица 3.2: Значения скорости в точке  $x = 0.0$ ,  $y = 0.5$  при разном количестве членов разложения  $p_x$ ,  $p_y$  в квадратной и прямоугольной трубе с  $A = 10$ .

$p_x$	$p_y$	$A = 1$	$p_x$	$p_y$	$A = 10$
5	5	0.8022	10	5	0.7553
10	10	0.7853	20	10	0.7479
15	15	0.7792	30	15	0.7489
20	20	0.7791	40	20	0.7496
25	25	0.7780	50	25	0.7500
выр. (3.14)		0.7782	выр. (3.14)		0.7500

Было рассмотрено изменение параметров потока в зависимости от положения внутреннего элемента канала, который может смещаться от центра в направлении стенки на величину  $d$  или в направлении угла на величину, проекцию которой на ось  $x$  обозначим как  $d_x$ . Эти перемещения обозначены стрелками на рисунке 3.8 и описывают основные возможные положения цилиндра внутри квадратного канала. В качестве единичного потока возьмем поток при расположении центрального элемента в центре канала и его радиусе  $r_0 = 0.1$ .

Вычисления произведены для радиусов  $r_0 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ . На рисунках 3.11 и 3.12 приведены графики изменения расхода жидкости при смещении внутреннего элемента по направлению к стенке канала и по направлению к углу канала. Смещение внутреннего элемента ограничено его диаметром. При смещении внутреннего элемента во всех случаях происходит увеличение расхода жидкости по сравнению с центральным положением. Наиболее велико такое увеличение для малых диаметров внутреннего цилиндра. График поля скоростей приведен на рисунке 3.13 при  $r_0 = 0.3$ ,  $d = 0.4$ .

Таким образом было рассмотрено течение в прямоугольной трубе с внутренним цилиндрическим элементом. Рассмотрена зависимость потока от диаметра центрального цилиндра и от его положения внутри квадратной трубы при постоянном градиенте давления. Установлено, что при смещении внутреннего элемента от центра трубы расход жидкости увеличивается, а сопротивление трубы, таким образом, уменьшается. Предложенный метод удобен для оптимизации параметров течений по сравнению с методом конечных элементов, так как не требует создания сеток для каждого рассмотренного варианта геометрии трубы, изменение геометрии канала может производиться непрерывно.

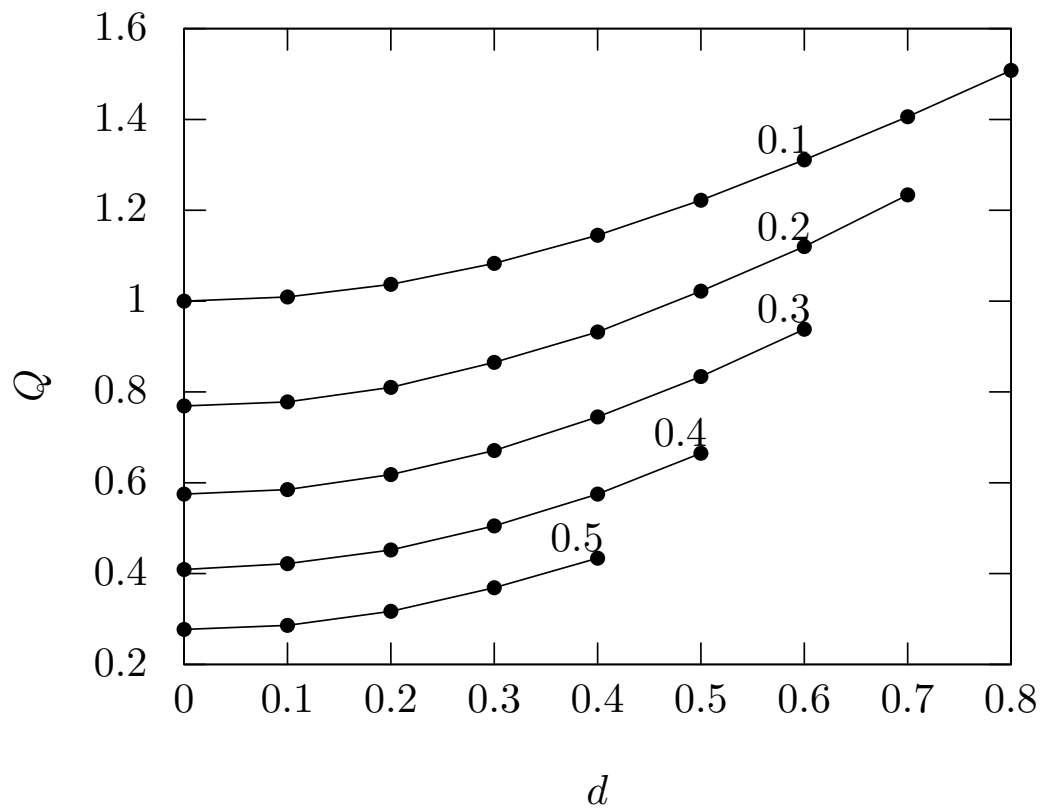


Рис. 3.11 — График зависимости относительного расхода жидкости  $Q$  от величины смещения внутреннего цилиндра  $d$  по направлению к стенке канала для  $r_0 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$

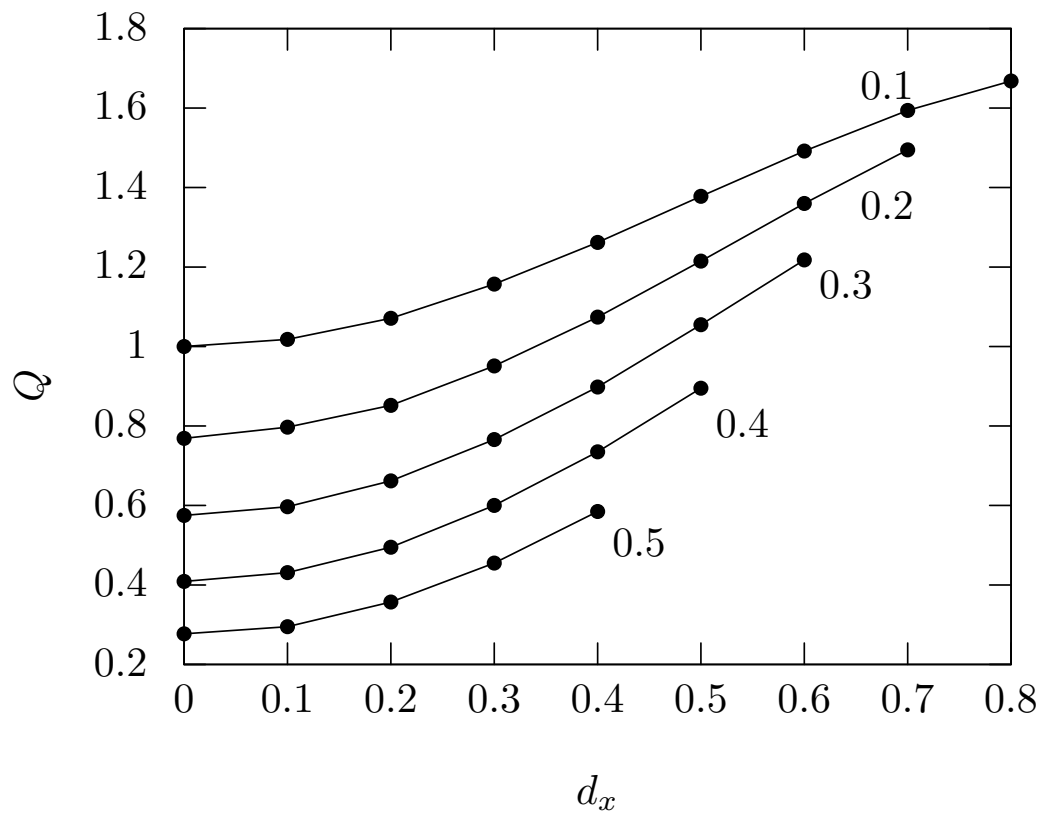


Рис. 3.12 — График зависимости относительного расхода жидкости  $Q$  от величины проекции смещения внутреннего цилиндра  $d_x$  по направлению к углу канала для  $r_0 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$

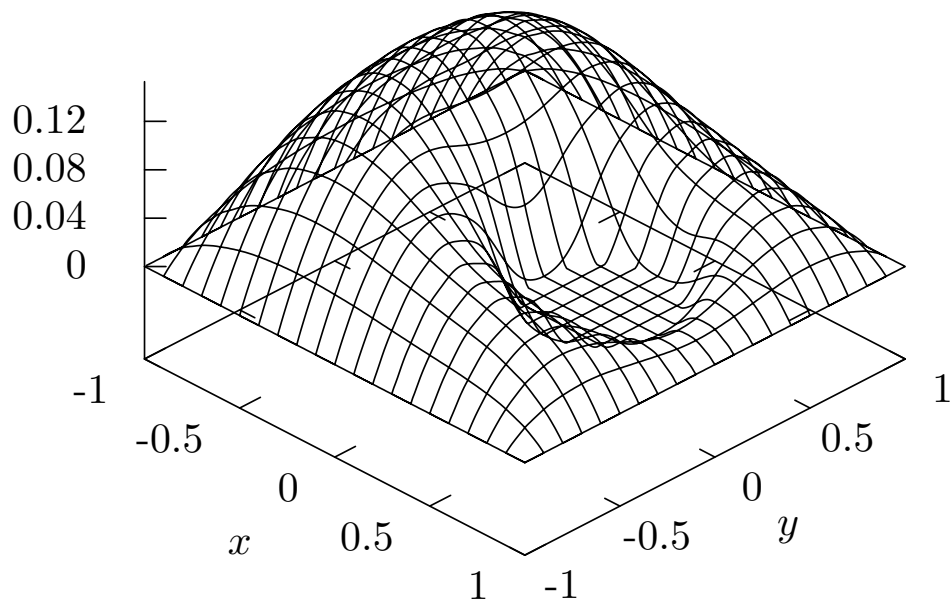


Рис. 3.13 — График поля скоростей в трубе,  $r_0 = 0.3$ ,  $d = 0.4$

### 3.4 Магнитогидродинамическое течение в трубе сложной геометрии

Рассмотрим систему уравнений магнитной гидродинамики

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H} &= (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{V} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H}, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} &= -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{1}{4\pi\rho}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{V}, \\ \operatorname{div}\mathbf{V} &= 0,\end{aligned}\quad (3.15)$$

где  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{H}$  – скорость жидкости и магнитное поле,  $P = p + \frac{1}{4\pi}H^2$  – давление,  $c$  – скорость света,  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $\sigma$  – плотность, вязкость и электропроводность, соответственно.

Поперечное сечение канала приведено на рисунке 3.14. Вязкая электропроводная жидкость течет в направлении  $z$  под действием стационарного градиента давления  $\frac{\partial p}{\partial z}$ .  $H_0$  – внешнее однородное магнитное поле, которое направлено вдоль оси  $y$ . Таким образом, скорость имеет только  $z$  компоненту  $V_z$ , а порожденное движением жидкости магнитное поле имеет только  $z$  компоненту  $H_z$ . В этом случае уравнения (3.15) может быть сведены к виду

$$\begin{aligned}H_0\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)H_z &= 0, \\ \frac{H_0}{4\pi}\frac{\partial H_z}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)V_z &= \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Следуя [268; 269], введем обозначения

$$V = V_z\eta\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)^{-1}, \quad H = \frac{cH_z}{4\pi}\sqrt{\frac{\eta}{\sigma}}\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)^{-1}, \quad M = \frac{H_0}{c}\sqrt{\frac{\eta}{\sigma}}.\quad (3.17)$$

Уравнения (3.16) примут вид:

$$\begin{aligned}M\frac{\partial V}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)H &= 0, \\ M\frac{\partial H}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)V &= -1.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Граничные условия на идеально-электропроводящей стенке  $\Omega$

$$V = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial n} = 0.\quad (3.19)$$



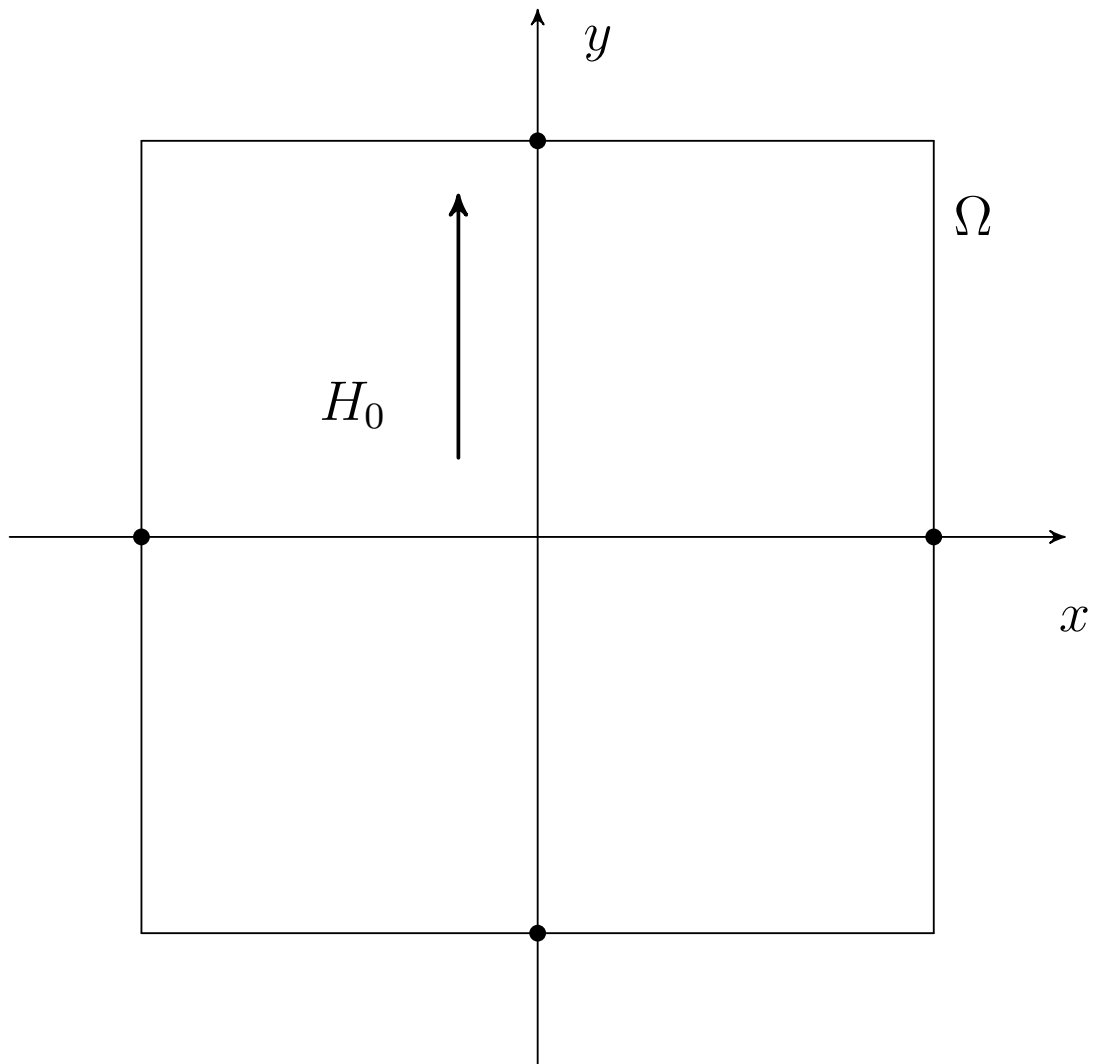


Рис. 3.14 — Сечение канала

На основе [157; 159; 161] составим пучок функций, удовлетворяющих граничным условиям (3.19):

$$\begin{aligned} V &= \omega \Phi_1 \\ H &= \Phi_2 + \omega^2 \Phi_2 + D_1 \Phi_2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

где  $\Phi_1 = \sum a_{ij} T_i(x) T_j(y)$ ,  $\Phi_2 = \sum b_{ij} T_i(x) T_j(y)$ ,  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  – коэффициенты,  $T_i(x)$ ,  $T_j(y)$  полиномы Чебышева порядка  $i$  and  $j$ ,  $D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\omega$  нормализованная граничная функция, то есть, на границе области  $\Omega$  она удовлетворяющая условию  $\frac{\partial \omega}{\partial n} |_{\Omega} = 1$ .

Введем множество точек  $\{x_0, x_1, \dots, x_{nx}\}$ ,  $\{y_0, y_1, \dots, y_{ny}\}$ ,  $\mathbf{x} = \{(x_0, y_0), (x_1, y_0), \dots, (x_{nx}, y_{ny})\}$  и вектор  $\boldsymbol{\xi} = \{a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n\}$ . Здесь  $n = p_x \cdot p_y$ , где  $p_x$ ,  $p_y$  максимальные порядок полиномов Чебышева в направлении  $x$  и  $y$ . Система линейных алгебраических уравнений получается путем подстановки (3.20) в (3.18). Используя метод Галеркина так же, как в разделах 3.2 и 3.3, запишем

$$A \boldsymbol{\xi} = \mathbf{f}. \quad (3.21)$$

Интегралы вычислялись методом Симпсона на множестве  $\mathbf{x}$ . Уравнение (3.21) решалась численно при помощи библиотеки LAPACK.

Рассмотрим течение в прямоугольном канале со стенками  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$ . Решение может быть представлено в виде ряда (см. работы [268; 269]):

$$\begin{aligned} V &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2(-1)^j \cos(\beta_j y)}{\beta_j} \frac{1}{\beta^2 + M^2} \left( 1 - \frac{\alpha_j E_j(x) - \gamma_j F_j(x)}{\alpha_j \sinh(2\alpha) - \gamma_j \sin(2\gamma)} \right), \\ H &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2(-1)^j \sin(\beta_j y)}{\beta_j} \frac{1}{\beta^2 + M^2} \left( \frac{M}{\beta_j} + \frac{\alpha_j F_j(x) + \gamma_j E_j(x)}{\alpha_j \sinh(2\alpha) - \gamma_j \sin(2\gamma)} \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

где

$$\beta_j = (j + 1/2)\pi,$$

$$\alpha_j = \sqrt{\frac{\beta_j}{2}} \sqrt{\beta_j + \sqrt{\beta_j^2 + M^2}},$$

$$\gamma_j = \sqrt{\frac{\beta_j}{2}} \sqrt{-\beta_j + \sqrt{\beta_j^2 + M^2}},$$

$$E_j(x) = (\cos(\gamma_j(1-x)) \sinh(\alpha_j(1+x)) + \cos(\gamma_j(1+x)) \sinh(\alpha_j(1-x))),$$

$$F_j(x) = (\sin(\gamma_j(1-x)) \cosh(\alpha_j(1+x)) + \sin(\gamma_j(1+x)) * \cosh(\alpha_j(1-x))).$$

Нормализованное уравнение прямоугольника получается путем применения  $R$ -конъюнкции к нормализованным полосам  $-\frac{1-x^2}{2}$ ,  $-\frac{1-y^2}{2}$ . В таблице 3.3 показаны значения скорости в точке  $x = 0.5$ ,  $y = 0.0$  для различных значений  $p_x$ ,  $p_y$ . Число точек интегрирования было взято  $100 \times 100$ ,  $200 \times 200$  и параметр  $M = 10$ . Проверочное значение скорости было вычислено суммированием 20 членов ряда (3.22), достигнута сходимость 5 знаков после запятой. На основании результатов, приведенных в таблице 3.3, можно заключить, что максимальная точность вычисления скорости меньше  $1 \cdot 10^{-4}$ . График скорости представлен на рисунке 3.15,  $M = 10$ .

Таблица 3.3: Значения скорости в точке  $x = 0.5$ ,  $y = 0.0$ .  $M = 10$ .

$p_x$	$p_y$	$100 \times 100$	$200 \times 200$
10	10	0.98244	0.98981
15	15	0.98348	0.97757
20	20	0.98295	0.98579
25	25	0.98297	0.98501
30	30	0.98277	0.98495
из (3.22)		0.98482	

Рассмотрим течение в трубе с прямоугольными выступами на стенках, сечение которой приведено на рисунке 3.16. Значения  $l_x$  и  $l_y$  задают размер этих выступающих элементов. Введем примитивы

$$s1 = -\frac{1-x^2}{2}, s2 = -\frac{l_x^2-x^2}{2l_x}, s3 = -\frac{l_y^2-y^2}{2l_y}, s4 = -\frac{1-y^2}{2}. \quad (3.23)$$

Тогда граничная функция может быть вычислена при помощи выражения

$$\omega = R_c(R_c(s1, s4), -R_c(s3, -s2)). \quad (3.24)$$

График скорости представлен на рисунке 3.17, здесь  $l_x = 0.9$ ,  $l_y = 0.5$ ,  $M = 20$ ,  $p_x = 10$ ,  $p_y = 10$  и число точек интегрирования  $300 \times 300$ .

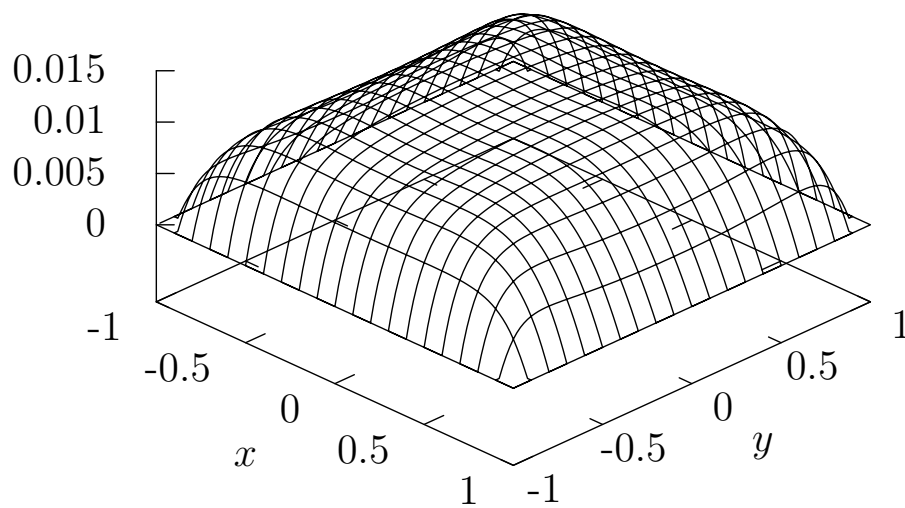


Рис. 3.15 — График скорости течения в прямоугольном канале при  $M = 10$

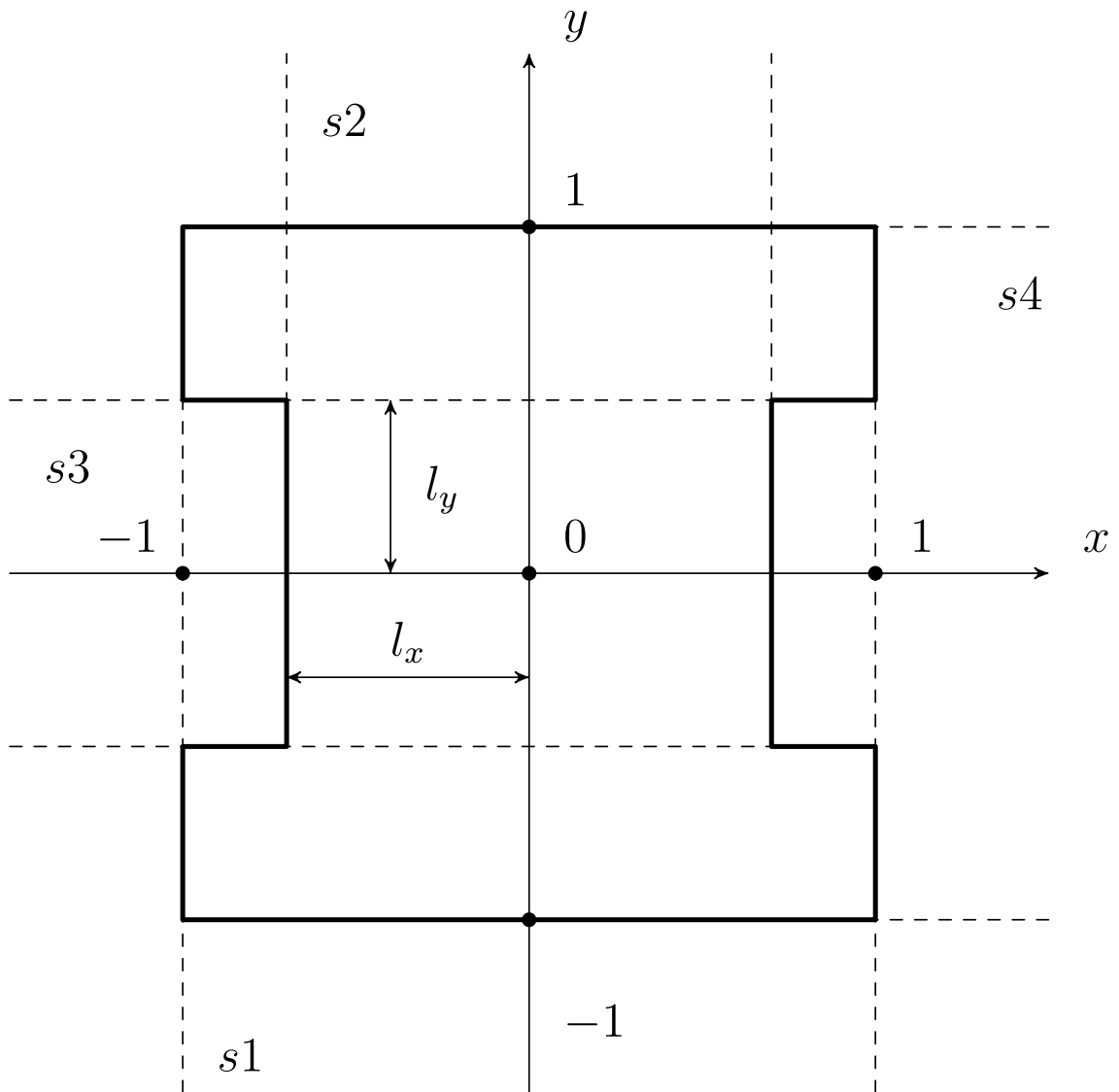


Рис. 3.16 — Сечение канала сложной формы

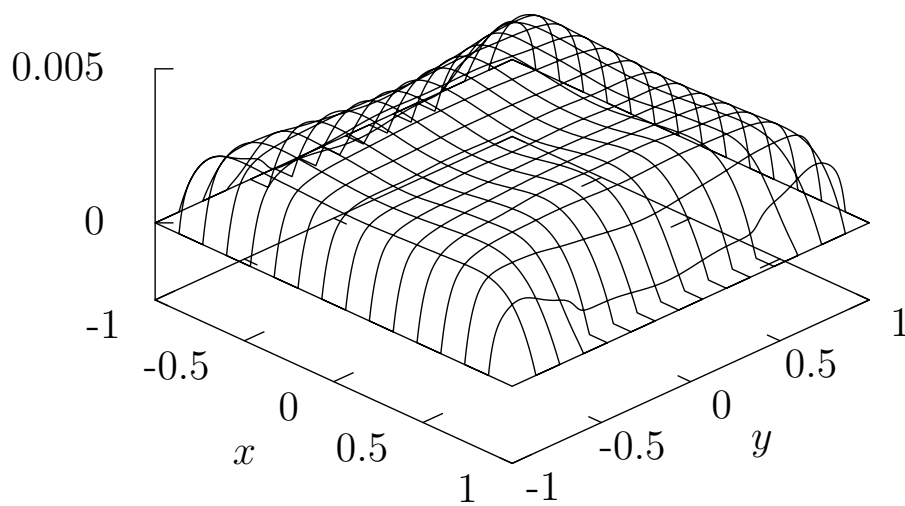


Рис. 3.17 — График скорости течения в канале сложной формы при  $M = 20$

### 3.5 Устойчивость двумерных течений

Рассмотрим задачу устойчивости для двумерных течений. Для этого запишем уравнения Навье-Стокса с использованием функции тока  $\Psi$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} = \frac{1}{Re} \Delta^2 \Psi, \quad (3.25)$$

Чтобы рассмотреть эволюцию малых возмущений, как рекомендовано в [64; 68; 69; 187], представим функцию тока в виде

$$\Psi = \Psi_0(x, y) + \psi(x, y)e^{Ct}, \quad (3.26)$$

где  $\Psi_0(x, y)$  – стационарное течение,  $\psi(x, y)e^{Ct}$  – малое возмущение, в котором  $\psi(x, y)$  – амплитуда возмущения, а  $C = X + iY$ ,  $X$  – коэффициент нарастания,  $Y$  – частота возмущения. Подставим (3.26) в (3.25), отбрасывая члены второго порядка малости, получим уравнение

$$C \Delta \psi = \frac{1}{Re} \Delta^2 \psi - V \Delta \psi_y + \psi_x \Delta U - U \Delta \psi_x + \psi_y \Delta V, \quad (3.27)$$

где производные обозначены индексами,  $U$  и  $V$  –  $x$  и  $y$  компоненты стационарного решения ( $U = (\Psi_0)_y$ ,  $V = -(\Psi_0)_x$ ) и  $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ . Граничные условия для возмущений мы принимаем нулевыми, как рекомендовано в работах [186; 187]:

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (3.28)$$

Согласно [161; 264], структура решения может быть записана в виде

$$\psi = \omega^2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^k a_{ij} T_i(x) T_j(y), \quad (3.29)$$

где  $\omega(x, y)$  функция расстояния до границ,  $T(x)$  и  $T(y)$  полиномы Чебышева, приведенные к соответствующим интервалам,  $a_{ij}$  – неизвестные коэффициенты. Множество точек коллокации принято в нулях полиномов Чебышева. Подставим (3.29) в (3.27) и, предполагая, что уравнение (3.27) выполняется на множестве точек коллокаций, можно записать алгебраическую проблему на собственные значения

$$Av = CBv, \quad (3.30)$$

где  $\mathbf{v} = \{a_{00}, a_{01}, \dots, a_{n(k-1)}, a_{nk}\}$ .

Для решения задачи (3.30) можно использовать стандартные численные методы, реализованные, например, в библиотеке программ LAPACK и, более эффективные для больших матриц, в библиотеках ARPACK и SLEPc [270].

В качестве простейшего примера в следующем разделе будет рассмотрена область предельно простой геометрии – прямоугольник, однако сам алгоритм позволяет исследовать области более сложной формы. При этом граничные условия удовлетворяются точно. Ограничения могут быть связаны с громоздким видом граничной функции  $\omega$ , производных от нее или ухудшением аппроксимационных свойств пучка (3.29).

### 3.6 Устойчивость локализованных возмущений в плоском канале

Рассмотрим плоское течение Пуазейля. Направим ось  $x$  вдоль направления движения жидкости, а ось  $y$  – перпендикулярно плоскостям (см. рисунок 3.18). Зададим условия на границе расчетной области  $\Omega$ . На неподвижных стенках возмущение скорости обращается в нуль. На входе в  $\Omega$  возмущение также задано равным нулю. На выходе из расчетной области  $\Omega$ , следуя [185], можно задать нулевой градиент скорости вдоль оси  $x$ . В этом случае возмущение может покидать

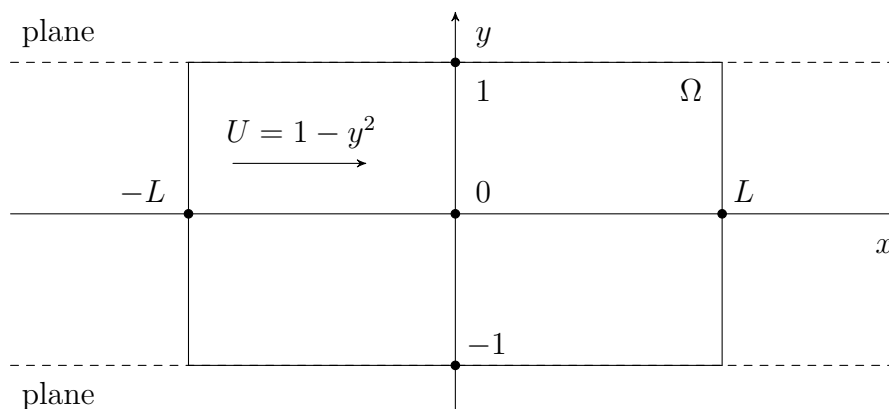


Рис. 3.18 — Конфигурация потока



расчетную область с ненулевой амплитудой. В работах [68; 170; 191], наоборот, использовались нулевые граничные условия. Возмущения в этом случае не могут покидать область расчетов и остаются локальными. В работе [191] сделан вывод о том, что расчетная область при использовании граничных условий второго типа должна быть длиннее. Учитывая сказанное, использовались граничные условия

$$\psi = \psi_x = \psi_y = 0, \quad (3.31)$$

соответствующие обращению возмущений в нуль. Таким образом, рассматриваются возмущения, локализованные в пространстве.

Чтобы написать уравнение границы прямоугольника  $\Omega$  рассмотрим пересечение полос  $x_1 = 1 - y^2 \geq 0$ ,  $x_2 = L^2 - x^2 \geq 0$ . Тогда искомое уравнение дается, например,  $R$ -конъюнкцией (см. [159])

$$x_1 \wedge_\circ x_2 \equiv (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{m}{2}}, \quad (3.32)$$

где  $m$  – натуральное число. Основные вычисления были произведены при  $m = 0$ . Простой подстановкой получим

$$\omega(x, y) = 1 - y^2 + L^2 - x^2 - \sqrt{(1 - y^2)^2 + (L^2 - x^2)^2}. \quad (3.33)$$

Производные от  $\omega$  я находил при помощи системы компьютерной алгебры *Matha*. Выбор функции  $\omega$  неоднозначен, для проверки численного метода задачу (3.27) можно решать с использованием разных функций  $\omega$ ; использовалось выражение (3.32) с  $m > 0$  и выражение

$$\omega(x, y) = (L^2 - x^2)(1 - y^2). \quad (3.34)$$

Рассмотрим течение с  $L = 1.0$  и  $n = k = 50$ . В таблице 3.4 приведены действительные части собственных значений  $C$  с наибольшей действительной частью при разных числах Рейнольдса от 10 до 1000, рассчитанные LAPACK, SLEPC с использованием арифметики двойной точности и, для сравнения, рассчитанные при помощи библиотеки *Nektar++*, которая реализует метод спектральных элементов. Расчетная сетка для *Nektar++* была подобрана так, что сходимость приведенных в таблице 3.4 значений я оценил как  $10^{-4}$  при  $Re = 1000$ . При  $Re = 10$  все три собственные значения совпадают, но с увеличением числа Рейнольдса число совпадающих цифр уменьшается. Однако, уже при  $Re = 700$  и  $Re = 1000$  LAPACK определяет собственные значения, резко выбивающиеся из ряда и, по-видимому, не имеющие отношения к спектру задачи.

В таблице 3.5 приведены собственные значения с наибольшей действительной частью в зависимости от количества точек коллокации  $n$  и  $k$ , рассчитанные при помощи SLEPc. С увеличением  $n$  и  $k$  соответствующие собственные значения должны образовывать последовательность, сходящуюся к собственному значению. На практике после достижения определенной точности на результат могут влиять другие ошибки, свойственные конкретной реализации алгоритма. Как следует из результатов, приведенных с таблице 3.5, при числе Рейнольдса, равном 1000, собственные числа сошлись по крайней мере до седьмого знака для действительной части, а при  $Re = 5000$  собственные значения сходятся до четырех знаков после запятой. Также для контроля приведены собственные числа, полученные вычислением с использованием  $R$ -конъюнкции (3.34) и (3.32) с  $m = 1$  (две последние строки в таблице 3.5).

На рисунке 3.19 приведены собственные значения ( $C = X + iY$ ) при  $Re = 1000$ ,  $L = 1$ . Возмущения можно разделить на монотонные ( $Y = 0$ ) и периодические ( $Y \neq 0$ ). Собственные значения, соответствующие этим двум типам, представлены на графике. На рисунках 3.20 и 3.21 представлены линии уровня действительной и мнимой части собственной функции, соответствующей соб-

Таблица 3.4: Зависимость действительной части собственных значений от  $Re$ ,  $n = 50$ ,  $k = 50$ ,  $L = 1.0$

$Re$	Действ. часть $C$	Библиотека	$Re$	Действ. часть $C$	Библиотека
10	-3.1786	LAPACK	400	-1.5169	LAPACK
	-3.1786	SLEPc		-1.5169	SLEPc
	-3.1786	Nektar++		-1.5156	Nektar++
50	-2.1144	LAPACK	500	-1.4495	LAPACK
	-2.1144	SLEPc		-1.4492	SLEPc
	-2.1144	Nektar++		-1.4429	Nektar++
100	-1.9808	LAPACK	600	-1.4048	LAPACK
	-1.9808	SLEPc		-1.4039	SLEPc
	-1.9806	Nektar++		-1.3850	Nektar++
200	-1.7517	LAPACK	700	-0.3952	LAPACK
	-1.7517	SLEPc		-1.3802	SLEPc
	-1.7515	Nektar++		-1.3372	Nektar++
300	-1.6121	LAPACK	1000	2.78053	LAPACK
	-1.6121	SLEPc		-1.2963	SLEPc
	-1.6120	Nektar++		-1.2306	Nektar++

ственному значению с наибольшей действительной частью при  $Re = 1000$ ,  $L = 1$ . В данном случае наблюдаются симметричные вихри. Аналогичный график представлен на рисунке 3.22 при  $Re = 1000$ ,  $L = 4$  в виде трехмерной поверхности. Это монотонно затухающий вихрь с осью вблизи оси канала.

На рисунке 3.23 приведены зависимости собственных значений от  $L$  для разных чисел Рейнольдса от  $10^3$  до  $5 \cdot 10^3$ . Для каждой ветви, представленной на графике, величина  $X$  возрастает с увеличением  $L$ . В свою очередь, сами ветви расположены в определенном порядке: при увеличении числа Рейнольдса значения  $X$  возрастают. На рисунке 3.24 приведены зависимости действительной части собственных значений от  $Re$  при  $L = 0.25(1)$ ,  $L = 1(2)$ ,  $L = 4(3)$ . Число Рейнольдса меняется от  $10^3$  до  $10^4$ . С увеличением числа Рейнольдса для зависимостей с  $L = 0.25$  и  $L = 1$  величина  $X$  возрастает, при  $L = 4$  величина  $X$  почти не меняется.

На рисунках 3.25, 3.26 приведены линии уровня действительной части собственной функции при  $Re = 3000$ ,  $L = 20$ ,  $C_6 = (-0.03016, \pm 0.25776)$  и  $C_{15} = (-0.04030, \pm 0.07813)$ . Затухающее возмущение имеет вид последовательных вихрей.

Результаты расчетов позволяют заключить, что локализованные возмущения устойчивы в рассмотренном диапазоне параметров  $Re$  и  $L$ .

Таблица 3.5: Зависимость собственных значений с наибольшей действительной частью от  $n$  и  $k$ ,  $Re = 1000$ ,  $Re = 5000$ ,  $L = 1.0$ . Строки, обозначенные {1} и {2}, соответствуют вычислениям при помощи  $R$ -конъюнкции (3.34) и (3.32) с  $m = 1$  соответственно

		$Re = 1000$		$Re = 5000$	
$n$	$k$	Действ. часть $C$	Мнимая часть $C$	Действ. часть $C$	Мнимая часть $C$
50	50	-1.293264539871856	1.087462148640639	1.942701048	1.559147236
60	60	-1.255768395039908	0.8781136507171899	0.6587661583	2.010687635
80	60	-1.230050190635487	0.8971942939279334	-0.4974945838	2.022046912
100	60	-1.230568610422895	0.8984693511654026	-0.8625281770	0.8222072725
100	70	-1.230568610049606	0.8984693516468647	-0.8625283592	0.8222064175
120	60	-1.230610310568465	0.8984959713463586	-0.8264486429	0.5237272589
140	60	-1.230611498906538	0.8984963168534776	-0.8244197295	0.5401157092
160	60	-1.230611522477419	0.8984963191778784	-0.8263675375	0.5437300819
180	60	-1.230611522273824	0.8984963207949902	-0.8272114112	0.5444320117
220	60	-1.230611522084476	0.8984963194842599	-0.8275200538	0.5445807151
220	70	-1.230611522758129	0.8984963207076385	-0.8275200601	0.5445807080
400	60	-1.230611518844661	0.8984963165508606	-0.8275373812	0.5445849618
{1}	220	-1.230611536609566	0.8984964473559163	-0.8275529056	0.5445946517
{2}	220	-1.230613806678481	0.8985043165368143	-0.8275117537	0.5446018155

Как уже отмечалось, данная задача содержит малый параметр  $\frac{1}{Re}$ , что сильно усложняет решение задачи на собственные значения и требует высокого качества приближенного представления решений. Предложенный численный метод оказался простым и экономичным. При  $L = 4$ ,  $Re = 5000$ ,  $n = 280$ ,  $k = 60$  вычисления на процессоре Phenom 8150 2.2 ГГц занимали порядка 40 минут и около 7 Гб оперативной памяти. Была продемонстрирована работоспособность метода вплоть до  $Re = 5000$ . Для сравнения, в одномерном случае аналогичный метод позволяет работать при значениях  $Re \sim 10^7$  [261].



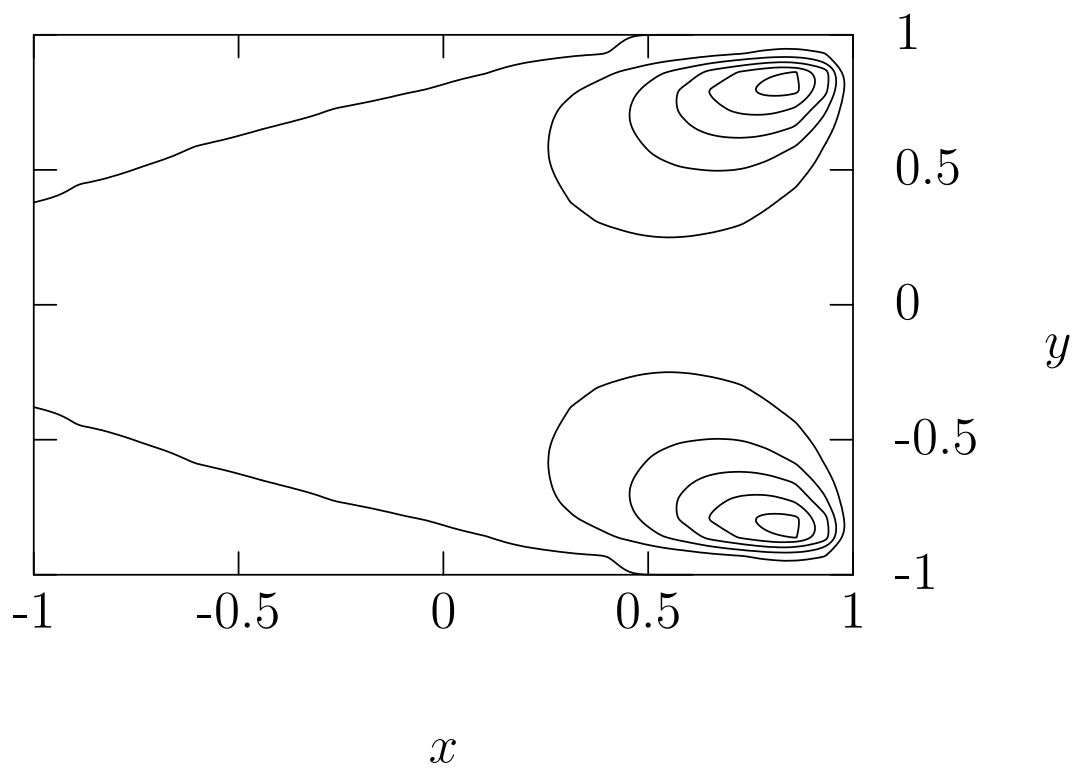


Рис. 3.20 — Линии уровня действительной части собственной функции при  $Re = 1000$ ,  $L = 1$ , собственное значение  $C = (-1.23061, \pm 0.89849)$

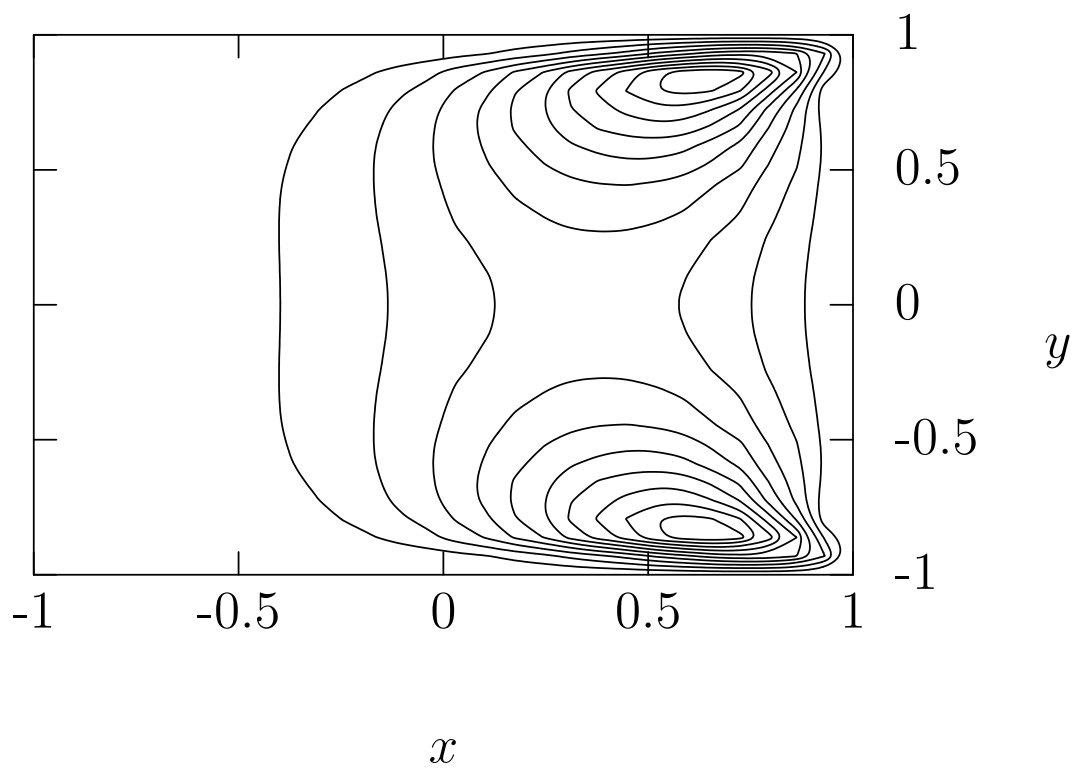


Рис. 3.21 — Линии уровня мнимой части собственной функции при  $Re = 1000$ ,  $L = 1$ , собственное значение  $C = (-1.23061, \pm 0.89849)$

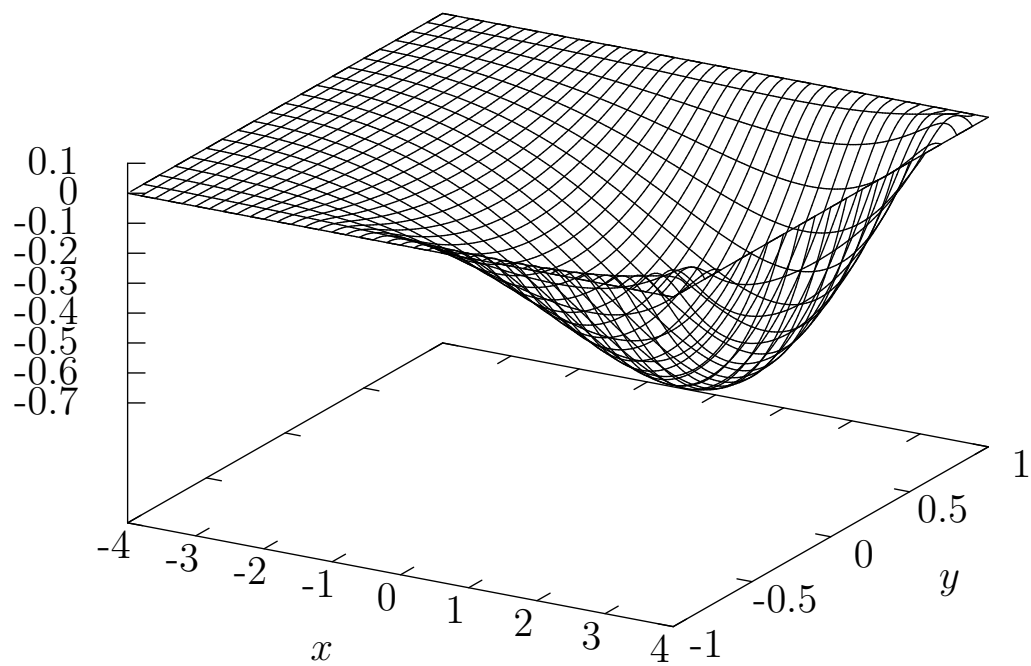


Рис. 3.22 — Действительная часть собственной функции  $Re = 1000$ ,  $L = 4$ , собственное значение  $C = (-0.1786773045527003, 0)$



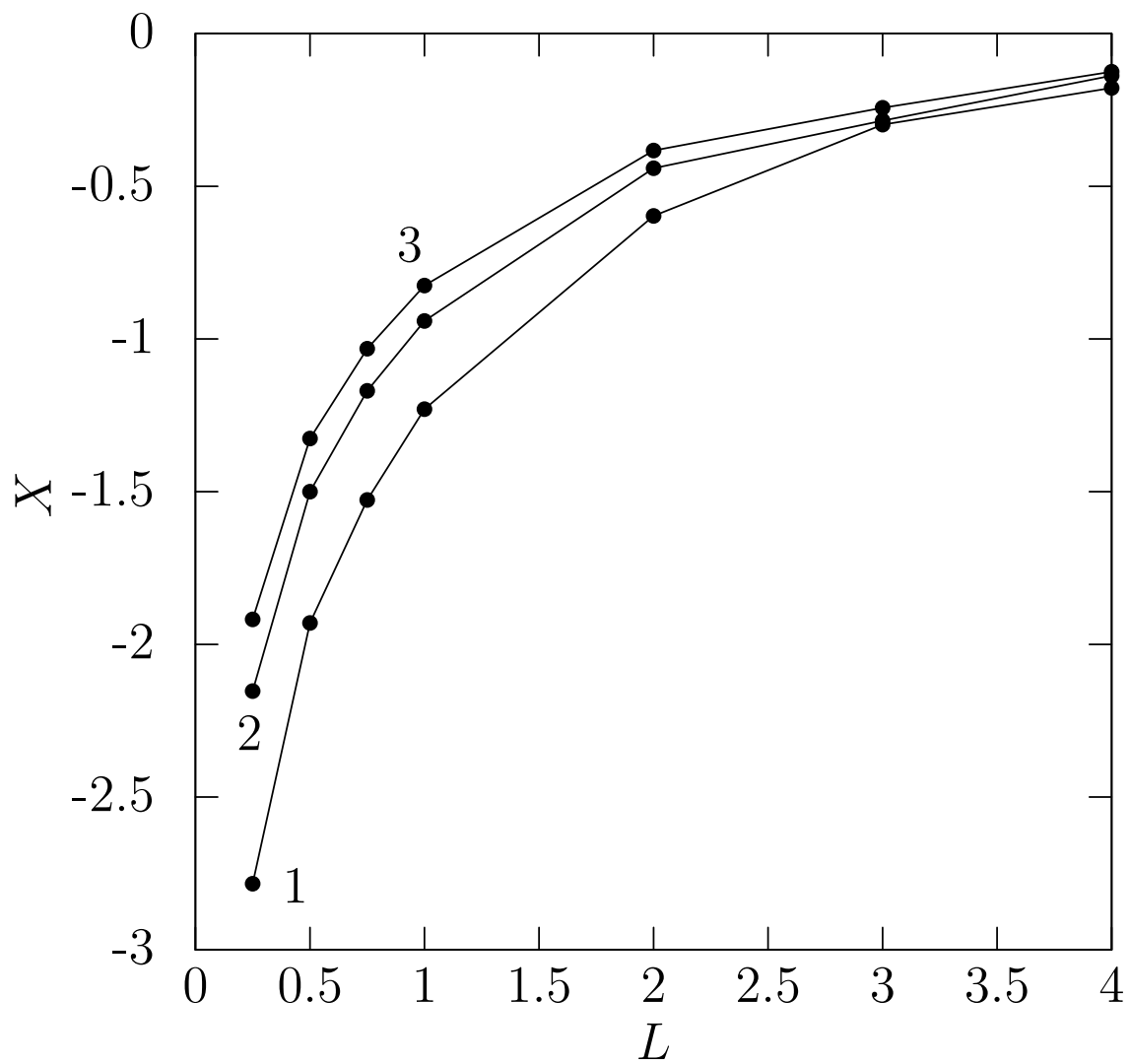


Рис. 3.23 — Зависимости наибольшей действительной части собственных значений от  $L$  при  $Re = 10^3$ (1),  $Re = 3 \cdot 10^3$ (2),  $Re = 5 \cdot 10^3$ (3)

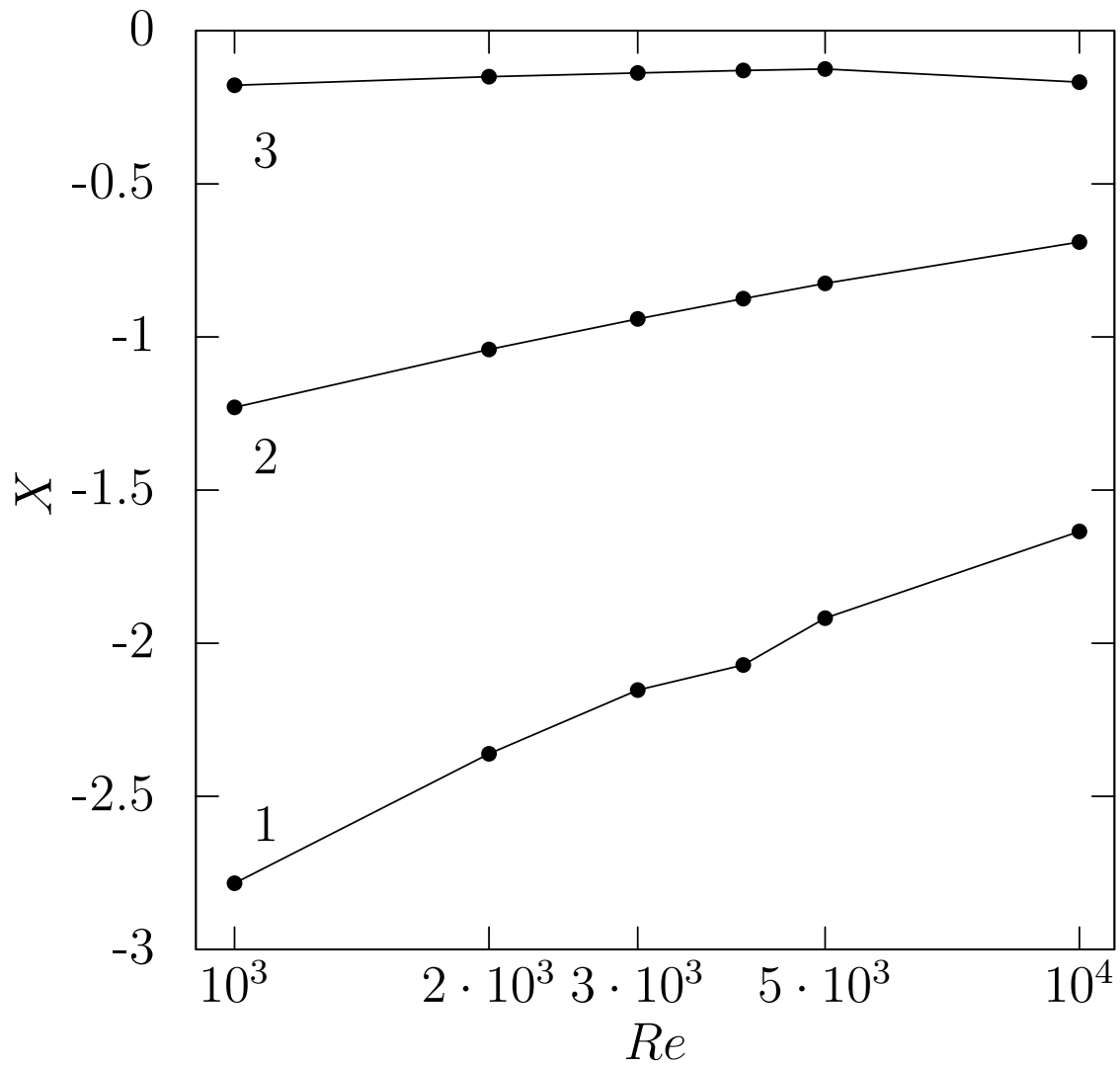


Рис. 3.24 — Зависимости действительной части собственных значений от  $Re$  при  $L = 0.25(1)$ ,  $L = 1(2)$ ,  $L = 4(3)$

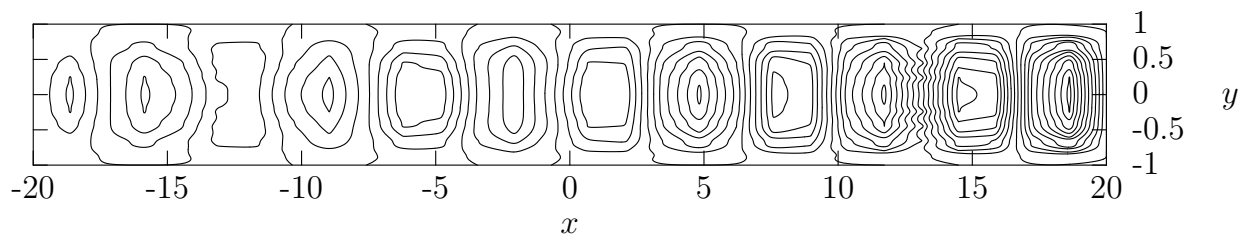


Рис. 3.25 — Линии уровня действительной части собственной функции при  $Re = 3000$ ,  $L = 20$ , собственное значение  $C_6 = (-0.03016, \pm 0.25776)$

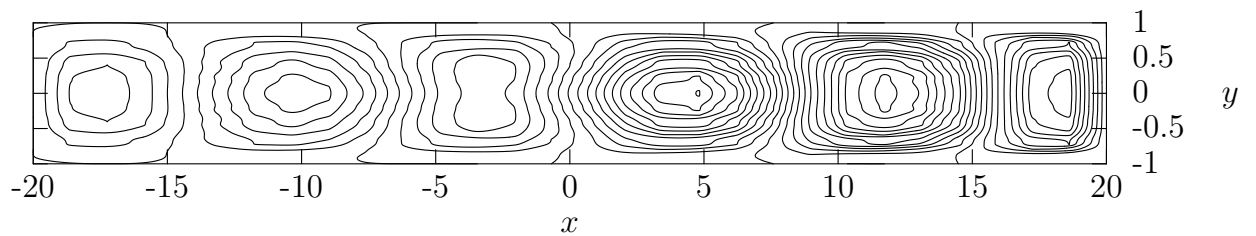


Рис. 3.26 — Линии уровня мнимой части собственной функции при  $Re = 3000$ ,  $L = 20$ , собственное значение  $C_{15} = (-0.04030, \pm 0.07813)$

### 3.7 Устойчивость магнитогидродинамического течения возле круглого цилиндра

Рассмотрим устойчивость течения возле круглого цилиндра, изображенного на рисунке 3.27. Поток вязкой жидкости течет перпендикулярно оси цилиндра, ось  $x$  направлена параллельно этому потоку. Вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}_0$  направлен параллельно потоку жидкости. Граница цилиндра обозначена как  $\Omega_c$ . Область  $\Omega$ , в которой будет решена задача, имеет размеры  $L$ ,  $L_1$  и  $L_y$ . Определим число Рейнольдса как  $Re = \frac{U_\infty d}{\nu}$  где  $U_\infty$  – величина скорости на бесконечности,  $d$  – диаметр цилиндра,  $\nu$  кинематическая вязкость.

Уравнение (3.25) с учетом магнитных сил имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} + St \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{Re} \Delta^2 \Psi, \quad (3.35)$$

где  $St = \frac{\sigma B_0^2 d^2}{\rho U_\infty}$  – число Стюарта.

Граничная функция  $\omega_\Omega(x, y)$  для прямоугольника  $\Omega$  имеет вид

$$\omega_\Omega(x, y) = x_{S1} \wedge_\circ x_{S2} \equiv x_{S1} + x_{S2} - \sqrt{x_{S1}^2 + x_{S2}^2}, \quad (3.36)$$

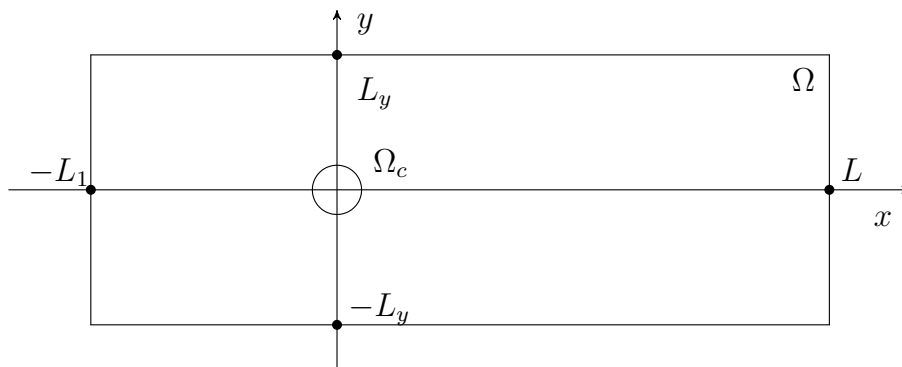


Рис. 3.27 — Течение возле цилиндра

где  $x_{S1} = k_1(L_y^2 - y^2)$  и  $x_{S2} = k_2(x - L)(L_1 - x)$  – граничные функции для двух перпендикулярных полос. Для цилиндра  $\Omega_C$  граничную функцию возьмем в виде  $x = -k_3(x - L - 10)(x^2 + y^2 - 0.25)$  и применим  $R$ -конъюнкцию (3.36) еще раз.

Для аналитического вычисления граничных функций использовалась система компьютерной алгебры Maxima. Такой подход позволяет работать с простой геометрией, использующейся в модельных задачах, при помощи стандартного программного обеспечения. Более развитые подходы рассмотрены в обзоре [267]. Известны специализированные программные комплексы SAGE [267] и ПОЛЕ [157], которые могут вычислять граничные функции автоматически. Ниже приведен код Maxima для вычисления функций  $\omega_\Omega(x, y)$  и  $\omega(x, y)$

```
Rc: e1+e2-sqrt(e1^2+e2^2)$
k1:0.01$ k2:0.1$ k3:0.01$ k4:100$
xS1: k1*(Ly^2-y^2)$
xS2: -k2*(x-L1)*(x-L)$
xCyl: -k3*(x-L-10)*(x^2+y^2-0.25)$
omega_0omega: ev(Rc, e1=xS1, e2=xS2)$
omega: k4*(ev(Rc, e1=ev(Rc, e1=xS1, e2=xS2), e2=xCyl))$
```

Графики  $\omega_\Omega(x, y)$  и  $\omega(x, y)$  приведены на рисунках 3.28 (пунктирной линией обозначен прямоугольник  $\omega_\Omega(x, y) = 0$ ) и 3.29.

Для примера ниже приведен явный вид функции  $\omega(x, y)$

$$\begin{aligned}
 k &= \sqrt{1.0 \times 10^{-4} (6.25 - y^2)^2 + 0.01 (x - 10)^2 (x + 5)^2} \\
 \omega &= k_4 \left( - \left( (-k + 0.01 (6.25 - y^2) - 0.1 (x - 10) (x + 5))^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 1.0 \times 10^{-4} (20 - x)^2 (y^2 + x^2 - 0.25)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - k + 0.01 (20 - x) \times \right. \\
 &\quad \left. \times (y^2 + x^2 - 0.25) + 0.01 (6.25 - y^2) - 0.1 (x - 10) (x + 5) \right). \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

Здесь  $k_1 = k_3 = 0.01$ ,  $k_2 = 0.1$  и общий коэффициент  $k_4 = 100$ .

Стационарное течение было вычислено при помощи программного комплекса Nektar++, но это могло бы быть сделано с помощью любой другой программы, например OpenFoam, CodeSaturne, ANSYS и так далее. Размеры области вычислений приняты  $L = 100$ ,  $L_1 = 20$  и  $L_y = 10$ . Однородное течение ( $U = U_\infty$ ,  $V = 0$ ) задано на входной, верхней и нижней границах прямоугольника  $\Omega$ . Условия прилипания заданы на поверхности цилиндра. На выходной границе

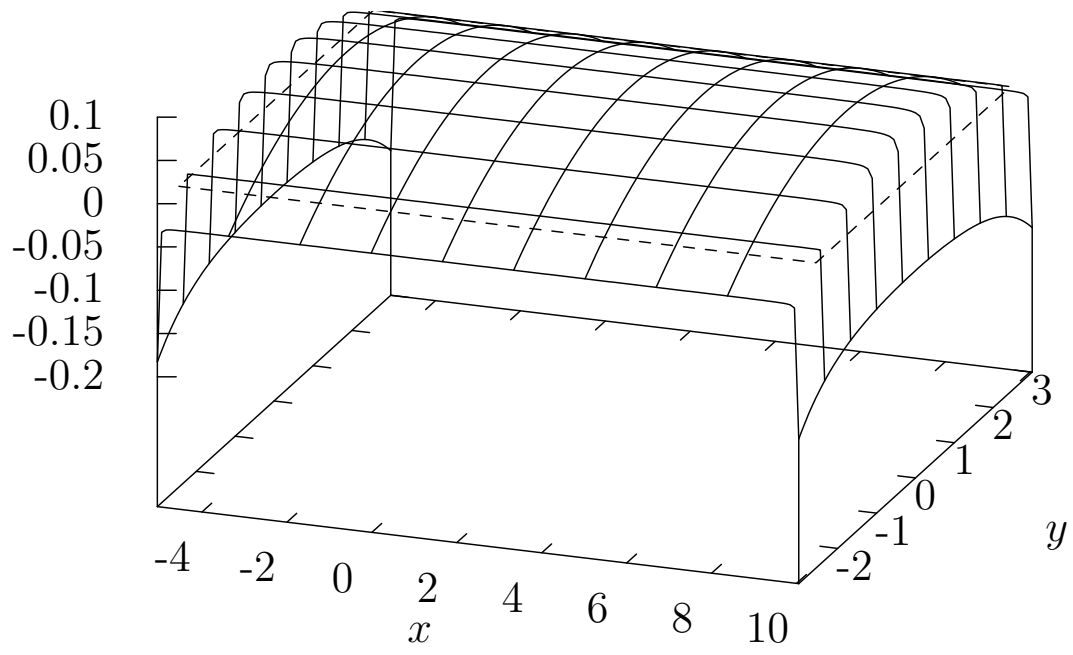


Рис. 3.28 — График функции  $\omega_{\Omega}(x, y)$

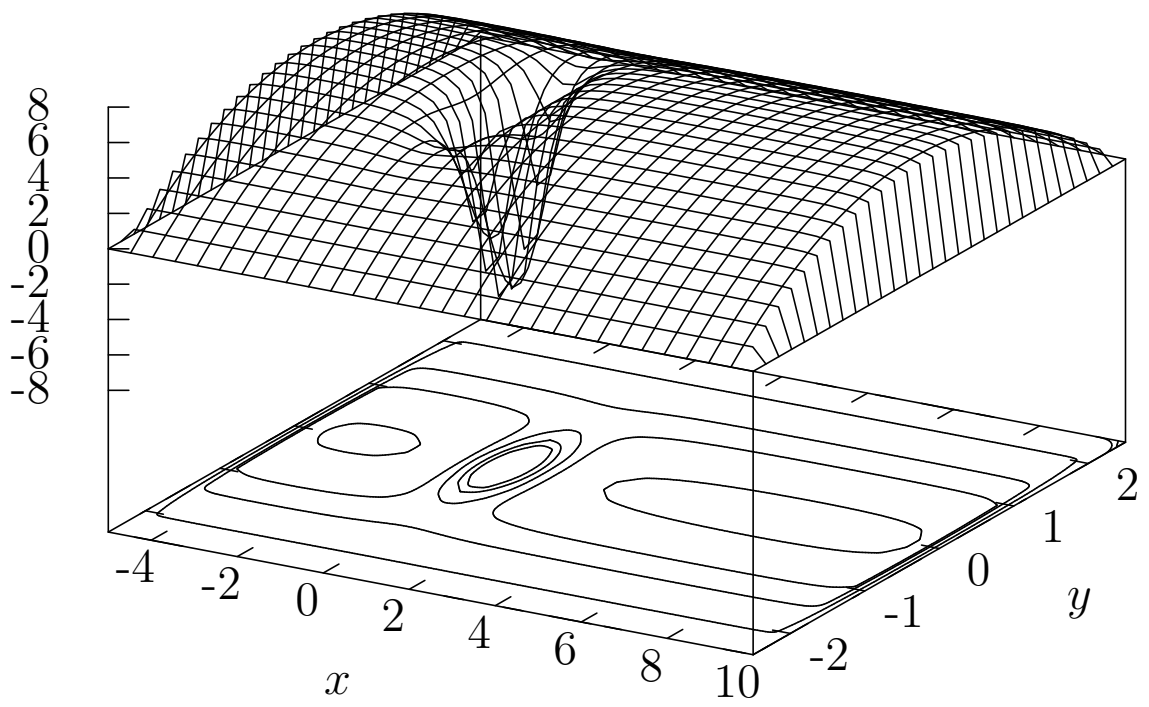


Рис. 3.29 — График функции  $\omega(x, y)$

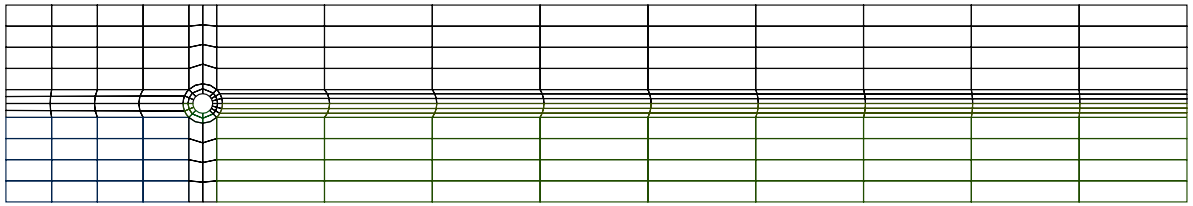


Рис. 3.30 — Сетка для вычисления стационарного течения возле круглого цилиндра

заданы условия свободного истечения жидкости. Стационарное течение стабилизировано заданием  $V = 0$  в следе за цилиндром при  $y = 0$ , как рекомендовано в работах [186; 187]. Сетка, использовавшаяся при вычислениях, приведена на рисунке 3.30.

Размер области для исследования устойчивости принят несколько меньше, чем для основного течения:  $L = 25$ ,  $L_y = 4$  и  $L_1 = 5$ . Я посчитал коэффициенты  $X$  для некоторого диапазона  $n$  и  $k$  чтобы убедиться в сходимости метода. Результаты этих вычислений представлены в таблице 3.6 для  $Re = 45, 46, 47, 50$ . Основываясь на приведенных в таблице 3.6 данных, можно сделать вывод том, что собственные значения вычисляются с удовлетворительной точностью.

Таблица 3.6: Зависимость  $X$  от  $n$  и  $k$  для  $Re = 45, 46, 47, 50$ .  $M = 0$

$Re$	$n$	40	80	100	180	Nektar++
	$k$	20	40	50	60	
45	$X$	0.4088	0.0872	0.0010	<b>-0.0037</b>	-0.0024
46		0.4022	0.0868	<b>0.0020</b>	0.0150	0.0020
47		0.3408	0.0852	<b>0.0066</b>	0.0040	0.0066
50		0.3958	0.0490	0.0106	<b>0.0170</b>	0.0170

На рисунках 3.31 и 3.32 показаны коэффициенты затухания и частоты в зависимости от числа Рейнольдса. В случае  $M = 0$  эти результаты совпадают с данными из статьи [186], а критическое число Рейнольдса лежит между 45 и 46, что совпадает с результатами работ [186; 187]. В случае  $M = 1$  критическое число Рейнольдса лежит между 50 и 60 [188; 189], то есть внесение продольного магнитного поля приводит к стабилизации течения. Магнитное поле заметно влияет



на частоты  $Y$ , которые уменьшаются при малых числах Рейнольдса. На рисунках 3.33 и 3.34 изображены линии тока действительной части наиболее опасной моды при  $Re = 80$ ,  $M = 0$  (неустойчивая мода) и при  $Re = 50$ ,  $M = 1$  (течение устойчиво). На этих рисунках за цилиндром видно образование вихревого следа.

Разработанный численный метод на основе функций Рвачева дает адекватные результаты, что подтверждается сравнением в данными, приведенными в литературе и расчетами при помощи программного комплекса Nektar++. При этом вычислительный алгоритм намного проще существующих, вследствие того, что геометрическая информация отделяется от вычислительного алгоритма при помощи метода функций Рвачева. Структура решения (3.29) определяется в начале решения и содержит определение граничных условий и формы области, в которой течет жидкость. После этого используется стандартный метод коллокаций, который, таким образом, становится возможно применить к областям сложной формы.

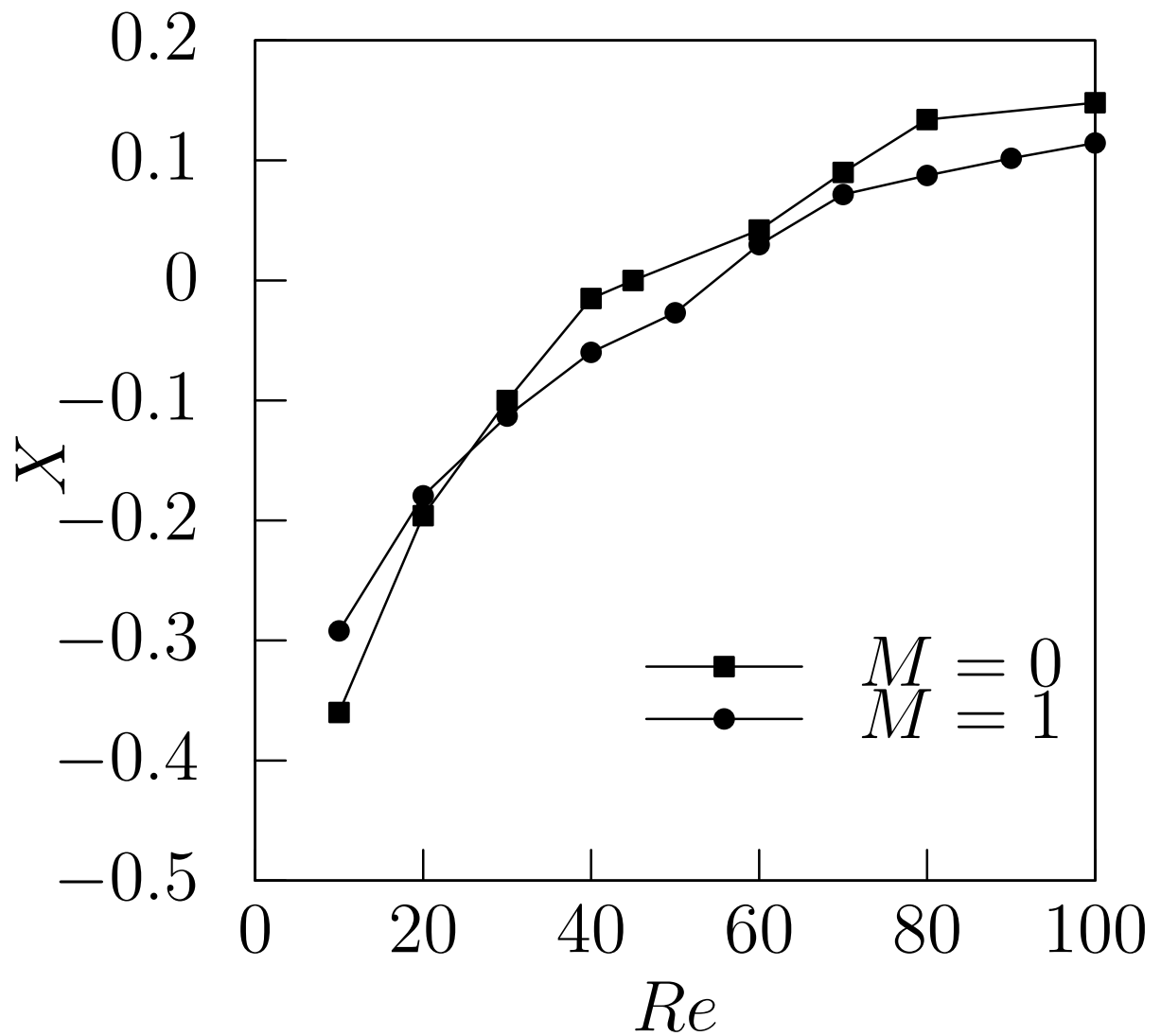


Рис. 3.31 — Зависимости коэффициента затухания  $X$  от числа Рейнольдса при  $M = 0, 1$

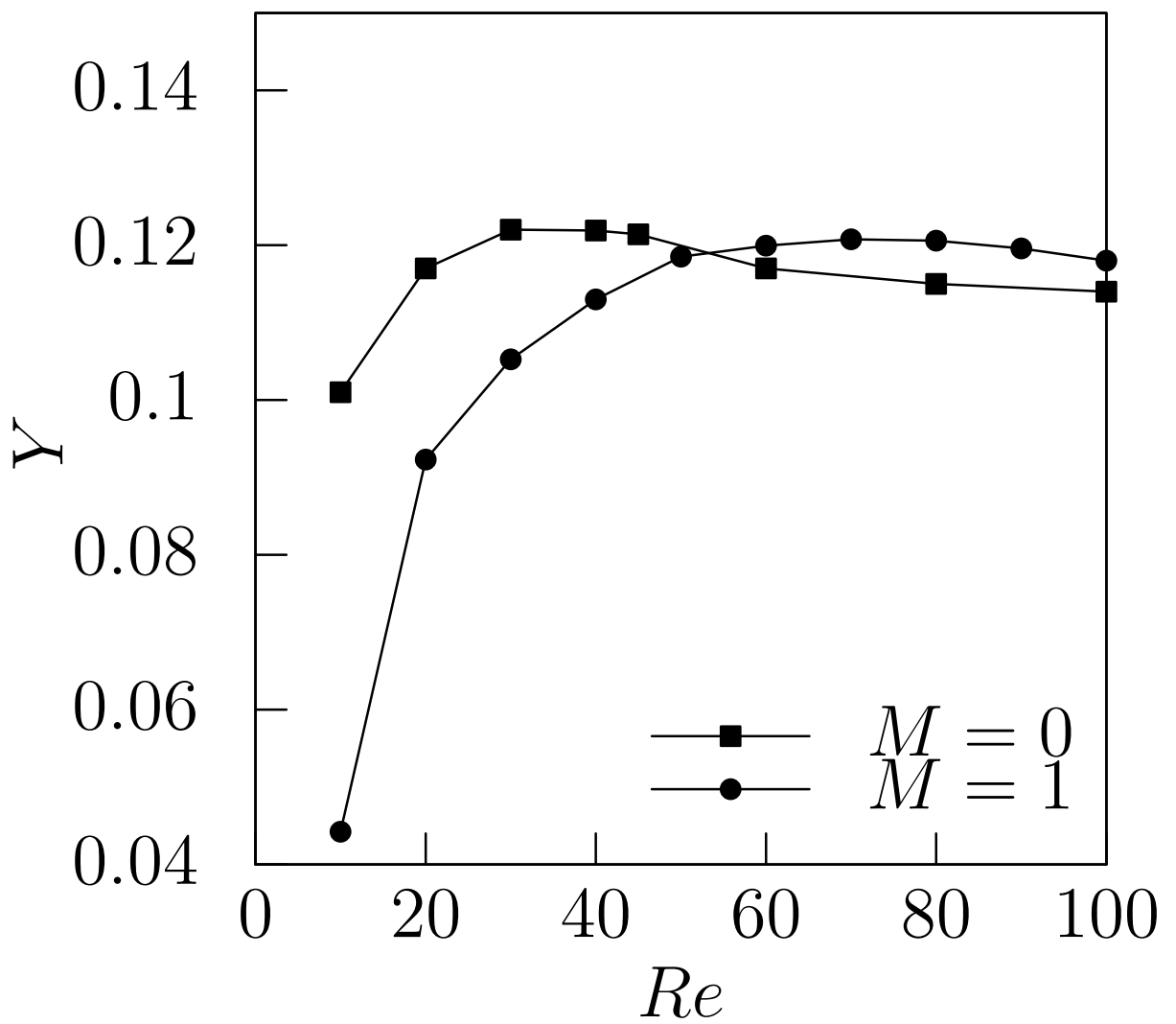


Рис. 3.32 — Зависимости частоты  $Y$  от числа Рейнольдса при  $M = 0, 1$

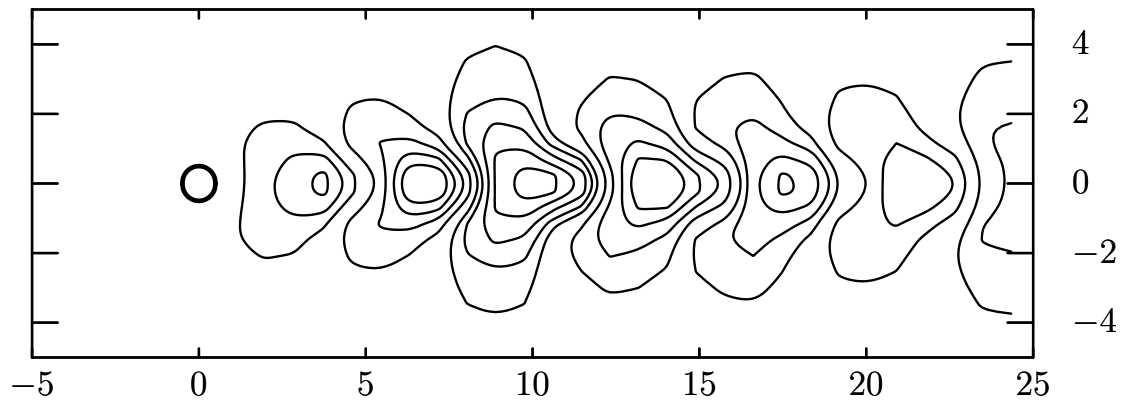


Рис. 3.33 — Линии тока действительной части наиболее опасной моды  $Re = 80$ ,  $M = 0$

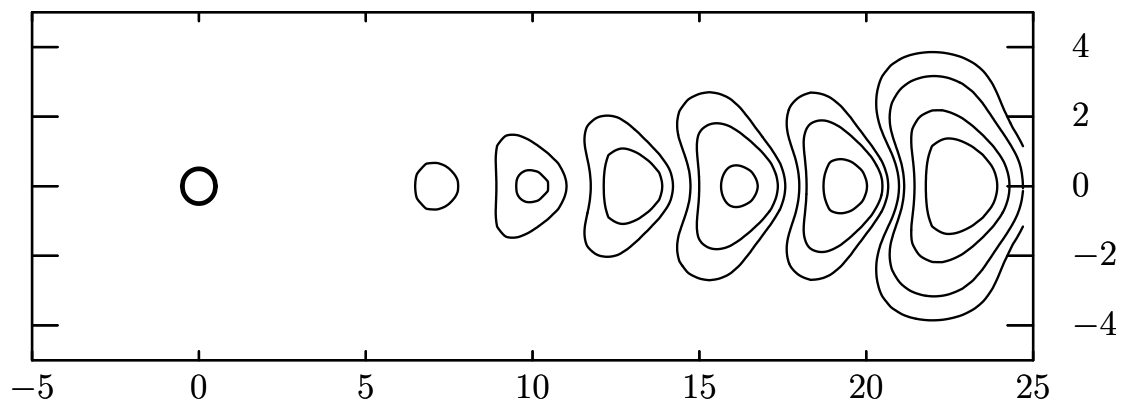


Рис. 3.34 — Линии тока действительной части наиболее опасной моды  $Re = 50$ ,  $M = 1$

### 3.8 Программная реализация задачи устойчивости течения возле круглого цилиндра

На рисунке 3.35 приведена диаграмма классов программы, которая реализует решение задачи, рассмотренной в разделе 3.7. Класс `chebyshev_polynomials`, в целом, соответствует классу `ChebyshevPolynomials`, введенному в разделе 2.10 и отличается деталями реализации, интерфейсом.

Класс `Pint` обеспечивает вычисление структуры решения (3.29) в точках с координатами, заданными векторами  $X$ ,  $Y$ . Метод `setPar()` устанавливает значения  $X$ ,  $Y$  и некоторые другие параметры, инициализирует объекты  $wx$  и  $wy$ . Приватный метод `bf` производит вызов граничной функции `bff_()`, определенной в другом файле.  $R$ -операции осуществлялись при помощи системы компьютерной алгебры `Maxima` или модуля `Sympy` языка программирования `Python`, полученная формула для вычисления граничной функции преобразовывалась в команды языка программирования `Fortran` или `C++`, которые сохранялись в файл и компилировались. Полученный объектный файл связывался с остальной частью кода. При помощи приватного метода `bf_tab_calc()` значения этой функции вычислялись в точках коллокаций и данные сохранялись в структуре  $M$ , откуда их можно получить для дальнейшего использования при помощи приватного метода `bf_tab()`. Публичный метод `Ph()` производит вычисление структуры (3.29) на основе уже вычисленных значений граничной функции и значений полиномов Чебышева, хранящихся в объектах  $wx$ ,  $wy$ .

В классе `Pois_2D` организовано вычисление элементов матриц, входящих в (3.30). Методы `setGrid()` и `setFlowPar()` задают физические параметры течения, геометрические параметры, параметры численной схемы. Также в этом методе происходит вычисление векторов  $X$  и  $Y$ , в которых хранятся точки коллокаций по координатам  $x$  и  $y$ . Далее, происходит инициация объекта класса `base_solution`, который вычисляет и загружает данные стационарного течения. Поля скоростей стационарного течения вычисляются отдельно при помощи программы, описанной в разделе 4. При помощи метода `setComp` в класс передаются значения  $X$  и  $Y$ , а также имя файла, в котором хранятся данные. С помощью утилит программного комплекса `Nektar++` происходит интерполяция полей скорости в данных точках, вычисленные величины сохраняются в структуре `field`, где

они доступны при помощи метода `getV()`. После загрузки данных стационарного течения происходит инициация объекта `w`, обеспечивающего работу со структурой решения. Метод `CalcM` производит непосредственное вычисление элементов матриц  $A$  и  $B$  по их номерам.

Решение задачи на собственные значения (3.30) реализовано в классе `ev_ef`. Определен конструктор класса, который формирует вектор `mcm` из объектов класса `Pois_2D`, число элементов вектора равно числу процессов, которые предполагается запускать параллельно. Функция `e_v()` производит вычисления матриц  $A$  и  $B$ , распараллеливание организовано построчно и производится при помощи технологии OpenMP. Решение задачи на собственные значения производилось при помощи библиотеки SLEPc. Для хранения вычисленных собственных векторов и значений в класс включен вектор, содержащий объекты класса `eivf`. Также в класс включен объект `w`, необходимый для построения графиков собственных функций, он инициализируется при помощи равномерной сетки. Метод `graph()` производит инициацию объекта `w` и формирует сетку для построения графиков собственных функций, на основе данных о коэффициентах вычисляет значения собственных функций в точках сетки и сохраняет эти данные в текстовые файлы.

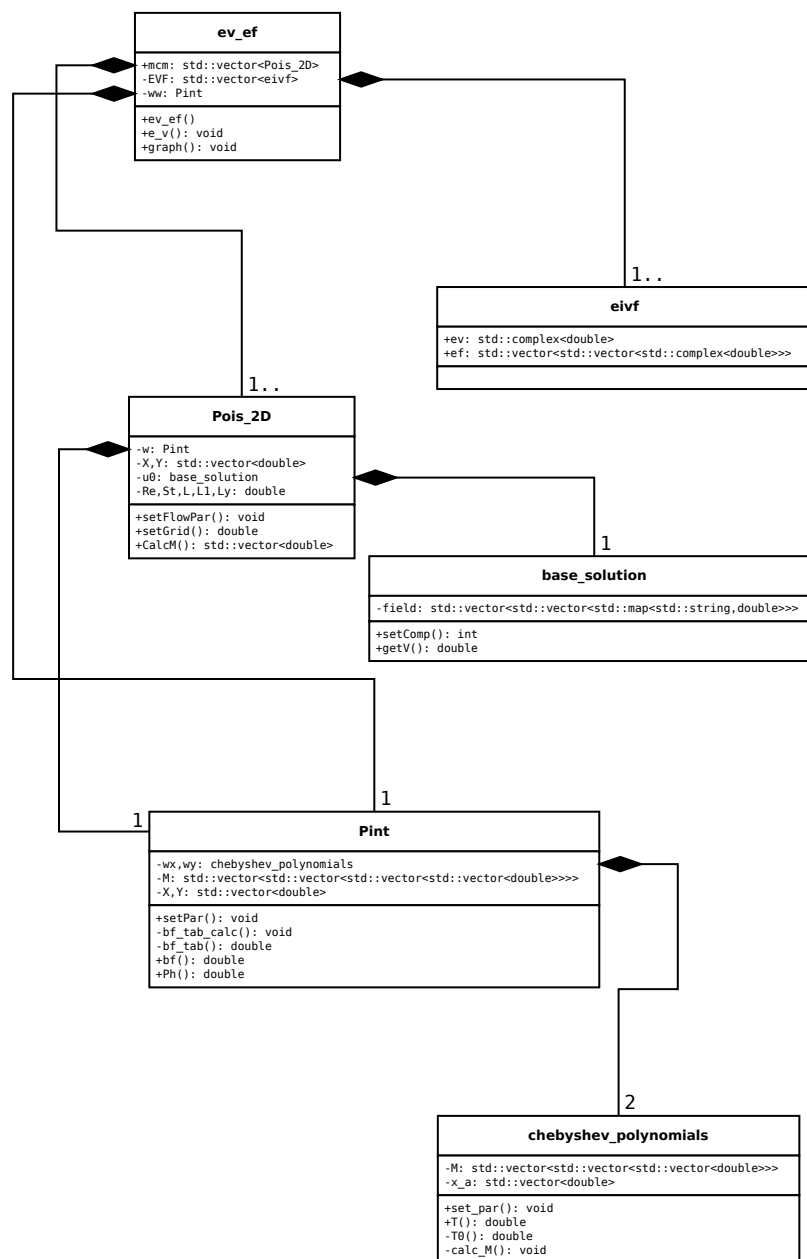


Рис. 3.35 — Диаграмма классов программы для вычисления собственных значений течения возле круглого цилиндра

### **3.9 Перспективы использования метода функций Рвачева в задачах гидродинамики и гидродинамической устойчивости**

Метод функций Рвачева позволяет разделить решение краевой задачи на два этапа. На первом происходит вычисление граничной функции и формируется структура, приближенно представляющая решение, а на втором осуществляется дискретизация задачи.

Роль граничной функции аналогична роли сетки в методе конечных элементов с той только разницей, что точность вычислений не зависит от этой функции. В работах [267; 271] показано, что граничная функция может быть составлена автоматически на основе геометрических моделей, полученных при компьютерном проектировании, или данных 3D сканирования. В работе [271] даже высказано предположение о появлении нового поколения компьютерных систем, которые смогут совмещать проектирование и математическое моделирование.

На втором этапе метода к структуре решения, составленной ранее, применяется численный алгоритм. Сложность критически-важной части численной процедуры соответствует методу Галеркина с численным интегрированием. Широко используемые спектральные алгоритмы вроде тау-метода или метода коллокаций, рассмотренного в разделе 2.3, требуют дополнительных действий для учета граничных условий и поэтому сложнее, а для областей произвольной формы просто неприменимы. Метод функций Рвачева, в силу своей простоты, может быть быстро реализован на современных вычислительных архитектурах вроде OpenCL, CUDA или Xeon Phi.

### **3.10 Основные результаты главы 3**

На основании проведенных исследований было установлено, что метод функций Рвачева имеет ряд важных преимуществ по сравнению с распространенными численными методами. Эти преимущества следуют из того факта, что функции Рвачева позволяют отделить геометрическую информацию от численного алгоритма. С одной стороны, это позволяет ускорить разработку компьютерных



программ и более просто использовать современные вычислительные технологии. С другой стороны, численный алгоритм отделяется от граничных условий. Это интересно для ненасыщаемых схем в области гидродинамики, где граничные условия для неньютоновских жидкостей или в наномасштабе могут иметь сложный вид и их трудно реализовать при помощи других методов.

1. На основе метода функций Рвачева был реализован ненасыщаемый метод вычисления течений вязкой электропроводящей жидкости в трубах в присутствии магнитного поля. Показано, что вычисления могут быть легко и эффективно распараллелены при помощи технологий OpenMP, OpenCL. Исследованы течения в трубе с внутренним элементом и течение к каналу МГД-генератора.
2. На основе метода функций Рвачева был разработан метод исследования устойчивости магнитогидродинамических течений в областях сложной геометрии. В качестве тестовых задач рассматривалась линейная устойчивость локализованных двумерных возмущений в плоском канале и устойчивость течения возле круглого цилиндра. С помощью разработанного метода исследована устойчивость течения возле круглого цилиндра в продольном магнитном поле.

Также важно отметить, что большинство существующих работ по методу функций Рвачева носят эмпирический характер, а соответствующая теория слабо разработана. Не ясны аппроксимационные возможности пучков функций, приближенно представляющих решения краевых задач и условия сходимости соответствующих численных схем.

## Глава 4. Спектрально-элементный метод

Известно, что численные методы высокого порядка точности обладают хорошими вычислительными свойствами: быстрой сходимостью, малой погрешностью, наиболее компактным представлением данных. То есть, теми свойствами, которые необходимы для решения многих задач гидродинамики, включая численное моделирование переходных режимов течения и исследование гидродинамической устойчивости. Конечно, турбулентные потоки могут быть рассчитаны и с использованием схем низкого порядка точности, за счет экстенсивного увеличения объема вычислений, но это часто очень не выгодно, особенно по отношению к задачам гидродинамической устойчивости. Например, классическое уравнение Орра-Зоммерфельда имеет малый параметр  $\frac{1}{Re}$  при старшей производной, который вызывает появление быстрорастущих осциллирующих решений. Первое численное вычисление собственных значений для этого уравнения [272] использовало конечно-разностную схему высокого порядка. Позже Орзаг [273] добился более точных результатов и продемонстрировал эффективность спектральных методов для задач такого типа. Эти выводы подтверждаются исследованиями, современный обзор которых на примере задач устойчивости течений в сложной геометрии, а также обсуждение преимуществ и недостатков ненасыщаемых численных методов можно найти в [69; 170]. Также эти вопросы раскрыты в учебнике [255].

### 4.1 Постановка задачи

Рассмотрим движение несжимаемой электропроводящей вязкой жидкости во внешнем магнитном поле, предполагая, что  $Re_m \ll Re$ . В этом случае индуцированное движением жидкости магнитное поле не оказывает влияния на ее течение. Это допущение выполняется в большинстве практических приложений

[274]. Запишем уравнения Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{B}), \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость жидкости,  $p$  – давление,  $\nu$  – вязкость,  $\rho$  плотность,  $\mathbf{F}$  – магнитные силы,  $\mathbf{B}$  – величина внешнего магнитного поля.

Запишем закон Ома

$$\mathbf{j} = \sigma (-\nabla \varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{j}$  – плотность электрического тока,  $\varphi$  – электрический потенциал,  $\sigma$  – электропроводность жидкости. Используя закон сохранения электрического заряда  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , можно вывести уравнение для электрического потенциала

$$\Delta \varphi = \nabla(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.3)$$

Система (4.1) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} + St (-\nabla \varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \Delta \varphi &= \nabla(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $Re = \frac{L_0 V_0}{\nu}$  – число Рейнольдса,  $St = \frac{\sigma H_0^2 L_0}{\rho V_0}$  – параметр, определяющий действие магнитного поля (число Стюарта),  $L_0$ ,  $V_0$  и  $B_0$  характеристические величины расстояния, скорости, магнитного поля, соответственно. Систему (4.4) называют уравнениями магнитной гидродинамики в форме электрического потенциала. Эта система широко используется в теоретических исследованиях и хорошо описывает течения жидких металлов во многих случаях (см. соответствующее обсуждение в [275]).

## 4.2 Спектрально-элементный метод и численная схема с коррекцией скорости

В настоящее время метод конечных элементов широко используется в вычислительной гидродинамике. Он состоит в том, что область, в которой ищется

решение, разбивается на большое количество неперекрывающихся подобластей – элементов. На каждом из таких элементов решение аппроксимируется кусочным образом. Такая аппроксимация обладает свойством локальности, то есть, вне элемента аппроксимирующий базис полагается равным нулю. Теория и практика метода конечных элементов изложена, например, в основополагающей работе [276], а также в книгах [277-279].

В простейшем случае для приближенного представления решения задачи на каждом элементе могут использоваться полиномы первого или второго порядков. Такой подход неэффективен для гладких функций. Ненасыщаемая конечно-элементная аппроксимация была предложена в известной статье [172] и изложенный там метод получил название спектрально-элементного. В работе [280] показано, что для гладких функций ошибка аппроксимации убывает как  $O(h^p)$ , где  $h$  – размер элемента, а  $p$  – степень аппроксимирующего полинома. Метод конечных элементов можно отнести к  $h$ -типу, если порядок аппроксимирующих полиномов  $p$  одинаков для всех элементов, а уменьшение погрешности достигается уменьшением размера элементов  $h$ . Как правило, такое уменьшение производится локально, в некоторых частях расчетной области. Если улучшение аппроксимации достигается за счет увеличения  $p$ , метод конечных элементов относится к  $p$ -типу. В этом случае  $p$  может меняться от элемента к элементу, если особенности задачи требуют локального увеличения точности.

Спектрально-элементный метод, хорошо себя зарекомендовавший в задачах вычислительной гидродинамики, может использоваться и в других областях, например, моделировании течений плазмы в одножидкостном приближении [281-283],

Для расчетов используется схема с коррекцией скорости, предложенная в работах [171; 284; 285]. Зададим последовательность моментов времени  $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}$ . Используя конечно-разностную схему первого порядка, можно найти промежуточную скорость  $\tilde{\mathbf{v}}$  при помощи уравнения

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_n}{\delta t} = -(\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n + \mathbf{F}_n + St \cdot \mathbf{v}_n \times (-\nabla \varphi_n + \mathbf{v}_n \times \mathbf{B}), \quad (4.5)$$

где  $\mathbf{F}$  – сила, действующая на жидкость. Она вычисляется после решения уравнения  $\Delta \varphi_n = \nabla(\mathbf{v}_n \times \mathbf{B})$  для электрического потенциала. Определим вторую промежуточную скорость как

$$\frac{\hat{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}}{\delta t} = -\nabla p_{n+1}. \quad (4.6)$$

Используя уравнение непрерывности  $div \hat{\mathbf{v}} = 0$ , немедленно получим уравнение Пуассона

$$\Delta p_{n+1} = \nabla \left( \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{\delta t} \right). \quad (4.7)$$

Таким образом, на этом шаге удовлетворяется уравнение несжимаемости. Граничные условия для давления обсуждаются в [284]. На следующем шаге вычислительного алгоритма решается уравнение

$$\left( \Delta - \frac{Re}{\delta t} \right) \mathbf{v}_{n+1} = -\frac{Re}{\delta t} \tilde{\mathbf{v}} + Re \nabla p_{n+1}, \quad (4.8)$$

которое позволяет определить скорость  $\mathbf{v}_{n+1}$ . Кроме схемы первого порядка по времени, описанной выше, программный комплекс Nektar++ позволяет использовать схемы второго и третьего порядков.

На рисунке 4.1 приведена диаграмма, которая поясняет последовательность вычислений при использовании метода вычислений с коррекцией скорости. Конвективный член, в зависимости от конкретной задачи, может иметь общий вид (Navier-Stokes advection), линейный (Linearized advection, раздел 4.3), нелинейный (Nonlinear advection, раздел 4.4).

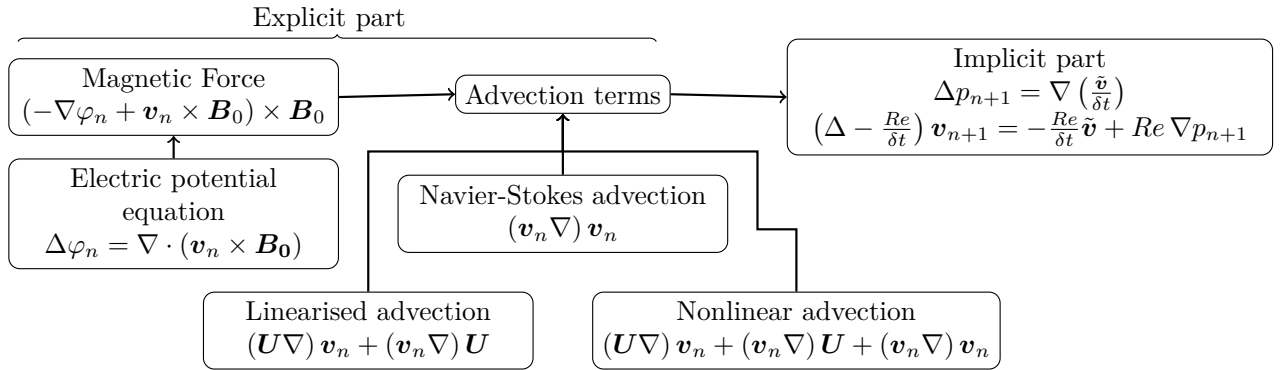


Рис. 4.1 — Схема с коррекцией скорости

## Пример: течение Гартмана

В качестве примера, демонстрирующего основные характеристики численного метода и корректность работы программы, рассмотрим течение Гартмана в плоском канале и течение Гартмана прямоугольной трубе, для которых известны аналитические решения.

На рисунке 4.2 изображен плоский канал. Две параллельные бесконечные плоскости находятся в точках  $y = \pm 1$ . Жидкость между плоскостями течет в направлении  $x$  под действием градиента давления  $\nabla p$ . Магнитное поле  $\mathbf{B}$  направлено перпендикулярно плоскостям. Это течение называют течением Гартмана в плоском канале. Как показано в [286], решение (4.4) в этом случае имеет вид:

$$\frac{u(y)}{u(0)} = \frac{\cosh(M) - \cosh(My)}{\cosh(M) - 1} \quad (4.9)$$

где  $M = \sqrt{St \cdot Re}$  – число Гартмана,  $u(0)$  скорость в центре канала. График скорости показан на рисунке 4.3 при  $M = 10, 100, 10000$ .

На рисунке 4.3 наблюдаются большие градиенты скорости возле стенок при больших значениях  $M$  и поэтому нужно принять специальные меры в этой области канала. Можно увеличить точность при помощи сгущения сетки возле стенок, где велики градиенты скорости, то есть произвести  $h$ -рефайнмент. Можно увеличить точность за счет увеличения порядка полиномов, при помощи которых приближенно представляется решение, что является  $p$ -рефайнментом. Во время вычислений эти два метода сочетались, используя порядок аппроксимации  $p$  от 5 до 25 и концентрацию сетки возле стенок с коэффициентом  $\beta$  ( $\beta = 1$  для равномерной сетки). Сетка, которая использовалась для проведения вычислений, показана на рисунке 4.4.

В таблице 4.1 приведены максимальные отклонения от точного решения при  $M = 10 \sim 10^4$  для разных порядков аппроксимации  $p$ . Стационарное решение (4.9) вычислялось как зависящее от времени начиная от нулевых начальных условий. Таблица 4.1 также включает время работы программы на процессоре AMD Ryzen Threadripper 1920X с использованием 12 потоков.

Рассмотрим стационарное течение в прямоугольной трубе, поперечное сечение которой изображено на рисунке 4.5. Однородное магнитное поле направлено вертикально, стенки трубы приняты идеально электропроводящими. Жидкость течет под действием постоянного градиента давления, перпендикулярного

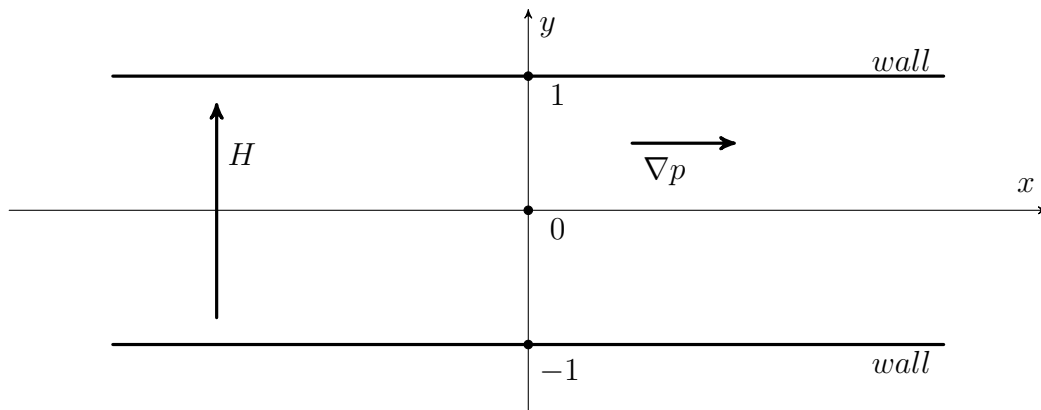
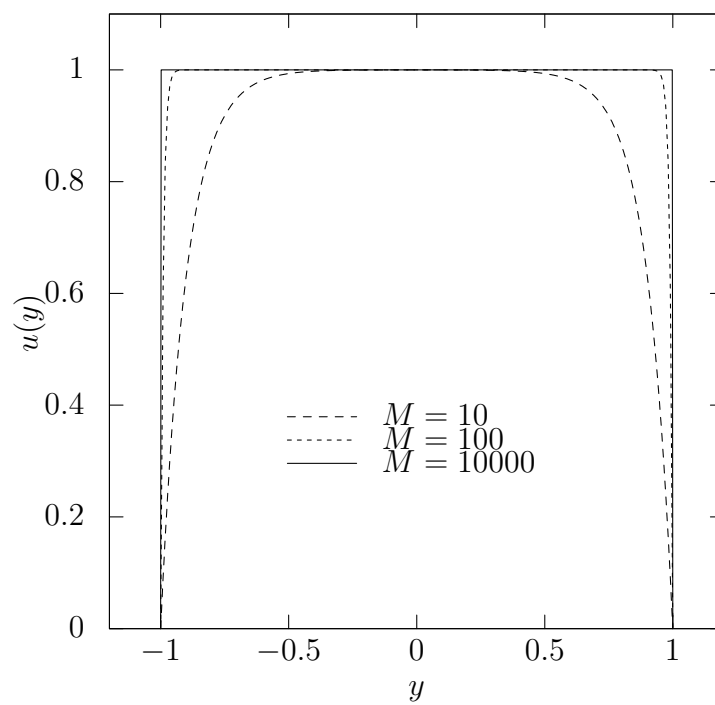


Рис. 4.2 — Плоский канал

Рис. 4.3 — Графики скорости при разных значениях  $M$

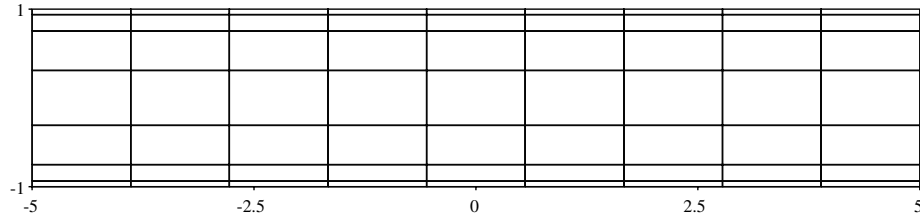


Рис. 4.4 — Сетка для расчетов течения Гартмана,  $\beta = 0.05$

Таблица 4.1: Максимальное отклонение от точного решения (4.9),  $M = 10 \sim 10^4$

$p$	$\beta = 0.5$		$\beta = 0.05$		$\beta = 0.005$		$\beta = 0.0005$	
	$M = 10$	$t, \text{m:s}$	$M = 100$	$t, \text{m:s}$	$M = 10^3$	$t, \text{m:s}$	$M = 10^4$	$t, \text{m:s}$
5	0.00035269	0:00.50	0.01206	0:00.71	0.0659132	0:00.48	0.116924	0:01.29
10	8.55003E-10	0:02.93	3.67734E-06	0:04.51	0.000550293	0:02.78	0.00731443	0:07.09
15	6.91253E-13	0:21.02	1.50558E-08	0:16.32	7.01068E-07	0:12.65	0.000215073	0:23.43
20	7.76823E-13	0:41.80	4.32387E-11	0:53.42	9.98051E-10	0:33.59	4.2223E-05	0:58.08
25	8.36775E-13	1:39.52	4.49063E-11	1:58.71	7.00766E-10	1:15.66	4.10316E-05	3:36.74

к плоскости рисунка. Для этого течения известно аналитическое выражение, полученное в работах [269; 287].

Для численных расчетов использовалась сетка, приведенная на рисунке 4.6. Программный комплекс Nektar++ в трехмерной геометрии позволяет задать однородное направление, в котором решение будет представлено в виде разложения Фурье. В рассмотренном случае таким направлением является ось  $z$ .

Для иллюстрации сходимости в таблице 4.2 приведены значения скорости в точках  $(0.95, 0.0)$  для  $M = 10^3$  и  $(0.98, 0.0)$  для  $M = 10^4$ . Таблица 4.2 иллюстрирует сходимость при увеличении порядка аппроксимации  $p$  от 5 до 25, приведены также значения скорости, вычисленные аналитически, значения коэффициента сгущения сетки возле стенок  $\beta$ , время вычислений и объем использованной памяти для рабочей станции с процессором AMD Ryzen Threadripper 1920X. Графики скорости при  $M = 10^3$ ,  $M = 10^4$  приведены на рисунке 4.7.



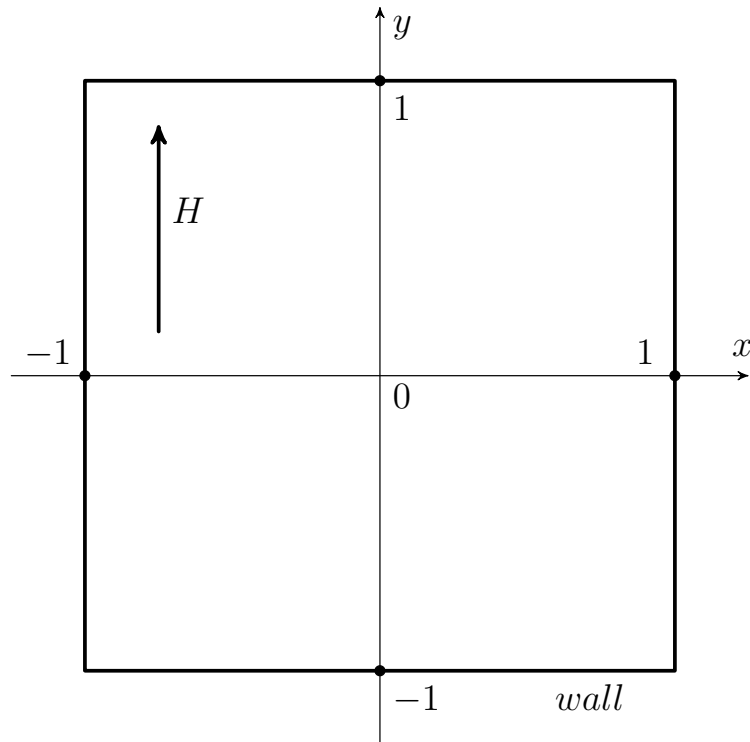


Рис. 4.5 — Поперечное сечение прямоугольной трубы

Таблица 4.2: Сходимость скорости в точках  $(x, y)$ ,  $M = 10^3, 10^4$ 

$p$	$\beta = 0.0005, (x, y) = (0.95, 0.0)$		$\beta = 0.0001, (x, y) = (0.98, 0.0)$		memory usage, Gb
	$M = 10^3$	<i>time, m:s</i>	$M = 10^4$	<i>time, m:s</i>	
5	1.197537688505880	0:54.71	1.105637945879100	2:35.64	0.041
10	1.214652059488780	1:31.85	1.242371828471130	9:29.99	0.115
15	1.212061289609800	5:12.96	1.234533071659520	24:40.63	0.358
20	1.212043863156160	9:30.71	1.234851578015370	1h 12:50	0.962
25	1.212044479951230	21:53.03	1.234834938798250	2h 30:03	2.189
reference values	1.21204510		1.2348750		

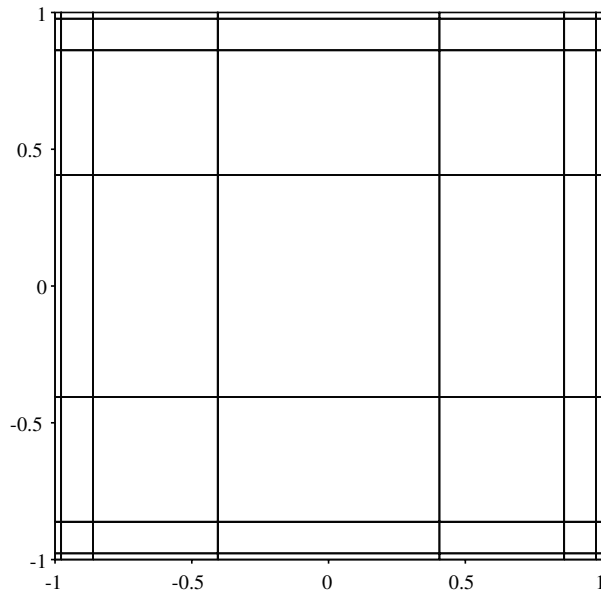


Рис. 4.6 — Сетка для расчетов течения Гартмана в прямоугольной трубе,  $\beta = 0.01$

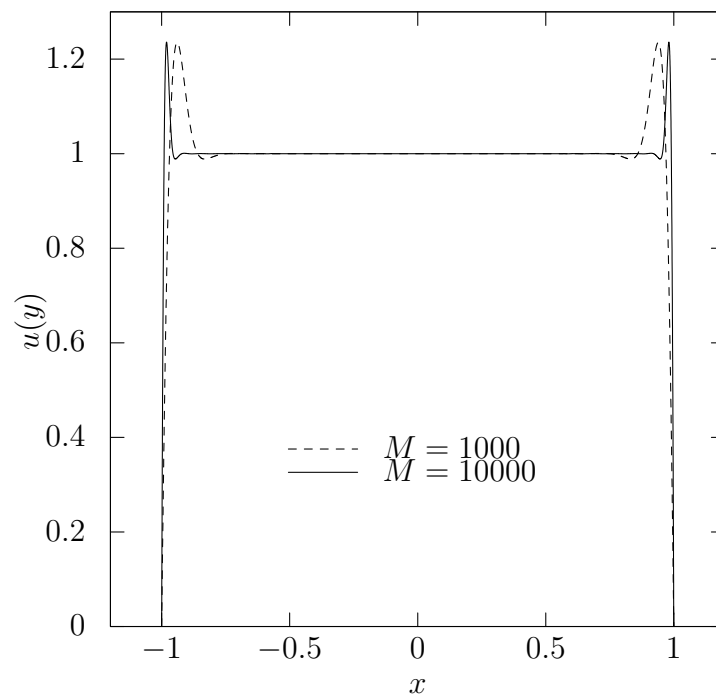


Рис. 4.7 — Графики скорости течения Гартмана в прямоугольной трубе по линии  $y = 0$  с случае идеально электропроводящих стенок,  $M = 10^3, 10^4$

### 4.3 Проблема устойчивости

Для анализа устойчивости представим скорость, давление и электрический потенциал в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{U} + \mathbf{v}, \\ \varphi &= \varphi_0 + \varphi, \\ p &= p_0 + p, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где  $\mathbf{U}$ ,  $\varphi_0$  и  $p_0$  стационарные значения, а  $\mathbf{v}$ ,  $\varphi$  и  $p$  – бесконечно-малые возмущения. В этом случае система (4.4) преобразуется к линейной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{U} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} + St (-\nabla \varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \Delta \varphi &= \nabla (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Уравнения (4.11) определяют линейный оператор  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{v}(x, y, z, T) = \mathbf{A}(T) \mathbf{v}(x, y, z, 0) = \lambda(T) \mathbf{v}(x, y, z, 0), \quad (4.12)$$

где  $T$  – временной интервал. Линейный оператор  $\mathbf{A}(T)$  вычисляется численно при помощи процедуры, описанной в разделе 4.2 для нелинейных уравнений (4.4). Чтобы найти собственные значения  $\lambda(T)$ , построим подпространство Крылова

$$K_n(\mathbf{A}, \mathbf{v}_0) = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_0, \mathbf{A}(T)\mathbf{v}_0, \mathbf{A}(T)^2\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{A}(T)^{n-1}\mathbf{v}_0\}, \quad (4.13)$$

где  $\mathbf{A}(T)^i \mathbf{v}_0$  получаются путем прямых вычислений  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}(T)\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{A}(T)\mathbf{v}_1$ , .... Дальнейшее вычисление собственных значений производится при помощи стандартных численных алгебраических методик, таких как метод Арнольди. Nektar++ вычисляет собственные значения в форме

$$\lambda(T) = m \cdot e^{\theta i}, \quad (4.14)$$

при  $m > 1$  течение неустойчиво. Независимые от времени коэффициент нарастания и частота возмущения равны  $\sigma = \frac{\ln(m)}{T}$  и  $\omega = \frac{\theta}{T}$ , соответственно.

## Устойчивость течения Гартмана

В разделе 4.2 было рассмотрено течение Гартмана в плоском канале. Для верификации программы и демонстрации возможностей численного метода я исследовал его устойчивость. Возьмем двумерные возмущения в виде:

$$\{v, \varphi, p\} = \mathbf{q}(x, y)e^{i\alpha(x-Ct)}, \quad (4.15)$$

где  $\mathbf{q}(x, y)$  – амплитуда возмущения,  $\alpha = \frac{2\pi}{\gamma}$  – волновой вектор,  $\gamma$  – длина волны,  $C = X + iY$  – фазовая скорость возмущения,  $\alpha X = \omega$  – частота,  $\alpha Y = \sigma$  – коэффициент нарастания возмущения. Если  $\sigma \leq 0$ , то течение устойчиво.

Для проверки численных результатов я использовались результаты Такаси-мы [133] для двумерных возмущений. В таблице 4.3 приведены коэффициенты нарастания и частоты возмущений для нескольких наборов параметров  $Re$  и  $M$ , которые были взяты из статьи [133]. Эти значения являются критическими. Сетка, на которой производились вычисления, показана на рисунке 4.4,  $n_x$  и  $n_y$  – количество ячеек в горизонтальном и вертикальном направлениях. Длина канала  $L$  задавалась величиной критического волнового числа  $\alpha_c = \frac{2\pi}{L}$ . Граничные условия на входе и выходе периодические. В таблице 4.3 наблюдается полное совпадение вычисленных мною коэффициентов  $\frac{\sigma}{\alpha}$  и  $\frac{\omega}{\alpha}$  с результатами, приведенными в [133], достигнута сходимость вплоть до  $10^{-7}$ . Также таблица включает время вычислений (на процессоре AMD Phenom FX-8150 с восемью потоками) и объем использованной памяти.

Таблица 4.3: Собственные значения течения Гартмана

$Re$	$M$	$\alpha$	$n_x \times n_y$	$p$	$\frac{\sigma}{\alpha}$	$\frac{\omega}{\alpha}$	time	memory,GB
10016.2621	1	0.971828	$6 \times 3$	10	0.233652452491593	4.14E-04	1h18:12	0.07
-	-	-	-	20	0.235517912202571	1.55E-06	3h28:46	0.33
-	-	-	$8 \times 6$	10	0.235518158254341	-7.67E-07	1h47:42	0.11
-	-	-	-	15	0.235518939061233	8.97E-08	4h35:36	0.30
-	-	-	-	20	0.235518994976477	6.38E-08	11h03:43	0.77
-	-	-	из [133]		0.235519			
28603.639	2	0.927773	$8 \times 6$	10	0.192137721274493	1.66E-06	3h19:01	0.13
-	-	-	из [133]		0.192133			
65155.21	3	0.958249	$8 \times 6$	20	0.169030377438432	1.16E-07	15h41:21	0.77
-	-	-	из [133]		0.169030			

## Устойчивость течения Ханта

Рассмотрим устойчивость течения в трубе прямоугольного сечения (см. рис 4.5) в случае, когда горизонтальные стенки идеально-электропроводящие, а вертикальные – диэлектрические. Такая труба была рассмотрена в [268] и называется течением Ханта. Сетка для вычисления стационарного течения и исследования его устойчивости приведена на рисунке 4.8. На рисунке 4.9 представлены графики скорости и электрического потенциала на линии  $y = 0$  при  $M = 10, 10^2, 10^3$ . В таблице 4.4 приведены вычисленные мною собственные значения и, для сравнения, результаты из работы [288], а также время работы программы (на процессоре AMD Ryzen Threadripper 1920X с 12 потоками) и объем использованной памяти. Таблица иллюстрирует сходимость собственных значений при увеличении  $p$  и совпадение в результатами из работы [288] вплоть до  $10^{-5}$ , за исключением случая  $M = 10^3$ .

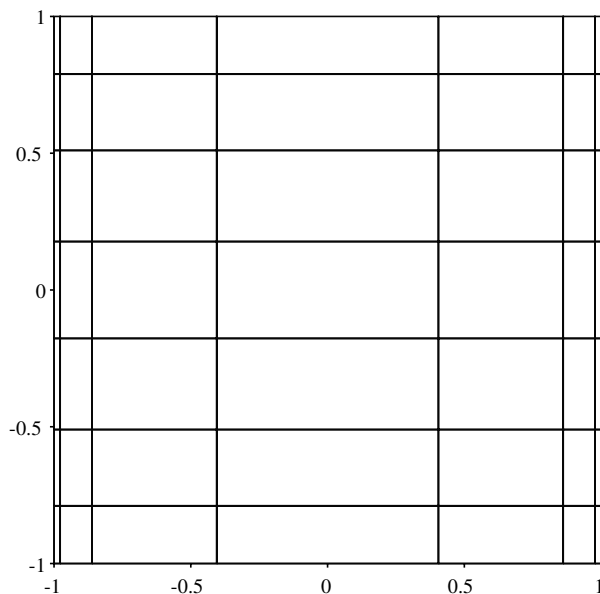


Рис. 4.8 — Сетка для течения Ханта,  $\beta_y = 0.5$ ,  $\beta_x = 0.01$

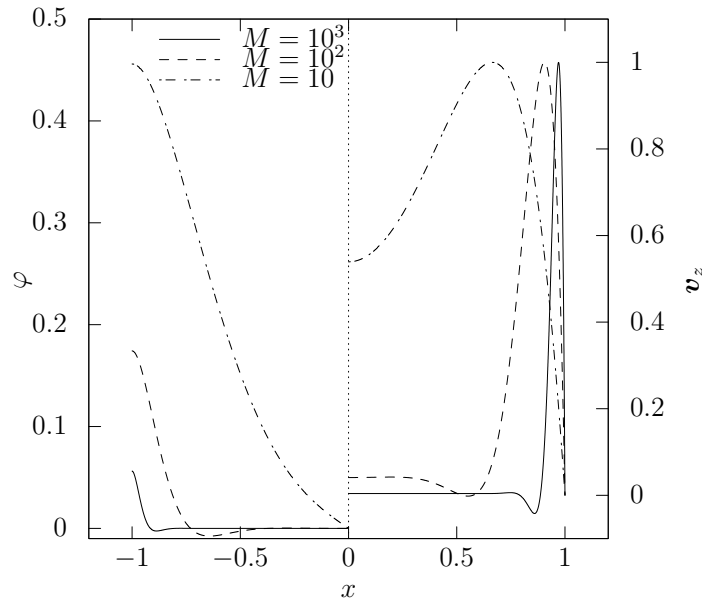


Рис. 4.9 — Скорость  $v_z$  и электрический потенциал  $\varphi$  течения Ханта на линии  $y = 0$ ,  $M = 10, 10^2, 10^3$

Таблица 4.4: Собственные значения в течении Ханта,  $M = 10, 10^2, 10^3$

$p$	$M = 10, \beta_x = 0.05, \beta_y = 0.1$			$M = 10^2, \beta_x = 0.01, \beta_y = 0.5$			$M = 10^3, \beta_x = 0.01, \beta_y = 0.5$			mem, Gb
	$\frac{\sigma}{\alpha}$	$\frac{\omega}{\alpha}$	time	$\frac{\sigma}{\alpha}$	$\frac{\omega}{\alpha}$	time	$\frac{\sigma}{\alpha}$	$\frac{\omega}{\alpha}$	time	
5	0.7495498	-0.5494e-2	13:56	0.8109660	-0.134660	5:48	0.4576533	2.41323e-2	2:12	0.042
10	0.7579881	-0.3446e-3	1h33:57	0.4912104	-0.6873e-2	42:59	0.4799186	0.08964e-2	14:12	0.118
15	0.7579733	-0.3348e-3	2h51:02	0.4907436	-0.8033e-2	1h50:50	0.4784210	0.14098e-2	2h21:50	0.365
20	0.7579599	-0.3311e-3	12h02:47	0.4907460	-0.8030e-2	2h42:15	0.4784201	0.14121e-2	3h50:34	0.972
из [288]	0.7579413	-0.3337e-3		0.4907415	-0.8028e-2		0.5053902	0.14170e-2		

## 4.4 Исследование нелинейной устойчивости

В разделе 4.3 исследовалась линейная устойчивость магнитогидродинамических течений. Анализ линейной устойчивости позволяет изучить многие эффекты, связанные с ламинарно-турбулентным переходом. Однако, такого анализа часто недостаточно. Например, для плоского течения Пуазейля критическое число Рейнольдса по линейной теории равно 5772, тогда как в экспериментах оно  $\sim 1000$  [64], а течение в круглой трубе вообще устойчиво по отношению к бесконечно-малым возмущениям.

В настоящее время есть две точки зрения на развитие неустойчивости [289]. Первая из них предполагает, что турбулентное движение развивается из бесконечно малых возмущений ламинарного течения, которые нарастают до некоторой относительно большой амплитуды, когда становится велика роль нелинейных эффектов. Вторая точка зрения предполагает, что турбулентное состояние при больших числах Рейнольдса имеет большую область притяжения и любое малое возмущение конечной амплитуды может скачком направить течение в турбулентное состояние.

Рассмотрим снова выражения (4.10), но теперь будем полагать, что  $\mathbf{v}$ ,  $\varphi$  и  $p$  имеют конечные амплитуды. Тогда система (4.4) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \\ = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} + St (-\nabla \varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0, \quad (4.16) \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \Delta \varphi = \nabla (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0). \end{aligned}$$

Эволюция нелинейных возмущений будет исследоваться путем интегрирования по времени уравнений (4.16). В данной постановке я изучаю возмущения отдельно от стационарного течения. Такие вычисления более затратны, так как приходится вычислять конвективные члены трижды ( $(\mathbf{U} \nabla) \mathbf{v}$ ,  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{U}$  и  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ ). Был проделан сравнительный анализ и в двумерном случае не удалось обнаружить измеримого увеличения общего времени вычислений, а в трехмерном случае я оценил, что дополнительные вычисления составляют примерно 20 процентов от общего времени вычислений. В качестве компенсации, такой подход позволяет изучать более точные постановки задач. Например, можно задать стационарное течение аналитически или вычислять стационарное течение при помощи приемов стабилизации.

## 4.5 Нелинейная устойчивость течения Гартмана в двумерном случае

Рассмотрим нелинейную устойчивость течения Гартмана. Сетка, с помощью которой производились вычисления, показана на рисунке 4.10. Были заданы

периодические граничные условия на входе и выходе, а на стенках

$$\mathbf{v} = 0, \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (4.17)$$

Граничные условия для  $\varphi$  в двумерной постановке не требуются.

Сначала исследовалась линеаризованная задача, как показано в разделе 4.3. Были найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции. Исследовано два набора параметров:  $Re = 10^4$ ,  $M = 1$  (случай А) и  $Re = 10^5$ ,  $M = 10$  (случай В). В случае А профиль скорости в канале близок к параболическому (без магнитного поля), но критическое число Рейнольдса заметно выше. В случае В магнитное поле сильнее влияет на течение. В двух этих случаях течение устойчиво по отношению к бесконечно-малым возмущениям. Наибольшие собственные значения равны  $(-0.0733, \pm 5.56)$  и  $(-0.0461, \pm 3.21)$  в случаях А и В. Соответствующие собственные функции были взяты как начальные условия для уравнений (4.16).

Для начальных условий я задал максимальные амплитуды  $Amp = 1.0, 0.1, 0.01, 0.001$  и вычислил эволюцию каждого возмущения во времени. На рисунке 4.11 показаны линии тока для возмущения в случае А для  $Amp = 1.0$ ,  $t = 0$  (а) и  $t = 50$  (б). Рисунки 4.12 и 4.13 показывают зависимость энергии потока от времени в случаях А и В для различных значений начальной энергии  $E_0$ , определяемых амплитудой  $Amp(E_d - \text{энергия возмущений})$ . Эти графики позволяют нам определить, что в большинстве случаев возмущения затухают, за исключением случая при  $Re = 10^4$ ,  $M = 1$ , где наблюдаются незатухающие осцилляции энергии потока.

Ниже исследовано внесение возмущений при помощи вдува жидкости в течение. Возмущение задавалось на стенках в виде

$$v_{inj} = \frac{1.0e^{-1250.0(x+2.0)^2}}{0.0625t^4 + 1}. \quad (4.18)$$

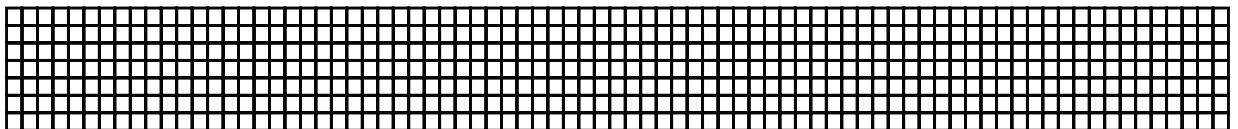
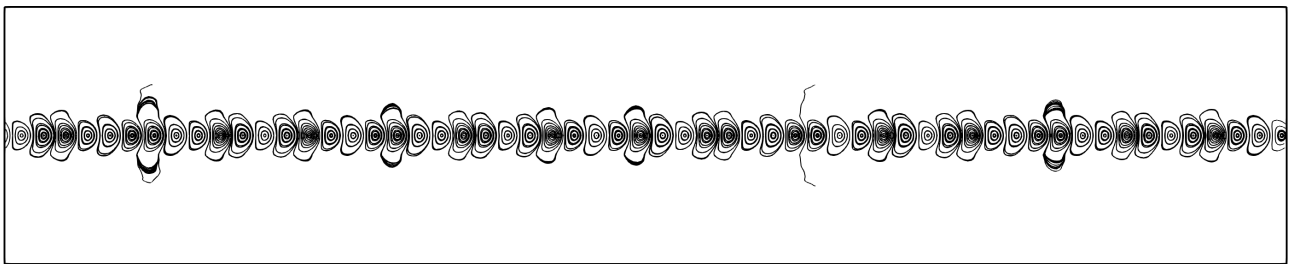
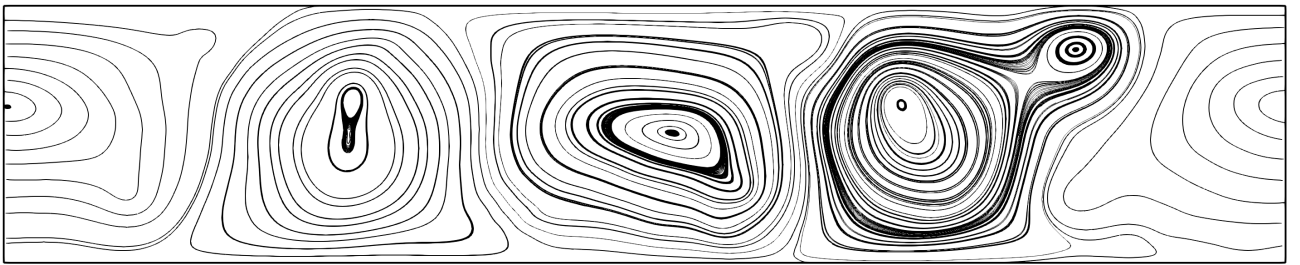


Рис. 4.10 — Сетка для изучения нелинейной эволюции возмущений в течении Гартмана





(a)



(b)

Рис. 4.11 — Линии тока возмущений при  $t = 0$  (a) и  $t = 50$  (b),  $Amp = 1.0$ ,  $Re = 10^4$ ,  $M = 1$ .

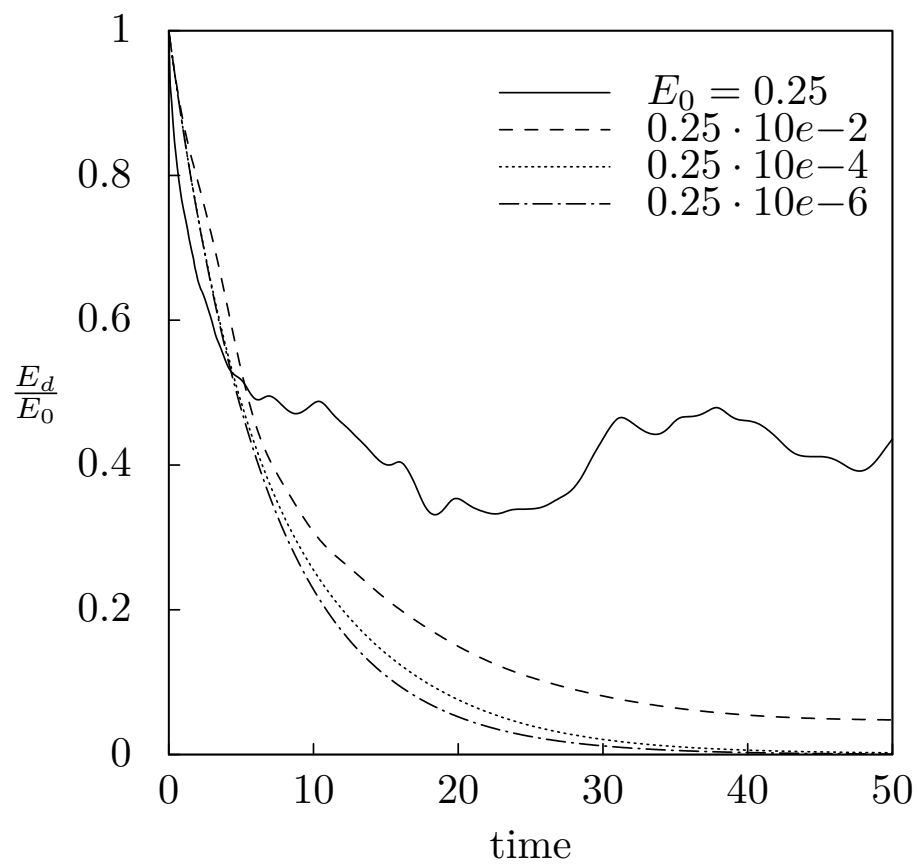


Рис. 4.12 — Графики энергии возмущения для различных значений  $E_0$  при  $Re = 10^4$ ,  $M = 1$

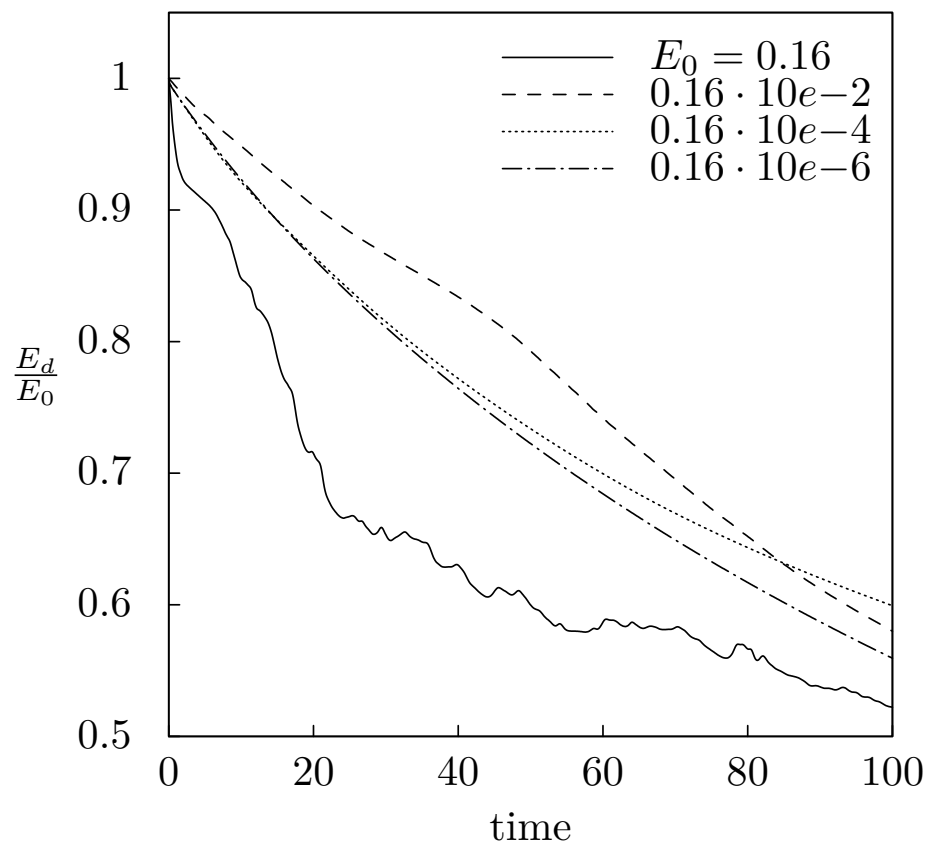


Рис. 4.13 — Графики энергии возмущения, заданного линейной задачей, для различных значений  $E_0$  при  $Re = 10^5$ ,  $M = 10$

Такой способ внесения возмущений моделирует вдув и отсос жидкости, которые широко используются в экспериментах. На рисунках 4.14, 4.15 показаны графики зависимости амплитуды возмущений от времени  $t$  и координаты  $x$ . На рисунке 4.16 изображены изоконтурные амплитуды скорости возмущения при  $Re = 3000$ ,  $M = 10^{-3}$ . Возмущение (4.18) было задано одновременно на верхней (отсос) и нижней (вдув) стенках канала для сохранения количества жидкости в канале. На рисунках 4.17 и 4.18 показаны зависимости энергии возмущения от времени для случаев А ( $Amp = 1, 0.7, 0.2, 0.1$ ) и В ( $Amp = 7, 2, 0.1$ ). Графики нормированы по значению энергии  $E_0$ , измеренному при  $t = 10$ . Графики энергии позволяют определить, что в большинстве случаев возмущения затухают, за исключением одного графика при  $Re = 10^4$ ,  $M = 1$ , где наблюдается потеря устойчивости стационарного течения. На рисунке 4.19 приведены линии тока нестационарного течения в момент времени  $t = 300$ , инициированного вдувом жидкости при  $M = 1$ ,  $Re = 10^4$ .

Таким образом, я исследовал двумерные возмущения и сравнил два подхода к внесению возмущений в течение: начальные значения задавались при помощи собственных функций линеаризованных уравнений, возмущение вносилось посредством вдува в поток конечного объема жидкости. Было рассмотрено два набора параметров:  $Re = 10^4$  и  $M = 1$  (случай А),  $Re = 10^5$  и  $M = 10$  (случай В). Оба подхода привели к идентичным результатам, в случае В течение устойчиво, а в случае А при достаточно большой амплитуде наблюдается переход к нестационарному течению. Также обнаружена существенная разница в практической реализации этих подходов. Исследование линейной устойчивости – достаточно трудная задача. По затратам машинного времени получение одного собственного значения и соответствующей собственной функции сравнимо с серией вычислений эволюции нелинейных возмущений. При увеличении чисел Гартмана и Рейнольдса это соотношение, по-видимому, будет ухудшаться.

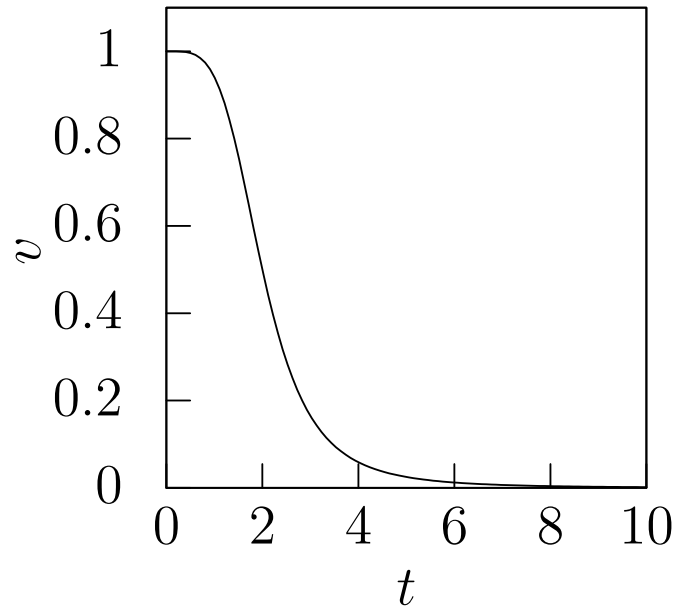


Рис. 4.14 — Убывание инъекционного возмущения во времени на оси вдува

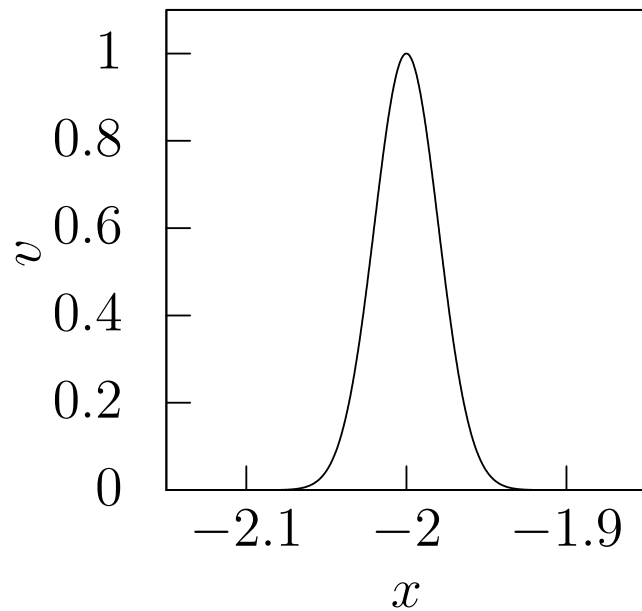


Рис. 4.15 — График инъекционного возмущения при  $t = 0$

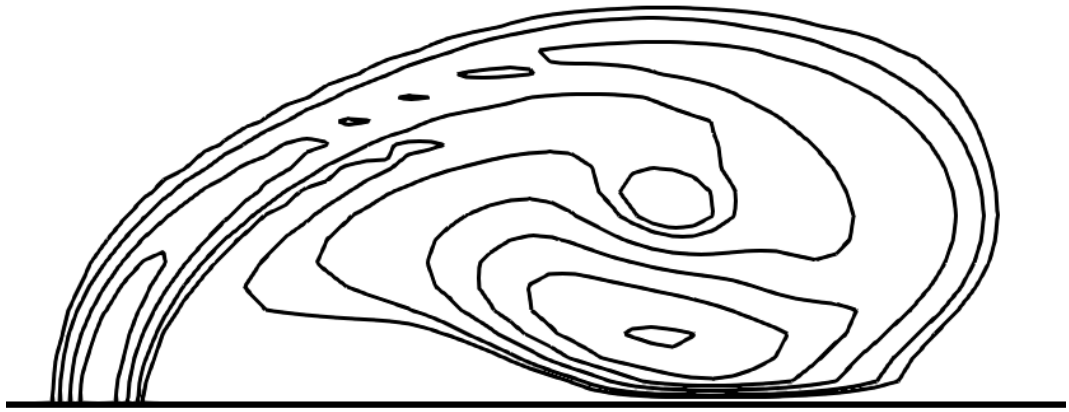


Рис. 4.16 — Изоконтурсы амплитуды скорости возмущения при  $Re = 3000$ ,  $M = 10^{-3}$

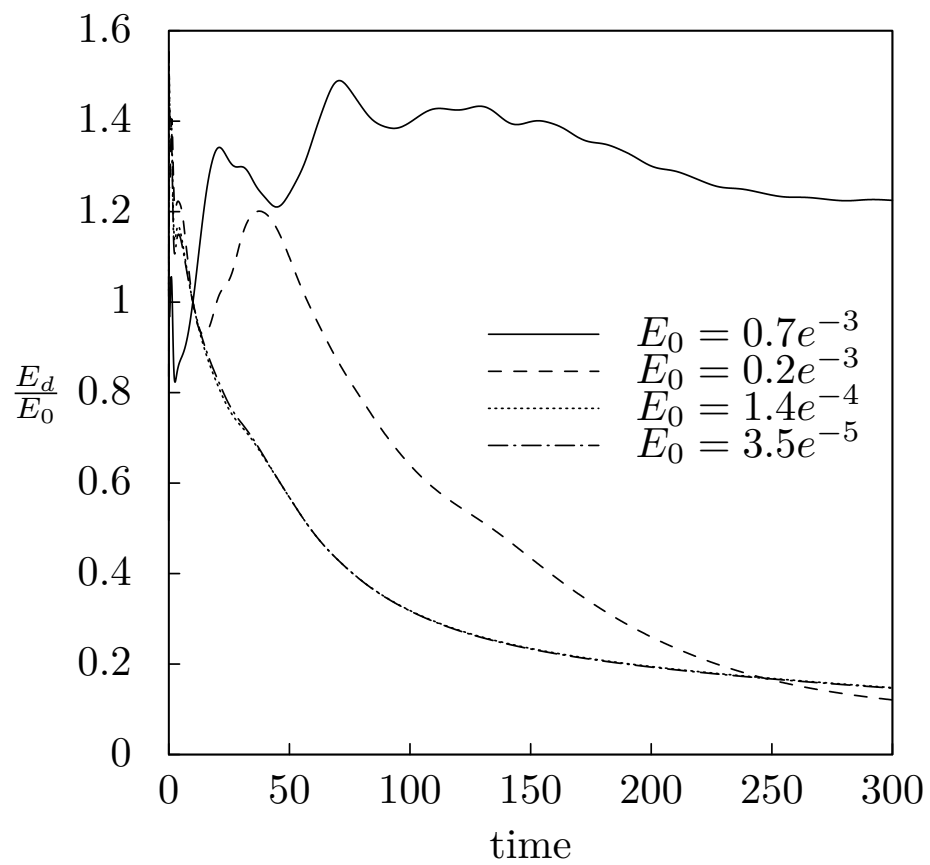


Рис. 4.17 — Графики энергии возмущения для различных значений  $E_0$  при  $Re = 10^4$ ,  $M = 1$

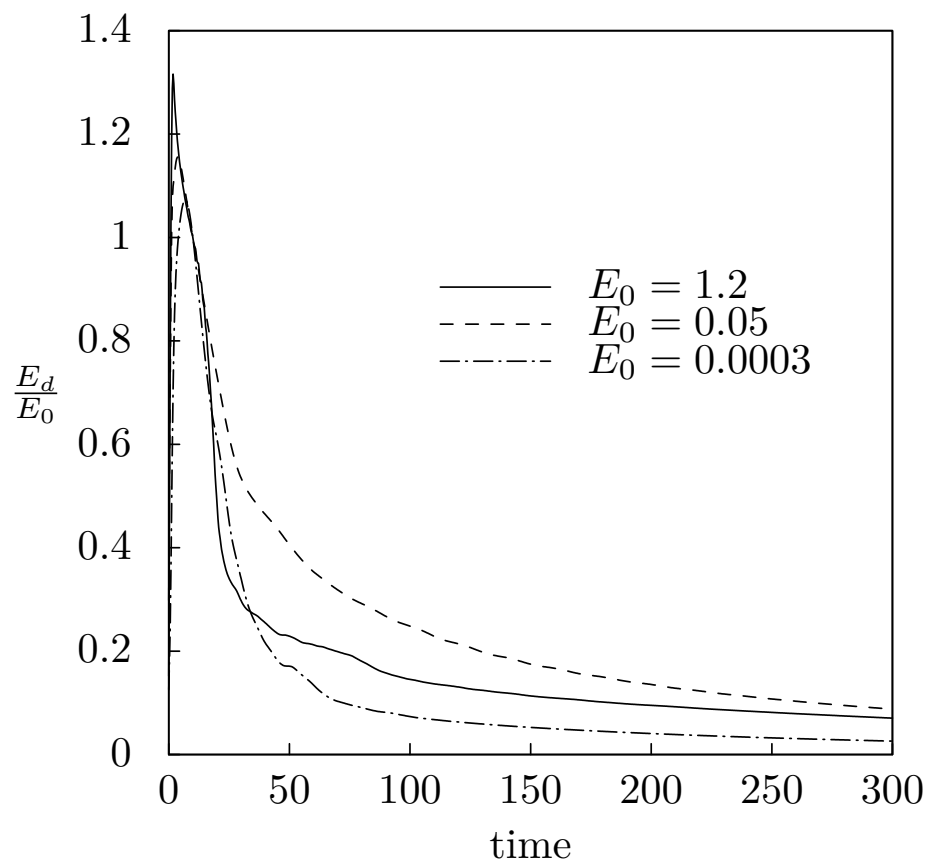


Рис. 4.18 — Графики энергии возмущения для различных значений  $E_0$  при  $Re = 10^5$ ,  $M = 10$



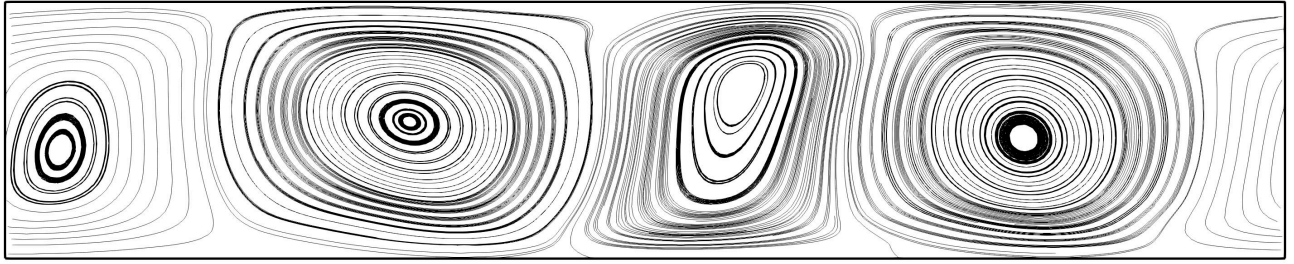


Рис. 4.19 — Линии тока возмущения при  $t = 300$ ,  $M = 1$ ,  $Re = 10^4$

## 4.6 Нелинейная устойчивость течения Гартмана в трехмерном случае

Рассмотрим эволюцию возмущений в плоском канале в трехмерном случае. Эта задача была рассмотрена в работе [226] другим методом и результаты этой статьи будут использоваться для независимой проверки. Введем ось  $z$ , которая направлена перпендикулярно к осям  $x$  и  $y$ , показанным на рисунке 4.2. Все величины вдоль оси  $z$  представим в виде ряда Фурье. Длина канала в поперечном направлении была принята равной 2 и число членов разложения Фурье было принято равным 20. Использование разложения Фурье позволяет рассмотреть трехмерное течение с относительно малыми затратами машинных ресурсов по сравнению с полной трехмерной задачей.

На рисунке 4.20 представлены графики скорости для  $M = 6, 20, 50$ . По мере увеличения числа Гартмана толщина пограничного слоя, в котором существуют большие градиенты скорости, уменьшается. Полезно ввести число Рейнольдса, основанное на толщине пограничного слоя Гартмана

$$R = \frac{Re}{M}. \quad (4.19)$$

Сетка, при помощи которой производились вычисления, показана на рисунке 4.21. Он двумерна и состоит из 40 элементов в направлении  $x$  ( $-5 \leq x \leq 5$ ) и 9 элементов в направлении  $y$ . Сетка сгущается вблизи границ, чтобы адекватно представить пограничный слой Гартмана. В статье [16] было показано, что для  $M \leq 100$  оптимальный коэффициент концентрации сетки (параметр **bump** в соответствии с терминологией генератора сетки **gmsh** [290]) равен 0.05. Параметры

сеток приведены в таблице 4.5. Для основного объема вычислений использовались наборы параметров  $MS1$  и  $MS2$ , а для контроля сходимости сетка сгущалась в направлениях  $x$  и  $y$ .

Инициация неустойчивости при помощи вдува производилась в два этапа. На первом этапе происходило внесение возмущения. На входе в канал и на верхней плоскости я задал нулевые граничные условия для возмущения скорости. На выходе из канала для скорости задано граничное условие  $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ . На нижней плоскости вертикальная скорость задана при помощи формулы

$$V = Ae^{(-200.0(x+2.9487)^2)}e^{(-200.0*(z-1.0)^2)}, \quad (4.20)$$

где  $V$  – вертикальная скорость,  $A$  – амплитуда возмущения. График функции (4.20) приведен на рисунке 4.22. Константа 2.9487 выбирается таким образом, чтобы максимум (4.20) лежал на краю сетки. На рисунке 4.23, 4.24 показан результирующий график (4.20) в продольном и поперечном сечениях через центр возмущения с использованием настройки сетки  $MS1$ . Результирующая форма возмущения в поперечном направлении сильно зависит от числа мод Фурье  $N_z$ , как показано на рисунке 4.24 для  $N_z = 10, 20, 30$ .

На втором этапе вдув прекращался и возмущение развивалось при периодических граничных условиях на входе и выходе из канала. В качестве примера на рисунке 4.25 приведены графики энергии возмущений в трех случаях:  $M = 6$ ,  $Re = 6000$ ,  $A = 1$ ,  $T = 1$ :  $E_0 = 3.7e - 5$  ( $A = 1$ ),  $E_0 = 2.6e - 6$  ( $A = 0.3$ ),  $E_0 = 2.7e - 7$  ( $A = 0.1$ ). При  $A = 0.1$  возмущения затухают, тогда как при  $A = 0.3$  и  $A = 1$  возмущение нарастает. Такое исследование эволюции вносимых возмущений позволяет делать выводы об устойчивости или неустойчивости течения.

Для проверки точности вычислений был проведен ряд контрольных расчетов. Сначала я исследовал, насколько хорошо стационарное течение (4.9) аппроксимируется при  $M = 10, 50, 100$ . Установившийся поток был рассчитан, как описано в [16]. Таблица 4.6 содержит отклонение от точного решения для сеток, со-

Таблица 4.5: Параметры сеток

Mesh	$N_y$	$N_x$	$N_z$	$p$
$MS1$	9	40	30	7
$MS2$	14	40	30	5

стоящих из элементов  $9 \times 40$ ,  $14 \times 40$ ,  $18 \times 40$ . Из этих данных можно сделать вывод, что существуют определенные соотношения параметров моделирования  $N_y$  и  $p$ , которые зависят от числа Гартмана. Например, если число Гартмана равно  $M = 50$ , разумно установить  $N_y = 9$  и  $p = 7$  (*MS1*) или  $N_y = 14$  и  $p = 5$  (*MS2*).

Что касается управления разрешением в продольном направлении, то мы рассмотрели возмущение в случае  $M = 50$  и  $Re = 1000$ ,  $A = 1$ ,  $T = 1$  на сетке *MS1*. На рисунке 4.26 показаны изолинии вертикальной скорости (а) и график вертикальной скорости (б), построенные вдоль линии, проходящей через вихрь. В таблице 4.7 показаны значения вертикальной скорости в точках 1-5, также показанных на рисунке 4.26(а). Эти данные свидетельствуют о том, что сетка *MS1* хорошо описывает возмущения при  $M = 50$ .

Рассмотрим влияние числа полиномов Фурье  $N_z$  на точность вычислений. На рисунке 4.27 показана энергия возмущения при  $M = 6$ ,  $Re = 6000$  и  $A = 1$ ,  $T = 1$  для случаев  $N_z = 10, 20, 30, 40$ . Использовалась сетка  $9 \times 40$  и  $p = 7$ . Из рисунка видно, что расчеты для разных  $N_z$  приводят к сходным кривым с точки зрения зависимости энергии от времени. Кривые немного отличаются при  $t < 60$ .

Таблица 4.6: Максимальное отклонение от точного решения для  $M = 10, 50, 100$

$p$	$M = 10, 9 \times 40$	$M = 50, 9 \times 40$	$M = 50, 14 \times 40$	$M = 50, 18 \times 40,$	$M = 100, 9 \times 40$
5	$2.38 \cdot 10^{-4}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$1.79 \cdot 10^{-4}$	$4.72 \cdot 10^{-05}$	$6.70 \cdot 10^{-03}$
7	$3.35 \cdot 10^{-6}$	$8.00 \cdot 10^{-5}$	$3.22 \cdot 10^{-6}$	$4.89 \cdot 10^{-07}$	$2.43 \cdot 10^{-04}$
10	$5.95 \cdot 10^{-9}$	$4.97 \cdot 10^{-7}$	$4.78 \cdot 10^{-9}$	$2.89 \cdot 10^{-09}$	$2.82 \cdot 10^{-06}$
12	$5.95 \cdot 10^{-9}$	$1.01 \cdot 10^{-8}$	$1.14 \cdot 10^{-10}$	$5.42 \cdot 10^{-11}$	$2.15 \cdot 10^{-07}$

Таблица 4.7: Сходимость для некоторого множества точек при  $M = 50$  and  $Re = 1000$ ,  $t = 15$

$p$	Point 1	Point 2	Point 3	Point 4	Point 5
5	0.0014668	0.010871	0.02693	0.0002252	-0.00009162
7	0.0014172	0.012680	0.02428	-0.0007548	-0.00012591
10	0.0014045	0.012867	0.02298	-0.0008567	-0.00013076
12	0.0014041	0.012764	0.02266	-0.0008556	-0.00013013
15	0.0014038	0.012753	0.02257	-0.0008610	-0.00013034

Однако, для  $t > 60$  кривая  $N_y = 20$  близка к кривым  $N_y = 30, 40$ . Это можно объяснить концепцией, согласно которой для развития возмущений точная форма вдува не важна. Однако важно, что разложение формулы (4.20) в ряд Фурье содержит много гармоник, которые перекрывают возможные частоты развития неустойчивых возмущений. Кроме того, при больших  $t$  характеристики возмущения больше определяются свойствами самого потока, но не исходной формой возмущения.

На рисунке 4.28 показаны графики энергии по времени для различных сеток в случае  $M = 6, Re = 6000$  (а) и  $M = 50, Re = 25000$  (б). Для результатов, приведенных на рисунке 4.28 (а) проведены вычисления с использованием сеток, которые содержат элементы  $9 \times 40, 9 \times 80, 14 \times 40$  при  $p = 7, N_z = 30$ . Во всех этих случаях кривые энергии остаются близкими друг к другу. Для рисунка 4.28 (б) использовались сетки  $14 \times 40, 14 \times 80$  и  $18 \times 40$  при  $p = 5, N_z = 30$ . Кроме того, чтобы связать результаты, показанные на рисунке 4.26, расчет был выполнен на сетке  $9 \times 40$  при  $p = 7, N_z = 30$ . Все эти кривые имеют одинаковые значения энергии. При  $p = 5$  результаты расчетов применительно к различным сеткам отклоняются друг от друга больше, чем в случае  $p = 7$ , но остаются достаточными для достоверного суждения о затухании или нарастании возмущений. Границы критического числа Рейнольдса соответствуют границам, найденным численно в [226] и экспериментально в [291].

Я провел серию вычислений для  $M = 6, M = 20$  и  $M = 50$ . На рисунке 4.29 показана временная зависимость энергии возмущения для различных чисел Рейнольдса, таких, что параметр  $R$  варьируется от 100 до 500. На этих рисунках  $E$  - это энергия возмущения, а  $E_0$  - его начальная энергия. Энергия рассчитывается по формуле

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 d\Omega. \quad (4.21)$$

Во всех случаях время вдува составляет  $T = 1$ , а амплитуда составляет  $A = 1.0$  (пунктирная линия,  $E_0 \sim 10^{-5}$ ) и  $A = 0, 1$  (сплошная линия,  $E_0 \sim 10^{-7}$ ). Для расчетов при  $M = 6$  использовалась сетка  $MS1$ , а для расчетов при  $M = 20, 50$  -  $MS2$ . При  $R = 100, 300$  возмущения затухают. Расчеты также проводились при  $R = 350$ , что является нижней границей нелинейного роста возмущений, найденной в [226]. При  $R = 350$  и  $A = 1.0$  не удалось получить бесспорного увеличения или уменьшения энергии возмущения. Во всех случаях  $M$  энергия колебалась вблизи начальных значений. Поэтому можно положить, что нижняя граница

неустойчивости составляет  $R = 300$ . Увеличение энергии возмущения с течением времени было получено только при  $R = 500$  для случаев  $M = 6, 50$  и  $R = 400$  для случая  $M = 20$ . Таким образом, верхняя граница критического числа Рейнольдса выше, чем в [226]. Это может быть связано с тем, что амплитуды, превышающие  $A = 1$ , не рассматривались.

На рисунке 4.30 показана амплитуда скорости возмущения в области вдува (в оттенках серого, темнее – больше) для случаев  $M = 6, 20, 50$ . Время вдува фиксировано и равно  $T = 1$ , а амплитуда вдува равна  $A = 1$ . С увеличением числа Гартмана вихрь прижимается к нижней стенке, поскольку ширина пограничного слоя уменьшается. Значительная часть возмущения пересекает пограничный слой и развивается в основном потоке. При этом образуется пара вихрей, как показано на рисунке 4.31 с помощью линий тока при  $M = 6$ . Эти вихри начинаются по бокам от области вдува. Их диаметр увеличивается вниз по течению, и, в конечном итоге, они соединяются, образуя подковообразную структуру.

При достаточно малой энергии внесенное возмущение затухает, образуя продольные структуры, приведенные на рисунке 4.32. При увеличении амплитуды возмущения  $A$  или времени вдува  $T$  наблюдается рост энергии возмущений и переход к турбулентному движению. На рисунке 4.33 приведены изоповерхности амплитуды скорости в последовательные моменты времени. Рисунок (а) соответствует времени вскоре после окончания вдува. Здесь можно видеть, что подковообразная структура вследствие разности скоростей по вертикали разделяется на две части: приосевую и пристенную. Из рисунка (б) ясно, что приосевое возмущение затухает, тогда как пристенное нарастает, захватывая верхнюю и нижнюю пристенные зоны канала (рисунок (с)). На рисунке 4.34 распространение возмущения с нижней пристенной области на верхнюю проиллюстрировано изображениями полей амплитуды скорости в сечении, проходящем через ось вдува.

Таким образом, предложенный метод исследования нелинейной устойчивости магнитогидродинамических течений был верифицирован путем сравнения с результатами, приведенными в литературе. Изучение возмущений отдельно от стационарного течения несколько более затратно, но позволяет исследовать более точные формулировки, например, стационарное течение может быть задано аналитически. Задать локализованное возмущение на границе течения по формуле (4.18) намного проще, чем решить линейную задачу устойчивости трехмерного течения как в классической, так и в оптимальной постановке.

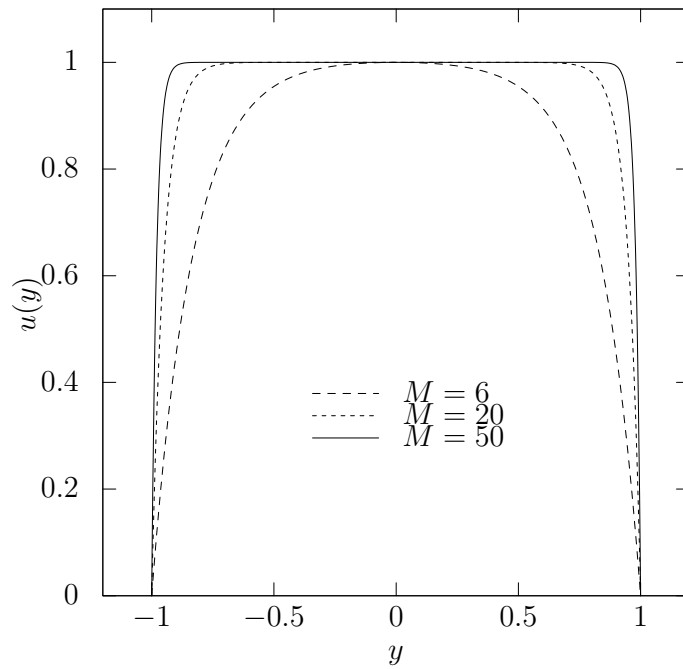


Рис. 4.20 — Профили скорости для  $M = 6, 20, 50$

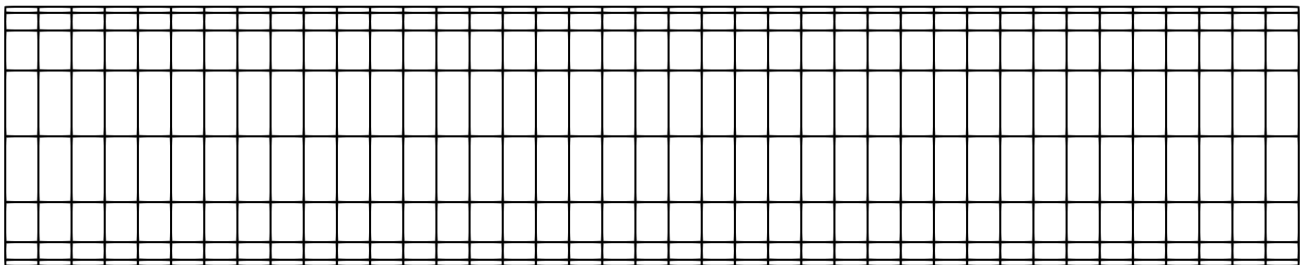


Рис. 4.21 — Сетка, при помощи которой производились расчеты эволюции возмущения (4.20)

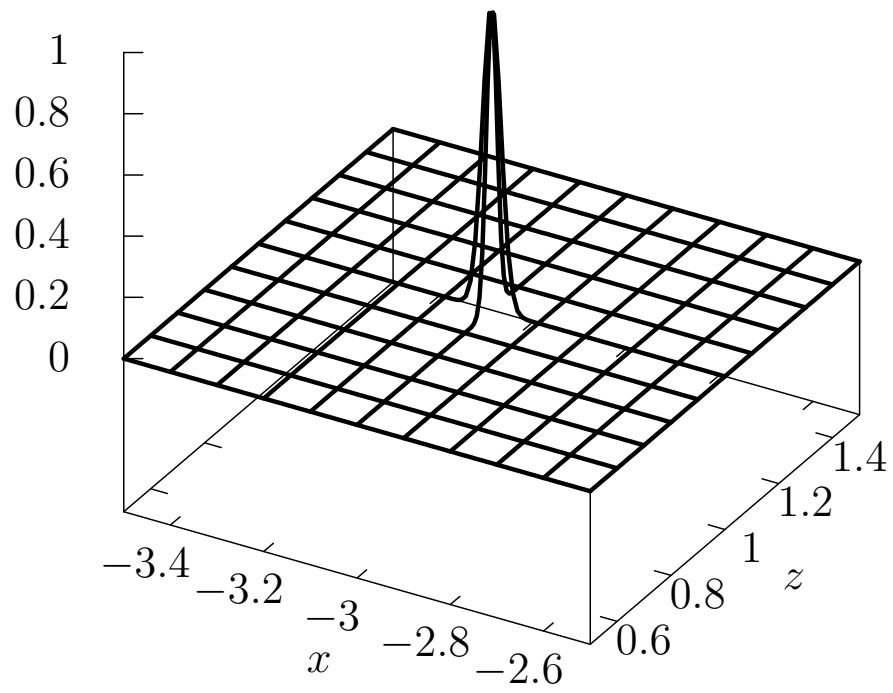


Рис. 4.22 — График выражения (4.20)

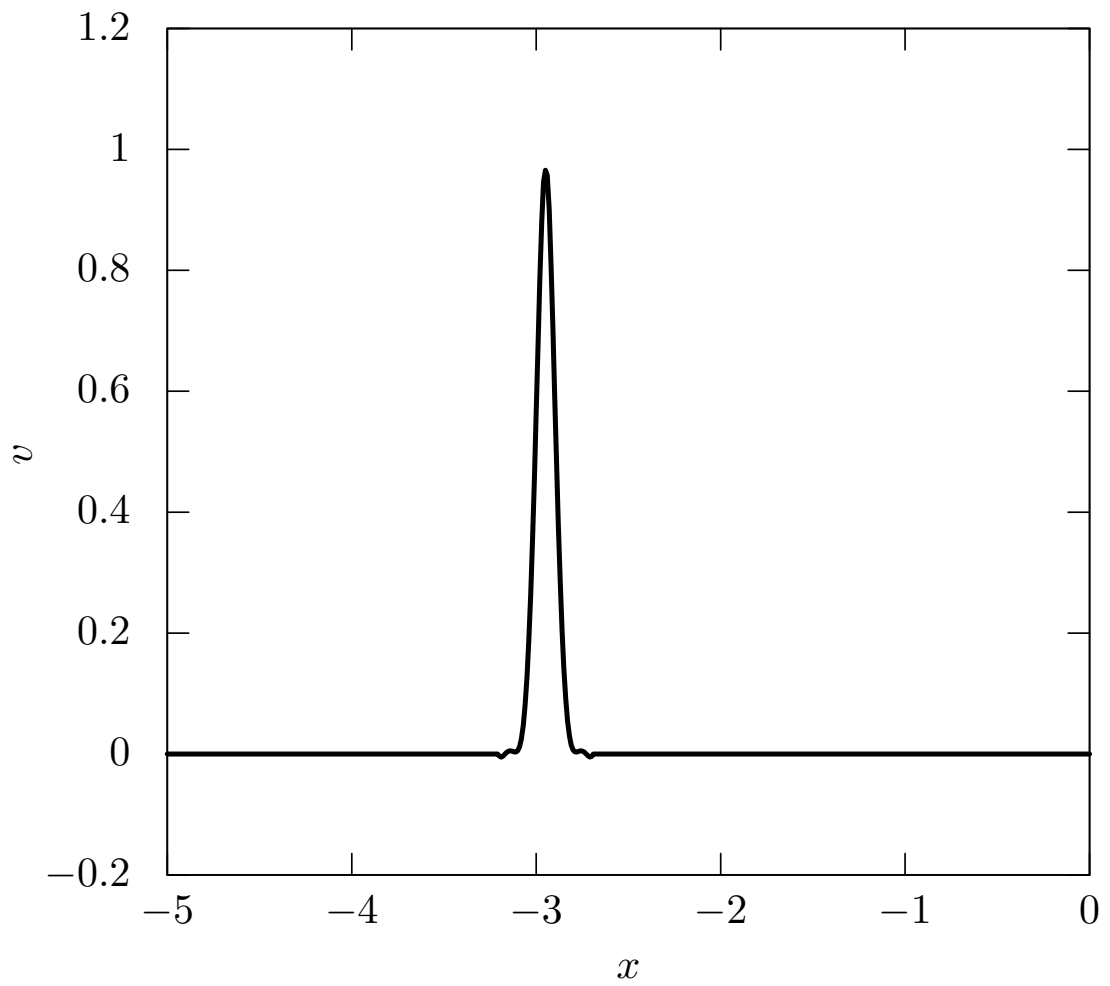


Рис. 4.23 — График  $v_y$  на нижней плоскости вдоль линии, проходящей в направлении оси  $x$  через центр вдува



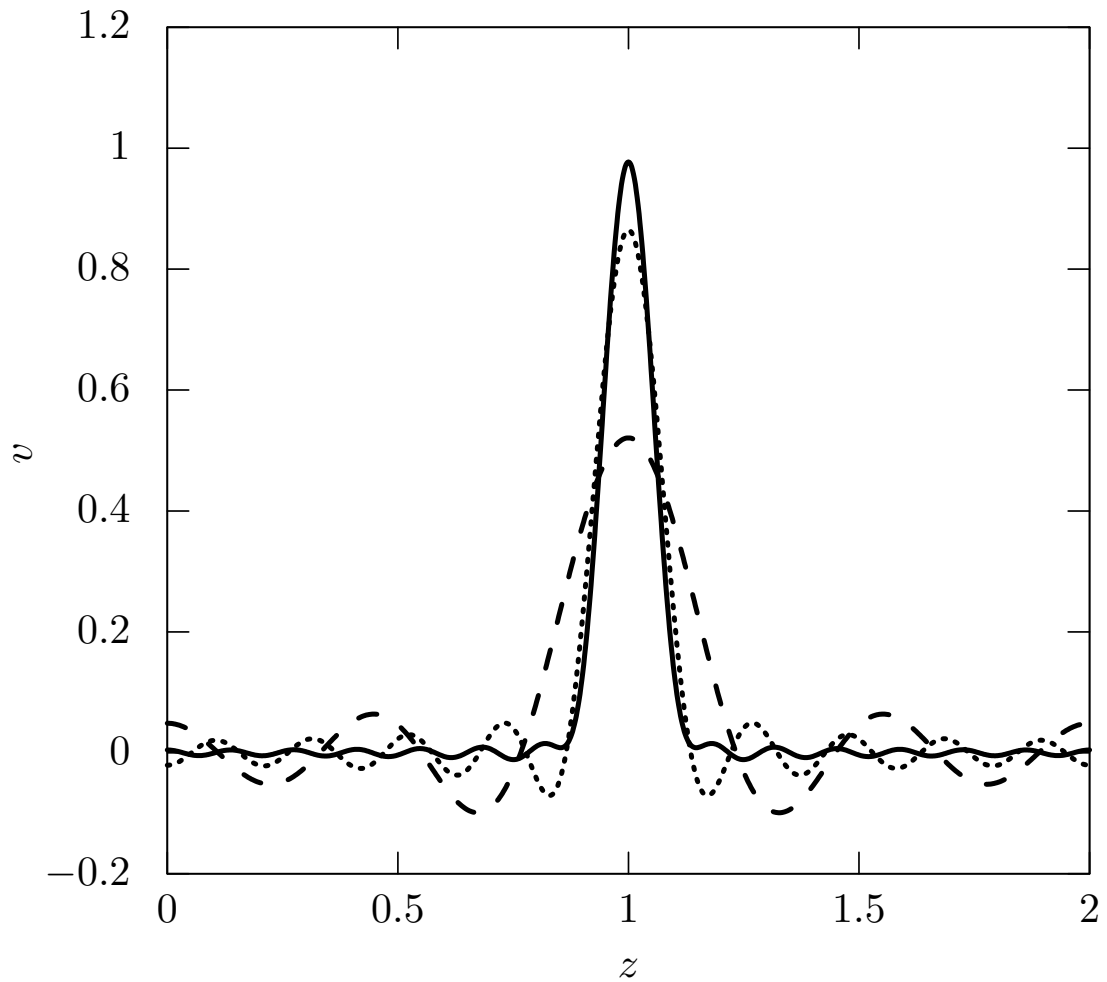


Рис. 4.24 — График  $v_y$  на нижней плоскости вдоль линии, проходящей в направлении оси  $z$  через центр вдува для  $N_z = 10$  (пунктирная линия),  $N_z = 20$  (точечная линия),  $N_z = 30$  (сплошная линия) (b)

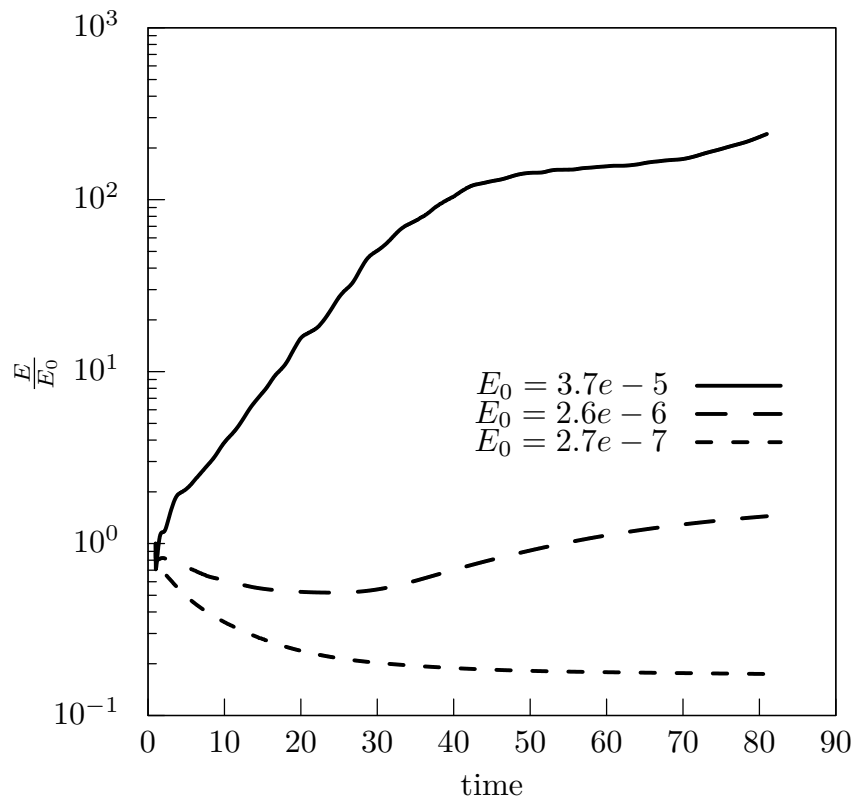


Рис. 4.25 — Графики энергии возмущений в трех случаях:  $M = 6$ ,  $Re = 6000$ ,  $A = 1$ ,  $T = 1$ :  $E_0 = 3.7e-5$  ( $A = 1$ ),  $E_0 = 2.6e-6$  ( $A = 0.3$ ),  $E_0 = 2.7e-7$  ( $A = 0.1$ )

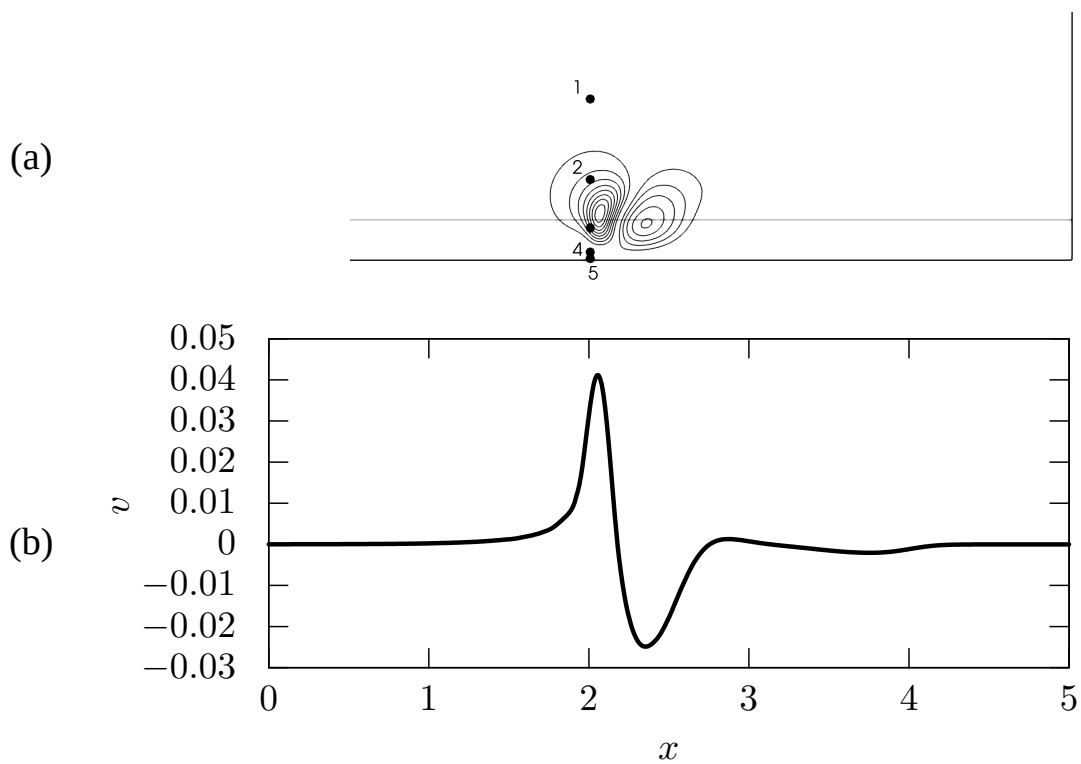


Рис. 4.26 — Возмущение при  $M = 50$ ,  $Re = 1000$ ,  $t = 7$ : контуры вертикальной скорости (a) и график вертикальной скорости (b) на горизонтальной линии при  $x = -0.75$  (сплошная линия на (a))

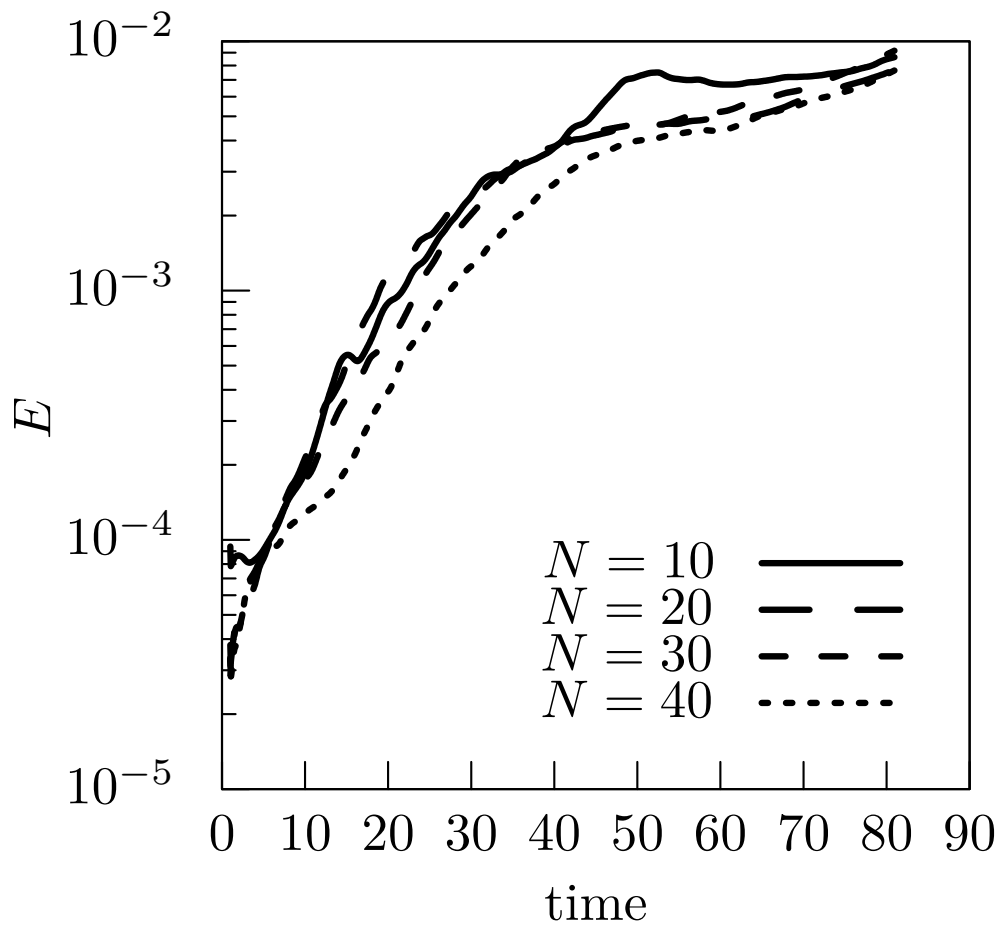


Рис. 4.27 — Рост энергии при  $M = 6$ ,  $Re = 6000$ ,  $A = 1$ ,  $T = 1$  для  $N = 10, 20, 30, 40$

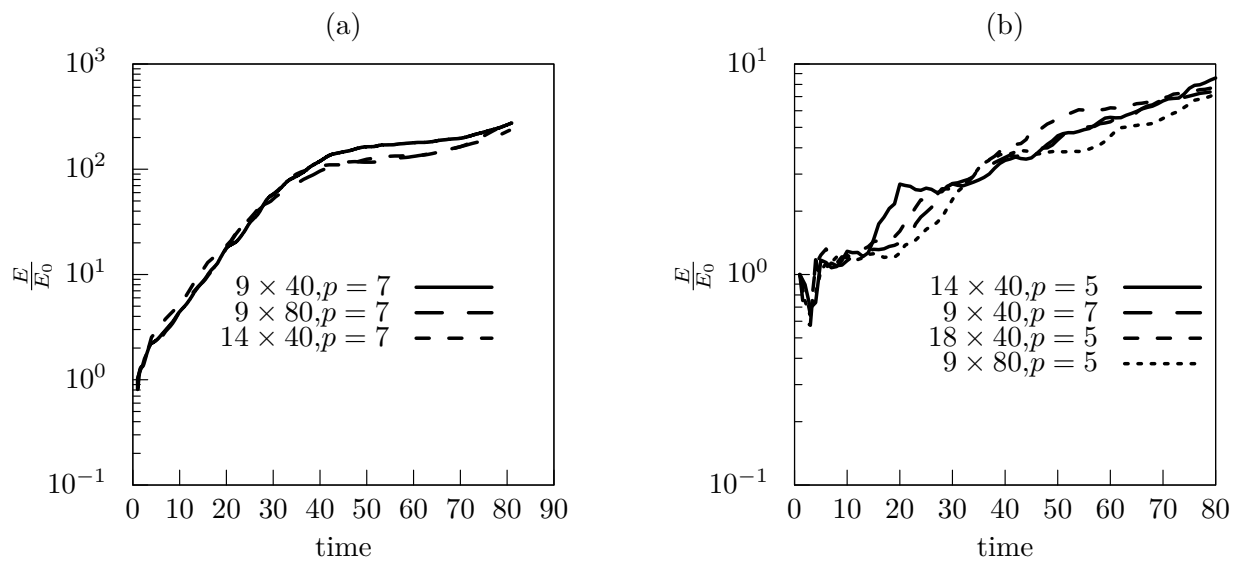


Рис. 4.28 — Рост энергии на разных сетках в случаях  $M = 6$ ,  $Re = 6000$ (a) и  $M = 50$ ,  $Re = 25000$ (b);  $A = 1$ ,  $T = 1$ ,  $N = 30$

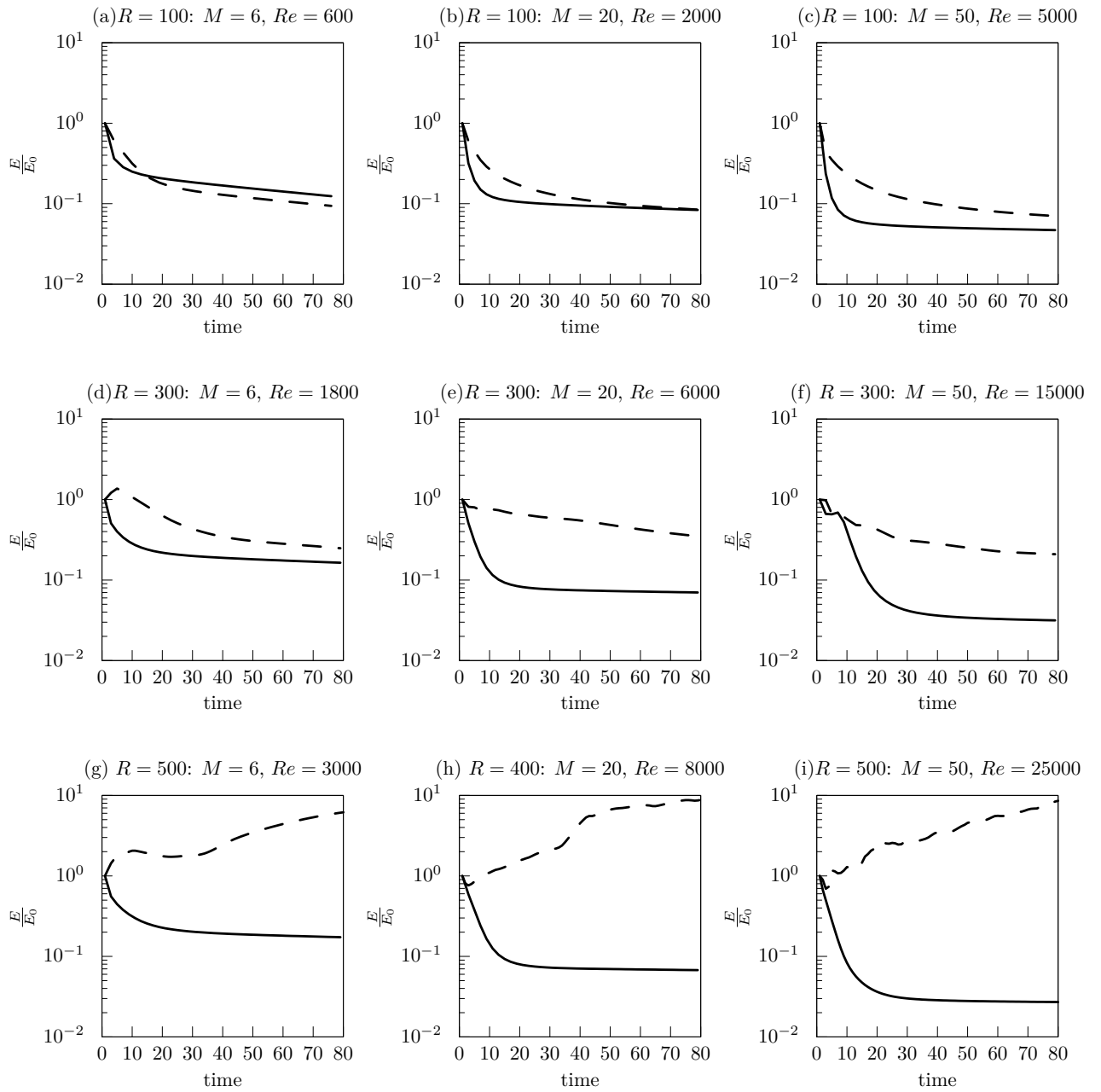


Рис. 4.29 — Графики зависимости энергии возмущений от времени в случаях  $M = 6$ :  $R = 100$ (a),  $R = 300$ (d),  $R = 500$ (g);  $M = 20$ :  $R = 100$ (b),  $R = 300$ (e),  $R = 500$ (h);  $M = 50$ :  $R = 100$ (c),  $R = 300$ (f),  $R = 500$ (i).

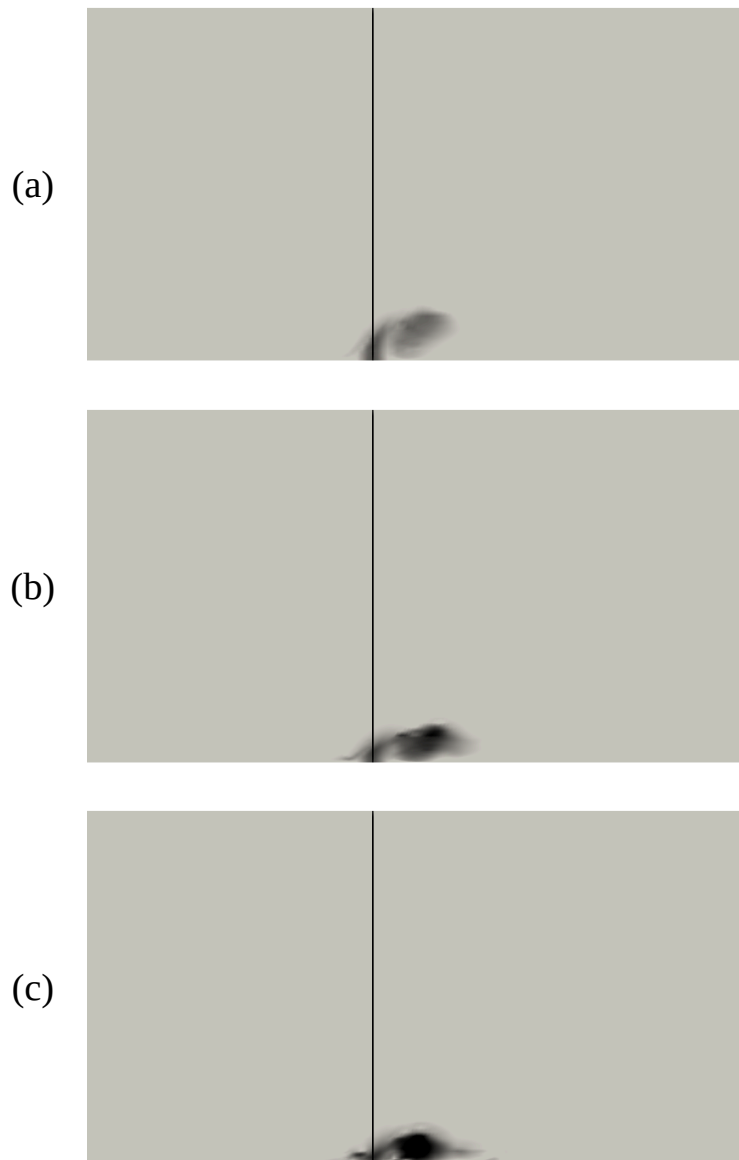


Рис. 4.30 — Амплитуда скорости при  $t = 1$  в сечении через центр возмущения:  $M = 6$ ,  $Re = 6000$ (a),  $M = 20$ ,  $Re = 8000$  (b),  $M = 50$ ,  $Re = 25000$ (c). Все вычисления произведены при  $A = 1$ ,  $T = 1$ .

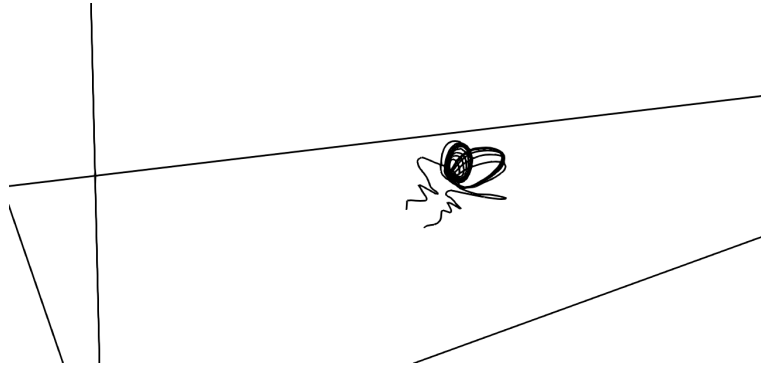


Рис. 4.31 — Линии тока возмущения при  $M = 6$ ,  $Re = 6000$ ,  $A = 1$ ,  $T = 1$ ,  $t = 0.8$

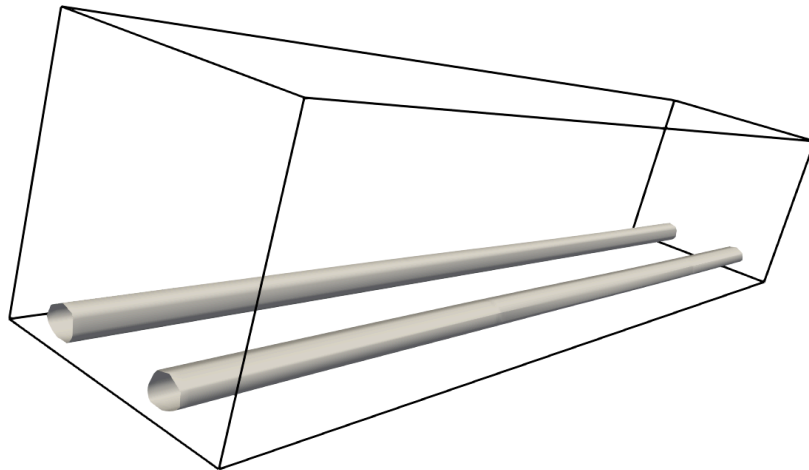


Рис. 4.32 — Изоповерхности  $1.5e-4$  продольной компоненты скорости при  $M = 6$ ,  $Re = 6000$ ,  $A = 0.1$ ,  $T = 1$ ,  $t = 81$



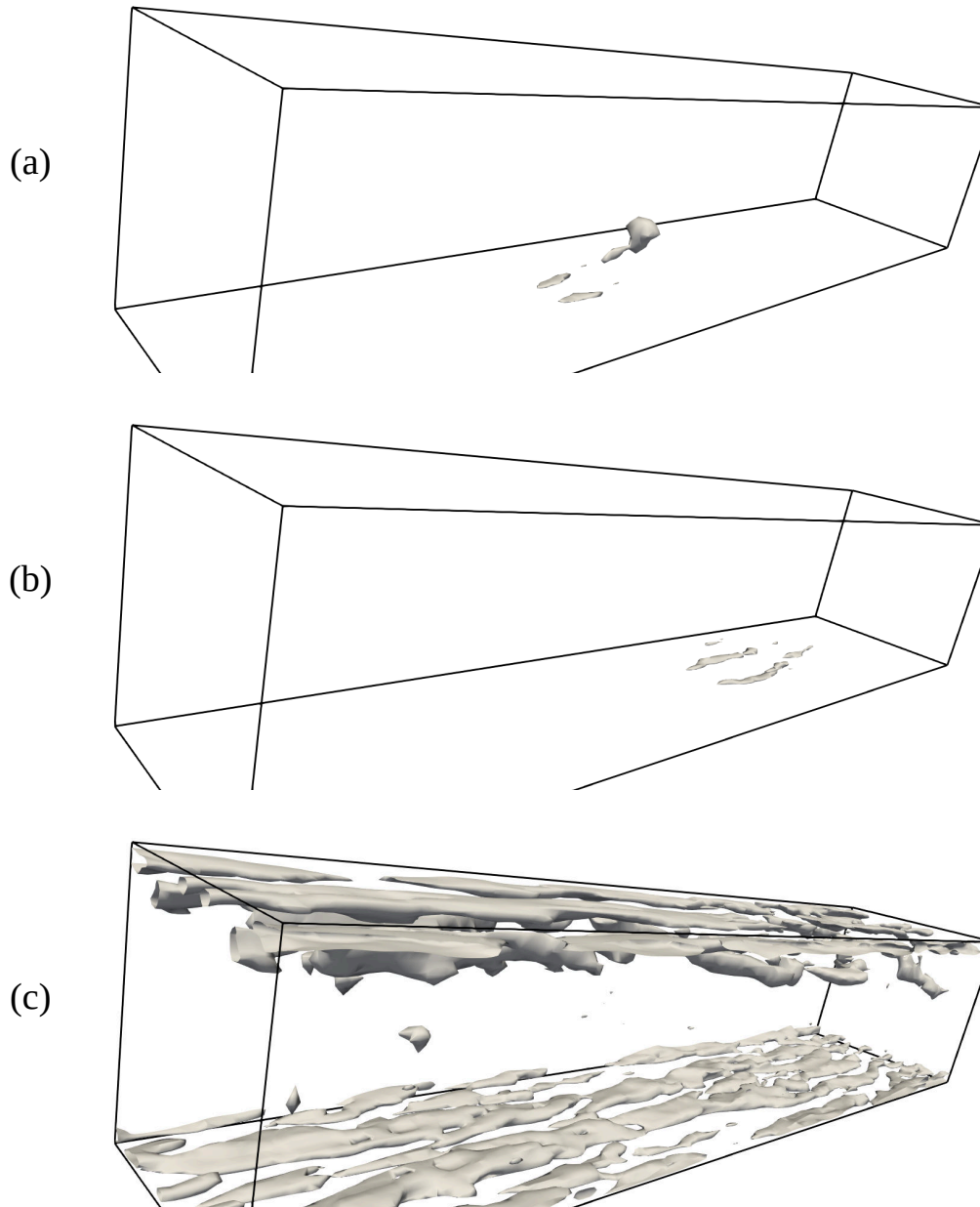


Рис. 4.33 — Изоповерхности 0.3 амплитуды скорости при  $M = 6$ ,  $Re = 6000$ ,  $A = 1$ ,  $T = 1$ :  $t = 3.2$  (a),  $t = 9$  (b),  $t = 81$  (c)



Рис. 4.34 — Амплитуда скорости при  $M = 6$ ,  $Re = 6000$ ,  $A = 1$ ,  $T = 1$ :  $t = 1$  (a),  $t = 41$  (b),  $t = 81$  (c), сечение в продольной плоскости канала через центр возмущения

## 4.7 Основные результаты главы 4

1. Предложена численная схема для исследования магнитогидродинамических течений в областях сложной геометрии и разработана программа для ЭВМ `MHDSolver` на основе спектрально-элементного фреймворка `Nektar++`. Программа `MHDSolver` позволяет моделировать стационарные и нестационарные течения электропроводящей жидкости, исследовать линейную устойчивость стационарных течений электропроводящей жидкости, изучать эволюцию возмущений конечной амплитуды, внесенных в стационарное течение. Разработанная программа основана на свободно распространяемых библиотеках с открытым исходным кодом, использует только свободно распространяемые библиотеки с открытым исходным кодом и свободно распространяемую программную компьютерную инфраструктуру с открытым исходным кодом.
2. Корректность работы численной схемы и программы `MHDSolver` подтверждена сравнением с аналитическими решениями и данными, приведенными в литературе. В качестве тестовых примеров стационарного течения исследовались течения Гартмана в плоском канале и прямоугольной трубе, течение Ханга в прямоугольной трубе. В качестве примеров задач устойчивости рассмотрены течения Гартмана в плоском канале и течения Ханга в прямоугольной трубе. Во всех случаях наблюдалась быстрая сходимость в зависимости от порядка аппроксимации и количества элементов сетки, величины скорости и собственные числа были получены с высокой точностью.
3. Реализована функция программы, позволяющая моделировать нелинейные возмущения при заданном заранее стационарном течении. Такой подход позволяет исследовать более тонкие постановки задач: ставить разные граничные условия для основного течения и возмущений, исследовать стабилизированные стационарные течения. Эта часть программы верифицирована расчетами нелинейной устойчивости течения Гартмана в двумерном и трехмерном случаях.
4. Предложен способ внесения возмущений в течения электропроводящей жидкости: возмущение задается при помощи аналитической функции, ко-

торая близка к нулю везде, кроме некоторой области в окрестности заданной точки. Возмущение вносится в виде граничного условия на одной из стенок канала и моделирует вдув или отсос жидкости. На примере плоского течения Гартмана показано, что этот метод приводит к критическим числам, которые согласуются как с экспериментальными результатами, так и с хорошо обоснованными теоретическими вычислениями, опубликованными в литературе.

## Глава 5. Магнитогидродинамическое течение в изогнутом канале

Жидкие металлы имеют большие перспективы использования в технологических приложениях. В технических устройствах жидкие металлы движутся в каналах сложной формы. Устойчивость и ламинарно-турбулентный переход течений электропроводящей жидкости в областях сложной формы в настоящее время изучены очень мало. Исследования устойчивости таких течений намного сложнее, чем параллельных, так как трудности, присущие задаче и описывающим ее уравнениям, увеличиваются за счет геометрии задачи.

### 5.1 Режимы течения в изогнутом канале без магнитного поля

На рисунке 5.1 приведена схема течения в изогнутом канале. Этот канал состоит из двух параллельных непроницаемых поверхностей, изогнутых так, чтобы радиус изгиба на центральной линии был равен  $R$ . Длина прямого входного и выходного патрубков равна  $L_{in}$  и  $L_{out}$  соответственно. Расстояние между плоскостями постоянно и равно  $2d$ . Можно ввести радиус закругления канала  $\delta = R/2d$ . Ниже, в основном, рассматривается случай  $\delta = 1$ , при этом заданы  $L_{in} = 10$  и  $L_{out} = 60$ . Несжимаемая вязкая жидкость течет под действием постоянной разности давлений между входом и выходом. Можно ввести число Рейнольдса  $Re = \frac{Ud}{\nu}$ , где  $U$  - максимальная скорость ламинарного потока Пуазейля, а  $\nu$  - вязкость жидкости. Уравнение Навье-Стокса имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{V}$  - скорость,  $\mathbf{F}$  - внешние силы, а  $p$  - давление. На стенках канала выполняется условия непроницаемости и прилипания  $\mathbf{V} = 0$ . Параболический профиль Пуазейля  $V_y = 1 - x^2$  задан на входе. На выходе выполняются стандартные гра-

ничные условия [190; 203]

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0, \quad p = 0. \quad (5.2)$$

Если  $\mathbf{U}(x, y)$  является стационарным решением (5.1), можно записать уравнение Навье-Стокса в линеаризованной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{U} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  и  $p(x, y, z, t)$  малые возмущения. Так как стационарное течение  $\mathbf{U}(x, y)$  не зависит от  $z$ -координаты, возмущение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y, z, t) &= \mathbf{v}(x, y) e^{(\sigma+i\omega)t+i\beta z} + \text{с.с.}, \\ p(x, y, z, t) &= p(x, y) e^{(\sigma+i\omega)t+i\beta z} + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь  $\sigma$  – коэффициент нарастания возмущения,  $\omega$  – частота возмущения, а  $\beta$  – поперечное волновое число.  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  $\lambda$  – длина волны в направлении  $z$ . Подстановка (5.4) позволяет свести проблему трехмерной устойчивости (5.3) к ряду последовательных двумерных задач для каждого значения  $\beta$ , которое непрерывно меняется в некотором диапазоне. Это аналитическое преобразование было использовано [69; 190; 203] и многими других работах.

Граничные условия для возмущений имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= 0 \text{ на стенках и входе в канал,} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} &= 0, \quad p = 0 \text{ на выходе} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Расчеты стационарного течения и его устойчивости были выполнены с помощью фреймворка с открытым исходным кодом Nektar++ [292]. Многоэлементная формулировка обеспечивает геометрическую гибкость по сравнению с однодоменными спектральными методами и позволяет применить ненасыщаемый численный метод к течениям сложной формы, за счет чего повысить надежность, точность и эффективность вычислений.

Для интегрирования уравнений (5.1) Nektar++ использует хорошо обоснованную схему расщепления, которая разделяет скорость и давление [284]. На основе уравнений (5.3) можно построить линейный оператор  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{v}(x, y, z, \tau) = \mathbf{A}(\tau) \mathbf{v}(x, y, z, 0) = \lambda(\tau) \mathbf{v}(x, y, z, 0), \quad (5.6)$$

где  $\tau$  - временной интервал. Линейный оператор  $\mathbf{A}(\tau)$  строится численно с помощью процедуры расщепления таким же образом, как и в случае нелинейных уравнений. Чтобы найти собственное значение  $\lambda(\tau)$ , строится подпространство Крылова

$$K_n(\mathbf{A}, \mathbf{v}_0) = \text{span}\{\mathbf{v}_0, \mathbf{A}(T)\mathbf{v}_0, \mathbf{A}(T)^2\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{A}(T)^{n-1}\mathbf{v}_0\}, \quad (5.7)$$

где  $\mathbf{A}(\tau)^i \mathbf{v}_0$  получаются вычислениями  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{v}_1$ , ... Дальнейшие вычисления собственных значений производятся стандартными численными методами, такими, как метод Арнольди. Nektar++ вычисляет собственные значения в форме:

$$\lambda(\tau) = m \cdot e^{\theta i}, \quad (5.8)$$

если  $m > 1$ , то течение неустойчиво. Легко вычислить независимые от времени  $\sigma = \frac{\ln(m)}{\tau}$  и  $\omega = \frac{\theta}{\tau}$ .

Для проблемы собственных значений можно использовать прямой подход, предложенный Шервином и Айнсвортом в работе [293] и реализованный в Nektar++. Для пояснения запишем уравнения Стокса

$$\begin{aligned} \left( \nabla \phi, \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{v} \right) - (\nabla \cdot \phi, p) &= (\phi, \mathbf{f}), \\ (q, \nabla \cdot \mathbf{v}) &= 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где  $\mathbf{v}, \phi \in V$ ,  $p, q \in W$ ,  $W, V$  – подходящие подпространства для представления полей скорости и давления. Чтобы преобразовать систему (5.9) к уравнениям Навье-Стокса, добавим конвективные члены в линейной форме  $(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{U}$  как силу  $\mathbf{f}$ . Несколько последовательных итераций дадут выражение, аналогичное (5.7)

$$K_n(\mathbf{A}, \mathbf{v}_0) = \text{span}\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}. \quad (5.10)$$

На рисунке 5.2 показана сетка, которая использовалась для расчетов. Эта сетка содержит 685 элементов и используется для расчетов при числе Рейнольдса  $Re = 500 \sim 800$ . Для более высоких чисел Рейнольдса использовались сетки с большим количеством элементов; для меньших  $Re$  оптимальными являются менее подробные сетки.

Установившееся течение я искал путем интегрирования уравнений (5.1) по времени до тех пор, пока в выбранных точках не наблюдалась постоянная скорость, по крайней мере, в 9 – 10 значащих цифрах. Некоторые из этих точек отмечены крестиками на рисунке 5.3, номера точек увеличиваются слева (№ 1) направо

(№4). В таблице 5.1 показаны значения горизонтальной скорости и коэффициента  $\sigma$  для наиболее опасной моды при  $\beta = 1.0$  в зависимости от порядка аппроксимационных полиномов  $p$ . Скорость сходится до 6 цифр, что составляет 0.0001% от масштаба скорости  $U$ . Таблица 5.1 также включает данные о сходимости  $\sigma$  при увеличении времени интегрирования  $T$  для основного течения. Большинство приведенных ниже результатов были получены при  $T = 500 - 1000$ , а порядок аппроксимации составлял  $p_s = 7$  для основного течения и  $p_s = 10 - 12$  для задачи на собственные значения.

Собственные значения и основное течение могут зависеть от длины входного и выходного патрубков канала. Для проверки была выполнена серия вычислений с различными  $L_{in}$  и  $L_{out}$  при  $Re = 710$ , близком к критическому числу Рейнольдса. Результаты этих расчетов приведены в таблице 5.2. Было обнаружено, что в диапазоне  $10 \leq L_{in} \leq 40$  и  $40 \leq L_{out} \leq 120$  разница составляет  $\sigma_{max} - \sigma_{min} = 2.5 \cdot 10^{-6}$ . Это означает, что влияние длины входа и выхода на собственные значения для  $L_{in} \geq 10$  и  $L_{out} \geq 40$  сопоставимо с погрешностью вычислений.

В работе [294] описан метод выборочного подавления частот, при помощи которого становится возможным находить неустойчивые решения путем интегрирования по времени. Б. Джорди с соавторами в статьях [295; 296] описывают адаптивный метод выборочного подавления частот, который использует одномерную модель для определения параметров фильтра, подавляющего периодическое движение. Метод адаптивного выборочного подавления частот реализован в Nektar++. Численные расчеты и анализ сходимости этого метода в отношении течения в изогнутом канале представлены в статье [8]. Метод выборочного подавления частот, в некотором смысле, замена методу Ньютона. Преимуществом этого метода по сравнению с методом Ньютона является то, что он не требует высококачественного начального приближения. Однако, метод выборочного подавления частот, особенно в адаптивной формулировке, требует значительных вычислительных затрат.

На рисунке 5.4 показаны линии тока при  $\delta = 1$  и  $Re = 20, 200, 500, 1300$ . Поток является ламинарным при малых числах Рейнольдса, в этом случае его линии тока параллельны (см. 5.4(a)). Когда число Рейнольдса увеличивается, появляются вихри  $V1, V3$  и  $V2$  (см. 5.4(b,c,d)). При относительно высоких числах Рейнольдса возможно существование двух различных типов течения: стационарного и периодического. Линии тока периодического течения показаны на рисунке 5.4(e). Один



из этих двух режимов может существовать в зависимости от условий, описанных ниже.

На рисунке 5.5 представлена диаграмма областей рециркуляции для рассматриваемого течения. На этой диаграмме маркерами обозначены начальная и конечная точки вихрей. Для вычисления этих точек была введена криволинейная система координат с осью  $x_a$ , которая совпадает с осью канала. Концы вихрей проецируются на нее, как показано в верхней части рисунка 5.5 пунктирными линиями. Область вихря  $V3$  обозначена круглыми маркерами,  $V1$  - квадратными, а  $V2$  - ромбическими.

Мацумото с соавторами [206] наблюдали вихри  $V1$ ,  $V2$  в резко изогнутом канале. В работах [202; 203] были обнаружены вихри  $V1$ ,  $V2$  и  $V3$  в резком изгибе на 180 градусов. Статьи [202; 203; 206] также описывают появление пульсирующего течения. Пунктирная линия на рисунке 5.5 условно обозначает нижний предел пульсаций. Линия нарисована на уровне  $Re = 700$  и начинается с  $x_a = 0$ . Эти значения являются приблизительными, так как невозможно точно определить, при каком числе Рейнольдса возникают пульсации и в каком месте они точно рождаются. В частности, в работе [203] обнаружен большой гистерезис для критического числа Рейнольдса в изогнутом на 180 градусов канале, соответствующего возникновению пульсаций. Это число Рейнольдса зависит от начальных условий и равно  $Re'_* \approx 1150$  для перехода из состояния покоя или установившегося поля скорости с меньшим числом Рейнольдса к пульсационному движению и  $Re'_* = 743$  для перехода от пульсационного течения к стационарному. Апостроф здесь означает, что авторы работы [203] рассчитали критическое число Рейнольдса по ширине канала и  $Re = 0.5Re'$ .

Во время рутинных вычислений я заметил, что повышение качества аппроксимации, т. е. уменьшение временного шага, увеличение порядка аппроксимации  $p$  или количества элементов сетки, подавляет возникновение пульсаций. Поэтому можно предположить, что эти пульсации возникают из-за нестабильности потока под влиянием возмущений конечной амплитуды, в данном случае порождаемых погрешностями численной схемы.

Чтобы доказать эту гипотезу, возмущение было наложено как сила  $F$  (см. (5.1)) случайной амплитуды  $A$ . Значения этой силы обновлялись на каждом временном шаге. На рисунке 5.6 показана реакция на шум в виде зависимостей максимальной амплитуды вертикальной скорости на центральной линии выходного патрубка от амплитуды шума. Кривая  $U = 0$  показывает реакцию в случае непо-

движной жидкости, когда нет усиления из-за неустойчивости. В случае  $Re = 200$  этот отклик меньше, чем для покоящейся жидкости, потому что возмущения затухают и выносятся из канала. В случаях  $Re = 500$  и  $Re = 800$  возмущения усиливаются, при  $Re = 800$  амплитуда движения в  $10^2$  раз больше по сравнению с неподвижной жидкостью.

На рисунке 5.7 показаны графики кинетической энергии возмущения под действием шума с амплитудой  $A = 10^{-3}$ . При  $Re = 10$  энергия возмущения несколько ниже, чем при  $Re = 500$ , но в этих двух случаях энергия вынужденного движения остается относительно небольшой. При  $Re = 800$  энергия возмущенного движения на начальном шаге имеет тот же уровень, что и при  $Re = 500$ . При  $t \approx 50$  эта энергия увеличивается по крайней мере в 10 раз, и колебательное движение продолжается на этом новом энергетическом уровне. Когда внешний шум был отключен в момент времени  $t = 200$ , пульсирующее движение исчезло. Таким образом, пульсации должны поддерживаться постоянным внешним воздействием.

На рисунке 5.8 представлена вертикальная скорость на осевой линии выходного патрубка в несколько последовательных моментов времени после включения шума. Каждый период графика соответствует одному вихрю. Вихри возникают вблизи задней кромки  $V2$ . Амплитуда скорости каждого вихря увеличивается вниз по течению и достигает максимума при  $x > 50$ . Затем каждый вихрь движется со своей собственной амплитудой, пока не покинет канал. Амплитуда вихрей вдоль продольной координаты  $x$  колеблется некоторым образом, не совсем точно периодически. Это может означать, что дорожка вихрей модулируется по амплитуде в продольном направлении, другими словами, в канале формируется последовательность вихревых пакетов.

Таким образом, в этом разделе исследованы двумерные режимы течения в изогнутом на 90 градусов канале. Было обнаружено, что по мере увеличения числа Рейнольдса последовательно появляются три области рециркуляции. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса может возникать квазипериодический режим с образованием дорожки вихрей. Подобная ситуация наблюдалась и ранее в течении с обратной ступенькой и в резко изогнутом канале. Было обнаружено, что рождение вихрей происходит за счет шума, порождаемого погрешностями аппроксимации численной схемы. За счет улучшения качества расчетов удалось найти стационарное течение вплоть до  $Re \approx 1200$ . При  $1200 < Re < 1900$  стационарное решение было получено с использованием метода выборочного подавле-

ния частот. Из полученных результатов следует, что существует диапазон чисел Рейнольдса, когда может развиваться один из двух типов движения: либо стационарное, либо квазипериодическое. Снизу этот диапазон ограничен некоторым значением, зависящим от амплитуды постоянно действующих нестационарных возмущений, а сверху, по-видимому, числами, характерными для перехода к турбулентному движению.

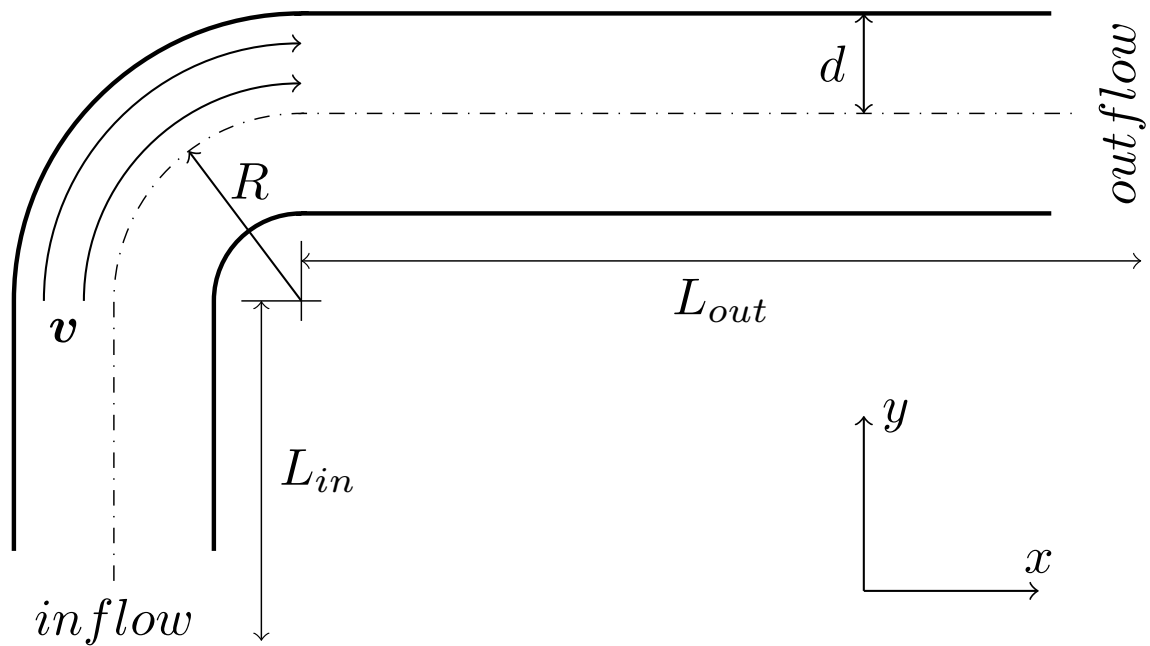


Рис. 5.1 — Схема течения в изогнутом канале

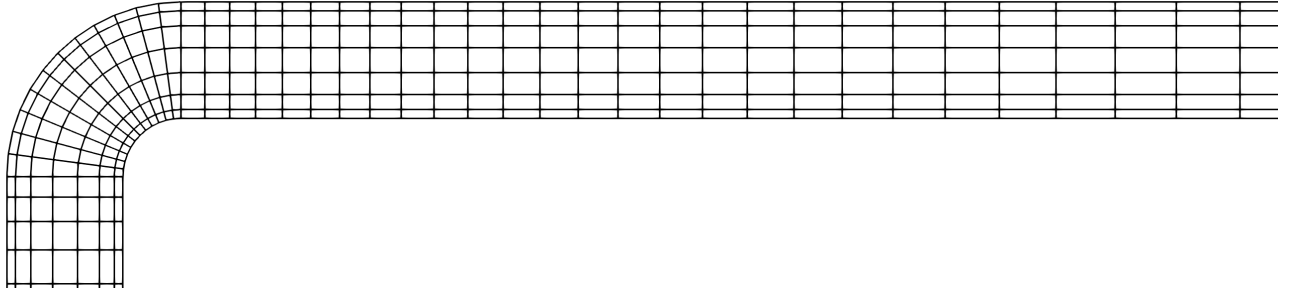


Рис. 5.2 — Часть сетки вблизи изгиба

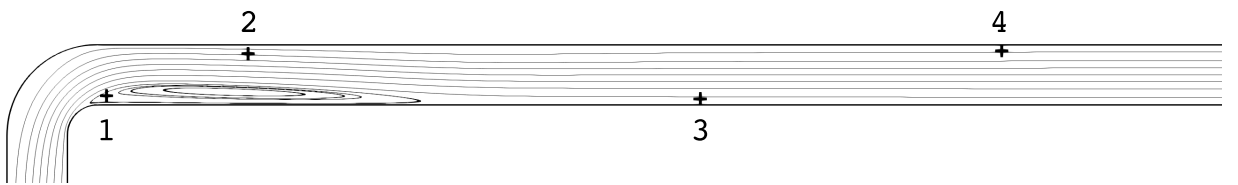


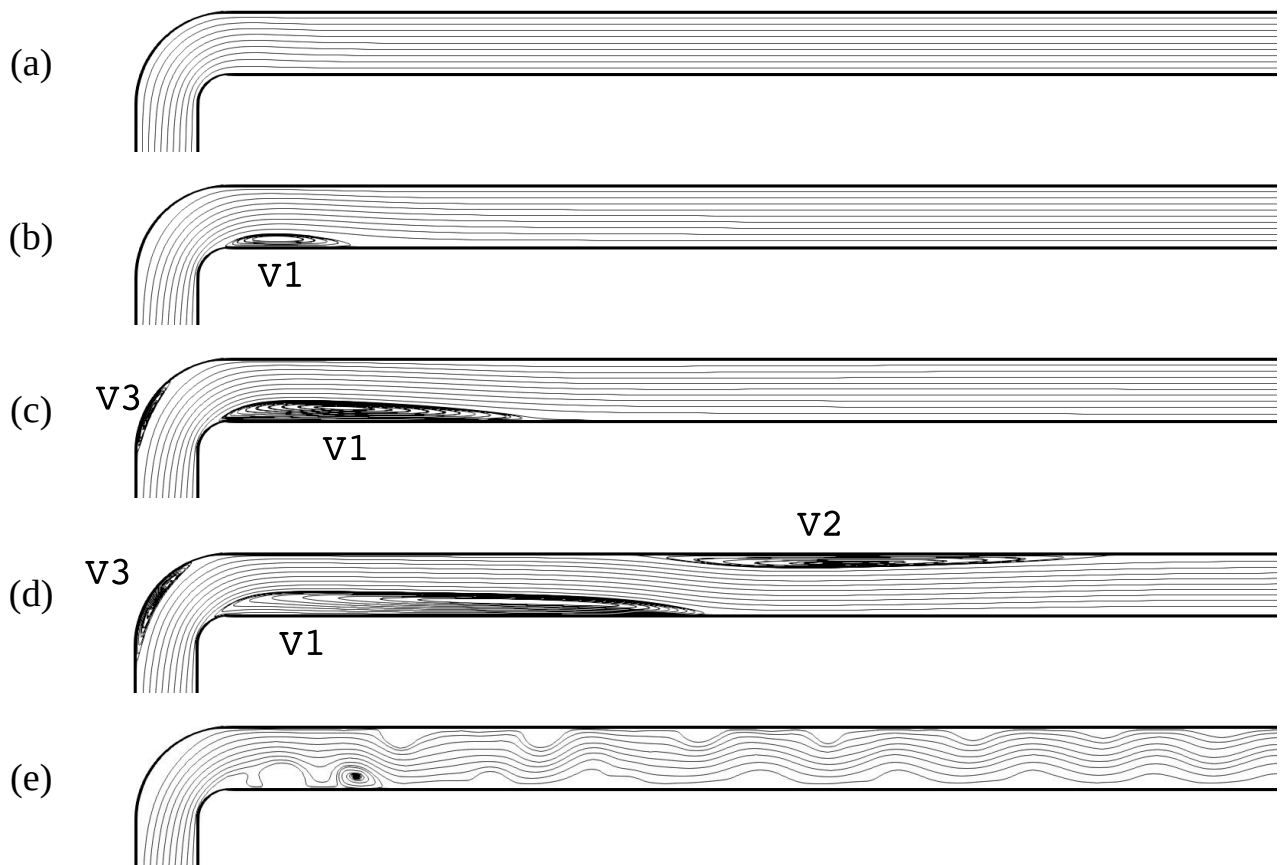
Рис. 5.3 — Контрольные точки,  $Re = 600$

Таблица 5.1: Сходимость коэффициента нарастания  $\sigma$  и горизонтальной скорости  $v_x$  в контрольных точках при  $Re = 600$ . Вычисления были выполнены на сетке, содержащей 685 элементов, за исключением одного столбца, для которого использовалась сетка, содержащая 1341 элемент.  $p_b$  – порядок аппроксимации при расчетах основного течения,  $p_s$  – порядок аппроксимации при вычислениях собственных значений.  $p$  без индексов означает, что  $p_b = p_s = p$

p	Point 1	Point 2	Point 3	Point 4	$\sigma$	$\sigma$ , 1341 elem.	T	$p_b = 7, p_s = 7$	$p_b = 7, p_s = 10$
5	-0.0097407	1.046623711	0.27554782	0.32007041	-0.00362109	-0.00341311	100	-0.00349753	-0.00350349
7	-0.0085206	1.046248285	0.27560974	0.32013706	-0.00378192	-0.00378138	250	-0.00377620	-0.00378212
10	-0.0084460	1.046219465	0.27561238	0.32013999	-0.00378744	-0.00378506	500	-0.00378192	-0.00378723
12	-0.0084454	1.046219463	0.27561233	0.32013996	-0.00378747	-0.00378506	1000	-0.00378192	-0.00378724

Таблица 5.2: Влияние  $L_{in}$  и  $L_{out}$  на коэффициент нарастания  $\sigma$  при  $Re = 710$ 

$L_{in}$	$L_{out}$	$\sigma$	$L_{in}$	$L_{out}$	$\sigma$	$L_{in}$	$L_{out}$	$\sigma$
5	60	-0.00005779	10	40	0.00012109	10	60	0.00012108
10	60	0.00012108	10	60	0.00012108	20	80	0.00012352
20	60	0.00012351	10	80	0.00012111	30	100	0.00012353
30	60	0.00012351	10	100	0.00012109	40	120	0.00012116

Рис. 5.4 — Типы основного течения:  $Re = 20$ (a),  $Re = 200$ (b),  $Re = 500$ (c),  $Re = 1300$ (d)(стационарный режим),  $Re = 1300$ (e)(периодический режим)

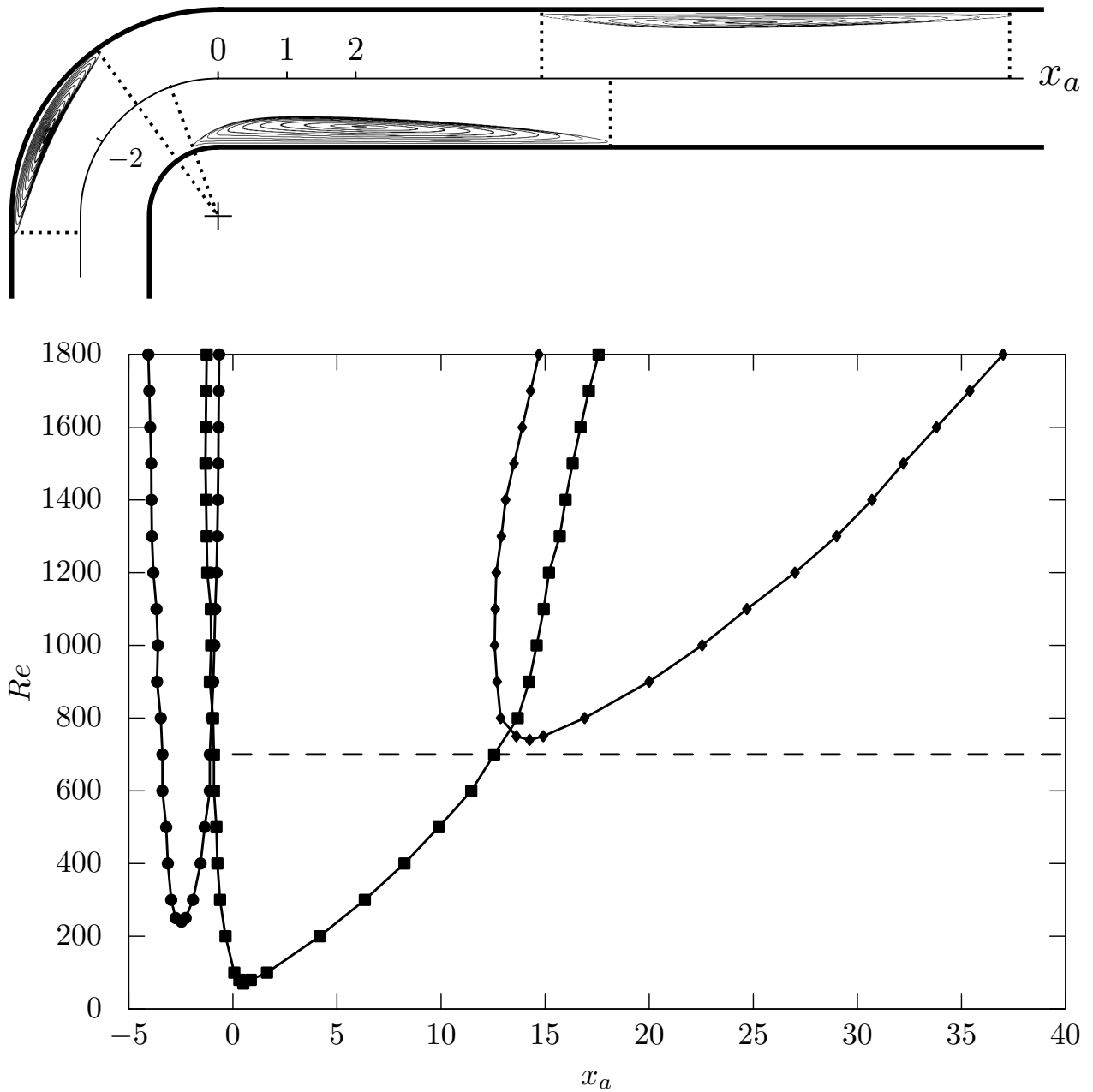


Рис. 5.5 — Диаграмм возникновения областей рециркуляции при  $\delta = 1$ , круги обозначают границы рециркуляционного пузыря  $V3$ , прямоугольники –  $V1$ , ромбы –  $V2$ , пунктирная линия обозначает возникновение пульсирующего течения. В верхней части рисунка показана криволинейная система координат с осью  $x_a$  и способ проецирования на нее краев областей рециркуляции

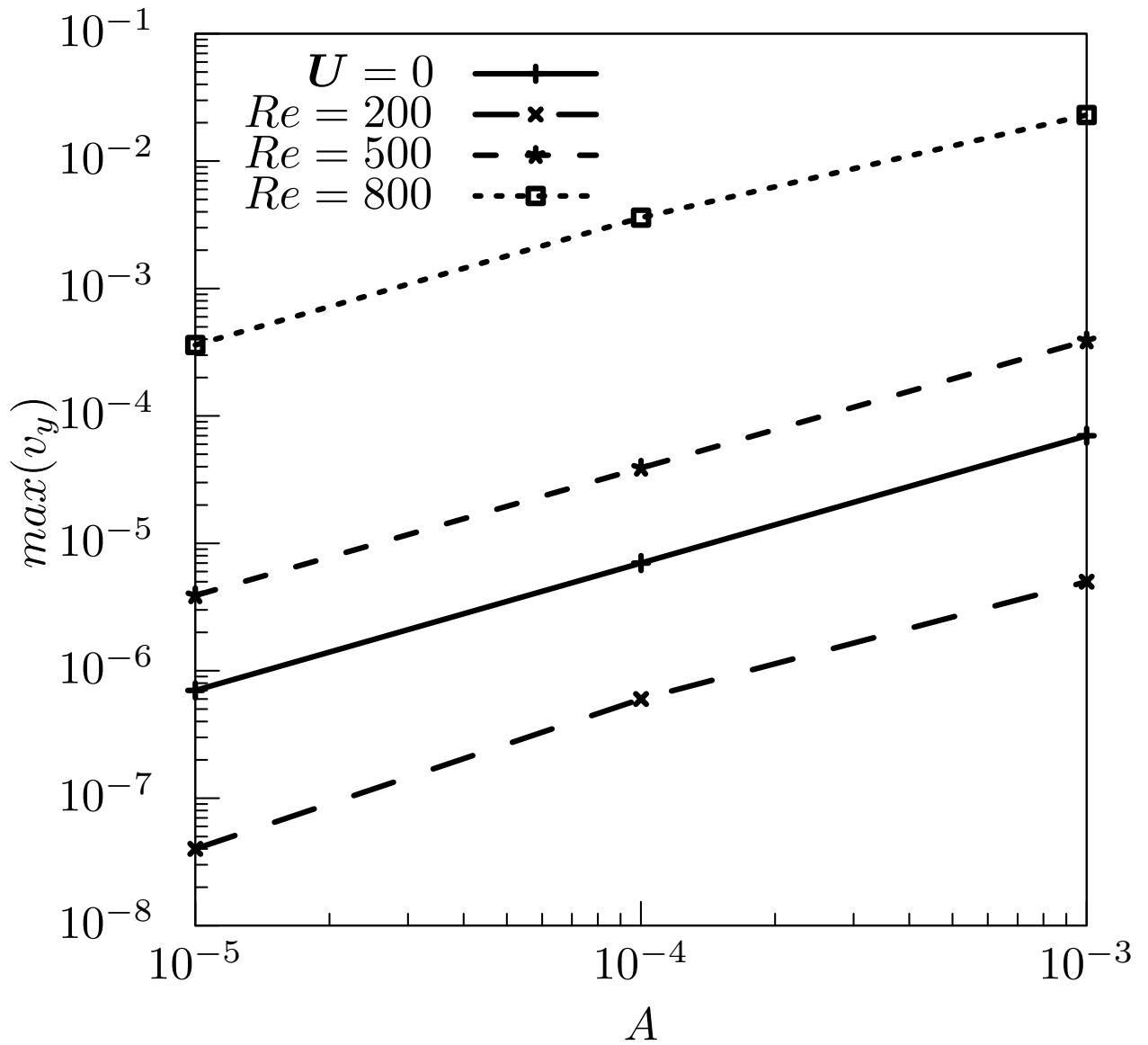


Рис. 5.6 — Отклик на случайный шум в виде максимальной амплитуды вертикальной скорости  $v_y$  на центральной оси выходного патрубка для неподвижной жидкости и при  $Re = 200, 500, 800$



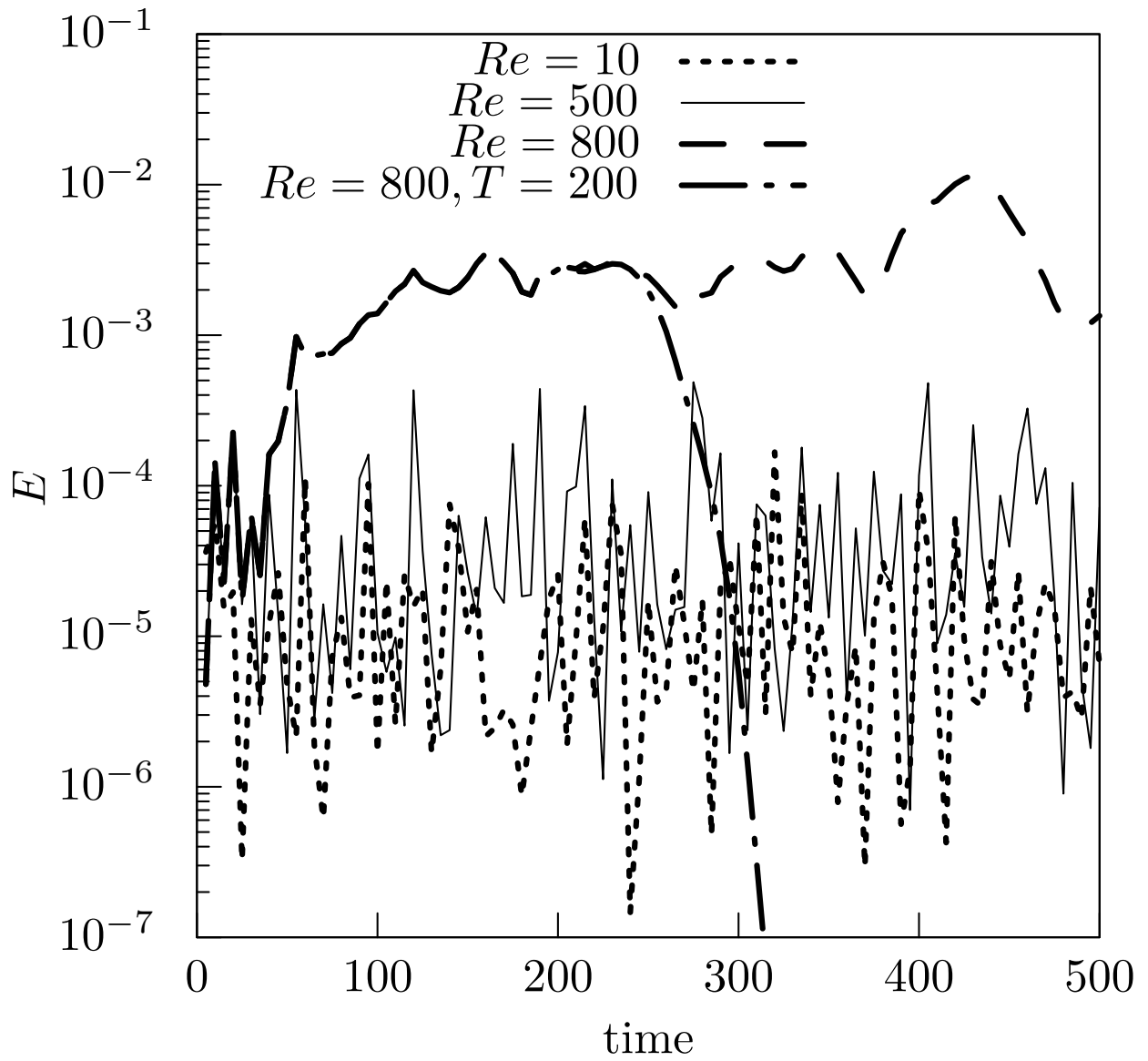


Рис. 5.7 — Энергия возмущений при  $Re = 10, 500, 800$  в случае наличия шума с постоянной амплитудой  $A = 10^{-3}$ . При  $Re = 800$  шум был выключен в момент времени  $t = 200$

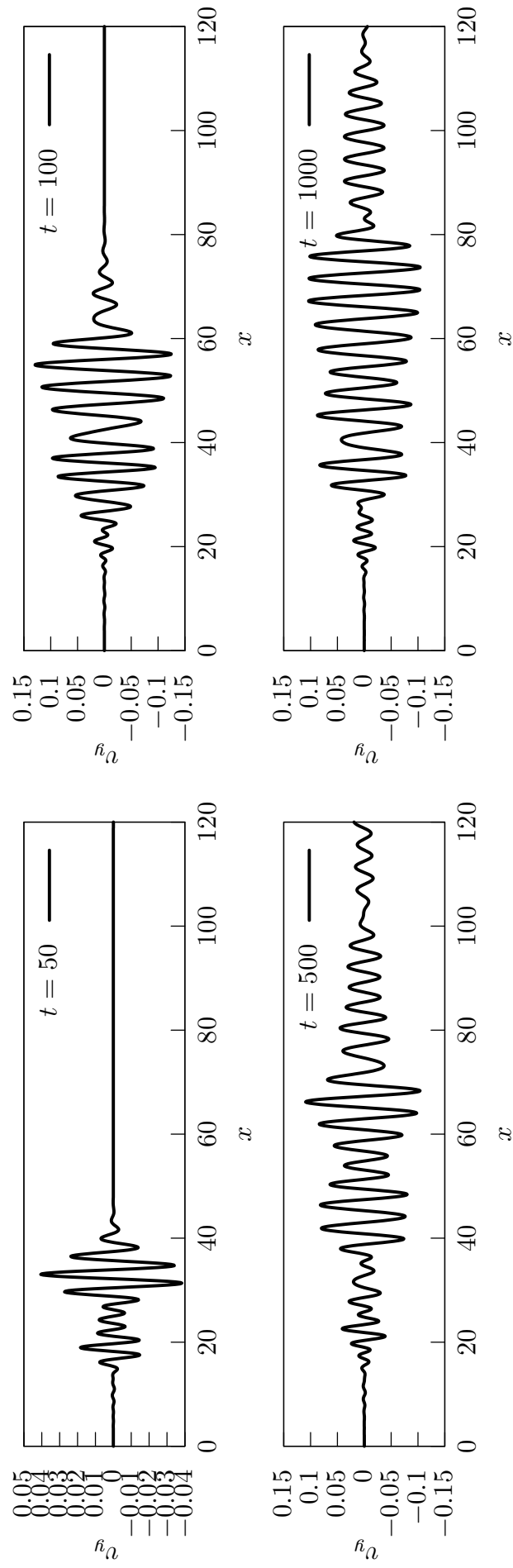


Рис. 5.8 — Графики вертикальной скорости  $v_y$  на центральной оси выходного патрубку при  $t = 50, 100, 500, 1000$ ,  $Re = 1000$

## 5.2 Устойчивость течения в изогнутом канале

Рассмотрим сначала устойчивость двумерных возмущений при  $\delta = 1$ . Стационарное течение было рассчитано до  $Re \sim 1200$  путем интегрирования по времени уравнений (5.1). Для больших чисел Рейнольдса применялся адаптивный метод выборочного подавления частот, упоминавшийся выше. С помощью этого метода удалось рассчитать установившееся течение вплоть до  $Re = 1900$ .

На рисунке 5.9 представлены собственные значения двумерных возмущений для  $Re = 1800$  и  $\delta = 1.0$ . Из рисунка видно, что наиболее опасными являются монотонные возмущения. Зависимости коэффициента  $\sigma$  от числа Рейнольдса  $Re$  приведены на рисунке 5.10. На этом графике все значения  $\sigma$  меньше нуля, поэтому двумерные возмущения устойчивы вплоть до  $Re = 1900$ . При помощи метода наименьших квадратов оказалось возможным построить линейную зависимость  $\sigma(Re)$  для  $900 \leq Re \leq 1900$ , она обозначена пунктирной линией на рисунке 5.10. Соответствующая экстраполяция критического числа Рейнольдса равна  $Re_* = 3495$ . На рисунке 5.11 показаны линии тока стационарного течения (а) и наиболее опасной моды (б) при  $Re = 1600$ , а также амплитуда вертикальной скорости этой моды (с). Эти графики показывают, что наиболее опасная мода локализована ниже области рециркуляции  $V2$ .

На рисунках 5.12, 5.13 представлены графики коэффициента нарастания возмущения  $\sigma$  и частоты  $\omega$  при  $Re = 1400$  в зависимости от волнового числа  $\beta = \frac{2\pi}{L}$ . Сплошные маркеры обозначают действительные (монотонные) моды, а незакрашенные маркеры – комплексные (периодические) моды. Графики построены в диапазоне  $0.01 < \beta < 10$ , за пределами которого течение устойчиво. Малые значения  $\beta$  соответствуют возмущениям с очень большой длиной волны и, в предельном случае  $\beta \rightarrow 0$ , двумерному случаю. Сплошные ромбы обозначают действительную моду, которая является наиболее опасной при  $\beta < 0.11$ , она устойчива. В диапазоне  $0.11 < \beta < 0.44$  наиболее опасная мода является комплексной. При увеличении  $\beta$  она пересекает линию  $\sigma = 0$  и становится неустойчивой. При дальнейшем увеличении поперечного волнового числа наиболее опасной становится действительная мода, обозначенная сплошными прямоугольниками. Она имеет максимум при  $\beta \approx 2.2$ . Пространственная структура неустойчивых мод будет рассмотрена ниже. Кроме того, на графиках 5.12, 5.13 показаны графики

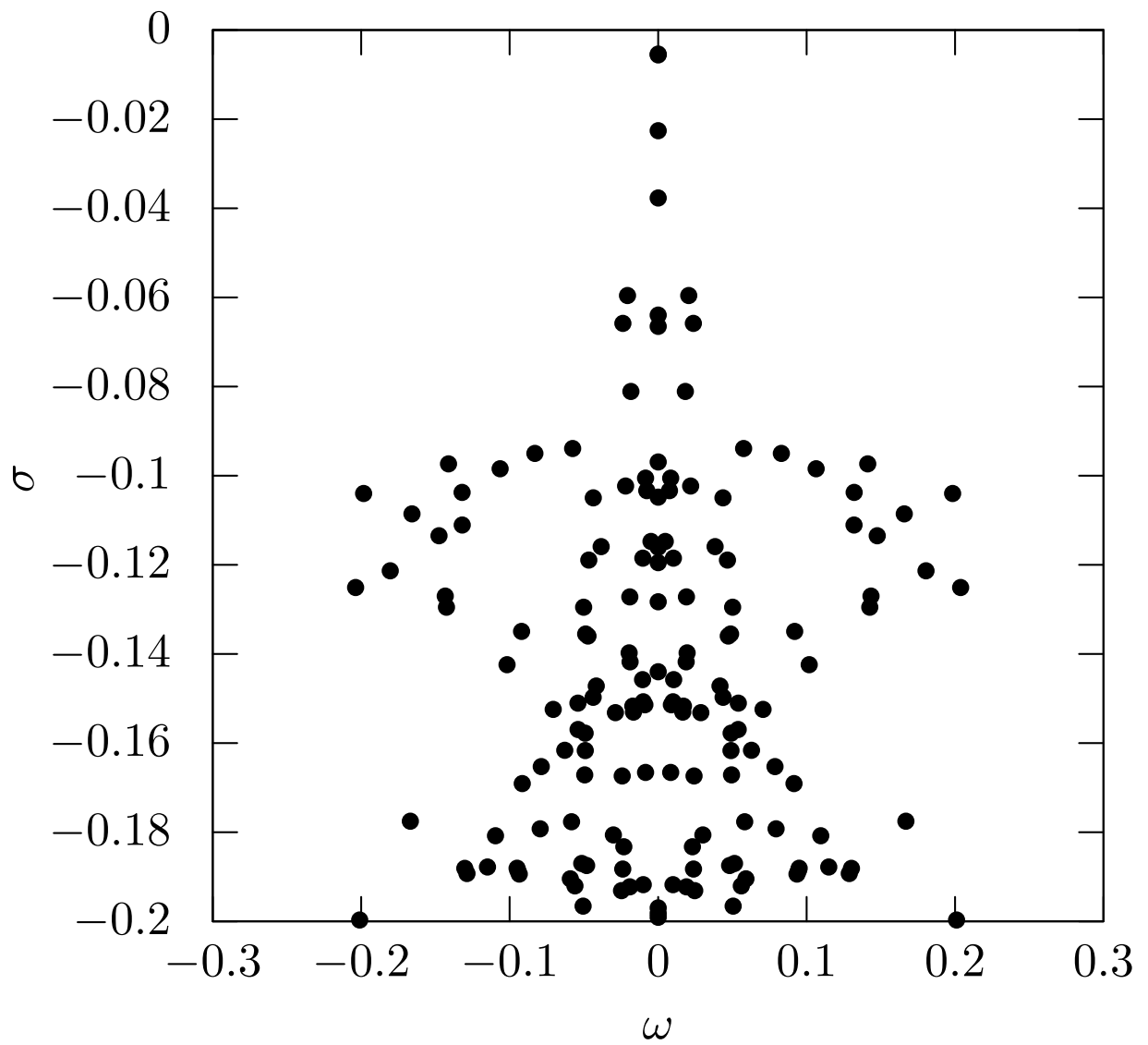


Рис. 5.9 — Собственные значения при  $Re = 1800$ ,  $\delta = 1$

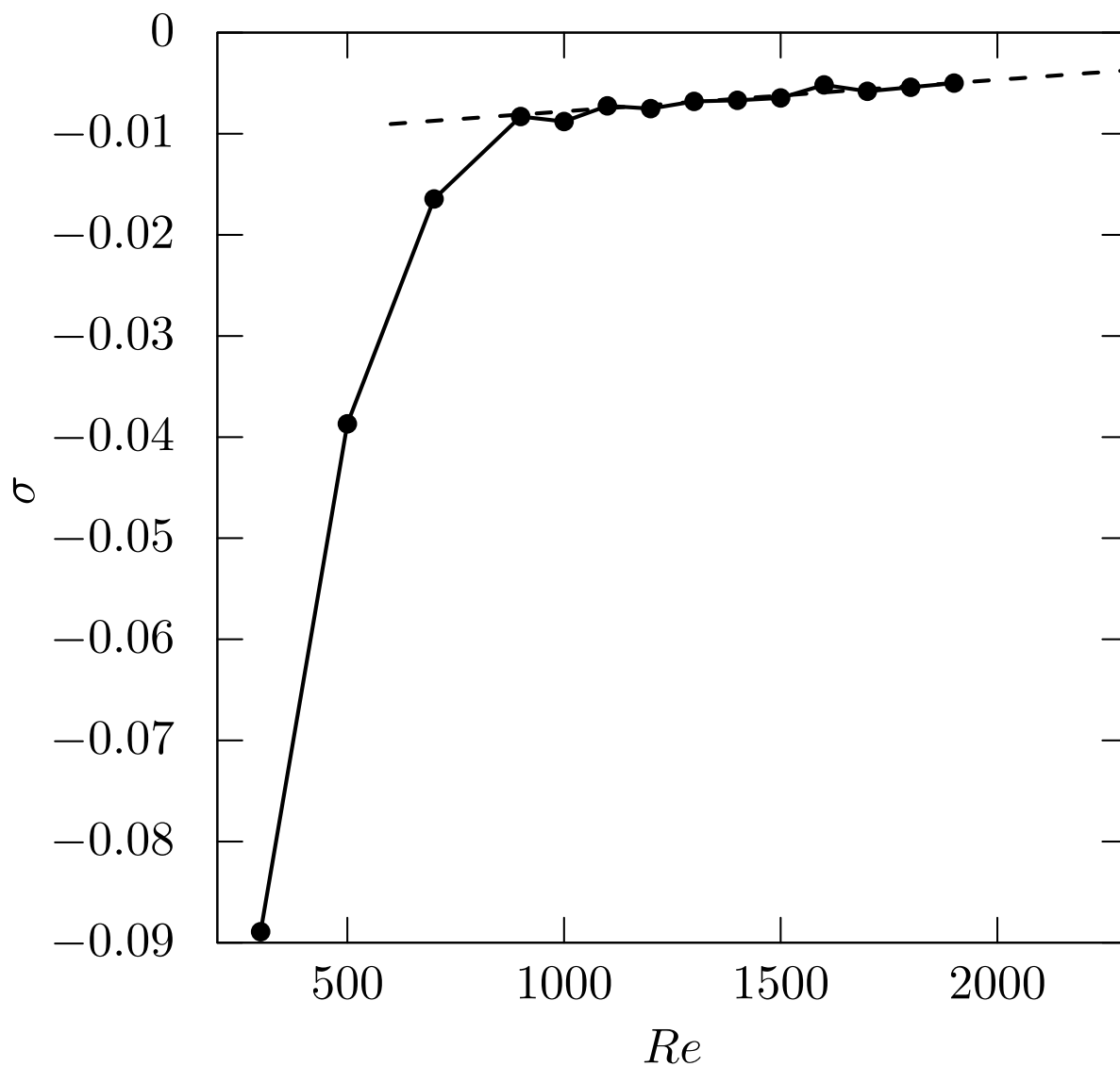


Рис. 5.10 — Зависимость коэффициента нарастания  $\sigma$  от  $Re$  для двумерных возмущений, пунктирная линия — аппроксимация методом наименьших квадратов при  $Re > 900$

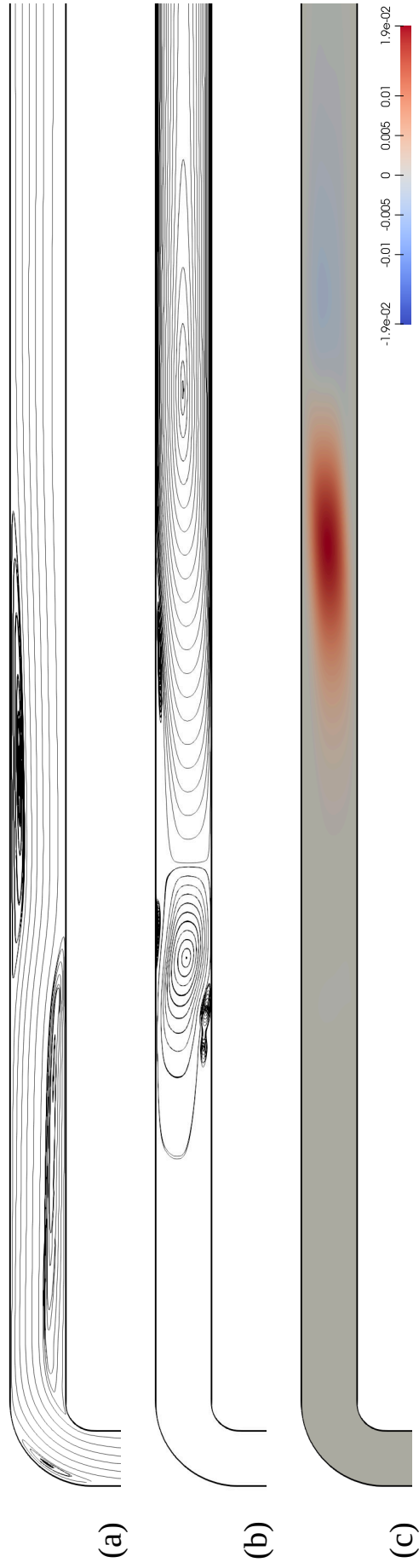


Рис. 5.11 — Линии тока стационарного течения при  $Re = 1600$  (a), линии тока его наиболее опасной функции (b) и её вертикальная скорость (c)

для нескольких младших устойчивых мод, обозначенных кружками, ромбами и треугольниками.

На рисунке 5.14 показаны зависимости коэффициента нарастания возмущения  $\sigma$  от поперечного волнового числа  $\beta$  при  $Re = 300, 700, 1100, 1900$ . Каждая кривая состоит из значений  $\sigma$ , соответствующих наиболее опасной моде. Действительные собственные значения на этом рисунке отмечены сплошными символами, а комплексные – незакрашенными. При  $Re = 300$  кривая имеет локальные максимумы в  $\beta \approx 0.03$  и  $\beta \approx 1.0$ , первый из которых соответствует комплексной моде, а второй – действительной. Когда  $\beta$  уменьшается, частота также уменьшается. По мере увеличения числа Рейнольдса неустойчивой сначала становится действительная мода, при этом существует конечный диапазон волновых чисел для неустойчивых возмущений. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса левая граница этого интервала определяется периодическими возмущениями с частотой порядка  $5 \cdot 10^{-3}$ . Периодические режимы также доминируют при больших  $\beta$ , но они устойчивы.

Нейтральная кривая представлена на рисунке 5.15. На этом рисунке показана область неустойчивости для  $Re < 1900$ . Граничные точки на кривой были получены путем определения точки  $\sigma = 0$  при изменении  $\beta$  и фиксированном числе Рейнольдса. Штриховкой обозначена область неустойчивости. Наименьшим значением числа Рейнольдса  $Re$ , при котором наблюдаются нарастающие возмущения, является критическое число Рейнольдса  $Re_*$ , которому соответствует критическое волновое число  $\beta_*$ . Незакрашенные ромбы обозначают границу, где наиболее опасная мода сменяется с комплексной на действительную. Незакрашенные треугольники обозначают нейтральную границу для комплексного режима. Обозначение маркеров в виде закрашенных ромбов, кругов и прямоугольников будет пояснено ниже.

На рисунках 5.16, 5.17, 5.18 представлены собственные значения для  $Re = 1100, \beta = 1$ ;  $Re = 1600, \beta = 0.3$ ;  $Re = 1600, \beta = 3.0$ . Каждый из графиков соответствует одному типу ведущей моды. При числе Рейнольдса  $Re = 1100$  наиболее опасная неустойчивая мода действительна и сосредоточена вблизи первой области рециркуляции, как показано на рисунке 5.19 с использованием изоповерхностей продольной составляющей завихренности (а) и поперечной составляющей скорости в месте максимальной амплитуды (б). Поскольку эта мода локализована в области первого рециркуляционного пузыря, ее можно назвать *B*-модой (bubble-mode). Когда поперечное волновое число  $\beta$  уменьшается, ведущая

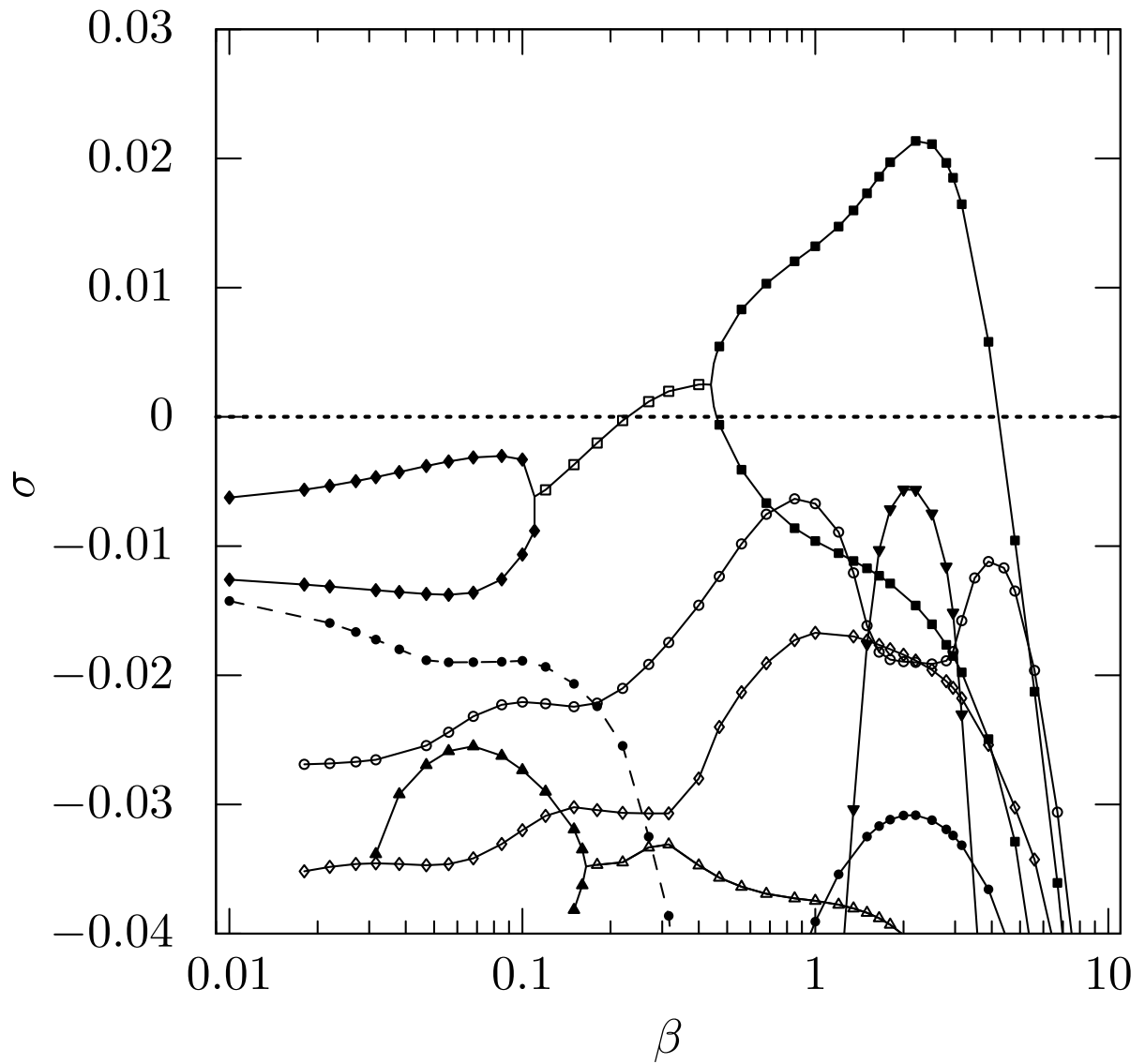


Рис. 5.12 — Собственные значения при  $Re = 1400$  как функция поперечного волнового числа  $\beta$ : коэффициент нарастания  $\sigma$



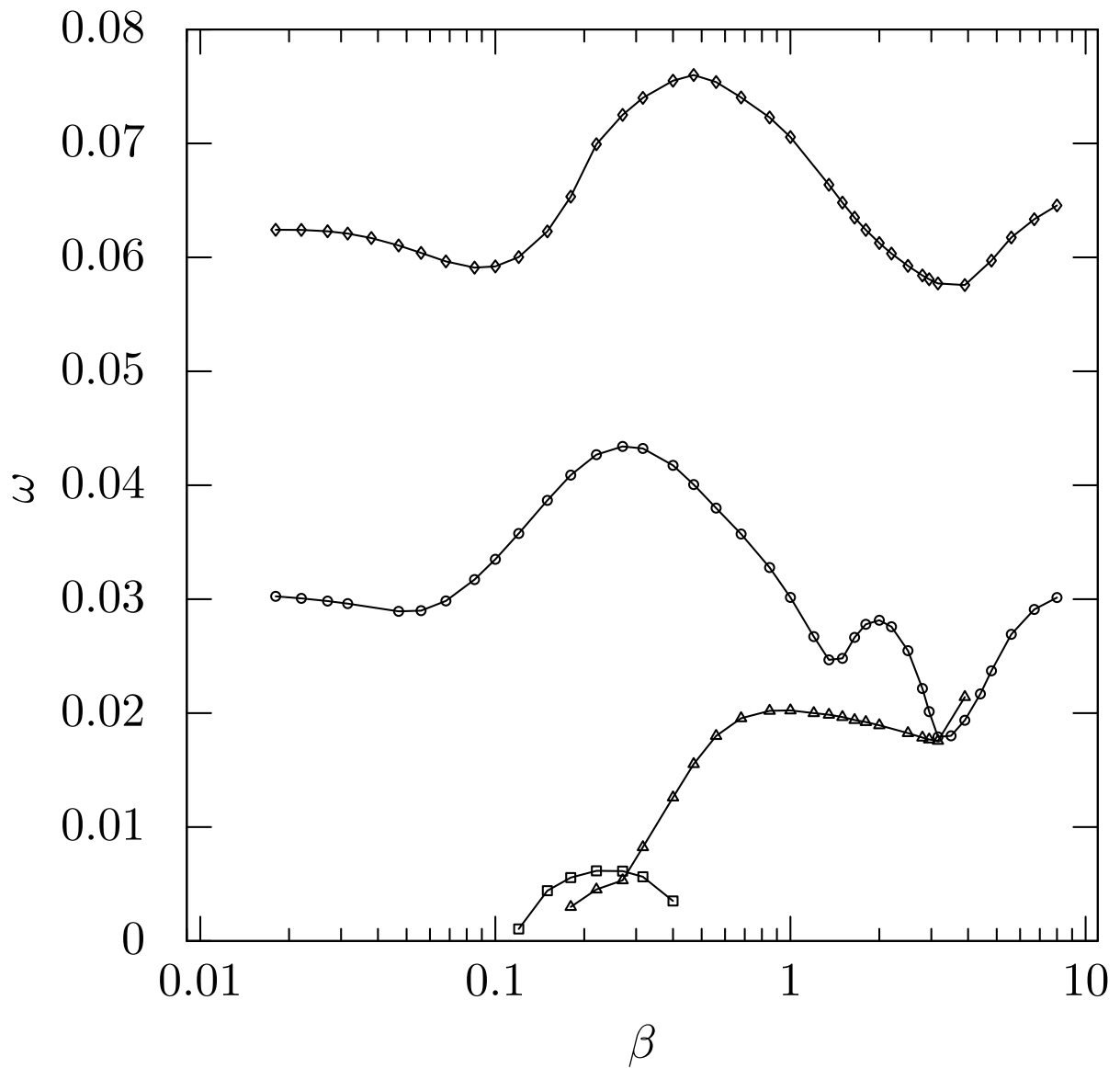


Рис. 5.13 — Собственные значения при  $Re = 1400$  как функция поперечного волнового числа  $\beta$ : частота  $\omega$

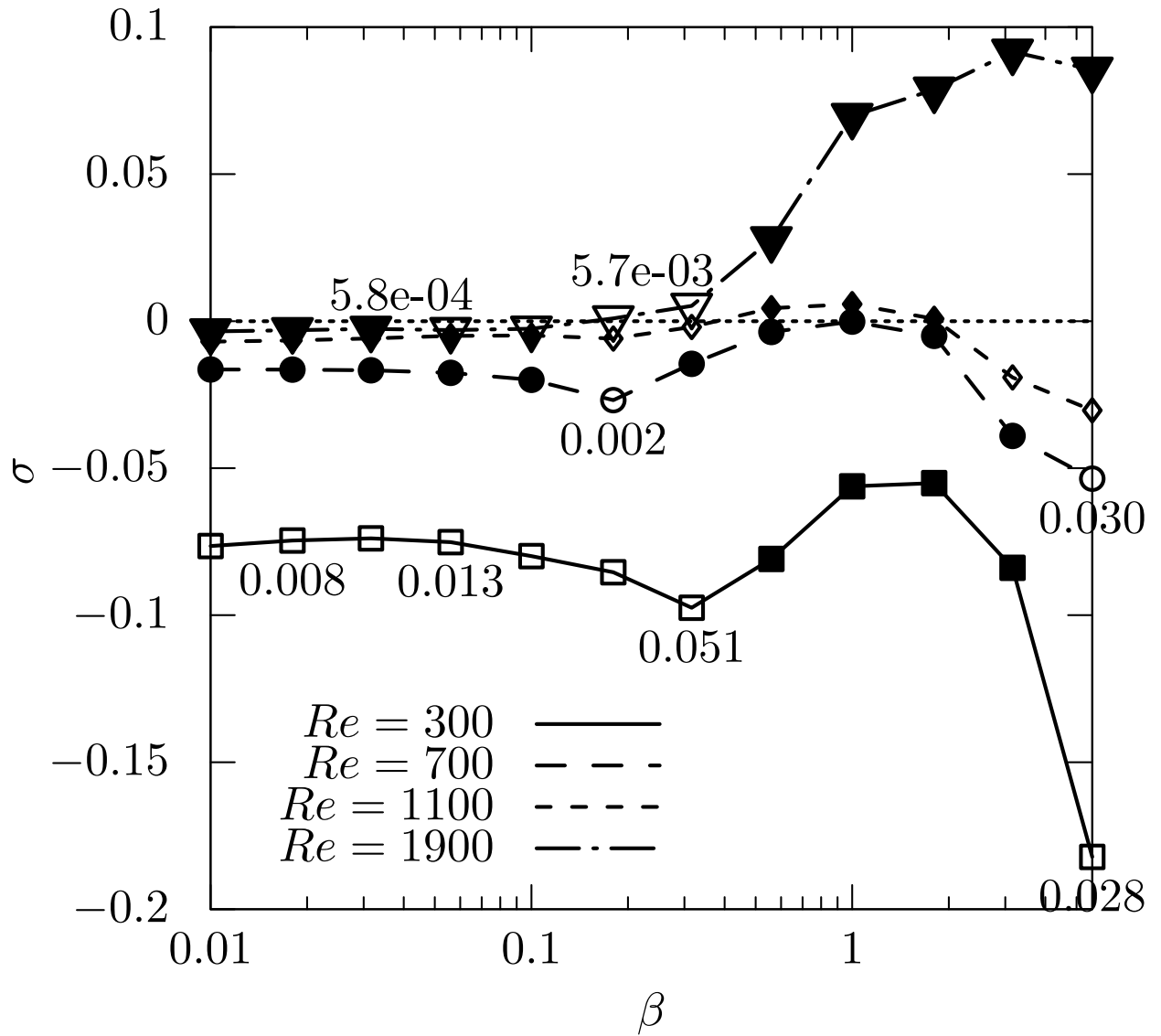


Рис. 5.14 — Зависимости  $\sigma$  от  $Re = 300, 700, 1100, 1900$  для наиболее опасной моды как функция от поперечного волнового числа  $\beta$ . Закрашенные символы обозначают действительные собственные значения, незакрашенные символы — комплексные. Возле некоторых точек указаны соответствующие частоты  $\omega$

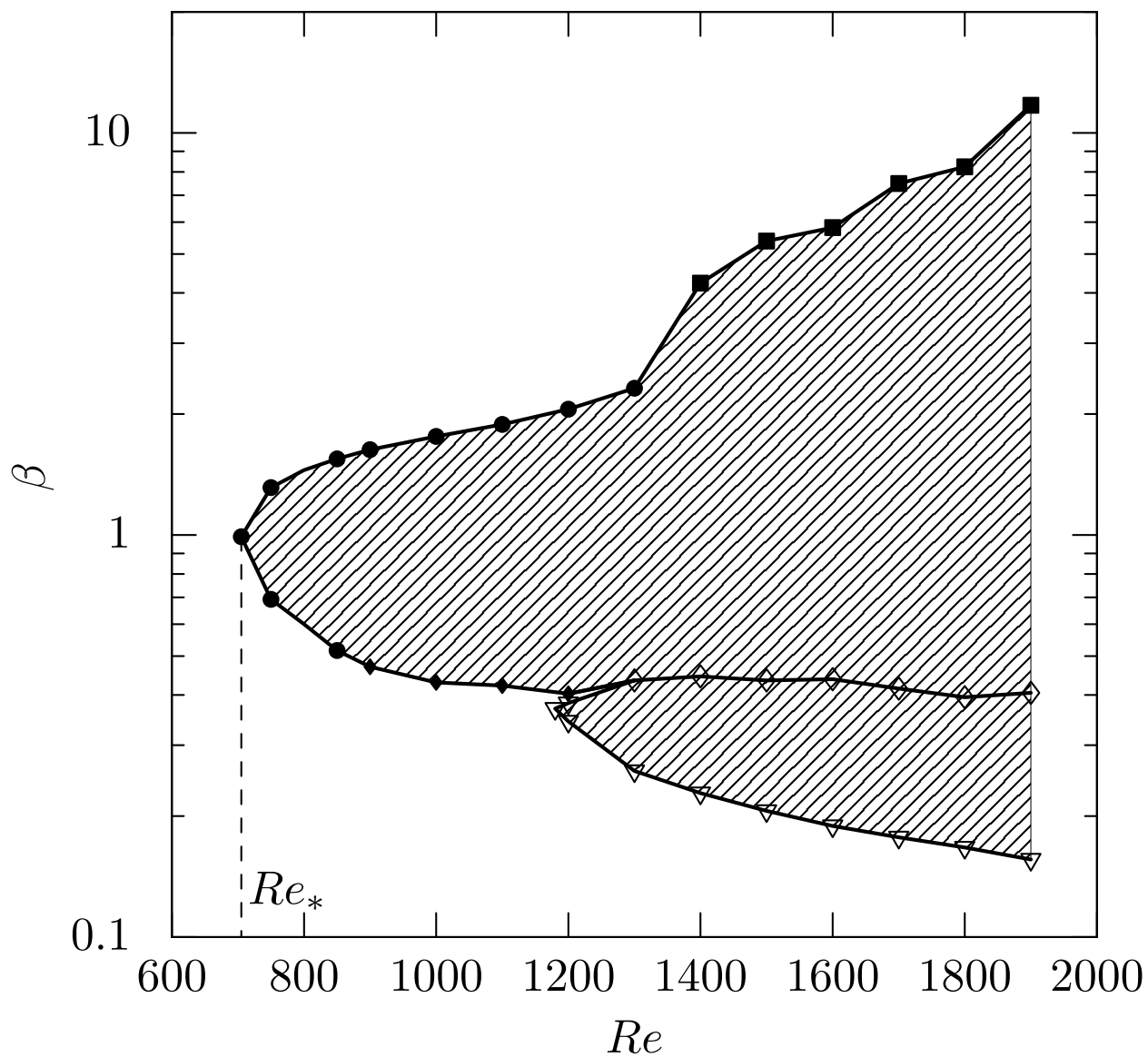


Рис. 5.15 — Нейтральная кривая при  $\delta = 1$ . Штриховкой обозначена область параметров, в которой течение неустойчиво

неустойчивая мода имеет заметную, хотя и меньшую амплитуду в области второй области рециркуляции, как показано на рисунке 5.20. Эта мода объединяет области рециркуляции  $V1$  и  $V2$  и может быть названа  $C$ -модой (coupled-mode). На рисунке 5.15 граница неустойчивости  $B$ -моды обозначена сплошными кругами, а граница неустойчивости действительной  $C$ -моды обозначена сплошными ромбами.

По мере увеличения числа Рейнольдса более опасной становится комплексная  $C$ -мода, действительная и мнимая части которой показаны на рисунках 5.21, 5.22 при  $Re = 1600$ ,  $\beta = 0.3$ . Как видно из рисунка 5.17, над линией  $\sigma = 0$  находится пара комплексных собственных значений, в то время как действительные моды устойчивы.

В отличие от длинных поперечных возмущений (малых  $\beta$ ), коротковолновые возмущения сосредоточены вблизи хвоста первой области рециркуляции, как показано на рисунке 5.23 при  $Re = 1600$ ,  $\beta = 3.0$ . Соответствующие собственные значения показаны на рисунке 5.18. Собственное значение наиболее опасной моды является действительным. Эту моду можно назвать  $T$ -модой (tail-mode). Граница устойчивости  $T$ -моды показана сплошными прямоугольниками на рисунке 5.15. Следует отметить, что четкая граница между разными типами мод существует только тогда, когда действительная  $B$ -мода переходит в комплексную  $C$ -моду. Переход между модами типов  $B$ ,  $C$  и  $T$  происходит постепенно по мере изменения параметров  $Re$  или  $\beta$ .

Зависимости критических чисел Рейнольдса от радиуса изгиба  $\delta$  приведены в таблице 5.3. Критическое число Рейнольдса увеличивается почти в десять раз за счет увеличения параметра изгиба, и при  $\delta = 2.5$  оно имеет тот же порядок величины, что и для плоского потока. При этом собственные числа наиболее опасной моды все время остаются действительными.

Таблица 5.3: Критические числа Рейнольдса  $Re_*$  и соответствующие волновые числа  $\beta_*$  в зависимости от параметра  $\delta$

$\delta$	0.7	1.0	1.5	2.0	2.5
$Re_*, \pm 1$	469	705	1187	1852	2737
$\beta_*, \pm 0.01$	1.01	0.99	0.96	0.89	0.79

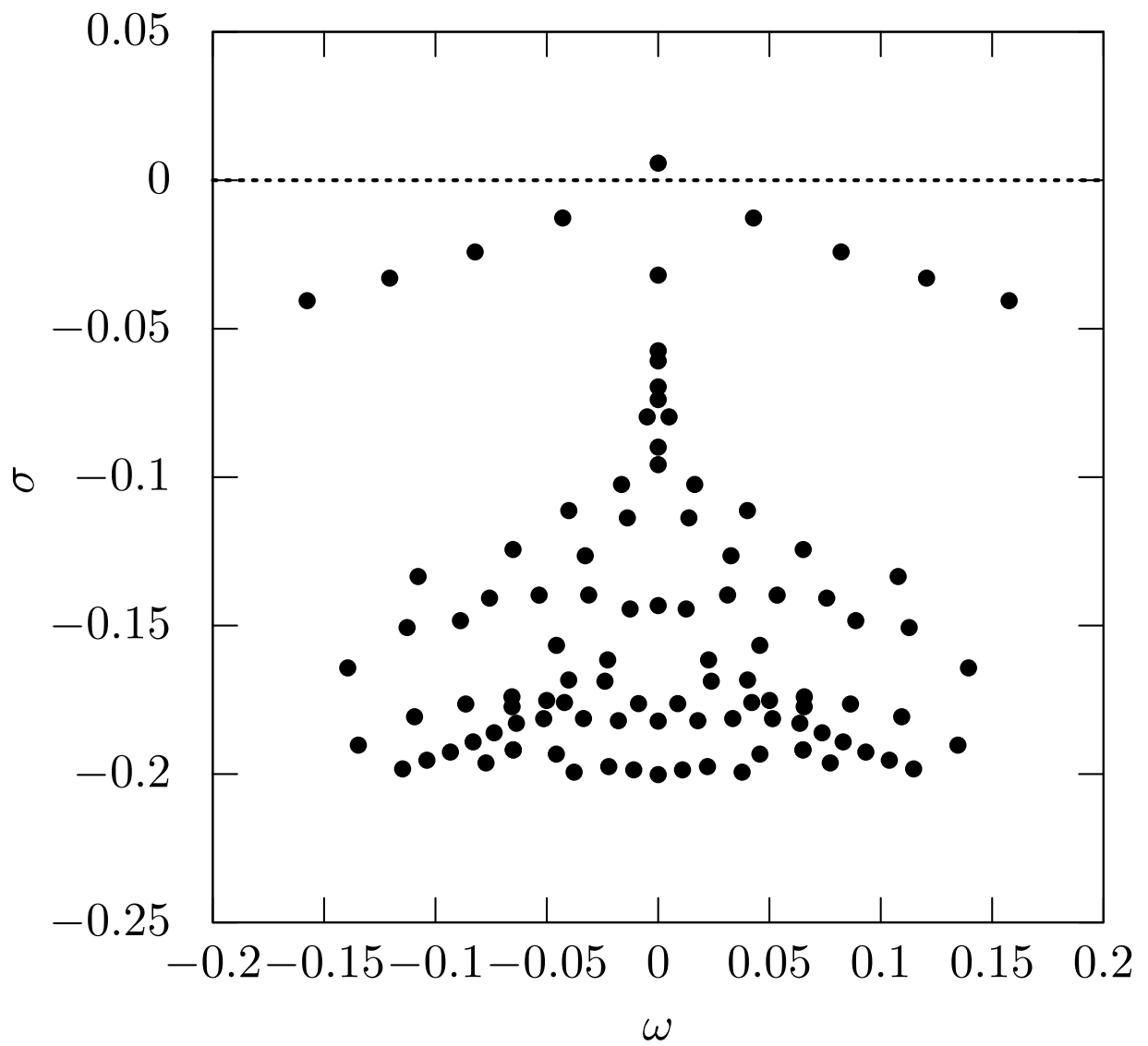


Рис. 5.16 — Собственные значения при  $Re = 1100$ ,  $\beta = 1$

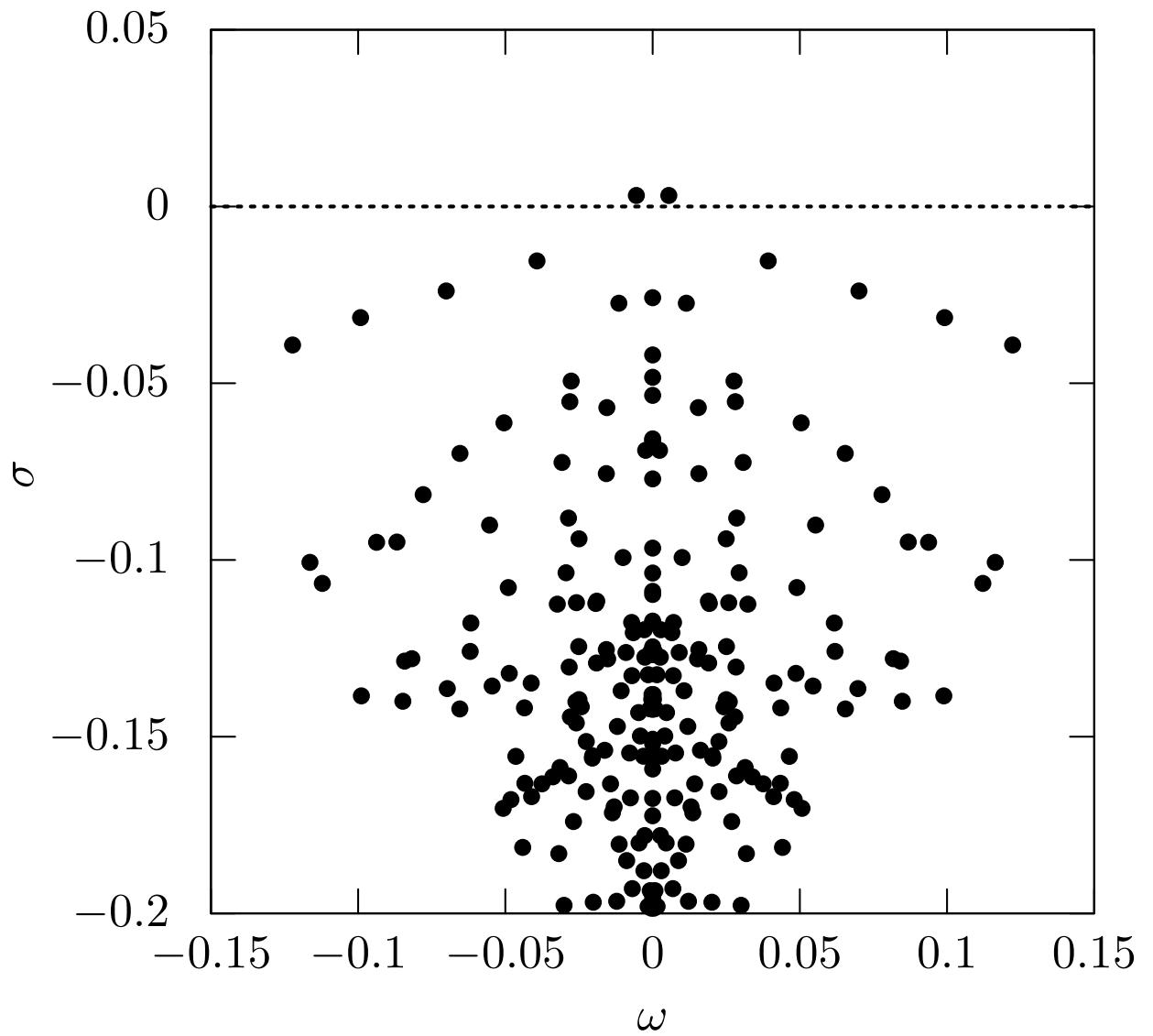


Рис. 5.17 — Собственные значения при  $Re = 1600$ ,  $\beta = 0.3$

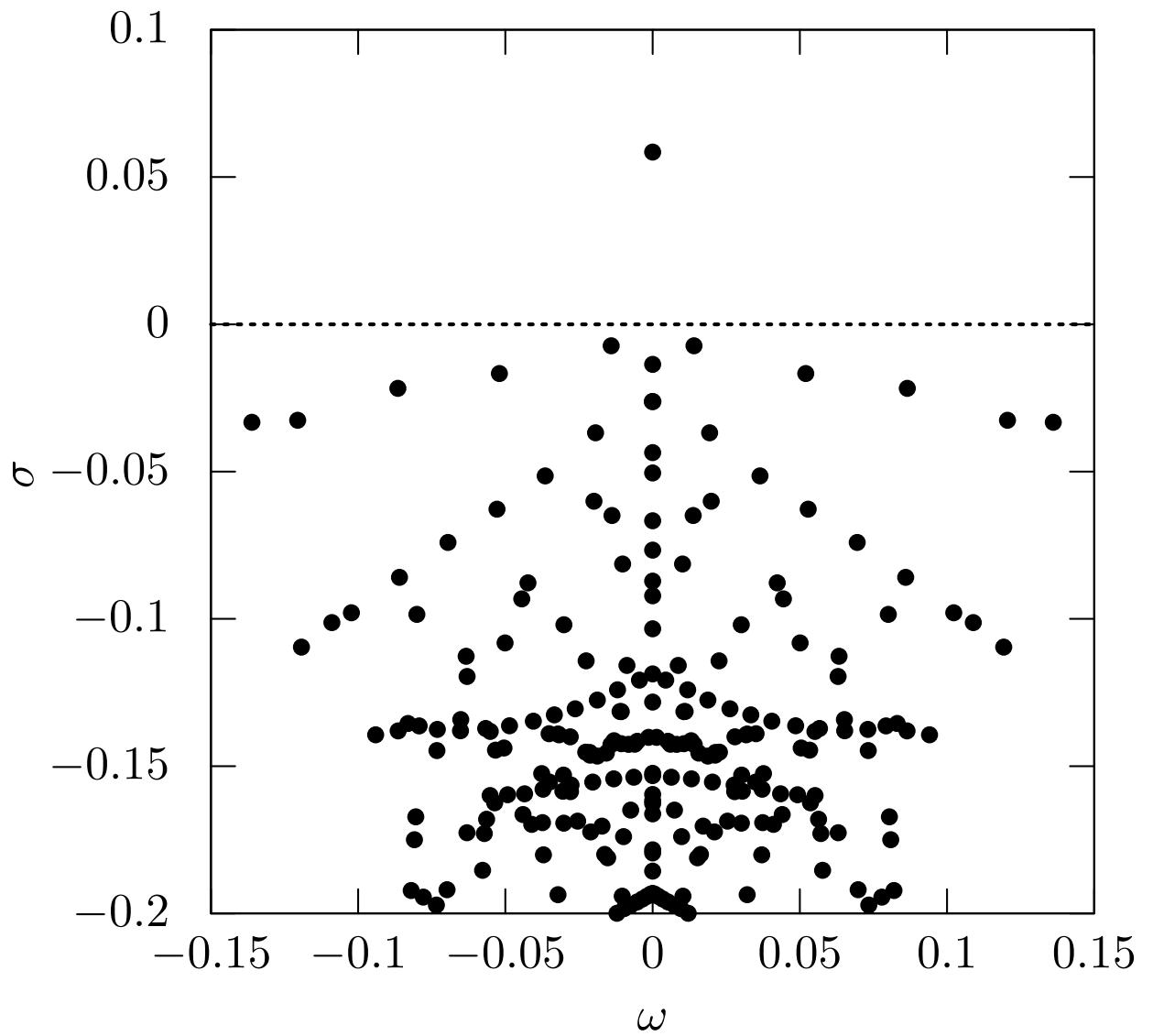


Рис. 5.18 — Собственные значения при  $Re = 1600$ ,  $\beta = 3.0$

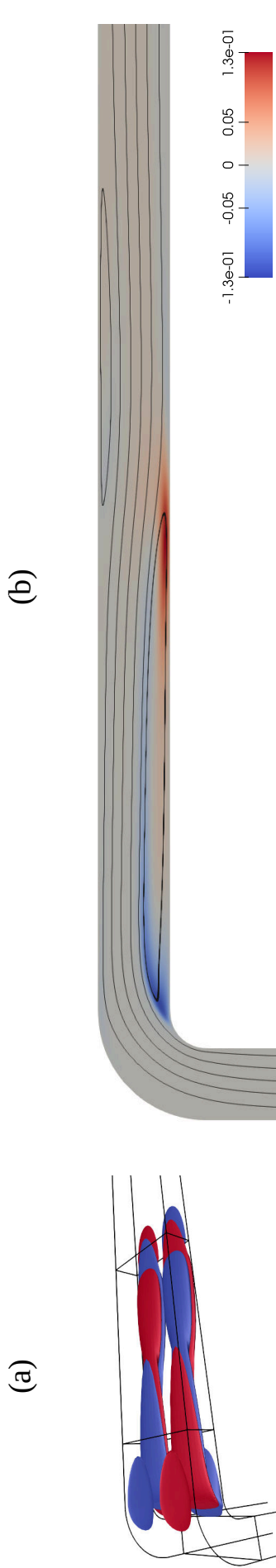


Рис. 5.19 — Визуализация неустойчивой  $B$ -моды при  $Re = 1100$ ,  $\beta = 1$ : изоповерхности  $\pm 0.1$  продольной компоненты завихренности (a) и распределение поперечной скорости  $v_z$  в сечении, где она имеет наибольшую амплитуду, вместе с линиями тока стационарного течения (b)



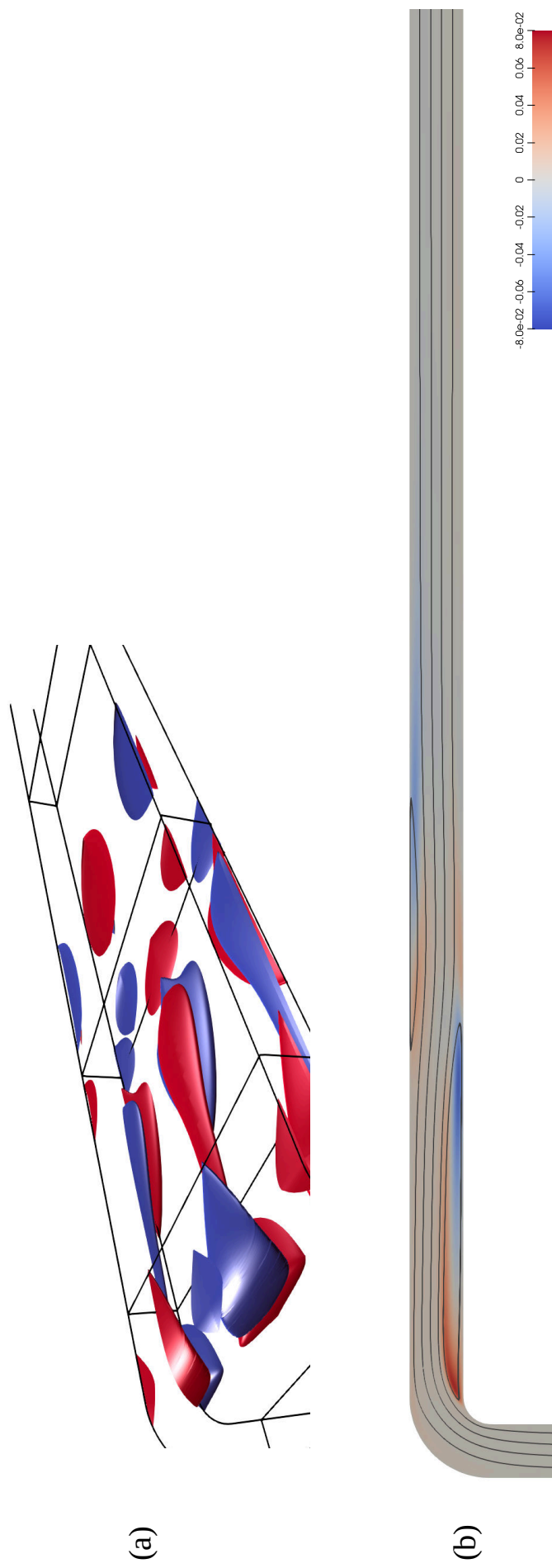


Рис. 5.20 — Визуализация неустойчивой  $C$ -моды при  $Re = 1000$ ,  $k = 0.45$ : изоповерхности  $\pm 0.15$  продольной компоненты завихренности (a) и распределение поперечной скорости  $v_z$  в сечении, где она имеет наибольшую амплитуду, вместе с линиями тока стационарного течения (b)

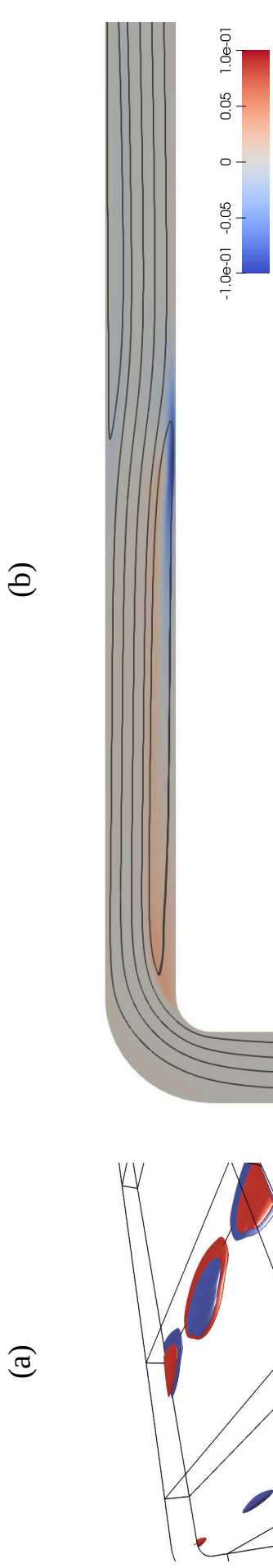


Рис. 5.21 — Визуализация действительной части неустойчивой  $C$ -моды при  $Re = 1600$ ,  $\beta = 0.3$ : изоповерхности  $\pm 0.3$  продольной компоненты завихренности (a) и распределение поперечной скорости  $v_z$  в сечении, где она имеет наибольшую амплитуду, вместе с линиями тока стационарного течения (b)

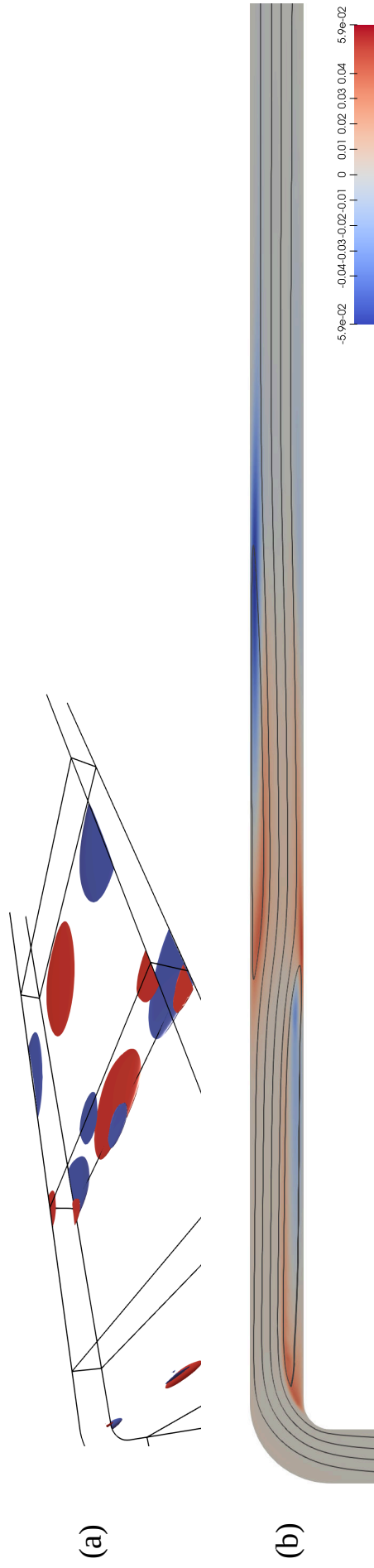


Рис. 5.22 — Визуализация минимой части неустойчивой  $C$ -моды при  $Re = 1600$ ,  $\beta = 0.3$ : изоповерхности  $\pm 0.3$  продольной компоненты завихренности (a) и распределение поперечной скорости  $v_z$  в сечении, где она имеет наибольшую амплитуду, вместе с линиями тока стационарного течения (b)

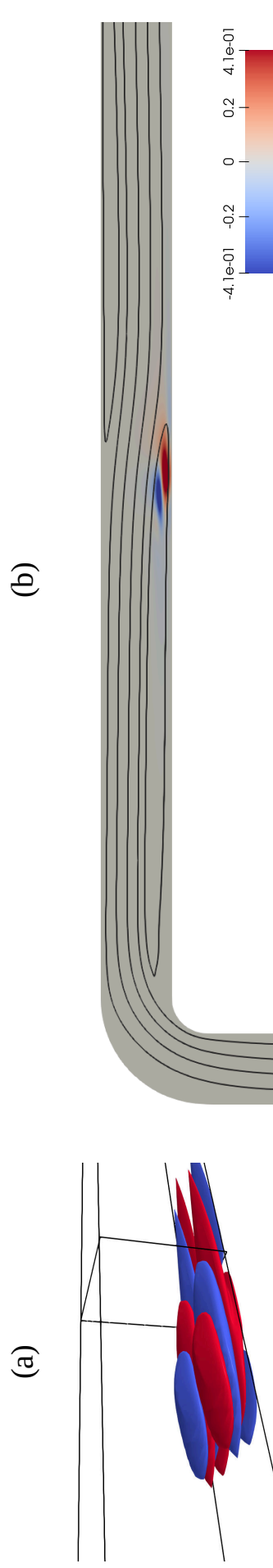


Рис. 5.23 — Визуализация неустойчивой  $T$ -моды при  $Re = 1600$ ,  $\beta = 3$ : изоповерхности  $\pm 0.4$  продольной компоненты завихренности (a) и распределение поперечной скорости  $v_z$  в сечении, где она имеет наибольшую амплитуду, вместе с линиями тока стационарного течения (b)

Из приведенных в этом разделе результатов можно сделать вывод, что неустойчивость вызвана монотонной модой, которая локализуется в области рециркуляции  $V1$ , или периодической, амплитуда которой велика как в первой ( $V1$ ), так и второй ( $V2$ ) областях рециркуляции. Критические числа Рейнольдса на основе линейной теории в двумерном случае по меньшей мере в 2.7 раза больше, чем в трехмерном случае. Однако эффект двумерных механизмов усиления неустойчивости велик при числах Рейнольдса, которые примерно соответствуют критическим числам для трехмерных возмущений в соответствии с линейной теорией. В качестве примера, кроме проведенных мною расчетов, можно привести результаты Чжана и Потерата [202], а также Блэкберна с соавторами [191], которые путем прямого численного моделирования наблюдали трехмерные течения с ведущей ролью двумерной динамики.

### 5.3 Режимы течения в изогнутом канале в вертикальном магнитном поле

Рассмотрим течение вязкой электропроводящей жидкости в изогнутом на 90 градусов канале, который приведен на рисунке 5.24. Жидкость предполагается вязкой и электропроводящей. Однородное магнитное поле  $B_0$  направлено вертикально. Жидкость втекает в канал через часть границы, обозначенную как «inflow» и вытекает через «outflow». Можно определить безразмерный радиус изгиба канала

$$\delta = \frac{d}{R}. \quad (5.11)$$

Таблица 5.4: Сходимость скорости в точках А, В и С

$p$	прямоугольные элементы			треугольные элементы		
	$v_x$ в А	$v_y$ в В	$v_x$ в С	$v_x$ в А	$v_y$ в В	$v_x$ в С
3	-0.00614057	-0.03366661	0.01152448	-0.00252486	-0.04073437	-0.0065677
5	-0.00046651	-0.03109454	0.00989152	-0.00104130	-0.03170791	0.01107090
7	-0.00078967	-0.03163357	0.01168906	-0.00101746	-0.03169345	0.01162540
9	-0.00104049	-0.03167006	0.01164027	-0.00103455	-0.03173050	0.01163066
11	-0.00102927	-0.03167162	0.01159739	-0.00103392	-0.03170722	0.01161798
13	-0.00103334	-0.03166994	0.01159802	-0.00103287	-0.03168602	0.01160666
15	-0.00103240	-0.03166936	0.01159777	-0.00103264	-0.03167486	0.01160077
17	-0.00103254	-0.03166915	0.01159760	-0.00103257	-0.03167044	0.01159842

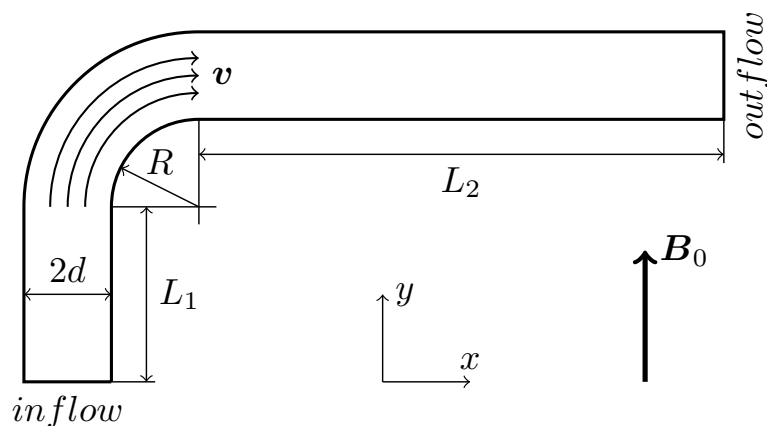


Рис. 5.24 — Изогнутый канал

Рассмотрим стационарное течение. Уравнения и методика численного анализа описаны в главе 4. Для того, чтобы получить стационарное течение, я задал постоянный градиент давления между входной и выходной областями канала, задал нулевые начальные условия и вычислял нестационарное течение до тех пор, пока не произошло установления постоянных значений скорости. На рисунках 5.25 и 5.26 показаны сетки с прямоугольными (251 элемент) и треугольными (561 элемент) элементами. Основной объем вычислений был проведен с использованием первой сетки, а вторая использовалась для контроля сходимости, который проводился в нескольких точках. Три таких точки приведены на рисунке 5.30 и обозначены как А, В, и С. В таблице 5.4 приведены значения скорости в этих точках при разных значениях порядка аппроксимации  $p$ . По данным таблицы можно сделать вывод, что достигается сходимость как минимум 4 значащих цифр, что менее 0.01%.

Стационарное течение было изучено в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Стюарта. Было обнаружено три различных разновидности стационарных течений. Одна из них, обозначенная как Тип0, приведена на рисунке 5.27. Тип0 имеет параллельные линии тока. Другая разновидность, обозначенная как Тип1, имеет завихрение после изгиба канала, показанное на рисунке 5.28. Течения вида Тип0 и Тип1 могут наблюдаться без магнитного поля. Если вязкость уменьшается при наличии достаточно большого магнитного поля, возникает другой тип течения, который я обозначил как Тип2. Линии тока течения Тип2 приведены на рисунке 5.29, образуется вихрь во входном патрубке канала. Если вязкость умень-

шается еще больше, вихрь во входном патрубке увеличивается и переходит в противотечение, как показано на рисунке 5.30. Соответствующее распределение давления показано на рисунке 5.31. Основное падение давления происходит в выходном патрубке. В области изгиба канала образуется область более высокого давления, чем на входе в канал. Образуется малый обратный градиент давления в левой части входного патрубка. Графики скорости во входном патрубке показаны на рисунках 5.32 и 5.33. Для вычислений я задал постоянную электропроводность и менял вязкость так, что число Рейнольдса варьировалось от 20 до 13023. Появление противотечения наблюдается на рисунке 5.32, а рисунок 5.33 иллюстрирует смещение обратной струи к центру канала. Я изучил переход от Тип0 к Тип2, меняя одновременно вязкость и электропроводность. Диаграммы, показанные на рисунке 5.34 иллюстрируют этот переход при  $\delta = 0.1, 1, 5$ .

Возникновение противотечения наблюдается и в трехмерном случае. Был рассмотрен изогнутый канал квадратного сечения, линии тока приведены на рисунке 5.35.

Обычно обратные течения возникают как вихри за неоднородностями потока, такими как цилиндр в потоке жидкости или ступенька в канале. В изогнутом канале вихрь возникает непосредственно после изгиба. Обратное течение может возникать, если существуют силы, направленные противоположно основному потоку, пример такого течения рассмотрен в работах [297; 298]. В рассмотренном здесь случае возникновение противотечения неожиданно, так как не следует из очевидных особенностей магнитного поля или геометрии канала. Обнаруженное явление может наблюдаться экспериментально, требуемые величины  $Re$  и  $St$  можно достичь в опытах с жидким натрием [291].

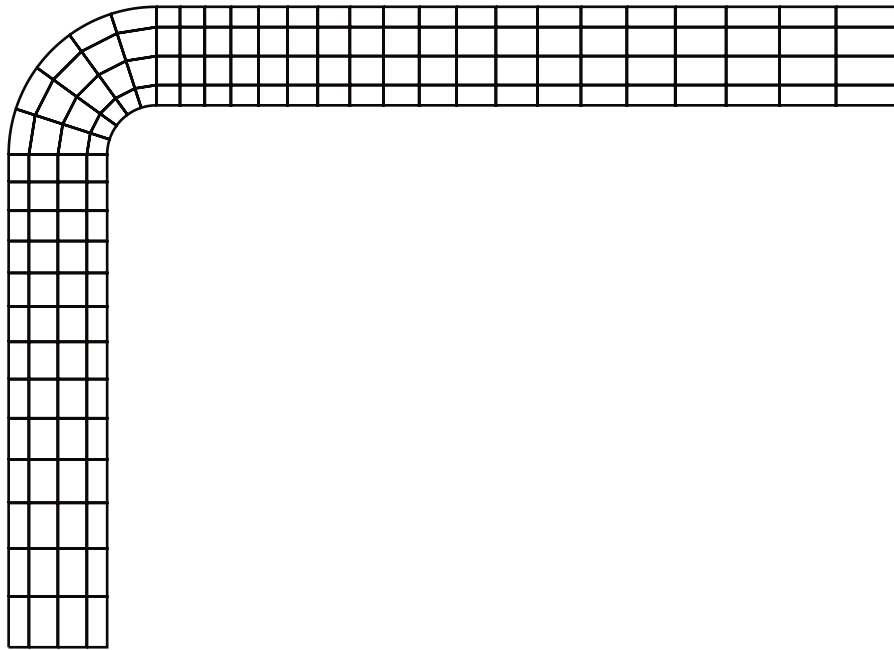


Рис. 5.25 — Сетка из прямоугольных элементов

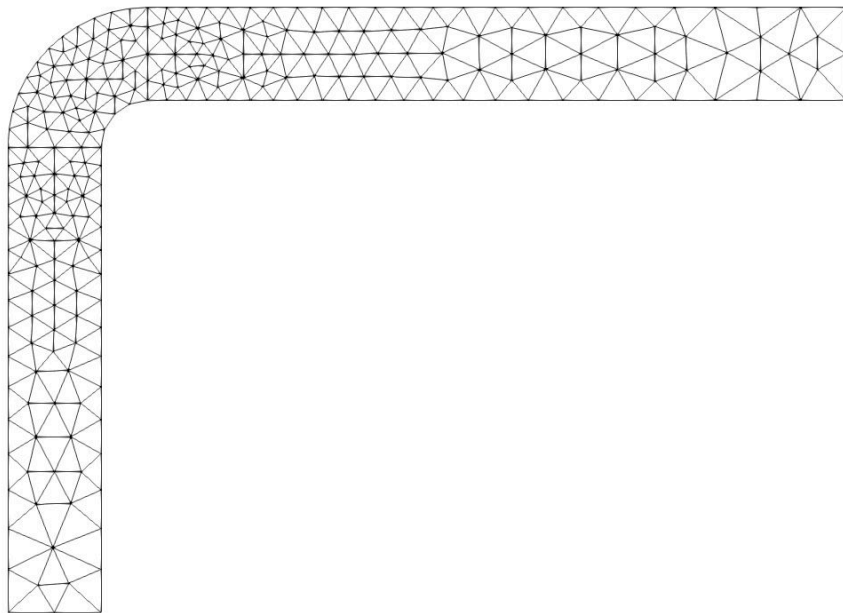


Рис. 5.26 — Сетка из треугольных элементов



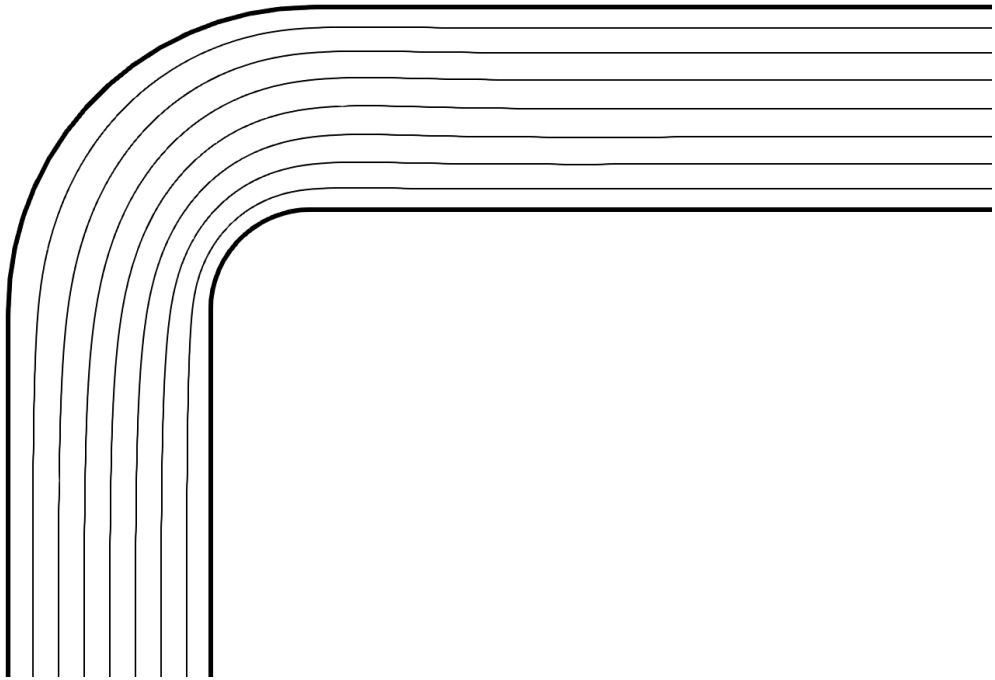


Рис. 5.27 — Линии тока, Тип0,  $Re = 4.85$ ,  $St = 2.06$ ,  $\delta = 1$

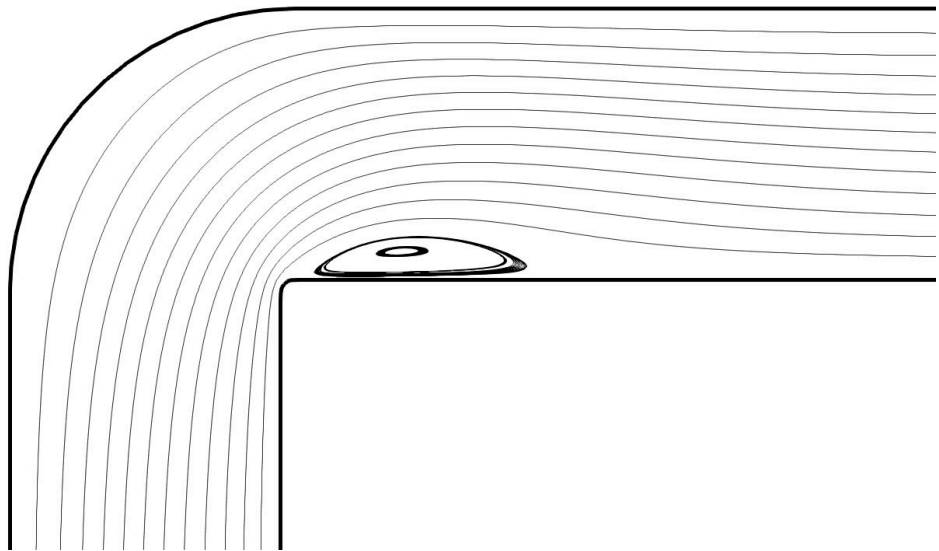


Рис. 5.28 — Линии тока, Тип1,  $Re = 50$ ,  $St = 0.001$ ,  $\delta = 0.1$

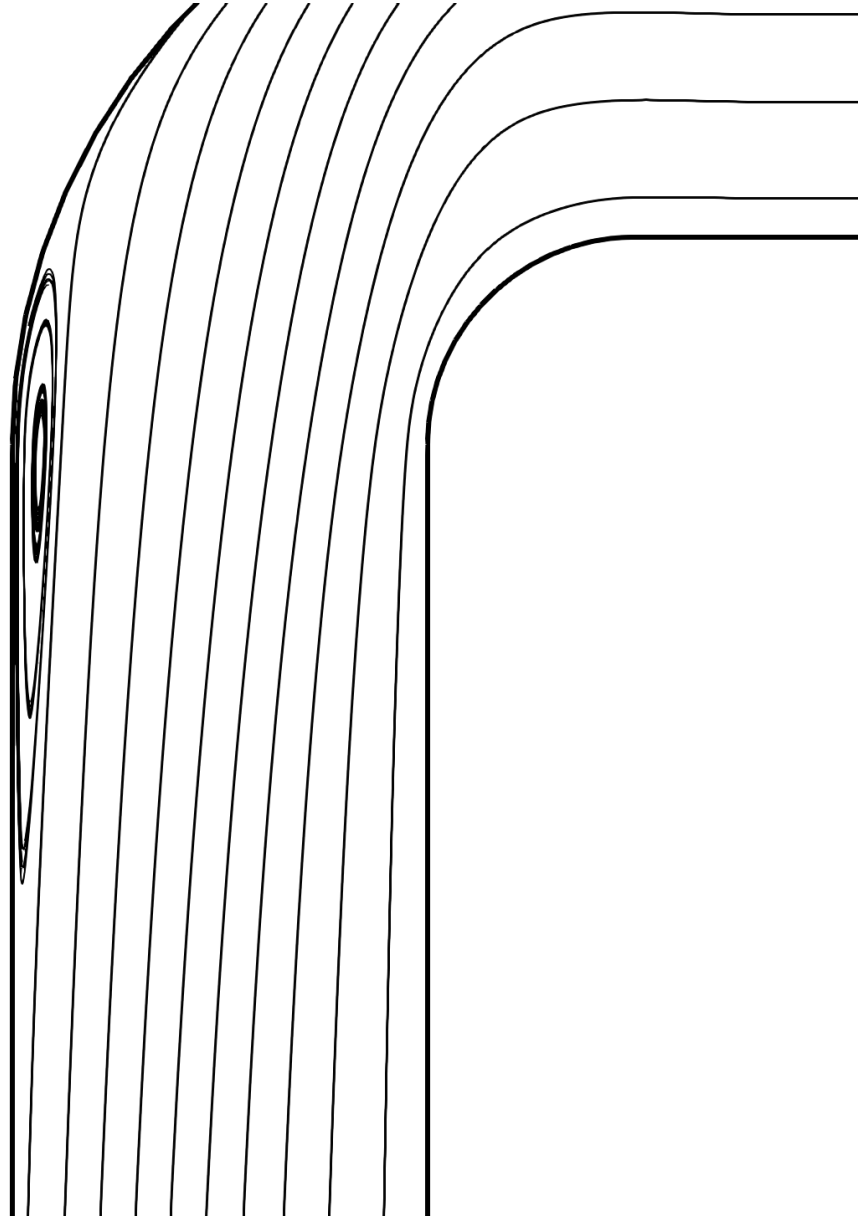


Рис. 5.29 — Линии тока, Тип2,  $Re = 25.63$ ,  $St = 58.54$ ,  $\delta = 1$

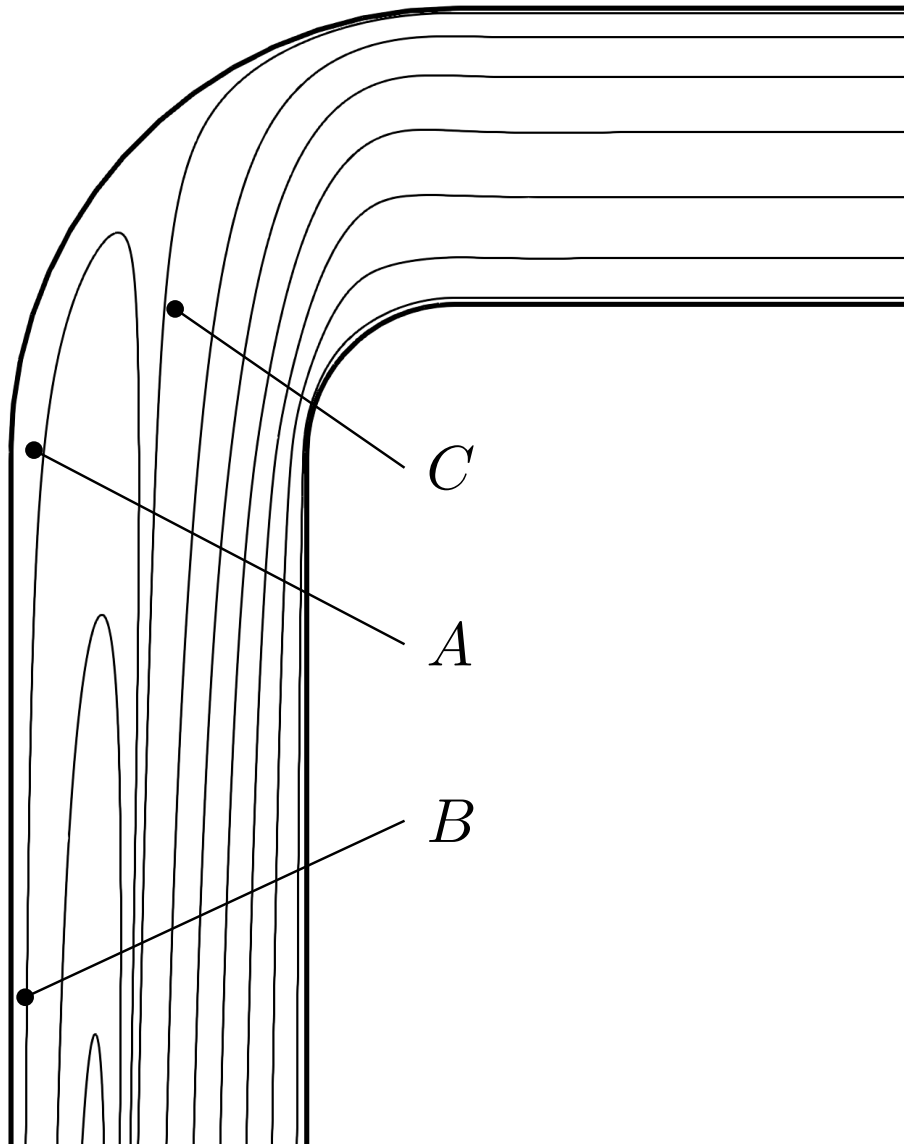


Рис. 5.30 — Линии тока, Тип2,  $Re = 103.16$ ,  $St = 58.16$ ,  $\delta = 1$

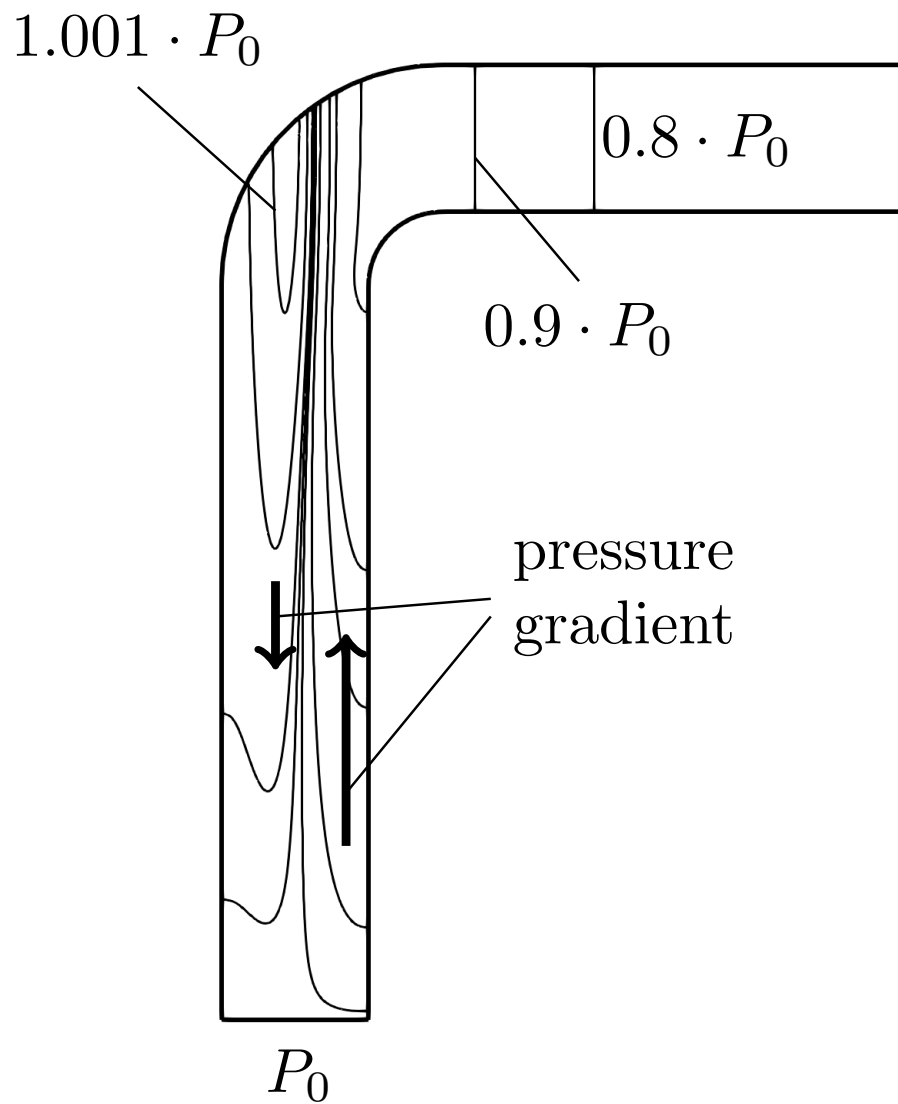


Рис. 5.31 — Распределение давления, Тип2,  $Re = 103.16$ ,  $St = 58.16$ ,  $\delta = 1$

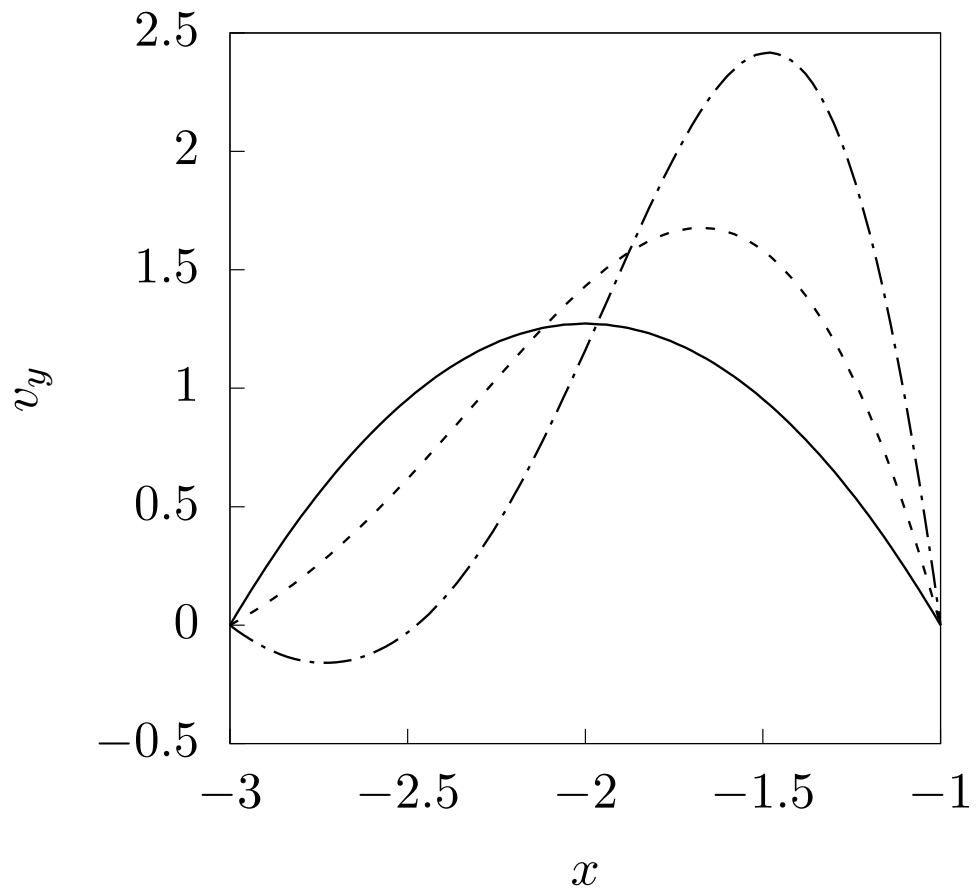


Рис. 5.32 — Профиль скорости возле входа в канал, Тип2,  $Re = 20$ ,  $St = 59$ (сплошная линия),  $Re = 64$ ,  $St = 62$ (пунктирная линия),  $Re = 103$ ,  $St = 58$ (штрих-пунктирная линия),  $\delta = 1$

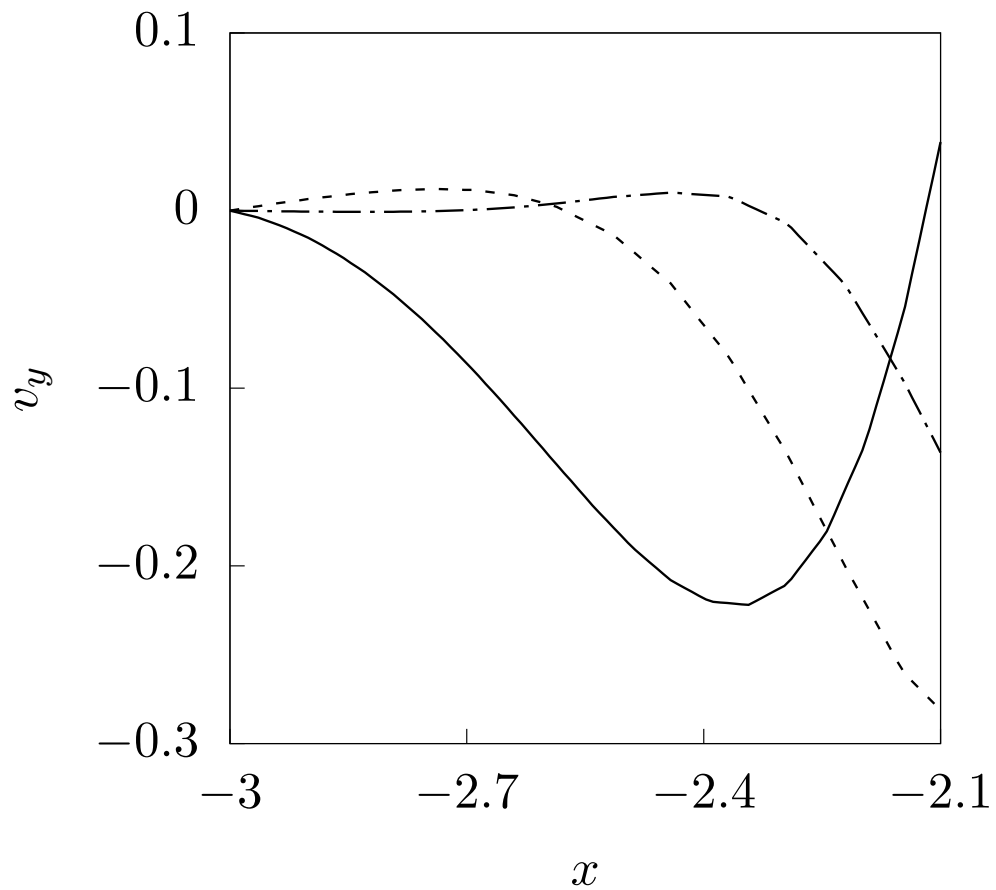


Рис. 5.33 — Профиль скорости возле входа в канал, Тип2,  $Re = 518$ ,  $St = 58$ (сплошная линия),  $Re = 2080$ ,  $St = 58$ (пунктирная линия),  $Re = 13023$ ,  $St = 58$ (штрих-пунктирная линия),  $\delta = 1$

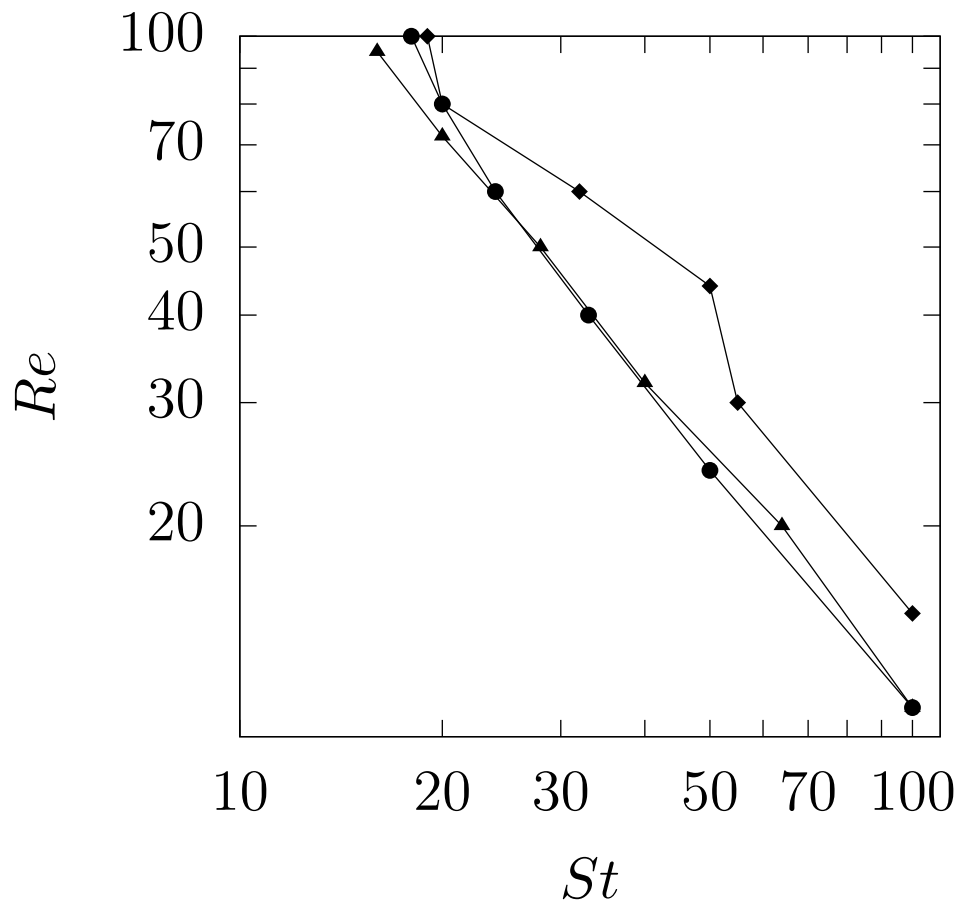


Рис. 5.34 — Диаграмма перехода Туре0→Туре2 at  $\delta = 0.1$ (круги),  $\delta = 1$ (треугольники),  $\delta = 5$ (ромбы)

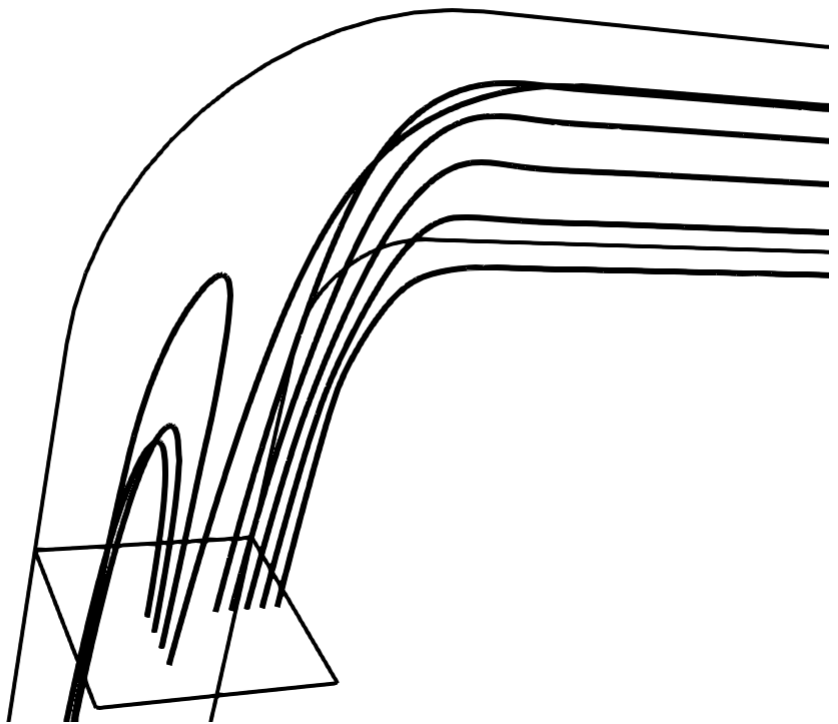


Рис. 5.35 — Линии тока в трехмерном случае,  $Re = 103$ ,  $St = 58$



## 5.4 Режимы течения в изогнутом канале в горизонтальном магнитном поле

В этом разделе описаны результаты исследования течения, аналогичного рассмотренному в разделе 5.3, которое отличается направлением магнитного поля – оно горизонтальное. Постановка расчетов полностью аналогична.

Сначала было рассмотрено течение при малых числах Рейнольдса. На рисунке 5.36 приведены линии тока течения в выходном патрубке канала при  $Re = 0.1$  и  $Ha = 10$ (a),  $Ha = 35$ (b),  $Ha = 100$ (c),  $Ha = 300$ (d). При  $Ha = 10$  линии тока параллельны. При  $Ha = 35$  в изгибе канала, с внешней стороны, наблюдается небольшой вихрь. При  $Ha = 100$  наблюдается противотечение вблизи внешней границы выходного патрубка. При увеличении числа Гартмана до  $Ha = 300$  область противотечения смещается к центру и формируется возвратная струя вблизи оси канала. Соответствующие профили скорости в выходном патрубке в середине его длины приведены на рисунках 5.37 и 5.38. На рисунке 5.38 прерывистой линией показана скорость в увеличенном масштабе. Величина противотока по амплитуде составляет значимую величину по сравнению с масштабом скорости.

На рисунках 5.37 и 5.38 видно, что при  $Ha = 10$  профиль скорости является симметричным. Однако, при увеличении влияния магнитного поля, максимум скорости смещается к внутренней стенке. Чтобы поступать в верхнюю часть канала, жидкость должна была бы в изгибе течь поперек магнитного поля. При таком направлении скорости возникают магнитные силы, которые тормозят движение жидкости. Во входном патрубке тормозящие магнитные силы компенсируются градиентом давления. В выходном патрубке нет сил, которые вызывали бы поперечное движение жидкости. Такие силы есть только в изгибе канала, в котором распределение скорости формируется под действием сил инерции, магнитных сил, градиента поля давления. На рисунке 5.36(c) видно, что линии тока из входного патрубка занимают только нижнюю часть выходного патрубка. В верхней части жидкость увлекается за счет вязких сил и объем вытекающей жидкости компенсируется противотечением со стороны выхода из канала.

Механика движения в изогнутом канале аналогична свободному вихрю в поперечном поле, для которого в работе [299] были получены аналитические ре-

шения и оценки. Полученная в [299; 300] картина отщепления от основного вихря противоположно вращающихся вихрей аналогична приведенным на рисунке 5.36.

На рисунке 5.39 приведены зависимости переходного числа Гартмана  $Ha_*$  от числа Рейнольдса. Переходным числом Гартмана названо число Гартмана, при котором возникает противотечение, сначала в виде маленького вихря, показанного на рисунке 5.36(b). Были рассмотрены радиусы закругления  $R = 1, 2, 3$ . При  $Re < 1$  возникновение противотечения мало зависит от числа Рейнольдса. При  $10 < Re < 100$  зависимости  $Ha_*(Re)$  имеют минимумы. При  $Re > 100$  зависимости  $Ha_*(Re)$  возрастают.

На рисунке 5.40 показано возникновение противотечения при  $Re = 1000$ :  $Ha = 10$ (a),  $Ha = 65$ (b),  $Ha = 100$ (c). При  $Ha = 10$  непосредственно за изгибом с внутренней стороны канала наблюдается вихрь. При  $Ha = 65$  аналогичный вихрь существует уже у наружной стенки канала. При  $Ha = 100$  наблюдается противотечение. При числе Рейнольдса  $Re = 1000$  течение менее устойчиво, чем при  $Re = 0.1$ . Поэтому получить течение без вихрей, как на рисунке 5.36(a), не удалось: при самых малых числах Гартмана оно неустойчиво, а при увеличении стабилизирующего влияния магнитного поля течение имеет вид как на рисунке 5.40(a).

Таким образом, рассмотрено течение вязкой электропроводящей жидкости в изогнутом канале в горизонтальном магнитном поле. Обнаружено возникновение противотечения в выходной части канала в виде пристенного течения и, при увеличении числа Гартмана, приосевой струи. Изучено возникновения противотечения при разных радиусах изгиба.

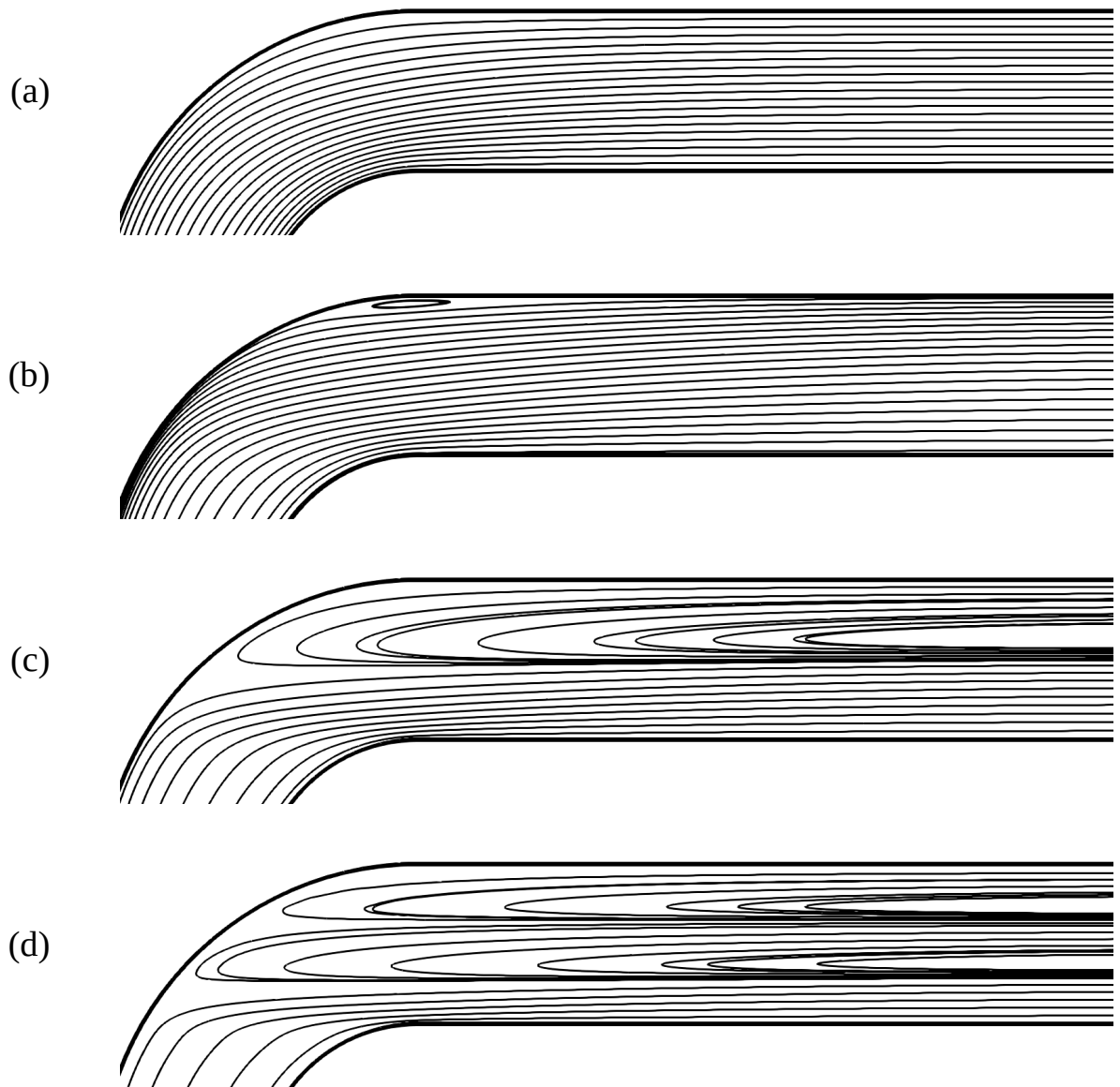


Рис. 5.36 — Линии тока при  $Re = 0.1$ ,  $R = 2$ :  $Ha = 10$ (a),  $Ha = 35$ (b),  $Ha = 100$ (c),  $Ha = 300$ (d)

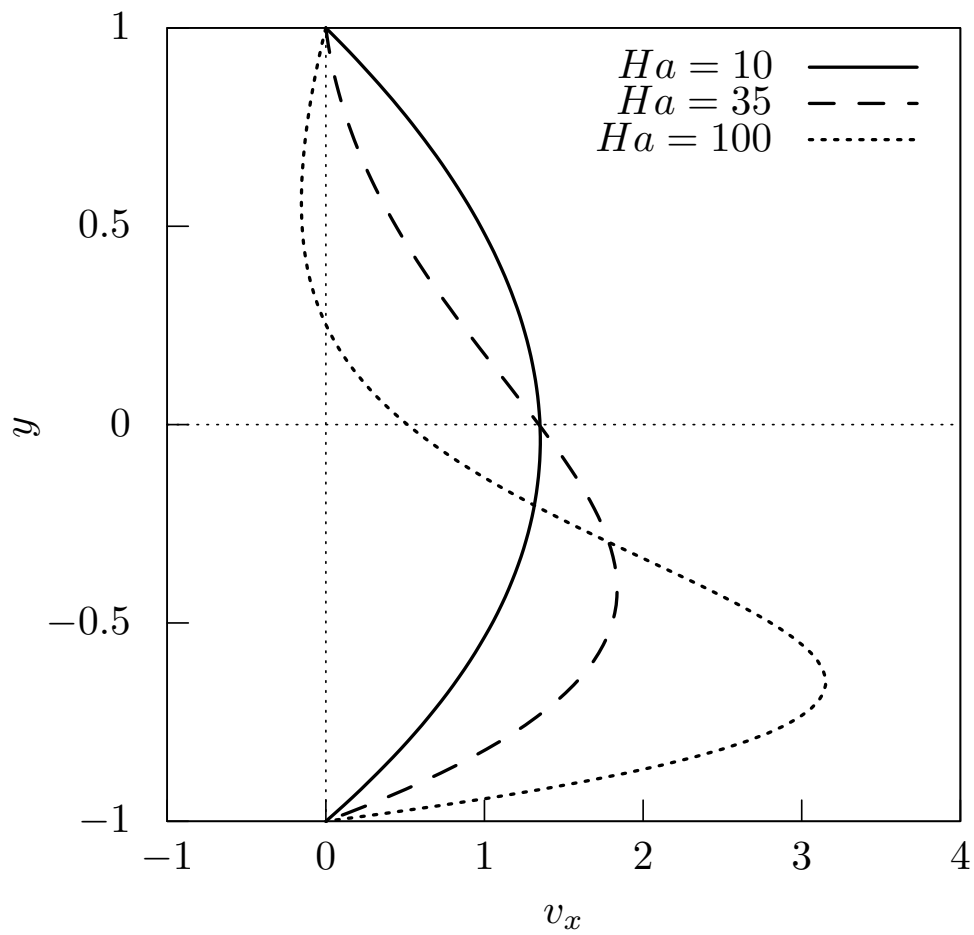


Рис. 5.37 — График скорости  $v_x$  в выходном патрубке при  $R = 2$ ,  $Re = 0.1$ :  $Ha = 10$ ,  $Ha = 35$ ,  $Ha = 100$ .

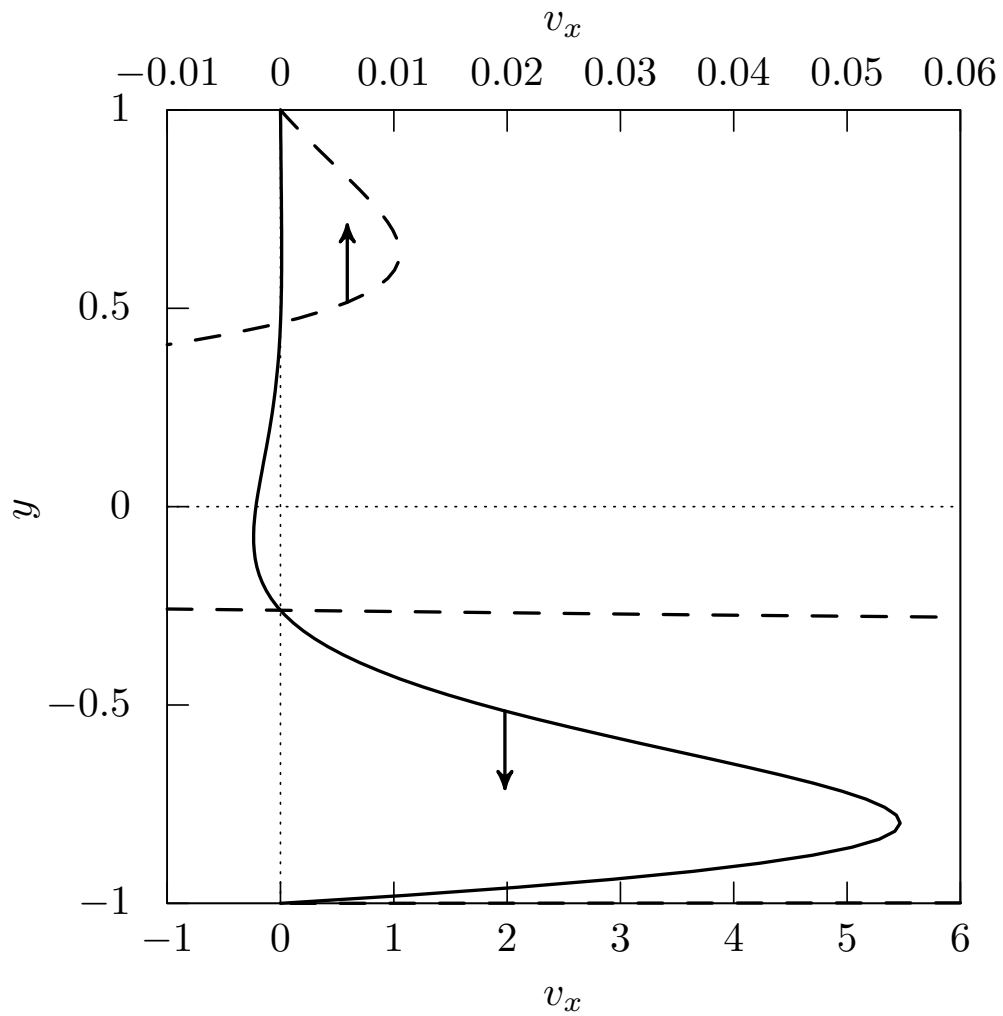


Рис. 5.38 — График скорости  $v_x$  в выходном патрубке при  $R = 2$ ,  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 300$ . Штриховой линией показана скорость в увеличенном масштабе.

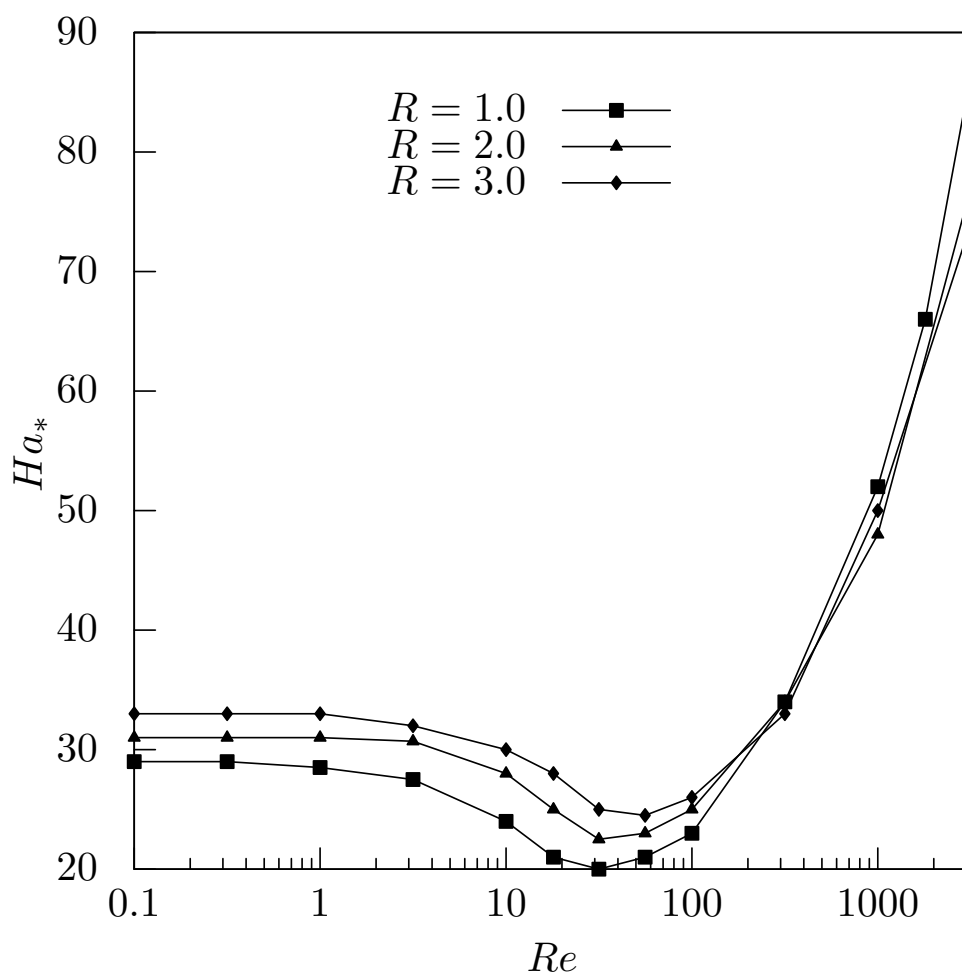


Рис. 5.39 — Диаграммы возникновения противотечения для радиусов закругления  $R = 1, 2, 3$ .

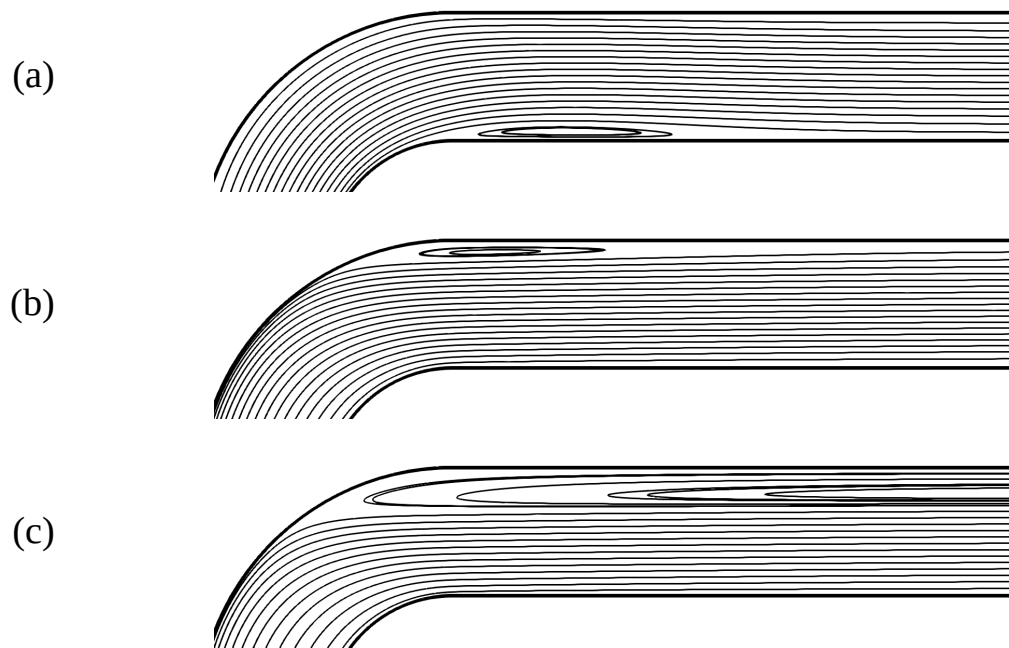


Рис. 5.40 — Линии тока при  $Re = 1000$ ,  $R = 2$ :  $Ha = 10$ (a),  $Ha = 65$ (b),  $Ha = 100$ (c)

## 5.5 Линейная устойчивость течения в изогнутом канале при наличии вертикального магнитного поля

Рассмотрим устойчивость течения в изогнутом канале в случае вертикального магнитного поля. Описанное в разделе 5.3 течение является двумерным. То есть, можно считать, что координата  $z$ , перпендикулярная плоскости  $xy$ , является однородной. Поэтому возмущения можно разделить на двумерные и трехмерные. Многочисленные исследования показали, что неустойчивости связаны с развитием трехмерных мод и поэтому я буду исследовать трехмерные возмущения.

Предположим, что на стенках канала выполняются условия  $v = 0$  и  $\varphi = 0$ , соответствующее идеально-электропроводящим границам. На выходе канала зададим условия  $v = 0$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$  в предположении, что течение Гартмана более устойчиво, чем течение в изогнутой части и неустойчивость будет развиваться во входном патрубке канала. На входе в канал зададим условия  $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ , которые позволяют возмущениям выноситься из канала через входную границу.

На рисунке 5.41 приведены зависимости коэффициента затухания (действительной части собственного значения  $C$ ) от длины волны возмущения в поперечном направлении  $L$  при числе Гартмана  $M = 100$ . Рассмотрены поперечные длины  $L$  от 0.25 до 10 и числа Рейнольдса 50, 100, 150. Обнаружено, что наиболее опасны монотонные возмущения, у которых  $Imag(C) = 0$ . Обнаружено также, что при  $Re \leq 150$  течение устойчиво, а коэффициент  $C$ , определяющий эволюцию возмущения, имеет максимум при  $L = 2.5$ . Слева от максимума кривые  $Real(C)$  резко убывают, справа они убывают медленнее. Физически это можно интерпретировать так, что возмущения с короткой поперечной длиной волны более устойчивы, чем длинноволновые. Критическое число Рейнольдса лежит между 150 и 160, переход при увеличении числа Рейнольдса впервые наступает при  $L \sim 2.5$ . При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса область неустойчивости по  $L$  расширяется.

На рисунке 5.42 показаны линии тока затухающей собственной функции, соответствующей наиболее опасному собственному значению при  $M = 100$ ,  $Re = 50$ ,  $L = 2.5$ . В выходном патрубке в качестве примера визуализирован один из типичных вихрей, которые в этой области имеют малый диаметр и затухают. Во входном патрубке форма возмущений сложнее. Линии тока возмущений



прямолинейные, в одной области скорость возмущения совпадает со скоростью течения, а в другой – противоположна, линии тока разворачиваются в области изгиба канала. Возмущения, близкие к внутренней стенке канала, проникают за область поворота и там переходят в возмущения более мелкого масштаба. На рисунке 5.43 показаны линии тока нарастающей собственной функции при  $M = 100$ ,  $Re = 160$ ,  $L = 2.5$ . В отличие от рисунка 5.42, здесь присутствуют замкнутые линии тока вблизи внутренней стенки в области поворота. На рисунке 5.44 показаны линии тока нарастающей собственной функции при  $M = 100$ ,  $Re = 200$ ,  $L = 2.5$ . При  $Re = 200$  структура неустойчивых собственных функций очень сложна. Наблюдаются вихревые структуры, обозначенные синим и зеленым, оси вращения которых перпендикулярны.

Также была исследована устойчивость течения в канале с диэлектрическими стенками. На рисунках 5.45 и 5.46 показаны зависимости действительной и мнимой частей наиболее опасного собственного значения в зависимости от числа Рейнольдса. Для того, чтобы построить этот график, выбиралось максимальное значение при изменении  $L$ , типичные значения составляли от 2 до 2.5. Обнаружено, что течение устойчиво при  $Re \leq 230$ , при  $Re \approx 180$  монотонно-растущие возмущения становятся более опасны, чем периодические. В качестве примера на рисунке приведены линии тока собственной функции при  $M = 100$ ,  $Re = 230$ . Обнаружены две вихревые структуры, обозначенные на рисунке зеленым и красным, которые взаимно зацепляются через свои внешние области.

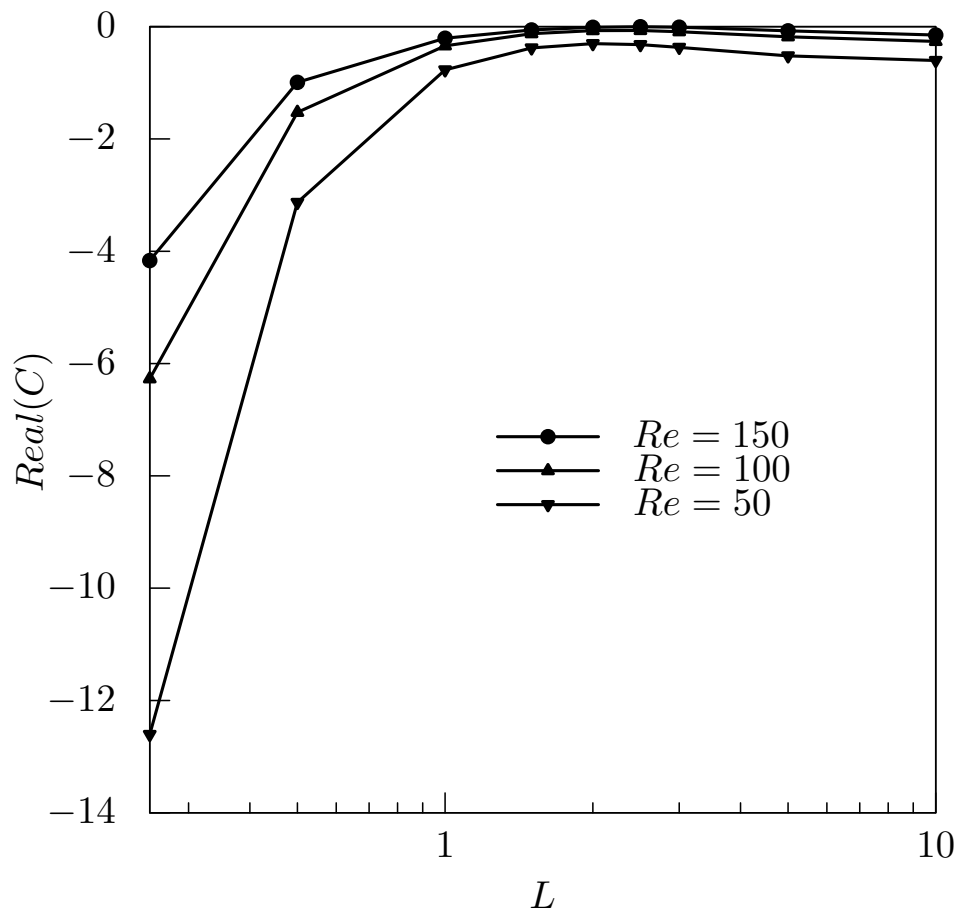


Рис. 5.41 — Графики действительной части собственных значений от  $L$  при  $M = 100$ ,  $Re = 150, 100, 50$ . Хорошо проводящие стенки

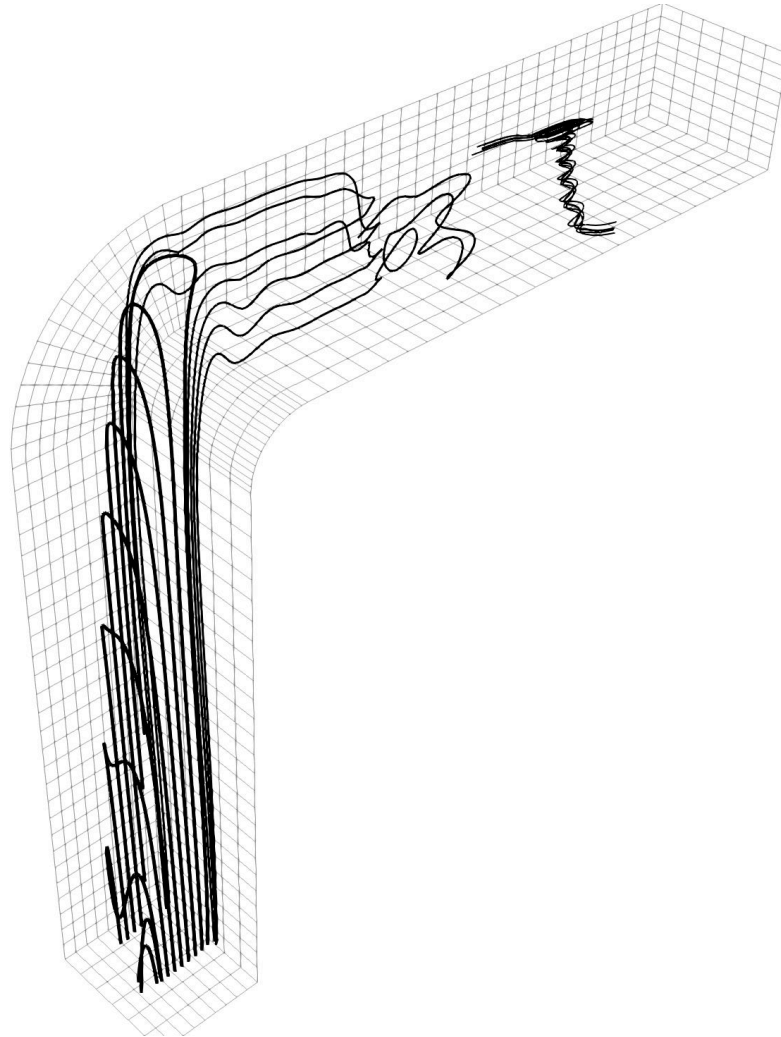


Рис. 5.42 — Линии тока наиболее опасной собственной функции при  $L = 2.5$ ,  $M = 100$ ,  $Re = 50$ . Хорошо проводящие стенки

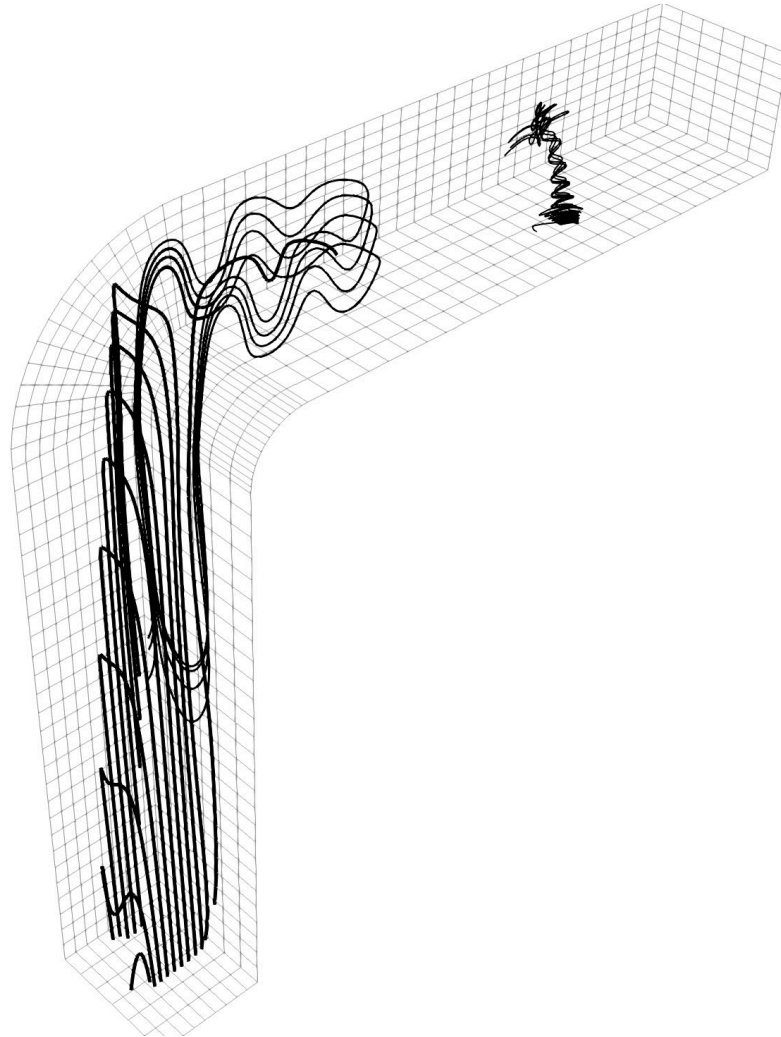


Рис. 5.43 — Линии тока нарастающей собственной функции при  $L = 2.5$ ,  $M = 100$ ,  $Re = 160$ . Хорошо проводящие стенки

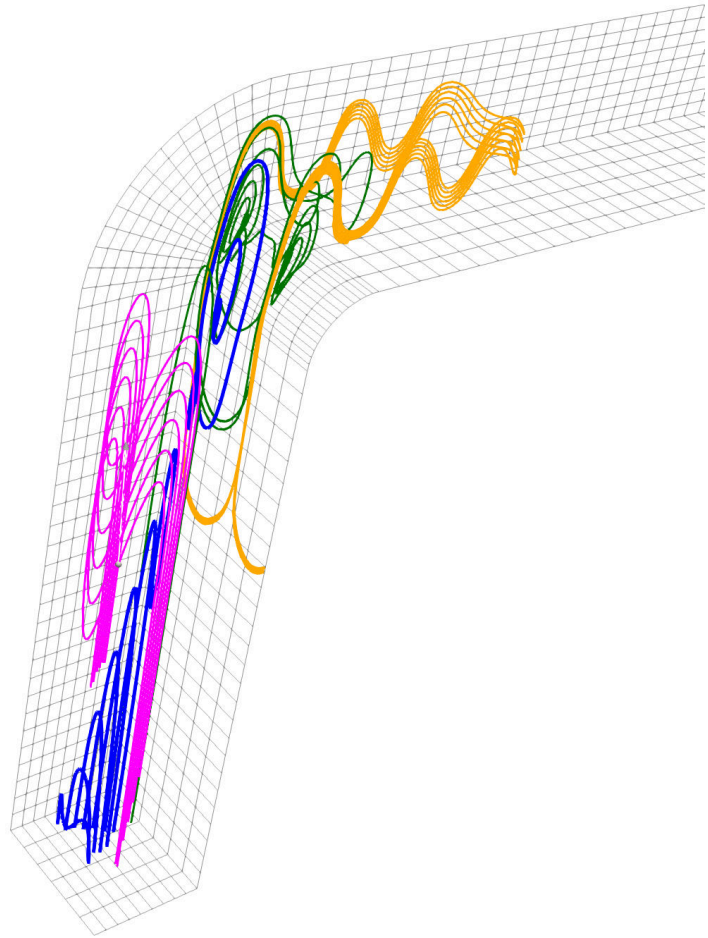


Рис. 5.44 — Вихревые структуры собственных функций, линии тока при  $M = 100$ ,  $Re = 200$ . Хорошо проводящие стенки

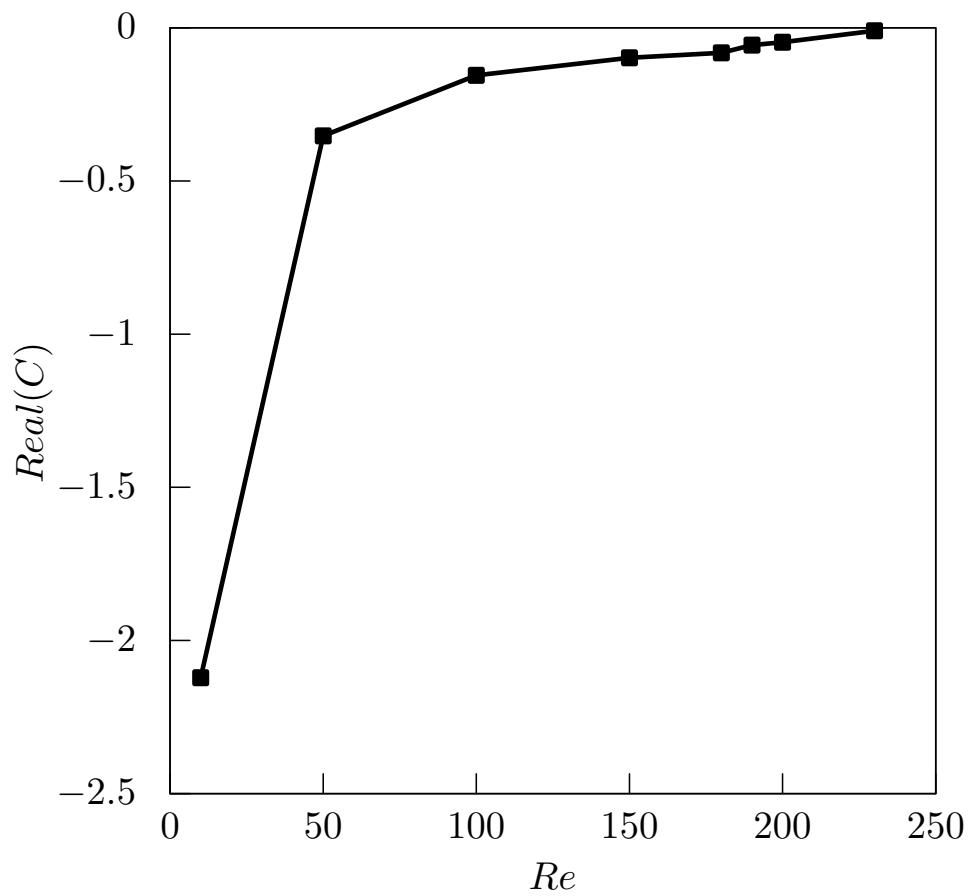


Рис. 5.45 — Графики зависимости действительной части собственных значений от  $Re$  при  $M = 100$ . Диэлектрические стенки

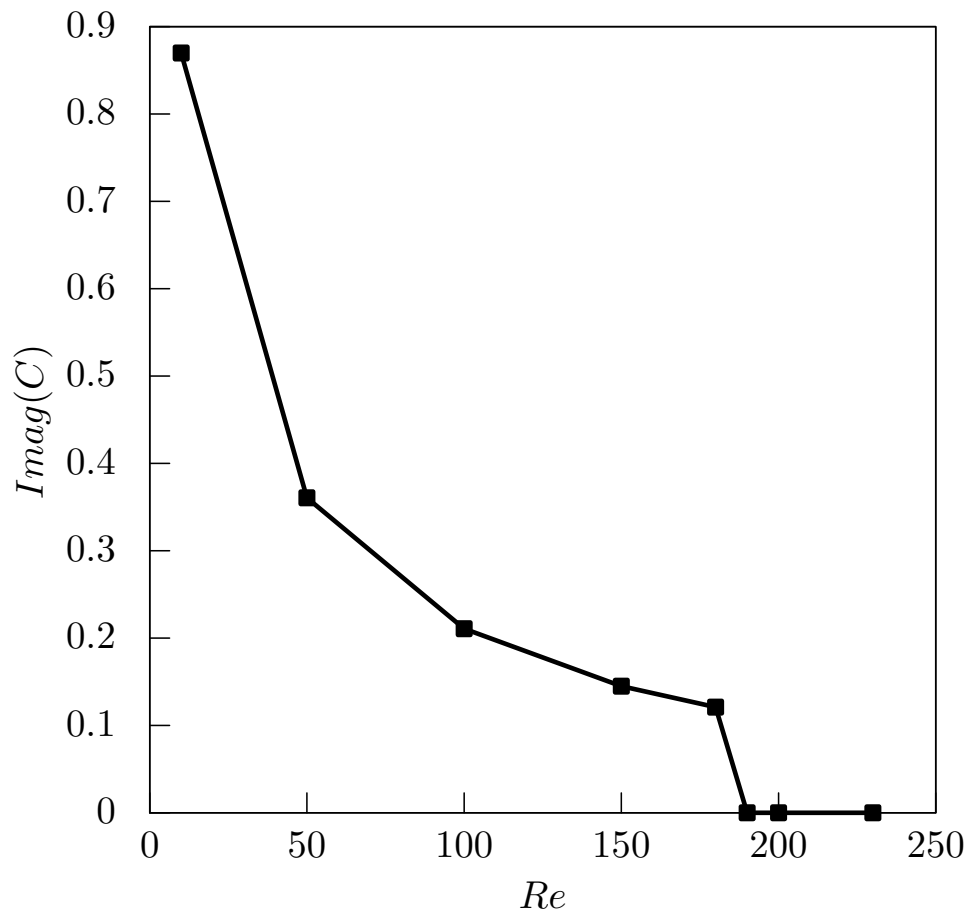


Рис. 5.46 — Графики зависимости мнимой части собственных значений от  $Re$  при  $M = 100$ . Диэлектрические стенки

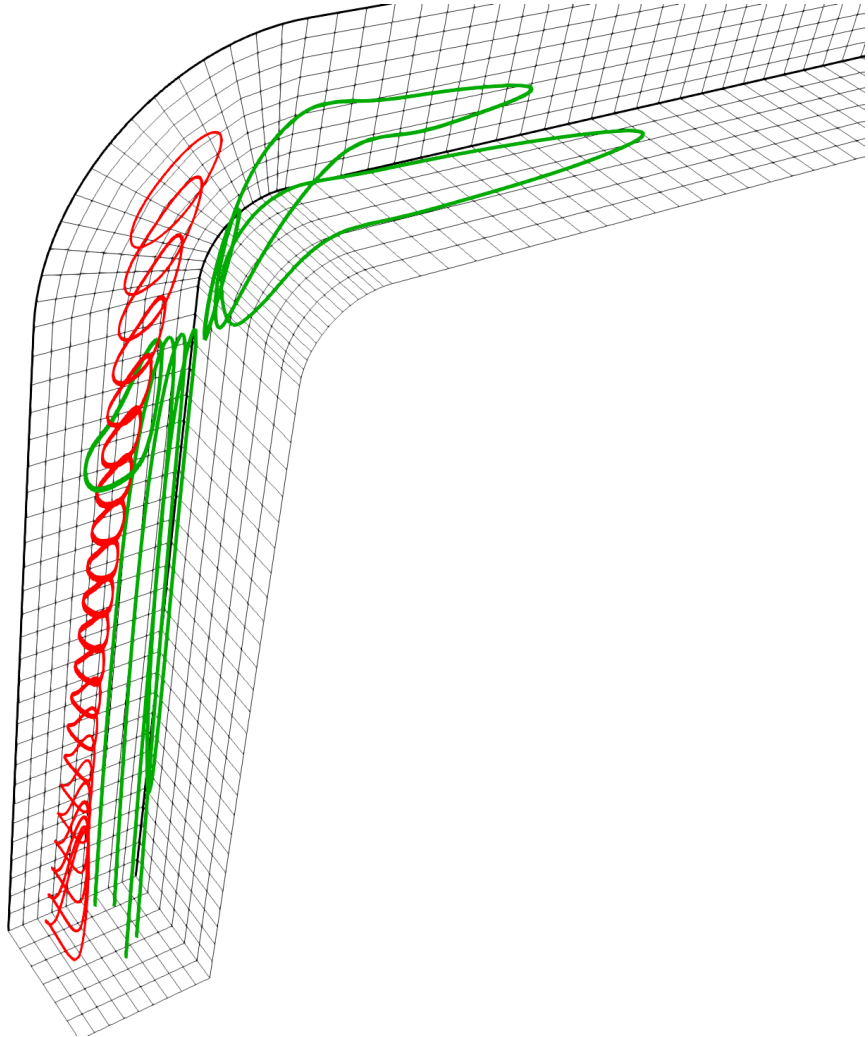


Рис. 5.47 — Вихревые структуры собственных функций, линии тока при  $M = 100$ ,  $Re = 230$ . Диэлектрические стенки



## 5.6 Нелинейная устойчивость течения в изогнутом канале при наличии вертикального магнитного поля

Рассмотрим устойчивость течения в изогнутом канале по отношению к возмущениям конечной амплитуды, предложенным в разделах 4.5, 4.6. Граничные условия взяты аналогично линейной задаче устойчивости, рассмотренной в разделе 5.5. Длина канала по оси  $z$  была принята равной 2.5, число членов разложения Фурье по этой координате было принято равным 20. Задача устойчивости решалась в два этапа. Во время первого этапа я вносил локальное возмущение электрического потенциала на стенках канала по формуле

$$\varphi = \pm A e^{-50.0(y+6.0)^2} e^{-50.0*(z-1.25)^2}, \quad (5.12)$$

где  $A$  – максимальная амплитуда, знак плюс берется для внешней стенки, а минус – для внутренней. Возмущение действует в течении времени  $T$ . С физической точки зрения выражение (5.12) можно интерпретировать как круглый проводник, отделенный от электропроводящей стенки тонким диэлектриком. Можно было бы поместить проводники в диэлектрическую стенку, сформулировав полностью трехмерную задачу, но такой подход за пределами наличных вычислительных возможностей. Изолинии электрического потенциала показаны на рисунке 5.48 при значениях параметров  $M = 100$ ,  $Re = 160$ ,  $A = 1.0$ ,  $T = 5.0$ ,  $t = 5.0$  в сечении, проходящем через центр возмущения. На рисунке 5.49 приведены изоповерхности 0.8 амплитуды скорости и линия тока, проходящая через точку, лежащую вблизи оси возмущения (5.12).

На рисунке 5.50 приведена зависимость энергии возмущения от времени при  $M = 100$ ,  $Re = 160$ ,  $A = 0.01$  для различных значений времени действия возмущения  $T$  от 1 до 25. При включении напряжения в первый момент энергия возмущения резко нарастает, но при дальнейшем действии внесенного напряжения эта скорость нарастания уменьшается. При выключении разности потенциалов, энергия возмущения резко падает. Величина падения зависит от  $T$ . При малых  $T$  падение энергии велико, но уменьшается при увеличении времени действия возмущения и становится совсем малым при  $T = 25$ .

На рисунках 5.51 и 5.52 приведены графики энергии возмущения при  $M = 100$ ,  $T = 5.0$ ,  $Re = 150$  и  $Re = 160$ , соответственно. Значения амплитуды возмущений были приняты  $A = 10^{-4}$ ,  $10^{-2}$ , 1. При  $Re = 150$  возмущения нарастают,

тогда как при  $Re = 160$  они затухают при всех значениях параметра  $A$ . На рисунках 5.53 и 5.54 приведены линии тока вблизи изгиба канала при  $t = 81$ ,  $M = 100$ ,  $Re = 160$ . Типичная форма нарастающего возмущения – пара перпендикулярных вихрей. На рисунке 5.53 линии тока построены вблизи оси вихрей, а на рисунке 5.53 в объеме, что дает представление о их взаимодействии.

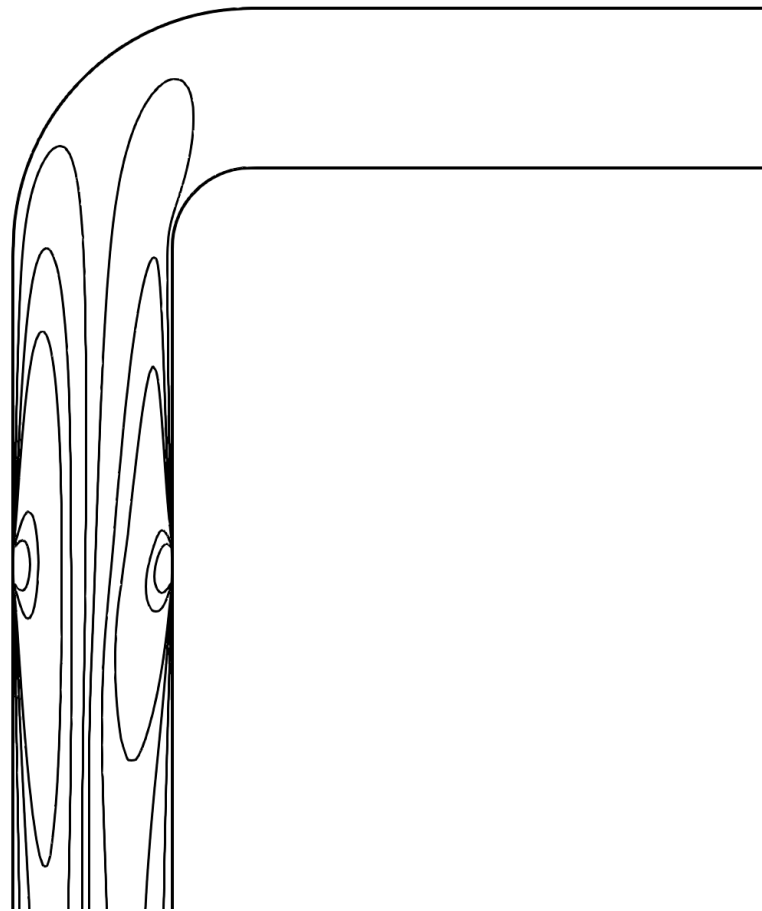


Рис. 5.48 — Изолинии электрического потенциала при  $M = 100$ ,  $Re = 160$ ,  $A = 1$ ,  $T = 5$ ,  $t = 5$

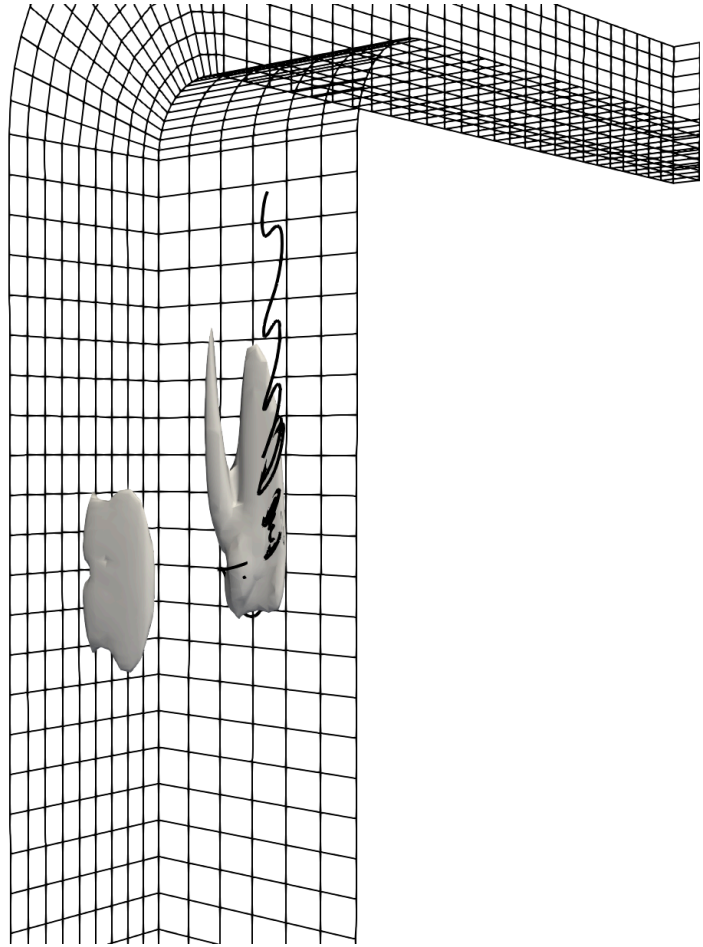


Рис. 5.49 — Изоповерхности амплитуды скорости 0.8 и пример линии тока при  $M = 100$ ,  $Re = 160$ ,  $A = 1$ ,  $T = 5$ ,  $t = 5$

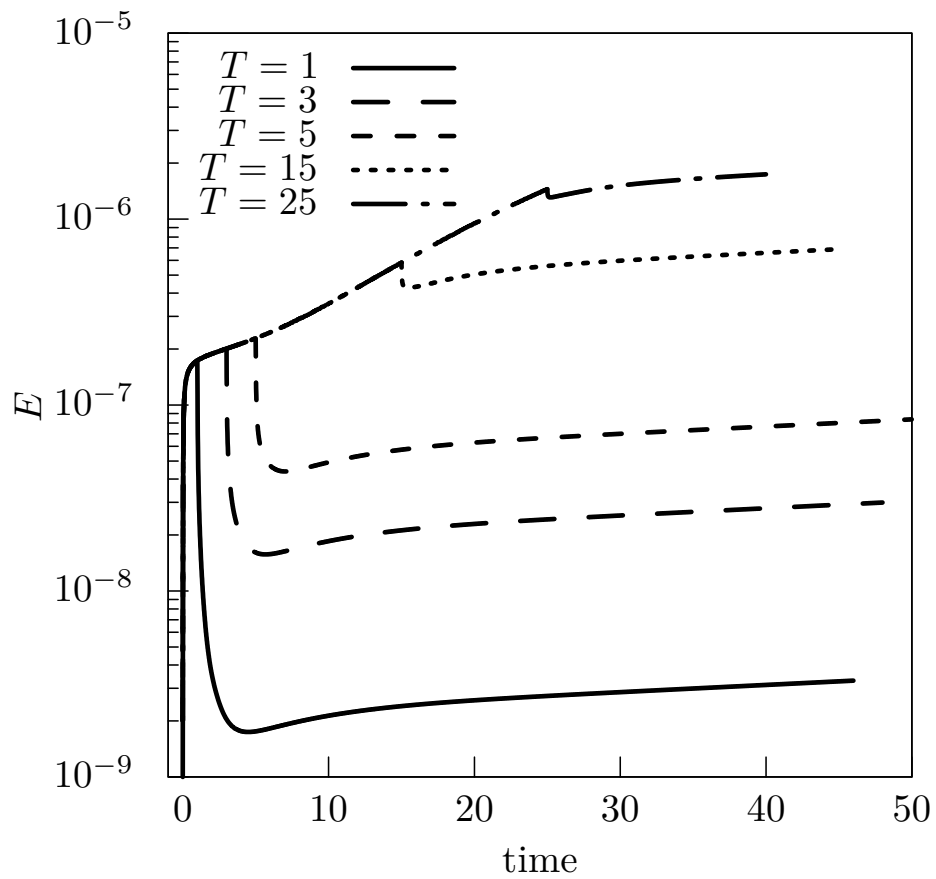


Рис. 5.50 — Зависимости энергии возмущений от времени при  $M = 100$ ,  $Re = 160$ ,  $A = 0.01$ ,  $T = 1, \dots, 25$

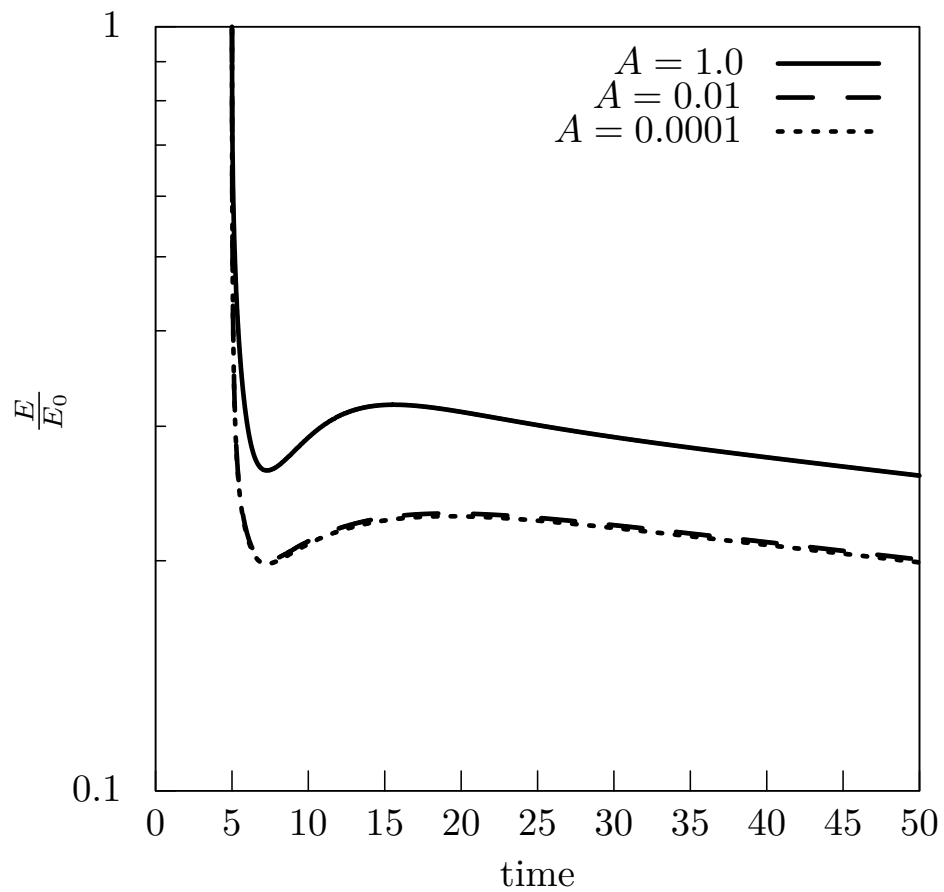


Рис. 5.51 — Зависимости энергии возмущений от времени при  $M = 100$ ,  $T = 5.0$ :  
 $Re = 150$

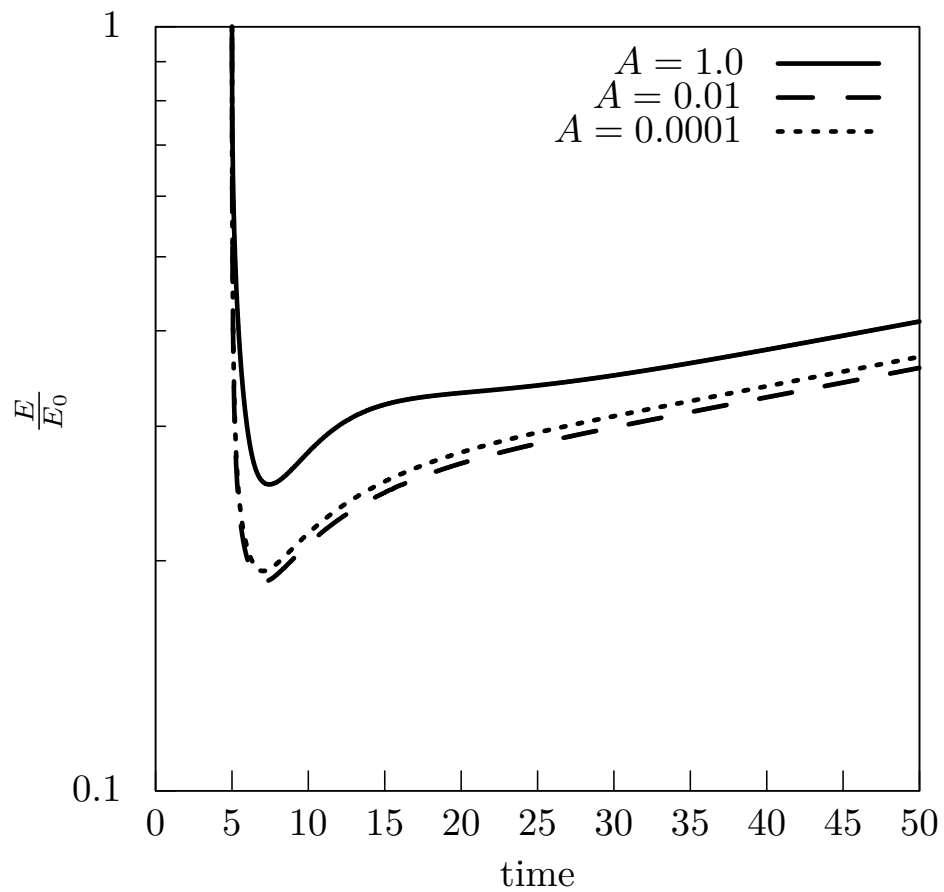


Рис. 5.52 — Зависимости энергии возмущений от времени при  $M = 100$ ,  $T = 5.0$ :  
 $Re = 160$

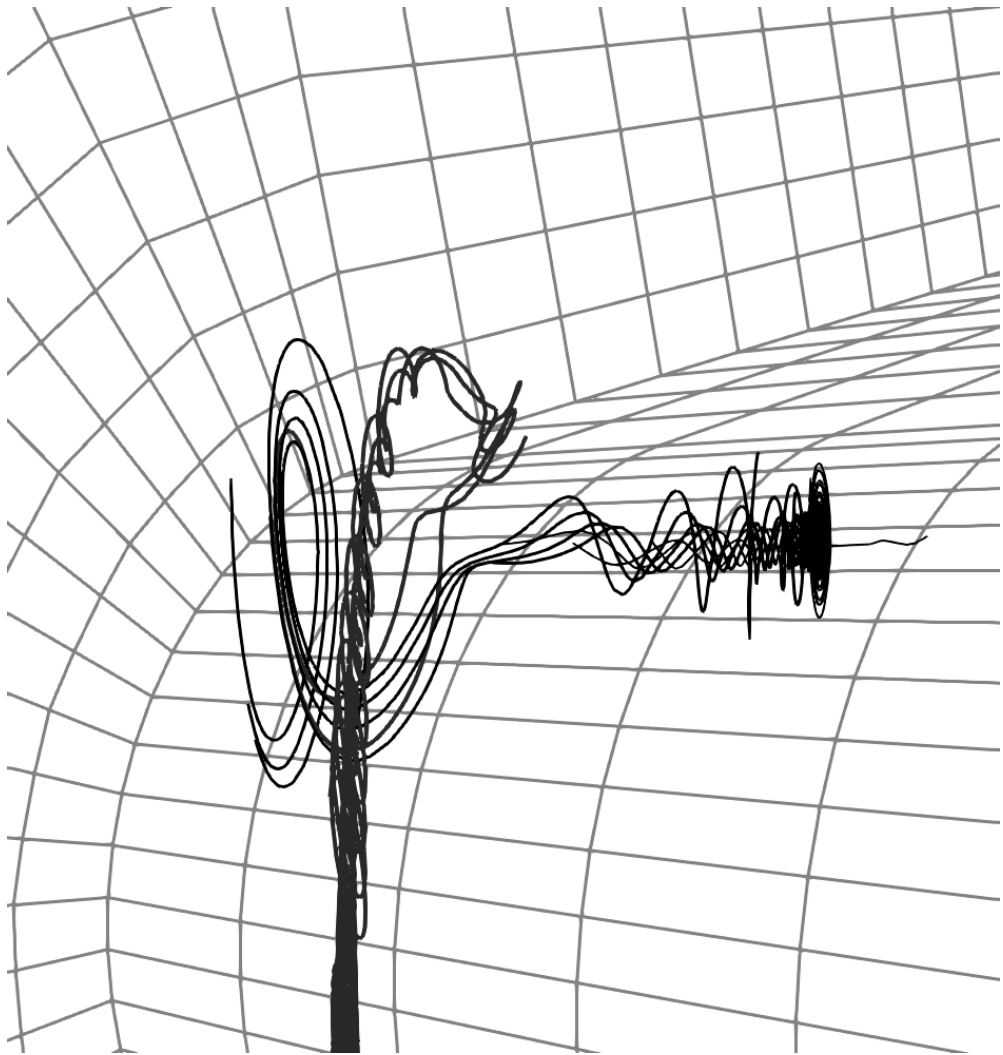


Рис. 5.53 — Пара вихрей при  $t = 81$ ,  $M = 100$ ,  $Re = 160$ : линии тока вблизи осей

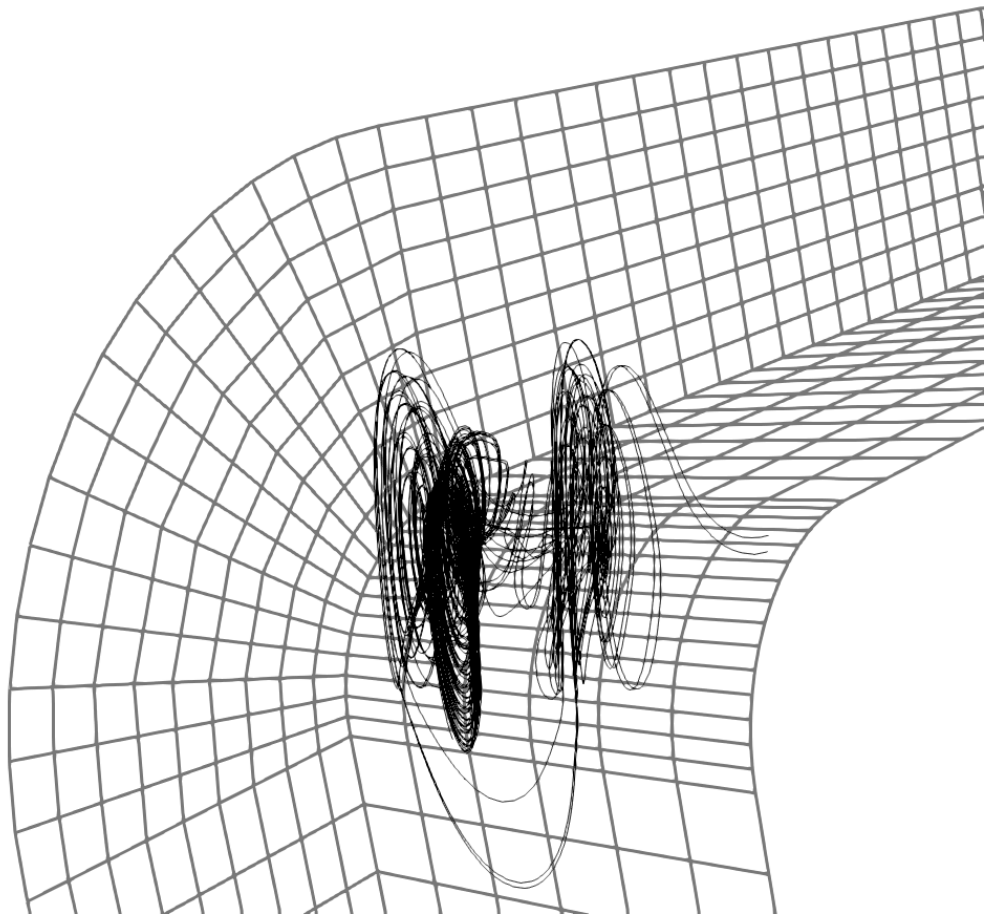


Рис. 5.54 — Пара вихрей при  $t = 81$ ,  $M = 100$ ,  $Re = 160$ : линии тока в объеме



## 5.7 Основные результаты главы 5

1. Изучены режимы стационарного течения в изогнутом канале без магнитного поля. Обнаружено последовательное появление областей рециркуляции при увеличении числа Рейнольдса. В определенном диапазоне чисел Рейнольдса выявлено существование одного из двух режимов: стационарного или квазипериодического. Методом выборочного подавления частот вычислено стационарное течение вплоть до  $Re = 1900$ , намного выше нижней границы появления пульсаций. Сделана оценка критических чисел Рейнольдса для двумерных возмущений. Исследована устойчивость трехмерных возмущений, определены критические числа Рейнольдса в зависимости от радиуса изгиба. Описаны основные типы растущих возмущений.
2. Изучены стационарные течения в изогнутом канале при наличии вертикального и горизонтального магнитного поля. Обнаружено возникновение противотечения за счет взаимодействия жидкости и магнитного поля в изгибе. Исследованы особенности возникновения и развития противотечения в зависимости от величины числа Рейнольдса, чисел Гартмана и Стюарта.
3. Показано, что противотечение является устойчивым. Для этого была изучена устойчивость течения в вертикальном поле по отношению к бесконечно малым возмущениям и возмущениям конечной амплитуды.

## Заключение

В диссертации сформулированы и обоснованы результаты, совокупность которых можно считать научным достижением в области исследования устойчивости магнитогидродинамических течений.

1. Исследована устойчивость плоского течения и течения в канале кольцевого сечения в продольном магнитном поле. Устойчивость этих течений впервые исследована во всем диапазоне магнитных чисел Прандтля. Обнаружена стабилизация течения при  $P_m \sim 0.1, 1$  и сложная структура критических зависимостей, приводящая к скачкам критических чисел Рейнольдса при изменении величин параметров.
2. Найдена новая ветвь неустойчивости течения в продольном магнитном поле. Результат проверен использованием независимых численных методов, независимых компьютерных программ, а также, в более позднее время, независимой группой исследователей.
3. Обнаружено, что внесение азимутального магнитного поля при наличии продольного может дестабилизировать течение в канале кольцевого сечения.
4. На основе метода функций Рвачева был разработан новый метод исследования устойчивости течений в областях сложной геометрии. Изучены возможности и особенности метода функций Рвачева на примере моделирования течений в трубах сложного сечения и устойчивости двумерных течений.
5. На основе спектрально-элементного подхода разработана программа для ЭВМ, которая позволяет моделировать стационарные и нестационарные течения электропроводящей жидкости в магнитном поле, исследовать линейную устойчивость стационарных течений электропроводящей жидкости, изучать эволюцию возмущений конечной амплитуды, внесенных в стационарное течение. Корректность работы численной схемы и программы подтверждена сравнением с аналитическими решениями и данными, приведенными в литературе.

6. На примере течения Гартмана исследована модель нелинейных возмущений специального вида. Устойчивость этого течения исследовалась при числах Гартмана  $M = 6, 20, 50$  и числах Рейнольдса  $Re < 25000$ . Было обнаружено, что верхняя граница устойчивости  $R \approx 300$  (где  $R$  – число Рейнольдса, вычисленное по ширине слоя Гартмана), что соответствует данным, полученным независимо другими способами.
7. Изучена устойчивость течения в изогнутом на 90 градусов канале. Исследованы размеры областей рециркуляции, которые возникают в изгибе канала, в зависимости от числа Рейнольдса. Обнаружено, что течение устойчиво к малым двумерным возмущениям при  $Re < 1900$ , но очень чувствительно к возмущениям конечной амплитуды, вследствие действия которых может возникать двумерное квазипериодическое движение при  $Re > 600-700$ . Было найдено, что в этом случае для вычисления стационарного течения эффективен метод выборочного подавления частот. Изучена структура неустойчивых трехмерных мод и вычислены критические числа Рейнольдса в зависимости от радиуса изгиба канала.
8. Изучены режимы течения в изогнутом на 90 градусов канале в горизонтальном и вертикальном магнитном поле. Обнаружено, что взаимодействие магнитного поля и потока в изгибе может приводить к возникновению противотечений в одном из патрубков изогнутого канала. Показано, что эти противотечения устойчивы к трехмерным линейным и нелинейным возмущениям.

## Список литературы

1. *Проскурин, А. В.* Метод дифференциальной прогонки / А. В. Проскурин. – 2015. – Свид. о рег. Progr. для ЭВМ №2015617814 от 22.07.2015.
2. *Проскурин, А. В.* Модуль графического интерфейса для управления вычислением собственных значений, нейтральных и критических зависимостей / А. В. Проскурин. – 2015. – Свид. о рег. Progr. для ЭВМ № 2015661276 от 22.10.2015.
3. *Проскурин, А. В.* Программа для вычисления матриц метода дифференциальной прогонки / А. В. Проскурин. – 2015. – Свид. о рег. Progr. для ЭВМ № 2015660887 от 12.10.2015.
4. *Проскурин, А. В.* Вычисление собственных значений задачи устойчивости плоского течения Пуазейля вязкой электропроводящей жидкости в продольном магнитном поле / А. В. Проскурин. – 2013. – Свид. о рег. Progr. для ЭВМ № 2011613868.
5. *Проскурин, А. В.* Построение критических зависимостей / А. В. Проскурин. – 2011. – Свид. о рег. Progr. для ЭВМ № 2011613867.
6. *Проскурин, А. В.* Ламинарно-турбулентный переход в МГД-течениях / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2015. – С. 179.
7. *Проскурин, А. В.* Программа сортировки и упорядочения данных / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков. – 2013. – Свид. о рег. Progr. для ЭВМ № 2013619258.
8. *Proskurin, A. V.* Mathematical modelling of unstable bent flow using the selective frequency damping method / A. V. Proskurin // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1809. – IOP Publishing. 2021. – P. 012012.
9. *Proskurin, A. V.* Linear stability of flow in a 90° bend / A. V. Proskurin // Physics of Fluids. – 2022. – Vol. 34, no. 3. – P. 034111.
10. *Проскурин, А. В.* Устойчивость напорного течения между коаксиальными цилиндрами в продольном магнитном поле / А. В. Проскурин // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – Т. 61, № 6. – С. 16-23.

11. *Proskurin, A. A simple scenario of the laminar breakdown in liquid metal flows / A. Proskurin, A. M. Sagalakov // Magnetohydrodynamics. – 2021. – Vol. 57, no. 2. – P. 191-209.*
12. *Proskurin, A. V. Patterns of Magnetohydrodynamic Flow in the Bent Channel / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics&Physics. – 2020. – Vol. 13, no. 6. – P. 1-6.*
13. *Proskurin, A. V. Stability of magnetohydrodynamic flow around a circular cylinder / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Nov. – Vol. 1382. – P. 012033.*
14. *Proskurin, A. V. The evolution of non-linear disturbances in magnetohydrodynamic flows / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – July. – Vol. 1268. – P. 012062.*
15. *Proskurin, A. V. An origin of magnetohydrodynamic reverse flow in 90° bends / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // Physics of Fluids. – 2018. – Vol. 30, no. 8. – P. 081701.*
16. *Proskurin, A. Spectral/hp element MHD solver / A. Proskurin, A. M. Sagalakov // Magnetohydrodynamics. – 2018. – Vol. 54, no. 4. – P. 361-371.*
17. *Proskurin, A. A method for modelling MHD flows in ducts. / A. Proskurin, A. Sagalakov // Magnetohydrodynamics. – 2016. – Vol. 52.*
18. *Проскурин, А. В. Математическое моделирование одного течения в трубе с помощью метода R-функций / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2016. – Т. 19, № 3. – С. 68-74.*
19. *Проскурин, А. Устойчивость течения Пуазейля при наличии продольного магнитного поля / А. Проскурин, А. Сагалаков // Журнал технической физики. – 2012. – Т. 82, № 5. – С. 29-35.*
20. *Проскурин, А. В. Устойчивость течения слабоэлектропроводящей жидкости в трубе кольцевого сечения при наличии спирального магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Теплофизика и аэромеханика. – 2009. – Т. 16, № 3. – С. 419-428.*

21. *Проскурин, А.* Новая ветвь неустойчивости магнитогидродинамического течения Пуазейля в продольном магнитном поле / А. Проскурин, А. Сагалаков // Письма в журнал технической физики. – 2008. – Т. 34, № 5. – С. 40-45.
22. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течения Пуазейля при наличии продольного магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 3. – С. 383-390.
23. *Проскурин, А.* Вторичные режимы магнитогидродинамического течения в изогнутой трубе / А. Проскурин, А. Сагалаков // Известия Алтайского государственного университета. – 2018. – 1 (99).
24. *Проскурин, А. В.* Метод исследования устойчивости течений в трубах / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского государственного университета. – 2016. – 1 (89).
25. *Проскурин, А. В.* Течение вязкой жидкости в деформируемой коаксиальной трубе / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – Т. 2, 1 (85).
26. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течения Озеена возле кругового цилиндра / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского государственного университета. – 2013. – 1-1 (77).
27. *Проскурин, А. В.* Численное моделирование устойчивости локализованных возмущений в течении Пуазейля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 18, № 3.
28. *Проскурин, А. В.* Локальные возмущения в течении Пуазейля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского государственного университета. – 2012. – Т. 2, 1(73). – С. 164-167.
29. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течения в трубе кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского государственного университета. – 2012. – Т. 2, 1(73). – С. 168-172.
30. *Проскурин, А. В.* Устойчивость плоского течения Пуазейля в продольном магнитном поле / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского государственного университета. – 2011. – Т. 2, 1(69). – С. 164-167.

31. *Проскурин, А. В. Устойчивость МГД-течения слабо проводящей жидкости в канале кольцевого сечения при наличии спирального магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Вестник Томского гос. ун-та: бюллетень оперативной научной информации. – 2006. – № 64. – С. 64-68.*
32. *Проскурин, А. В. Устойчивость течения слабоэлектропроводящей жидкости в канале кольцевого сечения при наличии спирального магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Вестник Томского гос. ун-та: бюллетень оперативной научной информации. – 2005. – № 44. – С. 42-46.*
33. *Проскурин, А. В. Устойчивость течения между коаксиальными цилиндрами при наличии продольного магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Вестник Томского гос. ун-та: бюллетень оперативной научной информации. – 2004. – № 24. – С. 94-100.*
34. *Проскурин, А. В. Режимы магнитогидродинамического течения в изогнутом канале / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Сборник тезисов докладов VII Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения". – Красноярск, 2020. – С. 152-155.*
35. *Proskurin, A. V. Non-linear stability of magnetohydrodynamic flows / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // The book of abstract of 8th Symposium on Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics, 16-19 July 2019, Limerick, Ireland. – Limerick, 2019. – P. 262.*
36. *Проскурин, А. В. Устойчивость магнитогидродинамического течения в канале с трехходовым расширением / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 2: Механика жидкости и газа. – Уфа, 2019. – С. 670-671.*
37. *Проскурин, А. В. Устойчивость магнитогидродинамического течения возле круглого цилиндра / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Тезисы докладов всероссийской конференции «XXXV Сибирский теплофизический семинар». 27-29 августа 2019. – Новосибирск, 2019. – С. 46.*

38. *Проскурин, А. В.* Эволюция нелинейных возмущений в магнитогидродинамических течениях / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Тезисы докладов всероссийской конференции и школы для молодых ученых, посвященных 100-летию академика Л.В. Овсянникова, 13 – 17 мая 2019. – Новосибирск, 2019. – С. 169-170.
39. *Proskurin, A. V.* A MHD flow in 90-degree bent channel / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // Book of abstracts of Russian conference on Magnetohydrodynamics. June 18-21, 2018, Perm, Russia. – Perm : ICMM UB RAS, 2018. – P. 107.
40. *Проскурин, А. В.* Нелинейная устойчивость течения Гартмана / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // материалы V Всероссийской конференции с международным участием «Пермские гидродинамические научные чтения», Пермь, 26 – 29 сентября 2018. – Пермь, 2018.
41. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течений в каналах при малых магнитных числах Рейнольдса / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: сборник тезисов 6-й Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых. Барнаул, 7-11 августа 2017. – Барнаул, 2017. – С. 112.
42. *Proskurin, A. V.* A method for modelling MHD flows in pipes / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // Book of abstracts of Russian conference on Magnetohydrodynamics. June 22-25, 2015, Perm, Russia. – Perm : ICMM UB RAS, 2015. – P. 84.
43. *Проскурин, А. В.* Математическое моделирование течений в трубах с помощью метода функций Рвачева / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов (Казань, 20 – 24 августа 2015 г.) – Казань : Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. – С. 3134-3136.
44. *Проскурин, А. В.* Метод функций Рвачева в задачах гидродинамики / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // VIII Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвященная 115-летию академика М.А.Лаврентьева, 7-11 сентября 2015, тезисы докладов. – Новосибирск : ИГиЛ СО РАН, 2015. – С. 54.



45. *Проскурин, А. В.* Вейвлет-аппроксимация в задачах гидродинамической устойчивости / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: Тезисы докладов V Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых. 29 июня-4 июля 2014 года/ Алт. гос. тех. ун-т, БТИ. – Бийск : Изд-во Алт. гос. тех. ун-та, 2014. – С. 85.
46. *Проскурин, А. В.* Метод функций Рвачева в задачах гидродинамической устойчивости / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: Тезисы докладов V Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых. 29 июня-4 июля 2014 года/ Алт. гос. тех. ун-т, БТИ. – Бийск : Изд-во Алт. гос. тех. ун-та, 2014. – С. 84.
47. *Проскурин, А. В.* Устойчивость одного конвективного течения в круглой вращающейся трубе / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: Тезисы докладов V Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых. 29 июня-4 июля 2014 года/ Алт. гос. тех. ун-т, БТИ. – Бийск : Изд-во Алт. гос. тех. ун-та, 2014. – С. 86.
48. *Проскурин, А. В.* О решении линейных задач устойчивости непараллельных течений / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: Тезисы докладов IV Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых. 5-10 июля 2011 года, Бийск. – Бийск : ИГиЛ СО РАН, 2011. – С. 83.
49. *Проскурин, А. В.* Устойчивость плоского течения Пуазейля в продольном магнитном поле / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: Тезисы докладов IV Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых. 5-10 июля 2011 года, Бийск. – Бийск : ИГиЛ СО РАН, 2011. – С. 84.
50. *Проскурин, А. В.* Исследование устойчивости течений в каналах методом коллокаций / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Неравновесные процессы в сплошных средах. Тезисы докладов всероссийской конференции молодых ученых. – Пермь, 2010.

51. *Проскурин, А. В.* Исследование устойчивости течений в каналах методом коллокаций / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Неравновесные процессы в сплошных средах. Материалы всероссийской конференции молодых ученых. – Пермь, 2010.
52. *Проскурин, А. В.* Устойчивость магнитогидродинамического течения Пуазейля в продольном магнитном поле / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Электронный физико-технический журнал. – 2010. – Т. 5. – С. 45-52.
53. *Проскурин, А. В.* О стабилизации течений электропроводящей жидкости продольным магнитным полем / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Электронный физико-технический журнал. – 2009. – Т. 4. – С. 1-11.
54. *Проскурин, А. В.* Об устойчивости течения Пуазейля при наличии продольного магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: Тезисы докладов III международной конференции. 28 июня-3 июля 2008 года, Бийск. – Новосибирск : ИГиЛ СО РАН, 2008. – С. 83.
55. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течения слабоэлектропроводящей жидкости в трубе кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: Тезисы докладов III международной конференции. 28 июня-3 июля 2008 года, Бийск. – Новосибирск : ИГиЛ СО РАН, 2008. – С. 83.
56. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течений электропроводящей вязкой жидкости в продольном магнитном поле / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // 15-я зимняя школа по механике сплошных сред. Т. 3. – Екатеринбург : УрО РАН, 2007. – С. 122-125.
57. *Проскурин, А. В.* Устойчивость течения слабопроводящей жидкости в зазоре кольцевого сечения при наличии спирального магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: тез. докл. международной конференции. – Новосибирск : ИГИЛ СО РАН, 2005. – С. 65-66.

58. *Proskurin, A. V. Stability of plasma flow between coaxial cylinders / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // International conference on Open Magnetic Systems for Plasma Confinement: abstracts. – Novosibirsk : INP SB RAS, 2004. – P. 86.*
59. *Проскурин, А. В. Образование ограниченных областей неустойчивости МГД-течений в каналах / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2004. – № 1. – С. 122-126.*
60. *Проскурин, А. В. Устойчивость течения электропроводящей жидкости в канале кольцевого сечения / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Устойчивость и турбулентность течений гомогенных и гетерогенных жидкостей: тез. докл. международной конференции. – Новосибирск : ИТПМ СО РАН, 2004. – С. 118-119.*
61. *Проскурин, А. В. Устойчивость течения проводящей жидкости в кольцевом зазоре при наличии продольного магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2003. – № 1. – С. 91-94.*
62. *Проскурин, А. В. Устойчивость течения проводящей жидкости в канале кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля / А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков // Вестник алтайского научного центра сибирской академии наук высшей школы. – 2003–2004. – № 6/7. – С. 68-73.*
63. *Гольдштик, М. А. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн. – Новосибирск : Наука, Сибирское отд-ние, 1977.*
64. *Schmid, P. J. Stability and transition in shear flows. Т. 142 / P. J. Schmid, D. S. Henningson. – Springer Science & Business Media, 2012.*
65. *Physics of Transitional Shear Flows: Instability and Laminar–Turbulent Transition in Incompressible Near-Wall Shear Layers. Т. 98 / A. V. Voiko [и др.]. – Springer Science & Business Media, 2011.*
66. *Андреев, В. Устойчивость неизотермических жидкостей: Монография / В. Андреев, В. Бекежанова. – СФУ, 2010. – (Библиотека журнала СФУ / М-во образования и науки Рос. Федерации, Сиб. федер. ун-т. Математика и физика).*
67. *Современные математические модели конвекции / В. Пухначев [и др.]. – ЛитРес, 2022.*

68. *Theofilis, V.* Advances in global linear instability analysis of non-parallel and three-dimensional flows / V. Theofilis // Progress in Aerospace Sciences. – 2003. – Вып. 4, № 39. – С. 249-315.
69. *Theofilis, V.* Global linear instability / V. Theofilis // Annual Review of Fluid Mechanics. – 2011. – Т. 43. – С. 319-352.
70. *Андреев, В. К.* Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) / В. К. Андреев, В. Б. Бекежанова // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т. 54, № 2. – С. 3-20.
71. Modal analysis of fluid flows: An overview / К. Taira [и др.] // Aiaa Journal. – 2017. – Т. 55, № 12. – С. 4013-4041.
72. Modal analysis of fluid flows: Applications and outlook / К. Taira [и др.] // AIAA journal. – 2020. – Т. 58, № 3. – С. 998-1022.
73. *Taira, K.* Modal analysis of fluid flow: introduction to the virtual collection / К. Taira, M. S. Hemati, L. S. Ukeiley. – 2020.
74. *Orr, W. M.* The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. Part II: A viscous liquid / W. M. Orr // Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences. Т. 27. – JSTOR. 1907. – С. 69-138.
75. *Sommerfeld, A.* Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen / A. Sommerfeld // Proc. 4th International Congress of Mathematics. – 1908. – С. 116-24.
76. *Heisenberg, W.* Über stabilität und turbulenz von flüssigkeitsströmen / W. Heisenberg // Original Scientific Papers Wissenschaftliche Originalarbeiten. – Springer, 1985. – С. 31-81.
77. *Heisenberg, W.* On stability and turbulence of fluid flows / W. Heisenberg. – 1951.
78. *Линь, Ц. Ц.* Теория гидродинамической устойчивости / Ц. Ц. Линь. – М. : Изд-во ин. лит-ры, 1958.
79. *Бирих, Р. В.* О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса / Р. В. Бирих, Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий // ПММ. – 1965. – Т. 29, № 1. – С. 88.

80. *Бирих, Р. В.* О спектре малых возмущений плоскопараллельного течения Куэтта / Р. В. Бирих // ПММ. – 1965. – Т. 29, № 4. – С. 54.
81. *Штерн, В. Н.* Устойчивость плоского течения Куэтта / В. Н. Штерн // Прикладная механика и техническая физика. – 1969. – № 1.
82. *Штерн, В. Н.* Спектр малых возмущений плоского течения Куэтта / В. Н. Штерн // Прикладная механика и техническая физика. – 1970. – № 1.
83. *Штерн, В. Н.* Численный анализ устойчивости плоского течения Пуазейля / В. Н. Штерн, В. А. Сапожников // Прикладная механика и техническая физика. – 1969. – № 4.
84. *Гольдштик, М. А.* Локальные свойства задачи гидродинамической устойчивости / М. А. Гольдштик, В. А. Сапожников, В. Н. Штерн // ПМТФ. – 1970. – № 2. – С. 56-61.
85. *Сагалаков, А. М.* Спектр малых возмущений плоского течения Куэтта-Пуазейля / А. М. Сагалаков // ПМТФ. – 1971. – № 2. – С. 63-67.
86. *Сагалаков, А. М.* Спектр малых возмущений плоского течения Куэтта-Пуазейля / А. М. Сагалаков // Доклады Академии наук. – 1971. – № 2. – С. 63.
87. *Сагалаков, А. М.* Энергетический анализ устойчивости плоскопараллельных течений с точкой перегиба профиля скорости / А. М. Сагалаков, В. Н. Штерн // ПМТФ. – 1971. – № 6. – С. 86-93.
88. *Sagalakov, A.* Energy analysis of the stability of plane-parallel flows with an inflection in the velocity profile / A. Sagalakov, V. Shtern // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1971. – Т. 12, № 6. – С. 859-864.
89. *Цвелодуб, О. А.* Устойчивость течения Пуазейля в упругом канале / О. А. Цвелодуб // Прикладная механика и техническая физика. – 1977. – № 5.
90. *Григорьев, Ю. Н.* Энергетическая оценка критических чисел Рейнольдса в сжимаемом течении Куэтта. Влияние объемной вязкости / Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51, № 5. – С. 59-67.

91. Григорьев, Ю. Н. Критические числа Рейнольдса течения Куэтта колебательно-возбужденного двухатомного газа. Энергетический подход / Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов // Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – Т. 53, № 4. – С. 57-73.
92. Григорьев, Ю. Н. Критические числа Рейнольдса в сверхзвуковом течении Куэтта колебательно-возбужденного двухатомного газа / Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов // Вычислительные технологии. – 2014. – Т. 19, № 2. – С. 20-32.
93. Григорьев, Ю. Н. Линейная устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. 2. Вязкая задача / Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов // Прикл. мех. и техн. физика. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 64.
94. Григорьев, Ю. Н. Асимптотическая теория кривой нейтральной устойчивости течения Куэтта колебательно-возбужденного газа / Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов // Прикладная механика и техническая физика. – 2017. – Т. 58, № 1. – С. 3-21.
95. Grigor'ev, Y. N. Linear stability of supersonic Couette flow of a molecular gas under the conditions of viscous stratification and excitation of the vibrational mode / Y. N. Grigor'ev, I. V. Ershov // Fluid Dynamics. – 2017. – Т. 52, № 1. – С. 9-24.
96. Grigor'ev, Y. N. Linear stability of the boundary layer of relaxing gas on a plate / Y. N. Grigor'ev, I. V. Ershov // Fluid Dynamics. – 2019. – Т. 54, № 3. – С. 295-307.
97. Grigoryev, Y. N. Asymptotic Estimate of Stability of a Supersonic Boundary Layer in a Vibrationally Excited Gas on a Plate / Y. N. Grigoryev, I. V. Ershov // Fluid Dynamics. – 2019. – Т. 54, № 8. – С. 1020-1037.
98. Grigoryev, Y. N. Linear stability of a supersonic boundary layer on a plate under conditions of vibrational excitation and of viscous stratification / Y. N. Grigoryev, I. V. Ershov // Journal of Physics: Conference Series. Т. 1268. – IOP Publishing. 2019. – С. 012021.
99. Гапонов, С. А. Устойчивость сверхзвукового пограничного слоя на пористой поверхности / С. А. Гапонов, Б. В. Смородский // Вестник Нижегородского университета им. НИ Лобачевского. – 2011. – № 4-3. – С. 702-704.

100. Гапонов, С. Линейная эволюция и взаимодействие возмущений в пограничных слоях сжимаемого газа на непроницаемых и пористых поверхностях с теплообменом / С. Гапонов, Н. Терехова // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2011. – № 3. – С. 67-81.
101. Гапонов, С. А. Устойчивость возмущений в сверхзвуковом пограничном слое сжимаемого газа с теплообменом на стенке / С. А. Гапонов, Н. М. Терехова // Современная наука: исследования, идеи, результаты, технологии. – 2013. – № 1. – С. 111-116.
102. Гапонов, С. А. Моделирование влияния внешнего градиента давления на устойчивость возмущений в пограничных слоях сжимаемого газа / С. А. Гапонов, Н. М. Терехова // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Физика. – 2013. – Т. 8, № 4. – С. 64-75.
103. Гапонов, С. А. Устойчивость сверхзвукового пограничного слоя на пористой пластине с гибким покрытием / С. А. Гапонов, Н. М. Терехова // Теплофизика и аэромеханика. – 2014. – Т. 21, № 2. – С. 149-162.
104. Устойчивость сверхзвукового пограничного слоя на сублимирующей поверхности / В. И. Лысенко [и др.] // Сибирский физический журнал. – 2020. – Т. 15, № 1. – С. 42-61.
105. Demin, V. A. Mechanical quasi-equilibrium and thermovibrational convective instability in an inclined fluid layer / V. A. Demin, G. Z. Gershuni, I. V. Verkholtantsev // International journal of heat and mass transfer. – 1996. – Т. 39, № 9. – С. 1979-1991.
106. Гершуни, Г. З. Термовибрационная конвективная неустойчивость механического квазиравновесия наклонного слоя жидкости / Г. З. Гершуни, В. А. Дёмин // Изв. РАН, МЖГ. – 1998. – № 1. – С. 8-15.
107. Демин, В. А. Устойчивость вибрационно-конвективных движений в ячейке Хеле-Шоу / В. А. Демин, И. С. Файзрахманова // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. – 2003. – № 1. – С. 108-113.
108. Демин, В. А. Устойчивость конвективных течений в ячейке Хеле-Шоу при воздействии вертикальных вибраций / В. А. Демин, Д. В. Макаров // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. – 2005. – № 1. – С. 101-110.

109. *Kolchanova, E. A.* Interface instability of methane hydrate deposits of variable permeability under permafrost conditions / E. A. Kolchanova, T. P. Lyubimova // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2016. – Т. 98. – С. 329-340.
110. *Попов, Д. М.* Устойчивость плоскопараллельного течения двух смешивающихся жидкостей в поле высокочастотных горизонтальных вибраций / Д. М. Попов, Т. П. Любимова // *Математическое моделирование в естественных науках*. – 2016. – Т. 1. – С. 289-294.
111. *Lyubimova, T.* Vertical vibration effect on stability of conductive state of two-layer system with deformable interface / T. Lyubimova, D. Lyubimov, Y. Parshakova // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2016. – Т. 92. – С. 1158-1165.
112. Instability of plane-parallel flow of incompressible liquid over a saturated porous medium / T. Lyubimova [и др.] // *Physical Review E*. – 2016. – Т. 94, № 1. – С. 013104.
113. *Lyubimova, T.* Stability of a stationary plane-parallel flow of a ternary fluid between two vertical plates maintained at constant different temperatures / T. Lyubimova, N. Lobov, V. Shevtsova // *The European Physical Journal E*. – 2018. – Т. 41, № 2. – С. 1-8.
114. *Lyubimova, T. P.* Stability of stationary plane-parallel flow of binary fluid with the Soret effect in vertical layer with differentially heated boundaries / T. P. Lyubimova, N. I. Lobov // *Microgravity Science and Technology*. – 2019. – Т. 31, № 5. – С. 709-714.
115. *Starchenko, S. V.* Marginal stability of almost adiabatic planetary convection / S. V. Starchenko, M. S. Kotelnikova, I. V. Maslov // *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. – 2006. – Т. 100, № 4/5. – С. 397-427.
116. *Старченко, С.* Критическая устойчивость почти адиабатической конвекции в быстровращающемся и широком сферическом слое / С. Старченко, М. Котельникова // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. – 2013. – Т. 143, № 2. – С. 388-396.
117. *Bekezhanova, V.* On the instability of convective flow in cylinder and possible secondary regimes / V. Bekezhanova, V. Andreev // *Fluid Dynamics Research*. – 2014. – Т. 46, № 4. – С. 041417.



118. *Lock, R. C.* The stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field / R. C. Lock // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. – 1955. – Т. 233, № 1192. – С. 105-125.
119. *Michael, D. H.* Stability of plane parallel flows of electrically conducting fluids / D. H. Michael // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Т. 49. – Cambridge University Press. 1953. – С. 166-168.
120. *Велихов, Е. П.* Устойчивость плоского пуазейлева течения идеально проводящей жидкости в продольном магнитном поле / Е. П. Велихов // ЖЭТФ. – 1959. – Т. 36, № 4. – С. 1192-1202.
121. *Stuart, J. T.* On the stability of viscous flow between parallel planes in the presence of a co-planar magnetic field / J. T. Stuart // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. – 1954. – Т. 221, № 1145. – С. 189-206.
122. *Kakutani, T.* The hydromagnetic stability of the modified plane Couette flow in the presence of a transverse magnetic field / T. Kakutani // Journal of the Physical Society of Japan. – 1964. – Т. 19, № 6. – С. 1041-1057.
123. *Сагалаков, А.* Устойчивость плоскопараллельных магнитогидродинамических течений в поперечном магнитном поле / А. Сагалаков, В. Штерн // ПМТФ. – 1970. – № 3. – С. 127.
124. *Павлов, К. Б.* Об устойчивости плоского течения Куэтта в присутствии магнитного поля / К. Б. Павлов // Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. – 1962.
125. *Сагалаков, А. М.* Устойчивость плоского магнитогидродинамического течения Куэтта с асимметричным профилем скорости / А. М. Сагалаков // ПМТФ. – 1971. – № 3. – С. 12-18.
126. *Сагалаков, А. М.* Устойчивость течения Гартмана / А. М. Сагалаков // Доклады Академии наук. – 1972. – Т. 203, № 4. – С. 772-775.
127. *Сагалаков, А. М.* Устойчивость течения Гартмана / А. М. Сагалаков // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. – 1972. – № 6. – С. 17.

128. Сагалаков, А. Устойчивость течения Пуазейля проводящей жидкости в продольном магнитном поле / А. Сагалаков, Г. Сидоров, Е. Тюлюпин // Магнитная гидродинамика. – 1984. – № 4. – С. 75-80.
129. Сагалаков, А. Устойчивость магнитогидродинамического течения Пуазейля в плоском канале с непроводящими стенками / А. Сагалаков, Г. Сидоров, Е. Тюлюпин // Магнитная гидродинамика. – 1989. – № 2. – С. 128-130.
130. Сагалаков, А. Автоколебания магнитогидродинамических течений в трубе кольцевого сечения в продольном магнитном поле / А. Сагалаков, А. Юдинцев // Магнитная гидродинамика. – 1992. – № 1. – С. 7-12.
131. Автоколебания в МГД-течениях / В. М. Патудин [и др.]. – Новосибирск : Редакционно-издательский центр НГУ, 2007.
132. Yudintsev, A. Mechanism of Spontaneous Symmetry Breaking in MHD Flows / A. Yudintsev, A. Sagalakov, N. Yavorsky // RUSSIAN JOURNAL OF ENGINEERING THERMOPHYSICS. – 1995. – Т. 5. – С. 409-424.
133. Takashima, M. The stability of the modified plane Poiseuille flow in the presence of a transverse magnetic field / M. Takashima // Fluid dynamics research. – 1996. – Т. 17, № 6. – С. 293-310.
134. Takashima, M. The stability of the modified plane Couette flow in the presence of a transverse magnetic field / M. Takashima // Fluid dynamics research. – 1998. – Т. 22, № 2. – С. 105-121.
135. Lingwood, R. On the stability of the Hartmann layer / R. Lingwood, T. Alboussiere // Physics of Fluids. – 1999. – Т. 11, № 8. – С. 2058-2068.
136. Gerard-Varet, D. Amplification of small perturbations in a Hartmann layer / D. Gerard-Varet // Physics of Fluids. – 2002. – Т. 14, № 4. – С. 1458-1467.
137. Vetcha, N. Linear stability analysis for the Hartmann flow with interfacial slip / N. Vetcha, S. Smolentsev, M. Abdou // Magnatohydrodynamics. – 2012. – Т. 48, № 1. – С. 147-155.
138. Kalashnikov, I. Y. Stability of Hartmann flow with the convective approximation / I. Y. Kalashnikov // Magnetohydrodynamics. – 2014. – Т. 50, № 4. – С. 353-359.
139. Instability of magnetohydrodynamic flow of Hartmann layers between parallel plates / Z. Yang [и др.] // AIP Advances. – 2019. – Т. 9, № 5. – С. 055003.

140. MHD instability of the pressure-driven plane laminar flow in the presence of the uniform coplanar magnetic field: Linear stability analysis / M. S. Basavaraj [и др.] // Heat Transfer. – 2021. – Т. 50, № 6. – С. 5779-5792.
141. Unstable spectra of plane Poiseuille flow with a uniform magnetic field / L. Wei [и др.] // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2022. – Т. 64, № 4. – С. 045022.
142. Юдович, В. И. О возникновении автоколебаний в жидкости / В. И. Юдович // Прикладная математика и механика. – 1971. – Т. 35, № 4. – С. 638-655.
143. Юдович, В. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений / В. Юдович // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1973. – № 1. – С. 32-35.
144. Патудин, В. М. Возникновение трехмерных автоколебаний в магнитогидродинамических течениях / В. М. Патудин, А. М. Сагалаков, А. Ю. Юдинцев // Магнитная гидродинамика. – 1989. – Т. 25, № 3. – С. 3-9.
145. Патудин, В. М. Трехмерные автоколебания плоскопараллельных магнитогидродинамических течений / В. М. Патудин, А. М. Сагалаков, А. Ю. Юдинцев // Магнитная гидродинамика. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 3-10.
146. Патудин, В. М. Трехмерные вторичные режимы плоскопараллельных магнитогидродинамических течений в продольном магнитном поле / В. М. Патудин, А. М. Сагалаков, А. Ю. Юдинцев // Магнитная гидродинамика. – 1990. – Т. 26, № 4. – С. 10-16.
147. Сагалаков, А. Устойчивость трехмерных автоколебаний плоскопараллельных потоков электропроводящей жидкости в продольном магнитном поле / А. Сагалаков, А. Юдинцев // Магнитная гидродинамика. – 1991. – Т. 27, № 4. – С. 15-20.
148. Сагалаков, А. Трехмерные возмущения магнитогидродинамических течений в кольцевом канале / А. Сагалаков, А. Юдинцев // Магнитная гидродинамика. – 1991. – Т. 27, № 4. – С. 21-24.
149. Сагалаков, А. Трехмерные автоколебательные магнитогидродинамические течения жидкости конечной проводимости в канале кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля / А. Сагалаков, А. Юдинцев // Магнитная гидродинамика. – 1993. – Т. 29, № 1. – С. 41-48.

150. Сагалаков, А. М. Генерация магнитного поля при потере устойчивости магнитогидродинамического течения в кольцевой трубе / А. М. Сагалаков, А. Ю. Юдинцев // Известия Алтайского государственного университета. – 1996. – 1 (1).
151. Сагалаков, А. М. Общие свойства вторичных несимметричных режимов в параллельных МГД-течениях / А. М. Сагалаков, А. Ю. Юдинцев // Известия Алтайского государственного университета. – 1997. – № 1.
152. Гапонов, С. А. Автоколебания, ответвляющиеся от нейтральной кривой в сверхзвуковом пограничном слое при  $M=2$  / С. А. Гапонов, Н. М. Терехова // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Физика. – 2016. – Т. 11, № 3. – С. 5-15.
153. Гапонов, С. А. Автоколебания, ответвляющиеся от нейтральной кривой в сверхзвуковом пограничном слое / С. А. Гапонов, Н. М. Терехова // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2020. – № 3. – С. 36-44.
154. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1962.
155. Рвачев, В. Л. Геометрические приложения алгебры логики / В. Л. Рвачев. – Техника, 1967.
156. Рвачев, В. Л. Методы алгебры логики в математической физике / В. Л. Рвачев. – Наук. Думка, 1974.
157. Рвачев, В. Л. Теория R-функций и некоторые приложения / В. Л. Рвачев. – Киев : Наукова думка, 1982. – С. 552.
158. Кравченко, В. Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям / В. Ф. Кравченко. – Радиотехника М, 2003.
159. Кравченко, В. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях / В. Кравченко, В. Рвачев. – Москва : Физматлит, 2006.
160. Rvachev, V. L. R-functions in boundary value problems in mechanics / V. L. Rvachev, T. I. Sheiko // Applied Mechanics Reviews. – 1995. – Т. 48, № 4. – С. 151-188.
161. Shapiro, V. Semi-analytic geometry with R-functions / V. Shapiro // Acta Numerica. – 2007. – Т. 16. – С. 239-303.

162. *Tsukanov, I.* A meshfree method for incompressible fluid dynamics problems / I. Tsukanov, V. Shapiro, S. Zhang // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2003. – Т. 58, № 1. – С. 127-158.
163. *Ламтюгова, С.* Применение метода R-функций к численному анализу задач обтекания в цилиндрической системе координат / С. Ламтюгова, М. Сидоров. – 2014.
164. *Pierrehumbert, R. T.* The two-and three-dimensional instabilities of a spatially periodic shear layer / R. T. Pierrehumbert, S. E. Widnall // Journal of Fluid Mechanics. – 1982. – Т. 114. – С. 59-82.
165. *Jackson, C. P.* A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies / C. P. Jackson // Journal of fluid Mechanics. – 1987. – Т. 182. – С. 23-45.
166. *Zebib, A.* Stability of viscous flow past a circular cylinder / A. Zebib // Journal of Engineering Mathematics. – 1987. – Т. 21, № 2. – С. 155-165.
167. *Lee, N. Y.* Stability of fluid in a rectangular enclosure by spectral method / N. Y. Lee, W. W. Schultz, J. P. Boyd // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1989. – Т. 32, № 3. – С. 513-520.
168. *Tatsumi, T.* Stability of the laminar flow in a rectangular duct / T. Tatsumi, T. Yoshimura // Journal of Fluid Mechanics. – 1990. – Т. 212. – С. 437-449.
169. *Rodríguez, D.* Massively parallel solution of the biglobal eigenvalue problem using dense linear algebra / D. Rodríguez, V. Theofilis // AIAA Journal. – 2009. – Т. 47, № 10. – С. 2449-2459.
170. *Gonzalez, L.* High-order methods for the numerical solution of the BiGlobal linear stability eigenvalue problem in complex geometries / L. Gonzalez, V. Theofilis, S. J. Sherwin // International journal for numerical methods in fluids. – 2011. – Т. 65, № 8. – С. 923-952.
171. *Karniadakis, G.* Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics: Second Edition / G. Karniadakis, S. Sherwin. – OUP Oxford, 2005. – (Numerical Mathematics and Scientific Computation).
172. *Patera, A. T.* A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion / A. T. Patera // Journal of computational Physics. – 1984. – Т. 54, № 3. – С. 468-488.

173. *Lin, R.-S.* On the stability of attachment-line boundary layers. Part 1. The incompressible swept Hiemenz flow / R.-S. Lin, M. R. Malik // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1996. – Т. 311. – С. 239-255.
174. *Theofilis, V.* On the verification and extension of the Görtler-Hämmerlin assumption in three-dimensional incompressible swept attachment-line boundary layer flow / V. Theofilis // *DLR IB*. – 1997. – С. 223-97.
175. *Heeg, R. S.* Spatial instabilities of the incompressible attachment-line flow using sparse matrix Jacobi–Davidson techniques / R. S. Heeg, B. J. Geurts // *Applied scientific research*. – 1997. – Т. 59, № 4. – С. 315-329.
176. *Theofilis, V.* On linear and nonlinear instability of the incompressible swept attachment-line boundary layer / V. Theofilis // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1998. – Т. 355. – С. 193-227.
177. *Гапонов, С. А.* Линейная устойчивость трехмерных пограничных слоев / С. А. Гапонов, Б. В. Смородский // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2008. – Т. 49, № 2. – С. 157-166.
178. Secondary instability of crossflow vortices and swept-wing boundary-layer transition / M. R. Malik [и др.] // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1999. – Т. 399. – С. 85-115.
179. *Högberg, M.* Secondary instability of cross-flow vortices in Falkner–Skan–Cooke boundary layers / M. Högberg, D. Henningson // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1998. – Т. 368. – С. 339-357.
180. *Wintergerste, T.* Secondary stability analysis of nonlinear crossflow vortices / T. Wintergerste, L. Kleiser // *Laminar-Turbulent Transition*. – Springer, 2000. – С. 583-586.
181. *Karniadakis, G. E.* Three-dimensional dynamics and transition to turbulence in the wake of bluff objects / G. E. Karniadakis, G. S. Triantafyllou // *Journal of fluid mechanics*. – 1992. – Т. 238. – С. 1-30.
182. *Henderson, R. D.* Secondary instability in the wake of a circular cylinder / R. D. Henderson, D. Barkley // *Physics of Fluids*. – 1996. – Т. 8, № 6. – С. 1683-1685.
183. *Barkley, D.* Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder / D. Barkley, R. D. Henderson // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1996. – Т. 322. – С. 215-241.

184. *Barkley, D.* Bifurcation theory for three-dimensional flow in the wake of a circular cylinder / D. Barkley, L. S. Tuckerman, M. Golubitsky // *Physical Review E*. – 2000. – Т. 61, № 5. – С. 5247.
185. *Barkley, D.* Confined three-dimensional stability analysis of the cylinder wake / D. Barkley // *Physical Review E*. – 2005. – Т. 71, № 1. – С. 017301.
186. *Barkley, D.* Linear analysis of the cylinder wake mean flow / D. Barkley // *Europhysics Letters*. – 2006. – Т. 75, № 5. – С. 750-756.
187. Transient growth analysis of the flow past a circular cylinder / N. Abdessemed [и др.] // *Physics of Fluids*. – 2009. – Т. 21, № 4.
188. Two-and three-dimensional instabilities of the cylinder wake in an aligned magnetic field / G. Mutschke [и др.] // *Physics of Fluids*. – 1997. – Т. 9, № 11. – С. 3114-3116.
189. The scenario of three-dimensional instabilities of the cylinder wake in an external magnetic field: A linear stability analysis / G. Mutschke [и др.] // *Physics of Fluids*. – 2001. – Т. 13, № 3. – С. 723-734.
190. *Barkley, D.* Three-dimensional instability in flow over a backward-facing step / D. Barkley, M. G. M. Gomes, R. D. Henderson // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2002. – Т. 473. – С. 167-190.
191. *Blackburn, H. M.* Convective instability and transient growth in flow over a backward-facing step / H. M. Blackburn, D. Barkley, S. J. Sherwin // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2008. – Т. 603. – С. 271-304.
192. *Kaiktsis, L.* Unsteadiness and convective instabilities in two-dimensional flow over a backward-facing step / L. Kaiktsis, G. E. Karniadakis, S. A. Orszag // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1996. – Т. 321. – С. 157-187.
193. *Lanzerstorfer, D.* Global stability of the two-dimensional flow over a backward-facing step / D. Lanzerstorfer, H. C. Kuhlmann // *Journal of fluid mechanics*. – 2012. – Т. 693. – С. 1.
194. *Boiko, A. V.* Instability of a backward-facing step flow modified by stationary streaky structures / A. V. Boiko, A. V. Dovgal, A. M. Sorokin // *Physics of Fluids*. – 2012. – Т. 24, № 10. – С. 104104.

195. Wake behaviour and instability of flow through a partially blocked channel / M. D. Griffith [и др.] // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2007. – Т. 582. – С. 319-340.
196. *Theofilis, V.* Globally unstable basic flows in open cavities / V. Theofilis // 6th Aeroacoustics Conference and Exhibit. – С. 1965.
197. *Theofilis, V.* Viscous linear stability analysis of rectangular duct and cavity flows / V. Theofilis, P. W. Duck, J. Owen // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2004. – Т. 505. – С. 249-286.
198. *Colonus, T.* An overview of simulation, modeling, and active control of flow/acoustic resonance in open cavities / T. Colonius // 39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. – 2001. – С. 76.
199. *Colonus, T.* Numerical investigation of the flow past a cavity / T. Colonius, A. Basu, C. Rowley // 5th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit. – 1999. – С. 1912.
200. *Jackson, A. P.* Experimental and computational study of laminar cavity flows at hypersonic speeds / A. P. Jackson, R. Hillier, S. Soltani // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2001. – Т. 427. – С. 329-358.
201. *Ding, Y.* Linear stability of incompressible fluid flow in a cavity using finite element method / Y. Ding, M. Kawahara // *International journal for numerical methods in fluids*. – 1998. – Т. 27, № 1-4. – С. 139-157.
202. *Zhang, L.* Influence of the geometry on the two-and three-dimensional dynamics of the flow in a 180 sharp bend / L. Zhang, A. Pothérat // *Physics of Fluids*. – 2013. – Т. 25, № 5. – С. 053605.
203. Linear stability of confined flow around a 180-degree sharp bend / A. M. Sapardi [и др.] // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2017. – Т. 822. – С. 813-847.
204. *Heskestad, G.* Two-dimensional miter-bend flow / G. Heskestad // *Journal of basic engineering*. – 1971. – С. 433-443.
205. Fluid flow and heat transfer in a two-dimensional miter-bend: 1st report, experiments and analyses / H. YAMASHITA [и др.] // *Bulletin of JSME*. – 1986. – Т. 29, № 258. – С. 4164-4169.



206. *Matsumoto, D.* Two-dimensional fluid dynamics in a sharply bent channel: Laminar flow, separation bubble, and vortex dynamics / D. Matsumoto, K. Fukudome, H. Wada // *Physics of Fluids*. – 2016. – Т. 28, № 10. – С. 103602.
207. *Hurd, A. C.* Analysis of flow separation in a confined two-dimensional channel / A. C. Hurd, A. R. Peters // *Journal of basic engineering*. – 1970. – С. 908-914.
208. *Orlandi, P.* Two-dimensional laminar flow in elbows / P. Orlandi, D. Cunsolo // *Journal of Fluids Engineering*. – 1979. – С. 276-283.
209. *Kotb, N.* A numerical study of laminar and turbulent flows in a two-dimensional bend with or without a guide vane / N. Kotb, M. R. Mokhtarzadeh-Dehghan, A. J. Ward-Smith // *International journal for numerical methods in engineering*. – 1988. – Т. 26, № 1. – С. 245-262.
210. *Park, D.* Streamwise streaks and secondary instability in a two-dimensional bent channel / D. Park, S. O. Park // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. – 2014. – Т. 28, № 3. – С. 267-293.
211. *Мулляджанов, Р. И.* Линейная гидродинамическая устойчивость дальнего поля затопленной ламинарной струи / Р. И. Мулляджанов, Н. И. Яворский // *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки*. – 2018. – Т. 11, № 3. – С. 108-121.
212. *Mullyadzhanov, R.* Linear stability of Landau jet: non-parallel effects / R. Mullyadzhanov, N. Yavorsky, K. Oberleithner // *Journal of Physics: Conference Series*. Т. 1268. – IOP Publishing. 2019. – С. 012050.
213. *Ryzhenkov, V.* Effect of Geometry on Direct and Adjoint Linear Global Modes of Low Reynolds Number Laminar Flow over Body / V. Ryzhenkov, D. Sozinov, R. Mullyadzhanov // *Journal of Engineering Thermophysics*. – 2020. – Т. 29, № 4. – С. 576-581.
214. *Lupi, V.* Global stability analysis of a 90-degree bend pipe flow / V. Lupi, J. Canton, P. Schlatter // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. – 2020. – Т. 86. – С. 108742.
215. *Orszag, S. A.* Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow / S. A. Orszag, L. C. Kells // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1980. – Т. 96, № 1. – С. 159-205.

216. *Wray, A.* Numerical experiments in boundary-layer stability / A. Wray, M. Y. Hussaini // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. – 1984. – Т. 392, № 1803. – С. 373-389.
217. On stability of streamwise streaks and transition thresholds in plane channel flows / S. C. Reddy [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. – 1998. – Т. 365. – С. 269-303.
218. *Дёмин, В. А.* Устойчивость стационарных вибрационно-конвективных течений жидкости в горизонтальном слое / В. А. Дёмин, В. П. Смертин // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2008. – № 4. – С. 102-108.
219. *Demin, V. A.* Convective instability near the interface between counter propagating fluxes of inter-soluble liquids / V. A. Demin, E. A. Popov // Mathematical models and computer simulations. – 2015. – Т. 7, № 5. – С. 485-494.
220. Stability of solutal advective flow in a horizontal shallow layer / A. Mizev [и др.] // Physical Review Fluids. – 2017. – Т. 2, № 10. – С. 103903.
221. *Lyubimova, T. P.* Secondary Convection Regimes in a Fluid with a Temperature-Dependent Viscosity in a Plane Vertical Layer / T. P. Lyubimova // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2019. – Т. 60, № 7. – С. 1228-1236.
222. *Farrell, B. F.* Optimal excitation of perturbations in viscous shear flow / B. F. Farrell // The Physics of fluids. – 1988. – Т. 31, № 8. – С. 2093-2102.
223. Hydrodynamic stability without eigenvalues / L. N. Trefethen [и др.] // Science. – 1993. – Т. 261, № 5121. – С. 578-584.
224. *Trefethen, A. E.* Spectra and pseudospectra for pipe Poiseuille flow / A. E. Trefethen, L. N. Trefethen, P. J. Schmid // Computer methods in applied mechanics and engineering. – 1999. – Т. 175, № 3/4. – С. 413-420.
225. *Waleffe, F.* Transition in shear flows. Nonlinear normality versus non-normal linearity / F. Waleffe // Physics of Fluids. – 1995. – Т. 7, № 12. – С. 3060-3066.
226. Numerical study of the instability of the Hartmann layer / D. S. Krasnov [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. – 2004. – Т. 504. – С. 183-211.

227. *Zienicke, E. A.* Parametric study of streak breakdown mechanism in Hartmann flow / E. A. Zienicke, D. Krasnov // *Physics of Fluids*. – 2005. – Т. 17, № 11. – С. 114101.
228. Optimal linear growth in magnetohydrodynamic duct flow / D. Krasnov [и др.] // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2010. – Т. 653. – С. 273-299.
229. *Zikanov, O. Y.* On the instability of pipe Poiseuille flow / O. Y. Zikanov // *Physics of Fluids*. – 1996. – Т. 8, № 11. – С. 2923-2932.
230. *Biau, D.* Transition to turbulence in duct flow / D. Biau, H. Soueid, A. Bottaro // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2008. – Т. 596. – С. 133-142.
231. *Krasnov, D.* Numerical study of magnetohydrodynamic duct flow at high Reynolds and Hartmann numbers / D. Krasnov, O. Zikanov, T. Boeck // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2012. – Т. 704. – С. 421-446.
232. Laminar-turbulent transition in magnetohydrodynamic duct, pipe, and channel flows / O. Zikanov [и др.] // *Applied Mechanics Reviews*. – 2014. – Т. 66, № 3. – С. 030802.
233. *Moxey, D.* Distinct large-scale turbulent-laminar states in transitional pipe flow / D. Moxey, D. Barkley // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. – 2010. – Т. 107, № 18. – С. 8091-8096.
234. The onset of turbulence in pipe flow / К. Avila [и др.] // *Science*. – 2011. – Т. 333, № 6039. – С. 192-196.
235. Patterned turbulence in liquid metal flow: computational reconstruction of the Hartmann experiment / D. Krasnov [и др.] // *Physical review letters*. – 2013. – Т. 110, № 8. – С. 084501.
236. *Starchenko, S.* The Simplest Solar Dynamo and a New Stabilization Mechanism / S. Starchenko // *Geomagnetism and Aeronomy*. – 2022. – Т. 62, № 1/2. – С. 1-5.
237. Magnetohydrodynamic flow in a square tube with walls of different electrical conductivity in an oblique transverse magnetic field / I. E. Butsenieks [и др.] // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. – 1971. – Т. 7, № 3. – С. 335-341.
238. An approach to verification and validation of MHD codes for fusion applications / S. Smolentsev [и др.] // *Fusion Engineering and Design*. – 2015. – Т. 100. – С. 65-72.

239. *Sterl, A.* Numerical simulation of liquid-metal MHD flows in rectangular ducts / A. Sterl // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1990. – Т. 216. – С. 161-191.
240. MHD simulations of liquid metal flow through a toroidally oriented manifold / N. B. Morley [и др.] // *Fusion Engineering and Design*. – 2008. – Т. 83, № 7-9. – С. 1335-1339.
241. Code validation and development for MHD analysis of liquid metal flow in Korean TBM / S. H. Kim [и др.] // *Fusion Engineering and Design*. – 2012. – Т. 87, № 7/8. – С. 951-955.
242. *Abdullina, K. I.* 3-D numerical modeling of MHD flows in variable magnetic field / K. I. Abdullina, S. V. Bogovalov // *Physics Procedia*. – 2015. – Т. 72. – С. 351-357.
243. *Khodak, A.* Numerical Analysis of 2-D and 3-D MHD Flows Relevant to Fusion Applications / A. Khodak // *IEEE Transactions on Plasma Science*. – 2017. – Т. 45, № 9. – С. 2561-2565.
244. *Patel, A.* Application of ansys fluent mhd code for liquid metal mhd studies / A. Patel, R. Bhattacharyay // *Nuclear Fusion*. – 2019.
245. *Yan, Y.* Validation of COMSOL Multiphysics® for Magnetohydrodynamics (MHD) Flows in Fusion Applications / Y. Yan, S. Smolentsev, M. Abdou // *COMSOL Conference Boston*. – 2017.
246. *Sahu, S.* Validation of COMSOL code for analyzing liquid metal magnetohydrodynamic flow / S. Sahu, R. Bhattacharyay // *Fusion Engineering and Design*. – 2018. – Т. 127. – С. 151-159.
247. *Sahu, S.* COMSOL as a tool for studying Magneto-Hydro-Dynamic effects in liquid metal flow under transverse magnetic field / S. Sahu, R. Bhattacharyay, E. Rajendrakumar // *Comsol conference*. – 2013.
248. Further validation of liquid metal MHD code for unstructured grid based on OpenFOAM / J. Feng [и др.] // *Fusion Engineering and Design*. – 2015. – Т. 100. – С. 260-264.
249. Validation case results for 2D and 3D MHD simulations / M.-J. Ni [и др.] // *Fusion Science and Technology*. – 2007. – Т. 52, № 3. – С. 587-594.

250. Validation strategies of HIMAG in interfacial flow computation for fusion applications / M.-J. Ni [и др.] // Fusion engineering and design. – 2006. – Т. 81, № 8-14. – С. 1535-1541.
251. Validation strategies of HIMAG in interfacial flow computation for fusion applications / N. Mingjiu [и др.]. – 2006.
252. Code development and validation for analyzing liquid metal MHD flow in rectangular ducts / T. Zhou [и др.] // Fusion Engineering and design. – 2010. – Т. 85, № 10-12. – С. 1736-1741.
253. *Badia, S.* FEMPAR: An object-oriented parallel finite element framework / S. Badia, A. F. Martín, J. Principe // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2018. – Т. 25, № 2. – С. 195-271.
254. *Badia, S.* A tutorial-driven introduction to the parallel finite element library FEMPAR v1. 0.0 / S. Badia, A. F. Martín // Computer Physics Communications. – 2019. – С. 107059.
255. *Бабенко, К. И.* Основы численного анализа / К. И. Бабенко. – М. : Наука, 1986.
256. *Сагалаков, А. М.* Псевдоспектральный метод расчета трехмерных вторичных режимов в плоскопараллельных течениях / А. М. Сагалаков, В. А. Шипицын // Экспериментальные методы в физике структурно-неоднородных сред: труды всерос. науч.-техн. конф. Т. 4. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 1997. – С. 40-53.
257. *Smith, D. M.* A FORTRAN package for floating-point multiple-precision arithmetic. / D. M. Smith // ACM Transactions on Mathematical Software. – 1991. – Т. 17, № 2. – С. 273-283.
258. *Сапожников, В. А.* Численное решение задач гидродинамической устойчивости : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Сапожников В. А. – Новосибирск : Институт теплофизики СО РАН, 1970.
259. *Proskurin, A. V.* Stability of Poiseuille flow in the presence of a longitudinal magnetic field / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // Journal of applied mechanics and technical physics. – 2008. – Vol. 49, no. 3. – P. 383-390.

260. *Proskurin, A. V.* A new branch of instability of the magnetohydrodynamic Poiseuille flow in a longitudinal magnetic field / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // *Technical Physics Letters*. – 2008. – Vol. 34, no. 3. – P. 199-201.
261. *Proskurin, A. V.* Stability of the Poiseuille flow in a longitudinal magnetic field / A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov // *Technical Physics*. – 2012. – Vol. 57, no. 5. – P. 608-614.
262. *Ландау, Л. Д.* Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц // *Теоретическая физика: В 10 т./Ландау ЛД, Лифшиц ЕМ*. – 1957.
263. *Куликовский, А. Г.* Магнитная гидродинамика / А. Г. Куликовский, Г. Любимов. – Физматгиз, 1962.
264. *Tsukanov, I.* A Meshfree Method for Incompressible Fluid Dynamics Problems / I. Tsukanov, V. Shapiro, S. Zhang // *Int. J. Numer. Meth. Engng*. – 2003. – Т. 58. – С. 127-158.
265. *Слесаренко, А.* S-функции в обратных задачах дифференциальной геометрии и управлении образования форм / А. Слесаренко // *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. – 2012. – Т. 1, 4 (55). – С. 4-10.
266. *Слесаренко, А.* S-функции в обратных задачах аналитической геометрии и моделировании тепловых процессов / А. Слесаренко // *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. – 2011. – Т. 3, № 4. – С. 41-46.
267. *Shapiro, V.* The Architecture of SAGE – A Meshfree System Based on RFM / V. Shapiro, I. Tsukanov // *Engineering with Computers*. – 2002. – Т. 18, № 4. – С. 295-311.
268. *Hunt, J.* Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts / J. Hunt // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1965. – Т. 21, № 04. – С. 577-590.
269. *Chang, C. C.* Duct flow in magnetohydrodynamics / C. C. Chang, T. S. Lundgren // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*. – 1961. – Т. 12, № 2. – С. 100-114.
270. SLEPc Users Manual : Technical Report DSIC-II/24/02 / С. Campos [и др.] ; Universidad Politecnica de Valencia. – 2011. – С. 90. – Available at <http://www.grycap.upv.es/slepcc/documentation/slepcc.pdf>.

271. *Freytag, M.* Field modeling with sampled distances / M. Freytag, V. Shapiro, I. Tsukanov // *Computer-Aided Design*. – 2006. – Т. 38, № 2. – С. 87-100.
272. *Thomas, L. H.* The stability of plane Poiseuille flow / L. H. Thomas // *Physical Review*. – 1953. – Т. 91, № 4. – С. 780.
273. *Orszag, S. A.* Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation / S. A. Orszag // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1971. – Т. 50, № 4. – С. 689-703.
274. *Lee, D.* Magnetohydrodynamic turbulent flow in a channel at low magnetic Reynolds number / D. Lee, H. Choi // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2001. – Т. 439. – С. 367-394.
275. *Krasnov, D.* Comparative study of finite difference approaches in simulation of magnetohydrodynamic turbulence at low magnetic Reynolds number / D. Krasnov, O. Zikanov, T. Boeck // *Computers & fluids*. – 2011. – Т. 50, № 1. – С. 46-59.
276. *Zienkiewicz, O. C.* The finite element method / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – McGraw-Hill, New York, 1989.
277. *Зенкевич, О.* Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – 1986.
278. *Hughes Thomas, J.* The finite element method / J. Hughes Thomas // Englewood Cliffs, New Jersey, EUA: Prentice-Hall. – 1987.
279. *Becker, E. B.* Finite Elements: Fluid mechanics. Т. 6 / E. B. Becker, G. F. Carey, J. T. Oden. – Prentice Hall, 1986.
280. *Babuška, I.* The p and h-p versions of the finite element method, basic principles and properties / I. Babuška, M. Suri // *SIAM review*. – 1994. – Т. 36, № 4. – С. 578-632.
281. Explosion phenomena in collisionless plasmas at super-Alfvénic speed / Y. A. Berezin [и др.] // *International Journal of Computational Fluid Dynamics*. – 1998. – Т. 10, № 2. – С. 117-126.
282. Simulation of “Belt”-type galathea plasma configurations / A. Belimov [и др.] // *Journal of applied mechanics and technical physics*. – 1999. – Т. 40, № 4. – С. 551-557.

283. *Fedoruk, M. P.* Finite volume algorithm for nonstationary Maxwell equations on an unstructured grid / M. P. Fedoruk, A. S. Lebedev, Y. I. Shokin // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling RNAM. – 2007. – T. 22, № 1. – C. 1-18.
284. *Karniadakis, G. E.* High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations / G. E. Karniadakis, M. Israeli, S. A. Orszag // Journal of computational physics. – 1991. – T. 97, № 2. – C. 414-443.
285. *Guermond, J.-L.* Velocity-correction projection methods for incompressible flows / J.-L. Guermond, J. Shen // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2003. – T. 41, № 1. – C. 112-134.
286. *Davidson, P. A.* Introduction to magnetohydrodynamics. T. 55 / P. A. Davidson. – Cambridge university press, 2016.
287. *Shercliff, J. A.* Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields / J. A. Shercliff // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. T. 49. – Cambridge University Press. 1953. – C. 136-144.
288. *Priede, J.* Linear stability of Hunt's flow / J. Priede, S. Aleksandrova, S. Molokov // Journal of Fluid Mechanics. – 2010. – T. 649. – C. 115-134.
289. *Hof, B.* Scaling of the turbulence transition threshold in a pipe / B. Hof, A. Juel, T. Mullin // Physical review letters. – 2003. – T. 91, № 24. – C. 244502.
290. *Geuzaine, C.* Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities / C. Geuzaine, J.-F. Remacle // International journal for numerical methods in engineering. – 2009. – T. 79, № 11. – C. 1309-1331.
291. *Moresco, P.* Experimental study of the instability of the Hartmann layer / P. Moresco, T. Alboussiere // Journal of Fluid Mechanics. – 2004. – T. 504. – C. 167-181.
292. Nektar++: Enhancing the capability and application of high-fidelity spectral/hp element methods / D. Moxey [и др.] // Computer Physics Communications. – 2020. – T. 249. – C. 107110.
293. *Sherwin, S. J.* Unsteady Navier–Stokes solvers using hybrid spectral/hp element methods / S. J. Sherwin, M. Ainsworth // Applied Numerical Mathematics. – 2000. – T. 33, № 1-4. – C. 357-363.



294. Steady solutions of the Navier-Stokes equations by selective frequency damping / E. Åkervik [и др.] // *Physics of fluids*. – 2006. – Т. 18, № 6. – С. 068102.
295. *Jordi, B. E.* Encapsulated formulation of the selective frequency damping method / B. E. Jordi, C. J. Cotter, S. J. Sherwin // *Physics of Fluids*. – 2014. – Т. 26, № 3. – С. 034101.
296. *Jordi, B. E.* An adaptive selective frequency damping method / B. E. Jordi, C. J. Cotter, S. J. Sherwin // *Physics of Fluids*. – 2015. – Т. 27, № 9. – С. 094104.
297. *Smolentsev, S.* Characterization of key magnetohydrodynamic phenomena in PbLi flows for the US DCLL blanket / S. Smolentsev, R. Moreau, M. Abdou // *Fusion Engineering and Design*. – 2008. – Т. 83, № 5. – С. 771-783.
298. *Zikanov, O.* Numerical investigation of MHD heat transfer in a vertical round tube affected by transverse magnetic field / O. Zikanov, Y. Listratov // *Fusion Engineering and Design*. – 2016. – Т. 113. – С. 151-161.
299. *Davidson, P. A.* The role of angular momentum in the magnetic damping of turbulence / P. A. Davidson // *Journal of fluid mechanics*. – 1997. – Т. 336. – С. 123-150.
300. *Davidson, P. A.* Magnetic damping of jets and vortices / P. A. Davidson // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1995. – Т. 299. – С. 153-186.