KMA/MMAN1

Matematická analýza I

Stanislav Trávníček

Učební text pro 1. ročník učitelského studia M-X

(Převod do LaTeXu, úpravy a rozšíření: Jiří Fišer)

Obsah

Seznam obrázků

Kapitola 1

Číselná osa, supremum a infimum

1.1 Základní číselné množiny

Uvedeme si přehled základních číselných množin a jejich označení. Uvažují se zejména tyto číselné množiny:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ je množina všech *přirozených* čísel.

  Přirozená čísla se používají např. jako pořadová čísla, třeba při zápisu členů posloupnosti: $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

  je pro některé autory také množinou všech *přirozených* čísel a zapisuje se jimi především počet prvků neprázdných množin.

- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ je množina všech *celých* čísel.

  Celá čísla se používají např. pro zápisy vztahující se k periodičnosti funkcí; např. funkce $y = \operatorname{cotg} x$ není definována pro $x = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné (celé) číslo.

- $\mathbb{Q}$ — množina všech zlomků $\left\{\frac{k}{n},\ \text{kde } k \in \mathbb{Z} \text{ a } n \in \mathbb{N}\right\}$ je množinou všech čísel *racionálních.*

  Používá se např. při konstrukci některých méně obvyklých matematických objektů (viz dále). Množina $\mathbb{Q}$ je na číselné ose hustě uspořádána, mezi každými dvěma racionálními čísly leží další racionální číslo (např. jejich aritmeticky průměr); též mezi každými dvěma reálnými čísly leží racionální číslo. Desetinný rozvoj racionálních čísel je ukončený nebo periodický, dostaneme jej ze zlomku k/n dělením. Obrácený postup je již náročnější.

Úloha 1.1.1. *Číslo $a = 1,5\overline{72}$ převeďte na obyčejný zlomek.*

První způsob řešení. Periodická část desetinného rozvoje čísla a je vlastně geometrická řada, tedy:

$$a = 1,5 + \frac{72}{10^3} + \frac{72}{10^5} + \frac{72}{10^7} + \cdots = 1,5 + \frac{72}{10^3}\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \cdots = \frac{173}{110}.$$

□

Druhý způsob řešení. Využijeme nekonečného periodického opakování:

$$\begin{aligned} a &= 1,5\overline{72}, \\ 100a &= 157,2\overline{72}, \end{aligned}$$

odkud po odečtení je

$$100a - a = 99a = 157,2\overline{72} - 1,5\overline{72} = 155,7,$$

tedy $a = \frac{1557}{990} = \frac{173}{110}$. □

- $\mathbb{R}$ — množina všech čísel *reálných*, je pro základní kurs matematické analýzy základní číselnou množinou (pokud není řečeno jinak, budeme rozumět pod pojmem číslo vždy číslo reálné). Dostaneme ji tak, že vhodným způsobem zavedeme iracionální čísla.

  Reálná čísla zobrazujeme na číselné (reálné) ose: je to přímka, na níž zvolíme bod O jako obraz čísla 0 (počátek číselné osy) a bod J jako obraz čísla 1, a pomocí těchto dvou bodů pak na ní zobrazujeme všechna reálná čísla; body na číselné ose označujeme zpravidla přímo zobrazovanými čísly.

Při rozšiřování pojmu *číslo* z Q na R vznikají dvě otázky:

- zda existuje potřeba iracionálních čísel (a jak je zavést),
- zda zobrazení množiny R na číselnou osu je bijekce, tj. zda i každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla.

Věta 1.1.2. *Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla rovna 2.*

Důkaz (sporem). Předpokládejme, že není splněno tvrzení věty, že tedy existuje $r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2$. Číslo r je zřejmě kladné; vyjádříme je jako zlomek v základním tvaru $r = \frac{p}{q}$, tedy p, q jsou čísla nesoudělná a platí $rq = p$. Tuto rovnost umocníme: $r^2q^2 = p^2$, tj. $2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ je sudé, tedy i p je sudé, což zapíšeme $p = 2k \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ je sudé $\Rightarrow q$ je sudé $\Rightarrow$ zlomek $\frac{p}{q}$ lze krátit dvěma, a to je spor s předpokladem, že tento zlomek je v základním tvaru. □

Bez iracionálních čísel (tj. v množině $\mathbb{Q}$) bychom tak např. nedovedli změřit úhlopříčku jednotkového čtverce (neměla by délku). Existuje tedy potřeba čísel, která nejsou racionální a která jsme nazvali iracionální.

Logika rozšiřování číselných oborů říká, že nový druh čísel zavádíme pomocí čísel již dříve definovaných. Při zavádění čísel reálných (tedy vlastně iracionálních, jen ta jsou nová) lze postupovat tak, že definujeme tzv. *řez* v množině Q jako každý rozklad množiny Q na dvě třídy, dolní a horní, kde tedy každé racionální číslo patří právě do jedné z těchto tříd a každé číslo z horní třídy je větší než každé číslo z dolní třídy. Iracionální číslo pak ztotožníme s takovým řezem, kde v dolní třídě není největší prvek a v horní třídě není prvek nejmenší. Např. číslo $\sqrt{2}$ je dáno řezem v $\mathbb{Q}$, kde do dolní třídy patří všechna čísla záporná a ta x z nezáporných, pro něž je $x^2 < 2$, do horní třídy patří všechny zbývající racionální čísla.

- Množinu všech *iracionálních* čísel označíme $\mathbb{Q}'$.

  Platí:
  $$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset \quad \text{a} \quad \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'.$$
  Všimněme si dekadického rozvoje: racionální čísla mají dekadický rozvoj ukončený nebo periodický, iracionální čísla mají svůj dekadický rozvoj neukončený a neperiodický (pro iracionální čísla často známe jen konečný počet míst jejich dekadického rozvoje (např. pro číslo π)), ale není to pravidlo.

Úloha 1.1.3. *Napište dekadický rozvoj takového iracionálního čísla, u něhož dovedeme jednoduše určit číslici na libovolném místě rozvoje.*

Poznámka 1.1.4. Důležitá cesta k poznání množiny $\mathbb{Q}'$ vede přes *mohutnosti množin*. Víme, že množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, a $\mathbb{Q}$ jsou spočetné (prvky těchto množin lze uspořádat do posloupnosti), zatímco množina $\mathbb{R}$ (a tedy i $\mathbb{Q}'$) spočetná není; říkáme, že $\mathbb{R}$ má *mohutnost kontinua.*

- $\mathcal{C}$ — množina všech čísel *komplexních*; komplexní čísla zobrazujeme v Gaussově rovině.

Pro uvedené číselné množiny platí:
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathcal{C}.$$

1.2 Vlastnosti číselných množin

O relacích a operacích v číselných množinách a o jejich přirozeném uspořádání pojednává podrobně algebra. Avšak i v matematické analýze se zabýváme mnoha významnými číselnými množinami. Při vyšetřování číselných množin se zabýváme jejich vlastnostmi, o nichž dále pojednáme.

Definice 1.2.1. Množina M se nazývá ***shora omezená*** $\Leftrightarrow$ $\exists L \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \leq L$. Toto číslo L se nazývá ***horní odhad*** (resp. horní závora).

Množina M se nazývá ***zdola omezená*** $\Leftrightarrow$ $\exists K \in R$tak, že $\forall x \in M$ platí $x \geq K$. Toto číslo K se nazývá ***dolní odhad*** (resp. dolní závora).

Množina M se nazývá ***omezená*** $\Leftrightarrow$ je omezená shora i zdola.

Úloha 1.2.2. *Kolik horních (dolních) odhadů má číselná množina? Vyjádřete, co znamená, že daná množina M není omezená shora, zdola, že není omezená.Co znamená, že číslo B není horním odhadem dané množiny?*

Pokud některý horní odhad množiny M patří do množiny M, pak jej nazýváme největší prvek množiny M a označujeme jej $\max M$. Podobně nejmenší prvek množiny M (definujte) označujeme $\min M$.

Úloha 1.2.3. *Určete největší a nejmenší prvek množiny*

$$M_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right\}, \quad M_2 = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots \right\}, \quad M_3 = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

Řešení. Množina M_1 má největší a nemá nejmenší prvek, M_2 nemá největší ani nejmenší prvek, M_3 má prvek největší i nejmenší. $\square$

K nejdůležitějším číselným množinám patří *intervaly.*

Definice 1.2.4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, definujeme

uzavřený interval $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$,

otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$,

a podobně $\langle a, b)$ a $(a, b\rangle$.

Všechny tyto intervaly mají délku $b - a$.

Definice 1.2.5. Množinu $\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$ nazýváme **neomezený interval**. Podobně $(a, +\infty)$, $(-\infty, b\rangle$, $(-\infty, b)$.

Množinu $\mathbb{R}$ zapisujeme též jako $(-\infty, +\infty)$.

Někdy uvažujeme též *degenerované intervaly*: $\langle a, a\rangle = \{a\}$, $(a, a) = \emptyset$ (prázdná množina). Pojmem interval budeme však dále vždy rozumět nedegenerovaný interval.

Definice 1.2.6. Absolutní hodnota čísla $a \in \mathbb{R}$ se označuje $|a|$ a je definována takto:

$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0, \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Věta 1.2.7 (vlastnosti absolutní hodnoty)**.** $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *platí*

1. $|a| \geq 0$, *přičemž* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,

2. $|-a| = |a|$,

3. $|a+b| \leq |a| + |b|$ *(trojúhelníkovou nerovnost),*

4. $|a-b| \geq |a| - |b|$,

5. $|ab| = |a| \cdot |b|$,

6. pro $b \neq 0$ *je* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Vlastnost 3 můžeme zobecnit (důkaz matematickou indukcí):
(3') $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a_i \in \mathbb{R} : |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, nebo zkráceně

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Geometrický význam absolutní hodnoty: $|a|$ značí vzdálenost obrazu čísla a od počátku číselné osy, $|a-b|$ ($= |b-a|$) vzdálenost obrazů čísel a,b na číselné ose.

Úloha 1.2.8. *Řešte nerovnice a rovnici:*

a) $|x-3| < 2$,

b) $2|x+2| - 3|x| - 2x \geq 4$,

c) $-3 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}|x+1| - \frac{3}{4}|x-2| = 0$.

1.3 Supremum a infimum

Definice 1.3.1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\beta \in \mathbb{R}$ nazýváme **supremum** množiny M a píšeme $\beta = \sup M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

(1) $\forall x \in M : x \leq \beta$,

(2) $\forall \beta\prime < \beta \exists x' \in M : x' > \beta\prime$.

Vlastnost (1) znamená, že β je horní odhad, vlastnost (2) říká, že β je ze všech horních odhadů nejmenší, tedy: $\sup M$ je *nejmenší horní odhad* (závora) množiny M. Z definice ovšem nijak neplyne, že takový nejmenší horní odhad existuje.

Definice 1.3.2. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazýváme **infimum** množiny M a píšeme $\alpha = \inf M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

(1) $\forall x \in M : x \geq \alpha$,

(2) $\forall \alpha\prime > \alpha \exists x' \in M : x' < \alpha\prime$.

Vlastnost (1) znamená, že α je dolní odhad, vlastnost (2) říká, že α je ze všech dolních odhadů největší, tedy: $\inf M$ je *největší dolní odhad* (závora) množiny M. Z definice opět nijak neplyne, že takový největší dolní odhad existuje.

Úloha 1.3.3. *Určete* $\sup M$ *a* $\inf M$ *pro množinu* $M = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$.

Důkaz. Platí $\sup M = 1$, neboť všechny prvky množiny M jsou pravé zlomky a jsou tedy menší než 1; jestliže však vezmeme libovolné číslo $r < 1$, existuje vždy v M prvek $\frac{n}{n+1}$, který je větší než r. Dále $\inf M = \frac{1}{2}$, neboť žádný prvek M není menší než $\frac{1}{2}$, a když zvolíme libovolné číslo $s > \frac{1}{2}$, pak vždy právě pro prvek $\frac{1}{2}$ platí $\frac{1}{2} < s$. Přitom $\sup M$ není a $\inf M$ je prvkem zadané množiny M. □

Tedy: supremum a infimum množiny mohou, ale nemusí být prvky této množiny. Pokud $\sup M$ je prvkem množiny M, je jejím největším prvkem; podobně pro $\inf M$. Také naopak, pokud má M největší prvek, je to současně $\sup M$; podobně pro nejmenší prvek.

Věta 1.3.4 (o existenci suprema a infima). *1) Každá neprázdná shora omezená množina reálných čísel má supremum.*

2) Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.

Tuto větu budeme považovat za axiom vyjadřující základní vlastnost číselné osy. Tedy: existuje bijekce množiny $\mathbb{R}$ na číselnou osu — každé reálné číslo lze zobrazit na číselné ose a každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla. Říkáme též: *číselná osa je spojitá.* Pojmy „číslo“ a „bod číselné osy“ považujeme za synonyma a říkáme např. „bod x_0“ místo „číslo x_0“ apod.

Pojmy supremum a infimum a věta o existenci suprema a infima jsou pro matematickou analýzu velmi důležité. Hrají podstatnou roli v řadě důkazů (viz např. důkaz Věty 1.4.5 o vložených intervalech) a při definici dalších důležitých matematických pojmů.

Reálná čísla a realita

Matematika svými prostředky modeluje realitu a přitom používá metody abstrakce: abstrahuje od mnoha vlastností reálných objektů (které mohou být pro realitu velmi významné) a ponechává jen ty, které upotřebí při vytváření matematických modelů. Vytváří tak různé abstraktní objekty, jako je bod, čtverec, číslo, funkce, řada ad. Tyto abstraktní modely jsou velmi vhodné pro popis a studium reality, ale přesto nesmíme zaměňovat model a realitu. V určitých případech se naše reálné představy a zkušenosti dostávají do rozporu s některými matematicky zcela přesně definovanými pojmy a vlastnostmi. Např. v reálném životě není nekonečno, takže některé jeho vlastnosti odporují našim praktickým zkušenostem, třeba to, že nekonečná množina je ekvivalentní s některou svou pravou částí; např. množina všech lichých přirozených čísel „má týž počet prvků“ (tj. stejnou mohutnost) jako množina $\mathbb{N}$. Podobně na základě zkušeností z reálného světa je nepředstavitelné, že $\mathbb{Q}'$ má větší mohutnost než $\mathbb{Q}$ (že iracionálních čísel „je více“ než čísel racionálních. Naše zkušenost říká, že když vedle sebe jsou umístěny nějaké objekty, tak mezer mezi nimi je tak nějak stejně jako objektů (plaňkový plot), ale u čísel racionálních a iracionálních je to úplně a nepředstavitelně jinak. Mezi každými dvěma čísly racionálními je alespoň jedno číslo iracionální a mezi každými dvěma čísly iracionálními je alespoň jedno číslo racionální, přičemž těch iracionálních mezi dvěma racionálními je množina mohutnosti kontinua, zatímco racionálních mezi dvěma iracionálními je jen spočetná množina. Definice iracionálních čísel, ať už použijeme jakoukoli metodu, vytváří jen matematický model a nikoli realitu. Spojitost číselné osy, která se skládá z racionálních a iracionálních bodů, si nelze představit; snad i proto, že v reálném světě je to jinak, tam neexistuje žádná přímka a pohodu číselné osy jako dobře fungujícího matematického modelu narušují různé fyzikální částice.

1.4 Několik vět o reálných číslech a číselných množinách

Věta 1.4.1 (o aritmetickém a geometrickém průměru). *Jsou-li a, b libovolná reálná nezáporná čísla, pak jejich aritmetický průměr ($\frac{a+b}{2}$) je větší nebo roven jejich průměru geometrickému ($\sqrt{ab}$), přičemž rovnost průměrů nastává právě při rovnosti obou čísel a, b.*

Princip důkazu. Je tu vhodný důkaz *přímý syntetický*, přičemž se vyjde z platné nerovnosti $\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0$, jejíž úpravou dostaneme tvrzení. □

Úloha 1.4.2. *Všimněte si slovní formulace věty. Přepište ji do formy převážně symbolické a do formy zcela symbolické.*

Věta 1.4.3 (Bernoulliova nerovnost). $\forall h \in \mathbb{R}$, $h > -1$, $h \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *platí*

$$V(n): \quad (1+h)^n > 1 + nh.$$

Princip důkazu. Matematickou indukcí v 1. kroku dokazujeme $V(2) : (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h$, a ve druhém kroku dokazujeme implikaci $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ a to tak, že ve $V(n)$ násobíme obě strany nerovnosti výrazem $(1+h)$ a pak na pravé straně vynecháme člen nh^2. □

Bernoulliova nerovnost se používá např. při některých důkazech vlastností posloupností.

Věta 1.4.4 (o rovnosti reálných čísel)**.** *Nechť* $p,\ q \in \mathbb{R}$. *Jestliže* $\forall \varepsilon > 0$ *platí* $|p - q| < \varepsilon$, *pak* $p = q$.

Důkaz (sporem). Kdyby $p \neq q$, bylo by $|p - q| > 0$. Zvolíme-li $\varepsilon = |p - q|$, dostáváme, že $|p - q| < \varepsilon$ a současně $|p - q| = \varepsilon$, což dává spor. Proto $p = q$. $\square$

Tato jednoduchá věta usnadňuje některé důkazy, např. důkaz následující věty.

Věta 1.4.5 (o vložených intervalech)**.** *Nechť* $\{J_n\}$ *je posloupnost omezených uzavřených intervalů* $J_n = \langle a_n, b_n\rangle$ *takových, že* $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \cdots$. *Pak existuje bod* x_0*, který leží ve všech intervalech* J_n, $n \in \mathbb{N}$. *Jestliže navíc* $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ *tak, že* $|J_n| < \varepsilon$, *je takový bod* x_0 *jediný.*

Princip důkazu. Uvažujeme množinu A všech levých krajních bodů a_n intervalů J_n a množinu B jejich pravých krajních bodů b_m; pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < b_m$. Podle věty o existenci suprema tedy existuje $\alpha = \sup A$, pro něž $\alpha \leq b_m$; podobně existuje $\beta = \inf B$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$, tedy $\forall n \in \mathbb{N} : \langle \alpha, \beta\rangle \subset \langle a_n, b_n\rangle$. Pro důkaz tvrzení věty stačí volit $x_0 \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Je-li interval $\langle \alpha, \beta\rangle$ degenerovaný, dostáváme x_0 jednoznačně. To nastává právě tehdy, když je splněna druhá podmínka věty, tedy když $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $b_n - a_n < \varepsilon$. Jelikož je $\beta - \alpha \leq b_n - a_n < \varepsilon$, je podle věty o rovnosti reálných čísel $\alpha = \beta$. $\square$

Podmínka věty, zajišťující jednoznačnost společného bodu x_0 může být formulována i takto: „Jestliže posloupnost $\{|J_n|\}$ délek intervalů J_n je nulová ..."

Větu o vložených intervalech používáme při důkazech některých důležitých vlastností posloupností a funkcí, zejména ve spojení s tzv. Bolzanovou metodou důkazu.

1.5 Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice 1.5.1. Okolím bodu a nazveme každý otevřený interval (c, d) konečné délky, který obsahuje bod a (tj. kde $a \in (c, d)$); označení okolí bodu a: $U(a)$.

Tato definice je formulována ve smyslu topologickém.

Věta 1.5.2 (vlastnosti okolí)**.** *Okolí bodu a má tyto vlastnosti:*

(1) Pro každé $U(a)$ *je* $a \in U(a)$.

(2) Ke každým dvěma okolím $U_1(a)$, $U_2(a)$ *existuje okolí* $U(a)$ *tak, že* $U(a) \subset U_1(a) \cap U_2(a)$.

(3) Je-li $b \in U(a)$, *pak existuje* $U_1(b)$ *tak, že* $U_1(b) \subset U(a)$.

(4) Pro libovolná $a \neq b$ *existují* $U_1(a)$, $U_2(b)$ *tak, že* $U_1(a) \cap U_2(b) = \emptyset$.

Pro důkazy některých vět je vhodnější definovat okolí bodu a ve smyslu metrickém.

Definice 1.5.3. **ε-okolím bodu** a, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nazýváme interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; označení: $U(a, \varepsilon)$ nebo též $U(a)$.

Lehce ověříme, že ε-okolí má všechny uvedené vlastnosti okolí. Místo $x \in U(a, \varepsilon)$ lze rovněž psát $|x - a| < \varepsilon$.

Definice 1.5.4. **Prstencovým** (**redukovaným**) **okolím** bodu a nazýváme množinu $P(a) = U(a) \setminus \{a\}$.

Podobně $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$. Dále se definuje levé resp. pravé okolí bodu a jako interval $(c, a\rangle$ nebo $(a - \varepsilon, a\rangle$ resp. $\langle a, d)$ nebo $\langle a, a + \varepsilon)$; jsou to tzv. **jednostranná okolí**. Ještě uvažujeme *jednostranná prstencová* (*redukovaná*) okolí — to když z jednostranného okolí vypustíme bod a.

Užitím pojmu okolí bodu lze klasifikovat body z $\mathbb{R}$ vzhledem k dané číselné množině M. Uvedeme si nyní zkrácené definice některých důležitých pojmů, používaných v matematické analýze.

- ***Vnitřní bod množiny*** M: Bod množiny M, který do M patří i s některým svým okolím.
- ***Vnitřek množiny*** M: Množina všech vnitřních bodů množiny M.
- ***Hraniční bod množiny*** M: V každém jeho okolí existuje bod množiny M a též bod, který do M nepatří. (Hraniční bod může, ale nemusí patřit do M.)
- ***Hranice množiny*** M: Množina všech hraničních bodů množiny M.
- ***Vnější bod množiny*** (*vzhledem k množině*) M: Bod číselné osy, který není vnitřním ani hraničním bodem množiny M.
- ***Vnějšek množiny*** M: Množina všech vnějších bodů množiny M.
- Množina M je ***otevřená***: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina M je ***uzavřená***: Obsahuje svou hranici.
- ***Uzávěr*** $\overline{M}$ ***množiny*** M: Sjednocení množiny M a její hranice.
- ***Hromadný bod*** a ***množiny*** M: V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny M.
- ***Izolovaný bod množiny*** M: Bod množiny M, který není jejím hromadným bodem.

- ***Diskrétní množina***: Všechny její body jsou izolované.
- ***Derivace*** M' ***množiny*** M: Množina všech hromadných bodů množiny M.

Jelikož všechny tyto pojmy jsou založeny vlastně jen na pojmu okolí, setkáváme se s nimi ve všech prostorech, kde se pracuje s okolím. Na číselné ose (na rozdíl např. od roviny) však pracujeme i s pojmy „levé okolí" a „pravé okolí" a můžeme tedy např. definovat *i levý hromadný bod* a *pravý hromadný bod* a těchto pojmů skutečně využíváme při definování jednostranných limit funkce.

Úloha 1.5.5. *Všechny uvedené pojmy použijte pro množinu* $M = \langle -1, 0) \cup \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$.

1.6 Rozšířená reálná osa

Je to model číselné osy, kterou rozšíříme o dva nové prvky: *nevlastní číslo* $+\infty$ a nevlastní číslo $-\infty$. Označení rozšířené reálné osy: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Zavedení nevlastních čísel nám umožňuje hlouběji, lépe a jednodušeji formulovat mnohé poznatky matematické analýzy.

Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na $\mathbb{R}$.

- *Uspořádání*: $\forall x \in R$: $-\infty < x < +\infty$, zvláště $-\infty < +\infty$; $-(-\infty) = +\infty$, $-(+\infty\ ) = -\infty$, $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$.
- *Okolí*: $U(+\infty)$ toto označení budeme používat pro každý interval $\langle c, +\infty\rangle \subset \mathbb{R}^*$, ale pokud budeme pracovat na $\mathbb{R}$, použijeme toto označení (pro zjednodušení vyjadřování) též pro intervaly $(c, +\infty) \subset \mathbb{R}$, což jsou vlastně prstencová okolí $P(+\infty)$ na $\mathbb{R}^*$. Podobně pro $U(-\infty)$ a $P(-\infty)$.
- *Supremum* a *infimum*: Pro množinu M, která není shora omezená, je $\sup M = +\infty$, pro množinu M, která není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.
- *Hromadné body*: Definice je formálně stejná, tedy $+\infty$ nazveme hromadným bodem množiny $M \subset \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$ v každém jeho okolí $P(+\infty)$ leží alespoň jeden bod množiny M. Podobně pro $-\infty$.

  Např. množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel má hromadné body $+\infty$ a $-\infty$, $\sup \mathbb{Z} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$, ale samozřejmě $+\infty \notin \mathbb{Z}$, $-\infty \notin \mathbb{Z}$.

Početní operace s nevlastními čísly

- *Sčítání a odčítání*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\pm x+(+\infty) = (+\infty)\pm x = \pm x-(-\infty) = (+\infty)+(+\infty) = (+\infty)-(-\infty) = +\infty,$$

$$\pm x+(-\infty) = (-\infty)\pm x = \pm x-(+\infty) = (-\infty)+(-\infty) = (-\infty)-(+\infty) = -\infty.$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty).$$

- *Násobení*: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ definujeme

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

  Podobně pro $x < 0$.

- *Nedefinujeme*

$$0 \cdot (+\infty), \quad (+\infty) \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

- *Dělení*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0.$$

  Pro $x > 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = -\infty,$$

  pro $x < 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = +\infty.$$

- *Nedefinujeme*

  $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, atd., $\frac{x}{0}$ pro žádné $x \in \mathbb{R}$, tj. ani $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{0}$.

- *Mocniny*: $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$(+\infty)^n = +\infty, \quad (+\infty)^{-n} = 0, \quad (-\infty)^n = (-1)^n \cdot (+\infty).$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty)^0, \quad (-\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}.$$

Poznámka 1.6.1. Z praktických důvodů se někdy píše místo $+\infty$ jen ∞, takže např. místo výrazu $(+\infty) + (+\infty)$ lze napsat jen $\infty + \infty$. Jestliže však pracujeme v komplexním oboru, kde se zavádí jediné komplexní nekonečno označované ∞, musíme dát pozor na jeho odlišení od $+\infty$ z rozšířené reálné osy $\mathbb{R}^*$.

Úloha 1.6.2. *Vypočtěte*

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$

— * —

Kapitola 2

Číselné posloupnosti

2.1 Pojem posloupnosti

Definice 2.1.1. Každé zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ nazýváme ***číselná posloupnost***. Zápis: $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ nebo jen $\{a_n\}$; a_n se nazývá *n-tý člen* posloupnosti.

Definici číselné posloupnosti lze založit i na pojmu (reálné) funkce; pak je to funkce definovaná na množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel.

Způsoby zadání posloupnosti

Číselná posloupnost bývá zadána *několika prvními členy* (tak, aby bylo patrné pravidlo, jak vytvářet další členy, n-tým členem nebo rekurentně.

Úloha 2.1.2. *Je dána posloupnost* $\frac{1}{1\cdot 4}$, $\frac{3}{4\cdot 7}$, $\frac{5}{7\cdot 10}$, $\frac{7}{10\cdot 13}$, $\cdots$ *Určete její n-tý člen.*

Řešení. $a_n = \frac{2n-1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$ □

Při zadání *n-tým členem* zase naopak lze z příslušného vzorce počítat jednotlivé členy posloupnosti.

Úloha 2.1.3 (Příklady číselných posloupností zadaných n-tým členem)**.** $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, $\{(-1)^n \cdot n\}$, $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, $\{a \cdot q^{n-1}\}$, $\{a+(n-1)d\}$. *Vypočtěte členy a_1, a_2, a_3, a_4.*

Rekurentní definice obsahuje zpravidla 1. člen (nebo několik prvních členů) a pravidlo, jak vytvořit další člen ze členů předcházejících.

Rekurentní definice aritmetické posloupnosti: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$.

Rekurentní definice geometrické posloupnosti: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$ ($q \notin \{0, 1, -1\}$).

Úloha 2.1.4. *Posloupnost $\{a_n\}$ je zadána rekurentně takto: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{10}{a_n}\right)$; je to posloupnost aproximací čísla $\sqrt{10}$. Vypočtěte první čtyři aproximace.*

Úloha 2.1.5. *Fibonacciova posloupnost* $\{b_n\}$ *je definována takto:* $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$. *Vypočtěte prvních 10 členů této posloupnosti.*

Posloupnost $\{a_n\}$ je třeba odlišovat od množiny (všech) jejích členů (kdy se též užívají složené závorky). Například množina (všech) členů posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$, množina (hodnot) členů posloupnosti $\{(-1)^n\}$ je $\{-1, 1\}$.

Definice 2.1.6. Posloupnost $\{b_n\}$ se nazývá ***vybraná*** *z posloupnosti* $\{a_n\}$ (nebo též ***podposloupnost***) $\Leftrightarrow$ $\exists$ posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $b_n = a_{k_n}$.

Např. posloupnost všech prvočísel je vybraná z posloupnosti $\{n\}$ všech čísel přirozených, ale není vybraná z posloupnosti $\{2n\text{-}1\}$ všech čísel lichých.

2.2 Základní vlastnosti číselných posloupností

V této kapitole se dále zabýváme jen číselnými posloupnostmi.

Definice 2.2.1. Posloupnost se nazývá (***shora, zdola***) ***omezená*** $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina všech jejích členů.

Např. posloupnost $\{2n - 1\}$ je zdola omezená, není omezená shora, není omezená. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená shora i zdola, je omezená. Stacionární posloupnost $\{c\}$ je omezená.

Definice 2.2.2. Posloupnost a se nazývá

– ***rostoucí*** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$,

– ***klesající*** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$,

– ***nerostoucí*** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$,

– ***neklesající*** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

Společný název pro všechny tyto druhy posloupností: ***posloupnosti monotonní*** a pro první dva druhy: ***posloupnosti ryze monotonní***.

Definice 2.2.3. Operace s posloupnostmi jsou definovány takto:

– ***násobení reálným číslem c***: $c \cdot \{a_n\} = \{c \cdot a_n\}$;

– ***aritmetické operace*** (*součet, rozdíl, součin, podíl*): $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$, $\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}$, $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$, $\{a_n\} / \{b_n\} = \{a_n / b_n\}$, (pro $b_n \neq 0$);

– ***opačná posloupnost*** k $\{a_n\}$ je $\{-a_n\}$;

– ***reciproká posloupnost*** k $\{a_n\}$ je $\{1/a_n\}$ (pro $a_n \neq 0$).

2.3 Limita posloupnosti

Definice 2.3.1. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ ***má limitu*** $a \Leftrightarrow$

$$\forall U(a) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \ \Rightarrow \ a_n \in U(a).$$

Je-li $a \in \mathbb{R}$, nazývá se a *vlastní limita* a posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá ***konvergentní***, pokud $a = \pm\infty$, nazývá se a *nevlastní limita*. Neexistuje-li vlastní limita, nazývá se posloupnost $\{a_n\}$ ***divergentní***.

Zápisy: $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$; $\lim a_n = a$; $a_n \to a$ pro $n \to +\infty$.

Posloupnost tedy buď konverguje nebo diverguje. V tomto druhém případě buď diverguje k $+\infty$ nebo k $-\infty$ nebo *osciluje* (tj. nemá limitu vlastní ani nevlastní).

Např. posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ je konvergentní, má limitu 1, stacionární posloupnost $\{c\}$ je konvergentní a má limitu c, posloupnost $\left\{\frac{n}{100}\right\}$ je divergentní, má nevlastní limitu $+\infty$, posloupnost $\{q^n\}$ je pro $q \leq -1$ divergentní, nemá limitu (osciluje).

Definice 2.3.2. Je-li $V(n)$ nějaká výroková forma a platí-li, že výrok

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow V(n))$$

je pravdivý, pak říkáme, že $V(n)$ platí ***pro skoro všechna*** n.

Pomocí tohoto vyjádření lze vyjádřit definici limity posloupnosti např. takto:

Definice 2.3.3. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu* $a \Leftrightarrow$ v každém okolí $U(a)$ leží skoro všechny členy této posloupnosti.

Věty o limitách:

Věta 2.3.4. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz (sporem). Kdyby existovaly dvě limity a, b, pak by existovala disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že pro skoro všechna n by mělo platit současně $a_n \in U(a)$, $a_n \in U(b)$, což je spor. □

Věta 2.3.5. *Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu, pak každá posloupnost $\{b_n\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ má tutéž limitu.*

Důkaz. Označme tuto limitu a; pak $\forall U(a) \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a)$; pro $k_n > n_0$ je ovšem též $b_m = a_{k_n} \in U(a)$, takže $b_m \in U(a)$ pro skoro všechna m. □

Limita posloupnosti se tedy nezmění, vynecháme-li nebo pozměníme-li libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Při výpočtu limit využíváme také tohoto postupu:

1) zjistíme, že daná posloupnost je konvergentní a

2) najdeme limitu a nějaké vhodné vybrané posloupnosti. Pak toto a je i limitou dané posloupnosti.

– Když naopak zjistíme, že nějaká vybraná posloupnost je divergentní, znamená to podle předchozí věty, že je divergentní i daná posloupnost.

– Podobně zjistíme-li, že dvě vybrané posloupnosti mají různou limitu, je daná posloupnost divergentní.

Věta 2.3.6. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Důkaz. Označme limitu a; zvolme $\varepsilon = 1$. Pak množina M těch členů posloupnosti, které neleží v okolí $U(a, 1)$, je konečná.

$\forall n \in \mathbb{N}$ pak platí $a \geq \min\{\min M, a-1\}$, $a \leq \max\{\max M, a+1\}$. □

Tato věta ovšem neplatí obráceně, neboť např. posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, ale je divergentní. Větší hloubku pohledu do vztahu mezi omezeností a konvergencí dává následující věta.

Věta 2.3.7 (Bolzano–Weierstrassova)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Princip důkazu. (Bolzanova metoda půlení intervalů): Je dána posloupnost $\{a_n\}$; ježto je omezená, $\exists\langle K_1, L_1\rangle$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \langle K_1, L_1\rangle$.

Konstrukce vybrané posloupnosti:

– Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, nechť v ní má index k_1.

– Interval $\langle K_1, L_1\rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2\rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.

– V $\langle K_2, L_2\rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.

– Interval $\langle K_2, L_2\rangle$ rozpůlíme, atd.

– Označíme a (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n\rangle$ (podle věty o vložených intervalech).

– Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n\rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \to a$.

□

Věta 2.3.8. *Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.*

Princip důkazu. Mějme dánu posloupnost $\{a_n\}$; z omezenosti množiny $M = \{a_1, a_1, \dots\}$ plyne existence vlastního suprema $a = \sup M$. Ze druhé vlastnosti suprema plyne, že v libovolném levém okolí $U(a-)$ leží alespoň jedno a_n, takže vzhledem k monotónnosti $\{a_n\}$ leží v $U(a-)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$. □

Věta 2.3.9 (o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu)**.** *Nechť* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. *Pak platí, pokud výrazy na pravých stranách mají v* $\mathbb{R}^*$ *smysl:*

1) $\lim(a_n + b_n) = a + b$, $\lim(a_n - b_n) = a - b$,

2) $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

3) pro $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ *je* $\lim(a_n/b_n) = a/b$,

4) $\lim |a_n| = |a|$.

Důkaz. Ukázka pro součet, kde a, b jsou vlastní limity:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že $\begin{array}{l} : n \geq n_1 \Rightarrow a_n \in U(a, \varepsilon/2), \\ : n \geq n_2 \Rightarrow b_n \in U(b, \varepsilon/2). \end{array}$

Nechť $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ a $n \geq n_0$. Pak $\begin{array}{l} a - \varepsilon/2 < a_n < a + \varepsilon/2, \\ b - \varepsilon/2 < b_n < b + \varepsilon/2. \end{array}$

Po sečtení obou nerovností máme $(a_n + b_n) \in U(a + b, \varepsilon)$. □

Úloha 2.3.10. *Dokažte větu pro součet, kde a je vlastní limita a* $b = +\infty$.

Věta 2.3.11 (limita nerovnosti)**.** *Nechť* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ *a pro nekonečně mnoho n platí* $a_n \leq b_n$. *Pak* $a \leq b$.

Důkaz sporem. Kdyby bylo $a > b$, existovala by disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že $\forall x \in U(a) \forall y \in U(b)$ by platilo $x > y$. Pro skoro všechna n je však $a_n \in U(a)$, $b_n \in U(b)$, tedy by platilo $a_n > b_n$, což dává spor s předpokladem věty. □

Pro konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ zřejmě platí, že když pro nekonečně mnoho členů je $a_n \leq b_n$ a pro nekonečně mnoho členů je $a_n > b_n$, pak $a = b$.

Věta 2.3.12 (věta o třech limitách)**.** *Nechť* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = a$ *a nechť pro skoro všechna n je* $a_n \leq c_n \leq b_n$. *Pak* $\lim c_n = a$.

Princip důkazu. Podle definice limity patří do libovolného okolí $U(a)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ a také skoro všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$. Proto do $U(a)$ patří také skoro všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$. □

Pro nevlastní limity má věta o třech limitách (zvaná též věta o třech posloupnostech) speciální tvar. Je-li totiž $\lim a_n = +\infty$, lze brát za b_n posloupnost $\{+\infty\}$, proto z nerovnosti $a_n \leq c_n$ plyne $\lim c_n = +\infty$. Podobně lze větu o třech limitách upravit pro nevlastní limitu $-\infty$.

2.4 Nulové posloupnosti

Jsou to posloupnosti, kde $\lim a_n = 0$. Nulové posloupnosti fakticky nejsou jen zvláštním případem konvergentních posloupností, ale i naopak, konvergenci bychom mohli definovat užitím nulových posloupností podle věty:

Věta 2.4.1.

$$a_n \to a \Leftrightarrow (a_n - a) \to 0.$$

Uvádíme některé věty, které mají vztah k nulovým posloupnostem.

Věta 2.4.2. *Jestliže $a_n \to a$, pak $|a_n| \to |a|$.*

Tato věta neplatí pro $a \neq 0$ naopak, ale pro $a = 0$ ano.

Věta 2.4.3. *Jestliže $|a_n| \to +\infty$, je $1/a_n$ posloupnost nulová.*

Jestliže jmenovatel zlomku konverguje k nule, je situace složitější:

Věta 2.4.4. *Je-li $\forall n \in \mathbb{N}$* $a_n > 0,\ a_n \to 0,$ *pak* $1/a_n \to +\infty,$
$a_n < 0,\ a_n \to 0,$ *pak* $1/a_n \to -\infty,$
$a_n \neq 0,\ a_n \to 0,$ *pak* $1/|a_n| \to \infty.$

Nulových posloupností se s výhodou využívá při výpočtech limit.

Úlohy:

2.4.1. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2+n}{4n^2+5}$.

2.4.2. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6\cdot 2^{2n}+5\cdot 2^n-4}{2^{2n+1}-2^n+15}$.

2.4.3. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n+150}{n^2-0,25}$.

2.4.4. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3-8n}{9n^2+10}$.

2.5 Posloupnost aritmetická a posloupnost geometrická

Někdy se pro uspořádané n-tice používá název *konečné posloupnosti*, který zčásti navozuje použití posloupností v praxi. V praxi je mnoho situací, kdy známe několik prvních členů a_1, a_2 , $a_3, \ldots, a_n$ nějaké posloupnosti a pomocí této znalosti chceme zjistit, zkonstruovat nebo předpovědět její další člen a_{n+1}. Může jít o posloupnost peněžních částek, (časovou) posloupnost údajů o objemu výroby, posloupnost časových termínů nebo intervalů ad. Problémem je, *jak* určit další člen (nebo alespoň jeho přibližnou hodnotu) ze znalosti předchozích. Může jít o nalezení vzorce pro n-tý člen, rekurentního pravidla nebo i o jiný postup.

Zvláštní pozornosti si zaslouží posloupnost aritmetická a posloupnost geometrická, které se v praxi vyskytují poměrně často.

Aritmetická posloupnost

je (definována jako) posloupnost, která je dána svým prvním členem a_1, konstantní diferencí d a rekurentním pravidlem

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n + d.$$

Aritmetickou posloupnost lze rovněž definovat jako posloupnost, u níž rozdíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n-tý člen:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

(Dokazuje se jednoduše např. matematickou indukcí). Vidíme, že aritmetická posloupnost má pro $d > 0$ limitu $+\infty$, pro $d < 0$ limitu $-\infty$.

Úloha 2.5.1. *V posledních třech měsících činil celkový objem zakázek přibližně* $a_1 = 325$ *tisíc Kč,* $a_2 = 354$ *tisíc Kč a* $a_3 = 383$ *tisíc Kč. Jaký objem lze očekávat ve 4. měsíci?*

Řešení. Lze vyslovit hypotézu, že objem zakázek tvoří aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 325$, $d = 29$ (tisíc Kč). Pak $a_4 = a_3 + d = 412$ (tisíc Kč). Lze očekávat objem zakázek za 412 tisíc Kč. (Samozřejmě korektnost vyslovení takové hypotézy závisí na praktických okolnostech.) □

Praktický význam může mít i součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti. Vzorec pro s_n lze odvodit např. takto: Vyjádříme s_n dvěma způsoby:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d),$$
$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d).$$

Po sečtení máme

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n), \quad \text{takže} \quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Úloha 2.5.2. *Na skládce jsou uloženy roury tak, že v dolní vrstvě jich je 26 a každá roura v každé vyšší vrstvě vždy zapadá mezi dvě roury ve vrstvě nižší; vrstev je celkem 12. Kolik je na skládce rour?*

Řešení. Položíme $a_1 = 26$; pak $d = -1$. V horní vrstvě je $a_{12} = 26 + 11 \cdot (-1) = 15$ rour a celkem $s_{12} = 6 \cdot (26 + 15) = 246$ rour. □

Geometrická posloupnost

je (definována jako) posloupnost, která je dána svým 1. členem a_1, konstantním kvocientem $q \neq 0$ a rekurentním pravidlem

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Geometrickou posloupnost lze tedy rovněž definovat jako posloupnost, u níž podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n-tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

(Dokazuje se jednoduše například matematickou indukcí).

Úloha 2.5.3. *V prvním měsíci roku činil obrat 300 000 Kč a v každém dalším měsíci byl o* 5% *větší než v měsíci předchozím. Určete předpokládaný listopadový obrat.*

Řešení. Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 300\,000$, $q = 1{,}05$, $n = 11$. Pak

$$a_{11} = 300\,000 \cdot 1{,}05^{10} \approx 300\,000 \cdot 1{,}629 = 489\,000 \text{ Kč}.$$

Viz poznámku za úlohou 2.5.1. □

Je-li $a_1 > 0$, pak geometrická posloupnost $\{a_1 \cdot q^{n-1}\}$ má limitu 0 (pro $|q| < 1$) nebo a_1 (pro $q = 1$) nebo $+\infty$ (pro $q > 1$) a nebo nemá limitu (pro $q < -1$).

Praktický význam může mít opět součet prvních n členů geometrické posloupnosti (tj. n-tý částečný součet geometrické řady).

Vzorec pro s_n lze odvodit takto: Vyjádříme s_n a $q \cdot s_n$:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}, \\ q \cdot s_n &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n. \end{aligned}$$

Po odečtení je $s_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n)$, takže

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{tj. též} \quad s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Úloha 2.5.4. *Vynálezce šachové hry požadoval podle pověsti odměnu za každé ze 64 polí šachovnice takto: za 1. pole jedno obilní zrno, za 2. pole 2 zrna, za 3. pole 4 zrna, atd., za každé další vždy dvojnásobek. Kolik zrnek obilí měl dostat?*

Řešení. Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$. Proto

$$s_{64} = 1 \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1{,}845 \cdot 10^{19}$$

a to je více obilí, než se kdy na Zemi urodilo. □

2.6 Některé významné limity

Věta 2.6.1. $\forall a > 0 : \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$

Princip důkazu. Pro $a > 1$ položíme $\sqrt[n]{a} = 1 + u_n$, tedy $u_n > 0$. Podle Bernoulliovy nerovnosti je $a = (1 + u_n)^n > 1 + n \cdot u_n$, odkud $0 < u_n < \dfrac{a-n}{n}$ a podle věty o třech limitách je $u_n \to 0$. Pro $a < 1$ použijeme předchozí výsledek na číslo $\dfrac{1}{a}$, pro $a = 1$ je výsledek zřejmý. □

Podobně lze užitím vhodných odhadů odvodit následující limity:

Věta 2.6.2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Věta 2.6.3. $\forall a > 1, \forall k > 0 : \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = +\infty.$

(Říkáme, že exponenciála a^n roste k $+\infty$ rychleji *než mocnina n^k.)*

Úloha 2.6.4. *Dokažte, že* $\forall a > 1 : \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0.$

Řešení. Pro $\forall \varepsilon > 0$ je $a^\varepsilon > 1$, takže pro skoro všechna n platí $1 < \sqrt[n]{n} < a^\varepsilon$, odkud po zlogaritmování nerovnosti při základu a plyne uvedené tvrzení. □

Úloha 2.6.5. *Vypočtěte* $\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!}$, *kde* $q > 0$.

Řešení. Pro $q \leq 1$ je tato limita rovna 0. Pro $q > 1$ má čitatel i jmenovatel limitu $+\infty$, takže nelze použít větu o limitě podílu. Uvedený výraz označme a_n; pak

$$(*) \qquad a_{n+1} = \frac{q}{n+1} a_n,$$

proto pro skoro všechna n je posloupnost $\{a_n\}$ klesající a zdola omezená (nulou), takže má limitu; označme ji a. Přejdeme-li v rovnosti (*) k limitě, máme $a = 0$. Říkáme, že faktoriál roste k $+\infty$ rychleji než exponenciála q^n. □

Úloha 2.6.6. *Ukažte, že každé iracionální číslo je limitou neklesající posloupnosti racionálních čísel; najděte tyto posloupnosti pro* $r = \pi$, $s = \sqrt{2}$.

Řešení. Lze uvažovat například posloupnost dolních desetinných aproximací. □

Poznámka 2.6.7. Kromě číselných posloupností pracujeme v matematické analýze i s dalšími typy posloupností; uvažují se třeba posloupnosti množin (např. intervalů), posloupnosti funkcí, ad. Definice těchto posloupností vytvoříme podle stejného schématu. Např. posloupnost funkcí definujeme jako zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny všech funkcí. Pracujeme-li s jinými posloupnostmi než s posloupnostmi číselnými, je třeba dbát na korektnost definice posloupnosti, případně její limity.

2.7 Číslo e

Funkce $y = \mathrm{e}^x$ a funkce $y = \ln x$ $(= \log_{\mathrm{e}} x)$ patří k nejdůležitějším funkcím v matematické analýze; v obou případech je základem Eulerovo číslo e.

Číslo e je definováno jako limita posloupnosti $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Abychom tuto definici mohli považovat za korektní, je třeba dokázat, že uvedená posloupnost je konvergentní; její členy označujme dále a_n. Důkaz existence limity posloupnosti $\{a_n\}$ lze provést ve dvou krocích:

1. dokážeme, že tato posloupnost je rostoucí,
2. dokážeme, že je shora omezená.

Existence konečné limity pak plyne z věty o limitě monotónní posloupnosti.

ad 1) Podle binomické věty je

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

První dva členy součtu na pravé straně jsou rovny 1, pro každý další člen provedeme úpravu

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{1}{k!} =$$
$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.$$

Pro posloupnost $\{a_n\}$ tak platí, že každý její člen a_n je součtem $n+1$ kladných výrazů, v nichž jsou činitelé tvaru $\left(1-\frac{j}{n}\right)$. Jestliže nyní přejdeme od n k $n+1$, je a_{n+1} součtem $n+2$ výrazů s činiteli tvaru $\left(1-\frac{j}{n+1}\right)$. Jelikož $\left(1-\frac{j}{n+1}\right) > \left(1-\frac{j}{n}\right)$ a navíc v a_{n+1} je o jeden kladný sčítanec víc, je $a_{n+1} > a_n$, posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

ad 2) Ve výrazu pro a_n nahradíme všechny „závorky“ $\left(1-\frac{j}{n+1}\right)$ číslem 1, takže platí

$$a_n < b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Závěr: Podle věty o limitě monotónní posloupnosti existuje limita posloupnosti $\{a_n\}$; nazýváme ji Eulerovo číslo a označujeme ji e; z předchozího plyne, že $2 < \mathrm{e} < 3$.

Výpočet čísla e

Hodnotu čísla e lze vcelku snadno určit jako součet číselné řady. Vidíme, že pro konstantní $k < n$ platí

$$a_n > 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.$$

Odsud pro $n \to +\infty$ máme $\mathrm{e} \geq b_k$, takže platí $a_n < b_n \leq \mathrm{e}$; podle věty o třech limitách pak je $\lim_{n\to+\infty} b_n = \mathrm{e}$. Přitom b_n je podle své definice tzv. n-tým částečným součtem řady, takže

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = 2,718\,281\,828\,459\,0\ldots$$

Tato řada „dosti rychle“ konverguje a má jednoduchý algoritmus výpočtu členů, takže výpočet hodnoty čísla e na zadaný počet desetinných míst lze provést vcelku rychle.

— * —

Kapitola 3

Pojem funkce

3.1 Definice funkce

Písmeno x nazýváme *proměnná* na (číselné) množině M $\Leftrightarrow$ může být ztotožněno s libovolným prvkem množiny M. Pojem funkce navazuje na pojem *binární relace* a na pojem *zobrazení*, jejichž základní znalost zde předpokládáme.

Definice 3.1.1. Každé zobrazení f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ (tj. zobrazení v $\mathbb{R}$) nazýváme ***reálná funkce*** *jedné reálné proměnné.* Je-li $(x, y) \in f$, píšeme $y = f(x)$; x se nazývá ***nezávisle proměnná***, y **závisle proměnná**; říkáme též, že *y je funkcí x.*

Chceme-li vyjádřit, že y je (zatím nepojmenovanou) funkcí x, zapíšeme $y = y(x)$. Vedle vyjádření „funkce f" se tolerují též zápisy „funkce $f(x)$" (chceme-li zdůraznit označení nezávisle proměnné) nebo „funkce $y = f(x)$" (chceme-li zdůraznit označení obou proměnných).

S pojmem funkce jsou spjaty dvě významné množiny:

definiční obor *funkce*:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; \exists (x, y) \in f\}\,,$$

funkční obor (***obor hodnot***):

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R}; \exists (x, y) \in f\}\,.$$

Hodnotu proměnné vyjadřujeme číslem nebo symbolem proměnné s indexem. Například v bodě $x_0 = 2$ má funkce $y = 3x$ hodnotu $y_0 = 6$. Je-li $M \subset D(f)$, je $f(M)$ označení pro $\{f(x); x \in M\}$. Je tedy $H(f) = f(D(f))$. Naopak, je-li $B \subset H(f)$, pak definujeme $f^{-1}(B)$ jako množinu $\{x \in D(f); f(x) \in B\}$.

Grafem funkce f v kartézských souřadnicích rozumíme množinu všech bodů euklidovské roviny, pro jejichž souřadnice x, y platí $(x, y) \in f$. Grafické znázornění funkce často svou názorností pomáhá k pochopení vlastností a průběhu funkce;

pro některé funkce však graf nedovedeme sestrojit, například pro Dirichletovu funkci. Grafy funkcí lze uvažovat také v polární souřadnicové soustavě, kdy ovšem dostáváme jiné křivky. Například grafem přímé úměrnosti $y = kx$ v kartézských souřadnicích je přímka, grafem téže funkce $\rho = k\varphi$ v polárních souřadnicích je Archimedova spirála. Neřekneme-li jinak, uvažujeme vždy graf v kartézských souřadnicích.

Způsoby definice funkce:

Funkci f lze vyjádřit takto: $f = \{(x, y) \in D(f) \times \mathbb{R}; V(x, y)\}$. Zadat (definovat) funkci f tedy znamená udat její definiční obor $D(f)$ a jisté pravidlo $V(x, y)$, jehož oborem pravdivosti je f a které stanovuje, jak k zadanému $x \in D(f)$ najít (vypočítat) hodnotu $f(x)$. Podle toho, jak je toto pravidlo formulováno, rozlišujeme tato zadání funkce:

a) (Explicitní) *rovnicí*, například

$$f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = x^2 - 1\right\},$$

nebo jednoduše $f : y = x^2 - 1$.

U funkce definované rovnicí, není-li řečeno jinak, bereme za $D(f)$ nejširší množinu, pro niž má rovnice smysl. Je-li předepsán jiný definiční obor, musíme jej uvést, například

$$f : y = x - 1, x \in \mathbb{N}.$$

b) *Tabulkou*, například

x	-2	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3	8

Také zadání funkce *výčtem prvků* lze považovat za zadání tabulkou, jde jen o jinou formu zápisu; například

$$f = \{(-2; 3), (-1; 0), (0; -1), (1; 0), (2; 3), (3; 8)\}.$$

Tabulkou či výčtem prvků bývají zadávány funkce, jejichž funkční hodnoty byly získány měřením nebo kde jsou tyto hodnoty důležitější než příslušné pravidlo (například daňové tabulky, bodovací sportovní tabulky). Tabelaci funkce však používáme i u funkcí definovaných jinak, pokud může tabulka posloužit lépe k přehlednosti nebo jiné praktické potřebě (například tabulka cen v závislosti na hmotnosti zboží).

c) *Grafem* (zpravidla kartézským). Další druhy grafů — šachovnicový, uzlový nebo graf v polární soustavě souřadnic — bývají méně časté.

Grafem bývají často vyjadřovány ty funkce, jejichž průběh je zapisován v přístrojích graficky na papírová média nebo na displeji.

d) *Po částech*; tak je definována například Dirichletova funkce $\chi(x)$. Podobným způsobem je definována funkce

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 \text{ pro } x < 0, \\ 0 \text{ pro } x = 0, \\ 1 \text{ pro } x > 0. \end{cases}$$

Rovnice $y = \chi(x)$ a $y = \operatorname{sgn} x$ však již považujeme za rovnice funkcí.

e) *Implicitní rovnicí*, například

$$x^2 + y^2 = 25;$$

takto se definují implicitní funkce $y = y(x)$, s nimiž je technika práce někdy poněkud odlišná. Zejména bývá vymezena množina $M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pro niž má platit $(x, y) \in M$. Například u výše uvedené rovnice může být zadáno, že M je polorovina $y \geq 0$.

f) *Parametricky*: Parametrické vyjádření je tvaru

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in J,$$

kde φ, ψ jsou funkce definované na množině (intervalu) J, přičemž funkce $y = f(x)$ je definována vztahem

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \exists t \in J \quad \text{tak, že} \quad x = \varphi(t) \wedge y = \psi(t)\}.$$

Například $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Parametrického vyjádření používáme ponejvíce při vyšetřování různých (například technických) křivek.

g) *Jinak*:

Někdy je pro výrokovou formu $V(x, y)$ dána jen slovní formulace. Například výroková forma $V(x, y) =$„y je největší celé číslo, které není větší než x“ definuje funkci $[\,.\,]$ „celá část“ (například $[3,8] = 3$, $[-1] = -1$, $[-6,7] = -7$; tím se tato funkce odlišuje od „počítačové“ INT(.)). Ostatně i goniometrické funkce sinus a kosinus jsou pomocí jednotkové kružnice definovány tímto způsobem (avšak $y = \sin x$, $y = \cos x$, jsou již *rovnice* těchto funkcí).

Výroková forma $V(x, y)$ je tedy jisté „pravidlo“ („předpis“), které ke každému číslu x z jisté množiny $D \subset \mathbb{R}$ přiřazuje právě jedno číslo $y \in \mathbb{R}$. Pojem funkce se někdy (z důvodů didaktických) ztotožňuje přímo s tímto pravidlem, podle nějž rozhodujeme, zda $(x,y) \in f$, nebo s jehož pomocí k danému x počítáme příslušnou funkční hodnotu $f(x)$. I při našem pojetí funkce však toto pravidlo chápeme jako atribut a druhou stránku pojmu funkce. Pro toto pravidlo $V(x,y)$ tak proto lze používat stejné označení f jako pro funkci a zkráceně říkat a psát například „funkce $f : y = x^2 - 1$“ nebo prostě „funkce $y = x^2 - 1$“.

3.2 Řešení rovnic a nerovnic

Při vyšetřování vlastností (průběhu) funkcí se setkáváme s několika typickými úlohami, jež vedou na řešení rovnic a nerovnic resp. jejich soustav. Některé dále uvádíme.

a) ***Stanovení definičního oboru***

Je-li funkce f určena rovnicí a její definiční obor není zadán, je třeba zjistit $D(f)$ jako množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž je daná rovnice definována. Úlohy na definiční obor zpravidla vedou na řešení nerovnic nebo soustav nerovnic.

Úloha 3.2.1. *Určete definiční obor funkce* $y = \dfrac{\ln(4-x^2)}{1-x}$.

Řešení. Čitatel je definován pro $4 - x^2 > 0$, tj. na množině $M_1 = (-2, 2)$, jmenovatel je definován pro $1 - x \neq 0$, tj. na množině $M_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pravá strana rovnice funkce je tedy definována na množině $D(f) = M_1 \cap M_2 = (-2, 1) \cup (1, 2)$. □

b) ***Zjištění nulových bodů funkce***

Tyto úlohy jsou součástí vyšetřování průběhu funkce: při hledání průsečíků grafu funkce s osou x zjišťujeme nulové body funkce f (a dále též při výpočtu extrémů funkcí zjišťujeme nulové body 1. derivace, tj. stacionární body, při zkoumání inflexe zjišťujeme zpravidla nulové body 2.derivace funkce).

Úloha 3.2.2. *Určete nulové body funkce* $y = -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \mathrm{e}^{-x}\cos x$.

Řešení. Máme $y = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$. Hledáme body, v nichž $y = 0$, tj. řešíme goniometrickou rovnici $\cos x - \sin x = 0$, jež je ekvivalentní s rovnicí $\sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x = 0$ (neboť $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$) a tedy i s rovnicí $\sin(\frac{\pi}{4} - x) = 0$. Nulové body dané funkce jsou tedy $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$. □

c) ***Zjištění intervalů, kde je funkce kladná*** (***záporná***).

Také tyto úlohy jsou součástí vyšetřování průběhu funkce (při zjišťování intervalů monotónnosti řešíme nerovnice typu $y' > 0$, při zjišťování intervalů konvexnosti a konkávnosti řešíme nerovnice typu $y'' > 0$).

Úloha 3.2.3. *Určete intervaly, kde je funkce* $y = (6x - x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$ *kladná a kde je záporná.*

Řešení. Rovnici upravíme na tvar $y = (6 - x)x\,\mathrm{e}^{-x}$. Pro $x > 0 \wedge 6 - x > 0$, tj. na intervalu (0, 6) je daná funkce kladná, pro $x > 0 \wedge 6 - x < 0$, tj. na intervalu $(6, +\infty)$ je funkce záporná, pro $x < 0 \wedge 6 - x > 0$, tj. též na intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce záporná. □

d) ***Zjištění průsečíků grafů dvou funkcí***

Úloha 3.2.4. *Jsou dány funkce* $y = x^2 - 1$, $y = x + 1$. *Stanovte průsečíky grafů těchto funkcí.*

Řešení. Řešíme rovnici

$$x^2 - 1 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, x_2 = 2,$$

takže průsečíky jsou body $A[-1; 0]$ a $B[2; 3]$. □

e) ***Porovnání hodnot dvou funkcí***

Úloha 3.2.5. *Jsou dány funkce* $f_1 : y = x^2$, $f_2 : y = 4 - 2x - x^2$. *Porovnejte hodnoty těchto funkcí.*

Řešení.

$$f_1(x) < f_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 4 - 2x - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 < 0,$$

tedy na intervalu (-2, 1); podobně $f_1(x) > f_2(x)$ na množině $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ a obě funkce mají stejné funkční hodnoty v bodech -2 a 1. □

3.3 Vlastnosti funkcí

Omezenost

Definice 3.3.1. Funkce f se nazývá

(***shora***, ***zdola***) ***omezená na množině*** $M \subset D(f)$ $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina $f(M)$;

nazývá se (***shora***, ***zdola***) ***omezená*** $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina $H(f)$.

Například funkce $y = x^2$ je omezená zdola, není omezená shora a není omezená, ale na množině $\langle -10, 10\rangle$ je omezená.

Je-li funkce f omezená na M, existují $K, L \in \mathbb{R}$ tak, že platí $f(M) \subset \langle K, L\rangle$. Je-li funkce omezená, je omezená na každé množině $M \subset D(f)$.

Supremum množiny $f(M)$ nazýváme *supremum funkce* na množině M a označujeme $\sup\limits_{x\in M} f(x)$; podobně $\inf\limits_{x\in M} f(x)$.

Má-li množina $f(M)$ největší prvek, pak toto číslo nazýváme ***největší hodnota funkce*** f na množině M nebo též *globální* (*absolutní*) *maximum* funkce f na množině M; značí se $\max\limits_{x\in M} f(x)$, podobně $\min\limits_{x\in M} f(x)$.

Pokud $M = D(f)$, pak označení $x \in M$ vynecháváme.

Monotónnost

Definice 3.3.2. Funkce f se nazývá ***rostoucí*** (***klesající***, ***neklesající***, ***nerostoucí***) ***na množině*** $M \subset D(f) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in M$ platí:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2),\; f(x_1) \le f(x_2),\; f(x_1) \ge f(x_2)).$$

Funkci f rostoucí na $D(f)$ nazýváme ***rostoucí*** (tj. neuvádíme, kde je rostoucí), podobně funkce ***klesající***, ***neklesající***, ***nerostoucí***.

Pro funkce rostoucí a funkce klesající používáme souhrnný název funkce ***ryze monotónní***; souhrnný název pro všechny čtyři uvedené druhy funkcí je funkce ***monotónní***.

Například funkce $y = 1/x$ je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a je klesající i na intervalu $(0, +\infty)$, ale není klesající (tj. není klesající na $D(f)$).

Kromě monotónnosti na množině, což je globální vlastnost funkce, se zavádí i pojem monotónnosti v bodě jako vlastnost lokální. Uvedeme definici jen pro funkci rostoucí, další tři případy monotónnosti se formulují analogicky.

Definice 3.3.3. Funkce f se nazývá ***rostoucí v bodě*** $x_0 \in D(f) \quad \Leftrightarrow \quad \exists U(x_0) \subset D(f)$ tak, že $\forall x \in P(x_0-)$ platí $f(x) < f(x_0)$ a $\forall x \in P(x_0+)$ platí $f(x_0) < f(x)$.

Úloha 3.3.4. *Podobně definujte funkci klesající (nerostoucí, neklesající) v bodě x_0 a dále funkci rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající v bodě x_0 zleva resp. zprava. (Tuto vlastnost vyšetřujeme zejména v krajních bodech intervalů.)*

Věta 3.3.5 (vztah monotónnosti v bodě a na intervalu)**.** *Funkce f definovaná na intervalu (a, b) je na tomto intervalu rostoucí (klesající, nerostoucí, neklesající) $\Leftrightarrow$ má takovou vlastnost v každém bodě tohoto intervalu.*

Princip důkazu. (pro f rostoucí):

1) Nechť je f rostoucí na (a, b). Zvolíme libovolný bod $x_0 \in (a, b)$ a jeho okolí $P(x_0) \subset (a, b)$. Je-li $x_1 \in P(x_0-)$, $x_2 \in P(x_0+)$, je $x_1 < x_0 < x_2$ a monotónnost v bodě x_0 plyne z monotónnosti na (a, b).

2) Nechť f je rostoucí v každém bodě intervalu (a, b). Zvolíme dva body $x_1 < x_2$ a dokážeme, že $f(x_1) < f(x_2)$. Pro každé x' z jistého $P(x_1)$ je $f(x_1) < f(x')$; nechť m je supremum množiny M všech takových x'. Kdyby $m < b$, bylo by $m \in M$, neboť i v m je f rostoucí a podle 2. vlastnosti suprema $\forall P(m-)$ obsahuje bod $x' \in M$, tedy $f(x_1) < f(x') < f(m)$. Současně by existovalo pravé okolí $P(m+) \subset (a, b)$ tak, že by pro všechny jeho body x'' platilo $f(x'') > f(m) > f(x_1)$, tj. $x'' \in M$, $x'' > m$ a to je spor s 1. vlastností suprema. Proto $m = b$, takže $x_2 \in M$ a $f(x_1) < f(x_2)$.

$\square$

Například funkce $y = \operatorname{sgn} x$ je rostoucí v bodě 0.

Parita

Definice 3.3.6. Funkce f se nazývá ***sudá*** (***lichá***) $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$x \in D(f) \quad \Rightarrow \quad -x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

Příklad sudé funkce: $y = \cos x$, příklad liché funkce: $y = \sin x$.

Úloha 3.3.7. *Dokažte, že funkce $y = 3x^2 - 5$, $y = |x|$ a Dirichletova funkce χ jsou sudé a že $y = 2x^3 + x$, $y = x|x|$ a $y = \operatorname{sgn} x$ jsou funkce liché.*

Pro polynomické funkce platí: jsou-li v polynomu jen členy se sudými exponenty, je daná funkce sudá, jsou-li zde jen členy s lichými exponenty, je funkce lichá.

Kartézský graf sudé funkce je souměrný podle osy y, graf liché funkce je souměrný podle počátku.

Periodičnost

Definice 3.3.8. Funkce f se nazývá ***periodická*** $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\exists p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$ tak, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

1) $x \in D(f) \Rightarrow (x \pm p) \in D(f)$,

2) $\forall x \in D(f) : f(x \pm p) = f(x)$.

Číslo p se nazývá ***perioda*** funkce f.

Je-li p perioda funkce f, je $\forall k \in \mathbb{Z}$ také číslo kp periodou funkce f. Nejmenší kladná perioda p_0, pokud existuje, se nazývá *primitivní* (též *základní*) *perioda* funkce f. Konstantní funkci zpravidla mezi periodické funkce nepočítáme.

Příklady periodických funkcí: $y = \sin x$ $(p_0 = 2\pi)$, $y = \operatorname{tg} x$ $(p_0 = \pi)$.

Úloha 3.3.9. *Dokažte, že funkce $y = x - [x]$ je periodická s periodou $p_0 = 1$ a že Dirichletova funkce χ je periodická a periodou je každé racionální číslo různé od nuly; zde p_0 neexistuje.*

Někdy je užitečné chápat periodičnost jen „jednostranně“, například „periodičnost vpravo,“ tj. tak, že v definici místo $(x \pm p)$ uvažujeme jen $(x + p)$, kde $p > 0$.

3.4 Operace s funkcemi

- ***Rovnost funkcí***:

  $$f = g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : ((x, y) \in f \Leftrightarrow (x, y) \in g).$$

  Obráceně, je-li $f \neq g$, znamená to, že buď $D(f) \neq D(g)$ nebo $\exists x' \in D(f) \cap D(g)$ tak, že $f(x') \neq g(x')$.

- ***Částečné uspořádání***: Je-li F množina funkcí a jsou-li všechny funkce definovány na M, definuje se na F částečné uspořádání nerovností $f < g$.

  Úloha 3.4.1. *Definujte nerovnost $f < g$ na M a objasněte její geometrický význam.*

  Například funkce $y = |x|$ a funkce $y = x + 1$ nejsou srovnatelné na $\mathbb{R}$, ale na $(0, +\infty)$ ano.

- ***Zúžení*** (***restrikce***) ***funkce***: Mějme funkci f; její restrikcí nazveme funkci g takovou, že $D(g) \subset D(f)$ a na $D(g)$ je $g(x) = f(x)$.

- ***Algebraické operace***: $\forall x \in D(f) \cap D(g)$ se definuje

  1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
  2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$,
  3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,
  4. $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ (pokud $g(x) \neq 0$.

- ***Skládání funkcí***: Mějme funkce f, φ a nechť $H(\varphi) \subset D(f)$. Pak složenou funkci $F = f \circ \varphi$ definujeme takto: $(f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)]$, přičemž funkci f nazýváme *vnější funkce* a funkci φ *funkce vnitřní.*

  Například ve složené funkci $y = \sin 2x$ je vnější funkce $y = \sin u$, vnitřní funkce $u = 2x$. Funkce může být složena i vícekrát, například $y = \mathrm{e}^{\sin(3x+1)}$.

  Složenou funkci můžeme vytvořit substitucí proměnné. Máme-li například funkci $y = 1 - x$ a dosadíme $x = \sin t$, dostáváme složenou funkci $y = 1 - \sin t$. Zvláštním případem složené funkce je $|f|$. Vnější funkce je $y = |z|$, vnitřní funkce $z = f(x)$.

Úloha 3.4.2. *Zobrazte funkci* $y = |x^2 - 2x|$.

Funkce prostá

Definice 3.4.3. Funkce f se nazývá ***prostá na*** $M \subset D(f) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in M$ platí: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

a nazývá se ***prostá*** $\quad \Leftrightarrow \quad$ je prostá na $D(f)$.

Množina M, na níž je funkce prostá, se nazývá jejím ***oborem prostoty***.

Například funkce $y = x^2$ není prostá, ale je prostá třeba na intervalu $\langle 0, +\infty)$, který je jejím oborem prostoty.

Věta 3.4.4 (vztah prostoty a ryzí monotónnosti)**.** *Je-li funkce ryze monotónní na* M*, je prostá na* M*.*

Důkaz. plyne z toho, že $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ a stejně i pro funkční hodnoty plyne z nerovností „<“, „>“ nerovnost „≠“. □

Obrácený vztah neplatí, existují prosté funkce, které nejsou monotónní, například funkce $y = 1/x$. Prostota funkce f je základním předpokladem pro to, aby inverzní relace f^{-1} byla zobrazením a tedy funkcí.

3.5 Funkce inverzní

Definice 3.5.1. Inverzní zobrazení f^{-1} k prosté funkci (na M) f nazýváme ***inverzní funkce***.

Je-li tedy funkce f prostá, pak k ní existuje funkce inverzní f^{-1} a platí

$$(x, y) \in f \quad \Leftrightarrow \quad (y, x) \in f^{-1};$$

přitom

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f).$$

Je-li f prostá na M, pak inverzní funkce má $D(f^{-1}) = f(M)$, $H(f^{-1}) = M$. Na M platí $f^{-1}(f(x)) = x$ a na $f(M)$ platí $f(f^{-1}(x)) = x$.

Geometrický význam: Grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrně sdružené podle přímky $y = x$ (osy I. a III. kvadrantu).

Například funkce $f : y = x^2 - 1$ je prostá na $M = \langle 0, +\infty)$, $f(M) = \langle -1, +\infty)$. Inverzní funkce f^{-1} je definována na $\langle -1, +\infty)$ a platí $x = y^2 - 1$ tj. $y = \sqrt{x+1}$. Pro $x \in \langle 0, +\infty)$ je $f^{-1} \circ f(x) = \sqrt{(x^2 - 1) + 1} = \sqrt{x^2} = x$, pro $x \in \langle -1, +\infty)$ je $f \circ f^{-1}(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 1 = x$.

Funkce a funkce k nim inverzní tvoří dvojice funkcí navzájem inverzních, neboť $(f^{-1})^{-1} = f$. Existují i funkce inverzní samy k sobě; graf takové funkce je souměrný podle přímky $y = x$ (například funkce $y = 1/x$, $y = a - x$, $y = x$).

Některé vlastnosti funkcí se přenášejí na funkce inverzní.

Věta 3.5.2 (o monotónnosti inverzní funkce). *Je-li funkce f rostoucí (klesající), je funkce f^{-1} také rostoucí (klesající).*

Princip důkazu. Nechť funkce $y = f(x)$ je rostoucí. Je-li $y_1 < y_2$, pak nemůže platit $x_1 > x_2$, protože z toho by plynulo $y_1 > y_2$. $\square$

3.6 Rozšíření pojmu funkce

Pojem funkce se v matematice používá i v širším pojetí, zejména jako zobrazení z nějaké množiny M do množiny $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}$, případně i do jiné množiny.

a) Je-li M množina uspořádaných n-tic $P = (x_1, \ldots, x_n)$ reálných čísel, je funkce $y = f(P)$ reálnou *funkcí n proměnných.*

b) Je-li M množina (systém) množin X, pak lze definovat různé *množinové funkce*; například:

   * Jsou-li množiny $X \in M$ konečné, definuje se množinová funkce n, kde $n(X)$ je *počet prvků* množiny X.
   * Jsou-li X křivky resp. rovinné obrazce resp. tělesa, definují se množinové funkce $s(X)$ (*délka křivky*) resp. $P(X)$ (*obsah – míra rovinného obrazce*) resp. $V(X)$ (*objem – míra tělesa*).

c) *Práce s texty.*

   V souvislosti s počítači vznikla větší potřeba práce s texty; množinu všech textů označíme T. Příklady *textových konstant*: 'Praha', 'JAN HUS', ''. Apostrofy zde uvedené mají úlohu omezovačů, tj, nezapočítávají se do textu. První z uvedených konstant má tedy 5 znaků, druhá konstanta má 7 znaků (také mezera mezi slovy je znak) a třetí konstanta je tzv. prázdný text. Mezera je jedním ze znaků, takže například 'Praha' je jiný text než 'Praha$\vee$' (tento text má 6 znaků; zde '$\vee$' je značka mezery), tedy 'Praha' $\neq$ 'Praha$\vee$'.

   Jsou-li x, y *textové proměnné* na množině T, lze položit (dosadit) například $x :=$'Praha', $y :=$'Zlín'; pak $x < y$ (tj. 'Praha' $<$ 'Zlín'), neboť jde o *abecední uspořádání.* Nejběžnější operací s texty je *spojování textů.* Má-li například textová proměnná x hodnotu 'Praha$\vee$' a proměnná z hodnotu '4', pak $x + z =$'Praha$\vee$4'.

   Na množině T se definuje funkce length: $T \to N_0$ (*délka textu*); například length('Praha') $= 5$, length('') $= 0$, pro $y :=$'Zlín' je length(y) $= 4$.

   Také různá zobrazení do T jsou běžně nazývána funkcemi.

   Funkce backwards: $T \to T$ (*text pozpátku*); například pro $x :=$'Praha' je backwards(x)$=$ 'aharP'.

Funkce Ucase: $T \rightarrow T$ (*velká abeceda*); například Ucase('Praha') = 'PRAHA'. Podobně Lcase (*malá abeceda*), Lcase('Praha') = 'praha'

Funkce trim: $T \rightarrow T$ (*vynechávání mezer* na konci textu); například pro x := 'Praha$\vee$' je trim(x) = 'Praha'.

Funkce left: $T \times N \rightarrow T$ (*text zleva*); například pro x := 'Praha', y := 2 je left(x,y) = 'Pr'. Podobně funkce right (*text zprava*) by dala right(x,y) = 'ha'.

Funkce mid: $T \times N \times N \rightarrow T$ (*text zevnitř*); pro x := 'Praha ', y := 3, z := 2 máme mid(x,y,z) = 'ah'.

V jednotlivých programovacích jazycích a softwarových systémech bývá definována řada standardních funkcí a další funkce si zpravidla může uživatel definovat podle potřeby.

$- * -$

Kapitola 4

Elementární funkce

4.1 Přehled elementárních funkcí

Jde o pojem spíše historický než matematický. Vymezuje se několik (*základních*) *elementárních funkcí* a z nich se pomocí konečného počtu algebraických operací a operací skládání vytvářejí další funkce, jež bývají v matematické literatuře někdy také nazývány *elementární funkce*.

Základní elementární funkce:

- funkce *konstantní* ($y = c$);
- funkce *mocninné* ($y = x^r$ pro libovolné $r \in R$, patří sem tedy i odmocniny a také například nepřímá úměrnost);
- *goniometrické* funkce ($y = \sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$) a funkce *cyklometrické* ($y = \arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$);
- *exponenciální* funkce ($y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$) a funkce *logaritmické* ($y = \log_a x$);
- *hyperbolické* funkce ($y = \operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{coth} x$) a funkce *hyperbolometrické* ($y = \operatorname{argsh} x$, $\operatorname{argch} x$, $\operatorname{argth} x$, $\operatorname{argcoth} x$).

Algebraické funkce

je název pro elementární funkce, které vzniknou z funkcí konstantních a z funkce $f(x) = x$ užitím operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování. Pokud nepoužijeme operaci odmocňování, dostaneme algebraické ***funkce racionální***. Algebraické funkce, které nejsou racionální, nazýváme ***iracionální***.

Zvláštní případy algebraických funkcí: například ***celá racionální funkce*** neboli funkce ***polynomická*** (algebraický polynom) a ***lomená racionální funkce***, patří mezi nejvýznamnější funkce studované v matematice.

Elementární funkce, které nejsou algebraické, se obvykle nazývají ***transcendentní***; ze základních elementárních funkcí mezi ně patří funkce exponenciální, logaritmické, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické, ale též mocninná funkce s iracionálním exponentem.

Elementární funkce mají velmi rozmanité vlastnosti (například pokud jde o omezenost, monotónnost, paritu, periodičnost aj.) a proto společné vlastnosti lze formulovat jen na velmi obecné úrovni. (Uvidíme zejména, že elementární funkce jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru a mají derivaci ve všech vnitřních bodech svého definičního oboru. Derivací elementární funkce je opět elementární funkce. Naopak ovšem primitivní funkcí k funkci elementární nemusí být funkce elementární).

Příklady funkcí, které nejsou elementární:

Dirichletova funkce $\chi(x)$, funkce $\operatorname{sgn} x$, funkce $[\,.\,]$ „celá část", funkce $\{\,.\,\}$ „lomená část" definovaná vztahem $\{x\} = x - [x]$.

Úloha 4.1.1. *Znázorněte graficky funkci $y = \{x\}$ a dokažte, že je periodická s periodou 1.*

Ani absolutní hodnota není považována za elementární funkci. Elementárními funkcemi nejsou ani jiné funkce definované „po částech", jako například funkce

$$y = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0, \\ x^2 & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

(Tuto funkci bychom ovšem mohli nazvat „po částech elementární").

4.2 Algebraické funkce

Při popisu jednotlivých funkcí nebo druhů funkcí někdy použijeme i některé pojmy, které jsou obsahem až pozdějších kapitol, ale kde určitou úroveň jejich znalosti lze předpokládat, ježto jsou obsahem středoškolského učiva matematiky. Jde tedy o jakési rozšířené zopakování středoškolského učiva.

a) Mocniny s přirozeným a celým exponentem

Mocninu a^n pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme jako součin n činitelů a. Z této definice ihned plynou vlastnosti mocnin, zejména

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall r, s \in \mathbb{N}:$

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,

(2) $a^r : a^s = a^{r-s}$ (pokud $a \neq 0$, $r > s$),

(3) $(a^r)^s = a^{rs}$,

(4) $(ab)^r = a^r b^r$,

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ (pokud $b \neq 0$),

(6) $a^r = b^r \Leftrightarrow a = b$ (pokud $a, b > 0$).

K tomu přidejme ještě vlastnosti vyjádřené nerovnostmi

(7) $\forall a, b > 0 : a^r < b^r \Leftrightarrow a < b$,

(8) $\forall a > 1, r < s \Rightarrow a^r < a^s; \quad \forall a \in (0, 1), r < s \Rightarrow a^r > a^s$.

Chceme-li rozšířit pojem mocniny rozšířením číselného oboru exponentu, přichází nejprve exponent 0. Mají-li zůstat v platnosti výše uvedené vlastnosti (1)–(5), je třeba podle (2) definovat

$$\forall a \neq 0; a^0 = 1.$$

Vlastnost (2) pak platí pro $r \geq s$ a u všech vlastností se musíme omezit na mocniny s nenulovým základem, neboť 0^0 není definována. Vlastnosti (6) a (7) ovšem pro $r = 0$ neplatí.

Dalším krokem je rozšíření pojmu mocnina pro exponent, jímž je celé číslo. Klíčovou vlastností je opět (2), podle níž se definuje (položíme-li $r = 0$, $s = k$)

$$\forall a \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}; \quad a^{-k} = \frac{1}{a^k}.$$

Vlastnost (2) pak platí již bez omezení pro $r, s \in \mathbb{Z}$ a vlastnost (7) nabude tvaru

(7') $\forall r > 0, \forall a, b > 0 : \quad a^r < b^r \Leftrightarrow a < b$,

$\forall r < 0, \forall a, b > 0 : \quad a^r > b^r \Leftrightarrow a < b$.

b) Odmocniny

Definice 4.2.1. Pro každé přirozené číslo n definujeme n-tou odmocninu z nezáporného čísla a jako takové nezáporné číslo x, pro něž platí $x^n = a$.

Označení: $x = \sqrt[n]{a}$.

Podle definice tedy $(\sqrt[n]{a})^n = a$, například $(\sqrt{3})^2 = 3$.

Existence n-té odmocniny se zdá být zřejmá. Toto zdání podporují jednoduché příklady jako $\sqrt[3]{8} = 2$, neboť $2^3 = 8$. Jestliže však vyšetřujeme méně zřetelné případy, třeba $\sqrt[3]{\pi}$, je třeba si odpovědět na otázku, zda n-tá odmocnina pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ skutečně existuje a zda je to jediné číslo.

Věta 4.2.2 (o existenci a jednoznačnosti n-té odmocniny)**.** *$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ existuje právě jedno číslo $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, takové, že $x^n = a$.*

Úloha 4.2.3. *Zjednodušte roznásobením $U = \left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)$.*

Úloha 4.2.4. *Zjednodušte umocněním a usměrněním*

$$V = \frac{\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}.$$

K základním vlastnostem odmocnin patří:

Věta 4.2.5. *$\forall a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $\forall m, n, r \in \mathbb{N}$:*

(1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$,

(2) $\sqrt[nr]{a^r} = \sqrt[n]{a}$.

Důkaz.

ad (1) Pro levou a pravou stranu rovnosti platí:
$L = x^m$, kde podle definice $x^n = a$; po umocnění na m-tou máme $x^{mn} = a^m$.
$P = y$, kde podle definice je $y^n = a^m$. Je tedy $x^{mn} = y^n$ a z toho $x^m = y$,
takže $L = P$.

ad (2) $L = x$, kde $x^{nr} = a^r$, což dává $x^n = a$.
$P = y$, kde $y^n = a$. Tedy $x^n = y^n$ a z toho $x = y$,
tj. $L = P$.

□

c) Mocniny s racionálním exponentem

Chceme-li rozšířit pojem mocniny na exponent racionální, vyjdeme ze základní vlastnosti n-té odmocniny z čísla a: $x^n = a$. Tedy položíme $x = a^t$ a po umocnění na n-tou je $a = x^n = a^{tn}$, tedy $tn = 1$, $t = 1/n$. To vede k definici ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > 0$):

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

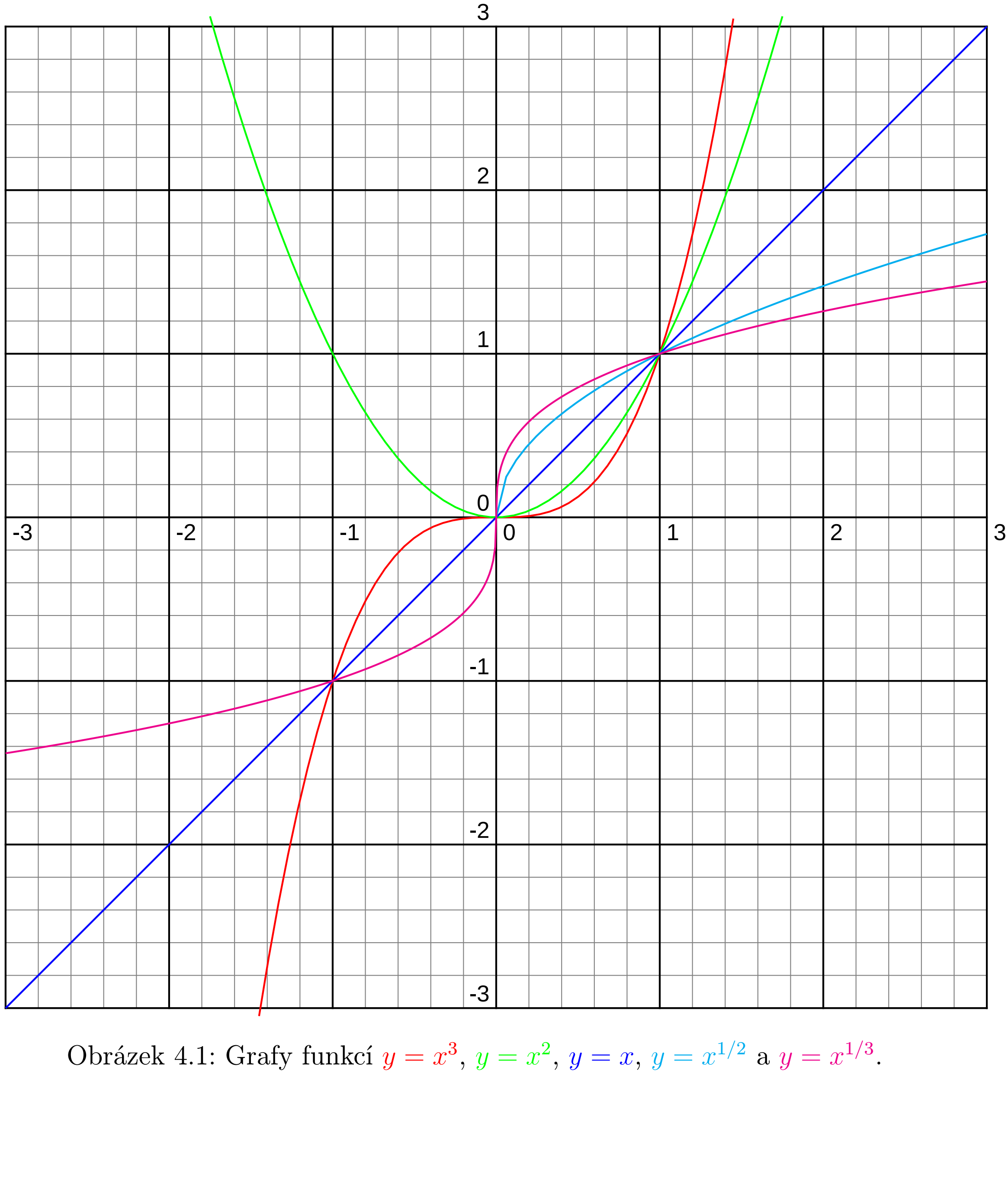
Vlastnosti mocnin zůstávají zachovány s tím, že musíme uvážit příslušné podmínky pro a, b, r, s.

Pojem mocniny lze rozšířit na libovolné reálné exponenty, ale mocnina s iracionálním exponentem již není algebraická funkce.

Definice 4.2.6. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $q \in \mathbb{Q}'$. Pak definujeme

$$a^q = \sup_{r \in Q,\, r < q} \{a^r\}.$$

Výše uvedené vlastnosti mocnin (1)–6), (7'), (8) platí pro libovolné reálné exponenty.



Obrázek 4.1: Grafy funkcí $y = x^3$, $y = x^2$, $y = x$, $y = x^{1/2}$ a $y = x^{1/3}$.

d) Polynomické funkce

Jsou dány rovnicí $y = P(x)$, kde

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

je algebraický polynom. Pro $a_0 \neq 0$ jde o polynom a tedy i o polynomickou funkci n-tého stupně; $D(f) = \mathbb{R}$. Polynomická funkce obsahující jen liché mocniny x je lichá, pokud obsahuje jen sudé mocniny x, je sudá.

Při studiu polynomických funkcí se využívá poznatků z algebry, která se algebraickými polynomy zabývá. Zejména se využívá:

- dělení polynomů (se zbytkem),
- rozklad polynomu na součin kořenových činitelů a nerozložitelných kvadratických polynomů,
- věta o rovnosti polynomů. (Jestliže dva polynomy P, Q nejvýše n-tého stupně se rovnají v $n+1$ bodech, pak $P(x) = Q(x)$ na $\mathbb{R}$, tj. oba polynomy mají tentýž stupeň a tytéž koeficienty.)

Nyní uveďme některé zvláštní případy polynomických funkcí.

Mocninná funkce

$$y = x^n$$

(s přirozeným exponentem n).

Grafem je parabola n-tého stupně.

Pro n **sudé** je f sudá funkce, která pro $n \geq 2$ je na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ klesající a na intervalu $\langle 0, +\infty)$ rostoucí, tedy v bodě 0 má minimum, $H(f) = \langle 0, +\infty)$, funkce je konvexní na $\mathbb{R}$. Při definici inverzní funkce se za obor prostoty bere interval $\langle 0, +\infty)$. Inverzní funkce $y = \sqrt[n]{x}$ je tedy definována na intervalu $\langle 0, +\infty)$ a stejný je i obor hodnot.

Pro n **liché** je f lichá funkce, je rostoucí na $\mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}$. Pro $n \geq 3$ je f konkávní na $(-\infty, 0\rangle$ a konvexní na $\langle 0, +\infty)$, v bodě 0 má inflexi. Ježto f je bijekcí $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, je inverzní funkce $y = \sqrt[n]{x}$ definována na $\mathbb{R}$ a má týž obor hodnot. Z tohoto důvodu je možné a účelné pro lichá n definovat n-tou odmocninu i ze záporných čísel; například $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Konstantní funkce

Jsou dány rovnicí

$$y = k,$$

kde k je konstanta; $H(f) = \{k\}$. Jsou to funkce současně neklesající i nerostoucí, sudé ($y = 0$ je současně i lichá). V každém bodě mají neostré lokální maximum i neostré lokální minimum. Grafem každé konstantní funkce $y = k$ v kartézské soustavě souřadnic je přímka rovnoběžná s osou x, resp. osa x ($y = 0$). V polární soustavě souřadnic je grafem konstantní funkce $\rho = r$ (kde $r > 0$), $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ kružnice se středem v počátku a s poloměrem r.

Lineární funkce

Jsou dány rovnicí

$$y = kx + q,$$

kde $k \neq 0$, q jsou reálné konstanty; $D(f) = H(f) = R$. Pro $k > 0$ to jsou funkce rostoucí, pro $k < 0$ klesající, pro $q = 0$ jsou liché. Grafem každé lineární funkce v kartézské soustavě souřadnic je přímka, jež není rovnoběžná s osou x ani k ní kolmá. Konstanta k je *směrnicí* přímky, tj. $k = \operatorname{tg} \varphi$, kde φ je velikost orientovaného úhlu určeného osou x a touto přímkou; zpravidla bereme $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Parametr q znamená *úsek na ose y*.

Pro $q = 0$ se lineární funkce nazývá též *přímá úměrnost*, kartézským grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem. Pro lineární funkci (zpravidla pro $q \neq 0$) se používá též název *lineární závislost*.

Grafem lineární funkce v polární soustavě souřadnic je Archimedova spirála.

Ježto lineární funkce jsou ryze monotonní, jsou i prosté. Funkce inverzní jsou opět lineární. Funkce $y = a - x$ a funkce $y = x$ jsou samy k sobě inverzní.

Lineární funkce je velmi důležitá v řadě problémů, v nichž se složitější průběh nějaké funkce nahrazuje (aproximuje) průběhem lineárním; například při lineární interpolaci funkcí.

Úloha 4.2.7. *Jsou dány dvě tabulkové hodnoty funkce f: $f(4,75) = 0,6758$, $f(4,80) = 0,6803$. Pomocí lineární interpolace stanovte $f(4,78)$.*

Řešení. Danými dvěma body proložíme přímku, její rovnice je

$$y = 0,6758 + \frac{0.6803 - 0.6758}{4.80 - 4.75}(x - 4.75) = 0,6758 + 0,09(x - 4,75);$$

$$f(4,78) = 0,6758 + 0,09 \cdot 0,03 = 0,6758 + 0,0027 = 0,6785.$$

□

Kvadratické funkce

Jsou dány rovnicí

$$y = ax^2 + bx + c,$$

kde $a \neq 0$, b, c jsou konstanty; $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f)$ je pro $a > 0$ interval typu $\langle m, +\infty)$, pro $a < 0$ je to interval typu $(-\infty, m\rangle$, kde m je minimum resp.

maximum funkce f. Tohoto ostrého lokálního extrému nabývá funkce f v bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Grafem každé kvadratické funkce v kartézské soustavě souřadnic je (kvadratická) parabola; pro funkci $y = ax^2$ je její vrchol v počátku soustavy souřadnic.

e) Racionální lomené funkce

Jsou to funkce dané rovnicí

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy. Je-li stupeň čitatele větší nebo roven stupni jmenovatele, dovedeme racionální lomenou funkci vyjádřit ve tvaru

$$y = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $S(x)$ je podíl a $R(x)$ je zbytek při dělení $\frac{P(x)}{Q(x)}$.Tato úprava (které se říká „snížit stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele“) se používá při integraci racionálních funkcí.

Úloha 4.2.8. *Je dána funkce* $y = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 7}{x^2 + 3}$. *Proveďte snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele.*

Řešení. Po provedeném dělení dostaneme $y = x - 2 + \dfrac{3x - 1}{x^2 + 3}$. □

Úloha 4.2.9. *Je dána funkce* $y = \dfrac{x^5 - 1}{x^2 + 1}$. *Proveďte snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele, aniž provedete klasické dělení.*

Řešení. V čitateli vhodné členy přičítáme a odčítáme a zlomek rozdělíme na více zlomků. Dostaneme $y = x^3 - x + \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$. □

Lineární lomené funkce

Jsou to funkce s rovnicí

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

kde a, b, c, d jsou reálné konstanty, přičemž platí

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0; \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}.$$

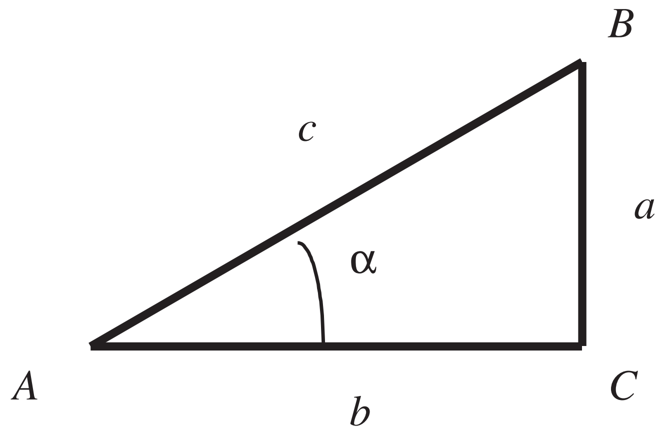
Jsou to funkce prosté, grafem v kartézské soustavě souřadnic je rovnoosá hyperbola. Inverzní funkce jsou téhož typu, tj. jsou též lineární lomené.

Zvláštním případem je funkce zvaná *nepřímá úměrnost* s rovnicí $y = \dfrac{a}{x}$, která je sama k sobě inverzní.

4.3 Goniometrické funkce a funkce cyklometrické

Pravoúhlé trojúhelníky

Podobnost trojúhelníků jako relace ekvivalence na množině všech pravoúhlých trojúhelníků, definuje rozklad této množiny na třídy. Z vlastnosti podobnosti plyne, že každá třída těchto trojúhelníků je určena jedním vnitřním ostrým úhlem a že všechny trojúhelníky z téže třídy ekvivalence se shodují v poměru odpovídajících si stran. Toho se využívá k definici *goniometrických funkcí ostrého úhlu*.



Obrázek 4.2: Pravoúhlý trojúhelník

Definice 4.3.1. $\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}.$

Tato definice pracuje zpravidla s úhly v míře stupňové.
Odsud
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Z $\triangle ABC$ dále plyne:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Zvláštní hodnoty

Některé zvláštní hodnoty goniometrických funkcí lze odvodit (při použití Pythagorovy věty)

- z rovnostranného trojúhelníku s výškou:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

(podobně pro „kofunkce“ $\cos\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$).

- ze čtverce s úhlopříčkou:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1.$$

Na této úrovni se přijímá jako důsledek definice, že když α roste od 0° do 90°, tak funkce sinus roste od 0 do 1, funkce tangens roste od 0 do $+\infty$, funkce kosinus klesá od 1 k 0 a funkce kotangens klesá od $+\infty$ k 0.

Rovněž pomocí názoru se na této úrovni snese rozšíření funkcí:

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \operatorname{tg} 0^\circ = 0, \quad \operatorname{cotg} 0^\circ \text{ není definován;}$$

podobně

$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0, \quad \operatorname{tg} 90^\circ \text{ není definován}, \quad \operatorname{cotg} 90^\circ = 0.$$

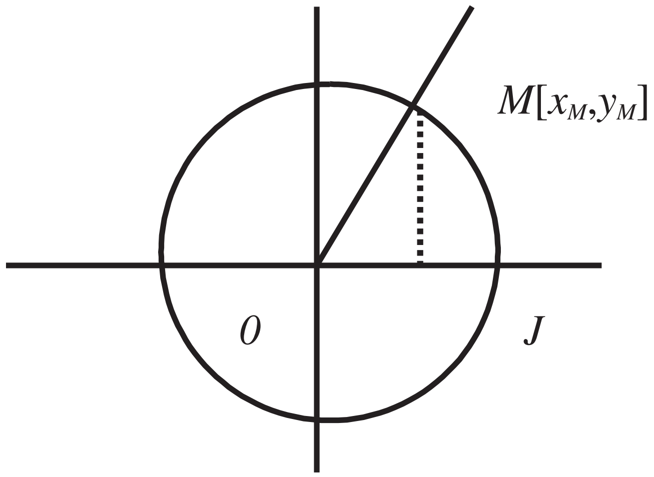
Užití jednotkové kružnice k definici goniometrických funkcí

Tato definice se obyčejně spojuje již s používáním míry obloukové, přičemž přepočet mezi velikostí úhlu α v míře stupňové a velikostí x v míře obloukové je dán vztahy

$$x = \frac{\pi}{180}\alpha, \qquad \alpha = \frac{180}{\pi}x.$$

Definice goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice přináší jeden didaktický problém. Chceme-li zachovat označení x pro velikost úhlu v míře obloukové, musíme volit jiné označení pro souřadnicové osy, například u, v. Chceme-li však zachovat označení os x, y, musíme volit jiné označení pro velikost úhlu, například t, tedy nemůžeme přímo definovat $\sin x$, přestože právě tento zápis v matematické analýze nejvíce používáme.

Definice 4.3.2. Je-li O počátek pravoúhlé soustavy souřadnic, J jednotkový bod na ose x, $M(x_M, y_M)$ bod na jednotkové kružnici a t velikost orientovaného úhlu $\angle JOM$, pak hodnota funkce $\cos t$ je definována jako x-ová souřadnice bodu M, $\cos t = x_M$, a hodnota funkce $\sin t$ je definována jako y-ová souřadnice bodu M, $\sin t = y_M$.



Obrázek 4.3: Užití jednotkové kružnice k definici goniometrických funkcí

Vlastnosti plynoucí z definice funkcí

Z definice máme: $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$, $H(\sin) = H(\cos) = \langle -1, 1\rangle$.
Z definice plyne rovněž periodičnost obou funkcí s periodou 2π:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}; \quad \sin(t + 2k\pi) = \sin t,\ \cos(t + 2k\pi) = \cos t.$$

Z běžných vlastností lze dále přímo z jednotkové kružnice zjistit

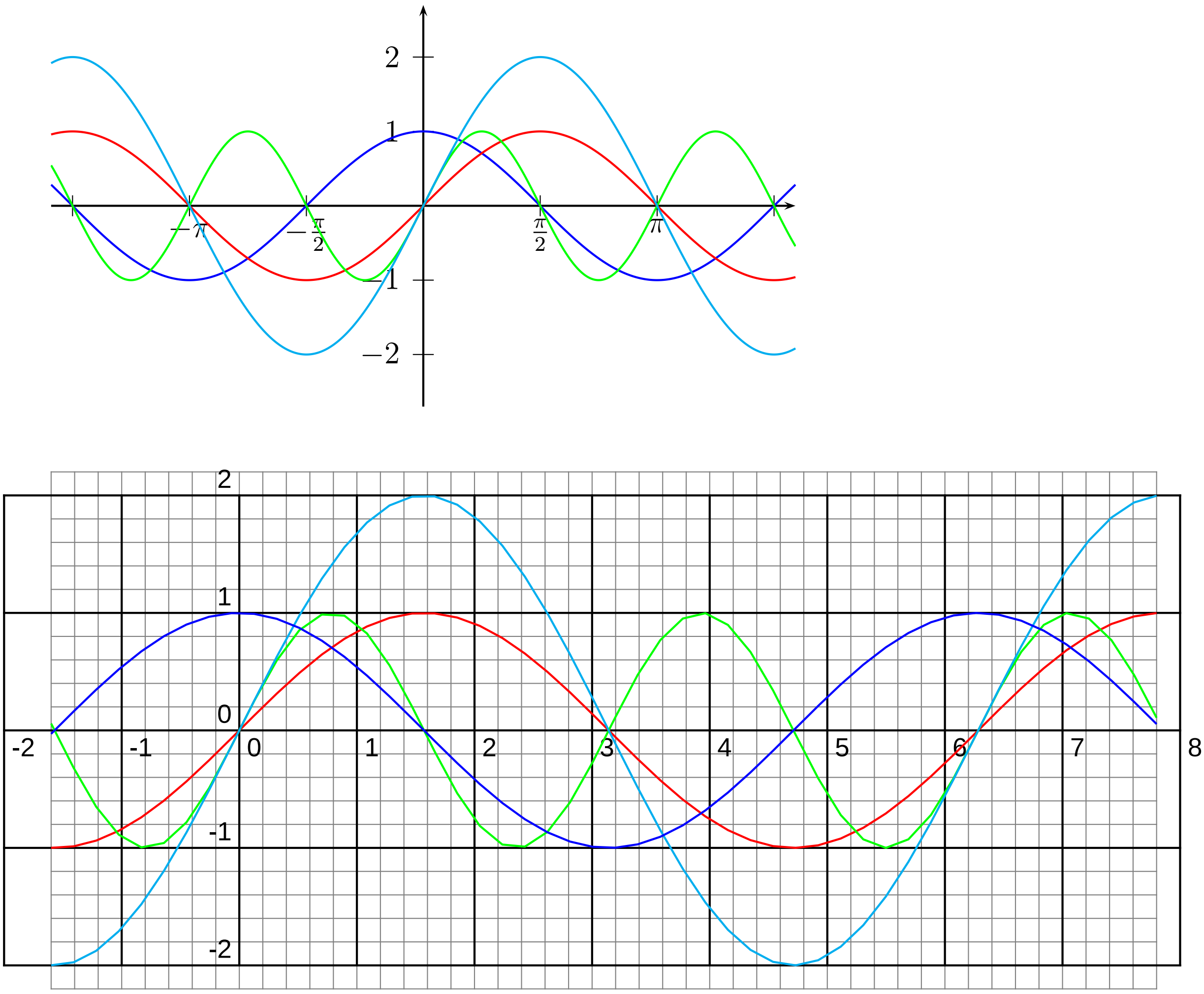
- znaménka funkcí v jednotlivých kvadrantech I, II, III, IV;
- hodnoty funkcí pro úhly, pro něž je bod M na některé souřadnicové ose, tj. pro úhly 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, ..., zejména nulové body:

$$\sin t = 0 \iff t = k\pi \quad (\forall k \in \mathbb{Z}),$$
$$\cos t = 0 \iff t = (2k+1)\tfrac{\pi}{2} \quad (\forall k \in \mathbb{Z});$$

- paritu funkcí, tj. $\forall t \in \mathbb{R}$:
  $\sin(-t) = -\sin t$ (funkce sinus je lichá),
  $\cos(-t) = \cos t$ (funkce kosinus je sudá);
- vzorce pro změnu velikosti úhlu o π, tj. $\forall t \in \mathbb{R}$:
  $\sin(t \pm \pi) = -\sin t$,
  $\cos(t \pm \pi) = -\cos t$;
- nerovnost: $\forall t \in (0, +\infty): \quad \sin t < t$;

- parametrické vyjádření kružnice: $\begin{array}{l} x = r \cdot \cos t, \\ y = r \cdot \sin t, \end{array} \quad t \in \langle 0, 2\pi)$.

Ve školské matematice se nejčastěji setkáváme s označováním velikosti úhlů řeckými písmeny α, β, ... a s mírou stupňovou, v matematické analýze se ponejvíce pracuje s mírou obloukovou a s x jako označením velikosti úhlů v míře obloukové, tedy $\sin x$, $\cos x$, ...



Obrázek 4.4: Grafy funkcí $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = 2 \sin x$ a $y = \cos x$.

Funkce tangens a kotangens

Definice funkcí tangens a kotangens vychází z funkcí sinus a kosinus.

Definice 4.3.3. $\forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (tedy pro něž $\cos x \neq 0$) definujeme funkci tangens:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$\forall x \neq k\pi$ (tedy pro něž $\sin x \neq 0$) definujeme funkci kotangens:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Vlastnosti funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$:

Funkce tangens je definována pro všechna $x \in (2k+1)\frac{\pi}{2}$, tj. na množině $D(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$; $H(\mathrm{tg}) = \mathbb{R}$.

Funkce kotangens je definována pro všechna $x \neq k\cdot\pi$, tj. na množině $D(\mathrm{cotg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$; $H(\mathrm{cotg}) = \mathbb{R}$.

Z definice funkcí tangens a kotangens a z vlastností funkcí sinus a kosinus dostáváme zejména tyto základní vlastnosti:

- znaménka funkcí v jednotlivých kvadrantech I, II, III, IV;

- hodnoty funkcí pro úhly, pro něž je bod M na některé souřadnicové ose, tj. pro úhly 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, zejména nulové body: $\operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} \pi = 0$, $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} = \operatorname{cotg} \frac{3\pi}{2} = 0$;

- paritu funkcí, tj. $\forall x \in D(f)$:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x \text{ (funkce liché);}$$

- periodičnost funkcí: $\forall x \in D(f)$:

$$\operatorname{tg}(x \pm \pi) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(x \pm \pi) = -\operatorname{cotg} x.$$

Vzorce pro goniometrické funkce:

Postupně lze vyvodit další skupiny vzorců. Je-li g libovolná ze čtyř základních goniometrických funkcí a označíme-li velikosti úhlů α, β, ..., jak je to běžné na střední škole, jde o vzorce, kde

- $g(\alpha \pm \beta)$ vyjadřujeme pomocí goniometrických funkcí úhlů α, β, například

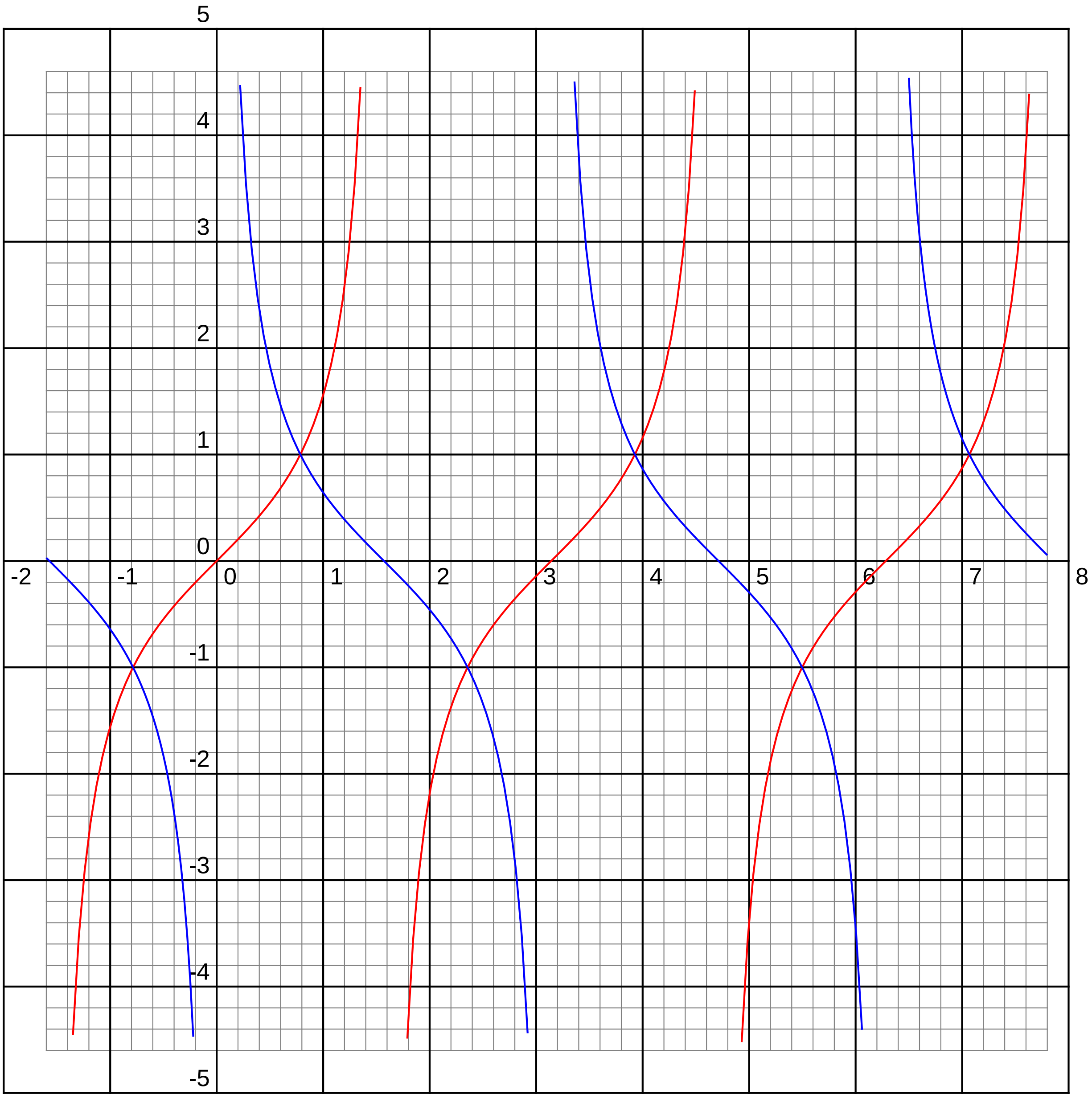
  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$;

  $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ (pro která α, β platí?);

- $g(2\alpha)$ vyjadřujeme pomocí goniometrických funkcí jednoduchého úhlu α, například

  $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,

  $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;



Obrázek 4.5: Grafy funkcí $y = \operatorname{tg} x$ a $y = \operatorname{cotg} x$.

- $g\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ vyjadřujeme pomocí goniometrických funkcí úhlu α,

  například pro $\alpha \in I$ je

  $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$; nebo též

  $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad \cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

  tento vzorec se využívá například při integraci goniometrických funkcí;

- $g(\alpha) \pm g(\beta)$ se vyjádří jako součin funkcí, například

  $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

- při integraci součinu goniometrických funkcí se využívá obráceného vztahu a $g(\alpha)\cdot g(\beta)$ vyjadřujeme jako součet nebo rozdíl goniometrických funkcí, například:

  $\sin m\alpha \cdot \cos n\alpha = \dfrac{1}{2}\left[\sin(m+n)\alpha + \sin(m-n)\alpha\right]$;

- velmi užitečný je vzorec $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$.

Funkce cyklometrické

Pro základní goniometrické funkce se volí obory prostoty P, přičemž obory hodnot H se nemění:

$\sin x: \quad P = \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle, \quad H = \langle -1, 1\rangle;$

$\cos x: \quad P = \langle 0, \pi\rangle, \quad H = \langle -1, 1\rangle;$

$\operatorname{tg} x: \quad P = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right), \quad H = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R};$

$\operatorname{cotg} x: \quad P = (0, \pi), \quad H = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$

Při definici cyklometrických funkcí se vymění úloha množin P a H.

Definice 4.3.4. Goniometrické funkce uvažujme na jejich oborech prostoty. Inverzní funkcí (s definičním oborem D) k funkci

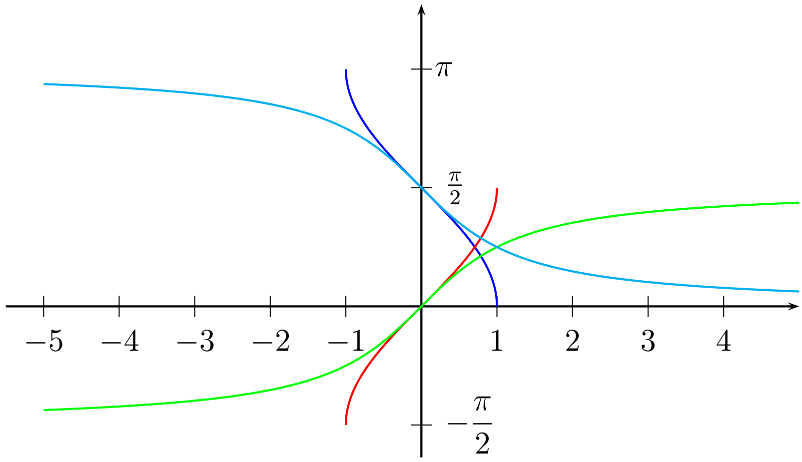
$\sin x$ je funkce $\arcsin x$ (arkussinus), $D = \langle -1, 1\rangle$;
$\cos x$ je funkce $\arccos x$ (arkuskosinus), $D = \langle -1, 1\rangle$;
$\operatorname{tg} x$ je funkce $\operatorname{arctg} x$ (arkustangens), $D = (-\infty, +\infty)$;
$\operatorname{cotg} x$ je funkce $\operatorname{arccotg} x$ (arkuskotangens), $D = (-\infty, +\infty)$.

Přitom si uvědomíme, že například $\forall x \in \langle -1, 1\rangle$, $\forall y \in \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$, znamenají zápisy $y = \arcsin x$, $x = \sin y$ přesně totéž.

Funkce $\arcsin x$ se vyskytuje v úlohách na určení definičního oboru funkcí.

Úloha 4.3.5. *Určete definiční obor funkce* $f: y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{3x+2}}$.

Řešení. Čitatel je definován na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, jmenovatel na množině $x > -\frac{2}{3}$, tedy na intervalu $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Definiční obor $D(f)$ je průnikem obou intervalů, tedy $D(f) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right\rangle$. □



Obrázek 4.6: Grafy funkcí $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ a $y = \operatorname{arccotg} x$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

Jelikož inverzní funkce zachovává monotónnost funkce výchozí, jsou funkce $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ ve svých definičních oborech rostoucí, $\arccos x$ a $\operatorname{arccotg} x$ jsou klesající.

Ze vzorců pro funkce goniometrické lze odvodit odpovídající vzorce pro funkce cyklometrické, například:

Ježto $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, dostaneme po dosazení $\cos t = x$, (tedy i $t = \arccos x$): $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) \Rightarrow \forall x \in \langle -1, 1\rangle : \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Podobně též $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

Proto se z uvedených cyklometrických funkcí používá obvykle vždy jen jedna z každé dvojice, zpravidla funkce $\arcsin x$ a $\operatorname{arctg} x$.

Jestliže ve vzorci pro $tg(\alpha + \beta)$ položíme $\operatorname{tg}\alpha = x$, $\operatorname{tg}\beta = y$, tj. $\alpha = \operatorname{arctg} x$, $\beta = \operatorname{arctg} y$, dostaneme vzorec $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

4.4 Funkce exponenciální a logaritmické

Exponenciální funkce

Nechť $a > 0$, $a \neq 1$. *Exponenciální funkce* jsou definovány rovnicí

$$y = a^x,$$

$D(f) = \mathbb{R}$ (plyne to z definice mocniny pro libovolný reálný exponent).

Hodnotu mocniny s iracionálním exponentem, tedy exponenciální funkce pro iracionální hodnotu nezávisle proměnné x) lze najít i jako limitu posloupnosti a^r, kde $r \in \mathbb{Q}$, $r \to x$. Tak třeba 2^π je limitou posloupnosti 2^r, kde r například tvoří posloupnost dolních desetinných aproximací čísla π: 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; .... Pak 2^r dává posloupnost 8; 8,5741...; 8,8152...; 8,8213...; 8,8244...; 8,82496..., takže například $2^\pi \approx 8,8250$.

Podobně (užitím suprema množin) bychom mohli dokázat, že každé kladné číslo je při daném základu a hodnotou nějaké mocniny, tj. $H(f) = (0, +\infty)$.

Pro $a > 1$ je exponenciální funkce rostoucí, jak plyne z vlastnosti mocnin 4.2 (8). Pro $a < 1$ je exponenciální funkce klesající. V tomto případě je $(1/a) > 1$, platí pro každé $x_1 < x_2 < \left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}$ a po přechodu k převráceným hodnotám máme $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Pro $a \in (0,1)$ je tedy $a^x = b^{-x}$, kde $b = 1/a > 0$.

Exponenciální funkci $y = a^x$ pro $a \in (0,1)$ lze tedy nahradit exponenciální funkcí $y = b^{-x}$ pro $b > 1$ (která je klesající), a to vede k závěru, že v podstatě není třeba se zabývat exponenciálními funkcemi se základem $a < 1$.

Grafu exponenciální funkce v kartézské soustavě říkáme *exponenciála*. Všechny exponenciály procházejí bodem [0; 1]. Grafem exponenciální funkce v polární soustavě souřadnic je tzv. *logaritmická spirála*.

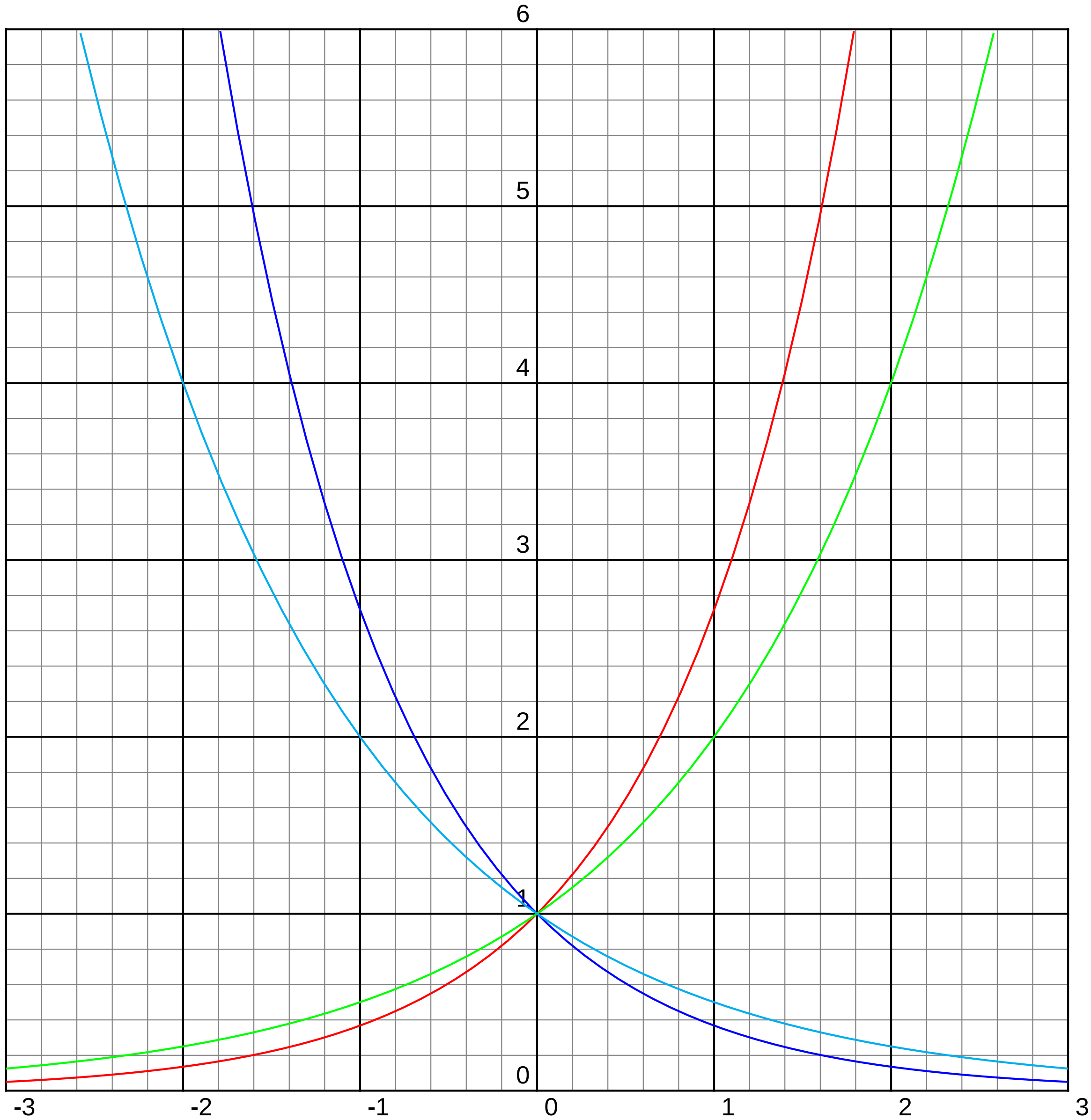
Zvlášť důležitá je exponenciální funkce $y = \mathrm{e}^x$ označovaná někdy též $\exp x$.

Logaritmické funkce

Exponenciální funkce $f : y = a^x$ je pro $a > 0$ rostoucí (tedy i prostá) na celé množině $\mathbb{R}$, přičemž $H(f) = (0, +\infty)$. Existuje proto inverzní funkce $f^{-1} : x = a^y$, kterou nazýváme *logaritmická funkce* o základu a a kterou zapisujeme $y = \log_a x$; ta má $D(f^{-1}) = (0, +\infty)$, $H(f) = \mathbb{R}$. Hodnotu logaritmické funkce nazýváme ***logaritmus***; někdy pojem logaritmus používáme i pro stručné označení logaritmické funkce. *Logaritmovat* nějaký výraz znamená určit jeho logaritmus.

Pro matematickou analýzu je nejdůležitější logaritmická funkce o základu e, pro niž máme zvláštní označení $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$ a název ***přirozený logaritmus*** (ln = logaritmus naturalis).

Z definice logaritmu plyne zejména:



Obrázek 4.7: Grafy funkcí $y = \mathrm{e}^x$, $y = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x$, $y = 2^x$ a $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

(a) Zápis $x = a^y$ znamená přesně totéž jako $y = \log_a x$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\log_a a^x = x$, $\quad \forall x > 0$: $a^{\log_a x} = x$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}$: $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ (neboť $a = \mathrm{e}^{\ln a}$).

Z prostoty exponenciálních a logaritmických funkcí plyne:

(d) $a^K = a^L \ \Leftrightarrow\ K = L, \quad A = B\ (> 0) \ \Leftrightarrow\ \log_a A = \log_a B$.

V obou případech (d) získáme závěr implikace *logaritmováním* jejího předpokladu.

Dekadický logaritmus, tj. logaritmus o základu 10, měl dříve výsadní postavení při numerických výpočtech (používání tabulek dekadických logaritmů), ale s rozšířením kalkulátorů a počítačů toto postavení ztratil.

Všechny logaritmické funkce o základu $a > 1$ jsou rostoucí a jejich grafy procházejí bodem $[1; 0]$ na ose x.

Úloha 4.4.1. *Načrtněte grafy funkcí* $y = \mathrm{e}^x$, $y = \ln x$.

Z výše uvedené vlastnosti (c) plyne, že místo exponenciálních funkcí $y = a^x$ o základu a lze uvažovat jen exponenciální funkce $y = \mathrm{e}^{kx}$ o základu e. Podobně na sebe lze převádět logaritmy o různých základech. Převodní vztahy lze odvodit například takto (uvažujme logaritmus přirozený a logaritmus o základu a):

Rovnost $x = a^{\log_a x}$ logaritmujeme při základu e a dostaneme $\ln x = \ln a \cdot \log_a x$.

Jestliže logaritmujeme rovnost $x = \mathrm{e}^{\ln x}$ při základu a, dostaneme $\log_a x = \log_a e \cdot \ln x$.

Z vlastností exponenciálních funkcí plynou ihned vlastnosti funkcí logaritmických:

$\forall x_1, x_2 > 0$: $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$;

$\forall x_1, x_2 > 0$: $\log_a(x_1 : x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$;

$\forall x > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$: $\log_a(x^m) = m \cdot \log_a x$.

4.5 Funkce hyperbolické a hyperbolometrické

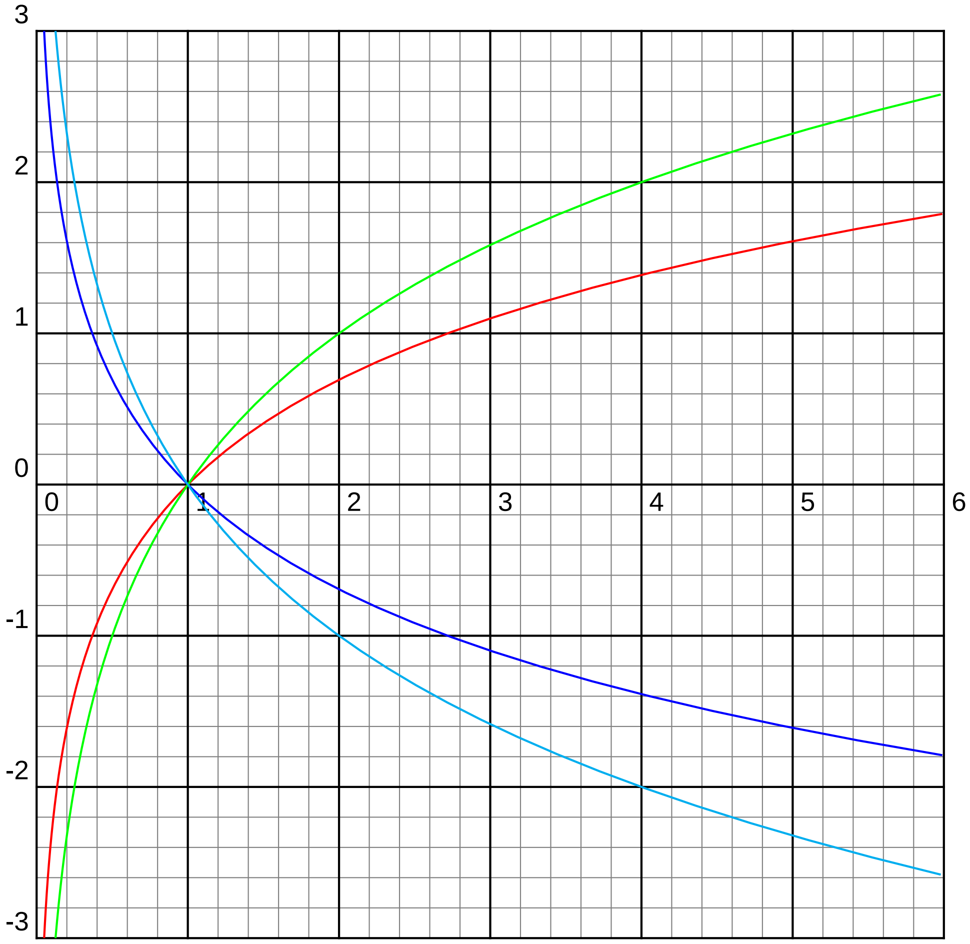
Hyperbolické funkce patří mezi elementární funkce a jsou definovány pomocí funkcí exponenciálních takto:

Definice 4.5.1.

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right), \ \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right),$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \qquad \operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x};$$

jsou to *hyperbolický sinus*, *kosinus*, *tangens* a *kotangens*.



Obrázek 4.8: Grafy funkcí $y = \ln x$, $y = \log_{1/e} x$, $y = \log_2 x$ a $y = \log_{1/2} x$.

Z definice je vidět, že pro první tři z těchto funkcí je $D(f) = \mathbb{R}$ (pro $\operatorname{th} x$ to plyne z toho, že $\forall x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch} x > 0$). Lehce zjistíme, že funkce $\operatorname{sh} x$ má jediný nulový bod pro $x_0 = 0$, takže $D(\coth) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Obory hodnot a průběh:

$H(\operatorname{sh}) = \mathbb{R}$, funkce je rostoucí; $H(\operatorname{ch}) = \langle 1, +\infty)$, funkce je klesající na $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na $\langle 0, +\infty)$, v bodě 0 má minimum 1.

$H(\operatorname{th}) = (-1; 1)$, funkce je rostoucí; $H(\coth) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, na intervalu $(-\infty, 0)$ funkce klesá od -1 k $-\infty$, na intervalu $(0, +\infty)$ funkce klesá od $+\infty$ k 1. Pro funkce tangens i kotangens jsou přímky $y = 1$ a $y = -1$ asymptotami, asymptotou grafu funkce kotangens je též osa y.

Úloha 4.5.2. *Do jednoho obrázku znázorněte grafy funkcí $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^x$.*

Úloha 4.5.3. *Do jednoho obrázku znázorněte grafy funkcí $y = \operatorname{th} x$, $y = \coth x$.*

Graf funkce $y = a \cdot \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$ v kartézské souřadnicové soustavě se nazývá *řetězovka*. Je to křivka, kterou vytváří řetěz (nepružná nit) volně zavěšený ve dvou bodech.

Hyperbolické funkce mají řadu vlastností velmi podobných vlastnostem funkcí goniometrických. Z definice funkcí lze odvodit například

(a) Funkce $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\coth x$ jsou liché, funkce $\operatorname{ch} x$ je sudá.

(b) $\forall x$: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

(c) $\forall x \neq 0$: $\operatorname{th} x \cdot \coth x = 1$.

(d) $\forall x_i \in \mathbb{R}$: $\operatorname{sh}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 \pm \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2$.

(e) $\forall x_i \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 \mp \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2$.

(f) $\forall x_i \in \mathbb{R}$: $\operatorname{th}(x_1 \pm x_2) = \dfrac{\operatorname{th} x_1 \pm \operatorname{th} x_2}{1 \pm \operatorname{th} x_1 \operatorname{th} x_2}$.

Hyperbolické funkce se vyskytují zejména v aplikacích a také se používají při výpočtu neurčitých integrálů pomocí hyperbolických substitucí.

Funkce $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ a $\coth x$ jsou prosté, u funkce $\operatorname{ch} x$ vezmeme za obor prostoty interval $\langle 0, +\infty)$. Pak lze definovat funkce inverzní (zvané ***hyperbolometrické***):

- K funkci $\operatorname{sh} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argsh} x$ (argument hyperbolického sinu), $D(f) = H(f) = \mathbb{R}$.

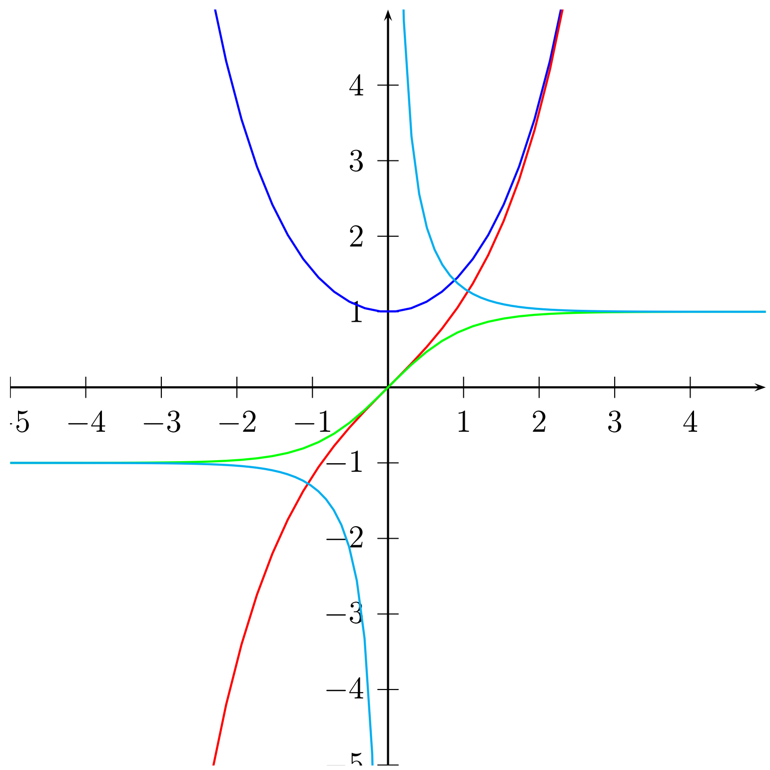
- K funkci $\operatorname{ch} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argch} x$ (argument hyperbolického kosinu), $D(f) = \langle 1, +\infty)$, $H(f) = \langle 0, +\infty)$.

- K funkci $\operatorname{th} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argth} x$ (argument hyperbolické tangens), $D(f) = (-1; 1)$, $H(f) = \mathbb{R}$.

- K funkci $\operatorname{coth} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argcoth} x$ (argument hyperbolické kotangens), $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

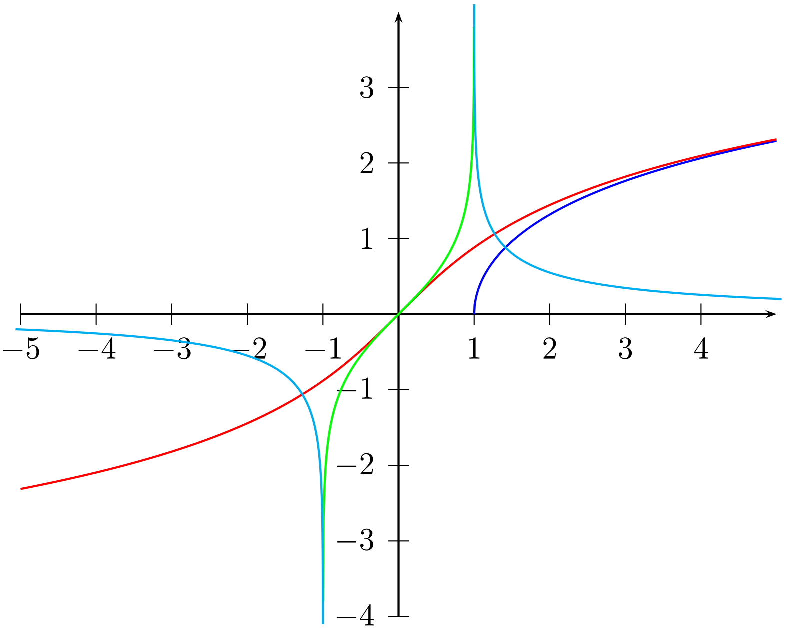
Ježto jsou hyperbolické funkce vyjádřeny pomocí exponenciální funkce, lze hyperbolometrické funkce vyjádřit pomocí funkce logaritmické, například:

$$\operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad \operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$



Obrázek 4.9: Grafy funkcí $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$ a $y = \operatorname{coth} x$.

$- * -$



Obrázek 4.10: Grafy funkcí $y = \operatorname{argsh} x$, $y = \operatorname{argch} x$, $y = \operatorname{argth} x$ a $y = \operatorname{argcoth} x$.

Kapitola 5

Limita funkce

Limita funkce je jedním z nejdůležitějších pojmů matematické analýzy. Na pojmu limita jsou založeny další významné pojmy, jako je spojitost, derivace funkce, Riemannův integrál, délka křivky a další. S přímým praktickým použitím limity se setkáme při vyšetřování průběhu funkce, například při zjišťování asymptot grafu funkce.

5.1 Limita funkce podle Heineho

Hlavní myšlenka: Problém limity funkce se převede na (již známý) problém limity posloupnosti.

Definice 5.1.1 (limita funkce podle Heineho)**.** Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$. Číslo a nazveme limita funkce f v bodě x_0 $\iff$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$, platí $f(x_n) \to a$.

Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Definice 5.1.2 (jednostranná limita funkce podle Heineho)**.** Nechť x_0 je levým (pravým) hromadným bodem $D(f)$.

Číslo a nazveme limita zleva (zprava) funkce f v bodě x_0 $\iff$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n < x_0$ ($x_n > x_0$), $x_n \to x_0$, platí $f(x_n) \to a$.

Píšeme

$$f(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = a \quad \left(f(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = a \right).$$

Úloha 5.1.3. *Vypočtěte* $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Úloha 5.1.4. *Vypočtěte obě jednostranné limity funkce $y = \operatorname{sgn} x$ v bodě 0.*

Úloha 5.1.5. *Dokažte, že Dirichletova funkce $\chi(x)$ nemá limitu (ani jednostrannou) v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Úloha 5.1.6. *Vyslovte definici nevlastní limity $+\infty$ ve vlastním bodě x_0.*

Definice 5.1.7 (vlastní limita v nevlastním bodě $+\infty$)**.** Nechť $+\infty$ je hromadným bodem $D(f)$. Číslo a nazveme limita funkce f v nevlastním bodě $+\infty$ $\iff$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n \to +\infty$, platí $f(x_n) \to a$.

Píšeme

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a.$$

Úloha 5.1.8. *Vyslovte definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě $-\infty$ a definice nevlastních limit v nevlastních bodech.*

5.2 Věty o limitách funkcí

Věty o limitách funkcí vyplývají na základě Heineho definice limity z vět o limitách posloupností. Proto jsou některé formulovány velmi podobně.

Formulaci uvádíme pro vlastní limity ve vlastních bodech, je však možné i jejich rozšíření na „nevlastní případy“.

Věta 5.2.1. *Každá funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nejvýše jednu limitu.*

Věta 5.2.2. *Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je omezená. (Tedy*

$$\exists P(x_0) \quad \exists K, L \in \mathbb{R} \quad \forall x \in P(x_0) \cap D(f) : f(x) \in \langle K, L\rangle.)$$

Věta 5.2.3 (věta o kladné limitě)**.** *Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou kladnou (zápornou) limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je f kladná (záporná).*

Věta 5.2.4 (věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu)**.** *Nechť jsou na M definovány funkce f a g. Nechť x_0 je hromadný bod M a platí*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b.$$

Pak funkce

$$f+g, \quad f-g, \quad f\cdot g, \quad \frac{f}{g} \ (\mathit{pro}\ g(x) \neq 0,\ b \neq 0)$$

mají limitu

$$a+b, \quad a-b, \quad a\cdot b, \quad \frac{a}{b}.$$

Tyto vlastnosti platí pro rozšířenou reálnou osu ve všech případech, kdy mají uvedené výrazy s a, b smysl; například věta o součtu neplatí pro $a = +\infty$, $b = -\infty$.

Věta 5.2.5 (věta o limitě rovnosti)**.** *Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$ a existuje $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. Pak též $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$.*

Věta 5.2.6 (věta o limitě nerovnosti)**.** *Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) \leq g(x)$ a existují limity obou funkcí v bodě x_0.*

Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Úloha 5.2.7. *Na příkladech ukažte, jaký vztah může platit mezi limitami, jestliže na $P(x_0)$ platí ostrá nerovnost $f(x) < g(x)$.*

Věta 5.2.8 (věta o třech limitách)**.** *Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

přičemž

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = a.$$

Pak existuje i $\lim_{x\to x_0} h(x)$ a je rovna a.

Věta 5.2.9 (věta o limitě monotónní funkce)**.** *Nechť bod x_0 je levým hromadným bodem množiny $M = D(f) \cap P(x_0-)$ a funkce f je neklesající na M.*

Pak existuje $\lim_{x\to x_0-} f(x)$.

Je-li funkce f na M shora omezená, je tato limita konečná, není-li f na M shora omezená, je tato limita rovna $+\infty$.

Úloha 5.2.10. *Vyslovte podobnou větu pro nerostoucí funkci a dále věty pro případ limity zprava.*

Věta 5.2.11.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0.$$

Věta 5.2.12.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} |f(x) - a| = 0$$

(pro a vlastní).

Věta 5.2.13. *Nechť x_0 je oboustranným hromadným bodem $D(f)$. Pak následující dva výroky jsou ekvivalentní:*

A: Existuje $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a je rovna a.

B: Existují $\lim_{x\to x_0-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ *a obě jsou rovny* a*.*

Úloha 5.2.14. *Užitím předchozí věty dokažte, že funkce* $y = x + \dfrac{|x|}{x}$ *nemá limitu v bodě* $x_0 = 0$*.*

Věta 5.2.15. *Nechť na nějakém* $P(x_0)$ *platí* $f(x) > 0$*. Pak*

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$,

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \iff \quad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0.$

Věta 5.2.16. *Nechť* $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0$*,* $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ *a v nějakém okolí* $P(x_0)$ *platí* $\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn} a$ *[*$\operatorname{sgn} g(x) = -\operatorname{sgn} a$*]. Pak platí* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *[*$-\infty$*].*

Věta 5.2.17. *Nechť* x_0 *je hromadným bodem* $D(f \cdot g)$*,* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *a* g *je funkce omezená. Pak* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$*.*

Věta 5.2.18 (věta o limitě složené funkce)**.** *Mějme složenou funkci* $f \circ \varphi$*. Nechť*

1. $\exists$ *okolí* $P(x_0) \subset D(\varphi)$ *tak, že* $\varphi(P(x_0)) \subset D(f)$*,*
2. $\exists a$ *jako* $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$*,*
3. a *je hromadným bodem* $D(f)$ *a existuje* $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$*,*
4. x_0 *není hromadným bodem množiny* $\{x \in P(x_0); \varphi(x) = a\}$*.*

Pak existuje limita složené funkce $f \circ \varphi$ *v bodě* x_0 *a platí* $\lim\limits_{x\to x_0} f \circ \varphi(x) = b$*.*

5.3 Výpočet limit

Limity některých elementárních funkcí

Úloha 5.3.1. *Užitím věty o třech limitách dokažte, že* $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$*.*

Úloha 5.3.2. *Dokažte, že* $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ *a* $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$*.*

Úloha 5.3.3. *Dokažte, že* $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$ *a že pro každý polynom* $P(x)$ *je* $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$*.*

Platnost výsledků úloh 5.3.2 a 5.3.3 lze zobecnit na všechny elementární funkce takto:

Věta 5.3.4. *Je-li* f *elementární funkce,* $x_0 \in D(f)$*, pak* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*.*

Použití této věty nazýváme *využití spojitosti funkce k výpočtu limity.*

Speciální limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x) - 1}{x} = m \qquad \text{(pro libovolná } m \in \mathbb{R}\text{)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Úloha 5.3.5. *Dokažte první z výše uvedených speciálních limit.*

Úloha 5.3.6. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$.

Úloha 5.3.7. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$.

Výpočet dle definice a vět o limitách

Úloha 5.3.8. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6x^3 + 2x + 5}{2x^3 + x^2 + 7}$.

Úloha 5.3.9. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6 \cdot 2^{3x} + 2^{x+1} + 5}{2^{3x+1} + 2^{2x} + 7}$.

Úloha 5.3.10. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$*, kde* $x > 0$.

Úloha 5.3.11. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

Další metoda výpočtu limit funkcí: užitím l'Hospitalova pravidla .

5.4 Limita funkce podle Cauchyho

Cauchyho definice limity využívá vztahu mezi okolími. Vyslovíme dvě definice. Jedna uvažuje okolí ve smyslu topologickém, druhá ve smyslu metrickém.

Definice 5.4.1 (limita funkce podle Cauchyho)**.** Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$. Říkáme, že funkce f **má v bodě** x_0 **limitu** $a \Leftrightarrow \ \forall \ U(a) \ \exists \ P(x_0) \ \forall x : x \in D(f) \cap P(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(a)$. Píšeme

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

Poznámka 5.4.2. Poslední implikaci lze nahradit inkluzí

$$f(D(f) \cap P(x_0)) \subset U(a).$$

Definice 5.4.3 (limita funkce podle Cauchyho, druhá definice)**.** Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$. Říkáme, že funkce f **má v bodě** x_0 **limitu** a $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x : x \in D(f) \cap P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(a, \varepsilon)$. Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Poznámka 5.4.4. Závěr definice lze formálně upravit na jiný tvar s využitím absolutních hodnot: místo $\forall x : x \in D(f) \cap P(x_0, \delta)$ uvedeme $\forall x \in D(f) : 0 < |x - x_0| < \delta$ a místo $f(x) \in U(a, \varepsilon)$ dáme $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Úloha 5.4.5. *Znázorněte obsah Cauchyových definic na obrázku.*

Úloha 5.4.6. *Vyslovte Cauchyovy definice vlastní limity v nevlastním bodě, nevlastní limity ve vlastním bodě a nevlastní limity v nevlastním bodě.*

Věta 5.4.7 (Ekvivalence definic limity funkce)**.** *Heineho definice a Cauchyova definice limity funkce jsou ekvivalentní.*

Limita funkce dle definice Heineho je tedy přesně týž pojem jako limita funkce podle Cauchyho. Je tu však rozdíl v jejich použití. Heineho definici používáme častěji k *výpočtu* limit, neboť v této definici znalost hodnoty limity funkce není předem potřebná, Cauchyovu definici používáme častěji k *důkazům*, hodnotu limity musíme znát předem.

— ∗ —

Kapitola 6

Spojitost funkce

Spojitost patří k nejvýznamnějším vlastnostem funkcí. Setkáváme se s ní — jako s požadovanou vlastností funkcí — ve všech částech matematické analýzy.

6.1 Pojem spojitosti funkce

Intuitivní představa spojitosti funkce f v bodě x_0 je spojena s grafem funkce: graf v tomto bodě „není přetržený“, funkce je v daném bodě definována a v malém okolí bodu x_0 *jsou malé i změny funkce. Spojitost v bodě je lokální vlastnost funkce.*

Definice 6.1.1 (spojitost funkce v bodě)**.**
Říkáme, že funkce f je ***spojitá v bodě*** $x_0 \Leftrightarrow$

1. je v bodě x_0 definována (tj. $x_0 \in D(f)$),
2. [je-li x_0 hromadným bodem $D(f)$, pak] existuje vlastní $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ a platí
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Poznámka 6.1.2. Někdy se vynechává podmínka v hranaté závorce. Její ponechání rozšiřuje spojitost i do izolovaných bodů $D(f)$ a umožňuje jednodušší formulaci některých vět.

Úloha 6.1.3. *Definujte spojitost v bodě x_0 zleva a spojitost zprava.*

Úloha 6.1.4. *Načrtněte graf funkce f tak, aby nastaly tyto jevy:*

1. *v bodě $x_1 \notin D(f)$ má funkce vlastní limitu,*
2. *v bodě $x_2 \notin D(f)$ limita zleva je menší než limita zprava, obě jsou vlastní,*
3. *v bodě x_3 je funkce spojitá zleva, limita zprava je menší než limita zleva,*

4. v bodě x_4 je funkce spojitá zprava a limita zprava je větší než limita zleva,

5. v bodě $x_5 \in D(f)$ má vlastní limitu, která je však menší než funkční hodnota,

6. v bodě $x_6 \in D(f)$, limita zleva je menší než $f(x_6)$, limita zprava je větší než $f(x_6)$,

7. v bodě $x_7 \notin D(f)$ je limita zleva $-\infty$, limita zprava $+\infty$,

8. v bodě $x_8 \in D(f)$ je limita zleva $+\infty$, vlastní limita zprava je menší než $f(x_8)$,

9. v bodě $x_9 \in D(f)$ má funkce nevlastní limitu $+\infty$.

Definice 6.1.5. Hromadný bod x_0 definičního oboru $D(f)$, v němž funkce f není spojitá, se nazývá ***bod nespojitosti*** funkce f.

Definice 6.1.6 (druhy nespojitosti)**.** Nespojitost v bodě x_0 se nazývá

- ***odstranitelná*** $\Longleftrightarrow$
  - f má v bodě x_0 vlastní limitu,
  - ale funkční hodnota $f(x_0)$
    - buď není definována
    - nebo není rovna limitě;
- ***neodstranitelná*** ve všech ostatních případech nespojitosti.

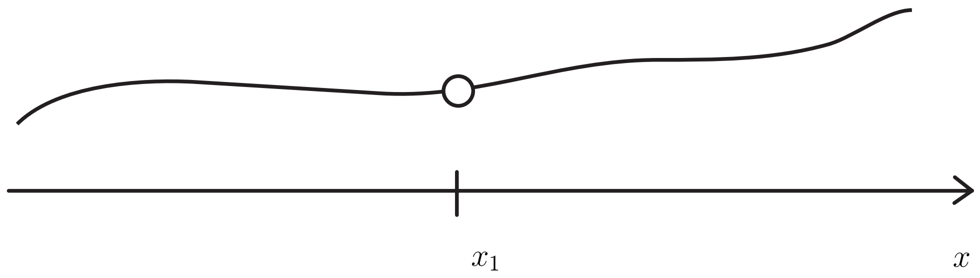
Neodstranitelnou nespojitost nazveme

- ***1. druhu*** $\Longleftrightarrow$
  - v bodě x_0 existují obě jednostranné vlastní limity,
  - ale jsou různé;
  - rozdíl limit $f(x_0+) - f(x_0-)$ (někdy jen absolutní hodnotu tohoto rozdílu) nazýváme ***skok***;
- ***2. druhu*** ve všech ostatních případech.

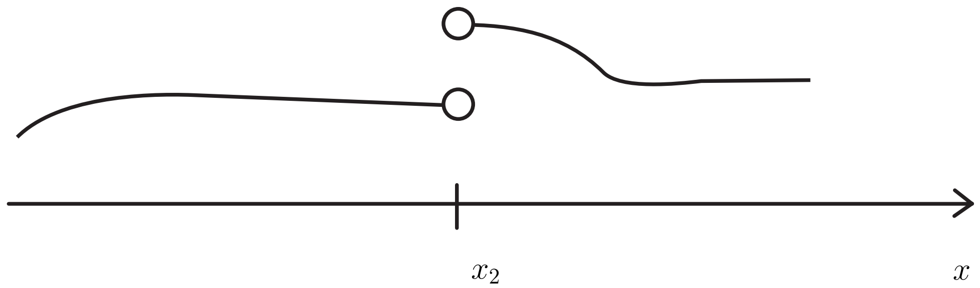
Poznámka 6.1.7. Odstranitelnou nespojitost lze odstranit tak, že funkci f v bodě x_0 *dodefinujeme* nebo *předefinujeme* tak, aby se funkční hodnota rovnala limitě funkce v bodě x_0.

Úloha 6.1.8. *Rozhodněte, jakou nespojitost má funkce f z úlohy 6.1.4 v bodech x_1 až x_9.*

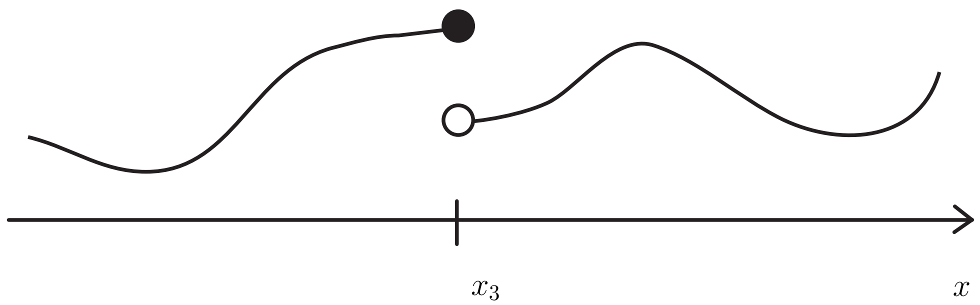
Úloha 6.1.9. *Dokažte, že Dirichletova funkce je nespojitá pro každé $x \in \mathbb{R}$. Jaká je to nespojitost?*



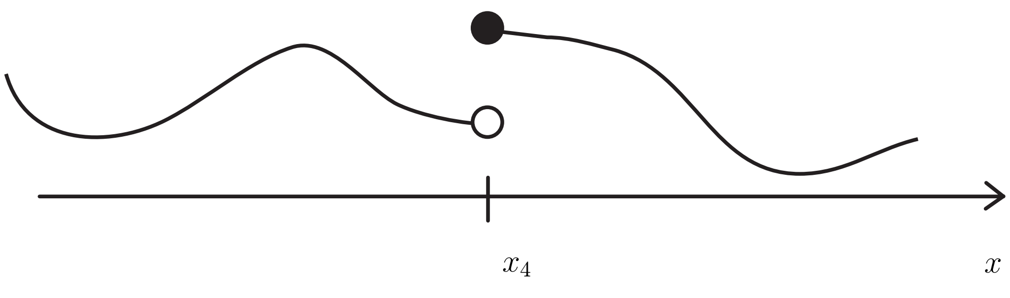
Obrázek 6.1: V bodě $x_1 \notin D(f)$ má funkce vlastní limitu (DODEFINOVÁNÍM ODSTRANITELNÁ NESPOJITOST).



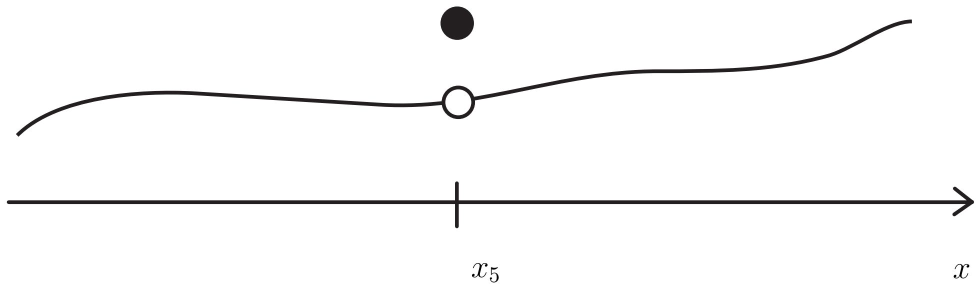
Obrázek 6.2: V bodě $x_2 \notin D(f)$ limita zleva je menší než limita zprava, obě jsou vlastní (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



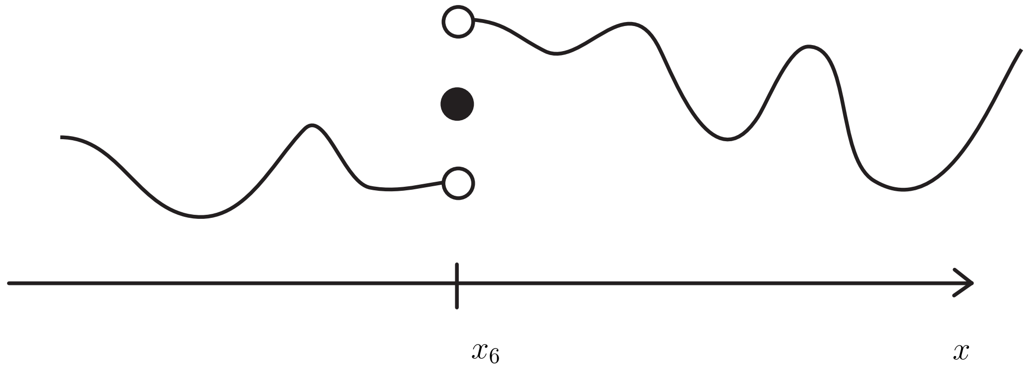
Obrázek 6.3: V bodě x_3 je funkce spojitá zleva, limita zprava je menší než limita zleva (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



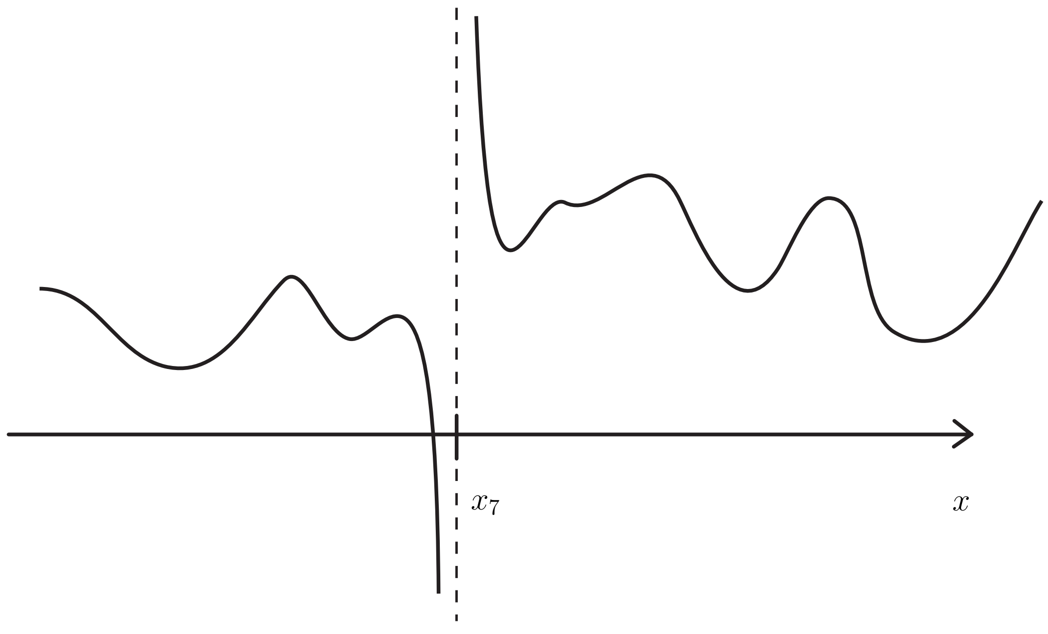
Obrázek 6.4: V bodě x_4 je funkce spojitá zprava a limita zprava je větší než limita zleva (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



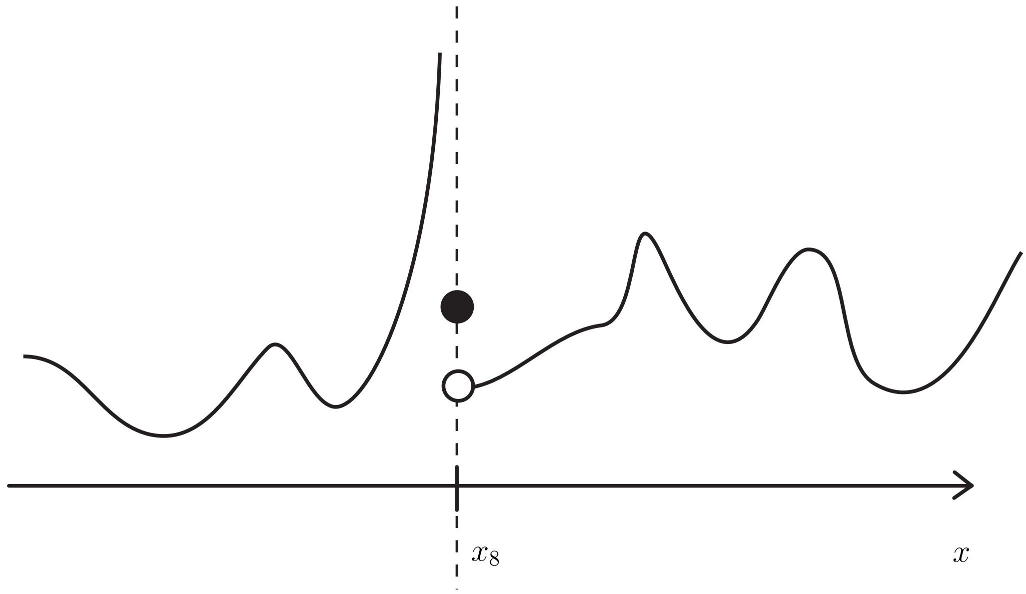
Obrázek 6.5: V bodě $x_5 \in D(f)$ má vlastní limitu, která je však menší než funkční hodnota (PŘEDEFINOVÁNÍM ODSTRANITELNÁ NESPOJITOST).



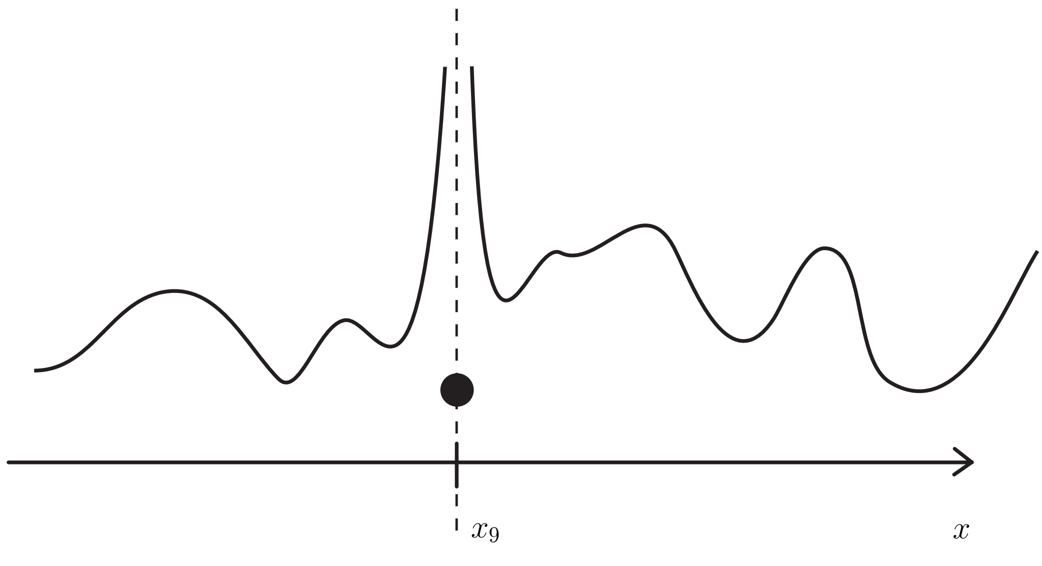
Obrázek 6.6: V bodě $x_6 \in D(f)$, limita zleva je menší než $f(x_6)$, limita zprava je větší než $f(x_6)$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



Obrázek 6.7: V bodě $x_7 \notin D(f)$ je limita zleva $-\infty$, limita zprava $+\infty$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).



Obrázek 6.8: V bodě $x_8 \in D(f)$ je limita zleva $+\infty$, vlastní limita zprava je menší než $f(x_8)$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).



Obrázek 6.9: V bodě $x_9 \in D(f)$ má funkce nevlastní limitu $+\infty$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).

Dále uvádíme přehled základních vět o spojitosti v bodě x_0

V případě, že tento bod je hromadným bodem $D(f)$, plynou tyto věty z vět o limitách.

Věta 6.1.10. *Jsou-li funkce*

- f, g *spojité v bodě* x_0 *a* $c \in \mathbb{R}$,

pak jsou v tomto bodě spojité též funkce

- $f + g$,
- $f - g$,
- $c \cdot f$,
- $f \cdot g$,
- $|f|$
- *a pro* $g(x_0) \neq 0$ *i* $\dfrac{f}{g}$.

(Pro součty, rozdíly a součiny platí tato vlastnost při libovolném konečném počtu členů resp. činitelů.)

Věta 6.1.11. *Je-li funkce* φ *spojitá v bodě* x_0, *funkce* f *spojitá v bodě* $a = \varphi(x_0)$, *pak složená funkce* $f \circ \varphi$ *je spojitá v bodě* x_0.

Věta 6.1.12. *Je-li funkce* f *spojitá v bodě* x_0, *pak existuje okolí* $U(x_0)$ *tak, že na* $D(f) \cap U(x_0)$ *je* f *omezená (je to tzv. lokální omezenost spojité funkce).*

Věta 6.1.13. *Nechť* x_0 *je hromadným bodem* $D(f)$, *funkce* f *je spojitá v* x_0 *a* $f(x_0) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U(x_0)$ *tak, že* $\forall x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$x \in U(x_0) \cap D(f) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0).$$

Věta 6.1.14. *Nechť* x_0 *je oboustranný hromadný bod* $D(f)$.

Funkce f *je spojitá v bodě* $x_0 \Longleftrightarrow$ *je v něm spojitá zleva i zprava.*

Věta 6.1.15 (Pravidlo ε–δ). *Nechť* x_0 *je hromadným bodem* $D(f)$.

Funkce f *je spojitá v bodě* $x_0 \Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tak, že* $\forall x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$x \in U(x_0, \delta) \cap D(f) \Longrightarrow f(x) \in (f(x_0), \varepsilon).$$

Poznámka 6.1.16.

- Tato vlastnost se též nazývá Cauchyova definice spojitosti; tedy takto lze definovat spojitost funkce v hromadném bodě $D(f)$ bez použití pojmu limita.
- V uvedeném pravidle $\varepsilon-\delta$ je ovšem pojem limity fakticky obsažen, viz pravidlo $\varepsilon-\delta$ pro limitu funkce.
- Podobně následující větu lze chápat jako Heineho definici spojitosti.

Věta 6.1.17. *Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$.*
Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \iff$

$$\forall x_n, x_n \in D(f),\ x_n \to x_0 \ \text{platí}\ f(x_n) \to f(x_0).$$

Věta 6.1.18. Základní elementární funkce jsou spojité ve všech bodech, v nichž jsou definovány.

Úloha 6.1.19. *Pro které funkce naleznete důkaz věty 6.1.18 v příkladech předchozí kapitoly?*

6.2 Funkce spojité na množině

Spojitost funkce na množině je globální vlastností funkce.

Definice 6.2.1. Říkáme, že funkce f ***je spojitá na množině*** $M \subset D(f) \iff$ je spojitá v každém bodě množiny M.

Zápis: $f \in C(M)$.

Říkáme, že funkce f ***je spojitá*** $\iff$ f je spojitá na $D(f)$.

Poznámka 6.2.2. Je třeba rozlišovat spojitost na $D(f)$ a spojitost na uzávěru $\overline{D(f)}$. Například funkce $f : y = 1/x$ je podle výše uvedené definice spojitá, neboť je spojitá na $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ale není spojitá na množině $\mathbb{R} = \overline{D(f)}$.

Někdy lze požadavek na spojitost funkce poněkud „oslabit“ a uvažovat funkce jen „po částech spojité“ (viz například Newtonův vzorec v kapitole Riemannův určitý integrál).

Definice 6.2.3. Funkce f se nazývá ***po částech spojitá*** na $M \iff$

- je spojitá ve všech bodech množiny M
- s výjimkou konečného počtu bodů M,
  - v nichž je definovaná
  - a má zde nespojitost 1. druhu
  - nebo nespojitost odstranitelnou.

K tomu, abychom mohli spojitosti prakticky využívat, je třeba se přesvědčit, které z běžně používaných funkcí jsou spojité. Především i zde přirozeně platí:

Věta 6.2.4. Všechny základní elementární funkce jsou spojité.

- Z vlastností spojitosti (věty 6.1.10, 6.1.11 a 6.1.18) plyne, že jsou spojité i všechny funkce, které ze základních elementárních funkcí dostaneme konečným počtem aritmetických operací a skládání funkcí.

- Nejdůležitějším zvláštním případem spojitosti na M je spojitost na intervalu.

  Přitom spojitost na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ znamená, že

  - f je spojitá na (a, b),
  - v levém krajním bodě a je spojitá zprava
  - a v pravém krajním bodě b je spojitá zleva.

6.3 Vlastnosti funkcí spojitých na intervalu

Věta 6.3.1 (1. Weierstrassova věta). *Je-li funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je na tomto intervalu omezená.*

Důkaz (sporem).

- Kdyby funkce f nebyla omezená na $\langle a, b\rangle$ (například shora), pak by ke každému $n \in \mathbb{N}$ existoval bod $x_n \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(x_n) > n$.

- Posloupnost $\{x_n\} \subset \langle a, b\rangle$ je omezená, takže podle Bolzano–Weierstrassovy věty existuje vybraná konvergentní podposloupnost $\{x'_n\}$ s limitou x_0, pro niž též $f(x'_n) > n$.

- Proto $f(x_0)$ je (podle Heineho definice spojitosti a podle věty o limitě nerovnosti)

  - jednak $+\infty$
  - a jednak reálné číslo vzhledem ke spojitosti f v každém bodě $\langle a, b\rangle$, tedy i v x_0,

  a to je spor.

□

Úloha 6.3.2. *Na příkladech ukažte, že oba předpoklady 1. Weierstrassovy věty (spojitost funkce a uzavřenost intervalu) jsou podstatné pro platnost tvrzení věty. Tedy při narušení některého z těchto předpokladů není nutně splněno ani tvrzení.*

Věta 6.3.3 (2. Weierstrassova věta). *Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak na tomto intervalu nabývá své největší i nejmenší hodnoty.*

Tedy existují body $c_1, c_2 \in \langle a, b\rangle$ tak, že

$$f(c_1) = \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x), \quad f(c_2) = \min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x).$$

Důkaz (části o maximu).

- Podle 1.Weierstrassovy věty je f shora omezená, takže existuje konečné

$$\sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = M.$$

- Stačí tedy dokázat, že existuje $c_1 \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(c_1) = M$.
- Kdyby takový bod c_1 neexistoval, byla by funkce

$$g(x) = M - f(x)$$

  na $\langle a, b\rangle$ spojitá a kladná.
- Proto i funkce $\dfrac{1}{g(x)}$ by byla na $\langle a, b\rangle$ spojitá,
- tedy podle 1. Weierstrassovy věty omezená kladnou konstantou

$$L : \frac{1}{g(x)} < L \implies g(x) > \frac{1}{L} \implies f(x) < M - \frac{1}{L};$$

- dostali jsme spor se 2. vlastností suprema,
- takže $g(x)$ nemůže být stále kladná,
- tedy uvažovaný bod c_1 existuje.

□

Úloha 6.3.4. *Na příkladech ukažte, že oba předpoklady 2. Weierstrassovy věty (spojitost funkce a uzavřenost intervalu) jsou podstatné pro platnost tvrzení věty. Tedy při narušení některého z těchto předpokladů není nutně splněno ani tvrzení. (Například uvažte funkci $y = x$ na intervalu $(-1, 1)$.)*

Věta 6.3.5 (Bolzano-Cauchyova). *Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$ a platí-li*

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

pak existuje bod $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(\xi) = 0$.

Důkaz (Bolzanovou metodou půlení intervalů).

- Interval $\langle a, b\rangle$ rozpůlíme bodem c_1.

  - Pokud $f(c_1) = 0$, je $\xi = c_1$.
  - Jinak označíme $\langle a_1, b_1 \rangle$ tu polovinu, kde $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- Interval $\langle a_1, b_1 \rangle$ rozpůlíme bodem $c_2 \dots$.
- Buď $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\xi = c_n$
- nebo dostáváme posloupnost vložených intervalů, které mají podle věty o vložených intervalech jediný společný bod ξ; o něm se dokáže $f(\xi) = 0$.
  - Nemůže být $f(\xi) > 0$, neboť by existovalo okolí $U(\xi)$ tak, že $\forall x \in U(\xi)$ by bylo $f(x) > 0$
  - a to je spor (pro dosti velké n by bylo $\langle a_n, b_n \rangle \subset U(\xi)$).
  - Stejně tak nemůže platit, že $f(\xi) < 0$, proto $f(\xi) = 0$.

□

Této věty se užívá např. při řešení rovnic k důkazu existence řešení.

Úloha 6.3.6. *Dokažte, že rovnice $x + \sin(x - 1) = 0$ má alespoň jeden kořen.*

Řešení. Uvažujeme například $a = -2$, $b = 2$ (najděte menší interval!) □

Věta 6.3.7 (věta o mezihodnotě)**.** *Nechť funkce f je spojitá na $\langle a, b \rangle$,*

$$f(a) \neq f(b).$$

Pak funkce f nabývá každé hodnoty q mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Princip důkazu. Bolzano-Cauchyovu větu použijeme na funkci

$$g(x) = f(x) - q.$$

□

Důsledek 6.3.8. *Je-li funkce f spojitá na intervalu J, pak $f(J)$ je interval nebo jednobodová množina.*

Věta 6.3.9 (vztah mezi monotónností a prostotou u funkcí spojitých na intervalu)**.** *Je-li funkce f spojitá na intervalu J, pak f je prostá právě tehdy, když je monotónní.*

Princip důkazu.

- Vztah „ryze monotónní“ $\Rightarrow$ „prostá“ platí zřejmě i pro nespojité funkce.
- Vztah „prostá“ $\Rightarrow$ „ryze monotónní“ se dokáže sporem.
  - Kdyby (prostá) funkce nebyla ryze monotónní, existovaly by tři body c_1, c_2, c_3 tak, že $f(c_2)$ by bylo větší (nebo menší) než $f(c_1)$ a $f(c_3)$.

- Z věty o mezihodnotě plyne existence bodů $x_1 \in (c_1, c_2)$, $x_2 \in (c_2, c_3)$ tak, že $f(x_1) = f(x_2)$,
- a to je spor s vlastností prostoty.

$\square$

Úloha 6.3.10. *Sestrojte náčrtek k poslední části důkazu předchozí věty.*

Věta 6.3.11 (o spojitosti inverzní funkce)**.** *Je-li funkce f na intervalu J spojitá a prostá, pak inverzní funkce f je též spojitá.*

Důkaz. Používá se ryzí monotónnost funkce f a důsledek věty o mezihodnotě. $\square$

6.4 Stejnoměrná spojitost

Jako jsme vlastnost spojitosti „zmírnili" spojitostí po částech, můžeme tuto vlastnost zase „zpřísňovat".

Definice 6.4.1. Funkce f se nazývá ***stejnoměrně spojitá*** na množině $M \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že pro každé dva body $x', x'' \in M$ platí:

$$|x' - x''| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Předně uvážíme, že stejnoměrná spojitost má smysl jen na množině (zejména na intervalu), neexistuje nějaká stejnoměrná spojitost v bodě. Je to tedy vlastnost globální.

V definici si dále uvědomíme, že δ závisí pouze na ε, tj. nezávisí na poloze bodů x', x'' v M; u spojitosti na množině M obecně δ závisí také na bodu x_0, tedy i když je funkce spojitá v každém bodě množiny M, nelze obecně k danému $\varepsilon > 0$ najít takové $\delta > 0$, které by bylo stejné, ať zvolíme x_0 kdekoli na M.

Například u funkce $y = \operatorname{tg} x$ na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, když volíme x_0 „stále blíže" k $\frac{\pi}{2}$, pak pro dané ε (třeba $= 1$) musíme volit δ stále menší a menší, aby pro $x \in U(x_0, \delta)$ zůstaly funkční hodnoty $f(x)$ v ε-okolí hodnoty $f(x_0)$.

Stejnoměrnou spojitost lze charakterizovat také ještě pomocí tzv. *oscilace funkce.*

Definice 6.4.2. Nechť funkce f je definovaná a omezená na množině M. Číslo

$$\omega = \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{x \in M} f(x)$$

se nazývá ***oscilace funkce*** f na množině M.

Je-li funkce spojitá na uzavřeném intervalu, pak místo rozdílu suprema a infima můžeme vzít rozdíl maxima a minima.

Věta 6.4.3 (o oscilaci stejnoměrně spojité funkce)**.** *Funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu J, právě když $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tak, že na každém podintervalu $I \subset J$ délky menší než δ je oscilace funkce menší než ε.*

Vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti řeší následující dvě věty.

Věta 6.4.4 (vztah stejnoměrné spojitosti a spojitosti na množině M)**.** *Je-li funkce f stejnoměrně spojitá na M, pak je na M spojitá.*

Princip důkazu. Ze stejnoměrné spojitosti plyne spojitost v libovolném bodě x_0, neboť $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tak, že $\forall x \in D(f)$ platí:

$$|x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$\square$

Věta 6.4.5 (Cantorova věta)**.** *Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.*

Důkaz se provádí užitím Borelovy věty o pokrytí: Je-li uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ pokryt systémem S_ν otevřených intervalů, pak existuje konečný podsystém $S_k \subset S_\nu$, který také pokrývá interval $\langle a,b\rangle$.

$- * -$

Kapitola 7

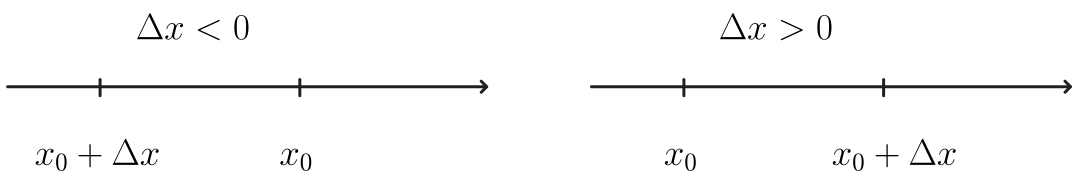
Derivace funkce

Derivace funkce patří mezi nejpoužívanější pojmy matematické analýzy. Derivace vyjadřuje rychlost změny a stojí proto i v základu četného praktického použití matematické analýzy.

7.1 Pojem derivace funkce

Mějme funkci f, která je definována v nějakém okolí $U(x_0)$ bodu x_0.

- Postoupíme-li z bodu x_0 o nějaké Δx (Δx je *přírůstek nezávisle proměnné*), dostaneme novou hodnotu nezávisle proměnné $x_0 + \Delta x$ $(\in U(x_0))$;
  - pro $\Delta x < 0$ je tato hodnota vlevo
  - a pro $\Delta x > 0$ je vpravo od x_0.

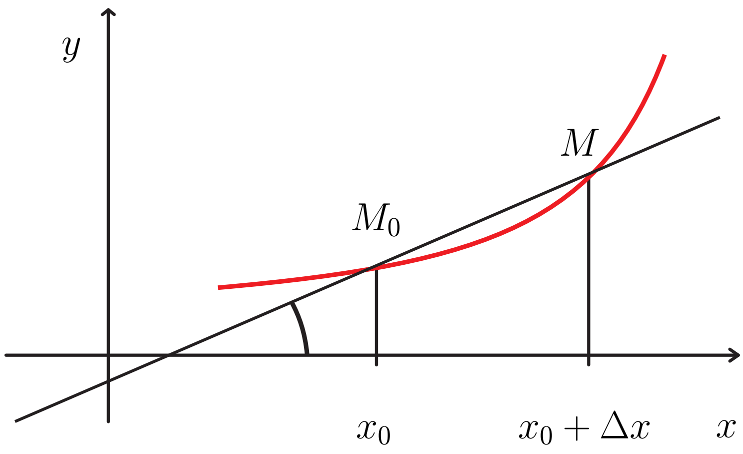


Obrázek 7.1: Přírůstky nezávisle proměnné.

- Funkční hodnota se přitom změní z hodnoty $f(x_0)$ na hodnotu $f(x_0+\Delta x)$ o rozdíl $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
  - Δy je tzv. *přírůstek funkce.*
  - Podíl $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ je tzv. *diferenciální podíl*;
  - jeho geometrickým významem je směrnice sečny ke grafu funkce,

– tj. $\operatorname{tg}\alpha$, kde α je úhel, který svírá sečna M_0M s osou x.

Úloha 7.1.1. *Doplňte do obrázku 7.2 označení: α, Δx, a Δy.*



Obrázek 7.2: Sečna grafu.

Pro spojitou funkci f platí

$$\Delta x \to 0 \implies \Delta y \to 0,$$

takže pro $\Delta x \to 0$ je diferenciální podíl $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ výraz typu $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Definice 7.1.2. Říkáme, že ***funkce*** f ***má v bodě*** x_0 ***derivaci***, právě když je f definována na nějakém okolí bodu x_0 a existuje (vlastní) limita

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Tuto limitu nazýváme ***derivace funkce*** f ***v bodě*** x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.

Derivace v bodě je tedy nějaké číslo.

Geometrický význam derivace funkce v bodě:

$f'(x_0)$ znamená směrnici tečny grafu funkce v bodě M_0, tj. $\operatorname{tg}\varphi$, kde φ je úhel který svírá tečna v bodě M_0 s osou x.

Úloha 7.1.3. *Načrtněte dle obrázku 7.2 obrázek, v němž vyznačíte geometrický význam derivace funkce v bodě.*

Fyzikální význam derivace v bodě:

Je-li zákon dráhy $s = s(t)$, pak diferenciální podíl $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ znamená průměrnou rychlost a $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$ znamená okamžitou rychlost.

Úloha 7.1.4. *Podle definice vypočtěte derivaci funkce* $y = x^2$ *v bodě* $x_0 = 3$.

Jestliže v definici derivace nahradíme limitu jednostrannou limitou, dostaneme definice jednostranných derivací (derivace zleva, zprava), které označujeme $f'(x_0-)$ a $f'(x_0+)$.

Je-li $f'(x_0) = k$, pak existují obě jednostranné derivace a jsou rovny číslu k; také naopak, existují-li obě jednostranné derivace funkce f v bodě x_0 a rovnají se témuž číslu k, pak existuje derivace funkce f v bodě x_0 a je rovna k, jak plyne z vět o limitách.

Úloha 7.1.5. *Vypočtěte obě jednostranné derivace funkce* $f : y = |x|$ *v bodě* $x_0 = 0$.

Z výpočtu plyne, že funkce $y = |x|$ nemá v bodě 0 derivaci.

Jestliže limita diferenciálního podílu $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ je pro $\Delta x \to 0$ rovna $+\infty$ nebo $-\infty$, pak mluvíme o nevlastních derivacích (též zleva, zprava).

Výrok „existuje derivace“ však bude vždy znamenat „existuje vlastní derivace“.

Úloha 7.1.6. *Je dána funkce* $f : y = \sqrt{1 - x^2}$. *Ověřte, že* $f'(1-) = +\infty$.

Úloha 7.1.7. *Určete derivaci funkce* $y = x^2$ *v bodě* x.

Derivace jako funkce

Definice 7.1.8. Má-li funkce f derivaci v každém bodě x nějaké množiny M, říkáme, že ***má derivaci na množině*** M; značíme ji f' nebo $f'(x)$.

- Vidíme, že derivace funkce na množině M je opět funkce.
- Například dle úlohy 7.1.7 derivací funkce $y = x^2$ na $\mathbb{R}$ je funkce $y = 2x$.
- Chceme-li pak zjistit derivaci $f'(x_0)$ v nějakém bodě x_0, stačí do $f'(x)$ dosadit x_0 za x.
- Například pro f z úlohy 7.1.7 je $f'(3) = (2x)_{x=3} = 6$ (srovnej s úlohou 7.1.4).

Přehled označení derivací:

v bodě:	jako funkce:	původ označení:
$f'(x_0)$	$y',\ f',\ f'(x)$	Lagrange
$\dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x},\ \left(\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x},\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$	Leibniz
$\mathrm{D}f(x_0)$	$\mathrm{D}y,\ \mathrm{D}f(x)$	Cauchy

- Každé z těchto označení má své výhody.
- Například v Leibnizově je dobře vidět, podle které proměnné se derivuje, takže se dobře uplatňuje například při manipulacích s funkcemi složenými a inverzními;
- Cauchyovo označování je vhodné například při řešení diferenciálních rovnic operátorovou metodou;
- operaci definovanou operátorem D nazýváme zpravidla *derivování* (podle dané proměnné).
- Chceme-li v Lagrangeově označení zdůraznit proměnnou, podle níž se derivuje, napíšeme tuto proměnnou jako index, například f'_u.

Věta 7.1.9 (vztah mezi derivací a spojitostí)**.** *Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v něm spojitá.*

Princip důkazu. Dokážeme, že platí $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\Big)=0.$ □

Úloha 7.1.10. *Dle definice derivace stanovte derivace funkce $y = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.*

Úloha 7.1.11. *Dle definice derivace stanovte derivace funkce $y = \sin x$ [pozor na to, jak se přitom využije spojitosti funkce kosinus].*

7.2 Vlastnosti derivací

Věta 7.2.1 (základní vlastnosti derivací)**.** *Nechť funkce $u = f(x)$, $v = g(x)$ mají na množině M derivace $u' = f'(x)$, $v' = g'(x)$ a $c \in \mathbb{R}$.*

Pak funkce $c\cdot f$, $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ a pro $g(x)\neq 0$ i $\dfrac{f}{g}$ mají na M derivace a platí:

1. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$,

2. $(u + v)' = u' + v', \quad (u - v)' = u' - v'$,

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$,

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Důkaz. Provádí se podle definice derivace, u součinu a podílu se přidá a odečte určitá pomocná funkce, využívá se tu též spojitosti. □

Pravidla pro sčítání a pro násobení lze matematickou indukcí rozšířit na n členů (činitelů), $n \in \mathbb{N}$. Pro násobení tří funkcí tak například máme

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

Věta 7.2.2 (derivace složené funkce)**.** *Nechť existuje složená funkce $f \circ \varphi$ a nechť*

1) funkce $u = \varphi(x)$ má v bodě x derivaci $\varphi'(x)$,

2) funkce $y = f(u)$ má v odpovídajícím bodě u $(= \varphi(x))$ derivaci $f'(u)$.

Pak funkce $f \circ \varphi$ má v bodě x derivaci

$$(f \circ \varphi)'(x) = (f'(u) \cdot \varphi'(x) =)(f \circ \varphi)'_u(x) \cdot \varphi'(x).$$

Úloha 7.2.3. *Užitím věty o derivaci složené funkce máme najít derivaci funkce $y = \sin^2 x$.*

Při označení podle Leibnize má pravidlo pro derivaci složené funkce tvar, jako úprava zlomků: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

Věta 7.2.4 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť f je ryze monotónní na intervalu J a má tu derivaci f'. Pak inverzní funkce f^{-1} má derivaci na $f(J)$ a platí*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Důkaz. U obou vět se provádí dle definice derivace a používá se faktu, že

$$\Delta y \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta x \to 0.$$

□

Úloha 7.2.5. *Užitím předchozí věty zjistěte derivaci funkce $y = \arcsin x$.*

Při označení podle Leibnize má pravidlo pro derivaci inverzní funkce tvar, jako úprava zlomku:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

7.3 Derivace elementárních funkcí

Věta 7.3.1 (přehled vzorců pro derivace elementárních funkcí).

- $(c)' = 0$ *(derivace konstanty);*
- $(x^m)' = mx^{m-1}$ *(platí pro libovolné $m \neq 0$); zvláště* $(x)' = 1$*;*
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$*; zejména* $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$*;*
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$*; zejména* $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$*;*
- $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$*;*
- $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$*;* $(\operatorname{cotg} x)' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$*;*
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$*;* $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$*;*
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$*;* $(\operatorname{arccotg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$*;*
- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$*;* $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$*;*
- $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$*;* $(\coth x)' = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$*;*
- $(\operatorname{argsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$*;* $(\operatorname{argth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Důkaz. Provádí se užitím definice derivace (někde i s užitím speciálních limit), vlastností derivací, vět o derivaci složené funkce a inverzní funkce. □

Úloha 7.3.2. *Určete derivaci funkce* $y = (\cos x)^{\sin x}$ *pro x v 1. kvadrantu.*

7.4 Diferenciál funkce

Řešíme problém: funkci f v okolí bodu x_0 aproximovat lineární funkcí g, tj. nalézt takovou lineární funkci g, aby platila podmínka

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

Označme $x = x_0 + h$; zřejmě $g(x) = f(x_0) + ah$, takže čitatel posledního zlomku lze zapsat jako

$$\omega(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - ah.$$

Výše uvedenou podmínku lze tak zapsat jako

$$\lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0.$$

Z definice funkce $\omega(h)$ plyne, že přírůstek funkce $\Delta f(x_0)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\Delta f(x_0)(= f(x_0 + h) - f(x_0)) = ah + \omega(h).$$

Definice 7.4.1. Lineární část přírůstku funkce, tedy funkci ah, nazýváme ***diferenciál funkce*** f ***v bodě*** x_0, označujeme jej $\mathrm{d}f(x_0)$ a funkci, která má diferenciál v bodě x_0, nazýváme ***diferencovatelnou v bodě*** x_0. Funkci, která má diferenciál v každém bodě množiny M, nazýváme ***diferencovatelnou na množině*** M.

Věta 7.4.2 (existence a jednoznačnost diferenciálu)**.** *Funkce f je diferencovatelná v bodě x_0 $\iff$ má v bodě x_0 vlastní derivaci. Diferenciál $\mathrm{d}f(x_0)$ funkce f v bodě x_0 je pak jednoznačně určen vzorcem*

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot h,$$

kde $h \in \mathbb{R}$ je přírůstek nezávisle proměnné.

Předchozí věta tedy říká, že výroky „f má v bodě x_0 (vlastní) derivaci“ a „f je v bodě x_0 diferencovatelná“ jsou ekvivalentní, znamenají totéž. (U funkcí více proměnných je tomu jinak.)

Místo h používáme pro přírůstek nezávisle proměnné též označení Δx nebo $\mathrm{d}x$ a název *diferenciál nezávisle proměnné*. Je to motivováno skutečností, že diferenciál lineární funkce $y = x$ je $\mathrm{d}x = 1 \cdot h(= 1 \cdot \Delta x)$. Diferenciál funkce pak též zapisujeme $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$. Výše uvedené poznatky nám umožňují definovat diferenciál funkce přímo uvedeným vzorcem.

Definice 7.4.3. ***Diferenciálem funkce*** f ***v bodě*** x_0 nazýváme výraz

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x,$$

kde $\mathrm{d}x(= \Delta x)$ je konstantní přírůstek (diferenciál) nezávisle proměnné.

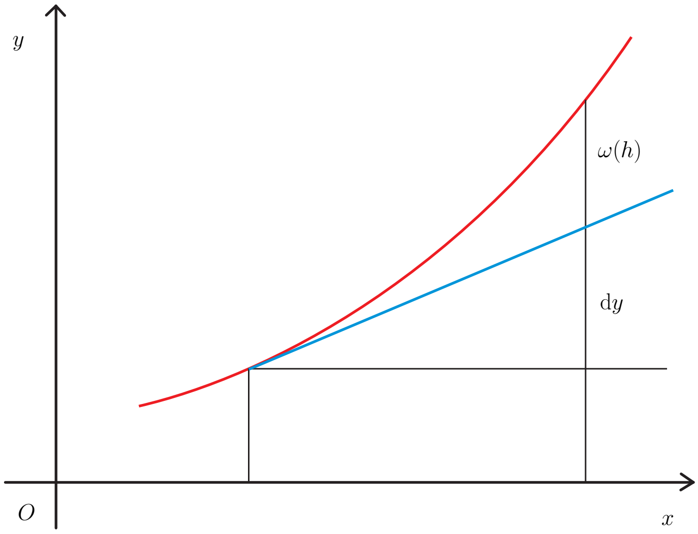
Diferenciálem funkce f ***na množině*** M nazýváme funkci

$$\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x,$$

kde $x \in M$.

Ze vztahu $\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$ vidíme, že Leibnizův symbol $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pro derivaci funkce je skutečným zlomkem — podílem diferenciálu funkce a diferenciálu nezávisle proměnné. Také vzorce pro derivaci složené funkce a inverzní funkce (viz 7.2) lze chápat jako operace se skutečnými zlomky.

Úloha 7.4.4. *Doplňte obrázek 7.3, který znázorňuje geometrický význam diferenciálu funkce jako přibližné hodnoty přírůstku funkce stanovené na tečně ke grafu funkce.*



Obrázek 7.3: Geometrický význam diferenciálu funkce.

Užití diferenciálu

Užití diferenciálu *v přibližných výpočtech* je založeno na přibližné rovnosti

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y \approx f(x_0) + \mathrm{d}y = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Úloha 7.4.5. *Pomocí diferenciálu funkce vypočtěte přibližnou hodnotu* $\sqrt{0,982}$.

Řešení.

$$\sqrt{0,982} = f(0,982) = f(1 - 0,018) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

$$\sqrt{0,982} \approx f(1) + f'(1) \cdot (-0,018) = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(-0,018) = 1 - \frac{0,018}{2} = 0,991.$$

□

Užití diferenciálu *při odhadu chyb* je založeno na tom, že když h (tedy $\mathrm{d}x$) položíme rovno absolutní chybě měření, udává $\mathrm{d}f$ přibližnou hodnotu absolutní chyby vypočtené hodnoty $y = f(x)$.

Úloha 7.4.6. *Počítáme objem koule, jejíž průměr x jsme změřili s chybou δx. Určete chybu výsledku.*

Řešení. Vzorec pro objem koule o poloměru r, resp. průměru x:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi x^3.$$

Pokud x měříme s chybou δx, dostaneme při označení $\hat{x} = x + \delta x$:

$$\hat{V} = \frac{1}{6}\pi\hat{x}^3 = \frac{1}{6}\pi(x+\delta x)^3 \approx \frac{1}{6}\pi x^3 + \left[\frac{1}{6}\pi x^3\right]' \cdot \delta x = V + \left[\frac{1}{2}\pi x^2\right] \cdot \delta x = V + \delta V.$$

Přibližná chyba výsledku je tedy $\delta V = \dfrac{1}{2}\pi x^2 \delta x$, přičemž přibližná relativní chyba výsledku je

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\frac{1}{2}\pi x^2 \delta x}{\frac{1}{6}\pi x^3} = 3\frac{\delta x}{x},$$

a tedy relativní chyba výsledku je rovna trojnásobku relativní chyby měření průměru. □

Diferenciál složené funkce

Mějme funkci $y = f(u)$, kde u je nezávisle proměnná. Pak její diferenciál je

$$\mathrm{d}f (= \mathrm{d}y) = f'(u) \cdot \mathrm{d}u.$$

Určeme nyní $\mathrm{d}f$ v případě, že u není nezávisle proměnná, ale $u = \varphi(x)$. Pak

$$\mathrm{d}f = [f \circ \varphi(x)]' \cdot \mathrm{d}x = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = f'(u) \cdot \mathrm{d}u,$$

neboť $\mathrm{d}u = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$.

Vidíme, že diferenciál funkce je invariantní při přechodu na složenou funkci. (Tuto vlastnost má pouze 1. diferenciál, viz 7.5, a používáme ji zejména při výpočtu neurčitých integrálů, viz 10.)

7.5 Derivace a diferenciály vyšších řádů

Funkce $y = \sin x$ má derivaci $y' = \cos x$. Toto je opět funkce, která má derivaci a platí $(y')' = -sinx$.

Definice 7.5.1. Má-li funkce f' v bodě x (na množině M) derivaci $(f')'$, označíme tuto derivaci f'' a nazveme ***derivace druhého řádu*** (***druhá derivace***) funkce f. Podobně ***derivaci*** n***-tého řádu*** (n***-tou derivaci***) $f^{(n)}$ definujeme vztahem $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Označení podle Leibnize: $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ (čti „d dvě f podle $\mathrm{d}x$ na druhou“), $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(f(x))$, $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, $\left(\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right)_{x=x_0}$, apod.

Označení podle Cauchyho: $D^2 f$, $D^n y$, apod.

Úloha 7.5.2. *Určete všechny derivace funkce* $y = 3x^2 - 2x - 1$.

Úloha 7.5.3. *Určete 2. derivaci funkce* $y = \sin x$ *v bodě* $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Derivace $y'', \dots, y^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, nazýváme *derivace vyšších řádů.* Upotřebíme je např. při vyšetřování průběhu funkce (viz kapitolu 9) nebo při určování koeficientů Taylorova rozvoje (viz kapitolu 8). Má proto smysl uvažovat o vzorcích, které usnadní výpočet n-té derivace.

Některé vzorce pro n-tou derivaci elementárních funkcí

1) Funkce $\mathrm{e}^x : \forall n \in \mathbb{N}$ je $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$;

   podobně pro funkci a^x máme $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$.

2) Funkce $\sin x$, $\cos x$.

   Platí: $f^{(n+4)} = f^{(n)}$, takže takto lze zjistit derivaci libovolného řádu. Platí též vzorec $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ a podobný pro $(\cos x)^{(n)}$.

3) Funkce $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$. Zde $f^{(n+2)} = f^{(n)}$.

4) Funkce x^n, $n \in \mathbb{N}$. Zde $(x^n)^{(n)} = n!$, $(x^n)^{(m)} = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m > n$.

Leibnizovo pravidlo pro n-tou derivaci součinu:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \cdots + \binom{n}{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.$$

Úloha 7.5.4. *Určete 120. derivaci funkce* $y = x^2\,\mathrm{e}^x$.

Řešení.

$$\mathrm{e}^x(x^2 + 240x + 14280).$$

□

Diferenciály vyšších řádů

Podobně jako u derivací je možno definovat *diferenciál 2. řádu* (*2. diferenciál*) jako diferenciál diferenciálu funkce (diferenciál funkce pak nazýváme 1. diferenciál funkce).

Je-li x nezávisle proměnná, je $\mathrm{d}x$ konstantní přírůstek, takže pro funkci $y = f(x)$ je

$$\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}(\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f'(x)\cdot\,\mathrm{d}x) = (f'(x)\cdot\,\mathrm{d}x)'\cdot\,\mathrm{d}x = f''(x)\cdot\,\mathrm{d}x^2.$$

Vidíme, že v Leibnizově označení 2. derivace je $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ skutečný podíl 2. diferenciálu a 2. mocniny $\mathrm{d}x$.

Definice 7.5.5. ***Diferenciál*** n***-tého řádu*** (n***-tý diferenciál***) funkce f je definován rekurentním vztahem:

$$\mathrm{d}^n f = \mathrm{d}\big(\mathrm{d}^{n-1} f\big)\,.$$

Věta 7.5.6. *Za předpokladu existence vlastní derivace n-tého řádu funkce $f(x)$, kde x je nezávisle proměnná, je*

$$d^n f = f^{(n)}(x) \cdot \mathrm{d}x^n.$$

Úloha 7.5.7. *Odvoďte vzorec pro druhý diferenciál složené funkce.*

Řešení. $d^2 y = f''(u)\,\mathrm{d}u^2 + f'(u)\,\mathrm{d}^2 u$, kde $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. □

Z výsledku je vidět, že diferenciály vyšších řádů nejsou invariantní vzhledem ke skládání funkcí (při přechodu na složenou funkci přibývá další člen: $f'(u)\,\mathrm{d}^2 u$).

7.6 Derivace různých typů funkcí

1) Funkce více proměnných

Derivujeme vždy podle jedné proměnné a ostatní považujeme za konstantu; dostáváme tzv. *parciální derivace* s označením (například pro funkci $z = f(x,y)$) $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, atd.

Úloha 7.6.1. *Vypočtěte všechny parciální derivace 2. řádu pro funkci $z = x \sin xy$.*

2) Funkce dané parametricky

Nezávisle proměnná x i hodnota funkce y jsou vyjádřeny soustavou $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in (\alpha, \beta)$. Derivaci $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ určíme pomocí diferenciálů (užitím uvedeného Leibnizova symbolu): $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\psi'(t)\,\mathrm{d}t}{\varphi(t)\,\mathrm{d}t} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi(t)}$ (tedy derivace je též funkcí parametru).

Úloha 7.6.2. *Odvoďte vzorec pro derivaci 2. řádu funkce dané parametricky.*

Řešení. $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \dfrac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\big(\varphi'(t)\big)^3}$. □

Úloha 7.6.3. *Funkce f je dána parametricky:* $\begin{array}{l} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{array}$ $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Vypočtěte $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ *a* $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

3) Funkce dané implicitně

Funkce $y = y(x)$ nechť je dána implicitní rovnicí $f(x,y) = 0$ pro $x \in (a,b)$. Na daném intervalu tedy platí identicky $f(x, y(x)) = 0$. Proto také derivace levé strany podle x je identicky rovna nule, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ a z toho vypočteme $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Derivaci $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ vypočteme, když tuto rovnost znovu derivujeme podle x s tím, že $y = y(x)$.

Úloha 7.6.4. *Vypočtěte 1. a 2. derivace funkce dané implicitní rovnicí* $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

Řešení. $y' = -\dfrac{x}{y}$, $y'' = -\dfrac{x^2+y^2}{y^3}$. □

4) Funkce dané graficky

Mějme funkci f danou na intervalu J „hladkým“ grafem, cílem je nalezení grafu derivace.

Zpravidla lze použít tento postup: Na J zvolíme přiměřeně „hustou“ množinu M bodů, do níž zahrneme zejména body, v nichž má funkce extrém nebo inflexi (viz kapitolu 9). Dále sestrojíme bod $T[-1;0]$. Pro každý bod $x_i \in M$ pak:

- sestrojíme přímku $x = x_i$ (na níž pak — po jejím zjištění — vyznačíme hodnotu derivace funkce v bodě x_i) a její průsečík A_i s grafem funkce f;
- v bodě A_i sestrojíme tečnu t_i ke grafu funkce f;
- bodem T s ní vedeme rovnoběžku $t_i' \,||\, t_i$ a stanovíme průsečík B_i' přímky t_i' s osou y; velikost orientované úsečky OB' je hodnotou $f'(x_i)$;
- úsečku OB' přeneseme na přímku $x = x_i$ od bodu x_i (ležícího na ose x) a dostaneme bod B grafu derivace.

5) Funkce dané tabulkou

Uvažujme tři po sobě jdoucí tabulkové hodnoty funkce f *v bodech* x_{-1}, x_0, x_1. Derivaci zprava $\mathrm{D}f(x_0+)$ nahradíme „pravým diferenciálním podílem“ $\delta f(x_0+)$, derivaci zleva $\mathrm{D}f(x_0-)$ „levým diferenciálním podílem“ $\delta f(x_0-)$ a derivaci $\mathrm{D}f(x_0)$ „aritmetickým průměrem hodnot“ $\delta f(x_0-)$ a $\delta f(x_0+)$, tedy

$$\delta f(x_0-) = \frac{f(x_0) - f(x_{-1}}{x_0 - x_{-1}},\ \delta f(x_0+) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$\mathrm{D}f(x_0) = \frac{1}{2}(\delta f(x_0-) + \delta f(x_0+)).$$

Úloha 7.6.5. *Funkce f je dána tabulkou $f(3,7) = 50,653$, $f(3,8) = 54,872$, $f(3,9) = 59,319$. Vypočtěte derivaci $f'(3,8)$.*

Řešení. $\delta f(3,8-) = 42,19$, $\delta f(3,8+) = 44,47$, $\mathrm{D}f(3,8) = 43,33$; pro kontrolu: platí $f(x) = x^3$, takže $f'(3,8) = 43,32$, chyba výpočtu je menší než $0,03\%$. $\square$

— ∗ —

Kapitola 8

Základní věty diferenciálního počtu

8.1 Úvod

Věta 8.1.1 (Fermatova)**.** *Nechť funkce f je definována na M a nabývá v některém vnitřním bodě $x_0 \in M$ své největší nebo nejmenší hodnoty. Má-li f v bodě x_0 derivaci, pak $f'(x_0) = 0$.*

Princip důkazu. Uvažujeme znaménko podílu $d(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ v levém a pravém okolí bodu x_0, v němž nabývá své největší (nejmenší) hodnoty. Z věty o limitě nerovnosti pak plyne $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} d(x) = 0$. □

Fermatovu větu lze vztáhnout na lokální extrém a jeho okolí, tato věta má tedy lokální charakter a lze ji formulovat takto: má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a má v něm derivaci, pak se tato derivace rovná nule. Tedy:

Věta 8.1.2. *Nutnou podmínkou existence lokálního extrému funkce f v bodě x_0 je, že v něm derivace $f'(x_0)$ buď neexistuje nebo je rovna nule.*

Pro diferencovatelnou funkci f je nutnou podmínkou rovnost $f'(x_0) = 0$.

8.2 Věty o střední hodnotě

Uvedeme zde trojici vět (Rolleova, Lagrangeova, Cauchyova), které jsou obvykle nazývány větami o střední hodnotě diferenciálního počtu. Jádrem je věta Lagrangeova.

Věta 8.2.1 (Rolleova)**.** *Nechť funkce f*

1) je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, *2) má derivaci na intervalu (a, b),*

3) splňuje rovnost $f(a) = f(b)$.

Pak v intervalu (a, b) existuje bod ξ tak, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz. Podle 2. Weierstrassovy věty nabývá funkce f v nějakém bodě $c_1 \in \langle a, b\rangle$ své nejmenší hodnoty a v nějakém bodě $c_2 \in \langle a, b\rangle$ své největší hodnoty. Kdyby c_1 i c_2 byly oba krajními body intervalu $\langle a, b\rangle$, platilo by $f(x) = konst.$, takže za ξ bychom mohli vzít libovolný bod intervalu (a, b). Je-li jeden z bodů c_1, c_2 vnitřním bodem intervalu (a, b) (označme jej c), pak tvrzení plyne z Fermatovy věty, kde $\xi = c$. □

Takových bodů, v nichž je derivace funkce f rovna 0, může být i více; například funkce $\sin x$ na $\langle 0, 2\pi\rangle$ splňuje předpoklady Rolleovy věty a její derivace je nulová v bodech $\dfrac{\pi}{2}$ a $\dfrac{3\pi}{2}$.

Úloha 8.2.2. *Proveďte grafickou ilustraci Rolleovy věty.*

Úloha 8.2.3. *Formou protipříkladů ukažte, že všechny tři předpoklady Rolleovy věty jsou nutné. Uveďte tedy příklady tří funkcí f_1, f_2, f_3, pro něž neplatí tvrzení Rolleovy věty, a to tak, že*

1) funkce f_1 je nespojitá v jediném bodě intervalu $\langle a, b\rangle$, ale předpoklady 2 a 3 jsou splněny;

2) funkce f_2 nemá derivaci v jediném bodě intervalu (a, b), ale předpoklady 1 a 3 jsou splněny;

3) pro funkci f_3 platí $f_3(a) \neq f_3(b)$, ale předpoklady 1 a 2 jsou splněny.

Věta 8.2.4 (Lagrangeova)**.** *Nechť funkce f*

1) je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,

2) má derivaci na intervalu (a, b),

Pak v intervalu (a, b) existuje bod ξ tak, že platí $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

Důkaz. Zavedeme pomocnou funkci $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ a ověříme, že jsou pro ni splněny předpoklady Rolleovy věty. Z tvrzení Rolleovy věty pro funkci F pak plyne tvrzení věty Lagrangeovy. □

Úloha 8.2.5. *Proveďte grafickou ilustraci Lagrangeovy věty.*

Úloha 8.2.6. *Formou proti příkladů (dle 8.2.3) ukažte, že oba předpoklady Lagrangeovy věty jsou nutné.*

Lagrangeova věta se používá v různých tvarech; některé uvedeme.

Položíme-li $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$ a označíme-li θ číslo z intervalu $(0, 1)$, lze tvrzení upravit takto:

Pak existuje $\theta \in (0, 1)$ tak, že platí

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Označíme-li $x = x_0 + \Delta x$, lze vztah z Lagrangeovy věty zapsat ve tvaru

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

Jiný zápis:

$$\Delta y = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x,$$

ukazuje, proč se Lagrangeově větě říká též *věta o přírůstku funkce.*

Lagrangeova věta má četné důsledky, z nichž některé lze posuzovat jako samostatné a významné výsledky matematické analýzy (viz 8.3).

Věta 8.2.7 (Cauchyho věta, zvaná též *zobecněná věta o střední hodnotě*)**.** *Nechť funkce f, g*

1) jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$,

2) mají derivace na intervalu (a, b),

3) $g'(x) \neq 0$ na intervalu (a, b).

Pak v intervalu (a, b) existuje bod ξ tak, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Důkaz. Předně $g(a) \neq g(b)$, neboť jinak by podle Rolleovy věty existoval bod $\xi_r \in (a, b)$ tak, že by $g'(\xi_r) = 0$, což by bylo ve sporu s předpokladem 3. Zavedeme pomocnou funkci

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)]$$

a ověříme, že jsou pro F na $\langle a, b\rangle$ splněny předpoklady Rolleovy věty. V (a, b) tedy existuje ξ tak, že $F'(\xi) = 0$, tedy

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(\xi) - f'(\xi) \cdot [g(b) - g(a)] = 0,$$

z čehož plyne tvrzení. □

Cauchyova věta se používá například k důkazu l'Hospitalova pravidla (viz 8.3).

Všimněme si ještě vztahu uvedených tří vět o střední hodnotě: implikace

$$(R) \Longrightarrow (L), \quad (R) \Longrightarrow (C)$$

znázorňují, že pomocí Rolleovy věty jsme dokázali zbývající dvě. Avšak také je (L) $\Rightarrow$ (R), neboť tvrzení Rolleovy věty lze chápat jako zvláštní případ tvrzení věty Lagrangeovy, když platí $f(a) = f(b)$. Stejně tak lze ukázat, že Lagrangeova věta je zvláštním případem věty Cauchyovy, tj. (C) $\Rightarrow$ (L), jestliže $g(x) = x$. Jsou tedy všechny tři věty o střední hodnotě navzájem ekvivalentní.

8.3 Některé důsledky vět o střední hodnotě

Nejprve uvedeme dva typické důsledky vět o střední hodnotě; na jednom je založen pojem neurčitého integrálu, druhý umožňuje jednoduchý výpočet limit funkcí.

Věta 8.3.1 (o konstantní funkci)**.** *Funkce f je na intervalu (a, b) konstantní $\Longleftrightarrow$ má na (a, b) derivaci a $\forall x \in (a, b)$ platí $f'(x) = 0$.*

Důkaz. Z definice derivace plyne, že funkce konstantní na (a, b) má na (a, b) derivaci rovnu 0. Naopak nechť na (a, b) je $f'(x) = 0$. Dokážeme, že pro každé dva body x_1, $x_2 \in (a, b)$ platí $f(x_1) = f(x_2)$. Zvolme označení tak, aby $x_1 < x_2$. Pak na intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$ jsou splněny předpoklady Lagrangeovy věty, tedy existuje bod $\xi \in \langle x_1, x_2\rangle$ tak, že je

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot f'(\xi).$$

Rovnost $f(x_2) = f(x_1)$ plyne z toho, že derivace ve výše uvedeném vztahu je nulová. $\square$

Důsledek 8.3.2. *Mají-li dvě funkce f, g na (a, b) stejné derivace, tj. $f'(x) = g'(x)$, pak se na tomto intervalu liší jen o konstantu, tj. $\exists C \in \mathbb{R}$ tak, že na (a, b) je $f(x) = g(x) + C$.*

Tímto důsledkem jsou vytvořeny předpoklady k definici pojmu neurčitý integrál. Tedy primitivní funkcí například k funkci $\cos x$ je nejen funkce $\sin x$, ale také každá funkce tvaru $\sin x + C$, kde $C \in \mathbb{R}$. *Neurčitý integrál* jako množina všech primitivních funkcí k funkci f je podle důsledku Lagrangeovy věty množinou všech funkcí tvaru $F(x) + C$, kde F je jedna z primitivních funkcí k funkci f a C je libovolná (integrační) konstanta (viz 11).

Následující věta se týká výpočtu limit typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Podobnou větu lze vyslovit i pro limity typu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ a obě pak použít k výpočtu několika dalších typů limit.

Věta 8.3.3 (L'Hospitalovo pravidlo). *Nechť*

1) funkce f, g mají derivace v $P(a)$, kde $a \in \mathbb{R}^*$,

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,

3) existuje vlastní nebo nevlastní $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Pak existuje i $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a rovná se K.

Princip důkazu (pro $a \in \mathbb{R}$, $x \to a+$. Podle 2) lze doplnit definici funkcí f, g tak, aby byly spojité v $U(a)$, když položíme $f(a) = g(a) = 0$. Existuje pak interval $\langle a, b\rangle \subset U(a+)$ tak, že obě funkce f, g jsou na něm spojité a na (a, b) mají derivaci. Předpoklady Cauchyovy věty jsou tak splněny nejen na intervalu $\langle a, b\rangle$, ale na každém podintervalu $\langle a, x\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Podle Cauchyovy věty pak na každém intervalu $\langle a, x\rangle$ existuje bod ξ tak, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Pro $x \to a+$ je též $\xi \to a+$. Podle předpokladu existuje $\lim\limits_{\xi\to a+} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = K$ a vzhledem k rovnosti $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ má stejnou limitu pro $x \to a+$ i podíl na její levé straně. $\square$

Úloha 8.3.4. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-4}$. $\left[\frac{1}{4}\right]$

Úloha 8.3.5. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$. [1]

Úloha 8.3.6. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6x^2+5x+4}{3x^3+2x^2+1}$. [2]

Z důkazu věty je zřejmé, že l'Hospitalovo pravidlo platí i pro jednostranné limity, což už jsme měli i v úloze 8.3.6.

Úloha 8.3.7. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$. [0]

L'Hospitalovo pravidlo neplatí naopak a to v tomto smyslu: z existence limity podílu funkcí neplyne existence limity podílu jejich derivací nebo, což je totéž, z neexistence limity podílu derivací ještě neplyne neexistence limity podílu funkcí. Například $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin|x|}{|x|} = 1$.

Někdy je potřebné použít l'Hospitalovo pravidlo i vícekrát, případně provádět při výpočtu úpravy, které postup zjednoduší.

Úloha 8.3.8. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2 x}$. $\left[\frac{9}{2}\right]$

Při výpočtu limit typu $[0 \cdot \infty]$ součinu funkcí $f \cdot g$ upravíme součin funkcí na podíl $f/(1/g)$ nebo naopak $g/(1/f)$ tak, aby to bylo vhodné pro použití l'Hospitalova pravidla (tedy například funkci logaritmickou je zpravidla nejvhodnější nechat v čitateli).

Úloha 8.3.9. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 0+} x \ln x$. $[0]$

Počítáme-li limitu typu $[\infty - \infty]$ rozdílu funkcí $f - g$, upravíme rozdíl funkcí na podíl:

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}.$$

Úloha 8.3.10. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg}^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Řešení. $-\dfrac{2}{3}$; před použitím l'Hospitalova pravidla nejprve získaný zlomek vhodně rozložíme na součin funkcí. □

U limit typu $[0^0]$, $[\infty^0]$ a $[1^\infty]$ pro funkce f^g postupujeme tak, že tuto funkci nejprve upravíme na tvar $\mathrm{e}^{g \cdot \ln f(x)}$, limitu přeneseme do exponentu (podle věty o limitě složené funkce) a v exponentu dostaneme limitu typu $[0 \cdot \infty]$.

Úloha 8.3.11. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$. $[1]$

8.4 Taylorův vzorec

Mějme funkci f, $U(x_0) \subset D(f)$; h nechť je přírůstek nezávisle proměnné a nechť platí $f(x_0 + h) \in U(x_0)$. Hodnotu $f(x_0 + h)$ dovedeme vyjádřit přesně pomocí Lagrangeovy věty

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + \theta h),$$

kde $\theta \in (0, 1)$, a přibližně užitím diferenciálu

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0).$$

1. vzorec je sice přesný, ale na závadu někdy může být (například při numerických výpočtech), že neznáme θ. Druhý vzorec dává aproximaci funkce f lineární funkcí, což je na jedné straně výhodné pro jednoduchost této aproximace, na druhé straně je lineární aproximace v některých případech nedostatečně přesná. Položme

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + R(h),$$

kde $R(h)$ je nějaký „zbytek“. Platí tedy

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \frac{R(h)}{h}, \quad \text{takže} \quad \lim_{x\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0.$$

Zbytek $R(h)$ je tedy „vyššího řádu“ než h, „jde k 0 rychleji než h“, například může být typu $a \cdot h^2$.

Chtěli bychom nyní zachovat jednoduchost aproximace hodnoty $f(x_0 + h)$, ale přitom zvýšit přesnost. Můžeme toho dosáhnout tím že $f(x_0 + h)$ aproximujeme mnohočlenem v h stupně n; tento mnohočlen označíme $T_n(h)$. Při vhodném postupu bude zbytek, tedy rozdíl $f(x_0 + h) - T_n(h)$, záviset až na h^{n+1}.

Věta 8.4.1 (Taylorova)**.** *Nechť funkce f má v $U(x_0)$ spojité derivace až do řádu $n + 1$.*

Pak pro každé $x \in U(x_0)$ platí (označíme-li $h = x-x_0$) tzv. ***Taylorův vzorec****:*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0}{n!}h^n + R_n(h),$$

kde $R_n(h)$, tzv. ***zbytek****, lze psát ve tvaru*

Lagrangeově: $R_n(h) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$*, kde* $\theta \in (0,1)$*, nebo*

Cauchyově: $R_n(h) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\bar{\theta} h)}{n!}(1-\bar{\theta})h^{n+1}$*, kde* $\bar{\theta} \in (0,1)$*.*

Důkaz. V *důkazu* se používají pomocné funkce a Rolleova věta. □

Druhý obvyklý tvar Taylorova vzorce dostaneme po dosazení $h = x - x_0$:

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{1n}(x-x_0)^n+R_n(x-x_0),$$

Koeficienty $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ se nazývají ***Taylorovy koeficienty***.

Položíme-li $x_0 = 0$, což je například u elementárních funkcí častý a přirozený požadavek, dostaneme zvláštní případ Taylorova vzorce pro okolí bodu 0, a tento vzorec se někdy nazývá ***Maclaurinův*** (čti mekloren):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

Prvních $n + 1$ členů na pravé straně Taylorova (Maclaurinova) vzorce tvoří Taylorův polynom $T_n(x)$, takže platí $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Pokud na nějakém $U(x_0)$ je $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, je Taylorův polynom aproximací funkce f. Polynom $T_n(x)$ se také nazývá ***Taylorův*** (***Maclaurinův***) rozvoj funkce f; zde je to rozvoj podle vzorce, ale pracujeme rovněž s rozvojem funkce v mocninnou řadu.

Věta 8.4.2 (přehled Maclaurinových rozvojů některých elementárních funkcí).

- $\mathrm{e}^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots \dfrac{x^n}{n!} + R_n(x).$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots (-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x)$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots (-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m}(x)$
- $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots (-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{2m-1!} + R_{2m-1}(x)$
- $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x)$
- $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m}(x)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + R_n(x)$
- $(1+x)^r = 1 + \dbinom{r}{1}x + \dbinom{r}{2}x^2 + \dbinom{r}{3}x^3 + \cdots + \dbinom{r}{n}x^n + R_n(x)\ (\forall r \in \mathbb{R})$

Jestliže zjišťujeme, pro která x platí $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, dostaneme, že u funkcí e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ je to pro $x \in \mathbb{R}$, u funkce $\operatorname{arctg} x$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$, u funkce $\ln(1+x)$ pro $x \in (-1, 1\rangle$ a u funkce $(1+x)^r$ pro $x \in (-1,1)$ nebo na intervalu širším v závislosti na r.

Úlohy (na Maclaurinův rozvoj funkcí)

Úloha 8.4.3. *Určete Taylorovy koeficienty rozvojů funkcí uvedených v předchozím přehledu (použitím obecného vzorce).*

Řešení. V podstatě jde o využití vhodných pravidel pro výpočet derivací vyšších řádů pro zadanou funkci. □

Úloha 8.4.4. *Najděte rozvoj funkcí* e^{-x}, $\sin 3x$.

Úloha 8.4.5. *Odvoďte rozvoj funkcí* $\dfrac{1}{1+x}$ *a* $\sqrt{1+x}$.

Úloha 8.4.6. *Určete první členy rozvoje funkcí* $(x+1)\cdot \operatorname{ch} 2x$, $x \cdot \mathrm{e}^{-2x}$ *až po členy s* x^5.

Úloha 8.4.7. *Zobrazte na grafickém kalkulátoru (nebo na počítači pomocí vhodného SW systému) funkci* $y = \cos x$ *společně s jejími aproximacemi danými Maclaurinovým rozvojem:*

$$f_1(x) = 1,\ \ f_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2},\ \ f_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},\ \ f_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}.$$

Sledujte, jak se rozšiřuje interval těch $x \in \mathbb{R}$*, pro něž* $\cos x \approx f_k(x)$*,* $k = 1, 2, 3, 4$.

Úloha 8.4.8. *Totéž proveďte pro funkce* $\sin x$*,* $\operatorname{ch} x$*,* $\operatorname{sh} x$*,* $\operatorname{arctg} x$*, případně i pro jiné.*

– ∗ –

Kapitola 9

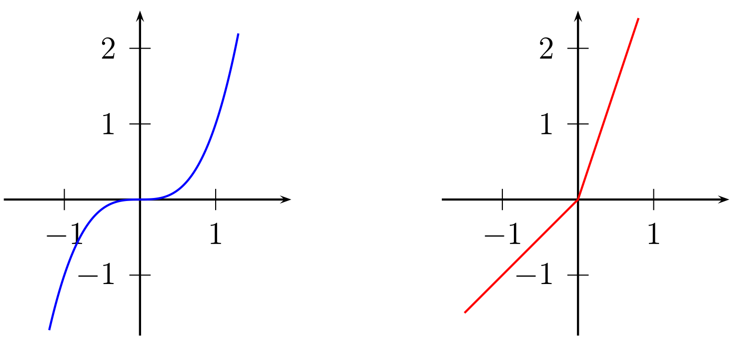
Užití diferenciálního počtu

9.1 Monotónnost funkce

Při vyšetřování průběhu funkce se mimo jiné zjišťuje, zda je daná funkce v některém intervalu (resp. v některém bodě) monotónní (definice viz v kap. 3). Velmi vhodným nástrojem pro zjišťování monotónnosti funkce je derivace funkce.

Věta 9.1.1. *Jestliže existuje okolí* $U(x_0) \subset D(f)$ *a* $f'(x_0) > 0$, *pak* f *je rostoucí v bodě* x_0.

Princip důkazu. Ježto $f'(x_0) > 0$, má v jistém okolí $U(x_0)$ stejné znaménko i diferenciální podíl a z toho plyne i tvrzení věty. □



Obrázek 9.1: Grafy funkcí $y = x^3$ a $y = 2x + |x|$.

Tato věta vyjadřuje jen postačující podmínku, neplatí obráceně. Funkce rostoucí v bodě může mít i nulovou derivaci (nebo derivaci nemít). Např. funkce $y = x^3$ je v bodě 0 rostoucí, ale má zde nulovou derivaci. Funkce $y = 2x + |x|$ je v bodě 0 rostoucí, ale derivaci v tomto bodě nemá.

Podobné výsledky platí i pro funkce klesající v bodě a pro zápornou derivaci.

Definice 9.1.2. Říkáme, že x_0 je stacionárním bodem funkce f, právě když $f'(x_0) = 0$.

Ve stacionárním bodě může být funkce rostoucí, klesající nebo v něm nemusí být monotónní.

Věta 9.1.3 (o monotónnosti na intervalu)**.** *Má-li funkce f derivaci na (a, b), pak platí:*

1) Funkce f je na (a, b) neklesající [nerostoucí], právě když $\forall x \in (a, b)$ je $f'(x) \geq 0$ [≤ 0].

2) Funkce f je na (a, b) rostoucí [klesající], právě když $\forall x \in (a, b)$ je $f'(x) \geq 0$ [≤ 0], přičemž neexistuje interval $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ tak, aby $\forall x \in (\alpha, \beta)$ $f'(x) = 0$.

Princip důkazu (pro funkce neklesající, resp. rostoucí).

(1)/1 Je-li f neklesající na (a, b), je v každém bodě intervalu (a, b) diferenciální podíl nezáporný, tedy i $f'(x) \geq 0$.

(1)/2 Je-li $f'(x) \geq 0$ na (a, b), $x_1 < x_2$, jsou na $\langle x_1, x_2 \rangle$ splněny předpoklady Lagrangeovy věty, tedy $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$, odkud plyne $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(2)/1 Je-li f rostoucí, je podle (1)/1 $f'(x) \geq 0$. Kdyby na nějakém (α, β) platilo $f'(x) = 0$, bylo by zde $f(x) = \mathit{konst.}$, což by byl spor.

(2)/2 Nechť $f'(x) \geq 0$ na (a, b), $x_1 < x_2$ a neexistuje (α, β) …Podle (1)/1 je $f(x_1) \leq f(x_2)$ a podle předpokladu o (α, β) existuje mezi x_1, x_2 bod x' tak, že $f'(x') > 0$, tj funkce f roste v x', a z toho se pomocí okolí bodu x' a definice funkce rostoucí v bodě vyvodí, že $f(x_1) < f(x_2)$.

□

Tuto větu lze rozšířit na uzavřený interval tak, že pro f předpokládáme derivaci na (a, b) a spojitost na $\langle a, b \rangle$.

Úloha 9.1.4. *Vyšetřete intervaly monotónnosti funkce $f : y = x^2 \,\mathrm{e}^{-x}$.*

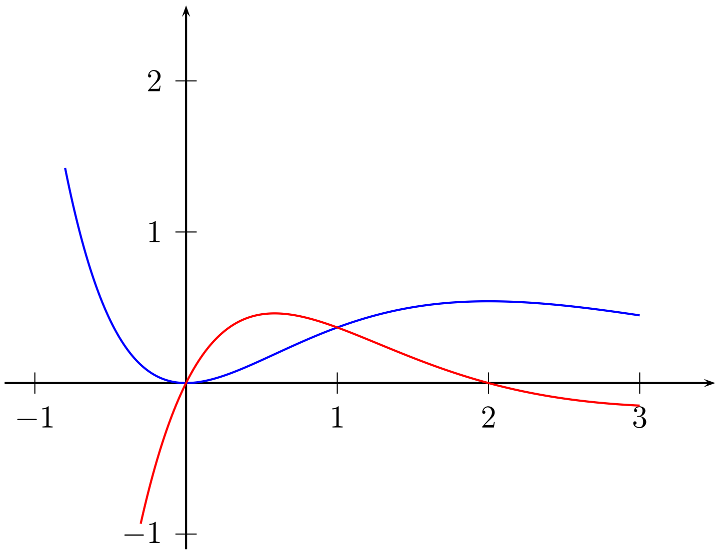
Řešení. $D(f) = \mathbb{R}$. Máme $y' = (2x - x^2)\,\mathrm{e}^{-x} = x(2 - x)\,\mathrm{e}^{-x}$; ježto $\mathrm{e}^{-x} > 0$, rozdělí se číselná osa body 0 a 2 na intervaly:

(1) na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ je $y' \leq 0$, přičemž y' je nulová v jediném bodě, f je klesající,

(2) na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ je $y' \geq 0$, přičemž y' je nulová ve dvou bodech, f je rostoucí,

(3) na intervalu $\langle 2, +\infty)$ je $y' \leq 0$, f je klesající (viz obrázek 9.2 na straně 105).

□



Obrázek 9.2: Grafy funkcí $y = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$ a $y' = x(2-x)\,\mathrm{e}^{-x}$ z úlohy 9.1.4.

9.2 Lokální extrémy

V kap. 3 jsou definovány pojmy (*ostré*) *lokální maximum*, (*ostré*) *lokální minimum* — se souhrnným názvem (*ostré*) *lokální extrémy*. V kap. 8 byla odvozena *nutná podmínka existence lokálního extrému*: Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$. Funkce tedy může mít extrém jen ve stacionárním bodě nebo v bodě, v němž nemá derivaci (jako tomu je např. u funkce $y = |x|$).

Zjišťování lokálních extrémů funkcí má velký význam teoretický i praktický, proto je důležité znát správný postup. Máme několik základních možností.

Postup při určování lokálních extrémů

Najdeme body, v nichž může nastat extrém, tj. body, v nichž je derivace funkce rovna nule (body stacionární) nebo v nichž derivace neexistuje; dále takový bod označíme x_0.

(1) Užití monotónnosti v okolí bodu x_0

Nechť f je spojitá v x_0 a existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$. Je-li f rostoucí v $P(x_0$-) a klesající v $P(x_0+)$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum.

Podobně lze formulovat další případy: ostré lokální minimum, neostré extrémy a případ, kdy extrém neexistuje.

(2) Užití 1. derivace v okolí bodu x_0

Nechť f je spojitá v x_0 a existuje okolí $P(x_0) \subset D(f)$, v němž má funkce f derivaci. Je-li $f'(x) > 0$ v $P(x_0-)$ a $f'(x) < 0$ v $P(x_0+)$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum. Podobně lze formulovat další případy.

(3) Užití 2. derivace v bodě x_0

Nechť f má derivaci v nějakém okolí $U(x_0) \subset D(f)$ a existuje $f''(x_0)$. Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum, je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální minimum.

Pozor: Pokud $f''(x_0) = 0$, neznamená to, že extrém neexistuje, ale že musíme rozhodnout podle jiného pravidla.

Odvození postupu dle (1) plyne z definice extrému, (2) plyne z (1) užitím vztahu mezi monotónností a znaménkem derivace, (3) plyne z (2) uvážíme-li, že např. vlastnost $f''(x_0) < 0$ říká, že funkce f' je klesající v bodě x_0, a protože $f'(x_0) = 0$, platí v nějakém $P(x_0-)$, že $f'(x) > 0$ a v $P(x_0+)$, že $f'(x_0) < 0$.

Úloha 9.2.1. *Zjistěte extrém funkce* $f : y = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

Řešení. Vypočteme derivaci $y' = (1 - x)\,\mathrm{e}^{-x}$ a položíme ji rovnu 0; dostáváme stacionární bod $x_0 = 1$. Dále vypočteme $y'' = (x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$. Ježto $y''(1) = -\,\mathrm{e}^{-1} < 0$, má funkce f v bodě 1 lokální maximum. □

(4) Užití Taylorova vzorce

Jestliže funkce f má derivace v $U(x_0)$ a platí $(n > 1)$ $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, pak

(1) pro n sudé existuje v bodě x_0 extrém:

- lokální maximum pro $f^{(n)}(x_0) < 0$,
- lokální minimum pro $f^{(n)}(x_0) > 0$.

(2) pro n liché extrém v bodě x_0 neexistuje.

Tvrzení plyne z toho, že z Taylorova vzorce máme za daných předpokladů $f(x_0 + \Delta x) - f(_0) = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta\Delta x)}{n!}\Delta x^n$, přičemž okolí bodu x_0, tedy $U(x_0)$, lze volit tak malé, že $f^{(n)}(x_0 + \theta\Delta x)$ má stejné znaménko jako $f^{(n)}(x_0)$.

Úloha 9.2.2. *Vyšetřete extrém funkce* $f : y = x^5$.

Řešení. Máme $y' = 5x^4$, stacionární bod 0. Dále pak $y'' = 20x^3$, $y''(0) = 0$, $y''' = 60x^2$, $y'''(0) = 0$, $y^{(4)} = 120x$, $y^{(4)}(0) = 0$, $y^{(5)} = 120 > 0$. První nenulová derivace je lichého řádu, tedy extrém neexistuje. □

9.3 Největší a nejmenší hodnota funkce na intervalu

Mějme funkci f definovanou a spojitou na intervalu $\langle a, b\rangle$. Podle 2.Weierstrassovy věty nabývá funkce f v některém bodě c_1 své největší hodnoty a v některém bodě c_2 své nejmenší hodnoty. Jiné názvy: *absolutní extrémy, globální extrémy.* Každý z bodů c_1, c_2 přitom může být vnitřním nebo krajním bodem intervalu $\langle a, b\rangle$, viz obr. 9.3.1.

Pokud je c_i vnitřním bodem, je to současně bod, v němž nastává lokání extrém, tedy stacionární bod nebo bod, v němž neexistuje derivace. Z toho pak plyne:

obr. 9.3.1.

Postup při určování největší a nejmenší hodnoty funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$

(1) Určíme všechny stacionární body a body, v nichž neexistuje derivace a vypočteme v nich funkční hodnoty.

(2) Vypočteme funkční hodnoty v bodech a, b.

(3) Maximum množiny všech těchto hodnot funkce z (1) a (2) je největší hodnotou funkce na $\langle a, b\rangle$,

(4) minimum množiny všech těchto hodnot funkce z (1) a (2) je nejmenší hodnotou funkce na $\langle a, b\rangle$.

Tedy: není třeba určovat lokální extrémy dle 9.2.

Úloha 9.3.1. *Máme určit největší a nejmenší hodnotu funkce* $f : y = x^3 - 3x + 1$ *na intervalu* $\langle 0, 2\rangle$.

Řešení. $y' = 3x^2 - 3$; f má na $\langle 0, 2\rangle$ jediný stacionární bod 1. Vypočteme $f(1) = -1$ a dále $f(0) = 1$, $f(2) = 3$. Funkce f tedy nabývá největší hodnoty 3 v bodě 2 a nejmenší hodnoty -1 v bodě 1. □

9.4 Konvexnost a konkávnost

Označme $k(u, v) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$; je-li f funkce spojitá, je pro $u \neq v$ také funkce $k(u, v)$ spojitá vzhledem k u i vzhledem k v. Geometrický význam: $k(u, v)$ je směrnice sečny grafu funkce f.

Definice 9.4.1. Funkce f se nazývá ***konvexní*** (***konkávní***) na intervalu $(a, b) \Leftrightarrow$ pro každé tři body $x_1, x, x_2 \in (a, b)$, kde $x_1 < x < x_2$, platí $k(x_1, x) < k(x, x_2)$ $(k(x_1, x) > k(x, x_2))$.

Funkce dle této definice je *ryze konvexní* nebo *konkávní*, při neostrých nerovnostech jde o neryzí vlastnosti.

Úloha 9.4.2. *Doplňte obrázek 9.4.1 (9.4.2), tak aby ilustroval definici funkce konvexní (konkávní).*

Věta 9.4.3 (1.věta o konvexnosti a konkávnosti)**.** *Nechť funkce f má na intervalu (a,b) derivaci f'. Pak funkce f je na (a,b) konvexní (konkávní) $\Leftrightarrow$ je f' na (a,b) rostoucí (klesající).*

Důkaz. 1) Nechť f je konvexní. Zvolme libovolné $x_1,\ x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$; dokážeme, že $f'(x_1) < f'(x_2)$. Mezi x_1 a x_2 zvolme další 3 body tak, aby platilo $x_1 < \bar{x}_1 < x_0 < \bar{x}_2 < x_2$. Pak platí $k(x_1,x_0) < k(x_0,x_2)$ a též $k(x_1,\bar{x}_1) < k(\bar{x}_1,x_0)$, $k(x_0,\bar{x}_2) < k(x_0,\bar{x}_2)$. Přejdeme k limitám: $\lim_{\bar{x}_1\to x_1+} k(x_1,\bar{x}_1) = f'(x_1+) = f'(x_1)$, $\lim_{\bar{x}_2\to x_2-} k(\bar{x}_2,x_2) = f'(x_2-) = f'(x_2)$,

$\lim_{\bar{x}_1\to x_1+} k(\bar{x}_1,x_0) = k(x_1,x_0)$, $\lim_{\bar{x}_2\to x_2-} k(x_0,\bar{x}_2) = k(x_0,\bar{x}_2) = k(x_0,x_2)$ a z toho

$f'(x_1) \le k(x_1,x_0) < k(x_0,x_2) < f'(x_2)$.

2) Naopak nechť f'je rostoucí na (a,b) . Uvažujme libovolné dva body $x_1,x_2 \in (a,b)$ a nechť $x \in (x_1,x_2)$. Dokážeme, že $k(x_1,x) < k(x,x_2)$ a to tak, že najdeme taková $\xi_1 < \xi_2$, že $f'(\xi_1) = k(x_1,x)$, $f'(\xi_2) = k(x,x_2)$. K tomu použijeme Lagrangeovu větu, podle níž existuje bod $\xi_1 \in \langle x_1,x\rangle$ tak, že $f'(\xi_1) = k(x_1,x)$, a podobně existuje $\xi_2 \in \langle x,x_2\rangle$ tak, že $f'(\xi_2) = k(x,x_2)$, přičemž $x_1 < x < x_2$. Proto $k(x_1,x) = f'(\xi_1) < f'(\xi_2) = k(x,x_2)$, funkce je konvexní.

□

Na funkci f' lze nyní použít větu o monotónnosti na intervalu (viz 9.1). Podle ní platí:

Věta 9.4.4 (2. věta o konvexnosti a konkávnosti)**.** *Má-li funkce f druhou derivaci na (a,b), pak tato funkce je na (a,b) konvexní [konkávní], právě když $\forall x \in (a,b)$ je $f''(x) \ge 0$ [≤ 0], přičemž neexistuje interval $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ tak, aby $\forall x \in (\alpha,\beta)$ bylo $f''(x) = 0$.*

9.5 Inflexe a inflexní body

Definice 9.5.1. Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 ***inflexi*** $\Leftrightarrow$ má derivaci $f'(x_0)$ a je v levém okolí $U(x_0-)$ konvexní [konkávní] a v pravém okolí $U(x_0+)$ konkávní [konvexní]. Bod $[x_0, f(x_0)]$ roviny se nazývá ***inflexní bod*** funkce f resp. grafu funkce f.

Tedy v inflexním bodě přechází funkce z konvexního průběhu na konkávní nebo naopak. *Inflexní tečna*, tj. tečna ke grafu funkce f v inflexním bodě, má tu vlastnost, že v bodě dotyku graf přechází z jedné poloroviny do druhé. Např. osa x je inflexní tečnou ke grafu funkce $y = x^3$. Tím se inflexní tečna liší od tečen v bodech, které nejsou inflexní.

Věta 9.5.2. *(vztah inflexe a derivace): Má-li funkce f v nějakém okolí $U(x_0)$ derivaci f', pak má v bodě x_0 inflexi $\Leftrightarrow$ má f' v bodě x_0 lokální extrém.*

Důkaz. 1) Nechť f má v bodě x_0 inflexi. Pak nastává jedna z těchto možností:

a) f je v $U(x_0-)$ konvexní (tj. f' je rostoucí) a v $U(x_0+)$ konkávní (tj, f' je klesající), takže f' má v bodě x_0 lokální maximum;

b) f je v $U(x_0-)$ konkávní (tj. f' je klesající) a v $U(x_0+)$ konvexní (tj, f' je rostoucí), takže f' má v bodě x_0 lokální minimum.

2) Má-li f' lokální extrém v bodě x_0, je to buď lokální maximum nebo lokální minimum a podobnými úvahami (proveďte je!) pro levé a pravé okolí dojdeme k existenci inflexe.

□

Věta 9.5.3 (nutná podmínka existence inflexe)**.** *Má-li funkce f v bodě x_0 inflexi a existuje $f''(x_0)$, je $f''(x_0) = 0$.*

Důkaz. Plyne z nutné podmínky existence extrému funkce f'. □

Vztah inflexe a derivace lze dalšími větami specifikovat pro případ existence druhé resp. i třetí derivace.

Věta 9.5.4 ((vztah inflexe a druhé derivace)**.** *Má-li funkce f v nějakém okolí bodu x_0 derivaci f'' a má-li tato derivace v $P(x_0-)$ a $P(x_0+)$ různá znaménka, má funkce f v bodě x_0 inflexi. Má-li f'' stejné znaménko v $P(x_0-)$ a $P(x_0+)$, pak funkce f v bodě x_0 inflexi nemá.*

Věta 9.5.5 (vztah inflexe a 3. derivace)**.** *Má-li funkce f v nějakém okolí bodu x_0 derivaci f'', platí $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak funkce f má v bodě x_0 inflexi.*

Tuto větu bychom mohli rozšířit (podobně jako odpovídající pravidlo pro určování lokálního extrému) i na případ, kdy $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Pro k liché existuje v bodě x_0 inflexe, pro k sudé nikoli.

Úloha 9.5.6. *Stanovte konvexnost, konkávnost a inflexi funkce $y = x\,\mathrm{e}^{-x}$.*

Řešení. Tato funkce má potřebné derivace, vypočteme
$y' = (1 - x)\,\mathrm{e}^{-x}$, $y'' = (x - 2)\,\mathrm{e}^{-x}$, kde $\mathrm{e}^{-x} > 0$.

Pro $x < 2$ je $y'' < 0$, funkce je konkávní, pro $x > 2$ je $y'' > 0$, funkce je konvexní. Pro $x = 2$ má funkce inflexi, inflexní bod je $[2; 2\,\mathrm{e}^{-2}]$. □

9.6 Asymptoty

Asymptoty jsou přímky a představujeme si je jako tečny ke grafu funkce v nekonečnu. Např. souřadnicové osy jsou asymptotami grafu funkce $y = 1/x$. Máme asymptoty dvou druhů a vyslovíme pro ně dvě různé definice, protože to je praktické, i když z hlediska geometrického jde o tentýž jev.

Definice 9.6.1. Přímka $x = c$ se nazývá ***vertikální asymptota*** grafu funkce $f \Leftrightarrow$ funkce f má v bodě c alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní.

Takových asymptot může mít funkce nekonečně mnoho, příkladem je funkce tangens. Kromě toho mohou pro danou funkci existovat ještě nejvýše dvě asymptoty s rovnicemi tvaru $y = kx + q$.

Definice 9.6.2. Přímka $y = kx+q$ se nazývá ***asymptota*** (***se směrnicí***) grafu funkce $f \Leftrightarrow$ pro $x \to -\infty$ nebo pro $x \to +\infty$ je $\lim[f(x) - kx + q] = 0$.

Asymptoty se směrnicí se zpravidla zjišťují podle následující věty.

Věta 9.6.3 (o výpočtu asymptot). *Přímka $y = kx + q$ je asymptotou grafu funkce $f \Leftrightarrow$ existují limity (pro $x \to -\infty$ nebo pro $x \to +\infty$) $\lim \frac{f(x)}{x} = k$ a $\lim[f(x) - kx] = q$.*

Důkaz. Všechny dále uvedené limity bereme pro $x \to -\infty$ nebo pro $x \to +\infty$.

1) Nechť přímka $y = kx+q$ je asymptotou. Pak $\lim[f(x)-(kx+q)] = 0$, tedy též $\lim \frac{f(x)-kx-q}{x} = 0$. Ježto $\frac{q}{x} \to 0$, platí $\lim \frac{f(x)}{x} - k = 0$, tedy $\lim \frac{f(x)}{x} = k$. Druhá rovnost je zřejmá, neboť ve vztahu $\lim[f(x) - (kx + q)] = 0$ lze provést rozdělení na dvě limity $\lim[f(x) - kx] - q = 0$.

2) Existují-li naopak limity pro k a pro q, plyne ze vztahu $\lim[f(x) - kx] = q$ definiční vztah $\lim[f(x) - (kx + q)] = 0$.

□

Praktický postup v běžných případech

1) Vyšetříme okolí těch hromadných bodů $D(f)$, které leží v $\mathbb{R} - D(f)$ (body nespojitosti - zejména izolované body množiny $\mathbb{R} - D(f)$ nebo krajní body intervalů, jež jsou součástí $D(f)$). Zjistíme ve kterém z těchto bodů existují alespoň jednostranné nevlastní limity.

2) Je-li $+\infty$ nebo $-\infty$ hromadným bodem $D(f)$, hledáme $\lim f(x)/x$. Jestliže tato limita (nebo obě) existuje, je to směrnice k asymptot, *pokud asymptoty existují.* Dále ještě hledáme $\lim[f(x) - kx]$ s oním k, jež bylo vypočteno v předchozí limitě. Existuje-li tato limita, je to q a asymptota existuje.

Při výpočtu $k = \lim \frac{f(x)}{x}$ lze použít l'Hospitalova pravidla, z něhož $k = \lim f'(x)$. Také tento vztah se často využívá k výpočtu směrnice asymptot (ovšem neexistuje-li $\lim f'(x)$, neznamená to neexistenci asymptot).

Úloha 9.6.4. *Určete asymptoty pro funkci $y = 2x + \operatorname{arctg} x$.*

Řešení. $k = \lim \frac{f(x)}{x} = \lim \left(2 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 2$, neboť v posledním zlomku je funkce v čitateli omezená, takže tento zlomek konverguje k 0. Dále $q = \lim(2x + \operatorname{arctg} x - 2x) =$ Existují tedy 2 asymptoty: $y = 2x - \pi/2$ pro $x \to -\infty$ a $y = 2x + \pi/2$ pro $x \to +\infty$. □

Úloha 9.6.5. *Určete asymptoty pro funkci $y = x + \sqrt{x}$.*

Řešení. Zde je nevlastním hromadným bodem $D(f)$ jen $+\infty$. Počítáme $k = \lim \frac{f(x)}{x} = 1 + \lim \frac{\sqrt{x}}{x} = 1$, $q = \lim (x + \sqrt{x} - x) = +\infty$, asymptota neexistuje. □

9.7 Průběh funkce

O vyšetřování průběhu funkce lze pojednat dvěma způsoby:

- uvést věcně, ze kterých činností se vyšetřování průběhu funkce skládá,
- popsat praktický postup při vyšetřování průběhu funkce.

Dle 1. hlediska uvažujeme tyto složky:

1) Definiční obor, body nespojitosti.

2) Funkční obor, omezenost; nulové body funkce; intervaly, kde je funkce kladná, kde je záporná.

3) Funkční vlastnosti funkce: parita, periodičnost.

4) Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti funkce, v krajních bodech definičního oboru, resp. v $-\infty$, $+\infty$.

5) Intervaly monotonnosti (kde funkce roste, kde klesá) nebo konstantnosti.

6) Lokální extrémy funkce.

7) Intervaly konvexnosti a konkávnosti.

8) Inflexe, inflexní body grafu funkce.

9) Asymptoty grafu funkce.

10) Sestrojení grafu funkce.

Praktický postup při vyšetřování průběhu funkce sleduje v běžném případě i myšlenku správného a přehledného záznamu výsledků a mezivýsledků do tabulky. Proto postupujeme takto:

A. Zjistíme údaje potřebné pro sestavení tabulky, sestavíme tabulku a zaznamenáme do ní dosud známé údaje o funkci,

B. postupně zjišťujeme další vlastnosti funkce a zaznamenáváme je do tabulky,

C. doplníme údaje potřebné pro sestrojení grafu a sestrojíme graf funkce.

Lze tak doporučit toto pořadí prací:

A1. Provedeme 1 (určíme $D(f)$ a body nespojitosti).

A2. Provedeme 3 (stanovení parity a periodičnosti), tj. zjistíme, zda bychom mohli zmenšit rozsah vyšetřování funkce tím, že se omezíme např. jen na interval $\langle 0, +\infty)$ nebo jen na jednu periodu u funkce periodické.

A3. Vypočteme 1.derivaci, položíme ji rovnu 0 a řešením získáme stacionární body. K nim přidáme ty body z $D(f)$, v nichž 1. derivace neexistuje. Má-li funkce lokální extrém, pak nastane v některém z těchto bodů.

A4. Vypočteme 2. derivaci, položíme ji rovnu 0 a řešením získáme body, v nichž může mít funkce inflexi. K nim přidáme ty body z $D(f')$, v nichž 2. derivace neexistuje.

A5. Sestavíme tabulku, kde v horizontálním záhlaví zaznamenáme rozčlenění číselné osy s ohledem na A1, A2, A3, A4; ve vertikálním záhlaví jsou řádky pro x, y, y', y'', a pro záznam vlastností funkce f. Do tabulky přeneseme údaje již zjištěné.

B1. Užitím znaménka 1. derivace určíme 5 (intervaly monotonnosti).

B2. Na základě B1 zjistíme 6 (lokální extrémy), včetně funkčních hodnot v těchto bodech.

B3. Užitím znaménka 2. derivace určíme 7 (konvexnost a konkávnost).

B4. Na základě B3 zjistíme 8 (inflexi), včetně funkčních hodnot v těchto bodech a hodnot 1. derivací.

B5. Určíme 9 (asymptoty).

B6. Určíme 4 (limity), pokud je to po B5 ještě třeba.

B7. Určíme 2 (funkční obor, nulové body, znaménka funkce).

C1. Podle potřeby doplníme např. průsečík grafu funkce s osou y, hodnoty funkce v dalších bodech $D(f)$, případně i hodnoty derivací (připojíme k tabulce jako dodatek).

C2. Provedeme bod 10 (sestrojíme graf funkce).

Úloha 9.7.1. *Sestavte tabulku pro vyšetření průběhu funkce* $y = x + \frac{1}{x}$.

Řešení. $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, funkce je lichá, tj. graf bude souměrný podle počátku.

$y' = 1 - \frac{1}{x^2}$; $y' = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 1\}$ (stacionární body); $y'' = \frac{2}{x^3} \neq 0$. Sestavíme tabulku (např. jen) pro interval $\langle 0, +\infty)$.

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>$\to 0+$</td><td>(0, 1)</td><td>1</td><td>(1, $+\infty$)</td><td>$\to +\infty$</td></tr>
<tr><td>y</td><td>n.d.</td><td>$\to +\infty$</td><td>-</td><td>2</td><td>-</td><td>$\to +\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>n.d.</td><td>$\to -\infty$</td><td>< 0</td><td>0</td><td>> 0</td><td>$\to +\infty$</td></tr>
<tr><td>y''</td><td>n.d.</td><td>-</td><td>> 0</td><td>> 0</td><td>> 0</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">*funkce*</td><td>n.d.</td><td>$\to +\infty$</td><td>klesá</td><td>lok.min.</td><td>roste</td><td>$\to +\infty$</td></tr>
<tr><td></td><td>asymptota $x = 0$</td><td colspan="3">konvexní</td><td>asymptota $y = x$</td></tr>
</table>

Inflexní body neexistují. □

9.8 Užití extrémů funkcí

Na výpočet extrémů vede řada praktických úloh.

Úloha 9.8.1. *Ze čtvercového listu papíru o straně a má být po vystřižení čtverečků v rozích složena krabice o maximálním objemu. Vypočtěte stranu čtverečků, jež mají být v rozích vystřiženy a rozměry výsledné krabice (obr. 9.8.1).*

Řešení. $V = (a - 2x)^2 x$, $V' = 12x^2 - 8ax + a^2 \Rightarrow x_1 = \frac{a}{6}$, $x_2 = \frac{a}{2}$ (nevyhovuje praktické úloze) ; rozměry krabice jsou $\frac{2}{3}a \times \frac{2}{3}a \times \frac{1}{6}a$, výška je rovna čtvrtině šířky čtvercového dna. □

Úloha 9.8.2. *Pracoviště je v konstantní vzdálenosti a od průmětu světla na vodorovnou rovinu. Při jaké výšce h světla (viz obr. 9.8.2) je osvětlení pracoviště maximální?*

Řešení. Intenzita osvětlení závisí na vstupních podmínkách takto: $I = c\frac{\sin\varphi}{r^2}$, kde $\sin\varphi = \frac{h}{r}$ a $r = \sqrt{h^2 + a^2}$, takže $I = I(h)$; po dosazení $I = c\frac{h}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$.
$I' = c\frac{a^2-2h^2}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} (= 0) \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0,7a$. □

Úloha 9.8.3. *Výkon Peltonova kola je $P = k \cdot u \cdot (v - u)$, kde u je obvodová rychlost Peltonova kola a v je rychlost vodního paprsku. Při jaké rychlosti u je výkon Peltonovy turbiny maximální?*

Řešení. $P = P(u)$, $P' = kv - 2ku(= 0) \Rightarrow u = \frac{v}{2}$. □

Úloha 9.8.4. *Určete rozměry konzerv tvaru rotačního válce o daném objemu V tak, aby se při jejich výrobě spotřebovalo co nejmenší množství plechu.*

Řešení. Hledá se minimum funkce $S = 2\pi xv + 2\pi x^2$, kde x je poloměr dna konzervy a v výška konzervy, za podmínky, že $V = \pi x^2 v$ je zadané (tedy konstantní). Po dosazení za v z této podmínky máme $S = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2$, odkud $S' = -\frac{2V}{x^2} + 4\pi x$. Z rovnice $S' = 0$ máme $x_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Odsud je $v_0 = \frac{V}{\pi x_0^2} = \cdots = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2x_0$: výška konzervy je rovna průměru dna. □

– ∗ –

Kapitola 10

Metody integrace pro funkce jedné proměnné

10.1 Základní vzorce

Základní problém: k dané funkci f stanovit množinu všech jejích primitivních funkcí F, tedy „neurčitý integrál“ $F + C$ funkce f.

Chceme-li zjistit primitivní funkci k dané (elementární) funkci f, máme dva problémy:

1) zda pro danou funkci f primitivní funkce vůbec existuje,

2) pokud ano, zda ji lze vyjádřit konečným vzorcem pomocí elementárních funkcí.

Existence: V následující kapitole 11 uvidíme, že každá funkce f spojitá na intervalu J má zde primitivní funkci.

Vyjádření primitivní funkce elementárními funkcemi: Je možné jen pro vybrané typy integrovaných funkcí, z nichž některé jsou probrány v této kapitole spolu s příslušnými metodami výpočtu primitivních funkcí.

Je-li tedy f funkce elementární, pak primitivní funkce není nutně také elementární; přitom funkce f může mít i poměrně jednoduché analytické vyjádření. Např. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\displaystyle\int \sin x^2\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ nejsou funkce elementární, tj. nelze je vyjádřit konečným vzorcem pomocí elementárních funkcí. (Vyjadřujeme je zpravidla pomocí mocninných řad.)

V kapitole 7 jsme se setkali se sadou základních vzorců pro derivace elementárních funkcí. K nim dostáváme ihned odpovídající vzorce pro stanovení primitivních funkcí. Např. $\sin x$ je primitivní funkce k funkci $\cos x$, neboť $(\sin x)' = \cos x$, neurčitým integrálem k funkci $\cos x$ je množina funkcí $\sin x + C$, kde C je (libovolná) *integrační konstanta*. Zapisujeme

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C, \quad \text{obecně} \quad \int f(x) \, \mathrm{d}x = F(x) + C,$$

kde F je jedna z primitivních funkcí k funkci f. Operaci, při níž k dané funkci stanovujeme primitivní funkci nebo neurčitý integrál, nazveme *integrace*. Výraz $f(x)\,\mathrm{d}x$ za znakem integrace se nazývá *integrand*, říkáme, že danou funkci f integrujeme.

Ze vzorců pro derivace plynou tyto vzorce pro integraci:

Funkce:	Funkce primitivní:	Funkce:	Funkce primitivní:
$x^m \quad (m \in \mathbb{R},\ m \neq -1)$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$
e^x	e^x	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
$\cos x$	$\sin x$	$\sin x$	$-\cos x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\operatorname{coth} x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

Z věty o derivaci součtu (rozdílu) plyne: Je-li F primitivní funkce k funkci f a G primitivní funkce k funkci g, je $F+G$ $(F-G)$ primitivní funkce k funkci $f+g$ $(f-g)$. Podobně platí: Je-li F primitivní funkce k funkci f, pak kF (kde k je konstanta) je primitivní funkce k funkci kf.

10.2 Integrace užitím substitucí

Základem jsou dvě věty o substitucích; v obou případech nechť je funkce $f(u)$ definována na intervalu J a funkce φ $(u = \varphi(x))$ nechť je definována na intervalu I, kde $\varphi(I) \subset J$, přičemž existuje φ'.

Věta 10.2.1 (1.věta o substituci)**.** *Je-li F primitivní funkcí k funkci f na J, pak složená funkce $F \circ \varphi$ je primitivní funkcí k funkci $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na I.*

Důkaz. $[(F \circ \varphi)(x)]' = F'_u(u) \cdot \varphi'(x) = f(u) \cdot \varphi'(x) = (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)$. $\square$

V příkladech na použití 1. věty o substituci má tedy integrovaná funkce tvar součinu složené funkce a derivace vnitřní funkce.

Úloha 10.2.2. *Vypočtěte* $I = \int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \begin{bmatrix} \sin x = u \\ \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{bmatrix} = \displaystyle\int u \, \mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$

Zde bylo $f(u) = u$, $\varphi(x) = \sin x$. $\square$

Úloha 10.2.3. *Vypočtěte* $I = \displaystyle\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x$.

Řešení.

$$I = \sin^2 x \sin x \, \mathrm{d}x = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, \mathrm{d}x = \int \sin x \, \mathrm{d}x - \int \cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x = \cdots .$$

První z integrálů je tabulkový, ve druhém položíme $\cos x = u$. $\square$

Vybrané typické příklady na použití 1. věty o substituci:

$$I = \int \sin^m x \cos x \, \mathrm{d}x, \quad \int \frac{\ln^m x}{x} \, \mathrm{d}x, \quad \int \frac{\operatorname{arctg}^m x}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x, \ldots$$

Úloha 10.2.4. *Vyřešte speciální případ integrace složené funkce, kde vnitřní funkce je lineární.*

Řešení. Je-li vnitřní funkce lineární, dostáváme z 1. věty o substituci

$$\int f(ax + b) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax + b) + C,$$

takže například

$$\int \mathrm{e}^{2x+3} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{2x+3} + C, \quad \int \cos \frac{x}{3} \, \mathrm{d}x = 3 \sin \frac{x}{3} + C.$$

$\square$

Úloha 10.2.5. *Vyřešte speciální případ integrace složené funkce ve tvaru zlomku, kde čitatel je derivací jmenovatele.*

Řešení. Pro $f(x) \neq 0$: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln |f(x)| + C$, takže například

$\displaystyle\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = -\ln |\cos x| + C, \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 3} \, \mathrm{d}x = \ln(x^2 - x + 3) + C$, atd. $\square$

Věta 10.2.6 (2. věta o substituci). *Nechť $\varphi' \neq 0$ na I, $\varphi(I) = J$. Je-li funkce F funkcí primitivní k funkci $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ na I, pak funkce $F \circ \varphi^{-1}$ je funkce primitivní k funkci f na J (kde φ^{-1} je funkce inverzní k φ).*

Důkaz. Nechť $x = \varphi(t)$, tj. $t = \varphi^{-1}(x)$. Pak $[(F \circ \varphi^{-1})(x)]' = [(F(\varphi^{-1}(x))]' = F_t'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) \cdot (1/\varphi'(t)) = f(x)$. □

Úloha 10.2.7. *Užitím 2. věty o substituci počítejte $I = \sin\sqrt{x}\ \mathrm{d}x$.*

Řešení. $I = \left[\begin{array}{c} x = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\ \mathrm{d}t \end{array}\right] = 2\int t\sin t\ \mathrm{d}t$, a dále se postupuje metodou per partes dle 10.3. □

Podle 2. věty o substituci se postupuje v mnoha speciálních případech, např. při integraci některých iracionálních funkcí (10.5) nebo u goniometrických a hyperbolických substitucí (10.8).

10.3 Metoda per partes

Věta 10.3.1. *Nechť funkce f, g jsou definovány a mají derivaci na intervalu J. Jestliže Ψ je funkce primitivní k $f \cdot g'$ na J, pak $\Phi = f \cdot g - \Psi$ je primitivní funkcí k funkci $f' \cdot g$ na J.*

Důkaz. Věta o per partes plyne ze vzorce pro derivaci součinu: $\Phi' = (f \cdot g - \Psi)' = f' \cdot g + f \cdot g' - \Psi' = f' \cdot g$. □

Jiný přístup: Pro $u = f(x)$, $v = g(x)$ je $(uv)' = u'v + uv'$, tj. $u'v = (uv)' - uv'$, takže $\int u'v\ \mathrm{d}x = uv - \int uv'\ \mathrm{d}x$.

Úloha 10.3.2. *Vypočtěte $I = \int x\cos x\ \mathrm{d}x$.*

Řešení. $I = \left[\begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\ \mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$. □

Úloha 10.3.3. *Vypočtěte $I = \int x^2 \sin x\ \mathrm{d}x$.*

Řešení. $I = \left[\begin{array}{cc} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\ \mathrm{d}x = \cdots$ znovu se použije metoda per partes, viz předchozí příklad. □

Typické příklady na metodu per partes:

$$\int x^n \cos x\ \mathrm{d}x,\ \int x^n \sin x\ \mathrm{d}x,\ \int x^n \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x,\ \int x^n \ln x\ \mathrm{d}x,\ \int x^n \operatorname{arctg} x\ \mathrm{d}x,\ \ldots$$

Zvláštní případy použití metody per partes

(1) *Výpočet integrálů*

$$I_c = \int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x, \quad I_s = \int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x$$

(budeme počítat primitivní funkce pro $C = 0$).

Řešení. V integrálu I_c se použije dvěma způsoby metoda per partes: pro $u' = \mathrm{e}^{ax}$, $v = \cos bx$ a pak pro $u' = \cos bx$, $v = \mathrm{e}^{ax}$. Tím dostaneme soustavu

$$I_c = \frac{1}{b} \mathrm{e}^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} I_s, \quad I_c = \frac{1}{a} \mathrm{e}^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} I_s,$$

jejímž řešením vyjde

$$I_c = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} \mathrm{e}^{ax}, \quad I_s = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \mathrm{e}^{ax} .$$

□

(2) *Rekurentní vzorec pro integrál* $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^n}$, $n \geq 2$.

Řešení. V integrálu I_m, kde $m \geq 1$, položíme $u = \dfrac{1}{(a^2 + x^2)^n}$, $v' = 1$ a dostaneme $I_m = \dfrac{x}{(a^2 + x^2)^m} + 2mI_m - 2ma^2 I_{m+1}$, odkud vyjádříme I_{m+1}. Položíme-li pak $m = n - 1$, dostaneme

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \, \frac{x}{(a^2 + x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}.$$

□

10.4 Integrace racionálních funkcí

Základní typy racionálních funkcí a jejich integrace:

(1) $\boxed{\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-k} = \ln|x-k| + C,}$

Úloha 10.4.1. $\displaystyle\int \frac{2 \, \mathrm{d}x}{x+3} = 2 \ln|x+3| + C.$

Úloha 10.4.2. $\displaystyle\int \frac{5\,\mathrm{d}x}{3x+2} = \frac{5}{3}\ln|3x+2| + C.$

(2) $$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-k)^s} = \frac{1}{1-s}\frac{1}{(x-k)^{s-1}} + C, \quad \text{kde} \quad s \neq 1.}$$

Úloha 10.4.3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^3} = \frac{1}{-2(x+2)^2} + C.$

(3) $\displaystyle\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}}$, kde ve jmenovateli je nerozložitelný kvadratický polynom, vede po úpravě jmenovatele na funkci arctg x.

Úloha 10.4.4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+13} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C.$

(4) $\displaystyle\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^s}}$, kde ve jmenovateli je nerozložitelný kvadratický polynom a $s \neq 1$, vede na použití rekurentního vzorce, viz 10.3(2).

Úloha 10.4.5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+6x+13)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left[(x+3)^2+4\right]^2} = \begin{bmatrix} x+3 = z \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}z \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+2^2)^2} = \frac{1}{2\cdot 4}\frac{z}{z^2+2^2} + \frac{1}{2\cdot 4}\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2^2}.$

Podle (3) vede tento integrál na funkci arctg x *a pak se vrátíme k původní proměnné x dosazením $z = x+3$.*

Racionální funkce** $P(x)/Q(x)$**, kde** $P(x)$, $Q(x)$ **jsou polynomy:

Při jejich integrování převádíme racionální funkci na uvedené základní typy, přičemž využíváme poznatků z algebry.

Algoritmus:

(1) Je-li stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, přejdeme na krok (2). Jinak užitím dělení upravíme funkci na tvar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $A(x)$ je polynom, který již dovedeme integrovat a $R(x)$ (zbytek dělení) je polynom stupně nižšího než $Q(x)$; tedy: *snížíme stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele.*

(2) Je-li jmenovatel rozložen na lineární kořenové činitele a nerozložitelné kvadratické polynomy, přejdeme na bod (3), jinak tento *rozklad jmenovatele* provedeme.

(3) Je-li ve jmenovateli jen jeden kořenový činitel nebo jeho mocnina nebo jen jeden nerozložitelný kvadratický polynom nebo jeho mocnina, přejdeme na bod (4); jinak provedeme *rozklad zlomku* $R(x)/Q(x)$ *na parciální zlomky.*

(4) *Integrujeme* všechny komponenty rozkladu funkce $y = P(x)/Q(x)$.

Úloha 10.4.6. *Upravte integrál* $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x$ *na základní typ (3).*

Řešení. $$\int \frac{3x-2}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x-\frac{4}{3}}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1-1-\frac{4}{3}}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+1-\frac{7}{3}}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\cdot\frac{7}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+3} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+x+3) - \frac{7}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+3}.$$ □

Úloha 10.4.7. *Upravte integrál* $\displaystyle\int \frac{4x+3}{(x^2-x+3)^3}\,\mathrm{d}x$ *na základní typ (4) a dvojnásobným použitím rekurentního vzorce 10.3 (2) pak na základní typ (3).*

Řešení. $$\int \frac{4x+3}{(x^2-x+3)^3}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x-1+1+\frac{3}{2}}{(x^2-x+3)^3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{(x^2-x+3)^2} + 5\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+3)^3} = \cdots$$ □

Na integraci racionálních funkcí vede výpočet integrálů mnoha dalších typů funkcí, viz dále.

10.5 Integrace některých iracionálních funkcí

(1) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$, kde $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ a $R(x,y)$ je racionální funkce.

Substitucí $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ se integrál převede na integrál z funkce racionální, viz 10.4.

Úloha 10.5.1. *Převeďte* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+7}\,\mathrm{d}x$ *na integrál z racionální funkce.*

Řešení. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+7}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c}\sqrt{2x-1}=t\\ x=\frac{1}{2}(t^2+1)\\ \mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t\end{array}\right] = \int \frac{t}{t^2+1+7} t\ \mathrm{d}t = \cdots.$ □

(2) $\displaystyle\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, x^{\frac{p_m}{q_m}}\right)\mathrm{d}x$, kde $R(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ je racionální funkce. Substitucí $x = t^n$, kde $n = n(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ je nejmenší společný násobek, se daný integrál převede na integrál z funkce racionální.

Úloha 10.5.2. *Převeďte* $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ *na integrál z racionální funkce.*

Řešení. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left[\begin{array}{c}x=t^6\\ \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t\end{array}\right] = \int \frac{t^6\cdot 6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = \cdots\ .$ □

10.6 Eulerovy substituce

Používají se pro výpočet integrálů typu $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$, kde R je racionální funkce dvou proměnných. Účelem substituce je převést integrování iracionální funkce na integrování funkce racionální. Eulerovy substituce jsou tři:

(1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$ [pro $a > 0$]; hlavní myšlenka: po umocnění se na obou stranách rovnosti ruší členy ax^2.

(2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$ [pro $c > 0$]; hlavní myšlenka: po umocnění se na obou stranách rovnosti ruší členy c a rovnost lze dělit x.

(3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$ [kde λ je reálný kořen]; hlavní myšlenka: po umocnění lze rovnost dělit kořenovým činitelem $(x-\lambda)$.

Úloha 10.6.1. *Ověřte, že při výpočtu* $\displaystyle\int x\sqrt{4x^2+5x+1}\,\mathrm{d}x$ *lze použít všechny tři substituce. Ve všech případech převeďte integrál na integrál z funkce racionální.*

Řešení. Je $a = 4 > 0$, $c = 1 > 0$, a uvedený trojčlen má reálné kořeny.

Při použití 1. substituce máme $\sqrt{4x^2+5x+1} = 2x+t$,

při použití 2. substituce $\sqrt{4x^2+5x+1} = xt+1$

a při použití 3. substituce je $\sqrt{4x^2+5x+1} = t(x+1)$. V tomto případě po umocnění rovnosti a zkrácení kořenového činitele $(x+1)$ dostáváme $4x+1 = t^2(x+1)$ a z toho

$$x = \frac{t^2-1}{4-t^2},\ t(x+1) = \frac{3t}{4-t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{6t}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t,\ \ldots$$ □

Po nalezení integrálu z příslušné racionální funkce se vracíme k původní proměnné, tj. dosadíme při 1. substituci $t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x$, při 2. substituci to je $t = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$, a při 3. dosadíme $t = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\lambda}$.

10.7 Integrace goniometrických a hyperbolických funkcí

Přehled substitucí pro $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$,
kde R je racionální funkce dvou proměnných:

(1) $\sin x = t$, pokud $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$,

(2) $\cos x = t$, pokud $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$,

(3) $\operatorname{tg} x = t$, pokud $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$,

(4) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ lze použít vždy (univerzální substituce). Univerzální substituce přináší zpravidla složitější výpočty, proto se dává přednost substitucím předchozím, pokud je lze použít.

Účelem substitucí je převést integrování goniometrických funkcí na integrování funkcí racionálních.

Úloha 10.7.1. *Vhodnou substitucí převeďte* $\int \operatorname{tg} x \sin x\,\mathrm{d}x$ *na integrál z funkce racionální.*

Řešení. $I = \int \operatorname{tg} x \sin x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$; $\frac{\sin^2 x}{-\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$, takže provedeme substituci $\sin x = t$; $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \cos x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \cdots.$ □

Úloha 10.7.2. *Vhodnou substitucí převeďte* $\int \operatorname{tg}^2 x \sin x\,\mathrm{d}x$ *na integrál z funkce racionální.*

Řešení. $I = \int \operatorname{tg}^2 x \sin x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$; ježto $\frac{(-\sin x)^3}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$, použijeme substituci $\cos x = t$, takže $I = \int \frac{(1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = -\int \frac{1-t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \cdots.$ □

Úloha 10.7.3. *Vhodnou substitucí převeďte* $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$ *na integrál z funkce racionální.*

Řešení. $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,\mathrm{d}x$; platí $\dfrac{(-\sin x)^2}{(-\cos x)^6} = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^6 x}$, takže použijeme substituci $\operatorname{tg} x = t$; při úpravách používáme často vztah $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$$I = \int \operatorname{tg}^2 x \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \left[\begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{d}t \end{array}\right] = \int t^2(1 + t^2)\,\mathrm{d}t = \cdots . \qquad \square$$

Při použití univerzální substituce $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$ je třeba znát či umět odvodit, čemu jsou rovny $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\mathrm{d}x$.

Předně platí $x = 2 \operatorname{arctg} t$, odkud $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1 + t^2}$.

Ze vztahu $\sin x = 2 \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}$ a vztahů mezi goniometrickými funkcemi plyne $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$, $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1 - t^2}$.

Integrace součinu goniometrických funkcí

Používá se vzorců

$\sin nx \sin mx = \dfrac{1}{2}[\cos(n - m)x - \cos(n + m)x,$

$\sin nx \cos mx = \dfrac{1}{2}[\sin(n - m)x + \sin(n + m)x],$

$\cos nx \cos mx = \dfrac{1}{2}[cos(n - m)x + \cos(n + m)x],$

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.

Úloha 10.7.4. *Vypočtěte* $\displaystyle\int \sin 5x \cos 4x\,\mathrm{d}x.$

Řešení. $\displaystyle\int \sin 5x \cos 4x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int (\sin x + \sin 9x)\,\mathrm{d}x\right] = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{18}\cos 9x + C$ $\square$

Integrace hyperbolických funkcí

Postupujeme podle analogických vzorců jako pro funkce goniometrické.

Úloha 10.7.5. *Vypočtěte* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ch}^2 x + 1}{\operatorname{ch}^4 x}\,\mathrm{d}x.$

Řešení. $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{ch}^2 x + 1}{\operatorname{ch}^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \int \left(1 + 1 - \operatorname{th}^2 x\right) \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \left[\begin{array}{c} \operatorname{th} x = t \\ \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \mathrm{d}t \end{array}\right] = \int \left(2 - t^2\right)\,\mathrm{d}t = 2t - \frac{1}{3}t^3 + C = 2 \operatorname{th} x - \frac{1}{3} \operatorname{th}^3 x + C.$ $\square$

10.8 Goniometrické a hyperbolické substituce

Přehled substitucí:

(1) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x$, substituce $x = a \sin t$ (nebo $x = a \operatorname{th} t$),

(2) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) \mathrm{d}x$, substituce $x = a \operatorname{tg} t$ (nebo $x = a \operatorname{sh} t$),

(3) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) \mathrm{d}x$, substituce $x = \dfrac{a}{\cos t}$ (nebo $x = a \operatorname{ch} t$).

Úloha 10.8.1. *Vypočtěte* $I = \displaystyle\int \sqrt{x^2 + 4x}\, \mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \displaystyle\int \sqrt{x^2 + 4x}\, \mathrm{d}x = \int \sqrt{x^2 + 4x + 4 - 4}\, \mathrm{d}x = \int \sqrt{(x+2)^2 - 2^2}\, \mathrm{d}x =$
$\left[\begin{array}{c} x + 2 = u \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array}\right] = \displaystyle\int \sqrt{u^2 - 2^2} \mathrm{d}u$ a dále se provede výše uvedená substituce (3). □

10.9 Užití Eulerových vzorců pro výpočet některých integrálů

Pro komplexní funkci $w(x)$ reálné proměnné x se derivace a integrál definují stejně jako pro reálné funkce s tím, že imaginární jednotka i se chová jako konstanta. Je-li $a \neq 0$ komplexní číslo, je např. $(\mathrm{e}^{ax})' = a\, \mathrm{e}^{ax}$, $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\, \mathrm{e}^{ax} + C$.

Elementární funkce e^z, $\cos z$, $\sin z$ se definují i pro komplexní proměnnou z; jejich vzájemný vztah je vyjádřen *Eulerovými vzorci*, podle nichž je

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^i\, x + \mathrm{e}^{-ix}\right), \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right).$$

Těchto vzorců lze využít pro výpočet některých integrálů.

Úloha 10.9.1. *Vypočtěte* $I = \displaystyle\int \sin^4 x\, \mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \displaystyle\int \sin^4 x\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(2i)^4}\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right)^4\, \mathrm{d}x = \frac{1}{16}\int \left(\mathrm{e}^{4ix} - 4\,\mathrm{e}^{2ix} + 6 - 4\,\mathrm{e}^{-2ix} + \mathrm{e}^{-4ix}\right)\, \mathrm{d}x =$
$\displaystyle\cdots = \frac{1}{32}\frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{4ix} - \mathrm{e}^{-4ix}\right) - \frac{1}{4}\frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{2ix} - \mathrm{e}^{-2ix}\right) + \frac{3}{8}x + C = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x +$
$\dfrac{3}{8}x + C.$ □

Úloha 10.9.2. *Vypočtěte (užitím Eulerových vzorců)* $I = \displaystyle\int \mathrm{e}^x \cos x\, \mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \displaystyle\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \,\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\mathrm{e}^{(1+i)x} + \mathrm{e}^{(1-i)x}\right)\,\mathrm{d}x =$ $\displaystyle\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+i}\,\mathrm{e}^{(1+i)x} + \frac{1}{1-i}\,\mathrm{e}^{(1-i)x}\right) + C = \cdots = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x) + C$. (Srovnej s výsledkem dle vzorce pro I_c, viz 10.3.) $\square$

$- * -$

Kapitola 11

Riemannův určitý integrál

11.1 Definice Riemannova integrálu

Riemannův integrál lze definovat v podstatě dvojím způsobem: užitím (Cauchyových) integrálních součtů nebo pomocí dolních a horních integrálů.

Užití integrálních součtů

Uvažujeme funkci f omezenou na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$. Dále uvedeme pojmy používané při definici integrálu:

- *Dělení intervalu* (označíme D) — každá konečná posloupnost bodů x_0, $x_1, \ldots, x_n$ (zvaných *dělicí*), kde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
- *Element dělení* $\Delta_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$, jeho délka je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
- *Norma dělení* $\nu(D) = \max \Delta x_i$, stručné označení ν.

Definice 11.1.1 (Riemannova určitého integrálu)**.** Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b\rangle$. Ke každému dělení D vytvoříme integrální součet

$$\sigma(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \text{kde} \quad \xi_i \quad \text{je libovolný bod z elementu} \quad \Delta_i.$$

Řekneme, že číslo I je Riemannovým (určitým) integrálem funkce f na $\langle a, b\rangle$, právě když $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0$ tak, že pro všechna dělení D, pro něž $\nu(D) < \delta$, a pro libovolnou volbu bodů ξ_i v elementech Δ_i dělení, platí $|\sigma(f, D) - I| < \varepsilon$.

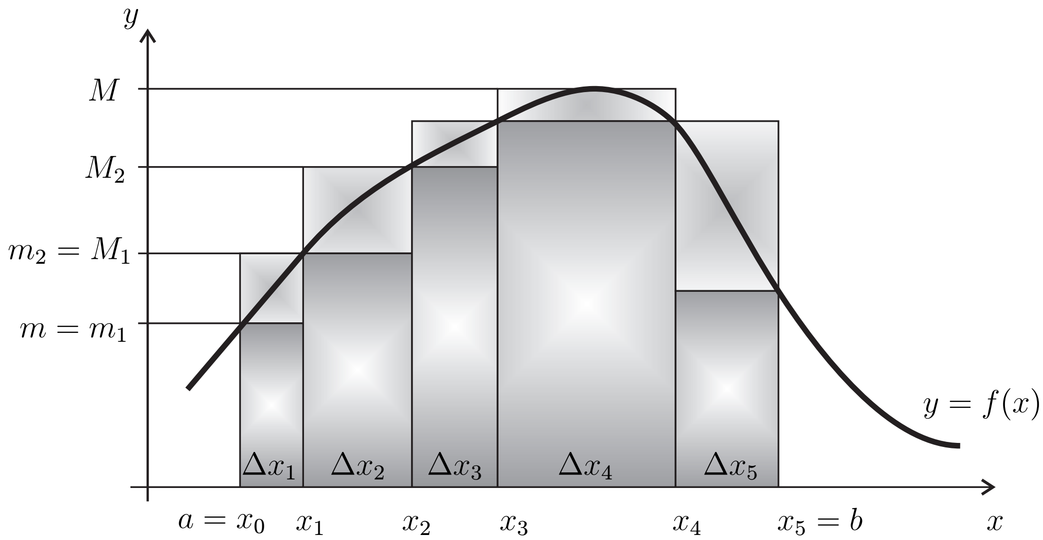
Označení: $I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Funkce f se pak nazývá *Riemannovsky integrovatelná*, $\langle a, b\rangle$ je *obor integrace*, čísla a, b *dolní* resp. *horní mez integrace*, x *integrační proměnná*.

Znak $\int\limits_a^b$ je symbol pro součet od a do b, $f(x)$ pro $f(\xi_i)$, $\mathrm{d}x$ pro Δx_i. Název *Riemannův integrál* používáme hlavně pro jeho odlišení od jiných typů integrálů. Není-li třeba zdůrazňovat (Riemannovu) metodu definice integrálu, lze používat jen historický název *určitý integrál.* Vedle *funkce Riemannovsky integrovatelná* říkáme též *integrovatelná* (*integrace schopná*) *podle Riemanna.* Množinu všech funkcí integrovatelných na $\langle a, b\rangle$ označíme $R(\langle a, b\rangle)$, a proto můžeme používat stručný zápis $f \in R(\langle a, b\rangle)$. Zvláště si uvědomíme, že Riemannův integrál funkce $f \in R(\langle a, b\rangle)$ je nějaké reálné číslo.

Geometrický význam součinu $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ pro $f > 0$:

– obsah obdélníku o stranách Δx_i, $f(\xi_i)$.



Obrázek 11.1:

Geometrický význam integrálního součtu $\sigma(f, D)$:

– přibližný obsah tzv. *základního obrazce*, tj. křivočarého lichoběžníku, jehož hranice leží na přímkách $x = a$, $x = b$, na ose x a na grafu funkce f.

Geometrický význam určitého integrálu:

– obsah základního obrazce.

Uvedenou definici Riemannova integrálu lze vyslovit i pomocí pojmu limita. Nejprve však pojednejme o zjemnění dělení.

Definice 11.1.2. Dělení D' nazveme *zjemnění dělení D*, právě když každý dělicí bod dělení D je dělicím bodem i dělení D'.

Poznámka 11.1.3. (1) Ke každým dvěma dělením existuje jejich společné zjemnění, i „nejhrubší“ společné zjemnění. Množina všech dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ tvoří svaz.

(2) Jestliže postupně zjemňujeme dělení, tak z toho neplyne, že $\nu(D) \to 0$, dokonce se přitom ν nemusí ani zmenšovat (proč?).

Druhou část výše uvedené definice lze pak vyslovit takto:

Definice 11.1.4. Řekneme, že integrální součty $\sigma(f, D)$ mají limitu $I \in \mathbb{R}$ a píšeme $\lim\limits_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D) = I$, právě když $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ dělení D_0 tak, že pro všechna jeho zjemnění D a pro libovolnou volbu bodů ξ_i v elementech Δ_i platí $|\sigma(f, D) - I| < \varepsilon$. Číslo I pak nazýváme Riemannův integrál funkce f, funkce f se nazývá *Riemannovsky integrovatelná*, atd.

Dolní a horní integrál

Mějme funkci f omezenou na $\langle a, b\rangle$ a libovolné dělení D. Označme pro $x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$: $m_i = \inf f(x)$, $M_i = \sup f(x)$.

Vytvoříme součty:

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \,\Delta x_i, \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \,\Delta x_i,$$

které nazveme *dolní* resp. *horní integrální součet* příslušný k funkci f a dělení D.

Vlastnosti:

(1) Libovolný dolní integrální součet není větší než libovolný horní integrální součet (příslušný třeba i k jinému dělení).

(2) Množina všech dolních integrálních součtů je (shora) omezená, množina všech horních integrálních součtů je (zdola) omezená: Jestliže pro $x \in \langle a, b\rangle$ označíme $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$, platí

$$m(b - a) \le s(f, D) \le S(f, D) \le M(b - a).$$

Proto existuje supremum množiny všech dolních a infimum množiny všech horních integrálních součtů.

Definice 11.1.5. Číslo $\mathrm{I}_* f = \sup\limits_{D} s(f, D)$ $(\mathrm{I}^* f = \inf\limits_{D} S(f, D))$ nazýváme *dolní* (*horní*) *Riemannův integrál.*

Zřejmě platí $s(f, D) \le \mathrm{I}_* f \le \mathrm{I}^* f \le S(f, D)$.

Úloha 11.1.6. *Najděte dolní i horní integrál Dirichletovy funkce na intervalu* $\langle 0, 1\rangle$.

Řešení. Máme

$$s(\chi, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0, \quad \mathrm{I}_* \chi = 0,$$

$$S(\chi, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1, \quad \mathrm{I}^* \chi = 1.$$

□

Definice 11.1.7. Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b\rangle$. Říkáme, že funkce f je na $\langle a, b\rangle$ Riemannovsky integrovatelná, právě když $\mathrm{I}_* f = \mathrm{I}^* f$.

Společnou hodnotu $\mathrm{I}f$ dolního a horního integrálu nazveme Riemannův integrál funkce f na $\langle a, b\rangle$ a píšeme

$$\mathrm{I}f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dá se dokázat ekvivalence obou definic Riemannova integrálu.

Geometrický význam dolního součtu

– obsah jistého mnohoúhelníku vepsaného do základního obrazce,

geometrický význam horního součtu

– obsah jistého mnohoúhelníku, do nějž je základní obrazec vepsán (nakreslete obrázek).

V souladu s definicí míry rovinného obrazce je geometrickým významem Riemannova integrálu obsah (míra) základního obrazce.

I v tomto případě lze využít pojmu limita. K tomu si uvědomíme ještě jednu vlastnost horních a dolních součtů:

(3) Zjemníme-li dělení, pak dolní integrální součet se nezmenší a horní integrální součet se nezvětší.

Důsledek 11.1.8. *Pro každou normální posloupnost* $\{D_n\}$ *dělení, tj. kde* $\nu(D_n) \to 0$ *a přitom každý další člen je zjemněním předchozího, je odpovídající posloupnost* $\{s(f, D_n)\}$ *neklesající a* $\{S(f, D_n)\}$ *nerostoucí.*

Integrovatelnost funkcí

Z teoretických důvodů (tj. pro použití v důkazech vlastností funkcí integrovatelných) se formuluje následující nutná a postačující podmínka integrovatelnosti, v níž se vyskytuje pojem oscilace funkce f na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle : \omega_i = M_i - m_i$.

Věta 11.1.9 (Nutná a postačující podmínka integrovatelnosti podle Riemanna)**.** *Funkce* $f \in R(\langle a, b\rangle)$*, právě když je* $\lim\limits_{\nu(D)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$*, tj.* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tak, že* $\forall D$ *platí:*

$$\nu(D) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

Princip důkazu. Dá se ukázat, že

$$\mathrm{I}_* f = \lim_{\nu(D)\to 0} s(f, D), \quad \mathrm{I}^* f = \lim_{\nu(D)\to 0} S(f, D)$$

(definujte pomocí ε a δ) a dále, že

$$s(f, D) = \inf_{\xi} \sigma(f, D), \quad S(f, D) = \sup_{\xi} \sigma(f, D).$$

Důkaz pak spočívá na vztahu

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = S(f, D) - s(f, D).$$

□

Z praktických důvodů byla formulována kritéria (tj. jednoduché postačující podmínky) integrovatelnosti podle Riemanna. Dá se dokázat, že do množiny $R(\langle a, b\rangle)$ patří tyto třídy funkcí:

– třída všech funkcí *spojitých* na $\langle a, b\rangle$,

– třída všech funkcí *spojitých po částech* na $\langle a, b\rangle$,

– třída všech funkcí *monotónních a omezených* na $\langle a, b\rangle$.

V množině $R(\langle a, b\rangle)$ však existují i funkce, které nesplňují žádnou z uvedených podmínek. Jestliže se funkce g liší od funkce $f \in R(\langle a, b\rangle)$ v konečném počtu bodů a nabývá v nich konečných hodnot, pak i $g \in R(\langle a, b\rangle)$ a oba integrály jsou si rovny.

11.2 Newtonův vzorec

Věta 11.2.1 (Newtonův vzorec)**.** *Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a má tu (zobecněnou) primitivní funkci F. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_{x=a}^b = F(b) - F(a).$$

Princip důkazu. Volíme takové dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, aby uvnitř každého elementu (x_{i-1}, x_i) měla funkce F derivaci. Platí:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \big[F(x_i) - F(x_{i-1}\big].$$

Na rozdíly $F(x_i) - F(x_{i-1})$ použijeme Lagrangeovu větu, podle níž na každém intervalu (x_{i-1}, x_i) existuje takový bod ξ_i, že

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Ježto f je integrovatelná, můžeme v integrálních součtech vzít právě tato ξ_i a tvrzení plyne z definice Riemannova integrálu. □

Newtonův vzorec je základní metodou výpočtu Riemannova integrálu.

Úloha 11.2.2. *Vypočtěte* $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x.$

Řešení. $I = \big[\sin x\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2.$ □

Úloha 11.2.3. *Vypočtěte* $I = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}.$

Řešení. Nejprve určíme primitivní funkci: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = (\text{substitucí}) = -\frac{1}{\ln x} + C.$
Pak $I = \left[-\dfrac{1}{\ln x}\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = -\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{1}\right) = \dfrac{1}{2}.$ □

11.3 Základní vlastnosti určitého integrálu

Hodnota integrálu závisí jednak na integrované funkci (integrandu) a jednak na intervalu integrování. Dostáváme tak několik skupin vlastností integrovatelných funkcí a integrálu.

Vlastnosti závislé na integrované funkci

Věta 11.3.1 (lineární vlastnosti)**.**

(1) Je-li $f \in R(\langle a,b\rangle)$, $k \in \mathbb{R}$, pak $kf \in R(\langle a,b\rangle)$ a platí

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) Je-li $f, g \in R(\langle a,b\rangle)$, pak $(f+g) \in R(\langle a,b\rangle)$ a platí

$$\int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Princip důkazu. Použijí se vlastnosti integrálních součtů. □

Věta 11.3.2 (vlastnosti vyjádřené nerovnostmi)**.** *Nechť $f, g \in R(\langle a,b\rangle)$.*

(3) Je-li $f(x) \geq 0$ na $\langle a,b\rangle$, pak $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

(4) Je-li $f(x) \leq g(x)$ na $\langle a,b\rangle$, pak $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(5) $|f(x)| \in R(\langle a,b\rangle)$ a platí $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Princip důkazu. (3) plyne z definice, (4) ze (3) a (5) ze (4), neboť $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. □

Věta 11.3.3 (o součinu funkcí)**.** *Je-li $f, g \in R(\langle a,b\rangle)$, pak i $fg \in R(\langle a,b\rangle)$.*

Princip důkazu. Důkaz je založen na odhadu

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leq |f(x'') - f(x')| \cdot L + |g(x'') - g(x')| \cdot K,$$

kde K, L jsou konstanty, pro něž $|f(x)| \leq K$, $|g(x)| \leq L$. □

Vlastnosti závislé na intervalu integrování

Věta 11.3.4 (aditivita integrálu)**.** *Nechť $a < c < b$. Pak $f \in R(\langle a,b\rangle)$, právě když $f \in R(\langle a,c\rangle) \wedge f \in R(\langle c,b\rangle)$. Přitom platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Princip důkazu. Plyne z vlastností integrálních součtů, když bod c vezmeme za dělicí bod. □

Tuto vlastnost lze rozšířit na konečný počet bodů $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 11.3.5. *Vypočtěte* $I = \int_0^3 |x-2|\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \int_0^2 (2-x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 = \cdots$ □

Rozšíření definice Riemannova integrálu pro případ, že $a \geq b$:

Pro $a = b$ definujeme $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Pro $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pak pro *libovolné* uspořádání bodů a, b, c platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pokud je funkce f integrovatelná v nejširším intervalu určeném body a, b, c.

11.4 Výpočet určitých integrálů

K výpočtu používáme zpravidla Newtonova vzorce, tj. najdeme primitivní funkci a pak použijeme Newtonův vzorec, viz úlohy 1 a 2 v kapitole 11.2.

Výpočet užitím substituce nebo per partes

Máme-li při výpočtu primitivní funkce použít substituci, pak můžeme postupovat přímo jako v 11.2, úloha 2, nebo můžeme provést *transformaci mezí.*

Věta 11.4.1. *Je-li* $f \in R(\langle a,b\rangle)$, φ *má spojitou derivaci na* $\langle \alpha,\beta\rangle$, *přičemž* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big[\varphi(t)\big]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Úloha 11.4.2. *Vypočtěte* $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \left[\begin{matrix} x = \sin t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t & x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$ $\left[\frac{1}{2}t + \sin 2t\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$ □

Podobně pro per partes platí

Věta 11.4.3. *Jsou-li u', v' spojité na $\langle a, b\rangle$, pak*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_{x=a}^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 11.4.4. *Vypočtěte* $I = \int_0^\pi x \sin x\,\mathrm{d}x.$

Řešení.

$$I = \left[\begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix}\right] = [-\cos x]_{x=0}^\pi + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = \cdots = \pi.$$

□

Integrál komplexní funkce reálné proměnné

Pojem určitého integrálu lze jednoduše rozšířit i na komplexní funkce reálné proměnné. Nechť $f_1, f_2 \in R(\langle a, b\rangle)$ a $f = f_1 + i f_2$. Pak definujeme

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f_1(t)\,\mathrm{d}t + i \int_\alpha^\beta f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Úloha 11.4.5. *Rozhodněte, které vlastnosti integrálů reálných funkcí zůstávají zachovány i pro integrály komplexních funkcí.*

Úloha 11.4.6. *Vypočtěte* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t.$

Řešení. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos t + i \sin t\big)\,\mathrm{d}t = [\sin t - i \cos t]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + i.$ □

11.5 Další vlastnosti určitého integrálu

Věty o střední hodnotě

Věta 11.5.1 (o střední hodnotě integrálního počtu). *Nechť $f \in R(\langle a, b\rangle)$ a platí $m \leq f(x) \leq M$. Pak existuje číslo $\mu \in \langle m, M\rangle$ tak, že*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b - a).$$

Je-li f spojitá, pak existuje číslo $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi).$$

Princip důkazu. Nerovnost $m \leq f(x) \leq M$ integrujeme na $\langle a, b\rangle$ a výraz $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ označíme μ. Je-li m, M minimum a maximum funkce f spojité na $\langle a, b\rangle$, pak podle věty o mezihodnotě nabývá f hodnoty $\mu \in \langle m, M\rangle$ v nějakém bodu $\xi \in \langle a, b\rangle$. $\square$

Věta 11.5.2 (zobecněná věta o střední hodnotě integrálního počtu)**.** *Nechť $f, g \in R(\langle a, b\rangle)$, $g(x) \geq 0$, $m \leq f(x) \leq M$. Pak platí*

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

a existuje číslo $\mu \in \langle m, M\rangle$ tak, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Je-li f spojitá, pak existuje číslo $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrál jako funkce horní meze

Je-li $f \in R(\langle a, b\rangle)$, pak pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f \in R(\langle a, x\rangle)$ a $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(x)$ je integrál, který je funkcí své horní meze x. Vzhledem k rozšířené definici integrálu lze za dolní mez zvolit libovolné číslo $c \in \langle a, b\rangle$.

Věta 11.5.3. *Nechť funkce $f \in R(\langle a, b\rangle)$, $c \in \langle a, b\rangle$. Pak funkce $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a v každém bodě $x_0 \in \langle a, b\rangle$, v němž je f spojitá, má Φ derivaci (v krajních bodech a, b jednostrannou), pro niž $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.*

Princip důkazu.

$$\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) = \int_c^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \mu h,$$

kde $\mu \in \langle m, M\rangle$ je střední hodnota, odkud plyne spojitost funkce Φ. Ve druhém případě se odvodí, že $\forall\varepsilon > 0\ \exists U(x_0)$ tak, že $\forall x \in U(x_0)$ platí (t je mezi x a x_0):

$$\left|\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\right| <$$

$$< \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x \varepsilon\,\mathrm{d}t\right| < \cdots < \varepsilon.$$

$\square$

Důsledky:

(1) Každá funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$ má na tomto intervalu primitivní funkci Φ.

(2) Každá funkce omezená a po částech spojitá na $\langle a, b\rangle$ má na tomto intervalu zobecněnou primitivní funkci; jednou z nich je funkce Φ (integrál jako funkce horní meze).

— ∗ —

Kapitola 12

Užití Riemannova integrálu

12.1 Přibližné metody výpočtu Riemannova integrálu

Existuje více přibližných metod, kterými lze provádět výpočet Riemannova integrálu. Označení „přibližná metoda“ není žádnou degradací příslušné metody, neboť zejména s využitím výpočetní techniky lze takto provádět výpočet Riemannova integrálu prakticky s libovolnou přesností. Takže v aplikacích má tento postup stejnou hodnotu a rozsáhlejší uplatnění než klasický výpočet užitím Newtonova vzorce, protože — jak bylo naznačeno již v kapitole ?? — primitivní funkcí ve tvaru pro použití Newtonova vzorce lze získat jen v některých speciálních případech.

Předpokládáme-li $f(x) \geq 0$ na $\langle a, b \rangle$, jde při výpočtu Riemannova integrálu o výpočet obsahu základního obrazce, viz ??

Metoda obdélníková

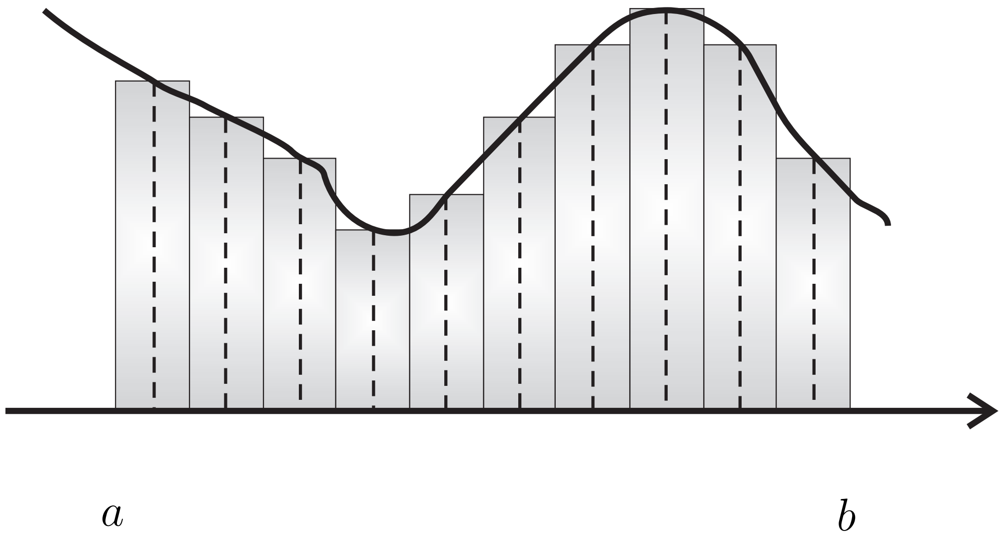
Princip této metody spočívá v tom, že určitý integrál nahradíme vhodným integrálním součtem (tj. s dostatečně jemným dělením a s vhodnými body ξ_i v elementech dělení, viz obr. 12.1).

Zpravidla volíme dělení na n stejných elementů, tedy délka jednoho elementu (tzv. *krok h*) je

$$h = \Delta x_i = \frac{b-a}{n},$$

za ξ_i volíme středy elementů. Obsah základního obrazce pokládáme přibližně roven integrálnímu součtu, tedy součtu obsahů obdélníků o stranách $f(\xi_i)$ a h. Pro obdélníkovou metodu tak máme vzorec

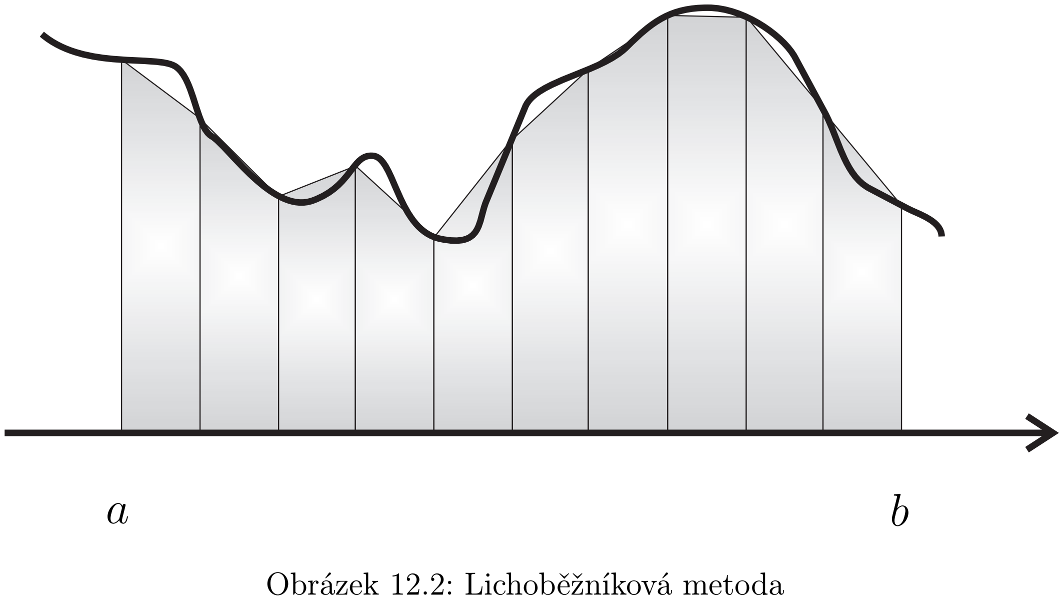
$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).$$



Obrázek 12.1: Obdélníková metoda

Chybu metody lze stanovit např. užitím horních součtů a dolních součtů (viz 11.1) což je zvlášť jednoduché pro monotónní funkce.

Metoda lichoběžníková



Obrázek 12.2: Lichoběžníková metoda

Princip této metody spočívá v tom, interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na n stejných elementů a funkci nahradíme lomenou čarou (viz obr. 12.2). Obsah základního obrazce pak přibližně nahradíme součtem obsahů elementárních lichoběžníků se základnami $f(x_{i-1}), f(x_i)$ a s výškou $h = \dfrac{b-a}{n}$. Tedy

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\big[f(x_{i-1}) + f(x_i)\big] = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_n)}{2}\right].$$

Metoda Simpsonova

Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na sudý počet $2n$ elementů o šířce $\dfrac{b-a}{2n}$, z nichž vytvoříme dvojice elementů o šířce $h = \dfrac{b-a}{n}$. V každé dvojici pak funkci f nahradíme kvadratickou funkcí (která je dané funkci f rovna na krajích a uprostřed těchto „dvojelementů“), takže k výpočtu obsahu vzniklých „křivočarých lichoběžníků“ lze využít Simpsonova vzorce.

$$P = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{2i+2} - x_{2i})\Big[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big].$$

Provedeme-li sčítání přes všechny elementy, dostaneme výslednou formuli pro Simpsonovu metodu:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\Big\{\big[f(x_0) + f(x_{2n})\big] + 2\big[f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{2n-2})\big] + $$
$$+4\big[f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1})\big]\Big\}.$$

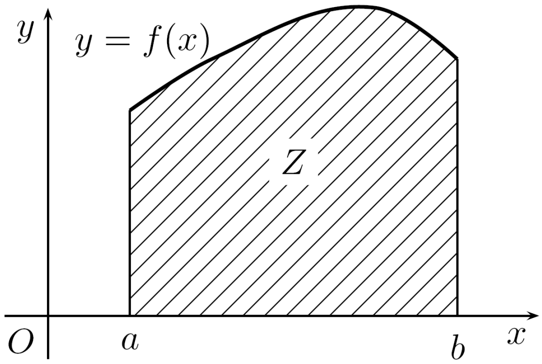
12.2 Užití určitého integrálu v geometrii

Obsah rovinného obrazce

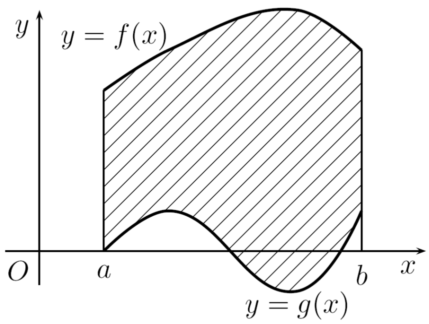
Uvažujme dále jen spojité funkce. Z geometrického významu Riemannova integrálu plyne, že pro funkci $f(x) \geq 0$ definovanou na $\langle a, b\rangle$ je obsah křivočarého lichoběžníku (základního obrazce) roven

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pozor! Je-li $f(x) < 0$ (tato část grafu funkce je pod osou x), dostaneme obsah se záporným znaménkem. Pokud bychom použili předchozí vzorec na funkci, která na $\langle a, b\rangle$ střídá znaménka, dostaneme rozdíl obsahů částí základního obrazce nad osou x a pod osou x, tedy výsledek, který nás zpravidla nezajímá. (Interpretujte takto např. fakt, že $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0$.)



Obrázek 12.3: Obsah rovinného obrazce — křivočarý lichoběžník



Obrázek 12.4: Obsah rovinného obrazce — normalita vzhledem k x.

Platí-li na intervalu $\langle a, b\rangle$ vztah $0 \le g(x) \le f(x)$, je přímkami $x = a$, $x = b$ a grafy obou funkcí ohraničena oblast *normální vzhledem k x* a její obsah se vypočte vzorcem

$$P = \int_a^b \Big[f(x) - g(x)\Big]\,\mathrm{d}x.$$

Je-li rovinný obrazec ohraničen křivkou danou parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, pak

$$P = \left|\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Obsah obrazce ohraničeného křivkami v polárních souřadnicích $\rho = \rho(\varphi)$ od φ_1 do φ_2 je dán vzorcem

$$P = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

K tomuto vzorci dojdeme využitím vztahu

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho(\varphi)\rho(\varphi + \Delta\varphi)\Delta\varphi.$$

Úloha 12.2.1. *Vypočtěte obsah kruhu o poloměru r.*

Řešení. a) Z rovnice kružnice

$$x^2 + y^2 = r^2$$

vyjádříme horní polokružnici

$$f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in \langle -r, r\rangle,$$

dolní polokružnici

$$g(x) = y = -\sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in \langle -r, r\rangle,$$

a použijeme je do druhého z výše uvedených vzorců:

$$P = \int_{-r}^{r}\Big(\sqrt{r^2 - x^2} - \big(-\sqrt{r^2 - x^2}\big)\Big)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x = r\sin\varphi \\ \mathrm{d}x = r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{array}\right] =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2r|\cos\varphi| r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(1 + \cos 2\varphi\Big)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= r^2\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} = \pi r^2.$$

b) V parametrickém vyjádření máme $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a odsud

$$P = \left| -\int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 t \,\mathrm{d}t \right| = \cdots .$$

c) Nejjednodušší je zde výpočet užitím polárních souřadnic, neboť kružnice o středu O a poloměru r má rovnici $\rho = r$ pro $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Proto

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \,\mathrm{d}\varphi = \cdots = \pi r^2.$$

□

Objem tělesa

Pomocí Riemannova integrálu funkce jedné proměnné lze počítat objemy ve dvou případech.

a) Těleso leží mezi rovinami $x = a$, $x = b$ a známe funkci $P(x)$, jejíž hodnoty znamenají obsah řezu tělesa rovinou kolmou k ose x.

Element objemu je

$$\Delta V = P(x)\cdot \Delta x, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}V = P(x)\cdot \mathrm{d}x,$$

a objem tělesa je

$$V = \int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Rotační těleso, kde osou rotace je osa x a které vznikne rotací křivočarého lichoběžníku ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$. Zde je řezem kruh o obsahu $\pi[f(x)]^2$ a platí

$$V = \pi\int_a^b \Big[f(x)\Big]^2 \,\mathrm{d}x = \pi\int_a^b y^2 \,\mathrm{d}x.$$

Úloha 12.2.2. *Určete objem koule o poloměru r.*

Řešení. Koule vznikne rotací grafu funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ kolem osy x a proto

$$V = \pi\int_{-r}^{r} \big(r^2 - x^2\big)\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

□

Délka křivky

Nechť je křivka l dána parametricky:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle, \\ z &= \chi(t), \end{aligned}$$

kde $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ jsou spojité a $\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 > 0.$$

Křivka l je prostorová nebo rovinná (to když je některá z funkcí φ, ψ, χ konstantní).

Uvažujme libovolné dělení D intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$:

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta,$$

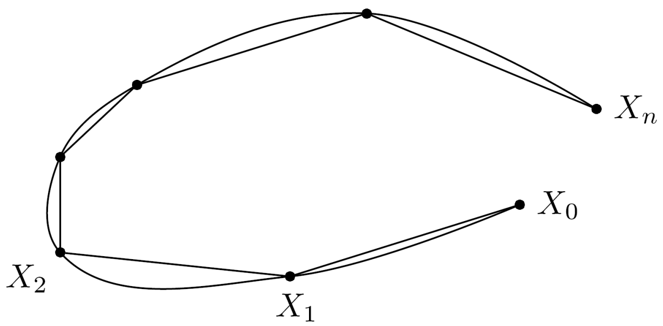
označme dělicí body křivky l:

$$X_i = [\varphi(t_i), \psi(t_i), \chi(t_i)], \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

a dále délku lomené čáry $X_0 X_1 \ldots X_n$ označme

$$\sigma(l, D) = \sum_{i=1}^{n} \left| X_{i-1} X_i \right|.$$

Délka křivky l se pak definuje:



Obrázek 12.5: Délka křivky

$$s(l) = \sup_D \sigma(l, D).$$

Uvažujme dále rovinnou křivku. Délka jedné strany lomené čáry je

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \Delta t,$$

takže

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}.$$

Pro $\Delta t \to 0$ pak máme

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2},$$

tedy

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}.$$

Ježto $\sigma(l, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta s_i$, dá se vyvodit, že $s(l) = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}s$. Odsud

$$s(l) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Úloha 12.2.3. *Vypočtěte délku kružnice o poloměru r.*

Řešení. Kružnici vyjádříme v parametrickém tvaru

$$\begin{aligned} x &= r\cos t,\\ y &= r\sin t, \end{aligned} \qquad t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Vypočteme

$$\mathrm{d}s = \cdots = r\,\mathrm{d}t, \quad \text{takže} \quad s(l) = \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}t = 2\pi r.$$

$\square$

Je-li křivka dána explicitně rovnicí $y = f(x)$, je to vlastně zvláštní případ parametrického zadání $x = x$, $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$. Z toho plyne

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}t, \quad \text{takže} \quad s(l) = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Je-li křivka dána v polárních souřadnicích $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle$, platí $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, odkud

$$\mathrm{d}x = (\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}y = (\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$

takže

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Nakonec tedy

$$s(l) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left[\rho(\varphi)\right]^2 + \left[\rho'(\varphi)\right]^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Pro prostorovou křivku zadanou parametricky máme

$$s(l) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2 + \left[\chi'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Povrch rotační plochy

Jde o plochy vzniklé rotací křivky l kolem osy x. Element povrchu plochy je

$$\Delta S = 2\pi y \Delta s,$$

takže diferenciál povrchu plochy je

$$\mathrm{d}S = 2\pi y \,\mathrm{d}s.$$

Je-li křivka l dána parametricky:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

je

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2} \,\mathrm{d}t,$$

je-li křivka l dána explicitně:

$$y = f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle,$$

je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} \,\mathrm{d}x.$$

12.3 Technické křivky

Dále uvádíme příklady technických křivek, které se často vyskytují ve výpočtech s využitím integrálu. Kuželosečky v tomto přehledu neuvádíme.

Řetězovka

Řetězovku vytváří nepružná nit (řetěz) zavěšená ve dvou bodech. Je to graf funkce:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad \text{kde} \quad a > 0.$$

Platí

$$\mathrm{d}s = \operatorname{ch} \frac{x}{a} \,\mathrm{d}x.$$

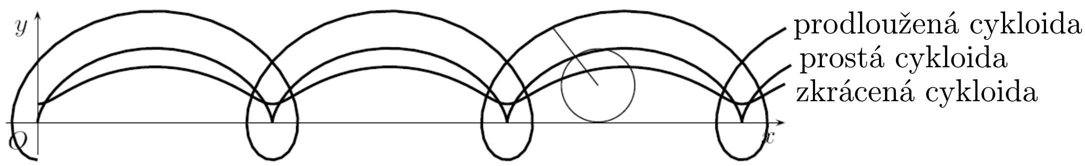
Kotálnice

Při kotálení křivky h (tzv. tvořící křivky nebo *hybné polodie*) bez skluzu po pevné křivce p (tzv. základní křivce nebo *pevné polodii*) opíše každý bod roviny křivku, kterou nazýváme *kotálnice*.

Důležité jsou případy, kdy hybná polodie je kružnice a pevná polodie přímka nebo kružnice.

Cykloidy

Jestliže se kružnice h o poloměru a kotálí po přímce p, pak každý (vnější, vnitřní) bod kružnice h (vzdálený o r od středu kružnice h) pevně spojený s touto kružnicí vytváří tzv. *prostou* (*prodlouženou*, *zkrácenou*) cykloidu.



Obrázek 12.6: Cykloidy

Prostá cykloida

Parametrické rovnice:

$$x = a(t - \sin t),$$

$$y = a(1 - \cos t);$$

jednu větev dostaneme pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Platí

$$\mathrm{d}s = 2a \sin \frac{t}{2}\, \mathrm{d}t.$$

Prodloužená (zkrácená) cykloida

Parametrické rovnice:

$$x = at - r \sin t,$$

$$y = a - r \cos t.$$

Platí

$$\mathrm{d}s = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos t}\, \mathrm{d}t.$$

Epicykloidy a hypocykloidy

Jestliže se kružnice h o poloměru a kotálí po vnějším resp. vnitřním obvodu kružnice p o poloměru A, pak každý (vnější, vnitřní) bod kružnice h (vzdálený o r od středu kružnice h) pevně spojený s touto kružnicí vytváří tzv. *prostou* (*prodlouženou*, *zkrácenou*) *epicykloidu* resp. *hypocykloidu*.

Parametrické rovnice prosté epicykloidy (platí horní znaménko) a hypocykloidy (platí dolní znaménko):

$$x = (A \pm a)\cos t \mp a \cos \frac{A \pm a}{a} t,$$
$$y = (A \pm a)\sin t - a \sin \frac{A \pm a}{a} t.$$

Asteroida

Zvaná též *astroida* patří mezi kotálnice; asteroidu opisuje každý bod kružnice o poloměru $\frac{a}{4}$, která se bez smyku kotálí zevnitř po kružnici o poloměru a.

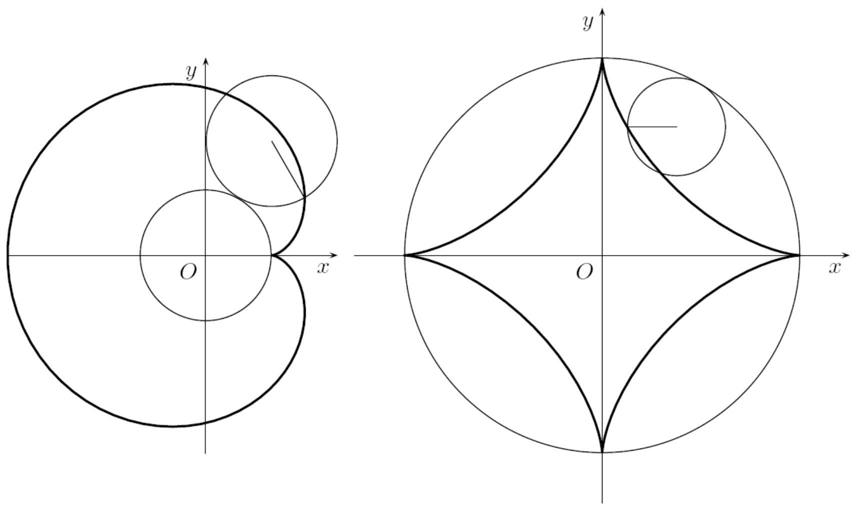
Je to tedy prostá hypocykloida, kde $A = \frac{a}{4}$.

Parametrické rovnice:

$$\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\sin^3 t, \end{aligned} \qquad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Platí

$$\mathrm{d}s = 3a \sin t \cos t \,\mathrm{d}t.$$



Obrázek 12.7: Kardioida a asteroida

Kardioida

Patří mezi kotálnice; kardioidu opisuje každý bod kružnice o poloměru a, která se bez smyku kotálí vně po kružnici o poloměru a. Je to tedy prostá epicykloida, kde $A = a$. Rovnice v polární soustavě:

$$\rho = a(1 + \cos\varphi), \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Platí

$$\mathrm{d}s = 2\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Evolventa kružnice

Lze ji zařadit mezi kotálnice (kde h je přímka a p je kružnice) i mezi spirály. Jako každá evolventa křivky vznikne tak, že počínaje počátečním bodem nanášíme na tečnu délku oblouku mezi počátečním bodem a bodem dotyku tečny s křivkou. (Evolventu kružnice tedy vytváří konec napjaté niti odmotávané z kruhové cívky.)

Parametrické rovnice:

$$\begin{aligned} x &= a(t\sin t + \cos t), \\ y &= a(\sin t - t\cos t). \end{aligned}$$

Platí

$$\mathrm{d}s = at\,\mathrm{d}t.$$

Archimédova spirála

Je to spirála s konstantní šířkou jednotlivých závitů. Je vytvořena rovnoměrným pohybem bodu po průvodiči, který se rovnoměrně otáčí kolem pólu.

Rovnice v polární soustavě:

$$r = a\varphi.$$

Platí

$$\mathrm{d}s = a\sqrt{1 + \varphi^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Logaritmická spirála

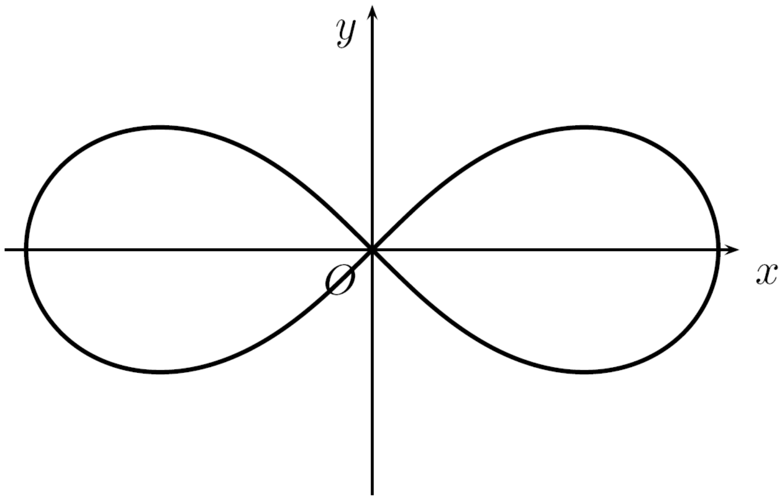
Rovnice v polární soustavě:

$$\rho = a\,\mathrm{e}^{m\varphi}\,.$$

Vyskytuje se např. v kresbě ulit plžů.

Platí

$$\mathrm{d}s = a\sqrt{1 + m^2}\,\mathrm{e}^{m\varphi}\,\mathrm{d}\varphi.$$



Obrázek 12.8: Lemniskáta

Lemniskáta

Je to množina bodů které mají od dvou daných pevných bodů stálý součin vzdáleností. Rovnice v polární soustavě:

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

Délku nelze vyjádřit užitím elementárních funkcí.

Šroubovice

Je to příklad prostorové křivky. Šroubovice leží na válcové ploše

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Rozvinutím válcové plochy přejde každý závit šroubovice v úsečku.

Parametrické rovnice:

$$\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= a\sin t, \quad \text{jeden závit pro} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \\ z &= ct, \end{aligned}$$

Platí

$$\mathrm{d}s = \sqrt{a^2 + c^2}\,\mathrm{d}t.$$

12.4 Užití určitého integrálu ve fyzice

Hmotnost rovinné desky

Mějme spojitou kladnou funkci f a uvažujme rovinnou desku ve tvaru základního obrazce (křivočarého lichoběžníku) pro $x \in \langle a, b\rangle$; nechť σ je plošná konstantní hustota materiálu.

Je-li deska homogenní, tj. $\sigma =$ konst., je hmotnost této desky rovna

$$m = \sigma \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Je-li hustota desky funkcí x, je

$$\int_a^b \sigma(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Těžiště rovinné desky

Nyní uvažujme jeden element desky, který má šířku $\Delta x (= \mathrm{d}x)$.

Statický moment tohoto elementu vzhledem k ose x je

$$\mathrm{d}M_x = (y\,\mathrm{d}x) \cdot \sigma \cdot \frac{1}{2} y$$

(hmotnost elementu násobená ramenem síly), podobně

$$\mathrm{d}M_y = (y\,\mathrm{d}x) \cdot \sigma \cdot x.$$

Statický moment celé (homogenní) desky vzhledem k osám je

$$M_x = \frac{1}{2}\sigma \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x, \quad M_y = \sigma \int_a^b xy\,\mathrm{d}x.$$

Těžiště $T[\xi, \eta]$ rovinné desky je bod, který má vzhledem k souřadnicovým osám stejný statický moment jako celá deska, pokud za jeho hmotnost považujeme hmotnost m celé desky.

Proto

$$m\xi = M_y, \quad m\eta = M_x$$

a z toho (po zkrácení σ)

$$\xi = \frac{\int_a^b xy\,\mathrm{d}x}{\int_a^b y\,\mathrm{d}x}, \qquad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x}{\int_a^b y\,\mathrm{d}x}.$$

Pokud má deska tvar oblasti normální vzhledem k ose x, tj. je-li

$$a \leq x \leq b, \quad y_1 \leq y \leq y_2,$$

pak lze podobně odvodit vzorce pro souřadnice těžiště; dostaneme je z předchozích záměnou $y_2 - y_1$ za y (ve jmenovatelích obou zlomků a v čitateli prvního zlomku) a $y_2^2 - y_1^2$ za y^2 (v čitateli druhého zlomku).

Hmotnost křivky

Uvažujme rovinnou homogenní křivku danou parametricky s konstantní délkovou hustotou σ. Pak

$$m = \sigma \int_\alpha^\beta \sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2 + \big[\psi'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Těžiště křivky

Při odvození vzorců se postupuje podobně jako u těžiště rovinné desky. Je zde

$$\mathrm{d}M_x = \sigma y\,\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}M_y = \sigma x\,\mathrm{d}s,$$

tedy

$$M_x = \sigma \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2 + \big[\psi'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t,$$
$$M_y = \sigma \int_\alpha^\beta \varphi(t)\sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2 + \big[\psi'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Z rovností

$$m\xi = M_y, \quad m\eta = M_x$$

pak plyne, že rovinná homogenní křivka zadaná parametricky má těžiště $T[\xi, \eta]$, kde

$$\xi = \frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2 + \big[\psi'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2 + \big[\psi'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t}, \qquad \eta = \frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2 + \big[\psi'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2 + \big[\psi'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t}.$$

Vidíme, že těžiště homogenní rovinné desky ani těžiště homogenní křivky nezávisí na hustotě.

– ∗ –

Kapitola 13

Nevlastní integrály

V definici Riemannova integrálu bylo podstatné, že funkce je omezená na uzavřeném intervalu. Pojem Riemannova určitého integrálu však lze rozšířit i na případy, že interval integrace je nekonečný, např. $\langle a, +\infty)$ nebo že funkce není omezená. Nejprve uvážíme první možnost.

13.1 Nevlastní integrál vlivem meze

Definice 13.1.1. Je-li funkce f definována na intervalu $\langle a, +\infty)$ a je integrace schopná na každém intervalu $\langle a, K\rangle$, kde $K > a$ je reálné číslo, pak

$$\lim_{K\to+\infty} \int_a^K f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{označíme} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a nazveme *nevlastní integrál vlivem meze* z funkce f na intervalu $\langle a, +\infty)$. Je-li uvedená limita vlastní, říkáme, že nevlastní integrál **konverguje** (je *konvergentní*), je-li tato limita nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál **diverguje** (*je divergentní*).

Definice nevlastního integrálu dává návod i pro jeho výpočet.

Úloha 13.1.2. *Vypočtěte* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

Řešení. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{K\to+\infty} \int_1^K \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{K\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^K = \lim_{K\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{K}\right) = 1.$
Zadaný integrál konverguje. □

Úloha 13.1.3. *Vypočtěte* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Řešení. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{K\to+\infty} \int_1^K \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{K\to+\infty} [\ln x]_{x=1}^K = \lim_{K\to+\infty} (\ln K - \ln 1) =$ $+\infty$. Zadaný integrál diverguje. □

Geometrická interpretace pro $f \geq 0$:

obsah nekonečného obrazce, části jehož hranice leží na přímce $x = a$, na ose x a na grafu funkce f (načrtněte obrázek!).

Rozšíření definice:

Podobně definujeme

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{jako} \quad \lim_{H\to-\infty} \int_{H}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a definujeme též

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{jako} \quad \lim_{\substack{H \to -\infty \\ K \to +\infty}} \int_{H}^{K} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(jde o dvojnou limitu). Výpočet této dvojné limity lze převést na výpočet dvou jednoduchých limit. Nechť c je libovolné reálné číslo; pak platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 13.1.4. *Vypočtěte* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Řešení.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \\
&= \lim_{H\to-\infty} [\operatorname{arctg} x]_{x=H}^{0} + \lim_{K\to+\infty} [\operatorname{arctg} x]_{x=0}^{K} = \\
&= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.
\end{aligned}$$

□

Úloha 13.1.5. *Vypočtěte* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Řešení.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \\
&= \lim_{H\to-\infty} \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_{x=H}^{0} + \lim_{K\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_{x=0}^{K} = \\
&= 0 - (+\infty) + (+\infty) - 0,
\end{aligned}$$

limita neexistuje, tedy daný integrál je divergentní. □

Někdy se definuje tzv. ***hlavní hodnota nevlastního integrálu*** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ s označením *v.p.* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, a to jako $\lim\limits_{K\to+\infty} \int_{-K}^{K} f(x)\,\mathrm{d}x$ (tj. místo dvojné limity jde o limitu jednoduchou, kde $H = -K$). Jestliže existuje vlastní limita, pak říkáme, že daný nevlastní integrál *konverguje ve smyslu hlavní hodnoty.* Písmena v.p. jsou zkratkou pro valeur principal [čti valér prénsipál].

Úloha 13.1.6. *Vypočtěte v.p.* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \lim_{K\to+\infty} \int_{-K}^{K} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{K\to+\infty} \Big(\ln\big(1+K^2\big) - \ln\big(1+(-K)^2\big) \Big) = \\ &= \lim_{K\to+\infty} \ln \frac{1+K^2}{1+K^2} = 0. \end{aligned}$$

V úloze 13.1.5 jsme viděli, že zadaný integrál (dvojná limita) diverguje, ale nyní jsme zjistili, že ve smyslu hlavní hodnoty konverguje. □

13.2 Nevlastní integrál vlivem funkce

Druhé rozšíření Riemannova integrálu je pro případ, že funkce f je definována na $\langle a, b)$, ale není na tomto intervalu omezená.

Definice 13.2.1. Je-li funkce f integrace schopná na každém intervalu $\langle a, s\rangle$, kde $a < s < b$, a není omezená v levém okolí bodu b (který nazveme *singulární bod*), pak $\lim\limits_{s\to b^-} \int_a^s f(x(\,\mathrm{d}x$ označíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a nazveme ***nevlastní integrál vlivem funkce*** z funkce f na intervalu $\langle a, b)$. Je-li uvedená limita vlastní, říkáme, že nevlastní integrál ***konverguje***, je-li tato limita nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál ***diverguje***.

Je třeba dát pozor na to, že ze zápisu integrálu nemusí být hned patrné, zda jde o určitý integrál Riemannův nebo integrál nevlastní.

Podobně, když funkce není omezená v pravém okolí bodu a, když tedy je bod a singulární, definujeme nevlastní integrál vlivem funkce na intervalu $(a, b\rangle$; označení integrálu je stejné.

Úloha 13.2.2. *Vypočtěte* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$.

Řešení. Funkce není omezená v pravém okolí počátku, tj. bod 0 je singulární, je však integrace schopná na každém intervalu $\langle s, 1\rangle$, kde $s \in (0,1)$.

$$I = \lim_{s\to 0^+} \int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{s\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_{x=s}^1 = \lim_{s\to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{s}\right) = 2.$$

□

Úloha 13.2.3. *Proveďte geometrickou interpretaci příkladu 1.*

Řešení. Je-li na daném intervalu integrace více singulárních bodů, rozdělíme tento interval na podintervaly tak, aby na každém z nich byl singulární bod nejvýše jeden (jako krajní bod), a vyšetřujeme integrály z dané funkce na jednotlivých podintervalech. Jsou-li všechny tyto integrály konvergentní, pak je konvergentní i výchozí integrál a je roven součtu komponent. □

13.3 Vlastnosti nevlastních integrálů

Oba druhy nevlastních integrálů lze formálně sloučit do vyjádření: $\displaystyle\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$, kde A je (jediný) singulární bod: buď $A = +\infty$ nebo $A \in \mathbb{R}$, $A > a$, přičemž funkce f není omezená v levém okolí bodu A.

Věta 13.3.1 (lineární vlastnosti)**.** *Jsou-li integrály* $\displaystyle\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^A g(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergentní a* $c \in \mathbb{R}$ *je libovolné číslo, pak*

(1) $\displaystyle\int_a^A \Big[f(x)+g(x)\Big]\,\mathrm{d}x$ *konverguje a je roven součtu integrálů obou komponent,*

(2) $\displaystyle\int_a^A cf(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje a rovná se* $\displaystyle c\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$.

I některé další vlastnosti Riemannova integrálu se přenášejí na integrály nevlastní. Například $\forall p \in \langle a, A\rangle$ platí pro konvergentní integrál

$$\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^p f(x)\,\mathrm{d}x + \int_p^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

13.4 Kriteria konvergence nevlastních integrálů

Věta 13.4.1 (srovnávací kriterium)**.** *Nechť* $0 \le f(x) \le g(x)$ *na* $\langle a, A)$, *kde* $a < A \le +\infty$, *funkce* f, g *jsou integrace schopné na každém intervalu* $\langle a, s\rangle$, *kde* $s \in (a, A)$, A *je (jediný) singulární bod. Pak*

(1) z konvergence $\int_a^A g(x)\,\mathrm{d}x$ *plyne konvergence* $\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$

(2) z divergence $\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ *plyne divergence* $\int_a^A g(x)\,\mathrm{d}x$.

Princip důkazu. Pro $t \in \langle a, A)$ označíme $F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, $G(t) = \int_a^t g(x)\,\mathrm{d}x$. Obě funkce jsou rostoucí a platí $0 \leq F(t) \leq G(t)$. Tvrzení pak plynou z definice konvergence a divergence. □

Z definice konvergence plyne:

Věta 13.4.2. *$\forall c \in \langle a, A)$ platí, že integrály $\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_c^A f(x)\,\mathrm{d}x$ současně konvergují nebo divergují.*

Při použití srovnávacího kriteria proto není třeba uvažovat celý interval $\langle a, A)$, ale nerovnost mezi funkcemi stačí dokázat jen na jeho části $\langle c, A)$.

Věta 13.4.3 (o absolutní hodnotě integrálu)**.** *Jestliže konverguje $\int_a^A \mid f(x) \mid \,\mathrm{d}x$, pak konverguje i $\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí $\left|\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^A \mid f(x) \mid \,\mathrm{d}x$.*

Úloha 13.4.4. *Zajímá nás konvergence integrálu* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{x^2}$.

Řešení. Jelikož $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ je konvergentní a platí $\mid \sin x \mid \leq 1$, tj. též $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, je také zadaný integrál konvergentní. □

Nacházíme hlubokou analogii mezi nevlastními integrály a číselnými řadami, založenou nejen na formální podobnosti, ale i na věcných souvislostech, o níž bude více v kapitole 15. Například stejně jako u číselných řad zavádíme i u nevlastních integrálů pojem absolutní a neabsolutní konvergence.

Definice 13.4.5. Říkáme, že $\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ je *absolutně konvergentní* (*konverguje absolutně*), právě když současně s ním konverguje také $\int_a^A |f(x)|\,\mathrm{d}x$. V případě, že $\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a $\int_a^A |f(x)|\,\mathrm{d}x$ diverguje, nazýváme daný nevlastní integrál *neabsolutně konvergentní.*

Nevlastní integrály mohou záviset ještě na parametru. Dostáváme tak nevlastní integrály závislé na parametru, například

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Pomocí nevlastních integrálů závislých na parametru jsou pro kladné hodnoty argumentů definovány známé funkce Beta a Gamma:

$$B(u, v) = \int_0^1 x^{u-1}(1 - x)^{v-1}\,\mathrm{d}x, \qquad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

$- * -$

Kapitola 14

Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic

14.1 Základní pojmy

V této kapitole budeme zpravidla (v souladu s velkou částí literatury) označovat nezávisle proměnnou písmenem t.

Úloha 14.1.1. *Najděte funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y' = 2t + \cos t$.*

Řešení. Podle definice primitivní funkce je hledanou funkcí $y(t)$ každá funkce primitivní k zadané funkci $2t + \cos t$, tedy $y = t^2 + \sin t + C$, kde C je (libovolná) integrační konstanta. □

Úloha 14.1.2. *Najděte funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y'' = -y$.*

Řešení. Z vlastností derivací funkcí $\cos t$ a $\sin t$ vidíme, že uvedená rovnice je splněna například pro funkci $y_1 = \cos t$, také pro funkci $y_2 = \sin t$, ale rovněž pro $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. □

Úloha 14.1.3. *Najděte funkci $y = y(t)$, pro niž platí $y' = 1$, přičemž $y(2) = 5$.*

Řešení. Nejprve si všimněme jen rovnice $y' = 1$; vyhovuje jí každá funkce $y = t + C$, kde C je libovolná konstanta. Použijeme-li nyní uvedenou podmínku, dostaneme $5 = 2 + C$, a z toho $C = 3$. Takže funkce $y = t + 3$ vyhovuje jak uvedené rovnici, tak zadané podmínce. □

To jsou 3 příklady diferenciálních rovnic.

Definice 14.1.4. ***Diferenciální rovnice*** je název pro rovnice, kde neznámou je funkce a v níž se vyskytuje alespoň jedna derivace neznámé funkce. ***Řád*** diferenciální rovnice, to je řád nejvyšší derivace neznámé funkce v rovnici.

V našich příkladech jde o rovnice 1., 2. a 1. řádu. V matematice i v aplikacích se pracuje s *obyčejnými diferenciálními rovnicemi*, to jsou ty, kde neznámá funkce je funkcí jedné nezávisle proměnné a derivace neznámé funkce je obyčejnou derivací, a také s *parciálními diferenciálními rovnicemi*, kde neznámá funkce je funkcí více proměnných a její derivace jsou tedy derivacemi parciálními.

Definice 14.1.5. ***Řešením*** (***integrálem***) diferenciální rovnice nazýváme každou funkci, která po dosazení vyhovuje na nějakém intervalu dané diferenciální rovnici.

Tak rovnice z příkladu 14.1.2 má řešení $y_1 = \cos t$, $y_2 = \sin t$, ale též $y_3 = 5\cos t - \sin t$, $y_4 = C \sin t$ (kde C je libovolná konstanta) a další.

Definice 14.1.6. ***Obecným řešením*** diferenciální rovnice n-tého řádu nazýváme to řešení, v němž se vyskytuje n libovolných konstant, které nelze nahradit menším počtem konstant.

Tak třeba funkce $y = C_1C_2 \sin t$ není obecným řešením diferenciální rovnice z příkladu 14.1.2, neboť lze položit $C = C_1C_2$ a v řešení $y = C \sin t$ je už jen jedna libovolná konstanta. Uvedená rovnice má obecné řešení $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, ale také třeba $y = A \sin(t - \varphi)$, kde A, φ jsou libovolné konstanty.

Definice 14.1.7. ***Partikulárním řešením*** diferenciální rovnice nazýváme řešení, které lze dostat z obecného řešení tím, že za některé konstanty C volíme přípustné číselné hodnoty.

V této kapitole se budeme dále zabývat již jen obyčejnými diferenciálními rovnicemi 1. řádu, které lze vyjádřit ve tvaru

$$y' = f(t, y).$$

Řešení rovnice může mít tvar explicitní, například $y = t + C$, nebo implicitní, například $y - t = C$.

Definice 14.1.8. Mějme diferenciální rovnici $y' = f(t, y)$ a dále nechť t_0, y_0 jsou libovolně daná reálná čísla. ***Cauchyova počáteční úloha*** znamená najít partikulární řešení $y(t)$ dané diferenciální rovnice, které je definována na nějakém intervalu I (kde $t_0 \in I$) a splňuje podmínku

$$y(t_0) = y_0.$$

Tato podmínka se nazývá ***Cauchyova počáteční podmínka***.

Příklad Cauchyovy úlohy je v úloze 14.1.3.

Geometrický význam řešení diferenciální rovnice

Na obecné řešení diferenciální rovnice se můžeme dívat jako na množinu funkcí s parametrem C, tj. jako na množinu všech partikulárních řešení. Grafem každého partikulárního řešení je nějaká křivka; nazýváme ji *integrální křivka.* Geometrickým významem obecného řešení je tedy jednoparametrická soustava čar — integrálních křivek. Například obecné řešení rovnice z úlohy 14.1.3 znamená (v pravoúhlém souřadnicovém systému s osami t, y) soustavu navzájem rovnoběžných přímek $y = t + C$. Partikulární řešení dané Cauchyovou počáteční podmínkou $y(2) = 5$ pak znamená tu přímku soustavy, která prochází bodem $[2; 5]$.

14.2 Základní problémy

Při studiu diferenciálních rovnic vyvstávají tyto problémy:

1. Zda u dané diferenciální rovnice je vůbec zaručena *existence řešení*, které by splňovalo zadanou Cauchyovu počáteční podmínku, resp. za jakých předpokladů na funkci f takové řešení existuje na nějakém okolí I bodu t_0.

2. Za předpokladu, že na intervalu I existuje partikulární řešení splňující Cauchyovu počáteční podmínku, zda je zaručena *jednoznačnost* jeho určení danou podmínkou, resp. za jakých předpokladů a na jakém okolí bodu t_0 je tato jednoznačnost zaručena.

3. Jaký je pro danou Cauchyovu počáteční úlohu nejširší interval, na němž takové partikulární řešení existuje, resp. je určeno zadanou podmínkou jednoznačně.

   Problémy existence a jednoznačnosti řešení jsou tedy jednak lokální, jednak globální.

4. Určit vlastnosti řešení, tj. jeho průběh nebo části průběhu, jako jsou omezenost, nulové body, periodičnost a asymptotické vlastnosti (chování řešení pro $t \to +\infty$, například tzv. stabilita řešení).

   Tento 4. problém lze řešit v podstatě dvěma způsoby:

   A) Určit (vypočítat) funkci, která je řešením diferenciální rovnice, a její vlastnosti získat vyšetřováním průběhu této funkce;

   B) Určit potřebné vlastnosti řešení diferenciální rovnice, aniž je tato rovnice řešena, tj. užitím vlastností koeficientů nacházejících se v rovnici (tomuto se věnuje tzv. kvalitativní teorie diferenciálních rovnic).

V dalších paragrafech této kapitoly se budeme zabývat problémem 4A, tj. uvedeme určité metody řešení *vybraných typů* diferenciálních rovnic, přičemž budeme vždy předpokládat, že řešení dané diferenciální rovnice existuje. K tomu ještě praktická poznámka: Víme, že primitivní funkce k funkci spojité sice existuje, ale primitivní funkce k funkci elementární obecně už není funkce elementární. Dovedeme tedy v elementárních funkcích integrovat jen vybrané typy funkcí. Tato vlastnost se přenáší i na diferenciální rovnice, tedy i když je funkce $f(t, y)$ vyjádřena elementárními funkcemi, dovedeme řešení rovnice $y' = f(t, y)$ vyjádřit pomocí elementárních funkcí jen u některých typů rovnic (algoritmy řešení pro část z nich uvádíme v dalších paragrafech).

Chceme-li tedy úspěšně řešit takové diferenciálné rovnice, je třeba:

– poznat, jakého typu je zadaná rovnice,

– znát algoritmus řešení tohoto typu rovnic,

– správně zvládnout potřebné výpočetní operace.

14.3 Separace proměnných

Tuto metodu lze užít u rovnic, které lze převést na tvar

$$(*) \qquad \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

(separace proměnných znamená, že na jedné straně rovnice je pouze proměnná y, na druhé straně pouze proměnná t). Je-li $y = u(t)$ nějaké řešení rovnice $(*)$ na intervalu J, pak pro $t \in J$ je $\mathrm{d}y = u'(t)\,\mathrm{d}t$, takže platí $\varphi(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \psi(t)\,\mathrm{d}t$ a je to identická rovnost dvou diferenciálů na J, tj. $\mathrm{d}\Phi(u(t)) = \mathrm{d}\Psi(t)$, kde funkce Φ, Ψ jsou primitivní k funkcím φ, ψ (u nichž se zřejmě předpokládá například spojitost). Proto platí $\Phi(u(t)) = \Psi(t) + C$. Znamená to, že funkce $u(t)$ jako řešení diferenciální rovnice $(*)$ vyhovuje současně rovnici

$$(**) \qquad \Phi(y) = \Psi(t) + C.$$

Toto tvrzení platí i naopak, tedy každá funkce $y = u(t)$, která vyhovuje rovnici $(**)$, splňuje též rovnici $(*)$, jak plyne z derivace identity $\Phi(u(t)) = \Psi(t) + C$.

Závěr:

Funkce $y = u(t)$ je řešením rovnice $(*)$ právě tehdy, když vyhovuje rovnici $(**)$; touto rovnicí lze tedy vyjádřit obecné řešení dané diferenciální rovnice $(*)$.

Úloha 14.3.1. *Najděte obecné řešení rovnice* $(1 + t)y' = t(1 - y)$.

Řešení. Tato rovnice je separovatelná, tj. lze v ní separovat proměnné. Vyjádříme-li y' jako $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, lze rovnici upravit na tvar, kde proměnné jsou již separované:

$$\frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t},$$

přičemž použitá metoda vyžaduje předpoklady $y \neq 1$, $t \neq -1$. Odsud

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t}.$$

Po integraci máme

$$-\ln|1-y| = t - \ln|1+t| + C,$$

kde C je libovolná konstanta. V této chvíli je daná diferenciální rovnice již v podstatě vyřešena, všechno další jsou úpravy a kompletace řešení.

Předně, jsou-li v takto získané rovnici logaritmy, bývá vhodné i integrační konstantu vyjádřit jako logaritmus: $C = \ln C_1$, kde C_1 je libovolná *kladná* konstanta (zůstává zachováno, že C je *libovolná* konstanta). Rovnici

$$\ln|1+t| - \ln|1-y| = t + \ln C_1$$

odlogaritmujeme a máme

$$\left|\frac{1+t}{1-y}\right| = C_1\,\mathrm{e}^t\,.$$

Položíme-li $C_2 = \frac{1}{C_1}$ ($C_2 > 0$ je pak také libovolná kladná konstanta), pak

$$\frac{1-y}{1+t} = \pm C_2\,\mathrm{e}^{-t}$$

a z toho

$$\frac{1-y}{1+t} = C_3\,\mathrm{e}^{-t},$$

kde $C_3 \neq 0$, tedy

$$1-y = C_3\,\mathrm{e}^{-t}(1+t),$$
$$y = 1 - C_3\,\mathrm{e}^{-t}(1+t),$$

což je obecné řešení v explicitním tvaru (ale ještě ne definitivním).

Nyní se vrátíme k podmínce ($y \neq 1$), kterou si vyžádala metoda řešení, a podíváme se, zda jsme tím nezanedbali nějaké řešení. Tedy ověříme, zda $y = 1$ je řešením, tím, že tuto funkci dosadíme do dané diferenciální rovnice:

$$L = (1+t)y' = 0, \qquad P = t(1-y) = 0,$$

takže funkce $y = 1$ skutečně *je* řešením. Toto řešení však nemusíme uvádět zvlášť, protože je dostaneme, když ve výše uvedeném obecném řešení připustíme nulovou hodnotu C. Konečný tvar obecného řešení je tedy

$$y = 1 + C\,\mathrm{e}^{-t}(1+t),$$

kde $C = -C_3 \vee 0$.

Podívejme se ještě na podmínku $t \neq -1$. Pro $t = -1$ máme $y = 1$, tedy všechny integrální křivky procházejí bodem $[-1; 1]$. Uvědomíme si, že Cauchyova úloha $y(-1) = 1$ není řešitelná jednoznačně a například Cauchyova úloha $y(-1) = 2$ nemá řešení. □

Úloha 14.3.2. *Znázorněte soustavu partikulárních řešení diferenciální rovnice z předchozí úlohy 14.3.1.*

14.4 Užití substitucí

U některých typů diferenciálních rovnic lze pomocí vhodných substitucí (transformace neznámé funkce, případně i transformace nezávisle proměnné) přeměnit tyto rovnice na separovatelné.

a) Rovnice typu $y' = f(\alpha t + \beta y + \gamma)$

Užijeme substituci $z = \alpha t + \beta y + \gamma$, odkud $z' = \alpha + \beta y'$, tj. $y' = \frac{1}{\beta}(z' - \alpha)$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme rovnici

$$z' = \alpha + \beta f(z),$$

v níž lze separovat proměnné. Ježto přitom tuto rovnici dělíme výrazem $\alpha + \beta f(z)$, musíme vyloučit jeho nulovou hodnotu a nakonec ověřit, zda z rovnosti nule nedostaneme další řešení dané rovnice. Nakonec se ovšem vracíme k původní proměnné.

Úloha 14.4.1. *Řešte rovnici $y' = t + y$.*

Řešení. Zvolíme novou neznámou funkci vztahem $z = t + y$, odkud $z' = 1 + y'$, tj. $y' = z' - 1$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice máme $z' - 1 = z$, neboli

$$z' = z + 1.$$

Dělením této rovnice výrazem $(z + 1)$, kde $z \neq -1$, a násobením $\mathrm{d}t$ provedeme separaci proměnných, z níž

$$z + 1 = C_1 \,\mathrm{e}^t,$$

neboli

$$y = C_1 \,\mathrm{e}^t - 1 - t,$$

kde $C_1 \neq 0$ je libovolná konstanta. Rovnost $z = -1$ dává $y = -1 - t$, a to je funkce, která (jak zjistíme dosazením do dané diferenciální rovnice) je rovněž řešením. Obecné řešení je tedy

$$y = C \,\mathrm{e}^t - 1 - t,$$

kde C je libovolná konstanta. □

b) Rovnice typu $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$, tzv. homogenní rovnice

Této rovnici se říká homogenní podle toho, že funkce F na pravé straně je tzv. *homogenní funkce*. Užijeme substituci $z = \frac{y}{t}$, odkud $y = zt$, tedy $y' = z + tz'$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme rovnici

$$z't = F(z) - z,$$

v níž lze separovat proměnné. Ježto přitom tuto rovnici dělíme výrazem $F(z) - z$, musíme vyloučit jeho nulovou hodnotu a nakonec opět ověřit, zda z rovnosti nule nedostaneme další řešení dané rovnice. Nakonec se pak vracíme k původní proměnné.

Úloha 14.4.2. *Řešte rovnici* $2tyy' = y^2 - t^2$.

Řešení. Rovnici nejprve upravíme na tvar:

$$y' = \frac{y^2 - t^2}{2ty}$$

a po dělení čitatele i jmenovatele výrazem t dostaneme uvedený tvar rovnice, tedy

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{t}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{t}}.$$

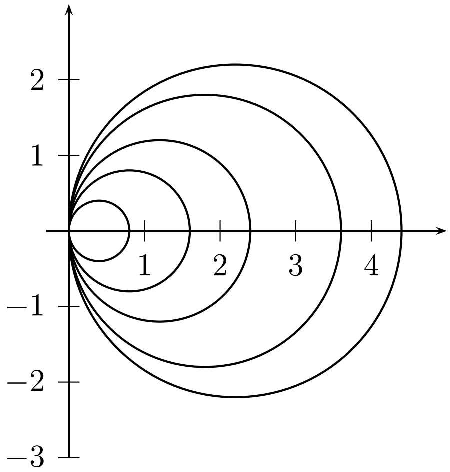
Nyní zvolíme novou neznámou funkci vztahem $z = \frac{y}{t}$, odkud $y = zt$, tedy $y' = z + tz'$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice dostaneme $z + tz' = \frac{y^2 - 1}{2y}$, a po separaci proměnných máme

$$\frac{2z\,\mathrm{d}z}{z^2 + 1} = -\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Po integrování a úpravách dostaneme integrál dané diferenciální rovnice ve tvaru

$$(t - C)^2 + y^2 = C^2.$$

Vidíme, že obecným řešením je jednoparametrická soustava kružnic se středem v $[C, 0]$ a s poloměrem $|C|$. $\square$



Obrázek 14.1: Jednoparametrická soustava kružnic se středem v $[C, 0]$ a s poloměrem $|C|$, daná rovnicí $(t - C)^2 + y^2 = C^2$.

c) Rovnice typu $y' = f\left(\dfrac{\alpha_1 t + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 t + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$

Ve zvláštním případě, pokud determinant $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$ nebo $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 0$, lze rovnici řešit separací proměnných s případnou předchozí substitucí pro rovnici homogenní. Je-li $\Delta \neq 0$ a též $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, provedeme substituci, při níž transformujeme jak neznámou funkci y, tak nezávisle proměnnou t:

$$y = z + r$$
$$t = \tau + s.$$

Koeficienty r, s volíme tak, abychom pro neznámou funkci $z(\tau)$ dostali rovnici homogenní, tj. aby se vynulovaly absolutní členy v čitateli i ve jmenovateli uvedeného zlomku. Z transformačních rovnic plyne $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau$ (tedy $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$) a daná rovnice přejde na tvar rovnice homogenní:

$$y' = f\left(\frac{\alpha_1 t + \beta_1 y}{\alpha_2 t + \beta_2 y}\right),$$

pokud položíme

$$\alpha_1 s + \beta_1 r + \gamma_1 = 0,$$
$$\alpha_2 s + \beta_2 r + \gamma_2 = 0.$$

Ježto determinant této soustavy $\Delta \neq 0$, existuje řešení r, s.

Úloha 14.4.3. *Řešte rovnici* $y' = \dfrac{5t-2y-1}{2t-y+1}$.

Řešení. Nejprve řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 5s - 2r - 1 &= 0,\\ 2s - r + 1 &= 0, \end{aligned}$$

jejíž determinant soustavy je $\Delta = -1 \neq 0$; je $r = 7$, $s = 3$. Substituce $y = z + 7$, $t = \tau + 3$ transformuje rovnici na tvar

$$z' = \frac{5\tau - 2z}{2\tau - z} \qquad \text{neboli} \qquad z' = \frac{5 - 2\frac{z}{\tau}}{2 - \frac{z}{\tau}}$$

rovnice homogenní. Položíme nyní $\dfrac{z}{\tau} = u(\tau)$, tj. $z = u\tau$. Z toho $z' = u + u'\tau$, takže

$$u + u'\tau = \frac{5-2u}{2-u}, \qquad \text{odkud} \qquad u'\tau = \frac{u^2-4u+5}{2-u}.$$

Po separaci proměnných máme

$$\frac{2-u}{u^2-4u+5}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau},$$

nebo též

$$\frac{2u-4}{u^2-4u+5}\mathrm{d}u = -2\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}.$$

Po integraci máme

$$\ln(u^2-4u+5) = -2\ln|\tau| + \ln C_1, \quad \text{kde} \quad C_1 > 0,$$

tedy

$$u^2 - 4u + 5 = \frac{C}{\tau^2}.$$

Jelikož $u = \dfrac{z}{\tau}$, $z = y - 7$, $\tau = t - 3$, je $u = \dfrac{y-7}{t-3}$, takže obecné řešení dané diferenciální rovnice lze vyjádřit funkcí danou implicitně:

$$\left(\frac{y-7}{t-3}\right)^2 - 4\frac{y-7}{t-3} + 5 = \frac{C}{(t-3)^2}, \quad \text{kde} \quad C > 0.$$

□

d) Snížení řádu diferenciální rovnice

Pokud v diferenciální rovnici n-tého řádu chybí y, y',..., $y^{(n-2)}$, lze ji substitucí $z = y^{(n-1)}$ převést na diferenciální rovnici 1. řádu.

Úloha 14.4.4. *Řešte rovnici $ty'' + (t-1)y' = 0$.*

Řešení. V zadané rovnici 2. řádu chybí y, takže položíme $y' = z$. Pak $y'' = z'$ a daná rovnice přejde na diferenciální rovnici 1. řádu

$$tz' + (t-1)z = 0$$

(snížili jsme řád rovnice), kterou řešíme separací proměnných. Pro $z \neq 0$, $t \neq 0$ máme po separaci

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1-t}{t}\,\mathrm{d}t$$

a po integraci

$$\ln|z| = \ln|t| - t + \ln C_1', \quad \text{kde} \quad C_1' > 0.$$

Po úpravách analogických jako v úloze 14.3.1 dostáváme obecné řešení upravené rovnice

$$z = t\,\mathrm{e}^{-t}\,C_1''$$

a z toho po návratu k původní proměnné

$$y' = C_1'' t\,\mathrm{e}^{-t},$$

kde C_1'' je libovolná konstanta. Po návratu k původní proměnné y máme $y' = C_1'' t\,\mathrm{e}^{-t}$, tedy $y = C_1'' \int t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, odkud použitím metody per partes dostaneme

$$y = C_1(t+1)\,\mathrm{e}^{-t} + C_2,$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty. □

Vidíme, že zde obecné řešení diferenciální rovnice 2. řádu skutečně závisí na dvou integračních konstantách.

14.5 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Lineární rovnice je rovnice tvaru

$$y' + p(t)y = q(t). \tag{nlr}$$

Funkce $q(t)$ se někdy nazývá *pravá strana*. Pokud pravá strana není identicky rovna nule, máme lineární rovnici *nehomogenní*, v opačném případě máme rovnici

$$y' + p(t)y = 0 \tag{hlr}$$

homogenní. Pokud v (nlr) i (hlr) je $p(t)$ jedna a táž funkce, nazývá se (hlr) *příslušná homogenní rovnice* (tj. příslušná k dané rovnici nehomogenní).

Lineární rovnice jsou velmi důležité. Jednak na ně vede řada významných praktických problémů (chemické reakce, množení bakterií, radioaktivní rozpad, ochlazování těles ad.) a jednak lze některé jiné typy rovnic řešit tak, že je transformujeme na rovnice lineární.

Existuje několik metod, jak řešit lineární rovnice; lze je například řešit i vzorcem. Prakticky se dává přednost použití některé z aktivních metod, sloužících jinak i k odvození onoho vzorce. Nejznámější je *metoda variace konstanty.* Tato metoda spočívá ve třech krocích:

Metoda variace konstanty:

1. Nejprve řešíme (separací proměnných) příslušnou rovnici homogenní a obecné řešení zapíšeme s integrační konstantou K.

2. Řešení nehomogenní rovnice hledáme v tomtéž tvaru, kde však $K = K(t)$ je funkce (odsud i název metody: z konstanty „se stane“ funkce). Dosadíme tedy funkci vypočtenou v bodě 1 do dané nehomogenní rovnice a dostaneme rovnici pro neznámou funkci K'.

3. Integrací vypočteme $K(t)$ (s integrační konstantou C) a dosadíme je do funkce vypočtené v kroku 1.

Postup při řešení lineární rovnice metodou variance konstanty si ukážeme na příkladě.

Úloha 14.5.1. *Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = t + y$ (viz příklad 14.4.1).*

Řešení. Danou rovnici lze zapsat ve tvaru $y' - y = t$, pravá strana je t, příslušná rovnice homogenní je $y' - y = 0$.

1. $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, tedy separací proměnných při řešení homogenní rovnice máme $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}t$, z čehož dostáváme obecné řešení příslušné rovnice homogenní ve tvaru $y = K \cdot \mathrm{e}^t$.

2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že $K = K(t)$ je funkce. Proto po dosazení máme

$$K' \cdot \mathrm{e}^t + K \cdot \mathrm{e}^t - K \cdot \mathrm{e}^t = t;$$

   dva členy s K se ruší (a to vždy!) a máme

$$K' = t \cdot \mathrm{e}^{-t}\,.$$

3. Integrujeme:

$$K = \int t\,\mathrm{e}^{-t}\;\mathrm{d}t = [\text{metoda per partes}] = C - t \cdot \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}\,.$$

Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot \mathrm{e}^t$ a dostáváme

$$y = (C - t \cdot \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}) \cdot \mathrm{e}^t\,.$$

Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy

$$y = C \cdot \mathrm{e}^t - t - 1.$$

□

Poznámka 14.5.2. Pro $C = 0$ odsud dostáváme partikulární řešení $Y = -t - 1$.

Vidíme, že obecné řešení nehomogenní rovnice je rovno součtu obecného řešení příslušné rovnice homogenní a partikulárního řešení dané rovnice nehomogennní. Tento poznatek platí pro lineární rovnice obecně.

Bernoulliova rovnice

je rovnice tvaru

$$y' + p(t)y = q(t)y^m, \quad \text{kde} \quad m \neq 1,\ m \neq 0.$$

Transformací neznámé funkce y lze tuto rovnici převést na rovnici lineární.

Postup při řešení Bernoulliovy diferenciální rovnice:

1. Rovnici dělíme činitelem y^m (pro $m > 0$ je funkce $y = 0$ řešením Bernoulliovy rovnice, přidáme je k výsledku nakonec):

$$\frac{y'}{y^m} + p(t)\frac{1}{y^{m-1}} = q(t).$$

2. Provedeme substituci $\dfrac{1}{y^{m-1}} = z$, tj. $\dfrac{y'}{y^m} = \dfrac{1}{1-m}z'$. Pak do rovnice dosadíme a dostaneme tak lineární rovnici

$$z' + (1-m)p(t)z = (1-m)q(t).$$

3. Řešíme tuto lineární rovnici s neznámou funkcí z.

4. V získaném řešení se vrátíme k původní proměnné dosazením $z = \dfrac{1}{y^{m-1}}$.

Úloha 14.5.3. *Určete obecné řešení diferenciální rovnice* $y' + y = t\sqrt{y}$ *(pro* $y > 0$*).*

Řešení. Provedeme dělení dle bodu 1:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} = t.$$

Substitucí $\sqrt{y} = z$ dle bodu 2 přejde tato rovnice v rovnici lineární

$$2z' + z = t \quad (z > 0).$$

Obecné řešení příslušné rovnice homogenní je

$$z = K\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$$

a metodou variace konstanty dostaneme

$$K = C + t\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} - 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t},$$

takže

$$z = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + t - 2$$

a je tím naplněn bod 3.

Dle bodu 4 položíme $z = \sqrt{y}$ a po umocnění máme výsledné obecné řešení ve tvaru

$$y = \left(C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + t - 2\right)^2.$$

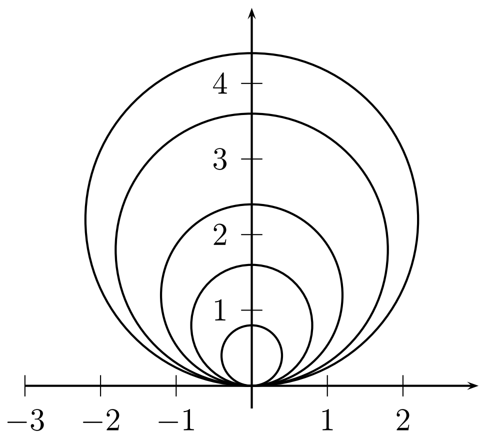
□

14.6 Ortogonální a izogonální trajektorie

Diferenciální rovnice dané soustavy čar

Při řešení diferenciálních rovnic 1. řádu dostáváme jako výsledek obecné řešení, což je vlastně jednoparametrická soustava čar (integrálních křivek) s parametrem C (viz 14.1). Ptáme se nyní naopak, jak k dané jednoparametrické soustavě čar nalézt diferenciální rovnici, pro niž je daná soustava čar soustavou grafů partikulárních řešení. Takovou diferenciální rovnici pak nazveme *diferenciální rovnice dané soustavy čar*. Začněme příkladem.

Úloha 14.6.1. *Najděte diferenciální rovnici soustavy kružnic, které se v počátku* O *pravoúhlé souřadnicové soustavy* Oty *dotýkají osy* t*.*



Obrázek 14.2: Jednoparametrická soustava kružnic se středem na ose y, dotýkajících se osy t v počátku.

Řešení. Každá kružnice, která se v bodě O dotýká osy t, má svůj střed na ose y, $S = [0, p]$, a její poloměr r je $r = |p|$, $p \neq 0$. Příslušná rovnice je

$$t^2 + (y - p)^2 = p^2,$$

neboli

$$t^2 + y^2 - 2py = 0.$$

Je-li $y(t)$ partikulárním řešením příslušné (hledané) diferenciální rovnice, pak předchozí rovnici kružnice vyhovuje identicky při určité hodnotě parametru p. Proto i derivace je splněna identicky. Derivujeme podle t:

$$2t + 2yy' - 2py' = 0$$

a vyloučíme z těchto dvou rovnic parametr p (například 1. rovnici násobíme y', druhou rovnici $-y$ a sečteme). Po úpravě máme

$$y' = \frac{2ty}{t^2 - y^2}$$

a to je hledaná diferenciální rovnice zadané soustavy kružnic. □

Stejně postupujeme i v jiných případech. Nechť je daná soustava čar vyjádřena implicitní rovnicí $F(t, y, p) = 0$, kde p je parametr. Pro různá p tak dostáváme různé čáry dané soustavy, tedy na dané čáře je p konstantní a $y = y(t)$. Derivace podle t tak dává

$$F'_t + F'_y y' = 0.$$

Současně však pro každou čáru soustavy platí $F(t, y, p) = 0$ a odsud plyne následující:

Postup pro určení diferenciální rovnice dané soustavy čar:

1. Implicitní rovnici $F(t, y, p) = 0$ dané soustavy čar derivujeme podle t s tím, že
$$y = y(t) : F'_t + F'_y y' = 0.$$

2. Z rovnic $F'_t + F'_y y' = 0$ a $F(t, y, p) = 0$ vyloučíme parametr p a dostaneme tak hledanou diferenciální rovnici (1. řádu).

Ortogonální trajektorie

Definice 14.6.2. Ortogonální trajektorie soustavy čar $F(t, y, p) = 0$ je křivka, která každou čáru dané soustavy protíná pod pravým úhlem.

Také ortogonální trajektorie vytvářejí (jednoparametrickou) soustavu čar.

Postup při určování ortogonálních trajektorií

1. Sestavíme diferenciální rovnici dané soustavy čar.

2. Vytvoříme diferenciální rovnici ortogonálních trajektorií.

3. Řešíme tuto diferenciální rovnici ortogonálních trajektorií.

ad 2: Je-li $y' = f(t, y)$ diferenciální rovnice dané soustavy čar, znamená $f(t, y)$ směrnici tečny k té křivce soustavy, která prochází bodem $[t, y]$. Ježto úhel dvou křivek je definován jako úhel jejich tečen v průsečíku a ježto směrnice k_1, k_2 dvou navzájem kolmých přímek jsou ve vztahu $k_1 = \frac{-1}{k_2}$, platí pro každou ortogonální trajektorii
$$y' = -\frac{1}{f(t, y)},$$
a právě toto je tedy diferenciální rovnice ortogonálních trajektorií.

Úloha 14.6.3. *Najděte ortogonální trajektorie soustavy kružnic, které se v počátku O pravoúhlé souřadnicové soustavy dotýkají osy t.*

Řešení. Nejprve určíme diferenciální rovnici dané soustavy čar; podle příkladu 14.6.1 je to
$$y' = \frac{2ty}{t^2 - y^2}.$$
Diferenciální rovnice ortogonálních trajektorií je tedy
$$y' = \frac{y^2 - t^2}{2ty}.$$

Řešíme-li tuto diferenciální rovnici, dostáváme (viz příklad 14.4.2) obecné řešení ve tvaru

$$(t-C)^2+y^2=C^2.$$

Tedy ortogonálními trajektoriemi k zadané soustavě kružnic je opět soustava kružnic a to takových, které se v počátku souřadnicové soustavy dotýkají osy y: střed mají v bodě $[C,0]$ a jejich poloměr je $|C|$, kde $C\neq 0$ je libovolná konstanta (hodnota parametru). □

Úloha 14.6.4. *Výsledek předchozího příkladu si graficky znázorněte.*

Izogonální trajektorie

Definice 14.6.5. Izogonální trajektorie soustavy čar $F(t,y,p)=0$ je křivka, která každou čáru dané soustavy protíná pod zadaným úhlem φ.

Je-li směrový úhel tečny v daném bodě křivky soustavy roven α, je směrový úhel tečny izogonální trajektorie v jejich průsečíku roven $\alpha+\varphi$ nebo $\alpha-\varphi$. K dané soustavě čar lze tedy uvažovat dva systémy izogonálních trajektorií.

Postup při určování izogonálních trajektorií

je stejný jako pro ortogonální trajektorie, liší se jen v provedení bodu 2. Diferenciální rovnice izogonálních trajektorií jsou tvaru

$$y'=\frac{f(t,y)\pm\operatorname{tg}\varphi}{\pm f(t,y)\operatorname{tg}\varphi}.$$

Ježto směrový úhel izogonálních trajektorií je $\beta=\alpha\pm\varphi$, je směrnice tečny (a tedy y') rovna $\operatorname{tg}\beta$ a výše uvedený vzorec plyne ze vzorce pro $\operatorname{tg}(\alpha\pm\varphi)$.

14.7 Užití diferenciálních rovnic

Ochlazování těles

Má-li nějaké těleso teplotu y, která je větší než teplota η jeho okolí, ochlazuje se, a to tím rychleji, čím je rozdíl $y-\eta$ těchto teplot větší. Podle fyzikálního významu derivace je rychlost ochlazování tělesa rovna $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, kde t je čas. Koeficient a (>0) úměrnosti závisí na materiálu tělesa a na prostředí. Předpokládáme-li, že ochlazováním tělesa se nezvyšuje teplota jeho okolí, dostáváme vztah

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-a(y-\eta),$$

kde znaménko „–“ na pravé straně je tu proto, že je $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} < 0$, neboť jde o ochlazování. Separací proměnných dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}y}{y-\eta} = -a\,\mathrm{d}t,$$

odkud, po integraci a úpravě máme obecné řešení

$$y = \eta + C\,\mathrm{e}^{-at},$$

kde pro $y > \eta$ je $C > 0$ libovolná konstanta. Partikulární řešení, které splňuje počáteční podmínku $y(t_0) = y_0$, je

$$y = \eta + (y_0 - \eta)\,\mathrm{e}^{-at}\,.$$

Lehce zjistíme, že stejný vztah platí i pro ohřev tělesa, tj. pro případ, že $y_0 < \eta$.

Zákon radioaktivní přeměny

Atomy radioaktivní látky se rozpadají tak, že rychlost rozpadu v okamžiku t je přímo úměrná počtu atomů $N(t)$ přítomných v okamžiku t. Počet atomů je přirozené číslo, tedy v realitě není funkce $N(t)$ spojitá. Ukazuje se však, že když považujeme funkci $N(t)$ za spojitou (dokonce diferencovatelnou) funkci, odpovídá model procesu realitě velmi přesně (pro velké N se $N(t)$ chová téměř jako spojitá funkce). Platí tedy

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N(t),$$

kde koeficient úměrnosti $\lambda > 0$ (přeměnová konstanta) je základním charakteristickým číslem pro každou radioaktivní látku. Znaménko „–“ opět souvisí s tím, že rychlost je záporná (atomů ubývá). Je-li počet atomů na počátku procesu (v čase 0) roven N_0, tj. za počáteční podmínky $N(0) = N_0$ dostáváme řešení *dané diferenciální rovnice radioaktivního rozpadu* ve tvaru

$$N\ \left(= N(t)\right)\ = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,.$$

Poločas rozpadu T, tj. dobu, v níž se původní množství atomů N_0 sníží na polovinu, dostaneme ze vztahu

$$N(T) = \frac{1}{2}N_0 = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda T},$$

tedy $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$, $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$, takže

$$N = N_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}\ln 2} \quad \left(= N_0 2^{-\frac{t}{T}}\right).$$

Množení organizmů

a) v neohraničeném živném prostředí

Jestliže kolonie organizmů (například kultura bakterií) žije v neohraničeném živném prostředí (za dostatku potravy i prostoru), pak se rozmnožuje rychlostí, která je v každém okamžiku t přímo úměrná počtu x těchto organizmů. To dává diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax(t),$$

kde koeficient $a > 0$ je závislý na druhu organizmů a prostředí, v němž žijí. Je-li na počátku v procesu x_0 organizmů, vede daná diferenciální rovnice k řešení

$$x = x(t) = x_0\,\mathrm{e}^{at}$$

(exponenciální růst, populační exploze).

b) s vnitřní konkurencí

V reálných přírodních podmínkách však probíhá konkurenční boj uvnitř populace pro nedostatek místa a potravy, rovněž při velké hustotě organizmů dochází ke snadnému přenosu infekcí, atd. Hledejme zákon vývoje počtu živých jedinců v kolonii za těchto podmínek.

Označme $x(t)$ rozsah populace v čase t. Za dobu Δt přibude Δx organizmů, přičemž je do Δx třeba započítat:

– skutečný přírůstek $k\cdot x\Delta t$ (je přímo úměrný počtu jedinců v daném časovém intervalu),

– úbytek $h(x, \Delta t)$ jako důsledek vnitřní konkurence.

Je tedy

$$\Delta x = kx\Delta t - h(x, \Delta t).$$

Ukazuje se, že konkurence roste úměrně k počtu vzájemných setkání jedinců kolonie. Počet setkání jedince s ostatními členy kolonie je úměrný počtu setkání x jedinců s ostatními $x - 1$ jedinci, tedy součinu $x(x - 1)$, a délce časového intervalu. Proto

$$h(x, \Delta t) = \lambda x(x - 1)\Delta t.$$

Odsud

$$\Delta x = kx\Delta t - \lambda x(x - 1)\Delta t = Kx\Delta t - \lambda x^2\Delta t,$$

takže

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = Kx - \lambda x^2.$$

Opět abstrahujeme od toho, že jde o celočíselné jevy, a přejdeme k limitě pro $\Delta t \to 0$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Kx - \lambda x^2,$$

a to je hledaný zákon vývoje počtu organizmů s vnitřní konkurencí (ve tvaru diferenciální rovnice).

Jde o zvláštní případ Bernoulliovy diferenciální rovnice, kterou lze řešit separací proměnných:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(K - \lambda x)} = \mathrm{d}t.$$

Zlomek na levé straně rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{1}{x(K - \lambda x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{K - \lambda x},$$

odkud $A = \dfrac{1}{K}$, $B = \dfrac{\lambda}{K}$. Po integraci máme

$$\frac{1}{K} \ln|x| + \frac{\lambda}{K}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \ln|K - \lambda x| = t + \ln C_1, \quad \text{tj.}$$

$$\ln \frac{x}{K - \lambda x} = Kt + \ln C_2,$$

a z toho

$$\frac{x}{K - \lambda x} = C\,\mathrm{e}^{Kt},$$

takže obecné řešení je

$$x = \frac{KC\,\mathrm{e}^{Kt}}{1 + \lambda C\,\mathrm{e}^{\lambda t}}.$$

Je-li v čase 0 v kolonii x_0 organizmů, je

$\dfrac{x_0}{K - \lambda x_0} = C$, odkud $\dfrac{1}{\lambda C} = \dfrac{K}{\lambda x_0} - 1.$

Označíme $\dfrac{K}{\lambda} = \mu$. V obecném řešení rozšíříme zlomek výrazem $\dfrac{x_0}{\lambda C}$ a dosadíme za $\dfrac{1}{\lambda C}$. Po úpravě dostáváme zákon vývoje počtu organizmů v kolonii ve tvaru

$$x = \frac{\mu x_0\,\mathrm{e}^{Kt}}{\mu - x_0 + x_0\,\mathrm{e}^{Kt}}.$$

Vidíme, že pro $t \to +\infty$ je $x \to \mu$ (nikoli $x \to +\infty$ jako u neohraničeného růstu). Grafem tohoto zákona je tzv. *logistická křivka*. Vidíme, že přímka $x = \mu$ je její asymptotou.

Populace organizmů s vnitřní konkurencí neroste tedy neohraničeně, ale nepřekročí určitou mez μ. Vyšetřováním průběhu funkce můžeme zjistit, že růst je nejprve progresivní (tj.graf je konvexní) — při malém počtu organizmů v kolonii ještě vnitřní konkurence nebrání rozvoji. Po dosažení inflexního bodu začne být růst degresivní (graf je konkávní), konkurence se uplatňuje stále silněji, rozvoj se zpomaluje, až prakticky ustane.

Tak se může matematický model vytvořený diferenciální rovnicí stát jedním z prostředků analýzy chování komunit organizmů.

— * —

Kapitola 15

Číselné řady

15.1 Základní pojmy

Definice 15.1.1. Symbol $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, kde $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$, se nazývá ***číselná řada***. Jiná označení: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum a_n$ (vynecháme-li podmínku pro n, uvažujeme členy od nejmenšího $n \in \mathbb{N}$, pro něž má výraz a_n smysl).

Číselnou řadu lze tak považovat za zobecnění součtu konečného počtu reálných čísel. Základními otázkami jsou: jak a kdy přiřadit řadě číslo, které by bylo vhodné nazvat součtem řady, a které z vlastností konečných součtů se přenášejí i na řady, jež lze pak považovat za součty nekonečné.

Definice 15.1.2.

- Číslo a_n se nazývá *n-tý člen řady*;
- číslo $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ se nazývá *n-tý částečný součet*;
- posloupnost $\{s_n\}$ se nazývá *posloupnost částečných součtů*;
- řada $\sum a_n$ se nazývá *konvergentní*, právě když existuje vlastní limita
$$s = \lim_{n\to+\infty} s_n;$$
tato limita s se nazývá *součet řady* $\sum a_n$ a píšeme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = s$;
- řada $\sum a_n$ se nazývá *divergentní*, právě když neexistuje vlastní $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$, tj. když tato limita je nevlastní (pak ji též nazýváme součet řady) nebo neexistuje (pak řada nemá součet);
- řada $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$ a též její součet r_n (pokud existuje) se nazývá *zbytek řady* $\sum a_n$ (po n-tém členu).

Zřejmě pro konvergentní řadu je $s = s_n + r_n$, tedy $r_n \to 0$.

U každé řady vyvstávají dva problémy: zda řada konverguje, a když konverguje, tak stanovit její součet. V některých případech lze k odpovědi na oba problémy využít definice konvergence a součtu řady.

Úloha 15.1.3. *Stanovte součet řady* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Řešení. Rozkladem na parciální zlomky dostaneme pro n-tý člen:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1+n-n}{n(n+1)} = \frac{1+n}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}.$$

n-tý částečný součet se tedy dá vyjádřit:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

takže $s_n \to 1$, a tedy součet dané řady je $s = 1$. □

Geometrická řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1}$

Dalším příkladem řady, u níž lze snadno rozhodnout o konvergenci a určit její součet, je *geometrická řada*

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots .$$

Zopakujme si, že její n-tý částečný součet a zbytek po n-tém členu jsou: je:

$$s_n = a\frac{1-q^n}{1-q}, \quad r_n = \frac{aq^n}{1-q}.$$

Geometrická řada tedy

- pro $|q| < 1$ konverguje a její součet je $s = a\dfrac{1}{1-q}$;
- pro $q > 1$ diverguje, $s = +\infty \cdot \operatorname{sgn} a$;
- pro $q \le -1$ neexistuje $\lim s_n$, řada diverguje, součet neexistuje;
- pro $q = 1$ máme divergentní řadu $a + a + \cdots + a + \cdots = +\infty \cdot \operatorname{sgn} a$.

Základní harmonická řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

je další důležitý příklad číselné řady. Platí

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n},$$

přičemž

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \quad \text{atd.}$$

takže

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad s_4 > 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}, \quad s_8 > 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}, \quad \ldots \quad s_{2^n} > 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$$

Ježto vybraná posloupnost $\{s_{2^n}\}$ je divergentní (má limitu $+\infty$), je také posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ divergentní. Tedy:

Základní harmonická řada je divergentní, $s = +\infty$.

Tento fakt bychom sotva odhalili součtem několika prvních členů řady, neboť například:

$$s_{\text{tisíc}} = 7,48\ldots, \quad s_{\text{milion}} = 14,39\ldots.$$

Ukažme si ještě jeden instruktivní příklad, jak lze dokázat divergenci nějaké řady přímo využitím definice.

Úloha 15.1.4. *Dokažte divergenci řady* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Řešení.

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty,$$

tedy daná řada je divergentní. □

15.2 Některé vlastnosti číselných řad

Věta 15.2.1 (nutná podmínka konvergence). *Konverguje-li řada* $\sum a_n$, *pak* $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Tvrzení plyne ze vztahu $s_n = s_{n-1} + a_n$ a z toho, že $\lim s_n = \lim s_{n-1} = s$. □

Uvedená podmínka konvergence není postačující, neboť například základní harmonická řada tuto podmínku splňuje, i když je divergentní.

Některé formulace vlastností řad se zjednoduší, jestliže zavedeme *pojem chování řady.*

Definice 15.2.2. Říkáme, že dvě řady mají *stejné chování*, právě když jsou obě konvergentní, nebo obě mají nevlastní součet nebo obě nemají součet.

Věta 15.2.3 (o vynechání prvních k členů)**.** *Chování řady se nezmění, vynecháme-li jejích prvních k členů.*

Princip důkazu. V původní řadě je

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

v upravené řadě je částečný součet

$$\sigma_m = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+m}.$$

Pro $n > k$ položme $n = k + m$; pak $s_n = s_k + \sigma_m$, částečné součty s_n, σ_m se navzájem liší jen o konstantu s_k a odsud plyne tvrzení pro všechny tři druhy chování. □

Definice 15.2.4 (lineární operace)**.**

- Součtem řad $\sum a_n$, $\sum b_n$ nazýváme řadu $\sum(a_n + b_n)$,
- rozdílem řadu $\sum(a_n - b_n)$.
- Násobkem řady $\sum a_n$ číslem $c \in \mathbb{R}$ nazýváme řadu $\sum ca_n$.

Věta 15.2.5 (o lineárních operacích s řadami)**.** *Nechť $\sum a_n = s$, $\sum b_n = \sigma$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Pak platí*

$$\sum(a_n + b_n) = s + \sigma, \quad \sum ca_n = cs$$

ve všech případech, kdy má smysl pravá strana těchto rovností. Navíc pro $c = 0$ je vždy $\sum ca_n = 0$.

Důkaz. Plyne z věty o lineárních operacích s posloupnostmi, neboť $s = \lim s_n$, $\sigma = \lim \sigma_n$. □

Tato věta neplatí naopak: Z konvergence řady $\sum(a_n+b_n)$ neplyne konvergence řad $\sum a_n$, $\sum b_n$; uvažte příklad $\sum(1 - 1)$.

Věta 15.2.6 (asociativní zákon pro řady). *Nechť*

$$\sum a_n = s$$

a $\{k_n\}$ *je libovolná rostoucí posloupnost přirozených čísel.*
Je-li

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}, \\ c_2 &= a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}, \\ &\vdots \\ c_n &= a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \cdots + a_{k_n}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pak

$$\sum c_n = s.$$

Důkaz. Je-li $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$ a $\{\sigma_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum c_n$, pak $\sigma = s$, neboť $\{\sigma_n\}$ je posloupnost vybraná z posloupnosti $\{s_n\}$ a má proto tutéž limitu. □

Věta neplatí naopak: například konverguje-li řada skupin členů, nemusí být řada po odstranění závorek konvergentní; uvažte opět řadu $\sum(1-1)$.

15.3 Řady s nezápornými členy

Řady $\sum a_n$ s nezápornými členy, $a_n \geq 0$, mají některé význačné vlastnosti pokud jde o konvergenci a její zjišťování. Jsou založeny zejména na tom, že posloupnost $\{s_n\}$ jejich částečných součtů je neklesající, takže má vždy limitu. Tedy:

> Je-li posloupnost $\{s_n\}$ shora omezená, je řada $\sum a_n$ konvergentní, není-li $\{s_n\}$ shora omezená, má řada $\sum a_n$ součet $+\infty$.

V tomto paragrafu pojednáme zejména o kriteriích konvergence nebo divergence (každé kriterium vyjadřuje postačující podmínku a je přizpůsobeno pro praktické využití).

> Pro všechny řady v kapitole 15.3 nechť tedy platí $a_n \geq 0$ a pokud bude třeba, aby $a_n > 0$, budeme mluvit o kladných řadách.

První skupina tří kriterií je známa pod společným názvem *srovnávací kriteria.* Jejich společným znakem je to, že zkoumanou řadu určitým způsobem srovnáme s vhodnou známou řadou a na základě tohoto srovnání vyslovíme závěr o konvergenci nebo divergenci.

Věta 15.3.1 (1. srovnávací kriterium). *Mějme řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ a nechť pro skoro všechna n platí $a_n \leq b_n$. Pak*

- *z* konvergence *majorantní řady $\sum b_n$ plyne* konvergence *řady $\sum a_n$*
- *a z* divergence *minorantní řady $\sum a_n$ plyne* divergence *řady $\sum b_n$.*

Důkaz. Předpokládejme, že nerovnost $a_n \leq b_n$ platí již od $n = 1$ (jinak můžeme vynechat členy, kde tato nerovnost neplatí, aniž se změní chování řad). Pak pro částečné součty s_n, σ_n těchto řad platí táž nerovnost $s_n \leq \sigma_n$. Z konvergence $\sigma_n \to \sigma$ a z nerovnosti $\sigma_n \leq \sigma$ plyne $s_n \leq \sigma$, takže také $\{s_n\}$ je konvergentní. □

Úloha 15.3.2. *Rozhodněte o chování řady $\sum \mathrm{e}^{\frac{1}{n}-n}$.*

Řešení. Řada $\sum \mathrm{e}^{-n}$ je geometrická řada s kvocientem $q = \dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$ a je tedy konvergentní. Ježto $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} < 3$ pro všechna n, je $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}-n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \cdot \mathrm{e}^{-n} < 3 \cdot \mathrm{e}^{-n}$, což je člen konvergentní geometrické řady. Proto také daná řada je konvergentní. □

Věta 15.3.3 (2. srovnávací kriterium). *Mějme dvě kladné řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ a nechť existuje*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = K.$$

Pak pro $K \in (0, +\infty)$ mají obě řady stejné chování.

Princip důkazu. $\forall \varphi > 0$ platí pro skoro všechna n:

$$(0 <)K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon \Rightarrow (K - \varepsilon)b_n < a_n < (K + \varepsilon)b_n$$

a tvrzení plyne z 1. srovnávacího kriteria. □

Kriterium lze doplnit případem $K = 0$ (pak platí stejné tvrzení jako u 1. srovnávacího kriteria) a případem $K = +\infty$ (pak platí analogické tvrzení, ale se záměnou obou řad).

Úloha 15.3.4. *Rozhodněte o konvergenci řady $\sum \dfrac{1}{an + b}$, kde $a > 0$, $an+b > 0$.*

Řešení. Danou řadu srovnáme se základní harmonickou řadou. Ježto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{an+b}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{an + b} = \frac{1}{a} > 0,$$

mají obě řady stejné chování, tedy daná řada je divergentní. □

Věta 15.3.5 (3. srovnávací kriterium)**.** *Mějme kladné řady* $\sum a_n$*,* $\sum b_n$*. Nechť pro skoro všechna* n *platí*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Pak

- z konvergence *řady* $\sum b_n$ *plyne* konvergence *řady* $\sum a_n$
- *a* z divergence *řady* $\sum a_n$ *plyne* divergence *řady* $\sum b_n$*.*

Princip důkazu. Nechť uvedená nerovnost platí už od $n = 1$. Pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ uvažujme $n-1$ nerovností $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \leq \dfrac{b_{k+1}}{b_k}$. Jestliže je všechny mezi sebou vynásobíme (proveďte!), dostaneme po úpravě $a_n \leq \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$ a tvrzení věty plyne z 1. srovnávacího kriteria. □

Věta 15.3.6 (podílové, d'Alembertovo kriterium)**.** *Nechť* $\sum a_n$ *je kladná řada.*

1) Existuje-li číslo $q \in (0, 1)$ *tak, že pro skoro všechna* n *je* $(D_n =)\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$*, pak řada* $\sum a_n$ konverguje.

2) Jestliže pro skoro všechna n *je* $D_n \geq 1$*, pak řada* $\sum a_n$ diverguje.

Princip důkazu. 1. tvrzení dostaneme, když ve 3. srovnávacím kriteriu použijeme jako $\sum b_n$ konvergentní geometrickou řadu q^n.

Druhé tvrzení vlastně znamená, že řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence. □

Úloha 15.3.7. *Rozhodněte o konvergenci řady* $1 + \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3 \cdot 2}{5^2} + \dfrac{2^2}{5^2} + \dfrac{3 \cdot 2^2}{5^3} + \dfrac{2^3}{5^3} + \cdots$.

Řešení. Vidíme, že v řadě jsou členy dvou druhů:

$$a_{2k} = \frac{3 \cdot 2^{k-1}}{5^k}, \quad a_{2k-1} = \frac{2^{k-1}}{5^{k-1}}.$$

Musíme tedy vyšetřit dva podíly dvou po sobě jdoucích členů:

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{3 \cdot 2^{k-1}}{5^k} : \frac{2^{k-1}}{5^{k-1}} = \frac{3}{5}, \quad \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{2^k}{5^k} : \frac{3 \cdot 2^{k-1}}{5^k} = \frac{2}{3}.$$

V obou případech $D_n \leq \frac{2}{3} < 1$, takže řada konverguje. □

Toto kriterium se častěji používá ve své limitní podobě.

Věta 15.3.8 (limitní podílové kriterium)**.** *Nechť $\sum a_n$ je kladná řada a existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Pak

- *pro $A < 1$ daná řada* konverguje
- *a pro $A > 1$ řada* diverguje.

Princip důkazu. Nechť $A < 1$, $\varepsilon = \frac{1-A}{2}$. Pak pro skoro všechna n je $D_n < A + \varepsilon$, takže podle podílového kriteria řada konverguje.

Pro $A > 1$ dokážeme podobně divergenci volbou $\varepsilon = A - 1$. $\square$

Uvědomíme si, že pro $A = 1$ nedává toto kriterium odpověď.

Úloha 15.3.9. *Rozhodněte o konvergenci řady* $\sum \frac{n}{2^n}$.

Řešení. $D_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2} < 1$, řada tedy konverguje. $\square$

Věta 15.3.10 (odmocninové, Cauchyovo kriterium)**.** *Nechť $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy.*

1) Existuje-li číslo $q \in (0, 1)$ tak, že pro skoro všechna n je

$$(C_n =)\ \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

pak řada $\sum a_n$ konverguje.

2) Jestliže pro nekonečně mnoho n je $C_n \geq 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.

Důkaz. Z nerovnosti $C_n \leq q$ plyne $a_n \leq q^n$, takže konvergence plyne z 1. srovnávacího kriteria (majorantou je konvergentní geometrická řada).

Nerovnost $C_n \geq 1$ znamená, že $a_n \geq 1$, takže řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence. $\square$

Úloha 15.3.11. *Rozhodněte o konvergenci řady* $\frac{1}{5} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^4} + \cdots$.

Řešení. Vyzkoušíme podílové kriterium.

$$\text{Pro } n \text{ liché je} \quad D_n = \frac{1}{7^{n+1}} : \frac{1}{5^n} = \frac{1}{7}\left(\frac{5}{7}\right)^n < \frac{5}{7} < 1,$$

$$\text{ale pro } n \text{ sudé je} \quad D_n = \frac{1}{5^{n+1}} : \frac{1}{7^n} = \frac{1}{5}\left(\frac{7}{5}\right)^n \to +\infty.$$

Podílové kriterium tedy nedává odpověď, ani jeho limitní verze.

Použijeme odmocninové kriterium.

$$\text{Pro } n \text{ liché je} \quad C_n = \frac{1}{5},$$

$$\text{pro } n \text{ sudé je} \quad C_n = \frac{1}{7},$$

tedy $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $C_n \leq \frac{1}{5} < 1$ a řada konverguje. □

Jak naznačuje tento příklad, bylo by možno dokázat, že odmocninové kriterium je silnější než kriterium podílové.

Věta 15.3.12 (limitní odmocninové kriterium). *Nechť $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy a existuje* $\lim \sqrt[n]{a_n} = A$. *Pak pro $A < 1$ daná řada* konverguje *a pro $A > 1$ řada* diverguje.

Důkaz. Provádí se stejně jako u limitního podílového kriteria. □

Úloha 15.3.13. *Určete, zda řada $\frac{1}{(\ln n)^n}$ je konvergentní.*

Řešení. $C_n = \frac{1}{\ln n} \to 0 < 1$, tedy daná řada konverguje. □

Všimněme si, že na řadu z úlohy 15.3.11 nelze použít limitní odmocninové kriterium, neboť posloupnost $\{C_n\}$ nemá limitu. Každé kriterium je zpravidla vhodné pro určité typy řad, bez ohledu na jeho „sílu“. Takto budeme chápat i náš výběr kriterií. Existuje však celá posloupnost kriterií konvergence, v nichž každé další je „silnější“ než předchozí. Ovšem „silnější“ kriterium je zpravidla složitější na formulaci a používání. Jako ukázku uveďme ještě:

Věta 15.3.14 (Raabeovo kriterium). *Nechť $\sum a_n$ je kladná řada.*

1) Existuje-li číslo $r > 1$ tak, že pro skoro všechna n je

$$(R_n =)\ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r,$$

pak řada $\sum a_n$ konverguje.

2) Jestliže pro skoro všechna n je $R_n < 1$, pak řada diverguje.

I toto kriterium má svou limitní verzi (viz následující úlohu).

Úloha 15.3.15. *Rozhodněte o konvergenci řady* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$.

Řešení. (Definice dvojných faktoriálů: $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2$, $9!! = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$.)

Při použití Raabeova kriteria je vhodné stanovit (a upravit) nejprve D_n. Po zkrácení je tedy $D_n = \dfrac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \to 1$, takže podílové kriterium nedává odpověď. Ale

$$R_n = n\left(\frac{1}{D_n} - 1\right) = \cdots = \frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1} \to \frac{3}{2},$$

řada konverguje podle limitního Raabeova kriteria. □

Uvědomíme si, že podle žádného z uvedených kriterií nelze rozhodnout o divergenci základní harmonické řady. Tuto schopnost má však integrální kriterium.

Věta 15.3.16 (Integrální kriterium)**.** *Nechť členy řady $\sum a_n$ jsou hodnotami kladné nerostoucí funkce f, která je integrace schopná na každém intervalu $\langle 1, K\rangle$, $K \in \mathbb{R}$; tedy $a_n = f(n)$. Pak řada $\sum a_n$ a nevlastní integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ současně konvergují nebo divergují.*

Důkaz. plyne z porovnání $\displaystyle\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$ s vhodnými částečnými součty řady. □

Úloha 15.3.17. *Rozhodněte o konvergenci řad $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, kde $s \in \mathbb{R}$.*

Řešení.

- Řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ se nazývají *harmonické.*
- Pro $s \leq 0$ jsou zřejmě divergentní, protože nesplňují nutnou podmínku konvergence.

Nechť tedy dále $s > 0$.

- Pro $s = 1$ dostáváme *základní harmonickou řadu*, která je dle 15.1 divergentní.
- Je-li $s < 1$, je $n^s < n \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{n^s} > \dfrac{1}{n}$, takže dle 1. srovnávacího kriteria jsou harmonické řady pro $s < 1$ rovněž *divergentní.*

Pro další studium harmonických řad použijeme integrální kriterium:

- Funkce daná předpisem $f(x) = \frac{1}{x^s}$ je pro $s > 0$ nerostoucí a kladná, integrace schopná (protože je spojitá) na každém intervalu $\langle 1, K\rangle$, $K \in \mathbb{R}$ a $\forall n \in \mathbb{N}$ je $(a_n =)\frac{1}{n^s} = f(n)$.

- Pro $s \neq 1$ je nevlastní integrál

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \lim_{K \to +\infty} \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_{x=1}^{K} = \lim_{K \to +\infty} \left(\frac{K^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} \right).$$

- Vidíme, že pro $s < 1$ je $K^{1-s} \to +\infty$, nevlastní integrál a tedy i harmonické řady jsou divergentní.
- Pro $s > 1$ je $K^{1-s} \to 0$, nevlastní integrál a tedy i harmonické řady jsou konvergentní.
- Pro $s = 1$ je $I = \lim\limits_{K \to +\infty} \ln K = +\infty$, tedy základní harmonická řada je divergentní.

$\square$

Závěr: Harmonické řady jsou konvergentní pro $s > 1$ a divergentní pro $s < 1$.

15.4 Řady s libovolnými členy, absolutní konvergence

V číselné řadě $\sum a_n$ mohou být některé členy kladné a některé záporné (nulové nejsou zajímavé, protože pro zjišťování konvergence řady nebo součtu řady je lze vynechat). Je-li záporných členů jen konečný počet, zacházíme při zjišťování konvergence s řadou, jako by měla jen kladné členy (podle věty o vynechání prvních k členů). Jsou-li všechny členy řady záporné, lze konvergenci zjišťovat pro kladnou řadu $-\sum a_n$ a takto lze vyřídit i případ konečného počtu kladných členů. Proto zbývá jediný podstatný případ, tj. že řada $\sum a_n$ má nekonečně mnoho kladných členů a nekonečně mnoho členů záporných. Z praktických důvodů však nebudeme vylučovat ani existenci nulových členů, neboť důležité číselné řady vznikají často z funkčních (mocninných) řad po dosazení za nezávisle proměnnou a některé členy mohou být tedy nulové.

Proveďme nejprve několik induktivních úvah. Zaveďme označení

$$a^+ = \max\{a, 0\}, \quad a^- = \max\{-a, 0\}.$$

Pak zřejmě platí:

$$a = a^+ - a^-, \quad |a| = a^+ + a^-.$$

K řadě $\sum a_n$ tak lze vytvořit řady

$$\sum a_n^+, \quad \sum a_n^-, \quad \sum |a_n|;$$

všechno to jsou řady s nezápornými členy. Označme

$$s' = \sum a_n^+, \quad s'' = \sum a_n^-,$$

přičemž

$$0 < s', s'' \leq +\infty.$$

Z lineárních vlastností řad plyne:

Konvergují-li řady $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$, pak konvergují i řady $\sum a_n$, $\sum |a_n|$

a platí

$$\sum a_n = s' - s'', \quad \sum |a_n| = s' + s''.$$

První z těchto vztahů platí i ve všech dalších případech, kdy má smysl rozdíl $s' - s''$ (tj. mimo případu $\infty - \infty$), druhý platí vždy.

Víme, že lineární operace neplatí obráceně, tedy

z konvergence *suman* neplyne konvergence řad $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$.

Ovšem z konvergence $\sum |a_n|$ plyne, že částečné součty řady $\sum (a_n^+ + a_n^-)$ jsou omezené, takže jsou omezené i částečné součty obou řad $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$, obě tyto řady jsou tedy konvergentní a také řada $\sum a_n$ je konvergentní.

Tak jsme dostali:

Věta 15.4.1 (o konvergenci řady absolutních hodnot)**.**

1) Řady $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ konvergují, právě když konverguje řada $\sum |a_n|$.

2) Z konvergence řady $\sum |a_n|$ plyne konvergence řady $\sum a_n$.

Tato věta je základem pro definici významného pojmu *absolutní konvergence.*

Definice 15.4.2. Řada $\sum a_n$ se nazývá

- ***absolutně konvergentní***, právě když konverguje řada $\sum |a_n|$ a nazývá se
- ***neabsolutně konvergentní***, právě když je konvergentní a přitom řada $\sum |a_n|$ je divergentní.

Vyšetřování absolutní konvergence tedy znamená zabývat se řadou $\sum |a_n|$ s nezápornými členy, k čemuž lze použít kriteria konvergence uvedená v předchozích paragrafech. Zbývá tedy zejména případ neabsolutně konvergentních řad s libovolnými členy.

15.5 Alternující řady

Jde o důležitý a často se vyskytující zvláštní případ řad s libovolnými členy:

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^{n-1} c_n + \cdots ,$$

kde $\{c_n\}$ je posloupnost kladných čísel. Základní kriterium konvergence alternujících řad je překvapivě jednoduché.

Věta 15.5.1 (Leibnizovo kriterium konvergence)**.** *Nechť $\{c_n\}$ je monotónní nulová posloupnost kladných čísel. Pak řada $\sum (-1)^{n-1} c_n$ konverguje. Přitom pro zbytek r_n řady platí:*

$$c_{n+1} - c_{n+2} \le |r_n| < c_{n+1} \quad a \quad \operatorname{sgn} r_n = (-1)^n.$$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že posloupnost $\{s_{2k}\}$ sudých částečných součtů vybraná z posloupnosti $\{s_n\}$ částečných součtů je neklesající:

$$s_{2k+2} = s_{2k} + c_{2k+1} - c_{2k+2} > s_{2k}.$$

Dále vidíme, že posloupnost $\{s_{2k}\}$ je shora omezená:

$$s_{2k} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \cdots - (c_{2k-2} - c_{2k-1}) - c_{2k} < c_1.$$

Z toho plynou dva závěry:

1. $\exists s = \lim s_{2k}$,
2. $c_1 - c_2 < s < c_1$.

Dále ukážeme, že s je také limitou posloupnosti lichých částečných součtů:

$$s_{2k-1} = s_{2k} - c_{2k};$$

pravá strana konverguje k rozdílu $s - 0$, tedy k s, proto $s_{2k-1} \to s$, takže $s_n \to s$, tedy řada je konvergentní a má součet s.

Zbytek po n-tém členu je opět alternující řada; tvrzení o jejím součtu r_n plyne z výše uvedeného 2. závěru. □

Úloha 15.5.2. *Rozhodněte o konvergenci řady* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$.

Řešení. Daná řada je alternující a posloupnost $\{c_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ je monotónní nulová, takže podle Leibnizova kriteria je daná řada konvergentní. □

Alternující řada z příkladu 15.5.2 je příkladem neabsolutně konvergentní řady, neboť řada absolutních hodnot je divergentní základní harmonická řada.

Řadám, které splňují předpoklady Leibnizova kriteria, se též říká *řady leibnizovské*. Leibnizovské řady se často a s výhodou používají při numerických výpočtech (při přibližném výpočtu konstant, které jsou součtem číselné řady), neboť umožňují velmi jednoduchý odhad chyby metody.

15.6 Přerovnávání číselných řad

Sčítání konečného počtu čísel je asociativní a komutativní. Je tedy otázka, v jaké formě tyto dvě vlastnosti přecházejí nebo nepřecházejí na řady jakožto zobecněný součet. V článku 15.1 je ukázáno, že asociativnost se v jisté podobě zachovává: členy řady lze „závorkovat“, ale obecně v řadě nelze závorky odstraňovat.

Vyšetřování komutativnosti je složitější a snad i zajímavější. Samozřejmě, zaměníme-li pořadí třeba u prvních dvou členů řady (nebo u prvních n – například milionu – členů řady), nestane se nic, pokud jde o chování řady resp. o její součet, protože jde vlastně o uplatnění komutativnosti v konečném součtu s_n. Budeme se proto zajímat o případy, kdy „změna pořadí“ členů řady zasahuje nekonečně mnoho členů řady.

Definice 15.6.1. Říkáme, že řada $\sum b_n$ vznikla přerovnáním řady $\sum a_n$, právě když existuje bijekce $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že $\forall n \in \mathbb{N}$: $b_n = a_{\beta(n)}$.

Definice tedy říká, že n-tý člen přerovnané řady je $\beta(n)$-tým členem řady původní. Obráceně n-tý člen původní řady je $\beta'(n)$-tým členem v řadě přerovnané, kde β' je bijekce inverzní k β.

Například alternující řadu $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ lze přerovnat tak, že vezmeme střídavě vždy tři členy kladné a jeden záporný:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Zde

$$\beta(n) = \{(1,1), (2,3), (3,5), (4,2), (5,7), (6,9), \dots\}.$$

Věta 15.6.2 (o přerovnání řad s nezápornými členy)**.** *Nechť* $\sum a_n$ *je konvergentní řada s nezápornými členy.*

Potom každá řada, která vznikne přerovnáním řady $\sum a_n$*,*

- *je konvergentní a*
- *její součet je roven součtu řady původní.*

Důkaz.

- Pro řadu $\sum a_n$ je n-tý částečný součet $s_n \to s$.
- Označme $\sum b_n$ řadu, která vznikne přerovnáním řady $\sum a_n$, a σ_n její n-tý částečný součet;
- zřejmě $\{s_n\}$, $\{\sigma_n\}$ jsou neklesající posloupnosti.
- Uvažujme σ_n a $m = \max\{\beta(1), \beta(2), \dots, \beta(n)\}$.
- Pak $\sigma_n \le s_m \le s$, takže řada $\sum b_n$ je konvergentní a má součet $\sigma \le s$.

- Přerovnáním se tedy součet řady nezvětší.
- Jestliže nyní řadu $\sum b_n$ přerovnáme zpět na $\sum a_n$, pak podle 1. části důkazu se součet opět nezvětší, takže $s \leq \sigma$.
- Proto $\sigma = s$, součet přerovnané řady je týž.

□

Věta 15.6.3 (o přerovnání absolutně konvergentních řad)**.** *Nechť* $\sum a_n$ *je absolutně konvergentní řada.*

Potom každá řada, která vznikne přerovnáním řady $\sum a_n$*,*

- *je konvergentní a*
- *její součet je roven součtu řady původní.*

Důkaz.
- Označme $\sum b_n$ řadu, která vznikne přerovnáním řady $\sum a_n$;
- pak $\sum |b_n|$ vznikne přerovnáním konvergentní řady $\sum |a_n|$, takže
- podle předchozí věty je $\sum |b_n|$ konvergentní,
- tedy $\sum b_n$ je absolutně konvergentní;
- její součet označme σ.
- Je-li $s = \sum a_n$, pak $s = s' - s''$, kde $s' = \sum a_n^+$ a $s'' = \sum a_n^-$ jsou součty řad s nezápornými členy.
- Podobně $\sigma = \sigma' - \sigma''$, kde $\sigma' = \sum b_n^+$, $\sigma'' = \sum b_n^-$.
- Přerovnání řady $\sum a_n$ na řadu $\sum b_n$ indukuje přerovnání řady $\sum a_n^+$ na řadu $\sum b_n^+$ a přerovnání řady $\sum a_n^-$ na řadu $\sum b_n^-$.
- Je tedy $\sigma' = s'$, $\sigma'' = s''$, takže $\sigma = s$.

□

Předchozí věta potvrzuje rozšíření platnosti komutativního zákona pro sčítání konečného počtu čísel na řady absolutně konvergentní. U řad neabsolutně konvergentních nastává nový jev. Nejprve však připomeňme, že u těchto řad je $s' = +\infty$ a též $s'' = +\infty$ i když i zde je $a_n \to 0$.

Věta 15.6.4 (Riemannova — o přerovnávání řad neabsolutně konvergentních)**.** *Je-li řada* $\sum a_n$ *neabsolutně konvergentní, pak pro každé* $B \in \mathbb{R}^*$ *lze řadu přerovnat tak, že přerovnaná řada* $\sum b_n$ *má součet* B*.*

Důkaz. Z řady $\sum a_n$ vytvoříme dvě řady: $\sum p_n$ a $\sum q_n$ a to tak, že

– do 1. řady dáme bez změny pořadí všechna nezáporná a_n a

– do druhé řady dáme absolutní hodnoty záporných členů a_n.

Jde vlastně o řady $\sum a_n^+$ a $\sum a_n^-$ po vynechání nadbytečných nulových členů.

Pak každý člen řady $\sum a_n$ padne právě do jedné z řad $\sum p_n$ a $\sum q_n$ v původním uspořádání.

Z neabsolutní konvergence $\sum a_n$ máme

$$\sum p_n = +\infty \quad \text{a} \quad \sum q_n = +\infty.$$

Dále se důkaz vede konstruktivně, tedy k libovolně zadanému B zkonstruujeme přerovnání tak, že součet přerovnané řady bude B.

a) Nechť B je reálné číslo (například kladné).

(1) Nejprve vezmeme právě tolik kladných členů, aby

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{r_1} > B \quad (\text{tj. bez } p_{r_1} \text{ je součet } \leq B).$$

To lze vzhledem k tomu, že $\sum p_n = +\infty$.

(2) Dále vezmeme právě tolik záporných členů, aby

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{r_1} - (q_1 + \cdots + q_{s_1}) \leq B \quad (\text{tj. bez } q_{s_1} \text{ je součet } > B).$$

To lze vzhledem k tomu, že $\sum q_n = +\infty$.

(3) Pak vezmeme právě tolik kladných členů, aby pro částečný součet platilo

$$\sigma_{r_2+s_1} > B, \quad \text{atd.}$$

Vidíme, že takto se „čerpají“ jak kladné členy, tak záporné, takže každý člen a_n původní řady se dostane do přerovnané řady $\sum b_n$. Ježto $a_n \to 0$, je $p_n \to 0$ i $q_n \to 0$, tedy $b_n \to 0$. Z uvedené konstrukce přerovnání plyne

$$|\sigma_n - B| \leq |b_n| \to 0, \quad \text{tedy} \quad \sigma_n \to B.$$

b) Nechť $B = +\infty$. Předchozí konstrukci nelze přímo použít, protože nelze vzít tolik kladných členů, aby částečný součet byl větší než $+\infty$. A je třeba též zajistit „čerpání“ záporných členů. Postupujeme tedy takto:

Nejprve vezmeme právě tolik kladných členů, aby

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{r_1} > 1,$$

pak jeden záporný, pak tolik kladných členů, aby částečný součet $\sigma_{r_2+1} > 2$, pak opět jeden záporný, atd.

Ježto $q_n \to 0$, lze již jednoduchou úvahou (proveďte ji!) dospět k závěru, že $\sigma_n \to +\infty$.

$\square$

Z důkazu Riemannovy věty plyne, že i z některých divergentních řad lze přerovnáním vytvořit řady (neabsolutně) konvergentní s libovolně předem zadaným součtem. Jde o řady, které splňují nutnou podmínku konvergence a kde $s' = +\infty$ a $s'' = +\infty$.

Úloha 15.6.5. *Přerovnejte neabsolutně konvergentní řadu $\sum a_n$ tak, aby přerovnaná řada neměla žádný součet, ani nevlastní.*

15.7 Mocninné řady

Geometrická řada

$$a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n + \cdots$$

je příkladem mocninné řady. Tato řada je konvergentní pro všechna $x \in (-1, 1)$; toto je tzv. *obor konvergence* geometrické řady.

Definice 15.7.1. Nechť $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ je číselná posloupnost. Pak řada

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \Big(\text{stručně } \sum a_n x^n\Big)$$

se nazývá ***mocninná řada***.

Věta 15.7.2 (o konvergenci mocninných řad). *Jestliže mocninná řada $\sum a_n x^n$ konverguje pro $x = x_1 (\neq 0)$, pak konverguje absolutně pro všechna x z intervalu $(-|x_1|, |x_1|)$. Jestliže mocninná řada $\sum a_n x^n$ diverguje pro $x = x_2$, pak diverguje pro všechna x vně intervalu $\langle -|x_2|, |x_2| \rangle$.*

Důkaz. Z konvergence řady $\sum a_n x_1^n$ plyne, že $|a_n x^n| \to 0$, tedy $\exists M$ tak, že $\forall n$ je $|a_n x_1^n| \leq M$. Pak pro $|x| < |x_1|$ platí

$$|a_n x^n| = \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_1} \right|^n .$$

První tvrzení plyne z 1. srovnávacího kriteria, neboť na pravé straně je člen konvergentní geometrické posloupnosti. Druhé tvrzení plyne z nepřímého důkazu užitím tvrzení prvního. $\square$

Pro každou mocninnou řadu tak nastává jedna z možností:

- konverguje jen v bodě 0,
- konverguje pro všechna x,

- existuje pro ni číslo R zvané *poloměr konvergence* tak, že uvnitř intervalu $(-R, R)$ řada konverguje (absolutně) a vně intervalu $\langle -R, R\rangle$ řada diverguje.

(V předchozích dvou případech klademe $R = 0$, resp. $R = +\infty$.)

Obor konvergence pak dostaneme tak, že k intervalu $(-R, R)$ přidáme ty krajní body intervalu konvergence, v nichž řada konverguje. Tato konvergence může být i neabsolutní.

Úloha 15.7.3. *Stanovte obor konvergence řady* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n2^n}$.

Řešení. Vyšetříme absolutní konvergenci užitím Cauchyova limitního kritéria:

$$C_n = \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n2^n}} = \frac{|x|}{2\sqrt[n]{n}} \to \frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow R = 2.$$

Ještě vyšetříme krajní body intervalu konvergence, tj. body 2 a -2. Dosadíme-li do členů řady $x = 2$, dostaneme po zkrácení základní harmonickou řadu, která je divergentní. Dosadíme-li $x = -2$, dostaneme alternující neabsolutně konvergující řadu (neboť řadou absolutních hodnot je základní harmonická řada). Oborem konvergence je tedy interval $\langle -2, 2)$. □

15.8 Násobení řad

V odstavci 15.2 byly připomenuty lineární operace s řadami: sčítání řad a násobení řady reálným číslem. Viděli jsme, že vlastnosti konečných součtů se na řady přenášejí s jistými výhradami: například konvergentní řady lze sečíst a součet je opět konvergentní řada, ale konvergentní řadu ve tvaru součtu nelze obecně rozdělit na součet konvergentních řad.

Při násobení konečných součtů

$$a = (a_1 + \cdots + a_n), \quad b = (b_1 + \cdots + b_m)$$

násobíme každý člen jednoho součtu každým členem druhého součtu a při libovolném uspořádání takto vzniklých součinů $a_i b_j$ dostaneme vždy týž výsledek ab. Riemannova věta z 15.6 nás varuje, abychom neočekávali totéž pro libovolné konvergentní řady. V další části odstavce předpokládejme $n \in \mathbb{N}_0$, tedy $\sum a_n$ je symbol pro řadu

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots .$$

Uvažujeme-li analogii s konečnými součty, očekáváme, že výsledkem násobení dvou řad by měla být řada, v níž jsou všechny součiny, kde každý člen jedné řady násobíme každým členem druhé řady. Toto násobení lze zorganizovat pomocí „čtvercového schématu“ ($*$):

	a_0	a_1	a_2	a_3	$\cdots$
b_0	a_0b_0	a_1b_0	a_2b_0	a_3b_0	$\cdots$
b_1	a_0b_1	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1	$\cdots$
b_2	a_0b_2	a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2	$\cdots$
b_3	a_0b_3	a_1b_3	a_2b_3	a_3b_3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Nyní jde o to, jak všechny prvky tohoto schématu uspořádat. Nelze například „po řádcích“ nebo „po sloupcích“ (to bychom nepoužili všechny prvky), ale lze například „po diagonálách“:

$$a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_0b_2 + a_1b_1 + \cdots$$

Pro uspořádání prvků ze schématu však lze použít i pravidlo čtverců („rámování“), které dá řadu

$$a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0 + a_0b_2 + a_1b_2 + \cdots$$

Věta 15.8.1 (Cauchyova o násobení řad)**.** *Jsou-li řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ absolutně konvergentní a mají součet a resp. b, pak řada vytvořená ze součinů dle schématu ($*$) vzatých v libovolném pořadí je také absolutně konvergentní a má součet ab.*

Důkaz. K řadě $\sum a_ib_j$ všech součinů ze schématu ($*$) uvažujme řadu absolutních hodnot: $\sum |a_ib_j|$ a její n-tý částečný součet σ_n. Označme $m = \max\{i_s, k_s\}$. Pak platí

$$\begin{aligned}\sigma_m &= |a_0b_0| + |a_0b_1| + \cdots + |a_mb_m|\\ &\leq (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m|) \cdot (|b_0| + |b_1| + \cdots + |b_m|)\\ &< a^*b^*,\end{aligned}$$

kde a^*, b^* jsou součty příslušných řad absolutních hodnot. Ježto posloupnost $\{\sigma_n\}$ je neklesající a shora omezená, existuje její vlastní limita, řada absolutních hodnot součinů je konvergentní, tedy řada součinů je absolutně konvergentní. Podle věty o přerovnání absolutně konvergentních řad nezávisí součet této řady na pořadí členů řady (na jejich uspořádání).

Nyní určíme součet této řady. K tomu lze zvolit libovolné uspořádání členů řady; výhodné se ukáže uspořádání „rámováním“, kde navíc sdružíme vždy všechny členy z téhož „rámu“:

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_2 + \cdots) + \cdots$$

Posloupnost $\{\bar{s}_p\}$ částečných součtů této řady je vybraná z posloupnosti $\{s_n\}$ částečných součtů řady původní. Označíme-li částečné součty řad $\sum a_n$, $\sum b_n$ jako s'_n, s''_n, pak zřejmě platí

$$\bar{s}_0 = s'_0 s''_0, \quad \bar{s}_1 = s'_1 s''_1, \quad \bar{s}_2 = s'_2 s''_2, \quad \ldots \quad \bar{s}_m = s'_m s''_m.$$

Ježto $s'_m \to a$, $s''_m \to b$, je $\bar{s}_m \to ab$, tedy $s = ab$. □

Definice 15.8.2. Mějme řady $\sum a_n$, $\sum b_n$. Pak řadu $\sum c_n$ nazýváme ***Cauchyův součin*** daných řad, právě když platí

$$c_0 = a_0 b_0,\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,\ c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0,\ \ldots\ c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0, \ldots$$

Vidíme, že sdružením vhodných členů při uspořádání „po diagonálách“ dostaneme Cauchyův součin nebo též, že posloupnost částečných součtů v Cauchyově součinu je vybraná z posloupnosti částečných součtů při uspořádání „po diagonálách“.

Pokud by nám stačilo tvrzení o Cauchyově součinu řad, mohli bychom oslabit předpoklady na řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ a to tak, že jedna je absolutně konvergentní, ale druhá (jen) konvergentní.

Úloha 15.8.3. *Najděte řadu se součtem* $\dfrac{3}{2 - x - x^2}$

a) užitím sčítání řad,

b) užitím násobení řad.

Řešení. Využijeme toho, že $\dfrac{1}{1-q}$ je pro $|q| < 1$ součet geometrické řady

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n.$$

ad a) Rozložíme na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2 - x - x^2} &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \\ &= -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n, \end{aligned}$$

kde

$$\Big(|q_1| = |x| < 1\Big) \ \wedge\ \Big(|q_2| = \left|\frac{x}{2}\right| < 1\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-1, 1).$$

ad b) Rozložíme na součin:

$$\frac{3}{2-x-x^2} = \frac{3}{2}\frac{1}{1-x}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{3}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n\right)$$

kde opět

$$\Big(|q_1| = |x| < 1\Big) \;\wedge\; \left(|q_2| = \left|\frac{x}{2}\right| < 1\right) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-1,1).$$

□

– ∗ –