

Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática
Instituto de Investigación Matemática



Revista Boliviana de Matemática

Número 4

Trabajos de Investigación del IIMAT

Carrera de Matemática

La Paz – Bolivia
2018–2020

©IIMAT 2018–2020: Instituto de Investigación Matemática UMSA
Publicaciones de Proyectos de Investigación del Instituto
Resolución HCC 96/2020
La Paz–Bolivia

Jefe Editor

Dr. Rimer Zurita O.
Universidad Mayor de San Andrés

Comité Editorial

Dr. Tovias Castro
Universidad del Atlántico, Colombia
Dr. Junior Soares
Universidade do Estado de Mato Grosso, MT–Brasil
Dr. Marco Calahorrano
Escuela Politécnica Nacional, Quito–Ecuador
Dra. Cecilia Orellana
Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, PA–Brasil
Dr. Julio Cesar Valencia
Universidad Católica San Pablo, Arequipa–Perú
Dr. Wolfgang Klieman
Iowa State University, IA–USA

Autoridades de Carrera de Matemática FCPN–UMSA

Lic. Oscar Bobarin Flores
Director a.i. de Carrera de Matemática
Dr. Porfirio Suñagua Salgado
Director del Instituto de Investigación Matemática

Presentación

La Carrera de Matemática de la Universidad Mayor de San Andrés realiza sus actividades de investigación e interacción social en el marco del Instituto de Investigación Matemática (IIMAT). Los docentes investigadores se agrupan en diferentes líneas de investigación en Matemática Teórica o Matemática Aplicada.

Los trabajos de la presente Revista, son resultados de los proyectos de investigación de carácter de divulgación de los docentes investigadores de la gestión académica 2018. Los artículos de la presente publicación corresponden a las líneas de Dinámicas de Control, Sistemas Dinámicos, Optimización Dinámica Aplicada, Combinatoria y Teoría de Grafos, Topología Diferencial, Álgebra Homológica y Optimización Matemática Lineal y No Lineal.

Dr. Porfirio Suñagua S.
Director Instituto de Investigación Matemática

Índice general

Presentación	I
I Artículos con Arbitraje	1
1. Gradientes Conjugados Precondicionado Porfirio Suñagua S.	2
2. Corchete de Lie y Algebras de Lie Efrain Cruz M.	8
II Contribuciones de Investigación	16
3. Dinámica estocástica de aplicaciones uniformemente expansoras Jimmy Santamaria T.	17
4. Condiciones de Existencia de Soluciones de una Inclusión Diferencial Willy Condory E.	22
5. Ecuaciones diferenciales parciales lineales aritméticas Ramiro Choque C.	27
6. Dimensiones en \mathbb{Z} Andrés Alberdi	33
7. Teorema de Ptolomeo Huber Lopez	47

Parte I

Artículos con Arbitraje



Método de Gradientes Conjugados Precondicionado[☆]

Porfirio Suñagua S.^{a,1,*}

^aUniversidad Mayor de San Andrés
 Instituto de Investigación Matemática
 Primer Piso del Edificio FCPN, Calle 27 Cota–Cota
 La Paz – Bolivia

Resumen

En este trabajo presentamos el algoritmo de gradientes conjugados precondicionado que mejora el clásico método de gradientes conjugados cuando la matriz de coeficientes del sistema lineal simétrico a resolver está mal condicionada. El método de gradientes conjugados se aplica al problemas de minimización de una función cuadrática donde la matriz del término cuadrático es definida positiva cuya condición optimal necesaria de primer orden resulta un sistema lineal. Este método funciona bien cuando la matriz de coeficientes del sistema lineal está bien condicionada.

Un precondicionador es una matriz no singular tal que pre y post multiplicando a la matriz dada podemos mejorar su número de condición, lo cual mejora la precisión y la convergencia de los métodos iterativos, especialmente cuando la dimensión del sistema lineal es grande.

Palabras clave: Gradientes Conjugados, Precondicionador, Métodos Iterativos

1. Introducción

En muchas aplicaciones de métodos matemáticos se requiere resolver un sistema lineal de la forma $Ax = b$, donde A es una matriz cuadrada $n \times n$, $x, b \in \mathbb{R}^n$. Cuando la dimensión n es grande, los métodos computacionales más utilizados son los métodos iterativos que a partir de alguna solución aproximada generan una secuencia de soluciones aproximadas que se espera que converja a la solución exacta. La convergencia, como la precisión dependen del número de condición de la matriz de coeficientes A .

Uno de los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales simétricos de rango completo es la factorización de Cholesky, una descripción de este método se encuentra en Wright [15, Cap. 11]. Pese a que la factorización de Cholesky es numéricamente estable, Higham [8], el error de acarreo por redondeo puede ser grande cuando la matriz es muy mal-condicionada.

Una forma de mejorar el número de condición de la matriz de coeficientes y resolver el sistemas lineal por métodos iterativos es

precondicionar la matriz de coeficientes. Ciertamente un precondicionador debe ser adecuado a las características de cada sistema. Para construir un precondicionador, se debe tomar en cuenta si la matriz es simétrica o no. El método de gradientes conjugados se aplica a los sistemas lineales simétricos y definidos positivos, de modo que en adelante daremos énfasis a precondicionadores para matrices simétricas.

Dada una matriz simétrica A y una matriz no singular C las ecuaciones lineales

$$Ax = b \quad \text{y} \quad (CAC^T)C^{-T}x = Cb,$$

son equivalentes en el sentido de que ambas tienen la misma solución. La matriz CAC^T también es simétrica y C se conoce como el precondicionador de A . Para que la nueva matriz de coeficientes CAC^T sea bien condicionada, sería bueno que ese producto esté “próximo” a la matriz identidad o tenga sus autovalores “próximos” a la unidad, así su *número de condición sería pequeño*. Esto permitirá resolver el sistema lineal con mejor estabilidad numérica.

Para aclarar las ideas, sobre todo del número de condición,

[☆] Artículo aceptado por el Comité Editorial. En contenido está orientado para desarrolladores de algoritmos iterativos computacionales

*✉ Av. Villazón 1995, PB Edificio Viejo, Carrera de Matemática

✉ psunagua@gmail.com (Porfirio Suñagua S.)

¹ Profesor del Área de Análisis y Optimización Matemática.

consideramos la siguiente matriz simétrica mal-condicionada

$$A = \begin{pmatrix} 10^{20} & 1 \\ 1 & 10^{-10} \end{pmatrix}.$$

los autovalores de ésta matriz son $\lambda_1 = 1,000000000 \times 10^{20}$ y $\lambda_2 = 9,999999999 \times 10^{-11}$. Por tanto, el número de condición es $\kappa(A) = \lambda_1/\lambda_2 = 1,0000000001 \times 10^{30}$.

Ahora como preconditionador, proponemos la siguiente matriz diagonal

$$C = \begin{pmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^5 \end{pmatrix}.$$

En efecto, pre y post multiplicando con ésta matriz, obtenemos

$$\begin{aligned} M = CAC^T &= \begin{pmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10^{20} & 1 \\ 1 & 10^{-10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Los autovalores de la nueva matriz son $\lambda_1 = 1,00001$ y $\lambda_2 = 9,999899 \times 10^{-1}$. Luego, el número de condición de la matriz preconditionada es $\kappa(M) = 1,000020000200002$. En las Figuras 1 y 2, se ilustran gráficamente estos hechos, por medio de curvas de nivel de las formas cuadráticas $\varphi(x) = x^T Ax$ y $\varphi(x) = x^T Mx$ asociadas respectivamente a las matrices A y M , donde $x \in \mathbb{R}^2$.

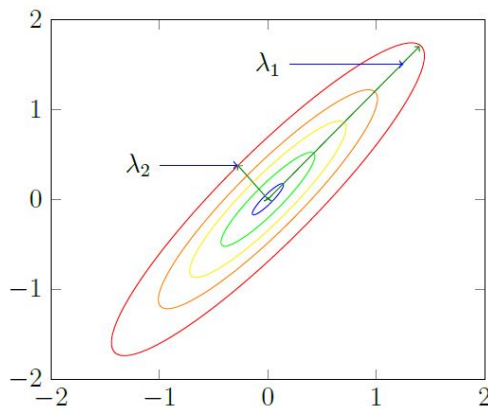


Figura 1. Matriz mal condicionada

Si A fuera definida positiva, teóricamente el mejor preconditionador sería la inversa de la factorización de Cholesky, o sea,

$$A = LL^T \wedge C = L^{-1} \Rightarrow M = CAC^T = L^{-1}LL^T L^{-T} = I.$$

Está claro que obtener el factor de Cholesky L es ya otro problema, entonces una aproximación de L podría ser aún un buen preconditionador. Una buena opción es usar la factorización incompleta de Cholesky. En algunas aplicaciones este preconditionador funciona bien, pero en los métodos de puntos interiores de Programación Lineal funciona bien solamente en las primeras iteraciones, Oliveira e Sorensen [12]. El sistema preconditionado

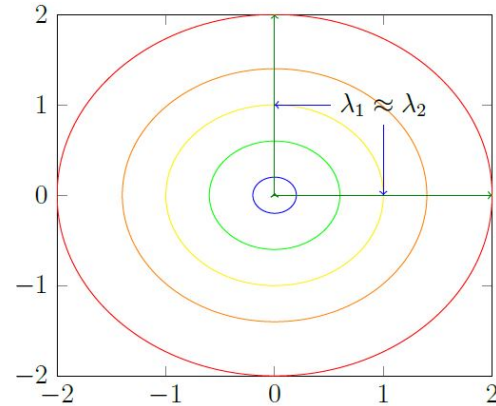


Figura 2. Matriz bien condicionada

tiene la forma $M\tilde{x} = \tilde{b}$, donde $\tilde{b} = Cb$, $x = C^T \tilde{x}$ y $M = CAC^T$. Normalmente, M no se calcula explícitamente, en métodos iterativos se aplica la multiplicación de matriz por un vector, o sea, $Mv = (CAC^T)v = C(A(C^T v))$.

Un buen preconditionador no debe ser muy caro de ser calculado computacionalmente, pero de alguna forma, debería obtener una matriz razonablemente bien condicionada, un equilibrio entre éstas dos propiedades determina un buen preconditionador. Una de las variantes de la factorización incompleta de Cholesky es la factorización controlada de Cholesky introducida por Campos y Rollet [3], y Kershaw [9], también obtiene buenos resultados para la mayoría de los problemas. Inicialmente éstas aproximaciones fueron desarrollados para resolver ecuaciones diferenciales por métodos numéricos donde funcionan mejor, pero hoy en día se aplican en las iteraciones de los métodos de puntos interiores de programación lineal.

En la implementación computacional de PCx (Predictor-Corrector de Mehrotra *et al* [5]) modificada por Oliveira e Sorensen [11], Bocanegra *et al* [1] e Velazco *et al* [14], fue incorporado el preconditionador obtenido desde la factorización controlada de Cholesky, el cual se utiliza con éxito en las primeras iteraciones del método de puntos interiores para resolver el sistema de ecuaciones normales por el método de gradientes conjugados.

Antes de abordar el método de gradientes conjugados, hacemos una breve descripción del método del gradiente que forma parte del grupo de métodos llamados *búsqueda lineal exacta*.

2. Método del gradiente o de máximo descenso

Dada una función real f diferenciable de varias variables, en la búsqueda lineal exacta (BLE), se minimiza $\phi(t) = f(\bar{x} + td)$ a partir del punto \bar{x} en la dirección del vector d de acuerdo al criterio de primer orden $\phi'(t) = 0$. En general, ésta ecuación es no lineal, por lo que podría ser necesario resolver la misma por métodos numéricos. Si fuera el caso, el proceso en cada iteración sería computacionalmente caro.

En el método del gradiente se toma $d = -\nabla f(\bar{x})$, luego $\nabla f(\bar{x})^T d = -\nabla f(\bar{x})^T \nabla f(\bar{x}) = -\|\nabla f(\bar{x})\|^2 < 0$, así d siempre será una dirección de descenso. Para encontrar el siguiente punto buscamos un \bar{t} tal que minimice globalmente $\phi(t) = f(\bar{x} + td)$, de este modo, éste método se conoce también como de *máximo descenso*. El algoritmo computacional se expresa en las siguientes líneas.

Dado $x^0, k = 0$.
Mientras $\nabla f(x^k) \neq 0$, haga

1. Calcule $d^k = -\nabla f(x^k)$
2. t_k minimizador global de $\min_{t>0} \phi(t) = f(x^k + td^k)$
3. $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$,
4. $k \leftarrow k + 1$.

2.1. Método del Gradiente: Caso cuadrático

Para A simétrica y definida positiva ($A > 0$) el minimizador global de la función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$, puede ser encontrado explícitamente resolviendo el sistema lineal $\nabla f(x) = Ax + b = 0$. Desde que $\nabla^2 f(x) = A > 0$, entonces la solución del sistema lineal es único y es el minimizador global estricto. En efecto, $\phi'(t) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x^k + td^k)^T d^k = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x^k)^T d^k + t(d^k)^T A d^k = 0$, así

$$t_k = -\frac{\nabla f(x^k)^T d^k}{(d^k)^T A d^k} = \frac{\nabla f(x^k)^T \nabla f(x^k)}{\nabla f(x^k)^T A \nabla f(x^k)}$$

Luego en el algoritmo de máximo descenso, el cálculo del tamaño de paso t_k queda explícitamente determinado. En la Figura 3 se ilustra el recorrido de los puntos estimados en cada iteración. En la figura tridimensional se puede observar que el punto estimado corresponde efectivamente al minimizador de $\phi(t)$, donde $\phi(t)$ puede ser visto como la intersección de $f(x)$ con el plano vertical formado por $x^k + td^k$.

Dado que A es una matriz simétrica sus autovalores son reales, luego considere $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ los autovalores de A , donde λ_1 y λ_n son el menor y el mayor autovalor de A respectivamente. El cociente $\frac{\lambda_n}{\lambda_1} = \kappa(A)$, donde $\kappa(A)$ es el número de condición de A respecto a la norma euclidiana, está fuertemente relacionado a la razón de convergencia del método de gradiente. En efecto, si $\{x^k\}$ es la sucesión generada por el método del gradiente, entonces $\|x^{k+1}\|_2 \leq \gamma \|x^k\|_2$, donde $\gamma = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}}$. Así, cuando la matriz es mal condicionada, el autovalor λ_n es grande, entonces el cociente λ_1/λ_n será pequeño, de modo que γ estará cerca de uno. Lo cual hace que la convergencia sea lenta.

Para problemas generales, según Luenberger [10], para $f \in C^2$, si \bar{x} es un minimizador local de f , $\nabla^2 f(\bar{x})$ es definida positiva y $\{x^k\}$ es la sucesión generada por el método de gradiente que converge a \bar{x} , entonces la sucesión $\{f(x^k)\}$ converge linealmente a $f(\bar{x})$ con tasa de convergencia no superior a $\left(\frac{\bar{\lambda}_n - \bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_n + \bar{\lambda}_1}\right)^2$, donde $\bar{\lambda}_1$

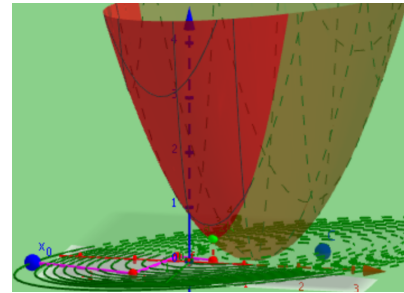
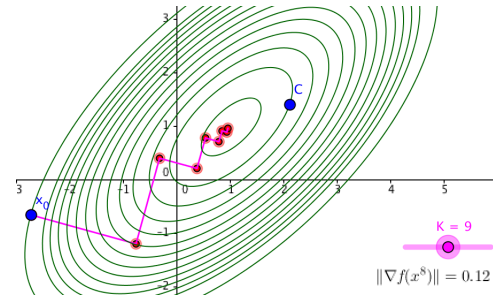


Figura 3. Método de Gradiente

y λ_n son el menor y el mayor autovalor de $\nabla^2 f(\bar{x})$ respectivamente.

3. Método de Gradientes Conjugados

Definición 3.1. Dada una matriz A simétrica y definida positiva, los vectores u y v son direcciones A -conjugadas si $u^T A v = 0$.

Para una función cuadrática convexa $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$, donde A es una matriz simétrica y definida positiva ($A = A^T > 0$), el método de gradientes conjugados, introducida por Hestenes y Stiefel [7], consiste en encontrar n direcciones conjugadas, basados en las gradientes de f , que conducen a encontrar el minimizador global de f . El tamaño de paso se encuentra con el mismo criterio de máximo descenso. Es decir, para $\phi(t) = f(x^k + td^k)$, entonces

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \nabla f(x^k + td^k)^T d^k = (A(x^k + td^k) + b)^T d^k \\ &= \nabla f(x^k)^T d^k + t(d^k)^T A d^k = 0 \end{aligned}$$

Así, la solución óptima para el tamaño del paso a partir del punto x^k resulta $t_k = -\frac{\nabla f(x^k)^T d^k}{(d^k)^T A d^k}$, luego $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$. Para encontrar la siguiente dirección conjugada se plantea $d^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta d^k$, donde β se calcula de manera que d^k y d^{k+1} sean A -conjugados. En efecto,

$$\begin{aligned} 0 &= (d^k)^T A d^k = -(d^k)^T A \nabla f(x^{k+1}) + \beta (d^k)^T A d^k \\ \beta_k &= \frac{(d^k)^T A \nabla f(x^{k+1})}{(d^k)^T A d^k} \end{aligned}$$

La primera dirección conjugada se elige simplemente como la dirección de máximo descenso, $d^0 = -\nabla f(x^0)$, luego el algoritmo de gradientes conjugados se puede escribir como sigue

Dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $d^0 = -\nabla f(x^0)$, $k = 0$

Mientras $\nabla f(x^k) \neq 0$, haga

1. $t_k = -\frac{(d^k)^T \nabla f(x^k)}{(d^k)^T A d^k}$, $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$
 2. $\beta_k = \frac{\nabla f(x^{k+1})^T A d^k}{(d^k)^T A d^k}$, $d^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k d^k$
- $k \leftarrow k + 1$.

En la Figura 4 se tiene las dos iteraciones del método de gradientes conjugados, pues en general, este método converge exactamente en n iteraciones, aunque en la práctica, dependiendo de la condición de la matriz, el método puede converger en menor número de iteraciones. En la figura tridimensional también se observa que el método minimiza f en la dirección d^k a partir del punto x^k .

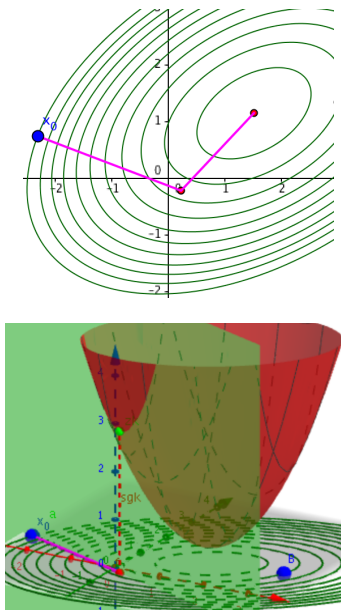


Figura 4. Método de gradientes conjugados

Un algoritmo de gradientes conjugados, conocido como la versión de Hestenes-Stiefel, basado en Golub y Van Loan [6], implementable en cualquier lenguaje de programación se muestra en el Algoritmo 1.

Este algoritmo converge a lo sumo en n iteraciones si no hubiera errores de redondeo, porque las direcciones conjugadas forman una base para \mathbb{R}^n . En Golub y Van Loan [6], se establece que las iteraciones $\{x_k\}$ generadas por el algoritmo satisfacen:

$$\|x - x_k\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^k \|x - x_0\|_A, \quad (1)$$

Algoritmo 1 Gradientes conjugados

Datos: x^0 , tal que $Ax_0 \approx b$

$k = 0$

Calcule el residuo inicial $r_0 = b - Ax_0$

mientras $r_k \neq 0$ **haga**

$k = k + 1$

si $k=1$ **entonces**

Inicialice $p_1 = r_0$

sino

Calcule $\beta_k = r_{k-1}^T r_{k-1} / r_{k-2}^T r_{k-2}$

Actualice $p_k = r_{k-1} + \beta_k p_{k-1}$

fin si

Calcule $\alpha_k = r_{k-1}^T r_{k-1} / p_k^T A p_k$

Actualice $x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k$

Actualice $r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_k$

fin mientras

retorne $x = x_k$

donde, x es la solución exacta que satisface $Ax = b$, $\kappa = \text{cond}_2(A)$ e $\|w\|_A = \sqrt{w^T M w}$. Entonces, podemos verificar también que en norma-2

$$\|x_k - A^{-1}b\|_2 \leq 2 \sqrt{\kappa} \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^k \|x_0 - A^{-1}b\|_2. \quad (2)$$

Por tanto, la tasa de convergencia, depende, principalmente del número de condición κ de la matriz A .

4. Método de Gradientes Conjugados Precondicionado

Cuando la matriz A es mal condicionada, precondicionamos el sistema $Ax = b$ con una matriz C no singular, para obtener, $M\tilde{x} = \tilde{b}$, donde $\tilde{x} = C^T x$, $M = C^{-1} A C^{-T}$ y $\tilde{b} = C^{-1} b$. Se espera que la nueva M sea bien condicionada, o bien, que M sea una matriz con autovalores concentrados, de manera que el menor y el mayor autovalores no estén muy separados. Para implementar el método podríamos aplicar el Algoritmo 1 y resolver para \tilde{x} , luego al final resolver el sistema adicional $C^T x = \tilde{x}$. Sin embargo, definiendo $p_k \leftarrow C^T p_k$ en el algoritmo anterior y haciendo $M = C C^T$, basado en Golub y Van Loan [6] y en Oliveira y Sorensen [12], el método de gradientes conjugados precondicionado, presentado en el Algoritmo 2, llamado también como el algoritmo Mz , obtiene directamente la solución para x .

Una aplicación de este método, para resolver problemas de programación lineal de dimensión grande, se encuentra dentro la aplicación computacional PCx que fue utilizado por Suñagua y Oliveira [13] y otros autores que aplican este algoritmo en el método de puntos interiores, donde el preconditionador se obtiene usando la factorización controlada de Cholesky.

Dada una matriz A simétrica y definida positiva, un preconditionador trivial que puede ser útil es $C = \text{diag}(A)^{-1}$, o bien,

Algoritmo 2 Gradientes conjugados preconditionado

Datos: x^0 , tal que $Ax_0 \approx b$
 $k = 0$
 Calcule el residuo inicial $r_0 = b - Ax_0$
mientras $r_k \neq 0$ **haga**
 Resuelva $Mz_k = r_k$
 $k = k + 1$
si $k=1$ **entonces**
 Inicialice $p_1 = z_0$
sino
 Calcule $\beta_k = r_{k-1}^T z_{k-1} / r_{k-2}^T z_{k-2}$
 Actualice $p_k = z_{k-1} + \beta_k p_{k-1}$
fin si
 Calcule $\alpha_k = r_{k-1}^T z_{k-1} / p_k^T A p_k$
 Actualice $x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k$
 Actualice $r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_k$
fin mientras
retorne $x = x_k$

$C = \text{diag}(A)^{-1/2}$, donde $\text{diag}(A)$ es la matriz diagonal cuya diagonal principal es el vector diagonal de A , $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Como se ha considerado en las secciones precedentes, el método de gradientes conjugados, preconditionado o no, resuelve sistemas lineales simétricos de rango completo donde la matriz de coeficientes tenga su número de condición razonablemente bueno.

En métodos de puntos interiores de programación lineal, el método de gradientes conjugados se aplica en cada iteración del método de puntos interiores para determinar la dirección de búsqueda. La mayoría de los problemas de programación lineal, como de NETLIB (www.netlib.org) se resuelve aproximadamente entre 10 y 100 iteraciones. Aunque el método termina en un número finito de iteraciones, para problemas con dimensiones grandes, el método converge en número menor de iteraciones que la dimensión de la matriz del sistema lineal que está dado por el número de restricciones. Mas detalles, se puede encontrar en Bocanegra *et al* [1], Velazco *et al* [14] y Suñagua y Oliveira [13].

Otra aplicación importante, descrita en Burden y Faires [2], está en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales mediante la aplicación de métodos de elementos finitos, donde afortunadamente las matrices involucradas no son tan mal condicionadas como en el método de puntos interiores.

En química computacional, en la optimización de estructura molecular llamado también minimización geométrica se minimiza la energía potencial de la superficie. Una referencia para este tipo de aplicaciones está en Chatzieftheriou *et al* [4].

5. Implementaciones Computacionales

Muchos métodos de optimización en alguna etapa de sus iteraciones utilizan el método de gradientes conjugados o gradientes conjugados preconditionados si la matriz involucrada queda

mal condicionada. Los programas computacionales que resuelven problemas reales con dimensiones grandes son muy complejos como para listar en cualquier publicación, pues ellos están implementados en lenguajes como C, C++, Fortran, etc. Quizá las implementaciones más didácticas están escritas en MATLAB y Python. Algunos enlaces de los métodos de optimización o de implementaciones públicas son

- Implementaciones de gradientes conjugados para diferentes lenguajes de alto y bajo nivel.
- Rutina de gradientes conjugados implementada en la librería de Álgebra Lineal de Python
- Implementación conceptual en Python para problemas pequeños
- Lista de algunos programas computacionales de PL libres y pagos
- CUTER: Problemas de optimización para pruebas de algoritmos en formato SIF
- Problemas de Programación Lineal para pruebas en formato MPS

6. Conclusiones

Como se ha mostrado en el desarrollo de las secciones, el método de gradientes conjugados es uno de los métodos iterativos eficientes para minimizar funciones cuadráticas cuya matriz principal es simétrica y definida positiva. Este método no funciona bien si la matriz de la forma cuadrática está mal condicionada. Una forma de mejorar tal número de condición es aplicar un preconditionador y aplicar el método de gradientes conjugados preconditionado según el Algoritmo 2. Las heurísticas para encontrar el preconditionador sigue siendo un tema de investigación. Para matrices muy mal condicionadas, uno de los preconditionadores utilizados en la práctica se obtiene por la factorización controlada de Cholesky.

Referencias

- [1] S. Bocanegra, F. Campos, A. R. Oliveira, Using a hybrid preconditioner for solving large-scale linear systems arising from interior point methods, *Computational Optimization and Applications* 36 (2-3) (2007) 149–164.
- [2] R. L. Burden, J. D. Faires, *Numerical analysis*, Cengage Learning 9.
- [3] F. F. Campos, J. S. Rollet, *Controlled Cholesky factorization for preconditioning the conjugate gradient method*, Oxford University Computing Laboratory, Numerical Analysis Group, 1995.
- [4] S. Chatzieftheriou, M. R. Adendorff, N. D. Lagaros, Generalized Potential Energy Finite Elements for Modeling Molecular Nanostructures, *Journal of chemical information and modeling* 56 (10) (2016) 1963–1978.
- [5] J. Czyzyk, S. Mehrotra, M. Wagner, S. J. Wright, *PCx user guide (Version 1.1)*, Optimization Technology Center, Northwestern University .
- [6] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix computations*, JHU Press, 4th. edn., ISBN 978-1-4214-0794-4, 2013.

- [7] M. R. Hestenes, E. Stiefel, *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, vol. 49, NBS Washington, DC, 1952.
- [8] N. J. Higham, Analysis of the Cholesky decomposition of a semi-definite matrix, M. G. Cox and S. J. Hammarling, (eds). *Reliable Numerical Computation* (1990) 161–185.
- [9] D. S. Kershaw, The incomplete Cholesky—conjugate gradient method for the iterative solution of systems of linear equations, *Journal of Computational Physics* 26 (1) (1978) 43–65.
- [10] D. G. Luenberger, *Linear and nonlinear programming*, Springer, 2003.
- [11] A. Oliveira, D. Sorensen, CRPC-TR97772 November 1997, Tech. Rep., 1997.
- [12] A. R. Oliveira, D. C. Sorensen, A new class of preconditioners for large-scale linear systems from interior point methods for linear programming, *Linear Algebra and its applications* 394 (2005) 1–24, England.
- [13] P. Suñagua, A. R. Oliveira, A new approach for finding a basis for the splitting preconditioner for linear systems from interior point methods, *Computational Optimization and Applications* 67 (1) (2017) 111–127.
- [14] M. Velazco, A. R. Oliveira, F. Campos, A note on hybrid preconditioners for large-scale normal equations arising from interior-point methods, *Optimization Methods & Software* 25 (2) (2010) 321–332.
- [15] S. J. Wright, *Primal-dual interior-point methods*, vol. 54, SIAM, 1997.



Corchete de Lie y Algebras de Lie^{☆,☆☆}

Efrain Cruz^{a,1,*}

^aCarrera de Matemática, Facultad Ciencias Puras y Naturales, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz-Bolivia.

Resumen

Este trabajo se encuentra en el contexto de divulgación de conceptos importantes de la Teoría de Control Geométrico, iniciaremos con la descripción del concepto de Corchete de Lie a través de la derivada de Lie definida en el espacio lineal de campos de vectores de una variedad diferenciable, sobre el espacio de derivaciones definidas del espacio de funciones escalares de la variedad sobre el cuerpo de los reales. Esta derivada de Lie es un isomorfismo que nos permite dotar al espacio lineal de campos de vectores de la estructura de álgebra el cual se conoce con el nombre de Algebra de Lie. La extensión de la Condición de Controlabilidad de Kalman a la estructura de variedad diferenciable será realizada con los Corchetes de Lie y la búsqueda del subespacio de Lie más pequeño generado por los campos vectoriales que rigen el Sistema de Control Lineal definido en una variedad diferenciable.

Palabras clave: Variedades diferenciables, campo de vectores, derivaciones, álgebras de Lie, sistema de control lineal

1. Introducción

Considerando una variedad diferenciable M de clase C^∞ de dimensión n que en lo que sigue simplemente será denominada como variedad y su espacio tangente TM que es una variedad y un espacio lineal de dimensión $2n$ en el sentido que es lineal en cada fibra, la variedad TM es la unión disjunta de espacios tangentes T_pM con $p \in M$. Se tiene que los espacios tangentes están relacionados a vectores velocidad de curvas. Dadas las variedades M y N de dimensiones m y n respectivamente, considerando una aplicación entre variedades $f : M \rightarrow N$ diferenciable de clase C^∞ induce una aplicación entre sus espacios tangentes escrita como $Tf : TM \rightarrow TN$ que es lineal en el sentido que es lineal en cada fibra, ver detalles en [1], pág. 51-73; [2], pág. 41-61 y [3], pág. 5-21.

La relación fundamental será explícita con el concepto de campos vectoriales que es una aplicación $X : M \rightarrow TM$ que a $p \in M$ le hace corresponder el vector tangente $X_p \in T_pM$, que serán descritas como entidades que relacionan los espacios tangentes con las variedades subyacentes, ver detalles en [1], pág. 106-121; [2], pág. 62-84 y [3], pág. 34-41.

El estudio de campos vectoriales de esta manera, es una opción moderna entre otras alternativas. En realidad tienen muchas conexiones con propiedades familiares. Una vez que se establece la definición y las propiedades fundamentales obtenidas directamente del concepto de campo vectorial, las propiedades procedentes con otras serán establecidas. Para obtener estas propiedades, se introduce la noción de 'derivación' (la operación de tomar derivadas), para otras presentaciones ver [1], pág. 176-185; [2], pág. 255-261 y [3], pág. 69-72.

Esta noción en principio es dada en forma abstracta, luego interpretada en términos del plano euclidiano. Algunas de sus propiedades serán obtenidas de manera explícita. Estas propiedades se relacionan con los de un campo vectorial, por considerar el conjunto de campos vectoriales sobre una variedad denotado por $\chi(M)$. Otra manera alternativa de estudiar las variedades es por considerar funciones diferenciables a valores reales $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y denotando al conjunto de todas estas funciones por $\mathfrak{F}(M)$ que con las operaciones de suma y multiplicación definidas de mane-

[☆] Artículo revisado por el Comité Editorial. El documento corresponde al Proyecto Dinámicas de Control 2017 - 2018.

^{☆☆} En el marco teórico de la Teoría de Control Geométrico, es necesario sentar las bases teóricas en las cuales se aplica el concepto de álgebras de Lie en la controlabilidad de sistemas de control.

*✉ ecruz3@umsa.bo

¹ Artículo revisado por el Comité Editorial. El contenido es de divulgación que da las bases de la aplicación de la geometría diferencial en el problema de controlabilidad de sistemas de control.

ra natural forma un anillo, y con la multiplicación por escalares reales es un espacio vectorial, además se obtiene que $\chi(M)$ es un espacio vectorial sobre $\mathfrak{F}(M)$, para detalles ver [1], pág. 151-153; [2], pág. 78.

Una derivación sobre la variedad M es dada por una función $\theta : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ que es lineal y satisface la regla de Leibniz, es decir, que la función se comporta como la deriva en el producto de funciones, denotemos por $\mathfrak{D}(M)$ al conjunto de derivaciones sobre M , el cual es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , entonces se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 1.1. *El espacio lineal de los campos vectoriales en M , $\chi(M)$ es isomorfo al espacio lineal de derivaciones en $\mathfrak{F}(M)$, $\mathfrak{D}(M)$.*

Para otra versión de este resultado ver [2], pág. 79. Finalmente, un hecho importante sobre los campos vectoriales es que no sólo forman un espacio lineal, sino también forman un álgebra. La última parte de este trabajo contiene una discusión de una regla de multiplicación (simbolizada por corchetes) denominado Corchete de Lie y algunas de sus propiedades que hacen de $\chi(M)$ un álgebra que procede del Corchete de Lie, denominada el álgebra de Lie, concluimos este trabajo como un ejemplo de álgebra de Lie que es usado en las ecuaciones lineales de estado en la Teoría de Control, sin embargo se debe destacar los Corchetes de Lie son la base de la Teoría de Control No Lineal que no es abordado en este escrito.

2. Campos Vectoriales

Sea M una variedad y $T(M)$ su espacio tangente. Un campo vectorial, \mathbf{X} , es una función entre variedades de M a TM tal que para cada $p \in M$, el campo vectorial en p es un elemento en el espacio tangente unido en p a la variedad M , la cual es denotada por $X(p) \in T_pM$.

Recordemos que cada punto t en la curva diferenciable $c(t)$ tiene un vector velocidad, la cual pertenece a una clase con vector tangente $c'(t)$ y que T_pM es el conjunto de clases de equivalencia de curvas a través del punto p en $t = 0$. Una buena elección de parametrización, es considerar a $c'(t)$ como el punto $\left(t, \frac{d}{dt}c(t)\right)$ o $(t, 1)$. Consideremos la curva c en M con dominio I como una función entre variedades; a saber, $c : I \rightarrow M$. Sea $c'(t)$ la curva en T_pM : $c'(0) \in [c]_p$, donde $[c]_p$ es la clase de equivalencia en p . Como se muestra en la Figura 1, también existe una función inducida T_c entre el espacio tangente a I , $I \times \mathbb{R}$ y TM , esto es, $T_c : I \times \mathbb{R} \rightarrow TM$.

Las propiedades de conmutatividad mostradas en la Figura 1, indican que $c'(t)$ es la imagen del punto $(t, 1)$:

$$c'(t) = T_c(t, 1). \tag{1}$$

La definición de campos vectoriales dice que $c'(t)$ es la imagen de $c(t) \in M$ por el campo vectorial \mathbf{X} , la cual se escribe como

$$c'(t) = \mathbf{X}(c(t)). \tag{2}$$

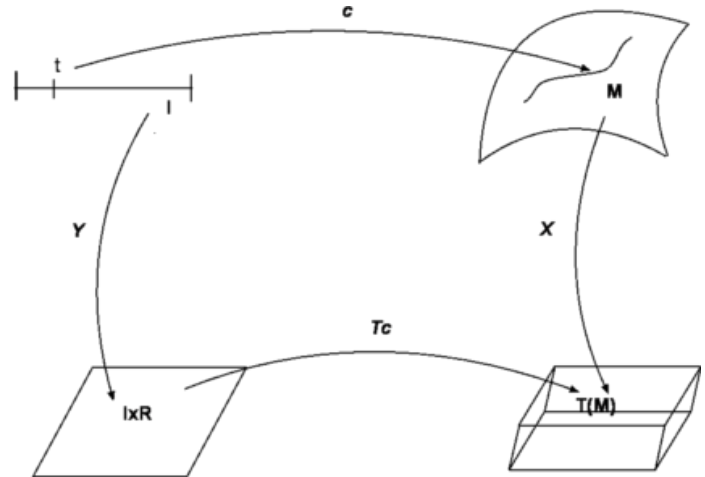


Figura 1. Aplicación tangente

Para establecer esta relación con más detalle, consideremos en coordenadas locales donde M puede tomarse como un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y su espacio tangente, $T(M)$, es un subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. La ecuación (1) da el vector tangente $c'(t)$ como:

$$\begin{aligned} c'(t) &= T_c(t, 1) \\ &= (c(t), Dc(t) \cdot 1) \\ &= \left(c(t), \frac{d}{dt}c(t)\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Por otra parte, podemos escribir $\mathbf{X}(c(t))$ de la forma:

$$\mathbf{X}(c(t)) = (c(t), \tilde{\mathbf{X}}(c(t))). \tag{4}$$

La comparación de las ecuaciones (2), (3) y (4) muestra que,

$$\frac{d}{dt}c(t) = \tilde{\mathbf{X}}(c(t)). \tag{5}$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales.

La ecuación (5) es importante. Proporciona una identificación conceptual de un punto móvil con una función de posición. De donde se deduce que lo importante de la definición de campos vectoriales radica en que la variedad es el lugar donde se localizan todas las condiciones iniciales de todas las curvas cuyos vectores tangentes están dados por la ecuación (5). Son las 'curvas integrales' de $\tilde{\mathbf{X}}$.

Toda la teoría local de las ecuaciones diferenciales ordinarias se aplica al sistema de ecuaciones en (5). Su estudio en términos de variedades da lugar a algunos resultados globales. Un ejemplo de un resultado global viene dado por el siguiente teorema que se utilizará en una sección posterior.

Teorema 2.1. *Sea M una variedad compacta, \mathbf{X} un campo vectorial sobre M y $c : I \rightarrow M$ una curva integral de \mathbf{X} . Entonces el dominio de c puede extenderse a \mathbb{R} .*

Para la demostración consultar [2], pág. 84-86 y [3], pág. 37.

Una interpretación de este teorema, por ejemplo, es que no existe tiempo de escape finito para soluciones de ecuaciones diferenciales sobre variedades compactas, lo que significa que las soluciones se comportan bien en cualquier intervalo de tiempo finito.

3. Derivaciones

Una vez definido los campos vectoriales y demostrado que determinan el lado derecho de las ecuaciones diferenciales ordinarias, nos referimos al concepto de derivaciones que luego se mostrará que es equivalente a la de un campo vectorial. El concepto es útil también porque generalmente es más fácil realizar las derivaciones que calcular el vector velocidad directamente.

Sean M una variedad y $\mathfrak{F}(M)$ el conjunto de todas las funciones a valores reales que lleva M en \mathbb{R} . Puesto que cuando cualquiera de ellas se evalúa en un punto dado ellos son sólo números reales, se pueden sumar y multiplicar cualquiera dos funciones $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ puntualmente de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (fg)(x) &= f(x)g(x).\end{aligned}$$

Puesto que los lados derechos son operaciones familiares sobre números reales, definen los símbolos de la izquierda. (Estas definiciones, junto con las definiciones sobre la multiplicación por constantes y propiedades asociativas, hacen que el conjunto de funciones reales $\mathfrak{F}(M)$ sea un 'álgebra'. Un enfoque alternativo a nuestro desarrollo de variedades utiliza anillos de funciones definidas en conjunto abierto en lugar de cartas porque conociendo $\mathfrak{F}(M)$ uno conoce M , para este concepto ver [1], pág. 178-182.)

Una derivación θ , en $\mathfrak{F}(M)$ se define como una función de $\mathfrak{F}(M)$ a $\mathfrak{F}(M)$, con las siguientes propiedades:

1. $\theta(cf) = c\theta(f)$, $c \in \mathbb{R}$.
2. $\theta(f + g) = \theta(f) + \theta(g)$.
3. $\theta(fg) = \theta(f)g + f\theta(g)$.

Las propiedades 1. y 2. dicen que θ es una función lineal en $\mathfrak{F}(M)$. La propiedad 3. muestra que la operación no es lineal cuando el coeficiente de una función no es una constante sino otra función. Parece sospechosamente como la derivada habitual del producto de los funciones. No debería sorprendernos, pues estas tres propiedades que definen la operación de derivación, θ , abstraen la idea habitual de una derivada.

Las derivadas son operaciones de diferenciación que necesitan tres objetos especificados antes de dar un valor, por ejemplo, un número real. Necesitan una función para trabajar, un lugar donde los resultados pueden ser evaluados, y un encabezamiento lejos del punto de evaluación. La afirmación $\theta f(x)$, o $\theta(f)(x)$, da un número real. La función f y el punto de evaluación x , son explícitos. Sin embargo implícito en θ , están las nociones de los límites de la diferenciación y de la dirección de la diferenciación.

Ejemplo 1. Sea M el plano euclidiano: $M = \mathbb{R}^2$. Entonces tomemos $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$ como el conjunto de todas las funciones de valor real con derivadas parciales continuas en todos los órdenes. Sea θ dada por:

$$\theta = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Entonces

$$\theta(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \quad (6)$$

y, por las reglas ordinarias del cálculo, se tiene

$$\theta(fg) = \theta(f)g + f\theta(g).$$

Ejemplo 2. Un resultado más general de una derivación para una función $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$ es

$$\alpha(f) = \alpha_1(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_2(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \quad (7)$$

donde α_1 y α_2 también pertenecen a $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$. La dirección de la diferenciación es (α_1, α_2) . De hecho, toda derivación de $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$ tiene la forma de la ecuación (7), como se ve a partir de lo que sigue.

Consideremos una función $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$. Entonces la ecuación

$$f(x, y) = f(a, b) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(a + t(x - a), b + t(y - b)) dt$$

es una identidad. Se puede escribir como:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(a, b) + \\ & (x - a) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(a + t(x - a), b + t(y - b)) dt \\ & + (y - b) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(a + t(x - a), b + t(y - b)) dt.\end{aligned}$$

Para a y b fijos, esta fórmula se cumple para todo x e y .

Siendo

$$g_1(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(a + t(x - a), b + t(y - b)) dt$$

y

$$g_2(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(a + t(x - a), b + t(y - b)) dt$$

podemos escribir

$$f(x, y) = f(a, b) + (x - a)g_1(x, y) + (y - b)g_2(x, y). \quad (8)$$

Definimos dos funciones proyección:

$$p_1(x, y) = x \quad y \quad p_2(x, y) = y. \quad (9)$$

Entonces la ecuación (8) puede escribirse en notación de función como

$$f = f(a, b) + (p_1 - a)g_1 + (p_2 - b)g_2.$$

Aplicando una derivación arbitraria θ a f tenemos:

$$\begin{aligned}\theta(f) &= \theta(p_1 g_1) - a\theta(g_1) + \theta(p_2 g_2) - b\theta(g_2) \\ &= \theta(p_1)g_1 + p_1\theta(g_1) - a\theta(g_1) + \theta(p_2)g_2 \\ &\quad + p_2\theta(g_2) - b\theta(g_2)\end{aligned}\quad (10)$$

puesto que las propiedades 1. y 3. ofrecen la condición sobre las derivadas que $\theta(a) = \theta(b) = 0$. Evaluando la expresión (10) en el punto (a, b) se tiene

$$\begin{aligned}\theta(f)(a, b) &= \theta(p_1)(a, b)g_1(a, b) + a\theta(g_1)(a, b) \\ &\quad - a\theta(g_1)(a, b) + \theta(p_2)(a, b)g_2(a, b) \\ &\quad + b\theta(g_2)(a, b) - b\theta(g_2)(a, b) \\ &= \theta(p_1)(a, b)g_1(a, b) + \theta(p_2)(a, b)g_2(a, b).\end{aligned}$$

De donde se obtiene que

$$g_1(a, b) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) dt = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \int_0^1 dt = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b),$$

similarmente

$$g_2(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Así, obtenemos

$$\theta = \theta(p_1) \frac{\partial}{\partial x} + \theta(p_2) \frac{\partial}{\partial y}$$

que tiene la forma de la ecuación (7).

3.1. Resultados a obtener y notaciones

Se ha considerado una derivación denotado por θ . Será relacionada con un campo vectorial denotado por \mathbf{X} , a través de la aplicación denotada por $L_{\mathbf{X}}$, la cual se denominará la Derivada de Lie. Todos los conceptos se refieren a símbolos utilizados para elementos del espacio tangente. Estos términos serán vistos como un gradiente o una derivada direccional cuando se aplique a funciones reales en el espacio euclidiano ordinario. Esta notación básicamente se utiliza para enfatizar diferentes aspectos del mismo conjunto de objetos, para detalles ver [1], pág. 154-156 y [3], pág. 69-70.

Las dificultades en la comprensión de la notación comienzan con las expresiones para los espacios tangentes. Un único espacio tangente $T_p M$, es un espacio vectorial lineal unido a un punto particular p de la variedad M . La cual esta dotada de la estructura de los espacios producto, esto es $M \times \mathbb{R}^n$ (en el sentido local, es decir, para un abierto U de M lo que identificamos es $U \times \mathbb{R}^n$); que tiene la siguiente descripción, un vector tangente puede ser escrito como el par (p, x) , con $p \in M$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Todas las operaciones vectoriales se realizan en la segunda componente, pero solo tienen sentido si se realizan en el mismo punto del espacio, es decir, $(p, x) + (p, y) = (p, x + y)$. Siempre que se discutan operaciones vectoriales de vectores tangentes, se supone que los objetos de

la operación residen en el mismo punto de la variedad, incluso este requisito no es invertido explícitamente. Lo que nos lleva a la conclusión de que no se definen de otra manera, ver [1], pág. 107; [2], pág. 68-74 y [3], pág. 12.

La expresión explícita para el término en \mathbb{R}^n se escribe como $c'(0)$, $(f \circ c(0))'$, $f'(0)c'(0)$ y así sucesivamente, dependiendo de las circunstancias de estudio. Estrictamente, estas expresiones se refieren a la velocidad de la curva en un punto de la variedad, que es equivalente a un vector tangente en el espacio tangente, una distinción no siempre considerada de manera clara.

Los aspectos de velocidad de estos términos, que se refiere a su generación en una curva sobre la variedad, no siempre pueden ser significativos; la tangente que se encuentra en \mathbb{R}^n lo es. En este caso se denota como Df cuando se quiere encontrar algo genérico, se puede considerar en la forma $df(m)(m, x)$ enviando un elemento (m, x) de un espacio tangente a otro; esta forma enfatiza los aspectos del operador lineal de $df(m)$. Si la variedad original es un espacio euclidiano, entonces $df(m)(m, x)$ se escribe explícitamente como $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(m), x_i\right)$ donde los paréntesis externos y la coma denotan un producto interno. Esto también puede parecer como $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(m), \alpha^i\right)$, donde su conexión con la forma general de $\theta f = \alpha^i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ es clara. Es también la forma general para una derivada direccional. La misma forma representa $\mathbf{X}(f)$ bajo estas condiciones. Es también la forma que toma una derivada de Lie cuando opera sobre una función escalar.

4. El isomorfismo

Con los comentarios anteriores intuitivamente se admite que los campos vectoriales y las derivaciones son sólo lados diferentes de la misma moneda. Su identificación entre sí es formalizada por un isomorfismo como espacios vectoriales o lineales. Se demostrará que cada campo vectorial de una variedad M da lugar a una única derivación de $\mathfrak{F}(M)$ (en adelante consideramos a $\mathfrak{F}(M)$ como el álgebra de funciones con derivadas de todos los ordenes a menos que se indique lo contrario) y con el resultado de que toda operación algebraica entre campos vectoriales corresponde el resultado de una operación algebraica entre las derivaciones correspondientes.

Recordemos que para $f \in \mathfrak{F}(M)$, el rango de la función inducida Tf es $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir

$$Tf : TM \rightarrow T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Restringiendo su dominio a la vecindad $T_p M$ de TM se tiene

$$T_p f = Tf|_{T_p M}.$$

Obtenemos la siguiente función lineal,

$$T_p f : T_p M \rightarrow \{f(p)\} \times \mathbb{R}.$$

Definimos $df(p)$ por:

$$df(p) = p_2 T_p f,$$

donde p_2 es la proyección sobre la segunda coordenada como se define en la ecuación (10), $p_2(a, b) = b$.

En general M no es un abierto en \mathbb{R}^n , para simplificar identificaciones locales; con el propósito de evitar complicaciones con estas identificaciones consideraremos que M es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n su espacio tangente TM es isomorfo a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, entonces f es una función de clase C^∞ a valores reales de n variables reales. La función inducida en el punto (p, x) del espacio tangente es dada por,

$$T_p f(p)(p, x) = (f(p), Df(p)x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

de lo cual el número $df(p)(p, x)$ puede ser identificado,

$$df(p)(p, x) = p_2 T_p f(p)(p, x) = Df(p)x.$$

Se puede ver a partir de estas expresiones que $df(p)$ resulta del operador lineal $Df(p)$ que actúa sobre x .

Puesto que $Df(m)$ es una función lineal de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, donde se tiene un funcional lineal, además es un elemento de un espacio dual a $T_m(M)$, y puede representarse como una fila de n elementos con respecto a la base dual de la base canónica del espacio tangente. Esta notación de fila es bastante compatible con la notación explícita de una derivada usualmente encontrada en textos de cálculo avanzado:

$$Df(m) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(m), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(m). \quad (11)$$

Si $x^i(x)$ denota la i -ésima función coordenada para la variedad euclidiana que es válida localmente, se tiene

$$df(m)(m, dx) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(m)dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(m)dx^n = Df(m)dx, \quad (12)$$

que es una formalización de la expresión usual en textos avanzados de cálculo:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n = \left(dx^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + dx^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) f.$$

Las expresiones en (11) y (12) merecen una segunda mirada a la idea del comentario de que $Df(m)$ es un elemento del espacio dual al espacio tangente $T_m(M)$. Sin embargo los términos en el lado derecho de (12) son números reales, sus factores vienen de (11) y una columna de dx^i . Si los dx^i se consideran vectores unitarios en el espacio dual, (12) es un elemento de ese espacio. Según el método habitual de evaluación de los coeficientes de un vector o de un vector dual (o co-vector), los coeficientes de (12) deben provenir de la acción de elementos unitarios en el espacio vectorial original a los cuales los dx^i son duales. No se rompe ninguna interpretación de la expresión diferencial usual para tomar estos vectores unitarios como $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

La descripción anterior deja a la expresión de la ecuación (12) en una nueva idea. Permite la introducción de otra notación, la derivada de Lie de una función real f , con respecto a un campo vectorial \mathbf{X} . Esta será escrita como:

$$L_{\mathbf{X}}(f)(m) = df(m)(\mathbf{X}(m)). \quad (13)$$

Con respecto a la derivada de Lie se mostrará que es una notación conveniente cuyo uso puede intercambiarse en forma de operador diferencial. Dado que las dos formas desplazan diferentes elementos dentro o fuera de paréntesis e intercambian el orden de la escritura de los factores, la elección de la forma utilizada será dada en gran medida por el deseo de reducir la notación, por lo cual los factores son relevantes en el momento.

La definición en (13) es puntual, que es válido en cada punto del espacio tangente y espacio dual o espacio cotangente asociados con el punto m . Puesto que $L_{\mathbf{X}}$ dará el isomorfismo entre los espacios lineal de campos vectoriales $\chi(M)$ y el espacio lineal de derivaciones de funciones en $\mathfrak{F}(M)$; $L_{\mathbf{X}}f$ debe ser un elemento de $\mathfrak{F}(M)$ y tendremos que extenderla desde la definición puntual en (13). Para mostrar que $L_{\mathbf{X}}f \in \mathfrak{F}(M)$, se demuestra que df es una función diferenciable. Esto sigue después de que se muestra que el espacio cotangente es una variedad. Los detalles son largos y técnicos. El lector interesado puede leer [?] para la construcción del espacio cotangente y para la prueba de que $L_{\mathbf{X}}f \in \mathfrak{F}(M)$. Esto establece entonces que $L_{\mathbf{X}}$ mapea de $\mathfrak{F}(M)$ a $\mathfrak{F}(M)$.

Para mostrar que $L_{\mathbf{X}}$ es lineal, recordemos las aplicaciones definidas en el espacio $T_m f$, en particular se tiene

$$T_m f : T_m(M) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

De la ecuación (13) se obtiene:

$$L_{\mathbf{X}}(f + g)(m) = d(f + g)(m)(\mathbf{X}(m)).$$

Considerando la expresión en la clase de equivalencia,

$$\begin{aligned} d(f + g)(m)[c]_m &= p_2 \cdot T_m(f + g)[c]_m \\ &= p_2((f + g)(m), D((f + g) \circ c)(0)) \\ &= D(f \circ c)(0) + D(g \circ c)(0) \\ &= p_2(f(m), D(f \circ c)(0)) \\ &\quad + p_2(g(m), D(g \circ c)(0)) \\ &= p_2 \cdot T_m f[c]_m + p_2 \cdot T_m g[c]_m \\ &= (p_2 \cdot T_m f + p_2 \cdot T_m g)[c]_m \\ &= (df(m) + dg(m))[c]_m. \end{aligned}$$

Así, se tiene que d es aditiva y el resto de la linealidad es análoga.

El mismo procedimiento que demostró que $L_{\mathbf{X}}$ es un operador lineal en $\mathfrak{F}(M)$ puede usarse para demostrar que es una deriva-

ción, es decir,

$$\begin{aligned} p_2 \cdot T_m f g [c]_m &= p_2(fg(m), D(fg \circ c)(0)) \\ &= D(fg \circ c)(0) \\ &= D((f \circ c)(g \circ c))(0) \\ &= f \circ c(0)D(g \circ c)(0) \\ &\quad + g \circ c(0)D(f \circ c)(0) \\ &= f(m)D(g \circ c)(0) + g(m)D(f \circ c)(0) \\ &= f(m)p_2 \cdot T_m g [c]_m + g(m)p_2 \cdot T_m f [c]_m. \end{aligned}$$

Luego, $L_X(fg) = fL_X(g) + gL_X(f)$, lo que muestra que cada campo vectorial \mathbf{X} , determina una derivación sobre $\mathfrak{F}(M)$.

Observemos también que, a partir de lo que se conoce de $T_m f$, se cumple lo siguiente

$$L_{X+fY}(g) = L_X(g) + fL_Y(g)$$

tal que cuando actúa sobre $\mathfrak{F}(M)$, L es una función lineal del conjunto de todos los campos vectoriales al espacio vectorial de derivaciones.

Una función lineal de un espacio vectorial a otro es un isomorfismo si es uno a uno y sobreyectiva. En el caso presente, es uno a uno si $L_X f = 0$ para todo f , significa que $\mathbf{X} = 0$. Para demostrar este hecho, se muestra que cada elemento en el espacio dual de $T_m(M)$ está representado por algún $df(m)$. La prueba de existencia es una construcción de 'particiones de la unidad' que se puede encontrar en [?]. Una vez que se conoce que el espacio dual está representado por algún $df(m)$, la prueba de que L es uno a uno es simple. Pues, consideremos $L_X = 0$. Entonces $L_X(f)(m) = 0$ para todo f en $\mathfrak{F}(M)$. Entonces

$$df(m)(\mathbf{X}(m)) = 0,$$

es válido y cada elemento α en el dual de $T_m(M)$ tiene la propiedad de que $\alpha(\mathbf{X}(m)) = 0$. Así, $\mathbf{X}(m) = 0$, y es cierto para cada m en M .

La función es sobreyectiva si cada derivación surge de la derivada de Lie de un campo vectorial. Recordemos que para \mathbb{R}^2 hemos demostrado que cada derivación θ tiene la forma

$$\theta(f)(m) = \alpha_1(m) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_m + \alpha_2(m) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_m.$$

Consideremos el campo vectorial $\mathbf{X}(m) = (m, \alpha_1(m), \alpha_2(m))$; entonces:

$$\begin{aligned} L_X(f)(m) &= df(m)(\mathbf{X}(m)) \\ &= \alpha_1(m) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_m + \alpha_2(m) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_m \end{aligned}$$

luego $L_X = 0$. En este caso, se tiene entonces que $M = \mathbb{R}^2$. Se ha demostrado el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *El espacio lineal de los campos vectoriales $\chi(M)$ es isomorfo al espacio lineal de derivaciones de $\mathfrak{F}(M)$.*

5. El álgebra de Lie

En los espacios vectoriales de los campos vectoriales y el espacio de las derivaciones incorporamos un producto para obtener la estructura de álgebra en ambos espacios. Obtenemos este producto de manera natural, consideremos la composición de dos derivaciones que en general no es una derivación.

Sean θ_1 y θ_2 dos derivaciones, entonces de la composición de ambas se tiene:

$$\begin{aligned} \theta_2 \theta_1 (fg) &= \theta_2 [f \theta_1 g + g \theta_1 f] \\ &= \theta_2 f \theta_1 g + \theta_2 g \theta_1 f + f \theta_2 \theta_1 g + g \theta_2 \theta_1 f. \end{aligned} \tag{14}$$

Los dos primeros términos estropean la propiedad de derivación. Por otra parte, notemos que la otra composición es dada por

$$\theta_1 \theta_2 (fg) = \theta_1 f \theta_2 g + \theta_1 g \theta_2 f + f \theta_1 \theta_2 g + g \theta_1 \theta_2 f. \tag{15}$$

Restando la ecuación (15) de la ecuación (14) se obtiene

$$(\theta_2 \theta_1 - \theta_1 \theta_2)(fg) = f(\theta_2 \theta_1 - \theta_1 \theta_2)g + g(\theta_2 \theta_1 - \theta_1 \theta_2)f$$

de manera que la operación $\theta_2 \theta_1 - \theta_1 \theta_2$ es una derivación. Esta operación de diferencia se denomina conmutador, o corchete de θ_2 y θ_1 , y será representada por

$$\theta_2 \theta_1 - \theta_1 \theta_2 = [\theta_2, \theta_1].$$

Usando la forma de la derivada de Lie como un ejemplo, demostraremos que el corchete obtenido es una derivada de Lie. Con el objetivo de ser explícitos, consideremos el caso 2-dimensional la cual es dada por

$$L_X(f) \triangleq a^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} f + a^2(x) \frac{\partial}{\partial x^2} f = \left(\sum_j (a(x))^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) f$$

y

$$L_Y(f) \triangleq b^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} f + b^2(x) \frac{\partial}{\partial x^2} f = \left(\sum_j (b(x))^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) f.$$

Entonces

$$(L_X L_Y) f = \left(a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \left(b^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + b^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) f \tag{16}$$

$$= \left(\left(a^1 \frac{\partial b^1}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial b^1}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(a^1 \frac{\partial b^2}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial b^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} \right) f \tag{17}$$

$$+ b^1 \left(a^1 \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^1} \right) + b^2 \left(a^1 \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} \right) \Big) f$$

y

$$(L_Y L_X) f = \left(b^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + b^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \left(a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) f \tag{18}$$

$$= \left(\left(b^1 \frac{\partial a^1}{\partial x^1} + b^2 \frac{\partial a^1}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(b^1 \frac{\partial a^2}{\partial x^1} + b^2 \frac{\partial a^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} \right. \quad (19)$$

$$\left. + a^1 \left(b^1 \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^1} \right) + a^2 \left(b^1 \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} \right) \right) f.$$

Entonces

$$(L_X L_Y - L_Y L_X) f = [L_X, L_Y] f \quad (20)$$

$$= \left(\left(a^1 \frac{\partial b^1}{\partial x^1} - b^1 \frac{\partial a^1}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial b^1}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial a^1}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} \right.$$

$$\left. + \left(a^1 \frac{\partial b^2}{\partial x^1} - b^1 \frac{\partial a^2}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial b^2}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial a^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} \right) f$$

$$= \left(\sum_j \left(\sum_i \left(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \right) f$$

$$= \left(\sum_j (c(x))^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) f = L_Z f, \quad (21)$$

donde $(c(x))^j = a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i}$ y Z es un campo vectorial en $\xi(M)$.

Al obtener el corchete elimina los términos con derivadas más altas de f , dejando una expresión con la forma apropiada para una derivada de Lie.

El isomorfismo que la derivada de Lie otorga entre campos vectoriales y derivaciones significa que las operaciones que implican derivaciones tienen operaciones correspondientes que implican campos vectoriales. La operación en campos vectoriales correspondiente a la operación de corchete en derivaciones también se denomina corchete más precisamente Corchete de Lie y se escribe de manera similar.

Un álgebra es un espacio vectorial dotado de una operación binaria interna que es asociativa. En particular, al espacio vectorial de campos vectoriales sobre una variedad $\Xi(M)$ dotado de la operación de corchete de Lie que es bilineal, antisimétrica y satisface la identidad de Jacobi, es un álgebra que se conoce como el álgebra de Lie.

Si X e Y son los campos vectoriales correspondientes a L_X y L_Y , entonces existe un campo vectorial Z correspondiente a $[L_X, L_Y]$ tal que $Z = [X, Y]$. El siguiente teorema se cumple:

Teorema 5.1. *La operación de corchete de Lie en el espacio lineal de campos vectoriales forma un álgebra de Lie con las siguientes propiedades:*

$$\left. \begin{array}{l} (i) \quad [X, Y] = -[Y, X] \\ (ii) \quad [X, Y + aZ] = [X, Y] + a[X, Z], \quad a \in \mathbb{R}^1 \\ (iii) \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \end{array} \right\} \quad (22)$$

De hecho, un álgebra de Lie no es más que un conjunto de elementos que forman un espacio vectorial y en el cual se define una multiplicación por la operación de corchete con las tres propiedades del Teorema.

6. Aplicación a Sistemas de Control Lineales

La representación en el espacio de estados de los Sistemas de Control Lineales a coeficientes constantes es una buena fuente de un ejemplo de álgebra de Lie. Del sistema de control

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, A una matriz de $n \times n$, B una matriz de $n \times m$ ambas con entradas reales y $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función constante por pedazos.

Obtenemos una familia de campos vectoriales, una para cada u . Sea Z_u el campo vectorial que actúa sobre un punto x por lo siguiente:

$$Z_u(x) = (x, (Ax + Bu)) \in T_x(M) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Suponiendo el punto base x , sea $Z_u = Ax + Bu$. El ejemplo de un álgebra de Lie implicará calcular el álgebra de Lie más pequeña que contiene todos los elementos Z_u en $T_x(M)$. Definimos $Z_u = (X + U)$ con $U = Bu$, $Z_v = (X + V)$ con $V = Bv$ y $X = Ax = Z_0$. También a partir de las ecuaciones (22),

$$\begin{aligned} [Z_u, Z_v] &= [X + U, X + V] \\ &= -[X, U] + [X, V] + [U, V] \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho que $[X, X] = 0$ para cualquier X . Por lo tanto, el álgebra de Lie generado por Z_u es dado por los conjuntos $\{X\}$, que es un conjunto de un elemento, y el conjunto de campos de vectores $\{U : U \in \mathbb{R}^n\}$. Estos corchetes pueden ser evaluados calculando los corchetes de las derivadas de Lie correspondientes. Las derivadas son escritos como en la ecuación (21),

$$L_X(f)(x) = \left(\sum_j (Ax)^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) f$$

y

$$L_U(f)(x) = \left(\sum_j (Bu)^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) f.$$

Calculando el corchete para $[L_U, L_V]f = L_U L_V f - L_V L_U f$, se ve que todas las segundas parciales se anulan, como se muestra en las ecuaciones (17) y (19). Además, como los coeficientes $(Bu)^j$ no envuelven a x , sus derivadas desaparecen. Por lo tanto, $[L_U, L_V] = 0$. El siguiente corchete a considerar es $[L_X, L_U]f$, cuyos primeros términos son $L_X L_U$:

$$\begin{aligned} L_X L_U f &= L_X \sum_i (Bu)^i \frac{\partial}{\partial x^i} f \\ &= \sum_j \sum_i (Ax)^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} (Bu)^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i} f + S \\ &= S, \end{aligned} \quad (23)$$

donde S representa las derivadas parciales de segundo orden, los otros términos desaparecen. El otro término del corchete es un poco más complejo (tomar b_j^i como los elementos de B y a_j^i como los elementos de A), luego se tiene

$$\begin{aligned}
 L_U L_X f &= L_U \sum_i (Ax)^i \frac{\partial}{\partial x^i} f \\
 &= \sum_j \sum_i (Bu)^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left((Ax)^i \frac{\partial}{\partial x^i} f \right) \\
 &= \sum_j \sum_i \sum_k \sum_m b_k^j u^k \frac{\partial}{\partial x^j} (a_m^i x^m) \frac{\partial}{\partial x^i} f + S \\
 &= \sum_j \sum_i \sum_k a_j^i b_k^j u^k \frac{\partial}{\partial x^i} f + S \\
 &= \sum_i (ABu)^i \frac{\partial}{\partial x^i} f + S.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Restando la ecuación (23) de la última línea de la ecuación anterior se obtiene:

$$(L_U L_X) f - (L_X, L_U) f = \sum_i (ABu)^i \frac{\partial}{\partial x^i} f \equiv L_{U^{(1)}} f.$$

El campo vectorial correspondiente a $L_{U^{(1)}}$ será denotado por

$$U^{(1)} = ABu.$$

La notación anticipa la definición de $U^{(k)} = A^k Bu$, donde A^k es la k -ésima potencia de A . Para ser coherente, $U^{(0)}$ reemplaza a U . Esta expresión se obtiene por repetir el procedimiento en las ecuaciones (24) que $[L_{U^{(k)}}, L_X] = L_{U^{(k+1)}}$. Por lo tanto, uno tiene que

$$[U^{(k)}, X] = U^{(k+1)} = A^{k+1} Bu.$$

El Teorema de Cayley-Hamilton dice que la n -ésima potencia de una matriz A de $n \times n$ es una combinación lineal de las potencias inferiores de la matriz, es decir,

$$A^n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i A^i.$$

Por el Teorema de Cayley-Hamilton, el proceso de obtener los corchetes de Lie termina con

$$[U^{(n-1)}, X] = U^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i U^{(i)}.$$

El álgebra de Lie tiene la siguiente tabla de multiplicación:

	X	$U^{(j)}$
$[X,$	0	$-U^{(j+1)}$
$[U^{(k)},$	$U^{(k+1)}$	0

y cada campo vectorial Z_u puede ser escrito como la suma de campos vectoriales $X, U^{(0)}, \dots, U^{(n-1)}$.

Cada campo vectorial que puede escribirse en estos términos, está relacionado con la noción de controlabilidad de los sistemas de control. De hecho, como se conoce el criterio de Kalman para la controlabilidad completa del sistema lineal de coeficientes constantes $\dot{x} = Ax + Bu$ es que la matriz, cuyas columnas se obtienen de las columnas de $A^k B$, donde A es de $n \times n$, tiene rango n :

$$\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n.$$

Este es un ejemplo que muestra que la Teoría de la controlabilidad de los sistemas está relacionada con la dimensión del álgebra de Lie generada por las familias de campos vectoriales. La literatura es rica con respecto a la conexión con sistemas no lineales (véase, por ejemplo, [5]). El álgebra de Lie de todos los campos vectoriales sobre una variedad parece ser un objeto muy difícil de estudiar. Hay muchas preguntas matemáticas que envuelven este álgebra que probablemente no serán contestadas en un futuro próximo. Sin embargo, cuando la variedad es un grupo de Lie existe una subálgebra que está íntimamente relacionada con la estructura del grupo de Lie.

7. Conclusiones

Según los resultados descritos se concluye que la descripción de los campos vectoriales definidos sobre una variedad diferenciable, como derivaciones de funciones diferenciables definidas en la variedad diferenciable a valores reales a través del isomorfismo, permite dotar al espacio vectorial de campos vectoriales de un producto denominado Corchete de Lie, de ahí obtenemos la estructura de álgebra de Lie.

Finalmente, se describe una aplicación de lo interesante de obtener álgebras de Lie, puesto que se constituye en una herramienta para decidir la controlabilidad de sistemas de control. De manera más específica se tiene la extensión de la Condición de Controlabilidad de Kalman a la estructura de variedad diferenciable por medio de Corchetes de Lie y la búsqueda del subespacio de Lie más pequeño generado por los campos vectoriales que rigen el Sistema de Control definido en una variedad diferenciable.

Referencias

- [1] W.M. BOOTHBY, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, N.Y., 1977.
- [2] A.A. SAGLE AND R.E. WALDE, *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Academic Press, INC, New York, N.Y., 1973.
- [3] F.W. WARNER, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, I.M. Singer, Illinois, 1971.
- [4] R.W. BROCKETT, *Some Geometric Questions in the Theory of Linear Systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-21:4, Aug. 1976, pp. 449-455.
- [5] R. HERMANN AND A.J. KRENER, *Nonlinear Controllability and Observability*, IEEE Trans. On Automatic Control, vol. AC-22:5, Oct. 1977, pp.728-740.

Parte II

Contribuciones de Investigación



Dinámica estocástica de aplicaciones uniformemente expansoras

Jimmy Santamaria^{a,1}

^aUniversidad Mayor de San Andrés, Avenida Villazón # 1995, La Paz, Bolivia.

Resumen

En este artículo de divulgación definimos algunas de las propiedades fundamentales de la teoría ergódica de sistemas dinámicos: ergodicidad, sistemas misturadores, decaimiento de correlaciones, teorema del límite central y de el teorema de grandes desvíos. En la última sección introducimos los sistemas expansores que es la clase de sistemas más simple que verifica las propiedades recientemente mencionadas. Se da un bosquejo muy simple de algunos de los argumentos en el estudio de la dinámica estocástica de sistemas expansores.

Palabras clave: Sistemas dinámicos, teoría ergódica, aplicaciones uniformemente expansoras.

1. Introducción

Supongamos que la evolución en el tiempo de un proceso de la naturaleza esté descrito por una transformación $f : M \rightarrow M$ en alguna variedad M . Las cantidades físicamente observables corresponden a funciones reales φ definidas en el espacio de fase M . Entonces los datos experimentales del sistema tendrán usualmente la forma de sucesiones de “mediciones” $\varphi(f^j(x))$, donde $z \in M$ y $j \geq 0$. De esa información se intenta extraer las propiedades intrínsecas principales del proceso dinámico en consideración.

Con frecuencia estas sucesiones temporales $\varphi(f^j(x))$ se comportan de manera complicada y “errática” cuando j varía en el tiempo, inclusive para leyes de evolución sencillas f . Es más, las sucesiones temporales pueden depender sensiblemente del estado inicial del sistema: modificaciones arbitrariamente pequeñas de $x \in M$ típicamente implican valores considerablemente diferentes de $\varphi(f^j(x))$ para j grande. Tales comportamientos “caóticos” significan que la dinámica puede ser difícil de entender en términos determinísticos y que el análisis estadístico de las sucesiones temporales puede dar mejores resultados.

2. Medidas físicas

Una pregunta básica es la existencia de medias temporales asintóticas

$$E_x(\varphi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x))$$

para “muchos” puntos $x \in M$. Claramente, $E_x(\varphi)$ existen siempre que x es un punto periódico de f . Más generalmente, el teorema ergódico de Birkhoff afirma que las medias temporales asintóticas existen para casi todo punto, para todo observable continuo, respecto a cualquier medida de probabilidad f -invariante. Este hecho es bastante relevante si f preserva volumen, i.e. f deja invariante alguna medida de Lebesgue en la variedad M . Sin embargo, medidas invariantes arbitrarias pueden carecer de significado físico. En general, “muchos” significará “en un conjunto de medida Lebesgue positiva”.

Aun más, se quisiera entender cuando la media temporal asintótica es independiente del punto inicial. Supongamos que para toda función continua $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ la media asintótica $E_x(\varphi)$ es independiente del punto x tomado en un conjunto de medida Lebesgue positiva $B \subset M$. Entonces

$$\varphi \mapsto E(\varphi) = E_x(\varphi) \quad (\text{cualquier } x \in B)$$

define un operador lineal no negativo en el espacio $C^0(M, \mathbb{R})$ de funciones reales continuas que por el teorema de representación

✉ jsantamaria@fcpn.edu.bo (Jimmy Santamaria)

¹Trabajo financiado por la Carrera de Matemática de la Universidad Mayor de San Andrés dentro del proyecto Sistemas Dinámicos y Aplicaciones.

de Riesz, ver [1, Cap. 2], está asociado a una medida de Borel μ en M por:

$$\int \varphi d\mu = E(\varphi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) \quad (\text{cualquier } x \in B).$$

Observemos que tal medida μ puede ser “físicamente observada” por el cálculo de las medias temporales de funciones continuas para puntos $x \in M$ elegidos aleatoriamente (existe probabilidad positiva de elegir $x \in B$). Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.1. Una medida de probabilidad f -invariante μ es una medida física o SRB (por Sinai-Ruelle-Bowen) de f si existe un conjunto de medida Lebesgue positiva de puntos $x \in M$ tales que

$$\int \varphi d\mu = E(\varphi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)). \quad (1)$$

para cada $\varphi \in C^0(M, \mathbb{R})$. El conjunto de puntos $x \in M$ que satisfacen esta propiedad es denominado cuenca ergódica de μ y se denota por $B(\mu)$.

Se cree que las medidas SRB existen en gran generalidad sin embargo su existencia solo se conoce para ciertas clases de sistemas, por ejemplo para aplicaciones expansoras. Por otra parte existen sistemas que no admiten una medida SRB, ver el ejemplo debido a Bowen en [2, p.8], [3, p.7] o [4, p.3].

3. Sistemas con “pérdida de memoria”

En la teoría de sistemas dinámicos es importante comprender la “pérdida de memoria” y la “creación de información” los sistemas con la evolución del tiempo. Por ejemplo, estudiar como órbitas comenzando en puntos próximos “olvidan” este hecho rápidamente: la evolución de cada órbita genera nueva información que no puede ser deducida de la información inicial, ni de la evolución de otra órbita. Existen varias propiedades que pretenden entender el comportamiento de sistemas con estas características.

3.1. Sistemas ergódicos

Un sistema se dice ergódico cuando para cada observable la media temporal asintótica es independiente del punto.

Definición 3.1. Sea $f : M \rightarrow M$ y μ una medida f -invariante. Se dice que el sistema (f, μ) es ergódico si satisface alguna de las siguientes propiedades equivalentes:

- Si $A \subset M$ es invariante, i.e. $f^{-1}(A) = A$, entonces $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.
- Para μ -casi todo punto x :

$$\int \varphi d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) \quad \text{para todo } \varphi \in C^0(M, \mathbb{R}).$$

3.2. Sistemas misturadores

Sea $f : M \rightarrow M$ y μ una medida invariante por f . Queremos medir en que medida observaciones $\varphi(f^j(x))$, hechas para j grande, son afectadas por valores iniciales $\psi(x)$ de algún observable dado $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ (posiblemente con $\psi = \varphi$). Para entender este fenómeno consideramos las funciones de correlación

$$C_n(\varphi, \psi) = \int (\varphi \circ f^n) \psi d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu.$$

Notemos que $C_n(\varphi, \psi) = 0$ significa en términos probabilísticos que $\varphi \circ f^n$ y ψ son variables aleatorias independientes.

Definición 3.2. Un sistema (f, μ) es misturador si $C_n(\varphi, \psi) \rightarrow 0$ para cada par de observables φ, ψ .

Notemos que en un sistema misturador (f, μ) las variables aleatorias $\varphi \circ f^n$ son cada vez menos y menos dependientes de la variable aleatoria ψ cuando $n \rightarrow \infty$.

Definición 3.3. Un sistema (f, μ) es exponencialmente misturador o tiene decaimiento exponencial de correlaciones si existe $\tau < 1$ y para cada par (φ, ψ) existe $C > 0$ tal que

$$|C_n(\varphi, \psi)| \leq C\tau^n \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Observación 3.1. La noción de sistema misturador o de decaimiento de correlaciones siempre es relativo a un espacio funcional adecuado, es decir φ y ψ , en las Definiciones 3.2 y 3.3, pertenecen a un espacio de Banach de funciones \mathcal{F} . En particular la existencia y el valor de τ en la Definición 3.3 dependen de \mathcal{F} .

4. Aleatoriedad

Otra importante caracterización de casi independencia (más precisamente de débil correlación) de observaciones sucesivas puede ser dada en términos de los teoremas del límite central y de grandes desvíos. Ambos resultados describen las oscilaciones de las medias temporales finitas

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

alrededor del valor esperado $\int \varphi d\mu$. Empezaremos recordando resultados clásicos de probabilidad.

Teorema 4.1 (Teorema del límite central para v.a.i.i.d.). Sean X_0, \dots, X_n, \dots variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) con valores en \mathbb{R} , con media $\bar{X} = E(X_n) < \infty$ y varianza $\sigma^2 = E((X_n - \bar{X})^2) \in (0, +\infty)$. Entonces, dado cualquier intervalo abierto $A \in \mathbb{R}$, la probabilidad de

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} (X_j - \bar{X}) \in A \quad \text{converge a} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_A \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 4.2 (Teorema de grandes desvíos para v.a.i.i.d.). Sean $X_0, \dots, X_n, \dots, \bar{X}$ y σ como en el Teorema 4.1. Supongamos que $E(e^{tX_n}) < \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, dado cualquier $\epsilon > 0$, la probabilidad $\mathcal{P}(n, \epsilon)$ de

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (X_j - \bar{X}) \right| > \epsilon$$

converge a cero exponencialmente rápido cuando $n \rightarrow \infty$ en el sentido que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathcal{P}(n, \epsilon) < 0.$$

Cada uno de los dos últimos teoremas es parte de una familia de resultados relacionados que incluyen enunciados considerablemente más sofisticados. Ver el Apéndice B de [3] por pruebas, información adicional y referencias.

Definición 4.1. Un observable φ *satisface el teorema del límite central* para (f, μ) si existe $\sigma > 0$ tal que para todo intervalo $A \subset \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mu \left\{ x \in M : \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\varphi(f^j(x)) - \int \varphi d\mu \right) \in A \right\}$$

tiende hacia

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_A \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt,$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Definición 4.2. Un observable φ *satisface el teorema de grandes desvíos* para (f, μ) si dado $\epsilon > 0$ existe $h(\epsilon) > 0$ tal que

$$\mu \left\{ x \in M : \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi(f^j(x)) - \int \varphi d\mu) \right| > \epsilon \right\} \leq e^{-nh(\epsilon)}$$

para n suficientemente grande.

Cuando φ tiene decaimiento de correlaciones suficientemente rápido satisface los teoremas de los grandes desvíos y del límite central, lo que significa en algún sentido, que las observaciones temporales individuales se comportan de manera “esencialmente” aleatoria en intervalos grandes de tiempo.

5. Perturbaciones aleatorias

A menudo, la formulación matemática $f : M \rightarrow M$ de un proceso físico dado involucra simplificaciones, donde la parte “principal” del proceso es aislada (esta parte es lo que f describe) y ciertos elementos no son contemplados por ser muy complicados para ser tomados en consideración y se espera que su influencia sea suficientemente pequeña para que puedan ser descartados.

Es claro que este proceso requiere una justificación especialmente si como es frecuente el sistema simplificado, representado por f , resulta ser estructuralmente inestable, i.e. aplicaciones g arbitrariamente cerca a f tienen comportamientos dinámicos muy diferentes a f , ver [3, Sección 1.5] para la definición precisa de estabilidad estructural.

En muchas situaciones en las que estos elementos descartados no son completamente entendidos, o son muy complicados para ser expresados efectivamente en términos determinísticos, se puede pensar que ellos son un especie de “ruido” aleatorio. La estabilidad estocástica significa que la presencia de pequeños ruidos tienen un efecto pequeño en el comportamiento asintótico de f .

Comenzaremos describiendo dos modelos importantes de perturbaciones aleatorias de sistemas dinámicos discretos. Sean $f : M \rightarrow M$ y U un conjunto abierto de M tal que $f(U)$ es relativamente compacto en U . El nivel del ruido que consideraremos $\epsilon > 0$ siempre es menor que la distancia de $f(U)$ a $M \setminus U$ de tal forma que las órbitas aleatorias no pueden escapar de U .

5.1. Modelo de cadenas de Markov

El modelo de perturbaciones aleatorias por cadenas de Markov está definido por una familia $\{p_\epsilon(\cdot|z) : z \in U, \epsilon > 0\}$ de medidas Borelianas de probabilidad tales que $p_\epsilon(\cdot|z)$ está soportada en la bola de radio ϵ con centro en $f(z)$. Las órbitas aleatorias son sucesiones $\{z_j\}$ donde cada z_{j+1} es una variable aleatoria distribuida con probabilidad $p_\epsilon(\cdot|z_j)$.

Una probabilidad μ_ϵ es *estacionaria* para la cadena de Markov si

$$\mu_\epsilon(E) = \int p_\epsilon(E, z) d\mu_\epsilon(z) \tag{2}$$

para todo conjunto Boreliano $E \subset U$. Equivalentemente, el producto semidirecto de medidas $\mu_\epsilon \times p_\epsilon^{\mathbb{N}}$ dado por

$$d(\mu_\epsilon \times p_\epsilon^{\mathbb{N}})(z_0, z_1, \dots, z_n, \dots) = \mu_\epsilon(dz_0) p_\epsilon(dz_1|z_0) \cdots p_\epsilon(dz_n|z_{n-1}) \cdots$$

es invariante por el shift $\mathcal{F} : U \times U^{\mathbb{N}} \rightarrow U \times U^{\mathbb{N}}$ en el espacio de órbitas aleatorias $\{z_j : j \geq 0\}$. Por el teorema ergódico, la media temporal de toda función continua $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{z}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(z_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi \circ \pi_0)(\mathcal{F}^j(\mathbf{z}))$$

existe en un conjunto de medida $\mu_\epsilon \times p_\epsilon^{\mathbb{N}}$ total en el conjunto de órbitas aleatorias $\mathbf{z} = \{z_j\}$.

Observación 5.1. Medidas estacionarias siempre existen si las probabilidades de transición $p_\epsilon(\cdot|z)$ dependen continuamente en la topología débil*, ver el Lema D.1 de [2].

5.2. Modelo de iterados aleatorios de aplicaciones

En este modelo se consideran sucesiones obtenidas por iteraciones $z_j = g_j \circ \cdots \circ g_1(z_0)$ de aplicaciones g_j elegidas aleatoriamente en bolas de radio ϵ con centro en f . Consideremos una

familia $\{\nu_\epsilon : \epsilon > 0\}$ de probabilidades en el espacio de aplicaciones C^r , para algún $r \geq 1$, tal que el soporte de ν_ϵ esta contenido en la bola $B(\epsilon, f)$. La órbita aleatoria asociada a (z_0, \mathbf{g}) es la sucesión $z_j = g_j \circ \dots \circ g_1(z_0)$, donde los g_j son variables aleatorias independientes distribuidas según ν_ϵ .

Una medida μ_ϵ se dice *estacionaria* para este modelo de perturbación si para todo conjunto Boreliano $E \subset U$ se tiene

$$\mu_\epsilon(E) = \int \mu_\epsilon(g^{-1}(E))d\nu_\epsilon(g). \tag{3}$$

5.3. Relación entre ambos modelos de perturbación

A una familia de probabilidades $\{\nu_\epsilon : \epsilon > 0\}$ que determinan un modelo de perturbación aleatoria de f esta asociada un cadena de Markov definida por

$$p_\epsilon(E|z) = \nu_\epsilon(\{g : g(z) \in E\}).$$

En esta situación μ_ϵ es una medida estacionaria en el sentido de (2) si y solamente si lo es en el sentido (3). En este caso las probabilidades $p_\epsilon(\cdot, |z)$ varían continuamente con z , por tanto medidas estacionarias existen, ver la Remarca 5.1.

Notemos que para cualesquiera conjuntos medibles

$$A_0, A_1, \dots, A_m \subset U,$$

el conjunto

$$(\mu_\epsilon \times \nu_\epsilon^{\mathbb{N}})(\{(z_0, \mathbf{g}) : z_0 \in A_0, g_1(z_0) \in A_1, \dots, g_m \dots g_1(z_0) \in A_m\})$$

es igual a

$$\begin{aligned} &= \int_{A_0} d\mu_\epsilon(z_0) \int \chi_{\{g_1: g_1(z_0) \in A_1\}} d\nu_\epsilon(g_1) \dots \\ &\quad \dots \int \chi_{\{g_m: (g_m \dots g_1)(z_0) \in A_m\}} d\nu_\epsilon(g_m) \\ &= \int_{A_0} d\mu_\epsilon(z_0) \int_{A_1} p_\epsilon(dy_1|z_0) \dots \int_{A_m} p_\epsilon(dy_m|y_{m-1}) \\ &= (\mu_\epsilon \times p_\epsilon^{\mathbb{N}})(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_m). \end{aligned}$$

Es decir que la estadística de las órbitas aleatorias obtenidas por iterados aleatorios son reproducidos fielmente por la cadena de Markov asociada.

Hemos visto que cualquier esquema de aplicaciones aleatorias puede ser realizado con una cadena de Markov. El problema inverso es discutido por Kifer en [5, Sección 1.1].

5.4. Estabilidad estocástica

Supongamos que existe una única medida estacionaria μ_ϵ para todo ϵ suficientemente pequeño. Entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(z_j) \rightarrow \int \varphi d\mu_\epsilon$$

para casi toda órbita aleatoria $\{z_j\}$ y toda función continua φ .

Definición 5.1. El sistema (f, μ) es *estocásticamente estable* bajo el esquema de perturbación $\{\nu_\epsilon : \epsilon > 0\}$ (o $\{p_\epsilon(\cdot|z) : z \in U, \epsilon > 0\}$) si μ_ϵ converge a μ en la topología débil*:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \varphi d\mu_\epsilon = \int \varphi d\mu \quad \text{para toda función continua } \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

6. Transformaciones uniformemente expansoras

Se dice que $f : M \rightarrow M$ es (*uniformemente*) *expansora* si existe una métrica Riemanniana $\|\cdot\|$ en M y una constante $\sigma > 1$ tal que

$$\|Df(x)v\| \geq \sigma\|v\| \quad \text{para todo } x \in M \text{ y todo } v \in T_xM. \tag{4}$$

Notemos que la existencia de $\sigma > 1$ en (4) es una condición C^1 abierta, i.e. transformaciones de M suficientemente cerca a f en la topología C^1 son también expansoras.

Ejemplo 6.1. Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal tal que $F(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$. Entonces existe una única aplicación f en el toro n - dimensional $M = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ tal que $f \circ \pi = \pi \circ F$, donde $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es la proyección canónica. Si todos los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de F tienen norma estrictamente mayor que 1 entonces f es expansora: cualquier $1 < \sigma < \min_i |\lambda_i|$ verifica (4).

Teorema 6.1. Sea $f : M \rightarrow M$ una aplicación expansora de clase $C^{1+\nu_0}$ para algún $\nu_0 \in (0, 1]$. Entonces,

- f admite una única medida de probabilidad μ_0 que es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Es más, μ_0 es ergódica, su soporte coincide con M y su cuenca de atracción $B(\mu_0)$ es un subconjunto de M de medida Lebesgue total. En particular, μ_0 es la única medida SRB de f ;
- (f, μ_0) es exponencialmente misturador y satisface el teorema del límite central en el espacio de Banach de funciones ν - Hölder continuas para cualquier $\nu \in (0, \nu_0]$;
- (f, μ_0) es estocásticamente estable bajo perturbaciones de iterados aleatorios de aplicaciones.

Las demostración del Teorema 6.1 está basada en que las propiedades ergódicas de f pueden ser derivadas de propiedades espectrales de su operador de transferencia, también llamado operador Perron-Frobenius, actuando en algún espacio conveniente de observables $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$. El operador de transferencia asociado a la transformación expansora $f : M \rightarrow M$ está definido por

$$(\mathcal{L}\varphi)(y) = \sum_{f(x)=y} \frac{\varphi(x)}{|\det Df(x)|},$$

note que la suma es sobre un número finito de términos. Una consecuencia inmediata de la definición y de la fórmula de cambio de variables es

$$\int (\mathcal{L}\varphi)\psi dm = \int \varphi(\psi \circ f) dm, \tag{5}$$

donde m es la medida de probabilidad de Lebesgue en M . La relación (5) implica, en particular, que los puntos fijos de \mathcal{L} están directamente relacionados con medidas invariantes por f que sean absolutamente continuas respecto a m . En efecto, si φ_0 es una función no negativa en $L^1(m)$ satisfaciendo $\mathcal{L}\varphi_0 = \varphi_0$ entonces

$$\mu_0 = \frac{\varphi_0}{\int \varphi_0 dm} m$$

es una probabilidad f invariante, claramente $\mu_0 \ll m$. Recíprocamente, si una medida finita f -invariante μ_0 es absolutamente continua con respecto a m entonces la derivada de Radon-Nikodim $\varphi_0 = d\mu_0/dm$ satisface $\mathcal{L}\varphi_0 = \varphi_0$.

Para probar la existencia de un punto fijo para el operador \mathcal{L} se usa la noción de métrica proyectiva asociada a un cono convexo en un espacio vectorial introducida por G. Birkhoff. Precisando, se construye un cono C en el espacio de funciones Hölder continuas que es aplicado estrictamente dentro de él por el operador \mathcal{L} , se concluye que $\mathcal{L} : C \rightarrow C$ es una contracción, con respecto a la métrica proyectiva asociada a C , y la primera afirmación del Teorema 6.1 se deriva de este hecho.

La propiedad de contracción permite que podamos describir mejor las propiedades espectrales del operador \mathcal{L} y demostrar que (f, μ_0) tiene decaimiento exponencial de correlaciones en el espacio de funciones Hölder continuas. En esta etapa de la demostración del Teorema 6.1 se analiza la velocidad de convergencia al equilibrio:

$$f_*^n(\varphi m) \rightarrow \left(\int \varphi dm \right) \mu_0.$$

La prueba que el sistema (f, μ_0) satisface el Teorema del límite central esta basada en las estimativas obtenidas al estudiar el decaimiento de correlaciones y el siguiente teorema abstracto del límite central para sistemas dinámicos:

Teorema 6.2. Sean (M, \mathcal{A}, μ) un espacio de probabilidad, $f : M \rightarrow M$ una aplicación medible, μ una probabilidad f -invariante ergódica y $\phi \in L^2(\mu)$ tal que $\int \phi d\mu = 0$. Sea \mathcal{A}_n la sucesión no creciente de σ -álgebras definidas por $\mathcal{A}_n = f^{-n}(\mathcal{A})$, $n \geq 0$. Supongamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|E(\phi|\mathcal{A}_n)\|_2 < \infty.$$

Entonces el número $\sigma \geq 0$ tal que

$$\sigma^2 = \int \phi^2 d\mu + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int \phi(\phi \circ f^n) d\mu$$

es finito y $\sigma = 0$ si y solamente si $\phi = u \circ f - u$ para algún $u \in L^2(\mu)$. Por otra parte, si $\sigma > 0$ entonces para cualquier intervalo $A \subset \mathbb{R}$ se tiene

$$\mu \left\{ x \in M : \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)) \in A \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_A \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt,$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Para estudiar perturbaciones aleatorias se desarrolla un análisis de un operador de transferencia “perturbado” para probar la estabilidad estocástica. El método también implica *estabilidad estadística*: la aplicación $f \mapsto \mu_0$ es continua en la topología $C^{1+\nu_0}$.

Las primeras dos afirmaciones del Teorema 6.1 son esencialmente debidas a Ruelle [6]. Sin embargo, el esquema presentado para la prueba del límite central en el Teorema 6.1 se debe a [7]. La estabilidad de aplicaciones expansoras por perturbaciones aleatorias con cadenas Markovianas fue probada por primera vez por Kifer en [5, 8].

Existe la noción de aplicaciones no uniformemente expansoras y existe un análisis estadístico correspondiente, ver [9].

7. Conclusiones

Los sistemas dinámicos, como disciplina, tuvieron sus orígenes con la introducción de métodos cualitativos en problemas provenientes de la mecánica celeste por Poincaré. Los resultados que se mostraron en esta nota, son de otra naturaleza, pertenecen a la Teoría Ergódica, que es el estudio del comportamiento a largo plazo de un sistema dinámico partiendo de casi todo punto inicial respecto de una medida en el espacio de estados. Los sistemas dinámicos inducidos por una transformación expansora son un paradigma que existen sistemas determinísticos cuyo comportamiento a largo plazo puede ser tan complejo que algunas propiedades similares a las propiedades estocásticas pueden ser observadas. Los sistemas expansores son un subclase de los sistemas llamados hiperbólicos, estudiados en los años 60 especialmente, cuyos comportamientos son similares a los presentados en esta nota.

Referencias

- [1] W. Rudin, Real and complex analysis, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1987.
- [2] C. Bonatti, L. J. Díaz, M. Viana, Dynamics beyond uniform hyperbolicity, Vol. 102 of Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 2005.
- [3] M. Viana, Stochastic dynamics of deterministic systems, Lecture Notes 21st Braz. Math. Colloq., IMPA, Rio de Janeiro, 1997.
- [4] M. Viana, Lecture notes on attractors and physical measures, Vol. 8 of Monografías del Instituto de Matemática y Ciencias Afines [Monographs of the Institute of Mathematics and Related Sciences], Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA, Lima, 1999, a paper from the 12th Escuela Latinoamericana de Matemáticas (XII-ELAM) held in Lima, June 28–July 3, 1999.
- [5] Y. Kifer, Ergodic theory of random perturbations, Birkhäuser, 1986.
- [6] D. Ruelle, The thermodynamical formalism for expanding maps, Comm. Math. Phys. 125 (1989) 239–262.
- [7] C. Liverani, Central limit theorem for deterministic systems, in: Procs. Intern. Conf. on Dynamical Systems (Montevideo 1995) – A tribute to Ricardo Mañé, Pitman, 1996, pp. 56–75.
- [8] Y. Kifer, General random perturbations of hyperbolic and expanding transformations, J. Analyse Math. 47 (1986) 11–150.
- [9] J. F. Alves, Statistical analysis of non-uniformly expanding dynamical systems, Lecture Notes 24th Braz. Math. Colloq., IMPA, Rio de Janeiro, 2003.



Condiciones de Existencia de Soluciones de una Inclusión Diferencial

Condori-Equice Willy^{a,1}

^aUniversidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia

Resumen

En este trabajo desarrollamos condiciones necesarias para la existencia de soluciones de una inclusión diferencial cuando se da una condición inicial. Desarrollamos condiciones que involucran los conceptos de semicontinuidad superior y semicontinuidad inferior.

Palabras clave: Multifunción, Semicontinuidad Superior, Semicontinuidad Inferior, Inclusión Diferencial.

Introducción

Este es un trabajo monográfico, resultado de una investigación bibliográfica y se presenta a fin de justificar las actividades de investigación dentro del Instituto de Investigación Matemática de la Universidad Mayor de San Andrés. No pretende presentar resultados originales. Esta desarrollado en base a [3].

En la primera sección se describen los conceptos de multifunción, semicontinuidad superior y semicontinuidad inferior; y se dan algunos resultados que caracterizan los conceptos de semicontinuidad. En la segunda sección, se plantea el problema tipo problema de Cauchy para una inclusión diferencial, donde se destaca la multifunción que esta a lado derecho de la inclusión diferencial. En las dos ultimas secciones se plantean los resultados de existencia de soluciones del problema planteado, manejando condiciones de semicontinuidad superior y semicontinuidad inferior, respectivamente.

1. Preliminares

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Una *multifunción* φ de X a Y es una aplicación que asigna a cada x en X un único subconjunto $\varphi(x)$ de Y , es decir, a cada $x \in X$, le hace corresponder $\varphi(x) \subset Y$. Para denotar una multifunción de X a Y escribimos

$\varphi : X \rightarrow Y$. También decimos que φ es una aplicación punto a conjunto de X en Y .

Sean $\varphi : X \rightarrow Y$ una multifunción y A un subconjunto de Y . La *imagen inversa superior* de A , denotada por $\varphi_s^{-1}(A)$, se define como

$$\varphi_s^{-1}(A) = \{x \in X : \varphi(x) \subset A\}.$$

La *imagen inversa inferior* de A , denotada por $\varphi_i^{-1}(A)$, se define como

$$\varphi_i^{-1}(A) = \{x \in X : \varphi(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Definición 1.1. Sean X y Y espacios topológicos y $\varphi : X \rightarrow Y$ una multifunción.

- a) Se dice que φ es *semicontinua superiormente* en $x \in X$, si para todo abierto W en Y tal que $\varphi(x) \subset W$, existe un abierto V en X que contiene a x que satisface

$$z \in V \Rightarrow \varphi(z) \subset W.$$

- b) Se dice que φ es *semicontinua inferiormente* en $x \in X$ si para todo abierto W en Y tal que $\varphi(x) \cap W \neq \emptyset$, existe un abierto V en X que contiene a x y satisface

$$z \in V \Rightarrow \varphi(z) \cap W \neq \emptyset.$$

- c) Se dice que φ es *continua* en $x \in X$, si es semicontinua superiormente e inferiormente en x .

¹ wcondori@gmail.com (Condori-Equice Willy)

La multifunción φ es semicontinua superiormente (inferiormente) en X , si lo es en cada punto x de X , análogamente φ es continua en X si lo es en todo punto x de X .

Ejemplo 1.1. La multifunción $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x < 1, \\ [0, 1] & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

es semicontinua superiormente en $[0, 1]$, semicontinua inferiormente en $[0, 1)$, pero no es semicontinua inferiormente en 1. En efecto, primero mostremos que φ no es semicontinua inferiormente en 1. Supongamos lo contrario y tomemos el conjunto abierto $U = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$; como

$$U \cap \varphi(1) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cap [0, 1] \neq \emptyset,$$

existe un abierto V que contiene a 1 tal que

$$\varphi(z) \cap U \neq \emptyset, \text{ para todo } z \in V;$$

pero existe $z \in V, z < 1$, y

$$\varphi(z) \cap U = \{0\} \cap (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \emptyset.$$

Así, φ no puede ser semicontinua inferiormente en 1.

Para probar la semicontinuidad superior de φ en 1, consideremos un conjunto abierto U que contiene a $\varphi(1) = [0, 1]$; tomemos el abierto $V = (\frac{1}{2}, 1]$ en $[0, 1]$ que contiene a 1. Luego, si

$$z \in V \Rightarrow \varphi(z) = \{0\} \text{ o } \varphi(z) = [0, 1] \Rightarrow \varphi(z) \subset [0, 1] \subset U.$$

Así, φ es semicontinua superiormente en 1.

Probemos ahora que φ es continua en $[0, 1)$. Para esto tomemos $x \in [0, 1)$ y U un abierto que intersekte a $\varphi(x) = \{0\}$; luego $0 \in U$. Tomemos el abierto $V = [0, 1)$, luego

$$\varphi(z) = \varphi(x) = \{0\} \subset U, \text{ para todo } z \in V;$$

por lo tanto φ es continua en $[0, 1)$.

Ejemplo 1.2. La multifunción $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{si } x < 1, \\ \{0\} & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

es semicontinua inferiormente en $[0, 1]$, semicontinua superiormente en $[0, 1)$, pero no es semicontinua superiormente en $[0, 1]$.

Primero demostraremos que ψ no es semicontinua superiormente en 1. Tomemos el abierto $U = [0, \frac{3}{4})$ que contenga a $\psi(1) = \{0\}$ y sea V un abierto que contenga a 1. Entonces, existe $z \in V$ y $z < 1$, de donde $\psi(z) = [0, 1]$ no está contenido en $U = [0, \frac{3}{4})$ y por lo tanto ψ no es semicontinua superiormente en 1.

Probaremos ahora que ψ es semicontinua inferiormente en 1. Sea U un conjunto abierto que intersekte a $\psi(1) = \{0\}$. Luego, $0 \in U$. Tomemos $V = (\frac{1}{2}, 1]$ y si $z \in V$, entonces $\psi(z) = [0, 1]$ o $\psi(z) = \{0\}$; en cualquiera de los casos $0 \in \psi(z) \cap U$. Por tanto, ψ es semicontinua inferiormente en 1.

Para probar la semicontinuidad superior de ψ en $[0, 1)$, tomemos $x \in [0, 1)$ y U un abierto que contenga a $\psi(x) = [0, 1]$. Para $V = [0, 1)$, si $z \in V$ entonces

$$\psi(z) = [0, 1] \subset U.$$

Por lo que ψ es semicontinua superiormente en $[0, 1)$.

Ahora para la semicontinuidad inferior en $[0, 1)$, supongamos que $x \in [0, 1)$ y que U es un abierto que intersekte a $\psi(x) = [0, 1]$. Luego, para el abierto $V = [0, 1)$ que contiene a x , si $z \in V$ entonces

$$\psi(z) \cap U = [0, 1] \cap U \neq \emptyset.$$

Por tanto ψ es semicontinua inferiormente en $[0, 1)$.

El siguiente teorema proporciona una caracterización de la semicontinuidad superior de una multifunción entre espacios topológicos, en términos de conjuntos abiertos y cerrados.

Teorema 1.1. Si $\varphi : X \rightarrow Y$ es una multifunción entre espacios topológicos. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i) φ es semicontinua superiormente en X .
- ii) $\varphi_s^{-1}(A)$ es abierto en X para todo conjunto abierto A en Y .
- iii) $\varphi_i^{-1}(F)$ es cerrado en X para todo conjunto cerrado F en Y .

Teorema 1.2. Si $\varphi : X \rightarrow Y$ es una multifunción entre espacios topológicos. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i) φ es semicontinua inferiormente en X .
- ii) $\varphi_i^{-1}(A)$ es abierto en X si A es abierto en Y .
- iii) $\varphi_s^{-1}(F)$ es cerrado en X si F es cerrado en Y .

Teorema 1.3. Sean X, Y espacios métricos y $\varphi : X \rightarrow Y$ una multifunción. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- i) φ es semicontinua inferiormente en x .
- ii) Para cada sucesión (x_n) en X , tal que $x_n \rightarrow x$, y para cada $y \in \varphi(x)$; existe una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$y_n \rightarrow y \quad y_n \in \varphi(x_n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- iii) Para cada sucesión (x_n) en X , tal que $x_n \rightarrow x$, y para cada $y \in \varphi(x)$; existen una sucesión (y_k) y una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que

$$y_k \rightarrow y \quad y_k \in \varphi(x_{n_k}), \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.4. Sean X, Y espacios métricos y una multifunción $\varphi : X \rightarrow Y$. Los siguientes enunciados son equivalentes :

- i) φ es semicontinua superiormente en x y $\varphi(x)$ es compacto.
- ii) Para cada sucesión $((x_n, y_n))$ en el $\text{Gr}\varphi$, tal que $x_n \rightarrow x$, se tiene que la sucesión (y_n) tiene un punto de acumulación en $\varphi(x)$.

2. Planteo del Problema

En un curso elemental de ecuaciones diferenciales uno trata con el problema de valor inicial

$$x' = f(t, x) \quad y \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

donde $f : J \times X \rightarrow X$, $J = [0, a]$ y $x_0 \in X = \mathbb{R}^n$. Las soluciones (globales) son funciones $x : J \rightarrow X$ de clase C^1 que satisfacen (1) y estas existen si f es continua y no crece tan rápido con respecto a x , es decir,

$$|f(t, x)| \leq c(1 + |x|), \quad (2)$$

sobre $J \times X$ para algún $c > 0$, donde $|\cdot|$ denota la norma euclídeana sobre X . La manera más simple de probar tal resultado es considerar la ecuación integral equivalente

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \quad (3)$$

sobre J y aplicar un apropiado teorema de punto fijo al operador definido por el lado derecho de (2) sobre $C_X(J)$.

El mismo argumento también da una solución de (3) si f es sólo medible en t , continua en x y tal que (2) se dá para alguna función $c \in L^1(J)$, como fue observado por C. Caratheodory. Luego, el lado derecho de (3) es derivable c.t.p., de donde $x(\cdot)$ es una solución absolutamente continua de (1), es decir,

$$x' \in L^1_X(J) \quad y \quad x(t) = x_0 + \int_0^t x'(s) ds$$

sobre J y $x' = f(t, x)$ casi en todas partes sobre J .

Mucho después este concepto de solución fue apreciado por la gente que trabaja en teoría de control, relacionada con problemas donde el lado derecho de la ecuación también depende de una función de control $u : J \rightarrow \mathbb{R}^m$. Las más interesantes funciones de control son las funciones “switch” $u : J \rightarrow \{-1, 1\}$, luego $f(\cdot, x, u(\cdot))$ puede ser discontinua. Desde muchos años, uno es consciente que sólo soluciones que satisfagan ciertas restricciones, como $x(t) \in D \subset X$ sobre J , son de interés en muchas aplicaciones. Como se verá mas adelante,

$$f(t, x) \in T_D(x) \quad \text{sobre } [0, a) \times D \quad (4)$$

es la condición correcta para obtener una solución $x(\cdot)$ en el conjunto cerrado D si $x_0 \in D$ y la función continua f satisface (2).

El propósito de esta sección es mostrar cuanto se puede lograr si el lado derecho es una multifunción. En la siguiente sección comenzamos con el caso semicontinuo superiormente, que aparece muy a menudo en aplicaciones.

3. Lado Derecho Semicontinuo Superiormente

Dados $X = \mathbb{R}^n$, $J = [0, a] \subset \mathbb{R}$, un subconjunto cerrado D de X , una multifunción $F : J \times D \rightarrow X$ de imágenes no vacías y $x_0 \in D$, buscamos soluciones absolutamente continuas de

$$x' \in F(t, x) \quad \text{c.t.p. sobre } J, \quad x(0) = x_0. \quad (5)$$

Además, similarmente a lo presentado en (3), se tiene

$$\|F(t, x)\| \leq c(t)(1 + \|x\|) \quad (6)$$

sobre $J \times D$, donde $\|F(t, x)\| = \sup \{|y| : y \in F(t, x)\}$ y $c \in L^1(J)$. También es obvio que una forma más débil de (4) está dado ahora por

$$F(t, x) \cap T_D(x) \neq \emptyset \quad \text{sobre } [0, a) \times D \quad (7)$$

donde

$$T_D(x) = \left\{ y \in X : \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^{-1} \rho(x + \lambda y, D) = 0 \right\} \quad (8)$$

para todo $x \in D$. Bajo estas suposiciones, sin perdida de generalidad reemplazamos (6) por

$$\|F(t, x)\| \leq 1 \quad \text{sobre } J \times D \quad (9)$$

siempre que sea conveniente.

Lema 3.1. Sea $X = \mathbb{R}^n$, $D \subset X$ cerrado y $F : D \rightarrow X$ una multifunción tal que $F(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in D$. Si

- (a) F es semicontinua superiormente y $F(x)$ es convexo y cerrado para todo $x \in D$,
- (b) $\|F(x)\| \leq c(1 + |x|)$ sobre D para algún $c > 0$, y
- (c) $F(x) \cap T_D(x) \neq \emptyset$ sobre D ;

entonces (5) tiene una solución sobre \mathbb{R}_+ para cada $x_0 \in D$.

Teorema 3.1. Sea $X = \mathbb{R}^n$, $J = [0, a] \subset \mathbb{R}$, $D \subset X$ cerrado, una multifunción $F : J \times D \rightarrow X$ semicontinua superiormente tal que $F(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in D$ y que toma valores convexos y cerrados, y que satisface (6) y (7). Entonces, (5) tiene una solución sobre J .

Demostración. Considere $X_0 = \mathbb{R} \times X$ con $|(t, x)| = |t| + |x|$, sea $D_0 = J \times D$ y $F_0 : D_0 \rightarrow X_0$ definido por $F_0(\tau, x) = \{1\} \times F(\tau, x)$. Luego es fácil ver que para $(\tau, x) \in D_0$ con $\tau < a$ tenemos

$$(1, y) \in F_0(\tau, x) \cap T_{D_0}(\tau, x) \Leftrightarrow y \in F(\tau, x) \cap T_D(x).$$

Por la prueba del anterior lema, es claro que podemos aplicar este resultado para X_0, D_0, F_0 y el valor inicial $(0, x_0)$. Así, la primera componente de esta solución es $\tau(t) = t$ y la segunda es la solución de (5). \square

4. Lado Derecho Semicontinuo Inferiormente

Buscamos soluciones absolutamente continuas de

$$x' \in F(t, x) \quad \text{c.t.p. sobre } J, \quad x(0) = x_0 \in D, \quad (10)$$

donde $J = [0, a] \subset \mathbb{R}$, $D \subset X = \mathbb{R}^n$ y $F : J \times D \rightarrow X$ son dados. Ahora asumimos que F es semicontinua inferiormente o que $F(\cdot, x)$ es medible y $F(t, \cdot)$ es semicontinua inferiormente. No podemos esperar soluciones por medio de soluciones aproximadas,

ya que si $x_n \in Gx_n + y_n$ con $y_n \rightarrow 0$, $x_n \rightarrow x$ y G es semicontinua inferiormente, entonces lo mejor que podemos obtener es que $x \in \lim Gx_n$, pero Gx puede ser más pequeño que este límite. Ahora, resultados como el teorema de selección de Michael sugiere buscar selecciones f de F que son suficientemente buenas para obtener soluciones de (10) al resolver

$$x' = f(t, x) \quad \text{c.t.p. sobre } J, \quad x(0) = x_0 \in D. \quad (11)$$

Así, si mantenemos la condición más simple

$$\|F(t, x)\| \leq c(t)(1 + |x|) \quad \text{sobre } J \times D, \quad \text{con } c \in L^1(J) \quad (12)$$

entonces se obtiene el siguiente teorema de existencia.

Teorema 4.1. *Sea $X = \mathbb{R}^n$, $J = [0, a] \subset \mathbb{R}$, $D \subset X$ cerrado, $F : J \times D \rightarrow X$ con $F(t, x) \neq \emptyset$ sobre $J \times D$. Si F es semicontinua inferiormente con valores cerrados y convexos, y satisface (12) y*

$$F(t, x) \subset T_D(x) \quad \text{sobre } [0, a) \times D, \quad (13)$$

entonces (10) tiene solución sobre J .

Aquí, obtenemos además una solución C^1 , ya que F tiene una selección continua f .

El punto más interesante de esta sección es mostrar que, a diferencia del caso semicontinuo superiormente, la condición de convexidad de los valores de F es redundante. Como mencionamos antes, el teorema de selección de Michael falla cuando $F(t, x)$ no es convexo. Antes de entrar en detalles, primero establecemos lo que queremos probar.

Teorema 4.2. *Sea $X = \mathbb{R}^n$, $J = [0, a] \subset \mathbb{R}$, $D \subset X$ cerrado, $F : J \times D \rightarrow X$ con $F(t, x) \neq \emptyset$ sobre $J \times D$. Si F es semicontinua inferiormente con valores cerrados y, satisface (13) y*

$$\|F(t, x)\| \leq c(1 + |x|) \quad \text{sobre } J \times D,$$

entonces (10) tiene solución sobre J .

Note que, por medio de reducciones, podemos asumir sin pérdida de generalidad que D es compacto y que F satisface

$$\|F(t, x)\| \leq 1$$

sobre $J \times D$. Luego, sea f una selección de F y consideremos la multifunción

$$\tilde{F}(t, x) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{conv}} f \left((J \times D) \cap \bar{B}_\delta(t, x) \right);$$

y el problema

$$x' \in \tilde{F}(t, x) \quad \text{c.t.p. sobre } J, \quad x(0) = x_0. \quad (14)$$

Ya que $f(t, x) \in \tilde{F}(t, x) \cap T_D(x)$, el problema (14) tiene una solución, por el teorema (3.1). Mostraremos que esta solución es la

solución de (11). La idea es hallar condiciones sobre f que garanticen que (11) y (14) tengan el mismo conjunto solución y luego mostrar que F tiene una selección que satisfaga estas condiciones.

En relación al primer punto, note que una solución de (14) satisface $|x'(t)| \leq 1$ casi en todas partes de $J \times D$, ya que $\|f(t, x)\| \leq 1$; luego $|x(t) - x(s)| \leq |t - s|$ para todo $t \in J$, de donde $(t, x(t)) \in (s, x(s)) + K_\alpha$ para $t \geq s$, donde K_α es un cono en \mathbb{R}^{n+1} , esto es,

$$K_\alpha = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| \leq \alpha t \right\} \quad \text{con } \alpha \geq 1. \quad (15)$$

Ahora, los conjuntos solución coinciden si f es continua, ya que luego (14) es (11), pero también es fácil ver que ello se da si f es sólo continua sobre K_α con $\alpha > 1$, esto es, para toda sucesión $(t_n, x_n) \in (t, x) + K_\alpha$ tal que $(t_n, x_n) \rightarrow (t, x)$, se tiene que $f(t_n, x_n) \rightarrow f(t, x)$.

Lema 4.1. *Sea $X = \mathbb{R}^n$, $J = [0, a] \subset \mathbb{R}$ y $D \subset X$ cerrado. Supongamos además que $f : J \times D \rightarrow X$ es continua a lo largo de K_α con $\alpha > 1$, $\|f(t, x)\| \leq 1$ sobre $J \times D$ y $f(t, x) \in T_D(x)$ sobre $[0, a) \times D$. Entonces, (11) tiene una solución absolutamente continua sobre J y los conjuntos solución de (11) y (14) son iguales.*

Demostración. Sea x una solución de (14). Entonces, $J = \bigcup_{n \geq 0} J_n$ con $\mu(J_0) = 0$ y para $n \geq 1$, los conjuntos J_n son disjuntos, cerrados, $x'|_{J_n}$ es continua y $x'(t) \in \tilde{F}(t, x(t))$ sobre J_n . Sea $J_n \setminus N_n$ los puntos de densidad de J_n , y sean $t \in J_n \setminus N_n$. Luego, hallamos $t_k \in J_n \cap (t, \infty)$ con $t_k \rightarrow t$, de donde $x'(t_k) \rightarrow x'(t)$ y

$$(s, y) \in (t, x(t)) + K_\alpha \quad \text{si } (s, y) \in \bar{B}_{\delta_k}(t_k, x(t_k)),$$

donde δ_k es suficientemente pequeño. De esta forma $x' = f(t, x)$ sobre $(J \setminus J_0) \setminus \bigcup_{n \geq 1} N_n$, es decir x es solución de (11). \square

Así, el paso final para la demostración del teorema (3.1) se prueba.

Lema 4.2. *Sean $X = \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R} \times X$ compacto, $F : M \rightarrow X$ ($F(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in M$) semicontinua inferiormente con valores cerrados y K es el cono K_α de (15). Entonces F tiene una selección continua a lo largo de K . Tenemos el mismo resultado, si M es localmente compacto.*

Demostración. Siguiendo el procedimiento estandar de la prueba de Michael, primero construimos una buena selección aproximada y luego procedemos de manera usual. Para $\omega \in M$ consideramos los entornos $W(\omega)$ de la forma $M \cap (\tilde{\omega} + K_\delta)$, con $\tilde{\omega} \in \mathbb{R} \times X$ y $K_\delta = K \cap ([0, \delta) \times X)$ para $\delta > 0$, tal que $\omega \in \text{int}(W(\omega))$, donde el interior se entiende relativo a M .

1. Sea $V = B_\epsilon(0)$. Ya que F es semicontinua inferiormente, tenemos que $F^{-1}(y - V)$ es abierto en M , y para $\omega \in F^{-1}(y - V)$ encontramos $W(\omega) \subset F^{-1}(y - V)$. Ya que $\omega \in F^{-1}(y - V)$ para $y \in F(\omega)$ y M es compacto, tenemos $M = \bigcup_{i=1}^m W_i$ con $W_i = W(\omega_i) \subset F^{-1}(y - V)$. Hacemos los W_i disjuntos al definir $M_1 = W_1$ y $M_i = W_i \setminus \bigcup_{j < i} W_j$ para $i \geq 2$, y defina

$f : M \rightarrow X$ tal que $f(\omega) = y_i$ sobre M_i , para $i = 1, \dots, m$. Evidentemente, tenemos $f(\omega) \in F(\omega) + V$ sobre M . Si

$$\omega_0 \in M_i, \quad \omega_n \in (\omega_0 + K) \cap M \quad \text{y} \quad \omega_n \rightarrow \omega_0,$$

entonces $\omega_n \in (\omega_0 + K_\delta) \cap M \subset M_i$ para algún $\delta > 0$ pequeño y n muy grande; luego $f(\omega_n) = y_i = f(\omega_0)$ para este n y de esta manera f es constante por pedazos y continua sobre K .

- Sea $V_k = B_{2^{-k}}(0)$. Obtenemos funciones $f_k : M \rightarrow X$ que son constantes por pedazos, continuas a lo largo de K y tal que para todo $\omega \in M$

$$\begin{aligned} f_k(\omega) &\in f_{k-1}(\omega) + 2V_{k-1} \quad \text{para } k \geq 2, \\ f_k(\omega) &\in F(\omega) + V_k \quad \text{para } k \geq 1. \end{aligned} \tag{16}$$

En efecto, el primer paso con $\epsilon = 1/2$ da f_1 , y dados f_1, \dots, f_k , consideramos f_k como la f del primer paso con $\epsilon = 2^{-k}$. Ya que $G(\omega) = F(\omega) \cap (y_i + V_k)$ es semicontinua inferiormente sobre el compacto \bar{M}_i y no necesitamos tener valores cerrados para utilizar el argumento del primer paso, hacemos para \bar{M}_i , G y V_{k+1} lo que hicimos en el primer paso para M , F y V . Así obtenemos

$$\bar{M}_i = \bigcup_{l=1}^p \bar{M}_i^l,$$

donde los conjuntos \bar{M}_i^l son disjuntos, luego

$$M_i = \bigcup_{l=1}^p \bar{M}_i^l \cap M_i,$$

y podemos continuar con M_i en vez de M en el primer paso para obtener f_{k+1} sobre M_i , y esto para $i = 1, 2, \dots, m$. Evidentemente, (16) implica que $f_k \rightarrow f$ uniformemente sobre M , para algún f que es continua a lo largo que K y que satisface $f(\omega) \in F(\omega)$ sobre M .

- Sea M localmente compacto, es decir, cada $\omega \in M$ tiene un entorno $U(\omega)$ con clausura compacta. Entonces esta cobertura abierta tiene un refinamiento $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Así, como \bar{U}_λ es compacto, tenemos

$$\bar{U}_\lambda \subset \bigcup_{l=1}^{m_\lambda} W_\lambda^l \quad \text{con } W_\lambda = W(\omega_\lambda^l),$$

para cada $\lambda \in \Lambda$, y un buen orden \leq de

$$\{W_\lambda^l : \lambda \in \Lambda, l = 1, \dots, m_\lambda\}.$$

De esta forma podemos tomar los W_λ^l disjuntos al definir

$$\begin{aligned} M_\lambda^l &= W_\lambda^l \setminus \bigcup W_\mu^j, \quad \text{con} \\ N(l, \lambda) &= \{(j, \mu) : W_\mu^j < W_\lambda^l \quad \text{y} \quad W_\mu^j \cap W_\lambda^l \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

donde $W < \bar{W}$ significa $W \leq \bar{W}$ y $W \neq \bar{W}$. Evidentemente, los M_λ^l juntos cubren M . Por el caso compacto, hallamos una selección f_λ^l continua a lo largo de K sobre M_λ^l , y definimos $f : M \rightarrow X$ por $f(\omega) = f_\lambda^l(\omega)$. Entonces f es una selección de F continua a lo largo de K ; recuerde que $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es localmente finito, luego $M \cap B_\rho(\omega_0)$ intersecciona solo un número finito de W_λ^l si ρ es suficientemente pequeño, y de esta manera $(\omega_0 + K_\delta) \cap M \subset M_\lambda^l$ si $\omega_0 \in M_\lambda^l$ y δ es suficientemente pequeño. □

5. Conclusiones

En este artículo se presentaron condiciones necesarias para que una inclusión diferencial, con condición inicial, admita una solución.

Se consideraron dos tipos de condiciones principales, semicontinuidad superior y semicontinuidad inferior; cada una de ellas junto a otras condiciones, dan dos condiciones de existencia diferentes. Dedicamos una sección para cada uno de los dos criterios. Los resultados principales están dados en los teoremas 3.1 y 4.2.

En un sentido extendido tipo Caratheodory, para ecuaciones diferenciales ordinarias, se pueden trabajar condiciones de existencia que admitan soluciones absolutamente continuas para una inclusión diferencial; estas condiciones constituyen un trabajo futuro si se quiere seguir trabajando en esta línea.

Referencias

- [1] Aubin J.-P., Cellina A., Differential Inclusions, Springer, 1984.
- [2] Aubin J.-P., Frankowska H., Set-Valued Analysis, Birkhauser, 1990.
- [3] Deimling Klaus, Multivalued Differential Equations, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, Walter de Gruyter (Ed.), Berlin - New York, 1992.
- [4] Macky J., Strauss A., Introduction to Optimal Control Theory, Springer, 1982.
- [5] Munkres J., Topology, Prentice Hall, 2000.



Ecuaciones diferenciales parciales lineales aritméticas^{☆☆}

Ramiro Choque C.^{1,1}

Resumen

Las ecuaciones diferenciales parciales aritméticas $x'_p = a$, $x'_p = ax^n$ y sus casos particulares son estudiadas en [3], [7] y [8]. En este artículo generalizamos el estudio a las ecuaciones diferenciales parciales lineales aritméticas de orden superior de la forma $a_n x_p^{(n)} + a_{n-1} x_p^{(n-1)} + \dots + a_1 x'_p + a_0 x = b$. Analizamos ecuaciones con coeficientes constantes, y clasificamos en soluciones exponenciales y las que no lo son.

Palabras clave: Derivada aritmética, Derivadas parciales aritméticas, Ecuaciones diferenciales aritméticas

1. Introducción

La definición de derivada aritmética fue incluido en "Putnam Prize Competition" en 1950, y refinado por E.J. Barbeau [1] en su artículo "Remark on an Arithmetic Derivative" en 1961. La derivada aritmética inicialmente se define como 1 para los números primos y usando la factorización única en primos de un número natural y la regla del producto del cálculo se tiene la derivada aritmética de cualquier número natural. Las propiedades y el comportamiento de la derivada aritmética están directamente relacionados con algunas de las conjeturas más antiguas y estudiadas en la teoría de números elemental [2]. Sobre la historia de las derivadas aritméticas, sus generalizaciones y lista de referencias ver [7]. Ufnarovski y Ahlander [2] generalizaron este concepto a números racionales. Entre otras cosas, resolvieron ciertas ecuaciones diferenciales aritméticas. La idea de la derivada parcial aritmética se debe a Kovic [3] para enteros positivos; y en [7] estudian varias ecuaciones diferenciales parciales aritméticas de primer y segundo orden y enuncian conjeturas, que son probamos en [8].

En la segunda sección de este documento definimos la derivada aritmética mostrando que proviene de la derivada usual de Cálculo y damos las interpretaciones geométricas. En la tercera sección definimos una ecuación diferencial parcial lineal y la terminología asociada a este concepto. La cuarta sección es el estudio de las ecuaciones lineales de primer orden. La quinta sección es el estudio de las ecuaciones de segundo orden y su generalización a orden superior.

2. La derivada parcial

Denotamos con el símbolo \mathbb{Z} al conjunto de los número enteros, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$, y $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ para el conjunto de los números primos.

Como consecuencia del Teorema Fundamental de la Aritmética de los números enteros, se tiene la descomposición (única) en factores primos de un número racional $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots$$

donde la sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ son todos cero, salvo un número finito. Queda definida la función $v_{p_i} : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ dado por $v_{p_i}(a) = \alpha_i$. Podemos escribir $a = \text{sign}(a) \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(a)}$. Definimos $v_p(0) = 0$ para todo $p \in \mathbb{P}$. De esto se sigue que, si $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, existe único entero α y un número racional no cero $\frac{a}{b}$ tales que $x = \frac{a}{b} p^\alpha$ donde $p \nmid a$ y $p \nmid b$. Se sigue que $v_p(x) = \alpha$ que es denominado valuación p -ádica. Para la demostración de la siguiente proposición ver [9].

Proposición 2.1. Sean $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $p \in \mathbb{P}$. Entonces

1. $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.
2. $v_p(x/y) = v_p(x) - v_p(y)$.
3. $v_p(x + y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$, igualdad si $v_p(x) \neq v_p(y)$.

Diremos que el entero primo p divide al número racional a , denotado $p \mid a$, si $v_p(a) \neq 0$. También decimos que a es divisible por p o que p es factor de a . La expresión $p \nmid a$ significa que p no divide a . Por ejemplo $2 \mid \frac{3}{4}$ ya que $v_2(3/4) = -2$ es distinto

[✉] rchoquec@gmail.com (Ramiro Choque C.)

de cero, y $5 \nmid \frac{3}{4}$ puesto que $v_5(3/4) = 0$. La proposición siguiente lista las propiedades básicas de divisibilidad que emplearemos con frecuencia.

Proposición 2.2. Sean $a, b, x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ y $p \in \mathbb{P}$. Entonces

1. Si $p \mid a$ y $p \nmid x$, entonces $p \mid ax$
2. Si $p \mid a$ y $p \nmid b$, entonces $p \mid \frac{a}{b}$
3. Si $p \mid b$ y $p \nmid a$, entonces $p \nmid \frac{a}{b}$
4. Si $p \mid a, b$; $p \nmid x, y$; $v_p(a) \neq v_p(b)$, entonces $p \mid ax + by$.
5. Si a es un entero, entonces la relación \mid es la divisibilidad usual de \mathbb{Z} .

El inciso 4 de la proposición anterior se generaliza mediante inducción matemática.

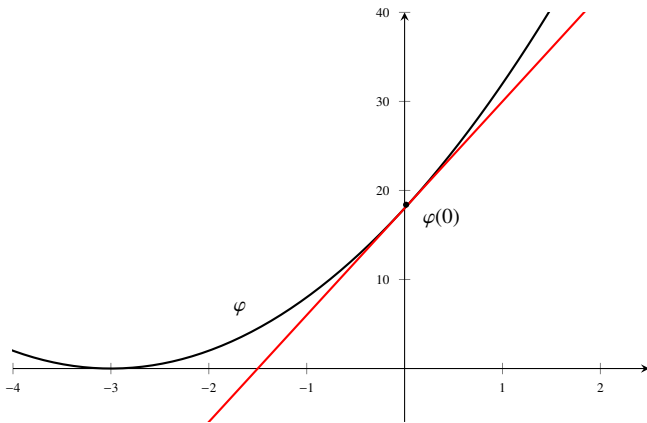
Corolario 2.1. Si $p \mid a_1, a_2, \dots, a_n$; $p \nmid x_1, x_2, \dots, x_n$ y $v_p(a_i) \neq v_p(a_j)$ para $i < j$, entonces $p \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$.

Sea a un número racional no cero tal que $a = \bar{a}p^\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{Z}$ y $\bar{a} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Sea φ la función real dada por $\varphi(t) = \bar{a}(p+t)^\alpha$ para $t \in (-1, 1)$. La derivada parcial de a respecto de p es definida por

$$a'_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \varphi'(0) = \frac{v_p(a)}{p} a.$$

De esto, podemos intuir que la derivada aritmética debería poseer algunas propiedades de la derivada usual de Cálculo. También con este resultado tenemos la interpretación usual de la derivada como la pendiente de la recta tangente de la función φ en cero. Por ejemplo $18'_3 = 12$ es la pendiente de la recta tangente en cero de $\varphi(t) = 2t^2 + 12t + 18$ tal como ilustra la figura 2. Como a es pro-

Derivada aritmética: $18'_3 = \varphi'(0)$



ducto de primos, representa área o volumen cuyos lados, o aristas son los factores primos respectivamente, y la derivada a'_p es interpretado como semiperímetro o semisuperficie. Una interpretación más general se describe en [4].

Como consecuencia de la proposición 2.1, tenemos

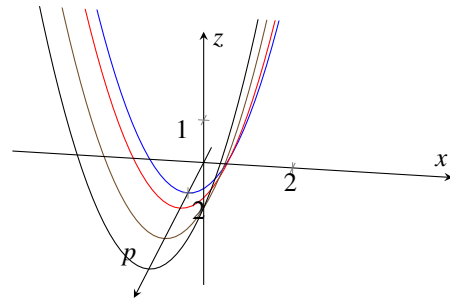
Proposición 2.3. Sean $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ y $p \in \mathbb{P}$. Entonces

1. $(ab)'_p = a'_p b + ab'_p$.
2. $(a^n)'_p = na^{n-1} a'_p$ si $n \in \mathbb{Z}^+$.
3. $(a/b)'_p = \frac{ba'_p - ab'_p}{b^2}$.

A la derivada parcial de a'_p respecto de p se denota por a''_p , es decir $a''_p = (a'_p)'_p$ que también se expresa con $a_p^{(2)}$. Del mismo modo se definen las derivadas parciales de orden superior.

3. Ecuaciones diferenciales aritméticas

Consideraremos funciones de $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ en \mathbb{Q} . Por ejemplo: p^p , x^p , $px^2 + 2x + 1$, y $\frac{3}{x^2+p}$ donde $p \in \mathbb{P}$ y $x \in \mathbb{Q}$. La gráfica de la función $z = f(p, x)$ son curvas de nivel que corresponden a números primos. La siguiente figura ilustra la gráfica de $z = x^2 + p$.



También consideraremos funciones en varias variables de la forma $z = f(p, x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde $p \in \mathbb{P}$ y $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Q}$.

Una ecuación diferencial parcial aritmética de primer orden es la de forma

$$x'_p = f(p, x),$$

de segundo orden

$$x''_p = f(p, x, x'_p)$$

y de orden n

$$x_p^{(n)} = f(p, x, x'_p, \dots, x_p^{(n-1)}).$$

Un ecuación diferencial parcial lineal de orden n es de la forma

$$a_n x_p^{(n)} + a_{n-1} x_p^{(n-1)} + \dots + a_1 x'_p + a_0 x + b = 0.$$

Cuando $b = 0$, diremos que es una ecuación homogénea. Si los coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n no son divisibles por p , diremos que es una ecuación con coeficientes constantes (respecto de p). Las constantes respecto de p , esto es las $x \in \mathbb{Q}$ tales que $p \nmid x$, son soluciones de la ecuación homogénea, que llamaremos soluciones constantes. Sólo trataremos con ecuaciones diferenciales parciales aritméticas, por simplicidad, llamaremos ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 3.1. $5x''_2 + 15x'_2 - 3x = 7$ es una ecuación lineal con coeficientes constantes no homogénea, y la ecuación $x''_2 + 4x'_2 + 3x = 0$ es lineal homogénea y no es de coeficientes constantes.

La mayor parte de las ecuaciones son imposibles de resolver en forma explícita, pero es impotente saber en que condiciones se tiene al menos una solución, por ello enunciamos el siguiente teorema, cuya demostración es inmediata.

Teorema 3.1. 1. Si la ecuación $f(p, x) = 0$ con p un número primo fijo tiene una solución \bar{x} tal que $p \nmid \bar{x}$, entonces la ecuación diferencial $x'_p = f(p, x)$ tiene al menos una solución, la solución constante \bar{x} .

2. Si $f(p, p^n) = np^{n-1}$ con p un número primo fijo y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces la ecuación diferencial $x'_p = f(p, x)$ tiene al menos la solución $x = p^n$.

En la secciones siguientes resolvemos las ecuaciones diferenciales parciales sistemáticamente. Hacemos énfasis a ecuaciones lineales y de coeficientes constantes. También son resueltas algunas ecuaciones con coeficientes no constantes.

4. Ecuaciones lineales de primer orden

Para $p \in \mathbb{P}$ y $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, las ecuaciones $x'_p = a$, y $x'_p = ax^n$ son estudiados en [7] y [8] tanto en la resolución y número de soluciones. En esta sección analizamos ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes homogéneas y las que no lo son. El siguiente teorema es incluido por razones de interpretación y terminología.

Teorema 4.1. Sea p un número primo con $p \nmid a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Entonces

$$x'_p + ax = 0 \tag{1}$$

tiene solución $x = \bar{x}p^{-ap}$, donde $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}$.

Demostración. Sea $x = \bar{x}p^{\alpha p^k}$ una solución no cero de (1) tal que $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $p \nmid \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{Z}^+$. Entonces $x'_p = \alpha \bar{x} p^{\alpha p^k + k - 1}$. Sustituyendo en (1) se tiene $\alpha \bar{x} p^{\alpha p^k + k - 1} + a \bar{x} p^{\alpha p^k} = 0$. Esto es equivalente a

$$\alpha p^{k-1} + a = 0.$$

Si $k \neq 1$, se deduce que $p \mid a$ que contradice la hipótesis. Luego, debe ser $k = 1$, de donde $\alpha = -a$, que es un número entero por hipótesis, así $x = \bar{x}p^{-ap}$ es una solución, cuya verificación es inmediata. □

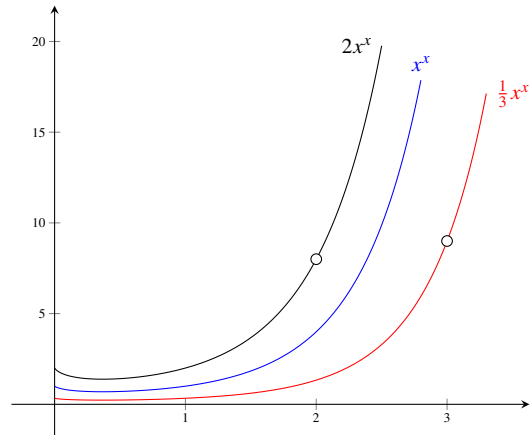
Un propiedad que caracteriza a las funciones exponenciales es que su derivada es proporcional a la misma función. La existencia de funciones exponenciales respecto a la derivada parcial aritmética, es una consecuencia del teorema anterior. En efecto. Sea $x = f(p)$ tal que $x'_p = x$, entonces, por el teorema anterior

$$f(p) = x = \bar{x}p^p, \quad p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}.$$

Definimos $f(0) = \bar{x}$. En general, si una expresión de la forma $\bar{x}p^{\alpha p^k}$ donde $p \nmid \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ y $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, es una

solución de alguna ecuación diferencial, diremos que es una *solución exponencial*, y si $\bar{x}p^{\alpha_1 p^{\alpha_2 p^{\alpha_3}}}$ es una solución, diremos que es una solución 2-exponencial, donde $\alpha_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}^+$ y $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Cuando afirmemos que es una solución exponencial o que es 2-exponencial, supondremos que se satisface estas condiciones.

La extensión de estas funciones sobre los números racionales positivos poseen puntos donde la función no esta definida tal como muestra la siguiente figura



No es difícil probar que la ecuación $x'_p + ax = 0$ no tiene soluciones 2-exponenciales. En la siguiente sección mostraremos que existen ecuaciones lineales de orden superior que poseen soluciones 2-exponenciales.

En lo que sigue analizamos ecuaciones lineales no homogéneas.

Teorema 4.2. Sean a, b números racionales no ceros y no divisibles por $p \in \mathbb{P}$. Entonces la ecuación

$$x'_p + ax = b \tag{2}$$

no tiene soluciones exponenciales.

Demostración. Sea $x = \bar{x}p^{\alpha p^k}$ una solución exponencial de (2). Entonces $x'_p = \alpha \bar{x} p^{\alpha p^k + k - 1}$. Sustituyendo en (2)

$$\alpha \bar{x} p^{\alpha p^k + k - 1} + a \bar{x} p^{\alpha p^k} = b. \tag{3}$$

Por hipótesis αp^k es no cero. Supongamos que $\alpha p^k + k - 1 = 0$, entonces $-\alpha p^k = k - 1$ que es no negativo, así $\alpha < 0$. Por inducción es fácil probar que $p^k > k - 1$ para todo entero positivo k . Pero

$$k - 1 = -\alpha p^k \geq p^k > k - 1$$

que es una contradicción. Luego $\alpha p^k + k - 1 \neq 0$. Ahora de (3) y corolario 2.1 se deduce que b es divisible por p que es una contradicción. □

Cuando los coeficientes no son constantes respecto de p , puede existir soluciones exponenciales o no. Un método para hallar

una solución de una ecuación lineal no homogénea, consiste fundamentalmente en intuir la forma de una solución. Uno de los métodos utilizados es de coeficientes indeterminados, que emplearemos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.1. Consideremos la ecuación

$$x'_p + ax = bp^{kp} \tag{4}$$

donde a y b son racionales, no ceros y no divisibles por p , y k un entero positivo. Como el segundo miembro de (4) es una exponencial, y la derivada de una exponencial es otra exponencial, es coherente plantear una solución exponencial de la forma $x = \bar{x}p^{kp}$. Entonces $x'_p = k\bar{x}p^{kp}$. Sustituyendo en (4) $k\bar{x}p^{kp} + a\bar{x}p^{kp} = bp^{kp}$, simplificando $k\bar{x} + a\bar{x} = b$, luego $\bar{x}(k + a) = b$. Cuando $p \nmid (k + a)$, se tiene la solución exponencial

$$x = \frac{b}{k + a} p^{kp}.$$

Ejemplo 4.2. La ecuación $x'_p + ax = bp$ donde a y b son racionales no ceros que no son divisibles por el primo p , no tiene soluciones exponenciales. En efecto sea $x = \bar{x}p^{\alpha p^k}$ una solución exponencial. Entonces $\alpha\bar{x}p^{\alpha p^k + k - 1} + a\bar{x}p^{\alpha p^k} = bp$, que es equivalente a

$$\alpha\bar{x}p^{\alpha p^k + k - 2} + a\bar{x}p^{\alpha p^k - 1} = b. \tag{5}$$

Como en el teorema 4.2 los factores potencia del primo p de (5) son no ceros, lo que implica que b es divisible por p que es una contradicción.

El siguiente teorema presenta las soluciones no exponenciales de las ecuaciones lineales de primer orden, exactamente son dos.

Teorema 4.3. Supongamos que $n, m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{P}$ tales que $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $m + 1$ no son divisibles por p . Entonces la ecuación diferencial

$$ax'_p + bp^n x = cp^m \tag{6}$$

tiene dos soluciones no exponenciales:

$$x = \frac{cp^{m+1}}{a(m+1) + bp^{n+1}}, \quad x = \frac{cp^{m-n}}{a(m-n)p^{-1-n} + b}.$$

Demostración. Sea $x = \bar{x}p^\alpha$ una solución de (6) donde $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}$ y $\alpha \in \mathbb{Z}$. Entonces $x'_p = \alpha\bar{x}p^{\alpha-1}$. Sustituyendo en (6) $a\alpha\bar{x}p^{\alpha-1} + bp^n\bar{x}p^\alpha = cp^m$ que podemos escribir en la forma

$$a\alpha\bar{x}p^{\alpha-1-m} + b\bar{x}p^{\alpha+n-m} = c. \tag{7}$$

Si $\alpha = m + 1$, entonces $a(m + 1)\bar{x} + b\bar{x}p^{1+n} = c$. La hipótesis garantiza que el factor $a(m + 1) + bp^{n+1}$ no es cero ni divisible por p , luego $\bar{x} = \frac{c}{a(m+1) + bp^{n+1}}$ no es divisible por p , y por tanto $x = \frac{c}{a(m+1) + bp^{n+1}} p^{m+1}$ es una solución. Si $\alpha = m - n$, entonces de (7) $a(m - n)\bar{x}p^{-n-1} + b\bar{x} = c$. Por hipótesis, el factor $a(m - n)p^{-n-1} + b$ no es cero ni divisible por p , luego $\bar{x} = \frac{c}{a(m-n)p^{-n-1} + b}$ no es divisible por p , de donde $x = \frac{c}{a(m-n)p^{-n-1} + b} p^{m-n}$ es también una solución. Si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{m + 1, m - n\}$, de (7) y corolario 2.1 se deduce que $p \mid c$ que es una contradicción. \square

Ahora consideremos ecuaciones cuya derivada parcial es una función polinomial con coeficientes no ceros constantes respecto de p . Para fijar ideas, analizamos la ecuación

$$x'_p = ax^2 + bx + c. \tag{8}$$

Claramente (8) no tiene soluciones exponenciales. Sea $x = \bar{x}p^\alpha$ una solución donde $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}$ y $\alpha \in \mathbb{Z}$. Entonces $x'_p = \alpha\bar{x}p^{\alpha-1}$. Sustituyendo en (8) tenemos

$$\alpha\bar{x}p^{\alpha-1} = a\bar{x}^2 p^{2\alpha} + b\bar{x}p^\alpha + c. \tag{9}$$

Si $\alpha = 0$, entonces $0 = a\bar{x}^2 + b\bar{x} + c$, de donde $x = \bar{x}$ es la solución constante (si existe).

Si $\alpha = 1$, entonces de (9)

$$\bar{x} = a\bar{x}^2 p^2 + b\bar{x}p + c.$$

Si esta ecuación tiene una solución $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ tal que $p \nmid \bar{x}$, entonces $x = \bar{x} \cdot p$ es una solución como es fácil de constatar.

Si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, entonces del corolario 2.1 y (9) se deduce $p \mid c$ que contradice lo asumido. Con el mismo argumento se prueba el siguiente teorema.

Teorema 4.4. Sea $p \in \mathbb{P}$ y $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ no divisibles por p y a_n y a_0 no ceros. Entonces las soluciones de la ecuación

$$x'_p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \tag{10}$$

son:

1. soluciones constantes respecto de p (si existen)
2. $x = \bar{x} \cdot p$ donde \bar{x} es una solución de la ecuación

$$\bar{x} = a_n \bar{x} p^n + a_{n-1} \bar{x}^{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 \bar{x} p + a_0$$

tal que $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}$.

El número de soluciones de la ecuación (10) es a lo más $2n$. El teorema 4.4 es un teorema de existencia. A continuación damos un resultado más específico cuando $n = 1$.

Teorema 4.5. La ecuación diferencial parcial lineal aritmética de primer orden no homogénea con coeficientes constantes no ceros

$$x'_p = ax + b \tag{11}$$

tiene exactamente dos soluciones, a saber: La solución $x = -\frac{b}{a}$, y $x = \frac{bp}{1-ap}$.

Demostración. Sea $x = \bar{x}p^\alpha$ una solución de (11), donde $\alpha \in \mathbb{Z}$ y $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Entonces (11) es equivalente a

$$\alpha p^{\alpha-1} \bar{x} = ap^\alpha \bar{x} + b. \tag{12}$$

Si $\alpha = 0$, la ecuación (12) se reduce a

$$0 = a\bar{x} + b.$$

De donde $\bar{x} = -\frac{b}{a}$ que es constante respecto de p , y tenemos la solución $x = -\frac{b}{a}$. Si $\alpha = 1$, la ecuación (12) se reduce a $\bar{x} = ap\bar{x} + b$, que podemos escribir en la forma

$$\bar{x}(1 - ap) = b.$$

Note que $1 - ap$ no es divisible por p , ni puede ser cero, así

$$\bar{x} = \frac{b}{1 - ap}.$$

Luego la solución en este caso es

$$x = \frac{b}{1 - ap} \cdot p.$$

Si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, entonces de (12) se deduce $p \mid b$ que es una contradicción. \square

Ejemplo 4.3. La ecuación diferencial $x'_2 = 3x - 15$ tiene dos soluciones. La solución constante $x = \frac{15}{3} = 5$ y la solución $x = \frac{-15 \cdot 2}{1 - 3 \cdot 2} = 6$.

Ejemplo 4.4. La ecuación $x'_3 = x^2 - 3x + 2$ tiene dos soluciones $x = 1, x = 2$ constantes respecto de 3, y la ecuación $x'_2 = x^2 - 3x + 3$ tiene una única solución, $x = 2$, que no es una solución constante.

La resolución de ecuaciones diferenciales asociadas a funciones racionales es análogo a las funciones polinomiales, pero el número de soluciones puede ser menor.

Teorema 4.6. Sea $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Q}$ no divisibles por p y a_0, a_n y b_m no ceros. Entonces

$$x'_p = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad (13)$$

tiene a lo más $\max\{n, m + 1\}$ soluciones.

Demostración. Sea $x = \bar{x}p^\alpha$ una solución de (13), donde $\alpha \in \mathbb{Z}$ y $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Sustituyendo en (13)

$$\alpha \bar{x} p^{\alpha-1} = \frac{a_n \bar{x}^n p^{\alpha n} + a_{n-1} \bar{x}^{n-1} p^{\alpha(n-1)} + \dots + a_1 \bar{x} p^\alpha + a_0}{b_m \bar{x}^m p^{\alpha m} + a_{m-1} \bar{x}^{m-1} p^{\alpha(m-1)} + \dots + b_1 \bar{x} p^\alpha + b_0}. \quad (14)$$

Si $\alpha = 0$, la ecuación (14) se reduce a

$$0 = a_n \bar{x}^n + a_{n-1} \bar{x}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{x} + a_0.$$

Si esta ecuación tiene una solución $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ tal que $p \nmid \bar{x}$, entonces $x = \bar{x}$ es una solución de (13). Si $\alpha = 1$, entonces la ecuación (14) es equivalente a

$$\bar{x} = \frac{a_n \bar{x}^n p^n + a_{n-1} \bar{x}^{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 \bar{x} p + a_0}{b_m \bar{x}^m p^m + a_{m-1} \bar{x}^{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 \bar{x} p + b_0} \quad (15)$$

que es equivalente a una ecuación polinomial de grado a lo más $\max\{n, m + 1\}$. Si la ecuación (15) tiene una solución $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ tal que $p \nmid \bar{x}$, entonces $x = \bar{x} \cdot p$ es una solución. Si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, de (14) se deduce que $p \mid a_0$ que es una contradicción. \square

5. Ecuaciones lineales de orden superior

Una ecuación lineal de segundo orden es de la forma

$$ax''_p + bx'_p + cx + d = 0 \quad (16)$$

donde a, b, c y d son números racionales, $p \in \mathbb{P}$ y $a \neq 0$. Si p no divide a, b, c y d , es una ecuación con coeficientes constantes. Cuando $d = 0$ la ecuación es homogénea. No se pierde generalidad cuando se supone que a, b, c y d son números enteros.

Como es usual en ecuaciones diferenciales, primero estudiamos las ecuaciones homogéneas. En las ecuaciones homogéneas es natural buscar soluciones exponenciales.

Teorema 5.1. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ con $p \nmid c$. Entonces la ecuación

$$ax''_p + bx'_p + cx = 0 \quad (17)$$

tiene una solución de la forma $x = \bar{x}p^{\alpha p}$ donde $p \nmid \alpha \in \mathbb{Z}$ y α satisface la ecuación auxiliar $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, y otro solución de la forma $x = \bar{x}p^{\alpha p^2}$ donde $p \nmid \alpha \in \mathbb{Z}$, y α satisface la ecuación auxiliar $ap^2\alpha^2 + (a+bp)\alpha + c = 0$. En ambas soluciones $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q}$.

Demostración. Sea $x = \bar{x}p^{\alpha p^k}$ una solución exponencial de (17). Entonces

$$\begin{aligned} x'_p &= \alpha \bar{x} p^{\alpha p^k + k - 1} \\ x''_p &= \alpha(\alpha p^k + k - 1) \bar{x} p^{\alpha p^k + k - 2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (17)

$$a\alpha(\alpha p^k + k - 1) \bar{x} p^{\alpha p^k + k - 2} + b\alpha \bar{x} p^{\alpha p^k + k - 1} + c \bar{x} p^{\alpha p^k} = 0.$$

Simplificando

$$a\alpha(\alpha p^k + k - 1) p^{k-2} + b\alpha p^{k-1} + c = 0. \quad (18)$$

Si $k = 1$, entonces de (18)

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0.$$

Si esta ecuación tiene una solución α tal que $p \nmid \alpha \in \mathbb{Z}$, entonces $x = \bar{x}p^{\alpha p}$ es una solución. Si $k = 2$, entonces de (18) $a\alpha(\alpha p^2 + 1) + b\alpha p + c = 0$, así $\alpha \in \mathbb{Z}$ debe satisfacer la ecuación

$$ap^2\alpha^2 + (a + bp)\alpha + c = 0.$$

Si $p \nmid \alpha \in \mathbb{Z}$, tenemos la solución $x = \bar{x}p^{\alpha p^2}$. Si $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2\}$, entonces de (18) se deduce que $p \mid c$ que contradice la hipótesis. \square

Ejemplo 5.1. La primera ecuación auxiliar de $x'_3 - 3x'_3 + 2x = 0$ es $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$, cuyas raíces son $\alpha = 1, \alpha = 2$. Como estos no son divisibles por 3, tenemos las soluciones $x = \bar{x} \cdot 3^3$ y $x = \bar{x} \cdot 3^6$ donde $3 \nmid \bar{x}$. La segunda ecuación auxiliar $9\alpha^2 - 8\alpha + 2 = 0$ no tiene soluciones. Las ecuaciones auxiliares de $x'_2 + 3x'_2 - 11x = 0$ son $\alpha^2 + 3\alpha - 11 = 0$ y $4\alpha^2 + 7\alpha - 11 = 0$. La primera ecuación no tiene soluciones enteras y la segunda sólo $\alpha = 1$ que no es divisible por 2. Luego la ecuación tiene solución $x = \bar{x} \cdot 2^4$ donde $2 \nmid \bar{x}$.

Ejemplo 5.2. La ecuación $x_2'' - 3x_2' + x = 0$ tiene una solución $x = 16 = 2^{2^2}$ que es 2-exponencial, pero $x_3'' - 3x_3' + x = 0$ no tiene soluciones 2-exponenciales. Este último ejemplo se puede generalizar a ecuaciones de orden superior como sigue.

Teorema 5.2. Sea p es un número primo mayor a n y a_0, a_1, \dots, a_n números enteros que no son divisibles por p y a_0, a_n no ceros. Entonces la ecuación

$$a_n x_p^{(n)} + a_{n-1} x_p^{(n-1)} + \dots + a_1 x_p' + a_0 x = 0. \quad (19)$$

no tiene soluciones 2-exponenciales.

Demostración. Sea $x = \bar{x} p^{\alpha_1 p^{\alpha_2 p^{\alpha_3}}}$ una solución 2-exponencial. Entonces $x_p' = \bar{x} \alpha_1 p^{\alpha_1 p^{\alpha_2 p^{\alpha_3} + \alpha_2 p^{\alpha_3} - 1}}$. Denotemos $\alpha = \alpha_1 p^{\alpha_1 p^{\alpha_2 p^{\alpha_3}}} + \alpha_2 p^{\alpha_3}$ y $[\alpha]_n = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)$ el factorial polinomial de $\alpha \in \mathbb{Q}$. Luego

$$\begin{aligned} x_p' &= \bar{x} \alpha_1 p^{\alpha-1} \\ x_p'' &= \bar{x} \alpha_1 \alpha^{-1} [\alpha]_1 p^{\alpha-2} \\ x_p^{(3)} &= \bar{x} \alpha_1 \alpha^{-1} [\alpha]_2 p^{\alpha-3} \\ &\vdots \\ x_p^{(n)} &= \bar{x} \alpha_1 \alpha^{-1} [\alpha]_{n-1} p^{\alpha-n} \end{aligned}$$

Al sustituir en (19) y simplificando el factor $\bar{x} p^{\alpha_1 p^{\alpha_2 p^{\alpha_3}}}$

$$a_n \alpha_1 \alpha^{-1} [\alpha]_{n-1} p^{\alpha_2 p^{\alpha_3} - n} + a_{n-1} \alpha_1 \alpha^{-1} [\alpha]_{n-2} p^{\alpha_2 p^{\alpha_3} - (n-1)} + \dots + a_1 \alpha_1 p^{\alpha_2 p^{\alpha_3} - 1} + a_0 = 0. \quad (20)$$

Como $p > n$, las potencias de p en (20) son no ceros, se deduce que $p \mid a_0$ que contradice la hipótesis. \square

Es inmediato verificar que cualquier función exponencial no satisface la ecuación no homogénea (16), así sólo planteamos soluciones de la forma $x = \bar{x} p^\alpha$ donde $p \nmid \bar{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ y $p \nmid \alpha \in \mathbb{Z}$. A tales soluciones llamaremos no exponenciales.

Teorema 5.3. Sea p es un primo impar y a, b, c y d enteros no ceros no divisibles por p . Entonces

$$ax_p'' + bx_p' + cx + d = 0 \quad (21)$$

tiene exactamente tres soluciones no exponenciales:

$$x = -d/c, \quad x = \frac{-d}{b+cp} p, \quad x = \frac{-d}{2a+2bp^2+cp^2} p^2.$$

Demostración. Sea $x = \bar{x} p^\alpha$ una solución no exponencial. Entonces

$$\begin{aligned} x_p' &= \alpha \bar{x} p^{\alpha-1}, \\ x_p'' &= \alpha(\alpha-1) \bar{x} p^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (21)

$$a\alpha(\alpha-1)\bar{x}p^{\alpha-2} + b\alpha\bar{x}p^{\alpha-1} + c\bar{x}p^\alpha + d = 0. \quad (22)$$

Si $\alpha = 0$, entonces $c\bar{x} + d = 0$, de donde $x = -d/c$ es una solución. Si $\alpha = 1$, entonces $b\bar{x} + c\bar{x}p + d = 0$, así $(b+cp)\bar{x} + d = 0$. Note que $b+cp$ no puede ser cero ni divisible por p . De donde $x = \frac{-d}{b+cp} p$ es una solución. Si $\alpha = 2$, entonces $2a\bar{x} + 2b\bar{x}p + c\bar{x}p^2 + d = 0$. Factorizando $(2a+2bp+cp^2)\bar{x} + d = 0$. Otra vez $2a+2bp+cp^2$ no es cero ni divisible por p . De donde $x = \frac{-d}{2a+2bp^2+cp^2} p^2$ es una solución. \square

Ejemplo 5.3. La ecuación $x_3'' + x_3' + x - 1 = 0$ tiene tres soluciones 1, 3/4 y 9/17.

Ejemplo 5.4. Las ecuaciones lineales se pueden resolver formando un sistema de ecuaciones diferenciales tal como ilustra el siguiente ejemplo. Consideremos la ecuación lineal

$$a_7'' - 5a_7' + 6a = 0. \quad (23)$$

Sea $x = a, y = a_7'$. Entonces $x_7' = y, y_7' = -6x + 5y$. Para $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$, tenemos

$$X_7' = \begin{pmatrix} x_7' \\ y_7' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -6x + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} X = AX.$$

Supongamos que $X = p^{\alpha p} \xi$ es una solución. Luego

$$\alpha p^{\alpha p} \xi = Ap^{\alpha p} \xi$$

de donde $A\xi = \alpha\xi$, que significa que $\alpha \in \mathbb{Z}$ es un autovalor y ξ es un autovector de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ con entradas racionales. Con un cálculo rutinario se establece que $\bar{a} \cdot 7^{14}$ y $\bar{a} \cdot 7^{21}$ son soluciones de (23), donde $7 \nmid \bar{a} \in \mathbb{Q}$.

Referencias

- [1] E. J. Barbeau, Remarks on an arithmetic derivative, *Canad. Math. Bull.* 4(2), 117–122 (1961).
- [2] V. Ufnarovski, B. Ahlander, How to differentiate a number *Journal of Integer Sequences*, Vol. 6, 2003.
- [3] J. Kovic, The arithmetic derivative and antiderivative, *J. Integer Seq.* 15 (2012), Article 12.3.8.
- [4] David W. Wilson, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <http://oeis.org/A003415>
- [5] P. Haukkanen, M. Mattila, J. K. Merikoski, and T. Tossavainen, Can the arithmetic derivative be defined on a non-unique factorization domain? *J. Integer Seq.* 16 (2013)
- [6] R. K. Mistri and R. K. Pandey, Derivative of an ideal in a number ring, *Integers* 14 (2014), # A24.
- [7] P. Haukkanen, J. K. Merikoski, T. Tossavainen, On arithmetic partial differential equations, *J. Integer Seq.* 19, Article 16.8.6 (2016).
- [8] Ram Krishna Pandey and Rohit Saxena, On Some Conjectures about Arithmetic Partial Differential Equations, *Journal of Integer Sequences*, Vol. 20 (2017)
- [9] Fernando Q Gouvêa. *p*-adic Numbers. Springer, 1997.



Dimensiones en \mathbb{Z}^{\star}

Andrés Alberdi^{a,*}

^aUMSA, Carrera de Matemática, La Paz, Bolivia.

Resumen

Se proponen un conjunto de Axiomas, que generalizan los Axiomas de Incidencia de Hilbert con objetos en Dimensiones positivas y negativas, a partir de Teoría de Conjuntos. Históricamente la Geometría se ha basado en el punto, recta, plano y otros conceptos intuitivos basados en una axiomática formalizada desde Euclides hasta Hilbert y Tarski. Por otra parte, el concepto de dimensión de un objeto geométrico ha sido el resultado de las construcciones axiomáticas o algebraicas de la geometría. En el presente trabajo, inicialmente se construyen los “ \mathbb{Z} -espacios”, que son abstracciones y generalizaciones de los objetos geométricos básicos, con base en relaciones t , \cong y u , brindando los resultados más básicos de estas e incorporando un primer axioma. Posteriormente se definen m y M que determinan relaciones entre dimensiones de los \mathbb{Z} -espacios y se establecen los axiomas más importantes, tanto de incidencia como de unicidad, construyendo sobre ellos las funciones \uparrow y \downarrow , que permiten construir nuevos elementos de \mathbb{Z} -espacios, con base en otros existentes, además de sus propiedades básicas. Luego se realiza un ejemplo a modo de mostrar las construcciones anteriormente definidas y estructuradas, construyendo los 8 axiomas de incidencia de Hilbert, con base en los \mathbb{Z} -espacios, las relaciones t , \cong , u y los operadores \uparrow , \downarrow , m y M . Logrando el objetivo central del presente trabajo. Finalmente, se construyen las definiciones y axiomas de Paralelismo Fuerte, que generan la Geometría Euclidiana y se incluyen propiedades adicionales que fueron desarrolladas en Talleres de Investigación durante el año 2017. Se aclara que durante el año 2018 existieron nuevos Talleres de Investigación en la Carrera de Matemática, donde se realizaron varios complementos y mejoras al presente trabajo, que serán presentados en la siguiente edición de la Revista Boliviana de Matemática.

Palabras clave: Dimensiones, Geometría, Geometría Axiomática, Axiomas de Hilbert, Axiomas de Incidencia, Dimensiones Negativas

Introducción

Agradeciendo al gentil lector por su interés en el presente trabajo, pasamos al desarrollo¹:

La Geometría es una disciplina que se viene estudiando desde hacen más de cinco mil años, apareciendo originalmente en Babilonia e India, en esa época se comenzaban a abstraer algunas ideas básicas como triángulos, longitudes, áreas, círculos y otros para resolver problemas prácticos como medición de terrenos, construcción, astronomía para mejorar los cultivos, etc. El proceso de abstracción era el siguiente: se hacían mediciones concretas, se generalizaban estas mediciones, se construían propiedades en base a estas generalizaciones y usaban las mismas propiedades en

otras aplicaciones concretas.

La cultura Griega hizo significativos avances en la Geometría⁰, sobre todo con el monumental hito de *Los Elementos de la Geometría* de Euclides aproximadamente en el año 300 AC². En esta obra se define por primera vez en la historia los conceptos de *punto*, *recta* y *plano*. Esto significó a su vez un importante avance en la abstracción a nivel de conceptos, ya que estos sirven para dar fundamento a las figuras y los cuerpos. Sin embargo algunos conceptos permanecían intuitivos como las congruencias, que un punto está entre otros dos puntos y otros.

A finales del siglo XIX y principios del siglo XX, el genio de David Hilbert formalizó los conceptos que habían quedado pendientes desde la Grecia antigua, en su libro *Grundlagen der Geo-*

^{*}Propuesta de Generalización de los Axiomas de Incidencia de Hilbert.

*✉ aalberdi@gmail.com

✉ aalberdi@gmail.com (Andrés Alberdi)

¹Agradezco a todos los participantes del Taller de Investigación los aportes que han realizado, para poder llegar a la presente versión del Documento

⁰Se aclara que todas las referencias a enlaces de páginas Web se datan al mes de Mayo de 2017

²<http://www.claymath.org/euclids-elements>

*metrie*³, que inició el tratamiento contemporáneo de la Geometría Euclidiana y abrió diferentes ramas de la Geometría, muchas de las cuales se siguen desarrollando hasta nuestros días. Los conceptos primitivos de esta axiomática son: *punto, línea, plano, esta entre, está contenido y congruencia*, cuyas propiedades están determinadas en su obra.

A mediados de los años 1960, Alfred Tarski postuló una importante axiomática de la Geometría^{4 5}, que generalizaba aun más los conceptos de Hilbert y la dotaba de propiedades deseables como ser una *teoría de primer orden* (la axiomática de Hilbert es de segundo orden), ser *decidible* y ser *completa* (tomando en cuenta los teoremas de Gödel). Los conceptos primitivos en esta axiomática son: *punto, estar entre y congruencia*, estas dos últimas relaciones se describen en su obra.

El estudio de los fundamentos de la Geometría es vasto, ya que contiene elementos históricos, elementos lógicos, da pié a varias áreas de la Matemática e inclusive linda con la filosofía, un interesante estudio introductorio se puede ver en la Enciclopedia de Filosofía de Stanford en línea⁶.

La motivación fundamental para esta propuesta se origina en una charla en el café de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA) en 1990 con Efraín Cruz y Eduardo Palenque, donde se conversó sobre la posibilidad de la existencia de *Dimensiones Negativas*. Luego se tuvo una exposición en el Primer Congreso Boliviano de Matemática en 1991 planteando esta idea y un Seminario Estudiantil sobre Dimensiones Negativas Intuitivas entre 1992-1993 para explorar aun más estos conceptos. Luego de muchas aproximaciones conceptuales, en Mayo de 2017 aparecieron los primeros bosquejos de generalización y formalización de estas ideas, que fueron consolidándose hasta Octubre de 2017, mes en el que se presentaron por primera vez en el XX Congreso Boliviano de Matemática en ocasión del quincuagésimo aniversario de la fundación de la Carrera de Matemática de la UMSA, así también se presentó la primera versión del presente documento.

Conceptos a Generalizar

Los objetos primitivos o nociones primitivas de la Geometría que se pretenden generalizar (entre otros) son los siguientes:

- Punto - Este concepto primitivo es el más sencillo de entender pero el más difícil de generalizar, debido a que en cualquier estudio se debe partir de *algo*, sobre todo en Matemática, donde se parte del natural 0, del conjunto vacío y otros.

- Espacio - Este concepto sobreentendido es el marco en el cual se presentan las diferentes axiomáticas, es el campo de acción o universo en el cual se opera.
- Está contenido - Si aceptamos que los puntos son objetos que tienen una relación de pertenencia en el Espacio, esa relación es de contención: *un punto está contenido en un espacio*.
- Recta, Plano - En la axiomática de Hilbert se pueden observar estos conceptos primitivos, que sin embargo no son nociones primitivas en la axiomática de Tarski.

Desde un punto de vista clásico, la presente propuesta solamente trata sobre los axiomas de incidencia en la axiomática de Hilbert⁷, es decir, generalizar lo siguiente:

- Las nociones primitivas: Punto, Recta y Plano
- La relación primitiva “*yace en*”
- Los 8 axiomas de *Incidencia*

El resto de los Axiomas de Hilbert (Secciones II, III, IV y V) pueden ser extendidos considerando los axiomas que se presentan en presente documento.

En términos de Geometría Vectorial (Geometría desde el punto de vista Vectorial)⁸, usualmente se consideran los siguientes resultados:

- El Punto tiene cero dimensiones.
- La Recta tiene una dimensión.
- El Plano tiene dos dimensiones.
- El Espacio (regular) tiene tres dimensiones.
- Se consideran espacios n-dimensionales con dimensiones mayores a 3, que están fuera del estudio de la geometría euclidiana.

De esta manera, se relacionan usualmente los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ con las dimensiones de los conceptos geométricos, clasificándolos de cierta manera a partir de \mathbb{N} .

Intuitivamente, los conceptos fundamentales de este documento serán:

1. ***Z-Espacio***: Generalizando los conceptos tradicionales de los puntos, las rectas, los planos, los espacios, etc., aquí se llamará *Z-Espacio* a cualquiera de estos conjuntos, así como a los espacios n-dimensionales y a otros objetos abstractos que tendrían dimensión negativa.

³<http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf>

⁴<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.27.9012>

⁵ The Bulletin of Symbolic Logic Volume 5, Number 2, June 1999

⁶<https://plato.stanford.edu/entries/epistemology-geometry/>

⁷Una versión simplificada se encuentra en: https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_axioms

⁸N.V.Efimov, Geometría Superior Ed. Mir, Capítulo VII Sec 1

2. **Función** $[]$: Que sería como la función inversa de la “Dimensión”.
3. **Relación** t : Generalizando la relación primitiva “yace en”, a partir de una relación binaria entre elementos de \mathbb{Z} -Espacios.
4. **Relación** \cong : Contextualiza la igualdad de elementos de \mathbb{Z} -espacios.
5. **Relación** u : Generaliza la relación t .
6. m, M : Permiten relacionar elementos de diferentes \mathbb{Z} -espacios.
7. **Relaciones** \uparrow, \downarrow : Generalizan el concepto de “Incidencia”.
8. **Relación** p : Generaliza el concepto de “Paralelismo”.

En términos formales, conforme las definiciones y axiomas que se plantean, el principal óbice para hacer una analogía de la construcción que se hace en el presente trabajo con la geometría analítica clásica, sería la axiomática de la teoría de conjuntos tradicional, que impide las construcciones infinitas de la forma $\forall i \in \mathbb{N} : A_{i+1} \in A_i$, debido al *Axioma de regularidad*⁹, que establece:

$$A \neq \emptyset \rightarrow (\exists x)(x \in A \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow y \notin A))$$
¹⁰

Sin embargo, “*es posible construir sistemas de teoría de conjuntos que contradigan este axioma*”¹¹, como ejemplo se tiene el sistema de ontología de Lesniewski y el sistema de Quine. Por otro lado, al estructurar la demostración de la consistencia del Axioma de Elección y de la Hipótesis del Continuo con los Axiomas de la teoría de conjuntos, K.Gödel indica que “*el Axioma de Regularidad no es indispensable pero simplifica el trabajo*”¹².

Reforzando estos conceptos, sobre el tema de teorías axiomáticas alternativas de conjuntos, existe un artículo extenso, con muchas referencias y bibliografía en la Enciclopedia de Filosofía de Stanford en línea¹³. En el mismo se puede encontrar el Axioma Anti-Fundacional (Anti-Foundation Axiom - AFA), una de cuyas equivalencias establece:

Todo grafo tiene una única decoración.^{14 15}

Para comprender este axioma alternativo se requiere desarrollar teoría de Grafos, que no es necesaria para el presente documento.

⁹P.Suppes, Teoría Axiomática de Conjuntos, Ed Norma, pp. 34-35

¹⁰Sin embargo, se observa que en el presente trabajo no se utiliza la relación \in para relacionar dos elementos de los \mathbb{Z} -espacios.

¹¹Extraído textualmente de P.Suppes, Teoría Axiomática de Conjuntos, Ed Norma, pág 36

¹²Extraído textualmente de K.Gödel, Obras Completas, Ed. Alianza Universidad, pág 237 y 238

¹³<https://plato.stanford.edu/entries/nonwellfounded-set-theory/>

¹⁴Como se puede apreciar en el punto 2.3 de la cita 12

¹⁵Un “Grafo” es un par (G, f) , donde f es una relación en G .

Una “decoración” de un grafo es una función d con dominio G tal que $d(g) = \{d(h) : (g, h) \in f\}$.

Evitando el óbice previamente mencionado, en el presente trabajo, en lugar de la pertenencia regular \in entre elementos de \mathbb{Z} -espacios, se usa la definición de **relación** t con propiedades particulares descritas más adelante, evitando así el uso de sistemas axiomáticos alternativos como aquellos que incluyan AFA.

En el presente documento se utilizarán como base los conceptos y notaciones tradicionales siguientes:

- De Lógica Matemática de primer orden como: $\forall, \exists, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee$
- De Teoría de Conjuntos como: $\cup, \times, \in, \notin, \subset, =$ ¹⁶, $-$ ¹⁷
- Del grupo igualitario ordenado $(\mathbb{Z}, +)$, con $=, +, -, \text{producto}, <, >, \leq, \not\leq$, etc.

1. \mathbb{Z} -Espacios

En esta sección se plantearán los conceptos básicos del documento que son los \mathbb{Z} -espacios y la relación t entre elementos de \mathbb{Z} -espacios consecutivos, con sus propiedades D1 y D2, más los operadores t^* y t_* , además de algunas observaciones y resultados iniciales que serán de utilidad para las siguientes secciones.

Sea $(\mathbb{Z}, +)$ el grupo de enteros con la suma usual:

Para cada $x \in \mathbb{Z}$ tomamos un conjunto no vacío, denotado $[x]$, tal que:

Para todos $x, y \in \mathbb{Z}$ ¹⁸, tenemos que $x = y \Leftrightarrow [x] = [y]$

Es decir, tomamos una función inyectiva:

$$\begin{aligned} [] : \mathbb{Z} &\longrightarrow \overline{\text{Conj}} - \{\emptyset\} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

Llamamos \mathbb{Z} -Espacios o solo *Espacios* a los conjuntos no vacíos $[x]$

Para cada $x \in \mathbb{Z}$ tomamos en cuenta los conjuntos $[x] \times [x+1]$.

Denominamos a $\mathcal{Y} = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}} [x]$ “*El conglomerado*”.

Definición 1.¹⁹

Sea $t_x \subset [x] \times [x+1]$ una relación²⁰ formamos el conjunto t tal que $(A, B) \in t$ si y solo si

¹⁶Dependiendo del contexto, “=” podrá ser igualdad de conjuntos o igualdad de enteros.

¹⁷Dependiendo del contexto, “-” podrá ser diferencia de conjuntos o diferencia de enteros.

¹⁸Se denota así cuando $x \in \mathbb{Z}$ y $y \in \mathbb{Z}$

¹⁹Esta definición fue ajustada gracias al aporte de Helder Lopez y Marcos Canelo.

²⁰Se observa que esta relación t_x se define conforme los puntos D1 y D2 más abajo.

$$(\exists x \in \mathbb{Z})(A \in [x] \wedge B \in [x+1] \wedge (A, B) \in t_x)$$

que cumplan²¹:

$$\mathbf{D1} \quad (\forall x \in \mathbb{Z})(\forall B \in [x])(\exists A \in [x+1])(\exists C \in [x-1])(CtB \wedge BtA)$$

$$\mathbf{D2} \quad (\forall x \in \mathbb{Z})(\forall B \in [x])(\exists A' \in [x+1])(\exists C' \in [x-1])(C'tB \wedge BtA')$$

De ahora en adelante tomaremos la relación t y los conjuntos $[x]$ tal que cumplan D1 y D2, conforme lo señalado previamente.

Cuando ocurra que $(A, B) \in t$ denotaremos AtB y cuando ocurra que $(A, B) \notin t$ denotaremos $\neg AtB$.

$$\text{Vemos que } t = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}} t_x \subset \bigcup_{x \in \mathbb{Z}} ([x] \times [x+1]).$$

Asimismo, $t \subset \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$ es una relación, ya que $(\forall x \in \mathbb{Z})([x] \subset \mathcal{Y})$.

Observaciones y Comentarios

Con las definiciones mencionadas, se puede observar lo siguiente, con $x, y \in \mathbb{Z}$, $A \in [x]$, $B \in [y]$:

Obs 1.1 El conjunto $t_x = [x] \times [x+1] = \{(X, Y) : X \in [x] \wedge Y \in [x+1]\}$ está bien definido y no es vacío porque ninguno de los conjuntos $[x]$ es vacío.

Obs 1.2 Si $A, B \in \text{Im}([\])$, AtB solamente está definida si $[B]^{-1} = [A]^{-1} + 1$.²²

Obs 1.3 Es contradictorio que AtB y BtA , simultáneamente, pues en ese caso tendríamos que $x = x + 1$ en \mathbb{Z} .

Obs 1.4 La función $[\] : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Im}([\])$ es biyectiva y podemos definir $[\]^{-1}(A) = [A]^{-1} = x$.

Obs 1.5 $A \in [[A]^{-1}]$ y $x = [[x]]^{-1}$

Obs 1.6 Es importante observar que los puntos D1 y D2 de la definición 1 describen cómo están escogidos los conjuntos $[x]$, no solamente cómo está definida la relación t .

Obs 1.7 Se puede entender la función $[\]^{-1}$ como la “Dimensión” del \mathbb{Z} -espacio $[x]$.

Obs 1.8 Se puede entender la relación AtB como “A está totalmente en B”, como podremos observar más adelante.

²¹Se observa que t restringido a $[x] \times [x+1]$ coincide con t_x ($t|_{[x] \times [x+1]} = t_x$) directamente de la definición de t .

²²Tomando en cuenta que la función $[\]$ es inyectiva.

Propiedades

A continuación algunos resultados, con base en las definiciones señaladas:

Proposición 1. Para todo $x \in \mathbb{Z}$, existen $A, B \in [x]$, que no son iguales $A \neq B$.²³

Demostración. Sea $x \in \mathbb{Z}$ entonces existe $A \in [x]$ ya que $[x] \neq \emptyset$. Existe $C \in [x+1]$, AtC por D1 y además existe $B \in [x]$, BtC por D2 (ambos en la página 35).

Sin embargo, los elementos $A, B \in [x]$ no pueden ser iguales ya que AtC, BtC .

Por tanto existen al menos dos elementos que no son iguales en cada conjunto $[x]$, $A \neq B$. \square

Proposición 2. Para todos $x, y \in \mathbb{Z}$, tal que $x < y$, dado $A \in [x]$ tenemos que:

existe $B \in [y]$ y existe $I = \{x, x+1, \dots, y-1, y\}$ tal que $(\forall i \in I)(\exists D_i \in [i])$ donde $D_y = B$, $D_x = A$ y $i \neq y \Rightarrow (D_itD_{i+1})$.²⁴

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x < y$ y sea $A \in [x]$, usaremos inducción.

Si $y = x + 1$ aplicando D1²⁵ a A tenemos que: $(\exists D_{x+1} \in [x+1])(AtD_{x+1})$ entonces $I = \{x, x+1\}$ donde $B = D_{x+1}$ y $D_x = A$.

En general, si existe $I = \{x, x+1, \dots, y-1\}$ tal que $(\forall i \in I)(\exists D_i \in [i])$ donde $D_x = A$ y $(i \neq y-1) \Rightarrow (D_itD_{i+1})$ Aplicamos D1 a D_{y-1} obteniendo la existencia de $D_y \in [y]$ tal que $D_{y-1}tD_y$ Así obtenemos un conjunto $I = \{x, x+1, \dots, y-1, y\}$ donde $(\forall i \in I)(\exists D_i \in [i])$ que cumple $i \neq y \Rightarrow (D_itD_{i+1})$. Llamamos $B = D_y$ y sabemos que $A = D_x$. \square

Proposición 3. Para todos $x, z \in \mathbb{Z}$, tal que $x > z$, dado $A \in [x]$ tenemos que:

existe $C \in [z]$ y existe $I = \{z, z+1, \dots, x-1, x\}$ tal que $(\forall i \in I)(\exists E_i \in [i])$ donde $E_z = C$, $E_x = A$ y $i \neq x \Rightarrow (E_itE_{i+1})$.

Demostración. Sean $x, z \in \mathbb{Z}$ tales que $x > z$ y sea $A \in [x]$, usaremos inducción.

Si $z = x - 1$ aplicando D1²⁶ a A tenemos que: $(\exists E_{x-1} \in [x-1])(E_{x-1}tA)$ entonces $I = \{x-1, x\}$ donde $C = D_{x-1}$ y $D_x = A$.

²³Se refiere a la igualdad como elementos de un conjunto.

²⁴Este tipo de construcción será muy importante más adelante.

²⁵En la página 35

²⁶En la página 35

En general, si existe $I = \{z - 1, z - 2, \dots, x - 1, x\}$ tal que $(\forall i \in I)(\exists E_i \in [i])$ donde $E_x = A$ y $(i \neq x) \Rightarrow (E_i t E_{i+1})$
 Aplicamos D1 a E_{z-1} obteniendo la existencia de $E_z \in [z]$ tal que $E_z t D_{z-1}$
 Así obtenemos un conjunto $I = \{z, z - 1, \dots, x - 1, x\}$ donde $(\forall i \in I)(\exists E_i \in [i])$
 que cumple $i \neq x \Rightarrow (E_i t E_{i+1})$.
 Llamamos $C = E_z$ y sabemos que $A = E_x$. \square

Operadores t_* y t^* :

Definición 2. Sea $x \in \mathbb{Z}$ y $A \in [x]$, definimos los conjuntos:

$$t^*(A) = \{B \in [x + 1] : AtB\}$$

$$t_*(A) = \{C \in [x - 1] : CtA\}$$

Si tomamos $x \in \mathbb{Z}$ y $A \in [x]$, se observa lo siguiente:

Obs 1.9 $t^*(A) \neq \emptyset$ y $t_*(A) \neq \emptyset$ por D1 (página 35).

Obs 1.10 $t^*(A) \subset [x + 1]$ y $t_*(A) \subset [x - 1]$ por definición 2.

Obs 1.11 $[x + 1] - t^*(A) \neq \emptyset$ y $[x - 1] - t_*(A) \neq \emptyset$ por D2 (página 35).

Obs 1.12 $A \in t^*(B)$ solo tiene sentido si $[A]^{-1} = [B]^{-1} + 1$.²⁷

Obs 1.13 $A \in t_*(B)$ solo tiene sentido si $[A]^{-1} = [B]^{-1} - 1$.

Obs 1.14 $A \in t^*(B)$ si y solamente si BtA si y solamente si $B \in t_*(A)$ por las Obs 1.2, 1.12 y 1.13.

2. Congruencia

En esta sección se brindará la relación de equivalencia \cong y las relaciones $<$ y $>$, que permiten comparar dos elementos de un \mathbb{Z} -espacio, junto con algunas observaciones y propiedades importantes, además de plantear el primer Axioma.

Sea $x \in \mathbb{Z}$:

Definición 3. Sean $A, A' \in [x]$ se denota $A < A'$ y se dice que A es *semicongruente* a A' si $(\forall B \in [x - 1])(BtA \Rightarrow BtA')$

Definición 4. Sean $A, A' \in [x]$ se denota $A \cong A'$ y se dice que A y A' son *congruentes* o *coinciden* si $(\forall B \in [x - 1])(BtA \Leftrightarrow BtA')$

Axioma 1 (Ax1). Sean $A, B \in [x]$ y $C \in [x + 1]$ ²⁸, entonces $(BtC \wedge A < B) \Rightarrow AtC$.

²⁷Se han corregido varios de estos puntos, gracias a las observaciones de Marcos Canedo.

²⁸Esto equivale a $[A]^{-1} = [B]^{-1}$ y $[C]^{-1} = [A]^{-1} + 1$

Observaciones y Comentarios

Si $x \in \mathbb{Z}$, tenemos:

Obs 2.1 Si $A, B \in [x]$ entonces, usando las definiciones previas, se obtiene inmediatamente: $A \cong B \Leftrightarrow (A < B) \wedge (B < A)$ ²⁹

Obs 2.2 Si $A, B \in [x]$, se denota también $B > A$ cuando $A < B$.

Obs 2.3 En el resto del documento se usará sobre todo la relación \cong , no tanto las relaciones $<$ y $>$.

Obs 2.4 Las relaciones $A \cong B$, $A > B$ y $A < B$ solamente están definidas si existe $x \in \mathbb{Z}$ y $A, B \in [x]$, lo que equivale a $[A]^{-1} = [B]^{-1}$.

Obs 2.5 De la definición 4 se tiene inmediatamente que $A \cong B$ equivale a $B \cong A$.

Obs 2.6 Por Ax1, si $A, B \in [x]$ y $C \in [x + 1]$ se tiene: $t_*(A) \subset t_*(B)$ y $B \in t_*(C)$ implican $A \in t_*(C)$.

Obs 2.7 Si $A, B \in [x]$, se tiene que $A \cong B \Leftrightarrow t_*(A) = t_*(B)$, por la definición 4.

Obs 2.8 Si $A, B \in [x]$, se tiene que $A < B \Leftrightarrow t_*(A) \subset t_*(B)$, por la definición 3.

Propiedades

Si $x \in \mathbb{Z}$, se tienen los siguientes resultados:

Proposición 4.

a) Sean $A, B \in [x]$ y $C \in [x + 1]$, entonces: $(BtC \wedge A \cong B) \Rightarrow AtC$.

b) Para todo $x \in \mathbb{Z}$, existen $A, B \in [x]$ tales que $A \not\cong B$.

Demostración.

a) Sean $A, B \in [x]$ y $C \in [x + 1]$

Si BtC y $A \cong B$, entonces $A < B$ y $B < A$, como se indicó en Obs 2.1.

Así tenemos BtC y $A < B$ por tanto, aplicando Ax1, tenemos que AtC .

b) Si $x \in \mathbb{Z}$, supongamos que $(\forall A, B \in [x])(A \cong B)$

Sea $C \in [x + 1]$, entonces por D1 y D2 existen $A', B' \in [x]$ tales que $A'tC, B'tC$

Así $B'tC$ y como $A' \cong B$ por la hipótesis (1), entonces $B'tC$ por la Proposición 4.a., lo que es contradictorio.

Por tanto existen $A, B \in [x]$ tales que $A \not\cong B$. \square

Proposición 5. La relación \cong es de equivalencia.

Demostración. Sean $A, B, C \in [x]$

a) $(\forall D \in [x - 1])(DtA \Leftrightarrow DtA)$ por tanto, por la Definición 4, $A \cong A$.

²⁹Que puede ser usado de manera equivalente como definición de \cong .

b) Por la Obs 2.5

c) Sean $A \cong B$ y $B \cong C$, tomemos $D \in [x - 1]$ entonces $(DtA \Leftrightarrow DtB) \wedge (DtB \Leftrightarrow DtC)$ por tanto $DtA \Leftrightarrow DtC$. Así: $(\forall D \in [x - 1])(DtA \Leftrightarrow DtC)$ de donde $A \cong C$. \square

Proposición 6. *La relación $<$ es de orden respecto a \cong .*

Demostración. Sean $A, B, C \in [x]$

a) $(\forall D \in [x - 1])(DtA \Rightarrow DtA)$ por tanto $A < A$.

b) Sean $A < B$ y $B < A$, entonces $A \cong B$ como se indicó en Obs 2.1.

c) Sean $A < B$ y $B < C$, tomemos $D \in [x - 1]$ entonces $(DtA \Rightarrow DtB) \wedge (DtB \Rightarrow DtC)$, por tanto $DtA \Rightarrow DtC$. Así: $(\forall D \in [x - 1])(DtA \Rightarrow DtC)$ de donde $A < C$. \square

Proposición 7. *La relación \cong es compatible con la relación t por ambos lados.*

Demostración. Sean $A, B \in [x]$ y $C, D \in [x - 1]$ tales que $A \cong B$ y $C \cong D$

a) Si suponemos que CtA entonces DtA por la Proposición 4.a. Como DtA entonces DtB por la definición de \cong .

b) Si suponemos que DtB entonces CtA por simetría de \cong , usando el mismo procedimiento de la Proposición 7.a. \square

3. Relaciones y operadores u

En esta sección se definirá la “relación” u , que permite vincular dos elementos de cualquier \mathbb{Z} -espacio, además definir los operadores unarios u^* y u_* , junto con algunas de las propiedades y observaciones importantes de u .

Sean $x, y \in \mathbb{Z}$:

Definición 5.³⁰ Si $A \in [x]$, $B \in [y]$ tales que $x \leq y$ definimos la relación binaria $u_{xy} \subset [x] \times [y]$, donde $(A, B) \in u_{xy}$ siempre y cuando se cumpla:

$(\forall i \in \{x, \dots, y\})(\exists D_i \in [i])(D_x \cong A \wedge D_y \cong B \wedge ((x < y) \wedge (i \neq y) \Rightarrow (D_i t D_{i+1})))$

Formamos el conjunto u tal que $(A, B) \in u$ si y solo si

$(\exists x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})(A \in [x] \wedge B \in [y] \wedge (A, B) \in u_{xy})$

Denotamos AuB en lugar de $(A, B) \in u$ ³¹.

³⁰Esta definición fue ajustada gracias al aporte de Marcos Canedo.

³¹De manera similar a t

Observaciones y Comentarios

Si $x \in \mathbb{Z}$, tenemos:

Obs 3.1 La relación AuB conforme la definición 5 solamente tiene sentido si existen $x, y \in \mathbb{Z}$, $A \in [x]$, $B \in [y]$ tales que $x \leq y$, lo que equivale a $[A]^{-1} \leq [B]^{-1}$

Obs 3.2 La relación u surge naturalmente de la necesidad de contar con una extensión de la relación t , conforme las Proposiciones 2 y 3.

Obs 3.3 En la definición de u (Definición 5), a diferencia de las proposiciones 2 y 3 que incluyen solamente la relación t , observamos que se ha incluido la relación \cong por consistencia de notación, ya que $A \cong A$.

Obs 3.4 Por otra parte, se ha incluido en esta relación u la posibilidad de que $x = y$, que no podía existir en las proposiciones 2 y 3 por la restricción indicada en Obs 1.2.

Propiedades

Si $x, y, z \in \mathbb{Z}$, tales que $z \leq x \leq y$ se tienen las siguientes proposiciones:

Proposición 8. *Si $A \in [x]$ y $B \in [y]$ entonces:*

a) $AtB \Rightarrow AuB$ ^{32 33}

b) $A \cong B \Rightarrow AuB$

c) Si $(x = y \wedge AuB) \Rightarrow A \cong B$

d) Si AuB y BuA entonces $A \cong B$

Demostración. Sean $A \in [x]$ y $B \in [y]$

a) Si AtB entonces $y = x + 1$ por Obs 1.2, así:

$(\forall i \in \{x, y\})(\exists D_i \in [i])(AtD_y)$, donde $D_x \cong A$ y $B \cong D_y$. (debido a que $A \cong A$)

Por tanto AuB .

b) Si $A \cong B$ entonces $x = y$ por Obs 2.4, por tanto $x \leq y$ y:

$(\forall i \in \{x\})(\exists D_x \in [x])(B \cong D_x \cong A)$, debido a que $A \cong A$

Por tanto AuB .

c) Si AuB entonces

$(\forall i \in \{x, \dots, y\})(\exists D_i \in [i])(D_x \cong A \wedge D_y \cong B \wedge ((x < y) \wedge (i \neq y) \Rightarrow (D_i t D_{i+1})))$

Si consideramos $x = y$, entonces: $(\exists D_x \in [x])(D_x \cong A \wedge D_x \cong B)$

Por la Proposición 5, tenemos que $A \cong B$

d) Si AuB y BuA entonces $x \leq y$ y $y \leq x$ por Obs 3.1, así $x = y$

Por tanto $A \cong B$, por la Proposición 8.c. \square

Proposición 9. *Sean $A, B \in [x]$ $C \in [z]$ y $D \in [y]$ con $z \leq x \leq y$, entonces:*

a) $(AuD \wedge A \cong B) \Rightarrow BuD$.

b) $(CuA \wedge A \cong B) \Rightarrow CuB$.

³²Esto implica que $t \subset u$

³³Si $y = x + 1$ entonces $AtB \Leftrightarrow AuB$ ó $t = u$

Demostración. Sean $A, B \in [x]$ $C \in [z]$ y $D \in [y]$ con $z \leq x \leq y$, tenemos:

a) Si $(AuD \wedge A \cong B)$ entonces:

$(\forall i \in \{x, \dots, y\})(\exists E_i \in [i])(E_x \cong A \wedge E_y \cong D \wedge ((x < y) \wedge (i \neq y) \Rightarrow (E_i t E_{i+1})))$

Como $A \cong B$ entonces $E_x \cong B$ y así BuD .

b) Si $(CuA \wedge A \cong B)$ entonces:

$(\forall i \in \{z, \dots, x\})(\exists D_i \in [i])(D_z \cong C \wedge D_x \cong A \wedge ((z < x) \wedge (i \neq x) \Rightarrow (D_i t D_{i+1})))$

Como $A \cong B$ entonces $D_x \cong B$ y así CuB . \square

Proposición 10. La relación u es de orden respecto de \cong .

Demostración. Si $A \in [x]$, $B \in [y]$ y $C \in [z]$, entonces:

a) $A \cong A$ por tanto AuA por Proposición 8.b.

b) Si $AuB \wedge BuA$ entonces $x \leq y \wedge x \geq y$ por tanto $x = y$ por Obs 3.1

Como AuB , por tanto $A \cong B$, por la Proposición 8.c.

c) Si $C \in [z]$, $A \in [x]$, $B \in [y]$ tales que $CuA \wedge AuB$ entonces:

$(\forall i \in \{z, \dots, x\})(\exists D_i \in [i])(D_z \cong C \wedge D_x \cong A \wedge ((x < y) \wedge (i \neq y) \Rightarrow (D_i t D_{i+1})))$

$(\forall j \in \{x, \dots, y\})(\exists E_j \in [j])(E_x \cong A \wedge E_y \cong B \wedge ((x < y) \wedge (j \neq y) \Rightarrow (E_j t E_{j+1})))$

Sea F_k tal que:

$(\forall i \in \{z, \dots, x-1\})(k = i)$ y definimos F_k como D_i

$(\forall j \in \{x+1, \dots, y\})(k = j)$ y definimos F_k como E_j

Se puede ver que $D_x \cong A \cong E_x$ por la Proposición 5 de la página 39, así definimos F_x como A , por tanto:

$(\forall k \in \{z, \dots, y\})(\exists F_k \in [k])(F_z \cong C \wedge F_y \cong B \wedge ((z < y) \wedge (k \neq y) \Rightarrow (F_k t F_{k+1})))$

En consecuencia CuB . \square

Proposición 11. Si $A \in [x]$ entonces:

a) $(\exists B \in [y])(AuB)$, donde $x \leq y$.

b) $(\exists C \in [z])(CuA)$, donde $z \leq x$.

Demostración. Sea $A \in [x]$:

a) Supongamos $x = y$ entonces existe $A \in [y]$ tal que AuA .

Supongamos $x < y$, por Proposición 2, existe $B \in [y]$ tal que

$(\forall i \in \{x, \dots, y\})(\exists D_i \in [i])$ donde D_y es B , D_x es A y $i \neq y \Rightarrow (D_i t D_{i+1})$

Como $D_y \cong B \wedge D_x \cong A$ y $(x < y \wedge i \neq y) \Rightarrow (D_i t D_{i+1})$, se tiene que AuB .

b) Supongamos $z = x$ entonces existe $A \in [z]$ tal que AuA .

Supongamos $z < x$, por Proposición 3, existe $C \in [z]$ tal que

$(\forall i \in \{z, \dots, x\})(\exists D_i \in [i])$ donde D_x es A , D_z es C y $i \neq x \Rightarrow (D_i t D_{i+1})$

Como $D_x \cong A \wedge D_z \cong C$ y $(z < x \wedge i \neq x) \Rightarrow (D_i t D_{i+1})$, se tiene que CuA . \square

Proposición 12. La relación \cong es compatible con la relación u por ambos lados.

Demostración. Sean $A, B \in [x]$ y $C, D \in [x-1]$ tales que $A \cong B$ y $C \cong D$

Si suponemos que CuA entonces DuA por la Proposición 9.a., ya que $C \cong D$

Si DuA entonces DuB por la Proposición 9.b., ya que $A \cong B$

Por tanto DuB . \square

Operadores u^* y u_* :

Definición 6. Sea $x, y, z \in \mathbb{Z}$, con $z \leq x \leq y$ y $A \in [x]$, definimos los conjuntos:

$u^*(A)_y = \{B \in [y] : AuB\}$

$u_*(A)_z = \{C \in [z] : CuA\}$

Si tomamos $x, y, z \in \mathbb{Z}$, con $z \leq x \leq y$ y $A \in [x]$, se observa lo siguiente:

Obs 3.5 $u^*(A)_y \neq \emptyset$ por Proposición 11.a y

$u_*(A)_z \neq \emptyset$ por Proposición 11.b.

Obs 3.6 $u^*(A)_y \subset [y]$ y $u_*(A)_z \subset [z]$ por definición 6.

4. Axiomas de incidencia

En esta sección se extenderá la definición de los operadores binarios u^* y u_* , además de los operadores m y M , que permitirán construcciones más avanzadas de elementos de \mathbb{Z} -espacios, como se reflejan en las varias observaciones y propiedades. Asimismo se plantean los dos Axiomas de incidencia, nombrados así porque permiten determinar las modalidades de incidencia de dos elementos de \mathbb{Z} -espacios cualquiera.

Sean $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ tales que $z \leq \{x, y\} \leq w$ ¹⁸:

Definición 7. Sean $A \in [x]$ y $B \in [y]$, definimos los conjuntos siguientes¹⁹:

$u^*(A, B)_w = \{C \in [w] : AuC \wedge BuC\}$

$u_*(A, B)_z = \{D \in [z] : DuA \wedge DuB\}$.

Definición 8. Sean $A \in [x]$ y $B \in [y]$, definimos los enteros siguientes:

$M(A, B) = \min\{w \in \mathbb{Z} : u^*(A, B)_w \neq \emptyset\}$

$m(A, B) = \max\{z \in \mathbb{Z} : u_*(A, B)_z \neq \emptyset\}$.

Axioma 2 (Ax2). Si $A \in [x]$ y $B \in [y]$, con $x \leq y$ entonces:

a)²⁰ Si $\exists m(A, B)$ entonces $M(A, B) = x + y - m(a, b)$

b)²¹ Si $\nexists m(A, B)$ entonces $M(A, B) = y + 1$.

¹⁸Denotando así que z es menor o igual que x y que y , y que w es mayor o igual que x y que y

¹⁹Se aclara que, la generalización de la presente definición al caso de una cantidad mayor a 2 \mathbb{Z} -espacios, presenta problemas más complejos, que se tratan en la "Teoría de la Incidencia" o "Incidence Geometry", como referencia https://en.wikipedia.org/wiki/Incidence_geometry

²⁰Exactamente esta igualdad se encuentra como un resultado (no generalizado) en el libro Álgebra Geométrica de E.Artin teorema 1.4.

²¹Esta igualdad se puede deducir fácilmente del teorema 1.3 del libro Álgebra Geométrica de E.Artin.

Observaciones y Comentarios

Si $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ tales que $z \leq \{x, y\} \leq w$ con $A \in [x]$ y $B \in [y]$, tenemos:

Obs 4.1 El conjunto $u^*(A, B)_w$ solo tiene sentido si se cumple que $A \in [x]$ y $B \in [y]$, con $\{x, y\} \leq w$

Obs 4.2 El conjunto $u_*(A, B)_z$ solo tiene sentido si se cumple que $A \in [x]$ y $B \in [y]$, con $z \leq \{x, y\}$

Obs 4.3 $u^*(A, B)_w \subset [w]$ y $u_*(A, B)_z \subset [z]$

Obs 4.4 $M(A, B), m(A, B) \in \mathbb{Z}$ en caso que existan.
 $M(A, B)$ siempre existe por Ax2.a y Ax2.b.

Obs 4.5 Si existe $m(A, B)$, entonces $m(A, B) \leq \{x, y\} \leq M(A, B)$ pues $m(A, B)$ se elige entre los $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z \leq \{x, y\}$ y $M(A, B)$ se elige entre los $w \in \mathbb{Z}$ tal que $\{x, y\} \leq w$.

Obs 4.6 Si $x = y$ entonces $m(A, B) \leq x \leq M(A, B)$ por la Obs 4.5.

Obs 4.7 Si $A \cong B$ entonces $m(A, B) = x = M(A, B)$ por la Proposición 9 y Definición 8.

Obs 4.8 Si $A \cong B$ entonces $x = y$
 $(\forall w \geq x)(u^*(A, B)_w = u^*(A)_w)$ y
 $(\forall z \leq x)(u_*(A, B)_z = u_*(A)_z)$.

Obs 4.9 Si $A \neq B$ entonces $y = x + 1$, $m(A, B) = x < y = M(A, B)$ por la Obs 4.5.

Obs 4.10 Si $A \neq B$ entonces $m(A, B) = x \leq y = M(A, B)$ por la Obs 4.5 y la Obs 3.1.

Obs 4.11 Si $A, B \in [x]$ y $A \not\cong B$ entonces $M(A, B) > x$ por Ax2.
Si $\exists m(A, B)$ tal que $A \not\cong B$ entonces $m(A, B) < x$ (Pues $M = 2x - m > x \Rightarrow x - m > 0$).

Obs 4.12 Si $A \in [x]$ y $B \in [y]$, se tiene que $m(A, B) = m(B, A)$ y que $M(A, B) = M(B, A)$ directamente de la definición 8.

Propiedades

Si $x, y \in \mathbb{Z}$, se tienen las siguientes proposiciones:

Proposición 13. Si $A \in [x]$ y $B \in [y]$ se tiene que :

a) Si $\exists m(A, B)$ entonces $(\exists D \in [m(A, B)])(DuA \wedge DuB)$

b) $(\exists C \in [M(A, B)])(AuC \wedge BuC)$

c) Si $(\exists z \in \mathbb{Z})(\exists D \in [z])(DuA \wedge DuB)$, entonces $\exists m(A, B)$

Demostración. Si $A \in [x]$ y $B \in [y]$ tenemos:

a) Si $\exists m(A, B)$ entonces existe $\max\{z \in \mathbb{Z} : u_*(A, B)_z \neq \emptyset\}$ por Definición 8.

Por tanto $u_*(A, B)_{m(A, B)} \neq \emptyset$, con $u_*(A, B)_{m(A, B)} \subset [m(A, B)]$ por Obs 4.3

Así $(\exists D \in [m(A, B)])(D \in u_*(A, B)_{m(A, B)})$

Por tanto $(\exists D \in [m(A, B)])(DuA \wedge DuB)$ por Definición 7.

b) Por Ax2 $\exists m(A, B)$

entonces existe $\min\{w \in \mathbb{Z} : u^*(A, B)_w \neq \emptyset\}$ por Definición 8

Por tanto $u^*(A, B)_{M(A, B)} \neq \emptyset$, con $u^*(A, B)_{M(A, B)} \subset [M(A, B)]$ por Obs 4.3

Así $(\exists C \in [M(A, B)])(C \in u^*(A, B)_{M(A, B)})$

Por tanto $(\exists C \in [M(A, B)])(AuC \wedge BuC)$ por Definición 7.

c) Si $(\exists z \in \mathbb{Z})(\exists D \in [z])(DuA \wedge DuB)$, entonces

$(\exists D \in [z])(D \in u_*(A, B)_z)$, así $u^*(A, B)_z \neq \emptyset$ por Definición 7.

Luego $\{w \in \mathbb{Z} : u_*(A, B)_w \neq \emptyset\} \neq \emptyset$, donde $(\forall w \in \mathbb{Z})(w \leq \{x, y\})$ por Obs 4.2

Siempre se puede tomar el máximo de un subconjunto no vacío de \mathbb{Z} acotado superiormente, por consiguiente existe $\max\{w \in \mathbb{Z} : u_*(A, B)_w \neq \emptyset\}$

Por tanto $\exists m(A, B)$ por Definición 8. \square

Proposición 14. Si $A, B \in [x]$ y $\exists m(A, B)$ con $m(A, B) = x$ entonces $A \cong B$ ²².

Demostración. Si $A, B \in [x]$ y $\exists m(A, B)$, con $m(A, B) = x$

Por tanto $(\exists D \in [x])(DuA \wedge DuB)$, sin embargo, por la Proposición 8.c, tenemos que $D \cong A$ y $D \cong B$, por tanto $A \cong B$. \square

Proposición 15. Si $A \in [x]$, $B \in [y]$ con AuB y además $z \in \mathbb{Z}$ tal que $C \in [z]$ con $z \geq \{x, y\}$ tenemos que:

a) Si existe $m(A, C)$, entonces existe $m(B, C)$ y $m(A, C) \leq m(B, C)$

b) $M(A, C) \leq M(B, C)$

Demostración. Sean $A \in [x]$, $B \in [y]$ y AuB , además $z \in \mathbb{Z}$ tal que $C \in [z]$ con $z \geq \{x, y\}$

a) Si existe $m(A, C)$ entonces $(\exists D \in [m(A, C)])(DuA \wedge DuC)$ y como AuB , se sigue que DuB por Proposición 10.c

Así: $(\exists D \in [m(A, C)])(DuB \wedge DuC)$, luego $D \in u_*(B, C)_{m(A, C)}$

Por definición 8 de $m(B, C)$ y como $u_*(B, C)_{m(A, C)} \neq \emptyset$, se sigue que $m(A, C) \leq m(B, C)$.

b) $(\exists E \in [M(B, C)])(BuE \wedge CuE)$ por la Obs 4.4

como AuB , se sigue que AuE por Proposición 10.c

Así: $(\exists E \in [M(B, C)])(AuE \wedge CuE)$, luego $E \in u^*(A, C)_{M(B, C)}$

Por definición 8 de $M(A, C)$ y como $u^*(A, C)_{M(B, C)} \neq \emptyset$, se sigue que $M(A, C) \leq M(B, C)$. \square

Proposición 16. Si $A, B \in [x]$, con $A \cong B$ y sea cualquier $z \in \mathbb{Z}$ tal que $C \in [z]$ tenemos:

a) $m(A, C) = m(B, C)$ si existen

b) $M(A, C) = M(B, C)$

Demostración. Sean $A, B \in [x]$, con $A \cong B$, además sea $z \in \mathbb{Z}$ tal que $C \in [z]$

a) Sea $w = \min\{x, z\}$ entonces

$(\forall y \in \mathbb{Z}, y \leq w)(\forall D \in [y])(DuA \Leftrightarrow DuB)$, aplicando dos veces la Proposición 9.b.

Luego $(\forall y \in \mathbb{Z}, y \leq w)(u_*(A, C)_y = u_*(B, C)_y)$ por Definición 7.

²²De donde $A \not\cong B \Rightarrow m(A, B) < x$

Así, tenemos que $u_*(A, C)_y, u_*(B, C)_y$ son ambos vacíos o ninguno es vacío, de donde, por la Definición 8 se cumple solo una de las siguientes afirmaciones:

- i) $(\exists m(A, C))(\exists m(B, C))(m(A, C) = m(B, C))$
- ii) $(\nexists m(A, C)) \wedge (\nexists m(B, C))$

b) Sea $w = \max\{x, z\}$ entonces

$(\forall y \in \mathbb{Z}, y \geq w)(\forall E \in [y])(AuE \Leftrightarrow BuE)$, aplicando dos veces la Proposición 9.a.

Luego $(\forall y \in \mathbb{Z}, y \geq w)(u^*(A, C)_y = u^*(B, C)_y)$ por Definición 7.

Por la Definición 8 tenemos $M(A, C) = M(B, C)$. \square

5. Axiomas de unicidad

En la presente sección se postulan los dos axiomas de unicidad que permiten un comportamiento regular y esperado en el conglomerado de los \mathbb{Z} -espacios, limitando la incidencia a elementos definidos de \mathbb{Z} -espacios y permitiendo la definición de los operadores \uparrow y \downarrow , junto con varias propiedades y observaciones.

Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}$:

Axioma 3 (Ax3). Sean $A \in [x], B \in [y]$:

a) Si $\exists m(A, B)$ entonces se cumple:

$(\exists D \in [m(A, B)])(\forall C \in [z])(CuA \wedge CuB \Rightarrow CuD)$ donde $z \leq m(A, B)$

b) $(\exists E \in [M(A, B)])(\forall C \in [z])(AuC \wedge BuC \Rightarrow EuC)$ donde $M(A, B) \leq z$

Proposición 17. Sean $A \in [x]$ y $B \in [y]$, considerando la terminología de Ax3:

a) Si $\exists m(A, B)$, con $(\exists D' \in [m(A, B)])(D'uA \wedge D'uB)$ entonces $D \cong D'$

b) Si $(\exists E' \in [M(A, B)])(AuE' \wedge BuE')$ entonces $E \cong E'$

Demostración. Sean $A \in [x]$ y $B \in [y]$, considerando la terminología de Ax3:

a) Supongamos $\exists m(A, B)$, si $(\exists D' \in [m(A, B)])(D'uA \wedge D'uB)$
Aplicando Ax3.a y como $m(A, B) \leq m(A, B)$, entonces tenemos $D'uD$
Por tanto $D \cong D'$ por la Proposición 8.c ya que $[D']^{-1} = [D]^{-1}$

b) Supongamos $(\exists E' \in [M(A, B)])(AuE' \wedge BuE')$
Aplicando Ax3.b y como $M(A, B) \leq M(A, B)$, entonces tenemos EuE'
Por tanto $E \cong E'$ por la Proposición 8.c ya que $[E']^{-1} = [E]^{-1}$ \square

Definición 9. Sean $A \in [x], B \in [y]$:

a) Si $\exists m(A, B)$, por Ax 3.a y Proposición 17.a, existe un único $D \in [m(A, B)]$ tal que $DuA \wedge DuB$. Denominamos $A \downarrow B$ a este único D ³⁴.

b) Por Ax 3.b y Proposición 17.b, existe un único $E \in [M(A, B)]$ tal que $AuE \wedge BuE$. Denominamos $A \uparrow B$ a este único E ³⁵.

Observaciones y Comentarios

Si $A \in [x], B \in [y]$, tenemos:

Obs 5.1 Los conjuntos cociente $(u_*(A, B)_{m(A, B)}) / \cong y (u^*(A, B)_{M(A, B)}) / \cong$ tienen cardinalidad 1 por Proposición 17.a. y 17.b. ³⁶

Obs 5.2 Por Obs 4.4 siempre existe $M(A, B)$, por tanto Ax.3.b y $A \uparrow B$ están bien definidas.

Obs 5.3 $A \uparrow B$ tiene sentido solamente si $(\exists x, y \in \mathbb{Z})(A \in [x] \wedge B \in [y])$.

Obs 5.4 $A \downarrow B$ tiene sentido solamente si $(\exists x, y \in \mathbb{Z})(A \in [x] \wedge B \in [y])$ y $\exists m(A, B)$

Obs 5.5 Por la Proposición 13.c y la Obs 5.4, se tiene que $A \downarrow B$ tiene sentido si existen $z \in \mathbb{Z}$ y $D \in [z]$ tales que $DuA \wedge DuB$. ³⁷

Obs 5.6 $(A \uparrow B) \in [M(A, B)], (A \downarrow B) \in [m(A, B)]$ por Definición 8 de \uparrow y \downarrow

Obs 5.7 Si $\exists m(A, B)$ y $\exists D \in [m(A, B)]$ tales que DuA, DuB , entonces $D \cong (A \downarrow B)$ por definición 9 de \downarrow .

Obs 5.8 Si $\exists E \in [M(A, B)]$ tales que AuE, BuE , entonces $E \cong (A \uparrow B)$ por definición 9 de \uparrow .

Propiedades

Si $A \in [x], B \in [y]$, se tienen las siguientes proposiciones:

Proposición 18. a) $(A \uparrow A) \cong A$

b) $Au(A \uparrow B)$ y $Bu(A \uparrow B)$

c) $AuB \Rightarrow (A \uparrow B) \cong B$

d) $(A \uparrow B) \cong (B \uparrow A)$

e) $A \cong B \Rightarrow (A \uparrow B) \cong A$

Demostración. Si $A \in [x], B \in [y]$:

a) Por definición de \uparrow , $(A \uparrow A) \in [x]$ tal que $Au(A \uparrow A)$
De donde, por Proposición 8.c se tiene $(A \uparrow A) \cong A$

b) Por definición 9 de \uparrow , $(A \uparrow B) \in [M(A, B)]$, tal que $Au(A \uparrow B)$ y $Bu(A \uparrow B)$

c) Si AuB entonces $M(A, B) = y$ por Obs 4.10, así existen $(A \uparrow B), B \in [M(A, B)]$ tales que $Bu(A \uparrow B)$ y BuB , por la Proposición 18.b

Por la unicidad en la Proposición 17.b, $(A \uparrow B) \cong B$

³⁵Se aclara que es único salvo \cong -equivalencia

³⁶La Obs 5.1 es equivalente a Ax3

³⁷Obviamente considerando que $(\exists x, y \in \mathbb{Z})(A \in [x] \wedge B \in [y])$ con $z \leq \{x, y\}$.

³⁴Se aclara que es único salvo \cong -equivalencia

- d) Por definición 9 de $B \uparrow A$, es el único E respecto a \cong tal que $E \in [M(A, B)]$ con AuE y BuE , como $M(A, B) = M(B, A)$ por la Obs 4.12 y por la unicidad se tiene: $(A \uparrow B) \cong (B \uparrow A)$
- e) Si $A \cong B$ entonces AuB por la Proposición 8.b
Así, $(A \uparrow B) \cong B$ por Proposición 18.c. y $A \cong B$, entonces $(A \uparrow B) \cong A$

□

Proposición 19. Si $\exists m(A, B)$, entonces se tiene lo siguiente:

- a) $(A \downarrow A) \cong A$
b) $(A \downarrow B)uA$ y $(A \downarrow B)uB$
c) $AuB \Rightarrow (A \downarrow B) \cong A$
d) $A \downarrow B \cong B \downarrow A$
e) $A \cong B \Rightarrow (A \downarrow B) \cong B$

Demostración. Si $A \in [x]$, $B \in [y]$, tales que $\exists m(A, B)$, tenemos:

- a) Por definición 9 de \downarrow , $(A \downarrow A) \in [x]$ tal que $(A \downarrow A)uA$
De donde, por Proposición 8.c se tiene $A \downarrow A \cong A$
- b) Por definición 9 de \downarrow , $(A \downarrow B) \in [m(A, B)]$, tal que $(A \downarrow B)uA$ y $(A \downarrow B)uB$
- c) Si AuB entonces $m(A, B) = x$ por Obs 4.10, así existen $(A \downarrow B)$, $A \in [m(A, B)]$ tales que $(A \downarrow B)uA$, $(A \downarrow B)uB$ y AuA por la Proposición 19.b
Por la unicidad en la Proposición 17.a, $(A \downarrow B) \cong A$
- d) Por definición 9 de $B \downarrow A$ es el único D respecto a \cong tal que $D \in [m(B, A)]$ con DuA y DuB , como $m(A, B) = m(B, A)$ por la Obs 4.12 y por la unicidad se tiene: $(A \downarrow B) \cong (B \downarrow A)$
- e) Si $A \cong B$ entonces AuB por la Proposición 8.b
Así, $(A \downarrow B) \cong A$ por Proposición 19.c y $A \cong B$ entonces $(A \downarrow B) \cong B$.

□

Proposición 20. Si $z \in \mathbb{Z}$ tal que, $A, B \in [x]$, $C \in [z]$ y $A \cong B$ entonces:

- a) Si $\exists m(A, C)$ y $\exists m(B, C)$ entonces $(A \downarrow C) \cong (B \downarrow C)$
b) $(A \uparrow C) \cong (B \uparrow C)$.

Demostración. Si $z \in \mathbb{Z}$ tal que $A, B \in [x]$, $C \in [z]$ y $A \cong B$:

- a) Si $\exists m(A, C)$ y $\exists m(B, C)$ entonces se cumple que $m(A, C) = m(B, C)$ por Proposición 16.a.
Por definición 9 $A \downarrow C$ es el único D respecto a \cong , tal que $D \in [m(A, C)]$ con DuA y DuC
Como $A \cong B$, entonces se cumple que $D \in [m(B, C)]$ tal que DuB y DuC por Proposición 9.b.
Por la unicidad en la Proposición 17.a, tenemos $D \cong (B \downarrow C)$
Por tanto $(A \downarrow C) \cong (B \downarrow C)$
- b) Se cumple que $M(A, C) = M(B, C)$ por Proposición 16.b.
Por definición 9 $A \uparrow C$ es el único E respecto a \cong , tal que $E \in [M(A, C)]$ con AuE y CuE ,
Como $A \cong B$, entonces se cumple que $E \in [M(B, C)]$ tal que BuE y CuE por Proposición 9.a.
Por la unicidad en la Proposición 17.b, tenemos $E \cong (B \uparrow C)$
Por tanto $(A \uparrow C) \cong (B \uparrow C)$

□

6. Axiomas de construcción

En la presente sección, se plantearán dos axiomas, para el uso adecuado de los operadores \uparrow y \downarrow , permitiendo la construcción de nuevos elementos de \mathbb{Z} -espacios, en el marco de un comportamiento también adecuado del conglomerado.

Sean $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$:

Axioma 4 (Ax4). Sean $x < y$, con $A \in [x]$ y $B \in [y]$ tales que AuB :

- a) $(\forall z < y)(\exists C \in [z])(B \cong (A \uparrow C))$
b) $(\forall w > x)(\exists D \in [w])(A \cong (B \downarrow D))$

Observaciones

Obs 6.1 Conforme la terminología de Ax4.a tenemos que CuB , por Proposición 18.b

Obs 6.2 Conforme la terminología de Ax4.b tenemos que AuD , por Proposición 19.b

Obs 6.3 Conforme la terminología de Ax4, no se puede dar que cada uno de los siguientes tres conjuntos $\{A, B\}$, $\{C, B\}$ o $\{D, A\}$ sean subconjuntos de un solo \mathbb{Z} -espacio.

Obs 6.4 Ax4 está bien establecido, debido a que los \mathbb{Z} -espacios no son vacíos y a que cada uno de estos tiene al menos dos elementos no congruentes por Proposición 4.b.

Obs 6.5 Ax4 no implica que dados cualquiera $x, y \in \mathbb{Z}$, $A \in [x]$ y $B \in [y]$ exista $m(A, B)$

Obs 6.6 El Ax4.b, implica que $\exists m(B, D)$, conforme la terminología de este Axioma.

Propiedades

Proposición 21. Sean $A \in [x]$ y $B \in [y]$ con $x < y$ y AuB , entonces

- a) $(\exists C \in [x])(B \cong (A \uparrow C) \wedge A \not\cong C)$
b) $(\exists D \in [y])(A \cong (B \downarrow D) \wedge B \not\cong D)$

Demostración. Sean $A \in [x]$ y $B \in [y]$ con $x < y$ y AuB , entonces

- a) Por Ax4.a $(\exists C \in [x])(B \cong (A \uparrow C))$
Si suponemos $A \cong C$, entonces, por Proposición 18.e $(A \uparrow C) \cong A$, de donde $A \cong B$ por Proposición 5. Esto implica que $x = y$, que es contradictorio.
Por tanto $A \not\cong C$
- b) Por Ax4.b $(\exists D \in [y])(A \cong (B \downarrow D))$
Si suponemos $B \cong D$, entonces, por Proposición 19.e $(B \downarrow D) \cong B$, de donde $B \cong A$ por Proposición 5. Esto implica que $x = y$, que es contradictorio.
Por tanto $B \not\cong D$

□

Proposición 22. Para cualquiera $x, y \in \mathbb{Z}$, dado $A \in [x]$ existe $B \in [y]$ tal que $\exists m(A, B)$

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ y $A \in [x]$, además, sea $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z < \{x, y\}$.

Por Proposición 11.b, existe $C \in [z]$ tal que CuA

Luego, por Ax4.b, como $y > z$ existe $B \in [y]$ tal que $C \cong (A \downarrow B)$

Por tanto $\exists m(A, B)$ por Obs 5.4. \square

7. Ejemplo de aplicación

Como un ejemplo concreto de la axiomática indicada, obtendremos los términos primitivos y los axiomas de Incidencia del sistema de Hilbert:

- Se define la noción primitiva de *Punto* como un elemento de $[0]$.
- Se define la noción primitiva de *Recta* como un elemento de $[1]$.
- Se define la noción primitiva de *Plano* como un elemento de $[2]$
- Se define la relación primitiva “yace en” como la relación $t \in ([0] \times [1]) \cup ([1] \times [2])$, conforme lo señalado previamente.

Axiomas de Hilbert:

Tomando en cuenta que se trata de un espacio tridimensional, es decir que no se consideran objetos en $[4]$, los axiomas de Incidencia de Hilbert se pueden expresar de la siguiente manera:

1. Dos puntos distintos A y B determinan una única recta R .
2. Dos puntos cualquiera de una recta la determinan por completo, es decir si A y B determinan R , además A y C también determinan R con B distinto de C entonces B y C determinan R .
3. Tres puntos A, B, C no situados en la misma recta, determinan un plano α .
4. Tres puntos A, B, C no situados en la misma recta, determinan un plano K por completo, es decir, si A, B, D también determinan K tales que A, B, D no están en la misma recta y C es distinto de D , entonces A, C, D determinan K .
5. Si dos puntos A y B de la recta R yacen en el plano K entonces toda la recta R yace en el plano K
6. Si dos planos K y L tienen un punto A en común, entonces tienen al menos otro punto B en común.
7. En cada recta R hay al menos dos puntos A y B , en cada plano K hay al menos tres puntos A, B, C que no están en la misma recta
8. Existen al menos cuatro puntos A, B, C, D no situados en un mismo plano.

Nociones previas:

Si tomamos los “puntos”: $A, B, C, D \in [0]$, las “rectas”: $R, S \in [1]$ y los “planos”: $K, L \in [2]$, debemos reformular lo establecido por los axiomas con la terminología del presente documento.

Lo primero que se debe notar es que no existen las nociones de \mathbb{Z} -espacios diferentes de $[0]$, $[1]$, $[2]$ y $[3]$ en los axiomas de Hilbert, por tanto especificaremos primero las siguientes nociones:

- a. *Puntos Distintos*, esta noción podría significar solamente que $A \not\cong B$, sin embargo en el contexto debemos interpretar adicionalmente si existe o no $m(A, B)$, ya que todos los \mathbb{Z} -espacios pueden tener o no tener \mathbb{Z} -espacios contenidos comunes (Entendemos “ \mathbb{Z} -espacios contenidos” como \mathbb{Z} -espacios que están en relación t o u con otro, por la izquierda ³⁹). Además se aclara que cuando $\exists m(A, B)$, se interpreta que $m(A, B) = -1$, con base en el Ax 2.a.
- b. *Única Recta*, interpretamos la unicidad de cualquier \mathbb{Z} -espacio definida por la equivalencia \cong .
- c. *Puntos Determinan una Recta*, esta noción se interpreta como $(A \uparrow B) \in [1]$, lo que implica que A y B son puntos distintos (conforme lo mencionado en el punto a inmediatamente arriba).
- d. *Punto en una Recta*, las nociones de “estar en”, “yacer en”, “pertener a”, o similares se interpretan como t en AtR cuando se trata de \mathbb{Z} -espacios adyacentes ($[x]$ es *adyacente* a $[y]$ si $|x - y| = 1$) o también se interpretan como u en AuK cuando se trata de \mathbb{Z} -espacios no adyacentes.
- d. *Determinan un plano*, esta noción se interpreta para Puntos cuando AuK, BuK, CuK son distintos, con $(A \uparrow B) \not\cong (A \uparrow C)$, tal que $K \cong [(A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C)]$. Se observa que dos rectas R y S determinan un plano cuando son diferentes. ⁴⁰
- e. *No en la misma recta*: Tres puntos A, B, C no situados en la misma recta, se entiende como $\exists m((A \uparrow B), (A \uparrow C))$
- f. *Dos planos tienen un punto en común*: Dos planos K, L tienen un punto en común, se interpreta bajo la limitación de que el máximo $z \in \mathbb{Z}$ que podemos tomar es 3.

Demostración de los Axiomas de Hilbert:

Ahora contamos con las herramientas para ejemplificar los conceptos de \mathbb{Z} -espacios en la axiomática de Hilbert, pasemos a demostrar cada axioma:

³⁹“ A está en relación u por la izquierda con R ” si AuR

⁴⁰ R y S son diferentes si $R \not\cong S$ considerando si existe o no existe $m(R, S)$ y la restricción a los \mathbb{Z} -espacios $[0], [1], [2], [3]$

³⁸Se observa que Obs. 6.5 y Proposición 22 no se contradicen.

Ejemplo 1 (Axioma 1 de Hilbert). Si $A, B \in [0]$ tales que A y B son distintos, entonces $(\exists! R \in [1])(AtR \wedge BtR)$, donde R es $(A \uparrow B)$, los puntos A y B determinan la única recta R .

Demostración. Si $A, B \in [0]$ tal que $A \not\cong B$ tenemos las siguientes posibilidades conforme la noción de “Puntos Distintos”:

- 1^a Si $\nexists m(A, B)$, así $M(A, B) = 0 + 1 = 1$ conforme Ax 2.b.
 2^a Si $\exists m(A, B)$, $m(A, B) = -1$, entonces $M(A, B) = 0 + 0 - (-1) = 1$, conforme Ax 2.a.

En ambos casos $\exists!(A \uparrow B)$ tal que $(A \uparrow B) \in [1]$

Si llamamos R a $A \uparrow B$, tenemos AuR y BuR (específicamente AtR y BtR). \square

Ejemplo 2 (Axioma 2 de Hilbert). Si $A, B, C \in [0]$ distintos entre sí tales que AtR, BtR, CtR , con $R \cong (A \uparrow B)$ y $R \cong (A \uparrow C)$ entonces $(B \uparrow C) \cong R$.

Demostración. Si $A, B, C \in [0]$ distintos entre sí tales que AtR, BtR, CtR y $R \in [1]$

con $R \cong (A \uparrow B)$ y $R \cong (A \uparrow C)$, como B y C son distintos, $B \not\cong C$ y:

- a) Si $\nexists m(B, C)$, así $M(B, C) = 0 + 1 = 1$ conforme Ax 2.b.
 b) Si $m(B, C) = -1$, entonces $M(B, C) = 0 + 0 - (-1) = 1$, conforme Ax 2.a.

En ambos casos $\exists!(B \uparrow C)$ tal que $(B \uparrow C) \in [1]$

Como $(B \uparrow C)$ es único en $[1]$, tal que $Bu(B \uparrow C)$ y $Cu(B \uparrow C)$, además $R \in [1]$ tal que BuR y CuR (por Proposición 9.b).

Tenemos que $R \cong (B \uparrow C)$ por la Proposición 17.b. \square

Ejemplo 3 (Axioma 3 de Hilbert). Sean $A, B, C \in [0]$ distintos entre sí tales que AuK, BuK, CuK y $(A \uparrow B) \not\cong (A \uparrow C)$ entonces $K \cong ((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C))$

Demostración. Sean $A, B, C \in [0]$ distintos entre sí tales que AuK, BuK, CuK

y $(A \uparrow B) \not\cong (A \uparrow C)$,

sabemos que $(A \uparrow B), (A \uparrow C) \in [1]$, pues $A, B, C \in [0]$ son distintos entre sí.

Como $Au(A \uparrow B)$ y $Au(A \uparrow C)$, entonces $\exists m((A \uparrow B), (A \uparrow C))$ por Proposición 13.c

y $m((A \uparrow B), (A \uparrow C)) = 0$ por Obs 4.6 y Proposición 14. Así $M((A \uparrow B), (A \uparrow C)) = 1 + 1 - 0 = 2$ por Ax 2.a

En Ax 3.b, complementado con la Proposición 17.b y la Definición 9.b habíamos caracterizado $(A \uparrow B)$, de la siguiente manera, tomando en cuenta que $M[A, B] = 1$ y que $K \in [2]$:

$(\exists(A \uparrow B) \in [1])(\forall C \in [z])(Au(A \uparrow B) \wedge Bu(A \uparrow B) \Rightarrow (A \uparrow B)uC)$, donde $M(A, B) \leq z$

Tomando $K \in [2]$ como uno de los C , y sabiendo que $Au(A \uparrow B)$ y $Bu(A \uparrow B)$, por Proposición 18.b

concluimos que $(A \uparrow B)uK$ por Ax 3.b.

Seguimos el mismo razonamiento para concluir que $(A \uparrow C)uK$.

Así tenemos que $K, ((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C)) \in [2]$ tales que $(A \uparrow B)$ y $(A \uparrow C)$ están en relación u por la izquierda con K y con

$((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C))$

Por la proposición 17.b tenemos que $K \cong ((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C))$ \square

Ejemplo 4 (Axioma 4 de Hilbert). Tres puntos A, B, C no situados en la misma recta, determinan un plano K por completo, es decir, si A, B, D también determinan K tales que A, B, D no están en la misma recta y C es distinto de D , entonces A, C, D determinan K .

Demostración. Los tres puntos A, B, C diferentes, no situados en la misma recta, determinan el plano $((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C))$, conforme se vio en la prueba del Axioma 3 de Hilbert. Llamemos K a $((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C))$

Si $D \in [0]$ diferente de A, B, C , con DuK y tal que A, B, D no están en la misma recta.

Suponemos que $K \cong ((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow D))$

Como AuK, CuK , además $(A \uparrow C) \in [1]$

Tenemos que $(A \uparrow C)uK$ por Ax3.b

Además como CuK, DuK , $(C \uparrow D) \in [1]$, por el Axioma 1 de Hilbert, ya que son diferentes.

Tenemos que $(C \uparrow D)uK$ por Ax3.b

Por otra parte, $\exists m((A \uparrow C), (C \uparrow D))$ con $m((A \uparrow C), (C \uparrow D)) = 0$, pues $Cu(A \uparrow C)$ y $Cu(C \uparrow D)$, por Obs 4.6 y Proposición 14.

Por tanto $M((A \uparrow C), (C \uparrow D)) = 1 + 1 - 0 = 2$ y $(A \uparrow C) \uparrow (C \uparrow D) \in [2]$ por Ax2.a y Definición 9 de \uparrow .

Hemos visto que $(A \uparrow C)uK$ y que $(C \uparrow D)uK$ por definición de K y de \uparrow .

Además, como $K, ((A \uparrow C) \uparrow (C \uparrow D)) \in [2]$

tenemos que $K \cong ((A \uparrow C) \uparrow (C \uparrow D))$ por Proposición 17.b. \square

Ejemplo 5 (Axioma 5 de Hilbert). Si dos puntos A y B de la recta R yacen en el plano K entonces toda la recta R yace en el plano K .

Demostración. Sean $A, B \in [0]$, tales que AtR, BtR , con $RtK, R \in [1]$ y $K \in [2]$ ⁴¹

Por otra parte estamos suponiendo que AuK, BuK .

Por definición de \uparrow , aplicando Ax3.b con $(A \uparrow B)$ como E y K como C , resulta:

$(A \uparrow B)uK$, ya que $M[A, B] = 1$.

Finalmente $(A \uparrow B)tK$ pues $K \in [2]$ por definición 5 de u . \square

Ejemplo 6 (Axioma 6 de Hilbert). Si dos planos K y L tienen un punto A en común, entonces tienen al menos otro punto B en común.

Demostración. Conforme la interpretación de “dos planos tienen un punto en común”(el mayor $z \in \mathbb{Z}$ es 3 para un \mathbb{Z} -espacio), tomemos los planos $K, L \in [2]$, tales que $A \in [0]$ es tal que AuK, AuL . De estas suposiciones, tenemos que $\exists m(K, L), m(K, L) \geq 0$ por Obs 4.5.

Con base en el Ax.2.a, tenemos $M(K, L) = 2 + 2 - m(K, L)$, por

⁴¹Se hicieron correcciones en este punto gracias a Amanda Iglesias.

tanto $m(K, L) > 0$, caso contrario $M(K, L) = 4$, que contradice la interpretación mencionada. Solo queda que $m(K, L) = 2$ o que $m(K, L) = 1$

Caso 1 Si suponemos $m(K, L) = 2$,

entonces por la Proposición 14, $K \cong L$

Por definición 5 de u , como AuK , tenemos que $\exists R \in [1]$ tal que AtR y RtK

Como AtR con $[A]^{-1} < [R]^{-1}$, por Proposición 21.a, tenemos que existe $B \in [0]$ tal que $R \cong (A \uparrow B)$ y $A \not\cong B$.

De aquí tenemos que BtR por Obs 6.1 y así BuK y BuL por definición 5 de u , tal que $A \not\cong B$.

Caso 2 Si suponemos $m(K, L) = 1$,

entonces por la proposición 13.a, ($\exists R \in [1]$)($RuK \wedge RuL$), por tanto RtK, RtL , por definición 5 de u .

Por D1, tenemos que $\exists C \in [0]$ tal que CtR y por tanto CuK y CuL por definición 5 de u .

Caso 2.1 Si $A \not\cong C$

entonces se cumple el requerimiento tomando $B = C$.

Caso 2.2 Si $A \cong C$,

entonces AtR por Proposición 4.a, además como $[A]^{-1} < [R]^{-1}$, por Proposición 21.a, tenemos que existe $B \in [0]$ tal que $R \cong (A \uparrow B)$ y $A \not\cong B$.

De aquí tenemos que BtR por Obs 6.1 y así BuK y BuL por definición de u , tal que $A \not\cong B$. \square

Ejemplo 7 (Axioma 7 de Hilbert).

En cada recta R hay al menos dos puntos diferentes A y B , en cada plano K hay a menos tres puntos diferentes A, B, C que no están en la misma recta.

Demostración.

En la recta: Por D1 de la definición 1, existe $A \in [0]$ tal que AtR por Proposición 21.a, tenemos que existe $B \in [0]$ tal que $A \not\cong B$, con $R \cong (A \uparrow B)$.

De aquí AtR y BtR .

En el plano: Por D1 de la definición 1, tenemos que existe $R \in [1]$ tal que RtK

por Proposición 21.a, tenemos que existe $S \in [1]$ tal que $S \not\cong R$, con $K \cong (R \uparrow S)$.

Como $R \not\cong S$, existe $A \in [0]$ tal que $AtR \wedge AtS$, por definición de $\not\cong$

Asimismo, existe $B \in [0]$ tal que $BtS \wedge BtR$, por definición de $\not\cong$

De donde AuK, BuK y $A \not\cong B$

Caso 1 Si $\nexists m(R, S)$

Por Propiedad 21.a existe $C \in [0]$ tal que $R \cong (A \uparrow C)$, con $C \not\cong A$ De aquí CtR y CtK y $C \not\cong B$ (pues BtR).

Caso 2 Si $\exists m(R, S)$

En este caso $m(R, S) = 0$ por la restricción mencionada de los

\mathbb{Z} -espacios

Por tanto $\exists C \in [0]$ tal que CtR, CtS por la Proposición 13.a, luego CuK

Tenemos que $C \not\cong A$ puesto que AtS y $C \not\cong B$ puesto que BtR Finalmente $\exists A, B, C \in [0]$, diferentes entre sí, tales que AuK, BuK, CuK \square

Ejemplo 8 (Axioma 8 de Hilbert). Existen al menos cuatro puntos $A, B, C, D \in [0]$ no situados en un mismo plano.

Demostración. Supongamos $A, B, C \in [0]$ tales que $K = ((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C)) \in [2]$, y AuK, BuK, CuK .

Por D2 de la definición 1, existe $R \in [1]$ tal que RtK

Por D1 de la definición 1, existe $E \in [0]$ tal que EtR , tenemos los siguientes casos:

Caso 1 Si $E \not\psi K$

entonces existe $D = E \in [0]$ con $D \psi K$.

Caso 2 Si $E \psi K$, entonces:

Por Proposición 21.a, existe $D \in [0]$ tal que $D \not\cong E$ y $R \cong (E \uparrow D)$ Si suponemos DuK entonces $(E \uparrow D)uK$ por definición 9 de \uparrow , de donde RuK por Proposición 12.

Luego RtK lo que contradice a (*).

Por tanto existe $D \in [0]$ tal que $D \psi K$. \square

8. Relación p

En la presente sección, finalizando este primer documento, complementamos lo señalado hasta ahora con otra noción fundamental para la Geometría Euclidiana, el “Paralelismo Fuerte”, expresado por la relación p , con sus propiedades correspondientes.

Sean $x, y \in \mathbb{Z}$:

Definición 10. Si $A \in [x]$ y $B \in [y]$, entonces se denota ApB siempre y cuando $A \cong B \vee \nexists m(A, B)$ ^{42,43}

Observaciones y Comentarios

Si $A \in [x]$, $B \in [y]$, tenemos:

Obs 8.1 La relación ApB solamente tiene sentido si existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $A \in [x]$, $B \in [y]$.

Obs 8.2 Si tenemos que ApB y $x \neq y$, entonces $A \not\cong B$, por tanto $\nexists m(A, B)$.

⁴²Se incluye la congruencia en la definición de p , para que se puedan hacer particiones de elementos en un \mathbb{Z} -espacio, siguiendo el libro Álgebra Geométrica de Artin.

⁴³Se debe notar que este paralelismo es “fuerte” debido a que no existen \mathbb{Z} -espacios comunes a los de referencia.

Obs 8.3 Si ApB decimos que A “es fuertemente paralela a” B

Obs 8.4 Si ApB y $A \not\cong B$ entonces no tiene sentido $A \downarrow B$.

Obs 8.5 La definición 10 de ApB es equivalente a $\exists m(A, B) \Rightarrow A \cong B$.

Axioma 5 (Ax5).⁴⁴ Sean $x, y \in \mathbb{Z}$, $A \in [x]$, $B \in [y]$, con $x < y$ y $A \not\downarrow B$, entonces:

a) $(\exists C \in [y])(AuC \wedge CpB)$

b) Si $(\exists D \in [y])(AuD \wedge DpB)$ entonces $D \cong C$.

Propiedades

Si $x \in \mathbb{Z}$, se tienen las siguientes proposiciones:

Proposición 23. Sean $A, B, C \in [x]$, tales que $A \cong B$ y ApC entonces BpC .

Demostración. Sean $x \in \mathbb{Z}$ y $A, B, C \in [x]$, tales que $A \cong B$ y ApC , tenemos dos casos:

a) Si $A \cong C$

entonces $B \cong C$ por transitividad de \cong , así BpC

b) Si $\nexists m(A, C)$ (ya que ApC) (*)

Supongamos que $\exists m(B, C)$ entonces $\exists m(A, C)$ y $m(A, C) = m(B, C)$ por Proposición 16.a, esto contradice (*).

De donde $\nexists m(B, C)$, por tanto BpC . \square

Proposición 24. La relación p es de equivalencia en $[x]$.

Demostración. Sean $x \in \mathbb{Z}$ y $A, B, C \in [x]$:

a) $A \cong A$, entonces $A \cong A \vee \nexists m(A, A)$, entonces ApA .

b) Si ApB , entonces $A \cong B \vee \nexists m(A, B)$, entonces $B \cong A \vee \nexists m(B, A)$
Por tanto BpA

c) Si ApB y BpC , veamos la relación entre A y C :

Si $\nexists m(A, C)$ entonces por definición se cumple ApC .

Por otra parte si suponemos que $\exists m(A, C)$, entonces $(\exists! D \in [m(A, C)])(DuA \wedge DuC)$ ⁴⁵ por Proposición 17.a. Así, como $m(A, B) = m(B, C) = m(A, C)$ en caso que existan, se dan los casos:

i) Si $A \cong B$ entonces $(\exists D \in [m(A, C)])(DuB \wedge DuC)$ así $\exists m(B, C)$

Luego $B \cong C$ porque BpC , por tanto ApC

ii) Si $B \cong C$ entonces $(\exists D \in [m(B, C)])(DuA \wedge DuB)$ así $\exists m(A, B)$

Luego $A \cong B$ porque ApB , por tanto ApC

iii) Si $\nexists m(A, B) \wedge \nexists m(B, C)$ entonces $D \not\downarrow B$ (Si DuB contradiría las suposiciones de no existencia, ya que DuA y DuC).

Por otra parte, si $A \cong C$ entonces ApC , así (por la nota en la Proposición 14) tenemos $m(A, C) < x$

Aplicando Ax 5.a para $D \in [m(A, C)]$ y $B \in [x]$, tenemos:

$(\exists! E \in [x])(DuE \wedge EpB)$, luego por Ax5.b $A \cong E \cong C$, de donde ApC . \square

Referencias

- [1] Emil Artin, Álgebra Geométrica, Princeton University, Editorial Limusa 1992, Versión autorizada en español de la obra publicada en inglés por Interscience Publishers, Inc. New York con el título, GEOMETRIC ALGEBRA @1957, ISBN 0-471-60839-4.
- [2] Euclides, Los Elementos de la Geometría, 300 AC, como referencia: <http://www.claymath.org/euclids-elements>
- [3] David Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 1900, como referencia <http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf>.
- [4] Alfred Tarski, artículo The Bulletin of Symbolic Logic Volume 5, Number 2, June 1999, como referencia: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.27.9012>
- [5] V.A., Enciclopedia de Filosofía de Stanford en línea <https://plato.stanford.edu/entries/epistemology-geometry/> <https://plato.stanford.edu/entries/nonwellfounded-set-theory/>
- [6] N.V.Efímov, Geometría Superior Ed. Mir
- [7] P.Suppes, Teoría Axiomática de Conjuntos, Ed Norma
- [8] K.Gödel, Obras Completas, Ed. Alianza Universidad

⁴⁴El presente axioma determina la geometría del conglomerado como Euclidiana y el punto b es equivalente al quinto postulado de los *Elementos de Euclides*.

⁴⁵La notación $\exists!$ significa existe un único respecto de \cong .



Teorema de Ptolomeo

Lopez Apaza Huber D.

Resumen

El presente artículo pretende mostrar propiedades conocidas de la geometría, como consecuencia de la aplicación del teorema de Ptolomeo. La cual hace referencia a la caracterización de los cuadriláteros cíclicos a través de sus lados.

Palabras clave: Cuadriláteros cíclicos, Teorema de Ptolomeo.



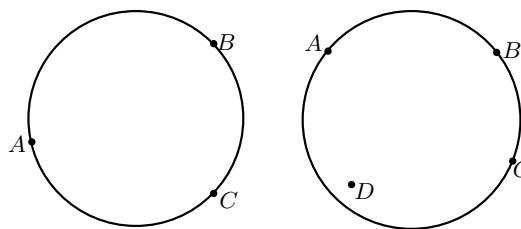
Claudio Ptolomeo, científico de origen egipcio, fue un importante astrónomo, matemático y geógrafo de ascendencia griega que floreció en Alejandría durante el siglo II d.C. Sus escritos representan el logro culminante de la ciencia grecorromana, principalmente si nos referimos a su modelo geocéntrico el cual estaba fundamentado en el centro de la tierra como modelo del universo lo que en la actualidad conocemos como el sistema Ptolomeico. Otra gran obra suya es la *Geographia*, en que describe el mundo de su época. Utiliza un sistema de latitud y longitud que sirvió de ejemplo a los cartógrafos durante muchos años. Esta obra contenía graves errores en cuanto a distancias, de hecho, se piensa que Colón terminó descubriendo América producto de que en el mapa de Ptolomeo las Indias se encontraba notablemente más cercanas al navegar en esa dirección.

El presente artículo pretende mostrar propiedades conocidas de la geometría, como consecuencia de la aplicación del teorema de Ptolomeo. La cual hace referencia a la caracterización de los cuadriláteros cíclicos a través de sus lados.

1. Introducción

Un hecho conocido en geometría es por cualquiera tres puntos no alineados, siempre es posible hacer pasar una única circunferencia. Basta tomar como centro el punto donde concurren las mediatrices del triángulo y como radio la distancia de este punto

a cualquiera de los vértices. ¿Pero qué podemos decir si consideramos cuatro puntos en lugar de tres.? Como es de esperar, no siempre existirá una circunferencia que pase por estos cuatro puntos. Por ejemplo, consideremos la circunferencia que pasa por los puntos A , B , C y agreguemos un cuarto punto D , el cual no esté sobre la circunferencia. Claramente se puede ver, que no existe una circunferencia que pase por estos cuatro puntos. De aquí se ve que los cuadriláteros que posean una circunferencia que pase por sus vértices deben ser en cierta forma especiales. A tales cuadriláteros se les acostumbra llamar cuadriláteros cíclicos.



Definición 1.1. Un cuadrilátero se llama cíclico si existe una circunferencia que pasa por sus cuatro vértices.

2. Dos criterios para la caracterización de cuadriláteros cíclicos

Si un $\square ABCD$ está inscrito en una circunferencia como en la Figura a, sabemos que los ángulos opuestos son suplementarios. Esto se sigue del hecho que son inscritos y que entre los dos abarcan la circunferencia completa. Inversamente, si tenemos un $\square ABCD$

✉ DelboyLopez@gmail.com (Lopez Apaza Huber D.)

en el que un par de sus ángulos opuestos son suplementarios, sabemos que el cuadrilátero es cíclico.

Del mismo modo, si tenemos un $\square ABCD$ inscrito en un círculo como en la Figura b, sabemos que los ángulos que comparten un mismo arco son iguales entre sí. Recíprocamente, si en $\square ABCD$ las diagonales forman con los lados opuestos ángulos iguales, dicho cuadrilátero es cíclico.

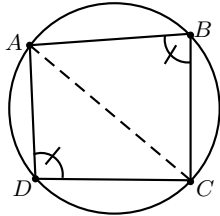


Figura a.

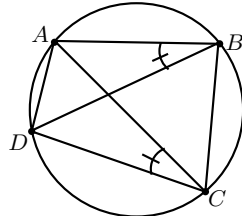


Figura b.

Las dos discusiones descritas anteriormente, son las demostraciones de los siguientes teoremas.

Teorema 2.1. Un $\square ABCD$ es cíclico si y sólo si sus ángulos opuestos son suplementarios.

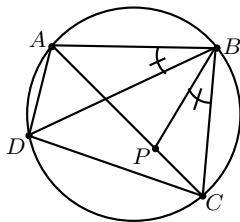
Teorema 2.2. Un $\square ABCD$ es cíclico si y sólo si las diagonales forman con los lados opuestos ángulos iguales.

Los dos teoremas anteriormente mencionados caracterizan a los cuadriláteros cíclicos a través de sus ángulos. Otra caracterización se puede hacer respecto a sus lados, y de hecho, este es conocido como Teorema de Ptolomeo, el cual enunciaremos y demostramos a continuación.

3. Teorema de Ptolomeo

Teorema 3.1 (Teorema de Ptolomeo). Un $\square ABCD$ es cíclico si y sólo $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$

Demostración. Empezaremos demostrando que si el cuadrilátero es cíclico, se cumple la expresión dada en el enunciado. Consideramos un punto P sobre la diagonal AC , de tal manera que $\angle PBC = \angle ABD$.



Dado que $\square ABCD$ es cíclico, también tenemos que $\angle PCB = \angle ADB$. De aquí deducimos que los triángulos PBC y ABD son semejantes, por lo que:

$$PC = \frac{BC \cdot AD}{BD}$$

Análogamente se tiene que los triángulos BAP y BDC son semejantes, de donde se tiene que:

$$AP = \frac{AB \cdot CD}{BD}$$

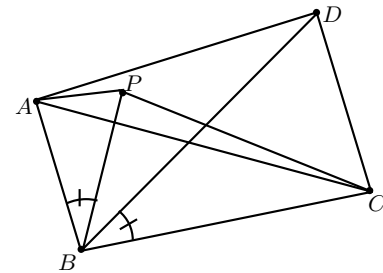
Sumando las dos expresiones obtenidas anteriormente tenemos:

$$AP + PC = AC = \frac{AB \cdot CD}{BD} + \frac{BC \cdot AD}{BD}$$

por tanto

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

Ahora demostraremos la otra implicación, es decir, si cumple la expresión $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ es un cuadrilátero cíclico. Consideramos el cuadrilátero de la figura de vértices $ABCD$.



Construir un triángulo APB semejante al triángulo DCB , de tal forma que el lado AB se corresponda con BD , y los ángulos con vértice B marcados en la figura, sean iguales.

Por la semejanza se cumple:

$$\frac{BP}{BC} = \frac{AB}{BD} = \frac{AP}{CD}$$

de donde se tiene:

$$AB \cdot CD = AP \cdot BD$$

La primera de las igualdades de la proporción junto a la igualdad de los ángulos marcados establece que los triángulos PBC y ABD son semejantes, por tanto:

$$\frac{PC}{AD} = \frac{BC}{BD}$$

de donde se tiene:

$$BC \cdot AD = PC \cdot BD$$

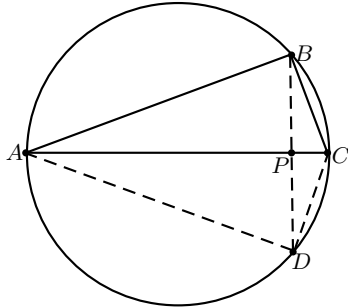
Y sumando las dos igualdades nos queda:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AP \cdot BD + PC \cdot BD \geq AC \cdot BD$$

Desigualdad que es válida para cualquier cuadrilátero, cuya igualdad se dará si y sólo si los puntos A, P, C son colineales y que $\angle BAC = \angle BAP = \angle BDC$. Así el $\square ABCD$ es cíclico. \square

Veamos la continuación algunas consecuencias interesantes del teorema de Ptolomeo.

Primero consideremos un triángulo rectángulo ABC inscrito en una circunferencia y hacemos la construcción del cuadrilátero $ABCD$, obteniendo el punto D por simetría del punto B respecto a la hipotenusa.



Aplicando el teorema de Ptolomeo se tiene:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Dado que los triángulos ABC y ADC son congruentes, se tiene que $AD = AB$, $BC = CD$ y $BD = 2 \cdot BP$. Reemplazando en la igualdad anterior se tiene:

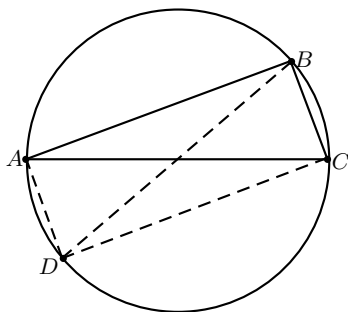
$$AC \cdot 2 \cdot BP = AB \cdot BC + AB \cdot BC = 2 \cdot AB \cdot BC$$

Simplificando

$$AC \cdot BP = AB \cdot BC$$

Así queda demostrado, que el producto de longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al producto de longitudes de la hipotenusa y la altura respectiva.

Análogamente al caso anterior consideremos un triángulo rectángulo ABC inscrito en una circunferencia y hacemos la construcción del rectángulo $ABCD$, obteniendo el punto D por simetría del punto B respecto al centro de la circunferencia.



Aplicando el teorema de Ptolomeo se tiene:

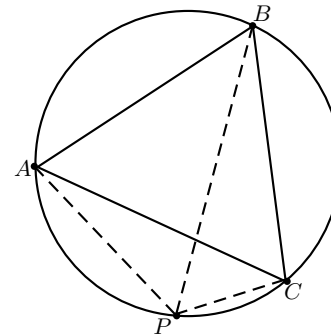
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Dado que $\square ABCD$ es un rectángulo, se tiene que $AB = CD$, $AD = BC$ y $AC = BD$. Reemplazando en la igualdad anterior se tiene:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Con lo cual queda demostrado, que la suma de los cuadrados de longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

Ahora consideremos un triángulo equilátero ABC inscrito en una circunferencia y un punto P de la circunferencia.



aplicando el teorema de Ptolomeo se tiene:

$$AP \cdot BC + AB \cdot PC = AC \cdot BP$$

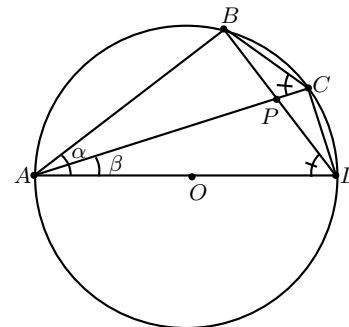
Dado que ABC es un triángulo equilátero se tiene, $AB = BC = AC$. Reemplazando en la igualdad anterior se tiene que:

$$AP \cdot BC + BC \cdot PC = BC \cdot BP$$

simplificando se tiene:

$$AP + PC = BP$$

Consideremos ahora, un cuadrilátero cíclico cuyo uno de sus lados sea el diámetro de la circunferencia.



Aplicando el teorema de Ptolomeo se tiene:

$$AD \cdot BC = AC \cdot BD - AB \cdot CD$$

Dividiendo por AD^2 , tenemos:

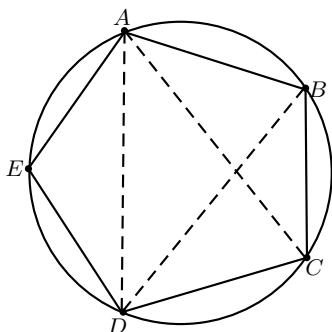
$$\frac{BC}{AD} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{AD} - \frac{AB}{AD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

Sea $\alpha = \angle DAB$, $\beta = \angle DAC$, tenemos que $\text{sen } \alpha = \frac{BD}{AD}$, $\text{sen } \beta = \frac{CD}{AD}$, $\text{sen}(\alpha - \beta) = \frac{BP}{AP}$, $\cos \alpha = \frac{AB}{AD}$ y $\cos \beta = \frac{AC}{AD}$. Como el triángulo APD es semejante al triángulo BPC , entonces $\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{AD}$. Reemplazando en la igualdad anterior se tiene:

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta$$

que es la conocida fórmula del seno de la diferencia de ángulos.

Ahora consideremos el pentágono regular $ABCDE$, inscrita en una circunferencia.



Aplicando el teorema de Ptolomeo al cuadrilátero $ABCD$ se tiene:

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$$

Dado que $ABCDE$ es un pentágono regular se tiene, $AB = DC = BC$ y $AC = BD = AD$. Reemplazando en la igualdad anterior se tiene que:

$$AC^2 = AB^2 + AC \cdot AB$$

Dividiendo por AB^2 , se tiene:

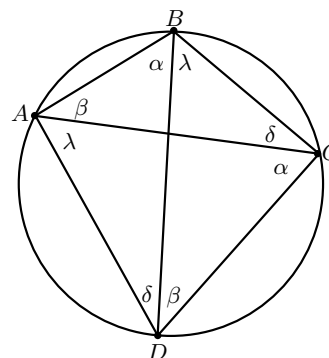
$$\frac{AC^2}{AB^2} = 1 + \frac{AC}{AB}$$

Si denotamos con φ a $\frac{AC}{AB}$ se obtiene:

$$\varphi^2 = 1 + \varphi$$

La cual es conocida como la razón de oro.

Para terminar, consideremos el cuadrilátero $ABCD$, inscrita en una circunferencia de diámetro R .



Aplicando el teorema de Ptolomeo se tiene:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC \tag{1}$$

Como $ABCD$ es cíclico se tiene, $\angle CAD = \angle CBD = \lambda$, $\angle BCA = \angle BDA = \delta$, $\angle BAC = \angle BDC = \beta$ y $\angle ABD = \angle ACD = \alpha$.

De donde se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{AD}{R} & ; & & \text{sen } \delta &= \frac{AB}{R} \\ \text{sen } \beta &= \frac{BC}{R} & ; & & \text{sen}(\alpha + \lambda) &= \frac{AC}{R} = \text{sen}(\delta + \beta) \\ \text{sen } \lambda &= \frac{CD}{R} & ; & & \text{sen}(\lambda + \beta) &= \frac{BD}{R} = \text{sen}(\alpha + \delta) \end{aligned}$$

Reemplazando en (1), se tiene:

$$R \cdot \text{sen}(\alpha + \lambda) \cdot R \cdot \text{sen}(\lambda + \beta) = R \cdot \text{sen } \delta \cdot R \cdot \text{sen } \lambda + R \cdot \text{sen } \beta \cdot R \cdot \text{sen } \alpha$$

Simplificando, se tiene:

$$\text{sen}(\alpha + \lambda) \cdot \text{sen}(\lambda + \beta) = \text{sen } \delta \cdot \text{sen } \lambda + \text{sen } \beta \cdot \text{sen } \alpha$$

donde esta igualdad se cumple si $\alpha + \beta + \lambda + \delta = \pi$ y es conocida como el teorema trigonométrico de Ptolomeo.

Referencias

- [1] Geometría en Olimpiadas de Matemáticas, Jesús Jerónimo Castro.
- [2] Problemas sobre cuadriláteros, Rocío López Anguita.
- [3] Geometría, José Antonio Gómez Ortega.
- [4] La enciclopedia de contenido libre, wikipedia.