Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen.

Von

Wilhelm Ackermann in Göttingen.

Um den Beweis für die von Cantor aufgestellte Vermutung zu erbringen, daß sich die Menge der reellen Zahlen, d. h. der zahlentheoretischen Funktionen, mit Hilfe der Zahlen der zweiten Zahlklasse auszählen läßt, benutzt Hilbert einen speziellen Aufbau der zahlentheoretischen Funktionen. Wesentlich bei diesem Aufbau ist der Begriff des Typs einer Funktion. Eine Funktion vom Typ 1 ist eine solche, deren Argumente und Werte ganze Zahlen sind, also eine gewöhnliche zahlentheoretische Funktion. Die Funktionen vom Typ 2 sind die Funktionenfunktionen. Eine derartige Funktion ordnet jeder zahlentheoretischen Funktion eine Zahl zu. Eine Funktion vom Typ 3 ordnet wieder den Funktionenfunktionen Zahlen zu, usw. Die Definition der Typen läßt sich auch ins Transfinite fortsetzen, für den Gegenstand dieser Arbeit ist das aber nicht von Belang[1]).

Sämtliche Funktionen werden durch Rekursion nach einer gewöhnlichen Zahlenvariablen definiert. Z. B. ist

$$\varphi(a, 0) = 0,$$
$$\varphi(a, n+1) = \varphi(a, n) + a$$

ein Beispiel einer Definition einer Funktion vom Typ 1. $\varphi(a, b)$ stellt offenbar die Funktion $a \cdot b$ dar. Die folgende Rekursion definiert eine Funktion vom Typ 2.

$$\varrho_c(f(c), a, 0) = a,$$
$$\varrho_c(f(c), a, n+1) = f(\varrho_c(f(c), a, n)).$$

$\varrho_c(f(c), a, n)$ stellt die n-malige Iteration der Funktion f, genommen für das Argument a, dar. (Der Index c von ϱ soll bedeuten, daß $\varrho_c(f(c), a, n)$ von f abhängt und nicht von c.) Neben der Rekursion ist natürlich auch

[1]) Siehe des näheren D. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Annalen 95 (1926).

die Bildung von Funktionen durch Einsetzung zulässig. Sind z. B. $\varphi(a, b)$ und $\psi(a, b)$ zahlentheoretische Funktionen von zwei Variablen, so ist auch $\varphi(\varphi(a, a), \psi(a, b))$ eine derartige Funktion.

Der Aufbau der zahlentheoretischen Funktionen geschieht nun in der Weise, daß man sie in gewisse Gruppen ordnet. In die erste Gruppe kommen diejenigen Funktionen, bei deren Definition nur der Typ 1 gebraucht wird, in die zweite die Funktionen, bei deren Definition die Benutzung einer durch Rekursion definierten Funktion vom Typ 2 wesentlich ist, während sich ein höherer Typ umgehen läßt, usf..

Damit der geschilderte Aufbau wirklich alle zahlentheoretischen Funktionen liefert, ist es wesentlich, daß jede Gruppe auch eine Erweiterung des Funktionenbestandes bringt. Es wäre ja z. B. denkbar, daß man alle Funktionen, bei deren Definition man den ersten und zweiten Typ braucht, auch mit Hilfe des ersten Typs allein erhalten kann.

Wir stellen nun im folgenden eine Funktion auf, von der wir beweisen, daß sie nicht ohne den zweiten oder einen höheren Typ definiert werden kann. Mit Hilfe der dabei benutzten Methode wird man auch für andere Gruppen unschwer den Beweis führen können, daß sie den Funktionenbestand erweitern [2]).

Es sollen übrigens die Rekursionen sämtlich nur nach einer Variablen gehen. Simultane Rekursionen sind ausgeschlossen. Eine Funktion, die durch simultane Rekursion definiert ist, läßt sich auch durch gewöhnliche Rekursion darstellen, falls man eventuell höhere Typen benutzt.

1.

Wir wollen die erwähnte Funktion zunächst angeben. Bei dem Aufbau der Funktionen vermittels Rekursion muß die Funktion $a+1$ als bekannt vorausgesetzt werden und kann nicht wieder durch Rekursion definiert werden. Die Funktion $a+b$ wird dann durch die Rekursion

$$a+0=a,$$
$$a+(b+1)=(a+b)+1$$

definiert. Der Einfachheit halber wollen wir noch zwei weitere Funktionen als bekannte Ausgangsfunktionen nehmen, nämlich $\lambda(a, b)$ und $\iota(a, b)$. $\lambda(a, b)$ ist gleich 1, falls $a=b$, und gleich 0, falls $a \neq b$. Bei $\iota(a, b)$ ist es umgekehrt. Man kann aber auch λ und ι durch Rekursion definieren.

[2]) Eine Arbeit, die mit der vorliegenden manche Berührungspunkte hat, wird von Herrn G. Sudan publiziert werden. Es handelt sich bei ihr um die Definition von Zahlen der zweiten Zahlklasse, die man in ähnlicher Weise klassifizieren kann wie die Definitionen der reellen Zahlen.

$\alpha(a, n)$ soll für $\iota(n, 1)\cdot\iota(n, 0)\cdot a + \lambda(n, 1)$ geschrieben werden. Hierbei ist $a\cdot b$ definiert durch

$$a\cdot 0 = a,$$
$$a\cdot(b+1) = a\cdot b + a.$$

$\alpha(a, n)$ ist also immer gleich a, ausgenommen für $n = 0$ und $n = 1$. Es ist $\alpha(a, 0) = 0$ und $\alpha(a, 1) = 1$. ϱ bedeute die schon vorher erwähnte Iterationsfunktion. Endlich wird eine zahlentheoretische Funktion φ mit drei Variablen gegeben durch:

$$\varphi(a, b, 0) = a + b,$$
$$\varphi(a, b, n+1) = \varrho_c(\varphi(a, c, n), \alpha(a, n), b).$$

Wie man daraus erkennt, ist $\varphi(a, b, 1)$ mit $a\cdot b$ identisch. $\varphi(a, b, 2)$ stimmt mit a^b überein. $\varphi(a, b, 3)$ ist die b-malige Iteration von a^b, genommen für a, usw. Unsere gesuchte Funktion erhalten wir nun, wenn wir in $\varphi(a, b, c)$ alle drei Argumente gleichnehmen. Wir behaupten also, $\varphi(a, a, a)$ kann nicht ohne Benutzung des zweiten Typs definiert werden[3]).

Die Ausschließung von simultanen Rekursionen ist für unsere Behauptung wesentlich. Es gelten nämlich die folgenden Formeln:

$$\varphi(a, b, 0) = a + b,$$
$$\varphi(a, 0, n+1) = \alpha(a, n),$$
$$\varphi(a, b+1, n+1) = \varphi(a, \varphi(a, b, n+1), n).$$

(Diese Formeln werden übrigens gleich bewiesen.)

2.

Der Beweis für unsere Behauptung wird darin bestehen, daß wir zeigen, daß die Funktion $\varphi(a, a, a)$ schneller wächst als jede Funktion, bei deren Definition man nur den ersten Typ benutzt. Um das zeigen zu können, müssen wir eine Reihe von Eigenschaften und Formeln für unsere Funktion beweisen.

I. $\varphi(a, 0, n+1) = \alpha(a, n)$.

Beweis.

$$\varphi(a, 0, n+1) = \varrho_c(\varphi(a, c, n), \alpha(a, n), 0) = \alpha(a, n).$$

II. $\varphi(a, b+1, n+1) = \varphi(a, \varphi(a, b, n+1), n)$.

Beweis.

$$\varphi(a, b+1, n+1) = \varrho_c(\varphi(a, c, n), \alpha(a, n), b+1),$$

[3]) Diese von mir aufgestellte Funktion ist schon in der Hilbertschen Abhandlung „Über das Unendliche" erwähnt; vgl. S. 185 dort.

$$\varrho_c(\varphi(a, c, n), \alpha(a, n), b+1) = \varphi\left(a, \varrho_c(\varphi(a, c, n), \alpha(a, n), b), n\right),$$
$$\varrho_c(\varphi(a, c, n), \alpha(a, n), b) = \varphi(a, b, n+1),$$

woraus die Behauptung ersichtlich ist.

Wir brauchen ferner gewisse Monotonitätseigenschaften von φ.

III. *Falls* $a \geqq 2$, *ist* $\varphi(a, b+1, n) > \varphi(a, b, n)$.

Beweis. Für $n = 0, 1$ ist diese Behauptung richtig; denn

$$a + 2 + b + 1 > a + 2 + b$$

und

$$(a+2)\cdot(b+1) > (a+2)\cdot b.$$

Es bleibt zu beweisen:

A) $\varphi(a+2, b+1, n+2) > \varphi(a+2, b, n+2)$.

Wir beweisen diese Formel zusammen mit

B) $\varphi(a+2, b, n+2) > b$

durch Induktion nach n.

$$\varphi(a+2, b+1, 2) > \varphi(a+2, b, 2),$$

denn

$$(a+2)^{b+1} > (a+2)^b,$$
$$\varphi(a+2, b, 2) = (a+2)^b > b.$$

Für n seien beide Formeln schon bewiesen. Wir beweisen zunächst B) für $n+1$ durch Induktion nach b. Für $b = 0$ und $n+1$ ist B) richtig, denn es gilt für jedes n:

$$\varphi(a+2, 0, n+3) = a + 2 > 0,$$
$$\varphi(a+2, b+1, n+3) = \varphi(a+2, \varphi(a+2, b, n+3), n+2).$$

Wenn also $\varphi(a+2, b, n+3) \geqq b+1$, so ist wegen der Gültigkeit von A) für n:

$$\varphi(a+2, \varphi(a+2, b, n+3), n+2) \geqq \varphi(a+2, b+1, n+2),$$

also

$$\varphi(a+2, b+1, n+3) \geqq \varphi(a+2, b+1, n+2),$$
$$\varphi(a+2, b+1, n+2) > b+1,$$
$$\varphi(a+2, b+1, n+3) > b+1.$$

B) ist damit für $n+1$ bewiesen.

$$\varphi(a+2, b+1, n+3) = \varphi(a+2, \varphi(a+2, b, n+3), n+2)$$
$$> \varphi(a+2, b, n+3) \text{ (nach B)}.$$

Damit sind die Formeln A) und B), also auch III bewiesen.

In ähnlicher Weise beweisen sich die beiden Formeln

IV. $\varphi(a+1, b, n) \geqq \varphi(a, b, n)$,

V. $\varphi(a+2, b+3, n+1) > \varphi(a+2, b+3, n)$.

Beweis von IV. Man überzeugt sich leicht, daß die Formel IV für $a = 0$ und $a = 1$ gilt. Für $n = 0, 1, 2$ läßt sich das leicht nachprüfen. Für $n \geqq 3$ gelten die Formeln:

$$\varphi(0, b, n) \leqq 1,$$
$$\varphi(1, b, n) = 1,$$
$$\varphi(2, b, n) \geqq 1,$$

die man durch Induktion nach n und Unterscheidung der Fälle $b = 0$ und $b \neq 0$ beweist. Wir müssen, um IV zu beweisen, noch zeigen, daß

$$\varphi(a+3, b, n) \geqq \varphi(a+2, b, n).$$

Für $n = 0$ stimmt das, desgl. für $b = 0$. Für kleineres n sowie für dasselbe n und kleineres b sei es schon gezeigt.

$$\varphi(a+3, b+1, n+1) = \varphi(a+3, \varphi(a+3, b, n+1), n),$$
$$\varphi(a+3, \varphi(a+3, b, n+1), n) \geqq \varphi(a+2, \varphi(a+3, b, n+1), n),$$
$$\varphi(a+3, b, n+1) \geqq \varphi(a+2, b, n+1).$$

Aus III folgt dann:

$$\varphi(a+2, \varphi(a+3, b, n+1), n) \geqq \varphi(a+2, \varphi(a+2, b, n+1), n).$$

$\varphi(a+2, \varphi(a+2, b, n+1), n)$ ist aber dasselbe wie $\varphi(a+2, b+1, n+1)$.

Beweis von V. Für $n = 0$ und $n = 1$ stimmt die Formel. Es bleibt zu zeigen:

$$\varphi(a+2, b+3, n+3) > \varphi(a+2, b+3, n+2).$$

Nehmen wir statt dessen die allgemeinere:

$$\varphi(a+2, b+1, n+3) > \varphi(a+2, b+1, n+2).$$

Für $b = 0$ ist das richtig, denn

$$\varphi(a+2, 1, n+3) = \varphi(a+2, \varphi(a+2, 0, n+3), n+2)$$
$$= \varphi(a+2, a+2, n+2),$$
$$\varphi(a+2, a+2, n+2) > \varphi(a+2, 1, n+2) \quad \text{[nach III]}.$$

Für $n = 0$ ebenfalls. Es sei nun für kleineres n sowie für dasselbe n und kleineres b schon gezeigt.

$$\varphi(a+2, b+2, n+4) = \varphi(a+2, \varphi(a+2, b+1, n+4), n+3),$$
$$\varphi(a+2, b+1, n+4) > \varphi(a+2, b+1, n+3),$$
$$\varphi(a+2, b+1, n+3) \geqq b+2.$$

(Nach Formel B), S. 121.)

$$\varphi(a+2,\ \varphi(a+2,\ b+1,\ n+4),\ n+3) > \varphi(a+2,\ b+2,\ n+3),$$
$$\varphi(a+2,\ b+2,\ n+4) > \varphi(a+2,\ b+2,\ n+3).$$

Damit ist auch V bewiesen.

Die folgende Eigenschaft ist die wichtigste, die bei unserem Beweis gebraucht wird.

VI. *Von den beiden Formeln*

$$\varrho_c(\varphi(c,\ c,\ n),\ a,\ a) \leqq \varphi(a,\ a,\ n+3),$$
$$\varrho_c(\varphi(c,\ c,\ n),\ a,\ a) \leqq 2$$

ist mindestens eine richtig.

[Die erste der beiden Formeln gilt übrigens immer, ausgenommen für $a=1$ und $n=0$.]

Wir brauchen hier eine Reihe von Hilfsformeln.

Formel 1: Wir beweisen zunächst:

$$\varphi(\varphi(a+2,\ c,\ 3),\ \varphi(a+2,\ c,\ 3),\ 1) \leqq \varphi(a+2,\ c+1,\ 3)$$

durch Induktion nach c. Für $c=0$ ist diese Formel richtig, denn die linke Seite wird gleich $\varphi(a+2, a+2, 1)$, d. h. $(a+2)\cdot(a+2)$, und die rechte $(a+2)^{(a+2)}$. Benutzt man, daß für $c=1, 2, 3$ die Funktion $\varphi(a, b, c)$ die bekannten Funktionen darstellt, so ergeben sich leicht die folgenden Formeln:

$$2 \leqq \varphi(a+2,\ c,\ 3),$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\varphi(a+2,\ c+1,\ 3),\ \varphi(a+2,\ c+1,\ 3),\ 1)& \\
&= \varphi(a+2,\ c+1,\ 3)^2 = (a+2)^{2\cdot\varphi(a+2,c,3)} \\
&\leqq (a+2)^{\varphi(a+2,c,3)\,\varphi(a+2,c,3)} \\
&\leqq (a+2)^{\varphi(a+2,c+1,3)}, \\
(a+2)^{\varphi(a+2,c+1,3)} &= \varphi(a+2,\ c+2,\ 3).
\end{aligned}$$

Formel 2:

$$\varphi(\varphi(a+2,\ b,\ 3),\ \varphi(a+2,\ c,\ 3),\ 2) \leqq \varphi(a+2,\ c+2,\ 3),$$

falls $c \geqq b$.

Beweis. a) Es sei $b=0$.

$$\varphi(a+2,\ 0,\ 3) = a+2,$$

$$\begin{aligned}
\varphi(a+2,\ \varphi(a+2,\ c,\ 3),\ 2)& \\
&= (a+2)^{\varphi(a+2,c,3)} = \varphi(a+2,\ c+1,\ 3) < \varphi(a+2,\ c+2,\ 3)
\end{aligned}$$

(nach III)

b) $b \geqq 1$.

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi(a+2, b, 3), \varphi(a+2, c, 3), 2)\\ = (a+2)^{\varphi(a+2, b-1, 3)\cdot\varphi(a+2, c, 3)} &\leqq (a+2)^{\varphi(a+2, c, 3)\cdot\varphi(a+2, c, 3)}\\ &\leqq (a+2)^{\varphi(a+2, c+1, 3)},\end{aligned}$$

(nach Formel 1)

$$(a+2)^{\varphi(a+2, c+1, 3)} = \varphi(a+2, c+2, 3).$$

Formel 3:

Für alle $a \geqq 2$, $c \geqq b$ und $b \neq 0$ und für ein festes n möge die Beziehung gelten:

$$\varphi(\varphi(a, b, n+3), \varphi(a, c, n+3), n+2) \leqq \varphi(a, c+2, n+3).$$

Wir behaupten dann, es gilt die Beziehung:

$$\varphi(\varphi(a, b, n+4), m, n+3) \leqq \varphi[a, \varphi(a, b-1, n+4) + 2m, n+3]$$

für alle derartigen a, b, c und für beliebiges m.

Für $m = 0$ sind die rechten und linken Seiten gleich.

$$\begin{aligned}&\varphi(\varphi(a, b, n+4), m+1, n+3)\\ &\qquad = \varphi\{\varphi(a, b, n+4), \varphi[\varphi(a, b, n+4), m, n+3], n+2\}.\end{aligned}$$

Gilt die Behauptung schon für kleineres m, so folgt mit Hilfe von Formel III, daß die rechte Seite nicht größer ist als

$$\varphi\{\varphi(a, b, n+4), \varphi[a, \varphi(a, b-1, n+4) + 2m, n+3], n+2\},$$

$$\varphi(a, b, n+4) = \varphi[a, \varphi(a, b-1, n+4), n+3].$$

Aus der Voraussetzung ergibt sich dann, daß der vorletzte Ausdruck kleiner oder gleich

$$\varphi[a, \varphi(a, b-1, n+4) + 2m + 2, n+3]$$

ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Formel 4:

Es sei $a \geqq 2$ und $c \geqq b$. Dann ist

$$\varphi(\varphi(a, b, n+3), \varphi(a, c, n+3), n+2) \leqq \varphi(a, c+2, n+3).$$

Für $n = 0$ stimmt diese Formel mit Formel 2 überein. Wir beweisen sie nun für $n+1$, unter der Voraussetzung, daß sie für n gilt. Zunächst sei b von 0 verschieden. Nach Formel 3 ist

$$\begin{aligned}&\varphi(\varphi(a, b, n+4), \varphi(a, c, n+4), n+3)\\ &\qquad \leqq \varphi[a, \varphi(a, b-1, n+4) + 2\varphi(a, c, n+4), n+3]\\ &\qquad \leqq \varphi[a, 3\cdot\varphi(a, c, n+4), n+3].\end{aligned}$$

Durch Induktion nach c läßt sich für $c \geqq 2$ leicht beweisen

$$3c \leqq \varphi(2, c, 3).$$

Da ferner $\varphi(a, c, n+4) \geqq 2$, weil $a \geqq 2$, so ist

$$3 \cdot \varphi(a, c, n+4) \leqq \varphi(2, \varphi(a, c, n+4), 3) \leqq \varphi(a, \varphi(a, c, n+4), n+3),$$

$$\varphi(a, \varphi(a, c, n+4), n+3) = \varphi(a, c+1, n+4),$$

$$\varphi(\varphi(a, b, n+4), \varphi(a, c, n+4), n+3)$$
$$\leqq \varphi(a, \varphi(a, c+1, n+4), n+3),$$

$$\varphi(a, \varphi(a, c+1, n+4), n+3) = \varphi(a, c+2, n+4).$$

Damit ist die Formel für $b \neq 0$ bewiesen.

$$\varphi(\varphi(a, 0, n+3), \varphi(a, c, n+3), n+2)$$
$$= \varphi(a, \varphi(a, c, n+3), n+2)$$
$$= \varphi(a, c+1, n+3) \leqq \varphi(a, c+2, n+3).$$

Für $b = 0$ ist sie also ebenfalls richtig.

Formel 5:

$$\varrho_c(\varphi(c, c, n+2), a+2, b) \leqq \varphi(a+2, 2b, n+3).$$

Beweis durch Induktion nach b. Für $b = 0$ bedeutet die Formel

$$a+2 \leqq a+2$$

$$\varrho_c(\varphi(c, c, n+2), a+2, b+1)$$
$$= \varphi\{\varrho_c[\varphi(c, c, n+2), a+2, b], \varrho_c[\varphi(c, c, n+2), a+2, b], n+2\}.$$

Der letzte Ausdruck ist nach Formel IV und III

$$\leqq \varphi(\varphi(a+2, 2b, n+3), \varphi(a+2, 2b, n+3), n+2).$$

Nach Formel 4 ist der letzte Term wieder

$$\leqq \varphi(a+2, 2b+2, n+3).$$

Damit ist Formel 5 bewiesen.

Beweis für VI. a) $a = 0$.

$$\varrho_c(\varphi(c, c, n), 0, 0) = 0 \leqq \varphi(0, 0, 3).$$

b) $a = 1$.

$$\varrho_c(\varphi(c, c, n), 1, 1) = \varphi(1, 1, n),$$
$$\varphi(1, 1, 0) = 2,$$
$$\varphi(1, 1, n+1) = 1.$$

Das letztere beweist sich leicht durch Induktion nach n.

c) $a \geqq 2$. Für $n = 0$ und $n = 1$ ist VI leicht zu verifizieren. Es bleibt für beliebige a und n zu beweisen:

$$\varrho_c(c, c, n+2), a+2, a+2) \leqq \varphi(a+2, a+2, n+5).$$

Ersetzen wir in Formel 5 b durch $a+2$, so erhalten wir:

$$\varrho_c(\varphi(c, c, n+2), a+2, a+2) \leqq \varphi(a+2, 2\cdot(a+2), n+3),$$

$$2(a+2) \leqq (a+2)^{a+2} = \varphi(a+2, 1, 3),$$

$$\varphi(a+2, 1, 3) \leqq \varphi(a+2, a+1, n+4),$$

$$\varrho_c(\varphi(c, c, n+2), a+2, a+2)$$
$$\leqq \varphi(a+2, \varphi(a+2, a+1, n+4), n+3),$$

$$\varphi(a+2, \varphi(a+2, a+1, n+4), n+3) = \varphi(a+2, a+2, n+4),$$

$$\varphi(a+2, a+2, n+4) \leqq \varphi(a+2, a+2, n+5),$$

$$\varrho_c(\varphi(c, c, n+2), a+2, a+2) \leqq \varphi(a+2, a+2, n+5),$$

w. z. b. w.

3.

Die angegebenen Formeln werden uns den Beweis ermöglichen, daß $\varphi(a, a, a)$ nicht ohne Benutzung des zweiten Typs definiert werden kann. Bezeichnen wir zur Abkürzung die Aussage, daß die zahlentheoretische Funktion $f(.)$ von einem gewissen Argument an nicht kleiner ist als $g(.)$, mit $\mathfrak{R}_a(g(a), f(a))$, so ist der Gang des Beweises der folgende:

Sei $\psi(a)$ irgendeine zahlentheoretische Funktion, die ohne Benutzung des zweiten Typs definiert ist. Wir werden dann zeigen, daß es ein n gibt, so daß $\mathfrak{R}_a(\psi(a), \varphi(a, a, n))$, oder, wie wir zur Abkürzung schreiben, wir zeigen, daß $\mathfrak{S}_{an}(\psi(a), \varphi(a, a, n))$ der Fall ist. Damit wäre der Beweis geführt, da $\mathfrak{S}_{an}(\varphi(a, a, a), \varphi(a, a, n))$ nicht zutrifft, wie sich aus Formel V ergibt.

Unsere Ausgangsfunktionen λ, c, $a+1$ haben die Eigenschaft $\mathfrak{S}$. Aus diesen Ausgangsfunktionen gewinnt man sukzessiv neue Funktionen, indem man die schon gebildeten Funktionen wieder bei den Rekursionen verwendet. Wir werden durch Induktion beweisen, daß die neugebildeten Funktionen immer wieder die Eigenschaft $\mathfrak{S}$ haben.

Genauer gesagt beweisen wir die folgenden Sätze: Wir mögen einen endlichen Bereich von Funktionen, von einer, von zwei und mehreren Zahlenvariablen haben mit den folgenden Eigenschaften:

1. Wenn $\psi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine Funktion unseres Bereiches ist, so enthält der Bereich auch eine in bezug auf alle Variablen monoton steigende Funktion $\psi'(a_1, \ldots, a_n)$ (Monotonie hier mit Einschluß der Gleichheit verstanden), so daß für beliebige $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\psi'(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqq \psi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

gilt. Es darf natürlich auch ψ' mit ψ identisch sein, wenn ψ schon selbst monoton ist.

2. Für jede Funktion $\psi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ des Bereiches gilt

$$\mathfrak{G}_{an}(\psi(a, a, \ldots, a),\ \varphi(a, a, n)).$$

Unsere beiden Sätze lauten dann folgendermaßen:

Satz 1. *Fügt man unserem Bereich eine neue Funktion hinzu, die man durch Einsetzung aus den Funktionen unseres Bereiches gewinnt, so hat der neue Bereich entweder wieder die beiden Eigenschaften, oder man kann ihn durch Hinzufügung noch weiterer Funktionen wieder in einen solchen Bereich verwandeln.*

Satz 2. *Bildet man unter Benützung der Funktionen unseres Bereichs durch Rekursion eine neue Funktion ψ, und fügt man diese Funktion und eventuell noch andere dem Bereich hinzu, so treffen auf den neu entstehenden Bereich wieder die beiden Eigenschaften zu.*

Da unsere Ausgangsfunktionen die Eigenschaften 1. und 2. haben, so ist mit dem Beweis dieser beiden Sätze alles erledigt.

Beweis von Satz 1. Man habe eine neue Funktion durch Einsetzung gebildet. Falls die Funktionen, aus denen man die neue Funktion kombinierte, alle monotone Funktionen waren, so ist auch die neue Funktion monoton in bezug auf sämtliche Variablen (monoton hier immer im Sinne von monoton steigend mit Einschluß der Gleichheit verstanden). Dann ist also die erste Eigenschaft erfüllt. — Sind bei der Zusammensetzung der neuen Funktion nicht lauter monotone Funktionen verwandt, so ersetzt man in dieser Kombination jede Funktion durch die zugehörige monotone, und fügt auch die so entstehende Funktion noch dem Bereich hinzu. Die erste Eigenschaft ist dann erfüllt. — Was die zweite Eigenschaft anbelangt, so genügt es zu zeigen, daß sie für alle Funktionen gilt, die man durch Einsetzung aus den monotonen Funktionen unseres Bereiches erhält. Ferner kann man sich darauf beschränken zu zeigen, daß, wenn $\psi(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ eine Funktion unseres Bereiches ist, die m Argumente hat, und wenn $\chi_1(a), \ldots, \chi_m(a)$ m Funktionen mit den Eigenschaften

$$\mathfrak{G}_{an}(\chi_i(a), \varphi(a, a, n))\ \mathfrak{G}_{an} \text{ sind, } \quad \big(\psi(\chi_1(a), \ldots, \chi_m(a)), \varphi(a, a, n)\big)$$

der Fall ist. Der allgemeine Fall ergibt sich nämlich daraus durch Induktion nach dem Grade der Ineinanderschaltung der aus den Funktionen unseres Bereichs durch Einsetzung entstehenden Funktion. Da nun für $n \geqq m$ $\mathfrak{K}_a(\varphi(a, a, m), \varphi(a, a, n))$ und da ψ monoton und für ein beliebiges i $\mathfrak{G}_{an}(\chi_i(a),\ \varphi(a, a, n))$ richtig ist, so hat man

$$\mathfrak{G}_{an}\big(\psi(\chi_1(a), \ldots, \chi_m(a)),\ \psi(\varphi(a, a, n), \ldots, \varphi(a, a, n))\big).$$

Da ferner

$$\mathfrak{G}_{an}(\psi(a, a, \ldots, a),\ \varphi(a, a, n)),$$

so ist auch

$$\mathfrak{G}_{an}\Big(\psi(\chi_1(a), \ldots, \chi_m(a)),\ \varphi(\varphi(a, a, n),\ \varphi(a, a, n), n)\Big),$$

$$\varphi(\varphi(a, a, n),\ \varphi(a, a, n), n) = \varrho_c(\varphi(c, c, n), a, 2).$$

Da

$$\mathfrak{R}_a\Big(\varrho_c(\varphi(c, c, n),\ a, 2),\ \varrho_c(\varphi(c, c, n), a, a)\Big)$$

und wegen Formel VI ergibt sich schließlich:

$$\mathfrak{G}_{an}\Big(\psi(\chi_1(a), \ldots, \chi_m(a)),\ \varphi(a, a, n)\Big), \text{ q. e. d.}$$

Beweis von Satz 2. a) Der Beweis von Satz 2 ist bei weitem komplizierter als der von Satz 1 und wird den Rest der Arbeit ausmachen. Zunächst wird eine nähere Erörterung des Rekursionsschemas, das den zweiten Typ nicht benutzt, notwendig. Bei einer Funktion einer Variablen sieht die Rekursion folgendermaßen aus:

$$\psi(0) = \mathfrak{a},$$

$$\psi(a+1) = \mathfrak{b}(a, \psi(a)),$$

$\mathfrak{a}$ ist hier ein Funktional, das keine Variablen enthält. $\mathfrak{b}$ eine eventuell durch Ineinanderschachtelung mehrerer Rekursionsfunktionen entstehende Funktion zweier Variablen. In $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ darf keine Rekursionsfunktion vom zweiten Typ und nur bereits definierte Funktionen vorkommen. Analog lautet das Schema bei Funktionen zweier Variablen:

$$\psi(a, o) = \mathfrak{a}(a)$$

$$\psi(a, b+1) = \mathfrak{b}_c(a, b,\ \psi(c, b)).$$

Hier gelten dieselben Bemerkungen. Es ist besonders zu beachten, daß die Funktionenfunktion $\mathfrak{b}_c(a, b, f(c))$ ohne eine Rekursionsfunktion vom zweiten Typ gebildet sein muß. Man kann natürlich auch ohne Rekursion, durch bloße Ineinanderschachtelung Funktionenfunktionen bilden, z. B. $f(f(a))$, $f(a)+f(b)$, usw. Die folgende Rekursion ist aber verboten:

$$\psi(a, 0) = \mathfrak{a}(a),$$

$$\psi(a, b+1) = \varrho_c(\psi(c, b), b, a).$$

Dagegen ist diese erlaubt:

$$\psi(a, 0) = a+1,$$

$$\psi(a, b+1) = 1 + \psi[\psi(a+b, b), b].$$

Entsprechend hat man für Funktionen von n Variablen das Schema:

$$\psi(a, b, \ldots, m, 0) = \mathfrak{a}(a, b, \ldots, m),$$

$$\psi(a, b, \ldots, m, n+1) = \mathfrak{b}_{a_1 b_1 \ldots m_1}(a, b, \ldots, m, n,\ \psi(a_1, \ldots, m_1, n)).$$

Wir können hier annehmen, daß sich $\mathfrak{a}(\ldots)$ und $\mathfrak{b}(\ldots)$ aus lauter monotonen Funktionen zusammensetzen. Hat das Schema für ψ nicht direkt diese Eigenschaft, so möge $\mathfrak{a}'(a, b, \ldots, m)$ aus $\mathfrak{a}(a, b, \ldots, m)$ dadurch entstehen, daß man alle in $\mathfrak{a}(a, b, \ldots, m)$ vorkommenden Funktionen durch die zugehörigen größeren monotonen Funktionen ersetzt. Ebenso gelangen wir von $\mathfrak{b}(\ldots)$ zu $\mathfrak{b}'(\ldots)$. Die folgende Funktion

$$\psi'(a, b, \ldots, m, 0) = \mathfrak{a}'(a, b, \ldots, m),$$

$$\psi'(a, b, \ldots, m, n+1) = \mathfrak{b}'_{a_1 \ldots m_1}(a, \ldots, m, n, \psi(a_1, \ldots, m_1, n))$$

ist dann von der gewünschten Art. Sie kann an Stelle von ψ betrachtet werden, da sie niemals einen kleineren Wert hat als ψ. ψ' ist monoton in bezug auf $a, b, \ldots, m$, wie man sich leicht durch Induktion nach n überzeugt. Bei allen folgenden Überlegungen denken wir uns immer stillschweigend den Übergang von ψ zu ψ' schon vollzogen. Den Strich lassen wir der Einfachheit halber fort.

b) Wir zeigen nun, daß man statt unseres allgemeinen Rekursionsschemas ein spezielleres der Betrachtung zugrunde legen kann. Wir machen übrigens die folgenden Überlegungen nur für Funktionen von zwei Variablen. Zum Schluß werden wir zeigen, daß diese Einschränkung unwesentlich ist. Wir betrachten also das Schema:

$$\psi(a, 0) = \mathfrak{a}(a)$$

$$\psi(a, b+1) = \mathfrak{b}_c(a, b, \psi(c, b)).$$

Wir dürfen hier annehmen, daß $\mathfrak{b}_c(a, b, \psi(c, b))$ wirklich das Zeichen ψ enthält, sonst handelt es sich ja um bloße Einsetzung und wir kommen auf den Satz 1 zurück. Nehmen wir zunächst an, daß in $\mathfrak{b}_c(a, b, \psi(c, b))$ kein ψ vorkommt, das in der zu einem anderen ψ gehörigen Klammer steht. In diesem Falle enthält jedes ψ von $\mathfrak{b}$ in seinem ersten Argument eine Funktion $\alpha_i(a, b)$, die durch Einsetzung von Funktionen unseres Bereiches zustande kommt, die also die beiden Eigenschaften unseres Bereiches hat. Diese Funktionen α seien $\alpha_1(a, b), \ldots, \alpha_m(a, b)$. Es sei ferner $\alpha(a, b) = \mathrm{Max}(\alpha_1(a, b), \ldots, \alpha_m(a, b))$. Offenbar hat auch α die Eigenschaften der Funktionen unseres Bereiches. Setzen wir nun in $\mathfrak{b}_c(a, b, \psi(c, b))$ in die ersten Argumente aller ψ statt der $\alpha_i(a, b)$ die Funktion $\alpha(a, b)$ ein, und bilden wir hiermit eine Rekursion, so erhalten wir eine Funktion, die für kein Wertepaar kleiner ist als $\psi(a, b)$. Hat aber in $\mathfrak{b}_c(a, b, \psi(c, b))$ die Funktion ψ als erstes Argument immer $\alpha(a, b)$, so kann man $\mathfrak{b}_c(a, b, \psi(c, b))$ auch in der Form schreiben $\omega\left(a, b, \psi(\alpha(a, b), b)\right)$, wo ω eine Funktion ist, die zu unserem Bereich gehört bzw. durch Einsetzung aus den Funktionen unseres Bereiches zustande kommt. Wir können uns also auf die Betrachtung des folgenden Schemas beschränken:

$$\psi(a, 0) = \mathfrak{a}(a),$$
$$\psi(a, b+1) = \omega\big(a, b, \psi(\alpha(a, b), b)\big).$$

Nun komme in $\mathfrak{b}_c(a, b, \psi(c, b))$ eine zweimalige Ineinanderschachtelung der ψ vor. Die innersten ψ in $\mathfrak{b}$ enthalten dann im ersten Argument wieder Funktionen $\alpha_i(a, b)$, die wir wieder durch eine einzige Funktion $\alpha(a, b)$ ersetzen können. Die nächstinnersten ψ haben als erstes Argument Funktionen μ_i von a, b und $\psi(\alpha(a, b), b)$. Ebenso wie wir vorher das Maximum der $\alpha_i(a, b)$ nahmen, können wir jetzt das Maximum der $\mu_i(a, b, c)$ benutzen. Falls also in $\mathfrak{b}_c(a, b, \psi(c, b))$ das ψ höchstens zweimal ineinandergeschachtelt vorkommt, so dürfen wir das folgende Rekursionsschema betrachten:

$$\psi(a, 0) = \mathfrak{a}(a),$$
$$\psi(a, b+1) = \omega\{a, b, \psi[\alpha(a, b), b], \psi(\mu(a, b, \psi[\alpha(a, b), b]), b)\}.$$

Entsprechende Überlegungen können wir anstellen, falls es sich um eine n-fache Ineinanderschachtelung handelt. Hier genügt es, das folgende Schema zu betrachten:

$$\psi(a, 0) = \mathfrak{a}(a),$$
$$\psi(a, b+1) = \omega(a, b, \ldots).$$

Hier hat die Funktion ω außer a und b noch n, also im ganzen $(n+2)$ Argumente. Diese Argumente sehen folgendermaßen aus: Das dritte Argument hat die Gestalt $\psi[\alpha(a, b), b]$. Sind ferner die ersten n Argumente von ω $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n$, so lautet das $(n+1)$te Argument:

$$\psi(\mu(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n), b),$$

Hier ist μ eine Funktion, die unserem Bereich angehört bzw. sich aus den Funktionen unseres Bereiches zusammensetzt.

c) Wir müssen nun zeigen, daß die Funktion $\psi(a, b)$ oder aber eine größere, auch bei festgehaltenem a in bezug auf b monoton steigt, und daß $\mathfrak{S}_{an}(\psi(a, a), \varphi(a, a, n))$ der Fall ist. Wir geben zunächst die größere monotone Funktion an. Wir ersetzen in der Rekursion $\alpha(a, b)$ durch die Funktion $\alpha'(a, b) = \mathrm{Max}(a, \alpha(a, b))$. Statt jeder Funktion μ benutzen wir $\mu'(a, b, \ldots, k) = \mathrm{Max}(\mu(a, b, \ldots, k), k)$ und statt $\omega(a_1, \ldots, a_{n+2})$ nehmen wir $\omega'(a_1, \ldots, a_{n+2}) = \mathrm{Max}(\omega(a_1, \ldots, a_{n+2}), a_{n+2})$. $\mathfrak{a}(a)$ wird ersetzt durch $\mathrm{Max}(a, \mathfrak{a}(a)) = \sigma(a)$. Die neue Funktion ist natürlich wieder monoton in bezug auf a, da alle die Funktionen ω', σ, α' und die Funktionen μ' monoton sind. Diese Funktion ist aber auch monoton in bezug auf b. Wir beweisen zunächst: Wenn für alle a $\psi(a, b) \geqq a$, so ist für alle a $\psi(a, b+1) \geqq \psi(a, b)$ und $\psi(a, b+1) \geqq a$.

Unter der Voraussetzung gelten nämlich die folgenden Überlegungen:

$$\psi(a, b+1) = \omega'(a, b, \psi[\alpha'(a, b), b], \ldots).$$

Für das dritte Argument ist $\psi[\alpha'(a, b), b] \geqq a$ und $\psi[a'(a, b), b] \geqq \psi(a, b)$. Da nämlich $\psi(a, b)$ monoton ist in bezug auf das erste Argument und da $\alpha'(a, b) \geqq a$, so ist $\psi(\alpha'(a, b), b) \geqq \psi(a, b)$ und $\psi[\alpha'(a, b), b] \geqq a$. — Es sei für ein Argument $\mathfrak{c}$ von ω' schon gezeigt: $\mathfrak{c} \geqq \psi(a, b)$ und $\mathfrak{c} \geqq a$. Es gelten diese Beziehungen dann auch für das nächste Argument $\mathfrak{d}$. Denn

$$\mathfrak{d} = \psi[\mu(a, b, \ldots, \mathfrak{c}), b]$$

$$\psi[\mu(a, b, \ldots, \mathfrak{c}), b] \geqq \psi[\mu(a, b, \ldots, \psi(a, b)), b],$$

$$\mu(a, b, \ldots, \psi(a, b)) \geqq \psi(a, b),$$

$$\psi[\mu(a, b, \ldots, \psi(a, b)), b] \geqq \psi[\psi(a, b), b],$$

$$\psi(a, b) \geqq a;\ \psi[\psi(a, b) b] \geqq \psi(a, b) \quad \text{(nach Vorauss.)}$$

also $\mathfrak{d} \geqq \psi(a, b)$ und $\mathfrak{d} \geqq a$.

Da nun $\omega'(a, b, \ldots)$ größer oder gleich dem letzten Argument von ω' ist, so ist auch

$$\psi(a, b+1) \geqq \psi(a, b) \quad \text{und} \quad \psi(a, b+1) \geqq a, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Nun ist $\psi(a, 0) = \sigma(a) \geqq a$. Infolgedessen gilt allgemein

$$\psi(a, b+1) \geqq \psi(a, b).$$

Damit ist gezeigt, daß die Funktion ψ die erste Eigenschaft unseres Bereiches hat.

Es bleibt jetzt noch zu zeigen, daß $\mathfrak{S}_{an}(\psi(a, a), \varphi(a, a, n))$. Solange bei $\psi(a, b)$ $b \leqq a$ bleibt, genügt es, wenn wir eine vereinfachte Rekursion betrachten:

$$\psi(a, 0) = \sigma(a),$$

$$\psi(a, b+1) = \omega'(a, a, \ldots).$$

Hier ist überall für b a eingesetzt, ausgenommen, wenn b in dem zweiten Argument von ψ steht. Daß diese Funktion nicht kleiner ist als die frühere, folgt einfach aus der Monotonität aller auftretenden Funktionen. Wir bezeichnen nun $\omega'(a, a, \ldots, a)$ mit $\omega''(a)$, $\alpha'(a, a)$ mit $\alpha''(a)$ und $\mu_i'(a, \ldots, a)$ mit $\mu_i''(a)$. In der Formel $\psi(a, b+1) = \omega'(a, a, \ldots)$ sind die Argumente von ω' alle kleiner als das letzte Argument. Zunächst ist nämlich $\psi(\alpha'(a), b) \geqq \psi(a, b) \geqq a$.

Es sei schon gezeigt, daß die Argumente bis zum k-ten nie fallen. Das k-te Argument sei $\mathfrak{d}$. Das $(k+1)$-te Argument hat dann die Gestalt: $\psi(\mu(a, a, \ldots, \mathfrak{d}), b)$. Nun ist $\mu(a, a, \ldots, \mathfrak{d}) \geqq \mathfrak{d}$

$$\psi(\mu(a, \ldots, \mathfrak{d}), b) \geqq \psi(\mathfrak{d}, b) \geqq \mathfrak{d}.$$

Wir erhalten also keine kleinere Funktion, wenn wir alle Argumente von ω'

gleich dem letzten nehmen. Das letzte Argument ist $\psi(\mu'_{n-1}(a, \ldots, \mathfrak{d}), b)$, wenn jetzt $\mathfrak{d}$ das vorletzte ist. Da alle Argumente von $\mu'_{n-1} \leqq \mathfrak{d}$ sind, so ist

$$\psi(\mu'_{n-1}(a, \ldots, \mathfrak{d}), b) \leqq \psi(\mu''_{n-1}(\mathfrak{d}), b).$$

$\mathfrak{d}$ ist wieder kleiner oder gleich $\psi(\mu'_{n-2}(\mathfrak{e}), b)$, wo $\mathfrak{e}$ das vorangehende Argument ist. Schließlich erhalten wir keine kleinere Funktion, wenn wir die folgende Rekursion nehmen:

$$\psi(a, 0) = \sigma(a),$$

$$\psi(a, b+1) = \omega''\Big(\psi\{\mu''_{n-1} \ldots \psi\big[\mu''_2(\psi\{\mu''_1[\psi(\alpha''(a), b)], b\}), b\big], \ldots, b\}\Big).$$

Wir müssen nun feststellen, aus einer wievielfachen Ineinanderschachtelung der Funktionen ω'', μ''_i, α'' und σ $\psi(a, b+1)$ besteht, falls die Rekursion aufgelöst wird. Man sieht, daß, wenn $\psi(a, b)$ aus einer x-fachen Ineinanderschachtelung besteht, $\psi(a, b+1)$ aus einer $((\mathfrak{n})(x+1)+1)$-fachen Ineinanderschachtelung besteht. Die Ineinanderschachtelung von $\psi(a, b)$ ist also gleich $2(\mathfrak{n}^b + \mathfrak{n}^{b-1} + \ldots + 1) - 1$. Statt dieser Zahl können wir die nicht kleinere $2(b+1)\mathfrak{n}^b$ nehmen. Ferner gibt es ein m, so daß alle die Funktionen μ'', ω'', α'', σ' von einem gewissen a an kleiner sind als $\varphi(a, a, m)$. Es gilt also

$$\mathfrak{G}_{am}(\psi(a, a)), \varrho_c(\varphi(c, c, m), a, 2(a+1)\mathfrak{n}^a).$$

$2(a+1)\cdot\mathfrak{n}^a$ ist eine Funktion von a, die durch Einsetzung aus Funktionen entsteht, die die Eigenschaften unseres Bereiches haben. Folglich ist:

$$\mathfrak{G}_{ak}(2(a+1)\mathfrak{n}^a, \varphi(a, a, k)).$$

Für jedes m und k ist ferner

$$\mathfrak{R}_a\Big(\varrho_c(\varphi(c, c, m), a, \varphi(a, a, k)), \varrho_c(\varphi(c, c, m), \varphi(a, a, k), \varphi(a, a, k))\Big).$$

Weiter hat man nach Formel VI:

$$\varrho_c(\varphi(c, c, m), \varphi(a, a, k), \varphi(a, a, k)) \leqq \varphi(\varphi(a, a, k), \varphi(a, a, k), m+3)$$

bzw.

$$\varrho_c(\varphi(c, c, m), \varphi(a, a, k), \varphi(a, a, k)) \leqq 2.$$

$\varphi(\varphi(a, a, k), \varphi(a, a, k), m+3)$ ist aber eine Funktion, die die Eigenschaften unseres Bereiches hat, da sie durch Einsetzung aus derartigen Funktionen entsteht. Wir haben also

$$\mathfrak{G}_{an}(\psi(a, a), \varphi(a, a, n)), \quad \text{q. e. d.}$$

d) Für Funktionen von zwei Variablen ist damit der Satz 2 bewiesen. Auf die Funktionen einer Variablen brauchen wir nicht besonders einzugehen. Eine Funktion $\psi(a)$ einer Variablen kann als Spezialfall $\psi(a, 0)$ einer Funktion zweier Variablen aufgefaßt werden. Nun möge die neu definierte Funktion mehr als zwei Argumente haben. Dieser Fall läßt sich auf den für zwei Variablen zurückführen. Es sei

$$\psi(a, b, \ldots, m, 0) = \sigma(a, b, \ldots, m),$$
$$\psi(a, b, \ldots, m, n+1) = \mathfrak{b}_{a_1, \ldots, m_1}(a, b, \ldots, m, n, (a_1, \ldots, m_1, n)).$$

In $\mathfrak{b}_{a_1, \ldots, m_1}(\ldots)$ stehen in den Argumenten der innersten ψ Funktionen von $a, b, \ldots, m$. Die ψ haben also eine folgende Gestalt

$$\psi(\alpha_1(a, b, \ldots, m, n), \ldots, \alpha_r(a, \ldots, m, n), n).$$

Hier kann man in alle Argumente von ψ mit Ausnahme des letzten das Maximum aller dieser Funktionen einsetzen. Auf dieselbe Weise kann man erreichen, daß bei den nächstinnersten ψ alle Argumente, mit Ausnahme des letzten, gleich werden, usw. Nun betrachten wir die Rekursion

$$\psi(a, \ldots, a, 0) = \sigma(a, a, \ldots, a),$$
$$\psi(a, a, \ldots, a, b+1) = \mathfrak{b}_{a_1, b_1, \ldots, m_1}(a, a, \ldots, a, b, \psi(a_1, \ldots, m_1, b)).$$

Das ist jetzt ein Rekursionsschema für eine Funktion $\psi'(a, b)$ von zwei Variablen. Es gilt also $\mathfrak{G}_{an}(\psi(a, a, \ldots, a), \varphi(a, a, n))$. Auch die zu ψ gehörige monotone Funktion läßt sich angeben. Die Monotonität in bezug auf $a, b, \ldots, m$ ist schon dadurch gegeben, daß man statt σ und statt der in $\mathfrak{b}$ vorkommenden Funktionen immer die zugehörigen monotonen nimmt. Nun hatten wir ein $\psi'(a, b)$ gefunden, so daß $\psi(a, a, \ldots, a, n) \leqq \psi'(a, n)$. Es ist $\psi'(a, n) \leqq \psi''(a, n)$, wo jetzt ψ'' auch in bezug auf n monoton ist. Die zu $\psi(a, b, \ldots, m, n)$ gehörige monotone Funktion ist nun $\psi''(\mathrm{Max}(a, b, \ldots, m), n)$. Denn

$$\psi(a, b, \ldots, m, n) \leqq \psi(\mathrm{Max}(a, b, \ldots, m), \mathrm{Max}(\ldots), \ldots, \mathrm{Max}(\ldots), n)$$
$$\leqq \psi''(\mathrm{Max}(a, b, \ldots, m), n).$$

(Eingegangen am 20. 1. 1927.)