УДК 681.3

Э.И. Ватутин[1], С.Е. Кочемазов[2], О.С. Заикин[2]
evatutin@rambler.ru
[1]Юго-Западный государственный университет, Курск
[2]Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск

ОЦЕНКА КОМБИНАТОРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

В работе приведены целочисленные последовательности минимального и максимального числа трансверсалей для диагональных латинских квадратов и числа симметричных квадратов от их размерности.

Латинским квадратом (ЛК) $A = \left\| a_{ij} \right\|,\ i, j = \overline{1, N}$ называется квадратная таблица, заполненная элементами некоторого множества U, причем $|U| = N$, таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце ЛК элементы не повторяются (фактически они образуют перестановку) [1]. Значение N называется порядком ЛК. Диагональным латинским квадратом (ДЛК) называется ЛК с дополнительным требованием на неповторяемость элементов на главной и побочной диагоналях. С ЛК и ДЛК связан ряд открытых комбинаторных проблем, имеющих фундаментальное значение. Для решения некоторых из них применяется понятие трансверсалей – множеств $T = \{t_1, t_2, ..., t_N\} = \left\{a_{i_1, j_1}, a_{i_2, j_2}, ..., a_{i_N, j_N}\right\}$ элементов ЛК, расположенных по одному в каждом столбце, в каждой строке и имеющих различные значения. При этом трансверсаль называется диагональной, если она включает в своем составе по одному элементу с главной и побочной диагоналей ЛК (в случае ЛК нечетного порядка данные элементы могут совпадать). Квадрат называется симметричным (для определенности, по вертикали), если элементы его столбцов с номерами $1, ..., \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ однозначно соответствуют элементам столбцов с номерами $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1, ..., N$ (первый – последнему, второй – предпоследнему и т.д.). Квадрат будем называть дважды симметричным (по вертикали и горизонтали), если рассмотренное выше свойство симметрии выполняется как для строк, так и для столбцов.

Зависимости минимального и максимального числа трансверсалей от порядка ЛК известны до $N < 10$ и представлены последовательностями A091323 и A090741 в Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей (англ. Online Encyclopedia of Integer Sequences, сокр. OEIS) [2]. Аналогичные оценки для числа трансверсалей ДЛК и числа диагональных трансверсалей ДЛК неизвестны. Авторами был разработан высокоэффективный генератор ДЛК, который базируется на множестве алгоритмических и высокоуровневых оптимизаций и позволяет быстро получать все ДЛК заданного порядка с упорядоченной первой строкой (именуемые также нормализованными) [3, 4].

С его помощью была организована серия вычислительных экспериментов, которая позволила определить искомые последовательности: минимальное число трансверсалей ДЛК для $1 \le N \le 7$: 1, 0, 0, 8, 3, 32, 7; максимальное число трансверсалей ДЛК для $1 \le N \le 7$: 1, 0, 0, 8, 15, 32, 133 (совпадает с аналогичной оценкой для ЛК, кроме размерностей 2 и 3, для которых ДЛК не существуют); минимальное число диагональных трансверсалей ДЛК для $1 \le N \le 7$: 1, 0, 0, 4, 1, 2, 0; максимальное число диагональных трансверсалей ДЛК для $1 \le N \le 7$: 1, 0, 0, 4, 5, 6, 27 (время вычислений – 4 мин для однопоточной реализации на процессоре Intel Core i7 4770 для каждой из последовательностей). Данные результаты были проверены с использованием различных алгоритмов получения множества трансверсалей и программных реализаций, разработанных авторами.

Зависимость числа симметричных ЛК от N известна и задается последовательностью A003191 в OEIS. Интересной особенностью является тот факт, что симметричных ЛК нечетного порядка не существует (если не считать частного случая размерности 1), поэтому последовательность приведена лишь для $N \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Аналогичная последовательность числа нормализованных симметричных ДЛК от N неизвестна и была определена авторами в ходе вычислительного эксперимента: 0, 2, 64, 3 612 672. Число дважды симметричных нормализованных ДЛК также было определено и представляется последовательностью 0, 2, 0, 15 780 (время вычислений – 19 ч для каждой из последовательностей).

Указанные последовательности могут быть продолжены, однако для этого потребуется несколько сотен дней машинного времени. Необходимые расчеты в настоящее время выполняются в проекте добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home и на вычислительном кластере «Академик В.М. Матросов» ИНЦ СО РАН с целью организации двойной независимой проверки результатов.

1. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs. Second Edition. Chapman&Hall, 2006. 984 p.
2. Sloanne N.J.A. Online Encyclopedia of Integer Sequences // http://oeis.org
3. Ватутин Э.И. и др. Учет алгоритмических особенностей задачи при генерации диагональных латинских квадратов // Известия ЮЗГУ. 2016. № 2 (65). С. 46–59.
4. Ватутин Э.И. и др. Программа для формирования диагональных латинских квадратов заданного порядка с использованием эвристических методов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016662288 от 07.11.16.