Э.И. Ватутин[1], С.Е. Кочемазов[2], О.С. Заикин[2], В.С. Титов[1]

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ СИММЕТРИЧНЫХ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ. РАБОТА НАД ОШИБКАМИ

[1] Россия, Курск, Юго-Западный государственный университет
[2] Россия, Иркутск, Институт динамики систем и теории управления им В.М. Матросова СО РАН

Латинским квадратом (ЛК) порядка N называется квадратная таблица $A = \left\| a_{ij} \right\|$, $i,\, j = \overline{1,\, N}$, элементами a_{ij} которой являются элементы некоторого множества U мощности $N = |U|$ (для определенности далее будем полагать, что $U = \{0, 1, 2, ..., N-1\}$). По определению в каждой строке и в каждом столбце ЛК каждый из элементов множества U встречается в точности один раз:

$$\forall i,\, j, k = \overline{1,\, N},\, j \neq k : \left(a_{ij} \neq a_{ik}\right) \wedge \left(a_{ji} \neq a_{ki}\right). \tag{1}$$

Для диагональных латинских квадратов (ДЛК), являющихся специальным видом ЛК, по определению дополнительно вводятся требования на отсутствие совпадающих элементов на главной и побочной диагонали ЛК:

$$\forall i,\, j = \overline{1,\, N}, i \neq j : \left(a_{ii} \neq a_{jj}\right) \wedge \left(a_{i,\, N-i+1} \neq a_{j,\, N-j+1}\right). \tag{2}$$

ДЛК называется нормализованным, если элементы его первой строки упорядочены по возрастанию. Несложно показать, что путем биективной подстановки (перестановки) элементов множества U любого корректного ДЛК можно добиться его нормализации, а указанное множество квадратов мощностью $N!$ образует класс эквивалентности. Для ряда задач (подсчет числа ЛК и ДЛК [1–10], поиск пар и троек попарно (частично) ортогональных ЛК и ДЛК [11–14]) квадраты в рамках указанного класса эквивалентности не различаются, т.к. обладают одинаковыми свойствами (наличие/отсутствие парного ортогонального квадрата, число и состав трансверсалей, состав элементов на диагоналях и пр.), что существенно экономит машинное время в соответствующих вычислительных экспериментах, позволяя рассматривать лишь один ДЛК из каждого класса изоморфизма.

Горизонтально симметричным ЛК будем называть такой ЛК, у которого имеется взаимно однозначное соответствие между всеми парами элементов $\left(a_{ij},\, a_{i,\, N-j+1}\right)$, $i = \overline{1,\, N}$, $j = \overline{1, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor}$. Указанная симметрия имеет место в горизонтальной плоскости (относительно вертикальной линии, проходящей через центральный столбец ДЛК нечетного порядка и между парой центральных столбцов для ДЛК четного порядка), аналогично можно ввести определение симметрии в вертикальной плоскости. Для нормализованного ДЛК условие наличия симметрии в горизонтальной плоскости может быть записано в более простом виде: $a_{ij} + a_{i,\, N-j+1} = N-1$. Также вертикальная симметрия может быть определена путем транспонирования квадрата и последующей проверки наличия горизонтальной симметрии.

Симметричные ЛК обладают симметричным множеством трансверсалей, что может быть использовано для построения пар и троек полностью или частично ортогональных диагональных латинских квадратов. Примеры симметричных в горизонтальной и вертикальной плоскости ДЛК приведены на рис. 1.

0	1	2	3	4	5
4	2	0	5	3	1
5	4	3	2	1	0
2	5	4	1	0	3
3	0	1	4	5	2
1	3	5	0	2	4

0	1	2	3	4	5
4	2	5	0	3	1
3	5	1	2	0	4
5	3	0	4	1	2
2	4	3	1	5	0
1	0	4	5	2	3

Рис. 1. Примеры симметричных ДЛК (для наглядности одна из пар значений элементов, образующих симметрию, выделена серым; оси симметрии изображены жирными линиями)

Зависимость числа симметричных ЛК с фиксированной диагональю (или, что то же самое с точностью до перестановки значений элементов квадрата, – с фиксированной первой строкой) от размерности задачи N задается последовательностью A003191 в Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей (англ. Online Encyclopedia of Integer Sequences, сокр. OEIS) [15, 16]. Интересной особенностью является тот факт, что симметричных ЛК нечетного порядка не существует (если не считать частного случая размерности 1), поэтому последовательность приведена лишь для $N \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Зависимость числа симметричных ДЛК он размерности задачи N по состоянию на момент начала исследований в OEIS не представлена, поэтому вызывает интерес ее построение. Для этого в простейшем случае необходимо осуществление генерации всех ДЛК заданного порядка N с проверкой на наличие искомой симметрии. Возможна также разработка более эффективной программной реализации указанной задачи, базирующейся на заполнении половины элементов квадрата в сочетании с вариацией порядка заполнения элементов отталкиваясь от принципа минимума возможностей [17] и использованием стратегии ветвей и границ [18]. Задача генерации ДЛК может быть решена с использованием высокоэффективного генератора ДЛК, разработанного авторами и базирующегося на алгоритмических особенностях решаемой задачи (использование порядка заполнения элементов ДЛК отталкиваясь от принципа минимума возможностей; использование статических структур данных вместо размещения их в динамической памяти; учет мощности множеств возможных значений для еще не заполненных ячеек квадрата в совокупности с ранним отсечением неперспективных ветвей дерева комбинаторного перебора при нахождении элементов квадрата без возможных элементов; применение вспомогательных структур данных (одномерных массивов) для быстрого определения множеств допустимых элементов; использование битовых операций) [19–22].

Следуя первой стратегии, была разработана программная реализация, с использованием которой был организован вычислительный эксперимент для определения искомого числа нормализованных симметричных ДЛК от размерности задачи N, полученные результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1. Зависимость числа горизонтально симметричных ДЛК от размерности задачи N

N	Число нормализованных горизонтально симметричных ДЛК	Число горизонтально симметричных ДЛК	Время эксперимента

1	1	1	< 1 с
2	0	0	< 1 с
3	0	0	< 1 с
4	2	48	< 1 с
5	0	0	< 1 с
6	64	46 080	< 1 с
7	0	0	< 1 с
8	3 612 672	145 662 935 040	19 ч

Оценка числа симметричных нормализованных ДЛК порядка 10 в настоящее время не представляется возможной ввиду необходимости огромных затрат вычислительного времени (генерация соответствующих ДЛК с проверкой на наличие симметрии производится с темпом 200 000 ДЛК/с на процессоре Core i7 4770 для однопоточной программной реализации на Delphi, при условии, что число нормализованных ДЛК порядка 10 составляет величину порядка 10^{22}, на это потребуется $1{,}6 \cdot 10^{9}$ лет при организации вычислений в один поток или около 160 лет на суперкомпьютере петафлопсного класса с 10 миллионами CPU-ядер).

Кроме того, существуют ДЛК, которые одновременно симметричны как по горизонтали, так и по вертикали. Пример подобного ДЛК приведен на рис. 2.

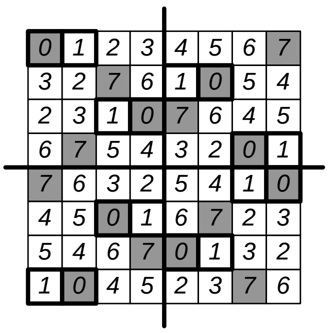

Рис. 2. Пример нормализованного ДЛК, симметричного как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскости (вертикально-симметричные пары элементов (0, 1) выделены жирным, горизонально-симметричные пары элементов (0, 7) – серым)

Подобные ДЛК являются достаточно редкими комбинаторными объектами, зависимость их числа от размерности задачи N, полученная по аналогичной стратегии путем генерации ДЛК заданного порядка и их последующей проверки на наличие одновременной симметрии по горизонтали и вертикали, приведена в табл. 2.

Таблица 2. Зависимость числа ДЛК, симметричных по горизонтали и вертикали одновременно, от размерности задачи N

N	Число нормализованных ДЛК, симметричных по горизонтали и вертикали одновременно	Число ДЛК, симметричных по горизонтали и вертикали одновременно	Время эксперимента
1	1	1	< 1 с
2	0	0	< 1 с

3	0	0	< 1 с
4	2	48	< 1 с
5	0	0	< 1 с
6	0	0	< 1 с
7	0	0	< 1 с
8	12 288 *	495 452 160 *	19,5 ч

Замечание *. В работах [23–26] для $N = 8$ приведены некорректные значения числа дважды симметричных ДЛК, что связано с некорректным определением вертикальной симметрии через соответствие $a_{ij} \to a_{N-i+1,\, j}$ для $i = \overline{1, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor}$, в то время как правильным соответствием, обеспечивающим вертикально-симметричную структуру трансверсалей, является взаимное двустороннее соответствие значений (каждому элементу a_{ij} соответствует $a_{N-i+1,\, j}$ и наоборот) или, другими словами, соответствие для $i = \overline{1, N}$. Коллектив авторов выражает благодарность А. Белышеву (whitefox) за независимую проверку результатов и уточнение определения вертикальной симметрии ДЛК [27].

Интересным эмпирическим следствием выполненного эксперимента является отсутствие дважды симметричных ДЛК для размерностей, не кратных 4 (в данном эксперименте путем полного перебора всех возможных ДЛК порядка $N \le 8$ данная особенность была подтверждена точно). Для ДЛК размерности $9 \le N \le 20$ была организована серия вычислительных экспериментов, в ходе которой было определено, что среди сгенерированных и проанализированных квадратов дважды симметричные ДЛК также существуют только для размерностей $N = 4n, n \in \mathbb{N}$ (для каждой размерности N был организован отдельный вычислительный эксперимент длительностью в 1 сутки). Скорее всего данная особенность свойственна и для других порядков ДЛК.

Симметричным ДЛК будем именовать такой ДЛК, у которого имеет место либо горизонтальная, либо вертикальная симметрия (не обязательно одновременно). Множество H горизонтально симметричных ДЛК может быть представлено как $H = H' \bigcup H''$, где H' – множество ДЛК, обладающих горизонтальной симметрией и не обладающих вертикальной, и H'' – множество дважды симметричных ДЛК, $H' \bigcap H'' = \varnothing$. Аналогичные соотношения можно ввести и для вертикально симметричных ДЛК: $V = V' \bigcup V''$, $V' \bigcap V'' = \varnothing$, причем $H'' = V''$ по определению. С учетом того, что $V' \bigcap H' = \varnothing$, множество симметричных ДЛК $S = H \bigcup V = H' \bigcup V' \bigcup H''$, а их число

$$|S| = |H \bigcup V| = |H| + |V| - |H''| = 2|H| - |H''| \tag{3}$$

(слагаемое $-|H''|$ в формуле (3) вводится для того, чтобы исключить повторный учет дважды симметричных ДЛК, входящих в состав как множества V, так и множества H, $|V| = |H|$, $|V'| = |H'|$). Соответствующая зависимости числа симметричных ДЛК от N приведена в табл. 3.

Таблица 3. Зависимость числа симметричных ДЛК от размерности задачи N

N	Число симметричных	Число симметричных

	нормализованных ДЛК	ДЛК
1	1	1
2	0	0
3	0	0
4	2	96
5	0	0
6	128	92 160
7	0	0
8	7 213 056	290 830 417 920

Симметричные и дважды симметричные квадраты обладают рядом особенностей:

- как правило они обладают большим числом трансверсалей;
- для них зачастую (но не всегда) существует большое число ортогональных ДЛК (ОДЛК);
- для размерностей $N=4$ и $N=8$ известные квадраты с максимально возможным числом ОДЛК являются дважды симметричными:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 0 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 7 & 1 & 6 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 7 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 1 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Аналогично рассмотренному выше была произведена попытка выявления дополнительных симметрий относительно диагоналей ДЛК, однако для размерностей $N \leq 8$ квадратов с данным типом симметрии не существует.

Таким образом, в ходе выполненных расчетов были найдены новые целочисленные последовательности, которые прошли проверку и были добавлены в OEIS под номерами A287649, A287650, A292516 и A292517. Число нормализованных симметричных ДЛК и число симметричных ДЛК представлены последовательностями «1, 0, 0, 2, 0, 128, 0, 7213056» и «1, 0, 0, 96, 0, 92160, 0, 290830417920», в настоящее время не входящими в OEIS. Других типов симметрии ДЛК не выявлено.

Литература

1. Wells M.B. The number of Latin squares of order 8 // J. Combin. Theory. 1967. № 3. pp. 98–99.
2. Brown J.W. Enumeration of Latin squares with application to order 8 // J. Combin. Theory. 1968. № 5. pp. 177–184.
3. Bammel S.E., Rothstein J. The number of 9x9 Latin squares // Discrete Math. 1975. № 11. pp. 93–95.
4. McKay B.D., Rogoyski E. Latin squares of order ten // Electron. J. Combinatorics. 1995. № 2.
5. McKay B.D., Wanless I.M. On the number of Latin squares // Ann. Combinat. 2005. № 9. pp. 335–344.
6. https://oeis.org/A002860

7. Vatutin E.I., Zaikin O.S., Zhuravlev A.D., Manzuk M.O., Kochemazov S.E., Titov V.S. Using grid systems for enumerating combinatorial objects on example of diagonal Latin squares // Distributed computing and grid-technologies in science and education (GRID'16): book of abstracts of the 7th international conference. Dubna: JINR, 2016. p. 114–115.
8. Ватутин Э.И., Титов В.С., Заикин О.С., Кочемазов С.Е., Валяев С.Ю., Журавлев А.Д., Манзюк М.О. Использование грид-систем для подсчета комбинаторных объектов на примере диагональных латинских квадратов порядка 9 // Информационные технологии и математическое моделирование систем 2016. М.: изд-во Центра информационных технологий в проектировании РАН, 2016. С. 154–157.
9. https://oeis.org/A274171
10. https://oeis.org/A274806
11. Заикин О.С., Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Манзюк М.О. Применение высокопроизводительных вычислений для поиска троек взаимно частично ортогональных диагональных латинских квадратов порядка 10 // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2016). Челябинск: издательский центр ЮУрГУ, 2016. С. 155–166.
12. Заикин О.С., Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Манзюк М.О. Применение высокопроизводительных вычислений для поиска троек взаимно частично ортогональных диагональных латинских квадратов порядка 10 // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: вычислительная математика и информатика. Т. 5. № 3. 2016. С. 54–68. DOI: 10.14529/cmse160304.
13. Zaikin O.S., Vatutin E.I., Zhuravlev A.D., Manzyuk M.O. Applying high-performance computing to searching for triples of partially orthogonal Latin squares of order 10 // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the 10th Annual International Scientific Conference on Parallel Computing Technologies "Parallel Computing Technologies" (PCT 2016). Vol. 1576. 2016. pp. 155–166. urn:nbn:de:0074-1576-1.
14. Zaikin O., Zhuravlev A., Kochemazov S., Vatutin E. On the Construction of Triples of Diagonal Latin Squares of Order 10 // Electronic Notes in Discrete Mathematics. Vol. 54C. 2016. pp. 307–312. DOI: 10.1016/j.endm.2016.09.053.
15. https://oeis.org/A003191
16. Gridgeman N.T. Latin squares under restriction and a jumboization // J. Rec. Math. 1972. Vol. 5. № 3. pp. 198–202.
17. Golomb S.W., Baumart L.D. Backtrack programming // Journal of the ACM. 1965. Vol. 12. Iss. 4. pp. 516–524. DOI: 10.1145/321296.321300.
18. Land A.H., Doig A.G. An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems // Econometrica. 1960. Vol. 28. pp. 497–520. DOI: 10.2307/1910129.
19. Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Заикин О.С., Титов В.С. Особенности использования взвешивающих эвристик в задаче поиска диагональных латинских квадратов // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. 2015. № 3 (16). С. 18–30.
20. Ватутин Э.И., Заикин О.С., Журавлев А.Д., Манзюк М.О., Кочемазов С.Е., Титов В.С. О влиянии порядка заполнения ячеек на темп генерации диагональных латинских квадратов // Информационно-измерительные диагностирующие и управляющие системы (Диагностика – 2016). Курск: изд-во ЮЗГУ, 2016. С. 33–39.
21. Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Заикин О.С., Титов В.С. Учет алгоритмических особенностей задачи при генерации диагональных латинских квадратов // Известия Юго-Западного государственного университета. 2016. № 2 (65). С. 46–59.

22. Ватутин Э.И., Титов В.С., Заикин О.С., Журавлев А.Д., Манзюк М.О., Кочемазов С.Е., и др. Программа для рекуррентного перечисления диагональных латинских квадратов заданного порядка методом полного перебора и его модификациями // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016662287 от 07.11.16.
23. Kochemazov S.E., Vatutin E.I., Zaikin O.S. Fast Algorithm for Enumerating Diagonal Latin Squares of Small Order // arXiv:1709.02599 [math.CO], 2017.
24. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С. Оценка комбинаторных характеристик диагональных латинских квадратов // Оптико-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработки изображений и символьной информации (Распознавание – 2017). Курск: изд-во ЮЗГУ, 2017. С. 98–100.
25. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S. On Some Features of Symmetric Diagonal Latin Squares // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the 13th International Scientific Conference "Optoelectronic Equipment and Devices in Systems of Pattern Recognition, Image and Symbol Information Processing" (RECOGN 2017). Vol. 1940. 2017. pp. 74–79.
26. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С., Титов В.С. Исследование свойств симметричных диагональных латинских квадратов // Труды 10-й всероссийской мультиконференции по проблемам управления. Т. 3. Ростов-на-Дону, Таганрог: изд-во ЮФУ, 2017. С. 17–19.
27. Белышев А.Д. О свойствах симметрии в диагональных латинских квадратах [Электронный ресурс] // Режим доступа: http://forum.boinc.ru/default.aspx?g=posts&m=89136#post89136