УДК 681.3

ОЦЕНКА КОМБИНАТОРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ПАР ОРТОГОНАЛЬНЫХ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ[1]

Ватутин Э.И.[1]*, Кочемазов С.Е.*[2]*, Заикин О.С.*[2]*, Манзюк М.О.*[3]*, Титов В.С.*[1]

[1]ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет»

[2]Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН

[3]Интернет-портал BOINC.RU

Одним из известных типов комбинаторных объектов, находящим применение в ряде фундаментальных и прикладных областей науки, являются латинские квадраты [1]. Латинским квадратом (ЛК) порядка N называется квадратная таблица $A = \left\| a_{ij} \right\|,\ i,\ j = \overline{1,\ N}$, элементами a_{ij} которой являются элементы некоторого множества U мощности $N = \left| U \right|$ (для определенности далее будем полагать, что $U = \left\{ 0, 1, 2, ..., N-1 \right\}$). По определению в каждой строке и в каждом столбце латинского квадрата каждый из элементов множества U встречается в точности один раз:

$$\forall i,\ j, k = \overline{1,\ N},\ j \neq k : \left(a_{ij} \neq a_{ik} \right) \wedge \left(a_{ji} \neq a_{ki} \right). \qquad (1)$$

Для диагональных латинских квадратов (ДЛК), являющихся специальным видом ЛК, по определению дополнительно вводятся требования на отсутствие совпадающих элементов на главной и побочной диагонали ЛК:

$$\forall i,\ j = \overline{1,\ N}, i \neq j : \left(a_{ii} \neq a_{jj} \right) \wedge \left(a_{i,\ N-i+1} \neq a_{j,\ N-j+1} \right). \qquad (2)$$

ДЛК называется нормализованным, если элементы его первой строки упорядочены по возрастанию. Несложно показать, что путем биективной подстановки (перестановки) элементов множества U любого корректного ДЛК можно добиться его нормализации, а указанное множество квадратов представляет собой класс эквивалентности из $N!$ ДЛК. Для ряда задач квадраты в рамках указанного класса эквивалентности не различаются, т.к. обладают одинаковыми свойствами

---

[1] Авторы статьи выражают благодарность citerra[Russia Team] с интернет-портала BOINC.ru за помощь в реализации некоторых алгоритмов и нахождении ряда комбинаторных структур с уникальными характеристиками.

(наличие/отсутствие парного ортогонального квадрата, число трансверсалей и пр.), что существенно экономит машинное время в соответствующих вычислительных экспериментах.

Парой ортогональных диагональных латинских квадратов (ОДЛК) называется такая пара ДЛК *A* и *B*, в которой все упорядоченные пары $\left(a_{ij}, b_{ij}\right)$, $i, j = \overline{1, N}$ уникальны (также в литературе подобные пары называются греко-латинскими квадратами). Пример подобной пары для ДЛК порядка 4 приведен на рис. 1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 00 & 11 & 22 & 33 \\ 32 & 23 & 10 & 01 \\ 13 & 02 & 31 & 20 \\ 21 & 30 & 03 & 12 \end{pmatrix}.$$

Рис. 1. Пример ОДЛК

Построение ОДЛК является вычислительно сложной комбинаторной задачей. Для ее решения применяется ряд подходов (например, полный перебор с возвратами по стратегии ветвей и границ [2, 3], SAT-подход [4]). На данный момент наиболее эффективным подходом считается построение множества диагональных трансверсалей для заданного ДЛК с последующим нахождением среди них *N* непересекающихся трансверсалей, из которых построение парного ДЛК производится тривиально (разумеется в случае, если указанное множество существует).

Асимптотическое поведение числа ортогональных латинских квадратов с ростом размерности квадрата *N* известно и определяется последовательностями A266166 (Number of reduced pairs of orthogonal Latin squares) и A072377 (Number of pairs of orthogonal Latin squares of order N) в Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей (англ. Online Encyclopedia of Integer Sequences, сокр. OEIS) [5, 6]. Аналогичные оценки для ОДЛК на данный момент неизвестны.

Еще одной вычислительно сложной задачей является задача построения систем из попарно ортогональных ЛК и ДЛК (англ. MOLS и MODLS соответственно). Одним из путей ее решения является нахождение квадрата, которому ортогональны более одного квадрата, с последующим отысканием среди найденного множества квадратов системы из *M* полностью или частично ортогональных квадратов. Например, для ДЛК порядка 10 открытой математической проблемой является проблема о существовании тройки попарно ортогональных ДЛК. В настоящее время указанная тройка не найдена, однако и не доказано, что она не существует. Наилучшее приближение к решению данной проблемы на данный момент найдено коллективом авторов [7]: им является псевдотройка из трех ДЛК, в которой две пары ДЛК ортогональны, а третья ортогональна в 74 ячейках. В контексте рассмотренного выше интересной является частная задача о поиске ДЛК заданного порядка N, обладающего максимальным числом ортогональных ему ДЛК. Асимптотическое поведение данной характеристики на данный момент также неизвестно.

С целью оценки числа ОДЛК порядка N и максимального числа различных ДЛК, ортогональных единственному ДЛК, авторами был разработан высокоэффективный генератор ДЛК заданного порядка N, который базируется на ряде алгоритмических и высокоуровневых оптимизаций (использование порядка заполнения элементов ДЛК отталкиваясь от принципа минимума возможностей [8]; использование статических структур данных вместо размещения их в динамической памяти; учет мощности множеств возможных значений для еще не заполненных ячеек квадрата в совокупности с ранним отсечением неперспективных ветвей дерева комбинаторного перебора при нахождении элементов квадрата без возможных элементов; применение вспомогательных структур данных (одномерных массивов) для быстрого определения множеств допустимых элементов; использование битовых операций). Он позволяет перебирать ДЛК порядка 10 с темпом 6,6 млн. ДЛК/с при запуске в 1 поток на процессоре Intel Core i7 4770 [9–12]. Кроме того, была разработана программная реализация поиска множества ОДЛК для заданного ДЛК, базирующаяся на построении множества трансверсалей. С использованием указанных программных реализаций был организован вычислительный эксперимент, направленный на выяснения асимптотического поведения указанных выше характеристик для размерностей $1 \leq N \leq 7$. Его результаты приведены в таблице.

Таблица. Найденные значения искомых комбинаторных характеристик

N	Число пар ОДЛК	Максимальное число ОДЛК для одного ДЛК	Время вычислительного эксперимента (темп проверки)
1	1	1	< 1 с
2	0	0	< 1 с
3	0	0	< 1 с
4	2	1	< 1 с
5	4	1	< 1 с

6	0	0	< 1 с
7	320	3	7,8 с 21 700 ДЛК/с
8	?	≥ 824	приблизительно 2 недели в 1 поток (6 000 ДЛК/с)
9	?	?	приблизительно 3,5 млн. лет в 1 поток (1 100 ДЛК/с)
10	?	≥ 8	приблизительно $1{,}2 \cdot 10^{13}$ лет в 1 поток (213 ДЛК/с)

Для определения числа пар ОДЛК и максимального числа ОДЛК для одного ДЛК порядка 8 в настоящее время в рамках проекта добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home [13] на платформе BOINC организован дополнительный вычислительный эксперимент. Параллельно с ним полученные результаты в настоящее время проверяются на вычислительном кластере «Академик В.М. Матросов» ИНЦ СО РАН на независимой программной реализации. Для максимального числа ОДЛК для одного ДЛК порядка 8 в настоящее известна оценка 824. Для размерности 10 известны 4 квадрата с максимальным числом ОДЛК, равным 8 (citerra, 2016). Вопрос о том, являются ли данные характеристики максимально возможными для размерностей 8 и 10, в настоящее время является открытым. Примеры указанных квадратов с рекордными оценками числа ОДЛК приведены ниже:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 0 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 7 & 1 & 6 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 7 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 1 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 5 & 4 & 9 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 9 & 6 & 8 & 2 & 7 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 6 & 8 & 7 & 4 & 9 & 0 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 9 & 1 & 8 & 0 & 4 & 6 & 2 \\ 9 & 4 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 1 & 7 & 2 & 8 & 0 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 4 & 6 & 0 & 9 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 8 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 5 & 8 & 1 & 4 & 9 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Для размерности 7 ДЛК образуют 224 пары ОДЛК и 4 семейства (квартета) из 4 попарно-ортогональных ДЛК с фиксированным первым квадратом. Одно из подобных семейств приведено ниже:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 6 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отталкиваясь от множества из 824 ДЛК порядка 8, ортогональных приведенному выше ДЛК, можно построить квинтет из 5 попарно-ортогональных ДЛК, приведенный ниже. Интересной особенностью найденных квартетов и квинтетов является то, что ОДЛК получаются из первого ДЛК путем перестановки его строк.

Все приведенные выше примеры семейств ДЛК являются рекордными по одной из рассмотренных выше характеристик.

$$\begin{pmatrix} 0&1&2&3&4&5&6&7\\ 4&2&1&7&0&6&5&3\\ 6&7&3&2&5&4&0&1\\ 7&6&5&4&3&2&1&0\\ 5&3&7&1&6&0&4&2\\ 3&5&6&0&7&1&2&4\\ 1&0&4&5&2&3&7&6\\ 2&4&0&6&1&7&3&5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&2&3&4&5&6&7\\ 3&5&6&0&7&1&2&4\\ 4&2&1&7&0&6&5&3\\ 6&7&3&2&5&4&0&1\\ 7&6&5&4&3&2&1&0\\ 2&4&0&6&1&7&3&5\\ 5&3&7&1&6&0&4&2\\ 1&0&4&5&2&3&7&6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0&1&2&3&4&5&6&7\\ 7&6&5&4&3&2&1&0\\ 5&3&7&1&6&0&4&2\\ 1&0&4&5&2&3&7&6\\ 2&4&0&6&1&7&3&5\\ 6&7&3&2&5&4&0&1\\ 3&5&6&0&7&1&2&4\\ 4&2&1&7&0&6&5&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&2&3&4&5&6&7\\ 5&3&7&1&6&0&4&2\\ 1&0&4&5&2&3&7&6\\ 2&4&0&6&1&7&3&5\\ 3&5&6&0&7&1&2&4\\ 7&6&5&4&3&2&1&0\\ 4&2&1&7&0&6&5&3\\ 6&7&3&2&5&4&0&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0&1&2&3&4&5&6&7\\ 2&4&0&6&1&7&3&5\\ 3&5&6&0&7&1&2&4\\ 4&2&1&7&0&6&5&3\\ 6&7&3&2&5&4&0&1\\ 1&0&4&5&2&3&7&6\\ 7&6&5&4&3&2&1&0\\ 5&3&7&1&6&0&4&2 \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2006.
2. Land A.H., Doig A.G. An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems // Econometrica. 1960. Vol. 28. pp. 497–520. DOI: 10.2307/1910129.
3. Ватутин Э.И., Титов В.С., Емельянов С.Г. Основы дискретной комбинаторной оптимизации. М.: Аргамак-медиа, 2016. 270 с.
4. Заикин О.С., Кочемазов С.Е. Поиск пар ортогональных диагональных латинских квадратов порядка 10 в проекте добровольных распределенных вычислений SAT@home // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислитель-

ная математика и информатика. 2015. Т.4, № 3. С. 95–108.
5. Egan J., Wanless I.M. Enumeration of MOLS of small order // Mathematics of Computation. 2016. Vol. 85. pp. 799–824. DOI: 10.1090/mcom/3010.
6. Sloanne N.J.A. Online Encyclopedia of Integer Sequences // http://oeis.org
7. Zaikin O., Zhuravlev A., Kochemazov S., Vatutin E. On the Construction of Triples of Diagonal Latin Squares of Order 10 // Electronic Notes in Discrete Mathematics. Vol. 54C. 2016. pp. 307–312. DOI: 10.1016/j.endm.2016.09.053.
8. Golomb S.W., Baumart L.D. Backtrack programming // Journal of the ACM. 1965. Vol. 12. Iss. 4. pp. 516–524. DOI: 10.1145/321296.321300.
9. Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Заикин О.С., Титов В.С. Особенности использования взвешивающих эвристик в задаче поиска диагональных латинских квадратов // Известия ЮЗГУ. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. 2015. № 3 (16). С. 18–30.
10. Ватутин Э.И., Заикин О.С., Журавлев А.Д., Манзюк М.О., Кочемазов С.Е., Титов В.С. О влиянии порядка заполнения ячеек на темп генерации диагональных латинских квадратов // Информационно-измерительные диагностирующие и управляющие системы (Диагностика – 2016). Курск: изд-во ЮЗГУ, 2016. С. 33–39.
11. Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Заикин О.С., Титов В.С. Учет алгоритмических особенностей задачи при генерации диагональных латинских квадратов // Известия Юго-Западного государственного университета. 2016. № 2 (65). С. 46–59.
12. Ватутин Э.И., Титов В.С., Заикин О.С., Журавлев А.Д., Манзюк М.О., Кочемазов С.Е., и др. Программа для рекуррентного перечисления диагональных латинских квадратов заданного порядка методом полного перебора и его модификациями // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016662287 от 07.11.16.
13. Vatutin E.I., Titov V.S. Voluntary distributed computing for solving discrete combinatorial optimization problems using Gerasim@home project // Distributed computing and grid-technologies in science and education: book of abstracts of the 6th international conference. Dubna: JINR, 2014. pp. 60–61.