Э.И. Ватутин[1], Н.Н. Никитина[2], М.О. Манзюк[3], О.С. Заикин[4], А.Д. Белышев[3]

О СВОЙСТВАХ КЛИК ИЗ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ НА МНОЖЕСТВЕ БИНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

[1] Россия, Курск, Юго-Западный государственный университет
[2] Россия, Петрозаводск, Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
[3] Россия, Москва, Интернет-портал BOINC.ru
[4] Россия, Иркутск, Институт динамики систем и теории управления РАН

Одним из известных типов комбинаторных объектов, находящих применение в ряде фундаментальных и прикладных задач, являются диагональные латинские квадраты (ДЛК) [1, 2]. ДЛК порядка N представляет собой квадратную матрицу размера $N \times N$, заполненную элементами некоторого алфавита $U = \{0, 1, ..., N-1\}$ так, что в каждой строке, в каждом столбце и на диагоналях квадрата элементы алфавита не повторяются. Парой ортогональных ДЛК (ОДЛК) называются такие квадраты $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, N}$, в составе которых все упорядоченные пары (a_{ij}, b_{ij}) различны. Поиск пар ОДЛК наиболее эффективно осуществляется с использованием метода Эйлера-Паркера [3], базирующегося на построении множества диагональных трансверсалей ДЛК [4, 5] с последующим отысканием в его составе подмножества из N попарно непересекающихся трансверсалей, из которых ортогональный соквадрат определяется тривиально (для поиска трансверсалей и построения покрытий из них на практике наиболее эффективно использовать алгоритм танцующих связей (DLX) [6]). Открытой математической проблемой является вопрос о существовании тройки (или клики большей размерности) попарно ортогональных латинских квадратов (ОЛК) порядка 10. Его исследованию посвящен ряд работ, на данный момент указанная тройка ОЛК/ОДЛК не найдена, при этом теоретически не доказано ее не существование. На современном уровне развития средств вычислительной техники с параллельной архитектурой решить указанную проблему полным перебором не представляется возможным, ввиду чего на практике используются различные особенности ДЛК.

Коллективом авторов с использованием проектов добровольных распределенных вычислений SAT@Home и Gerasim@Home был организован ряд вычислительных экспериментов с целью отыскания указанной тройки:

- сведение указанной задаче к системе булевых уравнений и ее решение с использованием распределенных SAT-решателей [7];
- формирование случайных ДЛК, выбор из них ОДЛК [8];
- формирование симметричных в одной плоскости и центрально-симметричных ДЛК, выбор из них ОДЛК [9–13];
- формирование обобщенно-симметричных ДЛК, выбор из них ОДЛК;
- исследование окрестностей обобщенно-симметричных ДЛК, поиск ОДЛК в их составе;
- попытка отыскания строчно-перестановочных ОДЛК.

В ходе выполненных вычислительных экспериментов и последующего анализа полученных результатов на данный момент коллективом авторов составлена коллекция из более чем 7 млн. канонических форм (сокр. КФ, лексикографически минимальных представителей главных классов ДЛК [14]) ОДЛК. В ее составе встречается ряд комбинаторных структур (графов из ДЛК на множестве бинарного отношения ортогональности) [15], однако ни один из них не содержит клики мощности более 2. Рекордной псевдотройкой с характеристикой ортогональности 274 является псевдотройка, которая была получена в ходе обработки квадратов, обладающих плоскостной симметрией: в ее составе две пары ДЛК полностью ортогональны, а третья пара ортогональна в 74 ячейках [9, 13].

Отыскание клик из ДЛК порядка 10 также возможно организовать путем анализа свойств клик из ДЛК малых порядков. Так для порядков $1 \le N \le 8$ все КФ ОДЛК получены полным перебором, а для порядка $N = 9$ в проекте добровольных распределенных вычислений RakeSearch была получена коллекция КФ ОДЛК, в составе которых ортогональный соквадрат получается путем перестановки строк исходного квадрата (что приблизительно на порядок быстрее подхода на базе метода Эйлера-Паркера). Соответствующие им комбинаторные структуры описаны в работах [16, 17] и доступны online. В их составе встречаются клики, анализу свойств которых посвящена данная работа.

Размерность $N = 1$ является тривиальной, для нее существует одна пара ОДЛК, в составе которой квадрат из единственного элемента алфавита ортогонален сам себе. Для размерностей $N \in \{2, 3\}$ ДЛК, а значит и ОДЛК, не существуют. Для размерности $N = 4$ существует единственный тип комбинаторных структур, представляющий собой клику из двух ДЛК

0123230132101032,
0123321010322301

с совпадающей канонической формой (т.е., другими словами, принадлежащих к одному и тому же главному классу). Здесь и далее с целью экономии места ДЛК приводятся в их строковом представлении путем выписывания их элементов слева направо сверху вниз. Для размерности $N = 5$ аналогично существует единственный тип клик мощности 2, представленных квадратами

0123423401401231234034012,
0123434012123404012323401

из одного главного класса. Для размерности $N = 6$ ОДЛК не существуют. Для размерности $N = 7$ существуют клики мощности 2

0123456124563064520135364102461032535012642036541,
0123456630124535641204652031143650220456135210364

и 4

0123456231564056401234062315620153415340623456201,
0123456620153434562011534062231564040623155640123,
0123456564012315340626201534345620123156404062315,
0123456345620140623152315640564012362015341534062,

причем ДЛК в их составе также принадлежат к одному главному классу. Для размерности $N = 8$ существуют клики мощности 2:

0123456712357604371024567654321053716042406753216542017324061735,
0123456757012436756431201345607264321705365072142076534142170653

и 6 (в составе комбинаторной структуры N824HUGE):

0123456723016745456701236745230132107654103254767654321054761032,
0123456732107654674523015476103276543210456701231032547623016745,
0123456745670123321076547654321067452301230167455476103210325476,
0123456754761032103254764567012323016745765432103210765467452301,
0123456767452301765432101032547654761032321076542301674545670123,
0123456776543210547610322301674510325476674523014567012332107654

ДЛК в составе которых также принадлежат к одному главному классу. Таким образом, для размерностей $1 \leq N \leq 8$ все клики мощностью более 2 образованы ДЛК из одного главного класса, другие клики не существуют.

Размерность $N = 9$ характеризуется существенно большим числом комбинаторных структур (на данный момент известно 197 различных типов) и клик в их составе. Среди них, аналогично рассмотренному выше, можно выделить клики из ДЛК, принадлежащих одному главному классу. Примеры некоторых из них приведены ниже:

012345678124538706568170342706421835370264581451783260835607124647812053283056417,
012345678835607124476281530358760241624518703107432856583076412260154387741823065,
012345678241853067387062451835607124158730246764128305670214583423586710506471832
(клика мощности 3 в составе структуры 24N54M4C);

012345678230678145768154302685437021154760283347012856471283560823506714506821437,
012345678347012856685437021768154302506821437230678145823506714471283560154760283,
012345678876201534534620187107862453781453062453786210260178345345017826628534701,
012345678453786210107862453534620187628534701876201534345017826260178345781453062
(клика мощности 4 в составе структуры 120N480M5C)

012345678230678145564120387856701234781453062473286510147062853305817426628534701,
012345678768154302607832451185467023370218546821503764456781230534620187243076815,
012345678387412056421583760738654102506821437645037821873206514260178345154760283,
012345678473286510856701234564120387628534701230678145305817426147062853781453062,
012345678821503764185467023607832451243076815768154302534620187456781230370218546,
012345678645037821738654102421583760154760283387412056260178345873206514506821437
(клика мощности 6 в составе структуры 24N60M4C).

Таким образом, можно сделать вывод о том, что для б**о**льших размерностей поиск клик (если они существуют) также может быть эффективно организован путем поиска ОДЛК из одного и того же главного класса путем разработки специализированного генератора ОДЛК подобного редкого вида.

Отличительной особенностью размерности $N = 9$ по сравнению с меньшими размерностями является наличие клик, не все ДЛК в составе которых входят в состав одного и того же главного класса. Примеры некоторых из них приведены ниже:

012345678124657803853706124570812346235460781781534062467281530648073215306128457,
012345678648073215306128457853706124124657803467281530570812346235460781781534062,

0123456785607821346284537017815340628732165401340672853061284574578013262456708l3
(клика мощности 3, 2 различных главных класса);

0123456781204837567831564205648012376450783128372645014567201832015378643786l2045,
01234567825716804332680471580571632478342015614805326767158243043067158256423780l,
0123456788456371204582713066371208452018645377635820145840137623764082511207564 83
(клика мощности 3 в составе структуры 32N86M13C, 3 различных главных класса);

0123456781205687435387061248534270166471508327642315804760823512018734653856l4207,
012345678351872460467183205674230581208714356583426017125607834830561742746058123,
012345678845716032103862457467501823784023561251687304630278145376154280528430716,
012345678768254301821670543305782164150436287436108752287563410543017826674821035,
012345678637081524285437061746813250371268405820754136564120783458602317103576842,
012345678483107256674528310138654702526871043347012865801436527765280134250763481
(клика мощности 6 в составе структуры 48N126M6C, 2 различных главных класса).

Наличие подобных клик не исключает возможности существования искомой тройки попарно ортогональных ДЛК порядка 10 (или клики большей мощности), ДЛК в составе которой принадлежат к различным главным классам.

Максимальная мощность клики из попарно ортогональных ДЛК в зависимости от размерности ДЛК образует следующий числовой ряд: 2, 0, 0, 2, 2, 0, 4, 6, ≥6, ≥2. Данный ряд является новым, не представлен в Online-энциклопедии целочисленных последовательностей OEIS [18] и может быть добавлен в ее состав.

Авторы выражают благодарность всем добровольцам, принявшим участие в проектах добровольных распределенных вычислений SAT@Home, Gerasim@Home и RakeSearch.

Литература

1. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2006.
2. Keedwell A.D., Dénes J. Latin Squares and their Applications. Elsevier, 2015. 438 p. DOI: 10.1016/C2014-0-03412-0.
3. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Т. 4A. Комбинаторные алгоритмы. Ч. 1. М.: Вильямс, 2013. 960 с.
4. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S., Valyaev S.Yu. Enumerating the Transversals for Diagonal Latin Squares of Small Order // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the Third International Conference BOINC-based High Performance Computing: Fundamental Research and Development (BOINC:FAST 2017). Vol. 1973. Technical University of Aachen, Germany, 2017. pp. 6–14.
5. Ватутин Э.И., Заикин О.С., Кочемазов С.Е., Валяев С.Ю., Титов В.С. Оценка числа трансверсалей для диагональных латинских квадратов // Телекоммуникации. 2018. № 1. С. 12–21.
6. Knuth D.E. Dancing links // arXiv:cs/0011047v1 [cs.DS], 2000. 26 p.
7. Kochemazov S., Zaikin O., Semenov A. The comparison of different SAT encodings for the problem of search for systems of orthogonal latin squares // CEUR Workshop Proceedings MIT 2016 - Proceedings of the International Conference Mathematical and Information Technologies. 2017. С. 155–165.
8. Заикин О.С., Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Манзюк М.О. Применение высокопроизводительных вычислений для поиска троек взаимно частично ортогональных диагональных латинских квадратов порядка 10 // Вестник Южно-

Уральского государственного университета. Серия: вычислительная математика и информатика. Т. 5. № 3. 2016. С. 54–68. DOI: 10.14529/cmse160304.
9. Zaikin O., Zhuravlev A., Kochemazov S., Vatutin E. On the Construction of Triples of Diagonal Latin Squares of Order 10 // Electronic Notes in Discrete Mathematics. Vol. 54C. 2016. pp. 307–312. DOI: 10.1016/j.endm.2016.09.053.
10. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S. On Some Features of Symmetric Diagonal Latin Squares // CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1940. Proceedings of the XIII International Scientific Conference on Optoelectronic Equipment and Devices in Systems of Pattern Recognition, Image and Symbol Information Processing. Aachen, Germany, 2017. pp. 74–79.
11. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С., Титов В.С. Исследование свойств симметричных диагональных латинских квадратов. Работа над ошибками // Интеллектуальные и информационные системы (Интеллект – 2017). Тула, 2017. С. 30–36.
12. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С., Манзюк М.О., Никитина Н.Н., Титов В.С. О свойствах центральной симметрии диагональных латинских квадратов // Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. № 1 (8). 2018. С. 74–78.
13. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S., Manzuk M.O., Nikitina N.N., Titov V.S. Central Symmetry Properties for Diagonal Latin Squares // Problems of Information Technology. No. 2. 2019. pp. 3-8. DOI: 10.25045/jpit.v10.i2.01.
14. Vatutin E., Belyshev A., Kochemazov S., Zaikin O., Nikitina N. Enumeration of isotopy classes of diagonal Latin squares of small order using volunteer computing // Communications in Computer and Information Science. Vol. 965. Springer, 2018. pp. 578–586. DOI: 10.1007/978-3-030-05807-4_49.
15. Vatutin E.I., Titov V.S., Zaikin O.S., Kochemazov S.E., Manzuk M.O., Nikitina N.N. Orthogonality-based classification of diagonal Latin squares of order 10 // CEUR Workshop Proceedings. Vol. 2267. Proceedings of the VIII International Conference "Distributed Computing and Grid-technologies in Science and Education" (GRID 2018). Dubna, JINR, 2018. pp. 282–287.
16. Ватутин Э.И., Манзюк М.О., Титов В.С., Кочемазов С.Е., Белышев А.Д., Никитина Н.Н. Классификация комбинаторных структур из диагональных латинских квадратов порядка 1–8 на множестве отношения ортогональности // Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. Т. 3. № 1. 2019. С. 94–100.
17. Manzuk M., Nikitina N., Vatutin E. Start-up and first structures of orthogonal diagonal Latin squares discovered in the volunteer computing project RakeSearch // CCIS. Accepted for publication.
18. Sloane N.J.A. Online encyclopedia of integer sequences // https://oeis.org