УДК 519.17

Э. И. Ватутин

ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет» (Россия, Курск)

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОЙ МОЩНОСТИ ГЛАВНЫХ КЛАССОВ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ ПОРЯДКОВ 9–15

В работе приводится описание вычислительного эксперимента, направленного на определение максимальной мощности главных классов диагональных латинских квадратов порядков 9–15. В отличие от порядков 1–8, оценка соответствующей мощности для которых была выполнена ранее путем организации полного перебора, в ходе выполненных вычислительных экспериментов производился выбор квадрата без обобщенных симметрий (автоморфизмов) и сопоставление мощности его главного класса с известной теоретической верхней оценкой. Для бо**о**льших порядков определение соответствующих величин не представляется возможным без использования вычислительной системы с параллельной архитектурой и большим количеством доступной оперативной памяти.

Ключевые слова: диагональные латинские квадраты; главные классы; M-преобразования; OEIS.

Латинским квадратом (ЛК) порядка N называется матрица размером $N \times N$ элементов, заполненная значениями некоторого алфавита мощности N (для определенности – числами $0, 1, ..., N-1$) таким образом, что в ее строках и столбцах указанные значения не повторяются. Латинские квадраты находят ряд практических применений, исследованию их свойств посвящено большое количество научных работ [1; 2]. Специальным видом латинских квадратов являются диагональные латинские квадраты (ДЛК), в которых накладывается дополнительное ограничение на уникальность значений элементов, расположенных на главной и побочной диагоналях.

Одним из распространенных типов задач комбинаторики являются задачи на перечисление и подсчет объектов заданного типа. Для ДЛК существует группа преобразований (поворот, отражение от вертикальной или горизонтальной прямой, транспонирование от главной или побочной диагонали, M-преобразования первого и второго типа [3]), комбинация которых приводит к получению изоморфного квадрата с теми же свойствами (наличие ортогональных квадратов, число трансверсалей, состав обобщенных симметрий и пр.), а полученные подобным образом квадраты образуют класс изоморфизма, именуемый главным классом. Главные классы находят свое применение при перечислении ДЛК соответствующего типа (достаточно перечислить по одному представителю каждого класса с последующим сложением полученных мощностей главных классов), при поиске квадратов с интересующими свойствами (например, имеющих ортогональные квадраты) и т. п.

Мощности главных классов для различных квадратов различаются, причиной чему являются как различное число комбинаций эквивалентных преобразований, перечисленных выше, так и наличие у квадрата обобщенных симметрий (автоморфизмов). Соответствующие значения минимальной и максимальной мощности не выражаются аналитическими формулами (либо на данный момент соответствующие формулы не известны) и могут быть найдены только в ходе соответствующего вычислительного эксперимента. Ограничение сверху на данные значения выражается следующей формулой [3], отталкиваясь от максимального числа эквивалентных преобразований:

$$a_{\min}(N) \le a_{\max}(N) \le M(N),$$
$$M(N) = 2^m \cdot m! \cdot 4,\ m = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor,$$

где $a_{\min}(N)$ и $a_{\max}(N)$ – соответственно минимальная и максимальная мощность главного класса ДЛК с упорядоченной первой строкой порядка N; $\lfloor x \rfloor$ – операция округления вниз (усечения).

Оценка максимальной мощности главных классов порядков $1 \le N \le 8$ была дана в работе [4]. В рамках соответствующего вычислительного эксперимента было произведено перечисление всех главных классов и определение ряда комбинаторных характеристик, в том числе величины $a_{\max}(N)$. Соответствующие значения содержатся в онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей (англ. OEIS) [5] в составе числовых последовательностей под номерами A299784 (для ДЛК с упорядоченной первой строкой) и A299787 (для ДЛК общего вида).

Аналогичное перечисление всех главных классов ДЛК порядка $N \ge 9$ и определение значений величин $a_{\min}(N)$ и $a_{\max}(N)$ на текущем уровне развития средств вычислительной техники с параллельной структурой не представляется возможным. Однако, зная значение верхней оценки $M(N)$, можно подобрать соответствующий ДЛК порядка N без обобщенных симметрий (автоморфизмов), в ходе вычислительного эксперимента определить для него мощность главного класса и в случае ее совпадения с $M(N)$ точно определить соответствующее значение величины $a_{\max}(N)$. При этом величину $a_{\max}(N)$ можно вычислить без полного перебора всех квадратов заданной размерности N ввиду того, что абсолютное большинство ДЛК указанных размерностей не имеют обобщенных симметрий (автоморфизмов). Соответствующая серия вычислительных экспериментов была организована с использованием собственноручно разработанного программного обеспечения, ее результаты приведены в таблице.

N	ДЛК порядка N	$a_{\max}\left(N\right)$	Затраты вычислительного времени CPU (1 поток) и затраты RAM
9	0 1 2 3 4 5 6 7 8 1 2 4 6 5 7 8 0 3 8 5 3 7 0 6 1 2 4 5 7 0 8 1 2 3 4 6 2 3 5 4 6 0 7 8 1 7 8 1 5 3 4 0 6 2 4 6 7 2 8 1 5 3 0 6 4 8 0 7 3 2 1 5 3 0 6 1 2 8 4 5 7	1536	< 1 с, 0,5 МБ
10	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 0 4 5 3 9 8 6 7 3 5 6 1 8 7 4 0 9 2 9 4 7 8 3 2 1 6 0 5 2 7 3 0 9 8 5 1 4 6 6 8 5 9 2 4 7 3 1 0 4 6 9 7 0 1 3 2 5 8 7 0 4 6 1 9 8 5 2 3 8 3 1 5 6 0 2 9 7 4 5 9 8 2 7 6 0 4 3 1	15360	< 1 с, 6 МБ
11	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 9 2 8 1 5 10 3 4 6 0 7 3 10 1 6 0 4 7 9 2 5 8 2 0 9 4 8 7 10 1 5 6 3 1 6 5 7 3 2 4 10 9 8 0 5 8 4 10 1 6 9 0 3 7 2 10 3 6 8 7 9 5 2 0 1 4 7 4 0 5 9 1 2 8 10 3 6 4 5 3 9 10 0 8 6 7 2 1 6 9 7 0 2 8 1 3 4 10 5 8 7 10 2 6 3 0 5 1 4 9	15360	3 с, 7 МБ

Продолжение табл.

N	ДЛК порядка N	$a_{\max}(N)$	Затраты вычислительного времени CPU (1 поток) и затраты RAM
12	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 9 2 10 1 6 4 11 3 5 7 0 8 7 10 1 9 0 3 4 11 6 2 8 5 11 7 3 4 9 10 2 0 1 8 5 6 5 6 7 10 3 8 9 4 0 11 1 2 1 5 0 11 8 6 3 2 9 4 7 10 2 8 4 0 11 7 5 6 10 3 9 1 3 0 9 2 5 1 10 8 11 6 4 7 8 3 5 6 10 11 1 9 7 0 2 4 6 11 8 5 2 9 7 1 4 10 3 0 4 9 6 7 1 0 8 10 2 5 11 3 10 4 11 8 7 2 0 5 3 1 6 9	184320	12 мин, 101 МБ
13	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 10 2 11 1 5 3 12 4 6 7 8 0 9 8 10 1 11 0 4 3 12 5 6 2 9 7 12 5 3 4 8 11 7 9 0 1 6 2 10 6 8 9 7 3 12 11 10 4 0 1 5 2 2 0 7 10 11 6 9 3 12 4 5 8 1 4 6 8 2 12 9 5 11 1 3 7 10 0 1 12 0 6 10 7 2 8 9 5 11 3 4 3 9 4 12 6 10 8 2 7 11 0 1 5 5 4 6 8 9 2 0 1 11 10 12 7 3 11 3 10 0 7 1 4 5 2 12 9 6 8 7 11 5 9 1 8 10 0 3 2 4 12 6 9 7 12 5 2 0 1 6 10 8 3 4 11	184320	16 мин, 118 МБ
14	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 11 2 12 1 6 3 8 13 4 5 7 9 0 10 8 10 1 12 0 4 3 5 13 11 6 2 9 7 5 12 11 4 13 7 0 2 10 3 1 6 8 9 6 8 10 13 3 12 9 0 5 4 2 7 11 1 7 4 13 9 12 6 10 11 3 2 0 8 1 5 13 3 7 2 11 9 5 6 0 12 4 1 10 8 9 6 3 0 2 13 7 8 11 1 12 10 5 4 10 9 6 5 1 8 13 12 7 0 11 3 4 2 3 13 4 11 5 1 12 9 2 10 8 0 7 6 2 0 5 10 7 11 4 1 6 8 9 13 3 12 4 5 9 7 8 10 11 3 1 6 13 12 2 0 1 11 8 6 9 0 2 10 12 7 5 4 13 3 12 7 0 8 10 2 1 4 9 13 3 5 6 11	2580480	53 ч, 1,3 ГБ

Окончание табл.

N	ДЛК порядка N	$a_{\max}(N)$	Затраты вычислительного времени CPU (1 поток) и затраты RAM
15	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 12 2 11 1 6 3 7 13 14 4 5 8 9 0 10 9 11 1 12 0 4 3 6 5 13 14 7 2 10 8 3 10 13 4 11 8 0 9 2 5 12 1 14 6 7 1 9 14 7 3 13 11 5 0 12 4 6 10 8 2 14 12 10 5 13 6 2 4 11 3 0 9 8 7 1 10 4 7 8 14 12 5 11 6 0 2 13 1 9 3 6 0 3 2 7 9 14 8 12 1 11 10 13 4 5 8 3 0 11 10 14 9 1 7 2 13 4 5 12 6 2 6 4 13 8 7 12 3 9 10 1 14 0 5 11 7 8 6 0 5 11 10 12 13 14 9 2 3 1 4 13 7 5 10 2 0 8 14 1 6 3 12 4 11 9 4 14 12 6 9 1 13 10 3 8 7 5 11 2 0 5 13 8 9 1 2 4 0 10 11 6 3 7 14 12 11 5 9 14 12 10 1 2 4 7 8 0 6 3 13	2580480	81 ч, 1,5 ГБ

Таким образом, числовой ряд A299784 может быть дополнен следующими значениями:

15360, 184320, 184320, 2580480, 2580480.

Данные значения в совокупностями с полученными ранее значениями для порядков $N \le 8$ позволяют выдвинуть гипотезу о том, что $a_{\max}(N) = M(N)$ для всех $N > 6$ ввиду существования ДЛК указанных размерностей без обобщенных симметрий (автоморфизмов).

Умножая полученные значения на $N!$, получаем соответствующее расширение для ряда A299787:

61312 2048000, 88289574912000, 1147764473856000,

22496 1836875776000, 337442755313664 0000.

Для расчета следующих двух членов ряда A299784, предположительно равных 41287680 каждый, потребуется построить 41287680 ДЛК в составе соответствующего главного класса и проверить их на уникальность. Для этого потребуется параллельная вычислительная система, приблизительно 54 дня вычислительного времени CPU (при линейной экстраполяции приведенных в таблице временных затрат) на построение ДЛК и не менее 9 и 11 ГБ соответственно для хранения ДЛК.

Список литературы

1. Colbourn C. J., Dinitz J. H. Handbook of Combinatorial Designs. Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2006. 1016 p.

2. Keedwell A. D., Dénes J. Latin Squares and their Applications. Elsevier, 2015. 438 p. DOI: 10.1016/C2014-0-03412-0.

3. Чебраков Ю. В. Теория магических матриц. СПб., 2016. 352 с.

4. Enumeration of isotopy classes of diagonal Latin squares of small order using volunteer computing / E. Vatutin, A. Belyshev, S. Kochemazov, O. Zaikin, N. Nikitina // Communications in Computer and Information Science. 2018. Vol. 965. P. 578–586. doi: 10.1007/978-3-030-05807-4_49.

5. Sloane N. J. A. Online encyclopedia of integer sequences. URL: https://oeis.org/.

УДК 621.397.01

С. Н. Гвоздева, Э. И. Ватутин

ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет» (Россия, Курск)

ОЦЕНКА АППАРАТНОЙ СЛОЖНОСТИ УСТРОЙСТВА ДЛЯ ВОЗВЕДЕНИЯ БИНАРНОЙ МАТРИЦЫ В КВАДРАТ

Предложено устройство для возведения бинарной матрицы в квадрат и расчет его аппаратной сложности, в ходе расчета установлено что данное устройство по сравнению с прототипом имеет выигрыш в 5,6–402,3 раза.

Ключевые слова: умножение матриц; многопортовая память; специализированные вычислительные устройства.

Задача умножения матриц является довольно распространенной, для ее решения известно большое количество алгоритмов и их практических реализаций (как программных, ориентированных на различные классы аппаратного обеспечения с параллельной архитектурой, так и аппаратных). В некоторых задачах теории множеств и теории графов возникает необходимость в умножении бинарных матриц, которое может быть реализовано с использованием тех же алгоритмов и их реализаций, однако при этом зачастую программные реализации характеризуются большим временем и затратами памяти, а аппаратные – большой аппаратной сложностью. Все перечисленные характеристики можно снизить путем разработки узкоспециализированных реализаций, ориентированных именно на обработку бинарных матриц.

Задача возведения бинарной матрицы в квадрат является одной из таких задач и находит практическое применение при транзитивном замыкании бинарного отношения (например, при определении достижимости/контрдостижимости в графах [1], при классификации бинарных отноше-