Э.И. Ватутин
E-mail: evatutin@rambler.ru
Юго-Западный государственный университет, Курск

О ПОДСЧЕТЕ ГЛАВНЫХ КЛАССОВ ЦИКЛИЧЕСКИХ ДИАГОНАЛЬНЫХ И ПАНДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

В работе приведены результаты подсчета числа главных классов циклических диагональных и пандиагональных латинских квадратов. Найденные числовые зависимости указанных мощностей главных классов от размера квадратов N являются новыми и образуют числовые ряды A341585 и A339999 в OEIS.

Одним из известных типов комбинаторных объектов являются латинские квадраты (ЛК) [1]. С ними связан ряд открытых математических проблем, они имеют связь с большим числом комбинаторных объектов и находят ряд практических применений при планировании эксперимента, помехоустойчивом кодировании, составлении некоторых видов расписаний и пр. Специальными видами ЛК являются диагональные (ДЛК) и пандиагональные латинские квадраты, для которых в первом случае значения на диагоналях квадрата, а во втором – на всех ломаных диагоналях и антидиагоналях, различны (другими словами, диагонали, ломаные диагонали и антидиагонали являются трансверсалями). Циклическими квадратами называются такие ЛК, у которых i-я строка получается из (i–1)-й строки путем ее циклического сдвига на d позиций. Все циклические квадраты являются пандиагональными, обратное верно только для размеров $N < 13$ [2].

Рассматривая указанные типы ЛК как диагональные, можно отметить ряд особенностей, присущих данным типам квадратов (большое число трансверсалей и ортогональных квадратов, наличие клик максимально возможной мощности с их участием для простых порядков N, вхождение в состав комбинаторных структур с большим числом квадратов и пр.), что делает актуальной задачу внимательного изучения их свойств.

С использованием разработанных программных реализаций был осуществлен подсчет числа главных классов пандиагональных ЛК порядков $N < 13$, в результате чего был получен числовой ряд 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 0, добавленный в OEIS [3] под номером A339999 (соответствующий список канонических форм доступен онлайн [4]). Для подсчета пандиагональных ЛК больших порядков требуется разработка специализированного генератора на базе принципов, использованных ранее для разработки аналогичных генераторов для ДЛК общего вида, а также симметричных, обобщенно или частично симметричных ДЛК.

Для циклических ДЛК был организован аналогичный вычислительный эксперимент, в ходе которого был получен числовой ряд 1, 0, 1, 1, 0, 2, 3, 0, 4, 4, 0, 5, добавленный в OEIS под номером A341585 (аналогично рассмотренному выше, соответствующий список канонических форм доступен онлайн [5]; ряд включает в своем составе значения нечетных порядков $N=2k+1$, для четных порядков $N=2k$ циклические ДЛК не существуют). Расчет значений для порядков $N\leq 13$ выполняется практически мгновенно на Core i7 4770 в 1 поток, для $N=17$ требуется 1 минут вычислительного времени указанного CPU, для $N=19$ – 1 час 7 минут, для $N=23$ потребовалось 413 часов вычислительного времени CPU (расчет был организован в 8 потоков и завершился за чуть более чем за 2 суток). Для расширения полученного ряда на циклические квадраты больших размеров необходима разработка специализированной параллельной программной реализации и параллельная вычислительная система (вычислительный кластер, суперкомпьютер или грид).

Следует отметить, что свойства цикличности и пандиагональности не являются инвариантными относительно *M*-преобразований по Чебракову [6].

Полученные списки канонических форм соответствующих главных классов могут быть использованы в дальнейшем для исследования свойств указанных типов ЛК. Так, например, на данный момент известно, что среди ДЛК порядка $N=11$ именно циклический ДЛК обладает максимально известным на данный момент числом трансверсалей: $\mathrm{A}287644(11)\geq 37851$, максимально известным на данный момент числом диагональных трансверсалей: $\mathrm{A}287648(11)\geq 4828$ (факт установлен Т. Брада в 2020 г.), а среди квадратов соответствующей ему комбинаторной структуры присутствует ДЛК с максимальным числом ортогональных ему нормализованных ДЛК: $\mathrm{A}287695(11)\geq 32462$. Кроме того, циклические ДЛК порядка 11 обладают наименьшей известной на данный момент мощностью соответствующих им главных классов: $\mathrm{A}299783(11)\leq 1536$.

---

1. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs. Second Edition. Chapman & Hall/CRC. 2006. 1016 p.
2. Atkin A.O.L., Hay L., Larson R.G. Enumeration and construction of pandiagonal Latin squares of prime order // Computers & Mathematics with Applications. Vol. 9. Iss. 2. 1983. pp. 267–292.
3. Sloane N.J.A. The on-line encyclopedia of integer sequences // https://oeis.org/
4. Ватутин Э.И. Подтверждающий список канонических форм пандиагональных ЛК // http://evatutin.narod.ru/A339999_proving_list.txt
5. Ватутин Э.И. Подтверждающий список канонических форм циклических ДЛК // http://evatutin.narod.ru/A341585_proving_list.txt
6. Чебраков Ю.В. Теория магических матриц. СПб.: изд-во "ВВМ", 2010. 280 с.