Э.И. Ватутин[1], Н.Н. Никитина[2], М.О. Манзюк[3], А.М. Альбертьян[4], И.И. Курочкин[5]

О ПОСТРОЕНИИ СПЕКТРОВ БЫСТРОВЫЧИСЛИМЫХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ МАЛОГО ПОРЯДКА

[1] Россия, Курск, Юго-Западный государственный университет
[2] Россия, Петрозаводск, Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
[3] Россия, Москва, Интернет-портал BOINC.ru
[4] Россия, Москва, Институт системного анализа РАН
[5] Россия, Москва, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Одним из известных типов комбинаторных объектов, имеющих ряд фундаментальных и прикладных применений, являются латинские (ЛК) и диагональные латинские квадраты (ДЛК) [1, 2]. ЛК A представляет собой квадратную матрицу $\|a_{ij}\|$ размера $N \times N$ элементов, заполненную символами некоторого алфавита U мощности $|U| = N$ (для определенности и без потери общности в дальнейшем будем подразумевать, что $U = \{0, 1, ..., N-1\}$) так, что в составе строк и столбцов значения элементов не повторяются. Для ДЛК вводится аналогичное требование на отсутствие дублирующихся значений элементов на диагоналях квадрата. Для заданного ДЛК A можно посчитать некоторые числовые характеристики $X(A)$, к которым относятся число трансверсалей, число интеркалятов, число циклов, число ортогональных квадратов и пр. Экстремальные (минимальные $X_{\min}$ и максимальные $X_{\max}$) значения выбранной числовой характеристики в зависимости от порядка квадрата (размерности задачи) N образуют соответствующие числовые ряды, имеющие фундаментальный интерес и коллекционируемые в рамках Онлайн энциклопедии целочисленных последовательностей (англ. OEIS) [3], на данный момент включающей в своем составе более 350 тыс. целочисленных числовых рядов. Примерами подобных рядов могут служить:

- максимальное число трансверсалей в ЛК – ряд A090741 в OEIS, посчитан точно для размерностей $1 \le N \le 9$, для $N = 10$ известно нижнее ограничение [4–8];
- максимальное число интеркалятов в ЛК – ряд A092237 в OEIS, посчитан точно для размерностей $1 \le N \le 9$, для $10 \le N \le 12$ известны нижние ограничения [9–10];
- минимальное число диагональных трансверсалей в ДЛК – ряд A287647 в OEIS, посчитан для размерностей $1 \le N \le 9$, для $N \in \{10, 11, 12, 13, 16, 17, 19\}$ известны верхние ограничения [11–13];
- и др.

Среди числовых характеристик условно можно выделить подмножество быстровычислимых (в плане необходимых вычислительных затрат на соответствующие вычислительные эксперименты), к которым относятся число трансверсалей, число диагональных трансверсалей, число интеркалятов и, с некоторыми оговорками, – число ортогональных ДЛК (ОДЛК). Остальные числовые характеристики (число полных и частичных циклов, число тривиальных и нетривиальных латинских подпрямоугольников, мощность главного класса) требуют существенно больших затрат вычислительного времени.

Спектром S числовой характеристики называется множество значений, которые она может принимать. Например, для ДЛК порядка 7 спектр числа диагональных трансверсалей включает в своем составе 14 значений: $S_{dt,\,DLS7} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 27\}$, соответствующие им квадраты, выписанные в строчку, приведены в табл. 1.

Таблица 1. Спектр числа диагональных трансверсалей в ДЛК порядка 7

Число диагональных трансверсалей	ДЛК
0	0352641214630534215605603124106543262140534530216
1	0345261213460564205135603142156243032160544051326
2	0356241213560436245105403162106243562410534510326
3	0356241213560434215605643012106243562041534510326
4	0345261213460564205135613042356142012063544052136
5	0354261213560414265305613042306241562401534501326
6	0345261513460264215302603145156042332160544052316
7	0354621214630514205635613240306541262310544502136
8	0354261314560214265302603145506241362103544531026
9	0354261314560214265302603145506241362310544510326
10	0352641613420536205145403162256143012460534015326
11	0356241314560216245302403165506241362103544531026
13	0245631315620413245604613025506241364013522530146
27	0245361610452315260344653102236041534126505031246

Мощностью спектра называется число элементов в его составе ($\left|S_{dt,\,DLS7}\right| = 14$ в приведенном примере). Несложно показать, что для спектра S_X выбранной числовой характеристики X $\sup S_X = X_{\max}$ и $\inf S_X = X_{\min}$. *Шириной спектра* S_X называется величина $w(S_X) = \sup S_X - \inf S_X + 1$. В приведенном примере $\inf S_{dt,\,DLS7} = 0$, $\sup S_{dt,\,DLS7} = 27$, а ширина спектра $w\left(S_{dt,\,DLS7}\right) = 27 - 0 + 1 = 28$. Спектр может быть представлен в графическом виде по аналогии со спектрами в физике (горизонтальная полоса с линиями, соответствующими входящим в спектр значениям), однако данная форма является неудобной для анализа ввиду того, что спектры числовых характеристик ДЛК могут иметь достаточно большую ширину (сотни тысяч значений и более). Вместо этого в качестве графического представления спектра выберем квадратное двумерное изображение размером $W \times W$ точек, точка с координатами (x, y) в составе которого соответствует элементу спектра со значением $v = yW + x$ (здесь $W = \left\lceil \sqrt{\sup S_X} \right\rceil$). Графическое представление спектра $S_{dt,\,DLS7}$ из рассмотренного выше примера приведено на рис. 1.

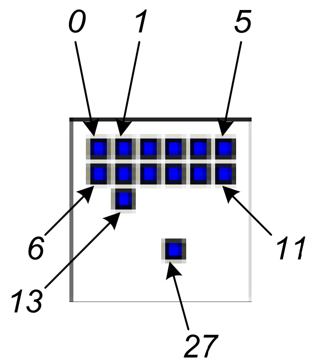

Рис. 1. Графическое изображение спектра $S_{dt,DLS7}$ числа диагональных трансверсалей в ДЛК порядка 7

Мощностям спектров числовых характеристик ЛК/ДЛК соответствуют числовые ряды. Например, для числа трансверсалей в ЛК в составе OEIS присутствует числовой ряд под номером A309344 (значения посчитаны для порядков $1 \le N \le 8$, A. R. Belmonte et al., 2019 г.). Аналогичные числовые ряды для быстровычислимых числовых характеристик в ДЛК в настоящее время неизвестны и были посчитаны коллективом авторов. Для этого для порядков $1 \le N \le 7$ была организована серия вычислительных экспериментов, в ходе которых полным перебором производилось построение всех нормализованных ДЛК, для каждого из ДЛК производилось вычисление значения выбранной числовой характеристики с последующим его добавлением в соответствующий спектр (затраты вычислительного времени – несколько секунд для однопоточной CPU-ориентированной программной реализации). Для размерности $N = 8$ вычислительный эксперимент был организован схожим образом, однако в качестве исходных квадратов был использован генератор сильно нормализованных канонических форм (СКФ) ДЛК на базе *X*-образных диагональных заполнений и ESODLS-схем [14], использование которого уменьшает мощность пространства перебора и соответствующие вычислительные затраты на 3 порядка, в итоге составившие 24 минуты работы CPU Core i7 4770 (Haswell) в 1 поток. Данный генератор обеспечивает получение по одной СКФ для каждого главного класса ДЛК, а рассматриваемые числовые характеристики являются инвариантами главных классов ДЛК и совпадают для всех квадратов в их составе каждого из главных классов. Для построения спектров ОДЛК были использованы списки КФ ОДЛК порядков $1 \le N \le 9$, полученные коллективом авторов ранее и доступные онлайн[1]. Полученные результаты сведены в табл. 2, соответствующие им числовые ряды оказались новыми, прошли апробацию и были добавлены в OEIS.

Таблица 2. Числовые ряды, соответствующие быстровычислимым числовым характеристикам ДЛК малых порядков

Числовая характеристика ДЛК	Значения членов числового ряда (мощность спектра)	Номер числового ряда в OEIS
Число трансверсалей	1, 0, 0, 1, 2, 1, 32, 73	A344105
Число диагональных трансверсалей	1, 0, 0, 1, 2, 2, 14, 47	A345370
Число интеркалятов	0, 0, 0, 1, 2, 1, 21, 61	A345760
Число ОДЛК	1, 0, 0, 1, 2, 1, 3, 31, 99	A345761

[1] http://evatutin.narod.ru/evatutin_odls_1_to_8.zip, http://evatutin.narod.ru/evatutin_odls_9.zip

С использованием известных списков КФ ОДЛК можно составить аналогичные рассмотренным выше числовые ряды для ОДЛК (табл. 3).

Таблица 3. Числовые ряды, соответствующие быстровычислимым числовым характеристикам ОДЛК малых порядков

Числовая характеристика ОДЛК	Значения членов числового ряда (мощность спектра)
Число трансверсалей	1, 0, 0, 1, 1, 0, 4, 25, 295
Число диагональных трансверсалей	1, 0, 0, 1, 1, 0, 3, 31, 165
Число интеркалятов	1, 0, 0, 1, 1, 0, 3, 26, 55
Число ОДЛК	1, 0, 0, 1, 1, 0, 2, 30, 98

Полученные числовые ряды, приведенные в табл. 3, являются новыми, не присутствуют в OEIS и планируются к добавлению в ее состав в ближайшей перспективе. Кроме того, отталкиваясь от супремумов и инфимумов полученных спектров числовых характеристик ОДЛК, можно получить множество числовых рядов, также не представленных в OEIS (табл. 4).

Таблица 4. Числовые ряды, соответствующие экстремальным значениям числовых характеристик ОДЛК малых порядков

Наименование числового ряда	Значения членов числового ряда
Минимальное число трансверсалей в ОДЛК	1, 0, 0, 8, 15, 0, 23, 16, 132
Минимальное число диагональных трансверсалей в ОДЛК	1, 0, 0, 4, 5, 0, 8, 8, 14
Минимальное число интеркалятов в ОДЛК	0, 0, 0, 12, 0, 0, 0, 2, 0
Максимальное число интеркалятов в ОДЛК	0, 0, 0, 12, 0, 0, 18, 112, 72
Минимальное число ОДЛК для ОДЛК	1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1

Число главных классов ДЛК известно для порядков $1 \le N \le 9$ и определяется числовым рядом A287764 в OEIS. В рамках одного главного класса ДЛК получаются друг из друга путем применения комбинации эквивалентных преобразований (преобразования M1 и M2 по Чебракову, повороты, отражения по горизонтали/вертикали, отражения от главной/побочной диагоналей) или, что то же самое – применением одной из ESODLS схем, при необходимости в совокупности с последующей нормализацией. Как уже было отмечено выше, значения числовых характеристик инвариантны относительно комбинаций эквивалентных преобразований, поэтому мощность спектра любой из числовых характеристик не может превосходить числа главных классов ДЛК соответствующего порядка. Исходя из этого, для упомянутых выше числовых рядов можно сформулировать следующие неравенства, ограничивающие мощности соответствующих спектров сверху:

$$A344105(N) \le A287764(N),$$

$$A345370(N) \le A287764(N),$$

$$A345760(N) \le A287764(N),$$

$$A345761(N) \le A287764(N).$$

Точное равенство в данном случае достигается только в том случае, если всем главным классам соответствуют различные значения рассматриваемой числовой характеристики, в противном случае в неравенстве имеет место знак «меньше». ОДЛК являются подмножеством ДЛК, а ДЛК в свою очередь – подмножеством ЛК, откуда следует, что для любой числовой характеристики имеет место следующее неравенство:

$$0 \le X_{\min}^{LS}(N) \le X_{\min}^{DLS}(N) \le X_{\max}^{DLS}(N) \le X_{\max}^{LS}(N).$$

Аналогичные неравенства могут быть сформулированы и для мощностей спектров соответствующих числовых характеристик.

Спектр S_X называется *сплошным* в том случае, если он образован идущими подряд значениями $X_{\min}, X_{\min}+1, X_{\min}+2, ..., X_{\max}-1, X_{\max}$. Для сплошного спектра $|S_X| = X_{\max} - X_{\min} + 1 = w(S_X)$. Большинство найденных спектров числовых характеристик ДЛК не являются сплошными, хотя в них присутствуют сплошные участки, поэтому для них $|S_X| < X_{\max} - X_{\min} + 1$. Исходя из этого, можно сформулировать следующие неравенства, связывающие мощности спектров с соответствующими экстремальными значениями выбранной числовой характеристики:

$$A344105(N) \le A287644(N) - A287645(N) + 1,$$
$$A345370(N) \le A287648(N) - A287647(N) + 1,$$
$$A345760(N) \le A307164(N) - A307163(N) + 1,$$
$$A345761(N) \le A287695(N) + 1.$$

Спектры трансверсалей, диагональных трансверсалей и интеркалятов в ДЛК порядка 9 могут быть посчитаны в перспективе в эксперименте, аналогичном выполненному ранее эксперименту по построению списка КФ ОДЛК порядка 9, с использованием *X*-образных диагональных заполнений и ESODLS схем, например, в одном из проектов добровольных распределенных вычислений, на что потребуется 1–2 месяца расчетов при реальной производительности проекта в районе 2–3 TFLOP/s. Для порядков $N \ge 10$ вычисление спектров полным перебором на современном уровне развития средств вычислительной техники не представляется возможным, что, однако, не запрещает решение данной задачи с использованием эвристических подходов. На данный момент на мощности соответствующих элементов спектров можно наложить следующие нижние ограничения (табл. 5) отталкиваясь от их известных составляющих, представляющих собой *аппроксимацию спектров*.

Таблица 5. Нижние ограничения для мощностей спектров числовых характеристик ДЛК порядков $N \ge 9$

Числовая характеристика ДЛК	Нижние ограничения на значения членов числового ряда	Номер числового ряда в OEIS
Число трансверсалей	$a(9) \ge 296$, $a(10) \ge 193$, $a(12) \ge 22\,149$	A344105
Число диагональных трансверсалей	$a(9) \ge 166$, $a(10) \ge 389$, $a(12) \ge 17\,620$	A345370
Число интеркалятов	$a(9) \ge 55$, $a(10) \ge 72$, $a(12) \ge 210$	A345760
Число ОДЛК	$a(10) \ge 10$, $a(11) \ge 36$, $a(12) \ge 2\,134$	A345761

Приведенные в табл. 5 нижние ограничения не являются окончательными и могут быть усилены в перспективе путем организации соответствующих вычислительных экспериментов.

Кроме того, в ходе построения спектров удалось усилить некоторые ограничения для экстремальных значений числовых характеристик ДЛК (табл. 6).

Таблица 6. Нижние и верхние ограничения для экстремальных значений быстровычислимых числовых характеристик ДЛК порядков $N \geq 10$, полученные в результате построения спектров

Числовая характеристика ДЛК	Ограничение	Подтверждающий ДЛК
Минимальное число трансверсалей в ДЛК (A287645)	$a(10) \leq 408$	0 5 1 8 9 2 7 6 3 4 7 1 5 4 2 9 0 3 6 8 6 4 2 1 5 3 8 0 9 7 4 9 0 3 6 8 2 1 7 5 3 8 7 6 4 1 9 5 2 0 9 7 4 0 8 5 3 2 1 6 2 0 8 7 1 4 6 9 5 3 8 2 9 5 3 6 4 7 0 1 1 3 6 9 0 7 5 4 8 2 5 6 3 2 7 0 1 8 4 9
	$a(11) \leq 2\,477$	0 6 4 7 5 9 3 1 2 10 8 6 1 9 10 3 4 0 8 5 7 2 9 7 2 1 0 3 4 5 10 8 6 1 10 6 3 9 0 8 4 7 2 5 7 5 10 8 4 2 9 3 6 1 0 3 4 1 0 8 5 2 10 9 6 7 10 9 7 4 1 8 6 2 0 5 3 5 8 3 6 2 10 1 7 4 0 9 4 2 0 5 6 7 10 9 8 3 1 8 3 5 2 10 6 7 0 1 9 4 2 0 8 9 7 1 5 6 3 4 10
	$a(12) \leq 1\,672$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 1 2 0 4 5 3 8 6 7 11 9 10 3 4 5 9 7 10 2 11 0 6 1 8 9 11 10 6 0 7 4 3 5 1 8 2 7 6 8 11 10 9 0 2 1 3 5 4 6 8 7 2 9 11 1 0 10 4 3 5 4 5 3 1 6 0 9 10 11 8 2 7 2 0 1 5 3 4 7 8 6 10 11 9 11 10 9 8 1 6 5 4 3 2 7 0 5 3 4 10 8 1 11 9 2 7 0 6 8 7 6 0 11 2 10 1 9 5 4 3 10 9 11 7 2 8 3 5 4 0 6 1
Максимальное число трансверсалей в ДЛК (A287644)	$a(12) \geq 198\,144$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 1 2 3 4 5 0 11 6 7 8 9 10 9 8 7 6 11 10 1 0 5 4 3 2 4 5 0 1 2 3 8 9 10 11 6 7 6 11 10 9 8 7 4 3 2 1 0 5 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 3 4 5 0 1 2 9 10 11 6 7 8 2 3 4 5 0 1 10 11 6 7 8 9 10 9 8 7 6 11 0 5 4 3 2 1 5 0 1 2 3 4 7 8 9 10 11 6 7 6 11 10 9 8 3 2 1 0 5 4 8 7 6 11 10 9 2 1 0 5 4 3

<table>
<tr><td rowspan="3">Минимальное число диагональных трансверсалей в ДЛК (A287647)</td><td>$a(10) \le 15$</td><td>0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 0 4 3 7 9 8 6 5
2 4 9 6 8 1 3 5 0 7
3 5 7 1 9 8 0 2 4 6
9 6 4 5 7 3 8 1 2 0
8 3 5 0 2 6 1 9 7 4
7 9 3 8 0 4 5 6 1 2
6 8 1 2 5 0 7 4 9 3
5 7 8 9 6 2 4 0 3 1
4 0 6 7 1 9 2 3 5 8</td></tr>
<tr><td>$a(11) \le 279$</td><td>0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1 2 3 10 5 9 8 4 6 7 0
3 4 10 7 1 6 0 5 9 8 2
5 3 9 1 8 10 7 0 2 6 4
9 0 8 6 7 4 3 2 10 5 1
4 10 0 5 2 8 1 6 7 3 9
8 7 5 2 6 0 9 10 4 1 3
7 8 6 4 9 2 10 3 1 0 5
10 6 1 9 0 3 4 8 5 2 7
6 5 7 0 10 1 2 9 3 4 8
2 9 4 8 3 7 5 1 0 10 6</td></tr>
<tr><td>$a(12) \le 66$</td><td>0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
1 2 0 4 5 3 8 6 7 11 9 10
3 9 5 7 11 10 1 0 4 6 2 8
10 3 4 9 6 11 0 5 2 7 8 1
4 5 1 11 3 9 2 8 0 10 6 7
11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
6 8 7 10 9 0 11 2 1 4 3 5
9 7 11 6 10 8 3 1 5 0 4 2
5 0 8 1 2 4 7 9 10 3 11 6
2 11 3 5 1 7 4 10 6 8 0 9
8 4 6 2 0 1 10 11 9 5 7 3
7 6 10 0 8 2 9 3 11 1 5 4</td></tr>
<tr><td>Максимальное число диагональных трансверсалей в ДЛК (A287648)</td><td>$a(12) \ge 30\,192$</td><td>0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
1 2 3 4 9 8 11 5 10 0 6 7
5 8 10 6 11 4 1 3 9 7 0 2
11 7 5 8 10 2 9 1 3 6 4 0
7 5 8 10 6 3 0 2 4 11 9 1
9 0 1 2 3 7 10 11 5 4 8 6
6 11 7 5 8 1 4 0 2 10 3 9
10 6 11 7 5 0 3 9 1 8 2 4
3 4 9 0 1 6 5 10 11 2 7 8
2 3 4 9 0 10 7 8 6 1 11 5
4 9 0 1 2 11 8 6 7 3 5 10
8 10 6 11 7 9 2 4 0 5 1 3</td></tr>
</table>

Максимальное число интеркалятов в ДЛК (A307164)	$a(12) \geq 252$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 1 2 0 4 5 3 8 6 7 11 9 10 3 5 4 0 2 1 10 9 11 7 6 8 9 10 11 6 7 8 3 4 5 0 1 2 10 11 9 7 8 6 5 3 4 2 0 1 6 8 7 9 11 10 1 0 2 4 3 5 2 0 1 5 3 4 7 8 6 10 11 9 4 3 5 1 0 2 9 11 10 6 8 7 5 4 3 2 1 0 11 10 9 8 7 6 11 9 10 8 6 7 4 5 3 1 2 0 7 6 8 10 9 11 0 2 1 3 5 4 8 7 6 11 10 9 2 1 0 5 4 3

Литература

1. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2006.
2. Keedwell A.D., Dénes J. Latin Squares and their Applications. Elsevier, 2015. 438 p. DOI: 10.1016/C2014-0-03412-0.
3. Sloane N.J.A. Online encyclopedia of integer sequences // https://oeis.org
4. Brown J.W., Cherry F., Most L., Most M., Parker E.T., Wallis W.D. Completion of the spectrum of orthogonal diagonal Latin squares // Lecture notes in pure and applied mathematics. 1992. Vol. 139. pp. 43–49.
5. Bedford D. Transversals in the Cayley tables of the non-cyclic groups of order 8 // European Journal of Combinatorics. Vol. 12. 1991. pp. 455–458.
6. Cavenagh N.J., Wanless I.M. On the number of transversals in Cayley tables of cyclic groups // Disc. Appl. Math. Vol. 158. 2010. pp. 136–146.
7. McKay B.D., McLeod J.C., Wanless I.M. The number of transversals in a Latin square // Des. Codes Cryptogr. Vol. 40. 2006. pp. 269–284.
8. Potapov V.N. On the number of transversals in Latin squares // arxiv:1506.01577 [math.CO], 2015.
9. Heinrich K., Wallis W. The maximum number of intercalates in a Latin square // Combinatorial Math. Proc. 8th Australian Conf. Combinatorics. 1980. pp. 221–233.
10. Bean R. Critical sets in Latin squares and associated structures. Ph.D. Thesis. The University of Queensland, 2001.
11. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С. Оценка комбинаторных характеристик диагональных латинских квадратов // Оптико-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработки изображений и символьной информации (Распознавание – 2017). Курск: изд-во ЮЗГУ, 2017. С. 98–100.
12. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S., Valyaev S.Yu. Enumerating the Transversals for Diagonal Latin Squares of Small Order // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the Third International Conference BOINC-based High Performance Computing: Fundamental Research and Development (BOINC:FAST 2017). Vol. 1973. Technical University of Aachen, Germany, 2017. pp. 6–14.
13. Vatutin E.I., Zaikin O.S., Kochemazov S.E., Valyaev S.Y. Using Volunteer Computing to Study Some Features of Diagonal Latin Squares // Open Engineering. Vol. 7. Iss. 1. 2017. pp. 453–460. DOI: 10.1515/eng-2017-0052.
14. Vatutin E.I., Zaikin O.S., Manzuk M.O., Nikitina N.N. Searching for Orthogonal Latin Squares via Cells Mapping and Boinc-Based Cube-And-Conquer // Russian Supercomputing Days (RSD 2021). Accepted for publication.