Прогнозирование локально стационарных данных с использованием предсказаний экспертных стратегий

В.В.Вьюгин, В.Г.Трунов

Аннотация

Решается задача непрерывного машинного обучения. В рамках теоретико-игрового подхода при расчете очередного прогноза не используются никакие предположения о стохастической природе источника, генерирующего поток данных – источник может быть аналоговым, алгоритмическим или вероятностным, его параметры могут изменяться в случайные моменты времени, при построении прогностической модели используются только структурные предположения о характере генерации данных. Представлен алгоритм онлайн прогнозирования локально стационарного временного ряда. Получена оценка эффективности предложенного алгоритма. Проведенные численные эксперименты иллюстрируют полученные оценки регрета алгоритма.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Непрерывное машинное обучение (Lifelong Machine Learning), Прогнозирующие алгоритмы, Обучение с учителем, Адаптивные алгоритмы прогнозирования в режиме онлайн, Предсказания с использованием экспертных стратегий, Регрет, Агрегирующий алгоритм, Метод агрегирования прогнозов Fixed Share, Метод смешивания апостериорных распределений (Mixing Past Pasteriors).

1 Введение

Прогнозирование данных, поступающих из “черного ящика”, является одной из основных задач машинного обучения. В этом случае, при прогнозировании не используются никакие стохастические предположения об источнике данных. Данные поступают в режиме онлайн в виде временного ряда, состоящего из “исходов”: пар вида (“сигнал”, “отклик”). Источником данных может быть аналоговый, детерминированный (алгоритмический) или стохастический процесс. При этом могут использоваться простые структурные предположения об источнике генерирующем данные. В данной работе предложен подход, при котором обучение производится на малых подвыборках основной выборки, прогнозы построенных прогностических моделей объединяются затем в один общий прогноз на основе известных методов агрегации.

Общая схема процесса онлайн-обучения и прогнозирования выглядит следующим образом. Процесс обучения происходит в дискретные моменты времени по скользящему окну в прошлое ширины h по шагам $t = 1, 2, \dots$. На очередном шаге t по данным подвыборки из наблюдаемых в прошлом данных, строится локальная прогностическая модель (экспертная предсказательная стратегия) для получения отклика по сигналу. Как правило, это функция регрессии, построенная по наблюдаемому отрезку временного ряда.

Таким образом, на каждом шаге прогнозирования t имеется t прогностических моделей, построенных по соответствующим подвыборкам из прошлого. После того как наблюдается сигнал $\mathbf{x}_t$ все построенные на шагах $1, 2, \dots, t$ экспертные предсказательные стратегии представлют свои прогнозы отклика. Используя эти прогнозы, Предсказатель строит свой прогноз отклика путем агрегирования экспертных прогнозов.

Задача онлайн агрегации прогнозов решается в рамках теории предсказаний с использованием экспертных стратегий (Prediction with Expert Advice). Данный подход широко представлен в научной литературе по машинному обучению, см. [1], [2], [3].

После того, как прогнозы будут представлены, соответствующий генератор выдает истинный отклик y_t, а эксперты и Предсказатель подсчитывают свои потери, связанные с различием их прогнозов и отклика.

В математической статистике при построении прогностических моделей часто используются стохастические предположения о природе данных. В данной работе для построения прогностических моделей используются онлайн методы машинного обучения в рамках теоретико-игрового подхода, при этом, стохастические модели данных не используются. Эксперты и Предсказатель имеют дело с конкретной траекторией, их суммарные потери вычисляются вдоль этой траектории, гарантийные оценки на регрет являются равномерными и верны для любой траектории.

При построении прогнозирующих стратегий используются следующие предположения о структуре способа генерации данных. Предполагается, что имеется несколько генераторов, которые, сменяя друг друга, порождают временной ряд, который, таким образом, делится на подвыборки – области стационарности. Устройство генераторов неизвестно предсказателям. Каждая область стационарности может быть изучена методами машинного обучения по результатам работы генератора, т.е., по данным из области стационарности будет построен соответствующий локальный прогнозирующий алгоритм (локальная прогностическая модель), привязанный к генератору, который может быть успешно применен на других областях стационарности, порожденных тем же генератором.

В теории предказаний с использованием экспертных стратегий оценка эффективности агрегирующего алгоритма производится с помощью понятия регрета, который представляет собой разность между суммарными (кумулятивными) потерями агрегирующего алгоритма и суммарными потерями экспертного алгоритма, накопленными за весь период прогнозирования. Цель агрегирующего алгоритма заключается в том, чтобы минимизировать регрет относительно каждой экспертной стратегии [1], [2], [3].

При другой, более общей, постановке задачи прогнозирования минимизируется регрет агрегирующего алгоритма относительно произвольных последовательностей экспертных стратегий: серия шагов, на которых делаются предсказания, делится на сегменты. Каждому сегменту ставится в соответствие свой эксперт; последовательность сегментов и соответствующих экспертов называется составным экспертом. Цель агрегирующего алгоритма изменяется – теперь он должен предсказывать так, чтобы быть не хуже каждого составного эксперта. Соответственно, модифицируется понятие регрета алгоритма – теперь это разность между потерями алгоритма и суммарными потерями последовательности экспертов. Данное изменение позволяет точнее моделировать условия реальной жизни, когда природа исходов может меняться со временем и разные эксперты могут предсказывать с разной степенью успешности в зависимости от текущего тренда. Соответствующий алгоритм называется Fixed Share [4].

В работе [5] было предложено дальнейшее обобщение метода Fixed Share – метод смешивания апостериорных распределений MPP (Mixing

Past Posteriors). Кумулятивные потери агрегирующего алгоритма соотносятся с выпуклыми комбинациями потерь экспертов. Понятие регрета также изменяется. Теперь суммарные потери алгоритма сравниваются с суммарными потерями выпуклых комбинаций экспертных стратегий (см. детали в [3]).

Характерной особенностью задачи, рассматриваемой в этой работе, является отсутствие заранее заданного множества конкурирующих экспертных стратегий, как это было в цитируемых выше работах. Вместо этого, новые экспертные стратегии строится на каждом шаге процесса обучения в режиме онлайн. Предсказатель должен агрегировать на каждом шаге прогнозы всех построенных к этому времени экспертных стратегий.

Кратко опишем предлагаемый подход.

Экспертные стратегии (прогностические модели) автоматически строятся в режиме онлайн в зависимости от наблюдаемых реальных данных. На каждом шаге вводится новая экспертная прогнозирующая стратегия, отражающая локальные свойства наблюдаемой части временного ряда (подвыборки).

Прогнозы всех построенных к этому моменту прогнозирующих стратегий объединяются в прогноз Предсказателя с помощью одного из методов агрегации.

Общая схема обучения с учителем с использованием экспертных стратегий имеет форму игры с участниками: Предсказатель, эксперты $i \in \mathcal{N}$. На каждом шаге t игры каждый Эксперт i наблюдает сигнал $\mathbf{x}_t$ и предоставляет свой прогноз $f_{i,t} = f_{i,t}(\mathbf{x}_t)$, Предсказатель вычисляет свой прогноз γ_t. После этого, предъявляется отклик y_t и вычисляются потери $l_{i,t} = \lambda(f_{i,t}, y_t)$ экспертов и потери $h_t = \lambda(\gamma_t, y_t)$ Предсказателя, где $\lambda(\gamma, y)$ – функция потерь, которая принимает неотрицательные значения.

Предполагаем, что источник данных имеет несколько режимов генерации откликов, поэтому генерируемые им данные разбиваются на соответствующие временные “интервалы стационарности”. Каждый интервал стационарности соответствует определенному режиму работы источника данных. Предполагаем, что существует (априорно неизвестная) стратегия, хорошо предсказывающая отклики на данном этапе стационарности. Параметры этой модели можно достаточно точно определить по выборкам, полностью входящим в интервал стационарности. Используется предположение о том, что такие модели обладают свойством валидности и на других интервалах стационарности, соответствующих тому же режиму работы источника (генератора).

Поскольку границы интервалов стационарности неизвестны Предсказателю, прогностические модели строятся на каждом шаге обучения. Часть этих моделей будут валидными, т.е., они будут обучены на данных, полностью порожденных каким-либо генератором, остальные будут не валидными, т.е. не будут соответствовать данным из какого-либо интервала стационарности. Таким образом, на каждом этапе прогнозирования мы имеем набор валидных и не валидных прогностических моделей, из которых мы должны составить единую эффективную прогностическую модель Предсказателя. Построеннные прогностические модели в каждый момент времени конкурируют друг с другом, поэтому мы будем объединять их используя методы агрерирования экспертных стратегий. Основной результат данной работы заключается в построении и изучении алгоритма прогнозирования локально стационарного временного ряда, который агрегирует все построеннве прогностические модели, выделяя прогнозы валидных локальных прогностических моделей.

Предложенный подход реализован в виде алгоритма GMPP, получены теоретические оценки потерь данного алгоритма. Проведенные численные эксперименты подтверждают эти оценки.

2 Предварительные сведения

2.1 Постановка задачи предсказания с использованием экспертных стратегий

Пусть $\lambda(\gamma, y)$ – функция потерь, где γ – прогноз, y –исход. Функция потерь принимает в качестве значений неотрицательные вещественные числа. Простейший пример функции потерь для задачи регрессии: в случае, когда исходы и прогнозы – вещественные числа из $\mathcal{R}$, используется квадратичная функция потерь $\lambda(\gamma, y) = (\gamma - y)^2$.

Предполагаем, что имеется бесконечное множество экспертных стратегий $i \in \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ – множество всех натуральных чисел (или начальный отрезок натурального ряда).[1]

[1] Второй случай – это классическая постановка, рассматриваемая в [6], [1], при которой при обучении алгоритма используются прогнозы экспертов из заранее заданного конечного набора, в этом случае $\mathcal{N}$ – начальный отрезок натурального ряда.

Общая схема обучения с учителем с использованием экспертных стратегий приведена ниже в виде игры с участниками: Предсказатель, эксперты $i \in \mathcal{N}$. На каждом шаге t игры каждый Эксперт i наблюдает сигнал $\mathbf{x}_t$ и предоставляет свой прогноз $f_{i,t} = f_{i,t}(\mathbf{x}_t)$, после этого, Предсказатель вычисляет свой прогноз γ_t. После того как все прогнозы будут сделаны, предъявляется истинный отклик y_t и вычисляются потери $l_{i,t} = \lambda(f_{i,t}, y_t)$ экспертов и потери $h_t = \lambda(\gamma_t, y_t)$ Предсказателя, где $\lambda(\gamma, y)$ – функция потерь, которая принимает неотрицательные значения.

Специфика задачи заключается в том, что число экспертов не ограничено – каждый эксперт i, а точнее, функция прогнозирования $f_{i,t} = f_{i,t}(\mathbf{x}_t)$, будет строится на шаге i и используется на последующих шагах. Поэтому приходится заранее предполагать, что число экспертов бесконечное и рассматривать задачу предсказания с использованием прогнозов экспертных стратегий для бесконечного числа экспертов.

Приведем классическую "теоретико-игровую" постановку задачи предсказания с использованием экспертных прогнозов для того случая, когда число экспертов бесконечное. Порядок действий игроков и доступ к информации определяется следующим онлайн протоколом:

Протокол 1

FOR $t = 1, \dots, T$

1. Каждый эксперт $i \in \mathcal{N}$ предъявляет свой прогноз $f_{i,t}$.
2. Предсказатель предъявляет свой прогноз γ_t.
3. Получаем исход y_t и вычисляем потери каждого Эксперта i: $l_{i,t} = \lambda(f_{i,t}, y_t)$ и потери $h_t = \lambda(\gamma_t, y_t)$ Предсказателя.

ENDFOR

Суммарные потери $L_{i,T}$ произвольного эксперта i и потери H_T, понесенные Предсказателем за первые T шагов, определяются как $L_{i,T} = \sum\limits_{t=1}^{T} l_{i,t}$ и $H_T = \sum\limits_{t=1}^{T} h_t$, соответственно.

Эксперты могут получать свои прогнозы тем или иным способом, который не имеет значения в данной игре. Предсказатель должен иметь свою стратегию для вычисления прогнозов γ_t. Построение такой стратегии является основной задачей при построении метода прогнозирования. Предсказатель может использовать всю информацию, которая известна к его ходу, в частности он может использовать текущие и прошлые прогнозы экспертов, прошлые исходы, а также потери экспертов на прошлых шагах игры. Теоретические оценки связывают потери Предсказателя и потери экспертов (например,(2.1)).

Эффективность Предсказателя относительно эксперта i измеряется регретом $R_{i,T} = H_T - L_{i,T}$. Задача Предсказателя состоит в том, чтобы свести к минимуму регрет по отношению к каждому из экспертов.

Стратегия Предсказателя основана на использовании весов, которые приписываются экспертам в зависимости от их потерь в прошлом.

Сначала задаются начальные значения весов $w_{i,1}$ при $i \in \mathcal{N}$. Например, $w_{i,1} = \frac{1}{c(i+1)\ln^2(i+1)}$, где $c = \sum_{i\in\mathcal{N}} \frac{1}{(i+1)\ln^2(i+1)}$.[2] В конце каждого шага t обновляем веса с помощью метода экспоненциального взвешивания:

$$w_{i,t+1} = w_{i,t}e^{-\eta l_{i,t}} \tag{1}$$

для каждого $i \in \mathcal{N}$, где $\eta > 0$ – параметр обучения. Веса нормализуются:

$$w^*_{i,t} = \frac{w_{i,t}}{\sum\limits_{j\in\mathcal{N}} w_{j,t}}.$$

Подробнее см. в [3], [6], [2].

Величина

$$m_t = -\frac{1}{\eta}\sum_{i\in\mathcal{N}} w^*_{i,t}e^{-\eta\lambda(f_{i,t},y)}$$

называется экспоненциально смешанными потерями (mixloss), а величина $M_T = \sum_{t=1}^T m_t$ называется кумулятивными (суммарными) экспоненциально смешанными потерями на шагах $t = 1, \dots, T$.[3] $L_{i,T} = \sum_{t=1}^T l_{i,t}$ – суммарные потери эксперта i за первые T шагов. Эти величины лежат в основе анализа предсказательных алгоритмов.

Предложение 1 *Для любого эксперта* i

$$M_T \le L_{i,T} + \frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{w_{i,1}}$$

для каждого T.

[2] $\frac{1}{\ln 2} < c < \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2\ln^2 2}$, численно $c \approx 2.10974$. В качестве $w_{i,1}$ подходят элементы любого сходящегося ряда.

[3] В статистической физике величина m_t называется статистической суммой. Легко видеть, что эти величины конечные.

Доказательство. Пусть $\mathbf{w}_t^* = (w_{i,t}^* : i \in \mathcal{N})$ – нормализованные веса, а $\mathbf{f}_t = (f_{i,t} : i \in \mathcal{N})$ – прогнозы экспертов на шаге t. Прогноз Предсказателя обозначается f_t. Из определения следует, что

$$m_t = -\frac{1}{\eta} \sum_{i \in \mathcal{N}} e^{-\eta\lambda(f_{i,t}, y_t)} w_{i,t}^* = -\frac{1}{\eta} \ln \frac{W_{t+1}}{W_t} \tag{2}$$

для любого t, пусть $W_t = \sum\limits_{i \in \mathcal{N}} w_{i,t}$ и $W_1 = 1$. Из (1) имеем $w_{i,T+1} = w_{i,1} e^{-\eta L_{i,T}}$. Путем телескопирования мы получаем для любого эксперта i и для любого T оценку

$$\begin{aligned} M_T = -\frac{1}{\eta} \ln W_{T+1} = -\frac{1}{\eta} \ln \sum_{i \in \mathcal{N}} w_{i,T+1} = \\ -\frac{1}{\eta} \ln \sum_{i \in \mathcal{N}} w_{i,1} e^{-\eta L_{i,T}} \leq \quad (3) \\ \leq -\frac{1}{\eta} \ln w_{i,1} e^{-\eta L_{i,T}} = L_{i,T} + \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{w_{i,1}}. \quad (4) \end{aligned}$$

Неравенство верно для любого i поскольку все слагаемые в сумме неотрицательные. $\square$

Способ вычисления прогноза Предсказателя указан в разделе 2.3.

2.2 Методы MPP и Fixed Share

В дальнейшем будет использоваться важное обобщение классической схемы предсказания с использованием экспертных стратегий – метод смешивания прошлых апостериорных распределений экспертов – MPP.

Пусть Δ – множество всех распределениий вероятностей $\mathbf{p} = \{p_i : i \in \mathcal{N}\}$ на счетном множестве $\mathcal{N}$: $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i \in \mathcal{N}} p_i = 1$.

Далее неравенства между векторами $\mathbf{p} > \mathbf{q}$ понимаются покомпонентно: $p_i > q_i$ при $i \in \mathcal{N}$.

Расширим понятие относительной энтропии для бесконечномерных вероятностных векторов. Пусть $\mathbf{p} = (p_i : i \in \mathcal{N})$, $\mathbf{q} = (q_i : i \in \mathcal{N})$ и $\mathbf{q} > \mathbf{0}$.

Относительная энтропия (расхождение Кульбака-Лейблера) для векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Delta$, $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ определяется как

$$D(\mathbf{p} \| \mathbf{q}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} p_i \ln \frac{p_i}{q_i}.$$

Полагаем $0 \ln 0 = 0$.

Напомним некоторые необходимые в дальнейшем свойства относительной энтропии [3].

Лемма 1 *1) Для любых $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{w} \in \Delta$, где $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ и $\mathbf{w} > \mathbf{0}$, выполнено*

$$D(\mathbf{p}\|\mathbf{q}) \le D(\mathbf{p}\|\mathbf{w}) + \ln\left(\sum_{i\in\mathcal{N}} p_i \frac{w_i}{q_i}\right).$$

2) Если $\mathbf{q} \ge \beta\mathbf{w}$ для некоторого числа $\beta > 0$, то

$$D(\mathbf{p}\|\mathbf{q}) \le D(\mathbf{p}\|\mathbf{w}) + \ln\frac{1}{\beta}.$$

3) В частности, при $\mathbf{p} = \mathbf{w}$ и $\mathbf{q} \ge \beta\mathbf{w}$ будет $D(\mathbf{w}\|\mathbf{q}) \le \ln\frac{1}{\beta}$.

Доказательство. Из вогнутости логарифма получаем неравенство 1):

$$D(\mathbf{p}\|\mathbf{q}) - D(\mathbf{p}\|\mathbf{w}) = \sum_{i\in\mathcal{N}} p_i \ln\frac{w_i}{q_i} \le \ln\sum_{i\in\mathcal{N}} p_i \frac{w_i}{q_i}. \qquad (5)$$

Если $\mathbf{q} \ge \beta\mathbf{w}$, то $D(\mathbf{p}\|\mathbf{q}) - D(\mathbf{p}\|\mathbf{w}) \le \ln\sum\limits_{i\in\mathcal{N}} p_i \frac{w_i}{\beta w_i} \le \ln\frac{1}{\beta}$, т.е., 2) выполнено. Так как $D(\mathbf{p}\|\mathbf{w}) = 0$ при $\mathbf{p} = \mathbf{w}$, из 2) получаем 3). □

Схемой смешивания (апостериорных распределений экспертов) называется вектор $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_t)$, где $\beta_i \ge 0$ при $0 \le i \le t$ и $\sum_{i=0}^t \beta_i = 1$,

Следствие 1 *Пусть $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_t)$ – схема смешивания, $\mathbf{w}_s$ такие, что $\mathbf{w}_s > \mathbf{0}$ при $0 \le s \le t$.*

Пусть также $\mathbf{q} = \sum\limits_{i=0}^{t} \beta_i \mathbf{w}_i$ – вектор выпуклой комбинации векторов $\mathbf{w}_i$, Тогда для произвольного вектора $\mathbf{p} \in \Delta$ будет

$$D(\mathbf{p}\|\mathbf{q}) \le D(\mathbf{p}\|\mathbf{w}_s) + \ln\frac{1}{\beta_s}.$$

для любого s такого, что $\beta_s > 0$.

В частности, при $\mathbf{p} = \mathbf{w}_s$ имеем оценку расхождения между произвольным элементом $\mathbf{w}_s$ выпуклой комбинации и вектором $\sum_{i=0}^t \beta_i \mathbf{w}_i$ выпуклой комбинации:

$$D\left(\mathbf{w}_s\|\sum_{i=0}^{t} \beta_i \mathbf{w}_i\right) \le \ln\frac{1}{\beta_s}.$$

Приведем модифициованную схему корректировки весов в Протоколе 1 с помощью метода смешивания прошлых апостериорных распределений (Mixing Past Posteriors –MPP).

Параметр $\eta > 0$. Полагаем $w_{i,1} = \tilde{w}_{i,0} = \frac{1}{c(i+1)\ln^2(i+1)}$ при $i \in \mathcal{N}$, в векторном виде $\mathbf{w}_t = (w_{1,t}, w_{2,t}, \dots)$ и $\tilde{\mathbf{w}}_t = (\tilde{w}_{1,t}, \tilde{w}_{2,t}, \dots)$.
FOR $t = 1, \dots, T$
Пусть эксперты несут потери $l_{i,t}$ при $i \in \mathcal{N}$, Предсказатель несет потери h_t.
Корректируем веса экспертов в два этапа:
5. **Loss Update**

$$\tilde{w}_{i,t} = \frac{w_{i,t}e^{-\eta l_{i,t}}}{\sum\limits_{j \in \mathcal{N}} w_{j,t}e^{-\eta l_{j,t}}}$$

при $i \in \mathcal{N}$.
6. **Mixing Update**
Задаем "схему смешивания" $\beta^{t+1} = (\beta_0^{t+1}, \dots, \beta_t^{t+1})$ и модифицируем вес i-го эксперта:

$$w_{i,t+1} = \sum_{s=0}^{t} \beta_s^{t+1} \tilde{w}_{i,s}$$

при $i \in \mathcal{N}$.
ENDFOR

Приведем примеры схем смешивания из [3].

Пример 1. $\beta_t^{t+1} = 1$, где $\beta_s^{t+1} = 0$, при $s = 0, \dots t$ (т.е., в выпуклой комбинации не учитываются веса на предыдущих шагах). Получается корректировка весов при схеме экспоненциального смешивания (1)

$$w_{i,t+1} = \tilde{w}_{i,t} = \frac{w_{i,t}e^{-\eta l_{i,t}}}{\sum\limits_{j \in \mathcal{N}} w_{j,t}e^{-\eta l_{j,t}}}$$

из Протокола 1.

Пример 2. $\beta_t^{t+1} = 1 - \alpha$, $\sum\limits_{s=0}^{t-1} \beta_s^{t+1} = \alpha$. Такие схемы β^{t+1} называются Fixed-Share с параметром $\alpha \in [0, 1]$. В частности, рассматривается схема смешивания: $\beta_0^{t+1} = \alpha$ и $\beta_s^{t+1} = 0$ при $0 < s < t$ Для этой схемы смешивания

$$w_{i,t+1} = \alpha\tilde{w}_{i,0} + (1 - \alpha)\tilde{w}_{i,t}.$$

Обозначим $\mathbf{l}_t = (l_{1,t}, l_{2,t}, \ldots)$ – (бесконечномерный) вектор потерь всех экспертов на шаге t, где $l_{i,t} \geq 0$ для всех i и t; $m_t = -\frac{1}{\eta} \ln \sum\limits_{i \in \mathcal{N}} \mathbf{w}_{i,t} e^{-\eta l_{i,t}}$ – экспоненциально смешанные потери на шаге t; $M_T = \sum\limits_{t=1}^{T} m_t$ – кумулятивные экспоненциально смешанные потери за T шагов.

Обозначим $L_{i,T} = \sum\limits_{t=1}^{T} l_{i,t}$ – кумулятивные потери эксперта, $i, i = 1, \ldots$; $H_T = \sum\limits_{t=1}^{T} h_t$ – кумулятивные потери Предсказателя за первые T шагов.

Вектор $\mathbf{q}_t = (q_{i,t} : i \in \mathcal{N})$, где $\mathbf{q}_t \in \Delta$, называется вектором сравнения, если все его координаты, кроме конечного их числа, равны 0. На каждои шаге t будем рассматривать выпуклые комбинации потерь экспертов $(\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{l}_t) = \sum\limits_{i \in \mathcal{N}} q_{i,t} l_{i,t}$ и весов $(\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{w}_t) = \sum\limits_{i \in \mathcal{N}} q_{i,t} w_{i,t}$, где $q_t = (q_{i,t} : i \in \mathcal{N})$ – вектор сравнения. Оценка экспоненциально смешанных потерь алгоритма MPP на шаге t дается в следующей теореме.

Теорема 1 *Пусть* $\tilde{\mathbf{w}}_t = (\tilde{w}_{1,t}, \ldots)$ *и* $\mathbf{w}_t = (w_{1,t}, \ldots)$ *– векторы весов из процедур Loss Update и Mixing Update. Для любых* t *и* $0 \leq s < t$ *таких, что* $\beta_s^t > 0$*, и для любых векторов сравнения* $\mathbf{q}_t$ *выполняется*

$$m_t \leq (\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{l}_t) + \frac{1}{\eta}(D(\mathbf{q}_t \| \mathbf{w}_t) - D(\mathbf{q}_t \| \tilde{\mathbf{w}}_t)) \leq \tag{6}$$

$$\leq (\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{l}_t) + \frac{1}{\eta}\left(D(\mathbf{q}_t \| \tilde{\mathbf{w}}_s) - D(\mathbf{q}_t \| \tilde{\mathbf{w}}_t) + \ln \frac{1}{\beta_s^t}\right). \tag{7}$$

Доказательство: В силу (5),

$$m_t = -\frac{1}{\eta}\ln\sum_{i\in\mathcal{N}} w_{i,t}e^{-\eta l_{i,t}} = \sum_{i\in\mathcal{N}} q_{i,t}\left(-\frac{1}{\eta}\ln\sum_{j\in\mathcal{N}} w_{j,t}e^{-\eta l_{j,t}}\right) =$$
$$= \sum_{i\in\mathcal{N}} q_{i,t}\left(l_{i,t} + \frac{1}{\eta}\ln e^{-\eta l_{i,t}} - \frac{1}{\eta}\ln\sum_{j\in\mathcal{N}} w_{j,t}e^{-\eta l_{j,t}}\right) =$$
$$= \sum_{i\in\mathcal{N}} q_{i,t}l_{i,t} + \frac{1}{\eta}(D(\mathbf{q}_t\|\mathbf{w}_t) - D(\mathbf{q}_t\|\tilde{\mathbf{w}}_t)).$$

Неравенство (7) следует из (6) по следствию 1. □

Применим теорему 1 для схем смешивания из примеров 1 и 2.

Теорема 2 *Для схемы смешивания из примера 1, где* $\beta_t^{t+1} = 1$, *и* $\beta_s^{t+1} = 0$ *при* $0 \le s < t$, *будет*

$$M_T \le \sum_{t=1}^{T}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{l}_t) + \frac{1}{\eta}D(\mathbf{q}\|\mathbf{w}_1). \tag{8}$$

для любого T *и для любого вектора сравнения* $\mathbf{q}$.

Доказательство. Суммируя неравенство (6) при постоянном векторе сравнения: $\mathbf{q}_t = \mathbf{q}$ при $t = 1, \dots T$, получим

$$M_T \le \sum_{t=1}^{T}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{l}_t) + \frac{1}{\eta}\sum_{t=1}^{T}(D(\mathbf{q}\|\mathbf{w}_t) - D(\mathbf{q}\|\tilde{\mathbf{w}}_t)) =$$
$$= \sum_{t=1}^{T}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{l}_t) + \frac{1}{\eta}(D(\mathbf{q}\|\mathbf{w}_1) - D(\mathbf{q}\|\tilde{\mathbf{w}}_T)) \le \sum_{t=1}^{T}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{l}_t) + \frac{1}{\eta}D(\mathbf{q}\|\mathbf{w}_1). \tag{9}$$

Здесь при переходе от первой строчки ко второй мы используем равенство $\mathbf{w}_t = \tilde{\mathbf{w}}_{t-1}$, которое имеет место для схемы смешивания из этого примера. Соседние слагаемые суммы сокращаются и остаются только первое и последнее слагаемое. Неравенство (9) выполнено, так как $D(\mathbf{q}\|\tilde{\mathbf{w}}_T) \ge 0$. □

Оценим потери для схемы смешивания из примера 2.

Теорема 3 *Предположим что вектор сравнения q_t изменяется k раз при $t = 1, \dots, T$: $k = |\{t : 1 \le t \le T, \mathbf{q}_t \ne \mathbf{q}_{t-1}\}|$. Пусть $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ – те шаги, на которых происходят изменения, то есть $\mathbf{q}_{t_j} \ne \mathbf{q}_{t_j-1}$ и $\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{t-1}$ для всех остальных шагов t, $t > 1$. Полагаем $t_0 = 0$ и $t_{k+1} = T + 1$.*

Для схемы смешивания из примера 2, т.е. при $\beta_t^{t+1} = 1-\alpha$, $\beta_0^{t+1} = \alpha$, $\beta_s^{t+1} = 0$, при $0 < s < t$, будет

$$M_T \le \sum_{t=1}^{T} (\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{l}_t) + \frac{1}{\eta} \sum_{j=0}^{k} \left(D(\mathbf{q}_{t_j} \| \mathbf{w}_1) - D(\mathbf{q}_{t_j} \| \tilde{\mathbf{w}}_{t_{j+1}-1}) \right) + \\ + \frac{1}{\eta}(k+1) \ln \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\eta}(T-k-1) \ln \frac{1}{1-\alpha}. \qquad (10)$$

Доказательство. Применим на каждом шаге t неравенство (7) из теоремы 1 для подходящего s:

При $t = 1$ полагаем $s = 0$, при этом, $\beta_0^1 = 1$. Получаем

$$m_1 \le (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{l}_1) + \frac{1}{\eta} \left(D(\mathbf{q}_1 \| \tilde{\mathbf{w}}_0) - D(\mathbf{q}_1 \| \tilde{\mathbf{w}}_1) \right).$$

Для тех шагов t, где не происходили изменения вектора сравнения, то есть $\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{t-1}$, полагаем $s = t - 1$ и используем свойство $\beta_{t-1}^t = 1 - \alpha$ схемы смешивания, т.е.,

$$m_t \le (\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{l}_t) + \frac{1}{\eta} \left(D(\mathbf{q}_t \| \tilde{\mathbf{w}}_{t-1}) - D(\mathbf{q}_t \| \tilde{\mathbf{w}}_t) \right) + \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{1-\alpha}.$$

Для шагов t, где происходили изменения вектора сравнения, $t = t_1, \dots, t_k$, полагаем $\beta_0^{t_j} = \alpha$ (при $s = 0$), т.е.,

$$m_{t_j} \le (\mathbf{q}_{t_j} \cdot \mathbf{l}_{t_j}) + \frac{1}{\eta} \left(D(\mathbf{q}_{t_j} \| \tilde{\mathbf{w}}_0) - D(\mathbf{q}_{t_j} \| \tilde{\mathbf{w}}_{t_j}) \right) + \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\alpha}.$$

Складываем все эти неравенства трех типов. Одинаковые по величине и разные по знаку слагаемые внутри интервалов сократятся, как в доказательстве теоремы 2, для каждого интервала разбиения остануться только начальные точки–со знаком плюс, и конечные точки–со знаком минус, эти слагаемые взаимно сокращаются. Кроме этого, началу каждого интервала соответствует дополнительное слагаемое $\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\alpha}$, а каждому шагу t, где $\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{t-1}$, соответствует дополнительное слагаемое $\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{1-\alpha}$. Таких дополнительных слагаемых первого типа всего $k + 1$, а второго типа всего $T - k - 1$. Также остается сумма $\sum_{j=1}^{k} D(\mathbf{q}_{t_j} \| \tilde{\mathbf{w}}_0)$. В итоге получаем (10). $\square$

2.3 Агрегирующий алгоритм АА

Агрегирующий Алгоритм (**АА**), предложенный в работах [6], [1], является базовым методом вычисления прогнозов Предсказателя в данной работе.

Пусть $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots)$ – прогнозы экспертов $i \in \mathcal{N}$ и $\mathbf{p} = (p_i : i \in \mathcal{N})$ – распределение вероятностей на множестве $\mathcal{N}$ всех экспертов.[4]

Функция суперпредсказания определяется как

$$g(y) = -\frac{1}{\eta} \ln \sum_{i \in \mathcal{N}} e^{-\eta\lambda(f_i, y)} p_i \tag{11}$$

для произвольного y, где $\eta > 0$ – параметр обучения [1].[5]

Функция потерь λ называется η-смешиваемой, если для любого распределения вероятностей $\mathbf{p}$ на множестве экспертов и для любого набора предсказаний экспертов $\mathbf{f}$ существует прогноз $\gamma \in \Gamma$ такой, что выполнено неравенство

$$\lambda(\gamma, y) \le g(y) \tag{12}$$

для всех y.

Зафиксируем некоторое правило $\gamma = \mathrm{Subst}(\mathbf{f}, \mathbf{p})$ для вычисления прогноза γ, удовлетворяющего (12). Функция Subst называется функцией подстановки.

В дальнейшем будет использоваться квадратичная функция потерь $\lambda(\gamma, y) = (y - \gamma)^2$, где y, γ – вещественные числа. Предполагаем, что $y \in [a, b]$, где $a < b$ – вещественные числа.

В [1] и [10] доказано, что квадратичная функция потерь является η-смешиваемой для каждого η такого, что $0 < \eta \le \frac{2}{(b-a)^2}$, а соответствующий прогноз равен

$$\gamma = \mathrm{Subst}(\mathbf{f}, \mathbf{p}) = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2\eta(b-a)} \ln \frac{\sum\limits_{i \in \mathcal{N}} p_i e^{-\eta(b-f_i)^2}}{\sum\limits_{i \in \mathcal{N}} p_i e^{-\eta(a-f_i)^2}}. \tag{13}$$

Теорема 4 *([1] и [3]) Предположим, что функция потерь $\lambda(f, y)$ является η-смешиваемой для некоторого $\eta > 0$. Пусть H_T – суммарные*

[4] То есть $p_i \ge 0$ для всех i и $\sum_{i \in \mathcal{N}} p_i = 1$.

[5] Ряд в правой части (11) сходится, так как функция потерь принимает неотрицательные значения.

потери Предсказателя. Тогда для каждого T выполнено неравенство $H_T \le M_T$

Доказательство. Согласно (12)

$$h_t = \lambda(f_t, y_t) \le g_t(y_t) = m_t. \tag{14}$$

для каждого t. Суммируем неравенства (14) по $t = 1 \dots, T$ и получаем $H_T \le M_T$. $\square$

3 Алгоритм для отслеживания генераторов подвыборок

‘ В этом разделе мы представим модифицированный алгоритм агрегирования экспертных прогнозов – GMPP для переменного числа экспертов.

Предварительно приведем мотивировку метода, лежащего в основе алгоритма.

Общая схема процесса онлайн-обучения выглядит следующим образом. На каждом шаге t наблюдается сигнал $\mathbf{x}_t$. Построенные на шагах $1, 2, \dots, t$ экспертные стратегии, представляют свои прогнозы отклика. Для простоты будем считать, что $\mathbf{x}_t \in \mathcal{R}^n$, $y_t \in \mathcal{R}$. Предсказатель также представляет свой прогноз.

После этого, соответствующий генератор G выдает истинный отклик $y_t = G(\mathbf{x}_t)$, а эксперты и Предсказатель вычисляют свои потери, связанные с различием их прогнозов и отклика.

Имеется $k + 1$ генераторов, преобразующих сигнал $\mathbf{x}_t$ в отклик y_t. Временной интервал $[1, T]$ разделен на подынтервалы, на каждом из которых один из этих генераторов выдает отклики.

В каждый момент времени t ни эксперты ни Предсказатель не знают число генераторов, а также какой из генераторов выдает отклик.

Описанная модель генерации создает выборку $(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots$, которая разделяется на подвыборки, отклики y_t в которых получены в результате работы одного из генераторов.

Предполагаем, что имеется метод обучения, с помощью которого в любой момент времени t по подвыборке (окну в прошлое) можно построить локальную прогностическую модель (эксперта).[6]

[6]Под окном в прошлое в момент времени t понимается подвыборка

На каждом шаге $t > h$ строится (инициализируется) прогностическая модель – функция $f_t(\mathbf{x})$, которая определяется по предыдущим наблюдаемым членам временного ряда – по окну в прошлое,

$$(\mathbf{x}_{t-1}, y_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_{t-h}, y_{t-h}),$$

где h – параметр (размер окна).

Таким образом, на каждом шаге t имеется коллекция локальных прогностических стратегий (моделей) $\mathbf{f}_t = (f_1, \dots, f_{t-1})$, построенных на прошлых шагах, и прогнозирующей функции f_t, построенной на шаге t.

Прогноз эксперта $i \le t$ на шаге t равен $f_{i,t} = f_i(\mathbf{x}_t)$, где $\mathbf{x}_t$ – сигнал на шаге t,

Вычисляем прогноз γ_t Предсказателя по правилу (13).

На шагах $t < i$, когда эксперт i еще не инициализирован, вводим для него виртуальный прогноз – будем считать, что его прогноз равен прогнозу γ_t Прдсказателя (алгоритма агрегирования).

Это определение содержит логический круг, так как прогноз γ_t Предсказателя определяется путем агрегирования прогнозов всех экспертов, включая экспертов $i > t$. Это противоречие будет разрешено с помощью метода неподвижной точки, предложенного в [7], следующим образом. Допустим, что прогноз γ_t Предсказателя известен экспертам. Определим прогнозы всех экспертов $i = 1, 2, \dots$ на шаге t:

$$f_{i,t} = \begin{cases} f_i(\mathbf{x}_t), \text{ если } i \le t, \\ \gamma_t, \text{ если } i > t. \end{cases}$$

Потери алгоритма агрегации равны $h_t = \lambda(\gamma_t, y_t)$, а потери эксперта i равны $l_{i,t} = \lambda(f_{i,t}, y_t)$ при $i \le t$ и $l_{i,t} = h_t$ для $i > t$.

Прогноз γ_t должен удовлетворять условию

$$\lambda(\gamma_t, y) \le g_t(y), \tag{15}$$

или, эквивалентно, должно быть выполнено условие

$$e^{-\eta\lambda(\gamma_t, y)} \ge \sum_{i \in \mathcal{N}} e^{-\eta\lambda(f_{i,t}, y)} w_{i,t} \tag{16}$$

$(\mathbf{x}_{t-1}, y_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_{t-h}, y_{t-h})$, где $h > 0$ – параметр (размер окна), В качестве такого метода будет использоваться метод гребневой регрессии. В разделе 3.1 прогностичесая модель (Эксперт) будет задаваться регрессионным уравнением $y = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})$, где $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^n$.

для каждого y.

Заменим условие (16) эквивалентным условием, при котором суммирование производится по конечному набору экспертов.

Так как $f_{i,t} = f_i(\mathbf{x}_t)$ при $i \le t$ и $f_{i,t} = \gamma_t$ при $i > t$, представим условие (16) для γ_t в более детальном виде:

$$e^{-\eta\lambda(\gamma_t,y)} \ge \sum_{i=1}^{t} w_{i,t} e^{-\eta\lambda(f_i,y)} + e^{-\eta\lambda(\gamma_t,y)} \left(1 - \sum_{i=1}^{t} w_{i,t}\right). \tag{17}$$

Таким образом, неравенство (16) эквивалентно неравенству

$$e^{-\eta\lambda(\gamma_t,y)} \ge \sum_{i=1}^{t} w^p_{i,t} e^{-\eta\lambda(f_{i,t},y)}, \tag{18}$$

где

$$w^p_{i,t} = \frac{w_{i,t}}{\sum_{j=1}^{t} w_{j,t}}. \tag{19}$$

Согласно правилу (13) для **AA**, определим

$$\gamma_t = \mathrm{Subst}(\mathbf{f}_t, \mathbf{w}^p_t), \tag{20}$$

где Subst – функция подстановки для используемой функции потерь [7], где $\mathbf{w}^p_t = (w^p_{1,t}, \dots, w^p_{t,t})$ и $\mathbf{f}_t = (f_1(\mathbf{x}_t), \dots, f_t(\mathbf{x}_t))$.

Из определения при $y = y_t$ будет

$$h_t = \lambda(\gamma_t, y_t)) \le g_t(y_t) = m_t,$$

где m_t – экспоненциально смешанные потери. Суммируем это неравенство по $t = 1, \dots, T$ и получаем $H_T \le M_T$.

Согласно методу Fixed Share веса экспертов корректируются в два приема следующим образом:

Loss Update

$$\tilde{w}_{i,t} = \frac{w_{i,t} e^{-\eta l_{i,t}}}{\sum\limits_{j \in \mathcal{N}} w_{j,t} e^{-\eta l_{j,t}}} \tag{21}$$

[7] Например, для квадратичной функции потерь, функция подстановки определена согласно (13)

при $i \in \mathcal{N}$.

Mixing Update

$$w_{i,t+1} = \alpha_t \tilde{w}_{i,1} + (1 - \alpha_t)\tilde{w}_{i,t} \tag{22}$$

при $i \in \mathcal{N}$, где α_t – положительный параметр, $0 < \alpha_t < 1$.

Из определения (21) следует, что

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} \tilde{w}_{j,t} = 1$$

для любого t. Из (22) следует, что

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} w_{j,t} = 1$$

для любого t.

Напомним, что потери Предсказателя равны $h_t = \lambda(\gamma_t, y_t)$, а потери эксперта i равны $l_{i,t} = \lambda(f_{i,t}, y_t)$ при $i \le t$ и $l_{i,t} = h_t$ при $i > t$.

Используя эти равенства, представим сумму из знаменателя (21) в вычислительно эффективном виде

$$\begin{aligned}\sum_{j \in \mathcal{N}} w_{j,t} e^{-\eta l_{j,t}} &= \\ = \sum_{j \le t} w_{j,t} e^{-\eta l_{j,t}} + \sum_{j > t} w_{j,t} e^{-\eta h_t} &= \\ = \sum_{j \le t} w_{j,t} e^{-\eta l_{j,t}} + e^{-\eta h_t} \sum_{j > t} w_{j,t} &= \\ = \sum_{j \le t} w_{j,t} e^{-\eta l_{j,t}} + e^{-\eta h_t}(1 - \sum_{j \le t} w_{j,t}).\end{aligned}$$

Поэтому часть (21) *Loss Update* заменяется на следующее определение:

$$\tilde{w}_{i,t} = \frac{w_{i,t} e^{-\eta l_{i,t}}}{\sum\limits_{j=1}^{t} w_{j,t} e^{-\eta l_{j,t}} + e^{-\eta h_t}(1 - \sum\limits_{j=1}^{t} w_{j,t})}, \tag{23}$$

а часть *Mixing update*, по-прежнему, имеет вид (22).

Представим протокол алгоритма GMPP. Предварительно зададим параметры η и α_t, где $0 < \alpha_t < 1$ при $t = 1, 2 \dots$, и $\eta > 0$. [8] Полагаем $\alpha_t = \frac{1}{t+1}$ для всех t.

Алгоритм GMPP

Определим начальные веса $w_{i,1} = \tilde{w}_{i,0}$ такие, что $\sum_{i \in \mathcal{N}} w_{i,1} = 1$.[9]

FOR $t = 1, \dots, T$

1. Эксперты $f_1(\cdot), \dots, f_{t-1}(\cdot)$ были инициализированы на предыдущих шагах.

   Инициализируем эксперта $f_t(\cdot)$.[10]

2. Получаем сигнал $\mathbf{x}_t$.

3. Вычисляем прогнозы экспертов $f_{i,t} = f_i(\mathbf{x}_t)$ при $1 \le i \le t$.

4. Вычисляем вспомогательные веса экспертов $1 \le i \le t$:
$$w^p_{i,t} = \frac{w_{i,t}}{\sum_{j=1}^{t} w_{j,t}}. \tag{24}$$

5. Вычисляем прогноз Предсказателя по правилу (13):
$$\gamma_t = \mathrm{Subst}(\mathbf{f}_t, \mathbf{w}^p_t),$$
   где $\mathbf{f}_t = (f_{1,t}, \dots, f_{t,t})$ и $\mathbf{w}^p_t = (w^p_{1,t}, \dots, w^p_{t,t})$.

6. Получаем (от генератора) истинное значение отклика (признака, метки) y_t и вычисляем потери Предсказателя $h_t = \lambda(\gamma_t, y_t)$ и потери экспертов:
$$l_{i,t} = \begin{cases} \lambda(f_{i,t}, y_t) \text{ если } i \le t, \\ h_t \text{ если } i > t. \end{cases}$$

7. Корректируем веса экспертов $1 \le i \le T$ в два этапа:

   Loss Update

---

[8] Для квадратичной функции потерь полагаем $\eta = \frac{2}{(b-a)^2}$, где $y_t \in [a, b]$.

[9] Например, $w_{i,1} = \tilde{w}_{i,0} = \frac{1}{c(i+1)\ln^2(i+1)}$ при $i = 1, 2, \dots$, где $c = \sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{1}{(i+1)\ln^2(i+1)}$, $\frac{1}{\ln 2} < c < \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2\ln^2 2}$, численно $c \approx 2.10974$.

[10] В том случае, когда решается задача регрессии, инициализация означает, что мы по данным из прошлого определяем весовой вектор $\mathbf{a}_t$ уравнения регрессии $f_t(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_t \cdot \mathbf{x})$.

$$\tilde{w}_{i,t} = \frac{w_{i,t}e^{-\eta l_{i,t}}}{\sum\limits_{j=1}^{t} w_{j,t}e^{-\eta l_{j,t}} + e^{-\eta h_t}(1 - \sum\limits_{j=1}^{t} w_{j,t})}. \qquad (25)$$

Mixing Update

$$w_{i,t+1} = \alpha_t \tilde{w}_{i,1} + (1 - \alpha_t)\tilde{w}_{i,t} \qquad (26)$$

ENDFOR

Пусть векторы сравнения $\mathbf{q}_t$ имеют вид $\mathbf{q}_t = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, где i-ая координата равна 1, а остальные координаты все равны 0. В этом случае, на шаге t мы сравниваем потери алгоритма с потерями только одного i-го эксперта. В этом случае, $D(\mathbf{q}_{t_j} \| \tilde{\mathbf{w}}_0) = \ln(c(i+1)\ln^2(i+1)) = \ln(i+1) + 2\ln\ln(i+1) + \ln c$.[11]

Пусть интервалы $[t_0, t_1), \dots, [t_{j-1}, t_j), \dots, [t_k, t_{k+1})$ определяют области данных, порожденных соответствующими генераторами. Рассмотрим "идеальную модель" предсказания – составного эксперта E, состоящего из $k+1$ элементарных экспертов $i_0, \dots, i_k$ и соответствующих им интервалов $[t_0, t_1), \dots, [t_{j-1}, t_j), \dots, [t_{k-1}, t_k)$, где для каждого $0 \le j \le k$ элементарный эксперт i_j был инициализирован на некотором шаге $< t_j$ и несет на интервале $[t_{j-1}, t_j)$ наименьшие потери среди всех экспертов, инициализированных на шагах $< t_j$.

Произвольный набор E экспертов $i_0, \dots i_k$, и набор интервалов $[t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, \dots k$, где $t_0 = 0$, назовем составным экспертом, а составляющие его эксперты будут называться элементарными.

Так как суммарные потери элементарного эксперта i_j на интервале $[t_{j-1}, t_j)$ равны $L_{([t_{j-1}, t_j))} = \sum_{t_{j-1} \le t < t_j} l_{i_j, t}$, суммарные потери составного эксперта E на всем временном интервале равны $\sum_{j=1}^{k} L_{([t_{j-1}, t_j))}$.

"Идеальный (составной эксперт) формируется на основе ретроспективного анализа результатов вычислительного эксперимента в предположении, что мы знаем границы участков стационарности. На каждом из этих участков находим лучшего локального эксперта и используем его как часть «составного эксперта» при прогнозировании на соответствующем временном интервале.

[11]Напомним, что $c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)\ln^2(i+1)}$.

Зададим потери составного эксперта с помощью векторов сравнения. Рассмотрим последовательность векторов сравнения $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_T$ такую, что

$$q_{i_j,t} = \begin{cases} 1, \text{ если } [t_{j-1} \le t < t_j), \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Всего на шагах $t = 1, \dots T$ было k изменений векторов сравнения: $k = |\{t : \mathbf{q}_{t-1} \ne \mathbf{q}_t\}|$.

Суммарные потери $L_T(E)$ составного эксперта E на всем временном интервале представим в виде

$$L_T(E) = \sum_{t=0}^{T} (\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{l}_t) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{t:t_{j-1} \le t < t_j}^{T} q_{i_j,t} l_{j,t} = \sum_{j=1}^{k} L_{([t_{j-1},t_j)}.$$

Оценка суммарных потерь алгоритма **GMPP** представлена в следующей теореме.

Теорема 5 *Пусть* $\alpha_t = 1/(t+1)$. *Для любого составного эксперта* E, *состоящего из* $k+1$ *элементарных экспертов, будет*

$$H_T \le M_T \le L_T(E) + \\ + \frac{1}{\eta}(k+1)(2\ln\ln(T+1) + \ln c) + \frac{1}{\eta}(2k+3)\ln(T+1). \quad (27)$$

для всех T, *где* $L_T(E)$ *– суммарные потери составного эксперта* E. *Из оценки (27) следует, что*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{H_T - L_T(E)}{T} = 0.$$

Доказательство.

Следуем доказательству теоремы 3.

При $t = 1$ полагаем $s = 0$, при этом, $\beta_0^1 = 1$. Получаем

$$m_1 \le (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{l}_1) + \frac{1}{\eta}\left(D(\mathbf{q}_1 \| \tilde{\mathbf{w}}_0) - D(\mathbf{q}_1 \| \tilde{\mathbf{w}}_1)\right).$$

Для тех шагов t, где не происходили изменения вектора сравнения, то есть $\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{t-1}$, полагаем $s = t-1$ и используем $\beta_{t-1}^t = 1 - \alpha_t = \frac{t}{t+1}$:

$$m_t \le (\mathbf{q}_t \cdot \mathbf{l}_t) + \frac{1}{\eta}\left(D(\mathbf{q}_t \| \tilde{\mathbf{w}}_{t-1}) - D(\mathbf{q}_t \| \tilde{\mathbf{w}}_t)\right)) + \frac{1}{\eta}\ln\frac{t+1}{t}.$$

Для шагов t, где происходили изменения вектора сравнения, $t = t_1, \ldots, t_k$, полагаем $s = 0$ и используем $\beta_0^{t_j} = \alpha_{t_j} = \frac{1}{t_j+1}$:

$$m_{t_j} \le (\mathbf{q}_{t_j} \cdot \mathbf{l}_{t_j}) + \frac{1}{\eta}\left(D(\mathbf{q}_{t_j} \| \tilde{\mathbf{w}}_0) - D(\mathbf{q}_{t_j} \| \tilde{\mathbf{w}}_{t_j}\right) + \frac{1}{\eta}\ln(t_j+1).$$

Складываем все эти неравенства трех типов. Одинаковые по величине и разные по знаку слагаемые внутри интервалов сократятся, для каждого интервала разбиения остануться только начальные точки – со знаком плюс, и конечные точки – со знаком минус. Оценим их сумму

$$\frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{k+1}\left(D(\mathbf{q}_{t_j} \| \tilde{\mathbf{w}}_0) - D(\mathbf{q}_{t_j} \| \tilde{\mathbf{w}}_{t_{j+1}-1})\right) \le \frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{k+1} D(\mathbf{q}_{t_j} \| \tilde{\mathbf{w}}_0) \le$$
$$\le \frac{1}{\eta}(k+1)(\ln(T+1) + 2\ln\ln(T+1) + \ln c). \quad (28)$$

Здесь мы сначала учли, что $D(\mathbf{q}_{t_j} \| \tilde{\mathbf{w}}_{t_{j+1}-1}) \ge 0$, а потом воспользовались оценкой

$$D(\mathbf{q}_{t_j} \| \tilde{\mathbf{w}}_0) = \ln\frac{1}{w_{0,t_j}} = \ln(i_j+1) + 2\ln\ln(i_j+1) + \ln c \le$$
$$\le \ln(T+1) + 2\ln\ln(T+1) + \ln c.$$

Сумму слагаемых вида $\frac{1}{\eta}\ln\frac{t+1}{t}$ при $\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{t-1}$ оценим как

$$\frac{1}{\eta}\sum_{t:\mathbf{q}_t=\mathbf{q}_{t-1}} \ln\frac{t+1}{t} \le \frac{1}{\eta}\sum_{t=1}^{T}\ln\frac{t+1}{t} = \frac{1}{\eta}\ln(T+1).$$

Кроме этого, началу каждого интервала соответствует дополнительное слагаемое $\frac{1}{\eta}\ln(t_j+1) \le \frac{1}{\eta}\ln(T+1)$, таких слагаемых всего $k+1$.

Складывая эти выражения, получаем (27). $\square$

Оценка (27) позволяет сформулировать основное предположение, лежащее в основе применения алгоритма **GMPP**: В том случае, когда удается “привязать” к каждой локальной подвыборке из области генерации валидную предсказательноую (экспертную) стратегию, несущую малые потери на каждой локальной подвыборке, порожденной генератором, т.е., “изучить” этот генератор, алгоритм GMPP также будет предсказывать с достаточно малыми потерями на всей выборке.

3.1 Численные эксперименты

Применяем Протокол 2 к сценарию онлайн-обучения в контролируемой среде (то есть данные представляют собой пары $(\mathbf{x}_t, y_t)$ переменных "сигнал–отклик").

Синтетические данные генерируются следующим образом. Выдается последовательность $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t$ 20-мерных сигналов, независимо и одинаково распределенных согласно многомерному нормальному распределению. Всего было сгенерировано $T = 3000$ таких векторов.

Временная шкала $[1, T]$ разбита на $k + 1 = 10$ последовательных временных интервалов $I_1, \dots, I_k$, на каждом из которых используется один из четырех генераторов (функций регрессии). Таким образом, на интервале времени $[1, T]$ зависимость y_t от $\mathbf{x}_t$ переключается $k = 9$ раз.

Количество генераторов и их параметры неизвестны Предсказателю. Используются $e = 4$ линейных генератора откликов, определяемых весовыми векторами $\hat{\mathbf{a}}_1, \dots, \hat{\mathbf{a}}_e$, т.е. внутри соответствующего интервала генерации I_s отклик равен $y_t = (\hat{\mathbf{a}}_s \cdot \mathbf{x}_t) + \epsilon$ для $1 \le s \le e$, где ϵ – стандартный нормальный шум.

На каждом шаге t с помощью метода гребневой регрессии по окну в прошлое $((\mathbf{x}_{i-h}, y_{t-h}), \dots, (\mathbf{x}_{i-1}, y_{i-1}))$ строится прогнозирующая функция $f_t(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_t \cdot \mathbf{x})$.[12]

“Идеальный составной эксперт” формируется на основе ретроспективного анализа (hindsight analysis) результатов вычислительного эксперимента в предположении, что мы знаем границы участков квазистаационарности. На каждом из этих участков находим лучшего локального эксперта и используем его как часть «составного эксперта» при прогнозировании на соответствующем временном интервале.

Результаты экспериментов представлены на рис. 1, где показана кривые на временном интервале $[1, T]$ суммарных потерь Предсказателя: $T \to \frac{1}{T} H_T$ и средних суммарных потерь: $T \to \frac{1}{T} L_T(E)$ “идеальной модели” – составного эксперта E. Результаты эксперимента подтверждают теоретическую оценку (27).

[12] Здесь $\mathbf{a}_t = (\sigma I + X_t' X_t)^{-1} X_t' \mathbf{y}_t$ при $t > h$. Здесь X_t – матрица, у которой столбцы образованы векторами $\mathbf{x}_{t-h}, \dots, \mathbf{x}_{t-1} \in R^n$, где X_t' – транспонированная матрица X_t, I – единичная матрица, $\sigma > 0$ – параметр, h – размер окна и $\mathbf{y}_t = (y_{t-h}, \dots, y_{t-1})$. При $t \le h$ в качестве $\mathbf{a}_t$ берем некоторый фиксированный вектор.

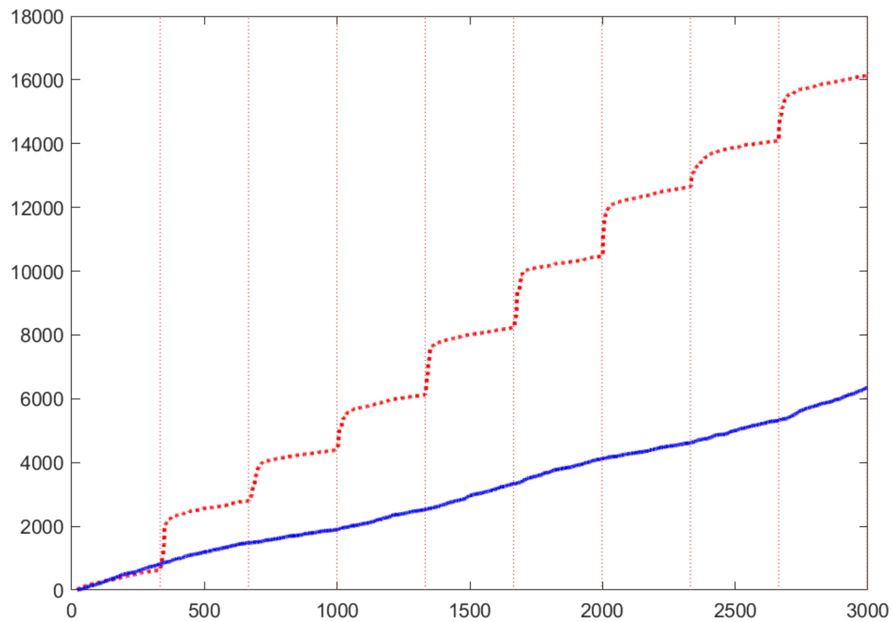

Рис. 1: На верхней кривой изображен график кумулятивных потерь алгоритма **GMPP**, на нижней кривой изображены суммарные потери "идеальной модели" предсказания (составного эксперта E). Оценка (27) ограничивает расстояние между этими кривыми.

4 Заключение

Предложен алгоритм машинного обучения для отслеживания в режиме онлайн генераторов подвыборок. Основная идея, лежащая в основе предлагаемой схемы прогнозирования, заключается в разделении процесса обучения и предсказания на малые подвыборки, которые отражают различные режимы процесса генерации. Разделение происходит в виде попыток в автоматическом режиме угадать подвыборку и построить предсказательную стратегию – кандидата в эксперты, валидного для соответствующующего генератора. Алгоритм **GMPPP** производит онлайн агрегацию всех этих кандидатов в эксперты, с целью выделить наиболее успешных из них. Эффективность алгоритма основана на использования метода адаптации весов Fixed Share (MPP). Получена логарифмическая по времени оценка регрета алгоритма относительно чисто теоретического "идеального" способа прогнозирования. Теоретическая оценка обоснована с помощью численных экспериментов.

Недостатком данной схемы вычисления является необходимость на каждом шаге $1 \le t \le T$ выполнить операции (25) и (26) для каждого эксперта $1 \le i \le T$, а также хранить весовые векторы экспертов и соответствующие величины. В практических приложених использовались ограничения на число инициализированных экспертов.

Список литературы

[1] V. Vovk, A game of prediction with expert advice. *Journal of Computer and System Sciences.* 56(2), 153–173, 1998.

[2] N. Cesa-Bianchi, G. Lugosi. *Prediction, Learning, and Games.* Cambridge University Press, 2006.

[3] В.В.Вьюгин. *Математические основы машинного обучения и прогнозирования*, 2022, Изд.3-е, МЦНМО, 400с.

[4] M. Herbster, M. Warmuth. Tracking the best expert. *Machine Learning*, 32(2) 151–178, 1998.

[5] O. Bousquet, M. Warmuth. Tracking a small set of experts by mixing past posteriors. *Journal of Machine Learning Research.* 3:363–396, 2002.

[6] V. Vovk, Aggregating strategies. In M. Fulk and J. Case, editors, *Proceedings of the 3rd Annual Workshop on Computational Learning Theory*, 371–383. San Mateo, CA, Morgan Kaufmann, 1990.

[7] A. Chernov, V. Vovk. Prediction with expert evaluators advice. ALT 2009, *LNCS*, 5809: 8–22, 2009.

[8] A. Korotin, V. V'yugin, E. Burnaev. Mixing past predictions. *Proceedings of Machine Learning Research (PMLR).* 128:171–188, 2020.

[9] N. Littlestone, M. Warmuth. The weighted majority algorithm. *Information and Computation.* 108:212–261, 1994.

[10] V. Vovk. Competitive on-line statistics. *International Statistical Review* 69: 213–248, 2001.