И. В. Вьюгин, Л. А. Дудникова, Стабильные расслоения и проблема Римана–Гильберта на римановой поверхности, *Матем. сб.*, 2024, том 215, номер 2, 3–20

DOI: 10.4213/sm9781

И. В. Вьюгин, Л. А. Дудникова

Стабильные расслоения и проблема Римана–Гильберта на римановой поверхности

Работа посвящена исследованию голоморфных векторных расслоений с логарифмическими связностями на компактной римановой поверхности и применению полученных результатов к исследованию вопроса положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта на римановой поверхности. Мы приводим пример представления фундаментальной группы римановой поверхности с четырьмя выколотыми точками, который не может быть реализован как представление монодромии логарифмической связности с четырьмя особыми точками ни в каком полустабильном расслоении. Для произвольной пары – расслоение и логарифмическая связность в нем – мы доказываем оценку на наклоны присоединенных факторов фильтрации Хардера–Нарасимхана. Кроме этого, мы представляем некоторые результаты о реализуемости представления в качестве прямого слагаемого в представлении монодромии логарифмической связности в полустабильном расслоении нулевой степени.

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: монодромия, риманова поверхность, проблема Римана–Гильберта, полустабильное расслоение, логарифмическая связность.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9781

§ 1. Постановка задачи и основные определения

Рассмотрим компактную риманову поверхность X рода g и представление

$$\chi\colon \pi_1(X\setminus D, z_0) \longrightarrow \mathrm{GL}_p(\mathbb{C}), \tag{1.1}$$

где $D=\{a_1,\dots,a_n\}\subset X$ – дивизор, состоящий из n точек. Пусть γ_i – образующие $\pi_1(X\setminus D, z_0)$, отвечающие обходам по петлям, обходящим точки a_i, δ_{2j-1} и δ_{2j} – образующие $\pi_1(X\setminus D, z_0)$, отвечающие обходам по A и B циклам вокруг ручки с номером j. Представление (1.1) может быть задано при помощи набора матриц

$$G_1,\dots,G_n, \quad H_1,\dots,H_{2g},$$

отвечающих образующим $G_i=\chi(\gamma_i)$, $H_j=\chi(\delta_j)$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,2g$. Образующие удовлетворяют соотношению

$$G_1\cdots G_nH_1H_2H_1^{-1}H_2^{-1}\cdots H_{2g-1}H_{2g}H_{2g-1}^{-1}H_{2g}^{-1}=I,$$

Исследование И. В. Вьюгина выполнено в ИППИ РАН за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00717, https://rscf.ru/project/22-21-00717/.

которое следует из стягиваемости соответствующей петли:

$$\gamma_1 \dots \gamma_n \delta_1 \delta_2 \delta_1^{-1} \delta_2^{-1} \dots \delta_{2g-1} \delta_{2g} \delta_{2g-1}^{-1} \delta_{2g}^{-1} \sim \mathrm{id}$$

на $X \setminus D$.

Пусть E – голоморфное расслоение над X степени $\deg E$ и ранга $\operatorname{rk} E$. Векторное расслоение

$$E = (\{U_\alpha\}, \{g_{\alpha\beta}\})$$

определяется покрытием $\{U_\alpha\}$ поверхности $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, открытыми множествами U_α и голоморфно обратимыми отображениями переклейки

$$g_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_p(\mathbb{C}), \qquad U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing,$$

образующими коцикл.

Сформулируем следующие определения (подробнее см. [1], [2]).

Определение 1. Пусть расслоение $E = (\{U_\alpha\}, \{g_{\alpha\beta}\})$ такое, что все склеивающие функции $g_{\alpha\beta}$ имеют блочно-треугольный вид с левым верхним квадратным блоком $g'_{\alpha\beta}$. *Подрасслоением* E' расслоения E называется расслоение над той же базой, которое задается описанием

$$E = (\{U_\alpha\}, \{g'_{\alpha\beta}\}),$$

соответствующим левому верхнему блоку описания исходного расслоения.

Определение 2. *Наклоном* $\mu(E)$ расслоения E называется отношение степени расслоения к его рангу: $\mu(E) = \deg(E)/\operatorname{rk}(E)$. Аналогичным образом определяются наклоны подрасслоений.

Определение 3. Все подрасслоения расслоения E, кроме пустого и всего расслоения, называются собственными. *Полустабильным* называется такое расслоение E, что все его собственные подрасслоения E' имеют не больший наклон, чем наклон расслоения E:

$$\mu(E') \leqslant \mu(E).$$

Если для всех собственных подрасслоений выполнены строгие неравенства, то расслоение E называется *стабильным*.

1.1. Связность в расслоении.

Определение 4. Пусть τ_M^* обозначает кокасательное расслоение на X, f – голоморфная функция на X, s – голоморфное сечение расслоения E, U – открытое множество атласа на X. *Связностью* ∇ в расслоении E над комплексным многообразием X называется $\mathbb{C}$-линейное отображение

$$\nabla \colon \Gamma(U, E) \to \Gamma(U, (\tau_M^*)_{\mathbb{C}} \otimes E), \tag{1.2}$$

удовлетворяющее тождеству

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s). \tag{1.3}$$

Связность ∇ в окрестности U_α определяется 1-формами ω_α, для которых

$$\nabla(y) = dy + \omega_\alpha y.$$

Определение 5. Пусть формы связности ω_α и ω_β определены в U_α и U_β соответственно. Пусть $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, $g_{\alpha\beta}$ – отображение переклейки, тогда выполняется следующее калибровочное условие:

$$\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}\omega_\beta\, g_{\alpha\beta}^{-1} + (dg_{\alpha\beta})\, g_{\alpha\beta}^{-1}. \tag{1.4}$$

Определение 6. *Логарифмической* (*фуксовой*) связностью на X называется связность, которая локально, в окрестности любой особой точки $z = a_k$, задается формами вида $\omega_k = \mathcal{B}_k(z)/(z-a_k)\,dz$, где $\mathcal{B}_k(z)$ – голоморфная в $z = a_k$ матричная функция.

В дальнейшем мы будем рассматривать *пары* (E, ∇): голоморфное расслоение E на римановой поверхности X и логарифмическая связность ∇ с дивизором особенностей $D = \{a_1, \dots, a_n\} \subset X$. У связности ∇ очевидным образом определяется представление монодромии (1.1).

Определение 7. Говорят, что подрасслоение E' расслоения E *стабилизируется связностью* ∇, если отображение (1.2) переводит сечения подрасслоения E' в сечения $E' \otimes \mathcal{O}(\log D)$, где через $\mathcal{O}(\log D)$ обозначается пучок мероморфных 1-форм с простыми полюсами в точках дивизора D. Это эквивалентно тому, что подпространство в слое, соответствующее E', является инвариантным относительно действия операторов монодромии.

Определение 8. *Полустабильной парой* называются такие расслоение E и связность ∇, что для любого собственного подрасслоения E', которое стабилизируется связностью ∇, выполняется

$$\mu(E') \leqslant \mu(E).$$

Если выполнены строгие неравенства, то пара (E, ∇) называется *стабильной*.

1.2. Локальная теория фуксовых особых точек. Обозначим через $\mathcal{L}$ пространство горизонтальных сечений связности в окрестности особой точки $z = a_k$.

Определение 9. Собственные числа β_k^j, $j = 1, \dots, p$, матрицы вычета $\mathcal{B}_k(0)$ формы связности ω_k в особой точке $z = a_k$ (см. определение 6) называются *показателями* связности в точке a_k ($p = \operatorname{rk} E$).

Базис $Y(z)$ горизонтальных сечений связности ∇ в окрестности фуксовой особой точки $z = a_k$ представляется в виде

$$Y(z) = U_k(z)(z-a_k)^{\Lambda_k}(z-a_k)^{E_k}C_k \tag{1.5}$$

с голоморфно обратимой в $z = a_k$ матрицей $U_k(z)$, диагональной целочисленной матрицей *нормирований* $\Lambda_k = \operatorname{diag}(\lambda_k^1, \dots, \lambda_k^p)$ и матрицей

$$E_k = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \ln S_k^{-1} G_k S_k, \tag{1.6}$$

где G_k – матрица монодромии в точке $z = a_k$, собственные значения ρ_k^j, $j = 1, \dots, p$, матрицы E_k выбраны так, что

$$0 \leqslant \operatorname{Re} \rho_k^j < 1, \qquad j = 1, \dots, p. \tag{1.7}$$

Матрицы S_k сопрягают G_k таким образом, чтобы матрица

$$(z - a_k)^{\Lambda_k} E_k (z - a_k)^{-\Lambda_k} \tag{1.8}$$

была голоморфна в точке $z = a_k$. Базис $Y_k(z) = Y(z)C_k^{-1}$ называется *ассоциированным* в точке $z = a_k$. Ассоциированный базис всегда существует (см. [1]). Целочисленные диагональные элементы λ_k^j матрицы Λ_k называются *нормированиями* в точке $z = a_k$, и выполнено следующее соотношение:

$$\beta_k^j = \lambda_k^j + \rho_k^j, \qquad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, p.$$

Теория Левеля также утверждает (см. [1]), что в окрестности особой точки связности существует базис горизонтальных сечений $Y_k(z)$ такой, что

$$\lambda_k^1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_k^p,$$

а матрица E_k – верхнетреугольная, в этом базисе матрица локальной монодромии в точке $z = a_k$ верхнетреугольная. Такой базис называется *левелевским*. *Слабо левелевским* в точке $z = a_k$ называется базис, который является объединением левелевских базисов всех собственных подпространств локальной монодромии в точке $z = a_k$. Левелевский и слабо левелевский базисы являются ассоциированными, т.е. в этих базисах решение может быть записано в форме (1.5) и нормирования принимают все свои значения с учетом кратности или, что эквивалентно, выполняется условие (1.8).

1.3. Построение расслоения со связностью по локальным данным. Пусть заданы:

– риманова поверхность X рода g;

– дивизор $D = \{a_1, \dots, a_n\} \subset X$;

– набор образующих $G_1, \dots, G_n, H_1, \dots, H_{2g}$ представления монодромии (1.1);

– набор диагональных целочисленных матриц $\Lambda = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$;

– набор матриц приведения $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ таких, что матрицы (1.8) голоморфны.

Эти данные единственным образом определяют пару $(E^{\Lambda,S}, \nabla^{\Lambda,S})$: голоморфное векторное расслоение $E^{\Lambda,S}$ на X с логарифмической связностью $\nabla^{\Lambda,S}$, имеющей дивизор D и монодромию (1.1). Подробно схема построения изложена в [1; лекция 8]. Напомним ее кратко.

На проколотой поверхности $X \setminus D$ существует единственная пара: голоморфное расслоение с голоморфной связностью, имеющей заданную монодромию (1.1), причем она может быть задана с помощью постоянных отображений переклейки и нулевых форм связности. Чтобы построить пару $(E^{\Lambda,S}, \nabla^{\Lambda,S})$ продолжим это единственное голоморфное расслоение с голоморфной связностью и заданной монодромией над $X \setminus D$ в точки дивизора D. Покроем риманову поверхность X окрестностями $O_1, \dots, O_n$ особых точек $a_1, \dots, a_n$ и набором окрестностей $\{U_\alpha\}$, покрывающих $X \setminus D$, не покрывающих точки из D. Чтобы продолжить пару в особую точку a_k рассмотрим окрестность O_k точки a_k и окрестность U_α, содержащую ее в своем замыкании, $O_k \cap U_\alpha$ – связное и односвязное множество. Функцию переклейки между окрестностями U_α и O_k определим следующим образом:

$$g_{k\alpha}(z) = (z-a_k)^{\Lambda_k}(z-a_k)^{E_k}S_k^{-1},$$

где матрица E_k (см. формулу 1.6) имеет собственные значения ρ_k^j, удовлетворяющие условию (1.7) . Форма связности в окрестности O_k имеет вид

$$\omega_k = \frac{\Lambda_k + (z-a_k)^{\Lambda_k}E_k(z-a_k)^{-\Lambda_k}}{z-a_k}\,dz.$$

Построенную пару – голоморфное расслоение над X с логарифмической связностью ∇ – будем обозначать $(F^{\Lambda,S}, \nabla^{\Lambda,S})$ или просто (F, ∇). В [1] показано, что любое голоморфное расслоение F с логарифмической связностью ∇, имеющей дивизор особенностей D и заданную монодромию, строится по какому-нибудь допустимому (т.е. такому, чтобы матрицы (1.8) были голоморфны в a_k) набору матриц Λ, S.

Опишем процедуру аналитического продолжения ассоциированного базиса в особой точке a_k в фиксированную неособую точку z_0. Рассмотрим ассоциированный базис горизонтальных сечений связности в точке $z = a_k$

$$Y_k(z) = (z-a_k)^{\Lambda_k}(z-a_k)^{E_k},$$

соединим a_k с z_0 выделенным путем, соединяющим окрестность O_k и выделенную неособую точку z_0. Имеем формулу для базиса горизонтальных сечений в точке z_0

$$g_{\alpha k}Y_k = S_k(z-a_k)^{-E_k}(z-a_k)^{-\Lambda_k}(z-a_k)^{\Lambda_k}(z-a_k)^{E_k} = S_k,$$

где индекс α обозначает окрестность U_α, содержащую точку a_k на своей границе. Отметим, что базис не меняется при аналитическом продолжении из окрестности U_α в точку z_0 вдоль выделенных путей. Это следует из построения расслоений по координатному описанию (см. [1]).

Степень расслоения F, в котором задана логарифмическая связность ∇ с особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ находится по формуле

$$\deg F = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tr} \mathcal{B}_k(0) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(\lambda_k^j + \rho_k^j),$$

доказательство этого факта можно найти, например, в [3; приложение B].

1.4. Фильтрация Хардера–Нарасимхана. Фильтрация Хардера–Нарасимхана – это фильтрация подрасслоений расслоения E такая, что последовательные факторы от большего к меньшему полустабильны и имеют все больший наклон, а E_1 – подрасслоение с самым большим наклоном из всех подрасслоений. Существование и единственность этой фильтрации доказана в [4].

Определение 10. *Фильтрация Хардера–Нарасимхана* расслоения E – это последовательность вложенных друг в друга расслоений

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_{m-1} \subset E_m = E, \tag{1.9}$$

удовлетворяющая следующим свойствам:

1) E_0 – нулевое подрасслоение;

2) E_1 – полустабильное и имеет максимальный наклон среди всех подрасслоений расслоения E;

3) расслоение E_j/E_{j-1} полустабильное для $j = 2, \dots, m$;

4) $\mu_{j-1} > \mu_j$, где $\mu_j = \mu(E_j/E_{j-1})$, $j = 2, \dots, m$.

Будем называть μ_j *наклонами* присоединенных факторов.

§ 2. Контрпример к ослабленному варианту проблемы Римана–Гильберта

В этом параграфе мы приведем пример представления, которое не может быть реализовано как представление монодромии логарифмической связности с четырьмя особыми точками в расслоении над римановой поверхностью, образующим со связностью полустабильную пару. Следствием этого является тот факт, что данное представление нельзя реализовать в качестве монодромии логарифмической связности в полустабильном расслоении никакой степени. Этот пример можно рассматривать как над сферой Римана, так и над римановыми поверхностями положительного рода. Для сферы Римана это утверждение является тривиальным следствием известных результатов, а для римановых поверхностей положительного рода – новым утверждением.

Рассмотрим следующие четыре образующие, построенные А. А. Болибрухом (см. [5; пример 5.2.2]):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{G_1}, \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{G_2},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{G_3}, \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{G_4}.$$

Болибрух показал, что данный набор образующих не реализуем как набор образующих монодромии фуксовой системы на сфере Римана (см. [5]). Мы рассмотрим пример, обобщающий пример Болибруха на случай римановой поверхности произвольного рода, и модифицируем его доказательство, чтобы получить следующее утверждение.

Теорема 1. *Не существует ни одной полустабильной пары* (F,∇) *(расслоение с логарифмической связностью) на римановой поверхности* X *рода* g, *имеющей особые точки* a_1,a_2,a_3,a_4 *и представление монодромии* (1.1) *с образующими*

$$G_1,\dots,G_4,\qquad H_1=\dots=H_{2g}=I. \tag{2.1}$$

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Допустим, что существует полустабильная пара $(F^{\Lambda,S},\nabla^{\Lambda,S})$, имеющая монодромию (1.1), (2.1). Из того, что монодромия верхнетреугольная следует, что существует последовательность вложенных инвариантных (стабилизирующихся связностью ∇) подрасслоений

$$F_1\subset F_2\subset\dots\subset F_7=F$$

рангов $\operatorname{rk}F_j=j$, соответствующих инвариантным подпространствам всех размерностей. Для всех подрасслоений F_j должны выполняться неравенства

$$\mu(F_j)\leqslant\mu(F).$$

В итоге мы покажем, что соответствующих допустимых (таких, чтобы матрицы (1.8) были голоморфны в a_k) наборов матриц Λ,S не существует. Это приведет нас к противоречию.

Мы существенно используем структуру данного представления. Каждая образующая G_k, $k=1,2,3,4$, сопряжена к матрице с двумя жордановыми блоками, один из которых отвечает собственному значению 1, а другой – собственному значению -1. В этом случае для каждой из особых точек существует ассоциированный базис, в котором монодромия в этой точке находится в жордановой форме (см. определение [1; лекция 5, пример 5.2]). Рассмотрим матрицу нормирований Λ_k (см. (1.5)) и обозначим через $\lambda_k^j:=(\Lambda_k)_{jj}$ диагональные элементы матриц Λ_k (нормирования).

Чтобы матрица нормирований Λ_k определяла логарифмическую связность в точке $z=a_k$, необходимо и достаточно, чтобы матрица (1.8) была голоморфной в $z=a_k$. Это в данном случае означает, что если $i<j$ и λ_k^i и λ_k^j отвечают одному и тому же жорданову блоку матрицы E_k, то $\lambda_k^i\geqslant\lambda_k^j$.

Наборы диагональных элементов ρ_k^j матриц E_k в особых точках имеют вид (см. формулу (1.6)):

$$a_1\colon\left\{0,\frac12,0,0,0,\frac12,0\right\};\qquad a_2\colon\left\{0,\frac12,\frac12,0,\frac12,\frac12,0\right\};$$
$$a_3\colon\left\{0,\frac12,0,\frac12,\frac12,\frac12,0\right\};\qquad a_4\colon\left\{0,\frac12,\frac12,\frac12,0,\frac12,0\right\}.$$

Наборы показателей в каждой из особых точек образуют следующие последовательности:

$$
\begin{aligned}
&a_1\colon \lambda_1^1,\ \underline{\lambda_1^2}+\frac{1}{2},\ \lambda_1^3,\ \lambda_1^4,\ \lambda_1^5,\ \underline{\lambda_1^6}+\frac{1}{2},\ \lambda_1^7;\\
&a_2\colon \lambda_2^1,\ \underline{\lambda_2^2}+\frac{1}{2},\ \underline{\lambda_2^3}+\frac{1}{2},\ \lambda_2^4,\ \underline{\lambda_2^5}+\frac{1}{2},\ \underline{\lambda_2^6}+\frac{1}{2},\ \lambda_2^7;\\
&a_3\colon \lambda_3^1,\ \underline{\lambda_3^2}+\frac{1}{2},\ \lambda_3^3,\ \underline{\lambda_1^4}+\frac{1}{2},\ \underline{\lambda_3^5}+\frac{1}{2},\ \underline{\lambda_3^6}+\frac{1}{2},\ \lambda_3^7;\\
&a_4\colon \lambda_4^1,\ \underline{\lambda_4^2}+\frac{1}{2},\ \underline{\lambda_4^3}+\frac{1}{2},\ \underline{\lambda_4^4}+\frac{1}{2},\ \lambda_4^5,\ \underline{\lambda_4^6}+\frac{1}{2},\ \lambda_4^7;
\end{aligned}
$$

причем нормирования λ_k^j без подчеркивания так же, как и нормирования с подчеркиваниями $\underline{\lambda_k^j}$, образуют убывающие (нестрого) последовательности для каждой из особых точек. Упорядоченность следует из необходимости условия голоморфности матрицы (1.8) в точке $z=a_k$.

Теперь с помощью цепочки рассуждений докажем, что соответствующего набора Λ матриц нормирований не существует. Заметим, что каждый набор ρ_k^j в точке a_k начинается и заканчивается нулем:

$$\rho_k^1=\rho_k^7=0,\qquad k=1,2,3,4,$$

следовательно,

$$\lambda_k^1\geqslant\lambda_k^7,\qquad k=1,2,3,4.$$

Обозначим через

$$\boldsymbol{s}_j=\deg F_j$$

степень подрасслоения ранга j, порожденного первыми j решениями соответствующих ассоциированных базисов. Все F_j стабилизируются связностью ∇.

Будем считать без потери общности, что $\lambda_k^7=0$, $k=1,2,3,4$, так как, отняв скалярные матрицы $I\cdot\lambda_k^7$ от всех Λ_k, получим новое расслоение с логарифмической связностью, имеющей ту же монодромию, которые тоже будут образовывать полустабильную пару.

Теперь, по предположению имеем, что

$$\boldsymbol{s}_7=\boldsymbol{s}_6+\lambda_1^7+\lambda_2^7+\lambda_3^7+\lambda_4^7=\boldsymbol{s}_6,$$

а из полустабильности пары следует, что

$$\mu(F_6)=\frac{1}{6}\boldsymbol{s}_6\leqslant\frac{1}{7}\boldsymbol{s}_7=\mu(F_7),$$

т.е. $\boldsymbol{s}_7\leqslant 0$. Снова из полустабильности (F,∇) получаем

$$\mu(F_1)=\boldsymbol{s}_1\leqslant\frac{1}{7}\boldsymbol{s}_7=\mu(F_7)\leqslant 0,$$

а из убывания последовательности нормирований имеем неравенство

$$\boldsymbol{s}_1=\lambda_1^1+\lambda_2^1+\lambda_3^1+\lambda_4^1\geqslant\lambda_1^7+\lambda_2^7+\lambda_3^7+\lambda_4^7=0.$$

Отсюда следует, что
$$\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = \lambda_4^1 = 0,$$
а также то, что все неподчеркнутые нормирования равны нулю. Действительно, если первый и последний элементы неубывающей последовательности равны нулю, то все промежуточные элементы этой последовательности тоже нулевые.

Из полустабильности пары (F, ∇) и доказанного соотношения $0 = \boldsymbol{s}_1 \leqslant \frac{1}{7}\boldsymbol{s}_7 \leqslant 0$ получаем, что
$$\boldsymbol{s}_6 = \boldsymbol{s}_7 = 0.$$
Теперь проанализируем подчеркнутые нормирования. Введем обозначения:
$$A = \sum_{k=0}^{4} \lambda_k^2, \qquad \overline{A} = \sum_{k=0}^{4} \lambda_k^6.$$
Из полустабильности пары (F, ∇) получаем, что
$$A = \deg(F_2) \leqslant 0,$$
а из убывания подчеркнутых нормирований следует, что
$$\overline{A} \leqslant A.$$
При этом $0 = \boldsymbol{s}_6 = \boldsymbol{s}_5 + \overline{A}$, т.е. $\boldsymbol{s}_5 = -\overline{A} \geqslant 0$. Из предположения полустабильности пары (F, ∇) имеем
$$\frac{1}{5}\boldsymbol{s}_5 \leqslant \frac{1}{7}\boldsymbol{s}_7 = 0,$$
т.е.
$$\overline{A} = 0 = A.$$
Это означает, что подчеркнутые нормирования в каждой точке равны между собой. В этом случае степень F равна
$$\deg F = 7 + 2\lambda_1^2 + 4\lambda_2^2 + 4\lambda_3^2 + 4\lambda_4^2 = 0,$$
где 7 – это сумма всех собственных значений ρ_k^j. Это приводит нас к противоречию, так как четное число не может быть равно нечетному. Мы показали, что не существует подходящего допустимого набора матриц нормирований Λ и, соответственно, полустабильной пары (F, ∇). Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 получаем немедленное следствие.

Замечание 1 (следствие). Представлению из теоремы 1 нельзя сопоставить полустабильное расслоение нулевой степени с логарифмической связностью, имеющей четыре особые точки и данное представление монодромии.

Действительно, существование такого расслоения со связностью противоречило бы утверждению теоремы 1, так как полустабильное расслоение со связностью всегда образуют полустабильную пару.

§ 3. Оценка наклонов при ограниченных показателях связности

В настоящем параграфе мы докажем неравенство для наклонов присоединенных факторов $\mu(E_j/E_{j-1})$ фильтрации (1.9). Результаты этого параграфа, в некотором смысле, обобщают результаты работы [6].

Для доказательства леммы 1 воспользуемся следующими фактами из [7] (см. утверждение 4.4).

Лемма 1. *Пусть существует ненулевой гомоморфизм $f\colon V \to W$ между расслоениями V и W, где V полустабильное, и пусть W_1 – образ V при отображении f, тогда если $\mu(V) > \mu(W)$, то $\mu(W_1) > \mu(W)$.*

Лемма 2 (следствие леммы 1). *Если существует ненулевой гомоморфизм $f\colon V \to W$ между полустабильными расслоениями V и W, тогда*

$$\mu(V) \leqslant \mu(W).$$

Лемма 3. *Пусть имеется расслоение E с логарифмической связностью ∇ на компактной римановой поверхности X рода g, имеющей дивизор $D = \{a_1, \dots, a_n\}$. Если при некотором l для наклонов фильтрации (1.9) выполнено*

$$\mu_l - \mu_{l+1} > 2g - 2 + n, \tag{3.1}$$

то подрасслоение E_l из (1.9) стабилизируется связностью ∇.

Доказательство. Докажем лемму от противного. Допустим, неравенство (3.1) выполнено и подрасслоение E_l не стабилизируется связностью ∇. Пусть k – минимальное такое число $k > l$, что подрасслоение E_k из фильтрации (1.9) стабилизируется связностью ∇. Такое k существует, так как $E_m = E$ точно стабилизируется связностью ∇ и $m > l$. Это означает, что ∇ переводит сечения E_k в сечения $E_k \otimes \mathcal{O}^{1,0}(\log D)$, где через $\mathcal{O}^{1,0}(\log D)$ обозначен пучок мероморфных 1-форм с простыми особенностями только в точках дивизора D.

Пусть $\mathrm{pr}_s\colon E_s \to E_s/E_{s-1}$ – послойная проекция расслоения E_s на фактор-расслоение E_s/E_{s-1}, а i_1 – наименьшее число, для которого образ отображения

$$\mathrm{pr}_k \circ \nabla\colon E_{i_1} \to E_k/E_{k-1} \otimes \mathcal{O}^{1,0}(\log D) \tag{3.2}$$

ненулевой. Такое i_1 существует, поскольку E_{k-1} не стабилизируется связностью ∇ (это следует из выбора k). Заметим, что если образ (3.2) для данного i_1 отличен от нуля, то и образ $\mathrm{pr}_k \circ \nabla$ всех подрасслоений E_l, $i_1 < l \leqslant k$ тоже ненулевой. Имеем две композиции отображений

$$\begin{gathered} E_{i_1} \xrightarrow{\nabla} E \otimes \mathcal{O}^{1,0}(\log D) \xrightarrow{\mathrm{pr}_k} E_k/E_{k-1} \otimes \mathcal{O}^{1,0}(\log D), \\ E_{i_1} \xrightarrow{\mathrm{pr}_{i_1}} E_{i_1}/E_{i_1-1} \xrightarrow{\nabla} E_k/E_{k-1} \otimes \mathcal{O}^{1,0}(\log D), \end{gathered} \tag{3.3}$$

дающие одинаковый результат ($\mathrm{pr}_k \circ \nabla = \nabla \circ \mathrm{pr}_{i_1}$). Обозначим через τ_1 отображение $\tau_1 := \nabla \circ \mathrm{pr}_{i_1}$, тогда

$$\mathrm{pr}_k \circ \tau_1 := \mathrm{pr}_k \circ \nabla \circ \mathrm{pr}_{i_1} = \mathrm{pr}_k \circ \nabla. \tag{3.4}$$

Действительно, отображение $\nabla \circ \mathrm{pr}_k$ зануляет E_{i_1-1}, а это означает, что по нему можно сначала профакторизовать E_{i_1}, а потом применить $\mathrm{pr}_k \circ \nabla$.

Отметим также, что отображение τ_1 линейно над пучком голоморфных функций. Пусть f – функция, а $\mathbf{s}$ – сечение E_{i_1}/E_{i_1-1}. Рассмотрим образ $\mathbf{s}$ при естественном отображении E_{i_1}/E_{i_1-1} в E_k. Так как

$$\tau_1(f\mathbf{s}) = \mathrm{pr}_k(f\nabla(\mathbf{s})) + \mathrm{pr}_k(df \wedge \mathbf{s}) = f\tau_1(\mathbf{s}) \in \Gamma(E \otimes \mathcal{O}^{1,0}(\log D)), \tag{3.5}$$

слагаемое $\mathrm{pr}_k(df \wedge s)$ равно нулю, а так как отображение ненулевое, мы имеем линейный гомоморфизм и образ $\tau_1(E_{i_1}/E_{i_1-1})$ является голоморфным подрасслоением.

Теперь покажем, что

$$\mu_{i_1} \leqslant \mu_k + 2g - 2 + n. \tag{3.6}$$

Известно, что степень пучка 1-форм с n простыми полюсами на одномерном многообразии, каковым является риманова поверхность рода g, равна

$$\deg \mathcal{O}^{1,0}(\log D) = 2g - 2 + n.$$

Теперь найдем наклон расслоения-образа в (3.3):

$$\begin{aligned}\mu(E_k/E_{k-1} \otimes \mathcal{O}^{1,0}(\log D)) &= \frac{\deg(E_k/E_{k-1}) + rk(E_k/E_{k-1})(2g-2+n)}{rk(E_k/E_{k-1})} \\ &= \mu_k + 2g - 2 + n. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Заметим, что τ_1 задает линейное отображение, которое переводит E_{i_1}/E_{i_1-1} в подрасслоение расслоения E_k/E_{k-1}. Расслоение E_k/E_{k-1} полустабильно как фактор соседних элементов в фильтрации Хардера–Нарасимхана, а значит, наклон любого подрасслоения не больше наклона всего расслоения. Применим лемму 2 к отображению

$$\tau_1 \colon E_{i_1}/E_{i_1-1} \to E_k/E_{k-1} \otimes \mathcal{O}^{1,0}(\log D)$$

и получим, что

$$\mu_{i_1} = \mu(E_{i_1}/E_{i_1-1}) \leqslant \mu(E_k/E_{k-1} \otimes \mathcal{O}^{1,0}(\log D)) = \mu_k + 2g - 2 + n. \tag{3.8}$$

Это неравенство приводит нас к противоречию, так как из упорядоченности последовательности наклонов (условие 4) определения 10) следует, что

$$\mu_{i_1} \geqslant \mu_l > \mu_{l+1} \geqslant \mu_k,$$

а значит,

$$\mu_l - \mu_{l+1} \leqslant 2g - 2 + n,$$

что противоречит предположению. Лемма доказана.

Теорема 2. *Рассмотрим голоморфное векторное расслоение E с логарифмической связностью ∇ на компактной римановой поверхности X рода g.*

Пусть связность ∇ имеет дивизор $D = \{a_1, \ldots, a_n\}$ из n особых точек и для показателей связности ∇ во всех особых точках выполнены неравенства

$$0 \leqslant \operatorname{Re} \beta_i^j < M \in \mathbb{Z}, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, p \tag{3.9}$$

(β_i^j см. в определении 9). Тогда для наклонов $\mu_1, \ldots, \mu_m$ фильтрации (1.9) выполнены неравенства

$$|\mu_i| < Mn + (m-1)(n+2g-2), \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{3.10}$$

Доказательство. Пусть расслоение E имеет ранг p, а его подрасслоения $E_1, \ldots, E_m$ из фильтрации Хардера–Нарасимхана (1.9) имеют ранги

$$\operatorname{rk} E_i = d_i, \qquad 1 \leqslant d_1 < \cdots < d_m = p.$$

Через μ_i обозначены наклоны факторов E_i/E_{i-1} ($E_0 = \{0\}$, $d_0 = 0$):

$$\mu_i = \frac{\deg(E_i/E_{i-1})}{d_i - d_{i-1}}.$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть

$$\mu_i - \mu_{i+1} \leqslant n + 2g - 2, \qquad i = 1, \ldots, m-1. \tag{3.11}$$

Для степени расслоения E выполнены следующие неравенства:

$$0 \leqslant \deg E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \beta_i^j < Mnp, \tag{3.12}$$

и, соответственно,

$$\deg E = \sum_{i=1}^{m} (d_i - d_{i-1}) \mu_i. \tag{3.13}$$

Из неравенства (3.11) получаем, что $\mu_1 - \mu_m \leqslant (m-1)(n+2g-2)$. Заметим, что если μ_1 и μ_m разных знаков, то из неравенства (3.11) следует, что $|\mu_i| \leqslant (m-1)(n+2g-2)$. В случае, если μ_1 и μ_m одного знака, они положительны, так как иначе бы это противоречило первому из неравенств (3.12). В этом случае все $\mu_1, \ldots, \mu_m$ положительны и из равенства (3.13) и второго неравенства (3.12) следует, что $\mu_m p < Mnp$, а следовательно, $\mu_m < Mn$ и из этого и (3.11) получаем, что $\mu_i < Mn + (m-1)(n+2g-2)$.

Случай 2. Пусть $1 \leqslant k_1 < \cdots < k_l < m$ – такие целые числа, что

$$\mu_{j+1} - \mu_j > n + 2g - 2 \tag{3.14}$$

тогда и только тогда, когда $j = k_s$ для какого-нибудь $s = 1, \ldots, l$. Из предположения следует, что $l \geqslant 1$. В этом случае из леммы 3 следует, что подрасслоения

$$E_{k_s}, \qquad s = 1, \ldots, l,$$

стабилизируются связностью. Это означает, в частности, что

$$\deg E_{k_s} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d_{k_s}} \beta_i^j, \qquad s = 1, \dots, l,$$

и, следовательно, что

$$\deg(E_{k_s}/E_{k_{s-1}}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=d_{k_{s-1}+1}}^{d_{k_s}} \beta_i^j, \qquad s = 2, \dots, l. \tag{3.15}$$

Это позволяет нам применить разобранный случай 1 к расслоениям E_{k_1} и $E_{k_s}/E_{k_{s-1}}$, $s = 2, \dots, l$, с индуцированными на них ∇ связностями, так как они полностью удовлетворяют его условиям. Действительно, последовательность присоединенных факторов E_i/E_{i-1}, $i = 1, \dots, m$, расслоения E разбивается на подпоследовательности E_i/E_{i-1}, $i = k_s + 1, \dots, k_{s+1}$, $s = 0, \dots, l-1$ (считаем, что $k_0 = 0$). Докажем оценку на наклоны присоединенных факторов каждой подпоследовательности отдельно, воспользовавшись тем, что подпоследовательность E_i/E_{i-1}, $i = k_s + 1, \dots, k_{s+1}$, является последовательностью присоединенных факторов расслоения $E_{k_{s+1}}/E_{k_s}$. В силу предположения случая 2 и леммы 3 связность ∇ индуцирует инвариантную связность на факторе $E_{k_{s+1}}/E_{k_s}$. Показатели этой связности совпадают с некоторыми показателями связности ∇. Следовательно, неравенство на показатели (3.9) для этой связности выполнено. Можно применить к $E_{k_{s+1}}/E_{k_s}$ рассуждение случая 1 и получить даже более сильное неравенство

$$|\mu_i| < Mn + (k_{s+1} - k_s - 1)(n + 2g - 2), \qquad i = k_s + 1, \dots, k_{s+1}. \tag{3.16}$$

Это верно для любого $s = 1, \dots, l$, т.е. для всех наклонов. Таким образом, доказательство теоремы 2 завершено.

§ 4. Проблема Римана–Гильберта с вполне приводимой монодромией

В этом параграфе мы обобщим результаты, полученные в работах [8], [9], на случай римановой поверхности произвольного рода. Пусть X – риманова поверхность рода g, $D = \{a_1, \dots, a_n\} \subset X$ – дивизор из n точек. В этой части мы рассмотрим вполне приводимые представления, которые являются прямой суммой

$$\chi = \chi' \oplus \chi'', \qquad \chi', \chi'' \colon \pi_1(z_0, X \setminus D) \to \mathrm{GL}(p^l, \mathbb{C}),$$

двух прямых слагаемых χ' и χ''. Пусть

$$G_1^l, \dots, G_n^l, \quad H_1^l, \dots, H_{2g}^l, \qquad l = ', '', \tag{4.1}$$

– образующие представлений χ', χ'' фундаментальной группы $\pi_1(X \setminus D)$, причем G_k^l соответствуют обходам особых точек $a_1, \dots, a_n$, а H_k – обходам по A и B-циклам на поверхности X. Образующие (4.1) удовлетворяют соотношению

$$G_1^l \cdots G_n^l H_1^l H_2^l {H_1^l}^{-1} {H_2^l}^{-1} \cdots H_{2g-1}^l H_{2g}^l (H_{2g-1}^l)^{-1} (H_{2g}^l)^{-1} = I, \qquad l = ', ''.$$

Теорема 3. *Пусть спектры образующих представлений χ' и χ'' не пересекаются,*

$$\operatorname{spec} G'_k \cap \operatorname{spec} G''_k = \varnothing, \qquad k = 1, \dots, n,$$

ни в одной из особых точек $a_1, \dots, a_n$, а $\chi = \chi' \oplus \chi''$ – монодромия логарифмической связности ∇ в полустабильном расслоении E нулевой степени на X, тогда представления χ' и χ'' могут быть реализованы в качестве представлений монодромии логарифмических связностей ∇' и ∇'' в полустабильных расслоениях степени нуль над X.

Доказательство. Предположим, что χ – представление монодромии логарифмической связности ∇ в полустабильном расслоении E нулевой степени на X. Пусть подрасслоения E' и E'' соответствуют инвариантным подпространствам подпредставлений χ' и χ'' представления χ. Степени подрасслоений E' и E'' неположительны, так как E полустабильно, т.е. $\deg E' \leqslant 0$ и $\deg E'' \leqslant 0$.

Заметим, что в окрестности любой особой точки $z = a_k$ существует слабо-левелевский базис. Слабо левелевский базис – это объединением левелевских базисов всех собственных подпространств оператора $G_k = G'_k \oplus G''_k$ (подробно об этом можно прочитать в [1]). Слабо левелевский базис является ассоциированным с фильтрацией, а это означает, что степени расслоений могут быть вычислены как суммы асимптотик слабо левелевских базисов во всех особых точках.

Инвариантные подпространства, соответствующие χ' и χ'', порождены различными частями слабо левелевского базиса (см. [1]), т.е. первые $\operatorname{rk}\chi'$ базисных векторов порождают первое инвариантное подпространство, а остальные $\operatorname{rk}\chi''$ базисных векторов – второе. По предположению операторы G'_k и G''_k не имеют совпадающих собственных значений, а это означает, что любой вектор из слабо левелевского базиса принадлежит ровно одному из двух инвариантных подпространств. Итак, степень подрасслоения E' равна сумме показателей связности, соответствующих подпредставлению χ', т.е.

$$\deg E' = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_1} \beta_k^j,$$

а степень E'', соответственно, равна

$$\deg E'' = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=p_1+1}^{p_1+p_2} \beta_k^j.$$

Таким образом, получаем, что

$$\deg E = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_1+p_2} \beta_k^j = \deg E' + \deg E'' = 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что $\deg E' = 0$ и $\deg E'' = 0$, а это означает, что E' и E'' – подрасслоения степени нуль полустабильного расслоения E, тоже имеющего нулевую степень. Отсюда следует, что E' и E'' тоже полустабильны, что и требовалось доказать.

Следующая теорема дает обратный результат в случае, когда спектры матриц-образующих прямых слагаемых хотя бы в одной из особых точек имеют непустое пересечение. Доказательство следующей теоремы содержательно повторяет доказательство теоремы 2 из [8], а основное отличие связано не с появлением дополнительных образующих у представления монодромии, а с тем, что мы строим по представлению не тривиальное расслоение, а полустабильное расслоение нулевой степени.

Теорема 4. *Для любого представления* χ',

$$\chi', \chi'' \colon \pi_1(z_0, X \setminus D) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}), \qquad n \geqslant 3, \tag{4.2}$$

найдется представление χ'' (*см.* (4.2)) *такое, что представление*

$$\chi = \chi' \oplus \chi''$$

может быть реализовано в качестве монодромии логарифмической связности с особыми точками $a_1, \dots, a_n$ *в полустабильном расслоении нулевой степени на* X.

Доказательство. Чтобы провести доказательство теоремы, мы построим по представлению χ' искомое представление χ''. Пусть χ' задано образующими $G_1', \dots, G_n'$ в точках $a_1, \dots, a_n$ и образующими $H_1', \dots, H_{2g}'$, соответствующими циклам на X. Предположим также, что матрица G_1' находится в жордановой нормальной форме. Это не ограничит общности, так как представление монодромии определено с точностью до общего постоянного сопряжения. Представление χ'' определено матрицами

$$G_1'', \dots, G_n'', \qquad H_1'', \dots, H_{2g}'', \tag{4.3}$$

которые нам необходимо задать. Рассмотрим набор (4.3), удовлетворяющий следующим условиям:

(a) $G_1'' = G_1'$;

(b) $\operatorname{spec} G_2'' \cap \operatorname{spec} G_2' = \varnothing$;

(c) набор матриц $G_1'', \dots, G_n'', H_1'', \dots, H_{2g}''$ определяет неприводимое представление χ''.

Теперь необходимо доказать, что набор матриц (4.3), задающий представление χ'' и удовлетворяющий условиям (a), (b), (c), существует для любого представления χ'. После этого мы покажем, что представление $\chi = \chi' \oplus \chi''$, удовлетворяющее данным условиям, может быть реализовано как представление монодромии логарифмической связности в полустабильном расслоении нулевой степени.

Существование такого набора (4.3) доказывается аналогично тому, как это доказано в работе [8] (см. доказательство теоремы 3) в случае сферы Римана.

Будем следовать доказательству теоремы 3 из [8]. Каждая пара $(E, \nabla) = (E^{\Lambda,S}, \nabla^{\Lambda,S})$ может быть определена своим координатным описанием как это описано в п. 1.3. Напомним, что координатное описание пары $(E^{\Lambda,S}, \nabla^{\Lambda,S})$, имеющей заданную монодромию, полностью определяют набор допустимых матриц нормирований $\Lambda = \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n\}$ и набор $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$ матриц связи (см. [1], лекция 8). Существует единственное с точностью до голоморфной калибровочной эквивалентности фундаментальная система горизонтальных сечений на $X \setminus D$, которая имеет заданную монодромию χ.

Рассмотрим аналитическое продолжение базиса

$$Y_k(z) = (z - a_k)^{\Lambda_k}(z - a_k)^{E_k}$$

как базиса горизонтальных сечений связности в окрестности точки $z = a_k$, вдоль выделенных путей, соединяющих окрестности U_k особых точек a_k и выделенную неособую точку z_0. Имеем формулу для базиса горизонтальных сечений в точке z_0

$$g_{\alpha k}Y_k = S_k(z - a_k)^{-E_k}(z - a_k)^{-\Lambda_k}(z - a_k)^{\Lambda_k}(z - a_k)^{E_k} = S_k,$$

где индекс α обозначает окрестность U_α, содержащую точку a_k на своей границе. Отметим, что базис не меняется при аналитическом продолжении из окрестности U_α в точку z_0 вдоль выделенных путей. Это следует из построения расслоений по координатному описанию.

Пара (E, ∇) с представлением монодромии $\chi = \chi_1 \oplus \chi_2$ определяется наборами матриц $\Lambda = \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n\}$ и $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$. Определим матрицу связи S_1 следующим образом:

$$S_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix},$$

где I обозначает единичную матрицу в размерности p, и пусть $S_2, \ldots, S_n$ – какие-нибудь допустимые матрицы, например, матрицы, приводящие матрицы $G_2, \ldots, G_n$ к жордановой нормальной форме. Матрицы нормирований определим следующим образом:

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} d \cdot I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_2 = \cdots = \Lambda_n = 0,$$

где d – достаточно большое целое положительное число, которое мы укажем в конце доказательства. Эти данные определяют нужное расслоение со связностью $(E^{\Lambda,S}, \nabla^{\Lambda,S})$.

Мы докажем, что пара $(E^{\Lambda,S}, \nabla^{\Lambda,S})$ стабильна. Утверждение теоремы будет следовать из стабильности пары $(E^{\Lambda,S}, \nabla^{\Lambda,S})$, поскольку по теореме 2 из [2] из существования стабильной пары с заданной монодромией, следует существование полустабильного расслоения нулевой степени с логарифмической связностью с этой же монодромией.

Опишем все инвариантные подпространства представления χ. Нетрудно видеть, что подпредставления χ – это все подпредставления χ'_α, представление χ' и их прямые суммы $\chi'_\alpha \oplus \chi''$, а также сами представления χ' и χ''. Действительно, образующая $G = G'_2 \oplus G''_2$ представления монодромии χ в точке a_2 такова, что любое ее инвариантное подпространство однозначно разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств операторов G_2^1 и G_2^2, которые имеют нулевое пересечение, потому что матрицы G_2^1 и G_2^2 по построению не имеют совпадающих собственных значений. Этим исчерпываются все подпредставления, поскольку χ'' неприводимо.

Теперь мы должны доказать, что выполняется условие стабильности пары (E,∇). То есть необходимо доказать, что условия на наклоны выполняются для любого собственного подрасслоения E_{sub} каждого из четырех типов подрасслоений $E_{\chi'}$, $E_{\chi'_\alpha}$, $E_{\chi'_\alpha\oplus\chi''}$ и $E_{\chi'}$, где индекс обозначает пространство, которому соответствует данное подрасслоение. Только эти подрасслоения стабилизируются связностью ∇. Покажем, что при достаточно большом d выполняется неравенство

$$\mu(E_{\mathrm{sub}})<\mu(E),\qquad E=E_\chi.$$

Расслоение со связностью уже построено и мы можем найти степени всех подрасслоений, которые стабилизируются связностью. Как известно, степени равны суммам соответствующих асимптотик, но мы не знаем априори собственных значений монодромии, через которые выражаются дробные части асимптотик. Имеем, что

$$\deg(E)\in[dp,dp+2np),\qquad \mu(E)\in\left[\frac{d}{2},\frac{d}{2}+n\right).$$

Обозначим размерность $\dim\chi'_\alpha=q$, где $q<p$. Тогда степени и наклоны удовлетворяют следующим условиям:

(a) $\deg E_{\chi'}\in[0,np)$, $\mu(E_{\chi'})\in[0,n)$;

(b) $\deg(E_{\chi'_\alpha})\in[0,2nq)$, $\mu(E_{\chi'_\alpha})\in[0,n)$;

(c) $\deg(E_{\chi'_\alpha\oplus\chi''})\in[dq,dq+(q+p)n)$, $\mu(E_{\chi'_\alpha\oplus\chi''})\in[d(1-p/(k+p)),d(1-p/(k+p))+n)$;

(d) $\deg(E_{\chi''})\in[0,np)$, $\mu(E_{\chi''})\in[0,n)$.

Мы видим, что наклон расслоения E не меньше чем $d/2$, а наклоны его подрасслоений не превосходят $d(p-1)/(2p-1)+n$. Это значение достигается, когда $\dim\chi_\alpha=p-1$. Так как $d>4pn$, условия стабильности пары выполняются. Как доказано в [2], из существования стабильной пары следует существование полустабильного расслоения нулевой степени, в котором определена связность с той же монодромией. Теорема 4 доказана.

Список литературы

[1] А. А. Болибрух, *Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения*, МЦНМО, М., 2000, 127 с.

[2] А. А. Болибрух, “Проблема Римана–Гильберта на компактной римановой поверхности”, *Монодромия в задачах алгебраической геометрии и дифференциальных уравнений*, Сборник статей, Труды МИАН, **238**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2002, 55–69; англ. пер.: A. A. Bolibrukh, “The Riemann–Hilbert problem on a compact Riemannian surface”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **238** (2002), 47–60.

[3] H. Esnault, E. Viehweg, “Logarithmic de Rham complexes and vanishing theorems”, *Invent. Math.*, **86**:1 (1986), 161–194.

[4] G. Harder, M. S. Narasimhan, “On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves”, *Math. Ann.*, **212** (1975), 215–248.

[5] А. А. Болибрух, “21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем”, Труды МИАН, **206**, Наука, М., 1994, 3–158; англ. пер.: A. A. Bolibrukh, “The 21st Hilbert problem for linear Fuchsian systems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **206** (1995), 1–145.

[6] И. В. Вьюгин, Р. Р. Гонцов, “О дополнительных параметрах в обратных задачах монодромии”, *Матем. сб.*, **197**:12 (2006), 43–64; англ. пер.: I. V. V’yugin, R. R. Gontsov, “Additional parameters in inverse monodromy problems”, *Sb. Math.*, **197**:12 (2006), 1753–1773.

[7] M. S. Narasimhan, C. S. Seshadri, “Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface”, *Ann. of Math.* (2), **82**:3 (1965), 540–567.

[8] И. В. Вьюгин, “Фуксовы системы с вполне приводимой монодромией”, *Матем. заметки*, **85**:6 (2009), 817–825; англ. пер.: I. V. V’yugin, “Fuchsian systems with completely reducible monodromy”, *Math. Notes*, **85**:6 (2009), 780–786.

[9] И. В. Вьюгин, “Неразложимая фуксова система с разложимым представлением монодромии”, *Матем. заметки*, **80**:4 (2006), 501–508; англ. пер.: I. V. V’yugin, “Irreducible Fuchsian system with reducible monodromy representation”, *Math. Notes*, **80**:4 (2006), 478–484.

Илья Владимирович Вьюгин
(Il’ya V. Vyugin)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича
Российской академии наук, г. Москва;
Факультет математики,
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва
E-mail: ilyavyugin@yandex.ru

Поступила в редакцию
20.04.2022 и 19.08.2023

Лада Андреевна Дудникова
(Lada A. Dudnikova)
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва
E-mail: ladud111@gmail.com