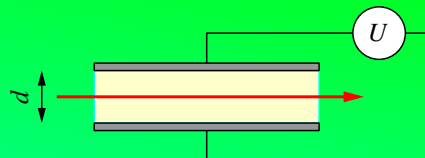
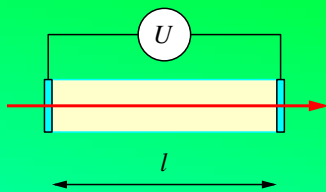
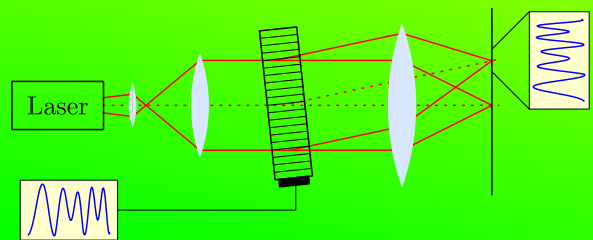
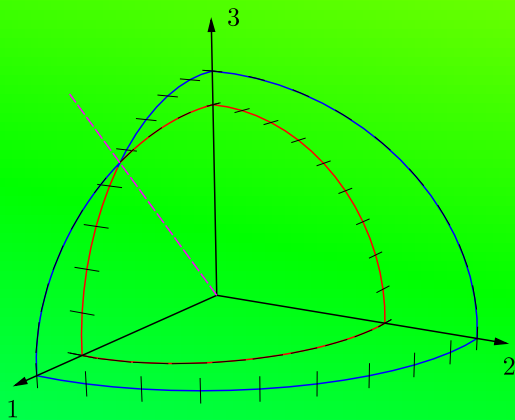


Optické vlastnosti pevných látek

Jan Soubusta, Antonín Černoš



V tomto textu bychom chtěli seznámit studenty přírodovědných oborů se základními metodami popisu optických vlastností pevných látek. V první části se probere potřebná teorie a v druhé části se potom aplikuje na popis tří základních jevů: magnetooptika, elektrooptika a akustooptika. V této vědní oblasti byla publikována již celá řada velmi kvalitních knih, ale převážná většina publikací je dnes dostupná pouze v anglickém jazyce. Tento text by měl proto ulehčit studentům náhled do této problematiky i tím, že je v českém jazyce.

Tato publikace vznikla jako studijní materiál pro studenty předmětů **SLO/OVPL** a **SLO/OVPLX** vyučovaných autory na PřF Univerzity Palackého v rámci oborů: Aplikovaná fyzika a Nanotechnologie.

Na závěr ještě citát klasika:

”Budoucnost patří aluminii.“

Jára da Cimrman



Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta

Optické vlastnosti pevných látek

Jan Soubusta
Antonín Černocho

Olomouc 2022

Oponenti: prof. RNDr. Zdeněk Bouchal Dr. – KO, PřF UP, Olomouc
doc. RNDr. Roman Grill, CSc. – MFF, UK, Praha
RNDr. Milan Orlita, Ph.D. – LNCMI-CNRS, Grenoble, Francie
Mgr. Milan Vůjtek, Ph.D. – KEF, PřF UP, Olomouc



Publikace byla vytvořena v rámci projektu Otevřená síť partnerství na bázi aplikované fyziky,
reg. č. CZ.1.07/2.4.00/17.0014

2. vydání

© Jan Soubusta, Antonín Černoch, 2022
© Univerzita Palackého v Olomouci, 2022

Neoprávněné užití tohoto díla je porušením autorských práv a může zakládat občanskoprávní, správněprávní,
popř. trestněprávní odpovědnost.

ISBN 1. vydání z 27. května 2014: 978-80-244-4111-5

Poděkování k 1. vydání

Na tomto místě bychom chtěli poděkovat všem, kteří se zasloužili, že mohl tento studijní text vzniknout: Doc. Luděkovi Bartoňkovi za entuziastický přístup k tvorbě nových studijních materiálů pro studenty aplikované fyziky, doc. Ondřeji Haderkovi za důvěru a soustavnou podporu práce ve Společné laboratoři optiky UP a FZÚ AV ČR. Dále také všem svým kolegům a spolupracovníkům. Autoři též děkují recenzentům za pečlivé čtení textu a za užitečné poznámky a připomínky.

Základní skladba textu byla inspirována přednáškami, které první autor absolvoval na počátku 90. let na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze, kde se této tématice věnovali významní odborníci doc. Milan Zvára a doc. Miroslav Kučera.

Poděkování k revidovanému vydání

V revidovaném vydání byly opraveny nalrzené překlepy a byla nově přidána desátá kapitola o nelineární optice. Hlavní dík prvního autora patří bezesporu jeho ženě Jitce a celé rodině za podporu a významnou motivaci k dokončení této práce. Hlavní dík druhého autora patří prvnímu autorovi za možnost spolupráce na tvorbě tohoto skripta.

MOTTO: Fermiho zlaté pravidlo

„Kdo má zlato, dělá pravidla!“

(podle Murphyho zákonů)

Revize původního vydání vzniklá podle doporučení různých oponentů dne 31. května 2022.

Obsah

Úvod	1
1 Optické materiálové konstanty	5
1.1 Popis interakce pevné látky se světlem	5
1.2 Optické konstanty	6
1.3 Vlnová rovnice v absorbujícím prostředí	8
1.4 Šíření energie	10
1.5 Alternativní možnosti zavedení komplexních veličin	11
1.6 Shrnutí	12
1.7 Příklady	13
2 Vztahy mezi optickými veličinami	15
2.1 Podmínky na materiálové vztahy	15
2.2 Kramersovy-Kronigovy disperzní relace	17
2.3 Šíření záření přes rozhraní	21
2.4 Shrnutí	23
2.5 Příklady	24
3 Lorentzův a Drudeho mikroskopický model	27
3.1 Lorentzův model	27
3.2 Drudeho model	32
3.3 Shrnutí	35
3.4 Příklady	36
4 Anizotropie a tenzorové veličiny	39
4.1 Typické tenzorové relace	40
4.2 Exkurz do tenzorové matematiky	42
4.3 Měření tenzorů	44
4.4 Využití symetrie při určování tenzorů	48
4.5 Symetrie krystalu pod vlivem působící síly	51
4.6 Magnetooptické jevy	53
4.7 Shrnutí	56
4.8 Příklady	57

5 Fresnelova rovnice	59
5.1 Lineární anizotropní prostředí	59
5.2 Řešení Fresnelovy rovnice	62
5.3 Plocha konstantní energie	64
5.4 Šíření světla v jednoosém krystalu	67
5.5 Úhel dvojlomu	71
5.6 Shrnutí	72
5.7 Příklady	73
6 Šíření světla v anizotropním prostředí	75
6.1 Lineární a cirkulární anizotropie	75
6.2 Indexová plocha (Σ)	76
6.3 Šíření světla v absorbujícím prostředí	81
6.4 Cirkulární anizotropie	82
6.5 Shrnutí	86
6.6 Příklady	87
7 Elektrooptické jevy	89
7.1 Popis elektrooptických jevů	89
7.2 Lineární EO jev, Pockelsův jev	91
7.3 Modulátory světla	97
7.4 Kvadratický EO jev, Kerrův jev	100
7.5 Měření elektrooptických koeficientů	101
7.6 Piezoelektrický jev	102
7.7 Další elektrooptické jevy	104
7.8 Shrnutí	105
7.9 Příklady	106
8 Akustooptický jev	109
8.1 Fotoelastický jev	109
8.2 Využití akustooptického jevu	110
8.3 Ramanův-Nathův režim difrakce	113
8.4 Braggův režim difrakce	115
8.5 Aplikace AO jevu	118
8.6 Shrnutí	120
8.7 Příklady	121
9 Mezipásové přechody	123
9.1 Popis pole pomocí potenciálu	123
9.2 Mezipásové přechody	124
9.3 Zjednodušený výpočet sdružené hustoty stavů	130
9.4 Absorpční pásy a kritické body	132

9.5	Další modifikace mezipásových přechodů	134
9.6	Shrnutí	137
10	Nelineární optika	139
10.1	Co znamená lineární a nelineární optika	139
10.2	Odvození vlnové rovnice pro nelineární prostředí	141
10.3	Zákony zachování a podmínka fázové synchronizace	142
10.4	Podmínka kvazi fázové synchronizace	151
10.5	Entanglement v polarizaci	152
10.6	Shrnutí	158
10.7	Příklady	159
	Dodatky	161
A	Matematický dodatek	162
A.1	Opakování vektorové algebry	162
B	Geometrický dodatek	164
B.1	Vztahy pro elipsu ve 2D	164
B.2	Vztahy pro elipsoid ve 3D	165
C	Fyzikální dodatek	166
C.1	Maxwellovy rovnice pro elektromagnetické pole	166
C.2	Rozdělení látek podle materiálových vztahů	169
C.3	Globální zákony zachování	170
C.4	Odvození indexu lomu mimořádného svazku	172
C.5	Odvození indexové plochy z Fresnelovy rovnice	173
	Literatura	175
	Seznam použitých symbolů	177

Úvod

Tento studijní text navazuje volně na skriptum *Fyzika pevných látek* [1] vydané prvním autorem v roce 2012. Obsah byl poskládan tak, aby seznámil studenty přírodovědných oborů se základními metodami popisu optických vlastností pevných látek. V první části se probere potřebná teorie a ve druhé části se potom aplikuje na popis tří základních jevů: magnetooptického, elektrooptického a akustooptického. V této vědní oblasti byla publikována již celá řada velmi kvalitních knih, ale převážná většina publikací je dnes dostupná pouze v anglickém jazyce. Snahou autorů bylo napsat skriptum, které by ulehčilo studentům náhled do problematiky optických vlastností pevných látek i tím, že je v českém jazyce.

Jako základní text pro seznámení se s celou klasickou optikou lze doporučit knihu P. Malého: *Optika* [2] nebo anglicky psanou knihu E. Hechta: *Optics* [3]. Velmi obsáhlý výklad klasické optiky je možné najít např. v knize D.H. Goldsteina: *Polarized Light* [4], která je doplněná i o aplikace jako je elipsometrie. Jako ucelený souhrn matematiky, která se v optice používá, lze doporučit knihu *Matematický aparát fyziky* od J. Kvasnicy [5]. Pro zopakování základů kvantové mechaniky je vhodná např. kniha L. Skály [6].

Optika anizotropních krystalů je tématem publikací *Polarization of Light* (S. Huard) [7] nebo *Optical Waves in Crystals* (A. Yariv, P. Yeh) [8]. Další vybraná kniha – *Handbook of Nonlinear Optical Crystals* [9] je typickým příkladem velmi precizní publikace ruských autorů s popisem optických parametrů všech technicky významných a používaných optických materiálů. Popisu jevů a aplikací z oblasti magnetooptiky, elektrooptiky a akustooptiky se věnují již zmíněné knihy [7, 8], ale také velmi obsáhlá kniha *Fundamentals of Photonics* [10] autorů B.E.A. Saleha a M.C. Teicha. Starší vydání této knihy je možné si přečíst i ve vynikajícím českém překladu *Základy fotoniky* [11], který byl vydán v Praze v roce 1996 ve čtyřech svazcích.



Knihy doporučené pro doplňující studium, přesné citace jsou uvedeny v kapitole Literatura na str. 175.

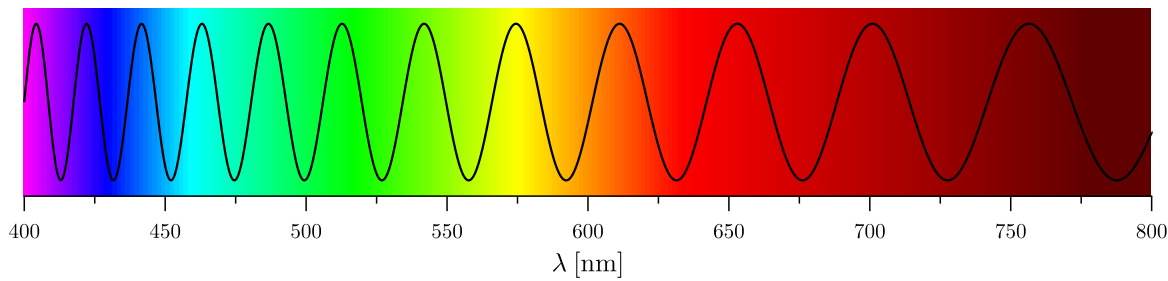
Pokročilejšímu čtenáři je možné doporučit knihy zabývající se optikou polovodičů jako *Semiconductor Optics* [12] nebo knihu zaměřenou na kvantový popis optických vlastností polovodičů *Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors* [13]. Na úplný závěr našeho výčtu jsme nechali dvě knížky z oblasti nelineární optiky. Autorem první z nich je Y.R. Shen (*The Principles of Nonlinear Optics*) [14] a autorem druhé je R.W. Boyd (*Nonlinear Optics*) [15].

Seznam jmenovaných knížek, které se věnují problematice optických vlastností pevných látek, by mohl být mnohem rozsáhlejší, ale další hledání přenechme vlastní iniciativě čtenáře. Navíc mnoho zajímavých textů je i na internetových stránkách známých univerzit. Jak je známo, dlouhé vysvětlování může snadno zastoupit jeden obrázek a dynamiku nějakého procesu je možné nejnáze pochopit z reprezentativní animace. Není možné zde vypsat všechny zajímavé internetové odkazy, ale bez obav: „Kdo hledá, najde.“

Ve druhém vydání byla skripta doplněna o kapitulu 10, která se věnuje nelineární optice. V této kapitole je pak uvedena celá řada relevantních citací, které jsou ocitované v kapitole Literatura na str. 175.



	Gama	RTG	UV	VIS	IČ	mikrovlny	rádio
λ	100 pm		200 nm	400 nm	750 nm	500 μm	100 mm
ν	3.00 EHz		1.50 PHz	749 THz	400 THz	600 GHz	3.00 GHz
$h\nu$	12.4 keV		6.20 eV	3.10 eV	1.65 eV	2.48 meV	12.4 μeV



380–440 nm
fialová

440–495 nm
modrá

495–580 nm
zelená

580–640 nm
žlutá, oranžová

640–750 nm
červená

Kapitola 1

Optické materiálové konstanty

Obsah kapitoly

1.1	Popis interakce pevné látky se světlem	5
1.2	Optické konstanty	6
1.2.1	Materiálové vztahy	7
1.2.2	Rozdělení materiálů	8
1.3	Vlnová rovnice v absorbujícím prostředí	8
1.3.1	Relace mezi komplexními parametry	9
1.3.2	Dynamika náboje v látce	9
1.4	Šíření energie	10
	Př. 1: Skin-efekt pro měď	10
1.5	Alternativní možnosti zavedení komplexních veličin	11
1.5.1	Vzájemné vztahy komplexních veličin	12
1.5.2	Výpočet absorpčního koeficientu	12
1.6	Shrnutí	12
1.7	Příklady	13

1.1 Popis interakce pevné látky se světlem

Interakci látky s elektromagnetickým zářením můžeme použít především pro studium vlastností látky. Nebo také můžeme měnit vlastnosti světla pomocí volby vhodného materiálu, který světlo požadovaným způsobem ovlivňuje. Pro popis interakce světla s pevnou látkou můžeme zvolit několik různých přístupů. Na úvod si teď některé vyjmenujme.

1) Maxwellova teorie

James Clerk Maxwell formuloval v roce 1865 ucelenou teorii, která dokáže popsat elektromagnetické jevy pomocí řešení čtyř diferenciálních rovnic. Ty se na jeho počest označují *Maxwellovy rovnice*. Pro řešení šíření elektromagnetického pole látkou je třeba doplnit Maxwellovy rovnice o materiálové vztahy, kde jsou zavedeny parametry jako je permitivita, permeabilita a vodivost (ϵ, μ, σ). Pomocí nich se dají potom vyjádřit další fenomenologické parametry látky, jako je index lomu, index absorpce, odrazivost, propustnost atd.

2) Lorentzova-Drudeho mikroskopická teorie

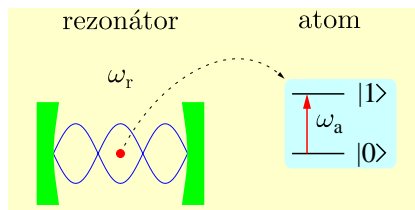
Tato teorie se snaží vysvětlit materiálové vztahy s použitím znalostí o složení pevné látky. Lokalizované elektrony vázané na dané atomy v látce se popisují jako klasické harmonické oscilátory. Naproti tomu elektrony ve vodivostním pásu kovu se mohou volně pohybovat a popisují se jako volné částice. Elektromagnetické pole potom působí jako vnější síla, která nutí elektrony nebo mřížku kmitat.

3) Semiklasický přístup

Světlo, chápáné jako elektromagnetická vlna s vlnovou délkou podstatně větší než meziatomární vzdálenosti, se popisuje klasicky. Naproti tomu pevnou látku kvantujeme a popíšeme ji jako soubor kvantových částic (kvazičástic).

4) Kvantový popis interakce

V tomto případě popisujeme jak pole, tak látku pomocí kvantové teorie. Nejjednodušším modelem tohoto typu je *Jaynesův-Cummingsův model*. Světlo se popíše jako jeden jediný mód elektromagnetického pole v rezonátoru na frekvenci ω_r . Pole tedy můžeme zapsat pomocí kvantování počtu fotonů tohoto módu. Látku potom modelujeme jako dvouhladinový systém. Lze si to představit jako jeden atom, který se může nacházet buď v základním, nebo v excitovaném stavu, viz obr. 1.1.



Obr. 1.1: Jaynesův-Cummingsův model interakce světla s látkou. Pole reprezentuje jeden mód rezonátoru (ω_r) a látku jeden atom popsáný dvouhladinovým modelem s energetickým rozdílem hladin $\hbar\omega_a$.

5) Spintronika

V současnosti se pro přenos a zpracování informace využívá elektrického náboje elektronů. Spintronika je nová odvětví elektroniky, která tuto oblast obohacuje využitím spinu elektronů.

Spin je kvantová vlastnost elementárních částic, jejíž ekvivalent klasická fyzika nezná. Jde o vlastní magnetický moment, jehož projekce do zvoleného směru nabývá u elektronu pouze dvou hodnot: $\pm\hbar/2$. Díky tomu jsou elektrony fermiony, což určuje jejich statistické chování. Spin elektronu zavedl v roce 1924 Wolfgang Pauli a formuloval známý Pauliho vylučovací princip. Každá energetická hladina může být obsazena pouze dvěma elektrony s opačně orientovaným spinem.

Nové technologie využívající spin již našly své komerční uplatnění. Využívají se ve čtecích hlavách pevných disků a v magnetických pamětech. V nedávné době se ve spintronice začalo využívat také světlo. Za běžných podmínek se vyskytují v látce obě orientace spinu elektronů se stejnou pravděpodobností. Pokud ale dokážeme injektovat do materiálu pouze elektrony s jednou hodnotou spinu, tzv. polarizované elektrony, získává materiál speciální magnetické vlastnosti. Využití interakce vhodně polarizovaného světla se spinovou polarizací elektronů poskytuje nové možnosti dalšího rozvoje rychlé elektroniky: <http://physics.mff.cuni.cz/kchfo/oe/vyzkum/opto-spintronika>.

V tomto skriptu se budeme držet popisu pomocí Maxwellových rovnic (ad 1), případně pomocí mikroskopické teorie (ad 2). I tyto klasické teorie dokáží popsat základní optické vlastnosti pevných látek a jsou předpokladem pro studium pokročilejších teorií založených na kvantové fyzice. Pouze v poslední kapitole jsme použili semiklasický přístup a pomocí kvantové mechaniky popisujeme mezipásové optické přechody elektronů mezi energetickými hladinami v pevné látce.

1.2 Optické konstanty

Vlastnosti pevných látek obvykle studujeme pomocí elektromagnetického záření v rozsahu vlnových délek λ od 1 mm po 200 nm. Jelikož daný rozsah obsahuje i viditelnou část elektromagnetického spektra, budeme bez újmy na obecnosti mluvit o elektromagnetickém záření jako o světle. Dlouhovlnná hranice mikrovlnného záření je dána konvenčně, po tuto hranici lze světlo ještě rozkládat hranolem. Krátkovlnná ultrafialová mez 200 nm je volena tak, aby vlnová délka λ byla mnohem větší než meziatomární vzdálenosti (desetiny až jednotky nanometru), a proto lze brát prostředí jako spojité.

Pro popis spektra a dalších vlastností optického pole se používají následující parametry:

rychlost ve vakuu	c	vlnčet	$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda}$
fázová rychlost	$v_f = c/n$	energie fotonu	$E = \hbar\omega = h\nu$
index lomu	n		$E[\text{eV}] = \frac{1.2398}{\lambda[\mu\text{m}]}$
vlnová délka	λ	$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$	
frekvence	$\nu = c/\lambda$	$h = 6.626\,07 \times 10^{-34} \text{ J s}$	
kruhová frekvence	$\omega = 2\pi c/\lambda$	$\hbar = 1.054\,57 \times 10^{-34} \text{ J s}$	
směr šíření	\vec{s}	$\hbar = 6.582\,12 \times 10^{-16} \text{ eV s}$	
vlnový vektor	$\vec{k} = (2\pi/\lambda)\vec{s}$	$1 \text{ eV} = 1.602\,18 \times 10^{-19} \text{ J}$	

Úplný popis elektromagnetického pole je dán kvantovou elektrodynamikou. Ta je ale pro naše účely zbytečně složitá. V následujícím textu si vystačíme s jednodušším klasickým popisem, který je založený na řešení *Maxwellových rovnic* (MR). Vektory popisující elektromagnetické pole musí splňovat tyto čtyři rovnice, které se někdy označují jako Faradayův, Ampérův a Gaussův zákon. Poslední z kvarteta bohužel postrádá takový zvučný název, popisuje pouze fakt, že v přírodě nemáme magnetické monopóly.

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\text{MR}_1) \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}, & (\text{MR}_3) \nabla \cdot \vec{D} = \rho, \\ (\text{MR}_2) \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}, & (\text{MR}_4) \nabla \cdot \vec{B} = 0. \end{array}} \quad (1.1)$$

Význam jednotlivých veličin je standardní: \vec{E} – intenzita elektrického pole, \vec{D} – elektrická indukce, \vec{H} – intenzita magnetického pole, \vec{B} – magnetická indukce, ρ – hustota náboje, \vec{j} – hustota proudu. Maxwellovy rovnice se podrobněji diskutují v dodatku C.1.

V rovnicích (1.1) je příliš mnoho proměnných, pro řešení této soustavy diferenciálních rovnic musíme doplnit další dodatečné podmínky. První doplňující podmínkou jsou tzv. *materiálové vztahy*. Ty popisují parametry prostředí, kterým se světlo šíří. Pro řešení je dále nutné zadat ještě počáteční a okrajové podmínky.

V tomto textu se většinou omezíme pouze na lineární prostředí, tj. případ slabého optického pole. V tom případě elektromagnetické pole nemá dostatečnou intenzitu, aby v materiálu vyvolalo nelineární odezvu. Materiálové vztahy jsou potom lineární

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (1.2)$$

Dále budeme často předpokládat, že prostředí je izotropní. Za těchto podmínek jsou všechny tři materiálové parametry skaláry: ε – permitivita, μ – permeabilita a σ – vodivost. V kapitole 4 provedeme zobecnění materiálových vztahů i na anizotropní prostředí. Potom budou materiálové parametry tenzory druhého řádu.

1.2.1 Materiálové vztahy

1) První materiálový vztah popisuje souvislost mezi elektrickými vektory, tj. vztah mezi vektorem elektrické indukce \vec{D} , elektrické intenzity \vec{E} a polarizací \vec{P}

$$\begin{aligned} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ &= \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

kde χ_e značí elektrickou susceptibilitu (někdy se označuje jako polarizovatelnost) a ε značí permitivitu. Relativní permitivitu můžeme zapsat jako $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$.

2) Pro magnetické veličiny máme analogicky definovaný druhý materiálový vztah mezi magnetickou indukcí \vec{B} , magnetickou intenzitou \vec{H} a magnetizací \vec{M}

$$\begin{aligned} \vec{B} = \mu \vec{H} &= \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \\ &= \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

kde χ_m je magnetická susceptibilita a μ permeabilita. Opět pro relativní permeabilitu platí $\mu_r = 1 + \chi_m$.

3) Poslední, a tedy třetí materiálový vztah, se nazývá Ohmův zákon. Ten definuje přímou úměru mezi vodivostí materiálu σ a hustotou proudu \vec{j} , který materiálem poteče po přiložení elektrického pole \vec{E} :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (1.5)$$

V celém textu budeme striktně používat soustavu jednotek SI. Pro úplnost uvedme hodnoty optických konstant permitivity a permeability pro vakuum v jednotkách SI:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}, & c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \\ \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}, & \end{array}} \quad (1.6)$$

1.2.2 Rozdělení materiálů

Podrobněji se kritériím na materiálové veličiny věnuje dodatek C.2. Různé materiály můžeme roztrdit do kategorií podle hodnot jejich elektrických a magnetických parametrů.

Elektrické vodivosti: $\sigma > 0$ vodiče
 $\sigma = 0$ dielektrika, jejich vlastnosti jsou popsány pouze parametry ε a μ

Magnetické vlastnosti: $\mu_r < 1$ diamagnetika
 $\mu_r > 1$ paramagnetika
 $\mu_r \gg 1$ feromagnetika

V tomto textu se budeme pohybovat ve viditelné oblasti spektra (400 nm až 800 nm), případně v blízkém UV a IČ. U většiny látek je v této oblasti hodnota relativní permeability $\mu_r \approx 1$, tedy na rozhraní diamagnetika a paramagnetika. Magnetizace v látce se nestíhá měnit s frekvencí optického pole řádu 10^{15} Hz. Naproti tomu magnetizace feromagnetik je konstanta nezávislá na frekvenci světla, je to tedy fixní parametr bez disperze.

Jak se dozvíme v této a následující kapitole, je pro popis látky možné zavést komplexní veličiny. Pevnou látku můžeme úplně popsat zadáním komplexní relativní permitivity $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, protože vodivost látky si lze dopočítat z imaginární složky permitivity ε_2 .

Pro optické frekvence řádu 10^{15} Hz a dielektrikum ($\sigma = 0$) platí pro index lomu $n^2 = \varepsilon_1$. Z pohledu frekvence elektrického pole, které na látku působí, dělíme optické konstanty na statické a vysokofrekvenční. $\varepsilon(0)$ je statická permitivita pro statické elektrické pole a $\varepsilon(\omega)$ označuje vysokofrekvenční permitivitu pro elektrické pole světla s frekvencí ω . Limita, ke které se permitivita blíží pro velmi velké frekvence (velmi krátké vlnové délky), je potom $\varepsilon(\infty)$.

1.3 Vlnová rovnice v absorbujícím prostředí

Světlo je elektromagnetická vlna a její šíření je tedy popsáno diferenciální rovnicí, která se označuje jako *vlnová rovnice*. Zcela obecnou vlnovou rovnici můžeme odvodit úpravou Maxwellových rovnic. Vlnovou rovnici můžeme zapsat pro libovolný vektor pole (\vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B}), obvykle se ale odvozuje pro vektor elektrické intenzity \vec{E} . Nejdřív provedeme rotaci první Maxwellovy rovnice a prohodíme pořadí derivací,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B}.$$

Dále použijeme identitu pro rozpis dvojitě rotace $\nabla \times \nabla \times \equiv \nabla(\nabla \cdot) - \Delta$. Operátor Δ značí Laplaceův operátor¹. Další odvození provedeme za podmínky homogenního materiálu bez volných nábojů ($\rho = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0$). Za rotaci magnetické intenzity dosadíme z druhé Maxwellovy rovnice

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu \nabla \times \vec{H} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Výsledek zapíšeme v obvyklém tvaru pro vlnovou rovnici pro vektor intenzity elektrického pole

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon \mu} \Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = 0.} \quad (1.7)$$

Tato rovnice se někdy označuje jako *telegrafní rovnice*, od běžné vlnové rovnice se liší tím, že má navíc člen s první derivací podle času, který popisuje ztráty.

Řešení této vlnové rovnice se hledá obvykle ve tvaru monochromatické rovinné vlny s frekvencí ω , $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$. Exponenciální zápis je velmi výhodný pro zjednodušení matematických výpočtů. Elektrické pole je zde zapsané pomocí komplexního výrazu, pokud nás bude zajímat měřitelná velikost, musíme spočítat reálnou část tohoto komplexního vektoru. Toto zjednodušení používáme v celém textu tohoto skripta.

¹ Laplaceův operátor: $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Více viz Dodatek A

Systém rovinných vln tvoří úplný systém funkcí, a proto je možné jakýkoliv tvar elektrického pole zrozsadit do řady rovinných vln. Pro rovinnou vlnu můžeme snadno napočítat derivace $\vec{E}(\vec{r}, t)$ podle času i podle prostorových souřadnic a dosadit do telegrafní rovnice

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow -i\omega, & \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow ik_x \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &\rightarrow -\omega^2, & \frac{\partial^2}{\partial x^2} &\rightarrow -k_x^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\omega^2 - i\omega \frac{\sigma}{\varepsilon} + \frac{k^2}{\varepsilon\mu} = 0.$$

Tento výraz můžeme upravit na rovnici

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \mu\varepsilon \left(1 + \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon} \right) = \frac{\tilde{N}^2}{c^2}. \quad (1.8)$$

Řešením vlnové rovnice v bezztrátovém prostředí vyjde, že podíl vlnového vektoru a frekvence dává převrácenou hodnotu rychlosti šíření, což se rovná podílu indexu lomu a rychlosti světla ve vakuu, $k/\omega = 1/v_f = n/c$. Tento typický vztah pro podíl vlnového vektoru \vec{k} a frekvence ω můžeme získat i ze vztahu (1.8) odvozeného z telegrafní rovnice pro absorbující prostředí, pokud zavedeme *komplexní index lomu* a *komplexní relativní permitivitu* následujícími vztahy

$$\boxed{\tilde{N}^2 = \mu_r \left(\varepsilon_r + \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0} \right) = \mu_r \tilde{\varepsilon}}, \quad \text{kde } \tilde{N} = n + i\kappa, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}. \quad (1.9)$$

n je obvyklý index lomu a κ je index extinkce, který odpovídá za tlumení neboli absorpci daného materiálu.

1.3.1 Relace mezi komplexními parametry

Pro nově definovaný komplexní index lomu a komplexní permitivitu si můžeme zapsat následující relace

$$\left. \begin{aligned} n^2 - \kappa^2 &= \mu_r \varepsilon_1 \\ 2n\kappa &= \mu_r \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu_r^2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) = n^4 + \kappa^4 - 2n^2 \kappa^2 + 4n^2 \kappa^2 = n^4 + \kappa^4 + 2n^2 \kappa^2 = (n^2 + \kappa^2)^2$$

a tedy

$$\left. \begin{aligned} n^2 - \kappa^2 &= \frac{\mu_r \varepsilon_1}{\mu_r \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} \\ n^2 + \kappa^2 &= \frac{\mu_r \varepsilon_1}{\mu_r \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} n^2 &= \frac{\mu_r}{2} \left(\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} + \varepsilon_1 \right), \\ \kappa^2 &= \frac{\mu_r}{2} \left(\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} - \varepsilon_1 \right). \end{aligned}$$

V nemagnetickém prostředí, kde je $\mu_r = 1$, si můžeme odvodit vztah pro kvadrát komplexního indexu lomu. Platí $\tilde{N}^2 = \tilde{\varepsilon}$, kde $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ je komplexní relativní permitivita. Mezi složkami komplexní permitivity a komplexního indexu lomu pak musí platit následující vztahy

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_r = n^2 - \kappa^2, \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = 2n\kappa. \quad (1.11)$$

1.3.2 Dynamika náboje v látce

Nyní si ukážeme, proč je možné v odvození vlnové rovnice pro homogenní prostředí zanedbat člen s $\nabla \cdot \vec{E}$. Pro dielektrikum bez volných nábojů je to zřejmé z třetí Maxwellovy rovnice. Ideální dielektrika mají nulovou vodivost, $\sigma = 0$, takže náboje v látce se nepohybují. A dále koncentrace volných nábojů je nulová.

V případě kovů je situace složitější, musíme zkoumat dynamiku náboje. Postupujeme tak, že zderivujeme třetí MR podle času a dosadíme za elektrickou indukci z druhé MR (1.1).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H} - \vec{j}) = -\nabla \cdot \vec{j} = -\nabla \cdot \sigma \vec{E}.$$

Využili jsme identitu $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$ a za proud jsme dosadili třetí materiálový vztah – Ohmův zákon (1.5). Opětovným dosazením ze třetí MR dostaneme kinetickou rovnici pro časový vývoj hustoty volného náboje ρ a její řešení

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_0 e^{-t/\tau_D}, \quad \tau_D = \varepsilon/\sigma.$$

Zde jsme zavedli τ_D jako *dielektrickou relaxační dobu*. Pro kovy s vodivostí $\sigma \approx 10^8$ S/m je relaxační čas $\tau_D \approx 10^{-19}$ s. V objemu kovového vodiče dochází téměř okamžitě k relaxaci volných nábojů. Kladné a záporné náboje se dostanou velmi rychle do rovnovážného stavu. Koncentrace celkového náboje je tedy nulová, $\rho = 0$. Relaxace výchylky nábojové hustoty v kovu se bude dále diskutovat v sekci 3.2.3.

1.4 Šíření energie

Komplexní index lomu nyní zavedeme i do exponenciály rovinné vlny. K tomu použijeme vztah pro komplexní vlnový vektor $\vec{k} = (\tilde{N}\omega/c)\vec{s}$. Dostaneme komplexní rovinnou vlnu

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(n\frac{\omega}{c}\vec{s}\cdot\vec{r} - \omega t)} e^{-\varkappa\frac{\omega}{c}\vec{s}\cdot\vec{r}}. \quad (1.12)$$

První exponenciála odpovídá za harmonické šíření vlny stejně jako v neabsorbujícím prostředí. Platí, že index lomu n mění vlnovou délku světla na λ_n a určuje rychlost šíření uvnitř materiálu ($n = \lambda/\lambda_n = c/v$).

Druhá exponenciála je zodpovědná za tlumení, což si nyní objasníme. Energie, kterou s sebou světlo nese, je dána velikostí Poyntingova vektoru \vec{S} . Ten je definován jako

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \propto e^{-2\varkappa\frac{\omega}{c}\vec{s}\cdot\vec{r}}. \quad (1.13)$$

Zde jsme využili toho, že oba vektory \vec{E} i \vec{H} mají stejný exponenciální tvar (1.12). V Poyntingově vektoru je proto exponenciála v kvadrátu (na druhou). Při šíření světla v absorbujícím prostředí ve směru osy z bude klesat hustota energie w podle vztahu

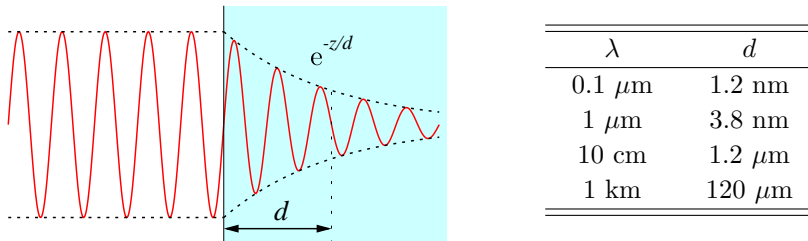
$$w = w_0 e^{-\alpha z}.$$

Tento vztah nám definuje *absorpční koeficient* α , který vyjádříme pomocí (1.13)

$$\alpha = \frac{2\omega\varkappa}{c} = \frac{4\pi\varkappa}{\lambda}. \quad (1.14)$$

Exponenciální pokles intenzity světla se správným absorpčním koeficientem dostaneme stejně i pokud použijeme jinou úvahu. Absorbovaná energie musí být rovna Joulovým ztrátám, $Z = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2$. I zde vyjde po dosazení za elektrické pole tlumení s odvozeným koeficientem α . V neabsorbujícím prostředí pak samozřejmě musí platit $\alpha = 0$, $\varkappa = 0$, $\sigma = 0$.

Př. 1.1: Skin-efekt pro měď: Skin-efekt dostal svůj název podle skutečnosti, že se vysokofrekvenční elektromagnetické pole šíří po povrchu vodivých předmětů. Hloubku, do které pole proniká, můžeme popsat pomocí parametru d . V této hloubce klesne intenzita dopadajícího světla na hodnotu $1/e$ (jednu étinu) původní energie, viz obr. 1.2. V kovech je typicky vodivost vysoká. Pro měď je její hodnota $\sigma = 6 \times 10^7$ S/m.



Obr. 1.2: Skin-efekt v mědi.

Uvažujme jednoduchou geometrii podle obr. 1.2. Lineárně polarizované světlo se šíří jako rovinná vlna podél osy z , elektrické pole má směr osy \vec{x} a magnetické pole má směr osy \vec{y} . Při řešení vyjdeme z Maxwellových rovnic a materiálových vztahů,

$$\nabla \times \vec{j} = \nabla \times \sigma \vec{E} = -\sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \omega \sigma \vec{B} = \omega \sigma \mu \vec{H}.$$

V naší geometrii má elektrické pole směr osy \vec{x} a tedy i proud má nenulovou pouze x -ovou složku, proto můžeme přepsat předešlou vektorovou rovnici pouze pro jednu složku,

$$\frac{d}{dz}j_x = \omega\sigma\mu H_y. \quad (1.15)$$

Dále využijeme toho, že ve vodiči je dominantní proud volných nábojů a posuvný proud můžeme zanedbat,

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{H} \quad \Rightarrow \quad j_x = -\frac{d}{dz}H_y.$$

Tento výraz dosadíme do rovnice (1.15), kterou zderivujeme podle z . Dostaneme diferenciální rovnici pro proud,

$$\frac{d^2}{dz^2}j_x = -\omega\sigma\mu j_x.$$

Řešením této diferenciální rovnice je harmonická funkce násobená tlumící exponenciálou $e^{-z/d}$. Z diferenciální rovnice vyplývá velikost hloubky d průniků elektromagnetického pole,

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi c\sigma\mu}}. \quad (1.16)$$

Tabulka spočtených hodnot d pro elektromagnetické pole s různou vlnovou délkou je spolu s nákresem tlumené vlny zobrazena v obr. 1.2.

1.5 Alternativní možnosti zavedení komplexních veličin

Existují různé způsoby zavedení komplexních veličin.

1) První způsob jsme si ukázali pro komplexní permitivitu $\tilde{\epsilon} = \epsilon_1 + i\epsilon_2$, viz str. 9.

Uveďme si další dva používané způsoby zavedení. Vyjdeme z druhé MR, kde za elektrickou indukci dosadíme materiálový vztah $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0\vec{E} + \epsilon_0\chi_e\vec{E}$.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_0\chi_e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.17)$$

Všechny členy na pravé straně mají význam hustoty proudu. První člen \vec{j} popisuje hustotu proudu volných nábojů, druhý člen $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ představuje Maxwellův proud, který je nenulový i ve vakuu. Poslední člen na pravé straně,

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \epsilon_0\chi_e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

značí posuvný proud. Polarizace v látce vzniká vzájemným posunem vázaných nábojů. Rovnici (1.17) upravíme na tvar

$$\nabla \times \vec{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} + \epsilon_0\chi_e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \sigma\vec{E} + \epsilon_0\chi_e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.18)$$

Pro harmonické pole můžeme opět nahradit derivace podle času: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$.

2) Vztah (1.18) můžeme převést na jednoduchou MR, pokud zavedeme *komplexní vodivost* $\tilde{\sigma}$:

$$\nabla \times \vec{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \sigma\vec{E} - i\omega\epsilon_0\chi_e\vec{E} = \tilde{\sigma}\vec{E}.$$

Tato komplexní vodivost má složky

$$\tilde{\sigma} = \sigma_1 + i\sigma_2, \quad \text{kde} \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma, \\ \sigma_2 &= -\omega\epsilon_0\chi_e. \end{aligned}$$

3) Vztah (1.18) můžeme zjednodušit také zavedením *komplexní susceptibility* $\tilde{\chi}_e$:

$$\nabla \times \vec{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \left(\frac{-\sigma}{i\omega} + \varepsilon_0 \chi_e \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \left(\chi_e + \frac{i\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \tilde{\chi}_e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Komplexní susceptibilita má tedy tvar

$$\tilde{\chi}_e = \chi_e + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}.$$

1.5.1 Vzájemné vztahy komplexních veličin

V předchozím textu jsme si odvodili následující komplexní optické veličiny:

index lomu	$\tilde{N} = n + i\kappa$
relativní permitivita	$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$
vodivost	$\tilde{\sigma} = \sigma_1 + i\sigma_2$
elektrická susceptibilita (polarizovatelnost prostředí)	$\tilde{\chi}_e = \chi_1 + i\chi_2$

Vztahy pro výpočet složek komplexní permitivity ze složek komplexní vodivosti mají tvar

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1 + \chi_e = 1 + \frac{1}{\omega \varepsilon_0} (\omega \varepsilon_0 \chi_e) = 1 - \frac{\sigma_2}{\omega \varepsilon_0}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\omega \varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Z těchto relací vyplývají vztahy pro výpočet komplexní vodivosti z komplexní permitivity

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= (1 - \varepsilon_1) \varepsilon_0 \omega, \\ \sigma_1 &= \omega \varepsilon_0 \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Na závěr si uvedme vztahy, které nám umožní přecházet mezi komplexní susceptibilitou a komplexní vodivostí.

$$\tilde{\varepsilon} = 1 + \tilde{\chi}_e = 1 + i \frac{\tilde{\sigma}}{\varepsilon_0 \omega} = 1 + i \frac{1}{\varepsilon_0 \omega} (\sigma_1 + i\sigma_2).$$

1.5.2 Výpočet absorpčního koeficientu

Na závěr kapitoly si ukážeme jako příklad, jak využít komplexní veličiny pro výpočet absorpčního koeficientu α . Ten si můžeme vyjádřit pomocí složek tří různých komplexních veličin:

$$\begin{aligned} \text{imaginární složky indexu lomu} & \quad \alpha = \frac{2\omega\kappa}{c}, \\ \text{imaginární složky permitivity} & \quad \alpha = \frac{2\omega}{c} \frac{\mu_r \varepsilon_2}{2n} = \frac{\omega \mu_r \varepsilon_2}{cn}, \\ \text{reálné části vodivosti} & \quad \alpha = \frac{\omega \mu_r}{nc} \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} = \frac{\mu_r \sigma}{nc \varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

1.6 Shrnutí

- Vektory elektromagnetického pole musí splňovat Maxwellovy rovnice, ze kterých je možné odvodit vlnovou rovnici např. pro elektrickou intenzitu \vec{E} .
- V absorbujícím prostředí budou materiálové parametry, jako je index lomu \tilde{N} nebo permitivita $\tilde{\varepsilon}$, komplexní.
- Existuje několik možných způsobů zavedení komplexních optických veličin. Všechny různé přístupy ale popisují stejnou realitu, a proto jsou vzájemně ekvivalentní.
- Pokud známe například komplexní permitivitu, můžeme si všechny další komplexní veličiny dopočítat.

1.7 Příklady

Př. 1.2: Permittivita vakua: Ve vztahu

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

jsou rychlost světla ve vakuu c a permeabilita vakua μ_0 tabelované veličiny. S jejich použitím dopočítejte velikost permitivity vakua ϵ_0 .

Nápověda: Použijte seznam konstant na konci této knihy, str. 177.

Př. 1.3: Jednotky permitivity a permeability:

Proveďte rozměrovou analýzu a ukažte, že jednotka permitivity je $\text{As}/(\text{Vm})$ a jednotkou permeability je $\text{Vs}/(\text{Am})$.

Př. 1.4: Parametry v SI:

Proveďte rozměrovou analýzu a ukažte, jakou velikost má výraz $1/(c\epsilon_0)$.

Řešení: [377 Ω]

Př. 1.5: Vlnová rovnice se zdroji:

Odvoďte, jak by vypadala vlnová rovnice (1.7) v materiálu s volnými náboji, tedy $\rho \neq 0$.

Nápověda:

Postupujte standardně výpočtem rotace z rotace vektoru \vec{E} a dosaďte Maxwellovy rovnice.

Řešení:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon \mu} \Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon \mu} \nabla \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right).$$

Př. 1.6: Dielektrická relaxační doba:

Vypočtete dielektrickou relaxační dobu τ_D pro křemíkový polovodič. Za jak dlouho klesne koncentrace výchyly volného náboje na poloviční hodnotu, $\rho(t = ?) = \rho_0/2$?

Nápověda: Využijte vztahů ze sekce 1.3.2, do kterých dosadíte hodnoty pro čistý křemík:

$\epsilon_{\text{Si}} = 1.04 \times 10^{-10} \text{ F/m}$, $\sigma_{\text{Si}} = 4.35 \times 10^{-4} \text{ S/m}$.

Řešení: [$\tau_D = 2.4 \times 10^{-7} \text{ s}$, $t = \ln(2) \tau_D$]

Př. 1.7: Skin-efekt pro křemík:

Vypočtete hloubku průniku elektromagnetického pole o vlnové délce 550 nm do materiálu křemíku ($\sigma_{\text{Si}} = 1.56 \cdot 10^{-3} \text{ S/m}$) a do skla ($\sigma_{\text{sklo}} = 10^{-18} \text{ S/m}$).

Př. 1.8: Skin-efekt pro měď:

V naší rozvodné síti se používá frekvence $f = 50 \text{ Hz}$. Jaká je hloubka vrstvy, kterou se šíří elektrické pole v měděném vodiči? Použijte parametry mědi uvedené v textu kapitoly nad vztahem (1.16). Diskutujte ideální průřez vodiče pro minimalizaci odporu.



Tento krystal je umístěn na zeměpisné pozici: $50^{\circ}04'44.755''\text{N}$, $14^{\circ}25'50.506''\text{E}$.
Jde o kubický krystal kuchyňské soli NaCl.

Kapitola 2

Vztahy mezi optickými veličinami

Obsah kapitoly

2.1	Podmínky na materiálové vztahy	15
2.1.1	Pět vlastností materiálových vztahů	16
Př. 1:	Ohmův zákon	17
Př. 2:	Elektrický materiálový vztah	17
2.2	Kramersovy-Kronigovy disperzní relace	17
2.2.1	Vlastnosti funkce komplexní proměnné	17
2.2.2	Odvození Kramersových-Kronigových relací	18
2.2.3	Alternativní tvar Kramersových-Kronigových relací	19
2.2.4	Příklady Kramersových-Kronigových relací	20
2.2.5	Fyzikální pohled na Kramersovy-Kronigovy relace	21
2.3	Šíření záření přes rozhraní	21
2.3.1	Fresnelovy vztahy pro kolmý dopad	22
2.3.2	Kramersovy-Kronigovy relace pro reflektivitu	22
2.3.3	Vektorové vztahy elektromagnetického pole	23
2.4	Shrnutí	23
2.5	Příklady	24

V této kapitole si podrobně probereme vlastnosti materiálových vztahů popsaných komplexními veličinami.

2.1 Podmínky na materiálové vztahy

V literatuře se vyskytuje několik způsobů zavedení Fourierovy transformace (FT), která dává do vztahu časový vývoj nějaké funkce $f(t)$ a její spektrum $f(\omega)$. V tomto textu se budeme striktně držet následující definice FT:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{i\omega t}, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (2.1)$$

Zopakujme si materiálové vztahy mezi jednotlivými složkami pole včetně Ohmova zákona:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad \vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E},$$

nebo-li

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}.$$

Tyto vztahy mají na pravé straně intenzitu představující vnější sílu a na levé straně je indukovaná odezva materiálu reprezentovaná např. polarizací, magnetizací nebo proudem.

Mohli bychom očekávat, že indukovaná změna látky bude synchronní s vnější silou. Toto platí pouze pro pomalu se měnící vnější síly. Pro optické frekvence budeme muset použít obecnější vztah, který bere v potaz konečnou dobu relaxace látky.

2.1.1 Pět vlastností materiálových vztahů

Nyní si shrneme pět základních kritérií, které nás budou na materiálových vztazích zajímat:

- 1. Nezávislost elektrických a magnetických složek** – elektrická indukce \vec{D} je funkcí elektrického pole \vec{E} , ale není funkcí magnetického pole \vec{H} . Podobně magnetická indukce \vec{B} je funkcí magnetické intenzity \vec{H} , ale není funkcí elektrické intenzity \vec{E} .
- 2. Lokálnost** – odezva materiálu je funkcí vnější síly jen v tom samém místě, není třeba započítávat příspěvky z celého prostoru.
- 3. Linearita** – jestliže je elektrická indukce závislá na elektrické intenzitě lineárně, tj. $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, považujeme daný proces za lineární. Pokud závislost již lineární není, musíme započítat členy druhého, popřípadě vyššího řádu (např. Kerrův jev). K nelineárním efektům dochází typicky při použití silného optického pole, např. laseru, kdy se velikost elektrického pole světla začíná blížit hodnotě elektrostatického pole mezi ionty v pevné látce.
- 4. Izotropní × anizotropní materiál** – Materiál označujeme jako izotropní, pokud má ve všech směrech stejné vlastnosti. V tomto případě má vektor odezvy materiálu stejný směr jako budící pole. Optické veličiny jako permitivita ϵ je pro izotropní materiály skalár. Materiálové vztahy vyjadřují souvislost dvou vektorů, což v obecném případě popisuje tenzor. Prostředí popsané tenzorem má v různých směrech různé vlastnosti a označujeme ho jako anizotropní (viz kap. 4).
- 5. Kauzalita** – Pro pomalu se měnící pole by platila podmínka synchronnosti, kdy indukovaná změna $\vec{D}(t)$, $\vec{P}(t)$ nebo $\vec{j}(t)$ je reakcí na příčinu $\vec{E}(t)$. Obdobně změny $\vec{B}(t)$, $\vec{M}(t)$ jsou reakcí na příčinu $\vec{H}(t)$. Obecnější podmínka kauzality popisuje to, že indukovaná změna závisí na velikosti budící síly nejen v čase t , ale i v časech předešlých. Označme si nyní $F(\tau)$ *funkci odezvy* materiálu (response, paměťová funkce, viz obr. 2.1) pro výpočet polarizace \vec{P} indukované elektrickým polem podle vzorce

$$\vec{P}(t) = \int_{-\infty}^t F(t - \xi) \vec{E}(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} F(\tau) \vec{E}(t - \tau) d\tau. \quad (2.2)$$

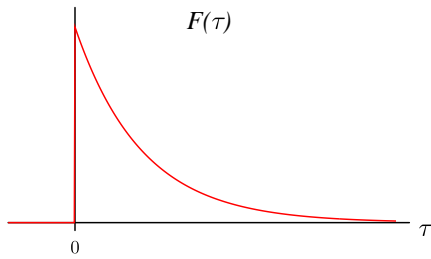
Integrál jsme upravili substitucí $t - \xi = \tau$, $-d\xi = d\tau$. Díky nulovosti funkce F pro $t < 0$ můžeme integrační meze od 0 do ∞ protáhnout od $-\infty$ do $+\infty$ a integrál přejde na konvoluci budící síly a funkce odezvy materiálu.

Vnější pole můžeme rozepsat do harmonických složek, $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$, potom můžeme přejít pomocí FT ke spektru všech veličin tohoto materiálového vztahu

$$\begin{aligned} \vec{P}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}(t) e^{i\omega t} dt = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(t - \xi) \vec{E}(\xi) e^{i\omega t} dt d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\xi) e^{i\omega \xi} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} F(t - \xi) e^{i\omega(t - \xi)} dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\xi) e^{i\omega \xi} d\xi}_{\vec{E}(\omega)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau}_{F(\omega)} \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{P}(\omega) = F(\omega) \vec{E}(\omega)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Pokud se vnější síla (\vec{E}) mění pomalu a odezva materiálu je synchronní, potom můžeme materiálový vztah pro daný čas popsat takto: $\vec{P}(t) = F(t) \vec{E}(t)$. Pokud je ale frekvence vnější síly příliš vysoká, je potřeba zapsat odezvu pomocí podmínky kauzality (2.2) a dojdeme ke vztahu pro frekvenční složky.

Věta: Přechodem ke spektru pomocí Fourierovy transformace zmizí konvoluce. Materiálové vztahy můžeme tedy zapsat zase jako prosté násobení (2.3) jen s tím rozdílem, že v tomto případě násobíme fourierovské (frekvenční, spektrální) komponenty polí!



Obr. 2.1: Tvar funkce odezvy $F(\tau)$. Pro $\tau < 0$ je nulová, látka není ovlivněna hodnotou vnější síly v budoucnosti. Pro $\tau = 0$ má maximum a s rostoucí hodnotou τ klesá k nule. Látka je ovlivněna nejvíce aktuální hodnotou vnější síly a hodnotami v časech předešlých méně a méně.

Funkce $F(\omega)$ je obecně komplexní, udává disperzi dané vlastnosti.

Př. 2.1: Ohmův zákon: Mějme harmonické elektrické pole s frekvencí ω , které si zapíšeme v exponenciálním tvaru $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$. Zajímá nás vodivost a průběh hustoty proudu. Použijeme zápis kauzálního materiálového vztahu podle (2.2).

$$\begin{aligned} \vec{j}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\tau) \vec{E}(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\tau) \vec{E}_0 e^{-i\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= \vec{E}(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau}_{\sigma(\omega)} = \sigma(\omega) \vec{E}(t). \end{aligned}$$

Z výsledku je patrné, že pokud na látku působí pouze monochromatické pole, tj. pole s jedinou frekvencí, potom je časová odezva úměrná odpovídající spektrální složce funkce odezvy. V konkrétním případě Ohmova zákona může být vodivost $\sigma(\omega)$ komplexní a v tomto případě je proud (odezva) fázově zpožděný vůči budícímu elektrickému poli.

Př. 2.2: Elektrický materiálový vztah: Pokud budeme řešit kauzální materiálový vztah pro elektrické veličiny v soustavě SI, nesmíme zapomenout na permitivitu vakua. Přechodem ke spektru Fourierovou transformací dostaneme vztah pro spektrální složky polarizace a elektrické intenzity,

$$\vec{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}(\omega) = \varepsilon_0 [\varepsilon_r(\omega) - 1] \vec{E}(\omega).$$

2.2 Kramersovy-Kronigovy disperzní relace

2.2.1 Vlastnosti funkce komplexní proměnné

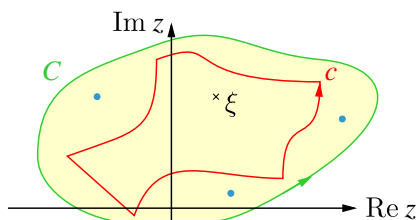
V následujících výpočtech budeme potřebovat znalost matematiky z oblasti funkce komplexní proměnné. Tato problematika je podrobně vysvětlena např. v učebnici *Matematický aparát fyziky* od J. Kvasnicy [5] (kap. VI). Centrální vztah, ze kterého se vychází, je

Cauchyův teorém: Integrál po uzavřené křivce c v komplexní rovině z funkce $f(z)$, která je analytická na a uvnitř této křivky, je nulový.

$$\oint_c f(z) dz = 0. \quad (2.4)$$

Z tohoto teorému vyplývá ještě zajímavější tvrzení, a to, že funkční hodnota v nějakém bodě uvnitř křivky v komplexní rovině se dá spočítat pomocí integrálu po této křivce. Opět funkce musí být analytická a křivka musí být alespoň po částech hladká a uzavřená, viz obr. 2.2. Tato *Cauchyova formule* se dá matematicky zapsat takto:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z) dz}{z - \xi}. \quad (2.5)$$



Obr. 2.2: Zobrazení výpočtu integrálu podle Cauchyovy formule (2.5). Červeně je naznačena integrační křivka c , křížek značí bod ξ komplexní roviny a modré tečky představují místa, kde není funkce $f(z)$ analytická.

Pokud naše funkce $f(z)$ není v nějakém bodě ξ analytická (má v tomto bodě singularitu), potom definujeme míru, která charakterizuje chování funkce v tomto bodě. Cauchy nazval tuto míru jako *reziduum* funkce v tomto bodě. Vypočítá se pomocí integrálu

$$\text{Res} f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz,$$

kde se integruje po kružnici se středem v bodě ξ a s dostatečně malým poloměrem. My budeme v našem textu potřebovat vypočítat reziduum pouze nejjednodušších funkcí, např.

$$\text{Res} \left(\frac{1}{z - \xi} \right) = 1.$$

Pokud má nějaká funkce v komplexní rovině singularity, použijeme pro výpočet křivkového integrálu v této ploše matematickou formuli, která se vztahuje ke křivce C na obr. 2.2.

Reziduová věta: Mějme uzavřenou křivku C v oblasti, kde je funkce $f(z)$ analytická kromě izolovaných pólů této funkce. Integrál z funkce $f(z)$ po této křivce je roven $2\pi i$ násobku sumy reziduí uzavřených uvnitř této křivky.

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}_i[f(z)]. \quad (2.6)$$

Abychom dostali naše reálné veličiny do komplexní roviny, zavedeme formálně komplexní frekvenci $\tilde{\omega} = \omega_1 + i\omega_2$. Nyní můžeme zapsat funkci odezvy jako funkci komplexní proměnné a spočítat Fourierovu transformaci podle vztahu (2.1)

$$F(\tilde{\omega}) = F(\omega_1 + i\omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) e^{i\tilde{\omega}\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) e^{i\omega_1\tau} e^{-\omega_2\tau} d\tau.$$

Tato funkce osciluje s frekvencí ω_1 a exponenciálně klesá s parametrem $\omega_2 \rightarrow +\infty$.

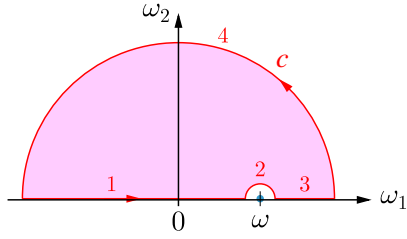
Pokud chceme použít Cauchyův teorém na funkci odezvy, musíme se ujistit, že platí všechny nutné předpoklady, které zde shrneme v pěti bodech:

1. funkce je integrovatelná, $\int |F(\tau)| d\tau < \infty$;
2. spektrum pro reálnou frekvenci získáme jako limitu, $F(\omega) = \lim_{\omega_2 \rightarrow 0^+} F(\omega_1 + i\omega_2)$;
3. existuje derivace této funkce alespoň v horní polorovině, tj. pro $\omega_2 > 0$;
4. limita v nekonečnu reálné osy je konečná hodnota, $\lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} F(\omega_1 + i\omega_2) \equiv F(\infty)$;
5. limita v nekonečnu imaginární osy je rovna nule, $\lim_{\omega_2 \rightarrow \infty} F(\omega_1 + i\omega_2) = 0$.

2.2.2 Odvození Kramersových-Kronigových relací

Kramersovy-Kronigovy relace (KKR) získáme tak, že si spočítáme integrál po křivce zobrazené na obr. 2.3 z funkce, která je uvnitř této křivky analytická. Podle (2.4) je tedy takový integrál nulový,

$$\oint_c \frac{F(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega} = \int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4 = 0, \quad \tilde{\omega} = \omega_1 + i\omega_2. \quad (2.7)$$



Obr. 2.3: Integrační křivka pro integrál (2.7) je zobrazena červeně. Místo, kde není integrovaná funkce analytická, je ω na reálné ose. Tomuto místu se integrační křivka vyhýbá.

Integrál lze rozepsat na součet čtyř příspěvků získaných integracemi podél čtyř hladkých částí křivky. Druhý integrál dává hodnotu záporné poloviny rezidua integrované funkce, což se rovná $-\imath\pi F(\omega)$. Poloviny proto, že se integruje po půlkruhu kolem singulárního bodu a záporné znaménko odpovídá opačné orientaci pohybu kolem singulárního bodu. Poslední, čtvrtý integrál se bude hodnotou blížit k nule, jak se bude zvětšovat poloměr velkého polokruhu k nekonečnu. První a třetí integrál nám dají v součtu integrál podél reálné osy. Dosazením do (2.7) získáme rovnost, která platí ve smyslu hlavní hodnoty

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} = \imath\pi F(\omega),$$

kde $\bar{\omega}$ je reálná integrační proměnná. S použitím tohoto vztahu si již můžeme zapsat první ze dvou používaných tvarů KKR

$$\boxed{\operatorname{Re}F(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im}F(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}, \quad \operatorname{Im}F(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}F(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}. \quad (2.8)}$$

Jak se nám podařilo ukázat, z vlastností funkce komplexní proměnné vyplývá, že reálná a imaginární část funkce odezvy jsou integrálně závislé. Známe-li například spektrum reálné části této veličiny, můžeme dopočítat hodnotu imaginární části (např. pro známý index lomu můžeme dopočítat index extinkce nebo absorpci).

Funkce odezvy např. $\chi(t)$ k sobě váže reálné veličiny $E(t)$ a $P(t)$, a proto je také reálnou funkcí času. Fourierova transformace reálné funkce má některé zajímavé vlastnosti, které vyplývají přímo z definičního vztahu (2.1)

$$\widetilde{\chi(\omega)} = \chi_1(\omega) + \imath\chi_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \chi(t) e^{\imath\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \chi(t) [\cos(\omega t) + \imath \sin(\omega t)].$$

Protože funkce sinus je lichá a kosinus je sudá, platí pro spektrální složky následující symetrický vztah: $\chi^*(\omega) = \chi(-\omega)$. Pro jakoukoliv funkci odezvy tedy platí, že reálná část je sudou funkcí a imaginární část je lichou funkcí frekvence. To můžeme zapsat následovně

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}F(\omega) &= \operatorname{Re}F(-\omega) \\ \operatorname{Im}F(\omega) &= -\operatorname{Im}F(-\omega) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F^*(\omega) = F(-\omega). \quad (2.9)$$

2.2.3 Alternativní tvar Kramersových-Kronigových relací

V literatuře se můžeme setkat se dvěma verzemi těchto relací. Ze vztahů (2.8) si proto nyní odvodíme druhý tvar. Integrál rozdělíme na kladnou a zápornou část, integrační meze posuneme do kladné poloosy a obě části sečteme. To provedeme nejprve pro reálnou část:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}F(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Im}F(\xi)}{\xi - \omega} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}F(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} \\ \xi = -\bar{\omega} \quad &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}F(\bar{\omega})}{\bar{\omega} + \omega} d\bar{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}F(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}F(\bar{\omega})[\bar{\omega} - \omega + \bar{\omega} + \omega]}{(\bar{\omega} + \omega)(\bar{\omega} - \omega)} d\bar{\omega}. \end{aligned}$$

Při odvození jsme použili vztah (2.9). Reálnou část funkce můžeme tedy spočítat podle relace

$$\boxed{\operatorname{Re}F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{\omega} \operatorname{Im}F(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}.} \quad (2.10)$$

Obdobně můžeme odvodit druhý tvar KKR pro výpočet imaginární složky komplexní funkce.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}F(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Re}F(\xi)}{\xi - \omega} d\xi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}F(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} \\ \xi = -\bar{\omega} \quad &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}F(\bar{\omega})}{\bar{\omega} + \omega} d\bar{\omega} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}F(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}F(\bar{\omega})[\bar{\omega} - \omega - \bar{\omega} - \omega]}{(\bar{\omega} + \omega)(\bar{\omega} - \omega)} d\bar{\omega}. \end{aligned}$$

Pro imaginární část funkce dostaneme finální relaci

$$\boxed{\operatorname{Im}F(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}F(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}.} \quad (2.11)$$

2.2.4 Příklady Kramersových-Kronigových relací

KKR lze napsat pro různé funkce odezvy. Ukážeme si několik příkladů pro komplexní susceptibilitu $\tilde{\chi}(\omega)$, komplexní permitivitu $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ a pro komplexní index lomu $\tilde{N}(\omega)$.

Komplexní susceptibilita:

$$\chi_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi \chi_2(\xi)}{\xi^2 - \omega^2} d\xi, \quad \chi_2(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\chi_1(\xi)}{\xi^2 - \omega^2} d\xi.$$

Komplexní permitivita:

$$\varepsilon_1(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi \varepsilon_2(\xi)}{\xi^2 - \omega^2} d\xi, \quad \varepsilon_2(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_1(\xi) - 1}{\xi^2 - \omega^2} d\xi, \quad (2.12)$$

kde jsme využili vztah $\tilde{\varepsilon} = 1 + \tilde{\chi}$.

Komplexní index lomu:

$$n(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi \varkappa(\xi)}{\xi^2 - \omega^2} d\xi, \quad \varkappa(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{n(\xi) - 1}{\xi^2 - \omega^2} d\xi. \quad (2.13)$$

Při výpočtu reálné složky z imaginární pomocí KKR je nejdůležitější chování imaginární složky blízko hledané frekvence ω . S rostoucí vzdáleností od této frekvence je vliv příspěvku imaginární složky do integrálu utlumen s faktorem $\xi/(\xi^2 - \omega^2)$. Obdobně to platí i pro výpočet imaginární složky z reálné.

Sumační pravidla na optické parametry

Uvažujme polovodič s šířkou zakázaného pásu $E_g = \hbar\omega_g$. Vypočítáme hodnotu statické permitivity nejprve podle vztahu (2.12) a potom podle vztahu (2.13). Využijeme toho, že světlo s energií menší než šířka zakázaného pásu není absorbováno. To znamená, že pro frekvence $\omega < \omega_g$ je $\varepsilon_2 = \varkappa = 0$. Proto můžeme posunout počátek integrace z nuly na ω_g .

$$\blacksquare \quad (2.12) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1(0) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_g}^{\infty} \frac{\varepsilon_2(\xi)}{\xi} d\xi,$$

$$\blacksquare \quad (2.13) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\varepsilon_1(0)} = n(0) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_g}^{\infty} \frac{\kappa(\xi)}{\xi} d\xi.$$

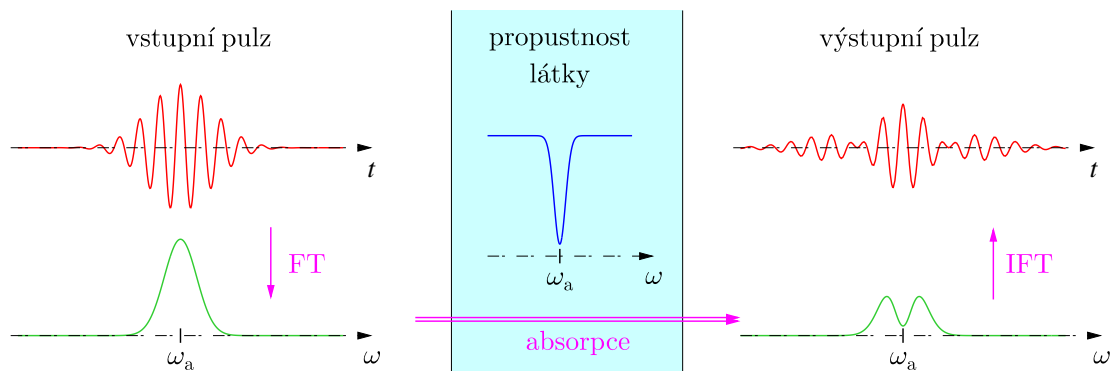
Pokud nám oba vztahy dají stejné číslo statické permitivity, potom je v integrační oblasti zahrnuto vše podstatné. Pokud jsou výsledky obou výpočtů různé, musíme hledat zakopaného psa.

Empirické vztahy

U většiny opticky zajímavých dielektrik potřebujeme znát profil indexu lomu v celé viditelné oblasti spektra, ve které je ale absorpce velmi malá. Proto se v tabulkách uvádějí mocninné rozvoje, které závislost popisují dobře v celém zkoumaném rozsahu, $\varepsilon_1(\omega) = 1 + a_1 + a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + \dots$. Často se přechází od závislosti na frekvenci k závislosti na vlnové délce a tento vztah pro výpočet permitivity se potom označuje jako Cauchyho rovnice.

2.2.5 Fyzikální pohled na Kramersovy-Kronigovy relace

Uvažujme nyní pro jednoduchost interakci světla s látkou, která má velmi úzkou absorpční čáru na frekvenci ω_a . Pokud by látkou procházelo harmonické světlo s touto frekvencí, bude docházet k absorpci úměrné tloušťce materiálu a lze to popsat pouhým snížením intenzity elektromagnetického pole na výstupu. Světlo s jinou frekvencí by se neabsorbovalo. Pokud ale na látku dopadne časově omezený pulz, např. s gaussovským profilem, bude jeho spektrum popsáno také gaussovskou funkcí s konečnou šířkou. Spektrum po průchodu látkou můžeme spočítat tak, že původní spektrum vynásobíme spektrem propustnosti látky, jak to ukazuje obr. 2.4. Pomocí inverzní Fourierovy transformace (IFT) můžeme spočítat časový průběh prošlého pulzu. Na frekvenci odpovídající rezonanční absorpci látky bude díky KKR silná disperze. Díky tomu se průchodem látkou konečné tloušťky jednotlivé spektrální složky světla vůči sobě časově rozposunou. Abychom získali správný časový průběh, museli bychom započítat i tento efekt.

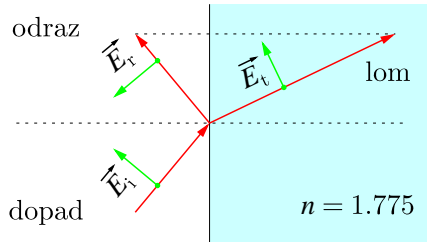


Obr. 2.4: Absorpce pulzu látkou: zeleně je zakresleno spektrum světla a červeně časový průběh amplitudy elektrického pole. Modře je zakresleno spektrum propustnosti látky.

2.3 Šíření záření přes rozhraní

Optické pole může s pevnou látkou interagovat mnoha různými způsoby. Různé interakce jsou typické pro různé spektrální oblasti. Studium interakce látky s optickým polem dalo vzniknout celé řadě experimentálních metod, které se dnes rutinně používají. Pro šíření rovinné vlny v prostředí s absorpcí jsme zavedli optické konstanty jako komplexní veličiny závislé na frekvenci optického pole ω . Pro všechny zavedené komplexní veličiny popisující optické vlastnosti látky musí platit Kramersovy-Kronigovy relace. Na tomto principu je založena také metoda studia pevných látek pomocí měření spekter odrazivosti. Pro měření tlouštěk a optických parametrů tenkých vrstev se často používá *elipsometrie*, při které se sleduje změna polarizace při odrazu. Díky tomu se získá komplexní popis parametrů prostředí, neboť se měří

současně amplituda i fáze. Často se používá konfigurace kolmého dopadu světla na povrch studovaného krystalu.



Obr. 2.5: Odraz a lom světla na rovinném rozhraní vzduchu a dielektrika s daným indexem lomu. Zobrazená geometrická konstrukce odpovídá Snellovu zákonu lomu.

2.3.1 Fresnelovy vztahy pro kolmý dopad

V základním kurzu optiky se odvozují vztahy pro amplitudovou odrazivost při dopadu záření na rovinné rozhraní dvou materiálů, které se označují jako *Fresnelovy vztahy*. Odražená amplituda elektrického pole \vec{E}_r je úměrná dopadající amplitudě pole \vec{E}_i , $\vec{E}_r = r(\omega)\vec{E}_i$, kde *amplitudová reflektivita* (odrazivost) $r(\omega)$ je určena pouze indexem lomu. Geometrie uspořádání je naznačena na obr. 2.5. V případě kolmého dopadu na absorbující prostředí platí zcela stejný Fresnelův vztah, pouze použijeme komplexní index lomu,

$$r(\omega) = \frac{\tilde{N}(\omega) - 1}{\tilde{N}(\omega) + 1}.$$

Amplitudová odrazivost je komplexní veličina. Popisuje jednak odrazivost rozhraní, ale navíc ještě udává změnu fáze odražené vlny. Připomeňme, že pro intenzity platí vztah $I_r = |E_r|^2 = R(\omega)I_i$, kde reálnou intenzitní odrazivost $R(\omega)$ spočítáme jako kvadrát modulu amplitudové odrazivosti,

$$R(\omega) = |r(\omega)|^2, \quad r(\omega) = \sqrt{R(\omega)} e^{i\varphi(\omega)}.$$

Nejprve si spočítáme amplitudovou odrazivost jako komplexní číslo

$$r(\omega) = \frac{n + i\kappa - 1}{n + i\kappa + 1} = \frac{(n - 1 + i\kappa)(n + 1 - i\kappa)}{(n + 1)^2 + \kappa^2} = \frac{n^2 - 1 + \kappa^2 + 2i\kappa}{(n + 1)^2 + \kappa^2}. \quad (2.14)$$

Pro intenzitní odrazivost bychom mohli vypočítat kvadrát modulu posledního výrazu. Tento způsob výpočtu je ale zbytečně komplikovaný a je snazší použít matematickou rovnost pro kvadrát modulu podílu dvou komplexních čísel. Takto dostaneme rovnou finální vztah pro intenzitní odrazivost

$$R(\omega) = \frac{(n - 1)^2 + \kappa^2}{(n + 1)^2 + \kappa^2}. \quad (2.15)$$

Poslední výraz ve vztahu (2.14) se nám bude nyní hodit pro výpočet fázového posunu při odrazu na rozhraní. Tuto fázi spočítáme z podílu imaginární a reálné části amplitudové odrazivosti,

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{\text{Im}(r(\omega))}{\text{Re}(r(\omega))} = \frac{2\kappa}{n^2 + \kappa^2 - 1}.$$

2.3.2 Kramersovy-Kronigovy relace pro reflektivitu

Při kolmém dopadu budeme sledovat komplexní amplitudovou reflektivitu $r(\omega)$, která je definovaná vztahem $E_r = r(\omega)E_i$. Komplexní reflektivitu si můžeme zapsat v exponenciálním tvaru pomocí dvou reálných veličin $R(\omega)$ a fáze $\varphi(\omega)$ následovně

$$r(\omega) = \sqrt{R(\omega)} e^{i\varphi(\omega)}.$$

Pokud tento výraz zlogaritmujeme, oddělíme reálnou a imaginární část standardním způsobem a dostaneme komplexní funkci

$$\widetilde{\ln r(\omega)} = \ln \sqrt{R(\omega)} + i\varphi(\omega) = \frac{1}{2} \ln R(\omega) + i\varphi(\omega).$$

Pro tuto funkci můžeme nyní zapsat vztah daný pomocí KKR.

Komplexní reflektivita:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln R(\xi)}{\xi^2 - \omega^2} d\xi. \quad (2.16)$$

2.3.3 Vektorové vztahy elektromagnetického pole

Odvodíme si vztah pro fázi mezi vektory elektrického a magnetického pole pro rovinnou monochromatickou elektromagnetickou vlnu. Vyjdeme z první Maxwellovy rovnice,

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

S využitím komplexního zápisu rovinné monochromatické vlny snadno spočítáme derivace ($\nabla \rightarrow i\vec{k}$, $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$) a rovnice nabude tvar

$$i\vec{k} \times \vec{E} - i\omega \vec{B} = 0.$$

Vlnový vektor si zapíšeme pomocí jednotkového směrového vektoru, $\vec{k} = k\vec{s}$. Tak dostane výraz pro magnetickou indukci, který dále upravíme s pomocí magnetického materiálového vztahu

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} (\vec{s} \times \vec{E}) \quad \Rightarrow \quad \mu_0 \mu_r \vec{H} = \frac{\tilde{N}}{c} (\vec{s} \times \vec{E}).$$

Zde jsme použili výraz (1.8) pro velikost vlnového vektoru (vlnové číslo) k , $k/\omega = \tilde{N}/c$. To nám umožnilo získat vztah mezi magnetickou a elektrickou intenzitou

$$\vec{H} = \frac{n + i\kappa}{c\mu_0\mu_r} (\vec{s} \times \vec{E}) = \frac{n + i\kappa}{\mu_r} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\vec{s} \times \vec{E}).$$

Z tohoto vztahu můžeme dopočítat vzájemnou fázi ϕ mezi magnetickým a elektrickým polem,

$$\tan \phi = \frac{\kappa}{n}.$$

Ve specifickém případě, kdy se index lomu n blíží k nule, dostaneme fázový posun $\phi = \frac{\pi}{2}$. K takovým podmínkám dochází při odrazu světla na kov v oblasti plazmové hrany. Elektromagnetická vlna s takovou fází mezi elektrickým a magnetickým polem nemůže v dané látce přenášet energii.

2.4 Shrnutí

- Odezva látky na optické frekvence nemůže být synchronní, látka na tak rychlé frekvence nestíhá reagovat. Při popisu kauzální odezvy prostředí na rychlé vnější pole je proto výhodnější přejít od složitých integrálních časových závislostí k jednodušším vztahům pro spektrální složky.
- Pro převod signálů z časové oblasti do oblasti spektrální (frekvenční) slouží Fourierova transformace.
- Komplexní optické veličiny, jako index lomu ($\tilde{N} = n + i\kappa$), musí splňovat vztahy vyplývající z matematické analýzy funkce komplexní proměnné. Tyto vztahy se v optice nazývají Kramersovy-Kronigovy relace.
- Pokud známe např. imaginární složku indexu lomu κ v široké oblasti spektra, můžeme si pomocí těchto integrálních vztahů dopočítat reálnou složku n a obráceně. Tyto vztahy se používají pro komplexní index lomu, permitivitu, susceptibilitu, vodivost, reflektivitu a další.

2.5 Příklady

Př. 2.3: KKR pro komplexní reflektivitu:

V textu této kapitoly byl odvozen pouze jeden vztah z KKR pro komplexní reflektivitu (2.16). Odvoďte i druhý symetrický vztah pro výpočet intenzitní odrazivosti $R(\omega)$ ze spektra fáze $\varphi(\omega)$.

Př. 2.4: Derivace rovinné vlny:

Dokažte, že prostorové derivace komplexní amplitudy elektrického pole $\nabla \times \vec{E}$ resp. $\nabla \cdot \vec{E}$ pro případ rovinné vlny ($\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$) lze zjednodušit na výraz $i\vec{k} \times \vec{E}$ resp. $i\vec{k} \cdot \vec{E}$.

Nápověda: Odvození proveďte rozpisem do složek pole v kartézských souřadnicích. Využijte vztahů pro rozpis derivací z dodatku A.1.2.

Př. 2.5: Vektorové vztahy vektorů pole:

Dokažte transversalitu elektromagnetického pole. Neboli to, že $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{k}$.

Nápověda: Vyjděte přímo z Maxwellových rovnic a použijte výsledků předešlého příkladu.

Př. 2.6: Vztah elektrické a magnetické složky optického pole:

Určete velikost konstanty, která se získá jako podíl elektrického pole a magnetické indukce $E(t)/B(t)$ elektromagnetické vlny.

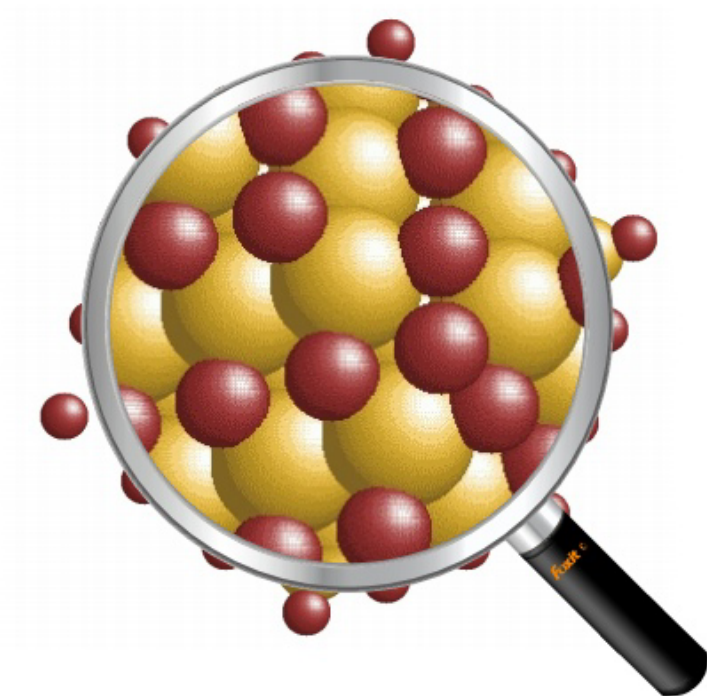
Nápověda: Postupujte podle odvození uvedeného v sekci 2.3.3.

Př. 2.7: Odraz na vodě:

Vypočtete odrazivost a fázový posun při kolmém dopadu světla o vlnové délce 400 nm, 550 nm a 700 nm na vodní hladinu.

Nápověda: Využijte hodnot n a \varkappa z následující tabulky:

λ [nm]	n	\varkappa
400	1.339	1.86×10^{-9}
550	1.333	1.96×10^{-9}
700	1.331	3.35×10^{-8}



Kapitola 3

Lorentzův a Drudeho mikroskopický model

Obsah kapitoly

3.1 Lorentzův model	27
3.1.1 Susceptibilita pro Lorentzův model látky	28
3.1.2 Susceptibilita v časové oblasti	28
Př. 1: Odezva na delta-pulz	29
Př. 2: Spektrum permitivity	30
3.1.3 Sellmeierova rovnice	30
3.1.4 Mřížková reflexe	31
3.1.5 Oblast záporné permitivity	32
3.2 Drudeho model	32
3.2.1 Plazmová hrana na volných nosičích	33
3.2.2 Absorpce v krátkovlnné oblasti	34
Př. 3: Absorpční koeficienty materiálů	34
3.2.3 Řešení dynamiky pohybu elektronové hustoty	34
3.3 Shrnutí	35
3.4 Příklady	36

Tato kapitola má za cíl ukázat výpočet materiálových vztahů látky pomocí nejjednoduššího modelu, který bere do úvahy znalosti o mikroskopické struktuře látky. Jevy, jako odraz světla, lom nebo absorpci lze popsat pomocí komplexního indexu lomu. Lorentzova a Drudeho mikroskopická teorie nám umožňuje spočítat základní vlastnosti komplexního indexu lomu.

3.1 Lorentzův model

Lorentzův model se snaží vysvětlit materiálové vztahy pomocí mikroskopického modelu, který využívá znalosti o složení pevné látky. H.A. Lorentz uvažuje vázané elektrony v atomech jako klasické oscilátory. Při vychýlení elektronu z rovnovážné polohy se mezi záporně nabitým elektronem a kladně nabitým jádrem atomu generuje dipólový moment. Celou pevnou látku považuje za soubor nezávislých harmonických oscilátorů. Lorentzův model zjednodušuje popis reálné pevné látky tím, že předpokládá pro jednoduchost stejnou vlastní frekvenci ω_0 všech oscilátorů v látce.

Dopadající světlo může reagovat s látkou tak, že rozkmitá jeden z oscilátorů. Ve viditelné, blízké infračervené a ultrafialové oblasti přispívají nejvíce elektrony vázané v atomech, neboť fotony z těchto spektrálních oblastí mají odpovídající energii pro stimulaci přechodů mezi elektronovými energetickými hladinami. Podobně interagují také kmity opačně nabitých iontů v polární mřížce, jejichž energie ale spadá do infračervené oblasti¹.

¹ Tyto kmity mřížky můžeme kvantovat pomocí formalismu optických fononů. Ty mají typické frekvence 10^{12} Hz. Tyto frekvence by pro světlo odpovídaly vlnovým délkám desítek mikrometrů.

Jeden tlumený harmonický oscilátor popíšeme kinetickou rovnicí

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2x = -eE. \quad (3.1)$$

Vlastní kmitání oscilátoru je tlumeno s časovou konstantou $\tau = 1/2\gamma$. E značí harmonické lokální pole, které je úměrné $e^{-i\omega t}$. Můžeme předpokládat stejnou harmonickou závislost i u výchylky elektronu z jeho rovnovážné polohy $x = x_0 e^{-i\omega t}$. Dosazením za časové derivace dostaneme rovnici pro amplitudy elektrického pole a výchylky, které jsou označeny nulou v indexu

$$-m\omega^2x_0 - i2m\omega\gamma x_0 + m\omega_0^2x_0 = -eE_0 \quad (3.2)$$

Celkový vektor polarizace \vec{P} je sumou všech generovaných dipólových momentů, $P(\omega) = -Nex(\omega)$, kde N značí počet harmonických oscilátorů v jednotce objemu (objemová hustota). Z (3.2) si můžeme vyjádřit amplitudu výchylky a tu dosadit do vztahu pro polarizaci

$$x_0 = \frac{e}{m} \frac{E_0}{[\omega^2 - \omega_0^2 + i2\omega\gamma]},$$

$$P(\omega) = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega\gamma} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.3)$$

Tímto postupem jsme získali vztah pro komplexní susceptibilitu, protože $P(\omega) = \varepsilon_0 \widetilde{\chi}_e E(\omega)$.

Pokud je tlumení jen velmi malé vůči frekvenci vlastních kmitů ($\gamma \ll \omega_0$), potom má imaginární člen ve jmenovateli (3.3) zanedbatelný vliv na fázi. Pro $\omega < \omega_0$ je tedy jmenovatel kladný a polarizace kmitá ve fázi s elektrickým polem. Naopak, pro $\omega > \omega_0$, je jmenovatel záporný a polarizace kmitá v protifázi. V případě rovnosti frekvencí, $\omega = \omega_0$, dochází k rezonanci harmonického oscilátoru. Ve jmenovateli zlomku je nulová reálná část, zbude pouze imaginární část úměrná $1/-i = i$, která nám dá fázi 90° mezi polarizací a elektrickým polem.

3.1.1 Susceptibilita pro Lorentzův model látky

Najdeme singularity vyplývající z podmínky nulovosti jmenovatele, $\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega\gamma = 0$. Řešením této kvadratické rovnice je frekvence

$$\omega = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -i\gamma \pm \omega'_0.$$

Vlivem tlumení, které je popsáno koeficientem γ , dojde k posunutí rezonanční frekvence. Nyní bychom měli provést renormalizaci, tedy $\omega_0 \rightarrow \omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Pokud je ale tlumení malé, potom je i posun rezonanční frekvence zanedbatelný a nebudeme tedy dále čárku u vlastní frekvence oscilátoru psát. Tím se dopouštíme nepřesností řádu γ^2 , ale matematický zápis susceptibility bude trochu jednodušší. Dostaneme

$$\widetilde{\chi}_e(\omega) = -\frac{\omega_{\text{pl}}^2}{(\omega + \omega_0 + i\gamma)(\omega - \omega_0 + i\gamma)}, \quad \text{kde} \quad \omega_{\text{pl}}^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \quad (3.4)$$

je konstanta, kterou jsme zavedli pro zjednodušení zápisu. N označuje hustotu oscilátorů, které mají rezonanční frekvenci ω_0 . Naproti tomu u kovů, kde se mohou vodivostní elektrony o koncentraci N volně pohybovat v celém objemu, by volné elektrony kmitaly s frekvencí ω_{pl} . Pouze pro zajímavost poznamenejme, že susceptibilitu (3.4) lze zapsat i v alternativním tvaru

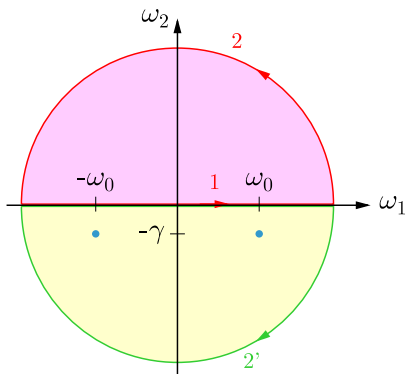
$$\widetilde{\chi}(\omega) = -\frac{\omega_{\text{pl}}^2}{2\omega_0} \left(\frac{1}{\omega - \omega_0 + i\gamma} - \frac{1}{\omega + \omega_0 + i\gamma} \right). \quad (3.5)$$

3.1.2 Susceptibilita v časové oblasti

Zopakujme vztah pro Fourierovu transformaci, který nám umožní získat z předchozího výrazu časovou funkci susceptibility

$$\chi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\chi}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (3.6)$$

K výpočtu tohoto integrálu použijeme Cauchyův teorém. Opět protáhneme frekvenci jako komplexní veličinu, $\tilde{\omega} = \omega_1 + i\omega_2$, do celé komplexní roviny. Budeme řešit odděleně dva případy.



Obr. 3.1: Integrační křivka pro integrál (3.6) je zobrazena červeně pro $\tau < 0$ a zeleně pro $\tau > 0$. Místa, kde není integrovaná funkce analytická, jsou modré body pod reálnou osou.

Případ $\tau < 0$: Integrál z $\chi(\omega)$ podél reálné osy uzavřeme do křivkového integrálu přes horní komplexní polorovinu, jak je to znázorněno červenou křivkou na obr. 3.1. Pro záporný čas vyjde $\chi(\tau) \sim -\int_2 e^{+\omega_2\tau} d\omega \rightarrow 0$, a proto je zde $\chi(\tau) = 0$.

Případ $\tau > 0$: nyní musíme integrační křivku uzavřít dolní polorovinou, aby $\int_{2'} \rightarrow 0$. Jak ukazuje obr. 3.1, jsou uvnitř zelené integrační křivky dvě singularity. Podle reziduové věty získáme integrál podél reálné osy jako záporně vzatý součet obou reziduí,

$$\chi(\tau) = -2\pi i \sum_{n=1}^2 \text{Res} \left[\frac{\chi(\omega) e^{-i\omega\tau}}{2\pi} \right] = -i \sum_{n=1}^2 \text{Res} [\chi(\omega) e^{-i\omega\tau}].$$

Za $\chi(\omega)$ dosadíme vztah (3.4). První reziduum vypočteme v bodě $\tilde{\omega} = \omega_0 - i\gamma$ a druhé v bodě $\tilde{\omega} = -\omega_0 - i\gamma$.

$$\begin{aligned} \chi(\tau) &= -i\omega_{\text{pl}}^2 \left[\frac{e^{-\gamma\tau} e^{-i\omega_0\tau}}{-2\omega_0} + \frac{e^{-\gamma\tau} e^{i\omega_0\tau}}{2\omega_0} \right] = -i \frac{\omega_{\text{pl}}^2 e^{-\gamma\tau}}{2\omega_0} [i \sin(\omega_0\tau) + i \sin(\omega_0\tau)] \\ &= \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{\omega_0} e^{-\gamma\tau} \sin(\omega_0\tau). \end{aligned}$$

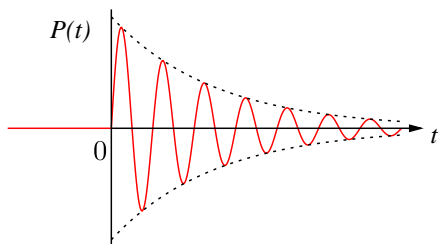
Pro výpočet časové závislosti polarizace můžeme dosadit do vztahu (2.2)

$$P(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi(t-\xi) E(\xi) d\xi = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{\omega_0} e^{-\gamma(t-\xi)} \sin[\omega_0(t-\xi)] E(\xi) d\xi. \quad (3.7)$$

Př. 3.1: Odezva na delta-pulz: Pokud na látku působí pouze časově velmi krátký pulz, můžeme ho matematicky popsat jako δ -pulz, $E(\xi) = E_0\delta(\xi)$. Dosazením do vzorce (3.7) se nám výraz pro polarizaci zjednoduší na tvar

$$P(t) = \varepsilon_0 \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{\omega_0} e^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t) E_0 = \varepsilon_0 \chi(t) E_0, \quad \text{pro } t > 0.$$

Průběh polarizace podle tohoto vzorce je zakreslen v obr. 3.2. Delta-pulz vyvolá v látce odezvu v podobě polarizace, která začne kmitat s vlastní frekvencí ω_0 a je tlumena s časovou konstantou $1/\gamma$.



Obr. 3.2: Časový průběh tlumeného kmitání polarizace v čase je odezvou materiálu na dopad δ -pulzu.

Rychlost relaxace látky souvisí s neuspořádaností, která také zvyšuje vodivost. To popisuje dielektrická relaxační doba odvozená v sekci 1.3.2, $\tau_D = \varepsilon/\sigma$. Pro kovy s velkou vodivostí jsou relaxace velmi

rychlé, jsou srovnatelné nebo rychlejší než optické frekvence. Naproti tomu u skla můžeme díky podstatně menší vodivosti očekávat relaxační doby v řádu mikrosekund.

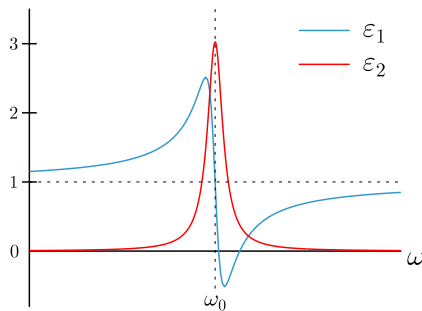
Př. 3.2: Spektrum permitivity: Nyní budeme zkoumat chování reálné a imaginární složky permitivity v oblasti rezonance $\omega = \omega_0 - i\gamma$. Přepíšeme si výraz pro permitivitu s použitím (3.5). Druhý člen pro zápornou frekvenci není v rezonanci a můžeme ho zanedbat,

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 + \tilde{\chi}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{2\omega_0} \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\gamma} \frac{(\omega - \omega_0) - i\gamma}{(\omega - \omega_0) - i\gamma}.$$

Po roznásobení získáme funkční tvar reálné a imaginární složky,

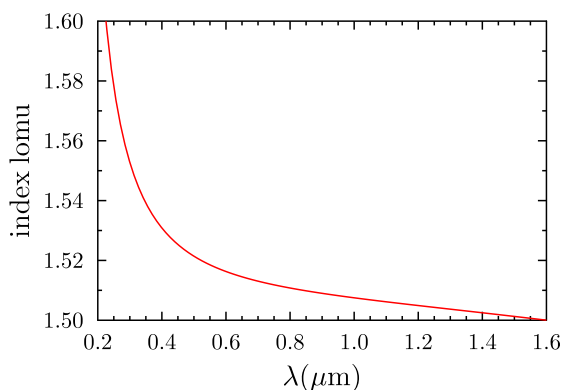
$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\omega) &= 1 - \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{2\omega_0} \frac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}, \\ \varepsilon_2(\omega) &= \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{2\omega_0} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Reálná část se chová daleko od rezonance jako posunutá hyperbola $\sim 1 - \frac{1}{\omega - \omega_0}$. Rozdíl je v tom, že zatímco hyperbola diverguje a má nespojitost v bodě $\omega = \omega_0$, reálná část permitivity je všude spojitá a konečná. To je způsobené konečnou hodnotou tlumení ($\gamma > 0$). Imaginární část má tvar Lorentzovy funkce, daleko od rezonance klesá k nule jako $\sim \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2}$. Toto chování je znázorněno na obr. 3.3. Díky tomu, že imaginární část permitivity má ve jmenovateli druhou mocninu, klesá k nule rychleji než reálná část. Daleko od rezonanční frekvence ω_0 je již absorpce minimální, ale reálná část permitivity je stále ještě ovlivněna.



Obr. 3.3: Permitivita podle Lorentzova modelu látky s jedním typem oscilátoru podle vztahů (3.8).

3.1.3 Sellmeierova rovnice



Obr. 3.4: Index lomu pro BK7 podle Sellmeierovy rovnice (3.9). Vlnové délky λ_1 a λ_2 odpovídají mezipásové absorpci a λ_3 souvisí s fonony.

i	b_i	λ_i [μm]
0	1	
1	1.039 612 12	0.077 464 2
2	0.231 792 344	0.141 485
3	1.010 469 45	10.176 5

Typickým příkladem názorně ukazujícím použitelnost Lorentzova modelu je *Sellmeierova rovnice* pro index lomu dielektrik ve viditelném spektru,

$$n^2(\lambda) = \varepsilon_1(\lambda) = b_0 + \sum_{i=1}^3 \frac{b_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2}. \quad (3.9)$$

Vlnové délky λ_i odpovídají absorpčním pásům daného materiálu, které jsou dost daleko od oblasti, kterou tento vztah popisuje. Wilhelm Sellmeier navrhl tuto rovnici již v roce 1871, a ta, přestože šlo o empirickou rovnici, souhlasí s teoretickým výpočtem podle KKR.

Obrázek 3.4 ukazuje index lomu korunového skla BK7, který můžeme podle Sellmeierovy rovnice (3.9) popsat pomocí tří nezávislých oscilátorů. Rezonanční frekvence těchto oscilátorů jsou dvě v UV oblasti ($\lambda < 150$ nm) a jedna v IR oblasti ($\lambda > 10$ μm). Přestože je absorpce mimo viditelnou oblast, index lomu to ovlivňuje v celém viditelném spektru. Index lomu je ve viditelném spektru větší než jedna a je klesající funkcí vlnové délky. Tato závislost indexu lomu na vlnové délce se označuje jako *oblast normální disperze*.

3.1.4 Mřížková reflexe

Problematika mřížkové reflexe se řeší ve fyzice pevných látek (např. [1], kap. 10). Sledujeme odezvu látky na optické pole, které v polárních krystalech silně interaguje s fononovým systémem. Rezonanční frekvence se nachází v infračervené oblasti. Mezipásové přechody elektronů, ke kterým dochází pro mnohem kratší vlnové délky v ultrafialové oblasti, způsobí vertikální posun celé spektrální závislosti ε_1 . Bez detailního výpočtu použijeme empirickou znalost látky, kdy víme, že pro vysoké frekvence se má permitivita blížit k hodnotě $\varepsilon(\infty)$ známé z optických měření této látky.

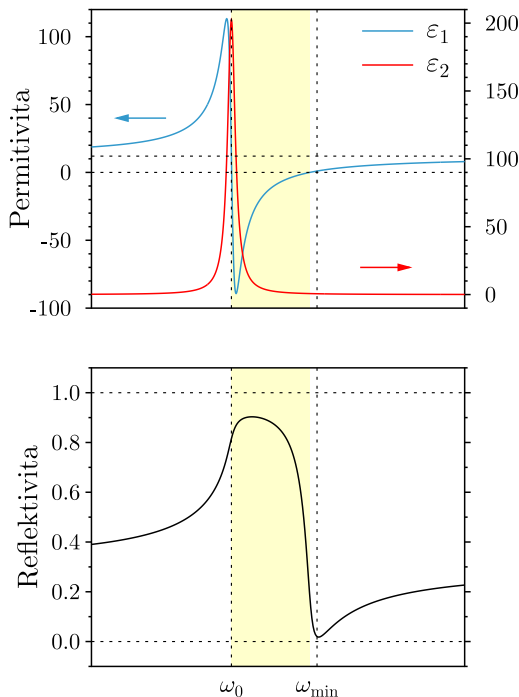
$$\begin{aligned}\varepsilon_1(\omega) &= \varepsilon(\infty) - \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{2\omega_0} \frac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}, \\ \varepsilon_2(\omega) &= \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{2\omega_0} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Tento posun lze chápat také tak, že při mikroskopickém popisu interakce látky s elektrickým polem bychom měli brát v úvahu to, že lokální pole uvnitř látky se liší od dopadajícího elektrického pole.

Ukažme si, jak se tato permitivita projeví ve spektru reflektivity. Ta se spočítá z komplexního indexu lomu, který získáme výpočtem z komplexní permitivity, podle následujícího schématu ($\tilde{\varepsilon} \Rightarrow \tilde{N} \Rightarrow R$). Pro kolmý dopad můžeme využít dříve odvozené vztahy mezi optickými parametry látky

$$\left. \begin{aligned}n^2 &= \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} + \varepsilon_1}{2} \right) / 2 \\ \varkappa^2 &= \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} - \varepsilon_1}{2} \right) / 2\end{aligned} \right\} \Rightarrow R(\omega) = \frac{(n-1)^2 + \varkappa^2}{(n+1)^2 + \varkappa^2}.\quad (3.11)$$

Takto spočítaná reflektivita je znázorněna na obr. 3.5.



Obr. 3.5: Permitivita látky (nahore) popisující mřížkovou reflexi podle vztahů (3.10) pro $\varepsilon(\infty) = 12$ a $\omega_0/\gamma = 500$. Frekvence ω_{min} odpovídá místu, kde je $\varepsilon_1 = 1$ a $\varepsilon_2 \approx 0$. Index lomu je tu $n = 1$ a reflektivita (dole) vyjde nulová. Žlutá oblast je frekvenční pásmo, ve kterém je $\varepsilon_1 < 0$. Zde je index lomu $n = 0$, index extinkce $\varkappa = \sqrt{-\varepsilon_1}$ a reflektivita se blíží jedné.

3.1.5 Oblast záporné permitivity

Fyzikové R.H. Lydanne, R.G. Sachs a E. Teller (LST) zkoumali oblast záporné reálné permitivity $\varepsilon_1 < 0$. V obr. 3.5 je tato oblast zobrazena žlutě. Podrobným výpočtem ze vztahu pro polarizaci (3.3) ukázali, že spodní hranice tohoto intervalu leží prakticky na frekvenci vlastních kmitů oscilátoru a rovná se frekvenci příčných (transverzálních) optických kmitů mřížky $\omega_0 = \omega_{\text{TO}}$. Dále ukázali, že horní hranice tohoto intervalu odpovídá podmínce $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_{\text{pl}}^2/\varepsilon(\infty)$ a toto místo je blízké frekvenci s nulovou reflexí (ω_{min}). Z těchto úvah odvodili vztah pro podíl vlastních frekvencí podélných a příčných optických vibrací mřížky

$$\frac{\omega_{\text{min}}^2}{\omega_0^2} = \frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon(\infty)} = \frac{\omega_{\text{LO}}^2}{\omega_{\text{TO}}^2}.$$

Tento výpočet není složitý, ale je nutné vyjít z přesného vztahu pro susceptibilitu (3.4) a započítat oba členy. My jsme při odvození (3.10) druhý člen zanedbali.

3.2 Drudeho model

V kovech nejsou vodivostní elektrony striktně lokalizované u jednoho atomu, ale mohou se volně pohybovat ve vodivostním pásu. V polovodičích n-typu jsou takto volné elektrony ve vodivostním pásu². Při dopadu světelné vlny tyto volné elektrony začnou kmitat vlivem elektrického pole světla. Řešení dynamiky tohoto problému provedl jako první P. Drude kolem roku 1900.

Kinetickou rovnici pro volné elektrony můžeme zapsat obdobně jako pro případ vázaných elektronů

$$m\ddot{x} + m\frac{\dot{x}}{\tau} = -eE. \quad (3.12)$$

Proti rovnici (3.1) se liší tím, že chybí člen zodpovědný za harmonický potenciál, a že rychlost tlumení kmitů jsme si popsali pomocí relaxační doby $\tau = 1/2\gamma$. Opět uvažujeme monochromatické elektrické pole $E = E_0 e^{-i\omega t}$ a předpokládáme i harmonické řešení $x = x_0 e^{-i\omega t}$. Dosadíme do kinetické rovnice (3.12) a vypočítáme si amplitudu výchylky

$$-m\omega^2 x_0 - i m \omega \frac{x_0}{\tau} = -eE_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{\frac{e}{m} E_0}{\omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}}.$$

Tato výchylka v poloze elektronů způsobí, že v látce poteče střídavý elektrický proud s amplitudou hustoty proudu

$$j_0 = -eN\dot{x}_0 = i\omega \frac{Ne^2}{m} \frac{E_0}{\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} = \frac{Ne^2}{m} \frac{\tau}{1 - i\omega\tau} E_0 = \frac{Ne^2}{m} \frac{\tau + i\omega\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} E_0,$$

kde N značí střední hustotu elektronů. Z tohoto výrazu, který je vlastně Ohmovým zákonem, můžeme určit komplexní vodivost

$$\tilde{\sigma} = \frac{Ne^2}{m} \frac{\tau + i\omega\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{Ne^2}{m} \frac{\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \\ \sigma_2 = \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} \end{cases}. \quad (3.13)$$

Pokud na látku působí velmi pomalé nebo statické pole, bude nás zajímat velikost statické vodivosti, kterou získáme jako limitu pro $\omega \rightarrow 0$. Statická vodivost je reálná a její hodnota je

$$\sigma(0) = \frac{Ne^2\tau}{m}.$$

Nyní použijeme vzájemné vztahy komplexních veličin (1.19) odvozené na str. 12. Díky vztahu $\tilde{\varepsilon} = 1 + i\tilde{\sigma}/\omega\varepsilon_0$ můžeme spočítat permitivitu z komplexní vodivosti.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1 - \frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_0} = 1 - \omega_{\text{pl}}^2 \frac{\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_0} = \omega_{\text{pl}}^2 \frac{\tau/\omega}{1 + \omega^2\tau^2} \end{aligned}. \quad (3.14)$$

²Tyto elektrony v pásové struktuře polovodiče se někdy označují jako tzv. blochovské elektrony podle F. Blocha.

Konstanta ω_{pl} vystupující v předešlém vztahu se nazývá *plazmová frekvence*,

$$\omega_{\text{pl}}^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}.$$

Ta odpovídá frekvenci vlastních kmitů elektronového plynu s danou hustotou N . U kovů značí m hmotnost volného elektronu m_0 . U polovodičů se musí zadat efektivní hmotnost elektronu pro vodivostní pás tohoto polovodiče. Její typické hodnoty jsou $\approx 0.1 m_0$. Např. pro často používaný polovodič GaAs je efektivní hmotnost elektronu ve vodivostním pásu $0.067 m_0$.

Pokud již máme spočítanou plazmovou frekvenci pro daný kov nebo polovodič, můžeme si snadno dopočítat vlnovou délku této rezonance λ_{pl} .

3.2.1 Plazmová hrana na volných nosičích

Nyní budeme zkoumat, jak se projeví spektrální závislost permitivity (3.14) na optických vlastnostech kovů a polovodičů. Zde budeme muset započítat vliv mezipásových přechodů v látce, což způsobí to, že musíme k reálné části permitivity přičíst konstantu. Ta zajistí, že pro vysoké frekvence se bude permitivita blížit k experimentálně správné hodnotě $\varepsilon(\infty)$. Dále budeme předpokládat, že tlumení kmitů elektronů je velmi slabé, $\omega\tau \gg 1$. Proto můžeme zanedbat jedničku ve jmenovateli (3.14).

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon(\infty) - \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{\omega^2} = \varepsilon(\infty) \left[1 - \frac{\bar{\omega}_{\text{pl}}^2}{\omega^2} \right], \quad \text{kde} \quad \bar{\omega}_{\text{pl}} = \frac{\omega_{\text{pl}}}{\sqrt{\varepsilon(\infty)}}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{\omega^2} \frac{1}{\omega\tau} = \frac{\bar{\omega}_{\text{pl}}^2}{\omega^2} \frac{\varepsilon(\infty)}{\omega\tau}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pro optické frekvence, kde platí $\omega < \omega_{\text{pl}}$, dochází k úplnému odrazu dopadajícího záření. V této oblasti totiž podle (3.15) vychází, že je $\varepsilon_1(\omega) < 0$, což nedovoluje šíření optického pole látkou. Vezmeme-li si jako typický příklad alkalické kovy, můžeme z koncentrace elektronů spočítat plazmovou frekvenci a plazmovou vlnovou délku, jak ukazuje tab. 3.1.

Tab. 3.1: Koncentrace elektronů, plazmová frekvence a odpovídající energie a plazmová vlnová délka pro alkalické kovy.

Prvek	Li	Na	K	Rb
N [10^{22} cm^{-3}]	4.70	2.65	1.40	1.15
ω_{pl} [10^{15} s^{-1}]	12.23	9.18	6.68	6.05
$\hbar\omega_{\text{pl}}$ [eV]	8.05	6.04	4.39	3.98
λ_{pl} [nm]	154	205	282	311

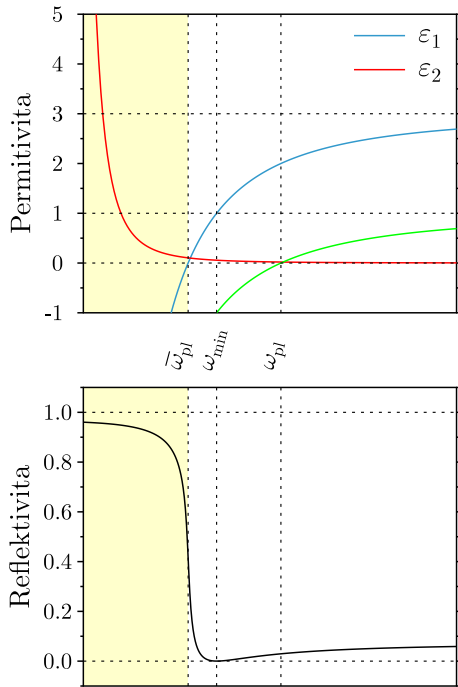
Experimentální hodnoty plazmových frekvencí kovů je možné najít na webových stránkách Alexandra Moroze z Amsterdamu: <http://www.wave-scattering.com/drudefit.html>. Uvádí zde hodnoty pro typické kovy, které získal fitováním Drudeho modelu na výsledky různých experimentů, proto mají tyto hodnoty docela velký rozptyl:

Prvek	Na	K	Cu	Au
λ_{pl} [nm]	209–217	333	142–168	137–157

Po započítání mezipásových přechodů se plazmová frekvence posune na hodnotu $\bar{\omega}_{\text{pl}}$, což názorně ilustruje obr. 3.6.

Na frekvenci plazmové hrany $\bar{\omega}_{\text{pl}}$ kmitají všechny volné náboje v látce jako celek. Jak jsme si odvodili v odstavci 2.3.3, elektromagnetické pole s touto frekvencí má v látce tu vlastnost, že fáze mezi \vec{E} a \vec{H} je $\phi = \arctan(\varkappa/n) = \pi/2$. Poyntingův vektor je tedy nulový, energie se látkou nešíří a reflektivita pro zmenšující se frekvence roste blízko k hodnotě 100 %. Jak je vidět v obr. 3.6, skok z nuly na maximum reflektivity na frekvenci $\bar{\omega}_{\text{pl}}$ není schodovitý. Rozmazání této hrany je způsobeno tím, že jsou zde nenulové

ztráty, $\varepsilon_2 > 0$. Protože plazmová hrana je pro kovy typicky v ultrafialové oblasti, jsou kovy všeobecně dobrá zrcadla pro celou viditelnou oblast spektra.



Obr. 3.6: Zelená křivka (nahore) znázorňuje permitivitu pouze pro elektronový plyn, proto protíná nulu pro frekvenci ω_{pl} . Permitivita látky popisující reflexi na kov podle vztahů (3.15) pro $\varepsilon(\infty) = 3$ a $\omega_{pl}\tau = 50$ je zobrazena modrou a červenou čarou. Frekvence ω_{min} odpovídá místu, kde je $\varepsilon_1 = 1$ a $\varepsilon_2 \approx 0$. Index lomu je tu $n = 1$ a reflektivita (dole) vyjde nulová. Žlutá oblast je frekvenční pásmo, ve kterém je $\varepsilon_1 < 0$. Zde je index lomu $n = 0$, index extinkce $\kappa = \sqrt{-\varepsilon_1}$ a reflektivita se blíží jedné. Hranici této oblasti tvoří frekvence $\bar{\omega}_{pl}$.

3.2.2 Absorpce v krátkovlnné oblasti

V tomto kontextu uvažujeme limitu: $\omega \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 0$. Pro výpočet absorpčního koeficientu α použijeme vztah (1.21), do kterého dosadíme spočítanou imaginární složku permitivity.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega}{cn} \varepsilon_2 = \frac{1}{cn} \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2 \tau} = \frac{1}{cn} \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{\tau}{\omega^2 \tau^2} = \frac{\sigma(0)}{cn\varepsilon_0 \omega^2 \tau^2} \\ &= \frac{(377 \Omega)}{n} \frac{\sigma(0)}{\omega^2 \tau^2}. \end{aligned}$$

Jak je zřejmé, absorpční koeficient je úměrný statické vodivosti a je úměrný druhé mocnině vlnové délky, $\alpha \propto \lambda^2$. Tato závislost platí za plazmovou hranou, tj. v pravé části obr. 3.6.

Př. 3.3: Absorpční koeficienty materiálů:

Vypočítejte koeficient α na vlnové délce $\lambda = 1 \mu\text{m}$ a) pro typický polovodič a b) pro typický kov.

a) Pro polovodič mějme $\tau = 2 \times 10^{-13} \text{ s}$, $n = 4$, $\sigma(0) = 10^2 (\Omega \text{ cm})^{-1}$. Spočítáme si součin $\omega\tau = 188$. Z toho získáme $\alpha \approx 0.27 \text{ cm}^{-1}$.

b) Pro kovy mějme $\sigma(0) = 10^6 (\Omega \text{ cm})^{-1}$. Po dosazení získáme hodnotu $\alpha \approx 10^4 \text{ cm}^{-1}$.

3.2.3 Řešení dynamiky pohybu elektronové hustoty

Nyní si odvodíme frekvenci kmitů elektronového plynu se střední hustotou N . Okamžitá hodnota elektronové hustoty je rovna $N + \Delta N$. Vyjdeme z rovnice continuity pro hustotu elektronů, do které dosadíme vztah pro hustotu proudu a využijeme nerovnost $N \gg \Delta N$,

$$\left. \begin{aligned} -e \frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} &= 0 \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= -eN(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \Delta N}{\partial t} + N \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Tuto rovnici zderivujeme podle času, potom dosadíme za časovou derivaci rychlosti Newtonovu pohybovou rovnici ($m \partial \vec{v} / \partial t = -eE$), čímž se nám dostane do hry elektrické pole. Nakonec za divergenci elektrického

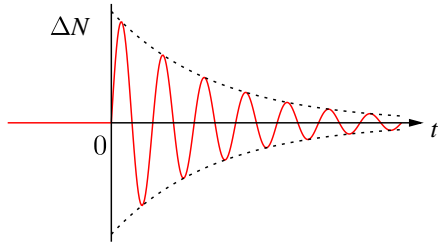
pole dosadíme Maxwellovu rovnici MR₃ ($\nabla \cdot \vec{E} = -e\Delta N/\varepsilon_0$).

$$\frac{\partial^2 \Delta N}{\partial t^2} = -N\nabla \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{Ne}{m} \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \Delta N.$$

Výslednou diferenciální rovnici přepíšeme do finálního tvaru

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Delta N}{\partial t^2} = -\omega_{\text{pl}}^2 \Delta N.}$$

Řešením této rovnice je samozřejmě harmonická závislost oscilací hustoty elektronů $\Delta N = \Delta N_0 e^{-\omega_{\text{pl}} t}$. Pokud dojde v elektronovém plynu kovu k výchylce elektronové hustoty z rovnováhy, začne tato hustota oscilovat s plazmovou frekvencí ω_{pl} .



Obr. 3.7: Drudeho model volných elektronů dává tento časový průběh tlumeného kmitání hustoty elektronů s frekvencí ω_{pl} .

Obrázek 3.7 ukazuje, jak bude s časem oscilovat hustota elektronů, pokud započítáme tlumení. Kmitání nábojové hustoty bude tlumené s časovou konstantou τ_{D} . Vztah pro dielektrickou relaxační dobu jsme si odvodili v sekci 1.3.2,

$$\tau_{\text{D}} = \varepsilon/\sigma.$$

Její hodnota je určená permitivitou a vodivostí materiálu. Pro typické kovy je relaxační doba velmi krátká, $\tau_{\text{D}} < 10^{-14}$ s. Naproti tomu u dielektrik můžeme díky podstatně menší vodivosti očekávat delší relaxační doby.

3.3 Shrnutí

- Mikroskopický model látky umožňuje vysvětlit typické chování permitivity různých látek.
- V Lorentzově modelu světlo interaguje s elektronem, který je v dielektriku lokalizovaný, tj. vázaný na jedno místo v krystalové mřížce. Dynamiku takového elektronu lze simulovat pomocí harmonického oscilátoru s vlastní frekvencí kmitů ω_0 .
- Pro dielektrika je typické, že mají rezonanční absorpční frekvence mimo viditelné spektrum. Proto ve viditelné oblasti neabsorbují, ale díky těmto rezonancím vzniká v celé viditelné oblasti disperze indexu lomu.
- Empirické závislosti indexů lomu materiálů na vlnové délce jsou tabelizované a označují se jako Sellmeierovy rovnice.
- V Drudeho modelu světlo interaguje s elektrony ve vodivostním pásu kovu nebo polovodiče. Tyto elektrony mají rezonanční frekvenci vlastních kmitů, která se nazývá plazmová frekvence ω_{pl} , příp. $\bar{\omega}_{\text{pl}}$.
- Pro kovy je typicky plazmová frekvence v UV oblasti a pro delší vlnové délky kov světlo odráží. Kovy jsou proto dobrá zrcadla pro viditelné světlo.

3.4 Příklady

Př. 3.4: Použití Sellmeierovy rovnice:

Vypočítejte přesné hodnoty indexů lomu optického korunového skla BK7 pro vlnové délky 400 nm, 700 nm a 1550 nm.

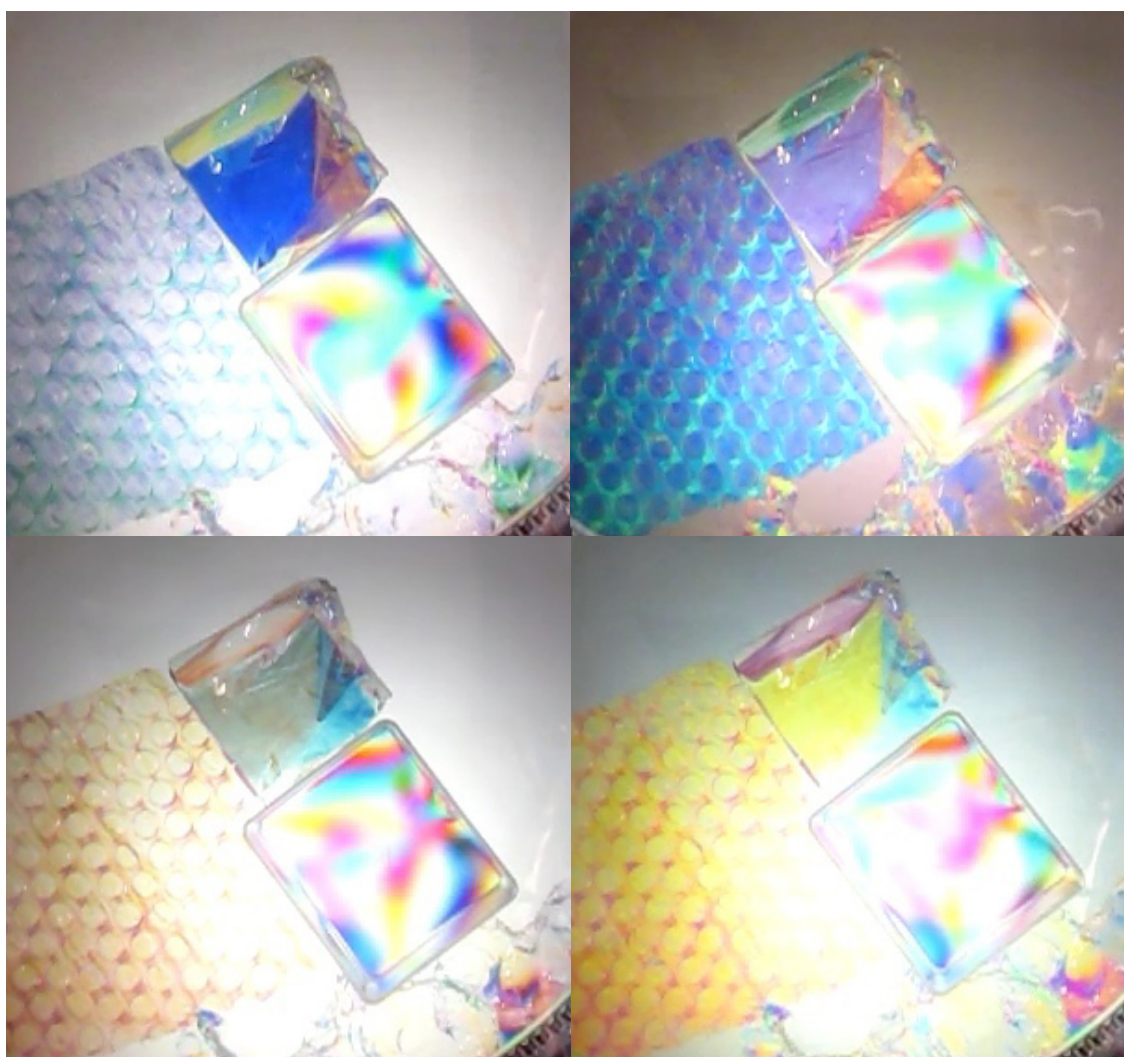
Nápověda: Využijte Sellmeierovy rovnice (3.9) a tabulky hodnot v obr. 3.4.

Řešení: [1.53085, 1.51306, 1.50065]

Př. 3.5: Reflektivita skla:

Jaká je odrazivost skla BK7 v případě kolmého dopadu ze vzduchu pro vlnové délky 400 nm, 700 nm a 1550 nm? Jak se změny hodnoty odrazivosti v případě odrazu uvnitř materiálu (rozhraní sklo/vzduch)?

Nápověda: Využijte hodnot indexů lomu vypočítaných v předchozím příkladu.



Napětí v průhledném materiálu můžeme zobrazit tak, že otáčíme polarizátorem v proslém světle a sledujeme vzniklé barevné proužky. Tato metoda se nazývá fotoelastometrie.
Zaznamenáno na pozici: 47°22'07.698"N, 8°33'20.364"E.

Kapitola 4

Anizotropie a tenzorové veličiny

Obsah kapitoly

4.1	Typické tenzorové relace	40
4.1.1	Zápis tenzorových materiálových vztahů	40
4.1.2	Tenzor mechanického napětí Σ_{ij}	40
4.1.3	Piezoelektrický jev	41
4.1.4	Vnější vlivy	42
4.2	Exkurz do tenzorové matematiky	42
4.2.1	Transformace vektoru při změně báze	42
4.2.2	Transformace tenzoru při změně báze	42
	Př. 1: Invariant transformace	43
4.2.3	Operace bodové symetrie	43
4.2.4	Rozklad tenzoru na symetrickou a antisymetrickou část	44
4.2.5	Reprezentace tenzoru pomocí kvadratických ploch	44
4.3	Měření tenzorů	44
4.3.1	Měření tenzoru vodivosti	44
4.3.2	Měření složek tenzoru teplotní roztažnosti	45
4.3.3	Určení hlavních os experimentálně změřeného tenzoru	47
4.4	Využití symetrie při určování tenzorů	48
4.4.1	Symetrie fyzikálního jevu krystalu dané třídy	48
4.4.2	Symetrie krystalů	48
4.4.3	Symetrie krystalů z pohledu optiky	50
4.4.4	Označení symetrie daného fyzikálního jevu	51
4.5	Symetrie krystalu pod vlivem působící síly	51
4.5.1	Vliv elektrického pole	52
4.5.2	Vliv magnetického pole	53
4.6	Magnetooptické jevy	53
	Př. 2: Lineární magnetooptický tenzor pro kubický materiál	55
	Př. 3: Tenzor permitivity v magnetickém poli	56
4.7	Shrnutí	56
4.8	Příklady	57

Pro zjednodušení matematických výrazů budeme v následujícím textu používat Einsteinovu sumační konvenci. Podle této konvence, pokud se v rovnici vyskytuje některý index právě dvakrát, potom to automaticky znamená sumaci přes tento index a symbol sumace (\sum) se vynechá. Například

$$\varepsilon_{ij} E_j \equiv \sum_j \varepsilon_{ij} E_j.$$

Použití Einsteinovy sumační konvence umožňuje zkrácený a přehlednější zápis tenzorových relací, ale vždy si musíme být jisti, že i po vynechání značky sumace je zapsaný výraz zcela jednoznačný.

4.1 Typické tenzorové relace

4.1.1 Zápis tenzorových materiálových vztahů

Zopakujme si zavedení parametrů jako je permitivita ε , permeabilita μ a susceptibilita χ , jak jsme si je uvedli v předešlých kapitolách pro izotropní prostředí,

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}.\end{aligned}$$

V izotropním prostředí jsou všechny elektrické vektory uvedené v prvním materiálovém vztahu rovnoběžné a podobně je tomu i pro všechny magnetické vektory v druhém materiálovém vztahu. Protože ale materiálové vztahy popisují závislost vektoru odezvy na vektoru vnější síly, mohou být parametry ε , μ a χ v obecném případě tenzory druhého řádu. A to je právě případ anizotropních prostředí, kde vektor odezvy materiálu není kolineární s vektorem vnější síly.

Materiálový vztah pro elektrickou indukci \vec{D} v anizotropním prostředí lze zapsat pro jednotlivé složky vektorů s využitím Kroneckerova symbolu δ_{ij} následovně,

$$\begin{aligned}D_i &= \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j, & P_i &= \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j, & \varepsilon_{ij} &= \delta_{ij} + \chi_{ij}, \\ \delta_{ij} &= 1 \text{ pro } i = j, & \delta_{ij} &= 0 \text{ pro } i \neq j.\end{aligned}$$

ε_{ij} popř. $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ označuje relativní permitivitu v anizotropním prostředí, kvůli přehlednosti u ní už neuvádíme index r. Druhý materiálový vztah pro složky vektorů magnetického pole je analogický a opět μ_{ij} je relativní permeabilita,

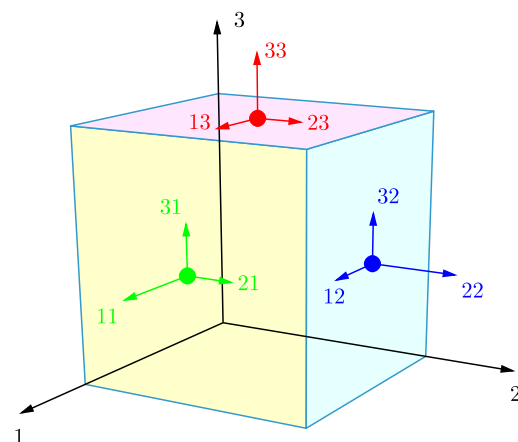
$$B_i = \mu_0 \mu_{ij} H_j, \quad M_i = \mu_0 \chi_{ij}^m H_j, \quad \mu_{ij} = \delta_{ij} + \chi_{ij}^m.$$

Pro splnění podmínek v případě termodynamické rovnováhy je nutná určitá symetrie koeficientů tenzorů permitivity $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ a permeability $\overleftrightarrow{\mu}$. Tato symetrie vyplývá z toho, že ve výrazu pro hustotu energie můžeme prohazovat pořadí derivací. Pro permitivitu i permeabilitu platí symetrie $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, respektive $\mu_{ij} = \mu_{ji}$. V případě komplexních veličin, které zahrnují i absorpci materiálu, platí obecnější vztah $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ji}^*$.

4.1.2 Tensor mechanického napětí Σ_{ij}

S tenzorovými veličinami je možné se setkat už v mechanice, kde se používají pro popis napětí a deformací tělesa. Uveďme si jako příklad tenzor $\overleftrightarrow{\Sigma}$ popisující *mechanické napětí*, které vzniká v látce působením vnějších sil na studované těleso. Obecně nemusí mít tento tenzor žádný vztah k symetrii tělesa, na které vnější síly působí. Zapišme si pro názornost tvar tenzoru $\overleftrightarrow{\Sigma}$ pro typické působící síly do přehledného seznamu:

jednoosé napětí	$\begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
dvouosé napětí	$\begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
hydrostatický tlak	$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix},$
smyk v osách	$\begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
smyk tečný	$\begin{pmatrix} 0 & \Sigma & 0 \\ \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$



Obr. 4.1: Zobrazení významu složek tenzoru mechanického napětí $\overleftrightarrow{\Sigma}$.

Kladná hodnota diagonální složky tenzoru napětí značí roztahování tělesa ve směru dané osy, těleso zvětšuje svůj rozměr. Záporná hodnota diagonální složky tenzoru napětí znamená, že dochází ke stlačování tělesa. Mimodiagonální členy tenzoru napětí potom udávají velikost krutu (torze) nebo smyku studovaného tělesa. Tenzory napětí jsou vždy vyjádřeny v osách, které jsou vlastní působící síle. Hydrostatický tlak znamená případ, kdy je těleso ponořeno v kapalině a je vystaveno tlaku p . Tento tlak působí ze všech směrů stejně a, jak je známo z mechaniky, působí vždy kolmo na stěnu. Z definice vyplývá, že jednotkou tenzoru mechanického napětí v SI je Pascal ($\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$).

Pro zkrácení zápisu matematických vztahů s tenzory je možné využít symetrie. Tensor mechanického napětí je symetrický, a proto má pouze šest nezávislých složek, které lze zapisovat do matice tenzoru následovně

$$\overleftrightarrow{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_6 & \Sigma_5 \\ \Sigma_6 & \Sigma_2 & \Sigma_4 \\ \Sigma_5 & \Sigma_4 & \Sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Těchto šest hodnot můžeme zapsat také do sloupcového vektoru $\Sigma(6 \times 1)$.

4.1.3 Piezoelektrický jev

Přímý piezoelektrický jev popisuje fyzikální úkaz, kdy mechanické napětí vyvolá v látce odezvu ve formě elektrické polarizace,

$$P_i = d_{ijk}^T \Sigma_{jk}, \quad \text{jednotky ve vztahu } [\text{C}/\text{m}^2 = \text{m}/\text{V} \cdot \text{Pa}].$$

Složky piezoelektrického tenzoru třetího řádu d_{ijk}^T jsou tabelované parametry daného prostředí. **Piezoelektrický tenzor** má v SI soustavě jednotky m/V . Naproti tomu u **inverzního piezoelektrického jevu** dochází k mechanické deformaci materiálu vlivem přiloženého elektrického pole,

$$u_{ij} = d_{ijk} E_k, \quad \text{jednotky ve vztahu } [1 = \text{m}/\text{V} \cdot \text{V}/\text{m}].$$

Zde tenzor \overleftrightarrow{u} značí **tenzor malé deformace**. Tento tenzor popisuje změnu polohy konkrétního atomu v látce vlivem vnější síly. Změna polohy atomu je charakterizována vektorem posunutí $\vec{\rho}$, pomocí něj lze tenzor malých deformací definovat následujícím způsobem:

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.1)$$

Piezoelektrický tenzor d_{ijk} představuje tenzor třetího řádu. Zápis složek takového tenzoru třetího řádu si lze představit tak, že jednotlivé bloky představují vrstvy 3D tenzoru.

$${}_{3 \leftrightarrow d} = \begin{vmatrix} 111 & 112 & 113 \\ 121 & 122 & 123 \\ 131 & 132 & 133 \\ \dots & \dots & \dots \\ 211 & 212 & 213 \\ 221 & 222 & 223 \\ 231 & 232 & 233 \\ \dots & \dots & \dots \\ 311 & 312 & 313 \\ 321 & 322 & 323 \\ 331 & 332 & 333 \end{vmatrix}.$$

Tab. 4.1: Zjednodušení v indexování symetrických tenzorů.

plně		zkráceně	
dvojice indexů		jeden multiindex	
11	→	1	
22	→	2	
33	→	3	
23 = 32	→	4	
13 = 31	→	5	
12 = 21	→	6	

Takový zápis je ale značně nepřehledný. Díky symetrii můžeme zavést zkrácený zápis pomocí multiindexů. Podle předpisu z tab. 4.1 se zavádí místo dvojice indexů $(i, j = 1, 2, 3)$ jeden multiindex $(n = 1, \dots, 6)$.

Zkráceně lze tedy piezoelektrický jev popsat pomocí rovnice $P_i = d_{ij}^T \Sigma_j$, kde vektor polarizace má tři složky, transponovaný piezoelektrický tenzor má rozměr (3×6) a poslední sloupcový vektor mechanického

napětí má šest složek:

$$P_i = d_{ij}^T \Sigma_j.$$

$$(3 \times 1) \quad (3 \times 6) \quad (6 \times 1)$$

4.1.4 Vnější vlivy

Vnější vlivy působící na dané těleso mohou být

- skalární – např. teplota (T),
- vektorové – např. elektromagnetické pole (\vec{E}, \vec{H}),
- tenzorové – např. mechanické napětí ($\overleftrightarrow{\Sigma}$).

Tyto vnější síly mohou způsobovat (indukovat) změnu parametrů prostředí, třeba i tenzorových parametrů, $t_{ij} \rightarrow t_{ij} + \Delta t_{ij}$.

4.2 Exkurz do tenzorové matematiky

4.2.1 Transformace vektoru při změně báze

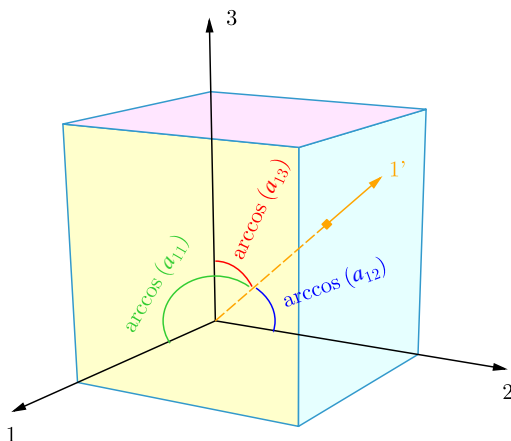
Abychom mohli plnohodnotně popsat změnu veličin pole při různých transformacích, musíme si osvěžit pravidla pro transformace vektorů a tenzorů. V případě změny báze u vektorů je převodním vztahem matice složená ze směrových kosinů \overleftarrow{a} . Transformované složky vektorů se určí z původních složek podle vztahu

$$x'_i = a_{ij} x_j, \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Uvažujme například vektor polarizace, který se transformuje při přechodu od nečárkovaných souřadnic k čárkovaným souřadnicím následovně

$$\text{ve složkách: } P'_i = a_{ij} P_j, \quad \text{vektorově: } \vec{P}' = \overleftarrow{a} \vec{P}.$$

Inverzní operace (tj. přechod od čárkovaných k nečárkovaným) má tvar $P_j = a_{ij}^T P'_i$ přičemž platí, že inverzní tenzor (matice inverzní transformace) je roven transponovanému tenzoru, $\overleftarrow{a}^{-1} = \overleftarrow{a}^T$.



Obr. 4.2: Přechod od nečárkovaných souřadnic k čárkovaným souřadnicím lze zadat pomocí směrových kosinů. Funkce kosinus se počítá z úhlů sevřených mezi bázevými směry. Zakresleny jsou pouze tři úhly a jim odpovídající směrové kosiny.

4.2.2 Transformace tenzoru při změně báze

V případě transformace tenzoru je situace složitější. Například mějme funkční vztah mezi dvěma vektory popsaný tenzorem druhého řádu následovně: $\vec{p} = \overleftarrow{T} \vec{q}$, neboli ve složkách: $p_i = T_{ij} q_j$. Převeďme si oba

vektory v této funkční závislosti do čárkovaných souřadnic pomocí tenzoru transformace, $\vec{p}' = \overleftrightarrow{a} \vec{p}$ a $\vec{q}' = \overleftrightarrow{a} \vec{q}$. Pro vektor \vec{q} budeme za chvíli potřebovat inverzní relaci. Jak známo, inverzní matice k matici směrových kosinů je matice transponovaná, a tedy $\vec{q} = \overleftrightarrow{a}^T \vec{q}'$. Nyní tyto výrazy použijeme pro úpravu původního funkčního vztahu,

$$\vec{p}' = \overleftrightarrow{a} \vec{p} = \overleftrightarrow{a} \overleftrightarrow{T} \vec{q} = \overleftrightarrow{a} \overleftrightarrow{T} \overleftrightarrow{a}^T \vec{q}' = \overleftrightarrow{T}' \vec{q}'.$$

Takto jsme našli transformaci tenzoru do čárkovaných souřadnic. Transformace tenzoru mezi dvěma soustavami lze zapsat pomocí následujících vztahů

$$\overleftrightarrow{T}' = \overleftrightarrow{a} \overleftrightarrow{T} \overleftrightarrow{a}^T, \quad \overleftrightarrow{T} = \overleftrightarrow{a}^T \overleftrightarrow{T}' \overleftrightarrow{a}.$$

Transformační vztahy zapsané pro tenzory můžeme zapsat pro jednotlivé složky tenzorů následovně:

$$T'_{ij} = a_{ik} T_{kl} a_{lj}^T = a_{ik} a_{jl} T_{kl}.$$

Připomeňme, že využíváme opět zkrácenou sumační konvenci, kdy se sčítá přes indexy, které jsou ve vztahu dvakrát. Obdobně lze odvodit transformační vztahy i pro tenzory vyšších řádů. Všechny tyto vztahy pro transformace *radiálních tenzorů* jsou schematicky shrnuty v tab. 4.2.

Tab. 4.2: Transformace radiálních tenzorů nultého až třetího řádu při otočení souřadnic.

skalár	$S' = S$
vektor	$v'_i = a_{ij} v_j$
tenzor 2. řádu	$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$
tenzor 3. řádu	$d'_{ijk} = a_{im} a_{jn} a_{ko} d_{mno}$

Př. 4.1: Invariant transformace: Dokažme si jednoduché matematické pravidlo, které říká, že délka vektoru se při změně souřadnic zachovává.

Řešení:

$$x'_i x'_i = a_{ik} a_{il} x_k x_l = \delta_{kl} x_k x_l = x_k x_k.$$

4.2.3 Operace bodové symetrie

Uvažujme změnu souřadnic, ke které dojde při aplikaci operace bodové symetrie. Operace bodové symetrie tvoří grupu, která musí vždy obsahovat identitu, ale může obsahovat a obvykle obsahuje další operace, které dělíme do dvou skupin podle znaménka determinantu matice transformace:

$\det(a_{ij}) = 1$ vlastní rotace (C_n)
 $\det(a_{ij}) = -1$ nevlastní rotace, (zrcadlení, rotace se zrcadlením a inverze).

Ukažme si výpočet determinantu pro inverzi

$$\det(\overleftrightarrow{a}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Nevlastní rotace jako operace symetrie představuje změnu souřadnic, která je jiná pro tzv. *axiální tenzory* (pseudotenzory). Uveďme si příklady axiálních tenzorů:

- Axiální skalár – optická aktivita (OA), chiralita (stáčení roviny lineární polarizace v chirálních roztocích například v roztocích cukrů).
- Axiální vektor – vektory magnetického pole \vec{H} , magnetické indukce \vec{B} , magnetizace \vec{M} .
- Axiální tenzor – tenzor gyrace g_{ij} .

Axiální tenzory jsou typicky tenzory popisující vliv magnetického pole. Jejich transformaci při změně souřadnic popisuje vztah

$$\text{pro axiální tenzor: } T'_{ij} = \det(a_{ij}) a_{ik} a_{jl} T_{kl}.$$

4.2.4 Rozklad tenzoru na symetrickou a antisymetrickou část

Na závěr této sekce o tenzorové matematice ještě připomeňme následující tvrzení. Jakýkoliv tenzor druhého řádu můžeme zapsat jako součet symetrického a antisymetrického tenzoru. Tento rozklad je jednoznačný a lze ho provést následovně:

$$T_{ij} = T_{ij}^S + T_{ij}^A = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 12 & 22 & 23 \\ 13 & 23 & 33 \end{pmatrix}^S + \begin{pmatrix} 0 & 12 & 13 \\ -12 & 0 & 23 \\ -13 & -23 & 0 \end{pmatrix}^A.$$

4.2.5 Reprezentace tenzoru pomocí kvadratických ploch

Ve fyzice je zvykem, že skalár je popsán číslem a vektor můžeme znázornit jako šipku. Ale jak zobrazit tenzor? Tenzor můžeme zobrazit geometricky jako kvadratickou plochu, která má matematický tvar $T'_{ij}x'_ix'_j = 1$. První, co můžeme obecně provést, je diagonalizace tenzoru, kterou provedeme přechodem do vlastních os tenzoru pomocí transformační matice a_{ij} , $T_{ij}a_{ik}a_{jl}x_kx_l = 1$.

Ve vlastních osách má diagonalizovaný tenzor nenulové pouze diagonální členy, je tedy daný pouze třemi čísly

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix}.$$

Rovnice kvadratické plochy se ve vlastních osách zjednoduší na $\sum_i T_i x_i^2 = 1$. Substitucí za diagonální členy tenzoru ($a = 1/\sqrt{T_1}$, $b = 1/\sqrt{T_2}$ a $c = 1/\sqrt{T_3}$) dostaneme typickou matematickou formuli

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1,$$

což je rovnice elipsoidu v prostoru. Tento elipsoid má poloosy délky a , b a c .

4.3 Měření tenzorů

4.3.1 Měření tenzoru vodivosti

Jako první příklad tenzorové veličiny budeme uvažovat tenzor vodivosti, který vystupuje v Ohmově zákonu: $\vec{j} = \overleftrightarrow{\sigma} \vec{E}$. V případě anizotropního materiálu popisuje tento tenzor fakt, že vnější elektrické pole budí v látce proud, jehož směr není kolineární s vnějším polem, což je znázorněno na obr. 4.3.

Pokud máme prostorově omezený vzorek, na který přikládáme elektrické napětí, dojde k tomu, že vzorkem poteče proud pouze ve směru elektrického pole a jeho velikost bude rovna průmětu proudu \vec{j} do směru elektrického pole. Tuto skalární hodnotu můžeme vypočítat jako

$$j_{\parallel} = \frac{\vec{j} \cdot \vec{E}}{|\vec{E}|} = \vec{j} \cdot \vec{a},$$

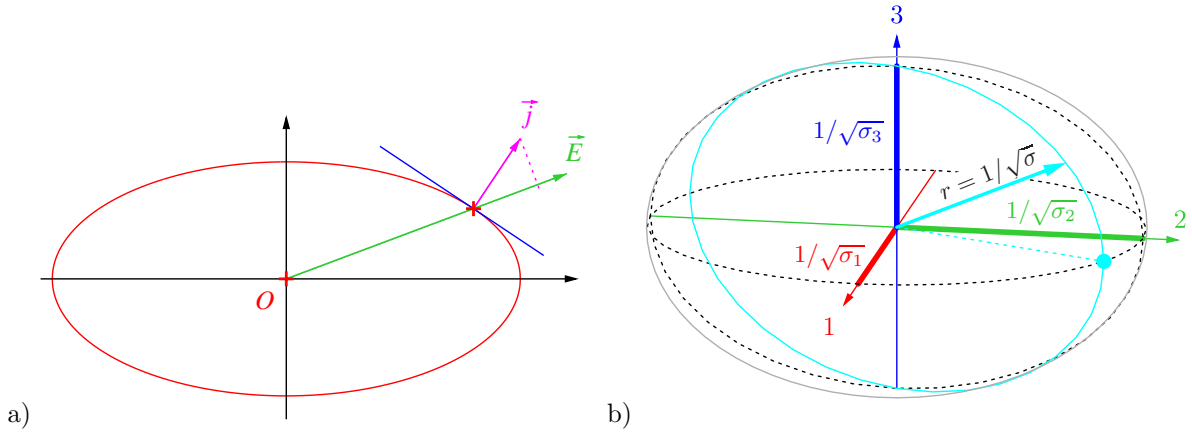
kde jsme si zavedli jednotkový vektor ve směru elektrického pole $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Podělením tohoto proudu elektrickým polem dostaneme hodnotu měřené elektrické vodivosti pro danou geometrii experimentálního uspořádání, $\sigma = j_{\parallel}/|E|$.

Vektor elektrického pole lze zapsat také pomocí směrového jednotkového vektoru $\vec{E} = E\vec{a} = E(a_1, a_2, a_3)$. Pokud si zvolíme vlastní bázi tenzoru vodivosti, bude tento tenzor diagonální

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Dosažením do Ohmova zákona dostaneme proud

$$\vec{j} = E \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{a} = E(\sigma_1 a_1, \sigma_2 a_2, \sigma_3 a_3).$$



Obr. 4.3: Zobrazení výpočtu Ohmova zákona v anizotropním prostředí. Vlevo 2D řez ukazující zeleně směr elektrického pole a fialově směr proudu, vpravo 3D zobrazení výpočtu vodivosti, která je pro daný směr elektrického pole daná délkou úsečky r .

Průmět do směru elektrického pole je potom roven

$$j_{\parallel} = E \underbrace{(\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2)}_{\sigma} = \sigma E,$$

kde σ je měřená hodnota vodivosti.

Pokud bychom neměli tenzor vodivosti v diagonálním tvaru, dostali bychom hodnotu vodivosti pomocí obecného vztahu $\sigma = \sigma_{ij} a_i a_j = \vec{a}^T \cdot \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{a}$. Nyní se vraťme k obr. 4.3. Jak je již nyní zřejmé, kvadratická plocha popisující tenzor vodivosti je definovaná právě tak, že vodivost je pro danou geometrii experimentu určena vztahem $\sigma = 1/r^2$, kde parametr r označuje délku úsečky od středu elipsoidu k průsečíku elipsoidu s vektorem ve směru elektrického pole.

Z levého obrázku je patrná geometrická konstrukce Ohmova zákona. V bodě průsečíku sestrojíme tečnu k elipsoidu a normála k této tečné ploše udává směr vektoru proudu \vec{j} .

4.3.2 Měření složek tenzoru teplotní roztažnosti

Uvažujme monoklinický (jednoklonný) krystal. Pokud si označíme fixní krystalovou osu ve směru kartézské osy x_2 , potom bude mít tenzor teplotní roztažnosti α_{ij} následující tvar

$$\overleftrightarrow{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{31} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Jak je zřejmé, čtyři nediagonální prvky jsou identicky nulové a další dva, které jsou nenulové, mají stejnou hodnotu ($\alpha_{13} = \alpha_{31}$). Pro tento krystal by i jiné matice tenzorů 2. řádu vypadaly podobně.

Projekce tenzoru do směru daného jednotkovým vektorem \vec{a} bude rovna $A = \vec{a}^T \cdot \overleftrightarrow{\alpha} \cdot \vec{a}$. Uvažujme nejprve symetrický směr ve směru optické osy krystalu, tj. $\vec{a} = (0, 1, 0)$. Projekce do tohoto směru nám dá přímo jednu číselnou hodnotu tenzoru

$$A_{(010)} = (0, 1, 0) \cdot \overleftrightarrow{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_{22}.$$

Takže hodnotu α_{22} tenzoru teplotní roztažnosti krystalu můžeme změřit přímo.

Trocha teorie ke zpracování výsledků měření

Při měření v jiných směrech dostaneme výsledek závislý na kombinaci více složek tenzoru. Proto je třeba provést více měření a složky tenzoru určit nějakou tomografickou metodou. Jednou z možných metod je

přímé řešení algebraických rovnic popisujících teoretickou závislost. Ve směru kolmém na optickou osu není žádný význačný směr přesně dán. Proto je dobré provést sadu měření, které můžeme parametrizovat pomocí úhlu θ , který svírá směrový vektor \vec{a} a osa x_3 , takže platí $\vec{a} = (a_1, 0, a_3) = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$. Protože měření je zatížené statistickou chybou, budeme provádět několik měření pro různé hodnoty úhlu θ , které pokryjí rovnoměrně celý interval od 0 do 2π . Pro i -té měření získáme hodnotu teplotní roztažnosti následovně

$$A_i = (a_1, 0, a_3) \cdot \overleftrightarrow{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_1, 0, a_3) \cdot \begin{pmatrix} a_1\alpha_{11} + 0 + a_3\alpha_{31} \\ 0 + 0 + 0 \\ a_1\alpha_{31} + 0 + a_3\alpha_{33} \end{pmatrix} = a_1^2\alpha_{11} + 2a_1a_3\alpha_{31} + a_3^2\alpha_{33},$$

$$A_i = \sin^2 \theta_i \alpha_{11} + \sin 2\theta_i \alpha_{31} + \cos^2 \theta_i \alpha_{33}. \quad (4.2)$$

Mohli bychom provést měření pouze pro tři různé hodnoty úhlu θ a tím určit tři neznámé koeficienty teplotní roztažnosti $\{\alpha_{11}, \alpha_{31}, \alpha_{33}\}$. My ale provedeme více měření a budeme se snažit určit hodnoty těchto tří koeficientů metodou nejmenších čtverců. Zapišme si všechny naměřené hodnoty do sloupcového vektoru měření \vec{M} . K tomuto vektoru si můžeme napočítat sloupcový vektor teoretických hodnot, které bychom měli při měření dostat: $\vec{A} = \overleftrightarrow{\theta} \cdot \vec{z}$. Vektor \vec{z} představuje hledané hodnoty tenzoru roztažnosti, které jsme si zapsali také do sloupcového vektoru, $\vec{z} = (\alpha_{11}, \alpha_{31}, \alpha_{33})$.

Každý řádek matice $\overleftrightarrow{\theta}$ dává výpočet jedné teoretické hodnoty zapsané ve vektoru \vec{A} z vektoru neznámých hodnot \vec{z} podle vzorce (4.2)

$$\overleftrightarrow{\theta} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta_1 & \sin 2\theta_1 & \cos^2 \theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin^2 \theta_p & \sin 2\theta_p & \cos^2 \theta_p \end{pmatrix}$$

Matice $\overleftrightarrow{\theta}$ má rozměry $(p \times n)$, kde p značí počet provedených měření a n je počet hledaných hodnot. Musí tedy platit $p > n$.

Měření je z principu zatížené chybou, kterou si pro jednotlivá provedená měření můžeme zapsat do vektoru \vec{v} . Takže \vec{v} , \vec{M} i \vec{A} jsou vektory $(p \times 1)$. Máme tedy p rovnic pro n neznámých,

$$\vec{v} = \vec{A} - \vec{M} = \overleftrightarrow{\theta} \cdot \vec{z} - \vec{M}.$$

Řešení tohoto přeúrceného systému rovnic hledáme optimalizací fitu teoretické závislosti na naměřené hodnoty. Děláme vlastně minimalizaci čtverců odchylek, tj. minimalizaci velikosti vektoru chyb. Suma čtverců je rovna $S = \sum_{i=1}^p v_i^2$ a nabývá minimální hodnoty v n -dimenzionálním prostoru v místě, kde je nulový gradient S při derivaci podle všech neznámých. Máme tedy n rovnic, které upravíme

$$v_i \frac{\partial v_i}{\partial z_j} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad v_i \theta_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}^T \cdot \overleftrightarrow{\theta} = \vec{0}.$$

Do tohoto vztahu dosadíme vektor chyb \vec{v} a pak budeme výraz upravovat tak dlouho, až dostaneme vzorec pro výpočet hledaných parametrů.

$$\begin{aligned} \left(\overleftrightarrow{\theta} \cdot \vec{z} - \vec{M} \right)^T \cdot \overleftrightarrow{\theta} &= \vec{0}, \\ \overleftrightarrow{\theta}^T \cdot \left(\overleftrightarrow{\theta} \cdot \vec{z} - \vec{M} \right) &= \vec{0}, \\ \overleftrightarrow{\theta}^T \cdot \overleftrightarrow{\theta} \cdot \vec{z} &= \overleftrightarrow{\theta}^T \cdot \vec{M}. \end{aligned}$$

Vynásobením inverzní maticí získáme finální vztah

$$\vec{z} = \left(\overleftrightarrow{\theta}^T \cdot \overleftrightarrow{\theta} \right)^{-1} \cdot \overleftrightarrow{\theta}^T \cdot \vec{M}. \quad (4.3)$$

Tento vztah představuje soustavu n rovnic, které nám umožní vypočítat n hledaných hodnot ze sady měření tak, že se automaticky minimalizuje suma čtverců odchylek naměřených hodnot od hodnot teoretických. Podmínkou řešení je to, že počet měření je větší než počet neznámých.

Dosažení měřených hodnot

Řešení si nyní ukážeme pro tři hledané složky tenzoru teplotní roztažnosti. Provedeme například čtyři měření v úhlech $\theta_i = \{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}$. Pro tyto úhly naměříme teplotní roztažnosti $M_i = (32, 16, 15, 31.5) \times 10^{-6}$. Dosažením úhlů θ_i spočítáme koeficienty matice $\overleftrightarrow{\theta}$ a $\overleftrightarrow{\theta}^T$:

$$\overleftrightarrow{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \overleftrightarrow{\theta}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme postupně do vztahu (4.3).

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\theta}^T \cdot \overleftrightarrow{\theta} &= \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}, \\ (\overleftrightarrow{\theta}^T \cdot \overleftrightarrow{\theta})^{-1} &= \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}, \\ (\overleftrightarrow{\theta}^T \cdot \overleftrightarrow{\theta})^{-1} \cdot \overleftrightarrow{\theta}^T &= \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 3/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní již dosadíme měřené hodnoty

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} = (\overleftrightarrow{\theta}^T \cdot \overleftrightarrow{\theta})^{-1} \cdot \overleftrightarrow{\theta}^T \cdot \vec{M} = \begin{pmatrix} 121/8 \\ -31/8 \\ 257/8 \end{pmatrix} \times 10^{-6} = \begin{pmatrix} 15.13 \\ -7.75 \\ 32.13 \end{pmatrix} \times 10^{-6}.$$

4.3.3 Určení hlavních os experimentálně změřeného tenzoru

Dalším zajímavým příkladem je situace, kdy získáme z měření na určitém vzorku tenzor nějaké vlastnosti, ale neznáme vlastní osy tohoto tenzoru. To je typické pro triklinickou krystalovou soustavu, ve které je primitivní krystalová buňka rovnoběžnostěn a úhly mezi elementárními translačními vektory nejsou pravé.

Symetrický tenzor pro triklinickou soustavu je popsán šesti nezávislými složkami. Musíme proto provést minimálně sedm měření. Pro pravoúhloú kostku vzorku můžeme měřit hodnoty ve třech kartézských osách: (100), (010), (001). Další čtyři směry mohou být směry čtyř tělesových úhlopříček: (111), (-111), (1-11), (-1-11). Prvky tenzoru určíme tak, jak to bylo popsáno v předešlém odstavci. Výsledek nechť je tento

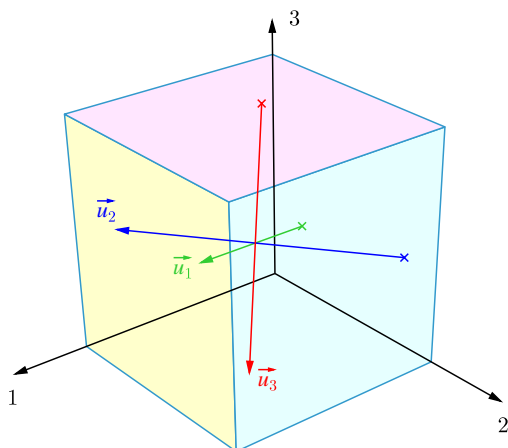
$$\overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Soustavu hlavních os tohoto tenzoru najdeme využitím znalosti, že pokud tenzor vynásobím jakýmkoliv zvoleným vektorem, dostanu vektor, který směřuje blíže ke směru nejkratší poloosy odpovídajícího elipsoidu. Tento nový vektor znormuji a znovu s ním vynásobím tenzor \overleftrightarrow{T} . Tímto iterativním postupem dokonvergujeme k jednotkovému vektoru ve směru nejkratší poloosy.

$$\overleftrightarrow{T} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{znormuji}} \begin{pmatrix} 0.8944 \\ 0.3578 \\ 0.2683 \end{pmatrix} \dots \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0.8041 \\ 0.5013 \\ 0.3195 \end{pmatrix}.$$

Pokud stejnou proceduru provedeme s inverzní maticí $\overleftrightarrow{T}^{-1}$, potom dostaneme vektor nejdelší poloosy $\vec{u}_3 = (0.2460, 0.2088, -0.9465)$. Pokud mám již dva vektory ortogonálního systému, můžeme snadno

dopočítat třetí chybějící vektor pomocí vektorového součinu, $\vec{u}_2 = \vec{u}_3 \times \vec{u}_1 = (0.5412, -0.8397, -0.0446)$, jak ukazuje obr. 4.4.



Obr. 4.4: Kostička představuje měřený vzorek s kartézskými osami označenými čísly. V této soustavě má změřený tenzor \vec{T} obecný nediagonální tvar (4.4). Napočítané vlastní osy tenzoru jsou zakresleny barevnými šipkami zeleně, modře a červeně. Vlastní osy představují pravoúhlý systém.

4.4 Využití symetrie při určování tenzorů

4.4.1 Symetrie fyzikálního jevu krystalu dané třídy

Tenzor popisující jakoukoliv vlastnost krystalu musí mít minimálně symetrii krystalu. To znamená, že tenzor vlastnosti musí být invariantní vůči jakékoliv transformaci souřadnic, při které přejde krystal zase sám na sebe. Například pro radiální tenzor třetího řádu T_{ijk} a matice transformace souřadnic \overleftarrow{a} musí platit

$$T_{ijk} = a_{ip}a_{jq}a_{kr}T_{pqr} = T_{pqr}. \quad (4.5)$$

Nejčastěji nás bude zajímat, zda má krystal symetrii popsanou inverzí. Transformační matice operace inverze má tvar

$$\overleftarrow{a} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1\delta_{ij} = -1\overleftrightarrow{\mathbb{1}}.$$

Aplikujeme-li operaci inverze na vztah (4.5), dostaneme

$$T_{ijk} = a_{11}a_{22}a_{33}T_{ijk} = (-1)^z T_{ijk},$$

kde přirozené číslo z značí řád tenzoru. Pokud uvážíme, za jakých podmínek bude tento vztah platit, dojdeme k následujícím výrokům o symetrii fyzikálního jevu:

Polární tenzor sudého řádu má střed symetrie (inverzi),
lichého řádu nemá střed symetrie.

Axiální tenzor sudého řádu nemá střed symetrie,
lichého řádu má střed symetrie.

Věta o nulovosti tenzorů: Krystal, který má střed symetrie, má identicky nulové všechny polární tenzory lichého řádu a všechny axiální tenzory sudého řádu.

4.4.2 Symetrie krystalů

Zopakujme si označení sedmi Bravaisových krystalových soustav [1], které jsou shrnuty v tab. 4.3. Nejméně prvků symetrie má trojklonná soustava (může mít pouze jediný prvek symetrie, identitu). Primitivní buňku této soustavy tvoří rovnoběžnostěn s délkou stran a, b, c , které svírají obecné úhly α, β, γ . Naopak nejsymetričtější krystaly jsou z kubické soustavy, kde je elementární buňkou krychle.

Tab. 4.3: Parametry čtrnácti typů prostorových mřížek v sedmi krystalografických soustavách včetně velikostí stran a úhlů primitivního rovnoběžnostěnu. Zkratky jednotlivých typů značí: P – prostá, I – prostorově centrovaná, F – plošně centrovaná, C – bazálně centrovaná mřížka.

Soustava	Alternativní český název	Počet mřížek	jednotlivé typy	strany a, b, c	úhly α, β, γ
kubická	krychlová	3	P, I, F	a	90°
tetragonální	čtverečná	2	P, I	a, a, c	90°
ortorombická	kosočtverečná	4	P, C, I, F	a, b, c	90°
trigonální	klencová	1	P	a	α
hexagonální	šesterečná	1	P	a, a, c	$90^\circ, 90^\circ, 120^\circ$
monoklinická	jednoklonná	2	P, C	a, b, c	$90^\circ, \beta, 90^\circ$
triklinická	trojklonná	1	P	a, b, c	α, β, γ

Operace symetrie

Všechny operace bodové symetrie nechávají na místě jeden význačný bod. U molekul je to těžiště, u krystalu to může být jeden atom nebo nějaký bod vyšší symetrie elementární buňky. Následující seznam obsahuje všechny typy prvků bodové symetrie:

I	\Rightarrow	identita
C_n	\Rightarrow	n -četná osa rotace
σ	\Rightarrow	zrcadlení (podle roviny σ_h horizontální, σ_v vertikální, σ_d diagonální)
S_n	\Rightarrow	n -četná osa rotace se zrcadlením podle roviny kolmé k ose
i	\Rightarrow	inverze ($i = S_2$).

Označení krystalů

Pro označení symetrie daného krystalu se používají dva systémy značek. Prvním systémem jsou Schoenfliesovy symboly, které se používají hlavně pro označení symetrie molekul. V krystalografii se často používají Hermannovy-Mauguinovy symboly, které ale nejsou tak přehledné. Oba typy symbolů pro jednotlivé krystalové soustavy jsou pro úplnost uvedeny v tab. 4.4.

Tab. 4.4: Seznam označení symetrie krystalů z jednotlivých krystalových soustav.

Soustava	Schoenfliesovy symboly						
	Hermannovy-Mauguinovy symboly						
triklinická	C_1	C_i					
	1	$\bar{1}$					
monoklinická	C_2	C_s	C_{2h}				
	2	m	$2/m$				
ortorombická	D_2	C_{2v}	D_{2h}				
	222	$mm2$	mmm				
trigonální	C_3	C_{3i}	D_3	C_{3v}	D_{3d}		
	3	$\bar{3}$	32	$3m$	$\bar{3}m$		
tetragonální	C_4	S_4	C_{4h}	D_4	C_{4v}	D_{2d}	D_{4h}
	4	$\bar{4}$	$4/m$	422	$4mm$	$\bar{4}2m$	$4/mmm$
hexagonální	C_6	C_{3h}	C_{6h}	D_6	C_{6v}	D_{3h}	D_{6h}
	6	$\bar{6}$	$6/m$	622	$6mm$	$\bar{6}m2$	$6/mmm$
kubická	T	T_h	O	T_d	O_h		
	23	$m\bar{3}$	432	$\bar{4}3m$	$m\bar{3}m$		

Pro symetrii vlastností daného krystalu musí platit

Neumannův princip: Prvky symetrie libovolné fyzikální vlastnosti krystalu musí zahrnovat všechny prvky symetrie bodové grupy krystalu.

Tento princip můžeme interpretovat také tak, že vlastnost musí mít vždy minimálně stejnou nebo vyšší symetrii, než má krystal. Případně můžeme říci, že tenzor vlastnosti je invariantní vůči všem prvkům symetrie krystalu.

4.4.3 Symetrie krystalů z pohledu optiky

Průhledné krystaly je možno podle optických vlastností rozdělit do tří charakteristických skupin.

A) Krystaly, ve kterých je možné vybrat tři navzájem ortogonální, krystalograficky ekvivalentní směry, jsou krystaly kubické. Je jasné, že tyto ekvivalentní směry jsou totožné s hlavními dielektrickými osami a

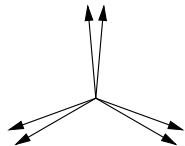
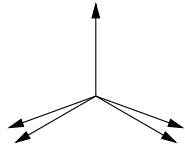
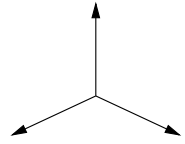
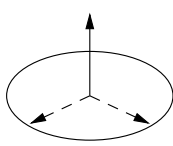
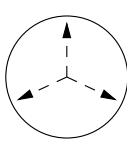
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3.$$

Takové krystaly jsou opticky *izotropní* a jsou v lineární optice ekvivalentní amorfním látkám jako je sklo nebo kapalina.

B) Krystaly, které nepatří ke skupině A), a ve kterých je možné najít dva nebo více krystalograficky ekvivalentních směrů ležících v jedné rovině. Patří sem krystaly trigonální, tetragonální a hexagonální. Roviny, ve kterých leží krystalograficky ekvivalentní směry, jsou kolmé na trojčetnou, čtyřčetnou, respektive šestičetnou osu. Jedna z hlavních dielektrických os musí být totožná s touto symetrickou osou, která je také optickou osou. Označme si ji osou x_3 . Pro zbývající dvě osy můžeme vybrat libovolnou dvojici ortogonálních směrů kolmých na osu x_3 . Tyto krystaly označujeme jako opticky *jednoosé*. Zde je

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3.$$

Obr. 4.5: Rozdělení krystalů podle symetrie a z pohledu anizotropie.

Krystalová soustava	Dielektrické osy	Elipsoid vlnových normál	Opt. klasifikace krystalu
triklinická	CCC 	obecný elipsoid	dvouosý
monoklinická	FCC 	”	”
ortorombická	FFF 	”	”
trigonální tetragonální hexagonální	FRR 	rotační elipsoid	jednoosý
kubická	RRR 	koule	izotropní

C) Krystaly, ve kterých není možné vybrat dva krystalograficky ekvivalentní směry. Patří sem krystaly ortorombické, monoklinické a triklinické. Nazýváme je opticky *dvouosé*. Zde platí

$$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3.$$

Směry dielektrických os jsou určeny symetrií krystalu pouze u ortorombických krystalů. U ostatních krystalů může vznikat tzv. disperze os. Tento efekt znamená, že pro různé vlnové délky mají tyto osy různý směr.

Pro přehlednost jsou v tab. 4.5 uvedeny všechny možné případy. Hlavní dielektrické osy (C), jejichž směr může záviset na frekvenci světla, jsou znázorněny dvěma vektory svírajícími malý úhel. Pevné osy (F), které jsou fixované na krystalografický směr, jsou znázorněny jedním vektorem. Osy, které mohou zaujímat libovolný směr (R), jsou značeny čárkovaným vektorem uvnitř kružnice nebo koule.

4.4.4 Označení symetrie daného fyzikálního jevu

Pro označení symetrie nějaké fyzikální veličiny, která krystal ovlivňuje, se používají stejné symboly, jako pro popis symetrie krystalů. Ty jsme si uvedli v tab. 4.4. Zopakujme si syntaxi značení pomocí Hermannových-Mauguinových symbolů:

číslo	osa symetrie nejvyšší četnosti;
<i>m</i>	rovina symetrie (zrcadlení), v této rovině leží osa nejvyšší symetrie;
<i>mm</i>	dvě roviny symetrie, osa nejvyšší symetrie musí ležet v průniku obou rovin;
/	prvek uvedený za lomítkem značí, že jde o prvek kolmý na osu nejvyšší symetrie.

Nyní uveďme příklady veličin, které popisují různé fyzikální jevy v krystalu:

1. skalár $\infty/\infty mm$
2. pseudoskalár ∞/∞ , nemá žádné roviny zrcadlení ani inverzi
3. vektor ∞mm , má pouze roviny zrcadlení, ve kterých leží tento vektor
4. pseudovektor ∞/m , má pouze rovinu kolmou na tento vektor
5. polární tenzor 2. řádu
 - symetrický
 - $T_1 = T_2 = T_3 \quad \infty/\infty mm$
 - $T_1 = T_2 \neq T_3 \quad \infty/mm$
 - $T_1 \neq T_2 \neq T_3 \neq T_1 \quad m/m/m$
 - antisymetrický
 - ∞/m
6. axiální tenzor 2. řádu
 - symetrický $\infty/\infty, \infty/22, 222$
 - antisymetrický ∞mm
 - nesymetrický $\infty, 2, 1, m, mm2$

Nakonec ještě dodejme, že pokud je nějaká veličina v krystalu popsána nesymetrickým tenzorem, potom má tato veličina prvky symetrie pouze z průniku její symetrické a antisymetrické části.

4.5 Symetrie krystalu pod vlivem působící síly

Nyní si popíšeme symetrii vnějších sil, které mohou působit na krystal. Tato informace je důležitá, neboť vnější síla může i z původně izotropního materiálu vytvořit materiál anizotropní. Studiu těchto jevů se věnoval francouzský fyzik Pierre Curie¹ kolem roku 1880.

¹Francouzský fyzik a chemik Pierre Curie se zasloužil o rozvoj vědy v oblasti krystalografie, magnetismu a radioaktivity. Se svým bratrem objevili a poprvé demonstrovali piezoelektrický jev. Pierre Curie je nositelem Nobelovy ceny za fyziku z roku 1903.

Curieův princip: Při působení vnější síly na krystal se zachovávají pouze ty prvky symetrie, které jsou společné jak krystalu, tak vnější působící síle.

Tento princip se můžeme pokusit zapsat matematicky s využitím grup. Grupa symetrie krystalu při působení vnější síly G'_k je průnikem grupy symetrie samotného krystalu G_k a symetrie působící síly $G_{p.s.}$: $G'_k = G_k \cap G_{p.s.}$

Uveďme si několik typických příkladů:

- jednoosé mechanické napětí působící na kubický krystal ve směru hrany krychle způsobí změnu symetrie např. $\mathcal{T}_d \rightarrow 4/mmm \equiv \mathcal{D}_{4h}$
- dvouosé mechanické napětí podél hran krychle způsobí např. $\mathcal{T}_h \rightarrow mmm \equiv \mathcal{D}_{2h}$
- jednoosé mechanické napětí v obecném směru $\rightarrow \bar{1} \equiv \mathcal{C}_i$
- jednoosé mechanické působení v obecném směru spolu s elektrickým polem $\rightarrow 1 \equiv \mathcal{C}_1$

4.5.1 Vliv elektrického pole

Jako první si popíšeme vliv elektrického pole na krystal. Nechť elektrické pole má směr jedné z krystalografických os materiálu \vec{x}_3 . Symetrie elektrického pole je tedy $\infty mm \equiv \mathcal{C}_{\infty v}$. Jakýkoliv tenzor druhého řádu, např. tenzor permitivity, si zachová prvky symetrie, které má i elektrického pole. Jaké jsou prvky symetrie takto orientovaného elektrického pole?

a) Prvním prvkem symetrie elektrického pole je otočení o libovolný úhel φ . Matice odpovídající transformace souřadnic má tvar:

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Druhou operací symetrie, při které se zachovává elektrické pole, je zrcadlení v rovině, ve které leží osa \vec{x}_3 . Tato rovina zrcadlení je pootočená o libovolný úhel α :

$$S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že inverzní operace k oběma výše zmíněným prvkům symetrie se dají vyjádřit následovně: $R(\phi)^{-1} = R(-\phi)$, $S(\phi)^{-1} = S(\phi)$.

Aplikací symetrie při rotaci získáme následující vztah $\overleftrightarrow{\epsilon}(\vec{E}) = R(\varphi)\overleftrightarrow{\epsilon}R(-\varphi)$. Tato identita musí platit pro všechny úhly φ . To způsobuje nulovost čtyř prvků matice permitivity $\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{31} = \epsilon_{32} = 0$ a rovnost koeficientů $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$ a $-\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$. Tenzor $\overleftrightarrow{\epsilon}$ se zjednoduší na tvar

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ -\epsilon_{12} & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

Aplikace druhé rovnosti nám dá podmínku $\overleftrightarrow{\epsilon}(\vec{E}) = S(\alpha)\overleftrightarrow{\epsilon}S(\alpha)$. Ale tato podmínka nám již žádné další zjednodušení nepřinese. Můžeme nanejvýš přejít do soustavy hlavních os, čímž získáme

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

Výsledek výpočtu lze shrnout tak, že izotropní či jednoosý krystal s elektrickým polem v ose přejde na jednoosý krystal. Jen je třeba mít na paměti, že složky permitivity se vlivem elektrického pole změň.

- c) Uvažujme nyní operaci symetrie, která není prvkem symetrie elektrického pole. Co způsobí reflexe v rovině, která je kolmá na osu \vec{x}_3 ? Je zřejmé, že po aplikaci této reflexe se otočí znaménko elektrického pole. Tensor permitivity je tenzor druhého řádu. Při aplikaci této reflexe pro něj tedy musí platit následující transformační vztah

$$\overleftarrow{\varepsilon}(-\vec{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overleftarrow{\varepsilon}(\vec{E}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Permitivita je tedy sudou funkcí elektrického pole, což můžeme zapsat pomocí jedné relace

$$\boxed{\varepsilon_{ij}(-\vec{E}) = \varepsilon_{ij}(\vec{E})}. \quad (4.6)$$

4.5.2 Vliv magnetického pole

V tomto odstavci si popíšeme vliv magnetického pole na permitivitu materiálu. Budeme postupovat podobně jako pro elektrické pole. Dostaneme ale rozdílný výsledek, protože vektor magnetické indukce \vec{B} je axiální vektor. Pokud budeme magnetické pole generovat smyčkou vodiče protékanou proudem, potom jsou velikost a směr magnetického pole dány orientací smyčky a velikostí proudu protékajícího smyčkou. Symetrie magnetického pole je tedy ∞/m . Jaké jsou prvky symetrie pro magnetické pole orientované v ose \vec{x}_3 ?

- a) Pro rotaci kolem osy \vec{x}_3 dostaneme

$$\overleftarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

- b) Reflexe v horizontální rovině nepřináší žádnou další informaci.
c) Reflexe v rovině obsahující vektor pole není operací symetrie, neboť dojde k reverzi magnetického pole (magnetické pole změni znaménko).

Podmínka $\overleftarrow{\varepsilon}(-\vec{B}) = S(\alpha)\overleftarrow{\varepsilon}(\vec{B})S(\alpha)$ vede na následující rovnosti koeficientů:

$$\varepsilon_{11}(-\vec{B}) = \varepsilon_{11}(\vec{B}); \quad \varepsilon_{33}(-\vec{B}) = \varepsilon_{33}(\vec{B}); \quad \varepsilon_{12}(-\vec{B}) = -\varepsilon_{12}(\vec{B}).$$

Jednoduše řečeno diagonální prvky tenzoru $\overleftarrow{\varepsilon}$ jsou sudými vůči magnetickému poli \vec{B} , kdežto nediagonální prvky jsou lichými funkcemi.

Výsledek je formulován jako tzv. *magnetický Onságerův princip*, který je vlastně důsledkem symetrie systému vůči magnetickému poli. Matematický zápis Onságerova principu zní

$$\boxed{\varepsilon_{ij}(-\vec{B}) = \varepsilon_{ji}(\vec{B})}. \quad (4.7)$$

4.6 Magnetooptické jevy

Vnější magnetické pole můžeme považovat za slabou poruchu vůči vnitřnímu poli v krystalu. Vliv vnějšího magnetického pole na tenzor permitivity můžeme proto zapsat pomocí Taylorova rozvoje do druhého řádu.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\vec{M}) &= \varepsilon_{ij}^{(0)} + \left[\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial M_k} \right]_{M=0} M_k + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial M_k \partial M_l} \right]_{M=0} M_k M_l \\ &= \varepsilon_{ij}^{(0)} + K_{ijk} M_k + G_{ijkl} M_k M_l = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

kde K_{ijk} jsou složky lineárního magnetooptického tenzoru a G_{ijkl} jsou složky kvadratického magnetooptického tenzoru. Tenzor K_{ijk} je třetího řádu, má tedy $3^3 = 27$ složek. Tenzor G_{ijkl} je čtvrtého řádu a

má tedy $3^4 = 81$ složek. Složky těchto tenzorů nejsou ale nezávislé, a proto je výhodné použít značení pomocí multiindexů. Ukážeme si, že tenzor K_{ijk} můžeme zapsat jako matici (3×3), neboť má pouze 9 nezávislých složek. Tenzor G_{ijkl} můžeme zapsat jako matici (6×6), má celkem 36 nezávislých složek.

Vlastnosti tenzoru $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ vedou díky vztahům

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = K_{ijk}M_k = K_{jik}(-M_k) = -\varepsilon_{ji}^{(1)}, \quad \varepsilon_{ii}^{(1)} = -\varepsilon_{ii}^{(1)}$$

ke zmenšení počtu neznámých v tenzoru \overleftrightarrow{K} . Dojdeme k zjištění, že

$$K_{iik} = 0, \quad K_{ijk} = -K_{jik}. \quad (4.9)$$

V případě kvadratického tenzoru je zřejmé, že díky možnosti záměny pořadí derivací můžeme prohazovat pořadí prvních dvou indexů. Z další relace plyne

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = G_{ijkl}M_kM_l = G_{jikl}(-M_k)(-M_l) = \varepsilon_{ji}^{(2)}.$$

Dále můžeme odvodit, že lze prohazovat také druhé dva indexy,

$$G_{ijkl} = G_{jikl}, \quad G_{ijkl} = G_{ijlk}. \quad (4.10)$$

Lineární magnetooptický tenzor

Pro zjednodušení zápisu a výpočtů se provádí zápis složek tenzoru permitivity do sloupce o devíti prvcích, přičemž rozmístění těchto prvků v původní matici by bylo následující

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & \varepsilon_5 \\ \varepsilon_9 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_8 & \varepsilon_7 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Ze stejného důvodu se u lineárního tenzoru \overleftrightarrow{K} zavádí multiindexace, kdy se dva první indexy u K_{ijk} nahradí multiindexem m , jak jsme ho zavedli v tab. 4.1, $K_{ijk} \rightarrow K_{mk}$, $m = 1, \dots, 9$ ($11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6, 32 \rightarrow 7, 31 \rightarrow 8, 21 \rightarrow 9$). Díky tomu se původní vztah s násobením tenzoru třetího řádu převede na maticové násobení

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \sum_k \begin{pmatrix} K_{11k} & K_{12k} & K_{13k} \\ K_{21k} & K_{22k} & K_{23k} \\ K_{31k} & K_{32k} & K_{33k} \end{pmatrix} M_k = \begin{pmatrix} K_{111} & K_{112} & K_{113} \\ K_{121} & K_{122} & K_{123} \\ K_{131} & K_{132} & K_{133} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{211} & K_{212} & K_{213} \\ K_{221} & K_{222} & K_{223} \\ K_{231} & K_{232} & K_{233} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{311} & K_{312} & K_{313} \\ K_{321} & K_{322} & K_{323} \\ K_{331} & K_{332} & K_{333} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}.$$

S využitím podmínek nulovosti a symetrie některých členů (4.9) přejde výraz ve zkrácené notaci na vztah

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} \\ \dots & \dots & \dots \\ -K_{41} & -K_{42} & -K_{43} \\ -K_{51} & -K_{52} & -K_{53} \\ -K_{61} & -K_{62} & -K_{63} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že v matici K_{mk} je horní blok nulový. Všechna informace je uložena ve středním bloku rozměrů (3×3) . Spodní blok je pouze opakováním druhého bloku s opačným znaménkem. Zápís pomocí multiindexů je přehlednější a výpočet vyžaduje pouze násobení 2D matic. Stále ale musíme mít na zřeteli, že zkrácené zápisy tenzorů již nejsou tenzory!

Př. 4.2: Lineární magnetooptický tenzor pro kubický materiál: Lineární magnetooptický tenzor má pro kubický materiál tvar

$$K_{mk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{63} & 0 & 0 \\ 0 & K_{63} & 0 \\ 0 & 0 & K_{63} \\ \dots & \dots & \dots \\ -K_{63} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{63} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{63} \end{pmatrix}.$$

Jak je vidět, tenzor má pouze šest nenulových členů, které jsou zadané pomocí hodnoty $\pm K_{63}$. Zapište si tvar lineárního magnetooptického příspěvku k permitivitě $\overleftrightarrow{\varepsilon}^{(1)}$.

Řešení:

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & K_{63}M_3 & K_{63}M_2 \\ -K_{63}M_3 & 0 & K_{63}M_1 \\ -K_{63}M_2 & -K_{63}M_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Kvadratický magnetooptický tenzor

Obdobné zjednodušení můžeme použít i u kvadratického tenzoru zavedením multiindexu na první i druhou dvojici indexů $\overset{4\leftrightarrow}{G}$. Podmínky (4.10) vedou na zjednodušený zápis

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} & G_{26} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} & G_{36} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & G_{45} & G_{46} \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} & G_{55} & G_{56} \\ G_{61} & G_{62} & G_{63} & G_{64} & G_{65} & G_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1^2 \\ M_2^2 \\ M_3^2 \\ M_2M_3 \\ M_1M_3 \\ M_1M_2 \end{pmatrix}.$$

Například kubický materiál má jen několik nenulových členů

$$G_{mn} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{12} & 0 & 0 & 0 \\ G_{12} & G_{11} & G_{12} & 0 & 0 & 0 \\ G_{12} & G_{12} & G_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{44} \end{pmatrix}.$$

Pro amorfní materiál by navíc platilo i následující zjednodušení: $G_{44} = (G_{11} + G_{12})/2$.

Dosadíme do Taylorova rozvoje (4.8) a dostaneme druhý řád magnetooptické permitivity

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}^{(2)} = \begin{pmatrix} G_{11}M_1^2 + G_{12}(M_2^2 + M_3^2) & 2G_{44}M_1M_2 & 2G_{44}M_1M_3 \\ 2G_{44}M_1M_2 & G_{11}M_2^2 + G_{12}(M_1^2 + M_3^2) & 2G_{44}M_2M_3 \\ 2G_{44}M_1M_3 & 2G_{44}M_2M_3 & G_{11}M_3^2 + G_{12}(M_1^2 + M_2^2) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Pro kubický materiál platí, že permitivita bez magnetického pole má tvar

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}^{(0)} = \varepsilon^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Př. 4.3: Tenzor permitivity v magnetickém poli:

Ve speciálním případě, kdy je vektor magnetizace \vec{M} rovnoběžný s osou \vec{x}_3 , tj. $\vec{M} = (0, 0, M)$, se nám tenzor permitivity pro kubický materiál velmi zjednoduší. Zapište tvar tenzoru permitivity do druhého řádu rozvoje. Použijte všechny výše odvozené výsledky (4.13), (4.11) a (4.12).

Řešení:

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(0)} + G_{12}M^2 & K_{63}M & 0 \\ -K_{63}M & \varepsilon^{(0)} + G_{12}M^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{(0)} + G_{11}M^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

4.7 Shrnutí

- Anizotropní materiály jsou popsány optickými parametry ve formě tenzorů. Takto lze popsat jevy, kdy vnější elektrické pole vyvolává v materiálu polarizaci, která není kolineární s intenzitou elektrického pole, $\vec{P} \nparallel \vec{E}$.
- Pokud chceme popsat piezoelektrický jev, je vnější síla popsána tenzorem napětí. Toto napětí generuje elektrickou polarizaci materiálu, která je vektorová. Obecný vztah závislosti vektoru na tenzoru může popsat pouze tenzor třetího řádu. Tenzorům se zde tedy nevyhneme.
- Zápis složitějších tenzorových vztahů se často zjednodušuje zavedením multiindexů. Např. tenzor druhého řádu si zapíšeme jako sloupcovou matici prvků tenzoru.
- Pro zjednodušení práce s tenzory je vždy výhodné využít znalost symetrie materiálu. Tak můžeme zjistit, že některé prvky tenzoru jsou identicky nulové, nebo že se některé prvky tenzoru musí sobě rovnat (Neumannův princip).
- Při reálném experimentu často jedním měřením nezískáme jeden izolovaný prvek hledaného tenzoru, ale lineární kombinaci několika prvků. Proto je třeba pro určení všech prvků tenzoru provést sadu různých měření a použít nějakou tomografickou metodu.
- Vnější pole, které působí na krystal, snižuje jeho symetrii (Curieův princip). Typické vnější síly jsou mechanické napětí, elektrické a magnetické pole.

4.8 Příklady

Př. 4.4: Rozměrová analýza piezoelektrického jevu:

Proveďte rozměrovou analýzu vztahů pro přímý a inverzní piezoelektrický jev daný vztahy:

$$\begin{array}{ll} \text{přímý} & P_i = d_{ijk}^T \Sigma_{jk}, \\ \text{inverzní} & u_{ij} = d_{ijk} E_k. \end{array}$$

Nápověda: Pro odvozené SI jednotky platí: $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$, $1 \text{ V} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-1}$.

Př. 4.5: Transformace tenzorů:

Uvažujte tenzor \overleftrightarrow{T} nějaké fyzikální vlastnosti a dva tenzory transformace souřadnic \overleftarrow{a}_1 resp. \overleftarrow{a}_2 v tomto tvaru,

$$\overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \overleftarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overleftarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\xi & \sin 2\xi \\ 0 & \sin 2\xi & -\cos 2\xi \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda tenzory \overleftarrow{a}_1 resp. \overleftarrow{a}_2 popisují vlastní, nebo nevlastní rotaci. Transformujte tenzor \overleftrightarrow{T} do nových souřadnic pomocí \overleftarrow{a}_1 (30°) resp. \overleftarrow{a}_2 (45°). Nový i původní tenzor \overleftrightarrow{T} rozložte na jeho symetrickou a antisymetrickou část.

Př. 4.6: Tomografie tenzoru:

Uvažujte měření složek tenzoru tepelné roztažnosti α_{ij} pro monoklinický krystal diskutované v sekci 4.3.2. Pro zvolenou orientaci krystalových os, kde fixní osa je ve směru kartézské osy x_2 , bude mít hledaný tenzor nenulové následující složky,

$$\overleftarrow{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{31} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

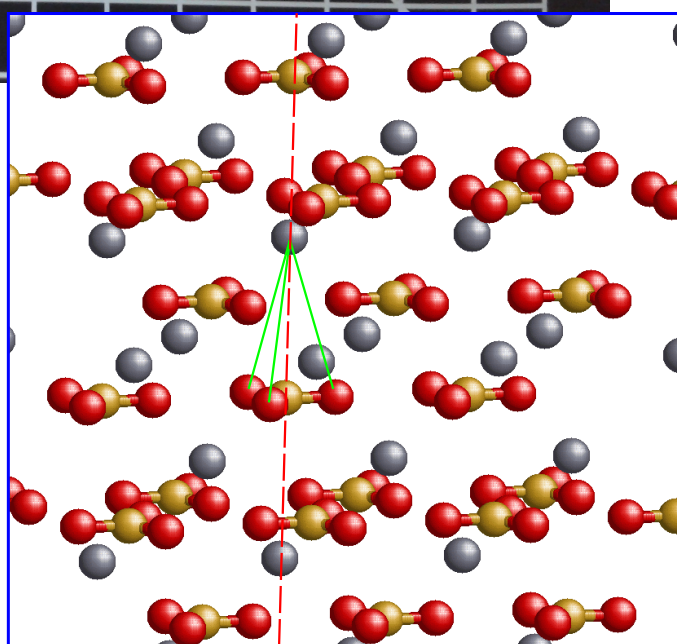
Diskutujte vhodný počet měření teplotního roztažení krystalu v různých směrech, který umožňuje určit všechny složky hledaného tenzoru.

Př. 4.7: Určení hlavní osy:

Určete směry hlavních os tenzoru

$$\overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Nápověda: Můžete postupovat analyticky, nebo numericky podle návodu ze sekce 4.3.3.



Tento přírodní krystal kalcitu je umístěn na zeměpisné pozici: $49^{\circ}35'36.485''\text{N}$, $17^{\circ}15'56.600''\text{E}$.
Dole je krystalová struktura s barevně rozlišenými atomy (Ca – šedě, C – žlutě, O – červeně).
Jde o negativní jednoosý krystal, červeně je zakreslena optická osa s trojčetnou symetrií.

Kapitola 5

Fresnelova rovnice

Obsah kapitoly

5.1	Lineární anizotropní prostředí	59
5.1.1	Tenzor permitivity a indexu lomu v hlavních osách	59
5.1.2	Proč je látka anizotropní?	60
5.1.3	Fresnelova rovnice	61
5.1.4	Vztahy mezi vektory elektromagnetického pole	61
5.2	Řešení Fresnelovy rovnice	62
5.2.1	Řešení Fresnelovy rovnice v rovině dopadu	62
5.2.2	Řešení Fresnelovy rovnice ve vlastních osách tenzoru permitivity	63
5.3	Plocha konstantní energie	64
5.3.1	Indexový elipsoid (E)	65
5.3.2	Směry vektorů pole v anizotropním prostředí	66
5.4	Šíření světla v jednoosém krystalu	67
	Př. 1: Dvojlom v anizotropním prostředí	67
5.5	Úhel dvojlomu	71
5.6	Shrnutí	72
5.7	Příklady	73

5.1 Lineární anizotropní prostředí

V této kapitole odvodíme Fresnelovu rovnici, která je základním vztahem pro popis šíření světla v anizotropním prostředí. V prostředí s lineární anizotropií platí následující materiálový vztah

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \overset{\leftarrow}{\varepsilon} \vec{E}. \quad (5.1)$$

Tenzor relativní permitivity $\overset{\leftarrow}{\varepsilon}$ si můžeme zapsat v nějakém souřadném systému jako matici. Z pohledu počtu proměnných v tenzoru permitivity můžeme všechny krystaly rozdělit do tří skupin: izotropní prostředí, jednoosé krystaly a dvouosé krystaly. Toto dělení je současně úzce spjaté se symetrií krystalové struktury studovaného materiálu, což bylo diskutováno v kap. 4 na str. 50. Je výhodné vyjádřit si tenzor permitivity v hlavních osách, kdy má matice tohoto tenzoru diagonální tvar,

$$\overset{\leftarrow}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

5.1.1 Tenzor permitivity a indexu lomu v hlavních osách

V nemagnetickém prostředí si zavedeme hlavní indexy lomu pomocí vztahu $n_i^2 = \varepsilon_i$, kde $i = 1, 2, 3$. U *dvouosého krystalu* jsou nezávislé tři indexy lomu určující hlavní osy tenzoru permitivity, přičemž je

dobré dodržovat jednotnou konvenci řazení indexů lomu podle velikosti: $n_1 < n_2 < n_3$. Tensor permitivity v hlavních osách má tedy tvar

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix}.$$

V případě jednoosého krystalu máme pouze dva rozdílné indexy lomu, n_o značí řádný (ordinární) a n_e mimořádný (extraordinární) index lomu. Tensor permitivity se nejčastěji uvádí v tomto tvaru

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}.$$

Jenoosé krystaly ještě dále dělíme na *pozitivní jednoosé* pokud platí podmínka $n_e > n_o$, a na *negativní jednoosé* pokud platí opačná podmínka $n_e < n_o$.

V izotropním prostředí nedochází k dvojlomu, indexový elipsoid zdegraduje na kouli. Tensor permitivity je dán pouze jedním parametrem

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = n^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.1.2 Proč je látka anizotropní?

Tabulka 5.1 uvádí indexy lomu typických optických krystalů. Otázkou ale zůstává, proč jsou tyto materiály anizotropní? Odpověď lze hledat pomocí mikroskopické struktury těchto materiálů. Například prostorové uspořádání atomů kalcitu je takové, že v jedné rovině leží uhlík ve středu trojúhelníku třech kyslíků. Vápník se nachází nad touto rovinou a spolu s uhlíkem vytváří trojčetnou osu symetrie, která je i optickou osou kalcitu. Nákres krystalového uspořádání kalcitu je spolu s fotografií přírodního krystalu použit jako úvodní obrázek této kapitoly.

Pokud krystalem kalcitu prochází světlo polarizované v rovině kolmé na optickou osu, bude silně interagovat s elektrony ve vazbách mezi kyslíky a uhlíky. Silná interakce má za následek vyšší index lomu pro tuto polarizaci a tedy pomalejší rychlost šíření světla s touto polarizací. Světlo polarizované ve směru optické osy bude interagovat s látkou méně, bude se šířit rychleji a bude cítit menší index lomu [2].

Pro obecnou polarizaci světla anizotropie způsobí, že odezva materiálu nebude kolineární s budícím elektrickým polem, což právě popisuje materiálový vztah (5.1). V anizotropním prostředí se tedy vstupní polarizace rozloží na vlastní stavy polarizace, které se mohou šířit různou rychlostí a různým směrem. Navíc mohou mít obě polarizace i různou absorpci.

Tab. 5.1: Indexy lomu typických jednoosých anizotropních materiálů

Typ	Materiál	n_o	n_e	λ (nm)	propustná oblast (nm)
negativní $n_o > n_e$	ADP ((NH ₄)H ₂ PO ₄)	1.522	1.478	633	200–1700
	Al ₂ O ₃ (safir)	1.768	1.760	589	300–4000
	CaCO ₃ (kalcit)	1.658	1.486	589	200–3000
	KDP (KH ₂ PO ₄)	1.507	1.467	633	250–1700
	LiNbO ₃	2.229	2.150	589	400–5000
pozitivní $n_o < n_e$	CdS	2.493	2.511	589	500–16000
	SiO ₂ (křemen)	1.544	1.553	589	190–4000
	ZnO	1.990	2.006	633	
	ZnS	1.923	1.968	589	

5.1.3 Fresnelova rovnice

V této kapitole budeme řešit Maxwellovy rovnice v dielektriku bez volných nábojů, tedy $\rho = 0$ a $\vec{j} = 0$. Řešení budeme hledat ve tvaru rovinné monochromatické vlny

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{i(N \frac{\omega}{c} \vec{s} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Jednotkový vektor \vec{s} udává směr vlnového vektoru, $\vec{k} = |\vec{k}| \vec{s} = \frac{N\omega}{c} \vec{s}$. Reálný index lomu N je vlastním číslem řešeného problému. Operace derivace se pro rovinnou vlnu zjednoduší podle následujícího schématu: $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ a $\nabla \times \rightarrow i\vec{k} \times$. První dvě Maxwellovy rovnice tedy získají tvar

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &\longrightarrow \vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}, \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &\longrightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu \vec{H}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Jako obvykle při odvozování vlnové rovnice použijeme rotaci z rotace vektoru \vec{E} a postupně dosadíme obě upravené MR (5.2) a nakonec materiálový vztah pro anizotropní prostředí (5.1)

$$\begin{aligned} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) &= \vec{k} \vec{k} \cdot \vec{E} - \vec{E} k^2, \\ \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) &= \vec{k} \times (\omega \mu \vec{H}) = -\mu \omega^2 \vec{D} = -\mu \epsilon_0 \overset{\leftarrow}{\epsilon} \omega^2 \vec{E}. \end{aligned}$$

Výrazy na konci prvního i druhého řádku se musí rovnat, což můžeme zapsat jako rovnici

$$k^2 \vec{E} - \vec{k} \vec{k} \cdot \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \overset{\leftarrow}{\epsilon} \vec{E} = 0.$$

S použitím definičního vztahu pro index lomu, $\omega^2/c^2 = k^2/N^2$, pokrátíme kvadrát vlnového vektoru a získáme finální výraz, který se nazývá *Fresnelova rovnice*

$$\boxed{\overset{\leftarrow}{\epsilon} \cdot \vec{E} - N^2 \left[\vec{E} - \vec{s} \vec{s} \cdot \vec{E} \right]} = 0. \quad (5.3)$$

Fresnelova rovnice je vlastně vlnovou rovnicí popisující šíření monochromatické rovinné vlny v anizotropním prostředí. Vlnový vektor světla má směr daný jednotkovým vektorem \vec{s} , polarizaci udává směr elektrického pole \vec{E} a takto polarizované světlo cítí index lomu N .

5.1.4 Vztahy mezi vektory elektromagnetického pole

Z první Maxwellovy rovnice (5.2) plyne, že vektor elektrické indukce \vec{D} je kolmý na směr vlnového vektoru \vec{k} a na směr vektoru magnetického pole \vec{H} . Ze druhé Maxwellovy rovnice dále platí, že $\vec{H} \perp \vec{k}$. Máme tedy sadu tří vektorů, které jsou i v anizotropním prostředí vždy navzájem kolmé $\{\vec{D}, \vec{H}, \vec{k}\}$. Obdobně, díky zavedení Poyntingova vektoru $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, máme i druhou sadu navzájem ortogonálních vektorů $\{\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}\}$, jak to ukazuje obr. 5.1a). Vztahy plynoucí ze zákona zachování energie elektromagnetického pole se řeší podrobněji v dodatku C.3.

Připomeňme, že pro elektromagnetické pole definujeme dvě rychlosti:

Fázová rychlost: $v_f = \omega/k = c/N$, $\vec{v}_f \parallel \vec{k}$,

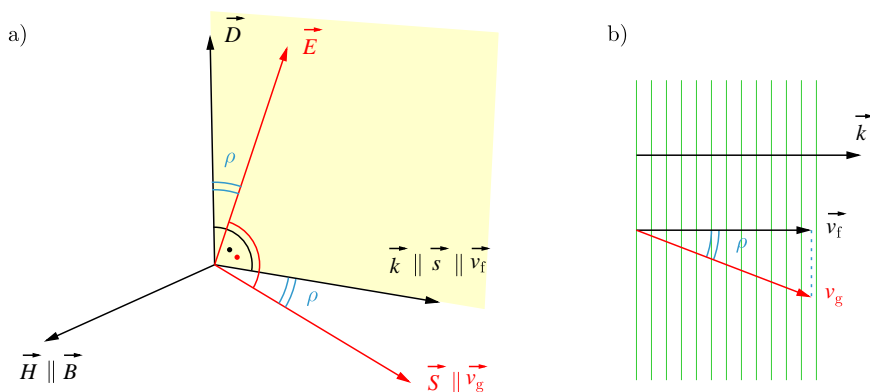
Grupová rychlost: $\vec{v}_g = \vec{S}/w$, kde w je hustota energie elektromagnetického pole.

Nyní si odvodíme vztah, který platí mezi těmito dvěma rychlostmi. Výraz pro hustotu elektrické energie upravíme dosazením první Maxwellovy rovnice za \vec{D} ,

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = -\frac{1}{2} \frac{N}{c} \vec{E} \cdot \vec{s} \times \vec{H} = \frac{1}{2} \frac{N}{c} \vec{s} \cdot \vec{E} \times \vec{H}.$$

Využijeme toho, že hustota elektrické energie je polovinou celkové hustoty energie elektromagnetického pole,

$$w = 2w_e = \frac{N}{c} \vec{s} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{N}{c} \vec{s} \cdot \vec{S} = \frac{N}{c} |\vec{S}| \cos \rho = \frac{S \cos \rho}{v_f}.$$



Obr. 5.1: a) Směry vektorů pole v anizotropním prostředí. b) Zelené čáry značí vlnoplochy a šipky zobrazují směr fázové a grupové rychlosti. ρ značí úhel dvojlomu (v anglické literatuře se používá termín walk-off).

ρ značí úhel dvojlomu, jak to ukazuje obr. 5.1. Tento výsledek dosadíme do výrazu pro velikost grupové rychlosti a dostaneme

$$v_g = \frac{S}{w} = \frac{Sv_f}{S \cos \rho} = \frac{v_f}{\cos \rho}.$$

Jak je zřejmé, vektor fázové rychlosti je průmětem vektoru grupové rychlosti do směru vlnového vektoru \vec{k} , jak to ukazuje obr. 5.1b)

$$v_f = v_g \cos \rho.$$

Vlnoplochy

V optice se zavádí pojem *vlnoplocha* jako rovina konstantní fáze elektromagnetického pole. Obecně i v anizotropním prostředí je vlnoplocha kolmá na vlnový vektor \vec{k} . Vlnoplocha v anizotropním prostředí už ale není kolmá na směr Poyntingova vektoru \vec{S} , který určuje směr šíření energie, tj. směr úzkého světelného paprsku.

V případě šíření světla anizotropním prostředím, které navíc ještě vykazuje absorpci, bude mít materiál komplexní index lomu \tilde{N} . Můžeme zavést komplexní vlnový vektor a vektorové vztahy budou ještě komplikovanější. Absorpce způsobí, že rovina konstantní fáze už nebude rovnoběžná s rovinou konstantní amplitudy. Navíc pro absorbující prostředí již neplatí podmínka symetrie tenzoru permitivity, a tedy $\epsilon_{ij} \neq \epsilon_{ji}$.

5.2 Řešení Fresnelovy rovnice

5.2.1 Řešení Fresnelovy rovnice v rovině dopadu

Zvolme si vhodně rovinu dopadu tak, aby vlnový vektor měl nulovou první složku. Jednotkový směrový vektor je tedy $\vec{s} = (0, s_2, s_3)$, přičemž platí normovací podmínka $s_2^2 + s_3^2 = 1$. Pro vlnový vektor tedy bude platit $\vec{k} = \frac{N\omega}{c} \vec{s}$ a současně $\vec{k} \perp \vec{x}_1$.

Pro rozpis Fresnelovy rovnice do složek bude výhodné si nejprve vyjádřit diadický součin jednotkového vektoru – *diádu* $\vec{s}\vec{s}$,

$$\vec{s}\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} (0 \ s_2 \ s_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2^2 & s_2 s_3 \\ 0 & s_2 s_3 & s_3^2 \end{pmatrix}.$$

Výsledek dosadíme do Fresnelovy rovnice (5.3)

$$\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{E} - N^2 \left[\overleftrightarrow{\mathbb{1}} - \vec{s}\vec{s} \right] \cdot \vec{E} = 0.$$

Z obou členů vytkneme skalární součin s elektrickým polem a s použitím normovací podmínky na směrový vektor ($s_2^2 + s_3^2 = 1$) dostaneme

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - N^2 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - N^2 s_3^2 & \varepsilon_{23} + N^2 s_2 s_3 \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} + N^2 s_2 s_3 & \varepsilon_{33} - N^2 s_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Při odvozování tohoto vztahu jsme využili normovací podmínku na složky jednotkového vektoru. Výsledek představuje ve třech řádcích zapsanou soustavu tří rovnic s nulovou pravou stranou (homogenní soustavu lineárních algebraických rovnic). Aby existovalo nenulové řešení soustavy, je nutné zajistit, aby tyto tři rovnice nebyly nezávislé. Tuto podmínku zajistí správná volba vlastního čísla, kterým je kvadrát indexu lomu N^2 . Rovnice jsou závislé právě tehdy, když je determinant matice nulový. Tuto rovnici, $\det() = 0$, označujeme jako *charakteristickou*, neboli *sekulární rovnici*.

Při výpočtu determinantu matice z rovnice (5.4) dostaneme kvadratickou rovnici pro N^2 . Jejím řešením jsou dvě vlastní hodnoty indexu lomu $N_{(1)}$ a $N_{(2)}$. Dosazením do vztahu (5.4) získáme podmínku

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \Big|_{N=N_{(1)}, N_{(2)}} \cdot \vec{E} = \vec{0},$$

ze které vypočítáme dva vlastní vektory elektrického pole \vec{E} . Každému ze dvou řešení sekulární rovnice můžeme dále dopočítat vlastní fázovou rychlost $v_f = c/N$ a vlastní směr polarizace (směr vektoru \vec{D}). Řešení můžeme popsat následujícím schématem:

$$(\det() = 0) \Rightarrow N_{(i)} \Rightarrow \vec{E}_{(i)} \Rightarrow v_{f(i)} \Rightarrow \vec{D}_{(i)}, \quad \text{pro } i = 1, 2.$$

5.2.2 Řešení Fresnelovy rovnice ve vlastních osách tenzoru permitivity

Řešení Fresnelovy rovnice je výhodné provést ve vlastních osách tenzoru permitivity, kde je tenzor ε_{ij} diagonální

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Nyní budeme Fresnelovu rovnici (5.3) postupně upravovat.

$$\begin{aligned} -\overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \vec{E} + N^2 (\overleftrightarrow{\mathbb{1}} - \vec{s}\vec{s}) \cdot \vec{E} &= 0, \\ N^2 \overleftrightarrow{\mathbb{1}} \cdot \vec{E} - \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \vec{E} &= N^2 \vec{s}\vec{s} \cdot \vec{E}, \\ \begin{pmatrix} N^2 - \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & N^2 - \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & N^2 - \varepsilon_3 \end{pmatrix} \cdot \vec{E} &= N^2 \vec{s}\vec{s} \cdot \vec{E}. \end{aligned}$$

Matici převedeme na druhou stranu tak, že budeme obě strany rovnice násobit zleva inverzní maticí a potom ještě vynásobíme zleva skalárně vektorem \vec{s} . Najít inverzní matici k diagonální matici je snadné, stačí pouze dosadit převrácenou hodnotu všech diagonálních elementů.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{N^2 - \varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{N^2 - \varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{N^2 - \varepsilon_3} \end{pmatrix} N^2 \cdot \vec{s}\vec{s} \cdot \vec{E}, \\ \vec{s} \cdot \vec{E} &= \vec{s} \cdot \begin{pmatrix} \frac{N^2}{N^2 - \varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N^2}{N^2 - \varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N^2}{N^2 - \varepsilon_3} \end{pmatrix} \cdot \vec{s}\vec{s} \cdot \vec{E}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Skalární součin $\vec{s} \cdot \vec{E}$ je číslo, které můžeme pokrátit na obou stranách. Dále využijeme toho, že \vec{s} je

jednotkový vektor a musí tedy platit $1 = |\vec{s}|^2 = \vec{s} \cdot \vec{s} = \vec{s} \cdot \vec{\mathbb{1}} \cdot \vec{s}$.

$$1 = \vec{s} \cdot \begin{pmatrix} \frac{N^2}{N^2 - \varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N^2}{N^2 - \varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N^2}{N^2 - \varepsilon_3} \end{pmatrix} \cdot \vec{s},$$

$$0 = \vec{s} \cdot \begin{pmatrix} \frac{N^2}{N^2 - \varepsilon_1} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N^2}{N^2 - \varepsilon_2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N^2}{N^2 - \varepsilon_3} - 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{s}.$$

Všechny diagonální prvky mají analogický tvar a všechny je proto upravíme tak, že oba sčítance převedeme na jeden zlomek,

$$\frac{N^2}{N^2 - \varepsilon_i} - 1 = \frac{N^2 - N^2 + \varepsilon_i}{N^2 - \varepsilon_i} = \frac{\varepsilon_i}{N^2 - \varepsilon_i} = \frac{1}{N^2} \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_i} - \frac{1}{N^2}}.$$

Nenulový kvadrát indexu lomu N^2 můžeme z celé matice vytknout a pokrátit. Zavedeme si hlavní indexy lomu pomocí $n_i^2 = \varepsilon_i$. Dostaneme rovnici pro vlastní hodnotu indexu lomu a složky jednotkového směrového vektoru vlny \vec{s} ,

$$\frac{s_1^2}{\frac{1}{N^2} - \frac{1}{n_1^2}} + \frac{s_2^2}{\frac{1}{N^2} - \frac{1}{n_2^2}} + \frac{s_3^2}{\frac{1}{N^2} - \frac{1}{n_3^2}} = 0.$$

Jestliže vynásobíme tuto rovnici faktorem $1/c^2$, využijeme vztahu $v_f = c/N$ a zavedeme hlavní rychlosti šíření $v_i = c/n_i$, potom dostaneme Fresnelovu rovnici pro fázovou rychlost

$$\boxed{\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{v_f^2 - v_i^2} = 0.} \quad (5.6)$$

Smysl hlavních rychlostí šíření je následující. Pokud se anizotropním krystalem šíří vlna s polarizací ve směru osy \vec{x}_1 , potom je její fázová rychlost rovna $v_f = v_1$. Analogicky pro polarizaci ve směru dalších dvou vlastních os dostaneme rychlosti v_2 a v_3 .

Na závěr ještě spočítáme vlastní vektory elektrického pole. Vyjdeme ze vztahu (5.5),

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{N^2}{N^2 - \varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N^2}{N^2 - \varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N^2}{N^2 - \varepsilon_3} \end{pmatrix} \cdot \vec{s} \vec{s} \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{c^2/\varepsilon_1}{c^2/\varepsilon_1 - c^2/N^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c^2/\varepsilon_2}{c^2/\varepsilon_2 - c^2/N^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c^2/\varepsilon_3}{c^2/\varepsilon_3 - c^2/N^2} \end{pmatrix} \cdot \vec{s} \vec{s} \cdot \vec{E}.$$

Pro složky vektoru elektrického pole dostaneme

$$\boxed{E_i = \frac{v_i^2}{v_i^2 - v_f^2} s_i (\vec{s} \cdot \vec{E}).} \quad (5.7)$$

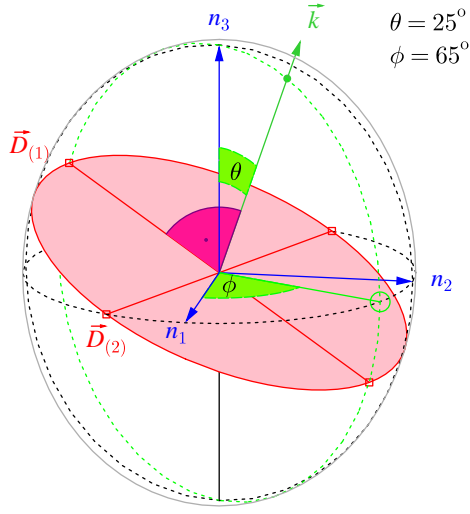
Tyto vztahy, označované jako Fresnelovy rovnice vlnových normál, jsou kvadratické pro v_f^2 . Jejich řešením jsou čtyři fázové rychlosti $\pm v_{f(1)}$ a $\pm v_{f(2)}$ pro šíření dvěma rychlostmi v jednom nebo v opačném směru. Vlastním řešením jsou pak dvě lineárně polarizované vlny, kdy polarizace obou vln jsou navzájem kolmé.

5.3 Plocha konstantní energie

Ze zákona zachování energie plyne, že energie záření se při šíření neabsorbujícím prostředím nemůže měnit. Hustotu energie záření můžeme spočítat jako dvojnásobek hustoty elektrické energie podle $w = 2w_e = \vec{E} \cdot \vec{D}$, díky tomu, že příspěvek elektrické i magnetické složky je stejný $w_m = w_e$. V izotropním prostředí má vektor \vec{D} pro pole s jednotkovou energií ($w = 1$) vždy stejnou délku bez ohledu na směr polarizace. Zavedme si vektor \vec{X} následovně,

$$\vec{X} = \vec{D} / \sqrt{\varepsilon_0}.$$

Koncový bod vektoru \vec{X} pro všechny možné směry polarizace vytváří plochu v prostoru. Ta se nazývá *plochou konstantní energie*. Pro izotropní prostředí má tvar koule. Naproti tomu v anizotropním materiálu má tato plocha obecnější tvar a my si odvodíme, že tato plocha je elipsoid, který ukazuje obr. 5.2.



Obr. 5.2: Indexový elipsoid anizotropního materiálu, modře jsou zakresleny vlastní osy a vlastní indexy lomu. Zelená šipka označuje směr vlnového vektoru, červeně je zakreslen řez elipsoidu kolmo na směr \vec{k} .

Jednotková plocha musí vyhovovat vztahu

$$\vec{D} \cdot \vec{E} = 1. \quad (5.8)$$

Za vektor elektrické intenzity dosadíme materiálový vztah $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \overleftrightarrow{\epsilon}^{-1} \cdot \vec{D}$, čímž dostaneme

$$\frac{1}{\epsilon_0} \vec{D} \cdot \overleftrightarrow{\epsilon}^{-1} \cdot \vec{D} = 1. \quad (5.9)$$

Úskalí nalezení inverzního tenzoru permitivity překonáme tím, že budeme pracovat s tenzorem permitivity ve vlastních osách. Určení inverzního tenzoru k diagonálnímu tenzoru je potom triviální,

$$\overleftrightarrow{\epsilon}^{-1} = \begin{pmatrix} \epsilon_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

Rovnici jednotkové plochy můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{D_1^2}{n_1^2} + \frac{D_2^2}{n_2^2} + \frac{D_3^2}{n_3^2} \right) = 1 \quad \text{nebo} \quad \boxed{\left(\frac{X_1^2}{n_1^2} + \frac{X_2^2}{n_2^2} + \frac{X_3^2}{n_3^2} \right) = 1} \quad (5.10)$$

Při odvození jsme použili vlastní hodnoty indexu lomu zavedené pomocí $\epsilon_i = n_i^2$. Výraz v rámečku je matematickým zápisem elipsoidu, který má velmi výhodné vlastnosti. Nazývá se *indexový elipsoid* nebo zkráceně *indikatrix* a označuje se symbolem (\mathbf{E}) . Jeho poloosy mají délku velikosti vlastních indexů lomu n_i . Díky materiálovému vztahu

$$E_i = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{D_i}{n_i^2}$$

je zřejmé, že pokud známe směr elektrické indukce \vec{D} , potom nalezneme směr elektrické intenzity \vec{E} jako normálu k indikatrix v průsečíku se směrem vektoru \vec{D} (viz Dodatek B).

5.3.1 Indexový elipsoid (\mathbf{E})

Odvodíme si další vlastnosti indexového elipsoidu s použitím Fresnelovy rovnice,

$$\overleftrightarrow{\epsilon} \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = N^2 [\vec{E} - \vec{s}\vec{s} \cdot \vec{E}],$$

kteřou vynásobíme skalárně zleva vektorem elektrické indukce \vec{D} . Takto dostaneme

$$\frac{\vec{D} \cdot \vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{|\vec{D}|^2}{\varepsilon_0} = N^2[\vec{D} \cdot \vec{E} - \vec{D} \cdot \vec{s}\vec{s} \cdot \vec{E}].$$

Jelikož vektor elektrické indukce je vždy kolmý na směr vlnového vektoru, musí být skalární součin těchto kolmých vektorů nulový, $\vec{D} \cdot \vec{s} = 0$. Druhý člen v závorce proto vypadne a zůstane pouze

$$\frac{|\vec{D}|^2}{\varepsilon_0} = N^2 \vec{D} \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{|\vec{D}|^2}{N^2}. \quad (5.11)$$

Nyní provedeme odvození obdobně jako na str. 65, které vedlo na rovnici (5.10).

$$\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{D} = \vec{D} \cdot \overset{\leftarrow}{\varepsilon}^{-1} \cdot \vec{D} = \sum_{i=1}^3 \frac{D_i^2}{n_i^2}. \quad (5.12)$$

Po srovnání rovnic (5.11) a (5.12) dostaneme výsledný výraz, který popisuje indexový elipsoid. Zde N značí vlastní index lomu, který je řešením Fresnelovy rovnice,

$$\frac{|D|^2}{N^2} = \frac{D_1^2}{n_1^2} + \frac{D_2^2}{n_2^2} + \frac{D_3^2}{n_3^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{X_1^2}{n_1^2} + \frac{X_2^2}{n_2^2} + \frac{X_3^2}{n_3^2} \right) = 1} \quad (5.13)$$

Z tohoto výrazu je zřejmé, že elektromagnetické pole v látce cítí index lomu, který odpovídá délce úsečky mezi středem elipsoidu a průsečíkem elipsoidu se směrem vektoru elektrické indukce \vec{D} . Libovolný bod na elipsoidu popisuje zavedený vektor \vec{X} , pro který platí $\vec{X} = \frac{\vec{D}}{|\vec{D}|} N$. Délka vektoru \vec{X} udává index lomu prostředí pro světlo s polarizací ve směru \vec{D} .

Z rovnice indexového elipsoidu (5.13) vyplývá, že směr normály v koncovém bodě vektoru \vec{X} k povrchu elipsoidu

$$\left(\frac{X_1}{n_1^2}, \frac{X_2}{n_2^2}, \frac{X_3}{n_3^2} \right)$$

je rovnoběžný s vektorem elektrické intenzity \vec{E} , protože $\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \overset{\leftarrow}{\varepsilon}^{-1} \vec{D}$.

5.3.2 Směry vektorů pole v anizotropním prostředí

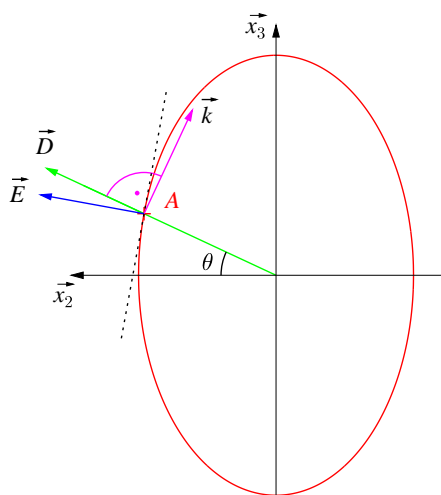
Indexový elipsoid je výhodný k určení směrů vektorů pole. Pokud známe směr šíření, potom kolmo na tento směr provedeme řez (II) jdoucí středem elipsoidu. Průnikem elipsoidu a roviny řezu je obecně elipsa. Směry hlavní a vedlejší poloosy této elipsy vytyčují dvě řešení pro vektor elektrické indukce $\vec{D}_{(1)}$ a $\vec{D}_{(2)}$. Vektory elektrické intenzity $\vec{E}_{(1)}$ a $\vec{E}_{(2)}$ leží v rovině určené vektory \vec{k} a $\vec{D}_{(1)}$, respektive $\vec{D}_{(2)}$. Vektory magnetické intenzity $\vec{H}_{(1)}$ a $\vec{H}_{(2)}$ jsou kolmé k rovině určené vektory \vec{k} a $\vec{E}_{(1)}$, respektive $\vec{E}_{(2)}$.

Naopak, pokud známe polarizaci světla, tj. směr vektoru elektrické indukce \vec{D} , potom nám tento vektor určí bod na ploše indexového elipsoidu. Normála k tečné ploše v tomto bodě určuje směr elektrické intenzity \vec{E} . Směr šíření (vlnový vektor \vec{k}) je kolmý na vektor \vec{D} a leží v rovině dané dvěma nekolineárními vektory \vec{E} a \vec{D} .

Pomocí indexové plochy se řeší dvě standardní úlohy:

1. Známe směr vlnového vektoru šířící se elektromagnetické vlny \vec{k} a chceme znát vlastní stavy polarizace (směr elektrické indukce \vec{D}).
Řešení: Provedeme řez indexového elipsoidu procházející jeho středem kolmo na směr vektoru \vec{k} . Dostaneme tak elipsu, jejíž hlavní osy udávají směry vlastních stavů lineární polarizace určené vektory $\vec{D}_{(1)}$ a $\vec{D}_{(2)}$, viz obr. 5.2.

2. Pro danou polarizaci vlny (danou vektorem \vec{D}) chceme určit směr šíření.
Řešení: V průsečíku vektoru \vec{D} a elipsoidu vytvoříme tečnou plochu. Normálou na tuto plochu je vektor elektrické intenzity \vec{E} . Směr šíření \vec{k} je kolmý na vektor elektrické indukce \vec{D} , přičemž leží v rovině určené vektory \vec{E} a \vec{D} , viz obr. 5.3.



Obr. 5.3: Červeně je zakreslen indexový elipsoid pro pozitivní jednoosý krystal $n_e/n_o = 1.6$. Zeleně je zakreslen směr vektoru elektrické indukce, modře směr vektoru elektrické intenzity a fialově směr vlnového vektoru. Pro jednoduchost je zvolena polarizace v rovině kolmé na osu \vec{x}_1 a zobrazen je pouze řez v rovině kolmé na tuto osu.

Ve zcela obecném elipsoidu lze najít dva řezy procházející středem, které mají kruhový tvar. Kolmice k těmto řezům určují směry optických os – jedná se o dvouosý materiál. U rotačního elipsoidu splynou oba kruhové řezy v jeden, který určuje jen jednu optickou osu – jde o jednoosý materiál.

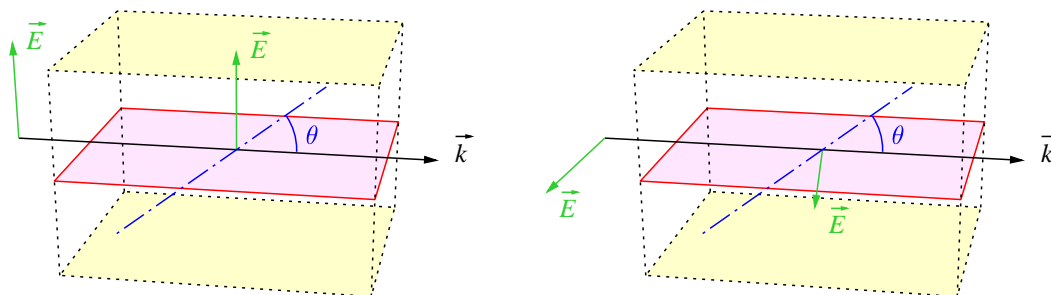
5.4 Šíření světla v jednoosém krystalu

V jednoosém krystalu je vždy optická osa daná nějakou význačnou krystalografickou osou, např. šestičetnou osou hexagonálního krystalu. Vlastní osy krystalu nám definují pravouhlý systém souřadnic: $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$. Směr optické osy položíme do osy \vec{x}_3 . Směr vlnového vektoru \vec{k} a optická osa krystalu \vec{x}_3 spolu svírají úhel θ a spolu dohromady určují tzv. *hlavní rovinu*. I při kolmém dopadu světla na rovinné rozhraní vzduchu a jednoosého krystalu dochází k dvojlomu, kdy se různě polarizované svazky šíří dvěma význačnými směry, které označujeme jako směr řádného a mimořádného paprsku.

Jak ukazuje obr. 5.4, v případě řádného paprsku (ordinárního, označení o) je vektor elektrické indukce \vec{D} kolmý na hlavní rovinu. Index lomu pro tuto polarizaci je $n_o(\theta) = n_o$ a není závislý na úhlu θ . Naproti tomu pro mimořádný paprsek (extraordinární, označení e) leží elektrické pole v hlavní rovině. Pro mimořádný paprsek platí, že vektor elektrické intenzity \vec{E} zde není kolmý na vlnový vektor \vec{k} . Index lomu mimořádného paprsku $n_e(\theta)$ je ale závislý na úhlu θ .

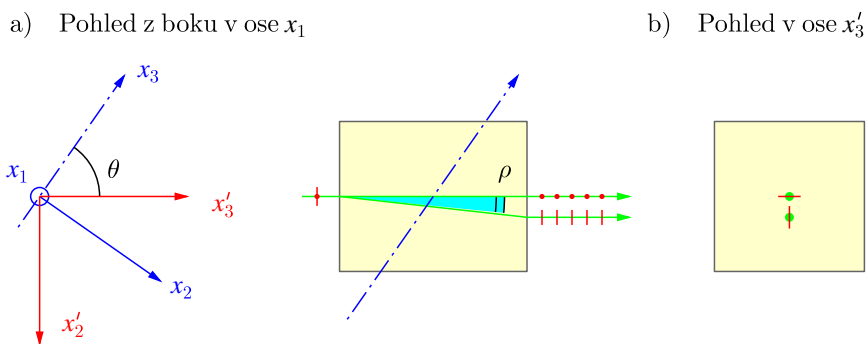
a) řádný / ordinary

b) mimořádný / extraordinary



Obr. 5.4: Šíření řádného a mimořádného svazku jednoosým krystalem. Červeně je zakreslena hlavní rovina. Vektor elektrické intenzity je zobrazen zeleně: a) pro řádný svazek je kolmý na hlavní rovinu, b) pro mimořádný svazek leží vektor elektrického pole v hlavní rovině.

Př. 5.1: Dvojlom v anizotropním prostředí: Anizotropní krystal můžeme použít k vzájemnému rozposunutí polarizačních složek světla. Uvažujme šíření světla v jednoosém krystalu jako je třeba kalcitu (CaCO_3) podle obr. 5.5. Fotografie přírodního kalcitu je úvodním obrázkem této kapitoly. S hlavní osou krystalu je svázána nečárkovaná souřadná soustava, přičemž osa \vec{x}_3 je totožná s optickou osou krystalu. V této vlastní souřadné soustavě je tenzor permitivity diagonální s tím, že platí: $\epsilon_1 = \epsilon_2 = n_o^2$ a $\epsilon_3 = n_e^2$.



Obr. 5.5: Nákres geometrie šíření světla v jednoosém anizotropním krystalu kalcitu (CaCO_3), který slouží pro prostorové rozposnutí polarizačních složek vstupního svazku světla díky dvojlomu. θ značí úhel sklonu (cut-angle) a ρ je úhel dvojlomu.

Směr šíření paprsku je svázán s laboratorní soustavou, kterou označíme jako čárkovanou soustavu souřadnic. Laboratorní soustava je vůči nečárkované soustavě otočená o úhel θ kolem osy $\vec{x}_1 = \vec{x}'_1$, jak to ukazuje obr. 5.5. Transformace mezi souřadnými systémy popisuje tenzor rotace, $\vec{x}' = \overleftrightarrow{R}(\theta)\vec{x}$, kde

$$\overleftrightarrow{R}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Díky tomu, že $\overleftrightarrow{R}^{-1}(\theta) = \overleftrightarrow{R}(-\theta)$, můžeme tenzor permitivity ze soustavy krystalu transformovat do soustavy směru šíření následovně

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}' = \overleftrightarrow{R}(\theta)\overleftrightarrow{\varepsilon}\overleftrightarrow{R}(-\theta) = \overleftrightarrow{R}(\theta) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \overleftrightarrow{R}(-\theta).$$

Provedeme maticové násobení a dostaneme matici, která má pouze pět nenulových prvků,

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_3 \sin^2 \theta & (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \sin \theta \cos \theta \\ 0 & (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \sin \theta \cos \theta & \varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_B & \varepsilon_D \\ 0 & \varepsilon_D & \varepsilon_C \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

V čárkované soustavě je vlnový vektor \vec{k}' rovnoběžný s osou \vec{x}'_3 , z čehož plyne, že $\vec{s}' = (0, 0, 1)$, a tedy

$$\vec{s}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overleftrightarrow{\mathbb{1}} - \vec{s}'\vec{s}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dosazením do Fresnelovy rovnice $(\overleftrightarrow{\varepsilon}'\vec{E} - N^2(\overleftrightarrow{\mathbb{1}} - \vec{s}'\vec{s}') \cdot \vec{E} = \vec{0})$, čímž dostaneme

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 - N^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_B - N^2 & \varepsilon_D \\ 0 & \varepsilon_D & \varepsilon_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Vlastní hodnoty indexu lomu získáme řešením podmínky nulovosti determinantu. Z této podmínky odvodíme kvadratickou rovnici pro kvadrát indexu lomu N^2 ,

$$(\varepsilon_1 - N^2) [(\varepsilon_B - N^2)\varepsilon_C - \varepsilon_D^2] = 0.$$

Řešení

První kořen kvadratické rovnice získáme z nulovosti první závorky

$$N_{(1)}^2 = \varepsilon_1 = n_o^2. \quad (5.15)$$

Tento výsledek znamená, že index lomu řádného svazku není závislý na úhlu θ a je roven n_o . Z nulovosti druhé závorky nám vyjde druhý kořen

$$N_{(2)}^2 = \varepsilon_B - \frac{\varepsilon_D^2}{\varepsilon_C} = n_e^2(\theta). \quad (5.16)$$

Když nyní dosadíme za průběžné parametry ε_B , ε_C a ε_D , dojdeme ke vztahu, který popisuje index lomu jako funkci směrového úhlu θ , který je sevřený vlnovým vektorem a optickou osou. Tento vztah je matematickou rovnicí elipsy,

$$\boxed{\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_3} + \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_1} = \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2}}. \quad (5.17)$$

Podrobné odvození je uvedeno v dodatku C.4. Z této rovnice plyne, že index lomu mimořádného svazku se mění v závislosti na úhlu odklonu osy krystalu od směru šíření dopadajícího svazku (někdy se tento úhel nazývá θ_c – úhel řezu krystalu (cut-angle)). Mezní hodnoty jsou $n_e(0^\circ) = n_o$ a $n_e(90^\circ) = n_e$. Je zřejmé, že pokud se světlo šíří ve směru optické osy, $\theta = 0^\circ$, jsou indexy lomu stejné pro všechny polarizace světla ($N_{(1)} = N_{(2)} = n_o$).

V literatuře můžeme najít několik alternativních zápisů rovnice indexu lomu mimořádného svazku (5.17). Provedeme odvození jednoho alternativního tvaru:

$$\begin{aligned} n_e^2(\theta) &= \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2}} = \frac{n_o^2 n_e^2}{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta} \\ &= n_o^2 \frac{1}{\cos^2 \theta + \left(\frac{n_o}{n_e}\right)^2 \sin^2 \theta} = n_o^2 \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + \left(\frac{n_o}{n_e}\right)^2 \sin^2 \theta}, \\ n_e^2(\theta) &= n_o^2 \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 + \left(\frac{n_o}{n_e}\right)^2 \tan^2 \theta}. \end{aligned}$$

Tento vztah platí ve smyslu limity, jelikož funkce tangens diverguje pro $\theta \rightarrow \pi/2$. Proto je výhodnější používat předchozí vztah (5.17) s funkcemi sinus a kosinus, které nikde nedivergují.

Vlastní stavy polarizace

Nyní, když jsme zjistili vlastní hodnoty indexu lomu z Fresnelovy rovnice, můžeme je dosadit za N a určit vlastní vektory \vec{E} .

$$\text{Ordinární : } \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{array} \right) \Bigg|_{N=N_{(1)}} \cdot \vec{E}_{(1)} = \vec{0}, \quad \vec{E}_{(1)} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

V prvním případě řádného paprsku dostaneme matici s nulovým prvním řádkem. Z toho je zřejmé, že řešením bude vektor $\vec{E}_{(1)}$ ve směru osy x_1 , který je vždy kolmý na vlnový vektor \vec{k} . V druhém případě mimořádného paprsku bude mít vlastní vektor $\vec{E}_{(2)}$ nenulovou druhou a třetí složku.

$$\text{Extraordinární : } \left(\begin{array}{ccc} \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{array} \right) \Bigg|_{N=N_{(1)}} \cdot \vec{E}_{(2)} = \vec{0}, \quad \vec{E}_{(2)} = \frac{E_0}{\sqrt{\varepsilon_C^2 + \varepsilon_D^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_C \\ -\varepsilon_D \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že v případě mimořádného paprsku jsou směry vektorů složitější. V tomto případě již směr paprsku není totožný se směrem vlnového vektoru \vec{k} . K určení směru šíření paprsku světla tedy musíme použít jiný vektor – vektor, který udává směr šíření energie, a tím je Poyntingův vektor, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Za vektor \vec{H} dosadíme z Maxwellovy rovnice vztah odvozený derivováním časových a

prostorových závislostí pro rovinnou vlnu

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ i\vec{k} \times \vec{E} &= \omega \vec{B}, \\ \vec{k} \times \vec{E} &= \omega \mu \vec{H}, \\ \vec{H} &= \frac{1}{\omega \mu} \vec{k} \times \vec{E}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\omega \mu} \vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E}), \\ \vec{S} &= \frac{1}{\omega \mu} (\vec{k} E^2 - \vec{E} \vec{k} \cdot \vec{E}).\end{aligned}\tag{5.18}$$

Ve druhé rovnici jsme použili známou identitu pro rozpis dvojitého vektorového součinu na skalární součiny. Do tohoto vztahu dosadíme a odvodíme si Poyntingův vektor pro řádný i pro mimořádný paprsek. V případě řádného paprsku je

$$\vec{k}_{(1)} = \frac{\omega}{c} n_o \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tedy skalární součin

$$\vec{k}_{(1)} \cdot \vec{E}_{(1)} \sim (001) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Poyntingův vektor a tedy i směr šíření řádného svazku je rovnoběžný s vlnovým vektorem. Pokud uvažujeme nemagnetické prostředí ($\mu_r = 1$), potom

$$\vec{S}_{(1)} = \frac{1}{\omega \mu_0} \frac{\omega}{c} n_o E_{(1)}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n_o E_0^2 \vec{x}_3.\tag{5.19}$$

V případě mimořádného svazku má vlnový vektor tvar

$$\vec{k}_{(2)} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_B - \frac{\varepsilon_D^2}{\varepsilon_C}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nicméně vlastní vektor elektrické intenzity mimořádného paprsku $\vec{E}_{(2)}$ má nenulový druhý a třetí člen, proto tedy skalární součin $\vec{k}_{(2)} \cdot \vec{E}_{(2)} \neq 0$ a Poyntingův vektor už nebude rovnoběžný s vlnovým vektorem. Dosadíme do rovnice (5.18) a budeme zjednodušovat podobně jako pro řádný svazek,

$$\begin{aligned}\vec{S}_{(2)} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} N_{(2)} E_0^2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon_C^2 + \varepsilon_D^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_C \\ -\varepsilon_D \end{pmatrix} (0, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_C \\ -\varepsilon_D \end{pmatrix} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} N_{(2)} E_0^2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\varepsilon_C^2 + \varepsilon_D^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_C \\ -\varepsilon_D \end{pmatrix} (-\varepsilon_D) \right] \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} N_{(2)} E_0^2 \frac{1}{\varepsilon_C^2 + \varepsilon_D^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_C \varepsilon_D \\ \varepsilon_C^2 + \varepsilon_D^2 - \varepsilon_D^2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} N_{(2)} E_0^2 \frac{\varepsilon_C}{\varepsilon_C^2 + \varepsilon_D^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_D \\ \varepsilon_C \end{pmatrix}, \\ \vec{S}_{(2)} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} N_{(2)} E_0^2 \frac{\varepsilon_C}{\varepsilon_C^2 + \varepsilon_D^2} (\varepsilon_D \vec{x}_2 + \varepsilon_C \vec{x}_3).\end{aligned}\tag{5.20}$$

Příklady šíření mimořádného svazku

Šíření podél optické osy: $\theta = 0^\circ$ $N_{(1)}^2 = N_{(2)}^2 = n_o^2 = \varepsilon_1$, $\vec{k} \parallel \vec{S}$,

Šíření kolmo na optickou osu: $\theta = 90^\circ$ $N_{(1)}^2 = n_o^2 = \varepsilon_1$, $N_{(2)}^2 = n_e^2 = \varepsilon_3$, $\vec{k} \parallel \vec{S}$,

Šíření v obecném směru: $0^\circ < \theta < 90^\circ$ $N_{(1)}^2 = n_o^2 = \varepsilon_1$, $N_{(2)}^2 = n_e^2(\theta)$, $\vec{k} \nparallel \vec{S}$

Jednoosé krystaly dělíme na pozitivní a negativní. Pokud je $n_e < n_o$, pak označujeme krystal jako jednoosý negativní. Pokud je nerovnost opačná, $n_e > n_o$, potom krystal nazýváme jednoosý pozitivní.

5.5 Úhel dvojlomu

Pro kvantifikaci míry anizotropie daného krystalu je možné použít jako parametr *úhel dvojlomu*. Pro jednoosý krystal je tento úhel roven úhlové vzdálenosti mezi směry Poyntingových vektorů (paprsků) řádného a mimořádného svazku. Úhel dvojlomu označujeme řeckým symbolem ρ , v anglické literatuře se používá termín walk-off. Tento důležitý úhel si nyní odvodíme. Pro jednoduchost budeme uvažovat jednoosý krystal s indexy lomu v hlavních osách krystalu n_o a n_e .

Jestliže směr šíření a hlavní osa krystalu svírají mezi sebou úhel θ , viz obr. 5.6, potom je z analýzy indexového elipsoidu patrné, že směry elektrických vektorů můžeme parametrizovat pomocí úhlu θ následovně

$$\vec{D} \parallel (0, \cos \theta, \sin \theta), \quad \vec{E} \parallel \left(0, \frac{\cos \theta}{n_o^2}, \frac{\sin \theta}{n_e^2} \right).$$

Tento vztah plyne z derivace plochy indexového elipsoidu v místě průsečíku vektoru elektrické indukce, viz Dodatek B. Vlnový vektor je kolmý na elektrickou indukci ($\vec{k} \perp \vec{D}$) a je rovnoběžný se směrem Poyntingova vektoru řádného svazku \vec{S}_o ,

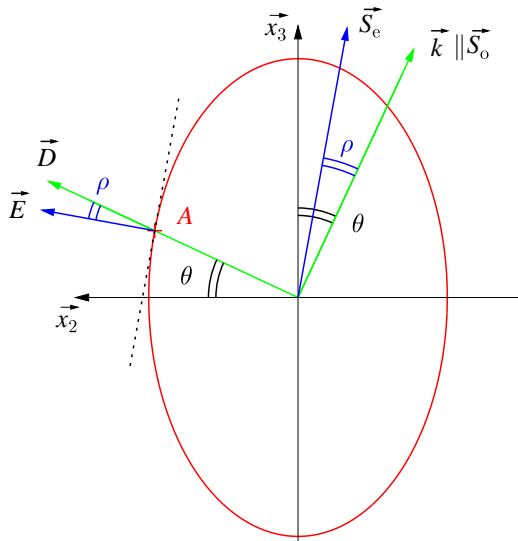
$$\vec{S}_o \parallel \vec{k} \parallel (0, -\sin \theta, \cos \theta).$$

Úhel mezi osou \vec{x}_2 a \vec{E} je dán rozdílem mezi úhly θ a ρ , tedy

$$\tan(\theta - \rho) = \frac{\sin \theta / n_e^2}{\cos \theta / n_o^2} \Rightarrow \tan(\theta - \rho) = \tan \theta \frac{n_o^2}{n_e^2}$$

a dalšími úpravami dospějeme ke tvaru

$$\rho(\theta) = \theta - \arctan \left[\left(\frac{n_o}{n_e} \right)^2 \tan \theta \right]. \quad (5.21)$$



Obr. 5.6: Červeně je zakreslen indexový elipsoid pro pozitivní jednoosý krystal $n_e/n_o = 1.6$. Úhel odklonu od optické osy $\theta = 25^\circ$. Zeleně jsou zakresleny kolmé vektory $\vec{D} \perp \vec{k}$, modře jsou zakresleny kolmé vektory $\vec{E} \perp \vec{S}_e$. Úhel dvojlomu vyjde $\rho = 14.7^\circ$.

Znaménko dvojlomu má pro jednoosé krystaly následující význam:

Pozitivní jednoosý: $n_e > n_o \Rightarrow \rho > 0$, příklon svazku k optické ose (viz obr. 5.6)

Negativní jednoosý: $n_e < n_o \Rightarrow \rho < 0$, odklon svazku od optické osy

5.6 Shrnutí

- Závislost indexu lomu na směru šíření světla a jeho polarizaci se označuje jako anizotropie.
- Vlnová rovnice je diferenciální rovnice druhého řádu, která se dá pro elektromagnetické pole odvodit z Maxwellových rovnic. Pro rovinnou monochromatickou vlnu v anizotropním prostředí se obdobným způsobem odvodí Fresnelova rovnice.
- Fresnelova rovnice představuje ve 3D prostoru soustavu tří algebraických rovnic. Řešením této soustavy získáme dvě vlastní čísla (indexy lomu) a dva vlastní stavy polarizace, které se mohou šířit anizotropním prostředím v zadaném směru.
- Anizotropní materiály dělíme na jednoosé (pozitivní a negativní) a dvouosé.
- Anizotropie materiálu je dobře popsána pomocí indexového elipsoidu (\mathbf{E}). Tento elipsoid umožňuje geometrické řešení úloh na šíření světla v anizotropním materiálu.
- Typickým jevem, který způsobuje anizotropie, je dvojlom (walk-off). Světelný paprsek se nešíří ve směru vlnového vektoru \vec{k} , ale ve směru Poyntingova vektoru.

5.7 Příklady

Př. 5.2: Index lomu mimořádného svazku:

Dosaďte za parametry ε_B , ε_C a ε_D do vztahu (5.16) a odvoďte vztah (5.17), který udává závislost indexu lomu mimořádného svazku na směrovém úhlu θ .

Př. 5.3: Úhel dvojlomu:

Odvoďte úhel dvojlomu ρ ze směrů Poyntingových vektorů $\vec{S}_{(1)}$ a $\vec{S}_{(2)}$, které jsou pro jednoosý materiál dané vztahy (5.19) a (5.20).

Př. 5.4: Optické rozdělení krystalů:

Který z následujících krystalů je jednoosý pozitivní, jednoosý negativní a který je dvouosý: ADP, KDP, KTP, safír, kalcit, LiNbO_3 , ZnS ?

Nápověda: Použijte tab. 5.1.

Př. 5.5: Dvojlom v kalcitu:

Spočtete úhel dvojlomu v krystalu kalcitu pro vlnovou délku 532 nm ($n_o = 1.663$, $n_e = 1.488$), jestliže je hlavní osa krystalu orientovaná pod úhlem 45° vůči rozhraní a světlo dopadá kolmo na toto rozhraní. Určete fázovou a grupovou rychlost světla v krystalu. Jak se změní úhel dvojlomu, pokud bude úhel sklonu optické osy (cut-angle) θ roven 30° ? Implicitně se předpokládá kolmý dopad na rozhraní.

Nápověda: Využijte vztah (5.21).

Př. 5.6: Polarizační rozposun:

V uspořádání podle obr. 5.5 vypočítejte, jaká by byla potřebná tloušťka krystalu kalcitu, který by rozposunul polarizační složky vstupního světla o 2 mm. Vlnovou délku a indexy lomu uvažujte shodně s předešlým příkladem.

Př. 5.7: Šíření světla dvouosým krystalem:

Fenomenologicky popište, jak se bude vyvíjet svazek nepolarizovaného světla při šíření v dvouosém krystalu ve směru optické osy.



”Ta baterka je nějaká vybitá.“

V této kapitole se budeme snažit vysvětlit to, proč se světlo v některých materiálech šíří jinak, než by člověk čekal.

Kapitola 6

Šíření světla v anizotropním prostředí

Obsah kapitoly

6.1	Lineární a cirkulární anizotropie	75
6.1.1	Anizotropie indukovaná nebo modifikovaná napětím	76
6.2	Indexová plocha (Σ)	76
6.2.1	Výpočet tvaru indexové plochy	77
6.2.2	Výpočet směru optické osy dvouosého materiálu	78
6.2.3	Dvojlom	79
6.2.4	Porovnání popisů anizotropie jednoosých materiálů	79
6.2.5	Vlastní stavy polarizace	79
6.3	Šíření světla v absorbujícím prostředí	81
6.3.1	Malá absorpce	81
6.4	Cirkulární anizotropie	82
6.4.1	Anizotropie vyvolaná elektrickým polem	82
6.4.2	Faradayův jev	83
6.4.3	Cirkulární anizotropie vyvolaná magnetickým polem	84
6.4.4	Aplikace Faradayova jevu	84
6.4.5	Magnetický Kerrův jev	85
6.5	Shrnutí	86
6.6	Příklady	87

V této kapitole se budeme nejprve ještě chvíli věnovat lineární anizotropii, kde navážeme na předešlou kapitolu. Potom se zaměříme na efekty spojené s cirkulární anizotropií.

6.1 Lineární a cirkulární anizotropie

Začátkem 19. století bylo objeveno stáčení roviny lineární polarizace v některých látkách (chiralita, optická aktivita). Na tomto výzkumu se podíleli např. F.J.D. Arago, J.B. Biot a J.F.W. Herschel. Tento jev lze vysvětlit tím, že polarizace generovaná v daném místě látky je daná jednak elektrickým polem v tomto místě, ale také polem v okolí. Matematicky to můžeme zapsat jako rozvoj, kdy polarizace látky závisí na elektrickém poli a na jeho derivaci v daném místě. Zapišme si tedy materiálový vztah závislosti elektrické indukce na elektrické intenzitě,

$$D_i = \varepsilon_0 E_i + P_i = \varepsilon_0 [E_i + \chi_{ij} E_j + \gamma_{ijk} \nabla_j E_k].$$

První člen popisuje vakuový příspěvek, druhý příspěvek popisuje lineárně anizotropní prostředí. Tyto dva členy dohromady lze souhrnně popsat pomocí tenzoru permitivity $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \chi_{ij}$, kde δ_{ij} značí

Kroneckerovo delta. Třetí člen v rovnici popisuje cirkulární anizotropii prostředí. Parametry χ_{ij} (resp. ε_{ij}) a γ_{ijk} závisí na struktuře materiálu, mohou ale záviset i na frekvenci ω procházejícího světla, pokud materiál vykazuje chromatickou disperzi.

Vliv symetrie: Cirkulární anizotropie je identicky nulová ve všech materiálech se středem symetrie.

Optická aktivita byla poprvé pozorována na krystalu křemene. Tento materiál má dvě možná zrcadlová uspořádání atomů v mřížce: levotočivou a pravotočivou formu. Křemen má ale i lineární anizotropii a protože je tento efekt mnohem silnější, je optická aktivita pozorovatelná pouze při šíření světla podél optické osy.

Podle typu anizotropie dělíme materiály na dva druhy:

Materiály s lineární anizotropií

- krystaly SiO_2 , CaCO_3 , LiNbO_3 , tekuté krystaly (nejsou amorfní)
- izotropní materiály pod vlivem vnějšího působení
 - elastické napětí, tlak \rightarrow fotoelastický efekt
 - elektrické pole \rightarrow Pockelsův a Kerrův jev
 - magnetické pole \rightarrow Cottonův-Moutonův a magnetický Kerrův jev
- amorfní materiály (tekutiny, sklo, polymery) pod vlivem vnějšího působení

Materiály s cirkulární anizotropií

- krystaly bez středu symetrie, např. křemen nebo NaClO_3
- roztoky organických látek (cukr ve vodě)
- kapaliny – benzen (C_6H_6), CS_2
- působení vnějších vlivů např. na sklo (optické vlákno)
 - magnetické pole – Faradayův jev
 - mechanické pnutí, kroucení

6.1.1 Anizotropie indukovaná nebo modifikovaná napětím

Jak bylo řečeno na úvod této kapitoly, anizotropie může být v látce vyvolána působením vnější síly. Typická vnější pole modifikují tenzor permitivity původně izotropního prostředí následovně:

1. Elektrické pole ($\vec{E} \parallel \vec{x}_3$), potom $\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$;

2. Magnetické pole ($\vec{B} \parallel \vec{x}_3$), potom $\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$;

3. Elastické napětí – působení je různé podle tvaru tenzoru napětí, viz sekce 4.1.2.

6.2 Indexová plocha (Σ)

Uvažujme nyní pouze lineární anizotropii a ukažme si alternativní popis. Pokud známe směr vlnového vektoru \vec{k} světla v anizotropním materiálu a chceme znát index lomu, musíme při použití indexového elipsoidu nejprve určit dva vlastní stavy polarizace. Směr vektoru \vec{D} pak určuje index lomu. Tato metoda je sice přímočará, ale značně těžkopádná, pro snazší řešení, např. lomu světla na rozhraní dvou prostředí, by bylo vhodnější zobrazit si index lomu pro zadaný směr vlnového vektoru \vec{k} . Tento 3D geometrický objekt se nazývá *indexová plocha* a označuje se symbolem (Σ).

Indexová plocha je jiným způsobem popisu indexu lomu anizotropního materiálu. Jelikož víme, že obecně jsou pro daný směr vektoru \vec{k} možné dva různé indexy lomu, musí být plocha indexu lomu v obecném směru dvouvrstvá. Jaký je rozdíl mezi indexovým elipsoidem a indexovou plochou? Indexový elipsoid (indikatrix) popisuje tenzor $\overleftarrow{\epsilon}^{-1}$. Naproti tomu indexová plocha neodpovídá přímo nějakému tenzoru fyzikální veličiny.

Při hledání tvaru indexové plochy vyjdeme opět z Fresnelovy rovnice $\overleftarrow{\epsilon} \vec{E} = N^2 (\vec{E} - \vec{s} \vec{s} \cdot \vec{E})$. Všechny členy převedeme na jednu stranu a rovnici rozepíšeme na soustavu tří rovnic pro jednotlivé komponenty vektorových veličin. Tenzor permitivity můžeme v hlavních osách popsat pomocí indexů lomu

$$\overleftarrow{\epsilon} = \begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix}.$$

Mimodiagonální složky ve Fresnelově rovnici jsou důsledkem obecného směrového vektoru $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$. Pro tento jednotkový vektor musí platit $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$. Fresnelova rovnice má řešení, pokud nalezneme takové hodnoty indexu lomu, aby byl determinant Δ nulový,

$$\Delta = \begin{vmatrix} n_1^2 - (1 - s_1^2)N^2 & s_1 s_2 N^2 & s_1 s_3 N^2 \\ s_1 s_2 N^2 & n_2^2 - (1 - s_2^2)N^2 & s_2 s_3 N^2 \\ s_1 s_3 N^2 & s_2 s_3 N^2 & n_3^2 - (1 - s_3^2)N^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozepsáním determinantu získáme několik členů s mocninami N^0 , N^2 , N^4 a N^6 . Členy s mocninou N^6 se vzájemně odečtou díky normovací podmínce pro směrový vektor, $|\vec{s}| = 1$.

Podrobné řešení této rovnice je provedeno v Dodatku C.5. Výsledná rovnice má tvar

$$\boxed{n_1^2 s_1^2 (N^2 - n_2^2)(N^2 - n_3^2) + n_2^2 s_2^2 (N^2 - n_1^2)(N^2 - n_3^2) + n_3^2 s_3^2 (N^2 - n_1^2)(N^2 - n_2^2) = 0.} \quad (6.1)$$

Jejími řešeními jsou vlastní hodnoty indexu lomu N .

Pokud je vlastní hodnota indexu lomu odlišná od indexů lomů v hlavních osách, $N \neq n_1, n_2, n_3$, jsou závorky nenulové a lze jimi podělit. Takto upravíme rovnici pro vlastní čísla indexu lomu na symetrický tvar

$$\frac{n_1^2 s_1^2}{N^2 - n_1^2} + \frac{n_2^2 s_2^2}{N^2 - n_2^2} + \frac{n_3^2 s_3^2}{N^2 - n_3^2} = 0. \quad (6.2)$$

Je třeba mít ale stále na zřeteli, že pokud použijeme numerický výpočet podle vzorce (6.2), může nulovost některého jmenovatele způsobit zhroucení numerického výpočtu. V těchto případech je vhodnější použít původní vztah (6.1).

6.2.1 Výpočet tvaru indexové plochy

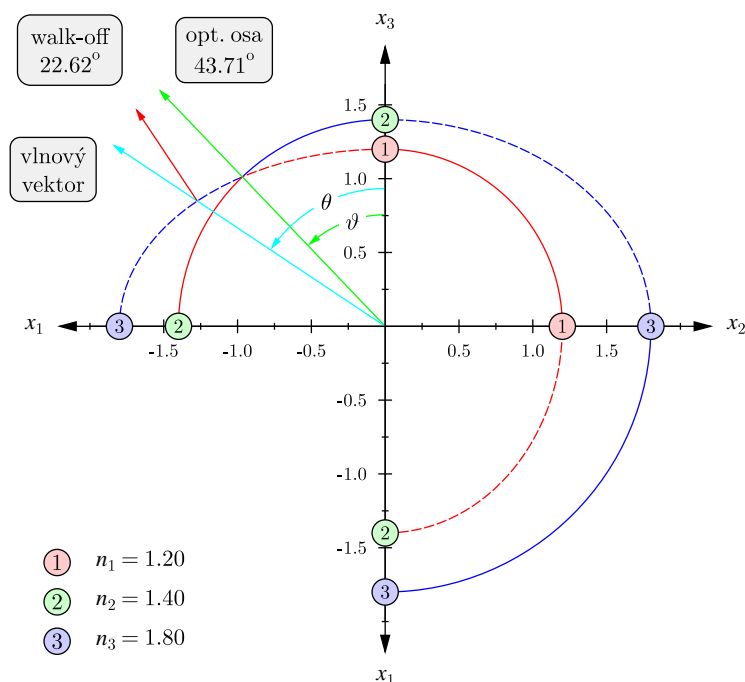
Zvolme si takové pořadí os, aby platilo $n_1 < n_2 < n_3$. Je zřejmé, že pokud se světlo šíří podél některé osy, např. podél osy \vec{x}_1 , bude směrový vektor $\vec{s} = (1, 0, 0)$ a řešením budou indexy lomu $N = n_2, n_3$. Jak to bude vypadat v řezu kolmou rovinou, tj. rovinou (2,3)? V této rovině je $s_1 = 0$, normovací podmínka se zjednoduší na $s_2^2 + s_3^2 = 1$. Dosazením se rovnice (6.1) zjednoduší na tvar

$$(N^2 - n_1^2) [n_2^2 s_2^2 (N^2 - n_3^2) + n_3^2 s_3^2 (N^2 - n_2^2)] = 0.$$

Tato rovnice má dvě řešení. První je triviální kružnice o poloměru $N_{(1)} = n_1$. Druhé řešení můžeme upravit na rovnici elipsy

$$N_{(2)}^2 = \frac{n_2^2 n_3^2}{n_2^2 s_2^2 + n_3^2 s_3^2} = \frac{1}{\frac{s_2^2}{n_3^2} + \frac{s_3^2}{n_2^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N_{(2)}^2} = \frac{s_2^2}{n_3^2} + \frac{s_3^2}{n_2^2}.$$

Pro další symetrické roviny řezu můžeme odvodit analogicky řešení pouhou cyklickou záměnou indexů. Vždy získáme kružnici a elipsu. Indexová plocha je zakreslena pro virtuální dvouosý krystal pomocí řezů v kartézských osách v obr. 6.1. Z uvedených řezů je pro přehlednost zobrazen vždy pouze jeden kvadrant.



Obr. 6.1: Indexová plocha pro virtuální krystal s uvedenými hlavními indexy lomu. Zobrazeny jsou pouze řezy v kartézských osách. Rychlá plocha je označena červeně, pomalá plocha modře. Části kružnic jsou zakresleny plnou čarou a části elips čárkovaně. Zeleně je zakreslena optická osa.

6.2.2 Výpočet směru optické osy dvouosého materiálu

Díky naší volbě posloupnosti velikostí indexů lomu ($n_1 < n_2 < n_3$) se budou obě vrstvy indexové plochy dotýkat ve směrech dvou optických os, které leží v rovině (1,3). Jak ukazuje obr. 6.1, směr jedné optické osy je skloněný od osy \vec{x}_3 o úhel ϑ , druhá osa by byla symetricky skloněná o úhel $-\vartheta$. Vnitřní vrstva dvouvrstvé indexové plochy se označuje jako rychlá a vnější jako pomalá vrstva. Je to dané tím, že vnitřní vrstva má menší index lomu, a proto se světlo s tímto indexem lomu šíří rychleji.

Pro určení úhlu ϑ je výhodnější uvažovat dvě křivky v řezu indexové plochy rovinou (1,3). První je kružnice o poloměru n_2 a druhá je elipsa s poloosami n_1 a n_3 . Optická osa prochází průsečíkem kružnice a elipsy. V tomto směru cítí všechny polarizace stejný index lomu rovný n_2 . Úhel ϑ lze spočítat jako průsečík kružnice a elipsy právě pomocí této podmínky. Jak si nyní ukážeme, výsledek závisí pouze na velikosti tří vlastních indexů lomu. Podmínka průsečíku $N_{(1)} = N_{(2)} = n_2$ nám pro směr $\vec{s} = (\sin \vartheta, 0, \cos \vartheta)$ dá

$$\frac{1}{n_2^2} = \frac{\cos^2 \vartheta}{n_1^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{n_3^2} = \frac{1 - \sin^2 \vartheta}{n_1^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{n_3^2}.$$

Vynásobíme kvadráty všech indexů lomu a tím se zbavíme zlomků,

$$n_1^2 n_3^2 = n_2^2 n_3^2 (1 - \sin^2 \vartheta) + n_2^2 n_1^2 \sin^2 \vartheta.$$

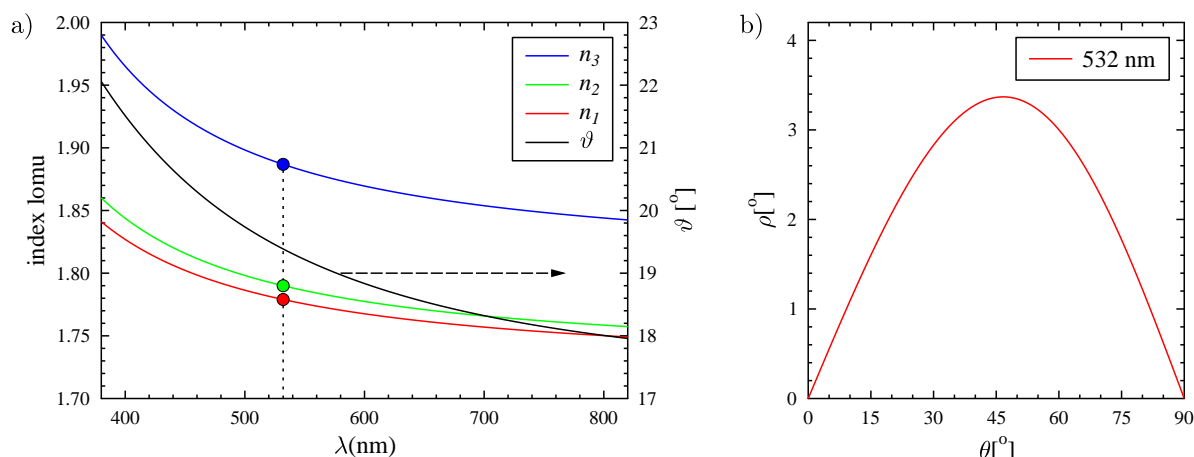
Nakonec si roznásobíme závorku a převedeme na jednu stranu členy se sinem. Tak získáme finální vztah

$$\sin^2 \vartheta = \frac{n_3^2 (n_2^2 - n_1^2)}{n_2^2 (n_3^2 - n_1^2)}. \quad (6.3)$$

Pořadí indexů v závorkách respektuje logické řazení podle velikosti tak, aby nám po odečtení v závorkách vycházely kladné hodnoty.

Pozor: Směr optických os ve dvouosém krystalu nesouvisí přímo s osami symetrie daného materiálu. Díky disperzi indexů lomu je navíc směr optických os závislý na vlnové délce.

Typický dvouosý materiál je např. krystal KTP (KTiOPO₄). Indexy lomu tohoto materiálu ve viditelné oblasti spektra jsou zakresleny na obr. 6.2a). Černou čarou je zakreslen úhel optické osy ϑ vypočítaný podle (6.3). Jak je zřejmé, v modré oblasti spektra je sklon optické osy $\vartheta \approx 22^\circ$, kdežto v červené oblasti spektra je to přibližně 18° .



Obr. 6.2: a) Spektrální závislosti hlavních indexů lomu KTP (červená, zelená a modrá čára) jsou vztaženy k levé ose hodnot. Spektrální závislost úhlu optické osy ϑ je zakreslena černě s pravou osou hodnot. b) Závislost úhlu dvojlomu na směru vlnového vektoru daného úhlem θ . Výpočet je proveden pro materiál KTP a vlnovou délku 532 nm.

6.2.3 Dvojlom

V sekci 5.5 jsme si odvodili úhel dvojlomu ρ , který popisuje, jak se rozcházejí dvě vlastní polarizace světla v anizotropním prostředí. Toto odvození bylo provedeno s použitím popisu anizotropie pomocí indexového elipsoidu. Na obr. 6.2b) je zakreslen úhel dvojlomu vypočítaný pro krystal KTP v rovině (1,3) podle vztahu (5.21). Výpočet je proveden pro vlnovou délku světla 532 nm a pro vlnový vektor \vec{k} , který svírá s osou \vec{x}_3 úhel θ . Tento materiál je málo anizotropní, tj. je malý rozdíl mezi indexy n_1 a n_3 . Důsledkem toho je, že dochází k maximálnímu dvojlomu pro úhel θ blízký 45° .

Geometrické určení úhlu dvojlomu lze provést i s použitím indexové plochy, jak je to naznačeno v obr. 6.1. Z geometrie indexové plochy je zřejmé, že paprsek světla s horizontální polarizací se bude šířit ve směru modře zakresleného vlnového vektoru, $\vec{S}_{(1)} \parallel \vec{k}$. Naproti tomu vertikální polarizace bude mít směr paprsku odkloněný nahoru o úhel dvojlomu ρ . Směr Poyntingova vektoru lze získat tak, že v průsečíku vlnového vektoru s indexovou plochou sestrojíme tečnou rovinu. Poyntingův vektor je kolmý na tuto tečnou rovinu.

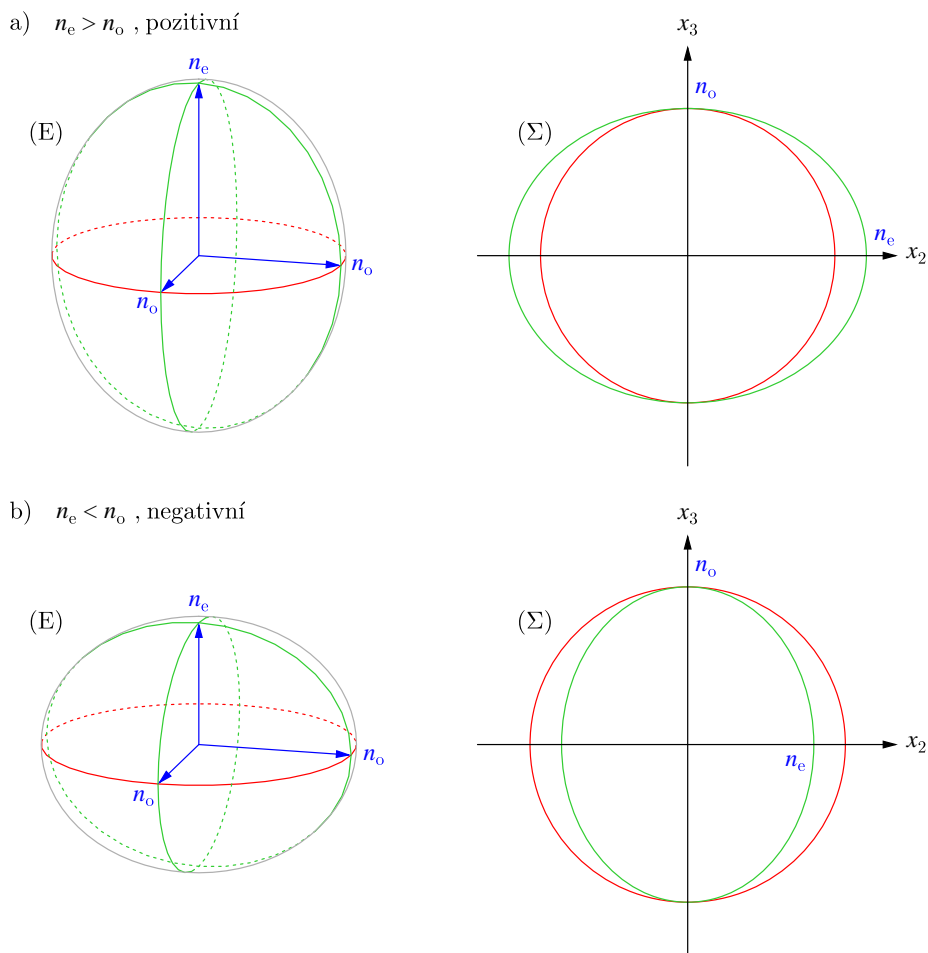
6.2.4 Porovnání popisů anizotropie jednoosých materiálů

V předchozí a této kapitole jsme si ukázali dva různé popisy anizotropie. Jeden pomocí indexového elipsoidu neboli indikatrix (\mathbf{E}), a druhý pomocí indexové plochy ($\mathbf{\Sigma}$). V literatuře se používají oba tyto popisy, a proto je třeba si je neplést. Následující obr. 6.3 zobrazuje tyto objekty pro jednoosé krystaly pro porovnání hned vedle sebe.

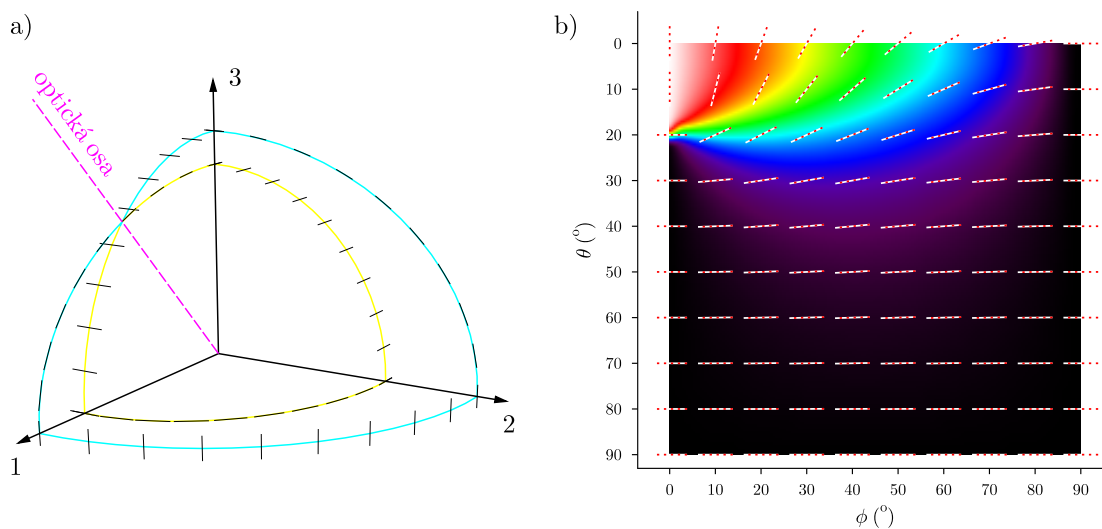
6.2.5 Vlastní stavy polarizace

V případě jednoosého anizotropního materiálu lze vlastní stavy polarizace označit jako řádný a mimořádný svazek světla, jak to ukazuje obr. 5.4. Řádný svazek má směr lineární polarizace kolmý na optickou osu. Polarizace mimořádného svazku je kolmá na polarizaci řádného svazku.

U dvouosého materiálu je ale popis vlastních stavů polarizace složitější, což ukazuje obr. 6.4. V části a) jsou zakresleny směry vlastních stavů polarizace na dvouvrstvé indexové ploše. Rozdíl indexů lomu je na obrázku pro přehlednost zvětšen. Vlastní stavy polarizace pro reálný dvouosý krystal KTP jsou zobrazeny v obr. 6.4b).



Obr. 6.3: Vlevo indexový elipsoid a vpravo indexová plocha pro a) pozitivní, b) negativní jednoosý krystal.



Obr. 6.4: a) Indexová plocha virtuálního anizotropního materiálu, žlutě je zobrazena rychlá plocha a modře pomalá plocha. Vlastní stavy polarizace jsou znázorněny ve vybraných místech černou úsečkou. b) Barevná škála ukazuje úhel vlastních stavů lineární polarizace v rychlé ploše popsané úhly θ a ϕ pro dvoosý krystal KTP. Polarizace je ve zvolených bodech zobrazena tečkovanou úsečkou.

6.3 Šíření světla v absorbujícím prostředí

V absorbujícím anizotropním prostředí může docházet k tomu, že vlastní stavy polarizace mají různý absorpční koeficient. Díky tomu se tyto dvě vlastní polarizace různě rychle absorbují. Tento jev se označuje jako *dichroismus* a může být buď lineární, nebo cirkulární. Jak víme, v absorbujícím prostředí jsou optické parametry komplexní. Tenzor permitivity v absorbujícím prostředí již není hermitovský, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$.

Díky komplexnímu indexu lomu můžeme též definovat komplexní vlnový vektor

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c}\tilde{N}\vec{s} = \frac{\omega}{c}(n + i\kappa)\vec{s}.$$

Podobně můžeme definovat i komplexní fázovou rychlost $\tilde{v}_f = c/\tilde{N}$. Pro zjednodušení se někdy zavádí popis pomocí součinu $\tilde{N}\vec{s} = \tilde{N}(s_1, s_2, s_3) = (\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3)$, kde reálná část je tvořena složkami indexu lomu (n_1, n_2, n_3) a imaginární část složkami indexu extinkce $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$. Komplexní veličina $\tilde{N}\vec{s}$ ale není vektor. V obecném případě lineárního dichroismu nemusí být shodné hlavní osy indexu lomu (n) a hlavní osy indexu absorpce (κ).

Řešením Fresnelovy rovnice pro komplexní tenzor permitivity budou dva komplexní vlastní vektory elektrické indukce $\tilde{D}_{(1)}$ a $\tilde{D}_{(2)}$, kterým odpovídají dvě vlny šířící se s komplexními fázovými rychlostmi. Tyto rychlosti můžeme nalézt řešením rovnice analogické k rovnici (5.6), která bude mít pro komplexní permitivitu tvar

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{\tilde{v}_f^2 - \tilde{v}_i^2} = 0, \quad \text{kde} \quad \tilde{v}_i = \frac{c}{\tilde{N}_i}. \quad (6.4)$$

O obecném řešení šíření světla v absorbujícím anizotropním prostředí se dá říci, že:

1. vlastními stavy polarizace jsou elipticky polarizované vlny;
2. $\tilde{D}_{(1)}$ a $\tilde{D}_{(2)}$ nejsou kolmé na vlnovou normálu;
3. stále jsou dvě sady ortogonálních vektorů $\{\vec{B}, \vec{D}, \vec{s} \parallel \vec{k}\}$ a $\{\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}\}$

V praxi to znamená, že při nekolmém odrazu na kovovém zrcátku se změní obecná lineární polarizace na eliptickou.

6.3.1 Malá absorpce

V případě malé absorpce a za předpokladu, že absorpce nezmění hlavní osy permitivity, lze brát změnu permitivity jako malou imaginární poruchu k permitivitě původní. Tím se výpočet značně zjednoduší,

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 + i\Delta\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon'_2 + i\Delta\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'_3 + i\Delta\varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Pro malou absorpci bude platit nerovnost $n \gg \kappa$. Proto můžeme ve vyjádření kvadrátu komplexního indexu lomu zanedbat člen s κ^2 , a tedy

$$\tilde{N}^2 = (n + i\kappa)^2 \approx n^2 + 2in\kappa = n^2 \left(1 + 2i\frac{\kappa}{n}\right).$$

Dále si zapíšeme fázovou rychlost a v rozvoji opět vezmeme do úvahy pouze členy lineární v κ ,

$$\tilde{v}_f^2 = \left(\frac{c}{\tilde{N}}\right)^2 = v_f^2 \left(1 - 2i\frac{\kappa}{n}\right).$$

Tyto rychlosti dosadíme do jednotlivých členů sumy v rovnici (6.4) a získáme

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{\tilde{v}_f^2 - \tilde{v}_i^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{v_f^2 - v_i^2} \left(1 - 2i\frac{\frac{\kappa}{n}v_f^2 - \frac{\kappa_i}{n_i}v_i^2}{v_f^2 - v_i^2}\right) = 0.$$

V dichroickém materiálu je různá absorpce obou vlastních stavů polarizace. Pro elektrické pole v neabsorbujícím prostředí jsme měli výraz (5.7):

$$E_i = \frac{v_i^2}{v_f^2 - v_i^2} s_i(\vec{s} \cdot \vec{E}),$$

který vlivem malé absorpce přejde na

$$D_i = -\frac{c^2}{\mu_0} \frac{s_i(\vec{s} \cdot \vec{E})}{v_f^2 - v_i^2} \left[1 - 2i \frac{\left(\frac{\varkappa}{n} - \frac{\varkappa_i}{n_i} \right) v_f^2}{v_f^2 - v_i^2} \right].$$

Reálná část zůstane beze změny, přibude pouze malá imaginární složka.

Obecně se dá říci, že ve slabě absorbujícím prostředí s lineární anizotropií:

1. vlastní stavy polarizace (šíří se beze změny polarizace) jsou lineárně polarizované jako v případě bez absorpce;
2. oba módy jsou tlumeny, ale mohou být tlumeny různě, $N_{(1)} = n_{(1)} + i\varkappa_{(1)}$, $N_{(2)} = n_{(2)} + i\varkappa_{(2)}$. Pokud je $\varkappa_{(1)} \gg \varkappa_{(2)}$, lze materiál použít jako polarizátor.

Na tomto principu pracují polarizátory vyráběné tradičně firmou Polaroid.

6.4 Cirkulární anizotropie

Ve zbytku této kapitoly budeme probírat jevy spojené s cirkulární anizotropií látky. Nejznámější efekt, který cirkulární anizotropie způsobuje, je stáčení roviny lineární polarizace světla procházejícího touto látkou. Látky, které stáčí rovinu lineární polarizace, se označují jako *chirální* neboli *opticky aktivní*. Přírodní opticky aktivní látky jsou např. aminokyseliny v peptidech či jednotlivé sacharidové jednotky v cukrech. Tyto organické látky stáčí rovinu polarizovaného světla v závislosti na konfiguraci chirálního atomu, který umožňuje dvě zrcadlová prostorová uspořádání. Je překvapivé, že v živé přírodě kolem nás se vyskytují chirální aminokyseliny i cukry dominantně pouze v jednom prostorovém uspořádání. Na tomto principu potom pracují *polarimetrie*, které dokáží přesně změřit koncentraci cukru v roztoku.

Vlastní stavy polarizace v opticky aktivních látkách jsou pravotočivá a levotočivá kruhová polarizace. Ty se při průchodu opticky aktivní látkou zachovávají. Chirální látky budou jinak interagovat se světlem s pravotočivou polarizací a jinak se světlem s levotočivou polarizací. Obě tyto polarizace budou cítit odlišný index lomu a budou se proto vůči sobě fázově zpožďovat.

6.4.1 Anizotropie vyvolaná elektrickým polem

Uvažujeme anizotropii indukovanou elektrickým polem. Materiálový vztah mezi elektrickou indukci a intenzitou bude mít lineární a cirkulární člen,

$$D_i = \varepsilon_0 [\varepsilon_{ij} E_j + \gamma_{ikj} \nabla_k E_j]. \quad (6.5)$$

V případě monochromatické rovinné vlny můžeme provést parciální derivaci ∇_k , čímž získáme faktor ik_k . Vlnový vektor si můžeme zapsat jako $\vec{k} = nk_0 \vec{s}$, kde jednotkový směrový vektor má složky $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$. Ve výrazu $nk_0 \gamma_{ikj} s_k E_j$ se vyskytuje index k dvakrát, což znamená sčítání přes tento index. Materiálový vztah (6.5) pro rovinnou monochromatickou vlnu, kde $k_0 = 2\pi/\lambda$, takto přejde do tvaru

$$D_i = \varepsilon_0 [\varepsilon_{ij} E_j + ik_0 G_{ij} E_j], \quad (6.6)$$

kde složky tenzoru \overleftrightarrow{G} jsou dány vztahem $G_{ij} = n\gamma_{ikj} s_k$. Pro popis anizotropie materiálu jsme zvyklí na materiálové tenzory jako susceptibilita $\overleftrightarrow{\chi}$, permitivita $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ nebo tenzor $\overleftrightarrow{\gamma}$. Tenzor \overleftrightarrow{G} zjednodušuje výpočet, ale není přímo svázán s nějakým parametrem prostředí. Závisí totiž na směru šíření světla prostředím přes jednotkový vektor \vec{s} a také na indexu lomu n .

Celkově můžeme materiálový vztah zapsat pomocí zobecněné rovnice

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \vec{E}, \quad \text{kde} \quad \overleftrightarrow{\varepsilon} = \overleftrightarrow{\varepsilon} + ik_0 \overleftrightarrow{G}.$$

Z Maxwellových rovnic v neabsorbujícím prostředí plyne, že $\overleftrightarrow{\epsilon}$ je hermitovský ($\tilde{\epsilon}_{ij} = \tilde{\epsilon}_{ji}^*$). Tenzor $\overleftrightarrow{\epsilon}$ je reálný symetrický a tenzor \overleftrightarrow{G} je tedy reálný antisymetrický ($G_{ij} = -G_{ji}$). Vektorová algebra udává, že jakýkoliv reálný antisymetrický tenzor lze popsat pouze pomocí jednoho vektoru. V našem případě lze tři nenulové složky tenzoru \overleftrightarrow{G} uspořádat do vektoru gyrace $\vec{\Gamma}$ následovně,

$$\overleftrightarrow{G} = \begin{pmatrix} 0 & -\Gamma_3 & \Gamma_2 \\ \Gamma_3 & 0 & -\Gamma_1 \\ -\Gamma_2 & \Gamma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{kde definujeme} \quad \vec{\Gamma} = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3).$$

S použitím vektoru gyrace můžeme zapsat materiálový vztah (6.5) ve vektorovém tvaru

$$\vec{D} = \epsilon_0 \left(\overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \vec{E} + ik_0 \vec{\Gamma} \times \vec{E} \right). \quad (6.7)$$

Rozborem směrů vektorů elektromagnetického pole \vec{E} , \vec{D} , \vec{s} , \vec{B} a \vec{H} zjistíme, že $\vec{\Gamma}$ je axiální vektor rovnoběžný se směrem šíření, můžeme ho tedy vyjádřit pomocí směrového vektoru \vec{s} , $\vec{\Gamma} = |\Gamma| \vec{s}$. Hodnota velikosti vektoru gyrace $|\Gamma|$ se spočítá pro zadaný směr $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ pomocí kvadratické formy ve 3D prostoru

$$\Gamma = g_{11}s_1^2 + g_{22}s_2^2 + g_{33}s_3^2 + 2g_{12}s_1s_2 + 2g_{23}s_2s_3 + 2g_{31}s_3s_1 = g_{ij}s_1s_j,$$

kde jsme zavedli symetrický tenzor gyrace \overleftrightarrow{g} .

6.4.2 Faradayův jev

Faradayův jev popisuje působení magnetického pole \vec{B} na původně izotropní prostředí. Jestliže se světlo šíří látkou podél magnetického pole ($\vec{B} \parallel \vec{s}$), potom se stáčí rovina polarizace záření o úhel $\phi = VBl$, kde V značí Verdetovu konstantu a l délku krystalu (materiálu). To, že magnetické pole vyvolává cirkulární anizotropii, je dané tím, že nutí elektrony v látce díky Lorentzově síle cirkulovat po kružnicích.

Pokud provedeme zjednodušení a řekneme, že vnější magnetické pole sjednotíme s osou \vec{x}_3 , potom má vektor magnetické indukce složky $\vec{B} = (0, 0, B)$. Vstupní lineární polarizace má směr osy \vec{x}_1 , tuto vlnu rozložíme na levotočivou (+) a pravotočivou (-) složku:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x_3, t) = \vec{E}_+ + \vec{E}_- &= \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 (\vec{x}_1 + i\vec{x}_2) e^{-i(\omega t - 2\pi N_+ x_3/\lambda)} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 (\vec{x}_1 - i\vec{x}_2) e^{-i(\omega t - 2\pi N_- x_3/\lambda)}. \end{aligned}$$

Na vstupu do látky je nulová fáze mezi oběma kruhovými složkami pole. Po průchodu látkou tloušťky l dostaneme výstupní pole následujícím výpočtem,

$$\begin{aligned} \vec{E}(l, t) = \vec{E}_+ + \vec{E}_- &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{x}_1 + i\vec{x}_2) e^{i\frac{\omega}{c}lN_+} e^{-i\omega t} \\ &+ \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{x}_1 - i\vec{x}_2) e^{i\frac{\omega}{c}lN_-} e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Zvolíme si odčítání času tak, že vynásobíme celý výsledek faktorem $e^{-i\frac{\omega}{c}l\frac{N_+ + N_-}{2}}$, který zápis zjednoduší.

$$\begin{aligned} \vec{E}(l) &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{x}_1 + i\vec{x}_2) e^{i\frac{\omega}{2c}l(N_+ - N_-)} + \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{x}_1 - i\vec{x}_2) e^{-i\frac{\omega}{2c}l(N_+ - N_-)} \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{x}_1 + i\vec{x}_2) e^{i\phi} + \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{x}_1 - i\vec{x}_2) e^{-i\phi} \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\vec{x}_1 (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) + i\vec{x}_2 (e^{i\phi} - e^{-i\phi})] \\ &= \sqrt{2} E_0 (\vec{x}_1 \cos \phi + \vec{x}_2 \sin \phi). \end{aligned}$$

Faradayův jev popisuje tento výsledek

$$\frac{E_2}{E_1} = \tan \phi, \quad \boxed{\phi = \frac{\omega}{2c} l (N_+ - N_-)}. \quad (6.8)$$

Úhel ϕ se označuje jako *Faradayova rotace*. Pokud je magnetické pole pouze slabá porucha, tj. platí $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_0$, potom můžeme problém řešit pomocí poruchové teorie. Vezmeme pouze členy lineární v ε_1 a dostaneme $N_+ - N_- \approx \varepsilon_1/\sqrt{\varepsilon_0}$.

Analogický výraz k (6.8) bude platit i v případě ztrátového prostředí s komplexními veličinami. Faradayův dvojlom MCB (Magnetic Circular Birefringence) odpovídá opět fázovému zpoždění cirkulárních polarizací,

$$\Theta = \text{Re}(\phi) = \frac{\omega}{2c}l(n_+ - n_-).$$

Faradayův dichroismus MCD (Magnetic Circular Dichroism) znamená, že obě cirkulární polarizace cítí různou absorpci, což je možné využít k výrobě cirkulárních polarizátorů,

$$\Psi = \text{Im}(\phi) = \frac{\omega}{2c}l(\kappa_+ - \kappa_-).$$

6.4.3 Cirkulární anizotropie vyvolaná magnetickým polem

Faradayův jev můžeme popsat také pomocí aparátu cirkulární anizotropie generované vnějším magnetickým polem \vec{B} ,

$$P_i = \varepsilon_0 \gamma_{ijk} E_j B_k, \quad \overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\nu\gamma B & 0 \\ \nu\gamma B & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Pokud působí magnetické pole ve směru osy \vec{x}_3 , tedy $\vec{B} = (0, 0, B)$, potom tenzor permitivity nabude tvar

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\nu\gamma B & 0 \\ \nu\gamma B & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -i|\Gamma| & 0 \\ i|\Gamma| & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Bez magnetického pole je materiál izotropní a jeho index lomu je $n_0 = \sqrt{\varepsilon}$. Vliv magnetického pole popisuje vektor gyrace, který je přímo úměrný magnetickému poli, $\vec{\Gamma} = \gamma\vec{B} = \Gamma\vec{x}_3$.

Vlastní hodnoty indexu lomu určíme jednoduše tak, že matici popisující tenzor permitivity zdiagonalizujeme. Nové členy na diagonále nám potom dají indexy lomu podle vztahu $n_{\pm} = \sqrt{\varepsilon_{\pm}}$. Takto získáme vlastní hodnoty

$$n_{\pm} = \sqrt{n_0^2 \pm \Gamma} = n_0 \sqrt{1 \pm \frac{\Gamma}{n_0^2}}.$$

Výsledek rozvedeme do řady a za předpokladu, že $\Gamma \ll n_0^2$, zanedbáme vyšší řády rozvoje. Vlastní hodnoty indexu lomu mají tedy přibližnou hodnotu

$$n_+ = n_0 + \frac{\Gamma}{2n_0}, \quad n_- = n_0 - \frac{\Gamma}{2n_0} \quad \Rightarrow \quad n_+ - n_- = \frac{\Gamma}{n_0} = \frac{\gamma B}{n_0}.$$

Vlastní módy pole jsou samozřejmě levotočivá a pravotočivá kruhová polarizace. V materiálu dochází ke stáčení roviny polarizace. Úhel stočení polarizace vlivem magnetického pole se označuje jako Faradayova rotace ϕ a spočítá se podle vztahu (6.8), kam dosadíme nyní spočítané indexy

$$\phi = \frac{\omega}{2c}l(n_+ - n_-) = \frac{\omega}{2c}l\frac{\gamma}{n_0}B = \frac{\pi\gamma}{\lambda n_0}lB.$$

Je-li $\gamma > 0$, potom pokud je vektor \vec{k} orientován stejně jako vektor \vec{B} , dochází k levotočivé rotaci. Pro vzájemně opačný směr vektorů \vec{k} a \vec{B} dochází k pravotočivé rotaci. Pokud je γ záporná, potom je závislost směru rotace na sousměrnosti vektorů \vec{k} a \vec{B} opačná.

6.4.4 Aplikace Faradayova jevu

Důležitou vlastností Faradayovy rotace je to, že směr otočení roviny polarizace je stejný pro paprsek šířící se ve směru osy \vec{x}_3 i ve směru opačném. Na tomto jevu jsou založeny optické Faradayovy izolátory popřípadě cirkulátory. Ukážeme si typické použití Faradayova izolátoru, který má opticky oddělit laserový systém od zařízení, do kterého se laserový svazek pouští. Pokud by totiž došlo ke zpětnému odrazu

laserového světla zpět do laseru, mohlo by to způsobit jeho nestabilitu. Optickou izolaci zajistí Faradayův izolátor, který je pro světlo průchozí pouze v jednom směru, viz obr. 6.5.

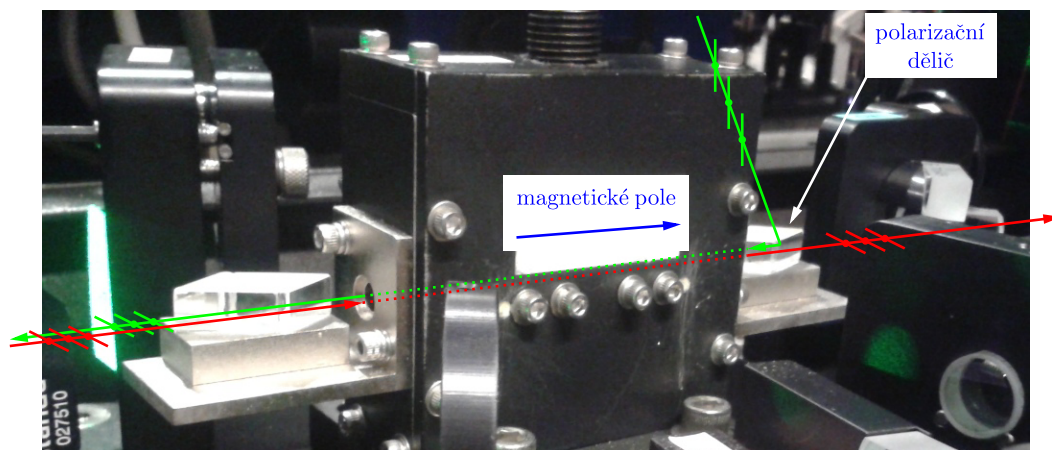


Obr. 6.5: Faradayův izolátor IO-5-NIR-LP firmy Thorlabs. Svazek prochází izolátorem pouze ve směru šipky. Převzato z webové stránky:

<http://www.thorlabs.de/thorproduct.cfm?partnumber=IO-5-NIR-LP>.

Optický svazek, který má např. vertikální polarizaci, se šíří krystalem s vhodně nastaveným magnetickým polem tak, že se polarizace otočí o 45° . Toto otočení kompenzuje půlvlnná fázová destička, která otočí polarizaci opět na vertikální. Při šíření světla v opačném směru nejprve fázová destička otočí polarizaci o 45° a Faradayův jev přidá dalších 45° . Takto se na vstupní polarizátor dostává zkřížená polarizace (horizontální), kterou polarizátor utlumí, nebo odkloní jiným směrem.

Obrázek 6.6 ukazuje Faradayův izolátor s polarizátory umístěnými na obou vstupech. Ve směru zprava doleva projde vertikální polarizace, kdežto zleva doprava projde horizontální polarizace. Toto zařízení se zvláště ve vláknové optice označuje jako cirkulátor.



Obr. 6.6: Faradayův izolátor na vstupu do rezonátoru laserového zesilovače RegA od firmy Coherent. Vstupní pulz se dostane do rezonátoru podél zelené šipky. Při průchodu izolátorem se otočí směr polarizace světla z vertikální na horizontální. Na směru ven z dutiny se horizontální polarizace v izolátoru nezmění a svazek postupuje podél červené šipky. K rozdělení dochází na výstupním polarizačním děliči označeném bílou šipkou.

6.4.5 Magnetický Kerrův jev

Magnetický Kerrův jev (angl. MOKE) se projevuje při odrazu světla na materiálu, na který působí magnetické pole. Pootočení směru polarizace je způsobené rozdílem koeficientu odrazivosti (reflektivity) pro levotočivou a pravotočivou polarizaci světla. Kerrova rotace je velmi malá, ale stačí na to, aby na tomto principu mohly fungovat magnetooptické záznamové disky, viz obr. 6.7. Tyto záznamové disky přišly na trh po roce 1985, ale díky konkurenci jiných záznamových médií se dnes již prakticky nepoužívají.

Metoda měření Kerrovy rotace je jednou z mnoha magnetooptických metod studia magnetických vlastností látek. Typickým příkladem je tzv. Kerrův mikroskop. Ten používá k osvětlení vzorku polarizované světlo, obvykle z laseru. Po odrazu na vzorku prochází světlo polarizačním analyzátozem, který umožňuje konvertovat rotaci polarizace, nebo změnu elipticity na intenzitní profil, který můžeme pozorovat očima nebo zaznamenat CCD detektorem. Díky tomuto uspořádání Kerrova mikroskopu je možné



Obr. 6.7: Magnetooptické disky firmy Sony, které využívají ke čtení dat magnetický Kerrův jev. Převzato z webové stránky: http://en.wikipedia.org/wiki/Magneto-optical_drive.

zobrazit magnetické domény studovaného materiálu.

6.5 Shrnutí

- Anizotropie prostředí může být jak lineární tak cirkulární. Materiál může mít vlastní anizotropii nebo může být anizotropie v materiálu vyvolaná vnější silou.
- Pro popis šíření světla v anizotropním materiálu můžeme využít indexovou plochu (Σ).
- Indexový elipsoid (\mathbf{E}) zobrazuje hodnotu indexu lomu ve směru lineární polarizace \vec{D} . Naproti tomu indexová plocha (Σ) je dvouvrstvá plocha, která zobrazuje index lomu ve směru vlnového vektoru \vec{k} . Proto je vhodná pro výpočet lomu světla na rozhraní dvou materiálů.
- Dva vlastní stavy polarizace se mohou v anizotropním prostředí různě absorbovat, což označujeme jako dichroismus.
- Cirkulární anizotropie způsobuje optickou aktivitu prostředí, tj. stáčení roviny lineární polarizace světla při průchodu tímto materiálem.
- Cirkulární anizotropie vyvolaná magnetickým polem \vec{B} se označuje jako Faradayův jev a používá se v optických izolátorech, které jsou pro světlo průchodné pouze v jednom směru.

6.6 Příklady

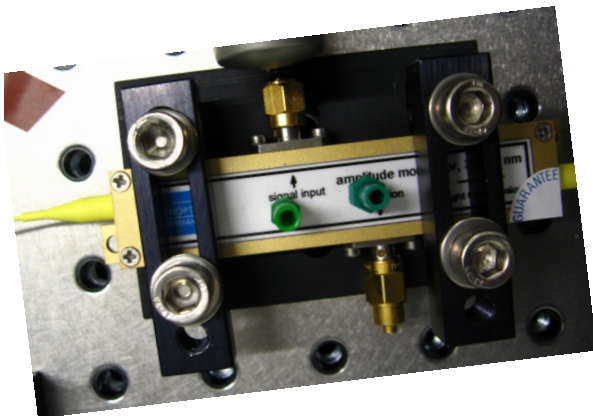
Př. 6.1: Úhel dvojlomu:

Proč je pro málo anizotropní prostředí, jako je KTP, úhel dvojlomu maximální pro $\theta = 45^\circ$? Srovnajte s úhlem maximálního dvojlomu pro kalcit, který je jednoosý a má pro vlnovou délku 589 nm indexy lomu: $n_o = 1.658$, $n_e = 1.486$.

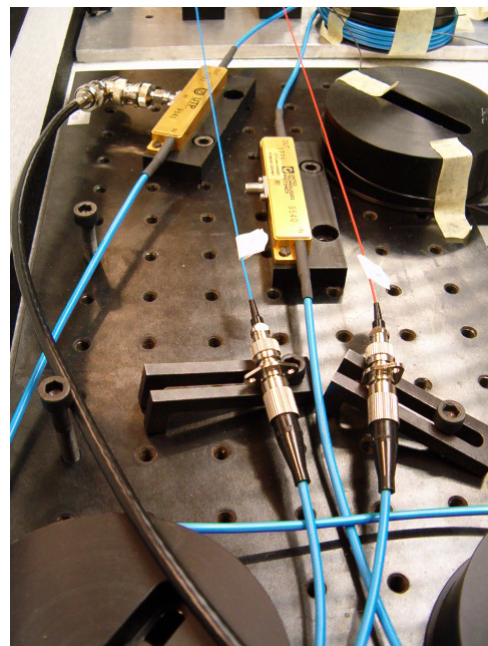
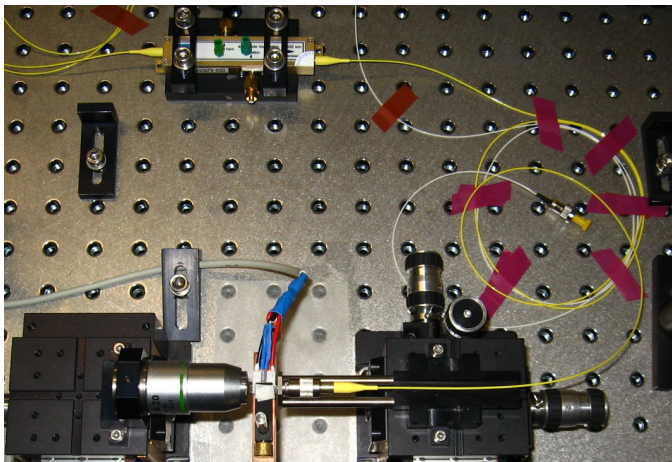
Př. 6.2: Optická aktivita křemene:

V červené oblasti spektra $\lambda = 630$ nm je optická aktivita křemene 329 rad/m. Spočítejte, o kolik stupňů se stočí rovina polarizace světla po průchodu krystalem tloušťky 1 mm.

Amplitudové modulátory



Fázové modulátory



Kapitola 7

Elektrooptické jevy

Obsah kapitoly

7.1	Popis elektrooptických jevů	89
7.1.1	Popis pomocí indexového elipsoidu	90
7.1.2	Elektrooptické materiály	91
7.2	Lineární EO jev, Pockelsův jev	91
Př. 1:	Pockelsův jev v KDP a ADP podél	91
Př. 2:	Pockelsův jev v KDP a ADP napříč	93
Př. 3:	Pockelsův jev v LiNbO ₃	94
7.2.1	Aplikace EO jevu pro modulaci fáze	95
7.3	Modulátory světla	97
7.3.1	Modulátor polarizace	97
7.3.2	Amplitudový modulátor	97
7.3.3	Fázový modulátor	99
7.4	Kvadratický EO jev, Kerrův jev	100
7.5	Měření elektrooptických koeficientů	101
7.5.1	Frekvenční závislost EO koeficientů	101
7.6	Piezelektrický jev	102
7.6.1	Vazba na mikroskopický model	102
7.6.2	Fotoelastický tenzor	102
7.6.3	Vazba na piezelektrický jev	103
7.7	Další elektrooptické jevy	104
7.8	Shrnutí	105
7.9	Příklady	106

7.1 Popis elektrooptických jevů

Elektrooptické (EO) jevy obecně popisují optické jevy způsobené změnou optických parametrů látky, která je ovlivněná elektrickým polem. V původně izotropním prostředí vytváří elektrické pole jednoosou anizotropii. V anizotropním prostředí se vlivem vnějšího elektrického pole změni tenzor permitivity, což můžeme zapsat pomocí rozvoje v mocninách působícího elektrického pole

$$\varepsilon_{ij}(\vec{E}) = \varepsilon_{ij}(0) + z_{ijk}E_k + Z_{ijkl}E_kE_l + \dots \quad (7.1)$$

První člen popisuje původní hodnotu permitivity bez vnějšího pole, druhý člen udává lineární změnu (Pockelsův jev) a třetí člen kvadratickou změnu (Kerrův jev) vlivem vnějšího pole. Vyšší členy rozvoje již mají zanedbatelnou velikost.

Abychom mohli některý materiál používat v optických zařízeních, které využívají elektrooptické jevy, musí mít tento materiál následující vlastnosti:

- co největší hodnotu lineárního (z_{ijk}) nebo kvadratického (Z_{ijkl}) elektrooptického koeficientu;
- musí být průhledný (neabsorbující) v požadované spektrální oblasti;
- dá se snadno opracovávat – lámat podél krystalových ploch a leštit;
- je chemicky stabilní na vzduchu nebo v jiném pracovním prostředí;
- dá se snadno získat, buď je tedy hojně zastoupený v přírodě (bývávalo), nebo se dá dobře uměle pěstovat (dnešní výroba monokrystalů);
- pro některé aplikace je nutné, aby byl krystal feroelektrický a měl dostatečně vysokou Curieovu teplotu (při této teplotě přestává mít materiál pevně orientované domény).

7.1.1 Popis pomocí indexového elipsoidu

Jedna z možností zkoumání vlivu vnějšího elektrického pole na optické vlastnosti materiálu je sledování změn indexového elipsoidu (indikatrix). Bez vnějšího pole je indexový elipsoid zapsán v hlavních osách

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{D_1^2}{\varepsilon_1} + \frac{D_2^2}{\varepsilon_2} + \frac{D_3^2}{\varepsilon_3} \right) = 1, \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{D_1^2}{n_{11}^2} + \frac{D_2^2}{n_{22}^2} + \frac{D_3^2}{n_{33}^2} \right) = 1.$$

Zavedeme-li normovaný vektor elektrické indukce se složkami $X_i = D_i/\sqrt{\varepsilon_0}$, potom můžeme indexový elipsoid ve zcela obecných osách zapsat jako

$$\frac{1}{n_{ij}^2} X_i X_j = 1. \quad (7.2)$$

V tomto zápisu se samozřejmě používá Einsteinovo sumační pravidlo přes oba indexy. Vektor \vec{X} popisuje libovolný bod na ploše indexového elipsoidu, má směr vektoru \vec{D} a jeho délka určuje index lomu světla s touto polarizací. Délka tohoto vektoru je svázaná také s hustotou světelné energie w vztahem $\vec{X} = \vec{D}/\sqrt{\varepsilon_0 w}$.

Pokud chceme sledovat změnu indexového elipsoidu vlivem vnějšího elektrického pole, musíme postupovat tak, že parciálně zderivujeme materiálový vztah $D_j = n_{ij}^2 E_i$. Takto získáme vyjádření indexů lomu,

$$\frac{1}{n_{ij}^2} = \frac{\partial E_i}{\partial D_j}.$$

Po zapnutí vnějšího pole dochází ke změně indexového elipsoidu, nové hodnoty indexů se spočítají z původních hodnot bez elektrického pole pomocí následujícího rozvoje

$$\frac{1}{n_{ij}^2} = \frac{1}{n_{ij}^2} \Big|_{E=0} + \Delta \left[\frac{1}{n_{ij}^2} \right].$$

Změna popsaná druhým členem tohoto vztahu má dva příspěvky – lineární Pockelsův jev a kvadratický Kerrův jev:

$$\Delta \left[\frac{1}{n_{ij}^2} \right] = r_{ijk} E_k + S_{ijkl} E_k E_l. \quad (7.3)$$

Koeficienty lineárního r_{ijk} a kvadratického S_{ijkl} elektrooptického jevu jsou svázány s hodnotami koeficientů z_{ijk} a Z_{ijkl} z rozvoje (7.1). Převodní vztah získáme jednoduše ze změny indexu lomu vyjádřením diferenciálu,

$$\Delta \left[\frac{1}{n^2} \right] = \frac{\partial \frac{1}{n^2}}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon = \frac{\partial \frac{1}{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2} (z_{ijk} E_k + Z_{ijkl} E_k E_l),$$

kde za diferenciál permitivity $\Delta \varepsilon$ jsme dosadili vztah (7.1). Porovnáním s rovnicí (7.3) dostáváme vztahy mezi EO koeficienty. Tedy koeficienty popisující změnu permitivity jsou přímo úměrné koeficientům popisujícím změnu indexového elipsoidu,

$$r_{ijk} = -\frac{1}{\varepsilon^2} z_{ijk}, \quad S_{ijkl} = -\frac{1}{\varepsilon^2} Z_{ijkl}.$$

Opět je typické zjednodušit zápis tenzorů vyššího řádu použitím multiindexů, jak to bylo zavedeno v tab. 4.1. U lineárního tenzoru sdružíme první dva indexy, čímž přejde jeho zápis na matici velikosti (6×3) . U kvadratického tenzoru sdružíme první i druhou dvojici indexů, přičemž vznikne matice o velikosti (6×6) .

$$\Delta [1/n^2]_i = \begin{matrix} & r_{ij} & E_j & + & S_{ik} & E_k^{(2)}. \\ (6 \times 1) & (6 \times 3) & & & (6 \times 6) & \end{matrix}$$

Zapišme si ještě definice matic $\Delta [1/n^2]_i$ a $E_k^{(2)}$, které jsou dimenze (6×1) ,

$$\Delta \left[\frac{1}{n^2} \right]_i = \begin{pmatrix} 1/n_{11}^2 \\ 1/n_{22}^2 \\ 1/n_{33}^2 \\ 1/n_{23}^2 \\ 1/n_{13}^2 \\ 1/n_{12}^2 \end{pmatrix}, \quad E_k^{(2)} = \begin{pmatrix} E_1 E_1 \\ E_2 E_2 \\ E_3 E_3 \\ 2E_2 E_3 \\ 2E_1 E_3 \\ 2E_1 E_2 \end{pmatrix}.$$

7.1.2 Elektrooptické materiály

Elektrooptické jevy dělíme podle závislosti na mocnině elektrického pole na lineární a kvadratické. Jako typické materiály pro lineární EO jev se používají ve viditelné spektrální oblasti LiNbO₃ a LiTaO₃ (jednoosé krystaly z trigonální krystalografické soustavy $3m$) a dále KDP (KH₂PO₄) a ADP ((NH₄)H₂PO₄), které jsou tetragonální jednoosé krystaly se symetrií $\bar{4}2m$.

V infračervené oblasti spektra se typicky používají krystaly GaAs a CdTe, které jsou kubické se symetrií $\bar{4}3m$. Díky této symetrii jsou tyto materiály bez vnějšího pole izotropní. Nové materiálové technologie dovolují připravovat EO prvky z organických krystalů nebo z polymerů. Řádová velikost koeficientů r_{ij} lineárního EO (Pockelsova) jevu je $(10^{-12}-10^{-10}) \text{ m V}^{-1} = (1-100) \text{ pm/V}$.

Díky symetrii mají amorfní materiály nebo materiály se středem symetrie lineární EO tenzor identicky nulový. Proto má největší zastoupení kvadratický EO (Kerrův) jev popsán tenzorem S_{ik} . Používají se polykrystalické materiály KDP, ADP, popřípadě ještě jiné. Nebo také kapaliny jako CS₂, nitrobenzen a nitrotolulen. Velikost EO koeficientů je řádově $(10^{-20}-10^{-15}) \text{ m}^2 \text{ V}^{-2}$.

7.2 Lineární EO jev, Pockelsův jev

Pokud je jako prostředí použit krystal s nenulovým lineárním EO tenzorem, potom můžeme zanedbat kvadratický člen a rozepíšeme si jednotlivé členy rovnice (7.2),

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n_{11}^2} + r_{1j} E_j \right) X_1^2 + \left(\frac{1}{n_{22}^2} + r_{2j} E_j \right) X_2^2 + \left(\frac{1}{n_{33}^2} + r_{3j} E_j \right) X_3^2 \\ + 2r_{4j} E_j X_2 X_3 + 2r_{5j} E_j X_1 X_3 + 2r_{6j} E_j X_1 X_2 = 1. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Řešení provádíme diagonalizací a rozvojem této rovnice. Tak získáme vlastní hodnoty polarizace a indexu lomu.

Př. 7.1: Pockelsův jev v KDP a ADP podél: Krystaly KDP a ADP mají tetragonální krystalickou mřížku se symetrií $\bar{4}2m \equiv D_{2d}$. Prvky symetrie jsou: $\{I, C_2, C_2', C_2'', 2S_4, \sigma', \sigma''\}$. Tenzor lineárního EO jevu má pouze tři nenulové členy:

$$r_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix}.$$

Jelikož se jedná o jednoosý materiál, můžeme k popisu indexového elipsoidu bez pole použít řádný a mimořádný index lomu $n_o = n_{11} = n_{22}$ a $n_e = n_{33}$.

Budeme uvažovat případ, kdy působí vnější elektrické pole ve směru osy \vec{x}_3 , tj. $\vec{E} = (0, 0, E)$, potom se nám indikatrix (7.4) zjednoduší na tvar

$$\frac{X_1^2 + X_2^2}{n_o^2} + \frac{X_3^2}{n_e^2} + 2r_{63}EX_1X_2 = 1,$$

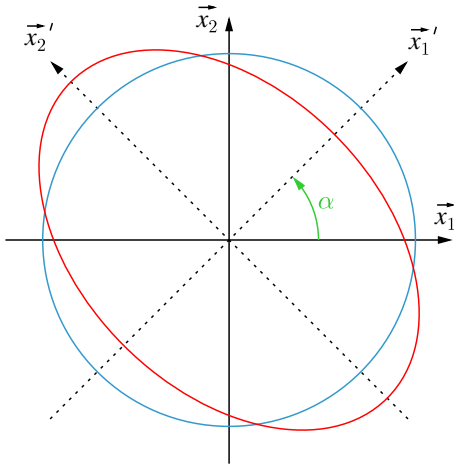
což je rovnice potočeného elipsoidu. Ukážeme si, o jaký úhel je elipsoid potočen. Pokud provedeme transformaci rotace podle osy \vec{x}_3 o obecný úhel α , budou se souřadnice transformovat následovně

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix}.$$

Protože provádíme rotaci kolem osy \vec{x}_3 , tak se složka X_3 vektoru nemění. Při transformaci se nemůže měnit délka vektoru, a proto musí platit: $X_1^2 + X_2^2 = X_1'^2 + X_2'^2$. Dosazením do indikatrix dostaneme výraz

$$\begin{aligned} \frac{X_1'^2 + X_2'^2}{n_o^2} + \frac{X_3^2}{n_e^2} + 2r_{63}E(\cos \alpha X'_1 - \sin \alpha X'_2)(\sin \alpha X'_1 + \cos \alpha X'_2) &= 1, \\ \frac{X_1'^2 + X_2'^2}{n_o^2} + \frac{X_3^2}{n_e^2} + 2r_{63}E[\cos \alpha \sin \alpha(X_1'^2 - X_2'^2) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)X'_1X'_2] &= 1. \end{aligned}$$

Abychom se zbavili nežádoucího členu $X'_1X'_2$, potřebujeme, aby byla závorka u tohoto členu nulová ($\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$). To určuje velikost úhlu rotace $\alpha = 45^\circ$. Pro tento úhel vyjde druhá závorka $\cos \alpha \sin \alpha = 1/2$.



Obr. 7.1: Řez indexového elipsoidu KDP v rovině (1,2), tj. kolmo na optickou osu tohoto jednoosého materiálu. Modrá kružnice o poloměru n_o znázorňuje řez indexového elipsoidu bez elektrického pole. S elektrickým polem podél optické osy se kružnice protáhne na červenou elipsu pod úhlem $\alpha = 45^\circ$.

Indikatrix se zdeformuje jak ukazuje obr. 7.1 a dostane tvar

$$\underbrace{\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{63}E\right)}_{1/n_1'^2} X_1'^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{n_o^2} - r_{63}E\right)}_{1/n_2'^2} X_2'^2 + \left(\frac{1}{n_e^2}\right) X_3^2 = 1.$$

Pod vlivem pole se jednak potočí soustava hlavních os indikatrix, ale navíc se změní hlavní indexy lomu na nové (čárkované) hodnoty. Přibližnou hodnotu nových indexů lomu určíme Taylorovým rozvojem podle n_o , kde zanedbáme vyšší řády

$$n_1' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_o^2} + r_{63}E}} = \frac{n_o}{\sqrt{1 + n_o^2 r_{63}E}} \approx n_o \left(1 - \frac{1}{2} n_o^2 r_{63}E\right) = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63}E.$$

Obdobně určíme i druhý index lomu

$$n_2' \approx n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{63}E.$$

Ve výsledku můžeme říci, že vlivem elektrického pole se indexový elipsoid otočí kolem osy \vec{x}_3 o úhel 45 stupňů. To by ale nebylo pozorovatelné, protože v rovině (1,2) měl původní elipsoid kruhový průřez (o poloměru n_o). Nicméně dalším důsledkem elektrického pole je také deformace této kružnice na elipsu s hlavními osami o délkách n_1' a n_2' .

Směr šíření světla

Do této chvíle jsme měli zadaný pouze směr elektrického pole ve směru optické osy krystalu, ale zatím jsme si neurčili směr šíření světla. Efekt dvojlomu indukovaného elektrickým polem (změna rozdílu indexů lomu pro dva vlastní módy polarizace) se řeší obvykle pro dva typické případy:

1. Šíření ve směru elektrického pole, ($\vec{s} \parallel \vec{E} \parallel \vec{x}_3$). Rozdíl indexů lomu bude

$$\Delta n = n'_2 - n'_1 = n_o^3 r_{63} E,$$

kde $E = U/l$. Napětí U se přikládá na průhledné kontakty na koncích krystalu délky l . Pro $E = 0$ je dvojlom nulový (vypnutý).

2. Šíření kolmo na směr elektrického pole, ($\vec{s} \parallel \vec{x}_1 \perp \vec{E}$). Rozdíl indexů lomu:

$$\Delta n = n_e - n'_2 = (n_e - n_o) - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E$$

je nenulový i při vypnutém poli. Velikost elektrického pole $E = U/d$ je při stejném napětí větší než v předchozím případě, napětí se přikládá napříč optické dráhy a příčná tloušťka krystalu d může být řádově menší než jeho délka. Navíc nepotřebujeme technologii na výrobu průhledných elektrod.

Př. 7.2: Pockelsův jev v KDP a ADP napříč: Nyní si probereme druhý možný případ geometrie uspořádání. Uvažujeme opět krystal KDP, nebo ADP. Vnější elektrické pole je nyní kolmé na osu krystalu. Zvolme si směr $\vec{E} \parallel \vec{x}_1$, v tomto případě má vektor elektrického pole složky $\vec{E} = (E, 0, 0)$. Rovnice (7.4) se nám zjednoduší na tvar

$$\frac{X_1^2 + X_2^2}{n_o^2} + \frac{X_3^2}{n_e^2} + 2r_{41} E X_2 X_3 = 1.$$

Chceme-li z tohoto vztahu dostat opět rovnici elipsoidu ve vlastních osách, provedeme rotaci podle osy \vec{x}_1 o úhel β . Jak je zřejmé, rotace se provádí opět kolem osy ve směru elektrického pole. Matice transformace souřadnic má tvar

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_2 \\ X'_3 \end{pmatrix} \quad \text{s podmínkou: } X_2^2 + X_3^2 = X_2'^2 + X_3'^2.$$

Touto rotací dostaneme výraz pro indikatrix

$$\frac{X_1^2}{n_o^2} + \frac{(\cos \beta X'_2 - \sin \beta X'_3)^2}{n_o^2} + \frac{(\sin \beta X'_2 + \cos \beta X'_3)^2}{n_e^2} + 2r_{41} E (\cos \beta X'_2 - \sin \beta X'_3)(\sin \beta X'_2 + \cos \beta X'_3) = 1,$$

který upravíme roznásobením závorek na tvar

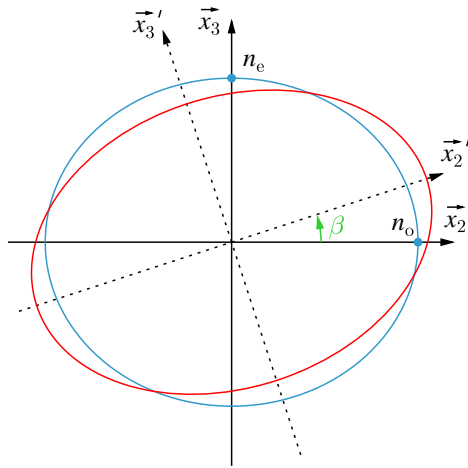
$$\begin{aligned} & \frac{X_1^2}{n_o^2} + \left(\frac{\cos^2 \beta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \beta}{n_e^2} + 2r_{41} E \cos \beta \sin \beta \right) X_2'^2 + \left(\frac{\sin^2 \beta}{n_o^2} + \frac{\cos^2 \beta}{n_e^2} - 2r_{41} E \cos \beta \sin \beta \right) X_3'^2 \\ & + \left[2r_{41} E (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) - \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{n_o^2} + \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{n_e^2} \right] X_2' X_3' = 1. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Vlastní souřadnice najdeme tak, že zvolíme úhel β právě tak, aby závorka u nežádoucího křížového členu $X_2' X_3'$ byla nulová. Musí tedy platit

$$2r_{41} E \cos 2\beta = \sin 2\beta \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right),$$

kde jsme využili identity pro sinus a kosinus dvojnásobného úhlu. Snadnou úpravou dostaneme lineární závislost otočení vlastní souřadné soustavy na elektrické intenzitě ve tvaru

$$\tan 2\beta = 2 \frac{n_o^2 n_e^2}{n_e^2 - n_o^2} r_{41} E.$$



Obr. 7.2: Řez indexového elipsoidu KDP v rovině (2,3). Optická osa tohoto jednoosého krystalu má směr \vec{x}_3 . Modrá elipsa s poloosami n_o a n_e znázorňuje řez indexového elipsoidu bez elektrického pole. KDP je negativní jednoosý krystal, protože $n_e < n_o$. S elektrickým polem podél osy \vec{x}_1 se elipsa protáhne a pootočí o úhel β , jak ukazuje červená křivka.

Pro takovýto úhel pootočení β přejde indikatrix (7.5) na rovnici elipsoidu ve vlastních osách, jak to ukazuje obr. 7.2. Z výrazů v kulatých závorkách v rovnici (7.5) můžeme snadno určit nové vlastní indexy lomu. Například ve směru \vec{x}'_2 dostaneme

$$\frac{1}{n'^2_2} = \frac{\cos^2 \beta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \beta}{n_e^2} + 2 \sin \beta \cos \beta r_{41} E \Rightarrow n'_2 = \frac{n_o}{\cos \beta} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan^2 \beta + 2r_{41} E \tan \beta n_o^2}} \right].$$

Pro malý úhel otočení β můžeme použít limity $\cos \beta \rightarrow 1$ a $\tan^2 \beta \rightarrow 0$. Výraz pro index lomu rozvedeme do Taylorovy řady, přičemž zanedbáme členy s $\tan^2 \beta$. Výsledkem bude přibližný vztah pro index lomu

$$n'_2 \approx n_o [1 - r_{41} n_o^2 E \tan \beta] = n_o - n_o^3 r_{41} E \tan \beta.$$

Obdobně bychom získali i vztah pro třetí index lomu,

$$n'_3 = n_e + n_e^3 r_{41} E \tan \beta.$$

Pro úplnost ještě dodejme, že první index se vlivem elektrického pole v ose \vec{x}_1 nemění, tedy $n'_1 = n_1 = n_o$. Je vidět, že indexy lomu n'_2 a n'_3 již nejsou lineárně závislé na elektrickém poli E . Díky lineární závislosti $\tan \beta$ na elektrickém poli bude závislost změny indexu lomu na elektrickém poli kvadratická.

Směr šíření světla

Opět budeme zkoumat dva typické příklady směru šíření světla:

1. Šíření ve směru elektrického pole kolmo na hlavní osu krystalu ($\vec{s} \parallel \vec{E} \parallel \vec{x}_1$). Rozdíl indexů lomu,

$$\Delta n = n'_3 - n'_2 = (n_e - n_o) + (n_o^3 + n_e^3) r_{41} E \tan \beta,$$

je nenulový i při vypnutém elektrickém poli.

2. Šíření kolmo na elektrické pole ve směru optické osy krystalu ($\vec{s} \parallel \vec{x}_3 \perp \vec{E}$). Rozdíl indexů lomu,

$$\Delta n = n'_2 - n'_1 = -n_o^3 r_{41} E \tan \beta,$$

je pro vypnuté pole nulový.

Př. 7.3: Pockelsův jev v LiNbO_3 : Lithium niobát je dalším typickým elektrooptickým materiálem. Je to také negativní jednoosý krystal, ale má trigonální symetrii $3m \equiv C_{3v}$. Jeho prvky symetrie jsou $\{I, 2C_3, 3\sigma_v\}$. Po aplikaci elektrického pole budeme opět řešit změnu indikatrix (7.2), ale tenzor lineárního elektrooptického jevu má pro krystal s touto symetrií jiný tvar

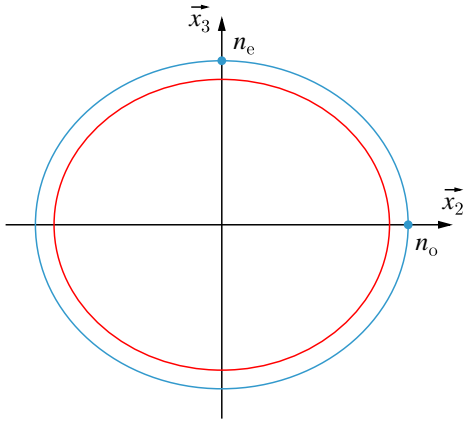
$$r_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jestliže aplikujeme elektrické pole ve směru optické osy, tedy ve směru \vec{x}_3 , $\vec{E} = (0, 0, E)$, potom se nám indikatrix (7.2) zjednoduší na tvar

$$\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{13}E\right) X_1^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{13}E\right) X_2^2 + \left(\frac{1}{n_e^2} + r_{33}E\right) X_3^2 = 1.$$

Jak je vidět, pro tento směr elektrického pole nedochází k žádné rotaci hlavních os indexového elipsoidu. Elipsoid se pouze zdeformuje, jak ukazuje obr. 7.3. Výrazy v závorkách určují nové indexy lomu. Přesněji řečeno, musíme závorku odmocnit a vzít převrácenou hodnotu. Pokud provedeme stejné úpravy jako v předchozích příkladech, tedy rozvedeme výrazy pro indexy lomu do Taylorovy řady a vyšší řady rozvoje zanedbáme, dostaneme přibližná vyjádření nových indexů lomu v závislosti na elektrickém poli ve tvaru

$$\begin{aligned} n'_1 = n'_2 &= n_o - \frac{1}{2}n_o^3r_{13}E, \\ n'_3 &= n_e - \frac{1}{2}n_e^3r_{33}E. \end{aligned}$$



Obr. 7.3: Řez indexového elipsoidu LiNbO_3 v rovině (1,3). Optická osa tohoto jednoosého krystalu má směr \vec{x}_3 . Modrá elipsa s poloosami n_o a n_e znázorňuje řez indexového elipsoidu bez elektrického pole. LiNbO_3 je negativní jednoosý krystal, protože $n_e < n_o$. S elektrickým polem podél osy \vec{x}_3 se modrá elipsa pouze zmenší na červenou elipsu.

Směr šíření světla

Opět budeme sledovat rozdíl indexů lomu pro dva ortogonální vlastní módy šíření pole v krystalu pod vlivem elektrického pole:

1. Šíření ve směru elektrického pole a ve směru optické osy krystalu ($\vec{s} \parallel \vec{E} \parallel \vec{x}_3$). Rozdíl indexů lomu vyjde

$$\Delta n = n'_2 - n'_1 = 0.$$

2. Šíření kolmo na směr elektrického pole a optickou osu krystalu ($\vec{s} \parallel \vec{x}_1 \perp \vec{E} \parallel \vec{x}_3$). Rozdíl indexů lomu vyjde

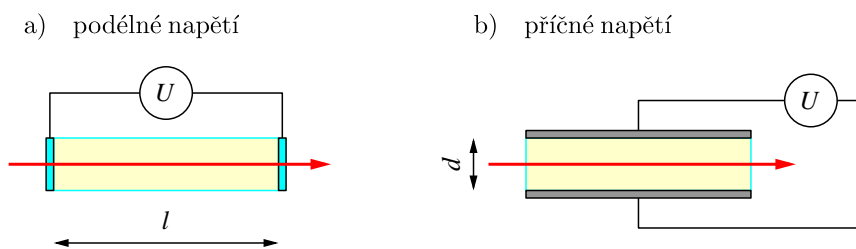
$$\Delta n = n'_3 - n'_2 = (n_e - n_o) - \frac{1}{2}(n_e^3r_{33} - n_o^3r_{13})E.$$

7.2.1 Aplikace EO jevu pro modulaci fáze

Funkci typického fázového modulátoru, který pracuje na principu výše popsaného lineárního EO jevu, ukazuje obr. 7.4. Fázové zpoždění Γ , které vznikne po přiložení elektrického pole, je určené indukovanou změnou indexu lomu dané polarizace použitého světla Δn , délkou krystalu l a vlnovou délkou λ :

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}l\Delta n.$$

Často se používá pro popis funkce EO modulátoru tzv. *půlvlnné napětí* U_π . Je to takové napětí, které vyvolá fázové zpoždění $\Gamma = \pi$, neboli dráhové zpoždění je rovné polovině vlnové délky. Lze snadno ukázat, že tomu odpovídá změna indexu lomu o hodnotu $\Delta n = \lambda/2l$. Pro názornost si vypočítáme velikost půlvlnného napětí pro dva případy dříve zmiňovaných směrů šíření a materiálů:



Obr. 7.4: Schéma uspořádání elektrooptického modulátoru: a) s podélným napětím, b) s příčným napětím.

- 1. Podélný směr pole:** Směr šíření je rovnoběžný se směrem elektrického pole a s optickou osou krystalu v materiálu KDP. Změna indexu lomu je $\Delta n = \frac{1}{2}n_o^3 r_{63} E$, a tedy fázové zpoždění

$$\Gamma = \frac{\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} U,$$

kde napětí $U = El$. Půlvlnné napětí nám vyjde

$$U_\pi = \frac{\lambda}{n_o^3 r_{63}}.$$

Po dosažení hodnoty koeficientů a vlnové délky kolem $1 \mu\text{m}$ dostaneme typické hodnoty půlvlnného napětí $\sim 10^4 \text{ V}$. Jak je vidět, půlvlnné napětí nezávisí na délce krystalu l , protože čím delší je krystal, tím menší je elektrické pole generované přiloženým napětím $E = U/l$. Technologicky je tato konfigurace náročnější, neboť vyžaduje průhledné elektrody. Popřípadě se dají použít také kontakty ve tvary prstence, v jehož středu prochází optický svazek.

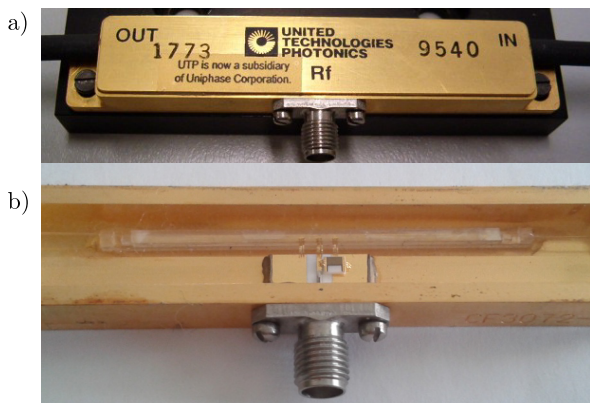
- 2. Příčný směr pole:** Směr šíření je kolmý na směr elektrického pole a optickou osu krystalu v materiálu LiNbO_3 . Toto uspořádání ukazuje fotografie na obr. 7.5. Změna indexu lomu jednoho z polarizačních módů je popsána vztahem $\Delta n = \frac{1}{2}n_o^3 r_{13} E$. Fázový rozdíl je tedy ve tvaru

$$\Gamma = \frac{\pi}{\lambda} l n_o^3 r_{13} \frac{U}{d},$$

kde d je příčná tloušťka krystalu. Napětí se přikládá na kontakty podél celé dráhy svazku a elektrické pole $E = U/d$ může dosáhnout větších intenzit pro velmi tenký krystal. Hodnota půlvlnného napětí v tomto případě už závisí na rozměrech EO krystalu

$$U_\pi = \frac{\lambda}{n_o^3 r_{13}} \frac{d}{l}.$$

Jak je zřejmé, čím bude krystal delší a užší, tím je potřeba menšího napětí k dosažení potřebného fázového zpoždění. Pro typické uspořádání je půlvlnné napětí řádově v jednotkách voltů.



Obr. 7.5: a) Fázový modulátor, b) detail jeho vnitřní konstrukce. Jako EO krystal je použit LiNbO_3 s délkou 47 mm. Elektrické pole se přikládá v příčném směru. Napětí se přivádí na horní elektrodu, spodní elektroda je uzemněná na kovové tělo modulátoru. U elektrického konektoru je patrná 50Ω zátěž. Jako polarizátor slouží hranol s Brewsterovým úhlem na přechodu světla z vlákna do krystalu.

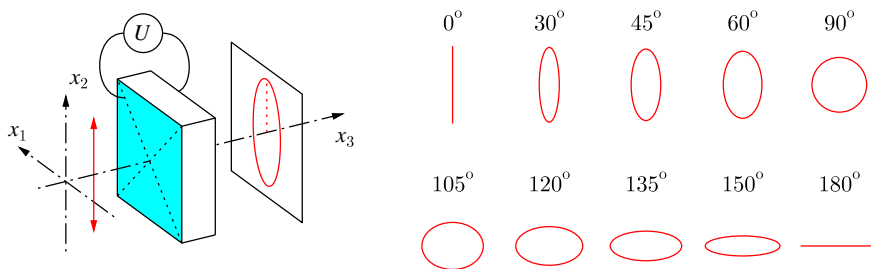
7.3 Modulátory světla

Elektrooptické jevy mění anizotropii materiálu vlivem přiloženého elektrického pole. Toto elektrické pole umožňuje modifikovat vlastnosti světla, jako jsou amplituda, fáze, frekvence nebo polarizace. Elektrooptické prvky, které využívají tyto jevy, se často souhrnně označují jako elektrooptické modulátory, protože provádějí modulaci procházejícího světla. Modulace může být kvazistatická, např. pokud chceme použít modulátor ke stabilizaci fáze, polarizace, nebo výkonu. Modulace může být i vysokofrekvenční s frekvencí Ω . Odezva standardních EO modulátorů světla se pohybuje mezi 1 ns a 10 ps, takže maximální modulační frekvence bývá typicky od 1 do 10 GHz.

7.3.1 Modulátor polarizace

Pokud se modulátorem šíří oba ortogonální vlastní módy polarizace, každý cítí jiný index lomu. V případě elektrooptického jevu se generovaný rozdíl indexů lomu Δn označuje jako *elektricky indukovaný dvojlom*. Takto vzniká mezi různými složkami polarizace fázový posun Γ , který lze řídit elektrickým polem. Tento fázový rozdíl vede na kontrolovanou změnu polarizačního stavu svazku jako celku, neboť výstupní polarizace vznikne součtem obou polarizačních módů s příslušnou fází Γ .

Uvažujme geometrii modulátoru s podélným polem popsanou v předchozí sekci. V tomto uspořádání se používá podélný elektrooptický jev v materiálu KDP, jak je to zobrazeno v levé části obr. 7.6. Vstupní polarizace je vertikální. Vlivem elektrooptického jevu jsou vlastními stavy, které se šíří KDP krystalem, diagonální ($\vec{D}_d \propto \vec{x}_2 + \vec{x}_1$) a antidiagonální ($\vec{D}_a \propto \vec{x}_2 - \vec{x}_1$) lineární polarizace. V pravé části obr. 7.6 je zakreslena výstupní polarizace, která vznikne součtem obou módů s fázovým posunem, $\vec{D}_{out} = \vec{D}_a + e^{i\Gamma} \vec{D}_d$, kde fáze je uvedena ve stupních. Jde obecně o eliptickou polarizaci.



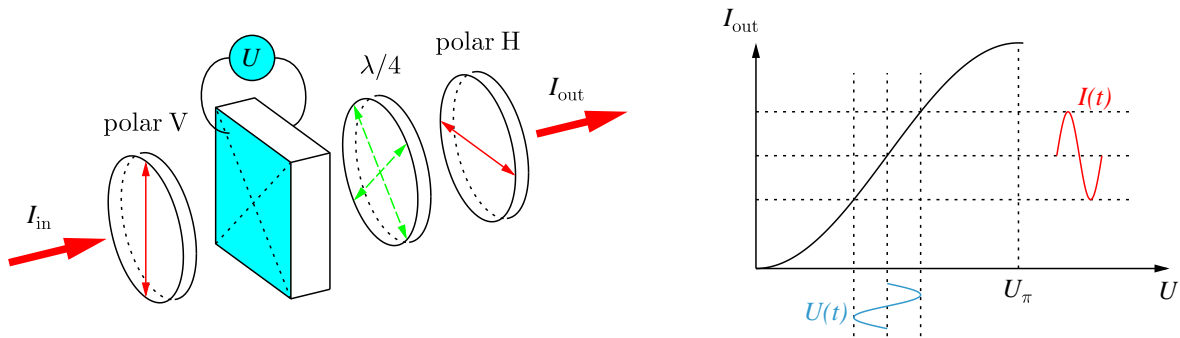
Obr. 7.6: Vlevo: schéma uspořádání elektrooptického modulátoru polarizace, na který dopadá světlo s vertikální lineární polarizací. Vpravo: Výstupní polarizace a odpovídající fázové zpoždění generované přiloženým elektrickým polem.

7.3.2 Amplitudový modulátor

Amplitudové modulátory umožňují vytvořit obálku intenzity optického svazku podle vstupního elektrického signálu. Často se používá periodické elektrické napětí $U = U_m \sin(\Omega t)$, kde U_m značí amplitudu napětí a Ω je frekvence tohoto signálu. Vyvolanou fázovou změnu Γ a její amplitudu Γ_m můžeme zapsat jednoduše pomocí půlvolného napětí

$$\Gamma = \pi \frac{U}{U_\pi}, \quad \Gamma_m = \pi \frac{U_m}{U_\pi}.$$

Nejčastější konstrukce amplitudového modulátoru je znázorněna na obr. 7.7. Vstupní záření prochází nejdříve polarizátorem. Nepolarizované světlo zde ztratí polovinu své intenzity, proto je výhodnější používat již na vstupu světlo polarizované (např. z laseru), jehož polarizaci správně natočíme pomocí fázových destiček. Takto na vstupním polarizátoru nedochází ke ztrátám. Potom záření vstupuje do EO krystalu, na který je aplikováno řídicí napětí. Uvažujme pro jednoduchost konfiguraci směru pole ve směru šíření světla, přesně stejně jako v předešlém odstavci u polarizačního modulátoru. Vlivem napětí se indexový elipsoid krystalu otočí o 45 stupňů a zdeformuje se. Vstupní polarizace se rozloží rovnoměrně do dvou vlastních polarizačních módů, kterými jsou diagonální a antidiagonální lineární polarizace. Každý mód se šíří s jiným indexem lomu, obě složky polarizace budou tedy fázově rozposunuté o Γ . V závislosti



Obr. 7.7: Vlevo: schéma uspořádání elektrooptického amplitudového modulátoru. Ten se skládá z vertikálně orientovaného polarizátoru, EO krystalu, čtvrtvlnné destičky otočené o 45° a horizontálně orientovaného analyzátoru. Vpravo: Výstupní výkon v závislosti na přiloženém napětí na kontaktech EO krystalu.

na velikosti fázového posunu se změní polarizace výstupní vlny. Na výstupu modulátoru je umístěn analyzátor pootočený vůči polarizátoru o 90° . Polarizační složka rovnoběžná s polarizátorem s intenzitou I_{\parallel} analyzátozem neprochází, je absorbována. Analyzátor propustí pouze kolmou složku polarizace s intenzitou I_{\perp} . Absorbovaná a propuštěná intenzita tedy závisí na fázovém posunu podle vzorců

$$I_{\parallel} = I_0 \cos^2 \frac{\Gamma}{2}, \quad I_{\perp} = I_0 \sin^2 \frac{\Gamma}{2},$$

kde I_0 je intenzita vstupního polarizovaného záření. Intenzita na výstupu z modulátoru je tedy úměrná I_{\perp} , kdežto polarizační složka I_{\parallel} je analyzátozem absorbovaná.

Je vidět, že k největší modulaci intenzity dochází pro fázový posun $\Gamma = \pi/2$. Proto se za krystal často zařazuje čtvrtvlnná fázová destička ($\lambda/4$). Malá změna napětí oscilujícího kolem nulové hodnoty vyvolá největší změnu výstupní intenzity světla, jak to ukazuje graf na pravé straně obr. 7.7. Vztah pro výstupní intenzitu $I = I_{\perp}$ můžeme upravit díky goniometrické identitě,

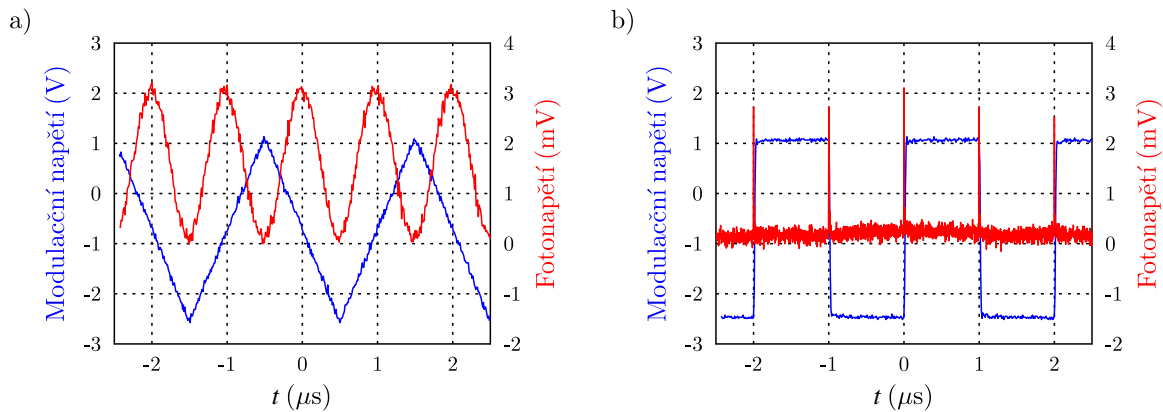
$$\sin^2 \left(\frac{\Gamma}{2} \right) = \frac{1 - \cos \Gamma}{2} = \frac{1 + \sin(\Gamma - \pi/2)}{2}.$$

Tuto identitu dosadíme do vztahu pro výstupní intenzitu I_{\perp} . Posun fáze o $\pi/2$ je způsoben fixně nastavenou čtvrtvlnnou fázovou destičkou. Takto získáme časový průběh výstupní intenzity

$$I(t) = \frac{1}{2} I_0 [1 + \sin(\Gamma_m \sin \Omega t)], \quad \text{kde} \quad \Gamma_m = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} U_m = \pi \frac{U_m}{U_{\pi}}.$$

Výraz sinus ze sinu můžeme rozvést do řady

$$\sin(\Gamma_m \sin \Omega t) = 2J_1(\Gamma_m) \sin \Omega t + 2J_3(\Gamma_m) \sin 3\Omega t + \dots,$$



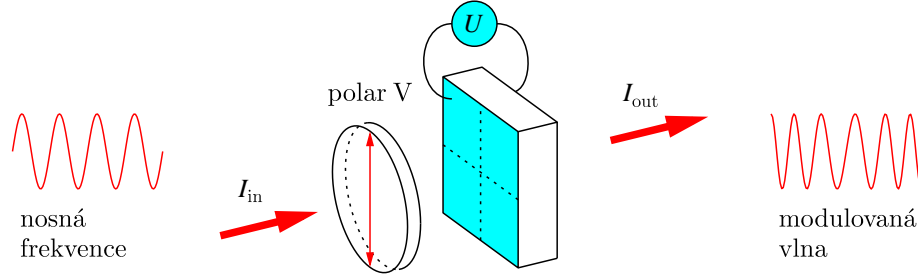
Obr. 7.8: Pomocí osciloskopu je zobrazeno modulační napětí na EO amplitudovém modulátoru (modře) a světelný výkon na výstupu modulátoru (červeně). a) pilovité modulační napětí, b) pravouhlé modulační napětí.

kde J_i jsou Besselovy funkce i -tého řádu. Pokud je Γ_m malé, potom můžeme vzít pouze první člen rozvoje a zanedbat všechny vyšší řády (vyšší frekvence). Výstupní intenzita pak bude mít konstantní příspěvek, na který bude namodulována harmonická složka z řídicího signálu elektrického napětí

$$I = \frac{1}{2} I_0 [1 + 2J_1(\Gamma_m) \sin \Omega t].$$

Obrázek 7.8 ukazuje měření intenzity světla na výstupu z amplitudového modulátoru v závislosti na modulačním napětí. V levém grafu je patrné, že při lineární změně napětí se mění výstupní intenzita podle funkce sinus. V pravém grafu je zakreslena generace krátkých světelných pulzů skokovým přepínáním modulačního napětí o hodnotu $2U_\pi$. Tímto způsobem je možné generovat nanosekundové pulzy.

7.3.3 Fázový modulátor



Obr. 7.9: Schéma uspořádání elektrooptického fázového modulátoru. Elektrické pole se přikládá podél, nebo napříč šíření světla, jen je třeba zajistit, aby byla vertikální polarizace stále vlastním módem polarizace i po přiložení elektrického pole.

Pro správnou funkci fázového EO modulátoru je potřeba, aby neměnil polarizační stav. Podobně jako v případě amplitudového modulátoru je první komponentou fázového modulátoru polarizátor zajišťující vstupní lineární polarizaci. Z toho důvodu je opět efektivnější používat již polarizované světlo, aby nedocházelo ke ztrátám. Na rozdíl od předchozího zařízení se pro fázové modulátory používají materiály se symetrií $3m$, například LiNbO_3 . Při aplikaci elektrického pole podél osy \vec{x}_3 shodné s optickou osou jednoosého materiálu nedochází k rotaci indexového elipsoidu. Vstupní vertikální lineární polarizace je v krystalu vlastním módem i po přiložení elektrického napětí a nedochází tedy ke změně polarizace. Obrázek 7.9 ukazuje aplikaci materiálu KDP, kde ale musí být krystal otočen o 45° .

Pokud je vstupní záření harmonická monochromatická vlna, potom má elektrické pole tvar $E_{\text{in}} = A \cos \omega t$, jako reálná část komplexní amplitudy $A e^{-i\omega t}$. Pro tuto geometrii krystalu KDP vychází amplituda fázového zpoždění poloviční vůči velikosti v předchozím případě, tedy

$$\Gamma_m = \frac{\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} U_m = \frac{\omega}{2c} n_o^3 r_{63} U_m.$$

To je dané tím, že nás zajímá posun fáze jedné polarizace vlivem elektrického pole, a ne vzájemný posun fáze dvou polarizačních komponent. Pokud uvažujeme také harmonickou modulaci, $U = U_m \sin(\Omega t)$, bude se měnit frekvence výstupního elektrického pole.

$$E_{\text{out}} = A \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{c} l n_o + \Gamma_m \sin \Omega t \right),$$

zde první člen v argumentu kosinu popisuje původní nosnou frekvenci vlny, druhý člen je konstantní posun fáze $\frac{\omega}{c} l n_o$. Tuto celkovou dodatečnou fázi můžeme položit rovnou nule, jde pouze o nastavení nulového času pro odečítání fáze. Nejdůležitější pro nás je třetí člen, který popisuje fázovou změnu v důsledku proměnného napětí. Výraz kosinus ze sinu můžeme opět rozvinout do řady s použitím Besselových funkcí a dostaneme

$$\begin{aligned} E_{\text{out}} &= \cos(\omega t + \Gamma_m \sin \Omega t) \\ &= J_0(\Gamma_m) \cos \omega t \\ &\quad + J_1(\Gamma_m) \cos[(\omega - \Omega)t] + J_1(\Gamma_m) \cos[(\omega + \Omega)t] \\ &\quad + J_2(\Gamma_m) \cos[(\omega - 2\Omega)t] + J_2(\Gamma_m) \cos[(\omega + 2\Omega)t] + \dots \end{aligned}$$

Ve výstupní vlně se okolo původní frekvenci ω objeví nové frekvence o velikosti $\omega \pm k\Omega$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Amplitudy těchto postranních frekvenčních pásem jsou rovny hodnotě Besselových funkcí $J_k(\Gamma_m)$. Připomeňme, že frekvenční posun Ω je roven frekvenci elektrického pole přiloženého na fázový modulátor a konstanta Γ_m je amplituda fázové modulace.

Fabryův-Perotův rezonátor

Nevýhodou amplitudových modulátorů bývá to, že potřebují rychle přepínat vysoké hodnoty řídicího napětí. Typické napětí na Pockelsových celách bývá tisíce voltů. Jednou z možností, jak toto napětí snížit, je prodloužit efektivní délku šíření světla v krystalu. Bud' můžeme krystal prodloužit jako takový, nebo jej můžeme vložit do Fabryova-Perotova rezonátoru. Musíme brát zřetel na to, že tento rezonátor propouští jen velmi úzkou spektrální čáru. Pokud ale EO krystal používá jako kontakty polopropustné kovové vrstvy, potom tyto vrstvy vlastně již vytvářejí rezonátor. Pokud je reflektivita těchto vrstev nezanedbatelná, světlo se při průchodu v rezonátoru několikrát odrazí než projde.

7.4 Kvadratický EO jev, Kerrův jev

Kvadratické elektrooptické jevy jsou o několik řádů slabší než lineární, a proto je v krystalech s lineárními EO jevy můžeme zanedbat. Kvadratické jevy pozorujeme v krystalech, ve kterých jsou lineární jevy díky symetrii identicky nulové. Tomu odpovídají všechny materiály se středovou symetrií, jakou mají například některé kubické krystaly.

Kvadratický EO jev je popsán pomocí tenzoru čtvrtého řádu S_{ijkl} , který lze pomocí multiindexace popsat maticí S_{ik} o dimenzi (6×6) . Změnu indexu lomu popisuje rovnice (7.3), ze které odpadl nulový lineární člen, takže

$$\Delta \left[\frac{1}{n^2} \right]_i = S_{ik} E_k^{(2)}. \quad (7.6)$$

V případě kubického krystalu se dá celá matice tenzoru S_{ij} zapsat pomocí nuly a tří konstant,

$$S_{ik} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{pmatrix}.$$

Kubický krystal je bez vnějších sil izotropní, tj. má ve všech směrech stejný index lomu n_0 . Teprve vlivem vnějšího elektrického pole se indexová koule začne deformovat na rotační elipsoid s osou ve směru elektrického pole. Pokud zvolíme elektrické pole například ve směru osy \vec{x}_3 , tedy $\vec{E} = (0, 0, E)$, potom rovnice (7.3) přejde na tvar

$$\left(\frac{1}{n_0^2} + S_{12} E^2 \right) X_1^2 + \left(\frac{1}{n_0^2} + S_{12} E^2 \right) X_2^2 + \left(\frac{1}{n_0^2} + S_{11} E^2 \right) X_3^2 = 1.$$

Je vidět, že nedochází k rotaci, pouze k deformaci koule na elipsoid. Ve směrech kolmých na pole je index lomu shodný. Odlišný je ve směru osy \vec{x}_3 . Matematicky je to popsáno rozdílem koeficientů S_{11} a S_{12} . Modifikované indexy můžeme opět najít jako v předchozím textu, tedy rozvojem do Taylorovy řady, kde vyšší řády rozvoje zanedbáme. Takto získáme následující výrazy pro nové vlastní indexy lomu

$$\begin{aligned} n'_1 = n'_2 &= n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 S_{12} E^2, \\ n'_3 &= n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 S_{11} E^2. \end{aligned}$$

Elektrické pole generuje v materiálu rozdíl indexů lomu (elektricky indukovaný dvojlom), který je úměrný kvadrátu elektrické intenzity,

$$\Delta n = n'_3 - n'_1 = \frac{1}{2} n_0^3 (S_{12} - S_{11}) E^2.$$

Díky tomu, že rozdílné indexy lomu jsou pouze mezi polarizací ve směru a polarizací kolmo na směr elektrického pole, nemůžeme použít konfiguraci šíření světla podél elektrického pole, protože v tomto směru se negeneruje dvojlom. Jediná funkční geometrie kvadratického EO modulátoru je tedy taková, že směr šíření je kolmý na elektrické pole, $\vec{s} \perp \vec{E}$.

7.5 Měření elektrooptických koeficientů

V této sekci nastíníme možnosti měření elektrooptických koeficientů vyskytujících se ve výrazech popisujících dvojlom indukovaný elektrickým polem. První, nejjednodušší a do značné míry alibistická možnost je, že se hledané parametry najdou v tabulkách. Pokud ale nevíme, co je to za materiál, nebo testujeme nějaký nový materiál, musíme si tyto koeficienty změřit sami.

Obecně jsou lineární i kvadratické EO koeficienty r_{ijk} a S_{ijkl} funkcí vlnové délky λ , teploty T a modulační frekvence Ω . Proto musíme měřit za podmínek, za jakých potom chceme daný materiál používat. Je výhodné znát symetrii daného materiálu, aby se zbytečně neměřily nulové nebo ze symetrie shodné hodnoty. Možnosti měření koeficientů odpovídají typickým uspořádáním, které jsme diskutovali v předchozí sekci. Pro danou konfiguraci (šíření světla podél nebo kolmo na směr elektrického pole) určíme jednu z následujících hodnot:

- půlplnné napětí U_π , a potom

$$r_{63} = \frac{\lambda}{2n_o^3 U_\pi} \quad \text{nebo} \quad n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13} = \frac{\lambda d}{U_\pi l}.$$

V druhém případě nelze tímto měřením určit koeficienty r_{33} a r_{13} odděleně.

- intenzity postranních pásem modulátoru, tyto intenzity jsou úměrné Besselovým funkcím s argumentem

$$\Gamma_m = \frac{\omega}{2c} n_o^3 r_{63} U.$$

7.5.1 Frekvenční závislost EO koeficientů

EO koeficienty díky své definici představují závislost indexu lomu (permitivity, susceptibility) na vyšších mocninách elektrického pole. EO koeficienty definujeme vztahem (7.3)

$$\Delta \left[\frac{1}{n_{ij}^2} \right] = r_{ijk} E_k + S_{ijkl} E_k E_l + \dots \quad (7.7)$$

Pokud chceme v materiálu sledovat nelineární efekty jako je generace druhé harmonické (SHG) nebo generace součtových/rozdílových frekvencí, bude nás zajímat nelineární polarizace, kterou v materiálu generuje elektrické pole dopadajícího světla. Nelineární polarizace je popsána vztahem

$$P_i^{\text{NL}} = \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots,$$

kde $\chi_{ijk}^{(2)}$ a $\chi_{ijkl}^{(3)}$ představují nelineární susceptibilitu druhého a třetího řádu.

Porovnáním obou výrazů je zřejmé, že EO koeficienty jsou přímo svázané s nelineární susceptibilitou. Rozdíl je pouze ve frekvenci elektrického pole. V prvním případě se jednalo o frekvence maximálně řádu 10 GHz, ve druhém případě jde o optická pole s frekvencemi 10^{15} Hz. Proto je třeba znát disperzi elektrooptických koeficientů (závislost na frekvenci elektrického pole).

7.6 Piezoelektrický jev

7.6.1 Vazba na mikroskopický model

Index lomu materiálu popisuje to, že elektrické pole světla způsobuje v látce přerozdělení nábojové hustoty, a proto se v látce světlo šíří pomaleji. Čím více s látkou interaguje, tím více se zdrží a tím větší je příslušný index lomu. Jestliže chceme sledovat dynamické vlastnosti EO koeficientů, musíme najít jejich příčinu. Pomalé elektrické pole způsobí nejen přerozdělení hustoty náboje elektronů q , ale i posunutí iontů. Prostorové rozložení iontů popisuje nábojová hustota Q . Pohyb iontů je asi stokrát pomalejší, navíc mají díky větší hmotnosti nezanedbatelnou setrvačnost. Proto můžeme např. lineární elektrooptický koeficient studovat ve *statické oblasti* (r_{ijk}^T , träge), kde přispívají ionty, a *vysokofrekvenční oblasti* (r_{ijk}^S , schnell) kde přispívají pouze elektrony.

Pro molekuly je příspěvek od iontů tisíckrát menší a lze ho zanedbat. V pevné látce ale ionty vytvářejí periodický potenciál. Jeho změna vede na změnu rozložení elektronů, a to způsobí změnu susceptibility nebo indexu lomu. Můžeme si proto zapsat diferenciál lineárního EO tenzoru

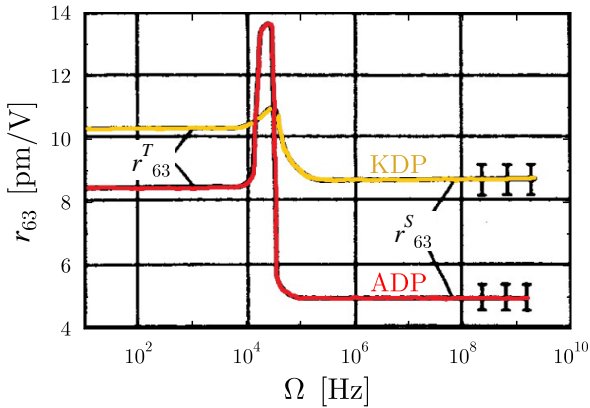
$$r_{ijk} = \frac{\partial \left[\frac{1}{n_{ij}^2} \right]}{\partial E_i} = \left(\frac{\partial \left[\frac{1}{n_{ij}^2} \right]}{\partial q} \right)_Q \frac{\partial q}{\partial E_i} + \left(\frac{\partial \left[\frac{1}{n_{ij}^2} \right]}{\partial Q} \right)_q \frac{\partial Q}{\partial E_i}.$$

Nyní je nutné si vzpomenout na Lorentzův a Drudeho mikroskopický model probíraný v kap. 3. Elektrony můžeme popsat pomocí tlumeného harmonického oscilátoru s rezonanční frekvencí ω_0 . Rezonance parciálních derivací bude na této frekvenci řádově 10^{14} – 10^{15} Hz. Druhý člen diferenciálu popisuje reakci mřížky s rezonanční frekvencí mřížkové reflexe v rádiové oblasti 10^{13} Hz.

U frekvencí elektrického pole Ω , které jsou pod frekvencí mřížkové rezonance, považujeme deformaci krystalu za piezoelektrickou a popisuje ji nízkofrekvenční tenzor r_{ijk}^T . Pro vyšší frekvence je deformace krystalu zprůměrovaná, krystal se nestíhá deformovat s frekvencí elektrického pole, což popisuje tenzor r_{ijk}^S . Oba tyto tenzory mají stejnou symetrii, ale liší o *nepřímý elektrooptický jev*

$$r_{ijk}^T = r_{ijk}^S + p_{ijlm} d_{lmk}, \quad (7.8)$$

kde p_{ijlm} značí elastooptický tenzor a d_{lmk} piezoelektrický tenzor. Toto chování ukazuje obr. 7.10 pro materiál KDP a ADP.



Obr. 7.10: Frekvenční spektrum lineárního EO koeficientu pro KDP (žlutá křivka) a pro ADP (červená křivka). Je zřejmý rozdíl mezi nízkofrekvenční (r_{63}^T) a vysokofrekvenční (r_{63}^S) hodnotou tohoto prvku tenzoru. V přechodové oblasti okolo 50 kHz je patrná elastická rezonance. Převzato z [8] a upraveno.

7.6.2 Fotoelastický tenzor

Pro vzájemné propojení výše zmiňovaných jevů s mechanooptickými jevy si zopakujeme některé tenzorové vztahy, které s tím souvisí. Pokud na krystal působí jak elektrické pole, tak mechanické napětí, potom popíšeme změnu indexového elipsoidu v lineárním režimu následovně

$$\Delta \left[\frac{1}{n_{ij}^2} \right] = r_{ijk} E_k + \pi_{ijkl} \Sigma_{kl}. \quad (7.9)$$

Tenzor mechanického napětí Σ_{kl} jsme si zavedli již v sekci 4.1.2. Nově zde máme *piezooptický tenzor* π_{ijkl} , který udává změnu indexu lomu vlivem mechanického působení na krystal. Jeho jednotkou je $\text{Pa}^{-1} = \text{m}^2/\text{N}$. Řádová velikost koeficientů piezooptického tenzoru je $10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$ [7]. Mechanické napětí v látce může být generované deformací, kterou popíšeme tenzorem malých deformací. Tuto závislost v elastické oblasti popisuje Hookův zákon

$$\Sigma_{kl} = C_{klmn}u_{mn}, \quad u_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right).$$

C_{klmn} značí *tenzor pružnosti* a koeficienty u_{mn} popisují tenzor malých deformací. Připomeňme si, že diagonální prvky u_{11} , u_{22} a u_{33} popisují stlačení, kdežto nediagonální prvky u_{12} , u_{23} a u_{31} popisují smyk. Tenzor malých deformací se počítá z derivací vektoru lokálního posunutí $\vec{u}(\vec{r})$. Anglicky se označuje displacement.

Provedeme tenzorové násobení a dostaneme pro změnu indexového elipsoidu následující rovnost:

$$\Delta \left[\frac{1}{n_{ij}^2} \right] = r_{ijk}E_k + p_{ijmn}u_{mn}, \quad p_{ijmn} = \pi_{ijkl}C_{klmn}. \quad (7.10)$$

p_{ijmn} je bezrozměrný *fotoelastický tenzor* o řádové velikosti 1/10. Pokud materiál při deformaci zmáčkne, zapříčiní to deformaci indexového elipsoidu o přibližně desetinu této mechanické deformace. S materiálem se tedy stlačuje i indexový elipsoid.

Pokud je deformace materiálu bez krutu, potom je tenzor deformace symetrický. Fotoelastický tenzor lze pomocí multiindexace zapsat jako matici (6×6).

7.6.3 Vazba na piezoelektrický jev

V našem odvozování můžeme postupovat dál tak, že budeme uvažovat mechanickou deformaci materiálu vyvolanou statickým elektrickým polem. Tento jev se nazývá inverzní piezoelektrický jev a je popsán rovnicí

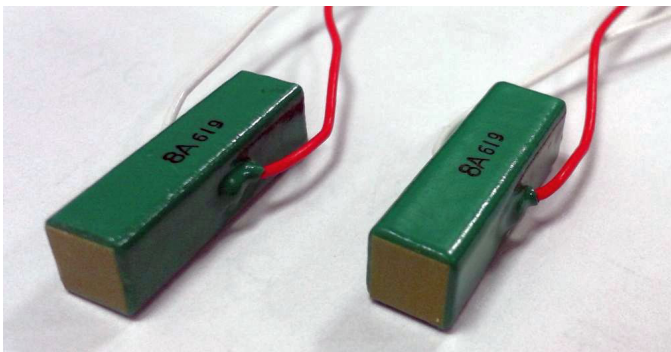
$$u_{ij} = d_{ijk}E_k,$$

kde d_{ijk} je *piezoelektrický tenzor*. Dosadíme do rovnice (7.10) a získáme velikost modifikace indexového elipsoidu ve tvaru

$$\Delta \left[\frac{1}{n_{ij}^2} \right] = (r_{ijk} + p_{ijlm}d_{lmk})E_k. \quad (7.11)$$

Porovnáním tohoto vztahu s definičním vztahem pro lineární EO jev je zřejmé, proč musí platit (7.8). Ve statickém režimu, nebo pro nízké frekvence, je změna indexového elipsoidu daná jak přímým, tak nepřímým elektrooptickým jevem $r_{ijk}^T = r_{ijk}^S + p_{ijlm}d_{lmk}$. První sčítanec odpovídá přímému EO jevu a druhý nepřímému.

Inverzní piezoelektrický jev se využívá pro mikromanipulace pomocí elektrického napětí. Pokud na piezoelektrický krystal přiložíme napětí, dojde k jeho mechanickému roztažení nebo smrštění v řádu jeden mikrometr na 10 voltů. Síla, jakou může krystal působit, je řádově 100 N. Takto můžeme velmi přesně nastavovat (naklánět nebo posouvat) zrcadla rezonátoru nebo laseru. Příklad piezoelektrických krystalů včetně kontaktů a přírodních elektrických kabelů ukazuje obr. 7.11.



Obr. 7.11: Piezoelektrické krystaly firmy Thorlabs. Po přiložení příčného napětí se prodlouží v podélném směru.

7.7 Další elektrooptické jevy

EO jevy zahrnují všechny efekty, kdy dojde ke změně optických vlastností materiálu vlivem přiloženého elektrického pole. Toto vnější elektrické pole má frekvence o několik řádů nižší, než jsou frekvence optického pole. Podle toho, který parametr látky je elektrickým polem ovlivněn, můžeme EO jevy rozdělit.

1. Změna indexu lomu

Do této kategorie patří vše, co bylo v této kapitole doposud diskutováno. Vhodným materiálem pro EO jevy je dielektrikum s širokým zakázaným pásem, které se používá ve spektrální oblasti, kterou toto dielektrikum nemůže absorbovat. Energie fotonů je menší než šířka zakázaného pásu. Do této skupiny jevů patří např.:

- Pockelsův jev
- Kerrův jev

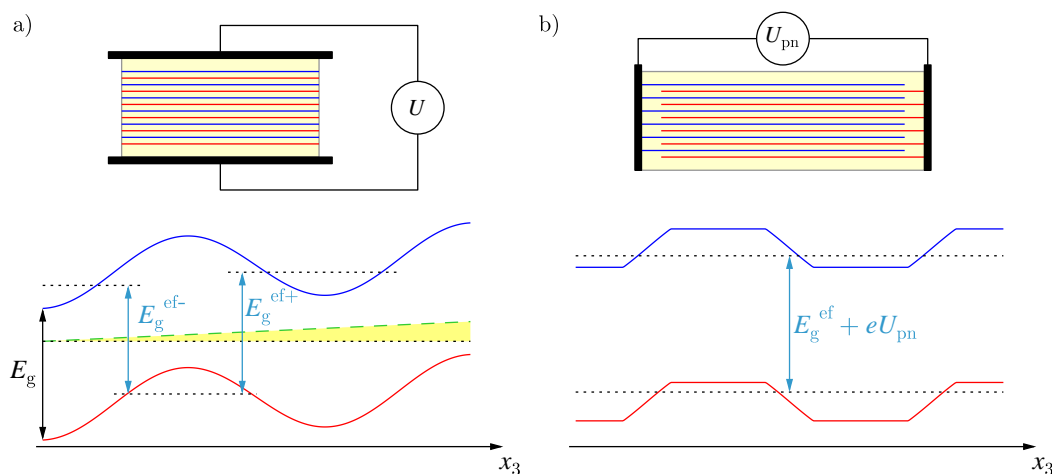
2. Změna optické aktivity

Sem patří změna cirkulární anizotropie – elektro-gyrace.

3. Změna absorpčního koeficientu

EO materiálem je v tomto případě polovodičová struktura a používá se světlo blízko hrany zakázaného pásu tohoto polovodiče. Polovodičová struktura je navržena tak, abychom pomocí elektrického pole mohli měnit šířku zakázaného pásu. Při zúžení zakázaného pásu se posune absorpční hrana a světlo, které dříve procházelo bez tlumení, začne být absorbováno. Na základě těchto jevů mohou fungovat amplitudové modulátory světla. Do této skupiny jevů patří např.:

- Franzův-Keldyšův jev – Elektrické pole naklání vodivostní a valenční pás, což vede k posunutí a sklonu absorpční hrany pro mezipásovou absorpci.
- kvantově vázaný Starkův jev – Je způsoben tím, že elektrony a díry v polovodičových kvantových jámách jsou díky elektrickému poli prostorově rozposunuty k opačným stranám jámy. Náklonem pásů pak dojde ke snížení energie absorpční hrany.
- n-i-p-i supermřížky – Tyto polovodičové prvky se vyrábějí pokročilými epitaxními metodami růstu jednotlivých vrstev polovodiče. Takto je možné vyrobit nad sebou vrstvy dopované na n-tyt, p-tyt a nedopované (i-tyt). Díky pokročilé litografii je možné vytvořit kontakty na jednotlivé vrstvy a elektrickým polem pak ovládat modulaci pásové struktury na p-n přechodech. Schéma tohoto elektrooptického amplitudového modulátoru je zobrazeno na obr. 7.12.



Obr. 7.12: n-i-p-i struktura polovodičového amplitudového modulátoru. Napětí se přikládá a) podél osy růstu U , b) na p-n vrstvy U_{pn} . Původní šířka zakázaného pásu je E_g a modifikovaná je E_g^{ef} . Převzato z [1], kde je možné najít podrobnější vysvětlení funkce.

7.8 Shrnutí

- Vnější elektrické pole vyvolává v látce změnu optických parametrů. Tyto efekty se souhrnně označují jako elektrooptické (EO) jevy a využívají se pro modulaci optického signálu pomocí elektrického signálu.
- Elektrickým polem lze modifikovat index lomu, optickou aktivitu nebo absorpční koeficient.
- Pro popis EO jevů se používá modifikace indexového elipsoidu. Elektrické pole mění hlavní indexy lomu a může měnit i směr hlavních os.
- Typické EO modulátory jsou: polarizační, amplitudový a fázový modulátor. Ty využívají lineární EO Pockelsův jev. Jedním z důležitých parametrů je půlvlnné napětí U_{π} .
- Používají se dvě konfigurace: podélný EO jev (elektrické pole ve směru šíření světla), příčný EO jev (elektrické pole je orientované kolmo na směr šíření světla).
- Při nízkých frekvencích elektrického pole přispívá k EO jevům jak přímý tak nepřímý EO jev. Nepřímý EO jev vzniká kombinací piezoelektrického a fotoelastického jevu.

7.9 Příklady

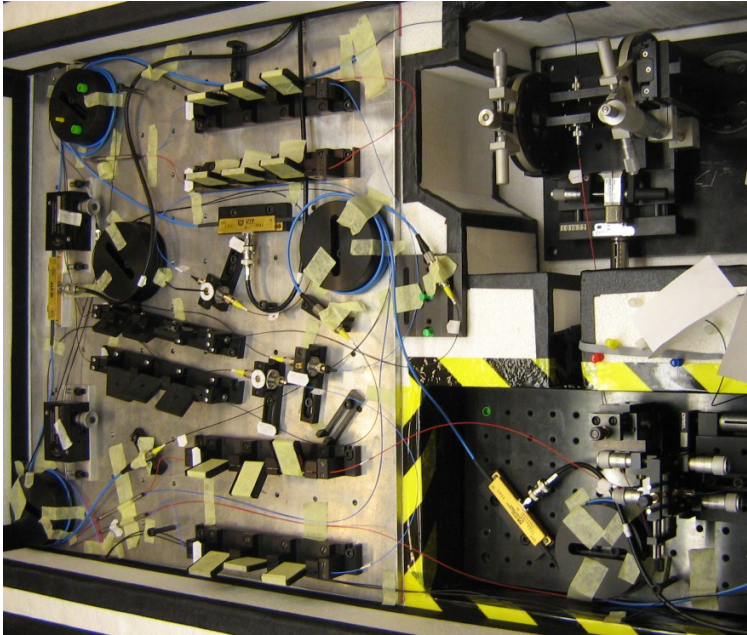
Př. 7.4: Fázový modulátor LiNbO_3 :

Uvažujte fázový modulátor používaný s příčnou konfigurací elektrického pole v lithiu niobátu. Načrtněte dvě geometrické konfigurace, jež se liší hodnotou půlvlnného napětí modulátoru, které jsou

$$U_{\pi}^{(1)} = \frac{\lambda}{n_o^3 r_{13}} \frac{d}{l}, \quad U_{\pi}^{(2)} = \frac{\lambda}{n_e^3 r_{33}} \frac{d}{l}.$$

Př. 7.5: Fázové modulátory v interferometru:

Najděte tři fázové modulátory ve vláknovém uspořádání dvou Machových-Zehnderových interferometrů na obr. 7.13. Vysvětlete funkci fázového modulátoru ve vláknovém interferometru.



Obr. 7.13: Experimentální uspořádání dvou propojených vláknových interferometrů typu Mach-Zehnder.



Tento přepínač do různých prostorových módů je
na zeměpisné pozici: 50°04'16.804"N, 14°24'9.128"E.

Kapitola 8

Akustooptický jev

Obsah kapitoly

8.1 Fotoelastický jev	109
8.1.1 Fotoelastický tenzor pro jednoosé napětí	110
8.2 Využití akustooptického jevu	110
8.2.1 Popis akustooptického jevu	111
8.2.2 Příčné vlnění	111
8.2.3 Podélné vlnění	112
8.2.4 Dva režimy AO difrakce	112
8.3 Ramanův-Nathův režim difrakce	113
8.4 Braggův režim difrakce	115
8.4.1 Braggova difrakce v anizotropním prostředí	116
Př. 1: Úhel AO difrakce ve vodě	116
8.4.2 Zákony zachování při difrakci	116
8.4.3 Popis difrakce pomocí Dopplerova jevu	117
8.4.4 Účinnost Braggovy difrakce	117
Př. 2: Účinnost AO difrakce ve vodě	118
Př. 3: Účinnost AO difrakce v krystalu PbMoO ₄	118
8.5 Aplikace AO jevu	118
8.5.1 Technické parametry AO intenzitního modulátoru	119
8.5.2 Technické parametry AO spektrálního analyzátoru	119
8.5.3 AO přepínač	119
8.6 Shrnutí	120
8.7 Příklady	121

V předchozí kapitole jsme diskutovali elektrooptické jevy v pevných látkách. EO jevy jsou ale svázány s další skupinou jevů, které souvisejí s mechanickou deformací materiálu. Tuto problematiku jsme diskutovali v sekci 7.6.2. Některé výsledky, které budeme nyní potřebovat, si zopakujeme.

8.1 Fotoelastický jev

Názvem fotoelastický jev označujeme změnu indexu lomu materiálu pod vlivem mechanické deformace. Díky tomu, že mechanické napětí snímá symetrii krystalu, můžeme fotoelastické jevy pozorovat i v krystalech se středovou symetrií. Pod vlivem mechanického napětí dochází v látce ke změně indexového elipsoidu. Zatímco jednoduchý tlak způsobuje lineární anizotropii, krut má za následek cirkulární anizotropii. Nejjednodušším případem mechanického napětí je jednoosé napětí, které popíšeme pouze jedním nenulovým koeficientem v tenzoru mechanického napětí $\underline{\underline{\Sigma}}$. Elastické napětí způsobuje deformaci, kterou

si můžeme zapsat jako tenzor nebo ve zkrácené podobě pomocí multiindexů.

$$\overleftrightarrow{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overleftrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_i = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Díky deformaci se mění lokální hustota látky a tím dochází ke změně optických vlastností materiálu. Provedeme rozvoj výrazu pro indexový elipsoid zavedený v sekci 5.3.1. Obvykle stačí rozvoj do prvního řádu

$$\left[\frac{1}{n_{ij}^2} \right] = \frac{1}{n_{ij}^2} \Big|_{\overleftrightarrow{\Sigma}=\overleftrightarrow{0}} + \Delta \left[\frac{1}{n_{ij}^2} \right].$$

Dále nás bude zajímat člen popisující změnu indexového elipsoidu

$$\Delta \left[\frac{1}{n_{ij}^2} \right] = p_{ijkl} u_{kl}.$$

Pokud použijeme zápis pomocí multiindexů, potom tento vztah získá tvar

$$\Delta \left[\frac{1}{n^2} \right]_i = p_{ik} u_k.$$

Podle definice dává fotoelastický tenzor p_{ik} do vztahu bezrozměrný index lomu a tenzor malých deformací, který je v relativních jednotkách. Díky tomu jsou koeficienty fotoelastického tenzoru také bezrozměrné a řádově mají velikosti ≈ 0.1 . Proto deformace materiálu o 1 % svého rozměru vede na deformaci indexového elipsoidu o hodnotu 0.1 %.

8.1.1 Fotoelastický tenzor pro jednoosé napětí

V případě jednoosé deformace, jak to ukazuje předpis (8.1), je nenulový pouze první koeficient ve sloupcovém zápisu tenzoru malých deformací. Jeho velikost označíme u_0 . Protože je odvození deformace indexového elipsoidu, které bychom teď měli provést, zcela analogické s výpočtem, který jsme provedli pro kvadratický EO jev, můžeme nalistovat sekci 7.4 na str. 100 a rovnou napsat výsledek. Z analogie vyplývá i to, že fotoelastický tenzor $\overset{4\leftrightarrow}{p}$ musí mít stejnou symetrii jako kvadratický elektrooptický tenzor $\overset{4\leftrightarrow}{S}$. Pro modifikaci indexového elipsoidu, např. pro kubický krystal, platí

$$\Delta \left[\frac{1}{n^2} \right]_i = p_{ij} u_j = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Modifikované indexy lomu budou

$$\begin{aligned} n'_1 &= n - \frac{1}{2} n^3 p_{11} u_0, \\ n'_2 = n'_3 &= n - \frac{1}{2} n^3 p_{12} u_0. \end{aligned}$$

n značí index lomu daného kubického materiálu, který je bez působení mechanického napětí izotropní.

8.2 Využití akustooptického jevu

Akustooptika řeší interakci optického pole s akustickou vlnou v materiálu pevné látky. To, že může světlo procházející látkou interagovat s akustickou vlnou, předpověděl Léon Brillouin již v roce 1922. Na jeho

počest se tento jev spojený se změnou frekvence procházejícího světla začal označovat jako Brillouinův rozptyl. Poprvé byl experimentálně pozorován v roce 1932 fyziky Debyem a Searsem v USA. Ve stejnou dobu provedli podobný experiment ve Francii fyzikové Lucas a Biguard.

Nejznámějším akustooptickým jevem je bezesporu difrakce na mřížce, která je v látce vytvořena periodickou modulací indexu lomu. Tato periodická modulace je vytvořena tlakem akustické vlny. Akustooptická interakce se ukázala jako velmi užitečná metoda pro spektrální rozklad zvukových vln a pro velmi rychlé přepínání směru šíření optického svazku v laserových systémech. Typické akustooptické (AO) prvky jsou: AO modulátory světla, spektrální analyzátoři, deflektory optického svazku a laditelné filtry.

8.2.1 Popis akustooptického jevu

Nyní se již naplno věnujme akustooptickým jevům. Pod tímto názvem se skrývají takové jevy, kdy se mění optické parametry prostředí vlivem akustické vlny. Akustická vlna, neboli zvuk, se ve vzduchu šíří ve formě podélného vlnění. V krystalu s periodickým uspořádáním může být směr kmitání akustické vlny jak podélný, tak příčný. To odpovídá také podélným a příčným fononům v pevné látce. Akustická vlna se může vybudit buď pomocí mikroreproduktoru, nebo pomocí piezokrystalu. Obě metody umožňují měnit elektrický signál na mechanické vibrace. V laserových systémech se musí velmi přesně nastavit fáze akustické vlny, aby bylo možné optimalizovat interakci s optickými pulzy délky desítek až stovek femtosekund.

Akustickou vlnu v materiálu popisujeme pomocí těchto parametrů:

- Frekvence Ω popisuje časový vývoj akustické vlny.
- Vlnový vektor, $\vec{K} = \frac{2\pi}{\Lambda} \vec{s}$, popisuje směr šíření. Většinou volíme směr šíření akustické vlny podél osy \vec{x}_3 , tedy $\vec{K} = (0, 0, K)$.
- Λ je vlnová délka akustické vlny.
- Rychlost $v_{\text{ak}} = \Omega/K$ udává fázovou rychlost šíření akustické vlny.
- Polarizace vlnění udává směr výchylek jednotlivých atomů. V případě příčného vlnění volíme směr výchylek v ose \vec{x}_1 . Pro podélné vlnění je směr výchylek shodný se směrem šíření akustické vlny, tedy podél osy \vec{x}_3 .

Akustická vlna se v materiálu pohybuje fázovou rychlostí. Pokud dochází k odrazu, můžeme v pevné látce vybudit i stojaté vlnění. Díky tomu, že rychlost světla $v = c/n \approx 10^8$ m/s je o pět řádů vyšší než rychlost zvuku, $v \gg v_{\text{ak}} \approx 10^3$ m/s, můžeme akustooptickou interakci femtosekundového optického pulzu popisovat jako interakci světla se stojatou vlnou v daném čase.

8.2.2 Příčné vlnění

V případě příčného vlnění lze malou výchylku v různých místech v materiálu zapsat jako harmonickou funkci souřadnice x_3

$$\vec{u}(x_3, t) = A \cos(\Omega t - K x_3) \vec{x}_1,$$

kde A je amplituda výchylky a K značí velikost vlnového vektoru akustické vlny, $K = 2\pi/\Lambda$. Zopakujme si, jak se z vektorů výchylek počítá tenzor malých deformací,

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (8.2)$$

Zapíšeme-li si tenzor malých deformací pomocí multiindexů jako sloupcový vektor o šesti prvcích, bude mít nenulovou hodnotu pouze prvek s indexem 5,

$$u_5 = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = u_0 \sin(\Omega t - K x_3), \quad u_0 = \frac{1}{2} A K.$$

Vlivem akustického pole se v látce vytvoří prostorová fázová mřížka, mřížka s periodickou změnou indexu lomu. Tuto periodickou mřížku můžeme v případě izotropního materiálu zapsat pomocí elastooptického tenzoru $\overset{4\leftrightarrow}{p}$, který lze zapsat jako matici (6×6) díky multiindexům. Pro námi zvolenou geometrii příčného vlnění se uplatní prvek p_{44} tohoto tenzoru. Indexový elipsoid nabude tvar

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}{n^2} + 2X_1X_3p_{44}u_0 \sin(\Omega t - Kx_3) = 1.$$

Dochází k deformaci indexové koule na elipsoid, což je matematicky stejný problém, jako u kvadratického elektrooptického jevu. Pomocí analogického řešení tedy dostaneme analogický výsledek. Po rotaci do vlastních os se zbavíme smíšeného členu s násobkem X_1X_3 a provedením rozvoje do druhého řádu dostaneme hodnoty modifikovaných indexů lomu,

$$\begin{aligned} n'_1 &= n - \frac{1}{2}n^3p_{44}u_0 \sin(\Omega t - Kx_3), \\ n'_2 &= n, \\ n'_3 &= n + \frac{1}{2}n^3p_{44}u_0 \sin(\Omega t - Kx_3). \end{aligned} \tag{8.3}$$

8.2.3 Podélné vlnění

Druhou možností geometrie šíření akustického signálu je ve formě podélného vlnění. V tomto případě atomy kmitají ve směru šíření zvuku. Velikost malé výchylky proto zapíšeme následovně

$$\vec{u}(x_3, t) = A \cos(\Omega t - Kx_3) \vec{x}_3.$$

Jediným nenulovým prvkem tenzoru malé deformace bude v tomto případě prvek s multiindexem tři,

$$u_3 = AK \sin(\Omega t - Kx_3) = u_0 \sin(\Omega t - Kx_3), \quad u_0 = AK.$$

Pomocí tohoto tenzoru si opět spočítáme, jak se změní indexová koule izotropního prostředí na elipsoid. V tomto případě se nám ale objeví dva prvky elastooptického tenzoru p_{ik} ,

$$\begin{aligned} \Delta \left[\frac{1}{n^2} \right]_1 &= \Delta \left[\frac{1}{n^2} \right]_2 = p_{12}u_3, \\ \Delta \left[\frac{1}{n^2} \right]_3 &= p_{11}u_3. \end{aligned}$$

Rozvojem opět určíme transformované indexy lomu

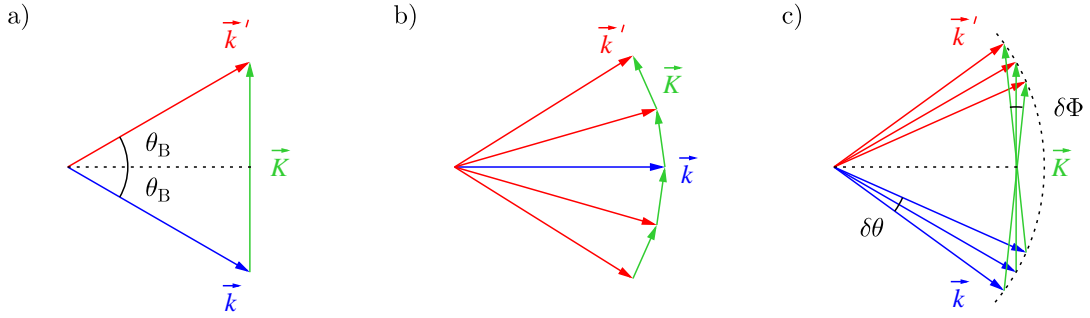
$$\begin{aligned} n_1 = n_2 &= n - \frac{1}{2}n^3p_{12}u_0 \sin(\Omega t - Kx_3), \\ n_3 &= n - \frac{1}{2}n^3p_{11}u_0 \sin(\Omega t - Kx_3). \end{aligned} \tag{8.4}$$

8.2.4 Dva režimy AO difrakce

Je třeba brát v úvahu tenzorový charakter interakce, vektorový popis optické a akustické vlny. Vliv akustické vlny na průchod optické vlny materiálem je takový, že se optická vlna odklání z původního směru, dochází k difrakci na vzniklé fázové mřížce. Tohoto jevu se využívá v rezonátorech pulzních laserů pro vyvážení pulzů z laserové dutiny. Obecně tímto jevem dochází k modulaci, popřípadě k řízené změně frekvence optického záření.

V závislosti na zvolené geometrii, tloušťce materiálu L , kterým světlo prochází a šířce akustického a optického svazku můžeme akustooptické jevy rozdělit do dvou kategorií:

- **Braggův režim:** materiál je natolik široký, že akustickou vlnu, která se v něm šíří, můžeme považovat za rovinnou. Interakcí dvou rovinných vln, optické a akustické, může dojít k difrakci pouze do jednoho výstupního směru.
- **Ramanův-Nathův režim:** materiál je natolik tenký, že nelze akustickou vlnu aproximovat rovinnou vlnou. Na výstupu z krystalu vzniká velký počet difrakčních řádů.



Obr. 8.1: a) Braggův režim difrakce, b) Ramanův-Nathův režim difrakce, c) Braggův režim s fokusovanými svazky. Vlnový vektor dopadající vlny je zakreslen modře, difraktované vlny červeně a akustické vlny zeleně.

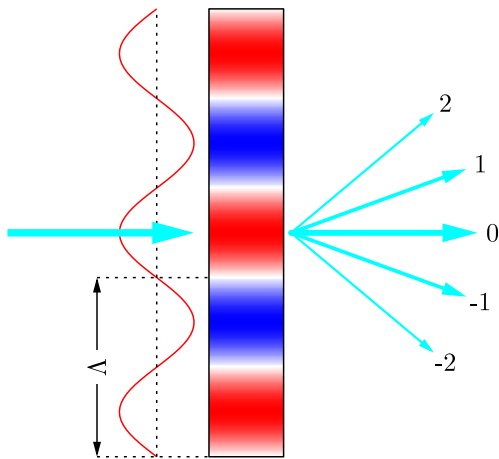
Na akustooptickou interakci se můžeme dívat jako na interakci fotonu s akustickými fonony, jak ukazuje obr. 8.1. Protože energie fononu je mnohem menší než energie fotonu, délka vlnového vektoru \vec{k} se při difrakci prakticky nezmění, pouze se pootočí jeho směr o úhel $2\theta_B$. Pokud by měl foton interagovat s dalším fononem, musel by mít tento fonon pootočený vlnový vektor \vec{K} . Úhlový rozptyl vlnových vektorů akustické vlny $\delta\Phi$ v materiálu tloušťky L se dá odhadnout výrazem

$$\delta\Phi = \frac{\Lambda}{L},$$

kde Λ je vlnová délka akustické vlny. Zavádí se hodnotící bezrozměrný parametr vztahem $Q = 4\pi\theta_B/\delta\Phi$. Pro Braggův režim difrakce je $Q > 1$. Pro Ramanův-Nathův režim platí opačná nerovnost, $Q < 1$. Úhlový rozptyl směru \vec{K} akustické vlny je zde mnohem větší než Braggův úhel, a tedy může docházet k difrakci do vyšších difrakčních řádů.

V reálných aplikacích AO jevu, kde se využívá Braggova režimu, je třeba počítat s konečnou šířkou AO krystalu L a s konečnou šířkou optického svazku D . Díky konečné šířce je divergence svazků nenulová. V optimálním a nejefektivnějším případě je třeba dosáhnout toho, aby divergence obou vln byly stejné, $\delta\theta = \delta\Phi$, jak to ukazuje obr. 8.1c).

8.3 Ramanův-Nathův režim difrakce



Obr. 8.2: Ramanův-Nathův režim AO difrakce. Krystal je tenký a akustická vlna s vlnovou délkou Λ modifikuje index lomu podle zobrazené červené funkce. K difrakci dochází do mnoha módů označených šipkou a číslem difrakčního řádu.

O Ramanově-Nathově režimu AO difrakce hovoříme tehdy, pokud je krystal, ve kterém se šíří akustická vlna, tenký. V tomto případě nelze akustickou vlnu aproximovat rovinnou vlnou. Tento režim AO interakce ukazuje obr. 8.2. Vstupní optická vlna dopadá kolmo na AO krystal a vlivem difrakce dochází k odchýlení optického svazku do mnoha prostorových módů, které se označují číslem difrakčního řádu. Nultý řád odpovídá průchodu svazku bez vychýlení z původního směru.

Monochromatickou elektromagnetickou vlnu, která vstupuje do AO krystalu, si zapíšeme v exponenciálním tvaru

$$E = E_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}.$$

Tato vlna získá po průchodu krystalem tloušťky L různý fázový posun v různých místech. Posun závisí na příčné pozici x_3 ,

$$\phi(x_3) = k_0 \int_0^L [n_0 + \delta n \sin(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})] dx_2 = \phi_0 + \delta\phi \cos(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r}).$$

Pro zjednodušení zápisu jsme si zavedli dva parametry δn a $\delta\phi$. Modulaci indexu lomu spočítáme jako $\delta n = n_0^3 p u_0 / 2$, kde p značí příslušný fotoelastický koeficient a u_0 amplitudu materiálové deformace. Bez akustické vlny získá optická vlna v krystalu posun fáze $\phi_0 = k_0 n_0 L$, s akustickou vlnou získá navíc příspěvek modulovaný s amplitudou $\delta\phi = k_0 \delta n L$.

V rovině výstupní hrany krystalu lze optickou vlnu popsat pomocí komplexní amplitudy elektrického pole ve tvaru

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i\phi_0} e^{-i\omega t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i[\delta\phi \cos(\Omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})]}.$$

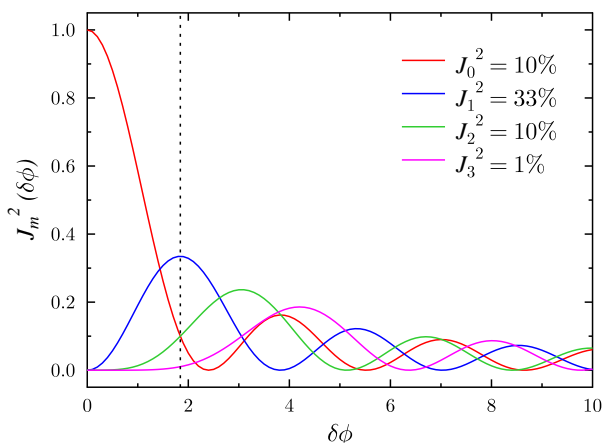
Konstantní posun fáze ϕ_0 nám pouze určuje naši volbu počátku. V našem výpočtu zvolíme počátek tak, aby $\phi_0 = 0$. Poslední člen, který obsahuje exponenciálu z goniometrické funkce, můžeme rozvést do Besselových funkcí. Takto získáme

$$E(\vec{r}, t) = E_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(\delta\phi) e^{-i(\omega+m\Omega)t} e^{i(\vec{k}+m\vec{K}) \cdot \vec{r}}.$$

Z tohoto zápisu výstupní optické vlny do rozvoje jasně plyne, že na výstupu z krystalu se objevují nové složky pole o frekvencích ω_m , které se budou šířit ve směrech \vec{k}_m , kde m je řád difrakce,

$$\omega_m = \omega + m\Omega, \quad \vec{k}_m = \vec{k} + m\vec{K}.$$

Intenzitní zastoupení těchto svazků je pro každý řád dáno hodnotou Besselovy funkce $J_m^2(\delta\phi)$. Pro ilustraci uvažujme konstrukci, kdy chceme do prvního difrakčního řádu odklonit co největší intenzitu. Jak ukazuje obr. 8.3, $J_1^2(\delta\phi)$ má maximální hodnotu 33 % a to pro $\delta\phi = 1.8421$. Intenzita světla se na výstupu rozdělí tak, že půjde 33 % do +1. a -1. řádu, 10 % do 0., +2. a -2. řádu. Zbývá čtyři procenta se rozdělí do dalších vyšších řádů.



Obr. 8.3: Závislost velikosti kvadrátu Besselových funkcí na argumentu $\delta\phi$. Svislá tečkovaná čára ukazuje maximum funkce J_1^2 a v rohu jsou zapsány hodnoty kvadrátů Besselových funkcí v tomto místě.

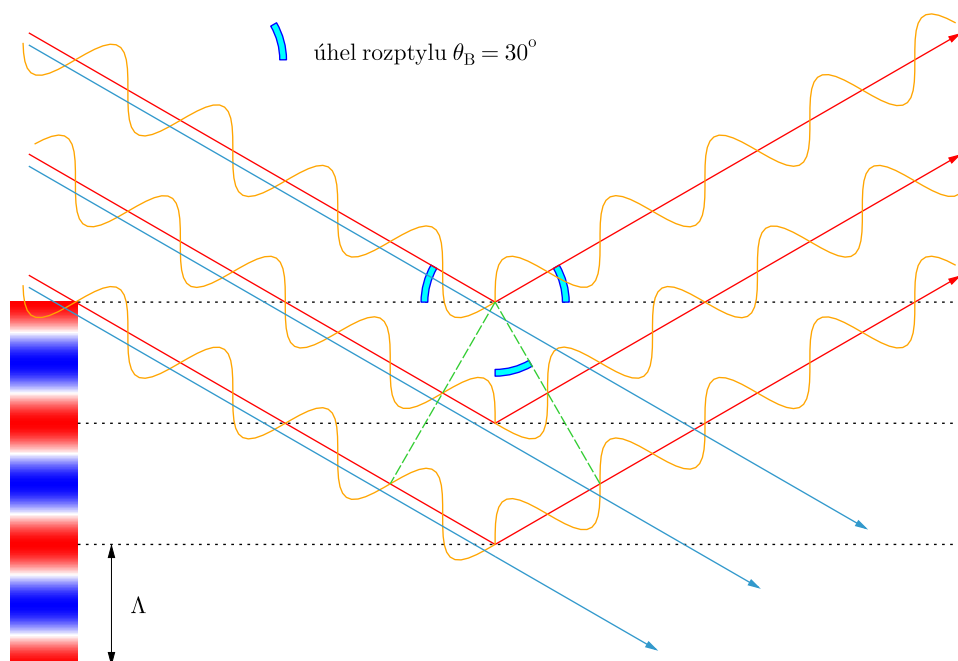
Jelikož je vlnový vektor akustické vlny mnohem menší než vlnový vektor světla, $|\vec{K}| \ll |\vec{k}|$, je úhel rozptylu jednotlivých řádů velmi malý, pouze několik stupňů. Pro lom z AO krystalu do vzduchu použijeme Snellův zákon a dojdeme k výrazu pro výstupní úhel jednotlivých řádů θ_m

$$|\vec{k}| \sin \theta_m = m|\vec{K}|, \quad \text{neboli} \quad \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_m = m \frac{2\pi}{\Lambda},$$

kde λ je vlnová délka světla ve vakuu. Pro malé úhly můžeme použít přibližný vztah $\sin \theta_m \approx \theta_m$. Takto dostaneme

$$\theta_m \approx m \frac{\lambda}{\Lambda}.$$

Vlnové vektory jednotlivých difraktovaných vln jsou přibližně stejné jako původní vlnový vektor optické vlny, $|\vec{k}_m| \approx |\vec{k}|$, jak ukazuje obr. 8.2. Jelikož je $\vec{k}_m = \vec{k} + \vec{K}$, musí mít vlnový vektor akustické vlny určitý směrový rozptyl. Nelze tedy použít rovinnou zvukovou vlnou, je lepší vlna kulová. Pomůže také, pokud není optická vlna rovinná, ale je fokusovaná.



Obr. 8.4: Braggův režim AO difrakce. Modré šipky ukazují průchod svazku bez difrakce, červeně jsou zakresleny difraktované paprsky, které musí do směru θ_B konstruktivně interferovat.

8.4 Braggův režim difrakce

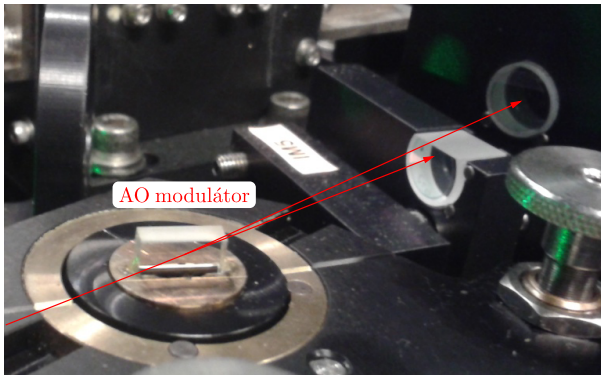
Pro Braggův režim musí být krystal dostatečně široký, a proto můžeme akustickou vlnu považovat za rovinnou. Difrakce světla na vzniklé fázové mřížce je analogická difrakci rentgenového záření na atomární mřížce krystalu. Protože vlnová délka akustické vlny je typicky několik mikrometrů, může akustická vlna efektivně difraktovat viditelné světlo. Díky analogii s rentgenovou difrakcí se tento proces nazývá Braggův režim difrakce a řídí se stejnými vztahy. Geometrické uspořádání je znázorněno na obr. 8.4. Bez akustické vlny prochází světlo přímočaře materiálem, jak to ukazují modré paprsky. Po zapnutí akustické vlny se část světla odráží na vzniklé mřížce. Aby došlo ke konstruktivní interferenci jednotlivých odrazů, musí být splněna difrakční podmínka. Směr difrakce je charakterizován Braggovým úhlem θ_B ,

$$2k \sin \theta_B = K \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin \theta_B = \frac{K}{2k}}, \quad (8.5)$$

$$2 \frac{2\pi}{\lambda} n \sin \theta_B = \frac{2\pi}{\Lambda} \quad \Rightarrow \quad \boxed{2\Lambda \sin \theta_B = \frac{\lambda}{n}}, \quad (8.6)$$

kde k , K a λ , Λ jsou velikosti vlnových vektorů a vlnové délky optické, respektive akustické vlny. Uvedené vztahy platí v tomto tvaru pouze pro izotropní prostředí s indexem lomu n .

Reálný AO modulátor založený na Braggově režimu difrakce, který je zobrazen na obr. 8.5, se používá jako AO přepínač v laserovém zesilovači RegA od firmy Coherent. Typický úhlový odklon svazku je pouze několik stupňů, jak je to v obrázku naznačeno červenými šipkami. Aby se odkloněný svazek vyhnul zrcadlu, které je blízko k AO modulátoru, je toto zrcadlo shora seříznuté. Tento AO přepínač slouží k zavedení laserového pulzu do dutiny zesilovače a po jeho zesílení se použije znovu k vyvedení pulzu z dutiny ven. Materiálem je SiO_2 a používá se frekvence akustické vlny 380 MHz.



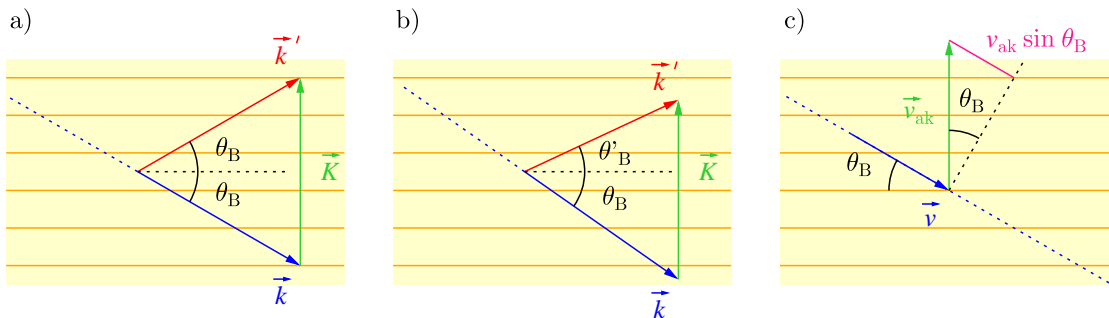
Obr. 8.5: AO modulátor v dutině laserového zesilovače RegA od firmy Coherent. Modulátor se používá jako ventil k navázání pulzu do laserové dutiny, kde je zesílen během několika oběhů. Stejným modulátorem je posléze zesílený laserový pulz opět z rezonátoru vypuštěn.

8.4.1 Braggova difrakce v anizotropním prostředí

V anizotropním prostředí musíme navíc započítat to, že difraktovaný svazek s vlnovým vektorem \vec{k}' a původní svazek s vlnovým vektorem \vec{k} mají ve svých směrech různé indexy lomu. Tedy úhel sklonu k vlnoploše akustické vlny je různý pro dopadající svazek (θ_B) a difraktovaný svazek (θ'_B). Pro difrakční úhel platí obecnější vztah,

$$2k \sin \theta_B = K - \frac{k'^2 - k^2}{K}.$$

Protože nás při této geometrické konstrukci zajímá velikost vlnového vektoru, je v tomto případě výhodnější používat pro popis anizotropního prostředí dvouvrstvou indexovou plochu. Geometrie vektorů je zakreslena na obr. 8.6a) pro izotropní materiál a na obr. 8.6b) pro anizotropní materiál.



Obr. 8.6: Zákon zachování vlnového vektoru pro Braggův režim difrakce a) v izotropním prostředí, b) v anizotropním prostředí. c) Výpočet Braggovy difrakce pomocí Dopplerova jevu. Světlo s rychlostí \vec{v} se odráží od čela akustické vlny, která se šíří rychlostí \vec{v}_{ak}

Př. 8.1: Úhel AO difrakce ve vodě:

Uvažujme typickou vlnovou délku optického záření z viditelné oblasti spektra, $\lambda = 500$ nm. Parametry akustické vlny ve vodě jsou následující: frekvence $f_{ak} = 500$ MHz, rychlost šíření $v_{ak} = 1.5$ km/s. Z rychlosti a frekvence akustické vlny můžeme určit její vlnovou délku Λ , úhlovou frekvenci Ω a velikost vlnového vektoru K s využitím vztahů

$$\Lambda = v_{ak}/f_{ak}, \quad \Omega = 2\pi f_{ak}, \quad K = \frac{\Omega}{v_{ak}} = \frac{2\pi f_{ak}}{v_{ak}}.$$

Dostaneme vlnovou délku $\Lambda = 3 \mu\text{m}$. Po dosazení do vzorce (8.6), kde dosadíme index lomu vody $n = 1.33$, získáme hodnotu difrakčního úhlu $\theta_B = 3.6^\circ$.

8.4.2 Zákony zachování při difrakci

Stejně tak jako pro jiné optické jevy platí i zde zákony zachování energie a hybnosti,

$$\hbar\omega' = \hbar\omega \pm \hbar\Omega, \quad \vec{k}' = \vec{k} \pm \vec{K}.$$

Nečárkované veličiny popisují vstupní optickou vlnu a čárkované veličiny odpovídají hodnotám po difrakci. Na elementární úrovni spolu interagují foton optického záření s fononem (vibračním módem) akustické vlny. Znaménko plus odpovídá tomu, že při difrakci zanikl jeden akustický fonon, mínus znamená, že jeden fonon vznikl. Vektorové vztahy pro vlnové vektory znázorňuje obr. 8.6.

8.4.3 Popis difrakce pomocí Dopplerova jevu

Změnu kruhové frekvence procházejícího světla ω můžeme spočítat také pomocí Dopplerova jevu. Dopplerův jev popisuje změnu frekvence zdroje, který se pohybuje vůči pozorovateli určitou rychlostí, nebo může popisovat odraz vlny na pohybujícím se předmětu. To se dá aplikovat na náš případ, kdy lze předpokládat, že se difraktovaná vlna odráží na čele pohybující se akustické vlny. Geometrie tohoto jevu je zakreslena na obr. 8.6c). Pro změnu frekvence u Dopplerova jevu platí vztah

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = 2 \frac{v_{\text{ak}} \sin \theta_{\text{B}}}{v}, \quad \text{kde } v = \frac{c}{n}.$$

Změna frekvence $\Delta\omega$ je dána poměrem rychlosti akustické vlny v_{ak} a rychlosti v světla v materiálu s indexem lomu n . Číselný faktor 2 vyplývá z toho, že při odrazu se otočí směr normálové složky rychlosti \vec{v} na opačný. Úpravou a po dosazení Braggovy rovnice (8.6) dokážeme, že se při difrakci kruhová frekvence záření změní o hodnotu

$$\Delta\omega = \omega' - \omega = 2 \frac{\omega}{v} \sin \theta_{\text{B}} v_{\text{ak}} = 2k \sin \theta_{\text{B}} v_{\text{ak}} = K v_{\text{ak}} = \Omega.$$

Dostali jsme očekávaný výsledek, že se kruhová frekvence světla změní o frekvenci akustické vlny (fononu).

8.4.4 Účinnost Braggovy difrakce

Oproti Ramanovu-Nathovu režimu lze v Braggově režimu měnit poměr intenzity prošlé a difraktované vlny. Účinnost difrakce η definujeme jako podíl intenzity difraktovaného svazku I_{dif} a intenzity dopadajícího svazku I_{in} . Pomocí metody vázaných vln je možné spočítat účinnost difrakce, ale toto odvození je nad rámec tohoto textu. Proto si pouze zapíšeme výsledek

$$\eta = \frac{I_{\text{dif}}}{I_{\text{in}}} = \sin^2 \kappa L.$$

Zde L označuje délku AO materiálu, kterým prochází svazek. Při průchodu světla se energie přelévá do difraktovaného svazku a zpět se sinovou závislostí na prostorové souřadnici. κ je vazebná konstanta a její hodnota je v izotropním prostředí s indexem lomu n rovna

$$\kappa = \frac{\omega}{4c} n^3 p_{\text{ef}} u_0.$$

Hodnota vazebné konstanty odpovídá prostorové frekvenci, s jakou se přelévá energie mezi procházejícím a difraktovaným svazkem. V konstantě κ se skrývá vlnový vektor světla, neboť platí $k = \omega/c$. Zbylé členy představují efektivní amplitudu modulace indexu lomu $n^3 p_{\text{ef}} u_0/4$, se kterou jsme se již setkali ve vztazích (8.3) a (8.4). Parametry p_{ef} a u_0 označují efektivní hodnotu fotoelastického tenzoru pro danou geometrii a amplitudu akustické deformace.

Vezmeme do úvahy vztah pro výpočet intenzity akustické vlny,

$$I_{\text{ak}} = \frac{1}{2} \rho v_{\text{ak}}^3 u_0^2,$$

kde ρ značí hustotu materiálu a v_{ak} fázovou rychlost. Pokud chceme vyjádřit závislost účinnosti difrakce na intenzitě akustické vlny, můžeme tyto vztahy dosadit a vyloučit neznámou u_0 . Ta se ale vyskytuje v obou vztazích v různé mocnině, a proto je výhodné si zavést materiálovou konstantu, která difrakci popisuje,

$$M = \frac{n^6 p_{\text{ef}}^2}{\rho v_{\text{ak}}^3}.$$

Účinnost difrakce pak můžeme zapsat jako

$$\eta = \sin^2 \left(\frac{\pi L}{\sqrt{2} \lambda \cos \theta_{\text{B}}} \sqrt{M I_{\text{ak}}} \right). \quad (8.7)$$

Protože Braggův úhel θ_B je velmi malý, často se bere $\cos \theta_B \approx 1$. Hodnoty koeficientu M jsou pro různé materiály tabelizovány, často se udává hodnota vztahovaná vůči vodě (M/M_{H_2O}).

Jak silnou akustickou vlnu budeme potřebovat na 100% účinnost difrakce? Potřebujeme zajistit, aby argument $\sin u$ byl $\pi/2$, neboť $\sin^2(\pi/2) = 1$. Jednoduchou úpravou dostaneme, že pro maximální difrakci potřebujeme akustickou intenzitu

$$I_{ak}^{max} = \frac{\lambda^2 \cos^2 \theta_B}{2ML^2}.$$

V praxi si musíme dát pozor, aby použitý krystal vydržel takový výkon akustické vlny.

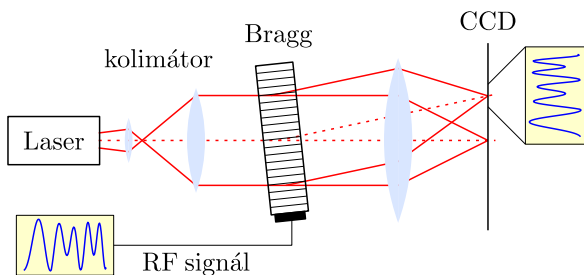
Př. 8.2: Účinnost AO difrakce ve vodě:

Pokud budeme chtít spočítat účinnost difrakce na akustické vlně ve vodě, musíme dosadit do (8.7) konstanty vody: $n = 1.33$, $p_{ef} = 0.31$, $v_{ak} = 1.5$ km/s, $\rho = 1000$ kg/m³. Pokud použijeme svazek červeného He-Ne laseru s vlnovou délkou $\lambda = 632.8$ nm, potom bude účinnost difrakce rovna $\eta = \sin^2(1.4 L \sqrt{I_{ak}})$. V závislosti na délce prostředí a intenzitě akustické vlny můžeme měnit účinnost difrakce od nuly až do 100 %.

Př. 8.3: Účinnost AO difrakce v krystalu PbMoO₄:

Mějme krystal PbMoO₄ délky $L = 1$ mm, který je použit pro difrakci optického svazku o průřezu 1 mm². Tento materiál má relativní difrakční koeficient $M/M_{H_2O} = 0.22$. Pokud má akustická vlna intenzitu 1 W, potom dosazením do uvedených vztahů získáme účinnost difrakce 40 %.

8.5 Aplikace AO jevu



Obr. 8.7: Schéma akustického spektrálního analyzátoru, který díky AO jevu v Braggově režimu promítne na stínítko spektrum akustického signálu. Akustický signál je buzen na piezokrystalu (černý obdélníček) elektrickým RF signálem v řádu desítek až stovek MHz.

Braggova režimu akustooptické difrakce se využívá v mnoha optoelektronických zařízeních. Uvedme si následující příklady:

- 1. Spektrální analyzátor:** využívá toho, že v závislosti na frekvenci akustické vlny je vstupní svazek odkloněn do různých úhlů. Na stínítku umístěném v ohniskové rovině čočky tak lze vidět spektrum akustické vlny, jak to ukazuje obr. 8.7.
- 2. Intenzitní modulátor:** využívá závislost účinnosti difrakce na intenzitě akustické vlny. Změnou akustického výkonu lze efektivně přelévát intenzitu procházejícího svazku do difraktovaného svazku.
- 3. Frekvenční modulátor:** díky zákonu zachování energie (viz též Dopplerův jev) se mění frekvence difraktovaného záření podle vztahu $\omega' = \omega \pm \Omega$. Na vysokofrekvenční optický signál se dá namodulovat nízkofrekvenční akustický signál.
- 4. Laditelný spektrální filtr:** pokud se ve směru difraktovaného módu umístí úzká štěrbina, propustí jen část spektra, která vyhovuje difrakční podmínce. Propuštěné spektrum lze nastavovat v závislosti na parametrech akustické vlny.
- 5. AO přepínač:** anglicky se označuje jako AO deflector. AO krystal se používá v Braggově režimu na přepínání optického svazku z jednoho prostorového módu do druhého. Využívá se to především v laserových systémech pro přepínání cest optického svazku. Používá se také na řízené zvýšení ztrát v rezonátoru Q-spínaného laseru nebo laserového zesilovače.

8.5.1 Technické parametry AO intenzitního modulátoru

Směr difrakce v Braggově režimu si díky (8.6) můžeme zapsat jako

$$\sin \theta_B = \frac{\lambda/n}{2\Lambda} = \frac{\lambda/n}{2v_{ak}} f_{ak}. \quad (8.8)$$

Se zvyšováním frekvence stoupá úhel odklonu difraktovaného svazku. Typický odklon je v řádu několika stupňů, můžeme tedy nahradit funkci sinus pouze argumentem a říci, že úhel difrakce θ_B je úměrný akustické frekvenci f_{ak} . Maximální odklon by nastal pro $\sin \theta_B = 1$, což definuje maximální frekvenci akustické vlny,

$$f_{ak}^{max} = \frac{2v_{ak}}{\lambda/n}.$$

Dosadíme-li typické hodnoty, dostaneme maximální frekvenci řádu 10 GHz.

Jedním z důležitých parametrů AO zařízení je *šířka pásma*. Pokud by interagovaly rovinné vlny, byla by Braggova difrakční podmínka ostrá, zařízení by fungovalo jen pro jednu frekvenci f_0 a šířka pásma by byla nulová, $\Delta f_{ak} = 0$. Reálně jsou ale obě vlny omezeny, což rozšíří šířku pásma na konečnou hodnotu. Provedeme diferenciál (8.8) a získáme

$$\cos \theta_B \Delta \theta_B = \frac{\lambda/n}{2v_{ak}} \Delta f_{ak} \quad \Rightarrow \quad \Delta f_{ak} = \frac{2v_{ak} n \cos \theta_B}{\lambda} \Delta \theta_B. \quad (8.9)$$

Celkový rozptyl Braggova úhlu je součtem úhlové šířky optického svazku $\delta\theta$ a úhlové šířky $\delta\Phi$ akustické vlny v daném materiálu,

$$\Delta \theta_B = \delta\theta + \delta\Phi.$$

Jak jsme si uváděli, je optimální, aby byly úhlové šířky optické a akustické vlny stejné. Použijeme vztah pro úhel optické vlny, který je pro gassovský svazek s šířkou sedla w_0 roven

$$\delta\theta = 2 \frac{\lambda/n}{\pi w_0}.$$

Budeme uvažovat, že celková variance Braggova úhlu je dvojnásobek $\delta\theta$. Dále pro malý úhel difrakce nahradíme $\cos \theta_B = 1$. Potom dostaneme

$$\Delta f_{ak} = \frac{8v_{ak}}{\pi w_0} \simeq \frac{v_{ak}}{w_0} = \frac{1}{\tau}.$$

Frekvenční šířka pásma je tedy daná převrácenou hodnotou času průchodu akustické vlny přes šířku optického svazku τ . Pro zvětšení šířky pásma AO modulátoru je tedy potřeba zúžit, tj. fokusovat, optický svazek a zkrátit dobu průchodu akustické vlny přes optický svazek. Je tedy třeba, aby τ bylo malé.

8.5.2 Technické parametry AO spektrálního analyzátoru

U tohoto AO prvku je třeba maximalizovat rozlišení akustických frekvencí. Maximalizujeme parametr N , který je dán poměrem šířky $\Delta\theta_B$, do které je optický svazek rozmítnut, a velikosti stopy, která by odpovídala monochromatickému akustickému signálu $\delta\theta$,

$$N = \frac{\Delta\theta_B}{\delta\theta} = \frac{\Delta f_{ak} \lambda/n}{2v_{ak} \cos \theta_B} \frac{\pi w_0}{2\lambda/n} = \frac{\pi w_0 \Delta f_{ak}}{4v_{ak} \cos \theta_B},$$

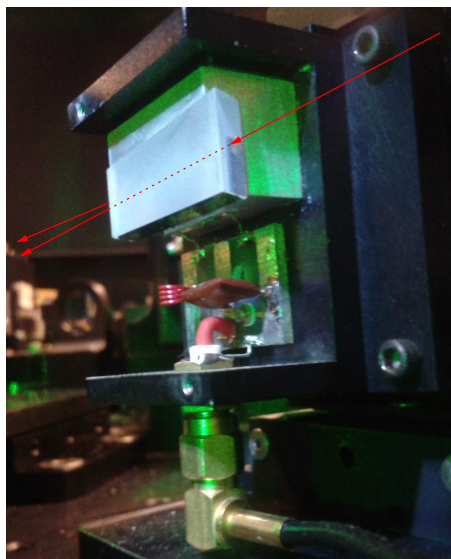
$$N \simeq \Delta f_{ak} \frac{w_0}{v_{ak}} = \Delta f_{ak} \tau.$$

Pro danou šířku pásma je pro zvýšení rozlišení potřeba τ velké. To znamená, že je třeba široký optický i akustický svazek. Je to tedy zcela opačná podmínka proti předešlému případu.

8.5.3 AO přepínač

AO přepínače jsou typickou součástí femtosekundových pulzních laserů, jak jsme již diskutovali na str. 116. Na obr. 8.5 je zakreslena konstrukce AO přepínače v laserovém zesilovači RegA. V tomto zařízení se ale

používá ještě jeden AO přepínač, který se označuje jako Q-spínač (spínač kvality rezonátoru). Ten je zachycen na obr. 8.8, AO krystal je vyroben z materiálu TeO_2 . Pokud je na krystal Q-spínače puštěn akustický signál, dochází k rozptylu procházejícího světla, čímž se zvýší ztráty v dutině a nedojde k rozsvícení stimulované emise laserového světla v rezonátoru. Po vypnutí Q-spínače se ztráty v rezonátoru zesilovače sníží a dojde k zesílení přivedeného pulzu o tři řády až na hodnoty okolo $3 \mu\text{J}$ na pulz délky 160 fs.



Obr. 8.8: AO modulátor v dutině laserového zesilovače RegA od firmy Coherent. Modulátor se používá jako Q-spínač, který způsobí ztráty v dutině rezonátoru. Až po otevření Q-spínače se může laserový zesilovač rozsvítit. AO krystal je umístěn na piezoelektrický krystal, který vytváří akustickou vlnu díky přiloženému elektrickému signálu s frekvencí 80 MHz. Pod krystalem je vidět přívodní elektrický kabel a cívka s kondenzátorem pro správné elektrické přizpůsobení.

8.6 Shrnutí

- Akustooptický (AO) jev patří do třídy fotoelastických jevů. Akustická vlna vytváří v materiálu periodickou změnu indexu lomu. Procházející světlo je difraktované takto vytvořenou mřížkou.
- Podle geometrie optického a akustického svazku rozlišujeme Braggův režim a Ramanův-Nathův režim difrakce. Tyto režimy se liší počtem difrakčních řádů a účinností.
- K AO difrakci může docházet v pevných látkách nebo v kapalinách.
- AO jev se využívá pro odklon směru šíření optického svazku, který se dá velmi rychle a časově přesně spínat. Tyto prvky se používají v laserových systémech s krátkými pulzy.
- AO jevy se dále používají pro spektrální analýzu nebo filtraci a frekvenční nebo intenzitní modulaci.

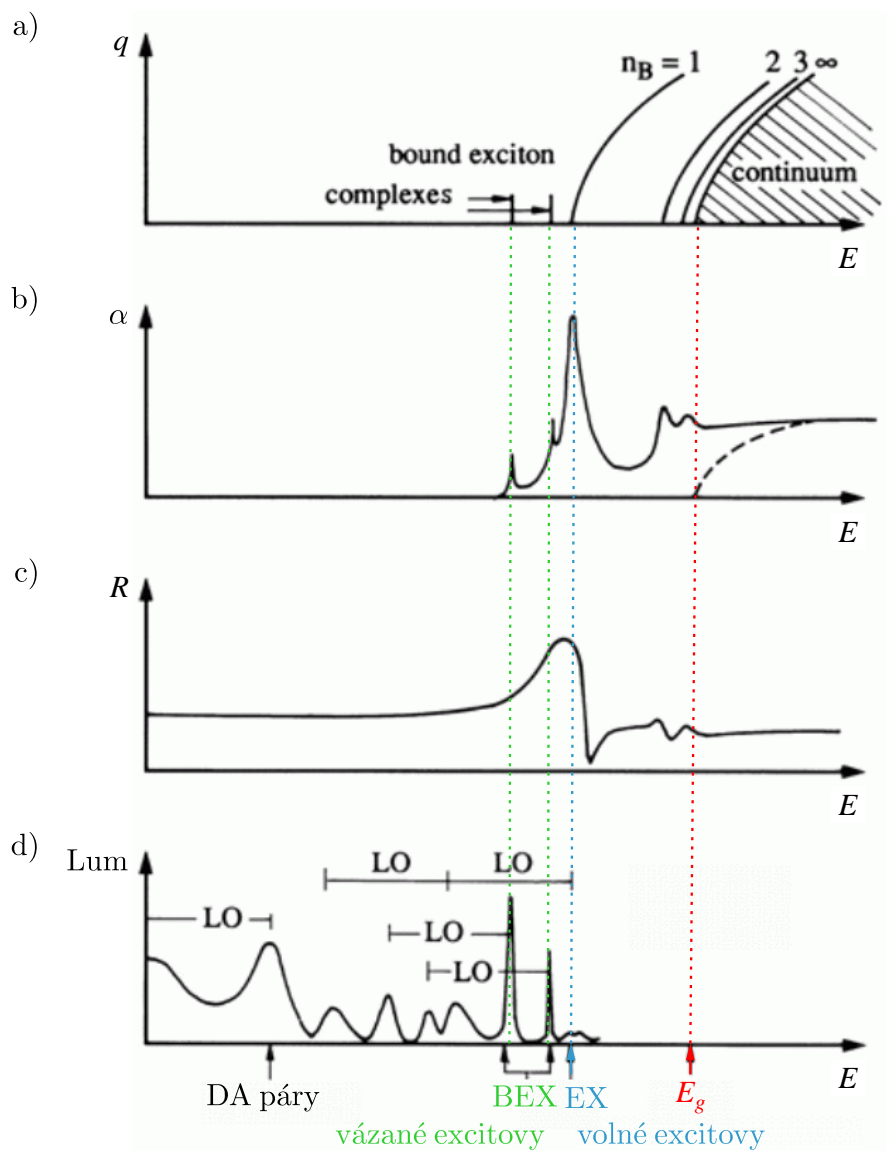
8.7 Příklady

Př. 8.4: Parametr difrakce: Ukažte, že pro bezrozměrný parametr Q , který určuje režim AO difrakce, se dá odvodit přibližný vztah

$$Q = \frac{2\pi\lambda L}{n\Lambda^2}.$$

Nápověda: Použijte definici parametru Q a za Braggův úhel dosad'te vztah (8.6).

Př. 8.5: AO přepínač: AO přepínač předvedený na obr. 8.5 pracuje v pulzním režimu. Vzdálenost mezi pulzy je 13 ns. Aby byl v Braggově režimu ovlivněn pouze jeden pulz, zapíná se akustický signál 10 ns před příchodem optického pulzu. Stihne se v AO přepínači vytvořit akustická vlna přes celou šířku svazku? Svazek je fokusován na šířku 55 μm a rychlost zvuku v materiálu SiO_2 je 4.2 km/s.



Přehled optických vlastností materiálu: a) disperzní relace pro elektrony, b) spektrum absorpce c) reflexe, d) luminescence. Červeně je vyznačena šířka zakázaného pásu E_g , modře základní volný exciton EX, zeleně vázané excitovy BEX, černě donor-akceptorové (DA) páry. Převzato z [12].

Kapitola 9

Mezipásové přechody

Obsah kapitoly

9.1	Popis pole pomocí potenciálu	123
9.2	Mezipásové přechody	124
9.2.1	Látka v jedoelektronovém přiblížení	124
9.2.2	Interakční hamiltonián	125
9.2.3	Řešení Schrödingerovy rovnice pomocí poruchového počtu	125
9.2.4	Fermiho zlaté pravidlo	127
9.2.5	Přechody z valenčního do vodivostního pásu	127
9.2.6	Energetická bilance	129
9.3	Zjednodušený výpočet sdružené hustoty stavů	130
	Př. 1: Sdružená hustota stavů pro parabolické pásy	131
9.4	Absorpční pásy a kritické body	132
9.4.1	Absorpční pás germánia	133
9.5	Další modifikace mezipásových přechodů	134
9.5.1	Dovolené a zakázané přechody	134
9.5.2	Přímé a nepřímé přechody	135
9.5.3	Vliv excitonů	136
9.6	Shrnutí	137

9.1 Popis pole pomocí potenciálu

Elektrické a magnetické pole se dá zavést pomocí skalárního a vektorového potenciálu. Pro harmonické elektromagnetické pole nám pro popis stačí *vektorový potenciál* $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Elektrické a magnetické pole můžeme získat z definičních vztahů

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (9.1)$$

Vektorový potenciál není přímo měřitelný, a proto jeho zavedení není jednoznačné. Elektrické a magnetické pole se počítá z derivace vektorového potenciálu. Pro jeho jednoznačnost se volí dodatečná podmínka, která se označuje jako tzv. cejchování. Obvykle se volí $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, což budeme používat i v tomto textu.

Pokud popisujeme harmonické pole s frekvencí ω a vlnovým vektorem $\vec{k} = (n + i\kappa)\frac{\omega}{c}\vec{s}$, potom bude mít i vektorový potenciál harmonickou závislost, $\vec{A}(\vec{r}, t) = A_0 \vec{a} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$. A_0 je amplituda vektorového potenciálu a \vec{a} je jeho jednotkový směrový vektor. Z definičních vztahů dostaneme elektrické a magnetické pole:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= i\omega A_0 \vec{a} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} &= \frac{ik}{\mu_0} A_0 (\vec{s} \times \vec{a}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \end{aligned}$$

Bude nás zajímat šíření energie, které popisuje Poyntingův vektor. Při výpočtu musíme započítat reálnou část komplexního pole a ze středování přes periodu pole vyjde faktor jedna polovina.

$$\langle \vec{S} \rangle = \langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle = \frac{\omega^2 A_0^2 n}{2\mu_0 c} e^{-\alpha \vec{s} \cdot \vec{r}} \vec{s}, \quad \text{kde} \quad \alpha = \frac{2\omega \varkappa}{c}. \quad (9.2)$$

9.2 Mezipásové přechody

V této kapitole se pokusíme popsat mezipásové optické přechody elektronů v pevné látce, ke kterým dochází při absorpci kvanta elektromagnetického záření. Vystačíme zde se semiklasickým popisem interakce látky s elektromagnetickým polem. Toto pole s frekvencí ω popíšeme klasicky, ale pokud dochází k absorpci, předává pole kvazičásticím v pevné látce energii po kvantech $\hbar\omega$.

Pro popis látky budeme používat její pásovou strukturu, kde předpokládáme znalosti fyziky pevných látek v rozsahu [1]. Obecné odvození mezipásové absorpce by bylo možné provést pro libovolný krystal polovodiče, dielektrika i kovu. Odvozování je ale nejnáze pochopitelné pro polovodiče, kde je pásová struktura relativně jednoduchá. Budeme se tedy při výkladu absorpce věnovat polovodičům, ale odvozené výsledky se dají použít i pro jiné materiály.

Polovodič má zakázaný pás šířky E_g , který odděluje valenční energetický pás E_v zaplněný elektrony a vodivostní pás E_c , který je prázdný. Vliv mezipásových přechodů na optické vlastnosti polovodiče a jejich provázanost jsou schématicky znázorněny na úvodním obrázku této kapitoly na str. 122.

9.2.1 Látka v jednoelektronovém přiblížení

Jedním z nejjednodušších kvantových způsobů popisu látky je jednoelektronové přiblížení. Předpokládáme, že známe periodický potenciál $V(\vec{r})$, který je v látce vytvořen systémem jader a elektronů. Zkoumáme pohyb jednoho vybraného elektronu v tomto periodickém potenciálu, což se provede řešením Schrödingerovy rovnice s následujícím hamiltoniánem

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\vec{r}).$$

Potenciál $V(\vec{r})$ musí být v periodickém krystalu periodický s periodou mřížky. Pro jednoduchost budeme předpokládat kubickou mřížku s periodou a , která se pohybuje v rozsahu několika angstromů (2-3 Å). Kinetická energie je v hamiltoniánu spočítaná pomocí operátoru hybnosti, $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$.

Švýcarský fyzik Felix Bloch odvodil jako první výraz pro vlnovou funkci elektronu v periodickém potenciálu.

Blochův teorém: V dokonalém periodickém potenciálu krystalu lze napsat řešení Schrödingerovy rovnice ve tvaru rovinné vlny $e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$ vynásobené periodickou funkcí $u_{n,\vec{q}}(\vec{r})$, která má periodu shodnou s periodou krystalu.

$$\boxed{\psi_{n,\vec{q}}(\vec{r}) = u_{n,\vec{q}}(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}.} \quad (9.3)$$

Tento zápis vlnové funkce elektronu se označuje jako *Blochova vlnová funkce*. V této funkci vystupuje vlnový vektor¹ elektronu \vec{q} , který určuje kvaziimpuls elektronu, $\hbar\vec{q}$. Index n značí index energetického pásu s disperzní závislostí $E_n(\vec{q})$.

Energetické pásy jsou řešením stacionární Schrödingerovy rovnice, která má tvar

$$\hat{\mathcal{H}}_0 \psi_{n,\vec{q}}(\vec{r}) = E_n(\vec{q}) \psi_{n,\vec{q}}(\vec{r}).$$

Abychom se vyhnuli komplikovanému značení indexu pásu a vlnového vektoru, použijeme zkrácené notace do jednoho písmene: $n, \vec{q} \rightarrow n$ a $m, \vec{q}' \rightarrow m$.

Díky tomu, že hamiltonián $\hat{\mathcal{H}}_0$ nezávisí na čase, je řešení časové Schrödingerovy rovnice triviální,

$$i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}_0 \psi_n(\vec{r}, t) = E_n \psi_n(\vec{r}, t).$$

¹ Vlnový vektor elektronu se zde značí \vec{q} . V literatuře se obvykle používá symbol \vec{k} , ale my jsme ho již použili pro světlo.

Ve vlnové funkci elektronu můžeme separovat časovou a prostorovou závislost,

$$\psi_n(\vec{r}, t) = \psi_n(\vec{r}) e^{-i(E_n/\hbar)t} = \psi_n(\vec{r}) e^{-i\omega_n t}.$$

Přechod mezi energií a kruhovou frekvencí je samozřejmě svázán s Planckovou konstantou $E_n = \hbar\omega_n$.

9.2.2 Interakční hamiltonián

Elektromagnetické pole popíšeme vektorovým potenciálem $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Interakce látky s tímto polem se dá započítat tak, že nahradíme operátor hybnosti: $\hat{p} \rightarrow \hat{p} - e\vec{A}$. Pro jednoduchost nebudeme závislost \vec{A} na (\vec{r}, t) stále explicitně uvádět. Hamiltonián upravíme následovně

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2m} (\hat{p} - e\vec{A})^2 + V(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2m} (\hat{p}^2 + e^2 A^2 - e(\hat{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \hat{p})) + V(\vec{r}). \end{aligned}$$

Člen $e^2 A^2$ lze pro slabá pole zanedbat. Operátor v závorce působící na vlnovou funkci se dá zjednodušit

$$(\hat{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \hat{p})\Psi = -i\hbar(\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla)\Psi = -2i\hbar\vec{A} \cdot \nabla\Psi.$$

Při odvození musíme vzít v úvahu, že derivace v operátoru ∇ působí doprava jak na vlnovou funkci, tak na vektorový potenciál. Můžeme ale použít vhodnou volbu vektorového potenciálu, kde $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Výsledný hamiltonián bude mít tvar

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) + \frac{ie\hbar}{m} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \nabla = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1, \\ \hat{\mathcal{H}}_1 &= \frac{ie\hbar}{m} \vec{A} \cdot \nabla = -\frac{e}{m} \vec{A} \cdot \hat{p}. \end{aligned}$$

Hamiltonián jsme tedy rozdělili na stacionární část $\hat{\mathcal{H}}_0$ a první řád poruchového počtu $\hat{\mathcal{H}}_1$. Tento člen hamiltoniánu závisí na čase díky časové závislosti vektorového potenciálu $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Díky tomu může indukovat přechody mezi stacionárními hladinami, které jsou vlastními stavy hamiltoniánu $\hat{\mathcal{H}}_0$.

Vlnovou funkci $\Psi(\vec{r}, t)$ můžeme rozepsat do báze $\{\psi_i(\vec{r}, t)\}$ vlastních stavů $\hat{\mathcal{H}}_0$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_i b_i(t) \psi_i(\vec{r}, t) = \sum_i b_i(t) \psi_i(\vec{r}) e^{-i\omega_i t} = \sum_i b_i(t) u_i(\vec{r}) e^{i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega_i t)}.$$

Index i v sumě znamená sčítání přes čísla všech energetických pásů a dále sčítání přes všechny povolené vlnové vektory elektronu \vec{q} . Bázové vlnové funkce jsme si zapsali v Blochově tvaru (9.3) s periodickou částí u_i .

9.2.3 Řešení Schrödingerovy rovnice pomocí poruchového počtu

Diferenciální Schrödingerovu rovnici budeme řešit s počáteční podmínkou v čase $t = 0$: $b_i(0) = \delta_{in}$, kde n označuje číslo hladiny základního stavu. Pro $t > 0$ značí tedy hodnota kvadrátu $|b_n(t)|^2$ pravděpodobnost, že systém zůstal v základním stavu. Pravděpodobnost přechodu systému ze základního stavu na m -tou hladinu v čase t ($n \rightarrow m$) spočítáme jako $P_{mn}(t) = |b_m(t)|^2$.

Dosadíme-li vyjádření vlnové funkce ve vlastních stavech hamiltoniánu do časové Schrödingerovy rovnice, dostaneme

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_i b_i(t) \psi_i(\vec{r}, t) = \hat{\mathcal{H}}_0 \sum_i b_i(t) \psi_i(\vec{r}, t) + \hat{\mathcal{H}}_1 \sum_i b_i(t) \psi_i(\vec{r}, t).$$

Následující postup řešení Schrödingerovy rovnice má tři kroky:

- 1) od rovnice odečteme stacionární řešení,
- 2) vynásobíme zleva komplexně sdruženou vlastní vlnovou funkcí $\psi_m^*(\vec{r}, t)$,
- 3) přeintegrujeme přes celý objem krystalu ($\int dV$).

Takto získáme upravenou rovnici

$$i\hbar \frac{\partial b_m(t)}{\partial t} = \sum_i b_i(t) \hat{\mathcal{H}}_1^{mi}(t) e^{i\omega_{mi} t}, \quad \text{kde} \quad \omega_{mi} = \omega_m - \omega_i.$$

Maticový element poruchového hamiltoniánu má tvar

$$\hat{\mathcal{H}}_1^{mi} = \int \psi_m^*(\vec{r}) \hat{\mathcal{H}}_1(\vec{r}, t) \psi_i(\vec{r}) dV.$$

Budeme počítat v první poruchové aproximaci pravděpodobnost $P_{mn}(t)$, že dojde k přechodu ze základního stavu n do excitovaného stavu m ,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial b_m(t)}{\partial t} &= \hat{\mathcal{H}}_1^{mn}(t) e^{i\omega_{mn}t} \\ \Rightarrow b_m(t) &= \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{\mathcal{H}}_1^{mn}(t') e^{i\omega_{mn}t'} dt', \\ P_{mn}(t) &= \frac{4\pi^2}{\hbar^2} \left| \hat{\mathcal{H}}_1^{mn}(\omega_{mn}) \right|^2. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Výraz $\hat{\mathcal{H}}_1^{mn}(\omega_{mn})$ představuje Fourierovu složku maticového elementu poruchového hamiltoniánu s frekvencí ω_{mn} . Výpočet maticového elementu provedeme nyní podrobněji

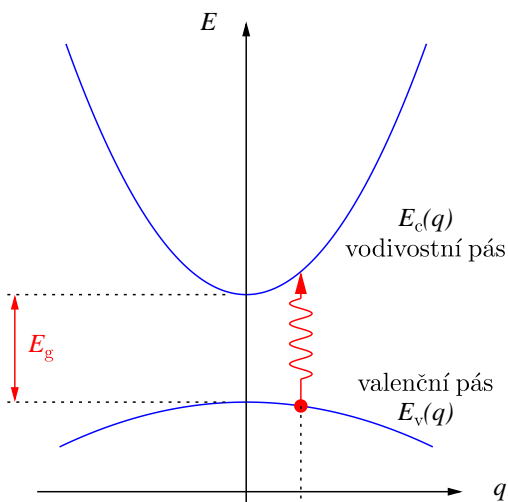
$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_1^{mn}(t) &= \int \psi_m^*(\vec{r}) \frac{i e \hbar}{m} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \nabla \psi_n(\vec{r}) dV \\ &= \frac{i e \hbar}{2m} A_0 \vec{a} \cdot \int u_m^*(\vec{r}) e^{-i\vec{q}' \cdot \vec{r}} \left[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \right] \nabla (u_n(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}) dV \\ &= \frac{i e \hbar}{2m} A_0 \vec{a} \cdot \int u_m^*(\vec{r}) e^{i(\vec{q} + \vec{k} - \vec{q}') \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} (\nabla u_n(\vec{r}) + u_n(\vec{r}) i\vec{q}) dV. \end{aligned}$$

Vektorový potenciál jsme si zde zapsali pomocí amplitudy A_0 a jednotkového směrového vektoru \vec{a} . Ve výrazu $\left[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \right]$ představuje první člen absorpci fotonu a přechod elektronu do excitovaného stavu. Druhý člen popisuje emisi fotonu, ale protože je elektron v základním stavu, nemůže žádný foton emitovat.

Člen $u_n(\vec{r}) i\vec{q}$ můžeme zanedbat, pokud je nenulový člen $\nabla u_n(\vec{r})$. Toto zjednodušení se označuje jako *dipólová aproximace*. Nyní provedme analýzu vlnových vektorů, které musí splňovat zákon zachování hybnosti:

$$\vec{q}' = \vec{q} + \vec{k} = \vec{q} + \frac{\omega n}{c} \vec{s} = \vec{q} + \frac{2\pi n}{\lambda} \vec{s}.$$

Protože všechny možné stavy elektronu jsou popsány vlnovými vektory \vec{q} , které pokrývají celou první Brillouinovu zónu (1.BZ), musí pro jejich velikost platit $q \leq 2\pi/a$. Vlnová délka světla ve viditelné oblasti (např. $\lambda \approx 500$ nm) je mnohem větší než mřížková konstanta (typicky $a \approx 0.3$ nm). Proto je $q \gg k$ a $\vec{q}' \approx \vec{q}$. To znamená, že mezipásové optické přechody jsou vertikální v BZ, jak to ukazuje obr. 9.1. Při přechodu elektronu mezi pásy se nemění vlnový vektor elektronového stavu.



Obr. 9.1: Zjednodušené pásové schéma polovodiče. Uvažujeme jednoduchý parabolický vodivostní i valenční pás. Ty odděluje zakázaný pás šířky E_g . Šipka znázorňuje přechod fotoexcitovaného elektronu mezi pásy, kdy se zachovává vlnový vektor q .

9.2.4 Fermiho zlaté pravidlo

Vypočítáme si velikost maticového elementu interakčního hamiltoniánu v dipólové aproximaci.

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_1^{mn}(t) &= \frac{ve\hbar}{2m} A_0 \vec{a} \cdot \int u_m^*(\vec{r}) e^{-i\omega t} \nabla u_n(\vec{r}) dV \\ &= -\frac{eA_0}{2m} e^{-i\omega t} \vec{a} \cdot \vec{p}_{mn}(\vec{q}), \\ \text{kde} \quad \vec{p}_{mn}(\vec{q}) &= -i\hbar \int u_m^*(\vec{r}) \nabla u_n(\vec{r}) dV.\end{aligned}$$

Zde jsme si zavedli mezipásový maticový element operátoru hybnosti $\vec{p}_{mn}(\vec{q})$ popisující přechod ze základního stavu s indexem n do excitovaného stavu s indexem m . Vypočítanou poruchu hamiltoniánu dosadíme do předchozího vztahu (9.4)

$$b_m(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{\mathcal{H}}_1^{mn}(t') e^{i\omega_{mn}t'} dt' = -\frac{eA_0}{2i\hbar m} \vec{a} \cdot \vec{p}_{mn}(\vec{q}) \int_0^t e^{i(\omega_{mn}-\omega)t'} dt'.$$

Pravděpodobnost přechodu mezi hladinami bude mít tvar

$$\begin{aligned}P_{mn}(t) = |b_m(t)|^2 &= \frac{e^2 A_0^2}{4\hbar^2 m^2} |\vec{a} \cdot \vec{p}_{mn}(\vec{q})|^2 \left| \int_0^t e^{i(\omega_{mn}-\omega)t'} dt' \right|^2 \\ &= \left(\frac{eA_0}{2m} \right)^2 \frac{1}{\hbar^2} |\vec{a} \cdot \vec{p}_{mn}(\vec{q})|^2 2\pi\hbar t \delta(\hbar\omega_{mn} - \hbar\omega), \\ P_{mn}(t) &= \frac{2\pi}{\hbar} t \left(\frac{eA_0}{2m} \right)^2 |\vec{a} \cdot \vec{p}_{mn}(\vec{q})|^2 \delta(E_m(\vec{q}') - E_n(\vec{q}) - \hbar\omega).\end{aligned}\tag{9.5}$$

Pravděpodobnost přechodu do excitovaného stavu je lineárně úměrná času. Derivace podle času je tedy konstanta na čase nezávislá, která určuje rychlost, s jakou dojde k této excitaci. Toto odvození provedli ve stejné době Paul Dirac a Enrico Fermi, nicméně tento výsledek se označuje pouze po jednom z nich.

Fermiho zlaté pravidlo: Pokud je systém pod vlivem poruchy ve formě harmonického pole s frekvencí ω , potom je pravděpodobnost přechodu ze základního stavu do excitovaného stavu za jednotkový čas rovna následujícímu výrazu,

$$\boxed{\frac{P_{mn}(t)}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{eA_0}{2m} \right)^2 |\vec{a} \cdot \vec{p}_{mn}(\vec{q})|^2 \delta(E_m(\vec{q}') - E_n(\vec{q}) - \hbar\omega).}\tag{9.6}$$

Tento výsledek nám říká, že pravděpodobnost přechodu systému do excitovaného stavu je nenulová pouze tehdy, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- 1) Nezmění se vlnový vektor elektronu během přechodu ($\vec{q}' = \vec{q}$).
- 2) Vzdálenost energetických hladin, mezi kterými elektron přechází, odpovídá energii absorbovaného fotonu ($E_c - E_v = \hbar\omega$).

9.2.5 Přechody z valenčního do vodivostního pásu

Celkový počet mezipásových přechodů W_{cv} z valenčního do vodivostního pásu v jednotkovém objemu materiálu za jednotkový čas získáme podle vztahu

$$W_{cv} = \frac{2}{(2\pi)^3} d^3q dN.$$

Dvojka plyne ze spinové degenerace elektronů, faktor $(2\pi)^3$ souvisí s integrací ve 3D recipročním prostoru a počet stavů dN získáme integrací přes 1.BZ následovně

$$dN = \int_{1.BZ} P_{cv} f_{FD}(E_v(\vec{q})) (1 - f_{FD}(E_c(\vec{q}))) d^3q.$$

V tomto výrazu $f_{\text{FD}}(E)$ značí Fermiho-Diracovu rozdělovací funkci, která udává pravděpodobnost obsazení hladiny s energií E elektronem při teplotě T . V limitě nízkých teplot ($T \rightarrow 0$) lze brát valenční pás jako zcela obsazený a vodivostní pás zcela prázdný. Výrazy v závorkách budou $f_{\text{FD}}(E_v) = (1 - f_{\text{FD}}(E_c)) \simeq 1$. Pro počet přechodů získáme dosazením (9.6) formuli

$$W_{\text{cv}} = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{eA_0}{2m} \right)^2 \int_{\text{1.BZ}} |\vec{a} \cdot \vec{p}_{\text{cv}}(\vec{q})|^2 \delta(E_c - E_v - \hbar\omega) d^3q.$$

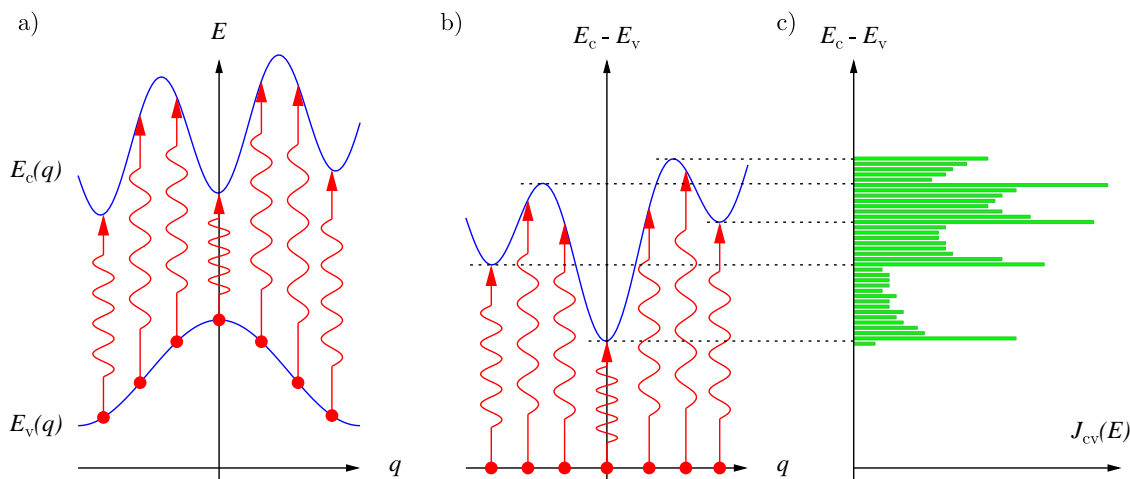
Velikost skalárního součinu se mění málo v oblasti, kde je nenulová delta funkce, a proto můžeme absolutní hodnotu vytknout jako konstantu před integrál. Pro charakterizaci rychlosti mezipásových přechodů je vhodné si definovat bezrozměrnou veličinu zvanou *síla oscilátoru* jako

$$f_{\text{cv}}(\omega) = \frac{2}{m\hbar\omega} |\vec{a} \cdot \vec{p}_{\text{cv}}(\vec{q})|^2. \quad (9.7)$$

Tato veličina je bezrozměrná a určuje, jak moc silně interaguje látka s harmonickou složkou pole na frekvenci ω . V integrálu zůstane jen δ -funkce, která nám po integraci dává takzvanou *sduženou hustotu stavů* s rozměrem [$\text{eV}^{-1} \text{m}^{-3}$],

$$J_{\text{cv}}(\omega) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\text{1.BZ}} \delta(E_c - E_v - \hbar\omega) d^3q. \quad (9.8)$$

Tato veličina udává, kolik je v látce povolených přechodů na této frekvenci. Výpočet sdužené hustoty stavů je graficky znázorněn na obr. 9.2 pro 1D případ. V části a) jsou červenou šipkou zakresleny různé optické přechody elektronu z valenčního pásu $E_v(q)$ do vodivostního pásu $E_c(q)$ v různých bodech první Brillouinovy zóny (1.BZ). Část b) ukazuje energie optických přechodů ($E_c(q) - E_v(q)$) a část c) je histogram těchto energií pro ekvidistantní povolené stavy vlnového vektoru q . Tento histogram odpovídá sdužené hustotě stavů, která se projeví ve spektru absorpce tohoto materiálu. Z obrázku je patrné, že maxima ve sdužené hustotě stavů (označeny tečkovanou čarou) odpovídají místům, kde jsou spolu vodivostní a valenční pásy rovnoběžné.



Obr. 9.2: Optická mezipásová absorpce v 1D materiálu: a) Obecné pásové schéma, červeně jsou vyznačeny fotoexcitované mezipásové přechody; b) zobrazení energie optického přechodu v různých místech BZ; c) sdužená hustota stavů jako histogram z b).

Tímto postupem se nám podařilo zredukovat vztah pro celkový počet mezipásových přechodů na zapamatovatelný vztah

$$W_{\text{cv}} = \frac{\pi e^2 A_0^2 \omega}{4m} f_{\text{cv}}(\omega) J_{\text{cv}}(\omega). \quad (9.9)$$

Je třeba si uvědomit, že tato veličina udává počty mezipásových přechodů. Pokud nás bude zajímat energie, která se při absorpci předává látce, musíme veličinu W_{cv} vynásobit energií jednoho fotonu $\hbar\omega$.

Poznámky k matematickému odvození

A teď krátké matematické intermezzo, kdy si podrobněji osvětlíme některé detaily předešlého odvozování. Spočítáme si integrál ve výrazu (9.5), kde pro jednoduchost zavedeme pomocnou veličinu $\xi = \omega_{mn} - \omega$.

$$\left| \int_0^t e^{i\xi t'} dt' \right|^2 = \left| \frac{e^{i\xi t} - 1}{i\xi} \right|^2 = \left| \frac{2}{\xi} e^{i\xi t/2} \sin\left(\frac{\xi t}{2}\right) \right|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{\xi t}{2}\right)}{\left(\frac{\xi}{2}\right)^2}.$$

V limitě pro čas jdoucí k nule dostaneme

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2\left(\frac{\xi t}{2}\right)}{\left(\frac{\xi}{2}\right)^2} \right] = 2\pi t^2 \delta(\xi t) = 2\pi \hbar t \delta(\hbar \xi) = 2\pi \hbar t \delta(\hbar \omega_{mn} - \hbar \omega).$$

Využili jsme identity, které platí pro δ -funkci:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 \xi t}{(\xi t)^2} \right] &= \pi \delta(\xi t), \\ t \delta(\xi t) &= \delta(\xi). \end{aligned}$$

9.2.6 Energetická bilance

Nyní se pokusíme svázat výslednou hodnotu celkového počtu mezipásových přechodů podle vztahu (9.9) s hodnotou měřitelné veličiny, jako je absorpční koeficient α . Šíření energie v látce popisuje Poyntingův vektor \vec{S} . Hustota energie bude v materiálu exponenciálně klesat s absorpčním koeficientem podle vztahu $w = w_0 e^{-\alpha x}$. Diferenciální rovnice pro šíření hustoty energie podél osy \vec{x} má tvar

$$\frac{dw}{dx} = -\hbar \omega W_{cv} = -\alpha w \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{w} \frac{dw}{dx}.$$

Absorpční koeficient můžeme tedy napočítat z celkového počtu mezipásových přechodů,

$$\alpha = \frac{\hbar \omega W_{cv}}{\langle \vec{S} \rangle}.$$

Dosadíme za střední hodnotu Poyntingova vektoru (9.2) a za počet mezipásových přechodů (9.9). Výsledkem dostaneme

$$\alpha = \frac{\hbar \omega \pi e^2 A_0^2 \omega 2 \mu_0 c}{4 m \omega^2 A_0^2 n} f_{cv}(\omega) J_{cv}(\omega).$$

To upravíme a získáme finální vztah

$$\boxed{\alpha = \frac{\mu_0 c}{2 m n} \pi e^2 \hbar f_{cv}(\omega) J_{cv}(\omega).} \quad (9.10)$$

Připomeňme si, že síla oscilátoru (9.7) je nepřímo úměrná frekvenci, $f_{cv} \propto 1/\omega$. Pokud odhlédneme od všech konstant, je užitečné si zapamatovat, že frekvenční závislost absorpčního koeficientu je

$$\boxed{\alpha \propto \frac{J_{cv}(\omega)}{\omega}.}$$

Jestliže dosadíme hodnoty fyzikálních konstant, za hmotnost dáme hmotnost volného elektronu, potom můžeme získat přehled o řádovém poměru studovaných veličin

$$\frac{\mu_0 c}{2 m_0} \pi e^2 \hbar = 1.098 \cdot 10^{-20} \text{ eV m}^2 = 1.098 \text{ eV } \text{Å}^2.$$

Odvození permitivity

Nyní využijeme vztahů absorpčního koeficientu k ostatním optickým veličinám, abychom je vyjádřili pomocí nedávno zavedených funkcí. Z rovností $\alpha = 2\omega\kappa/c$ a $\varepsilon_2 = 2n\kappa$ si vypočítáme imaginární složku komplexní permitivity

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{nc}{\omega}\alpha = \frac{\pi e^2 \hbar \mu_0 c^2}{2m\omega} f_{cv}(\omega) J_{cv}(\omega) = \\ &= \frac{\pi c^2}{m^2 \omega^2 \varepsilon_0} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{1.BZ} |\vec{a} \cdot \vec{p}_{cv}|^2 \delta(E_c(\vec{q}) - E_v(\vec{q}) - \hbar\omega) d^3q.\end{aligned}$$

Přes známé Kramersovy-Kronigerovy relace lze integrací dojít i k reálné části permitivity ε_1 .

9.3 Zjednodušený výpočet sdružené hustoty stavů

Představme si, že máme pásové schéma látky v základním stavu, kdy jsou všechny stavy elektronů ve valenčním pásu obsazeny. Tyto různé stavy jsou popsány kvantovým číslem, kterým je vlnový vektor \vec{q} , každý takový stav má dvojnásobnou degeneraci díky spinu. Při optické excitaci může elektron přejít do prázdného stavu ve vodivostním pásu se stejným vlnovým vektorem \vec{q} . Sdružená hustota stavů $J_{cv}(\omega)$ je proto důležitá veličina, neboť určuje, kolik elektronových stavů s různými hodnotami \vec{q} má nad sebou stav ve vodivostním pásu, který je vzdálený právě o $\hbar\omega$.

Zopakujme si definiční vztah (9.8) pro sdruženou hustotu stavů, jako integrál přes první Brillouinovu zónu,

$$J_{cv}(\omega) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{1.BZ} \delta(E_c - E_v - \hbar\omega) d^3q. \quad (9.11)$$

Schéma výpočtu bylo graficky znázorněno na obr. 9.2c). O velikosti sdružené hustoty samozřejmě rozhoduje chování delta funkce, což budeme nyní studovat. Zavedeme si pomocnou funkci $f(\vec{q})$ popisující vzdálenost vodivostního a valenčního pásu,

$$\delta(E_c(\vec{q}) - E_v(\vec{q}) - \hbar\omega) = \delta(f(\vec{q}) - \hbar\omega).$$

Provedeme rozvoj této funkce do Taylorovy řady v okolí hodnoty vlnového vektoru \vec{q}_0 , pro kterou platí, že $f(\vec{q}_0) = \hbar\omega$. Tedy

$$f(\vec{q}) = \underbrace{f(\vec{q}_0)}_{\hbar\omega} + \underbrace{\frac{df}{d\vec{q}} \Big|_{\vec{q}_0}}_{1. \text{ řád}} (\vec{q} - \vec{q}_0) + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{q}^2} \Big|_{\vec{q}_0}}_{2. \text{ řád}} (\vec{q} - \vec{q}_0)^2 + \dots \quad (9.12)$$

Nultý řád rozvoje se v argumentu δ -funkce odečte. První řád si upravíme s využitím vlastností δ -funkce následovně,

$$\delta\left(\frac{df}{d\vec{q}} \Big|_{\vec{q}_0} (\vec{q} - \vec{q}_0)\right) = \frac{\delta(\vec{q} - \vec{q}_0)}{\frac{df}{d\vec{q}} \Big|_{\vec{q}_0}},$$

a tedy pro původní argument získáme

$$\delta(E_c - E_v - \hbar\omega) = \frac{\delta(\vec{q} - \vec{q}_0)}{|\nabla_{\vec{q}}(E_c(\vec{q}) - E_v(\vec{q}))|_{\vec{q}_0}}.$$

To dosadíme do (9.11), čímž můžeme sdruženou hustotu stavů vyjádřit jako

$$J_{cv}(\omega) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{1.BZ} \frac{\delta(q - q_0) d^3q}{|\nabla_{\vec{q}}(E_c(\vec{q}) - E_v(\vec{q}))|_{E_c - E_v = \hbar\omega}}.$$

Diferenciál můžeme zapsat jako $d^3q = dS \cdot dq_{\perp}$. 3D integrál v q -prostoru spolu s δ -funkcí můžeme zjednodušit na integrál přes plochu S , na které je splněna podmínka $(\vec{q} = \vec{q}_0) \Rightarrow (E_c - E_v = \hbar\omega)$. Je

třeba si uvědomit, že pokud budeme počítat integrál pro jinou kruhovou frekvenci ω , změní se nám i integrační plocha S (plocha konstantní diference).

$$J_{cv}(\omega) = \frac{2}{(2\pi)^3} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_S \frac{dS}{|\nabla_{\vec{q}}(E_c(\vec{q}) - E_v(\vec{q}))|_{E_c - E_v = \hbar\omega}}. \quad (9.13)$$

Pokud bychom řešili nejjednodušší 1D případ, který je znázorněný na obr. 9.2, mohli bychom tento výsledek popsat následovně: Maxima ve sdružené hustotě stavů odpovídají místům, kde jsou vodivostní a valenční pás spolu rovnoběžné a jmenovatel ve zlomku se blíží k nule.

Ve 3D je ale situace mnohem složitější. Podmínka nulovosti jmenovatele

$$\boxed{|\nabla_{\vec{q}}(E_c(\vec{q}) - E_v(\vec{q}))| = 0}. \quad (9.14)$$

nám definuje tzv. *kritické body* v q -prostoru. Podle toho, jak jsou pásy prohnuté v blízkosti daného kritického bodu, vznikne v hustotě stavů charakteristický zlom.

Př. 9.1: Sdružená hustota stavů pro parabolické pásy: Uvažujme parabolické pásové schéma podle obr. 9.1 v okolí absorpční hrany. To znamená oblast energií blízko šířky zakázaného pásu E_g . Nejdřív si zapíšeme explicitně parabolickou závislost energií vodivostního a valenčního pásu na vlnovém vektoru,

$$\begin{aligned} \text{vodivostní pás:} \quad E_c(\vec{q}) &= \frac{\hbar^2 q^2}{2m_c}, \\ \text{valenční pás:} \quad E_v(\vec{q}) &= -E_g - \frac{\hbar^2 q^2}{2m_v}. \end{aligned}$$

Veličiny m_c a m_v označují efektivní hmotnost elektronu ve vodivostním, respektive valenčním pásu a určují zakřivení energetické paraboly. Definujme si redukovanou hmotnost m_r vztahem

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_v}. \quad (9.15)$$

Podmínka pro plochu S s rozdílem energií pásů, který odpovídá energii fotonu, nám vyjde

$$\hbar\omega = E_c - E_v = E_g + \frac{\hbar^2 q^2}{2m_r}.$$

Ještě si vypočítáme gradient přes vlnový vektor,

$$|\nabla_{\vec{q}}(E_c(\vec{q}) - E_v(\vec{q}))| = \frac{\hbar^2 q}{m_r}.$$

Nyní již máme všechny části, které můžeme dosadit do rovnice (9.13) pro sdruženou hustotu stavů, kterou budeme dále upravovat

$$\begin{aligned} J_{cv}(\omega) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_S \frac{m_r dS}{\hbar^2 q} = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{m_r}{\hbar^2} \frac{4\pi q^2}{q} = \frac{m_r q}{\pi^2 \hbar^2} = \frac{m_r}{\pi^2 \hbar^2} \sqrt{\frac{2m_r}{\hbar^2} (\hbar\omega - E_g)} = \\ &= \frac{\sqrt{2m_r^3}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\hbar\omega - E_g}. \end{aligned}$$

Tento typický výsledek, který dává pro 3D hustotu stavů odmocninovou závislost na energii, je známý z fyziky pevných látek, viz např. [1] 6. kapitola a příklady na konci této kapitoly. Sdruženou hustotu stavů můžeme dosadit do výrazu (9.10) pro výpočet absorpčního koeficientu

$$\alpha = \frac{\mu_0 c e^2 \sqrt{m}}{4\pi \hbar^2 n} \left(\frac{2m_r}{m} \right)^{3/2} f_{cv}(\omega) \sqrt{\hbar\omega - E_g}.$$

Jako příklad dosadíme typické hodnoty pro germánium,

$$(\hbar\omega - E_g) = 10 \text{ meV}; \quad m_r = \frac{1}{2}m; \quad f_{cv} = 1; \quad n = 4.$$

Dostaneme hodnotu $\alpha = 6.65 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1}$. Fotony s energií o 10 meV větší, než je šířka zakázaného pásu germánia, tedy proniknou do charakteristické hloubky $1/\alpha = 1.5 \text{ } \mu\text{m}$.

9.4 Absorpční pásy a kritické body

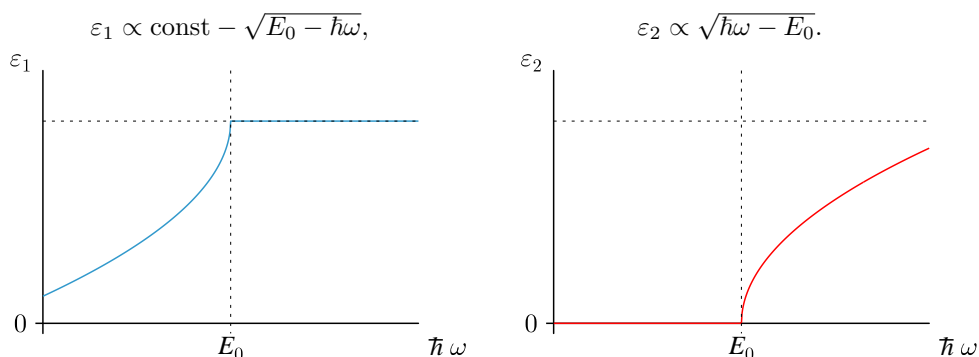
Ke změnám profilu sružené hustoty stavů $J_{cv}(\omega)$ dochází v bodech Brillouinovy zóny, kde jsou energetické pásy rovnoběžné a je nulový gradient $\nabla_{\vec{q}}(E_c(\vec{q}) - E_v(\vec{q})) = 0$. Symetrie krystalu odpovídá za to, kde se nacházejí tyto kritické body. Symetrickým bodem je např. bod Γ , jakožto střed BZ. Pro popis chování v okolí kritických bodů budeme muset použít Taylorův rozvoj rozdílu energetických pásů (9.12) do druhého řádu,

$$E_c(\vec{q}) - E_v(\vec{q}) = \underbrace{E_0}_{0. \text{ řád}} + \underbrace{\nabla_{\vec{q}}(E_c(\vec{q}) - E_v(\vec{q}))|_{\vec{q}_0}}_{1. \text{ řád} = 0} (\vec{q} - \vec{q}_0) + \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\hbar^2}{2m_i} (\vec{q} - \vec{q}_0)_i^2}_{2. \text{ řád}}.$$

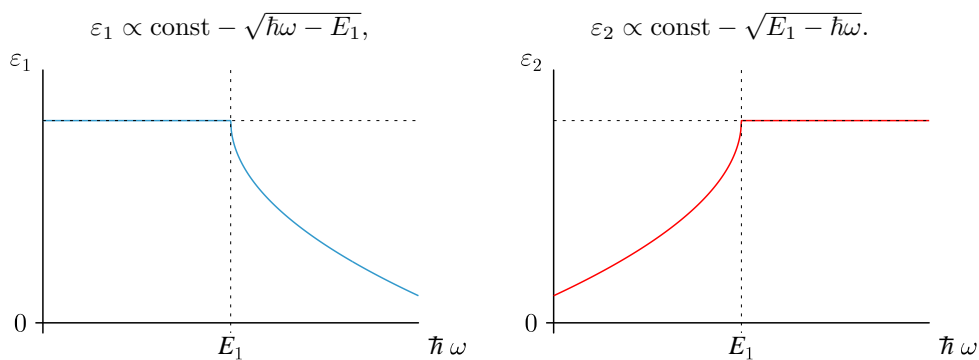
K zjištění, zda se pro daný kritický bod ve 3D prostoru jedná o minimum, maximum či inflexní (sedlový) bod, potřebujeme znát hodnoty efektivních hmotností m_i . Tato veličina je v tomto případě tenzorová a má tři vlastní hodnoty.

Podle znamének tří složek m_i dělíme kritické body do čtyř kategorií:

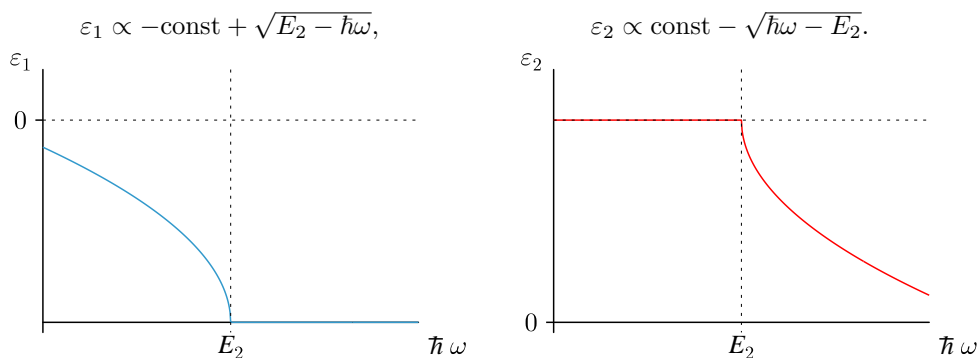
M₀ – všechny m_i jsou kladné, jde o lokální minimum,



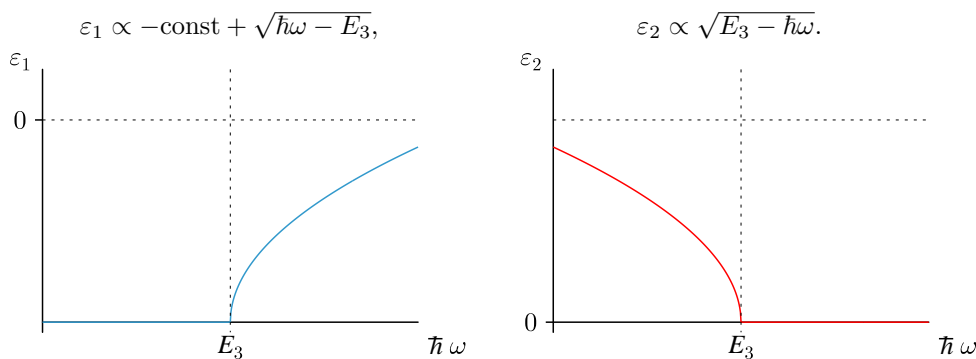
M₁ – dvě hodnoty jsou kladné, jedna záporná, jde o sedlový bod,



M₂ – jedna hodnota je kladná, dvě záporné, jde o sedlový bod,



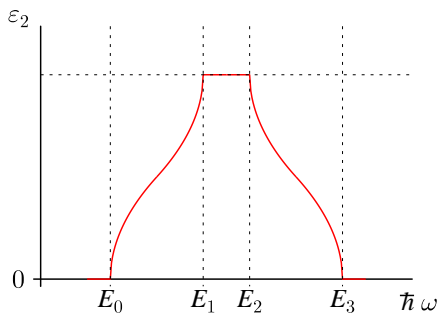
M_3 – všechna m_i jsou záporné, jde o lokální maximum,



Belgický fyzik Léon Van Hove jako první poukázal na následující geometrický fakt.

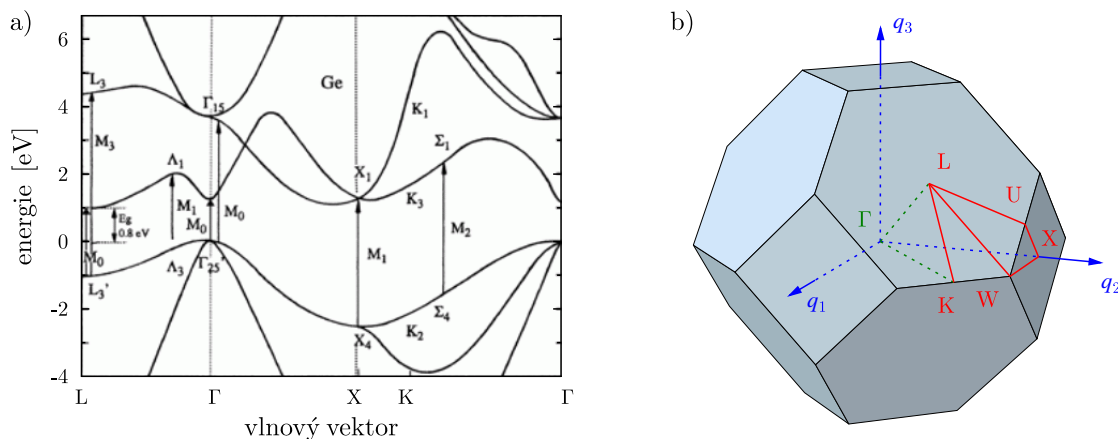
Van Hoveův teorém: Každý absorpční pás musí obsahovat alespoň jednu singularitu každého typu (M_0, M_1, M_2, M_3).

Tento výsledek je zakreslen do obr. 9.3, který představuje typické spektrum imaginární části permittivity krystalu v oblasti mezipásových přechodů.



Obr. 9.3: Typické spektrum imaginární části permittivity 3D krystalu. Podobně by vypadalo i spektrum absorpce α nebo extinkce \varkappa .

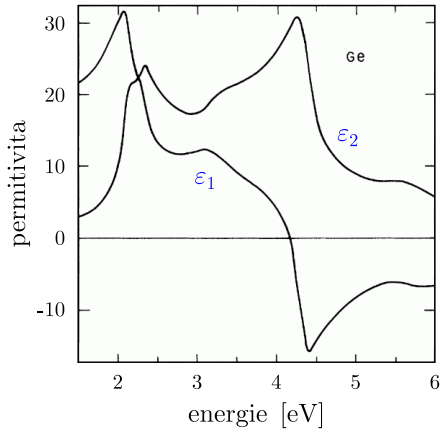
9.4.1 Absorpční pás germánia



Obr. 9.4: a) Pásová struktura germánia: valenční pás má záporné energie, šířka zakázaného pásu je $E_g = 0.8$ eV, vodivostní pás má energie $E \geq E_g$. Ve schématu jsou přechody v kritických bodech označeny šipkami. Převzato z [12], str. 327. b) Značení symetrických bodů v 1.BZ germánia, které krystalizuje v diamantové struktuře.

Obrázek 9.4 ukazuje kritické body v pásové struktuře germánia. Ať už byla tato pásová struktura spočítána, nebo získána měřením, je možné z ní napočítat všechny optické konstanty jako například permittivitu², která je pro germánium zakreslena v obr 9.5.

² D.E. Aspnes, A.A. Studna, „Dielectric functions“, Physical Review B **27**, 985 (1983).



Obr. 9.5: Permittivita germánia: ve spektrech reálné (ϵ_1) i imaginární složky (ϵ_2) jsou zřetelné extrémy a zlomy blízko hodnoty 2 eV a hodnoty 4.5 eV. Tyto extrémy a zlomy souvisejí s kritickými body M_2 a M_3 ve sdružené hustotě stavů, která je určena pásovou strukturou krystalu germánia. Převzato z článku uvedeného v poznámce 2.

9.5 Další modifikace mezipásových přechodů

Doposud jsme si odvodili pro mezipásové přechody ten nejjednodušší model, který popisuje ty nejdůležitější vlastnosti. Při detailním zkoumání experimentálních dat ale zjistíme, že budeme pro lepší shodu muset do naší teorie ještě některé drobnosti doplnit. A právě to je cílem této sekce.

9.5.1 Dovolené a zakázané přechody

Doposud jsme uvažovali, že síla oscilátoru $f_{cv}(\omega)$ je ve studované oblasti víceméně konstantní a o celkovém počtu mezipásových přechodů rozhoduje pouze sdružená hustota stavů $J_{cv}(\omega)$. V tomto případě označujeme přechody jako dovolené³. Pokud je pro nějaký vlnový vektor \vec{q}_0 maticový element operátoru hybnosti nulový, $\vec{p}_{cv}(\vec{q}_0) = 0$, potom je nulová i síla oscilátoru. Zde jsou *přechody zakázané*. K tomu dochází zpravidla díky symetrii. To, zda je daný přechod dovolený nebo zakázaný, označujeme jako *výběrová pravidla*.

V případě kubických materiálů, např. s diamantovou strukturou (diamant, Si, Ge) nebo se sfaleritovou strukturou (GaAs), je tento maticový element izotropní. Ale v případě nekubických materiálů závisí síla oscilátoru, $f_{cv}(\vec{q}) \propto |\vec{a} \cdot \vec{p}_{cv}(\vec{q})|^2$, i na polarizaci světla.

Zopakujme si vztah pro výpočet maticového elementu operátoru hybnosti,

$$\vec{p}_{cv}(\vec{q}) = -i\hbar \int u_{c\vec{q}}^*(\vec{r}) \nabla u_{v\vec{q}}(\vec{r}) dV.$$

Pro bližší analýzu musíme rozvést operátor hybnosti $\vec{p}_{cv}(\vec{q})$ v okolí bodu \vec{q}_0 . Přímo pro \vec{q}_0 je přechod zakázaný, čím víc se od této hodnoty vzdálíme v q -prostoru, tím je přechod pravděpodobnější („méně zakázaný“).

$$\vec{p}_{cv}(\vec{q}) = \underbrace{\vec{p}_{cv}(\vec{q}_0)}_{=0} + \nabla_{\vec{q}} \vec{p}_{cv}(\vec{q})|_{\vec{q}_0} (\vec{q} - \vec{q}_0).$$

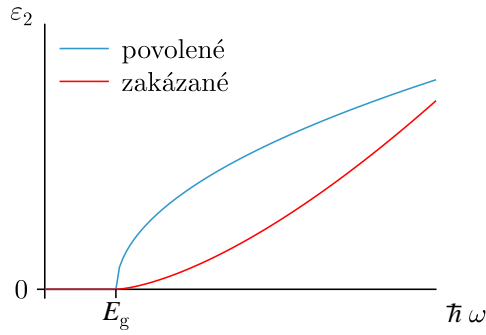
Maticový element je tedy lineárně závislý na q . V síle oscilátoru máme ale kvadrát maticového elementu, $|\vec{p}_{cv}(\vec{q})|^2 \propto (q - q_0)^2$.

Výsledkem tedy je, že absorpční koeficient nebo imaginární složka permitivity má pro zakázané přechody závislost na jiné mocnině energie.

$$\begin{aligned} \text{povolené přechody:} & \quad \alpha \propto \epsilon_2 \propto (\hbar\omega - E_g)^{1/2}, \\ \text{zakázané přechody:} & \quad \alpha \propto \epsilon_2 \propto (\hbar\omega - E_g)^{3/2}. \end{aligned}$$

Tento rozdíl tvaru absorpční hrany mezipásových optických přechodů je znázorněn na obr. 9.6.

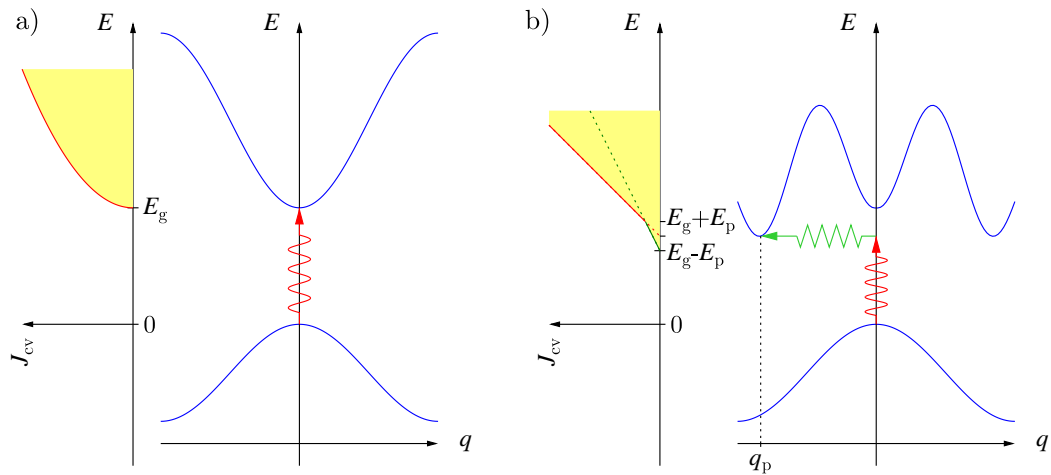
³ To je jednoduché, přecházet jest dovolené tam, kde je zebra. Takže v africké savaně jsou na tom relativně dobře.



Obr. 9.6: Závislost profilu absorpční hrany na tom, zda jsou mezipásové přechody v látce povolené, nebo zakázané.

9.5.2 Přímé a nepřímé přechody

Podle toho, zda minimum vodivostního pásu polovodiče leží v q -prostoru ve stejném místě jako maximum valenčního pásu, dělíme polovodiče na přímé a nepřímé. Typický přímý polovodič je např. GaAs, kdežto křemík nebo germanium jsou typické nepřímé polovodiče. Typická pásová schémata polovodiče jsou znázorněna na obr. 9.7.



Obr. 9.7: Schéma absorpce fotonu v pásové struktuře a) přímého a b) nepřímého polovodiče. Přechod elektronu mezi pásy je znázorněn červenou šipkou, fonon zelenou šipkou. Žlutě je zakresleno odpovídající spektrum absorpce. V případě nepřímého polovodiče není minimum vodivostního pásu v centru BZ globálním minimem tohoto pásu.

Pokud má při absorpci fotonu a následném nepřímém přechodu elektronu mezi pásy platit zákon zachování hybnosti, musí se ho účastnit ještě nějaká další částice, která potřebný rozdíl v hybnosti, $\hbar\vec{q}_p = \hbar(\vec{q}_c - \vec{q}_v)$, dodá. Tou potřebnou kvazičásticí je fonon jakožto kvantum tepelných vibrací krystalové mřížky. Fonony mají vlnové vektory \vec{q}_p pokrývající celý rozsah Brillouinovy zóny krystalu, naproti tomu, jejich energie E_p jsou pouze 10 až 30 meV. Pokud dojde při absorpci fotonu současně i k absorpci fononu, získá elektron energii potřebnou pro mezipásový přechod v součtu od obou absorbovaných kvazičástic. To ukazuje zelená čára v obr. 9.7b), která začíná na energii $E_g - E_p$. Se snižováním teploty T ale počty fononů ubývají a tento příspěvek k absorpčnímu koeficientu postupně vymizí. Fonon se ale může při mezipásové přechodu také nově vytvořit, což lze při jakékoliv teplotě. Bude k tomu ale potřeba foton s vyšší energií $E_g + E_p$.

Pro teoretický popis nepřímých přechodů je potřeba započítat druhý řád poruchového počtu. Ve výpočtu sdružené hustoty stavů se nám objeví integrály, kde se integruje nezávisle přes vodivostní pás \vec{q}_c a přes valenční pás \vec{q}_v , tedy

$$\int \delta(E_c(\vec{q}_c) - E_v(\vec{q}_v) - (\hbar\omega \pm E_p)) d^3q_c d^3q_v.$$

Výsledný absorpční koeficient má tedy první člen popisující absorpci fononu a druhý člen popisující emisi

fononu, $\alpha = \alpha_a + \alpha_e$, které jsou

$$\begin{aligned} \text{absorpce fononu:} \quad \alpha_a &= a_a \frac{(\hbar\omega - (E_g - E_p))^2}{e^{E_p/k_B T} - 1}, \\ \text{emise fononu:} \quad \alpha_e &= a_e \frac{(\hbar\omega - (E_g + E_p))^2}{1 - e^{-E_p/k_B T}}. \end{aligned}$$

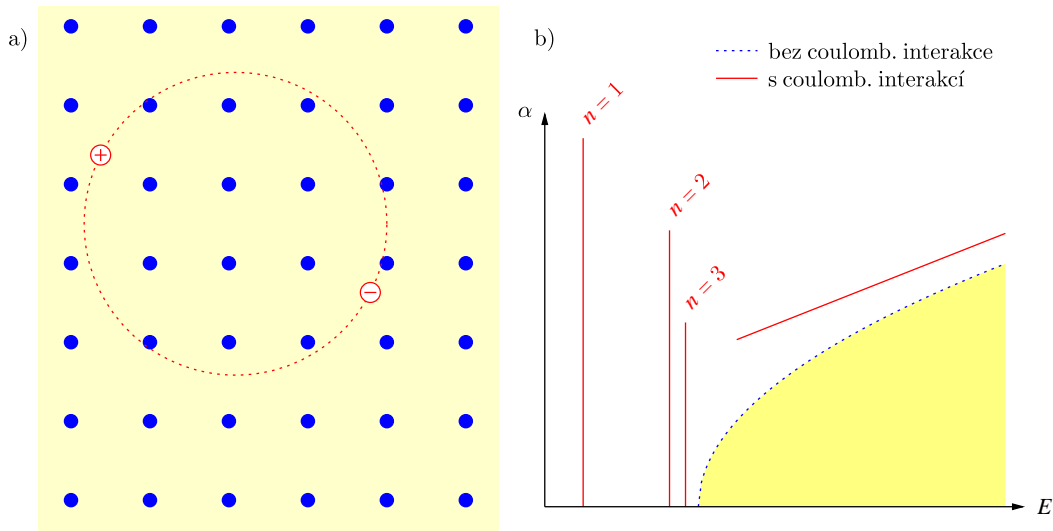
9.5.3 Vliv excitonů

Při optické excitaci dochází v polovodiči k přechodu elektronu z valenčního do vodivostního pásu. Z fyziky pevných látek je známo [1], že chybějící stav ve valenčním pásu se chová jako kvazičástice s kladným nábojem nazývaná díra. Elektron ve vodivostním pásu a díra ve valenčním pásu na sebe coulombovsky působí a díky tomu mohou vytvořit vázaný stav, kvazičástici zvanou exciton. Výskyt intenzivních úzkých absorpčních čar s energií pod hranou zakázaného pásu E_g je důkazem existence těchto vázaných stavů.

Systém kladně nabitě díry a záporně nabitého elektronu je analogický popisu atomu vodíku. Řešení této úlohy je známo z učebnic kvantové mechaniky [6]. V případě excitonu není ale takový rozdíl v hmotnosti elektronu a díry, jako je tomu u elektronu a protonu v atomu vodíku. Proto je při řešení vhodné přejít do soustavy svázané s těžištěm. Efektivní hmotnost m_r definuje obvyklým způsobem jako (9.15).

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_v}.$$

Výklad excitonů se obvykle dělí na dva limitní případy, silně a slabě vázaný exciton. My se v našem textu omezíme pouze na slabě vázaný exciton (Mottův a Wannierův exciton s velkým poloměrem), který je vhodný pro typické polovodiče. Exciton v krystalu je znázorněn na obr. 9.8a).



Obr. 9.8: Exciton: a) prostorové schéma polovodiče, b) absorpční spektrum s typickými excitonovými liniemi.

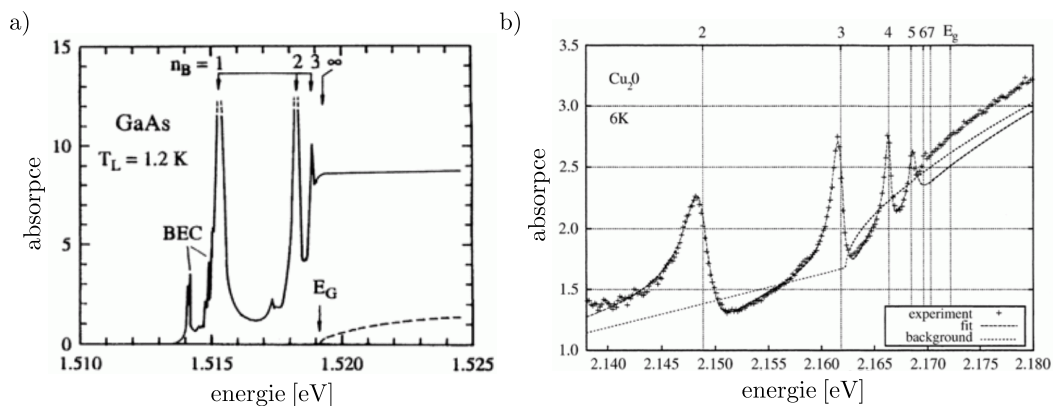
Z analogie s atomem vodíku vyplývá i analogické řešení. Základní stav je $1s$ vodíková funkce, kde se použije modifikovaný Bohrovův poloměr excitonu a_{ex} . Vazebná energie základního stavu se označuje jako excitonový Rydberg

$$a_{ex} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon\hbar^2}{m_r e^2}, \quad R_{ex} = \frac{m_r e^4}{2(4\pi\epsilon_0\epsilon\hbar)^2}. \quad (9.16)$$

Neboť redukovaná hmotnost excitonového páru elektron-díra m_r je mnohem menší než klidová hmotnost elektronu m_0 , je vazebná energie excitonu o tři řády menší než pro atom vodíku. Např. v GaAs vyjde vazebná energie základního stavu excitonu $R_{ex} = 4.2$ meV.

V absorpčním spektru daného materiálu se excitony projeví jako ostrá maxima pod hranicí zakázaného pásu E_g . Energetický posun pod hranici zakázaného pásu odpovídá energii jednotlivých excitonových hladin označených kvantovým číslem n .

$$\hbar\omega = E_g - \frac{R_{ex}}{n^2}.$$



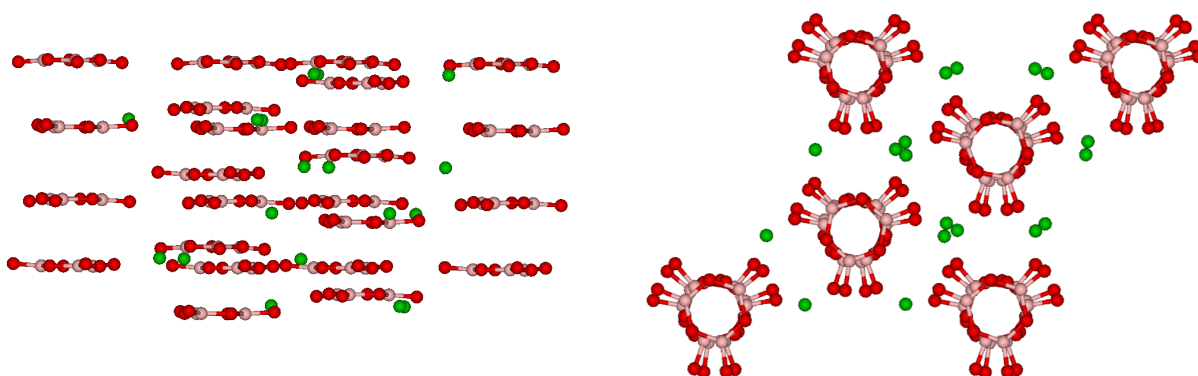
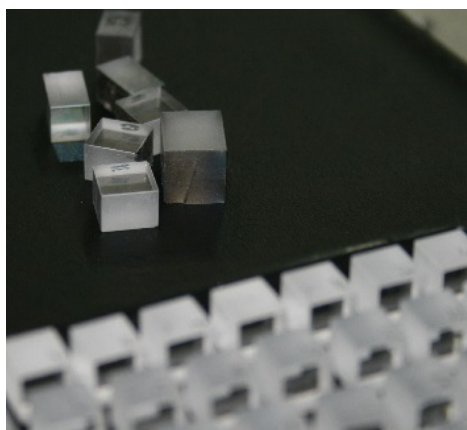
Obr. 9.9: Absorpce materiálů: a) GaAs – dovolené přechody, b) CuO₂ – zakázané přechody. Excitony jsou nahoře označeny kvantovým číslem n . Převzato z [12], 13. kapitola.

Toto chování ukazuje obr. 9.8b) pro přímý 3D polovodič. Jak je v obrázku naznačeno, i při mezipásové absorpci nad hranicí zakázaného pásu je absorpční koeficient ovlivněn coulombovskou interakcí mezi elektrony a dírami.

Podrobným výpočtem se dá ukázat, že intenzita excitonových absorpčních maxim klesá s kvantovým číslem jako $\propto 1/n^3$. Nejsilnější je tedy základní exciton s číslem $n = 1$. Toto platí pro povolené přechody např. v materiálu GaAs. Pokud jsou přechody v daném materiálu zakázané, potom je závislost na kvantovém čísle n podobná, jenom s tím rozdílem, že základní exciton $n = 1$ zcela vymizí. První nenulový exciton má kvantové číslo $n = 2$. Experimentálně změřená spektra absorpce obou zmínovaných materiálů jsou zakreslena na obr. 9.9.

9.6 Shrnutí

- Při absorpci světla s energií větší než je šířka zakázaného pásu E_g polovodičem nebo dielektrikem dochází k přechodu elektronu z valenčního do vodivostního pásu.
- Mezipásové optické přechody se studují pomocí kvantového jednoelektronového přiblížení a poruchového počtu. Výsledkem je Fermiho zlaté pravidlo, které udává pravděpodobnost přechodu elektronu do vyššího energetického stavu za jednotku času.
- Pro popis mezipásových přechodů se zavádí dvě důležité veličiny: síla oscilátoru a sdružená hustota stavů.
- Mezipásové přechody tvoří ve spektru absorpční pás, jehož profil je daný symetrií. Je ovlivněn tím, zda jsou mezipásové přechody dovolené, nebo zakázané a zda je přechod přímý, nebo nepřímý.
- Na hraně absorpčního pásu se typicky projevuje generace excitonů.



Fotografie uměle vyráběných nelineárních krystalů BBO (BaB_2O_4).

Převzato z webu: <https://raicol.com/bbo/bbo-for-fhg>

Rozložení atomů kolmo na optickou osu a podél osy.

Převzato z Wikipedie: https://en.wikipedia.org/wiki/Barium_borate

Kapitola 10

Nelineární optika

Obsah kapitoly

10.1 Co znamená lineární a nelineární optika	139
10.1.1 Opakování již zmiňovaných vlastností materiálových vztahů	140
10.1.2 Nelineární materiálový vztah	141
10.2 Odvození vlnové rovnice pro nelineární prostředí	141
10.2.1 Přechod k harmonickým složkám	142
10.3 Zákon zachování a podmínka fázové synchronizace	142
10.3.1 HOM – Hongŕv, Ouŕv a Mandelŕv experiment	143
10.3.2 SPDC v krystalu BBO	144
Př. 1: Mimořádný index lomu jednoosého krystalu:	145
Př. 2: BBO typ I a II:	145
10.3.3 Geometrie fotonových párů generovaných v BBO typu I	146
10.3.4 Geometrie fotonových párů generovaných v BBO typu II	146
10.3.5 Spektra barev v SPDC	147
10.3.6 Efektivita SPDC procesu	148
Př. 3: Kolmé vektory	149
10.3.7 Efektivní nelinearita	149
10.3.8 Praktické poznámky pro generaci SPDC v jednoosých krystalech	150
10.4 Podmínka kvazi fázové synchronizace	151
Př. 4: Odhad přípustného rozladění:	151
10.5 Entanglement v polarizaci	152
10.5.1 Typ I ($e \rightarrow o + o$)	153
10.5.2 Typ II ($e \rightarrow o + e$)	154
Př. 5: Výpočet polarizace fotonových párů SPDC v BBO typu II	155
10.5.3 Kwiatŕv zdroj entanglovaných fotonových párů	156
10.6 Shrnutí	158
10.7 Příklady	159

10.1 Co znamená lineární a nelineární optika

Dřívě se lidé domnívali, že světlo v látce lze vždy chápat jako harmonickou vlnu, která je projevem lineární odezvy prostředí na dopadající elektromagnetické pole. Důsledky této linearity jsou následující:

1. index lomu n , nebo absorpční koeficient α nezávisí na intenzitě světla,
2. platí princip superpozice optických vln, které se lineárně skládají a v závislosti na fázi vzájemně interferují,

3. světlo z jednoho svazku, které se v látce překrývá se světlem druhého svazku s jiným směrem šíření, se vzájemně neovlivňují,
4. světlo v látce nemění svou frekvenci ω .

V dnešní době, kdy máme k dispozici lasery, můžeme generovat optické pole, jehož elektrická složka má intenzitu srovnatelnou s elektrostatickými silami vazeb v krystalické látce, 10^5 – 10^8 V/m. Je zřejmé, že pokud takto silné pole působí na pevnou látku, nelze již očekávat jednoduchou harmonickou odezvu této látky [10]. Je to analogické s mechanickým namáháním látky. Pokud mechanické napětí překročí mez pružnosti, nelze již pro deformaci látky použít jednoduchý Hookův zákon lineární elastické deformace. Předchozí seznam výroků musíme pro nelineární interakce invertovat. V nelineárním prostředí platí:

1. index lomu n , rychlost světla $v = c/n$ a další optické veličiny látky závisí na intenzitě,
2. při skládání optických vln se projevují odchylky vyššího řádu od prosté superpozice vln,
3. světlo z jednoho svazku může v látce ovlivňovat (modulovat, spínat) průchod druhého svazku,
4. světlo jedné frekvence může v látce generovat světlo jiné frekvence.

10.1.1 Opakování již zmiňovaných vlastností materiálových vztahů

Vraťme se nejprve k definici vlastností materiálových vztahů studované látky. Budeme potřebovat základní materiálový vztah pro elektrické veličiny:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}. \quad (10.1)$$

Pokud je vnější elektrické pole dostatečně pomalé, můžeme předpokládat, že polarizace látky \vec{P} bude kmitat synchronně s budícím elektrickým polem \vec{E} . Pokud je ale látka pod vlivem elektrického pole s frekvencí optických polí (10^{15} Hz), musíme již místo synchronnosti uvažovat obecnější *podmínku kauzality*. Stav látky je ovlivněn vnějším polem v dané chvíli, ale také polem v časech předchozích. Důsledkem kauzality je to, že výše uvedený vztah již neplatí pro časové hodnoty polí, ale platí pro jednotlivé harmonické složky $\vec{P}(\omega)$ a $\vec{E}(\omega)$. Zpoždění reakce látky na budící pole je pak popsáno zavedením komplexního parametru (funkce odezvy) látky. V tomto případě jde o *komplexní susceptibilitu* $\widetilde{\chi}_e(\omega)$. Připomeňme, že pro rozklad pole do harmonických složek můžeme použít buď prostou sumaci, nebo integrální Fourierovu transformaci,

$$E(t) = \sum_j E(\omega_j) e^{-i\omega_j t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} E(\omega) e^{-i\omega t}.$$

Jak jsme to popisovali v kapitole 2, zavedení komplexní funkce odezvy látky umožňuje popsat absorpci a také získat vzájemné integrální vazby mezi reálnou a imaginární částí všech komplexních materiálových veličin (index lomu, susceptibilita, reflektivita). Tyto vztahy se označují jako Kramersovy-Kronigerovy relace a důsledkem této integrální vazby je disperze všech materiálů. Jelikož každá látka má v nějaké spektrální oblasti nenulovou absorpci, projevuje se to tím, že přilehlá spektrální oblast již bez absorpce je *oblastí normální disperze*. V této oblasti je index lomu $n(\omega)$ rostoucí funkcí frekvence, nebo-li $n(\lambda)$ je klesající funkcí vlnové délky.

Další důležitou vlastností látky je otázka izotropie daného materiálu. V optice jsou totiž velmi důležité *anizotropní materiály*, pro které platí, že budící elektrické pole a polarizace jako odezva látky nejsou kolineární vektory. To je dané tím, že změna rozložení elektrického náboje v látce není určena pouze směrem vnějšího elektrického pole, ale musí rovněž respektovat mikroskopické pozice chemických vazeb v daném materiálu. Proto je třeba zavést materiálové parametry jako je susceptibilita ve formě tenzorů a do materiálového vztahu přidat skalární součin s budícím polem.

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi} \cdot \vec{E}, \quad \text{nebo ve složkách} \quad P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j. \quad (10.2)$$

Popis anizotropie látky a odvození Fresnelovy rovnice jsme diskutovali v kapitolách 4 a 5. Pokud bychom chtěli být ultra akurátní, dala by se diskutovat ještě také lokálnost odezvy, což by vedlo na zavedení cirkulární anizotropie materiálu (viz kap. 6).

10.1.2 Nelineární materiálový vztah

Konečně se dostáváme k poslední vlastnosti materiálových vztahů, kterou chceme podrobně studovat v této kapitole, a to je linearita. Stojíme tedy před otázkou, zda můžeme materiálový vztah mezi \vec{P} a \vec{E} , zapsaný obecně jako Taylorův rozvoj v mocninách elektrického pole, aproximovat pouze lineárním členem. Členy s vyšší mocninou jsou vždy řádově slabší, nicméně pokud nejsou principiálně nulové díky symetrii či zanedbatelné, začneme se pohybovat v oblasti nelineární optiky. Dá se říci, že nelineární optika začíná tam, kde se v látce mění vlnová délka (frekvence) optického pole. Jinými slovy nelineární odezva materiálu umožňuje vazbu mezi různými frekvenčními složkami optického pole. K tomu, aby k takovým efektům docházelo s dostatečnou účinností je zapotřebí intenzivní koherentní svazek s odpovídající frekvencí. Ke studiu a posléze masivnímu rozšíření nelineární optiky proto došlo jen díky rozvoji laserové techniky v minulých desetiletích.

Pro studium nelineárních jevů se obvykle používají anizotropní materiály. Proto jsou parametry prostředí tenzory druhého a vyšších řádů. Taylorův rozvoj materiálového vztahu můžeme zapsat ve složkách,

$$P_i = P_i^{\text{lin}} + P_i^{\text{NL}} = \varepsilon_0 \left(\underbrace{\chi_{ij}^{(1)} E_j}_{\text{lin}} + \underbrace{\chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots}_{\text{NL}} \right). \quad (10.3)$$

První člen rozvoje \vec{P}^{lin} je zodpovědný za lineární efekty jako je index lomu. Frekvence světla se v látce zachovává, zmenšuje se pouze rychlost šíření světla látkou. Celá nelineární optika je popsána nelineární polarizací látky \vec{P}^{NL} , kterou můžeme dále dělit na jevy druhého řádu ($\chi_{ijk}^{(2)}$), třetího řádu ($\chi_{ijkl}^{(3)}$) a případně ještě vyšších řádů.

10.2 Odvození vlnové rovnice pro nelineární prostředí

Pro odvození vlnové rovnice vyjdeme obdobně jako vždy z Maxwellových rovnic. Pro zjednodušení budeme uvažovat ideální dielektrikum bez volných nábojů a tedy i bez jím odpovídajícímu proudu.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}, \quad \nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad (10.4)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (10.5)$$

K tomu přidáme jednoduché materiálové vztahy pro nemagnetické prostředí.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (10.6)$$

Jako obvykle se provede druhá derivace (rotace) Faradayova zákona (MR1).

$$\begin{aligned} -\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= \Delta \vec{E} \\ &= \nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Výslednou vlnovou rovnici můžeme zapsat v obvyklém tvaru,

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}, \quad (10.8)$$

kde vlevo máme druhé derivace elektrického pole podle prostorových a časových souřadnic. Tyto členy jsou zodpovědné za šíření harmonické vlny ve vakuu, protože ve vakuu by byla pravá strana této rovnice nulová. Podle provedeného odvození je zřejmé, jak z permitivity a permeability vakua vyplývá rychlost šíření světla ve vakuu c . Při šíření světla látkou je pravá strana rovnice nenulová a časová derivace polarizace prostředí je zdrojovým členem pro generaci jednotlivých harmonických vln.

Nyní můžeme oddělit lineární a nelineární část odezvy prostředí. $\vec{P} = \vec{P}^{\text{lin}} + \vec{P}^{\text{NL}}$. Takto můžeme zahrnout lineární odezvu prostředí do indexu lomu, který mění rychlost šíření optického pole (zpomaluje šíření). Na pravé straně si pak necháme pouze tu nelineární část, která je jako zdrojový člen zodpovědná za generaci nových harmonických složek optického pole.

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1 + \chi^{(1)}}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}^{\text{NL}}}{\partial t^2}} \quad (10.9)$$

10.2.1 Přechod k harmonickým složkám

Pro správný popis kauzality materiálové odezvy a disperze studovaného materiálu musíme přejít k fourierovským složkám polí. Indukovanou lineární a nelineární polarizaci pak můžeme zapsat následovně:

$$\vec{P}^{\text{lin}}(\omega) = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}^{(1)} \cdot \vec{E}(\omega) \quad (10.10)$$

$$\vec{P}^{\text{NL}}(\omega) = \sum_j \sum_k \overleftrightarrow{\chi}^{3\leftrightarrow(2)}(\omega = \omega_j + \omega_k) : \vec{E}(\omega_j) \vec{E}(\omega_k). \quad (10.11)$$

Dvojtečka v tomto vztahu znamená dvojnásobný skalární součin. Uveďme nyní nejčastější nelineární jevy rozdělené *podle řádu interakce*:

NL jevy druhého řádu: generace druhé harmonické (SHG), generace součtové frekvence (SFG), generace rozdílové frekvence (optické parametrické zesílení), sestupná parametrická frekvenční konverze (SPDC), třívlonné směšování (3WM).

NL jevy třetího řádu: generace třetí harmonické (THG), optický Kerrův jev, samofokusace, samomodulace fáze, čtyřvlonné směšování (4WM).

Podrobný popis těchto jevů můžeme najít v různých učebnicích optiky [10], nebo v knihách zaměřených speciálně na problematiku nelineární optiky [14, 15].

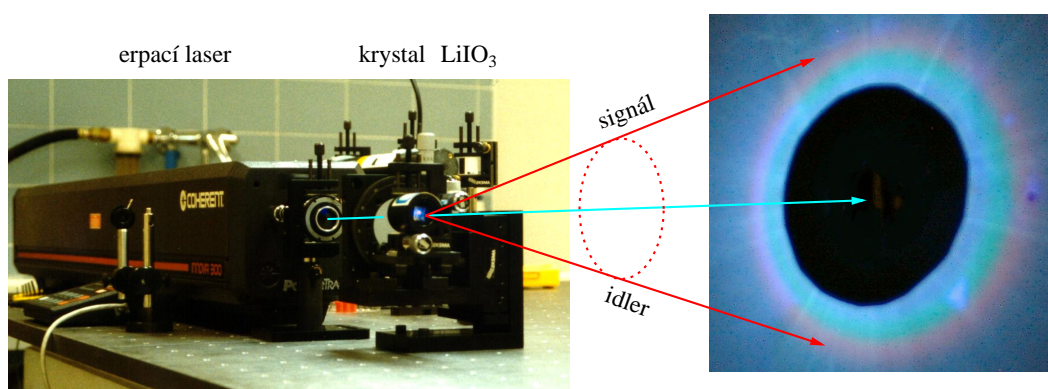
10.3 Zákony zachování a podmínka fázové synchronizace

V této sekci se budeme věnovat zákonům zachování, které musí platit samozřejmě i pro nelineární optické procesy [16]. Pro konkrétnost budeme uvažovat sestupnou frekvenční konverzi (SPDC), což je proces druhého řádu. Ten probíhá tak, že do materiálu vstupuje výhradně a pouze světlo z čerpacího laseru na frekvenci $\omega_p = 2\omega$.

Obrázek 10.1 ukazuje typickou sestavu používanou pro generaci SPDC v našich laboratoři po roce 2002. V té době jsme používali nelineární krystaly LiIO_3 . Foton čerpacího svazku z kryptonového laseru (modrý, 413.1 nm, ~ 100 mW) se v nelineárním prostředí s malou pravděpodobností ($\approx 10^{-9}$) rozpadá na dva fotony s nižší energií. Tyto dva fotony se z historických důvodů označují jako signální a jalový (*signal, idler*). Zákon zachování energie pro fotony interagujících polí lze napsat jako $2\omega \rightarrow \omega_s + \omega_i$. Oba fotony si mohou energii čerpacího fotonu rozdělit v libovolném poměru. Jako degenerovaný případ označujeme situaci, kdy si oba fotony rozdělí energii přesně na poloviny:

$$2\omega \rightarrow \omega + \omega. \quad (10.12)$$

Otočíme-li čas vznikne z degenerované SPDC známější proces generace druhé harmonické. Je to jako bychom otočili v poslední rovnici směr šipky.



Obr. 10.1: Fotografie vlevo: kryptonový laser a nelineární krystal LiIO_3 v optické montáži s nastavitelnými náklony. Fotografie vpravo: vzdálené pole SPDC zachycené na stínítku (čas 15 s, clona 2.0, ohnisko 7.19 mm)

Podmínka fázové synchronizace (PMC – *Phase Matching Condition*) vyplývá z nutnosti splnit pro nelineární interakci současně se zákonem zachování energie i zákon zachování hybnosti. Zatímco zákon

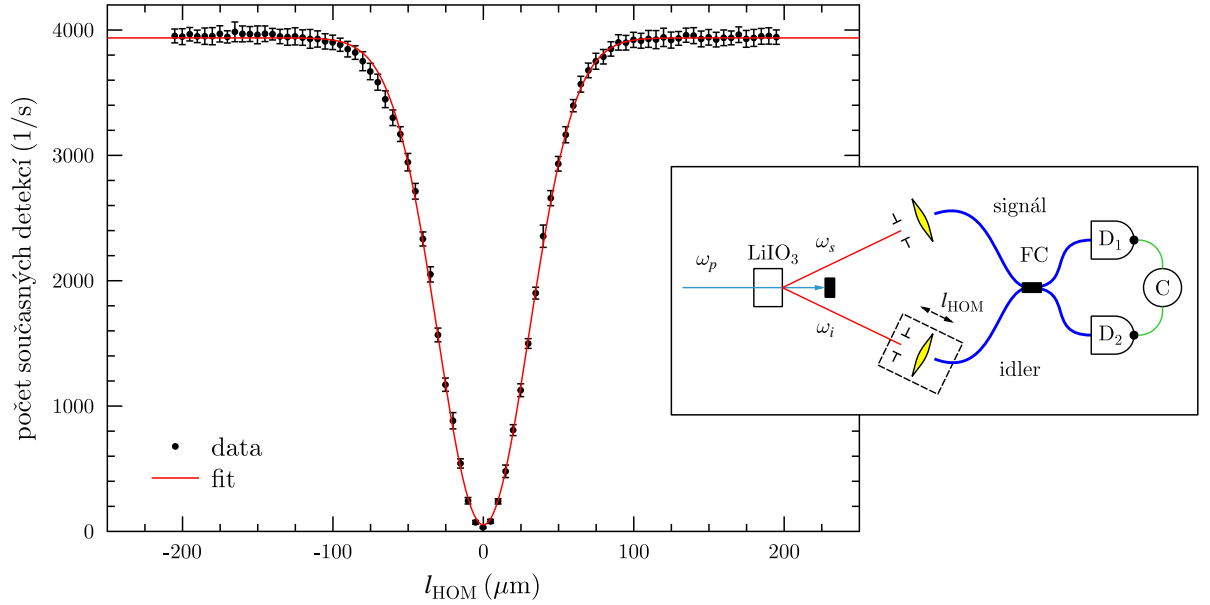
pro energii je skalární, zákon zachování hybnosti je vektorový a po zkrácení Planckovy konstanty ho lze zapsat jako zákon zachování vlnového vektoru \vec{k} . Podmínka fázové synchronizace tedy určuje geometrii interakce optických polí.

$$\vec{k}_p(\omega_p) = \vec{k}_s(\omega_s) + \vec{k}_i(\omega_p - \omega_s). \quad (10.13)$$

Jinými slovy, podmínka fázové synchronizace udává směry, do kterých se šíří jednotlivé barevné složky vygenerovaného pole. Vlnové délky se vždy mění spojitě se změnou směru (výstupního úhlu) takže na stínítku za krystalem se nám zobrazí barevná duha, viz obr. 10.1 vpravo.

10.3.1 HOM – Hongův, Ouův a Mandelův experiment

Platnost obou fundamentálních zákonů zachování v uvedeném tvaru vyplývá z faktu, že stav krystalu se během nelineární interakce nemění. Dochází tedy k přenosu energie pouze mezi optickými poli. Protože signální i jalové pole jsou před rozpadem čerpacího fotonu ve vakuovém stavu, hovoří se o tom, že je SPDC proces stimulován náhodnými fluktuacemi vakua a jako takový vzniká ve zcela náhodném časovém okamžiku. Nicméně i v případě kontinuálního čerpání jsou signální a jalový foton z jednoho páru vždy velmi přesně časově synchronizovány. Toho využili poprvé autoři Hong, Ou a Mandel (*HOM*) k ověřování interference fotonů jakožto bosonů na děliči svazku [17].



Obr. 10.2: Vpravo schéma experimentu pro měření HOM dipu, vlevo měřený dip. Popis experimentu viz text.

Při používání zdroje fotonových párů z fotografie na obr. 10.1 jsme i my proměřili dvoufotonovou interferenci (tzv. HOM dip). Schéma tohoto experimentu a typický výsledek měření dipu jsou zakresleny na obr. 10.2. Jak je zřejmé k interferenci signálního a jalového fotonu dochází na vláknovém děliči optických svazků (FC) s dělicím poměrem blízkým 50:50. Vzájemné zpoždění obou fotonů l_{HOM} se provádí pomocí vzdalování/přibližování vláknového kolimátoru k nelineárnímu krystalu LiIO_3 . Současné detekce fotonů na obou detektorech D_1 a D_2 se vyhodnocují pomocí koincidenční elektroniky (C). Zde byly použity jednofotonové detektory SPCM-AQ-141-FC (PerkinElmer) a koincidenční elektronika TAC/SCA (Ortec). Současná detekce (koincidence) znamená překryv náběžné hrany signálů v časovém okně šířky 1 ns.

Při dostatečném rozposunutí, $|l_{\text{HOM}}| > 200 \mu\text{m}$, dochází k tomu, že vlnové balíky signálního a jalového fotonu se na děliči vůbec nepotkají. Díky tomu v polovině případů projde do každého výstupu právě jeden foton a elektronika zaznamená koincidence. Těchto koincidenzí je řádově $4 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$. Posunem do dipu, $|l_{\text{HOM}}| = 0 \mu\text{m}$, dojde k tomu, že se fotony shluknou a budou vycházet vždy dva do jednoho výstupního ramene, kdežto ve druhém rameni zůstane vakuum. Koincidence jdou na tomto místě ideálně k nule. Šířka změřeného HOM dipu je nepřímo úměrná šířce spektra fotonů z páru a v zobrazeném případě, kdy lze dip fitovat gaussovskou křivkou, je možné dojít v prvním přiblížení k následujícímu vztahu pro pološířku spektra,

$$\text{FWHM}_\lambda = \frac{2\sqrt{2} \ln 2}{\pi} \frac{\lambda^2}{\text{FWHM}_{\text{dip}}}. \quad (10.14)$$

Na obr. 10.2 je FWHM křivky dipu 72 μm , což dává v časové oblasti 240 fs a odpovídá šířce spektra 5.9 nm. Za λ jsme dosadili vlnovou délku pro degenerovaný případ SPDC (826 nm).

V článkách [18, 19, 20] jsme publikovali naše výsledky měření časových a spektrálních korelací fotonových párů. Jak jsme prokázali, pomocí spektrální filtrace je možné rozšířit vlnové balíky fotonů a tedy prodloužit oblast vzájemné interference fotonů.

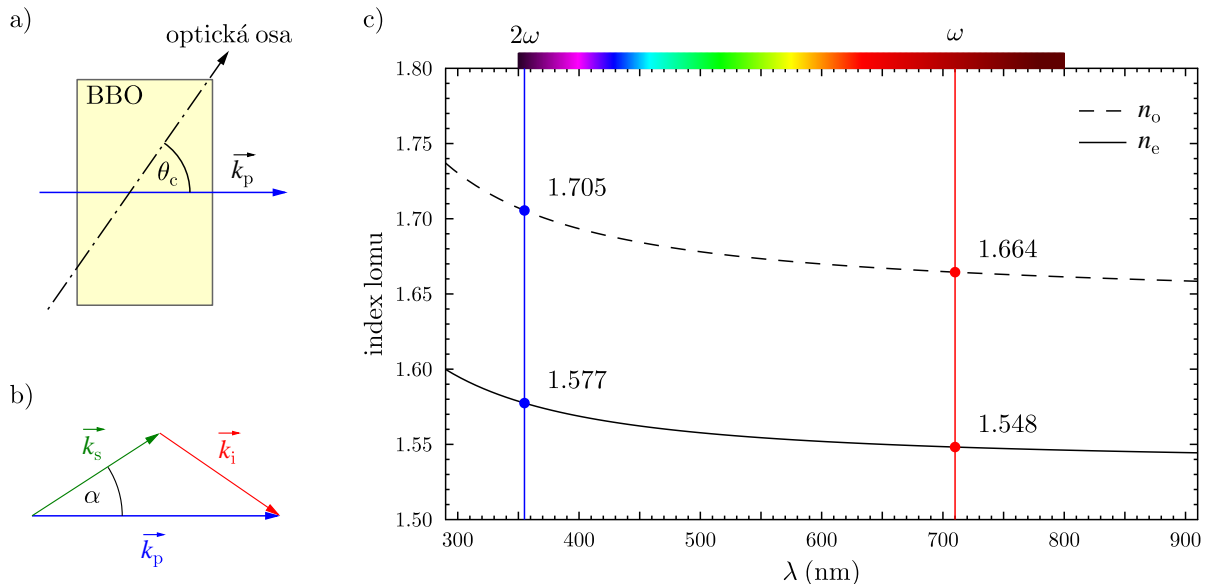
10.3.2 SPDC v krystalu BBO

Od krystalů LiIO_3 jsme velmi rychle přešli k nelineárním krystalům BBO. Tento materiál se díky svým výhodným parametrům a díky tomu, že se dá uměle pěstovat, stal velmi hojně užívaným materiálem jak v nelineární optice, tak v komerčních laserových systémech. Jde o sůl s chemickým vzorcem BaB_2O_4 . Uspořádání atomů v krystalu odpovídá trigonální soustavě (klencová) odpovídající grupě symetrie $3m \equiv C_{3v}$. Z toho plyne, že musí jít z pohledu lineární anizotropie o jednoosý materiál. Experiment pak doplňuje, že se jedná o jednoosý negativní krystal, neboť pro jeho indexy lomu platí $n_e < n_o$. Protože tento materiál budeme i nadále často zmiňovat, je vhodné uvést empirické Sellmeierovy rovnice pro indexy lomu BBO od firmy Eksma, jejíž krystaly často používáme.

$$\begin{aligned} n_o^2(\lambda) &= 2.7405 + \frac{0.0184}{\lambda^2 - 0.0179} - 0.0155\lambda^2, \\ n_e^2(\lambda) &= 2.3730 + \frac{0.0128}{\lambda^2 - 0.0156} - 0.0044\lambda^2. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Takto napočítaná disperze indexů lomu pro BBO ve viditelné oblasti je vykreslena na obr. 10.3c).

Z pohledu potenciálního využití v nelineární optice je naprosto nezbytné to, že tento krystal nemá střed symetrie. Díky tomu je $\chi_{ijk}^{(2)}$ jako polární tenzor třetího řádu pro BBO nenulový. Krystal BBO je průhledný jako sklo v celé viditelné oblasti, viz úvodní obrázek této kapitoly na str. 138. Pro nelineární optiku je nutné, aby krystal nedegradoval při průchodu intenzivního laserového svazku, pro BBO se udává práh zničení $>5 \text{ GW/cm}^2$. Na tomto krystalu budeme zkoumat proces SPDC, kdy do krystalu kolmo k rozhraní vstupuje čerpací laser s vlnovou délkou 355 nm. Tuto geometrii ukazuje obr. 10.3a), kde θ_c značí úhel sklonu optické osy vůči procházejícímu čerpacímu svazku (kat, *cut-angle*). Krystal se obvykle vyleští tak, aby dopadající svazek vstupoval do krystalu prakticky kolmo k vstupnímu rozhraní.



Obr. 10.3: a) Hlavní rovina krystalu BBO při dopadu čerpacího laseru kolmo na rozhraní. b) Vektorová konstrukce podmínky fázové synchronizace pro SPDC. Úhel α udává směr generovaných fotonů. c) Disperze řádného (n_o) a mimořádného (n_e) indexu lomu BBO ve viditelné oblasti spektra. $\lambda_p = 355 \text{ nm}$.

Podobný obrázek jsme viděli při výkladu anizotropie (viz obr. 5.5). Jejím důsledkem je to, že čerpací svazek s mimořádnou polarizací se bude mírně odklánět dolů směrem od optické osy. Úhel tohoto dvojlomu

(*walk-off*) jsme označili ρ . Jeho velikost se počítá podle vztahu (5.21). V tomto skloněném směru šíření optického svazku míří Poyntingův vektor. Pro určení podmínky fázové synchronizace jsou ale podstatné pouze směry vlnových vektorů \vec{k} .

Pro velikost vlnového vektoru světla s frekvencí ω a indexem lomu n musí platit, $k = n\omega/c$. Aby bylo možné složit vlnový vektor čerpání \vec{k}_p z vlnových vektorů signálního a jalového fotonu, musí platit trojúhelníková nerovnost (obr. 10.3b)). V degenerovaném případě (10.12) ji lze zapsat jako

$$k(2\omega) \leq 2k(\omega) \quad \Rightarrow \quad n(2\omega)\frac{2\omega}{c} \leq 2n(\omega)\frac{\omega}{c}.$$

Po zkrácení dostaneme podmínku, která musí platit pro indexy lomu na frekvenci čerpání a na frekvenci generovaných fotonů z páru, $n(2\omega) \leq n(\omega)$. Tato podmínka je ale v naprostém rozporu s obvyklým chováním indexu lomu, neboť v oblasti normální disperze je index lomu rostoucí funkcí frekvence, jak to pro BBO ukazuje obr. 10.3c). Proto se jako nelineární materiály začaly používat anizotropní krystaly, které splňují PMC díky využití různých indexů lomu pro různé polarizace světla. Podle směru polarizací nazýváme jednotlivé typy procesů (o – řádný svazek, e – mimořádný svazek).

typ 0: o \rightarrow o + o, nelze v tomto případě splnit,

typ I: e \rightarrow o + o, $n_e(2\omega) < n_o(\omega)$,

typ II: e \rightarrow e + o, $n_e(2\omega) < (n_e(\omega) + n_o(\omega))/2$.

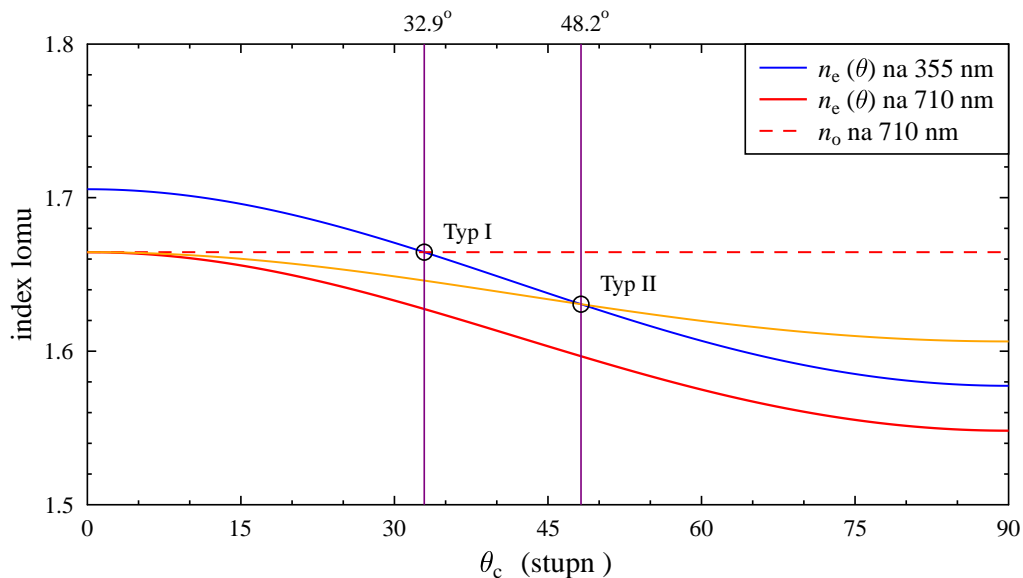
Řádný index lomu v jednoosém krystalu nezávisí na směru \vec{k} . Naproti tomu mimořádný index lomu závisí na úhlu θ mezi vlnovým vektorem \vec{k} a optickou osou. Tuto závislost, která vyplývá z indexového elipsoidu, můžeme matematicky zapsat následovně,

$$n_e^2(\theta) = \frac{n_o^2}{1 - \sin^2 \theta (1 - (n_o/n_e)^2)} = \frac{n_e^2}{1 - \cos^2 \theta (1 - (n_e/n_o)^2)}. \quad (10.16)$$

Výsledek ukazují modrá a červená křivka v obr. 10.4.

Př. 10.1: Mimořádný index lomu jednoosého krystalu: Ze vztahů odvozených pro indexový elipsoid jednoosého krystalu v kapitole 5 odvoďte alternativní vztah pro úhlovou závislost indexu lomu mimořádného svazku (10.16).

Př. 10.2: BBO typ I a II: Pomocí hodnot z obr. 10.3c) ověřte splnění PMC v BBO.



Obr. 10.4: Výpočet mezního úhlu sklonu θ_c pro čerpání SPDC v BBO na 355 nm.

Pro BBO tedy nelze jednoduše sfázovat proces typu 0. Naproti tomu typ I a typ II mají určitý minimální mezní úhel sklonu θ_c , od kterého lze proces sfázovat, viz obr. 10.4. Pro typ I tedy musí být: $\theta_c \geq 32.9^\circ$, pro typ II: $\theta_c \geq 48.2^\circ$. Pro tento minimální úhel je SHG proces kolineární. Účinnost SPDC procesu ale postupně klesá s rostoucím úhlem θ_c . Proto je vhodné zvolit tento úhel co nejmenší. Tomu potom odpovídá malý výstupní úhel pro kužel generovaných fotonových párů. Pro úhel sklonu $\theta_c = 90^\circ$ bude odklon generovaných fotonů od osy čerpacího svazku největší. V našich prvních experimentech, kdy jsme používali krystal LiIO_3 právě v tomto uspořádání čerpání kolmo na optickou osu, byl výstupní úhel SPDC cca. 34° . Pro BBO by byl tento úhel 32° , ale tato kolmá geometrie se u BBO nepoužívá, protože účinnost procesu se pro tento kat krystalu blíží limitně k nule.

10.3.3 Geometrie fotonových párů generovaných v BBO typu I

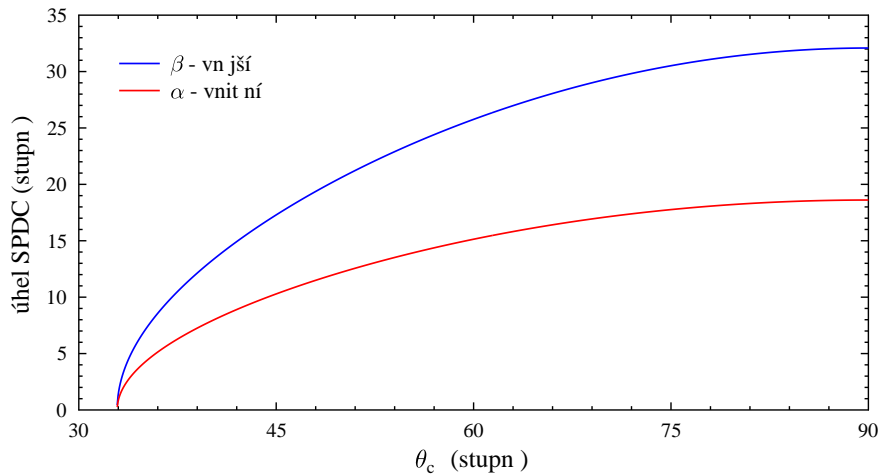
Z poměru k -vektorů spočítáme úhel α generovaných fotonových párů v procesu typu I,

$$n(2\omega)\frac{2\omega}{c} = 2n(\omega)\frac{\omega}{c} \cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\alpha) = \frac{n_e(\theta_c, \lambda_p)}{n_o(\lambda_s)}}. \quad (10.17)$$

Je potřeba si uvědomit, že úhel α spočítaný z PMC podmínky (10.17) platí pro šíření světla uvnitř nelineárního krystalu. Poté, co světlo složené z párů fotonů dorazí na konec nelineárního krystalu, je potřeba ještě dopočítat úhel β lomu světla do vzruchu podle standardního *Snellova zákona*,

$$\sin(\beta) = n_o(\lambda_s) \sin(\alpha).$$

Typický výsledek pro krystal BBO čerpáný na vlnové délce 355 nm je vykreslen na obr. 10.5



Obr. 10.5: Závislost úhlů degenerované SPDC typu I pro BBO krystal na orientaci θ_c optické osy: vnitřní úhel generace (červená čára), výstupní úhel z krystalu (modrá čára). Čerpací vlnová délka je 355 nm.

10.3.4 Geometrie fotonových párů generovaných v BBO typu II

U SPDC typu II v BBO má signální foton řádnou polarizaci a jalový foton (idler) mimořádnou polarizaci. Díky rozdílným indexům lomu obou fotonů budou různé délky jejich k -vektorů a oba fotony budou mít jiný úhel α_o , resp. α_e . Díky tomu tedy musíme řešit soustavu dvou rovnic: první je projekce PCM do roviny kolmo na směr čerpání a druhá rovnice je projekce PCM do směru čerpacího svazku. Zkusme si to zapsat obecně i pro případ, kdy jsou vlnové délky obou generovaných fotonů různé

$$\begin{aligned} \frac{n_o}{\lambda_s} \sin(\alpha_o) &= \frac{n_e(\theta, \lambda_i)}{\lambda_i} \sin(\alpha_e), \\ \frac{n_o}{\lambda_s} \cos(\alpha_o) + \frac{n_e(\theta, \lambda_i)}{\lambda_i} \cos(\alpha_e) - \frac{n_e(\theta_c, \lambda_p)}{\lambda_p} &= 0. \end{aligned} \quad (10.18)$$

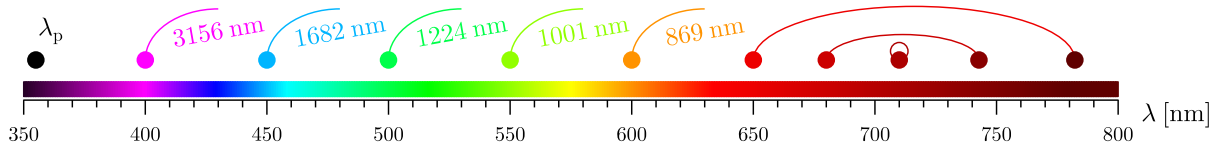
Jak se při řešení postupuje? Nejjednodušší metoda je půlením intervalu. Hledáme úhel α_e v intervalu $(0, \pi/2)$. Pro zvolené α_e dopočítám z geometrie úhel odklonu vektoru \vec{k}_e od optické osy θ a ze vztahu (10.16) spočítám odpovídající index lomu. Z první rovnice určím úhel α_o . Spočítám levou stranu druhé rovnice a podle výsledku se určí správná polovina půleného intervalu. Iterativním postupem dojdou během deseti kroků k dostatečně přesnému výsledku.

10.3.5 Spektra barev v SPDC

Zatím jsme uvažovali hlavně degenerovaný případ SPDC, kdy signální i jakový foton mají stejnou frekvenci ω a tedy i barvu. Za podmínky splnění požadavků fázového sladění mohou ale vznikat i fotonové páry, které si energii rozdělí na různé díly, $2\omega \rightarrow \omega_s + \omega_i$. To můžeme snadno přepsat na podmínku pro vlnové délky následovně,

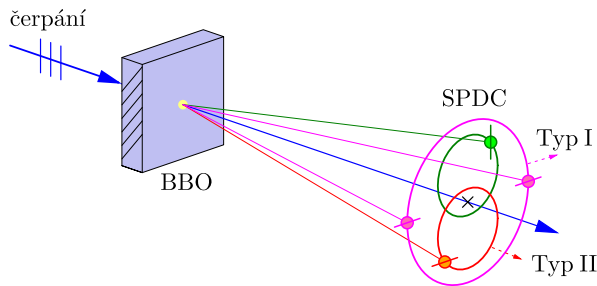
$$1/\lambda_p = 1/\lambda_s + 1/\lambda_i.$$

Spektrum párů fotonů při čerpání vlnovou délkou 355 nm je patrné z obr. 10.6. Vlnové délky signálního a jalového fotonu, které patří do jednoho vygenerovaného páru, jsou spojeny obloučkem. Vlnové délky v IR (tj. mimo zobrazený rozsah) jsou pouze zapsány číselnou hodnotou.



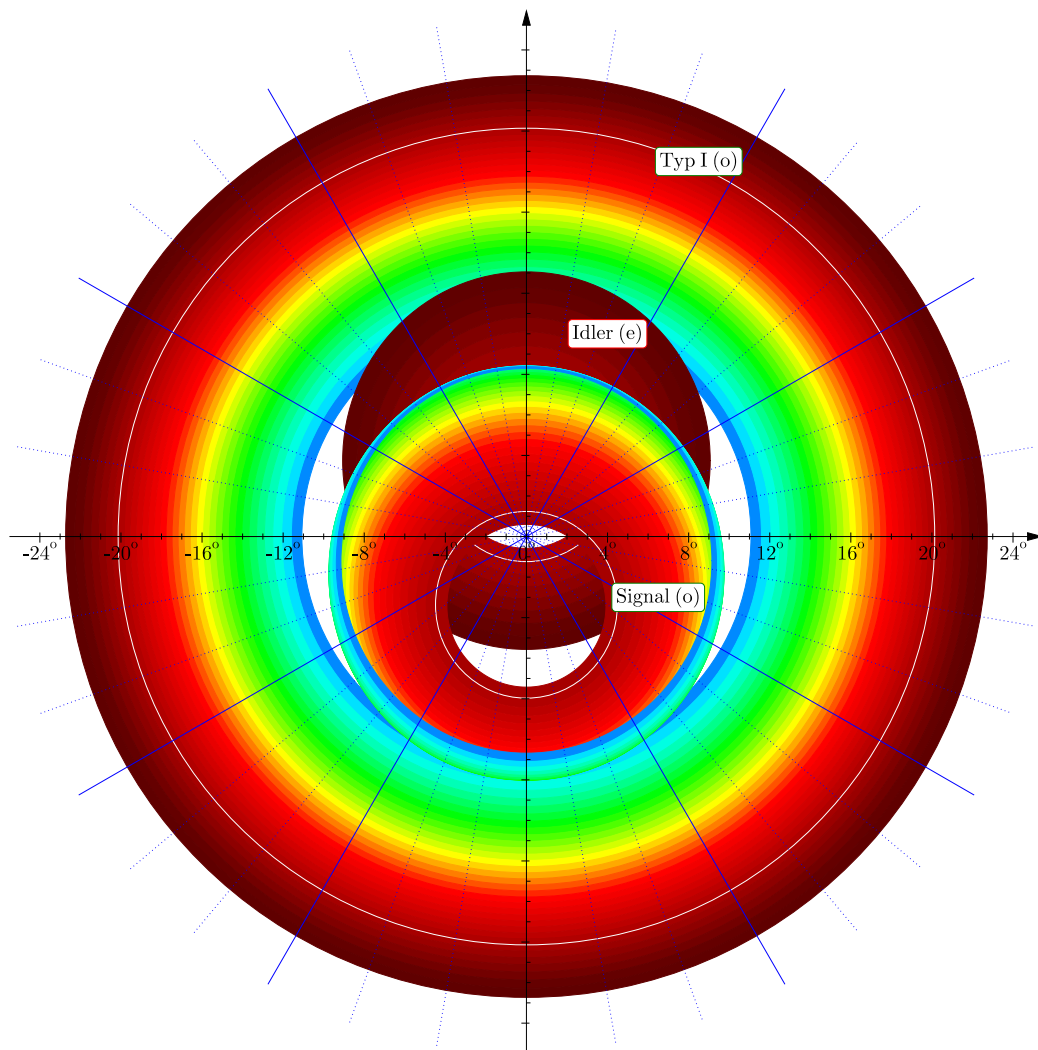
Obr. 10.6: Zákon zachování energie pro spektrum SPDC fotonových párů při čerpání na $\lambda_p = 355$ nm.

Pokud se podíváme očima přes filtr blokující modré světlo na krystal BBO čerpaný modrým nebo UV světlem a budeme pohybovat hlavou, uvidíme na výstupu duhu barev z celého viditelného spektra. Použijeme-li krystal, který může generovat procesy typu I i II současně, potom geometrie výstupních polí bude odpovídat schématu na obr. 10.7. Hlavní rovina BBO je svislá a leží v ní optická osa, Čerpání s vertikální polarizací proto představuje mimořádný svazek. V procesu typu I vznikají dva horizontálně polarizované řádné fotony. Ty leží proti sobě na kuželi s větším výstupním úhlem (označeny fialově). V procesu typu II je v kuželi nad osou mimořádný foton (označen zeleně) a v kuželi pod osou řádný foton (označen červeně).



Obr. 10.7: Geometrie výstupních polí SPDC za BBO krystalem. Směr optické osy krystalu je naznačen na boku. Lineární polarizace jednotlivých svazků je naznačena čárkou.

Ve vzdáleném poli za krystalem pak bude možné na stínítku pozorovat duhu, viz obr. 10.8. Blíže osy jsou dva kužely odpovídající typu II. Na vnějším kuželi typu I leží oba fotony z páru. Degenerovaný případ vlnové délky 710 nm je pro přehlednost v obrázku spekter vyznačen bílou kružnicí.



Obr. 10.8: Výpočet spektra SPDC ve vzdáleném poli za BBO krystalem pro zadané parametry: $\theta = 49.3^\circ$, $\lambda_p = 355 \text{ nm}$.

10.3.6 Efektivita SPDC procesu

Pro krystal BBO se symetrií $3m \equiv C_{3v}$ je tvar tenzoru nelineární susceptibility zapsaný ve zkrácené notaci pomocí multiindexů následovný:

$$\overset{3\leftrightarrow}{\chi}_{\text{BBO}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \chi_{31} & -\chi_{22} \\ -\chi_{22} & \chi_{22} & \cdot & \chi_{31} & \cdot & \cdot \\ \chi_{31} & \chi_{31} & \chi_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right). \quad (10.19)$$

Nulové koeficienty jsou v matici označeny tečkou. Velikost nenulových koeficientů je $\chi_{22} = 2.22 \text{ pm/V}$ a $\chi_{31} = 0.16 \text{ pm/V}$. Význam jednotlivých členů na různých místech matice je následující. V levém čtverci jsou na diagonále členy zodpovědné za procesy typu 0, ostatní členy vlevo umožňují procesy **typu I**. Vpravo jsou procesy **typu II**. Při počítání efektivity není vhodné tenzor (10.19) transformovat do laboratorní soustavy, ztratila by se tím přehlednost. Navíc jde o tenzor třetího řádu zapsaný pomocí multiindexů, který umí správně transformovat málokdo.

Obecné řešení, kdy čerpání, signál i idler mají různé směry, nelze analyticky provést. Proto se pro výpočet efektivity předpokládá pouze kolineární případ a všechny vektory se převedou do os krystalu. Uvažujme směr vlnového vektoru zadaný v souřadnicích os krystalu pomocí sférických úhlů. Jednotkový vektor ve směru vlnového vektoru napíšeme jako

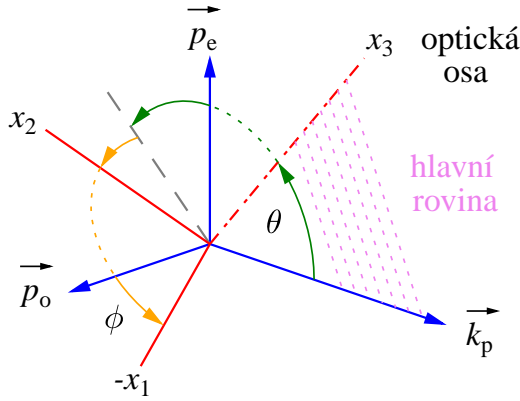
$$\vec{k} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Vlastní stavy polarizace jsou lineární polarizace \vec{D}_o a \vec{D}_e . Jednotkové vektory v těchto směrech určují

směry lineární polarizace,

$$\begin{aligned}\vec{D}_o &\propto \vec{p}_o = (\sin \phi, -\cos \phi, 0) \\ \vec{D}_e &\propto \vec{p}_e = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)\end{aligned}$$

Vektory $\{\vec{k}, \vec{p}_o, \vec{p}_e\}$ tvoří ortonormální bázi. Přitom \vec{p}_o je kolmý na optickou osu, takže má nulovou třetí složku, neboť optická osa má směr $(0, 0, 1)$, viz obr. 10.9.



Obr. 10.9: Označení směrů vektorů optického pole pro popis SPDC v jednoosém krystalu.

Pokud chci vytvořit kvadrát elektrického pole $E^{(2)}$ pro generaci SHG jako sloupcový vektor, kterým budu násobit matici susceptibility (10.19) zprava, budu postupovat následovně:

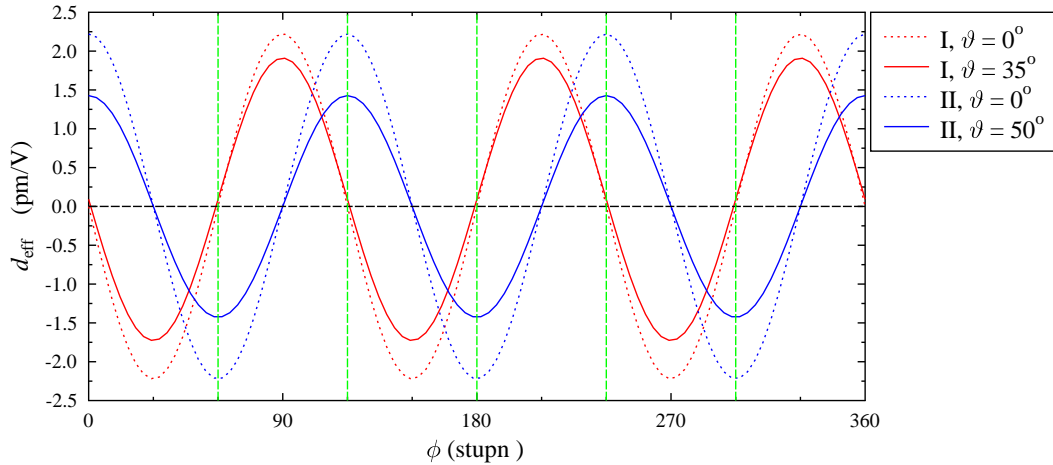
$$E^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}) = [x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_2y_3 + x_3y_2, x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 + x_2y_1].$$

Pro SPDC představuje kvadrát pole $E^{(2)}$ pár fotonů – signální a jalový. Výpočet efektivity je tedy analogický, neboť SPDC je vlastně časovou inverzí generace součtové frekvence.

Př. 10.3: Kolmé vektory:

- Ověřte kolmost vektorů a) $\vec{k} \perp \vec{p}_o \perp \vec{p}_e \perp \vec{k}$;
b) vektor \vec{p}_o je kolmý na optickou osu.

10.3.7 Efektivní nelinearita



Obr. 10.10: Efektivní nelinearita pro dva různé úhly θ . Pro 0° je efektivita nejvyšší (tečkované čáry), ale procesy nelze sfázovat. Pro 35° resp. 50° je efektivita menší, ale lze procesy sfázovat (plné čáry).

Koeficient efektivní nelinearity získáme vynásobením matice susceptibility (10.19) zleva polarizací čerpání a zprava kvadrátem polarizace fotonových párů,

$$d_{\text{eff}}(\vec{x} + \vec{y} \rightarrow \vec{z}) = \vec{z} \cdot \overset{3\leftrightarrow}{\chi} \cdot E^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}). \quad (10.20)$$

V objemových krystalech jsou možné pouze dva typy fázové synchronizace: typ I a typ II. Pro ně dostaneme závislost efektivní nelinearity na směru šíření a polarizace, které jsou zadané úhly (θ, ϕ) .

$$\begin{aligned}
 e \rightarrow o + o : \quad d_{\text{eff}}^{\text{I}} &= \vec{p}_e \cdot \overset{3\leftrightarrow}{\chi} \cdot E^{(2)}(\vec{p}_o, \vec{p}_o) \\
 &= -\chi_{31} \sin \theta + \chi_{22} \cos \theta \sin(3\phi), \\
 e \rightarrow e + o : \quad d_{\text{eff}}^{\text{II}} &= \vec{p}_e \cdot \overset{3\leftrightarrow}{\chi} \cdot E^{(2)}(\vec{p}_o, \vec{p}_e) \\
 &= \chi_{22} \cos^2 \theta \cos(3\phi).
 \end{aligned} \tag{10.21}$$

Efektivní nelinearita obou typů procesů je zakreslena v obr. 10.10 jako funkce úhlu ϕ rotace kolem optické osy. Maxima obou procesů se opakují po 60° a je jich dokola šest. Pro optimalizaci procesů typu I i II se uvažují dominantní členy s větším koeficientem χ_{22} . Proto je pro typ I optimální úhel rotace krystalu $\phi = 90^\circ$. Pro typ II je optimální $\phi = 0^\circ$. Pro krystal říznutý na typ II bude přesto svítit i typ I ovšem s koeficientem χ_{31} a bude tedy o řád slabší.

10.3.8 Praktické poznámky pro generaci SPDC v jednoosých krystalech

- Podmínka fázové synchronizace nezávisí na úhlu ϕ , ale efektivita NL procesu na něm závisí.
- Pro směry interagujících polí lze odvodit přesné analytické výrazy, pokud je mimořádný (extraordinary) nanejvýš jeden svazek.
- V ostatních případech je potřeba provést řešení PMC numericky. Výsledkem je hladká závislost, která se dá proložit empirickou závislostí s přesností 0.2° . Tato přesnost pro návrh geometrie použití nelineárního krystalu obvykle stačí.
- Častěji používané krystaly mají pro závislost indexů lomu n_o, n_e na vlnové délce známy Sellmeierovy vztahy. Je ale potřeba použít vztahy dodané výrobcem krystalu, neboť zbytkové příměsi obsažené v materiálu mohou tyto hodnoty mírně ovlivňovat.
- Je třeba mít stále na paměti, že PMC řeší směry generace fotonových párů uvnitř krystalu. Nás samozřejmě bude zajímat směr fotonů, které již opustí nelineární krystal. Na rozhraní je tedy třeba splnit lom světla podle Snellova zákona.
- Pro optimalizaci je výhodné pokrýt vstupní stěnu krystalu antireflexní vrstvou pro čerpací vlnovou délku a výstupní stěnu AR vrstvou jak pro čerpání, tak pro generované fotonové páry, aby se omezily zpětné odrazy. AR na výstupu musí počítat s tím, že generované fotony neprocházejí výstupním rozhraním kolmo.
- Obecně je třeba vzít do úvahy i závislost parametrů krystalu na teplotě a případně dalších vnějších vlivech (tlak, magnetické pole). Teplotní stabilizace je extrémně důležitá pro periodicky pólované materiály, které budeme diskutovat v následující sekci.

10.4 Podmínka kvazi fázové synchronizace

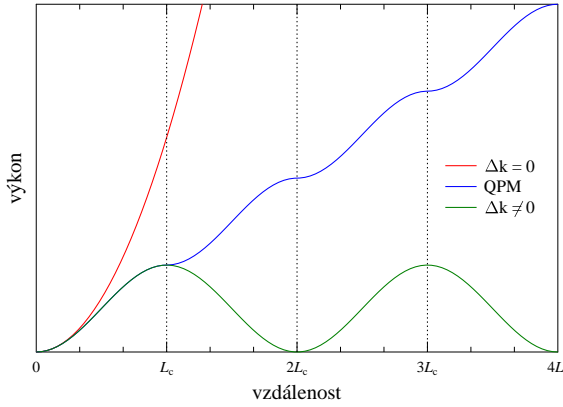
Podmínka fázové synchronizace PMC fyzikálně odpovídá prostorové rezonanci mezi vlnou nelineární polarizace, která je zdrojovým členem ve vlnové rovnici (10.9), a produkovaným optickým polem na téže frekvenci. Pokud ale není PCM splněna, je efektivita nelineárního procesu velmi slabá. Např. pro SHG to můžeme zapsat jako

$$I^{\text{SHG}} = I_{\text{max}} \frac{\sin^2(\Delta k L/2)}{(\Delta k L/2)^2}, \quad (10.22)$$

kde $\Delta \vec{k} = \vec{k}_3 - \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ představuje rozladění k -vektorů a L je délka nelineárního prostředí.

Př. 10.4: Odhad přípustného rozladění: Výše uvedený vztah efektivit představuje kvadrát funkce sinc, která je definovaná jako $\sin(x)/x$. Odhadněte možné fázové rozladění pro NL krystal délky 1 cm.

Podmínka (10.22) znamená, že jsme v nelineární optice limitováni parametry dostupných krystalů, které pak určují geometrii probíhajících procesů. Toto je velmi omezující hlavně u nelineárních vlnovodů, kde jsme z principu limitováni na kolineární geometrii. Pokud je při kolineární geometrii $\Delta k \neq 0$, bude intenzita SHG oscilovat s periodou $2L_c$, jak to ukazuje obr. 10.11. Vzdálenost L_c se označuje jako koherenční vzdálenost, na které dochází k nárůstu SHG výkonu, pak začne výkon opět klesat k nule.



Obr. 10.11: Závislost výkonu generované druhé harmonické na vzdálenosti průchodu čerpacího svazku v nelineárním krystalu. Červeně je zobrazen kvadratický vzestup při přesném sfázování, zeleně jsou zakreslené oscilace při výkonu při nedokonalém sfázování. Modrá křivka QPM odpovídá splnění podmínky kvazi fázové synchronizace a přibližně se dá označit jako lineární nárůst generovaného výkonu.

Striktní podmínka fázové synchronizace nedovoluje generovat v objemových krystalech procesy typu 0. To jsou procesy, kdy mají všechny tři interagující fotony stejnou polarizaci. Z principu má tedy tato interakce nejvyšší nelineární koeficient. Proto se začaly používat fotonické struktury z feroelektrických materiálů jako je PP-KTP (periodicky pólované KTP, KTiOPO_4), kde platí alternativní podmínka kvazi fázové synchronizace (QPM - *quasi phase-matching*) [21, 22, 23]. Můžeme si to představit tak, že se po vzdálenosti L_c změní orientace feroelektrické domény, tím se otočí znaménko nelineární interakce a intenzita SHG začne opět stoupat. Vzestup výkonu generovaného pole je tedy prakticky lineární s délkou krystalu, viz modrá křivka v obr. 10.11.

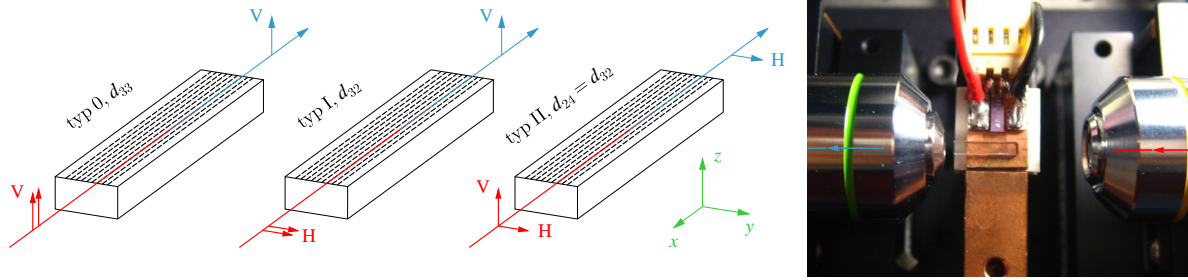
V nelineárním materiálu musíme vytvořit strukturu, kde se mění směr domény s periodou $\Lambda = 2L_c$, typicky 5-15 μm . Tato perioda je daná řešením podmínky $\Delta k L_c = \pi$. Tyto krystaly se proto nazývají *periodicky pólované*. Samotný krystal pak dodává k podmínce fázové synchronizace vlnový vektor $|\vec{K}| = 2\pi/\Lambda$. Tato metoda se hojně využívá u vlnovodných struktur, kde jsme z podstaty vlnovodného šíření vázáni pouze na kolineární procesy. Podmínku kvazi fázové synchronizace pro SPDC [24, 25, 26, 27, 28] můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i + m\vec{K}, \quad \text{kde } m = 1, 2, \dots \quad (10.23)$$

Díky tomu, že vektor \vec{K} představuje volný parametr, můžeme si navrhnout strukturu tak, aby v ní probíhal požadovaný proces při započítání celočíselného násobku vektoru \vec{K} . V naší laboratoři jsme používali PP-KTP s vlnovody dodané od firmy AdvR¹ s periodou pólování $\Lambda = 7.62 \mu\text{m}$. Zde probíhají procesy následovně: typ II - první řád ($m = 1$), typ 0 - druhý řád ($m = 2$), typ I - třetí řád ($m = 3$).

Vlnovody se vyrábějí obvykle v sérii. Na jednom vzorku krystalu (čipu) je vyrobeno řádově 50 vlnovodů, které jsou dostatečně vzdálené, aby bylo možné pomocí mikroskopových objektivů do jednotlivých

¹<http://www.advr-inc.com/>



Obr. 10.12: Typické experimentální uspořádání s vlnovodem KTP pro generaci druhé harmonické (800 nm + 800 nm → 400 nm). Vlevo je šipkami zakreslen směr polarizace vstupních polí (červeně) a SHG (modře). Vpravo je fotografie čipu umístěného na teplotně stabilizovaný prst ke kterému směřují mikroskopové objektivy. Šipky naznačují směry šíření optických polí.

vlnovodů navazovat čerpací svazek nezávisle. Větší počet vlnovodů se dělá jednak proto, že výrobní proces je značně náročný a ne vždy se podaří dodržet požadovanou periodu a regularitu vlnovodu. Dalším důvodem je, že vlnovod má příčné rozměry $\approx 5\mu\text{m}$. Pokud se na vstupní nebo výstupní hraně vytvoří nějaký defekt, nedá se tento vlnovod již použít. Z celkového počtu vlnovodů na jednom čipu se pak dá pro praktické použití vybrat pouze několik vhodných. Naštěstí podmínku fázové synchronizace lze alespoň v malém intervalu ladit pomocí teplotní závislosti indexů lomu. Toho se využívá jak ve vlnovodech KTP, tak i v objemových krystalech lithium-niobátu, kde je závislost na teplotě obzvláště citlivá. Na druhou stranu má tato vlastnost i svá negativa. Pro udržení sfázování se musí vzorek stabilně udržovat na přesně dané teplotě.

Uspořádání atomů v krystalu KTP odpovídá ortorombické soustavě (kosočtverečná) s grupou symetrie $mm2 \equiv C_{2v}$. KTP je typický dvouosý materiál a proto jsme jeho indexy lomu ve viditelné oblasti a tvar jeho indexové plochy již diskutovali v kapitole 6 na str. 78. Symetrie krystalu je zodpovědná za tvar jeho tenzoru nelineární susceptibility:

$$\overset{3\leftrightarrow}{\chi}_{\text{KTP}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \chi_{31} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \chi_{32} & \cdot & \cdot \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right). \quad (10.24)$$

V literatuře se udává velikost nenulových členů $\chi_{33} = 10.7 \text{ pm/V}$ a $\chi_{32} = 2.65 \text{ pm/V}$. Největší nelineární koeficient χ_{33} , který dává do interakce tři pole, která jsou všechna orientovaná ve směru krystalografické osy z tohoto materiálu, je zodpovědný za procesy typu 0. Typický příklad schématu pro generaci SHG nebo SPDC ve vlnovodu KTP ukazuje obr. 10.12. Volbou nastavení polarizace čerpání a navázaného módu je možné generovat všechny tři různé procesy typu 0, I i II. Poznatky o tomto PP-KTP jsme publikovali v článku [29], kde je možné dohledat i další základní reference z oblasti periodicky pólovaných materiálů.

10.5 Entanglement v polarizaci

Termín *entanglement* (kvantová provázanost) [30] je ryze kvantový jev, který nemá v klasické fyzice obdoby a je zásadní pro kvantovou informatiku i kvantové komunikace. Pro jednoduchost se omezme pouze na čisté stavy. Předpokládejme dva podsystémy v čistých stavech $|\Theta_1\rangle$ a $|\Theta_2\rangle$ (například dva fotony s přesně danou polarizací). Je třeba si uvědomit, že i jeden jediný foton může mít zcela přesně definovaný polarizační stav, jenž lze změřit pomocí stejného polarizačního děliče, který bychom použili pro měření polarizace světla s klasickou intenzitou. Nejsme-li schopni celkový stav systému obou fotonů separovat na součin stavů dvou částic $|\Theta\rangle = |\Theta_1\rangle \otimes |\Theta_2\rangle$, označujeme stav těchto dvou fotonů jako entanglovaný.

Vzniknou-li v nějakém procesu dvě entanglované částice, např. dva fotony v SPDC procesu, jsou provázané a musí být popisovány společně pomocí jediné vlnové funkce. Pokud na jedné částici provedeme měření, dojde ke kolapsu této společné vlnové funkce a druhá částice se vyprojektuje do určitého stavu v závislosti na výsledku měření na první částici. K tomuto efektu dojde i v případě, když jsou tyto dvě částice od sebe na kilometry daleko.

Předpokládejme jeden typický Bellův stav [31] fotonového páru, který je entanglovaný v polarizaci,

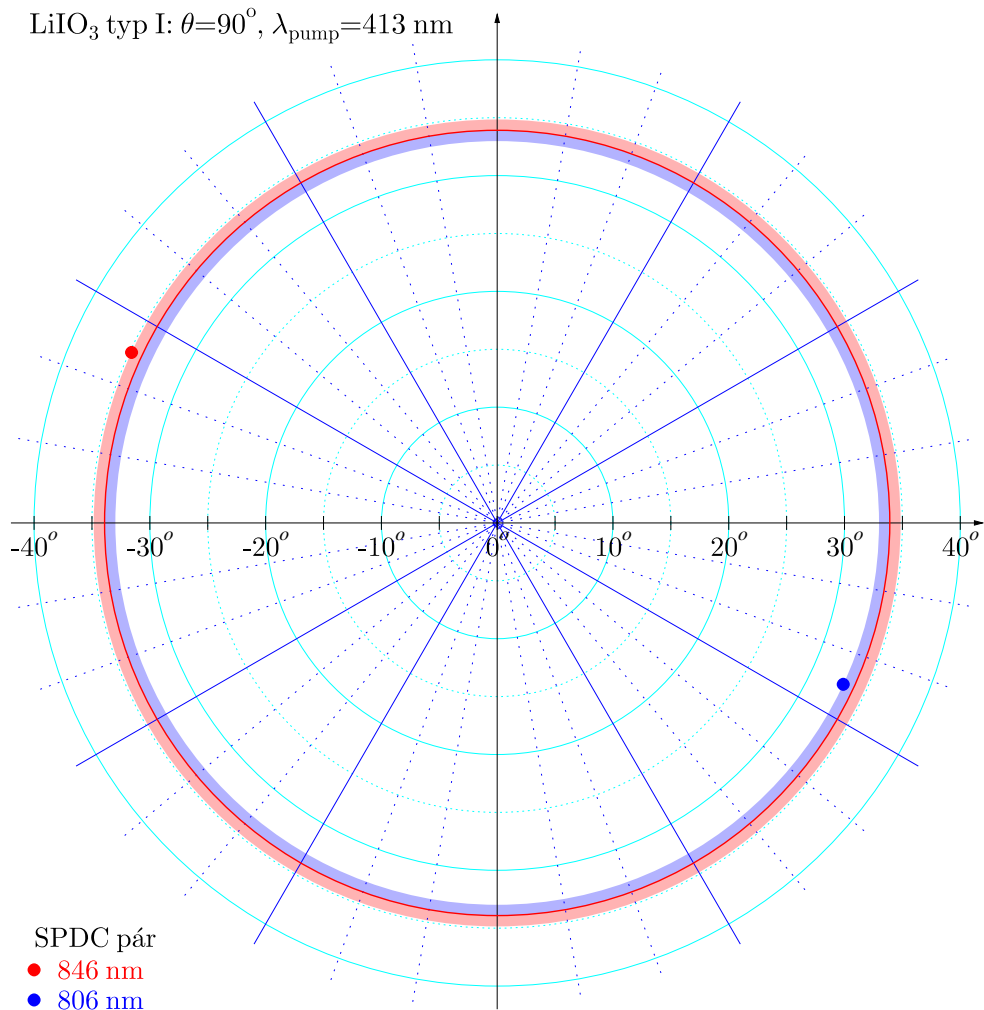
zapsaný jako

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H_1\rangle|V_2\rangle - |V_1\rangle|H_2\rangle), \quad (10.25)$$

kde $|H\rangle$ a $|V\rangle$ představují dva na sebe kolmé stavy polarizace jednotlivých fotonů (horizontální a vertikální lineární polarizace) a indexy označují prostorový mód. Změříme-li, že první foton je polarizován například ve stavu $|H\rangle$, druhý foton bude mít polarizaci $|V\rangle$ a naopak. Před měřením nejsme schopni říci, jak bude který foton polarizován. O tom se rozhodne až v okamžiku měření na jedné z částic – *projeckce*. Dopředu známe pouze pravděpodobnosti možných výsledků měření. V případě vyváženého stavu, jak je zapsán stav $|\Psi^-\rangle$, je pravděpodobnost výsledku $|H\rangle$, nebo $|V\rangle$ v poměru 50%:50%. Ačkoliv se na první pohled zdá, že kolaps vlnové funkce způsobuje šíření informace od měřené částice k té k druhé částici nadsvětelnou rychlostí, samotný princip kolapsu vlnové funkce a entanglementu neporušuje princip kauzality. Nelze ho totiž použít k přenosu informace rychlostí větší, než je rychlost světla.

10.5.1 Typ I ($e \rightarrow o + o$)

Při nekolineárním procesu SPDC jsou generovány fotony v celém spektru s různými vlnovými délkami. Díky symetrii musí ležet jednotlivé spektrální komponenty generovaných fotonů na povrchu kužele s osou ve směru čerpacího svazku, jak to ukazuje obr. 10.13. Podmínka fázové synchronizace tedy udává pro každou vlnovou délku generovaných fotonů jeden konkrétní vrcholový úhel kužele. Chceme-li získat fotonové páry se stejnou vlnovou délkou obou fotonů, musíme vybírat pomocí clonek dvojice fotonů, které jsou emitovány na protilehlé strany povrchu kužele, který odpovídá degenerované frekvenci $\omega_s = \omega_i = \omega_p/2 = \omega$.



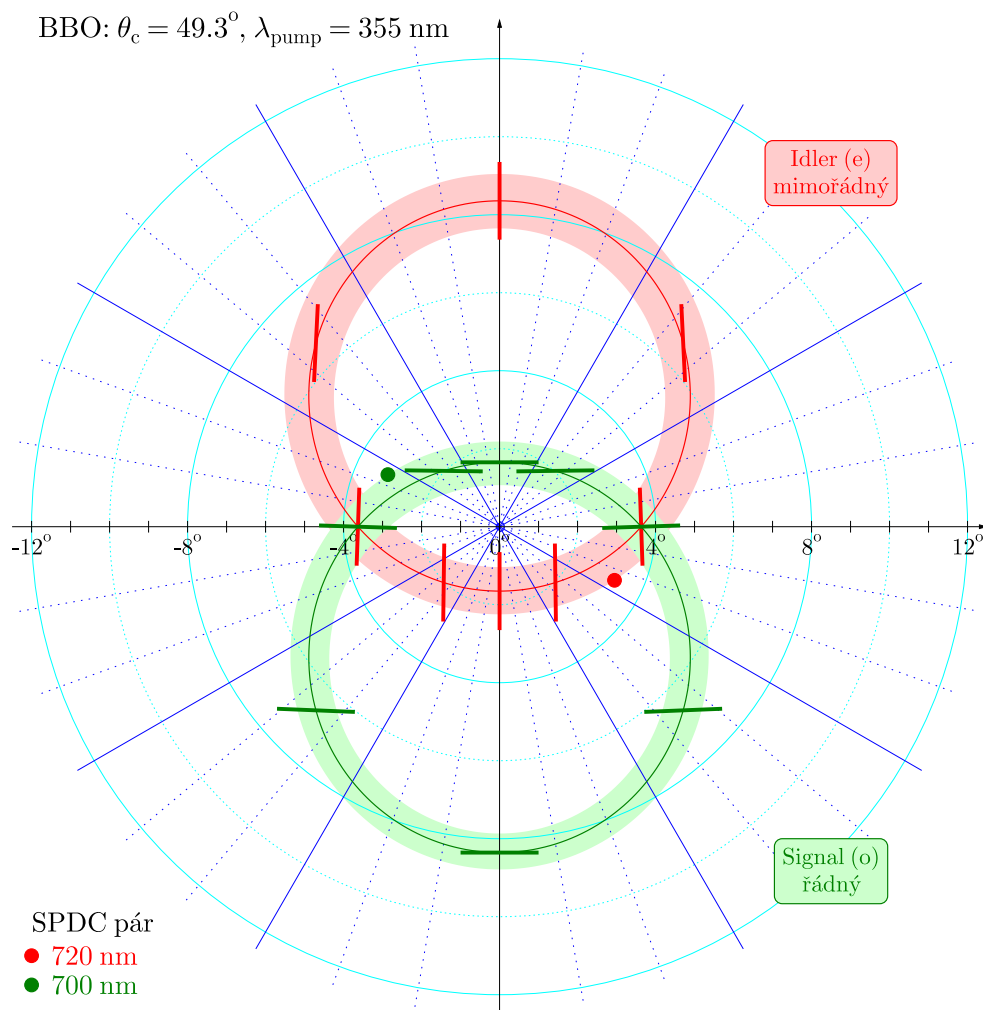
Obr. 10.13: Spektrum SPDC typu I generované v krystalu LiIO₃ při čerpání na vlnové délce 413 nm kolmo na osu krystalu. Úhly v obrázku jsou definovány vůči směru čerpacího svazku.

V kolineárním případě se kužel limitně zúží a přechází na polopřímku. Generované fotony vychází z krystalu stejným směrem jako čerpací svazek, což přináší obtíže s oddělením generovaného slabého signálu od silného čerpacího svazku. Polarizace nově vzniklých fotonů je v procesu typu I kolmá k polarizaci čerpacího svazku. Jedním krystalem typu I tedy nelze přímo generovat fotonové páry entanglované v polarizaci. Vzniká čistý stav $|HH\rangle$.

10.5.2 Typ II ($e \rightarrow o + e$)

V tomto případě dochází ke generaci dvou fotonů s polarizacemi na sebe navzájem kolnými. Fotony z páru opouští krystal ve směru povrchů dvou kuželů, které jsou symetrické vůči čerpacímu svazku. V závislosti na směru krystalických os nelineárního krystalu vůči rozhraní a směru dopadu čerpacího svazku rozlišujeme několik možností nekolineárního sfázování: kužely signálních a jalových fotonů se vůbec neprotínají, kužely se protínají v jediném místě, kterým ze symetrie musí být osa čerpacího svazku, kužely se protínají ve dvou směrech. Tento případ je zobrazený na obr. 10.14. Dvoufotonový stav entanglovaný v polarizaci lze pozorovat v tom případě, když pomocí clonek vybíráme fotony právě z těchto průsečíků. Míra entanglementu je zde ale snížena částečnou spektrální rozlišitelností, protože navázaná spektra emitovaných fotonů jsou různá. To vyplývá z odlišné úhlové disperze obou fotonů, což je vidět z šířek kružnic v obr. 10.14. Zobrazená šířka odpovídá spektrální šířce 20 nm.

Pokud se podíváme na polarizaci generovaných fotonů, je zřejmé, že řádná polarizace musí být vždy kolmá na optickou osu. V zobrazeném případě $\theta_c = 49.3^\circ$, optická osa protne rovinu, kde sledujeme vzdálené pole generovaných fotonů. Mimořádná polarizace musí směřovat k tomuto bodu a řádná polari-



Obr. 10.14: Spektrum SPDC typu II generované v krystalu BBO při čerpání na vlnové délce 355 nm, kat 49.3° . Úhly v obrázku jsou definovány vůči směru čerpacího svazku. Barevné proužky představují spektrální šířku 20 nm.

zace musí být k tomuto směru kolmá. Na tomto místě provedeme pro názornost výpočet směrů polarizace.

Př. 10.5: Výpočet polarizace fotonových párů SPDC v BBO typu II:

V tomto příkladu chceme shrnout výpočty, které jsou nutné pro vykreslení obr. 10.14. Bude nutné pracovat s vektory ve dvou soustavách. V čárkované laboratorní soustavě je směr čerpacího laseru v ose x'_3 . V příčné rovině je horizontální směr x'_1 a vertikální směr vzhůru x'_2 .

Nečárkovaná soustava je spojená s prvky symetrie krystalu. Optická osa krystalu \vec{z} je shodná se směrem osy x_3 a je skloněná o úhel θ_c vůči procházejícímu čerpacímu laseru. Protože popisujeme proces typu II v BBO kde je optimální efektivita tohoto procesu pro $\phi = 0$, splývá horizontální osa x_1 s x'_1 . Transformační matice je tedy pouze rotace $\vec{x}' = \overleftarrow{R}(\theta_c) \cdot \vec{x}$. Přejít mezi souřadnými soustavami si můžeme ukázat na příkladu transformace optické osy,

$$\vec{z}' = \overleftarrow{R}(\theta_c) \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ 0 & -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, \sin \theta_c, \cos \theta_c).$$

Nyní vyřešíme PMC podmínku (10.18) a pro vybraný úhel sklonu ξ vůči horizontální rovině získáme jednotkový vlnový vektor idleru a úhel α_e odklonu od osy čerpacího svazku (viz obr. 10.15).

$$\vec{k}'_e \propto \vec{s}'_e = (\cos \xi \sin \alpha_e, \sin \xi \sin \alpha_e, \cos \alpha_e), \quad \text{lab. soustava.}$$

Abychom mohli určit index lomu idleru, je nutné znát úhel který svírá k -vektor s optickou osou. Skalární součin obou vektorů zapsaný v laboratorní soustavě nám dává kosinus tohoto úhlu θ ,

$$\cos \theta = \vec{s}'_e \cdot \vec{z}' = \sin \xi \sin \alpha_e \sin \theta_c + \cos \alpha_e \cos \theta_c.$$

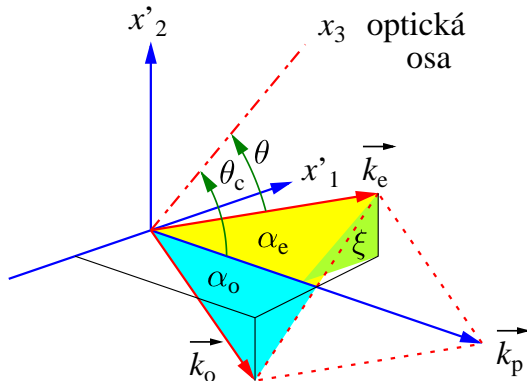
Walk-off

Protože idler má mimořádnou polarizaci, je potřeba dopočítat jeho dvojlom. U jednoosého negativního krystalu BBO dojde vůči $\vec{k}_e \parallel \vec{s}_e$ k odklonu Poyntingova vektoru od optické osy. V hlavní rovině leží optická osa, vektor \vec{k}_e skloněný o úhel θ i Poyntingův vektor odkloněný o úhel dvojlomu ρ . Odklon Poyntingova vektoru od optické osy je tedy daný rozdílem obou úhlu ($\theta - \rho$), jak bylo diskutováno v sekci 5.5 s výsledným vztahem (5.21). Pro jistotu tento vztah zopakujeme

$$\theta - \rho = \arctan \left[(n_o/n_e)^2 \tan \theta \right]$$

Dvojlom se snáze počítá v soustavě symetrie krystalu (nečárkovaná soustava). Hlavní rovina je pootočená vůči optické ose o úhel ψ , takže můžeme zapsat přepočtený vlnový vektor do os krystalu následovně

$$\vec{s}_e = \overleftarrow{R}(-\theta_c) \cdot \vec{s}'_e \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos \psi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha_e \cos \xi \\ \sin \alpha_e \sin \xi \cos \theta_c - \cos \alpha_e \sin \theta_c \\ \sin \alpha_e \sin \xi \sin \theta_c + \cos \alpha_e \cos \theta_c \end{pmatrix}. \quad (10.26)$$



Obr. 10.15: Označení úhlů popisujících prostorovou geometrii SPDC v jednoosém krystalu: ξ – zvolený úhel sklonu pro výpočet úhlů α_e, α_o .

Úhel ψ lze nyní určit z poměru prvních dvou složek,

$$\frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{\sin \alpha_e \sin \xi \cos \theta_c - \cos \alpha_e \sin \theta_c}{\sin \alpha_e \cos \xi}.$$

Ted' již můžeme zapsat jednotkový vektor ve směru Poyntingova vektoru idleru,

$$\vec{S}_e = (\cos \psi \sin(\theta - \rho), \sin \psi \sin(\theta - \rho), \cos(\theta - \rho)), \quad \text{soustava symetrie krystalu,}$$

který si vynásobením s maticí rotace převedeme do laboratorní soustavy.

Idler

Polarizaci idleru určíme ze znalosti, že elektrické pole \vec{D}_e musí kmitat v rovině dané optickou osou \vec{z} a směrem \vec{s} . Jednotkový vektor ve směru polarizace označujeme \vec{p}_e . Můžeme ho tedy zapsat jako lineární kombinaci obou vektorů, $\vec{p}_e = a\vec{z} + b\vec{s}_e$. Víme že elektrické pole kmitá kolmo na směr vlnového vektoru, $\vec{p}_e \perp \vec{s}_e$. Takže $\vec{p}_e \cdot \vec{s}_e = 0$. Po dosazení dostaneme řešení

$$\vec{p}_e \propto \vec{z} - \cos \theta \vec{s}_e,$$

které musí platit v libovolné vztažné soustavě. Výsledek je sice nenormovaný, ale směr je správný.

Signál

Signální foton je řádný a má tedy kolineární vlnový vektor a Poyntingův vektor. V laboratorní soustavě je můžeme zapsat:

$$\vec{S}'_o \parallel \vec{s}'_o = (-\cos \xi \sin \alpha_o, -\sin \xi \sin \alpha_o, \cos \alpha_o).$$

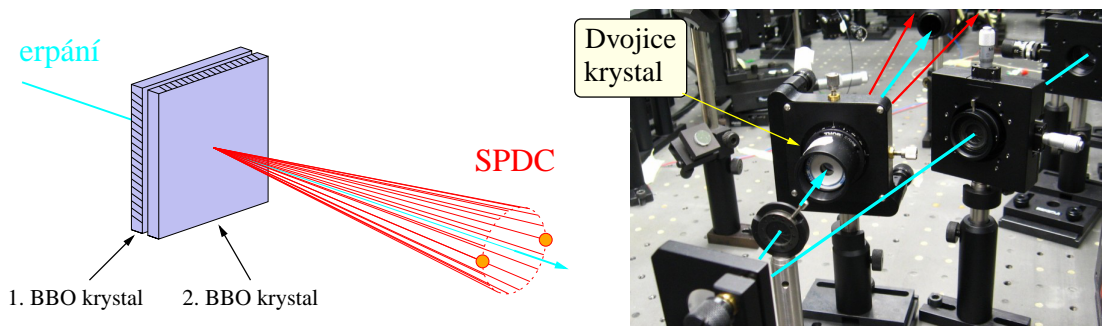
Jednotkový vektor ve směru řádné polarizace \vec{D}_o můžeme spočítat jednoduše jako vektorový součin vlnového vektoru a směru osy,

$$\vec{D}_o \propto \vec{p}_o = \vec{s}'_o \times \vec{z}'.$$

Shrnutí

Výsledek lze shrnout následovně. 1) Fotony, které jsou generované daleko od hlavní roviny čerpacího laseru mají polarizace o pár stupňů pootočené vůči horizontálnímu a vertikálnímu směru. 2) Dvojlom způsobí odklon šíření idleru od optické osy, což způsobí to, že degenerované SPDC fotony se uvnitř BBO krystalu šíří prakticky po stejném kuželi. Pokud uvažujeme krystal dlouhý 1 mm, vytvoří fotonové páry na konci krystalu kolečko o průměru 20 μm .

10.5.3 Kwiatův zdroj entanglovaných fotonových párů



Obr. 10.16: Schéma uspořádání dvou krystalů BBO ve zdroji entanglovaných párů podle P. G. Kwiat. Směr optické osy je naznačen na boční straně krystalu.

P. G. Kwiat navrhnul experimentální uspořádání pro efektivnější generaci polarizačně entanglovaných fotonových párů [32, 33]. Umístil za sebe dva totožné krystaly typu I vzájemně otočené o 90° , viz

obr. 10.16. Každý z krystalů může být buzen pouze lineární složkou polarizace čerpacího svazku, která odpovídá mimořádné polarizaci. Tento směr lineární polarizace tedy leží v hlavní rovině krystalu. Takto se označuje rovina určená směrem vektoru \vec{k} a optickou osou krystalu. Pokud je dvojice krystalů čerpána laserovým svazkem s obecně eliptickou polarizací, budou jednotlivé krystaly generovat fotony v poměru rozkladu intenzity obecné polarizace čerpacího svazku do horizontálního a vertikálního směru. Generace může probíhat v obou krystalech současně. Jsou-li krystaly dostatečně tenké, dráhy vygenerovaných fotonů se překrývají. Díky tomu pak nelze po detekci fotonu určit, ve kterém z krystalů fotonový pár vzniknul. Generované fotonové páry mají polarizaci popsanou koherentním součtem příspěvků $|HH\rangle$ z jednoho a $|VV\rangle$ z druhého krystalu. Tímto způsobem lze generovat přímo polarizačně entanglované stavy,

$$|\Psi\rangle = \cos \alpha |HH\rangle + e^{i\beta} \sin \alpha |VV\rangle. \quad (10.27)$$

Parametry α a β závisí na polarizaci čerpacího svazku. Poměr mezi $|HH\rangle$ a $|VV\rangle$ složkami ovlivňuje parametr α , který je možno plynule měnit rotací půlvlnné destičky (HWP) v čerpacím svazku. Parametr β označuje fázový člen, který lze ovlivnit náklonem čtvrtvlnné destičky (QWP). Je-li $\alpha = 0$ nebo $\alpha = \pi$, potom generuje vždy jen jeden krystal a výsledkem jsou separabilní stavy. V případě $\alpha = \pi/2$ generují oba krystaly stejnou měrou, což dává vzniknout maximálně entanglovanému stavu. Při nastavení v intervalu mezi těmito limitními hodnotami se generují stavy částečně entanglované.

10.6 Shrnutí

- Rozvoj nelineární optiky byl umožněn díky rozvoji laserové techniky.
- ATD..

10.7 Příklady

Př. 10.6: Mimořádný index lomu jednoosého krystalu:

Ze vztahů odvozených pro indexový elipsoid jednoosého krystalu v kapitole 5 odvod'te alternativní vztah pro úhlovou závislost indexu lomu mimořádného svazku (10.16).

DODATKY

Příloha A

Matematický dodatek

A.1 Opakování vektorové algebry

V tomto dodatku si zopakujeme základní matematické vztahy vektorové algebry, které se v textu často vyskytují. Podrobnější vysvětlení je třeba hledat v učebnicích základního kurzu matematiky. Jako přehled matematiky lze doporučit knihu [5].

A.1.1 Násobení

Ve fyzice pracujeme se třemi *typy součinů dvou vektorů* \vec{a} a \vec{b} . Uvedme si jejich názvy a značení.

název operace	matematický zápis	typ výsledku
diadický součin	$\vec{a}\vec{b}$	tenzor
skalární součin	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	skalár (číslo)
vektorový součin	$\vec{a} \times \vec{b}$	vektor

Tyto výrazy si rozepíšeme v kartézských souřadnicích:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\vec{b})_{ij} &= a_i b_j, \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \\ \vec{a} \times \vec{b} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).\end{aligned}$$

Pro úpravy několikanásobných součinů můžeme použít následující vztahy

$$\begin{aligned}\vec{a}\vec{b} \cdot \vec{c} &= (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}), & \text{výsledek je vektor ve směru původního vektoru } \vec{a}. \\ \vec{d} \cdot \vec{a}\vec{b} \cdot \vec{c} &= \underbrace{(\vec{d} \cdot \vec{a})}_{\eta} \underbrace{(\vec{b} \cdot \vec{c})}_{\xi} = \eta \xi, & \text{výsledek je skalár.} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}, & & \text{smíšený součin, udává objem tělesa vymezeného vektory.} \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}), & \text{dvojitý vektorový součin.}\end{aligned}$$

A.1.2 Derivace

Ve 3D prostoru definujeme tři druhy *prostorových derivací*.

gradient:	$\text{grad} \equiv \nabla$	zvyšuje řád tenzoru o jedna,
divergent:	$\text{div} \equiv \nabla \cdot$	snížíze řád tenzoru o jedna,
rotace:	$\text{rot} \equiv \nabla \times$	minimálně na vektor, řád tenzoru se nemění.

Tyto derivace aplikujeme na skalár φ a vektor \vec{A} . Výsledek si zapíšeme v kartézských souřadnicích.

$$\begin{aligned}\nabla\varphi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi(\vec{r}), \\ \nabla\cdot\vec{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z\right), \\ \nabla\times\vec{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y, \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z, \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right).\end{aligned}$$

A.1.3 Dvojité derivace

Ve fyzice se často používají pouze některé dvojité derivace. Uvedme si dvě relace, které pro ně platí

$$\begin{aligned}\Delta &\equiv \nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ \nabla\times\nabla\times\vec{A} &= \nabla\nabla\cdot\vec{A} - \nabla\cdot\nabla\vec{A} = \nabla\nabla\cdot\vec{A} - \Delta\vec{A}.\end{aligned}$$

Operátor Δ značí Laplaceův operátor. Derivace se provádějí postupně od té nejbližší k derivované funkci. Dále platí identická nulovost dvou následujících dvojitých derivací

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\nabla\times\vec{A} &= 0, \\ \nabla\times\nabla\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Příloha B

Geometrický dodatek

B.1 Vztahy pro elipsu ve 2D

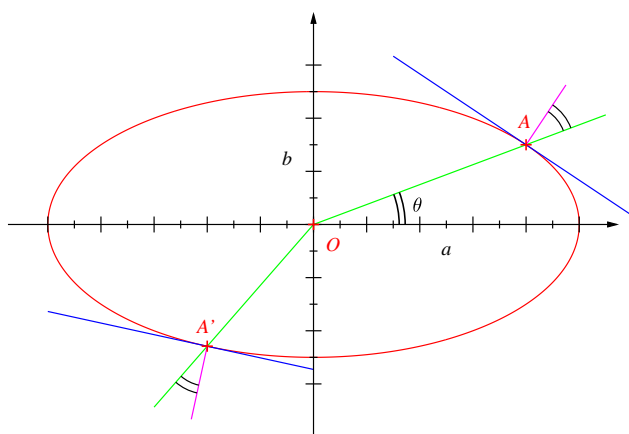
Na obr. B.1 je zakreslena elipsa umístěná v počátku soustavy souřadnic O a orientovaná ve směru hlavních os. Rovnice elipsy se obvykle zapisuje ve tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (\text{B.1})$$

kde a a b jsou délky poloos elipsy. Kterýkoliv vybraný bod elipsy $A = [x_1, y_1]$ musí splňovat rovnici (B.1). Pokud si označíme délku úsečky $\overline{OA} = r$, můžeme přepsat tuto rovnici pomocí úhlu θ sevřeného průvodičem a hlavní poloosou.

$$\frac{r^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} = \frac{1}{r^2}}. \quad (\text{B.2})$$

Jednotkový vektor ve směru průvodiče je tedy $\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$.



Obr. B.1: Geometrické vztahy v elipse. Zakresleny jsou: červeně elipsa s poměrem $a/b = 2$, zeleně průvodič bodu A , modře tečna a fialově normála.

Nyní budeme hledat tečnu k elipse v bodě $A = [x_1, y_1]$. K tomu stačí provést diferenciál vztahu (B.1) v tomto bodě. Tečná rovina v bodě A má potom rovnici

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1. \quad (\text{B.3})$$

Tento zápis tečny nám přímo dává normálový vektor. Jeho směr je dán koeficienty u proměnných x a y , což dává

$$\vec{n} = \left(\frac{x_1}{a^2}, \frac{y_1}{b^2} \right) = r \left(\frac{\cos \theta}{a^2}, \frac{\sin \theta}{b^2} \right).$$

Vztah pro normálu si můžeme zapsat také pomocí tenzorového zápisu

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

B.2 Vztahy pro elipsoid ve 3D

Výsledek výpočtu normály k elipse můžeme přímočaře generalizovat z 2D na 3D elipsoid. Pokud máme elipsoid s poloosami a , b a c , potom normála v bodě $[x_1, y_1, z_1]$ bude mít směr

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

První člen je tenzor, který má na diagonále převrácené hodnoty kvadrátů velikostí poloos elipsoidu. Tento tenzor se skalárně násobí vektorem spojnice počátku s bodem, ve kterém chceme určit normálový vektor.

Příloha C

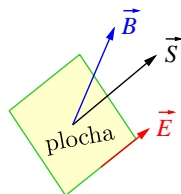
Fyzikální dodatek

C.1 Maxwellovy rovnice pro elektromagnetické pole

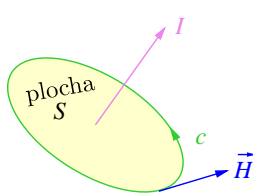
Název *Maxwellovy rovnice* se používá pro čtyři rovnice, které dávají do vzájemného vztahu elektrické a magnetické jevy, a vytvářejí úplný klasický popis elektromagnetického pole. Tyto rovnice se často zapisují v diferenciálním tvaru (1.1), který byl uveden hned v první kapitole na str. 7.

Tyto rovnice se odvozují podrobně v základních učebnicích fyziky v části věnované elektřině a magnetizmu. V učebnicích optiky [2, 3, 4, 7] se Maxwellovy rovnice již neodvozují, ale pouze se uvedou jako známé a dále se s nimi pracuje. My zde podrobné odvozování nebudeme uvádět, pouze pro úplnost připomeňme integrální tvar Maxwellových rovnic. V integrálním tvaru mají rovnice blíže k reálným experimentům, protože pracují s makroskopickými náboji a proudy. V této sekci budeme používat geometrické relace podle obr. C.1.

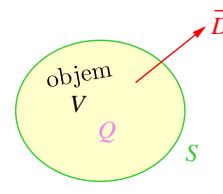
a) Faradayův zákon



b) Ampérův zákon



c) Gaussův zákon



Obr. C.1: Vektory pole, plochy, objemy a jejich hranice, které se vyskytují v Maxwellových rovnicích.

Faradayův zákon popisuje elektromagnetickou indukci,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\text{C.1})$$

Zavedeme si magnetický indukční tok $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$, který protéká orientovanou plochou \vec{S} . Přeintegrujeme přes tuto plochu a použijeme Stokesovu větu o přechodu od plošného integrálu po ploše S k integrálu po křivce c , která plochu ohraničuje, $\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Takto dostaneme integrální tvar první rovnice

$$\boxed{\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \Phi = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.} \quad (\text{C.2})$$

Ampérův zákon popisuje fakt, že proudy generují magnetické pole,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (\text{C.3})$$

Opět přeintegrujeme levou i pravou stranu rovnice přes plochu \vec{S} a s pomocí Stokesovy věty pro rotaci magnetické intenzity, $\int_S \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l}$, dostaneme integrální tvar druhé rovnice,

$$\boxed{\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}.} \quad (\text{C.4})$$

Členy na pravé straně mají význam proudu, I je proud volných nábojů a druhý člen nazýváme Maxwellův posuvný proud.

Jaké magnetické pole generuje ve vzdálenosti r přímý vodič, kterým teče proud I ?

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r = \mu I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{r}. \quad (\text{C.5})$$

Síla, kterou by magnetické pole působilo na testovací vodič s proudem \vec{i} , se vypočte ze vztahu $\vec{F} = \vec{i} \times \vec{B}$.

Gaussův zákon se někdy označuje též Coulombův zákon, protože popisuje elektrické pole, které generují elektrické náboje s hustotou ρ ,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \quad (\text{C.6})$$

Provedeme-li integraci, dostaneme celkový náboj Q ve zkoumané oblasti. Dále použijeme Gaussovou větu o přechodu objemového integrálu z divergence na plošný integrál, $\int_V \nabla \cdot \vec{D} dV = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$. Jako obvykle plocha S ohraničuje objem V . Dostaneme výsledný integrální vztah pro třetí Maxwellovu rovnici

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q = \int_V \rho dV.} \quad (\text{C.7})$$

Jaké elektrické pole bude generovat bodový náboj? Pro bodový náboj, který bychom uzavřeli do pomyslné koule o poloměru r , musí platit

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r^2}. \quad (\text{C.8})$$

Síla, kterou by působilo elektrické pole na testovací náboj q , se vypočte podle vztahu $\vec{F} = q\vec{E}$.

Spojitosť indukčního toku je poslední čtvrtá Maxwellova rovnice a znamená neexistenci magnetických monopólů, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Po integraci to vede na vztah

$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.}$$

Můžeme říci, že tok magnetického pole uzavřenou plochou je vždy nulový. Co na jedné straně přiteče, to musí druhou stranou odtéci.

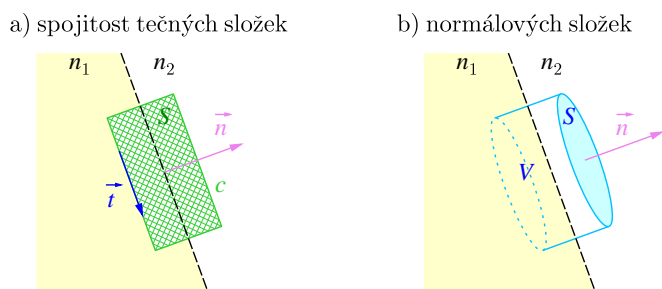
C.1.1 Spojitosť elektromagnetických polí na rozhraní

Maxwellovy rovnice a z nich získaná vlnová rovnice popisuje šíření světla v prostředí s daným indexem lomu. Dalším krokem je popis chování elektromagnetického pole na rozhraní dvou pro jednoduchost izotropních materiálů s indexy lomu n_1 a n_2 . Normálu k tomuto rozhraní označme \vec{n}

Tečné složky intenzit

Jako první budeme řešit elektrickou intenzitu, která má v jednotlivých materiálech velikost \vec{E}_1 a \vec{E}_2 . Zintegrujeme Faradayův zákon přes plochu, která prochází rozhraním, jak to ukazuje obr. C.2a). Pomocí Stokesovy věty zmíněné výše nahradíme integrál z rotace přes zeleně šrafovanou plochu S integrálem podél obvodu této plochy c .

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$



Obr. C.2: a) Integrační plocha pro výpočet spojitosti tečných složek intenzit. b) Integrační objem pro výpočet spojitosti normálových složek indukci.

Provedeme limitu, kdy poženeme k nule šířku integračního obdélníku. Velikost plochy S půjde k nule a díky tomu půjde k nule i plošný integrál z derivace magnetického pole. Integrál podél křivky c přejde na integraci podél delších stran obdélníku. Tím dostaneme $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{t} = 0$, kde vektor \vec{t} je tečný vektor podél rozraní. Protože směr tečného vektoru je libovolný v 2D ploše rozhraní, lze spojitost tečných složek elektrického pole zapsat obecně tak, že se na rozhraní dvou materiálů může měnit pouze normálová složka elektrické intenzity.

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = 0.$$

Nyní bychom mohli analogicky zintegrovat Ampérův zákon. Rozdíl je pouze v tom, že v Ampérově zákonu vystupuje navíc ještě proud. Výsledný vztah pro spojitost tečných složek magnetické intenzity proto vypadá následovně,

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n} = \vec{j}_S,$$

kde \vec{j}_S představuje hustotu povrchového proudu. Pro dielektrika je ale tento proud nulový a i magnetická intenzita má tedy na rozhraní dvou dielektrik spojitě své tečné složky \vec{H}_1 a \vec{H}_2 .

Normálové složky indukci

Nyní vyjdeme z Gaussova-Coulombova zákona, který budeme integrovat v objemu válce V , s podstavou S jenž prochází rozhraním dvou prostředí podle obr. C.2b). Využijeme Gaussovu větu pro přechod integrálu z divergence na plošný integrál po hranici integračního objemu.

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D} \, dV = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \, dV.$$

Opět limitně snížíme výšku integračního válce k nule. Díky tomu objemový integrál se zmenší na nulu a plošný integrál bude integraci pouze přes horní a dolní podstavu válce. Takto odvodíme spojitost normálových složek elektrické indukce na rozhraní. Nespojitosť by mohl způsobit pouze povrchový náboj s hustotou ρ_S na rozhraní v ploše S .

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \rho_S.$$

Samozřejmě u dielektrik, kde je povrchový náboj nulový, jsou normálové složky indukce na rozhraní spojitě.

Obdobně můžeme postupovat i se čtvrtou Maxwellovou rovnicí a dostali bychom analogicky pro magnetickou indukci následující vztah,

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0.$$

Uvedené čtyři podmínky na rozhraní nejsou nezávislé, protože elektromagnetická pole jsou svázaná Maxwellovými rovnicemi. Proto stačí splnit dvě podmínky pro tečné komponenty a díky splnění Maxwellových rovnic v obou prostředích oddělených rozhraním budou automaticky splněny i další dvě podmínky pro normálové složky [34].

C.2 Rozdělení látek podle materiálových vztahů

Zapišme si obvyklé materiálové vztahy, které jsou nezbytné pro řešení Maxwellových rovnic,

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E}), & \vec{P} &= \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}_e \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + \vec{M}(\vec{H}), & \vec{M} &= \mu_0 \overleftrightarrow{\chi}_m \vec{H}.\end{aligned}$$

Látky můžeme dělit podle různých kritérií. Ukažme si to na příkladu pěti druhů dělení magnetických vlastností látek. Obdobně se to dá zavést i pro elektrické vlastnosti.

1. kritérium popisuje to, zda je látka bez působení vnějšího magnetického pole permanentní magnet,

- magneticky měkké, $\vec{M}_0 = 0$
- magneticky tvrdé, $\vec{M}_0 \neq 0$, spontánní magnetizace (bez vnějšího pole)

2. kritérium popisuje linearitu odezvy na vnější pole

- lineární, $M \propto H$
- nelineární, $M \propto f(H, H^2) +$ vyšší členy

3. kritérium zkoumá, zda mají různá místa materiálu různé vlastnosti

- homogenní, χ_m není funkcí polohy \vec{r}
- nehomogenní, $\chi_m(\vec{r})$, často se řeší vrstevnaté nebo planární struktury

4. kritérium popisuje závislost vlastností materiálu na frekvenci vnějšího pole

- disperzní (funkce odezvy) $\Rightarrow \chi_m(\omega)$
- nedisperzní (bez zpoždění, odezva ihned, pro pomalé vnější pole, kvazistatické přiblížení)

5. kritérium zkoumá, zda má materiál různé vlastnosti v různých směrech

- izotropní, susceptibilita je číslo $\overleftrightarrow{\chi}_m = \chi_m \mathbb{1}$, $\vec{H} \parallel \vec{B}$
- anizotropní, $\overleftrightarrow{\chi}_m$ je skutečný tenzor, $\vec{H} \not\parallel \vec{B}$

Uvažujme např. magneticky měkké, lineární, homogenní a izotropní prostředí bez disperze, potom budou materiálové vztahy následující

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\varepsilon} &= \varepsilon \mathbb{1}, & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E}, \\ \overleftrightarrow{\mu} &= \mu \mathbb{1}, & \vec{B} &= \mu \vec{H}.\end{aligned}$$

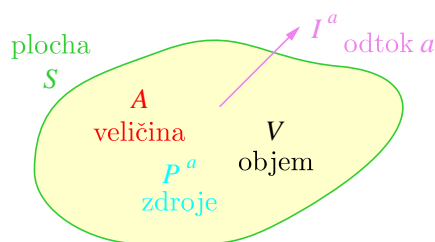
a relativní konstanty prostředí budou $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$, $\mu_r = 1 + \chi_m$

Projevem toho, že zdrojem elektromagnetických polí jsou elektrické náboje a jejich pohyb, je to, že vektor polarizace \vec{P} směřuje přibližně ve směru vektoru elektrického pole \vec{E} (není v protisměru). Proto musí platit $\chi_e \geq 0$; $\varepsilon_r \geq 1$.

Pro magnetické vlastnosti to tak není, magnetická susceptibilita může být i záporná. Můžeme říci, že odezva na magnetické pole je:

bud' lineární $\begin{cases} \chi_m < 0 & \text{diamagnetika,} \\ \chi_m > 0 & \text{paramagnetika,} \end{cases}$
nebo nelineární, $\chi_m \gg 0$ feromagnetika.

C.3 Globální zákony zachování



Obr. C.3: Zákon zachování veličiny A v prostorové oblasti o objemu V ohraničené plochou S .

V přírodě platí zákony zachování mnoha veličin. Z principu je tedy možné si odvodit obecný zákon zachování nějaké veličiny s objemovou hustotou a . Zákon zachování si můžeme vyjádřit v diferenciálním tvaru ve zvoleném bodě prostoru. Nebo si můžeme spočítat integrální zákon zachování veličiny A v objemu V , jak to ukazuje obr. C.3. Mezi těmito veličinami platí integrálně diferenciální vztahy,

$$a = \frac{dA}{dV}, \quad A = \int_V a dV.$$

Je potřeba si definovat další dvě veličiny. První je hustota zdrojů p^a , jejíž objemový integrál nám určuje, kolik vznikne veličiny A v objemu V za jednotku času (1 s).

$$P^a = \int_V p^a dV.$$

Veličina A může ze zkoumaného objemu také vytékat. Proto je druhou důležitou veličinou hustota toku \vec{j}^a . Pokud chceme určit, kolik této veličiny A vyteče z objemu V za jednotku času, musíme si definovat plochu rozhraní S , přes kterou tok zintegrujeme. Celkový tok bude

$$I^a = \oint_S \vec{j}^a \cdot d\vec{S}.$$

Zákon zachování zapíšeme ve tvaru

$$\frac{dA}{dt} + I^a = P^a,$$

který znamená toto: Zdroje vytvoří za jednotku času P^a veličiny A v objemu V . To vede na přírůstek této veličiny a část, která vyteče přes hranici z tohoto objemu ven. Pokud do rovnice dosadíme předchozí výrazy, dostaneme

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial a}{\partial t} dV + \oint_S \vec{j}^a \cdot d\vec{S} &= \int_V p^a dV, \\ \int_V \frac{\partial a}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot \vec{j}^a dV &= \int_V p^a dV. \end{aligned}$$

Při tomto odvození jsme použili Gaussovu větu o přechodu z plošného na objemový integrál. Má-li platit tento integrální vztah pro jakýkoliv objem, musí platit rovnost i pro integrované veličiny. Diferenciální zákon zachování má tedy tvar

$$\boxed{\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}^a = p^a.} \quad (\text{C.9})$$

Obdobně bychom postupovali i v případě odvozování zákona zachování vektorové veličiny \vec{a} . Pro vektorovou veličinu bychom odvodili analogický výraz

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \nabla \cdot \overleftarrow{j}^{\vec{a}} = p^{\vec{a}}.$$

C.3.1 Zákon zachování energie pro elektromagnetické pole

Začneme tím, že si napočítáme divergenci Poyntingova vektoru,

$$\nabla \cdot \vec{S} = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} = - \left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \vec{j}.$$

Nejdříve jsme rozepsali derivaci součinu tak, aby se derivovala pouze jedna proměnná napravo od symbolu ∇ . Potom jsme za rotace polí dosadili první a druhou Maxwellovu rovnici. Pro látky s lineárními materiálovými vztahy, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, lze použít definici hustoty elektromagnetické energie a její časové derivace,

$$w = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Zavedený Poyntingův vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ značí tok energie z daného objemu. Takto můžeme zapsat zákon zachování elektromagnetické energie v obvyklém tvaru (C.9) a identifikovat jednotlivé členy,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Zde první člen značí změnu energie pole ve zkoumané oblasti, druhý člen popisuje výtok elektromagnetické energie ze zkoumaného místa. Pravá strana je zodpovědná za Coulombovské teplo, ve které se elektromagnetické pole může měnit v absorbujícím prostředí.

C.3.2 Hustota elektrické a magnetické energie

Ukažme si nyní, že hustota elektrické energie w_e a hustota magnetické energie w_m jsou pro elektromagnetické pole stejné. Použijeme první Maxwellovu rovnici (1.1) a spočítáme si derivace pro rovinnou monochromatickou vlnu,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}.$$

Nyní použijeme vztah pro podíl $k/\omega = n/c = \sqrt{\varepsilon\mu}$ s tím, že budeme uvažovat kolmost vektorů a dále budeme počítat již pouze jejich velikosti. Takto dostaneme pro elektromagnetické pole důležitý vztah pro podíl elektrického a magnetického pole,

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H.} \quad (\text{C.10})$$

Díky této rovnosti nám hned vychází rovnost elektrické a magnetické složky hustoty elektromagnetické energie,

$$\left. \begin{aligned} w_e &= \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \\ w_m &= \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2}\mu H^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow w_e = w_m. \quad (\text{C.11})$$

C.3.3 Anizotropní prostředí

Ukažme si, jaké podmínky musí splňovat tenzor permitivity v anizotropním prostředí. Hustota energie se zde spočítá podle

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{ij}E_iE_j = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E} \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \vec{E}.$$

Časová derivace hustoty energie bude

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \dot{w}_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{ij}[\dot{E}_iE_j + E_i\dot{E}_j].$$

Díky tomu, že můžeme prohazovat pořadí derivací, musí platit $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Pro neabsorbující prostředí s komplexní permitivitou $\tilde{\varepsilon}$, tj. v případě cirkulární anizotropie, platí obecnější podmínka: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*$.

C.4 Odvození indexu lomu mimořádného svazku

V sekci 5.4 jsme zavedli vlastní stavy polarizace v jednoosém krystalu. Zatímco řádný svazek má index lomu vždy n_o , mimořádný svazek má index lomu závislý na směru daném úhlem θ podle (5.16), který zde zopakujeme,

$$n_e^2(\theta) = \varepsilon_B - \frac{\varepsilon_D^2}{\varepsilon_C}.$$

Úhel θ je odklon směru vlnového vektoru \vec{k} od optické osy. Za pomocné parametry ε_B , ε_C a ε_D , které jsme si zavedli ve vztahu (5.14), dosadíme z textu kap. 5 a odvodíme si výsledný vzorec.

$$\begin{aligned} n_e^2(\theta) &= \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_3 \sin^2 \theta - \frac{((\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \sin \theta \cos \theta)^2}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(\varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_3 \sin^2 \theta)(\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta) - ((\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \sin \theta \cos \theta)^2}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3 (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta / \varepsilon_3 + \cos^2 \theta / \varepsilon_1}. \end{aligned}$$

Nyní dosadíme hlavní indexy lomu ($\varepsilon_1 = n_o^2$, $\varepsilon_3 = n_e^2$) a dostaneme finální vztah (5.17) z textu kapitoly,

$$\boxed{\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_3} + \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_1} = \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2}.$$

C.5 Odvození indexové plochy z Fresnelovy rovnice

V sekci 6.2 jsme si z Fresnelovy rovnice odvodili vztah pro vlastní hodnoty indexu lomu. Nyní podrobně probereme postup, kterým se z řešení nulovosti následujícího determinantu dostane rovnice indexové plochy (6.1).

$$\Delta = \begin{vmatrix} n_1^2 - (1 - s_1^2)N^2 & s_1 s_2 N^2 & s_1 s_3 N^2 \\ s_1 s_2 N^2 & n_2^2 - (1 - s_2^2)N^2 & s_2 s_3 N^2 \\ s_1 s_3 N^2 & s_2 s_3 N^2 & n_3^2 - (1 - s_3^2)N^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{C.12})$$

Řešení spočívá v tom, že pro směr šíření zadaný jednotkovým vektorem $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ najdeme vlastní číslo (hledaný index lomu N) tak, aby byla splněna rovnice (C.12). Normovací podmínka na jednotkový vektor zní: $|\vec{s}| = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$.

Při výpočtu determinantu získáme násobením diagonálních členů násobky $\{1, N^2, N^4, N^6\}$ – část I, pak získáme tři záporné příspěvky (jeden člen na diagonále krát dva členy mimo diagonálu) $\{N^4, N^6\}$ – část II. Nakonec zbývají dva kladné příspěvky násobením členů mimo diagonálu $\{N^6\}$ – část III. Zapišme si nyní jednotlivé části determinantu:

část I

$$\begin{aligned} n_1^2 n_2^2 n_3^2 &+ N^2 [(s_1^2 - 1)n_2^2 n_3^2 + (s_2^2 - 1)n_1^2 n_3^2 + (s_3^2 - 1)n_1^2 n_2^2] \\ &+ N^4 [n_1^2 (s_2^2 - 1)(s_3^2 - 1) + n_2^2 (s_1^2 - 1)(s_3^2 - 1) + n_3^2 (s_1^2 - 1)(s_2^2 - 1)] \\ &+ N^6 (s_1^2 - 1)(s_2^2 - 1)(s_3^2 - 1) \end{aligned}$$

část II

$$\begin{aligned} &- N^4 (n_1^2 s_2^2 s_3^2 + n_2^2 s_1^2 s_3^2 + n_3^2 s_1^2 s_2^2) \\ &- N^6 [(s_1^2 - 1)s_2^2 s_3^2 + (s_2^2 - 1)s_1^2 s_3^2 + (s_3^2 - 1)s_1^2 s_2^2] \end{aligned}$$

část III

$$+ N^6 2s_1^2 s_2^2 s_3^2.$$

Příspěvky ze všech tří částí musíme sečíst. Proto dáme k sobě členy s odpovídající mocninou N a dostaneme u jednotlivých mocnin tyto výrazy:

N^0 :

$$n_1^2 n_2^2 n_3^2 = n_1^2 n_2^2 n_3^2 (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)$$

N^2 :

$$-(s_2^2 + s_3^2)n_2^2 n_3^2 - (s_1^2 + s_3^2)n_1^2 n_3^2 - (s_1^2 + s_2^2)n_1^2 n_2^2 = -s_1^2 n_1^2 (n_2^2 + n_3^2) - s_2^2 n_2^2 (n_1^2 + n_3^2) - s_3^2 n_3^2 (n_1^2 + n_2^2)$$

N^4 :

$$-n_1^2 (s_2^2 + s_3^2 - 1) - n_2^2 (s_1^2 + s_3^2 - 1) - n_3^2 (s_1^2 + s_2^2 - 1) = s_1^2 n_1^2 + s_2^2 n_2^2 + s_3^2 n_3^2$$

N^6 :

$$s_1^2 s_2^2 s_3^2 - s_1^2 s_2^2 - s_1^2 s_3^2 - s_2^2 s_3^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 1 - 3s_1^2 s_2^2 s_3^2 + s_2^2 s_3^2 + s_1^2 s_3^2 + s_1^2 s_2^2 + 2s_1^2 s_2^2 s_3^2 = 0$$

Jak je zřejmé, člen s nejvyšší mocninou (N^6) vyjde identicky nulový.

Podíváme se podrobněji na členy celkového determinantu s s_1^2 . Členy s s_2^2 nebo s s_3^2 musí být symetrické, získáme je pouhou cyklickou záměnou indexů.

$$\begin{aligned} s_1^2 [n_1^2 n_2^2 n_3^2 - N^2 n_1^2 (n_2^2 + n_3^2) + n_1^2 N^4] &= s_1^2 n_1^2 [N^4 - N^2 (n_2^2 + n_3^2) + n_2^2 n_3^2] \\ &= s_1^2 n_1^2 (N^2 - n_2^2)(N^2 - n_3^2). \end{aligned}$$

Sečteme-li analogické členy pro všechny tři složky s_1^2, s_2^2, s_3^2 , potom dostaneme podmínku nulovosti determinantu (C.12) ve tvaru

$$\begin{aligned} & s_1^2 n_1^2 (N^2 - n_2^2)(N^2 - n_3^2) \\ & + s_2^2 n_2^2 (N^2 - n_1^2)(N^2 - n_3^2) \\ & + s_3^2 n_3^2 (N^2 - n_1^2)(N^2 - n_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Pokud jsou závorky $(N^2 - n_i^2) \neq 0$ pro $i = 1, 2, 3$, potom můžeme těmito závorkami podělit a podmínku pro vlastní číslo N upravit na následující tvar,

$$\boxed{\frac{s_1^2 n_1^2}{N^2 - n_1^2} + \frac{s_2^2 n_2^2}{N^2 - n_2^2} + \frac{s_3^2 n_3^2}{N^2 - n_3^2} = 0} \quad (\text{C.14})$$

Například, pokud se omezíme jen na osu x_1 , tedy $s_1 = 1, s_2 = s_3 = 0$, potom dostaneme vztah

$$(N^2 - n_2^2)(N^2 - n_3^2) = 0.$$

Je zřejmé, že při šíření ve směru osy \vec{x}_1 mají dva vlastní stavy polarizace světla index lomu n_2 a n_3 . V obecném směru musíme řešit kvadratickou rovnici pro N^2 , kterou můžeme získat roznásobením závorek v (C.13),

$$N^4 (s_1^2 n_1^2 + s_2^2 n_2^2 + s_3^2 n_3^2) - N^2 [s_1^2 n_1^2 (n_2^2 + n_3^2) + s_2^2 n_2^2 (n_1^2 + n_3^2) + s_3^2 n_3^2 (n_1^2 + n_2^2)] + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0$$

Jak je známo, řešením kvadratické rovnice $AN^4 + BN^2 + C = 0$ dostaneme dva kořeny, které mají velikost $N_{\pm}^2 = (-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})/2A$.

Zavedeme si vektor délky indexu lomu ve směru \vec{k} vlnového vektoru: $\vec{X}_{\Sigma} = (X, Y, Z) = N(s_1, s_2, s_3)$. Dosazením do předešlé kvadratické rovnice získáme vztah pro dvouvrstvou plochu, která se označuje *indexová plocha* (Σ)

$$\begin{aligned} & [n_1^2 X^2 + n_2^2 Y^2 + n_3^2 Z^2][X^2 + Y^2 + Z^2] \\ & - [X^2 n_1^2 (n_2^2 + n_3^2) + Y^2 n_2^2 (n_1^2 + n_3^2) + Z^2 n_3^2 (n_1^2 + n_2^2)] \\ & + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Jaký je rozdíl mezi tímto zápisem a předešlým výrazem (C.13)?

- Rovnice (C.13) je rovnice pro vlastní číslo – index lomu N .
- V rovnici (C.15) hledáme vektor \vec{X}_{Σ} , který vyhovuje této rovnici. Index lomu je pak délka tohoto vektoru.

Literatura

- [1] J. Soubusta: *Fyzika pevných látek*, Vydavatelství UP v Olomouci, 2012, ISBN: 978-80-244-3095-9.
- [2] P. Malý: *Optika*, Karolinum Praha, 2008, ISBN: 978-8024613420.
- [3] E. Hecht: *Optics*, Addison-Wesley, 4th edition, 2001, ISBN: 978-0805385663.
- [4] D.H. Goldstein: *Polarized Light*, CRC Press, 3rd edition, 2010, ISBN: 978-1439830406.
- [5] J. Kvasnica: *Matematický aparát fyziky*, ACADEMIA Praha, 2004.
- [6] L. Skála: *Úvod do kvantové mechaniky*, ACADEMIA Praha, 2005.
- [7] S. Huard: *Polarization of Light*, Wiley, 1996, ISBN: 978-0471965367.
- [8] A. Yariv, P. Yeh: *Optical Waves in Crystals*, John Wiley & Sons, 2002, ISBN: 978-0471430810.
- [9] V.G. Dmitriev, G.G. Gurzadyan, D.N. Nikogosyan: *Handbook of Nonlinear Optical Crystals*, Springer, 3rd edition, 1999, ISBN: 978-3540653943.
- [10] B.E.A. Saleh, M.C. Teich: *Fundamentals of Photonics*, Wiley-Interscience, 2nd edition, 2007, ISBN: 978-0471358329.
- [11] B.E.A. Saleh, M.C. Teich: *Základy fotoniky* (č. překlad Matfyzpress, UK Praha, 1996).
- [12] C. Klingshirn: *Semiconductor Optics*, Springer, 3rd edition, 2006, ISBN: 978-3540383451.
- [13] H. Haug, S.W. Koch: *Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors*, World Scientific Singapore, 4th edition, 2004, ISBN: 978-9812386090.
- [14] Y.R. Shen: *The Principles of Nonlinear Optics*, Wiley-Interscience, reprint edition, 2002, ISBN: 978-0471430803.
- [15] R.W. Boyd: *Nonlinear Optics*, Academic Press, 3rd edition, 2008, ISBN: 978-0123694706.
- [16] Jan Soubusta, Habilitační práce, UP Olomouc 2010.
- [17] C.K. Hong, Z.Y. Ou, L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **59**, 2044 (1987).
- [18] J. Soubusta, J. Peřina Jr., M. Hendrych, O. Haderka, P. Trojek, M. Dušek, *Experimental verification of energy correlations in entangled photon pairs*, Phys. Lett. A319, 251-262 (2003).
- [19] J. Soubusta, J. Peřina Jr., O. Haderka, M. Hendrych, M. Dušek, *Experimental tests of energy and time entanglement*, Acta Phys. Hungarica B: Quantum Electronics 23, 143 (2005).
- [20] E. Halenková, A. Černochoch, K. Lemr, J. Soubusta, S. Drusová, *Experimental implementation of the multifunctional compact two-photon state analyzer*, App. Optics. 51, 474 (2012); E. Halenková, A. Černochoch, J. Soubusta, *Spontánní sestupná frekvenční parametrická konverze a zdroj fotonových párů podle návrhu P.G. Kwiaty*, Učební texty projektu RCPTM, UP Olomouc 2012, ISBN: 978-80-244-3111-6.
- [21] M.G. Roelofs, A. Suna, W. Bindloss, J.D. Bierlein, J. Appl. Phys. **76**, 4999 (1994).
- [22] K. Banaszek, A.B. U'Ren, I.A. Walmsley, Opt. Lett. **26**, 1367 (2001).
- [23] K. Sanaka, K. Kawahara, T. Kuga, Phys. Rev. Lett. **86**, 5620 (2001).

- [24] S. Tanzilli, W. Tittel, H. De Riedmatten, H. Zbinden, P. Baldi, M. De Micheli, D.B. Ostrowsky, N. Gisin, *Eur. Phys. J. D* **18**, 155 (2002).
- [25] C.E. Kuklewicz, M. Fiorentino, G. Messin, F.N.C. Wong, J.H. Shapiro, *Phys. Rev. A* **69**, 013807 (2004).
- [26] M.J.A. de Dood, W.T.M. Irvine, D. Bouwmeester, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 040504 (2004).
- [27] N.N. Lepeshkin, A. Schweinsberg, G. Piredda, R.S. Bennink, R.W. Boyd, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 123902 (2004).
- [28] M. Fiorentino, S.M. Spillane, R.G. Beausoleil, T.D. Roberts, P. Battle, M.W. Munro, *Opt. Express* **15**, 7479 (2007).
- [29] R. Machulka, J. Svozilík, J. Soubusta, J. Peřina, Jr., O. Haderka, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 013836 (2013).
- [30] M. Dušek, *Koncepční otázky kvantové teorie*, (UP, Olomouc 2002).
- [31] M.A. Nielsen, I.I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2010). ISBN: 978-11-394-95486.
- [32] P.G. Kwiat, E. Waks, A.G. White, I. Appelbaum, P.H. Eberhard, *Phys. Rev. A* **60**, R773 (1999).
- [33] A.G. White, D.F.V. James, P.H. Eberhard, P.G. Kwiat, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3103 (1999).
- [34] L. Novotny, B. Hecht, *Principles of Nano-Optics* (Cambridge University Press, 2006). ISBN: 978-05-218-32243.

Seznam použitých symbolů

1D	jednodimenzionální, jednorozměrný
2D	dvoudimenzionální, plošný
3D	trojdimenzionální, prostorový
$\overleftrightarrow{\mathbb{I}}$	jednotková matice, identita
$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$	osy kartézského souřadnicového systému
a	mřížková konstanta kubických mřížek
a_{ex}	poloměr excitonu
\vec{a}	jednotkový vektor ve směru polarizace
$\overleftrightarrow{a}, a_{ij}$	matice transformace souřadnic
\vec{A}	vektorový potenciál
\vec{B}	vektor magnetické indukce
c	rychlost světla ve vakuu, $c = 299\,792\,458$ m/s (přesně)
C_n	operace symetrie, n -četná osa rotace
C_{klmn}	tenzor pružnosti popsáné v elastické oblasti Hookovým zákonem
d	tloušťka krystalu
d_{ijk}	piezoelektrický tenzor
D	šířka optického svazku
\vec{D}	vektor elektrické indukce
e	Eulerovo číslo (2.718 281 828 4)
e	elementární náboj, $e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$ C (přesně)
eV	elektronvolt, energie, kterou získá elektron urychlením potenciálem 1 V
E	energie
$E_c(q), E_v(q)$	vodivostní a valenční energetický pás v q -prostoru
E_g	šířka zakázaného pásu
E_p	energie fononu
\vec{E}	vektor elektrické intenzity
f_{FD}	Fermiho-Dirackova statistická rozdělovací funkce
$f(q)$	vzdálenost vodivostního a valenčního pásu v q -prostoru
$f_{\text{cv}}(\omega)$	síla oscilátoru
f_{ak}	frekvence akustické vlny
\overleftrightarrow{g}	symetrický tenzor gyrace
\hbar	redukováná Planckova konstanta, $2\pi\hbar = 6.626\,075\,15 \times 10^{-34}$ J s (přesně)
$\hat{\mathcal{H}}$	hamiltonián
$\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{\mathcal{H}}_1$	stacionární a poruchový hamiltonián
\vec{H}	vektor magnetické intenzity
i	imaginární jednotka ($i = \sqrt{-1}$)
i	operace symetrie inverze
I	operace symetrie identita, nebo proud

\vec{j}	hustota proudu
J_{cv}	sdružená hustota stavů
k_B	Boltzmannova konstanta, $k_B = 1.380\,649 \times 10^{-23}$ J/K (přesně)
\vec{k}	vlnový vektor světla, $k = 2\pi/\lambda$
\vec{K}	vlnový vektor akustické vlny, $K = 2\pi/\Lambda$
L	délka krystalu
m	hmotnost elektronu
m_0	hmotnost volného elektronu, $m_0 = 0.910\,938\,370 \times 10^{-30}$ kg
m_c, m_v	efektivní hmotnost elektronu ve vodivostním pásu, díry ve valenčním pásu
m_r	redukováná efektivní hmotnost excitonu
M	materiálová konstanta popisující účinnost AO difrakce
M_n	hmotnost neutronu, $M_n = 1.674\,927 \times 10^{-27}$ kg
\vec{M}	vektor magnetizace
n	index lomu
n_o, n_e	řádový a mimořádný index lomu v jednoosém krystalu
N	indexu lomu jako vlastní číslo řešené rovnice, koncentrace elektronů
\tilde{N}	komplexní index lomu, $\tilde{N} = n + i\kappa$
N_A	Avogadrova konstanta, $N_A = 6.022\,140\,76 \times 10^{23}$ mol ⁻¹ (přesně)
\hat{p}	operátor hybnosti
\vec{P}	vektor polarizace
p_{ijmn}	fotoelastický tenzor (někdy se označuje jako elastooptický tenzor)
q	velikost vlnového vektoru elektronu, hustota náboje elektronů
Q	hustota náboje iontů, parametr popisující režim AO prvku
\vec{q}	vlnový vektor elektronu
\vec{r}	polohový vektor elektronu
r_{ijk}	tenzor lineárního elektrooptického jevu (Pockelsův jev)
R_{ex}	vazebná energie základního stavu excitonu (excitonový Rydberg)
\vec{s}	jednotkový vektor ve směru vlnového vektoru světla, $\vec{k} = k\vec{s}$
S	plocha
\vec{S}	Poyntingův vektor
S_n	operace symetrie n -četná nevlastní osa rotace
S_{ijkl}	tenzor kvadratického elektrooptického jevu (Kerrův jev)
t	čas
$u_{\vec{q}}(\vec{r})$	periodická část Blochovy vlnové funkce
u_{ij}	tenzor malých deformací
\vec{u}	vektor výchylky z rovnovážné polohy při deformaci krystalu
U, U_{pn}	napětí přiložené na kontakty
U_π	půlvlnné napětí
V	objem
$V(\vec{r})$	periodický potenciál pro elektrony v krystalu
\vec{v}	vektor rychlosti
v_{ak}	rychlost akustické vlny
\vec{v}_f, \vec{v}_g	fázová, resp. grupová rychlost
w	hustota elektromagnetické energie
w_e, w_m	hustota elektrické energie a magnetické energie
w_0	pološířka sedla gassovského svazku
W_{cv}	pravděpodobnost přechodu elektronu z valenčního do vodivostního pásu ($v \rightarrow c$)
\vec{X}	vektor popisující indexový elipsoid (indikatrix)
z	řád tenzoru (T_{ijk} je tenzor 3. řádu, $z = 3$)

α	absorpční koeficient
γ_{ijk}	tenzor cirkulární anizotropie
$\vec{\Gamma}$	vektor gyrace
δ	Diracova δ -funkce
δ_{ij}	Kroneckerovo delta
ε	permitivita
$\tilde{\varepsilon}$	komplexní permitivita, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$
ε_0	permitivita vakua, $\varepsilon_0 = 8.854\,187\,8 \times 10^{-12}$ F/m
ε_r	relativní permitivita
η	účinnost AO difrakce
θ	polární úhel
$\delta\theta$	úhlový rozptyl (divergence) optického svazku
θ_B	Braggův úhel rozptylu
θ_c	úhel řezu krystalu
ϑ	sklon optické osy dvouosého materiálu
κ	vazebná konstanta popisující difrakci
\varkappa	index extinkce, komplexní část indexu lomu
λ	vlnová délka světla
Λ	vlnová délka akustické vlny
μ	permeabilita
μ_0	permeabilita vakua, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m
μ_r	relativní permeabilita
ν	frekvence světla
π	Ludolfovo číslo (3.141 592 653 6)
π_{ijkl}	piezooptický tenzor
ρ	hustota náboje; měrný odpor; úhel dvojlomu (walk-off)
σ	vodivost
$\sigma_h, \sigma_v, \sigma_d$	operace symetrie různě orientované roviny zrcadlení
Σ_{ij}	tenzor mechanického napětí
τ	doba života, relaxační doba, časová konstanta
ϕ	azimutální úhel
$\delta\Phi$	úhlový rozptyl akustické vlny
χ, χ_e	elektrická susceptibilita
χ_m	magnetická susceptibilita
$\psi_{\vec{q}}(\vec{r})$	Blochova vlnová funkce
ω	kruhová frekvence světla ($\hbar\omega$ je energie jednoho fotonu)
ω_a	frekvence přechodu v atomu
ω_r	frekvence módu rezonátoru
ω_{TO}, ω_{LO}	frekvence příčného a podélného optického fononu
ω_{pl}	plazmová frekvence elektronů v kovu
Ω	frekvence akustické vlny