ISSN 0130-2221
НОЯБРЬ
2017 · №11

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

БЛИЗНЕЦЫ В КЛЕТКЕ

В этой головоломке японского изобретателя Осанори Ямамото (Osanori Yamamoto) требуется поместить две фигурки из светлого дерева в своеобразную клетку – темную деревянную рамку – так, чтобы ничего не торчало наружу. Как видно, фигурки одинаковые – отсюда и название головоломки. Каждую из них можно сделать из трех брусочков размерами 3×2×1, 3×1×1 и 2×1×1. Рамка же состоит из 12 брусочков 3×1×1 (на фотографии видно, как они состыкованы).

Хотя у этой головоломки всего три части, она не такая уж простая. Видимо, за это ее оценили «знатоки» – на проходившем в начале августа в Париже 37 Съезде любителей головоломок она была признана лучшей по мнению участников съезда.

Желаем успехов в решении!

Е.Епифанов

КВАНТ НОЯБРЬ 2017 №11

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Сколько времени длится причаливание?

С.ДВОРЯНИНОВ, З.КРАУТЕР, В.ПРОТАСОВ

КАК ПРИЧАЛИТЬ НА ЛОДКЕ К БЕРЕГУ? Что за странный вопрос! Нужно снизить скорость и аккуратно пристать. Скорость желательно снизить до нуля – иначе лодка ударится о пристань. Тормозить (веслами) нужно начать заранее, поскольку, в отличие от парковки автомобиля, мы не можем тормозить резко. Итак, надо постепенно и плавно довести скорость до нуля. Поразительно, но эта простая на вид задача, строго говоря, неразрешима! И мы это сейчас покажем. А как же тогда причаливают лодки, корабли, космические аппараты? За этим стоит целая теория, основанная на большом разделе математики – дифференциальных уравнениях. Перед тем как с ними познакомиться, мы разберем нескольких важных и известных задач. Задача о причаливании – первая из них.

Задача о причаливании

Наша лодка находится на расстоянии 1 метр от берега и приближается к нему со скоростью 1 м/с. Обозначим скорость лодки на расстоянии x от берега через $f(x)$. Тогда $f(1) = 1$ и $f(0) = 0$ (скорость у берега равна нулю). Какую функцию скорости $f(x)$ можно выбрать? Попробуем $f(x) = x$, она удовлетворяет обоим условиям.

Задача 1. *Сколько времени длится причаливание со скоростью $f(x) = x$, где x – расстояние от лодки до берега?*

Решение. Первые полметра до берега лодка пройдет за время, большее 1/2 (полсекунды), потому что скорость лодки в каждой точке будет меньше 1. Следующие четверть метра лодка идет со скоростью, меньшей 1/2, а значит, вновь потратит времени больше, чем полсекунды. И на

следующие $1/8$ метра потратит больше, чем полсекунды, и т.д. Так мы можем сложить по полсекунды сколь угодно много раз. Следовательно, **лодка будет причаливать бесконечно долго**.

Другими словами, она не причалит никогда! А что же делать? Увеличение скорости в тысячу раз (т.е. $f(x) = 1000x$) не поможет: время уменьшится в тысячу раз, но по-прежнему останется бесконечным. А если использовать совсем другую функцию? Например, $f(x) = x^2$? Да нет, снова не поможет. В самом деле, поскольку при $x < 1$ выполнено неравенство $x^2 < x$, скорость $f(x)$ будет меньше, чем x. Поэтому причаливание будет длиться даже дольше, чем со скоростью x. На этом пути выхода нет: никакой гладкой функции $f(x)$ для причаливания придумать не получится.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема (т.е. имеет производную) в точке $x = 0$, то причаливание длится бесконечно долго.*

Доказательство. Если $f(x)$ дифференцируема в нуле, то существует число $C > 0$ и маленький промежуток $[0;\ a]$, на котором $f(x) \le Cx$. Значит, причаливание будет длиться дольше, чем со скоростью $f(x) = Cx$. А это, как мы знаем, займет бесконечное время (просто заменим 1000 на C в нашем рассуждении выше).

Итак, *причаливание со скоростью, гладко зависящей от расстояния до берега, невозможно.*

Неожиданно! Вот как писал про этот феномен Владимир Игоревич Арнольд (1937–2010), один из величайших математиков XX века, вспоминая дискуссию с другим видным математиком и астрономом Михаилом Львовичем Лидовым (1926–1993):

«Автоматическое причаливание, в соответствии с общими принципами теории управления, основано на обратной связи: наблюдая оставшееся до причала расстояние x, управление выбирают так, чтобы скорость причаливания плавно уменьшать до нуля (как функцию от x). Естественно, эта функция – гладкая, т.е. при малых расстояниях x скорость будет убывать с x приблизительно линейно. …Время причаливания будет бесконечным при любом таком механизме гладкой обратной связи. Чтобы причалить за конечное время, нужно либо отказаться от принципа регулирования (с гладкой обратной связью), заменив управление скоростью корабля работой матроса с чалкой, либо согласиться на удар корабля о причал в заключительной стадии причаливания (для чего и обвешивают край пристани отслужившими автомобильными покрышками)».

Так как же причаливать? Ну ладно, на лодке или маленьком пароходике мы согласны удариться об «отслужившую автомобильную покрышку». Но как причаливать океанским лайнерам или, скажем, космическим аппаратам? Ответ подсказывает теорема 1. Надо попробовать взять функцию $f(x)$, не дифференцируемую в нуле. А такие бывают? Из числа «хороших» функций? Да. Например, $f(x) = \sqrt{x}$. Для этой функции отношение $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ стремится к бесконечности при $x \to 0$, поэтому производной в точке $x = 0$ не существует. Пробуем.

Задача 2. *Сколько времени длится причаливание со скоростью $f(x) = \sqrt{x}$, где x – расстояние от лодки до берега?*

Решение. Разделим весь путь, т.е. отрезок $[0;\ 1]$, точками $1/4$, $1/16$, $1/64$, … (в знаменателях стоят квадраты степеней двойки). Скорость на первом промежутке (от 1 до $1/4$) больше $f(1/4) = 1/2$, а его длина меньше 1, поэтому лодка пройдет его меньше чем за 2 секунды.

Скорость на втором промежутке (от $1/4$ до $1/16$) больше $f(1/16) = 1/4$, а его длина меньше $1/4$, поэтому лодка пройдет его меньше чем за 1 секунду. Третий промежуток – меньше чем за $1/2$ секунды и т.д. Итоговое время меньше чем $2(1 + 1/2 + 1/4 + \ldots) = 4$. Итак, **лодка причалит меньше чем за 4 секунды**.

(На самом деле, точное время причаливания равно 2 секунды, см. пример 2 в конце статьи.)

Упражнения

1. Оцените время причаливания для скорости $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

2. Пусть материальная точка движется по числовой прямой из точки $x = 0$ в точку $x = 1$ и торможение осуществляется по закону $v = \sqrt{1 - x^2}$. Оцените время причаливания.

Указание. Сведите задачу к случаю движения из точки $x = 1$ в точку $x = 0$ с помощью замены x на $1 - x$.

В обеих задачах, даже не имея уравнения движения лодки, мы смогли оценить время причаливания! Для этого мы разбили пройденный путь особым образом: на отрезки, пропорциональные степеням двойки. Попробуем развить успех на других задачах. Первое, что мы сделаем, – перейдем от причаливания к преследованию.

Одна задача о преследовании

В декабре 1966 года в газете «Комсомольская правда» были опубликованы задачи математической олимпиады. Интернета в то время не было, и только благодаря газете информация об олимпиаде была доступна школьникам. Одна из задач, о двух мальчиках, убегающих один от другого, стала потом очень популярной. Так, в книге Н.Б.Васильева, А.П.Савина «Избранные задачи математических олимпиад» (1968) она была повторена в чуть более «озорной» формулировке: там уже ученик убегал от учителя.

Задача 3. *Ученик плавает в центре круглого бассейна. На краю бассейна стоит учитель, который не умеет плавать, но бегает в четыре раза быстрее, чем плавает ученик. Сможет ли ученик убежать от учителя, если он бегает быстрее, чем учитель?*

Итак, ученик плавает со скоростью v, а учитель не умеет плавать, но бегает со скоростью $4v$. Радиус бассейна примем за единицу. Первая естественная попытка убежать от учителя – плыть к краю бассейна прямо в точку B, диаметрально противоположную начальному положению учителя. Тогда ученику предстоит преодолеть расстояние 1, на это потребуется время, равное $\frac{1}{v}$. Однако учитель сможет добежать до точки B раньше: ему нужно будет пробежать половину окружности, т.е. расстояние $\pi = 3{,}1415\ldots$, и на это уйдет время, равное $\frac{\pi}{4v} < \frac{1}{v}$.

Значит, ученик не сможет убежать? Оказывается, сможет! Но для этого понадобится более сложная стратегия. Ученик добивается, чтобы он находился на значительном расстоянии от центра «в оппозиции» с учителем, т.е. на одном диаметре с учителем по разные стороны от центра (рис.1). И только после этого он плывет прямо в точку B. Реализуем этот план.

Решение. *Этап 1 – выход на окружность радиуса 1/4.* Разложим скорость ученика по двум направлениям (рис.2). Пусть величина скорости вдоль радиуса бассейна равна a, а величина скорости, перпендикулярной радиусу, равна b.

Пока ученик находится на расстоянии $r < \frac{1}{4}$ от центра, он может поддерживать оппозицию с учителем: на каждое движение учителя со скоростью $4v$ он отвечает движением по окружности радиусом r в

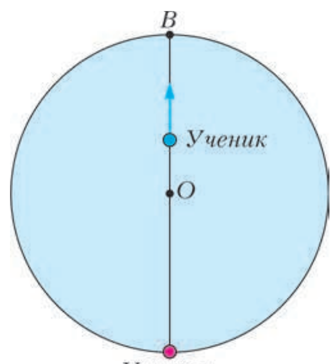


Рис. 1

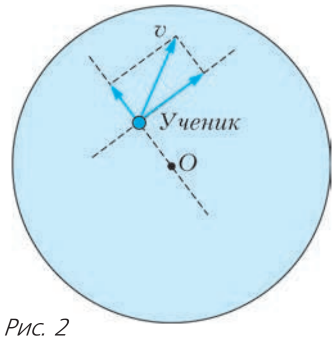


Рис. 2

противоположную сторону со скоростью $b = 4vr$ (из подобия окружностей). Так как $r < \frac{1}{4}$, то $b < v$. Следовательно, ученик может не только поддерживать оппозицию к учителю, двигаясь со скоростью b перпендикулярно радиусу, но и «включить» вторую компоненту скорости a, чтобы удаляться от центра окружности. Вторая компонента будет маленькая, чтобы выполнялось неравенство $a^2 + b^2 \le v^2$, но все же ненулевая. И пока $r < \frac{1}{4}$, ученик может удаляться от центра бассейна, постоянно оставаясь в оппозиции к учителю.

Этап 2 – полный вперед! Как только ученик попадет на окружность радиуса $\frac{1}{4}$, ему останется плыть дистанцию $\frac{3}{4}$ до точки B, и он это сделает быстрее учителя, поскольку $\frac{3}{4v} < \frac{\pi}{4}$.

Задача решена! Да нет, не совсем... Внимательный читатель, памятуя задачи 1 и 2, сразу заметит подвох: а не будет ли «причаливание» ученика к окружности радиуса $\frac{1}{4}$ длиться бесконечно долго? Причаливание происходит со скоростью $a = \sqrt{v^2 - b^2} = v\sqrt{1 - (4r)^2}$. Предлагаем читателю завершить рассуждение в следующем упражнении.

Упражнение 3. Воспользовавшись упражнением 2, докажите, что ученик выйдет на окружность радиуса $\frac{1}{4}$ за конечное время.

В задаче 3 есть и более простой способ обойти тонкие вопросы со временем причаливания. Достаточно выйти на окружность радиуса чуть меньше $\frac{1}{4}$, тогда скорость a удаления от центра будет все время больше положительной константы, и поэтому время выхода на эту окружность конечно!

Упражнения

4. Постройте траекторию выхода ученика на окружность радиуса $\frac{1}{4}$, если учитель все время бежит вокруг бассейна по часовой стрелке со скоростью $4v$.

5. Собачка бегает по большому кругу арены цирка со скоростью v. Как лев, находящийся в центре арены, может ее догнать (за конечное время!), если его максимальная скорость тоже равна v?

Замечание. Интересен вопрос, внешне сходный с упражнением 5:

Пусть собачка и лев могут двигаться со скоростью, не превышающей v, каким угодно образом внутри арены. Сможет ли лев догнать собачку за конечное время?

Забавно, что, в отличие от упражнения 5, лев не всегда сможет догнать собачку. Подробнее об этой задаче и близких интересных вопросах можно прочитать в статье Белы Боллобаша «The Lion and the Christian, and Other Pursuit and Evasion Games» (сборник «An Invitation to Mathematics»).

Задача о жучке на стебле бамбука

Эта задача в некотором смысле «о причаливании к бесконечности». Замечательна она не только сама по себе, но и по составу именитых ученых, когда-либо ее решавших. В заметке «Три эпизода» (журнал «Природа», №8 за 1990 г.) физик, академик Лев Борисович Окунь (1929–2015) вспоминает свои встречи с выдающимся ученым и человеком Андреем Дмитриевичем Сахаровым (1921–1989). На Международной конференции по физике в 1976 году в кулуарах Л.Б.Окунь предложил А.Д.Сахарову одну занимательную задачку (приводим условие с небольшими изменениями).

Задача 4. *В основании ростка бамбука длиной 1 метр сидит жучок. Бамбук постоянно растет (стебель при этом равномерно растягивается) со скоростью 1 метр в день. Жучок ползет по нему вверх с гораздо меньшей скоростью – 1 мм в день (относительно бамбука). Доползет ли он когда-нибудь до вершины?*

Казалось бы, ответ очевидно отрицательный: вершина будет каждый день удаляться от жучка почти на метр. Тем не менее, оказывается, что он доползет, причем за конечное время! Как такое возмож-

но? Поневоле вспомнишь слова Л.Д.Ландау, что наука позволяет человеку «понять вещи, которые он уже не в силах вообразить». Вот что пишет сам Л.Б.Окунь:

«И до, и после этого вечера я давал задачу разным людям. Одним для ее решения требовалось около часа, другим сутки, третьи оставались твердо убеждены, что жучок не доползет. Андрей Дмитриевич переспросил условие и попросил кусочек бумаги. Я дал ему пригласительный билет на банкет, и он тут же без всяких комментариев написал на обороте решение задачи. На все ушло около минуты».

А.Д.Сахаров придумал короткое решение с использование интегралов. Мы приведем другое решение с оценкой времени «причаливания».

Решение. Положим для краткости $a = 1/1000$ м, через h обозначим высоту бамбука (в данный момент времени), а через x обозначим высоту, на которой находится жучок. Таким образом, $x(0) = 0$, $h(0) = 1$. После первого дня длина бамбука станет равна $h(1) = 2$, а $x(1) > a$ (поскольку жучок не только ползет сам, но и поднимается за счет того, что растет бамбук). Поэтому отношение $x(1)/h(1)$ больше $a/2$. Если бы в этот момент жучок остановился, то отношение x/h далее бы не менялось. Но за счет того, что за второй день жучок вновь проползет a, отношение x/h увеличится не меньше чем на $a/h(2) = a/3$. Таким образом, отношение $x(2)/h(2)$ будет больше, чем $a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$. Аналогично, после третьего дня отношение $x(3)/h(3)$ будет больше, чем $a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$, и т.д. Таким образом, по прошествии k дней отношение $x(k)/h(k)$ будет больше, чем $a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k+1}\right)$.

На первый взгляд может показаться, что сумма в скобках невелика и множитель $a = 1/1000$ делает все произведение маленьким. Но это не так! В скобках – частичная сумма знаменитого *гармонического ряда* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$, которая с ростом количества слагаемых растет до бесконечности. В самом деле, первое число ряда равно $\frac{1}{2}$, сумма следующих двух чисел больше $\frac{1}{2}$, сумма следующих 4 чисел снова больше $\frac{1}{2}$ (поскольку это 4 числа, каждое из которых больше $1/8$), далее идут 8 чисел, больших $1/16$, поэтому их сумма вновь больше $1/2$, и т.д. Так мы группируем числа в «пачки» с суммой больше $1/2$ в каждой. Следовательно, сумма всего ряда бесконечна! Поэтому найдется такое k, при котором отношение $x(k)/h(k)$ станет больше 1. Это означает, что по истечении этой k-й секунды наш неутомимый жучок точно доползет до вершины!

Задача решена! И уж точно никакого подвоха нет: жучок достигнет вершины за конечное время. Но и здесь все не так просто! Нет, не ищите ошибок в решении, мы с вами все сделали верно. Дело в другом. В конце статьи (пример 3) мы получим точную формулу движения жучка. Оказывается, что он достигнет вершины примерно за $5 \cdot 10^{431}$ лет (пятерка и 431 ноль)! Это невообразимое время значительно больше времени существования нашей Вселенной. Бамбук при этом вырастет до 10^{431} км! Так что **ответ в задаче, хоть и математически корректный, но физически неосуществимый**. Те, кто считал, что жучок не доползет никогда, оказались не так уж неправы.

Задача о жучке и ее вариации стали популярными: например, задача такого сорта предлагалась в начале 1990-х на сборах по подготовке к Международной физической олимпиаде, эта задача была опубликована в задачнике «Кванта» под номером Ф1348* («Квант» № 5 за 1992 г.).

Упражнение 6. Докажите, что жучок достигает вершины с ненулевой скоростью, т.е. на самом деле происходит не «причаливание», а удар.

Задача о четырех муравьях

А вот еще одна популярная задача. Она исследует «совместное причаливание» к месту встречи.

Задача 5. *В вершинах квадрата ABCD со стороной 1 находятся четыре муравья; назовем муравьев так же, как и вершины квадрата. Одновременно муравьи начинают двигаться со скоростями, равными v (по абсолютной величине). Муравей A все время ползет по направлению к муравью B, муравей B – к C, C – к D, муравей D – к A. Встретятся ли муравьи, и если да, то через какое время?*

Решение. В силу симметрии в любой момент времени муравьи располагаются в вершинах квадрата $A'B'C'D'$ (рис.3).

Этот квадрат имеет общий центр O с исходным квадратом, но стороны его повернуты относительно исходного. Скорость муравья A направлена вдоль стороны $A'B'$ и составляет угол 45° с отрезком $A'O$. Это значит, что длина отрезка $A'O$ уменьшается со скоростью $v\cos 45° = v/\sqrt{2}$. Вначале эта длина составляет $1/\sqrt{2}$. Следовательно, через время $1/v$ все муравьи окажутся в точке O.

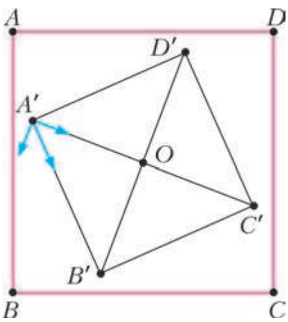


Рис. 3

В отличие от всех предыдущих задач, здесь мы смогли не только оценить время, но и точно его найти. А вот найти траектории движения муравьев так же просто не получится. Оказывается, траектория каждого муравья – так называемая *логарифмическая спираль* (рис. 4), которая «накручивается» на центр, совершая бесконечно много оборотов. Вот и еще один подвох (тут-то мы их совсем не ожидали!). Да-да, каждый из муравьев бесконечно много раз обходит точку O за конечное время. Этот путь, кажущийся невозможным, тем не менее является верным ответом.

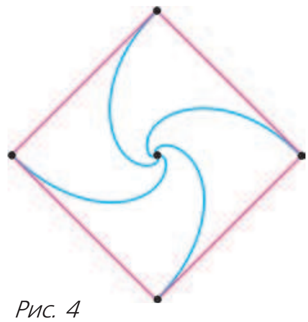


Рис. 4

По условию, в точке O происходит «удар» — все муравьи столкнутся со скоростью v. Правда, до этого каждый из них сделает бесконечно много витков вокруг точки O. Меняя должным образом скорости муравьев, можно добиться и плавного их «причаливания» к точке O.

Упражнения

7. Пусть скорость каждого муравья не постоянна, а в каждый момент равна расстоянию до соседнего муравья. Встретятся ли муравьи? Если да, то произойдет ли это за конечное время?

8. Тот же вопрос, что в упражнении 7, но теперь скорость равна квадратному корню из расстояния до соседнего муравья.

Полезно решать дифференциальные уравнения

Этот раздел потребует от читателя некоторой подготовки – знания производной, первообразной, а также функций e^t и $\ln t$. Поэтому он скорее адресован старшеклассникам и студентам. Читатель, не знакомый с этими понятиями, может пока его пропустить – основной смысл статьи сохранится.

Во всех разобранных задачах мы смогли качественно исследовать процесс, выяснить, чем он завершится, и будет ли это сделано за конечное время. Но ни в одном из них мы не смогли написать уравнение движения. Это неудивительно – школьная физика подробно разбирает только движение с постоянной скоростью или с постоянным ускорением. Более сложные случаи требуют решения *дифференциальных уравнений*. В таких уравнениях надо найти функцию по заданному соотношению между ней и ее производными. Огромное количество задач естествознания, экономики, социологии и многих других наук сводятся к дифференциальным уравнениям. О значении дифференциальных уравнений писали еще Ньютон, Лейбниц, Кеплер, Бернулли. Известно высказывание Ньютона: *«Data aequotione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa»*, его перевод на современный математический язык вынесен нами в заголовок этого раздела.

Пример 1. В задаче 1 о причаливании скорость лодки $f(x) = x'(t)$ равна расстоянию x, таким образом, получаем *дифференциальное уравнение* $x'(t) = -x$. Минус ставим потому, что скорость направлена в сторону уменьшения расстояния. Положение точки в начальный момент времени $t = 0$ запишется в виде начального условия $x(0) = 1$.

Легко проверить, что функция $x(t) = e^{-t}$ является решением. Значит, она задает уравнение движения лодки. Видим, что $x(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$, но никогда не обращается в ноль. Поэтому «причаливание» к точке $x = 0$ продолжается бесконечно долго. Но при этом уже через $t = 10$ секунд расстояние станет равным $e^{-10} \approx 0{,}000045$, т.е. меньше $\frac{1}{20}$ миллиметра.

Мы, правда, не разобрались с очень важным вопросом: является ли функция $x(t) = e^{-t}$ единственным решением дифференциального уравнения? Может быть, есть другое решение и движение лодки на самом деле подчиняется ему? Вопрос законный, но мы не будем в него углубляться. Скажем лишь, что единственность решения легко может быть установлена методами теории дифференциальных уравнений.

Пример 2. В задаче 2 о причаливании получаем дифференциальное уравнение $x' = -\sqrt{x}$. Непосредственно можно проверить, что этому уравнению удовлетворяют функции вида $x(t) = \frac{1}{4}(c-t)^2$, где $c > 0$ – константа, $t \in [0; c]$. Из начального условия $x(0) = 1$ находим $c = 2$. Итак, мы получили уравнение движения лодки:

$$x(t) = \frac{1}{4}(2-t)^2.$$

Время причаливания находим, решив уравнение $x(0) = 1$. Получим $t = 2$ – это и есть время движения до остановки в точке 0.

Упражнение 9. Запишите дифференциальные уравнения, соответствующие «причаливанию» из упражнений 1 и 2. Попробуйте отыскать их решения и найти время движения.

Указание. При решении уравнения $x' = -\sqrt{1-x^2}$ воспользуйтесь свойствами синуса и косинуса.

Пример 3. В задаче 4 движение жучка по стеблю бамбука описывается дифференциальным уравнением:

$$x' = \frac{x}{t+1} + a, \quad x(0) = 0,$$

где $x(t)$ – высота, на которой находится жучок в момент времени t. Решение этого уравнения $x(t) = a(t+1)\ln(t+1)$. Жучок доберется до вершины в момент, когда $x(t) = t+1$. Таким образом, $t+1 = a(t+1)\ln(t+1)$, отсюда $1/a = 1000 = \ln(t+1)$. Итак, $t = e^{1000} - 1$ дней, что примерно составляет $5 \cdot 10^{431}$ лет.

Пример 4. Построим дифференциальные уравнения, описывающие логарифмическую спираль – траекторию муравья из задачи 5. Пусть начало координат находится в месте встречи муравьев – в точке O. В момент времени t муравей A находится в точке $(x, y) = (x(t), y(t))$. Точка B получается из A поворотом вокруг точки O

на угол $90°$, поэтому $B = (-y, x)$. Тогда вектор скорости муравья (x', y') пропорционален вектору $AB(-y - x, x - y)$. Получаем систему дифференциальных уравнений

$$x' = k(-y - x),$$
$$y' = k(x - y),$$

где

$$k = \frac{v}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}.$$

Решать эту систему мы не будем (это не очень просто), а вот систему, возникающую в упражнении 7, вполне можно решить.

Упражнение 10. Получите систему дифференциальных уравнений на траекторию муравья из упражнения 7 и постарайтесь решить ее.

Как все, оказывается, просто, когда умеешь решать дифференциальные уравнения! Нашел решение, подставил в него необходимые данные и ответил на все вопросы. Зачем же мы тогда так сложно все делали в первых четырех разделах? Неужели зря? Нет, не зря! На практике во многих задачах получаются очень сложные дифференциальные уравнения, которые не удается решить в явном виде. А свойства решения, тем не менее, нужно узнать. В этом случае ученые вынуждены анализировать свойства решений, не имея точных формул. Эта наука называется *качественной теорией дифференциальных уравнений*. Именно по ней мы с вами краешком прошлись.

Авторы благодарны редколлегии, в особенности В.М.Тихомирову, за вдохновляющее обсуждение текста статьи.

НАМ ПИШУТ

Об элементарном доказательстве теоремы Фейербаха

И. КУШНИР, О. ЧЕРКАССКИЙ

Напомним, что в любом треугольнике середины сторон, основания высот, а также середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности. Эта окружность носит название *окружности девяти точек* или *окружности Эйлера* (см., например, статью И.Шарыгина и А.Ягубьянца «Окружность девяти точек и прямая Эйлера» в «Кванте» №8 за 1981 г.). Одним из самых красивых результатов классической геометрии по праву считается **теорема Фейербаха,** утверждающая, что *окружность девяти точек касается окружности, вписанной в треугольник, и трех вневписанных окружностей* (рис 1).

Большинство известных доказательств теоремы Фейербаха сложны и неэлементарны (используют инверсию и т.д.). Мы же приведем здесь совсем короткое элементарное доказательство, основанное на известных формулах и несложных вычислениях.

Будем использовать следующие обозначения для элементов данного треугольника ABC: a, b,

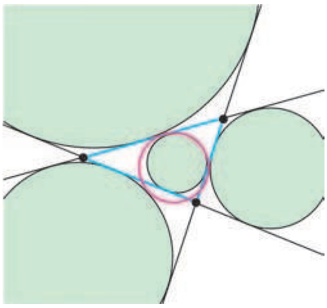


Рис. 1

c – длины сторон BC, CA, AB соответственно, R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей, I – инцентр (т.е. центр вписанной окружности), O – центр описанной окружности, H – ортоцентр (т.е. точка пересечения высот). Как известно, радиус окружности Эйлера равен $R/2$, а ее центр E является серединой отрезка OH. Утверждение теоремы Фейербаха о касании вписанной окружности и окружности девяти точек будет доказано, если мы установим, что $IE = |R/2 - r|$. Это равенство соответствует внутреннему касанию рассматриваемых окружностей (на самом деле, можно показать, что $R/2$ всегда не меньше чем r).

Рассмотрим треугольник OHI (рис. 2). Отрезок IE является медианой этого треугольника. По формуле длины медианы имеем

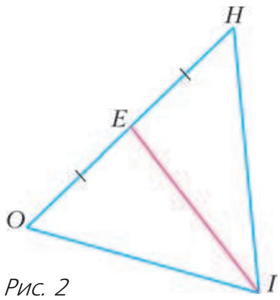


Рис. 2

$$4IE^2 = 2OI^2 + 2IH^2 - OH^2 .$$

Воспользуемся известными формулами:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr ,$$

$$IH^2 = 4R^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) ,$$

$$OH^2 = 9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right) .$$

Объединив все четыре формулы, получаем

$$4IE^2 = \left(2R^2 - 4Rr\right) + \left(8R^2 + 4r^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\right) - \left(9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\right) ,$$

$$4IE^2 = R^2 - 4Rr + 4r^2 ,$$

откуда

$$2IE = \left|R - 2r\right| ,$$

что и требовалось!

Читатель может, применив аналоги формул для центра вневписанной окружности, провести доказательство касания окружности девяти точек с вневписанными окружностями по той же схеме.

От редакции

Теорема Фейербаха своей красотой привлекала внимание многих любителей геометрии и поэтому имеет много разных доказательств. Журнал «Квант» также неоднократно обращался к этой теореме. Например, в статьях В.Дубровского «Момент инерции в геометрии» (№7, 1984 г.), В.Протасова «Вокруг теоремы Фейербаха» (№9, 1992 г.), В.Дубровского и В.Сендерова «Ловушка для треугольника» (№3, 1999 г.), В.Протасова «Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха» (№4, 2008 г.).

В отличие от многих известных доказательств, рассуждения, которые предлагают И.Кушнир и О.Черкасский, действительно выглядят прозрачно и доступно. Конечно, существенная трудность – доказательство используемых формул – здесь остается за кадром. Впрочем, эти формулы известны и содержатся во многих источниках. Формула для OI^2 часто употребима и известна как формула Эйлера, формула для вычисления длины отрезка IH имеется, например, в упомянутой статье В.Дубровского, а в статье А.Заславского, Д.Косова и М.Музафарова «Траектории замечательных точек треугольника Понселе» (№2, 2003 г.) есть общий рецепт получения формул для длин IX и OX для произвольных точек X.

Спринтеры и стайеры

А.МИНЕЕВ

Будь ты спринтер, будь ты стайер,
Трижды чемпионом,
Не упустим, не отстанем,
Все равно догоним.

Песня

ЗАДАДИМСЯ ТАКИМ ВОПРОСОМ: КАКОВЫ максимальная скорость и мощность, которые развивают легкоатлеты при беге? Воспользуемся данными нынешних мировых рекордов (раздел – легкая атлетика, бег) и построим график зависимости скорости лучших бегунов мира от дистанции пробега. Там же отложим по оси абсцисс и время забега. На рисунке 1 приведены рекорды бега мужчин и женщин на 100 м, 200 м, 400 м, 800 м, 1609 м (1 миля), 2 км, 3 км, 5 км, 10 км, 20 км, 25 км, 30 км и 100 км. Данные марафонского бега помечены звездочками.

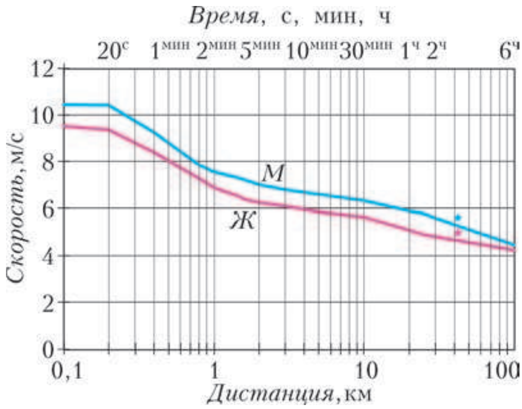


Рис. 1. Зависимость максимальной скорости и времени бега от расстояния для мужчин (М) и женщин (Ж)

Взгляд на эти кривые позволяет заметить несколько важных особенностей:

- у спринтеров (дистанция 100–200 метров) скорость бега достигает 10 м/с; столь высокая скорость может поддерживаться в течение 20–30 секунд;
- у стайеров (1–10 км) средняя скорость бега составляет около 6–7 м/с; с такой скоростью они могут бежать в течение получаса;
- у бегунов на сверхдальние расстояния

с увеличением длины дистанции средняя скорость все более и более снижается; так, у марафонцев (дистанция 42 км 195 м) средняя скорость оказывается уже около 5 м/с, в забеге на 100 км она меньше 4,5 м/с, на 200 км – меньше 3,6 м/с и так далее.

Отметим, что, в отличие от спринтеров и стайеров, бегуны на сверхдальние дистанции вынуждены питаться в ходе пробега, пополняя запасы воды и энергии. Поэтому сосредоточимся главным образом на первой и второй группах – спринтерах и стайерах, которые на протяжении дистанции лишь *тратят* запасенную до старта энергию, и займемся выяснением особенностей ресурсов и затрат энергии спринтеров и стайеров.

Сформулируем конкретные вопросы, на которые будем искать ответы:

почему скорость бега порядка 10 м/с не удается выдержать более десятков секунд;

почему уровень скорости 6–7 м/с может выдерживаться достаточно долго;

какую максимальную мощность развивают спринтеры и стайеры и какова зависимость мощности, затрачиваемой бегуном, от скорости бега;

какими запасами энергии пользуются спринтеры и стайеры?

Энергетика бега

Вначале свяжем скорость передвижения спортсмена с затратами мощности на поддержание его жизнедеятельности.

В спокойном состоянии человеку требуется мощность на уровне 80–100 Вт. Эта цифра соответствует так называемому минимальному уровню метаболизма человека. Указанная мощность восполняется поступлением в организм пищи. Действительно, если поделить 2000–2500 килокалорий (т.е. 8–10 МДж), которые человек получает в день, на продолжительность суток, то средняя мощность, поступающая в организм с пищей, оказывается около 100 Вт. К тем же выводам приводят и оценки энергии, выделяющейся в результате реакций с участием кислорода. Действительно, в спокойном состоянии человек расходует примерно 0,3 литра кислорода в минуту или 5 мл/с. Один литр кислорода способен окислить углеводы и жиры с высвобождением энергии около 5 ккал или 20 кДж. Поэтому 5 мл/с по энергии соответствуют примерно 100 Вт мощности, что близко к указанному выше минимальному уровню метаболизма.

Каков уровень максимальных затрат мощности спортсмена? Измеренная максимальная скорость потребления кислорода при быстром беге достигает 6 литров в минуту (100 мл/с) что в энергетических единицах составляет несколько киловатт.

Измерения подтверждают и уточняют такие оценки максимальных затрат мощности. По мере увеличения скорости бега экспериментально измеренная зависимость потребляемой мощности P (Вт) от скорости v (м/с) имеет вид

$$P = 3{,}6mv + \frac{1}{2}\rho SCv\left(v - v_{\text{в}}\right)^2,$$

где m – масса бегуна (кг), S – эффективная площадь поперечного сечения бегуна (м^2), $v_{\text{в}}$ – скорость ветра (м/с), $\rho = 1{,}225\ \text{кг}/\text{м}^3$ – плотность воздуха при нормальных условиях, C – безразмерный коэффициент лобового сопротивления. Первое слагаемое соответствует потерям на трение при соприкосновении с землей, второе – влиянию сопротивления воздуха.

Отметим, что, согласно правилам международной ассоциации легкоатлетических федераций, *допустимая* скорость попутного ветра (для регистрации рекордов) для спринтеров составляет всего 2 м/с. Поэтому при оценках положим $v_{\text{в}} = 0$. Коэффициент лобового сопротивления бегунов соответствует турбулентному режиму обтекания тела спортсмена воздухом, который реализуется при больших числах Рейнольдса: $Re > 10^4$. Число Рейнольдса является одной из характеристик течения вязкой жидкости (или газа). Оно выражается соотношением $Re = dv/\nu_{\text{кин}}$ и при скорости бега $v = 1{-}10$ м/с, характерном размере тела человека $d \sim 1$ м и коэффициенте кинематической вязкости воздуха $\nu_{\text{кин}} \sim 1 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^2/\text{с}$ составляет $\sim (0{,}6 - 6) \cdot 10^5$. При такой величине числа Рейнольдса коэффициент лобового сопротивления C оказывается близким к единице.

Из приведенного выражения для мощности P следует, что бегун массой 75 кг при эффективной площади его поперечного сечения 1 м^2, скорости 5 м/с, коэффициенте $C \approx 1$ и отсутствии ветра затрачивает мощность 1,4 кВт. Попутный ветер с той же скоростью $v_в = 5$ м/с (при этом второе слагаемое вклада не дает) снижает потребление мощности лишь на 80 Вт. При увеличении скорости бега до 10 м/с вклад сопротивления воздуха ($\sim v^3$) уже не мал и доходит до 20%, а затрачиваемая мощность превышает 3 кВт. Соответствующий график зависимости P от v представлен на рисунке 2.

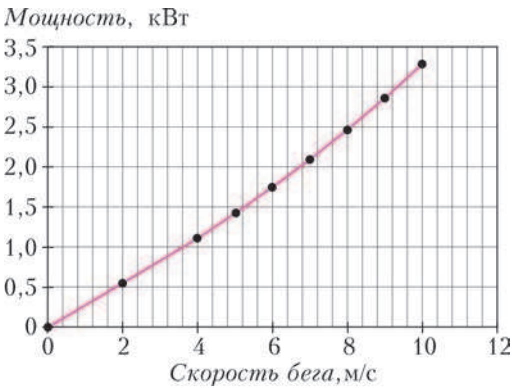


Рис. 2. Зависимость затрачиваемой бегуном мощности от скорости бега

Вооруженные этими данными, пройдемся по вопросам, поставленным в начале статьи.

Спринт. Анаэробный запас энергии

Из рисунка 1 видно, что при беге в течение времени, меньшем 20–30 секунд, на графике образуется плато скорости $v = 10$ м/с. За такое плато отвечает *внутренний* запас энергии, который может быть мобилизован практически сразу. Слова «практически сразу» означают, что высвобождение такой энергии может происходить даже *без потребления кислорода*. Иными словами, в течение такого времени бегун (или, скажем, пловец) может практически не дышать. Подобный процесс называется *анаэробным*, происходящим без участия кислорода, и соответствует выделению энергии при разложении фосфатов и сахаров (глюкозы). Внутренний запас энергии, который может быть быстро мобилизован, составляет для человека порядка 100 кДж. Поскольку выделяемая организмом мощность при скорости $v = 10$ м/с масштаба 3,5 кВт, то длительность бега до существенного снижения внутреннего запаса энергии составляет

$$\frac{100 \text{ кДж}}{3{,}5 \text{ кВт}} \approx 30 \text{ с}.$$

Сама величина максимальной скорости (10 м/с) ограничена мышечной системой спортсмена и особенностями взаимодействия ног бегуна с землей. На стадии спринтерского бега тепло, как правило, не успевает отводиться, и температура тела спринтера повышается.

Средние дистанции. Подключение аэробного механизма подпитки

При беге в течение 20–30 минут происходит спад скорости с 10 до 7 м/с (см. рис.1). На этой стадии ресурс анаэробного запаса энергии постепенно иссякает и заменяется аэробным, в котором выделение энергии происходит с участием кислорода. Дыхание превращается в важнейший фактор, определяющий скорость бега. Кислород в этом случае приводит к расщеплению глюкозы до конечных продуктов – углекислого газа и воды. Такое более глубокое расщепление требует и большего времени, что и ограничивает скорость спортсмена до уровня $v \sim 7$ м/с.

Энергетический ресурс на этой стадии связан с существенным снижением исходного запаса глюкозы. Уровень запаса глюкозы в мышцах порядка 300 граммов. Если принять, что допустимо его снижение вдвое, то это соответствует выделению энергии

$$150 \text{ г} \cdot 20 \text{ кДж/г} = 3 \text{ МДж}.$$

Скорости 7 м/с соответствуют затраты мощности около 2 кВт (см. рис.2). Частное от деления запаса энергии на мощность дает максимальную длительность бега со скоростью 7 м/с:

$$\frac{3\ \text{МДж}}{2\ \text{кВт}} = 1500\ \text{с} = 25\ \text{мин}\ .$$

Стайеры и марафонцы. Роль окисления жиров

Полный запас энергии в *жировой* ткани спортсмена массой 75 кг составляет более 300 МДж, и он очень далек от исчерпания. Но для того чтобы существенно истратить запас жиров, требуется много времени. Это могут подтвердить все, кто старается похудеть.

На стайерской дистанции затрачивается мощность 1–1,5 кВт, а затраты энергии составляют 4–5 МВт за каждый час бега. Рекордсмены потребляют в день около 5000 ккал энергии (≈ 20 МДж). Если принять, что половину этой энергии допустимо затратить в ходе бега, то доступными являются только 10 МДж энергии. Как видно из наших оценок, такая энергия тратится примерно за два часа быстрого бега. На рисунке 1 это соответствует длительности марафонского забега. И действительно, марафонцы, не говоря уже о бегунах на более длинные дистанции, вынуждены пополнять запасы энергии в ходе бега смесями, богатыми углеводами. Обязательно ли марафонцу пить воду? Конечно. Поскольку для испарения литра воды требуется 2,3 МДж, то часовому бегу соответствует испарение около 2 литров воды. Но нужно ли полностью восполнять потери воды? Нет, это опасно. Вода может не успеть усвоиться организмом стайера во время бега, и задачу восполнения потерь решают уже после финиша.

А как чемпионы среди людей по бегу выглядят на фоне быстроты передвижения других млекопитающих? Скажем прямо – весьма посредственно. Во многом это плата за прямохождение и связанный с этим бег на двух ногах. Четвероногие бегут быстрее. Чемпион среди них – гепард, у которого зафиксирована максимальная скорость бега 35 м/с в течение 10 секунд. Скорее всего, больше ему и не нужно для удачной охоты. Остальное время он отдыхает или перемещается с существенно более низкой и экономной «крейсерской» скоростью в поисках очередной жертвы. Да и строение тела гепарда более приспособлено для быстрого бега, и относительная масса мышц повыше.

Наиболее быстрые *спринтеры* – хищники (типа кошачьих) и копытные. Как выглядит человек на их фоне, показано на рисунке 3. А на рисунке 4 приведена соответствующая информация для *стайеров* – тех, кто способен на быстрый длительный бег. Из этих рисунков видно, насколько сильно человек уступает животным, особенно в спринте.

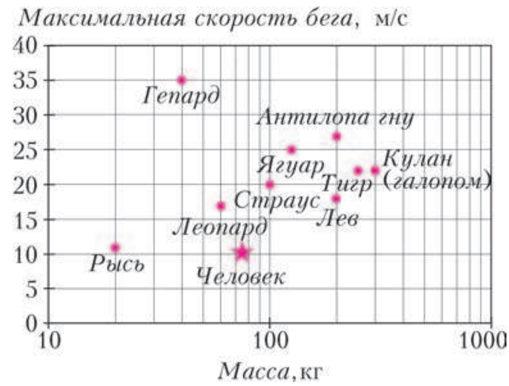


Рис. 3. Спринтеры: зависимость максимальной скорости бега млекопитающих от массы тела

Рис. 4. Стайеры: зависимость максимальной скорости длительного бега млекопитающих от массы тела

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2486–М2489 предлагались на XXXIX Турнире городов.

Задачи Ф2493–Ф2496 предлагались на олимпиаде «Шаги познания физики» (г.Пенза). Автор этих задач – А.Сеитов.

Задачи М2486–М2489, Ф2493–Ф2496

М2486. Аналитик сделал прогноз изменения курса доллара на каждый из 12 ближайших месяцев: на сколько процентов (число, большее 0% и меньшее 100%) изменится курс за октябрь, на сколько – за ноябрь, …, на сколько – за сентябрь. Оказалось, что про каждый месяц он верно предсказал, на сколько процентов изменится курс, но ошибся с направлением изменения (т.е. если он предсказывал, что курс увеличится на $x\%$, то курс падал на $x\%$, и наоборот). При этом через 12 месяцев курс совпал с прогнозом. В какую сторону в итоге изменился курс?

А.Заславский

М2487. Вписанная окружность касается сторон AB, BC и AC треугольника ABC в точках N, K и M соответственно (рис.1).

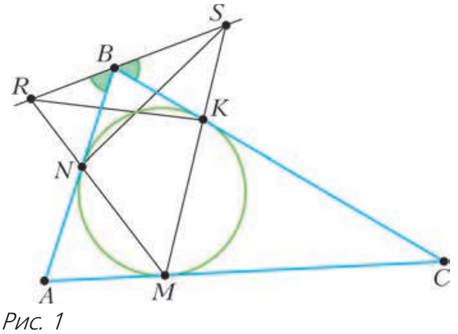


Рис. 1

Прямые MN и MK пересекают биссектрису внешнего угла B в точках R и S соответственно. Докажите, что прямые RK и SN пересекаются на вписанной окружности треугольника ABC.

М.Евдокимов

М2488. Город представляет из себя клетчатый прямоугольник, в каждой клетке стоит пятиэтажный дом. Закон о реновации позволяет выбрать две соседние по стороне клетки, в которых стоят дома, и снести тот дом, где меньше этажей (либо столько же). При этом над вторым домом надстраивается столько этажей, сколько было в снесенном доме. Какое наименьшее число домов можно оставить в городе, пользуясь законом о реновации, если город имеет размеры: а) 20×20 клеток; б) 50×90 клеток?

М.Мурашкин

М2489. Покажите, что для любой последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, состоящей из единиц и минус единиц, найдутся такие n и k, что

$$|a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k+1} + \ldots$$
$$\ldots + a_n \cdot a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{n+k}| = 2017 .$$

И.Митрофанов

Ф2493. На протяженной гладкой горизонтальной поверхности вдоль вертикальной

оси скачет небольшой абсолютно упругий гладкий шарик. Максимальная скорость его равна v. На той же горизонтальной поверхности на расстоянии от места ударов этого шарика, равном максимальной высоте его полета, расположен второй такой же шарик. Ему сообщают горизонтальную скорость v в направлении первого. Шарики столкнулись так, что в момент соударения линия, проходящая через их центры, была горизонтальна и совпадала по направлению со скоростью второго шарика до удара.
1) Найдите максимальную высоту полета первого шарика.
2) Найдите период движения первого шарика до удара со вторым.
3) На какой высоте находился первый шарик в момент старта второго?
4) Найдите скорость первого шарика сразу после удара со вторым.
5) На каком расстоянии от места удара можно поставить вертикальную стенку так, чтобы после отражения от нее первый шарик вновь ударился о второй?
Временем ударов можно пренебречь.

Ф2494. В системе, изображенной на рисунке 2, трения нет, пружина упругая и

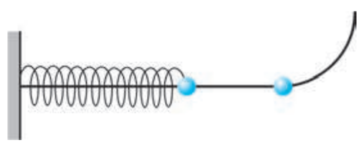


Рис. 2

невесомая, небольшие шары одинаковые и упругие. Правая часть стержня плавно переходит в дугу окружности радиусом R, расположенную в вертикальной плоскости, а в месте перехода находится правый шар. Расстояние между шарами равно R. Если, не снимая шаров и не удерживая их внешними силами, систему расположить так, что прямолинейная часть стержня примет вертикальное положение, то в состоянии равновесия пружина сожмется на величину R. Из положения, показанного на рисунке, правый шар отклоняют так, что его угловое смещение вдоль дуги невелико и равно β $(\beta \ll 1)$.
1) Найдите время, в течение которого правый шар первый раз вернется в указанное на рисунке начальное положение.
2) Найдите модуль скорости правого шара на горизонтальном участке.
3) Найдите максимальную величину сжатия пружины после удара шаров.
4) Найдите время движения левого шара между первыми двумя ударами шаров.
5) Найдите период колебаний этой системы.

Ф2495. В горизонтальной трубке длиной L постоянного сечения S, запаянной с одного конца, заперт жидкостью плотностью ρ столб воздуха при абсолютной температуре T_0 (рис.3). Если воздух в

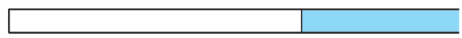


Рис. 3

трубке нагреть до абсолютной температуры T, то вся жидкость вытечет из трубки. Трубку поворачивают на 90° открытым концом вверх, жидкость при этом вниз не протекает и температура поддерживается постоянной. Атмосферное давление $p = \rho g H_0$, где $H_0 > L$.
1) Найдите длину воздушного столба в горизонтальной трубке.
2) Сколько молекул газа находится в трубке?
3) Найдите давление воздуха в трубке в вертикальном положении.
4) Найдите длину воздушного столба в вертикальной трубке.
5) Найдите максимальную длину столба жидкости, которую можно получить после добавления жидкости в вертикальную трубку.
Капиллярные эффекты не учитывать.

Ф2496. В однородном магнитном поле с индукцией, равной B и направленной от нас (рис.4), покоится вертикальный контур с дву-

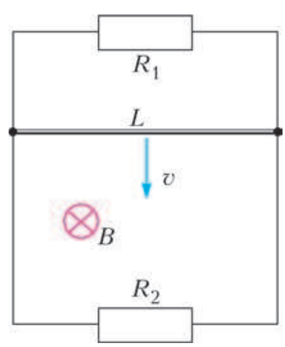


Рис. 4

мя резисторами сопротивлениями R_1 и R_2. Вертикальные стороны контура соединены горизонтальной перемычкой длиной L малого сопротивления, способной скользить по сторонам контура без трения, сохраняя с ними хороший электрический контакт. Перемычку отпускают, и она через некоторое время движется равномерно вниз. За время T равномерного движения в первом резисторе выделяется количество теплоты Q_1.

1) Укажите направления токов, протекающих через первый и второй резисторы при движении перемычки.

2) Какое количество теплоты Q_2 выделилось за время T во втором резисторе?

3) Найдите установившуюся скорость движения перемычки.

4) Найдите силу тока в перемычке при ее равномерном падении.

5) Найдите массу перемычки.

Решения задач М2474–М2477, Ф2481–Ф2484

М2474. *Натуральные числа x, y, z таковы, что $(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z$. Докажите, что они являются длинами сторон некоторого треугольника.*

Заметим, что числа x, y, z различны, поскольку правая часть равенства положительна. Пусть для определенности z – наибольшее из чисел, тогда

$$(x-y)(y-z)(z-x)=(y-x)(z-y)(z-x)$$

должно быть положительным, поэтому $y>x$. Обозначим $a=y-x$, $b=z-y$, тогда

$$(y-x)(z-y)(z-x)=ab(a+b),$$

$$x+y+z=$$

$$=x+(x+a)+(x+a+b)=3x+2a+b$$

и условие переписывается в виде

$$ab(a+b)=3x+2a+b. \qquad (*)$$

Если предположить, что x, y, z не являются сторонами никакого треугольника, то $z\ge x+y$, т.е. $x+a+b\ge x+x+a$ и $x\le b$. Тогда

$$ab(a+b)=3x+2a+b\le 2a+4b<4(a+b),$$

отсюда $ab<4$. Остаются лишь возможности: $a=b=1$; $a=1$, $b=2$; $a=1$, $b=3$; $a=2$, $b=1$; $a=3$, $b=1$. Однако подстановка в $(*)$ ни в одном из этих пяти случаев не приводит к натуральному x. Наше предположение противоречиво, значит, верно утверждение задачи.

Можно показать, что треугольников, стороны которых удовлетворяют уравнению из условия задачи, бесконечно много. Действительно, задаваясь, например, натуральными a и b, кратными 3, из $(*)$ найдем натуральное x, а затем восстановим оставшиеся стороны $y=x+a$, $z=x+a+b$.

В.Сендеров

М2475. *Дан квадрат $ABCD$. Переменный квадрат $KLMN$ расположен так, что K лежит на отрезке AD, B лежит на отрезке LM, а C лежит на отрезке MN (рис.1). Найдите геометрическое место точек T пересечения прямых AL и DN.*

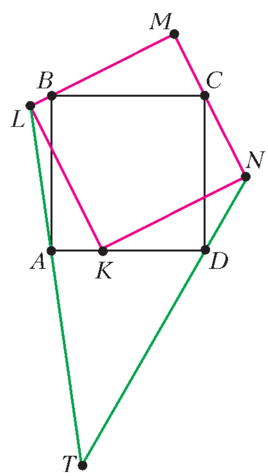


Рис. 1

Докажем, что $AL \parallel MD$. Достроим треугольник BMC до квадрата $MQPR$, описанного вокруг квадрата $ABCD$ (рис.2). Заметим, что MK и MP – диагонали квадратов, имеющих общий угол M, поэтому каждая из прямых

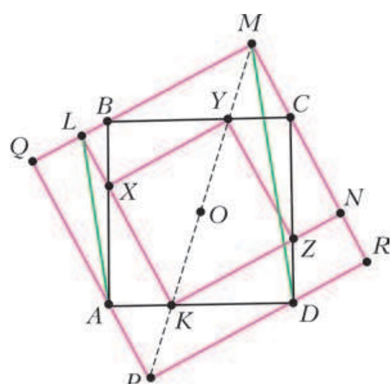


Рис. 2

MK и MP – биссектриса угла QMR, значит, K лежит на MP. Кроме того, MP проходит через общий центр O квадратов $ABCD$ и $MQPR$. Впишем в квадрат $ABCD$ квадрат $KXYZ$ (поворачивая вершину K на углы $90°$, $180°$, $270°$ вокруг центра), при этом Y лежит на прямой KO, т.е. на прямой MP. Так как KM – общая биссектриса прямых углов LKN и XKZ, то X и Z лежат на отрезках KL и KN.

В треугольниках AXL и DCM: $AX \parallel CD$ и $XL \parallel CM$. Кроме того, $AX = CZ$, $CM = DR$ (поворот вокруг центра), $XL = KL - KX = KN - KZ = NZ$. Из подобия треугольников CZN и CDR имеем $CD:CZ = DR:NZ$. Отсюда $CD:AX = CM:XL$. Получаем $\Delta AXL \sim \Delta DCM$, следовательно, $AL \parallel MD$.

Итак, $AL \parallel MD$, значит, прямая AL симметрична прямой MD относительно середины W отрезка AD. Аналогично, прямая DN симметрична прямой MA относительно W. Значит, T симметрична точке M относительно W (рис.3). Точка M пробегает полуокружность γ, построенную на стороне BC как на диаметре вне квадрата $ABCD$, значит, искомое ГМТ точек T – полуокружность, симметричная полуокружности γ относительно W.

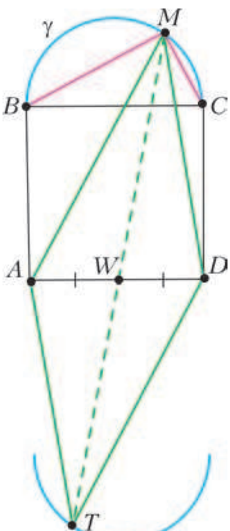


Рис. 3

П.Кожевников, В.Расторгуев

M2476. *На координатной плоскости построены графики $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ квадратичных функций $f_1(x) = p_1x^2 + q_1x + r_1$ и $f_2(x) = p_2x^2 + q_2x + r_2$, причем $p_1 > 0 > p_2$. Графики $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ пересекаются в двух различных точках A и B. Четыре касательные к $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, проведенные в точках A и B, образуют выпуклый четырехугольник, в который можно вписать окружность. Докажите, что графики $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ имеют общую ось симметрии.*

Пусть касательные, проведенные в точках A и B к $\mathcal{G}_1$, пересекаются в точке C_1, касательные, проведенные в точках A и B к $\mathcal{G}_2$, пересекаются в точке C_2 (рис.1). Используем следующую лемму.

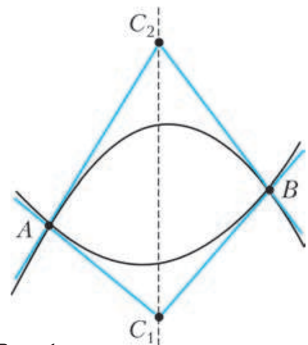


Рис. 1

Лемма. *Если к параболе проведены касательные CA и BC (где A и B – точки касания), то абсцисса точки C равна среднему арифметическому абсцисс точек A и B.*

Доказательство. Можно считать, что C – это начало координат (этого можно добиться сдвигом), так что уравнения касательных имеют вид $y = k_ax$ и $y = k_bx$. Обозначим через x_a и x_b абсциссы точек касания. Тогда x_a и x_b – это двукратные корни квадратных уравнений $f(x) = k_ax$ и $f(x) = k_bx$, где $f(x) = px^2 + qx + r$ – квадратный трехчлен, задающий параболу. По теореме Виета, $x_a^2 = \frac{r}{p} = x_b^2$. Ясно, что $x_a \neq x_b$, поэтому $x_a = -x_b$ и $\frac{x_a + x_b}{2} = 0$, что и требовалось. Лемма доказана. (Помимо приведенного доказательства есть и чисто геометрическое, с использованием аффинного преобразования.)

Из леммы следует, что прямая C_1C_2 параллельна оси ординат, а точки A и B равноудалены от это прямой. Предположим, что центр I окружности, вписанной в четырехугольник AC_1BC_2, не лежит на прямой C_1C_2. Без ограничения общности, пусть I лежит внутри треугольника AC_1C_2 (рис.2). Пусть A' – точка, получаемая отражением точки A относительно прямой C_1C_2. Тогда луч C_1B лежит внутри угла AC_1A' (посколь-

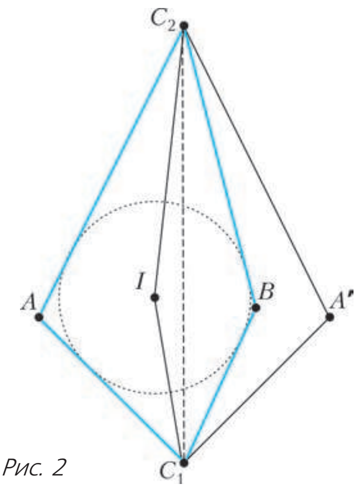


Рис. 2

ку $\angle BC_1I = \angle AC_1I < \angle A'C_1I$). Аналогично, луч C_2B лежит внутри угла AC_2A'. Значит, B лежит внутри четырехугольника $AC_1A'C_2$. Но тогда A' и B не могут быть равноудалены от прямой C_1C_2. Противоречие.

Таким образом, I лежит на прямой C_1C_2 (рис.3), значит, прямые AC_1 и BC_1 симметричны относительно прямой C_1C_2. То

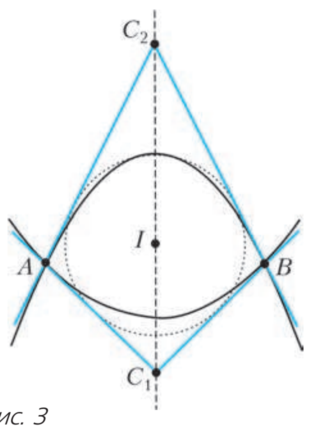


Рис. 3

же верно для прямых AC_2 и BC_2. Получаем, что точки A и B симметричны относительно прямой C_1C_2. Так как A и B – точки на параболе $\mathcal{G}_1$, то C_1C_2 – ось параболы $\mathcal{G}_1$. Аналогично, C_1C_2 – ось параболы $\mathcal{G}_2$.

И.Богданов, А.Заславский

М2477. *Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски всех остальных (но не знает на ком они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все мудрецы одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?*

Ответ: $k = 13$.

Сначала немного переформулируем задачу. Каждый мудрец видит $k - 1$ цвет и, следовательно, не видит $26 - k$ цветов. Угадывая цвет, он называет один из $26 - k$ цветов, которых не видит, тем самым высказывая предположение о множестве $25 - k$ масок, не использованных для покрытия мудрых голов.

Оценка. Проверим, что при $k < 13$ требуемой стратегии не существует. Действительно, зафиксируем цвета масок у всех мудрецов, кроме одного. Тем самым, мы рассматриваем $26 - k$ вариантов раздач масок, в которых выбранный мудрец дает один и тот же ответ. Поскольку все варианты разбиваются на такие группы, этот мудрец дает правильный ответ в $\frac{1}{26-k}$ части случаев. Следовательно, доля случаев, в которых хотя бы один мудрец дает правильный ответ, не превосходит $\frac{k}{26-k}$, что меньше 1 при $k < 13$.

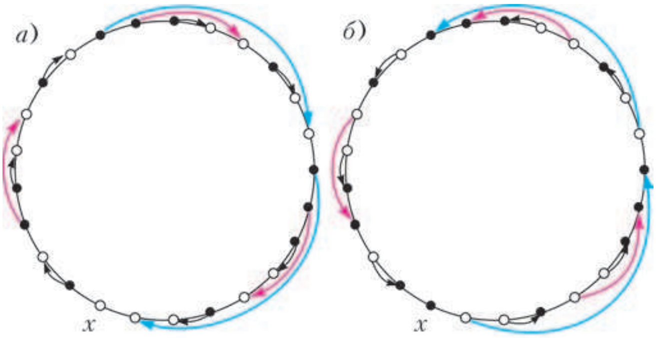
Пример. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Дано множество из $2n+1$ элементов. Существует взаимно однозначное соответствие между всеми $(n+1)$-элементными подмножествами и всеми n-элементными подмножествами, при котором каждому $(n+1)$-элементному подмножеству A сопоставлено n-элементное подмножество A' такое, что $A' \subset A$.*

Ниже мы приведем доказательство этой леммы, а сначала покажем, как с ее помощью смогут договориться 13 мудрецов.

Пусть мудрецы зафиксировали некоторое правило, по которому каждому подмножеству A из 13 цветов сопоставлено

12-элементное подмножество $A' \subset A$. После того как маски надеты, каждый мудрец сопоставит, согласно правилу, множеству B из 13 цветов, которые он не видит на окружающих, его 12-элементное подмножество B' и назовет тот из 13 цветов множества B, который не входит в B'. Пусть C' – 12-элементное множество цветов нерозданных масок. Согласно правилу, C' сопоставлено некоторому 13-элементному множеству $C = C' \cup \{x\}$ (т.е. кроме цветов множества C' в множестве C есть еще какой-то цвет x). Тогда мудрец, на котором надета маска цвета x, угадает ее цвет.



Взаимно однозначное соответствие, о котором идет речь в лемме, можно получить неявно с помощью леммы Холла.

Мы же приведем явную конструкцию.

Доказательство леммы. Пусть S – множество, состоящее из $2n + 1$ точек, расположенных по окружности, $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{A}_{n+1}$ – множества его всевозможных n-элементных и $(n+1)$-элементных подмножеств.

Сейчас мы опишем вспомогательную функцию выбора g: $\mathcal{A}_{n+1} \to S$, которая определенным способом выбирает из множества $A \in \mathcal{A}_{n+1}$ один его элемент. Выяснится, что отображение F: $\mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n$, заданное правилом $F(A) = A \setminus \{g(A)\}$ (т.е. выбрасыванием из множества A элемента $g(A)$), дает нужное взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{A}_{n+1}$ и $\mathcal{A}_n$.

Пусть $A \in \mathcal{A}_{n+1}$. Будем считать, что в множестве S точки, принадлежащие A, – белого цвета, а не принадлежащие A, – черного (рис.*а*). Будем группировать черные и белые точки парами. Сначала обойдем окружность по часовой стрелке и отметим все черные точки, сразу за которыми идет белая. Это будут «пары первого уровня». Удалим их мысленно и повторим процесс, т.е. снова отметим все черные точки, за которыми сразу идет белая. Мы получим пары второго уровня. Удалим их тоже и будем действовать аналогично до тех пор, пока все белые точки, кроме некоторой исключительной точки x, не окажутся в парах с черными. Белая точка x определена однозначно исходным множеством A. Положим $g(A) = x$ и $F(A) = A \setminus \{x\}$.

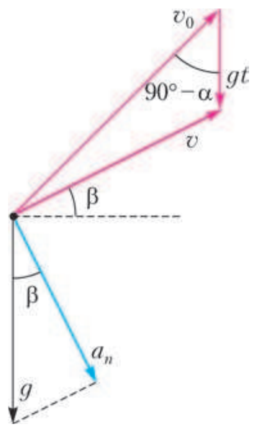
Остается показать, как по множеству $B \in \mathcal{A}_n$ восстановить точку $x \in S \setminus B$, для которой $F(B \cup \{x\}) = B$ (отсюда будет следовать взаимная однозначность F, поскольку количество $(n+1)$-элементных подмножеств равно количеству n-элементных множеств – оба количества равны $\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}$).

Пусть точки из множества B – белого цвета (рис.*б*). Выполним процесс из определения отображения F, инвертируя цвета и взяв противоположное направление обхода, т.е. обойдем окружность против часовой стрелки, группируя в пары белые точки, сразу за которыми идет черная, и т.д. Конструкция даст нам одну непарную черную точку x. Если теперь мы начнем процесс отыскания $g(B \cup \{x\})$, то мы в точности воссоздадим только что построенное разбиение черных и белых точек на пары (просто в первом случае мы отслеживали пары против часовой стрелки и от белой точки к черной, а во втором – по часовой стрелке и от черной к белой). Таким образом, $g(B \cup \{x\}) = x$ и $F(B \cup \{x\}) = B$.

С.Берлов, К.Кохась

Ф2481.[1] *Камень брошен со скоростью $v_0 = 17$ м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. С какой угловой скоростью поворачивается вектор скорости камня через $t = 1$ с после броска? Принять $g = 10$ м/с^2, сопротивление воздуха не учитывать. Результат выразите в радианах в секунду и округлите до десятых.*

Изменение направления скорости приводит к появлению у ускорения нормальной (перпендикулярной к траектории) составляющей (см. рисунок). Пусть R – радиус



кривизны траектории, тогда нормальное ускорение равно

$$a_n = \frac{v^2}{R} = v\frac{v}{R} = v\omega,$$

где ω – искомая угловая скорость вращения вектора скорости. Отсюда находим

$$\omega = \frac{a_n}{v} = \frac{g\cos\beta}{v} = \frac{g(v\cos\beta)}{v^2} =$$

$$= \frac{gv_0\cos\alpha}{v_0^2 + (gt)^2 - 2v_0gt\sin\alpha} \approx 0{,}9 \text{ с}^{-1}.$$

Здесь использованы постоянство горизонтальной составляющей скорости ($v_0\cos\alpha = v\cos\beta$) и теорема косинусов для треугольника скоростей ($\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$, $v^2 = v_0^2 + (gt)^2 - 2v_0gt\cos(90° - \alpha)$).

[1] Автор решений задач Ф2481–Ф2484 – Д.Александров.

Ф2482. *На гладкой горизонтальной поверхности находятся неподвижный шарик массой 2m и движущийся со скоростью $v_0 = 6$ м/с шарик массой m. Происходит центральный не вполне упругий удар, так что в тепло переходит только 3/4 от энергии, которая перешла бы тепло при абсолютно неупругом ударе. Найдите скорость налетающего шарика после удара.*

Так как суммарный импульс системы не равен нулю, в тепло не может перейти вся кинетическая энергия налетающего шарика, иначе это противоречило бы закону сохранения импульса. Связанных с этим обстоятельством довольно громоздких вычислений можно избежать, если перейти в инерциальную систему отсчета, в которой суммарный импульс равен нулю, т.е. в систему центра масс. Выделившееся количество теплоты от выбора системы отсчета не зависит.

Будем считать, что налетающий шарик двигался слева направо. Скорость центра масс в лабораторной системе отсчета равна

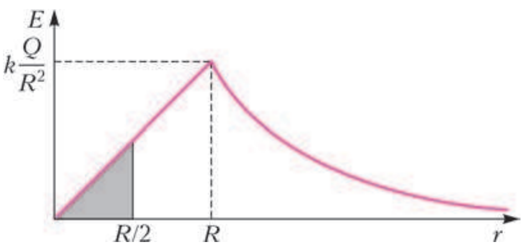
$$u = \frac{mv_0 + 0}{m + 2m} = \frac{1}{3}v_0 = 2 \text{ м/с}.$$

В системе отсчета, связанной с центром масс, налетающий шарик имеет скорость 6 м/с − 2 м/с = 4 м/с, направленную вправо, а второй шарик имеет скорость 2 м/с, направленную влево. Можно убедиться, что суммарный импульс действительно равен нулю. По условию, после удара должна остаться только четверть кинетической энергии, значит, скорости после удара уменьшатся вдвое (скорости связаны условием равенства нулю суммарного импульса, поэтому они не могут меняться независимо). Таким образом, скорость первого шарика будет равна 2 м/с и направлена влево, а второго – равна 1 м/с и направлена вправо. В лабораторной системе отсчета скорости шариков получаются −2 м/с + 2 м/с = 0 и 1 м/с + + 2 м/с = 3 м/с. Следовательно, скорость налетающего шарика после удара равна нулю.

Формально существует второе решение: шарики после удара движутся с вдвое меньшими скоростями в прежнем направлении. Для этого они должны либо как-то пройти сквозь друг друга, либо слипнуться-перевернуться-отвалиться. При центральном ударе такое невозможно, поэтому второе решение отпадает.

Ф2483. *Шар радиусом R заряжен равномерно по объему. Потенциал центра шара (относительно бесконечности) равен $\varphi(0) = 120$ В. Найдите потенциал на расстоянии $R/2$ от центра шара.*

Как известно, напряженность электрического поля равномерно заряженной сферы внутри нее равна нулю, а снаружи такая же, как если бы весь заряд сферы находился в ее центре. Разбив мысленно шар на тонкие сферические слои, из принципа суперпозиции получим, что зависимость напряженности поля шара с зарядом Q от расстояния r до его центра имеет вид,



показанный на рисунке, и напряженность равна

$$E(r) = k\frac{Q}{r^2} \text{ при } r \ge R$$

и

$$E = k\frac{Q}{R^3}r \text{ при } r < R.$$

Потенциал в центре шара равен площади под всем графиком зависимости E от r. Площадь от 0 до R находится как площадь треугольника и равна

$$\frac{1}{2}\cdot R\cdot k\frac{Q}{R^2} = k\frac{Q}{2R}.$$

Площадь от R до бесконечности равна $k\frac{Q}{R}$, так как в этой области поле шара совпадает с полем точечного заряда, для потенциала которого есть готовая формула. Итого, потенциал в центре равен

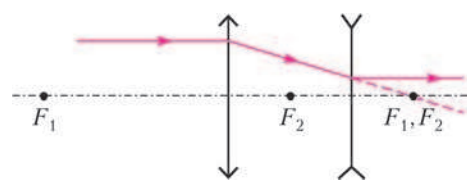
$$\varphi(0) = \frac{3kQ}{2R} = 120 \text{ В}.$$

Потенциал на расстоянии $R/2$ от центра шара меньше, чем в центре, на площадь закрашенного на рисунке треугольника, которая в 4 раза меньше уже найденной площади от 0 до R, поэтому

$$\varphi\left(\frac{R}{2}\right) = \varphi(0) - \frac{1}{4}\cdot\frac{kQ}{2R} = \frac{11}{8}\frac{kQ}{R} = \frac{11}{12}\varphi(0) =$$
$$= 110 \text{ В}.$$

Ф2484. *Оптическая система, состоящая из расположенных на общей оптической оси на расстоянии $l = 10$ см друг от друга собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 15$ см и рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $|F_2| = 5$ см, создает изображение предмета, находящегося на некотором расстоянии перед собирающей линзой. Во сколько раз изменится размер изображения, если линзы поменять местами?*

Фокусы линз совпадают, поэтому параллельный оптической оси луч после прохождения системы останется параллельным оси (см. рисунок), а из подобия



получаем, что расстояние до оси уменьшилось в $F_1/|F_2| = 3$ раза. Отсюда следует, что увеличение системы не зависит от расстояния до предмета и равно $1/3$. Если линзы поменять местами, то, рассуждая аналогично, получим, что увеличение будет равно 3. Значит, размер изображения изменится в 9 раз.

Задачи

1. Ваня написал 4 последовательных натуральных числа в порядке возрастания друг за другом без пробелов и получил одно большое число. Миша написал эти же числа без пробелов, но в порядке убывания, и тоже получил одно большое число. При этом оказалось, что Мишино число меньше Ваниного. Приведите пример, как такое могло получиться.

Н.Чернятьев

2. В нижней левой клетке доски 15×15 стоит ладья. За один ход она может передвинуться вправо или вверх, причем первый раз на одну клетку, а каждый следующий раз на одну клетку больше, чем в предыдущий. Покажите, как ладья может пройти из нижнего левого угла доски в правый верхний.

Н.Чернятьев

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на Костромском областном турнире юных математиков.

3. Четыре сестры примерили новые шапки. Саша на год старше девочки в синей шапке, Клара на год старше девочки в красной шапке, Зина на год старше девочки в зеленой шапке. Кто старше и на сколько: Женя или девочка в желтой шапке?

Е.Бакаев

4. Мальвина написала для Буратино пример вида $a+b-c$, где a, b, c – три различных натуральных числа, и попросила его сосчитать. Буратино забыл, что значат знаки «+» и «–», и вместо сложения сделал умножение, а вместо вычитания – деление. После чего он сообщил Мальвине ответ, и она его похвалила: ответ совпал с правильным. Докажите, что считать Буратино тоже не умеет.

Н.Чернятьев

Иллюстрации Д.Гришуковой

Сказка про Буратино и его глобус

И.БОЯРИНОВ

Стол, за которым Буратино делал уроки, стоял у окна. Это был самодельный стол, который смастерил Папа Карло. Он был большой – тянулся от стены до стены. И все на нем умещалось. На одном краю располагались колбы, пробирки и реактивы для химических опытов, на другом – микроскоп для биологических наблюдений. Посередине стола стоял глобус, Буратино любил его рассматривать. Иногда он воображал себя путешественником: вот его родная Италия, и он на корабле отплывает от ее берегов сначала в Средиземное море, потом через Гибралтар в океан... Другой раз ему представлялся полет на воздушном шаре – он чуть прищуривал глаза, потихоньку вращал глобус, и карта казалась ему реальной Землей, проплывавшей где-то далеко внизу.

Вот и сейчас он смотрел на крутящийся перед ним глобус.

– А что это у тебя глобус не в ту сторону крутится? – молвил Папа Карло.

– Почему не в ту? Глобус на оси, может крутиться туда-сюда, подобно флюгеру. Вот когда мы заводим наши пружинные часы, мы вращаем ручку только в одну сторону.

Если бы и глобус следовало вращать только в одном направлении, то, наверное, на фабрике сделали бы соответствующий ограничитель. А так его нет. Глобус можно вращать как угодно, – возразил Буратино.

– Глобус – да. Но глобус – это модель нашей планеты, а Земля вращается в определенном направлении!

– А разве для вращения есть направление? Вот сейчас на оконном стекле по окружности ползает муха. Нам кажется, что она движется по часовой стрелке. Но для прохожего на улице муха перемещается против часовой стрелки.

– Верно. Поэтому на оси вращения выбирают точку, относительно которой и определяют направление вращения. Люди давно заметили, что если мысленно продолжить ось Земли от Северного полюса вверх, то эта прямая дойдет до Полярной звезды. А теперь вообразим, что на этой звезде находится наблюдатель и смотрит на Землю. Наша планета будет казаться ему кругом. Он будет видеть почти все северное полушарие. Города предстанут маленькими точками, и каждая такая точка вследствие вращения Земли вокруг своей оси будет двигаться по окружности. А теперь скажи, как она движется для этого наблюдателя – по часовой стрелке или против? – задал вопрос Папа Карло.

Буратино не стал спешить с ответом, а вырезал из бумаги круг, в его центре поставил букву N – это Северный полюс, а маленьким сапожком изобразил Италию.

И тут Буратино задумался. Круг лежит на столе, смотрим на него сверху, со стороны Полярной звезды. Как же он крутится на самом деле? Куда движется Италия? По часовой стрелке, т.е. с востока на запад, или наоборот – с запада на восток? – от этих раздумий у Буратино даже слегка закружилась голова.

– Давай усовершенствуем твою модель, – предложил Папа Карло, заметив испытываемые Буратино затруднения. С этими словами он вырезал из бумаги еще один небольшой круг, закрасил его желтым карандашом и положил на стол. – Это у нас Солнце.

– Получается, Солнце меньше Земли? Это же не так! – запротестовал Буратино.

– А вот это для нашей модели не важно, – возразил Папа Карло и поставил на Аппенинский полуостров оловянного солдатика, повернув его лицом на восток.

– Сейчас в Италии ночь. А теперь потихоньку поворачивай свой круг, чтобы солдатик не упал и чтобы во время восхода Солнце светило солдатику в глаза, а не в спину.

Буратино начал этот неложный эксперимент. Вы тоже можете его проделать.

– Чтобы Солнце взошло на востоке, я должен вращать круг против часовой стрелки, т.е. в направлении с запада на восток. Но если я сижу на стуле, а вращающийся глобус стоит на столе передо мной, то мне кажется, что города движутся слева направо. Все ясно! – радостно воскликнул Буратино.

– Но мне еще давно показалось, что глобус у меня какой-то бракованный. Его ось наклонилась, как старое дерево, – сокрушенно сказал Буратино.

– Нет-нет, глобус исправен, а наклон его оси напоминает, что ось вращения Земли наклонена к плоскости вращения (рис.1). Угол наклона равен примерно двадцати четырем градусам.

– Понятно. Земля при своем вращении словно кланяется Солнцу, вот так, я нарисую

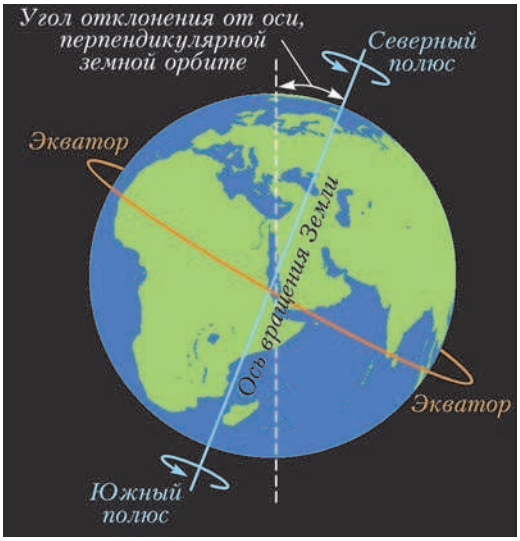


Рис. 1

для ясности, – и Буратино изобразил ось Земли в четырех точках земной орбиты (рис.2).

Рис. 2

– Нет, это неправильно. У тебя на рисунке ось меняет свое направление, а оно постоянно. Ты помнишь свою игрушку – детский волчок? Раскрути его и поставь на картонку. Ты можешь картонку чуть наклонить, пытаясь отклонить ось волчка, но ось всегда будет сохранять свое первоначальное направление. Так и Земля является гигантским волчком. Поэтому если ты хочешь с помощью глобуса изобразить вращение Земли вокруг Солнца, то для этого удобнее использовать глобус не с круглой подставкой, а с прямоугольной. Такую подставку следует перемещать по кругу так, чтобы стороны основания все время оставались параллельными краям стола (рис.3). В этом случае

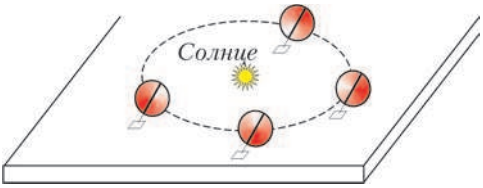


Рис. 3

ось глобуса, жестко связанная с подставкой, сохраняет свое направление в пространстве. Если такой подставки нет, можно приклеить к круглой подставке прямоугольник из картона.

– Вот теперь я все уяснил. Глобус, т.е. Земля, вращается вокруг своей оси с запада на восток, при этом ось сохраняет свое направление, – с чувством исполненного долга произнес Буратино.

– Ты помнишь слова Козьмы Пруткова: «Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою»? Так вот, вращая глобус, думай о вращении Земли вокруг Солнца; иначе такое вращение будет пустою тратою времени! – улыбнулся Папа Карло.

Как срочно доставить лекарство на воздушный шар

В.ВЫШИНСКИЙ

Через полчаса мистер Вильям Болваниус, Джон Лунд и шотландец Том Бекас летели уже к таинственным пятнам на восемнадцати аэростатах. Они сидели в герметически закупоренном кубе... Джентльмены кутались в плащи и курили сигары. Термометр показывал ниже нуля... На третий день Джон Лунд заболел дифтеритом, а Тома Бекаса обуял сплин.

А.П.Чехов, Летающие острова

Однажды некий Отличник решил на спор провести каникулы на воздушном шаре, причем на высоте 22 километра, куда, бывало, залетали шары-зонды из дружественных стран. А заодно – решить все задачи по физике из школьных учебников. Да вот незадача – за неделю до истечения договорного срока он начал чихать, кашлять, потеть... И немудрено: температура воздуха на такой высоте меньше $-50\,°C$, а парацетамол (есть такие таблетки) весь вышел. Что делать? Не спускаться же – ведь в этом случае спор не выиграешь, полет будет прерван. И Отличник решил обратиться (конечно, по мобильнику) к Старому Приятелю: как бы доставить немедленно на воздушный шар хотя бы пару пакетов терафлю?

Задумался Старый Приятель и стал в уме прикидывать уравнения динамики и решать их аналитически и численно.

1. Можно использовать дальнобойное орудие

Введем прямоугольную систему координат x, y, z (рис.1); обозначим u, v, w соответствующие компоненты скорости снаряда, так что $u^2+v^2+w^2=V^2$ – квадрат модуля его скорости. Конечно, прежде всего разумно рассмотреть простейший случай одномерного (вертикального) движения, когда орудие находится точно под воздушным шаром. При этом $u=w=0$, $V=v$. Тогда уравнение движения тела с постоянной массой m в поле тяготения с постоянным ускорением свободного падения (с постоянной напряженностью поля) g и с учетом аэродинамического сопротивления имеет вид

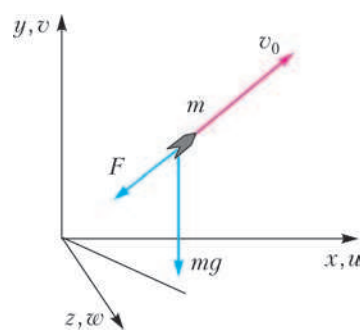


Рис. 1

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-F\,.$$

Но даже в этом случае решить уравнение не так-то просто, потому что аэродинамическое сопротивление снаряда F пропорционально коэффициенту сопротивления C, скоростному напору $\frac{1}{2}\rho v^2$ и площади поперечного сечения снаряда S:

$$F = \frac{1}{2} C S \rho v^2 .$$

Предполагается, что снаряд (тело вращения без оперения) обтекается осесимметрично. Эту зависимость легко установить (а еще легче проверить) из соображений размерностей, а вот безразмерный коэффициент C получают экспериментально. Типичная зависимость коэффициента аэродинамического сопротивления снаряда от числа Маха $M = \frac{v}{v_{зв}}$, полученная из эксперимента, приведена на рисунке 2. Здесь $v_{зв}$ – скорость звука в атмосфере на данной высоте. Оказывается, что сам коэффициент сопротивления

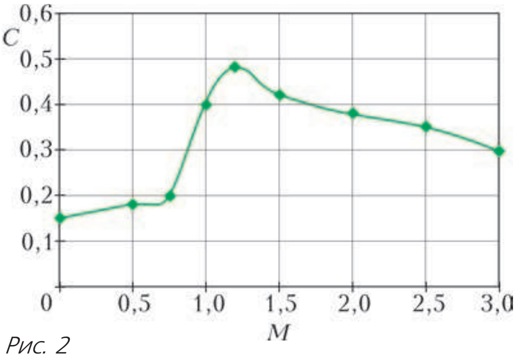


Рис. 2

зависит от искомой скорости. Поэтому уравнение движения придется решать численно.

Для этого прежде всего проведем так называемую дискретизацию задачи. Непрерывное время t «рубится» на дискретные отрезки Δt_i, например равной протяженности Δt. Тогда время $t_i = t_0 + i \cdot \Delta t$, i = 1, 2, … Ускорение можно приближенно записать как

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} .$$

Подставляя последнее выражение в уравнение движения, несложно получить итерационную формулу для скорости:

$$v_{i+1} = v_i - \left(g + \frac{F}{m} \right) \Delta t ,$$

которая позволяет последовательно, шаг за шагом, в предположении, что на предыдущем шаге все известно, построить решение. В пределах временно́го шага Δt все параметры считаются постоянными. Алгоритм решения задачи легко программируется на любом языке программирования и на любом компьютере.

Параметры атмосферы входят в решение задачи через изменение плотности ρ и скорости звука $v_{зв}$ с высотой y. Примеры этих функций, измеренных в летном эксперименте, приведены на рисунке 3.

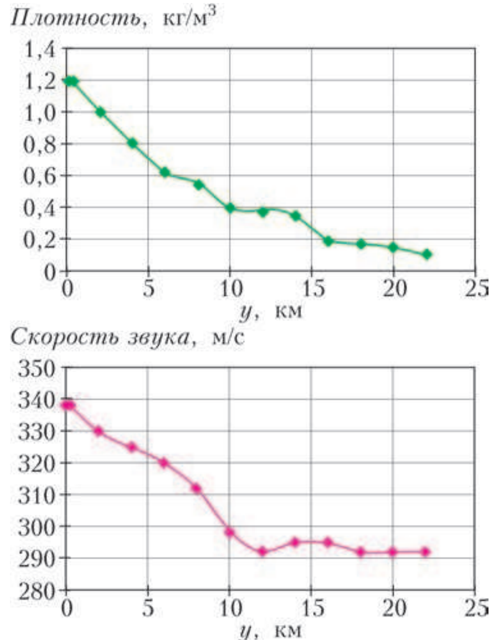


Рис. 3

Итак, начнем с зенитного орудия. Для простоты будем стрелять вертикально, но моделировать решение будем с учетом аэродинамического сопротивления и изменения параметров атмосферы с высотой. Для численного моделирования используем параметры зенитного орудия калибра 85 мм с массой снаряда 9,2 кг и начальной скоростью вылета 1000 м/с. Результаты моделирования представлены на рисунке 4. Штриховой линией нанесены результаты без учета аэродинамического сопротивления. В этом случае решение хорошо известно: вертикальная компонента скорости зависит от времени линейно, а высота – квадратично, если, конечно, считать g постоянным.

Как видно, через 40 с снаряд достигнет предельной для данного зенитного орудия высоты около 13 км, что существенно ниже «потолка» воздушного шара. Интересно, что на обратном пути снаряд достигает сверхзвуковой «равновесной» скорости около

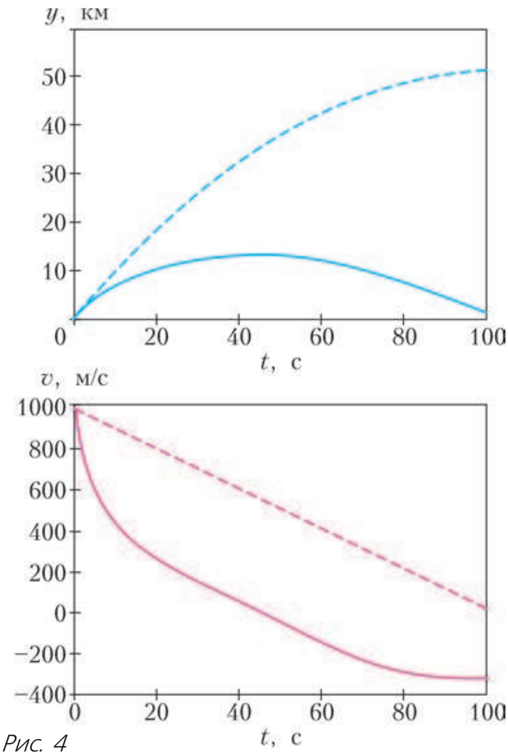


Рис. 4

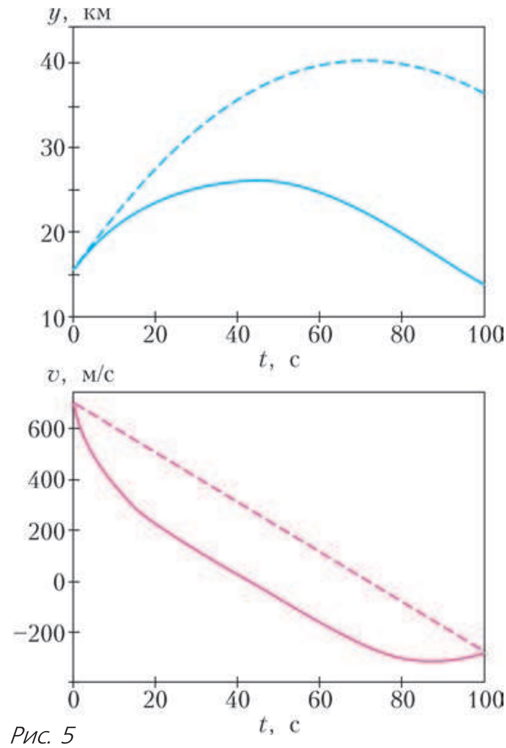


Рис. 5

350 м/с, когда сопротивление равно силе тяжести. Скорость выходит на «полку». По мере повышения плотности с уменьшением высоты равновесная скорость немного снижается.

2. Используем авиационную пушку

Установим пушку калибра 23 мм на самолете, у которого статический потолок 15,5 км, максимальная скорость полета 1050 км/ч, масса снаряда пушки 0,174 кг, скорость вылета 700 м/с. И тут возможны два сценария.

• Самолет начинает стрелять, исчерпав скорость в наборе высоты. Результаты моделирования приведены на рисунке 5. Стрельба вверх производится с высоты 15,5 км. Штриховой линией нанесены результаты расчета без учета аэродинамического сопротивления. Как видно, для того чтобы снаряд достиг цели с нулевой скоростью, начать стрельбу можно с 12 км.

• Самолет выходит на цель, разогнавшись до максимальной скорости 300 м/с на высоте 15 км, и стрельба производится с полупетли (рис.6). Пусть радиус петли 500 м, тогда, в соответствии с законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mg\Delta y = \text{const},$$

на высоте 15,5 км самолет будет иметь скорость 140 м/с, которая добавится к скорости вылета снаряда. Результаты моделирования представлены на том же рисунке 6.

3. Можно использовать и зенитные ракеты...

Но тут задача несколько усложняется: появились тяга двигателя и изменение массы. Уравнение движения тела с переменной массой m в поле тяготения с постоянным g с учетом аэродинамического сопротивления и тяги двигателя имеет вид

$$\frac{d\left(m(t)v\right)}{dt} = -m(t)g + \left(f(t) - F\right).$$

На рисунке 7 качественно представлены изменение тяги двигателя в зависимости от времени $\left(f(t)\right)$ и соответствующее изменение массы ракеты $\left(m(t)\right)$. При этом вводится еще одно важное понятие: удельная тяга. Это – характеристика реактивного двигателя, равная отношению создаваемой им тяги

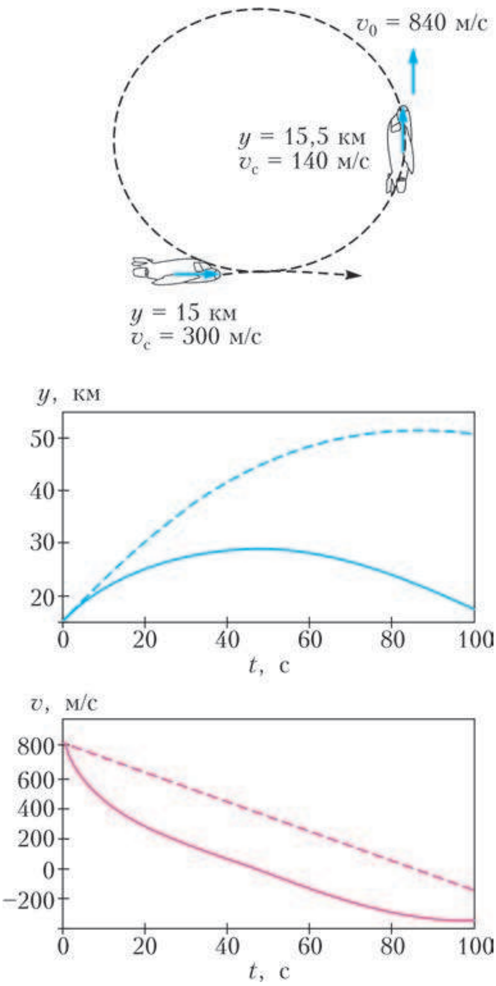


Рис. 6

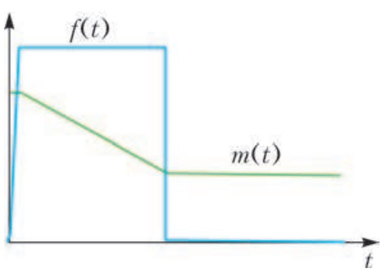


Рис. 7

(Н) к массовому расходу топлива (кг/с), которая означает, сколько секунд данный двигатель сможет создавать тягу в 1 Н, истратив 1 кг топлива. Физик назвал бы эту величину удельным импульсом. Удельная тяга твердотопливных ракетных двигателей составляет 2500 – 3000 Н · с/кг .

Для расчета были использованы следующие параметры: общее время работы твердотопливного двигателя 15 с, максимальная скорость полета 1000 м/с, тяга двигателя 52360 Н, диаметр ракеты 400 мм, масса 685 кг, удельная тяга 2500 Н · с/кг , расход топлива 21 кг/с, масса топлива 315 кг. Величина коэффициента аэродинамического сопротивления взята в соответствии с рисунком 2. Результаты моделирования представлены на рисунке 8. Достижимая высота

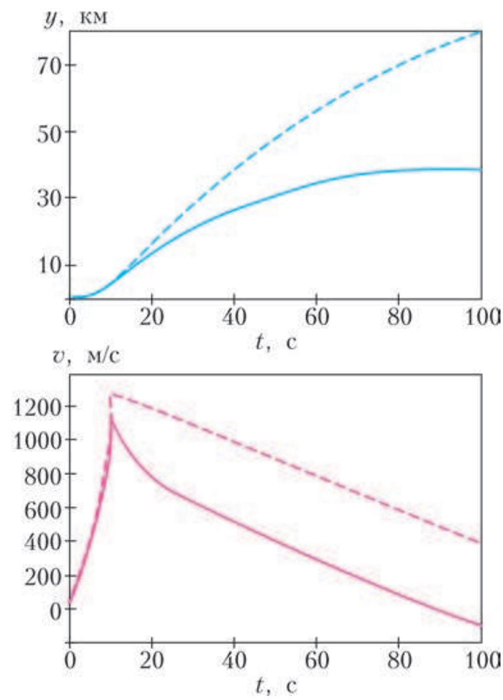


Рис. 8

более чем достаточна, придется даже тормозить. Результаты впечатляют!

* * *

Но что это?! Узнав о раздумьях Старого Приятеля (конечно, по мобильнику), Отличник на воздушном шаре внезапно выздоровел!

Так ли необходимо различать цвета?

И.БОГДАНОВ, А.ЗАСЛАВСКИЙ

Ах, какая за окном красота!
Словно кто-то перепутал цвета.
Л.Филатов

На XXXVIII Турнире городов была предложена такая задача.

Задача 1 (Б.Френкин). *На трех красных и трех синих карточках написаны различные положительные числа. Известно, что на карточках одного цвета написаны попарные суммы каких-то трех чисел, а на карточках другого цвета – попарные произведения тех же чисел. Всегда ли можно восстановить эти три числа?*

Ответ. Да.

Решение. Так как сумма и произведение любых двух из исходных трех чисел положительны, сами эти числа тоже положительны. Кроме того, они различны, так как в противном случае среди чисел на карточках тоже нашлись бы одинаковые. Обозначим исходные числа через $x_1 < x_2 < x_3$. Тогда $x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3$ и $x_1x_2 < x_1x_3 < x_2x_3$. Следовательно, для карточек одного цвета отношение наибольшего из написанных чисел к наименьшему равно $\frac{x_3}{x_1}$, а для карточек другого цвета – $\frac{x_3 + x_2}{x_1 + x_2}$. Поскольку первая из этих величин всегда больше второй (докажите!), мы можем узнать, на карточках какого цвета написаны произведения, после чего исходные числа легко находятся (как?).

Зададимся теперь вопросом: может ли определить исходные числа дальтоник (не различающий цвета карточек). Точнее, поставим следующую задачу.

Задача 2 (А.Заславский, XXI Кубок памяти А.Н.Колмогорова). *Даны шесть различных положительных чисел. Известно, что эти числа являются попарными суммами и произведениями каких-то трех чисел. Всегда ли можно восстановить эти три числа?*

Ответ. Да.

Решение. Пусть G – данный набор из 6 чисел; обозначим для удобства его элементы как $m < m_2 < m_3 < M_3 < M_2 < M$. Предположим, что он получился из двух различных троек $x_1 < x_2 < x_3$ и $y_1 < y_2 < y_3$ (как и в предыдущей задаче, числа в каждой тройке положительны и различны); тогда

$$m = \min(x_1x_2, x_1 + x_2) = \min(y_1y_2, y_1 + y_2) \qquad (1)$$

и

$$M = \max(x_2x_3, x_2 + x_3) = \max(y_2y_3, y_2 + y_3). \qquad (2)$$

Равенство (1) показывает, что из $x_1 < y_1$ следует $x_2 > y_2$ и наоборот (в противном случае одно из чисел $\min(x_1x_2, x_1 + x_2)$ и $\min(y_1y_2, y_1 + y_2)$ меньше другого). Аналогично, из (2) вытекает, что неравенства $x_2 > y_2$ и $x_3 < y_2$ также выполнены или не выполнены одновременно. Отсюда, в частности, можно получить, что при $x_1 = y_1$ мы бы имели $x_2 = y_2$ и $x_3 = y_3$, т.е. наши тройки чисел совпали бы. Поскольку это не так, можно без ограничения общности считать, что $x_1 < y_1$, и поэтому

$$x_1 < y_1 < y_2 < x_2 < x_3 < y_3. \qquad (3)$$

Далее возможны два случая.

Случай 1. Пусть $m = y_1 + y_2$. Тогда $y_1y_2 > y_1 + y_2$, откуда

$$1 > \frac{y_1 + y_2}{y_1y_2} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} > \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = \frac{y_2 + y_3}{y_2y_3};$$

значит,

$$M = \max(y_2 + y_3, y_2y_3) = y_2y_3.$$

Тогда $x_2x_3 \le y_2y_3$. Теперь из (3) получаем

$$(x_2 + x_3)^2 = (x_3 - x_2)^2 + 4x_2x_3 < (y_3 - y_2)^2 + 4y_2y_3 = (y_2 + y_3)^2,$$

т.е. $x_2 + x_3 < y_2 + y_3 \le M_2$. Кроме того, $x_1x_3 < y_1y_3 \le M_2$ – также из (3). Отсюда следует, что суммы иксов не могут равняться M_2 и M, а из произведений иксов на эти роли подходит лишь x_2x_3. Это невозможно.

Случай 2. Пусть теперь $m = y_1y_2$. Тогда $x_1x_2 \ge y_1y_2$, а значит, из (3) имеем

$$\left(x_1 + x_2\right)^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + 4x_1x_2 > $$
$$> \left(y_2 - y_1\right)^2 + 4y_1y_2 = \left(y_1 + y_2\right)^2,$$

т.е. $x_1 + x_2 > y_1 + y_2$. Теперь из (3) получаем, что

$$m = y_1y_2 < y_1 + y_2 < x_1 + x_2 <$$
$$< x_1 + x_3 < y_1 + y_3 < y_2 + y_3$$

– шесть различных элементов из G. Это значит, что

$$m_2 = y_1 + y_2, \; m_3 = x_1 + x_2, \; M_3 = x_1 + x_3,$$
$$M_2 = y_1 + y_3 \text{ и } M = y_2 + y_3.$$

Поскольку $x_1 + x_2 = m_3$, имеем

$$m = \min\left(x_1x_2, x_1 + x_2\right) = x_1x_2,$$

а отсюда

$$m_2 = \min\left(x_1 + x_2, x_1x_3\right) = x_1x_3.$$

Аналогично, из $m = y_1y_2$ и $m_2 = y_1 + y_2$ следует

$$m_3 = \min\left(y_1 + y_3, y_1y_3\right) = y_1y_3$$

(поскольку $y_1 + y_3 = M_2$). Итак, $m_2 = x_1x_3 = y_1 + y_2$ и $m_3 = y_1y_3 = x_1 + x_2$, откуда

$$y_3 - x_3 = \frac{x_1 + x_2}{y_1} - \frac{y_1 + y_2}{x_1} =$$
$$= \frac{x_1^2 + \left(x_1x_2 - y_1y_2\right) - y_1^2}{x_1y_1} = \frac{x_1^2 - y_1^2}{x_1y_1}.$$

Это невозможно, ибо левая часть положительна, а правая отрицательна. Итак, второй случай также приводит к противоречию.

Таким образом, мы выяснили, что дальтоник тоже может восстановить исходные числа, что, казалось бы, позволяет дать на вопрос, вынесенный в заголовок статьи, отрицательный ответ. Однако стоит отметить существенную разницу между решениями задач 1 и 2. Действительно, решение задачи 1 дает простой алгоритм определения исходных чисел. Решение же задачи 2, хотя и доказывает, что числа можно восстановить, ничего не говорит о том, КАК это сделать. Впрочем, раз уж дальтоник знает, что числа восстанавливаются однозначно, он может просто рассмотреть все возможные способы разбиения данных шести чисел на две тройки, соответствующие суммам и произведениям искомых чисел $x_1 < x_2 < x_3$. Всего таких способов существует 20 (почему?), но из разбора случая 1 видно, что четыре варианта, при которых $m = x_1 + x_2$, $M = x_2 + x_3$ можно исключить сразу. Дальнейший перебор можно сократить, используя следующие результаты.

Упражнения

1. Докажите, что если $m \le 4$, то $m = x_1x_2$.
2. Докажите, что если $m > 4$, то $M = x_2x_3$.

В обоих случаях эти результаты позволяют исключить еще шесть вариантов. Таким образом, дальтонику остается перебрать еще не более десяти. Конечно, различая цвета, восстановить исходные числа можно гораздо быстрее. Но, может быть, читатели смогут придумать метод, позволяющий и дальтонику найти их без утомительного перебора?

Заметим также, что в решении задачи 1 использовалось только, что различные числа написаны на карточках одного цвета. Предлагаем читателям выяснить, сможет ли дальтоник восстановить исходные числа, если на каких-то карточках разных цветов числа совпадают.

Наконец, также интересен вопрос, что произойдет в нашей задаче, если увеличить количество исходных чисел, т.е. предположить, что на $k(k-1)$ карточках написаны все попарные суммы и все попарные произведения k различных чисел. На данный момент авторы не знают ответа на этот вопрос.

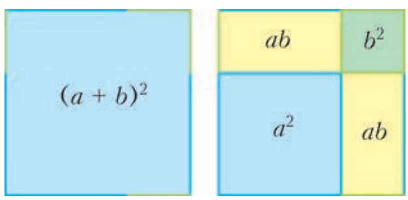
Доказательства без слов

В этом «Калейдоскопе» собраны доказательства нескольких тождеств и неравенств, в которых основная идея видна, если просто внимательно посмотреть на картинку.

Формулы сокращенного умножения

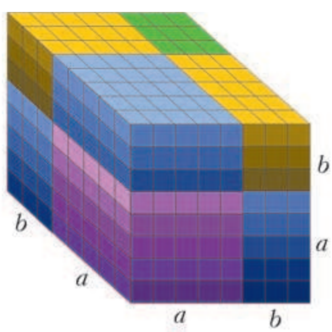
1. Квадрат суммы:

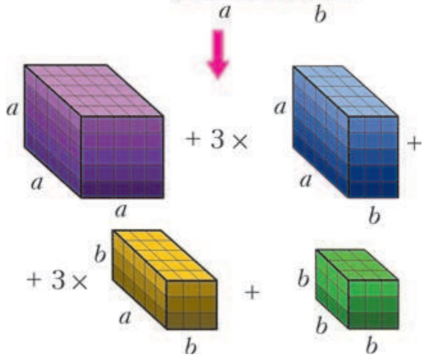
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 .$$



2. Куб суммы:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 .$$



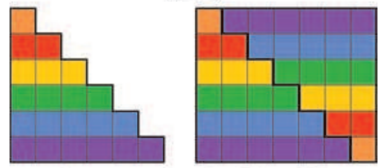


Формулы суммирования

1. Сумма натуральных чисел от 1 до n:

$$1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2 .$$

$n = 6$

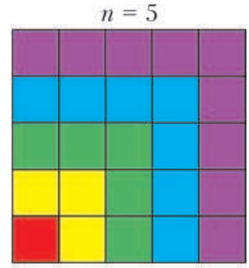


$1 + \ldots + 6 = 6 \cdot 7/2 = 21$

2. Сумма первых n нечетных чисел:

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2 .$$

$n = 5$

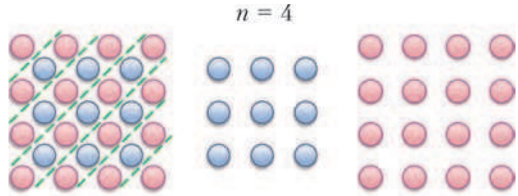


$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$

3. «Возвратная» сумма первых n нечетных чисел:

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) \ldots + 3 + 1 = (n-1)^2 + n^2 .$$

$n = 4$

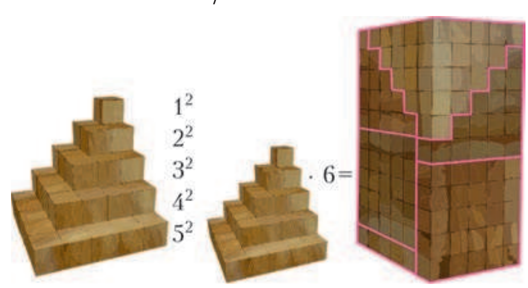


$1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1 = 3^2 + 4^2$

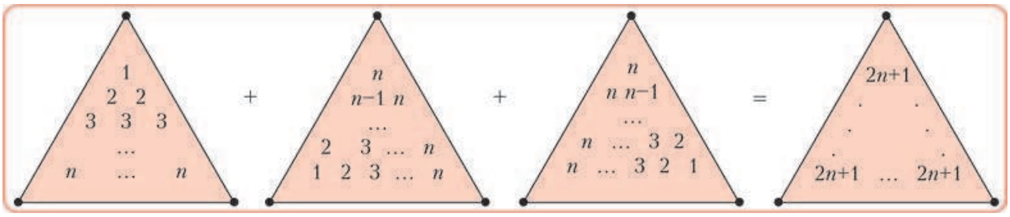
4. Сумма квадратов чисел от 1 до n:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6 .$$

Первый способ



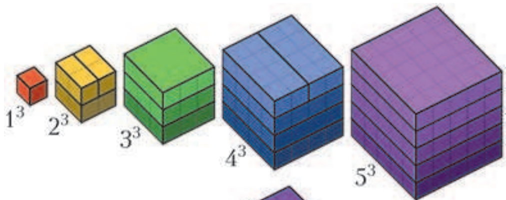
Второй способ

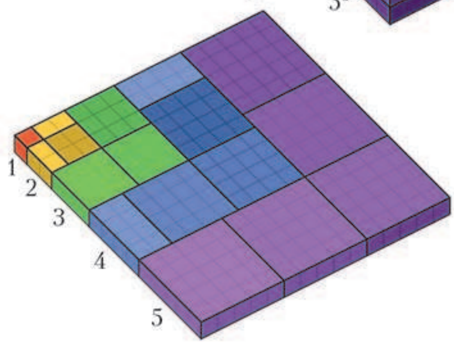


5. Сумма кубов чисел от 1 до n:

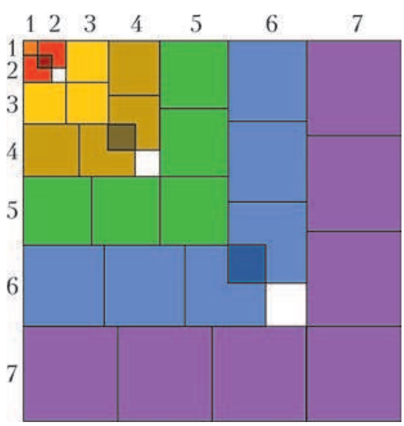
$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2 .$$

Первый способ





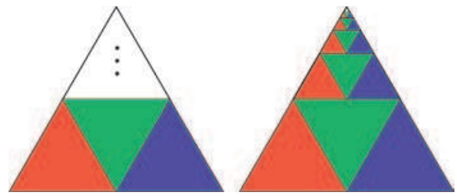
Второй способ



Геометрические прогрессии

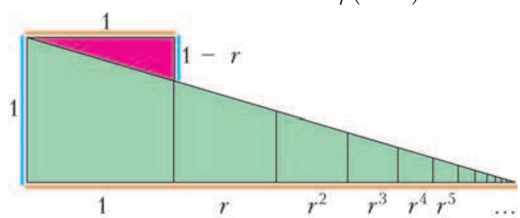
1. Прогрессия со знаменателем $1/4$:

$$1/4+1/16+1/64+\ldots=1/3 .$$



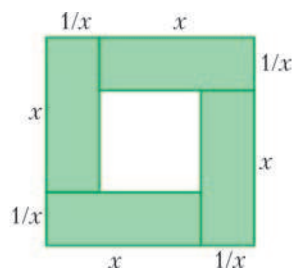
2. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем r:

$$1+r+r^2+r^3+\ldots=1/(1-r) .$$

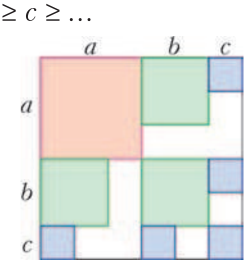


Неравенства

1. $x+1/x\geq 2$ при $x>0$.



2. $(a+b+c+\ldots)^2\geq a^2+3b^2+5c^2+\ldots$ при $a\geq b\geq c\geq\ldots$



Материал подготовил Е.Епифанов

Силы инерции и фонтанирующая цепочка

А.КНЯЗЕВ

Рис. 2

О силах инерции

Многие наверняка испытывали неприятный момент, когда, например, у велосипеда слетает недостаточно натянутая цепь или когда срывается ослабевший ремень шкива двигателя. Для объяснения этого одни говорят, что на цепь (ремень) действует центробежная сила, другие – что цепь слетает по инерции. И то и другое – верно.

На лекциях часто показывают эффектный опыт с вращающейся цепочкой (рис.1). Цепочка соединяется в кольцо, насаживается

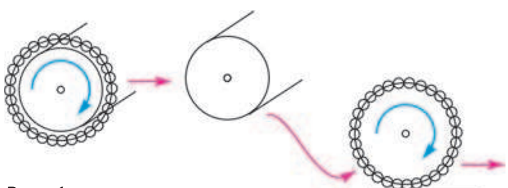


Рис. 1

на вал и раскручивается. После этого ее аккуратно сталкивают с вала, и цепочка неожиданно жестким колесом катится по столу, падает на пол и продолжает катиться до тех пор, пока не ударяется о стенку и не превращается в горку звеньев! Точно так же, только на весу, раскручивают перед бросанием петлю лассо (рис.2).

Для описания прямолинейного движения с ускорением можно использовать несколько способов. Один из распространенных связан с применением классических законов Ньютона. В нем рассматриваются известные силы, каждая из которых имеет понятную физическую причину: сила трения, сила упругости, сила гравитации и т.п. Этот же подход может быть применена и к примерам с криволинейным движением. Так, если материальная точка движется со скоростью v по дуге окружности радиусом R, то это означает, что действующая результирующая сила обеспечивает ей нормальное (центростремительное) ускорение, равное v^2/R. В случае с вращающейся цепочкой или лассо это могут быть силы натяжения, действующие на выделенный элемент массой Δm со стороны соседних элементов (на рисунке с лассо эти силы показаны).

Описание решения задачи будет выглядеть так. Записываем уравнение движения: $\dfrac{\Delta m v^2}{R} = F$. Далее запись можно детализировать, например, по следующему сценарию: $\Delta m = \dfrac{M}{2\pi R} R\Delta\varphi$, $F = 2T\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}$. Здесь величины T, M, $\Delta\varphi$ обозначают, соответственно, силу натяжения, массу вращающейся цепочки или лассо и угол, стягивающий выделенный элемент массы. Теперь по известным данным можно найти любую из неизвестных величин. Подобных задач очень много и не будем здесь приводить известные примеры.

Можно, однако, рассуждать иначе. Каждый испытывал на себе реальную силу, которая прижимает тело вбок на повороте в едущей машине. Такая же сила действует и на элемент цепочки. Эту силу называют центробежной силой инерции. По численному значению она в точности равна $\dfrac{\Delta m v^2}{R}$, но направлена в противоположную сторону. Свое название эта сила получила за то, что тело стремится «убежать» по касательной от центра окружности, двигаясь по инерции. Силы инерции можно реально почувствовать, находясь в неинерциальной системе координат. Мы не вылетаем из машины потому, что центробежная сила уравновешивается силой реакции стенки дверцы или силой трения о сиденье. Вода в реке центробежной силой подмывает берег, который заставил воду искривить прямолинейное движение. Затем эта вода ударяет в противоположный берег и подмывает уже его – так реки становятся извилистыми. В случае с цепочкой сила инерции при движении по данной окружности уравновешивается силами натяжения от соседних звеньев. А если силы инерции превосходят натяжение – цепочка порвется или на лассо появится выпуклый участок, стремящийся увеличить размер петли. Иными словами, элемент стремится уйти на окружность большего радиуса. Ковбой, чувствуя натяжение раскручиваемого лассо, понемногу выпускает запас веревки до необходимого диаметра петли. Как видите – все сходится и в этом случае. Заметим, что с учетом сил инерции можно записать и уравнение движения для неинерциальной системы координат. В наших примерах это сделать совсем просто.

Теперь попробуем дать объяснение аварии с велосипедной цепью. Здесь можно использовать и обычные законы Ньютона. Однако для качественного анализа удобнее воспользоваться представлениями о силах инерции. Когда велосипед движется очень медленно, цепь увлекается зубчатым колесом и сохраняет ту форму, которая на ри-

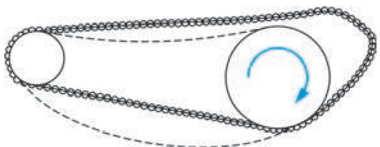


Рис. 3

сунке 3 отмечена штриховой линией. Как только мы начинаем ускоряться, верхняя часть цепочки стремится двигаться по инерции и срывается с зубчатки вперед. Можно сказать, что на эти звенья цепочки действует сила инерции, направленная вперед. Что же заставляет звенья цепочки изменить через некоторое время направление скорости своего движения? Во-первых, это сила тяжести, а во-вторых, силы натяжения со стороны соседних звеньев, направленные назад и вниз. Так же, как и в случае с лассо, на данном участке велосипедной цепи тоже возникает выпуклый участок. Наконец, звенья падают на зубчатку, и если плоскости движения цепочки и зубчатки немного перекошены, то цепь слетает. Для устранения случившейся аварии необходимо в меру натянуть цепь (перемещая заднее колесо) и выровнять положения зубчаток.

Полное описание такого движения, в любой системе представлений, довольно сложно. В последнем примере оно складывается из поступательного движения каждого звена вбок и его криволинейного движения на нисходящем участке траектории. Но поскольку мы все уже поняли на качественном уровне, то подробности такого описания не столь и интересны. Тем не менее, встречаются примеры на первый взгляд неожиданные, поскольку к основным механизмам добавляются новые, заметить которые оказывается подчас нелегко. Для иллюстрации возьмем такой пример.

Задача о фонтанирующей цепочке

Несколько лет назад в интернете (см., например, youtube.com/watch?v=6ukMId5fIi0) появились демонстрации опыта, в котором показывается длинная нитка бус, положенная в стеклянный сосуд. Если теперь выдернуть ее свободный конец, то бусы будут не просто выскальзывать и падать на пол, а изогнутся дугой. Бусины, подобно воде в фонтане, как бы выпрыгивают на заметную высоту над краем стакана. Ученые Кембриджского университета (под руководством Джона Биггинса) качественно объяснили, почему так происходит (и об этом можно прочитать в интернете).

Читатели, живущие в сельской местности, могут припомнить, что похожее поведение наблюдается при падении длинной веревки (к которой крепится ведро) в глубокий колодец. Подобным же образом ведет себя иногда якорная цепь катера. На Сибирском турнире юных физиков школьники из Новосибирского интерната показали яркий фонтан с длинной (альпинистской) веревкой.

Все увиденное довольно просто объяснить на качественном уровне. Мы же попробуем дать количественные оценки наблюдаемого явления, проведя опыты и сделав посильные (упрощенные) вычисления.

Наши опыты с бусинками

Нам[1] удалось подобрать две подходящие цепочки пластиковых бус диаметром 3 мм и 5 мм – для украшения новогодних елок. Длины цепочек были 8 м и 15 м. Высота падения их из стакана составляла 2 м, линейная плотность обеих цепочек была $\lambda \approx 5$ г/м.

1) Сначала мы провели опыт так, как он описан в интернете. Фонтан бусинок поднимается из стакана не сразу – сила растет по мере того, как нарастает импульс уже упавшей части. У нас получились практически одинаковые фонтаны для обеих цепочек. Высота наблюдаемого фонтана составляла от 10 до 20 см. Это около 10% от высоты, с которой падает цепочка. Полная длина цепочки влияет лишь на продолжительность наблюдения. В Кембриджском эксперименте высота фонтана была около 40 см. Существенно сказывается на высоте фонтана то, что уложенные в сосуд элементы цепочки цепляются друг за друга и дополнительно тормозят соскальзывание. У нас качество связок было неважным, бусы каждый раз нужно было аккуратно укладывать.

2) Затем мы видоизменили опыт. В новом варианте бусы не вылетали из стакана вверх, а соскальзывали с почти плоской тарелки (рис.4). И все равно, через некоторое время поднимался фонтан – вверх и чуть вбок. Значит, дело не в необходимости вертикальной составляющей начальной скорости, а в резком изменении направления скорости – точнее, изменения направления (опрокидывания) импульса, в возникновении нормальной составляющей ускорения, или в другой трактовке – в возникновении центробежной силы (подобно рассмотренным примерам).

Рис. 4

Развитие фонтана в горизонтальном направлении связано с ускоренным поступательным движением бусинок вбок – прежде чем падать, они пролетают некоторое расстояние. Пренебрежение этим обстоятельством в школьных задачах о соскальзывании нити (цепочки) с края стола часто, и справедливо, подвергается критике. Чтобы оценить это расстояние, мы приближенно решили двумерное уравнение криволинейного движения с переменной массой – задача, необычная для школьников. Смещение вбок оказалось равным около 15 см. Это хорошо совпадает с экспериментом, однако ничего существенного для понимания сути явления такой результат не дает. Поэтому здесь мы и не будем усложнять расчеты, ограничившись описанием движения только вверх.

3) Следующее усложнение опыта понадобилось для того, чтобы отсечь первоначально возникшие соображения о влиянии обратной волны при ударе о землю. Этот эффект несомненно имеет место, но не в нашем случае. Мы проделали соответствующие оценки и измерения упругости нескольких цепочек и провели дополнительный опыт. Он состоял в том, что цепочки бросались с большой высоты (до 5 м) на разные подстилающие поверхности. Однако оказалось, что фонтан вполне может возникнуть, прежде чем конец цепочки ударится о поверхность земли. Здесь, при мягкой связи между звеньями, импульс отдачи теряется в неупругом ударе между отдельными шариками.

Модель и оценки

Когда соскальзывающая цепочка уже разогналась, то скорость ее в данный момент с хорошей точностью можно принять равной $v = \sqrt{2ax}$, где x – высота падения упавшей части, a – ускорение падения, отличающееся от ускорения свободного падения g. Расчет этого ускорения a не столь уж и сложен.

---

[1] Эксперименты проводились при участии одиннадцатиклассника Физико-технического лицея 1 города Саратова Александра Крылова.

Соскальзывающая цепочка представляет собой тело с переменной массой. Поэтому уравнение движения следует записать так:

$$\frac{d(mv)}{dt} = mg .$$

Когда решаются задачи с постоянной массой, ее выносят за знак производной и говорят о массе, умноженной на ускорение. Ньютон же говорил о скорости изменения импульса (количества движения): «Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует».

Если теперь взять производную от произведения mv, то получим

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = mg \text{ , или } ma = mg - v\frac{dm}{dt} .$$

Уже видно, что ускорение цепочки получается меньшим, чем ускорение свободного падения точечного тела той же массы. Продолжим:

$$v = \frac{dx}{dt} , \quad dm = \frac{m}{x}dx , \quad ma = m\left(g - \frac{v^2}{x}\right).$$

Осталось применить известное кинематическое соотношение, связывающее скорость и путь, пройденный от начала падения:

$$v^2 = 2ax .$$

Теперь для ускорения падающей цепочки получаем искомое значение:

$$a = \frac{g}{3} .$$

Если участок поворота представить частью окружности (рис.5), то уравнение движения для элементарной массы Δm можно записать так:

$$\Delta m\frac{v^2}{R} = \Delta mg + \sum T .$$

Будем считать, что верхний участок кривой представляет собой полуокружность радиусом R, тогда масса этого участка равна $\Delta m = \lambda\pi R$. Сумма сил натяжения $\sum T$ по обеим сторонам дуги примерно равной силе веса движущейся части цепочки λxg плюс вес стенки «арки» $2\lambda hg$. На самом деле на правой части кривой наблюдается как падение вниз, так и движение вбок. Отказавшись от описания последнего, для простейшей оценки имеем

$$\lambda\pi R\frac{v^2}{R} = \lambda\pi Rg + \lambda xg + 2\lambda hg .$$

Отсюда, приняв $R \sim h$ и учитывая, что $v^2 =$

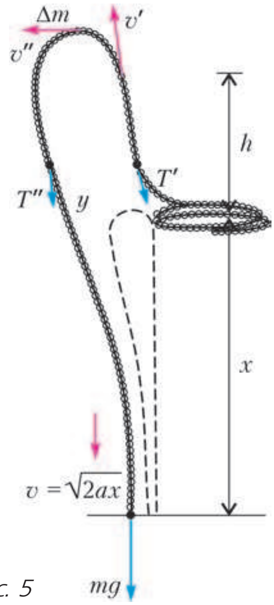


Рис. 5

$= 2ax = \frac{2}{3}gx$, получаем

$$\frac{2}{3}\pi x = \pi h + x + 2h \text{ , или } \frac{h}{x} = \frac{2\pi - 3}{3(\pi + 2)} \approx 0,2 .$$

В представленном в интернете опыте наблюдалось похожее соотношение. У нас мешала шероховатость соединения бусинок, и фонтан получился меньше.

Учтя сильные упрощения в расчете, можно лишь утверждать, что высота фонтана составляет несколько процентов от высоты падения цепочки. Это и наблюдается в демонстрации. Точные цифры при оценках не имеют доказательной силы.

Как видим, оценка получилась довольно простая и быстрая. В этом и прелесть метода физических оценок. Ученые используют его практически во всех сложных случаях, чтобы не завязнуть в деталях.

Итак, явление фонтанирования цепочки представляет собой естественный процесс, совершенно аналогичный рассмотренным выше процессам раскручивания лассо или соскакивания раскрученного ремня. Его можно объяснить с двух идентичных в своем описании точек зрения.

В неинерциальной системе, связанной с частицами цепочки, это возникновение центробежной поднимающей силы, которая определяется скоростью опрокидывания (изменения направления) импульса (здесь на угол $90°$). С другой точки зрения, связанной с наблюдателем и, соответственно, инерциальной системой, это возникновение поперечного (центростремительного, нормального) ускорения при движении тела по кривой под действием сил натяжения, которые преодолевают инерцию разогнанных частиц цепочки за конечное время и для которого требуется некоторый участок торможения. Этот участок и наблюдается как фонтан.

Подчеркнем, что явление отклонения от задаваемой формы движения наблюдается при совершенно произвольных ориентациях движения цепочки, лассо или ремня в пространстве. В нашем случае эта форма задается силой тяжести. В других случаях она навязывается различными направляющими, силами натяжения и силами реакций.

Почему же именно фонтанирование цепочки привлекает внимание наблюдателя? Это связано с тем, что наблюдатель мысленно сравнивает полет цепочки с потоком отдельных частиц, подбрасываемых с начальной скоростью, или с движением сбрасываемых с высоты в горизонтальном направлении тел. В этих случаях наблюдается гладкая параболическая траектория.

Однако как летят не связанные между собой частицы? Их скорости определяются ускорением, равным g, но в каждой точке пространства они различные. В частности, в точках области поворота (опрокидывания импульса) скорость наименьшая. В результате в потоке раздельно движущихся частиц практически не наблюдается ни сильного влияния центробежной силы (в неинерциальной системе), ни значительного влияния нормального ускорения (в системе наблюдателя). Хотя нечто подобное нашему случаю все-таки можно наблюдать – например, в питьевых фонтанчиках, где еще заметно влияние на связь частиц в струе сил поверхностного натяжения воды.

Иначе выглядит явление, когда все элементы цепочки связаны между собой и в каждый момент имеют одинаковую скорость. Эта скорость определяется ускорением, равным $a \neq g$, и задается совместным действием сил натяжения и силы тяжести. В каждый момент эта скорость равна скорости головной части падающей цепочки. Ее величина меньше, чем скорость свободно падающего тела в этот момент. Но возникающее поперечное ускорение вызывает отклонение движения частиц цепочки вбок от траектории падения, так же, как автомобиль, превысивший скорость прохождения по криволинейному участку шоссе, выбрасывается на обочину (т.е. на траекторию с бóльшим радиусом). В нашем случае, за счет значительной в целом нормальной (центростремительной) силы, из ослабленной части всей цепочки, при наличии свободно лежащего конца, вытягиваются дополнительные элементы. Происходит удлинение всей цепочки и формирование фонтана.

Визуально отличие падения цепочки от падения потока свободных частиц выглядит так, как будто элементы цепочки задерживаются в верхней точке, группируются, чтобы накопить необходимую для фонтана длину, и затем продолжают падение. В дальнейшем движении на нисходящем участке падающей цепочки отличие скорости от скорости свободного падения практически не замечается наблюдателем.

В случае с прослабленной велосипедной цепью возникновение группировки ускоренных звеньев достигается за счет разницы в натяжениях в верхней и нижней частях цепи. В примере с лассо петля – это не что иное, как тот же фонтан, только формирующийся в горизонтальной плоскости.

Осталось обсудить некоторые важные детали процесса. Например, как начинается фонтан и что происходит на правой (на наших рисунках) стороне поднимающейся цепочки? На рисунке 6 показано, как происходит возникновение фонтана. Вначале, когда свисает малая часть цепочки, сила тяжести левого конца сравнима с силой натяжения на правом, лежащем конце (векторы $\overrightarrow{T''}$ и $\overrightarrow{T'}$). Результирующая сила направлена вбок вправо, а соответствующая ей сила инерции (синий вектор) – вбок влево. Цепочка сдергивается с тарелки, и начинается формирование фонтана вверх и влево. По мере соскальзывания левый конец цепочки становится тяжелее, теперь сила инерции принимает почти вертикальное направление, и фонтан растет вверх. При этом на обеих сторонах поднявшейся цепочки начинаются свободные колебания – это хорошо видно на опытах. Обратим внимание, что здесь введение силы инерции (переход в неинерциальную систему) немного упрощает объяснение.

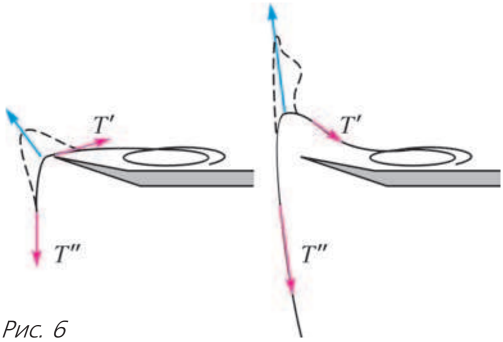


Рис. 6

Вот и все объяснение явления фонтанирования. Существенным оказывается то, что в полете неразрывная, но несжимаемая и нерастяжимая цепочка дополнительно вытягивается, чтобы «накопить» избыток длины за счет малого веса вытягиваемого конца цепочки (справа). Конечно, используемая нами модель является довольно упрощенной и обладает рядом недостатков. Так, не учтены потери энергии на работу по изгибанию цепочки. Не учтена и сила сопротивления воздуха, которая должна участвовать при расчете ускорения падения цепочки. При расчетах в итоге оказалась исключенной погонная масса цепочки в наших результатах, но она все-таки где-то должна проявиться. Например, слишком легкая цепочка (нить) начнет парить в воздухе и запутается – как запутывается леска слабо брошенного спиннинга. Но… здесь мы должны остановиться.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором Вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Желаем успеха!

9. Несколько ребят пошли в лес по ягоды. Оказалось, что все собрали ягод поровну. Алеша нашел $1/9$ всех собранных ягод черники и $1/11$ всех собранных ягод брусники. Ягоды других видов ребята не собирали. Докажите, что Алеша собрал столько же ягод брусники, сколько и черники.

Е.Бакаев

10. Есть два выпуклых многоугольника. У первого многоугольника вдвое больше острых углов, чем у второго тупых, а у второго втрое больше острых углов, чем у первого тупых. Также известно, что у каждого из них есть хотя бы один острый угол и что у этих многоугольников (одного или обоих) есть еще и прямые углы.

а) Приведите пример, как такое может быть.

б) Сколько прямых углов у каждого из многоугольников? (Требуется найти все варианты и доказать, что других нет.)

И.Акулич

11. Оказалось, что в группе по изучению французского языка для любых двух девочек есть ровно один мальчик, который нравится им обеим, и каждый мальчик нравится по крайней мере трем девочкам. Приведите пример такой группы, в которой учится больше одного мальчика.

Ф.Нилов

12. Доска 12×12 разрезана на трехклеточные уголки. Можно ли утверждать, что существует горизонтальный или вертикальный ряд клеток, который пересекается не менее чем: а) с 8 уголками; б) с 9 уголками; в) с 10 уголками?

С.Костин

XLVIII Международная физическая олимпиада

С 16 по 24 июля 2017 года в городе Джокьякарте (республика Индонезия) прошла очередная, XLVIII Международная физическая олимпиада (МФО) школьников. В олимпиаде участвовали 390 школьников из 85 стран.

Команду России в этом году представляли: Сергей Власенко (Воронеж), Станислав Крымский (Санкт-Петербург), Кирилл Паршуков (Республика Коми), Дмитрий Плотников (Москва), Василий Югов (Пермь). Приятно отметить, что все наши участники получили золотые медали.

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1. Темная материя

Фриц Цвики первым указал на существование темной материи. Он пришел к этому выводу, анализируя динамику скопления галактик Кома. Скопление (кластер) содержит около тысячи галактик. С помощью теоремы о вириале Цвики оценил полную массу скопления. Для систем, подобных Солнечной системе, в которой планеты вращаются по круговым орбитам вокруг Солнца, теорема о вириале утверждает, что кинетическая энергия планет определяется потенциальной энергией гравитационного взаимодействия. В общем случае, для системы взаимодействующих частиц, теорема о вириале связывает усредненную по времени полную кинетическую энергию системы и усредненную по времени полную потенциальную энергию системы.

Исследуя скорости галактик на периферии Кома-кластера, Цвики пришел к выводу, что полная масса кластера превышает массу входящих в него галактик, наблюдаемых визуально. Чтобы объяснить величины скоростей галактик на периферии кластера, недостаточно учесть гравитационное взаимодействие только с наблюдаемой материей (т.е. видимыми галактиками). Это означало, что в кластере содержится еще какая-то невидимая материя. Если учесть гравитационное взаимодействие с ней, то можно объяснить бóльшие значения наблюдаемых скоростей. Эта невидимая материя и есть «темная материя». В дальнейшем будем считать, что масса каждой галактики равна сумма масс видимой материи и темной материи этой галактики. Оба вида материи движутся совместно. Считайте, что темная материя взаимодействует с видимой только гравитационно.

Сборная команда России и ее руководители. Слева направо: М.Н.Осин, В.А.Шевченко, С.Власенко, В.Югов, С.Крымский, Д.Плотников, К.Паршуков, Ф.М.Цыбров, А.А.Воронов

А. Скопление галактик

Пусть кластер (скопление) состоит из большого числа N галактик и темной материи, распределенных однородно внутри сферы радиусом R. Полная масса кластера (т.е. и входящих галактик, и темной материи) M, а средняя масса галактики (состоящей из видимой и темной материи) m.

А1. Пусть материя распределена в кластере однородно. Найдите полную гравитационную энергию кластера. Ответ выразите через M и R. (1 балл)

Так как Вселенная расширяется, объекты удаляются от наблюдателя на Земле. Они удаляются со скоростью, которая зависит от расстояния между наблюдателем и объектом. Как правило, регистрируют излучение линии атома водорода. Частота этой линии от источника, находящегося на Земле, равна f_0. Пусть для каждой i-й удаляющейся галактики на Земле регистрируется сигнал частотой f_i, где $i = 1, \ldots, N$.

А2. Определите среднюю скорость скопления галактик $V_{\text{ср}}$, которое удаляется от Земли. Выразите ответ через f_i $(i = 1, \ldots, N)$, f_0 и N. (0,5 б.)

Примечание. Скорости галактик много меньше скорости света c.

А3. Предположим, что скорости галактик относительно центра кластера изотропны (т.е. все направления равноправны). Найдите среднюю квадратичную скорость $v_{\text{ср.кв.}}$ галактик относительно центра их скопления. Выразите ответ через N, f_i $(i = 1, \ldots, N)$ и f_0. Определите среднюю кинетическую энергию одной галактики относительно центра кластера. Выразите ответ через $v_{\text{ср.кв.}}$ и m. (1,5 б.)

Чтобы определить полную массу скопления галактик, можно использовать теорему о вириале. Согласно ей, для консервативной системы частиц $\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t$, где $\langle K \rangle_t$ – полная кинетическая энергия, усредненная по времени, $\langle U \rangle_t$ – полная потенциальная энергия, усредненная по времени, а γ – константа. Этот результат можно получить, если предположить, что в системе взаимодействующих частиц значения координаты и импульса каждой частицы конечны, а следовательно, конечна и величина $\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$.

А4. Усреднение величины $d\Gamma/dt$ по достаточно большому периоду времени равно нулю, т.е. $\left\langle \dfrac{d\Gamma}{dt} \right\rangle_t = 0$. Определите γ в выражении для теоремы о вириале для случая гравитационного взаимодействия. (1,7 б.)

Указание. Попробуйте решить задачу, просуммировав в Γ параметры для небольшого конечного числа галактик.

А5. Используя предыдущие результаты, найдите полную массу темной материи в кластере. Выразите ответ через N, $m_{\text{г}}$, R и $v_{\text{ср.кв.}}$, где $m_{\text{г}}$ – средняя масса видимой материи одной галактики. Считайте, что средняя квадратичная скорость темной материи совпадает со средней квадратичной скоростью галактик в кластере. (0,5 б.)

В. Темная материя в галактике

Темная материя есть как внутри галактик, так и вокруг них. Рассмотрим сферическую галактику видимого радиуса $R_{\text{г}}$ (это приблизительное расстояние, где еще можно наблюдать достаточно большое число звезд, при этом небольшое число звезд могут находиться на расстояниях, бóльших $R_{\text{г}}$). Звезды в галактиках можно считать точечными частицами со средней массой $m_{\text{ср}}$. Звезды в галактике распределены однородно. Число звезд в единице объема равно n. Будем считать, что звезды движутся по круговым орбитам.

В1. Пусть галактика состоит только из звезд. Найдите скорость звезды $v(r)$ в зависимости от расстояния от звезды до центра галактики. Изобразите графически зависимость $v(r)$ для $r < R_{\text{г}}$ и $r \geq R_{\text{г}}$. (0,8 б.)

На существование темной материи также указывает наблюдаемая зависимость скорости звезд от расстояния r (рис.1). Для простоты будем считать, что зависимость $v(r)$ линейна при $r \leq R_{\text{г}}$ и постоянна и равна v_0 при $r > R_{\text{г}}$.

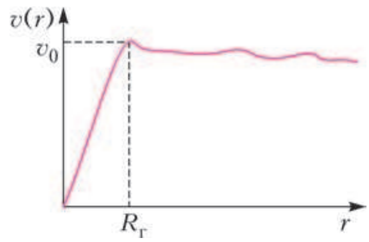


Рис. 1. Наблюдаемая зависимость скорости звезд от расстояния

В2. Найдите полную массу m_R той части галактики, которая находится внутри сферы радиусом $R_{\text{г}}$. Выразите ответ через v_0 и $R_{\text{г}}$. (0,5 б.)

Различие между графиком на рисунке 1 и графиком, полученным в пункте В1, указывает на существование темной материи.

В3. Определите, как зависит плотность темной материи от расстояния r. Найдите эту зависимость для $r < R_г$ и $r \geq R_г$. Выразите ответ через r, $R_г$, v_0, n и $m_{ср}$. (1,5 б.)

С. Межзвездный газ и темная материя

Рассмотрим галактику, в которой присутствуют межзвездный газ и темная материя (массой звезд можно пренебречь). Пусть межзвездный газ состоит из одинаковых частиц массой m_0. Концентрация частиц $n(r)$ и температура газа $T(r)$ зависят от расстояния r до центра галактики. Будем считать, что газ находится в гидростатическом равновесии: его давление связано с гравитационным притяжением галактики.

С1. Найдите градиент давления газа dp/dr. Выразите ответ через $m'(r)$, r и $n(r)$, где $m'(r)$ – полная масса газа и темной материи, находящихся внутри сферы радиусом r от центра галактики. (0,5 б.)

С2. Найдите $m'(r)$. Выразите ответ через $n(r)$, $T(r)$ и их производные по r. Считайте межзвездный газ идеальным. (0,5 б.)

Для простоты предположим, что температура газа постоянна, везде одинакова и равна T_0, а концентрация частиц определяется соотношением $n(r) = \dfrac{\alpha}{r(\beta + r)^2}$, где α и β – некоторые постоянные.

С3. Определите, как зависит плотность темной материи в галактике от r. (1 б.)

Задача 2. Вулканы, землетрясения и цунами

В Индонезии часто происходят стихийные бедствия: извержения вулканов, землетрясения и цунами.

А. Извержение вулкана Мерапи

Вулкан Мерапи в Джокьякарте – один из самых активных вулканов на острове Ява. Пирокластический поток – это разогретая смесь газов и горных пород, выбрасываемых вулканом. При извержении вулкана Мерапи 26 октября 2010 года в 10:02 утра пепел выбрасывался на высоту до 12 км (рис.2), а разливы пирокластических потоков привели к эвакуации более 20000 человек.

Рассмотрим причины извержения Мерапи в 2010 году. Известно, что попадание воды в магму играет важную роль во взрывообразном характере вулканических выбросов. Вулкан – это система, состоящая из воды и частиц магмы. Границы этой системы – это жерло вулкана и окружающая атмосфера. Полагают, что взрывообразные извержения происходят в два этапа: 1) очень быстрое, почти мгновенное взаимодействие магмы и воды; 2) расширение системы. На первом этапе магма массой $m_м$ при температуре $T_м$ смешивается с водой массой $m_в$ при температуре $T_в$. Термодинамическое равновесие воды и магмы устанавливается практически мгновенно. Их взаимодействие можно рассматривать как процесс с практически неизменными объемами обоих компонентов. Теплотами на парообразование воды и затвердевание магмы можно пренебречь.

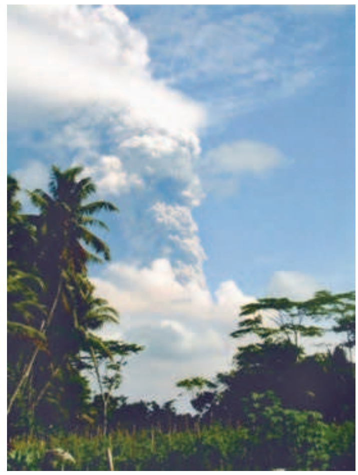


Рис. 2. Облако вулканического пепла во время извержения вулкана Мерапи

А1. Выразите конечную температуру смеси воды и магмы в конце первого этапа. Удельные теплоемкости воды и магмы равны $c_в$ и $c_м$ соответственно. (0,5 б.)

А2. Найдите равновесное значение давления смеси в конце первого этапа извержения. Получившуюся смесь воды и магмы можно считать идеальным газом. Молярный объем получившейся смеси равен $v_{мол}$. (0,3 б.)

Расширение системы (второй этап) может происходить по одному из нескольких путей, один из которых – термическая детонация. Хотя подобный процесс очень сложен для описания, эмпирически возможно рассчитать скорость выбрасываемой смеси. Скорость газа во время извержения $v_г$ зависит от его давления p, массы m и объема смеси V в канале вулкана.

А3. Выразите скорость газа во время извержения $u_г$ через p, m, V с точностью до безразмерного постоянного множителя k. (0,5 б.)

В действительности давление имеет порядок около 100 МПа. Это приводит к тому, что скорость извержения может быть сравнимой со скоростью пули.

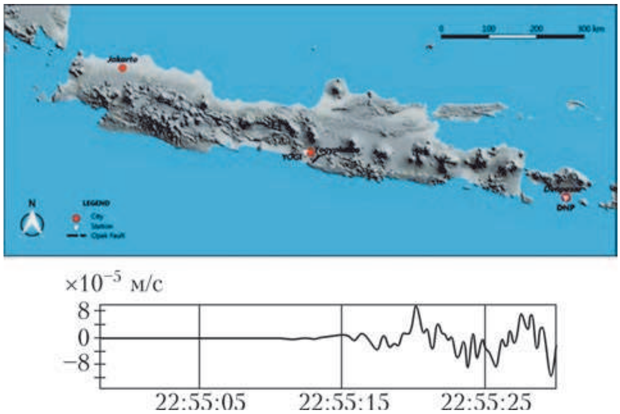


Рис. 4. Расположение станции DNP и ее сейсмограмма

В. Землетрясение в Джокьякарте

Землетрясение в Джокьякарте в 2006 году с магнитудой M = 6,4 произошло в 05:54:00 по местному времени или в 22:54:00 по универсальному международному времени (UTC). Землетрясение было вызвано внезапным смещением части сегмента Опак. Гипоцентр (очаг землетрясения) находился на 15 км ниже поверхности Земли.

Сейсмическая волна, которая распространяется по земной коре, может быть записана с помощью сейсмометра. Сейсмограммы представляют собой графики зависимости вертикальной скорости грунта от времени. На рисунке 3 показана сейсмограмма, зарегистрированная на станции Gamping Yogyakarta (YOGI), а на рисунке 4 – в Денпасаре (DNP). Сейсмическая волна состоит из трех типов волн: продольная (первичная) P-волна, поперечная (вторичная) S-волна и поверхностная волна. При этом P-волны и S-волны распространяются внутри Земли, в то время как поверхностная волна движется по поверхности Земли. Сейсмические волны, которые распространяются в толще Земли к сейсмическим станциям, можно разделить на те, которые распространяются по прямой, те, которые отражаются от границы слоев, и те, которые преломляются и частично проникают в следующий слой. У продольной (первичной) волны наибольшая скорость, в то время как поверхностная волна имеет самую низкую скорость, около 60% от скорости P-волны.

Эпицентр – это проекция очага землетрясения на поверхность Земли. Расстояния между эпицентром и станциями YOGI и DNP составляют 22,5 км и 500 км соответственно. Толщина земной коры на Яве 30 км. Под слоем земной коры находится слой мантии Земли. Сейсмические волны также подчиняются закону Снеллиуса, как и другие волны. Сейсмические волны могут отражаться от слоя мантии. В этой задаче кривизной Земли можно пренебречь.

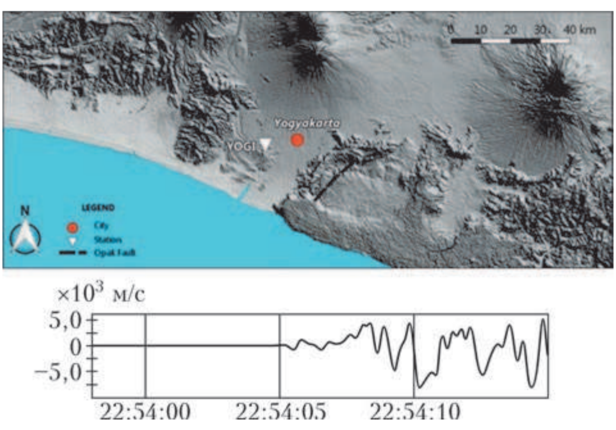


Рис. 3. Расположение станции YOGI и ее сейсмограмма

В1. На рисунке 3 показана сейсмограмма, зарегистрированная на станции YOGI. Вычислите скорость P-волны в земной коре, используя эту сейсмограмму. (0,5 б.)

В2. Вычислите времена распространения прямой и отраженной P-волн от очага землетрясения до станции DNP в Денпасаре. (0,6 б.)

Будем считать, что Земля состоит всего из двух слоев: земной коры и мантии. Первичные волны распространяются в коре и в мантии с разными скоростями. Скорость в мантии выше, чем скорость в коре. P-волна преломляется так, что угол преломления в мантии равен 90°. Эта волна частично преломляется обратно в кору. Это преломление может происходить на всем пути движения вдоль границы кора–мантия.

B3. Найдите скорость P-волны в мантии. (1,2 б.)

Для более точного описания структуры Земной коры ее можно разделить на ряд тонких слоев. Скорость сейсмической волны v зависит от глубины z по закону $v(z) = v_0 + az$, где a – постоянная. В дальнейшем считайте, что очаг землетрясения находится на поверхности Земли. В этой модели луч волны загибается.

B4. Определим параметр p следующим образом: $p = \sin\theta(z)/v(z)$, где $\theta(z)$ – угол между нормалью к поверхности и лучом на глубине z. В точке, где находится станция, у пришедшей волны этот параметр оказался равным p. Найдите расстояние от станции до очага землетрясения, выразив его через p, v_0 и a. Считайте, что очаг находится на поверхности Земли. (1,4 б.)

B5. Выразите время распространения волны T от очага землетрясения до произвольной сейсмической станции в виде интеграла по z. (1 б.)

Пусть Земля состоит из стопки однородных слоев (рис.5). Скорости распространения волн внутри этих слоев равны v_i, толщины этих слоев δz_i.

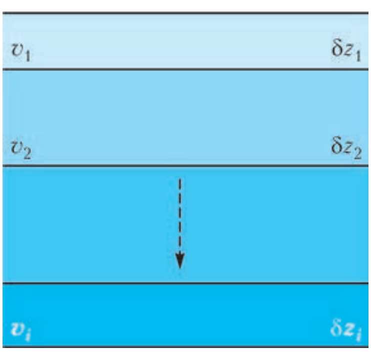


Рис. 5. Упрощенная модель слоев коры Земли

B6. Используя результаты предыдущего пункта, оцените время распространения волны $T(p)$ от очага до станции DNP в Денпасаре. Считайте, что земная кора состоит из трех слоев (i = 1, 2, 3) с параметрами v_1 = 6,65 км/с, v_2 = 6,97 км/с, v_3 = 6,99 км/с, p = 0,143 с/км, δz_1 = 6,0 км, δz_2 = 9,0 км, δz_3 = 15 км. (1 б.)

C. Цунами на Яве

Цунами и землетрясение Пангандаран произошло 17 июля 2006 года в 15:19:27 на побережье острова Явы. Во время землетрясения происходит смещение поверхности дна океана. Оно приводит к возникновению огромной волны, называемой цунами. Цунами – это волна на мелководье, которая при возникновении имеет малую амплитуду и чрезвычайно большую длину волны. Рассмотрим простую модель смещения поверхности дна океана (рис.6). Предположим, что

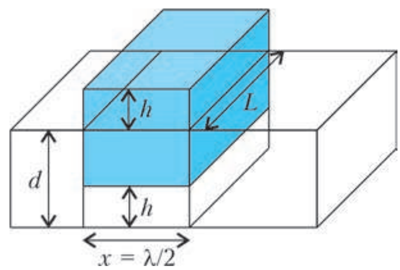


Рис. 6. Иллюстрация волны цунами. Глубина океана равна d

энергия землетрясения переходит в потенциальную энергию только той части океанической воды, которая приподнята над уровнем океана. В простой модели можно считать, что над уровнем океана образуется параллелепипед с площадью сечения $L\lambda/2$ (где $L \gg \lambda$) и высотой h.

C1. Определите потенциальную энергию воды, запасенную в образовавшемся над уровнем океана параллелепипеде. Плотность воды равна ρ. (0,5 б.)

C2. Найдите скорость распространения волны цунами с точностью до безразмерного множителя. (1,2 б.)

C3. Используя энергетический подход, определите амплитуду волны цунами как функцию глубины океана. Считайте, что глубина меняется медленно. Известно, что для глубины d_0 амплитуда равна A_0. (1,3 б.)

Задача 3. Расширение Вселенной

Если наблюдать с Земли за движением галактик, то регистрируемая длина волны их излучения будет отличаться от той длины волны, на которой галактики излучают. Это объясняется эффектом Доплера. Из общих соображений можно ожидать, что для одних галактик сдвиг регистрируемой длины волны будет положителен – красное смещение, а для других отрицателен – синее смещение. Однако наблюдения показывают, что для всех галактик (кроме ближайших) характерно красное смещение. То же самое должно получиться, если провести наблюдения из другой точки Вселенной. Из этого следует, что Вселенная расширяется.

На масштабах, превышающих 100 Мпк (100 мегапарсек; 1 парсек = 3,26 световых лет), можно пренебречь локальными неоднородностями Вселенной. В этом случае распределение галактик становится все более изотропным (независящим от направления) и однородным (независящим от координаты). Поэтому можно считать, что плотность Вселенной равна ρ.

А. Расширение Вселенной

Рассмотрим шар, который находится в шарообразном пространстве гораздо большего объема и расширяется. Распределение плотности в маленьком шаре однородно и равно плотности в пространстве. Пусть в некоторый момент времени радиус рассматриваемого шара равен $R_{\text{ш}}$. Чтобы задать зависимость радиуса от времени $R(t)$, введем безразмерный масштабный параметр $a(t)$ так, что $R(t) = a(t)R_{\text{ш}}$. Для этой модели можно получить уравнения Фридмана. Первое уравнение получится, если для точечной массы рассчитать скорость на поверхности шара, используя закон всемирного тяготения:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1\rho(t) - \frac{kc^2}{R_{\text{ш}}^2 a^2(t)},$$

где k – безразмерная постоянная, c – скорость света.

А1. Найдите постоянную A_1 в первом уравнении Фридмана. (1,3 б.)

Приведенные выше рассуждения сделаны для нерелятивистского случая. Но их можно распространить и на релятивистскую систему, приняв $\rho(t)c^2$ как плотность полной энергии (не включая гравитационную потенциальную энергию). Если в такой релятивистской системе записать первое начало термодинамики для адиабатической системы, можно получить второе уравнение Фридмана:

$$\dot{\rho} + A_2\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0,$$

где p – давление на поверхности шара.

А2. Найдите постоянную A_2 во втором уравнении Фридмана. (0,9 б.)

Для решения уравнений Фридмана предположим, что зависимость давления от плотности $p = p(\rho)$ записывается следующим образом: $p(t)/c^2 = w\rho(t)$, где w – постоянная. Величина $H = \dot{a}/a$ называется постоянной Хаббла. Значения параметров в настоящий момент времени обозначаются индексом 0: t_0, H_0, a_0 и так далее. Для простоты примем $a_0 = 1$.

Считается, что Вселенная образовалась в результате Большого взрыва, при котором возникли релятивистские частицы. В процессе расширения Вселенная охлаждается, и частицы в ней становятся нерелятивистскими. Однако недавние наблюдения показывают, что современная Вселенная характеризуется постоянной плотностью энергии. По мере расширения Вселенной у фотонов длина волны растет пропорционально масштабному параметру.

А3. Для каждого из трех случаев определите значение w: (1) для Вселенной, в которой присутствует только излучение (т.е. энергия фотонов), (2) для Вселенной, в которой присутствует только материя (нерелятивистское вещество), (3) для Вселенной в модели с постоянной плотностью энергии. (1,2 б.)

А4. Приняв $k = 0$, найдите $a(t)$ для всех случаев (1), (2) и (3) из пункта А3. Начальные условия: для случаев (1) и (2) $a(t=0) = 0$, для случая (3) $a_0 = 1$. (1,2 б.)

Постоянная k в первом уравнении Фридмана характеризует тип пространственной геометрии Вселенной. Она может принимать такие значения: $k = +1$ для Вселенной положительной кривизны (замкнутой, конечной), $k = 0$ для плоской Вселенной (открытой, бесконечной), $k = -1$ для Вселенной отрицательной кривизны (открытой, бесконечной). Введем относительную плотность $\Omega = \rho/\rho_{\text{кр}}$, где $\rho_{кр} c^2 = H^2/A_1$ и называется критической плотностью энергии, A_1 берется из пункта А1.

А5. Выразите k из первого уравнения Фридмана через переменные Ω, H, a, R_0 и константы. (0,1 б.)

А6. Укажите, каким диапазонам значений Ω соответствуют значения $k = +1$, $k = 0$, $k = -1$. (0,3 б.)

B. Фаза инфляции

Наблюдения реликтового излучения предсказывают, что наша Вселенная практически плоская. Однако если это так, то начальное состояние Вселенной тоже должно было быть плоским. Иначе любое случайное отклонение приведет к тому, что Вселенная не будет плоской.

В1. Найдите $\Omega(t) - 1$ как функцию времени для стадии доминирования излучения или для стадии доминирования материи (см. пункт А3). (0,5 б.)

В самом начале Вселенная должна была находиться в фазе постоянной плотности энергии. В этой фазе расширение происходит экспоненциально, и она называется фазой инфляции.

В2. Найдите $\Omega(t) - 1$ как функцию времени для этой фазы постоянной плотности энергии. Считайте, что $\Omega(t) - 1 \ll 1$. (0,3 б.).

В3. С помощью формул покажите, что из условия фазы инфляции следуют такие утверждения: давление отрицательно, расширение происходит с положительным ускорением ($\ddot{a} > 0$) и радиус Хаббла $\left(\dfrac{1}{aH}\right)$ уменьшается $\left(d(aH)^{-1}/dt < 0\right)$. (0,9 б.)

Введем параметр $\varepsilon = -\dot{H}/H^2$.

В4. Покажите, что условие уменьшения радиуса Хаббла может быт выражено через параметр ε как $\varepsilon < 1$. (0,2 б.)

Отметим, что фаза инфляции продолжается, пока $\varepsilon < 1$, и завершается, когда $\varepsilon = 1$. Можно ввести такой параметр N, что $dN = d\ln a = H dt$. Этот параметр соответствует скорости экспоненциального расширения. Когда фаза инфляции завершилась, $N = 0$.

C. Расширение из-за однородно распределенной материи

Можно привести пример простой системы, в которой может возникнуть фаза инфляции. Например, это Вселенная, где преобладает однородное распределение материи. Поведение частицы этой материи описывается некой функцией $\varphi(t)$ (можно считать ее аналогом координаты), и уравнение динамики выглядит так: $\ddot{\varphi} + 3H\varphi = -U'$, где $U = U(\varphi)$ – потенциальная энергия частицы, а $U' = \dfrac{\partial U}{\partial \varphi}$. В этой модели для постоянной Хаббла справедливо соотношение $H^2 = \dfrac{1}{3M^2}\left(\dfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + U\right)$, где M – константа. Фаза инфляции происходит, когда потенциальная энергия U намного больше кинетической энергии $\dot{\varphi}^2/2$ и слагаемым $\ddot{\varphi}$ в уравнении динамики можно пренебречь. Введем параметр $\eta_U = \delta + \varepsilon$, где $\delta = -\ddot{\varphi}/(H\dot{\varphi})$.

С1. Найдите параметры ε и η_U, а также получите выражение для $dN/d\varphi$. Выразите ответы через потенциал $U(\varphi)$, его первую и вторую производные (U' и U'') и константы. (1,7 б.)

D. Фаза инфляции с заданным потенциалом

Предсказания любой модели фазы инфляции должны согласовываться с экспериментальными данными по изучению реликтового излучения. Для начала фазы инфляции ($\varphi = \varphi_н$) рассчитаны параметры $n_0 = 0{,}968 \pm 0{,}006$ и $r < 0{,}12$, где $n_0 = 1 + 2\eta_U - 6\varepsilon$ и $r = 16\varepsilon$ для модели Вселенной, в которой преобладает однородное распределение материи. Будем считать, что потенциальная энергия задана в явном виде: $U(\varphi) = \Lambda^4\left(\dfrac{\varphi}{M}\right)^n$, где n – целое число, Λ – постоянная.

D1. Для заданного потенциала вычислите $\varphi_к$, когда фаза инфляции завершилась. (0,5 б.)

D2. Выразите r и n_0 через параметр N и целое число n. Оцените значение n, при котором величины r и n_0 близки к наблюдаемым значениям. При расчетах считайте, что $N = 60$. (0,9 б.)

Публикацию подготовил В.Слободянин

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Политехническая олимпиада школьников

Политехническая олимпиада школьников в 2016/17 учебном году проводилась по четырем предметам: математике, физике, химии и информатике. Отборочный тур проходил заочно в два этапа, применяя интернет-технологии. Задания и правила выполнения были вывешены на официальном сайте олимпиады. Победители и призеры отборочного тура приглашались к участию в заключительном туре, который прошел в Санкт-Петербургском политехническом университете в форме очного письменного испытания.

Информацию об олимпиаде 2017/18 учебного года можно получить на сайтах СПбПУ: www.spbstu.ru и olymp.spbstu.ru.

МАТЕМАТИКА

Отборочный тур

1 этап

1. Найдите наибольший простой делитель числа $89 \cdot 105 + 64$.

2. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые делятся хотя бы на одно из чисел 6, 8.

3. Из пункта A в пункт B одновременно отправились два велосипедиста со скоростями 10 км/ч и 20 км/ч. Через 2 ч за ними выехал скутер, который сначала догнал первого велосипедиста, а еще через 80 мин догнал и второго. С какой скоростью двигался скутер?

4. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{3x-4} = \sqrt[3]{x}.$$

В ответе укажите корень или сумму корней, если их несколько.

5. Найдите больший корень уравнения

$$\log_2 x + 8x^{-1} = 6 - \left|8x^{-1} - \log_2 x\right|.$$

6. Сколько целых решений имеет неравенство $\sqrt{12 - \sqrt{1-x}} > \sqrt{6-x}$?

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{y+2} = 3, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y+9} = 3. \end{cases}$$

В ответе запишите произведение $x \cdot y$, где $(x; y)$ – решение системы.

8. Пусть $\{b_k\}$ – геометрическая прогрессия с положительными членами, S_n – сумма ее первых n членов, T_n – сумма первых n членов прогрессии $\left\{\frac{1}{b_k}\right\}$. Найдите b_2, если $\frac{S_3}{T_3} = 4$.

9. Пусть S_m – сумма первых m членов некоторой арифметической прогрессии. Найдите $\frac{S_{3n}}{S_n}$, если $\frac{S_{2n}}{S_n} = 3$, где n – некоторое натуральное число.

10. Найдите наименьшее целое значение параметра a, для которого уравнение

$$\frac{x^2 - 2x}{|2x-1| - |x+1|} = a^{-1} + |x|$$

имеет ровно два корня.

2 этап

1. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} - \sqrt{x}$ на промежутке $[0; 3]$.

2. Найдите $\frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha + 2\cos^3\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

3. Найдите целое число – решение уравнения $2\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}$.

4. Последовательность $\{x_n\}$ задана следующими соотношениями: $x_1 = 3$; $x_n = \frac{1}{1 - x_{n-1}}$ при $n \ge 2$. Найдите сумму первых 36 членов последовательности.

5. Каждый турист из группы, прибывшей в Санкт-Петербург, посетил не менее двух музеев, причем 11 человек посетили Эрмитаж, 7 – Русский музей, 5 – Исаакиевский собор. Какое максимальное число туристов могло быть в группе?

6. Из точки M, взятой внутри треугольника ABC со сторонами $AB = 6$, $BC = 7$, $CA = 9$, опущены перпендикуляры MX, MY и MZ на стороны BC, CA и AB. Найдите сумму $AY \cdot AC + BZ \cdot BA + CX \cdot CB$.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$7\cos 2x + 24\sin 2x + 16\cos x + 12\sin x.$$

В ответе укажите сумму найденных значений.

8. Правильная четырехугольная пирамида имеет боковое ребро длины $3\sqrt{3}$. Найдите наибольшее возможное значение объема этой пирамиды.

9. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ объема 35 с основанием $ABCD$ через вершину основания A и точку M на боковом ребре SC проведено сечение $ALMN$ параллельно диагонали BD основания. Найдите объем пирамиды $SALMN$, если $SM : MC = 2 : 3$.

10. Сколько решений имеет уравнение $\dfrac{\sqrt{\sin 2x \cos x}}{1-\sin x} = \sqrt{3}$ на промежутке $[0; 2\pi]$?

Заключительный тур

1. Найдите сумму натуральных чисел $n \in [40; 60]$, которые нельзя представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{2 + x - \sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} + x$ на промежутке $[0; 7]$.

3. Решите уравнение

$$\log_{8\sqrt{x}}\left(8\sqrt{x}+5\right) = \log_{x+16}(x+21).$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x} = 2\sqrt{y},\\ \sqrt{y}+\sqrt{2-y} = 2\sqrt{1-x}.\end{cases}$$

5. Сколько корней на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ имеет уравнение $\dfrac{1+\sqrt{2}\sin(x-\pi/4)}{1+\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{5}$?

6. Пассажир прошел по движущемуся эскалатору, ступив на 30 ступеней. В следующий раз он шел с той же скоростью навстречу движению эскалатора и ступил на 45 ступеней. На сколько ступеней ступит пассажир, идя по неподвижному эскалатору?

7. Три автосалона продавали автомобили стандартной и улучшенной комплектаций. Автомобили улучшенной комплектации имели и повышенную цену. Во всех салонах цены были одинаковыми. Первый салон продал 11 автомобилей, второй – 21, третий – 29, причем в каждом был продан хотя бы один стандартный автомобиль. Выручка салонов оказалась одинаковой. Найдите наименьшее возможное число проданных автомобилей улучшенной комплектации.

8. В результате смешения 60 г 60%-го и некоторого количества 10%-го растворов соли получился 25%-й раствор. Сколько получилось 25%-го раствора?

9. Точки B_1 и C_1 – основания высот треугольника ABC, проведенных из вершин B и C соответственно. Известно, что $AB = 8$, $AC = 7$, $\sin\angle BAC = \dfrac{3\sqrt{15}}{16}$. Найдите длину отрезка B_1C_1.

10. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2-1}{|2x+1|-|x+2|} = ax^2$ имеет не более одного корня?

ФИЗИКА

Отборочный тур[1]

9–10 классы

1. К концам нерастяжимого каната, переброшенного через два блока, подвешены два груза массами $m_1 = 2{,}9$ кг и $m_2 = 3{,}5$ кг (рис.1). Найдите массу M груза, который

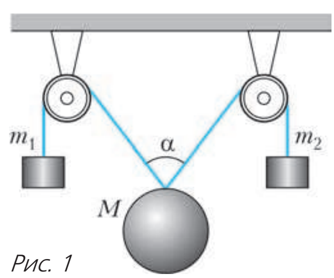


Рис. 1

[1] Каждая задача оценивалась в 10 баллов.

нужно подвесить к канату между блоками, чтобы угол между наклонными участками каната был равен $\alpha = 56°$. Массой каната и трением в блоках можно пренебречь.

2. Опаздывая на лекцию по физике, студенты СПбПУ Павел Поспешаев и Борис Бегунков идут наверх по ступеням двух эскалаторов. Поспешаев идет по эскалатору, едущему *вверх*, а Бегунков выбрал эскалатор, движущийся *вниз*. Студенты прибывают наверх за одинаковое время $t = 132$ с. Во сколько раз работа по подъему Бегункова, его масса $m_1 = 84$ кг, превышает работу Поспешаева, масса которого $m_2 = 61$ кг? Глубина залегания платформы станции метро «Политехническая» $h = 65$ м. Эскалаторы относительно балюстрады едут с одной и той же скоростью $v = 0{,}7$ м/с. Угол наклона тоннеля эскалатора к горизонту $\alpha = 30°$.

3. Маятник метронома совершает колебания с периодом $T = 2{,}48$ с и амплитудой $\varphi_{\max} = 65°$. На фотографии (рис.2), сделанной с достаточно большой выдержкой, изображение грузика метронома получилось в виде дуги, один конец которой имеет угловое положение $\varphi_1 = 22°$, а второй $\varphi_2 = 37°$ относительно вертикального направления. В течение какого времени был открыт затвор фотоаппарата?

Рис. 2

4. Ржавая и мятая железная бочка с остатками нефти плавает в озере, погрузившись в воду на $x = 0{,}4$ своего объема. После того как за $n = 122$ дня в нее набралось $V = 59$ л воды, под водой оказалось уже $y = 0{,}6$ объема бочки. Сколько еще дней бочка будет плавать в озере, перед тем как утонет?

5. На дорогу от платформы «$9\frac{3}{4}$» до пункта назначения Хогвартс-Экспресс расходует $M = 17$ т дров с теплотворной способностью $L = 14$ МДж/кг. Расстояние до «Хогвартса» $s = 813$ км, средняя сила тяги паровоза $F = 14$ кН. Сколько тонн дров можно было бы сэкономить за одну поездку, если бы паровоз работал по циклу Карно? В качестве рабочего тела в паровозе используется перегретый водяной пар при температуре $t_1 = 362$ °C, а температура воздуха $t_2 = 16$ °C.

6. В системе управления питанием звездолета Д'Кур важную роль играет специальный резистор (токоизмерительный шунт), для изготовления которого вулканцы используют отрезки стержней из поликристаллических висмута (удельное сопротивление $\rho_{01} = 1{,}2$ мкОм · м, температурный коэффициент сопротивления $\alpha_1 = 4{,}8 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$) и графита (удельное сопротивление $\rho_{02} = 0{,}8$ мкОм · м, температурный коэффициент сопротивления $\alpha_2 = -1{,}0 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$), соединяя их последовательно. Диаметр обоих стержней одинаков и равен $d = 8{,}2$ мм. Длина отрезков выбирается так, чтобы сопротивление резистора не зависело от температуры, а общая длина резистора была равна $l = 18$ см. Чему равно сопротивление резистора?

7. Раздобыв на захваченном корабле бочонок дицианоаурата калия, Джек Воробей решил изготовить несколько сотен фальшивых золотых монет из давно лежащих в заброшенном сундуке медяков какой-то древней забытой страны. Он тщательно измерил монеты – все они имели диаметр $d = 22$ мм и толщину $h = 1{,}5$ мм. В качестве источника тока для гальванического покрытия монет золотом Джек взял $n = 11$ гигантских электрических скатов, каждый из которых мог давать ток $I = 50$ мА в течение $t = 2$ ч. Сколько монет удалось позолотить Джеку, если слой наносимого им золота имел толщину $l = 4{,}5$ мкм? Электрохимический эквивалент золота в этом процессе $k = 2{,}04$ мг/Кл, плотность золота $\rho = 19{,}3$ г/см^3.

8. Кольцо Всевластья, в одном из пробных вариантов, было изготовлено Сауроном из отрезка мифриловой проволоки сопротивлением $R = 185$ нОм и имело радиус $r = 9{,}3$ мм. Однако оказалось, что Кольцо разрывается буквально через $\tau = 4{,}0$ с после помещения в однородное магнитное поле, вектор индукции которого направлен перпендикулярно плоскости кольца, а его величина меняется по линейному закону $B(t) = \xi t$, где $\xi = 3{,}8$ Тл/с. Найдите силу, разорвавшую Кольцо Всевластья в точке его сварки. (Собственная индуктивность Кольца пренебрежимо мала.)

11 класс

1. Доктор Ватсон провожал Генри Баскервиля на железнодорожной платформе вокзала Паддингтон. Стоя у начала 4-го вагона (нумерация вагонов начинается от локомотива), доктор определил, что начавший двигаться вагон прошел мимо него за $t_1 = 4{,}7$ с, а весь поезд – за $t_2 = 18{,}2$ с. Сколько вагонов было у поезда, отправившегося в Плимут (графство Девоншир)? Движение поезда считать равноускоренным.

2. В *некоторой* жидкости в состоянии безразличного равновесия плавает герметичный контейнер в форме параллелепипеда (рис.3). Его геометрические размеры

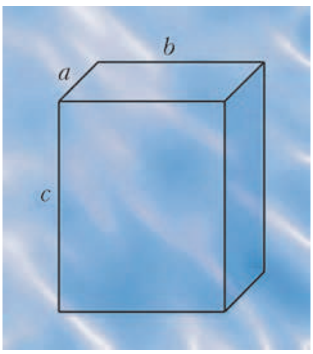


Рис. 3

$a = 0{,}8$ м, $b = 0{,}5$ м, $c = 1{,}9$ м. Сила гидростатического давления, действующая на верхнюю грань площадью $S_{\text{верх}} = a \times b$ равна $F_1 = 5$ кН, а на боковую грань площадью $S_{\text{бок}} = b \times c$ равна $F_2 = 40$ кН. Найдите массу контейнера.

3. В электрочайник из большой бочки с водой налили некоторое количество воды. Вода закипела через $t_1 = 15$ мин после включения чайника. Сразу же после начала кипения в чайник добавили дополнительную порцию воды из той же бочки, после чего температура воды в чайнике понизилась на $\Delta T = 38$ °C. Через $t_2 = 18$ мин после этого вода снова закипела. Определите температуру воды в бочке.

4. Вертикальный цилиндр с теплопроводящими стенками закрыт невесомым поршнем площадью $S = 375$ см^2, который может перемещаться без трения (рис.4). Внутри цилиндра находится воздух и воздушный шарик объемом $V = 1436$ см^3. Давление внутри шарика превышает атмосферное в 1,3 раза. На какое расстояние сдвинется поршень, если шарик лопнет?

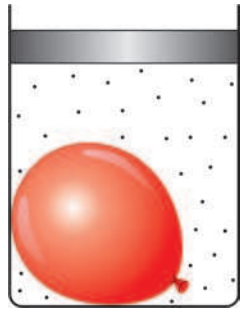


Рис. 4

5. В электрической схеме, показанной на рисунке 5, осуществляют зарядку конденсаторов следующим образом: сначала *замыкают* ключ K_1 и спустя некоторое время *размыкают* его. После этого *замыкают* ключ K_2. Определите напряжение, установившееся на *первом* конденсаторе. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: электрические емкости $C_1 = 74$ мкФ, $C_2 = 62$ мкФ, ЭДС источников напряжения $\mathcal{E}_1 = 7{,}8$ В и $\mathcal{E}_2 = 19{,}2$ В.

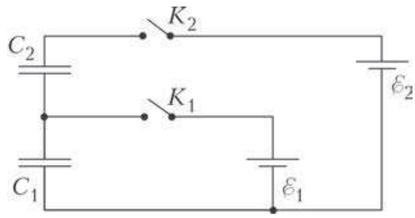


Рис. 5

6. Студенты Политеха изобрели самоварящийся суп из влагозащищенного смартфона. Рецепт его прост: в термос наливается немного теплой воды, $t = 26$ °C, и в нее опускается полностью заряженный смартфон массой $m_{\text{см}} = 126$ г, на котором запущен показ фильмов. Выделяющееся при этом тепло нагревает воду, а аккумуляторная батарея телефона с напряжением $U = 3{,}7$ В и емкостью $q = 1900$ мА · ч полностью разряжается. Какое максимальное количество воды можно взять, чтобы суп все-таки «сварился» (вода дошла до кипения), а студенты получили Шнобелевскую премию? Средняя удельная теплоемкость материалов смартфона $c_{\text{см}} = 0{,}6$ кДж/(кг · К), удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4{,}2$ кДж/(кг · К).

Внимание! Не повторять – возможен взрыв!

7. В wi-fi адаптере MaxWi-MaxFi-2019 при переключении с 38 канала (частота 5095 МГц) на 12 канал (частота 2467 МГц) емкость колебательного контура его радиопередатчика изменяется на 2,9 пФ. Чему равна индуктивность этого контура?

8. Пока его спутники, залепив уши воском, направляли корабль параллельно берегу острова, привязанный к мачте Одиссей слушал пение сирен. Он обнаружил в их пении мощные колебания на частоте f = 21 Гц, которые влияли на бета-ритмы мозга и подавляли у моряков способность мыслить. Одиссей почувствовал, что его страдания минимальны, когда корабль находился точно напротив одной из сирен, и стали невыносимы, когда корабль проплыл d = 108 м и оказался на одинаковом расстоянии от обеих сирен. Но затем страдания вновь пропали, когда корабль проплывал мимо второй сирены. На каком расстоянии от берега с сиренами проплывал корабль Одиссея? Скорость звука в тот вечер была v = 338 м/с.

Заключительный тур

9–10 классы

1. Маленький каучуковый шарик движется между двумя массивными вертикальными стенками, соударяясь с ними. Одна из стенок неподвижна, а другая удаляется от нее с постоянной скоростью $u = 100$ см/с. Считая движение шарика все время горизонтальным, а удары абсолютно упругими, найдите его окончательную скорость, если начальная скорость шарика была v_0 = 2017 см/с. (15 баллов)

2. Спутник запускают на полюсе Земли строго вертикально с первой космической скоростью. На какое максимальное расстояние от поверхности Земли удалится спутник? (Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = 10$ м/с^2, радиус Земли R = 6400 км.) (15 баллов)

3. Определите массу m гелия, которым нужно заполнить пустой воздушный шарик массой m_1 = 10 г, чтобы шарик взлетел. Температуру и давление газа в шарике принять равными температуре и давлению воздуха. Молярная масса гелия $M_г = 4$ г/моль, молярная масса воздуха $M_в = 29$ г/моль. (15 баллов)

4. Тщательно очищенную воду можно переохладить до температуры ниже 0 °С. Однако если в нее бросить кристаллик льда, то вода немедленно начнет замерзать. Какая часть переохлажденной до –10 °С воды, находящейся в термосе, замерзнет, если в нее бросить маленькую льдинку? Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. (15 баллов)

5. Шесть резисторов сопротивлениями R_1 = 1 Ом, R_2 = 2 Ом, R_3 = 3 Ом, R_4 = = 4 Ом, R_5 = 5 Ом и R_6 = 6 Ом соединены последовательно и замкнуты кольцом. К получившейся цепи подключили источник постоянного напряжения так, что сопротивление цепи между его клеммами *максимально*. Напряжение источника U = 12 В. Найдите мощность, выделяющуюся на резисторе сопротивлением R_3. (25 баллов)

6. Посмотрев с края берега ручья вниз, Вовочка решил, что высоты его резиновых сапог хватит, чтобы перейти ручей вброд. Однако, совершив переправу, Вовочка замочил ноги по колено (H = 52 см). Оцените, какой высоты h сапоги у Вовочки. Глубину ручья считать постоянной, показатель преломления воды n = 1,33. (15 баллов)

11 класс

1. Электропоезд Сапсан, приближаясь к железнодорожной станции со скоростью v = = 216 км/ч, за полкилометра до нее подает предупредительный звуковой сигнал длительностью Δt = 5 с. Какова будет длительность сигнала $\Delta\tau$ с точки зрения пассажиров, стоящих на платформе? Скорость звука в воздухе c = 340 м/с. (10 баллов)

2. Деревянный куб с ребром l = 30 см плавает в озере. Плотность дерева $\rho = 750$ кг/м^3, плотность воды ρ_0 = = 1000 кг/м^3. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы полностью вытащить куб из воды? (15 баллов)

3. На диаграмме (рис.6) изображен процесс нагревания неизменной массы одноатомного идеального газа. Определите КПД этого процесса. (20 баллов)

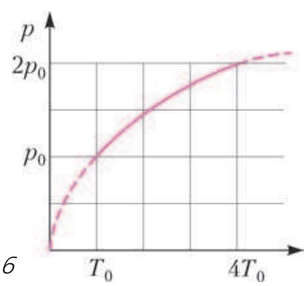


Рис. 6

4. В вершинах квадрата со стороной a расположены четыре заряда: q, q, q, $-q$. Чему равны модуль напряженности E и потенциал φ электрического поля в середине стороны квадрата, соединяющей положительный и отрицательный заряды? ($q = 2$ нКл, $a = 20$ см). (15 баллов)

5. Вольтметр, подключенный к клеммам источника тока с ЭДС, равной 12 В, показывает напряжение $U_1 = 9$ В. К клеммам источника подсоединяют еще один такой же вольтметр. Определите показания вольтметров. (Сопротивление источника ненулевое, сопротивление вольтметров конечное.) (20 баллов)

6. Рассеивающая линза дает изображение гвоздя, уменьшенное в 4 раза. Гвоздь расположен на главной оптической оси линзы шляпкой к линзе. Длина гвоздя $l = 20$ см, оптическая сила линзы $D = -5$ дптр. Найдите расстояние от оптического центра линзы до шляпки гвоздя. (20 баллов)

ИНФОРМАТИКА

Отборочный тур

9–10 классы

1 этап

1. Экспериментируя с кодированием текстовой информации, школьник Сидор выполнил следующие действия:

1. Записал в первой строке название своего родного города прописными буквами кириллицы.

2. Под каждой буквой (во второй строке) написал ее ASCII-код.

3. Вычел из каждого кода значение самого маленького из записанных во 2-й строке чисел, результат записал под ним. В результате в третьей строке оказались записанными числа 3 20 0 20 4.

В каком городе родился Сидор? Ответ – название города в именительном падеже.

2. Упорядочите логические выражения по возрастанию количества единиц в таблице истинности.

Обозначения:
NOT – отрицание
AND – конъюнкция
OR – дизъюнкция
XOR – исключающее ИЛИ
$\rightarrow$ – импликация
$\leftrightarrow$ – эквиваленция

А. NOT (A AND B)
Б. (NOT A) XOR (NOT B)
В. A AND NOT A AND B
Г. (A $\leftrightarrow$ B) OR (A XOR B)

3. Дана логическая схема (рис.7). Выберите те наборы значений (один или несколько), при подаче которых на вход схемы на выходе будет значение 1.

Логическая операция	Конъюнкция	Дизъюнкция	Инверсия
Обозначение на схеме	&	1	

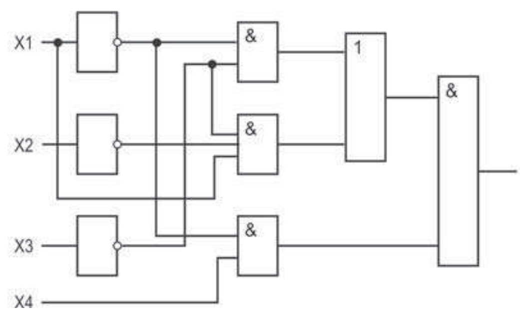


Рис. 7

А. X1=0; X2=0; X3=1; X4=0
Б. X1=1; X2=1; X3=0; X4=1
В. X1=0; X2=0; X3=0; X4=1
Г. X1=1; X2=0; X3=1; X4=1

4. Определите количество натуральных чисел, которые одновременно удовлетворяют следующим условиям:

1) В 20ричной и в 7ричной системах счисления число двузначно.

2) В 3чной системе счисления число четырехзначно.

3) В двоичной записи числа не менее четырех единиц.

5. На рисунке 8 представлены пять рисунков. Они одинакового размера (200 на 200 пикселей) и представляют собой 24-разрядные точечные рисунки. Рисунки преобразовали в формат .JPG. Упорядочите файлы по возрастанию размера получаемых из них jpg-файлов.

Рис. 8

2 этап

1. Перед Новым годом Делфтского Яблокоеда (виртуальное существо, постоянный персонаж Политехнической олимпиады, обитает в одномерных и двумерных стеллажах-массивах) научили перемещаться по стеллажу по алгоритму Гирлянда. В приведенном ниже описании алгоритма (рис.9) команды ВНИЗ, ВПРАВО, ВЛЕВО означают перемещение в соседнюю ячейку в указанном

```
Алг Гирлянда
Нач
  Цел M := 0
  Цел Z := 1
  НЦ
    Петля (M, Z)
    M := M + 1
    Z := - Z
  КЦ
Кон
```

```
Алг Петля (Цел A, Цел D)
Нач
  Цел K
  Для K От 1 До A НЦ
    Шаг (D)
    КЦ
    ВНИЗ
  Для K От 1 До A НЦ
    Шаг (-D)
  КЦ
Кон
```

Рис. 9

направлении, остальные команды соответствуют правилам алгоритмического языка, применяемого на ЕГЭ и ОГЭ.

Итак, яблокоеда сажают в произвольную ячейку двумерного стеллажа-массива, и он начинает движение. В каждой из посещенных ячеек он, естественно, съедает одно яблоко. Если в ходе движения Яблокоед пытается переместиться в несуществующую ячейку, происходит «прерывание»: лаборант-яблокоедовед ловит выпавшего из стеллажа Яблокоеда и уносит в клетку (вместе со всеми содержащимися в нем яблоками).

А вот теперь вопрос. Ниже приведены числа. Какие из них ни при каком размере массива и ни при каком начальном расположении яблокоеда не могут быть количеством содержащихся внутри Яблокоеда в момент прерывания яблок?

1 5 9 14

2. Сказка. Довольно грустная.

Один молодой лентяй-разгильдяй, далее Л-Р, получил в наследство от тетушки сад с кустами роз. Ежедневно на каждом из кустов распускалась одна роза. Ежедневно Л-Р срезал все распустившиеся розы, а также выкапывал один розовый куст. Все это он относил в расположенную неподалеку оптовую цветоторговую фирму и продавал: розы по 10 руб. за штуку, а куст за 100 руб. Кустов становилось все меньше, и вот однажды Л-Р принес продавать последнюю розу и последний куст. Он, естественно, был печален, и его совсем не утешило сообщение сотрудника фирмы, что за время цветоторговли он заработал 57230 руб. Сколько дней длился бизнес Л-Р?

3. Ниже (рис.10) приведен алгоритм, описанный на псевдокоде. Операция mod означает вычисление остатка от деления первого операнда на второй (т.е. K mod L − это остаток от деления K на L). При вводе значения $L = 11$ и некоторого натурального значения K в ходе выполнения алгоритма были выведены числа 7, 5 и 0. Найдите наименьшее возможное значение K.

```
Алг Шаг (Цел T)
Нач
  Если T<0 То
    ВЛЕВО
  Иначе
    ВПРАВО
  Всё
Кон
```

```
Нач
  Ввод K,L
  Пока L>0 НЦ
      L := K mod L
         Вывод L
  Кц
Кон
```

Рис. 10

4. Давным-давно, во времена пионеров, в одной из школ потребовалось в какой-то очень торжественный день выставить караул у знамени. Караул должен представлять собой пару пионеров, причем обязательно одного роста. Сколько же пар часовых можно сформировать из N пионеров? Эту задачу директор школы поставил перед пионервожатым Мишей. Ясно, что ни один из пионеров не должен дежурить более одного раза и что найдутся неудачники, которым пары не нашлось… Миша решил воспользоваться данными о росте пионеров, имевшимися в медкабинете, чтобы вычислить возможное количество пар «часовых». Медсестра Клавдия Петровна любезно согласилась отсортировать медкарты по неубыванию роста и выписать данные о росте на бумажку. Тут бы Мише и остановиться… но он решил воспользоваться передовыми для того времени компьютерными технологиями и написал программу, работающую с массивом R (те самые отсортированные по неубыванию роста пионеров), элементы которого пронумерованы от 1 до N. Для вашего удобства программу Миши мы перевели с древнего языка Алгол на псевдокод (рис.11). Вам не придется строить пио-

1	S := 0
2	J := 1
3	<u>Пока</u> J < N <u>НЦ</u>
4	<u>Если</u> R[J] = R[J+1] <u>То</u>
5	S := S +1
6	J := J + 1
7	<u>Иначе</u>
8	J := J + 1
9	<u>Всё</u>
10	<u>КЦ</u>
11	<u>Вывод S</u>

Рис. 11

неров и караулить знамя. Ваша задача – определить, в какой строке программы Миши содержится ошибка, какой символ в ней надо заменить и на какой. Ответ – строка, содержащая ответы на эти вопросы, разделенные пробелами (например, если вы полагаете, что в строке 13 надо заменить А на 1, то пишите «13 А 1»).

5. В одной маленькой симпатичной стране есть отличная сеть государственных дорог, ведущих от столицы к самым разным точкам страны. Она похожа на снежинку. Непонятно? Ну тогда она похожа на нейрон. Все равно непонятно? Объясняем для блондинок: она представляет собой неориентированный связный граф без циклов. Вершины этого графа обозначаются строками символов, означающими последовательность указателей, которым надо следовать, чтобы добраться до данной вершины от Главной вершины (она находится у Центрального автовокзала и обозначения, естественно, не имеет). Чтобы добраться от Главной вершины до вершины ГДЕТОТАМ, надо свернуть на дорогу к вершине Г, доехав до Г, повернуть на ГД, из ГД ехать в ГДЕ и т.п. А чтобы доехать от ГДЕТОТАМ до Главной вершины, надо последовательно проехать ГДЕТОТА, ГДЕТОТ, ГДЕТО и т.п. Естественно, можно ездить по этим трассам из любой вершины в любую и, чтобы добраться из ГДЕТОТАМ в ГДЕТОТУТ, вовсе не нужно проезжать Главную вершину (ГДЕТОТАМ – ГДЕТОТА – ГДЕТОТ – ГДЕТОТУ – ГДЕТОТУТ). А вот чтобы приехать из ТУТ в ЗДЕСЬ – надо.

А теперь задача: упорядочите эти пары вершин по возрастанию числа «транзитных» вершин на пути от первой ко второй. К примеру, чтобы доехать из КЕКС в ПУПС, надо проехать 7 «транзитных» вершин.

А. ПРИЗРАК – ПРИЗНАК
Б. КРУГ – КРОНА
В. СИНУС – КОСИНУС
Г. РАКЕТА – РАК
Д. РАК – МРАК
Е. ГРАМОТА – ГРАБИТЕЛЬ

11 класс

1 этап

1. Братья Ёксель и Пиксель придумали себе высокоинтеллектуальную игру. Сначала генератор случайных чисел выдавал два целых значения из интервала от 0 до 255, будем называть их байтами А и В. Далее Ёксель выбирал одну из трех поразрядных операций – И, ИЛИ, исключающее ИЛИ – и выполнял ее над числами А и В. Получалось число С. Затем Пиксель брал число С и переставлял в нем биты так, как считал нужным. Результатом этой операции было число D. А потом братья выполняли над числами С и D поразрядную операцию исключающее ИЛИ, назовем результат этого действия числом Z. И Пиксель записывал себе столько очков, сколько единиц в числе Z, а Ёксель – столько, сколько ноликов. Ввиду высокого интеллекта братьев, оба они всегда играли оптимально. И вскоре, едва взглянув на выпавшие числа, сразу записывали очки в табличку. Сколько баллов запишет себе Ёксель, если выпали числа 129 и 188?

2. Задумано натуральное число из диапазона от 1 до N. Имеются 3 высказывания.

А = {Задуманное число кратно 5}

В = {Задуманное число содержит цифру 5}

С = {Задуманное число содержит цифру 1}

Известно, что сообщение *«Высказывание (B and not C) → A для задуманного числа ложно»* содержит ровно 4 бита информации об этом числе. Найдите наименьшее значение N, при котором это возможно.

Пояснение: → – импликация, and – конъюнкция, not – инверсия.

3. См. задачу 4 (первого этапа) для 9–10 классов.

4. См. задачу 5 (первого этапа) для 9–10 классов.

5. Боря сложил из карточек с буквами слово. Затем перевернул карточки и перемешал. Потом вынул наугад одну карточку, посмотрел на нее и сообщил своему коту Бейсику: «Это буква О!» Бейсик, который ранее видел сложенное слово, понял, что Боря дал ему примерно 1,32 бита информации. Какое из перечисленных ниже слов было сложено?

ЛОМ КОЛОК КЛОН ОКО КОЛОКОЛ МОЛОКО

2 этап

1. См. задачу 1 (второго этапа) для 9–10 классов, но варианты значений следующие: 1 5 9 14 30 39 60 90.

2. Сколько чисел из интервала от 100 до 10000 (в десятичной системе счисления) являются палиндромами одновременно и в 3й, и в 7й системах счисления? (Палиндром – число, которое читается одинаково и слева направо, и справа налево; например, 12110, 1012, D16.)

3. См. задачу 5 (второго этапа) для 9–10 классов.

4. Вот алгоритм, описанный на псевдокоде (рис.12). Функция СлЧислоМежду возвращает целое случайное число из интервала [MIN, MAX] (все числа интервала, включая границы, равновероятны). Как видите, значение переменной MAX нам неизвестно (но заведомо корректно: 1 < MAX < 50). Однако известно, что при многократных выполнениях алгоритма максимальное значение приобретал элемент C[11]. Определите минимальное возможное количество элементов массива C, которые после выполнения алгоритма имеют значение 0.

```
Алг СчётСлучайных
   Цел A, B, K, MIN, MAX, S
   Цел C[100]
Нач
      MIN = 1
      MAX = ...
   Для K От 1 До 100 НЦ
       C[K] := 0
   КЦ
   Для K От 1 До 100500 НЦ
       A := СлЧислоМежду (MIN, MAX)
       B := СлЧислоМежду (MIN, MAX)
       C[A+B] := C[A+B]+1
   КЦ
Кон
```

Рис. 12

5. Вот рецепт сырного салата.

1. Сварить вкрутую 3 яйца.
2. Весь имеющийся в доме сыр (в том числе старые подсыхающие кусочки) натереть на мелкой терке.
3. Мелко нарубить яйца, добавить их к натертому сыру.
4. Очистить и мелко нарезать 3 крупных зубчика чеснока, добавить к сырно-яичной смеси.
5. Добавить 300 г майонеза, перемешать, дать постоять 1 час.
6. Салат готов к употреблению.

Как известно, кулинарный рецепт – это алгоритм приготовления блюда. Но данный алгоритм не обладает одним из существенных для алгоритма свойств. Каким именно?

А. Детерминированность. Б. Однозначность. В. Конечность. Г. Массовость. Д. Дискретность.

Заключительный тур

9–10 классы

1 (15 баллов). Имеется подалгоритм (рис.13), получающий на вход 2 натураль-

```
Алг ЧтоТоТам (Цел A, Цел B)
   Цел K, M
Нач
   K := A
   M := B
   Пока K ≠ M НЦ
       Если K < M То
          K := K + A
       Иначе
          M := M + B
       Всё
   КЦ
   Вернуть M
Кон
```

Рис. 13

ных числа. Что будет выведено при выполнении

ЧтоТоТам (143, 77)?

2 (20 баллов) В папке находятся точечные рисунки (формат BMP) с именами P1.BMP, P2.BMP и т.д. до P999.BMP. Все они представляют собой квадратные 16-цветные картинки одинакового размера 400 на 400 пикселей. Из этой папки выбрали файлы по маске P?4* и перенесли в другую папку, а затем преобразовали в черно-белые.

Напомним: * – любое неотрицательное количество любых символов, ? – ровно один любой символ.

Определите, на сколько Кбайт сократится суммарный объем выбранных файлов после сжатия. Ответ можно округлять до целого.

3 (10 баллов). На рисунке 14 ячейки, закрытые прямоугольником, заполнены целыми неотрицательными неповторяющимися числами. В столбце D – суммы по строкам, в строке 4 – суммы по столбцам. Каково значение в C1?

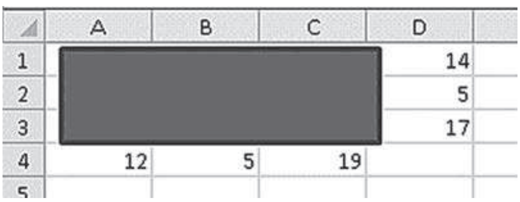


Рис. 14

4 (10 баллов). Органами госбезопасности был задержан агент террористической организации, предположительно готовящей взрыв моста в Санкт-Петербурге. Помимо взрывчатых веществ (колы и леденцов с ментолом) у агента была изъята записка следующего содержания (рис.15, слева). Внимание контрразведчиков привлекла также татуировка на руке агента (рис.15, справа). Какой из питерских мостов привлек внимание террористов?

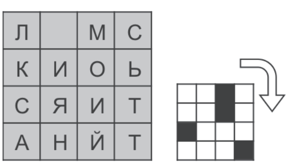


Рис. 15

5 (20 баллов). Массив из N элементов, пронумерованных от 0 до N – 1 заполнен и изменен в соответствии с алгоритмом, представленным на рисунке 16. На каких позициях окажутся после выполнения алгоритма для N=64 значения 35 и 4?

```
Алг Туда-сюда
   Цел A[N]
   Цел i, k, x
Нач
   Для i От 0 До N-1 НЦ
      A[i] := i
   КЦ
   k := 1
   Для i От 0 До (N-1) div 2 НЦ
      x := A[i]
      A[i] := A[i+k]
      A[i+k] := x
      k := k + 1
   КЦ
```

Рис. 16

6 (25 баллов). Задумано натуральное число из интервала от 32 до 63. Имеются следующие высказывания о задуманном числе.

A = {Число является симметричным в двоичной системе счисления}

B = {Число является симметричным в восьмеричной системе счисления}

C = {Число является симметричным в шестнадцатеричной системе счисления}

Определите, сколько информации о задуманном числе содержится в высказывании, что A AND NOT (B OR C) – истинно.

11 класс

1 (15 баллов). Массив из N элементов, пронумерованных от 0 до N – 1, заполнен и изменен в соответствии с алгоритмом, представленным на рисунке 17. На каких позициях окажутся после выполнения алгоритма для N = 64 значения 37 и 2?

2 (20 баллов). См. задачу 6 для 9–10 классов.

3 (10 баллов). Ячейки B1:F1 электронной таблицы заполнили с помощью автозаполнения числами 1, 2, 3, 4, 5. Аналогично заполнили ячейки A2:A6. Какую формулу следует ввести в ячейку B2, чтобы при последующем тиражировании на диапазон B2:F6 получились данные, отображаемые на гистограмме, представленной на рисунке 18? Гистограмма строилась с рядами в строках, т.е. каждая группа соответствует столбцу таблицы.

4 (10 баллов). См. задачу 4 для 9–10 классов.

```
Алг Перетасовка
   Цел A[N]
   Цел i, k, t
Нач
   Для i От 0 До N-1 НЦ
       A[i] := i
   КЦ
   k := 1
   Для i От 0 До (N-1) div 2 НЦ
     t := A[i]
     A[i] := A[i+1]
     A[i+1] := t
     k := k + 1
   КЦ
Кон
```

Рис. 17

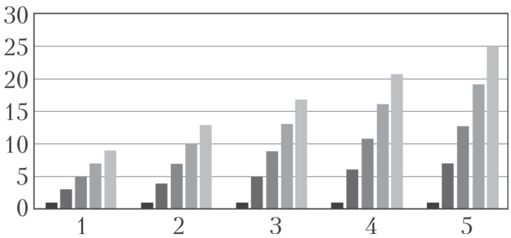


Рис. 18

5 (20 баллов). Поле для игры «Большой морской бой» представляет собой квадрат из 2^N на 2^N клеток. Корабли располагаются на игровом поле по правилам обычного «Морского боя»: по вертикали или по горизонтали, не соприкасаясь ни сторонами, ни углами. Имеются 4 варианта длины корабля. Были предложены 3 способа кодирования данных о расстановке кораблей.

1. Массив, отображающий состояние каждой клетки поля игры (свободна или занята кораблем).

2. Список кораблей: для каждого корабля хранятся координаты (X,Y) его левого верхнего угла, направление (по горизонтали или по вертикали) и номер варианта длины.

3. Список занятых клеток поля: для каждой занятой клетки хранятся ее координаты (X,Y).

Все составные части данных во всех вариантах кодируются наименьшим возможным числом битов. Известно, что объем данных при кодировании по 1, 2 и 3 вариантам составит 128 кбайт, 23000 бит, 462500 байт соответственно. На основе этих данных определите среднюю длину корабля.

6 (25 баллов). Делфтский яблокоед (ДЯ), специалист по многомерным массивам, столкнулся со следующей задачей. Имеется набор данных, представляющий собой N-мерный массив. Известен размер массива по каждому из измерений M_i, i=0…N − 1 (поскольку эти данные представляют собой массив, логичнее нумеровать их с нуля). Но содержимое многомерного массива, к сожалению, представлено в памяти в виде массива одномерного. Порядок элементов традиционный, в порядке возрастания индексов, начиная с левого (например, при N=2 и M={2,3} элементы исходного массива расположатся в таком порядке: [0,0], [0,1],[0,2], [1,0], [1,1], [1,2]). Требуется определить, каким будет индекс в этом одномерном массиве у элемента, который в многомерном массиве имеет индексы T_i , i=1…N.

ДЯ быстренько разработал алгоритм подсчета номера в одномерном массиве (рис.19;

```
1  Нач
2  N := N - 1
3  Цел Z := T[N]
4  Цел P := 1
5  Для K От N-1 До 0 Шаг -1 НЦ
6         P := P * M(K)
7         Z := Z + T(K) * P
8  КЦ
9  Вывод Z
```

Рис. 19

для удобства строки пронумерованы). Однако тестирование показало, что алгоритм содержит ошибку. Вам предстоит ее найти и описать, как изменить алгоритм. При этом чем меньше изменений вы внесете в алгоритм – тем выше будет оценено ваше решение (если оно, конечно, будет верным).

Публикацию по математике подготовили И.Комарчев, А.Моисеев, С.Преображенский, Г.Шестакова;

по физике – Т.Андреева, М.Коробков, С.Старовойтов;

по информатике – Н.Иванова, Е.Крылова, А.Щукин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №10)

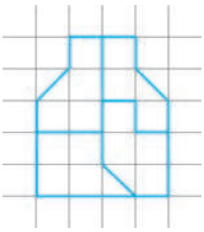


Рис. 1

1. Один из способов приведен на рисунке 1.

2. Лжет.

Предположим, что Миша – правдолюб. Тогда девять из десяти игроков команды правдолюбов забили по нечетному количеству голов (один, три или пять), а Миша – четное. Значит, команда правдолюбов забила нечетное число голов, что противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно и Миша – лжец.

3. 5 детей.

За несколько лет суммарный возраст членов семьи вырос на 49. Это число должно делиться на число членов семьи (которое больше 2). Но 49 делится только на 7 и на 49. В первом случае в семье 7 человек, а во втором прошел только один год, что противоречит условию.

4. $90°/11$, $900°/11$.

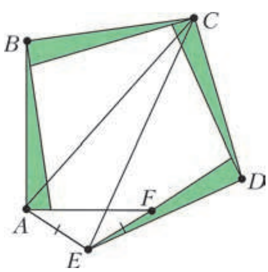


Рис. 2

Пусть меньший из углов Лешиного треугольника равен α. Обозначим точки так, как показано на рисунке 2.

Заметим, что четыре угла белого пятиугольника равны по $90° + \alpha$. Из суммы углов пятиугольника получаем, что пятый угол (при вершине F) равен $540° - 4(90° + \alpha) = 180° - 4\alpha$. Следовательно, $\angle EAF = \angle AFE = 4\alpha$. Теперь заметим, что равнобедренные треугольники ABC и CDE с углом при вершине $90° + \alpha$ равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $AC = CE$ и треугольник ACE равнобедренный.

Значит,

$$\angle BAE = \angle BAC + \angle CAE = \angle DEC + \angle CEA = \angle DEA.$$

При этом

$$\angle BAE = \angle BAF + \angle FAE = 90° + 4\alpha,$$

а

$$\angle DEA = \angle DEF + \angle FEA = \alpha + (180° - 2\cdot 4\alpha) = 180° - 7\alpha.$$

Итак, $90° + 4\alpha = 180° - 7\alpha$, откуда $\alpha = 90°/11$; а другой угол Лешиного треугольника равен $90° - \alpha = 900°/11$.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №9)

1. Да, может (см. рисунок 3).

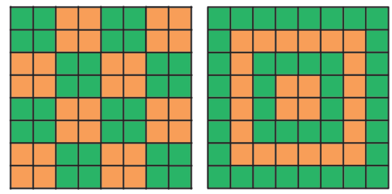


Рис. 3

2. Не могут.

Представим число n^2 в виде $n^2 = 10x + y$, где y – его последняя цифра. Понятно, что n и y одинаковой четности.

Преобразуем:

$$n^4 = (10x + y)^2 = 100x^2 + 20xy + y^2 = 20(5x^2 + xy) + y^2.$$

Первое слагаемое делится на 20, поэтому не влияет на четность предпоследней цифры. Таким образом, у n^4 и y^4 предпоследние цифры одинаковой четности. Цифра y – это последняя цифра квадрата числа, не кратного 10, значит это 1, 4, 5, 6 или 9. Тогда y^2 это, соответственно, 1, 16, 25, 36 или 81. Видно, что во всех этих случаях четность y и предпоследней цифры y^2 разная. Соответственно, разная и четность последней цифры n и предпоследней цифры n^4.

3. а) Можно. Пример – на рисунке 4.

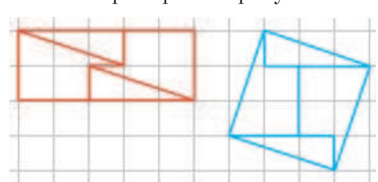


Рис. 4

б) Можно.

Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ со сторонами 2 и 5 и квадрат $A'B'CD$ площади 10, расположенные, как на рисунке 5. Докажем, что $\Delta ADF = \Delta A'ED'$, а $\Delta DEB' = \Delta FD'B$, где E и F – точки пересечения DD' с $A'B'$ и AB. Тогда из этих двух треуголь-

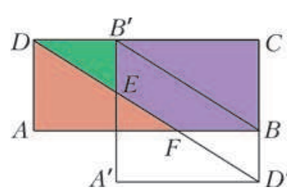


Рис. 5

ников (зеленого и коричневого) и фиолетовой общей части можно сложить и квадрат, и прямоугольник.

Докажем, что BB' параллельно DD'. Отношения $B'C/BC$ и $DC/D'C$ равны, потому что $B'C \cdot D'C = BC \cdot DC = 10$. Значит, по теореме Фалеса, BB' параллельно DD'. Тогда из параллелограммов $B'BFD$ и $B'BD'E$ получаем $DF = BB' = ED'$. Значит, у прямоугольных треугольников DAF и $EA'D'$ не только параллельны стороны, но и равны гипотенузы.

А значит, они равны (по стороне и двум углам). Аналогично, $DE = DF - EF = ED' - EF = FD'$, и треугольники $DB'E$ и FBD' также равны. Строго говоря, нужно еще доказать, что прямыми $A'B'$ и DD' прямоугольник $ABCD$ действительно разрезается на два треугольника и пятиугольник. Для этого нужно доказать, что $B'E < CB$. Мы уже знаем, что $B'E = BD'$, а значит,

$$BD' = CD' - CB = \sqrt{10} - 2 = 1{,}1\ldots < 2.$$

4. Ответ: 45, 36, 28, 21, 15, 10, 6, 3, 1, 0, 0, 0,…

Изначально числа упорядочены по невозрастанию (каждое следующее не больше, чем предыдущее). Заметим, что при производимой операции это свойство будет сохраняться.

Обозначим числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Рассмотрим сумму

$$P = 1a_1 + 9a_2 + 90a_3 + 900a_4 + \ldots + 9 \cdot 10^{k-2} a_k + \ldots$$

Заметим, что после операции, увеличивающей число a_i на 1, первые $i-1$ слагаемых суммы P уменьшатся на $1 + 9 + 90 + \ldots + 9 \cdot 10^{i-3}$, а i-е слагаемое увеличится на $9 \cdot 10^{i-2}$. Несложно заметить, что при этом величина P не меняется. Таким образом, величина P будет в конце такая же, как сначала, т.е. 123456789.

Отсюда можно сделать вывод, что $a_k = 0$ при $k \geq 11$, иначе $9 \cdot 10^{k-2} a_k > 123456789$.

Теперь преобразуем:

$$P = 1a_1 + (10-1)a_2 + (10^2 - 10)a_3 + (10^3 - 10^2)a_4 + \ldots + (10^{k-1} - 10^{k-2})a_k + \ldots =$$
$$= (a_1 - a_2) + 10(a_2 - a_3) + 10^2(a_3 - a_4) + \ldots + 10^{k-1}(a_k - a_{k+1}) + \ldots$$

Заметим, что если одна из разностей будет больше 9, то ход сделать можно. Значит, в конце все разности будут в пределах от 0 до 9.

Но представить натуральное число в виде суммы вида

$$P = b_1 + 10b_2 + 100b_3 + 1000b_4 + \ldots + 10^{k-1} b_k + \ldots$$

с соблюдением условия, что все числа b_i лежат в пределах от 0 до 9, можно единственным образом, ведь это его запись в десятичной системе счисления. Отсюда получаем, что $(a_1 - a_2)$ – это последняя цифра числа 123456789, $(a_2 - a_3)$ – предпоследняя цифра и так далее: $a_1 - a_2 = 9$, $a_2 - a_3 = 8$, $a_3 - a_4 = 7$, …, $a_9 - a_{10} = 1$, $a_{10} - a_{11} = 0$, $a_{11} - a_{12} = 0$, $a_{12} - a_{13} = 0$, …

Как мы уже выяснили, $a_k = 0$ при $k \geq 11$.

Теперь по набору разностей набор чисел восстанавливается однозначно:

45, 36, 28, 21, 15, 10, 6, 3, 1, 0, 0, 0,…

XLVIII МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1

A1. $U = -\dfrac{3}{5}\dfrac{GM^2}{R}$. **A2.** $V_{\text{ср}} = \dfrac{c}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\dfrac{f_0}{f_i} - 1\right)$.

A3. $v_{\text{ср.кв.}} = \dfrac{cf_0\sqrt{3}}{N}\sqrt{\left(N\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\dfrac{1}{f_i}\right)^2\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{1}{f_i}\right)^2}$;

$K_{\text{ср}} = \dfrac{m}{2}v^2_{\text{ср.кв.}}$.

A4. $\gamma = \dfrac{1}{2}$.

A5. $M_{\text{полн}} = \dfrac{5Rv^2_{\text{ср.кв.}}}{3G} - Nm_{\text{г}}$.

B1. $v(r) = \sqrt{\dfrac{4\pi Gnm_{\text{ср}}}{3}}\,r$, если $r < R_{\text{г}}$;

$v(r) = \sqrt{\dfrac{4\pi Gnm_{\text{ср}}R^3}{3r}}$, если $r > R_{\text{г}}$; см. рис.6.

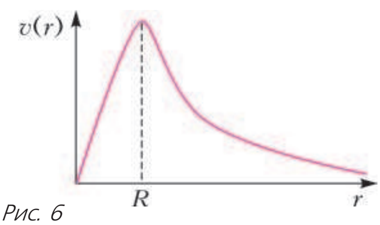


Рис. 6

B2. $m_R = \dfrac{v_0^2 R_{\text{г}}}{G}$.

B3. $\rho(r) = \dfrac{3v_0^2}{4\pi GR_{\text{г}}^2} - nm_{\text{ср}}$, если $r < R_{\text{г}}$;

$\rho(r) = \dfrac{v_0^2}{4\pi Gr^2}$, если $r \geq R_{\text{г}}$.

C1. $\dfrac{dp}{dr} = -n(r)m_0\dfrac{Gm'(r)}{r^2}$.

C2. $m'(r) = -\dfrac{kT}{Gm_0}\left(\dfrac{r^2}{n(r)}\dfrac{dn(r)}{dr} + \dfrac{r^2}{T(r)}\dfrac{dT(r)}{dr}\right)$.

C3. $\rho_{\text{тм}}(r) = \dfrac{kT_0}{4\pi Gm_0}\dfrac{3r^2 + 6r\beta + \beta^2}{(r+\beta)^2 r^2} - \dfrac{\alpha m_0}{r(\beta + r)^2}$.

Задача 2

A1. $T_к = \dfrac{m_в c_в T_в + m_м c_м T_м}{m_в c_в + m_м c_м}$.

A2. $p_к = \dfrac{R}{v_{мол}} \dfrac{m_в c_в T_в + m_м c_м T_м}{m_в c_в + m_м c_м}$.

A3. $u_г = k\sqrt{\dfrac{pV}{m}}$.

B1. $v_P = 5{,}75$ км/с . **B2.** $t_{пр} = 86{,}9$ с, $t_{отр} = 87{,}3$ с.

B3. $v_{P_м} = 7{,}1$ км/с.

B4. $x = \dfrac{2}{ap}\left(\sqrt{1 - p^2 (v_0 + az)^2} - \sqrt{1 - p^2 v_0^2}\right)$.

B5. $T = 2\int\limits_0^{z_t} \dfrac{1}{v_0 + az} \dfrac{1}{\sqrt{1 - p^2 (v_0 + az)^2}} dz$.

B6. $T(p) = 151{,}64$ с .

C1. $E_п = \dfrac{h^2 \rho \lambda L g}{4}$.

C2. $v = \sqrt{gd}$, где d – глубина океана.

C3. $A = A_0 \sqrt[4]{\dfrac{d_0}{d}}$.

Задача 3

A1. $A_1 = \dfrac{8\pi G}{3}$. **A2.** $A_2 = 3$.

A3. $w_1 = \dfrac{1}{3}$, $w_2 = 0$, $w_3 = -1$.

A4. $a_1(t) = \sqrt{2H_0 t}$, где $H_0 = \sqrt{\dfrac{8\pi G}{3}\rho_{изл\,0}}$;

$a_2(t) = \sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}H_0 t\right)^2}$, где $H_0 = \sqrt{\dfrac{8\pi G}{3}\rho_{мат\,0}}$;

$a_3(t) = e^{H_0(t - t_0)}$, где $H_0 = \sqrt{\dfrac{8\pi G}{3}\rho_{пост}}$.

A5. $k = \dfrac{R_0^2}{c^2} a^2 H^2 (\Omega - 1)$.

A6. $\Omega > 1$ при $k = +1$, $\Omega = 1$ при $k = 0$, $\Omega < 1$ при $k = -1$.

B1. $\Omega - 1 = \tilde{k} t^{2(1-p)}$, где $p = \dfrac{1}{2}$ для доминирования излучения и $p = \dfrac{2}{3}$ для доминирования материи.

B2. $\Omega - 1 = \dfrac{k}{H^2} t^{-2Ht}$.

B3. Поскольку $w = -1$, то $p = -\rho c^2$; дифференцирование второго уравнения Фридмана дает $\dfrac{\ddot{a}}{a} = -\dfrac{4\pi G}{3}\left(\rho + \dfrac{3p}{c^2}\right)$, откуда следует, что при отрицательном давлении $a > 0$ и $\dfrac{d(Ha)^{-1}}{dt} < 0$.

B4. $\dfrac{d(aH)^{-1}}{dt} = -\dfrac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\dfrac{1}{a}(1 - \varepsilon) < 0$, следовательно, $\varepsilon < 1$.

C1. $\varepsilon \approx \dfrac{M^2}{2}\left(\dfrac{U'}{U}\right)^2$, $\eta_U \approx M^2 \dfrac{U''}{U}$, $\dfrac{dN}{d\varphi} \approx -\dfrac{1}{M^2}\dfrac{U}{U'}$.

D1. $\varphi_к = \dfrac{n}{\sqrt{2}} M$.

D2. $r = \dfrac{16^n}{n - 4N}$, $n_0 = 1 - \dfrac{2(n + 2)}{n - 4N}$; при $n_0 = 0{,}968$ должно быть $n = -5{,}93$, что не соответствует условию $r < 0{,}12$.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

МАТЕМАТИКА

Отборочный тур

1 этап

1. 97. **2.** 123302. **3.** 40. **4.** 2. **5.** 8. **6.** 5. **7.** –1. **8.** 2. **9**. 6. **10**. 2.

2 этап

1. 2. **2**. 1. **3**. 2. **4**. 38. **5**. 11. **6**. 83. **7**. 18. **8**. 36. **9.** 8. **10**. 2.

Заключительный тур

1. 250.

Натуральные числа, кратные 4, можно представить в виде разности квадратов: $4n = (n + 1)^2 - (n - 1)^2$. Нечетные числа тоже можно представить в виде разности квадратов: $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$. Так как $n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$, то разность квадратов либо нечетна, либо кратна 4. Отсюда следует, что числа, не представляемые в виде разности квадратов, имеют вид $4n + 2$. На промежутке [40; 60] такими числами будут числа 42, 46, 50, 54, 58. Их сумма равна 250.

2. 10.

Упростим выражение:

$$y = \frac{\sqrt{x + 2}\left(\sqrt{x + 2} - \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x}} + x = \sqrt{x + 2} + x .$$

Наибольшее значение достигается при $x = 7$ и равно 10.

3. 16.

Если $8\sqrt{x} < 1$, то правая и левая части имеют разные знаки. При $8\sqrt{x} > 1$ перепишем уравнение в виде $\dfrac{\ln(8\sqrt{x} + 5)}{\ln 8\sqrt{x}} = \dfrac{\ln((x + 16) + 5)}{\ln(x + 16)}$. Функция $y = \dfrac{\ln(t + 5)}{\ln t}$ убывающая при $t > 1$, так как ее производная $y' = \dfrac{(t + 5)^{-1}\ln t - t^{-1}\ln(t + 5)}{\ln^2 t}$ отрицательна. Отсюда следует, что $8\sqrt{x} = x + 16$, и $x = 16$.

4. $(0;\ 1)$.

Если сложить уравнения системы, то получим уравнение $\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}=\sqrt{y}-\sqrt{2-y}$. После возведения его в квадрат получаем уравнение $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2y-y^2}$, из которого следует, что $x^2=(y-1)^2$. Отсюда получаем $x=0$, $y=1$.

5. 3.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{1+\sqrt{2}\sin(x-\pi/4)}{1+\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)}=\frac{1-\cos x+\sin x}{1+\cos x+\sin x}=$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}.$$

Правая часть преобразуется следующим образом:

$$\frac{\operatorname{tg}x}{5}=\frac{\sin x}{5\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{5\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)}.$$

Наше уравнение принимает вид

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{5\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)}.$$

Ясно, что $x=0$ – корень уравнения. При $x\neq 0$ делим обе части на $\sin\frac{x}{2}$ и приводим уравнение к виду $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{5}{8}$. Так как $x/2\in(-\pi/4;\pi/4)$, то $\cos\frac{x}{2}>0$ и уравнение приходит к виду $\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{5}{8}}$. На интервале $(-\pi/2;\pi/2)$ это уравнение имеет два решения $x=\pm 2\arccos\sqrt{5/8}$.

Всего три решения.

6. 36.

Пусть лента эскалатора имеет протяженность в n ступеней. При движении по неподвижному эскалатору пассажир ступает на n ступеней и продвигается вперед на n ступеней. Если пассажир идет в направлении движения эскалатора, то он продвигается относительно эскалатора на 30 ступеней, а эскалатор перемещается на $n-30$ ступеней. Если пассажир идет против движения эскалатора, то он продвигается относительно эскалатора на 45 ступеней, а эскалатор перемещается на $45-n$ ступеней. Поскольку скорость движения пассажира сохранилась, равны отношения перемещений пассажира и эскалатора:

$$\frac{n-30}{30}=\frac{45-n}{45},$$

$$3(n-30)=2(45-n),\ 5n=180,\ n=36.$$

7. 13.

Обозначим через k, m, n число улучшенных автомобилей, проданных первым, вторым и третьим автосалонами соответственно. По стандартным ценам салоны продали $11-k$, $21-m$, $29-n$ автомобилей. Ясно, что $k>m>n$. Обозначим через x и y $(x<y)$ цены стандартной и улучшенной комплектаций. Выручки салонов равны, соответственно,

$$(11-k)x+ky,\ (21-m)x+my,\ (29-n)x+ny.$$

По условию выручки салонов одинаковы. Получаем уравнения

$$(11-k)x+ky=(21-m)x+my=(29-n)x+ny.$$

Из левого равенства получается, что

$$(k-m)y=(10+k-m)x,$$

а из правого –

$$(m-n)y=(8+m-n)x.$$

Разделим первое из полученных равенств на второе:

$$\frac{k-m}{m-n}=\frac{10+(k-m)}{8+(m-n)}.$$

Далее,

$$8(k-m)+(k-m)(m-n)=$$
$$=10(m-n)+(k-m)(m-n),$$
$$\frac{k-m}{m-n}=\frac{5}{4}.$$

Следовательно, $k-m=5i$, $m-n=4i$, где i – натуральное число. Заметим, что первый салон продал $k=n+9i$ дорогих автомобилей. По условию задачи $k\le 10$. Поэтому $i=1$; $k-m=5$, $m-n=4$. Возможны два варианта:

1) $n=0$, $m=4$, $k=9$;
2) $n=1$, $m=5$, $k=10$.

Наименьшее число улучшенных автомобилей получается в первом варианте. Это число равно $0+$ $+4+9=13$.

8. 200 г.

Обозначим через x количество 10%-го раствора. В результате смешения получилось $(60+x)$ г раствора. Он содержит $(0{,}6\cdot 60+0{,}1x)$ г соли и имеет концентрацию $\frac{0{,}6\cdot 60+0{,}1x}{60+x}$. По условию,

$$\frac{0{,}6\cdot 60+0{,}1x}{60+x}=0{,}25.$$

Решим полученное уравнение:

$$36+0{,}1x=15+0{,}25x,\ 21=0{,}15x,\ x=140.$$

Всего получилось $60+140=200$ г раствора.

9. $\frac{33}{8}$ или $\frac{11\sqrt{190}}{16}$.

Обозначим угол $\angle BAC$ через α. Возможны два случая: 1) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и 2) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{9\cdot 15}{16^2}} = \frac{\sqrt{256-135}}{16} = \frac{\sqrt{121}}{16} = \frac{11}{16}.$$

Из треугольника ABB_1 (рис.7) получаем

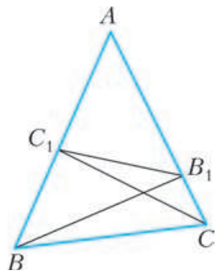


Рис. 7

$\frac{AB_1}{AB} = \cos\alpha = \frac{11}{16}$. Найдем длину BC. По теореме косинусов,

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha} = $$
$$= \sqrt{64 + 49 - 2\cdot 8\cdot 7\cdot\frac{11}{16}} = \sqrt{36} = 6.$$

Отрезок BC является диаметром окружности, описанной как вокруг треугольника BB_1C, так и вокруг треугольника BC_1C. Следовательно, эта окружность описана вокруг четырехугольника BC_1B_1C.

Значит, $\angle BC_1B_1 + \angle ACB = \pi$. С другой стороны, $\angle BC_1B_1 + \angle AC_1B_1 = \pi$. Следовательно, $\angle ACB = \angle AC_1B_1$, откуда следует подобие треугольников ABC и AB_1C_1 по двум углам, так как угол BAC – общий. Значит,

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AB} = \cos\alpha.$$

Таким образом,

$$B_1C_1 = BC\cdot\cos\alpha = 6\cdot\frac{11}{16} = \frac{33}{8}.$$

Пусть теперь $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Тогда

$$\cos\alpha = $$
$$= -\sqrt{1 - \frac{9\cdot 15}{16^2}} = -\frac{\sqrt{256-135}}{16} = -\frac{\sqrt{121}}{16} = -\frac{11}{16}.$$

Из треугольника ABB_1 получаем

$$\frac{AB_1}{AB} = \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha = \frac{11}{16}.$$

По теореме косинусов,

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 + 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha} = $$
$$= \sqrt{64 + 49 + 2\cdot 8\cdot 7\cdot\frac{11}{16}} = \sqrt{190}.$$

Как уже было доказано в случае 1, вокруг четырехугольника BB_1C_1C (рис.8) можно описать

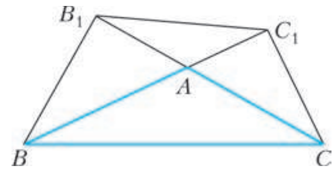


Рис. 8

окружность. Следовательно, $\angle BC_1B_1 = \angle B_1CB$ как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу окружности. Кроме того, $\angle B_1AC_1 = \angle BAC$ как вертикальные углы, откуда и следует подобие треугольников ABC и AB_1C_1 по двум углам. Значит,

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AB} = \cos(\pi-\alpha) = \frac{11}{16}$$

и

$$B_1C_1 = BC\cdot\cos(\pi-\alpha) = BC\cdot\frac{11}{16} = \frac{11\sqrt{190}}{16}.$$

10. $(-\infty;0]\cup\{2/3\}\cup\{2\}$.

Знаменатель обращается в 0, если $2x+1 = \pm(x+1)$, т.е. при $x = \pm 1$. Для уравнения допустимы все x, кроме $x = \pm 1$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на $|2x+1| + |x+2| > 0$:

$$\frac{(x^2-1)(|2x+1|+|x+2|)}{(2x+1)^2-(x+2)^2} = ax^2,$$
$$\frac{(x^2-1)(|2x+1|+|x+2|)}{3(x^2-1)} = ax^2,$$
$$|2x+1|+|x+2| = 3ax^2. \qquad (*)$$

Если $a \le 0$, то левая часть больше 0, а правая – меньше либо равна 0; уравнение $(*)$ не имеет решений.

Если $a > 0$, уравнение $(*)$ имеет по крайней мере 2 решения.

Исходное уравнение может иметь меньшее число решений, только если хотя бы одно из чисел ± 1 – решение $(*)$. При этом

1 – решение $(*)$, если $6 = 3a$, $a = 2$; (-1) – решение $(*)$, если $2 = 3a$, $a = 2/3$.

При $a = 2$ уравнение $(*)$ принимает вид $|2x+1|+|x+2| = 6x^2$ и имеет корни $x_1 = -1/2$, $x_2 = 1$. Исходное уравнение имеет единственный корень $x = -1/2$.

При $a = 2/3$ уравнение $(*)$ принимает вид $|2x+1|+|x+2| = 2x^2$ и имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3+\sqrt{33}}{4}$. Исходное уравнение имеет единственный корень $x = \frac{3+\sqrt{33}}{4}$.

ФИЗИКА

Отборочный тур

9–10 классы

1. $M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\alpha} = 5{,}7$ кг.

2. $\dfrac{A_Б}{A_П} = \dfrac{m_1(h + vt\sin\alpha)}{m_2(h - vt\sin\alpha)} = 8{,}2$.

3. $\tau = \dfrac{T}{2\pi}\left(\arcsin\dfrac{\varphi_1}{\varphi_{max}} - \arcsin\dfrac{\varphi_2}{\varphi_{max}}\right) = 103$ мс.

4. $N = \dfrac{1-x}{y-x}n - n = 244$ дня.

5. $m = M - \dfrac{Fs}{L}\dfrac{t_1}{t_1 - t_2} = 15{,}5$ т.

6. $R = \dfrac{4l}{\pi d^2}\dfrac{\rho_{01}\rho_{02}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\rho_{01}\alpha_1 - \rho_{02}\alpha_2} = 14$ мОм.

7. $N = \dfrac{2knIt}{\rho\pi dl(d + 2h)} = 108$ монет.

8. $F = \dfrac{\pi\xi^2 r^3\tau}{R} = 789$ Н.

11 класс

1. $N = (n-1) + \left(\dfrac{t_2}{t_1}\right)^2 = 18$ вагонов (здесь $n = 4$).

2. $m = \dfrac{2}{g}\left(\dfrac{a}{c}F_2 - F_1\right) = 2368$ кг.

3. $T = 100\ °C - \Delta T\left(1 + \dfrac{t_1}{t_2}\right) = 30{,}3\ °C$.

4. $\Delta h = \dfrac{V(n-1)}{S} = 11{,}5$ мм (здесь $n = 1{,}3$).

5. $U_1 = \dfrac{C_1\mathcal{E}_1 + C_2\mathcal{E}_2}{C_1 + C_2} = 13$ В.

6. $m_в = \dfrac{1}{c_в}\left(\dfrac{qU}{100\ °C - t} - c_{см}m_{см}\right) = 63$ г.

7. $L = \dfrac{1}{4\pi^2\Delta C}\left(f_2^{-2} - f_1^{-2}\right) = 1{,}1$ нГн.

8. $s = \dfrac{4d^2 f}{v} - \dfrac{v}{4f} = 2{,}9$ км.

Заключительный тур

9–10 классы

1. $v = v_0 - 2\cdot 10\cdot u = 17$ см/с.

2. $H = R = 6400$ км.

3. $m = \dfrac{m_1 M_г}{M_в - M_г} = 1{,}6$ г.

4. $\dfrac{m_л}{m_в} = \dfrac{c\Delta t}{\lambda} = 0{,}13$.

5. $P_3 = \dfrac{U^2 R_3}{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)^2} = 4{,}32$ Вт (см. рис. 9).

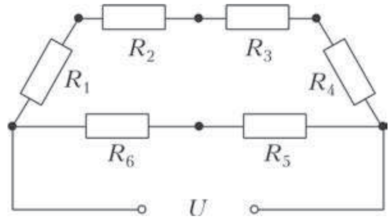


Рис. 9

6. $h = H\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{H}{n} = 39$ см (см. рис.10).

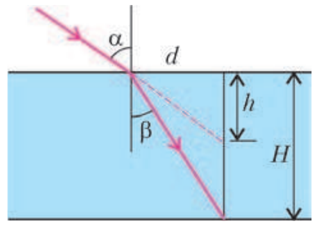


Рис. 10

11 класс

1. $\Delta\tau = \dfrac{(c - v)}{c}\Delta t = 4{,}12$ с.

2. $A_{min} = \dfrac{9}{32}\rho_0 g l^4 = 22{,}8$ Дж (см. рис.11).

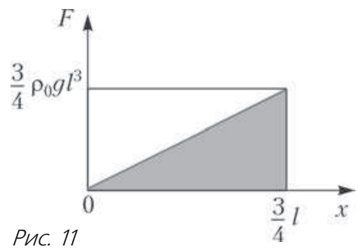


Рис. 11

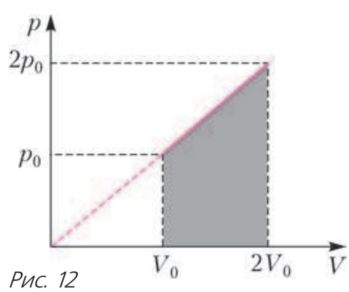


Рис. 12

3. $\eta = \dfrac{3p_0V_0}{12p_0V_0} = 0{,}25 = 25\%$ (см. рис.12).

4. $E = \dfrac{kq}{a^2}\sqrt{\left(\dfrac{16}{5\sqrt{5}}\right)^2 + 8^2} \approx 3600$ В/м (см. рис.13),

$\varphi = \dfrac{4kq}{\sqrt{5}a} \approx 160$ В.

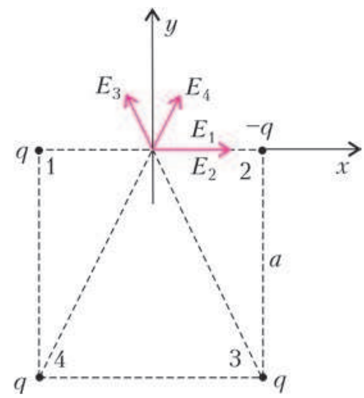


Рис. 13

5. $U_2 = \dfrac{\mathcal{E}U_1}{2\mathcal{E} - U_1} = 7{,}2$ В .

6. $d_1 = \dfrac{\sqrt{17} - 3}{2D} = 11{,}2$ см (см. рис.14).

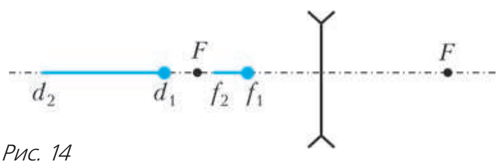


Рис. 14

ИНФОРМАТИКА

Отборочный тур

9–10 классы

1 этап

1. Кызыл. **2.** ВБАГ. **3.** В. **4.** 9. **5.** у3, у2, у1, у5, у4.

2 этап

1. 9, 14. **2.** 97. **3.** 40. **4.** 6 1 2. **5.** ГБАДЕВ.

11 класс

1 этап

1. 6. **2.** 112. **5.** КОЛОК.

2 этап

1. 9, 14, 39, 60. **2.** 10. **4.** 81. **5.** А.

Заключительный тур

9–10 классы

1. 1001. **2.** 5940. **3.** 7. **4.** Итальянский. **5.** 17, 39. **6.** 5 бит.

11 класс

1. 18, 47.
3. B$1*$A2-B$1+$A2 (возможны варианты).
5. 185.
6. Строка 6: вместо К должно быть К+1.

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.А.Аткарская, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: (495) 930-56-48
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»
Телефон: (495) 363-48-86,
htpp: //capitalpress.ru

ШахматЫ И РЕВОЛЮЦИЯ

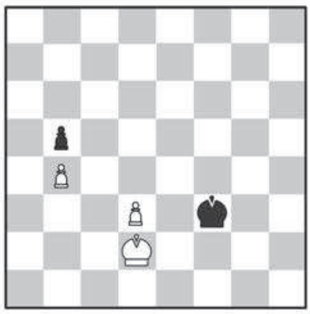
В ноябре 2017 года исполнилось 100 лет со дня Великой Октябрьской революции. Ее предводитель В.И.Ленин был большим любителем шахмат. До нашего времени не дошли партии, которые со стопроцентной уверенностью можно было бы приписать Ленину (хотя в различных источниках можно найти партии, которые, возможно, были сыграны им: с революционером П.Лепешинским, писателем М.Горьким и даже с А.Гитлером – их встреча за шахматной доской могла состояться в 1909 году в Вене). Однако до наших дней дошла задача, которую составил его младший брат Д.Ульянов и которую сам Ленин оценивал высоко.

Д.Ульянов, 1909

Мат в 2 хода

Решает парадоксальный ход 1. ♖d6! Грозит мат: 2. ♖e6×. Ладья, несмотря на множество нападений, неприкосновенна: 1… ♚:d6 2. ♕b8×; 1… ♝:d6 2. ♕g7×; 1… ♞:d6 2. ♕:e7×, а в ответ на 1…d5 следует 2. ♕:c5×.

После революции шахматы стали стремительно развиваться в Советской России. Большую роль в этом сыграл Николай Дмитриевич Григорьев – педагог-математик, способствовавший популяризации шахмат в молодом советском государстве. В 1920 году он возглавил Московский шахматный клуб, а с 1922 году начал вести шахматную страничку в газете «Известия» – первый шахматный раздел, еженедельно выпускавшийся в популярном издании с огромным тиражом. Н.Д.Григорьев был хорошим шахматистом-практиком, мастером, неоднократно становился победителем и призером турниров. Однако настоящих высот он достиг в теории эндшпиля, в особенности пешечного, и вошел в историю как один из ведущих аналитиков эндшпиля и автор замечательных этюдов.



Н.Григорьев, 1920

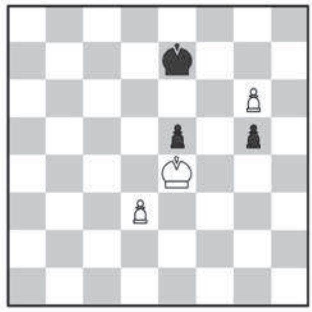
Выигрыш

Белые находятся в цугцванге, поэтому нужно передать очередь хода черным. Наиболее короткий путь для этого: ♔c2-b2-b3-c2: 1. ♔c2! ♚f4 2. ♔b2 ♚f3 3. ♔b3! ♚f4 4. ♔c2! ♚e5 (4…♚f4 5. ♔e2 – и король прорывается через свой фланг) 5. ♔d1 ♚d5 6. ♔e2 ♚d4 7. ♔d2 ♚e5 8. ♔e3 ♚d5 9. d4 ♚c4 10. ♔e4 ♚:b4 11. d5 ♚c5 12. ♔e5 b4 13. d6 ♚c6 14. ♔e6 b3 15. d7 b2 16. d8♕ b1♛ 17. ♕c8+ с выигрышем ферзя.

Н.Григорьев, 1923

Ход белых, выигрыш

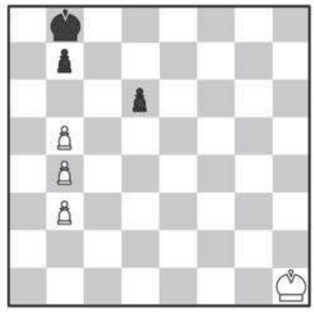
1.g7 ♚f7 2. ♔f5! ♚g8! 3. ♔g4! (важно сохранять оппозицию – 3. ♔:g5 e4! 4. de ♚:g7 с ничьей) 3… ♚f7 4. ♔:g5 e4 5. ♔h6! ed 6. ♔h7! И белая пешка раньше становится ферзем.



Н.Григорьев, 1929

Ход белых, ничья

Единственный шанс белых заключается в создании угроз



пешке d: 1. ♔g2! ♚c7 2. ♔f3! d5! 3. ♔f4 ♚d6 4. ♔f5! b6 5. ♔f4 ♚e6 6. ♔e3 ♚e5 7. ♔d3 d4 8. ♔c4! ♚e4 пат! Другой вариант также ведет к пату: 2… ♚d7 3. ♔f4! ♚e6 4. ♔e4! d5+ 5. ♔d4 ♚d6 6. b6! ♚e6 7. b5 ♚d6 8. b4 ♚e6 9. ♔c5! ♚e5. Ничья.

Н.Д.Григорьев скоропостижно скончался в 1938 году в возрасте 43 лет, но начатая им работа по популяризации шахмат принесла свои плоды. Шахматы в СССР стали массовой игрой, одним из популярных способов проведения культурного досуга, а советские профессиональные шахматисты во второй половине XX века практически безраздельно владели пальмой мирового первенства, лишь ненадолго отдав ее шахматному гению Роберту Фишеру.

А.Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой

Какую форму приобретает неожиданно слетевшая с оси велосипедная цепь? Почему длинная нитка бус выпрыгивает из стеклянного стакана, изогнувшись дугой?

(Подробнее – на с. 34 внутри журнала)

ФОНТАНИРУЮЩАЯ ЦЕПОЧКА