

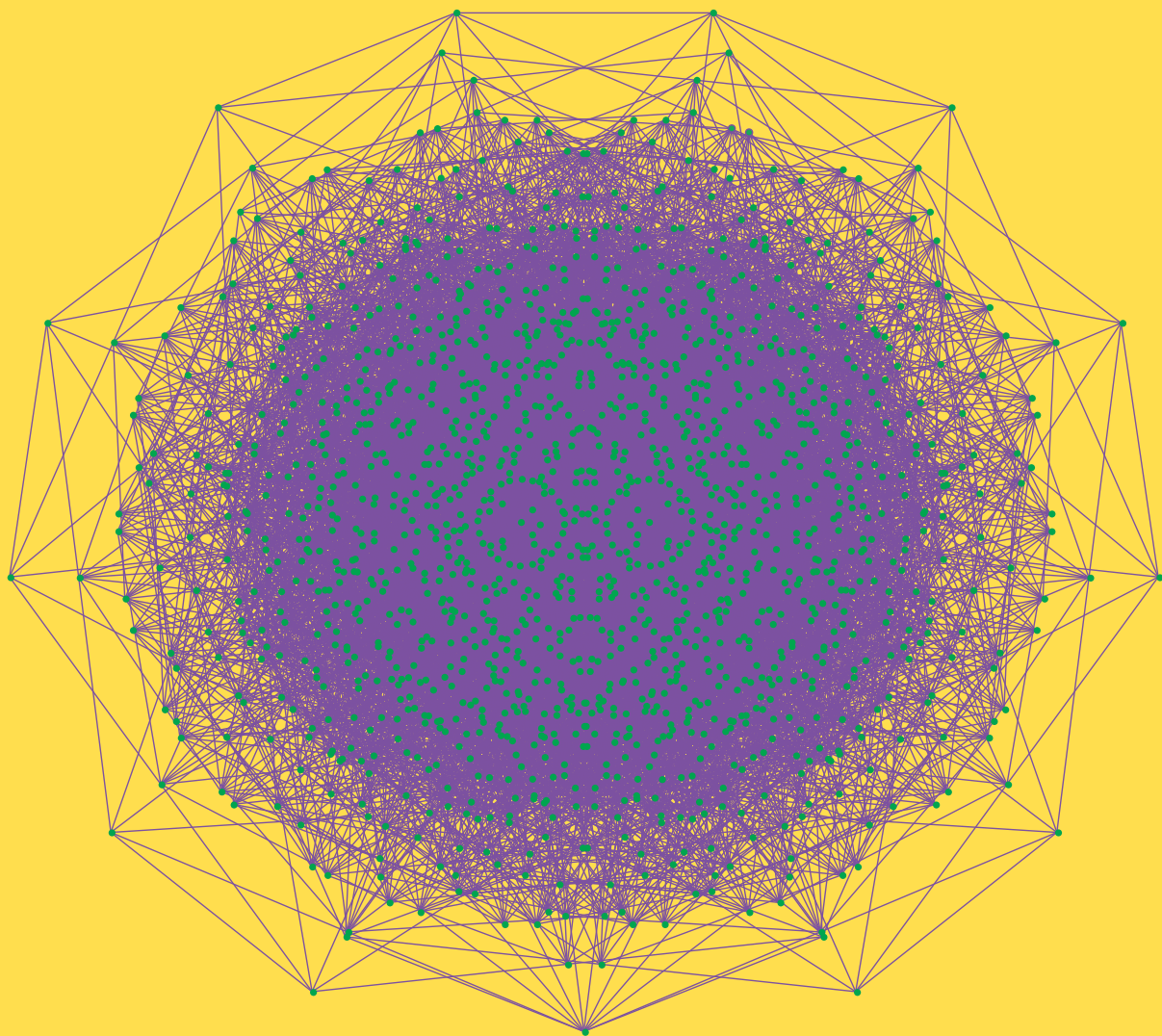
НОЯБРЬ

ISSN 0130-2221

2018 · № 11

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# СПРЯТАТЬ

# ЗОЛОТО



Эта головоломка американского математика и изобретателя Джорджа Зихермана (George Sicherman) состоит из восьми деталей. Каждая из них склеена из четырех кубиков: трех темных и одного светлого. Вам нужно сложить эти детали так, чтобы ни одна грань светлых кубиков не попала на поверхность получившейся фигуры (даже на нижнюю, которая будет спрятана, если вы будете решать головоломку на столе).

Зихерман давно сочиняет разного рода головоломки, но у него есть и более научные результаты. Например, он придумал пару игровых костей, на гранях которых написаны натуральные числа (не так, как у привычных костей) и при бросании которых числа от 1 до 12 выпадают с теми же вероятностями, что и на обычных костях. Оказывается, такая пара единственна. Сможете ли вы ее найти?

## В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук

Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАНФизический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,  
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.П.Веселов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,  
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников  
(заместитель главного редактора),  
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.В.Произволов,  
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,  
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Прорыв в задаче о раскраске плоскости.  
*А.Райгородский, В.Воронов, А.Савватеев*
- 10 Механика невидимого. *Л.Ашкинази*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 17 Задачи M2534–M2537, Ф2541–Ф2544
- 18 Решения задач M2522–M2525, Ф2529–Ф2532

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 26 Задачи
- 27 Геометрия клетчатой бумаги. *А.Онопrienко*

## КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

- 30 Задачи 9–12

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 31 Окружность десяти точек вписанного  
четырёхугольника. *М.Нсанбаев*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Замощения сферы и архимедовы  
многогранники

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 35 Акустический резонанс. *М.Старшов*

## ОЛИМПИАДЫ

- 37 XLIX Международная физическая олимпиада
- 44 LIX Международная математическая олимпиада

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 47 Санкт-Петербургский политехнический  
университет Петра Великого
- 54 Олимпиада «Ломоносов»-2018. Математика

- 55 Ответы, указания, решения  
Вниманию наших читателей (64)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Прорыв в задаче  
о раскраске плоскости»*
- II *Коллекция головоломок*
- III *Шахматная страничка*
- IV *Прогулки с физикой*

# Прорыв в задаче о раскраске плоскости

А.РАЙГОРОДСКИЙ, В.ВОРОНОВ, А.САВВАТЕЕВ

## Введение

В этой статье мы расскажем о недавнем удивительном продвижении в одной из самых известных задач комбинаторной геометрии. Это задача о так называемом *хроматическом числе плоскости*. Требуется найти минимальное число цветов, в которые можно так покрасить плоскость, чтобы расстояние между точками одного цвета никогда не равнялось единице. Это число и называется хроматическим, а обозначается оно  $\chi(\mathbb{R}^2)$ . Зачем так много букв? Ну, просто красить можно не только плоскость – можно и прямую, и пространство, и многие другие интересные объекты. На прямой, кстати, все почти очевидно:  $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$ , так как одного цвета, конечно, не хватит, а двух достаточно, о чем свидетельствует рисунок 1. Что же с плоскостью?



Рис. 1. Раскраска прямой в 2 цвета

Ясно, что не хватит одного цвета, и легко видеть, что не хватит и двух цветов. Действительно, рассмотрим вершины правильного треугольника со стороной 1. Уже для «правильной» раскраски этих трех точек, очевидно, необходимо использовать три различных цвета. Чуть более слож-

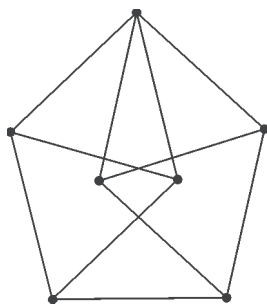


Рис. 2. Мозеровское веретено

ная конструкция так называемого мозеровского веретена (рис.2) показывает, что  $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$ .

В то же время легко покрасить плоскость в 7 цветов без точек одного цвета на расстоянии 1. Целых две разных покраски изображены на рисунках 3 и 4. На рисунке 3 цвета образуют правильные шестиуголь-

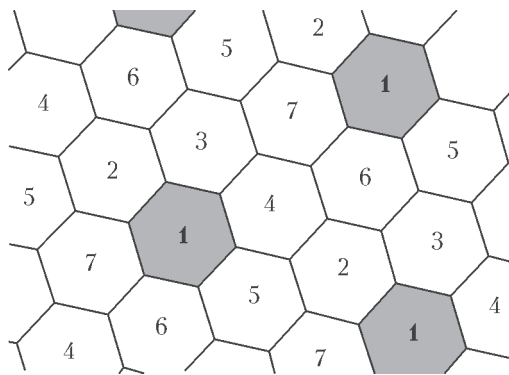


Рис. 3. Первая раскраска плоскости в 7 цветов

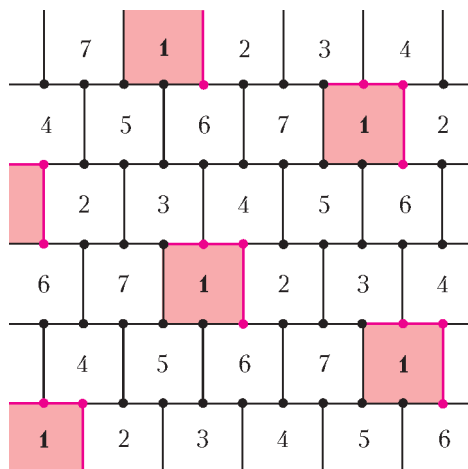


Рис. 4. Вторая раскраска плоскости в 7 цветов

ники с большими диагоналями длины  $x$  чуть меньше единицы. Границы между двумя или тремя шестиугольниками красятся в цвет любого из них (в любой из двух или трех цветов, соответственно, но не в один из оставшихся цветов). Расстояния между ближайшими шестиугольниками одного цвета равны  $x \frac{\sqrt{7}}{2}$ , и это число, в свою очередь, должно быть уже строго больше единицы. Таким образом, кажется, что у раскраски есть «запас прочности», позволяющий как-то ее модифицировать в раскраску шестью цветами. На рисунке 4 цвета образуют квадраты, и здесь никакого запаса прочности нет, даже границы приходится красить с осторожностью.<sup>1</sup>

Задача об отыскании хроматического числа плоскости возникла в 1950 году (см. [1]), хотя еще в 1944 году очень близкую задачу изучал Хадвигер. До недавнего времени все, что было известно о хроматическом числе, – это с легкостью доказанные нами только что оценки

$$4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7.$$

Иными словами, около 70 лет в крайне популярной задаче было целых 4 варианта ответа, и никаких продвижений к установлению истины не было!

Отметим ряд интересных смежных фактов. Например, все нижние оценки, которые мы получали, это фактически оценки с помощью графов. И треугольник, и мозеровское веретено – это так называемые *дистанционные графы*, т.е. графы, вершины которых – точки плоскости, а ребра – отрезки длины 1, соединяющие пары точек, отстоящих друг от друга на расстоянии 1. Напомним, что *хроматическое число графа  $G$*  – это минимальное число цветов  $\chi(G)$ , в которые можно так покрасить вершины графа, чтобы концы любого ребра имели разные цвета. Таким образом,

$\chi(\mathbb{R}^2) \geq \chi(G)$  для любого дистанционного графа  $G$ . В 1976 году Эрдёш поставил вопрос, существуют ли дистанционные графы с хроматическим числом 4 (как у мозеровского веретена), но без треугольников. Оказалось, и такое бывает! Сейчас известны примеры всего лишь на двадцати трех вершинах (см. [2]).

В 1971 году Вудалл доказал, что если красить плоскость в некотором смысле так же, как на рисунках 3 и 4, то потребуется не меньше шести цветов. Что значит «так же»? Ну, скажем, каждый цвет – это объединение некоторого числа многоугольников (не обязательно выпуклых и не обязательно содержащих всю свою границу). Получается, что если вдруг  $\chi(\mathbb{R}^2) < 6$ , то раскраску и представить себе трудно!

В 2016 году Канель-Белов предложил [4] следующую интерпретацию задачи. Рассмотрим в трехмерном пространстве слой между двумя плоскостями толщины  $\epsilon$ . Понятно, что при достаточно малых  $\epsilon$  запас прочности с рисунка 3 позволяет и весь слой покрасить в 7 цветов без точек одного цвета на расстоянии 1. Оказалось, что при любом  $\epsilon > 0$  четырех цветов уже не хватает: нужно хотя бы 5! Иными словами, если вдруг  $\chi(\mathbb{R}^2) = 4$ , то раскраску не просто трудно, а за пределами трудно себе представить!

Многие другие любопытные факты можно найти в книгах [1] и [3].

А 8 апреля 2018 года случилось замечательное событие. На ресурсе [arxiv.org](http://arxiv.org), куда выкладываются статьи до своей публикации в журналах, появилась заметка Обри ди Грея [5], в которой описывался дистанционный граф с хроматическим числом 5! Поскольку задача невероятно популярна, огромное количество специалистов взялось за проверку и практически сразу результат был подтвержден. Теперь мы знаем, что

$$5 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7.$$

Интересно, что ди Грей не является профессиональным математиком. Он геронтолог по специальности, т.е. он занимается изучением процессов старения.

<sup>1</sup> На рисунке 4 розовым выделена часть границы, окрашиваемая в тот же цвет, что и сам квадрат. Черная часть границы получает цвет от соседних квадратов.



Свежий взгляд на задачу позволил ему добиться такого успеха.

В работе ди Грея дистанционный граф с хроматическим числом 5 имел 1581 вершину. Сейчас уже найдены графы с 553 вершинами [6]. И есть смельчаки, надеющиеся отыскать графы с хроматическим числом 6!

В настоящей статье мы расскажем о том, как получается результат ди Грея.

### О пользе свежего взгляда

Посмотрим, как устроены самые простые дистанционные графы с хроматическим числом 4. Это веретено Мозеров, изобретенное братьями Лео и Вильямом

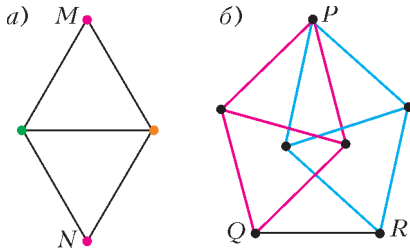


Рис. 5. Подграфы в веретене Мозеров

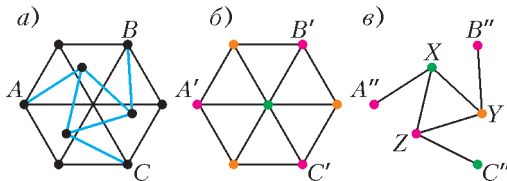


Рис. 6. Подграфы в графе Голомба

Мозерами, и граф Голомба. В веретене Мозеров есть два подграфа-«ромба», состоящих из двух равносторонних треугольников с общей стороной. При любой раскраске вершин такого подграфа в 3 цвета точки  $M, N$  имеют один цвет (рис. 5,а). Значит, в веретене Мозеров точки  $P, Q, R$  одного цвета, но  $Q$  и  $R$  соединены ребром (рис.5,б). Можем ли мы получить противоречие таким же способом, когда цветов не три, а четыре? Другими словами, построить такой граф, что в нем есть пара вершин, цвета которых совпадают при любой правильной раскраске. Тогда было бы доказано, что плоскость не красится в четыре цвета. Но как построить такой граф – непонятно.

Разобьем граф Голомба на два подграфа (рис.6,а). Первый из них – шестиугольник, содержащий шесть равносторонних треугольников. С точностью до перестановок цветов он красится в три цвета единственным образом (рис.6,б) Значит, вершины равностороннего треугольника  $A'B'C'$  со стороной  $\sqrt{3}$  раскрашены в этом случае в один цвет.

Обозначим здесь и далее  $\Delta_{\sqrt{3}}$  – множество, состоящее из вершин равностороннего треугольника со стороной  $\sqrt{3}$ . При этом расположение треугольника на плоскости может быть любым.

Во втором подграфе вершины такого равностороннего треугольника соединены с вершинами равностороннего треугольника со стороной 1 (рис.6,в). При раскраске в три цвета точки  $X, Y, Z$  разноцветные. Тогда  $A'', B'', C''$  не могут быть одного цвета, поскольку он совпадет с цветом одной из точек  $X, Y, Z$ . Таким образом, в графе Голомба к противоречию приводит раскраска двух подграфов: первый из них гарантирует, что вершины  $\Delta_{\sqrt{3}}$  будут одноцветными, а второй исключает такую возможность.

Теперь нас интересует дистанционный граф, который невозможно раскрасить в четыре цвета. Может быть, проще искать не весь граф целиком, а подграфы, раскраска которых приводит к противоречиям? В первом подграфе некоторый набор вершин, «шаблон», при любой правильной раскраске будет одноцветным, а во втором подграфе он всегда разноцветный. Или так: если в первом подграфе найдется хотя бы один одноцветный шаблон, а во втором подграфе его невозможно покрасить в один цвет, то это непременно приведет к противоречию при раскраске плоскости. (С одной стороны, одноцветный шаблон должен где-то обнаружиться, а с другой стороны, он запрещен – ведь к любому его расположению на плоскости можно прикрепить второй граф.)

Именно так и действовал ди Грей: он рассматривал в качестве шаблона треугольник  $\Delta_{\sqrt{3}}$ , как в графе Голомба, и перебирал раскраски в 4 цвета двух до-

вольно сложных дистанционных графов, о которых речь пойдет далее.

**Построение графа, содержащего одноцветный  $\Delta_{\sqrt{3}}$**

В каких множествах точек среди попарных расстояний встречается много единиц, а среди всевозможных треугольников – много  $\Delta_{\sqrt{3}}$ ? Первое, что приходит в голову, это кусок треугольной решетки. Рассуждая от противного, предположим, что одноцветный треугольник  $\Delta_{\sqrt{3}}$  отсутствует. Это не приводит к противоречию сразу, но сильно ограничивает число возможных раскрасок.

**Упражнения**

1. Убедитесь, что если правильная раскраска в 4 цвета графа на рисунке 7 не содержит

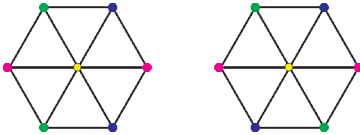


Рис. 7. Раскраски графа на 7 вершинах

одноцветного  $\Delta_{\sqrt{3}}$ , то: а) каждый цвет, кроме цвета центральной вершины, встречается ровно два раза; б) с точностью до поворотов и перестановок цветов допустимы только две раскраски.

2. Докажите, что всякая раскраска треугольной решетки в 4 цвета, не содержащая одноцветного  $\Delta_{\sqrt{3}}$ , состоит из чередующихся линий сетки, на каждой из которых есть вершины только двух цветов.

Указание. Можно рассмотреть два случая: а) в шестиугольниках встречается только раскраска, приведенная на рисунке 7 справа; б) хотя бы в одном шестиугольнике встречается тип раскраски, как на рисунке 7 слева.

Возьмем участок треугольной решетки в форме цветка (рис.8) и назовем этот граф  $Q$ . С точностью до поворотов и перестановок цветов существует шесть раскрасок центрального большого шестиугольника без одноцветного  $\Delta_{\sqrt{3}}$  (рис.9). Цвета двенадцати крайних вершин нам не интересны, хотя их наличие влияет на число вариантов раскраски. Важно, что в раскрасках а, г все вершины шестиугольника раскрашены в тот же цвет, что и его центр;

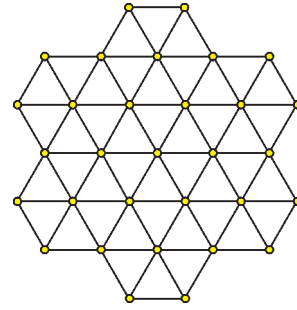


Рис. 8. Граф  $Q$

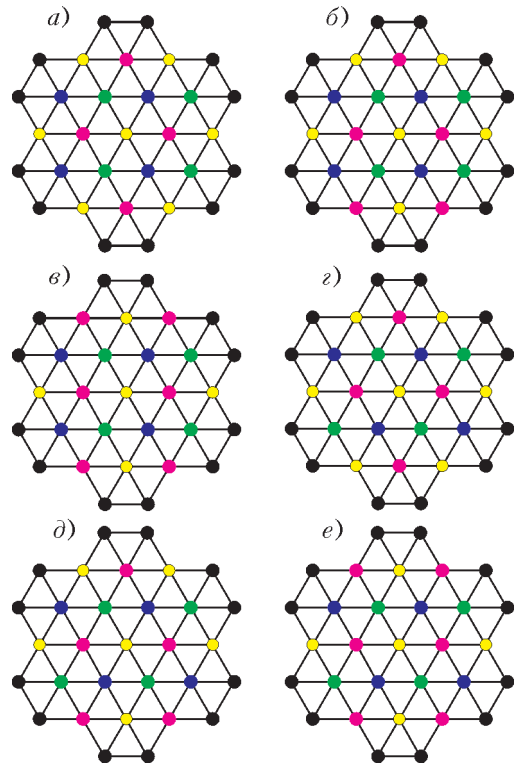


Рис. 9. Возможные раскраски центральной области в графе  $Q$

в раскрасках б, д таких вершин четыре, а в раскрасках в, е только две.

Что будет, если взять два экземпляра графа  $Q_1$  и  $Q_2$  с общей центральной вершиной и повернуть один из них на угол  $\alpha = 2 \arcsin \frac{1}{4}$  относительно другого (рис. 10)? В получившемся графе, обозначим его  $X$ , расстояния между соответствующими вершинами шестиугольников равны единице:

$$AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF' = 1.$$

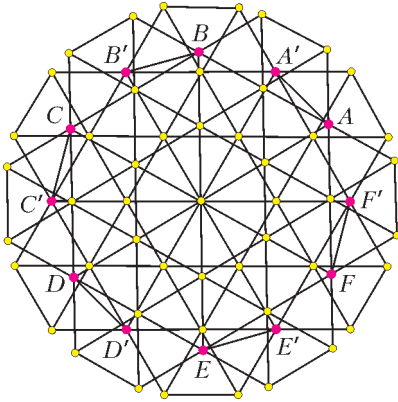


Рис. 10. Граф  $X$  состоит из двух экземпляров графа  $Q$  с общей центральной вершиной

Кроме того, в каждом из экземпляров графа  $Q$  две, четыре или шесть вершин шестиугольника раскрашены в тот же цвет, что и центральная. Если хотя бы в одном из экземпляров таких вершин четыре или шесть, то найдутся две вершины одного цвета на расстоянии 1. Следовательно, в  $Q_1$  и  $Q_2$  допустимы лишь раскраски  $\nu, e$ .

Наконец, заметим, что в раскрасках  $\nu, e$  концы диагоналей шестиугольников раскрашены одинаково. Поэтому в графе  $X$  при дополнительном условии об отсутствии одноцветного  $\Delta_{\sqrt{3}}$  вершины  $A, D$  имеют один цвет – почти как в трехцветной раскраске веретена Мозеров. Возьмем два экземпляра графа  $X$ , совместим их и повернем один из них относительно другого

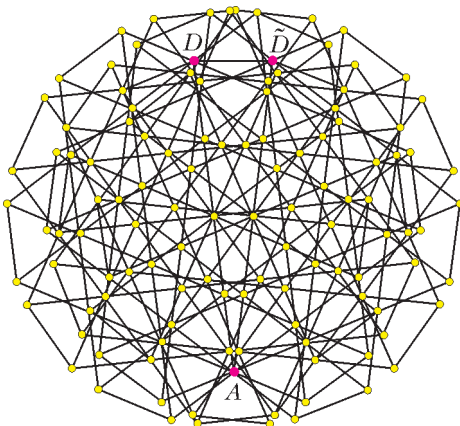


Рис. 11. Граф  $G$ , в свою очередь, состоит из двух экземпляров графа  $X$

вокруг  $A$  на угол  $\beta = 2 \arcsin \frac{1}{8}$ . Тогда  $D\tilde{D} = 1$  и эти вершины раскрашены в тот же цвет, что и  $A$ . Мы пришли к противоречию, а значит, построен граф  $G$ , в котором хотя бы один треугольник  $\Delta_{\sqrt{3}}$  раскрашен в один цвет (рис.11).

**Упражнение 3.** Докажите, что если множество узлов треугольной сетки размножить тремя поворотами на углы  $\alpha, \beta, \alpha$  вокруг одного и того же узла, получая при этом еще три экземпляра сетки (рис.12), то полученный

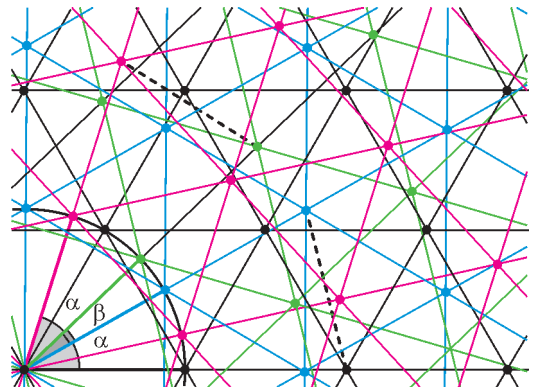


Рис. 12. Четыре экземпляра треугольной сетки

бесконечный дистанционный граф при любой раскраске узлов в 4 цвета также содержит одноцветный  $\Delta_{\sqrt{3}}$ . Как и выше,  $\alpha = 2 \arcsin \frac{1}{4}$ ,  $\beta = 2 \arcsin \frac{1}{8}$ .

**Построение графа, исключающего раскраску  $\Delta_{\sqrt{3}}$  в один цвет**

Правильность описанного выше построения можно проверить если не в уме, то хотя бы с ручкой и листком бумаги. К сожалению, второй граф из статьи ди Грея не допускает наглядных объяснений. Пока никто не придумал, как доказать без компьютера, что этот граф обладает нужным свойством, или как построить другой граф, для которого доказательство было бы «человеческим» от начала до конца.

Ди Грей предположил, что если в дистанционном графе содержится достаточно много веретен Мозеров в качестве подграфов, то удастся исключить одноцветную раскраску хотя бы одного фиксированного



треугольника  $\Delta_{\sqrt{3}}$ . Как построить такой дистанционный граф, чтобы на одну вершину в среднем приходилось как можно больше веретен? После ряда неудачных попыток ди Грей пришел к конструкции, при описании которой пригодится следующее определение.

**Определение.** Пусть  $X, Y$  – некоторые множества векторов (вообще говоря,  $X, Y$  могут состоять из чего угодно, лишь бы была определена операция сложения). Суммой Минковского  $M = X + Y$  называется множество, состоящее из всех возможных сумм  $x + y$ , где  $x \in X, y \in Y$  (см. пример на рисунке 13).

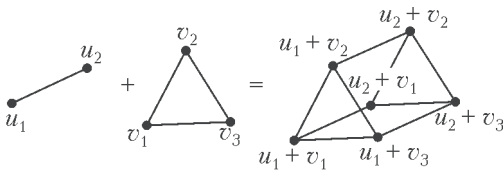


Рис.13. Сумма Минковского  $\{u_1, u_2\} + \{v_1, v_2, v_3\}$

Иногда мы будем говорить о сумме Минковского дистанционных графов, имея в виду граф, вершины которого – сумма множеств вершин слагаемых, а ребра – всевозможные отрезки единичной длины.

На рисунке 14,б совмещены «обычное» веретено Мозеров (рис.14,а) и «тройное»

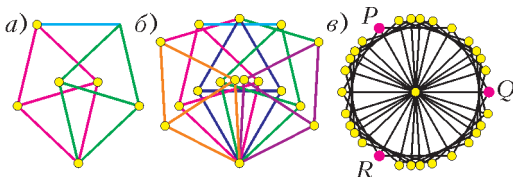


Рис. 14. Классы эквивалентности ребер. Граф  $V$

веретено – два веретена Мозеров с общим подграфом-«ромбом». Назовем два ребра эквивалентными, если угол между ними кратен  $60^\circ$ . Ребра разобьются на 5 классов, отмеченных цветом (см. рис.14,б). Сопоставим каждому ребру вектор, приписав ему произвольное направление. Теперь представим, что на плоскости сидит кузнечик и он может прыгать на единичное расстояние или в одном из этих направлений, или в любом из них, повернутом на угол, кратный  $60^\circ$ .

Отметим начальную точку и все точки, в которые кузнечик попадает за один прыжок. Таких точек будет  $5 \cdot 6 + 1 = 31$  – это вершины графа  $V$ , показанного на рисунке 14,в. Очевидно, точки  $P, Q, R$  образуют  $\Delta_{\sqrt{3}}$ . Пусть  $O$  – начало координат. При вычислении суммы Минковского  $V + V$  каждая точка будет складываться с точкой  $O$ , поэтому

$$\{P, Q, R\} \subset V \subset V + V \subset V + V + V.$$

**Упражнение 4.** а) Убедитесь, что если кузнечик разрешается сделать не более 2 прыжков, то ему доступны вершины графа  $W = V + V$ . б) Докажите, что  $W$  содержит веретено Мозеров в качестве подграфа.

Оказывается, что если отметить все точки, в которые кузнечик может попасть за 0, 1, 2 или 3 прыжка ( $V + V + V$ ) и покрасить точки  $P, Q, R$  в один цвет, то правильно раскрасить остальные вершины в четыре цвета невозможно!

Искомый граф построен, но компьютерный перебор раскрасок затрагивает лишь небольшую часть вершин. Ди Грей не стал спешить с публикацией и попробовал сделать построение более экономным. Опишем вариант, к которому он пришел.

Пусть  $W'$  состоит из векторов из  $W$ , длина которых не превосходит  $\sqrt{3}$ . Пусть  $U$  – подграф  $V$  на 7 вершинах, показанный на рисунке 7.

**Упражнение 5.** Найдите мощности множеств  $W$  и  $W'$ .

Граф  $H = W' + U$  имеет 1345 вершин и является подграфом  $V + V + V$  (рис.15). Если раскрасить в первый цвет три точки в вершинах  $\Delta_{\sqrt{3}}$ , выбранных из вершин  $U$ , компьютерный перебор показывает, что для раскраски остальных вершин четырех цветов (включая первый) не хватает.

Проверить это утверждение без написания программы пока никому не удалось. По сравнению со многими другими «компьютерными» доказательствами объем вычислений невелик: порядка минуты счета на одном ядре современного процессора. Но и этот перебор намного превышает человеческие возможности. А вот провер-

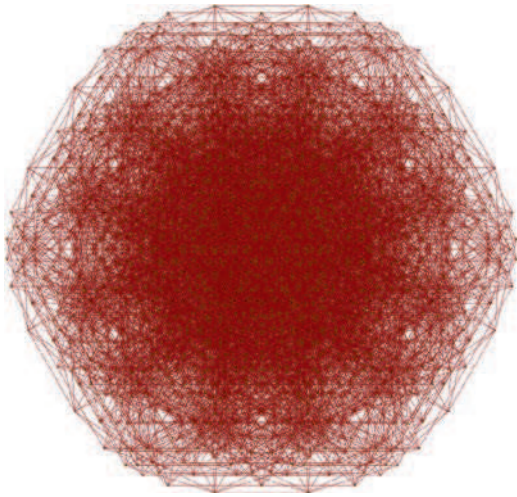


Рис. 15. Граф  $H$  на 1345 вершинах

ка с помощью компьютера доступна для большинства программистов.

Используется слегка усовершенствованный поиск в глубину. Во-первых, полезно вначале упорядочить вершины графа так, чтобы у следующей вершины было как можно больше соседей среди раскрашенных ранее (например, сортировкой по убыванию степени вершины, хотя есть способы и получше). Во-вторых, после раскраски какой-либо вершины следует сразу же проверять, нет ли среди соседних вершин таких, для которых остался только один вариант раскраски, и красить их немедленно (подобно тому, как сразу же вписываются единственные варианты при разгадывании sudoku).

#### Плоские дистанционные графы с хроматическим числом 5

В предыдущих разделах мы описали построение графа  $G$ , при раскраске которого в 4 цвета хотя бы один из треугольников  $\Delta_{\sqrt{3}}$  будет раскрашен в один цвет, и графа  $H$ , при раскраске которого в 4 цвета фиксированный треугольник  $\Delta_{\sqrt{3}}$  не может быть одноцветным. Из первого условия следует, что на плоскости, раскрашенной в 4 цвета, найдется одноцветный  $\Delta_{\sqrt{3}}$ , а из второго – что одноцветного  $\Delta_{\sqrt{3}}$  на плоскости нет. Это уже означает, что

$$\chi(\mathbb{R}^2) \geq 5,$$

но нетрудно указать и конкретный граф, обеспечивающий нижнюю оценку. Прикрепим к каждому из 52 шестиугольников в графе  $G$  по экземпляру  $H$ . При этом многие вершины совпадут, но это не должно нас беспокоить. Если не существует правильной раскраски графа в четыре цвета без учета их расположения на плоскости и отождествления вершин, то после отождествления ее тем более не будет. Полученный граф  $P$  на 20425 вершинах невозможно правильно раскрасить в четыре цвета.

Как и при переборе раскрасок  $H$ , выясняется, что большую часть вершин можно отбросить. Ди Грею удалось выделить из графа  $P$  подграф  $P'$  на 1581 вершине, который также не красится в четыре цвета (рис.16).

Статья ди Грея привлекла внимание энтузиастов комбинаторной геометрии к нескольким вопросам. Какое наименьшее число вершин может иметь плоский дистанционный граф с хроматическим числом 5 или больше? Нельзя ли найти граф с хроматическим числом 6 или 7, усложняя конструкцию? Существует ли доказательство новой нижней оценки, доступное для непосредственной проверки человеком?

Вскоре был найден алгоритмически более простой, хотя, увы, еще менее «человеческий» способ строить графы с хроматическим числом 5 и меньшим числом вершин. Выяснилось, что для этого можно

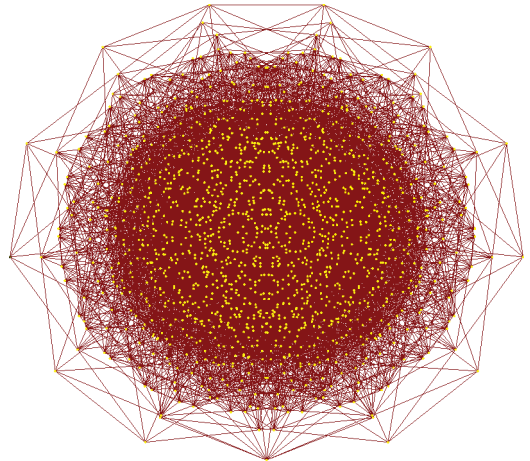


Рис. 16. Граф  $P'$  на 1581 вершине. Не существует правильной раскраски  $P'$  в четыре цвета

взять в качестве множества вершин  $(V + V + V) \cup \varphi_\beta(V + V + V)$ , где  $\varphi_\beta$  – поворот на угол  $\beta = \arcsin \frac{1}{8}$  вокруг начала координат. Автор статьи [6] перебирал различные способы отбрасывания «лишних» вершин при вычислении суммы Минковского, а затем использовал так называемые SAT-решатели<sup>2</sup>, чтобы найти подграф, из которого нельзя удалить ни одной вершины без уменьшения хроматического числа. По состоянию на текущий момент удалось сократить число вершин до 553, но, разумеется, нет никакой гарантии, что это число минимально. Вполне вероятно, что рекорд еще не раз обновится. Его

<sup>2</sup> Специализированные алгоритмы и программы, предназначенные для решения задачи о выполнимости булевых формул – NP-полной задачи, к которой сводится в том числе и задача о раскраске графа в  $k$  цветов.

## Замощения сферы и архимедовы многогранники

В «Калейдоскопе «Кванта» этого номера мы продолжаем тему полуправильных замощений (см. «Квант» №3 за 2018 г.), но на этот раз не плоскости, а *сферы*, – таких, что все многоугольники в них правильные и в каждой вершине (узле) сходятся такие же многоугольники в том же или зеркальном порядке, что и в любой другой вершине. Эти замощения интересны тем, что их узлы являются вершинами правильных или полуправильных многогранников – платоновых или архимедовых тел. Так мы получим и классификацию таких многогранников; именно они изображены на последующих рисунках.

Сферическая геометрия отличается от плоской тем, что сумма углов треугольника в ней

текущее значение можно узнать на сайте проекта Polymath [7] в разделе, посвященном данной задаче.

### Литература

1. *A. Soifer*. The Mathematical Coloring Book. – Springer, 2009.
2. *А. Райгородский, О. Рубанов, В. Кошелев*. Хроматические числа. – «Квант», 2008, №3.
3. *А. М. Райгородский*. Хроматические числа. – М.: МЦНМО, 2015.
4. *А. Я. Канель-Белов, В. А. Воронов, Д. Д. Черкашин*. О хроматическом числе плоскости. – Алгебра и анализ, 29:5 (2017), с.68–89.
5. *A. D. N. J. de Grey*. The chromatic number of the plane is at least 5. – //arXiv preprint arXiv:1804.02385 (2018).
6. *M. J. H. Heule*. Computing small unit-distance graphs with chromatic number 5. – //arXiv preprint arXiv:1805.12181 (2018).
7. Проект Polymath. – [http://michaelnielsen.org/polymath1/index.php?title=Hadwiger-Nelson\\_problem](http://michaelnielsen.org/polymath1/index.php?title=Hadwiger-Nelson_problem)

всегда *больше*  $180^\circ$ . (Например, на земном шаре у треугольника, образованного экватором и двумя перпендикулярными меридианами, все углы прямые!) Сумма углов  $n$ -угольника будет строго больше, чем  $180^\circ \cdot (n - 2)$ , а у правильного  $n$ -угольника угол будет больше, чем

$$\alpha_n = \frac{180^\circ \cdot (n - 2)}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

Пусть к каждому узлу замощения сходятся  $k$  многоугольников с числом вершин  $n_1, \dots, n_k$ . Сумма их углов равна  $360^\circ > \alpha_{n_1} + \dots + \alpha_{n_k}$ , откуда

$$\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_k} > \frac{k}{2} - 1. \quad (*)$$

С другой стороны, поскольку  $n_i \geq 3$ , получаем  $\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_k} \leq \frac{k}{3}$ . Значит,  $\frac{k}{3} > \frac{k}{2} - 1$ , откуда  $k < 6$ . Так как  $k \geq 3$  (в узле сходятся хотя бы три многоугольника), возможны три случая:  $k = 3$ ,  $k = 4$ ,  $k = 5$ .

(Продолжение см. на с. 32)

# Механика невидимого

Л. АШКИНАЗИ

## Подчинение законам

Все, что мы видим вокруг себя, подчиняется законам механики. Вы легко назовете множество примеров, причем, в соответствии со школьным курсом физики, эти примеры можно разделить на несколько групп. Связанные с движением – небесных тел и транспортных средств; со столкновениями – в технике и спорте; с равновесием – в спорте, технике, строительстве; а также с прочностью и жесткостью вещей и сооружений. Все это мы видим вокруг себя. Но и то, что мы не видим, ведет себя тоже в соответствии с законами механики – силы и механические напряжения в материале лопаток турбин самолетного двигателя и в жестком диске компьютера описываются одними и теми же формулами. Вы вполне можете оценить эти напряжения, если сообщить вам все необходимые (кстати, какие?) параметры. Но то, что быстро вращается и поэтому должно подвергаться действию сил, создающих необходимые ускорения, – это еще далеко не все. Кровь в сосудах, воздух в легких – все это движется под действием соответствующих сил. И отдельные клетки, перемещающиеся внутри наших организмов, – тоже. Более того, у бактерий есть несколько механизмов перемещения, и они не все еще установлены.

В этой же статье будет рассказано о применении механики в разнообразных электронных приборах – в счетчиках Гейгера, в механотронах, в мощных электронных лампах, в просвечивающих электронных микроскопах и сканирующих туннельных микроскопах, а также в приборах, для которых еще не придумано и названия. Причем будет рассказано не просто о том, что детали должны быть

прочными, а о чем-то более интересном и менее очевидном.

## Счетчик Гейгера

Принцип работы этого прибора вы знаете из учебника. В данном случае нам важно, что давление газа внутри существенно меньше атмосферного, поэтому на стенки счетчика действует сила. Нейтронам и  $\gamma$ -излучению стенки не помеха, но если мы хотим, чтобы прибор реагировал на  $\beta$ -частицы с относительно малой энергией и на  $\alpha$ -частицы, то где-то должно быть сделано окно, которое будет их пропускать, и оно должно быть тонким.

Попробуем оценить возможную толщину такого окна. Если атмосферное давление  $p$ , а диаметр окна  $d$ , то сила, действующая на окно, равна  $p\pi d^2/4$ . Примем толщину окна равной  $h$  и будем считать, что сила приходится на максимальное сечение материала окна, равное  $\pi dh$ . Тогда получается, что напряжение в материале составляет  $pd/(4h)$ , а минимальное допустимое значение толщины равно  $h = pd/(4\sigma)$ , где  $\sigma$  – максимальное допустимое механическое напряжение в материале окна. Полагая  $p = 0,1$  МПа,  $d = 1$  см,  $\sigma = 0,3$  ГПа, находим  $h = 1$  мкм. Прочность здесь взята для бериллия и слюды, из которых часто и делают окошки. Окошко толщиной в 1 мкм сделать можно, но оно будет работать «на пределе» и надежность у прибора станет недопустимо малой. Поэтому окошко делается толщиной в несколько микрон. На фото 1 и 2 показаны два счетчика Гейгера – с окошком из бериллия и из слюды. Поскольку слюда прозрачна, на окошко положена кнопка – чтобы сделать наглядным присутствие окошка. В данном случае механические свойства материала окна прямо определяют возможности прибора. Чем прочнее материал окна, тем оно может





Фото 1. Счетчик Гейгера с окошком из бериллия



Фото 2. Счетчик Гейгера с окошком из слюды

быть больше – это увеличивает чувствительность прибора или тоньше – это расширяет диапазон энергий регистрируемых частиц в сторону меньших энергий. Потому что чем меньше энергия, тем меньше глубина проникновения частицы в материал. С этой проблемой мы скоро встретимся – в электронном микроскопе. А пока что вернемся к окнам.

### Окно для энергии

Электронно-вакуумные приборы, усиливающие или генерирующие электромагнитные волны, имеют внутри себя вакуум – чтобы электроны могли двигаться свободно. А снаружи присутствует атмосфера. Значит, нам опять нужно окно, которое выдержит разность давлений и пропустит электромагнитную волну. В данном случае проблема облегчается тем, что в хорошем диэлектрике волны с длиной волны порядка сантиметра и более (а это вся связь, телевидение, радиолокация) затухают слабо, поэтому окно может быть толще. Однако на границе диэлектрика происходит отражение – часть энергии возвращается в прибор. Когда-то в качестве материала «вывода энергии» применялась опять же слюда (фото 3), сейчас

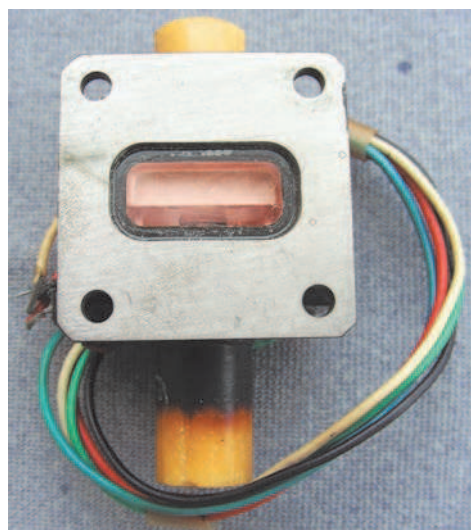


Фото 3. Электронно-вакуумный прибор с окошком из слюды

это обычно керамика (фото 4). Вытянутая вдоль волновода форма керамики (верхний объект на фото 4) используется для уменьшения отражения электромагнитной волны.

Кстати, насчет того, что «снаружи присутствует атмосфера». Когда начались полеты в космос, некоторые вздохнули облегченно – проблемы с созданием вакуума в электронных приборах и выводом энергии решены! Ан нет: оказалось, что



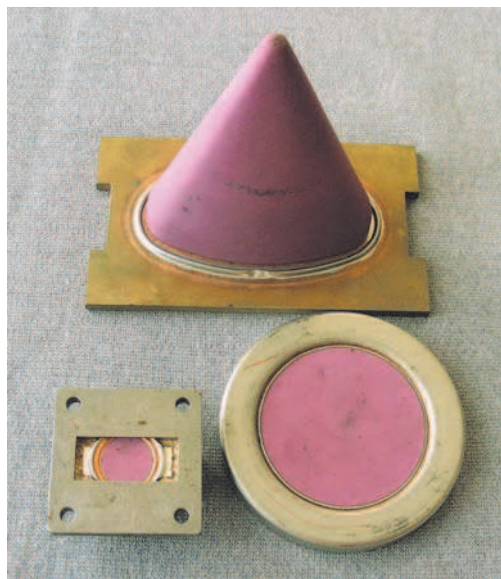


Фото 4. Электронно-вакуумный прибор с керамическим окошком

вакуум в ближнем космосе гораздо хуже того, который должен быть в электронном приборе (от  $10^{-7}$  до  $10^{-15}$  атм), и баллон прибору все равно нужен. Про Луну и Марс и говорить не стоит – вокруг Луны летает пыль от ударов о ее поверхность микрометеоритов, а что происходит на Марсе, знаете сами. Или посмотрите в учебнике или интернете. Так что в вакуумных приборах чистота, как в дальнем космосе.

#### Опять окно – для микроскопа

В просвечивающем электронном микроскопе электронный пучок должен распространяться, не рассеиваясь, поэтому в приборе нужен вакуум. И пучок должен проходить через наш образец насквозь – поэтому образец обязан быть тонким. Причем образец не должен портить вакуум, а вакуум не должен портить образец. Первая проблема решается легко: образец маленький, и то, что он выделяет, насосы микроскопа откачают, а со второй проблемой дело обстоит сложнее. Из-за этого в электронном микроскопе нельзя просто так исследовать биообъекты, например живые клетки, – вода мгновенно испаряется, и клетка гибнет.

Однако не будем затрагивать биологию, а обратим свое внимание на компьютеры, роутеры, камеры, смартфоны и прочие гаджеты. Во всех них есть источник энергии – батарейка или аккумулятор. Рассказывать, как и почему важен запас энергии, не надо – это знает каждый, кто срочно искал, куда бы воткнуть зарядное устройство. Поэтому исследования в области улучшения параметров аккумуляторов ведутся непрерывно.

Очень важно, например, понять, как изменяется в процессе заряда и разряда аккумулятора структура его материалов. Возникает нетривиальная задача: сделать аккумулятор толщиной в микроны, чтобы пучок прошел его насквозь. Но это еще не все – в аккумуляторе есть электролит, а в вакууме он (как и жидкость из клетки) мгновенно испарится, и аккумулятор (как и клетка) погибнет. Решение нашла группа под руководством А.М.Абакумова (МГУ, Сколтех) – в их приборе электронный пучок проходил через окно толщиной в доли микрона, сделанное из соединения  $\text{Si}_3\text{N}_4$ . Торможение электронов в твердом теле зависит от концентрации в нем своих электронов, поэтому пробег тем больше, чем меньше атомные номера элементов, из которых состоит преграда. Заметьте, что Si, N, Be и то, из чего состоит слюда, чаще всего мусковит  $\text{KAl}_2[\text{AlSi}_3\text{O}_{10}](\text{OH})_2$ , это все верх Периодической таблицы. Разумеется, важно еще, можно ли из такого материала сделать микронную пластинку, какова будет ее прочность и как ее соединить с остальным корпусом. По сравнению со счетчиком Гейгера в случае электронного микроскопа проблема немного облегчается тем, что от площади окна чувствительность метода не зависит, поэтому окно можно сделать поменьше. Но, с другой стороны, в счетчике важно, чтобы частица просто попала внутрь, а в микроскопе важно еще, чтобы электронный луч не рассеивался в материале окна.

#### Выпусти электрон на волю

Пробег электрона в веществе зависит от количества встреченных по дороге электронов. Но оно зависит не только от атом-

ного номера элементов, а еще и от концентрации атомов в пространстве. Поэтому в атмосфере, т.е. в газе, пробег электронов должен быть относительно велик. Действительно, в воздухе при нормальных условиях и при энергии электронов 20 кэВ их пробег составляет около 2 см, а при энергии 20 МэВ – 100 м. Этот диапазон энергий примерно соответствует энергиям электронов при  $\beta$ -распаде. То, что электроны могут преодолевать заметные расстояния в воздухе, наводит на мысль о возможности их применения для инициирования химических реакций, для обработки материалов, для сварки и т.д. Действительно, такие возможности имеются. Однако, для того чтобы ими воспользоваться, надо сначала отделить электроны от прочих компонентов вещества, потом ускорить, т.е. сообщить им энергию.

Добыть электроны можно посредством термо- или автоэлектронной эмиссии (с этим мы еще встретимся) из твердого тела или жидкости, а можно извлечь их из плазмы газового разряда. Ускорять электроны удобно в вакууме, и тут же возникает проблема выпуска электронного потока в атмосферу. Естественно, выпускают пучок через фольгу из титана (Ti) толщиной в десять и более микрон. Поскольку пучок изначально ускоряется до энергий в сотни килоэлектровольт, его пробег в титане составляет величину порядка сотен микрон, поэтому фольга толщиной в десятки микрон хотя и будет перехватывать часть пучка и греться, но большая часть пучка пройдет через фольгу. Применение именно титана, а не, скажем, бериллия связано с доступностью фольги из титана – она намного дешевле. А что произойдет при попытке пропустить поток электронов через слюду, при том что слюда все-таки перехватит часть электронов, подумайте сами.

А пока обратимся к микроскопам – но к другим.

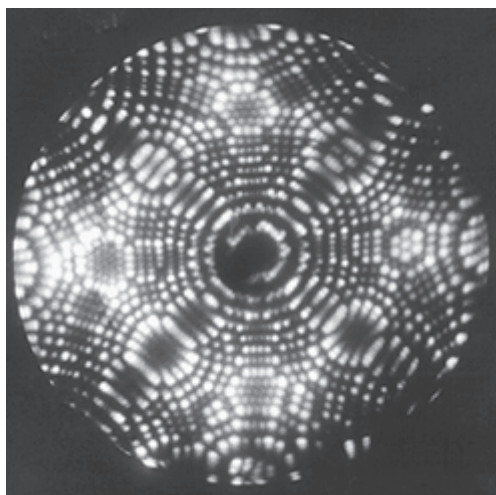
### **Сколько атомов может поместиться на острие иглы?**

Если спросить вас, что такое микроскоп, вы ответите, что это нечто такое, посредством чего мы видим что-то маленькое,

которое иначе не увидать. Это правильно, но мы получаем информацию не только при помощи зрения, почему же микроскоп в этом смысле дискриминировали? А если он сообщит нам какую-то информацию о маленьком объекте не в виде оптического сигнала? Ограничение связано только с традицией, мы привыкли «видеть» объекты – их расположение, форму, рельеф поверхности и ее «оптические» свойства, т.е. цвет, коэффициент отражения, блеск и т.д. Перечисленные параметры не независимы, они связаны сложно и интересно; например, подумайте, что такое «блеск» и от чего он зависит. Но сейчас нам важно другое: каким бы способом микроскоп не получал информацию об объекте, он должен представить ее в виде картинки, на которую мы посмотрим. Картинка эта плоская, но часто создающая у нас в мозгу объемное изображение; возможен и микроскоп, который создает настоящее объемное изображение.

А вот на этап, как говорится, «визуализации» надо посмотреть внимательнее. Ибо то, что нам показывает микроскоп, а именно расположение, форма, поверхность объекта, далеко не всегда то, что мы бы увидели, если бы объект увеличился в миллион или миллиард раз. Например, потому, что в области нанометров изменяется смысл понятий «форма» и «поверхность», а понятия «цвет» и «блеск» вообще пропадают. Даже когда привычный электронный микроскоп (человек работает с ним с 1931 года) показывает нам картинку, надо понимать и помнить, как он ее получал и преобразовывал. (Если мы вообще хотим что-то понять, а не просто поохать и поохать.)

Ионный проектор – вещь, в принципе, простая. Поместим в вакуум металлическую иглу и подадим на нее высокое напряжение. Рядом с острием напряженность поля такова, что оставшиеся в вакууме атомы газа ионизируются, а ионы ускоряются полем, летят до люминесцентного экрана и создают изображение. Ионизация происходит тем чаще, чем выше напряженность поля, а она выше рядом с отдельными атомами, торчащими из ост-



*Фото 5. Металлическая решетка в атомном изображении*

рия. Вот и получаем мы на экране изображение решетки металла с атомным разрешением (фото 5). Но важно помнить, что в данном случае мы видим не атомную, а электронную плотность. А еще надо не забывать про закон Кулона и прочность кристаллической решетки – соответствующая сила может оторвать от иглы отдельные атомы («полевое испарение») или разрушить иглу. При вакуумном пробое, а сейчас мы о нем поговорим, именно это и происходит.

### **Вакуумный пробой**

Когда говорят об электрическом пробое диэлектрика, имеется в виду следующее. Берем кусок диэлектрика, прикладываем к нему электрическое напряжение и начинаем это напряжение увеличивать. Идеальных диэлектриков не бывает, поэтому появляется ток – поначалу маленький. А раз есть ток и напряжение, значит, есть мощность. Если мощность умножить на время, получим энергию – значит, в диэлектрике должно что-то происходить. И действительно, в какой-то момент ток скачком возрастает, диэлектрик перестает быть диэлектриком. Причем что-то происходит с самим материалом диэлектрика, с веществом. Но в вакууме вещества нет! И то, что происходит при вакуумном пробое, может происходить только с материалом

электродов. А как материал электродов попадает в зазор?

Собственно, путь для этого один – испарение и заполнение парами материала электродов вакуумного зазора. А уж в этом паре происходит пробой, зажигается разряд (если хватает мощности, горит дуга), прибор разрушается. Осталась мелочь – понять, кто испаряет материал электрода.

Для этого есть два механизма. Первый механизм состоит в следующем. При высокой напряженности поля начинается автоэлектронная эмиссия одного из электродов. Вылетевшие из него электроны достигают противоположного электрода и выделяют на нем свою энергию. Напряженность поля выше всего на остриях, вот почему полируют электроды высоковольтных вакуумных конденсаторов. Второй механизм таков: электрическое поле отрывает кусок материала от электрода (поскольку его поверхность заряжена), этот кусок летит через зазор, всю дорогу ускоряясь (второй закон Ньютона в действии), и отдает свою энергию другому электроду, а далее – нагрев, испарение и пробой в парах. Поэтому электроды стараются делать из прочных металлов.

Между прочим, вакуумные конденсаторы – далеко не единственная и даже не основная ситуация, когда мы имеем вакуум и высокое напряжение. Так происходит почти во всех мощных электровакуумных приборах – а это и космическая связь, и радиолокация, и ускорительная техника, и телевидение... Даже токамак без таких приборов не заработает!

### **Еще два микроскопа: сканирующий туннельный и атомно-силовой**

Преимущество этих двух микроскопов в том, что им не нужен вакуум, который разрушает многие интересные объекты (например, биологические). Если поднести к поверхности объекта на маленькое расстояние иглу и подать на нее напряжение, между иглой и поверхностью (если она хотя бы плохой, но проводник) начнет протекать ток – тот самый автоэлектронный ток, с которого иногда начинается вакуумный пробой. Чем игла острее, тем

выше пространственное разрешение, и оно может достигать десятых долей межатомного расстояния в решетке! Возникающий ток очень сильно зависит от расстояния между поверхностью и иглой, и мы можем измерить это расстояние с высокой точностью. Но расстояние до чего именно – мы ведь ни в каком смысле не касались атомов? Это будет как раз «расстояние до электронов», т.е. мы получим профиль электронной плотности над поверхностью. Пример для кремния показан на фото 6.

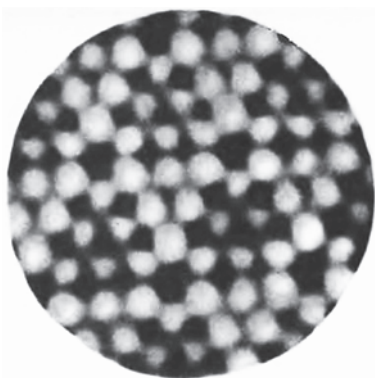


Фото 6. Профиль электронной плотности над поверхностью кремния

Но, как вам известно, между атомами действуют силы – притяжения на большом расстоянии и отталкивания на малом. Атомы в молекуле располагаются в среднем на таком расстоянии друг от друга, когда сумма этих сил равна нулю. Поэтому, если мы будем подводить иглу к поверхности, на нее начнет действовать сила. Эту силу измеряют по изгибу «кантилевера» – балки, на которой закреплена игла. А это как раз и есть механика, причем основы теории изгиба балок заложили не абы кто, а Эйлер и Бернулли в XVII–XVIII веках.

Заметим, что атомно-силовые микроскопы XXI века работают хитрее. Они приближаются к поверхности, слегка вибрируя, а на параметры этих колебаний и влияют силы, действующие на подползающую к поверхности иглу... Вот это уже современная механика на самом переднем крае наук о поверхности, как сейчас модно говорить – наноаук. О них мы еще поговорим.

## Механотрон

Чем мы измеряем перемещения? А это смотря какие и с какой точностью. Но прежде всего на ум приходят механические и оптические средства измерений – рулетки, линейки, лазерные дальномеры, интерферометры. Обработка результатов измерения осуществляется нынче довольно часто компьютерами, а чтобы сообщить компьютеру результат измерений, нужно сначала получить его в виде электрического сигнала, потом преобразовать в цифровую форму. Второе – вещь освоенная, соответствующие устройства называются аналого-цифровыми преобразователями (АЦП). А как сделать, чтобы перемещение чего-то откликнулось электрическим сигналом?

Один из вариантов – перемещать ферромагнитный сердечник, изменяя индуктивность катушки, другой – перемещать пластину конденсатора, изменяя емкость. Далее использовать индуктивность и емкость можно по-разному, например через реактивное сопротивление или резонансную частоту контура (формула Томсона). Но есть и другой, менее распространенный способ – перемещать анод электронной лампы. При этом изменяются ее параметры, например анодный ток при определен-



Фото 7. Механотрон



ном анодном напряжении. Соответствующая лампа называется «механотрон» (фото 7), ее стеклянный баллон спаян с металлической рамкой, в рамку впаяна мембрана (ее край виден на снимке), а к мембране изнутри и прикреплен анод. При нажатии на мембрану анод перемещается. Параметры лампы как преобразователя силы в ток зависят от жесткости мембраны, а как преобразователя перемещения в ток – не зависят. Понимаете, почему это так?

### Изотопный мотор

Один из экзотических источников электроэнергии – изотопная батарея. Простейший вариант – конденсатор в вакууме, от его пластин сделаны выводы, на одну из пластин нанесен  $\beta$ -активный изотоп. Электроны вылетают, попадают на противоположную пластину и через нагрузку возвращаются обратно. А что происходит, если нагрузка не присоединена?

Представим себе ситуацию, когда внешней нагрузки нет, но зато одна из пластин сделана гибкой. Тогда по мере увеличения заряда на ней эта пластина начнет изгибаться, и, если она сумеет коснуться другой пластины, конденсатор разрядится, пластина выпрямится, и все начнется сначала. Параметры такого мотора зависят, естественно, от энергии электронов и их тока, от геометрии системы (размеров пластины и зазора) и параметров материала (модуля Юнга). Можете на досуге попробовать решить эту задачу.

Вполне возможно, что когда-нибудь такие микро- или, скорее, нанодвигатели будут применяться. Тем более, что начали появляться идеи использования этих движений для генерации электроэнергии – например, сделав пластину из сегнетоэлектрика. Впрочем, обычная изотопная батарея и так уже является источником электроэнергии.

### Нано: электроника и трение

Законы физики одинаковы на всех уровнях – от межатомных расстояний в твердом теле, до межгалактических у нас над головой. Но проявляются они по-разному. И то, на что мы привычно не обращаем

внимания, размышляя о процессах в твердом теле и при контакте твердых тел, становится определяющим в космосе – например, гравитация. А что-то остается столь же важным – например, диффузия в твердом теле и диффузия излучения в звездах. Правда, это диффузия чего-то другого...

Опускаясь в мир нанорасстояний, мы не должны забывать про механику, но относительная роль разных ее аспектов может измениться. Простейший пример: объем тела зависит от его линейных размеров в кубе, а поверхность – в квадрате, поэтому роль поверхностных эффектов, например трения, возрастает. И вообще, начинает происходить странное: незаряженные поверхности притягиваются, звук передается через вакуум, иначе передается тепло, возникает бесконтактное трение... Но не спешите выкидывать школьные учебники. Все это становится существенным только на расстояниях, сравнимых с межатомными, и только тогда, когда вы займетесь Серьезной Физикой.

### Тут продвинутый школьник...

...который днюет не выпуская из рук кодификатор ЕГЭ, а ночует в обнимку с университетским курсом физики, спросит: а зачем мне было это читать? Я это и так все знаю. Ну, почти все...

На это есть два ответа – один обидный, а другой – по существу. Обидный ответ вот: это вам так кажется, что знаете. А преподаватель задаст два-три вопроса, и вы сами поймете, что умение делать умные глаза и кивать в нужных местах – это не знание. Ответ по существу вот: написано это было мною, а прочитано вами для того, чтобы вы поняли – мир не делится на механику, термодинамику, электричество и далее по списку. Физику надо знать всю. Точнее – всю ширину, а в глубину – в пределах школьного, потом и серьезного университетского курса.

А электронные приборы – еще не самое страшное. Исследование элементарных частиц и поведение звезд и галактик – так и там рулит Ньютон. Прямо из своего XVII века.



# Задачи по математике и физике

*Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.*

*Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».*

*Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.*

*Задачи M2534–M2537 предлагались на XI Турнире городов.*

## Задачи M2534–M2537, Ф2541–Ф2544

**M2534.** На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?» Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?

*М.Кузнецов*

**M2535.** Требуется записать число вида  $77\dots7$ , используя только семерки (их можно писать и по одной, и по несколько штук подряд), причем разрешены только сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень, а также скобки. Для числа  $77$  самая короткая запись – это просто  $77$ . А существует ли число вида  $77\dots7$ , которое можно записать по этим правилам, используя меньшее количество семерок, чем в его десятичной записи?

*С.Маркелов*

**M2536\***. Изначально на белой клетчатой плоскости конечное число клеток окрашено в черный цвет. На плоскости лежит

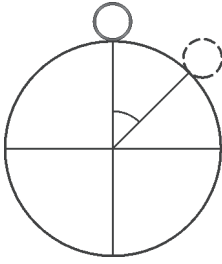
бумажный клетчатый многоугольник  $M$ , в котором больше одной клетки. Его можно сдвигать, не поворачивая, в любом направлении на любое расстояние, но так, чтобы после сдвига он лежал «по клеткам». Если после очередного сдвига ровно одна клетка у  $M$  лежит на белой клетке плоскости, эту белую клетку окрашивают в черный цвет и делают следующий сдвиг. Докажите, что существует такая белая клетка, которая никогда не будет окрашена в черный цвет, сколько бы раз мы ни сдвигали  $M$  по описанным правилам.

*Д.Захаров*

**M2537\***. На числовой оси отмечено бесконечно много точек с натуральными координатами. Когда по оси катится колесо, каждая отмеченная точка, по которой проехало колесо, оставляет на нем точечный след. Докажите, что можно выбрать такое действительное  $R$ , что если прокатить по оси, начиная из нуля, колесо радиуса  $R$ , то на каждой дуге колеса величиной в  $1^\circ$  будет след хотя бы одной отмеченной точки.

*И.Митрофанов*

**Ф2541.** С вершины горизонтального цилиндра без начальной скорости скатывается небольшой обруч (отношение радиуса обруча к радиусу цилиндра – малая величина). Коэффициент трения между поверхностями цилиндра и обруча  $\mu = 1$ . При



каком угле между вертикалью и линией, проходящей через центр обруча и ось цилиндра (см. рисунок), начнется проскальзывание обруча по цилиндру? При каком угле между теми

же линиями произойдет отрыв обруча от цилиндра?

*А. Власов*

**Ф2542.** Тепловой двигатель ракеты обеспечивает вылет продуктов реакции горения из сопла двигателя со скоростью  $v = 3$  км/с. Через  $\Delta t = 5$  с после включения главного двигателя (в момент включения скорость ракеты равна нулю) ракета поднималась вверх со скоростью  $u = 100$  м/с. К этому моменту масса ракеты была  $M = 10$  т. Считая КПД преобразования тепловой энергии в механическую равным 30%, оцените тепловую мощность химической реакции в двигателе и найдите долю этой мощности, которая достается ракете в этот момент времени. Какой была стартовая масса ракеты  $M_0$  (до запуска главного двигателя)?

*С. Королёв*

**Ф2543.** Сплошной шар радиусом  $r = 4$  см, сделанный из вольфрама, нагрет до температуры  $t_b = 1000$  °С. Его опустили на поверхность круглого цилиндра из свинца, торцы которого горизонтальны. Свинец имеет комнатную температуру  $t_0 = 27$  °С. В цилиндре имеется множество одинаковых вертикальных сквозных отверстий, распределенных равномерно по площади горизонтального сечения, так что общая площадь поперечного сечения отверстий равна половине площади круга радиусом  $2r$ . Внешний радиус горизонтального сечения цилиндра равен  $2r$ , цилиндр закреплен на краях, а шар опущен на центр верхнего горизонтального торца. Оцените максимальную высоту цилиндра, при которой вольфрамовый шар сможет «пройти» сквозь цилиндр (см. видео <https://www.youtube.com/watch?v=P—>

uuKuhBO0). Молярные теплоемкости свинца и вольфрама примерно одинаковы и близки к значению  $3R = 25$  Дж/(моль · К). Температура плавления свинца  $t_{пл} = 600$  К, его молярная теплота плавления  $L = 4,77$  кДж/моль. Теплопроводностью свинца ( $35,3$  Вт/(м · К)) можно пренебречь в сравнении с теплопроводностью вольфрама ( $163$  Вт/(м · К)). Молярные массы и плотности в твердом состоянии этих элементов равны, соответственно,  $M_{св} = 207$  г/моль и  $\rho_{св} = 11,3$  г/см<sup>3</sup>,  $M_{в} = 184$  г/моль и  $\rho_{в} = 19,3$  г/см<sup>3</sup>.

*А. Свинцов-Вольфрам*

**Ф2544.** По бесконечно длинной наклонной плоскости шириной  $2L$  с углом наклона к горизонту  $\alpha$  движется маленькая шайба с зарядом  $q$  и массой  $m$ . Коэффициент трения шайбы о наклонную плоскость  $\mu = \tan \alpha$ . Перпендикулярно плоскости действует магнитное поле с индукцией  $B$ . В начальный момент шайба находится на расстоянии  $L$  от края наклонной плоскости. Какую минимальную начальную скорость нужно сообщить шайбе, чтобы она могла слететь с этой наклонной плоскости?

*М. Николсон*

### Решения задач M2522–M2525, Ф2529–Ф2532

**M2522.** Найдите все натуральные числа  $n$ , для которых существует перестановка  $a_1, \dots, a_n$  чисел  $1, \dots, n$  такая, что все числа  $|a_1 - 1|, |a_2 - 2|, \dots, |a_n - n|$  попарно различны.

**Ответ:**  $n$  вида  $4k$  или  $4k + 1$ , где  $k$  – целое число.

Предположим, что указанная перестановка  $a_1, \dots, a_n$  чисел  $1, \dots, n$  существует. Заметим, что  $0 \leq |a_i - i| \leq n - 1$ , поэтому все числа  $|a_1 - 1|, |a_2 - 2|, \dots, |a_n - n|$  могут быть попарно различными, только если они образуют перестановку чисел  $0, 1, 2, \dots, n - 1$ . В таком случае  $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_n - n| = 0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1)$ . Левая часть этого равенства имеет такую же четность, как и сумма

$(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \dots + (a_n - n) = 0$ , т.е. четна. Правая часть равна  $\frac{n(n-1)}{2}$ . При  $n$ , дающих остаток 2 или 3 при делении на 4, это число нечетное. Значит, для таких  $n$  получается противоречие.

Если  $n$  имеет вид  $4k$  или  $4k + 1$ , ответ в задаче положительный. Приведем соответствующие примеры. Для наглядности отметим на числовой прямой точки  $1, 2, \dots, n$  и будем проводить стрелки от точки  $i$  к точке  $a_i$ .

Для  $n = 4k$  система стрелок будет такая:  
 $1 \rightarrow 4k \rightarrow 2 \rightarrow 4k - 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4k - 2 \rightarrow \dots$   
 $\dots \rightarrow k \rightarrow 3k + 1 \rightarrow k + 2 \rightarrow 3k \rightarrow k + 3 \rightarrow$   
 $\rightarrow 3k - 1 \rightarrow \dots \rightarrow 2k \rightarrow 2k + 2 \rightarrow 2k + 1 \rightarrow 1$   
 и петля  $k + 1 \rightarrow k + 1$  (на рисунке 1 показана

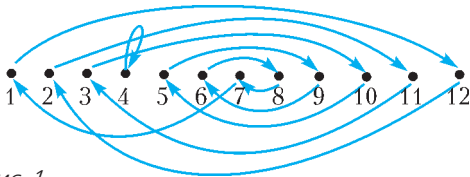


Рис. 1

на система стрелок для  $k = 3$ , т.е. для  $n = 12$ ). По этой системе стрелок легко восстановить перестановку:  $a_1 = 4k, a_2 = 4k - 1, \dots, a_k = 3k + 1, a_{k+1} = k + 1$  и т.д. Видно, что каждое из чисел  $0, 1, 2, \dots, 4k - 1$  встречается ровно один раз как разность между числами на концах стрелки.

Пусть  $n = 4k + 1$ . При  $k = 0$  задача очевидна. При  $k \geq 1$  достаточно изменить систему стрелок в построенном выше примере для  $n = 4k$  таким образом: убрать стрелку  $2k + 1 \rightarrow 1$  и вместо нее добавить стрелки  $2k + 1 \rightarrow 4k + 1$  и  $4k + 1 \rightarrow 1$  (на

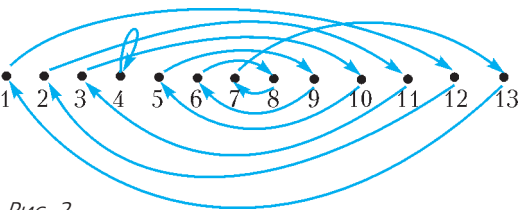


Рис. 2

рисунке 2 показана система стрелок для  $k = 3$ , т.е. для  $n = 13$ ).

П. Кожевников

**M2523.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = AC$ ) точка  $M$  – середина высоты  $CH$  (рис. 1). Прямая, проходящая

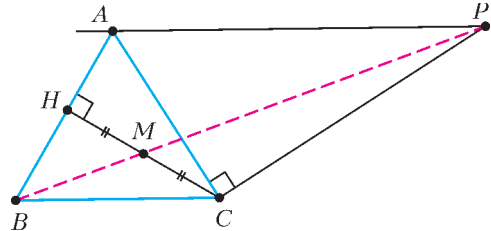


Рис. 1

щая через  $C$  и перпендикулярная прямой  $AC$ , пересекает прямую, проходящую через  $A$  и параллельную прямой  $BC$ , в точке  $P$ . Докажите, что точки  $B, M$  и  $P$  лежат на одной прямой.

Построим прямоугольный треугольник  $APD$ , симметричный треугольнику  $APC$

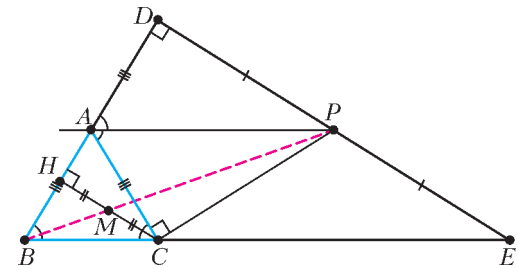


Рис. 2

относительно  $AP$  (рис. 2). Так как  $AP$  – внешняя биссектриса угла  $BAC$ , точка  $D$  лежит на прямой  $AB$ , причем  $DA = AC = AB$ . Пусть прямые  $DP$  и  $BC$  пересекаются в точке  $E$ . Так как  $BA = AD$  и  $AP \parallel BE$ , то  $AP$  – средняя линия треугольника  $BDE$ , значит,  $DP = PE$ . Прямоугольные треугольники  $BHC$  и  $BDE$  гомотетичны с центром в точке  $B$ , поэтому середины отрезков  $CH$  и  $ED$  лежат на одной прямой с точкой  $B$ , т.е. точки  $M, P$  и  $B$  лежат на одной прямой, что и требовалось доказать. Задача решена.

Можно заметить, что в построенной нами конструкции прямые  $DP$  и  $CP$  являются касательными к окружности, описанной около треугольника  $BDCD$ . Тогда, как известно (см. например, статью Ю.Блинкова «Симедиана» в «Кванте» №4 за 2015 г.),  $BP$  является симедианой треугольника  $BDCD$ . Также можно показать, что прямые

$CH$  и  $CD$  – антипараллели в угле  $CBD$ , поэтому прямая  $BP$  содержит медиану треугольника  $BHC$ .

*Д. Пашуткин*

**M2524.** Для каждой пары различных действительных чисел  $a, b$  найдите все функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  (т.е. функции, определенные на множестве всех действительных чисел и принимающие положительные значения) такие, что при всех  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$  выполнено равенство

$$f(xy) = (f(x))^{ay} (f(y))^{bx}.$$

**Ответ:**  $f(x) \equiv 1$  при  $a + b \neq 1$ ;  $f(x) = c^x$ , где  $c > 0$ , при  $a + b = 1$ .

По условию хотя бы одно из чисел  $a, b$  отлично от 1. Пусть для определенности  $a \neq 1$ . Положив  $y = 1$ , получаем

$$f(x) = (f(x))^a (f(1))^{bx}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (f(x))^{1-a} &= (f(1))^{bx}, \\ f(x) &= (f(1))^{\frac{bx}{1-a}} = \left( (f(1))^{\frac{b}{1-a}} \right)^x. \end{aligned}$$

Таким образом,  $f(x) = c^x$ , где  $c$  – положительная константа.

Проверим, при каких значениях  $c$  найденная функция является решением. Подставляя в исходное равенство, получаем

$$\begin{aligned} c^{xy} &= (c^x)^{ay} (c^y)^{bx}, \\ c^{xy} &= c^{axy} c^{bxy}, \\ c^{xy} &= c^{(a+b)xy}. \end{aligned}$$

При  $c = 1$  получаем верное равенство, т.е.  $f(x) \equiv 1$  удовлетворяет условию задачи. Если  $a + b = 1$ , то получаем верное равенство для каждого положительного  $c$ . Если  $a + b \neq 1$ , то  $c \neq 1$  не подходит, так как, например, при  $x = y = 1$  равенство  $c^{xy} = c^{(a+b)xy}$  нарушается.

Заметим, что мы решили функциональное уравнение для всех значений параметров, кроме пары  $a = b = 1$ .

*Я. Алиев*

**M2525.** Даны натуральные числа  $m, n, k, a, b, c$ . Прямоугольный параллелепипед  $m \times n \times k$  удалось разрезать на несколько

«кирпичей» трех видов:  $a \times 1 \times 1, 1 \times b \times 1$  и  $1 \times 1 \times c$ . (Размеры указаны в заданном порядке – длина, ширина, высота; например,  $1 \times 1 \times 2$  и  $1 \times 2 \times 1$  – кирпичи разного вида.) Докажите, что верно хотя бы одно из следующих утверждений:  $m$  делится на  $a$ ;  $n$  делится на  $b$ ;  $k$  делится на  $c$ .

Если одно из чисел  $a, b, c$  равно 1, то задача очевидна. Далее будем считать, что  $a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2$ .

Основная идея (похожие идеи работают во многих доказательствах невозможности разрезания) – приписать кубикам  $1 \times 1 \times 1$  веса так, чтобы суммарный вес каждого кирпича был равен нулю. Тогда суммарный вес всего параллелепипеда будет равен 0, откуда можно получить условия на его размеры. В этой задаче нам помогут веса, являющиеся комплексными числами.

Пусть  $\epsilon_a$  равно комплексному числу  $\cos \frac{2\pi i}{a} + i \sin \frac{2\pi i}{a}$  (другое обозначение:

$\epsilon_a = e^{\frac{2\pi i}{a}}$ ), так что  $\epsilon_a^a = 1$  и, более того, для целого числа  $t$  равенство  $\epsilon_a^t = 1$  выполнено тогда и только тогда, когда  $t$  делится на  $a$ . Аналогично положим

$$\begin{aligned} \epsilon_b &= \cos \frac{2\pi i}{b} + i \sin \frac{2\pi i}{b}, \\ \epsilon_c &= \cos \frac{2\pi i}{c} + i \sin \frac{2\pi i}{c}. \end{aligned}$$

Введем координаты так, чтобы ось  $Ox$  была направлена вдоль ребра длины  $m$ , ось  $Oy$  – вдоль ребра длины  $n$ , ось  $Oz$  – вдоль ребра длины  $k$ , а центр угловой клетки имел координаты  $(0; 0; 0)$ . Заполним наш параллелепипед числами, записав в кубике с центром  $(i; j; l)$  число  $\epsilon_a^i \epsilon_b^j \epsilon_c^l$ . Докажем, что сумма чисел в каждом кирпиче равна 0. Рассмотрим кирпич  $a \times 1 \times 1$ , пусть он состоит из кубиков  $(i; j; l), (i+1; j; l), \dots, (i+a-1; j; l)$ . Тогда сумма чисел в них равна

$$\left( \epsilon_a^i + \epsilon_a^{i+1} + \dots + \epsilon_a^{i+a-1} \right) \epsilon_b^j \epsilon_c^l.$$

Из формулы геометрической прогрессии вытекает, что

$$\epsilon_a^i + \epsilon_a^{i+1} + \dots + \epsilon_a^{i+a-1} = \epsilon_a^i \cdot \frac{\epsilon_a^a - 1}{\epsilon_a - 1} = 0.$$

Заметим, что сумма чисел во всех клетках данного параллелепипеда  $m \times n \times k$  равна

$$\begin{aligned} & (1 + \epsilon_a + \epsilon_a^2 + \dots + \epsilon_a^{m-1}) \times \\ & \times (1 + \epsilon_b + \epsilon_b^2 + \dots + \epsilon_b^{n-1}) \times \\ & \times (1 + \epsilon_c + \epsilon_c^2 + \dots + \epsilon_c^{k-1}) = \\ & = \frac{(\epsilon_a^m - 1)(\epsilon_b^n - 1)(\epsilon_c^k - 1)}{(\epsilon_a - 1)(\epsilon_b - 1)(\epsilon_c - 1)}. \end{aligned}$$

Эта сумма должна быть равна 0, значит, хотя бы одно из выражений  $\epsilon_a^m - 1$ ,  $\epsilon_b^n - 1$ ,  $\epsilon_c^k - 1$  равно 0. Пусть, например,  $\epsilon_a^m - 1 = 0$ , т.е.  $\epsilon_a^m = 1$ . Как было замечено ранее, отсюда следует, что  $m$  делится на  $a$ . Аналогично, в случаях  $\epsilon_b^n - 1 = 0$  и  $\epsilon_c^k - 1 = 0$  получаем, соответственно, что  $n$  делится на  $b$  и  $k$  делится на  $c$ .

Т.Зиманов

**Ф2529.**<sup>1</sup> В аквариум в форме куба с длиной ребра  $2R$  «вписан» конус (ширина аквариума равна диаметру основания конуса, высота конуса равна высоте аквариума). Аквариум с находящимся в нем конусом полностью залит водой. Определите минимальную работу, которую следует совершить, чтобы «осушить» конус (вынуть его из воды). Плотность воды  $\rho_0$ , плотность материала конуса  $\rho$ .

Сначала найдем положение центра масс конуса. Для этого из конуса «вырежем» пирамидальную дольку (рис.1) настолько малую, что будем считать ее пирамидой с

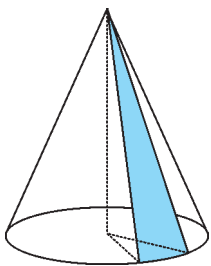


Рис. 1

треугольным основанием. Центр масс пирамиды лежит на пересечении двух «центральных» линий – линий, соединяющих центр (точку пересечения медиан) поверхностного треугольника с противоположной ему верши-

ной. Действительно, пирамиду можно представить стопкой горизонтальных треугольников. Центр масс каждого треугольника лежит на пересечении медиан. Центры всех треугольников лежат на центральной линии  $ab$  (рис.2). Другая центральная линия  $cd$  соединяет вершину  $c$  с центром

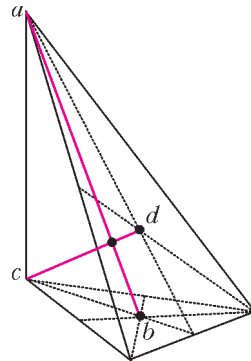


Рис. 2

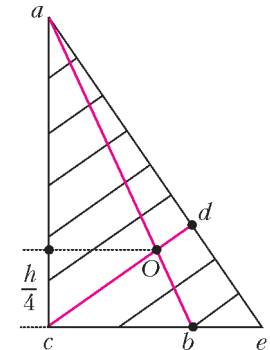


Рис. 3

бокового треугольника – точкой  $d$ . Для определения высоты центра масс рассмотрим пирамиду «в профиль» (рис.3). Расчертим «профиль» пирамиды (треугольник) линиями, параллельными центральной линии  $cd$  с шагом  $(ae)/9$ . При этом, очевидно, центральная линия  $ab$  разделится на 8 частей. Поскольку  $de = \frac{1}{3}ae$ ,  $be = \frac{1}{3}ce$ ,  $ob = \frac{1}{4}ab$ , то центр масс пирамиды и, соответственно, конуса лежит на высоте  $1/4$  высоты пирамиды  $h$ .

Далее расчеты будем проводить приближенно, полагая  $\pi \approx 3$  (в этом приближении запись результатов значительно упрощается). Координату центра масс воды в начальном состоянии определим следующим образом. Будем считать, что куб полностью залит водой, центр масс которой находится в центре куба на высоте  $R$ . Объем, занимаемый конусом, будем считать дополнительно залитым водой с отрицательной массой, ее центр масс находится на высоте  $R/2$ . Наложение положительной и отрицательной масс образует правильную «ворон-

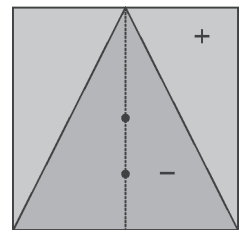


Рис. 4

<sup>1</sup> Автор решений задач Ф2529–Ф2532 – А.Власов. Приносим извинения за неправильное указание авторства при публикации условий этих задач.



ку» воды (рис.4). Ее центр масс находится на высоте

$$y_B = \frac{(2R)^3 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2R \cdot \frac{R}{2}}{(2R)^3 - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2R} \approx \frac{7}{6}R.$$

Объем воды равен

$$V_B = (2R)^3 - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2R = 2R^3 \left(4 - \frac{\pi}{3}\right) \approx 6R^3.$$

Высота уровня воды при поднятии конуса будет

$$h = \frac{V_B}{4R^2} = \frac{R}{2} \left(4 - \frac{\pi}{3}\right) \approx \frac{3}{2}R.$$

Работа внешних сил равна изменению потенциальной энергии системы (относительно дна аквариума):

$$A = \Delta E_{\text{п}} = \rho \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2R \cdot g \cdot \frac{3}{2}R + \rho_B \cdot 6R^3 \cdot g \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}R - \frac{7}{6}R\right) \approx 3 \left(\rho - \frac{5}{6}\rho_B\right) R^4 g.$$

Знак работы может быть различным в зависимости от соотношения плотностей конуса и воды.

Точный результат с использованием числа  $\pi$  выглядит достаточно громоздко:

$$A = R^4 g \left( \frac{\pi}{9}(12 - \pi) - \rho_B \frac{1}{18} \left( (12 - \pi)^2 - 6(24 - \pi) \right) \right).$$

**Ф2530.** На дне пустого колодца лежит груз массой  $m$ , к которому привязан невесомый упругий шнур длиной  $L$ , а второй конец шнура привязан к барабану на уровне его оси (рис.1). На шнуре на высоте  $9/10 L$  от дна колодца находится «метка». В начальный момент времени шнур не деформирован. Какую работу необходимо совершить для того, чтобы оторвать груз от дна колодца? Шнур при наматывании не проскальзывает относительно барабана (как бы прилипает к

нему). Известно, что при отрыве груза метка оказывается на высоте оси барабана.

Коэффициент упругости части шнура  $k_x$  связан с коэффициентом упругости всего шнура  $k$  соотношением

$$k_x = k \frac{L}{x}.$$

Запишем условие равновесия при отрыве груза от дна колодца:

$$mg = k \frac{L}{0,9L} \cdot 0,1L,$$

$$\text{или } 9mg = kL. \quad \text{Рис. 1}$$

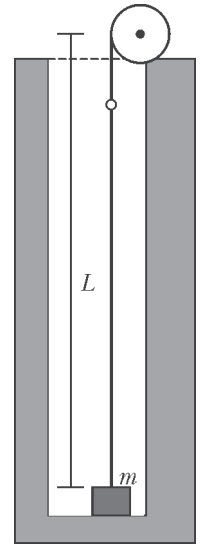
Далее сделаем приближенную оценку совершенной работы. Минимальная ее величина (заниженная) определяется работой при растяжении шнура от метки до оси барабана. Для этого беремся за метку на шнуре и перемещаем ее до оси барабана. «Работает» только часть шнура длиной  $0,9L$  (часть шнура длиной  $0,1L$  остается недеформированной), и

$$A_{\text{min}} = k \frac{L}{0,9L} \cdot \frac{(0,1L)^2}{2} = \frac{1}{20} mgL.$$

Максимальная величина работы (завышенная) определяется работой при деформации всего шнура до силы натяжения отрыва. Беремся за конец всего шнура и перемещаем его вверх до того момента, пока метка не окажется на уровне оси барабана. При этом сила натяжения шнура равна  $mg$ , и

$$A_{\text{max}} = \frac{(mg)^2}{2k} = \frac{1}{18} mgL.$$

Очевидно, что искомая величина работы при наматывании шнура на барабан лежит в интервале  $(1/20 - 1/18)mgL$ . Определим приближенно энергетическую поправку к минимальной величине работы. Будем считать, что часть шнура, намотанного на барабан, деформирована линейно, т.е. сила натяжения частей шнура линейно возрастала в процессе намотки от нуля до  $mg$



(рис.2,а). Энергия намотанного на барабан кусочка шнура длиной  $\Delta x$  равна

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{F^2}{2k_{\Delta x}} = \\ &= \frac{F^2}{2k \cdot \frac{L}{\Delta x}} = \frac{F^2}{2kL} \cdot \Delta x = \frac{1}{18mg} F^2 \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Полную энергию намотанной части шнура можно представить геометрически в виде

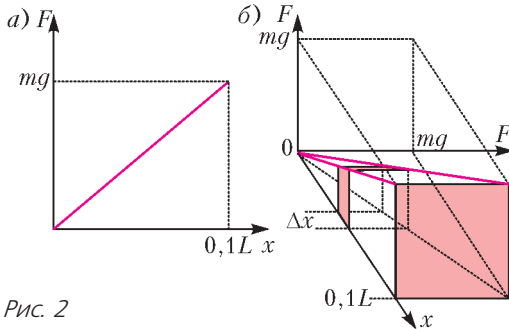


Рис. 2

объема пирамиды (рис.2,б). Представленная схема является «квадратичным» вариантом линейного графика силы, на нем две оси силы и одна ось намотанной длины шнура. Этот трехмерный график образует пирамиду, в основании которой «квадрат силы», так что  $F^2 \cdot \Delta x$  – объем кусочка пирамиды. Это выражение входит в формулу для  $\Delta E$ . Используя формулу объема пирамиды и формулу для  $\Delta E$ , получаем значение полной энергии деформации части шнура, намотанной на барабан:

$$E = \frac{1}{18mg} \cdot \frac{1}{3} (mg)^2 \cdot 0,1L = \frac{mgL}{540}.$$

Теперь можно записать величину работы с учетом приближенной величины поправки:

$$\begin{aligned} A &= \frac{mgL}{20} \left( 1 + \frac{1}{27} \right) = \frac{28}{540} mgL = \frac{7}{135} mgL \approx \\ &\approx 0,05185mgL = \frac{1}{19,29} mgL. \end{aligned}$$

В заключение получим точное решение и сравним его с приближенным. В ходе намотки шнура его элементы деформируются. Очевидно такое соотношение между длиной недеформированного элемента  $dx$  и его измененной длиной при деформации

$dy$ :

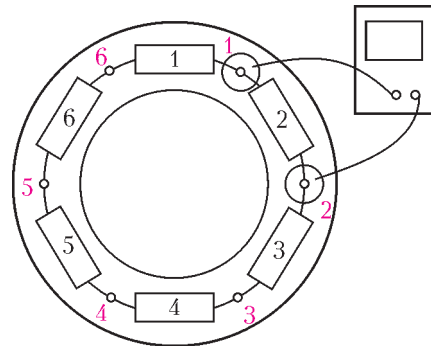
$$dy = dx \cdot \frac{L}{L-x},$$

где  $x$  – намотанная часть шнура. Работа определяется следующим интегралом:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{0,1L} k \frac{L}{L-x} \cdot x \cdot \frac{L}{L-x} dx = \\ &= 9mgL \int_0^{0,1L} \frac{-(L-x)+L}{(L-x)^2} dx = \\ &= 9mgL \left( \ln 0,9 + \frac{1}{9} \right) = \\ &= 0,051755mgL = \frac{1}{19,32} mgL. \end{aligned}$$

Видно, что отличие от приближенного значения есть, но оно небольшое.

**Ф2531.** В «сером» ящике находится кольцо из шести резисторов (см. рисунок). Поворотом специального шаблона в этом



ящике можно открывать выводы (точки соединения) только одного резистора и измерять прибором (омметром) сопротивление между этими точками. В ходе эксперимента были получены значения шести величин:  $R_{12}, R_{23}, R_{34}, R_{45}, R_{56}, R_{61}$  (второй индекс соответствует номеру резистора). Определите по этим данным истинные значения сопротивлений всех шести резисторов.

Обозначим экспериментально измеренные величины символами  $X_j = R_{ij}$ . Для этих величин можно записать

$$X_i = \frac{R_i \cdot \sum_{j \neq i} R_j}{R_i + \sum_{j \neq i} R_j}.$$



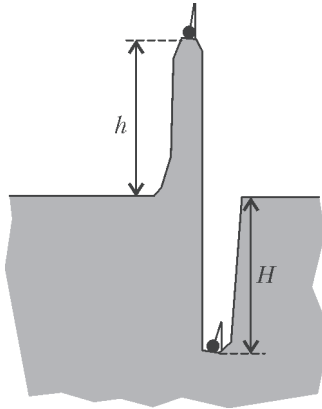


Рис. 1

Введем обозначения  $\alpha = \frac{h}{R}$  и  $\beta = \frac{H}{R}$ , где  $R$  – радиус Земли. Ускорение свободного падения вне шара Земли, а именно на вершине горы, определяется формулой (без поправки на вращение)

$$g_h = G \frac{M}{(R+h)^2} = G \frac{M}{R^2(1+\alpha)^2} = \frac{g}{(1+\alpha)^2},$$

где  $g$  – ускорение на поверхности Земли. На дне шахты ускорение свободного падения определяется «ядром» Земли – шаром радиусом  $r = R - H$ :

$$g_H = G \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = G \frac{M}{R^2} \left(1 - \frac{H}{R}\right) = g(1-\beta).$$

Приравниваем ускорения на вершине горы и на дне шахты:

$$\frac{g}{(1+\alpha)^2} = g(1-\beta).$$

После преобразования получаем точное соотношение между  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2} = 1-\beta, \text{ и } \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta}} - 1.$$

График этого соотношения представлен на рисунке 2 (красная линия). Точка пересечения графика с линией  $\alpha = \beta$  (синяя

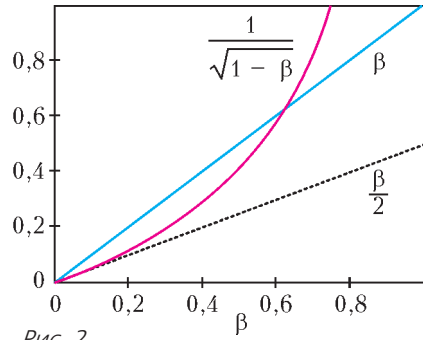


Рис. 2

линия) разделяет области различного соотношения между  $\alpha$  (высотой горы) и  $\beta$  (глубиной колодца). При малых величинах  $\alpha \ll 1$  и  $\beta \ll 1$  получаем

$$\frac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)^2(1-\alpha)^2} = (1-\beta), \quad (1-\alpha)^2 = 1-\beta, \\ 1-2\alpha+\alpha^2 = 1-\beta, \quad 2\alpha = \beta, \quad h = \frac{H}{2},$$

т.е. глубина шахты в 2 раза больше высоты горы. Действительно, подъем в горы быстрее снижает ускорение свободного падения, чем спуск в шахту (пунктирная линия на графике).

Интересно, что синхронизация маятников при равенстве высоты горы глубине шахты соответствует значению «золотого сечения». После решения уравнения

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2} = 1-\alpha \text{ получаем} \\ \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

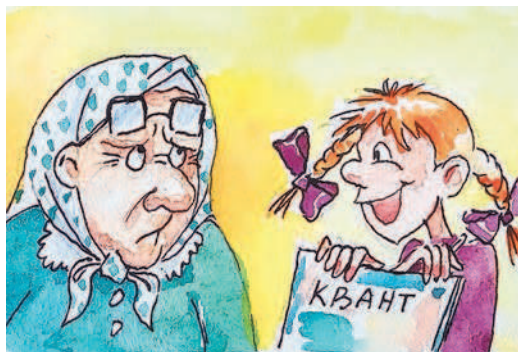
*Примечание.* Земля на самом деле не является однородным шаром, и при погружении на глубину более 3000 км ускорение свободного падения не падает, а наоборот растет. Однако современные технологии бурения еще не позволяют «добуриться» до такой глубины.



## Задачи

1. Впишите в следующее предложение какое-нибудь числительное (не цифрами, а словом или словами), чтобы утверждение было верным: «В этом предложении \_\_\_\_\_ гласных букв».

*А.Антропов*



2. Разрежьте прямоугольник  $3 \times 5$  и квадрат  $1 \times 1$  на две равные части каждый так, чтобы из полученных четырех частей можно было сложить квадрат.

*Фольклор*



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Задача 1 предлагалась на ХLI Турнире имени М.В.Ломоносова, задачи 2–4 – на XXIV Турнире математических боев имени А.П.Савина.

3. Сто спортсменов заняли места с 1-го по 100-е. После того, как некоторые из них были дисквалифицированы за допинг, все остальные передвинулись на различное количество мест. Каково наименьшее возможное количество дисквалифицированных?

*С.Токарев*



4. В турнире матбоев участвовали команды пятых классов и команды шестых классов. Пятиклассники выиграли на 7 боев больше и проиграли на 13 боев больше, чем шестиклассники. Кто выиграл больше боев между командами пятого и шестого классов и на сколько: пятиклассники или шестиклассники?

*С.Токарев*



# Геометрия клетчатой бумаги

А. ОНОПРИЕНКО

**М**Ы РАССКАЖЕМ ОБ ОДНОМ ИНТЕРЕСНОМ сюжете, подготовленном по материалам математических кружков при Московском педагогическом государственном университете (МПГУ).<sup>1</sup>

Обычный листочек в клетку таит в себе много неожиданностей. Мы обсудим несколько задач, построения в которых производятся на клетчатой плоскости. Как и в стандартных задачах на построение, можно пользоваться линейкой без делений, чтобы проводить прямые, но циркуль нам совершенно не понадобится. Как правило, именно циркуль, а не линейка, позволяет в задачах на построение «измерять» отрезки (не находить их длину, а строить отрезок, равный данному, например). Здесь же измерительным инструментом является сама плоскость!

Заглавными буквами  $A, B, C, \dots$  во всех задачах обозначены узлы клетчатой бумаги. Сторону одной клетки принимаем за 1. Начнем наше путешествие с одной простой задачи-исследования.

**Задача 1.** а) На клетчатой бумаге проведен отрезок  $AB$ , не проходящий по сторонам клеток, и отмечена точка  $C$ . Отметьте узел  $D$  такой, что  $AB = CD$ . б) Постройте все такие отрезки. Сколько их получилось?

На рисунке 1 представлены разные варианты отрезков  $AB$ . Постарайтесь решить задачу для каждого из этих вариантов. Точку  $C$  можете выбирать в каком угодно узле (из нашего решения будет следовать, что ее расположение не важно).

<sup>1</sup> Кружки открыты с 2016 года, а в этом году они получили поддержку Департамента образования города Москвы в рамках мероприятия «Детский университет МПГУ (организация работы кружков для московских школьников на базе МПГУ)». Более подробная информация о кружках есть на сайте [mathcircles.mpgu.org](http://mathcircles.mpgu.org)



Рис. 1

**Решение.** а) Построим прямоугольный треугольник по сторонам сетки, одна из сторон которого – отрезок  $AB$  (вообще говоря, это можно сделать двумя способами, но зафиксируем один из них). Затем перенесем этот треугольник в точку  $C$ . Та сторона этого треугольника, которая не идет по сторонам сетки, будет равна отрезку  $AB$ , так как треугольники равны по двум катетам. Это и будет искомым отрезок  $CD$  (рис.2,а).

Это же решение годится для любого другого отрезка  $AB$ .

б) Вообще говоря, в пункте а) можно было бы не строить треугольник, а внимательно рассмотреть отрезок  $AB$ . Для того чтобы попасть в точку  $B$ , мы должны от точки  $A$  пройти на 5 клеток вправо и на 2 клетки вверх (эти числа приведены для первого отрезка, для других отрезков количество клеток будет другим). Если пройти от точки  $C$  на 5 клеток в одном направлении и на 2 клетки в перпендикулярном

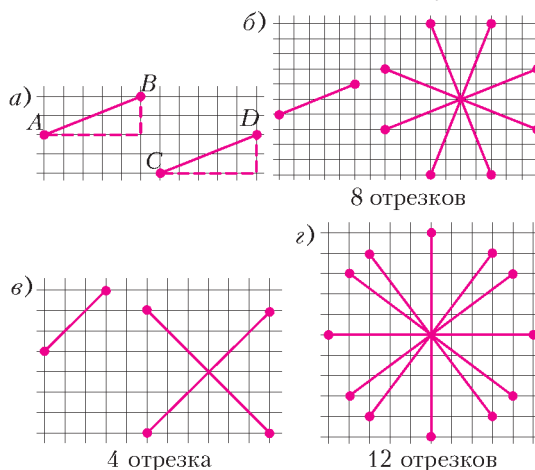


Рис. 2

изначальному направлению, то все отрезки, которые мы при этом получим, будут равны  $AB$ . В общем случае мы проходим  $n$  клеток в одном направлении и  $m$  клеток в перпендикулярном ему. Всего получается 8 отрезков: проходим  $n$  клеток в одном из четырех направлений вниз-влево-вверх-вправо и далее проходим  $m$  клеток в одном из двух перпендикулярных направлений (рис.2,б). При  $n = m$  (когда отрезок  $AB$  проходит под углом  $45^\circ$  к линиям сетки) равных отрезков получится не 8, а 4 штуки (из исходных 8 отрезков каждая соответствующая пара будет «сливаться» в один отрезок; рис.2,в).

Третий случай на рисунке 1 отличается от первых двух тем, что помимо указанных ранее восьми отрезков можно построить еще четыре. Если вспомнить теорему Пифагора, то окажется, что  $4^2 + 3^2 = 5^2$ , т.е. длина третьего отрезка равна 5. Поэтому в данном случае добавится еще 4 отрезка, идущих по сторонам клеток (рис.2,г).

Обратите внимание, что на рисунке 2 приведены все возможные отрезки, равные исходным. Действительно, опять применим теорему Пифагора и заметим, что числа  $5^2 + 2^2 = 29$ ,  $3^2 + 3^2 = 18$  и  $4^2 + 3^2 = 25$  не представляются по-другому в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

*Замечание.* Вообще говоря, отрезков может быть больше двенадцати, если число представимо в виде суммы двух квадратов более чем одним способом. Например, шестнадцать (скажем,  $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$  – из одной точки выходят два пучка по 8 отрезков, и все они равны друг другу), двадцать (к примеру,  $65^2 = 16^2 + 63^2 = 33^2 + 56^2$  – помимо двух пучков из 8 отрезков добавляется 4 отрезка, идущих по сторонам клеток) и т.д.

**Задача 2.** Незнайка нарисовал на клетчатой бумаге квадрат  $ABCD$  с вершинами в узлах сетки, стороны которого не проходят по сторонам клеток, а потом все стер, оставив только точки  $A$  и  $B$  (рис.3). Восстановите рисунок Незнайки. Сколько решений имеет задача?

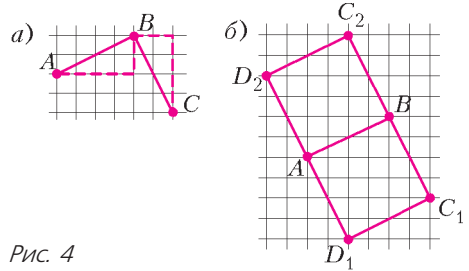
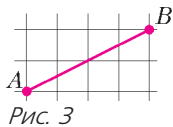


Рис. 4

Сначала необходимо научиться строить перпендикуляр к отрезку. Как в предыдущей задаче, строим прямоугольный треугольник, одной из сторон которого будет отрезок  $AB$ , а затем поворачиваем его на угол  $90^\circ$  (рис.4,а). Если посмотреть на клеточки, то мы увидим, что точка  $B$  из точки  $A$  получается так: надо пройти 4 клеточки вправо и 2 клеточки вверх, а точка  $C$  получается из точки  $B$  так: надо пройти те же самые расстояния, но в направлениях, перпендикулярных исходным, т.е. 2 клеточки вправо и 4 клеточки вниз. Далее строим перпендикуляры еще два раза, каждый раз к новой стороне. Задача имеет два решения, так как первый отрезок  $BC$  можно было построить двумя способами (рис.4,б).

Мы разобрали решение задачи на конкретном примере. Нетрудно понять, что в других случаях происходит то же самое.

**Задача 3.** Постройте середину отрезка  $AB$ , не идущего по сторонам клеток.

В некоторых случаях построить середину отрезка на клетчатой бумаге очень легко. Рассмотрим отрезок  $AB$ : пусть от одного его конца до другого необходимо пройти  $a$  клеток вправо или влево и  $b$  клеток вверх или вниз. Если оба числа  $a$  и  $b$  четные, то середина  $AB$  попадает в узел (рис.5,а), от которого до каждого конца отрезка необходимо пройти  $\frac{a}{2}$  клеток в одном направлении и  $\frac{b}{2}$  в другом.

Если же одно из чисел  $a$  и  $b$  четное, а другое нет, пусть четным является число  $a$ , то середину отрезка  $AB$  можно найти, пройдя  $\frac{a}{2}$  клеток вправо (или влево) и найдя пересечение отрезка с этой вертикальной линией сетки (рис.5,б).

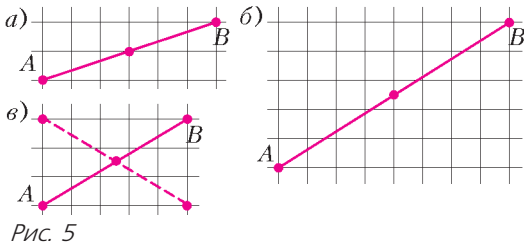


Рис. 5

Если оба числа  $a$  и  $b$  нечетные, то поступим следующим образом (рис.5,в). Отрезок  $AB$  является диагональю прямоугольника  $a \times b$  с вершинами в узлах сетки. Проведя вторую диагональ и найдя точку пересечения с отрезком  $AB$ , получим искомую середину.

Заметим, что этот метод годится для любых чисел  $a$  и  $b$ , а не только нечетных.

Подумайте дополнительно, как построить середину отрезка, идущего по сторонам клеток. (Если длина этого отрезка четная, то середина просто попадает в узел. А если нечетная?)

Перейдем теперь к подсчету площадей на клетчатой бумаге.<sup>2</sup>

**Задача 4.** Найдите площадь треугольников, изображенных на рисунке 6. Подумайте, как это сделать для произвольных треугольников с вершинами в узлах сетки.

а) Достроим прямоугольный треугольник до прямоугольника (рис.7,а). Если

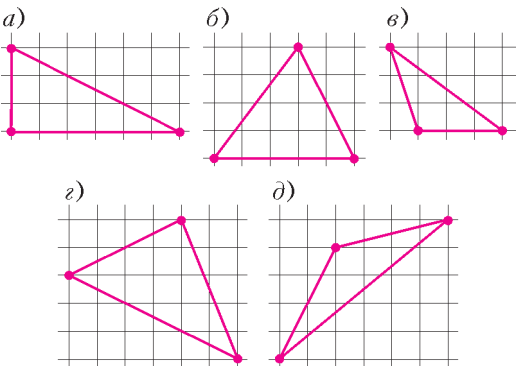


Рис. 6

<sup>2</sup> В общем случае для вычисления площади многоугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги можно использовать формулу Пика (см. например, статью Г.Мерзона «Формула Пика и тающий лед» в «Кванте» №9 за 2018 г.). – Прим. ред.

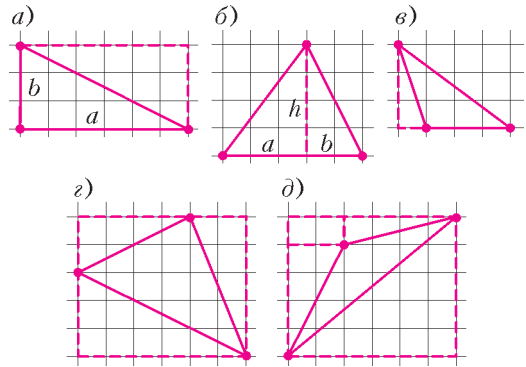


Рис. 7

$a$  и  $b$  – стороны прямоугольника, то его площадь равна  $a \cdot b$ , а площадь данного прямоугольного треугольника равна

$$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9.$$

б), в) Проведем высоту в треугольнике, падающую на сторону, проходящую по сторонам клеток, или на ее продолжение (рис.7,б,в). Площадь нашего треугольника равна сумме либо разности площадей двух прямоугольных треугольников (в зависимости от того, падает высота на сторону треугольника или же на ее продолжение). Проведем подсчеты. Для случая б) (сумма площадей) площадь треугольника

$$\text{равна } \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{2} = 10,$$

$$\text{для случая в) (разность площадей) площадь треугольника равна } \frac{4 \cdot 3}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2} = 4,5.$$

В общем случае площадь треугольника равна  $\frac{a \cdot h}{2} \pm \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(a \pm b) \cdot h}{2}$ , причем заметим, что  $a \pm b$  – сторона нашего треугольника, т.е. мы получили правильную формулу.

г), д) Опишем вокруг данного треугольника прямоугольник (рис.7,г,д). Заметим, что площадь треугольника получается так: вычитаем из площади прямоугольника, площади всех лишних кусочков, которые могут быть прямоугольными треугольниками (случай г) или прямоугольными треугольниками и прямоугольниками (случай д). Вычислим эти площади. Случай г):  $6 \cdot 5 - \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 5}{2} - \frac{3 \cdot 6}{2} = 12,$



$$\text{случай д): } 6 \cdot 5 - 1 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{1 \cdot 4}{2} - \frac{5 \cdot 6}{2} = 7.$$

### Задачи для самостоятельного решения

5. На клетчатой бумаге проведен отрезок  $AB$ , не проходящий по сторонам клеток. Постройте наибольшее число равносторонних треугольников  $ABC$  с основанием  $AC$ . Решите задачу для двух отрезков, изображенных на рисунке 8.

6. На клетчатой бумаге проведен отрезок  $AB$ , не проходящий по сторонам клеток. Постройте угол  $ABC$ , равный  $45^\circ$ .

7. На клетчатой бумаге в ее узлах отмечены две точки. Постройте квадрат, для которого данные две точки являются противоположными вершинами.

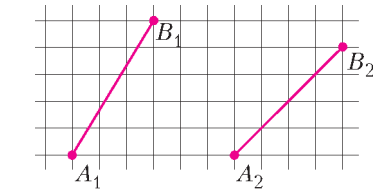


Рис. 8

8. а) Опираясь на построение предыдущей задачи, постройте серединный перпендикуляр к данному отрезку. б) Как построить центр окружности, описанной вокруг данного треугольника?

9. Нарисуйте квадрат с вершинами в узлах сетки площадью: а) 10; б) 17; в) 26 клеток.

## КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

*Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».*

*Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.*

*Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest*

*Желаем успеха!*

9. Электронные часы показывают часы и минуты. Вася подошел к часам и заметил, что сейчас на них палиндром – время выглядит как  $AB:BA$ . Он решил подождать, когда это повторится, но, просидев 4 часа, так и не увидел второго палиндрома. А сколько ему еще осталось ждать?

*Ю.Маркелов*

10. Докажите, что любое целое число, не меньшее 12, можно записать как сумму двух составных чисел.

*И.Митрофанов*

11. На столе лежит картонный треугольник  $ABC$ . С ним несколько раз делают следующую операцию. Выбирают его вершину, обозначим ее  $X$ , переворачивают треугольник и кладут его так, чтобы точка  $X$  попала на том же место, что и раньше,

и угол  $X$  треугольника совпал со своим предыдущим положением. Обозначим такую операцию  $P_X$ . Докажите, что после последовательности операций  $P_A, P_B, P_C, P_A, P_B, P_C$  треугольник займет первоначальное положение.

*В.Расторгуев*

12. В клетки прямоугольника  $2 \times n$  записывают числа  $1, 2, \dots, 2n$  (в каждую клетку – по одному числу). Сначала в левую нижнюю угловую клетку записывают число 1, затем в одну из соседних клеток – число 2, потом в одну из соседних с ранее занятыми – 3 и т.д.; все последующие числа записывают в клетки, соседние с ранее занятыми. Докажите, что существует ровно  $2^{n-1}n!$  способов заполнить таблицу.

*В.Расторгуев*

# Окружность десяти точек вписанного четырехугольника

М.НСАНБАЕВ

ИЗВЕСТНО, ЧТО В ЛЮБОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с его ортоцентром, лежат на одной окружности, которая называется *окружностью Эйлера* или *окружностью девяти точек* треугольника. Аналогом окружности девяти точек для вписанного четырехугольника можно назвать окружность, о которой говорится в следующей задаче, предложенной в 2011 году на VII Международной Жаутыковской олимпиаде (Казахстан):

Диагонали вписанного четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $K$ , точки  $M$  и  $N$  – середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  соответственно. Описанные окружности треугольников  $ADM$  и  $BCN$  пересекаются в точках  $M$  и  $L$ . Докажите, что точки  $K, L, M$  и  $N$  лежат на одной окружности (все эти точки предполагаются различными).

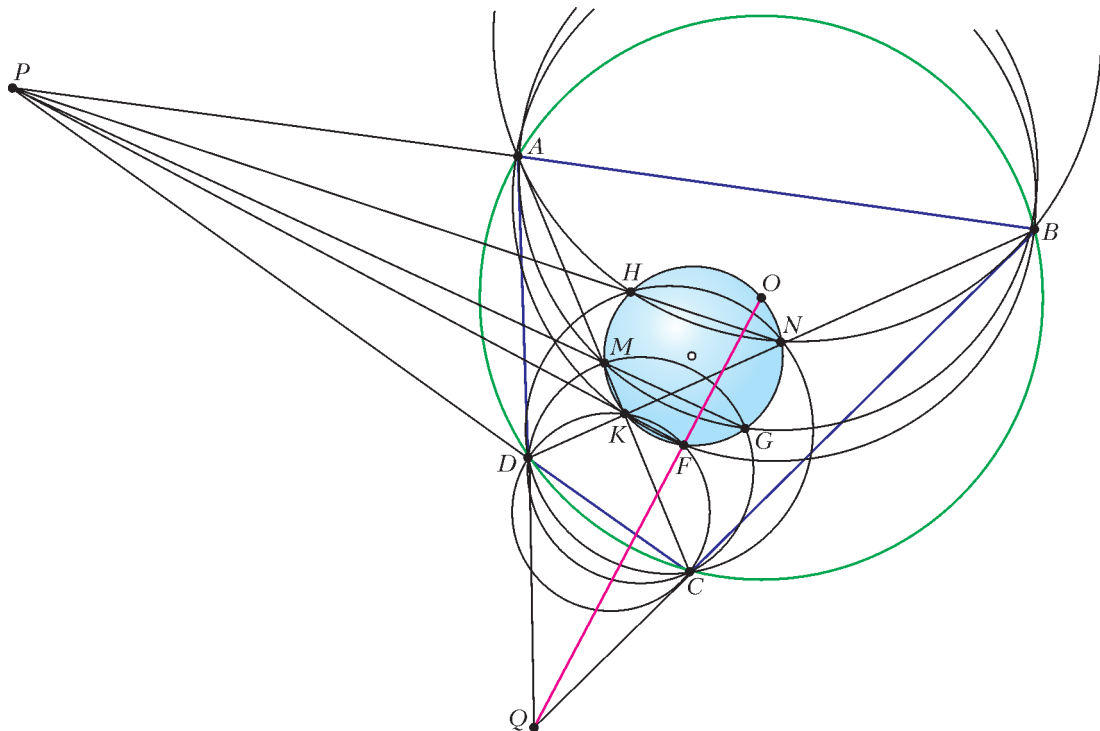
В данной статье мы покажем, что на этой окружности, в дальнейшем будем обозначать ее  $\mu$ , помимо точек  $K, L, M$  и  $N$  лежат еще шесть точек. Это позволяет назвать ее *окружностью десяти точек вписанного четырехугольника*.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$\omega(ABC)$  – описанная окружность треугольника  $ABC$ ;

$S(X)$  – степень точки  $X$  (см. [2]) относительно  $\omega(ABC)$ .

**Основная теорема.** Пусть  $ABCD$  – вписанный четырехугольник (см. рисунок),  $M$  и  $N$  – середины его диагоналей,  $K$  – точка пересечения его диагоналей,  $O$  – центр описанной окружности  $ABCD$ . Пусть точки  $F, G, H$  – вторые точки пересечения



# Замощения сферы и архимедовы многогранники

(Начало см. на с. 9)

**Случай 1:**  $k = 3$ . Переменные  $n_1, n_2, n_3$  входят в (\*) симметрично, поэтому будем считать, что  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ . Тогда  $\frac{1}{n_1}$  составляет хотя бы треть от всей суммы:  $\frac{1}{n_1} > \frac{1}{3} \left( \frac{k}{2} - 1 \right) = \frac{1}{6}$ . Отсюда  $n_1$  равно 3, 4 или 5.

**Случай 1.1:**  $n_1 = 3$ . Применим ту же оценку к  $n_2$ :  $\frac{1}{n_2} \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \right) > \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{12}$ . Отсюда  $3 \leq n_2 < 12$ . Если  $n_2 \neq n_3$ , то  $n_1$  должно быть четным: вокруг  $n_1$ -угольника чередуются  $n_2$ - и  $n_3$ -угольники. Для нечетного  $n_1 = 3$  получаем  $n_3 = n_2$ , что сокращает перебор. Если  $n_2$  тоже нечетно, то  $n_1 = n_3$ , т.е.  $n_1 = n_2 = n_3 = 3$  — это *тетраэдр* (рис.1).

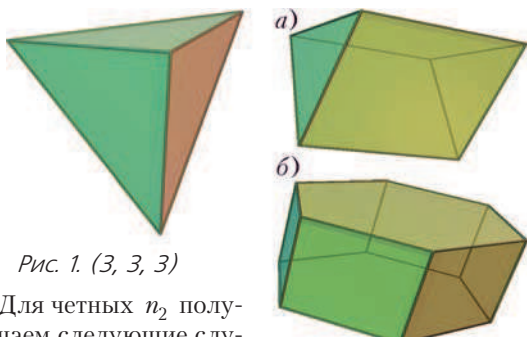


Рис. 1. (3, 3, 3)

Для четных  $n_2$  получаем следующие случаи, все они реализуются в виде полуправильных многогранников (на рисунках используем запись  $(n_1, n_2, n_3)$ ): правильная треугольная *призма* (рис.2,а;  $n_3 = 4$ ); *усеченный тетраэдр* (рис.

Рис. 2. (3, 4,  $n_3$ )

3); *усеченный куб* (рис. 4); *усеченный додекаэдр* (рис. 5).

**Случай 1.2:**  $n_1 = 4$ . Тогда  $\frac{1}{n_2} \geq \frac{1}{8}$ , откуда  $4 \leq n_2 < 8$ . Если  $n_2$  равно 5 или 7, то по соображению четности  $n_3 = n_1 = 4$ , что противоречит условию  $n_2 \leq n_3$ . Остаются случаи  $n_2 = 4$  и  $n_2 = 6$ . При  $n_2 = 4$  условие (\*) не ограничивает  $n_3$  — и для любого  $n_3$  есть многогранник! Это правильная  $n_3$ -угольная призма (рис.2,б;  $n_3 = 6$ ). При  $n_2 = 6$  получаем  $\frac{1}{n_3} > \frac{1}{12}$ , откуда  $6 \leq n_3 < 12$ . Отсекаем нечетные  $n_3$  (для них было бы  $n_1 = n_2$ , что не так); остальные случаи реализуются: *куб* (рис.6); *усеченный октаэдр* (рис.7); *ромбоусеченный кубооктаэдр* (рис.8); *ромбоусеченный икосододекаэдр* (рис.9).

**Случай 1.3:**  $n_1 = 5$ . Неравенство (\*) дает оценку  $n_2 < 7$ , а по соображениям четности  $n_3 = n_2$ . Получаются два случая: *додекаэдр* (рис. 10); *усеченный икосаэдр*<sup>1</sup> (рис.11).

**Случай 2:**  $k = 4$ . При  $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$  из (\*) получаем  $\frac{1}{n_1} > \frac{1}{4} \left( \frac{k}{2} - 1 \right) = \frac{1}{4}$ , и  $n_1 = 3$ . Далее,  $\frac{1}{n_2} > \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{9}$ , и  $n_2$  равно 3 или 4.

**Случай 2.1:**  $n_2 = 3$ . Тогда  $\frac{1}{n_3} < 6$ , откуда  $n_3$  равно 3, 4 или 5. Если  $n_3 = 3$ , то при любом  $n_4$  получается похожая на барабан *антипризма*: на рисунке 12,б изображена

<sup>1</sup> Форму усеченного икосаэдра имеет молекула фуллерена  $C_{60}$ , а также футбольный мяч.

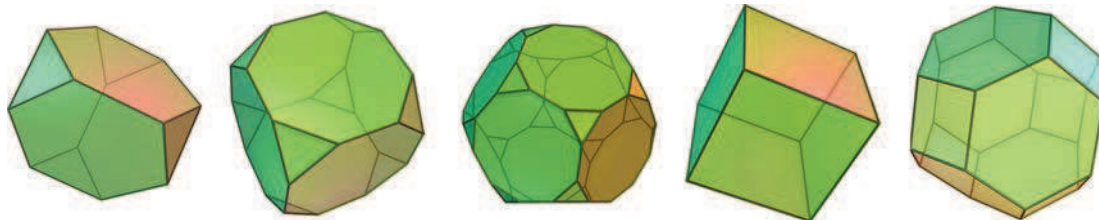


Рис. 3. (3, 6, 6)

Рис. 4. (3, 8, 8)

Рис. 5. (3, 10, 10)

Рис. 6. (4, 4, 4)

Рис. 7. (4, 6, 6)



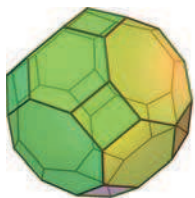


Рис. 8. (4, 6, 8)

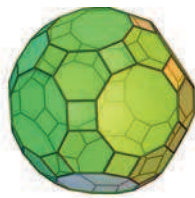


Рис. 9. (4, 6, 10)

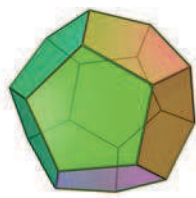


Рис. 10. (5, 5, 5)

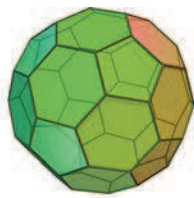


Рис. 11. (5, 6, 6)

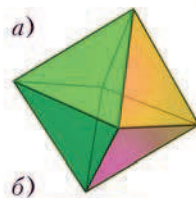


Рис. 12. (3, 3, 3, n<sub>4</sub>)

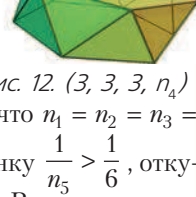


Рис. 12. (3, 3, 3, n<sub>4</sub>)

антипризма с  $n_4 = 6$ . **Октаэдр** (рис.12,а) – тоже антипризма, но при  $n_4 = 3$ . При  $n_3 = 4$  или 5 опять пользуемся четностью. У каждого узла ровно два треугольника. Если они напротив друг друга, то  $n_3 = n_4$  по четности; иначе мозаика не сложится. Получаются два случая (порядок чисел на рисунках соответ-

**Случай 3:**  $k = 5$ .  
Опять предполагаем  $n_1 \leq \dots \leq n_5$  и из (\*) Рис. 12. (3, 3, 3, n<sub>4</sub>) последовательно получаем, что  $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 3$ . Для  $n_5$  имеем оценку  $\frac{1}{n_5} > \frac{1}{6}$ , откуда  $n_5$  равно 3, 4 или 5. Все три случая



Рис. 13. (3, 4, 3, 4)

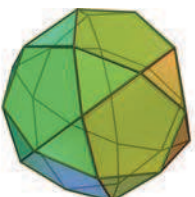


Рис. 14. (3, 5, 3, 5)

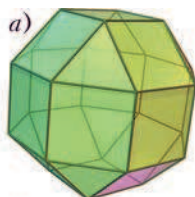


Рис. 15. (3, 4, 4, 4)

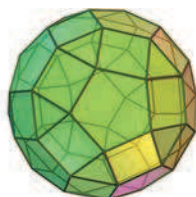


Рис. 16. (3, 4, 5, 4)

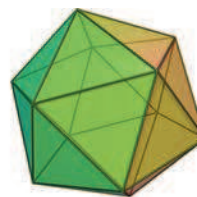


Рис. 17. (3, 3, 3, 3, 3, 3)

ствует порядку многоугольников при вершине): **кубооктаэдр** (рис. 13); **икосододекаэдр** (рис.14).

**Случай 2.2:**  $n_2 = 4$ . Оценки здесь таковы:  $\frac{1}{n_3} > \frac{5}{24}$ , откуда  $n_3 = 4$ ;  $\frac{1}{n_4} > \frac{1}{6}$ , и  $n_4$  равно 4 или 5. Оба случая реализуются: **ромбокубооктаэдр** (рис. 15,а); **ромбоикосододекаэдр** (рис.16).

У ромбокубооктаэдра при этом есть собрат – **псевдоромбокубооктаэдр**, с такими же гранями и так же устроенными вершинами, но как бы перекрученный (рис. 15,б). В отличие от остальных полуправильных многогранников, он не обладает глобальной симметрией: его вершину не получится перевести в любую другую вращением. Поэтому псевдоромбокубооктаэдр не всегда относят к архимедовым телам. Интересно, что этот многогранник не был известен в античности, а открыли его только в XX веке независимо Д.Соммервиль, Д.Миллер и В.Г.Ашкингузе.<sup>2</sup>

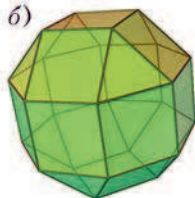


Рис. 15. (3, 4, 4, 4)

реализуются: **икосаэдр** (рис.17); **курносый куб** (рис.18); **курносый додекаэдр** (рис.19). Последние два многогранника не обладают зеркальной симметрией и появляются в двух вариантах («правом» и «левом»).

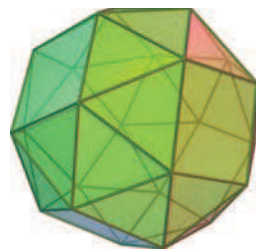


Рис. 18. (3, 3, 3, 3, 4)

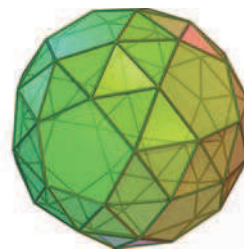


Рис. 19. (3, 3, 3, 3, 5)

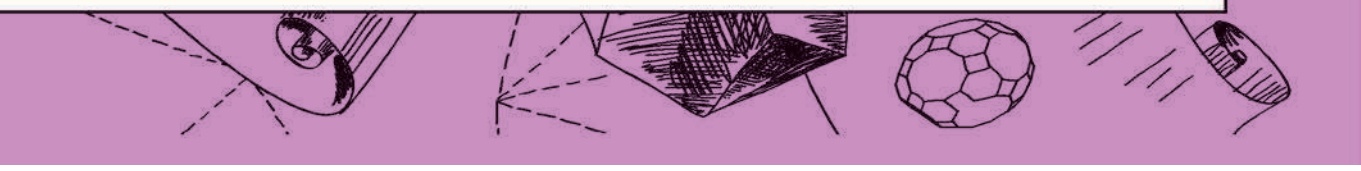
**Вопросы для самостоятельного размышления**

1. Мы предполагали, что у каждого многоугольника есть хотя бы три угла. Но на сфере бывают и двуугольники! Что получится, если разрешить и их использовать в замощениях?

2. Все упомянутые многогранники вписаны в сферу – мы и получали их из замощений сферы. А бывают ли полуправильные многогранники, вписать которые в сферу невозможно?

Материал подготовил С.Кузнецов

<sup>2</sup> В.Г.Ашкингузе. О числе полуправильных многогранников // Математическое просвещение, 2-я серия, вып.1 (1957), с.107–118.



$\omega(ABK)$  с  $\omega(CDK)$ ,  $\omega(ABM)$  с  $\omega(CDM)$  и  $\omega(ABN)$  с  $\omega(CDN)$  соответственно. Тогда точки  $M, N, K, O, F, G, H$  лежат на окружности  $\mu$ , диаметром которой будет отрезок  $OK$ .

(Заметим, что утверждение теоремы справедливо и для любых других расположений точек  $A, B, C, D$  на окружности.)

Перед доказательством основной теоремы напомним несколько фактов. Их доказательства можно прочитать в статьях [1] и [2].

1) Пусть в окружность с центром  $O$  вписан четырехугольник. Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ , а диагонали – в точке  $K$ . Тогда каждая из четырех точек  $O, P, Q, K$  является ортоцентром треугольника, образованного тремя другими точками. [1]

2) Для двух неконцентрических окружностей геометрическим местом точек  $P$  таких, что степени точки  $P$  относительно обеих окружностей равны, является прямая, которая называется радикальной осью этих окружностей. [2]

3) Для любых трех попарно неконцентрических окружностей их попарные радикальные оси пересекаются в одной точке. [2]

**Доказательство основной теоремы.** Пусть  $\omega(ABK)$  пересекает  $\omega(CDK)$  в точках  $K$  и  $F$ . Тогда прямые  $AB, CD, KF$  пересекаются в точке  $P$ , так как  $AB$  – радикальная ось окружностей  $\omega(ABK)$  и  $\omega(ACD)$ ,  $CD$  – радикальная ось окружностей  $\omega(CDK)$  и  $\omega(BCD)$ ,  $KF$  – радикальная ось окружностей  $\omega(ABK)$  и  $\omega(CDK)$ . Следовательно, выполняется равенство  $S(P) = PK \cdot PF = PA \cdot PB$ . Аналогично,  $S(P) = PM \cdot PG = PN \cdot PH$ , где  $G$  и  $H$  – вторые точки пересечения окружностей  $\omega(ABM), \omega(CDM)$  и  $\omega(ABN), \omega(CDN)$  соответственно. Так как  $PM \cdot PG = PN \cdot PH = PK \cdot PF$ , получаем, что точки  $M, N, K, F, G, H$  лежат на одной окружности, причем точка  $O$  также лежит на ней, поскольку  $OM$  и  $ON$  перпендикулярны  $AC$  и  $BD$  соответственно. Из этого следует, что  $M$  и  $N$  лежат на окружности с диаметром  $OK$ , значит, и точки  $F, G, H$  лежат на этой окружности. Аналогично доказываются, что также на окружности  $\mu$  лежат точки пересечения окружностей  $\omega(ADK)$  с  $\omega(BCK)$ ,  $\omega(ADM)$  с  $\omega(BCM)$  и  $\omega(ADN)$  с  $\omega(BCN)$

соответственно. Исходя из этого, мы и назвали ее окружностью десяти точек.

#### Дополнительные полезные свойства

**1.** Если  $T$  – любая точка на окружности  $\mu$ , то  $\omega(ABT)$  во второй раз пересекает  $\omega(CDT)$  на окружности  $\mu$ .

В самом деле, пусть прямая  $PT$  пересекает  $\mu$  в точке  $T'$ . Тогда

$$PC \cdot PD = PA \cdot PB = S(P) = PK \cdot PF = PT \cdot PT',$$

т.е. точки  $T$  и  $T'$  лежат на  $\mu$  и являются пересечениями  $\omega(ABT)$  и  $\omega(CDT)$ .

**2.** Прямая  $OQ$  пересекает прямую  $PK$  в точке  $F$ .

Так как прямая  $PK$  – поляра точки  $Q$ , прямая  $OQ$  перпендикулярна прямой  $PK$ . Заметим, что  $\angle OFP = \angle OFK = 90^\circ$ , поскольку  $OK$  – диаметр, а точка  $F$  лежит на окружности  $\mu$ . Получаем, что прямая  $OF$  перпендикулярна  $PK$ , как и прямая  $OQ$ . Тогда  $O, F, Q$  лежат на одной прямой.

**3.** Треугольники  $PMS$  и  $PNB$  подобны.

Это следует из подобия треугольников  $PAC$  и  $PDB$  и равенства отношений

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NB}.$$

В заключение предлагаем читателям три задачи для самостоятельного решения.

**1** (Турнир городов, 2015/16). Дан вписанный четырехугольник  $ABCD$ . Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Пусть  $K$  и  $N$  – середины диагоналей. Докажите, что сумма углов  $PKQ$  и  $PNQ$  равна  $180^\circ$ .

**2** (Олимпиада Боснии и Герцеговины). Пусть четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром  $O$ , а его диагонали пересекаются в точке  $K$ . Возьмем произвольную точку  $P$  на окружности с диаметром  $OK$ . Докажите, что прямая, проходящая через центры  $\omega(ABP)$  и  $\omega(CDP)$ , делит  $OK$  пополам.

**3** (Олимпиада Казахстана, 2017/18, областной этап). Диагонали  $AC$  и  $BD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Точки  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  выбраны на отрезках  $AO, BO, CO$  и  $DO$  соответственно так, что  $AA_1 = CC_1, BB_1 = DD_1$ . Пусть  $\omega(AOD) \cap \omega(BOC) = M, \omega(AOB) \cap \omega(COD) = N, \omega(A_1OB_1) \cap \omega(C_1OD_1) = P$ . Докажите, что точки  $M, N, P$  и  $Q$  лежат на одной окружности.

#### Литература

1. Г.Багдасарян. Поляры и Теорема Паппа. – «Квант», 2000, №3.
2. В.Протасов. Касающиеся окружности: От Тебо до Фейербаха. – «Квант», 2008, №4.



# Акустический резонанс

**М. СТАРШОВ**

**О**ДНО ИЗ ВАЖНЕЙШИХ ДОСТИЖЕНИЙ XX века – это понимание роли обратных связей в сложных системах. Конечно, неосознанно ими пользуется любой живой организм, да и в своей практике технической деятельности человек использовал их в разное время и в разных конструкциях; классический пример – регулятор в паровой машине Джеймса Уатта. И наоборот, незнание или пренебрежение положительными и отрицательными обратными связями неизбежно приводит к серьезным авариям.

Самые близкие примеры обратных связей мы можем увидеть в часах, маятнике или качелях, но особенно наглядно – в музыке. Именно в наблюдениях за звуком родилось понятие резонанса, а у древних римлян это слово означало просто отзвук. Издавать звук способен и щепка, и натянутая нить, и даже травинка, но гораздо громче и богаче они звучат при добавлении к ним некоторого объема воздуха – резонатора. Например, многие дети «раньше времени» делали телефон из нитки с какими-нибудь коробочками, а люди моего поколения помнят рупоры на волжских пароходах. Не могу удержаться от упоминания забавного эпизода с огромным самодельным рупором американского мальчика Роберта Вуда, ставшего впоследствии выдающимся физиком и которому посвящена великолепная книга В.Сибрука «Роберт Вуд. Современный чародей физической лаборатории»:

*«... Другим образцом шалостей, особенно подходящим к характеру Вуда, была шутка с дверными звонками нового дома, который был выстроен недалеко от Латинской школы, где Роб умирал от скуки. Было что-то привлекательное в длинном ряде переговорных трубок с кнопками внизу в вестибюле. Однажды Робу пришла в голову идея, что очень просто «замкнуть накоротко» эти трубки. То, чего ему не хватало для*

*этого, он нашел дома в чулане, где хранились бумага, веревки и всякий хлам. Это была длинная картонная трубка около трех дюймов диаметром. Он приставил ее к ряду переговорных трубок в вестибюле, наметив кружки, соответствующие их отверстиям. Потом он вырезал дыры в отмеченных местах перочинным ножом, а концы трубки заткнул. Далее с помощью своего друга и соседа по дому он прикрепил это приспособление к переговорным трубкам, в результате чего получилась «перемычка», дававшая возможность жильцам дома говорить друг с другом. Затем маленькие чертенята нажали кнопки вызова, начав с верхнего этажа, чтобы обеспечить себе безопасное отступление. Надо вообразить, какое вавилонское столпотворение произошло в доме».*

Приглядитесь к музыкальным инструментам, взгляните на какой-нибудь саксофон. Какая красота, как сложно было придумать такую форму и сделать ее руками, но зато и звучит прекрасно! Ничего не понимая в науке о звуке, акустике, легко ощущая отличие звуков речи лектора в двух аудиториях саратовского университета. Одна создана в 1913 году архитектором-художником К.Мюфке, а другую безымянный ремесленник через каких-то сорок лет попытался с нее скопировать. Мне приводилось читать лекции и в одной, и в другой аудитории, и быстро начинаешь понимать, что акустика не наука, но высокое искусство.

А теперь поговорим о простейшем и очень доступном любому школьнику опыту по резонансу в акустике. Все, что нужно для такого опыта, находится у каждого школьника буквально перед глазами.

Вот на фотографии (рис. 1) видно клавиатуру ноутбука и крышку от бутылки. Верхнее отверстие крышки прикрыто монетой, другая монета приподнимает с одной стороны крышку для доступа в нее звука. Примерно в метре от компьютера закреплены звуковые колонки, с регулятором громкости естественно. Так вот, если крышку доннышком вверх подносить к маленькому отверстию для микрофона рядом с клавиатурой на передней панели ноутбука, а регулятор громкости поставить почти на максимум, то, когда останется зазор в пару миллиметров, из колонок начинает литься пронзительный



Рис. 1

звук одной частоты. Высоту этого тона можно изменять разными способами – выбором расстояния крышки до микрофона, уровнем громкости на колонке, величиной и формой сосуда, заменяющего крышку.

На другом снимке (рис.2) резонатором служит пустой стакан. Возможны и другие, самые разнообразные варианты.

Почему-то большое впечатление производит такой своеобразный резонатор из железной трубки, к которой удачно подходит изящный пластиковый элемент пробки современных бутылок – с тремя небольшими отверстиями (рис.3). Плотнo вставив пластиковую деталь в трубку, очень близко подносим трубку вертикально или почти вертикально к микрофонному отверстию на передней панели ноутбука и получаем пронзительный звук. А его высоту можно изменять,



Рис. 2



Рис. 3

прикрывая в разной степени отверстия в пластиковой вставке.

Можно сказать, что случайный слабый звук, попавший в микрофон, усиливается электрической системой компьютера и колонок, снова приходит в микрофон, еще проходит по тракту усиления, а одна из частот в этом звуке усиливается особенно существенно, совпадая с некоторой собственной частотой системы. При резонансе сигнал становится очень громким. Это – положительная обратная связь. Но для качественного звучания любого инструмента конструкция должна иметь и отрицательную обратную связь – для предотвращения лишних резонансов, иначе звук будет только раздражать ухо.

В сущности, это предельно упрощенная модель чудесного изобретения Льва Сергеевича Термена (1896–1993), которое так и называлось «терменвокс», только в этом приборе обратная связь осуществлялась электрическим путем. Приближение руки исполнителя изменяло емкость колебательного контура в генераторе, и его частота повышалась или понижалась. Затем это переводилось в звук, и на инструменте (не прикасаясь к нему!) удавалось воспроизводить мелодии с уникальным звучанием.

Короче говоря, предлагаемый опыт представляет широкое поле возможностей для школьника – например, выбирающего тему для проекта и доклада на ученической конференции.

# XLIX Международная физическая олимпиада

В этом году Международная физическая олимпиада (МФО) проходила в Лиссабоне – столице Португалии. В соревновании участвовал 431 школьник из 87 стран.

Сборную команду России представляли:

*Григорий Бобков* – Черноголовка Московской области, Москва, школа 1589,  
*Вячеслав Кузнецов* – Москва, школа 192,  
*Станислав Цапаев* – Москва, школа 1589,  
*Алексей Шишкин* – Москва, школа 1589,  
*Захар Яковлев* – Санкт-Петербург, Академический лицей «Физико-техническая школа».

Команду России возглавили преподаватели Московского физико-технического института (государственного университета) А.А.Воронов (руководитель команды), М.Н.Осин, В.А.Шевченко и Ф.М.Цыбров.

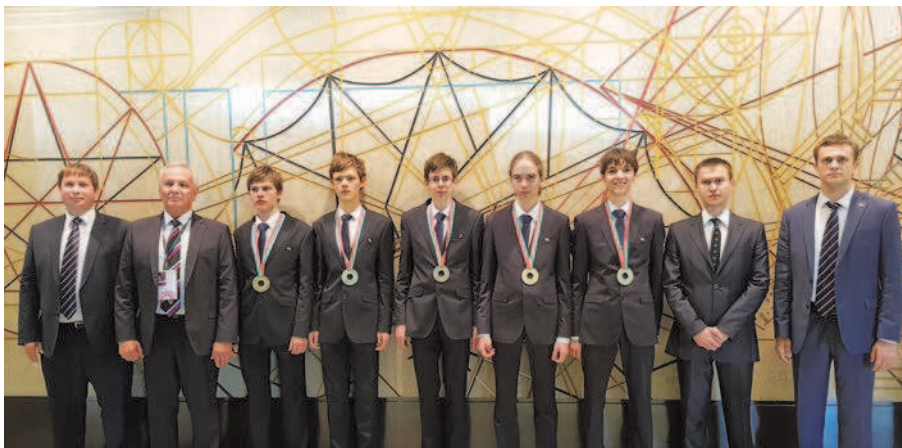
Отбор кандидатов начался за год до олимпиады. Кандидатами в сборную стали более 30 десятиклассников – победителей и призеров заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по физике прошлого года. Подготовка команды и отбор окончательного состава проходили в течение года на базе МФТИ и образовательного центра «Сириус». На сборах отрабатывались навыки экспериментальной работы на сложном оборудовании, изучались темы, которые не входят в школьную программу по физике, но необхо-

димы для участия в МФО. Сложившаяся за прошлые годы система подготовки включает в себя также участие в международных олимпиадах. Возможность попробовать себя в «боевых» условиях олимпиады – важный этап психологической подготовки к решающему соревнованию. Ребята участвовали в Европейской олимпиаде «Romanian Masters of Physics», в Международной экспериментальной олимпиаде по физике и в Азиатской олимпиаде по физике.

На олимпиаде в Лиссабоне участникам были предложены три теоретические задачи и два экспериментальных задания. Представленные задачи отражают современное развитие науки и технологий, раскрывают связь между естественными науками. Например, в первой теоретической задаче участникам предстояло обработать данные эксперимента LIGO по обнаружению гравитационных волн. Темой третьей теоретической задачи были физика живых систем и модель роста опухоли. В эксперименте участники исследовали полевой TFT транзистор, «напечатанный» на бумаге. Максимальное количество баллов, которое мог набрать каждый из школьников, равнялось 50.

Члены сборной России показали следующие результаты:

Г.Бобков – 42,5 балла и золотая медаль,



*Сборная команда России и ее руководители. Слева направо: А.А.Воронов, М.Н.Осин, С.Цапаев, Г.Бобков, З.Яковлев, В.Кузнецов, А.Шишкин, Ф.М.Цыбров, В.А.Шевченко*

З.Яковлев – 40,8 баллов и золотая медаль, В.Кузнецов – 37,9 баллов и золотая медаль, С.Цапаев – 36,3 баллов и золотая медаль, А.Шишкин – 33,2 балла и серебряная медаль.

Григорий Бобков стал вторым в абсолютном рейтинге участников олимпиады, также он был отмечен призом Европейского физического общества как лучший участник-мужчина из Европы.

В неофициальном командном зачете по сумме баллов Россия заняла третье место (уступив Китаю и Южной Корее).

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады.

**Теоретический тур**

**Задача 1. LIGO-GW150914**

В 2015 году гравитационно-волновая лаборатория LIGO впервые в истории зарегистрировала гравитационные волны (GW). Это событие, получившее название GW150914, было вызвано двумя черными дырами, которые двигались по квазикруговым орбитам. Вам предстоит оценить некоторые параметры этой системы по данным зарегистрированного сигнала.

**Часть А. Ньютоновские (консервативные) орбиты**

**A1.** Рассмотрим систему из двух звезд массами  $M_1, M_2$ , находящихся, соответственно, в точках  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  относительно центра масс системы, т.е.

$$M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2 = 0.$$

Звезды изолированы от всех остальных объектов Вселенной и движутся с нерелятивистскими скоростями. Из законов Ньютона можно получить ускорение звезды массой  $M_1$ :

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n},$$

где  $r_1 = |\vec{r}_1|$ . Аналогичное выражение получается и для второй звезды массой  $M_2$ . Найдите  $n \in \mathbb{N}$  и  $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$ , где  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$  – гравитационная постоянная. (1 балл)

**A2.** Полная механическая энергия системы двух тел, движущихся по круговым орбитам, задается формулой

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L},$$

где  $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$  и  $M = M_1 + M_2$  – приве-

денная масса и полная масса системы соответственно,  $\Omega$  – угловая скорость, а  $L = r_1 + r_2$  – расстояние между двумя массами. Получите формулу для  $A(\mu, \Omega, L)$ . (1 балл)

**A3.** Уравнение для  $E$  можно упростить:

$$E = \beta G \frac{M\mu}{L}. \text{ Найдите } \beta. \text{ (1 балл)}$$

**Часть В. Введение релятивистского за-  
тухания**

Теория гравитации (общая теория относительности), окончательно сформулированная Эйнштейном в 1915 году, предсказывает, что гравитационное взаимодействие распространяется со скоростью света. Переносчиком этого взаимодействия являются гравитационные волны. Гравитационные волны испускаются любой ускоряющейся массой, что выражается в потере ею энергии.

Рассмотрим систему из двух изолированных точечных частиц. Эйнштейн доказал, что для достаточно малых скоростей испускаемые гравитационные волны: 1) имеют частоту вдвое большую, чем частота орбитального вращения, и 2) их можно охарактеризовать параметром интенсивности, т.е. испускаемой мощностью  $\mathcal{P}$ , которая, согласно формуле Эйнштейна, равна

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right).$$

Здесь  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  – скорость света. Для системы из двух точечных частиц, вращающихся в плоскости  $xy$ , величины  $Q_{ij}$  даны в следующей таблице ( $i, j$  – номер строки и столбца соответственно):

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2),$$

$$Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2),$$

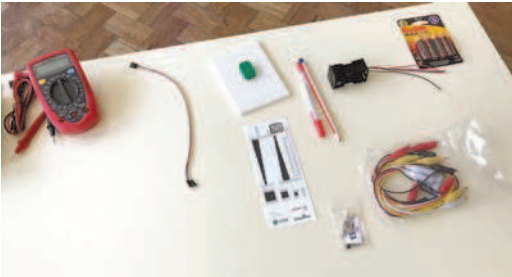
$$Q_{33} = -\sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2),$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A$$

и  $Q_{ij} = 0$  для всех иных комбинаций  $i$  и  $j$ . Здесь  $(x_A, y_A)$  – положение массы  $A$  в системе центра масс.

**B1.** Для круговых орбит, описанных в пункте A2, компоненты  $Q_{ij}$  зависят от време-





Экспериментальное оборудование задания «Бумажный транзистор»

ни  $t$  следующим образом:

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2}(a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij} \stackrel{i \neq j}{=} \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt.$$

Найдите  $k$ . Ответ выразите через  $\Omega$ . Найдите значения чисел  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_{ij}$ . (1 балл)

**В2.** Покажите, что для этой системы мощность  $\mathcal{P}$ , излучаемая в виде гравитационных волн, равна

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6.$$

Найдите численное значение  $\xi$ . (1 балл)

*Примечание.* Если вам не удалось получить значение  $\xi$ , используйте в дальнейшем  $\xi = 6,4$ .

**В3.** Если бы гравитационных волн не существовало, оба тела вращались бы по круговым орбитам бесконечно долго. Однако, излучение гравитационных волн приводит к потере энергии и, следовательно, к медленному уменьшению радиусов орбит. Покажите, что изменение угловой скорости со временем  $\frac{d\Omega}{dt}$  описывается формулой

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5,$$

где  $M_c$  – так называемая *chirp mass*, она определяет скорость, с которой увеличивается частота вращения при уменьшении радиуса орбиты. Выразите  $M_c$  через  $M$  и  $\mu$ . (1 балл)

*Примечание.* Слово «chirp» в переводе означает «чирикание», «щебетание», т.е. звук возрастающей частоты, создаваемый маленькими птицами.

**В4.** Пользуясь предыдущими данными, найдите связь угловой частоты  $\Omega$  с частотой гравитационных волн  $f$ . Для любой гладкой

функции  $F(t)$  и  $a \neq 1$

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \Rightarrow F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0),$$

где  $\chi$  – некоторая постоянная, а  $t_0$  – произвольная константа интегрирования. Покажите, что из уравнения из пункта В3 следует такое выражение для частоты гравитационных волн:

$$f^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p}.$$

Определите постоянную  $p$ . (2 балла)

14 сентября 2015 года LIGO зарегистрировал событие GW150914, показанное на рисунке 1. Детектор LIGO представляет собой

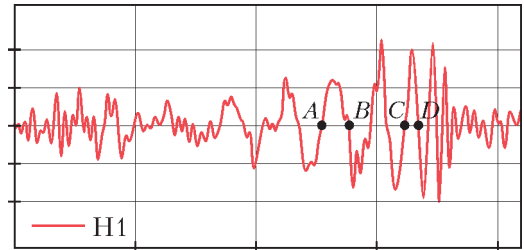


Рис. 1. Деформация (относительное изменение длины) каждого плеча детектора H1 в системе LIGO в зависимости от времени. Точки A, B, C, D соответствуют моментам времени 0,00; 0,009; 0,034; 0,040 секунд соответственно

Г-образную систему, состоящую из двух 4-километровых плеч. Плечи детектора линейно реагируют на проходящую гравитационную волну, так что сигнал воспроизводит волну. В данном случае волна была создана парой черных дыр, движущихся по квазикруговым орбитам. Потери энергии за счет излучения приводят к уменьшению радиусов орбит, в конце концов черные дыры сталкиваются. Пик, следующий за точкой D на рисунке 1, примерно соответствует моменту столкновения.

**В5.** По данным рисунка 1 оцените  $f(t)$  для двух моментов времени

$$t_{AB} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{и} \quad t_{CD} = \frac{t_D + t_C}{2}.$$

Пусть формула для частоты  $f$  из пункта В4 справедлива в течение всего процесса сближения черных дыр вплоть до столкновения. Массы черных дыр одинаковы. Оцените величину  $M_c$ , а также полную массу систе-



мы  $M$ . Ответ дайте в массах Солнца  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$  кг. (1 балл)

**В6.** Оцените расстояние между двумя объектами в момент времени  $t_{CD}$ . Оцените максимальный размер каждого объекта  $R_{\max}$ .

Найдите величину  $R_{\odot}/R_{\max}$ , тем самым, сравните этот размер с радиусом Солнца  $R_{\odot} = 7 \cdot 10^5$  км. Оцените линейную скорость  $v$  каждого объекта на орбите в этот момент времени и сравните ее со скоростью света, т.е. найдите:  $v/c$ . (1 балл)

Придите к выводу, что сталкивающиеся объекты чрезвычайно компактны и движутся действительно очень быстро!

### Задача 2. В поисках нейтрино

При соударении двух высокоэнергетических протонов в Большом адронном коллайдере (ЛHC) рождаются различные частицы – электроны, мюоны, нейтрино, кварки и соответствующие им античастицы. Большинство этих частиц можно зарегистрировать с помощью детектора. Однако кварки не могут существовать в свободном состоянии и быстро подвергаются адронизации, т.е. превращаются в адронные струи – узконаправленные потоки частиц.

В пространстве, где происходит соударение протонов, присутствует сильное магнитное поле. Оно искривляет траектории высокоэнергетических заряженных частиц, и это позволяет рассчитать их импульс. В детекторе ATLAS создается однородное магнитное поле индукцией 2,00 Тл. Если в процессе соударения рождаются частицы с импульсом меньше некоторого значения, то в магнитном поле они будут двигаться по окружности малого радиуса и не достигнут детектора (поэтому не смогут быть обнаружены). Нейтрино, в силу своей природы, пролетят через детектор не взаимодействуя с ним (поэтому также не могут быть обнаружены).

Вам могут понадобиться такие численные значения: масса электрона  $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг, элементарный заряд  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  Кл, скорость света  $c = 3,00 \cdot 10^8$  м/с, электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

### Часть А. Детектор ATLAS

**A1.** Найдите циклотронный радиус  $r$  – радиус круговой траектории электрона в магнитном поле, перпендикулярном вектору

его скорости. Ответ выразите через кинетическую энергию электрона  $K$ , модуль его заряда  $e$ , массу  $m$  и величину магнитной индукции  $B$ . Считайте электрон нерелятивистской, классической частицей. (0,5 балла)

Электроны, рождающиеся в установке ATLAS, в действительности являются релятивистскими. Однако формула для циклотронного радиуса продолжает быть справедливой, если рассматривать релятивистский импульс.

**A2.** Рассчитайте минимальное значение импульса электрона, которое позволяет ему вылететь за пределы внутренней части цилиндрического детектора, ее радиус 1,1 м. Электрон рождается в точке соударения протонов, расположенной на оси цилиндра. Ответ дайте в единицах МэВ/с. (0,5 балла)

Когда релятивистская частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется с ускорением, перпендикулярным скорости, она излучает электромагнитные волны. Мощность такого синхротронного излучения задается формулой

$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3},$$

где  $a$  – ускорение, а  $\gamma = \left(1 - (v/c)^2\right)^{-1/2}$ . Частица считается ультрарелятивистской, когда ее скорость очень близка к скорости света.

**A3.** Мощность излучения ультрарелятивистской частицы задается формулой

$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2,$$

где  $\xi$  – численный коэффициент,  $n$ ,  $k$  – целые числа,  $E$  – энергия заряженной частицы,  $B$  – величина магнитной индукции поля. Найдите  $\xi$ ,  $n$  и  $k$ . (1 балл)

**A4.** В ультрарелятивистском пределе энергии электрона зависит от времени следующим образом:

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

где  $E_0$  – начальная энергия электрона. Найдите  $\alpha$ . Ответ выразите через  $e$ ,  $c$ ,  $B$ ,  $\epsilon_0$  и  $m$ . (1 балл)

**A5.** При столкновении пучков рождается электрон с энергией 100 ГэВ, который летит в радиальном направлении. Оцените, какую энергию он потеряет из-за синхротронного

излучения, пока не покинет детектор. Выразите ответ в МэВ. (0,5 балла)

**А6.** Найдите, как зависит циклотронная частота электрона от времени в ультрарелятивистском пределе. (0,5 балла)

**Часть В. Ищем нейтрино**

Рассмотрим процесс столкновения двух протонов (рис.2). В результате соударения образовались  $t$ -кварк и  $t$ -антикварк,  $t$ -кварк

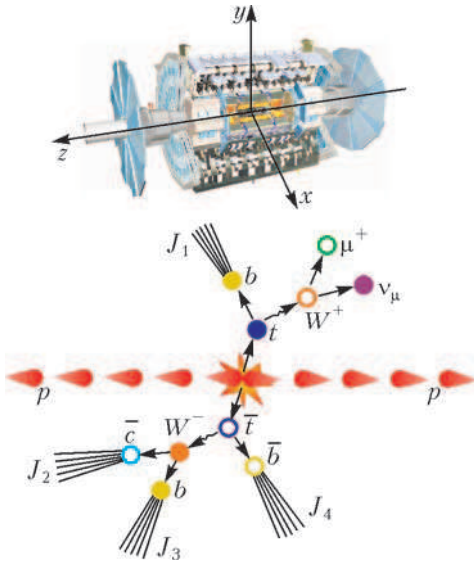


Рис. 2. Детектор ATLAS (вверху), схема соударения двух протонов (внизу)

распадается на бозон  $W^+$  и на  $b$ -кварк, а  $t$ -антикварк распадается на бозон  $W^-$  и на  $b$ -антикварк. Далее бозон  $W^+$  распадается на антимюон  $\mu^+$  и нейтрино  $\nu$ , а бозон  $W^-$  – на кварк и антикварк. Ваша задача – рассчитать параметры нейтрино по значениям импульсов зарегистрированных частиц. Считайте, что все струи и частицы, кроме  $t$ -кварка и бозонов  $W^\pm$ , не имеют массы. Импульсы продуктов распада  $t$ -кварка приведены в таблице. Даны компоненты импульсов всех частиц, кроме проекции импульса нейтрино на ось  $z$ . Известно, что

Частица	$p_x$ (ГэВ/с)	$p_y$ (ГэВ/с)	$p_z$ (ГэВ/с)
Антимюон $\mu^+$	-24,7	-24,9	-12,4
Струя $J_1$	-14,2	+50,1	+94,1
Нейтрино $\nu$	-104,1	+5,3	-

полный импульс частиц равен нулю только в проекции на поперечную плоскость  $xy$  и отличен от нуля в проекции на ось  $z$  (вдоль линии столкновения). Это позволяет находить значения импульсов частиц.

**В1.** Найдите квадрат массы  $m_W$  бозона  $W^+$ . Ответ выразите через компоненты импульсов нейтрино и антимюона: поперечных  $\vec{p}_T^{(\nu)} = p_x^{(\nu)} \hat{i} + p_y^{(\nu)} \hat{j}$ ,  $\vec{p}_T^{(\mu)} = p_x^{(\mu)} \hat{i} + p_y^{(\mu)} \hat{j}$  и продольных (вдоль оси  $z$ )  $p_z^{(\mu)}$ ,  $p_z^{(\nu)}$ . (1,5 балла)

**В2.** Вычислите (в ГэВ/с) два возможных значения продольной компоненты импульса нейтрино  $p_z^{(\nu)}$ . Массу бозона  $W^+$  примите равной  $m_W = 80,4$  ГэВ/с<sup>2</sup>. (1,5 балла)

**В3.** Вычислите массу  $t$ -кварка (в ГэВ/с<sup>2</sup>), соответствующую каждому из двух полученных в предыдущем пункте значений проекции импульса нейтрино. (1 балл)

*Примечание:* Если вы не смогли получить два решения в пункте В2, используйте следующие значения:  $p_z^{(\nu)} = 70$  ГэВ/с и  $p_z^{(\nu)} = -180$  ГэВ/с.

Нормализованное число соударений для расчета массы  $t$ -кварка из экспериментальных данных включает две компоненты: «сигнал» (данные, соответствующие распаду  $t$ -кварка) и «фон» (данные, соответствующие другим процессам, проходящим без  $t$ -кварка). Экспериментальные данные учитывают оба процесса (рис.3).

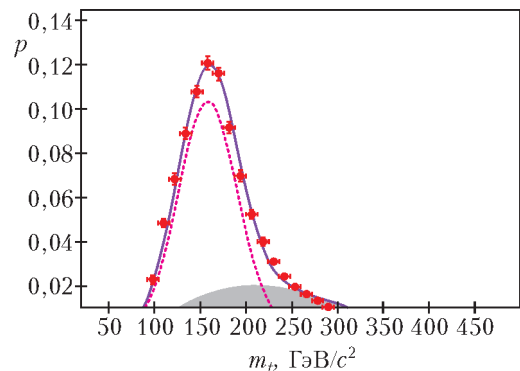


Рис. 3. Распределение значений массы  $t$ -кварка, рассчитанной из экспериментальных данных (т.е. нормализованное число соударений, где было получено определенное значение массы  $t$ -кварка). Точки – экспериментальные данные, пунктир – сигнал, а затемненная зона – фон

**В4.** По графику распределения значений массы  $t$ -кварка скажите, какое из двух ранее найденных значений массы  $t$ -кварка правильно с наибольшей вероятностью? Оцените вероятность получения этого значения. (1 балл)

**В5.** Для этого наиболее вероятного значения массы  $t$ -кварка вычислите расстояние, которое он преодолет до того, как распадется. Время жизни  $t$ -кварка в состоянии покоя  $5 \cdot 10^{-25}$  с. (1 балл)

### Задача 3. Физика живых систем

Вам может понадобиться численное значение атмосферного давления при нормальных условиях:  $1,013 \cdot 10^5$  Па = 760 мм рт.ст.

#### Часть А. Физика кровеносной системы

Приближенно кровеносные сосуды можно считать цилиндрическими. Известно, что для стационарного нетурбулентного потока несжимаемой жидкости в недеформируемом цилиндре разность давлений на концах цилиндра задается формулой

$$\Delta p = \frac{8l\eta}{\pi r^4} Q,$$

где  $l$  и  $r$  – длина и радиус цилиндра соответственно,  $\eta$  – вязкость жидкости, а  $Q$  – объемный расход (объем жидкости, протекающей через поперечное сечение цилиндра за единицу времени). Эта формула дает верное по порядку величины значение для разности давлений даже в случае пульсирующего потока и нежестких стенок сосуда, имеющих сложную форму. То что кровь – это не просто жидкость, а смесь клеток и плазмы, также несущественно. Более того, эта формула имеет такой же вид, что и закон Ома. Проведем аналогию: объемный расход жидкости соответствует электрическому току, а разность давлений – разности потенциалов. Таким образом, величина  $R = \frac{8l\eta}{\pi r^4}$  – сопротивление.

Рассмотрим симметричную сеть мелких артерий, доставляющих кровь от крупной артерии к капиллярам. В этой сети каждый сосуд делится на два одинаковых сосуда (рис.4). Сосуды каждого последующего уровня – более тонкие и короткие, чем на предыдущем уровне. Будем считать, что радиус и длина сосудов, принадлежащих двум соседним уровням  $i$  и  $i + 1$ , связаны

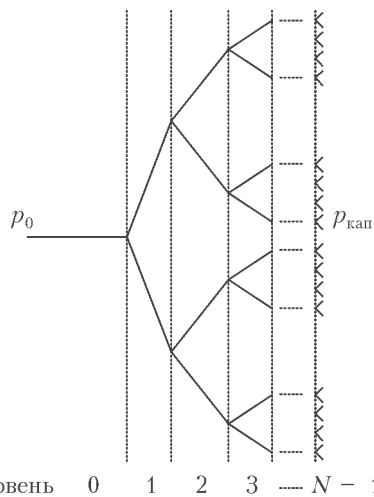


Рис. 4. Схема сети мелких артерий

между собой соотношениями  $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$  и  $l_{i+1} = l_i/2^{1/3}$ .

**А1.** Найдите объемный расход  $Q_i$  в одиначном сосуде  $i$ -го уровня. Ответ выразите через число уровней сети  $N$ , вязкость  $\eta$ , радиус  $r_0$  и длину  $l_0$  первого сосуда и разность давлений  $\Delta p = p_0 - p_{\text{кап}}$  между сосудом нулевого уровня и капиллярами. (1,3 балла)

**А2.** Рассчитайте объемный расход  $Q_0$  (в мл/ч) в сосуде нулевого уровня. Его радиус  $6,0 \cdot 10^{-5}$  м, длина  $2,0 \cdot 10^{-3}$  м. Давление на входе в сосуд 55 мм рт.ст., давление в капиллярах 30 мм рт.ст., число уровней сети  $N = 6$ . Вязкость крови  $\eta = 3,5 \cdot 10^{-3}$  кг/(м·с). (0,5 балла)

**Электрическая RLC-модель кровеносных сосудов.** Представление сосудов в виде жестких цилиндров может быть усовершенствовано путем введения некоторых поправок. Особенно важно учесть нестационарность потока, а также изменение диаметра сосудов при пульсирующем потоке крови. Кроме того, как показывают наблюдения, в широких сосудах давление крови варьируется довольно значительно, в то время как в более тонких сосудах амплитуда колебаний давления намного меньше и поток крови практически не зависит от времени. При увеличении давления в реальном сосуде его диаметр увеличивается. Это приводит к увеличению объема крови, которая находится внутри сосуда. Когда давление снизится,

этот сосуд будет источником крови для следующего сосуда. Это похоже на поведение конденсатора в электрической цепи. Из-за нестационарности потока крови нужно учесть инерцию жидкости, считая ее пропорциональной плотности  $\rho = 1,05 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Электрическим эквивалентом будет индуктивность. Полная электрическая схема такой модели сосуда приведена на рисунке 5.

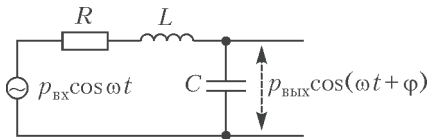


Рис. 5. Электрическая схема сосуда согласно описанной модели

Эквивалентные емкость и индуктивность задаются следующими выражениями:

$$C = \frac{3l\pi r^3}{2Eh} \text{ и } L = \frac{9l\rho}{4\pi r^2},$$

где  $h$  – толщина стенки сосуда, а  $E$  – модуль Юнга (для сосудов можно считать  $E = 0,06 \text{ МПа}$ ).

**А3.** В установившемся режиме расход в сосуде колеблется с угловой частотой  $\omega$ . Найдите амплитуду давлений колебаний на выходе сосуда  $p_{\text{вых}}$ . Ответ выразите через амплитуду колебаний на его входе  $p_{\text{вх}}$ , угловую частоту  $\omega$ , сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$  и емкость  $C$ . Найдите соотношение между  $\eta$ ,  $\rho$ ,  $E$ ,  $h$ ,  $r$  и  $l$ , при котором на низких частотах амплитуда колебаний давления на выходе сосуда меньше, чем амплитуда колебаний давления на его входе. (2 балла)

**А4.** Для сети сосудов, описанной в пункте А2, оцените максимальную толщину стенки сосуда  $h$ , для которой выполняется условие из пункта А3. Считайте, что  $h$  не зависит от уровня сосуда. (0,7 балла)

### Часть В. Рост опухоли

Рассмотрим группу здоровых клеток, окруженную нерастяжимой мембраной, – так формируется ткань. Таким образом, ткань сохраняет свою начальную сферическую форму радиусом  $R$  (рис.6). Изначально в ткани отсутствуют какие-либо напряжения – в любой ее точке давление равно атмосферному. В момент времени  $t = 0$  опухоль

начинает расти в центре сферы и, по мере того как она разрастается, давление внутри ткани увеличивается. Будем считать, что оба типа ткани – здоровая  $N$  и опухолевая  $T$  – сжимаемы и их плотности  $\rho_N$  и  $\rho_T$  растут с давлением линейно:

$$\rho_N = \rho_0 \left( 1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left( 1 + \frac{p}{K_T} \right),$$

где  $\rho_0$  – плотность ткани при нормальном давлении,  $p$  – избыточное давление по сравнению с атмосферным,  $K_N$  и  $K_T$  – модули объемного сжатия нормальной и опухолевой тканей соответственно. Опухолевая ткань обычно более жесткая, поэтому у нее более высокий объемный модуль упругости. Считайте, что при росте опухоли масса здоровых клеток не меняется.

**В1.** Найдите отношение  $v = V_T/V$  объема опухоли к общему объему ткани. Ответ выразите через отношение  $\mu = M_T/M_N$  массы опухоли  $M_T$  к массе нормальной ткани  $M_N$  и отношение соответствующих модулей объемного сжатия  $\kappa = K_N/K_T$ . (1 балл)

Одним из методов лечения рака является гипертермия. В этом методе раковые клетки избирательно нагреваются от нормальной температуры человеческого тела  $37^\circ\text{C}$  до температуры, превышающей  $37^\circ\text{C}$ , что вызывает их смерть. В настоящее время ученые работают над созданием углеродных нанотрубок, покрытых особыми белками, которые могут связываться с раковыми клетками. При облучении ткани инфракрасным излучением нанотрубки поглощают его значительно эффективнее, чем окружающие ткани. Таким образом, можно разогреть нанотрубки и опухолевую ткань до нужной температуры, не повреждая здоровую ткань.

Пусть здоровые клетки, клетки опухоли и окружающие ткани имеют одинаковую теплопроводность  $k$ . Считайте, что плотность потока тепловой энергии (энергия, проходящая в единицу времени через единицу площади) равна произведению теплопроводности  $k$  и градиента температуры  $dT/dr$ . На-

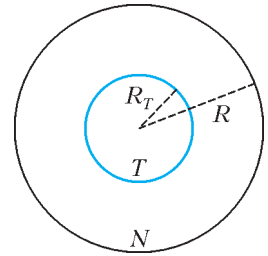


Рис. 6. Упрощенная модель опухоли

нотрубки распределены по объему опухоли равномерно и при облучении выделяют тепловую мощность на единицу объема  $\mathcal{P}$ . Примите температуру окружающих тканей вдали от опухоли равной нормальной температуре тела.

**В2.** Найдите температуру в центре опухоли в стационарном режиме. Ответ выразите через  $\mathcal{P}$ ,  $k$ , температуру человеческого тела и радиус опухоли  $R_T$ . (1,7 балла)

**В3.** Рассчитайте минимальную мощность на единицу объема  $\mathcal{P}_{\min}$ , которая нужна, чтобы разогреть все раковые клетки в опухоли радиусом 5,0 см до температуры, превышающей 43 °С. Теплопроводность тканей  $k = 0,60$  Вт/(К·м). (0,5 балла)

Пусть опухолевая ткань содержит сосудистую систему, как в пункте А1. Когда опухоль разрастается, давление  $p$  в ней становится выше, чем давление в капиллярах  $p_{\text{кап}}$ . При этом радиус сосудов уменьшается на величину

$\delta r$ . Если давление превысит критическое значение  $p_k$  (которому соответствует  $\delta r_k$ ), нормальное кровоснабжение опухоли будет нарушено из-за слипания капилляров. Давление и изменение радиуса сосудов связаны друг с другом соотношением

$$\frac{p}{p_{\text{кап}}} - 1 = \left( \frac{p_k}{p_{\text{кап}}} - 1 \right) \left( 2 - \frac{\delta r}{\delta r_k} \right) \frac{\delta r}{\delta r_k}.$$

В следующем пункте считайте, что при росте опухоли изменяются радиусы сосудов только на уровне  $N - 1$ . Считайте также, что разность  $p - p_{\text{кап}}$  мала.

**В4.** Найдите относительное уменьшение расхода  $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$  в самых тонких сосудах.

Ответ выразите через относительный объем опухоли  $v = V_T/V$ ,  $K_N$ ,  $N$ ,  $p_k$ ,  $\delta r_k$ ,  $r_{N-1}$ ,  $p_{\text{кап}}$ . (2,3 балла)

Публикацию подготовили Ф.Цыбров, А.Воронов, М.Осин, В.Шевченко

## LIX Международная математическая олимпиада

Спустя 59 лет после того, как первая Международная математическая олимпиада (ММО) прошла в румынском городе Брашов, олимпиаду вновь принимала Румыния (в шестой раз в истории ММО). На этот раз в июле 2018 года столицей главного математического соревнования школьников мира стал город Клуж-Напока. В ММО-2018 приняли участие 594 школьников из 107 стран мира (а в 1959 году все начиналось с 52 участников из 7 стран).

В этом году команду России составили выпускники школы *Марат Абдрахманов* (Челябинск), *Артур Герасименко* (Москва), *Станислав Крымский* (Санкт-Петербург), *Сергей Лучинин* (Киров), *Егор Рябов* (Москва), а также десятиклассник *Владимир Петров* (Санкт-Петербург).

Команда выступила достаточно убедительно. Ребята практически не потеряли баллов в решении условно легких и средних по сложности задач

1, 2, 4, 5. И в самых трудных задачах 3 и 6 удалось если не добиться полного решения, то существенно продвинуться на пути к нему. Это позволило нашим олимпийцам в личном зачете завоевать пять золотых и одну серебряную медали (при этом нашему единственному «серебряному» участнику лишь балла не хватило до золота), а в командном зачете набрать больше 200 баллов и занять второе место.

Приводим таблицу с баллами по задачам участников нашей сборной (каждая задача

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Марат Абдрахманов	7	7	7	7	7	4	39	Золотая
Артур Герасименко	7	7	0	7	7	7	35	Золотая
Владимир Петров	7	7	3	7	6	4	34	Золотая
Станислав Крымский	7	7	1	7	7	3	32	Золотая
Егор Рябов	7	7	0	7	7	3	31	Золотая
Сергей Лучинин	7	7	0	7	7	2	30	Серебряная





Команда России и ее руководители. Слева направо: Н.Х.Агаханов, Е.Рябов, С.Лучинин, С.Крымский, В.Петров, М.Абдрахманов, А.Герасименко, К.А.Сухов, М.Я.Пратусевич

оценивалась из 7 баллов) и результаты первых 20 стран в командном рейтинге. Полная информация о результатах на международных математических олимпиадах имеется на официальном сайте олимпиады [www.imo-official.org](http://www.imo-official.org).

Помимо огромного вклада каждого из наших участников, одной из причин уверенного выступления, возможно, стали некоторые изменения в системе отбора команды и работы с кандидатами в команду. В отличие от предыдущих лет, завершающий отбор команды происходил не на Всероссийской олимпиаде, а на дополнительных сборах в мае. В 2017/18 учеб-

ном году члены команды России отбирались из группы кандидатов в конкурентной борьбе по формальным показателям, которые суммировались за несколько предыдущих испытаний: зимние сборы (декабрь 2017), международная олимпиада Romanian Masters (февраль 2018), Всероссийская олимпиада (апрель 2018), майские сборы (май 2018). По сравнению с предыдущими годами было проведено несколько новых очных и дистанционных учебных мероприятий, адресованных кандидатам в команду. В разных мероприятиях по подготовке команды работала довольно большая группа математиков и педагогов (в которую

Страна	Сумма баллов	Количество медалей			Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
		Золото	Серебро	Бронза			Золото	Серебро	Бронза
США	212	5	1	0	Австралия	169	2	3	1
Россия	201	5	1	0	Великобритания	161	1	4	0
Китай	199	4	2	0	Сербия	158	2	2	2
Украина	186	4	2	0	Япония	158	1	3	2
Таиланд	183	3	3	0	Венгрия	157	0	4	2
Тайвань	179	3	1	2	Канада	156	0	5	1
Южная Корея	177	3	3	0	Италия	154	0	4	2
Сингапур	175	2	3	1	Казахстан	151	0	4	2
Польша	174	1	5	0	Иран	150	1	3	1
Индонезия	171	1	5	0	Вьетнам	148	1	2	3

вошли как маститые ученые, так и молодые преподаватели — студенты, в недавнем прошлом медалисты ММО): *Б.Баев, И.Богданов, Д.Белов, С.Берлов, В.Брагин, Н.Власова, А.Гаврилюк, А.Гайфуллин, А.Голованов, М.Григорьев, М.Дидин, А.Зимин, П.Кожевников, А.Кузнецов, Д.Клюев, Д.Крачун, А.Кушнир, Ф.Петров, М.Пратусевич, А.Райгородский, К.Сухов (руководил подготовкой), И.Фролов, Г.Челнок.* Большую помощь в организационных и содержательных вопросах подготовки команды оказали организации, которые мы с благодарностью называем: Образовательный центр «Сириус» (Сочи), Центр педагогического мастерства (Москва), Президентский физико-математический лицей №239 (Санкт-Петербург), Международный детский центр «КОМПЬЮТЕРИЯ» (Тверская область), Математический институт РАН (Москва, Санкт-Петербург).

### Задачи олимпиады

**1.** Пусть  $\Gamma$  — окружность, описанная около остроугольного треугольника  $ABC$ . Точки  $D$  и  $E$  лежат на отрезках  $AB$  и  $AC$  соответственно, причем  $AD = AE$ . Середины перпендикуляры к отрезкам  $BD$  и  $CE$  пересекают меньшие дуги  $AB$  и  $AC$  окружности  $\Gamma$  в точках  $F$  и  $G$  соответственно. Докажите, что прямые  $DE$  и  $FG$  параллельны или совпадают.

*Греция*

**2.** Найдите все целые числа  $n \geq 3$ , для которых существуют вещественные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$  такие, что  $a_{n+1} = a_1$ ,  $a_{n+2} = a_2$  и  $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$  при всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

*Словакия*

**3.** Антипаскалевым треугольником назовем таблицу в виде равностороннего треугольника, заполненную числами так, что каждое число, кроме чисел, стоящих в нижней строке, равно модулю разности двух чисел, стоящих непосредственно под ним. На рисунке приведен пример антипаскалева треугольника с четырьмя строками, в котором встречаются все целые числа от 1 до 10. Существует ли антипаскалев треугольник с 2018 строками, в котором встречаются все целые числа от 1 до  $1 + 2 + \dots + 2018$ ?

*Иран*

**4.** На координатной плоскости *отмечены* точки  $(x; y)$  с натуральными координатами  $x$  и  $y$ , не превосходящими 20. Вначале все 400 отмеченных точек не заняты. Аня и Ваня делают ходы по очереди, Аня ходит первой. Своим ходом Аня кладет в еще не занятую отмеченную точку новый красный камень, причем расстояние между любыми двумя точками с красными камнями не должно равняться  $\sqrt{5}$ . Ваня своим ходом кладет в еще не занятую отмеченную точку новый синий камень. (Точка с синим камнем может находиться на произвольном расстоянии от других занятых точек.) Игра останавливается, когда кто-то из игроков не может сделать ход. Найдите наибольшее  $K$ , при котором Аня сможет разместить не менее чем  $K$  красных камней независимо от действий Вани.

*Армения*

**5.** Пусть  $a_1, a_2, \dots$  — бесконечная последовательность целых положительных чисел. Предположим, что существует целое число  $N > 1$  такое, что при всех  $n \geq N$  число

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

является целым. Докажите, что найдется такое целое положительное  $M$ , что  $a_m = a_{m+1}$  при всех  $m \geq M$ .

*Монголия*

**6.** Выпуклый четырехугольник  $ABCD$  удовлетворяет условию  $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ . Точка  $X$  внутри четырехугольника  $ABCD$  такова, что

$$\angle XAB = \angle XCD \text{ и } \angle XBC = \angle XDA.$$

Докажите, что  $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$ .

*Польша*

*Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, М.Григорьев, П.Кожевников, Ф.Петров, М.Пратусевич, К.Сухов*

# Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Политехническая олимпиада школьников в 2017/18 учебном году проводилась по четырем предметам: математике, физике, химии и информатике. Отборочный тур проходил заочно с применением интернет-технологий. Участники выполняли задания на официальном сайте олимпиады. Победители и призеры отборочного тура были приглашены к участию в заключительном туре, который прошел в Санкт-Петербургском политехническом университете в форме очного письменного испытания.

Информацию об олимпиаде 2018/19 учебного года можно получить на сайтах СПбПУ: [www.spbstu.ru](http://www.spbstu.ru) и [olymp.spbstu.ru](http://olymp.spbstu.ru)

## МАТЕМАТИКА

### Отборочный тур

1. Решите систему

$$\begin{cases} x^3 = x + 3y, \\ y^3 = 3x + y. \end{cases}$$

В ответе укажите максимальное значение суммы  $x + y$ , где  $(x; y)$  – решение системы.

2. В одной банке содержится 10 литров раствора соли, во второй – 15 литров раствора соли, причем количество соли в первой и второй банках одинаково. Количество воды во второй банке составляет 60 процентов от общего количества раствора в этой банке. Сколько процентов воды в первой банке? В ответе укажите целое число без знака процента.

3. Найдите количество чисел из промежутка  $[60; 70]$ , каждое из которых является дискриминантом некоторого квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

4. Среди написанных на доске чисел содержится число 3. Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске, если двузначных чисел среди них больше 85%?

5. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с гипотенузой  $AB$  проведены биссектриса  $CL$ ,

медиана  $CM$ , высота  $CN$ . Найдите площадь треугольника  $CLM$ , если площадь треугольника  $CNM$  равна 5, а  $CN : CM = 2 : 3$ .

6. Найдите наибольшее число  $a$  такое, что система

$$\begin{cases} y = |y + x^2 - 4x|, \\ (x - 2)^2 + (y - a)^2 = 4 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

7. Найдите наименьшее целое решение неравенства  $(x + 1)^3 + (x - 1)^3 \geq 28$ .

8. Найдите наименьшее значение функции  $y = |x - 1| + |x + 2|$ .

9. Найдите количество двузначных натуральных чисел, которые не делятся без остатка ни на 8, ни на 12.

10. Велосипедист проехал из пункта  $A$  в пункт  $B$ , где пробыл 30 минут, и вернулся назад. По пути в  $B$  велосипедист догнал пешехода, а через 2 часа вторично встретился с ним на обратном пути. Велосипедист вернулся в пункт  $A$  одновременно с прибытием пешехода в пункт  $B$ . За сколько часов пешеход преодолел расстояние  $AB$ , если его скорость была в 4 раза меньше скорости велосипедиста?

### Заключительный тур

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} \geq 1 - \frac{1}{2 + \operatorname{tg} x} - \frac{1}{2 + \operatorname{ctg} x}$$

на промежутке  $(0; \pi/2)$ .

2. Пусть  $x_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ,  $y_n = \frac{1}{n}$  для каждого натурального числа  $n$ . Найдите разность между суммой первых 200 членов последовательности  $\{x_n\}$  и суммой членов последовательности  $\{y_n\}$  с номерами от 101 до 199.

3. Найдите наименьшее число  $a$ , при котором система

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2a - 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2z} = a + 1 \end{cases}$$

имеет решение с положительными значениями  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

4. Во время каникул 23 школьника одного класса посетили Москву, 19 школьников посетили Санкт-Петербург, 5 – Великий Новгород. Какое наименьшее количество школьников могло быть в классе, если каждый из них посетил не более двух городов?

5. Найдите количество натуральных чисел из промежутка  $[200; 400]$ , сумма цифр которых дает остаток 3 при делении на 9.

6. Найдите множество значений функции  $y = |x - 2| - |x + 1|$ .

7. Найдите количество целых решений неравенства  $(x + 1)^4 + (x - 2)^4 \leq 83$ .

8. На двух принтерах напечатали одинаковое количество страниц. Второй принтер был включен через 5 мин после первого, но работал с большей скоростью, так что еще через 10 мин число напечатанных страниц стало одинаковым, а закончилась работа второго устройства на 15 мин раньше, чем первого. Сколько минут работал первый принтер?

9. Найдите остаток от деления числа  $N = 23 \cdot 9^{2018^3+1} + 3$  на 16.

10. Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  – точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника  $ABC$  с описанной вокруг  $\triangle ABC$  окружностью. Окружность, вписанная в треугольник  $A_1B_1C_1$ , касается одной из сторон  $\triangle ABC$ , а один из углов треугольника  $ABC$  равен  $45^\circ$ . Найдите два других угла треугольника  $ABC$ .

## Ф И З И К А

### Отборочный тур

Каждая задача оценивалась в 10 баллов.

1. Магнитная головка жесткого диска ноутбука считывает с дорожки на пластине информацию со скоростью  $v = 98 \cdot 10^6$  бит в секунду. Сколько всего битов помещается на этой дорожке, если пластины диска вращаются с частотой  $f = 7200$  оборотов в минуту?

2. Железнодорожная платформа движется по прямому горизонтальному пути с постоянным ускорением. На концах платформы стоят два человека и перебрасывают друг другу теннисный мячик. В некоторый момент человек, стоящий в начале платформы, бросает мячик вертикально вверх относительно платформы со скоростью  $v = 12$  м/с. Спустя

некоторое время мячик прилетает точно в руки человеку, стоящему в конце платформы. Найдите ускорение платформы. Длина платформы  $L = 7$  м. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Вертикальный штатив укреплен на массивной горизонтальной подставке. К верхнему концу штатива на длинной тонкой нити привязан грузик.

Подставку со штативом ставят на наклонную плоскость, угол наклона ее к горизонту  $\alpha = 22^\circ$ , и отпускают (рис. 1). Найдите угол отклонения  $\beta$  нити от вертикали в процессе движения. Коэффициент трения подставки о плоскость  $\mu = 0,24$ .

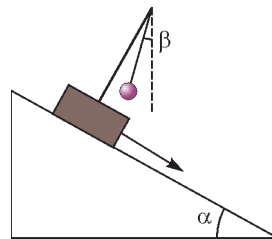


Рис. 1

4. Пытаясь забраться на скользкую ледяную гору, Кристофф разогнался до скорости  $v_1 = 10,8$  м/с и начал скользить вверх. Однако не удержался и, скатившись обратно, оказался внизу со скоростью  $v_2 = 8,3$  м/с. На какую высоту удалось Кристоффу подняться?

5. Участники снежной битвы бросают друг в друга снежки, находясь в окопах, так что каждый бросок происходит с уровня земли. Два одинаковых снежка были брошены навстречу друг другу – один под углом  $\alpha_1 = 41^\circ$ , а другой под углом  $\alpha_2 = 53^\circ$  к горизонту. Снежки столкнулись и слиплись на высоте  $H = 3,6$  м в высших точках своих траекторий. Чему равна скорость получившегося большого снежка?

6. Впереди Мазай увидел, что дрожащие на льдине  $n_1 = 14$  взрослых зайцев вот-вот утонут: льдина под ними практически полностью погрузилась в воду. Быстро подплыв и пересадив  $n_2 = 6$  зайцев в лодку, Мазай немного успокоился – льдина поднялась над водой на  $\Delta h = 0,9$  см, и спокойно спас всех стальных. Какова была толщина льдины? Плотность воды  $\rho_v = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, плотность льда  $\rho_l = 800$  кг/м<sup>3</sup>.

7. В подарок богатырю Добрыне Никитичу мастера из Златоуста выковали стальной меч массой  $M = 1,11$  кг. Для закалки меч, нагретый до высокой температуры  $t_0 = 812$  °С, опускали в корыто с водой. Масса воды в корыте  $m_1 = 33$  кг, начальная

температура воды  $t_1 = 5^\circ\text{C}$ , масса испарившейся в результате этого воды  $m_2 = 51$  кг. Найдите температуру воды в деревянном корыте, когда меч остынет. Потерей тепла на нагревание окружающего воздуха и корыта пренебречь. Удельная теплота парообразования воды  $r = 2260$  кДж/кг, удельная теплоемкость воды  $c_v = 4,2$  кДж/(кг · К). Считать, что средняя удельная теплоемкость стали в этом диапазоне температур  $c = 0,673$  кДж/(кг · К).

8. В двух сосудах разного объема содержится одинаковое количество воздуха при одинаковой температуре. В первом сосуде находится воздух с относительной влажностью  $\phi_1 = 35\%$ , во втором – сухой воздух. Давление воздуха в первом сосуде в  $n = 1,4$  раза больше, чем во втором. После открытия крана, соединяющего сосуды, газы перемешались, причем температура воздуха не изменилась. Найдите относительную влажность воздуха в сосудах после перемешивания.

9. Постоянный ток течет по участку цепи  $AB$ , показанному на рисунке 2. Сопротивления резисторов  $R_1 = 9$  Ом,  $R_2 = 19$  Ом, емкость конденсатора  $C = 14$  нФ. Идеальный вольтметр показывает напряжение  $U = 7$  В. Найдите заряд на пластинах конденсатора.

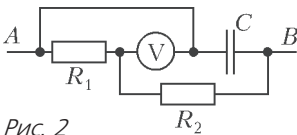


Рис. 2

10. Кощей Бессмертный собрался с размахом отпраздновать Хэллоуин в своем замке. Для праздничной иллюминации Василиса Прекрасная выделила ему  $N = 952$  светлячка-светодиода сопротивлением  $r = 91$  Ом каждый. Кикиморы из них сплели электрическую гирлянду в виде занавеса, состоящего из  $n = 34$  рядов последовательно соединенных светлячков. На сколько больше денег Кощею придется в этом месяце заплатить за электричество, если занавес будет гореть круглосуточно в течение  $d = 6$  дней, стоимость электричества в волшебном лесу  $c = 3,73$  руб. за кВт · ч, а напряжение в электрической сети замка  $U = 220$  В?

### Заключительный тур

Каждая задача, кроме третьей, оценивалась в 15 баллов, а задача 3 оценивалась в 25 баллов.

1. Поезд метро уезжает со станции с постоянным ускорением, при этом третий вагон проезжает мимо дежурной по станции, стоящей около кабины машиниста, со средней скоростью 10 км/ч. Какой будет скорость поезда в момент, когда последний, восьмой вагон проедет мимо дежурной?

2. Открыв банку со сгущенкой и съев половину, Славик подумал, что неплохо было бы сварить остаток. Опустив банку в кипящую воду, Славик заметил, что банка погрузилась в воду на  $5/6$  своего объема. Время шло, не темнела, и Славик съел еще четверть банки. Теперь банка плавала, погрузившись наполовину. Сколько граммов весила полная банка, если ее объем 300 мл?

3. Идеальный одноатомный газ в количестве  $\nu$  молей совершает прямой циклический процесс, состоящий из изобарного расширения, изохорного охлаждения и изотермического сжатия. В пределах цикла как давление, так и объем газа изменяются в  $n = 2$  раза. Нарисуйте этот цикл в  $p$ - $V$  координатах и определите его КПД. (Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $y = 1/x$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = x_1$  и  $x = x_2$  ( $x_2 > x_1$ ), равна  $S = \ln \frac{x_2}{x_1}$ .)

4. На крышке маленького черного ящика находятся три клеммы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , а внутри – схема, собранная из трех резисторов сопротивлениями 10 Ом, 20 Ом и 40 Ом. Сопротивление между клеммами  $A$  и  $B$  равно  $R_{AB} = 28$  Ом, между клеммами  $B$  и  $C$  равно  $R_{BC} = 20$  Ом. Чему равно сопротивление между клеммами  $A$  и  $C$ ? Нарисуйте схему соединения резисторов в черном ящике.

5. Электрон, летевший со скоростью  $v_x = 2 \cdot 10^5$  м/с вдоль оси  $x$ , попадает в область пространства, где присутствуют однородные электрическое и магнитное поля, причем и напряженность электрического поля, и индукция магнитного поля направлены вдоль оси  $y$ ,  $E = 900$  В/м,  $B = 0,6$  Тл. Во сколько раз изменится величина скорости электрона, когда он сделает  $N = 20$  оборотов вокруг оси  $y$ ?

6. Плоский тонкий предмет был расположен параллельно плоскости тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием 10 см. Линзу заменили на рассеивающую с таким же фокусным расстоянием. На какое рассто-



яние и куда нужно переместить предмет вдоль главной оптической оси так, чтобы размер его изображения не изменился?

**И Н Ф О Р М А Т И К А**

*Отборочный тур*

1. Делфтский яблокоед (виртуальный персонаж Политехнической олимпиады, обитающий в массивах и питающийся яблоками) любит раскладывать разноцветные яблоки в ячейки двумерных массивов-стеллажей (в ячейку помещается ровно одно яблоко) и любоваться получившимися композициями. Особенно понравившиеся композиции Яблокоед старался запоминать, но получалось плохо. Тогда он стал их записывать, просто указывая ширину стеллажа (число столбцов массива), символ «#» для отделения числа от всего остального, а затем последовательно перечисляя цвета всех яблок, обозначенные первой буквой: G – зеленое, Y – желтое, R – красное. Получалось долго и требовало много бумаги. Тогда Яблокоед стал заменять последовательности яблок одного цвета числом повторений цвета и буквой цвета. А потом ему рассказали про скобки, и толковый Яблокоед сразу понял, что можно повторять последовательность расклада яблок несколько раз, заключив ее в скобки и указав перед

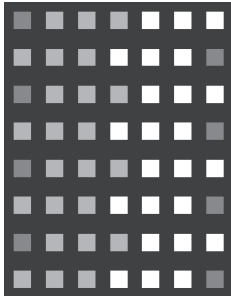


Рис. 3

скобкой число повторов. Яблокоед очень гордился своим способом и не знал, что человечеству он давно известен как алгоритм сжатия RLE. К примеру, картинку на рисунке 3 (зеленому соответствует светло-серый, желтому – белый, красному – темно-серый) Яблокоед записал так: 7#4(R2(3G3Y)R). Какая из записей соответствует приведенной на рисунке 4 картинке?

- А) 12#2(6R6G)3(GY)6Y12G18Y
- Б) 12#3(2(RG)3Y2G3Y3(RG)Y2G3Y)
- В) 12#6(2(GR)3Y2G3Y)
- Г) 12#6(2(RG)2(3YG))
- Д) 12#3(2(RG)3Y2G3Y3(RG)3Y2GY)

2. Бит-реверс – функция от натурального числа. Берем число, записываем его в двоичной системе счисления, переставляем в полу-

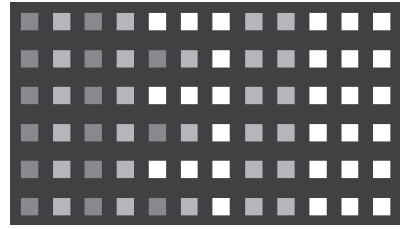


Рис. 4

ченном двоичном числе цифры в обратном порядке, снова переводим в десятичную систему. Обозначим бит-реверс числа M как V(M). К примеру: M=50. Двоичная запись этого числа – 110010. Перевернули, получили 010011=10011. Переводим обратно в десятичную: 19. Стало быть, V(M)=19. Интересно, что V(19) не 50, а 25 (11001). Подсчитайте, сколько в интервале от 100 до 999 таких чисел, что V(V(M))=M.

3. Вам предлагаются высказывания. Отметьте те из них, которые являются истинными.

- 1) Штаб-квартира компании Microsoft находится на улице Microsoft Way.
- 2) Корпус первой компьютерной мыши был изготовлен из дерева.
- 3) Технология быстрой разработки программ называется: RAID.
- 4) Основную структуру текстового документа определяет колонтитул.
- 5) Планкалькюль – это высокоуровневый язык программирования.
- 6) Выражение, записанное в обратной польской нотации как 3 4 5 \* + 6 -, будет равно 10.
- 7) «Королева Параллелограммов» – так называли Аду Лавлейс Байрон.
- 8) Ниббл – это один восьмеричный разряд.
- 9) Если число является симметричным (одинаково читается слева направо и справа налево) в шестнадцатеричной системе счисления, то оно симметрично и в двоичной системе.
- 10) Термин «Пасхальное яйцо» в программировании означает некий сюрприз, не совпадающий с общей стилистикой программного продукта, спрятанный разработчиком в коде программы.

4. Даны 4 шаблона имен файлов:

```
P????P???.* *TUPI*.V* *_?.*Z
*OS*. *U*
```

Укажите в качестве ответа самое короткое

имя файла, удовлетворяющее всем указанным шаблонам. Регистр не важен.

*Справка:* «\*» в шаблонах имен означает любое (в т.ч. 0) количество любых символов, «?» в шаблонах имен означает ровно один любой символ.

5. Слово МУЛЬТИЗАДАЧНОСТЬ зашифровали с помощью шифра Виженера (не знакомы? Гугл в помощь!). Получилось НУФОУИРТЕААЯПСЬЮ. Найдите слово-ключ. Известно, что слово-ключ имеет отношение к обработке информации.

6. При регистрации на олимпиаду «IT-планета» команде политехников предложили выбрать для себя 5-значный номер-идентификатор. Это оказалось непростым делом, так как у разных участников были совершенно разные предпочтения в мире натуральных чисел. Аркадий любил даты – например, годы, связанные с важными историческими событиями. Белла любила степени двойки. Валерий считал счастливыми для себя числа, в которых много троек. Геннадий просто любил большие числа – чем больше, тем лучше. Дмитрий тоже много что любил, но, будучи юношей практичным, он предложил вариант, который устроит всех: возводим двойку в степень, равную 1703 (год основания Петербурга), а затем возводим число 33 в степень, равную тому, что получилось перед этим, и в качестве номера берем последние 5 цифр результата. Каким в итоге оказался номер команды?

7. Когда-то давно студенты играли на лекции в «балду»: один называет букву, второй присоединяет к ней следующую, первый добавляет еще и т.п. Проигрывает тот, после хода которого получилось законченное слово, или же тот, кто сделал ход, после которого построение слова невозможно. Пример партии. Первый называет Ш (почему бы и нет?). Второй делает ШЛ (возможно много разных продолжений). Первый: ШЛА (рассчитывает на ШЛАК). Второй: ШЛАН (у него есть выигрышный вариант). Первому остается либо проиграть, назвав ШЛАНГ, либо назвать другую букву и проиграть из-за непродолжаемого слова. В «балду» можно играть на любом языке. Предположим, вы оказались гостем племени Бдыщ (словарь племени приведен ниже). Если вы выиграете в «балду» у вождя племени – сохраните статус гостя, в противном случае получите

статус завтрака. Вам предоставлено право первого хода. Какую букву следует назвать, чтобы наверняка не стать завтраком?

БДЫЩ ДУ ЫЩ БАБАК АЫК КУЩА ДЫК АЫКА КЫК БДЫКА БУ БАЩ КЫДАК ДЫДЫК ДА ЫКУД АЩАБЫКА КЫБЫЩ ЫКУБА ЫКА ЫКУКА ЫЩУБ УЩ УЩУЩ УЩУЩУЩ УКЫКА ЫЩА ДУД ДУДАК ЫЩАБАК УБО ДЫЩАБ

8. Блоха умеет прыгать по координатной плоскости, выполняя команды ВверхНа N, ВнизНа N, ВправоНа N и ВлевоНа N. Кроме того продвинутое насекомое знакомо с псевдокодом, в частности с операциями цикла. Где окажется блоха, сидящая сейчас в точке (300, 300) после выполнения описанного на рисунке 5 алгоритма?

```

Алг  ПутьБлохи
Нач
НЦ Для К От 1 До 400 Шаг 4
    ВнизНа К
    ВправоНа К+1
    ВверхНа К+2
    ВлевоНа К+3
КЦ
Кон
    
```

Рис. 5

9. В ячейках A1:A10 (рис.6) цвет шрифта совпадает с цветом заливки. Формула из B1 (она видна в строке формул) с помощью

	A	B	C	D	E	F
1		29				
2		28				
3		24				
4		23				
5		22				
6		13				
7		9				
8		10				
9		11				
10		15				

Рис. 6

автозаполнения растиражирована на ячейки B2:B10. Найдите сумму значений в ячейках A2:A10.

10. A и B – 16-разрядные целочисленные переменные без знака. С переменной A выполнили несколько операций циклического сдвига вправо, а с переменной B – несколько

операций циклического сдвига влево («несколько» – это от нуля до бесконечности, у А и В «несколько» могли быть разными). С тем, что получилось, выполнили поразрядную операцию XOR (исключающее ИЛИ). Каким мог быть максимальный возможный результат этой операции при А = 34770 и В = 49877?

*Справка:* Циклический сдвиг – операция, при которой двоичные разряды числа сдвигаются на одну позицию в указанном направлении, а «вытесненный» разряд занимает «освободившееся» место. Например, результатом циклического сдвига байта, содержащего число 13 (00001101), вправо будет число 134 (10000110), а влево будет число 26 (00011010).

### Заключительный тур

**1. Задуманное число** (10 баллов). Задумано натуральное число, не превосходящее Х. Найдите значение Х, если сообщение «Задуманное число меньше 21» несет на 2 бита меньше информации, чем «Задуманное число больше 47».

**2. Гирлянда** (9 баллов). Кот Бейсик зачарованно смотрел на гирлянду из 8 светодиодов, ежесекундно меняющую свое состояние. «8 элементов с двумя состояниями... байт!» – понял продвинутый кот, и стал вслух интерпретировать состояния гирлянды как числа в формате беззнакового байта, постепенно понимая закономерность:

113, 37, 39, 35, 41, 57, 17, 85, 127...

Назовите следующие 3 числа, которые произнесет Бейсик.

**3. Шифровка** (8 баллов). Перехвачены файлы с зашифрованными числовыми данными. Для некоторых чисел известна их расшифровка: так, 34202215731 расшифровывается как 28881637447, а 077713 – как 913507. Известно, что ключом является год некоего важного события, связанного с информационными технологиями. Найдите ключ.

**4. Схема раскладки яблок** (15 баллов). Делфтский Яблокоед (ДЯ) по-прежнему фигурирует в задачах Политехнической олимпиады и, как и раньше, живет в двумерном стеллаже-массиве размером N на N ячеек (N – гарантированно четное). Для нормальной жизнедеятельности яблокоед должен много двигаться и хорошо питаться (яблоками, естественно). Каждые 4 дня профессор Ог-

```

ЦелТаб Y[8][8]
Цел Q, K, M
НЦ Для K От 1 До 8
    НЦ Для M От 1 До 8
        Y[K][M] := 0
    КЦ
КЦ
Q := 8
НЦ Пока Q > 0
    НЦ
        K := СЛЧИСЛО(1, 8)
        M := СЛЧИСЛО(1, 8)
        КЦ Пока Не Y[K][M]=0
        Y[K][M] := 1
        Y[M][9-K] := 2
        Y[K][K] := 2
        Y[9-M][K] := 2
        Q := Q - 1
    КЦ
НЦ Для K От 1 До 8
    НЦ Для M От 1 До 8
        Y[K][M] := Y[K][M] mod 2
    КЦ
КЦ

```

Рис. 7

рызков выдает лаборантам схему раскладки яблок на стеллаже. В первый день лаборанты кладут схему заголовком вверх и кладут в каждую ячейку указанное количество яблок. На второй день схему переворачивают заголовком вправо и вновь раскладывают яблоки. На третий день схему кладут заголовком вниз, на четвертый – заголовком влево. За день ДЯ съедает все выложенные яблоки, оставляя на их месте огрызки. Профессор решил создать генератор схем раскладки яблок. Главное требование к схеме: через 4 дня в каждой ячейке стеллажа должен оказаться ровно 1 яблочный огрызок. Вот (рис.7) алгоритм, разработанный профессором для N=8 и заполняющий целочисленный массив из 8 строк и 8 столбцов Y[8][8] количествами яблок в каждой ячейке. Известно, что он содержит ошибки. Вам предстоит их выявить. В ответе про каждую ошибку укажите номер неверной строки и правильный вариант ее написания.

**5. Минимум** (8 баллов). В выражение Max (Min (Max( \_\_, \_\_), Max( \_\_, \_\_)), Min (Max( \_\_, \_\_), Max( \_\_, \_\_))) вместо прочерков расставили в случайном порядке пере-

менные A, B, C, D, E, F, G, H. Перечислите в порядке возрастания все возможные значения выражения, если A=5, B=11, C=2, D=8, E=4, F=7, G=13, H=6.

**6. Кирпич-1** (5 баллов). «Кирпич размером A на B на C см (A, B, C – натуральные числа) разрезали на кубики со стороной 1 см. Внутри кирпич желтый, снаружи покрыт красной глазурью. Сколько получилось кубиков с 0, 1, 2, ... и т.д. (все возмож-

```

Алг Грани
Цел A, B, C, K0, K1, K2, K3
Нач
Ввод A, B, C
Если A <= 0 или B <= 0 или C <= 0 То
    Вывод «Данные некорректны»
Иначе
    K3 := 8
    K2 := 4 * (A + B + C - 6)
    K1 := 2 * ((A-2)*(B-2)+(B-2)*((C-2)+(C-2)*(A-2)))
    K0 := A*B*C - (K3+K2+K1)
    Вывод K0, K1, K2, K3
Все
    
```

Рис. 8

ные варианты) красными гранями?» Студент Вася разработал следующий алгоритм решения этой задачи (рис.8). Приведите пример входных значений, при которых программа Васи работает некорректно.

**7. Кирпич-2** (20 баллов). Попробуйте решить предыдущую задачу средствами MS Excel. В качестве ответа приведите таблицу в режиме отображения формул. Исходные данные – в ячейках A2:C2 (рис.9). Значения

	A	B	C
1	A	B	C
2	7	3	5

Рис. 9

должны верно рассчитываться при любых натуральных A, B и C. Рекомендуется проиллюстрировать идею расчета блок-схемой.

**8. Попрыгунчик** (10 баллов). Попрыгунчик начинает движение в начале координат (оси – как в математике, а не как на экране). Траектория его движения состоит из шагов длины 1. Направление движения на каждом шаге определяется последними двумя цифрами двоичного представления числа N: 00 – вверх, 01 – вправо, 10 – вниз, 11 – влево.

Число же N формируется так: на первом шаге оно равно весу попрыгунчика V, выраженному натуральным числом; на каждом следующем шаге к нему прибавляется одно и то же число L – количество лапок попрыгунчика. Сколько существует точек плоскости, удаленных от начала координат не более чем на 10, для которых можно подобрать такие значения V и L, чтобы попрыгунчик достиг этой точки?

**9. Система счисления** (8 баллов). Определим функцию MinSum от двух целочисленных аргументов N и B следующим образом: это минимальная сумма цифр числа N при записи его в системе счисления с основанием, не превышающим B. Найдите количество таких N в интервале от 111 до 222, для которых MinSum(N, 16) минимальна на данном интервале.

**10. Графические форматы** (7 баллов). Восемь точечных рисунков одинакового размера преобразовали в формат .PNG (рис.10). Упорядочите файлы по возрастанию размера.

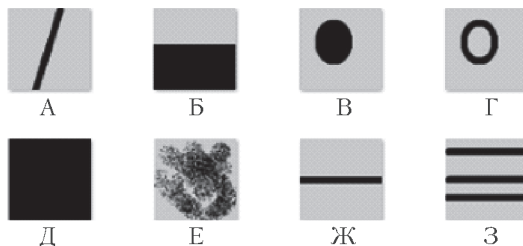


Рис. 10

Публикацию по математике подготовили  
 И.Комарчев, А.Моисеев, А.Одницов,  
 С.Преображенский;  
 по физике – Т.Андреева, С.Старовойтов;  
 по информатике – Н.Иванова,  
 Е.Крылова, А.Щукин



# Олимпиада «Ломоносов»-2018.

## Математика

В соответствии с Порядком проведения олимпиад школьников олимпиада «Ломоносов» проводилась в 2017/18 учебном году в два этапа: отборочный и заключительный. Отборочный этап проводился в режиме он-лайн и состоял из двух независимых друг от друга туров. Каждый школьник мог участвовать в любом из них или в обоих (в последнем случае засчитывался результат второго тура). Все задания публиковались на сайте олимпиады <http://olymp.msu.ru>.

К участию в заключительном (очном) этапе, который проводился в марте 2018 года в Москве и ряде городов России, допускались только победители и призеры отборочного этапа, а также победители и призеры заключительного этапа прошлого учебного года.

### ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

#### Первый тур

1. Последовательность  $\{x_n\}$  задана условиями  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 17$ ,  $x_{n+1} = x_n - x_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ). Найдите  $x_{2018}$ .

2. Найдите все значения  $x$ , при которых наибольшее из чисел  $x^2$  и  $\cos 2x$  меньше чем  $1/2$ . В ответ запишите суммарную длину найденных промежутков числовой прямой.

3. Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 2 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 3 конверта, лишней снова оказалась одна марка; когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он попытался их разложить поровну в 9 конвертов, осталось 7 марок. Сколько всего марок у Андрея, если недавно, для того чтобы разместить их все у себя, ему пришлось купить второй альбом на 150 марок, так как одного такого же альбома уже не хватало?

4. Через вершину  $A$  параллелограмма  $ABCD$  проведена прямая, пересекающая диагональ  $BD$ , сторону  $CD$  и прямую  $BC$  в точках  $E$ ,  $F$  и  $G$  соответственно. Найдите отношение  $BE : ED$ , если  $FG : FE = 4$ .

5. Найдите сумму цифр в десятичной записи целой части числа  $\sqrt{\underbrace{11\dots 11}_{2017} \underbrace{22\dots 22}_{2018}}$ .

6. Найдите все целые решения уравнения  $x \ln 27 \log_{13} e = 27 \log_{13} y$ . В ответ запишите сумму  $x + y$  для решения  $(x; y)$ , в котором  $y$  – наименьшее, превосходящее 70.

7. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{5x^2 + 8xy + 5y^2 - 14x - 10y + 30}{(4 - x^2 - 10xy - 25y^2)^{7/2}}.$$

8. Точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  являются центрами окружностей, вписанных в грани  $SAB$ ,  $SAC$ ,  $SBC$  и  $ABC$  тетраэдра  $SABC$ . Известно, что  $AB = SC = 5$ ,  $AC = SB = 7$ ,  $BC = SA = 8$ . Найдите объем тетраэдра  $KLMN$ .

#### Второй тур

1. Найдите наименьшее 12-значное натуральное число, делящееся на 36 и содержащее в своей записи каждую из 10 цифр не менее одного раза.

2. Синус двугранного угла при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен  $\frac{15}{17}$ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь ее диагонального сечения равна  $3\sqrt{34}$ .

3. При каком наибольшем  $a$  неравенство  $\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x}} > \frac{a}{2}$  выполнено при всех допустимых  $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ ?

4. В компьютерный магазин завезли партию планшетов четырех разных брендов. Среди них планшеты Lenovo, Samsung и Huawei составляли менее трети, причем планшетов Samsung было на 6 штук больше, чем Lenovo. Все остальные планшеты – бренда Apple iPad, причем их в три раза больше, чем Huawei. Если бы планшетов Lenovo было в три раза больше, а Samsung и Huawei – столько же, сколько сейчас (при том же общем числе всех планшетов), то планшетов Apple iPad было бы 59 штук. Сколько всего планшетов завезли в магазин?

5. Пусть  $S(n)$  – сумма цифр в десятичной записи числа  $n$ . Найдите

$$S\left(S\left(S\left(S\left(2017^{2017}\right)\right)\right)\right).$$

6. Пусть  $f(x) = x^2 + px + q$ . Известно, что неравенство  $|f(x)| > \frac{1}{2}$  не имеет решений на отрезке  $[1; 3]$ . Найдите

$$\underbrace{f\left(f\left(\dots f\left(\left(3 + \sqrt{7}\right)/2\right)\dots\right)\right)}_{2017}.$$

7. В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $AM$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, точка  $Q$  – центр вписанной в него окружности. Отрезки  $AM$  и  $OQ$  пересекаются в точке  $S$ , при этом  $2 \frac{OS}{MS} = 3\sqrt{3} \frac{QS}{AS}$ . Найдите сумму синусов величин углов  $ABC$

и  $ACB$ , если известно, что  $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ .

8. Решите в натуральных числах уравнение  $x^{x+y} = y^{y-x}$ . В ответ запишите сумму  $x + y$  для решения  $(x; y)$ , в котором  $y$  – наименьшее, превосходящее 1500.

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

1. На каком из пяти интервалов, на которые разбивают числовую ось четыре точки  $x^5 < y^8 < y^3 < x^6$ , лежит число 0?

2. Какое из чисел больше:

$$\sqrt[2018]{\underbrace{\sqrt{17}\sqrt{13}\sqrt{17}\sqrt{13}\sqrt{17}\dots}}_{2018 \text{ знаков корня}} \quad \text{или} \quad 17\sqrt[3]{\frac{13}{17}}?$$

3. В треугольнике  $ABC$ , площадь которого равна 20, проведена медиана  $CD$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , если известно, что

$AC = \sqrt{41}$ , а центр окружности, вписанной в треугольник  $ACD$ , лежит на окружности, описанной около треугольника  $BCD$ .

4. Архив фотографий укладывают в порядке их нумерации в одинаковые альбомы, ровно по 4 фотографии на одну страницу. При этом 81-я по счету фотография попала на 5-ю страницу одного из альбомов, 171-я – на 3-ю страницу другого. Сколько фотографий вмещает каждый альбом?

5. Решите неравенство

$$\left(\frac{5}{2\pi} \arccos x\right) > \arccos\left(\frac{10}{3\pi} \arcsin x\right).$$

6. Найдите все такие наборы чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ , что  $x_1 = x_{n+1}$  и при всех  $k = 1, \dots, n$  выполнено равенство

$$2 \log_2 x \cdot \log_2 x_{k+1} - \log_2^2 x_k = 9.$$

7. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sin(x + \sin x) + \sin(x - \sin x) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \sin \sin x.$$

8. Андрею нравятся все числа, не делящиеся на 3, а Тане нравятся все числа, в которых нет цифр, делящихся на 3.

а) Сколько четырехзначных чисел нравятся и Андрею, и Тане?

б) Найдите общую сумму цифр всех таких четырехзначных чисел.

*Публикацию подготовили Б.Будак, Д.Горяшин, А.Зеленский, А.Козко, В.Панфёров, А.Разборов, И.Сергеев, И.Шейнак*

**ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**

**«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ**

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №10)

1. 11.

Рассмотрим 5 последних мальчиков. Они могут танцевать только с тремя девочками. Значит, какие-то двое из них будут без пары. Всего мальчиков 13, значит, пар не больше 11.

Ниже приведен пример, в котором 11 пар (около ребенка написан номер его пары):

м1 м2 м3 д1 д2 м4 м5 м6 д3 д4 д5 м7 м8 д6 д7 д8 д- д- м9 м10 м11 м- д9 м- д10 д11

2. 0.

Так как оба числа делятся на 3, то суммы цифр в числе ДЮЖИНА и ГРОСС также делятся на 3. Следовательно, и сумма этих сумм делится на 3. В этой сумме участвуют десять различных букв, причем буква С – дважды. Следовательно, такая сумма равна  $C + (0 + 1 + \dots + 8 + 9) = C + 45$ , откуда следует, что С кратно трем. Кроме того, ГРОСС делится на 4, поэтому число, обра-

зованное его двумя последними цифрами (СС) делится на 4. Под оба эти условия подходит только вариант С = 0.

Отметим, что числа, указанные в условии, существуют. Например, ДЮЖИНА = 375948, ГРОСС = 21600.

**3. Один лжец.**

Разберем три случая.

1) Если Эник – правдолюб, то Беник – хитрец, а Вареник – лжец.

2) Если Эник – лжец, то Беник – не хитрец, значит, Беник – правдолюб. Тогда Вареник не может быть лжецом.

3) Если Эник – хитрец и сказал правду, то Беник – также хитрец и солгал. Значит, Вареник – лжец. А если Эник – хитрец и солгал, то Беник сказал правду и он не лжец. Противоречие. Таким образом, в каждом случае лжецом является кто-то один.

**4. Так как проволоку сгибать нельзя, то после спайки должны получиться кубы с меньшей длиной ребра. Следовательно, каждое ребро куба должно быть разрезано. Значит, частей не меньше 8 (количество вершин куба). Разрезав каждое ребро по середине, получим 8 одинаковых частей. На рисунке 1 показано, как из четырех**

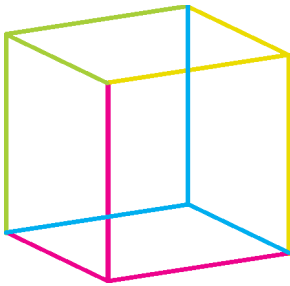


Рис. 1

таких частей можно спаять куб, не сгибая проволоку.

**КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА**

(с.м. «Квант» №9)

**1. 15:59.**

Назовем периодом аттракциона время, за которое проходит перерыв и один цикл аттракциона. Олег пришел в момент, когда ни один аттракцион не работал, а значит, прошло целое число периодов каждого аттракциона, если считать с 8:59. Пусть прошло  $x$  минут, тогда  $x$  делится на 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Наименьшее такое число – это наименьшее общее кратное (НОК) этих чисел:  $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$  (минут), т.е. 7 часов. Прибавим 7 часов ко времени начала работы аттракционов, получим 15:59. Если прибавить еще 7 часов, получим уже 22:59. Так как дело было днем, то подходит только первый вариант.

**2. 1 отрезок.**

Приведем несколько доказательств того, что достаточно провести один отрезок.

*Первое решение.* Продлим отрезок  $AB$  до узла  $K$  (рис.2). Приняв сторону квадратной сетки за

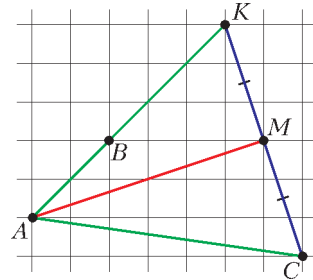


Рис. 2

единицу, по теореме Пифагора найдем длины отрезков  $AK = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$  и  $AC = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$ . Таким образом, треугольник  $ACK$  равнобедренный с основанием  $CK$ . Значит, биссектриса его угла  $A$  совпадает с медианой, проведенной к основанию. Середина основания  $CK$  – это узел  $M$ . Тогда  $AM$  – медиана треугольника  $ACK$ , а значит, и биссектриса угла  $A$ .

*Второе решение.* Отметим узлы  $M$  и  $N$  (рис.3). Заметим, что они лежат на одной прямой с

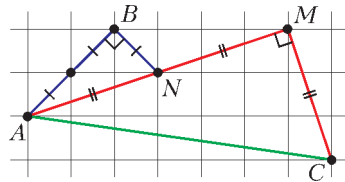


Рис. 3

точкой  $A$ . Отрезки  $AB$  и  $BN$  перпендикулярны, так как они проходят по диагоналям квадратов, образующих сетку. А отрезки  $NM$  и  $MC$  перпендикулярны, поскольку оба этих отрезка являются диагоналями в прямоугольниках  $1 \times 3$ , значит, образуют со сторонами прямоугольников равные углы. Поэтому треугольники  $ABN$  и  $AMC$  – прямоугольные с отношением катетов  $1:2$ . Значит, они подобны. Тогда равны и углы  $BAN$  и  $MAC$ , т.е.  $AN$  – биссектриса угла  $BAC$ .

*Третье решение.* Введем систему координат (рис.4). Пусть  $A$  – начало координат, оси направлены вдоль сторон сетки и единичный отрезок

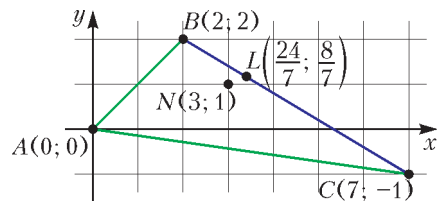


Рис. 4

зок равен стороне квадрата. Тогда координаты других точек  $B(2;2)$ ,  $C(7;-1)$ .

Пусть  $AL$  – биссектриса треугольника  $ABC$ . Найдем координаты точки  $L$ . По свойству биссектрисы,  $BL:LC = BA:AC$ . Длины  $BA$  и  $AC$  найдем по теореме Пифагора:

$$BA = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ и}$$

$$AC = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Теперь из соотношения  $BL:LC = 2:5$  найдем координаты точки  $L\left(\frac{2 \cdot 5 + 7 \cdot 2}{7}; \frac{2 \cdot 5 + (-1) \cdot 2}{7}\right)$ , после

упрощения получаем  $L\left(\frac{24}{7}; \frac{8}{7}\right)$ . Первая координата в 3 раза больше второй. Значит, уравнение биссектрисы  $AL$  – это  $y = x/3$ . Тогда на ней лежит точка  $N$  с целыми координатами  $(3;1)$ , которая является узлом сетки.

**3.** Ноутик вправе выбрать порядок, в котором ему называть 5 чисел Квантику. Всего таких порядков 120 (на первом месте может стоять любое из 5 чисел, на втором месте любое из оставшихся 4 чисел и т.д., всего  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  вариантов). Квантик и Ноутик заранее запоминают все возможные порядки в определенной последовательности: 12345, 12354, 12435, ... (1 обозначает наименьшее из пяти чисел, 2 – следующее по величине и т.д.). Ноутик упорядочивает по возрастанию 120 чисел, которые он не называет, находит в нем шестое задуманное число и называет указанные зрителем 5 чисел в порядке с соответствующим номером. Квантик высчитывает этот номер (также упорядочивая неназванные числа) и угадывает задуманное число.

**4.** Да, можно.

Приведем алгоритм, как разрезать квадрат требуемым образом. Рассмотрим граф, вершины

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Рис. 5

которого будут соответствовать клеткам квадрата. Две вершины будем соединять красным ребром, если соответствующие им клетки находятся в одной доминошке, и синим ребром, если они симметричны относительно центра квадрата. Тогда из

каждой вершины выходит одно красное ребро и одно синее. На рисунках 5 и 6 приведен пример работы алгоритма для разбиения квадрата  $4 \times 4$  на доминошки. На рисунке 5 – исходное разбиение, на рисунке 6 – полученный граф. Для удобства клетки квадрата пронумерованы числами от 1 до 16.

Докажем, что такой граф представляет собой объединение циклов. Выберем любую вершину и

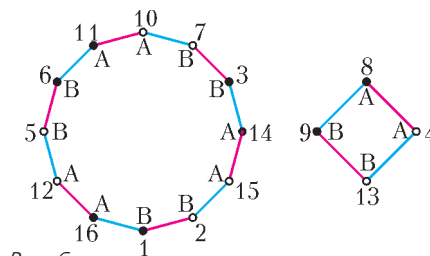


Рис. 6

начнем обходить граф по ребрам, не проходя ни по какому ребру дважды. Посещать новые вершины все время мы не можем, так что когда-то вернемся в вершину, в которой уже были. Это может быть только начальная вершина, так как из промежуточных вершин выходит по два ребра, оба из которых мы уже посетили. А если мы вернулись в начальную вершину, значит, обшлись цикл. Если еще не все вершины пройдены, то выбираем такую непройденную вершину и начинаем такой же обход с нее, повторяя те же рассуждения. Таким образом, данный граф – объединение циклов.

Рассмотрим один из циклов. Для начала заметим, что красные и синие ребра чередуются. Теперь покрасим каждую вершину в цвет соответствующей ей клетки в шахматной раскраске. Тогда вершины, соединенные красным ребром, разного цвета (так как соседние клетки разного цвета), а соединенные синим – одного цвета (поскольку клетки, симметричные относительно центра, одного цвета). Таким образом, цвета вершин в цикле идут так: черная, черная, белая, белая, черная, черная, белая, белая, ..., значит, количество вершин кратно 4.

Обозначим теперь вершины цикла буквами А и В так, чтобы красные ребра соединяли одинаковые буквы, а синие ребра – разные. Буквы будут идти в порядке А, А, В, В, А, А, В, В, ... Так сделать получится, потому что количество вершин в цикле делится на 4.

Объединение клеток, соответствующих вершинам типа А, это объединение нескольких доминошек. Аналогично с вершинами типа В. При этом эти два множества клеток симметричны друг другу, потому что каждая клетка типа А симметрична какой-то клетке типа В и наоборот. Покажем теперь, что клетки типа А образуют связную фигуру. При обходе цикла от вершины типа А к следующей вершине типа А мы переходили либо по одному красному ребру – т.е. в соседнюю клетку; либо по синему ребру, по красному ребру и снова по синему ребру – т.е. переходили в симметричную клетку, в соседнюю с ней и снова в симметричную – этими тремя шагами мы также переходим в соседнюю клетку.



Получается, что любые две соседние в порядке обхода цикла вершины типа А соответствуют соседним клеткам доски. Значит, клетки типа А образуют связную фигуру.

Итак, если в графе всего один цикл, то мы достигли требуемого – показали, как разделить доминошки на две симметричные связные группы.

Покажем, как действовать, когда циклов несколько (рис. 7, 8). Выберем любой цикл и поделим его клетки на группы А и В, как показано выше. Клетки А покрасим в желтый цвет, В – в зеленый.

1 <sub>В</sub>	2 <sub>В</sub>	3 <sub>В</sub>	4
5 <sub>В</sub>	6 <sub>В</sub>	7 <sub>В</sub>	8
9	10 <sub>А</sub>	11 <sub>А</sub>	12 <sub>А</sub>
13	14 <sub>А</sub>	15 <sub>А</sub>	16 <sub>А</sub>

Рис. 7

1 <sub>В</sub>	2 <sub>В</sub>	3 <sub>В</sub>	4
5 <sub>В</sub>	6 <sub>В</sub>	7 <sub>В</sub>	8
9	10 <sub>А</sub>	11 <sub>А</sub>	12 <sub>А</sub>
13	14 <sub>А</sub>	15 <sub>А</sub>	16 <sub>А</sub>

Рис. 8

1 <sub>В</sub>	2 <sub>В</sub>	3 <sub>В</sub>	4 <sub>А</sub>
5 <sub>В</sub>	6 <sub>В</sub>	7 <sub>В</sub>	8 <sub>А</sub>
9 <sub>В</sub>	10 <sub>А</sub>	11 <sub>А</sub>	12 <sub>А</sub>
13 <sub>В</sub>	14 <sub>А</sub>	15 <sub>А</sub>	16 <sub>А</sub>

Рис. 9

Теперь будем повторять следующую операцию. Если еще не все клетки покрашены, то найдется непокрашенная клетка Н рядом с покрашенной клеткой П. Рассмотрим, в каком цикле находится клетка Н, и поделим клетки этого цикла на группы А и В по алгоритму, приведенному выше. Тогда покрасим клетку Н в цвет клетки П (желтый или зеленый), и все клетки одного типа с Н покрасим в этот цвет. Клетки другого типа покрасим в другой цвет (рис. 9). Повторяя эту операцию, покрасим в итоге все клетки.

**ГЕОМЕТРИЯ КЛЕТЧАТОЙ БУМАГИ**

**5.** Из точки А строим отрезки, равные АВ, как в задаче 1. При этом вместо 8 (или 4) решений (как было в первой задаче) треугольников окажется 6 (или 2). Два решения пропадают, так как один из равных отрезков совпадает с АВ, а второй образует с ним угол 180°.

**6.** Постройте квадрат со стороной АВ и проведите его диагональ.

**7.** Отложите углы 45° от обоих концов отрезка по обе стороны. Всего получится 4 угла. Дальше уже нетрудно построить искомым квадрат.

**8.** а) Постройте квадрат, диагональю которого является данный отрезок. Далее проведите вторую диагональ. б) Центром описанной окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

**9. Указание:**

$$10 = 1^2 + 3^2, \quad 17 = 1^2 + 4^2, \quad 26 = 1^2 + 5^2.$$

**XLIX МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА**

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР**

**Задача 1**

**A1.**  $n = 3, \quad \alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2}.$

**A2.**  $A(\mu, \Omega, L) = \frac{1}{2} \mu L^2 \Omega^2.$     **A3.**  $\beta = -\frac{1}{2}.$

**B1.**  $k = 2\Omega; \quad a_1 = a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = -\frac{2}{3}, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = 0, \quad c_{12} = c_{21} = 1,$  для всех остальных случаев  $c_{ij} = 0.$

**B2.**  $\xi = \frac{32}{5}.$     **B3.**  $M_c = (\mu^3 M^2)^{1/5}.$     **B4.**  $p = 1.$

**B5.**  $M_c \approx 30M_\odot, \quad M \approx 69M_\odot.$

**B6.**  $L \approx 5 \cdot 10^2 \text{ км}; \quad \frac{R_\odot}{R_{\text{max}}} \approx 3 \cdot 10^3; \quad \frac{v}{c} \approx 0,2.$

**Задача 2**

**A1.**  $r = \frac{\sqrt{2Km}}{eB}.$     **A2.**  $p = 330 \text{ МэВ/с}.$

**A3.**  $\xi = \frac{1}{6\pi}, \quad n = 5, \quad k = 4.$     **A4.**  $\alpha = \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5}.$

**A5.**  $\Delta E = -56 \text{ МэВ}.$

**A6.**  $\omega(t) = \frac{ec^2 B}{E_0} \left( 1 + \frac{e^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4 c^5} E_0 t \right).$

**B1.**  $m_W^2 = \frac{1}{c^2} \left( 2p^{(\mu)} \sqrt{(p_T^{(v)})^2 + (p_z^{(v)})^2} - 2\vec{p}_T^{(\mu)} \cdot 2\vec{p}_T^{(v)} - 2p_z^{(\mu)} p_z^{(v)} \right).$

**B2.**  $p_z^{(v)} = 74,0 \text{ ГэВ/с}$  или  $p_z^{(v)} = -188,3 \text{ ГэВ/с}.$

**B3.**  $m_t = 169,3 \text{ ГэВ/с}^2$  или  $m_t = 311,2 \text{ ГэВ/с}^2.$

**B4.**  $m_t = 169,3 \text{ ГэВ/с}^2.$     **B5.**  $d = 2 \cdot 10^{-16} \text{ м}.$

**Задача 3**

**A1.**  $Q_i = \Delta p \frac{\pi r_0^4}{2^{i+3} N l_0 \eta}.$     **A2.**  $Q_0 \approx 1,5 \text{ мл/ч}.$

**A3.**  $p_{\text{вых}} = \frac{p_{\text{вх}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}}; \quad \frac{64\eta^2 l^2}{3Ehr^3} > 1.$

**A4.**  $h = 8 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$

**B1.**  $v = \frac{1 + \mu - \sqrt{(1 + \mu)^2 - 4\mu(1 - \kappa)}}{2(1 - \kappa)}.$

**B2.**  $T = 310,15 + \frac{PR_T^2}{2k}.$

**B3.**  $P_{\text{min}} = 4,3 \text{ кВт/М}^3.$

**B4.**  $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \approx \frac{2}{N} \frac{K_N v - (1 - v) p_{\text{кап}}}{(1 - v)(p_\kappa - p_{\text{кап}})} \frac{\delta r_\kappa}{r_{N-1}}.$

**LIX МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА**

**1** (С.Лучинин). При  $AB = AC$  картинка симметрична относительно среднего перпендикуляра к  $BC$ , поэтому утверждение задачи очевидно. Не умаляя общности, предположим, что  $AB < AC$ . Пусть  $T$  – середина дуги  $BAC$  (рис.10). Заме-

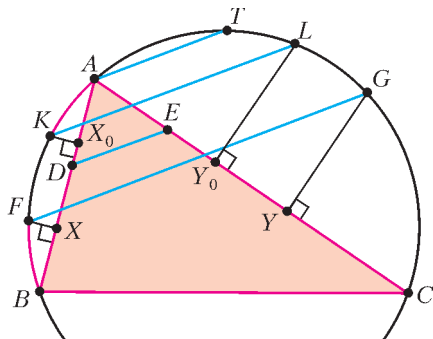


Рис. 10

тим, что  $AT$  – внешняя биссектриса угла  $BAC$ , поэтому  $AT \parallel ED$ . Достаточно доказать, что  $GF \parallel AT$ , что равносильно равенству дуг  $GT$  и  $AF$ . Так как равны дуги  $CT$  и  $BT$ , то достаточно доказать, что  $\overset{\frown}{BF} + \overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{CG}$ .

Пусть  $X$  и  $Y$  – основания перпендикуляров из  $F$  и  $G$  на  $AB$  и  $AC$  соответственно. Пусть  $X_0, D_0$  – точки, симметричные  $X$  и  $D$  относительно середины  $AB$ . Аналогично определяются точки  $Y_0, E_0$  на стороне  $AC$ . И пусть  $K, L$  – точки пересечения перпендикуляров к  $AB$  и  $AC$ , проведенных через  $X_0$  и  $Y_0$  соответственно с меньшими дугами  $AB$  и  $AC$ . Из симметрии относительно серединного перпендикуляра к  $AC$  имеем  $\overset{\frown}{CG} = \overset{\frown}{AL}$  и, аналогично,  $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{AK}$ . Тогда достаточно доказать, что  $\overset{\frown}{AK} + \overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{AL}$ , или  $\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{TL}$ , или, эквивалентно,  $AT \parallel KL$ .

Перпендикуляры  $KX_0$  и  $LY_0$  пересекаются в центре  $O_1$  окружности  $(AD_0E_0)$  (рис.11). Эта окружность проходит также через  $T$ . Действительно, треугольники  $TBD_0$  и  $TCE_0$  равны, поскольку  $BD_0 = AD = AE = CE_0$ ,  $TB = TC$  ( $T$  – середина дуги  $BAC$ ),  $\angle D_0BT = \angle ABT = \angle ACT = \angle E_0CT$ ; отсюда  $\angle AD_0T = \angle AE_0T$ , следовательно,  $A, D_0, E_0, T$  лежат на одной окружности. Таким образом,  $O_1$  лежит на среднем перпендикуляре  $m$  к отрезку  $AT$ .

Прямые  $O_1X_0K$  и  $O_1Y_0L$  составляют равные углы с внешней биссектрисой  $AT$ , поэтому лучи  $O_1K$  и  $O_1L$  симметричны относительно  $m$ . Тогда (поскольку  $m$  – ось симметрии окружности)

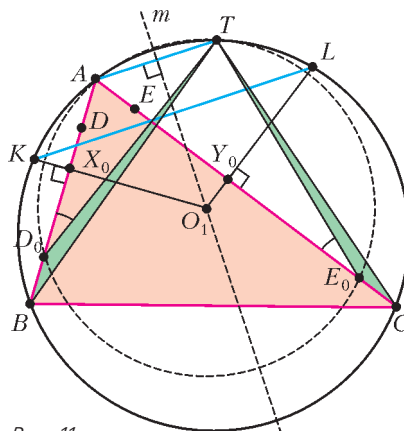


Рис. 11

$K$  и  $L$  симметричны относительно  $m$ . Тем самым,  $KL \perp m$  и  $KL \parallel AT$ .

**2** (С.Крымский). Все  $n$ , кратные 3.

Вначале приведем пример для  $n$ , делящихся на 3. Примером является последовательность  $-1, -1, 2, -1, -1, 2, \dots, -1, -1, 2, -1, -1$ , иначе говоря,  $a_k = 2$ , если  $k$  делится на 3, и  $a_k = -1$  в противном случае. Легко видеть, что эта последовательность удовлетворяет условиям.

Пусть теперь  $n$  не делится на 3. Предположим, что требуемая последовательность существует. Полагая  $a_{n+i} = a_i$ , будем считать нашу последовательность циклической и брать индексы по модулю  $n$ . Таким образом,  $a_{i+2} = a_{i+1}a_i + 1$  для всех целых  $i$ .

Предположим вначале, что нашлся некоторый индекс  $k$  такой, что  $a_k = 0$ . Тогда  $a_{k+1} = a_{k+2} = 1$ ,  $a_{k+3} = a_{k+2} + 1 > 1$ ,  $a_{k+4} \geq a_{k+3} + 1 > 1$ , и далее все члены последовательности, очевидно, будут больше 1, в противоречие с условием  $a_{k+n} = a_k$ . Далее считаем, что в последовательности нет нулей.

Имеем  $a_{i+3} = a_{i+2}a_{i+1} + 1 = (a_i a_{i+1} + 1)a_{i+1} + 1 = a_i a_{i+1}^2 + a_{i+1} + 1$ , или  $a_i a_{i+1}^2 + a_{i+1} + (1 - a_{i+3}) = 0$ . Рассмотрев последнее равенство как квадратный трехчлен ( $a_i \neq 0$ ) относительно  $a_{i+1}$ , запишем условие неотрицательности дискриминанта:

$$1 - 4a_i(1 - a_{i+3}) \geq 0, \text{ или } 4a_i(1 - a_{i+3}) \leq 1. (*)$$

Рассмотрим два взаимоисключающих случая.

*Первый случай.* Предположим, что нашлся некоторый индекс  $k$  такой, что  $a_k \geq \frac{1}{2}$ .

Из (\*) следует  $1 - a_{k+3} \leq \frac{1}{4a_k} \leq \frac{1}{2}$ , и  $a_{k+3} \geq \frac{1}{2}$ .

Проверяя, выводим  $a_{k+6} \geq \frac{1}{2}, a_{k+9} \geq \frac{1}{2}, \dots$  Так как  $n$  не делится на 3, по этому циклу мы пройдем все  $a_i$ , т.е. все числа в последовательности не меньше  $1/2$ . Пусть  $a_m = b$  – наименьшее число

в последовательности. Тогда  $b = a_m = a_{m-1}a_{m-2} + 1 \geq b^2 + 1$ , и  $b^2 - b + 1 \leq 0$ , что невозможно.

*Второй случай.* Пусть теперь для всех  $i$  выполнено  $a_i < \frac{1}{2}$ . Тогда для всех  $i$  верно

$a_i a_{i+1} = a_{i+2} - 1 < -\frac{1}{2} < 0$ , значит, ровно одно из чисел  $a_i, a_{i+1}$  положительно. Рассмотрим какое-либо  $k$ , для которого  $a_k > 0$ . Имеем чередование знаков:  $a_{k+1} < 0, a_{k+2} > 0, a_{k+3} < 0$  и т.д. (в частности,  $n$  четно). Из (\*) с учетом  $a_{k+3} < 0$  имеем  $4a_k \leq \frac{1}{1 - a_{k+3}} < 1$ , значит,  $a_k < \frac{1}{4}$ . Аналогично показываем, что  $a_{k+2} < \frac{1}{4}$ , и (так как  $a_{k+1} < 0$ )  $a_{k+3} = 1 + a_{k+1}a_{k+2} > 1 + \frac{a_{k+1}}{4}$ .

Пусть  $c < 0$  – наибольшее среди всех отрицательных чисел в последовательности. Не умаляя общности, пусть  $a_{k+1} = c$ . Тогда, с одной стороны,  $a_{k+3} \leq c$ , а с другой,  $a_{k+3} \geq 1 + \frac{a_{k+1}}{4} = 1 + \frac{c}{4}$ . Получаем  $c \geq 1 + \frac{c}{4}$ , и  $c \geq \frac{4}{3} > 0$  – противоречие.

**3** (М.Абдрахманов). Пусть такой треугольник существует. Будем называть *маленькими* числами 2018 наименьших чисел среди стоящих в треугольнике (т.е. числа 1, 2, ..., 2018) и *большими* числами – 2018 наибольших чисел (т.е. числа

$$(1 + 2 + \dots + 2017) + 1, (1 + 2 + \dots + 2017) + 2, \dots, (1 + 2 + \dots + 2017) + 2018).$$

Пусть  $A_i = B_i$  – число, стоящее в самой верхней клетке треугольника. Для всех  $i$  от 1 до 2017 обозначим через  $A_{i+1}$  большее из двух чисел, стоящих непосредственно под  $A_i$ , а  $B_{i+1}$  – меньшее из них. Тогда  $A_i = A_{i+1} - B_{i+1}$ . Сложив такие равенства, получим, что

$$A_1 = A_{2018} - B_{2018} - B_{2017} - \dots - B_2 \Rightarrow \Rightarrow A_{2018} = B_{2018} + B_{2017} + \dots + B_1.$$

Число  $A_{2018}$  равно сумме 2018 различных натуральных чисел (потому что все  $B_i$  различны), но оно также не превосходит числа клеток в таблице, равного  $1 + 2 + \dots + 2018$ , значит,  $\{B_1, B_2, \dots, B_{2018}\}$  – это перестановка всех маленьких чисел, поэтому все маленькие числа расположены по одному в строке.

Докажем, что все большие числа расположены в строках, отстоящих от нижней не больше чем на 70. Предположим, что, напротив, нашлось большое число  $C_1 = D_1$ , над которым еще хотя бы 70 строк. Обозначим для всех  $i$  от 1 до 70 через  $C_{i+1}$  большее из двух чисел, стоящих непосредственно под  $C_i$ , а  $D_{i+1}$  – меньшее из них. Аналогично рассуждениям выше, имеем

$$C_{71} = D_{71} + D_{70} + \dots + D_1,$$

$$C_{71} - D_1 = D_{71} + D_{70} + \dots + D_2 \geq \geq 1 + 2 + \dots + 70 > 70 \cdot 70/2 > 2018.$$

Но  $D_1$  – большое число, поэтому  $C_{71} > (1 + 2 + \dots + 2017) + 2018$  – противоречие.

Значит, каждое большое число лежит в одной из 70 нижних строк. Заметим, что большое число  $X$  не из нижней строки является разностью стоящих под ним  $Y$  и  $Z$ , поэтому меньшее из них – маленькое. Так как маленькое число равно одно в любой строке, то в каждой строке, кроме нижней, не больше двух больших чисел. Поэтому во всех строках, кроме нижней, не более  $69 \cdot 2 = 138$  больших чисел, следовательно, в нижней строке все числа, кроме не более 138 чисел, являются большими. Поскольку  $138 < [2018/3]$ , в нижней строке есть три подряд идущих больших числа. В таком случае два числа над ними маленькие, но это противоречит тому, что в каждой строке одно маленькое число. Противоречие.

**4** (Е.Рябов). 100.

Вместо точек рассмотрим клетки со стороной 1 с центрами в этих точках. Заметим, что две отмеченные точки находятся на расстоянии  $\sqrt{5}$  тогда и только тогда, когда соответствующие им клетки отстоят друг от друга на ход коня.

Сначала приведем стратегию, позволяющую Ане гарантированно поставить хотя бы 100 красных камней. Раскрасим клетки получившейся доски в шахматном порядке в черный и белый цвета. Ход коня меняет цвет клетки, поэтому если Аня будет ходить только в белые клетки, то никакие два ее камня не будут на расстоянии  $\sqrt{5}$ . Поскольку в каждый момент времени синих камней на доске не больше, чем красных, до момента, когда Аня поставит сотый красный камень, перед ходом Ани всегда будет свободная белая клетка (так как всего белых клеток 200). Таким образом, Аня сможет поставить хотя бы 100 камней.

Теперь покажем, как Ваня может помешать Ане поставить больше ста камней. Разобьем доску на квадраты  $4 \times 4$  и каждый квадрат разобьем на 4 цикла длины 4 ходом коня (рис. 12). Каждый раз, когда Аня ставит камень в какую-нибудь клетку, она попадает в какой-то цикл, и тогда Ваня делает свой ход в противоположную клетку того же цикла. После этого Аня не сможет больше ставить камни в клетки этого цикла (две оставшиеся свободные клетки цикла теперь запрещены условием).

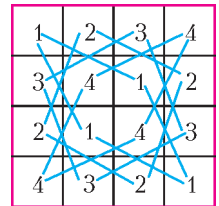


Рис. 12

Ваня всегда сможет сделать ход, ведь после его хода всегда будут оставаться либо полностью свободные циклы, либо циклы, в которые Аня не может поставить

камень. Таким образом, Аня сможет поставить камней не больше, чем количество циклов, которое равно 100.

5 (В.Петров). Через  $v_p(a)$  обозначим степень вхождения простого числа  $p$  в разложение натурального числа  $a$ . Для удобства обозначим

$$s_k = \sum_{1 \leq i \leq k-1} \frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_k}{a_1}.$$

Согласно условию, при  $k \geq N$  число  $s_k$  – целое.

**Лемма.** Пусть для некоторого  $k \geq N$  и некоторого простого  $p$  выполнено  $v_p(a_k) < v_p(a_{k+1})$ . Тогда  $v_p(a_{k+1}) = v_p(a_1)$ .

Рассмотрим разность

$$s_{k+1} - s_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{a_1} + \frac{a_k}{a_{k+1}}. \quad (*)$$

Это сумма двух дробей, равная целому числу. Пусть  $x = v_p(a_k) < y = v_p(a_{k+1})$ . Тогда в несократимой записи дроби  $\frac{a_k}{a_{k+1}}$  степень вхождения  $p$  в знаменатель равна  $y - x$ . Значит, в несократимой записи дроби  $\frac{a_{k+1} - a_k}{a_1}$  – тоже. Так как  $v_p(a_{k+1} - a_k) = x$ , то  $v_p(a_1) = (y - x) + x = y$ . Лемма доказана.

Как следствие, для каждого простого числа  $p$  получаем две возможности:

(i) последовательность  $v_p(a_N), v_p(a_{N+1}), \dots$  не возрастает и стабилизируется на каком-то числе (не превосходящем  $v_p(a_N)$ );

(ii) найдется наименьший индекс  $k \geq N$ , удовлетворяющий условиям леммы, и тогда последовательно получаем, что все числа  $v_p(a_{k+1}), v_p(a_{k+2}), \dots$  не превосходят  $v_p(a_1)$ .

В любом случае при  $t \geq N$  имеем  $v_p(a_t) \leq \max(v_p(a_1), v_p(a_N))$ , т.е. каждый член последовательности  $a_N, a_{N+1}, \dots$  принимает значение из конечного множества чисел (каждый член – делитель числа  $\text{НОК}(a_1, a_N)$ ). Можно выбрать такое  $T \geq N$ , что все числа, которые есть в последовательности  $a_T, a_{T+1}, \dots$ , повторяются в ней бесконечное количество раз. Пусть  $M$  – максимальное из чисел  $a_T, a_{T+1}, \dots$ . Пусть  $a_k = M$  при некотором  $k > T$ . Положим  $a_{k+1} = L \leq M$ . Кроме того, мы знаем, что есть бесконечно много индексов  $t > k + 1$ , для которых  $a_t = M$ .

Пусть  $p$  – некоторое простое число, для которого  $v_p(M) > v_p(a_1)$ . Для такого  $p$  условие (ii) не выполнено, значит, верно (i), откуда  $v_p(M) = v_p(a_k) \geq v_p(L) = v_p(a_{k+1}) \geq v_p(a_t) = v_p(M)$ , т.е.  $v_p(M) = v_p(L)$ .

Пусть  $d$  равно произведению чисел  $p^{v_p(M)}$  по всем простым  $p$ , для которых верно (i). Тогда

$M = d \cdot M_1$ ,  $L = d \cdot L_1$ , где  $M_1$  и  $L_1$  взаимно просты с  $d$ . В разложение числа  $M_1$  простое  $q$  входит в степени  $v_q(M) \leq v_q(a_1)$ . Согласно лемме, тогда  $v_q(L_1) = v_q(L) = v_q(a_{k+1}) \leq v_q(a_1)$ . Таким образом,  $L_1$  и  $M_1$  – делители числа  $a_1$ .

Пусть  $t = \text{НОД}(M_1, L_1)$ ,  $M_1 = tM_2$ ,  $L_1 = tL_2$ , где  $\text{НОД}(M_2, L_2) = 1$ . Поскольку  $a_1$  делится на  $M_1$  и  $L_1$ , имеем  $a_1 = tM_2L_2 \cdot b$ , где  $b$  – натуральное.

Из (\*) мы знаем, что число  $\frac{L - M}{a_1} + \frac{M}{L}$  целое.

Второе слагаемое  $\frac{M}{L}$  сокращается до несократимой дроби  $\frac{M_2}{L_2}$ , значит, и первая дробь, равная

$\frac{d(L_2 - M_2)}{M_2 \cdot L_2 \cdot b}$ , в несократимой записи должна

иметь знаменатель, равный  $L_2$ . Следовательно,

$d(L_2 - M_2) : M_2$ . Однако  $\text{НОД}(d, M_2) = 1$  (поскольку  $M_1 : M_2$ ), а также  $\text{НОД}(M_2, L_2) = 1$ .

Получаем, что возможно только  $M_2 = 1$ , откуда  $L : M$ . Тем самым  $L = M$ .

Аналогично получаем, что  $M = a_k = a_{k+1} = \dots = a_{k+2} = \dots$

6 (А.Герасименко). Не умаляя общности, считаем, что лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $F$  или  $AB \parallel DC$ , а также лучи  $CB$  и  $DA$  пересекаются в точке  $E$  или  $CB \parallel DA$ . Тогда из равенств углов, данных в условии задачи, следует, что точки  $A, C, F$  и  $X$  лежат на одной окружности (а если  $AB \parallel DC$ , то  $A, C, X$  лежат на одной прямой), и аналогичное утверждение верно для точек  $B, D, E, X$  (рис.13).

Сделаем преобразование инверсии относительно окружности с центром в точке  $B$  и радиусом 1. Образ каждой точки будем обозначать той же буквой, но с 1 в индексе (рис.14). (В случае

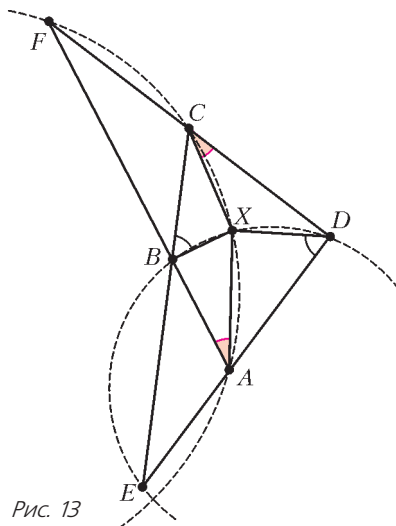


Рис. 13



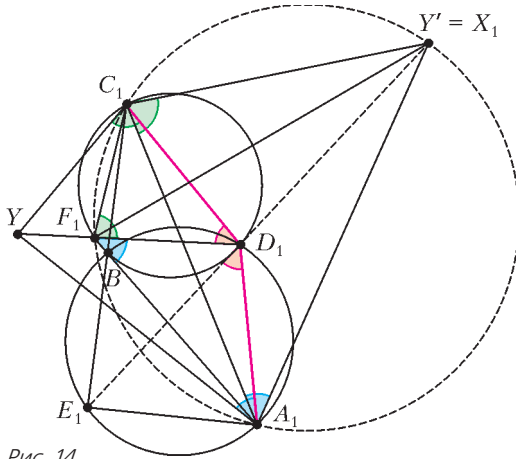


Рис. 14

$AB \parallel DC$  полагаем, что  $F_1 = B$ , а луч  $BF_1$  – дополнительный для луча  $BA_1$ ; аналогично для случая  $CB \parallel DA$ ).

Из подобия треугольников  $BAD$  и  $BD_1A_1$  следует  $\frac{A_1D_1}{AD} = \frac{BD_1}{AB} = \frac{1}{AB \cdot BD}$ ; аналогично,  $\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{1}{CB \cdot BD}$ . Тогда  $A_1D_1 = \frac{AD}{AB \cdot BD} = \frac{CD}{BC \cdot BD} = C_1D_1$ , так как  $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ .

Пусть  $Y$  – точка на луче  $D_1F_1$  такая, что  $D_1Y \cdot D_1F_1 = D_1A_1^2 = D_1C_1^2$ . Тогда из определения точки  $Y$  следует, что треугольники  $D_1YA_1$  и  $D_1A_1F_1$  подобны, следовательно,  $\angle D_1A_1Y = \angle A_1F_1D_1$ ; аналогично,  $\angle D_1C_1Y = \angle C_1F_1D_1$ . Пусть точка  $Y'$  изогонально сопряжена  $Y$  относительно треугольника  $A_1D_1C_1$ . Тогда, в силу равенств  $\angle Y'C_1A_1 + \angle Y'A_1C_1 = \angle D_1C_1Y + \angle D_1A_1Y = \angle C_1F_1A_1$ , точка  $Y'$  лежит на дуге  $A_1C_1$ , не содержащей точку  $F_1$ , окружности  $(A_1C_1F_1)$ . Также  $Y'$  лежит на прямой  $D_1X_1E_1$ , так как  $\angle A_1D_1E_1 = \angle A_1BE_1 = \angle F_1BC_1 = \angle F_1D_1C_1$ . Это означает, что точки  $X_1$  и  $Y'$  совпадают. Тогда  $\angle A_1F_1X_1 = \angle A_1C_1X_1 = \angle YC_1D_1 = \angle D_1F_1C_1$ .

Теперь получается, что

$$\frac{A_1X_1}{X_1C_1} = \frac{\sin \angle A_1F_1X_1}{\sin \angle X_1F_1C_1} = \frac{\sin \angle C_1F_1D_1}{\sin \angle D_1F_1B} = \frac{C_1D_1}{D_1B} = \frac{A_1D_1}{D_1B} = \frac{\sin \angle A_1E_1X_1}{\sin \angle X_1E_1C_1},$$

откуда следует равенство радиусов описанных окружностей треугольников  $A_1X_1E_1$  и  $C_1X_1E_1$ . Это означает, что либо  $\angle E_1A_1X_1 = \angle X_1C_1E_1$ , либо точки  $E_1, A_1, X_1, C_1$  лежат на одной окружности  $\Omega$  (и на этой же окружности лежит точка  $F_1$ ).

Пусть точки  $E_1, A_1, X_1, C_1, F_1$  лежат на одной окружности  $\Omega$ . В таком случае

$$\begin{aligned} \angle E_1D_1B &= \angle E_1A_1B = \angle E_1A_1F_1 = \angle E_1C_1F_1 = \\ &= \angle BC_1F_1 = \angle BD_1F_1. \end{aligned}$$

Поскольку  $\angle A_1D_1E_1 = \angle F_1D_1C_1$ , то  $\angle A_1D_1B = \angle BD_1C_1$ . Тогда треугольники  $A_1D_1B$  и  $C_1D_1B$  равны по двум сторонам и углу между ними, значит,  $A_1B = BC_1$ . Получаем, что  $BD$  – ось симметрии для  $A_1E_1F_1C_1$ . Из симметрии вытекает, что в равных окружностях  $(BE_1A_1D_1)$  и  $(BF_1C_1D_1)$  дуги  $D_1B$  равны, значит,  $\angle D_1F_1B = \angle D_1A_1B$ , откуда  $D_1F_1 = D_1A_1 = D_1C_1$ . Получаем, что  $D_1$  – центр окружности  $\Omega$ , а  $E_1D_1X_1$  – диаметр и  $\angle E_1A_1X_1 = \angle X_1C_1E_1 = 90^\circ$ . Таким образом, в любом случае  $\angle E_1A_1X_1 = \angle X_1C_1E_1$ . Теперь, пользуясь равенством  $\angle E_1A_1X_1 = \angle X_1C_1E_1$ , завершаем решение задачи. Имеем:  $\angle E_1A_1X_1 = \angle E_1A_1B + \angle BA_1X_1 = \angle BC_1X_1$ , значит, до инверсии  $\angle BEA + \angle BXA = \angle BXC$ , а так как  $B, D, E, X$  лежат на одной окружности, то  $\angle BEA + \angle BXA + \angle AXD = 180^\circ$ , поэтому  $\angle AXD + \angle BXC = 180^\circ$ .

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

**МАТЕМАТИКА**

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

1. 4. 2. 40. 3. 6. 4. 7. 5. 3. 6. 4. 7. 2. 8. 3. 9. 75. 10. 10.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР

1.  $\pi/4$ .

Преобразовав правую часть неравенства, запишем его в виде

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} \geq \frac{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{5 + 2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x}.$$

Положим  $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ . Заметим, что при  $x \in (0; \pi/2)$  справедливо условие  $y \geq 2$ . Наше неравенство превращается в  $\frac{1}{1+y} \geq \frac{1+y}{5+2y}$ . Умножение на  $(1+y)(3+2y) > 0$  дает  $5+2y \geq 1+2y+y^2$ ,  $y^2 \leq 4$ . Последнее с учетом условия  $y \geq 2$  дает равенство  $y = 2$ . На интервале  $(0; \pi/2)$  равенство  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$  выполняется только при  $x = \pi/4$ .

2.  $1/200$ .

Легко заметить, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{200} x_k &= \sum_{k=1}^{200} y_k - 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{200} y_k - \sum_{k=1}^{100} y_k = \sum_{k=101}^{200} y_k. \end{aligned}$$

Поэтому искомая разность равна  $y_{200} = \frac{1}{200}$ .

3. При  $a = 2$  система имеет решение  $x = 1, y = 1, z = 1/2$ .

4. 24.

5. 23.

Натуральное число дает остаток  $k$  при делении на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа дает остаток  $k$  при делении на 9. Числа из промежутка  $[200; 400]$ , дающие остаток 3 при делении на 9, образуют арифметическую прогрессию  $\{a_n\}$  с первым членом  $a_1 = 201$  и разностью  $d = 9$ . Наибольшим натуральным решением неравенства  $a_n = 201 + 9(n - 1) \leq 400$  будет  $n = 23$ , в промежутке  $[200; 400]$  содержится 23 числа с остатком 3 от деления на 9.

6.  $[-3; 3]$ .

7. 4.

Для целых чисел, больших 2 и меньших  $(-1)$ , левая часть неравенства больше 83. Четыре числа  $\{-1; 0; 1; 2\}$  являются решениями данного неравенства.

8. 60.

9. 2.

Показатель степени  $2018^3 + 1$  — нечетное число. Найдем остатки от деления степени числа 9 на 16. При делении 9 на 16 получаем остаток 9, при делении  $9^2 = 81$  на 16 получаем остаток 1,  $9^3 = 729$  дает остаток 9 и т.д. Нечетные степени числа 9 имеют остаток 9;  $9^{2018^3+1}$  при делении на 16 дает остаток 9, так что  $9^{2018^3+1} = 16n + 9$ , а  $N = 23(16n + 9) + 3 = 16(23n + 13) + 2$ , остаток от деления числа  $N$  на 16 равен 2.

10. 75, 60.

Будем для определенности считать, что  $A_1, B_1, C_1$  лежат на продолжениях высот, опущенных из точек  $A, B, C$  соответственно, а вписанная окружность треугольника  $A_1B_1C_1$  касается стороны  $AB$  (рис.15). Пусть  $P$  и  $Q$  — точки касания

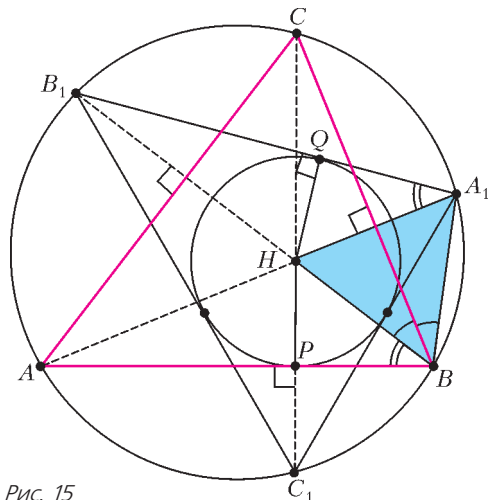


Рис. 15

вписанной в  $\Delta A_1B_1C_1$  окружности со сторонами  $AB$  и  $A_1B_1$  соответственно,  $H$  — пересечение высот треугольника  $ABC$ . Имеем

$$\begin{aligned} \angle A_1C_1C &= \angle A_1AC = 90^\circ - \angle ACB = \\ &= \angle B_1BC = \angle B_1C_1C. \end{aligned}$$

Следовательно, точка  $H$  лежит на биссектрисе  $\angle A_1C_1B_1$ . Аналогично, точка  $H$  лежит на биссектрисах  $\angle C_1B_1A_1$  и  $\angle B_1A_1C_1$ . Значит,  $H$  — центр вписанной в  $\Delta A_1C_1B_1$  окружности. Далее,  $\angle B_1BA = \angle B_1A_1A$ ,  $HP = HQ$ , следовательно,  $HB = HA_1$ . Затем,

$$\angle CBA_1 = \angle CC_1A_1 = \angle B_1C_1C = \angle B_1BC,$$

но тогда  $BC$  — высота и биссектриса треугольника  $A_1BH$  и  $HB = BA_1$ . Итак,  $HB = HA_1 = BA_1$ , треугольник  $HBA_1$  — правильный,  $\angle ACB = \angle AA_1B = 60^\circ$ . Оставшийся искомым угол равен  $180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$ .

### ФИЗИКА

#### ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

1.  $I = \frac{v}{f} = 8,2 \cdot 10^5$  бит. 2.  $a = \frac{Lg^2}{2v^2} = 2,4$  м/с<sup>2</sup>.

3.  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}$ ,  $\beta = 8,5^\circ$ .

4.  $h = \frac{v_1^2 + v_2^2}{4g} = 4,6$  м.

5.  $v = \sqrt{\frac{gH}{2}} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \right) = 1,7$  м/с.

6.  $h = \frac{n_1}{n_1 - n_2} \frac{\rho_B}{\rho_B - \rho_L} \Delta h = 10,5$  см.

7.  $\frac{Mc(t_0 + 273) + (m_1 + m_2)c_B(t_1 + 273)}{(m_1 - m_2)c_B + Mc} + \frac{m_2(r + c_B(100 - t_1))}{(m_1 - m_2)c_B + Mc} = 8,4$  °С.

8.  $\varphi = \frac{\varphi_1}{1 + n} = 14,6\%$ .

9.  $q = \frac{CU(R_1 + R_2)}{R_1} = 305$  нКл.

10.  $C = c \frac{U^2}{r} \frac{n^2}{N} d = 347$  руб.

#### ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР

1.  $v = 4(\sqrt{6} - 2)v_{cp} = 18$  км/ч.

2.  $M = \rho_c V + \frac{1}{6} \rho_B V = 450$  г, где  $\rho_c = \frac{4}{3} \rho_B$ .

3.  $\eta = 1 - \frac{n \ln n + \frac{3}{2} n(n-1)}{\frac{5}{2} n(n-1)} = 0,12$ .

4.  $R_{AC} = 8$  Ом.

|    | A                       | B  | C                         |
|----|-------------------------|--|---------------------------|
| 1  | <b>A</b>                | <b>B</b>   | <b>C</b>                  |
| 2  | 3                       | 4  | 5                         |
| 3  | =МИН (A2; МИН (B2; C2)) | =СУММ (A2; C2) - A3 - C3   | =МАКС (C2; МАКС (A2; B2)) |
| 4  | 6                       | =ЕСЛИ (C3=1; 1; 0)   |                           |
| 5  | 5                       | =ЕСЛИ (И (B3=1; C3>1); 2; 0)   |                           |
| 6  | 4                       | =ЕСЛИ (И (B3=1; C3>1); C3-2; ЕСЛИ (И (A3=1; B3>1); 4; 0))                  |                           |
| 7  | 3                       | =ЕСЛИ (A3>1; 8; ЕСЛИ (B3>1; 2 * (B3+C3-4); 0))                             |                           |
| 8  | 2                       | =ЕСЛИ (И (A3=1; B3>1); (B3-2) * (C3-2); ЕСЛИ (B3=1; 0; 4 * (A3+B3+C3-6)))  |                           |
| 9  | 1                       | =ЕСЛИ (A3=1; 0; 2 * ((A3-2) * (B3-2) + (A3-2) * (C3-2) + (B3-2) * (C3-2))) |                           |
| 10 | 0                       | =A3*B3*C3 - СУММ (B4; B9)  |                           |

Рис. 16

$$5. n = \sqrt{\frac{(2\pi NE)^2}{(v_x B)^2} + 1} = 1,37.$$

6. Предмет нужно переместить ближе к линзе на  $\Delta d = 2F = 20$  см.

### ИНФОРМАТИКА

#### ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

1. Б. 2. 450. 3. Верны 1, 2, 5, 10.  
4. POSTUPI\_V.VUZ. 5. БАЙТ. 6. 98241. 7. К.  
8. (100, 500). 9. 17. 10. 65526.

#### ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР

1. X=52. 2. 63, 31, 79. 3. 1642. 4. Вместо Q := 8

надо Q := 16. Вместо Y[M][K] := 2 надо Y[9-K][9-M] := 2. 5. 6, 7, 8, 11. 6. Когда хотя бы по одному из измерений размер 1. 7. Решение приведено в таблице (рис.16). 8. 45. 9. 7. 10. ДБЖЗАВГЕ.

**БИБЛИО-ГЛОБУС**  
ВАШ ГЛАВНЫЙ БИЗНЕС

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ  
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

**УСЛУГИ**

- Интернет-магазин [www.bgshop.ru](http://www.bgshop.ru)
- Кафе
- Клубные (дисконтные) карты и акции
- Подарочные карты
- Предварительные заказы на книги
- Встречи с авторами
- Читательские клубы по интересам
- Индивидуальное обслуживание
- Подарочная упаковка
- Доставка книг из-за рубежа
- Выставки-продажи

**АССОРТИМЕНТ**

- Книги
- Аудиокниги
- Антиквариат и предметы коллекционирования
- Фильмы, музыка, игры, софт
- Канцелярские и офисные товары
- Цветы
- Сувениры

г. Москва, м. Лубянка, ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1  
8 (495) 781-19-00  
[www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)  
пн - пт 9:00 - 22:00  
сб - вс 10:00 - 21:00  
без перерыва на обед

# КВАНТ

12+

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

**НОМЕР ОФОРМИЛИ  
М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

**ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ  
РЕДАКТОР**

**Е.В.Морозова**

**КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА  
М.Н.Грицуц, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.  
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru), [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru)**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами  
в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»  
Телефон: +7 495 363-48-86,  
<http://capitalpress.ru>**

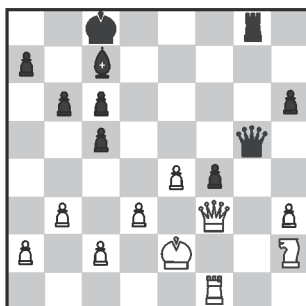
## Проблема БЕЛОГО ЦВЕТА

На прошедшем в Лондоне матче за звание чемпиона мира М.Карлсен смог защитить свой титул, одержав победу над претендентом Ф.Каруаной на тайбрейке в быстрые шахматы. Классическая часть победителя не выявила: все 12 партий закончились вничью, а шансы на победу соперники имели, играя черными.

**Ф.Каруана – М.Карлсен**

### 1 партия

1. e4 c5 2. ♖f3 ♗c6 3. ♗b5 g6 4. ♗c6 dc 5. d3 ♗g7 6. h3 ♗f6 7. ♗c3 ♗d7 8. ♗e3 e5 9. 0-0 b6 10. ♗h2 ♗f8 11. f4 ef 12. ♗f4 ♗e6! Черные откладывают рокировку, чтобы определиться с ней в зависимости от игры белых. 13. ♗f2 h6 14. ♗d2 g5! Захват пространства на королевском фланге – логичное продолжение начатого черными плана. 15. ♗af1?! ♗d6 16. ♗g4 0-0-0 17. ♗f6 ♗d7 18. ♗h5 ♗e5 19. g4! Белые не лучшим образом разыграли дебют и теперь препятствуют пешечным подрывам на королевском фланге. 19...f6 20. b3 ♗f7 21. ♗d1 ♗f8 22. ♗f6 ♗e6 23. ♗h5 ♗h5 24. gh ♗f4 25. ♗f4 gf 26. ♗g2? ♗hg8 27. ♗e2 ♗g2+ 28. ♗g2 ♗e6 29. ♗f2 ♗g8 30. ♗g4 ♗e8 31. ♗f3 ♗h5 32. ♗f2 ♗c7 33. ♗e2? (Необходимо было перекрыть большую диагональ: 33. e5! ♗b7 34. ♗f6! ♗h4 35. ♗e2 ♗g7 36. ♗f4 ♗h3.) 33... ♗g5 34. ♗h2.

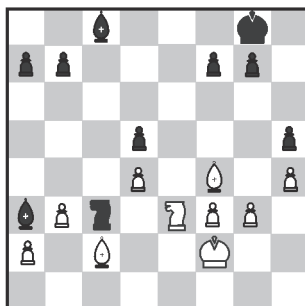


34...h5 (лучше было 34... ♗e5! с идеей вторжения на b2: 35. ♗d2 b5! с последующим ♗a5+) 35. ♗f2 ♗g1 36. ♗f1 h4? (добиться победы черным можно, только проникнув на ферзевый фланг, к этой цели вело 36... ♗g7!) 37. ♗d2? (необходимо 37. e5! сужерассмотренной идеей перекрытия большой диагонали) ♗b7 38 c3 ♗e5? (черные могли добиться цели, пожертвовав качество: 38... ♗g3 39. ♗g3 hg 40. ♗g2 ♗b1!) 39. ♗c2 ♗g7 40. ♗h2 ♗c3? (Карлсен окончательно выпускает перевес. У черных был шанс повторить позицию: 40... ♗g1 и найти верный путь к победе.) 41. ♗f4 ♗d4 42. ♗f7+ ♗a6 43. ♗g7 ♗g7 44. ♗e2 ♗g3 45. ♗g4 ♗h3 46. e5 ♗f3 47. e6 ♗f8 48. e7 ♗e8 49. ♗h6 h3 50. ♗f5 ♗f6 51. a3 b5 52. b4 cb 53. ab ♗e7 54. ♗e7 h2 55. ♗h2 ♗e7. Серия разменов привела к теоретически ничейному эндшпилю, и через 60 ходов соперники согласились на ничью.

**М.Карлсен – Ф.Каруана**

### 6 партия

В шестой партии основные события развернулись в эндшпиль: претендент удачно разыграл фирменную русскую партию, лучше разобрался в тонкостях миттельшпиля и четким последним ходом 35... ♗a3! заблокировал пешку a2, поставив белых на грань ее потери. 36. ♗b8 a6 37. f4 ♗d7 38. f5 ♗c6 39. ♗d1 ♗b2 40. ♗h5 ♗e4+ 41. ♗g2 ♗d4 42. ♗f4 ♗c5 43. ♗f3 ♗d2 44. ♗d5. Смелый



ход: не желая предоставлять черным преимущество двух слонов, белые жертвуют фигуру за несколько пешек. 44... ♗e3 45. ♗c6 ♗f4 46. ♗b7 ♗d6 47. ♗a6 ♗e4 48. g4 ♗a3! На этот раз фиксирующий ход позволяет выиграть одну из пешек. 49. ♗c4 ♗f8 50. g5 ♗c3 51. b4 ♗b4 52. ♗f3 ♗a4 53. ♗b5 ♗c5 54. a4 f6 55. ♗g4 ♗e4 56. ♗h5 ♗e1 57. ♗d3 ♗d6! Черные стремятся перевести коня на e5, а затем приблизиться к пешке h королю. В таком случае они выигрывают, однако Карлсен находит этюдный путь к спасению. 58. a5! ♗a5 59. gf gf 60. ♗g6 ♗d8 61. ♗h7! Не подпуская черного короля. 61... ♗f7 62. ♗c4 ♗e5 63. ♗d5 ♗a5 64. h5 ♗d2 65. ♗a2 ♗f3 66. ♗d5 ♗d4 67. ♗g6 ♗g5 68. ♗c4 (Кажется, что черным невозможно достичь прогресса, однако комментировавший эту партию Г.Каспаров в своем блоге указывает путь к победе, найденный с помощью компьютера: 68... ♗h4!, и белые в цугцванге: 69. h6 ♗f3 70. ♗b3 ♗e5+ 71. ♗h5 ♗g5. Маневрируя конем, черные вынуждают ход h7, после чего съедают эту пешку королем. К такому же варианту ведет и 69. ♗a2. Поэтому белым остается 69. ♗d5 ♗e2 70. ♗f3, чтобы вернуться к уже знакомой позиции после 70... ♗f4+ 71. ♗h7! Однако черные достигают победы посредством 70... ♗g1!, и во всех вариантах белые либо допускают ♗g8, либо вынуждены сыграть h6, что ведет к поражению. Впрочем, 13-й чемпион мира отметил, что найти такой ход за доской практически невозможно.) 68... ♗f3 69. ♗h7 ♗e5 70. ♗b3 ♗g4 71. ♗c4 ♗e3 72. ♗d3 ♗g4 73. ♗c4 ♗h6 74. ♗g6 ♗e7 75. ♗b3 ♗d6 76. ♗c2 ♗e5 77. ♗d3 ♗f4 78. ♗c2 ♗g4 79. ♗b3 ♗e3 80. h6 ♗h6. Ничья.

*А.Русанов*



# Уроки с физикой



ОКАЗЫВАЕТСЯ, ЗВУКУ МОГУТ ПОМОЧЬ И КРЫШКА ОТ БУТЫЛКИ, И СТЕКЛЯННЫЙ СТАКАН, НАХОДЯЩИЕСЯ РЯДОМ С КЛАВИАТУРОЙ НОУТБУКА.



Как можно усилить звук?

(Подробнее – на с. 35 внутри журнала)