ACTA ARITHMETICA
XIX (1971)

Sur des formules de Atle Selberg

par

HUBERT DELANGE (Paris)

1. Introduction. Soient $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers de l'entier positif n, et $\Omega(n)$ le nombre total des facteurs dans la décomposition de n en facteurs premiers.

Désignons, d'autre part, par Q l'ensemble des entiers positifs "quadratfrei".

Atle Selberg (1) a établi les résultats suivants:

a. z étant un nombre complexe quelconque, on a pour x infini

$$\sum_{n\leqslant x} z^{\omega(n)} = xF(z)(\log x)^{z-1}+O\{x(\log x)^{\mathrm{Re}\,z-2}\} \tag{1}$$

et

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in Q}} z^{\omega(n)} = xG(z)(\log x)^{z-1}+O\{x(\log x)^{\mathrm{Re}\,z-2}\}, \tag{2}$$

F et G étant les fonctions entières définies par

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\prod\left(1+\frac{z}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{z}$$

et

$$G(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\prod\left(1+\frac{z}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{z},$$

où, dans les produits, p parcourt la suite des nombres premiers (2).

Quel que soit $\varrho > 0$, ces deux formules ont lieu uniformément pour $|z| \leqslant \varrho$.

b. z étant un nombre complexe de module < 2, on a pour x infini

$$\sum_{n\leqslant x} z^{\Omega(n)} = xH(z)(\log x)^{z-1}+O\{x(\log x)^{\mathrm{Re}\,z-2}\}, \tag{3}$$

---

(1) *Note on a paper by L. G. Sathe*, Journ. Indian Math. Soc. 18 (1954), p. 83-87.

(2) Dans tout cet article, la lettre p désigne toujours un nombre premier. La lettre n, ainsi que la lettre k, désigne toujours un entier $\geqslant 1$.

où H est la fonction méromorphe définie par

$$H(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \prod \left(1-\frac{z}{p}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{z},$$

et, quel que soit $\varrho > 0$ et < 2, le O est uniforme pour $|z| \leqslant \varrho$.

Nous nous proposons essentiellement ici d'établir un théorème général dont des cas particuliers fourniront des expressions plus précises des sommes considérées ci-dessus, comportant, au lieu d'un terme principal et un reste, le produit de $x(\log x)^{z-1}$ par un développement asymptotique suivant les puissances de $\dfrac{1}{\log x}$ (3).

Nous donnerons quelques applications de notre théorème.

D'autre part, nous en indiquerons brièvement des généralisations, avec également des applications.

Tout au long de cet article, lorsque x est un nombre réel > 0, nous désignons par $\log x$ la valeur réelle du logarithme de x. Pour z réel ou complexe non réel $\leqslant 0$, nous désignons par $\operatorname{Log} z$ la valeur du logarithme de z dans laquelle le coefficient de i est de valeur absolue $< \pi$. Ainsi Log est une fonction holomorphe dans le plan complexe privé de l'ensemble des nombres réels $\leqslant 0$, et, pour x réel > 0, $\operatorname{Log} x = \log x$.

Toutes les fois qu'il apparaît une expression de la forme a^b, où a et b sont deux nombres complexes, a n'étant pas réel $\leqslant 0$, il est entendu qu'elle est prise égale à $\exp\{b \operatorname{Log} a\}$.

2. Énoncé du théorème principal. *Soit f une fonction arithmétique additive à valeurs entières $\geqslant 0$, telle que $f(p) = 1$ pour tout p premier.*

Soit, d'autre part, χ une fonction arithmétique multiplicative ne prenant que les valeurs 0 et 1 (4) *et telle que $\chi(p) = 1$ pour tout p premier.*

---

(3) Un résultat semblable pour la somme $\sum_{n \leqslant x} d_z(n)$, où, pour $\operatorname{Re} s > 1$, $\sum_1^{+\infty} \frac{d_z(n)}{n^s} = \zeta(s)^z$, a été établi par R. D. Dixon (*On a generalized divisor problem*, Journ. Indian Math. Soc. 28 (1964), p. 187–196).

La méthode que nous suivons ici est différente de celle de Dixon. Il utilise le fait que l'on a uniformément pour $|z| \leqslant N$, avec N entier > 0, et $x \geqslant y \geqslant 2$

$$\sum_{y < n \leqslant x} d_z(n) = O\big((x-y)(\log x)^{N-1}\big) + O\big(x^{1-1/(N+1)}\big),$$

ce qui se démontre élémentairement.

Nous ne faisons intervenir aucune considération de ce genre.

(4) Cette hypothèse n'est pas essentielle. On pourrait supposer seulement χ bornée, quitte à remplacer dans (4) plus bas $\chi(p^k)$ par $|\chi(p^k)|$. Cela nous a paru sans intérêt.

Pour chaque $\varrho \geqslant 0$ définissons $\sigma_0(\varrho)$ comme étant la borne inférieure de l'ensemble des σ réels $> \frac{1}{2}$ pour lesquels on a

$$\sum_{\substack{p,k \\ k \geqslant 2}} \frac{\chi(p^k)\,\varrho^{f(p^k)}}{p^{k\sigma}} < +\infty \tag{4}$$

si cet ensemble n'est pas vide, et $+\infty$ dans le cas contraire.

Il est clair que $\sigma_0(\varrho)$ est une fonction non décroissante de ϱ et que, si $\sigma_0(\varrho) < +\infty$, on a (4) pour tout $\sigma > \sigma_0(\varrho)$.

Il est clair également que, pour $\varrho \leqslant 1$, $\sigma_0(\varrho) = \frac{1}{2}$.

Soit E l'ensemble des $\varrho \geqslant 0$ tels que $\sigma_0(\varrho) < 1$, et soit R la borne supérieure (finie ou égale à $+\infty$) de l'ensemble E.

Il est clair que $R \geqslant 1$, puisque $1 \in E$, et que E contient tous les nombres de l'intervalle $[0, R[$.

Ceci dit, on a le résultat suivant.

Il existe une suite de fonctions $A_0, A_1, \ldots, A_j, \ldots$ définies pour $|z| \in E$, holomorphes dans le disque ouvert $|z| < R$, et en outre continues sur le disque fermé $|z| \leqslant R$ dans le cas où $R \in E$, telles que:

quel que soit l'entier $q \geqslant 0$, pour tout z tel que $|z| \in E$ on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{n \leqslant x} \chi(n) z^{f(n)} = x(\log x)^{z-1} \left\{ \sum_{j=0}^{q} \frac{A_j(z)}{(\log x)^j} + O\left(\frac{1}{(\log x)^{q+1}}\right) \right\}, \tag{5}$$

et, quel que soit $\varrho > 0$ appartenant à E, le O est uniforme pour $|z| \leqslant \varphi$.

Les fonctions A_j sont déterminées comme suit.

Pour tout z tel que $|z| \in E$, la formule

$$\mathcal{G}(s, z) = \prod \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi(p^k) z^{f(p^k)}}{p^{ks}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{z}$$

définit $\mathcal{G}(s, z)$ au moins pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$, et $\mathcal{G}(s, z)$ est une fonction de s holomorphe dans ce demi-plan.

l étant une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert V du point 1 ne contenant pas de zéro de la fonction ζ, égale à 0 pour $s = 1$ et telle que, pour $s \in V$ et $s \neq 1$, $\exp\big(l(s)\big) = (s-1)\,\zeta(s)$, la fonction de s égale à $\dfrac{1}{s}\,\mathcal{G}(s, z) \exp\big(z\, l(s)\big)$ dans la partie commune à V et au demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$ est évidemment holomorphe dans cette partie commune. Si son développement de Taylor au voisinage du point 1 est

$$\sum_{j=0}^{+\infty} B_j(z)(s-1)^j,$$

on a

$$A_j(z) = \frac{B_j(z)}{\Gamma(z-j)}.\ (^5)$$

On voit que l'on a en particulier

$$A_0(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\prod\Big(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p^k)z^{f(p^k)}}{p^k}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^z.$$

La formule (5) donne comme cas particuliers des formules précisant les formules (1), (2) et (3) de Atle Selberg, en prenant respectivement

$$f(n) = \omega(n) \quad \text{et} \quad \chi(n) = 1,$$

$$f(n) = \omega(n) \quad \text{et} \quad \chi(n) = \mu^2(n),$$

$$f(n) = \Omega(n) \quad \text{et} \quad \chi(n) = 1.$$

3. Préliminaires.

3.1. Donnons tout d'abord un lemme qui nous sera utile dans la suite.

LEMME. *Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ et $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ des fonctions complexes définies sur un même ensemble A.*

B étant un ensemble contenu dans A, on suppose que, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in B$,

$$|u_n(x)| \leqslant U_n \quad \text{et} \quad |u_n(x)-v_n(x)| \leqslant V_n,$$

où les U_n et les V_n sont des constantes positives telles que

$$\sum_1^{+\infty} U_n^2 < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_1^{+\infty} V_n < +\infty.$$

Alors le produit infini

$$\prod_1^{+\infty}\big(1+u_n(x)\big)\exp\big(-v_n(x)\big)$$

est uniformément convergent pour $x \in B$ et sa valeur est bornée pour $x \in B$.

Démonstration. Il existe $U > 0$ tel que $U_n \leqslant U$ et $V_n \leqslant U$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme

$$\frac{(1+u)e^{-u}-1}{u^2} \quad \text{et} \quad \frac{e^u-1}{u}$$

sont des fonctions entières de u, il existe $M > 0$ tel que, pour $|u| \leqslant U$,

$$|(1+u)e^{-u}-1| \leqslant M|u|^2 \quad \text{et} \quad |e^u-1| \leqslant M|u|.$$

(5) Il est évident que ceci ne dépend pas du choix du voisinage V.

Ceci dit, posons $\big(1+u_n(x)\big)\exp\big(-v_n(x)\big) = 1+w_n(x)$.

On a pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in B$

$$\begin{aligned} w_n(x) &= \big(1+u_n(x)\big)\exp\big(-v_n(x)\big)-1 \\ &= \Big(\big(1+u_n(x)\big)\exp\big(-u_n(x)\big)-1\Big)\exp\big(u_n(x)-v_n(x)\big)+ \\ &\qquad +\exp\big(u_n(x)-v_n(x)\big)-1 \end{aligned}$$

et, comme $|u_n(x)| \leqslant U_n \leqslant U$ et $|u_n(x)-v_n(x)| \leqslant V_n \leqslant U$,

$$|w_n(x)| \leqslant M|u_n(x)|^2\exp\big(|u_n(x)-v_n(x)|\big)+M|u_n(x)-v_n(x)| \leqslant W_n,$$

où $W_n = Me^U U_n^2+MV_n$.

Comme $\sum_1^{+\infty} W_n < +\infty$, ceci montre que le produit infini $\prod_1^{+\infty}\big(1+w_n(x)\big)$, c'est-à-dire $\prod_1^{+\infty}\big(1+u_n(x)\big)\exp\big(-v_n(x)\big)$, est uniformément convergent pour $x \in B$.

Sa valeur est d'ailleurs de module au plus égal à

$$\prod_1^{+\infty}(1+W_n).$$

3.1.1. En fait, nous considérerons un produit de la forme

$$\prod\big(1+u_p(x)\big)\exp\big(-v_p(x)\big),$$

où p parcourt la suite des nombres premiers.

On supposera que, pour tout p premier et tout $x \in B$,

$$|u_p(x)| \leqslant U_p \quad \text{et} \quad |u_p(x)-v_p(x)| \leqslant V_p,$$

où $\sum U_p^2 < +\infty$ et $\sum V_p < +\infty$.

On peut appliquer le lemme en numérotant les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

On conclut que le produit infini est uniformément convergent pour $x \in B$ et sa valeur est bornée pour $x \in B$.

3.2. Dans tout ce qui suit, jusqu'à la fin du chapitre 4, Δ est un domaine déterminé une fois pour toutes de la façon suivante.

Soient $t_0 \geqslant e$ et $a > 0$ et $\leqslant \frac{1}{2}\log t_0$ tels que $\zeta(\sigma+it) \neq 0$ si l'on a

$$\text{ou bien } |t| \geqslant t_0 \text{ et } \sigma > 1-\frac{a}{\log|t|},$$

$$\text{ou bien } |t| < t_0 \text{ et } \sigma > 1-\frac{a}{\log t_0}.$$

Δ est l'ensemble des points $s = \sigma + it$ pour lesquels l'une ou l'autre des conditions ci-dessus est satisfaite.

Δ est donc un domaine simplement connexe contenant le demi-plan fermé $\operatorname{Re} s \geqslant 1$ et contenu dans le demi-plan ouvert $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, et la fonction égale à $(s-1)\zeta(s)$ est holomorphe dans Δ et différente de zéro en tout point de Δ. Elle est d'ailleurs égale à 1 pour $s = 1$.

Nous designerons par Δ^* le domaine obtenu en enlevant de Δ le segment $\left]1-\frac{a}{\log t_0}, 1\right]$.

Δ^* est encore un domaine simplement connexe et la fonction ζ est holomorphe dans Δ^* et différente de zéro en tout point de Δ^*.

Nous désignerons par l la fonction holomorphe dans Δ définie comme étant la branche de $\log\big((s-1)\zeta(s)\big)$ qui prend la valeur zéro pour $s = 1$.

La fonction définie dans Δ^* comme prenant la valeur

$$l(s) + \operatorname{Log}\frac{1}{s-1}$$

est évidemment une branche holomorphe de $\log\zeta$. C'est d'ailleurs celle qui est réelle pour s réel > 1, c'est-à-dire celle qui est égale pour $\operatorname{Re} s > 1$ à

$$\sum_{p,k}\frac{1}{kp^{ks}},$$

car $l(s)$ est réel pour tout s réel appartenant à Δ.

En effet, $\operatorname{Im} l(s)$ est une fonction de s continue sur l'ensemble connexe $\Delta \cap \boldsymbol{R}$ et ne prend sur cet ensemble que des valeurs réelles appartenant à $2\pi\boldsymbol{Z}$. Elle est donc constante sur $\Delta \cap \boldsymbol{R}$ et, comme elle prend la valeur zéro pour $s = 1$, elle est toujours nulle.

D'après des résultats bien connus, étant donné le nombre réel a' satisfaisant à $0 < a' < a$, il existe une constante K, dépendant de a', telle que, pour $s = \sigma + it$ avec $|t| \geqslant t_0$ et $\sigma \geqslant 1 - \frac{a'}{\log|t|}$,

$$\left| l(s) + \operatorname{Log}\frac{1}{s-1}\right| \leqslant \log\log|t| + K.$$

3.3. Nous allons maintenant établir les faits suivants:

1. On peut définir $\mathscr{G}(s, z)$ pour tout couple (s, z) tel que $|z| \in E$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$ par la formule

$$\mathscr{G}(s, z) = \prod\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p^k)z^{f(p^k)}}{p^{ks}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^z; \tag{6}$$

2. Pour chaque z tel que $|z| \in E$, $\mathscr{G}(s, z)$ est une fonction de s holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$;

3. Quels que soient $\varrho \in E$ et $\sigma_1 > \sigma_0(\varrho)$, $\mathscr{G}(s, z)$ est borné pour $|z| \leqslant \varrho$ et $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1$.

Pour cela, il suffit de montrer que, si $\varrho \in E$, on a les faits suivants:

4. Pour chaque p, la série $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p^k)z^{f(p^k)}}{p^{ks}}$ est absolument convergente pour $|z| \leqslant \varrho$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho)$;

5. Quel que soit $\sigma_1 > \sigma_0(\varrho)$, le produit infini

$$\prod\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p^k)z^{f(p^k)}}{p^{ks}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^z$$

est uniformément convergent pour $|z| \leqslant \varrho$ et $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1$ et est borné pour ces valeurs de s et z.

En effet, supposons ceci établi.

D'abord, si $|z| \in E$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$, en prenant $\varrho = |z|$, on voit que la formule (6) définit bien $\mathscr{G}(s, z)$.

Si maintenant on suppose z fixé, avec $|z| = \varrho \in E$, pour chaque p la somme de la série de Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p^k)z^{f(p^k)}}{p^{ks}}$$

est une fonction de s holomorphe pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho)$, de sorte qu'il en est de même de

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p^k)z^{f(p^k)}}{p^{ks}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^z.$$

Comme, quel que soit $\sigma_1 > \sigma_0(\varrho)$, le produit infini

$$\prod\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p^k)z^{f(p^k)}}{p^{ks}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^z$$

est uniformément convergent pour $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1$, sa valeur $\mathscr{G}(s, z)$ est une fonction de s holomorphe pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho) = \sigma_0(|z|)$.

Enfin 3 résulte immédiatement de 5.

3.3.1. Soit donc $\varrho \in E$.

Remarquons d'abord que, si $\sigma_1 > \sigma_0(\varrho)$, comme on a

$$\sum_{\substack{p,k\\k\geqslant 2}}\frac{\chi(p^k)\varrho^{f(p^k)}}{p^{k\sigma_1}} < +\infty,$$

on a pour chaque p

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\chi(p^k)\,\varrho^{f(p^k)}}{p^{k\sigma_1}} < +\infty.$$

Il en résulte que, pour $|z| \leqslant \varrho$ et $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1$, la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi(p^k)\,z^{f(p^k)}}{p^{ks}}$$

est absolument convergente.

Comme σ_1 est aussi voisin que l'on veut de $\sigma_0(\varrho)$, ceci établit le point 4 ci-dessus.

3.3.2. Ainsi, pour $|z| \leqslant \varrho$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho)$, tous les termes du produit infini

$$\prod \left(1+\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi(p^k)\,z^{f(p^k)}}{p^{ks}}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^z$$

sont définis.

Le terme général s'écrit

$$\big(1+u_p(s,z)\big)\exp\big(-v_p(s,z)\big),$$

où

$$u_p(s,z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi(p^k)\,z^{f(p^k)}}{p^{ks}} \quad \text{et} \quad v_p(s,z) = z\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{kp^{ks}}.$$

Fixons un $\sigma_1 > \sigma_0(\varrho)$.

Si $|z| \leqslant \varrho$ et $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1$, on a pour chaque p

$$\left|\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\chi(p^k)\,z^{f(p^k)}}{p^{ks}}\right| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\chi(p^k)\,\varrho^{f(p^k)}}{p^{k\sigma_1}}$$

et, comme $\dfrac{\chi(p)\,z^{f(p)}}{p^s} = \dfrac{z}{p^s}$,

$$|u_p(s,z)| \leqslant U_p, \quad \text{où} \quad U_p = \frac{\varrho}{p^{\sigma_1}} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\chi(p^k)\,\varrho^{f(p^k)}}{p^{k\sigma_1}}.$$

Mais, puisque

$$\sum_p \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\chi(p^k)\,\varrho^{f(p^k)}}{p^{k\sigma_1}}\right) < +\infty,$$

on a

$$\sum_p \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\chi(p^k)\,\varrho^{f(p^k)}}{p^{k\sigma_1}}\right)^2 < +\infty.$$

Comme, par ailleurs, $\sum_p (\varrho/p^{\sigma_1})^2 < +\infty$ puisque $\sigma_1 > \frac{1}{2}$, on a

$$\sum U_p^2 < +\infty.$$

Par ailleurs, pour $|z| \leqslant \varrho$ et $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1$, on a

$$u_p(s,z) - v_p(s,z) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\chi(p^k)\,z^{f(p^k)}}{p^{ks}} - z\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{kp^{ks}},$$

de sorte que

$$|u_p(s,z) - v_p(s,z)| \leqslant V_p,$$

où

$$V_p = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\chi(p^k)\,\varrho^{f(p^k)}}{p^{k\sigma_1}} + \varrho\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{kp^{k\sigma_1}}.$$

On voit que $\sum V_p < +\infty$.

Ainsi le lemme, où la variable x est le couple (s, z), montre que le produit infini

$$\prod \left(1+\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi(p^k)\,z^{f(p^k)}}{p^{ks}}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^z$$

est uniformément convergent pour $|z| \leqslant \varrho$ et $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1$, et borné pour ces valeurs de s et z.

3.4. Ceci dit, définissons $\mathscr{H}(s,z)$ pour tous les couples (s, z) tels que

$$|z| \in E, \qquad s \in \varDelta \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$$

par

$$\mathscr{H}(s,z) = \mathscr{G}(s,z)\exp\big(zl(s)\big).$$

Ainsi, pour chaque z tel que $|z| \in E$, $\mathscr{H}(s,z)$ est une fonction de s holomorphe dans le domaine intersection de $\varDelta$ avec le demi-plan $\operatorname{Re} s >_0(|z|)$, domaine qui contient le point 1.

$\dfrac{1}{s}\mathscr{H}(s,z)$ est donc représentable au voisinage du point 1 par une série entière en $s-1$, soit

$$\sum_{j=0}^{+\infty} B_j(z)(s-1)^j.$$

Conformément à ce qui est dit dans l'énoncé du théorème, nous définirons les fonctions A_j pour $|z| \in E$ par

$$A_j(z) = \frac{B_j(z)}{\Gamma(z-j)}.$$

On a en particulier

$$A_0(z) = \frac{B_0(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(z)}\mathscr{H}(1, z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\mathscr{G}(1, z)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(z)}\prod\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p^k)z^{f(p^k)}}{p^k}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^z.$$

On pourrait établir directement ici les propriétés des fonctions A_j indiquées dans l'énoncé du théorème. Mais c'est inutile car elles résulteront de la relation (5).

En effet, d'après cette relation, si $\varrho \in E$, le produit

$$x^{-1}(\log x)^{1-z}\sum_{n\leqslant x}\chi(n)z^{f(n)}$$

converge uniformément pour $|z| \leqslant \varrho$ vers $A_0(z)$, et, pour chaque $q \geqslant 1$, l'expression

$$(\log x)^q\left(x^{-1}(\log x)^{1-z}\sum_{n\leqslant x}\chi(n)z^{f(n)} - \sum_{j=0}^{q-1}\frac{A_j(z)}{(\log x)^j}\right)$$

converge uniformément pour $|z| \leqslant \varrho$ vers $A_q(z)$.

Ceci montre de proche en proche que les fonctions $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots$ sont holomorphes pour $|z| < R$ et, si $R \in E$, qu'elles sont continues pour $|z| \leqslant R$.

3.5. Remarquons, bien que nous n'en ayons pas besoin ici, que la fonction $\mathscr{H}$ est holomorphe en s et z en tout point intérieur à son ensemble de définition.

Pour le montrer, il suffit évidemment d'établir que $\mathscr{G}(s, z)$ est une fonction holomorphe de s et z en tout point intérieur à l'ensemble des points (s, z) tels que

$$|z| \in E \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|).$$

Soit donc (s_1, z_1) un point intérieur à cet ensemble. Posons $s_1 = \sigma_1 + i\tau_1$, avec σ_1 et τ_1 réels, et $z_1 = \varrho_1 e^{i\theta_1}$, avec ϱ_1 réel $\geqslant 0$ et θ_1 réel.

Si ε est un nombre >0 assez petit, le point $[s_1-\varepsilon, (\varrho_1+\varepsilon)e^{i\theta_1}]$ appartient encore à l'ensemble; autrement dit, $\varrho_1+\varepsilon \in E$ et on a $\sigma_1-\varepsilon > \sigma_0(\varrho_1+\varepsilon)$.

Le produit infini

$$\prod\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p^k)z^{f(p^k)}}{p^{ks}}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^z$$

est donc uniformément convergent sur l'ensemble des points (s, z) tels que $\operatorname{Re} s > \sigma_1 - \varepsilon$ et $|z| < \varrho_1 + \varepsilon$, ensemble auquel (s_1, z_1) est intérieur.

Mais chaque terme du produit infini est une fonction holomorphe de s et z sur cet ensemble car chaque série

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p^k)z^{f(p^k)}}{p^{ks}}$$

est uniformément convergente sur cet ensemble puisque, si $\operatorname{Re} s > \sigma_1 - \varepsilon$ et $|z| < \varrho_1 + \varepsilon$,

$$\left|\frac{\chi(p^k)z^{f(p^k)}}{p^{ks}}\right| \leqslant \frac{\chi(p^k)(\varrho_1+\varepsilon)^{f(p^k)}}{p^{k(\sigma_1-\varepsilon)}}.$$

3.6. La remarque suivante nous sera utile dans la suite: ϱ étant un nombre quelconque de E, a' un nombre réel satisfaisant à $0 < a' < a$ et t_1 un nombre réel $\geqslant t_0$ et tel que $1 - \dfrac{a'}{\log t_1} > \sigma_0(\varrho)$, il existe $M > 0$ tel que, si $s = \sigma + it$, avec σ et t réels, on a

$$(7) \qquad |\mathscr{H}(s, z)(s-1)^{-z}| \leqslant M(\log|t|)^{\varrho}$$

lorsque $|t| \geqslant t_1$, $\sigma \geqslant 1 - \dfrac{a'}{\log|t|}$ et $|z| \leqslant \varrho$ (ce qui implique que $s \in \Delta^*$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$)!

En effet, on a pour $s \in \Delta^*$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$

$$\mathscr{H}(s, z)(s-1)^{-z} = \mathscr{G}(s, z)\exp\left\{z\left(l(s) + \operatorname{Log}\frac{1}{s-1}\right)\right\}$$

et par suite

$$|\mathscr{H}(s, z)(s-1)^{-z}| \leqslant |\mathscr{G}(s, z)|\exp\left\{|z|\left|l(s) + \operatorname{Log}\frac{1}{s-1}\right|\right\}.$$

Comme on l'a dit à la fin du § 3.2, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\left|l(s) + \operatorname{Log}\frac{1}{s-1}\right| \leqslant \log\log|t| + K \quad \text{pour} \quad |t| \geqslant t_0 \text{ et } \sigma \geqslant 1 - \frac{a'}{\log|t|}.$$

Par ailleurs, si $|t| \geqslant t_1$ et $\sigma \geqslant 1 - \dfrac{a'}{\log|t|}$, on a

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{a'}{\log t_1} > \sigma_0(\varrho).$$

D'après le 3 du § 3.3, on sait qu'il existe $K' > 0$ tel que

$$|\mathscr{G}(s, z)| \leqslant K' \quad \text{pour} \quad \sigma \geqslant 1 - \frac{a'}{\log t_1} \text{ et } |z| \leqslant \varrho.$$

Ainsi, si $|t| \geqslant t_1$, $\sigma \geqslant 1 - \dfrac{a'}{\log|t|}$ et $|z| \leqslant \varrho$, on a (7) avec $M = K' e^{k\varrho}$.

4. Démonstration de la relation (5). Tout au long de ce chapitre, ϱ sera un nombre >0 appartenant à E, fixé une fois pour toutes.

Nous allons montrer que, quel que soit l'entier $q \geqslant 0$, la relation (5) a lieu uniformément pour $|z| \leqslant \varrho$.

Nous poserons, pour x réel $\geqslant 0$ et z complexe quelconque,

$$P_x(z) = \sum_{n \leqslant x} \chi(n) z^{f(n)}.$$

4.1. Remarquons d'abord que, si $|z| \leqslant \varrho$, on a pour tout $\sigma > 1$

$$\sum_{p,k} \frac{|\chi(p^k) z^{f(p^k)}|}{p^{k\sigma}} < +\infty.$$

En effet, d'une part, on a $|\chi(p^k) z^{f(p^k)}| \leqslant \chi(p^k) \varrho^{f(p^k)}$ et, comme $\sigma_0(\varrho) < 1$, on sait que, pour tout $\sigma > 1$,

$$\sum_{\substack{p,k \\ k \geqslant 2}} \frac{\chi(p^k) \varrho^{f(p^k)}}{p^{k\sigma}} < +\infty.$$

D'autre part, puisque $\chi(p) = f(p) = 1$, on a pour $\sigma > 1$

$$\sum_p \frac{|\chi(p) z^{f(p)}|}{p^\sigma} = \sum_p \frac{|z|}{p^\sigma} < +\infty.$$

Comme $\chi(n) z^{f(n)}$ est une fonction multiplicative de l'entier n, il résulte de là que, si $|z| \leqslant \varrho$, la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n) z^{f(n)}}{n^s}$$

est absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > 1$, avec pour somme la valeur du produit infini absolument convergent

$$\prod \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi(p^k) z^{f(p^k)}}{p^{ks}}\right).$$

4.1.1. Remarquons que, comme on a

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-z} = \exp\left(z \sum_{p,k} \frac{1}{kp^{ks}}\right) = \exp\left\{z \left(l(s) + \operatorname{Log} \frac{1}{s-1}\right)\right\},$$

on a

$$\prod \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi(p^k) z^{f(p^k)}}{p^{ks}}\right) = \mathscr{G}(s, z) \exp\left\{z \left(l(s) + \operatorname{Log} \frac{1}{s-1}\right)\right\}$$
$$= \mathscr{H}(s, z)(s-1)^{-z}.$$

Nous pouvons donc dire que, si $|z| \leqslant \varrho$, la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n) z^{f(n)}}{n^s}$$

est absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > 1$, avec pour somme

$$\mathscr{H}(s, z)(s-1)^{-z}.$$

Alors, d'après une formule bien connue, si c est un nombre réel quelconque >1, on a pour $x > 0$

$$\int_0^x P_t(z)\, dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \mathscr{H}(s, z)(s-1)^{-z} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\, ds,$$

où l'intégrale est prise sur le segment de droite joignant les points $c - iT$ et $c + iT$.

Pour simplifier l'écriture, nous définirons $\mathscr{F}(s, z, x)$ pour tous les systèmes (s, z, x) tels que

$$|z| \in E, \quad s \in \Delta^*, \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|) \quad \text{et} \quad x > 0$$

par

$$\mathscr{F}(s, z, x) = \mathscr{H}(s, z)(s-1)^{-z} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}.$$

Ainsi, nous pouvons dire que, si $|z| \leqslant \varrho$, on a pour $x > 0$

$$\int_0^x P_t(z)\, dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \mathscr{F}(s, z, x)\, ds,$$

où c est un nombre réel quelconque >1 et l'intégrale est prise sur le segment de droite joignant les points $c - iT$ et $c + iT$.

4.1.2. Pour x et z fixés, $\mathscr{F}(s, z, x)$ est une fonction de s holomorphe dans le domaine simplement connexe constitué par l'intersection de Δ^* avec le demi-plan ouvert $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho)$. On peut donc, au lieu d'intégrer sur le segment $[c - iT, c + iT]$, intégrer sur tout autre chemin contenu dans ce domaine et allant du point $c - iT$ au point $c + iT$.

Soit a' un nombre réel satisfaisant à $0 < a' < a$ et soit t_1 un nombre réel $\geqslant t_0$ tel que $1-\dfrac{a'}{\log t_1} > \sigma_0(\varrho)$.

Posons $\dfrac{a'}{\log t_1} = \eta$, de sorte que $0 < \eta < \frac{1}{2}$.

Les nombres a' et t_1, et par suite aussi η, resteront fixes dans toute la suite de ce chapitre.

Soient, d'autre part, r et ε deux nombres réels satisfaisant à

$$0 < r < \eta \quad \text{et} \quad 0 < \varepsilon < \operatorname{Arctg}\frac{t_1}{\eta},$$

et que nous pourrons faire varier à notre guise.

En supposant $T > t_1$, nous remplacerons l'intégrale de $\mathscr{F}(s, z, x)$ sur le segment $[c-iT, c+iT]$ par la somme des intégrales sur les arcs orientés $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_9$ définis comme suit.

Γ_1 est le segment $\left[c-iT, 1-\dfrac{a'}{\log T}-iT\right]$;

Γ_2 est l'arc décrit par le point $1-\dfrac{a'}{\log|t|}+it$ quand t croît de $-T$ à $-t_1$;

Γ_3 est le segment $[1-\eta-it_1, 1-\eta-i\eta\operatorname{tg}\varepsilon]$;

Γ_4 est le segment $[1-\eta-i\eta\operatorname{tg}\varepsilon, 1-re^{i\varepsilon}]$;

Γ_5 est l'arc de circonférence décrit par le point $1+re^{i\theta}$ quand θ croît de $-\pi+\varepsilon$ à $\pi-\varepsilon$;

Γ_6 est le segment $[1-re^{-i\varepsilon}, 1-\eta+i\eta\operatorname{tg}\varepsilon]$;

Γ_7 est le segment $[1-\eta+i\eta\operatorname{tg}\varepsilon, 1-\eta+it_1]$;

Γ_8 est l'arc décrit par le point $1-\dfrac{a'}{\log t}+it$ quand t croît de t_1 à T;

Γ_9 est le segment $\left[1-\dfrac{a'}{\log T}+iT, c+iT\right]$.

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_8$ et Γ_9 ne dépendent que de T, mais pas de r et ε.

Quand ε tend vers zéro, T et r restant fixes, les intégrales sur Γ_3 et Γ_7 tendent respectivement vers les intégrales sur les segments $[1-\eta-it_1, 1-\eta[$ et $]1-\eta, 1-\eta+it_1]$, que nous désignerons par C_3 et C_7, tandis que la somme des intégrales sur Γ_4, Γ_5 et Γ_6 tend vers

$$\int_{1-\eta}^{1-r} \mathscr{H}(s, z)(1-\sigma)^{-z}e^{i\pi z}\frac{x^{\sigma+1}}{\sigma(\sigma+1)}d\sigma + \int_{\gamma_r}\mathscr{F}(s, z, x)ds + \int_{1-r}^{1-\eta}\mathscr{H}(s, z)(1-\sigma)^{-z}e^{-i\pi z}\frac{x^{\sigma+1}}{\sigma(\sigma+1)}d\sigma,$$

c'est-à-dire

$$2i\sin\pi z\int_r^\eta \frac{\mathscr{H}(1-u, z)u^{-z}}{(1-u)(2-u)}x^{2-u}du + \int_{\gamma_r}\mathscr{F}(s, z, x)ds,$$

où γ_r est l'arc constitué par la circonférence $|s-1| = r$ privée du point $1-r$, parcourn dans le sens direct.

Cette expression est évidemment indépendante du choix de r.

Si maintenant T tend vers $+\infty$, r restant fixe, les intégrales sur Γ_1 et Γ_9 tendent vers zéro et les intégrales sur Γ_2 et Γ_8 tendent vers les intégrales absolument convergentes

$$\int_{-\infty}^{-t_1}\mathscr{F}\left(1-\frac{a'}{\log|t|}+it, z, x\right)\left(i+\frac{a'}{t(\log|t|)^2}\right)dt$$

et

$$\int_{t_1}^{+\infty}\mathscr{F}\left(1-\frac{a'}{\log t}+it, z, x\right)\left(i+\frac{a'}{t(\log t)^2}\right)dt.$$

En effet, d'après ce que l'on a dit au § 3.6, il existe $M > 0$ tel que, si $s = \sigma+it$, on a, quand $|t| \geqslant t_1$, $\sigma \geqslant 1-\dfrac{a'}{\log|t|}$ et $|z| \leqslant \varrho$,

$$|\mathscr{H}(s, z)(s-1)^{-z}| \leqslant M(\log|t|)^\varrho$$

et par suite, pour $x > 0$,

$$|\mathscr{F}(s, z, x)| \leqslant \frac{Mx^{\sigma+1}}{t^2}(\log|t|)^\varrho.$$

Ceci entraîne d'abord que les intégrales sur Γ_1 et Γ_9 sont de module au plus égal à

$$\frac{Mx^{c+1}}{T^2}\left(c-1+\frac{a'}{\log T}\right)(\log T)^\varrho.$$

D'autre part, les intégrales sur Γ_2 et Γ_8 sont égales respectivement à

$$\int_{-T}^{-t_1}\mathscr{F}\left(1-\frac{a'}{\log|t|}+it, z, x\right)\left(i+\frac{a'}{t(\log|t|)^2}\right)dt$$

et

$$\int_{t_1}^{T}\mathscr{F}\left(1-\frac{a'}{\log t}+it, z, x\right)\left(i+\frac{a'}{t(\log t)^2}\right)dt.$$

On voit que, pour $|t| \geqslant t_1$,

$$\left|\mathscr{F}\left(1-\frac{a'}{\log|t|}+it, z, x\right)\left(i+\frac{a'}{t(\log|t|)^2}\right)\right|$$
$$\leqslant \frac{K_1}{t^2} x^{2-a'/\log|t|}(\log|t|)^\varrho \leqslant \frac{K_1 x^2}{t^2}(\log|t|)^\varrho,$$

où

$$K_1 = M\sqrt{1+\frac{a'^2}{t_1^2(\log t_1)^4}},$$

et ceci montre que les intégrales de $-\infty$ à $-t_1$ et de t_1 à $+\infty$ sont absolument convergentes.

Finalement, on arrive au résultat suivant:

On a pour $|z| \leqslant \varrho$ et $x > 0$

(8) $$\int_0^x P_t(z)\,dt = \Phi_z(x)+w(x, z),$$

où

$$\Phi_z(x) = \frac{\sin \pi z}{\pi}\int_r^\eta \frac{\mathscr{H}(1-u, z)u^{-z}}{(1-u)(2-u)} x^{2-u}du+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\mathscr{F}(s, z, x)\,ds,$$

r étant un nombre réel satisfaisant à $0 < r < \eta$, et

$$w(x, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}\mathscr{F}(s, z, x)\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_7}\mathscr{F}(s, z, x)\,ds+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-t_1}\mathscr{F}\left(1-\frac{a'}{\log|t|}+it, z, x\right)\left(i+\frac{a'}{t(\log|t|)^2}\right)dt+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{t_1}^{+\infty}\mathscr{F}\left(1-\frac{a'}{\log t}+it, z, x\right)\left(i+\frac{a'}{t(\log t)^2}\right)dt.$$

4.1.3. Nous allons voir qu'il existe H_1 et $a > 0$ tels que l'on ait

(9) $$|w(x, z)| \leqslant H_1 x^2 \exp(-2a\sqrt{\log x}) \quad \text{pour} \quad x \geqslant 1 \text{ et } |z| \leqslant \varrho.$$

On a déjà vu que, pour $|z| \leqslant \varrho$, $x > 0$ et $|t| \geqslant t_1$,

$$\left|\mathscr{F}\left(1-\frac{a'}{\log|t|}+it, z, x\right)\left(i+\frac{a'}{t(\log|t|)^2}\right)\right| \leqslant \frac{K_1}{t^2} x^{2-a'/\log|t|}(\log|t|)^\varrho.$$

Fixons un $\varepsilon > 0$ et < 1.

L'inégalité précédente montre que, pour $|z| \leqslant \varrho$, $x \geqslant 1$ et $|t| \geqslant t_1$,

$$\left|\mathscr{F}\left(1-\frac{a'}{\log|t|}+it, z, x\right)\left(i+\frac{a'}{t(\log|t|)^2}\right)\right|$$
$$\leqslant \frac{K_1(\log|t|)^\varrho}{|t|^{2-\varepsilon}} x^2 \exp\left(-\varepsilon\log|t| - a'\frac{\log x}{\log|t|}\right)$$
$$\leqslant \frac{K_1(\log|t|)^\varrho}{|t|^{2-\varepsilon}} x^2 \exp(-2a\sqrt{\log x}),$$

où $a = \sqrt{a'\varepsilon}$, car on a

$$\varepsilon\log|t|+a'\frac{\log x}{\log|t|}-2\sqrt{a'\varepsilon\log x} = \left(\sqrt{\varepsilon\log|t|}-\sqrt{a'\frac{\log x}{\log|t|}}\right)^2 \geqslant 0,$$

d'où

$$\varepsilon\log|t|+a'\frac{\log x}{\log|t|} \geqslant 2\sqrt{a'\varepsilon\log x}.$$

Par suite, pour $|z| \leqslant \varrho$ et $x \geqslant 1$, la somme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-t_1}\mathscr{F}\left(1-\frac{a'}{\log|t|}+it, z, x\right)\left(i+\frac{a'}{t(\log|t|)^2}\right)dt+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{t_1}^{+\infty}\mathscr{F}\left(1-\frac{a'}{\log t}+it, z, x\right)\left(i+\frac{a'}{t(\log t)^2}\right)dt$$

est de module au plus égal à $K_2 x^2 \exp(-2a\sqrt{\log x})$, où

$$K_2 = \frac{K_1}{\pi}\int_{t_1}^{+\infty}\frac{(\log|t|)^\varrho}{|t|^{2-\varepsilon}}\,dt.$$

On voit, d'autre part, qu'il existe une constante K_3 telle que, si $|z| \leqslant \varrho$ et $x \geqslant 1$, on a pour tout s appartenant à C_3 ou C_7

$$|\mathscr{F}(s, z, x)| \leqslant K_3 x^{2-\eta}.$$

En effet, $\dfrac{\mathscr{H}(s, z)}{s(s+1)}$ est borné pour $|z| \leqslant \varrho$ et s appartenant au segment $[1-\eta-it_1, 1-\eta+it_1]$, qui contient la réunion de C_3 et C_7, car $\mathscr{G}(s, z)$ est borné pour ces valeurs de s et z, puisque $1-\eta > \sigma_0(\varrho)$, et la fonction l, continue sur le segment $[1-\eta-it_1, 1-\eta+it_1]$, est bornée sur ce segment.

D'autre part, on a pour s appartenant à C_3 ou C_7

$$|\mathrm{Log}(s-1)| \leqslant \pi + \mathrm{Max}\left(|\log\eta|, \log\sqrt{t_1^2+\eta^2}\right)$$

et par suite

$$|(s-1)^{-z}| \leqslant \exp\left\{\varrho\left(\pi+\mathrm{Max}\left(|\log\eta|, \log\sqrt{t_1^2+\eta^2}\right)\right)\right\} \quad \text{si} \quad |z| \leqslant \varrho.$$

Il résulte de là que, pour $|z| \leqslant \varrho$ et $x \geqslant 1$,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}\mathscr{F}(s, z, x)\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_7}\mathscr{F}(s, z, x)\,ds\right|$$
$$\leqslant 2t_1K_3x^{2-\eta} = 2t_1K_3x^2\exp(-\eta\log x)$$
$$\leqslant 2t_1K_3\left(\exp\left(\frac{\alpha^2}{\eta}\right)\right)x^2\exp(-2\alpha\sqrt{\log x})$$

puisque

$$-\eta\log x = \frac{\alpha^2}{\eta} - 2\alpha\sqrt{\log x} - \eta\left(\sqrt{\log x} - \frac{\alpha}{\eta}\right)^2.$$

Finalement, on voit que l'on a bien (9), avec

$$H_1 = K_2 + 2t_1K_3\exp\left(\frac{\alpha^2}{\eta}\right).$$

4.1.4. Remarquons que, pour chaque z tel que $|z| \leqslant \varrho$, la fonction Φ_z est indéfiniment dérivable pour $x > 0$ et on a

(10)
$$\Phi_z'(x) = \frac{1}{\pi}\sin\pi z\int_r^\eta \frac{\mathscr{H}(1-u, z)}{1-u}u^{-z}x^{1-u}\,du + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{\mathscr{H}(s, z)}{s}(s-1)^{-z}x^s\,ds$$

et

$$\Phi_z''(x) = \frac{1}{\pi}\sin\pi z\int_r^\eta \mathscr{H}(1-u, z)u^{-z}x^{-u}\,du + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\mathscr{H}(s, z)(s-1)^{-z}x^{s-1}\,ds,$$

r étant toujours un nombre réel quelconque satisfaisant à $0 < r < \eta$.

$\mathscr{G}(s, z)$ est borné pour $|s-1| \leqslant \eta$ et $|z| \leqslant \varrho$ puisque, si $|s-1| \leqslant \eta$, $\mathrm{Re}\, s \geqslant 1-\eta > \sigma_0(\varrho)$. Comme la fonction l est continue sur le disque $|s-1| \leqslant \eta$, elle est bornée sur ce disque. On voit donc qu'il existe $K_4 > 0$ tel que

$$|\mathscr{H}(s, z)| \leqslant K_4 \quad \text{pour} \quad |s-1| \leqslant \eta \text{ et } |z| \leqslant \varrho.$$

Alors on a, pour $x > 1$ et $|z| \leqslant \varrho$,

$$\left|\int_r^\eta \mathscr{H}(1-u, z)u^{-z}x^{-u}\,du\right| \leqslant K_4\int_r^\eta u^{-\varrho}x^{-u}\,du < K_4\left(\int_{r\log x}^{+\infty} v^{-\varrho}e^{-v}\,dv\right)(\log x)^{\varrho-1}$$

puisque le changement de variable $u = v/\log x$ donne

$$\int_r^\eta u^{-\varrho}x^{-u}\,du = (\log x)^{\varrho-1}\int_{r\log x}^{\eta\log x} v^{-\varrho}e^{-v}\,dv.$$

Comme, d'autre part, pour $|s-1| = r$,

$$|(s-1)^{-z}x^{s-1}| \leqslant x^r r^{-\varrho}e^{\pi\varrho},$$

on a aussi

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\mathscr{H}(s, z)(s-1)^{-z}x^{s-1}\,ds\right| \leqslant K_4r^{1-\varrho}e^{\pi\varrho}x^r.$$

Si $x > e^{1/\eta}$, on peut prendre $r = 1/\log x$.

On voit ainsi que, pour $x > e^{1/\eta}$ et $|z| \leqslant \varrho$, on a

(11)
$$|\Phi_z''(x)| \leqslant H_2(\log x)^{\varrho-1},$$

où

$$H_2 = K_4\left(\frac{\mathrm{sh}\,\pi\varrho}{\pi}\int_1^{+\infty} v^{-\varrho}e^{-v}\,dv + e^{\pi\varrho+1}\right).$$

4.2. Supposons maintenant que $x > 2e^{1/\eta}$, et soit ξ un nombre réel satisfaisant à $0 < \xi \leqslant x/2$.

Si $|z| \leqslant \varrho$, on a pour $x < t \leqslant x+\xi$

$$|P_t(z) - P_x(z)| = \left|\sum_{x<n\leqslant t}\chi(n)z^{f(n)}\right| \leqslant \sum_{x<n\leqslant t}\chi(n)\varrho^{f(n)} = P_t(\varrho) - P_x(\varrho).$$

On a par suite, pour $|z| \leqslant \varrho$,

$$\left|\frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi}P_t(z)\,dt - P_x(z)\right| = \left|\frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi}\left(P_t(z) - P_x(z)\right)dt\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi}\left(P_t(\varrho) - P_x(\varrho)\right)dt = \frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi}P_t(\varrho)\,dt - P_x(\varrho).$$

On déduit de là que, pour $|z| \leqslant \varrho$,

$$|P_x(z) - \Phi_z'(x)| \leqslant \left|\frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi}P_t(z)\,dt - \Phi_z'(x)\right| + \frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi}P_t(\varrho)\,dt - P_x(\varrho).$$

Mais, comme

$$P_t(\varrho) \geqslant P_x(\varrho) \quad \text{pour} \quad t \geqslant x \quad \text{et} \quad P_t(\varrho) \leqslant P_x(\varrho) \quad \text{pour} \quad t \leqslant x,$$

on a

$$\frac{1}{\xi}\int_{x-\xi}^{x} P_t(\varrho)\,dt \leqslant P_x(\varrho) \leqslant \frac{1}{\xi}\int_{x}^{x+\xi} P_t(\varrho)\,dt$$

et par suite

$$\frac{1}{\xi}\int_{x}^{x+\xi} P_t(\varrho)\,dt - P_x(\varrho) \leqslant \frac{1}{\xi}\int_{x}^{x+\xi} P_t(\varrho)\,dt - \frac{1}{\xi}\int_{x-\xi}^{x} P_t(\varrho)\,dt.$$

On voit ainsi que, pour $|z| \leqslant \varrho$,

$$(12)\qquad |P_x(z) - \Phi_z'(x)| \leqslant \left|\frac{1}{\xi}\int_{x}^{x+\xi} P_t(z)\,dt - \Phi_z'(x)\right| + \frac{1}{\xi}\left(\int_{x}^{x+\xi} P_t(\varrho)\,dt - \int_{x-\xi}^{x} P_t(\varrho)\,dt\right).$$

Maintenant, la formule (8) donne

$$\int_{x}^{x+\xi} P_t(z)\,dt = \int_{0}^{x+\xi} P_t(z)\,dt - \int_{0}^{x} P_t(z)\,dt$$

$$= \Phi_z(x+\xi) - \Phi_z(x) + w(x+\xi, z) - w(x, z)$$

$$= \xi\Phi_z'(x) + \xi^2\int_0^1 (1-u)\,\Phi_z''(x+u\xi)\,du + w(x+\xi, z) - w(x, z),$$

et

$$\int_{x}^{x+\xi} P_t(\varrho)\,dt - \int_{x-\xi}^{x} P_t(\varrho)\,dt = \int_{0}^{x+\xi} P_t(\varrho)\,dt + \int_{0}^{x-\xi} P_t(\varrho)\,dt - 2\int_{0}^{x} P_t(\varrho)\,dt$$

$$= \Phi_\varrho(x+\xi) + \Phi_\varrho(x-\xi) - 2\Phi_\varrho(x) + w(x+\xi, \varrho) + w(x-\xi, \varrho) - 2w(x, \varrho)$$

$$= \xi^2\int_0^1 (1-u)\,[\Phi_\varrho''(x+u\xi) + \Phi_\varrho''(x-u\xi)]\,du +$$

$$+ w(x+\xi, \varrho) + w(x-\xi, \varrho) - 2w(x, \varrho).$$

Ainsi (12) montre que l'on a pour $|z| \leqslant \varrho$

$$|P_x(z) - \Phi_z'(x)| \leqslant \frac{\xi}{2}\left(\operatorname*{Sup}_{0\leqslant u\leqslant 1}|\Phi_z''(x+u\xi)| + \operatorname*{Sup}_{0\leqslant u\leqslant 1}|\Phi_\varrho''(x+u\xi) + \Phi_\varrho''(x-u\xi)|\right) +$$

$$+ \frac{|w(x+\xi, z)| + |w(x, z)| + |w(x+\xi, \varrho)| + |w(x-\xi, \varrho)| + 2\,|w(x, \varrho)|}{\xi}$$

et, en tenant compte de (9) et (11) et observant que

$$\log(x+\xi) \leqslant \log x + \log\frac{3}{2} = \log x\left(1 + \frac{\log(3/2)}{\log x}\right) \leqslant \left(1 + \frac{\log(3/2)}{1/\eta + \log 2}\right)\log x,$$

$$\log(x-\xi) \geqslant \log x - \log 2 = \log x\left(1 - \frac{\log 2}{\log x}\right)$$

$$\geqslant \left(1 - \frac{\log 2}{1/\eta + \log 2}\right)\log x \geqslant \frac{1}{1/\eta + \log 2}\log x$$

et

$$\sqrt{\log x} - \sqrt{\log(x-\xi)} = \frac{\log x - \log(x-\xi)}{\sqrt{\log x} + \sqrt{\log(x-\xi)}} \leqslant \frac{\log\big(x/(x-\xi)\big)}{2\sqrt{\log(x-\xi)}}$$

$$\leqslant \frac{\log 2}{2\sqrt{\log(x/2)}} \leqslant \frac{\sqrt{\eta}\log 2}{2},$$

ceci donne

$$|P_x(z) - \Phi_z'(x)| \leqslant H_3(\log x)^{\varrho-1}\xi + \frac{H_4}{\xi}x^2\exp(-2a\sqrt{\log x}),$$

où

$$H_3 = \begin{cases} H_2\left[\dfrac{1}{2} + \left(1 + \dfrac{\log(3/2)}{1/\eta + \log 2}\right)^{\varrho-1}\right] & \text{si} \quad \varrho \geqslant 1, \\[2ex] H_2\left[1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\eta} + \log 2\right)^{1-\varrho}\right] & \text{si} \quad \varrho < 1, \end{cases}$$

et

$$H_4 = H_1\left(\frac{15}{2} + \exp(a\sqrt{\eta}\log 2)\right).$$

Si x est assez grand, on a $\exp(a\sqrt{\log x}) > 2(\log x)^{(1-\varrho)/2}$ et on peut prendre $\xi = x(\log x)^{(1-\varrho)/2}\exp(-a\sqrt{\log x})$, ce qui donne

$$|P_x(z) - \Phi_z'(x)| \leqslant (H_3 + H_4)\,x(\log x)^{(\varrho-1)/2}\exp(-a\sqrt{\log x}).$$

On a ainsi prouvé que, quand x tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $|z| \leqslant \varrho$

$$\sum_{n\leqslant x}\chi(n)z^{f(n)} = P_x(z) = \Phi_z'(x) + O\big(x(\log x)^{(\varrho-1)/2}\exp(-a\sqrt{\log x})\big)\text{[6]}.$$

---

[6] On remarquera que, lorsque z est un entier $\leqslant 0$, cette relation se réduit à

$$\sum_{n\leqslant x}\chi(n)z^{f(n)} = O\big(x(\log x)^{(\varrho-1)/2}\exp(-a\sqrt{\log x})\big)$$

car on voit alors immédiatement sur la formule (10) que $\Phi_z'(x) = 0$.

4.3. Il est clair que, pour achever la démonstration de (5), il ne reste plus qu'à prouver que, quel que soit q entier $\geqslant 0$, on a uniformément pour $|z| \leqslant \varrho$

$$\Phi_z'(x) = x(\log x)^{z-1}\left\{\sum_{j=0}^{q}\frac{A_j(z)}{(\log x)^j}+O\left(\frac{1}{(\log x)^{q+1}}\right)\right\},$$

c'est-à-dire

$$\Phi_z'(x) = \sum_{j=0}^{q}\frac{xB_j(z)}{\Gamma(z-j)}(\log x)^{z-j-1}+O\big(x(\log x)^{\operatorname{Re} z-q-2}\big). \tag{13}$$

4.3.1. On sait que, pour z fixé, avec $|z| \leqslant \varrho$, $\frac{1}{s}\mathscr{H}(s,z)$ est une fonction de s holomorphe dans le domaine intersection de Δ avec le demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$, donc en particulier, puisque $\sigma_0(|z|) \leqslant \sigma_0(\varrho)$, dans le disque $|s-1| < \delta$, où $\delta = 1-\sigma_0(\varrho)$ (de sorte que $\delta > \eta$).

D'après la définition des fonctions B_j on a pour $|s-1| < \delta$

$$\frac{1}{s}\mathscr{H}(s,z) = \sum_{j=0}^{+\infty}B_j(z)(s-1)^j.$$

q étant un entier $\geqslant 0$ fixé, nous poserons

$$\frac{1}{s}\mathscr{H}(s,z) = \sum_{j=0}^{q}B_j(z)(s-1)^j+R_q(s,z)(s-1)^{q+1}, \tag{14}$$

de sorte que l'on a pour $|s-1| < \delta$

$$R_q(s,z) = \sum_{j=q+1}^{+\infty}B_j(z)(s-1)^{j-q-1}.$$

On va voir qu'il existe $H_5 > 0$ tel que l'on ait

$$|R_q(s,z)| \leqslant H_5 \quad \text{pour} \quad |s-1| \leqslant \eta \text{ et } |z| \leqslant \varrho. \tag{15}$$

En effet, soit δ' satisfaisant à $\eta < \delta' < \delta$.

Si $|s-1| \leqslant \delta'$, on a $\operatorname{Re} s \geqslant 1-\delta' > \sigma_0(\varrho)$.

On sait que $\mathscr{G}(s,z)$ est borné pour $\operatorname{Re} s \geqslant 1-\delta'$ et $|z| \leqslant \varrho$, de sorte qu'il en est de même de $\frac{1}{s}\mathscr{G}(s,z)$. Comme, par ailleurs, la fonction l est holomorphe dans le domaine Δ, qui contient le disque fermé $|s-1| \leqslant \delta'$, on voit que $\frac{1}{s}\mathscr{H}(s,z)$ est borné pour $|s-1| \leqslant \delta'$ et $|z| \leqslant \varrho$:

Il existe $K_5 > 0$ tel que

$$\left|\frac{1}{s}\mathscr{H}(s,z)\right| \leqslant K_5 \quad \text{pour} \quad |s-1| \leqslant \delta' \text{ et } |z| \leqslant \varrho.$$

Pour z fixé, on peut appliquer l'inégalité classique de Cauchy pour le coefficient de $(s-1)^j$ dans le développement en série de Taylor de $\frac{1}{s}\mathscr{H}(s,z)$ au voisinage du point 1. On voit ainsi que, pour $|z| \leqslant \varrho$,

$$|B_j(z)| \leqslant \frac{K_5}{\delta'^j}. \tag{16}$$

Il en résulte que, pour $|z| \leqslant \varrho$ et $|s-1| \leqslant \eta$,

$$|R_q(s,z)| \leqslant \sum_{j=q+1}^{+\infty}K_5\frac{\eta^{j-q-1}}{\delta'^j} = \frac{K_5}{\delta'^q(\delta'-\eta)}.$$

4.3.2. En supposant $x > e^{1/\eta}$, nous prendrons $r = 1/\log x$ dans la formule (10) et nous y remplacerons $\mathscr{H}(1-u,z)/(1-u)$ et $\mathscr{H}(s,z)/s$ par leurs expressions au moyen de la formule (14).

En tenant compte de ce que $(-1)^j\sin\pi z = \sin\pi(z-j)$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}\Phi_z'(x) = {}&\sum_{j=0}^{q}B_j(z)\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi(z-j)\int_r^{\eta}u^{j-z}x^{1-u}\,du+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}(s-1)^{j-z}x^s\,ds\right)+\\ &+\frac{1}{\pi}\sin\pi(z-q-1)\int_r^{\eta}R_q(1-u,z)u^{q+1-z}x^{1-u}\,du+\\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}R_q(s,z)(s-1)^{q+1-z}x^s\,ds\\ = {}&\sum_{j=0}^{q}xB_j(z)\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi(z-j)\int_r^{+\infty}u^{j-z}x^{-u}\,du+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}(s-1)^{j-z}x^{s-1}\,ds\right)+\\ &+W(x,z),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}W(x,z) = {}&-\sum_{j=0}^{q}xB_j(z)\frac{\sin\pi(z-j)}{\pi}\int_{\eta}^{+\infty}u^{j-z}x^{-u}\,du+\\ &+x\frac{\sin\pi(z-q-1)}{\pi}\int_r^{\eta}R_q(1-u,z)u^{q+1-z}x^{-u}\,du+\\ &+\frac{x}{2\pi i}\int_{\gamma_r}R_q(s,z)(s-1)^{q+1-z}x^{s-1}\,ds.\end{aligned}$$

On voit que l'on a pour $0 \leqslant j \leqslant q$

$$\frac{1}{\pi}\sin\pi(z-j)\int_r^{+\infty}u^{j-z}x^{-u}du+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}(s-1)^{j-z}x^{s-1}\,ds = \frac{(\log x)^{z-j-1}}{\Gamma(z-j)}. \tag{17}$$

En effet, en posant $u = v/\log x$ dans la première intégrale et $s = 1+re^{i\theta} = 1+e^{i\theta}/\log x$ dans la deuxième, on obtient

$$(\log x)^{z-j-1}\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi(z-j)\int_1^{\infty} v^{j-z}e^{-v}\,dv+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\theta(j-z)}\exp(e^{i\theta})\,ie^{i\theta}\,d\theta\right)$$

ou

$$(\log x)^{z-j-1}\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi(z-j)\int_1^{+\infty} v^{j-z}e^{-v}\,dv+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\zeta^{j-z}e^{\zeta}\,d\zeta\right),$$

où Γ est la circonférence $|\zeta| = 1$ privée du point -1, parcourue dans le sens direct.

D'après une formule bien connue, la quantité entre crochets est égale à $\dfrac{1}{\Gamma(z-j)}$.

Compte-tenu de (17), on voit que, pour établir (13), il suffit de montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $|z| \leqslant \varrho$

$$\int_{\eta}^{+\infty} u^{j-z}x^{-u}\,du = O\big((\log x)^{-q-2-\varrho}\big) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant q, \tag{18}$$

$$\int_r^{\eta} R_q(1-u,z)\,u^{q+1-z}x^{-u}\,du = O\big((\log x)^{\operatorname{Re} z-q-2}\big) \tag{19}$$

et

$$\int_{\gamma_r} R_q(s,z)(s-1)^{q+1-z}x^{s-1}\,ds = O\big((\log x)^{\operatorname{Re} z-q-2}\big). \tag{20}$$

Pour établir (18), nous faisons d'abord dans l'intégrale le changement de variable $u = v/\log x$, ce qui donne

$$\int_{\eta}^{+\infty} u^{j-z}x^{-u}\,du = (\log x)^{z-j-1}\int_{\eta\log x}^{+\infty} v^{j-z}e^{-v}\,dv.$$

Comme $\log x > 1/\eta > 1$, on a pour $|z| \leqslant \varrho$

$$|(\log x)^{z-j-1}| \leqslant (\log x)^{\varrho-1} \quad \text{et} \quad \left|\int_{\eta\log x}^{+\infty} v^{j-z}e^{-v}\,dv\right| \leqslant \int_{\eta\log x}^{+\infty} v^{q+\varrho}e^{-v}\,dv.$$

Remarquons maintenant que la fonction égale à $v^{q+\varrho}e^{-v}$ a pour dérivée logarithmique $\dfrac{q+\varrho}{v}-1$, qui est $\leqslant -\frac{1}{2}$ pour $v \geqslant \eta\log x$ dès que $\log x \geqslant \dfrac{2(q+\varrho)}{\eta}$.

Donc, si $x \geqslant \exp\left(\dfrac{2(q+\varrho)}{\eta}\right)$, on a pour $v \geqslant \eta\log x$

$$v^{q+\varrho}e^{-v} \leqslant (\eta\log x)^{q+\varrho}e^{-\eta\log x}\exp\big(-\tfrac{1}{2}(v-\eta\log x)\big)$$

et par suite on a

$$\int_{\eta\log x}^{+\infty} v^{q+\varrho}e^{-v}\,dv \leqslant 2(\eta\log x)^{q+\varrho}e^{-\eta\log x}.$$

Finalement, on voit que l'on a pour $x \geqslant \exp\left(\dfrac{2(q+\varrho)}{\eta}\right)$ et $|z| \leqslant \varrho$

$$\left|\int_{\eta}^{+\infty} u^{j-z}x^{-u}\,du\right| \leqslant 2\eta^{q+\varrho}(\log x)^{q+2\varrho-1}e^{-\eta\log x},$$

ce qui entraîne (18).

Maintenant, (19) et (20) s'établissent aisément en utilisant (15).

On a pour $|z| \leqslant \varrho$

$$\begin{aligned}\left|\int_r^{\eta} R_q(1-u,z)\,u^{q+1-z}x^{-u}\,du\right| &\leqslant H_5\int_r^{\eta} u^{q+1-\operatorname{Re} z}x^{-u}\,du\\ &\leqslant H_5(\log x)^{\operatorname{Re} z-q-2}\int_1^{\eta\log x} v^{q+1-\operatorname{Re} z}e^{-v}\,dv\\ &\leqslant H_5(\log x)^{\operatorname{Re} z-q-2}\int_1^{+\infty} v^{q+1+\varrho}e^{-v}\,dv.\end{aligned}$$

D'autre part, en posant $s = 1+re^{i\theta} = 1+\dfrac{e^{i\theta}}{\log x}$, on trouve

$$\int_{\gamma_r} R_q(s,z)(s-1)^{q+1-z}x^{s-1}\,ds = (\log x)^{z-q-2}\int_{-\pi}^{\pi} R_q(1+re^{i\theta},z)\,e^{i\theta(q+1-z)}\exp(e^{i\theta})\,ie^{i\theta}\,d\theta.$$

Mais, si $|z| \leqslant \varrho$, on a pour $-\pi < \theta < \pi$

$$|R_q(1+re^{i\theta},z)| \leqslant H_5 \quad \text{et} \quad |e^{i\theta(q+1-z)}\exp(e^{i\theta})\,ie^{i\theta}| \leqslant e^{1+\pi\varrho}.$$

On a donc pour $|z| \leqslant \varrho$

$$\left|\int_{\gamma_r} R_q(s,z)(s-1)^{q+1-z}x^{s-1}\,ds\right| \leqslant 2\pi H_5e^{1+\pi\varrho}(\log x)^{\operatorname{Re} z-q-2}.$$

5. Applications. Les formules (1), (2) et (3) d'Atle Selberg permettaient déjà d'établir un certain nombre de résultats concernant les fonctions ω et Ω, comme il est indiqué dans l'article d'Atle Selberg et dans deux articles que nous avons écrits précédemment [7].

---

[7] *Sur des formules dûes à Atle Selberg*, Bull. Sci. Math. (2), 83 (1959), p. 101-111, et *Sur le nombre des diviseurs premiers de n*, Acta Arith. 7 (1962), p. 191-215.

En prenant simplement $q = 0$ dans la formule (5), on peut évidemment établir des résultats semblables pour toute fonction additive f à valeurs entières $\geqslant 0$ telle que $f(p) = 1$ pour tout p et pour laquelle, lorsque l'on prend $\chi(n) = 1$ quel que soit n, le R de notre théorème est > 1. (Cette dernière hypothèse n'est d'ailleurs nécessaire que pour une partie des résultats dont il s'agit).

Nous ne voulons pas insister ici sur ces résultats, mais indiquer plutôt ce que l'on peut obtenir de plus en utilisant la formule avec q quelconque.

5.1. Comme première application, nous donnerons le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Soit f une fonction additive à valeurs entières $\geqslant 0$, telle que $f(p) = 1$ pour tout p premier.*

Soit, d'autre part, χ une fonction multiplicative ne prenant que les valeurs 0 et 1 et telle que $\chi(p) = 1$ pour tout p premier.

Étant donné l'entier $\nu \geqslant 1$, il existe une suite de polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_j, \ldots$ de degré $\leqslant \nu - 1$ telle que, quel que soit q entier $\geqslant 0$, on a pour x tendant vers $+\infty$

$$(21)\qquad \sum_{\substack{n\leqslant x\\ f(n)=\nu}} \chi(n) = \sum_{j=0}^{q} \frac{xP_j(\log\log x)}{(\log x)^{j+1}} + O\left(\frac{x(\log\log x)^{\nu-1}}{(\log x)^{q+2}}\right).$$

Le coefficient de $X^{\nu-1}$ dans $P_j(x)$ est

$$\frac{(-1)^j}{(\nu-1)!} F^{(j)}(1), \qquad où \qquad F(s) = \frac{1}{s} \prod \Big(1 + \sum_{f(p^k)=0} \frac{\chi(p^k)}{p^{ks}}\Big).$$

Si $f(n) \geqslant 1$ pour tout $n > 1$, ceci est égal à $\dfrac{j!}{(\nu-1)!}$ car $F(s) = \dfrac{1}{s}$.

5.1.1. On est dans les conditions d'application du théorème principal.

Remarquons d'abord que, d'après la formule qui détermine les fonctions A_j, on a $A_j(0) = 0$ pour tout $j \geqslant 0$.

On peut donc écrire, pour $|z| < R$,

$$A_j(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{j,k} z^k.$$

On va voir que l'on a la formule (21) avec

$$P_j(X) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{a_{j,k}}{(\nu-k)!} X^{\nu-k}.$$

En effet, quel que soit $q \geqslant 0$, on peut écrire, pour tout z tel que $|z| \in E$ et tout $x > 1$,

$$(22)\qquad \sum_{n\leqslant x} \chi(n) z^{f(n)} = \sum_{j=0}^{q} x(\log x)^{z-j-1} A_j(z) + Q_q(x, z).$$

D'après la formule (5), on a quand x tend vers $+\infty$

$$Q_q(x, z) = O\big(x(\log x)^{\mathrm{Re}\,z-q-2}\big)$$

et, quel que soit $\varrho \in E$, le O est uniforme pour $|z| \leqslant \varrho$.

En prenant en particulier $\varrho = 1$, on voit que

$$Q_q(x, z) = O\big(x(\log x)^{-q-1}\big) \text{ uniformément pour } |z| \leqslant 1.$$

En remplaçant q par $q+1$ dans (22), nous écrirons

$$(23)\qquad \sum_{n\leqslant x} \chi(n) z^{f(n)} = \sum_{j=0}^{q+1} x(\log x)^{z-j-1} A_j(z) + Q_{q+1}(x, z),$$

avec

$$(24)\qquad Q_{q+1}(x, z) = O\big(x(\log x)^{-q-2}\big) \text{ uniformément pour } |z| \leqslant 1.$$

Pour x fixé, le premier membre de (23) est un polynôme en z où le coefficient de z^ν est la somme $\sum_{\substack{n\leqslant x\\ f(n)=\nu}} \chi(n)$. Chacun des termes de la somme au second membre est une fonction de z holomorphe pour $|z| < R$. Il en est donc de même du terme $Q_{q+1}(x, z)$. Le coefficient de z^ν est la somme des coefficients de z^ν dans les développements en série entière des différents termes.

On voit immédiatement que le coefficient de z^ν dans le développement de $x(\log x)^{z-j-1} A_j(z)$ est $\dfrac{x}{(\log x)^{j+1}} P_j(\log\log x)$.

D'autre part, d'après l'inégalité classique de Cauchy, il résulte de (24) que le coefficient de z^ν dans le développement de $Q_{q+1}(x, z)$ est $O\big(x(\log x)^{-q-2}\big)$ quand x tend vers $+\infty$.

On obtient ainsi

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ f(n)=\nu}} \chi(n) = \sum_{j=0}^{q+1} \frac{xP_j(\log\log x)}{(\log x)^{j+1}} + O\big(x(\log x)^{-q-2}\big),$$

ce qui donne bien (21).

5.1.2. Notons que, d'après la formule $A_j(z) = \dfrac{B_j(z)}{\Gamma(z-j)}$, on a $a_{j,1} = (-1)^j j!\, B_j(0)$.

Le coefficient de $X^{\nu-1}$ dans $P_j(X)$ est donc $\dfrac{(-1)^j j!\, B_j(0)}{(\nu-1)!}$.

$B_j(0)$ est le coefficient de $(s-1)^j$ dans le développement de Taylor au voisinage du point 1 de $\frac{1}{s}\mathscr{H}(s,0)$, c'est-à-dire de $\frac{1}{s}\mathscr{G}(s,0)$. On a donc $B_j(0) = \frac{1}{j!}F^{(j)}(0)$, où

$$F(s) = \frac{1}{s}\mathscr{G}(s,0) = \frac{1}{s}\prod\Big(1+\sum_{f(p^k)=0}\frac{\chi(p^k)}{p^{ks}}\Big).$$

Si l'on a $f(n)\geqslant 1$ pour tout $n>1$, on voit que $\mathscr{G}(s,0)=1$, de sorte que $F(s)=1/s$.

5.1.3. En prenant $f=\omega$, $\chi=\mu^2$, ou $f=\omega$, $\chi(n)=1$ pour tout n, ou $f=\Omega$, $\chi(n)=1$ pour tout n, on retrouve comme cas particuliers les résultats établis par Landau [8] pour

$\pi_\nu(x)$ = nombre des $n\leqslant x$ qui sont le produit de ν nombres premiers distincts,

$\varrho_\nu(x)$ = nombre des $n\leqslant x$ pour lesquels $\omega(n)=\nu$,

$\sigma_\nu(x)$ = nombre des $n\leqslant x$ pour lesquels $\Omega(n)=\nu$.

5.2. Comme deuxième application de notre théorème principal, nous donnerons le résultat suivant.

THÉORÈME 2. *Soient f et χ une fonction additive et une fonction multiplicative satisfaisant aux hypothèses du théorème principal.*

Supposons que l'on ait $R>1$ [9].

Alors, étant donné l'entier $\nu\geqslant 1$, il existe une suite de polynômes Π_0, $\Pi_1,\ldots,\Pi_j,\ldots$, où Π_0 est de degré ν et, pour $j\geqslant 1$, Π_j est de degré $\leqslant \nu-1$, telle que, pour tout q entier $\geqslant 0$, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{n\leqslant x}\chi(n)f(n)^\nu = \sum_{j=0}^{q}\frac{x\Pi_j(\log\log x)}{(\log x)^j}+O\Big(\frac{x(\log\log x)^{\nu-1}}{(\log x)^{q+1}}\Big). \tag{25}$$

Le coefficient de X^ν dans $\Pi_0(X)$ est

$$\mathscr{G}(1,1)=\prod\Big(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p^k)}{p^k}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big).$$

---

[8] *Über die Verteilung der Zahlen welche aus ν Primfaktoren zussammengesetzt sind*, Nach. Ges. Wiss. Göttingen, 1911, p. 361-381.

[9] Il est clair que cette condition est équivalente à la suivante: Il existe un $\varrho>1$ et un $\sigma<1$ tels que

$$\sum_{\substack{p,k\\k\geqslant 2}}\frac{\chi(p^k)\varrho^{f(p^k)}}{p^{k\sigma}}<+\infty.$$

Celui de $X^{\nu-1}$ est

$$\nu\Big(\Big(\frac{\nu-1}{2}+\gamma\Big)\mathscr{G}(1,1)+\mathscr{G}'_z(1,1)\Big),$$ *où γ est la constante d'Euler.*

Pour $j>0$, le coefficient de $X^{\nu-1}$ dans $\Pi_j(X)$ est

$$(-1)^{j-1}\frac{\nu}{j}G^{(j)}(1),$$

où

$$G(s)=\frac{1}{s}\mathscr{H}(s,1)=\frac{(s-1)\zeta(s)}{s}\prod\Big(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p^k)}{p^{ks}}\Big)\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big).$$

Si $\chi(n)=1$ pour tout n,

$$G(s)=\frac{(s-1)\zeta(s)}{s}.$$

Si $\chi=\mu^2$,

$$G(s)=\frac{(s-1)\zeta(s)}{s\zeta(2s)}.$$

5.2.1. Comme pour le théorème 1, on peut écrire (22) pour tout z tel que $|z|\in E$ et tout $x>1$ et on a quand x tend vers $+\infty$

$$Q_q(x,z)=O\big(x(\log x)^{\operatorname{Re}z-q-2}\big);$$

de plus, quel que soit $\varrho\in E$, le O est uniforme pour $|z|\leqslant\varrho$.

Pour tout ζ tel que $|e^\zeta|\in E$, on peut prendre $z=e^\zeta$ dans (22), ce qui donne

$$\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\exp\big(\zeta f(n)\big)=\sum_{j=0}^{q}x(\log x)^{e^\zeta-j-1}A_j(e^\zeta)+Q_q(x,e^\zeta), \tag{26}$$

et on a quand x tend vers $+\infty$

$$Q_q(x,e^\zeta)=O\big(x(\log x)^{\operatorname{Re}e^\zeta-q-2}\big).$$

On voit de plus que, quel que soit $u>0$ tel que $e^u\in E$, le O est uniforme pour $|\zeta|\leqslant u$. On a par suite

$$Q_q(x,e^\zeta)=O\big(x(\log x)^{e^u-q-2}\big) \text{ uniformément pour } |\zeta|\leqslant u.$$

Fixant un $u>0$ tel que $e^u\in E$ et un entier $m\geqslant e^u-1$, nous remplacerons q par $q+m$ dans (26) et écrirons

$$\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\exp\big(\zeta f(n)\big)=\sum_{j=0}^{q+m}x(\log x)^{e^\zeta-j-1}A_j(e^\zeta)+Q_{q+m}(x,e^\zeta), \tag{27}$$

avec

(28) $\qquad Q_{q+m}(x, e^{\zeta}) = O\big(x(\log x)^{-q-1}\big)$ uniformément pour $|\zeta| \leqslant u$.

Pour x fixé, le premier membre de (27) est une fonction entière de ζ et le coefficient de ζ^{ν} dans son développement en série entière est

$$\frac{1}{\nu!}\sum_{n\leqslant x}\chi(n)f(n)^{\nu}.$$

Chacun des termes de la somme au second membre étant une fonction de ζ holomorphe pour $|\zeta| < u$, il en est de même du terme $Q_{q+m}(x, e^{\zeta})$.

On voit que $\frac{1}{\nu!}\sum_{n\leqslant x}\chi(n)f(n)^{\nu}$ est la somme des coefficients de ζ^{ν} dans les développements en séries entières des différents termes du second membre de (27).

Si l'on pose, pour chaque $j \geqslant 0$, $\Pi_j(X) = \nu!$ coefficient de ζ^{ν} dans le développement en série entière de $A_j(e^{\zeta})\exp\big(X(e^{\zeta}-1)\big)$, on voit que, pour tout $x > 1$, le coefficient de ζ^{ν} dans le développement en série entière de $x(\log x)^{e^{\zeta}-j-1}A_j(e^{\zeta})$ est

$$\frac{1}{\nu!}\cdot\frac{x}{(\log x)^j}\,\Pi_j(\log\log x).$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Cauchy, (28) montre que le coefficient de ζ^{ν} dans le développement en série entière de $Q_{q+m}(x, e^{\zeta})$ est $O\big(x(\log x)^{-q-1}\big)$ quand x tend vers $+\infty$.

On trouve ainsi que, quel que soit q entier $\geqslant 0$, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{n\leqslant x}\chi(n)f(n)^{\nu} = \sum_{j=0}^{q+m}\frac{x\Pi_j(\log\log x)}{(\log x)^j} + O\big(x(\log x)^{-q-1}\big). \tag{29}$$

On voit de suite que chaque Π_j est un polynôme de degré $\leqslant \nu$ où le coefficient de X^{ν} est $A_j(1)$.

Comme, d'après la formule $A_j(z) = \dfrac{B_j(z)}{\Gamma(z-j)}$, on a $A_j(1) = 0$ pour $j \geqslant 1$, on voit que, pour $j \geqslant 1$, Π_j est en fait de degré $\leqslant \nu-1$.

Ainsi (29) donne bien (25).

On voit immédiatement que le coefficient de X^{ν} dans $\Pi_0(X)$ est $A_0(1) = B_0(1) = \mathscr{H}(1, 1) = \mathscr{G}(1, 1)$.

Pour $j > 0$, on voit que le coefficient de ζ dans le développement en série entière de $A_j(e^{\zeta}) = \dfrac{B_j(e^{\zeta})}{\Gamma(e^{\zeta}-j)}$ est $(-1)^{j-1}(j-1)!B_j(1)$.

Il en résulte que le coefficient de $X^{\nu-1}$ dans $\Pi_j(X)$ est

$$(-1)^{j-1}\nu(j-1)!B_j(1) = (-1)^{j-1}\frac{\nu}{j}G^{(j)}(1), \qquad \text{où} \qquad G(s) = \frac{1}{s}\mathscr{H}(s, 1).$$

Pour avoir le coefficient de $X^{\nu-1}$ dans $\Pi_0(X)$, on remarque que le développement en série entière en ζ de $A_0(e^{\zeta}) = \dfrac{B_0(e^{\zeta})}{\Gamma(e^{\zeta})}$ commence par $B_0(1)+\big(\gamma B_0(1)+B_0'(1)\big)\zeta$, c'est-à-dire, puisque

$$B_0(z) = \mathscr{H}(1, z) = \mathscr{G}(1, z), \qquad \text{par} \qquad \mathscr{G}(1,1)+\big(\gamma\mathscr{G}(1,1)+\mathscr{G}_z'(1,1)\big)\zeta.$$

On a donc à prendre le coefficient de ζ^{ν} dans

$$\nu\Big(\mathscr{G}(1,1)+\big(\gamma\mathscr{G}(1,1)+\mathscr{G}_z'(1,1)\big)\zeta\Big)(e^{\zeta}-1)^{\nu-1},$$

ce qui donne

$$\nu\left[\left(\frac{\nu-1}{2}+\gamma\right)\mathscr{G}(1,1)+\mathscr{G}_z'(1,1)\right].$$

5.2.2. En prenant $f = \omega$ et $\chi(n) = 1$ pour tout n ou bien $\chi = \mu^2$, on obtient des évaluations des sommes

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^{\nu} \qquad \text{et} \qquad \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in Q}}\omega(n)^{\nu}.$$

En particulier, pour $\nu = 1$, on trouve que l'on a, quel que soit q entier $\geqslant 1$,

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n) = x\log\log x + b_1 x + \sum_{j=1}^{q}\frac{(-1)^{j-1}}{j}G_1^{(j)}(1)\frac{x}{(\log x)^j} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{q+1}}\right),$$

avec

$$b_1 = \gamma - \sum\left(\log\frac{p}{p-1}-\frac{1}{p}\right) \qquad \text{et} \qquad G_1(s) = \frac{(s-1)\zeta(s)}{s},$$

formule qui a été établie élémentairement à partir d'une forme forte du théorème des nombres premiers par B. Saffari [10], et

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in Q}}\omega(n) = \frac{6}{\pi^2}x\log\log x + b_2 + \sum_{j=1}^{q}\frac{(-1)^{j-1}}{j}G_2^{(j)}(1)\frac{x}{(\log x)^j} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{q+1}}\right),$$

[10] *Sur quelques applications de la "méthode de l'hyperbole" de Dirichlet*, L'Enseignement Mathématique 14 (1968), p. 205–224.

En fait, Saffari évalue, plus généralement, $\sum_{n\leqslant x}\omega_{k,l}(n)$, où $\omega_{k,l}(n)$ est le nombre des diviseurs premiers de n satisfaisant à $p \equiv l \pmod{k}$ (avec $(k, l) = 1$).

avec

$$b_2 = \frac{6}{\pi^2}\Bigl(\gamma - \sum \Bigl(\log\frac{p}{p-1} - \frac{1}{p+1}\Bigr)\Bigr) \quad \text{et} \quad G_2(s) = \frac{(s-1)\zeta(s)}{s\zeta(2s)}.$$

Remarquons que, toutes les fois que les hypothèses du théorème sont satisfaites avec $\chi(n) = 1$ pour tout n, on a, en prenant $\nu = 1$ et $q \geqslant 1$,

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = x\log\log x + \bigl(\gamma + \mathscr{G}_z'(1,1)\bigr)x + \sum_{j=1}^{q} \frac{(-1)^{j-1}}{j}\, G_1^{(j)}(1)\,\frac{x}{(\log x)^j} + O\Bigl(\frac{x}{(\log x)^{q+1}}\Bigr),$$

où G_1 est la même fonction que ci-dessus.

5.3. La même méthode permet d'obtenir, pour toute fonction additive f et toute fonction multiplicative χ satisfaisant aux hypothèses du théorème 2, un développement asymptotique de la somme

$$\sum_{n\leqslant x} \chi(n)\bigl(f(n) - \log\log x\bigr)^\nu,$$

qui est le produit par $\nu!$ du coefficient de ζ^ν dans le développement en série entière en ζ de

$$\sum_{n\leqslant x} \chi(n)\exp\{\zeta(f(n) - \log\log x)\} = (\log x)^{-\zeta}\sum_{n\leqslant x}\chi(n)(e^\zeta)^{f(n)}.$$

On obtient ainsi, en particulier, des développements asymptotiques de

$$\sum_{n\leqslant x}\bigl(\omega(n) - \log\log x\bigr)^\nu, \quad \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in Q}}\bigl(\omega(n) - \log\log x\bigr)^\nu \quad \text{et} \quad \sum_{n\leqslant x}\bigl(\Omega(n) - \log\log x\bigr)^\nu.$$

6. Généralisations.

6.1. Indiquons d'abord que l'on peut ajouter à notre théorème principal le complément suivant, qui constitue en fait une généralisation.

Étant donné l'entier $k > 1$ et l'entier relatif l, il existe une suite de fonctions $A_0^*, A_1^*, \ldots, A_j^*, \ldots$ définies pour $|z| \in E$, holomorphes dans le disque ouvert $|z| < R$, et en outre continues sur le disque fermé $|z| \leqslant R$ dans le cas où $R \in E$, telles que, quel que soit l'entier $q \geqslant 0$, pour tout z tel que $|z| \in E$, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l (\mathrm{mod}\ k)}} \chi(n)z^{f(n)} = x(\log x)^{z-1}\Bigl\{\sum_{j=0}^{q}\frac{A_j^*(z)}{(\log x)^j} + O\Bigl(\frac{1}{(\log x)^{q+1}}\Bigr)\Bigr\},$$

et, quel que soit $\varrho > 0$ appartenant à E, le O est uniforme pour $|z| \leqslant \varrho$.

Les fonctions A_j^* dépendent uniquement de k et du plus grand commun diviseur de k et l.

6.1.1. Lorsque $(k, l) = 1$, la démonstration se fait comme suit.

On introduit les fonctions de Dirichlet $L_1, L_2, \ldots, L_{\varphi(k)}$ correspondant aux différents caractères $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{\varphi(k)}$ modulo k (χ_1 étant le caractère principal) et on considère encore un domaine Δ déterminé de la même façon que précédemment par deux nombres réels t_0 et a, où $t_0 \geqslant e$ et $0 < a \leqslant \frac{1}{2}\log t_0$, mais avec la condition "$\zeta(\sigma+it) \neq 0$" remplacée par "$L_j(\sigma+it) \neq 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, \varphi(k)$".

On considère les fonctions $l_1, l_2, \ldots, l_{\varphi(k)}$ holomorphes dans Δ et définies comme suit.

$l_1(s)$ est la branche de $\log\bigl((s-1)L_1(s)\bigr)$ qui prend la valeur $\log\frac{\varphi(k)}{k}$ pour $s = 1$. Pour chaque $j > 1$, $l_j(s)$ est la branche de $\log L_j(s)$ qui est égale à $\sum_{p,r}\frac{\chi_j(p^r)}{rp^{rs}}$ pour $\mathrm{Re}\,s > 1$.

Pour chaque j, on définit $\mathscr{G}_j(s, z)$ pour $|z| \in E$ et $\mathrm{Re}\,s > \sigma_0(|z|)$ par

$$\mathscr{G}_j(s, z) = \prod\Bigl(1 + \sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\chi_j(p^r)\chi(p^r)z^{f(p_r)}}{p^{rs}}\Bigr)\Bigl(1 - \frac{\chi_j(p)}{p^s}\Bigr)^z,$$

puis $\mathscr{H}_j(s, z)$ pour $|z| \in E$, $s \in \Delta$ et $\mathrm{Re}\,s > \sigma_0(|z|)$ par

$$\mathscr{H}_j(s, z) = \mathscr{G}_j(s, z)\exp\bigl(zl_j(s)\bigr).$$

On voit que, quels que soient $\varrho \in E$ et $\sigma_1 > \sigma_0(\varrho)$, chacune des fonctions $\mathscr{G}_j$ est bornée pour $\mathrm{Re}\,s \geqslant \sigma_1$ et $|z| \leqslant \varrho$.

De plus, étant donné $\varrho \in E$, a' satisfaisant à $0 < a' < a$, et $t_1 \geqslant t_0$ et tel que $1 - \frac{a'}{\log t_1} > \sigma_0(\varrho)$, il existe $M > 0$ tel que, si $s = \sigma + it$, avec $|t| \geqslant t_1$ et $\sigma \geqslant 1 - \frac{a'}{\log|t|}$, on a pour $|z| \leqslant \varrho$

$$|\mathscr{H}_1(s, z)(s-1)^{-z}| \leqslant M(\log|t|)^\varrho$$

et, pour chaque $j > 1$, $|\mathscr{H}_j(s, z)| \leqslant M(\log|t|)^\varrho$.

Étant donné $\varrho \in E$, on montre que, si $|z| \leqslant \varrho$, les séries $\sum_1^{+\infty}\frac{\chi_j(n)\chi(n)z^{f(n)}}{n^s}$ sont absolument convergentes pour $\mathrm{Re}\,s > 1$ et on a

$$\sum_1^{+\infty}\frac{\chi_j(n)\chi(n)z^{f(n)}}{n^s} = \begin{cases}\mathscr{H}_1(s, z)(s-1)^{-z} & \text{si } j = 1,\\ \mathscr{H}_j(s, z) & \text{si } j > 1.\end{cases}$$

On en déduit que, si $|z| \leqslant \varrho$, on a pour $\mathrm{Re}\, s > 1$

$$\sum_{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} \frac{\chi(n) z^{f(n)}}{n^s} = \frac{1}{\varphi(k)} \mathscr{H}_1(s, z)(s-1)^{-z} + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{j>1} \overline{\chi_j(l)} \mathscr{H}_j(s, z),$$

la série au premier membre étant absolument convergente.

La démonstration s'achève en suivant fidélement ce qui a été fait dans les paragraphes 4.1.1 à 4.3.2.

Les fonctions A_j^* sont définies comme suit pour $|z| \in E$.

Le développement de Taylor de $\frac{1}{\varphi(k)} \cdot \frac{1}{s} \mathscr{H}_1(s, z)$, qui est une fonction de s holomorphe pour $s \in \Delta$ et $\mathrm{Re}\, s > \sigma_0(|z|)$, au voisinage du point 1 étant $\sum_{j=0}^{+\infty} B_j^*(z)(s-1)^j$, on a

$$A_j^*(z) = \frac{B_j^*(z)}{\Gamma(z-j)}.$$

6.1.2. Lorsque $(k, l) > 1$, la démonstration est un peu plus compliquée.

Si l'on pose $(k, l) = d$, $k = dk'$, $l = dl'$, on peut remarquer que la condition $n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)$ est équivalente à

$$n = dn', \quad \text{avec} \quad n' \equiv l' \,(\mathrm{mod}\, k').$$

L'évaluation de

$$\sum_{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} \frac{\chi(n) z^{f(n)}}{n^s}$$

pour $\mathrm{Re}\, s > 1$ et $|z| \leqslant \varrho$ se raméne ainsi à celle de

$$\sum_{n \equiv l' \,(\mathrm{mod}\, k')} \frac{\chi(dn) z^{f(dn)}}{n^s},$$

et par suite à celle des sommes des séries

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{\chi_j(n) \chi(dn) z^{f(dn)}}{n^s},$$

où $\chi_1, \chi_2, \ldots$ sont les caractères modulo k'.

Ces dernières sommes s'expriment encore sous forme de produits infinis dont on voit qu'ils sont égaux à $\mathscr{H}_1(s, z)(s-1)^{-z}$, $\mathscr{H}_2(s, z), \ldots$, où les fonctions $\mathscr{H}_j$ sont définies convenablement sur un ensemble de même type que plus haut.

6.2. Avant d'énoncer les autres théorèmes que nous avons en vue, il nous faut introduire une certaine classe d'ensembles de nombres premiers.

Étant donnés les nombres réels $t_0 > 1$ et $a > 0$, nous désignerons par $D(t_0, a)$ le domaine constitué par l'ensemble des points $\sigma + it$ pour lesquels on a

$$\text{ou bien } |t| \geqslant t_0 \text{ et } \sigma > 1 - \frac{a}{\log|t|},$$

$$\text{ou bien } |t| < t_0 \text{ et } \sigma > 1 - \frac{a}{\log t_0}.$$

Ceci dit, nous dirons que l'ensemble A de nombres premiers est un "bon ensemble" (de nombres premiers) si l'on a les propriétés suivantes:

1. Il existe λ réel, $t_0 \geqslant e$, $a > 0$ et une fonction h holomorphe dans le domaine $D(t_0, a)$, tels que l'on ait pour $\mathrm{Re}\, s > 1$

$$\sum_{p \in A} \frac{1}{p^s} = \lambda \operatorname{Log} \frac{1}{s-1} + h(s) \text{ [11]}. \tag{30}$$

2. Il existe K' et $K'' > 0$ tels que, pour $s = \sigma + it$, avec $|t| \geqslant t_0$ et $\sigma > 1 - \frac{a}{\log|t|}$,

$$\left| h(s) + \lambda \operatorname{Log} \frac{1}{s-1} \right| \leqslant K' \log\log|t| + K''.$$

Il est clair que t_0 et a ne sont pas déterminés de façon unique: on peut toujours augmenter t_0 et diminuer a. Si deux nombres donnés t_0 et a conviennent, nous dirons qu'ils sont appropriés à l'ensemble A.

On remarquera que la propriété 1 implique que le nombre des nombres de A au plus égaux à x est $\lambda \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui revient à dire que l'ensemble A est de densité λ par rapport a l'ensemble de tous les nombres premiers [12]. Nous dirons donc que A est un bon ensemble de nombres premiers *de densité* λ.

---

[11] Comme on a, pour s réel > 1, $0 \leqslant \sum_{p \in A} \frac{1}{p^s} \leqslant \sum \frac{1}{p^s}$, on a nécessairement $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

[12] Si $\lambda > 0$, on le voit immédiatement en remarquant que, par dérivation de (30), on a pour $\mathrm{Re}\, s > 1$

$$\sum_{p \in A} \frac{\log p}{p^s} = \frac{\lambda}{s-1} - h'(s)$$

et appliquant le théorème de Ikehara, ce qui donne $\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in A}} \log p \sim \lambda x$.

Si $\lambda = 0$, il résulte d'un théorème classique de Landau que la série de Dirichlet $\sum_{p \in A} \frac{1}{p^s}$ a une abscisse de convergence $\sigma_c < 1$. Alors, pour $\sigma_c < \sigma < 1$, $\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in A}} 1 = o(x^\sigma)$.

L'ensemble de tous les nombres premiers est un bon ensemble de densité 1, car on a les propriétés 1 et 2 en prenant t_0 et a respectivement au moins égal et inférieur à ceux qui avaient été fixés au paragraphe 3.2 — ce qui implique que $D(t_0, a)$ soit contenu dans le domaine Δ fixé à ce moment —, $\lambda = 1$ et

$$h(s) = l(s) - \sum_{\substack{p,r \\ r>1}} \frac{1}{rp^{rs}}.$$

L'ensemble vide est trivialement un bon ensemble de densité 0. Il en est de même de tout ensemble A tel que

$$\sum_{p \in A} \frac{1}{p^\sigma} < +\infty \quad \text{pour un } \sigma < 1.$$

On voit sans peine ([13]) que, si k est un entier >1 et l un entier quelconque premier avec k, l'ensemble des nombres premiers tels que

$$p \equiv l \pmod k$$

est un bon ensemble de densité $1/\varphi(k)$.

On voit d'autre part que la réunion d'un nombre fini de bons ensembles disjoints est un bon ensemble et que, si A_1 et A_2 sont deux bons ensembles et $A_2 \subset A_1$, $A_1 - A_2$ est un bon ensemble.

6.3. Ceci dit, on peut généraliser le théorème principal comme suit.

Théorème B. *Soient f une fonction additive à valeurs entières $\geqslant 0$ et χ une fonction multiplicative ne prenant que les valeurs 0 et 1.*

On définit comme dans le théorème principal l'ensemble E et le nombre R (qui est donc $\geqslant 1$).

On suppose que $\chi(p) = 1$ pour tout p et que $f(p) = 0$ ou 1 pour tout p, l'ensemble des p pour lesquels $f(p) = 1$ étant un bon ensemble de densité $\lambda > 0$.

Alors, il existe une suite de fonctions $A_0, A_1, \ldots, A_j, \ldots$ définies pour $|z| \in E$, holomorphes dans le disque ouvert $|z| < R$, et en outre continues sur le disque fermé $|z| \leqslant R$ dans le cas où $R \in E$, telles que:

quel que soit l'entier $q \geqslant 0$, pour z tel que $|z| \in E$, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{n \leqslant x} \chi(n) z^{f(n)} = x(\log x)^{\lambda(z-1)} \left\{ \sum_{j=0}^{q} \frac{A_j(z)}{(\log x)^j} + O\left(\frac{1}{(\log x)^{q+1}}\right) \right\},$$

et, quel que soit $\varrho > 0$ appartenant à E, le O est uniforme pour $|z| \leqslant \varrho$.

6.3.1. Pour démontrer ce théorème, on introduit un domaine Δ' qui sera le domaine $D(t_0, a)$ où t_0 et a sont appropriés à l'ensemble des p

([13]) Compte tenu de résultats classiques concernant les fonctions L de Dirichlet.

tels que $f(p) = 1$ et respectivement au moins égal et inférieur à ceux du paragraphe 3.2 (de sorte que Δ' est contenu dans le domaine Δ défini dans ce paragraphe).

On définit $\mathscr{G}(s, z)$ pour $|z| \in E$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$ par

$$\mathscr{G}(s, z) = \prod \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi(p^k) z^{f(p^k)}}{p^{ks}}\right) \exp\left(-\frac{z^{f(p)}}{p^s}\right),$$

puis $\mathscr{H}(s, z)$ pour $|z| \in E$, $s \in \Delta'$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$ par

$$\mathscr{H}(s, z) = \mathscr{G}(s, z) \exp\big(h_0(s) + (z-1) h_1(s)\big),$$

où $h_0(s) = l(s) - \sum\limits_{\substack{p,k \\ k>1}} \frac{1}{kp^{ks}}$ et h_1 est la fonction holomorphe dans Δ' telle que l'on ait pour $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{f(p)=1} \frac{1}{p^s} = \lambda \operatorname{Log} \frac{1}{s-1} + h_1(s).$$

On voit que, quels que soient $\varrho \in E$ et $\sigma_1 > \sigma_0(\varrho)$, la fonction $\mathscr{G}$ est bornée pour $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1$ et $|z| \leqslant \varrho$.

De plus, étant donné $\varrho \in E$, a' satisfaisant à $0 < a' < a$ et $t_1 \geqslant t_0$ tel que $1 - \dfrac{a'}{\log t_1} > \sigma_0(\varrho)$, il existe M et $C > 0$ tels que, si $s = \sigma + it$, avec $|t| \geqslant t_1$ et $\sigma \geqslant 1 - \dfrac{a'}{\log |t|}$, on a pour $|z| \leqslant \varrho$

$$|\mathscr{H}(s, z)| \leqslant M (\log |t|)^C.$$

Étant donné $\varrho \in E$, on montre que, si $|z| \leqslant \varrho$, la série $\sum\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{\chi(n) z^{f(n)}}{n^s}$ est absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > 1$, avec pour somme

$$\mathscr{H}(s, z)(s-1)^{-(1+\lambda(z-1))}.$$

On achève la démonstration comme précédemment.

Les fonctions A_j sont déterminées comme suit pour $|z| \in E$.

Le développement de Taylor de $\dfrac{1}{s}\mathscr{H}(s, z)$, qui est une fonction de s holomorphe pour $s \in \Delta'$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$, au voisinage du point 1, étant $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} B_j(z)(s-1)^j$, on a

$$A_j(z) = \frac{B_j(z)}{\Gamma\big(\lambda(z-1) - j + 1\big)}.$$

6.4. Au lieu d'une seule fonction additive à valeurs entières $\geqslant 0$, on peut en considérer simultanément plusieurs.

Nous nous bornerons ici à deux.

On a, par exemple, le théorème suivant.

THÉORÈME C. *Soient f_1 et f_2 deux fonctions additives à valeurs entières $\geqslant 0$, et χ une fonction multiplicative ne prenant que les valeurs 0 et 1.*

On suppose que $\chi(p) = 1$ pour tout p et que, pour chaque p, on a $f_1(p) = 0$ ou 1, $f_2(p) = 0$ ou 1 et $f_1(p) f_2(p) = 0$.

On suppose en outre que l'ensemble des p pour lesquels $f_1(p) = 1$ et l'ensemble des p pour lesquels $f_2(p) = 1$ sont de bons ensembles, de densités respectives λ_1 et λ_2, avec $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$.

Pour chaque couple (ϱ_1, ϱ_2) de nombres réels $\geqslant 0$, définissons $\sigma_0(\varrho_1, \varrho_2)$ comme étant la borne inférieure de l'ensemble des σ réels $> \frac{1}{2}$ pour lesquels on a

$$\sum_{\substack{p,k\\k\geqslant 2}} \frac{\chi(p^k)\varrho_1^{f_1(p^k)}\varrho_2^{f_2(p^k)}}{p^{k\sigma}} < +\infty$$

si cet ensemble n'est pas vide, et $+\infty$ dans le cas contraire.

Il est clair que, si $\varrho_1 \leqslant \varrho_1'$ et $\varrho_2 \leqslant \varrho_2'$, on a $\sigma_0(\varrho_1, \varrho_2) \leqslant \sigma_0(\varrho_1', \varrho_2')$, et que, si $\varrho_1 \leqslant 1$ et $\varrho_2 \leqslant 1$, on a $\sigma_0(\varrho_1, \varrho_2) = \frac{1}{2}$.

Soit E l'ensemble des couples (ϱ_1, ϱ_2) de nombres réels $\geqslant 0$ pour lesquels $\sigma_0(\varrho_1, \varrho_2) < 1$.

Il est clair que, si $(\varrho_1, \varrho_2) \in E$ et si $\varrho_1' \leqslant \varrho_1$ et $\varrho_2' \leqslant \varrho_2$, $(\varrho_1', \varrho_2') \in E$. De plus E contient l'ensemble produit $[0, 1] \times [0, 1]$.

Ceci dit, on a le résultat suivant:

Il existe une suite de fonctions $A_0, A_1, \ldots, A_j, \ldots$ définies pour $(|z_1|, |z_2|) \in E$, et holomorphes en z_1 et z_2 à l'intérieur de leur ensemble de définition, telles que:

Quel que soit l'entier $q \geqslant 0$, pour tout couple (z_1, z_2) tel que $(|z_1|, |z_2|) \in E$, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{n\leqslant x} \chi(n) z_1^{f_1(n)} z_2^{f_2(n)} = x(\log x)^{\lambda_1(z_1-1)+\lambda_2(z_2-1)} \left\{ \sum_{j=0}^{q} \frac{A_j(z_1, z_2)}{(\log x)^j} + O\left(\frac{1}{(\log x)^{q+1}}\right) \right\},$$

et, quels que soient ϱ_1 et $\varrho_2 > 0$ tels que $(\varrho_1, \varrho_2) \in E$, le O est uniforme pour $|z_1| \leqslant \varrho_1$ et $|z_2| \leqslant \varrho_2$.

Un cas particulier intéressant est celui où $f_2(p) = 0$ pour tout p (de sorte que $\lambda_2 = 0$).

6.4.1. La démonstration est semblable à celle du théorème B. On prend cette fois pour domaine Δ' le domaine $D(t_0, a)$ où t_0 et a sont appropriés à la fois à l'ensemble des p tels que $f_1(p) = 1$ et à l'ensemble des p tels que $f_2(p) = 1$, et encore respectivement au moins égal et inférieur à ceux du paragraphe 3.2.

On définit $\mathscr{G}(s, z_1, z_2)$ pour $(|z_1|, |z_2|) \in E$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z_1|, |z_2|)$ par

$$\mathscr{G}(s, z_1, z_2) = \prod \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi(p^k) z_1^{f_1(p^k)} z_2^{f_2(p^k)}}{p^{ks}}\right) \exp\left(-\frac{z_1^{f_1(p)} z_2^{f_2(p)}}{p^s}\right),$$

puis $\mathscr{H}(s, z_1, z_2)$ pour $(|z_1|, |z_2|) \in E$, $s \in \Delta'$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z_1|, |z_2|)$ par

$$\mathscr{H}(s, z_1, z_2) = \mathscr{G}(s, z_1, z_2) \exp\big(h_0(s) + (z_1 - 1) h_1(s) + (z_2 - 1) h_2(s)\big),$$

où

$$h_0(s) = l(s) - \sum_{\substack{p,r\\r>1}} \frac{1}{rp^{rs}},$$

comme plus haut, et h_1 et h_2 sont les fonctions holomorphes dans Δ' telles que l'on ait pour $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{f_1(p)=1} \frac{1}{p^s} = \lambda_1 \operatorname{Log} \frac{1}{s-1} + h_1(s) \quad \text{et} \quad \sum_{f_2(p)=1} \frac{1}{p^s} = \lambda_2 \operatorname{Log} \frac{1}{s-1} + h_2(s).$$

Si $(|z_1|, |z_2|) \in E$, on a pour $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{\chi(n) z_1^{f_1(n)} z_2^{f_2(n)}}{n^s} = \mathscr{H}(s, z_1, z_2)(s-1)^{-(\lambda_1(z_1-1)+\lambda_2(z_2-1)+1)},$$

la série au premier membre étant absolument convergente.

Les fonctions A_j sont définies comme suit pour $(|z_1|, |z_2|) \in E$:

Le développement de Taylor de $\frac{1}{s}\mathscr{H}(s, z_1, z_2)$, qui est une fonction de s holomorphe pour $s \in \Delta'$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z_1|, |z_2|)$, au voisinage du point 1, étant $\sum_{j=0}^{+\infty} B_j(z_1, z_2)(s-1)^j$, on a

$$A_j(z_1, z_2) = \frac{B_j(z_1, z_2)}{\Gamma\big(\lambda_1(z_1-1) + \lambda_2(z_2-1) + 1 - j\big)}.$$

On peut remarquer que la fonction $\mathscr{H}$ est holomorphe en s, z_1 et z_2 à l'intérieur de son ensemble de définition.

6.4.2. Dans le cas particulier où $f_1(p) = 1$ et $f_2(p) = 0$ pour tout p, on peut compléter le théorème C comme on a complété le théorème principal au paragraphe 6.1, en donnant un développement asymptotique pour x tendant vers $+\infty$ de la somme

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\n\equiv l \pmod k}} \chi(n) z_1^{f_1(n)} z_2^{f_2(n)}.$$

6.5. Les résultats qui précèdent permettent de démontrer, et même de généraliser, tous les résultats indiqués dans nos notes *Sur certaines fonctions arithmétiques* ([14]).

On peut aussi en donner des applications semblables à celles du théorème principal données au chapître 5.

6.5.1. Ainsi, le résultat du paragraphe 6.1 permet d'obtenir, pour toute fonction additive f et toute fonction multiplicative χ satisfaisant aux hypothèses du théorème principal, un développement asymptotique de la somme

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l(\bmod k)\\ f(n)=\nu}} \chi(n)$$

et, si $R>1$, des développements asymptotiques des sommes

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l(\bmod k)}} \chi(n)f(n)^\nu \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l(\bmod k)}} \chi(n)\big(f(n)-\log\log x\big)^\nu.$$

6.5.2. Pour toute fonction additive f et toute fonction multiplicative χ satisfaisant aux hypothèses du théorème B, on obtient des développements asymptotiques de la somme

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ f(n)=\nu}} \chi(n)$$

et, si $R>1$, des sommes

$$\sum_{n\leqslant x} \chi(n)f(n)^\nu \quad \text{et} \quad \sum_{n\leqslant x} \chi(n)\big(f(n)-\lambda\log\log x\big)^\nu.$$

Comme exemple particulier, indiquons le résultat suivant.

THÉORÈME 3. *Soit A un bon ensemble de nombres premiers, de densité $\lambda>0$, et désignons par ω_A le nombre des diviseurs premiers de n appartenant à A.*

Étant donné l'entier $\nu\geqslant 1$, il existe deux suites de polynômes $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_j, \ldots$ et $\Pi_0^*, \Pi_1^*, \ldots, \Pi_j^*, \ldots$, où Π_0 et Π_0^* sont de degré ν et, pour $j\geqslant 1$, Π_j et Π_j^* sont de degré $\leqslant \nu-1$, telles que, pour tout $q\geqslant 0$, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{n\leqslant x} \omega_A(n)^\nu = \sum_{j=0}^{q} \frac{x\Pi_j(\log\log x)}{(\log x)^j} + O\left(\frac{x(\log\log x)^{\nu-1}}{(\log x)^{q+1}}\right)$$

et

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in Q}} \omega_A(n)^\nu = \sum_{j=0}^{q} \frac{x\Pi_j^*(\log\log x)}{(\log x)^j} + O\left(\frac{x(\log\log x)^{\nu-1}}{(\log x)^{q+1}}\right).$$

([14]) Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences, 245 (1957), p. 611–614 et p. 1197–1200.

Les coefficients de X^ν dans $\Pi_0(X)$ et $\Pi_0^*(X)$ sont λ^ν et $\frac{6}{\pi^2}\lambda^\nu$, ceux de $X^{\nu-1}$ étant

$$\nu\lambda^{\nu-1}\left(b_A+\frac{\nu-1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{6}{\pi^2}\nu\lambda^{\nu-1}\left(b_A^*+\frac{\nu-1}{2}\right),$$

où

$$b_A = \lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\in A}}\frac{1}{p}-\lambda\log\log x\right) \quad \text{et} \quad b_A^* = \lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\in A}}\frac{1}{p+1}-\lambda\log\log x\right).$$

Pour $j>0$, les coefficients de $X^{\nu-1}$ dans $\Pi_j(X)$ et $\Pi_j^*(X)$ sont

$$(-1)^{j-1}\frac{\nu}{j}\lambda^\nu G_1^{(j)}(1) \quad \text{et} \quad (-1)^{j-1}\frac{\nu}{j}\lambda^\nu G_2^{(j)}(1),$$

où

$$G_1(s) = \frac{(s-1)\zeta(s)}{s} \quad \text{et} \quad G_2(s) = \frac{(s-1)\zeta(s)}{s\zeta(2s)}.$$

En prenant $\nu=1$, on trouve que, pour tout $q\geqslant 1$, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{n\leqslant x}\omega_A(n) = \lambda x\log\log x + b_A x + \sum_{j=1}^{q}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\lambda G_1^{(j)}(1)\frac{x}{(\log x)^j} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{q+1}}\right) \tag{31}$$

et

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in Q}}\omega_A(n) = \frac{6}{\pi^2}\lambda x\log\log x + \frac{6}{\pi^2}b_A^* x + \sum_{j=1}^{q}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\lambda G_2^{(j)}(1)\frac{x}{(\log x)^j} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{q+1}}\right).$$

La formule (31) contient comme cas particulier celle établie par B. Saffari ([15]).

6.5.3. Si f_1 et f_2 sont deux fonctions additives et χ une fonction multiplicative satisfaisant aux hypothèses du théorème C, on obtient un développement asymptotique de la somme

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ f_1(n)=\nu_1\\ f_2(n)=\nu_2}} \chi(n), \quad \text{où} \quad \nu_1 \text{ et } \nu_2 \text{ sont deux entiers} \geqslant 0,$$

([15]) Cf. note ([10]).

en remarquant que c'est le coefficient de $z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2}$ dans le polynôme

$$\sum_{n \leqslant x} \chi(n) z_1^{f_1(n)} z_2^{f_2(n)}.$$

Par exemple, en prenant $f_1 = \omega$, $f_2 = \Omega - \omega$ et $\chi(n) = 1$ pour tout n, on obtient ainsi le résultat suivant.

THÉORÈME 4. *Étant donné les entiers $m \geqslant 2$ et $h \geqslant 1$, il existe une suite de polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_j, \ldots$ de degré $m-2$ telle que, $\nu_{m,h}(x)$ étant le nombre des $n \leqslant x$ pour lesquels $\omega(n) = m$ et $\Omega(n) = m+h$, quel que soit q entier $\geqslant 0$, on a quand x tend vers $+\infty$*

$$\nu_{m,h}(x) = \sum_{j=0}^{q} \frac{x P_j(\log\log x)}{(\log x)^{j+1}} + O\left(\frac{x(\log\log x)^{m-2}}{(\log x)^{q+2}}\right).$$

Le coefficient de X^{m-2} dans $P_j(X)$ est

$$\frac{(-1)^j}{(m-2)!} H_h^{(j)}(1), \quad \text{où} \quad H_h(s) = \frac{1}{s} \sum \frac{1}{p^{(h+1)s}}.$$

Ajoutons que le complément au théorème C mentionné au paragraphe 6.4.2 permet d'obtenir un développement asymptotique du nombre des n au plus égaux à x tels que

$$\omega(n) = m, \quad \Omega(n) = m+h \quad \text{et} \quad n \equiv l \pmod{k}.$$

Reçu le 15. 2. 1970 (38)

ACTA ARITHMETICA
XIX (1971)

On Waring's Problem in GF[p]

by

M. M. DODSON (Heslington)

In this paper we consider the solubility of Waring's Problem and of two related equations in GF[p], the Galois field of p elements. It is convenient to consider the equivalent question of the solubility of the congruences (mod p). Throughout, p will denote a prime, k a positive integer and $d = (k, p-1)$ will denote the highest common factor of k and $p-1$. We shall always write $t = (p-1)/d$.

The first congruence to be considered then is

$$x_1^k + \ldots + x_s^k \equiv N \pmod{p}, \tag{1}$$

where N is an arbitrary integer. Let $\Gamma(k, p)$ be the least positive integer s such that this congruence has a non-trivial solution (i.e. a solution with not all of the integral variables $x_1, \ldots, x_s$ divisible by p) for all integers N. Hardy and Littlewood ([12]) showed that if $d < \frac{1}{2}(p-1)$, then $\Gamma(k,p) \leqslant k$ and Chowla, Mann and Straus ([6]) showed that if $d < \frac{1}{2}(p-1)$, then $\Gamma(k,p) \leqslant [\frac{1}{2}(k+4)]$. I. Chowla ([4]) showed that if k is sufficiently large, then for all primes p with $d = (k, p-1) < \frac{1}{2}(p-1)$, we have

$$\Gamma(k, p) < k^{1-c+\varepsilon}$$

where, as always, ε is a positive number, and $c = (103-3\sqrt{641})/220$ lies strictly between 1/8 and 1/9, a result which for large k is much stronger than Hardy and Littlewood's and that of Chowla, Mann and Straus. Here this estimate is improved slightly to the simpler result that if $d < \frac{1}{2}(p-1)$, then

$$\Gamma(k, p) < k^{7/8},$$

provided k is sufficiently large. This is probably a long way from the truth and indeed Heilbronn ([14], p. 5) has conjectured that given $\varepsilon > 0$, and k large enough,

$$\Gamma(k, p) < k^{\varepsilon},$$

for t sufficiently large or at least, that if $t > 2$ (corresponding to $d < \frac{1}{2}(p-1)$), then $\Gamma(k, p) = O(k^{1/2})$. We note that the cases $d = p-1$ and