ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1979)

Répartition des nombres largement composés

par

JEAN-LOUIS NICOLAS (Limoges)

En hommage à Charles Pisot

Désignons par $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Ramanujan [8] a appelé hautement composé un entier n vérifiant:

$$m < n \Rightarrow d(m) < d(n).$$

Nous dirons que n est largement composé s'il vérifie:

$$m \leqslant n \Rightarrow d(m) \leqslant d(n).$$

Désignons par $Q_h(X)$ (resp. $Q_l(X)$) le nombre de nombres hautement (resp. largement) composés $\leqslant X$. On sait qu'il existe (cf. [2] et [6]) deux nombres réels c et c' vérifiant $1.125 \leqslant c < c'$ tels que, pour X assez grand, on ait:

$$(\log X)^c \leqslant Q_h(X) \leqslant (\log X)^{c'}$$

et on conjecture que:

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\log Q_h(X)}{\log\log X} = \frac{\log 30}{\log 16} = 1.227.$$

Nous allons démontrer que $Q_l(X)$ est beaucoup plus grand que $Q_h(X)$:

THÉORÈME. *Il existe deux nombres réels a et b vérifiant $0.2 < a < b < 0.5$ tels que, pour X assez grand on ait:*

$$\exp(\log X)^a \leqslant Q_l(X) \leqslant \exp(\log X)^b.$$

On peut conjecturer que:

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\log\log Q_l(X)}{\log\log X} = 1 - \frac{\log 30}{2\log 16} = 0.387.$$

La démonstration de ce théorème repose sur les propriétés des nombres hautement composés supérieurs que nous rappelons au §1, sur un théorème de Selberg (concernant les nombres premiers dans l'intervalle $x, x+x^{\tau}$) que nous redémontrons au §2. La minoration de $Q_l(X)$ fait l'objet du §3. La majoration de $Q_l(X)$, donnée au §4, utilise les méthodes de la majoration de $Q_h(X)$ dans [6].

1. Nombres hautement composés supérieurs. On dit que N est hautement composé supérieur, s'il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout entier M on ait:

$$\frac{d(M)}{M^{\varepsilon}} \leqslant \frac{d(N)}{N^{\varepsilon}}.$$

Un tel nombre est hautement composé:

$$M<N \Rightarrow d(M) \leqslant \left(\frac{M}{N}\right)^{\varepsilon} d(N) < d(N).$$

Propriétés (cf. [8], §32–34, [5], [6]). Etant donné ε, $0<\varepsilon<1$, il existe un nombre hautement composé supérieur associé à ε dont la décomposition en facteurs premiers $N_{\varepsilon}=\prod_{\lambda} \lambda^{a_\lambda}$ est donnée par:

$$a_\lambda = \left[\frac{1}{\lambda^{\varepsilon}-1}\right] = \text{partie entière de } \frac{1}{\lambda^{\varepsilon}-1}. \tag{1}$$

(En effet, pour maximiser le produit $\prod_{\lambda}\left(\frac{a_\lambda+1}{\lambda^{\varepsilon a_\lambda}}\right)$, on maximise chacun des facteurs.)

On attache à N les nombres:

$$x = 2^{1/\varepsilon} \quad \text{et} \quad x_k = x^{\log(1+1/k)/\log 2} = (1+1/k)^{1/\varepsilon}. \tag{2}$$

On a alors:

$$(x_{k+1}<\lambda<x_k) \Rightarrow (a_\lambda = k) \Rightarrow (x_{k+1}\leqslant \lambda \leqslant x_k), \tag{3}$$

$$\log N \sim x. \tag{4}$$

Soit p_1 le plus grand nombre premier divisant N, et P_1 le nombre premier suivant p_1. On a: $p_1\leqslant x\leqslant P_1$ et le nombre hautement composé supérieur suivant N est inférieur ou égal à NP_1.

On a également:

$$\lambda \leqslant x_k \Leftrightarrow \varepsilon \leqslant \frac{\log(1+1/k)}{\log \lambda}.$$

Il est commode de poser, pour $k\geqslant 1$:

$$F_k = \left\{\frac{\log(1+1/k)}{\log\lambda},\ \lambda \text{ premier}\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{F}_k = \bigcup_{j\geqslant k} F_j.$$

On définit:

$$\varepsilon_k^{+} = \inf_{\substack{\alpha\geqslant\varepsilon\\ \alpha\in\mathscr{F}_k}} \alpha \quad \text{et} \quad \varepsilon_k^{-} = \sup_{\substack{\alpha\leqslant\varepsilon\\ \alpha\in\mathscr{F}_k}} \alpha. \tag{5}$$

Soit $\varepsilon>0$ fixé et N_{ε} un nombre maximisant $d(N)/N^{\varepsilon}$. On définit pour M entier le *bénéfice* de M (bén M) par rapport à N et ε par:

$$\text{bén } M = \log\frac{d(N)}{N^{\varepsilon}} - \log\frac{d(M)}{M^{\varepsilon}} = \log\frac{d(N)}{d(M)} - \varepsilon\log\frac{N}{M}. \tag{6}$$

D'après la définition des nombres hautement composés supérieurs, on a toujours: bén $M\geqslant 0$ et si $M=\prod_{\lambda}\lambda^{b_\lambda}$, on a:

$$\text{bén } M = \sum_{\lambda \text{ premier}} \text{bén}_\lambda M \tag{7}$$

avec

$$\text{bén}_\lambda M = \log\frac{a_\lambda+1}{b_\lambda+1} - \varepsilon(a_\lambda-b_\lambda)\log\lambda.$$

On a, pour tout λ premier, $\text{bén}_\lambda M\geqslant 0$, d'après (1).

Compte tenu de ce que, pour $b_\lambda\geqslant a_\lambda$,

$$\frac{b_\lambda+1}{a_\lambda+1} \leqslant \left(\frac{a_\lambda+2}{a_\lambda+1}\right)^{b_\lambda-a_\lambda},$$

on a pour $b_\lambda\geqslant a_\lambda$:

$$\begin{aligned} \text{bén}_\lambda M &\geqslant (b_\lambda-a_\lambda)\left(\varepsilon\log\lambda - \log\left(1+\frac{1}{a_\lambda+1}\right)\right) \\ &\geqslant (b_\lambda-a_\lambda)\log\lambda(\varepsilon-\varepsilon_{a_\lambda+1}^{-}). \end{aligned} \tag{8}$$

On a de même pour $b_\lambda\leqslant a_\lambda$:

$$\text{bén}_\lambda M \geqslant (a_\lambda-b_\lambda)\log\lambda(\varepsilon_{a_\lambda}^{+}-\varepsilon). \tag{9}$$

Lemme 1. *Soit $\eta>0$ fixé. Pour tout $x\in[\xi, 2\xi]$ excepté pour un ensemble de mesure $O(\xi^{1-\eta})$, le nombre hautement composé supérieur N associé par (1) à $\varepsilon = \frac{\log 2}{\log x}$ vérifie la relation, où n' désigne le nombre hautement composé suivant N:*

$$\frac{n'}{N} \geqslant 1+\frac{1}{(\log N)^{\theta+2\eta}} \quad \textit{avec} \quad \theta = \frac{\log 3/2}{\log 2} = 0.585. \tag{10}$$

Démonstration. Ce lemme généralise le théorème 8, p. 174 de [5]. Pour $\xi\leqslant x\leqslant 2\xi$, on a:

$$\frac{\log 2}{\log\xi} \geqslant \varepsilon \geqslant \frac{\log 2}{\log 2\xi}.$$

Considérons les éléments $a \in F_k$, $a \geqslant \dfrac{\log 2}{\log 2\xi}$. On a:

$$a = \frac{\log(1+1/k)}{\log \lambda} \geqslant \frac{\log 2}{\log 2\xi} \Leftrightarrow \lambda \leqslant (2\xi)^{\log(1+1/k)/\log 2}.$$

Il y en a au plus $(2\xi)^{\log(1+1/k)/\log 2}$, et, pour $k \geqslant (\log 2\xi)/(\log 2)^2$, il n'y en a pas. Posons:

$$A_\xi = \left\{a \in \mathscr{F}_2;\ \frac{\log 2}{\log \xi} \geqslant a \geqslant \frac{\log 2}{\log 2\xi}\right\}.$$

On a:

$$\operatorname{Card} A_\xi \leqslant \sum_{k=2}^{[(\log 2\xi)/(\log 2)^2]} (2\xi)^{\log(1+1/k)/\log 2} = O(\xi^\theta).$$

Autour de chacun de ces $a \in A_\xi$, on met une zone interdite $[a-l, a+l]$, avec $l = \xi^{-\theta-2\eta}$. La mesure de la réunion

$$Z_{\xi,l} = \bigcup_{a \in A_\xi} [a-l, a+l]$$

est donc $O(\xi^{-2\eta})$.

L'image de $Z_{\xi,l}$ dans l'intervalle $[\xi, 2\xi]$ par l'application $a \mapsto 2^{1/a}$ aura une mesure $O(\xi^{1-2\eta}\log^2\xi) = O(\xi^{1-\eta})$. Choisissons x en dehors de cette image. On aura alors $\varepsilon = \dfrac{\log 2}{\log x} \notin Z_{\xi,l}$ ce qui implique, d'après (5):

$$\varepsilon_2^+ - \varepsilon \geqslant l \quad \text{et} \quad \varepsilon - \varepsilon_2^- \geqslant l.$$

Posons maintenant $n' = \dfrac{r}{s} N$ avec $(r, s) = 1$, et considérons le bénéfice de n' par rapport à N et ε. On a l'une des trois éventualités:

(i) r a un diviseur premier λ vérifiant $a_\lambda \geqslant 1$; on aura d'après (8)

$$\text{bén}\, n' \geqslant (\log \lambda)(\varepsilon - \varepsilon_2^-) \geqslant l \log 2,$$

(ii) s a un diviseur premier μ vérifiant $a_\mu \geqslant 2$; on aura d'après (9)

$$\text{bén}\, n' \geqslant (\log \mu)(\varepsilon_2^+ - \varepsilon) \geqslant l \log 2,$$

(iii) n' s'écrit:

$$n' = \frac{P_1 P_2 \ldots P_k}{p_1 p_2 \ldots p_j} N$$

où $P_1, P_2, \ldots, P_k$ ne divisent pas N et $p_1, p_2, \ldots, p_j$ divisent N avec l'exposant 1. Cela donne:

$$\log \frac{d(n')}{d(N)} = (k-j)\log 2 \geqslant \log 2 \quad \text{puisque} \quad d(n') > d(N).$$

Dans les trois cas, on aura, par (6)

$$\varepsilon \log \frac{n'}{N} = \log \frac{d(n')}{d(N)} + \text{bén}\, n' \geqslant l \log 2.$$

C'est-à-dire:

$$\frac{n'}{N} - 1 \geqslant \log \frac{n'}{N} \geqslant l \log x = \frac{\log x}{\xi^{\theta+2\eta}} > \frac{\log x}{x^{\theta+2\eta}}.$$

Et, comme, par (4), $x \sim \log N$, cela achève la démonstration.

Remarque. En utilisant le résultat de Feldmann [3]: il existe deux constantes c et $\varkappa$ telles que l'on ait:

$$|v\theta - u| \geqslant \frac{c}{v^\varkappa} \quad \text{pour} \quad u, v \in \mathbf{Z},$$

on peut remplacer dans (10) θ par $\varkappa\theta/(\varkappa+2)$. Il suffit pour cela de remplacer dans la définition de A_ξ, $\mathscr{F}_2$ par $\mathscr{F}_3$ et dans les deux premières éventualités de considérer $a_\lambda \geqslant 2$ puis $a_\mu \geqslant 3$. M. Waldschmidt m'a communiqué pour $\varkappa$ la valeur 2^{60}.

2. Un résultat de A. Selberg

LEMME 2 (cf. [9]). *Soit* $\psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \log p$ *la fonction de Tchebychev. Lorsque* $x \to +\infty$ *et pour tout* $T \leqslant x^{5/6} e^{-(\log x)^\delta}$ *(avec* $2/3 < \delta < 1$*), on a pour* $\mu < \delta - 2/3$:

$$\frac{1}{x} \int_x^{2x} \left| \psi\left(y + \frac{y}{T}\right) - \psi(y) - \frac{y}{T} \right|^2 dy = O\left(\frac{x^2}{T^2} e^{-(\log x)^\mu}\right).$$

Démonstration. Désignons par $N(\sigma, t)$ le nombre de zéros $\varrho = \beta + i\gamma$ de la fonction ζ de Riemann, vérifiant $\sigma \leqslant \beta < 1$ et $|\gamma| < t$. La démonstration du lemme 2 repose sur les résultats suivants, où σ vérifie $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$:

(11) $$N(\sigma, t) = O(t^{\frac{12}{5}(1-\sigma)} \log^9 t) \quad \text{(cf. [4])},$$

(12) $N(\sigma, t) = 0$ pour $t \geqslant t_0$ et $\sigma \geqslant 1 - \eta(t)$ avec:

$$\eta(t) = c(\log\log|t|)^{-1/3}(\log|t|)^{-2/3} \quad \text{(cf. [1], p. 423)},$$

(13) $$N(0, t+1) - N(0, t) = O(\log t) \quad \text{(cf. [1], p. 163)},$$

(14) $$\frac{1}{2} N(0, t) = \frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} + O(\log t) \quad \text{(cf. [1], p. 166)}$$

et la formule explicite valable pour $t \leqslant x$ (cf. [7], p. 232)

(15) $$\psi(x) - x = -\sum_{|\gamma| < t} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O\left(\frac{x}{t} \log^2 x\right).$$

On a alors, pour $x \leqslant y \leqslant 2x$ et $T \geqslant 1$:

$$\psi\left(y+\frac{y}{T}\right)-\psi(y)-\frac{y}{T} = -\sum_{|\gamma|<t}\frac{e^{\delta\varrho}-1}{\varrho}y^{\varrho}+O\left(\frac{x}{t}\log^2 x\right)$$

avec $\delta = \log(1+1/T) \leqslant 1/T$. Compte tenu de ce que $|A+B|^2 \leqslant 2(|A|^2+$ $+|B|^2)$, et en évaluant $\int_x^{2x} y^{\varrho}y^{\bar{\varrho}'}dy$, il vient, en posant:

$$I = \frac{1}{x}\int_x^{2x}\left|\psi\left(y+\frac{y}{T}\right)-\psi(y)-\frac{y}{T}\right|^2 dy,$$

$$I = O\left(\sum_{|\gamma|<t}\sum_{|\gamma'|<t}\left(\frac{e^{\delta\varrho}-1}{\varrho}\right)\left(\frac{e^{\delta\bar{\varrho}'}-1}{\bar{\varrho}'}\right)\frac{2^{\varrho+\bar{\varrho}'+1}-1}{1+\varrho+\bar{\varrho}'}x^{\varrho+\bar{\varrho}'}\right)+O\left(\frac{x^2}{t^2}\log^4 x\right).$$

Comme la fonction $(e^z-1)/z$ est bornée pour $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$, on a:

$$I = O\left(\sum_{|\gamma|<t}\sum_{|\gamma'|<t}\frac{1}{T^2}\frac{x^{\beta+\beta'}}{1+|\gamma-\gamma'|}\right)+O\left(\frac{x^2}{t^2}\log^4 x\right).$$

De l'inégalité $x^{\beta+\beta'} \leqslant \frac{1}{2}(x^{2\beta}+x^{2\beta'})$, on déduit:

$$I = O\left(\frac{1}{T^2}\sum_{|\gamma|<t}x^{2\beta}\sum_{|\gamma'|<t}\frac{1}{1+|\gamma-\gamma'|}\right)+O\left(\frac{x^2}{t^2}\log^4 x\right).$$

On a ensuite, en utilisant (13):

$$\sum_{-t<\gamma'<t}\frac{1}{1+|\gamma-\gamma'|} < \sum_{n=1}^{2t}\sum_{n-1\leqslant|\gamma-\gamma'|\leqslant n}\frac{1}{n} = O\left(\sum_{n=1}^{2t}\frac{\log t}{n}\right) = O(\log^2 t).$$

Il vient alors, puisque $t \leqslant x$:

$$I = O\left(\frac{x^2\log^2 x}{T^2}\sum_{|\gamma|<t}x^{2\beta-2}\right)+O\left(\frac{x^2}{t^2}\log^4 x\right).$$

Evaluons maintenant, en intégrant par parties l'intégrale de Stieltjès:

$$S = \sum_{|\gamma|<t}x^{2\beta-2} = -\int_0^1 x^{2\sigma-2}d_{\sigma}N(\sigma, t)$$
$$= x^{-2}N(0, t)+\int_0^1 2(\log x)x^{2\sigma-2}N(\sigma, t)\,d\sigma$$

et en utilisant (14), (12) et (11), on obtient:

$$S = O\left(\frac{t\log t}{x^2}\right)+\int_0^{1-\eta(t)} 2(\log x)\log^9 t\, e^{(2\log x-\frac{12}{5}\log t)(\sigma-1)}\,d\sigma.$$

On choisit alors $t = x^{5/6}e^{-\frac{1}{2}(\log x)^{\delta}}$, cela donne:

$$S = O(1/x)+O\left((\log x)^{10-\delta}\right)\left(e^{-\eta(t)\frac{6}{5}(\log x)^{\delta}}-e^{-\frac{6}{5}(\log x)^{\delta}}\right).$$

D'après (12),

$$\eta(t) \geqslant \frac{c}{(\log x)^{2/3}(\log\log x)^{1/3}}$$

on a donc, pour $\mu < \delta-2/3$:

$$S = O(e^{-(\log x)^{\mu}}).$$

Comme $T \leqslant x^{5/6}e^{-(\log x)^{\delta}}$, cela entraîne: $T^2/t^2 \leqslant e^{-(\log x)^{\delta}}$ et l'on obtient pour tout $\mu < \delta-2/3$

$$I = O\left(\frac{x^2}{T^2}e^{-(\log x)^{\mu}}\right).$$

LEMME 3. *Posons* $\pi(x) = \sum_{p\leqslant x} 1$. *Soit* τ *vérifiant* $1/6 < \tau < 1$ *et* μ *vérifiant* $0 < \mu < 1/3$. *Pour tout* $x \in [\xi, \xi']$, *avec* $\xi' = \xi+\xi/\log\xi$, *excepté pour un ensemble de mesure* $O(\xi e^{-(\log\xi)^{\mu}})$ *on a*:

(16) $$\left|\pi(x+x^{\tau})-\pi(x)-\frac{x^{\tau}}{\log x}\right| \leqslant \frac{4x^{\tau}}{\log^2 x}$$

et

(17) $$\left|\pi(x)-\pi(x-x^{\tau})-\frac{x^{\tau}}{\log x}\right| \leqslant \frac{4x^{\tau}}{\log^2 x}.$$

Démonstration. Si x ne vérifie pas la relation (16), on en déduit que, pour x assez grand, on a:

(18) $$|\psi(x+x^{\tau})-\psi(x)-x^{\tau}| \geqslant \frac{3x^{\tau}}{\log x}.$$

D'après le lemme 2, on a, en choisissant $T = \xi^{1-\tau}$

$$\int_{\xi}^{\xi'}\left|\psi\left(y+\frac{y}{T}\right)-\psi(y)-\frac{y}{T}\right|^2 dy = O\left(\frac{\xi^3}{T^2}e^{-(\log\xi)^{\mu}}\right)$$

ce qui entraîne que la relation

$$\psi(y+\xi^{\tau-1}y)-\psi(y)-\xi^{\tau-1}y<\frac{y^{\tau}}{\log y}$$

est vérifiée pour $y\in[\xi,\xi']$ excepté sur un ensemble E de mesure $O(\xi e^{-(\log\xi)^{\mu}})$, pour tout $\mu<1/3$. Si $y\notin E$, on a, puisque ψ est une fonction croissante:

$$\psi(y+y^{\tau})-\psi(y)-y^{\tau}\leqslant\psi(y+\xi^{\tau-1}y)-\psi(y)-\xi^{\tau-1}y+(\xi^{\tau-1}y-y^{\tau})$$
$$\leqslant\frac{y^{\tau}}{\log y}+y^{\tau}\left(\frac{y}{\xi}-1\right)\leqslant\frac{y^{\tau}}{\log y}+y^{\tau}\left(\frac{\xi'}{\xi}-1\right)\leqslant\frac{3y^{\tau}}{\log y}.$$

On aura de même en choisissant $T=\xi'^{(1-\tau)}$

$$\psi(y+\xi'^{(\tau-1)}y)-\psi(y)-\xi'^{(\tau-1)}y>-\frac{y^{\tau}}{\log y}$$

excepté sur un ensemble E' de mesure $O(\xi e^{-(\log\xi)^{\mu}})$. Si $y\notin E'$, on a:

$$\psi(y+y^{\tau})-\psi(y)-y^{\tau}\geqslant\psi(y+\xi'^{(\tau-1)}y)-\psi(y)-\xi'^{(\tau-1)}y+(\xi'^{(\tau-1)}y-y^{\tau})$$
$$\geqslant-\frac{y^{\tau}}{\log y}+y^{\tau}\left(\frac{y}{\xi'}-1\right)\geqslant-\frac{3y^{\tau}}{\log y}.$$

Ce qui montre que la relation (18) ne peut être vérifiée que sur l'ensemble $E\cup E'$ de mesure $m_1=O(\xi e^{-(\log\xi)^{\mu}})$.

Pour la relation (17), on démontre de même qu'elle est vérifiée excepté sur un ensemble de mesure $m_2=O(\xi e^{-(\log\xi)^{\mu}})$ en majorant comme dans le lemme 2 l'intégrale:

$$\frac{1}{x}\int_{x}^{2x}\left|\psi(y)-\psi\left(y-\frac{y}{T}\right)-\frac{y}{T}\right|^2dy.$$

Les relations (16) et (17) sont donc simultanément vérifiées sauf sur un ensemble de mesure au plus m_1+m_2.

3. Minoration de $Q_l(X)$. Soit τ vérifiant $1/6<\tau<1$ et $\eta>0$. Entre $\frac{1}{2}\log X$ et $\frac{3}{4}\log X$, choisissons un x vérifiant (16), (17) et (10). Appelons p_k et P_k les nombres premiers entourant x:

$$\ldots p_k<\ldots<p_2<p_1\leqslant x<P_1<P_2<\ldots<P_k<\ldots$$

Choisissons $K=[x^{\tau}/2\log x]$, de telle sorte que $P_K\leqslant x+x^{\tau}$ et $p_k\geqslant x-x^{\tau}$. Soit maintenant $m\leqslant K$ et

$$1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_m\leqslant K.$$

On considère:

$$n_{(i)}=N\frac{P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_m}}{p_1p_2\ldots p_m}$$

où N est le nombre hautement composé supérieur associé à $\varepsilon=\dfrac{\log 2}{\log x}$. D'après (2) et (3), $p_1,p_2,\ldots,p_m$ divisent N avec l'exposant 1 et $P_1,P_2,\ldots,P_K$ ne divisent pas N. On a donc: $d(n_{(i)})=d(N)$ et:

$$(19)\qquad \log n_{(i)}-\log N\leqslant m\log(x+x^{\tau})-m\log(x-x^{\tau})\leqslant\frac{3K}{x^{1-\tau}}\leqslant 3x^{2\tau-1}$$

pour x assez grand. Comme $\log N\sim x$, on aura $n_{(i)}<n'$, si l'on a, d'après (10)

$$(20)\qquad 3x^{2\tau-1}\leqslant\tfrac{1}{2}x^{-\theta-2\eta}$$

et ces nombres $n_{(i)}$ seront largement composés. Il y en a 2^K-1. En choisissant $\tau=(1-\theta-3\eta)/2$, on obtient:

$$Q_l(X)\geqslant 2^K-1=2^{[x^{\tau}/2\log x]}-1\geqslant e^{(\log X)^a}$$

pour X assez grand et pour tout $a<(1-\theta)/2=0.20752$.

4. Majoration de $Q_l(X)$

LEMME 4. *Soit N et N' deux nombres hautement composés supérieurs consécutifs. Si ε est associé à N, on pose $x=2^{1/\varepsilon}$. Il existe $\gamma>0$ tel que, pour tout nombre largement composé n compris entre N et N' on ait: $\text{bén}\, n\leqslant x^{-\gamma}$. D'autre part, pour tout λ premier, les valuations λ-adiques de n et N vérifient: $|v_\lambda(n)-v_\lambda(N)|\leqslant 1$.*

La démonstration est la même que celle du théorème 1 (p. 120) et de la proposition 3 (p. 123) de [6], la distinction entre „largement” et „hautement” n'intervenant pas ici.

Soit maintenant, avec les notations du §1, λ un nombre premier; on a d'après (7) et (2):

$$\text{bén}\,\lambda N=\log\frac{a_\lambda+1}{a_\lambda+2}+\varepsilon\log\lambda=\varepsilon\log\frac{\lambda}{x_{a_\lambda+1}}$$

et si $a_\mu\geqslant 1$,

$$\text{bén}\,\frac{N}{\mu}=\log\frac{a_\mu+1}{a_\mu}-\varepsilon\log\mu=\varepsilon\log\frac{x_{a_\mu}}{\mu}.$$

Si λ divise N avec l'exposant $a_\lambda=k-1$ et n avec l'exposant k, on a:

$$\text{bén}\,n\geqslant\varepsilon\log\frac{\lambda}{x_k}$$

et d'après le lemme 4, si n est largement composé, on doit avoir:

$$\varepsilon\log\frac{\lambda}{x_k}\leqslant x^{-\gamma}$$

soit:

$$\lambda - x_k \leqslant c_1 (\log x) x_k x^{-\gamma}. \tag{21}$$

Si maintenant les nombres premiers $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_h$ divisent N avec l'exposant $k-1$ et n avec l'exposant k, on a:

$$\text{bén}\, n \geqslant \sum_{i=1}^{h} \varepsilon \log \frac{\lambda_i}{x_k} \geqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{h} \frac{\lambda_i - x_k}{\lambda_i} \geqslant \frac{\varepsilon}{\lambda_h} \sum_{i=1}^{h} 2(i-1) = \frac{\varepsilon}{\lambda_h}(h^2 - h).$$

Si n est largement composé, on a d'après (3) et (21) $\lambda_h \sim x_k$ et bén $n \leqslant x^{-\gamma}$ ce qui donne:

$$h \leqslant c_2 \sqrt{(\log x) x_k x^{-\gamma}}.$$

Le nombre de choix possibles pour un tel système de nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ est donc au plus:

$$\left(c_1 (\log x) x_k x^{-\gamma}\right)^{c_2 \sqrt{(\log x) x_k x^{-\gamma}}} = \exp\left(c_3 x^{\frac{1}{2}\left(\frac{\log(1+1/k)}{\log 2} - \gamma + \eta\right)}\right)$$

pour tout $\eta > 0$. On obtient la même majoration pour le nombre de choix possibles pour un système de nombres premiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_h$ divisant N avec l'exposant k et n avec l'exposant $k-1$. On définit ensuite K par:

$$\frac{\log\left(1+1/(K+1)\right)}{\log 2} \leqslant \frac{1-\gamma}{2} < \frac{\log(1+1/K)}{\log 2}.$$

Le nombre de façon de choisir n' largement composé entre N et N' sera d'après le lemme 4 majoré par:

$$3^{\pi(x_K+1)} \prod_{k=1}^{K} \exp\left(2 c_3 x^{\frac{1}{2}\left(\frac{\log(1+1/k)}{\log 2} - \gamma + \eta\right)}\right) \leqslant e^{(\log N)^{(1-\gamma)/2 + 2\eta}}$$

pour tout $\eta > 0$ et N assez grand, en utilisant (4).

Comme, d'après Ramanujan, il y a $O\left(\frac{\log X}{\log\log x}\right)$ nombres hautement composés supérieurs $N \leqslant X$, il existe donc $b < 1/2$ tel qu'il y ait au plus $e^{(\log X)^b}$ nombres largement composés $\leqslant X$, pour X assez grand.

5. Conjecture. Sous les deux hypothèses très fortes formulées à la fin de [6] la conjecture de Cramer sur le $n^{\text{ième}}$ nombre premier p_n:

$$p_{n+1} - p_n = O(\log^2 p_n)$$

et l'inégalité vérifiée pour tout $\eta > 0$:

$$|u \log 3/2 + v \log 5/4 + w \log 2| > \frac{1}{K(\eta)|uv|^{1+\eta}} \quad \forall u, v, w \in \mathbf{Z},$$

on peut choisir dans les lemme 4, pour tout $\eta > 0$:

$$\gamma = \frac{1}{4}\left(\frac{\log 3/2 + \log 5/4}{\log 2}\right) - \eta = \frac{\log 15/8}{\log 16} - \eta$$

et dans le lemme 1, on peut dans (10) remplacer θ par $\log 15/8/\log 16 + \eta$. A partir de ces valeurs les mêmes calculs donnent la conjecture citée dans le théorème.

6. Un problème de P. Erdös. La méthode de minoration de $Q_l(X)$ permet de répondre à une question de P. Erdös: „*Soit $h(n)$ le plus petit entier tel que $d(n+h(n)) > d(n)$. Montrer que la quantité $\frac{1}{X}\sum_{n \leqslant X} h(n)$ n'est bas bornée*".

Dans la construction du §3, on a, par (10), (19) et (20):

$$h(n_{(i)}) = n' - n_{(i)} \geqslant \frac{N}{4x^{\theta+2\eta}}$$

en choisissant toujours $\tau = (1-\theta-3\eta)/2$. Il vient ensuite:

$$\frac{1}{n'} \sum_{n \leqslant n'} h(n) \geqslant \frac{N}{4n' x^{\theta+2\eta}} 2^{[x^\tau/2\log x]}$$

qui n'est pas borné.

Enfin, on peut se demander si, entre deux nombres hautement composés consécutifs assez grands il existe toujours un nombre largement composé.

Références

[1] W. J. Ellison et M. Mendès France, *Les nombres premiers*, Actualités scientifiques et industrielles n° 1366, Hermann, Paris 1975.

[2] P. Erdös, *On highly composite numbers*, J. London Math. Soc. 19 (1944), p. 130–133.

[3] N. Feldmann, *Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers* (en russe), Math. Sb. 77 (119) (1968), p. 423–436; Math. URSS-Sb. 6 (1968), p. 393–406, (traduction de l'Amer. Math. Soc.).

[4] M. N. Huxley, *The distribution of prime numbers. Large sieves and zero density theorems*, Oxford at the Clarendon Press, 1972 (Oxford Mathematical Monographs). *On the difference between consecutive primes*, Inventiones Math. 15 (1972), p. 164–170.

[5] J.-L. Nicolas, *Ordre maximal d'un élément du groupe des permutations et highly composite numbers*, Bull. Soc. Math. France 97 (1969), p. 129–191.

[6] — *Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan*, Canad. J. Math. 23 (1) (1971), p. 116–130.

[7] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band XCI, Springer Verlag, Berlin 1957.

[8] S. Ramanujan, *Highly composite numbers*, Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 14 (1915), p. 347–409; Collected papers, p. 78–128.
[9] A. Selberg, *On the normal density of primes in small intervals and the difference between consecutive primes*, Arch. math. Naturvid. 47 (6) (1943), p. 87–105.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
U.E.R. DES SCIENCES
123, rue Albert Thomas
87060 Limoges Cedex, France

Reçu le 27. 1. 1978
et dans la forme modifiée le 4. 6. 1978 (1037)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1979)

On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial

by

E. Dobrowolski (Wrocław)

1. In 1933 D. H. Lehmer [5] posed the following question:

Let α be a non-zero algebraic integer of degree n, $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ its conjugates over the rationals and let

$$M(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \max\{1, |\alpha_i|\}.$$

Is it true that for every positive ε there exists an algebraic integer α such that $1 < M(\alpha) < 1+\varepsilon$?

Clearly, $M(\alpha) \geqslant 1$ and Kronecker's theorem [3] asserts that $M(\alpha) = 1$ implies that α is a root of unity.

In the case where α is not reciprocal (i.e. when α and $1/\alpha$ are not conjugate) Lehmer's question was answered in the negative in 1971 by C. J. Smyth [8]. He showed that if β_0 denotes the real root of the equation $x^3 - x - 1 = 0$ and α is not reciprocal, then either $M(\alpha) \geqslant \beta_0$ or α is a root of unity. This implies the well-known Siegel's result that β_0 is the smallest PV-number.

In the same year, P. E. Blanksby and H. L. Montgomery [2] showed in the general case that if α is not a root of unity, then

$$M(\alpha) \geqslant 1 + \frac{1}{52 n \log 6n}.$$

An estimation on $M(\alpha)$ of the same order was recently obtained by C. L. Stewart [9] who used a different argument. Stewart's proof is based on a construction of an auxiliary polynomial with small coefficients.

In this paper we modify the method of Stewart and prove

Theorem 1. *Let α be non-zero algebraic integer of degree n. If ε is an arbitrary positive constant and $n > n_0(\varepsilon)$, and*

$$M(\alpha) \leqslant 1 + (1-\varepsilon)\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)^3,$$

then α is a root of unity.