Maintenant une question très importante se pose: quelle est la condition necessaire et suffisante pour la convergence des polynomes de M. S. Bernstein dans un point de discontinuité de deuxième espèce? On peut affirmer qu'une telle condition, si elle existe, ne dépend que de la structure arithmétique des valeurs de la fonction $f(x)$ aux points rationnels, et elle est indépendante des qualités métriques et descriptives de l'ensemble des discontinuités. En effet, il à été démontré (au paragraphe 6°) qu'il est possible de construire deux fonctions discontinues en chaque point et telles que pour l'une d'elles la suite des polynomes de M. S. Bernstein *converge partout* et pour l'autre cette suite est *partout divergente.*

Zur allgemeinen Theorie des Masses.

Von

J. v. Neumann (Berlin).

Einleitung.

1. Das allgemeine Problem des linearen Maßes kann (in Anschluss an eine etwas allgemeinere Fragestellung von Lebesgue[1])), folgendermassen formuliert werden:

Jeder beschränkten linearen Menge (d. h. Menge reeller Zahlen) $\mathfrak{M}$ werde eine nicht negative Zahl $\mu(\mathfrak{M})$ zugeordnet, derart, dass

α. Wenn $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots,$ paarweise elementfremdre Menge (mit beschränkter Vereinigungsmenge) sind,

$$\mu(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots) = \mu(\mathfrak{M}_1) + \mu(\mathfrak{M}_2) + \cdots$$

gilt (die Folge $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ ist endlich oder abzählbar!).

β. Wenn die Menge $\mathfrak{N}$ aus der Menge $\mathfrak{M}$ durch eine gewöhnliche Translation entsteht[2]) (beide beschränkt!), so ist

$$\mu(\mathfrak{M}) = \mu(\mathfrak{N})$$

[1]) *Leçons sur l'intégration*, Paris 1905. Lebesgue sucht nach einem allgemeinen Integral, das für alle beschränkten Funktionen $f(x)$ und jedes endliche Intervall a, b definiert ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Diese Fragestellung ist aber nur scheinbar allgemeiner als die des Maßes: mit der üblichen Methode der Zurückführung des Lebesgueschen Integrals aufs lineare Lebesguesche Maß (vgl. Anm. [37]) ist ihre Gleichwertigkeit leicht einzusehen.

[2]) Wenn wir die „Koordinate" x einführen, so ist das die Abbildung

$$x' = x + a$$

(a konstant).

Hausdorff zeigte [3]), dass die Bedingungen $\alpha.$, $\beta.$ unverträglich sind (wenn man von der trivialen Lösung $\mu(\mathfrak{M}) \equiv 0$ absieht), in der Tat ist z. B. das ihnen genügende Lebesguesche Maß nur für die sog. messbaren Mengen definiert, und nicht alle Mengen sind meßbar.

Angesichts dieses Tatbestandes lag es nahe, mit den Ansprüchen herunterzugehen, und $\alpha.$ dahin abzuschwächen, dass es nur für endliche Folgen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_m$ elementfremder Mengen zu gelten hat (man kann dann offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m=2$ setzen). Die so modificierte Bedingung $\alpha.$ wollen wir $\alpha^*.$ nennen.

Ob die Bedingungen $\alpha^*.$, $\beta.$ gleichzeitig befriedigt werden können, konnte, lange Zeit nicht entschieden werden, erst die, w. u. zu besprechenden, Untersuchungen von Banach brachten die Entscheidung; eine plausible Verallgemeinerung von $\alpha^*.$, $\beta.$ ereilte aber alsbald ihr Schicksal.

Man kann nämlich an Stelle linearer Punktmengen ebene, räumliche, oder solche im n-dimensionalen euklidischen Raume untersuchen, und für diese das allgemeine Maßproblem formulieren. An eine Generalisation von $\alpha.$, $\beta.$ ist, mit Rücksicht auf das Fiasko im eindimensionalen Falle, natürlich nicht zu denken, aber für $\alpha^*.$, $\beta.$ kann man es versuchen.

2. Die n-dimensionale Formulierung lautet so:

Jeder beschränkten Menge $\mathfrak{M}$ des n-dimensionalen euklidischen Raumes R_n werde eine nichtnegative Zahl $\mu(\mathfrak{M})$ zugeordnet, derart dass

$\alpha_n^*.$ Wenn $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ zwei [4]) elementfremde Mengen (beschränkt) sind,

$$\mu(\mathfrak{M}+\mathfrak{N}) = \mu(\mathfrak{M}) + \mu(\mathfrak{N})$$

gilt.

$\beta_n.$ Wenn die Menge $\mathfrak{N}$ aus der Menge $\mathfrak{M}$ durch eine längentreue Abbildung von R_n auf sich selbst entsteht [5]) beide (beschränkt!) so ist

$$\mu(\mathfrak{M}) = \mu(\mathfrak{N}).$$

[3]) *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, S. 401.

[4]) Die Beschränkung der Summandenzahl auf 2 (statt eines beliebigen endlichen m) ist, wie erwähnt, unerheblich.

[5]) Wenn wir Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ einführen, so ist das eine Abbildung

Es ist übrigens ohne weiteres möglich hier R_n durch die Oberfläche der Einheitskugel in R_n [6]), K_n, zu ersetzen: $\mu(\mathfrak{M})$ ist dann für alle Teilmengen von K_n zu definieren, und in $\beta_n.$ sind K_n in sich selbst überführenden längentreuen Abbildungen in Betracht zu ziehen. Die triviale Lösung $\mu(\mathfrak{M}) \equiv 0$ ist natürlich wieder auszuschliessen, dann ist aber, wie man leicht zeigt, $\mu(\overline{\mathfrak{M}}) > 0$, wenn $\overline{\mathfrak{M}}$ das Innere des Einheitswürfels in R_n [7]) bezw. ganz K_n ist. Durch Multiplikation aller $\mu(\mathfrak{M})$ mit einer positiven Konstanten können wir also die Normierung

$\gamma_n.$
$$\mu(\overline{\mathfrak{M}}) = 1$$

erzwingen.

Es ist klar: wenn es nichttriviale Lösungen von $\alpha_n^*.$, $\beta_n.$ für ein R_n, $n \geqq 3$, gibt, so muss es auch solche für K_3 d. h. die Oberfläche der gewöhnlichen, räumlichen Einheitskugel geben [8]). Hausdorff

$$\begin{array}{l} x_1' = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n + a_1 \\ x_2' = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2n} x_n + a_2 \\ \vdots \\ x_n' = \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{nn} x_n + a_n \end{array}$$

($\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{nn}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Konstante), wobei die Matrix $\{\alpha_{pq}\}$ $(p, q = 1, 2, \ldots, n)$ orthogonal ist.

[6]) D. h. die $n-1$-dimensionale Menge aller Punkte mit

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

[7]) D. h. die Menge aller Punkte mit

$$0 \leqq x_1 < 1, \quad 0 \leqq x_2 < 1, \ldots, \quad 0 \leqq x_n < 1.$$

[8]) Erstens folgt aus der Erfüllbarkeit von $\alpha_n^*.$, $\beta_n.$ für R_n bei einem $n > 3$ auch die bei $n=3$: denn wenn $\mu(\mathfrak{M})$ das Maß einer Teilmenge $\mathfrak{M}$ von R_n ist, dann definieren wir $\mu'(\mathfrak{M})$ für Teilmengen $\mathfrak{M}'$ von R_3 so: sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Punkte, für die x_1, x_2, x_3 zu $\mathfrak{M}'$ gehört, und

$$0 \leqq x_4 < 1, \ldots, 0 \leqq x_n < 1$$

ist, dann sei

$$\mu'(\mathfrak{M}') = \mu(\mathfrak{M}).$$

μ' erfüllt offenbar $\alpha_n^*.$, $\beta.$

Weiter folgt aus der Erfüllbarkeit für R_3, die für K_3, denn aus dem $\mu(\mathfrak{M})$ von R_3 gewinnen wir das $\mu'(\mathfrak{M}')$ von K_3 so: sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller x_1, x_2, x_3-

zeigte aber, dass $\alpha_{n}^{*}\cdot$, $\beta_{n}\cdot$ bereits für K_3 unverträglich sind [9]), mit einer Methode, die uns noch w. u. eingehend beschäftigen soll. Somit sind sie für R_n im besten Falle bei $n = 1, 2$ erfüllbar.

Für diese R_n zeigte nun Banach, dass $\alpha_{n}^{*}\cdot$, $\beta_{n}\cdot$ verträglich sind, d. h. er gab ein allgemeines, nichtnegatives, additives und orthogonal-invariantes Maß sowohl für die Gerade, als auch für die Ebene an [10])! Der euklidische Raum scheint danach beim Erreichen der Dimensionzahl 3 jäh seinen Charakter zu ändern: für $n < 3$ lässt er einen allgemeinen Maßbegriff noch zu, für $n \geqq 3$ nicht mehr!

Dass dem nicht so ist, dass vielmehr der innere Grund dieses sonderbaren Phänomens eine gewisse gruppentheoretische Eigenheit der n-dimensionalen Drehgruppe ist, dies zu zeigen, ist des Hauptzweck der vorliegenden Arbeit. Zunächst müssen wir aber noch die „Hausdorffsche Paradoxie“ (das Fehlen deß allgemeinen Maßes auf K_3 und den R_n, $n \geqq 3$) und gewisse, daran anschliessende Resultate von Banach und Tarski näher ins Auge fassen.

3. Hausdorff hatte (vgl. [9])) genauer das folgende gezeigt: man kann die Oberfläche der Einheitskugel, K_3, in drei Teile $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zerlegen, deren jede durch eine 120°-Drehung (um eine geeignete Achse) mit jedem anderen zur Deckung gebracht werden kann, aber auch durch eine 180°-Drehung (um eine geeignete Achse) mit der Vereinigungsmenge der beiden anderen. D. h.: jede dieser Mengen ist sowohl Hälfte als auch Drittel der Kugeloberfläche müsste sowohl $\frac{1}{2}$ als auch $\frac{1}{3}$ als Maß haben, was unmöglich ist. (Eigentlich machen die, paarweise elementfremden, Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zusammen nicht das volle K_3 aus, sondern es fehlen noch dazu abzählbar viele Punkte. Aber man zeigt leicht, dass jede abzählbare Menge das Maß 0 haben muss, sodass dies irrelevant ist).

Banach und Tarski konnten, unter Benutzung des Hausdorffschen Resultates und einer höchst geistvollen Heranziehung der

---

Punkte, für die $\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{r}$ $(r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$ zu $\mathfrak{M}'$ (auf K_3) gehört und

$$0 < r < 1$$

ist. Dann sei

$$\mu'(\mathfrak{M}') = \mu(\mathfrak{M})$$

μ' erfüllt dann alles für K_3.

[9]) *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig 1914, S. 469.

[10]) Fund. Math. IV, S. 30–31.

Beweismethode des Bernstein-Cantorschen Aequivalenzsatzes, dieses „Paradoxon“ weitgehend vertiefen und verallgemeinern [11]).

Sie stellten nämlich den Begriff der „endlichen Zerlegungsgleichheit“ auf:

Zwei Mengen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ heissen endlich zerlegungsgleich, wenn es zwei Zerlegungen derselben in gleichviel (u. zw. endlich viel) paarweise elementfremde Summanden gibt:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_k, \quad \mathfrak{M}_u \times \mathfrak{M}_v = 0 \quad (u \neq v),$$
$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \ldots + \mathfrak{N}_k, \quad \mathfrak{N}_u \times \mathfrak{N}_v = 0 \quad (u \neq v).$$

derart, dass $\mathfrak{M}_1$ mit $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{M}_2$ mit $\mathfrak{N}_2, \ldots,$ $\mathfrak{M}_k$ mit $\mathfrak{N}_k$ kongruent (d. h. durch eine längentreue Abbildung mit ihm zur Deckung zu bringen) ist.

und bewiesen:

Sowohl in K_3. als auch in jedem R_n, $n \geqq 3$, sind zwei ganz beliebige Mengen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bestimmt endlich zerlegungsgleich, falls beide innere Punkte besitzen und beschränkt sind.

(Für R_1, R_2 gilt das bestimmt nicht. da es nach Banach dort allgemeine Maße gibt, und endlich zerlegungsgleiche Mengen dasselbe Maß haben müssen). Die Unmöglichkeit des allgemeinen Maßes in K_3, sowie R_n, $n \geqq 3$, war damit nochmals dargetan, und ein kleiner Schönheitsfehler des Hausdorffschen Beispiels (die abzählbar vielen Ausnahmepunkte) behoben. Die Banach-Tarskischen Resultate veranlassen das Entstehen ganz sonderbar handgreiflicher neur Paradoxien: so kann z. B. die Vollkugel vom Radius 1 derart in 9 Teile zerlegt werden, dass nach Ausführüng gewisser geeigneter Drehungen sowohl die 5 ersten als auch die 4 letzten je eine Vollkugel vom Radius 1 ausmachen!

Übrigens zeigt dieser Satz auch, das es in K_3 (oder R_n, $n \geqq 3$) auch dann kein allgemeines Maß geben kann, wenn man auf seine Nichtnegativität verzichtet: denn da alle beschränkten Mengen mit inneren Punkten dasselbe Maß haben müssen (weil sie endl. zlggl. sind, $\alpha_{n}^{*}\cdot$, $\beta_{n}\cdot$), haben sie das Mass 0 [12]) und daher auch ihre Differenzen, d. s. alle beschränkten Mengen überhaupt [13]).

[11]) Fund. Math. IV, S. 224 Vgl. die §§ 5, 6 der Einleitung der vorliegenden Arbeit.

[12]) Da z. B. die Vereinigungsmenge zweier solcher (elementfremder) Mengen eine ebensolche ist.

[13]) Bei Zugrundelegung des „Hausdorffschen Paradoxons“ muss, wegen der abzählbar vielen Ausnahmepunkte, die Nichtnegativität des Maßes benutzt werden.

4. Wir haben in den §§ 1.—3. den Stand der allgemeinen Theorie des Maßes auf Grund der Arbeiten von Hausdorff, Banach und Tarski skizziert, und am Schlusse des § 2. hervorgehoben, wie nahe die Interpretation liegt, dass sich beim Übergange von $n=1,2$ zu $n=3,4,\ldots$ der Charakter des R_n jäh ändert. Es wurde auch gesagt, dass wir in den vorliegenden Zeilen versuchen wollen, das Gegenteil zu zeigen oder genauer: dass wir diejenige spezielle gruppentheoretische Eigenschaft von R_n aufweisen werden, die dieses sonderbare Phänomen verursacht.

Um klar zu sehen, müssen wir aber die Fragestellung etwas verallgemeinern:

Sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige Menge[14]), $\mathfrak{W}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{G}$ eine Gruppe eineindeutiger Abbildungen von $\mathfrak{M}$ auf sich selbst[15]). Von einem allgemeinen nichtnegativen additiven und gegen alle Abbildungen aus $\mathfrak{G}$ invarianten Maß in $\mathfrak{M}$ das durch $\mathfrak{W}$ normiert ist kurz: einem $[\mathfrak{M}, \mathfrak{W}, \mathfrak{G}]$-Maß verlangen wir:

Jeder Teilmenge $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$[16]) sei eine Zahl $\mu(\mathfrak{N}) \geqq 0$ zugeordnet, derart dass

α'. Wenn $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$ elementfremd sind, so ist

$$\mu(\mathfrak{N}+\mathfrak{P}) = \mu(\mathfrak{N}) + \mu(\mathfrak{P}).$$

β'. Wenn σ zu $\mathfrak{G}$ gehört, so ist

$$\mu(\mathfrak{N}) = \mu(\sigma\mathfrak{N}).$$

γ'. Es ist

$$\mu(\mathfrak{W}) = 1\,^{17)}.$$

Die Frage ist nunmehr offenbar: wie müssen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{G}$ beschaffen sein, damit ein $[\mathfrak{M}, \mathfrak{W}, \mathfrak{G}]$-Maß existiert?

Bekanntlich kann man jedes Element σ von $\mathfrak{G}$ als eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf sich selbst auffassen: die allgemein

[14]) Mit beliebigen Elementen, d. h. eine abstrakte Menge.

[15]) Wir werden die folgenden Bezeichnungen benützen: Elemente von $\mathfrak{M}$ nennen wir $x, y, \ldots$, Teilmengen $\mathfrak{N}, \mathfrak{P}, \ldots$, ein-eindeutige Abbildungen von $\mathfrak{M}$ auf sich selbst $\sigma, \tau, \ldots$ σx ist das durch σ vermittelte Bild von x, $\sigma\mathfrak{N}$ die Bildmenge von $\mathfrak{N}$, $\sigma\tau$ die Abbildung, die entsteht, wenn zuerst τ, dann σ ausgeführt wird

[16]) Da wir keine Einengung der $\mathfrak{N}$ durch eine Bedingung, wie die Beschränktheit in R_n, vornehmen, sei nun auch ∞ als Wert für $\mu(\mathfrak{N})$ zugelassen.

[17]) Bisher war $\mathfrak{M}$ gleich R_n oder K_n, $\mathfrak{W}$ das Innere des Einheitswürfels oder ebenfalls K_n, $\mathfrak{G}$ die Gruppe der längentreuen Abbildungen.

τ in $\sigma\tau$ überführt. Es wird sich zeigen, dass wenn ein $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$-Maß existiert, eine einfache notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines $[\mathfrak{M}, \mathfrak{W}, \mathfrak{G}]$-Maßes angegeben werden kann[18]). Diese Bedingung ist übrigens für $\mathfrak{W}=\mathfrak{M}$ stets erfüllt, also im von uns betrachteten Falle $\mathfrak{M}=K_n$, $\mathfrak{W}=K_n$: und auch für $\mathfrak{M}=R_n$, $\mathfrak{W}=$ Einheitswürfelinneres, falls $\mathfrak{G}$ den Einheitswürfel auf messbare Mengen von Lebesgueschen Maße 1 abbildet[18]) (wie z. B. die Orthogonalgruppe).

Es kommt daher einzig auf die Existenz eines $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$-Maßes an[19]), und diese kann als eine Eigenschaft der abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$ angesehen werden[20]). Wenn sie vorhanden ist, so heise $\mathfrak{G}$ eine messbare Gruppe.

Wir werden nun, unter Fortführung der Banach'schen Methoden zeigen:

A. Jede Abel sche Gruppe $\mathfrak{G}$ ist messbar.

B. Wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ den Normalteiler $\mathfrak{H}$ hat, und sowohl $\mathfrak{H}$ als auch seine Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ messbar ist, so ist auch $\mathfrak{G}$ messbar[21]).

Für endliche Gruppen bestimmen **A.**, **B.** gerade die Klasse der auflösbaren Gruppen, unter Verallgemeinerung dieses Begriffes auf unendliche Gruppen können wir also sagen: Alle auflösbaren Gruppen sind messbar.

Die Banach-schen Resultate für die Gerade und die Ebene sind nun ohne weiteres klar: die Orthogonalgruppe der Geraden besteht aus den Translationen, ist also Abelsch; die der Ebene hat einen Abel-schen Normalteiler (die Translationengruppe) mit Abel-scher Faktorgruppe (deren Elemente etwa durch den Drehwinkel beschrieben sind).

Zu **A.**, **B.** werden wir noch ein drittes Erzeugungsprinzip messbarer Gruppen hinzufügen, nämlich

[18]) Vgl. die diesbezügliche Bedingung in § 5. der Einleitung.

[19]) Diese Bedingung ist zwar nur notwendig, und nicht hinreichend, aber dieser Umstand kommt tatsächlich nicht zur Geltung; sobald das $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$-Maß nicht existiert, hat, wie wir sehen werden, in unseren Beispielen $\mathfrak{G}$ solche Eigenschaften, dass auch das uns interessierende Maß nicht existiert. Vgl. die §§ 4, 5, der Einleitung.

[20]) D. h. von zwei einstufig isomorphen Gruppen $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ kommt sie keiner oder beiden zu.

[21]) Da wir es mit abstrakten Gruppen zu tun haben, können wir die Faktorgruppe ohne weiteres bilden ohne uns darum zu kümmern, ob und aus welchen Abbildungen sie besteht.

C. M sei eine Menge von Gruppen, derart dass von zwei Elementen von M bestimmt eine Untergruppe der anderen ist; dann ist die Vereinigungsmenge von M offenbar auch eine Gruppe. Wenn alle Elemente von M messbare Gruppen sind, so ist es auch die Vereinigungsmenge.

Leider gilt ausserdem noch ein viertes, dass die Analogie zu den auflösbaren Gruppen empfindlich stört, nämlich:

D. Jede endliche Gruppe ist messbar.

Dies ist trivial: wenn $\mathcal{G}'$ irgendeine Teilmenge der endlichen Gruppe $\mathcal{G}$ ist, so definieren wir $\mu(\mathcal{G}')$ als

$$\frac{\text{Anzahl der Elemente von } \mathcal{G}'}{\text{Anzahl der Elemente von } \mathcal{G}},$$

dies ist offenbar ein $[\mathcal{G}, \mathcal{G}, \mathcal{G}]$-Maß.

5. In § 4. haben wir uns mit dem Grunde der günstigen Erscheinungen (dass es in R_1, R_2 allgemeine Maße gibt) beschäftigt, es bleibt übrig, uns den ungünstigen, den Hausdorff-Banach-Tarskischen Paradoxien zuzuwenden.

Wenn man die Hausdorffsche Konstruktion der Drittel-Hälften der Kugel (vgl. Anm.[9]) näher betrachtet, so sieht man, dass ihr Ausgangspunkt der folgende Umstand ist:

Es gibt zwei längentreue Abbildungen von K_3 auf sich selbst (d. h. Drehungen um den O-Punkt), σ, τ, zwischen denen keine nicht-trivialen Gleichungen bestehen; d. h. keine Gleichungen von der Form

$$\sigma^{u_1}.\tau^{v_1}.\ldots.\sigma^{u_m}.\tau^{v_m} = 1$$

($u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m$ ganze Zahlen $\gtreqless 0$; alle $\neq 0$ ausser eventuell u_1, v_n; wenn $u_1 = v_n = 0$ ist, $m > 1$; 1 die identische Abbildung)[22]).

Da man die von zwei solchen σ, τ erzeugte Gruppe (bestehend aus allen $\sigma^{u_1}.\tau^{v_1}.\ldots.\sigma^{u_m}.\tau^{v_m}$ überhaupt) als die freie Gruppe von zwei Erzeugenden bezeichnet, können wir dies auch so formulieren:

[22]) Bei Hausdorff sind zwar die Relationen

$$\sigma^2 = 1, \quad \tau^3 = 1$$

zugelassen, doch ist dies unwesentlich. Und wenn auch für σ, τ die obigen Relationen gelten, so bestehen z. B. für

$$\sigma' = \tau.\sigma\tau\sigma\tau\sigma.\tau^2, \quad \tau' = \tau^2.\sigma\tau\sigma\tau\sigma.\tau$$

überhaupt keine Relationen.

Die Gruppe aller Drehungen um den 0-Punkt (in R_n) enthält eine freie Gruppe von zwei Erzeugenden als Untergruppe. Dass dieser Umstand der wahre Grund der erwähnten Paradoxien ist, soll nunmehr auseinandergesetzt werden.

Wir verallgemeinern den Banach-Tarskischen Begriff der endlichen Zerlegungsgleichheit folgendermassen:

Sei wieder $\mathcal{M}$ eine beliebige Menge, und $\mathcal{G}$ eine Gruppe ein-eindeutiger Abbildungen von $\mathcal{M}$ auf sich selbst. Wir nennen zwei Teilmengen $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$ von $\mathcal{M}$ in Bezug auf $\mathcal{G}$ endlich zerlegungsgleich kurz $\mathcal{G}$-zlggl. — wenn es zwei Zerlegungen derselben in gleichviel (u. zw. endlich viel) paarweise elementfremde Summanden gibt:

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 + \ldots + \mathcal{N}_k, \quad \mathcal{N}_u \times \mathcal{N}_v = 0 \quad (u \neq v),$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \ldots + \mathcal{P}_k, \quad \mathcal{P}_u \times \mathcal{P}_v = 0 \quad (u \neq v),$$

und dazu k Elemente $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ von G, so dass

$$\mathcal{P}_1 = \sigma_1 \mathcal{N}_1, \quad \mathcal{P}_1 = \sigma_2 \mathcal{N}_2, \ldots, \quad \mathcal{P}_k = \sigma_k \mathcal{N}_k$$

ist.

(Wenn O_n bezw. O'_n die Gruppe aller längentreuen Abbildungen von R_n bzw. K_n auf sich selbst ist, so hatten wir bisher im Sinne dieser Definition O_n bezw. O'_n zlggl. betrachtet).

Für die $\mathcal{G}$-zlggl. gelten, unabhängig von der besonderen Natur der Gruppe $\mathcal{G}$, die folgenden Sätze (von Banach-Tarski für $\mathcal{G} = O_n$ bezw. O'_3 ausgesprochen; wir schreiben vorübergehend $\mathcal{N} \sim \mathcal{P}$ für $\mathcal{N}$ $\mathcal{G}$-zlggl. mit $\mathcal{P}$):

A. $\sim$ hat den Charakter der Aequivalenz, d. h. es ist $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}$, aus $\mathcal{N} \sim \mathcal{P}$ folgt $\mathcal{P} \sim \mathcal{N}$, aus $\mathcal{N} \sim \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \sim \mathcal{R}$ folgt $\mathcal{N} \sim \mathcal{R}$.

B. $\sim$ ist additiv, d. h. wenn die Mengen $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots, \mathcal{N}_l$ untereinander paarweise elementfremd sind, und ebenso die Mengen $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_l$, so folgt aus $\mathcal{N}_1 \sim \mathcal{P}_1$, $\mathcal{N}_2 \sim \mathcal{P}_2, \ldots$ $\mathcal{N}_l \sim \mathcal{P}_l$ auch $\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 + \ldots + \mathcal{N}_l \sim \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \ldots + \mathcal{P}_l$.

C. Wenn $\mathcal{N} \sim \mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$[23]) und $\mathcal{P} \sim \mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$[24]) ist, so ist $\mathcal{N} \sim \mathcal{P}$.

D. Wenn $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots, \mathcal{N}_l$ untereinander paarweise elementfremde Mengen sind, und $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_l$ ebenfalls, so folgt aus

[23]) $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}$ bedeutet: $\mathcal{N}$ ist Teilmenge von $\mathcal{P}$.

[24]) Dieses Analogon des Cantor-Bernstein'schen Äquivalenzsatzes ist die wesentlichste Verfeinerung der Hausdorffschen Methode durch Banach-Tarski. Vgl. auch Banach, Fund. Math. VI, S. 236.

$$\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2 \sim \ldots \sim \mathfrak{N}_l, \quad \mathfrak{P}_1 \sim \mathfrak{P}_2 \sim \ldots \sim \mathfrak{P}_l$$

sowie $\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \ldots + \mathfrak{N}_l \sim \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_l$ auch $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{P}_1$ [25]) (D. h.: $\mathfrak{G}$-zlggl. Relationen dürfen mit l dividiert werden).

Weiter sieht man, dass für jedes $[\mathfrak{M}, \mathfrak{W}, \mathfrak{G}]$-Maß ($\mathfrak{W}$ beliebig!) $\mathfrak{G}$-zlggl. Mengen dasselbe Maß haben müssen.

Wenn nun eine Menge $\mathfrak{W}$ in zwei elementfremde Teile zerlegt werden kann, mit deren jeder sie $\mathfrak{G}$-zglgl. ist:

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{U} + \mathfrak{V}, \quad \mathfrak{U} \times \mathfrak{V} = 0,$$

$$\mathfrak{W} \sim \mathfrak{U} \sim \mathfrak{V},$$

so hat sie bestimmt das Maß 0 — es kann also kein $[\mathfrak{M}, \mathfrak{W}, \mathfrak{G}]$-Maß geben. Ein $\mathfrak{W}$ mit dieser Eigenschaft nennen wir seiner Hälfte $\mathfrak{G}$-zlggl.

Mann kann (in Anschluss an Hausdorff-Banach-Tarski) leicht einsehen: Wenn $\mathfrak{G}$ eine freie Untergruppe mit zwei Erzeugenden hat, und alle Elemente von $\mathfrak{M}$ (ausser der identischen Abbildung, der Einheit von $\mathfrak{G}$) fixpunktlos sind, so ist $\mathfrak{M}$ seiner Hälfte kongruent und ebenso jede Teilmenge $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{M}$, die durch jede Abbildung von $\mathfrak{G}$ in sich selbst übergeführt wird. Es gibt also kein $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}, \mathfrak{G}]$-Maß, und für die soeben beschriebenen $\mathfrak{W}$ keine $[\mathfrak{M}, \mathfrak{W}, \mathfrak{G}]$-Maße. Um aber den Anschluss an die Hausdorff-Banach-Tarskischen Resultate zu gewinnen, brauchen wir mehr; denn die dort betrachteten Abbildungen (Drehungen) haben Fixpunkte (die schon bei Hausdorff unbequem wurden), und im Falle $\mathfrak{M} = R_n$ ist $\mathfrak{W} =$ Einheitswürfel gegenüber den Abbildungen von O_n (den Drehungen) keineswegs invariant. Wir müssen also etwas tiefer in den Gegenstand eindringen, und werden in der Tat eine hinreichende Bedingung für $\mathfrak{W}$ angeben, die die uns interessierenden Fälle (der nicht-Existenz eines $[\mathfrak{M}, \mathfrak{W}, \mathfrak{G}]$-Maßes) alle umfasst. Sie lautet so:

Es muss eine Teilmenge $\mathfrak{W}'$ von $\mathfrak{W}$ geben, und eine endliche

[25]) Diesen Satz beweisen und benützen Banach-Tarski nur für $l = 2$ (und somit für $l = 2^s$ loc. cit. [11]), Théorème 11, Corollaire 12; auch in dieser Arbeit kommt es nur auf $l = 2^s$ an, vgl. [55])); allein ein Satz der Herren D. König und S. Valkó (Fund. Math. VIII, S. 114—134) ermöglicht einen (mit dem dortigen wörtlich übereinstimmenden) Beweis für beliebiges l. Der genannte Satz wird von ihnen bei der Behandlung von K_3 benötigt.

Zahl von Abbildungen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ aus $\mathfrak{G}$, derart dass einerseits

$$\mathfrak{W} \subset \varrho_1 \mathfrak{W}' + \varrho_2 \mathfrak{W}' + \ldots + \varrho_m \mathfrak{W}'$$

ist, und andererseits zu jedem $N = 1, 2, \ldots$ eine freie Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit zwei Erzeugenden σ, τ so gewählt werden kann, dass bei allen $u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m$ mit $|u_1| + |v_1| + \ldots + |u_m| + |v_m| \leq N$

$$\sigma^{u_1} . \tau^{v_1} . \ldots . \sigma^{u_m} . \tau^{v_m} \mathfrak{W}' \subset \mathfrak{W}$$

ist.

Wenn keine, von der identischen verschiedene Abbildung dieser Untergruppe einen Fixpunkt hat, verlangen wir nichts weiter; wenn das aber der Fall ist, so sei noch die folgende Forderung erfüllt: Es gibt ein festes (d. h. von N unabhängiges) $k = 1, 2, \ldots$, so dass zu jedem $N = 1, 2, \ldots k$ freie Untergruppen von G mit den obigen Eigenschaften existieren, und dabei kein Punkt in $\mathfrak{M}$ vorhanden ist, der für jede dieser k Untergruppen Fixpunkt einer von der identischen verschiedenen Abbildung (der betr. Untergruppe) ist.

(Diese Bedingung liesse sich noch auf verschiedene Arte variieren, aber wir haben daran kein Interesse. Andererseits mag ihr etwas komplizierter Charakter störend empfunden werden, man beachte aber, dass dieser bloß von den oben angedeuteten Nebenumständen — Nichtinvarianz von $\mathfrak{W}$ gegenüber $\mathfrak{G}$ sowie das Auftreten von Fixpunkten — herrührt. Der gruppentheoretische Kern, die Existenz einer freien Untergruppe mit zwei Erzeugenden, bleibt nach wie vor klar. In allen Spezialfällen wäre übrigens eine etwas einfachere Behandlung möglich, bloss die Allgemeinheit unserer Untersuchung bedingt die obigen, etwas umständlichen Vorsichtsmassregeln).

Es bleibt noch einiges dazu zu sagen, dass diese Bedingungen in den uns interessierenden Fällen wirklich erfüllt sind. Betrachten wir zunächst die auf $\mathfrak{W}$ bezügliche Forderung, soweit dabei von Fixpunkten keine Rede ist. Die ist erstens offenbar für $\mathfrak{W} = \mathfrak{M}$ erfüllt (wir können $m = 1$, $\varrho_1 =$ identische Abbildung, $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W} = \mathfrak{M}$ wählen), also für $\mathfrak{M} = K_n$, $\mathfrak{W} = K_n$. Bei $\mathfrak{W} \neq \mathfrak{M}$ nehmen wir an, dass $\mathfrak{M}$ ein R_n ist, und $\mathfrak{G}$ jedenfalls alle Translationen umfasst; dann ist sie bestimmt erfüllt, falls $\mathfrak{W}$ beschränkt ist und innere Punkte hat, und die freie Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit zwei Erzeugenden σ, τ so gewählt werden kann, dass σ, τ beliebig nahe bei der identischen Abbildung liegen (d. h. dass für ein gegebenes $P > 0$ und

$\varepsilon > 0$ in der ganzen Kugel mit dem Radius P um den Nullpunkt σx und τx von x um weniger als ε entfernt sind [26]). Somit kommt unsere Bedingung hier darauf hinaus, dass die freien Untergruppen von $\mathfrak{G}$, den Fixpunktbedingungen genügend, mit beliebig nahe an der identischen Abbildung gelegenen Erzeugenden gewählt werden können sollen. Dass das geht, wird in Kap. II § 1. (Satz 7). zur Sprache kommen.

6. Jetzt dürfen wir wohl sagen: es kommt nur auf die Eigenschaften der (abstrakten) Gruppe $\mathfrak{G}$ an. Denn der gewünschte allgemeine Maßbegriff ist (unter den betrachteten Verhältnissen) sicher vorhanden, wenn sie mit Hilfe der Erzeugungs-Prinzipien **A.—D.** in § 4 gewonnen werden kann, und er existiert bestimmt nicht, wenn $\mathfrak{G}$ eine freie Untergruppe mit zwei Erzeugenden σ, τ enthält (eventuell ist nach § 5. noch zu verlangen, dass σ, τ in beliebiger Nähe der identischen Abbildung, sowie gewissen Fixpunkt-Bedingungen genügend wählbar seien [27])).

Der plötzliche Charakterwechsel des euklidischen Raumes beim Erreichen und Überschreiten der Dimensionszahl 3 lieght einfach daran, dass die — bisher allein berücksichtigte — Gruppe O_n der längentreuen Abbildungen für $n = 1, 2$ „auflösbar" ist (vgl. § 4), für $n = 3, 4, \ldots$ hingegen eine freie Untergruppe mit zwei Erzeugenden σ, τ hat (schon O_3' hat eine).

Der euklidische Raum selbst aber ändert sich dabei recht wenig: es genügt eine andere Gruppe $\mathfrak{G}$ zu betrachten (an Stelle von O_n), und wir finden ganz andere Verhältnisse.

[26]) Man wähle nämlich eine in $\mathfrak{W}$ enthaltene Vollkugel $\mathcal{K}_1$ eine im Inneren dieser liegende $\mathcal{K}_0$, sowie eine $\mathfrak{W}$ enthaltende $\mathcal{K}_2$, und setze $\mathfrak{W}' = \mathcal{K}_0$. Dann wähle man die Translation $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ so, dass $\varrho_1 \mathcal{K}_0 + \varrho_2 \mathcal{K}_0 + \ldots + \varrho_m \mathcal{K}_0$ $\mathcal{K}_2$ überdeckt (was offenbar geht) d. h. $\varrho_1 \mathfrak{W}' + \varrho_2 \mathfrak{W}' + \ldots + \varrho_m \mathfrak{W}'$ das $\mathfrak{W}$. Wenn nun σ, τ genügend nahe an der identischen Abbildung liegen, so liegen auch alle

$$\sigma^{u_1} . \tau^{v_1} \ldots\ldots \sigma^{u_m} \quad (|u_1| + |v_1| + \ldots + |u_m| + |v_m| \leqq N)$$

beliebig nahe daran, also ist $\sigma^{u_1} . \tau^{v_1} \ldots\ldots \sigma^{u_m} . \tau^{v_m} \mathcal{K}_0$ Teil von $\mathcal{K}_1$, also $\sigma^{u_1} . \tau^{v_1} \ldots\ldots \sigma^{u_m} . \tau^{v_m} \mathfrak{W}'$ Teil von $\mathfrak{W}$.

[27]) Ein durch A.—D. in § 4 erzeugtes $\mathfrak{G}$ hat daher gewiss keine freie Untergruppe mit zwei Erzeugenden: was auch unschwer direkt einzusehen ist.

Wenn wir z. B. für $\mathfrak{G}$ die Gruppe T_n aller Translation [28]) in R_n wählen, so ist, da T_n Abelsch ist, ein $[R_n$, Einheitswürfel, $T_n]$-Maß, für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ vorhanden. Dagegen besitzt die Gruppe aller linearen flächentreuen Abbildungen, A_n („affine Gruppe") [29]), bereits für $n = 2$ eine freie Untergruppe mit zwei Erzeugenden, wie wir zeigen werden. Infolgedessen gibt es bereits in der Ebene kein nichtnegatives additives Maß (wo das Einheitsquadrat das Maß 1 hat), dass gegenüber allen Abbildungen von A_2 invariant wäre. Ja, die ganze Hausdorff-Banach-Tarski-sche Pathologie wiederholt sich schon in der Ebene, wenn wir nur O_2 durch A_2, d. h. längentreu durch linear-flächentreu, ersetzen.

Um auch auf der Geraden ähnliche Paradoxien zu finden, müssen wir uns vergegenwärtigen, dass es ausser den Translationen keine (stetigen) flächentreuen Abbildungen gibt, bis auf die Spiegelung, die hier nichts ändert: das Banach-sche Maß scheint also hier alles zu leisten, was man von einem Maßbegriff erwarten kann (in der Ebene war es immerhin nicht affininvariant!). Trotzdem lassen sich auch hier mit den ebenen und räumlichen Paradoxien verwandte Gebilde konstruieren.

Zu diesem Zwecke definieren wir:

$\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$ seien zwei lineare Mengen, wir nennen $\mathcal{M}$ kleiner als $\mathcal{P}$, wenn es eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{P}$ gibt, bei der die Distanz irgend zweier Punkte (von $\mathcal{M}$) vergrössert wird (d. h. kleiner ist als die ihrer Bildpunkte in $\mathcal{P}$).

Und $\mathcal{M}$ ist zerlegungskleiner, kurz: zlgkl., als $\mathcal{P}$, wenn wir

[28]) D. h., wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Koordinaten sind, alle Abbildungen

$$x_1' = x_1 + a_1, \quad x_2' = x_2 + a_2, \ldots, \quad x_n' = x_n + a_n$$

($a_1, a_2, \ldots, a_n$ Konstante).

[29]) D. h. alle Abbildungen

$$\begin{array}{l} x_1' = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n + a_1 \\ x_2' = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2n} x_n + a_2 \\ \vdots \\ x_n' = \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n1} x_2 + \ldots + \alpha_{nn} x_n + a_n \end{array}$$

($\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{nn}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Konstante), wobei die Determinante der Matrix $\{\alpha_{pq}\}$ $(p, q = 1, 2, \ldots, n)$ gleich 1 ist.

beide in gleichviele (endlich viele) paarweise elementfremde Summanden zerlegen können:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \dots + \mathfrak{M}_k, \quad \mathfrak{M}_u \times \mathfrak{M}_v = 0 \quad (u \neq v),$$

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \dots + \mathfrak{N}_k, \quad \mathfrak{N}_u \times \mathfrak{N}_v = 0 \quad (u \neq v),$$

so dass $\mathfrak{M}_1$ kleiner als $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{M}_2$ kleiner als $\mathfrak{N}_2, \dots,$ $\mathfrak{M}_k$ kleiner als $\mathfrak{N}_k$ ist.

Wir werden nun u. a. zeigen, dass jede beschränkte lineare Menge mit inneren Punkten zlgkl. ist, als jede andere derartige Menge: also z. B. jedes Intervall zlgkl. als jedes Intervall. Das Banachsche lineare Maß muss also jedenfalls die folgende sonderbare Eigenschaft haben: es nimmt bei einer Abbildung ab, die eine Dehnung ist, d. h. alle Entfernungen vergrössert.

7. Ausser den bisher auseinandergesetzten Sätzen und Beispielen werden wir noch eine Anwendung betrachten, die eines unserer Beispiele gestattet. Wir werden nämlich u. a. kontinuum viele, paarweise elementfremde lineare Mengen angeben, derart dass das Intervall 0, 1 zlgkl. ist als jede von ihnen. Daher haben alle ein Lebesguesches äusseres Maß > 0 [30]). Wenn wir alle Vereinigungsmengen von beliebigen Mengen dieser Mengen bilden, es gibt ihrer offenbar $2^{\aleph}$ viele, so haben wir ein System von Mengen erzeugt, das die folgende Eigenschaft hat: irgend zwei verschiedene darunter haben einen Unterschied [31]), der keine Lebesguesche 0-Menge ist.

Nun gibt es bekanntlich ebensoviele (nach Lebesgue) messbare Menge als unmessbare: nähmlich $2^{\aleph}$, was sonderbar ist, da man sonst in der reellen Funktionentheorie an ein Überwiegen der Pathologie gewöhnt ist. Unsere obige Konstruktion ermöglicht aber zu zeigen dass es auch hier so ist: bloss die grosse Zahl der O-Mengen (es gibt ihrer bekanntlich $2^{\aleph}$ viele [32])) verursacht die grosse

[30]) Denn alles, was zglkl. ist als eine Lebesguesche 0-Menge, ist ebenfalls eine Lebesguesche 0-Menge. Man hüte sich aber, zu schliessen, dass eine Menge, die zlgkl. ist als eine andere, kein grösseres Lebesguesches äusseres Maß haben kann als jene!

[31]) Der Unterschied von zwei Mengen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ist die Menge aller Punkte, die einer, aber nicht der anderen unter ihnen angehören, d. h.

$$(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}) - (\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}).$$

[32]) Jede Teilmenge einer 0-Menge ist 0-Menge, hat die erstere die Mächtigkeit $\aleph$, so gibt es $2^{\aleph}$ viele.

Zahl von messbaren Mengen, abstrahiert man von ihnen, so ändert sich das Bild.

Genauer: wir nennen zwei Mengen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ äquivalent, $\mathfrak{M} \approx \mathfrak{N}$, wenn ihr Unterschied eine O-Menge ist. Da $\mathfrak{M} \approx \mathfrak{M}$ ist, aus $\mathfrak{M} \approx \mathfrak{N}$ $\mathfrak{N} \approx \mathfrak{M}$ folgt, und aus $\mathfrak{M} \approx \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \approx \mathfrak{R}$ $\mathfrak{M} \approx \mathfrak{R}$ folgt, zerfallen alle Punktmengen in lauter Äquivalenzklassen untereinander äquivalenter. Jede Äquivalenzklasse enthält offenbar lauter messbare oder lauter unmessbare Mengen; also können wir die Äquivalenzklassen selbst als schlechthin messbar oder unmessbar bezeichnen.

Man zeigt leicht, dass es bloss $\aleph$ viele messbare Klassen gibt [33]), aus unserem Beispiel folgt aber, dass es $2^{\aleph}$ viele Klassen überhaupt gibt (was aus Mächtigkeitsüberlegungen nie geschlossen werden könnte, da jede Klasse $2^{\aleph}$ viele Elemente hat!), denn wir haben $2^{\aleph}$ viele paarweise nicht äquivalente Mengen angegeben. Daher gibt es auch $2^{\aleph}$ viele unmessbare Klassen.

8. Es bleibt noch übrig, einiges über die Rolle des Auswahlprincips in unseren Überlegungen zu sagen [34]). Damit steht es so: bei allen negativen Sätzen, (den Beweisen der nicht-Existenz gewisser Maße, d. h. der Aufstellung pathologischer Zerlegungsgleichheiten u. a.) brauchen wir es, in dem Maße, wie es stets beim Aufstellen (nach Lebesgue) unmessbarer Mengen gebraucht wurde: simultane Auswahl je eines Elementes aus einer Menge paarweise elementfremder (und nicht-leerer) Teilmengen des Kontinuums. Also simultane Auswahl aus Kontinuum vieler Mengen.

Bei allen positiven Sätzen jedoch (Existenz allgemeiner Maße) brauchen wir die effektive Wohlordnung der betreffenden Mengen; im Falle euklidischer Räume also die des Kontinuums. Das kommt bekanntlich einer simultanen Auswahl aus allen seinen, $2^{\aleph}$ vielen, Teilmengen gleich.

Die Anordnung der Arbeit ist die folgende: im Teile I untersuchen wir die auf die Existenz von $[\mathfrak{M}, \mathfrak{W}, \mathfrak{G}]$-Maßen und messbare Gruppen bezüglichen Fragen (vgl. § 4 dieser Einleitung), im Teile II. die $\mathfrak{G}$-Zerlegungsgleichheit und die damit verbundenen „pathologischen“ Beispiele, und schliesslich im Teil III. die Eigenschaft

[33]) Weil es zu jeder messbaren Menge eine sie enthaltende Menge von gleichem Maße gibt (die also mit ihr äquivalent ist!) die Durchschnitt einer Folge offener Mengen ist — und nur $\aleph$ viele solche Mengen existieren, und nach dem soeben Gesagten jede Klasse mindestens eine deratige Menge enthält.

[34]) Vgl. Banach-Tarski, loc. cit [11]), S. 245.

„zerlegungskleiner zu sein“, sowie aufs Lebesgue-sche Maß bezügliche Beispiele.

I. Aufstellung allgemeiner Maßbegriffe.

1. In § 4. der Einleitung wurde eine Gruppe $\mathcal{G}$ als messbar definiert, wenn ein $[\mathcal{G}, \mathcal{G}, \mathcal{G}]$-Maß existiert (vgl. dort). Wir werden mit einer scheinbar etwas allgemeineren Definition operieren, die der früheren in Wahrheit gleichwertig ist. Wir nennen nämlich eine Gruppe $\mathcal{G}$ messbar, wenn ein „allgemeiner Mittelwert“ auf ihr existiert [35]), wobei der Mittelwert folgendermassen definiert wird:

Eine „beschränkte Gruppenzahl“ ist eine in (ganz) $\mathcal{G}$ definierte Funktion, mit reellen Zahlen als Werten, wenn ihr Wertvorrat beschränkt (d. h. in einem endlichen Zahlenintervalle gelegen) ist; wir bezeichnen die beschränkten Gruppenzahlen mit $f, g, \ldots$

f ordnet dem Element σ von $\mathcal{G}$ die reelle Zahl $f(\sigma)$ zu. Wenn f, g beschränkte Gruppenzahlen sind, so definieren wir auf naheliegende Weise (a eine reelle Zahl, τ ein Element von $\mathcal{G}$) die beschränkten Gruppenzahlen af, $f \pm g$, f_τ durch

$$(af)(\sigma) = a f(\sigma), \quad (f \pm g)(\sigma) = f(\sigma) \pm g(\sigma), \quad f_\tau(\sigma) = f(\tau\sigma).$$

Eine beschr. Gz. f heisst nichtnegativ, wenn stets $f(\sigma) \geqq 0$ ist.

Ein „allgemeiner Mittelwert“ auf $\mathcal{G}$ ist eine Zuordnung, die jeder beschr. Gz. f eine reelle Zahl $M(f)$ entsprechen lässt, unter Wahrung der folgenden Bedingungen:

α. Es gilt allgemein

$$M(af) = aM(f), \quad M(f+g) = M(f) + M(g).$$

β. Es gilt allgemein (τ von $\mathcal{G}$)

$$M(f_\tau) = M(f).$$

γ. Wenn f nicht negativ ist, so ist $M(f) \geqq 0$.

δ. Wenn stets $f(\sigma) = 1$ ist, so ist auch $M(f) = 1$ [36]).

[35]) Wir sagen „Mittelwert“ statt „Integral“, weil wir den „Gesamtinhalt“ der Gruppe gleich 1 normieren.

[36]) Alle diese Begriffsbildungen sind denen Banachs, loc. cit. [10]) verallgemeinernd nachgebildet.

Dass aus der Messbarkeit von $\mathcal{G}$ in diesem Sinne, die im alten folgt, ist klar: wenn $\mathcal{H}$ eine Teilmenge von $\mathcal{G}$ ist, so sei

$$f^{\mathcal{H}}(\sigma) \begin{cases} = 1 & \text{wenn } \sigma \text{ zu } \mathcal{H} \text{ gehört,} \\ = 0 & \text{wenn } \sigma \text{ nicht zu } \mathcal{H} \text{ gehört.} \end{cases}$$

Dann ist $f^{\mathcal{H}}$ eine beschr. Gz. und $M(f^{\mathcal{H}}) = \mu(\mathcal{H})$ ein $[\mathcal{G}, \mathcal{G}, \mathcal{G}]$-Maß. Aber auch die Umkehrung gilt: Wenn ein $[\mathcal{G}, \mathcal{G}, \mathcal{G}]$-Maß $\mu(\mathcal{H})$ vorliegt, ist es möglich, mit seiner Hilfe ein allgemeines Mittel $M(f)$ auf $\mathcal{G}$ zu konstruieren [37]) [38]).

Wir werden nun die im § 4 der Einleitung angekündigte Überlegung durchführen: nämlich für messbare Gruppen $\mathcal{G}$ eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben, dass ein $[\mathfrak{M}, \mathfrak{W}, \mathcal{G}]$-Maß existiere.

[37]) Nämlich mit Hilfe des bereits bei [1]) erwähnten Verfahrens, mit dem man das Lebesguesche Integral aufs lineare Lebesguesche Maß zurückführt.

Sei f eine beschränkte Gruppenzahl; $K_\varepsilon = (\ldots, k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \ldots)$ eine sich von $-\infty$ bis $+\infty$ unendlich erstreckende Kette reeller Zahlen mit einer Maschenweite $< \varepsilon$ (d. h. $k_n \to \pm\infty$ für bezw. $n \to \pm\infty$, $k_n < k_{n+1} < k_n + \varepsilon$), $\varepsilon > 0$; und $\mathcal{H}(f, K_\varepsilon, n)$ die Menge aller σ mit

$$k_n \leqq f(\sigma) < k_{n+1}.$$

Da alle $\mathcal{H}(f, K_\varepsilon, n)$ bis auf endlich viele leer sind, (weil f beschränkt ist), stehen in

$$M(f, K_\varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n \, \mu(\mathcal{H}(f, K_\varepsilon, n))$$

nur endlich viele Summanden. Mit Hilfe bekannter Schlussweisen zeigt man, dass für $\varepsilon \to 0$ alle $M(f, K_\varepsilon)$ gegen einen Limes $M(f)$ streben: und von $M(f)$ sieht man unschwer ein, dass es ein allgemeines Mittel auf $\mathcal{G}$ ist.

[38]) Es sei gleich hier bemerkt, dass sich jedes allgemeine Mittel auf $\mathcal{G}$ von beschr. Gz. ohne weiteres auf einseitig, etwa nach unten, beschr. Gz. (d. h. solche in ganz $\mathcal{G}$ definierte Funktionen mit reellen Zahlen als Werten, deren Wertevorrat eine endliche untere Schranke hat) erweitern lässt — unter Wahrung der Bedingungen $\alpha. - \delta.$ der Definition. Freilich muss man dann den Wert ∞ für das Mittel zulassen.

Sei nämlich f eine etwa nach unten beschr. Gz., A eine Zahl > 0, f_A die folgende beschr. Gz.

$$f_A(\sigma) = \mathrm{Min}\,(f(\sigma), A).$$

Dann wächst $M(f_A)$ monoton mit A (wegen $\beta.$ und $\gamma.$), und

$$M^*(f) = \operatorname*{limes}_{A \to \infty} M(f_A)$$

ist, wie man leicht erkennt, die gewünschte Verallgemeinerung.

Zuerts beweisen wir den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 1. Wenn $\mathfrak{G}$ messbar ist, so existiert ein $[\mathfrak{M}, \mathfrak{W}, \mathfrak{G}]$-Maß dann und nur dann, wenn ein für alle Teilmengen $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$ definiertes nichtnegatives Maß $\mu(\mathfrak{N})$ existiert, von dem ausser der Bedingung α^*. aus § 4 (Einleitung) nur verlangt wird, dass für alle σ von $\mathfrak{G}$: $\mu(\sigma\mathfrak{W}) = 1$ sei [39]).

Die Notwendigkeit ist klar, es bleibt übrig, die Hinreichendheit zu beweisen, d. h. mit Hilfe eines Maßes $\mu(\mathfrak{N})$ im Sinne des Hilfssatzes ein $[\mathfrak{M}, \mathfrak{W}, \mathfrak{G}]$-Maß zu konstruieren. Sei $\mathfrak{N}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$, wir definieren eine offenbar nach unten beschr., weil nichtnegative G. Z. $f^{\mathfrak{N}}(\sigma)$ durch

$$f^{(\mathfrak{N})}(\sigma) = \mu(\sigma\mathfrak{N})$$

und weiter ein allgemeines Maß $\nu(\mathfrak{N})$ durch

$$\nu(\mathfrak{N}) = M(f^{(\mathfrak{N})})$$

(vgl. [38])). Man sieht sofort, dass ν ein $[\mathfrak{M}, \mathfrak{W}, \mathfrak{G}]$-Maß ist.

Von der Bedingung des Hilfssatzes I ist es aber möglich, direkt zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist. Es gilt nämlich:

Hilfssatz 2. Ein allgemeines Maß μ mit den in Hilfsatz I. geforderten Eigenschaften existiert dann und nur dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

Wenn $\mathfrak{N}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$ ist, so sei $\varphi^{(\mathfrak{N})}$ in $\mathfrak{M}$ eine definierte Funktion mit

$$\varphi^{(\mathfrak{N})}(x) \begin{cases} = 1 \text{ wenn } x \text{ zu } \mathfrak{N} \text{ gehört,} \\ = 0 \text{ wenn } x \text{ nicht zu } \mathfrak{N} \text{ gehört.} \end{cases}$$

Es darf kein System von Elementen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ von G und von reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ geben, so dass einerseits

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k > 0$$

ist, und andererseits für alle x

$$a_1\varphi^{(\sigma_1\mathfrak{W})}(x) + a_2\varphi^{(\sigma_2\mathfrak{W})}(x) + \ldots + a_k\varphi^{(\sigma_k\mathfrak{W})}(x) \leqq 0$$

gilt.

Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist leicht einzusehen. Sei

[39]) Wie man sieht ist β'. durch eine Verschärfung von γ'. ersetzt worden — die aber viel weniger weit geht.

$\mu(\mathfrak{N})$ ein allgemeines Maß mit den Eigenschaften aus Hilfssatz I. E durchlaufe alle $2^k - 1$ nicht-leeren Teilmengen von $(1, 2, \ldots, k)$; $\mathfrak{W}_E$ sei die Menge aller x, die unter allen $\sigma_l\mathfrak{W}$ denjenigen mit zu E gehörigem l und nur diesen angehören.

Alle $\mathfrak{W}_E$ sind paarweise elementfremd, und $\sigma_l\mathfrak{W}$ ist die Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{W}_E$ mit l enthaltendem E, was durch

$$\sigma_l\mathfrak{W} = \sum_{l \text{ in } E} \mathfrak{W}_E$$

angedeutet werde. Da alle $\mu(\sigma_l\mathfrak{W}) = 1$ sind, können wir schreiben:

$$\sum_{l=1}^{k} a_l\mu(\sigma_l\mathfrak{W}) > 0, \quad \sum_{l=1}^{k} a_l \sum_{l \text{ in } E} \mu(\mathfrak{W}_E) > 0,$$

$$\sum_E \mu(\mathfrak{W}_E) \sum_{l \text{ in } E} a_l > 0.$$

Wenn wir nun zeigen können, dass für alle E mit nicht leerem $\mathfrak{W}_E$ $\sum\limits_{l \text{ in } E} a_l \leqq 0$ ist, so sind wir am Ziele: denn für die anderen E muss $\mu(\mathfrak{W}_E) = 0$ sein, und wir haben in der obigen Ungleichheit einen Widerspruch. Sei also $\mathfrak{W}_E$ nicht leer, dann ist für jedes x von $\mathfrak{W}_E$

$$\sum_{l=1}^{k} a_l\varphi^{(\sigma_l\mathfrak{W})}(x) = \sum_{l \text{ in } E} a_l$$

und da die linke Seite nach Annahme $\leqq 0$ ist, ist alles bewiesen.

Die Hinreichendheit unserer Bedingung zu beweisen ist etwas umständlicher, und gelingt nur mit Hilfe des Wohlordnungssatzes, sie werde daher bis zum nächsten § verschoben. Wir wollen aber schon hier feststellen, dass für die im § 4 der Einleitung genannten Fälle ($\mathfrak{M} = \mathfrak{W}$; sowie $\mathfrak{M} = R_n$, $\mathfrak{W} =$ Einheitswürfel, $\mathfrak{G}$ bildet den Einheitswürfel nur auf messbare Mengen vom Lebesgueschen Maß 1 ab) die Bedingung aus Hilfssatz 2 in der Tat erfüllt ist.

Für $\mathfrak{M} = \mathfrak{W}$ sind auch alle $\sigma_l\mathfrak{W} = \mathfrak{M}$, daher ist stets

$$\sum_{l=1}^{k} a_l\varphi^{(\sigma_l\mathfrak{W})}(x) = \sum_{l=1}^{k} a_l > 0$$

womit alles bewiesen ist. Im zweiten der genannten Fälle können wir den soeben geführten Beweis der Notwendigkeit wörtlich wiederholen, bloss $\mu(\mathfrak{T})$ ist konsequent durch das Lebesguesche äussere Maß zu ersetzen. Denn dieses ist zwar nicht allgemein additiv, wohl aber für die hier allein in Frage kommenden, $\mathfrak{W}_E$: denn die $\sigma_i\mathfrak{W}$ sind messbar, und daher auch die $\mathfrak{W}_E$.

2. Der Beweis der Hinreichendheit, den wir nun führen müssen, kommt auf die Konstruktion eines allgemeinen Maßes $\mu(\mathfrak{T})$ mit den in Hilfssatz 1 geforderten Eigenschaften heraus. Dieselbe führen wir folgendermassen durch [40].

Zunächst werde die Menge aller Teilmengen von $\mathfrak{M}$ wohlgeordnet, u. zw. so, dass die $\sigma\mathfrak{W}$ (σ aus $\mathfrak{G}$) vor alle anderen zu stehen kommen. Sie sei etwa vom Typus der Ordnungszahl Ω, ihre Elemente seien $\mathfrak{T}_\alpha$, wo α alle Ordnungszahlen $<\Omega$ durchläuft. Die $\sigma\mathfrak{W}$ mögen dass Anfangsstück der $\alpha<\Xi$ bilden.

Wir werden uns bemühen, jedem $\mathfrak{T}_\alpha$, $\alpha<\Omega$, eine nicht-negative Zahl $m(\mathfrak{T}_\alpha)$ derart zuzuordnen, dass die folgende Bedingung gewahrt bleibt:

Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ irgendwelche Ordnungszahlen $<\Omega$ sind, und $a_1, a_2, \ldots, a_k$ irgendwelche reelle Zahlen, so kann nicht

$$a_1\, m(\mathfrak{T}_{\alpha_1}) + a_2\, m(\mathfrak{T}_{\alpha_2}) + \ldots + a_k\, m(\mathfrak{T}_{\alpha_k}) > 0$$

sein, wenn für alle x von $\mathfrak{M}$

$$a_1\, \varphi^{(\mathfrak{T}_{\alpha_1})}(x) + a_2\, \varphi^{(\mathfrak{T}_{\alpha_2})}(x) + \ldots + a_k\, \varphi^{(\mathfrak{T}_{\alpha_k})}(x) \leqq 0$$

ist (die $\varphi^{(\mathfrak{T})}(x)$ sind ebenso definiert, wie in Hilfssatz 2).

(Wenn unter den $m(\mathfrak{T}_{\alpha_k})$ mindestens eines $=\infty$ ist, und dabei $a_n<0$ ist, so betrachten wir die erste Relation als nicht-bestehend).

Für die $\alpha<\Xi$, d. h. $\mathfrak{T}_\alpha=\sigma\mathfrak{W}$, leistet das (nach Annahme des Hilfssatzes) die Definition

$$m(\mathfrak{T}_\alpha)=1.$$

Wenn es uns gelingt, dies auf alle $\alpha<\Omega$ fortzusetzen, so sind wir am Ziele: denn erstens ist dann für alle σ von G

$$m(\sigma\mathfrak{W})=1$$

und zweitens ist für elementfremde $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{P}$ identisch

$$\varphi^{(\mathfrak{T}+\mathfrak{P})}(x) - \varphi^{(\mathfrak{T})}(x) - \varphi^{\mathfrak{P}}(x) = 0$$

[40]) Die Beweismethode ist mit der Banachs, loc. cit. [10]) eng verwandt, nur der Einfachheit des vorliegenden Falles entsprechend vereinfacht.

also, indem wir einmal $a_1=1$, $a_2=a_3=-1$ und dann $a_1=-1$, $a_2=a_3=1$ setzen

$$m(\mathfrak{T}+\mathfrak{P}) - m(\mathfrak{T}) - m(\mathfrak{P}) = 0.$$

Die erforderliche Fortsetzung von $m(\mathfrak{T}_\alpha)$ (von den $\alpha<\Xi$ auf alle $\alpha<\Omega$) leisten wir durch transfinite Induktion, indem wir zeigen: wenn $m(\mathfrak{T}_\alpha)$ für alle $\alpha<\xi$ ($\Xi\leqq\xi<\Omega$) gemäss unserer Bedingung definiert ist, so kann es auch für $\alpha=\xi$ dieselbe befriedigend bestimmt werden. (Die anzuwendende Beweismethode ist, wie gesagt, mit der von Banach, loc. cit. [10]), eng verwandt).

Die Bedingung war für alle $\alpha<\xi$ erfüllt, was kommt zu ihr Neues hinzu, wenn wir auch $\alpha=\xi$ zulassen? Offenbar die Fälle, wo mindestens eines der $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ gleich ξ ist (ohne Beschränkung der Allgemeinheit: genau eins, u. zw. etwa α_k). Ausserdem ist $a_k \neq 0$ (sonst haben wir nichts neues), oder auch, nach irrelevanter Multiplikation mit einer positiven Zahl. $a_k=\pm 1$.

Dann lässt sich aber (mit einer kleinen Änderung der Bezeichnungsweise) die Bedingung auch so schreiben: Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k<\xi$ und $a_1, a_2, \ldots, a_k$ reelle Zahlen sind, und für alle x von $\mathfrak{M}$

$$a_1\, \varphi^{(\mathfrak{T}_{\alpha_1})}(x) + a_2\, \varphi^{(\mathfrak{T}_{\alpha_2})}(x) + \ldots + a_h\, \varphi^{(\mathfrak{T}_{\alpha_h})}(x) \leqq \text{bzw.} \geqq \varphi^{(\mathfrak{T}_\xi)}(x)$$

gilt, so ist auch

$$a_1\, m(\mathfrak{T}_{\alpha_1}) + a_2\, m(\mathfrak{T}_{\alpha_2}) + \ldots + a_h\, m(\mathfrak{T}_{\alpha_h}) \leqq \text{bzw.} \geqq m(\mathfrak{T}_\xi).$$

Wir müssen also $m(\mathfrak{T}_\xi)$ so wählen, dass es $\geqq$ bzw. $\leqq$ ist als alle

$$a_1\, m(\mathfrak{T}_{\alpha_1}) + a_2\, m(\mathfrak{T}_{\alpha_2}) + \ldots + a_h\, m(\mathfrak{T}_{\alpha_h})$$

wenn für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$, $a_1, a_2, \ldots, a_h$ die erste Ungleichheit bei allen x mit $\leqq$ bzw. $\geqq$ gilt.

Eine solche Zahl ist sicher vorhanden, wenn eine jede der soeben genannten unteren Grenzen $\leqq$ ist, als eine jede der soeben genannten oberen Grenzen. Und dies ist in der Tat der Fall: aus

$$a_1\, \varphi^{(\mathfrak{T}_{\alpha_1})}(x) + a_2\, \varphi^{(\mathfrak{T}_{\alpha_2})}(x) + \ldots + a_h\varphi^{(\mathfrak{T}_{\alpha_h})} \leqq (x)\ \varphi^{(\mathfrak{T}_\xi)}(x),$$

$$b_1\, \varphi^{(\mathfrak{T}_{\beta_1})}(x) + b_2\, \varphi^{(\mathfrak{T}_{\beta_2})}(x) + \ldots + b_j\varphi^{(\mathfrak{T}_{\beta_j})}(x) \geqq \varphi^{(\mathfrak{T}_\xi)}(x),$$

folgt

$$a_1\, \varphi^{(\mathfrak{T}_{\alpha_1})}(x) + \ldots + a_h\, \varphi^{(\mathfrak{T}_{\alpha_h})}(x) - b_1\, \varphi^{(\mathfrak{T}_{\beta_1})}(x) - \ldots - b_j\varphi^{(\mathfrak{T}_{\beta_j})}(x) \leqq 0$$

also (da alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j < \xi$ sind)

$$a_1\, m(\mathfrak{M}_{\alpha_1}) + \ldots + a_h\, m(\mathfrak{M}_{\alpha_h}) - b_1\, m(\mathfrak{M}_{\beta_1}) - \ldots - b_j\, m(\mathfrak{M}_{\beta_j}) \geqq 0$$

wie wir es brauchen.

Hilfssatz 1. und 2. ergeben zusammen mit der Bemerkung am Schluss der letzten § den folgenden, die Ankündigung des § 4 der Einleitung rechtfertigenden, Satz:

Satz 3. Wenn $\mathfrak{G}$ eine messbare Gruppe ist, so ist ein $[\mathfrak{M}, \mathfrak{W}, \mathfrak{G}]$-Maß dann und nur dann vorhanden, wenn die Bedingung des Hilfssatzes 2 erfüllt ist.

Diese ist insbesondere bestimmt erfüllt, wenn $\mathfrak{W} = \mathfrak{M}$ ist, oder wenn $\mathfrak{M}$ der n-dimensionale euklidische Raum R_n ist, $\mathfrak{W}$ der Einheitswürfel, und jede Abbildung von $\mathfrak{G}$ diesen in messbare Mengen vom Lebesgueschen Maß 1 überführt.

3. Jetzt gehen wir dazu über, die im § 4 der Einleitung genannten Erzeugungsprinzipien **A.**—**D.** für messbare Gruppen als solche zu erweisen.

Für **D.** erübrigt sich ein Beweis, da er bereits dort in wenigen Zeilen geführt werden konnte. **B.** können wir unschwer direkt beweisen. Sei nämlich $\mathfrak{H}$ ein messbarer Normalteiler von $\mathfrak{G}$, und die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ gleichfalls messbar; für Gruppenzahlen von $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ schreiben wir $f, g, \ldots$ bzw. $F, G, \ldots$, sei $M(f)$ bzw. $N(F)$ ein allgemeines Mittel auf $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Wenn Φ eine beschr. Gz. auf $\mathfrak{G}$ ist, so bestimmt es auch eine beschr. Gz. f in $\mathfrak{H}$: nämlich die, die mit ihr auf $\mathfrak{H}$ in allem übereinstimmt, aber sonst undefiniert ist. Wenn wir

$$M(\Phi) = M(f)$$

definieren, so hat $M(\Phi)$ alle Eigenschaften des allgemeinen Mittels auf $\mathfrak{G}$, bis auf die eine

$$M(\Phi_\tau) = M(\Phi)$$

denn diese gilt offenbar nur für die τ von $\mathfrak{H}$. Immerhin hat dies die Folge, dass

$$M(\Phi_\tau) = M(\Phi)$$

ist, wenn τ, ϱ zur selben Nebengruppe Σ von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$, d. h. zum selben Element Σ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ gehören. Wir nennen dasselbe daher $M(\Phi, \Sigma)$, dies ist als Funktion von Σ betrachtet eine beschr. Gz. auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ [41]), die etwa F_Φ heisse. Wir setzen

$$M^*(\Phi) = N(F_\Phi)$$

und das ist, wie man mühelos verificiert, ein allgemeines Mittel auf $\mathfrak{G}$.

Alle diese Überlegungen sind wenig tiefgehend, im Gegensatze zu **A.** und **C.** Bei diesen sind wir jedoch in der angenehmen Lage, uns auf gewisse Überlegungen Banachs weitgehend stützen zu können. Der Beweis von **A.** insbesondere ist eine so gut wie wörtliche Wiederholung des Banachschen Räsonnements loc. cit. [10]), wo (um unsere Terminologie zu gebrauchen) die Messbarkeit der linearen Translationengruppe (O_1, vgl. [2])) bewiesen wird.

Wenn man dort [42]) genau zusieht, so sieht man nämlich, dass von allen Eigenschaften der linearen Translationsgruppe einzig und allein ihr Abelscher Charakter eine Rolle spielt [43]). Insbesondere ist dort $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{G}$ identisch: $\mathfrak{M}$ besteht aus allen reellen Zahlen x, $\mathfrak{G}$ aus allen Abbildungen

$$x' = x + a$$

die den reellen Zahlen a entsprechen — und wenn man x, a als Elemente von $\mathfrak{G}$ auffasst, so ist x' (als Element von $\mathfrak{G}$) ihr gruppentheoretisches Produkt.

Wenn wir daher die reellen Zahlen konsequent durch die Elemente einer Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ ersetzen, und die Addition durch das gruppentheoretische Multiplicieren [44]), so geht die genannte Schlussweise ohne weiteres in einen Beweis von **A.** über: in die Konstruktion eines allgemeinen Mittels für eine beliebige Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$. Da all das ohne jeden weiteren Gedanken durchführbar ist, glauben wir davon absehen zu müssen, den Beweis hier in extenso zu wiederholen.

Es bleibt noch übrig, **C.** zu beweisen. Hierzu bemerken wir: Nach Annahme können wir die Menge M von Gruppen dadurch ordnen, dass wir von zwei Elementen $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$ von M diejenige

[41]) Denn wenn stets $|\Phi(\sigma)| \leqq a$ ist, so ist auch $|f(\sigma)| \leqq a$ also $|M(\Phi)| = |M(f)| \leqq a$; das gilt ebenso für alle Φ_τ, daher $|M(\Phi, \Sigma)| \leqq a$.

[42]) Loc. cit. [10]), S. 9—10.

[43]) Auch dieser nur beim Beweise des, freilich entscheidenden, Théorème 1.

[44]) Natürlich nur in den Argumenten der Gruppenzahlen, die Werte der Gz. bleiben reelle Zahlen, und deren Addition bleibt gewöhnliche Addition.

als die frühere bezeichnen, die Untergruppe der anderen ist; es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, dass dies eine Wohlordnung ist. Es gibt nämlich zweifellos eine mit M konfinale und dabei (in der vorliegenden Ordnung) wohlgeordnete Teilmenge M' von M [45]), da diese (wegen der Konfinalität) dieselbe Vereinigungsmenge wie M hat, genügt es M' statt M zu betrachten. Sei also M wohlgeordnet, etwa nach Typus der Ordnungszahl Ω, wir bezeichnen seine Elemente in dieser Anordnung mit $\mathfrak{G}_\alpha$, wo α alle Ordnungszahlen $< \Omega$ durchläuft. Ihre Vereinigungsmenge sei $\mathfrak{G}$. Da jedes $\mathfrak{G}_\alpha$ messbar ist, gibt es zu jedem ein allgemeines Mittel $M_\alpha(f)$, es gilt ein allgemeines Mittel $M(f)$ auf $\mathfrak{G}$ zu finden.

Wenn f eine beschr. Gz. von $\mathfrak{G}$ ist, so definieren wir für jedes $\mathfrak{G}_\alpha$ eine beschr. Gz. $f(\alpha)$ auf $\mathfrak{G}_\alpha$, die auf $\mathfrak{G}_\alpha$ mit f übereinstimmt, und sonst undefiniert ist, und setzen

$$M_\alpha(f) = M_\alpha(f_{(\alpha)})$$

(analog wie in § 3). $M_\alpha(f)$ hat alle Eigenschaften eines allgemeinen Mittels auf $\mathfrak{G}$, bis auf

$$M_\alpha(f_\tau) = M_\alpha(f),$$

das nur für die τ von $\mathfrak{G}_\alpha$ gelten muss. Wir betrachten daher die Folge aller

$$M_\alpha(f), \quad \alpha < \Omega,$$

sie ist beschränkt [46]), und wenn wir f durch ein f_τ (τ von $\mathfrak{G}$) ersetzen, so bleibt zumindest ein Endstück von ihr unverändert (denn τ gehört zu $\mathfrak{G}$, also zu einem $\mathfrak{G}_\alpha$, also zu allen $\mathfrak{G}_\beta$ mit $\alpha \leqq \beta < \Omega$, alle diese $M_\beta(f)$ ändern sich somit nicht).

Nehmen wir nun an, wir hätten in der Menge $\mathfrak{G}$ aller Ordnungszahlen $< \Omega$ eine Kompositionsregel $\alpha \bigcirc \beta$ definiert (aus $\alpha < \Omega$, $\beta < \Omega$ folge $\alpha \bigcirc \beta < \Omega$) die associativ ist (d. h. $(\alpha \bigcirc \beta) \bigcirc \gamma = \alpha \bigcirc (\beta \bigcirc \gamma)$). Dann können wir, die Definition des allgemeinen Mittels am Anfang des § 1 dieses Teiles I ohne weiteres auf $\mathfrak{G}$ anwenden: in der Definition spielt es nämlich überhaupt keine Rolle, dass die Gruppenei-

[45]) Konfinal heisst: nach jedem Element von M liegen noch Elemente von M', Vgl. z. B. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[46]) Wenn stets $|f(\sigma)| \leqq a$ ist, so ist auch $|f_\alpha(\sigma)| \leqq a$, also $|M_\alpha(f)| = |M_\alpha(f_\alpha)| \leqq a$.

genschaft wirklich vorliegt [47]), nur die Kompositionsregel ist wichtig. Wenn es aber zu jedem Endstück von $\mathfrak{G}$ ein α gibt, so dass alle $\alpha . \xi$ ihm angehören (dies ist freilich mit der Gruppeneigenschaft, unvereinbar), so behaupten wir: aus der Existenz eines allgemeinen Mittels auf der Menge aller Ordnungszahlen $< \Omega$ (im Sinne dieser Kompositionsregel) folgt diejenige eines allgemeinen Mittels auf $\mathfrak{G}$ (im alten Sinne), d. h. die Messbarkeit von $\mathfrak{G}$.

Seien nämlich zwei beschr. Gz. auf der Menge aller Ordnungszahlen $< \Omega$ d. h. zwei Folgen $f(\xi)$ und $\bar{g}(\xi)$, $\xi < \Omega$, gegeben, die in einem Endstück dieser Menge übereinstimmen. Wir wählen dann α so, dass alle $\alpha . \xi$ in diesem Endstücke liegen, dann ist $\bar{f}_\alpha = \bar{g}_\alpha$, und daher dass Mittel von $\bar{f}_\alpha$ gleich dem von $\bar{g}_\alpha$, d. h. das von f gleich dem von $\bar{g}$. Infolgedessen ist das Mittel der Folge $M_\xi(f)$ ein allgemeines Maß auf G.

Nun ist das Banachsche Räsonnement, das wir zum Beweise von A. benutzen, so geartet, dass dabei die Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{G}$ nirgends benützt wird, sondern nur die Associativität und Kommutativität des gruppentheoretischen Produktes — man überzeugt sich hiervon leicht bei Durchsicht desselben. Daher existiert das allgemeine Mittel auf $\mathfrak{G}$ bestimmt, wenn $\alpha \bigcirc \beta$ auch noch kommutativ ist.

Unsere Aufgabe ist somit, eine Ordnungszahlen-Operation $\alpha \bigcirc \beta$ mit den folgenden Eigenschaften zu finden:

1. Aus $\alpha < \Omega$, $\beta < \Omega$ folgt $\alpha \bigcirc \beta < \Omega$.
2. Es ist $\alpha \bigcirc \beta = \beta \bigcirc \alpha$ und $(\alpha \bigcirc \beta) \bigcirc \gamma = \alpha \bigcirc (\beta \bigcirc \gamma)$.
3. Zu jedem $\alpha' < \Omega$ gibt es ein α, sodass für alle ξ gilt $\alpha \bigcirc \xi > \alpha'$.

Zunächst bemerken wir aber: wir können annehmen, dass Ω eine Potenz von ω ist. Denn wenn Ω keine Limeszahl ist, so hat M ein letztes Element, das dann $= \mathfrak{G}$ und dabei messbar ist. Dann ist nichts zu beweisen. Und wenn es eine Limeszahl ist, so können wir es unter allen mit M Konfinalnemöglichst klein wählen: dann ist es eine ω-Potenz, denn jede andere Ordnungszahl ist mit einer noch kleineren konfinal [48]).

Durch $\alpha + \beta$ können wir $\alpha \bigcirc \beta$ nicht definieren, da ihm die Ei-

[47]) D. h. dass die zu α gehörigen Abbildungen

$$\xi' = \xi \bigcirc \alpha \quad \text{sowie} \quad \xi'' = \alpha \bigcirc \xi$$

ein-eindeutige Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf sich selbst sind und dass auch ein, die inversen Abbildungen vermittelndes, Element α^{-1} existiert.

[48]) Vgl. loc. cit. [45]).

genschaft $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ abgeht. Eine leichte Variation dieser Definition führt indessen an Ziel. Jede Ordnungszahl ξ kann nämlich auf eine und nur eine Art auf die Form

$$\xi = c_1\,\omega^{\eta_1} + c_2\,\omega^{\eta_2} + \ldots + c_k\,\omega^{\eta_k}$$

(k sowie $c_1, c_2, \ldots, c_k$ positive ganze — endliche — Zahlen, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ Ordnungszahlen) gebracht werden [49]). Es sei nun

$$\alpha = c_1\,\omega^{\eta_1} + c_2\,\omega^{\eta_2} + \ldots + c_k\,\omega^{\eta_k}$$

$$\beta = d_1\,\omega^{\eta_1} + d_2\,\omega^{\eta_2} + \ldots + d_k\,\omega^{\eta_k}$$

(dass α und β dasselbe Exponentsystem $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ haben, kann durch Zulassen von Koefficienten c_i, d_i gleich 0 erreicht werden), dann definieren wir

$$\alpha \circ \beta = (c_1 + d_1)\,\omega^{\eta_1} + (c_2 + d_2)\,\omega^{\eta_2} + \ldots + (c_k + d_k)\,\omega^{\eta_k}$$

Dieses $\alpha \circ \beta$ besitzt offenbar alle gewünschten Eigenschaften **1.—3.**

Der Inhalt dieses § kann somit wie folgt zusammengefasst werden:

Satz 4. Durch die Erzeugungsprinzipien **A.—D.** des § 4, der Einleitung entstehen lauter messbare Gruppen.

II. Über die Zerlegungsgleichheiten.

1. Im § 5 der Einleitung haben wir definiert, wann zwei Teilmengen $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$ einer gegebenen Menge $\mathcal{M}$ $\mathcal{G}$-zlggl. sind. ($\mathcal{G}$ ist eine Gruppe eineindeutiger Abbildungen von $\mathcal{M}$ auf sich selbst). Wir hatten dort vier Eigenschaften **A.—D.** der $\mathcal{G}$-zlggl.-heit formuliert. Wir haben es nicht nötig, sie hier zu beweisen, denn ihre Beweise sind wörtlich nach Banach-Tarski, loc. cit. [11]) zu führen. U. zw. entspricht **A.** dort Théorème 1, 2, **B.** das Théorème 4, **C.** das Théorème 8, und **D.** das Théorème 11 (wo alledings an Stelle des dort benützten Satzes von C. Kuratowski ein Satz von D. König und St. Valkó heranzuziehen ist, der für beliebiges l gilt, vgl. [25]). Wir stellen daher fest:

Satz 5. Die G-zlggl. besitzt, für beliebige Gruppen $\mathcal{G}$ die Eigenschaften **A.—D.** des § 5 der Einleitung.

Wir zeigen nunmehr, dass, wenn $\mathfrak{W}$ und $\mathcal{G}$ der Bedingung in § 5 der Einleitung genügen, $\mathfrak{W}$ seiner Hälfte zerlegungsgleich ist.

[49]) Vgl. Hausdorff, *Grundzüge d. Mengenlehre* Leipzig 1914. p. 120 u. 121.

Wir nehmen die $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$, sowie das $\mathfrak{W}' \subset \mathfrak{A}$ im Sinne dieser Bedingung, mit

$$\mathfrak{W} \subset \varrho_1\,\mathfrak{W}' + \varrho_2\,\mathfrak{A}' + \ldots + \varrho_m\,\mathfrak{W}'$$

wir können dann bestimmt $\mathfrak{W}$ in

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1 + \mathfrak{W}_2 + \ldots + \mathfrak{W}_m, \quad \mathfrak{W}_\mu \times \mathfrak{W}_\nu = 0 \quad (\mu \neq \nu),$$

$$\mathfrak{W}_\mu \subset \varrho_\mu\,\mathfrak{W}'$$

zerlegen. Über das N behalten wir es uns für später vor, zu verfügen.

Weiter wählen wir (abhängig von N!) die in dieser Bedingung genannte freie Untergruppe von $\mathcal{G}$ mit zwei Erzeugenden σ, τ; sie heisse $\mathcal{H}$. Jedes Element von ihr kann (auf eine einzige Weise!) auf die Form

$$\sigma^{u_1} . \tau^{v_1} . \ldots . \sigma^{u_n} . \tau^{v_n}$$

(n positiv ganz, $u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n$ ganz, alle $\neq 0$, mit eventueller Ausnahme von u_1 und v_n) gebracht werden. Wir zerlegen H in Teilmengen, H_t ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), indem wir H_t durch $u_1 = t$ definieren. Es ist offenbar

$$\sigma^{s-t} H_t = H_s \quad \text{und für} \quad t \neq 0 \quad \tau H_t \subset H_0$$ [50]).

Nun sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Punkte von $\mathcal{M}$, die für kein von der identischen Abbildung verschiedenes Element von $\mathcal{H}$ Fixpunkte sind; $\mathcal{F}$ wird durch jedes Element von $\mathcal{H}$ auf sich selbst abgebildet [51]).

Zwei Elemente von $\mathcal{F}$ nennen wir aequivalent, $x \sim y$, wenn es eine Abbildung von $\mathcal{H}$ gibt, die sie ineinander überführt; aus der Gruppeneigenschaft von $\mathcal{H}$ folgt: $x \sim x$, aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$, aus $x \sim y$, $y \sim z$ folgt $x \sim z$. Daher zerfällt $\mathcal{F}$ in lauter paarweise elementfremde Klassen untereinander aequivalenter Elemente. Wir wählen aus jeder dieser Klassen je ein Element aus, und fassen diese zu einer Menge $\mathcal{K}$ zusammen. Aus der Definition von $\mathcal{F}$ und von $\mathcal{K}$ folgt unschwer: wenn σ alle Elemente von $\mathcal{H}$ durchläuft, so durchläuft $\sigma\mathcal{K}$ lauter paarweise elementfremde Mengen, die zusammen genau $\mathcal{F}$ ausmachen. Die Summe aller $\sigma\mathcal{K}$ wo $\sigma \mathcal{H}_t$ durch-

[50]) Wenn v ein Element und $\mathcal{J}$ eine Teilmenge der Gruppe $\mathcal{G}$ ist, so ist $v\mathcal{J}$ die Menge aller $v\sigma$, wenn σ alle Elemente von $\mathcal{J}$ durchläuft.

[51]) Wenn x Fixpunkt von v (aus H) ist, so ist wx Fixpunkt von wvw^{-1} (das mit w, v auch zu H gehört); wenn v nicht die Einheit ist, ist es wvw^{-1} auch nicht.

läuft, sei $\mathcal{H}_t$; offenbar sind auch die $\mathcal{H}_t$ $(t=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ lauter paarweise elementfremde Mengen, die zusammen genau $\mathcal{F}$ ausmachen, und aus den entsprechenden Relationen für die $\mathcal{H}_t$ folgt:

$$\sigma^{s-t}\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_s, \quad \text{und für} \quad t \neq 0 \quad \tau\mathcal{H}_t \subset \mathcal{H}_0$$ [52]).

Nunmehr nehmen wir eine Zahl h über die wir noch später genau verfügen werden, es sei aber gleich gesagt, dass N (und so mittelbar $\mathcal{H}_t$, σ, τ und $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ sowie die $\mathcal{H}_t$) von h abhängig gewählt werden wird. Wir werden jeder Zahl $l = 1, 2, \ldots, h$ eine gewisse Abbildung der Teilmenge von $\mathcal{W}$

$$\mathcal{J} = \mathcal{W}_1 \times \varrho_1 \mathcal{F} + \mathcal{W}_2 \times \varrho_2 \mathcal{F} + \ldots + \mathcal{W}_m \times \varrho_m \mathcal{F}$$

zuordnen, diese h Abbildungen sollen jetzt konstruiert werden.

Die l-te Abbildung $(l = 1, 2, \ldots, h)$ soll eine solche sein, wie sie für die $\mathcal{G}$-zlggl. in Frage kommt: aus endlich vielen Abbildungen von $\mathcal{G}$ (in verschiedenen Teilen von $\mathcal{J}$!) zusammengestellt. Man bilde zuerst bzw. $\mathcal{W}_\mu \times \varrho_\mu \mathcal{F}$ durch ϱ_μ^{-1}, ab $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$, wodurch es in $\varrho_\mu^{-1}\mathcal{W}_\mu \times \mathcal{F}$, eine Teilmenge von $\mathcal{W}'$ und von $\mathcal{F}$ übergeht. Man zerlege dieselbe in ein in $\mathcal{H}_0$ und ein in $\sum_{t \neq 0} \mathcal{H}_t$ gelegenes Teil, und bilde dieselben mit σ^{h+l} bezw. $\sigma^l\tau$ weiter ab. Wir haben somit $\mathcal{W}_\mu \times \varrho_\mu \mathcal{F}$ in zwei Teilen eineindeutig auf je eine Teilmenge von $\mathcal{H}_{h+l}$ bzw. $\mathcal{H}_l$ abgebildet, also, da diese Menge elementfremd sind, ein-eindeutig auf eine Teilmenge von $\mathcal{H}_l + \mathcal{H}_{h+l}$. Wenn wir noch die weitere Abbildung $\sigma^{2(\mu-1)h}$ auf das ganze anwenden, so haben wir eine ein-eindeutige Abbildung auf $\mathcal{H}_{2(\mu-1)h+l} + \mathcal{H}_{(2\mu-1)h+l}$. Dieselbe ist dabei von der bei $\mathcal{G}$-zlggl. zugelassenen Art.

Das ganze $\mathcal{J}$ wird daher durch die l-te Abbildung $\mathcal{G}$-zlggl. auf eine Menge abgebildet, die in der folgenden enthalten ist:

$$\mathcal{H}_l + \mathcal{H}_{h+l} + \mathcal{H}_{2h+l} + \mathcal{H}_{3h+l} + \ldots + \mathcal{H}_{2(m-1)h+l} + \mathcal{H}_{(2m-1)h+l}.$$

Daher bilden die Abbildungen $l = 1, 2, \ldots, h$ auf lauter paarweise elementfremde Mengen ab.

Weiter sieht man, dass für jede dieser Abbildungen jeder Punkt der Bildmenge aus einem solchen von $\mathcal{W}'$ durch Anwendung eines

[52]) Hier liegt bereits das paradoxe Verhalten des (etwas anders konstruierten) Hausdorffschen Beispiels vor: alle H_t sind „gleichgross", und doch, übertrifft die Summe der H_t, $t \neq 0$, das H_0 nicht!

$\sigma^{2(\mu-1)h+l}\tau$ oder $\sigma^{(2\mu-1)h+l}$ entsteht — also gewiss zu $\mathcal{W}$ gehört, wenn etwa $N = 2mh$ gewählt wird, was nunmehr geschehen soll. Wir haben also h paarweise elementfremde Teilmengen von $\mathcal{W}$ angegeben, deren jede dem $\mathcal{J}$ G-zlggl. ist.

Wenn kein von der identischen Abbildung verschiedenes Element von $\mathcal{H}$ Fixpunkte besitzt, so sind wir am Ziele: es ist $\mathcal{F} = \mathcal{M}$, also $\mathcal{J} = \mathcal{W}$, es genügt somit $h = 2$ zu setzen. Wenn das nicht der Fall ist, so wählen wir, im Sinne der Bedingung des § 5 der Einleitung, k freie Untergruppen von $\mathcal{G}$ mit zwei Erzeugenden aus, sodass sie die dort ausgeführten Eigenschaften haben, und kein Punkt von $\mathcal{M}$ für eine jede von ihnen Fixpunkt eines von der identischen Abbildung verschiedenen Elementes derselben ist. Seien diese Untergruppen $\mathcal{H}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ ihre Erzeugenden $\sigma_\varkappa$, $\tau_\varkappa$, und entsprechend bilden wir $\mathcal{F}_\varkappa$, $\mathcal{J}_\varkappa$.

Nach dem soeben Gesagten ist $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \ldots + \mathcal{F}_k = \mathcal{M}$, also $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \ldots + \mathcal{J}_k = \mathcal{W}$. Daher gibt es eine Zerlegung von $\mathcal{W}$

$$\mathcal{W} = \mathcal{J}_1' + \mathcal{J}_2' + \ldots + \mathcal{J}_k', \qquad \mathcal{J}_\varkappa' \times \mathcal{J}_\lambda' = 0 \quad (\varkappa \neq \lambda),$$

mit $\mathcal{J}_\varkappa' \subset \mathcal{J}_\varkappa$. Da es in $\mathcal{W}$ h paarweise elementfremde Teilmengen gibt, deren jede mit $\mathcal{J}_\varkappa$ zlggl. ist, gilt dasselbe um so mehr für $\mathcal{J}_\varkappa'$. Seien diese letzteren Teilmengen von $\mathcal{W}$

$$\mathcal{H}_{1,\varkappa}, \mathcal{H}_{2,\varkappa}, \ldots, \mathcal{H}_{h,\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Wir nehmen nun an, dass es in $\mathcal{G}$ k Abbildungen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ gibt, die $\mathcal{W}$ auf k paarweise elementfremde $\eta_1\mathcal{W}, \eta_2\mathcal{W}, \ldots, \eta_k\mathcal{W}$ abbilden; dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit unserer Schlüsse [53]). Dann ist $\mathcal{J}_\varkappa'$ dem $\mathcal{H}_{l,\varkappa}$ $(l = 1, 2, \ldots, h)$ zlggl., also dem

[53]) In unseren Beispielen ist dies grösstenteils erfüllt, da es aber unter den Bedingungen, die im § 5 der Enleitung aufgestellt wurden, nicht vorkommt, müssen wir seine Unwesentlichkeit auf alle Fälle beweisen. Dies tun wir durch den folgenden Kunstgriff.

Wir ersetzen $\mathcal{M}$ durch eine Folge von Mengen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots$, die alle auf $\mathcal{M}$ ein-eindeutig abgebildet (und dabei paarweise elementfremd) sind, den x von $\mathcal{M}$ entspreche x_p in $\mathcal{M}_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ x_1 etwa werde mit x identificiert (also $\mathcal{M}_1$ mit $\mathcal{M}$). Die Vereinigungsmenge aller $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots$ heisse $\mathcal{M}^*$. $\mathcal{G}$ ersetzen wir durch die folgende Gruppe $\mathcal{G}^*$: sei σ irgendein Element von $\mathcal{G}$. $u(p) = q$ irgendeine Permutation von $1, 2, \ldots$, dann sei das durch $\sigma_u x_p = (\sigma x)_{u(p)}$ definierte σ_u das allgemeine Element von $\mathcal{G}^*$. (Wenn die identische Permutation, $u(p) = p$, 1 heisst, können wir σ_1 mit σ identificieren). $\mathcal{W}$ bleibe unverändert.

$\eta_\varkappa \mathcal{K}_{l,\varkappa}$, und alle $\eta_\varkappa \mathcal{K}_{l,\varkappa}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ sowie $l = 1, 2, \ldots, h$) sind paarweise elementfremd (für verschiedene $\varkappa$, weil sie $\subset \eta_\varkappa \mathcal{W}$ sind; für gleiche $\varkappa$, aber verschiedene l, weil sie Bilder der elementfremden $\mathcal{K}_{l,\varkappa}$ sind). Daher ist $\mathcal{W} = \mathcal{T}_1' + \mathcal{T}_2' + \ldots + \mathcal{T}_k'$ dem

$$\mathcal{V}_l = \eta_1 \mathcal{K}_{l,1} + \eta_2 \mathcal{K}_{l,2} + \ldots + \eta_k \mathcal{K}_{l,k}$$

$\mathcal{G}$-zlggl., und die $\mathcal{V}_l$ sind paarweise elementfremd und alle $\subset \eta_1 \mathcal{W} + \eta_2 \mathcal{W} + \ldots + \eta_k \mathcal{W}$.

Jetzt setzen wir $h = 2k$, und haben, wenn wir noch für $\eta_\varkappa \mathcal{W}$ $\mathcal{W}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) schreiben: $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots, \mathcal{W}_k$ paarweise elementfremd, $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_{2k}$ ebenso, alle $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots, \mathcal{W}_k, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_{2k}$ untereinander $\mathcal{G}$-zlggl., und

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \ldots + \mathcal{V}_{2k} \subset \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \ldots + \mathcal{W}_{2k}\text{ [54]}.$$

Zur Abkürzung sei

$$\mathcal{A} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \ldots + \mathcal{W}_k, \quad \mathcal{B} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \ldots + \mathcal{V}_k,$$
$$\mathcal{C} = \mathcal{V}_{k+1} + \mathcal{V}_{k+2} + \ldots + \mathcal{V}_{2k}.$$

Dann sind $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ $\mathcal{G}$-zlggl., und

$$\mathcal{B} + \mathcal{C} \subset \mathcal{A}, \quad \mathcal{B} \times \mathcal{C} = 0.$$

Aus C. (§ 5 der Einleitung) folgt sofort, dass auch $\mathcal{C}' = \mathcal{A} - \mathcal{B}$ mit $\mathcal{A}$ $\mathcal{G}$-zlggl. ist; dann ist

$$\mathcal{B} + \mathcal{C}' = \mathcal{A}, \quad \mathcal{B} \times \mathcal{C}' = 0.$$

Offenbar können wir $\mathcal{C}'$ (wie $\mathcal{A}$) in k paarweise elementfremde Mengen $\mathcal{V}_1', \mathcal{V}_2', \ldots, \mathcal{V}_k'$ zerlegen, die alle dem $\mathcal{W}$-zlggl. sind. Wir haben dann

$$(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_1') + (\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_2') + \ldots + (\mathcal{V}_k + \mathcal{V}_k') = \mathcal{B} + \mathcal{C}' = \mathcal{A} =$$
$$= \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \ldots + \mathcal{W}_k.$$

Für Teilmengen von $\mathcal{M}$ (d. h. $\mathcal{M}_1$) ist offenbar die $\mathcal{G}$-zlggl. mit der $\mathcal{G}^*$-zlggl. gleichwertig; daher besitzt $\mathcal{W}$ in $\mathcal{M}^*$ ebensogut die Eigenschaften aus § 5. der Einleitung, wie in $\mathcal{M}$. Ausserdem sind in $\mathcal{G}^*$ gewiss die im Texte gewünschten $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ vorhanden: wenn u_{ij} die Vertauschung von i und j ist, und e die identische Abbildung aus $\mathcal{G}$, so tun etwa $e_{u_{11}}, e_{u_{12}}, e_{u_{1k}}$ das gewünschte.

Wenn wir also mit dieser Praemisse zeigen können (wie es im Text geschehen wird), dass $\mathcal{W}$ seiner Hälfte $\mathcal{G}^*$-zlggl. ist, so ist es nach dem früheren auch seiner Hälfte $\mathcal{G}$-zlggl.

[54]) Das Paradoxon accentuiert sich: das $2k$-fache von $\mathcal{W}$ (im Sinne der $\mathcal{G}$-zlggl). ist Teilmenge des k-fachen!

Dabei sind einerseits $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1', \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_2', \ldots, \mathcal{V}_k, \mathcal{V}_k'$ und andererseits $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots, \mathcal{W}_k$ paarweise elementfremd, und einerseits $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_1'$, $\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_2', \ldots, \mathcal{V}_k + \mathcal{V}_k'$ und andererseits $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots, \mathcal{W}_k$ untereinander $\mathcal{G}$ zlggl.

Somit dürfen wir D. (§ 5 der Einleitung) anwenden (d. h. mit k dividieren [55])): es ist $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_1'$ mit $\mathcal{W}_1$ $\mathcal{G}$-zlggl. Da aber $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1', \mathcal{W}_1$ alle mit $\mathcal{W}$ $\mathcal{G}$-zlggl. sind, folgt hieraus, dass $\mathcal{W}$ (ebenso wie $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_1'$), in zwei Teile zerlegt werden kann, die ihm beide $\mathcal{G}$-zlggl. sind. D. h.: $\mathcal{W}$ ist mit seiner Hälfte $\mathcal{G}$-zlggl.

Damit haben wir, unserem Programm entsprechend, den folgenden Satz bewiesen:

Satz 6. Wenn die Bedingung des § 5 der Einleitung erfüllt ist, so ist $\mathcal{W}$ (im dortigen Sinne) seiner Hälfte $\mathcal{G}$-zlggl; also existiert insbesondere kein $[\mathcal{M}, \mathcal{U}, \mathcal{G}]$-Maß.

2. Es bleibt übrig zu zeigen, dass die uns interessierenden Fälle (nämlich $\mathcal{G} = O_n'$, O_n, A_n: $\mathcal{M} = K_n$, R_n, R_n und $\mathcal{W} = K_n$, Einheitswürfel, Einheitswürfel; vgl. die §§ 5, 6 der Einleitung) die Bedingungen des Satzes 6 erfüllen, und dies kommt, wie wir schon wissen (vgl. § 5 der Einleitung und [26]); für K_n Einheitswürfel, Einheitswürfel treffen die dortigen Annahmen zu, denn im ersten Falle ist $\mathcal{U} = \mathcal{M}$, im zweiten und dritten aber ist $\mathcal{U}$ beschränkt, aber mit inneren Punkten, und $\mathcal{G}$ enthält alle Translationen), darauf heraus, dass O_n', O_n, A_n freie Untergruppen mit zwei beliebig nahe bei der identischen gelegenen Erzeugenden besitzen, und dass solche Untergruppen insbesondere gewählt werden können, dass die dortigen Fixpunktsbedingungen (bzw. vgl. § 5 Einleitung) erfüllt sind. Wenn das bewiesen ist, so wissen wir sogar von jedem beschränkten $\mathcal{W}$ mit inneren Punkten, dass es seiner Hälfte O_n'-, O_n-, A_n-zlggl. ist [56]).

Der gruppentheoretische Grund der Möglichkeit solcher Konstruktionen ist, dass in O_n', O_n, A_n ($n \geqq 3$, 3. 2) keine nicht-trivialen Relationen identisch gelten, d. h. dass für jedes System $u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m$ (m positiv ganz, $u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m$ ganz, alle $\neq 0$

---

[55]) Da in der Bedingung des § 5 der Einleitung k offenbar durch jedes $k' \geqq k$ ersetzt werden kann, dürfen wir annehmen, dass k die Form 2^s hat. Daher brauchen wir D. nur im von Banach und Tarski (loc. cit [11])) angewandten Umfange, und nicht den tieferen Satz von D. König und St. Valkó (vgl. [25])).

[56]) Mann kann hieraus unschwer das Resultat von Banach-Tarski gewinnen, wonach irgend zwei beschränkte Mengen mit inneren Punkten O_n'- bzw. O_n-zlggl. ($n \geqq 3$) sind, wir wollen dies aber hier nicht näher erörtern.

mit eventueller Ausnahme von u_1 und v_m) zwei σ, τ (aus O'_n, O_n, A_n) mit

$$\sigma^{u_1} \cdot \tau^{v_1} \cdot \ldots \cdot \sigma^{u_m} \cdot \tau^{v_m} \neq 1$$

(1 sei die identische Abbildung, die Einheit von O'_n, O_n, A_n) existieren (natürlich mit Ausnahme des trivialen Falles $m = 1$, $u_1 = v_1 = 0$). Auf den Beweis werden wir noch zurückkommen. wir wollen zunächst nur zeigen, wie aus ihr, durch rein algebraische Konstruktionen, die von uns benötigten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ gewonnen werden können.

Zunächst stellen wir eine freie Untergruppe mit zwei Erzeugenden her. Eine jede der 3 Gruppen O'_n, O_n, A_n kann offenbar ein-eindeutig auf eine endliche Zahl von Parametern $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$ stetig und algebraisch gezogen werden [57]) wobei freilich die $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$ gewissen Einschränkungen unterworfen sein werden. Immerhin dürfen wir annehmen, dass die identische Abbildung 1 den Parameterwerten $0, 0, \ldots, 0$ entspricht, und dass $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$ in einer gewissen Umgebung von $0, 0, \ldots, 0$ frei wählbar sind.

Wir wählen nun für σ und τ die Parameterwerte $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$ und $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\alpha$ als 2α voneinander algebraisch unabhängige Zahlen [58]). Das Bestehen einer nicht-trivialen Relation

$$\sigma^{u_1} \cdot \tau^{v_1} \ldots \sigma^{u_m} \cdot \tau^{v_m} = 1$$

bedeutete eine algebraische Relation zwischen den Parametern, die nicht identisch gelten kann, da sie nicht für alle σ, τ von O'_n, O_n, A_n

[57]) D. h. alle Transformationskoefficienten hängen stetig und algebraisch von $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$ ab.

[58]) Wir nennen eine endliche Menge reeller Zahlen algebraisch unabhängig, wenn kein nicht-identisch verschwindendes Polynom mit ganzen rationalen Koefficienten $= 0$ wird, wenn man sie für die Variablen einsetzt — d. h. wenn zwischen ihnen keinerlei nicht-triviale abgebraische Relationen bestehen.

Man sieht sofort, dass es zu n gegebenen (algebraisch unabhängigen) Zahlen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nur abzählbar viele X_{n+1} gibt, so dass $X_1, X_2, \ldots X_n, X_{n+1}$ algebraisch abhängig sind. Daher kann X_{n+1} so gewählt werden, dass $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ auch algebraisch unabhängig sind. Also gibt es eine Folge $X_1, X_2, \ldots$, von der jede endliche Teilmenge algebraisch unabhängig ist

Man kann sogar eine Zahlenmenge mit dieser Eigenschaft angeben, die die Mächtigkeit des Kontinuums hat: u. zw. mit Benützung des Auswahlprinzips nach H. Lebesgue (Atti Ac. Torino 1906—1907) und E. Steinitz (Journal f. r. u. a Math., 137, 1910), oder auch effektiv, Vgl. eine Arbeit des Verfassers (Math. Ann., $99^1/_2$, 1928).

gilt (nach Annahme!). Daher gilt sie für unsere σ, τ bestimmt nicht (weil $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\alpha$ algebraisch unabhängig sind), somit erzeugen diese in der Tat eine freie Gruppe. Damit σ, τ in gewünschter Nähe der Einheit liegen, müssen nur $X_1, X_2, \ldots X_\alpha$ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\alpha$ nahe bei der 0 liegen (damit werden sie auch beliebig wählbar).

Wir bekommen also eine freie Untergruppe mit zwei, in beliebig vorgeschriebener Nähe der Einheit gelegenen. Erzeugenden σ, τ, wenn wir $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\alpha$ algebraisch unabhängig und hinreichend nahe bei der 0 wählen — sonst aber ganz beliebig. Es bleibt übrig ein k und k solche Systeme zu finden, sodass unsere Fixpunktbedingungen erfüllt werden. Es soll gezeigt werden: $k = n + 1$ sowie $n + 1$ solche σ_ν, τ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n+1)$, dass ihre $X_{1,\nu}, X_{2,\nu}, \ldots, X_{\alpha,\nu}$, $Y_{1,\nu}, Y_{2,\nu}, \ldots, Y_{\alpha,\nu}$ $2(n+1)\alpha$ algebraisch unabhängigen Zahlen sind (sie mögen auch noch hinreichend nahe bei der 0 liegen). leisten das Gewünschte.

Es ist zu zeigen: die $n+1$ (von 1 verschiedenen!) Abbildungen

$$\sigma_\nu^{u_{1,\nu}} \cdot \tau_\nu^{v_{1,\nu}} \cdot \ldots \cdot \sigma_\nu^{u_{m_\nu,\nu}} \cdot \tau_\nu^{v_{m_\nu,\nu}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n+1)$$

haben keinen gemeinsamen Fixpunkt. Da wir die $X_{1,\nu}, X_{2,\nu}, \ldots, X_{\alpha,\nu}$, $Y_{1,\nu}, Y_{2,\nu}, \ldots, Y_{\alpha,\nu}$, algebraisch unabhängig wählten (und da die Existenz eines gemeinsamen Fixpunktes jedenfalls das Bestehen einer gewissen — vielleicht identisch erfüllten — algebraischen Relation zwischen den Parameterwerten der σ_ν, τ_ν bedeutet) genügt es zu zeigen, dass die σ_ν, τ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n+1)$ überhaupt (d. h. in Abhängigkeit von $u_{1,\nu}, v_{1,\nu}, u_{2,\nu}, v_{2,\nu}, \ldots, u_{m_\nu,\nu}, v_{m_\nu,\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n+1$) so gewählt werden können, dass kein gemeinsamer Fixpunkt existiert.

Betrachten wir die Fixpunktmannigfaltigkeit von

$$\sigma_\nu^{u_{1,\nu}} \cdot \tau_\nu^{v_{1,\nu}} \cdot \ldots \cdot \sigma_\nu^{u_{m_\nu,\nu}} \cdot \tau_\nu^{v_{m_\nu,\nu}}$$

Sie ist jedenfalls eine lineare Mannigfaltigkeit, etwa von der Dimensionzahl n' $(\leqq n)$ [59]). Wir können σ_ν, τ_ν so wählen

$$(u_{1,\nu}, v_{1,\nu}, \ldots, u_{m_\nu,\nu}, v_{m_\nu,\nu}$$

halten wir fest, nicht aber σ_ν, τ_ν), dass der obigen Ausdruck $\neq 1$ ist, dann ist $n' < n$. Der kleinstmögliche (also im „allgemeinen" angenommene) Wert von n' (für alle möglichen σ_ν, τ_ν unserer

[59]) D. h. eine n'-dimensionale Ebene im R_n. Bei K_n muss diese freilich durch den Nullpunkt gehen, aber es zählen dann nur ihre auf K_n gelegenen Punkte

Gruppe) sei n_ν, es ist $n_\nu < n$. Wir können darum eine von den Parametern von σ_ν, τ_ν algebraisch abhängige, n_ν dimensionale lineare Mannigfaltigkeit angeben, die „im allgemeinen" alle Fixpunkte des obigen Gruppenelementes umfasst. Wegen der algebraischen Unabhängigkeit der $X_{1,\nu}, X_{2,\nu}, \ldots, X_{\alpha,\nu}, Y_{1,\nu}, Y_{2,\nu}, \ldots Y_{\alpha,\nu}$ werden diese insbesondere bei unserer speziellen Wahl von σ_ν, τ_ν alle Fixpunkte sein. Es genügt daher zu zeigen, dass die $n+1$ linearen Mannigfaltigkeiten dann keinen gemeinsamen Punkt haben, oder auch (weil die $X_{1,\nu}, X_{2,\nu}, \ldots, X_{\alpha,\nu}, Y_{1,\nu}, Y_{2,\nu}, \ldots, Y_{\alpha,\nu}$, $2(n+1)\alpha$ algebraisch unabhängige Zahlen sind), dass es möglich ist, $\sigma_1, \tau_1, \ldots \sigma_{n+1}, \tau_{n+1}$ so zu wählen, dass die genannten bzw. $u_1, \ldots, u_{n+1}$ dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten keinen gemeinsamen Punkt haben.

Nun sind sie aber alle ganz willkürlich: denn wenn wir σ_ν, τ_ν durch $v\sigma_\nu v^{-1}, v\tau_\nu v^{-1}$ ersetzen (v aus O'_n, O_n, A_n) geht die betreffende lineare Mannigfalltigkeit in ihr durch v vermitteltes Bild über: und $n+1$ beliebige, $< n$-dimensionale, lineare Mannigfaltigkeiten haben im allgemeinen in der Tat keinen einzigen gemeinsamen Punkt (vgl. [59]).

Wir sind also am Ziele, wenn wir die eingangs gemachte Bemerkung über das Fehlen nicht-trivialer Relationen in O'_n, O_n, A_n ($n \geqq 3, 3, 2$) beweisen [60]. Da O'_3 Untergruppe von O'_n und dies von O_n ist, und da A_2 Untergruppe von A_n ist, brauchen wir nur O'_3 und A_2 zu betrachten [61].

A_2 ist offenbar der Gruppe L der linear gebrochenen Transformationen

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc > 0, \quad a, b, c, d \text{ reell},$$

(da ein gemeinsamer Faktor willkürlich ist, können wir $ad - bc = 1$ verlangen) zweistufig isomorph, es genügt also hier das Fehlen nicht-trivialer Relationen nachzuweisen. Aus O'_3 wird, durch stereographische Projektion der Einheitskugel auf die komplexe Zahlenebene, die Gruppe der Tansformationen

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad a, b, c, d \text{ komplex}, \quad d = \bar{a}, \; c = -\bar{b}.$$

(x, y Komplex). Und hier fehlen nicht-triviale Relationen, wenn solche in der grösseren Gruppe

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc \neq 0 \quad a, b, c, d \text{ komplex},$$

fehlen (weil die Bedingungen $d = \bar{a}$, $c = -\bar{b}$ nicht-algebraischer Natur sind, hier können wir übrigens über einen gemeinsamen Faktor der a, b, c, d beliebig verfügen – also $ad - bc = 1$ vorschreiben); das ist aber ganz gewiss der Fall, wenn bei Beschränkung auf reelle a, b, c, d (in der obigen Gruppe L) nicht-triviale Relationen nicht vorhanden sind. Es genügt also L zu betrachten.

Sei ω das Element $y = -\frac{1}{x}$ von L ($\omega^2 = 1$), es genügt (zu gegebenen $s_1, s_2, \ldots, s_p$, alle ganz und $\neq 0$) ein χ aus L mit

$$\chi^{s_1} . \omega . \chi^{s_2} . \omega \ldots . \omega . \chi^{s_p} \neq 1$$

zu finden: um

$$\sigma^{u_1} . \tau^{v_1} \ldots . \sigma^{u_m} . \tau^{v_m} \neq 1$$

zu machen, brauchen wir dann bloss (k, l positiv ganz, $k \neq l$)

$$\sigma = \chi^k . \omega . \chi^k, \quad \tau = \chi^l . \omega . \chi^l$$

zu setzen.

Für χ können wir aber $y = x + 2$ wählen. Dann wird nämlich aus

$$\chi^{s_1} . \omega . \chi^{s_2} . \omega \ldots . \omega . \chi^{s_p}$$

die Abbildung

$$y = 2s_1 - \cfrac{1}{2s_2 - \cfrac{1}{2s_3 - \ddots \cfrac{1}{2s_{p-1} - \cfrac{1}{2s_p + x}}}} \qquad (s_1, s_2, \ldots, s_p = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

[60]) Es bleibt eigentlich noch zu zeigen, dass es in beliebiger Nähe von $O, O, \ldots, O$ algebraisch unabhängige Zahlen gibt. Nach [58]) gibt es eine Folge algebraisch unabhängiger Zahlen, und sie bleiben solche, auch wenn wir zu jeder eine (beliebige) rationale Zahl addieren. Indem wir nun diese rationalen Zahlen geeignet wählen, können wir unsere Folge in eine beliebige (gegebene) Umgebung der O hineinzwängen.

[61]) Für O'_3 zeigte dies Hausdorff, vgl. [3]).

Wäre nun dies gleich x, so müsste es für $x=\infty$ unendlich werden:

$$2s_1-\cfrac{1}{2s_2-\cfrac{1}{2s_3-\cfrac{\ddots}{\cfrac{1}{2s_{p-1}}}}}=\infty$$

(hier ist $p>1$ vorausgesetzt, für $p=1$ ist aber offenbar $x+2s_1\neq x$, also $\chi^{r_1}\neq 1$). Die Teilkettenbrüche

$$2s_{p-1},\quad 2s_{p-2}-\frac{1}{2s_{p-1}},\ldots,\quad 2s_2-\cfrac{1}{2s_3-\cfrac{\ddots}{\cfrac{1}{2s_{p-1}}}},$$

$$\ldots,\ 2s_1-\cfrac{1}{2s_2-\cfrac{1}{2s_3-\cfrac{\ddots}{\cfrac{1}{2s_{p-1}}}}}$$

sind aber (wie man leicht rekursiv einsieht) alle absolut >1 und endlich, insbesondere also der letzte $\neq\infty$.

III.

Der Begriff „Zerlegungskleiner" und das Lebesgue'sche Maß.

1. Wir wenden uns nunmehr den linearen Mengen (Mengen reeller Zahlen) sowie dem im § 6 der Einleitung aufgestellten Begriff „zerlegungskleiner" (zlgkl.) zu. Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst wieder die Gruppe L aller Abbildungen

$$y=\frac{ax+b}{cx+d},\quad ad-bc=1,\quad a, b, c, d \text{ reell.}$$

Unsere Absicht ist, für die beiden in den §§ 6, 7 der Einleitung auseinandergesetzen Zwecke eine gemeinsame vorbereitende Konstruktion durchzuführen. Wir wollen zeigen, dass jedes Intervall $I=(a,b)$ (Menge aller x mit $a\leqq x<b$, $a<b$) Kontinuum viele

paarweise elementfremde Teilmengen hat, deren jeder es L-zlggl. ist, u. zw. derart, dass dabei nur in beliebiger (vorgeschriebener) Nähe der Translationen gelegene Abbildungen aus L zur Anwendung kommen (vgl. [64]), von der L-zlggl. werden wir nachher zum zlgkl. übergehen.

Zunächst verallgemeinern wir ein am Schlusse des § 2 über L bewiesenes Resultat, indem wir zeigen: keine Relation

$$\sigma_{p_1}^{u_1}.\,\sigma_{p_2}^{u_2}.\,\ldots\,.\,\sigma_{p_m}^{u_m}=1$$

($u_1, u_2,\ldots, u_m$ ganz und $\neq 0$, $p_1, p_2,\ldots, p_m=1, 2,\ldots, \nu$, $p_1\neq p_2$, $p_2\neq p_3,\ldots$, $p_{m-1}\neq p_m$) kann identisch bestehen, d. h, wie immer die Elemente $\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_\nu$ aus L gewählt werden. Es genügt nämlich mit dem ω und χ vom § 2. $\sigma_\mu=\chi^{k_\mu}.\,\omega.\,\chi^{k_\mu}$ $(\mu=1, 2,\ldots,\nu)$ zu setzen, wobei alle k_μ positiv ganz und voneinander verschieden sind. Hieraus folgt sofort: wenn die Koefficienten der $\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_\nu$ voneinander algebraisch unabhängig sind [62], so gilt die obige Relation auch für diese speziellen $\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_\nu$ nicht.

Ferner haben zwei Transformationen

$$\sigma_{p_1}^{u_1}.\,\sigma_{p_2}^{u_2}.\,\ldots\,.\,\sigma_{p_m}^{u_m}\quad\text{und}\quad \tau_{q_1}^{v_1}.\,\tau_{q_2}^{v_2}.\,\ldots\,.\,\tau_{q_m}^{v_m}$$

($u_1, u_2,\ldots, u_m$ und $v_1, v_2,\ldots, v_n$ ganz und $\neq 0$; $p_1, p_2,\ldots, p_m=1, 2,\ldots, \mu$ und $q_1, q_2,\ldots, q_n=1, 2,\ldots,\nu$; $p_1\neq p_2$, $p_2\neq p_3,\ldots, p_{m-1}\neq p_m$ und $q_1\neq q_2$, $q_2\neq q_3,\ldots, q_{n-1}\neq q_n$) im Allgemeinen (d. h. für geeignete $\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_\mu$ und $\tau_1, \tau_2,\ldots, \tau_\nu$ aus L) keinen gemeinsamen Fixpunkt: Man wähle nämlich zuerst $\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_\mu$ und $\tau_1, \tau_2,\ldots, \tau_\nu$ so, dass die obigen Transformationen beide $\neq 1$ sind, dann hat jede von ihnen höchstens zwei Fixpunkte, seien diese P_1, P_2 bezw. Q_1, Q_2 und v aus L so, dass vP_1 und vP_2 sowohl von Q_1 als auch von Q_2 verschieden sind. Dann ersetzten wir $\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_\mu$ durch $v\sigma_1 v^{-1}$, $v\sigma_2 v^{-1},\ldots, v\sigma_\mu v^{-1}$, wodurch die erste der obigen Transformationen die Fixpunkte vP_1, vP_2 erhält, also keinen Fixpunkt der zweiten. Also liegt auch kein gemeinsamer Fixpunkt vor, wenn die Koeffi-

[62]) Eine Transformation σ aus L

$$y=\frac{ax+b}{cx+d},\quad ad-bc=1$$

hat die 3 Koefficienten a, b, c, der vierte ist ja durch $d=\dfrac{1+bc}{a}$ bestimmt ($a=0$ kommt bei uns nicht in Frage).

zienten der $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mu$, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ voneinander algebraisch unabhängig sind.

Nunmehr wählen wir Kontinuum viele reelle Zahlen, von denen jedes endliche Teilsystem aus voneinander algebraisch unabhängigen Zahlen besteht (vgl. [58]), und indicieren sie wie folgt:

$$a'_\theta,\ b'_\theta,\ c'_\theta,\quad a''_\theta,\ b''_\theta,\ c''_\theta \quad (\theta \text{ durchläuft alle reellen Zahlen})$$

(wir werden über dieselben noch näher verfügen). Sodann setzen wir $d'_\theta = \frac{1 + b'_\theta c'_\theta}{a'_\theta}$, $d''_\theta = \frac{1 + b''_\theta c''_\theta}{a''_\theta}$ und definieren σ_θ, τ_θ als die Transformationen

$$y = \frac{a'_\theta x + b'_\theta}{c'_\theta x + d'_\theta} \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{a''_\theta x + b''_\theta}{c''_\theta x + d''_\theta}$$

von L. Nach dem zuerst gesagten besteht keine Relation von der Form

$$\sigma_{\theta_1}^{u_1} \cdot \sigma_{\theta_2}^{u_2} \cdot \ldots \cdot \sigma_{\theta_m}^{u_m} = 1$$

zwischen irgendwelchem der σ_θ, diese erzeugen also eine freie Untergruppe von L mit Kontinuum vielen Erzeugenden, $\mathcal{H}'$ Ebenso erzeugen die τ_θ eine freie Untergruppe von L mit Kontinuum vielen Erzeugenden, $\mathcal{H}''$. Nach dem zuletzt Gesagten kann kein von der Einheit verschiedenes Element von $\mathcal{H}'$ mit einem, von der Einheit verschiedenen Elemente von $\mathcal{H}''$ einen gemeinsamen Fixpunkt haben.

Wir nennen die Menge aller Zahlen, die für kein von der Einheit verschiedenes Element von $\mathcal{H}'$ Fixpunkte sind, $\mathcal{F}'$. Jedes Element von $\mathcal{H}'$ bildet $\mathcal{F}'$ auf sich selbst ab (vgl. [51]). Zwei Elemente von $\mathcal{F}'$, die durch ein Element von $\mathcal{H}'$ aufeinander abgebildet werden können, nennen wir $\mathcal{H}'$-äquivalent, $x \precsim y$; aus der Gruppeneigenschaft von $\mathcal{H}'$ folgt: $x \precsim x$, aus $x \precsim y$ folgt $y \precsim x$, aus $x \precsim y$, $y \precsim z$ folgt $x \precsim z$. Daher zerfällt $\mathcal{F}'$ in lauter paarweise elementfremde Klassen untereinander $\mathcal{H}'$-äquivalenter Elemente, aus einer jeden dieser Klassen wählen wir je ein Element aus, und diese fassen wir zu einer Menge $\mathcal{K}'$ zusammen; aus der Definition von $\mathcal{F}'$ und von $\mathcal{H}'$ folgt sofort: wenn σ alle Elemente von $\mathcal{H}'$ durchläuft, so durchläuft $\sigma \mathcal{K}'$ lauter paarweise elementfremde Mengen, die zusammen genau $\mathcal{F}'$ ausmachen.

Jedes Element von $\mathcal{H}'$ kann auf eine und nur eine Art auf die Form

$$\sigma_{\theta_1}^{u_1} \cdot \sigma_{\theta_2}^{u_2} \cdot \ldots \cdot \sigma_{\theta_m}^{u_m}$$

($u_1, u_2, \ldots, u_m$ ganz und $\neq 0$, $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_2 \neq \theta_3, \ldots, \theta_{m-1} \neq \theta_m$; für die Einheit ist $m = 0$ zu nehmen) gebracht werden. $\mathcal{H}'_\theta$ sei die Menge aller Elemente von $\mathcal{H}'$ mit $\theta_1 = \theta$. Die $\mathcal{H}'_\theta$ sind paarweise elementfremd, und machen zusammen $\mathcal{H}'$ (mit Ausnahme der Einheit) aus. Es gilt offenbar

$$\mathcal{H}'_\theta \subset \sigma_\xi \mathcal{H}'_\xi \ (\xi \neq 0), \quad \mathcal{H}' - \mathcal{H}'_\theta \subset \sigma_\theta^{-1} \mathcal{H}'_\theta.$$

Wenn also $\mathcal{K}'_\theta$ die Vereinigungsmenge aller $\sigma \mathcal{K}$, σ von $\mathcal{H}'_\theta$ ist, so sind die $\mathcal{K}'_\delta$ paarweise elementfremde Teilmengen von $\mathcal{F}'$ und es ist

$$\mathcal{K}'_\theta \subset \sigma_\xi \mathcal{K}'_\xi \ (\xi \neq \theta), \quad \mathcal{F}' - \mathcal{K}'_\theta \subset \sigma_\theta^{-1} \mathcal{K}'_\theta \text{ [63]}.$$

Genau ebenso können wir zu $\mathcal{H}''$ die Mengen $\mathcal{F}''$, $\mathcal{K}''_\theta$ mit den Eigenschaften

$$\mathcal{K}''_\theta \subset \tau_\xi \mathcal{K}''_\theta \ (\xi \neq \theta), \quad \mathcal{F}'' - \mathcal{K}''_\theta \subset \tau_\theta^{-1} \mathcal{K}''_\theta$$

konstruieren. Nach dem was wir über die Fixpunkte in $\mathcal{H}'$ und $\mathcal{H}''$ wissen, gehört jede Zahl zu $\mathcal{F}'$ oder zu $\mathcal{F}''$.

Jetzt wollen wir noch gewisse nähere Bestimmungen über die $a'_\theta, b'_\theta, c'_\theta, a''_\theta, b''_\theta, c''_\theta$, von denen wir ausgingen, treffen. Wir können zu jeder von ihnen eine beliebige rationale Zahl addieren, ohne ihre algebraische Unabhängigkeit aufzuheben; wir dürfen also für eine jede dieser Zahlen vorschreiben, dass sie in einem beliebig gegebenen Intervalle liegen soll.

Wenn ein σ von L die Koefficienten a, b, c $\left(\text{und } d = \frac{1 + bc}{a}\right)$ hat, und a, b, c hinreichend nahe bei bzw. 1, 0, 0 liegen, so liegt σ in beliebiger Nähe der identischen Abbildung; insbesondere kann so erreicht werden, dass für jedes x, y von I

$$|\sigma x - x| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\sigma x - \sigma y}{x - y} - 1 \right| < \varepsilon$$

sei (ε fest gegeben und < 0, wir werden darüber später verfügen). In dementsprechend kleine Intervalle um 1, 0, 0 wollen wir darum bzw. $a'_\theta, b'_\theta, c_\theta$ sowie bzw. $a''_\theta, b''_\theta, c''_\theta$ hineinzwängen; die obigen Relationen gelten somit für alle $\sigma = \sigma_\theta$ und $= \tau_\theta$.

[63] Man beachte den Keim des Paradoxons: $\mathcal{F}'$ hat Kontinuum viele Teilmengen, deren jede von der anderen überdeckt werden kann, aber auch die Gesamtheit aller anderen überdecken kann (allerdings bloss mit Hilfe von Abbildungen aus L).

Nach diesen Vorbereitungen wählen wir ein Teilintervall J von I. das ganz im Inneren von I liegt und halb so lang ist, etwa $I=(a, b)$, $J=\left(\frac{3a+b}{4}, \frac{a+3b}{4}\right)$. Wir zerlegen I in die zwei Teilintervalle $I'=\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $I''=\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ und nennen die (zu L gehörigen!) Translationen $y=x+\frac{1}{4}(a-b)$ und $y=x-\frac{1}{4}(a-b)$ ϱ' bzw. ϱ'', dann ist

$$\varrho' I' = \varrho'' I'' = J.$$

Wir werden jetzt jedem θ mit $0<\theta<1$ eine ein-eindeutige Abbildung von I zuordnen, und zwar eine die, nach Zerschneidung von I in endliche viele Teile, aus lauter Abbildungen aus L besteht — also eine L — zlggl. vermittelt.

Zuerst zerlegen wir I in I' und I'' und wenden auf diese ϱ' bzw. ϱ'' an, wodurch alles in J zu liegen kommt. J zerlegen wir in ein in $\mathcal{F}'$ und ein in $\mathcal{F}'$ liegendes Teil: $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ (also

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{F}', \quad \mathcal{E}'' \subset \mathcal{F}'',$$
$$\mathcal{E}' + \mathcal{E}'' = J, \quad \mathcal{E}' \times \mathcal{E}'' = 0).$$

$\mathcal{E}'$ bzw. $\mathcal{E}''$ zerlegen wir weiter, in ihre in $\mathcal{H}_0'$ und $\mathcal{F}'-\mathcal{H}_0'$ bezw. $\mathcal{H}_0''$ und $\mathcal{F}''-\mathcal{H}_0''$ gelegenen Teile: $\mathcal{E}_1'$, $\mathcal{E}_2'$ bzw. $\mathcal{E}_1''$, $\mathcal{E}_2''$.

Nunmehr wenden wir auf $\mathcal{E}_1'$, $\mathcal{E}_2'$, $\mathcal{E}_1''$, $\mathcal{E}_2''$ die Abbildungen σ_θ, $\sigma_{\theta+1}\,\sigma_0$, τ_θ, $\tau_{\theta+1}\,\tau_0$ oder $\sigma_{\theta+2}$, $\sigma_{\theta+3}\,\sigma_0$, $\tau_{\theta+2}$, $\tau_{\theta+3}\,\tau_0$ an, je nach dem ob sie aus I' oder aus I'' stammen. Wir haben somit I in 8 Teilen auf Teile von $\mathcal{H}_\theta'$, $\mathcal{H}_{\theta+1}'$, $\mathcal{H}_\theta''$, $\mathcal{H}_{\theta+1}''$, $\mathcal{H}_{\theta+2}'$, $\mathcal{H}_{\theta+3}'$, $\mathcal{H}_{\theta+2}''$, $\mathcal{H}_{\theta+3}''$ abgebildet. Jede Abbildung für sich ist ein-eindeutig, das ganze ist es aber nicht, da die obigen Mengen nicht alle elementfremd sind. Genauer: die Abbildung von vieren dieser Teile auf eine Teilmenge von $\mathcal{H}_\theta' + \mathcal{H}_{\theta+1}' + \mathcal{H}_{\theta+2}' + \mathcal{H}_{\theta+3}'$ ist ein-eindeutig, und ebenso die Abbildung der vier übrigen auf eine Teilmenge von

$$\mathcal{H}_\theta'' + \mathcal{H}_{\theta+1}'' + \mathcal{H}_{\theta+2}'' + \mathcal{H}_{\theta+3}'';$$

aber diese zwei Mengen können noch gemeinsame Punkte haben.

Um dies zu beseitigen, gehen wir so vor. Die beiden Mengen, auf die die zwei Teile von I abgebildet wurden, mögen $\mathcal{H}'$ bzw. $\mathcal{H}''$ heissen, es ist $\mathcal{H}' \subset \mathcal{F}'$, $\mathcal{H}'' \subset \mathcal{F}''$. Wir zerlegen $\mathcal{H}''$ in zwei Teile:

$$\mathcal{H}_1'' = \mathcal{H}'' \times \mathcal{F}', \quad \mathcal{H}_2'' - \mathcal{H}'' \times \mathcal{F}'.$$

$\mathcal{H}_2''$ lassen wir stehen. $\mathcal{H}_1''$ dagegen teilen wir weiter ein, in ein in $\mathcal{H}_0'$ und ein in $\mathcal{F}'-\mathcal{H}_0'$ liegendes Teil. Das erstere bilden wir durch $\sigma_{\theta+4}$, das letztere durch $\sigma_{\theta+5}\,\sigma_0$ weiter ab. Wir haben nunmehr I in 4 Teilen auf Teilmengen von

$$\mathcal{H}_\theta' + \mathcal{H}_{\theta+1}' + \mathcal{H}_{\theta+2}' + \mathcal{H}_{\theta+3}', \quad \mathcal{H}_{\theta+4}', \quad \mathcal{H}_{\theta+5}',$$
$$(\mathcal{H}_\theta'' + \mathcal{H}_{\theta+1}'' + \mathcal{H}_{\theta+2}'' + \mathcal{H}_{\theta+3}'') \times \text{Komplementärmenge von } \mathcal{F}'$$

(jedesmal ein-eindeutig) abgebildet. Diese Mengen sind aber elementfremd, somit ist die ganze Abbildung ein-eindeutig.

Also ist die so gewonnene Bildmenge von I in einer gewissen Teilmenge von

$$\mathcal{H}_\theta' + \mathcal{H}_{\theta+1}' + \mathcal{H}_{\theta+2}' + \mathcal{H}_{\theta+3}' + \mathcal{H}_{\theta+5}' +$$
$$+ (\mathcal{H}_\theta'' + \mathcal{H}_{\theta+1}'' + \mathcal{H}_{\theta+2}'' + \mathcal{H}_{\theta+3}'') \times \text{Komplementärmenge von } \mathcal{F}'$$

enthalten. Die zu verschiedenen θ gehörigen $(0<\theta<1)$ sind daher elementfremd. Weiter sind alle Bildpunkte aus Punkten von J durch Anwendung einer der Abbildungen

$$\sigma_\theta, \; \sigma_{\theta+1}\,\sigma_0, \; \sigma_{\theta+2}, \; \sigma_{\theta+3}\,\sigma_0; \quad \tau_\theta, \; \tau_{\theta+1}\,\tau_0, \; \tau_{\theta+2}, \; \tau_{\theta+3}\,\tau_0;$$
$$\sigma_{\theta+4}\,\tau_\theta, \; \sigma_{\theta+4}\,\tau_{\theta+1}\,\tau_0, \; \sigma_{\theta+4}\,\tau_{\theta+2}, \; \sigma_{\theta+4}\,\tau_{\theta+3}\,\tau_0,$$
$$\sigma_{\theta+5}\,\sigma_0\,\tau_\theta, \; \sigma_{\theta+5}\,\sigma_0\,\tau_{\theta+1}\,\tau_0, \; \sigma_{\theta+5}\,\sigma_0\,\tau_{\theta+2}, \; \sigma_{\theta+3}\,\sigma_0\,\tau_{\theta+3}\,\tau_0$$

entstanden. Nach dem über die σ_ξ, τ_ξ gesagten folgt hieraus, wenn wir $\varepsilon<0$ mit $4\varepsilon<\frac{1}{4}(a-b)$ wählen, dass alle Bildpunkte eine Entfernung $<4\varepsilon<\frac{1}{4}(a-b)$ von J haben, also in I liegen.

Wir haben also kontinuum viele paarweise elementfremde Teilmengen von I gefunden, sie mögen $\mathfrak{A}_\theta$ $(0<\theta<1)$ heissen, deren jede dem I L-zlggl. ist. Ausserdem setzt sich eine jede der dabei zur Anwendung kommenden Abbildungen χ von L aus einer Translation (ϱ' oder ϱ'') sowie höchstens 4 successiven σ_ξ, τ_ξ zusammen, daher gilt für diese in I

$$(1-\varepsilon)^4 < \frac{\chi x - \chi y}{x-y} < (1+\varepsilon)^4.$$

Wenn also $\eta>0$ ist, und ε auch noch $(1-\varepsilon)^4 > 1-\eta$, $(1+\varepsilon)^4 < 1+\eta$ genügend gewählt wird, so ist für die genannten Abbildungen in ganz I

$$\left|\frac{\chi x - \chi y}{x-y} - 1\right| < \eta.$$

2. Am I aus § 1 und seine Teilmengen $\mathfrak{A}_\theta$ $(0<\theta<1)$ halten wir zunächst fest. Dagegen sei K ein beliebiges anderes Intervall. Wir wählen eine Zahl $k=1, 2, \ldots$ so, dass die Länge von K höchstens das k-fache der Länge von I ist, und teilen dann K in k Teilintervalle $K_1, K_2, \ldots, K_k$ ein, deren jedes höchstens die Länge von I hat, also durch eine geeignete Translation (etwa bzw. $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$, alle gehören zu L) in I hineingeschoben werden kann.

So wird K in k Teilen auf gewisse Teile von I abgebildet. Da I einer jeden der Mengen $\mathfrak{A}_{\theta_1}, \mathfrak{A}_{\theta_2}, \ldots, \mathfrak{A}_{\theta_k}$ $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ seien irgendwelche, voneinander verschiedene, Zahlen $>0, <1)$ L-zlggl. ist, sind diese k Teilmengen von I gewissen Teilmengen von bzw. $\mathfrak{A}_{\theta_1}, \mathfrak{A}_{\theta_2}, \ldots, \mathfrak{A}_{\theta_k}$ L-zlggl. (und diese sind elementfremd!) somit ist K einer geeigneten Teilmenge von I L-zlggl. Die dabei zur Anwendung kommenden Abbildungen (von Teilmengen von K) bestehen jeweils aus einer Translation und einer Abbildung, die bei der der L-zlggl von I und den $\mathfrak{A}_\theta$ eine Rolle spielt (vgl. das Ende § 1), also gilt auch für sie (für x, y von K, $x \neq y$)

$$\left|\frac{\chi x - \chi y}{x-y}\right| < \eta \text{ [64]}.$$

Da I ganz willkürlich ist, ist natürlich ebensogut auch I einer Teilmenge von K L-zlggl., und für die dabei zur Anwendung kommenden Abbildungen χ (von Teilmengen von I) gilt wieder die obige Bedingung. Daher ist nach C. (§ 5. der Einleitung) I dem K L-zlggl. Indem man den Beweis von C. näher betrachtet, sieht man sofort, dass dabei keine anderen Abbildungen (von Teilmengen

[64]) An einer blossen L-zlggl. von K und eines Teiles von I (oder, wie wir gleich zeigen werden, von I und K) wäre nichts bemerkenswertes, da ja alle Abbildungen $y = cx$ $(c>0)$ zu L gehören. Erst die Bedingung

$$\left|\frac{\chi x - \chi y}{x-y} - 1\right| < \eta$$

(mit beliebigem $\eta>0$), die beliebig genau erfüllte Längentreue (an Stelle der nur bei den Tanslationen vorhanden absoluten Längentreue), macht die Sache paradox.

von I) vorkommen, als die oben genannten χ' und χ^{-1} [65]), somit gilt für diejenigen Abbildungen ξ (von Teilmengen von I) die hierbei auftreten (für x, y von I, $x \neq y$)

$$\left|\frac{\xi x - \xi y}{x-y} - 1\right| < \delta$$

($\delta>0$ beliebig; es muss $\eta>0$ mit $\frac{1}{1+\eta} > 1-\delta$, $\frac{1}{1-\eta} < 1+\delta$ sowie $\eta<\delta$ gewählt werden).

Dieses Resultat, zusammen mit dem am Schluss von § 1, formulieren wir noch einmal:

Satz 7. Jedes Intervall I enthält Kontinuum viele paarweise elementfremde Teilmengen $\mathfrak{A}_\theta$ $(0<\theta<1)$, mit deren jeder es L-zlggl. ist. Jedes Intervall I ist mit jedem Intervall K L-zlggl. Dabei kann aber erreicht werden, dass nur solche Abbildungen (von Teilmengen von I) χ aus L zur Verwendung kommen, für welche (für alle x, y von I, $x \neq y$)

$$\left|\frac{\chi x - \chi y}{x-y} - 1\right| < \delta$$

gilt, wobei $\delta>0$ beliebig vorgegeben werden kann [66]).

Jetzt sind wir in der Lage, die in den §§ 6, 7 der Einleitung angekündigten Resultate zu beweisen.

Zunächst seien I, K irgend zwei Intervalle. Wir bilden I auf ein doppelt so langes Intervall I' ab (etwa durch $y=2x$) und wenden dann auf I' und K den Satz 7 mit $\delta = \frac{1}{2}$ an. Da bei der Abbildung von I auf I' jede Entfernung verdoppelt wird, und da bei den weiteren Abbildungen der (endlich vielen) Teile von I' auf Teile von K jede Entfernung grösser als ihre Hälfte bleibt, so wird insgesamt jede Entfernung vergrössert. Daher ist I zlgkl. als K.

Weiter sei I irgendein Intervall und $\mathfrak{A}_\theta$ $(0<\theta<1)$ die in Satz 7 erwähnten Mengen. I' sei ein halb so langes Intervall, aus dem I etwa durch $y=2x$ hervorgehe. Wir früheren zuerst diese

[65]) C. wird bei Banach-Tarski, loc. cit. [11]), als Théorème 8. ausgesprochen; der Beweis steht bei Banach loc. cit. [24]), und ist eine fast wörtliche Wiederholung des Beweises des Cantor-Bernsteinschen Äquivalenzsatzes.

[66]) Dies ist das eigentliche Paradoxon, das wir bei linearen Mengen erzielten vgl. [64]).

Abbildung von I' auf I durch, und wenden dann auf I und $\mathfrak{A}_\theta$ Satz 7 mit $\delta = \frac{1}{2}$ an. Ebenso wie vorhin folgt hieraus, dass I' zlgkl. als $\mathfrak{A}_\theta$ ist. Da aber I zlgkl. als I' ist, schliesst man daraus leicht, dass auch I zlgkl. als $\mathfrak{A}_\theta$ ist.

Wir haben also aus Satz 7 erschlossen:

Zusatz: Mit den Bezeichnungen von Satz 7 gilt: I ist zlgkl. als jedes $\mathfrak{A}_\theta \cdot (0 < \theta < 1)$; I ist zlgkl. als K.

Damit haben wir die für die Ausführungen der §§ 6, 7 der Einleitung notwendigen Unterlagen restlos hergestellt.

Sur les plus petits types de dimensions incomparables.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de prouver qu'*il existe deux ensembles linéaires, E et F, dont les types de dimensions* [1]) *ne sont pas comparables, et tels que si M et N sont deux ensembles* (*linéaires* [2])), *dont les types de dimensions ne sont pas comparables, on a nécessairement soit*

$$dE \leqslant dM \quad \text{et} \quad dF \leqslant dN, \tag{1}$$

soit

$$dF \leqslant dM \quad \text{et} \quad dE \leqslant dN \tag{2}$$

(soit à la fois (1) et (2)).

Démonstration. Désignons par E l'ensemble formé du nombre 0 et de tous les nombres de la forme

$$\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+n}},$$

où m et n sont des nombres naturels.

Or, désignons par F l'ensemble formé des nombres 0, $\frac{1}{n}$ et $1 + \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

[1]) Pour la définition du type (nombre) de dimensions, voir: M. Fréchet „*Les espaces abstraits* etc.“ Paris, 1928, p. 29 ss.; aussi: *Fund. Math.* t. VIII, p. 193.

[2]) ou, plus généralement, deux ensembles d'un espace métrique quelconque.