INTRODUCTION.

A. L'intégrale de Lebesgue-Stieltjes.

Nous admettons que le lecteur connait la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue[1]).

§ 1. *Quelques théorèmes de la théorie de l'intégrale de Lebesgue*[2]).

Si les fonctions mesurables $x_n(t)$ sont bornées dans leur ensemble et la suite $\{x_n(t)\}$ converge presque partout dans un intervalle fermé $[a, b]$ vers la fonction $x(t)$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt=\int_a^b x(t)\,dt. \tag{1}$$

Plus généralement, s'il existe une fonction sommable $\varphi(t)\geqslant 0$ telle que $|x_n(t)|\leqslant\varphi(t)$ pour $n=1,2,\dots$, la fonction limite est également sommable et satisfait à l'égalité (1).

Si les fonctions $x_n(t)$ sont sommables dans $[a, b]$ et forment une suite non décroissante, convergente vers la fonction $x(t)$, on a l'égalité (1), lorsque la fonction $x(t)$ est sommable, et

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt=+\infty$$

dans le cas contraire.

---

[1]) Cf. p. ex. C. de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire,* Paris, Gauthier-Villars (1916), ou H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, 2-me édition, Paris, Gauthier-Villars (1928).

[2]) Cf. p. ex. C. de la Vallée Poussin, l. cit., p. 49.

Si la suite $\{x_n(t)\}$ de fonctions à p-ième puissance sommable ($p \geqslant 1$) converge presque partout vers la fonction $x(t)$ et si

$$\int_a^b |x_n(t)|^p \, dt < K \qquad \textit{pour tout } n = 1, 2, \ldots,$$

la fonction $x(t)$ est également à p-ième puissance sommable[1]).

§ 2. *Quelques inégalités pour les fonctions à p-ième puissance sommable*[2]).

La classe des fonctions à p-ième ($p > 1$) puissance sommable dans $[a, b]$ sera désignée par $(L^{(p)})$. Au nombre p on fait correspondre le nombre q lié avec p par l'équation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et portant le nom *d'exposant conjugué avec p.* Pour $p = 2$ on a donc également $q = 2$.

Si $x(t) \subset (L^{(p)})$ et $y(t) \subset (L^{(q)})$, la fonction $x(t) \cdot y(t)$ est sommable et son intégrale remplit l'inégalité

$$\left| \int_a^b x\, y\, dt \right| \leqslant \left(\int_a^b |x|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

En particulier, on a donc pour $p = 2$:

$$\left| \int_a^b x\, y\, dt \right| \leqslant \left(\int_a^b x^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b y^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ appartiennent à $(L^{(p)})$, il en est de-même de la fonction $x(t) + y(t)$ et on a:

$$\left(\int_a^b |x + y|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |x|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

---

[1]) Cf. E. W. Hobson, *The Theory of Functions of a real variable...*, 2-nd Edition, Cambridge (1921/26), vol. I, p. 300.

[2]) Cf. E. W. Hobson, l. c., vol. I, p. 588.

A ces inégalités correspondent les inégalités arythmétiques suivantes:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

dont la première donne pour $p = 2$ l'inégalité connue de Schwarz:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour toute fonction $x(t)$ à p-ième ($p \geqslant 1$) puissance sommable et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue $\varphi(t)$ telle que

$$\int_a^b |x - \varphi|^p < \varepsilon$$ [1].

§ 3. *La convergence asymptotique.*

La suite $\{x_n(t)\}$ de fonctions mesurables dans un certain ensemble est dite *asymptotiquement convergente* (ou *convergente en mesure)* vers la fonction $x(t)$ définie dans cet ensemble, lorsqu'on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} m \mathop{E}_{t} (|x_n(t) - x(t)| > \varepsilon) = 0$$ [2].

Une suite $\{x_n(t)\}$ asymptotiquement convergente vers la fonction $x(t)$ contient toujours une suite partielle convergente (dans le sens ordinaire) presque partout vers cette fonction.

---

[1]) Cf. p. ex. E. W. Hobson, l. c., vol. II, p. 250.

[2]) mE désigne la mesure de l'ensemble E; le symbole $\mathop{E}_{t}(\,)$ désigne d'une façon générale l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles se présente la propriété mise en ( ).

Pour qu'une suite $\{x_n(t)\}$ soit asymptotiquement convergente, il faut et il suffit que l'on ait pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{i,\, k \to \infty} m \mathop{E}_{t} (|x_i(t) - x_k(t)| > \varepsilon) = 0$$ [1].

4. *La convergence en moyenne.*

Etant donnée une suite $\{x_n(t)\}$ de fonctions à p-ième puissance sommable ($p \geqslant 1$) dans $[a, b]$, on dit que cette suite y est à p-ième puissance *convergente en moyenne* vers la fonction $x(t)$ à p-ième puissance sommable, lorsque

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p \, dt = 0 .$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle fonction $x(t)$ existe, est que l'on ait

$$\lim_{i,\, k \to \infty} \int_a^b |x_i(t) - x_k(t)|^p \, dt = 0 .$$

La fonction $x(t)$ est alors définie dans $[a, b]$ d'une façon univoque, sauf dans un ensemble de mesure nulle.

Une suite de fonctions qui converge en moyenne vers une fonction $x(t)$ est aussi asymptotiquement convergente vers cette fonction[2] et contient par conséquent (§ 3) une suite partielle qui converge (dans le sens ordinaire) presque partout vers la même fonction.

§ 5. *L'intégrale de Stieltjes*[3].

Soient $x(t)$ une fonction continue et $\alpha(t)$ une fonction à variation bornée dans $[a, b]$. En subdivisant l'intervalle $[a, b]$ en intervalles partiels à l'aide des nombres

---

[1] Cf. p. ex. E. W. Hobson, l. c., vol. II, p. 242—244.
[2] Cf. p. ex. E. W. Hobson, l. c., vol. II, p. 245.
[3] Cf. p. ex. H. Lebesgue, l. c., Chapitre XI.

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

et choisissant dans chacun de ces intervalles partiels un nombre arbitraire ϑ_i, nous pouvons, par analogie avec la définition de l'intégrale de Riemann, former la somme

$$S = \sum_{i=1}^{n} x(\vartheta_i)\,[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \quad où \quad t_i \geqslant \vartheta_i \geqslant t_{i-1}.$$

On démontre que pour toute suite de subdivisions, pourvu que leur intervalle partiel le plus grand tende vers 0, les sommes S ont une limite commune à toutes suites pareilles; cette limite est désignée par

$$\int_a^b x(t)\,d\alpha(t)$$

et dite *intégrale de Stieltjes.*

Cette intégrale a les propriétés suivantes:

$$\int_a^b x(t)\,d\alpha(t) = -\int_b^a x(t)\,d\alpha(t),$$

$$\int_a^b x(t)\,d\alpha(t) + \int_b^c x(t)\,d\alpha(t) = \int_a^c x(t)\,d\alpha(t),$$

$$\int_a^b [x_1(t) + x_2(t)]\,d\alpha(t) = \int_a^b x_1(t)\,d\alpha(t) + \int_a^b x_2(t)\,d\alpha(t).$$

Le premier théorème sur la valeur moyenne s'exprime ici par l'inégalité

$$\left|\int_a^b x(t)\,d\alpha(t)\right| \leqslant M\,V,$$

où M désigne la borne supérieure de la valeur absolue $|x(t)|$ et V la variation totale de la fonction $\alpha(t)$ dans $[a, b]$.

Si la fonction $\alpha(t)$ est absolument continue, on peut exprimer l'intégrale de Stieltjes par celle de Lebesgue comme il suit:

$$\int_a^b x(t)\,d\alpha(t) = \int_a^b x(t)\,\alpha'(t)\,dt\,.$$

Si $\alpha(t)$ est une fonction croissante (c. à. d. que l'on a toujours $\alpha(t') < \alpha(t'')$ pour $a \leqslant t' < t'' \leqslant b$) et si l'on pose pour tout nombre s de l'intervalle $[\alpha(a), \alpha(b)]$

$$\beta(s) = a + \text{borne sup}\ \underset{t}{E}(s \geqslant \alpha(t))\,,$$

on obtient:

$$\text{(2)} \qquad \int_a^b x(t)\,d\,\alpha(t) = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x[\beta(s)]\,ds\ ^{1)}.$$

Démonstration. Nous avons par définition de $\beta(s)$:

$$\text{(3)} \qquad \beta[\alpha(t)] = t \quad \textit{pour} \quad a \leqslant t \leqslant b\,.$$

La fonction $\beta(s)$ étant par hypothèse croissante et admettant comme valeurs tous les nombres de l'intervalle $[a, b]$ où, d'après (3), $a = \beta[\alpha(a)]$ et $b = \beta[\alpha(b)]$, elle est une fonction continue. Il en résulte que la fonction $x[\beta(s)]$ est également continue.

Considérons une subdivision (δ) de $[a, b]$ donnée par les nombres $a = t_0 < < t_1 < \ldots < t_n = b$ et posons $\alpha(t_i) = \vartheta_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Nous avons

$$I_i = \int_{\vartheta_{i-1}}^{\vartheta_i} x[\beta(s)]\,ds = (\vartheta_i - \vartheta_{i-1})\,x(\vartheta_i')\,,$$

où $\vartheta_i' = \beta(s_i')$ et $\vartheta_{i-1} \leqslant \vartheta_i' \leqslant \vartheta_i$. Evidemment $\beta(\vartheta_{i-1}) \leqslant \beta(s_i') = \vartheta_i' \leqslant \beta(\vartheta_i)$. En vertu de (3) on a $\beta(\vartheta_{i-1}) = \beta[\alpha(t_{i-1})] = t_{i-1}$ et d'une façon analogue $\beta(\vartheta_i) = t_i$. Par conséquent

$$t_{i-1} \leqslant \vartheta_i' \leqslant t_i\,,$$

donc

$$I_i = x(\vartheta_i')\,[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]\,,$$

---

[1] Cf. H. Lebesgue, l. c., p. 258 — 260.

d'où

$$\int\limits_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x\,[\beta\,(s)]\,ds = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} x\,(\vartheta_i{}')\,[\alpha\,(t_i) - \alpha\,(t_{i-1})]\,. \tag{4}$$

Or, cette dernière somme tendant vers $\int\limits_a^b x\,(t)\,d\alpha\,(t)$, lorsque la longueur maximum des intervalles de la subdivision (δ) tend vers 0, l'égalité (4) donne l'égalité (3), q. f. d.

Ceci établi, si l'on admet que $\alpha\,(t)$ est une fonction quelconque à variation bornée, on peut la représenter toujours comme une différence $\alpha_1(t) - \alpha_2(t)$ où les fonctions $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ sont croissantes; en désignant comme auparavant par $\beta_1(s)$ et $\beta_2(s)$ les fonctions correspondantes, nous obtenons

$$\int\limits_a^b x\,(t)\,d\alpha\,(t) = \int\limits_a^b x\,(t)\,d\alpha_1(t) - \int\limits_a^b x\,(t)\,d\alpha_2(t) =$$

$$= \int\limits_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x\,[\alpha_1(s)]\,ds - \int\limits_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x\,[\alpha_2\,(s)]\,ds\,.$$

Si les fonctions $x_n(t)$ sont continues et bornées dans leur ensemble et la suite $\{x_n(t)\}$ converge partout vers une fonction continue $x\,(t)$, on a pour toute fonction $\alpha\,(t)$ à variation bornée

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b x_n(t)\,d\alpha\,(t) = \int\limits_a^b x\,(t)\,d\alpha\,(t)\,,$$

car

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x_n[\beta_1(s)]\,ds = \int\limits_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x\,[\beta_1(s)]\,ds \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x_n[\beta_2(s)]\,ds = \int\limits_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x_n[\beta_2(s)]\,ds\,.$$

§ 6. *Le théorème de Lebesgue.*

Notons encore le théorème suivant.

Pour qu'une suite de fonctions sommables $\{x_n(t)\}$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ remplisse l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \alpha(t)\, x_n(t)\, dt = 0$$

pour toute fonction $\alpha(t)$ mesurable et bornée dans $[0, 1]$, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes se trouvent simultanément satisfaites:

1º la suite $\left\{\int_0^1 |x_n(t)|\, dt\right\}$ est bornée,

2º pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ tel que tout sous-ensemble H de $[0,1]$ de mesure $< \eta$ donne lieu à l'inégalité $\left|\int_H x_n(t)\, dt\right| \leqslant \varepsilon$, quel que soit $n = 1, 2, \ldots$,

3º $\lim_{n\to\infty}\int_0^u x_n(t)\, dt = 0$ pour tout $0 \leqslant u \leqslant 1$ [1].

Nous connaîtrons dans la suite d'autres théorèmes de ce genre.

B. Ensembles et opérations mesurables (B) dans les espaces métriques.

§ 7. *Espaces métriques.*

Etant donné un ensemble non vide E, on dit qu'il constitue un *espace métrique* ou *espace* (D), lorsqu'à tout couple ordonné x, y de ses éléments correspond un nombre (x, y) satisfaisant aux conditions [1]:

1) $(x, x) = 0$, $(x, y) > 0$ *lorsque* $x \neq y$,

2) $(x, y) = (y, x)$,

3) $(x, z) \leqslant (x, y) + (y, z)$.

---

[1]) H. Lebesgue, Annales de Toulouse 1909.

[1]) Les trois conditions 1) — 3) peuvent être remplacées par les deux suivantes: 1*) $(x, y) = 0$ *équivaut à* $x = y$, 2*) $(x, z) \leqslant (x, y) + (z, y)$. Cf. A. Lindenbaum, *Sur les espaces métriques*, Fundamenta Mathematicae VIII (1926), p. 211.

Le nombre (x, y) s'appelle *distance* des points (des éléments) x, y. Une suite de points $\{x_n\}$ est dite *convergente*[1]), lorsque

(5) $$\lim_{p,q\to\infty}(x_p, x_q) = 0;$$

on l'appelle *convergente vers le point* x_0 (ce qu'on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), lorsque

(6) $$\lim_{n\to\infty}(x_n, x_0) = 0.$$

Le point x_0 porte alors le nom de *limite* (ou de *point-limite*) de la suite $\{x_n\}$.

Il est facile de voir que la relation (6) entraîne (5), car on a toujours

$$(x_p, x_q) \leqslant (x_p, x_0) + (x_q, x_0).$$

Par conséquent, une suite convergente vers un point est par cela-même une suite convergente; bien entendu, la réciproque n'est pas toujours vraie.

L'espace (D) à propriété que toute suite convergente y converge vers un certain point est dit *complet*.

L'espace (D) tel que toute suite infinie de ses points contient une suite convergente vers un point s'appelle *compact*.

Les espaces euclidiens constituent autant d'exemples des espaces (D) complets. Nous en allons énumérer ici une série d'autres exemples importants.

1. *Soit* (S) *l'ensemble des fonctions mesurables* dans l'intervalle $[0,1]$. Faisons correspondre à tout couple ordonné x, y d'éléments de cet ensemble[2]) le nombre

$$(x, y) = \int_0^1 \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|}\, dt.$$

[1]) Les suites convergentes dans notre sens sont appelées d'habitude „suites satisfaisant à la *condition de Cauchy*", c. à. d. précisément à la condition (5).

[2]) Nous posons: $x = x(t)$ et $y = y(t)$, resp. $x_n = x_n(t)$ et $x_0 = x_0(t)$, dans tous les exemples où x et y, resp. x_n et x_0, sont des éléments d'un ensemble de fonctions.

On vérifie facilement que les conditions 1)—3), énoncées plus haut pour la distance, se trouvent remplies. En effet, quant aux conditions 1) et 2), c'est évident (nous ne distinguons pas entre les fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle) et pour se convaincre que la condition 3) est également réalisée, il suffit de remarquer que l'on a pour tout couple de nombres arbitraires a, b:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Ainsi „métrisé", l'ensemble (S) forme donc un espace (D); cet espace est complet, car la convergence d'une suite $\{x_n\}$ de ses points (vers un point x_0) s'y ramène à la convergence en mesure de la suite des fonctions $\{x_n(t)\}$ (vers la fonction $x_0(t)$ dans $[0, 1]$.

2. *Soit (s) l'ensemble de toutes les suites de nombres.* Posons pour tout couple ordonné x, y de ses éléments [1]):

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}.$$

L'ensemble (s) forme alors un espace (D) complet. En effet, la convergence d'une suite de points $\{x_m\}$, resp. sa convergence vers un point x_0, y signifie (en posant $x_m = \{\xi_n^{(m)}\}$ et $x_0 = \{\xi_n\}$) que pour tout n naturel chacune des suites $\{\xi_n^{(m)}\}$ est convergente, resp. converge vers ξ_n, à mesure que m tend vers l'infini.

3. *Soit (M) l'ensemble des fonctions mesurables et bornées* dans $[0, 1]$. Si l'on pose pour tout couple x, y de ses éléments

$$(x, y) = \text{vrai} \underset{0 \leqslant t \leqslant 1}{\text{maximum}} |x(t) - y(t)|,$$

---

[1]) Nous posons $x = \{\xi_n\}$ et $y = \{\eta_n\}$ dans tous les exemples des espaces de suites.

on en obtient un espace (D) complet. La convergence d'une suite de points $\{x_n\}$ (vers un point x_0) s'y traduit par la convergence uniforme presque partout dans [0,1] de la suite des fonctions $\{x_n(t)\}$ (vers la fonction $x_0(t)$).

4. *Soit* (m) *l'ensemble des suites bornées de nombres.* En posant

$$(x, y) = \underset{1 \leqslant n < \infty}{\text{borne sup}} \, |\xi_n - \eta_n|,$$

on obtient d'une façon évidente de (m) un espace (D) complet.

5. *Soit* (C) *l'ensemble des fonctions continues* dans [0,1]. Posons pour tout couple x, y de ses éléments

$$(x, y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|.$$

L'ensemble (C) forme alors un espace (D) complet; la convergence d'une suite de ses points $\{x_n\}$ (vers un point x_0) se ramène à la convergence uniforme dans [0,1] de la suite des fonctions $\{x_n(t)\}$ (vers la fonction $x_0(t)$).

6. *Soit* (c) *l'ensemble des suites convergentes* de nombres. En définissant pour tout couple x, y de ses éléments leur distance (x, y) tout comme nous l'avons fait dans l'ensemble (m), on voit facilement que l'ensemble (c) forme également un espace (D) complet.

7. *Soit* $(C^{(p)})$ *l'ensemble des fonctions à p-ième dérivée continue* dans [0,1]. En posant

$$(x, y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)| + \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(p)}(t) - y^{(p)}(t)|,$$

nous en obtenons un espace (D) complet. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de points $\{x_n\}$ y soit convergente (vers un point x_0) est que la suite des fonctions $\{x_n(t)\}$, de-même que celle des fonctions $\{x_n^{(p)}(t)\}$, convergent uniformément dans [0,1] (la première vers la fonction $x_0(t)$ et la seconde vers la fonction $x_0^{(p)}(t)$).

8. *Soit* ($L^{(p)}$) où $p \geqslant 1$ *l'ensemble des fonctions à p-ième puissance sommable* dans [0, 1]. En posant

$$(x, y) = \left[\int_0^1 | x(t) - y(t) |^p \right]^{\frac{1}{p}},$$

nous voyons que l'ensemble ($L^{(p)}$) devient un espace (D) complet. Pour qu'une suite $\{x_n\}$ de ses points soit convergente (vers le point x_0), il faut et il suffit, que la suite des fonctions $\{x_n(t)\}$ soit dans [0, 1] à p-ième puissance convergente en moyenne (vers la fonction $x_0(t)$).

9. *Soit* ($l^{(p)}$) où $p \geqslant 1$ *l'ensemble des suites de nombres tels que la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} | \xi_n |^p$ *est convergente.* En posant pour les éléments x, y de ($l^{(p)}$)

$$(x, y) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n - \eta_n |^p \right]^{\frac{1}{p}},$$

on en obtient un espace (D) complet.

10. *L'ensemble des fonctions analytiques* $f(z)$ *uniformément continues* dans le cercle $|z| \leqslant 1$ forme un espace (D) complet, lorsqu'on définit la distance de deux fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ comme

$$\max_{|z| \leqslant 1} | f(z) - \varphi(z) | .$$

Il est à remarquer que l'on peut définir *les ensembles des fonctions à n variables correspondant aux exemples* 3, 5, 7 et 8.

§ 8. *Ensembles dans les espaces métriques.*

Soient E un espace (D) quelconque et G un ensemble arbitraire d'éléments (de points) de E.

Un point x_0 est dit *point d'accumulation* de l'ensemble G, lorsqu'il existe une suite de points $\{x_n\}$ telle que $x_0 \neq x_n \subset G$ pour tout n et que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. L'ensemble de tous les points d'accumulation de G s'appelle son *ensemble dérivé* et on le désigne par G'. L'ensemble

$$\overline{G} = G + G'$$

porte le nom de *fermeture* de l'ensemble G; l'ensemble G s'appelle *fermé*, lorsque $G' \subset G$ et il s'appelle *parfait*, lorsque $G' = G$. On dit d'un ensemble G qu'il est *ouvert*, lorsque son complémentaire (c. à d. l'ensemble $E - G$) est un ensemble fermé. Tout ensemble ouvert s'appelle aussi *entourage* (ou *voisinage*) de chacun de ses points.

Etant donné un point $x_0 \subset E$ et un nombre $r_0 > 0$, l'ensemble de tous les points x tels que $(x, x_0) \leqslant r_0$ s'appelle une *sphère* et celui des x tels que $(x, x_0) < r_0$ s'appelle une *sphère ouverte*; le point x_0 est dit *centre* et le nombre r_0 *rayon* de cette sphère, resp. de cette sphère ouverte. On dit d'un ensemble G, qu'il est *dense*, lorsque $\overline{G} = E$ et qu'il est *non dense*, lorsque $\overline{G}$ ne contient aucune sphère.

L'espace E est dit *séparable*, lorsqu'il contient un ensemble dense dénombrable. Il est facile de voir que *tout espace métrique compact* (c. à d. dont toute suite infinie de points contient une suite convergente; cf. p. 9) *est séparable.*

Un ensemble G est dit *de I-e catégorie*, lorsqu'il est une somme dénombrable d'ensembles non denses; dans le cas contraire il est dit *de II-e catégorie.* Un ensemble G est *de I-e catégorie dans un point* x_0, lorsqu'il existe un entourage V de x_0 tel que l'ensemble $G \cdot V$ est de I-e catégorie; si tous les entourages du point x_0 sont dépourvus de cette propriété, on dit que l'ensemble G est *de II-e catégorie au point* x_0.

On peut démontrer le suivant

Théorème 1. *Si un ensemble G situé dans un espace métrique quelconque E est de II-e catégorie, il existe dans E une sphère K telle que l'ensemble G est de II-e catégorie en tout point de $G \cdot K$*[1]*.*

---

[1]) Pour la démonstration voir S. Banach, *Théorème sur les ensembles de première catégorie*, Fundamenta Mathematicae XVI (1930), p. 395.

Admettons à présent que E soit un espace (D) *complet*. Nous allons démontrer le

Lemme. *Etant donnée dans E une suite $\{K_n\}$ de sphères de rayons r_n telles que $K_{n+1} \subset K_n$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$ et $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, il existe un point commun à toutes ces sphères.*

Démonstration. Soit x_n le centre de la sphère K_n. On a par hypothèse pour $p < q$ naturels $x_q \subset K_q \subset K_p$, d'où

$$(x_p, x_q) \leqslant r_p. \tag{7}$$

Il en résulte que la suite de points $\{x_n\}$ est convergente. En posant (l'espace E étant complet) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, on a pour $p < q$ selon (7) $(x_p, x_0) \leqslant (x_p, x_q) + (x_q, x_0) \leqslant r_p + (x_q, x_0)$, d'où $(x_p, x_0) \leqslant r_p$. Or, p étant arbitraire, le point x_0 appartient à toutes les sphères K_n, c. q. f. d.

Une simple conséquence de ce lemme est le

Théorème 2. *Tout espace métrique et complet E est de II-e catégorie.*

Démonstration. Supposons par contre que

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} G_n, \tag{8}$$

où chacun des ensembles G_n est non dense. Il existe par conséquent une suite de sphères $\{K_n\}$ de rayons $\{r_n\}$ à propriétés suivantes: $K_1 \cdot G_1 = 0$, $r_1 < 1$ *et* $K_{n+1} \subset K_n$, $K_{n+1} \cdot G_{n+1} = 0$, $r_{n+1} < \dfrac{1}{n+1}$.

En vertu du lemme, il existe donc un point x_0 qui appartient à toutes ces sphères. Or, comme $K_n \cdot G_n = 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, ce point ne peut appartenir à aucun E_n, contrairement à (8).

Soit maintenant E un espace (D) quelconque et E^* un ensemble arbitraire de points de E. Si l'on conserve pour les élements de E^* la même definition de la distance que celle adoptée dans l'espace E, on obtient de E^* également un certain espace (D).

Considérons un ensemble $G \subset E^*$. S'il est p. ex. non dense, lorsqu'on l'envisage dans l'espace E^*, on dit qu'il est *non dense par rapport à (l'ensemble)* E^*; ce n'est que dans le cas où $E^* = E$ que nous omettons d'habitude les mots „par rapport à (l'ensemble) E^*". On fait de-même, lorsqu'il s'agit des autres définitions qui ont été introduites au début de ce §.

Le théorème 1 implique que si l'ensemble G est de I-e catégorie dans tous ses points par rapport à E^*, il est de I-e catégorie par rapport à E^*. D'une façon analogue, le théorème 2 implique que lorsque l'espace métrique E est complet et l'ensemble E^* est fermé, cet ensemble est de II-e catégorie par rapport à lui-même.

Considérons dans un espace (D) arbitraire E la plus petite classe K d'ensembles de cet espace satisfaisant aux conditions suivantes:

1) tout ensemble fermé appartient à K,

2) toute somme dénombrable d'ensembles appartenant à K appartient à K,

3) tout complément d'un ensemble appartenant à K appartient à K.

Les ensembles de la classe K s'appellent „*ensembles mesurables* (B)". On dit d'un ensemble G qu'il *remplit la condition de Baire*, lorsque tout ensemble parfait $P (\neq 0)$ contient un point x_0 tel qu'au moins un des ensembles: $P \cdot G$ et $P - G$ est de I-e catégorie dans le point x_0 par rapport à P.

On a le

Théorème 3. *Tout ensemble mesurable* (B) *remplit la condition de Baire* [1]).

§ **9.** *Opérations dans les espaces métriques.*

Soient E et E_1 des ensembles non vides arbitraires. Si l'on fait correspondre à tout élément $x \subset E$ un certain élément de E_1

---

[1]) Pour la démonstration cf. S. Banach, l. c., p. 398.

on dit qu'une *opération* est définie dans l'ensemble E. L'élément correspondant à x s'appelle *valeur* de cette opération en x; l'ensemble E porte le nom de *domaine* et l'ensemble des valeurs celui de *contredomaine* de l'opération considérée. Dans le cas particulier où les valeurs de l'opération donnée sont des nombres, on l'appelle d'habitude une *fonctionnelle*.

Ceci dit, admettons que l'ensemble E constitue un espace (D) et soit $U(x)$ une opération ayant E pour domaine et un certain espace (D) pour contredomaine. L'opération $U(x)$ s'appelle *continue au point* x_0, lorsque, pour toute suite de points $\{x_n\}$ convergente vers le point x_0, on a $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = U(x_0)$; l'opération $U(x)$ s'appelle *continue dans* E, lorsqu'elle l'est en tout point de cet espace. Etant donnée une suite d'opérations $\{U_n(x)\}$ et une opération $U_0(x)$ définies dans E et les contredomaines de toutes ces opérations faisant partie d'un même espace (D), on dit que cette suite d'opérations est *convergente au point* x_0 vers l'opération $U_0(x)$, lorsque la suite des valeurs $U_n(x_0)$ converge vers $U_0(x_0)$; la suite d'opérations $\{U_n(x)\}$ est *convergente dans* E *vers l'opération* $U_0(x)$, lorsqu'elle l'est en tout point de E. Si la suite d'opérations $\{U_n(x)\}$ est convergente dans E vers l'opération $U_0(x)$, cette dernière opération s'appelle *limite de* $\{U_n(x)\}$ *dans* E. Au lieu de dire „opération continue dans E", on dit plus court „opération continue", lorsqu'il est entendu de quel espace il s'agit; on fait de-même pour les autres termes.

Soit K la plus petite classe d'opérations (ayant pour domaine commun un espace (D) donné E et pour contredomaines respectifs des ensembles situés également dans un certain espace (D)) qui satisfait aux conditions:

1) toute opération continue appartient à K,

2) toute limite d'une suite convergente d'opérations qui appartiennent à K appartient à K.

Les opérations de cette classe portent le nom *d'„opérations mesurables* (B)".

On dit d'une opération $U(x)$ à domaine E et à contredomaine étant également un espace (D) qu'elle *remplit la condition de Baire*, lorsque dans tout ensemble parfait non vide $P \subset E$ il existe un ensemble G de I-e catégorie par rapport à P et tel que l'opération $U(x)$, considérée dans l'espace $P - G$, est continue dans cet espace.

On a le

Théorème 4. *Toute opération mesurable (B) remplit la condition de Baire*[1].

On peut démontrer également le

Théorème 5. *Si l'opération $U(x)$ définie dans l'espace E y est une limite d'opérations continues, il existe dans E un ensemble G de I-e catégorie tel que l'opération $U(x)$ est continue en chaque point de l'ensemble $E - G$.*

Le théorème suivant établit une relation entre les ensembles mesurables (B) et les opérations mesurables (B); soient E l'espace (D) où elles sont définies et E_1 l'espace qui contient leurs valeurs.

Théorème 6. *L'opération $U(x)$ étant mesurable (B), pour tout ensemble $G_1 \subset E_1$ mesurable (B) l'ensemble G des points x tels que $U(x) \subset G_1$ est mesurable (B)*[2].

Théorème 7. *Si les espaces E et E_1 sont séparables et l'opération $U(x)$ est continue dans E, alors les images des ensembles $G \subset E$ mesurables (B) remplissent la condition de Baire. Si, en outre, $x \neq x'$ entraîne toujours $U(x) \neq U(x')$, les images des ensembles mesurables (B) sont aussi mesurables (B).*

La première partie du théorème résulte du fait que l'image continue d'un ensemble mesurable (B) est toujours un ensemble ainsi dit „analytique“[3]) et que tout ensemble analytique remplit la condition de Baire[4]). La démonstration de la deuxième

---

[1]) Pour la démonstration cf. S. Banach, l. c., p. 397.

[2]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1927, p. 195, II.

[3]) Cf. p. ex. F. Hausdorff, l. c., p. 179, 208 et 209, II.

[4]) Cf. O. Nikodym, *Sur une propriété de l'opération A*, Fundamenta Mathematicae VII (1925), p. 149—154; la démonstration pour les espaces eucli-

partie du théorème se trouve aussi dans le livre de F. Hausdorff[1]).

Théorème 8. *Si les opérations $U'(x)$ et $U''(x)$ sont mesurables (B), la fonctionnelle $(U'(x), U''(x))$ l'est également.*

La démonstration résulte du fait que si les opérations $U'(x)$ et $U''(x)$ sont continues, la fonctionnelle $(U'(x), U''(x))$ est aussi continue et que pour tout point $y_0 \subset E_1$ la fonctionelle $(y, y_0) = (y_0, y)$ est continue dans E_1.

Théorème 9. *$\{U_n(x)\}$ étant une suite d'opérations mesurables (B), l'ensemble des points où cette suite est convergente est un ensemble mesurable (B).*

Démonstration. Soit pour p, q et r naturels $G_{p,q,r}$ l'ensemble des points x tels que $(U_p(x), U_q(x)) \leqslant \frac{1}{r}$. En vertu des théorèmes 6 et 8 les ensembles $G_{p,q,r}$ sont mesurables (B). Or, on a $G = \prod\limits_{r=1}^{\infty} \sum\limits_{p=1}^{\infty} \prod\limits_{q=p}^{\infty} G_{p,q,r}$, donc G est mesurable (B).

Théorème 10. *$\{U'_n(x)\}$ et $\{U''_n(x)\}$ étant des suites d'opérations mesurables (B), si pour tout $x \subset E$ on a $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, (U'_n(x), U''_n(x)) < \infty$, la fonctionnelle $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, (U'_n(x), U''_n(x))$ est mesurable (B).*

Démonstration. Posons pour tout couple de nombres naturels p, q et pour tout point x:

$$F_{p,q}(x) = \max_{p \leqslant n \leqslant p+q+1} (U'_n(x), U''_n(x)).$$

On a évidemment pour tout x:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, (U'_n(x), U''_n(x)) = \lim_{p\to\infty} \lim_{q\to\infty} F_{p,q}(x).$$

---

diens, qui s'y trouve, s'applique facilement au cas général, lorsqu'on tient compte du théorème précité sur les ensembles de I-e catégorie (S. Banach, l. c., p. 395).

[1]) l. c., p. 208, II.

Il suffit donc de montrer que chacune des fonctionnelles $F_{p,q}(x)$ est mesurable (B). Or, d'après le théorème 8, chacune des fonctionnelles $F_{p,1}(x) = (U'_p(x), U''_p(x))$ est mesurable (B) et comme on a pour tout $q > 1$:

$$F_{p,q+1}(x) = F_{p,q}(x) + F_{p+q,1}(x) + |F_{p,q}(x) - F_{p+q,1}(x)|,$$

on en conclut par induction, en appliquant encore le théorème 8, que toutes les fonctionnelles $F_{p,q}(x)$ sont mesurables (B).

Théorème 11. *Etant donnée une suite de fonctionnelles continues et non-négatives $\{F_n(x)\}$ telles que l'on a $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} F_n(x) < \infty$ pour tout élément x d'un ensemble $G \subset E$ de II-e catégorie, il existe une sphère $K \subset E$ et un nombre N tel que $F_n(x) \leqslant N$ pour tout $x \subset K$ et pour tout $n = 1, 2, \ldots$*

Démonstration. Les ensembles G_i des points x tels que $F_n(x) \leqslant i$ pour $n = 1, 2, \ldots$ sont évidemment fermés et on a $G \subset \sum\limits_{i=1}^{\infty} G_i$; il existe donc un indice N tel que G_N est de II-e catégorie. Comme ensemble fermé, il contient par conséquent une sphère K en question.