# Листок 1. Буквы помогают

$\boxed{\mathbf{1}}$ Что больше: **а)** $\dfrac{20182017}{20172018}$ или $\dfrac{20182018}{20172019}$; **б)** $\dfrac{12345}{54321}$ или $\dfrac{12346}{54322}$?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Незнайка заметил, что

$$11 - 2 = 9 = 3^2,$$
$$1111 - 22 = 1089 = 33^2.$$

Он предположил, что число

$$\underbrace{1\ldots1}_{2n} - \underbrace{2\ldots2}_{n}$$

будет полным квадратом при любом натуральном $n$. Помогите Незнайке это доказать.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Мальвина учила Буратино сокращать дроби и дала ему контрольное задание: сократить дроби $\dfrac{16}{64}$ и $\dfrac{19}{95}$. Увидев правильные ответы, Мальвина было порадовалась, но взглянув на решение, пришла в ужас:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4} \qquad \frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5}$$

Придя в себя, Мальвина решила найти все такие цифры от 1 до 9, для которых выполняется равенство

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c}$$

($\overline{ab}$ и $\overline{bc}$ — двузначные числа), причём дробь $\dfrac{a}{c}$ может быть сократимой. Отыщите и вы все такие дроби.

# Листок 2. Связные графы

**1** Соедините сто городов наименьшим числом авиалиний так, чтобы из каждого города можно было попасть в любой, сделав не более двух пересадок?

**2** В тридевятом царстве от любого города до любого другого можно долететь без пересадок либо на ковре-самолёте, либо на метле. Докажите, что от любого города до любого другого можно долететь, пользуясь только одним из этих видов транспорта, хотя, возможно, и с пересадками в других городах.

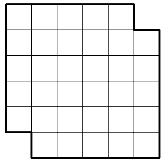
**3** Жители Лунного города могут добраться на метро от любой станции до любой другой. Однажды сотрудники метро устроили забастовку и потребовали от мэрии закрыть одну станцию. Докажите, что мэрия может выбрать эту станцию так, чтобы между любыми двумя другими по-прежнему было сообщение.

**4** Воллейбольная сетка имеет размеры $50 \times 600$. Какое наибольшее число верёвочек в ней можно разрезать, чтобы сетка не распалась на куски?

**5** Гидры состоят из голов и шей (каждая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча Геракл можно разрубить все шеи, выходящие из какой-то одной головы, однако при этом из неё мгновенно вырастает по одной шее во все остальные головы (не соединённые с ней ранее). Геракл побеждает гидру, если ему удастся разрубить её на две несвязанные шеями части. При каком наименьшем $N$ Геракл может победить любую стошеюю гидру, нанеся не более $N$ ударов?

# Листок 3. Раскраски

В задачах этого листка вам поможет та или иная раскраска доски.

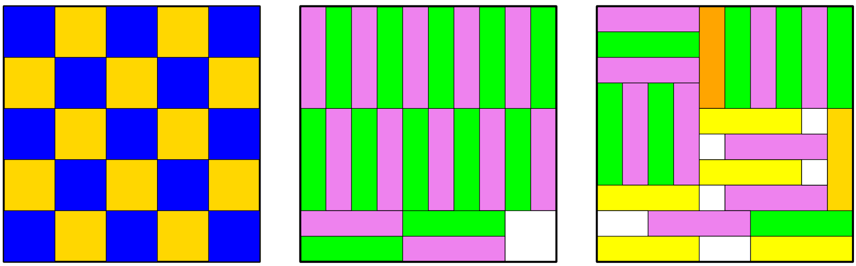


**1** У доски $6 \times 6$ вырезали две угловые клетки на диагонали (см. рисунок). Можно ли разрезать оставшуюся часть на доминошки из двух клеток?

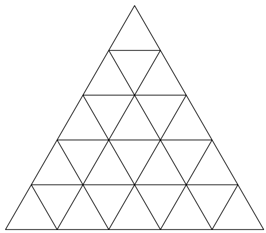
**2** **Переполох.** В каждой клетке квадрата $5 \times 5$ сидит жук. Вдруг все жуки переползли на соседние клетки (по стороне). Возможно ли, что и теперь в каждой клетке сидит по жуку?

**3** **Путешествие коня.** Шахматный конь хочет отправиться в путешествие по шахматной доске. Может ли он пройти с поля a1 на поле h8, побывав на каждом поле ровно по одному разу?

**4** Незнайка легко замощает доску $10 \times 10$ квадратами $2 \times 2$, а вот полосками из четырёх клеток у него никак не получается (см. рисунки). А в принципе это возможно?



**5** Треугольник разбит на треугольнички (25 штук), как показано на рисунке. Жук может ходить по треугольнику, переходя между соседними (по стороне) треугольничками. Какое максимальное количество треугольничков может пройти жук, если в каждом он побывал не больше одного раза?



**6** Можно ли покрыть доску $6 \times 6$ одиннадцатью полосками из трёх клеток и одним уголком из трёх клеток?

# Листок 4. Раскраски-2

$\boxed{\mathbf{1}}$ На столе рубашкой вниз лежит игральная карта. Можно ли, перекатывая её по столу через ребро, добиться того, чтобы она оказалась на прежнем месте, но **а)** рубашкой вверх; **б)** рубашкой вниз и вверх тормашками?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Можно ли шахматную доску покрыть 15 горизонтальными и 17 вертикальными доминошками? (Каждая доминошка покрывает две клетки.)

$\boxed{\mathbf{3}}$ Кусок сыра имеет форму кубика $3 \times 3 \times 3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик $1 \times 1 \times 1$. После того, как мышь съедает очередной кубик $1 \times 1 \times 1$, она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?

$\boxed{\mathbf{4}}$ На клетчатой бумаге отмечены произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них всегда можно выбрать не менее 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом (соприкасающимися считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину).

$\boxed{\mathbf{5}}$ Миша и Коля сыграли в «Морской бой» по необычным правилам. Миша расставил 21 трёхпалубный корабль (прямоугольник из трёх клеток) на доске $8 \times 8$, а Коля сделал один выстрел и... промахнулся. В какую клетку он мог стрелять? Укажите все возможные варианты.

# Листок 5. Комбинаторика

**1** Сколькими способами можно прочитать слово СТРОКА, двигаясь по буквам вниз и вправо?

С Т Р О К А
Т Р О К А
Р О К А
О К А
К А
А

**2** Сколькими способами можно разбить: **а)** четырёх человек на две пары; **б)** десять человек на пять пар; **в)** десять человек на две равные команды; **г)** девять человек на три тройки?

**3** *Шахматы Фишера.* Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматные фигуры (короля, ферзя, две ладьи, два слона и два коня) так, чтобы слоны стояли на полях разного цвета и король стоял между ладьями (необязательно по соседству).

**4** В выпуклом $n$-угольнике провели все диагонали. Оказалось, что никакие три из них не пересекаются в одной точке. Сколько всего точек пересечения у диагоналей?

**5** Забор состоит из ста досок. Тётушка Полли поручила Тому Сойеру покрасить каждую доску в один из цветов: красный, жёлтый, синий, зелёный, при этом соседние доски должны быть непременно покрашены в разные цвета. Сколькими способами Том может выполнить задание, если доски в заборе стоят **а)** в ряд; **б)** по кругу?

# Листок 6. На чём сэкономить?

**1** Восесь кузнецов должны подковать десять лошадей. Каждый кузнец тратит на одну подкову 5 минут. Какое наименьшее время они должны потратить на работу? (Учтите, лошадь не может стоять на двух ногах, но может стоять на трёх.)

**2** Папе, маме, сыну и бабушке понадобилось тёмной ночью перейти по хлипкому мостику через реку. Мостик может выдержать только двоих одновременно. К тому же на всех имеется только один фонарик, без которого нельзя сделать ни шагу. Папа может перейти через мостик в одну сторону за 1 минуту, мама — за 2 минуты, сын — за 5, а бабушка — за 10. За какое минимальное время все они смогут перебраться на другой берег? (Когда через мостик идут двое, они идут со скоростью того, кто ходит медленнее).

**3** Найдите натуральное число с наименьшей суммой цифр, кратное 14.

**4** В пруд пустили 30 щук, которые стали кушать друг друга. Щука считается сытой, если она съела хотя бы трёх щук. Какое наибольшее количество щук могло насытиться, если съеденные сытые щуки при подсчёте тоже учитываются?

**5** На старт „Весёлого забега“ на 3000 м выходит команда из трёх математиков. Им выдаётся один одноместный самокат. Дорога прямая, стартуют все одновременно, а в зачёт идет время последнего пришедшего на финиш. Каково минимальное возможное время прохождения дистанции, если бегают все трое со скоростью 125 м/мин, а на самокате ездят со скоростью 250 м/мин?

# Листок 7.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Миша, Паша, Саша, Яша и Наташа провели турнир по настольному теннису, играя парами так, что каждые двое сыграли с каждыми двумя другими один раз. В результате Саша проиграл 12 игр, а Яша — 6. Сколько игр выиграла Наташа? (Ничьих в теннисе не бывает.)

$\boxed{\mathbf{2}}$ В остроугольном треугольнике наименьший угол составляет $1/5$ наибольшего, величины всех углов составляют целое число градусов и все эти величины различны. Определите их.

$\boxed{\mathbf{3}}$ У крестьянина были коза, корова, кобыла, стог сена и сын. Сын подсчитал, что сена хватит козе и кобыле на месяц, кобыле и корове на треть месяца, а корове и козе — на три четверти месяца. Отец сказал, что сын плохо учится в школе. Почему отец решил, что сын ошибся?

# Листок 8. Чётность

**1** Николай с сыном и Пётр с сыном пошли на рыбалку. Николай поймал столько же рыб, сколько его сын, а Пётр — столько же, сколько его сын. Все вместе поймали 27 рыб. Сколько рыб поймал Николай?

**2** На столе стоят семь стаканов — все вверх дном. За один ход можно перевернуть любые четыре стакана. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

**3** Можно ли число 101010 представить в виде разности квадратов двух целых чисел?

**4** В начале времён в Ачухонии жили 100 рыцарей, 99 принцесс и 101 дракон. Рыцари убивают драконов, драконы едят принцесс, а принцессы изводят до смерти рыцарей. Древнее заклятие запрещает убивать того, кто сам погубил нечётное число других жителей. Сейчас в Ачухонии остался всего один житель. Кто это?

**5** На шахматной доске стоят восемь не бьющих друг друга ладей. Докажите, что число ладей, стоящих на чёрных клетках, чётно.

**6** В однокруговом турнире по матбоям участвовали восемь команд из восьми разных школ. Каждый бой проходил в одной из школ-участниц. Могло ли случиться так, что каждая команда сыграла во всех школах, кроме своей?

# Листок 9. Одна задача – хорошо, а две – лучше

**1** **а)** Разрежьте фигуру на рисунке 1, составленную из пяти квадратов, на части и сложите из них один квадрат.

**б)** Каждая сторона квадрата разделена на три равные части, и некоторые из точек деления соединены с вершинами треугольника так, как показано на рисунке 2. Во сколько раз площадь большого квадрата больше площади закрашенного?

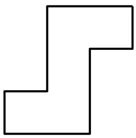


Рисунок 1

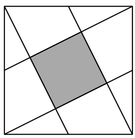


Рисунок 2

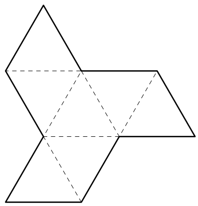


Рисунок 3

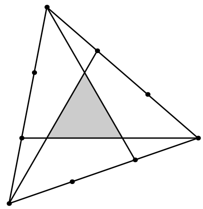


Рисунок 4

**2** **а)** Разрежьте фигуру на рисунке 1, составленную из семи правильных треугольников, на четыре части и сложите из них правильный треугольник.

**б)** Каждая сторона правильного треугольника разделена на три равные части, и некоторые из точек деления соединены с вершинами треугольника так, как показано на рисунке 2. Во сколько раз площадь большого треугольника больше площади закрашенного?

**3** **а)** На рисунке 5 в трапеции проведены диагонали. Докажите, что площади зелёных треугольников равны.

**б)** *Задача Абу-ль Вефы* (из „Книги о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений“, X век н. э.). На рисунке 6 $BE = EC$. Докажите, что отрезок $GD$ делит $\triangle ABC$ на две равновеликие части.

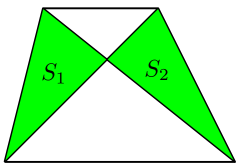



Рисунок 5

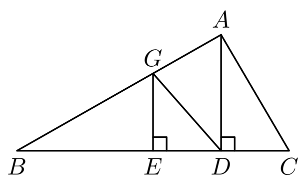
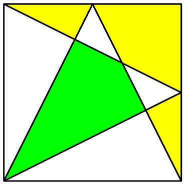


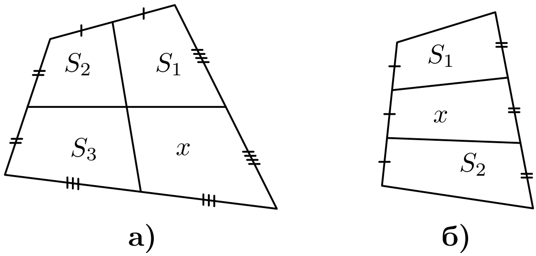

Рисунок 6

# Листок 10. Сшит колпак, да не по-колпаковски

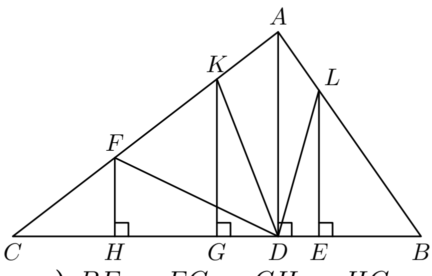
**1** В квадрате середины двух сторон соединили с вершинами, как показано на рисунке. Докажите, что жёлтая и зелёная части равновелики.



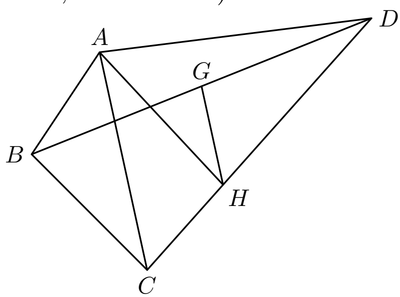
**2** Найдите неизвестную площадь $x$ по рисунку:




**3** *Задачи Абу-ль Вефы* (из „Книги о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений", X век н. э.).

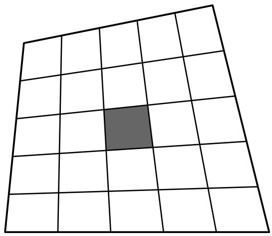



**а)** $BE = EG = GH = HC$.
Докажите: $S_{CFD} = S_{FKD} = S_{KALD} = S_{LBD}$.




**б)** $BG = GD$, $GH \parallel AC$.
Докажите: $S_{ABCH} = S_{ADH}$.

**4** Каждая из сторон выпуклого четырёхугольника разделена на пять равных частей и соответствующие точки противоположных сторон соединены. Докажите, что площадь среднего (закрашенного) четырёхугольника в 25 раз меньше площади исходного.



# Листок 11. В целых числах

$\boxed{\mathbf{1}}$ Поставьте вместо звёздочек такие цифры, чтобы число $32*35717*$ делилось на 72.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Вася задумал целое число. Коля умножил его не то на 5, не то на 6. Женя прибавил к результату Коли не то 5, не то 6. Саша отнял от результата Жени не то 5, не то 6. В итоге получилось 73. Какое число мог задумать Вася? Укажите все возможные варианты.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Придумайте какие-нибудь натуральные $x, y, z$, для которых

$$28x + 30y + 31z = 365.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ На какую цифру оканчивается число $7^{7^7}$?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Решите уравнение $4x^2 - 1 = y^3$ в целых числах.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Легко посчитать, что $12^2 = 144$, $38^2 = 1444$. А может ли полный квадрат оканчиваться четырьмя четвёрками?

# Листок 12. Рыцари и лжецы

$\boxed{\mathbf{1}}$ На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого: „Сколько рыцарей среди твоих спутников?" Первый ответил: „Ни одного", второй ответил: „Один". Что сказал третий?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Путешественник, попавший на остров рыцарей и лжецов, встретил четырёх островитян и задал им вопрос: „Кто вы?" Он получил такие ответы:

Первый: „Все мы лжецы".

Второй:„Среди нас один лжец".

Третий: „Среди нас два лжеца".

Четвёртый:„Я ни разу в жизни не соврал, и сейчас не вру".

Путешественник сразу сообразил, кем является четвёртый островитянин. Как он это сделал?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Однажды на острове судили трёх обвиняемых, о которых известно, что среди них один иностранный шпион (может говорить так, как ему удобно — иногда говорит правду, иногда врёт), один рыцарь и один лжец (но неизвестно, кто есть кто). Они дали следующие показания:

Первый: „Третий обвиняемый — лжец".

Второй: „Первый обвиняемый — рыцарь".

Третий: „Я шпион".

Кто шпион?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Социологи опросили всех жителей острова. Некоторые аборигены заявили, что на острове чётное число рыцарей, а остальные — что на острове нечётное число лжецов. Можно ли определить, чётно или нечётно: **а)** число рыцарей; **б)** число жителей острова?

$\boxed{\mathbf{5}}$ В одном из посёлков на острове живут 100 рыцарей и 100 лжецов, у каждого из которых есть ровно один друг. Однажды утром каждый житель посёлка произнёс либо фразу „Мой друг — рыцарь", либо фразу „Мой друг — лжец", причём каждую фразу произнесло ровно 100 человек. Найдите наименьшее возможное количество пар друзей, в которых один друг — рыцарь, а второй — лжец.

# Листок 13. Вероятность

$\boxed{\mathbf{1}}$ Монету подбрасывают два раза. Какова вероятность выпадения **а)** двух орлов; **б)** орла и решки?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Бросают два игральных кубика. Какова вероятность: **а)** выпадения дубля; **б)** того, что сумма выпавших чисел не меньше 9; **в)** того, что сумма выпавших чисел равна 8, а разность — 4?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Из мешка с 2 белыми и 3 чёрными шарами не глядя достают 2 шара. Какова вероятность вынуть: **а)** два белых шара; **б)** два чёрных; **в)** белый и чёрный?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Десять учеников стоят перед экзаменом у дверей класса. Сначала на столе лежат 10 различных билетов. Каждый должет зайти и взять один из оставшихся. Миша не знает один из этих 10 билетов. Какова вероятность того, что именно этот билет ему попадётся, если Миша зайдёт **а)** первым; **б)** последним; **в)** шестым?

$\boxed{\mathbf{5}}$ В ящике лежат четыре шара, каждый из которых белый или чёрный. Требуется угадать, сколько каких шаров в ящике. За одну попытку разрешается, не заглядывая в ящик, наугад вынуть два шара, посмотреть на них и положить обратно (после чего шары перемешиваются). Сделали 100 попыток, и в 50 из них вынимали два черных шара. Как Вы думаете, сколько каких шаров в ящике (скорее всего) и почему?

$\boxed{\mathbf{6}}$ В тесте 15 вопросов и в каждом 3 варианта ответа. Петя произвольно ответил на вопросы. Какова вероятность того, что **а)** он правильно решил весь тест; **б)** правильно решил только номера 6 и 10?

# Листок 14. Вероятность-2

$\boxed{\mathbf{1}}$ В лифт пятиэтажного дома на первом этаже вошли трое. Каждый может выйти на любом этаже со второго по пятый равновероятно и независимо от других. Какова вероятность того, что все выйдут **а)** на четвёртом этаже; **б)** на одном этаже; **в)** на разных этажах; **г)** выше второго этажа?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Куб, все грани которого окрашены, распилили на 1000 кубиков ($10 \times 10 \times 10$), которые затем перемешали. Чему равна вероятность того, что наудачу выбранный кубик имеет ровно одну окрашенную грань?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Десятитомное собрание сочинений стоит на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый и второй тома стоят рядом?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Один бросил монету 10 раз, другой — 11. Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом больше раз, чем у первого?

$\boxed{\mathbf{5}}$ **а)** Чему равна вероятность того, что хотя бы у двух школьников в классе из 23 человек дни рождения совпадают? **б)**$^*$ Сравните эту вероятность с $1/2$. (Високосными годами пренебречь.)

$\boxed{\mathbf{6}}$ *Let's Make a Deal.* В некоторой игре ведущий предлагает играющему угадать, за какой из трёх закрытых дверей находится автомобиль. Игрок заранее знает, что за двумя другими дверями находятся козы. Он наугад выбирает одну из дверей. После этого ведущий (зная, где находится автомобиль) открывает одну из двух других дверей, за которой коза, причём игрок знает, что ведущий обязательно откроет дверь, за которой коза. Далее ведущий предлагает играющему две возможности: изменить своё решение и выбрать другую закрытую дверь, или же по-прежнему настаивать на первоначально выбранной двери. Как лучше поступить играющему?

# Листок 15. Математический аукцион

*Правила аукциона*

1. Школьники делятся на (примерно) равные команды.
2. Аукцион состоит из раундов по 1-2 задачи в каждом. На раунд отводится 10-15 минут. По истечении времени команды сдают листки с ответами к задачам раунда. Менять (улучшать) эти ответы потом **нельзя**!
3. Как все сдали листки с ответами, по каждой задаче в отдельности (последовательно) начинаются торги за право выхода к доске — рассказать свой ответ. У команд есть начальный капитал в 100 у.е.
4. Всегда можно поставить установленную сумму — 15 у.е., даже если придётся уйти в минус.
5. Результат торгов — последовательность, в которой представители команд выходят к доске — определяется в порядке убывания заявленных цен.
6. Команда, поставившая больше всех, **обязана** выйти к доске, остальные — на своё усмотрение (выходить бессмысленно, если твой результат хуже рассказанного).
7. У каждой команды, вышедшей к доске, заявленная цена вычитается **автоматически**.
8. Команда, рассказавшая верное и не улучшенное никем решение, получает удвоенную свою сумму.
9. **ВА-БАНК.** Можно пойти ва-банк — поставить всё, что есть (при условии, что капитал не меньше фиксированной суммы, скажем, 10 у.е.). Ва-банк можно перебить только бо́льшим ва-банком.

*Задачи*

$\boxed{\textbf{1}}$ Расставьте на шахматной доске как можно большее число ладей так, чтобы каждая била нечётное число других.

$\boxed{\textbf{2}}$ Найдите как можно большее натуральное число, в записи которого не встречается цифра 0, и которое делится на сумму своих цифр.

**3** Придумайте натуральное число, делящееся на 14, с как можно меньшей суммой цифр.

**4** Разрежьте квадрат $7\times7$ на как можно большее число различных прямоугольников по линиям сетки.

**5** Из квадрата на рисунке можно вырезать прямоугольник, сумма чисел в котором равна $n$ для любого $n$ от 1 до 8, а с суммой 9 — нельзя. Расставьте натуральные числа в квадрате $3 \times 3$ так, чтобы можно было вырезать прямоугольники с любой суммой от 1 до $N$ для как можно большего $N$.

**6** Обезьяна хочет узнать, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У неё есть 2 ореха. Какого наименьшего числа бросков ей заведомо хватит? (Возможно, и при падении с 15-го этажа орех не разбивается. Неразбившийся орех можно бросать
снова.)

**7** По рецепту торт имеет вид квадрата $8\times8$ и содержит ровно 5 розочек (по одной в каких-то пяти клетках). По традиции Винни-Пуху разрешено отрезать любой прямоугольный кусок (с границами по линиям сетки), содержащий ровно одну розочку. Голодный Винни-Пух отрезает себе самый большой кусок из возможных (он может вырезать себе кусок хоть из центра торта, но обязан соблюдать традицию). Предусмотрительный Кролик хочет расставить розочки на торте так, чтобы Винни-Пух получил как можно меньший кусок. Помогите Кролику найти оптимальную расстановку розочек. Какой по площади кусок при этом достанется Винни-Пуху?

**8** Фигура мамонт бьёт как слон (по диагоналям), но только в трёх направлениях из четырёх (отсутствующее направление может быть разным для разных мамонтов). Какое наибольшее число не бьющих друг друга мамонтов можно расставить на шахматной доске $8 \times 8$?

**9** Найдите как можно большее натуральное число, не оканчивающееся нулем, которое при вычеркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз.

**10** Разместите на шахматной доске как можно меньше доминошек так, чтобы их нельзя было сдвинуть. (Сдвигать доминошки за край доски нельзя.)

**11** Разрежьте квадрат на 20 меньших квадратов так, чтобы среди них было как можно больше разных.

**12** Какое наибольшее число фишек можно поставить на клетки шахматной доски так, чтобы на любой горизонтали, вертикали и диагонали находилось четное число фишек?

**13** Отметьте на линейке как можно меньше делений так, чтобы ею можно было отмерить любое расстояние от 1 до 20.