Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Математический кружок

6 класс

Составители: Д. А. Коробицын, Г. К. Жуков

Москва, 2017

Математический кружок 6 класс. / Универсальная методическая разработка для элективного курса по решению нестандартных задач в средних общеобразовательных учреждениях г. Москвы // Сост. Д. А. Коробицын, Г. К. Жуков. — М.: МГУ, 2017.

Брошюра разработана в рамках совместной программы «Развитие интеллектуальных способностей математически одарённых школьников и повышение качества математического образования» МГУ и Департамента образования города Москвы.

Содержание

Часть I

Раздаточный материал

Листок 1. Можно или нельзя

Во всех задачах нужно дать ответ «Да» или «Нет». Если ответ «Да», то нужно привести пример, когда такое может быть. Если ответ «Нет», то нужно объяснить, почему.

1 Можно ли из 4 палочек длины 1 см, 4 палочек длины 2 см, 7 палочек длины 3 см и 5 палочек длины 4 см сложить прямоугольник? (Использовать нужно все палочки, разламывать их нельзя.)

2 На День рождения к Андрею пришли Вася, Глеб, Даша, Митя, Петя, Соня и Тимур. Можно ли всех восьмерых ребят рассадить за круглый стол так, чтобы у любых двух, рядом сидящих, в именах встречались одинаковые буквы?

3 У Пети есть 8 монет и 4 кармана. Сможет ли он так разложить монеты по карманам, чтобы во всех было разное количество монет?

4 Учительница написала на доске дробь $\frac{10}{97}$ и разрешила ученикам: прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно; умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Смогут ли дети с помощью этих действий получить дробь, равную **а)** $\frac{1}{2}$; **б)** 1?

5 В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены цифры. Из цифр каждого столбца и каждой строки составили 10-значные числа — всего получилось 20 чисел. Может ли так быть, что из них ровно 19 делятся на три?

6 Вася задумал натуральное число, перемножил все его цифры и результат умножил на задуманное число. Могло ли у него получиться 1716?

7 Можно ли так расставить фишки в клетках доски 8×8, чтобы в любых двух столбцах количество фишек было одинаковым, а в любых двух строках — разным?

Листок 2. Сложные вычисления

1 Придумайте три разные правильные несократимые дроби, сумма которых — целое число, такие, что если каждую из этих дробей «перевернуть» (т.е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей тоже будет целым числом.

2 Решите уравнение $((x : 2 - 3) : 2 - 1) : 2 - 4 = 3$.

3 Три человека A, B и C пересчитали кучу шариков четырёх цветов. При этом каждый из них правильно различал какие-то два цвета, а два других мог путать: один путал красный и оранжевый, другой — оранжевый и жёлтый, а третий — жёлтый и зелёный. Результаты их подсчётов приведены в таблице. Сколько шариков каждого цвета было на самом деле?

	красный	оранжевый	жёлтый	зелёный
A	2	8	4	9
B	2	4	9	8
C	4	2	8	9

4 Вычислите суммы:

а) $1 + 2 + \ldots + 500$;

б) $1 + 2 + \ldots + 2011$.

в) Докажите, что $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

5 Найдите сумму $123456789 + 234567891 + 345678912 + \ldots + 912345678$.

6 В примерах на сложение заменили цифры буквами: одинаковые цифры — одинаковыми буквами, разные цифры — разными буквами. Получилось:

а) КРОТ+СЛОН=ЗАВОД; **б)** АБВГ+ДЕЖ=ЗИКЛ.

Восстановите исходные примеры. *(Нужно найти все возможные варианты и показать, что других нет.)*

7 В квадрате 3×3 расставлены некоторым образом все целые числа от 1 до 9. Сначала подсчитали средние арифметические чисел в четырёх различных квадратах 2×2 (все они оказались целыми числами), а затем подсчитали среднее арифметическое полученных четырёх чисел (оно также оказалось целым). Какое наибольшее значение могло принимать последнее подсчитанное число?

8 Незнайка написал на доске несколько различных натуральных чисел и поделил сумму этих чисел на их произведение. После этого он стёр самое маленькое число и поделил сумму оставшихся чисел на их произведение. Второй результат оказался в 3 раза больше первого. Какое число Незнайка стёр?

Листок 3. Города и дороги

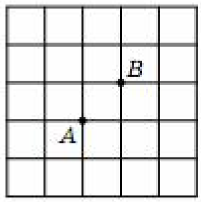
$\boxed{1}$ В некоторой стране **а)** 6; **б)** 20 городов, любые два из которых соединены дорогой. Сколько всего дорог в этой стране? **в)** Докажите, что если число городов равно n, то дорог $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

$\boxed{2}$ В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник заметил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий делится на три. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

$\boxed{3}$ В государстве 100 городов, и из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

$\boxed{4}$ В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трёх улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.

$\boxed{5}$ Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка A на плане) до своего отеля (точка B). Он хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрёстке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.



$\boxed{6}$ В стране 96 городов, из которых 24 — «областные». Некоторые пары городов соединены между собой дорогами (но не более чем одной), причём любой путь по дорогам между двумя обычными городами, если он есть, проходит хотя бы через один «областной» город. Какое наибольшее количество дорог могло быть в этой стране?

$\boxed{7}$ В чемпионате России по футболу участвуют 16 команд. Любые две команды играют друг с другом два раза: по разу на поле каждого из соперников. **а)** Какое максимальное и какое минимальное количество очков может набрать команда, участвующая в чемпионате России? **б)** Какое минимальное и какое максимальное количество очков могут набрать в сумме все команды? (В футболе за победу в матче даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.)

$\boxed{8}$ В шахматном турнире приняло участие несколько человек. Каждый сыграл с каждым ровно одну партию. Оказалось, что все, кроме Пети, набрали одинаковое количество очков. Докажите, что Петя либо у всех выиграл, либо всем проиграл. (В шахматах за победу даётся 1 очко, за ничью — 1/2 очка, за поражению — 0 очков.)

Листок 4. Делимость

$\boxed{1}$ Приведите пример числа, которое:
а) делится на 3 и делится на 4;
б) делится на 11 и делится на 12.

$\boxed{2}$ Может ли сумма трёх различных натуральных чисел делиться на каждое из слагаемых?

$\boxed{3}$ Дети ходили в лес за орехами и теперь, возвращаясь домой, идут парами. В каждой паре идут мальчик и девочка, причём у мальчика орехов в 2 раза больше, чем у девочки. Может ли всего у детей быть 100 орехов?

$\boxed{4}$ В магическом квадрате суммы цифр в каждой строке, в каждом столбце и на обеих диагоналях равны. Можно ли составить магический квадрат 3×3 из первых 9 простых чисел?

$\boxed{5}$ Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.

$\boxed{6}$ Можно ли расставить числа **а)** от 1 до 7; **б)** от 1 до 9 по кругу так, чтобы любое из них делилось на разность своих соседей?

$\boxed{7}$ На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2011. Какое число стёрли?

$\boxed{8}$ Номер телефона у Джейн — 395322, а у Ирэн — 435903. Если разделить эти номера на трехзначный код города, где они живут, получатся одинаковые остатки, равные двузначному коду страны, где они живут. В какой стране живут девушки? Найдите хотя бы её код.

Листок 5. Пары и чередования

1 Барон Мюнхаузен, вернувшись из кругосветного путешествия, рассказывает, что по пути он пересёк границу Трапезундии ровно 7 раз. Стоит ли доверять его словам?

2 В джунглях во время кругосветного путешествия на Мюнхаузена напали пантеры. Когда он проскочил мимо двух из них, они бросились на него, промахнулись и загрызли друг друга. Мюнхаузен повторял этот манёвр ещё раз и ещё, до тех пор, пока все они не загрызли друг друга. По словам Мюнхаузена всего было 97 пантер. Правда ли это?

3 Кузнечик прыгает по прямой — каждый раз на 1 метр влево или вправо. Через некоторое время он оказался в исходной точке. Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

4 Из комплекта домино выбросили все кости с «пустышками». Можно ли оставшиеся кости по правилам выложить в ряд?

5 За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей мальчик–девочка и девочка–мальчик чётно.

6 Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая на 90° каждые 30 минут. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только: **а)** через целое число часов; **б)** через чётное число часов.

7 На шахматной доске стоят 8 ладей, из которых никакие две не бьют друг друга. Докажите, что число ладей стоящих на чёрных полях чётно.

8 К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы чётна.

Листок 6. Задачи с n

$\boxed{1}$ Найдите количество натуральных чисел, которые не меньше 5 и не больше n ($n \geq 5$).

$\boxed{2}$ Клетки доски покрашены в шахматном порядке так, что левый верхний угол черный. Найдите число черных клеток, если доска имеет размер **а)** $n \times n$; **б)** $m \times n$.

$\boxed{3}$ В стране n городов, один из которых Таганрог. Некоторые пары городов соединены дорогами, при этом между любыми двумя городами их не более одной. Какое наибольшее количество дорог может быть в этой стране, если из Таганрога выходит только одна дорога?

$\boxed{4}$ В Андорре m футбольных команд (по 11 футболистов в каждой). Все футболисты собрались в аэропорту для поездки в другую страну на турнир. Самолёт сделал 10 рейсов, перевозя каждый раз по m пассажиров. Ещё один футболист Юра полетел на турнир сам на веротолёте. Докажите, что хотя бы одна команда прилетела полностью.

$\boxed{5}$ Существует ли такое натуральное число, что при умножении его на любое другое натуральное число у полученного произведения будет нечётная сумма цифр?

$\boxed{6}$ Докажите, что для любого n числа $1, 2, \ldots, 2n$ можно записать по кругу так, чтобы любые два соседних отличались не более, чем на 2.

$\boxed{7}$ В военную часть приехали n незнакомых друг с другом новобранцев. Прапорщик сообщил каждому новобранцу натуральное число так, что сумма всех n чисел равна $2n-2$. Докажите, что можно познакомить некоторых из них друг с другом так, чтобы у каждого новобранца было количество знакомых, равное числу, которое ему сообщил прапорщик.

$\boxed{8}$ Известно, что сумма цифр натурального числа N равна 100, а сумма цифр числа $5N$ равна 50. Докажите, что N четно.

Листок 7. Длины и расстояния

1 На стороне AC треугольника ABC отметили точку E. Известно, что периметр треугольника ABC равен 25 см, треугольника ABE — 15 см, треугольника BCE — 17 см. Найдите длину отрезка BE.

2 Отрезок, равный 28 см, разделён на три (возможно неравных) отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

3 Длина стороны AC треугольника ABC равна 3.8 см, длина стороны AB — 0.6 см. Известно, что длина BC — целое число. Чему она может быть равна?

4 Прямоугольник разбит на 9 меньших прямоугольников. Периметры четырех из них указаны на рисунке. Чему равен периметр прямоугольника x?

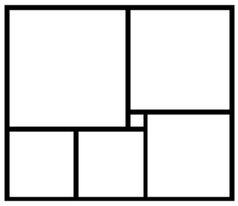
10		x
11		
12		13

5 Квадрат $ABCD$ со стороной 2 и квадрат $DEFK$ со стороной 1 стоят рядом на верхней стороне AK квадрата $AKLM$ со стороной 3. Между парами точек A и E, B и F, C и K, D и L натянуты паутинки. Паук поднимается снизу вверх по маршруту $AEFB$ и спускается по маршруту $CKDL$. Какой маршрут короче?

6 Один прямоугольник расположен внутри другого. Может ли так быть, что периметр внутреннего прямоугольника больше периметра внешнего?

7 На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5. Можно ли его разрезать на пять частей одинаковой площади, проводя разрезы только по линиям сетки так, чтобы суммарная длина разрезов была не больше 16?

8 Прямоугольник составлен из шести квадратов (см. рисунок).



Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького равна 1.

Листок 8. Простые и составные числа

Натуральное число называется ***простым***, если оно делится ровно на два различных натуральных числа: на 1 и на само себя.

Если у числа больше двух различных натуральных делителей, то оно называется ***составным***.

1 Являются ли простыми числа **а)** 11; **б)** 91; **в)** 713; **г)** 2011?

2 Найдите все простые числа, которые отличаются друг от друга на 17.

3 Число умножили на его сумму цифр и получили 2008. Найдите все такие числа.

4 Выпишите все простые числа, не превосходящие 100.

5 Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше 1. Сколько в доме этажей, если в нём 105 квартир?

6 Имеется много одинаковых прямоугольных картонок размером $a \times b$ см, где a и b — целые числа, причём a меньше b. Известно, что из таких картонок можно сложить и прямоугольник 49×51 см, и прямоугольник 99×101 см. Можно ли по этим данным однозначно определить a и b?

7 Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 — простое число или единица.

8 Существует ли самое большое простое число?

Листок 9. Логика

$\boxed{1}$ Петя сказал: «Если кот шипит, то рядом собака, и наоборот, если собаки рядом нет, то кот не шипит». Не сказал ли Петя чего-то лишнего?

$\boxed{2}$ Вася написал на доске натуральное число. После этого Катя и Маша сказали:

—У этого числа четная сумма цифр.

—У этого числа число нечетных цифр нечетно.

Сколько среди этих утверждений верны?

$\boxed{3}$ Среди 5 школьников A, B, C, D, E двое всегда лгут, а трое всегда говорят правду. Каждый из них сдавал зачет, причем все они знают, кто сдал зачет, а кто — нет. Они сделали следующие утверждения. A:«B не сдал зачет». B:«C не сдал зачет». C:«A не сдал зачет». D:«E не сдал зачет». E:«D не сдал зачет». Сколько из них зачет сдали?

$\boxed{4}$ В школе прошёл забег с участием 5 спортсменов, и все заняли разные места. На следующий день каждого из них спросили, какое место он занял, и каждый, естественно, назвал одно число от 1 до 5. Сумма их ответов оказалась равна 22. Какое наименьшее число врунишек могло быть?

$\boxed{5}$ На острове живут племя рыцарей и племя лжецов. Однажды каждый житель острова заявил: «В моем племени у меня больше друзей, чем в другом». Может ли рыцарей быть меньше, чем лжецов?

$\boxed{6}$ Четырехзначное число таково, что все его цифры различны, а также известно, что числа 5860, 1674, 9432, 3017 содержат ровно по две цифры, принадлежащие этому числу, однако ни одна из них не стоит в том же месте, что и в этом числе. Найдите его.

$\boxed{7}$ 2011 школьников и студентов встали по кругу. Каждый из них по очереди произнес фразу «Оба мои соседа — школьники». Если про студента солгали, он обижается и становится школьником. Если про школьника сказали правду, он радуется и становится студентом. Когда школьников было больше — вначале, или в конце?

$\boxed{8}$ В поселке некоторые дома соединены проводами. Соседями называются двое, дома которых связаны проводом. Всегда ли удастся поселить в каждый дом по одному человеку: лжецу или рыцарю — так, чтобы каждый на вопрос: «Есть ли среди ваших соседей лжецы?» ответил положительно? (Каждый знает про каждого из своих соседей, лжец он или рыцарь).

Листок 10. Принцип крайнего

1 По кругу выписано несколько натуральных чисел, каждое из которых не превосходит одного из соседних с ним. Докажите, что среди этих чисел точно есть хотя бы два равных.

2 По кругу выписано несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних с ним. Докажите, что все эти числа равны.

3 8 грибников собрали 37 грибов. Известно, что никакие двое не собрали грибов поровну и каждый нашёл хотя бы один гриб. Докажите, что какие-то двое из них собрали больше, чем какие-то пятеро.

4 На шахматной доске стоят несколько ладей. Обязательно ли найдется ладья, бьющая не более двух других? (Перепрыгивать через другие фигуры ладья не может.)

5 В стране есть несколько городов. Сумасшедший путешественник едет из города A в самый далёкий от него город B. Затем едет в самый далёкий от B город C и т.д. Докажите, что если город C не совпадает с городом A, то путешественник никогда не вернётся обратно в город A.

6 В космическом пространстве летают 2011 астероидов, на каждом из которых сидит астроном. Все расстояния между астероидами различны. Каждый астроном наблюдает за ближайшим астероидом. Докажите, что за одним из астероидов никто не наблюдает.

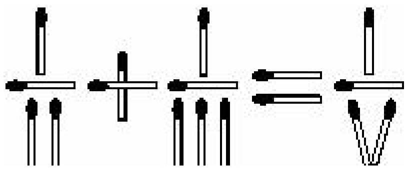
7 Петя задумал четыре неотрицательных числа и посчитал их всевозможные попарные суммы (всего 6 штук). Какие числа он задумал, если эти суммы — 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Листок 11. Дроби

$\boxed{1}$ Что больше $\dfrac{2010}{2011}$ или $\dfrac{2011}{2012}$?

$\boxed{2}$ Юра хочет тратить $\dfrac{1}{3}$ своего времени на игру в футбол, $\dfrac{1}{5}$ — на учёбу в школе, $\dfrac{1}{6}$ — на просмотр фильмов, $\dfrac{1}{70}$ — на решение олимпиадных задач и $\dfrac{1}{3}$ — на сон. Возможно ли это?

$\boxed{3}$ Из спичек сложено неверное равенство. Переложите одну спичку так, чтобы равенство стало верным.



$\boxed{4}$ Волк с тремя поросятами написал детектив «Три поросёнка — 2», а потом вместе с Красной Шапочкой и её бабушкой кулинарную книгу «Красная Шапочка — 2». В издательстве выдали гонорар за обе книжки поросёнку Наф-Нафу. Он забрал свою долю и передал оставшиеся 2100 золотых монет Волку. Гонорар за каждую книгу делится поровну между её авторами. Сколько денег Волк должен взять себе?

$\boxed{5}$ Какое число нужно вычесть из числителя дроби $\dfrac{537}{463}$ и прибавить к знаменателю, чтобы после сокращения получить $\dfrac{1}{9}$?

$\boxed{6}$ На острове $\dfrac{2}{3}$ всех мужчин женаты и $\dfrac{3}{5}$ всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке?

$\boxed{7}$ Докажите, что дробь $\dfrac{1}{n}$ можно представить в виде конечной десятичной дроби только в том случае, если n в разложении на простые множители содержит только двойки и пятёрки.

$\boxed{8}$ На доске написали 100 дробей, у которых в числителях стоят все числа от 1 до 100 по одному разу, и в знаменателях стоят все числа от 1 до 100 по одному разу. Оказалось, что сумма этих дробей есть несократимая дробь со знаменателем 2. Докажите, что можно поменять местами числители двух дробей так, чтобы сумма стала несократимой дробью с нечетным знаменателем.

Листок 12. Ребусы

Ребус получается, если в примере на вычисление заменить цифры на буквы так, что вместо одинаковых цифр будут одинаковые буквы, а вместо разных цифр — разные буквы.
В задачах 1–6 нужно решить ребус: т.е. найти все числовые выражения, удовлетворяющие условию, и показать, что других нет.

1 **а)** Б+БЕЕЕ=МУУУ

б) АИСТ+АИСТ+АИСТ+АИСТ+АИСТ=СТАЯ

2 ААА:Б=ВГ

3 ААВ+АВА+ВАА=1998

4 БАО·БА·Б=2002

5 ДУРАК+УДАР=ДРАКА

6 ФУТБОЛ+ХОККЕЙ=ПОБЕДА

7 В числах МИХАЙЛО и ЛОМОНОСОВ произведения цифр равны. Могут ли оба эти числа быть нечётными?

8 Петя написал два числа, не содержащих в записи нулей, и заменил цифры буквами (разные цифры — разными буквами, одинаковые цифры — одинаковыми буквами). Оказалось, что число КРОКОДИЛЛЛ делится на 312. Докажите, что число ГОРИЛЛА не делится на 392.

Листок 13. Включения-исключения

1 В классе все увлекаются математикой или биологией. Сколько человек в классе, если математикой занимаются 20 человек, биологией — 15, а и тем, и другим – 10?

2 Большая группа туристов выехала в заграничное турне. Из них владеет английским языком 28 человек, французским – 13, немецким – 10, английским и французским – 8, французским и немецким – 5, английским и немецким – 6, всеми тремя языками – 2, а 41 человек не владеет ни одним из трех языков. Сколько всего туристов?

3 В комнате площадью 6 кв.м постелили три ковра произвольной формы площадью 3 кв.м каждый. Докажите, что какие-либо два из них перекрываются по площади, не меньшей 1 кв.м.

4 Дядя Федор собирается все 92 дня каникул провести в деревне. При этом он строго придерживается такого распорядка: каждый второй день (то есть через день) ходит купаться, каждый третий – ходит в магазин за продуктами, и каждый пятый – работает в огороде. В первый день дядя Федор занимался сразу всем. Сколько за каникулы будет: **а)** «приятных» дней, когда дядя Федор будет только купаться; **б)** «скучных» дней, когда у него не будет никаких дел; **в)** тяжелых дней, когда ему придется делать все три дела?

5 Куб со стороной 10 разбит на 1000 кубиков, в каждом из которых записано число. Сумма чисел каждого ряда из десяти кубиков (расположенного в любом из трёх возможных направлений) равна 1. В одном из кубиков записано число 40. Через него проходят три «слоя» $1\times10\times10$, параллельные граням куба. Найдите сумму всех чисел, записанных в кубиках, не входящих ни в один из этих «слоёв».

6 Три ученика решили вместе 100 задач, при этом каждый из них решил ровно 60. Будем называть задачу, которую решили все трое, *лёгкой*, а задачу, которую решил только один из них, – *трудной*. На сколько больше трудных задач, чем лёгких?

7 В классе есть a_1 учеников, получивших в течение года хотя бы одну двойку, a_2 учеников, получивших не менее двух двоек, $\ldots$, a_k учеников, получивших не менее k двоек. Сколько всего двоек было получено в течение года учениками этого класса? (Предполагается, что больше k двоек ни у кого нет.)

Листок 14. Неравенство треугольника

Из трёх отрезков можно составить треугольник в том и только в том случае, если длина любого из них меньше суммы длин двух других.

1 Можно ли составить треугольник из отрезков длины (см):

а) 7, 12, 19;

б) 2.7, 4.9, 7.55;

в) $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{17}$, 1.3?

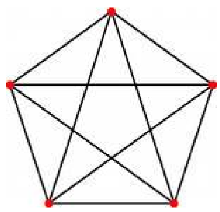
2 Длина стороны AB треугольника ABC равна 3.8 см, а длина стороны AC — 0.6 см. Известно, что длина BC составляет целое число сантиметров. Какова эта длина?

3 **а)** Докажите, что длина любой стороны треугольника меньше его полупериметра.

б) Внутри треугольника взяли две произвольные точки. Докажите, что расстояние между ними меньше полупериметра треугольника.

4 Существуют ли 10 отрезков такие, что ни из каких трёх из них нельзя составить треугольник?

5 Докажите, что в пятиугольнике (см. рис.) сумма длин диагоналей **а)** больше периметра; **б)** меньше удвоенного периметра пятиугольника. (Диагональ — это отрезок, соединяющий две НЕсоседние вершины.)



6 Грибник выходит из леса в некоторой заданной точке. Ему надо дойти до шоссе, которое представляет собой прямую линию, и зайти обратно в лес в некоторой другой заданной точке. Как ему это сделать, пройдя по самому короткому пути?

7 Муха сидит на внешней поверхности круглого стакана. Ей надо перебраться в другую точку, лежащую на внутренней поверхности. Как мухе это сделать так, чтобы путь который она пройдёт, был наименьшим?

Листок 15. Шахматы и доски

$\boxed{1}$ Можно ли на шахматную доску выставить по очереди в некотором порядке 5 главных шахматных фигур (ладью, коня, слона, ферзя и короля) так, чтобы каждая фигура в момент постановки на доску била все выставленные до неё фигуры?

$\boxed{2}$ Шахматный конь стоит в левом нижнем углу доски. Может ли он через **а)** 4; **б)** 5; **в)** 111 ходов вернуться на исходное поле?

$\boxed{3}$ Можно ли расставить на шахматной доске короля, ладью, коня, слона и ферзя так, чтобы каждая фигура била ровно две фигуры и была побита ровно двумя, причём другими, фигурами?

$\boxed{4}$ Можно ли разрезать шахматную доску на доминошки так, чтобы никакие две из них не образовывали квадрат 2×2?

$\boxed{5}$ **а)** Новая шахматная фигура «лягушка» поочерёдно делает ходы на 1, 2, 1, 2, ... клетки (по горизонтали или вертикали). Может ли лягушка обойти всю доску 8×8, побывав на каждой клетке ровно 1 раз?

б) Тот же вопрос, если «лягушка» поочерёдно делает ходы на 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... клетки.

$\boxed{6}$ Во время матча «ЦСКА»–«Реал» пришедший с шахматного кружка Незнайка задумался над задачей «Можно ли на шахматное поле 8×8 поставить 11 коней, 11 королей и 1 мяч (бить не умеет) так, чтобы не было фигуры, стоящей под боем другой фигуры?» А действительно, можно ли?

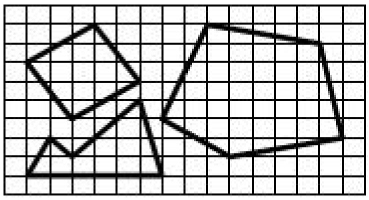
$\boxed{7}$ Можно ли в клетках таблицы 2002×2002 расставить натуральные числа от 1 до 2002^2 так, чтобы для любой клетки этой таблицы из строки или из столбца, содержащих эту клетку, можно было бы выбрать тройку чисел, одно из которых равно произведению двух других?

Листок 16. Площадь

$\boxed{1}$ **а)** Вспомните, как найти площадь прямоугольника, зная длины его сторон.

б) Как найти площадь прямоугольного треугольника, зная длины двух его сторон, прилегающих к прямому углу?

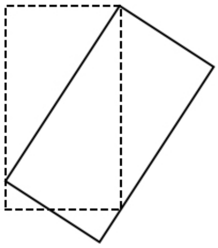
$\boxed{2}$ Найдите площади многоугольников, изображенных на рисунке (сторона клетки равна 1).



$\boxed{3}$ Каждая сторона треугольника больше 1000. Может ли его площадь быть меньше 1? (Треугольник может быть любым — необязательно прямоугольным.)

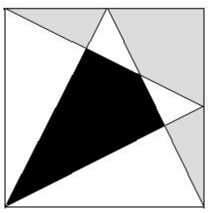
$\boxed{4}$ Нарисуйте на клетчатой бумаге два многоугольника с одинаковыми периметром и площадью, но неравные между собой.

$\boxed{5}$ В отрывном календаре оторвали листок и положили на следующий так, как показано на рисунке. **а)** У какого листка незакрытая часть больше: у нижнего или у верхнего? **б)** Какая часть нижнего листка больше: закрытая или открытая?



$\boxed{6}$ Прямоугольную шоколадку разломали «крестом» на 4 прямоугольных кусочка. Первый кусочек состоит из 8 квадратных долек, второй — из 12, третий — из 18. Сколько квадратных долек в четвёртом кусочке, если известно, что количество долек в нём отличается от количества долек в остальных кусочках?

$\boxed{7}$ В квадрате отметили середины двух сторон и соединили их с вершинами так как показано на рисунке. Докажите, что площадь чёрного многоугольника равна сумме площадей серых многоугольников.



$\boxed{8}$ В квадрате со стороной 1 расположены 11 многоугольников, сумма площадей которых больше 10. Докажите, что у всех этих многоугольников есть общая точка.

Листок 17. Примеры и контрпримеры

Если утверждение верно всегда, то докажите его, а если хоть в одном случае неверно, то покажите, что это за случай (приведите контрпример).

$\boxed{\mathbf{1}}$ Приведите контрпример к каждому из следующих утверждений. **а)** Все простые числа — нечетные. **б)** Все прямоугольники являются квадратами. **в)** Каждое натуральное число либо простое, либо составное. **г)** Все четырехугольники, у которых все стороны равны, являются квадратами.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Вася думает, что если площадь первого прямоугольника больше площади второго, а также периметр первого больше периметра второго, то из первого можно вырезать второй. Прав ли он?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Гриб называется плохим, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Выберите 24 клетки в прямоугольнике 5×8 и проведите в каждой выбранной клетке одну из диагоналей так, чтобы никакие две проведенные диагонали не имели общих концов.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Барон Мюнхгаузен утверждает, что может для некоторого N так переставить числа $1, 2, \ldots, N$ в другом порядке и затем выписать их все подряд без пробелов, что в результате получится многозначное число-палиндром (оно читается одинаково слева направо и справа налево). Не хвастает ли барон?

$\boxed{\mathbf{6}}$ На доске написаны три различных числа от 1 до 9. Одним ходом разрешается либо прибавить к одному из чисел 1, либо вычесть из всех чисел по 1. Верно ли, что всегда можно добиться того, чтобы на доске остались только нули, сделав не более 23 ходов?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Рома придумал теорему: *Если число A является квадратом натурального числа B, а также каждая цифра числа A делится на 3, то и каждая цифра числа B делится на 3.* Верна ли ромина теорема?

Листок 18. Графы

$\boxed{1}$ Между планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по маршрутам Земля — Меркурий, Плутон — Венера, Земля — Плутон, Плутон — Меркурий, Меркурий — Венера, Уран — Нептун, Нептун — Сатурн, Сатурн — Юпитер, Юпитер — Марс, Марс — Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

Графом называется схема из точек на плоскости, некоторые из которых соединены линиями. Эти точки называются ***вершинами*** графа, а линии — ***рёбрами*** графа.

$\boxed{2}$ На День рождения к Андрею пришли Вася, Глеб, Даша, Митя, Петя, Соня и Тимур. Покажите, как восьмерых ребят можно рассадить за круглый стол, чтобы у любых двух, сидящих рядом, в именах встречались одинаковые буквы.

$\boxed{3}$ В пяти корзинах лежат яблоки пяти разных сортов. Яблоки первого сорта лежат в корзинах А и В; яблоки второго сорта — в корзинах Б, В и Д; в корзинах Б, Г и Д имеются яблоки пятого сорта; в корзине Г есть к тому же яблоки четвёртого сорта, а в корзине А — третьего. Можно ли дать каждой корзине номер так, чтобы в корзине №1 было хотя бы одно яблоко первого сорта, в корзине №2 - второго и т.д.?

$\boxed{4}$ **а)** На шахматной доске 3×3 стоят два чёрных и два белых коня. Белые кони стоят в левом верхнем и правом верхнем углах доски, а чёрные — в левом нижнем и правом нижнем углах. Можно ли сделать несколько ходов конями так, чтобы они поменялись местами?

б) Можно ли поменять коней так, чтобы белые кони стояли в левом верхнем и правом нижнем углах доски, а чёрные — в правом верхнем и левом нижнем?

$\boxed{5}$ Пешеход обошёл все улицы одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь один раз. Могло ли такое быть?

$\boxed{6}$ **а)** В графе с 8 вершинами любые две вершины соединены ребром. Сколько всего рёбер в этом графе?

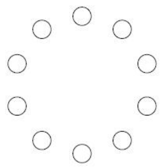
б) Тот же вопрос, если в графе не 8, а n вершин.

$\boxed{7}$ Докажите, что среди любых шести человек всегда найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

$\boxed{8}$ На встречу выпускников пришло 45 человек. Оказалось, что любые двое из них, имеющие одинаковое число знакомых среди пришедших, не знакомы друг с другом. Чему равно наибольшее число знакомств, которое могло быть среди участвовавших во встрече?

Листок 19. Симметрия

$\boxed{1}$ Расположите в кружочках (см. рис.) числа от 1 до 10 так, чтобы для любых двух соседних чисел их сумма была равна сумме двух чисел, им противоположных (симметричных относительно центра окружности).



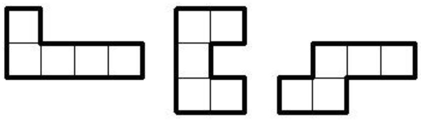
$\boxed{2}$ Ожерелье состоит из 10 бусин, расположенных по окружности на одинаковом расстоянии друг от друга. Закрасьте некоторые бусины из ожерелья так, чтобы ожерелье не имело оси симметрии.

$\boxed{3}$ Число называется *симметричным*, если оно одинаково читается слева направо и справа налево (например: 1001 или 2992). Какое наибольшее количество четырёхзначных симметричных чисел может идти подряд?

$\boxed{4}$ **а)** На доске 25×25 расставлены 25 шашек, причём их расположение симметрично относительно одной из двух главных диагоналей. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.

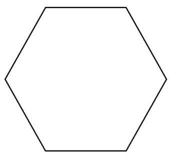
б) Расположение шашек теперь симметрично относительно обеих диагоналей. Докажите, что одна из них расположена в центральной клетке.

$\boxed{5}$ Придумайте, как из данных трёх фигурок, использовав каждую ровно один раз, сложить фигуру, имеющую ось симметрии.



$\boxed{6}$ В квадрате 8×8 можно закрашивать клетки по одной так, чтобы каждый раз получающаяся фигура имела ось симметрии. Можно ли таким образом закрасить 28 клеток?

$\boxed{7}$ Можно ли правильный шестиугольник (т.е. такой, у которого вершины расположены по окружности на одинаковом расстоянии друг от друга) разрезать на пять остроугольных треугольников?

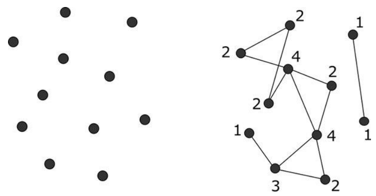


$\boxed{8}$ Дана доска 15×15. Некоторые пары центров соседних по стороне клеток соединили отрезками так, что получилась замкнутая несамопересекающаяся ломаная, симметричная относительно одной из диагоналей доски. Докажите, что длина ломаной не больше 200.

Листок 20. Четность и графы

Напомним, что ***граф*** — это набор точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются ***вершинами*** графа, линии — ***рёбрами.***

$\boxed{1}$ Получите из левой картинки правую, проводя линии между точками (по одной). Около каждой точки подписывайте, сколько из неё выходит линий. Как изменяются числа после каждого дорисовывания линии?



Вершину графа будем называть чётной, если из неё выходит чётное число рёбер, нечётной — если выходит нечётное число рёбер.

$\boxed{2}$ **а)** Как связаны числа из задачи **1** и количество рёбер в графе?

б) Докажите, что в любом графе количество нечётных вершин чётно.

$\boxed{3}$ Можно ли 15 телефонов соединить проводами так, чтобы каждый был соединён ровно с 5 другими?

$\boxed{4}$ В классе 30 человек. Может ли быть так, что у 9 из них по 3 друга в классе, у 11 — по 4 друга и у 10 — по 5 друзей?

$\boxed{5}$ Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

$\boxed{6}$ Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

$\boxed{7}$ В некотором государстве 99 городов, некоторые пары городов соединены дорогами длиной в 1, 3 или 5 вёрст, причём от каждого города до каждого по этим дорогам можно добраться ровно одним способом. Из каждого города в каждый другой отправились гонцы с важным донесением. Докажите, что суммарное расстояние, пройденное гонцами, делится на 4.

$\boxed{8}$ На Малом Мехмате дети договорились послать друг другу электронные письма. Те из них, у кого число знакомых чётно, отправят письма всем знакомым, а те, у кого число знакомых нечётно, отправят письма всем незнакомым. Придя домой и включив компьютер, Гоша увидел, что ему пришло 99 писем. Докажите, что он получит ещё хотя бы одно.

Листок 21. Расстановки ладей

$\boxed{1}$ **а)** Расставьте 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга, тремя разными способами.

б) А сколько всего таких способов?

$\boxed{2}$ Ладья стоит на поле a1 шахматной доски. Может ли она обойти всю доску, побывав в каждой клетке ровно один раз и закончив в клетке h8? (Ладья может перепрыгивать через клетки, в которых уже побывала.)

$\boxed{3}$ На шахматную доску поставили несколько ладей произвольным образом. Докажите, что точно найдётся ладья, бьющая не более двух других.

$\boxed{4}$ На шахматной доске стоят 8 ладей, никакие две из которых не бьют друг друга. Докажите, что количество ладей в левом верхнем квадрате 4×4 равно количеству ладей в правом нижнем квадрате 4×4.

$\boxed{5}$ На шахматной доске стоят 8 ладей, никакие две из которых не бьют друг друга. Докажите, что число ладей, стоящих на чёрных полях, чётно.

$\boxed{6}$ На шахматной доске 4×4 расположена фигура «летучая ладья», которая ходит так же, как обычная ладья, но не может за один ход встать на поле, соседнее с предыдущим. Может ли она за 16 ходов обойти всю доску, побывав в каждой клетке по разу, и вернувшись на исходное поле?

$\boxed{7}$ На полях a1, a2 и b1 шахматной доски стоят соответственно белая, чёрная и красная ладьи. Разрешается делать ходы по обычным правилам, однако после любого хода каждая ладья должна быть под защитой какой-нибудь другой ладьи (т.е. в одной горизонтали или вертикали с другой ладьёй). Сколько ещё других расстановок этих ладей можно получить из исходной расстановки?

$\boxed{8}$ На шахматную доску по очереди выставляются ладьи так, что каждая нечётная по очереди выставленная ладья никого не бьёт, а каждая чётная бьёт ровно одну выставленную ранее. Какое наибольшее количество ладей можно поставить на доску по этим правилам?

Листок 22. Отрицательные числа

$\boxed{\mathbf{1}}$ **а)** Напишите в строку пять чисел, чтобы сумма любых двух соседних была отрицательна, а сумма всех — положительна.

б) Можно ли выписать в строку 12 чисел так, чтобы сумма любых трёх подряд идущих была положительна, а любых четырёх подряд идущих — отрицательна?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Произведение 10 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна 0.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Может ли число, в котором все цифры идут по порядку $12345678901234567890\ldots$ делиться на 11? (Заканчиваться число может любой цифрой.)

$\boxed{\mathbf{4}}$ На доске написано число 1234. Его можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из них не равна 9, либо вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью нескольких таких операций получить число 4004?

$\boxed{\mathbf{5}}$ В ряд выписаны все натуральные числа **а)** от 1 до 11; **б)** от 1 до 110 и в промежутках между ними расставляются произвольным образом знаки $+$ и $-$(перед 1 тоже можно поставить знак $-$). Какое наименьшее положительное значение может принимать полученное числовое выражение?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Во всех клетках таблицы 4×4 расставляются числа -1, 0 и 1. Какое наибольшее количество различных значений могут принимать 8 сумм чисел в строках и в столбцах?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Существуют ли такие числа a, b, c, k, m, n, x, y и z, что $amz > 0$, $bnx > 0$, $cky > 0$, $any < 0$, $bkz < 0$, $cmx < 0$?

$\boxed{\mathbf{8}}$ По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырёх идущих подряд чисел a, b, c, d произведение $a - d$ и $b - c$ отрицательно, то b и c можно поменять местами. Докажите, что такие операции можно проделать лишь конечное число раз.

Листок 23. Клетчатые задачи

$\boxed{1}$ Можно ли в квадрате 7×7 закрасить некоторые клетки так, чтобы в любом квадрате 2×2 была ровно одна закрашенная клетка?

$\boxed{2}$ **а)** Можно ли в клетках шахматной доски расставить целые числа так, чтобы сумма чисел в любом столбце была положительной, а в любой строке — отрицательной?

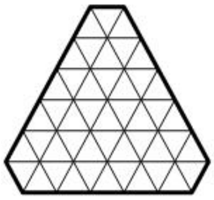
б) В клетках квадратной таблицы 10×10 стоят ненулевые цифры. В каждой строке и в каждом столбце из всех стоящих там цифр произвольным образом составлено десятизначное число. Может ли оказаться так, что из двадцати получившихся чисел ровно одно не делится на 3?

$\boxed{3}$ Можно ли в центры 16 клеток шахматной доски 8×8 вбить гвозди так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?

$\boxed{4}$ В квадрате 7×7 закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по 3 закрашенные клетки.

$\boxed{5}$ В клетках шахматной доски расставлены натуральные числа так, что в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел чётна. Докажите, что сумма чисел в чёрных клетках будет чётна.

$\boxed{6}$ Можно ли шестиугольный торт разрезать на 23 равных куска по указанным линиям?



$\boxed{7}$ Каждая грань куба с ребром 4 см разделена на клетки со стороной 1 см. Можно ли целиком оклеить 3 его грани, имеющие общую вершину, шестнадцатью бумажными прямоугольными полосками размером 1×3 так, чтобы границы полосок совпадали с границами клеток?

$\boxed{8}$ Бумага расчерчена на клеточки со стороной 1. Ваня вырезал из неё по клеточкам прямоугольник и нашёл его площадь и периметр. Таня отобрала у него ножницы и со словами «Смотри, фокус!» вырезала с краю прямоугольника по клеточкам квадратик, квадратик выкинула и объявила: «Теперь у оставшейся фигуры периметр такой же, какая была площадь прямоугольника, а площадь — как был периметр!» Ваня убедился, что Таня права.

а) Квадратик какого размера вырезала и выкинула Таня?

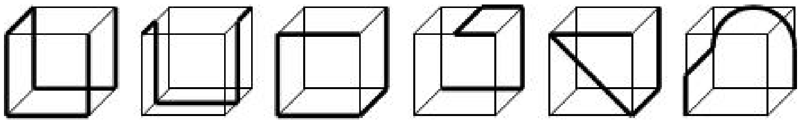
б) Приведите пример такого прямоугольника и такого квадрата.

в) Прямоугольник каких размеров вырезал Ваня?

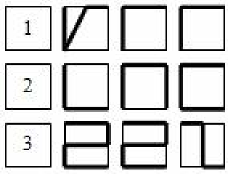
Листок 24. Кубики

$\boxed{\mathbf{1}}$ Куб $3 \times 3 \times 3$ покрасили, а затем распилили на кубики $1 \times 1 \times 1$. Сколько получилось кубиков, у которых закрашена одна грань? Две грани? Три грани?

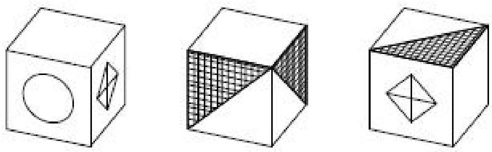
$\boxed{\mathbf{2}}$ Нарисуйте, как выглядит спереди, сверху и слева проволока, расположенная на каждом из стеклянных кубиков.



$\boxed{\mathbf{3}}$ Нарисуйте, как выглядит проволока на каждом из трёх кубиков: 1, 2 и 3 (даны проекции спереди, сверху и слева соответственно).



$\boxed{\mathbf{4}}$ Придумайте раскраску граней кубика, чтобы в трёх различных положениях он выглядел, как показано на рисунке.



$\boxed{\mathbf{5}}$ Кусок сыра имеет форму кубика $3\times3\times3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик $1 \times 1 \times 1$. После этого она приступает к одному из соседних (по грани) с только что съеденным и т.д. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?

$\boxed{\mathbf{6}}$ В одной из вершин куба сидит заяц, но охотникам он не виден. Три охотника стреляют залпом, при этом они могут «поразить» любые три вершины куба. Если они не попадают в зайца, то до следующего залпа заяц перебегает в одну из трёх соседних (по ребру) вершин куба. Как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в зайца за четыре залпа?

$\boxed{\mathbf{7}}$ В вершинах куба на этот раз находятся натуральные числа. Они расставлены так, что числа в соседних (по ребру) вершинах отличаются не более, чем на единицу. Докажите, что обязательно найдутся две противоположные вершины, числа в которых отличаются тоже не более, чем на единицу.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Каждая деталь конструктора «Юный паяльщик» это скобка в виде буквы «П», состоящая из трех единичных отрезков. Можно ли из деталей этого конструктора спаять полный проволочный каркас куба $2 \times 2 \times 2$, разбитого на кубики $1 \times 1 \times 1$? (Каркас состоит из 27 точек, соединенных единичными отрезками; любые две соседние точки должны быть соединены ровно одним проволочным отрезком.)

Листок 25. Признаки делимости

$\boxed{\mathbf{1}}$ Петя считает, что если число делится на 27, то и его сумма цифр делится на 27. А Вася считает, что если сумма цифр числа делится на 27, то и само число делится на 27. Кто из них прав?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Существует ли число, состоящее из одних единиц, которое делится **а)** на 3; **б)** на 9; **в)** на 7; **г)** на 13?

$\boxed{\mathbf{3}}$ **а)** Простое или составное число 123456789?

б) Изменится ли ответ, если в этом числе некоторым образом поменять местами цифры?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Придумайте число, делящееся на 11, в котором использованы все 10 цифр по одному разу.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Назовем четырехзначное число $\overline{abcd}$ *крутым*, если оно делится на $\overline{ab}+\overline{cd}$ и цифры a, b, c и d попарно различны. Например, 2013 — крутое число. Найдите еще три крутых числа.

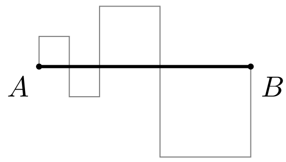
$\boxed{\mathbf{6}}$ Леша перемножил все числа от 1 до 100, подсчитал сумму цифр произведения. У полученного числа он снова подсчитал сумму цифр и т.д. В итоге получилось однозначное число. Какое?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Существуют ли попарно различные цифры A, B, C и D такие, что $AB \cdot CCCD$ делится на 2013?

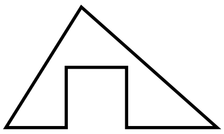
$\boxed{\mathbf{8}}$ Найдите все четырехзначные числа, которые будучи выписаны три раза подряд образуют число, кратное 14.

Листок 26. Периметры

$\boxed{\textbf{1}}$ Известно, что расстояние между точками A и B равно 10 см. Найдите длину ломаной, соединяющей точки A и B, если известно, что все прямоугольники, изображенные на рисунке являются квадратами.

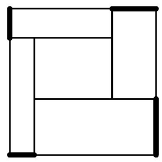


$\boxed{\textbf{2}}$ Гриша взял бумажный треугольник и вырезал из него квадрат (см. рисунок).

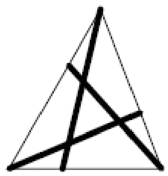


Известно, что периметр треугольника был равен 17, а периметр полученной фигуры 23. Найдите площадь новой фигуры, если площадь треугольника была равна 25.

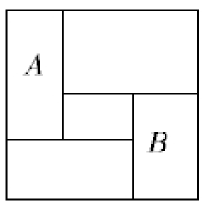
$\boxed{\textbf{3}}$ Квадрат со стороной 4 м разрезан на прямоугольники так, как показано на рисунке. Сумма длин жирных отрезков равна 2 м. Найдите периметр внутреннего прямоугольника.



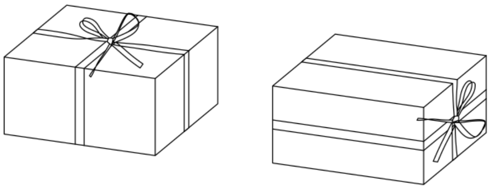
$\boxed{\textbf{4}}$ Большой треугольник разбит тремя жирными отрезками на 4 треугольника и 3 четырехугольника. Сумма периметров четырехугольников равна 25 см. Сумма периметров четырех треугольников равна 20 см. Периметр исходного большого треугольника равен 19 см. Найдите сумму длин жирных отрезков.



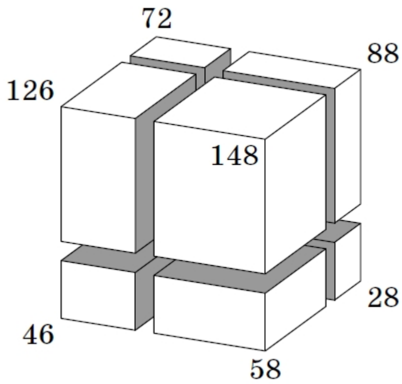
$\boxed{\textbf{5}}$ Разрежьте по клеточкам квадрат размером 10×10 клеток на 5 прямоугольных частей по схеме, показанной на рисунке, так, чтобы площадь прямоугольника A была больше площади каждой из остальных частей, и при этом периметр прямоугольника B был больше периметра каждой из остальных частей.



$\boxed{6}$ Торт упакован в коробку с квадратным основанием. Высота коробки вдвое меньше стороны этого квадрата. Ленточкой длины 156 см можно перевязать коробку и сделать бантик сверху (как на левом рисунке). А чтобы перевязать её с точно таким же бантиком сбоку (как на рисунке справа), нужна ленточка длины 178 см. Найдите размеры коробки.



$\boxed{7}$ Деревянный брусок тремя распилами распилили на восемь меньших брусков. На рисунке у семи брусков указана их площадь поверхности. Какова площадь поверхности невидимого бруска?



Листок 27. Игры

В каждой задаче один и тот же вопрос — Кто выиграет при правильной игре?

$\boxed{1}$ По кругу расставлены 2015 фишек. За ход разрешается снять одну или две изначально соседние фишки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

$\boxed{2}$ Двое по очереди ломают шоколадку 6×8. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

$\boxed{3}$ Двое по очереди ставят шахматных слонов в клетки доски 2011×2012. Причем ставить слона на битое поле нельзя (слон бьет все клетки обеих диагоналей, содержащих клетку, на которой он стоит). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

$\boxed{4}$ Имеется три кучки камней: в первой — 10, во второй — 15, в третьей — 20 камней. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

$\boxed{5}$ На столе лежат три монеты достоинством 12, 17 и 30 центов. Также имеется касса, в которой есть неограниченное количество монет любого достоинства. За один ход разрешается взять любую неодноцентовую монету со стола, разменять ее в кассе на несколько более мелких и их снова положить на стол. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

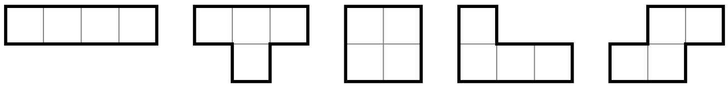
$\boxed{6}$ На доске нарисовано 10 крестиков и 10 ноликов. За ход разрешается стереть любые два значка и, если они были одинаковыми, нарисовать вместо них крестик, а если разными — нолик. Если последний оставшийся на доске значок – крестик, то и выиграл первый игрок, если нолик — то второй.

$\boxed{7}$ Белая ладья стоит на поле $b2$ шахматной доски 8×8, а черная — на поле $c4$. Игроки ходят по очереди, каждый — своей ладьей, начинают белые. Запрещается ставить свою ладью под бой другой ладьи, а также на поле, где уже побывала какая-нибудь ладья. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. (За ход ладья сдвигается по горизонтали или вертикали на любое число клеток, и считается, что она побывала только в начальной и конечной клетках этого хода.)

Листок 28. Разрезания

$\boxed{1}$ Из клетчатого квадрата 8×8 вырезали две противоположные угловые клетки. Можно ли получившуюся фигуру разрезать на доминошки?

$\boxed{2}$ *Тетрамино* – связные клетчатые фигурки из четырех клеточек. На рисунке ниже изображены все тетрамино с точностью до поворотов и симметрии.

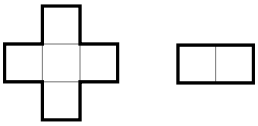


На какие фигурки тетрамино можно разрезать квадрат 8×8, а на какие нельзя?

$\boxed{3}$ Найдите все клетки в квадрате 5×5, которые можно вырезать, чтобы оставшуюся фигуру можно было разбить на уголки.

$\boxed{4}$ Клетчатая доска 7×7 разбита на 16 прямоугольников 1×3 и один квадратик 1×1. Где может находиться этот квадратик?

$\boxed{5}$ Можно ли из таких фигурок сложить квадрат 7×7?



$\boxed{6}$ Можно ли сложить параллелепипед $6 \times 7 \times 7$ из брусков $1 \times 1 \times 2$ так, что брусков каждого из трех возможных направлений было одинаковое количество?

Листок 29. Квадраты

$\boxed{1}$ **а)** Чему равна сумма
$$1+3+5+7+\ldots+2n-1?$$

б) Чему равна сумма
$$1+1+2+2+\ldots+(n-1)+(n-1)+n?$$

$\boxed{2}$ Три натуральных числа a, b и c, для которых $a^2+b^2=c^2$, называются *пифагоровой тройкой*. Найдите хотя бы три различных пифагоровых тройки, в которых числа взаимно просты.

$\boxed{3}$ **а)** Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые в следующих выражениях:
$$(a+b)^2; (a-b)^2; (a+1)^2; (a-1)^2.$$

б) Возведите число, состоящее из 2016 девяток, в квадрат.

$\boxed{4}$ Число $\overline{xxyy}$ — точный квадрат. Найдите x и y.

$\boxed{5}$ Оказывается, если перемножить два последовательных натуральных числа и приписать в конце 25, получится точный квадрат. Например,
$$225=15^2, 1225=35^2.$$
Докажите это свойство.

$\boxed{6}$ Докажите, что для любого натурального a найдутся целые b и c такие, что
$$b^2+c^2=2(a^2+1).$$

$\boxed{7}$ Существует ли тысяча полных квадратов, отличающихся только порядком цифр?

$\boxed{8}$ Существует ли натуральное число, у которого четное число нечетных и нечетное число четных делителей?

Листок 30. Инвариант

Инвариантом процесса называют величину, которая не изменяется в течение него.

1 На доске написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?

2 100 фишек выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

3 Вера, Надя и Люба решали задачи. Чтобы дело шло быстрее, они купили конфет и условились, что за каждую решенную задачу девочка, решившая ее первой, получает четыре конфеты, решившая второй — две, а решившая последней — одну. Девочки говорят, что каждая из них решила все задачи и получила 20 конфет, причем одновременных решений не было. Может ли такое быть?

4 В таблице 9×9 одна из угловых клеток закрашена черным цветом, все остальные — белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

5 Хулиган Вася порвал стенгазету, причем каждый кусок он разрывал либо на 4, либо на 10 частей. Могло ли в конце получиться 2006 кусков?

6 На доске написано число 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят на 2 или на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не может быть равно 54.

7 На острове Серобуромалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно перекрашиваются в третий цвет. Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

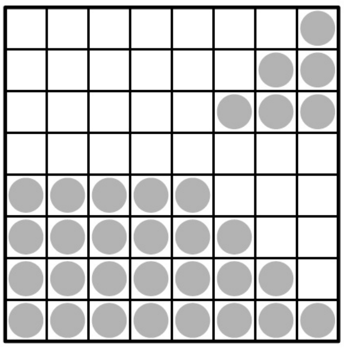
Часть II

Ответы и решения

1 Можно или нельзя

1. Ответ: нет, нельзя.
Решение. Поскольку палочки ломать нельзя, каждая сторона прямоугольника измеряется целым числом сантиметров. Каждая сторона прямоугольника в его периметре участвует дважды, значит, периметр должен выражаться четным числом сантиметров. Посчитаем его: $4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 4 + 8 + 21 + 20 = 53$ — нечетное число. Значит, такого не может быть.
2. Ответ: да, можно.
Решение. Можно посадить детей так: Вася→Даша→Андрей→Глеб→Петя→Тимур→Митя→Соня.
3. Ответ: да, сможет.
Решение. Например, в первый карман он положит 0 монет, во второй — 1, в третий — 2 и в четвертый — 5 монет.
4. Ответ: а) смогут; **б)** не смогут.
Решение. а) умножим числитель и знаменатель на 2, получим дробь $\frac{20}{194}$. Теперь прибавим к числителю и знаменателю число 154, получим дробь $\frac{174}{348} = \frac{1}{2}$.

б) Заметим, что исходная дробь меньше 1 и при указанных действиях из дроби, меньшей 1, не может получится дробь, большая или равная 1.
5. Ответ: нет, не может.
Решение. Воспользуемся следующим фактом: число дает тот же остаток при делении на три, что и сумма его цифр. Вычислим остаток суммы всех цифр, стоящих в таблице, при делении на три. Так как ровно 19 чисел делятся на 3, то либо все строки делятся на 3, либо все столбцы делятся на 3. Будем считать, что все строки делятся на 3. Тогда сумма цифр в каждой строке делится на 3, а, значит, и сумма всех цифр в таблице делится на 3. Суммируя все цифры по столбцам, получим, что сумма всех цифр в таблице не делится на 3. Значит, такого не может быть.
6. Ответ: да, могло.
Решение. Пусть Вася написал число 143. Тогда после того, как Вася умножит его на каждую его цифру, он получит $143 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 = 1716$.
7. Ответ: да, можно.
Решение. Можно расставить, например, так:



2 Сложные вычисления

1. Ответ: 1/2, 1/3, 1/6.
Решение. Проверим, что эти дроби подходят. $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$ — целое и $2 + 3 + 6 = 11$ — тоже целое.
2. Ответ: 66.
Решение. $((x : 2 - 3) : 2 - 1) : 2 - 4 = 3 \to ((x : 2 - 3) : 2 - 1) : 2 = 7 \to (x : 2 - 3) : 2 - 1 = 14 \to (x : 2 - 3) : 2 = 15 \to x : 2 - 3 = 30 \to x : 2 = 33 \to x = 66$.
3. Ответ: 9 зеленых, 4 оранжевых, 2 красных и 8 желтых шариков.
Решение. Заметим, что только один путал зеленый цвет, значит, двое назвали точное число зеленых шариков – это A и C. Тогда зеленых шариков 9, а B путает зеленый и желтый цвета. B не путает оранжевый, значит, оранжевых 4. C путает красный цвет с оранжевым, значит, красных 2. C не путает желтый, значит, желтых 8.
4. Ответ: **а)** 125250; **б)** 2023066.
Решение. Докажем пункт **в)**, предыдущие два пункта очевидно из него следуют.

Запишем числа от 1 до n в ряд. А под этим рядом запишем те же числа только в обратном порядке и сложим числа, записанные друг под другом:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ + & + & + & \dots & + & + & + \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 & n+1 \end{array}$$

По приведенной выше таблице становится понятно, что если сложить все числа от 1 до n, взяв каждое число дважды, то получится то же самое, что и при сложении чисел $n+1$, взятых в количестве n штук. Таким образом, сумма чисел от 1 до n равна $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

5. Ответ: 4999999995.
Решение. Заметим, что если взять два одинаковых разряда в двух числах и поменять в этих разрядах цифры местами, то сумма не изменится. Значит, сумма всех чисел равна

$$111111111 + 222222222 + \ldots + 999999999 = 111111111 \cdot (1 + \ldots + 9) = 111111111 \cdot 45 = 4999999995.$$

6. Ответ: В обоих пунктах нет решений.
Решение. В обоих равенствах использовано 11 разных букв, значит, ребусы не имеют решений.

7. Ответ: 6.
Решение. Подсчёт последнего среднего арифметического даёт следующее значение

$$M = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + 4c}{16},$$

где a_i — числа в углах, b_j — числа в неугловых клетках на границе, c — число в центре таблицы. Тогда

$$M = \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + c) + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + c) + 2c}{16} = \frac{45 + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + c) + 2c}{16}$$

и $M \leq \dfrac{45 + (5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 2 \cdot 9}{16} = \dfrac{98}{16} = 6.125$, а наибольшее возможное целое значение равно 6. Приведем пример такой таблицы:

1	5	2
6	8	9
3	7	4

8. Ответ: 4, 6.
Решение. Пусть c — наименьшее число, s и p — сумма и произведение оставшихся чисел, тогда по условию $3 \cdot \dfrac{s + c}{pc} = \dfrac{s}{p}$. Преобразуем: $3(s + c) = sc$.

Левая часть делится на 3, значит, либо s, либо c делится на 3.

1) Пусть s делится на 3, тогда $s = 3k$. $3(c + 3k) = 3kc$, $c + 3k = kc$, $3k = c(k - 1)$. $k = 1$ решением не является, также числа k и $k - 1$ взаимно просты, тогда $k - 1 = 1$ или $k - 1 = 3$. В первом случае получим $c = 6$, во втором $c = 4$.

2) Если c делится на 3, то $c = 3k$, аналогичным образом получим $k = 2$ и $k = 4$, т.е. $c = 6$ и $c = 12$.

Приведем примеры для $c = 4, 6$.

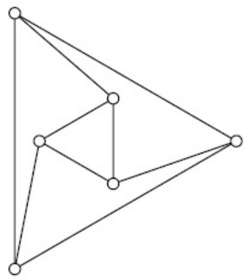
1) $c = 4$. Числа $4, 6, 6$.

2) $c = 6$. Числа $6, 6$.

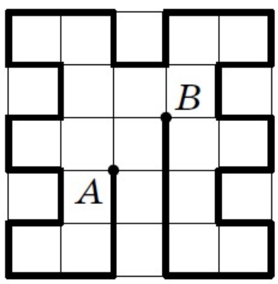
3) $c = 12$. Тогда $s = 4$, но такого не может быть, т.к. $s \geqslant c$.

3 Города и дороги

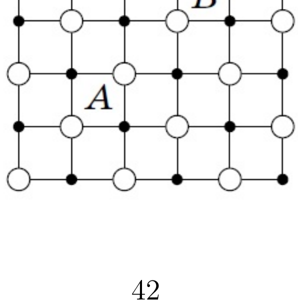
1. Ответ: а) 15; **б)** 190.
Решение. Докажем **в)**. Посчитаем пары городов. На первое место можно выбрать n городов, на второе уже $n-1$ (так как город не может быть соединен сам с собой). Следовательно, всего пар $n(n-1)$. Заметим, что число дорог в два раза меньше числа пар, так как пару «город А – город Б» мы посчитали 2 раза (А-Б и Б-А). Значит, надо поделить на 2. Пункты **а)** и **б)** получаются подстановкой в формулы.
2. Ответ: нет, нельзя
Решение. Из города, название которого не делится на 3, можно попасть только в города, название которых также на 3 не делится.
3. Ответ: 200.
Решение. В государстве 100 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Значит, если мы умножим 100 на 4, то получим удвоенное. Следовательно, число дорог равно $\frac{100 \cdot 4}{2} = 200$.
4. Ответ: План города может быть, например, таким:



5.
Решение. Один из возможных маршрутов туриста изображён на рисунке.



Двигаясь по этому пути, турист пройдёт 34 улицы (улицей мы называем отрезок между двумя соседними перекрёстками). Докажем, что более длинный маршрут невозможен. Всего в Старом городе 36 перекрёстков. Всякий раз, когда турист проходит очередную улицу, он попадает на новый перекрёсток. Таким образом, больше 35 улиц турист пройти не сможет (начальный перекрёсток A не считается). Покажем, что посетить 35 перекрёстков (и, следовательно, пройти 35 улиц) любознательный турист тоже не сможет. Для этого раскрасим перекрёстки в чёрный и белый цвета в шахматном порядке.



Всякий раз, проходя улицу, турист попадает на перекрёсток другого цвета. И отель, и вокзал расположены на белых перекрёстках. Поэтому любой маршрут содержит чётное число улиц, а число 35 нечётно.

6. Ответ: 2004.

Решение. Очевидно, что обычные города не соединены дорогами, иначе бы существовал путь не проходящий через областной город. Значит, максимальное число дорог достигается в том случае, когда каждый обычный город соединен с каждым областным, и все областные соединены между собой. Нетрудно убедиться, что ответ в таком случае будет равен $\frac{24 \cdot 23}{2} + (96-24) \cdot 24 = 276 + 1728 = 2004$.

7. Ответ: а) 90 и 0 очков; **б)** 480 и 720 очков.

Решение. а) Ясно, что наибольшее число очков команда может набрать, когда все матчи выиграет, а минимальное, когда все матчи проиграет.

б) Если в матче одна из команд одержит победу, то в сумме за матч будет разыграно 3 очка; если же ни одна из команд не выиграет, то в сумме будет разыграно два очка. Если в каждом матче будет ничья, то всего будет разыграно $16 \cdot 15 \cdot 2 = 480$ очков. Максимальное число очков будет разыграно, когда в каждом матче одна из команд выиграет, т.е. $16 \cdot 15 \cdot 3 = 720$ очков.

8.

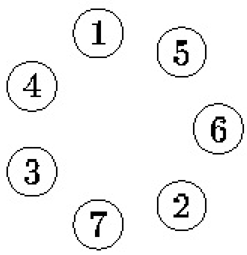
Решение. Поменяем немного правила начисления очков: за победу будем давать 2 очка, а за ничью 1 очко. Ясно, что после такой замены все условия задачи сохранятся и каждый из участников наберет целое число. Будем считать, что в этом турнире всего участников было n. Тогда все участники в сумме набрали $n(n-1)$ очков. Пусть у тех участников, которые набрали равное число очков, по k очков, а у Пети P очков. Тогда

$$n(n-1) = k(n-1) + P.$$

Заметим, что P кратно $n-1$. Но всего максимум очков могло быть $2(n-1)$ ($n-1$ тур, в каждом максимум два очка). Значит, $P = 0, n-1$ или $2(n-1)$. В первом и третьем случаях получим то, что нужно доказать, во втором получим $n = k+1$, или $k = n-1$, но тогда все, в том числе и Петя, набрали $n-1$ очко, что противоречит условию задачи.

4 Делимость

1. Ответ: а) 12; **б)** 132.
2. Ответ: Да, может.
Решение. Например, $1 + 2 + 3 = 6$.
3. Ответ: Нет, не может.
Решение. Рассмотрим произвольную пару. Пусть в этой паре у девочки a орехов, тогда у мальчика их $2a$, значит, в каждой паре всего $3a$ орехов, или число орехов кратное трем. Таким образом, если посчитать все орехи, то их число тоже будет делиться на три, но 100 не делится на 3. Значит, такого быть не могло.
4. Ответ: Нет, нельзя.
Решение. Заметим, что сумма всех чисел магического квадрата должна делиться на три(суммы по трем строкам совпадают). Посчитаем сумму первых девяти простых чисел: $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 100$. Но 100 не делится на 3.
5. Ответ: 2222232.
Решение. Заметим, что последние две цифры должны образовывать число, делящееся на 4. Значит, это 32 (числа 22, 23 и 33 на 4 не делятся). Теперь поставим в начале кода пять двоек(тогда двоек будет точно больше, чем троек). Полученное число будет делиться на 3, т.к. сумма цифр равна 15(делится на 3).
6. Ответ: а) можно; **б)** нельзя.
Решение. а)



б) Заметим, что нечетное число не делится на четное, т.е. его соседи разной четности. Значит, нечетные числа расположены парами. Но среди чисел 1, 2, ..., 9 нечетных чисел пять, и их нельзя разбить на пары.
7. Ответ: 224.
Решение. Пусть это были числа $a-4, a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$. Тогда их сумма равна $10a+5$. Пусть стерли число $a+t$, тогда $10a+5-(a+t) = 2011$. $9a = 2006+t$. Значит, t дает остаток 1 при делении на 9, значит, $t = 1$. Но тогда $9a = 2007$, т.е. $a = 223$, и $a+t = 223+1 = 224$.

8. Ответ: 33.
Решение. Найдем код страны в которой живут девушки. Т.к. остатки номеров девушек при делении на трехзначный код C города совпадают, то

$$435903 - 395322 = 40581 = 3^5 \cdot 167$$

делится на C. Значит, $C = 167, 3 \cdot 167 = 501$ или 243.

Обозначим остаток при делении числа a на b как $a \bmod b$.

Тогда

$$435903 \bmod 243 = 204, \quad 435903 \bmod 501 = 33, \quad 435903 \bmod 167 = 3.$$

Получается, что т.к. код страны есть двузначное число, то это 33.

5 Пары и чередования

1. Ответ: нет.

Решение. Заметим, что после четного числа пересечений Мюнхаузен будет находиться с той же стороны от границы, что и до этого. Поскольку 7 — нечетное число, такого быть не могло.

2. Ответ: нет.

Решение. Так как каждый раз какие-то две пантеры загрызали друг друга, то после каждого маневра число пантер уменьшалось на 2. В конце пантер не осталось, значит, их было четное число.

3.

Решение. Пусть A — исходная точка. Заметим, что после каждого прыжка расстояние до точки A меняет четность. Изначально расстояние равно нулю. Значит, когда он вновь попадет в исходную точку, он совершит четное число прыжков.

4. Ответ: нет.

Решение. Заметим, что число доминошек без пустышек равно 21. Если доминошки удастся выложить в ряд, то число доминошек с каждым числом точек, кроме быть может двух, четно. А это неверно.

5.

Решение. Объединим каждую группу подряд сидящих мальчиков в одного мальчика, а каждую группу подряд сидящих девочек в одну девочку. Тогда поскольку дети одного пола рядом теперь не сидят, между ними четное число мест, а, значит, и число требуемых пар четно.

6.

Решение. Заметим, что чтобы вернуться в исходную точку, нужно пройти одинаковое расстояние влево и вправо, а также вверх и вниз. Пусть улитка поднималась вверх a раз, а влево — b раз. Тогда она ползла $2 \cdot 30 \cdot a + 2 \cdot 30 \cdot b = 60(a + b)$. Отсюда следует, что она ползла целое число часов. Поскольку после каждого движения по вертикали следует движение по горизонтали и наоборот, то числа a и b одной четности. Значит, улитка ползла четное число часов.

7.

Решение. Пронумеруем числами от 1 до 8 вертикали слева направо и горизонтали сверху вниз соответственно. *Суммой координат* клетки назовем сумму номеров ее вертикали и горизонтали. Тогда пусть у черных клеток сумма координат четна, тогда у белых она нечетна. Заметим, что сумма координат клеток, на которых стоят 8 ладей, четна (она равна удвоенной сумме чисел от 1 до 8). Но тогда число ладей, стоящих не белых клетках, четно (сумма координат белой клетки нечетна), значит, и число ладей на черных клетках четно.

8.

Решение. Предположим, что все цифры суммы нечетны. Разберем два случая.

1) Сумма первой и последней цифры числа меньше 10. Ясно, что в этом случае не будет ни одного перехода через разряд. Действительно, допустим в предпоследнем разряде произошел переход через десяток, но тогда сумма первой и последней цифры четна, что неверно по предположению. Продолжая так далее получим треубемое. Но тогда, складывая средние цифры чисел, получим четную цифру.

2) Сумма первой и последней цифры числа не меньше 10. Тогда получим что переход через разряд чередуется с непереходом через разряд при движении справа налево. Но тогда в десятом разряде не будет перехода, и в девятом разряде сложатся две одинаковые цифры, т.е. получится четная цифра.

6 Задачи с n

1. Ответ: $n-4$.
Решение. От 1 до n количество чисел равно n. Из них 1, 2, 3, 4 не подходят, поэтому ответ $n-4$.
2.
Решение. а) Всего клеток n^2. Если n — чётное, то каждого цвета поровну, поэтому чёрных клеток $\frac{n^2}{2}$. Если n — нечётное, то чёрных клеток на одну больше, чем белых, то есть, их $\frac{n^2-1}{2}+1$.

б) Аналогично пункту **а)**, чёрных и белых клеток будет поровну, если всего клеток чётное число, и непоровну, если всего клеток нечётное число. То есть, если m и n нечётные, то ответ $\frac{mn-1}{2}+1$, и $\frac{mn}{2}$, если хотя бы одно из них четно.
3.
Решение. Любые два города, кроме Таганрога, можно соединить дорогой. Получится не больше $(n-2)+(n-3)+\ldots+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ дорог. И ещё одна дорога соединяет Таганрог с одним из городов, т.е. всего $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$.
Ответ: $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$.
4.
Решение. Было сделано 10 рейсов по m пассажиров, т.е. перевезено $10m$ пассажиров. Ещё Юра приехал сам — всего $10m+1$. Если бы ни одна из команд не приехала полностью, то из каждой команды приехало бы не больше 10 футболистов, а значит, общее количество приехавших футболистов было бы не больше $10m$.
5.
Решение. Не существует, потому что для любого натурального числа найдётся другое натуральное число такое, что их произведение будет иметь чётную сумму цифр.
Возьмём произвольное число, у которого количество цифр равно k. Умножим его на число $100\ldots01$, где количество нулей равно k. Десятичная запись произведения будет два раза повторять исходное число. Значит, сумма цифр будет у него в два раза больше, чем у исходного числа, т.е. чётная.
6.
Решение. Можно это сделать, например, так:

$$3,\ldots,2n-3,2n-1,\mathbf{2n},2n-2,2n-4,\ldots,2,\mathbf{1}$$

1 замыкает круг.
7.
Решение. Среди чисел, которые сообщили новобранцам, точно есть единица, иначе сумма всех чисел была бы не меньше $2n$. Знакомим новобранца с единицей с любым другим, у которого число больше одного (такой точно есть, если $n>2$). После этого про первого новобранца «забываем», а у второго число уменьшаем на 1. Тогда осталось $n-1$ солдат, у каждого из которых число натуральное, и сумма всех чисел равна $2n-4=2(n-1)-2$. Т.е. ситуация свелась к предыдущей, но число новобранцев стало на 1 меньше. Повторяем эту процедуру до тех пор, пока не останется два новобранца. Сумма их чисел равна $2\cdot 2-2=2$, т.е. у каждого из них осталась единица — знакомим их друг с другом. (Если солдат изначально было только 2, т.е. $n=2$, то проделываем это сразу.)
8.
Решение. Обозначим через $s(A)$ сумму цифр числа A. Из рассмотрения сложения в столбик двух чисел A и B следует, что $s(A+B)\le s(A)+s(B)$, причем равенство достигается в том и только в том случае, когда при сложении нет переносов через разряд. Тем самым, из условия задачи вытекает, что при сложении $5N+5N=10N$ нет переносов через разряд, поскольку $s(10N)=s(N)=100$. Но число $5N$ оканчивается на 5 или на 0 в случае соответственно нечетного и четного N. Первый случай отпадает, так как возникает перенос в последнем разряде.

7 Длины и расстояния

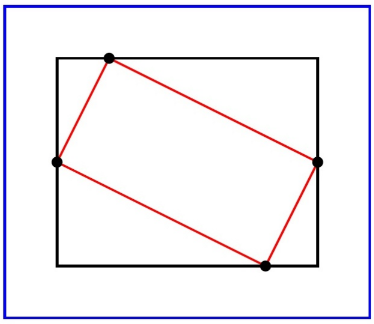
1. Ответ: 4 см.
Решение. Заметим, что сумма половин двух крайних отрезков равна $28 - 16 = 12$ см, значит, сумма их длин равна $2 \cdot 12 = 24$ см, но тогда длина среднего отрезка равна $28 - 24 = 4$ см.
2. Ответ: 3.5 см.
Решение. Сложим периметры треугольников ABE и BCE. С одной стороны, мы получим сумму периметра треугольника ABC и удвоенного отрезка BE, с другой — 32 см. Откуда следует, что $2BE = 32 - 25 = 7$ см, и $BE = 3.5$ см.
3. Ответ: 4 см.
Решение. Известно, что в треугольнике любая сторона меньше суммы двух других. Поэтому сторона BC меньше $AB + AC = 3.8 + 0.6 = 4.4$ см. Также $BC + AC > AB$, т.е. $BC + 0.6 > 3.8$, $BC > 3.2$ см. Получили что BC, длина которой целая, удовлетворяет неравенствам $4.4 > BC > 3.2$, т.е. $BC = 4$ см.
4. Ответ: 11.
Решение. Заметим, что суммы периметров маленьких прямоугольников, стоящих в противополжных углах, равны. Тогда

$$12 + x = 10 + 13 = 23,$$

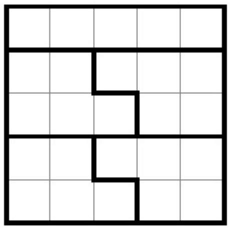
откуда $x = 11$.
5. Ответ: никакой, маршруты равны.
Решение. Заметим, что в обоих маршрутах есть отрезок длины 1 (в первом это отрезок EF, во втором — KD). Теперь нарисуем сетку так, чтобы все точки из условия оказались в узлах, а стороны квадратов были параллельны линиями сетки. Теперь можно заметить, что отрезки AE и CK равны, а также отрезки BF и DL равны. Получили, что оба маршрута равны.
6. Ответ: нет, не может.
Решение. Назовем внутренний прямоугольник *маленьким*, а внешний *большим*.

Ясно, что если стороны маленького прямоугольника параллельны сторнам большого, то каждая сторона большого больше соотвествующей стороны маленького, а, стало быть, периметр большого больше.

Разберем случай, когда стороны маленького не параллельны сторонам большого. Опишем около маленького прямоугольника *средний* прямоугольник так, чтобы стороны среднего были параллельны сторонам большого и вершины маленького лежали на сторонах среднего(см. рис.)

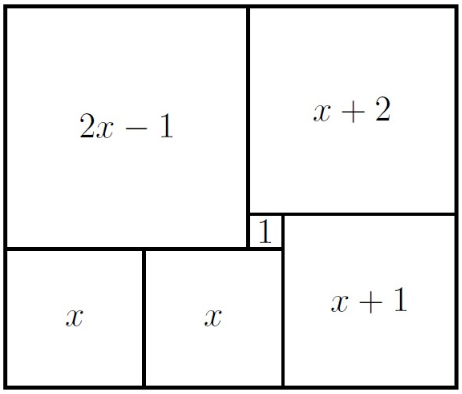


Покажем, что периметр маленького прямоугольника меньше, чем периметр среднего. Действительно, поскольку кратчайший путь между точками — отрезок, то каждая красная сторона меньше суммы двух черных отрезков, образующих с ней треугольник. Сумма всех таких черных отрезков равна периметру среднего прямогуольника. А то, что периметр среднего меньше периметра большого, мы доказали в первом случае. Значит, такого быть не могло.
7. Ответ: да, можно.
Решение. Приведем пример.



8. Ответ: 7.

Решение. Обозначим сторону квадрата, расположенного в левом нижнем углу за x. Тогда стороны других квадратов легко вычислить. Получится, как на рисунке.



Поскольку вертикальные стороны прямоугольника равны, то $(2x-1)+x=(x+2)+(x+1)$, т.е. $3x-1=2x+3$, откуда $x=4$. Значит, сторона самого большого квадрата равна $2\cdot 4-1=8-1=7$.

8 Простые и составные числа

1. Ответ: а), **г)**: да; **б)**, **в)**: нет($91 = 7 \cdot 13$, $713 = 23 \cdot 31$).
2. Ответ: 2 и 19.
Решение. Заметим, что эти два числа разной четности. 2 — единственное четное простое число. Тогда второе число — это $2 + 17 = 19$.
3. Ответ: 251.
Решение. Разложим число 2008 на простые множители: $2008 = 2^3 \cdot 251$. Так как число, у которого считали сумму, меньше 2008, то его сумма цифр не больше $9 \cdot 3 + 1 = 28$. Значит, сумма цифр равна 1, 2, 4 или 8. Подходит только вариант с суммой 8: $251 \cdot (2 + 5 + 1) = 251 \cdot 8 = 2008$.
4. Ответ: $\underbrace{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97}_{\text{всего 25 чисел}}$.
5. Ответ: 7 этажей.
Решение. Пусть в доме p подъездов, e этажей и на каждом этаже k квартир. Тогда $p \cdot e \cdot k = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Поскольку $e > k > p > 1$, $e = 7$.
6. Ответ: да, можно. $a = 1$, $b = 3$.
Решение. Если из картонок $a \times b$ можно сложить прямоугольник $c \times d$, то cd делится на ab. Значит, $49 \cdot 51 = 3 \cdot 7^2 \cdot 17$ делится на ab и $99 \cdot 101 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$ делится на ab. Поэтому $ab = 1$ или $ab = 3$. Воспользуемся условием $a < b$, тогда первый вариант не подойдет, а во втором получаем $a = 1$, $b = 3$. То, что из прямоугольников 1×3 можно сложить прямоугольник, у которого одна из сторон делится на 3, очевидно.
7.
Решение. Предположим, что получился составной остаток. Тогда у него есть делитель равный произведению двух простых (не обязательно различных). (Случай нулевого остатка очевидно невозможен.) Если остаток будеть иметь общий простой делитель $p < 30$ с числом 30, то и исходное число будет делится на p. Это означает, что исходное число либо и есть p, либо делится (но не равно) на 2 ,3 или 5, откуда следует, что оно не может быть простым. Значит, оба простых делителя больше 5, тогда остаток хотя бы $7 \cdot 7 = 49 > 30$, чего также не может быть, значит, наше предположение неверно, и остаток — простое число, либо единица.
8. Ответ: нет, не существует.
Решение. Предположим, что простых чисел конечное число. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — все простые числа. Тогда рассмотрим число $P = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$. Число P не делится ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_n$. Значит, в разложении его на простые числа будет новое простое число. Т.е. наше предположение неверно, и простых чисел бесконечно много.

9 Логика

1. Ответ: сказал.
Решение. Если бы собаки рядом не было, а кот бы зашипел, то собака должна была бы быть рядом, а это не так. Поэтому вторая часть утверждения никакого смысла в себе не несет.
2. Ответ: одно.
Решение. Заметим, что второе утверждение означает, что у Васиного числа нечетная сумма цифр. Поскольку сумма цифр может быть либо четной, либо нечетной, то верно только одно из утверждений.
3. Ответ: двое.
Решение. Поскольку все пять утверждений были сделаны про 5 разных школьников и три из них верны, то три школьника не сдали зачет. Два других утверждения ложны, поэтому соответствующие школьники зачет сдали.
4. Ответ: 2.
Решение. Заметим, что сумма ответов тех, кто ответил честно, не больше $1+2+3+4+5=15$. Т.к. $22-15=7>5$, то хотя бы двое соврали. Пример ответов: 5, 5, 3, 4, 5 (последние трое ответили честно).
5. Ответ: да, может.
Решение. Пусть есть четверо рыцарей, которые попарно дружат. А также четыре пары лжецов, где лжецы каждой пары дружат со своим рыцарем, а друг с другом не дружат. Также никакие два лжеца не дружат.
6. Ответ: 4306.
Решение. Пусть искомое число $\overline{abcd}$. Для каждой цифры a, b, c, d посчитаем, сколько раз она встречается в данных четырех числах. Очевидно, что сумма этих вхождений должна равняться 8. Поскольку никакая цифра не встречается в 3 числах, то каждая цифра встречается ровно дважды.

Т.е. в искомом числе могут быть только цифры 0, 1, 3, 4, 6, 7. Но в первом числе из этих цифр есть только 6 и 0. Значит, эти цифры в числе точно есть. Аналогично из третьего числа, получаем цифры 4 и 3. Составим табличку, в которой плюсики стоят в тех разрядах, в которых они могут быть написаны.

0	+	−	+	−
3	−	+	−	+
4	+	−	+	−
6	+	−	−	+

Очевидно, что т.к. в разряде сотен есть только один «+», то в разряде сотен числа стоит тройка. Действуя так далее и воспользовавшись тем, что четырехзначное число с нуля не начинается, получим число 4306, которое, очевидно, подходит.
7. Ответ: поровну.
Решение. Рассмотрим некоторого человека. Заметим, что поменять статус он может только, когда произносят фразы его соседи. Предположим, что он был школьником. Тогда после первого соседа он станет студентом, а после второго — школьником. Если же он был студентом, то после первого соседа он станет школьником, а затем — снова студентом. Значит, сколько школьников было, столько и осталось.
8. Ответ: да, всегда.
Решение. Рассмотрим наибольшее подмножество A домов, никакие два из которых не являются соседними. Поселим в каждый дом множества A лжеца, а во все остальные — по рыцарю. Тогда заметим, что у каждого рыцаря есть сосед – лжец, иначе бы дом этого рыцаря можно было бы добавить в множество A. По построению ни у какого лжеца нет соседей – лжецов.

10 Принцип крайнего

1.
Решение. Рассмотрим наибольшее из этих чисел(или одно из них, если таких чисел несколько). Так как оно не меньше и не больше одного из своих соседей, то оно равно ему. Мы нашли пару равных чисел.
2.
Решение. Рассмотрим наибольшее из этих чисел(или одно из них, если таких чисел несколько). Из того, что оно не меньше своих соседей и равно их среднему арифметическому, следует, что оно равно своим соседям. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что все числа равны.
3.
Решение. Пронумеруем грибников так, чтобы первый набрал больше всех грибов, второй больше среди оставшихся и т.д. Ясно, что первый не мог набрать меньше 9 грибов, т.к. тогда бы все вместе набрали максимум $1+\ldots+8=36<37$ грибов. Также второй не мог набрать меньше 7 грибов. Значит, первый и второй вместе набрали хотя бы $7+9=16$ грибов. Учитывая то, что третий набрал хотя бы 6 грибов, то 4-й, 5-й,…,8-й набрали вместе максимум $37-16-6=15<16$ грибов
4. Ответ: да, обязательно.
Решение. Рассмотрим самую верхнюю ладью, если таких несколько, то самую левую из них. Тогда выше и левее этой ладьи нет других ладей, значит, она бьет не более двух других.
5.
Решение. Предположим, что на втором шаге путешественник не возвратился в A, т.е. городC отличен от города A. Тогда маршрут от A до B короче маршрута из B в C (поскольку C — наиболее удаленный от B город). В дальнейшем каждый следующий маршрут будет не короче предыдущего, так как каждый раз мы в качестве следующего пункта назначения выбираем наиболее удаленный город. Пусть на некотором шаге путешетвенник все же вернулся в город A, выйдя из некоторого города X. По доказанному, маршрут от X до A длиннее маршрута от A до B, а это противоречит тому, что B — наиболее удаленный от A город.
6.
Решение. Рассмотрим два астероида A и B, расстояние между которыми наименьшее. Астроном на астероиде A смотрит на астероид B, а астроном на астероиде B смотрит на астероид A. Если найдется астроном, который смотрит на астероид A или B, то найдется астероид на которого никто не смотрит. В противном случае исключим из рассмотрения астероиды A и B. Получим систему из $2011-2=2009$ астероидов, для которых очевидно выполняется условие задачи. Продолжая так далее, придем к случаю трех астероидов. Выбрав, среди них два, расстояние между которыми наименьшее получим, что на оставшийся астероид никто не смотрит.
7. Ответ: 0, 1, 2, 4.
Решение. Пусть Петя задумал числа $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Все суммы различны, поэтому самая маленькая из посчитанных сумм — $c+d$, следующая за ней — $d+b$, также самая большая — $a+b$, а следующая за ней — $a+c$.

Значит,
$$c+d=1, d+b=2, a+b=6, a+c=5.$$
Тогда $c=1-d$, $b-c=1$, $b=c+1=2-d$, $a=5-c=4+d$.

Заметим, что $a+d=4+2d$ и $b+c=3-2d$ есть числа 3 и 4 в некотором порядке. Число d неотрицательно, значит, $a+d \geq 4$ и $b+c \leq 3$, значит, $d=0$,тогда $c=1$, $b=2$, $a=4$.

11 Дроби

1. Ответ: $\frac{2011}{2012}$ больше.

Решение. Заметим, что первая дробь меньше числа 1 на $\frac{1}{2011}$, а вторая — на $\frac{1}{2012}$. Поскольку

$$\frac{1}{2011} > \frac{1}{2012},$$

то вторая дробь больше.

2. Ответ: нет.

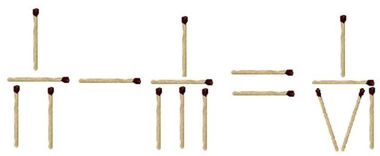
Решение. Сложим все дроби из условия. Получим:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{70}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{11}{30}+\frac{1}{70}=\frac{31}{30}+\frac{1}{70}>1,$$

что невозможно.

3.

Решение.



4. Ответ: 700 золотых монет.

Решение. За книгу «Три поросёнка-2» каждый автор должен получить четверть гонорара. Но так как Наф-Наф свою долю уже забрал, Волку причитается 1/3 остатка. За книгу «Красная шапочка-2» ему также полагается 1/3 гонорара. Поэтому всего он должен получить треть переданной ему суммы.

5. Ответ: 437.

Решение. Пусть искомое число — это a. Тогда

$$\frac{537-a}{463+a}=\frac{1}{9}, 537\cdot 9-9a=463+a, 4370=10a, a=437.$$

6. Ответ: 12/19.

Решение. Пусть $2m$ человек состоят в браке, тогда мужчин $m:\frac{2}{3}=\frac{3}{2}m$, а женщин $m:\frac{3}{5}=\frac{5}{3}m$. Т.к. всего жителей острова $\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{3}\right)m=\frac{19}{6}m$, и из них $2m$ состоят в браке, то в браке состоит 12/19 жителей острова.

7.

Решение. Если число n в разложении на простые содержит только двойки и пятерки, то числитель и знаменатель можно домножить на натуральное число так, чтобы знаменатель стал степенью десятки. Тогда такая дробь, очевидно, представляется в виде конечной десятичной дроби.

Предположим, что дробь из условия можно представить в виде конечной десятичной. Тогда

$$\frac{1}{n}=\frac{a}{10^k}.$$

Тогда $10^k=na$, а, значит, n содержит только двойки и пятерки.

8.

Решение. Возьмем дробь со знаменателем, содержащей двойку в наибольшей степени: $\frac{a}{64}$. Тогда одно из чисел $a-32$, $a+32$ попадает в интервал от 1 до 100. Обозначим его за b, а дробь — за $\frac{b}{c}$. Посмотрим, что произойдет, если поменять числители b и a местами. Сумма изменится на $\frac{1}{2}-\frac{32}{c}$. Но тогда прибавим(или вычтем) к дроби со знаменателем 2 дробь 1/2, после сокращения получим дробь с нечетным знаменателем. Ну а посли вычитания (или прибавления) дроби $\frac{32}{c}$, которая после сокращения является дробью с нечетным знаменателем, получим снова дробь с нечетным знаменателем.

12 Ребусы

1. Ответ: **а)** $1999 + 1 = 2000$; **б)** $1263 \cdot 5 = 6315$.

Решение. **а)** Так как в БЕЕЕ и МУУУ не совпадают цифры в разряде сотен, то был переход через разряд. Т.е. ЕЕ + Б $>$ 100. Так как Б $<$ 10, то ЕЕ $>$ 90, значит, Е = 9, У = 0, Б = 1 и М = 2.

б) Данное выражение можно переписать как 5·АИСТ = СТАЯ. СТАЯ $<$ 10000, значит, А = 1. Перепишем, 1ИСТ·5 =СТ1Я, тогда Т = 2 или 3.

1) Пусть Т = 2. 1ИС2·5 =С210

5000 + 500И + 50С + 10 = 1000С + 210

4800 + 500И = 950С

96 + 10И = 19С

96 + С = 10И − 20С, следовательно, С = 4 (по делимости на 10), но такого быть не может(С $>$ 5).

2) Пусть Т = 3. Тогда

1ИС3·5 = С315

5000 + 500И + 50С + 15 = 1000С + 315

4700 + 500И = 950С

94 + 10И = 19С

94 + С = 10И − 20С, следовательно, С = 6.

$163 \cdot 5 = 6315$. Тогда И = 2.

2. Ответ: 222:3=74, 666:9=74, 222:6=37.

Решение. 111·А = Б·ВГ

$37 \cdot 3 \cdot$ А = Б·ВГ, значит, ВГ делится на 37.

1) Пусть ВГ = 37, тогда 3·А = Б. Так как В = 3, то А = 2, Б = 6.

2) Пусть ВГ = 74, тогда 3·А = 2·Б. Значит, А = 2, Б = 3 или А = 6, Б = 9.

3. Ответ: АВ=58, 74, 82, 90.

Решение. Так как ААВ + АВА + ВАА = 1998, то

$222 \cdot$ А + $111 \cdot$ В = 1998.

$2 \cdot$ А + В = 18

Получаем следующие варианты А = 5, В = 8; А = 7, В = 4; А = 8, В = 2; А = 9, В = 0.

4. Ответ: $143 \cdot 14 \cdot 1 = 2002$.

Решение. Разложим число 2002 на простые множители:

БАО·БА·Б= $2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 7$.

Если Б $>$ 1, то БАО· БА· Б $> 200 \cdot 20 \cdot 2 > 8000$. Значит, Б = 1, а БА = 13 или 14.

Вариант БАО = 2002 : 13 = 154 не подходит.

А вариант БАО= 2002 : 14 = 143 подходит.

5. Ответ: $51286 + 1582 = 52868$.

6. Ответ: нет решений.

Решение. Заметим, что различных цифр в ребусе используется больше 10.

7. Ответ: не могут.

Решение. Предположим, что оба числа оказались нечетными. Сократим произведения на М·Л·О. Если ни одна из этих цифр не равна нулю, получатся снова равные произведения. М и Л — это первые цифры чисел, поэтому они нулю не равны. А цифра О не равна нулю, потому что это последняя цифра нечетного числа.

Значит,

$$\text{И} \cdot \text{Х} \cdot \text{А} \cdot \text{Й} = \text{О}^{3} \cdot \text{Н} \cdot \text{С} \cdot \text{В}$$

Всего 8 разных букв. Ни одна из них не равна 0, 5 или 7. Значит, возможных цифр всего 7. Противоречие.

8.

Решение. 312 делится на 8. По признаку делимости на 8: ЛЛЛ = 888(нулей в числах нет). Аналогично 392 делится на 8. Но тогда ЛЛО = 880 или 888. Значит, О = 0 или 8. Противоречие.

13 Включения-исключения

1. Ответ: 25.

Решение. Заметим, что 10 человек, которые занимаются и тем, и тем, входят и в 20 математиков, и в 15 биологов. Значит, в $20 + 15 = 35$ они посчитаны дважды, и всего в классе $35 - 10 = 25$ человек.

2. Ответ: 75.

Решение. Аналогично в $28 + 13 + 10 = 51$ дважды посчитаны те, кто владеют ровно двумя языками и трижды те, кто тремя. Тогда если мы вычтем $5 + 6 + 8 = 19$, то мы трижды вычтем тех, кто владеет ровно тремя языками. Следовательно, их надо один раз прибавить. Тогда всего людей, кто владеет хотя бы одним языком, $51 - 19 + 2 = 34$, а всего людей $34 + 41 = 75$.

3. Ответ:

Решение. Пусть пересечение первого и второго занимает x кв. м. Первого и третьего — y, второго и третьего — z. А все три имеют общее пересечение t кв.м.

Тогда аналогично второй задаче $6 = 3+3+3-x-y-z+t$. Но тогда $x+y+z = 3+t$. Следовательно, какие-то два ковра пересекаются по площади не меньшей, чем 1 кв.м.

4а. Ответ: 24.

Решение. 46 дней, когда он купался; 16 дней, когда он купался и ходил в магазин(возможно что-то ещё); 10 дней, когда он купался и работал в огороде. Но при этом каждый 30-й день он делает все вместе, следовательно, таких было 4. Тогда в $46 - 16 - 10 = 20$ входят дни, когда он только купался и не входят дни, когда он делал все вместе, так как в $16 + 10$ они посчитаны дважды. Значит, всего дней, когда он только купался, было 24.

4б. Ответ: 25.

Решение. Примем первый день за нулевой. Тогда купается дядя Фёдор все дни с чётным остатком от деления на 30. Ходит в магазин с остатком от деления на 30, кратным 3. Работает в огороде с остатком от деления на 30, кратным 5. То есть нас интересуют все остатки от деления на 30, не кратные 2, 3 и 5. Посчитаем все, которые наоборот делятся на одно из них. Кратных 2 — 15, кратных 3 — 10, кратных 5 — 6. Кратных 2 и 3 — 5, кратных 2 и 5 — 3, кратных 3 и 5 — 2. Кратных всем — 1.

Аналогично второй задаче тогда всего таких остатков $15+10+6-5-3-2+1 = 22$. Т. е. в 30 днях 8 скучных, и в первых 90 всего 24 скучных дня. В оставшихся двух ещё один скучный(последний). Всего 25 скучных дней.

4в. Ответ: 4.

Решение. Заметим, что он делает все дела каждый тридцатый день. Таких будет, очевидно, 4.

5. Ответ: 33.

Решение. $100 - 3 \cdot 10 + 3 \cdot 1 - 40 = 33$.

6. Ответ: легких на 20 больше.

Решение. Пусть легких задач было x, y средних и z трудных.

$x + y + z = 100$ и $x + 2y + 3z = 180$

$2x + 2y + 2z = 200$ и $x + 2y + 3z = 180$

Вычтем из первого второе. Получим $x - z = 20$.

7. Ответ: $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

Решение. Заметим, что ровно i двоек получили $a_i - a_{i+1}$ школьников и k двоек получили a_k школьников. Тогда всего двоек было

$$(a_1 - a_2) \cdot 1 + (a_2 - a_3) \cdot 2 + \ldots + (a_{k-1} - a_k) \cdot (k-1) + a_k \cdot k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

14 Неравенство треугольника

1. Ответ: а) нельзя; **б)** можно; **в)** нельзя.

Решение. а) Заметим, что $12 + 7 = 19$. То есть сумма двух сторон не больше третей, значит, треугольник составить нельзя.

б) Заметим, что если большая сторона меньше суммы двух других, то уже можно составить треугольник. Проверим это: $2.7 + 4.9 = 7.6 > 7.55$.

в) $\frac{7}{12} + \frac{11}{17} < \frac{7}{12} + \frac{12}{18} = \frac{7}{12} + \frac{2}{3} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} < 1.3$. Значит, такой треугольник составить нельзя.

2. Ответ: 4.

Решение. Пусть BC не больше 3. Тогда $BC + AC$ не больше 3.6 и меньше, чем AB.

Пусть BC не меньше 5. Тогда BC больше, чем $AB + AC$.

$BC = 4$. Тогда $4 < 3.8 + 0.6$, т.е. такой треугольник можно составить.

3.

Решение. а) Предположим обратное. Тогда одна сторона не меньше полупериметра, сумма двух других не больше полупериметра и большая сторона не меньше суммы двух других.

б) Если отрезок лежит на стороне, то все очевидно.

Продлим наш отрезок до пересечения со сторонами. Новый отрезок не меньше исходного. Заметим, что он будет делить исходный треугольник либо на два треугольника, либо на треугольник и четырехугольник. В каждой такой фигуре наш отрезок меньше полупериметра. Тогда удвоенный наш отрезок меньше суммы полупериметра исходного треугольника и длины нашего отрезка. То есть наш отрезок меньше полупериметра исходного треугольника. Что и требовалось доказать.

4. Ответ: да, существуют.

Решение. Например, 1, 2, 4, 8, 32, 64, 128, 256, 512.

5.

Решение. а) Отметим все 5 пересечений диагоналей и рассмотрим 5 треугольников, образованных двумя вершинами стороны пятиугольника и ближним к стороне пересечением диагоналей. В таком треугольнике сторона пятиугольника меньше двух других сторон. Во всех пяти треугольниках такие стороны образуют неполную суммарную длину диагоналей. Значит, периметр пятиугольника меньше сумм диагоналей.

б) К каждой диагонали прилегают две стороны. Рассмотрим 5 таких треугольников, образованных каждой диагональю. В них каждая сторона посчитана дважды. Значит, удвоенный периметр пятиугольника больше суммы длин диагоналей.

6.

Решение. Обозначим точку, в которой грибник выходит из леса, через A, а точку, в которой он должен войти в лес, через B. Отразим точку A симметрично относительно прямой(шоссе) и получим точку A'. Тогда из любого пути AKB (K — это точка, в которой грибник выходит на шоссе) можно, отразив симметрично относительно шоссе его участок AK, получить равный ему по длине путь $A'KB$, длина которого по неравенству треугольника не меньше $A'B$. Следовательно, искомая точка K, в которой грибник должен подойти к шоссе — это точка пересечения $A'B$ и шоссе.

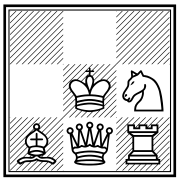
7.

Решение. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

15 Шахматы и доски

1. Ответ: да, можно.

Решение. Сначала выставляем слона, затем коня, ладью, ферзя и короля.



2. Ответ: а) да; **б)**, **в)** нет.

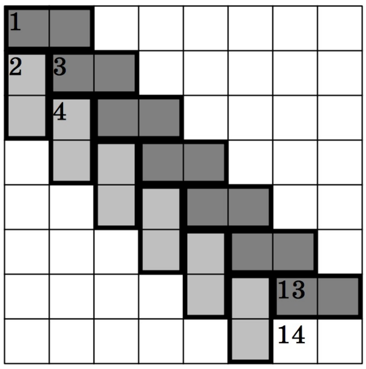
Решение. В **а)** это сделать очень просто: $a1 \to b3 \to d4 \to c2 \to a1$. В **б)** и **в)** заметим, что при каждом ходе конь меняет цвет поля. Поэтому через нечетное число ходов конь окажется на клетке другого цвета, чем исходная. Поэтому не сможет.

3. Ответ: нет, нельзя.

Решение. Предположим, такая расстановка возможна. Тогда для любой пары фигур A и B выполнено только одно из двух: A бьет B, B бьет A. Заметим, что если слон бьет ферзя, то и ферзь бьет слона. Значит, ферзь бьет слона. Аналогично получим, что ферзь бьет ладью и короля. Получили, что ферзь бьет три фигуры. Противоречие.

4. Ответ: нет, нельзя.

Решение. [1] Попробуем разрезать. В углу домино можно положить всего двумя способами. Не теряя общности, будем считать, что угловая клетка 1 закрыта горизонтальным домино. Рассмотрим теперь клетку 2: ее тоже можно закрыть лишь двумя способами. Горизонтальное домино не годится: вместе с первым домино оно образует квадрат. Значит, накроем клетку 2 вертикальным домино. Теперь клетку 3 можно накрыть всего двумя способами. Но вертикальное домино образовало бы квадрат со вторым домино, значит, надо накрыть горизонтально. Так продолжая, будем строить «елочку», пока она не упрется в правый нижний угол.



Видим, что разрезать не получается: клетку 14 можно накрыть лишь горизонтальным домино, в результате домино 13 и 14 таки образуют запрещенный квадрат.

5. Ответ: а) да, может; **б)** нет, не может.

Решение. а)

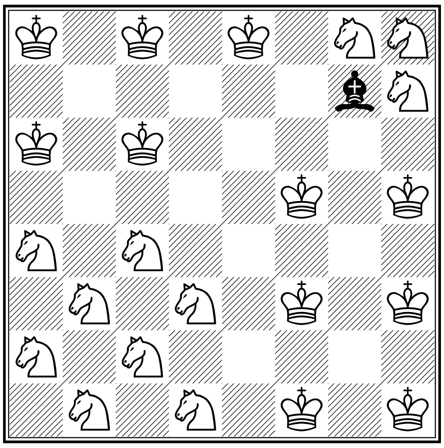
[1]Решение взято из книги «Принцип узких мест» А.В.Шаповалова.

1	62	12	47	13	42	24	27
2	61	11	48	14	41	23	28
64	63	45	46	44	43	25	26
3	60	10	49	15	40	22	29
4	59	9	50	16	39	21	30
55	56	54	53	35	36	34	33
5	58	8	51	17	38	20	31
6	57	7	52	18	37	19	32

б) Пусть первая клетка белая. Тогда три следующие клетки черная, черная, белая. Следующие три также черная, черная, белая. Ясно, что если удастся обойти так доску, то на ней черных клеток будет больше, чем белых, что неверно.

6. Ответ: можно.

Решение. Черным слоном обозначен мяч.



7. Ответ: нет, нельзя.

Решение. Числа от 1 до 2001 могут располагаться не более, чем в 2001 строке и 2001 столбце. Значит, найдутся строка и столбец, все числа в которых не меньше 2002. Но тогда произведение любых двух чисел из такой строки (столбца) больше 2002^2, т. е. для клетки, расположенной на пересечении таких строки и столбца, условие задачи не выполняется.

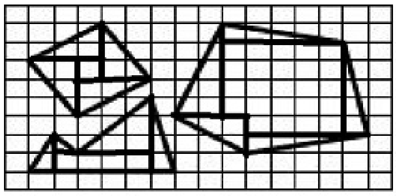
16 Площадь

1. Ответ: а) ab; б) $ab/2$.

Решение. б) Приложим к гипотенузе такой же треугольник, чтобы получился прямоугольник со сторонами a и b. Тогда площадь треугольника равна половине площади прямоугольника, т.е. $ab/2$.

2. Ответ: 13; 12; 39.5.

Решение. Чтобы найти эти площади нужно разбить фигуры на прямоугольные треугольники и квадратики. Площадь и тех и других мы умеем вычислять по первой задаче.

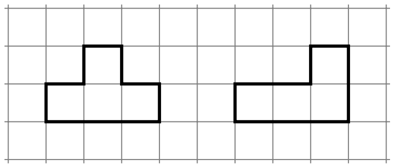


3. Ответ: Да, может.

Решение. Построим такой треугольник. Возьмем отрезок длины 2000(его вершины будут первыми двумя вершинами треугольника). Отметим его середину. Отложим от нее перпендикулярно исходному отрезку отрезок длины 0.00001. Пусть вторая вершина этого отрезка и будет третьей вершиной треугольника. Тогда его стороны, очевидно, больше 1000, а площадь равна $2000 \cdot 0.00001/2 = 0.1 < 1$.

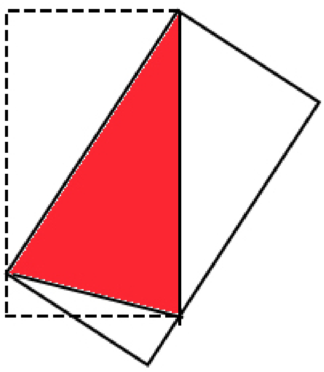
4.

Решение.



5.

Решение. а) у верхнего, т.к. площадь всего прямоугольника больше площади его части; б) закрытая. Площадь красного треугольника равна половине площади треугольника. Площадь закрытой очевидно, больше ее. Но тогда площадь открытой меньше площади закрытой, т.к. в сумме они дают прямоугольника.



6. Ответ: 27.

Решение. Заметим, что если разбить прямоугольник на четыре части «крестом», то произведения площадей противоположных частей равны. Тогда произвдение двух из трех данных в условии чисел должно делиться на третье. $12 \cdot 18/8 = 27$, $12 \cdot 8/18$ — не целое, $8 \cdot 18/12 = 12$ (по условие все площади разные). Значит, ответ 27. Нетрудно привести пример, удовлетворяющий условию.

7.

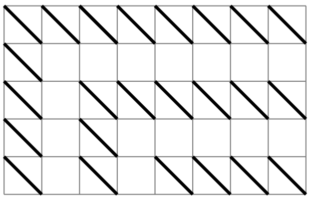
Решение. Можно доказать, что общая площадь всех серых и белых частей равна площади всех черных и белых частей. Для этого нужно найти два треугольника, площадь каждого из которых равна половине площади всей фигуры.

8.

Решение. Многоугольники разбили квадрат на части. Если никакая точка не накрыта всеми многоугольниками, то каждая часть покрыта не более 10 многоугольниками. Но тогда общая площадь не может быть больше 10.

17 Примеры и контрпримеры

1. Ответ: **а)** 2; **б)** прямоугольник со сторонами 1 и 2; **в)** 1; **г)** ромб, не являющийся квадратом.
2. Ответ: Нет, не прав.
Решение. Из прямоугольника 1×100 нельзя вырезать квадрат 2×2.
3. Ответ: Могут.
Решение. Пусть в каждом плохом грибе ровно 10 червей, а в хорошем червей нет. Далее, пусть из каждого плохого гриба по одному червю переползут в хорошие, по 9 в каждый. В результате в каждом грибе окажется по 9 червей, и все грибы будут хорошими.
4.
Решение.



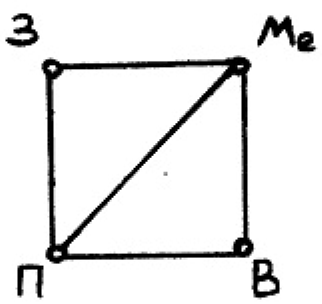
5. Ответ: Нет, не хвастает.
Решение. Числа можно выписать, например, так

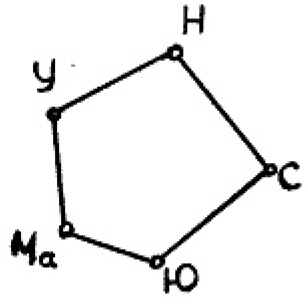
9.18.7.16.5.14.3.12.1.10.11.2.13.4.15.6.17.8.19

Объясним, почему нужно искать пример для $N \geq 19$. В палиндроме количество всех цифр, кроме, быть может, одной, должно быть четным. Однако если $N = 2, \ldots, 9$, то цифры 1 и 2 встречаются в записи чисел $1, 2, \ldots, N$ по одному разу, а если $N = 10, \ldots, 18$, то по 1 разу встречаются цифры 0 и 9.
6. Ответ: Неверно.
Решение. Пусть вначале на доске написаны числа 1, 2 и 9, и через несколько ходов из них получились нули. Если из 9 в результате получился ноль, то вычитание производилось хотя бы девять раз. Значит, и из остальных чисел вычиталось хотя бы по девять единиц; значит, к 1 надо было сделать не меньше восьми прибавлений, а к двойке не меньше семи. Итоговое количество ходов, таким образом, не меньше $9 + 8 + 7 = 24$.
7. Ответ: Неверна.
Решение. Например, для $B = 264$ или 813. $264^2 = 69696$, $813^2 = 660969$.

18 Графы

1. Ответ: нет, нельзя.
Решение. Нарисуем, как связаны планеты.

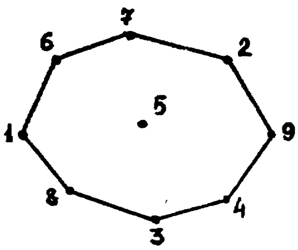


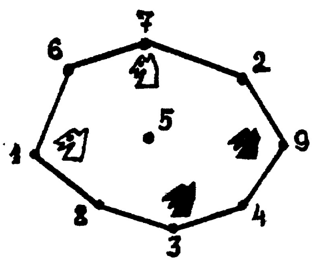


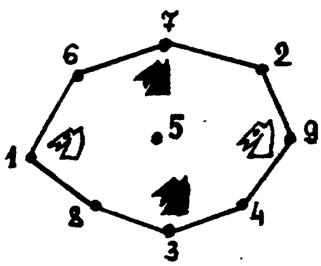
Теперь ясно, что от Земли до Марса добраться нельзя.
2. Ответ: можно посадить детей так: Вася $\to$ Даша $\to$ Андрей $\to$ Глеб $\to$ Петя $\to$ Тимур $\to$ Митя $\to$ Соня.
3. Ответ: да, можно.
Решение. Поскольку яблоки третьего сорта есть только в корзине А, то она будет третьей. Аналогично, Г будет четвертой корзиной. Пусть также В будет первой, Б — второй и Д — пятой. То есть порядок будет ВБАГД.
4.
Решение. а) Аналогично пункту **б)** нарисуем картинку. Ясно, что передвигая коней по кругу, можно поменять белых и черных.

б) Занумеруем клетки доски числами 1, 2, 3, ..., 9 так, как показано на рис.1. Каждой клетке сопоставим точку на плоскости, и если из одной клетки можно попасть в другую ходом коня, то соединим соответствующие точки линией (см. рис.2). Исходная и требуемая расстановки коней изображены на рис.3.

1	4	7
2	5	8
3	6	9







Порядок следования коней на окружности не может измениться. Поэтому переставить коней требуемым образом невозможно.
5. Ответ: да, могло.
Решение. Пусть город — три улицы, выходящих из одной площади. Тогда, начав с площади, последовательно будем обходить каждую улицу туда-обратно. Очевидно, что улицы такого города нельзя пройти по разу.
6. Ответ: а) $\frac{8\cdot 7}{2} = 28$; б) $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$.
Решение. Из каждой вершины выходит ровно $n-1$ ребро, причем каждое ребро соединяет две вершины. Поскольку всего вершин n, то всего ребер $n(n-1)/2$.

7.

Решение. У данного человека среди остальных пяти есть либо не менее трех знакомых, либо не менее трех незнакомых ему. Разберем, например, первый случай. Среди этих трех людей есть либо двое знакомых — тогда они вместе с выбранным нами исходно человеком образуют нужную тройку, либо они все трое попарно незнакомы.

8. Ответ: 870.

Решение. Приведем пример. Поскольку $45 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 9$, можно разбить 45 человек на группы по 1, по 2, ..., по 9 человек. Пусть люди, принадлежащие одной группе, не знакомы между собой, а люди, принадлежащие разным группам, знакомы. Тогда каждый человек из k-й группы имеет $45 - k$ знакомых. При этом, очевидно, условие задачи выполнено, и общее количество пар знакомых людей равно

$$\frac{45 \cdot 44}{2} - \left(\frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} + \ldots + \frac{9 \cdot 8}{2}\right) = 870.$$

Докажем, что большего числа знакомств быть не могло. Зафиксируем некоторое k, $0 \le k \le 44$. Пусть имеется некоторый выпускник, который знаком ровно с k людьми. По условию любой его знакомый не может иметь ровно k знакомых. Поэтому количество выпускников, знакомых ровно с k людьми, не превосходит $45 - k$. Обозначим через A_0, A_1, ..., A_{44} количество выпускников, имеющих соответственно 0, 1, ..., 44 знакомых. Как показано выше, $A_k \le 45 - k$, кроме того, $A_0 + A_1 + \ldots + A_{44} = 45$. Оценим общее число знакомств

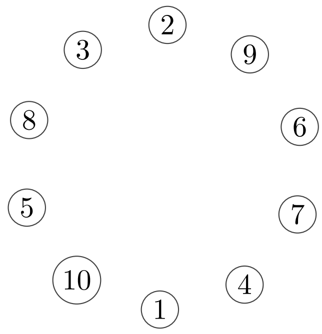
$$S = \frac{1}{2}(0 \cdot A_0 + 1 \cdot A_1 + \ldots + 44 \cdot A_{44}) = \frac{1}{2}(A_{44} + (A_{44} + A_{43}) + \ldots + (A_{44} + A_{43} + \ldots + A_{36}) +$$

$$+ \ldots + (A_{44} + A_{43} + \ldots + A_1)) \le \frac{1}{2}(1 + (1 + 2) + \ldots + (1 + 2 + \ldots + 9) + 45 + 45 + \ldots + 45) =$$

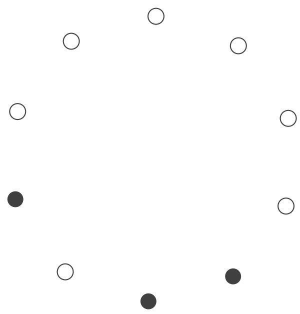
$$= \frac{1}{2}(45 \cdot 44 - ((9 + 8 + \ldots + 2) + (9 + 8 + \ldots + 3) + \ldots + 9)) = 870.$$

19 Симметрия

1. Ответ:

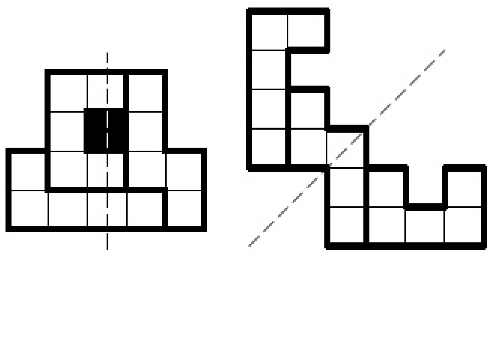


2.
Ответ: См. рис.



3. Ответ: одно.
Решение. Пусть A — симметричное четырехзначное число. Проверим, может ли $A+1$ быть симметричным числом. Если последняя цифра числа A не равна 9, то, очевидно, нет. Если же она равна 9, то последняя цифра числа $A+1$ равна 0, а первая не равна 0. Получили, что $A+1$ не может быть симметричным числом. Значит, максимум одно симметричное число может идти подряд.
4.
Решение. а) Расположение шашек симметрично относительно диагонали, поэтому под и над ней одинаковое число шашек. Т.е. не на диагонали четное число шашек. Но тогда на диагонали есть хотя бы одна шашка.

б) Допустим, что это не так. Соединим шашки, симметричные относительно какой-либо из диагоналей, ниткой. После этого разложим все шашки на группы шашек, соединенных нитками. Тогда в каждой из групп — либо две, либо четыре шашки. Значит, общее количество шашек должно быть четным — противоречие.
5. Ответ:



6. Ответ: да, можно.
Решение.

1			20			13	
	2		21		12		
		3	22	11			
14	15	16	4	17	18	19	27
		10	23	5			
	9		24		6		
8			25			7	
			26				28

7. Ответ: нет, нельзя.

Решение. Поскольку треугольников 5, а сторон у шестиугольника 6, то у одного из треугольников сторонами будут части двух соседних сторон шестиугольника. Но тогда угол между этими сторонами тупой.

8.

Решение. Ясно, что ломаная пересекает диагональ. Пусть A — одна из вершин ломаной, лежащая на диагонали. Будем двигаться по ломаной, пока не попадем в первый раз снова в вершину B, лежащую на диагонали. Из симметрии, если двигаться по ломаной из A в другую сторону, то B также окажется первой вершиной на диагонали, в которую мы попадем. При этом ломаная уже замкнется, поэтому через остальные 13 центров клеток на диагонали ломаная не проходит. Раскрасим доску в шахматном порядке так, чтобы диагональ была черной. Заметим, что на нашей ломаной белые и черные клетки чередуются, поэтому их количества равны. В исходном же квадрате черных клеток на одну больше. Поскольку клетки диагонали черные, и ломаная не проходит через 13 из них, то она не проходит и через 12 белых клеток. Итого, длина ломаной не более $15^2 - 13 - 12 = 200$.

20 Четность и графы

1.
Решение. После каждого дорисовывания степени двух вершин увеличиваются на 1.
2. а)
Ответ: сумма всех чисел равна удвоенному числу ребер, так как каждое ребро увеличивает степень ровно двух вершин на 1; **б)** поскольку сумма степеней всех вершин четна, то и число нечетных вершин четно.
3. Ответ: нет, нельзя.
Решение. Рассмотрим граф, в котором телефоны — это вершины. Вершины будем соединять ребром, если телефоны соединены проводом. В любом графе число нечетных вершин четно. Значит, так соединить телефоны не получится.
4. Ответ: нет, не может.
Решение. Посчитаем число нечетных вершин в этом графе. Их $9 + 10 = 19$ — нечетное число. Значит, такого не может быть.
5. Ответ: нет, не может.
Решение. Пусть в графе a городов. Тогда $a \cdot 3/2 = 100$, но тогда $3a = 200$, чего не может быть, так как 200 не делится на 3.
6. Ответ: нет, нельзя.
Решение. Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют отрезку. Вершины будем соединять ребром, если соответсвующие отрезки пересекаются. Тогда получим, граф в котором нечетное число нечетных вершин. Значит, так нарисовать отрезки не получится.
7.
Решение. Рассмотрим произвольную дорогу N. Эта дорога делит все города на две группы так, что из города одной группы нельзя проехать в город другой группы, не проезжая через N. Пусть в одной группе a городов, тогда в другой $99 - a$. Но тогда по этой дороге проехали всего $2 \cdot a \cdot (99 - a)$ раз. Т.к. a и $99 - a$ разной четности, то $2 \cdot a \cdot (99 - a)$ делится на 4. Значит, и вся сумма делится на 4.
8.
Решение. Будем называть ребенка *четным*, если у него четное число знакомых, и *нечетным* в противном случае. Заметим, что число нечетных детей четно. Посмотрим, от кого Гоша мог получить письма. Либо от четных знакомых, либо от нечетных незнакомых. Разберем два случая.

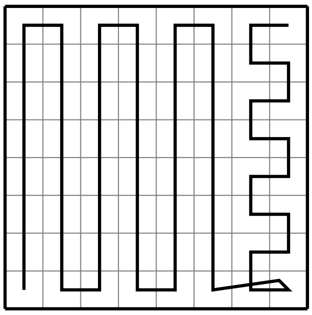
1) Гоша — четный. Тогда он получит четное число писем от знакомых и еще четное число от незнакомых.

2) Гоша — нечетный. Тогда он получит нечетное число писем от незнакомых и еще нечетное число писем от знакомых.

В обоих случаях получили, что Гоша получит четное число писем. Т.е. еще хотя бы одно.

21 Расстановки ладей

1. а)
Решение. Можно поставить ладей вдоль одной из главных диагоналей. Два других способа из первой расстановки можно получить перестановкой столбцов.
б) Ответ: 8!.
Решение. Заметим, что любую такую расстановку можно получить перестановкой столбцов из расстановки ладей по диагонали. Причем разные перестановки задают разные расположения. Всего перестановок 8 столбцов — 8!.
2. Ответ: да, может.
Решение.



3.
Решение. Выберем самую левую ладью среди самых верхних. Очевидно, что левее и выше ее нет ладей. Значит, она бьет не более двух ладей.
4.
Решение. Заметим, что в любых четырех столбцах и любых четырех строках ровно по 4 ладьи. Но тогда сумма количеств ладей в левом нижнем квадрате и правом нижнем совпадает с суммой количеств ладей в правом нижнем и правом верхнем квадрате. Откуда следует, что количество ладей в левом верхнем квадрате 4×4 равно количеству ладей в правом нижнем квадрате 4×4.
5.
Решение. Поскольку любую расстановку ладей можно получить из диагональной последовательными перестановками соседних столбцов, то достаточно проверить, что из расстановки ладей, при которой на черных клетках стоит четное число ладей, получается расстановка с тем же свойством. Заметим, что при такой перестановке каждая ладья меняет цвет поля. Но тогда четность ладей на черных клетках не меняется.
6. Ответ: да.
Решение.

5	11	6	12
1	15	2	16
8	10	7	9
4	14	3	13

7. Ответ: 9407.
Решение. Заметим, что эти три ладьи всегда располагаются в трёх клетках, лежащих в углах некоторого прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам доски («квартета» из четырёх клеток, находящихся на пересечении двух горизонталей и двух вертикалей). При этом их порядок по часовой стрелке совпадает с исходным, т.е. белая, чёрная и красная ладьи. Нетрудно убедиться, что возможно любое из таких расположений. Для этого ладьи сначала сдвигаются в три угла такого квартета (передвигаются в две вертикали, потом в две горизонтали квартета, сохраняя друг друга под защитой), а затем перемещаются по очереди по часовой стрелке через свободный угол. Всего существует $(8{\cdot}7/2)^2 = 28^2 = 784$ таких квартетов, что определяется выбором двух горизонталей и двух вертикалей, на пересечении которых и будут находиться четыре угла соответствующего прямоугольника. В каждом таком прямоугольнике существуют $4 \cdot 3 = 12$ расстановок ладей по часовой стрелке, т.к. ладьи всегда образуют уголок, в центральной клетке которого может находиться любая ладья (3 варианта), а сама

центральная клетка может находиться в любом из углов квартета (4 варианта). Учитывая исходный вариант, получим всего $784 \cdot 12 - 1 = 9407$ расстановок.

8. Ответ: 10.

Решение. Пример, см. на рисунке:

1	2	4	6				
8							
10							
				3			
					5		
						7	
							9

Докажем, что больше 10 ладей расставить не удастся. Каждая нечётная по номеру ладья бьёт ровно 4 новые стенки из $32 = 4 \cdot 8$ стенок на доске (сторон граничных клеток), а каждая чётная ладья бьёт ровно 2 новые стенки, т.к. две стенки ряда (строки-столбца), в котором эта ладья стоит вместе с побитой ею ладьёй, уже были ранее побиты той ладьёй. Значит, каждая пара подряд выставленных ладей бьёт ровно 6 новых стенок, тогда можно выставить ровно $[32/6] = 5$ пар ладей (всего 10 ладей), после чего останется ровно $32 - 5 \cdot 6 = 2$ непобитые стенки, которых уже не хватит для появления на доске 11-й ладьи, т.к. ей надо 4 новые стенки.

22 Отрицательные числа

1. Ответ: а) $1, -1.1, 1, -1.1, 1$; **б)** нет, нельзя.
Решение. Посчитаем сумму всех чисел двумя способами. 1) Разобьем все числа на четыре группы по три соседних числа; 2) на три группы по четыре соседних числа. Тогда в 1) получим положительную сумму, а в 2) отрицательную. Значит, такого не может быть.
2.
Решение. Заметим, что каждое число равно либо 1, либо -1. Но тогда -1 четное количество. А значит, 1 и -1 не одинаковое количество. Значит, их сумма не равна 0.
3. Ответ: Да, может.
Решение. Докажем, что число 12345678901234567890 1 подходит. Вычислим знакопеременную сумму цифр этого числа:

$$(1-2+3-4+5-6+7-8+9-0)+(1-2+3-4+5-6+7-8+9-0)+1=11.$$

Значит, число делится на 11.
4. Ответ: Нет, нельзя.
Решение. Заметим, что при таких операциях не меняется остаток при делении на 11.
5.
Решение. а) Ясно, что четность полученного выражения совпадает с четностью суммы всех чисел. Сумма чисел от 1 до 11 четна. Значит, минимальный результат равен 2. Получим его, $1+2+3+4+5-6-7+8-9-10+11=2$.
б) Здесь сумма уже нечетная. Получим 1:

$$2-1+((110+3)-(109+4)+(108+5)-(107+6)+\ldots+(58+55)-(57+56))=1.$$

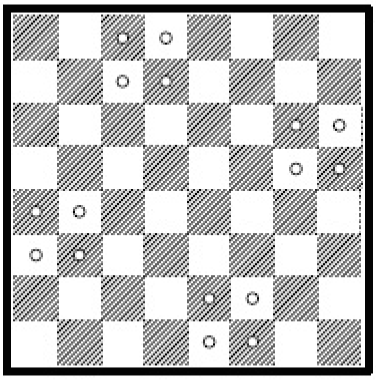
6. Ответ: 8.
Решение. Очевидно, что больше 8 различных сумм не получится. Пример на 8 сумм:

1	1	1	1
1	1	1	0
0	-1	-1	-1
0	-1	0	-1

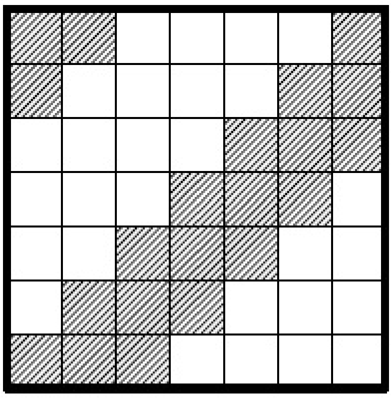
7. Ответ: Нет, не существует.
Решение. Заметим, что из первых трех неравенств $abckmnxyz=(amz)(bnx)(cky)>0$, а из последних трех $abckmnxyz=(any)(bkz)(cmx)<0$. Значит, таких чисел не существует.
8.
Решение. В результате каждой операции сумма S попарных произведений соседних чисел увеличивается (в этой сумме $ab+bc+cd$ заменяется на $ac+cb+bd$, а $ab+cd<ac+bd$, если $(a-d)(b-c)<0$.) Но сумма S может принимать лишь конечное число различных значений.

23 Клетчатые задачи

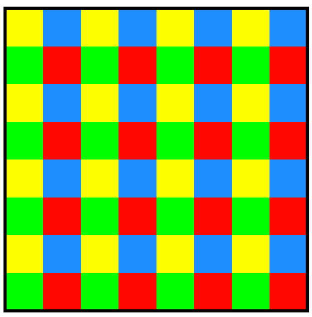
1. Ответ: да, можно.
Решение. Возьмем квадрат 8×8 и закрасим в нем клетки, стоящие на пересечении столбца и строки с четным номером. Ясно, что у этого квадрата в любом квадрате 2×2 будет ровно одна закрашенная клетка. Теперь выкинем правый столбец и верхнюю строку. Получим квадрат 7×7, удовлетворяющий условию.
2. а) Ответ: нет, нельзя.
Решение. Посчитаем сумму всех чисел в таблице. Складывая по столбцам, получим, что она больше 800, а по строкам — получим, что меньше 800.
б) Ответ: нет, не может.
Решение. Ясно, что остаток суммы всех чисел по строкам равен остатку суммы всех чисел по столбцам и равен остатку суммы всех цифр в таблице при делении на 3. Если ровно одно из чисел не делится на 3, то суммы по строкам и по столбцам дают разные остатки, чего не может быть.
3. Ответ: да, можно.
Решение.



4.
Решение.



5.
Решение. Покрасим доску так, как показано на рисунке.

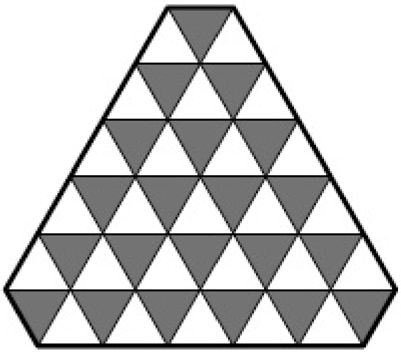


Тогда черные клетки перекрасятся в синий и зеленый цвета, а белые — в красный и желтый.

Заметим, что если сумма двух чисел четна, то эти числа одной четности. Значит, в каждом столбце и в каждой строке четность суммы цифр на белых клетках совпадает с четностью суммы на черных. Поэтому четность суммы зеленых чисел совпадает с четностью красных. А четность суммы красных совпадает с четностью суммы синих. Тогда сумма синих чисел совпадает с четностью суммы зеленых, а, значит, сумма чисел в черных клетках четна.

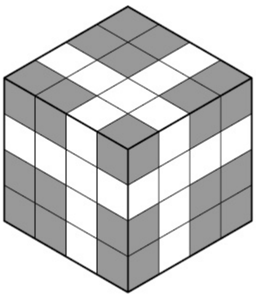
6. Ответ: нельзя.

Решение. Раскрасим фигуру так, как изображено на рисунке. Если разрезание возможно, то в куске будет два треугольника: черный и белый (всего их 46), то есть черных и белых треугольников должно быть поровну. Но на рисунке черных треугольников 21, а белых — 25, следовательно, требуемое разрезание невозможно.



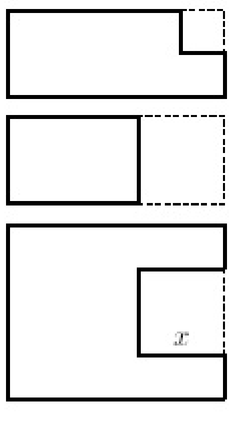
7. Ответ: нельзя.

Решение. Закрасим 27 квадратиков указанных граней так, как показано на рисунке. Тогда любая полоска 3×1 закрывает четное число закрашенных квадратиков. Поэтому заклеить данные три грани полосками так, как требуется в условии, не удастся.



8. Ответ: а) 2×2; б) см. рис.; в) 3×10 или 4×6.

Решение. а) Квадратик не мог иметь общий угол с прямоугольником (см. рис.), так как тогда периметр остался бы прежним или уменьшился, а площадь бы уменьшилась. Значит, квадрат примыкает только к одной из сторон прямоугольника (см. рис.). Пусть сторона квадрата x. Тогда Таня, вырезав квадрат, уменьшила площадь фигуры на x^2, при этом периметр увеличился на две стороны квадрата, то есть на $2x$. Таким образом,



исходная площадь$-x^2$ = площадь полученной фигуры,

исходный периметр$+2x$ = периметр полученной фигуры.

По условию

исходная площадь = периметр полученной фигуры,

исходный периметр = площадь полученной фигуры.

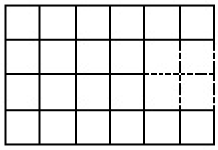
Отсюда

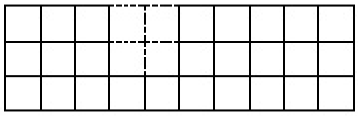
исходная площадь $-x^2$ = исходный периметр,

исходный периметр $+2x$ = исходная площадь.

Значит, $x^2 = 2x$, откуда $x = 2$.

б)





в) Пусть стороны прямоугольника m и n. Тогда из решения пункта а) следует, что $mn = 2m + 2n + 4$. Наша задача — найти все возможные пары чисел m и n, удовлетворяющие этому равенству. Равенство $mn = 2m + 2n + 4$ можно записать в виде $(n-2)(m-2) = 8$. Поскольку m и n превосходят 2, задача сводится к поиску разложений числа 8 на два натуральных множителя.

24 Кубики

1. Ответ: одна грань у 6, две грани у 12 и три грани у 8.

Решение. Сначала заметим, что три грани закрашены только у угловых кубиков, их 8. Две грани у оставшихся, лежащих на ребре основного куба, таких 12. Тогда у всех остальных, кроме центрального, одна грань. Их $27 - 20 - 1 = 6$.

5.

Решение. Раскрасим наш кубик $3 \times 3 \times 3$ в шахматную раскраску(каждый кубик $1 \times 1 \times 1$ будет соприкасаться с кубиком другого цвета). Пусть в верхнем слое 5 черных и 4 белых, тогда в соседнем должно быть наоборот — 5 белых и 4 черных, но центральный кубик вырезан, соответственно, там будет 4 белых и 4 черных. В последнем третьем слое будет опять 5 черных и 4 белых кубика. Тогда в сумме 14 черных и 12 белых кубиков. Каждый ход мышка кушает соседний кубик, который будет другого цвета, соответственно, каждые 2 хода мышка съедает по кубику каждого цвета, а в конце разница между белыми и черными $14 - 12 = 2$, чего мы достичь не сможем.

6.

Решение. Раскрасим вершины куба в шахматную раскраску(с белой заяц может попасть только в чёрную). Предположим, что заяц изначально в белой вершине. Обстреляем все, кроме одной. Если он выжил, то был в оставшейся четвёртой белой вершине, следовательно, он следующим ходом может пойти только в три вершины. Вторым выстрелом обстреляем эти 3 клетки. Если заяц опять выжил, то он был изначально в чёрной, тогда аналогично действуя, мы точно убьём его за 2 оставшихся хода.

7.

Решение. Заметим, что разница между двумя диагональными вершинами одной грани не больше, чем два. Тогда разница между двумя диагональными вершинами куба не больше, чем 3. Выберем вершину A, ей диагональную в верхней грани вершину B и диагональ куба AC. Между A и B разница меньше 3, а B и C соседние. Следовательно, разница между числами в вершинах A и C меньше 4.

Если модуль разности меньше двух, мы решим задачу.

Пусть модуль разности равен двум, тогда одна из вершин на пути из A в C равна единице, а другая отличается не более, чем на 1. Аналогично для другого пути из A в C. Так мы найдём пару вершин, в которых модуль разности меньше двух.

Пусть модуль разности равен 3. Тогда пусть число в вершине A будет равно 0, а в вершине C — 3. Все соседние вершины с C — это диагональные в грани вершины с A, значит, между ними разность меньше 3, также они должны различаться не более, чем на 1 с вершиной C. Значит, все они равны 2.

Вершина соседняя с A, назовём её L, может быть от -1 до 1 и у нее есть сосед с числом 2. Значит, число при ней — это 1. Вершина противоположная L отмечена числом 2. Мы нашли пару противоположных вершин, подходящих под условие и в этом случае.

8. Ответ: нет, нельзя.

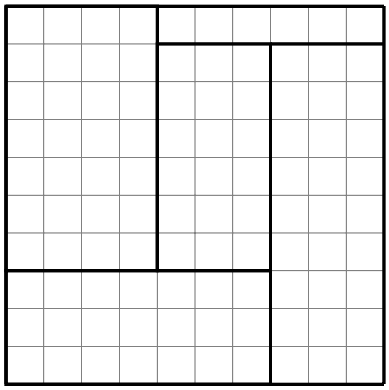
Решение. Так как каркас состоит из 54 единичных отрезков, для его изготовления необходимо 18 деталей. Рассмотрим одну из восьми вершин куба. Для того, чтобы припаять к ней три отрезка, нужно использовать не менее двух деталей. То есть, для формирования вершин куба нужно не менее 16 деталей. Рассмотрим центр куба. Из него должно выходить 6 отрезков, и для этого необходимо не менее трёх деталей. А так как одна и та же деталь не может использоваться в вершине куба и в его центре, то необходимо не менее 19 деталей. Противоречие.

25 Признаки делимости

1. Ответ: никто.
Решение. Контпримером для Пети является число 27, а для Васи — 9981.
2. Ответ: во всех пунктах ответ «да».
Решение. а) 111; **б)** 111111111; **в)** 111111; **г)** 111111111111.
3. Ответ: а) составное; **б)** не изменится.
Решение. По признаку делимости на 3(сумма цифр равна 45 и делится на 3) число делится на 3. При перестановке цифр сумма цифр числа не меняется, поэтому число снова будет делится на 3, т.е. не будет простым.
4. Ответ: 1625384970.
5. Ответ: 4026, 6039, 8052.
6. Ответ: 9.
Решение. Заметим, что при данных операциях не меняется остаток при делении на 9. Произведение всех чисел от 1 до 100 делится на 9. Значит, и последнее однозначное число делится на 9. Ясно, что это не 0, тогда, это 9.
7. Ответ: нет, не существуют.
Решение. 2013 делится на 11. Но ни одно из чисел AB, $CCCD$ на 11 делиться не может.
8. Ответ: все четные четырехзначные числа.
Решение. Заметим, что $\overline{abcdabcdabcd} = 100010001 \cdot \overline{abcd}$. Число 100010001 делится на 7. Значит, для делимости на 14 достаточно, чтобы число $\overline{abcd}$ было четным.

26 Периметры

1. Ответ: 30 см.
Решение. Длина ломаной в три раза больше длины отрезка.
2. Ответ: 16.
Решение. Периметр полученной фигуры отличается от периметра исходной на удвоенную сторону квадрата. Значит, площадь новой фигуры меньше исходной на площадь квадрата, т.е. равна $25 - 3^2 = 16$.
3. Ответ: 12 м.
Решение. Периметр внутреннего прямоугольника отличается от периметра большого квадрата на удвоенную сумму жирных отрезков. Получается, периметр внутреннего равен $4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 12$.
4. Ответ: 26.
Решение. Если сложить периметры всех четырехугольников и треугольников, получим, периметр большого треугольника и удвоенную сумму жирных отрезков. Поэтому она равна $25 + 20 - 19 = 26$.
5. Ответ:



6. Ответ: $22 \times 22 \times 11$.
Решение. Пусть $2a$ — сторона основания, а a – высота коробки. Тогда разность в длинах ленточек равна $2a = 22$, значит, размеры коробки $22 \times 22 \times 11$.
7. Ответ: 22.
Решение. Обозначим, вершины куба как $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причем A_1 лежит строго над A и так далее. Тогда нетрудно заметить, что суммы площадей поверхностей брусков при вершинах A, B_1, C, D_1 и при вершинах A_1, B, C_1, D равны. Значит, площадь поверхности невидимого бруска равна $46 + 28 + 148 + 72 - 88 - 126 - 58 = 22$.

27 Игры

1. Ответ: выиграет второй.

Решение. Посмотрим на первый ход. Если первый снимет одну фишку, то второй две симметричные ей; если первый снимет две фишки, то второй снимет одну симметричную ей. Далее круг разобьется на две половины и второй может делать ходы, симметричные первому.

2. Ответ: выиграет первый.

Решение. Первым ходом он ломает шоколадку пополам, а дальше делает разломы симметрично первому в соответствующем куске симметрично относительно первого разлома.

3. Ответ: выиграет второй.

Решение. Он будет делать ходы симметричные первому относительно оси симметрии доски параллельной стороне длины 2011.

4. Ответ: второй выиграет.

Решение. За ход число кучек увеличивается на 1. Изначально их было три, когда игра закончится, их будет 45. Значит, второй сделает последний ход и первый проиграет.

5. Ответ: выиграет первый.

Решение. Первым ходом он разменяет 30 центов на монеты 12, 17 и 1 цент. Далее будет повторять ходы за вторым симметрично.

6. Ответ: выиграет первый игрок.

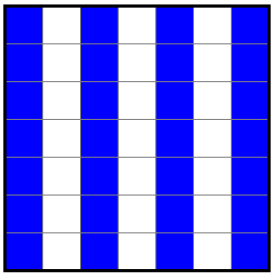
Решение. После каждого хода меняется четность крестиков на доске. Всего ходов будет 19. Значит, на доске останется крестик и выиграет первый игрок.

7. Ответ: выиграет второй.

Решение. Если представить, что ладьи стоят в противоположных углах, то очевидно по симметрии выиграет второй. Этого несложно добиться, мысленно переставив столбцы и строки.

28 Разрезания

1. Ответ: нет, нельзя.
Решение. Решить задачу помогает шахматная раскраска.
2. Ответ: На все, кроме последней.
3. Ответ: можно вырезать только клетки с координатами $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(1, 5)$, $(3, 1)$, $(3, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 1)$, $(5, 3)$, $(5, 5)$.
4. Ответ: В клетках с координатами $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(1, 7)$, $(4, 1)$, $(4, 4)$, $(4, 7)$, $(7, 1)$, $(7, 4)$, $(7, 7)$.
Решение. Решить задачу помогает раскраска в три цвета диагоналями.
5. Ответ: нет, нельзя.
Решение. Решить задачу помогает шахматная раскраска.
6. Ответ: нет, нельзя.
Решение. Расположим параллелепипед так, чтобы верхняя грань была 7×7. Закрасим кубики верхней грани в синий цвет, как показано на рисунке. Также закрасим все кубики, находящиеся в одних столбцах с закрашенными кубиками.



Всего будет закрашено четное число кубиков. Заметим, что любой вертикальный брусок занимает четное число кубиков обоих цветов. Каждый горизонтальный брусок одного вида занимает четное число кубиков каждого цвета, а другого вида — по одному кубику каждого цвета. Осталось заметить, что брусков каждого вида нечетное число.

29 Квадраты

1. Ответ: а) n^2; **б)** n^2.

2. Ответ: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 9, 40, 41.

3.

Решение. а) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, $(a+1)^2 = a^2+2a+1$, $(a-1)^2 = a^2-2a+1$.

б) Вычислите по формуле из пункта **а)** $(10^{2016}-1)^2$.

4. Ответ: $\overline{xxyy} = 7744$.

Решение. $\overline{xxyy} = 11 \cdot \overline{x0y}$. $\overline{x0y}$ — квадрат, умноженный на 11. Нетрудно видеть, что $x = 7$, $y = 4$.

5.

Решение. $n(n+1) \cdot 100 + 25 = 100n^2 + 100n + 25 = (10n+5)^2$.

6.

Решение. $b = a - 1$, $c = a + 1$.

7.

Решение. Подойдут числа $10\ldots01$, $10\ldots010$, $\ldots$, $110\ldots0$.

8. Ответ: нет, не существует.

Решение. У такого числа нечетное количество делителей, значит, это квадрат. Выкинем из него все двойки, получим нечетный квадрат, причем все нечетные делители исходного числа сохранились. Но у полученного числа их нечетное число.

30 Инвариант

1. Ответ: нет, нельзя.
Решение. При указанных операциях не меняется четность суммы чисел на доске.
2. Ответ: нет, нельзя.
Решение. Заметим, что четные числа могут поменяться местами только с четными, а нечетные — только с нечетными.
3. Ответ: нет, не может.
Решение. Заметим, что за каждую задачу выдается в сумме 7 конфет. Всего девочки получили 60 конфет. Но 60 на 7 не делится.
4. Ответ: нет, не может.
Решение. Посмотрим на квадрат 2×2 с закрашенной клеткой. Нетрудно видеть, что даже его нельзя указанными операциями перекрасить в одноцветный квадрат.
5. Ответ: не, могло.
Решение. После каждого измельчения число кусков увеличивается на число кратное трем. По итогам всех измельчений оно увеличилось на 2005, но 2005 не делится на 3.
6.
Решение. Сумма степеней всех простых при указанных операциях за минуту меняется ровно на 1. Изначально она была равна 3, а в конце должна стать равна 4. Но через час сумма степеней будет нечетной.
7. Ответ: нет, не может.
Решение. Заметим, что при встречах остаток при делении на 3 разностей числа хамелеонов любых двух цветов не меняется. Изначально это были не нули, а в конце должны стать нули.