



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modularizace a modernizace studijního programu počáteční přípravy učitele fyziky

### Studijní modul

# MECHANICKÉ KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

Oldřich Lepil



Olomouc 2012

Zpracováno v rámci řešení projektu Evropského sociálního fondu  
a Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky  
Modularizace a modernizace studijního programu počáteční přípravy učitele fyziky  
Registrační číslo: CZ.1.07/2.2.00/18.0018

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem  
a státním rozpočtem České republiky

První vydání

© Oldřich Lepil, 2012

ISBN 978-80-244-3295-3

# OBSAH

---

<b>Kapitola 1 Mechanické kmitání</b>	5
1.1 Kinematika harmonického pohybu	6
1.2 Složené kmitání	8
1.3 Symbolické znázornění veličin kmitavých dějů	18
1.4 Dynamika harmonického kmitání	19
1.5 Kyvadlo	22
1.6 Tlumené kmitání	25
1.7 Nucené kmitání mechanického oscilátoru	28
1.8 Příklady kmitajících soustav	33
<b>Kapitola 2 Mechanické vlnění</b>	
2.1 Postupné mechanické vlnění	43
2.2 Rychlost vlnění v pružném prostředí	46
2.3 Intenzita vlnění	50
2.4 Interference vlnění	51
2.5 Grupová rychlost vlnění	53
2.6 Stojaté vlnění	54
2.7 Chvění mechanických soustav	56
2.8 Vlnění v izotropním prostředí	57
2.9 Odraz a lom vlnění	58
2.10 Ohyb vlnění	60
<b>Kapitola 3 Akustika</b>	
3.1 Zdroje zvuku	65
3.2 Vlastnosti zvuku	68
3.3 Hudební akustika	69
3.4 Fyziologická akustika	70
3.5 Šíření zvuku	73
3.6 Dopplerův jev	74
<b>Historické poznámky k tématu Mechanické kmitání a vlnění</b>	78

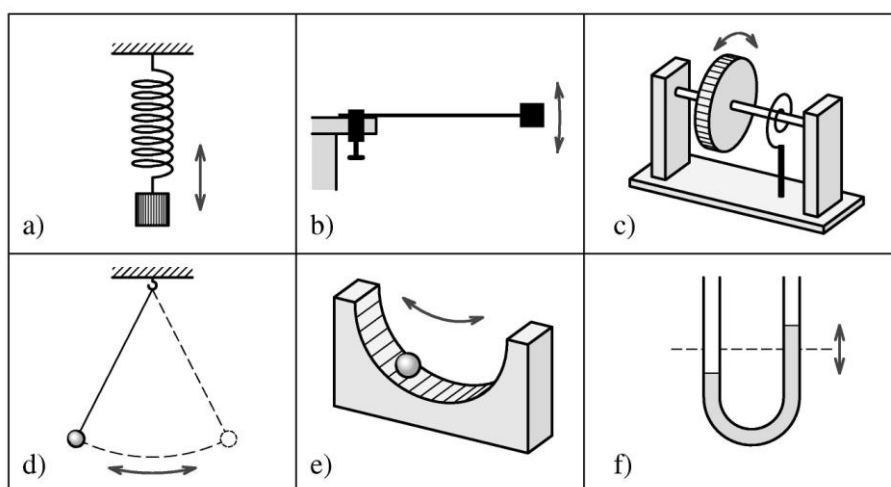


# Kapitola 1 MECHANICKÉ KMITÁNÍ

Kmitání a vlnění patří k nejrozšířenějším jevům v přírodě i v technické praxi. Charakteristickým znakem těchto jevů je, že se veličiny, kterými kmitání a vlnění popisujeme, s časem mění a tyto změny jsou převážně periodické. Kmitavé a vlnové děje mohou mít různou fyzikální podstatu. V tomto modulu se budeme zabývat mechanickým kmitáním a vlněním, které je spojeno s pohybem těles nebo částic v tělesech.

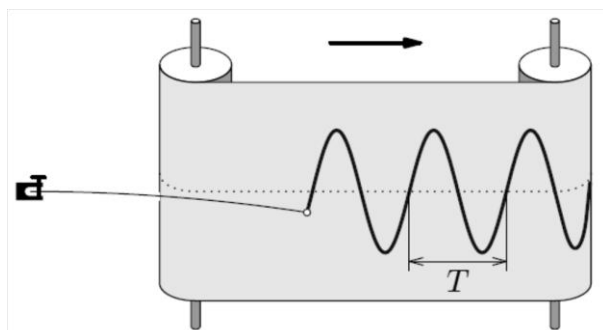
## Kmitání mechanického oscilátoru

Na obr. 1-1 jsou příklady různých zařízení, která mohou po vychýlení z rovnovážné polohy volně kmitat. Takové zařízení nazýváme **mechanický oscilátor**.



Obr. 1-1

Výchylka mechanického oscilátoru se s časem periodicky mění. Jestliže například kmitající těleso spojíme se zapisovacím zařízením, pak na pruhu papíru, který se pohybuje stálou rychlostí, vznikne zápis v podobě sinusoidy (obr. 1-2). Výchylka kmitajícího tělesa závisí na čase podle funkce sinus a grafickým vyjádřením této závislosti je **časový diagram kmitavého pohybu**.

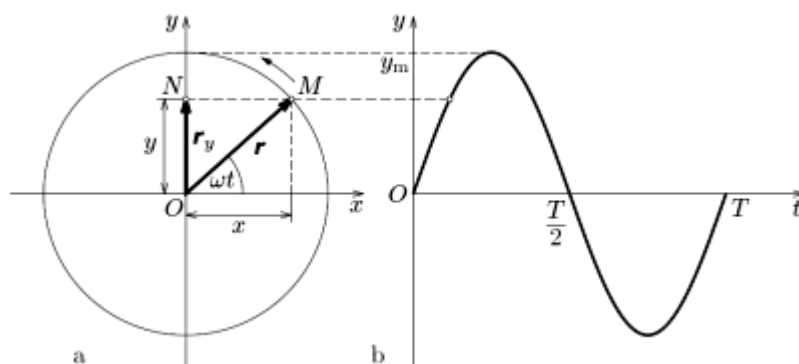


Obr. 1-2

**Kmitavý pohyb, jehož časový diagram má podobu sinusoidy, popř. kosinusoidy, nazýváme jednoduchý kmitavý pohyb nebo harmonický pohyb.**

## 1.1 Kinematika harmonického pohybu

V kinematice popisujeme pohyb pomocí kinematických veličin – **polohového vektoru  $r$** , **rychlosti  $v$** , **zrychlení  $a$** . U kmitavého pohybu můžeme získat vztahy pro tyto veličiny srovnáním kmitavého pohybu s pohybem rovnoměrným po kružnici.



Obr. 1-3

Na obr. 1-3 je naznačena kružnice, po níž se pohybuje hmotný bod  $M$ . Střed kružnice leží v počátku  $O$  vztažné soustavy ( $Oxy$ ). Okamžitou polohu bodu  $M$  určuje polohový vektor  $r$ , jehož koncový bod má souřadnice  $x$  a  $y$ . Jestliže se bod  $M$  pohybuje úhlovou rychlostí  $\omega$ , svírá polohový vektor s kladným směrem osy  $x$  úhel  $\omega t$  a pro souřadnice bodu  $M$  platí vztahy

$$x = r \cos \omega t,$$

$$y = r \sin \omega t.$$

Souvislost kmitavého pohybu s pohybem rovnoměrným po kružnici je taková, že polohový vektor  $r_y$  bodu  $N$  kmitajícího na přímce (totožné např. s osou  $y$  vztažné soustavy) je vlastně průmětem (složkou) polohového vektoru bodu  $M$  do osy  $y$ . Harmonické kmitání je pak popsáno souřadnicí  $y$  (popř.  $x$ ) polohového vektoru  $r$ . Tato souřadnice určuje okamžitou výchylku  $y$  kmitajícího bodu. Platí rovnice harmonického kmitání:

$$y = y_m \sin \omega t$$

Veličina  $y_m$  je největší výchylka hmotného bodu z rovnovážné polohy, čili **amplituda výchylky** ( $y_m = |r_y| = |OM|$ ) nebo krátce **amplituda**. Veličina  $\omega t$  je **okamžitá fáze kmitání**.

### Perioda a frekvence kmitání

Veličinu  $\omega$ , která má u pohybu rovnoměrného po kružnici význam úhlové rychlosti, nazýváme u kmitavých dějů **úhlová frekvence** nebo **úhlový kmitočet**. Je definována vztahem:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$T$  je doba kmitu a  $f$  je frekvence kmitání. Jednotka úhlové frekvence  $[\omega] = s^{-1}$ .

Jednotka frekvence je *hertz* (Hz):  $[f] = [1/T] = s^{-1} = \text{Hz}$ . V praxi se používají také násobné jednotky – kilohertz (kHz), megahertz (MHz) a gigahertz (GHz). Jednotka je nazvaná na počest německého fyzika H. R. HERTZE (1857–1894).

*Poznámka:* Jednotka úhlové frekvence a frekvence vyjádřená v základních jednotkách je stejná:  $s^{-1}$ . Pokud by mohlo dojít k záměně jednotek, je možné použít pro úhlovou frekvenci jednotku *radián za sekundu*, značka  $\text{rad} \cdot s^{-1}$ .

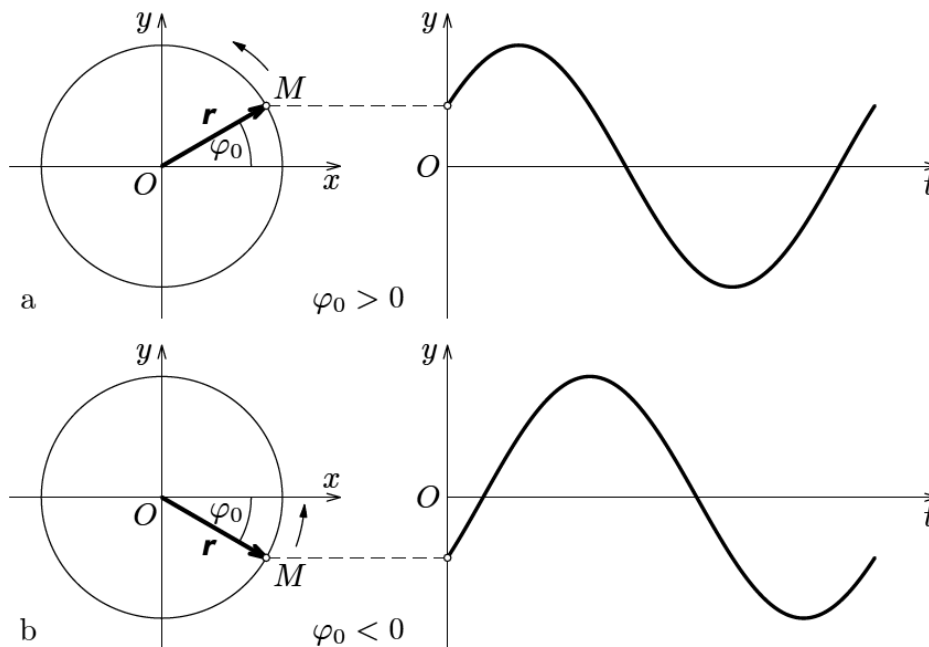
### Počáteční fáze kmitání

V případě znázorněném na obr. 1-3 byla v počátečním okamžiku ( $t_0 = 0$ ) okamžitá výchylka nulová ( $y_0 = 0$ ). Bod  $M$  ležel na ose  $x$  a bod  $N$  byl ve vztažném bodu  $O$ . Často však potřebujeme zapsat rovnici okamžité výchylky nebo jiné veličiny harmonického kmitání v případě, že v počátečním okamžiku není hodnota dané veličiny nulová. Počáteční hodnotu veličiny vyjádříme pomocí úhlu  $\varphi_0$ , který nazýváme **počáteční fáze kmitání**.

Pro okamžitou výchylku hmotného bodu platí vztah

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1.1)$$

Počáteční fáze může mít kladnou i zápornou hodnotu. Na obr. 1-4 je vyznačen také polohový vektor  $\mathbf{r}$  bodu  $M$ , který se pohybuje pohybem rovnoměrným po kružnici. V počátečním okamžiku svírá s osou  $x$  úhel  $\varphi_0$ . Obr. 1-4 zachycuje dva typické případy, kdy počáteční fáze je kladná ( $\varphi_0 > 0$ ), popř. záporná ( $\varphi_0 < 0$ ).



Obr. 1-4

Počáteční fáze je důležitá zejména pro posouzení vzájemných vztahů fyzikálních veličin kmitavého pohybu. Obvykle vyjadřujeme **fázový rozdíl**  $\Delta\varphi$  těchto veličin. Jestliže dvě harmonické veličiny mají stejnou úhlovou frekvenci  $\omega$  a počáteční fáze  $\varphi_{01}$  a  $\varphi_{02}$ , platí pro fázový rozdíl:

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{02}) - (\omega t + \varphi_{01}) = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

Fázový rozdíl dvou veličin harmonického kmitání o stejné frekvenci je určen rozdílem jejich počátečních fází.

Zvláštní význam mají případy, kdy mezi dvěma veličinami harmonického kmitání stejné frekvence je fázový rozdíl  $2k\pi$  a  $(2k + 1)\pi$ , kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ . V prvním případě mají obě veličiny **stejnou fázi**, ve druhém **opačnou fázi**.

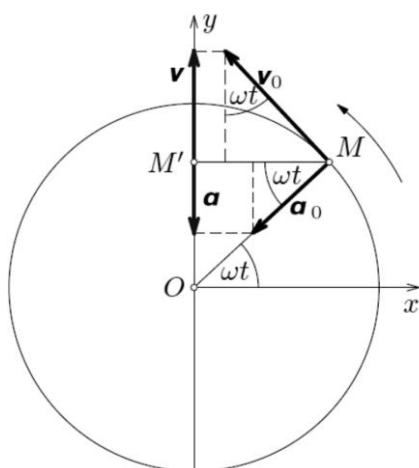
## Rychlost a zrychlení kmitavého pohybu

K základním veličinám kinematického popisu harmonického pohybu patří rychlost  $\mathbf{v}$  a zrychlení  $\mathbf{a}$ . Tyto vektory leží ve stejné vektorové přímce jako vektor okamžité výchylky  $\mathbf{y}$ . Pro jejich souřadnice  $v$  a  $a$  platí:

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega y_m \cos \omega t = \omega y_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.2)$$

$$a = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 y_m \sin \omega t = -\omega^2 y \quad (1.3)$$

Vztahy pro rychlost a zrychlení můžeme také odvodit ze srovnání s pohybem rovnoměrným po kružnici. Na obr. 1-5 jsou vyznačeny vektory rychlosti  $\mathbf{v}_0$  hmotného bodu, který koná pohyb rovnoměrný po kružnici, a dostředivé zrychlení  $\mathbf{a}_0$ . Odpovídající vektory kmitavého pohybu jsou složky těchto vektorů na ose  $y$ .



Obr. 1-5

Výsledky získané těmito jednoduchými postupy (rovnice (1.1), (1.2) a (1.3)) v podstatě představují řešení diferenciální rovnice (1.4) popisující jednoduchý harmonický kmitavý pohyb:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (1.4)$$

## 1.2 Složené kmitání

V mechanice platí **princip superpozice**: Jestliže hmotný bod koná současně více pohybů, je výsledná poloha tělesa stejná, jako kdyby tyto pohyby konal po sobě v libovolném pořadí. Složené kmitání vzniká, když hmotný bod koná současně několik harmonických kmitavých pohybů téhož směru s okamžitými výchylkami  $y_1, y_2, \dots, y_k$ . Okamžitá výchylka  $y$  výsledného kmitání:

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_k$$

Okamžité výchylky mohou mít kladnou i zápornou hodnotu. Průběh složeného kmitání závisí na směru složek, jejich počtu, amplitudě, počáteční fázi a frekvenci a může mít značně složitý. Zvláštní případy složeného kmitání nastávají, když všechny složky leží v jedné přímce, popř. v přímkách navzájem kolmých.



## Skládání kmitů v jedné přímce

### A. Stejné frekvence složek

Harmonická kmitání stejné frekvence nazýváme *izochronní* (z řec. *isos* – stejný, *chronos* – čas). Platí pro ně rovnice:

$$y_1 = y_{m1} \sin(\omega t + \varphi_{01})$$

$$y_2 = y_{m2} \sin(\omega t + \varphi_{02})$$

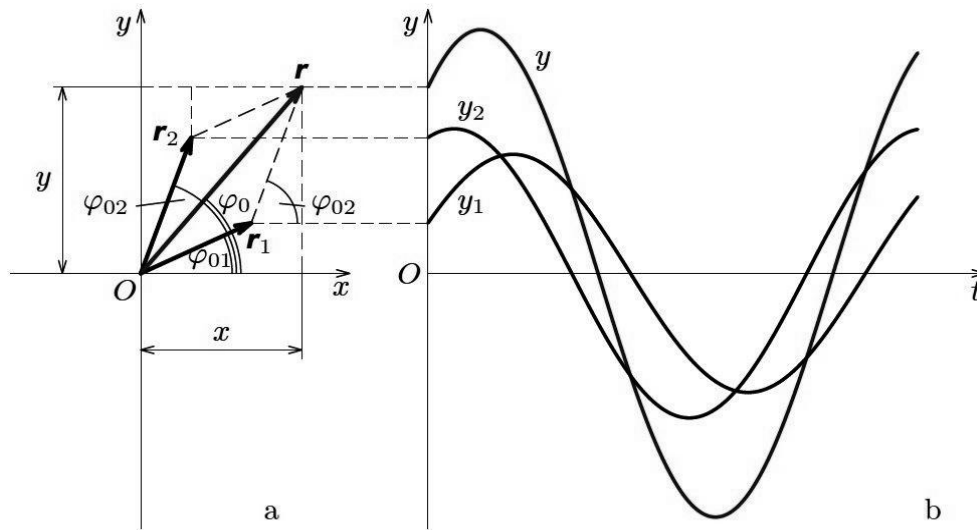
Superpozicí vzniká složené kmitání téže úhlové frekvence  $\omega$ , ale s jinou amplitudou.

Časový diagram složeného kmitání ( $y = y_1 + y_2$ ) získáme grafickým postupem tak, že složky symbolicky znázorníme polohovými vektory  $r_1$  a  $r_2$  (obr. 1-6a). Poloha vektorů odpovídá počátečnímu okamžiku, takže úhly  $\varphi_{01}$  a  $\varphi_{02}$  jsou počáteční fáze kmitavých pohybů. Polohový vektor  $r$  odpovídající výslednému kmitání najdeme vektorovým součtem  $r = r_1 + r_2$ .

Výsledné složené kmitání popisují souřadnice polohového vektoru  $r$ :

$$x = r_1 \cos \varphi_{01} + r_2 \cos \varphi_{02}$$

$$y = r_1 \sin \varphi_{01} + r_2 \sin \varphi_{02}$$



Obr. 1-6

Počáteční fáze výsledného kmitání je určena vztahem:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{y}{x} = \frac{r_1 \sin \varphi_{01} + r_2 \sin \varphi_{02}}{r_1 \cos \varphi_{01} + r_2 \cos \varphi_{02}}$$

Pro amplitudu složeného kmitání platí:

$$y_m = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dosažením do této rovnice a zjednodušením výrazu použitím vzorce  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  dostaneme

$$y_m = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2(\cos \varphi_{01} \cos \varphi_{02} + \sin \varphi_{01} \sin \varphi_{02})}.$$

Výraz v závorce je kosinus rozdílu počátečních fází, takže

$$y_m = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}.$$

Amplitudu složeného kmitání značně ovlivňuje rozdíl počátečních fází složek. Jestliže fázový rozdíl  $\Delta\varphi = 2k\pi$ , kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ , tzn. při stejné počáteční fázi obou složek, je amplituda složeného kmitání největší a má hodnotu

$$y_m = y_{m1} + y_{m2}.$$

Složené kmitání má stejnou počáteční fázi jako složky.

Jestliže fázový rozdíl  $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$ , tzn. při opačné počáteční fázi obou složek, je amplituda složeného kmitání nejmenší a má hodnotu

$$y_m = |y_{m1} - y_{m2}|.$$

Složené kmitání má stejnou počáteční fázi jako složka s větší amplitudou. V případě, že  $y_{m1} = y_{m2}$ , je výchylka stále nulová a kmitání zaniká.

### B. Různé frekvence složek

Superpozicí harmonických kmitání různé frekvence vzniká kmitání neharmonické, které je periodické jen v případě, že frekvence složek jsou v poměru celých čísel. Jestliže např. frekvence  $f_1, f_2$  dvou kmitání jsou v poměru celých čísel  $k_1, k_2$  ( $f_1 : f_2 = k_1 : k_2$ ), pak výsledné kmitání má periodu

$$T = k_1 T_1 = k_2 T_2$$

a frekvenci

$$f = \frac{f_1}{k_1} = \frac{f_2}{k_2}.$$

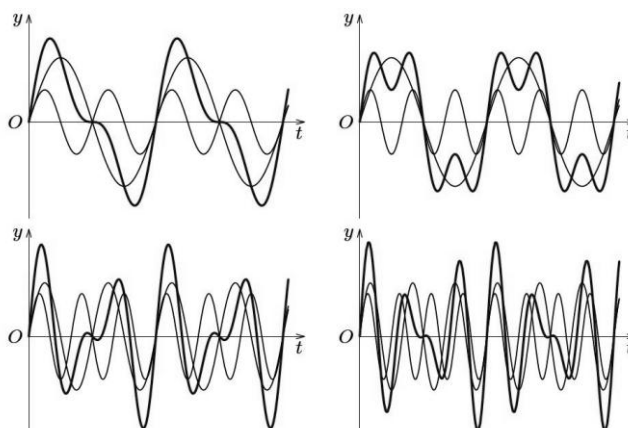
Zvláštní případ nastane při superpozici kmitání, pro která platí  $f_k = kf_z$ , kde  $k = 1, 2, 3, \dots$  a  $f_z$  je **základní frekvence**. Kmitání s frekvencí  $f_1 = f_z$  je první harmonická složka (v akustice základní tón). Kmitání s frekvencemi  $f_2 = 2f_z, f_3 = 3f_z, \dots$  jsou vyšší harmonické složky (v akustice vyšší harmonické tóny).

Jako příklad uvedeme skládání harmonických kmitů s poměrem frekvencí  $1 : 2$  ( $\omega_2 = 2\omega_1$ ). V akustice tomuto případu odpovídá hudební interval oktáva. Jestliže zvolíme amplitudy  $y_{m2} = \frac{1}{2} y_{m1}$  a  $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$ , jsou složky popsány rovnicemi:

$$y_1 = y_{m1} \sin \omega_1 t$$

$$y_2 = 0,5 y_{m1} \sin 2\omega_1 t$$

Časový diagram výsledného kmitání je na obr. 1-7a. Podobně jsou znázorněny další složená kmitání s poměrem  $1 : 3$  (obr. 1-7b),  $2 : 3$  (v akustice hudební interval kvinta; obr. 1-7c) a  $3 : 4$  (kvarta; obr. 1-7d).



Obr. 1-7

### C. Blízké frekvence složek

Zvláštní případ složeného kmitání nastává, když složky mají blízké úhlové frekvence ( $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ ). Rovnici výsledného kmitání najdeme pro případ, že  $y_{m1} = y_{m2} = y_m$ ,  $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$ ,  $\omega_1 = \omega - \Delta\omega$ ,  $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$ , přičemž  $\Delta\omega \ll \omega$ . Složky jsou popsány rovnicemi:

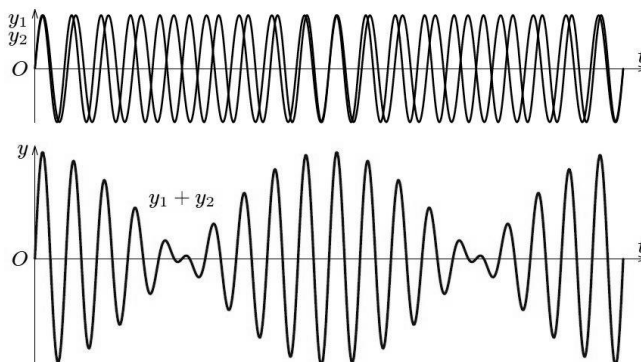
$$y_1 = y_m \sin \omega_1 t$$

$$y_2 = y_m \sin \omega_2 t$$

Použitím vzorce pro součet funkcí sinus dostaneme pro složené kmitání rovnici

$$y = y_1 + y_2 = 2y_m \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} = 2y_m \cos(\Delta\omega t) \sin \omega t.$$

Časový diagram složeného kmitání je na obr. 1-8.



Obr. 1-8

Vidíme, že výsledné kmitání není harmonické, avšak při malém rozdílu frekvencí můžeme toto kmitání považovat za „přibližně“ harmonické s periodou  $T_0 = 2\pi/\omega$  a s pomalu se měnící amplitudou

$$y_{m0} = |2y_m \cos(\Delta\omega t)|.$$

Tento případ složeného kmitání označujeme jako **rázy** a jejich perioda je reciprokou funkcí rozdílu frekvencí složek:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\pi}{\Delta\omega}$$

Frekvence rázů:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = f_2 - f_1$$

Rázy se využívají například při měření frekvence (metoda nulových rázů). Kmitání neznámé frekvence  $f_1$  se skládá s kmitáním známé frekvence  $f_2$ , která se mění. Jestliže  $f_2 \rightarrow f_1$ , frekvence rázů se zmenšuje a při shodě obou frekvencí ( $f_2 = f_1$ ) rázy zaniknou.

Jde-li o kmitání v oboru slyšitelných frekvencí, označujeme akustické rázy jako **zázněje**, které při shodě frekvencí vymizí.

## Skládání kmitů v přímkách navzájem kolmých

### A. Stejně frekvence složek

Je-li kmitání složeno z kmitání, která probíhají v přímkách navzájem kolmých, leží trajektorie kmitajícího bodu v rovině. Nejjednodušší případ nastane, jestliže obě složky mají stejnou úhlovou frekvenci. Okamžité výchylky složek jsou popsány rovnicemi:

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi_{01})$$

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi_{02})$$

Trajektorie výsledného kmitání je určena fázovým rozdílem složek, který odpovídá počáteční fázi složky  $y$ . Jestliže  $\varphi_0 = k\pi$  (kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ ), dostaneme dělením rovnic vztah

$$y = \pm \frac{y_m}{x_m} x,$$

což je rovnice přímky. To znamená, že při stejné nebo opačné fázi složek koná hmotný bod opět přímočarý harmonický pohyb. V případě, že  $x_m = y_m$ , půlí přímka výsledného kmitání úhel mezi směry složek (obr. 1-9a, e).

Jestliže  $\varphi_0 = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$  a pro amplitudy platí  $x_m = y_m = r$ , dostaneme z rovnic pro okamžité výchylky  $x, y$  jejich umocněním a sečtením vztah

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

což je rovnice kružnice.

Kmitající bod se pohybuje po kružnicové trajektorii o poloměru  $r$  (obr. 1-9c).

V ostatních případech je trajektorie kmitajícího bodu elipsa (obr. 1-9b, d), která představuje obecný tvar trajektorie při skládání kolmých kmitů stejné frekvence. Trajektorii hmotného bodu popisuje rovnice (pro  $x_m = y_m = r$ )

$$x^2 - 2xy \cos \varphi_0 + y^2 = r_m^2 \sin^2 \varphi_0.$$

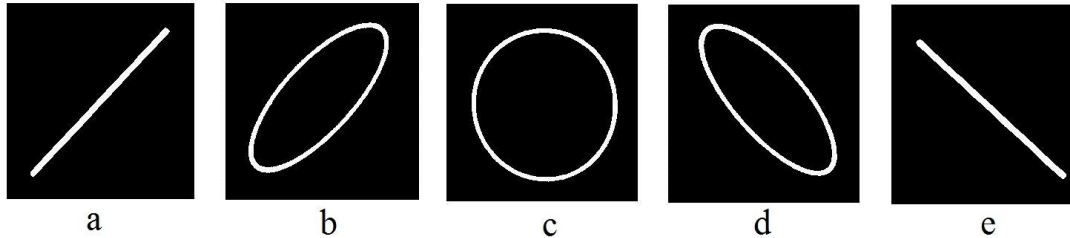
Rovnici odvodíme tak, že z rovnic kmitání složek vyloučíme čas  $t$ :

$$\begin{aligned} y &= r(\sin \omega t \cos \varphi_0 + \cos \omega t \sin \varphi_0) = \\ &= \cos \varphi_0 \cdot r \sin \omega t + \sin \varphi_0 \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \omega t} = \\ &= \cos \varphi_0 \cdot x + \sin \varphi_0 \sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned}$$

Výsledek upravíme do tvaru:

$$y - x \cos \varphi_0 = \sin \varphi_0 \sqrt{r^2 - x^2}$$

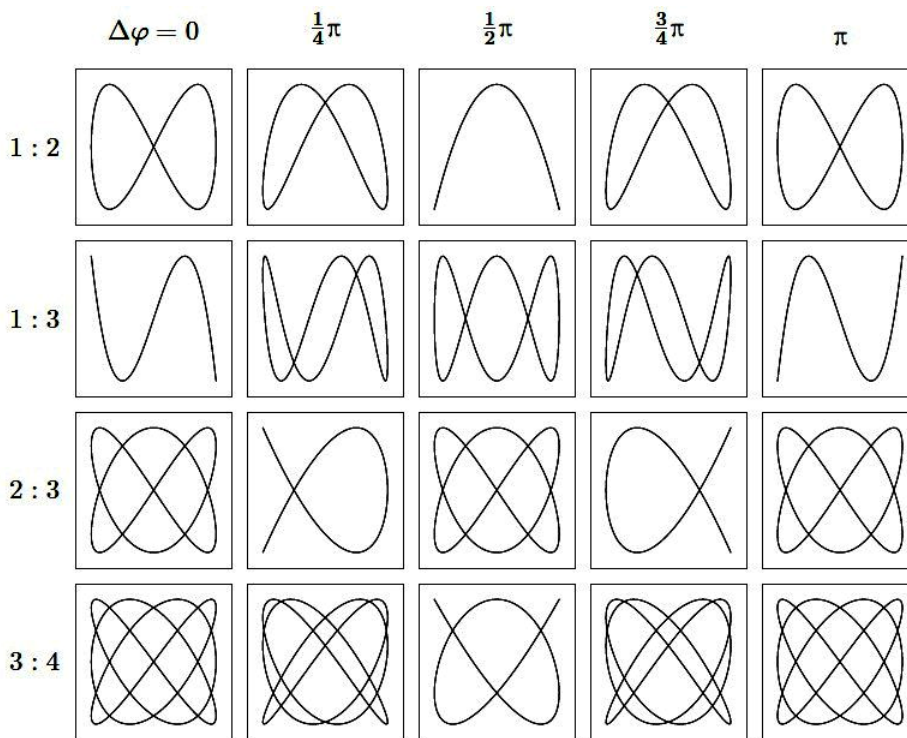
Odtud po umocnění a úpravě dostaneme rovnici trajektorie hmotného bodu.



Obr. 1-9

### B. Různé frekvence složek

Jestliže mají dvě harmonická kmitání v navzájem kolmých přímkách různé frekvence, pohybuje se hmotný bod po složité trajektorii (obr. 1-10), která obecně nemusí být tvořena uzavřenou křivkou. Jen v případě, že jsou frekvence složek v poměru celých čísel, je pohyb kmitajícího bodu periodický a vznikají charakteristické křivky nazývané **Lissajousovy křivky** (*lissajousovy*). Některé případy Lissajousových křivek pro různé fázové rozdíly složek jsou na obr. 1-10.



Obr. 1-10

### Harmonická analýza

Na předcházejících příkladech jsme poznali, že skládáním harmonických kmitání vzniká složité neharmonické kmitání. Můžeme si však položit také otázku, zda libovolně složité periodické kmitání nemůžeme obráceně rozložit na řadu harmonických složek. Na tuto otázku odpověděl již začátkem 19. století francouzský matematik a fyzik J. FOURIER (*furjé*, 1786–1830), který položil základy metodě **harmonické** nebo **Fourierovy analýzy**.

Fourier dokázal, že libovolná periodická funkce  $f(t)$  s periodou  $T$  může být rozložena na harmonické složky, které tvoří Fourierovu řadu

$$y = f(t) = y_0 + y_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) + y_2 \sin(2\omega t + \varphi_{02}) + y_3 \sin(3\omega t + \varphi_{03}) + \dots,$$

neboli

$$f(t) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sin(k\omega t + \varphi_{0k}),$$

kde  $k$  je celé číslo.

Frekvence jednotlivých členů Fourierovy řady (vyšších harmonických složek) tvoří celistvé násobky frekvence první harmonické složky. Amplituda vyšších harmonických složek se s rostoucím  $k$  obvykle rychle zmenšuje. To umožňuje pracovat při harmonické analýze jen s několika složkami.

Názorně si to ukážeme na příkladu periodického kmitání, které má obdélníkový průběh. Teoretický rozbor tohoto kmitání vede k výsledku, že obdélníkový kmit je tvořen superpozicí harmonických kmitání stejného směru, která tvoří řadu

$$y = \frac{4y_0}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right).$$

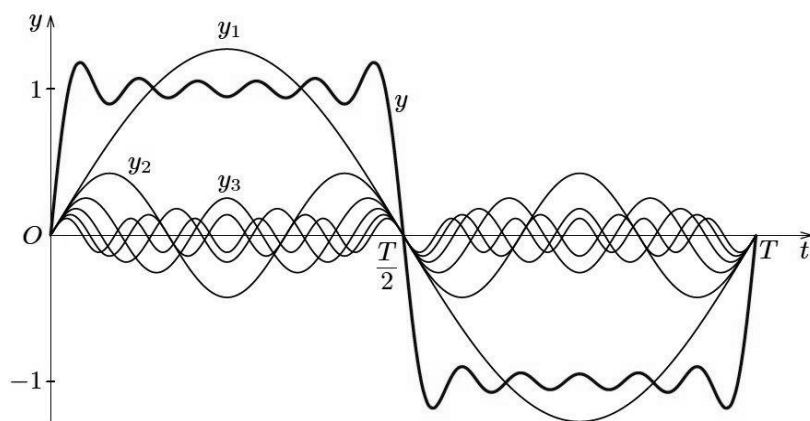
Na obr. 1-11 je výsledek superpozice tří harmonických složek obdélníkového kmitu. Správnost výsledku si můžeme ověřit pro případ, že  $\{y_0\} = 1$  a  $t = T/4$  (střed poloviny obdélníkového kmitu). Pak platí

$$\{y\} = \frac{4}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} + \dots \right),$$

což je

$$\{y\} = \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right).$$

Součet řady je roven  $\frac{\pi}{4}$ , takže  $\{y_0\} = 1$ . Na obr. 1-11 je dobře patrné, jak se s rostoucím počtem harmonických složek amplituda obdélníkového kmitu přibližuje k uvedené hodnotě  $y_m = y_0$  a současně je zřejmý fyzikální smysl znamének u jednotlivých členů řady.



Obr. 1-11

Pro  $k$ -tou harmonickou složku platí

$$y_{mk} \sin(k\omega t + \varphi_k) = y_{mk} \sin k\omega t \cos \varphi_k + y_{mk} \cos k\omega t \sin \varphi_k = A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t,$$

kde  $A_k = y_{mk} \cos \varphi_k$  a  $B_k = y_{mk} \sin \varphi_k$ . Fourierovu řadu pak napíšeme ve tvaru:

$$y = f(t) = y_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + \dots + A_k \sin k\omega t + \dots + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + \dots + B_k \cos k\omega t$$

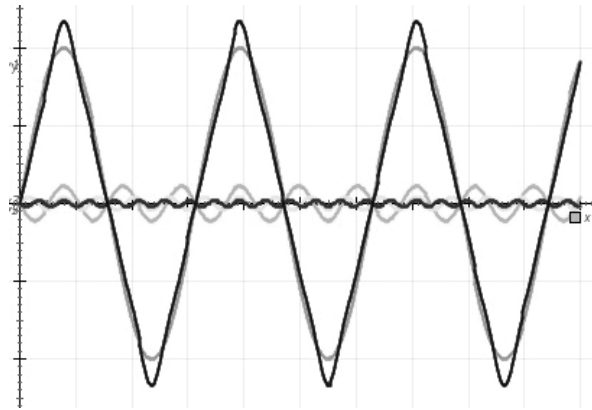
Veličiny  $y_0$ ,  $A_k$ ,  $B_k$  se určují pomocí vztahů:

$$y_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt, \quad B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt$$

### Příklady Fourierových řad pro různé průběhy

1. *Trojúhelníkový průběh* (obr. 1-12):

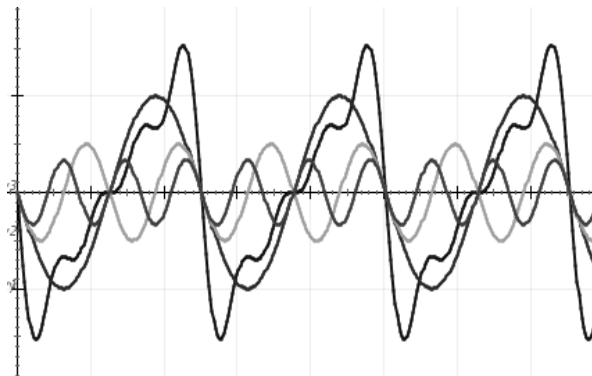
$$f(t) = \frac{8y_0}{\pi^2} \left( \frac{1}{1^2} \sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega t - \dots \right)$$



Obr. 1-12

2. *Pilovitý průběh* (obr. 1-13):

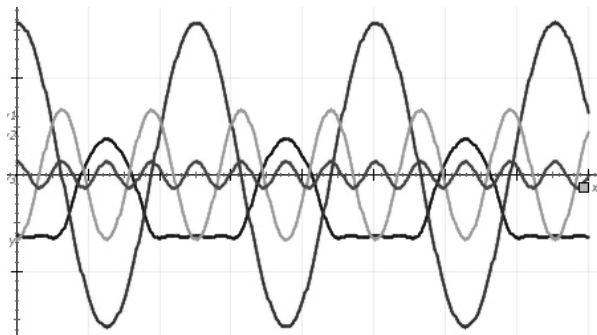
$$f(t) = \frac{2y_0}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$$



Obr. 1-13

3. Jednocestně usměrněný harmonický signál (obr. 1-14):

$$f(t) = \frac{y_0}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t - \frac{2}{3} \cos 2\omega t + \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \dots \right)$$



Obr. 1-14

### Spektrum složeného kmitání

Často je pro posouzení složeného kmitání dostačující znalost amplitudy vyšších harmonických kmitání a není nutné znát jejich počáteční fázi. Tak je tomu např. při výpočtu energie kmitání, která závisí na kmitočtu a amplitudě kmitání a je nezávislá na fázi. Proto postačuje, když složené kmitání charakterizujeme grafem, v němž na osu  $x$  vyznačujeme úhlové frekvence  $\omega_k$  (popř. jen frekvence  $f_k$ ) a na osu  $y$  amplitudy  $y_{mk}$  harmonických složek periodické funkce. Tento graf nazýváme *kmitočtové spektrum* a je důležitou charakteristikou kmitání.

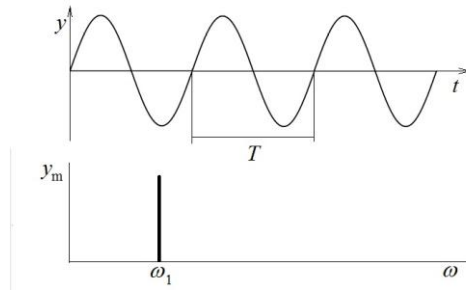
V případě čistě harmonického kmitání obsahuje kmitočtové spektrum jen jedinou čáru (obr. 1-15a), což je ale fyzikální abstrakce. Kmitání skutečných oscilátorů nikdy není zcela harmonické, takže spektrální diagram je složitější a i v případě oscilátoru, jehož kmitání je velmi blízké harmonickému kmitání (např. kmitání ladičky používané v akustice), tvoří spektrální diagram úzká křivka konečné šířky obsahující frekvence v intervalu od  $(f - \Delta f)$  do  $(f + \Delta f)$ , kde  $\Delta f$  má velmi malou hodnotu, která však nikdy není nulová.

Spektrum složeného kmitání obsahuje větší počet čar, jejichž délka ve vhodném měřítku zobrazuje velikosti amplitud jednotlivých harmonických složek. Jestliže délku čáry pro amplitudu první harmonické složky označíme  $y_{m1}$ , ve spektrálním diagramu přisoudíme amplitudám jednotlivých harmonických složek délky čar  $y_{mk}/y_{m1}$ . Na obr. 1-15b, c jsou kmitočtová spektra obdélníkového kmitu (b) a pilovitého kmitu (c). Pokud složené kmitání probíhá neomezeně dlouhou dobu, tvoří jeho kmitočtové spektrum diskrétní čáry.

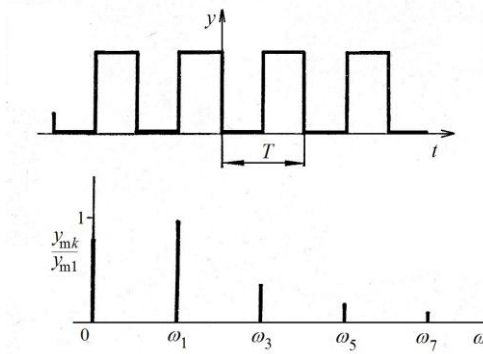
Složitější kmitočtové spektrum vzniká, jestliže je kmitavý děj časově omezený. Může to být např. sled obdélníkových impulsů (obr. 1-15d), jejichž doba trvání je menší než perioda, s níž se impulsy opakují. Pak kmitočtové spektrum tvoří velký počet harmonických složek s málo odlišnými kmitočty a v případě, že jde o jediný impuls s dobou trvání  $\tau$ , vzniká *spojité kmitočtové spektrum*.



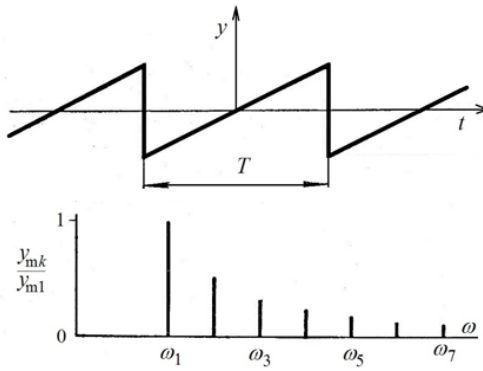
a)



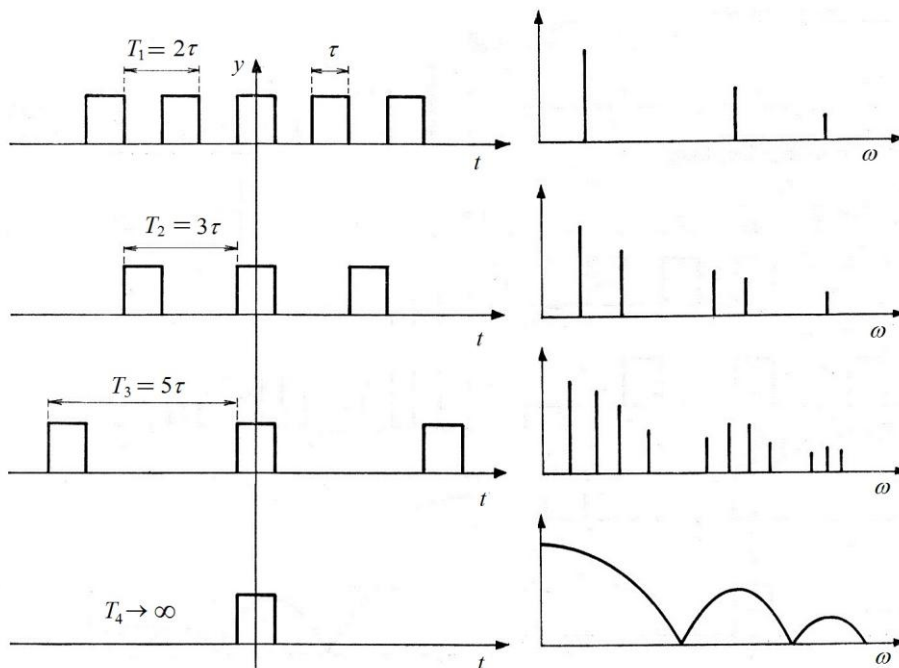
b)



c)



d)



Obr. 1-15

### 1.3 Symbolické znázornění veličin kmitavých dějů

Veličiny kmitavých dějů jako funkce času mají harmonický průběh. To umožňuje používat k jejich matematickému, popř. grafickému znázornění několik metod. Dosud jsme řešení diferenciálních rovnic kmitavých dějů vyjadřovali pomocí goniometrických funkcí. V praxi se používají další způsoby, které označujeme jako **symbolické metody**. Uplatňují se nejen při popisu dějů v mechanických oscilátorech, ale zejména při řešení dějů v elektrických obvodech připojených ke zdroji harmonického střídavého napětí (obvody střídavého proudu).

Symbolicky znázorňujeme veličiny s harmonickým průběhem:

1. vektorovým, popř. fázorovým diagramem,
2. komplexními čísly,
3. exponenciálními funkcemi.

(1) Pro popis kmitavých dějů **vektorovým diagramem** je charakteristické, že veličiny znázorňujeme symbolicky jako vektory. U elektrických veličin (elektrické napětí a proud), které nejsou vektory, označujeme symbolické vektory jako *fázory*. Při konstrukci vektorového diagramu vycházíme ze souvislosti kmitání a otáčivého pohybu. Tento postup jsme již použili při výkladu superpozice kmitání stejného směru (viz obr. 1-6). Veličina kmitání je znázorněna vektorem, jehož délka odpovídá amplitudě veličiny. Počáteční bod vektoru je umístěn v počátku souřadnicové soustavy  $Oxy$ , a koncový bod vektoru rotuje s úhlovou rychlostí  $\omega$  po kružnicové trajektorii o poloměru rovném amplitudě veličiny. Počáteční poloha vektoru je určena počáteční fází  $\varphi_0$  veličiny. V případě složeného kmitání znázorníme další složku opět jako vektor a vektorovým součtem vektorů obou složek najdeme vektor výsledného kmitání. Okamžité hodnoty veličin kmitání určuje souřadnice vektoru na ose  $y$ , popř. na ose  $x$ .

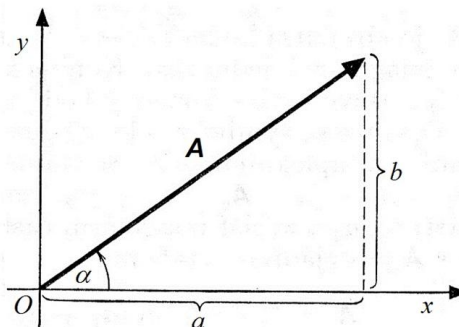
(2) Znázornění veličin kmitání **komplexními čísly** vychází opět z vektorového znázornění dané veličiny vektorem, který je však umístěn v Gaussově rovině komplexních čísel (obr. 1-16). Jsou-li  $a$  a  $b$  souřadnice koncového bodu vektoru  $\mathbf{A}$ , pak jeho symbolem je komplexní číslo, např. ve složkovém tvaru

$$\mathbf{A} = a + ib \quad |\mathbf{A}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a},$$

nebo v goniometrickém tvaru

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

kde  $|\mathbf{A}|$  je absolutní hodnota (*modul*) vektoru  $\mathbf{A}$  a  $i = \sqrt{-1}$  je imaginární jednotka. Komplexní číslo tedy určuje v Gaussově rovině koncový bod vektoru  $\mathbf{A}$ .



Obr. 1-16

Operace se symboly vektorů jsou stejné jako při počítání s komplexními čísly. Sčítáme-li např. dva vektory  $\mathbf{A}_1 = a_1 + ib_1$ ,  $\mathbf{A}_2 = a_2 + ib_2$ , sečteme zvlášť reálné části  $a_1$ ,  $a_2$  a zvlášť imaginární části  $b_1$ ,  $b_2$ . Výsledný vektor  $\mathbf{A}$  je vyjádřen vztahem

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

a jeho modul odpovídající amplitudě veličiny

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}.$$

Pro počáteční fázi  $\varphi_0$  vektoru složeného kmitání platí vztah

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}.$$

(3) Vyjádření veličin kmitání **exponenciálními funkcemi s imaginárním exponentem** je výhodné, jestliže s veličinami provádíme složitější matematické operace, než jen sčítání a odčítání. K tomu využíváme Eulerův vztah

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha},$$

kde  $e = 2,718 \dots$  je základ přirozených logaritmů.

Veličina kmitání je vyjádřena vztahem

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|e^{i\alpha}.$$

Jestliže chceme vyjádřit, že se vektor  $\mathbf{A}$  pootočil o úhel  $\beta$  v kladném smyslu (tzn. proti směru otáčení hodinových ručiček), násobíme ho činitelem  $e^{i\beta}$

$$\mathbf{A}' = |\mathbf{A}|e^{i\alpha}e^{i\beta} = |\mathbf{A}|e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Ve zvláštních případech, kdy  $\beta = +\frac{\pi}{2}$  nebo  $\beta = -\frac{\pi}{2}$  je  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$  nebo  $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ , takže při posunutí vektoru o  $\pi/2$  v kladném smyslu

$$|\mathbf{A}|e^{i\frac{\pi}{2}} = i|\mathbf{A}|$$

a při posunutí o  $\pi/2$  v záporném smyslu

$$|\mathbf{A}|e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i|\mathbf{A}|.$$

## 1.4 Dynamika harmonického kmitání

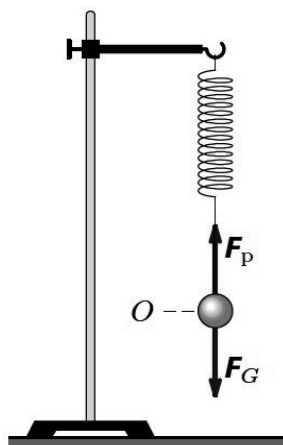
Dynamika zkoumá příčiny pohybu. Příčinou kmitání mechanického oscilátoru je buď síla pružnosti, nebo tíhová síla. Poněvadž již víme, že zrychlení harmonického kmitavého pohybu  $a = -\omega^2 y$ , můžeme na základě 2. Newtonova pohybového zákona vyjádřit souřadnici síly, která způsobuje harmonické kmitání:

$$F = -m\omega^2 y$$

Tuto rovnici také označujeme jako **pohybovou rovnici harmonického kmitavého pohybu** a zapisujeme ji jako diferenciální rovnici druhého řádu:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + m\omega^2 y = 0 \quad (1.5)$$

U každého mechanického oscilátoru je třeba určit souvislost úhlové frekvence kmitání oscilátoru  $\omega$  s jeho konkrétními vlastnostmi, tedy s **parametry mechanického oscilátoru**. Jako základní model mechanického oscilátoru budeme uvažovat těleso zavěšené na pružině (*pružinový oscilátor*, obr. 1-17).



Obr. 1-17

Parametry tohoto oscilátoru jsou **hmotnost**  $m$  tělesa a **tuhost**  $k$  pružiny (tuhost pružiny určuje velikost síly, kterou by se pružina prodloužila o jednotku délky:  $k = F/y$ ). Kmitání tohoto oscilátoru způsobuje síla pružnosti  $F_p$ , kterou pružina působí na těleso. Kromě síly pružnosti působí na oscilátor tíhová síla  $F_G$ , která má opačný směr. Výslednice  $F$  obou sil působí stále do rovnovážné polohy oscilátoru, v níž jsou obě síly stejně velké. Jestliže se těleso oscilátoru pohybuje z rovnovážné polohy směrem vzhůru, zmenšuje se síla pružnosti a výsledná síla  $F$  směřuje dolů. Při pohybu tělesa z rovnovážné polohy směrem dolů je tomu naopak. Pro souřadnici výsledné síly působící na oscilátor platí:

$$F = -ky$$

Pohybová rovnice pružinového oscilátoru má tedy tvar

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0,$$

čili

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0. \quad (1.6)$$

Odtud vyplývá srovnáním s rovnicí (1.4), že

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Pro periodu  $T$  a frekvenci  $f$  pružinového oscilátoru platí:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

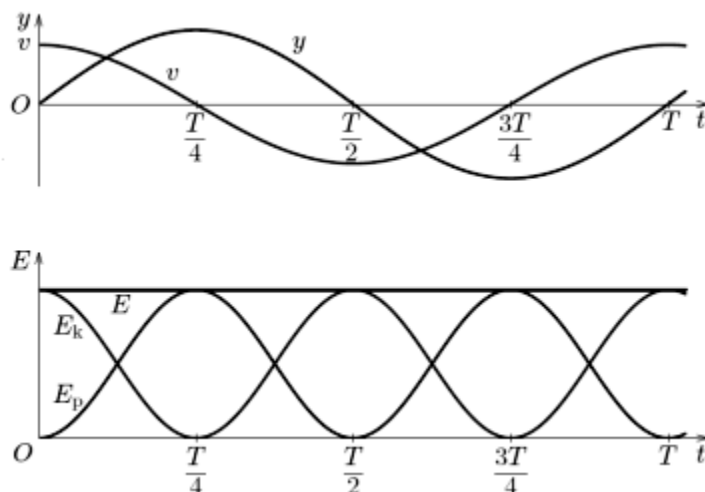
### Přeměny energie v mechanickém oscilátoru

Pro kmitání je charakteristické, že je spojeno s periodickými přeměnami energie. U pružinového oscilátoru se mění kinetická energie tělesa  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  v potenciální energii pružnosti deformované pružiny  $E_p = \frac{1}{2}ky^2$ . Když těleso oscilátoru prochází rovnovážnou polohou, má největší rychlost, a tedy i největší kinetickou energii

$$E_{k \max} = \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 y_m^2,$$

kde  $v_m = \omega y_m$  je amplituda rychlosti tělesa. Potenciální energie pružnosti je v tomto okamžiku nulová. Naopak v krajní poloze oscilátoru, tzn. když těleso dosáhne amplitudy  $y_m$ , je jeho kinetická energie nulová (neboť  $v = 0$ ) a potenciální energie pružnosti oscilátoru je největší:

$$E_{p \max} = \frac{1}{2} k y_m^2$$



Obr. 1-18

V průběhu periody kmitání oscilátoru probíhá vzájemná přeměna obou energií podle časového diagramu na obr. 1-18. Celková energie kmitání oscilátoru  $E$  se však nemění (uvažujeme oscilátor bez tlumení) a v každém okamžiku platí

$$E = E_k + E_p = \text{konst.}$$

Při harmonickém kmitavém pohybu se periodicky mění potenciální energie kmitání v energii kinetickou a naopak. Celková energie oscilátoru je konstantní a je rovna součtu klidové energie oscilátoru a energie kmitání dodané oscilátoru při uvedení do kmitavého pohybu. Energie kmitání je přímo úměrná druhé mocnině amplitudy a druhé mocnině úhlové frekvence vlastního kmitání.

### Vliv hmotnosti pružiny na kmitání oscilátoru

Při určování úhlové frekvence pružinového oscilátoru jsme uvažovali, že hmotnost oscilátoru je dána jen hmotností  $m$  zavěšeného tělesa. U reálného pružinového oscilátoru však hmotnost  $m_0$  pružiny nemusí být při kmitání oscilátoru zanedbatelná. Pružina však nekmitá jako celek a s největší amplitudou kmitá jen její konec se zavěšeným tělesem, kdežto ostatní elementy pružiny kmitají s menší amplitudou a v bodě závěsu je konec pružiny v klidu. Budeme uvažovat kmitání elementu pružiny ve vzdálenosti  $x$  od bodu závěsu. Jestliže má celá pružina délku  $l$ , bude mít element pružiny o délce  $dx$  hmotnost

$$dm = \frac{m_0}{l} dx.$$

Při kmitavém pohybu má konec pružiny se závažím okamžitou rychlost  $v$  a uvažovaný element pružiny bude mít rychlost určenou vztahem

$$v_{px} = v \frac{x}{l}.$$

Kinetická energie pružiny bude:

$$E_{\text{kp}} = \frac{1}{2} \int_0^m dm \left( v \frac{x}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_0 v^2}{l^3} \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{m_0}{3} v^2$$

V okamžiku největší výchylky tělesa jsou všechny elementy pružiny v klidu a energii pružinového oscilátoru určuje potenciální energie pružnosti

$$E_p = \frac{1}{2} k y_m^2.$$

Naopak v rovnovážné poloze má oscilátor jen energii kinetickou

$$E_k = \frac{1}{2} \left( m + \frac{m_0}{3} \right) v_m^2 = \frac{1}{2} \left( m + \frac{m_0}{3} \right) \omega^2 y_m^2.$$

Podle zákona zachování mechanické energie tedy platí

$$\frac{1}{2} k y_m^2 = \frac{1}{2} \left( m + \frac{m_0}{3} \right) \omega^2 y_m^2$$

a odtud najdeme

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_0}{3}}} \quad \text{a} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_0}{3}}{k}}$$

## 1.5 Kyvadlo

Jako kyvadlo se obvykle označuje jakékoli těleso zavěšené nad těžištěm, které se může volně otáčet kolem vodorovné osy procházející bodem závěsu kolmo k rovině kmitání. Příkladem nejjednoduššího kyvadla je malé těleso (hmotný bod) zavěšené na pevném vlákně zanedbatelné hmotnosti, jehož délka je  $l$ . Taková abstrakce je také označována jako **matematické kyvadlo**.

Harmonické kmitání jsme zavedli jako přímočarý pohyb. Aby tato podmínka byla přibližně splněna i u kyvadla, musí být výchylka tak malá, že oblouk, po němž se těleso pohybuje, můžeme s dostatečnou přesností považovat za úsečku. To je splněno, jestliže úhel  $\alpha$ , který vlákno při pohybu svírá se svislým směrem, nepřekročí  $5^\circ$  ( $\approx 0,09$  rad).

Příčinou kmitavého pohybu kyvadla je síla  $\mathbf{F}$ , která je výslednicí tíhové síly  $\mathbf{F}_G$  a tahové síly  $\mathbf{F}_t$ , kterou působí vlákno závěsu na těleso (obr. 1-19). Pro malou výchylku tělesa platí

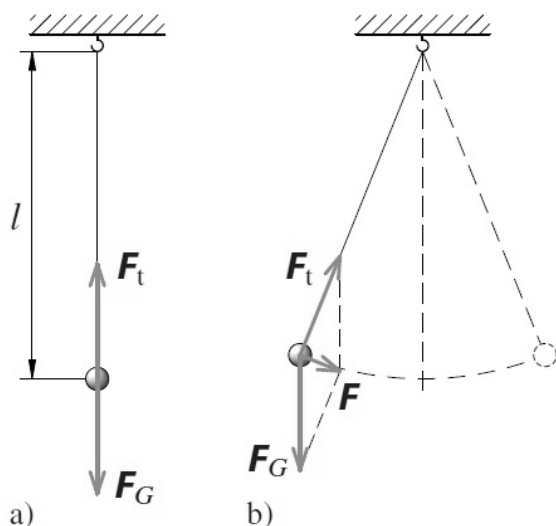
$$\sin \alpha \approx \alpha = \frac{F}{F_G} = \frac{x}{l}.$$

Pohybovou rovnicí kyvadla napíšeme ve tvaru

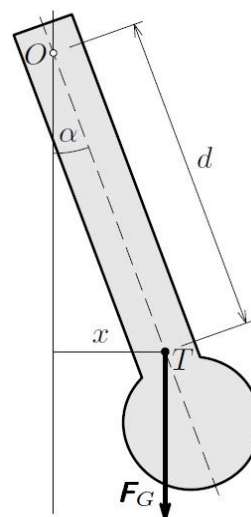
$$F = -m\omega^2 x = -m \frac{g}{l} x,$$

čili

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} x = 0.$$



Obr. 1-19



Obr. 1-20

Odtud najdeme:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Matematické kyvadlo je fyzikální abstrakcí. Skutečná tělesa nemají hmotnost soustředěnu do jednoho bodu a za kyvadlo můžeme považovat každé těleso volně pohyblivé kolem osy procházející tělesem mimo těžiště. Takový mechanický oscilátor označíme jako **fyzické kyvadlo** (obr. 1-20).

Příčinou kmitání je otáčivý účinek tíhové síly  $F_G$ , která působí v těžišti tělesa. Při vychýlení kyvadla o úhel  $\alpha$  vzniká působením tíhové síly  $F_G = mg$  v těžišti ve vzdálenosti  $d$  od osy kyvadla moment síly o velikosti

$$M = mgd \sin \alpha .$$

Kyvadlo koná v podstatě rotační pohyb, pro který platí pohybová rovnice

$$M = J\varepsilon = J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgd \sin \alpha ,$$

kde  $J$  je moment setrvačnosti tělesa k ose otáčení a  $\varepsilon$  je úhlové zrychlení otáčivého pohybu. Pro malé výchylky, kdy  $\sin \alpha \approx \alpha$ , napíšeme rovnici kmitání fyzického kyvadla ve tvaru:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgd}{J} \alpha = 0$$

Odtud opět najdeme:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgd}{J}}$$

Pro matematické kyvadlo je  $d = l$  a  $J = ml^2$ , takže po dosazení dostaneme pro periodu kyvadla stejný vztah, který jsme již odvodili jiným postupem.

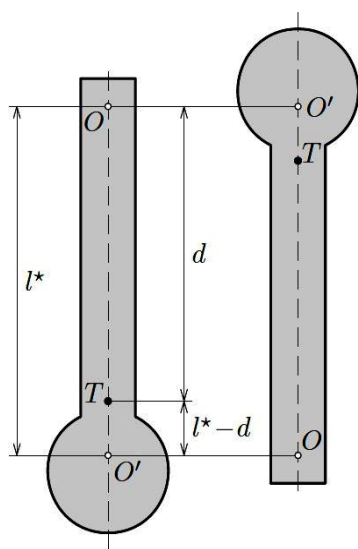
Délka  $l^*$  matematického kyvadla, které má stejnou dobu kmitu jako kyvadlo fyzické, se nazývá **redukováná délka** fyzického kyvadla. Platí pro ni

$$\frac{J}{mgl} = \frac{l^*}{g}$$

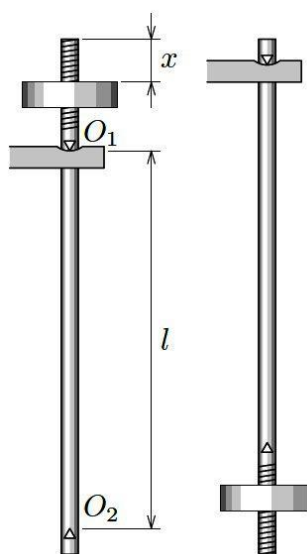
a odtud

$$l^* = \frac{J}{ml}.$$

Jestliže na svislou přímku jdoucí těžištěm kyvadla v jeho rovnovážné poloze nanese od osy  $O$  redukovánou délku kyvadla, dostaneme bod  $O'$ , který se nazývá **střed kyvu** (obr. 1-21). Ten má tu vlastnost, že zavěsíme-li kyvadlo jak v bodě  $O$ , tak v bodě  $O'$ , bude doba kmitu kyvadla v obou případech stejná.



Obr. 1-21



Obr. 1-22

Kyvadlo upravené tak, že ho lze zavěsit v obou bodech, se používá k laboratornímu měření tíhového zrychlení (*reverzní kyvadlo* – obr. 1-22). Měření spočívá v tom, že se měří perioda kmitání kyvadla při různých polohách pohyblivého závaží na jednom konci a při zavěšení v bodě  $O_1$  a v bodě  $O_2$ . Hledá se taková poloha závaží, aby perioda kmitání kolem obou os byla stejná. Pak je vzdálenost  $|O_1O_2|$  rovna redukováné délce  $l^*$  kyvadla a pro tíhové zrychlení platí

$$g = \frac{4\pi l^*}{T^2}.$$

Kyvadlo sehrálo významnou úlohu v historii měření času jako jednoduché zařízení, jehož periodu kmitání lze snadno a poměrně přesně nastavit změnou jediného parametru, kterým je délka kyvadla. U kyvadlových hodin bylo kyvadlo tvořeno tyčí se závažím. Kyvadlo svým pohybem řídilo pozvolné otáčení soustavy ozubených kol spojených s hodinovými ručičkami. Konstrukcí mechanismu kyvadlových hodin proslul holandský fyzik CHRISTIAAN HUYGENS (*hajchens*, 1629–1695).



## 1.6 Tlumené kmitání

Předcházející úvahy jsme provedli za předpokladu, že mechanický oscilátor kmitá volně, tzn. že na něj v průběhu kmitání nepůsobí žádné vnější vlivy. Za tohoto ideálního předpokladu by se amplituda neměnila a oscilátor by kmital neomezeně dlouho. Pokusy s mechanickými oscilátory však dokazují, že se amplituda reálného oscilátoru vždy postupně zmenšuje, až volné kmitání zanikne. Příčinou jsou přeměny mechanické energie oscilátoru v jinou formu energie (např. na vnitřní energii okolního prostředí nebo samotného oscilátoru). Dochází ke ztrátám energie oscilátoru, kterým nelze nikdy zabránit, a vzniká **tlumené kmitání**.

Nejčastěji je příčinou tlumení oscilátoru odporová síla při jeho pohybu v látkovém prostředí (např. ve vzduchu). Tato síla je podle Stokesova zákona přímo úměrná rychlosti  $v$  oscilátoru a její velikost

$$F_o = bv = b \frac{dy}{dt},$$

kde  $b$  je konstanta úměrnosti mezi odporovou silou a rychlostí oscilátoru.

Poněvadž odporová síla působí proti pohybu mechanického oscilátoru, bude mít pohybová rovnice tlumeného oscilátoru tvar

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - bv.$$

Odtud vyjádříme **diferenciální rovnici tlumeného kmitavého pohybu**

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\delta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0, \quad (1.7)$$

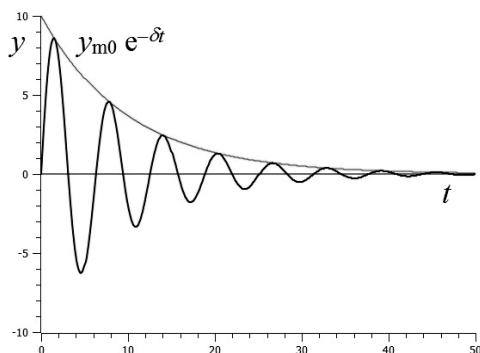
kde  $\delta = \frac{b}{2m}$  je konstanta tlumení oscilátoru a  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  je úhlová frekvence netlumeného oscilátoru.

Pro  $\delta < \omega_0$  má tato diferenciální rovnice řešení

$$y = y_m e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

kde  $\omega$  je **vlastní úhlová frekvence**, tzn. úhlová frekvence volně kmitajícího oscilátoru

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (1.8)$$



Obr. 1-23

Charakteristický časový diagram tlumeného kmitání je na obr. 1-23.

Označíme-li amplitudy tlumeného kmitání, které po sobě následují v intervalu periody  $T$  kmitání, postupně  $y_{m0}, y_{m1}, y_{m2}, \dots$ , platí

$$\frac{y_{m0}}{y_{m1}} = \frac{y_{m1}}{y_{m2}} = \frac{y_{m2}}{y_{m3}} = \dots = e^{\delta T} = \lambda.$$

Veličina  $\lambda$  je **útlum** a jeho přirozený logaritmus, tzv. **logaritmický dekrement**  $A$ :

$$A = \ln e^{\delta T} = \delta T = \delta \frac{2\pi}{\omega}$$

Logaritmický dekrement charakterizuje zmenšení amplitudy tlumených kmitů za periodu  $T$ . Jestliže označíme  $N$  počet kmitů, za které se amplituda tlumených kmitů zmenší  $e$ -krát (tzn. na  $1/2,718 \approx 0,37$ , čili na 37 % počáteční hodnoty), pak

$$A = \delta T = \frac{1}{N}.$$

Logaritmický dekrement je měřítkem rychlosti tlumení oscilátoru. Uvažujme např. dva různé oscilátory, pro které platí:

$$T_1 = 10^{-8} \quad \delta_1 = 10^5 \quad A_1 = 10^{-3}$$

$$T_2 = 10^{-3} \quad \delta_2 = 10^2 \quad A_2 = 10^{-1}$$

Ve kterém oscilátoru se kmitání rychleji utlumí? Tuto otázku můžeme chápat různě. Jestli nás zajímá, kolik sekund bude oscilátor kmitat, pak se rychleji utlumí kmitání oscilátoru s větším součinitelem tlumení  $\delta$ , tedy v prvním oscilátoru. Jestliže však budeme uvažovat, jak rychle se zmenšuje amplituda kmitů v průběhu jedné periody, pak větší tlumení bude mít oscilátor s větším dekrementem tlumení, tzn. druhý oscilátor.

Jestliže vztah (1.8) upravíme pro periody kmitání a napíšeme místo  $\delta$  výraz  $A/T$ , dostaneme po úpravě pro periodu tlumených kmitů vztah

$$T = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{A}{2\pi}\right)^2}.$$

Při malém tlumení oscilátoru použijeme přibližný vztah

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{2\pi}\right)^2\right),$$

kde  $T_0$  je perioda vlastních netlumených kmitů oscilátoru.

Oscilátor (nejen mechanický) můžeme charakterizovat jedinou veličinou, která je funkcí jak úhlové frekvence vlastního kmitání  $\omega$ , tak součinitele tlumení  $\delta$ . Touto veličinou je **činitel jakosti**  $Q$  oscilátoru. Hodnota činitele jakosti vyplývá z úvah o přeměnách energie v oscilátoru s tlumením. U pružinového oscilátoru je určena poměrem síly působící na oscilátor  $F = ma = m\omega^2 y = mv\omega$  a odporové síly  $F_o = bv = 2m\delta v$ :

$$Q = \frac{F}{F_o} = \frac{\omega}{2\delta} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi}{A} = \pi N_{\max}$$

Pomocí činitele jakosti můžeme posoudit, jak rychle zanikne kmitání oscilátoru. V praxi se obvykle uvažuje, že kmitání zaniklo, jestliže se energie kmitů zmenší  $10^2$ krát, a tedy jejich amplituda 10krát, čili platí

$$\frac{y_{m1}}{y_{m2}} = e^{\delta t} = e^{\frac{\pi}{Q} N} = 10$$

a logaritmováním dostaneme

$$N_{\max} = \frac{1}{\pi \log e} Q = 0,74Q.$$

Tak můžeme pomocí činitele jakosti určit, kolikrát oscilátor volně, tzn. bez vnějšího působení

kmitne. Pro netlumený oscilátor  $Q \rightarrow \infty$  a oscilátor by kmital nepřetržitě se stálou amplitudou. Naopak při  $Q \leq 0,5$  oscilátor nevykoná ani jeden kmit (viz dále).

Pro srovnání uvedeme hodnoty činitele jakosti pro některé typy oscilátorů (mechanických i elektromagnetických):

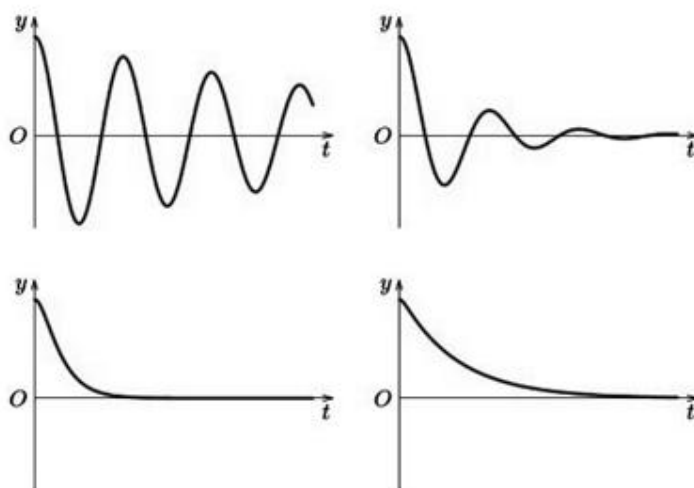
vysokofrekvenční elektromagnetický oscilátor	$10^2$
ocelová struna	$10^3$
ladička bez rezonátoru	$10^4$
piezoelektrický krystal ve vakuu	$10^5$
elektron v atomu	$10^7$

Netlumené harmonické kmitání je jen určitou fyzikální abstrakcí. Vlastní kmitání oscilátoru je vždy tlumené. Tlumení nemá vliv jen na amplitudu kmitavého pohybu, která se postupně zmenšuje, ale ovlivňuje i periodu kmitání. Tlumený oscilátor volně kmitá s poněkud větší periodou (menší úhlovou frekvencí  $\omega < \omega_0$ ), než jakou by měl netlumený oscilátor se stejnými parametry.

Podle hodnot veličin  $\omega$  a  $\delta$  rozlišujeme tři typické případy:

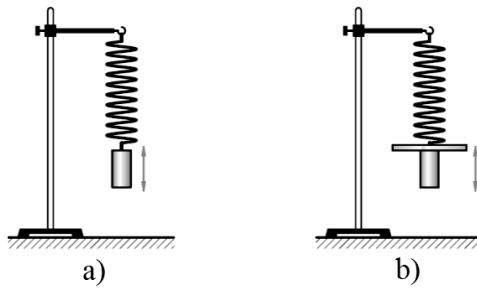
1.  $\omega_0^2 > \delta^2$  – tlumené kmitání, amplituda kmitavého pohybu se zmenšuje podle exponenciální funkce.
2.  $\omega_0^2 < \delta^2$  – aperiodický pohyb, oscilátor se po vychýlení zvolna vrací do rovnovážné polohy a kmitání nevznikne.
3.  $\omega_0^2 = \delta^2$  – kritické tlumení, oscilátor se rovněž nerozkmitá, ale do rovnovážné polohy dospěje v nejkratší době.

Příklady tlumeného kmitání při různých hodnotách součinitele tlumení jsou na obr. 1-24.

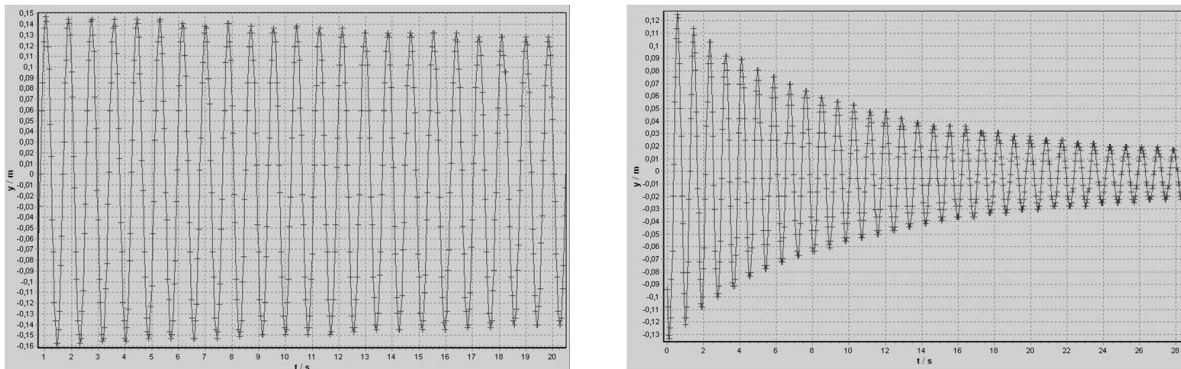


Obr. 1-24

O vlivy prostředí na kmitání oscilátoru se přesvědčíme pokusem, při němž pružinový oscilátor kmitá volně ve vzduchu (obr. 1-25a), a podruhé je odporová síla zvětšena připojením papírového kotoučku (obr. 1-25b). Kmitání bylo zachyceno na videozáznam, který byl pomocí zvláštního programu analyzován [5]. Časové diagramy jsou na obr. 1-26.



Obr. 1-25



Obr. 1-26

Poznatky o tlumeném kmitání mají značný praktický význam. V případech, kdy požadujeme malé tlumení kmitavého pohybu, je nutné odstranit příčiny tlumení, popř. dodávat oscilátoru energii, kterou v průběhu periody ztratil. Naopak tam, kde je kmitání nežádoucí, se tlumení uměle zvětšuje (např. tlumiče pérování automobilů).

## 1.7 Nucené kmitání mechanického oscilátoru

Vlastní kmitání oscilátoru je vlivem ztrát energie tlumené, a proto kmitání zaniká. Abychom kmitání oscilátoru udrželi, musíme mu zvnějšku dodávat energii. Například tak, že úderem do oscilátoru zvětšíme amplitudu na původní hodnotu (takto pracují např. mechanické hodiny). V tomto případě oscilátor kmitá netlumeně, ale jeho kmitání není harmonické.

Netlumené harmonické kmitání vznikne, když je energie oscilátoru dodávána v průběhu celé periody. Tento případ nastane, jestliže na oscilátor působí nepřetržitě harmonicky proměnná síla, pro kterou platí  $F = F_m \sin \Omega t$ . Působením této síly je v oscilátoru vynucováno netlumené harmonické kmitání, které označujeme jako **nucené kmitání oscilátoru**.

Pro nucené kmitání mechanického oscilátoru platí pohybová rovnice ve tvaru:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - bv + F_m \sin \Omega t$$

Odtud po dosazení  $b = 2m\delta$  a  $k = m\omega_0^2$  a úpravě dostaneme:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\delta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \frac{F_m}{m} \sin \Omega t \quad (1.9)$$

Tato diferenciální rovnice má řešení:

$$y = y_m e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + Y_m \sin(\Omega t + \gamma)$$

Výsledné kmitání oscilátoru, na který působí vnější harmonická síla, má tedy dvě složky: tlumené kmitání, které by oscilátor konal bez působení vnější síly, a netlumené harmonické kmitání o stálé amplitudě  $y_m$  a stálé fázi  $\gamma$  vzhledem k působící harmonické síle. Pro tyto veličiny platí:

$$y_m = \frac{F_m}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}} \quad \text{tg } \gamma = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (1.10)$$

Pro případ netlumených kmitů oscilátoru bez tlumení ( $\delta = 0$ ) dospějeme k obdobnému výsledku jednoduchou úvahou. Pohybovou rovnici můžeme napsat ve tvaru

$$ma = -ky + F_m \sin \Omega t.$$

Dosadíme za  $a = -\Omega^2 y_m \sin \Omega t$ , za  $y = y_m \sin \Omega t$  a rovnici upravíme na tvar

$$-\Omega^2 y_m \sin \Omega t = -\frac{k}{m} y_m \sin \Omega t + \frac{F_m}{m} \sin \Omega t.$$

Dělíme celou rovnici  $\sin \Omega t$ , a poněvadž  $k/m = \omega_0^2$ , dostaneme po úpravě vztah pro amplitudu nucených kmitů

$$y_m = \frac{F_m}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Z těchto úvah vyplývá:

1. Amplituda nucených kmitů je úměrná amplitudě vnější harmonické síly a nepřímo úměrná hmotnosti oscilátoru.
2. Amplituda nucených kmitů je tím větší, čím menší je rozdíl mezi frekvencí vnější harmonické síly a frekvencí vlastních kmitů oscilátoru a čím menší je útlum.
3. Jakmile začne vnější harmonická síla působit na oscilátor, vzniknou na přechodnou dobu vlastní tlumené kmity oscilátoru i nucené kmity a dochází k jejich superpozici. Po utlumení vlastních kmitů kmitá oscilátor již jen s frekvencí nucených kmitů a s konstantní amplitudou  $y_m$ .

Úhlovou frekvenci nuceného kmitání, při níž amplituda nucených kmitů oscilátoru dosáhne maximální hodnoty, určíme tak, že první derivaci vztahu pro  $y_m$  položíme rovnou nule. Extrémní hodnoty může nabýt výraz pod odmocninou, takže napíšeme:

$$\frac{d\left(\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}\right)}{dt} = 0$$

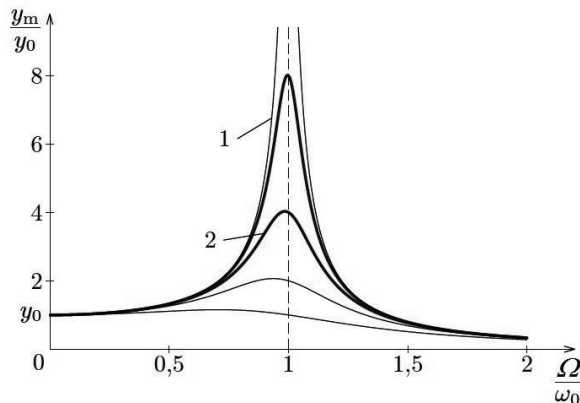
Po provedení derivace a úpravě najdeme vztah pro úhlovou frekvenci nuceného kmitání, při níž dosahuje amplituda nucených kmitů největší hodnoty

$$\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (1.11)$$

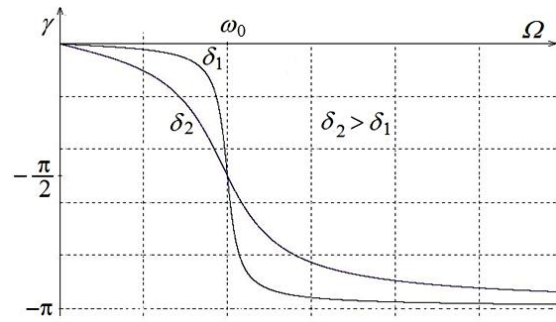
Odtud vyplývá, že pro oscilátor bez tlumení ( $\delta = 0$ ) by tato frekvence byla shodná s vlastní frekvencí kmitání oscilátoru. Amplituda kmitů by však rostla nade všechny meze ( $Y_m \rightarrow \infty$ ). Reálné oscilátory jsou vždy tlumené a kmitání dosahuje maximální amplitudy při poněkud menší úhlové frekvenci  $\Omega_0$ .

Děj, při němž amplituda nucených kmitů oscilátoru dosahuje působením vnější harmonické síly maximální hodnotu, se nazývá **rezonance oscilátoru**.

Graf, který vyjadřuje popsanou závislost amplitudy nuceného kmitání jako funkci úhlové frekvence ( $y_m = f(\omega)$ ), je **rezonanční křivka**. Na obr. 1-27 jsou rezonanční křivky pro několik hodnot součinitele tlumení  $\delta$ . Čím menší je tlumení oscilátoru, tím je maximum rezonanční křivky vyšší ( $y_m$  dosahuje větší hodnoty) a křivka je užší (křivka 1). Naopak při větším tlumení sice amplituda dosahuje menších hodnot, ale rezonanční křivka je širší (oscilátor lze rozkmitat v širším intervalu frekvencí; křivka 2).



Obr. 1-27



Obr. 1-28

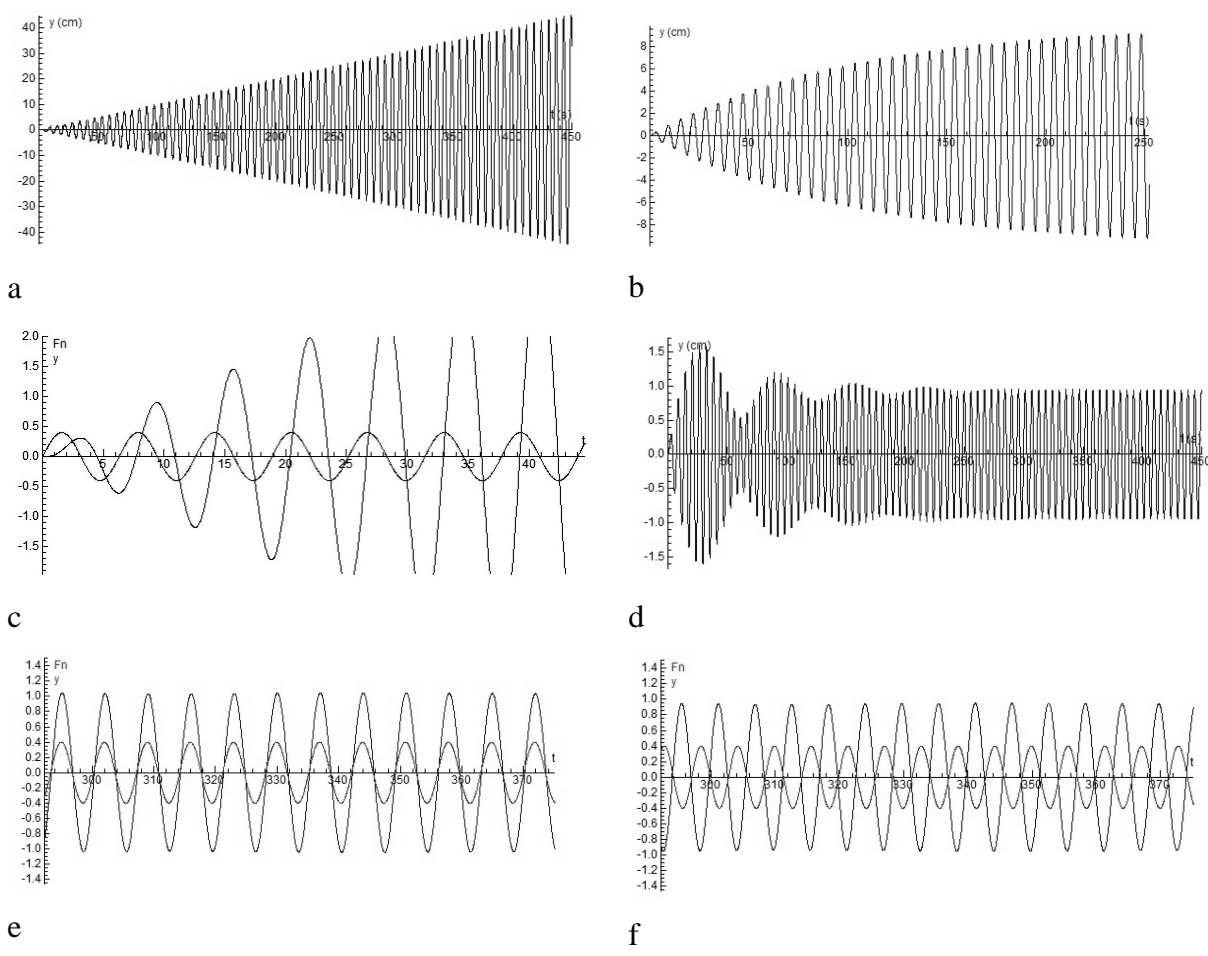
Měnící se frekvence ovlivňuje také fázi  $\gamma$  nuceného kmitání vzhledem k síle, která nucené kmitání vynucuje. Jestliže úhlová frekvence  $\Omega$  budící síly roste z hodnoty  $\Omega = 0$ , má fáze nuceného kmitání zápornou hodnotu, což znamená, že vzniká fázové zpoždění nucených kmitů za budící silou. Při  $\Omega = \omega_0$  je  $\gamma = -\pi/2$  a při frekvenci  $\Omega \rightarrow \infty$  se  $\gamma$  blíží hodnotě  $-\pi$ . To je patrné z grafu na obr. 1-28.

Základní případy nuceného kmitání byly vytvořeny počítačovým programem a jsou zobrazeny na obr. 1-29. Na obr. 1-29a je vznik nuceného kmitání ideálního oscilátoru bez tlumení, kdy amplituda kmitů lineárně bez omezení roste. Na obr. 1-29b je nucené kmitání buzené harmonickou silou o stejné frekvence jako je vlastní frekvence oscilátoru. Kmitání se po určité době ustálí na konstantní hodnotě. Na obr. 1-29c je patrné, že v tomto případě kmitání vnější síly předbíhá o fázi  $\pi/2$  nucené kmity. Obr. 1-29d ukazuje, jak se po určité době od počátečního okamžiku utlumí vlastní kmitání a oscilátor dále kmitá s frekvencí vnější síly. Na obr. 1-29e, f, je znázorněno fázové posunutí při  $\Omega < \omega_0$  ( $\gamma \approx 0$ ) a při  $\Omega > \omega_0$  ( $\gamma \approx -\pi$ ).

Jestliže do vztahu (1.10) pro  $y_m$  dosadíme vztah (1.11) pro  $\Omega_0$ , určíme maximální amplitudu nucených kmitů

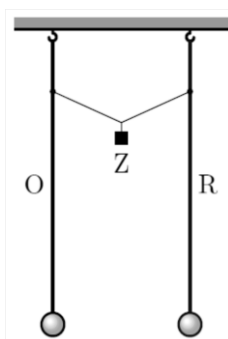
$$y_{m \max} = \frac{F_m}{m} \frac{1}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_m}{2m\delta\omega}, \quad (1.12)$$

kde  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  je úhlová frekvence tlumených kmitů, které by oscilátor konal, kdyby na něj nepůsobila síla budící nucené kmitání.

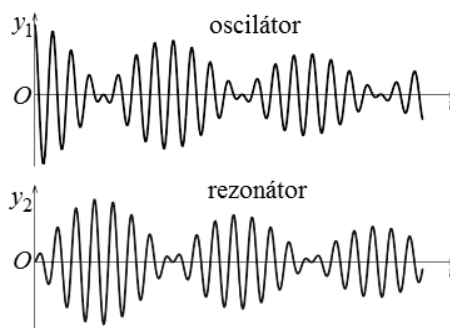


Obr. 29

Z průběhu rezonanční křivky je patrný poznatek důležitý zejména pro praktické využití rezonance. Při rezonanční frekvenci dosahuje amplituda nucených kmitů větší hodnoty, než by odpovídalo výchylce způsobené vnější silou při velmi nízké frekvenci (počáteční hodnota  $y_0$  rezonanční křivky). Nastává rezonanční zesílení nucených kmitů. Malou, periodicky působící silou lze v oscilátoru vzbudit kmitání o značné amplitudě, pokud je perioda vnějšího působení shodná s periodou vlastního kmitání oscilátoru.



Obr. 1-30a



obr. 1-30b

Rezonanci můžeme považovat za projev vzájemného působení dvou oscilátorů. Jeden je zdrojem nuceného kmitání (*oscilátor*) a druhý se působením zdroje nuceně rozkmitá (*rezonátor*).

Oscilátory na sebe navzájem působí *vazbou* a označujeme je jako *vázané oscilátory*. Jednoduchým příkladem vázaných oscilátorů jsou *spřažená kyvadla* (obr. 1-30a). Jsou to dvě stejná kyvadla spojená navzájem pružinou, popř. vláknem se závažím Z. Tím se mezi kyvadly vytváří vazba, která umožňuje přenos energie mezi oscilátorem a rezonátorem a naopak.

Jestliže oscilátor O rozkmitáme, pozorujeme, že jeho amplituda se postupně zmenšuje, a rezonátor R naopak začíná kmitat. Jeho amplituda dosahuje maxima v okamžiku, kdy kmitání oscilátoru ustalo. Tento děj se periodicky opakuje a kmitání má podobu rázů (obr. 1-30b). Vlivem tlumení se amplituda rázů postupně zmenšuje.

Děje ve vázaných oscilátorech o stejných frekvencích vlastního kmitání bez tlumení vyjadřují rovnice:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \omega^2 y_1 + k(y_2 - y_1) = 0$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} + \omega^2 y_2 + k(y_1 - y_2) = 0$$

Veličina  $k$  je *součinitel vazby* a určuje, jak rychle přechází energie kmitání z oscilátoru na rezonátor a zpět.

Spřažená kyvadla jsou příkladem výměny energie kmitání mezi oscilátorem a rezonátorem působením vzájemné vazby. Jestliže vazbou vzniká jen malé vzájemné působení, přechází energie z oscilátoru do rezonátoru dále. Mezi oscilátory je *vazba volná*. Je-li vzájemné působení silné, energie přejde do rezonátoru v krátké době, mezi oscilátory je *vazba těsná*.

Praktické využití rezonance spočívá především v rezonančním zesilování. Uvedeme několik příkladů: rezonanční zesilování zvuků hudebních nástrojů, např. houslí jejich dřevěnou částí a dutinou v jejich vnitřním prostoru, ozvučnice reproduktorů, různé měřicí metody apod.

V řadě případů je však rezonanční zvětšení amplitudy nuceného kmitání nežádoucí. Tak je tomu zejména u strojů, jejichž části se otáčejí. Tím vznikají periodické síly, které se přenášejí nejen na vlastní zařízení, ale i na jeho okolí, např. na podlahu, k níž je stroj připevněn. Vzniku rezonančního kmitání se předchází tím, že se vlastní frekvence zařízení upraví tak, aby se lišila od frekvence sil vynucujících kmitání i od jejich násobků.

Rezonanční kmitání může nastat také u mechanismů, které obsahují pružné prvky. Např. pérování automobilu tvoří s mechanismem kol pružnou soustavu, která se vlivem nerovnosti vozovky rozkmitává. Poněvadž kmitání kol je nežádoucí, doplňuje se zavěšení kol tlumiči, které kmitání omezují.

V technické praxi se k potlačení rezonančních kmitů používají v podstatě tři způsoby:

- a) změna vlastní frekvence mechanismu,
- b) doplnění mechanismu tlumičem kmitání (na obr. 1-31 je tlumič pérování motocyklu v podobě válce naplněného oleje, v němž se pohybuje píst),
- c) zvětšení tření mechanismu.



Obr. 1-31

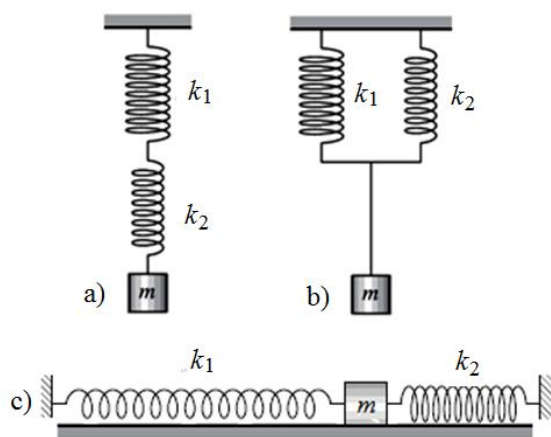
Rezonanční jevy se uplatňují i v jiných oborech fyziky, zejména v elektřině, v atomové a jaderné fyzice.



## 1.8 Příklady kmitajících soustav

### A. Zvláštní případy pružinových oscilátorů

Pružinový oscilátor nemusí být tvořen jedinou pružinou, ale pružiny lze navzájem spojovat.



Obr. 1-32

a) Na obr. 1-32a je *oscilátor s pružinami spojenými za sebou* (sériově). Jestliže oscilátor vychýlíme z rovnovážné polohy, budou obě pružiny napínány, popř. stlačovány stejně a na těleso působí síla pružnosti

$$F_p = -k_1 y_1 = -k_2 y_2.$$

Prodloužení pružin je však různé, ale platí  $y = y_1 + y_2$ . Můžeme tedy psát:

$$y = y_1 + y_2 = -F \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = -F \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}$$

Úhlová frekvence a perioda kmitání oscilátoru se sériově spojenými pružinami:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$

b) Na obr. 1-32b je *oscilátor s pružinami spojenými paralelně*. Při vychýlení závaží např. směrem dolů se obě pružiny prodlouží stejně a na závaží působí celková síla pružnosti o velikosti

$$F = -(k_1 + k_2)y.$$

To znamená, že při paralelním spojení pružin se jejich tuhosti sčítají ( $k = k_1 + k_2$ ) a pro úhlovou frekvenci a periodu platí:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

c) *Horizontální oscilátor* (obr. 1-32c). Jestliže těleso vychýlíme vpravo, pružina o tuhosti  $k_1$  se prodlouží a pružina o tuhosti  $k_2$  se zkrátí. Prodloužení a zkrácení obou pružin je stejné a na těleso působí síly pružnosti  $F_1 = -k_1 x$  a  $F_2 = -k_2 x$ , které mají souhlasný směr do rovnovážné polohy oscilátoru. Pohybová rovnice má tvar

$$F_p = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x$$

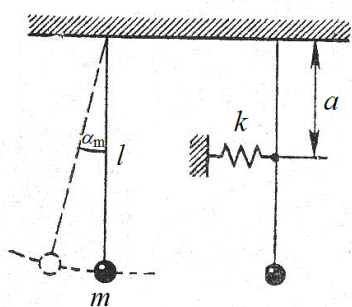
a po úpravě

$$a = -\frac{k_1 + k_2}{m} x.$$

Úhlová frekvence a perioda vlastního kmitání oscilátoru bude obdobná jako v případě b):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

## B. Kmitání kyvadla s pružinou



Obr. 1-33

Budeme uvažovat kmitání kyvadla, které tvoří kulička o hmotnosti  $m$  na konci tuhé tyče délky  $l$ , jejíž hmotnost je vzhledem k hmotnosti kuličky zanedbatelná. Taková soustava kmitá s úhlovou frekvencí kyvadla

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Ve vzdálenosti  $a$  od bodu závěsu kyvadla je k tyči připojena pružina o tuhosti  $k$  (obr. 1-33), jejíž druhý konec je nepohyblivý. Soustava je upravena tak, že v rovnovážné poloze kyvadla není pružina deformována a tedy nepůsobí na kyvadlo silou pružnosti.

Jestliže však kuličku z rovnovážné polohy vychýlíme, dochází k deformaci pružiny a mění se jak potenciální energie tíhová kuličky, tak potenciální energie pružnosti deformované pružiny. Při vychýlení kyvadla o malý úhel  $\alpha_m$  bude mít kyvadlo největší potenciální energii

$$E_{pm} = mgl(1 - \cos \alpha_m) + \frac{1}{2}ka^2\alpha_m^2 \approx \frac{1}{2}mgl\alpha_m^2 + \frac{1}{2}ka^2\alpha_m^2$$

a amplituda výchylky z rovnovážné polohy bude  $x_m = l \sin \alpha_m \doteq l\alpha_m$ . Když kyvadlo přejde do rovnovážné polohy, bude mít vzhledem k  $v = \omega x_m = \omega l \alpha_m$  maximální kinetickou energii

$$E_{km} = \frac{1}{2}ml^2\omega^2\alpha_m^2.$$

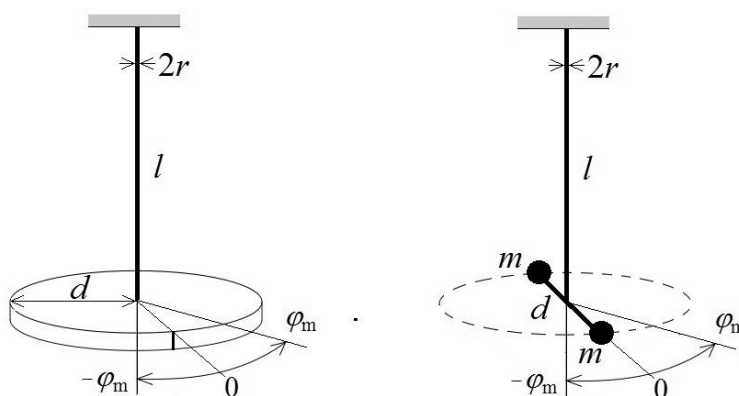
Poněvadž  $E_{pm} = E_{km}$ , je

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}$$

a po úpravě

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{ka^2}{mgl}} > \omega_0.$$

## C. Torzní kyvadlo



Obr. 1-34

Vlastnosti mechanického oscilátoru mají také soustavy, v nichž příčinou kmitání je síla pružnosti, která vzniká při deformaci kroucením (*torzí*). Takovou soustavou je *torzní kyvadlo*, které tvoří drát, na němž je v těžišti zavěšeno vhodné těleso (např. homogenní kotouč, popř. tyč, na jejímž konci jsou závaží v podobě koulí, obr. 1-34). Pootočením tělesa o úhel  $\varphi$  se drát torzně deformuje a vzniká moment síly  $\mathbf{M} = J\boldsymbol{\varepsilon}$ , kde  $J$  je moment setrvačnosti tělesa a  $\boldsymbol{\varepsilon}$  je úhlové zrychlení. Na těleso tedy působí síla, která ho vrací zpět do rovnovážné polohy. Velikost momentu síly

$$M = -k_t \varphi.$$

Konstanta  $k_t$  je *torzní tuhost* použitého drátu a její velikost závisí na délce  $l$  a poloměru  $r$  drátu a na vlastnostech materiálu, z něhož je drát vyroben. Poněvadž zavěšená tělesa konají periodický kruhový pohyb s úhlovým zrychlením o velikosti  $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ , má pohybová rovnice torzního kyvadla tvar

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k_t \varphi = 0$$

a pro úhlovou frekvenci, popř. periodu torzního kyvadla vychází

$$\omega = \sqrt{\frac{k_t}{J}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k_t}}.$$

Z teorie pružné torzní deformace vyplývá, že torzní tuhost drátu

$$k_t = \frac{\pi G r^4}{2l},$$

kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku materiálu, z něhož je zhotoven závěs torzního kyvadla. Pro periodu torzního kyvadla tedy platí

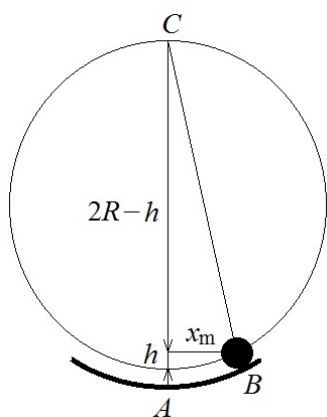
$$T = \sqrt{\frac{2\pi l J}{G r^4}}.$$

Poněvadž moment setrvačnosti kotouče homogenního kotouče o hmotnost  $m$  a poloměru  $d$  je  $J = 1/2(md^2)$  a moment setrvačnosti koulí spojených tuhou tyčí, jejíž hmotnost můžeme ve srovnání s hmotností koulí zanedbat,  $J = 2md^2$ , jsou periody kmitání torzních kyvadel na obr. 1-34:

$$T_a = \sqrt{\frac{\pi l m d^2}{G r^4}} \quad T_b = \sqrt{\frac{4\pi l m d^2}{G r^4}}$$

Torzní kyvadlo se používalo nejen v historických hodinách, jejichž repliky se vyrábějí dodnes, ale bylo i součástí zařízení pro měření modulu pružnosti ve smyku tzv. dynamickou metodou.

#### D. Kmitání kuličky v misce



Obr. 1-35

Periodicky kmitá těžiště kuličky, která se pohybuje na dně misky ve tvaru kulového vrchlíku o poloměru  $R$  (obr. 1-35). Jestliže kuličku vychýlíme z rovnovážné polohy v bodě  $A$  do bodu  $B$ , je  $x_m$  amplituda výchylky těžiště kuličky.

V trojúhelníku  $ABC$  platí

$$x_m^2 = h(2R - h) \doteq 2Rh,$$

kde jsme  $h^2$  zanedbali a  $h \doteq x_m^2/2R$ . Současně kulička získá největší potenciální energii

$$E_{\text{pm}} = mgh = mg \frac{x_m^2}{2R}.$$

Při pohybu zpět do rovnovážné polohy se potenciální energie mění v energii kinetickou a v rovnovážné poloze má největší hodnotu

$$E_{\text{km}} = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}J\Omega_m^2,$$

kde  $J = 2/5(mr^2)$  je moment setrvačnosti homogenní kuličky o poloměru  $r$  a  $\Omega_m = v_m/r$  je úhlová rychlost rotace kuličky v rovnovážné poloze. Poněvadž amplituda rychlosti kmitání kuličky  $v_m = \omega x_m$ , platí

$$W_k = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 + \frac{1}{5}m\omega^2 x_m^2 = \frac{7}{10}m\omega^2 x_m^2.$$

Podle zákona zachování mechanické energie  $E_{\text{km}} = E_{\text{pm}}$ , takže platí

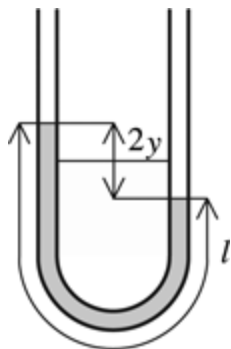
$$\frac{7}{5} \frac{1}{2} m\omega^2 x_m^2 = \frac{1}{2} m x_m^2 \frac{g}{R}$$

a pro úhlovou frekvenci a periodu kmitavého pohybu kuličky dostaneme

$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{7R}} \doteq 0,85\omega_0 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{7R}{5g}} \doteq 1,18T_0,$$

kde  $\omega_0$  a  $T_0$  jsou úhlová frekvence a perioda kyvadla s délkou závěsu  $l = R$ .

#### E. Kmitání sloupce vody



Obr. 1-36

Vlastnosti mechanického oscilátoru má i sloupec vody např. v trubici ve tvaru U (obr. 1-36).

Jestliže trubici nakloníme, zvětší se výška sloupce vody v jednom rameni a po vrácení trubice do svislé polohy začne voda v trubici s poměrně velkým tlumením kmitat. Když odhlédneme od tlumení, které je způsobeno třením kapaliny o stěny nádoby, můžeme uvažovat jako příčinu kmitání jen hydrostatickou tlakovou sílu určenou rozdílem výšek sloupců vody v obou ramenech nádoby. Jestliže je hladina vody v počátečním okamžiku v levém sloupci ve vzdálenosti  $y$  nad rovnovážnou polohou  $O$ , je v pravém sloupci hladina o  $y$  níže a rozdíl hladin je  $2y$ . Kmitání způsobuje tlaková síla o velikosti

$$F = -2yS\rho g,$$

kde  $S$  je plocha příčného řezu trubici a  $\rho$  je hustota vody. Označíme  $l$  délku sloupce vody v obou ramenech nádoby, takže hmotnost vody  $m = lS\rho$ . Pohybová rovnice kmitání vody bude

$$lS\rho \frac{d^2 y}{dt^2} = -2yS\rho g,$$

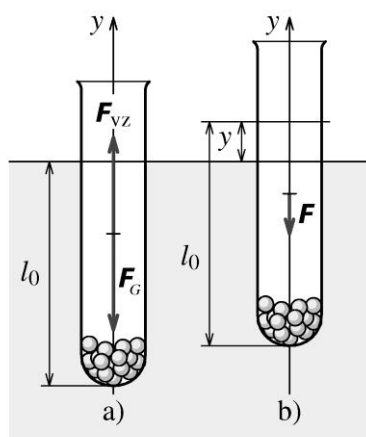
čili

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2g}{l} y = 0.$$

Srovnáním s pohybovou rovnicí netlumeného oscilátoru (1.4) dostaneme pro úhlovou frekvenci a periodu kmitání vodního sloupce bez tlumení obdobný vztah jako pro kyvadlo:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$$

### F. Kmitání plovoucího objektu



Obr. 1-37

Těleso plovoucí na hladině je v rovnovážné poloze, při níž je v rovnováze tíhová síla  $F_G$  působící v těžišti tělesa svislým směrem dolů a hydrostatická vztlaková síla  $F_{vz}$  působící opačným směrem. Jestliže těleso poněkud ponoříme nebo vyzvedneme nad hladinu a pustíme, začne těleso tlumeně kmitat. Ukážeme, na čem frekvence kmitání závisí. Popíšeme kmitání zkumavky o ploše příčného řezu  $S$ , která je u dna zatížena např. broky, aby měla nízko těžiště a při ponoření do nádoby s vodou zůstala ve svislé poloze (obr. 1-37). Zakřivení dna na zkumavky ovlivňuje objem zkumavky jen nepatrně, a budeme ji považovat za válec, jehož ponořená část má v rovnovážné poloze objem  $V = l_0 S$  a podle Archimédova zákona na zkumavku působí vztlaková síla o velikosti

$$F_{vz} = V\rho g = Sl_0\rho g.$$

Při vysunutí zkumavky o vzdálenost  $y$  se zmenší vztlaková síla, ale tíhová síla se nezmění. Tím se poruší rovnováha a vznikne síla směřující do rovnovážné polohy, pro jejíž souřadnici platí

$$F = -Sy\rho g.$$

Pohybová rovnice kmitání

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + S\rho g y = 0.$$

Hmotnost zkumavky, kterou určíme z podmínky rovnováhy  $F_G = F_{vz}$ :

$$m = Sl_0\rho$$

Po úpravě pohybové rovnice dostaneme

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{g}{l_0} y = 0,$$

takže

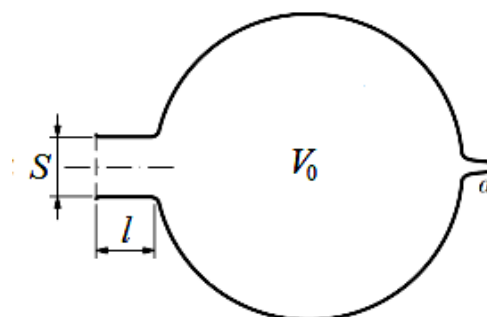
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l_0}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}.$$

### G. Helmholtzův rezonátor

Akustickou analogií pružinového oscilátoru je Helmholtzův rezonátor, což je historická pomůcka pro analýzu zvuků (obr. 1-38a), vytvořená německým fyzikem HERMANEM VON HELMHOLTZEM (1821-1894). Je to dutá, obvykle kovová koule o objemu  $V_0$ , opatřená krátkým hrdlem ve tvaru válečku o délce  $l$  a ploše příčného řezu  $S$  (obr. 1-38b). Na opačném konci rezonátoru je výstupek s otvorem, který se vkládá do ucha. Jestliže ve zkoumaném zvuku je obsažen tón, pro který je rezonátor konstruován, dojde k rezonančnímu zesílení tónu, kdežto ostatní zvuky rezonátor potlačuje. Budeme předpokládat, že objem vstupního válečku je malý ve srovnání s objemem rezonátoru a že vliv výstupku s otvorem na rezonanční frekvenci rezonátoru je zanedbatelný.



Obr. 1-38a



Obr. 1-38b

Zvuková vlna dopadající na vstupní otvor rezonátoru uvede vzduch ve válečku do pohybu podobně, jako se pohybuje těleso zavěšené na pružině. Vzduch v dutině rezonátoru se chová jako pružně deformovatelné těleso, tedy jako pružina, na které je zavěšeno těleso o hmotnosti  $m = lS\rho$ , kde  $\rho$  je hustota vzduchu. Posunutím vzduchu ve vstupním válečku o  $x$  vzniká tlaková síla

$$\Delta F = S\Delta p,$$

kde  $\Delta p$  je adiabatická změna tlaku v dutině. Použitím Poissonovy rovnice pro adiabatický děj

$$pV^\kappa = \text{konst.}$$

dostaneme

$$-\frac{\Delta p}{p} = \kappa \frac{\Delta V}{V} \approx \kappa \frac{Sx}{V_0},$$

kde  $\kappa$  je Poissonova konstanta pro plyn v dutině rezonátoru (pro vzduch  $\kappa = 1,40$ ).

Kmitání vzduchu způsobuje síla

$$\Delta F = lS\rho \frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa S^2 \frac{p_0}{V_0} x$$

a po úpravě dostaneme rovnici kmitání

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \kappa \frac{S}{l\rho} \frac{p_0}{V_0} x = 0.$$

Odtud je zřejmé, že

$$\omega = \sqrt{\kappa \frac{S}{l\rho} \frac{p_0}{V_0}} = v \sqrt{\frac{S}{lV_0}}.$$

Pod odmocninou jsou mechanické parametry rezonátoru dané jeho konstrukcí a veličina

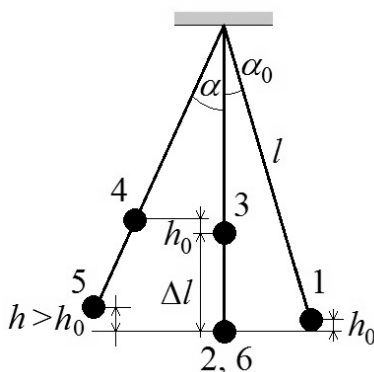
$$v = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho}}$$

je rychlost zvuku v plynu (viz kap. 2.2). Pro rezonanční frekvenci  $f_H$  Helmholtzova rezonátoru tedy platí

$$f_H = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{lV_0}}.$$

## H. Parametrické kmitání

Zvláštní typ kmitání vzniká v soustavě, jejíž parametry se v průběhu kmitání periodicky mění. Názorným příkladem může být způsob, jakým děti udržují pohyb houpačky. Jestliže je houpačka v rovnovážné poloze a má největší rychlost, tak se dítě přikrčí, aby jeho těžiště bylo co nejnižší. Při pohybu do krajní polohy s největší výchylkou se naopak vztyčí, aby se těžiště těla posunulo blíže k závěsu. Takový pohyb se opakuje dvakrát během periody kmitání houpačky a nahrazují se tak ztráty energie tlumením pohybu, popř. se může i získat energie, která umožňuje zvětšit amplitudu kmitání. Důležité však je, že tímto způsobem nelze houpačku rozhoupat, pokud je v klidu. Houpačka musí být v počátečním okamžiku v pohybu a periodickou změnou polohy těžiště, čili změnou parametru, tzn. délky kmitající soustavy, lze její energii udržovat, popř. i zvětšovat. Tento způsob zvětšení energie kmitající soustavy periodickou změnou parametrů se označuje jako *parametrická rezonance*.



Obr. 1-39

Fyzikální podstatu parametrického kmitání ukážeme na jednoduchém příkladu matematického kyvadla, jehož délka závěsu se bude periodicky prodlužovat a zkracovat. Kyvadlo délky  $l$  s tělesem o hmotnosti  $m$  vychýlíme z rovnovážné polohy o úhel  $\alpha_0$  (obr. 1-39, poloha 1) a pustíme. Kyvadlo projde rovnovážnou polohou (2) rychlostí  $v_0$  a v tomto okamžiku zkrátíme závěs kyvadla o délku  $\Delta l$ , takže těleso je v poloze (3), což ale nemá vliv na velikost rychlosti. Pohyb tělesa tak pokračuje po trajektorii s menším poloměrem, až dosáhne polohy (4), která je o vzdálenost  $h_0$  výše, než v poloze (3) a závěs se odkloní o úhel  $\alpha > \alpha_0$ . V tomto okamžiku se rychle změní délka závěsu a těleso bude v poloze

(5), která je ve výšce  $h > h_0$  nad rovnovážnou polohou (2). Těleso tedy bude mít větší polohovou energii ve srovnání s energií v poloze (1) a rovnovážnou polohou při pohybu vpravo projde rychlostí  $v_1 > v_0$ . Jestliže se tento způsob změny délky závěsu kyvadla bude opakovat dvakrát za periodu, bude se celková energie kmitavého pohybu kyvadla zvětšovat. Je to dáno tím, že energie potřebná ke zvednutí kmitajícího tělesa o  $\Delta l$  je větší, než energie, kterou ztratí při přemístění z polohy (4) do polohy (5), tzn. když  $\Delta l_1 = \Delta l \cos \alpha$ .

Popíšeme přeměny energie při parametrickém kmitání. Poněvadž závěs kyvadla je napínán tíhou tělesa  $G = mg$  a odstředivou silou  $F_o = m \frac{v_0^2}{l}$ , vykoná se při zkrácení závěsu práce

$$\Delta W_1 = \left( mg + \frac{mv_0^2}{l} \right) \Delta l.$$

Naopak prodloužení závěsu z polohy (4) do polohy (5) odpovídá práce

$$\Delta W_2 = -mg\Delta l \cos \alpha = -mg\Delta l \left( 1 - \frac{h}{l} \right).$$

Zvětšení energie kyvadla tedy bude

$$\Delta E = \Delta W_1 + \Delta W_2 = mv_0^2 \frac{\Delta l}{l} \left( 1 + \frac{gh}{v_0^2} \right) = 2 \frac{\Delta l}{l} E_0 \left( 1 + \frac{h}{2h_0} \right) \approx 3 \frac{\Delta l}{l} E_0,$$

kde  $v_0^2 = 2gh_0$ ,  $\frac{1}{2}mv_0^2 = E_0$ ,  $h \approx h_0$ .

Vlivem tlumení se za polovinu periody energie pohybu kyvadla změní na hodnotu

$$E_1 = E_0 e^{-\delta T}$$

a ztráta energie

$$\Delta E_1 = E_0 - E_1 \approx E_0 \delta T = E_0 \frac{\pi}{Q},$$

kde  $E_0$  je energie kyvadla v počátečním okamžiku a  $Q$  je činitel jakosti oscilátoru.

Aby došlo k parametrické rezonanci, je třeba, aby  $\Delta E > \Delta E_1$ , takže pro tzv. *hloubku modulace parametru*  $\frac{\Delta l}{l}$  musí platit  $\frac{\Delta l}{l} > \frac{\pi}{3Q} \approx \frac{1}{Q}$ . Čím větší je činitel jakosti oscilátoru, tím menší změny parametru jsou nutné, aby se kmitání oscilátoru udrželo.

Parametrické kmitání může nastat i za jiných podmínek. Kdyby např. tělesem kyvadla byla ocelová kulička a pod její rovnovážnou polohu bychom umístili elektromagnet, dosáhli bychom urychlení kyvadla a tím náhrady ztrát energie periodickým zapínáním elektromagnetu v okamžiku, kdy se kulička blíží do rovnovážné polohy, a vypnutím elektromagnetu v okamžiku, kdy kulička projde rovnovážnou polohou. Podobně jako při houpaní na houpačce je tedy pro dosažení parametrické rezonance nutné měnit zvolený parametr s dvojnásobnou frekvencí, než je frekvence vlastního kmitání soustavy.



## Úlohy ke kapitole 1

1. Hmotný bod kmitá harmonicky s frekvencí 400 Hz a s amplitudou výchylky 2 mm. Počáteční fáze kmitání je  $30^\circ$ . Napište rovnici pro okamžitou výchylku hmotného bodu. Určete: a) okamžitou výchylku hmotného bodu v počátečním okamžiku, b) dobu, za kterou hmotný bod dospěje do rovnovážné polohy, c) rychlost hmotného bodu v rovnovážné poloze.

[ $\{y\} = 2 \cdot 10^{-3} \sin(800\pi\{t\} + \pi/6)$ , a)  $10^{-3}$  m, b)  $(-0,21 + k \cdot 1,25)$  ms, kde  $k = 1, 2, 3, \dots$ , c)  $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]

2. Hmotný bod vykoná 150 kmitů za minutu. Určete počáteční fázi kmitání, jestliže hmotný bod dosáhl kladné amplitudy výchylky za dobu 0,3 s od počátečního okamžiku.  $[-\pi]$

3. Určete amplitudu výchylky hmotného bodu, který kmitá s počáteční fází  $-1/3\pi$ , je-li jeho okamžitá výchylka v počátečním okamžiku 2,6 cm.  $[3 \text{ cm}]$

4. Hmotný bod kmitá harmonicky s amplitudou výchylky 50 mm, s periodou 4 s a s počáteční fází  $\pi/4$ . Určete okamžitou výchylku při  $t_1 = 0$  a  $t_2 = 1,5$  s.  $[y_1 = 35 \text{ mm}, y_2 = 0]$

5. Hmotný bod kmitá s amplitudou výchylky 4 cm. Určete okamžitou výchylku odpovídající hodnotě  $\omega t = \pi/3$ , je-li počáteční fáze kmitání  $\pi/2$ .  $[2 \text{ cm}]$

6. Hmotný bod kmitá harmonicky s amplitudou výchylky 1,2 cm a s periodou 0,25 s. Určete amplitudu rychlosti a zrychlení.  $[3,0 \cdot 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, 7,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}]$

7. Hmotný bod kmitá harmonicky s amplitudou výchylky 5 cm a s periodou 2 s. Počáteční fáze kmitání je nulová. Určete velikost rychlosti hmotného bodu v okamžiku, kdy okamžitá výchylka je 2,5 cm.  $[0,14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$

8. Dvě izochronní harmonická kmitání téhož směru o frekvenci 4 Hz mají stejnou amplitudu výchylky 2 cm a rozdíl fází kmitání je  $\pi/2$ . Napište rovnici výsledného kmitání, jestliže jedno kmitání má nulovou počáteční fázi.

$$[\{y_{12}\} = 2,8 \cdot 10^{-2} \sin\left(8\pi\{t\} + \frac{\pi}{4}\right)]. \text{ Řešením je i případ, kdy } \varphi_{012} = -\pi/4.]$$

9. Napište rovnici výsledného kmitání, které vzniká superpozicí dvou izochronních kmitání o frekvenci 8 Hz a o stejné amplitudě výchylky 2 cm. Fázový rozdíl kmitání je  $\pi/4$  a počáteční fáze jedné složky je nulová.  $[\{y_{12}\} = 0,04 \sin(16\pi\{t\} + \pi/8)]$

10. Superpozicí izochronních kmitání, která mají stejné amplitudy výchylky, vzniká výsledné kmitání popsané rovnicí  $\{y_{12}\} = 0,14 \sin\left(10\pi\{t\} + \frac{\pi}{4}\right)$ . Určete amplitudu výchylky složek, jejich frekvenci a fázový rozdíl, jestliže počáteční fáze jedné složky je nulová.

$$[y_{m1} = y_{m2} = \frac{y_{m12}}{\sqrt{2}} \approx 0,10 \text{ m}, 5 \text{ Hz}, \varphi_{02} = \frac{\pi}{2}]$$

11. Pružina se po zavěšení tělesa prodlouží o 2,5 cm. Určete frekvenci vlastního kmitání takto vzniklého oscilátoru.  $[3,2 \text{ Hz}]$

12. Těleso zavěšené na pružině kmitá s periodou 0,5 s. O kolik se pružina zkrátí, jestliže těleso z pružiny sejmeme?  $[6 \text{ cm}]$

13. Mechanický oscilátor je tvořen pružinou, na níž je zavěšena miska se závažím. Perioda oscilátoru je 0,50 s. Přidáním dalšího závaží se perioda oscilátoru zvětší na 0,60 s. Určete, o kolik cm se pružina přidáním závaží prodloužila.  $[\Delta l = \frac{g}{4\pi^2}(T_2^2 - T_1^2) = 2,7 \text{ cm}]$

14. Těleso o hmotnosti  $m$  dopadlo z výšky  $h$  na miskou pružinových vah, jejichž pružina má tuhost  $k$ . Po dopadu tělesa se miska vah rozkmitala. Určete amplitudu kmitání misky vah. Hmotnosti misky a pružiny jsou zanedbatelné ve srovnání s hmotností tělesa.

$$[ y_m = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}} ]$$

15. Vodorovná podložka, na níž je volně položen předmět, kmitá harmonicky s amplitudou 0,1 m. Určete frekvenci kmitání, při níž předmět na podložce začne nadskakovat. (Poznámka: Předmět nadskočí, když se podložka bude pohybovat s větším zrychlením, než je zrychlení volného pádu.) [1,6 Hz]

16. Hranol z dubového dřeva o rozměrech 10 cm × 20 cm × 20 cm plave na hladině vody. Hranol poněkud zatlačíme do vody a pustíme. Jaká by byla perioda kmitání hranolu, pokud bychom odpor prostředí mohli zanedbat. Hustota dubového dřeva je 900 kg · m<sup>-3</sup>. Výška hladiny je stálá. [  $T = 2\pi\sqrt{\rho h / \rho_0 g} = 0,6 \text{ s}$  ]

17. Při zvětšení délky matematického kyvadla o 0,2 m se doba kmitu kyvadla zvětšila o 0,1 s. Určete původní dobu kmitu kyvadla. [  $T_0 = \frac{2\pi^2 \Delta l}{g \Delta T} - \frac{\Delta T}{2} \approx 4 \text{ s}$  ]

18. Ve vagónu je zavěšeno kyvadlo, které ve stojícím vagónu kmitá s periodou  $T_0$ . Určete periodu tohoto kyvadla, jestliže se vagón pohybuje vodorovně po přímočaré trati se zrychlením o velikosti  $a = g/2$ . [0,94 $T_0$ ]

19. Kolikrát se změní perioda kmitání kyvadla přeneseného ze Země na Měsíc, jestliže hmotnost Měsíce je 81krát menší než hmotnost Země a poloměr Země je 3,7krát větší než poloměr Měsíce? [  $\frac{T_M}{T_Z} = \sqrt{\frac{g}{g_M}} = 2,4$  ]

20. Kyvadlo tvořené vláknem délky  $l$  a kuličkou o hmotnosti  $m$  je zavěšeno v kabině výtahu, který se pohybuje se zrychlením  $\mathbf{a}_0$  směrem vzhůru. Určete periodu kyvadla. Jaká by byla perioda kyvadla, kdyby se výtah pohyboval se stejným zrychlením směrem dolů?

$$[ T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + a_0}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - a_0}} ]$$

21. Periody dvou kyvadel tvořených pevnými vlákny, na nichž jsou zavěšeny kuličky, jsou v poměru 3 : 2. Kolikrát je první kyvadlo delší než druhé? [  $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{l_1}{l_2} = 2,25$  ]

22. Pro okamžitou výchylku kmitání hmotného bodu platí rovnice  $y = y_m \sin(2\pi\{t\} + \pi/6)$ . Určete, ve kterém okamžiku je poprvé potenciální energie hmotného bodu rovna jeho kinetické energii. [  $t = 1/24 \text{ s}$  ]

## Kapitola 2 MECHANICKÉ VLNĚNÍ

---

Vlnění je jedním z nejrozšířenějších fyzikálních jevů. Setkáme se s ním v podobě zvuku, světla, rozhlasového či televizního vysílání atd. I když má vlnění různou fyzikální podstatu, platí pro různé druhy vlnění společné zákonitosti, které si objasníme na příkladu mechanického vlnění.

### 2.1 Postupné mechanické vlnění

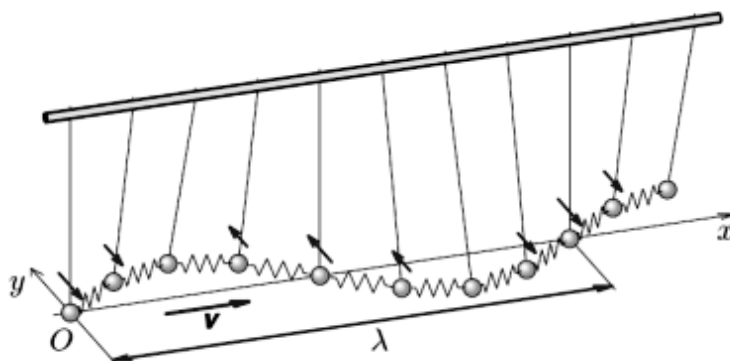
Zdrojem mechanického vlnění v pružném látkovém prostředí je kmitání, které vznikne v určitém místě prostředí a kmitání přenáší do dalších bodů prostředí, které začnou rovněž kmitat. Poloha kmitajících bodů se však nemění. Šíření vln není spojeno s přenosem látky.

Mechanické vlnění vzniká v látkách všech skupenství a jeho příčinou je existence vazebných sil mezi částicemi (atomy, molekulami) prostředí, kterým se vlnění šíří. Kmitání jedné částice se vzájemnou vazbou přenáší na další částici. Současně se tak na tuto částici přenáší energie kmitavého pohybu.

Přenosem kmitání mezi částicemi pružného prostředí se vytváří vlna. Jestliže hmotný bod, který je zdrojem vlnění, kmitá harmonicky, vzniká mechanická vlna sinusového průběhu. Modelem pružného prostředí je řada mechanických oscilátorů – kyvadel navzájem spojených vazbou, kterou znázorníme malými pružinami. Jestliže první kyvadlo vychýlíme ve směru osy  $y$  a necháme ho volně kmitat, začnou postupně kmitat i ostatní kyvadla (obr. 2-1). Kmitání konstantní rychlostí postupuje ve směru osy  $x$ . Vzniká postupné vlnění příčné a rychlost  $\mathbf{v}$  je rychlost postupného vlnění. Za dobu kmitu  $T$  prvního kyvadla se vlna rozšířila do vzdálenosti označované jako **vlnová délka**  $\lambda$

$$\lambda = vT = \frac{v}{f},$$

kde  $f$  frekvence kmitání zdroje ( $f = 1/T$ ).



Obr. 2-1

#### Definice vlnové délky:

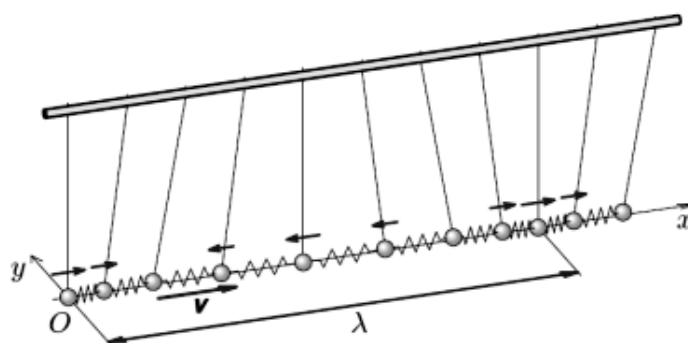
Vlnová délka  $\lambda$  je vzdálenost, do níž se vlnění rozšíří za periodu  $T$  kmitání zdroje vlnění.

Vlnová délka  $\lambda$  je vzdálenost dvou nejbližších bodů, které kmitají se stejnou fází.

Rozlišujeme dva základní typy postupného mechanického vlnění:

1. *Postupné vlnění příčné*, kdy hmotné body pružného prostředí kmitají kolmo na směr, kterým vlnění postupuje. Je charakteristické pro pružná pevná tělesa ve tvaru tyčí, vláken apod. Pozorujeme ho také na vodní hladině.

2. *Postupné vlnění podélné*, při němž částice pružného prostředí kmitají ve směru, kterým vlnění postupuje (obr. 2-2). Vzniká v tělesech všech skupenství, tedy i v kapalinách a plynech, která jsou pružná při změně objemu (tzn. při stlačování a rozpínání). Postupným vlněním podélným se v pružných látkách šíří např. zvuk.



Obr. 2-2

Rychlost mechanického vlnění závisí na vlastnostech pružného prostředí a je různá pro vlnění příčné a podélné. Zvláštní význam má rychlost podélného postupného vlnění, kterým se v různých prostředích šíří zvuk. Rychlostí zvuku se budeme zabývat v kap. 3.

### Rovnice postupného vlnění

Vlnění popisujeme rovnicí, která určuje okamžitou výchylku  $y$  libovolného bodu pružného prostředí v čase  $t$  v závislosti na vzdálenosti  $x$  od zdroje vlnění. Tuto rovnici odvodíme pro případ, že se vlnění šíří řadou bodů. Uvažujeme, že zdroj vlnění kmitá harmonicky podle rovnice

$$y = y_m \sin \omega t.$$

Jestliže se harmonické postupné vlnění šíří rychlostí  $v$  řadou hmotných bodů, dospěje do bodu  $M$  ve vzdálenosti  $x$  od zdroje vlnění  $Z$  za dobu  $\tau = x/v$  (obr. 2-3). O tuto dobu je kmitání bodu  $M$  opožděno oproti kmitání zdroje  $Z$ . Pro kmitání bodu  $M$  bude tedy platit vztah:

$$y = y_m \sin \omega(t - \tau) = y_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

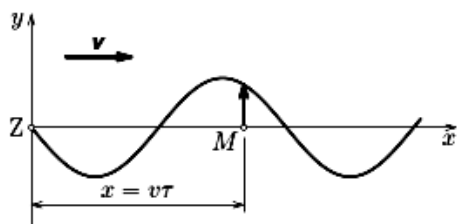
Po dosazení  $\omega = 2\pi/T$  a  $\lambda = vT$  dostaneme **rovnici postupné vlny** pro řadu bodů

$$y = y_m \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (2.1)$$

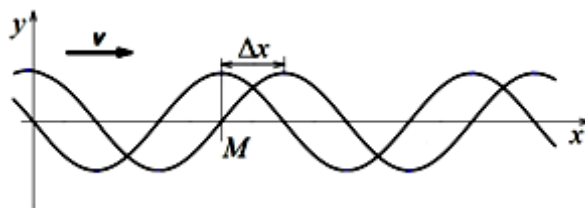
nebo

$$y = y_m \sin(\omega t - kx),$$

kde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  je **úhlový vlnčet**.



Obr. 2-3



Obr. 2-4

Reciproká hodnota vlnové délky se označuje jako **vlnočet**  $\sigma$  nebo *vlnové číslo*:

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi}$$

Z uvedeného vyplývá, že rychlost postupného vlnění souvisí s uvedenými veličinami vztahem:

$$v = f\lambda = \frac{\omega\lambda}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$$

Na obr. 2-4 je postupná vlna zobrazena ve dvou po sobě následujících okamžicích a to v čase  $t$  a v čase  $t + \Delta t$ . Vidíme, že amplituda vlny se za dobu  $\Delta t$  posunula o vzdálenost  $\Delta x$ . Argument  $(\omega t - kx)$ , který představuje okamžitou **fázi vlnění**, se však nezměnil, poněvadž zvětšení hodnoty  $t$  znamená současně zvětšení hodnoty  $x$ . Je tedy

$$\omega t - kx = \text{konst.}$$

a derivace tohoto výrazu podle času

$$\omega - k \frac{dx}{dt} = 0.$$

Odtud dostaneme pro rychlost, s níž se mění okamžitá fáze vlnění, již uvedený vztah

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

a takto určenou rychlost budeme nazývat **fázová rychlost**. Určuje rychlost, jakou se přemísťuje stejná fáze kmitání jednotlivých bodů pružného prostředí. Pro vlnění, které se šíří v opačném směru osy  $x$  je ve výrazu pro fázi vlnění znaménko  $+$ . Jednorozměrné postupné vlnění tedy vyjadřuje funkce

$$u = f\left(t \pm \frac{x}{v}\right) = f(t \pm kx).$$

Poněvadž tento výsledek se netýká jen mechanického vlnění, ale i jiných druhů vlnění (vlnění elektromagnetického), budeme dále vlnění místo mechanické výchylky  $y$  popisovat veličinou  $u$  a její amplitudu označíme  $u_m$ .

Vlnění se liší od kmitání, při němž okamžitá výchylka kmitajícího bodu je jen funkcí času, tím, že je to děj periodický také v prostoru. Mechanické vlnění je tedy děj s dvojitou periodicitou. Všechny veličiny popisující vlnění jsou jak funkcemi času, tak funkcemi polohy (souřadnice) bodu, kterým vlnění prochází.

Rovnice platí pro příčné i podélné harmonické vlnění v homogenním prostředí. V daném prostředí však tato vlnění mají různou rychlost. Předpokládáme, že při šíření vlnění nevznikají ztráty a vlnění není tlumené ( $\gamma_m = \text{konst.}$ ).

Vlnová rovnice popisuje zvláštní případ vlnění, kdy zdroj kmitá harmonicky. Často však může mít kmitání zdroje složitější, obecně neharmonický průběh. Každý bod prostředí však koná tytéž kmity s určitým fázovým zpožděním. Pro popis obecných případů vlnění (nejen vlnění mechanického) používáme diferenciální rovnice a rovnici (2.1) můžeme považovat za zvláštní případ řešení obecně platné diferenciální rovnice, kterou najdeme následující úvahou.

Utvoříme druhou derivaci rovnice (2.1), v níž okamžitou výchylku označíme  $u$ , jednak podle času  $t$ , jednak podle souřadnice  $x$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -u_m \omega^2 \sin(\omega(t - kx))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -u_m k^2 \sin(\omega(t - kx))$$

Vzájemným porovnáním těchto rovnic dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Protože  $\frac{\omega}{k}$  je fázová rychlost vlnění, dostaneme obecně platnou rovnici vyjadřující dynamiku vlnění, tzv. **vlnovou rovnici**. Pro vlnění, které se šíří ve směru osy  $x$ , má tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Vlnění v prostoru popisuje vlnová rovnice ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

nebo

$$\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

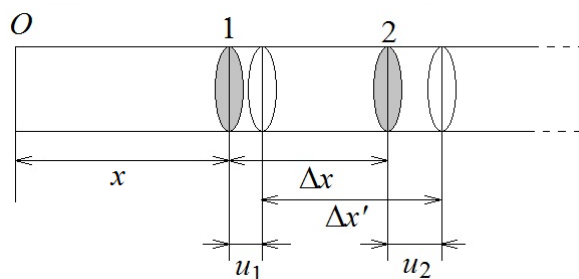
kde  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  je tzv. *Laplaceův operátor*.

Vlnová rovnice platí nejen pro popis vlnění s harmonickým průběhem, ale pro vlnění s libovolnou funkcí argumentů  $(t - x/v)$  a  $(t + x/v)$  a jejich kombinací.

## 2.2 Rychlost vlnění v pružném prostředí

### A Rychlost vlnění v pružné tyči

Určení rychlosti vlnění v pružném látkovém prostředí je poměrně složitý fyzikální problém. Souvislost rychlosti harmonického postupného vlnění s mechanickými vlastnostmi pružné látky ukážeme na příkladu tenké tyče, jejíž jeden konec je rozkmitáván podélně zdrojem harmonického kmitání. V tomto případě postačí k nalezení vztahu pro rychlost vlnění vlnová rovnice, v níž se uplatňují jen dvě nezávislé proměnné veličiny:  $x$  – vzdálenost uvažovaného bodu na ose tyče od zdroje vlnění v počátečním bodě  $O$  (obr. 2-5) a čas  $t$ .



Obr. 2-5

Budeme uvažovat dva navzájem blízké průřezy tyče, které se nacházejí v klidu (tzn. v rovnovážné poloze) ve vzdálenostech  $x$  a  $x + \Delta x$  od bodu  $O$ . Jestliže se tyčí šíří postupné podélné vlnění, tak se vzájemná vzdálenost  $\Delta x$  průřezů mění a dochází k periodickému zmenšování a prodlužování této vzdálenosti. V čase  $t$  je tato vzdálenost  $\Delta x' = u_2 - u_1 = \Delta u$ , kde  $u_1$  a  $u_2$  jsou okamžité výchylky uvažovaných průřezů tyče a  $\Delta u$  je okamžitá deformace tyče. Dochází k relativnímu prodloužení materiálu tyče  $\varepsilon = \Delta u / \Delta x$  a pro velmi malou vzdálenost  $\Delta x \rightarrow 0$  vyjádříme relativní prodloužení vztahem

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Poněvadž každý průřez tyče má v určitém okamžiku jinou polohu, působí na element tyče síla  $dF$ , jejíž velikost je úměrná rozdílu  $d\varepsilon$  relativních prodloužení, pro které platí

$$d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Pro deformaci tyče platí Hookeův zákon  $F = SE\varepsilon$ , kde  $S$  je plošný obsah průřezu tyče a  $E$  je modul pružnosti v tahu. Pro sílu  $dF$  platí

$$dF = SE d\varepsilon = SE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Tato síla uděluje elementu tyče o hmotnosti  $dm = \rho S dx$  zrychlení

$$a = \frac{dF}{dm}$$

a po dosazení a úpravě dostaneme rovnici vlnění v tyči ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kde  $\rho$  je hustota materiálu tyče.

Odtud vyplývá, že podélné vlnění se tyčí šíří rychlostí

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Pružnou tyčí se tedy vlnění šíří tím rychleji, čím větší je modul pružnosti v tahu, tzn. čím větší síla je potřebná k prodloužení či zkrácení tyče, a čím menší je hustota materiálu tyče.

Podélné vlnění v plynném prostředí se šíří jako periodické stlačování a rozpínání plynu, které probíhá při dostatečné frekvenci kmitání jako adiabatický děj, tzn. že nedochází k tepelné

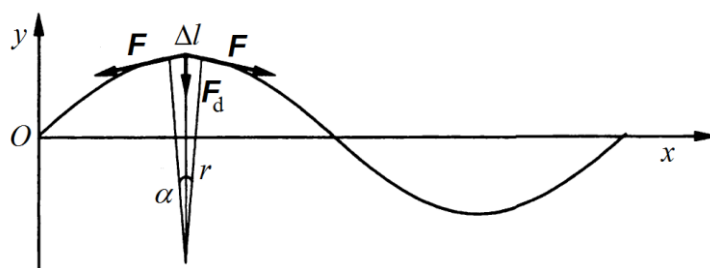
výměně s okolím. Pro rychlost podélných vln v plynu pak platí vztah obdobný jako vztah pro pevnou tyč

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

kde  $K$  je modul objemové pružnosti.

### **B Rychlost vlnění na struně**

Budeme uvažovat element struny délky  $\Delta l$ , který se nachází v místě amplitudy postupné příčné vlny na struně (obr. 2-6).



Obr. 2-6

Vzhledem k deformaci struny působí na uvažovaný element z obou stran stejně velké síly  $F$ , jejichž výslednice směřuje kolmo ke směru šíření postupné vlny. Současně se element struny pohybuje rychlostí  $v$  ve směru osy  $x$  vztažené soustavy. Tuto soustavu však můžeme zvolit tak, že se bude pohybovat rychlostí  $-v$  a element struny bude vzhledem k pozorovateli v klidu, avšak částice struny se pohybují rychlostí  $v$  po oblouku, který struna v místě amplitudy vytváří. Pokud je tento oblouk malý, můžeme velikost výslednice působících sil vyjádřit vztahem

$$F_d = F\alpha.$$

Tato výslednice je z hlediska pohybu částic dostředivou silou, takže platí

$$F_d = m \frac{v^2}{r}.$$

Hmotnost  $m$  elementu struny je

$$m = \rho S \Delta l = \rho S r \alpha,$$

kde  $\rho$  je hustota materiálu struny a  $S$  je plocha příčného průřezu struny. Platí tedy

$$F\alpha = \rho S r \alpha \frac{v^2}{r}$$

a odtud pro rychlost příčného postupného vlnění na struně dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}},$$

kde  $\sigma = \frac{F}{S}$  je napětí struny.



### C Rychlost vlnění v plynu

Na rozdíl od pružné tyče, kde jsme uvažovali periodické prodlužování a zkracování malého úseku tyče podél její osy, v plynu dochází k periodické změně malého objemu v uvažovaném místě, jímž vlnění prochází. Tlak  $p$  způsobuje relativní změnu objemu  $\Delta V/V$  a platí

$$p = K \frac{\Delta V}{V},$$

kde  $K$  je modul objemové pružnosti.

Poněvadž změny tlaku vyvolané vlněním probíhají jako adiabatický děj, platí Poissonova rovnice

$$pV^\kappa = \text{konst.},$$

kde  $\kappa$  je Poissonova konstanta, což je poměr měrných tepel plynu při stálém tlaku a stálém objemu.

Z Poissonovy rovnice diferencováním najdeme rovnici

$$V^\kappa dp + \kappa p V^{\kappa-1} dV = 0$$

nebo po úpravě

$$V dp + \kappa p dV = 0.$$

Odtud pro modul objemové pružnosti platí

$$K = -V \frac{dp}{dV} = \kappa p.$$

Poněvadž zvětšení tlaku odpovídá zmenšení objemu a naopak, je hodnota  $K$  při jakékoliv změně kladná a pro rychlost vlnění dostaneme

$$v = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}.$$

Pro většinu plynů i pro vzduch je Poissonova konstanta  $\kappa \approx 1,4$ . Ve vzduchu o hustotě  $\rho_0 = 1,293 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  za normálních podmínek ( $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C} \approx 273 \text{ K}$ ) je rychlost vlnění

$$v_0 = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{1,4 \frac{1,013 \cdot 10^5}{1,293} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} \doteq 331 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

což je rychlost, kterou se ve vzduchu šíří zvukové vlnění. Vidíme, že tato rychlost nezávisí na frekvenci vlnění. To znamená, že zvuky všech frekvencí se ve vzduchu šíří stejnou rychlostí.

Rychlost vlnění v plynném prostředí ovlivňuje také jeho teplota  $t$ , která je příčinou změny hustoty plynu. Pro hustotu plynu vyplývá ze stavové rovnice vztah

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{1}{1 + \gamma t},$$

kde  $\gamma$  je teplotní součinitel objemové roztažnosti plynů:

$$\gamma = \frac{1}{273,15 \text{ K}} = 0,003662 \text{ K}^{-1}$$

Pro rychlost zvukového vlnění ve vzduchu o teplotě  $t$  platí vztah:

$$v = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0} (1 + \gamma t)} = v_0 \sqrt{\gamma T},$$

kde  $T$  je termodynamická teplota plynu.

Přibližně také platí

$$v \approx \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{\gamma}{2} t\right)}$$

a pro vzduch vychází

$$v \doteq (331 + \frac{331}{2 \cdot 273} t) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = (331 + 0,61t) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

## 2.3 Intenzita vlnění

Šíření mechanického vlnění látkovým prostředím není spojeno s přenosem látky, ale vzájemnými vazbami mezi částicemi látky dochází k přenosu energie jejich kmitání. Tato energie se v homogenním látkovém prostředí přenáší všemi směry, a když za dobu  $\Delta t$  byla plochou  $S$  přenesena energie  $\Delta E$ , je výkon vlnění

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dE}{dt}.$$

Poněvadž se vlnění šíří všemi směry, je s rostoucí vzdáleností od zdroje vlnění výkon vlnění procházející stejnou plochou stále menší. Proto je vhodné přenos energie vlnění v určitém bodě prostoru vyjádřit energií, která za jednotku času projde elementární ploškou  $dS$  kolmou na směr šíření vln, a této plošky, čili výkonem vlnění přeneseným v daném bodě prostoru jednotkovou plochou. Tato veličina se označuje jako *intenzita vlnění*:

$$I = \frac{dP}{dS}$$

Jestliže zdroj vlnění kmitá harmonicky s úhlovou frekvencí  $\omega$  a s amplitudou  $y_m$ , je energie kmitání

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 y_m^2.$$

V látkovém prostředí o hustotě  $\rho$  je energie v objemové jednotce (tzv. *hustota energie*)

$$w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 y_m^2.$$

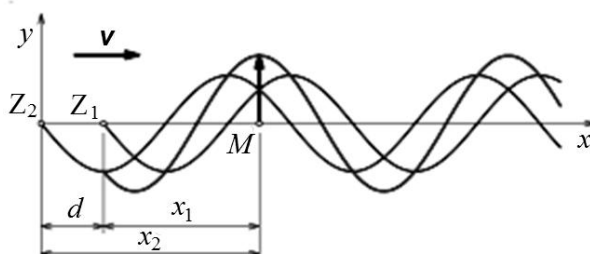
Energie obsažená v objemové jednotce se šíří od zdroje vlnění rychlostí  $v$ , takže objem odpovídající sloupci o jednotkovém průřezu má za jednotku času délku rovnou velikosti rychlosti a energie v něm obsažená vyjadřuje intenzitu vlnění

$$I = wv = \frac{1}{2} \rho \omega^2 y_m^2 v.$$

Pro další výklad je důležitý zejména poznatek, že intenzita vlnění je funkcí druhých mocnin amplitudy vlnění a jeho frekvence.

## 2.4 Interference vlnění

Jestliže se pružným prostředím šíří vlnění ze dvou nebo více zdrojů, jednotlivá vlnění postupují prostředím nezávisle. Avšak v místech, kde se vlnění setkávají, dochází k jejich skládání. Nastává interference vlnění a kmitání bodu v uvažovaném místě je určeno superpozicí okamžitých výchylek jednotlivých vlnění.



Obr. 2-7

Budeme uvažovat dvě vlnění o stejné vlnové délce  $\lambda$  a amplitudě výchylky  $y_m$ , která se stejnou rychlostí šíří řadou bodů (obr. 2-7). Zdroje vlnění  $Z_1$  a  $Z_2$  mají různou polohu, ale kmitají se stejnou počáteční fází. Vzhledem k bodu  $M$  popíšeme složky vlnění rovnicemi:

$$y = y_m \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right)$$

$$y = y_m \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right)$$

Výsledné vlnění, které vzniká interferencí dvou vlnění, určíme stejným způsobem, jakým jsme prováděli superpozici při skládání kmitavých pohybů. Pro okamžitou výchylku výsledného vlnění platí vztah

$$y = y_1 + y_2 = 2y_m \cos \pi \frac{d}{\lambda} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{\bar{x}}{\lambda} \right),$$

kde  $\bar{x} = (x_1 + x_2)/2$ . V této rovnici je výraz  $2y_m \cos(\pi d/\lambda)$  konstantní, nezávisí na čase, a má tedy význam amplitudy  $Y_m$  výsledného vlnění. Rovnici výsledného postupného vlnění zapíšeme v jednoduchém tvaru:

$$y = Y_m \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{\bar{x}}{\lambda} \right)$$

Uvedený vztah pro výslednou amplitudu výchylky  $Y_m$  platí jen v případě, že  $y_{m1} = y_{m2} = y_m$ . Jestliže  $y_{m1} \neq y_{m2}$ , použijeme pro výpočet amplitudy výchylky výsledného vlnění obecně platný vztah:

$$Y_m = \sqrt{y_{m1}^2 + y_{m2}^2 + 2y_{m1}y_{m2} \cos \left( \frac{2\pi d}{\lambda} \right)}$$

Interferencí dvou harmonických postupných vlnění tedy vzniká opět harmonické vlnění stejné vlnové délky a frekvence, ale jeho amplituda závisí na *dráhovém rozdílu*  $d$  složek výsledného vlnění;  $d = (x_2 - x_1)$ . Je to vzdálenost dvou bodů, v nichž mají obě vlnění stejnou fázi. Dráhový rozdíl je tedy funkcí *fázového rozdílu vlnění*  $\Delta\varphi$  v uvažovaném bodě pružného prostředí. Určíme ho jako rozdíl fází obou vlnění v určitém okamžiku:

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}d$$

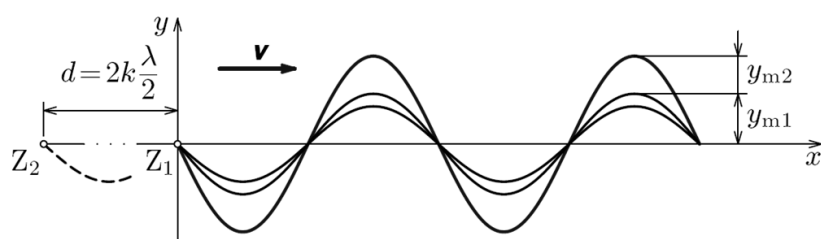
Vidíme, že **fázový rozdíl vlnění je přímo úměrný dráhovému rozdílu vlnění.**

Zvláštní případy interference vlnění nastávají, když dráhový rozdíl je roven celistvému počtu půlvln interferujících vlnění

1. Sudý počet půlvln:  $d = 2k\lambda/2 = k\lambda$ , kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Interferující vlnění se setkávají v každém bodě se stejnou fází a vzniká vlnění, jehož výsledná amplituda výchylky je rovna součtu amplitud výchylek složek (obr. 2-8):

$$y_m = y_{m1} + y_{m2}$$

Vzniká **interferenční maximum** (označuje se také *konstruktivní interference*).



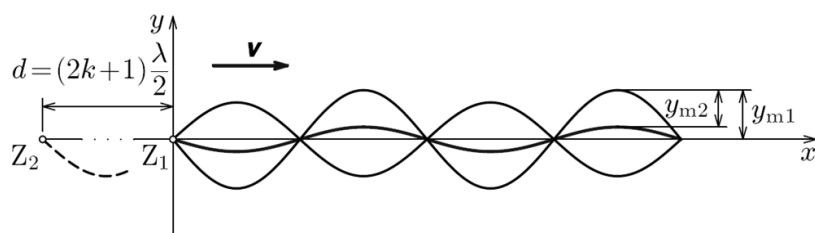
Obr. 2-8

2. Lichý počet půlvln:  $d = (2k + 1)\lambda/2$ , kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Interferující vlnění se setkávají s opačnou fází a amplituda výchylky výsledného vlnění je rovna absolutní hodnotě rozdílu amplitud složek (obr. 2-9):

$$y_m = |y_{m1} - y_{m2}|$$

Vzniká **interferenční minimum** (označuje se také *destruktivní interference*).

Při stejné amplitudě výchylek obou složek se vlnění navzájem ruší.



Obr. 2-9

Jev interference je pro vlnění charakteristický a setkáme se s ním zejména v optice, kdy interferencí světelného vlnění vznikají interferenční obrazce v podobě světlých a tmavých, popř. barevných proužků a dalších geometrických útvarů. Interference je často důležitým kritériem při rozhodování, zda má fyzikální jev vlnovou povahu.

## 2.5 Grupová rychlost vlnění

Dosud jsme předpokládali, že rychlost vlnění nezávisí na frekvenci a tedy vlnění všech frekvencí se v daném prostředí šíří stejnou rychlostí. Existuje však jev zvaný *disperze*, kdy se v látkovém prostředí rychlosti vlnění různých frekvencí nepatrně liší. Uvažujme, že se ve směru osy  $x$  šíří současně dvě vlnění s úhlovými frekvencemi

$$\omega_1 = \omega + d\omega,$$

$$\omega_2 = \omega - d\omega,$$

a s úhlovými vlnočty

$$k_1 = k + dk \quad \text{a} \quad k_2 = k - dk.$$

Pro obě vlnění platí vztahy:

$$u_1 = u_m \sin[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x]$$

$$u_2 = u_m \sin[(\omega - d\omega)t - (k - dk)x]$$

Superpozicí vlnění dostaneme vztah pro výsledné vlnění

$$u = u_1 + u_2 = 2u_m \cos(td\omega - xdk) \cdot \sin(\omega t - xdk).$$

Výsledek je obdobný jako při skládání kmitů s blízkými frekvencemi (viz obr. 1-8; osa  $x$  však není osou času  $t$ , ale určuje souřadnici uvažovaného kmitajícího bodu prostředí). Vznikají *grupy* vln s narůstající amplitudou mezi dvěma body na ose  $x$ , v nichž je v daném okamžiku amplituda nulová (body jsou v klidu). Tuto podmínku splňují body, jejichž argument kosinu splňuje podmínku  $(td\omega - xdk) = (2n - 1) \cdot \pi/2$ , kde  $n = 1, 2, 3, \dots$  Můžeme tedy psát

$$td\omega - xdk = \text{konst.}$$

a derivací tohoto vztahu dostaneme

$$d\omega - \frac{dx}{dt} dk = 0.$$

Odtud najdeme rychlost, kterou se budou podél osy  $x$  přemísťovat grupy vln a tuto rychlost označíme jako **grupovou rychlost**  $v_g$ :

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$$

Pokud v daném prostředí nedochází k disperzi, grupy vln nevznikají a grupová i fázová rychlost mají stejnou velikost.

Pojem grupové rychlosti je významný pro pochopení přenosu energie vlněním. Snadno pochopíme, že na základě fázové rychlosti nelze přenos energie charakterizovat. Při prostorově neomezeném postupném vlnění kmitají všechny body prostředí se stejnou amplitudou a energie vlnění je ve všech bodech stejná, takže nelze mluvit o rychlosti přenosu energie. O přenosu energie má smysl mluvit jen v případě, že vlnění má charakter časově ohraničeného rozruchu. Takový rozruch ale nelze popsat harmonickou funkcí s jedinou frekvencí. K vytvoření rozruchu potřebujeme velký počet harmonických vln s frekvencemi, které se spojitě mění v určitém intervalu ( $\omega \pm \Delta\omega$ ). Jejich superpozicí vzniká grupa monofrekvenčních vln, která se v prostoru šíří grupovou rychlostí.

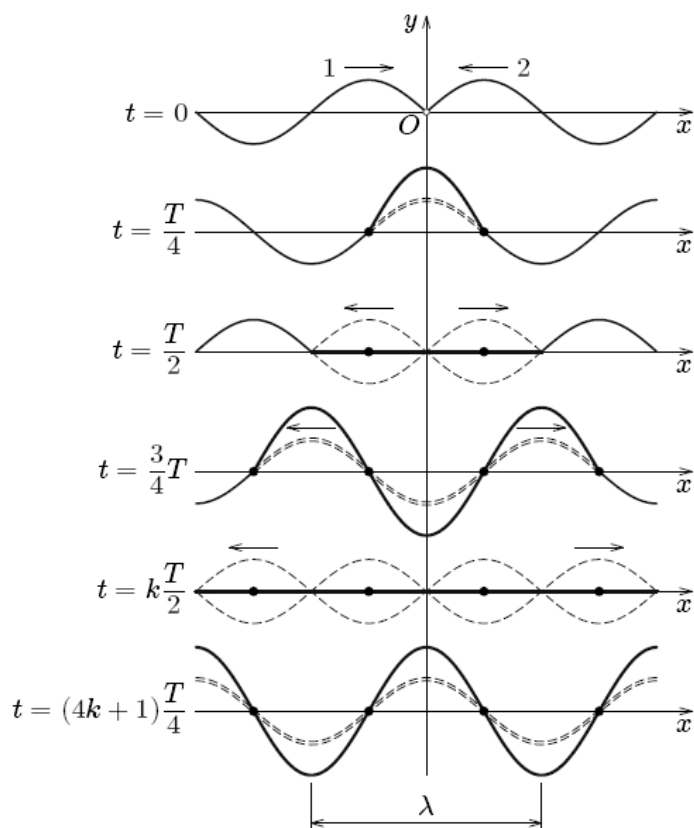
Předcházející úvaha se týkala interference dvou vln s blízkými frekvencemi a stejnou amplitudou. Tento případ můžeme zobecnit tak, že vlnám přisoudíme různé, ale navzájem málo odlišné fázové rychlosti  $v$  a  $v' = v + \Delta v$ . Vzhledem k malému rozdílu rychlostí bude malý i rozdíl vlnových délek obou vlnění  $\Delta\lambda$  a pro grupovou rychlost vznikajících skupin vln platí vztah nazvaný po jeho objeviteli *Rayleighův vztah pro grupovou rychlost*:

$$v_g = v - \lambda \frac{\Delta v}{\Delta \lambda}$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že grupová rychlost se od fázové rychlosti liší tím více, čím větší je podíl  $\Delta v/\Delta\lambda$ , tzn. čím více závisí rychlost vlnění na vlnové délce. Je-li uvedený podíl kladný, čili když se vlny o větší vlnové délce šíří rychleji než vlny o menší vlnové délce, je grupová rychlost menší než rychlost fázová a tato situace se označuje jako *normální disperze*. Podrobněji jsou řešeny tyto případy v optice.

## 2.6 Stojaté vlnění

Významný případ interference vlnění nastává, jestliže dvě vlnění o stejné amplitudě výchylky a stejné frekvenci postupují pružným prostředím v opačném směru, tedy proti sobě. K tomu dochází zejména při šíření vlnění v omezeném prostoru (např. v tyči). Vlnění postupuje až k okraji pružného prostředí, tam se odráží a postupuje v opačném směru. Přímé a odražené vlnění se skládají a vzniká stojaté vlnění.



Obr. 2-10

Vznik stojatého vlnění skládáním přímého a odraženého vlnění je znázorněn na obr. 2-10. Superpozice začíná v čase  $t = 0$ , kdy se obě vlnění setkají v bodě  $M$ , a je zakreslena pro časo-

vé intervaly  $T/4$ . Vidíme, že bod  $M$  a také všechny další body vzdálené od něho o celistvé násobky poloviny vlnové délky kmitají s největší amplitudou výchylky. V těchto bodech vzniká kmitna stojatého vlnění. Naopak body vyznačené na obr. 2-10 tečkami zůstávají ve všech fázích periody stále v klidu. Jsou to uzly stojatého vlnění. Rovněž uzly jsou ve vzájemné vzdálenosti  $\lambda/2$ . Poloha kmiten a uzlů stojatého vlnění se nemění. Kmitna je ve vzdálenosti  $\lambda/4$  od uzlu.

Stojaté vlnění vzniká skládáním dvou harmonických vln popsanych rovnicemi

$$y_1 = y_m \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

$$y_2 = y_m \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right),$$

kde  $x$  je souřadnice uvažovaného bodu za předpokladu, že počátek soustavy souřadnic  $O$  je v místě, v němž je v čase  $t = 0$  fázový rozdíl vlnění  $\Delta\varphi = 0$ .

Sečtením okamžitých výchylek dostaneme pro okamžitou výchylku výsledného vlnění vztah

$$y = 2y_m \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

nebo

$$y = Y_m \sin \omega t.$$

Vidíme, že všechny body kmitají harmonicky se stejnou fází, ale amplituda kmitů jednotlivých bodů je funkcí jejich souřadnice  $x$ :

$$Y_m = 2y_m \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

Kmitna vzniká v bodech splňujících podmínku  $\cos(2\pi x/\lambda) = 1$ , tedy pro  $x = \pm k\lambda/2$ , kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Uzel vzniká v bodech, v nichž  $\cos(2\pi x/\lambda) = 0$ , tzn. pro  $x = \pm(2k + 1)\lambda/4$ .

Mezi postupným a stojatým vlněním jsou zásadní rozdíly:

1. Při postupném vlnění kmitají všechny body se stejnou amplitudou výchylky, ale s různou, na čase závislou fází. Každý následující bod dosahuje stejné výchylky později než bod předcházející. Fáze vlnění se šíří rychlostí  $v$ , kterou také označujeme fázová rychlost.

Postupným vlněním se přenáší energie.

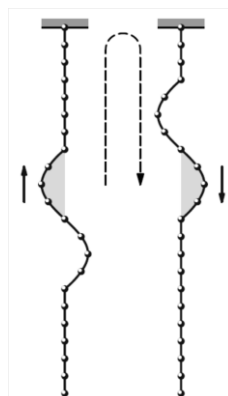
2. Při stojatém vlnění kmitají všechny body mezi dvěma uzly se stejnou fází, ale s různou amplitudou výchylky, která závisí na poloze bodu.

Stojatým vlněním se energie nepřenáší, ale jen se periodicky mění potenciální energie pružnosti v kinetickou energii hmotných bodů.

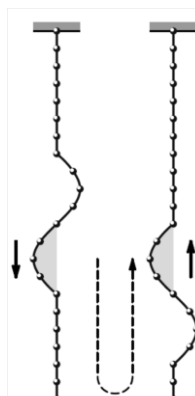
Stojaté vlnění může být opět příčné nebo podélné. U podélného vlnění dochází k největšímu zhuštění, popř. zředění kmitajících částic v kmitnách, kdežto částice v uzlech nekmitají. Typické příklady stojatého vlnění si můžeme ukázat na hudebních nástrojích. U strunných nástrojů (housle, kytara) je vlastně zdrojem zvuku příčné stojaté vlnění struny. U dechových nástrojů (trubka, klarinet) vzniká podélné stojaté vlnění vzduchového sloupce v duté části nástroje. Toto stojaté vlnění označujeme jako **chvění**.

## 2.7 Chvění mechanických soustav

Se stojatým vlněním se setkáváme zejména u těles, která představují prostorově ohraničené pružné prostředí. Vlnění postupuje v tělese až k rozhraní, na němž nastává odraz vlnění.



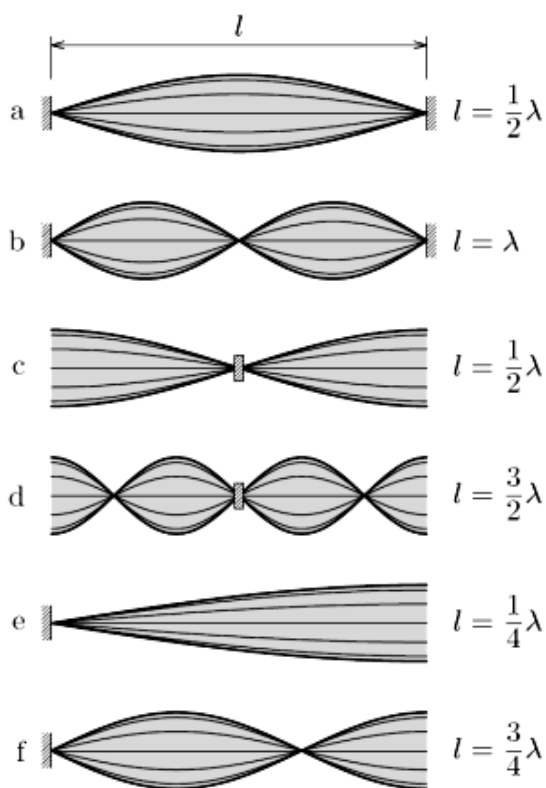
Obr. 2-11a



Obr. 2-11b

Na obr. 2-11a je pružné vlákno, kterým se šíří vlnový rozruch směrem ke koncovému bodu vlákna. V případě, že je koncový bod vlákna pevný, nemůže se rozkmitat a vzniká síla, která způsobuje výchylku vlákna na opačnou stranu. Vlnový rozruch postupuje od koncového bodu zpět, fáze vlny je však opačná. Na pevném konci nastává odraz vlnění s opačnou fází.

Obdobný jev nastává na volném konci např. svisle zavěšeného pružného vlákna (obr. 2-11b). Konec vlákna v tomto případě může kmitat a vlnění postupuje od konce zpět se stejnou fází. Na volném konci nastává odraz se stejnou fází.



obr. 2-12

Jestliže v tělese, např. v pružné tyči, postupuje vlnění ke konci tyče, dochází na konci tyče k odrazu vlnění. Odražené vlnění se skládá s vlněním postupujícím v původním směru a vzniká stojaté vlnění v podobě chvění. Průběh chvění závisí na tom, jak je tyč upevněna.

Na obr. 2-12 jsou příklady chvění pružné tyče upevněné na obou koncích (a, b), uprostřed (c, d) a na jednom konci (e, f). V bodech, v nichž je tyč upevněna, vzniká uzel stojatého vlnění. Ostatní body tyče kmitají s různou amplitudou a v případě, že je tyč délky  $l$  upevněna na obou koncích, vzniká v nejjednodušším případě polovina délky stojaté vlny ( $l = \lambda/2$ ). Mohou však vzniknout i další stojaté vlny, které ale musí vždy splňovat podmínku

$$l = k \frac{\lambda}{2} \quad \text{kde } k = 1, 2, 3, \dots$$

Tato stojatá vlnění vznikají při frekvencích

$$f_k = k f_z,$$

kde  $f_z$  je základní frekvence:



$$f_z = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2l}$$

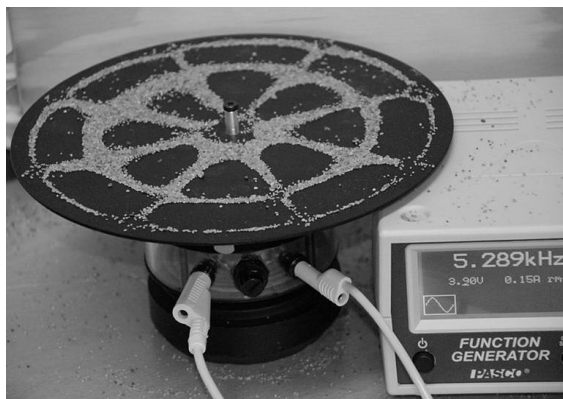
Frekvence, při nichž  $k > 1$ , nazýváme **vyšší harmonické frekvence**. Podobně vzniká chvění u tyčí upevněných uprostřed, jejichž konce jsou volné. Pak je uzel vždy uprostřed tyče a na koncích tyče vznikají kmitny (obr. 2-12c). Snadno zdůvodníme, proč v tomto případě nevzniká chvění při všech násobcích základní frekvence, ale jen při lichých násobcích (obr. 2-12d).

Ještě složitější je průběh chvění v případě, kdy je jeden konec pružného tělesa volný a druhý pevný. Pak chvění se základní frekvencí odpovídá vlnová délka  $\lambda = 4l$  (obr. 2-12e) a možné jsou opět jen liché násobky základní frekvence (obr. 2-12f). Takto probíhá např. chvění vzduchového sloupce ve válci, který je na jednom konci otevřen a na druhém uzavřen. Chvění pevných těles (např. tyčí) s jedním pevným a druhým volným koncem má složitější teorii a popsaný průběh stojaté vlny je jen přibližným modelem tohoto děje. Chvění je charakteristické zejména pro zdroje zvuku, např. hudební nástroje, ale i lidské hlasivky. Zdroje zvuku tedy plní funkci oscilátoru, z něhož se kmitání přenáší do okolního prostředí, nejčastěji do vzduchu. Ve vzduchu vznikají periodické změny tlaku vzduchu a prostředím se šíří postupné podélné zvukové vlnění.

Chvění však nevzniká jen v pružných tělesech s jedním převládajícím rozměrem. Zajímavý průběh má chvění desek různého tvaru. Můžeme to demonstrovat na desce upevněné uprostřed, kterou posypeme jemným pískem, a pak její okraj rozkmitáme pomocí smyčce. Vzniká chvění, při němž se zrnka písku shromáždí v uzlech a vzniknou charakteristické obrazce, kterým říkáme *Chladniho obrazce* (obr. 2-13). Nověji se k buzení kmitů desky používá reproduktor nebo speciální elektromechanický vibrátor připojený ke generátoru střídavého napětí zvukové frekvence (*tónový generátor, generátor funkcí*) (obr. 2-14).



Obr. 2-13



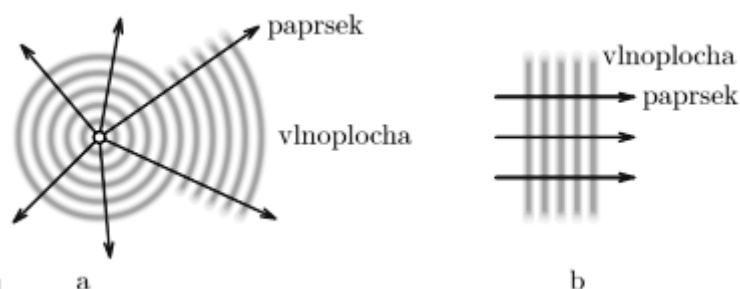
Obr. 2-14

Studium chvění desek, blan a jiných podobných objektů má značný praktický význam zejména pro konstrukci různých elektroakustických zařízení (membrány reproduktorů, sluchátek, mikrofonů apod.), u nichž požadujeme vysokou kvalitu přenosu zvukových signálů.

## 2.8 Vlnění v izotropním prostředí

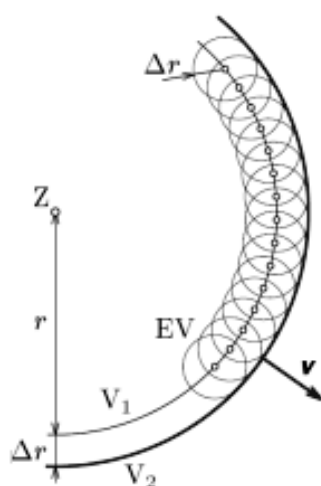
Jako izotropní prostředí označujeme takové látkové prostředí, které má ve všech směrech stejné fyzikální vlastnosti. Jestliže je v takovém prostředí zdroj mechanického vlnění, šíří se vlnění ve všech směrech stejnou rychlostí  $v$ . Body ležící na povrchu koule o poloměru  $r = vt$

( $t$  je čas, za který vlnění dospěje ze zdroje do uvažovaného bodu na povrchu koule) kmitají se stejnou fází a tvoří **vlnoplochu**. Směr šíření vlnění v daném bodě vlnoplochy určuje kolmice k vlnoploše, která se nazývá **paprsek** (obr. 2-15).



Obr. 2-15

Způsob, jakým se vlnění šíří, objasnil v roce 1678 CH. HUYGENS, který formuloval Huygensovův princip (obr. 2-16):



Obr. 2-16

**Každý bod vlnoplochy, do něhož dospělo vlnění v určitém okamžiku, můžeme pokládat za zdroj elementárního vlnění, které se z něho šíří v elementárních vlnoplochách. Vlnoplocha v dalším časovém okamžiku je vnější obalová plocha všech elementárních vlnoploch ve směru, v němž se vlnění šíří.**

Význam Huygensova principu spočívá především v tom, že umožňuje konstrukci vlnoplochy v určitém okamžiku, je-li známa její poloha a tvar v některém předcházejícím okamžiku. Přitom poloha zdroje vlnění nemusí být známa. Pomocí Huygensova principu vyložíme například dva důležité jevy – odraz a lom vlnění.

## 2.9 Odraz a lom vlnění

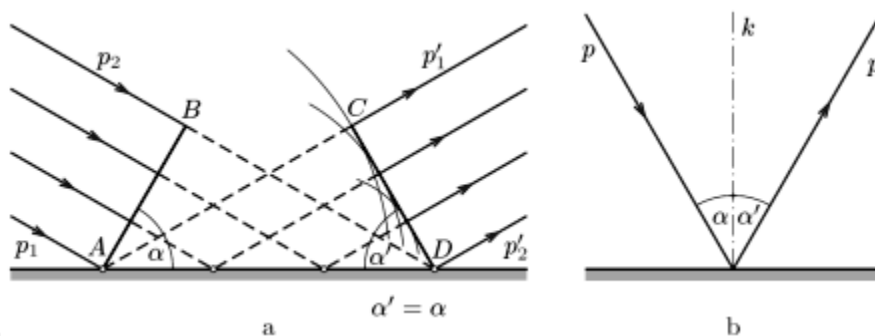
Jestliže vlnění dospěje k rozměrné překážce, popř. na rozhraní mezi dvěma prostředími, v nichž se vlnění šíří různou rychlostí, pak se od překážky vlnění odráží, nebo rozhraním dvou prostředí prochází. Na překážce nastává **odraz a lom vlnění**.

Uvažujme, že k rozměrné překážce postupuje rovinná vlnoplocha ( $AD$  na obr. 2-17a), která s překážkou svírá úhel  $\alpha$ . Vlnoplocha dospěje k překážce nejprve v bodě  $A$  a ten se stane zdrojem elementárního vlnění. Postupně se stávají zdroji elementárního vlnění i ostatní body překážky, až vlnění dospěje z bodu  $D$  do bodu  $B$ . Podobně jako v předcházejícím případě, najdeme obálku všech elementárních vlnoploch a získáme tak odraženou vlnoplochu  $BC$ .

Poněvadž vzdálenost  $|DB|$  je stejná jako poloměr  $|AC|$  první elementární vlnoplochy, je zřejmé, že úhel  $\alpha'$ , který s překážkou svírá odražená vlnoplocha, je stejný jako úhel  $\alpha$ , který s překážkou svírá dopadající vlnoplocha ( $\alpha' = \alpha$ ).

Obvykle však neprovádíme konstrukci vlnoploch, ale šíření vlnění vyznačíme pomocí paprsků (obr. 2-17b). Dopadající vlnění je vyznačeno paprskem  $p_1$ , který svírá úhel dopadu  $\alpha$

s kolmicí vztyčenou k rovinné překážce v místě dopadu vlnění (kolmice dopadu  $k$ ). Úhel odrazu  $\alpha'$  svírá obdobně s kolmicí dopadu paprsek  $p_2$  odraženého vlnění. Rovina určená kolmicí dopadu a dopadajícím paprskem je rovina dopadu.

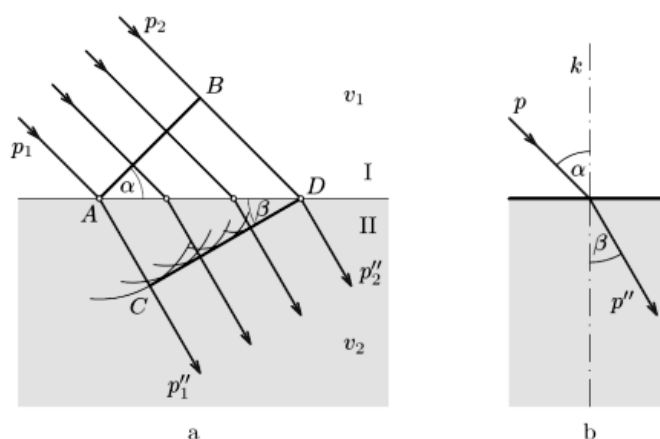


Obr. 2-17

Pro odraz mechanického vlnění platí zákon odrazu:

**Úhel odrazu vlnění se rovná úhlu dopadu. Odražený paprsek leží v rovině dopadu.**

**Lom vlnění** se projevuje změnou směru, kterým se vlnění při průchodu rozhraním dvou prostředí šíří. Obdobným způsobem jako při výkladu odrazu vlnění sestojíme vlnoplochu vlnění po průchodu rozhraním. Předpokládáme, že rychlost vlnění v prvním prostředí je  $v_1$  a v druhém prostředí  $v_2$ . Budeme uvažovat případ, kdy rychlost vlnění v druhém prostředí je menší ( $v_1 > v_2$ ).



Obr. 2-18

Jakmile vlnění dospěje do bodu A rozhraní, stává se tento bod zdrojem elementárního vlnění (obr. 2-18). Za dobu  $\tau$ , než vlnění v prvním prostředí dospěje z bodu B do bodu D ( $|BD| = v_1 \tau$ ), vznikne v druhém prostředí elementární vlnoplocha o poloměru  $|AC| = v_2 \tau$ . Z bodů na úsečce AB vycházejí další elementární vlnoplochy a jejich obalová plocha CD je rovinnou vlnoplochu lomeného vlnění v druhém prostředí. Dopadající a lomené paprsky jsou kolmé na vlnoplochy AB a CD. Podle obr. 2-18a platí

$$\frac{|BD|}{|AC|} = \frac{v_1 \tau}{v_2 \tau} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Poněvadž  $|BD| = |AD|\sin \alpha$  a  $|AC| = |AD|\sin \beta$ , dostaneme

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = n,$$

kde  $\alpha$  je úhel dopadu a  $\beta$  je úhel lomu vlnění.

Platí zákon lomu vlnění:

**Poměr sinu úhlu dopadu k sinu úhlu lomu je pro daná dvě prostředí stálá veličina a rovná se poměru rychlostí vlnění v obou prostředích. Nazývá se index lomu vlnění  $n$  pro daná prostředí. Lomený paprsek zůstává v rovině dopadu.**

Chod lomeného vlnění je vyznačen na obr. 2-18b. Lom mechanického vlnění většinou přímo nepozorujeme. Mnohem větší význam má lom světla; budeme se jím zabývat v optice.

## 2.10 Ohyb vlnění

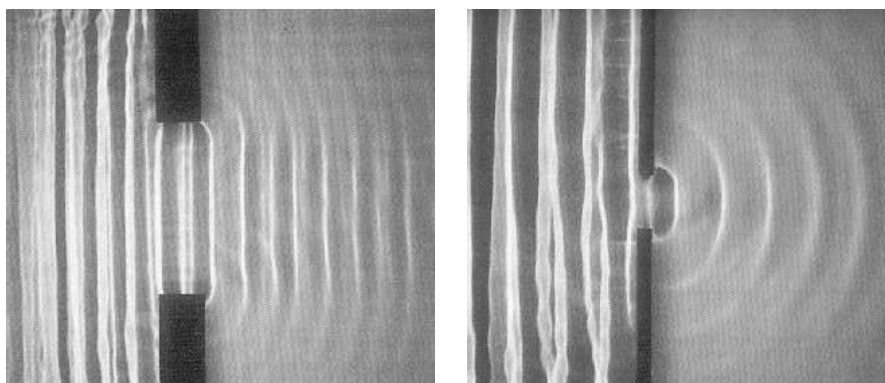


Obr. 2-19



Obr. 2-20

Často nastává situace, kdy vlnění dopadá na překážku. Na obr. 2-19 je příklad vlnění na vodní hladině, které pozorujeme i za překážkami v podobě terénu vyčnívajícího nad hladinu. Nastává jev označovaný jako **ohyb** nebo **difrakce vlnění**. Ohyb mechanického vlnění můžeme sledovat pomocí demonstračního zařízení, kde se vlnění modeluje rozkmitáváním vodní hladiny v mělké nádobě větších rozměrů. Vlnám jsou do cesty kladeny překážky, které vymezují část vlnoplochy, a pozorujeme vlnění za překážkou (obr. 2-20).

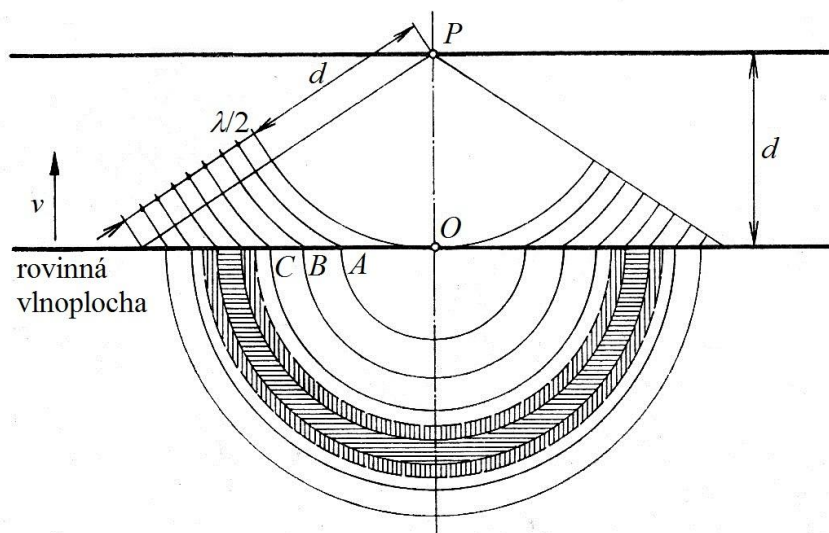


Obr. 2-21

Např. na obr. 2-21 jsou zachyceny experimenty, kdy vlnění na vodní hladině prochází otvory různé šířky v souvislé překážce. Pozorujeme, že vlnění dospívá i za překážku a dostává se i do oblasti, kam by podle Huygensova principu nemělo dospět. Nastává opět ohyb vlnění, který je tím výraznější, čím menší je otvor v překážce.

Ohyb vlnění je poměrně složitý jev a pomocí Huygensova principu objasníme jen jeho podstatu. Ta spočívá v tom, že každý bod vlnoplochy, která dospěla k překážce, je zdrojem elementárního vlnění, které se šíří všemi směry, tedy i do prostoru za překážku. Tam tato vlnění navzájem interferují a to vede k zvětšení, popř. k zmenšení amplitudy výchylky výsledného vlnění v jednotlivých bodech, což se projevuje jako ohyb vlnění, popř. jako stín vlnění.

Výklad odrazu a lomu pomocí Huygensova principu předpokládá, že se vlnění šíří přímočaře a neříká nic o tom, co se děje v ostatních místech prostoru, do kterého zasahují elementární vlnoplochy, tedy i za překážkou, kam by vlnění podle Huygensova principu nemělo dospět. Z toho je zřejmé, že Huygensův princip vyžaduje doplnění, které provedl francouzský fyzik AUGUSTIN-JEAN FRESNEL (1788 – 1827). Jeho podstatu ukážeme na zjednodušeném modelu, který tvoří rovinná vlnoplocha ve vzdálenosti  $d$  od pozorovatele v bodě  $P$  (obr. 2-22).



Obr. 2-22

Z bodu  $P$  opišeme kulové plochy, jejichž poloměry se postupně zvětšují od  $|PO|=d$  vždy o polovinu vlnové délky  $\lambda/2$ . Tyto kulové plochy protínají rovinnou vlnoplochu v soustředných kružnicích se společným středem v bodě  $O$ . Poloměry takto vzniklých kružnic jsou:  $r_0 = 0$  (bod  $O$ ),

$$r_1^2 = \overline{PA}^2 - \overline{PO}^2 = \left(d + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - d^2 = \lambda d + \frac{\lambda^2}{4} \doteq \lambda d,$$

$$r_2^2 = \overline{PB}^2 - \overline{PO}^2 = \left(d + \lambda \frac{\lambda}{2}\right)^2 - d^2 + 4 \frac{\lambda^2}{4} \doteq 2\lambda d,$$

Délka vlny  $\lambda$  je mnohem menší než vzdálenost  $d$ , takže výraz  $\lambda^2/4$  je proti  $\lambda d$  zanedbatelný. Podobně najdeme poloměry dalších kružnic a platí

$$r_k^2 \doteq k\lambda d,$$

kde  $k = 1, 2, 3, \dots$

Plochy kruhů vymezených na rovinné vlnoploše těmito kružnicemi jsou  $S_k = \pi r_k^2 = \pi k \lambda d$  a jejich mezikruží mají stejné obsahy

$$S_k - S_{k-1} = \pi \lambda d = S_1.$$

Tato mezikruží vymezená na rovinné vlnoploše označujeme jako *Fresnelovy zóny*. Poněvadž mají stejný obsah, mají i stejný počet bodů, z nichž podle Huygensova principu vychází elementární vlnění. Ke každému elementárnímu vlnění z jedné Fresnelovy zóny lze najít elementární vlnění ze sousedící zóny, které za předpokladu že v rovinné vlnoploše body kmitají se stejnou počáteční fází, dospívá do bodu  $P$  s opačnou fází, poněvadž dráhový rozdíl vlnění je  $\lambda/2$ . Kdyby amplitudy těchto vlnění byly stejné, pak by se vlnění ze sousedících zón navzájem interferencí rušila. Na obr. 2-21 je vyšrafovaná 5. Fresnelova zóna a poloviny 4. a 6. zóny. Když označíme amplitudu vlnění přicházející do bodu  $P$  z  $k$  té zóny  $u_{mk}$ , je celková amplituda odpovídající interferenci ze všech Fresnelových zón neohraničené rovinné vlnoplochy

$$u_m = u_{m1} - u_{m2} + u_{m3} - u_{m4} + u_{m5} - \dots.$$

Úpravou dostaneme

$$u_m = \frac{1}{2}u_{m1} + \left(\frac{1}{2}u_{m1} - u_{m2} + \frac{1}{2}u_{m3}\right) + \left(\frac{1}{2}u_{m3} - u_{m4} + \frac{1}{2}u_{m5}\right) + \dots.$$

Výrazy v závorkách představují nulovou amplitudu, čili odpovídají poznatku, že se amplitudy vlnění vyvolané sousedícími zónami ruší a celková amplituda vlnění v bodě  $P$  odpovídající interferenci elementárních vlnění ze všech bodů rovinné vlnoplochy je

$$u_m = \frac{1}{2}u_{m1}.$$

Dospíváme k závěru, že účinek všech Fresnelových zón na bod  $P$  je roven polovičnímu účinku první Fresnelovy zóny, jejíž poloměr  $r_1 = \sqrt{\lambda d}$ .

Z výsledku vyplývá, že o tom, zda vlnění z rovinné vlnoplochy dospěje do bodu  $P$  i v případě, že mezi vlnoplochu a bod  $P$  umístíme překážku, rozhoduje velikost překážky. Jestliže překážka např. v podobě kotoučku nepřekryje celou 1. Fresnelovu zónu, vlnění do bodu  $P$  za překážkou dospěje a nastává ohyb vlnění. Pokud má překážka větší rozměr a překryje 1. Fresnelovu zónu, vzniká v bodě  $P$  stín. Fresnel tedy prokázal, že zákon o přímočarém vlnění neplatí přesně a na překážkách vzniká ohyb vlnění, který je tím výraznější, čím je větší vlnová délka vlnění a čím větší je vzdálenost od překážky. Proto např. zvukové vlnění, jehož vlnová délka je řádově  $10^1$  až  $10^{-1}$  m, vykazuje výrazný ohyb vlnění a zvuk slyšíme i za poměrně velkými překážkami, kdežto ohyb světelného vlnění s vlnovými délkami řádově  $10^{-7}$  m v běžném životě nepozorujeme. Šíření světla můžeme považovat za přímočaré a vyznačujeme ho přímkou označovanou jako světelný paprsek.

## Úlohy ke kapitole 2

1. Vlnění s periodou  $T$  postupuje podél osy  $x$ . Bod o souřadnici  $x = 4$  cm má v čase  $T/6$  okamžitou výchylku rovnou polovině amplitudy. Určete vlnovou délku vlnění. Řešte pro  $y(t = 0; x = 0) = 0; \lambda > x$ . [ $\approx 0,5$  m]

2. Pro okamžitou výchylku kmitajícího zdroje vlnění platí vztah  $\{y\} = 0,03 \sin 20\pi\{t\}$  za předpokladu, že délku vyjadřujeme v metrech a čas v sekundách. Velikost fázové rychlosti vlnění je  $200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Určete a) periodu kmitů, b) okamžitou výchylku bodu, který leží ve vzdálenosti  $5,0$  m od zdroje, v čase  $0,10$  s od začátku kmitání zdroje. [a)  $0,1$  s; b)  $0,03$  m]

3. Vlnění o frekvenci  $450$  Hz se šíří fázovou rychlostí o velikosti  $360 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ve směru přímky  $p$ . Jaký je fázový rozdíl kmitavých pohybů dvou bodů, které leží na přímce  $p$  a mají vzájemnou vzdálenost  $20$  cm? [ $\pi/2$ ]

4. Určete fázový rozdíl kmitání dvou bodů, které leží na přímce rovnoběžné se směrem šíření zvukového vlnění a jejich vzájemná vzdálenost je  $1,7$  m. Frekvence vlnění je  $100$  Hz a rychlost zvukového vlnění je  $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . [ $\pi$  rad]

5. Zdroj  $Z$  zvukového vlnění kmitá s frekvencí  $850$  Hz. Určete fázový rozdíl kmitání zdroje a bodu  $M$  ve vzdálenosti  $2,3$  m od zdroje vlnění. Kolik dalších bodů na úsečce  $ZM$  kmitá se stejným fázovým rozdílem? [ $3/2 \pi$ ;  $5$ ]

6. Body na přímce, podél které se šíří postupné mechanické vlnění, jsou vzdáleny od zdroje vlnění  $12$  m a  $14,7$  m a kmitají s fázovým rozdílem  $3/2\pi$ . Určete rychlost vlnění, jestliže zdroj vlnění kmitá s frekvencí  $1$  kHz. [ $v = 2\pi f \frac{\Delta l}{\Delta \varphi} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]

7. Rovinné vlnoplochy vlnění o periodě  $0,04$  s postupují v pravoúhlé souřadnicové soustavě  $Oxyz$  ve směru osy  $x$  rychlostí o velikosti  $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . S jakým fázovým rozdílem kmitají dva body, které mají souřadnice  $(10 \text{ m}, 3 \text{ m}, 0)$ ,  $(16 \text{ m}, 0, 0)$ ? [ $\pi$ ]

8. V bodech  $S_1, S_2$ , jejichž vzájemná vzdálenost je  $d$ , jsou zdroje vlnění, které kmitají synchronně, každý podle rovnice  $y_1 = y_2 = y_0 \sin \omega t$ . Napište rovnici popisující kmity bodu, který leží na přímce  $S_1S_2$  za bodem  $S_2$  ve vzdálenosti  $x$  od něho.

$$\left[ y = y_1 + y_2 = 2y_0 \cos \pi \frac{d}{\lambda} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{d + 2x}{2\lambda} \right) \right]$$

9. Interferencí dvou vlnění o periodách  $2,1 \cdot 10^{-3}$  s vzniká stojaté vlnění. Vzájemná vzdálenost sousedních uzlů je  $1,5$  m. Jak velkou rychlostí se šíří postupné vlnění? [ $1,4 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]

10. Určete základní a harmonické frekvence chvění vzduchového sloupce v trubici délky  $3,4$  m otevřená na obou koncích. Rychlost zvuku  $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . [ $50 \cdot k$  Hz, kde  $k = 1, 2, 3, \dots$ ]

11. Ve skleněném válci délky  $0,5$  m, otevřeném na obou koncích, je pomocí reproduktoru vytvořeno stojaté vlnění. Akustickou sondou bylo v trubici zjištěno  $6$  minim vlnění (uzlů). Určete frekvenci vlnění. [ $2$  kHz]

12. Ocelová tyč délky  $1$  m je upevněna uprostřed a její konec opatřený pístem je vsunut do otevřeného rezonátoru (tzv. Kundtovy trubice). Podélným rozkmitáním tyče vznikne chvění a v rezonátoru se vytvoří stojaté vlnění o vlnové délce  $13,6$  cm. Určete rychlost zvuku v oceli. [ $5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]

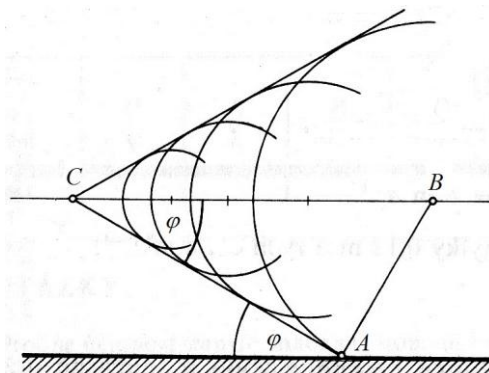
13. Zvuk se šíří v kovu o hustotě  $8,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  jako podélné vlnění rychlostí  $4750 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Určete modul pružnosti v tahu pro daný kov. [ $1,9 \cdot 10^{11}$  Pa]

14. Jestliže zkrátíme strunu při stálé napínající síle o 0,1 m, změní se její původní základní frekvence 1,5krát. Určete původní délku struny. [0,3 m]

15. Pozorovatel, který stojí v bodě  $A$  (obr. 2-23), sleduje letadlo letící stálou rychlostí rovnoběžně s rovinou s pozorovatelem přes bod  $B$  do bodu  $C$ ., avšak neslyší zvuk letadla. Letadlo uslyší v okamžiku, kdy ho vidí pod úhlem  $\varphi = 30^\circ$  nad obzorem. Určete rychlost letadla.

Rychlost zvuku  $v_z = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

$$\left[ v = \frac{v_z}{\sin \varphi} = 680 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$$



Obr. 2-23



## Kapitola 3 AKUSTIKA

---

Zvukem nazýváme každé mechanické vlnění v látkovém prostředí, které je schopno vyvolat v lidském uchu sluchový vjem.

Fyzikálními ději, které jsou spojeny se vznikem zvukového vlnění, jeho šířením a vnímáním zvuku sluchem se zabývá **akustika**.

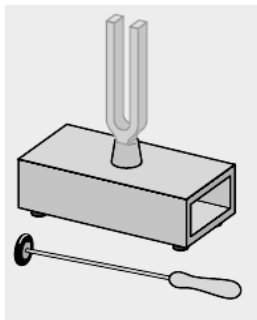
Zvuk člověku zprostředkovává informace o okolním světě. Celý tento děj přenosu informací si můžeme představit jako přenosovou soustavu, která má tři základní části:

1. zdroj zvuku,
2. prostředí, kterým se zvuk šíří,
3. přijímač zvuku, kterým je v nejjednodušším případě lidské ucho. V následujícím výkladu uvedeme stručnou charakteristiku těchto základních částí.

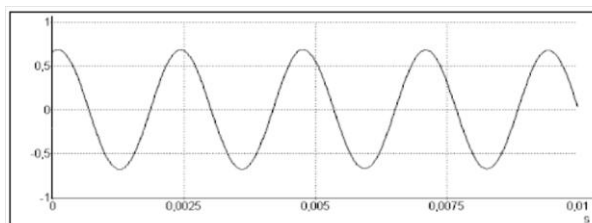
### 3.1 Zdroje zvuku

Jako zvuk označujeme mechanické vlnění, které vnímáme sluchem. Zdrojem zvuku je chvění pružných těles. To se přenáší do okolního prostředí a vzbujuje v něm zvukové vlnění. Frekvence zvuků, které můžeme vnímat uchem, leží v intervalu přibližně 16 Hz až 16 000 Hz (16 kHz). Zvířata obvykle vnímají i zvuky vyšších frekvencí, např. kočka až 65 kHz, pes 50 kHz.

Zdroje zvuku jsou velmi rozmanité (lidský hlas, struna houslí, membrána reproduktoru, výfuk automobilu apod.). Pro všechny zdroje zvuku je však charakteristické, že jsou to kmitající tělesa. Průběh kmitání zdrojů zvuku může být velmi složitý. Proto byly v historii akustiky vytvořeny zvláštní zdroje zvuku, jejichž kmitání má jednoduchý harmonický průběh. Takovým zdrojem zvuku je ladička (obr. 3-1), která se rozechvěje úderem kladívka a vydává zvuk s přesně určenou frekvencí. Odtud je také název ladičky, která se používá při ladění hudebních nástrojů. O harmonickém kmitání ladičky svědčí časový diagram pořízený pomocí počítače (obr. 3-2). V současnosti se používá jako zdroj jednoduchých tónů s přesně nastavitelnou frekvencí elektronický zdroj – *tónový generátor*. Generátor je připojen k reproduktoru, ze kterého se šíří zvukové vlnění s časovým průběhem odpovídajícím elektrickému napětí zdroje. Tyto generátory obvykle umožňují získat nejen kmitání slyšitelné frekvence s harmonickým průběhem, ale kmitání s obdélníkovým, trojúhelníkovým či pilovým průběhem.

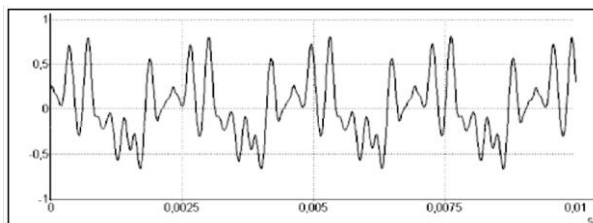


Obr. 3-1



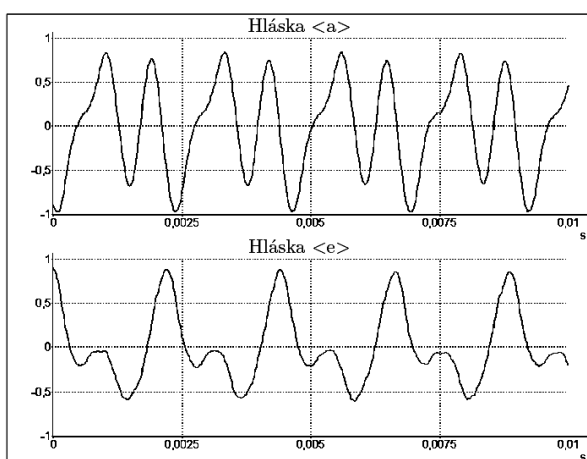
Obr. 3-2

Pokud má zvuk periodický průběh, je to **hudební zvuk** nebo **tón**. V nejjednodušším případě má tón harmonický průběh a je to **jednoduchý tón** (obr. 3-2). U přirozených zdrojů zvuku se však zřídka setkáme s jednoduchými tóny. Na obr. 3-3 je záznam zvuku houslí. Kmitání je periodické, ale není harmonické, je to **složený tón**. Zvuky však mohou mít i nepravidelný, neperiodický průběh a sluchem je vnímáme jako **hluky**, např. vrzání, praskot, šumění apod.

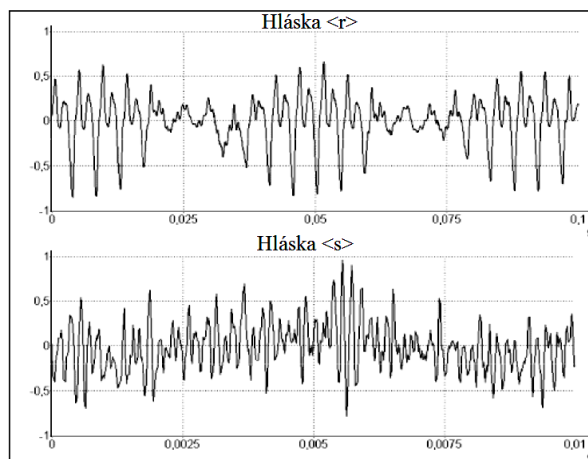


Obr. 3-3

Mezi hudební zvuky patří nejen zvuky hudebních nástrojů, ale např. i samohlásky řeči. Na obr. 3-4 jsou počítačem pořízené časové diagramy samohlásek <a> a <e>. Vidíme, že zvuk samohlásek je sice periodický, ale není harmonický. Podobně i zvuky různých hudebních nástrojů mají složitý průběh, což sluchem dokážeme rozlišit. Proto rozpoznáme nejen hlasy různých lidí, ale rozlišíme zvuk houslí od klarinetu apod.



Obr. 3-4



Obr. 3-5

Neperiodické zvuky vnímáme jako hluk (praskot, bušení, skřípání apod.). Neperiodický průběh mají také souhlásky. Na obr. 3-5 jsou časové diagramy souhlásek <r> a <s>. Zvláštním případem neperiodického zvuku je šum, který v podstatě neustále doprovází sluchové vjemy. Vzniká nahodilými neperiodickými změnami tlaku v prostředí, kterým se šíří zvuk. Charakteristický je např. šum, který slyšíme v lese. Jeho příčinou je nepravidelný pohyb listí stromů a jejich vzájemné tření.

Mimo meze slyšení leží mechanické vlnění s frekvencí menší než 16 Hz – **infrazvuk** a s frekvencí větší než 16 kHz – **ultrazvuk**.

Zvlášť významné je praktické využití ultrazvuku v různých oborech, zejména však v lékařství, kde se využívá zejména v diagnostice (*sonografie*). Zdrojem ultrazvukového signálu je v tomto případě diagnostická sonda, z níž se do těla pacienta šíří ultrazvukové vlnění

(využívá se frekvence 2 MHz až 30 MHz), jehož část se v těle pohlcuje, rozptyluje, popř. odrazí a na výstupu z těla je vlnění sondou snímáno a poskytuje informace o vlastnostech vyšetřovaných tkání.

K buzení ultrazvukových kmitů lze využít různé fyzikální principy, z nichž nejvíce je využíván *piezoelektrický jev*. Ten spočívá v poznatku, že na protilehlých plochách některých krystalů se při mechanické deformaci budí elektrické napětí a naopak vnějším elektrickým napětím připojeným ke krystalu lze dosáhnout změny jeho rozměru. Pro buzení ultrazvuku se používají destičky vybroušené z krystalu křemene ( $\text{SiO}_2$ ) tak, aby hlavní krystalografická osa byla kolmá na plochu destičky. Přiložením střídavého napětí vhodné frekvence se destička rozkmitá a je zdrojem ultrazvukového vlnění. Pokud je tloušťka destičky rovna lichému počtu půlvln ultrazvukové vlny, stává se krystal účinným piezoelektrickým zářičem. Probíhá i opačný děj a při dopadu ultrazvukových vln se krystal stává detektorem ultrazvuku. Ultrazvukové sondy v lékařských diagnostických přístrojích obsahují soubor většího počtu krystalů a umožňují tak po zpracování ultrazvukových signálů počítačem vytvoření obrazu sledovaného objektu v těle pacienta (na obr. 3-6 je obraz embryí dvojčat pořízený ultrazvukovým diagnostickým přístrojem).



Obr. 3-6

Velmi krátká vlnová délka ultrazvukových vln se projevuje tím, že vlny nevykazují výrazný ohyb na překážkách a šíření vln je přímočaré. Významně se uplatňuje odraz ultrazvuku podle zákona odrazu. Na rozdíl od obyčejného zvukového vlnění je ultrazvuk ve vzduchu a jiných plynech značně absorbován. Naopak v kapalinách, například ve vodě, se ultrazvukové vlnění může rozšířit i do velmi velkých vzdáleností. To se využívá např. při měření hloubky moří metodou echolokace. Speciální přístroj (sonar) vysílá ultrazvukové impulsy a měří se doba, za kterou sonar zachytí impuls po odrazu od mořského dna.

Na podobném principu fungují také čidla pro sledování pohybu těles, popř. pro bezdotykové měření vzdáleností (ultrazvukové snímače, ultrasonické detektory). Ultrazvukové čidlo vysílá cyklicky vysokofrekvenční impuls, který se šíří prostorem rychlostí zvuku. Pokud narazí na nějaký předmět, odrazí se od něj a vrací se zpět k čidlu jako ozvěna. Z časového intervalu mezi vysláním impulsu a návratem ozvěny odvodí čidlo vzdálenost. Vzdálenosti řádově v metrech (do 10 m) lze měřit s přesností 1 mm.

Ultrazvuk má využití i v jiných oborech. Je to např. *ultrazvuková defektoskopie* (zjišťování vad výrobků na základě odrazu ultrazvukového vlnění od defektů uvnitř materiálu), čištění

předmětů účinkem tzv. *kavitace*, při níž se nečistoty na povrchu předmětu oddělí v kapalném prostředí působením intenzivní tlakové vlny dopadajících ultrazvukových vln, ultrazvuk podporuje homogenizaci heterogenních soustav a usnadňuje vznik emulzí, suspenzí a koloidních roztoků.

Známý je význam ultrazvuku v živočišné říši. Např. pes reaguje na signály speciální ultrazvukové píšťalky, jejíž zvuk člověk neslyší. Netopýři využívají ultrazvukové signály, které vysílají, k orientaci v prostoru a např. delfíni komunikují v oboru ultrazvukových kmitočtů, popř. využívají svůj biologický sonar pro vyhledávání potravy.

### 3.2 Vlastnosti zvuku

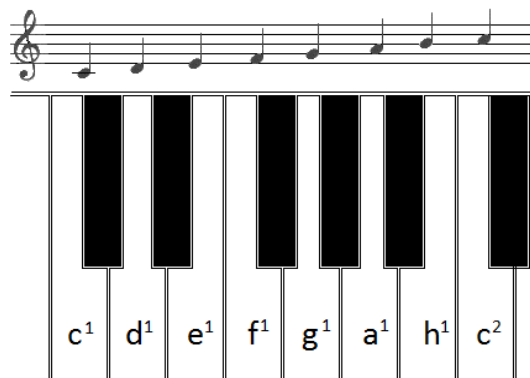
Vlastnosti zvuku rozhodují o kvalitě sluchového vjemu. Tyto vlastnosti se dají vyjádřit objektivně fyzikálními veličinami, které můžeme změřit nezávisle na subjektivních pocitech vznikajících při vnímání zvuku. Často však je pro nás důležitější než objektivně zjištěná veličina spíše veličina subjektivní, lépe vyjadřující sluchový vjem. Podrobněji se budeme zabývat třemi základními veličinami, které zvuk charakterizují. Jsou to: výška zvuku, barva zvuku a hlasitost.

**Výška zvuku** je určena jeho frekvencí. U jednoduchých tónů s harmonickým průběhem určuje frekvence absolutní výšku tónu.

Absolutní výšku tónu lze poměrně snadno měřit přístroji pro měření zvukových frekvencí. Sluchem však absolutní výšku tónu většinou nedokážeme určit, a proto je pro subjektivní hodnocení zvuků důležitější relativní výška tónu.

Relativní výška tónu je určena podílem frekvence daného tónu k frekvenci vhodně zvoleného, tzv. *referenčního tónu*. V hudební akustice je tímto referenčním tónem tón o frekvenci 440 Hz (hudební označení  $a^1$ ). V technické praxi se často jako referenční tón používá tón o frekvenci 1 kHz.

Relativní výška dvou tónů se často vyjadřuje podílem jejich frekvencí. Takto se vyjadřují hudební intervaly. Nejjednodušší hudební interval je oktáva, charakterizovaná poměrem frekvencí 2 : 1, tzn. že tón o oktávu vyšší má dvojnásobnou frekvenci. Na klaviatuře pianina je mezi prvním tónem (primou) a osmým tónem (oktávou) 12 kláves, 7 bílých a 5 černých, jimž přísluší tóny tónové stupnice s přesně definovanými relativními výškami (obr. 3-7).



Obr. 3-7

Složené tóny jsou výsledkem superpozice základního tónu, jehož frekvence určuje absolutní výšku složeného tónu, a vyšších harmonických tónů. Obsah vyšších harmonických tónů ve složeném tónu způsobuje, že má tón pro naše ucho zcela charakteristický zvuk. Tato vlastnost zvuků se označuje jako **barva tónu**. Je určena nejen počtem vyšších harmonických tónů obsažených ve složeném tónu, ale také jejich amplitudami. Barva tónu umožňuje sluchem rozlišit dva složené tóny stejné absolutní výšky, které vydávají např. dva různé hudební nástroje.

### 3.3 Hudební akustika

Zvláštním druhem zdrojů zvuku jsou hudební nástroje, jejichž vlastnosti zkoumá *hudební akustika*. V hudebním nástroji může být zdrojem zvuku:

- příčné chvění napjaté struny, která je rozkmitávána smyčcem ( housle, violoncello, kontrabas), prsty (kytara, harfa) nebo kladívky (klavír),
- chvění vzduchového sloupce, který je rozkmitáván prouděním vzduchu úzkou štěrbinou nebo kolem ostré hrany (píšťaly varhan, flétna), nebo kmitáním jazýčku (klarinet, saxofon, hoboje, popř. dechové nástroje, kde jazýček tvoří hudebníkový rty – trubka, pozoun, lesní roh),
- příčné i podélné chvění tyčí nebo desek (zvony, činely, gong),
- příčné chvění napjaté blány rozkmitávané údery různě měkkých paliček (bubny, tym-pány).

Současné vnímání dvou tónů neboli jejich *souzvuk* se nám subjektivně jeví buď jako libozvučné (*konsonantní*) nebo nelibozvučné (*disonantní*). Tento poznatek zkoumal již Pythagoras pokusy se strunami ze stejného materiálu a stejně napjatými. Zjistil, že tóny strun znějí tím libozvučněji, čím menšími celými čísly je dán poměr jejich délek. Dospěl k závěru, že konsonantní tóny mají relativní výšky dané poměrem malých celých čísel.

Sled tónů s definovanými intervaly (vzhledem k základnímu tónu) určuje hudební stupnici. Mezi základním tónem (primou) a vyšším harmonickým tónem s dvojnásobnou frekvencí (oktávou) je sled tónů s definovanými relativními výškami. Např. tzv. diatonická tvrdá stupnice (dur) má následující sled tónů s relativními výškami:

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2$$

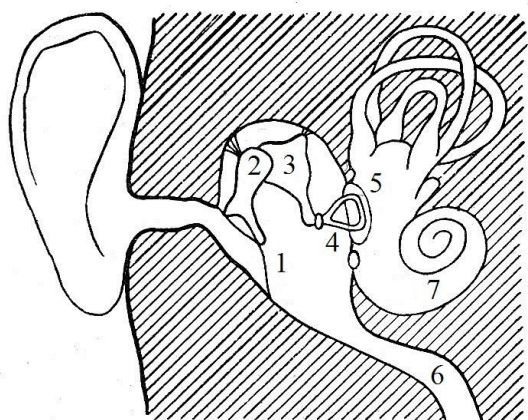
V hudbě se používá osm oktáv: subkontraoktáva (začíná tónem  $C_2$ ), kontrakotáva ( $C_1$ ), velká (C), malá (c), jednočárkovaná ( $c^1$  až  $c^2$ ), dvou až čtyřčárkovaná oktáva končící tónem  $c^5$ . U hudebních nástrojů, kde hudebník může přímo ovlivnit frekvenci tónu (např. u houslí), se používá tónová stupnice s tzv. *přirozeným laděním*. V něm jsou jednotlivé hudební intervaly vyjádřeny poměrem celých čísel. Např. kvinta  $3/2$ , kvarta  $4/3$ , velká tercie  $5/4$ , malý půltón  $25/24$ . U klávesových nástrojů se používá tónová stupnice s tzv. *temperovaným laděním*. Oktáva je rozdělena na 12 hudebních intervalů (půltónů) s relativní výškou  $\sqrt[12]{2} \doteq 1,06$ .

Rozdíl obou ladění ukážeme na příkladu jedné oktávy stupnice C dur, která zahrnuje tóny s hudebním označením  $c^1$  až  $c^2$ . V obou druhích ladění má tón  $a^1$  stejnou absolutní výšku 440 Hz. Absolutní ladění ostatních tónů se u obou ladění nepatrně liší.

Tón	$c^1$	$d^1$	$e^1$	$f^1$	$g^1$	$a^1$	$h^1$	$c^2$
Ladění	absolutní výška (Hz)							
temperované	262	294	330	349	392	<b>440</b>	494	524
přirozené	264	297	330	352	396	<b>440</b>	495	528
Hudební interval	1:1	9:8	5:4	4:3	3:2	5:3	15:8	2:1

### 3.4 Fyziologická akustika

Fyziologická akustika se zabývá ději, které probíhají jednak v uchu, které je přijímačem zvukového vlnění, jednak při vytváření zvuku v hlasovém orgánu.



Obr. 3-8

Zvukové vlnění je zachyceno boltcem ucha a je soustředěno zvukovodem na *bubínek* (1 na obr. 3-8). Bubínek je blanka kuželovitého tvaru, která se rozkmitá dopadajícími zvukovými vlnami, jež jsou provázeny periodickými změnami tlaku vzduchu. Kmity bubínku se přenášejí na sluchové kůstky ve středním uchu: *kladívko* (2), *kovadlinku* (3) a *třmínek* (4). V této soustavě sice dochází ke zmenšení amplitudy kmitů, avšak zvětšuje se periodická síla, kterou se kmitání přenáší *oválným okénkem* (5) na kapalinu vnitřního ucha. Oblast středního ucha je spojena s vnějším prostředím *Eustachovou trubicí* (6), aby se vyrovnaly tlaky v uchu. Za *oválným okénkem* je

vnitřní ucho, v němž je soustava spirálovitě vinutých kanálků (*hlemýžď* – 7), které rozdělují základní blána složená z vláken. Kmity kapaliny se přenášejí na základní blánu a její kmity na sluchové buňky uložené v *Cortiho orgánu*. V něm se energie mechanických kmitů převádí na elektrické signály, které se přenášejí na vlákna zvukového nervu.

Zvuková vlna v podstatě představuje periodické stlačování a rozpínání pružného prostředí (vzduchu, vody, kovu apod.). To znamená, že např. ve vzduchu dochází k periodickým změnám atmosférického tlaku, které uchem vnímáme jako zvuk určité hlasitosti. Čím větší jsou tyto změny, tím více se rozkmitává bubínek v uchu a zvuk je sluchem vnímán jako hlasitější.

Objektivní hodnocení zvuků vychází ze skutečnosti, že šíření zvukového vlnění je spojeno s přenosem energie. Zdroj zvuku vyzařuje energii zvukového vlnění a ta je přenášena k přijímači zvuku – uchu. Čím větší část energie  $\Delta E$  zvukového vlnění se za dobu  $\Delta t$  přenesla za zdroje do uvažovaného místa, tím má zvukové vlnění větší **akustický výkon  $P$**

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

Jednotkou akustického výkonu je **watt** (W).

Názornější představu o hlasitosti zvuku poskytuje veličina intenzita zvuku  $I$ . Jestliže se malou plochou  $\Delta S$  umístěnou v uvažovaném místě kolmo ke směru, kterým se zvukové vlnění šíří, přenesla energie odpovídající akustickému výkonu  $\Delta P$ , je intenzita zvuku

$$I = \frac{\Delta P}{\Delta S}.$$

Jednotka intenzity zvuku je  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Sluchem můžeme vnímat při referenčním kmitočtu zvuky o velmi malém akustickém výkonu  $10^{-12}$  W, čili 1 pW (pikowatt). Tato hodnota určuje **práh slyšení**. Zvuky o velkém akustickém výkonu mohou v uchu vyvolat bolestivý pocit. Ten způsobují zvuky o výkonu větším než 1 W, což je **práh bolesti**.

Poměr největší a nejmenší akustického výkonu zvuku v oblasti největší citlivosti ucha je  $10^{12}$ , a je tedy značný. Proto se poměr vyjadřuje v logaritmické stupnici v jednotkách **bel** (B), nazvaných podle vynálezce telefonu, amerického inženýra ALEXANDRA GRAHAMA BELLA

(1847–1922). Prahu bolesti odpovídá hodnota 12 B. V praxi se používá jednotka 10krát menší – decibel (dB).

V decibelech vyjádříme poměr akustického výkonu  $P$  daného zvuku k akustickému výkonu  $P_0$ , který určuje práh slyšení, jako **hladinu akustického výkonu**  $L_w$ :

$$L_w = 10 \log \frac{P}{P_0}$$

Prahu slyšení odpovídá v této stupnici 0 dB a pro práh bolesti vypočítáme

$$L_w = 10 \log \frac{1}{10^{-12}} \text{ dB} = 120 \text{ dB} .$$

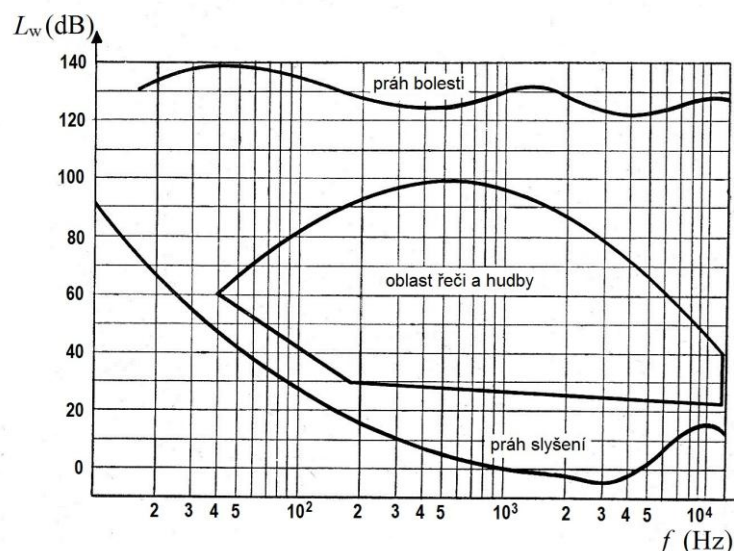
Podle tohoto vztahu odpovídá zvětšení akustického výkonu, čili „zesílení“ zvuku na dvojnásobek zvýšení akustického výkonu přibližně o 3 dB, desetinásobnému zvětšení akustického výkonu odpovídá hladina 10 dB apod.

Příklady hladin akustického výkonu pro některé známé zvuky jsou v tabulce 3-1.

Tabulka 3-1

Zdroj zvuku	Vzdálenost (m)	Hladina akustického výkonu (dB)
práh slyšení		0
tichý šepot	1	10
šepot	2	20
tichý rozhovor	1	40
normální hovor	1	65
motor automobilu	5	70
symfonický orchestr	3 až 5	80
hluk motorových vozidel	10	90
hudba na diskotéce		100
startující letadlo	10	110
práh bolesti		120

Lidský sluch není stejně citlivý na zvuky všech frekvencí z oboru slyšení. To je patrné z grafu na obr. 3-9, v němž jsou vymezeny meze slyšitelnosti z hlediska frekvence zvuku a vyznačením prahu slyšení a prahu bolesti. Pro zvukovou komunikaci člověka je nejdůležitější oblast řeči a hudby. Ucho je nejcitlivější pro tóny v oblasti okolo 1 000 – 3 000 Hz (mluvené slovo). Důležitý je také poznatek, který vyjadřuje **Weberův-Fechnerův zákon**, podle kterého je subjektivní vnímání hlasitosti zvuku úměrné logaritmu míry jeho fyzikální příčiny. To znamená, že při zvětšování vnějšího popudu charakterizovaného fyzikální veličinou (intenzitou zvuku) geometrickou řadou, tedy po násobcích, zvětšuje se sluchový vjem aritmetickou řadou, čili vždy o určitou hodnotu.



Obr. 3-9

Intenzita zvuku se s rostoucí vzdáleností od zdroje zvuku zmenšuje s druhou mocninou této vzdálenosti (pokud není šíření zvuku ovlivňováno odrazy zvuku). To znamená, že zvětšení vzdálenosti od zdroje zvuku na dvojnásobek způsobí zmenšení akustického výkonu zvuku na čtvrtinu původní hodnoty a tomu odpovídá snížení hladiny akustického výkonu o 6 dB.

Trvalý příkon zvukové energie do sluchového orgánu je škodlivý zejména při větších intenzitách zvuku. Může nastat nejen porucha sluchu, ale nadměrný hluk působí škodlivě na celou nervovou soustavu. To má nepříznivý vliv na fyzický pracovní výkon člověka i na jeho psychický stav. Překročení prahu bolesti může mít za následek mechanické poškození sluchového orgánu (prasknutí bubínku ucha). Proto je jedním ze základních požadavků hygieny pracovního prostředí a ekologie životního prostředí omezení hluku na co nejnižší hladinu.

Fyziologická akustika se zabývá také vznikem zvuku v lidském hlasovém orgánu, který můžeme chápat jako mechanický zdroj zvuku. Tóny vznikají průchodem proudu vzduchu štěrbinou mezi dvěma hlasivkovými vazy napjatými v příčném směru v hrtanu. Při mluvení nebo zpěvu se hlasivky rozkmitají, avšak zdrojem zvuku je v podstatě chvění sloupce vzduchu nad hlasivkami. Výšku hlasu ovlivňuje jednak délka hlasivek (u mužů asi 18 mm, u žen asi 12 mm), jednak napínání hlasivek příslušnými svaly, což určuje frekvenční rozsah hlasu odpovídající přibližně dvěma oktávám.

Rezonancí vhodně nastavené ústní dutiny, popř. dutiny nosohltanu a dutiny hrudní se zvuky některých frekvencí zesilují. Důležité jsou zejména rezonanční tónové oblasti ústní dutiny při tvoření samohlásek. Ústní dutina se při určité samohlásce nastavuje stejně a můžeme ji přibližně chápat jako Helmholtzův rezonátor. Zesiluje se oblast frekvencí (rezonanční pásmo) odpovídající vlastnímu tónu ústní dutiny, která je označovaná jako *hlavní formant* samohlásky. Např. hlásce *u* odpovídá formant s nejnižší frekvencí (asi 175 Hz – tón *f*) a tvoří ji v podstatě jen základní tón. Formanty dalších samohlásek charakterizují vyšší frekvence, např. hláska *o* – 400 Hz, *a* – 800 Hz, *e* – 2 300 Hz, *i* – 3 700 Hz.

Jestliže má zvuk vznikající v hlasivkách složitý průběh, zesilují se v rezonančních dutinách hlavně frekvence v okolí formantů. Hlavní formant je měnitelný, a proto se může měnit i složení lidského hlasu, čímž právě vznikají různé samohlásky. Při řeči se polohou mluvidel (jazyk, rty, zuby, patro) mění rezonanční frekvence jak souhlásek, tak samohlásek a to se projevuje jako artikulace řeči.



### 3.5 Šíření zvuku

Ze zdroje se zvuk šíří jen pružným látkovým prostředím libovolného skupenství. Nejčastěji je to vzduch, v němž se zvuk šíří jako podélné postupné vlnění.

Nejdůležitější charakteristikou prostředí z hlediska šíření zvuku je rychlost zvuku v daném prostředí. V předcházejícím výkladu byly již vztahy pro výpočet rychlosti zvuku v pružném prostředí uvedeny.

Nejčastěji uvažujeme rychlost zvuku ve vzduchu, která závisí na složení vzduchu (nečistoty, vlhkost), ale nejvíce na jeho teplotě. Ve vzduchu o teplotě  $t$  v Celsiových stupních má zvuk rychlost

$$v_t = (331,82 + 0,61 \{t\}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Při výpočtech obvykle používáme přibližnou hodnotu rychlosti zvuku odpovídající běžným teplotám vzduchu  $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Rychlost zvuku není ovlivněna tlakem vzduchu a je stejná pro zvuková vlnění všech frekvencí.

V kapalinách a pevných látkách je rychlost zvuku větší než ve vzduchu (popř. v jiných plynech). Přibližné hodnoty rychlosti zvuku pro některé látky jsou v tabulce 3-2:

Tabulka 3-2

Látka	Rychlost zvuku ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	Látka	Rychlost zvuku ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )
voda (25 °C)	1 500	led	3 200
rtuť	1 400	ocel	5 000
beton	1 700	sklo	5 200

Šíření zvuku je ovlivněno i překážkami, na které zvukové vlnění dopadá, a projevuje se odraz i ohyb zvukového vlnění. Zvláštním případem odrazu zvuku od rozlehlé překážky (skalní stěna, velká budova) je **ozvěna**. Je v podstatě důsledkem vlastnosti sluchu, kterým rozlišíme dva po sobě následující zvuky, pokud mezi nimi uplyne doba alespoň 0,1 s. To je přibližně doba, kterou potřebujeme k vyslovení jedné slabiky, a zvuk urazí celkovou vzdálenost 34 m (tzn. 17 m od pozorovatele k překážce a 17 m zpět). Při vzdálenosti 17 m od překážky tedy vzniká tzv. jednoslabičná ozvěna. Při větší vzdálenosti mohou vznikat ozvěny víceslabičné.

Jestliže je překážka blíže než 17 m, zvuky již neodlišíme, částečně se překrývají a odražený zvuk splývá se zvukem původním. To se projevuje jako prodloužení trvání zvuku, které nazýváme **dozvuk**. S dozvukem je třeba počítat při projektování velkých místností, koncertních sálů apod. Působí rušivě a snižuje srozumitelnost řeči nebo zkresluje hudbu. Proto se akustické vlastnosti sálů zlepšují rozčleňováním ploch stěn, závěsy, použitím materiálů, které pohlcují zvuk, apod.

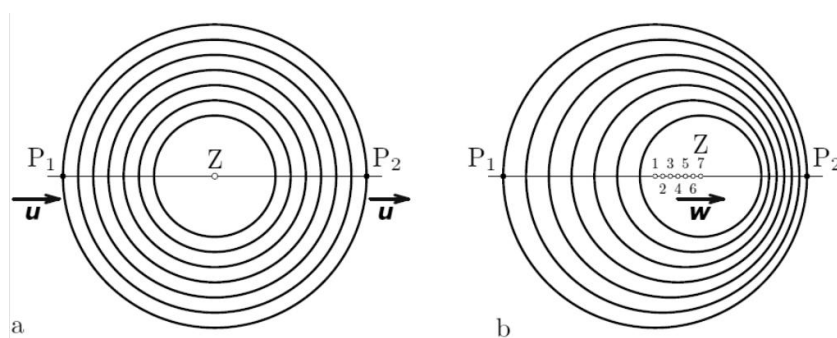
Zvuk se od překážek nejen odráží, ale je jimi také pohlcován, popř. překážkou prochází a zvuková energie se šíří dále za překážkou. Schopnost materiálů, které pokrývají např. stěny uzavřených místností, pohlcovat dopadající zvukové vlnění vyjadřuje *činitel zvukové pohltivosti*  $\alpha$  (koeficient akustické absorpce). Je definován jako poměr energie pohlcené určitou plochou a celkové energie zvukového vlnění, která na plochu dopadá. Čím větší je činitel zvukové pohltivosti, tím větší je absorpční schopnost materiálu. Činitel  $\alpha$  pro některé materiály: beton 0,015, sklo 0,027, omítnutá stěna 0,025, neomítnutá stěna 0,032, stěna obložená dřevem 0,10, stěna obložená vrstvou korku nebo porézní pryže 0,2.

Největší pohltivost můžeme přisoudit otvoru ve stěně, kterým zvukové vlnění projde prakticky bez odrazu ( $\alpha = 1$ ). Poněvadž otvor ve stěně je možné realizovat otevřením okna, udává se pohltivost povrchů nebo předmětů *ekvivalentní pohltivou plochou* (značka  $A$ ), což je obsah otevřeného okna vyjádřený v  $m^2$ , čili obsah ekvivalentní plochy s činitelem pohltivosti rovným 1. Pohltivost zvuku ovlivňují i osoby a předměty v místnosti. Např. ekvivalentní pohltivá plocha osoby v místnosti je v průměru  $0,42 m^2$ , židle  $0,01 m^2$ , čalouněného křesla  $0,09$  až  $0,28 m^2$  apod. Celková pohltivost zvuku v místnosti se pak určuje jako suma ploch  $S$  stěn i předmětů v místnosti vynásobených jejich činitelem zvukové pohltivosti:

$$A = \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i$$

### 3.6 Dopplerův jev

Při relativním pohybu zdroje zvuku nebo pozorovatele vnímá pozorovatel zvuk jiné frekvence, než je frekvence zdroje. Podstatu tohoto jevu objasnil v roce 1843 rakouský fyzik CHRISTIAN DOPPLER (1803–1853).



Obr. 3-10

Nejdůležitější případy Dopplerova jevu nastávají při vzájemném pohybu zdroje zvuku  $Z$  a přijímače zvuku  $P$ . Jsou to případy:

1. Zdroj zvuku je v klidu a přijímač zvuku se pohybuje po vzájemné spojnici konstantní rychlostí  $u$ , která je menší než rychlost zvuku  $v$  ( $u < v$ ).

Zdroj  $Z$  vysílá zvukové vlnění o vlnové délce  $\lambda = v/f$  ( $f$  je frekvence zdroje vlnění), které je na obr. 3-10a znázorněno soustavou soustředných vlnoploch. Jestliže jsou přijímače zvukového vlnění  $P_1$  a  $P_2$  v klidu, dospěje k nim za jednotku času stejný počet vlnoploch a přijímače registrují zvukové vlnění stejné frekvence  $f = v/\lambda$ .

Jestliže se přijímač  $P_1$  rychlostí  $u$  ke zdroji zvuku přibližuje, dospěje k němu za jednotku času větší počet vlnoploch a přijímač registruje vyšší frekvenci zvuku:

$$f_1 = \frac{v+u}{\lambda} = \frac{v+u}{v} f = \left(1 + \frac{u}{v}\right) f$$

Přijímač  $P_2$ , který se od zdroje zvuku rychlostí  $u$  vzdaluje, zachytí méně zvukových vln a registruje nižší frekvenci zvuku:

$$f_1 = \frac{v-u}{\lambda} = \frac{v-u}{v} f = \left(1 - \frac{u}{v}\right) f$$

2. Přijímač je v klidu a zdroj vlnění se pohybuje rychlostí  $w$  ( $w < v$ ) od přijímače  $P_1$  k přijímači  $P_2$  (obr. 3-10b).

Zdroj vlnění se od přijímače  $P_1$  vzdaluje a to se projevuje jako zvětšení vlnové délky zvukového vlnění (zvětšuje se vzdálenost mezi jednotlivými vlnoplochami). Vlnová délka  $\lambda_1 = (v + w)/f$  a přijímač  $P_1$  registruje frekvenci

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{v+w} f,$$

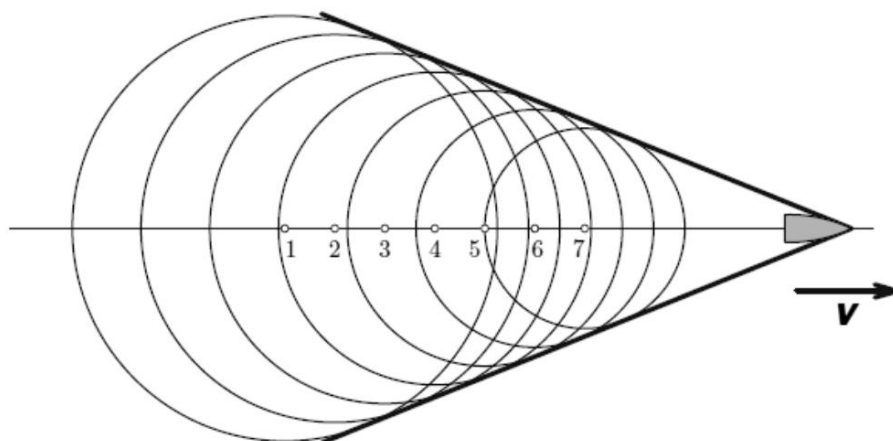
která je nižší než frekvence zdroje ( $f_1 < f$ ).

Obdobně v místě přijímače  $P_2$  je vlnová délka zvukového vlnění kratší ( $\lambda_2 = (v - w)/f$ ) a přijímač  $P_2$  registruje frekvenci

$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{v-w} f,$$

která je vyšší než frekvence zdroje ( $f_2 > f$ ).

Zvláštní případ Dopplerova jevu podle obr. 3-10b nastává, když se rychlost pohybu zdroje zvuku přiblíží k rychlosti zvuku, popř. ji i překročí. V případě, že  $w = v$  je  $\lambda = 0$  a pojem zvuková vlna ztrácí smysl. K tomu dochází např. u moderních letadel, která se mohou pohybovat i větší, tzv. nadzvukovou rychlostí. Rozložení vlnoploch vytvářených zvukem letadla, které má nadzvukovou rychlost, je na obr. 3-11. Obalová plocha těchto vlnoploch vytváří tzv. rázovou vlnu, v níž dochází k prudkému stlačení vzduchu. To znamená, že v rázové vlně je soustředěna značná energie, a když dosáhne k zemskému povrchu, vnímáme ji sluchem jako silnou ránu podobající se výstřelu. Tento zvuk, který je z hlediska životního prostředí nežádoucí, označujeme jako akustický třesk.



Obr. 3-11

Nadzvuková rychlost letadel se obvykle vyjadřuje tzv. **Machovým číslem**  $M$ , které určuje násobek rychlosti zvuku. To znamená, že hodnotě  $M = 1$  odpovídá u zemského povrchu rychlost přibližně  $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1\,224 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . První civilní nadzvukové dopravní letadlo Concorde (obr. 3-12), které létalo v letech 1969 až 2003, dosahovalo ve výšce 15 km rychlost až  $M = 2,2$ .



Obr. 3-12

Dopplerův jev nastává obecně v každém případě, kdy se zdroj zvuku a jeho přijímač navzájem přibližují, popř. vzdalují. Přitom se mohou pohybovat i po mimoběžkách nebo po křivkách. V těchto případech se však frekvence mění podle složitějších vztahů.

S Dopplerovým jevem se setkáme například tehdy, když kolem nás projíždí velkou rychlostí automobil. V okamžiku, kdy nás automobil míjí, nastane náhlé snížení frekvence zvuku, který vydává motor automobilu.

Dopplerův jev vzniká i u elektromagnetického vlnění a je na něm například založeno měření rychlosti automobilů pomocí radaru. Velký význam má Dopplerův jev v astronomii, kde umožňuje určovat rychlost vesmírných objektů na základě změn vlnových délek záření, které tyto objekty vyzařují.

### Úlohy ke kapitole 3

1. Kolikrát se změní vlnová délka zvukového vlnění při přechodu ze vzduchu do vody. Rychlost zvuku ve vodě  $v_1 = 1\,450 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , ve vzduchu  $v_2 = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . [  $\lambda_1/\lambda_2 \approx 4,3$  ]
2. Netopýr se pohybuje směrem k překážce stálou rychlostí o velikosti  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Zvukový signál, který vyslal směrem dopředu, se po odrazu vrátil k netopýrovi za dobu 0,15 s. Teplota vzduchu je  $26 \text{ }^\circ\text{C}$ . Kolik času zbylo netopýrovi, aby se překážce vyhnul? [2,5 s]
3. Na hmatníku kytary je řada kovových pražců, jejichž poloha určuje frekvenci tónů. Vypočítejte polohu pražců pro jednu oktávu. Délka struny je 62 cm. Poznámka: Mezi primou a oktávou (středem struny: na hmatníku je označena tečkou) je 12 půltónů. Jejich poměr frekvencí (relativní výška) je  $\sqrt[12]{2} = 1,06$ . Výsledek ověřte měřením na kytaře.
4. Tón píšťaly lokomotivy, která se pohybuje rychlostí  $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , má frekvenci 576 Hz. Určete frekvenci tónu, který slyší pozorovatel stojící u trati. [0,61 kHz při přibližování, 0,54 kHz při vzdalování lokomotivy]
5. Zdroj zvuku vysílá tón o frekvenci 500 Hz a pohybuje se směrem k pozorovateli rychlostí  $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Rychlost zvuku je  $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Jakou rychlostí se pohybuje pozorovatel, který slyší tón o frekvenci 522 Hz. [pohybuje se směrem ke zdroji rychlostí  $9,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]
6. Pozorovatel a zdroj zvuku se k sobě navzájem blíží tak, že se pohybují po téže přímce. Zdroj má rychlost  $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a pozorovatel  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pozorovatel slyší tón o frekvenci 522 Hz. Teplota vzduchu je  $13 \text{ }^\circ\text{C}$ . Určete frekvenci zdroje zvuku. [499 Hz]

## Literatura

- [1] Horák, Z. – Krupka, F.: *Fyzika*, SNTL/SVTL, Praha 1966.
- [2] Bělař, A. a kol.: *Fyzika pro učitele*. I. díl, SPN Praha 1967.
- [3] Svoboda, E. a kol.: *Přehled středoškolské fyziky*, Prometheus, Praha 2006.
- [4] Šedivý P. – Volf, I. – Horáková, R.: *Harmonické kmity mechanických soustav*, MAFY, Hradec Králové 2000. Dostupné na: <<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/kmity.pdf>>
- [5] Lepil, O.: *Videoanalýza jako prostředek didaktické komunikace ve výuce fyziky*. In: Sborník seminárních materiálů II, Slovanské gymnázium Olomouc, Olomouc 2011. Dostupné na: <<http://ufyz.sgo.cz/Vydane-publikace/>>
- [6] Lepil, O. – Richterek, L.: *Dynamické modelování*, Slovanské gymnázium Olomouc, Olomouc 2007. Dostupné na: <[http://ufm.sgo.cz/ke\\_stazeni/Dynamicke\\_modelovani.pdf](http://ufm.sgo.cz/ke_stazeni/Dynamicke_modelovani.pdf)>

## Zdroje vyobrazení

- 1-19 <<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/kmity.pdf>> obr. 14
- 1-20 <<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/kmity.pdf>> obr. 16
- 1-21 <<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/kmity.pdf>> obr. 19
- 1-28 <[http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Rezonance\\_frekvence.png](http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Rezonance_frekvence.png)>
- 1-31 <[http://fotky-foto.cz/fotobanka/tlumeric\(31105106\)/](http://fotky-foto.cz/fotobanka/tlumeric(31105106)/)>
- 1-38 <[http://www.phys.cwru.edu/ccpi/Helmholtz\\_resonator.html](http://www.phys.cwru.edu/ccpi/Helmholtz_resonator.html)>
- 2-13 <<http://www.hps.cam.ac.uk/whipple/explore/acoustics/ernstchladni/chladniplates/>>
- 2-14 <[http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Pieter\\_Kuiper/Physics\\_photos](http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Pieter_Kuiper/Physics_photos)>
- 2-21 <<http://electron9.phys.utk.edu/phys136d/modules/m9/diff.htm>>
- 2-19 <<http://www.flickr.com/photos/industrialbarn/436088455/>>
- 2-20 <<http://www.phywe.com/461/pid/26231>>
- 3-12 <[http://www.concordesst.com/latestnews\\_03\\_2.html](http://www.concordesst.com/latestnews_03_2.html)>

# Historické poznámky k tématu Mechanické kmitání a vlnění

---

## CHRISTIAAN HUYGENS

1629–1695



Holandský všestranný přírodovědec se narodil v Haagu, v 16 letech začal studovat právo a ve 20 letech se stal doktorem práv. V průběhu vysokoškolských studií se věnoval i studiu matematiky, mechaniky a astronomie. Zabýval se teorií světla, sestrojil dalekohled, zpracoval teorii fyzikálního kyvadla a zkonstruoval kyvadlové hodiny. Objevil mlhovinu v souhvězdí Orion, Saturnův měsíc Titan a vysvětlil podstatu Saturnových prstenců. Je po něm pojmenována evropská planetární sonda, která byla určena k průzkumu atmosféry a povrchu největšího Saturnova měsíce Titanu.

V roce 1657 zveřejnil sdělení o svém vynálezu kyvadlových hodin (tzv. pendlovky) s netlumeným pohybem kyvadla, do kterých později zabudoval soustavu setrvačnicku a pružiny. Vynález podrobně popsal ve spisu *Horologium oscillatorium* (Kyvadlové hodiny).

V roce 1678 předložil pařížské Akademii věd svou práci, ve které popsal vlnovou povahu světla, která byla zveřejněna tiskem v roce 1690 pod názvem *Traité de la Lumière* (Pojednání o světle). Huygens vyslovil všeobecný princip, který umožňuje určit směr světelného paprsku. Podstata tohoto principu, který se nazývá Huygensův princip, spočívá v tom, že libovolný bod vlnoplochy, do kterého dospělo vlnění v určitém časovém okamžiku, je zdrojem elementárního vlnění, které se z něho šíří v elementárních vlnoplochách. Vlnoplocha v dalším časovém okamžiku je vnější obalová plocha všech elementárních vlnoploch.

Těsně před koncem života napsal své hlavní dílo *Cosmotheoros*, ve kterém jsou populární formou shrnuty veškeré astronomické poznatky o vesmíru. Dílo vyšlo až po jeho smrti v roce 1698.

O povaze světla byly vytvořeny dvě odporující si teorie, teorie korpuskulární (částičková) a teorie vlnová. Teorie korpuskulární byla vybudovaná anglickým fyzikem I. NEWTONEM a světlo považuje za nepatrné částičky proudící přímočaře ze zdroje světla.

Téměř současně s Newtonovou teorií se začala prosazovat myšlenka Ch. Huygense, že světlo je určitým druhem vlnivého pohybu. Svítící bod vykonává rychle se střídající kmity, které se přenáší na nehmotné prostředí zvané éter, a následkem jeho pružnosti se šíří všemi směry. O hypotetickém, uměle vytvořeném pojmu éter se předpokládalo, že vyplňuje prázdný prostor (vakuum) a proniká do pórů průhledných látek.

## HEINRICH RUDOLF HERTZ

1857–1894



Německý fyzik, který se zapsal do historie fyziky tím, že experimentálně dokázal existenci elektromagnetických vln a prozkoumal jejich vlastnosti. Tyto pokusy také potvrdily správnost teorie vypracované anglickým fyzikem J. C. MAXWELLEM, podle které jsou změny elektrického a magnetického pole spojeny se vznikem elektromagnetických vln stejné fyzikální podstaty, jako je světlo. V době vzniku Maxwellovy teorie o její správnosti mnoho fyziků pochybovalo. Hertz však byl jejím přesvědčeným zastáncem a uskutečnil pokusy, které nejen teorii o vzniku elektromagnetických vln potvrdily, ale předznamenaly technické využití elektromagnetických vln pro bezdrátový přenos zpráv. Tím byla otevřena cesta k novým prostředkům sdělovací techniky jako je rozhlas, televize a další radiotechnická zařízení, bez nichž si život moderní společnosti neumíme představit.

Aby bylo možné prokázat souvislost světla a elektromagnetických vln, bylo třeba vytvořit zdroj elektromagnetických vln o co nejmenší vlnové délce. To se Hertzovi podařilo konstrukcí zvláštního oscilátoru (*Hertzův oscilátor*), který tvořily dva dráty, na jednom konci opatřené kovovou kuličkou. Dráty byly umístěny tak, že kuličky byly v malé vzájemné vzdálenosti a byly připojeny ke zdroji vysokého napětí. Mezi kuličkami přeskakovaly jiskry a při každém jiskrovém výboji vznikaly elektrické kmity, jejichž energii vyzařovaly dráty oscilátoru do prostoru. Toto pokusné zařízení fungovalo jako vysílač decimetrových vln, jaké se dnes používají k šíření signálu televize nebo rozhlasu v pásmu VKV. K příjmu elektromagnetických vln sloužil rezonátor v podobě kovové smyčky přerušené jiskřištěm. Jestliže na rezonátor dopadaly elektromagnetické vlny, mezi kuličkami jiskřiště přeskakovaly nepatrné jiskry. Tak se Hertzovi podařilo poprvé uskutečnit přenos elektromagnetických vln, zatím jen na vzdálenost přibližně 10 m.

Hertz byl profesorem fyziky v Karlsruhe a v Bonnu a zkoumal i další fyzikální jevy, např. fotoelektrický jev a katodové záření. Jeho největším přínosem však zůstává položení základů radiotechniky. Na jeho počest je pojmenována jednotka kmitočtu hertz Hz.

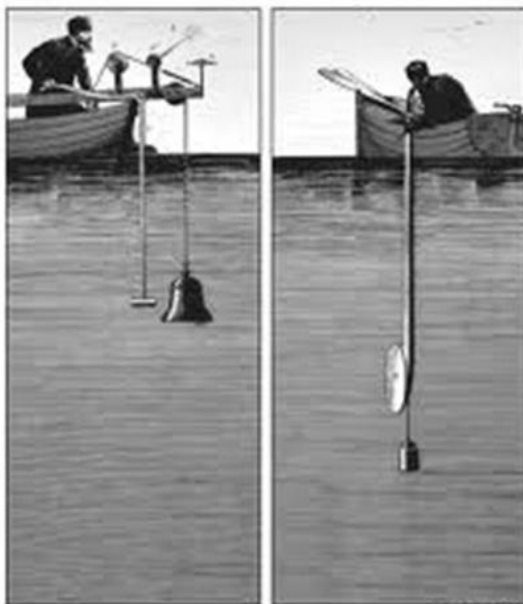
## HISTORIE MĚŘENÍ RYCHLOSTI ZVUKU

Historie měření rychlosti zvuku sahá až do 17. století. První, kdo se pokusil změřit rychlost zvuku ve vzduchu, byl františkánský mnich MARIN MERSENNE (1588 až 1648). Napadlo jej, aby jeho přítel střílel z kanónu a sám ve větší vzdálenosti měřil čas mezi zábleskem u hlavně při výstřelu a okamžikem, kdy k němu dorazil zvuk výstřelu. Neměl však k dispozici přesné hodiny a tak počítal úderů vlastního srdce. Jeho odhad byl kolem 430 m/s.

V roce 1788 další dva francouzští vědci vystřelili z děl vzdálených 18 km od sebe. Druhé dělo sloužilo pro kontrolu výsledku. Mezi děly byla vzdálenost tak velká, že se oba vědci mohli pozorovat dalekohledy. Opět měřili čas, který uplynul mezi záblesky a zaduněním výstřelů.

Na ještě přesnější měření však další vědci potřebovali speciální vybavení. Proto francouzský vědec HENRI REGNAULT (1810 až 1878) sestrojil důmyslný přístroj, v němž se otáčel pravidelnou rychlostí válec a zapisovač kreslil čáru na jeho povrchu. Zapisovač byl ovládán dvěma elektrickými obvody. Regnault vystřelil z pistole, která byla připojena k jednomu z obvodů. Zvuk z výstřelu zaregistrovala membrána, tím se obvod přerušil a zapisovač se posunul do nové pozice. Obvod se následně propojil a zapisovač se vrátil do původní pozice. Regnault znal rychlost, se kterou se válec otáčel. Změřil vzdálenost mezi značkami a zjistil, jak rychle pokus proběhl. Naměřil rychlost zvuku ve vzduchu 1 220 km/h.

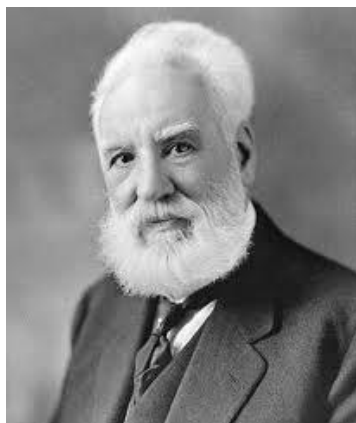
Ve vodě poprvé přesně měřili rychlost zvuku v roce 1827 CHARLES STURM a JEAN DANIEL COLLADON. Dvě lodě navzájem vzdálené 13 487 m umístili na ženevském jezeře. Ve stejný okamžik odpálili střelný prach a přitom speciální zařízení udeřilo do zvonu ponořeného pod hladinou vody. Na druhé loďce pak druhý pozorovatel zjistil rozdíl mezi akustickým a optickým signálem 9,4 s. Tomu odpovídala rychlost zvuku ve vodě asi 1 435 m/s.





## ALEXANDER GRAHAM BELL

1847–1922



Narodil se v Edinburghu a od útlého věku vykazoval talent pro umění a postupem času se stále více zajímal o fungování světa kolem sebe a začal provádět první experimenty. Vystudoval univerzity v Edinburghu a v Londýně a již v průběhu svých studií se začal zabývat akustikou ve snaze pomoci své neslyšící matce. Po ukončení studií se začal intenzivněji zabývat studiem fonetických zákonitostí lidských mluvidel, v oboru fyziologie lidské řeči získal titul profesora. V roce 1870 jeho rodiče emigrovali do Kanady, kde se dále zabýval studiem lidské mluvy a sluchu, ale také zkoumal možnosti komunikace za pomoci elektrické energie, ve výzkumech pokračoval i později v Bostonu. Celý svůj život zasvětil zvuku a metodám jeho přenášení. Je autorem mnoha převratných vynálezů, avšak mezi jeho nejvýznamnější patenty se řadí sestavení prvního funkčního telefonu v roce 1876 a sestavení gramofonu v roce 1884.

Vynález telefonu byl výsledkem jeho snah o zvýšení přenosové rychlosti telegrafu, který v té době umožňoval posílat v jeden okamžik pouze jednu depeši. Bell se zabýval konstrukcí přístroje, který také využíval Morseovy abecedy (kombinace teček a čárek), ale byl schopný přenést v jednom okamžiku více zpráv. Princip spočíval v tom, že signály jednotlivých zpráv byly odesílány s použitím různě vysokých frekvencí.

Bell ve svém prvním telefonu použil membránu jak v mikrofону, tak i ve sluchátku. Membrána kmitala v blízkosti cívky navinuté na ocelovém magnetu. Takové uspořádání bylo nejen jednoduché, ale nepotřebovalo baterii ani na přijímací ani na vysílací straně. Původní indukční mikrofón byl málo citlivý a byl nahrazen uhlíkovým odporovým mikrofónem, který byl používán ještě nedávno. Po řadě experimentů našel membránu správných parametrů a dne 2. června 1875 se mu podařilo elektricky přenést tón a v roce 1876 získal patent na svůj přístroj pro přenos řeči.

Na jeho počest je jednotka hladiny intenzity zvuku, popř. elektrických signálů nazvána *bel* (v praxi se častěji používá menší jednotka *decibel* dB).

## ERNST MACH

1838–1916



Rakouský fyzik a filosof se narodil v Chrlicích u Brna a zabýval se akustikou, optikou, experimentální fyzikou, psychologií a fyziologií vnímání. Od roku 1864 působil jako profesor matematiky na univerzitě ve Štýrském Hradci, kde soustředil svůj zájem také na psychologii vnímání a s tím spojené fyzikální otázky. Od roku 1867 vedl katedru experimentální fyziky na Karlo-Ferdinandově univerzitě v Praze, kde do fyzikálního experimentování v oblasti optiky a akustiky zapojoval i své studenty. V období let 1895 až 1901 působil jako profesor filozofie na vídeňské univerzitě. E. Mach byl nejen zkušeným experimentátorem, snažil se např. o sjednocení různých vědních oborů, o vybudování oboru zvaného psychofyzika, která měla vysvětlovat vztahy mezi fyzikálními podněty a smyslovými počítky.

E. Mach vytvořil mnoho demonstračních a měřicích přístrojů, které byly dlouho používány také ve školách a v některých případech se používají i dnes. Mezi jeho nejznámější demonstrační přístroje patří Machův vlnostroj pro demonstraci příčného a podélného vlnění, a Machovo kyvadlo, které lze naklánět a tím měnit dobu kyvu.

V roce 1883 vyšlo poprvé knižně jeho dílo s názvem *Die Mechanik in ihre Entwicklung* (Mechanika ve svém vývoji), ve kterém kritizoval Newtonovo chápání absolutního prostoru (Newton zavedl tento pojem, protože považoval trojrozměrný prostor, ve kterém žijeme za plnohodnotnou vztažnou soustavu). Mach v díle zveřejnil svou myšlenku, že rozdílný tvar zákonů mechaniky v inerciálních a neinerciálních systémech není důsledkem zrychleného pohybu systému vzhledem k absolutnímu prostoru, ale důsledkem zrychlení vzhledem ke vzdáleným hvězdám.

Z jeho prací měla velký ohlas studie, která se zabývala průletem střel prostředím. V roce 1884 připravil experimentální zařízení, které umožnilo zachytit na fotografickou desku vše, co se děje v okolí střely při jejím průletu plynným prostředím. Teoreticky vydedukoval a experimentálně potvrdil existenci rázové vlny, která má tvar kužele (tzv. Machův kužel) se střelou ve vrcholu. Při nadzvukových rychlostech čelní plocha rázové vlny přenáší zvukový ráz způsobený zhuštěním vzduchu v okolí střely (akustický třesk). Poměr rychlosti střely k rychlosti zvuku byl později nazván *Machovo číslo*. Je to fyzikální veličina, která vyjadřuje poměr rychlosti pohybu tělesa určitým prostředím k rychlosti šíření zvuku ve stejném prostředí. V letectví představuje poměr rychlosti letu k rychlosti zvuku. Je-li hodnota Machova čísla menší než 1, hovoříme o podzvukových rychlostech, je-li větší než 1, jedná se o nadzvukové rychlosti.

## CHRISTIAN ANDREAS DOPPLER

1803–1853



Christian Doppler byl význačný rakouský fyzik, matematik a astronom. Po absolvování střední školy v Linci zahájil v roce 1832 studium na Polytechnickém institutu ve Vídni a o tři roky později začal studovat na vídeňské univerzitě matematiku, mechaniku a astronomii. Od roku 1835 působil v Praze, kde nejprve vyučoval na střední technické škole a v roce 1841 byl jmenován profesorem matematiky a geometrie na pražském Polytechnickém institutu, kde již dříve přednášel. V roce 1847 byl jmenován profesorem matematiky a mechaniky na Akademii hornictví a lesnictví v Baňské Štiavnici. Počátkem roku 1849 odešel do Vídně, kde byl jmenován profesorem geodézie na polytechnice. V roce 1850 se stal prvním ředitelem nového Institutu fyziky na univerzitě ve Vídni, ale už od roku 1852 musel požádat o dovolenou ze zdravotních důvodů, odjel se léčit do Itálie, kde v roce 1853 v Benátkách zemřel.



Hrob Christiana Dopplera v Benátkách

Za svého pobytu v Praze publikoval v roce 1842 monografii *Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels* (O barevném světle dvojhvězd a některých dalších nebeských hvězdách), kde byl poprvé formulován Dopplerův jev.

Jedním z nejběžnějších příkladů, jak lze Dopplerův jev pozorovat, je změna výšky tónů vydávaných sirénou umístěnou na vozidle, které projíždí kolem pozorovatele. Dopplerova jevu využívá řada měřicích přístrojů a zařízení, např. radary pro měření rychlosti vozidel.

Pomocí Dopplerova efektu se dají vypočítat rychlosti vzdálených zdrojů zvuku nebo i světla (např. souhvězdí). Tento princip se velmi osvědčil zejména v astronomii, kde se projevuje posuvem spektrálních čar vyzařovaných vesmírnými tělesy. Pokud se tato tělesa od Země vzdalují, lze pozorovat tzv. rudý posuv.

Na počest tohoto vědce je pojmenováno pražské Gymnázium Christiana Dopplera.

Oldřich Lepil

## **Mechanické kmitání a vlnění**

Výkonný redaktor prof. RNDr. Tomáš Opatrný, Dr.  
Odpovědná redaktorka Mgr. Lucie Loutocká  
Technická úprava textu doc. RNDr. Oldřich Lepil, CSc.  
Návrh obálky Jiří Jurečka

Vydala a vytiskla Univerzita Palackého v Olomouci  
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc  
<http://www.upol.cz/vup>  
e-mail: [vup@upol.cz](mailto:vup@upol.cz)

Olomouc 2012

1. vydání

Publikace neprošla ve vydavatelství redakční a jazykovou úpravou.

Neprodejné

ISBN 978-80-244-3295-3