BxMO 2011

THIRD BENELUX MATHEMATICAL OLYMPIAD

Luxembourg, 6–8 May 2011

Language : **French**

Problème 1. Un couple d'entiers (m, n) avec $1 < m < n$ est un *couple Benelux* si les deux conditions suivantes sont satisfaites : m a les mêmes diviseurs premiers que n, et $m+1$ a les mêmes diviseurs premiers que $n+1$.

(a) Trouver trois couples Benelux (m, n) avec $m \leqslant 14$.

(b) Montrer qu'il existe une infinité de couples Benelux.

Problème 2. Soit ABC un triangle dont I est le centre du cercle inscrit. Les bissectrices AI, BI et CI coupent $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ en D, E et F, respectivement. La médiatrice du segment $[AD]$ coupe les droites BI et CI en M et N, respectivement. Démontrer que A, I, M et N appartiennent à un même cercle.

Problème 3. Pour k un nombre entier, soit $\mathrm{c}(k)$ le plus grand cube parfait inférieur ou égal à k. Déterminer tous les entiers strictement positifs p tels que la suite suivante est bornée :

$$a_0 = p \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2\mathrm{c}(a_n) \quad \text{pour } n \geqslant 0.$$

(*Une suite $a_0, a_1, \ldots$ de réels est dite* bornée *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \geqslant 0$, $|a_n| \leqslant M$.*)

Problème 4. Abby et Brian jouent au jeu suivant : ils choisissent d'abord un entier positif N. Ensuite, ils écrivent, l'un après l'autre, des nombres sur un tableau. Abby entame le jeu en écrivant le nombre 1. Par après, si l'un vient d'écrire le nombre n, l'autre écrit soit $n+1$, soit $2n$, pourvu que le nombre ne soit pas plus grand que N. Le joueur qui écrit N au tableau gagne le jeu.

(a) Déterminer quel joueur a une stratégie gagnante pour $N = 2011$.

(b) Trouver le nombre d'entiers positifs $N \leqslant 2011$ pour lesquels Brian a une stratégie gagnante.

Durée : 4 heures et 30 minutes.
Chaque problème vaut 7 points.