INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rozšíření akreditace učitelství matematiky a učitelství deskriptivní geometrie
na PřF UP v Olomouci o formu kombinovanou

CZ.1.07/2.2.00/18.0013

Diferenciální geometrie ploch v úlohách

Martin Sochor, Josef Mikeš

Oponenti: RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.
Mgr. Irena Hinterleitner, Ph.D.

ISBN 978-80-244-3999-0

Obsah

Úvod 5

1 Vektorové funkce více proměnných 7
1.1 Základní vlastnosti 7
1.2 Řešené příklady 9
1.3 Kontrolní otázky 9
1.4 Cvičení 10
1.5 Odpovědi na kontrolní otázky 10
1.6 Výsledky 10

2 Definice plochy a její základní vlastnosti 13
2.1 Definice plochy 13
2.2 Řešené příklady 16
2.3 Kontrolní otázky 19
2.4 Cvičení 19
2.5 Odpovědi na kontrolní otázky 20
2.6 Výsledky 20

3 Tečné vlastnosti ploch 23
3.1 Křivky na ploše 23
3.2 Tečná rovina a normála plochy 24
3.3 Řešené příklady 25
3.4 Kontrolní otázky 27
3.5 Cvičení 27
3.6 Odpovědi na kontrolní otázky 28
3.7 Výsledky 28

4 První kvadratická forma plochy 31
4.1 První kvadratická forma plochy 31
4.2 Užití první kvadratické formy plochy 32
4.3 Řešené příklady 34
4.4 Kontrolní otázky 37
4.5 Cvičení 37
4.6 Odpovědi na kontrolní otázky 38
4.7 Výsledky 38

5 Druhá kvadratická forma plochy 41
5.1 Druhá kvadratická forma plochy 41
5.2 Klasifikace bodů na ploše 42

5.3 Řešené příklady . . . 43
5.4 Kontrolní otázky . . . 46
5.5 Cvičení . . . 46
5.6 Odpovědi na kontrolní otázky . . . 47
5.7 Výsledky . . . 47

6 Křivosti a význačné směry na ploše **49**
6.1 Normálová křivost, asymptotické a hlavní směry . . . 49
6.2 Gaussova a střední křivost . . . 52
6.3 Řešené příklady . . . 53
6.4 Kontrolní otázky . . . 58
6.5 Cvičení . . . 58
6.6 Odpovědi na kontrolní otázky . . . 59
6.7 Výsledky . . . 59

7 Gaussovy a Weingartenovy rovnice **61**
7.1 Gaussovy a Weingartenovy rovnice . . . 61
7.2 Řešené příklady . . . 63
7.3 Kontrolní otázky . . . 67
7.4 Cvičení . . . 67
7.5 Odpovědi na kontrolní otázky . . . 67
7.6 Výsledky . . . 68

8 Speciální typy ploch **71**
8.1 Přímkové plochy . . . 71
8.1.1 Přímkové plochy rozvinutelné . . . 72
8.1.2 Přímkové plochy zborcené . . . 73
8.2 Rotační plochy . . . 73
8.3 Minimální plochy . . . 77

Úvod

Cílem učebního textu *Diferenciální geometrie ploch v úlohách* je poskytnout čtenářům bohatý sborník úloh, který jim umožní si dostatečně procvičit vybrané partie z diferenciální geometrie ploch. Primárně je určen posluchačům prvního semestru magisterského studia matematiky na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci.

Je rozčleněn na 7 základních kapitol, které pokrývají učivo části předmětu *Diferenciální geometrie* (KAG/MDIG7) věnované plochám. Závěrečná kapitola pak obsahuje vyobrazení nejčastěji se vyskytujících ploch v zadání příkladů a úloh.

Sbírka má jednotnou stavbu. V úvodu je nastíněno, o čem se bude v dané kapitole hovořit, jsou zde vymezeny cíle a uvedeny klíčové pojmy pro snazší orientaci v textu. Využít ji tedy pomohou bez obtíží i studenti distančního studia. Následuje teoretická část, kde si lze zopakovat nejvýznamnější poznatky. Věty jsou uváděné bez důkazů (ty lze vyhledat v doporučené literatuře, jejíž seznam je připojen na konci textu), je k nim však ve většině případů připojen komentář vysvětlující jejich tvrzení či použití. Řešené příklady jsou vyřešeny velmi detailně, postup je doplněn řadou osvětlujících poznámek. V dalších dvou částech má čtenář k dispozici jednak několik kontrolních otázek, jednak neřešené úlohy ve Cvičení. Obě sekce prověřují, do jaké míry učivo pochopil, zapamatoval si podstatné informace a zda je umí aplikovat při řešení úloh. Najdete je na konci každé kapitoly. Jejich prostřednictvím zjistíte, jestli jste splnili formulované cíle.V obou případech je však pro kontrolu uvedeno správné řešení.

Za každou kapitolou je připojen volný list pro případné poznámky. Jako průvodci studiem Vám poslouží následující ikony, které by Vám měly usnadnit samostatnou práci s textem.

Průvodce studiem: V této části pochopíte propojenost učiva s předchozími kapitolami. Připomeneme, co již znáte z jiných předmětů, dřívějšího studia či běžného života.

Motivace: Zde bude vysvětleno, proč se danou problematikou budeme zabývat, jaký je její význam či užití.

Cíle: Na začátku každé kapitoly naleznete konkrétně formulované cíle. Jejich prostřednictvím získáte přehled o tom, co budete po nastudování příslušného tématického celku umět, znát, co budete schopni dělat.

Klíčové pojmy: Hned na začátku každé kapitoly najdete klíčové pojmy, které byste měli po jejím prostudování být schopni vysvětlit. Vracejte se k nim i při dalším čtení a opakování, dokud si je dostatečně nezafixujete v paměti.

Pasáž pro zájemce: Tato část textu je určena těm z vás, kteří máte zájem o hlubší studium problematiky, nebo se chcete dozvědět i nějaké zajímavé podrobnosti vztahující se k tématu.

Literatura: Odkazuje na konkrétní pasáž v literatuře, jejíž seznam lze najít na konci učebního textu.

Kapitola 1

Vektorové funkce více proměnných

Úvodní kapitola slouží k zopakování poznatků o vektorových funkcích více proměnných. V podstatě zobecňuje poznatky o vektorových funkcích jedné proměnné, s nimiž jste se seznámili při studiu teorie křivek.

Vektorové funkce jedné reálné proměnné představují v diferenciální geometrii stěžejní nástroj využívaný k popisu křivek. Umožňují snadno zavést např. pojem tečného vektoru. Analogicky pak vektorové funkce více proměnných slouží k charakteristice ploch. Proto je důležité s nimi umět pracovat.

Po prostudování této kapitoly dokážete:

- definovat vektorové funkce více proměnných,
- řešit základní úlohy vektorové analýzy.

vektorová funkce více proměnných; limita, spojitost, derivace a diferenciál vektorové funkce více proměnných; Taylorův rozvoj

1.1 Základní vlastnosti

Definice 1.1.1 Nechť $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^2$. Zobrazení $f : \mathbb{M} \to \mathbb{E}_3$, resp. $f : \mathbb{M} \to \mathbb{V}_3$, nazýváme bodovou, resp. vektorovou funkcí dvou proměnných. Množina $\mathbb{M}$ se nazývá definiční obor funkce.

Čtenář sám jistě snadno zdůvodní, proč se jedná o funkci dvou proměnných, analogicky lze definici zobecnit i pro n proměnných. Pro úplnost byla zavedena i funkce bodová, dále však budeme hovořit výhradně o funkcích vektorových. O úzkém vztahu mezi těmito dvěma typy funkcí je podrobněji pojednáno v následující kapitole. Doplňme ještě pro úplnost způsob zápisu obou funkcí:

$$P(u_1, u_2) = \left[x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2)\right],$$

$$\vec{p}(u_1, u_2) = \left(x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2)\right),$$

kde v obou případech $(u^1, u^2) \in \mathbb{M}$.

Definice 1.1.2 Řekneme, že vektorová funkce $\vec{p}(u^1, u^2)$ má *limitu* $\vec{p}_0$ v bodě (u_0^1, u_0^2), což budeme zapisovat ve tvaru

$$\lim_{(u^1,u^2)\to(u_0^1,u_0^2)} \vec{p}(u^1, u^2) = \vec{p}_0,$$

jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall (u^1, u^2) \in \mathbb{M}, (u^1, u^2) \neq (u_0^1, u_0^2) :$$

$$|(u^1, u^2) - (u_0^1, u_0^2)| < \delta \Rightarrow |\vec{p}(u^1, u^2) - \vec{p}_0| < \varepsilon.$$

Stejně jako v případě vektorových funkcí jedné proměnné vyšetřujeme existenci limity vektorové funkce více proměnných pomocí limit jednotlivých souřadnicových funkcí x, y a z. Platí totiž následující vztah

$$\lim_{(u^1,u^2)\to(u_0^1,u_0^2)} \vec{p}(u^1, u^2) = \left(\lim_{(u^1,u^2)\to(u_0^1,u_0^2)} x(u^1, u^2), \lim_{(u^1,u^2)\to(u_0^1,u_0^2)} y(u^1, u^2), \lim_{(u^1,u^2)\to(u_0^1,u_0^2)} z(u^1, u^2) \right),$$

pomocí něhož je v literatuře limita vektorové funkce mnohdy definována.

Nyní můžeme pomocí limity zavést pojem spojitosti a následně pak derivaci vektorové funkce.

Definice 1.1.3 Řekneme, že vektorová funkce je *spojitá* v bodě (u_0^1, u_0^2), jestliže v tomto bodě existuje její limita a je rovna funkční hodnotě v tomto bodě.

Definice 1.1.4 Nechť $(u_0^1, u_0^2) \in \mathbb{M}$. Pak vektory

$$\vec{p}_1(u_0^1, u_0^2) \equiv \frac{\partial \vec{p}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{p}(u_0^1 + h, u_0^2) - \vec{p}(u_0^1, u_0^2)}{h},$$

$$\vec{p}_2(u_0^1, u_0^2) \equiv \frac{\partial \vec{p}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{p}(u_0^1, u_0^2 + h) - \vec{p}(u_0^1, u_0^2)}{h},$$

pokud existují, se nazývají *parciální derivace dle proměnné* u^1 a u^2.

Podobně jako u limity lze derivaci zavést pomocí derivací souřadnicových funkcí vztahem

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \left(x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2) \right) = \left(\frac{\partial x(u^1, u^2)}{\partial u^i}, \frac{\partial y(u^1, u^2)}{\partial u^i}, \frac{\partial z(u^1, u^2)}{\partial u^i} \right).$$

Podrobně pojednáme o tomto přístupu (přechodu k souřadnicovým funkcím) v řešeném příkladu.

1.2 Řešené příklady

Příklad 1.2.1 Vypočtěte diferenciál funkce

$$\vec{p}(u,v) = (u-v)\vec{e}_1 + (u+v)\vec{e}_2 + (u^2+v^2)\vec{e}_3.$$

Řešení:

Než se dostaneme k řešení vlastní úlohy, ukažme si na zmiňované funkci pojmy zavedené v teoretické části. Předně si všimněme, že se jedná o funkci dvou proměnných, kde $u^1 = u, u^2 = v$ a že zkoumaná vektorová funkce je zadána jako lineární kombinace vektorů standartní báze v $\mathbb{R}^3$. Definičním oborem této funkce je zřejmě celá rovina $\mathbb{R}^2$. Zapišme funkci $\vec{p}$ v obvyklejším tvaru:

$$\vec{p}(u,v) = (\underbrace{u-v}_{x}, \underbrace{u+v}_{y}, \underbrace{u^2+v^2}_{z}),$$

kde jsme naznačili, čemu jsou rovny jednotlivé souřadnicové funkce. Pomocí nich, jak bylo uvedeno v teoretické části, v praxi provádíme vlastní výpočty.

Chceme-li např. spočítat limitu dané vektorové funkce v bodě $(2,1)$, vypočteme danou limitu pro jednotlivé souřadnicové funkce v daném bodě, tím však prakticky opouštíme problematiku vektorových funkcí, kterou jsme převedli na úlohu o reálných funkcích více proměnných. V našem případě tedy dostaneme

$$\lim_{(u,v)\to(2,1)} \vec{p}(u,v) = \left(\lim_{(u,v)\to(2,1)} (u-v), \lim_{(u,v)\to(2,1)} (u+v), \lim_{(u,v)\to(2,1)} (u^2+v^2) \right) =$$
$$= (2-1, 2+1, 2^2+1^2) = (1,3,5).$$

Podobně „po složkách“ vypočteme i derivace

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} = (1,1,2u); \ \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} = (-1,1,2v).$$

Nyní můžeme přikročit k řešení úlohy. Připomeňme, že diferenciál vektorové funkce je definován analogicky jako pro funkce reálné, tj.

$$d\vec{p}(u^1,u^2) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \vec{p}}{\partial u^i} du^i.$$

Odtud plyne pro uvažovanou funkci

$$d\vec{p}(u,v) = (1,1,2u)du + (-1,1,2v)dv =$$
$$= (du-dv)\vec{e}_1 + (du+dv)\vec{e}_2 + 2(u\ du + v\ dv)\vec{e}_3.$$

1.3 Kontrolní otázky

1. Jaký je rozdíl mezi bodovou a vektorovou funkcí?
2. Vyslovte větu o spojitosti vektorové funkce pomocí souřadnicových funkcí.
3. Co znamená, že vektorová funkce je *třídy* C^n?
4. Pokuste se definovat *Taylorův rozvoj* pro vektorové funkce dvou proměnných. Kde jste se s Taylorovým rozvojem setkali při studiu křivek?

1.4 Cvičení

1. Určete definiční obor, rozhodněte o spojitosi a vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce $\vec{p}(u,v) = (u\mathrm{e}^v, u^2+v^2, uv)$.

2. Je dána složená vektorová funkce dvou proměnných

$$\vec{p}(\vec{x}) = (x_1^2 + x_2^2)\vec{e}_1 + x_1 x_2 \vec{e}_2,$$

kde

$$\vec{x} = (u_1 \cos u_2)\vec{e}_1 + (u_1 \sin u_2)\vec{e}_2.$$

Vyjádřete funkci $\vec{p}$ pomocí proměnných u_1, u_2 a vypočtěte $\frac{\partial \vec{p}}{\partial u_i}, i = 1, 2$.

2. Vyjádřete Taylorův rozvoj funkce $\vec{p}(u,v) = (u^2+v^3)\vec{e}_1 + u^3 v \vec{e}_2$ v bodě $(1,-1)$.

1.5 Odpovědi na kontrolní otázky

1. Bodová funkce zobrazuje do eukleidovského prostoru - přiřazuje tedy body, zatímco vektorová funkce zobrazuje do zaměření příslušného prostoru - přiřazuje vektory.

2. Vektorová funkce $\vec{p}(u_1, u_2)$ je spojitá v daném bodě (na daném intervalu) právě tehdy, jsou-li v daném bodě (na daném intervalu) spojité všechny její souřadnicové funkce.

3. Tato vlastnost znamená, že daná vektorová funkce je spojitá i se všemi svými parciálními derivacemi do řádu n včetně.

4. *Taylorův rozvoj* vektorové funkce $\vec{p}(u)$, kde $u = (u^1, u^2)$, v bodě $u_0 = (u_0^1, u_0^2)$ je dán vzorcem

$$\vec{p}(u) = \vec{p}(u_0) + \frac{d\vec{p}(u_0)}{1!} + \frac{d^2\vec{p}(u_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^m\vec{p}(u_0)}{m!} + \mathrm{R}_m(u-u_0),$$

kde

$$\lim_{u \to u_0} \frac{\mathrm{R}_m(u-u_0)}{|u-u_0|^m} = 0.$$

V teorii křivek se Taylorův rozvoj využívá při studiu styku křivek.

1.6 Výsledky

1. $D = \mathbb{R}^2$, funkce je spojitá na celém definičním oboru (ověříme pomocí souřadnicových funkcí), $\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} = (\mathrm{e}^v, 2u, v)$, $\frac{\partial \vec{p}}{\partial v} = (u\mathrm{e}^v, 2v, u)$

2. $\vec{p}(u_1, u_2) = (u_1^2, u_1^2 \cos u_2 \sin u_2, 0)$, $\frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1} = (2u_1, u_1 \sin 2u_2, 0)$, $\frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2} = (0, u_1^2 \cos 2u_2, 0)$

3. po vypočtení příslušných diferenciálů a po dosazení do vzorce pro Taylorův rozvoj dostaneme:

$$\vec{p}(u) = -\vec{e}_2 + (2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2)(u_1 - 1) + (3\vec{e}_1 + \vec{e}_2)(u_2 + 1) +$$
$$+ (\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2)(u_1 - 1)^2 + 3\vec{e}_2(u_1 - 1)(u_2 + 1) - 3\vec{e}_1(u_2 + 1)^2 + \mathrm{R}_2(u - u_0)$$

Poznámky:

Kapitola 2

Definice plochy a její základní vlastnosti

Pro definici plochy využijeme přístup, který byl použit i při definici křivek, tj. pomocí homeomorfismu. Dále připomeneme způsoby zadání plochy a v neposlední řadě základní poznatky o změně parametru plochy.

Neboť celá sbírka je věnována studiu ploch, je zapotřebí se důkladně seznámit se stěžejním pojmem plochy a základními principy, jež využíváme při jejich charakterizaci.

Hlavním cílem této kapitoly je seznámit se s pojmem plochy. Po jejím prostudování dokážete:

- definovat plochu,
- klasifikovat typy rovnic, jimiž může být plocha zadána,
- aplikovat Einsteinovu sumační konvenci při zápisu vzorců a rovnic.

plocha; parametrické určení; implicitní a explitní určení; transformace parametru; Einsteinova sumační konvence

2.1 Definice plochy

V této části se zaměříme na definici plochy. Pro následující úvahy předpokládejme, že $\mathbb{E}_n$ značí eukleidovský prostor dimenze n a $\mathbb{U}$ je konvexní oblast v $\mathbb{E}_2$. Pro větší názornost uvedeme tradiční definici, kterou lze nalézt ve většině publikací věnujících se této problematice.

Definice 2.1.1 Nechť $p : \mathbb{U} \to \mathbb{E}_3$ je bodová funkce s vlastnostmi:

a) funkce p má spojité parciální derivace ve všech bodech oblasti $\mathbb{U}$,

b) v každém bodě $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{U}$ jsou parciální derivace

$$\vec{p}_1(u) = \frac{\partial p}{\partial u^1},\ \vec{p}_2(u) = \frac{\partial p}{\partial u^2}$$

lineárně nezávislé vektory (tzv. *regulárnost*).

Pak říkáme, že bodová funkce p je *parametrickým vyjádřením plochy*. Čísla u^1 a u^2 se nazývají *parametry na ploše* S, jimiž je určen její bod $X = p(u^1, u^2)$.

V některých případech se připouští, aby u některých (obvykle izolovaných) bodů množiny $\mathbb{U}$ nebyl druhý požadavek z definice plohy splněn. Mluvíme pak o *singulárních bodech* plochy. Analogicky jako u křivek lze singularity členit na *odstranitelné* a *neodstranitelné*. Rovněž poznamenejme, že někteří autoři navíc požadují, aby funkce p byla prostá.

Uveďme ještě korektnější definici plochy pomocí pojmu parametrizace.

Definice 2.1.2 Nechť p je zobrazení z konvexní oblasti $\mathbb{U}$ do $\mathbb{E}_3$. Pak se toto zobrazení nazývá *(regulární) parametrizací třídy* C^r, jestliže:

a) je hladké třídy C^r, $r \geq 1$,

b) je regulární, tj. $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$,

c) je prosté,

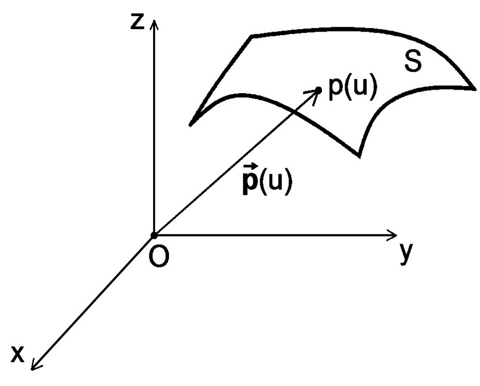
d) každá posloupnost bodů $p(u_{(i)})$ konverguje k $p(u_{(0)})$, pak $u_{(i)} \to u_{(0)}$, kde $u_{(i)} \in \mathbb{U}, i = 0, 1, 2, \ldots$

K této definici doplňme, že z bodů $a), c), d)$ plyne, že zobrazení $p : \mathbb{U} \to S = p(\mathbb{U})$ je homeomorfismem, tj. p je bijektivní, p a p^{-1} jsou spojitá zobrazení.

Definice 2.1.3 *Elementární diferencovatelnou plochou třídy* C^r pak rozumíme takovou množinu $S \subset \mathbb{E}_3$, pro kterou existuje parametrizace p třídy C^r taková, že $S = p(\mathbb{U})$. *Diferencovatelná plocha třídy* C^r je množina $S \subset \mathbb{E}_3$, která je lokálně elementární třídy C^r, tj. okolí každého bodu $X \in S$ je elementární diferencovatelná plocha třídy C^r.

Závěrem této poznámky uveďme, že dále budeme pojmem plocha obyčejně rozumět elementární diferencovatelnou plochu třídy C^r, $r \geq 1$.

Nyní si popíšeme vztah mezi vektorovou a bodovou funkcí.



obr. 1: Vztah mezi bodovou a vektorovou funkcí

Předně si uvědomme, že *bodová funkce* $p(u), u \in \mathbb{U}$, je ekvivalentní *vektorové funkci* $\vec{p}(u)$. Bodová funkce $p(u)$ totiž indukuje vektorovou funkci $\vec{p}(u)$ rozdílem $\vec{p}(u) = p(u) - O$, kde O je počátek zvolené soustavy souřadné. Naopak lze bodovou funkci z vektorové získat pomocí vztahu $p(u) = O + \vec{p}(u)$, tj. posunutím počátku o patřičný vektor $\vec{p}(u)$, jež bývá zvykem označovat pojmem *průvodič bodu* $p(u)$. Situace je znázorněna na obr. 1.

Nechť $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{U}$. Z uvedeného vyplývá, že parametrizaci plochy lze popsat následujícími formulemi (souhrnně označovanými jako *parametrické rovnice* plochy):

- $p = p(u^1, u^2)$, tzv. bodová rovnice,
- $\vec{p} = \vec{p}(u^1, u^2)$, tzv. vektorová rovnice,
- $x = x(u^1, u^2), y = y(u^1, u^2), z = z(u^1, u^2)$, tzv. souřadnicový tvar (získáme ho rozepsáním předchozích dvou typů rovnic po souřadnicích).

Kromě parametrizace ještě rozeznáváme další typy zadání ploch. Jejich rovnice tak můžeme vyjádřit třemi základními způsoby:

- parametricky: $x = x(u^1, u^2), y = y(u^1, u^2), z = z(u^1, u^2)$;
- explicitně: $z = f(x, y)$;
- implicitně (jde o *obecnou rovnici plochy*): $\mathcal{F}(x, y, z) = 0$.

V prvním případě jsou souřadnice bodů dané plochy vyjádřeny pomocí parametrů u^1, u^2; ve zbývajících případech pracujeme přímo se souřadnicemi bodů. Připomeňme, že plochu, kterou lze vyjádřit explicitně, nazýváme plochou *prostou.*

Ze základních pojmů dále uveďme *transformaci parametru.* Předpokládejme, že v $\mathbb{E}_2$ jsou dány dvě oblasti $\mathbb{U}$ a $\mathbb{U}^*$ splňující předpoklady vyslovené v úvodu kapitoly, S nechť je plocha v $\mathbb{E}_3$ a p, p^* příslušné bodové funkce zobrazující oblasti $\mathbb{U}$ a $\mathbb{U}^*$ na plochu S.

Definice 2.1.4 Regulárním zobrazením F třídy $C^r, r \geq 1$, oblasti $\mathbb{U}$ na oblast $\mathbb{U}^*$ nazveme zobrazení $F : \mathbb{U} \to \mathbb{U}^*$, kde

$$F = \Big(\varphi_1(u^1, u^2), \varphi_2(u^1, u^2)\Big),$$

takové, že

a) φ_1, φ_2 jsou funkcemi třídy C^r,

b) v každém bodě $(u^1, u^2) \in \mathbb{U}$ je Jacobián zobrazení F nenulový, tj.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Přejdeme-li od bodové funkce p, která je vyjádřením plochy S, k bodové funkci

$$p^* = p \circ F^{-1},$$

kde F splňuje vlastnosti z definice 2.1.4, je tato funkce opět parametrickým vyjádřením plochy S, což dokážeme pomocí ověření podmínek z definice 2.1.1. Říkáme, že jsme na ploše provedli *regulární transformaci parametru.* Naopak lze rovněž dokázat, že pro každé dvě parametrizace $p,\ p^*$, jež parametrizují stejnou plochu, existuje zobrazení $F^* : \mathbb{U}^* \to \mathbb{U}$ takové, že

$$F^* = F,$$

které je prosté, regulární a třídy C^r.

Na závěr této části ještě zmiňme konvenci, jež umožňuje efektivnější a přehlednější matematické vyjadřování v diferenciální geometrii ploch.

Einsteinovo sumační pravidlo: Jestliže se vyskytuje ve formuli jeden symbol v roli dolního a poté horního indexu, pak pro tento symbol předpokládáme sumaci od 1 do n. Díky této konvenci se značně zjednodušují zápisy mnoha formulí, umožňuje nám totiž vynechávat sumační znak.

Pro ilustraci uveďme výraz $x_i y^i z_k$, který je zapsán s využitím zmíněného pravidla. Neboť index i splňuje požadavky pro sumační konvenci, předpokládáme u něj sumaci pro hodnoty od 1 do n. Naopak index k předpoklady nesplňuje, v tomto zápise je proto „pevným“ indexem. Lze tedy psát:

$$x_i y^i z_k = \sum_{i=1}^{n} x_i y^i z_k = z_k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y^i = z_k \cdot (x_1 y^1 + x_2 y^2 + \cdots + x_n y^n).$$

2.2 Řešené příklady

Příklad 2.2.1 Ověřte, že funkce $\vec{p}(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v)$, kde $r \in \mathbb{R}^+, u \in \langle 0; 2\pi)$, $v \in \mathbb{R}$, je parametrickým vyjádřením plochy.

Řešení:

Podle definice plochy je třeba ověřit, že daná vektorová funkce má ve všech bodech svého definičního oboru, tj. ve všech bodech oblasti U, spojité parciální derivace, které jsou lineárně nezávislé. Diferencovatelnost je s ohledem na předpis funkce $\vec{p}$ splněna, nyní derivace vypočtěme:

$$\vec{p}_1 = (-r\sin u, r\cos u, 0),\ \vec{p}_2 = (0,0,1).$$

Odtud vidíme, že derivace jsou nejen spojité, ale rovněž lineárně nezávislé. Shrneme-li všechny závěry, představuje uvažovaná bodová funkce parametrické určení plochy.[1] Jedná se o *rotační válcovou plochu.*

Toto parametrické určení můžeme získat, uvědomíme-li si, že rotační válcová plocha patří mezi *plochy přímkové.* To znamená, že každým jejím bodem prochází alespoň jedna přímka, jejíž všechny body leží na dané ploše. Přímková plocha vzniká tak, že do každého bodu $p(t)$ řídící křivky popsané rovnicí $\vec{p} = \vec{p}(t)$ umístíme přímku o směrovém vektoru $\vec{q}(t)$. Celkově tedy dostáváme, že přímkovou plochu lze popsat rovnicí

$$\vec{r}(t,v) = \vec{p}(t) + v\vec{q}(t).$$

[1] Nastiňme rovněž postup pro prověření ve smyslu korektnější definice 2.1.2. V tomto případě navíc musíme kromě diferencovatelnosti a regularity prověřit, že daná funkce je prostá. První dva kroky jsou analogické předchozímu postupu, třetí krok je splněn s ohledem na omezení definičního oboru proměnné u.

Uvědomíme-li si, že řídící křivkou je v našem případě kružnice (o poloměru r umístěná tak, že její střed je totožný s počátkem soustavy souřadné), snadno odvodíme pomocí jejího parametrického vyjádření rovnici rotační válcové plochy, směrový vektor přímek volíme $(0, 0, 1)$ vzhledem k umístění kružnice.

Příklad 2.2.2 Ukažte, že danou válcovou plochu z předchozího příkladu lze určit pomocí obecné rovnice $x^2 + y^2 = r^2$.

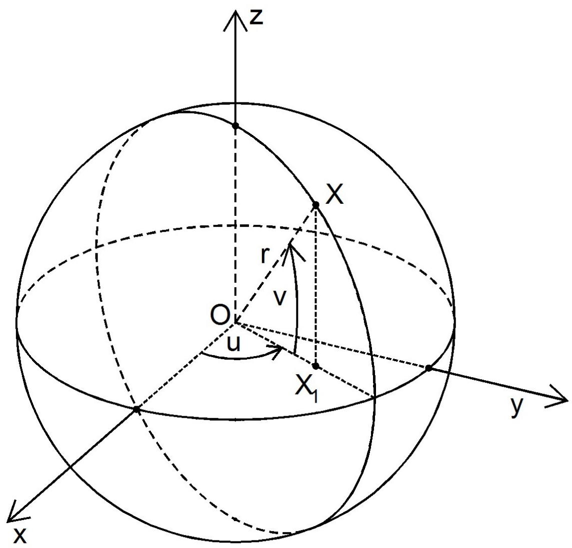
Řešení:

Z parametrického určení plynou pro souřadnice libovolného bodu dané plochy rovnice $x = r\cos u, y = r\sin u, z = v$. Pro výraz na levé straně uvažované rovnice postupně dostáváme:

$$x^2 + y^2 = (r \cdot \cos u)^2 + (r \cdot \sin u)^2 = r^2 \cdot (\cos^2 u + \sin^2 u) = r^2.$$

Získáváme tedy platnou rovnost. Každý bod plochy popsané uvažovanými souřadnicovými funkcemi rovnici tedy splňuje. Na druhou stranu ke každému bodu (x, y, z) prostoru, který vyhovuje dané rovnici, lze přiřadit čísla $u, v \in \mathbb{R}$ tak, aby platily výše uvedené rovnice pro x, y, z, přičemž hodnota v je určena jednoznačně, hodnota u je určena až na celočíselný násobek 2π. Daná obecná rovnice popisuje stejnou plochu.

Na závěr jen doplňme, že obecnou rovnici získáme ze souřadnicových funkcí eliminací parametrů u, v, např. umocněním a sečtením prvních dvou rovnic.



obr. 2: Zeměpisná délka a šířka

Příklad 2.2.3 Odvoďte parametrické vyjádření kulové plochy (sféry).

Řešení:

Každý bod X kulové plochy o poloměru r je určen dvěma parametry u, v, které jsou v geografii známé jako *zeměpisná délka* a *zeměpisná šířka* (viz obr. 2). Nechť X_1 značí průmět bodu X do roviny xy. Parametr u potom vyjadřuje odchylku průvodiče bodu X_1 a osy x, parametr v odchylku průvodiče bodu X a roviny xy. Označme x, y, z souřadnice bodu X. První dvě z nich získáme pomocí bodu X_1. Načrtneme-li si situaci v rovině xy, snadno pomocí goniometrických funkcí odvodíme, že

$$x = |OX_1| \cos u,$$
$$y = |OX_1| \sin u.$$

Zbývá odvodit souřadnici z a určit rozměr $|OX_1|$. K tomu lze využít rovinu určenou body O, X, X_1. Zakreslíme-li patřičný úhel v, dostáváme

$$|OX_1| = r \cos v,$$
$$z = r \sin v.$$

Dosadíme-li první vyjádření do vztahů pro x, y získáme následující vyjádření kulové plochy:

$$x = r \cos v \cos u,$$
$$y = r \cos v \sin u,$$
$$z = r \sin v.$$

Z odvození těchto rovnic vyplývá, že $u \in \langle -\pi; \pi \rangle$ a $v \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$. Tato parametrizace je ale regulární pouze pro $u \in (-\pi; \pi)$ a $v \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Příklad 2.2.4 Odvoďte parametrické vyjádření rotační plochy.

Řešení:

Rotační plochou rozumíme plochu, která vzniká rotací křivky kolem určité přímky, tu poté nazýváme *osou rotace*. Leží-li daná křivka v rovině procházející osou rotace, nazývá se *meridiánem*. Předpokládejme, že meridián leží v rovině xz, a nechť je osou rotace osa z. Křivka má proto rovnice

$$x = \varphi(v), \ y = 0, \ z = \psi(v),$$

kde $v \in (a, b)$. Každý bod $X[x; y; z]$ uvažované rotační plochy je určený jednak parametrem v, jednak parametrem u, jenž vyjadřuje úhel, o který se musí otočit bod $Y[\varphi(v); 0; \psi(v)]$ původní křivky při rotaci do bodu X. Je patrné, že poslední souřadnice bodu Y se během rotace nemění, je tedy shodná se souřadnicí z. Zbývá vyšetřit souřadnice x, y. K tomu využijeme průmět bodů X, Y do roviny xy. Zde snadno pomocí goniometrických funkcí můžeme odvodit vztahy

$$x = \varphi(v) \cos u,$$
$$y = \varphi(v) \sin u,$$

kde $\varphi(v)$ je poloměr kružnice, po níž rotace probíhá. Celkově tedy dostáváme rovnici rotační plochy ve tvaru

$$x = \varphi(v) \cos u,$$
$$y = \varphi(v) \sin u,$$
$$z = \psi(v),$$

kde $u \in (-\pi; \pi \rangle, v \in (a; b)$.

Příklad 2.2.5 Odvoďte parametrické vyjádření rotačního jednodílného hyperboloidu.

Řešení:

Pro řešení využijeme výsledku předchozí úlohy. Stačí si uvědomit, že jednodílný rotační hyperboloid vznikne rotací hyperboly kolem vedlejší osy. Pokud ji ztotožníme s osou z, dostaneme po dosazení parametrických rovnic hyperboly hledané vyjádření plochy ve tvaru[2]

$$\begin{aligned} x &= a \cosh v \cos u, \\ y &= a \cosh v \sin u, \\ z &= b \sinh v. \end{aligned}$$

Vyšetřete intervaly pro u, v.

2.3 Kontrolní otázky

1. Zdůvodněte, proč požadujeme v definici plochy regulárnost.
2. Charakterizujte vztah mezi bodovou a vektrovou rovnicí plochy!
3. Uveďte příklad implicitně dané plochy.
4. Definujte přímkovou plochu. Uveďte její příklad.
5. V čem spočívá význam Einsteinovy sumační konvence?

2.4 Cvičení

1. Ověřte, že dané funkce jsou parametrickým vyjádřením plochy:
   a) $\vec{p}(u,v) = A + u\vec{a_1} + v\vec{a_2}$, kde $A \in \mathcal{E}_3$ a $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ jsou lineárně nezávislé vektory ze zaměření $\mathcal{E}_3$,
   b) $\vec{p}(t,u) = (a \cos t \cos u, b \sin t \cos u, c \sin u)$; $a, b, c \in \mathcal{R}^+$,
   c) $\vec{p}(t,u) = \Big(2t, 2u, 2\Big(\dfrac{t^2}{a^2} - \dfrac{u^2}{b^2}\Big)\Big)$; $a, b \in \mathcal{R}^+$.
2. Ukažte, že parametrizace z úlohy:
   a) 1*b*) popisuje rotační elipsoid o implicitní rovnici $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$,
   b) 1*c*) popisuje hyperbolický paraboloid o rovnici $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$.

[2] Připomeňme, že

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathcal{R},$$

jsou hyperbolický kosinus a sinus. Pro tyto funkce platí podobné vztahy jako pro funkce goniometrické, např.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

3. Odvoďte parametrickou rovnici rotačního elipsoidu a rotačního dvojdílného hyperboloidu.

4. V jaké křivce protíná plocha tečen šroubovice $\vec{p}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a, b \in \mathcal{R}^+$, rovinu $z = 0$?

5. Parametrizujte kuželovou plochu s vrcholem, jehož průvodič je $\vec{r}$.

6. Rozhodněte, zda plocha

$$\vec{p}(u, v) = (\cos u + v\sin u, \sin u - v\cos u, v)$$

je plochou přímkovou.

2.5 Odpovědi na kontrolní otázky

1. tento požadavek zaručuje, že množina $p(\mathbb{U})$ se neredukuje pouze na křivku

2. obě rovnice jsou ekvivalentní; bodová funce indukuje funkci vektorovou a naopak

3. např. sféra $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

4. každým bodem přímkové plochy prochází alespoň jedna přímka ležící na jejím povrchu; příkladem je plocha kuželová nebo válcová

5. umožňuje jednodušší a přehlednější zápisy rovnic

2.6 Výsledky

1. postupujeme analogicky příkladu 2.2.1

2. postupujeme analogicky příkladu 2.2.2

3. $(a\cos v\cos u, a\cos v\sin u, b\sin v)$; $(a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, b\cosh v)$; využijte poznatky o rovnici rotačních ploch

4. jde o křivku o rovnicích $x = a(\cos t - t\sin t), y = a(\sin t + t\cos t)$, tato křivka se nazývá Archimédova spirála; postup: ze zadání plyne, že uvažovaná plocha je plocha přímková (řídící křivkou je šroubovice, směrovým vektorem přímek je její tečný vektor)

5. např. $\vec{p}(s, t) = \vec{r} + t\vec{q}(s), t \in \mathbb{R}$, pro odvození si uvědomte, že jde o přímkovou plochu - řídící křivkou je konstantní vektor $\vec{r}$, označíme-li směrový vektor přímek $\vec{q}(s)$, dostaneme dané vyjádření

6. ano, plochu lze přepsat ve tvaru $\vec{p}(u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + v(\sin u, -\cos u, 1)$

Poznámky:

Kapitola 3

Tečné vlastnosti ploch

V této kapitole nastíníme, jak lze k ploše sestrojit v jejím bodě tečnou rovinu, ukážeme její vztah k normále plochy. Zkonstruujeme repér analogický Frenetově trojhranu.

Podobně jako nalezení rovnice tečny u křivky, je nalezení tečné roviny plochy jednou ze základních úloh, s níž se můžeme setkat nejenom v diferenciální geometrii. Pojem normálového vektoru a Gaussova repéru nám v následujících kapitolách pak umožní zavést další pojmy.

Po prostudování této kapitoly dokážete:

- definovat křivku na ploše,
- odvodit rovnici tečné roviny a normály plochy v jejím daném bodě,
- popsat konstrukci Gaussova repéru.

křivka na ploše; souřadnicová síť; tečný vektor plochy; normálový vektor plochy; tečná rovina; normála; Gaussův repér

3.1 Křivky na ploše

Následující pojmy nám usnadní vyslovení definice tečného vektoru.

Definice 3.1.1 Předpokládejme, že bodovou rovnicí $p = p(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in \mathbb{U}$, je popsána plocha S. Nechť $u^1 = u^1(t), u^2 = u^2(t)$ jsou parametrické rovnice křivky l, jejíž body leží v $\mathbb{U}$. Říkáme, že křivka l *leží na ploše* S. Zmíněné parametrické rovnice se nazývají *vnitřní rovnice křivky* l.[1]

Speciálním typem křivek na ploše jsou *souřadnicové křivky*. Jedná se o takové křivky, pro něž je jedna z jejich vnitřních rovnic rovna konstantní funkci. Křivka l, pro kterou je $u^2 =$ konst., se nazývá u^1*-souřadnicová křivka*, analogicky pro u^2*-souřadnicovou křivku.*

[1] Uvědomme si, že *parametrické vyjádření* křivky na ploše je tedy složené zobrazení

$$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_3, f = p \circ \varphi,$$

kde $\varphi : I \to \mathbb{U}; \forall t \in I : \varphi(t) = (u^1(t), u^2(t))$. Z tohoto vyjádření je patrné, že φ je vnitřní složkou složeného zobrazení, odtud název *vnitřní rovnice*. Připomeňte, jaké musí být splněny podmínky pro to, aby zobrazení φ bylo křivkou v $\mathbb{U}$!

Jako příklad uveďme kulovou plochu - zde jsou u-křivkami jsou rovnoběžkové kružnice (neboť se mění pouze parametr u, tj. zeměpisná délka), v-křivkami pak jsou poledníky (mění se pouze parametr v, tj. zeměpisná šířka).

Definice 3.1.2 Soustava souřadnicových křivek tvoří *souřadnicovou síť.*

Sítí křivek na ploše rozumíme obecně zadání dvou systémů křivek s vlastnostmi:

- každým bodem plochy prochází právě jedna křivka každého z obou systémů,
- dvě křivky z různých systémů mají nejvýše jeden společný bod,
- ve společném průsečíku dvou křivek z různých systémů mají tyto křivky různé tečny.

K souřadnicovým sítím se ještě vrátíme v souvislosti s hlavními křivkami plochy a první kvadratickou formou plochy.

3.2 Tečná rovina a normála plochy

Definice 3.2.1 *Tečnou plochy* rozumíme tečnu regulární křivky ležící na dané ploše.

Otázkou je, jak určíme příslušný tečný vektor. Víme, že vektorová rovnice příslušné křivky na ploše je vlastně složená funkce, proto pro derivaci je třeba aplikovat příslušný vzorec. Derivováním obdržíme

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{du^1}\frac{du^1}{dt} + \frac{d\vec{p}}{du^2}\frac{du^2}{dt}.$$

Vidíme, že tečný vektor je vyjádřen jako lineární kombinace vektorů $\vec{p}_1$ a $\vec{p}_2$ zavedených v předchozí kapitole. Odtud plyne geometrický význam vektorů $\vec{p}_1$ a $\vec{p}_2$. Tyto vektory se nazývají *tečné* a jedná se o tečné vektory příslušných souřadnicových křivek. Jako důsledek dostáváme následující větu:

Věta 3.2.1 *Všechny tečny k ploše v jejím daném bodě leží v rovině o zaměření* $\{\vec{p}_1;\ \vec{p}_2\}$.

Definice 3.2.2 Rovina z předchozí věty se nazývá *tečná.*

Definice 3.2.3 Normálou plochy v jejím daném bodě nazýváme kolmici k tečné rovině sestrojenou v daném bodě.

Jelikož je normála k tečné rovině kolmá, je zřejmé, že její směrový vektor (označme ho $\vec{m}$) získáme vektorovým součinem vektorů ze zaměření tečné roviny. V případě implicitně dané plochy $\mathcal{F}(x, y, z) = 0$ je nalezení vektoru normály snazší. Je to gradientní vektor

$$\nabla\vec{\mathcal{F}} = \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}, \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}, \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right) = (\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z)\,.$$

V budoucích výpočtech se často setkáme s *jednotkovým vektorem normály.* Ten získáme normalizací vektoru normály, tj. platí

$$\vec{m} = \frac{\vec{p}_1 \times \vec{p}_2}{|\vec{p}_1 \times \vec{p}_2|}.$$

Význam tohoto vektoru nespočívá pouze v nalezení obecné rovnice tečné roviny, případně parametrické rovnice normály. Lze ho využít i pro zavedení pojmu orientace plochy, kterou lze definovat v souvislosti se změnou parametru na ploše.

Označme d determinant Jacobiho matice příslušné změně parametru na ploše v jejím daném bodě. Je-li $d > 0$, pak říkáme, že obě parametrizace určují *tutéž orientaci plochy*, pro $d < 0$ *opačnou orientaci*. Souhlasné parametrizace určují v každém bodě týž vektor normály. Pro nesouhlasné parametrizace leží pole vektorů normály „na různých stranách plochy“. Z těchto úvah je patrné, že množinu všech parametrizací téže plochy lze rozdělit podle znaménka d na dvě skupiny (třídy). Ověřte, že relace „určovat tutéž orientaci“ je skutečně relace ekvivalence, a dokažte, že zmíněné dvě skupiny tvoří rozklad množiny parametrizací téže plochy.

Věta 3.2.2 *Vektory* $\{\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \vec{m}\}$ *tvoří pravotočivý repér.*

Je to analogie Frenetova trojhranu, kterou označíme jako *Gaussův repér*. Jeho užití poznáme v kapitole věnované Gaussovým rovnicím.

3.3 Řešené příklady

Příklad 3.3.1 Charakterizujte parametrické křivky roviny $p(u,v) = A + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$, kde $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2 \in \mathcal{E}_3$ jsou lineárně nezávislé vektory a $A \in \mathcal{E}_3$.

Řešení:

Prozkoumejme nejprve u-křivky. Víme, že se jedná o takové křivky, pro něž je v konstantní, odtud pak vyplývá, že hodnota $v\vec{a}_2$ je rovněž pro každé u konstatní. Rovnice (která je již funkcí jedné proměnné) pak přechází na tvar

$$p(u,v) = (A + v\vec{a}_2) + u\vec{a}_2.$$

Pokud tedy získanou rovnici budeme interpretovat geometricky za využití poznatků z analytické geometrie, dostáváme, že závorka vyjadřuje (pevný) bod, jde proto o rovnici přímky rovnoběžnou s vektorem u. Analogicky postupujeme v případě v-křivek.

Příklad 3.3.2 Napište rovnici tečné roviny plochy $p(u,v) = (u\cos v, u\sin v, cv), c \neq 0$, v obecném bodě $p(u_0, v_0)$.

Řešení:

Nejprve musíme vypočítat souřadnice vektorů $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2$. Získáme je provedením patřičných parciálních derivací vektorové funkce uvažované plochy. Platí tedy $\vec{p}_1 = (\cos v, \sin v, 0)$ a $\vec{p}_2 = (-u\sin v, u\cos v, c)$. Nyní je třeba určit souřadnice normálového vektoru. Z teoretické části víme, že ho dostaneme vektorovým součinem vektorů $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2$:

$$\vec{m} = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & c \end{vmatrix} = (c\sin v, -c\cos v, u)$$

Celou situaci uvažujeme v obecném bodě $p(u_0, v_0)$. Po dosazení získáme souřadnice normálového vektoru v daném bodě ve tvaru $\vec{m} = (c\sin v_0, -c\cos v_0, u_0)$. Odtud tedy plyne rovnice hledané roviny:

$$cx\sin v_0 - cy\cos v_0 + u_0 z + d = 0.$$

Zbývá vypočítat koeficient d, který určíme obvyklým způsobem, tj. dosazením souřadnic bodu, který v hledané rovině leží. V našem případě jde o obecný bod uvažované plochy, neboli $(u_0\cos v_0, u_0\sin v_0, cv_0)$. Řešením lineární rovnice s neznámou d obdržíme $d = -cu_0v_0$. Odtud tedy dostáváme rovnice hledané roviny ve tvaru

$$cx\sin v_0 - cy\cos v_0 + u_0 z - u_0 v_0 c = 0.$$

Příklad 3.3.3 Napište rovnici tečné roviny k ploše $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 2 = 0$ v bodě $(3; 2; 1)$.

Řešení:

K určení rovnice tečné roviny plochy dané implicitně použijeme postup nastíněný v teoretické části. Normálový vektor odpovídá vektoru, který získáme parciálním derivováním dané funkce dle všech proměnných, tj. vektoru $(\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z)$. V tomto případě má normálový vektor souřadnice $\vec{m} = (x, -2y, -3z)$, v uvažovaném bodě tedy $(3; -4; -3)$. Proto rovnice tečné roviny má tvar:

$$3x - 4y - 3z + d = 0.$$

Dosazením souřadnic uvažovaného bodu získáme hodnotu zbývajícího parametru d. Celkem tak dostáváme rovnici

$$3x - 4y - 3z + 2 = 0.$$

Příklad 3.3.4 Napište rovnici normály plochy $z = 3x^2 + y^2$ v bodě $(1; 1; 3)$.

Řešení:

Víme, že normálou rozumíme kolmici na tečnou rovinu, proto jejím směrovým vektorem je normálový vektor dané plochy. Neboť jde o plochu danou explicitně, můžeme při výpočtu normálového vektoru postupovat analogicky předchozímu příkladu. Nejprve však rovnici upravíme na implicitní tvar $3x^2 + y^2 - z = 0$, odtud derivováním dostaneme $\nabla\mathcal{F} = (6x, 2y, -1)$, v uvažovaném bodě pak $\vec{m} = (6, 2, -1)$. Tím jsme získali směrový vektor hledané normály, kterou proto lze vyjádřit pomocí parametrických rovnic:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 6t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= 3 - t,\ t \in \mathcal{R}. \end{aligned}$$

Příklad 3.3.5 K ploše o rovnici $xyz = 1$ určete tečnou rovinu rovnoběžnou s rovinou $x + y + z = 5$.

Řešení:

Oproti předchozím úlohám neznáme souřadnice bodu dotyku. Ty však lze získat prostřednictvím poznatku o rovnoběžnosti tečné roviny. Víme-li, že hledaná tečná rovina je rovnoběžná s rovinou $x + y + z = 5$, pak musí její normálový vektor být rovnoběžný s normálovým vektorem dané roviny, tj. s vektorem $(1, 1, 1)$. Současně ovšem víme, že normálový vektor hledané roviny lze získat derivováním rovnice uvažované plochy, kterou upravíme na tvar $xyz - 1 = 0$, tímto způsobem odvodíme, že $\nabla\mathcal{F} = (yz, xz, xy) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$. Celkově tedy máme vektorovou rovnici

$$\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) = \alpha \cdot (1, 1, 1),$$

kde $\alpha \in \mathcal{R}$. Dva vektory jsou si rovny, pokud jsou si rovny jejich souřadnice. Jejich porovnáním dostáváme soustavu rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \alpha \\ \frac{1}{y} &= \alpha \\ \frac{1}{z} &= \alpha, \end{aligned}$$

ze které snadno získáme rovnice bodů dotyku. Je patrné, že $x = y = z \left(= \frac{1}{\alpha}\right)$. Dosazením do rovnice plochy dostaneme $x^3 = 1$. Tato rovnice má jediné reálné řešení $x = 1$. Proto bod dotyku má souřadnice $(1; 1; 1)$. Hledaná rovnice tečné roviny má tvar

$$x + y + z - 3 = 0.$$

3.4 Kontrolní otázky

1. Čím je tvořena souřadnicová síť?
2. jakou vlastnost mají poledníky a rovnoběžky?
3. Pomocí jakých vektorů je vyjádřen tečný vektor plochy v jejím daném bodě?
4. Popište vztah mezi normálou a tečnou rovinou plochy.
5. Definujte Gaussův repér.

3.5 Cvičení

1. Charakterizujte parametrické křivky následujících ploch:
   a) $p(u, v) = (r\cos u, r\sin u, v)$,
   b) $p(u, v) = (u\cos v, u\sin v, cv), c \neq 0$.
2. Napište rovnici tečné roviny dané plochy v daném bodě, je-li dáno:
   a) $z = xy, (2; -1; -2)$,
   b) $z = x^2 + y^2, (-1; -1; 2)$,
   c) $p(u, v) = (u + v, u^2 + v^2, u^3 + v^3), (-1; -1)$.
3. Napište rovnici normály plochy v daném bodě:
   a) $x^2 - y^2 = 4z, (2; 0; 1)$,
   b) $xyz = 6, (-2; 1; -3)$.
4. Dokažte, že vektor $\nabla\mathcal{F}$ je normálový vektor plochy $\mathcal{F}(x, y, z) = 0$.
5. Určete rovnici tečné roviny plochy k ploše $z = 2x^2 + 3y^3$, která je rovnoběžná s rovinou $4x - 6y + z = 0$.
6. Určete rovnici tečné roviny elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ rovnoběžné s rovinou $x - y + 2z = 0$.
7. Dokažte, že tečné roviny plochy $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = a, a > 0$, vytínají na souřadnicových osách úseky, jejichž součet je a^2.

3.6 Odpovědi na kontrolní otázky

1. soustavou souřadnicových křivek
2. jsou to $v-$ a u-křivky na sféře
3. pomocí tečných vektorů příslušných souřadnicových křivek v daném bodě
4. normála je kolmá na tečnou rovinu
5. jedná se o ortonormalizovaný repér $\{\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \vec{m}\}$

3.7 Výsledky

1. a) u-křivky: kružnice, v-křivky: přímky (tzv. površky); b) u-křivky: přímky, v-křivky: šroubovice nebo osa z pro $u = 0$
2. a) $-x + 2y - z + 2 = 0$, b) $2x + 2y + z + 2 = 0$, c) $3x + z = 0$
3. uvedeny jsou příslušné normálové vektory: a) (6, 2, -1), b) (-3, 6, -2)
4. nechť je dána plocha $\mathcal{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$; derivováním této rovnice postupně podle proměnných u, v odvodíme soustavu $(\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z) \cdot \vec{p}_i = 0$, odkud již plyne tvrzení
5. bod dotyku (-1; 1; 5), tečná rovina: $4x - 6y + z + 5 = 0$
6. $2x - 2y + 4z = \pm\sqrt{22}$
7. návod: určete rovnici tečné roviny v obecném bodě dané plochy a poté ji převeďte na úsekový tvar

Poznámky:

Kapitola 4

První kvadratická forma plochy

V následující kapitole prohloubíme poznatky o tečných vektorech na ploše a zavedeme aparát, který nám umožní na ploše řešit řadu metrických úloh (odchylky, délky křivek, plošné obsahy).

Významnou charakteristikou ploch je jejich první kvadratická forma. V této kapitole ukážeme, jak ji lze využít pro řešení řady praktických úloh. Dále se podíváme na to, jak lze diferenciální geometrii využít v dalších oborech, konkrétně v kartografii. Hned v úvodu poznamenejme, že bude velmi hojně využívána Einsteinova sumační konvence.

Po prostudování této kapitoly dokážete:

- vypočítat skalární součin vektorů na ploše
- definovat a určit první kvadratickou formu plochy,
- popsat vlastnosti první kvadratické formy plochy,
- aplikovat první kvadratickou formu plochy při řešení úloh.

kontravariantní souřadnice; první kvadratická forma plochy; diskriminant kvadratické plochy; aplikace první kvadratické formy plochy (úhel dvou křivek, délka křivky na ploše, plošný obsah)

4.1 První kvadratická forma plochy

Předpokládejme, že vektorovou rovnicí $\vec{p} = \vec{p}(u^1, u^2)$, kde $(u^1, u^2) \in \mathbb{U}$, je popsána plocha S. V jejím libovolném bodě X sestrojme tečnou rovinu. Každý vektor lze v této rovině vyjádřit pomocí lineární kombinace vektorů $\vec{p}_1, \vec{p}_2$. Uvažujme tedy libovolné dva vektory $\vec{u}, \vec{v}$ ze zaměření tečné roviny. Platí pro ně vztahy

$$\vec{u} = u^i \vec{p}_i,$$
$$\vec{v} = v^j \vec{p}_j.$$

Značení indexů (i, j) je voleno pro přehlednost. Čísla u^i, v^j se nazývají *kontravariantní souřadnice* vektorů $\vec{u}, \vec{v}$. Pro skalární součin vektorů na ploše tak dostáváme

$$\vec{u}\vec{v} = u^i v^j \vec{p}_i \vec{p}_j.$$

Skalární součin vektorů $\vec{p}_i\vec{p}_j$ je zvykem označovat symbolem g_{ij}. Výše uvedený vztah tak získává jednodušší zápis

$$\vec{u}\vec{v} = g_{ij}u^i v^j.$$

Nyní lze přistoupit k definici první kvadratické formy plochy.

Definice 4.1.1 *První kvadratickou formou plochy* rozumíme výraz

$$I = g_{ij}du^i du^j.$$

Funkce g_{ij} se nazývají *koeficienty první kvadratické formy plochy.*

smallskip

Jak bylo zmíněno v úvodu, při zápisu je použita sumační konvence, proto pro vyšší názornost vztah pro první kvadratickou plochu rozepíšeme. Uvědomme si, že se ve vzorci objevují celkem dva indexy splňující podmínky pro zjednodušený zápis sumační konvencí, proto postupně dostáváme:

$$I = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} g_{ij}du^i du^j = \sum_{i=1}^{2}(g_{i1}du^i du^1 + g_{i2}du^i du^2) =$$

$$= g_{11}du^1du^1 + g_{12}du^1du^2 + g_{21}du^2du^1 + g_{22}du^2du^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2.$$

Někteří autoři zavádí pojem *diskriminantu* první kvadratické formy. Rozumíme jím hodnotu $D = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$.

V následujících větách shrneme vlastnosti první kvadratické formy plochy, důkazy lze nalézt např. v [4].

Věta 4.1.1 *Pro první kvadratickou plochu platí vztah* $I = (d\vec{p})^2$.

Věta 4.1.2 *První kvadratická forma plochy nezávisí na volbě souřadnic.*

Věta 4.1.3 *První kvadratická forma plochy je pozitivně definitní kvadratickou formou.*

Poslední věta plyne z významného vztahu $|\vec{p}_1 \times \vec{p}_2| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$.

4.2 Užití první kvadratické formy plochy

Využití první kvadratické formy při řešení úloh je velmi široké. Zahrnuje jednak výpočty délky křivky na ploše, úhlů mezi křivkami a plošného obsahu plochy.

A) délka křivky na ploše

Návod na výpočet délky křivky na ploše dává následující věta:

Věta 4.2.1 *Nechť je na ploše S popsané vektorovou rovnicí $\vec{p} = \vec{p}(u^1, u^2)$ dána křivka $l : u^i = u^i(t)$. Pro délku této křivky mezi body $Y(t_0), Y(t), t_0 < t$, platí*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Uvedený vzorec můžeme interpretovat i fyzikálně. Vyjadřuje dráhu pohybujícího se bodu na ploše S za čas t. Z této vlastnosti první kvadratické formy plochy vyplývá, že se jedná o metrickou formu plochy, umožňuje nám na ploše měřit.

Metrika daná pozitivně definitní kvadratickou formou se nazývá *Riemannova metrika*. Plocha opatřená Riemannovou metrikou g pak tvoří *Riemannův prostor* a geometrie na této ploše se nazývá *Riemannova geometrie*.

B) úhel dvou křivek

Nejprve je třeba pojem úhlu dvou křivek na ploše zavést.

Definice 4.2.1 *Úhlem křivek* plochy S, které prochází společným bodem X plochy, nazýváme úhel tečen sestrojených k těmto křivkám v bodě X.

Věta 4.2.2 *Nechť a^i, b^j jsou kontravariantní souřadnice tečných vektorů dvou křivek plochy S, které prochází společným bodem X plochy. Pro úhel φ těchto křivek platí vztah*

$$\cos\varphi = \frac{g_{ij}a^i b^j}{\sqrt{g_{kl}a^k a^l} \cdot \sqrt{g_{mn}b^m b^n}}.$$

Pro souřadnicové křivky se vztah dá zjednodušit.

Věta 4.2.3 *Pro úhel φ souřadnicových křivek ve společném bodě X plochy platí*

$$\cos\varphi = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}}}.$$

Se znalostí úhlu křivek můžeme také zavést ortogonální souřadnicovou síť zmiňovanou v předchozí kapitole.

Definice 4.2.2 Řekneme, že souřadnicové křivky tvoří *ortogonální síť*, jestliže se v každém bodě plochy protínají kolmo.

Kritérium pro rozhodování o ortogonalitě souřadnicové sítě poskytuje následující věta.

Věta 4.2.4 *Souřadnicové křivky tvoří na ploše ortogonální síť právě tehdy, když je*

$$g_{12} = 0.$$

C) plošný obsah

Poslední typ úloh, k nimž lze využít první kvadratickou formu plochy, je výpočet obsahu ploch.

Věta 4.2.5 *Obsah S plochy je dán vzorcem* $S = \iint_\Omega \sqrt{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2}\, du^1 du^2$.

Věta 4.2.6 *Obsah S plochy při explicitním vyjádření $z = f(x, y)$ je dán vzorcem*

$$S = \iint_\Omega \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy,$$

kde f_i znamená parciální derivaci funkce f dle proměnné i.

Na tomto místě stručně pohovořme o zobrazeních mezi plochami. Výchozím pojmem bude *difeomorfismus.*

Definice 4.2.3 Nechť φ je prosté zobrazení mezi plochami v $\mathbb{E}_3$. Zobrazení φ se nazývá *difeomorfismem*, jestliže φ a φ^{-1} jsou diferencovatelná zobrazení.

Pro další úvahy předpokládejme, že plochy jsou shodně parametrizované, tj. odpovídající si body mají shodné křivočaré souřadnice. Za této podmínky dále zkoumejme vlastnosti difeomorfismů.

Definice 4.2.4 Difeomorfismus φ je *izometrií*, jestliže zachovává délky všech křivek.

Lze dokázat, že kritériem, podle něhož rozhodneme, zda zobrazení je či není izometrií, je rovnost kvadratických forem ploch, mezi nimiž izometrii uvažujeme, tj. platí $g = \overline{g}$. Speciálním typem izometrií je *rozvinutí.*

Definice 4.2.5 Plocha se nazývá *rozvinutelná*, jestliže existuje izometrie dané plochy na rovinu nebo její část.

Na základě této definice lze snadno ukázat, že sféra není rozvinutelnou plochou. Proto pro zobrazení v kartografii používáme následující postup - sféru zobrazíme do rozvinutelné plochy, kterou poté i s obrazem zobrazíme do roviny. Dle typu použité rozvinutelné plochy pak rozlišujeme zobrazení azimutální, válcové či kuželové.

Definice 4.2.6 Difeomorfismus φ se nazývá *konformním zobrazením*, zachovává-li velikosti úhlů všech dvojic křivek.

Praktickým kritériem je v tomto případě úměrnost prvních kvadratických forem daných ploch, tj. existuje reálná funkce ρ na $\mathbb{U}$ taková, že $g = \rho\overline{g}$.

Zajímavým faktem je, že libovolná plocha je *lokálně konformně Eukleidova*, tj. na každé ploše lokálně existuje soustava souřadnic, ve které

$$I = \rho(u^1, u^2) \cdot \left((du^1)^2 + (du^2)^2\right).$$

Z toho např. plyne, že lokálně můžeme na ploše zavést ortonormální soustavu souřadnic.

Definice 4.2.7 Difeomorfismus φ se nazývá *plochojevným zobrazením*, jestliže zachovává plošný obsah každé části plochy.

Kritériem je pro plochojevná zobrazení rovnost diskriminantů prvních kvadratických forem příslušných ploch.

4.3 Řešené příklady

Příklad 4.3.1 Zapište první kvadratickou formu plochy $p(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 0)$. O jakou plochu se jedná?

Řešení:

Jedná se o rovinu. Následující příklad vyřešíme podrobně. Nejprve vypočteme vektory $\vec{p}_1, \vec{p}_2$. Parciálním derivováním dostáváme postupně:

$$\vec{p}_1 = (\cos v, \sin v, 0); \ \vec{p}_2 = (-u \sin v, u \cos v, 0).$$

Nyní můžeme přejít k výpočtu koeficientům první kvadratické formy:

$$g_{11} = \vec{p_1} \cdot \vec{p_1} = (\cos v, \sin v, 0) \cdot (\cos v, \sin v, 0) = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$g_{12} = \vec{p_1} \cdot \vec{p_2} = (\cos v, \sin v, 0) \cdot (-u \sin v, u \cos v, 0) = -u \cos v \sin v + u \sin v \cos v = 0,$$

$$g_{22} = \vec{p_2} \cdot \vec{p_2} = (-u \sin v, u \cos v, 0) \cdot (-u \sin v, u \cos v, 0) = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2.$$

Celkově pak pro první kvadratickou formu uvažované roviny plyne

$$I = (du^1)^2 + u^2(du^2)^2.$$

Příklad 4.3.2 Zapište první kvadratickou formu plochy hlavních normál křivky $\vec{y}(s)$.

Řešení:

Ze zadání vyplývá, že se jedná o plochu přímkovou - řídící křivkou je uvažovaná křivka $\vec{y}(s)$ a vektorem pak $\vec{n}(s)$. S ohledem na výsledky uvedené v první kapitole můžeme rovnici plochy psát ve tvaru $\vec{p}(s,u) = \vec{y}(s) + u\vec{n}(s)$. Dále by si měl čtenář povšimnout, že řídící křivka má za parametr oblouk, proto pro další úpravy využijeme Frenetových vzorců známých z teorie křivek. Následující postup je pak v souladu s předchozím příkladem. Nejprve vypočteme parciální derivace:

$$\vec{p_1} = \vec{y}'(s) + u\vec{n}'(s) = \vec{t}(s) + u(-\kappa\vec{t}(s) + \tau\vec{b}(s)) = (1 - u\kappa)\vec{t}(s) + u\tau\vec{b}(s);$$

$$\vec{p_2} = \vec{n}(s).$$

Dále určíme koeficienty první kvadratické formy (uvědomme si, že $\vec{t}(s) \perp \vec{n}(s)$, analogicky pro zbývající dvojice vektorů Frenetova repéru):

$$g_{11} = \Big((1 - u\kappa)\vec{t}(s) + u\tau\vec{b}(s)\Big) \cdot \Big((1 - u\kappa)\vec{t}(s) + u\tau\vec{b}(s)\Big) =$$

$$= (1 - u\kappa)^2\vec{t}(s)\vec{t}(s) + 2\tau(1 - u\kappa)\vec{t}(s)\vec{b}(s) + u^2\tau^2\vec{b}(s)\vec{b}(s) = (1 - u\kappa)^2 + u^2\tau^2,$$

$$g_{12} = \Big((1 - u\kappa)\vec{t}(s) + u\tau\vec{b}(s)\Big) \cdot \vec{n}(s) = (1 - u\kappa)\vec{t}(s)\vec{n}(s) + u\tau\vec{b}(s)\vec{n}(s) = 0,$$

$$g_{22} = \vec{n}(s) \cdot \vec{n}(s) = 1.$$

Závěrem lze první kvadratickou formu dané plochy psát ve tvaru

$$I = ((1 - u\kappa)^2 + u^2\tau^2)(ds)^2 + (du)^2.$$

Příklad 4.3.3 Určete délku křivky $u(t) = t, v(t) = 2t, t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, na ploše S, jejíž první kvadratická forma má tvar $I = (du)^2 + \frac{1}{4}\cos v (dv)^2$.

Řešení:

Postupovat budeme podle věty 4.2.1. Aplikací daného vzorce (za g_{ij} dosadíme koeficienty z dané kvadratické formy, za diferenciály pak derivace souřadnicových funkcí křivky dle proměnné t) postupně dostáváme:

$$s(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot \cos 2t \cdot 2^2}\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos 2t}\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 t}\ dt =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\ dt = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\ dt = \sqrt{2}.$$

Během výpočtu byl použit goniometrický vzorec pro dvojnásobný úhel a absolutní hodnotu jsme odstranili s ohledem na integrační obor.

Příklad 4.3.4 Jaký úhel svírají křivky $C_1 : u + v = 0, C_2 : u - v = 0$ na ploše s první kvadratickou formou $I = (du)^2 + (4 + u^2)(dv)^2$?

Řešení:

Úhlem křivek z definice rozumíme úhel, který svírají tečné vektory křivek ve společném bodě. Odtud plyne postup - určíme společné body a tečné vektory křivek, dále první kvadratickou formu plochy a k určení úhlu pak použijeme vzorec z věty 4.2.2. Pro společné body křivek podle zadání dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} u + v &= 0 \\ u - v &= 0, \end{aligned}$$

které vyhovuje bod $A[0; 0]$. Z rovnic křivek snadno odvodíme jejich parametrické vyjádření $C_1 : g(t) = (t; -t), C_2 : h(t) = (t, t)$, pro tečné vektory pak derivací dostaneme $g'(t) = (1; -1), h'(t) = (1; 1)$. Nyní zbývá tedy určit jednotlivé komponenty do vzorce z věty 4.2.2. Pro výraz v čitateli výpočet rozepíšeme podrobně, jmenovatel získáme analogicky.

$$g_{ij}a^i b^j = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g_{ij}a^i b^j = g_{11}a^1 b^1 + g_{21}a^2 b^1 + g_{12}a^1 b^2 + g_{22}a^2 b^2 =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 1 + (4 + 0^2) \cdot (-1) \cdot 1 = 1 - 4 = -3,$$

$$g_{kl}a^k a^l = 5, g_{mn}b^m b^n = 5.$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{-3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \varphi = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$$

Příklad 4.3.5 Vypočtěte obsah křivočarého čtyřúhelníka na ploše dané bodovou funkcí $p(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$ omezeného křivkami $u = 0, u = 1, v = 0,$
$v = a.$

Řešení:

Pro výpočet použijeme vzorec z věty 4.2.5. Ještě si ujasněme, že hraniční křivky nám určují obor integrace, v tomto případě jde o množinu $\langle 0; 1\rangle \times \langle 0; a\rangle$. Vypočítejme potřebné komponenty:

$$\vec{p_1} = (-v \sin u, \cos u, a), \vec{p_2} = (\cos u, \sin u, 0),$$

$$g_{11} = v^2 \sin^2 u + v^2 \cos^2 u + a^2 = v^2 + a^2,$$

$$g_{12} = -v \cos u \sin u + v \cos u \sin u + 0 = 0,$$

$$g_{22} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1.$$

Dosazením do zmiňovaného vzorce tak dostáváme

$$S = \int_0^1 \int_0^a \sqrt{1 \cdot (v^2 + a^2) - 0}\ dvdu = 1 \cdot \int_0^a \sqrt{v^2 + a^2}\ dv =$$

$$= \frac{1}{2}[v\sqrt{v^2 + a^2} + a^2 \ln(v + \sqrt{a^2 + v^2})]_0^a = \frac{1}{2}a^2[\sqrt{2} + ln(1 + \sqrt{2})].$$

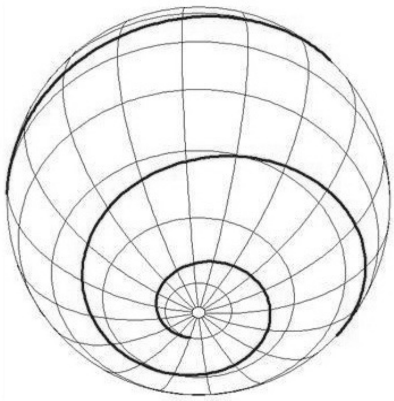
Při výpočtu integrálu je využita speciální substituce $v = |a| \sinh t$ (podrobný výpočet tohoto integrálu lze nalézt např. v [6; str. 122]).

4.4 Kontrolní otázky

1. Jakým způsobem získáme kontravariantní souřadnice vektoru?
2. Definujte první kvadratickou formu plochy.
3. Uveďte vlastnosti první kvadratické formy plochy.
4. Za jakých podmínek tvoří parametrické křivky ortogonální síť?
5. Jaké typy difeomorfismů rozlišujeme?

4.5 Cvičení

1. Dokažte věty 4.1.1, 4.2.3 a 4.2.4.
2. Vypočtěte koeficienty první kvadratické formy sféry dané bodovou funkcí
$$p(u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u).$$
3. Určete první kvadratickou formu plochy tečen křivky $\vec{y}(s)$.
4. Tvoří soustava souřadnicových křivek na sféře ortogonální síť?
5. Vypočtěte úhel křivek $C_1 : u + v = 0, C_2 : u^2 - v = 0$ ležících na ploše o rovnici $p(u, v) = (\cosh u \cos v; \cosh u \sin v; u), u \in \langle -2; 2\rangle, v \in \langle 0; 2\pi\rangle$.
6. Na ploše s první kvadratickou formou $I = a^2 \cosh^2 u[(du)^2 + (dv)^2]$ leží křivka $u = v$. Určete její délku pro $u \in \langle 0; \ln(1 + \sqrt{2})\rangle$.
7. Vypočtěte obsah plochy, která je částí rotačního paraboloidu daného rovnicí $p(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v^2)$, a je určena nerovnostmi $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \sqrt{2}$.
8. Je dána plocha s první kvadratickou plochou $I = (du)^2 + (u^2 + a^2)(dv)^2$. Na této ploše uvažujeme křivky o rovnicích $v = 1, u = \frac{1}{2}av^2, u = -\frac{1}{2}av^2$. Určete obvod křivočarého trojúhelníka, jenž je těmito křivkami určen.
9. Loxodromou rozumíme křivku, která protíná poledníky rotační plochy pod konstantním úhlem φ (viz obr. 3). Najděte loxodromy na sféře o rovnici
$$p(u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos v).$$



obr. 3: Loxodroma na sféře

10. Pomocí první kvadratické formy plochy odvoďte vzorec pro obsah pláště rotačního válce.

11. Dokažte, že válcová plocha je rozvinutelná.

12. Ja dána plocha S s první kvadratickou formou je ve tvaru $I = (du)^2 + \sinh^2 u(dv)^2$. Určetu délku křivky $u = v$ mezi jejími body $(u_1, ?)$ a $(u_2, ?)$.

13. Určete obsah plochy anuloidu daného rovnicí

$$p(u,v) = \Big((b + a\sin u)\cos v, (b + a\sin u)\sin v, a\cos u\Big),$$

kde $\mathbb{U} = \langle 0; 2\pi) \times \langle 0; 2\pi); a, b \in \mathbb{R}, a > b$.

4.6 Odpovědi na kontrolní otázky

1. vyjádřením ve tvaru lineární kombinace tečných vektorů paramerických křivek v daném bodě plochy

2. první kvadratickou formou rozumíme výraz $I = g_{ij}du^i du^j$

3. nezávisí na volbě soustavy souřadnic a jde o pozitivně definitní kvadratickou formu

4. pokud se v každém bodě plochy protínají kolmo

5. izometrie, konformní a plochojevné zobrazení

4.7 Výsledky

1. první tvrzení se odvodí přímým výpočtem a porovnáním s definicí první kvadratické formy; pro důkaz druhého vyjdeme z tvrzení věty 4.2.2 a zohledníme skutečnost, že se jedná o souřadnicové křivky; ve třetím případě pak jde o přímý důsledek definice 4.2.2 a věty 4.2.3

2. $g_{11} = r^2, g_{12} = 0, g_{22} = r^2 \sin^2 u$

3. $I = (1 + u^2\kappa^2)(ds)^2 + 2\ dsdu + (du)^2$; postupujeme jako v příkladu 4.3.2

4. ano, neboť $g_{12} = 0$ (viz úloha 2)

5. $\frac{\pi}{4}$; $\arccos \frac{3\sqrt{10}}{10}$

6. $\sqrt{2}a$

7. $\frac{13\pi}{3}$

8. $o = \frac{10}{3}a$

9. $v = \operatorname{tg}\varphi \ln|\operatorname{tg}\frac{u}{2}|+C$; řešte dle věty 4.2.3 - uvědomte si, že jednou křivkou je hledaná loxodroma, druhou poledník, čímž se uvažovaný vzorec značně zjednoduší; odvoďte z něj diferenciální rovnici hledané křivky, jejíž integrací dostanete výsledek

10. $2\pi rv$; vyjděte z rovnice $p(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v)$ a použijte větu 4.2.5, uvědomte si geometrický význam jednotlivých parametrů pro odvození integračního oboru

11. stačí dokázat, že má stejnou kvadratickou formu jako rovina

12. $\sinh u_2 - \sinh u_1$

13. $4\pi^2 ab$

Poznámky:

Kapitola 5

Druhá kvadratická forma plochy

Nyní se seznámíme s pojmy, které nám umožní zkoumat vztahy mezi křivostmi křivek, jež na ploše prochází společným bodem, a dále pak charakterizovat křivosti ploch, což bude náplň následující kapitoly.

Druhá kvadratická forma plochy nám umožní získat představu o „tvaru“ zkoumané plochy. Díky ní můžeme totiž klasifikovat body plochy na několik typů, z nichž každý má svůj geometrický význam.

Po prostudování této kapitoly dokážete:

- definovat druhou kvadratickou formu plochy a vypočítat její koeficienty,
- nalézt planární a sférické body na ploše,
- klasifikovat body na ploše.

druhá kvadratická forma; planární bod; sférický bod; eliptický bod; parabolický bod; hyperbolický bod

5.1 Druhá kvadratická forma plochy

Definice 5.1.1 Nechť je dána plocha S třídy C^2 o rovnici $p = p(u^1, u^2)$. *Druhou kvadratickou formou plochy* S pak rozumíme výraz

$$II = b_{ij} du^i du^j,$$

kde $b_{ij} = \vec{p}_{ij} \cdot \vec{m}$ jsou *koeficienty druhé kvadratické formy plochy* S.

Pro upřesnění ještě doplňme, že třída C^2 znamená, že daná bodová funkce, jíž je plocha určena, je spojitá i se svými derivacemi až do řádu 2 včetně. Vektor $\vec{p}_{ij}$ je definován vztahem

$$\vec{p}_{ij} = \frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial u^i \partial u^j}$$

a $\vec{m}$ je jednotkový vektor normály plochy (viz kapitola 3).

Po rozepsání lze druhou kvadratickou formu psát ve tvaru

$$II = b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12} du^1 du^2 + b_{22}(du^2)^2.$$

Dosadíme-li si za koeficienty patřičné výrazy, zjistíme, že druhá kvadratická forma je hodnotou skalárního součinu druhého diferenciálu funkce p a vektoru $\vec{m}$. Snadno se lze přesvědčit o pravdivosti následující věty:

Věta 5.1.1 *Pro koeficienty druhé kvadratické formy platí následující vztahy:*

1) $b_{ij} = b_{ji}$

2) $b_{ij} = \dfrac{(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_{ij})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}$

3) $b_{ij} = -\vec{p}_i \cdot \vec{m}_j$*, kde* $\vec{m}_j = \frac{\partial \vec{m}}{\partial u^j}$*.*

Definice 5.1.2 Bod P na ploše S, pro nějž jsou všechny tři koeficienty druhé kvadratické formy plochy rovny současně nule, se nazývá *planární bod.*

Lze ukázat, že planárnost bodu je čistě vlastnost tohoto bodu, která nezávisí na použité parametrizaci (viz např. [8]). Význam planárních bodů spočívá ve skutečnosti, že plochy se v okolí těchto bodů chovají jako roviny. V podstatě můžeme říct, že hrají stejnou úlohu jako inflexní body u křivek (viz [3]).

Definice 5.1.3 Bod P na ploše S, pro nějž je druhá kvadratická forma úměrná první kvadratické formě (s koeficientem úměrnosti různým od nuly), nazýváme *sférický (kruhový) bod.*

Podobně jako v případě planárních bodů platí, že tato vlastnost bodu nezávisí na parametrizaci plochy a že oblast kruhových bodů je částí sféry.

Závěrem poznamenejme, že známe-li u plochy její první a druhou kvadratickou formu, pak je jimi tato plocha jednoznačně určena. Podrobněji pojednáme o této skutečnosti v sedmé kapitole.

5.2 Klasifikace bodů na ploše

Podobně jako v případě první kvadratické formy můžeme zavést pojem *diskriminantu* druhé kvadratické formy plochy. Označme ho W. Pro jeho výpočet pak platí vztah

$$W = b_{11}b_{22} - b_{12}^2.$$

V porovnání s diskriminantem první kvadratické formy plochy, který je vždy kladný, nabývá diskriminant druhé kvadratické formy plochy i hodnot nulových a záporných.

Definice 5.2.1 Regulární bod P plochy S, v němž je

- $W > 0$, se nazývá *eliptický,*
- $W = 0$, se nazývá *parabolický,*
- $W < 0$, se nazývá *hyperbolický*[1].

Kruhové body považujeme za speciální případ bodů eliptických. Někteří autoři považují planární body za body parabolické, jiní za limitní případ bodů kruhových. V tomto textu, nebude-li řečeno jinak, planární body z našich úvah vyloučíme.

[1] Jak zjistíme později, můžeme ke klasifikaci bodů využít i hlavní křivosti.

Věta 5.2.1 *Je-li P bod eliptický (hyperbolický), pak existuje okolí bodu P, jehož všechny body jsou eliptické (hyperbolické).*

Věta 5.2.2 *Leží-li na ploše bod eliptický a bod hyperbolický, leží na této ploše nutně i bod parabolický.*

Obecně můžeme říci, že křivky parabolických bodů od sebe oddělují oblasti bodů eliptických a hyperbolických. Závěrem uveďme větu, která charakterizuje geometrický význam jednotlivých typů bodů.

Věta 5.2.3 *Nechť P je regulární bod plochy S, který není bodem planárním, π tečná rovina a O okolí bodu P. Jestliže bod P je:*

- *eliptický, pak leží všechny body z O v témže poloprostoru určeného rovinou π (ta má s plochou S z množiny O společný jen jediný bod - a to P),*
- *hyperbolický, pak existují v množině O body, které leží v jednom poloprostoru určeném rovinou π, i body ležící v prostoru opačném (rovina π má s plochou S společné ještě další body z O kromě P)*
- *parabolický, pak mohou nastat obě možnosti popsané v a) i b).*

5.3 Řešené příklady

V řešených příkladech použijeme kromě obvyklého i následující značení

$$\vec{p}_{11} = \frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial (u^1)^2},\ \vec{p}_{12} = \frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial u^1 \partial u^2},\ \vec{p}_{22} = \frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial (u^2)^2}.$$

Příklad 5.3.1 Určete druhou kvadratickou formu plochy $p(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$.

Řešení:

Pro určení druhé kvadratické formy plochy stačí vypočítat její koeficienty, k tomu nejprve musíme získat příslušné vektory $\vec{p}_{ij}$ a vektor normály $\vec{m}$. Postupným derivováním získáváme:

$$\vec{p}_1 = (1, 0, 2u),\ \vec{p}_2 = (0, 1, -2v),$$

$$\vec{p}_{11} = (0, 0, 2),\ \vec{p}_{12} = (0, 0, 0),\ \vec{p}_{22} = (0, 0, -2).$$

Vektor $\vec{m}$ normály plochy dostaneme pomocí vektorového součinu, který následně normalizujeme. Platí tedy:

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (-2u, 2v, 1) \Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}(-2u, 2v, 1).$$

Odtud pro koeficienty druhé kvadratické plochy plyne

$$b_{11} = \vec{p}_{11} \cdot \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}(0 \cdot (-2u) + 0 \cdot (2v) + 2 \cdot 1) = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}},$$

$$b_{12} = \vec{p}_{12} \cdot \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}(0 \cdot (-2u) + 0 \cdot (2v) + 0 \cdot 1) = 0,$$

$$b_{22} = \vec{p}_{22} \cdot \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}(0 \cdot (-2u) + 0 \cdot (2v) + (-2) \cdot 1) = -\frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}.$$

Celkově tak dostáváme $II = \dfrac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}[(du)^2 - (dv)^2]$.

Příklad 5.3.2 Proveďte pomocí druhé kvadratické formy klasifikaci bodů plochy dané rovnicí $p(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \cos u)$, $u \in \langle 0; 2\pi)$, $v \in \langle 0; 2\pi)$.

Řešení:

Postup pro klasifikaci bodů plyne z definice 5.2.1. Nejprve určíme druhou kvadratickou formu uvažované plochy, vypočteme její diskriminant a poté provedeme diskuzi. Potřebné vektory mají souřadnice:

$$\vec{p}_1 = (\cos v, \sin v, -\sin u), \ \vec{p}_2 = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

$$\vec{p}_{11} = (0, 0, -\cos u), \ \vec{p}_{12} = (-\sin v, \cos v, 0), \ \vec{p}_{22} = (-u \cos v, -u \sin v, 0),$$

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & -\sin u \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (u \sin u \cos v, u \sin u \sin v, u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{(u \sin u \cos v, u \sin u \sin v, u)}{|u|\sqrt{\sin^2 u + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 u + 1}}(\sin u \cos v, \sin u \sin v, 1).$$

Pro odstranění absolutní hodnoty jsme si uvědomili obor proměnné u. Nyní vypočítejme koeficienty druhé kvadratické formy:

$$b_{11} = \vec{p}_{11} \cdot \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 u + 1}}(0 \cdot \sin u \cos v + 0 \cdot \sin u \sin v + 1 \cdot (-\cos u)) = -\frac{\cos u}{\sqrt{\sin^2 u + 1}},$$

$$b_{12} = \vec{p}_{12} \cdot \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 u + 1}}(-\sin v \sin u \cos v + \sin u \sin v \cos v + 0 = 0,$$

$$b_{22} = \vec{p}_{22} \cdot \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 u + 1}}(u \sin u \cos^2 v - u \sin^2 v \sin u + 0) = -\frac{\sin u}{\sqrt{\sin^2 u + 1}}.$$

Pro diskriminant druhé kvadratické formy platí

$$W = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \frac{\cos u \cdot \sin u}{\sqrt{\sin^2 u + 1}}.$$

Vidíme, že jmenovatel je vždy nezáporný, proto znaménko diskriminantu závisí pouze na čitateli. Dle definice 4.4 tak dostáváme:

- pro $u \in (0; \frac{\pi}{2}) \cup (\pi; \frac{3\pi}{2})$ je $W > 0 \Rightarrow$ jde o body eliptické,
- pro $u \in (\frac{\pi}{2}; \pi) \cup (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$ je $W < 0 \Rightarrow$ jde o body hyperbolické,
- pro $u \in \{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\}$ je $W = 0 \Rightarrow$ jde o body parabolické.

Příklad 5.3.3 Dokažte, že v kruhovém bodě plochy je diskriminant druhé kvadratické formy plochy kladný.

Řešení:

Nechť P je kruhový bod plochy S. V tomto bodě platí pro formy plochy podle definice 5.1.3. vztah $II = k \cdot I$, kde $k \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, proto pro diskriminant druhé kvadratické formy dostáváme

$$W = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = kg_{11} \cdot kg_{22} - (k \cdot g_{12}^2) = k^2 \cdot (g_{11}g_{22} - g_{12}^2) = k^2 \cdot D,$$

kde D je diskriminant první kvadratické formy, o němž víme, že je vždy kladný. Odtud pak plyne tvrzení dokazované věty.

Příklad 5.3.4 Ukažte, že na ploše $z = -xy$ neexistují kruhové body.

Řešení:

Pro uvažovanou plochu zvolme parametrizaci $p(u, v) = (u, v, -uv)$. Vypočítejme vektory potřebné pro druhou kvadratickou formu:

$$\vec{p_1} = (1, 0, v),\ \vec{p_2} = (0, 1, -u),$$

$$\vec{p}_{11} = (0, 0, 0),\ \vec{p}_{12} = (0, 0, -1),\ \vec{p}_{22} = (0, 0, 0),$$

$$\vec{p_1} \times \vec{p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -v \\ 0 & 1 & -u \end{vmatrix} = (v, u, 1) \Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}(u, v, 1).$$

Odtud snadno určíme hledané koeficienty:

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}(0, 0, 0)(u, v, 1) = 0 = b_{22},$$

$$b_{12} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}(0, 0, -1)(u, v, 1) = \frac{-1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}.$$

Tudíž diskriminant druhé kvadratické formy má tvar

$$W = 0 - \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}},$$

neboli $W < 0$, proto s ohledem na předchozí příklad jsme s řešením hotovi.

Příklad 5.3.5 Nalezněte planární body na ploše $z = x^3 + y^3$.

Řešení:

Pro danou plochu zvolme parametrizaci $p(u, v) = (u, v, u^3 + v^3)$. Připomeňme, že podle definice 5.1.2 je planárním bodem takový bod plochy, pro který jsou všechny tři koeficienty druhé kvadratické formy nulové. Pojďme tedy zmiňované koeficienty vypočítat - potřebné vektory mají souřadnice:

$$\vec{p_1} = (1, 0, 3u^2),\ \vec{p_2} = (0, 1, 3v^2),$$

$$\vec{p}_{11} = (0, 0, 6u),\ \vec{p}_{12} = (0, 0, 0),\ \vec{p}_{22} = (0, 0, 6v),$$

$$\vec{p_1} \times \vec{p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3u^2 \\ 0 & 1 & 3v^2 \end{vmatrix} = (-3u^2, -3v^2, 1) \Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{9u^4 + 9v^4 + 1}}(-3u^2, -3v^2, 1).$$

Pro koeficienty pak platí:

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{9u^4 + 9v^4 + 1}}(0 \cdot (-3u^2) + 0 \cdot (-3v^2) + 1 \cdot 6u) = 0 = \frac{6u}{\sqrt{9u^4 + 9v^4 + 1}}$$

$$b_{12} = \frac{1}{\sqrt{9u^4 + 9v^4 + 1}}(0, 0, 0)(-3u^2, -3v^2, 1) = 0,$$

$$b_{22} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}(0 \cdot (-3u^2) + 0 \cdot (-3v^2) + 1 \cdot 6v) = \frac{6v}{\sqrt{9u^4 + 9v^4 + 1}}.$$

Položíme-li podle definice 5.1.2 koeficienty druhé kvadratické formy rovny nule, dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 6u &= 0 \\ 6v &= 0, \end{aligned}$$

které vyhovuje jediný bod $A[0; 0]$, jenž je hledaným řešením příkladu.

5.4 Kontrolní otázky

1. Definujte druhou kvadratickou formu plochy.
2. Jaký je vztah mezi planárními a sférickými body?
3. Uveďte příklad plochy, na které neexistuje žádný planární bod.
4. K čemu využíváme diskriminant druhé kvadratické formy plochy?
5. Popište geometrický význam eliptických bodů vzhledem k tečné rovině.

5.5 Cvičení

1. Vypočtěte druhou kvadratickou formu šroubového konoidu daného vektorovou rovnicí $p(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$.
2. Určete explicitní vyjádření a klasifikujte body hyperbolického paraboloidu daného rovnicí $p(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$.
3. Zapište první a druhou kvadratickou formu plochy $p(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$. Plochu pojmenujte a klasifikujte její body.
4. Určete rovnici tečné roviny v libovolném parabolickém bodu plochy dané rovnicí $p(u, v) = (u, v, u^2 + v^3)$.
5. Ukažte, že rovina obsahuje pouze planární body.
6. Dokažte, že kulová plocha obsahuje pouze sférické body. Vypočtěte koeficient úměrnosti forem.
7. Ověřte, že na ploše $z = a^2x^2 - b^2y^2$ neexistují kruhové body.
8. Nalezněte planární body plochy $z = \varphi(x, y)$.

5.6 Odpovědi na kontrolní otázky

1. druhou kvadratickou formou plochy rozumíme výraz $II = b_{ij}du^i du^j$
2. planární body jsou limitní podobou bodů sférických
3. obecně jde o plochy druhého stupně - sféra, elipsoid, jednodílný a dvojdílný hyperboloid, válcová a kuželová plocha, eliptický a hyperbolický paraboloid, anuloid, katenoid a další
4. pro klasifikaci bodů plochy
5. je-li P eliptický bod plochy S, pak leží všechny body z okolí bodu P v témže poloprostoru určeného tečnou rovinou sestrojenou v bodu P k ploše S

5.7 Výsledky

1. $II = \dfrac{2dudv}{u}$
2. $x^2 - y^2 = z$, každý bod plochy je bodem hyperbolickým
3. $I = (du)^2 + (dv)^2, II = -(du)^2$, jedná se o plochu válcovou, všechny body plochy jsou body parabolické
4. parabolické body leží na křivce $y(u) = p(u, 0)$, $2ux + z + u^2 = 0$
5. postupujeme ověřením podmínky z definice 5.1.2 pro vhodnou parametrizaci roviny
6. postupujeme ověřením podmínky z definice 5.1.3 pro vhodnou parametrizaci kulové plochy, $k = \frac{1}{r}$
7. postupujeme analogicky jako v příkladu 5.3.4
8. jedná se o takové body, v nichž pro parciální derivace platí $\varphi_{xx} = \varphi_{xy} = \varphi_{yy}$

Poznámky:

Kapitola 6

Křivosti a význačné směry na ploše

Hovořit budeme o dalších aplikacích první a druhé kvadratické formy, volně tedy navazujeme na předchozí dvě kapitoly. Uvedeme jednotlivé typy křivostí na plochách a vztahy pro jejich výpočet.

Budeme pokračovat ve vyšetřování chování plochy na okolí svého bodu. Problematiku převedeme na zkoumání křivek na ploše procházejících tímto bodem a jejich křivostí. Završením této části pak bude Gaussova *Theorem Egregium* - „slavná věta“.

Po prostudování této kapitoly dokážete:

- charakterizovat a vypočítat normálovou křivost,
- určovat asymptotické směry a křivky na plochách,
- určovat hlavní směry a křivky na plochách,
- definovat, charakterizovat geodetické křivky a hledat je na plochách,
- definovat a vypočítat hlavní, Gaussovu a střední křivost plochy.

normálová křivost; normálový řez; asymtotický směr; asymptotická křivka; hlavní směr; hlavní křivka; hlavní křivost; geodetická křivka; geodetická křivost; Gaussova křivost; střední křivost; Eulerův vzorec; rozvinutelná plocha; minimální plocha

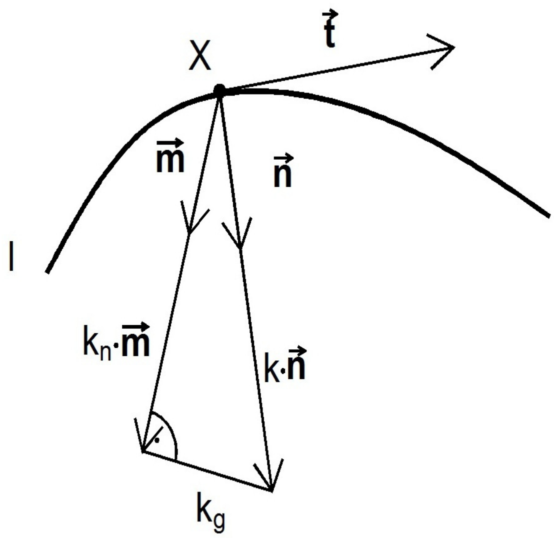
6.1 Normálová křivost, asymptotické a hlavní směry

Definice 6.1.1 Na ploše S o rovnici $p = p(u^2, u^2)$ uvažujeme křivku l, která prochází bodem X dané plochy a je popsána rovnicí $y(s) = p(u^1(s), u^2(s))$. Potom číslo

$$k_n = \vec{y}'' \cdot \vec{m}$$

nazýváme *normálovou křivostí křivky l v bodě X.*

Normálová křivost (až na znaménko) vyjadřuje délku $\vec{y}''$ kolmo promítnutého do normály m plochy S (viz obr. 4).



obr. 4: Definice normálové křivosti

Věta 6.1.1 *Normálová křivost všech křivek, které leží na ploše a dotýkají se v bodě X společné tečny, je v tomto bodě stejná.*

Nyní zavedeme pojem normálového řezu, který nám umožní počítat normálovou křivost v praxi.

Definice 6.1.2 Křivka l, jež je řezem plochy S s rovinou, která prochází bodem X a jejíž zaměření obsahuje vektor tečny t křivky l a normály m plochy S, nazýváme *normálovým řezem* sestrojeným na ploše S v bodě X a ve směru určeném tečnou t.[1]

Věta 6.1.2 *Pro normálovou křivost k_n ve směru vektoru (du^1, du^2) v daném bodě X plochy S platí*

$$k_n = \frac{II}{I}$$

.

Tento vzorec je důsledkem *Meusnierova vzorce*. Nechť je na ploše dána křivka l. Označme k její křivost a φ odchylku mezi vektorem hlavní normály křivky a vektorem normály plochy (vše v daném bodě). Pak pro tečný vektor křivky l platí

$$k \cos \varphi = \frac{II}{I}.$$

Křivka zavedena v předchozí definici má tedy zajímavou vlastnost, absolutní hodnota její normálové křivosti odpovídá její flexi v daném bodě X. Tento výsledek můžeme snadno zdůvodnit. Vektor hlavní normály $\vec{n}$ křivky musí ležet v rovině řezu a musí být kolmý na zvolený tečný vektor, je proto buď $\vec{n} = -\vec{m}$ nebo $\vec{n} = \vec{m}$, tj. $\varphi = 0$ nebo $\varphi = \pi$. Odtud s ohledem na Meusnierův vzorec plyne uvažované tvrzení.

Pomocí pojmu normálové křivosti můžeme zavést asymptotický směr.

[1]Uvědomme si, že při konstrukci normálového řezu tedy nejprve stanovíme zaměření roviny řezu, to je určeno vektorem normály plochy a libovolným nenulovým tečným vektorem plochy. Křivka, kterou získáme při řezu plochy danou rovinou, má pak proto za svůj tečný vektor zvolený tečný vektor plochy.

Definice 6.1.3 Tečný směr, v němž je normálová křivost nulová, se nazývá *směr asymptotický.*

Z této definice s ohledem na větu 6.1.2 plyne postup pro hledání asymptotických směrů - druhá kvadratická forma musí být nulová. Rozborem této rovnice dostaneme, že v planárních bodech je každý směr směrem asymptotickým, v hyperbolických bodech existují dva takové směry, v parabolických jeden a v eliptických bodech neexistuje žádný asymptotický směr.

Definice 6.1.4 Křivku l ležící na ploše S nazýváme *asymptotickou křivkou plochy* S, jestliže tečna sestrojená v libovolném bodě křivky l leží v asymptotickém směru.

Definice 6.1.5 Nechť k_n je normálová křivost v neasymptotickém směru v bodě X. Potom číslo $\frac{1}{|k_n|}$ nazýváme *poloměrem normálové křivosti* a bod $S_n = X + \frac{1}{k_n} \cdot \vec{m}$ *středem normálové křivosti* v daném směru.

Věta 6.1.3 *(Meusnierova věta): Sestrojme v bodě X plochy S oskulační kružnice ke všem křivkám, které leží na dané ploše S a dotýkají se v bodě X společné tečny t, jejíž směr není asymptotickým směrem plochy S. Potom středy těchto oskulačních kružnic leží na kružnici nad průměrem XS_n v rovině kolmé k dané společné tečně.*

Nyní můžeme definovat další význačný směr na ploše, a to směr hlavní.

Definice 6.1.6 Tečný směr plochy S v bodě X se nazývá *hlavní směr*, jestliže normálová křivost plochy určená v bodě X tímto směrem je extrémní. Normálová křivost v hlavním směru bodu X se nazývá *hlavní křivostí plochy.*

Platí, že v kruhových a planárních bodech je každý směr plochy směrem hlavním. V ostatních bodech jsou hlavní pouze dva navzájem kolmé směry (proto i hlavní křivosti jsou dvě, označme je k_1, k_2).

Věta 6.1.4 *Nenulový tečný vektor plochy S v bodě X o souřadnicích du^i leží v hlavním směru, právě když platí rovnost*

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Při výpočtu hlavních křivostí můžeme postupovat buď tak, že určíme hlavní směry, hledané křivosti pak přísluší těmto směrům, případně je můžeme získat výpočtem kořenů kvadratické rovnice s neznámou k, kterou si můžeme odvodit z definice hlavní křivosti. Tato rovnice má tvar

$$(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)k^2 - (g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11})k + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = 0. \qquad (*)$$

Definice 6.1.7 Křivku l na ploše nazveme *hlavní (křivoznačnou) křivkou*, jestliže tečna sestrojená v jejím libovolném bodě leží v hlavním směru plochy.

Každým bodem, který není planárním nebo sférickým bodem, prochází právě dvě hlavní křivky. Ortogonální soustava takových křivek pak tvoří *hlavní souřadnicovou síť*, jejím kritériem jsou pak rovnosti $g_{12} = 0$ a $b_{12} = 0$. Tyto podmínky čtenář jistě sám snadno odvodí.

k_g v obrázku 4 značí tzv. *geodetickou křivost* a geometricky vyjadřuje velikost vektoru $\vec{y}''$ kolmo promítnutého na vektor $\vec{b}$. Definovat ji můžeme pomocí vztahu

$$k_g = [\vec{m}, \vec{y}', \vec{y}''].$$

Geodetická křivost nám umožňuje na plochách určit význačnou skupinu křivek označovaných jako geodetiky.

Definice 6.1.8 *Geodetickou křivkou (geodetikou)* $y = y(s)$ *na ploše* S *rozumíme takovou křivku, v jejímž každém bobě je geodetická křivost rovna nule.*

Rozmyslíme-li si tuto definici podrobně, zjistíme, že daná křivka je křivkou geodetickou, je-li její každý bod bodem inflexním (tj. vektory $\vec{y}', \vec{y}''$ jsou lineárně závislé) nebo je v něm oskulační rovina křivky kolmá k tečné rovině plochy (tj. vektory $\vec{y}', \vec{y}'', \vec{m}$ jsou lineárně závislé). Z uvedené definice dále vyplývá, že vyjádření geodetických křivek je dáno rovnicí

$$[\vec{m}, \vec{y}', \vec{y}''] = 0.$$

Jejich význam charakterizuje následující věta.

Věta 6.1.5 *Jestliže mezi všemi křivkami, které na regulární ploše spojují dva body, leží křivka nejmenší délky, potom je tato křivka geodetickou křivkou.*

Dále lze dokázat následující větu, která uvádí vztah mezi geodetickými a hlavními křivkami.

Věta 6.1.6 *Je-li geodetická křivka rovinná, je hlavní křivkou.*

Jako příklad geodetických křivek můžeme zmínit *hlavní kružnice* na sféře. Jsou to takové kružnice, jejichž normála je současně normálou plochy. Lze prokázat, že jiné geodetické křivky se na sféře najít nedají (viz [2]). V kartografii se označují jako *ortodromy*, v námořnictví se pak nahrazují pomocí oblouků *loxodromy*. Plavba lodi po loxodromě umožnila udržovat stálý kurz.

6.2 Gaussova a střední křivost

Rovnici (*) zapíšeme ve tvaru

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

kde

$$\begin{aligned} K &= \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \\ H &= \frac{1}{2}\frac{g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \end{aligned}$$

Označíme-li k_1, k_2 kořeny této rovnice (víme již, že jde o hlavní křivosti plochy S v daném bodě X), snadno zjistíme pomocí Vietových vzorců, že pro doposud neznámé koeficienty K a H v dané rovnici platí vztahy

$$\begin{aligned} K &= k_1 k_2, \\ H &= \frac{k_1 + k_2}{2}. \end{aligned}$$

Definice 6.2.1 Hodnota K se nazývá *Gaussovou křivostí* a hodnota H *střední křivostí* plochy S v bodě X.

Nyní uveďme vztah, který dává do souvislosti hlavní křivosti s křivostí normálovou. Je znám pod názvem *Eulerova formule.*

Věta 6.2.1 *Označme k_n normálovou křivost v bodě X ve směru, jehož odchylka od hlavního směru, v němž má plocha křivost k_1, je φ. Potom platí Eulerova formule*

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi.$$

Pomocí Eulerovy formule lze snadno odvodit následující větu.

Věta 6.2.2 *Poloviční součet normálových křivostí vypočtených v bodě X plochy S ve dvou navzájem kolmých tečných směrech plochy S je roven střední křivosti plochy S v bodě X.*

Nyní přikročme ke Gaussově Theorem Egregium, tzv. „slavné větě“. Její důkaz považoval za jeden ze svých největších matematických úspěchů.

Věta 6.2.3 *(Theorem Egregium): Gaussovu křivost plochy lze vyjádřit pouze pomocí koeficientů první kvadratické formy plochy a jejich prvních a druhých parciálních derivací.*

Jeden z možných důkazů naleznete v následující kapitole. Význam věty spočívá v tom, že pokud rozvineme plochu na plochu (viz kapitola 4), pak v odpovídajících si bodech jsou si rovny Gaussovy křivosti. Z věty lze dále odvodit následující dva důsledky.

Věta 6.2.4 *Gaussova křivost K je ve všech bodech rozvinutelné plochy rovna nule.*

Tvrzení věty lze dokonce obrátit, dostáváme tak kritérium pro rozvinutelnost plochy. Jak jsme doposud vyšetřovali rozvinutelnost plochy? Lze ukázat, že kromě roviny existují pouze tři typy rozvinutelných ploch - obecné plochy válcové, obecé plochy kuželové, plochy tečen prostorových křivek a plochy, které vniknou „slepením“ předcházejících typů ploch.

Věta 6.2.5 *Gaussova křivost K je v eliptickém bodu plochy kladná, v parabolickém a planárním rovna nule a v hyperbolickém záporná.*

Tento důsledek lze využít jako další metodu pro klasifikaci bodů plochy. V závěru zaveďme pojem minimální plochy.

Definice 6.2.2 Plocha se nazývá *minimální*, právě když má střední křivost nulovou v každém bodě.

Minimální plochy obsahují s výjimkou roviny pouze hyperbolické body. Název vychází ze skutečnosti, že se tyto plochy vyznačují minimálním povrchem. Jako příklad můžeme uvést rovinu, katenoid nebo helikoid.

6.3 Řešené příklady

Příklad 6.3.1 Vypočtěte normálovou křivost paraboloidu daného bodovou funkcí

$$p(u, v) = (2u, 2v, au^2 + bv^2)$$

v počátku určenou vektorem (du, dv).

Řešení:

K výpočtu použijeme větu 6.1.2. Proto nejprve vypočítejme potřebné vektory pro určení koeficientů kvadratických forem dané plochy:

$$\vec{p}_1 = (2, 0, 2au),\ \vec{p}_2 = (0, 2, 2bv),$$

$$\vec{p}_{11} = (0, 0, 2a),\ \vec{p}_{12} = (0, 0, 0),\ \vec{p}_{22} = (0, 0, 2b),$$

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2au \\ 0 & 2 & 2bv \end{vmatrix} = (-4au, -4bv, 4) \Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{a^2u^2 + b^2v^2 + 1}}(-au, -bv, 1).$$

Známým postupem vypočteme koeficienty kvadratických forem:

$$g_{11} = 4 + 4a^2u^2,\ g_{12} = 4abuv,\ g_{22} = 4 + 4b^2v^2,$$

$$b_{11} = \frac{2a}{\sqrt{a^2u^2 + b^2v^2 + 1}},\ b_{12} = 0,\ b_{22} = \frac{2b}{\sqrt{a^2u^2 + b^2v^2 + 1}}.$$

Nyní dosaďme do zmiňovaného vzorce pro výpočet normálové křivosti (nezapomeňme, že výpočet uvažujeme pro počátek):

$$k_n = \frac{II}{I} = \frac{\frac{2}{\sqrt{a^2 \cdot 0 + b^2 \cdot 0 + 1}}[a(du)^2 + b(dv)^2]}{(4 + 4a^2 \cdot 0)(du)^2 + (2 \cdot 4 \cdot ab \cdot 0 \cdot 0)dudv + (4 + 4b^2 \cdot 0^2)(dv)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a(du)^2 + b(dv)^2}{(du)^2 + (dv)^2}.$$

Příklad 6.3.2 Vypočtěte podle definice normálovou křivost válcové plochy dané rovnicí $p(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ v bodě $A[1; 0; 0]$ ve směru tečny $u-$křivky. Určete rovnici křivky, která je normálovým řezem v uvažovaném bodě.

Řešení:

Nejprve stanovíme rovnici uvažované souřadnicové křivky. Ze zadání je patrné, že se jedná o kružnici, zohledníme-li bod, v němž situaci uvažujeme, je dána rovnicí

$$q(u) = (\cos u, \sin u, 0).$$

K výpočtu máme použít vzorec v definici 6.1.1, proto si vypočítejme vektor $\vec{q}''(u)$.

$$\vec{q}'(u) = (-\sin u, \cos u, 0) \Rightarrow \vec{q}''(u) = (-\cos u, -\sin u, 0)$$

Potřebujeme ještě vektor normály $\vec{m}$ válcové plochy

$$\vec{p}_1 = (-\sin u, \cos u, 0),\ \vec{p}_2 = (0; 0; 1),$$

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, \sin u, 0) = \vec{m}.$$

Nyní můžeme dosadit do vzorce (opět nezapomeneme, že máme zadaný konkrétní bod):

$$k_n = \vec{q}'' \cdot \vec{m} = (-1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) = -1.$$

Normálovým řezem je s ohledem na uvažovanou situaci kružnice. Střed vypočteme dle vzorce v definici 6.1.5, tj.

$$S_n = A + \frac{1}{-1} \cdot (1,0,0) = [1,0,0] + (-1) \cdot (1,0,0) = [0,0,0].$$

Podle stejné definice dostaneme, že poloměr této kružnice je roven 1, celkově tak dostáváme, že hledaným normálovým řezem je kružnice

$$x^2 + y^2 = 1, z = 0.$$

Příklad 6.3.3 Pro helikoid $p(u,v) = (v\cos u, v\sin u, au)$ nalezněte asypmtotické a hlavní křivky, vypočtěte jeho hlavní křivosti.

Řešení:

Postup pro nalezení asymptotických křivek je popsán za definicí 6.1.3, dle něj sestavíme diferenciální rovnici asymptotických křivek, jejímž řešením hledané křivky získáme. Potřebujeme nejprve vypočítat druhou kvadratickou formu helikoidu.

$$\vec{p}_1 = (-v\sin u, v\cos u, a),\ \vec{p}_2 = (\cos u; \sin u; 0),$$

$$\vec{p}_{11} = (-v\cos u, -v\sin u, 0),\ \vec{p}_{12} = (-\sin u, \cos u, 0),\ \vec{p}_{22} = (0,0,0),$$

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v\sin u & v\cos u & a \\ \cos u & \sin u & 0 \end{vmatrix} = (-a\sin u, a\cos u, -v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{a^2+v^2}}(-a\sin u, a\cos u, -v),$$

$$\Rightarrow b_{11} = 0,\ b_{12} = \frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}},\ b_{22} = 0.$$

Položíme-li druhou kvadratickou formu rovnu nule, dostaneme diferenciální rovnici asymptotických křivek, zde máme

$$\frac{2a}{\sqrt{a^2+v^2}}\, dudv = 0 \Leftrightarrow dudv = 0,$$

odtud pak plyne buď $du = 0 \Leftrightarrow u = C_1$ nebo $dv = 0 \Leftrightarrow v = C_2$. Existují tedy dva typy asymptotických křivek - jsou to dokonce křivky souřadnicové, tj. přímky a šroubovice.

Získaný závěr můžeme zobecnit do následující věty.

Věta 6.3.1 *Souřadnicové křivky plochy jsou asymptotickými, právě když pro všechny body plochy platí* $b_{11} = b_{22} = 0$.

Hlavní křivky budeme hledat s pomocí vzorce vysloveného ve větě 6.1.4. Pro jeho aplikaci musíme ještě vypočítat koeficienty první kvadratické formy. S využitím již získaných výsledků známým způsobem obdržíme

$$g_{11} = a^2 + v^2,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = 1.$$

Odtud pak použitím zmíněného vzorce a úpravou determinantu dostáváme kvadratickou rovnici

$$\frac{a(a^2+v^2)}{\sqrt{a^2+v^2}}(du)^2 - \frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}}(dv)^2 = 0,$$

kterou upravíme na tvar

$$du = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+v^2}} dv,$$

což je separovaná diferenciální rovnice prvního řádu, kterou vyřešíme prostou integrací, rovnice hlavních křivek jsou ve tvaru

$$u = \pm \ln |v + \sqrt{a^2+v^2}| + C.$$

Konečně pak hlavní křivosti nalezneme řešením kvadratické rovnice uvedené za větou 6.1.4. V našem případě má tvar

$$((a^2+v^2)\cdot 1 - 0^2)k^2 + (0\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}} + 0\cdot (a^2+v^2))k + (0\cdot 0 - \frac{a^2}{a^2+v^2}) = 0,$$

neboli po úpravě

$$k^2 = \frac{a^2}{(a^2+v^2)^2},$$

kterou již snadno vyřešíme. Dostaneme tak, že $k_1 = -\frac{a}{a^2+v^2}$, $k_2 = \frac{a}{a^2+v^2}$, čímž je příklad kompletně vyřešen.

Příklad 6.3.4 Nalezněte geodetické křivky v rovině $p(u,v) = (u,v,0)$.

Řešení:

Známým způsobem vypočteme vektor normály plochy, získáme $\vec{m} = (0,0,1)$. Hledáme tedy křivku $y(t) = \Big(u(t), v(t)\Big)$ tak, že platí

$$[\vec{m}, \vec{y}', \vec{y}''] = 0.$$

Výpočtem daného smíšeného součinu pak obdržíme rovnici

$$\frac{du}{dt}\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{dv}{dt}\frac{d^2u}{dt^2} = 0.$$

Této rovnici vyhovují všechny $v-$křivky, pro které je $u =$ konst., což jsou s ohledem na zvolenou parametrizaci přímky rovnoběžná s osou y. Dále této rovnici vyhovují křivky, pro něž je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = k\cdot \frac{du}{dt},$$

kde k je konstanta. Odtud pak $v = ku + q$, kde q je konstanta.

Příklad 6.3.5 Určete pro šroubový konoid $p(u,v) = (u\cos v, u\sin v, cv)$ jeho Gaussovu a střední křivost. Podél kterých křivek je Gaussova křivost konstantní?

Řešení:

K výpočtu použijeme vzorce uvedené za definicí 6.2.1, k tomu musíme nejprve spočítat koeficienty obou základních forem. Potřebné vektory mají souřadnice

$$\vec{p}_1 = (\cos v, \sin v, 0),\ \vec{p}_2 = (-u\sin v, u\cos v, c),$$

$$\vec{p}_{11} = (0,0,0),\ \vec{p}_{12} = (-\sin v, \cos v, 0),\ \vec{p}_{22} = (-u\cos v, -u\sin v, 0),$$

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & c \end{vmatrix} = (c\sin v, -c\cos v, u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{c^2+u^2}}(c\sin v, -c\cos v, u).$$

Proto pro koeficienty dostáváme

$$g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = u^2 + c^2,$$

$$b_{11} = 0,\ b_{12} = \frac{-c}{\sqrt{c^2+u^2}},\ b_{22} = 0.$$

Proto pro Gaussovu křivost s využitím zmiňovaných vzorců dostáváme

$$K = \frac{-\frac{c^2}{u^2+c^2}}{u^2+c^2} = -\frac{c^2}{(u^2+c^2)^2}.$$

Podobně pro střední křivost pak platí

$$H = \frac{1}{2}\frac{0}{u^2+c^2} = 0.$$

Pro odpověď na druhou otázku si blíže všimneme vztahu pro Gaussovu křivost. Je patrné, že konstantní bude tam, kde je konstantní hodnota proměnné u, tj. podél $v-$křivek. V případě uvažované plochy jde o šroubovice.

Příklad 6.3.6 Ověřte, že válcová plocha je rozvinutelná.

Řešení:

Návodem pro tuto úlohu je nám komentář za větou 6.2.4, podle kterého stačí, aby Gaussova křivost dané plochy byla nulová. Zvolme parametrizaci

$$p(u,v) = (r\cos v, r\sin v, u)$$

. Pro výpočet zmiňované křivosti potřebujeme znát koeficienty obou forem. Počítejme proto postupně:

$$\vec{p}_1 = (0,0,1),\ \vec{p}_2 = (-r\sin v, r\cos v, 0),$$

$$\vec{p}_{11} = (0,0,0),\ \vec{p}_{12} = (0,0,0),\ \vec{p}_{22} = (-r\cos v, -r\sin v, 0),$$

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -r\sin v & r\cos v & 0 \end{vmatrix} = (-r\cos v, -r\sin v, 0) \Rightarrow \vec{m} = (-\cos v, -\sin v, 0),$$

$$g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = r^2,$$

$$b_{11} = 0,\ b_{12} = 0,\ b_{22} = r.$$

Proto pro Gaussovu křivost dostáváme

$$K = \frac{0 \cdot r - 0^2}{r^2 - 0^2} = 0.$$

Daná plocha je tedy skutečně rozvinutelná.

6.4 Kontrolní otázky

1. Jakou množinu bodů charakterizuje Meusnierova věta?

2. Co lze říci o asymptotických a hlavních směrech v planárních bodech plochy?

3. Popište, jaký vztah charakterizuje Eulerův vzorec.

4. Které skupiny ploch a jak můžeme definovat pomocí Gaussovy, resp. střední křivosti?

5. Jaké body nalezneme na rozvinutelných plochách?

6. Charakterizujte vztah mezi klasifikací bodů na základě diskriminantu druhé kvadratické formy a na základě Gaussovy křivosti.

6.5 Cvičení

1. Určete normálovou křivost v libovolném bodě:

   a) sféry $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,

   b) plochy $p(u, v) = (u \cos v, u \sin v, au)$.

2. Dokažte tvrzení Meusnierovy věty.

3. Je dána válcová plocha $p(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$. Určete rovnici křivky normálového řezu v bodě $A[1; 0; 0]$ ve směru tečny $v-$křivky dané plochy.

4. Určete asymptotické směry na:

   a) válcové ploše $p(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$,

   b) sféře $p(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v)$,

   c) katenoidu $p(u, v) = (a \cosh \frac{u}{a} \cos v, a \cosh \frac{u}{a} \sin v, u)$.

5. Je dán anuloid $p(u, v) = ((b+a \sin u) \cos v, (b+a \sin u) \sin v, a \cos u)$. Vypočtěte jeho hlavní křivosti.

6. Určete rovnice hlavních křivek na paraboloidu $p(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$.

7. Vypočtěte Gaussovu a střední křivost pro rotační elipsoid daný rovnicí $p(u, v) = (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v)$.

8. Ověřte, že helikoid $p(u, v) = (v \cos u, v \sin u, ku)$ je plochou minimální.

9. Určete funkci $f(t)$ tak, aby plocha $p(t, u) = (f(t) - 2u, t \cdot f(t) - 2ut, u + ut^2)$ byla plochou rozvinutelnou.

6.6 Odpovědi na kontrolní otázky

1. množinu středů oskulačních kružnic ke křivkám, které leží na ploše a dotýkají se v jejím daném bodě společné tečny, jejíž směr není asymptotický
2. v planárním bodě je každý směr asymptotický a hlavní
3. Eulerův vzorec udává vztah mezi normálovou křivostí a hlavními křivostmi v daném bodě plochy
4. pomocí Gaussovy křivosti lze zavést plochy rozvinutelné, pomocí střední pak plochy minimální; v obou případech jsou patřičné křivosti nulové
5. na takových plochách nalezneme body jen planární nebo parabolické
6. dávají stejný výsledek, neboť W i K mají ve stejném typu bodu totéž znaménko

6.7 Výsledky

1. a) $\dfrac{1}{a}$; b) $\dfrac{\frac{au}{a^2+1}(dv)^2}{(1+a^2)(du)^2+u^2(dv)^2}$
2. naším úkolem je ukázat, že trojúhelník PSS_n je pravoúhlý, tj. ukážeme kolmost vektorů $\vec{SS_n}$ a $\vec{PS}$
3. normálová křivost je nulová, proto je daný směr asymptotickým směrem a řezem je přímka (površka válcové plochy)
4. a) $u = C$, tj. $v-$křivky; b) plocha obsahuje pouze eliptické body, žádný směr není asymptotický (pro tento závěr si uvědomte definiční obor proměnných);
   c) $v = \frac{1}{a}u + C_1, v = -\frac{1}{a}u + C_2$
5. $k_1 = \dfrac{1}{a},\ k_2 = \dfrac{\sin u}{b + a\sin u}$
6. $u^2 + v^2 = C_1, u = C_2 v$
7. $K = \dfrac{1}{a^2b^4},\ H = -\dfrac{1}{2ab^2}$
8. ukážeme, že $H = 0$
9. musí být splněna podmínka $K = 0$, $f(t) = \dfrac{c}{1+t^2}$

Poznámky:

Kapitola 7

Gaussovy a Weingartenovy rovnice

V teorii křivek mají ústřední postavení vzorce Frenetovy. Jejich analogií v případě ploch jsou právě rovnice Weingartenovy a Gaussovy. Pomocí nich je pak možné odvodit podmínky pro existenci plochy pouze z hodnot první a druhé kvadratické formy plochy. Tím uzavřeme problematiku klasické diferenciální geometrie ploch.

V této kapitole se naučíme pracovat a počítat s *Christofellovými symboly.* Uveďme, že jsou velmi výhodným nástrojem pro vyjádření řady tvrzení v moderní diferenciální geometrii, např. jimi můžeme přesně vyjádřit rovnice geodetik.

Po prostudování následující kapitoly dokážete:

- zapsat pro konkrétní plochu Weingartenovy rovnice,
- zapsat pro konkrétní plochu Gaussovy rovnice,
- vypočítat Christoffelovy symboly prvního a druhého druhu.

Gaussův repér; Weingartenovy rovnice; Gaussovy rovnice; Christoffelův symbol prvního druhu; Christoffelův symbol druhého druhu

7.1 Gaussovy a Weingartenovy rovnice

Jak bylo řečeno v úvodních odstavcích, je tato problematika analogická Frenetovým vzorcům. Ve třetí kapitole byl zkonstruován Gaussův repér[1] tvořený vektory $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{m}$. Zmiňované rovnice nám říkají, jakým způsobem vyjádříme parciální derivace vektorů Gaussova repéru, tj. vektory $\vec{p}_{ij}$, $\vec{m}_i$[2] pomocí vektorů zmiňovaného repéru. Nadále předpokládejme, že uvažovaná plocha S je dána rovnicí $p = p(u, v)$ a že g^{ij} jsou složky matice inverzní k matici složené z koeficientů první kvadratické formy. Rovnou uveďme, že mezi těmito hodnotami platí následující vztahy

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{D},\ g^{12} = -\frac{g_{12}}{D},\ g^{22} = \frac{g_{11}}{D},$$

kde D je diskriminant první kvadratické formy. Uvedené vzorce nám výrazně usnadní pozdější výpočty.

[1] některými autory označován také jako Frenetův repér pro plochy

[2] Uveďme pro jistotu význam tohoto vektoru. Platí $\vec{m}_i = \dfrac{\partial \vec{m}}{\partial u^i}, i = 1, 2.$

Věta 7.1.1 *(Weingartenovy rovnice): Vektory $\vec{p}_i$, $\vec{m}_i$, $i = 1, 2$, sestrojené v bodě X plochy S jsou spolu vázány rovnicemi*

$$\vec{m}_i = -b_i^k \vec{p}_i,$$

kde $b_i^k = b_{ij} g^{jk}$.

Tyto rovnice nám tedy říkají, jakým způsobem lze vyjádřit parciální derivace vektoru $\vec{m}$ pomocí vektorů Gaussova repéru. Analogické tvrzení o parciálních derivacích vektorů $\vec{p}_i, i = 1, 2$, nám přináší Gaussovy rovnice. Nejprve však zaveďme *Christoffelovy symboly.*

Definice 7.1.1 Výraz Γ_{ijk} nazýváme *Christoffelovým symbolem prvního druhu*, výraz Γ_{ij}^k pak *Christoffelovým symbolem druhého druhu.*

Návod na výpočet jednotlivých symbolů nám dává následující věta.

Věta 7.1.2 *Pro Christoffelovy symboly platí vztahy:*

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right),$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij\alpha} \cdot g^{\alpha k}.$$

Je dobré si povšimnout, že zároveň s ohledem na komutativnost sčítání plynou rovnosti $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}, \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, které nám opět usnadní výpočty. Současně si uvědomme, že tyto symboly vyjadřujeme pouze pomocí koeficientů první kvadratické formy plochy a jejich derivací, patří tedy k *vnitřní geometrii plochy.* Nyní přikročme k samotným Gaussovým rovnicím.

Věta 7.1.3 *(Gaussovy rovnice): V každém bodě X plochy S platí rovnice*

$$\vec{p}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \vec{p}_k + b_{ij} \vec{m}.$$

Shrňme, že Gaussových a Weingartenových rovnic je celkem šest, v praxi však dvě z nich s ohledem na záměnnost parciálních derivací splývají. Jejich odvození není nijak náročné, postupuje se analogicky jako při odvození Frenetových vzorců. Vřele doporučujeme si odvození provést, zopakujete si a upevníte si tak poznatky o vztazích mezi důležitými vektory plochy.

Pomocí Gaussových a Weingartenových rovnic můžeme dokázat řadu stěžejních tvrzení a vztahů. Uveďme jako příklad následující výsledky.

Označme

$$\vec{p}_{ijk} = \frac{\partial^3 p}{\partial u^i u^j u^k},\ \Gamma_{ij,k}^l = \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k},\ b_{ij,k} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k}.$$

Pomocí zmiňovaných rovnic lze odvodit (viz příklad 7.2.3), že

$$\vec{p}_{ijk} = \left(\Gamma_{ij,k}^h + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^h - b_{ij} b_k^h\right) \vec{p}_h + \left(\Gamma_{ij}^\alpha b_{\alpha k} + b_{ij,k}\right) \vec{m}.$$

Díky tomuto vyjádření lze snadno vypočítat, že

$$\vec{p}_{ijk} \cdot \vec{p}_l = \Gamma_{ij,k}^h \cdot g_{hl} + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^h \cdot g_{hl} - b_{ij} b_{kl}.$$

Analogicky dostaneme

$$\vec{p}_{ikj} \cdot \vec{p}_l = \Gamma_{ik,l}^h \cdot g_{hl} + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h \cdot g_{hl} - b_{ik} b_{jl}.$$

Protože smíšené derivace jsou záměnné, musí si být oba skalární součiny rovny a my tak získáme rovnici

$$b_{ij}b_{kl} - b_{ik}b_{jl} = g_{hl} \cdot \left(\Gamma^h_{ij,k} - \Gamma^h_{ik,l} + \Gamma^\alpha_{ij}\Gamma^h_{\alpha k} - \Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^h_{\alpha j}\right).$$

Specielně pro $i = j = 1, k = l = 2$ dostáváme *Gaussovu rovnici*

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = g_{h2} \cdot \left(\Gamma^h_{11,2} - \Gamma^h_{12,2} + \Gamma^\alpha_{11}\Gamma^h_{\alpha 2} - \Gamma^\alpha_{12}\Gamma^h_{\alpha 1}\right).$$

Výraz na levé straně odpovídá diskriminantu druhé kvadratické formy, který jsme tedy vyjádřili pomocí koeficientů první kvadratické formy a jejich derivací. Tím jsme dokázali *Theorem egregium.*

Odvozená rovnice má velký význam a umožňuje nám zavést *Riemannův tenzor*:

$$R_{hijk} = b_{hj}b_{ik} - b_{hk}b_{ij},$$

pro který platí

$$R_{hijk} = g_{h\alpha}R^\alpha_{ijk},$$

kde

$$R^h_{ijk} = \Gamma^h_{ik,j} - \Gamma^h_{ij,k} + \Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^h_{\alpha j} - \Gamma^\alpha_{ij}\Gamma^h_{\alpha k}.$$

Riemannův tenzor je antisymetrický v prvních dvou indexech, i v posledních dvou a je symatrický vůči záměně první a druhé dvojice indexů. Má velký význam v teorii relativity.

Podobně lze odvodit *Codazziho rovnice*

$$b_{ij,k} - b_{ik,j} + \left(\Gamma^l_{ij}b_{lk} - \Gamma^l_{ik}b_{lj}\right) = 0.$$

Tím se dostáváme k *základním větám teorie ploch:*

Věta 7.1.4 *Jsou-li S a S^* dvě plochy určené parametrizacemi $p : \mathbb{U} \to \mathbb{E}_3$, $p^* : \mathbb{U} \to \mathbb{E}_3$, které mají stejnou první a druhou kvadratickou formu, pak existuje shodnost $\varphi : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ tak, že $\varphi \circ p = p^*$.*

Věta 7.1.5 *Uvažujme dvě kvadratické formy Φ_1, Φ_2 na $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$, kde Φ_1 je pozitivně definitní ve všech bodech. Jestliže Φ_1 a Φ_2 splňují Gaussovu a Codazziho rovnice, pak lokálně existuje plocha s parametrizací $p : \mathbb{U} \to \mathbb{E}_3$ tak, že Φ_1 je její první a Φ_2 druhá kvadratická forma.*

7.2 Řešené příklady

Příklad 7.2.1 Sestrojte Gaussův repér pro helikoid $p(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$. Vypočtěte pro něj Christoffelovy symboly.

Řešení:

Nejprve určeme souřadnice potřebných vektorů, které tvoří Gaussův repér:

$$\vec{p}_1 = (-v \sin u, v \cos u, 1), \ \vec{p}_2 = (\cos u, \sin u, 0),$$

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v \sin u & v \cos u & 1 \\ -\cos u & \sin u & 0 \end{vmatrix} = (-\sin u, \cos u, -v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{v^2+1}}(-\sin u, \cos u, -v).$$

Tím jsme získali všechny vektory, které tvoří Gaussův repér.

Dále přikročme k výpočtu Christoffelových symbolů. Nejprve vypočítáme symboly prvního druhu, pomocí nich pak symboly druhého druhu - k oběma krokům využijeme větu 7.1.2. Pro uvedené vzorce nejprve potřebujeme vypočítat koeficienty první kvadratické formy - ty obdržíme pomocí vektorů $\vec{p}_i, i = 1, 2$, obvyklým způsobem. Vychází nám

$$g_{11} = v^2 + 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = 1.$$

Výpočet prvních dvou Christoffelových symbolů prvního druhu rozepíšeme podrobně, zbylé získáme analogicky. Platí

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u}\right) = \frac{1}{2}(0+0-0) = 0,$$

$$\Gamma_{112} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v}\right) = \frac{1}{2}(0+0-2v) = -v,$$

$$\Gamma_{121} = v,\ \Gamma_{122} = \Gamma_{221} = \Gamma_{222} = 0.$$

..

Pro výpočet Christoffelových symbolů druhého druhu určeme nejprve hodnoty výrazů g^{ij}. Platí pro ně:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{v^2+1} = \frac{1}{v^2+1},\ g^{12} = 0,\ g^{22} = 1.$$

Nyní dosaďme do druhé ze vzorců obsažených ve větě 7.1.2, získáme tak Christoffelovy symboly druhého druhu. Postup pro první dva rozepíšeme analogicky, u zbývajících uvedeme pouze výsledek:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma_{11\alpha} \cdot g^{\alpha 1} = \sum_{\alpha=1}^{2} \Gamma_{11\alpha} \cdot g^{\alpha 1} = \Gamma_{111} \cdot g^{11} + \Gamma_{112} \cdot g^{21} = 0 \cdot \frac{1}{v^2+1} + (-v) \cdot 0 = 0,$$

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma_{11\alpha} \cdot g^{\alpha 2} = \sum_{\alpha=1}^{2} \Gamma_{11\alpha} \cdot g^{\alpha 2} = \Gamma_{111} \cdot g^{12} + \Gamma_{112} \cdot g^{22} = 0 \cdot 0 + (-v) \cdot 1 = -v,$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{v}{v^2+1},\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{22} = 0.$$

Tím jsme příklad vyřešili.

Příklad 7.2.2 Je dána plocha, jejíž parametrické křivky jsou navzájem kolmé. Dokažte rovnost

$$\Gamma^k_{ik} = \frac{1}{2g_{kk}} \cdot \frac{\partial g_{kk}}{\partial u^i}, i \neq k.$$

Řešení:
Rozepišme postupně daný Christoffelův symbol:

$$\Gamma_{ik}^{k} = \Gamma_{ik\alpha} g^{\alpha k} = \sum_{\alpha=1}^{2} \Gamma_{ik\alpha} g^{\alpha k} = \Gamma_{ik1} g^{1k} + \Gamma_{ik2} g^{2k} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{k1}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^1}\right) \cdot g^{1k} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{k2}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^2}\right) \cdot g^{2k}.$$

Číslo k může nabývat dvou hodnot (1 a 2). Prodiskutujme jednotlivé případy. Nechť je $k = 1$, dosazením dostaneme:

$$\Gamma_{i1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{i1}}{\partial u^1}\right) \cdot g^{11} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{i1}}{\partial u^2}\right) \cdot g^{21} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u^i} \cdot \frac{g_{22}}{D} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{i1}}{\partial u^2}\right) \cdot \left(-\frac{g_{12}}{D}\right).$$

Pokud nyní aplikujeme předpoklad dokazované rovnosti, dostaneme, že druhý sčítanec je roven 0, neboť síť křivek na ploše je ortogonální, tj. $g_{12} = 0$. Podobně po dosazení do diskriminantu první kvadratické formy plochy celkově vypočteme, že

$$\Gamma_{i1}^{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u^i} \cdot \frac{g_{22}}{g_{11} g_{22} - \underbrace{g_{12}^2}_{=0}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u^i} \cdot \frac{g_{22}}{g_{11} g_{22}} = \frac{1}{2 g_{11}} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u^i}.$$

Analogicky v případě $k = 2$ vypočteme

$$\Gamma_{i2}^{2} = \frac{1}{2 g_{22}} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial u^i},$$

neboli

$$\Gamma_{ik}^{k} = \frac{1}{2 g_{kk}} \cdot \frac{\partial g_{kk}}{\partial u^i},$$

což jsme chtěli dokázat.

Příklad 7.2.3 Pomocí vektorů Gaussova repéru vyjádřete vektor $\vec{p}_{ijk}$.
Řešení:
Postup není potřeba nijak podrobně komentovat, využíváme pouze základní pravidla pro derivování a dosazujeme z Gaussových a Weingartenových rovnic. Poznamenejme pouze, že v závěru vektor jen formálně upravíme na tvar lineární kombinace vektorů repéru.

$$\vec{p}_{ijk} = \frac{\partial \vec{p}_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial\left(\Gamma_{ij}^{\alpha} \cdot \vec{p}_{\alpha} + b_{ij}\vec{m}\right)}{\partial u^k} = \frac{\partial\left(\Gamma_{ij}^{\alpha} \cdot \vec{p}_{\alpha}\right)}{\partial u^k} + \frac{\partial\left(b_{ij}\vec{m}\right)}{\partial u^k} =$$

$$= \Gamma_{ij,k}^{\alpha} \cdot \vec{p}_{\alpha} + \Gamma_{ij}^{\alpha} \cdot \vec{p}_{\alpha k} + b_{ij,k}\vec{m} + b_{ij}\vec{m}_k = \Gamma_{ij,k}^{\alpha} \cdot \vec{p}_{\alpha} + \Gamma_{ij}^{\alpha} \cdot \left(\Gamma_{\alpha k}^{h} \cdot \vec{p}_h + b_{\alpha k}\vec{m}\right) + b_{ij,k}\vec{m} - b_{ij} \cdot \left(b_k^h \vec{p}_k\right) =$$

$$= \left(\Gamma_{ij,k}^{h} + \Gamma_{ij}^{\alpha}\Gamma_{\alpha k}^{h} - b_{ij} b_k^h\right) \cdot \vec{p}_h + \left(\Gamma_{ij}^{\alpha} \cdot b_{\alpha k} + b_{ij,k}\right) \cdot \vec{m}.$$

Příklad 7.2.4 Pro plochu $p(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$ zapište Weingartenovy rovnice.

Řešení:

Naším úkolem je vyjádřit parciální derivace vektoru $\vec{m}$ pomocí Gaussova repéru. K tomu potřebujeme nejprve získat koeficienty obou kvadratických forem uvažované plochy. Patřičné vektory mají souřadnice

$$\vec{p_1} = (\cos v, \sin v, f'(u)),\ \vec{p_2} = (-u\sin v, u\cos v, 0),$$

$$\vec{p_{11}} = (0, 0, f''(u)),\ \vec{p_{12}} = (-\sin v, \cos v, 0),\ \vec{p_{22}} = (-u\cos v, -u\sin v, 0),$$

$$\vec{p_1} \times \vec{p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & f'(u) \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (-f'(u)\cos v, -f'(u)\sin v, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{[f'(u)]^2+1}}(-f'(u)\cos v, -f(u)\sin v, 1).$$

Koeficienty pak nabývají hodnot

$$g_{11} = [f'(u)]^2 + 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = u^2,$$

$$b_{11} = \frac{f''(u)}{\sqrt{[f'(u)]^2+1}},\ b_{12} = 0,\ b_{22} = \frac{f'(u)}{\sqrt{[f'(u)]^2+1}}.$$

Ještě určeme hodnoty g^{ij}, pro naši plochu jsou rovny

$$g^{11} = \frac{1}{[f'(u)]^2+1},\ g^{12} = 0,\ g^{22} = \frac{1}{u^2}.$$

Nyní již můžeme dosadit do Weingartenových rovnic

$$\vec{m}_1 = \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(-b_{1j}g^{jk})\vec{p_k} = (-b_{11}g^{1k})\vec{p_k} + (-b_{12}g^{2k})\vec{p_k} =$$

$$= -b_{11}g^{11}\vec{p_1} - b_{11}g^{12}\vec{p_2} - b_{12}g^{21}\vec{p_1} - b_{12}g^{22}\vec{p_2} =$$

$$= (-b_{11}g^{11} - b_{12}g^{21})\vec{p_1} + (-b_{11}g^{12} - b_{12}g^{22})\vec{p_2}.$$

V našem případě pak máme

$$\vec{m}_1 = (-\frac{f''(u)}{\sqrt{[f'(u)]^2+1}}\frac{1}{[f'(u)]^2+1} - 0\cdot 0)\vec{p_1} + (-\frac{f''(u)}{\sqrt{[f'(u)]^2+1}}\cdot 0 - 0\cdot\frac{1}{u^2})\vec{p_2} =$$

$$= -\frac{f''(u)}{\sqrt{([f'(u)]^2+1)^3}}\vec{p_1}.$$

Analogicky vyjádříme i vektor $\vec{m}_2$, zde

$$\vec{m}_2 = -\frac{f'(u)}{u\cdot\sqrt{[f'(u)]^2+1}}\vec{p_2}.$$

7.3 Kontrolní otázky

1. Jaké vektory jsou u křivek analogické vektorům Gaussova repéru?
2. Co říkají Weingartenovy rovnice?
3. Definujte vnitřní geometrii plochy.
4. Jak lze dokázat *Theorem egregium*?
5. Jaké symboly se objevují v Gaussových rovnicích? Jakým způsobem je spočítáme?

7.4 Cvičení

1. Zkonstruujte Gaussův repér pro sféru.
2. Zapište Gaussovy rovnice pro anuloid.
3. Dokažte rovnost $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.
4. Vypočtěte Christoffelovy symboly druhého druhu pro plochu o parametrizaci
$$p(s, v) = (f_1(s), f_2(s), v),$$
kde s je oblouk řídící křivky.
5. Je dána plocha, jejíž paramterické křivky jsou navzájem kolmé. Dokažte:
$$\Gamma_{ii}^k = -\frac{1}{2g_{kk}} \cdot \frac{\partial g_{ii}}{\partial u^k}, i \neq k.$$
6. Pomocí Weingartenových vzorců dokažte
$$\vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = \sqrt{D} \cdot K \cdot \vec{m},$$
kde D je diskriminant první kvadratické formy plochy a K Gaussova křivost.
7. Pomocí vektorů Gaussova repéru vyjádřete součin $\vec{p}_{ijk} \cdot \vec{p}_l$.

7.5 Odpovědi na kontrolní otázky

1. tečný vektor, vektor hlavní normály a vektor binormály
2. říkají, jak vyjádříme parciální derivace vektoru normály plochy pomocí vektorů Gaussova repéru
3. jde o soubor vlastností plochy plynoucích z první kvadratické formy plochy
4. pomocí Gaussovy rovnice, ty vyjadřuje diskriminant druhé kvadratické formy pomocí koeficientů první kvadratické formy a jejich derivací
5. Christoffelovy symboly druhého druhu, výpočet probíhá prostřednictvím Christoffelových symbolů prvního druhu

7.6 Výsledky

1. $\vec{p}_1 = (-r\sin u\cos v, r\cos u\cos v, 0)$, $\vec{p}_2 = (-r\cos u\sin v, -r\sin u\sin v, r\cos v)$, $\vec{m} = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$
2. $\vec{p}_{11} = -(a + b\cos v)\cos v \cdot \vec{m}$, $\vec{p}_{12} = \frac{b\sin v}{a+b\cos v} \cdot \vec{p}_1$, $\vec{p}_{22} = -b \cdot \vec{m}$
3. důkaz provedeme rozepsáním dle definice
4. všechny jsou nulové
5. postupujte analogicky příkladu 7.2.2
6. návod: pomocí Weingartenových rovnic vyjádřete vektory $\vec{m}_1, \vec{m}_2$ a vypočtěte jejich vektorový součin za využití distributivity vektorového součinu, pokud tento součin normalizujete dostanete dané tvrzení
7. $\Gamma^h_{ij,k} \cdot g_{hl} + \Gamma^\alpha_{ij}\Gamma^h_{\alpha k} \cdot g_{hl} - b_{ij}b_{kl}$

Poznámky:

Kapitola 8

Speciální typy ploch

V následující kapitole jsou vyobrazeny plochy, které nejsou příliš známé a objevovaly se v zadání úloh. Současně jsou plochy klasifikovány pro lepší orientaci do několika skupin, nutno ale podotknout, že toto třídění není dichotomické, tedy některé plochy lze zařadit hned do několika skupin. Doplňme, že obrázky byly vyhotoveny v programu *Maple*.

Prostřednictvím této kapitoly si uvědomte, jak obsáhlou charakteristiku můžete o libovolné ploše podat - naučili jste se význačné plochy parametrizovat, vypočítat jejich první a druhou kvadratickou formu, charakterizovat křivosti v libovolném bodě, určit významné křivky a klasifikovat body plochy.

Po prostudování následující kapitoly dokážete:

- klasifikovat plochu,
- charakterizovat plochu z různých hledisek.

přímkové plochy, rozvinutelné plochy, zborcené plochy, rotační plochy

8.1 Přímkové plochy

Definice 8.1.1 *Přímkovou plochou* rozumíme plochu, jejímž každým bodem prochází alespoň jedna přímka ležící celá na dané ploše.

Ve druhé kapitole jsme zmínili, že přímkové plochy vznikají pohybem přímky po nějaké křivce. Z příkladu 2.2.1 víme, jak postupovat při odvození parametrické rovnice přímkové plochy, lze ho psát ve tvaru

$$\vec{r}(t,v) = \vec{p}(t) + v\vec{q}(t),$$

kde $\vec{p}(t)$ je vektorová rovnice *řídící křivky* a $\vec{q}(t)$ je směrový vektor uvažované přímky. Souřadnicové křivky, pro něž je $t = const.$ jsou přímky, které označujeme jako *tořící* nebo povrchové přímky (površky) plochy. Uveďme některé jejich vlastnosti.

Věta 8.1.1 *Povrchové přímky na přímkové ploše jsou vždy jejími asymptotickými křivkami.*

Věta 8.1.2 *Prochází-li regulárním bodem plochy přímka ležící celá na ploše, potom tečná rovina plochy v tomto bodě obsahuje tuto přímku.*

Mezi přímkové plochy patří všechny *rozvinutelné* plochy. Každou přímkovou plochu, která není rozvinutelná, označujeme jako plochu *zborcenou*.

8.1.1 Přímkové plochy rozvinutelné

Víme již, že jedním z kritérií rozvinutelnosti plochy, je rovnost

$$K = 0.$$

Odtud vyplývá, že každou takovou plochu lze bez metrických deformací rozvinout do roviny. Jejich zajímavou vlastnost charakterizují následující věty:

Věta 8.1.3 *Každá křivka rozvinutelné přímkové plochy přejde po rozvinutí této plochy do roviny do křivky se zachováním délek všech příslušných oblouků.*

Věta 8.1.4 *Dvě libovolné křivky na přímkové rozvinutelné ploše protínající se v daném bodě pod daným úhlem, přejdou po rozvinutí do roviny do dvou křivek, jež se protínají v odpovídajícím bodě pod týmž úhlem.*

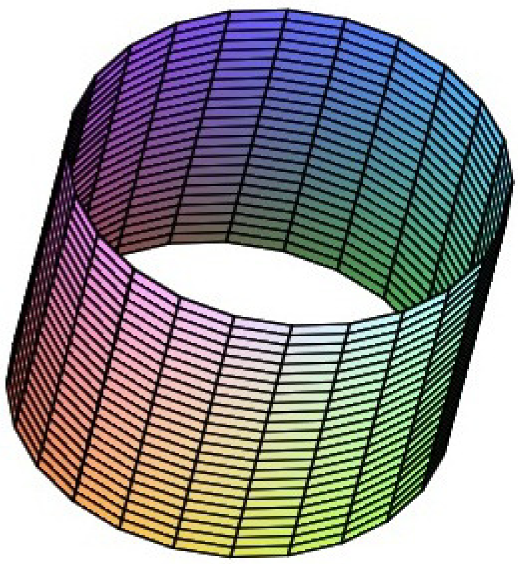
Dále lze dokázat následující tvrzení.

Věta 8.1.5 *Na rozvinutelných přímkových plochách leží pouze parabolické body.*

Mezi rozvinutelné plochy patří:

a) *obecné plochy válcové* (viz obr. 5), které lze parametrizovat např. rovnicí

$$p(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v), r = const. > 0,$$



obr. 5: Válcová plocha

b) *obecné plochy kuželové*, které lze ve smyslu přímkových ploch parametrizovat rovnicí

$$p(u, v) = a_0 + vq(u),$$

kde a_0 je pevný bod, *vrchol* kuželové plochy,

c) *plochy tečen prostorových křivek*, které lze parametrizovat rovnicí

$$p(u, v) = q(u) + vq'(u),$$

d) všechny plochy, které lze vytvořit jako kombinaci předchozích typů ploch.

8.1.2 Přímkové plochy zborcené

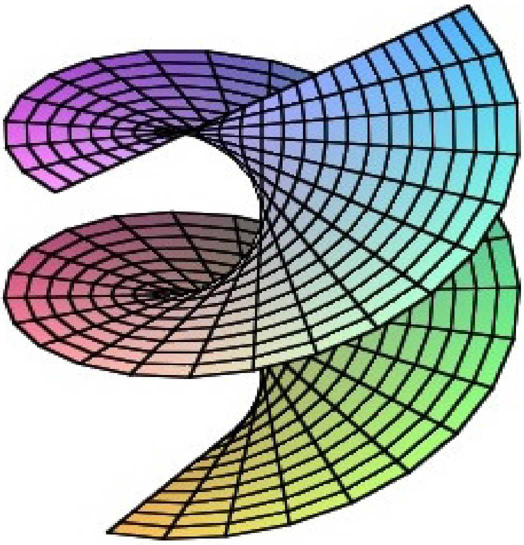
Definice 8.1.2 *Zborcenou plochou* rozumíme takovou přímkovou plochu, která není rozvinutelná.

Tyto plochy nalézají uplatnění v technických aplikacích, neboť každé dvě blízké povrchové přímky zborcené plochy jsou mimoběžné, v důsledku této skutečnosti mají dobré vlastnosti z hlediska pevnosti apod.

Pro geometrické odvození zborcené plochy potřebujeme celkem tři řídící křivky, pro které platí tři vlastnosti - nemají žádný společný bod, žádné dvě z těchto křivek neleží v téže rovině a neleží současně všechny tři současně na téže rozvinutelné ploše. Pak pohybující se přímka, která při svém pohybu stále protíná všechny tři dané řídící křivky tvoří zborcenou přímkovou plochu.

Zvolíme-li řídící křivky tak, že jedna z nich je řídící přímkou, druhá řídící křivkou a třetí nevlastní řídící přímkou, dostáváme zborcenou plochu, která se nazývá *konoid*. Podle řídící křivky se rozdělují na konoidy *kruhové, parabolické* apod. Významným typem konoidu je *šroubový konoid* neboli *helikoid* (viz obr. 6) s parametrizací

$$p(u,v) = (u\cos v, u\sin v, cv).$$



obr. 6: Helikoid

Zvolíme-li za dvě řídící křivky kuželosečky a za třetí nevlastní řídící přímku, dostaneme další typ zborcené přímkové plochy, *cylindroid*.

8.2 Rotační plochy

Definice 8.2.1 *Rotační plochou* rozumíme plochu, jež vznikne rotací křivky kolem přímky.

Doplňme, že danou křivku označujeme jako *křivku tvořící* a přímku jako *osu rotační plochy*. Definujme ještě další důležité pojmy.

Definice 8.2.2 *Rovnoběžkovou kružnicí (rovnoběžkou)* plochy rozumíme kružnici, která vznikne rotací libovolného bodu tvořící přímky kolem osy rotační plochy.

Definice 8.2.3 *Meridiánem (poledníkem)* plochy rozumíme řez rotační plochy rovinou procházející osou rotační plochy.

Rovnoběžkové kružnice je dále možné klasifikovat následujícím způsobem. Vytvoří-li tečny podél ní válcovou plochu, jejíž poloměr podstavy je vzhledem k ostatním takovým válcovým plochám minimální, nazývá se daná rovnoběžka *hrdlem*. Je-li naopak maximální, označujeme ji jako *rovníkem*. V případě, že tečny vytvoří rovinu kolem rovnoběžky vytvoří rovinu, hovoříme o *kráteru*.

Odvozením parametrikého vyjádření obecné rotační plochy jsme se zabývali v příkladu 2.2.4, kde jsme vypočítali, že ho lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= \varphi(v)\cos u, \\ y &= \varphi(v)\sin u, \\ z &= \psi(v), \end{aligned}$$

Zajímavou vlastnost mají geodetické křivky na rotačních plochách.

Věta 8.2.1 *(Clairautova věta): Podél geodetiky na rotační ploše je součin poloměru rovnoběžkové kružnice a sinu úhlu, který svírá tečna geodetiky s poledníkem, konstantní.*

Mezi rotační plochy patří celá řada význačných ploch. Uveďme některé příklady.

a) *sféra* (viz obr. 7), kterou lze parametrizovat rovnicí

$$p(u,v) = (r\cos v\cos u, r\cos v\sin u, r\sin v), r = const. > 0,$$

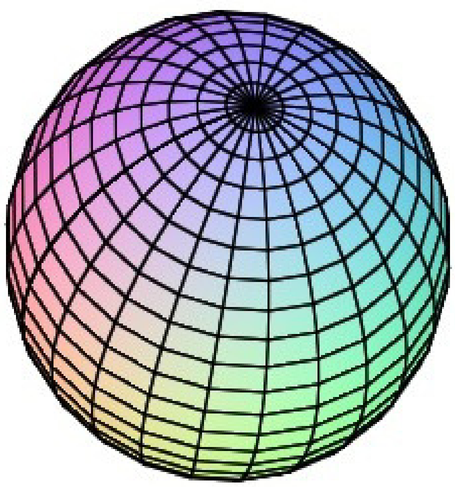
případně

$$p(u,v) = (r\cos u\sin v, r\sin u\sin v, r\cos v), r = const. > 0,$$

je plocha vzniklá rotací kružnice se středem v počátku soustavy souřadné (odvození rovnice viz příklad 2.2.3). Lze snadno dokázat, že sféra obsahuje pouze kruhové body a že platí rovnosti

$$K = \frac{1}{r^2},\ H = -\frac{1}{r}$$

.



obr. 7: Sféra

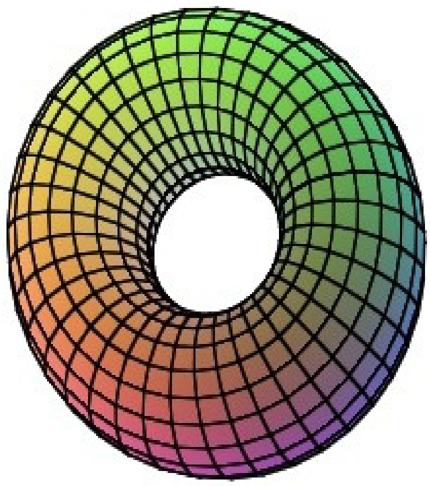
b) *anuloid* (viz obr. 8), který lze parametrizovat rovnicí

$$p(u,v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u),$$

kde $a > b$ jsou reálné konstanty. Jedná se o plochu vzniklou rotací kružnice, která neprotíná osu z. Opět se lze výpočtem přesvědčit, že platí rovnosti

$$K = \frac{\sin u}{a(b + a\sin u)}, \quad H = \frac{b + 2ab\sin u}{2a(b + a\sin u)}$$

.



obr. 8: Anuloid

c) *katenoid* (viz obr. 9), který lze parametrizovat rovnicí

$$p(u,v) = (a\cosh\frac{u}{a}\cos v, a\cosh\frac{u}{a}\sin v, u),$$

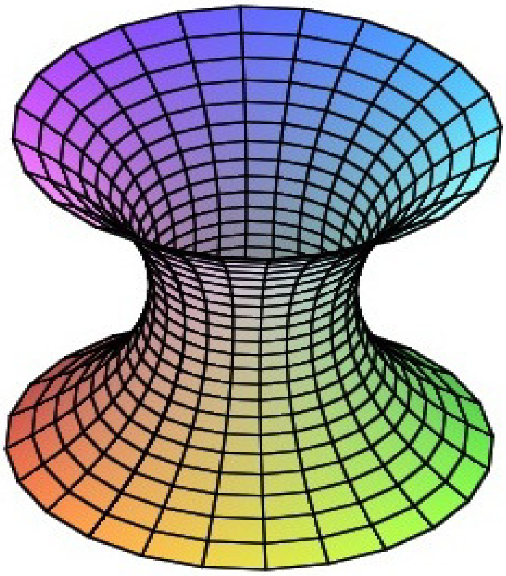
kde $a = const. \neq 0$. Plocha vzniklá rotací řetězovky

$$\varphi(u) = \left(a\cosh\frac{u}{a}, 0, u\right)$$

kolem osy z. Všechny body katenoidu jsou hyperbolické. Výpočtem získáme rovnosti

$$K = -\frac{a^2}{\cosh\frac{u}{a}}, \quad H = 0,$$

odkud vyplývá, že katenoid je současně plochou minimální.

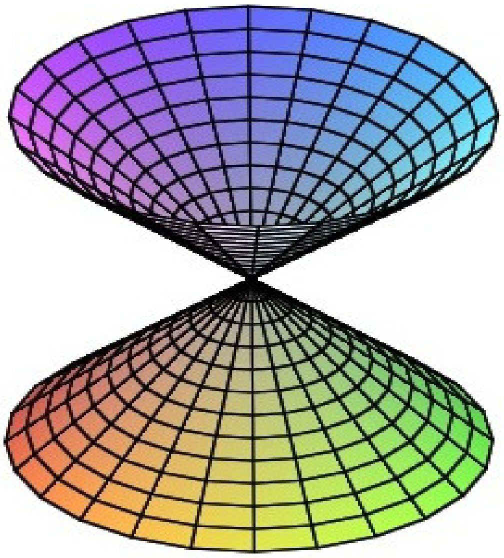


obr. 9: Katenoid

d) *rotační kuželová plocha* (viz obr. 10), kterou lze ve smyslu rotačních plochparametrizovat rovnicí

$$p(u,v) = (v\cos u\cos\alpha, v\sin u\cos\alpha, v\sin\alpha), \alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$

vzniká rotací přímky různoběžné s osou z kolem osy z. Všechny body rotační kuželové plochy jsou parabolické. Jak víme, patří mezi plochy rozvinutelné.



obr. 10: Kuželová plocha

e) *rotační válcová plocha* (viz obr. 5), vzniká rotací přímky rovnoběžné s osou z kolem osy z. Jak víme, patří mezi plochy rozvinutelné.

f) *rotační jednodílný hyperboloid*, který lze parametrizovat rovnicí

$$p(u,v) = \left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2+u^2}\cos v, \frac{a}{b}\sqrt{b^2+u^2}\sin v, u\right),$$

vzniká rotací větve hyperboly (pro $x > 0$) , jež má vedlejší osu totožnou s osou z, kolem osy z.

f) *rotační dvoudílný hyperboloid*, který lze parametrizovat rovnicí

$$p(u, v) = \left(u \cos v, u \sin v, \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + u^2}\right),$$

vzniká rotací hyperboly, jež má hlavní osu totožnou s osou z, kolem osy z.

g) *rotační paraboloid*, který lze parametrizovat rovnicí

$$p(u, v) = \left(u \cos v, u \sin v, au^2\right),$$

kde $a \neq 0$, vzniká rotací paraboly s osou v ose z kolem osy z.

h) *pseudosféra*, kterou lze parametrizovat rovnicí

$$p(u, v) = \left(a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a[\ln(\operatorname{tg} \frac{u}{2}) + \cos u]\right),$$

kde $a \neq 0$, vzniká rotací tratrix dané rovnicí

$$\varphi(u) = \left(a \sin u, 0, a \sin u \sin v, a[\ln(\operatorname{tg} \frac{u}{2}) + \cos u\right)$$

kolem osy z. Obsahuje pouze hyperbolické body. Lze dokázat rovnosti

$$K = -1, H = \frac{\sinh^2 u - 1}{2 \sinh u}.$$

8.3 Minimální plochy

Definice 8.3.1 Plocha se nazývá *minimální*, jestliže je její střední křivost nulová.

Mezi příklady minimálních ploch patří

a) *rovina*,

b) *katenoid*,

c) *helikoid*.

O vlastnostech minimálních ploch hovoří následující věty.

Věta 8.3.1 *Minimální plochy neobsahují eliptické body.*

Věta 8.3.2 *(Bernsteinova věta:) Parametrizuje-li funkce*

$$p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{E}_3, p(u, v) = (u, v, g(u, v))$$

minimální plochu, pak je funkce g funkcí lineární.

Závěrem poznamenejme, že problematika minimálních ploch souvisí s úkolem nalézt plochu s nejmenším obsahem, která má za hranici předem danou křivku.

Další zajímavou skupinou ploch jsou *plochy s konstantní Gaussovou křivostí.* Patří mezi ně např. *sféra*, která má Gaussovu křivost kladnou, a *pseudosféra*, jejíž Gaussova křivost je záporná.

Poznámky:

Literatura

[1] BOČEK, L. Příklady z diferenciální geometrie. Praha: Univerzita Karlova, 1974.

[2] BOČEK, L., KUBÁT, V. Diferenciální geometrie křivek a ploch. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983.

[3] BUDÍNSKÝ, B. Analytická a diferenciální geometrie. Praha: SNTL, 1983.

[4] BUDÍNSKÝ, B., KEPR, B. Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi. Praha: SNTL, 1970.

[5] KEPR, B. Základy diferenciální geometrie křivek a ploch (pro posluchače zeměměřičského inženýrství. Praha: SNTL, 1955.

[6] KOJECKÁ, J. Řešené příklady z matematické analýzy II. Olomouc: VUP, 1986.

[7] KOLÁŘ, I., POSPÍŠILOVÁ, L. Diferenciální geometrie křivek a ploch. Dostupný z WWW: ⟨http://is.muni.cz/do/1499/el/estud/prif/ps08/geom/web/index.html⟩.

[8] METELKA, J. Diferenciální geometrie. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1969.

[9] MIKEŠ, J., VANŽUROVÁ, A. Geodesic mappings of manifolds with affine connection. Olomouc: VUP, 2008.

[10] MIKEŠ, J., HINTERLEITNER, I., VANŽUROVÁ, A. Geodesic mappings and some generalizations. Olomouc: VUP, 2009.

[11] PRADLOVÁ, J. Diferenciální geometrie: Sbírka řešených příkladů. Plzeň: Západočeská univerzita, 2001.

[12] SHIFRIN, T. Differential geometry: A First Course in Curves and Surfaces. Dostupný z WWW: ⟨http://www.math.uga.edu/ shifrin/ShifrinDiffGeo.pdf⟩.

[13] VANŽUROVÁ, A. Diferenciální geometrie křivek a ploch. Olomouc: VUP, 1996.

prof. RNDr. Josef Mikeš, DrSc.
Mgr. Martin Sochor

Diferenciální geometrie ploch v úlohách

Výkonný redaktor Prof. RNDr. Tomáš Opatrný, Dr.
Odpovědná redaktorka Mgr. Jana Kreiselová
Technická redakce autor

Určeno pro studenty Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci

Vydala a vytiskla Univerzita Palackého v Olomouci
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc
www.upol.cz/vup
vup@upol.cz

Tato publikace neprošla redakční jazykovou úpravou.

Olomouc 2013

1. vydání

Edice – Skripta

ISBN 978-80-244-3999-0

Neprodejná publikace

VUP 2013/988