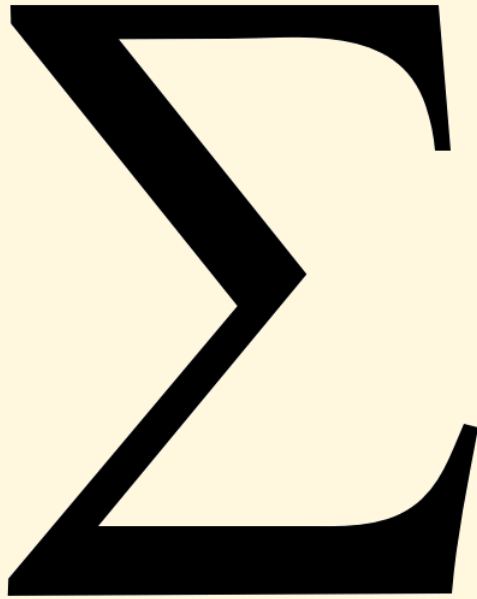
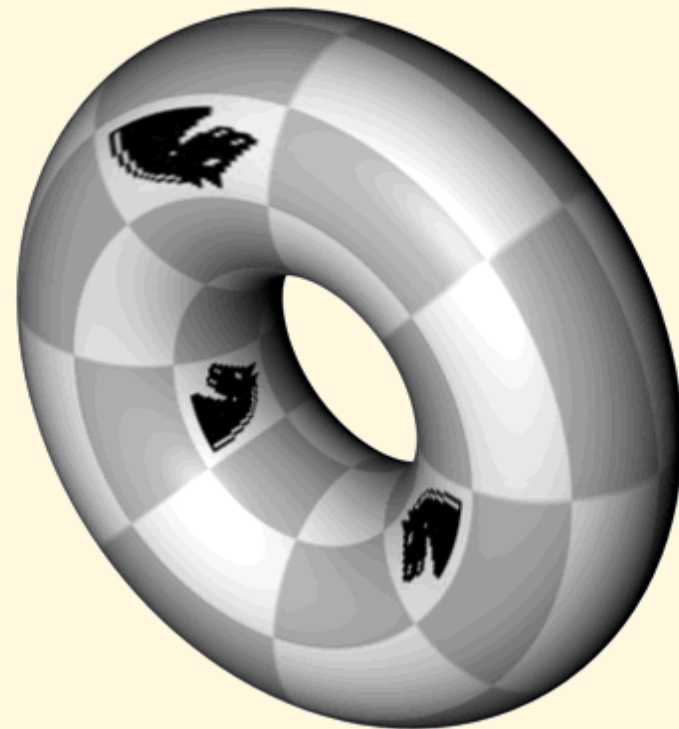


Non-attacking chess pieces
6th edition



Václav Kotěšovec



Neohrožující se kameny

Non-attacking chess pieces (chess and mathematics)

This book is devoted to the question of the number of arrangements of non-attacking chess pieces of the same kind on chessboards of various sizes and types.

The best-known example is the n -Queens problem, but this publication has a much wider range and includes other chess pieces (kings, rooks, bishops, knights) and many fairy pieces.

*Even though the book is about chess and each problem can be placed among **chess-mathematical problems**, it will be more readily understandable by mathematicians than by chess players or composers. A partial knowledge of linear algebra, difference equations, generating functions and power series is necessary.*

New in the sixth edition:

- *For pieces Rookhopper and Bishophopper (include number of stalemate positions!) see new chapters [9.9](#)*
- *For maximal number of non-attacking riders $[r,s]$, see updated chapter [14.1](#)*
- *New formulas for semi-knights and generally for semi-leapers, see new chapter [5.1.2](#)*
- *Enhanced table of entropy constants, see page 69*
- *New recurrence for bishops on an toroidal chessboard $n \times n$ if n is even, see page 280*
- *Both constants in the asymptotic formula for composite pieces semi-Rook + semi-Bishop are now in closed form!, see page 717*
- *Formula for 10 non-attacking kings on an $n \times n$ chessboard, see updated chapter [2.1](#)*

Neohrožující se kameny (šach a matematika)

Kniha je věnována problematice počtu rozmístění neohrožujících se kamenů stejných hodnot na různých velikostech a typech šachovnic. Nejznámější z těchto problémů je tzv. problém n dam (n -Queens problem), který řeší počet rozmístění n neohrožujících se dam na šachovnici $n \times n$. O tomto problému byla napsána již spousta článků a základní informace a přehled linků je možno nalézt na mojí [internetové stránce](#). Tato publikace má však mnohem širší záběr a věnuje se různým typům kamenů i šachovnic.

I když se tato kniha zabývá šachovou problematikou a každý problém lze zařadit mezi **šachově-matematické úlohy**, publikaci budou asi více rozumět matematici než šachisté. Pochopení některých částí vyžaduje aspoň částečné znalosti z lineární algebry, teorie diferenčních rovnic, vytvářejících funkcí a mocninných řad.

Většina v knize uvedených sekvencí (včetně vzorců) byla postupně publikována i v [On-Line Encyclopedia of Integer Sequences](#) (dále jen OEIS, kterou spravuje Neil J. A. Sloane, resp. jeho nadace). Doplnil jsem proto vždy i čísla těchto sekvencí v OEIS včetně příslušných odkazů.

Vzhledem k tomu, že v knize jsou desítky velmi dlouhých vzorců, z nichž některé by se neměly lámat přes jeden řádek, zvolil jsem méně obvyklý formát stránek otočených naležato (který je vhodnější pro čtení na monitoru).

V šestém vydání jsou

- nové kameny věžový a střelcový cvrček (včetně počtu možných patových pozic!), viz kapitoly [9.9](#)
- maximální počty nenapadajících se liniových kamenů $[r,s]$, viz aktualizovaná kapitola [14.1](#)
- nové vzorce pro semi-jezdce a obecně semi-skokany (semi-leapers), viz nová kapitola [5.1.2](#)
- rozšířena tabulka entropie konstant, viz str. 69
- nová rekurence pro střelce na prstencové šachovnici sudých rozměrů, viz str. 280
- obě konstanty v asymptotickém vzorci pro kombinované kameny semi-věž + semi-střelec jsou nyní i v symbolickém tvaru, viz str. 717
- vzorec pro 10 nenapadajících se králů na normální šachovnici $n \times n$, viz aktualizovaná kapitola [2.1](#)

Previous editions

Part of book "Between chessboard and computer" (p. 204-6), Václav Kotěšovec, 1996

My [website](#): Article "Number of ways of placing non-attacking kings and queens on boards of various sizes." (updated 2001-2010)

"Non-attacking chess pieces", first edition (22.4.2010)

- new results and formulas since 1996
- total 110 explicit formulas, 29 tables and over 100 generating functions and recurrences
- added non-attacking bishops, knights and some fairy pieces

"Non-attacking chess pieces", [second edition](#) (23.6.2010)

- [General conjecture](#) about k queens on an $n \times n$ chessboard
- [Leapers and Riders](#)
- Total 190 explicit formulas, 40 tables and over 200 generating functions and recurrences.

"Non-attacking chess pieces", [third edition](#) (19.1.2011)

- [8n non-attacking kings on a 16 x 2n chessboard](#), formula for *smallest root* (include limit)
- formula for 5 non-attacking [amazons](#) on a $n \times n$ board
- [kings](#), [amazons](#) and [zebras](#) on a toroidal chessboard
- 65 new explicit formulas added to section [Riders](#), total more than 300 explicit formulas in third edition
- new results and tables for [2 riders](#) on a toroidal chessboard
- [Method for transformation of formulas with Floor function to expressions with trigonometric functions](#)
- [Index of citations](#)

Historie předchozích vydání

Základ tvořila kapitola z mé knihy "Mezi šachovnicí a počítačem", 1996, str. 204-206. Další verze se pak postupně rodila v letech 2001-2010 na mé [internetové stránce](#). Formát HTML se však ukázal jako ne příliš vhodný pro matematické vzorce a proto jsem využil možnost sazby matematických vzorců ve Wordu 2007 a další vydání pak publikoval v přehlednějším PDF formátu. Vzniklo tak první vydání této knihy z 22.4.2010, které mělo 116 stran a druhé vydání z 23.6.2010 pak bylo rozšířeno na 237 stran, třetí vydání z 19.1.2011 mělo už 348 stran a čtvrté vydání z 15.6.2011 mělo 467 stran, páté vydání z 9.1.2012 pak už 703 stran.

První vydání z 22.4.2010 obsahovalo celkem 110 explicitních vzorců, 29 tabulek a přes 100 vytvářících funkcí a rekurencí. Druhé vydání z 23.6.2010 obsahovalo celkem 190 explicitních vzorců, 40 tabulek a přes 200 vytvářících funkcí a rekurencí.

Ve druhém vydání jsem doplnil kapitoly věnované skokanům ([Leapers](#)) a liniovým kamenům ([Riders](#)) a to jak na normální, tak na prstencové šachovnici. Podařilo se mi najít několik obecných vzorců a vytvářících funkcí v závislosti na souřadnicích $[r,s]$ těchto kamenů. Největším objevem byla však [obecná rekurence](#) pro k neohrožujících se dam na šachovnici $n \times n$ včetně elegantního asymptotického vzorce.

Ve třetím vydání z 19.1.2011 jsem doplnil vzorce pro rozmístění [8n neohrožujících se králů na šachovnici 16 x 2n](#), což bylo pokračování započaté série, které sáhlo až na hranici možností výpočetní techniky a počítačových programů. Do této kapitoly jsem dále doplnil elegantní algebraické vyjádření hodnot [nejmenších kořenů](#), včetně limit. V části [Riders](#) přibýlo asi 65 nových a 50 alternativních vzorců a v kapitole 11.3 přibýla řada výsledků. Vymyslel jsem také obecnou [metodu](#), umožňující převod výrazů, obsahujících celé části, na trigonometrické funkce. Doplněn byl [alternativní vzorec](#) pro rozmístění 6 neohrožujících se dam (odvozený touto metodou), vyjádřený pomocí trigonometrických funkcí a vzorec pro počet neohrožujících se [5 amazonek](#) na šachovnici $n \times n$. Doplněny byly též nové kapitoly týkající se [králů](#), [amazonek](#) a [zeber](#) na prstencové šachovnici a jmenný [rejstřík](#) citací. Třetí vydání obsahovalo už celkem přes 300 explicitních vzorců.

“*Non-attacking chess pieces*”, *fourth edition* (15.6.2011)

- For general formulas for the number of ways of placing ***k non-attacking bishops*** on an $n \times n$ chessboard (including the most interesting case $k=n$), see the updated chapters [4.1](#), [4.3](#) and new chapters [4.1.1](#), [4.1.2.](#), [4.4](#).
- For miscellaneous problems with rooks, see chapter [3.1.1](#)
- An extensive new chapter [12](#) is devoted to the **asymptotic behaviour** of sequences of numbers of ways of placing non-attacking composite pieces rook + leaper, queen + leaper, rook + rider, queen + rider. There are many new formulas, conjectures, graphs and tables of values.
- For maximal number of non-attacking pieces, see chapter [14](#)

“*Non-attacking chess pieces*”, *fifth edition* (9.1.2012)

- For general asymptotic formulas see new chapter [13.1](#).
- For new results for $m \times n$ non-attacking kings on a $2m \times 2n$ chessboard see chapters [2.3](#) and [2.3.9](#).
- For non-attacking kings on the **cylindrical chessboard**, see the new chapters [2.6](#), [2.6.9](#), [2.7](#) and [2.5](#).
- For new formula for the number of ways of placing **n^2 non-attacking kings on an $2n \times 2n$ toroidal chessboard**, see the new chapter [2.9](#).
- For explicit formula for the number of ways of placing **6 non-attacking queens on an $n \times n$ toroidal chessboard**, see the updated chapter [1.3](#).
- For non-attacking **nightriders** on the **cylindrical chessboard**, see the new chapters [6.5](#) and [6.6](#).
- Roots of a polynomials as points in the **complex plane**.
- Added pieces **semi-wazir**, **semi-fers** and **semi-knight** (interesting from mathematical view point), see new chapters [9.1.1](#), [9.3.1](#), [9.4.1](#) and [5.1.1](#).
- Reduced PDF size

Ve **čtvrtém vydání** z 15.6.2011 byl

- kompletně vyřešen problém rozmístění ***k neohrožujících se střelců*** na šachovnici $n \times n$ (včetně nejzajímavějšího případu, kdy $k=n$), viz aktualizované kapitoly [4.1](#), [4.3](#) a nové kapitoly [4.1.1](#), [4.1.2.](#), [4.4](#).
- doplněna kapitola [3.1.1](#), věnovaná různým úlohám s věžemi
- doplněna rozsáhlá kapitola [12](#), věnovaná **asymptotickému chování** posloupností počtu neohrožujících se kombinovaných kamenů, jejichž pohyblivost vznikne složením pohyblivosti věže (nebo dámy) a obecných skokanů (Leapers) nebo liniových kamenů (Riders). Tabulky vypočtených hodnot byly doplněny teoretickými úvahami a řadou grafů.
- doplněna kapitola [14](#), shrnující pro každý typ kamene maximální počty neohrožujících se kamenů

V **pátém vydání** z 9.1.2012 byly doplněny

- nové **obecné asymptotické vzorce** (kap. [13.1](#))
- nové výsledky pro počty rozmístění neohrožujících se $m \times n$ králů na šachovnici $2m \times 2n$, viz aktualizované kapitoly [2.3](#) a [2.3.9](#)
- nové kapitoly [2.6](#), [2.6.9](#), [2.7](#) a [2.5](#) o počtech pozic neohrožujících se králů na **válcových šachovnicích**.
- nový vzorec pro počet pozic neohrožujících se **n^2 králů na prstencové šachovnici $2n \times 2n$** , viz nová kapitola [2.9](#).
- explicitní vzorec pro počet rozmístění **6 neohrožujících se dam na prstencové šachovnici $n \times n$** , viz aktualizovaná kapitola [1.3](#).
- nové kapitoly [6.5](#) a [6.6](#), tátoši na válcových šachovnicích
- doplněna řada grafů kořenů polynomů v komplexní rovině
- doplněny kameny **semi-vezír** (kap. [9.1.1](#) a [9.3.1](#)), **semi-fers** (kap. [9.4.1](#)) a **semi-jezdec** (kap. [5.1.1](#)), zajímavé hlavně z matematického pohledu
- výrazně zmenšena velikost PDF souboru

Content - Obsah

1.1	k Queens on an $n \times n$ chessboard	1.1	k dam na šachovnici $n \times n$	11
1.1.1	n Queens on an $n \times n$ chessboard	1.1.1	n dam na šachovnici $n \times n$	35
1.2	k Queens on an $k \times n$ chessboard	1.2	k dam na šachovnici $k \times n$	39
1.3	k Queens on an $n \times n$ toroidal chessboard	1.3	k dam na prstencové šachovnici $n \times n$	47
1.3.1	n Queens on an $n \times n$ toroidal chessboard	1.3.1	n dam na prstencové šachovnici $n \times n$	62
2.1	k Kings on an $n \times n$ chessboard	2.1	k králů na šachovnici $n \times n$	64
	Entropy constants		konstanty entropie	69
2.1.1	k Kings on a $1 \times n$ and $2 \times n$ chessboard	2.1.1	k králů na šachovnici $1 \times n$ a $2 \times n$	74
2.1.2	n Kings on an $n \times n$ chessboard	2.1.2	n králů na šachovnici $n \times n$	77
2.2	k Kings on an $k \times n$ chessboard	2.2	k králů na šachovnici $k \times n$	78
2.3	$m \times n$ Kings on a $2m \times 2n$ chessboard	2.3	$m \times n$ králů na šachovnici $2m \times 2n$	81
2.3.1	n Kings on a $2 \times 2n$ chessboard	2.3.1	n králů na šachovnici $2 \times 2n$	90
2.3.2	$2n$ Kings on a $4 \times 2n$ chessboard	2.3.2	$2n$ králů na šachovnici $4 \times 2n$	90
2.3.3	$3n$ Kings on a $6 \times 2n$ chessboard	2.3.3	$3n$ králů na šachovnici $6 \times 2n$	91
2.3.4	$4n$ Kings on a $8 \times 2n$ chessboard	2.3.4	$4n$ králů na šachovnici $8 \times 2n$	92
2.3.5	$5n$ Kings on a $10 \times 2n$ chessboard	2.3.5	$5n$ králů na šachovnici $10 \times 2n$	96
2.3.6	$6n$ Kings on a $12 \times 2n$ chessboard	2.3.6	$6n$ králů na šachovnici $12 \times 2n$	100
2.3.7	$7n$ Kings on a $14 \times 2n$ chessboard	2.3.7	$7n$ králů na šachovnici $14 \times 2n$	104
2.3.8	$8n$ Kings on a $16 \times 2n$ chessboard	2.3.8	$8n$ králů na šachovnici $16 \times 2n$	112
2.3.9	more kings on a $2m \times 2n$ chessboard	2.3.9	více králů na šachovnici $2m \times 2n$	128
2.3.10	Largest and smallest root	2.3.10	Největší a nejmenší kořen	139
2.4	n^2 Kings on a $2n \times 2n$ chessboard	2.4	n^2 králů na šachovnici $2n \times 2n$	160
2.5	k Kings on an $n \times n$ cylindrical chessboard	2.5	k králů na válcové šachovnici $n \times n$	163
2.5.1	k Kings on a $1 \times n$ and $2 \times n$ horizontal cylinder	2.5.1	k králů na horizontálním válci $1 \times n$ a $2 \times n$	166
2.6	$m \times n$ Kings on a $2m \times 2n$ cylindrical chessboard	2.6	$m \times n$ králů na válcové šachovnici $2m \times 2n$	169
2.6.1	n Kings on a $2 \times 2n$ horizontal cylinder	2.6.1	n králů na horizontálním válci $2 \times 2n$	169
2.6.2	$2n$ Kings on a $4 \times 2n$ horizontal cylinder	2.6.2	$2n$ králů na horizontálním válci $4 \times 2n$	169
2.6.3	$3n$ Kings on a $6 \times 2n$ horizontal cylinder	2.6.3	$3n$ králů na horizontálním válci $6 \times 2n$	170
2.6.4	$4n$ Kings on a $8 \times 2n$ horizontal cylinder	2.6.4	$4n$ králů na horizontálním válci $8 \times 2n$	170

2.6.5	5n Kings on a 10 x 2n horizontal cylinder	2.6.5	5n králů na horizontálním válci 10 x 2n	171
2.6.6	6n Kings on a 12 x 2n horizontal cylinder	2.6.6	6n králů na horizontálním válci 12 x 2n	172
2.6.7	7n Kings on a 14 x 2n horizontal cylinder	2.6.7	7n králů na horizontálním válci 14 x 2n	174
2.6.8	more Kings on a 2m x 2n horizontal cylinder	2.6.8	více králů na horizontálním válci 2m x 2n	178
2.6.9	m x n Kings on a 2m x 2n vertical cylinder	2.6.9	m x n králů na vertikálním válci 2m x 2n	197
2.7	n^2 Kings on a 2n x 2n cylindrical chessboard	2.7	n^2 králů na válcové šachovnici 2n x 2n	209
2.8	k Kings on an n x n toroidal chessboard	2.8	k králů na prstencové šachovnici n x n	211
2.9	n^2 Kings on a 2n x 2n toroidal chessboard	2.9	n^2 králů na prstencové šachovnici 2n x 2n	215
3.1	k Rooks on an n x n chessboard	3.1	k věží na šachovnici n x n	216
3.1.1	Miscellaneous problems with rooks	3.1.1	Různé další úlohy s věžemi	220
3.2	k Rooks on an k x n chessboard	3.2	k věží na šachovnici k x n	230
4.1	k Bishops on an n x n chessboard	4.1	k střelců na šachovnici n x n	234
4.1.1	n Bishops on an n x n chessboard	4.1.1	n střelců na šachovnici n x n	242
4.1.2	n semi-bishops on an n x n chessboard	4.1.2	n semi-střelců na šachovnici n x n	260
4.2	k Bishops on an k x n chessboard	4.2	k střelců na šachovnici k x n	270
4.3	k Bishops on an n x n toroidal chessboard	4.3	k střelců na prstencové šachovnici n x n	273
4.4	n Bishops on an n x n toroidal chessboard	4.4	n střelců na prstencové šachovnici n x n	281
5.1	k Knights on an n x n chessboard	5.1	k jezdců na šachovnici n x n	283
5.1.1	k semi-knights on an n x n chessboard	5.1.1	k semi-jezdců na šachovnici n x n	286
5.1.2	semi-leapers [r,s] on an n x n chessboard	5.1.2	semi-skokani na šachovnici n x n	290
5.1.3	n Knights on an n x n chessboard	5.1.3	n jezdců na šachovnici n x n	293
5.2	k Knights on an k x n chessboard	5.2	k jezdců na šachovnici k x n	294
5.2.1	k Knights on a 2 x n chessboard	5.2.1	k jezdců na šachovnici 2 x n	297
5.2.2	k Knights on a 2 x n horizontal cylinder	5.2.2	k jezdců na horizontálním válci 2 x n	302
5.3	k Knights on an n x n cylindrical chessboard	5.3	k jezdců na válcové šachovnici n x n	305
5.4	k Knights on an n x n toroidal chessboard	5.4	k jezdců na prstencové šachovnici n x n	308
6.1	k Nightriders on an n x n chessboard	6.1	k tátošů na šachovnici n x n	312
6.1.1	k semi-nightriders on an n x n chessboard	6.1.1	k semi-tátošů na šachovnici n x n	319
6.1.2	k semi-riders [r,s] on an n x n chessboard	6.1.2	k semi-riders [r,s] na šachovnici n x n	325
6.1.3	n Nightriders on an n x n chessboard	6.1.3	n tátošů na šachovnici n x n	330
6.2	k Nightriders on an k x n chessboard	6.2	k tátošů na šachovnici k x n	331
6.3	k Nightriders on an n x n toroidal chessboard	6.3	k tátošů na prstencové šachovnici n x n	333

6.4	n Nightriders on an $n \times n$ toroidal chessboard	6.4	n tátošů na prstencové šachovnici $n \times n$	338
6.5	k Nightriders on an $n \times n$ cylindrical chessboard	6.5	k tátošů na válcové šachovnici $n \times n$	339
6.6	n Nightriders on an $n \times n$ cylindrical chessboard	6.6	n tátošů na válcové šachovnici $n \times n$	342
7.1	k Amazons (superqueens) on an $n \times n$ chessboard	7.1	k amazonek na šachovnici $n \times n$	343
7.1.1	n Amazons (superqueens) on an $n \times n$ chessboard	7.1.1	n amazonek na šachovnici $n \times n$	348
7.1.2	n pieces Queen + Nightrider on an $n \times n$ chessboard	7.1.2	n kamenů dáma + tátoš na šachovnici $n \times n$	350
7.2	k Amazons (superqueens) on an $k \times n$ chessboard	7.2	k amazonek na šachovnici $k \times n$	353
7.3	k Amazons on an $n \times n$ toroidal chessboard	7.3	k amazonek na prstencové šachovnici $n \times n$	356
7.3.1	n Amazons on an $n \times n$ toroidal chessboard	7.3.1	n amazonek na prstencové šachovnici $n \times n$	360
8.1	k Zebras on an $n \times n$ chessboard	8.1	k zeber na šachovnici $n \times n$	361
8.1.1	n Zebras on an $n \times n$ chessboard	8.1.1	n zeber na šachovnici $n \times n$	363
8.2	k Zebras on an $k \times n$ chessboard	8.2	k zeber na šachovnici $k \times n$	364
8.3	k Zebras on an $n \times n$ toroidal chessboard	8.3	k zeber na prstencové šachovnici $n \times n$	366
9.1	k Wazirs on an $n \times n$ chessboard	9.1	k vezírů na šachovnici $n \times n$	369
9.1.1	k semi-wazirs on an $n \times n$ chessboard	9.1.1	k semi-vezírů na šachovnici $n \times n$	373
9.1.2	n Wazirs on an $n \times n$ chessboard	9.1.2	n vezírů na šachovnici $n \times n$	382
9.2	k Wazirs on an $k \times n$ chessboard	9.2	k vezírů na šachovnici $k \times n$	383
9.2.1	k Wazirs on a $2 \times n$ chessboard	9.2.1	k vezírů na šachovnici $2 \times n$	386
9.2.2	k Wazirs on a $2 \times n$ horizontal cylinder	9.2.2	k vezírů na horizontálním válci $2 \times n$	394
9.3	k Wazirs on an $n \times n$ toroidal chessboard	9.3	k vezírů na prstencové šachovnici $n \times n$	402
9.3.1	k semi-wazirs on an $n \times n$ toroidal chessboard	9.3.1	k semi-vezírů na prstencové šachovnici $n \times n$	407
9.3.2	n Wazirs on an $n \times n$ toroidal chessboard	9.3.2	n vezírů na prstencové šachovnici $n \times n$	411
9.3.3	k Wazirs on an $n \times n$ cylindrical chessboard	9.3.3	k vezírů na válcové šachovnici $n \times n$	412
9.4	k Ferses on an $n \times n$ chessboard	9.4	k fersů na šachovnici $n \times n$	415
9.4.1	k semi-feres on an $n \times n$ chessboard	9.4.1	k semi-fersů na šachovnici $n \times n$	418
9.4.2	n Ferses on an $n \times n$ chessboard	9.4.2	n fersů na šachovnici $n \times n$	423
9.5	k Ferses on an $k \times n$ chessboard	9.5	k fersů na šachovnici $k \times n$	425
9.5.1	k Ferses on a $2 \times n$ chessboard	9.5.1	k fersů na šachovnici $2 \times n$	428
9.5.2	k Ferses on a $2 \times n$ horizontal cylinder	9.5.2	k fersů na horizontálním válci $2 \times n$	435
9.6	k Ferses on an $n \times n$ toroidal chessboard	9.6	k fersů na prstencové šachovnici $n \times n$	425
9.6.1	k Ferses on an $n \times n$ cylindrical chessboard	9.6.1	k fersů na válcové šachovnici $n \times n$	441
9.7	k Grasshoppers on an $n \times n$ chessboard	9.7	k cvrčků na šachovnici $n \times n$	444

9.7.1	k Grasshoppers in stalemate	9.7.1	k cvrčků v patu	447
9.8	k Grasshoppers on an $n \times n$ toroidal chessboard	9.8	k cvrčků na prstencové šachovnici $n \times n$	451
9.9.1	k Rookhoppers on an $n \times n$ chessboard	9.9.1	k věžových cvrčků na šachovnici $n \times n$	455
9.9.2	k Rookhoppers in stalemate	9.9.2	k věžových cvrčků v patu	458
9.9.3	k Rookhoppers on an $n \times n$ toroidal chessboard	9.9.3	k věžových cvrčků na prstencové šachovnici $n \times n$	466
9.9.4	k Bishophoppers on an $n \times n$ chessboard	9.9.4	k střelcových cvrčků na šachovnici $n \times n$	469
9.9.5	k Bishophoppers in stalemate	9.9.5	k střelcových cvrčků v patu	472
9.9.6	k Bishophoppers on an $n \times n$ toroidal chessboard	9.9.6	k střelcových cvrčků na prstencové šachovnici $n \times n$	477
10.	Leapers	10.	Skokani	480
10.1	2 leapers on an $n \times n$ chessboard	10.1	2 skokani na šachovnici $n \times n$	480
10.2	3 leapers on an $n \times n$ chessboard	10.2	3 skokani na šachovnici $n \times n$	483
10.3	4 leapers on an $n \times n$ chessboard	10.3	4 skokani na šachovnici $n \times n$	486
10.4	2 leapers on an $n \times n$ toroidal chessboard	10.4	2 skokani na prstencové šachovnici $n \times n$	491
10.5	3 leapers on an $n \times n$ toroidal chessboard	10.5	3 skokani na prstencové šachovnici $n \times n$	495
10.6	4 leapers on an $n \times n$ toroidal chessboard	10.6	4 skokani na prstencové šachovnici $n \times n$	498
10.7	5 leapers on an $n \times n$ toroidal chessboard	10.7	5 skokanů na prstencové šachovnici $n \times n$	503
10.8	6 leapers on an $n \times n$ toroidal chessboard	10.8	6 skokanů na prstencové šachovnici $n \times n$	505
10.9	more leapers on an $n \times n$ toroidal chessboard	10.9	více skokanů na prstencové šachovnici $n \times n$	512
11.	Riders	11.	Liniové kameny	513
11.1	2 riders on an $n \times n$ chessboard	11.1	2 liniové kameny na šachovnici $n \times n$	513
11.2	3 riders on an $n \times n$ chessboard	11.2	3 liniové kameny na šachovnici $n \times n$	540
11.3	2 riders on an $n \times n$ toroidal chessboard	11.3	2 liniové kameny na prstencové šachovnici $n \times n$	564
12.	Composite pieces Rook/Queen + Leaper/Rider	12.	Kombinované kameny	621
12.1	n pieces rook + leaper $[r,s]$ on an $n \times n$ chessboard	12.1	n kamenů věž + skokan $[r,s]$ na šachovnici $n \times n$	622
12.2	n pieces queen + leaper $[r,s]$ on an $n \times n$ chessboard	12.2	n kamenů dáma + skokan $[r,s]$ na šachovnici $n \times n$	649
12.3	n pieces rook + rider $[r,s]$ on an $n \times n$ chessboard	12.3	n kamenů věž + liniový kámen $[r,s]$ na šachovnici $n \times n$	655
12.4	n pieces queen + rider $[r,s]$ on an $n \times n$ chessboard	12.4	n kamenů dáma + liniový kámen $[r,s]$ na šachovnici $n \times n$	676
13.	Comparison of general formulas	13.	Porovnání obecných vzorců	682
13.1	General asymptotic formulas (Leapers)	13.1	Obecné asymptotické vzorce (skokani)	685
13.2	Composite pieces Leaper + Leaper	13.2	Kombinované kameny skokan + skokan	687
13.3	General asymptotic formulas (Riders)	13.3	Obecné asymptotické vzorce (liniové kameny)	710
13.4	Composite pieces Rider + Rider	13.4	Kombinované liniové kameny	712

13.5	Composite pieces Rider + Leaper	13.5	Kombinované kameny liniový kámen + skokan	740
14.	Maximal number of non-attacking pieces	14.	Maximální počty neohrožujících se kamenů	751
14.1	normal chessboard	14.1	normální šachovnice	752
14.2	toroidal chessboard	14.2	prstencová šachovnice	777
14.3	cylindrical chessboard	14.3	válcová šachovnice	788
15.	Methods	15.	Metody hledání vzorců	790
Index		Rejstřík		792

1.1) k Queens on an $n \times n$ chessboard - k dam na šachovnici $n \times n$

Vzorec pro počet rozmístění n dam na šachovnici $n \times n$ nedá matematikům spát již přes 150 let. Zatím ho nikdo neobjevil. Proto se matematici snažili už v 19. století vyřešit alespoň jednodušší případy, což se podařilo pro rozmístění 2 a 3 dam na $n \times n$. Na další výsledky bylo ale třeba čekat více než 100 let, kdy k objevení dalších vzorců pomohly až počítače. Obecně ale platí, že vzorce pro rozmístění většího počtu dam nebudou příliš elegantní, naopak půjde o složité výrazy, tak jak už to bývá pravidlem při řešení diferenčních rovnic. Navíc se tyto vzorce mírně liší podle typu rozměrů šachovnic (sudá/lichá apod.), což při snaze o zobecnění vede k (pro nematematiky) překvapujícím členům SIN a COS v těchto vzorcích, které však dávají celočíselné výsledky.

[A036464](#) - 2 Queens, board $n \times n$ (E.Lucas, 1891):

$$\frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{6}$$

[A047659](#) - 3 Queens, board $n \times n$ (E.Landau, 1896):
pro n sudé (even)

$$\frac{n(n-2)^2(2n^3 - 12n^2 + 23n - 10)}{12}$$

pro n liché (odd)

$$\frac{(n-1)(n-3)(2n^4 - 12n^3 + 25n^2 - 14n + 1)}{12}$$

nebo jedním vzorcem:

$$\frac{4n^6 - 40n^5 + 158n^4 - 300n^3 + 264n^2 - 86n + 3 + 3(2n-1)(-1)^n}{24}$$

98

LIVRE I. — LES NOMBRES ENTIERS.

Exemple II. — Le nombre des manières de placer deux reines sur l'échiquier de p^2 cases, de telle sorte qu'elles ne soient pas en prise, c'est-à-dire qu'elles ne soient pas situées sur une même ligne parallèle aux bords ou aux diagonales de l'échiquier est

$$\frac{1}{6}p(p-1)(p-2)(3p-1).$$

XI. Nr. 31.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift.

367

Ueber das Achtdamenproblem und seine Verallgemeinerung.

Von Edmund Landau.

Poznámka: Panos Louridas publikoval v idee & form 93/2007 (str. 2936-2938) obecnější vzorec pro rozmístění 3 dam na šachovnici $m \times n$. Vzorec je však dost neelegantní (zabírá skoro půl stránky), proto zájemce odkazuji na tento článek.

A061994 - 4 Queens, board $n \times n$ (V.Kotěšovec, 1992), $n \geq 2$

$$\frac{n^8}{24} - \frac{5n^7}{6} + \frac{65n^6}{9} - \frac{1051n^5}{30} + \frac{817n^4}{8}$$

a dále podle typu n :

a) $n=6a$

$$-\frac{4769n^3}{27} + \frac{1963n^2}{12} - \frac{1769n}{30}$$

b) $n=6a+1$

$$-\frac{9565n^3}{54} + \frac{1013n^2}{6} - \frac{6727n}{90} + \frac{257}{27}$$

c) $n=6a+2$

$$-\frac{4769n^3}{27} + \frac{1963n^2}{12} - \frac{5467n}{90} + \frac{28}{27}$$

d) $n=6a+3$

$$-\frac{9565n^3}{54} + \frac{1013n^2}{6} - \frac{2189n}{30} + 7$$

e) $n=6a+4$

$$-\frac{4769n^3}{27} + \frac{1963n^2}{12} - \frac{5467n}{90} + \frac{68}{27}$$

f) $n=6a+5$

$$-\frac{9565n^3}{54} + \frac{1013n^2}{6} - \frac{6727n}{90} + \frac{217}{27}$$

5) 4 Dames sur $n.n$, avec $n \geq 2$:

$$(n^8)/24 - (5n^7)/6 + (65n^6)/9 - (1051n^5)/30 + (817n^4)/8 - \dots$$

et maintenant pour :

$$a) n = 6k : -(4769n^3)/27 + (1963n^2)/12 - (1769n)/30$$

$$b) n = 6k+1 : -(9565n^3)/54 + (1013n^2)/6 - (6727n)/90 + 257/27$$

$$c) n = 6k+2 : -(4769n^3)/27 + (1963n^2)/12 - (5467n)/90 + 28/27$$

$$d) n = 6k+3 : -(9565n^3)/54 + (1013n^2)/6 - (2189n)/30 + 7$$

$$e) n = 6k+4 : -(4769n^3)/27 + (1963n^2)/12 - (5467n)/90 + 68/27$$

$$f) n = 6k+5 : -(9565n^3)/54 + (1013n^2)/6 - (6727n)/90 + 217/27$$

Un très grand bravo à Vaclav ! Une contribution vraiment exceptionnelle.

rex multiplex n°38 - Septembre 1992 -

Na základě řešení diferenční rovnice jsem pak odvodil jednotný vzorec pro tuto funkci (dávající pro celočíselné hodnoty n stejné výsledky):

$$\frac{n^8}{24} - \frac{5n^7}{6} + \frac{65n^6}{9} - \frac{1051n^5}{30} + \frac{817n^4}{8} - \frac{19103n^3}{108} + \frac{3989n^2}{24} - \frac{18131n}{270} + \frac{253}{54} + \left(\frac{n^3}{4} - \frac{21n^2}{8} + 7n - \frac{7}{2} \right) (-1)^n + \frac{32(n-1)}{27} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{40}{81} \sqrt{3} \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

V roce 2005 pak S.Perepechko ještě našel jiný zápis (pomocí celých částí) rovněž formálně sjednocující všech 6 případů. *Sergey Perepechko (2005) convert 6 formulas by Vaclav Kotěšovec (1992) into 1 unified expression*, kde $[x] = \text{Floor}(x)$ je **celá část** (largest integer not greater than x)

$$\frac{n(n-1)(45n^6 - 855n^5 + 6945n^4 - 30891n^3 + 78864n^2 - 106226n + 53404)}{1080} + \left(n^3 - \frac{21}{2}n^2 + 28n - 14 \right) \left[\frac{n}{2} \right] + \frac{32}{9}(n-1) \left[\frac{n}{3} \right] + \left(\frac{16}{9}n - 4 \right) \left[\frac{n+1}{3} \right]$$

A108792 - 5 Queens, board $n \times n$ (V.Kotěšovec, 4.4.2010):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{120}n^{10} - \frac{5}{18}n^9 + \frac{301}{72}n^8 - \frac{1679}{45}n^7 + \frac{78383}{360}n^6 - \frac{77519}{90}n^5 + \frac{1867681}{810}n^4 - \frac{6499681}{1620}n^3 + \frac{5324093}{1296}n^2 - \frac{12758453}{6480}n + \frac{13038851}{64800} \\ & + \left(\frac{1}{8}n^5 - \frac{143}{48}n^4 + \frac{82}{3}n^3 - \frac{5647}{48}n^2 + \frac{10475}{48}n - \frac{3547}{32} \right) * (-1)^n + \left(\frac{29}{2}n - \frac{35}{2} \right) * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + (2n + 15) * \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \\ & + \left(\frac{32}{27}n^3 - \frac{1328}{81}n^2 + \frac{6328}{81}n - \frac{5488}{81} \right) * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \left(\frac{40}{81}n^2 - \frac{1496}{243}n + \frac{7024}{243} \right) * \sqrt{3} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \\ & + \left(\left(\frac{8}{5} + \frac{8\sqrt{5}}{25} \right) * n - \frac{16\sqrt{5}}{25} - \frac{64}{25} \right) * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{8}{25} * \sqrt{50 + 22\sqrt{5}} * \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \\ & + \left(\left(\frac{8}{5} - \frac{8\sqrt{5}}{25} \right) * n + \frac{16\sqrt{5}}{25} - \frac{64}{25} \right) * \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right) * (-1)^n - \frac{8}{25} * \sqrt{50 - 22\sqrt{5}} * \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) * (-1)^n \end{aligned}$$

Dedicated to memory of Gauss, Lucas and Landau.

Pět dam dlouho odolávalo. V roce 2005 Sergey Perepechko vypočítal hodnoty pro $n \leq 25$, ale obecný vzorec neobjevil (na základě tak málo hodnot to ani nešlo). Až v roce 2010 Václav Kotěšovec vypočítal svým speciálně optimalizovaným programem hodnoty pro $n \leq 55$ a na jejich základě objevil obecný vzorec. Nejmenší perioda je 60, jinými slovy pro šachovnice $n \times n$, kde $n = 60p + q$, kde p a q jsou nezáporné konstanty (celá čísla), dostaneme vždy polynom desátého stupně (pro každé q jiný), který již neobsahuje trigonometrické funkce (tzv. kvazipolynomy).

In 2005 S.Perepechko computed values for $n \leq 25$, but he had not found general formula. In 2010 Václav Kotěšovec created special efficient computer program and computed all values for $n \leq 55$, then he discovered explicit formula!

Alternative formula (V.Kotěšovec, 2010)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{32n^3}{9} - \frac{1328n^2}{27} + \frac{6328n}{27} - \frac{5488}{27} \right) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left(\frac{16n^3}{9} - \frac{724n^2}{27} + \frac{1304n}{9} - \frac{6256}{27} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left(\frac{n^5}{2} - \frac{143n^4}{12} + \frac{328n^3}{3} - \frac{5647n^2}{12} + \frac{10427n}{12} - \frac{3787}{8} \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (33n - 5) \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + (25n - 65) \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \left(\frac{32n}{5} - \frac{48}{5} \right) \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \\ & + \left(\frac{24n}{5} - \frac{64}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \left(\frac{16n}{5} - \frac{56}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{5} - \frac{32}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + \frac{n^{10}}{120} - \frac{5n^9}{18} + \frac{301n^8}{72} - \frac{1679n^7}{45} + \frac{78293n^6}{360} - \frac{153943n^5}{180} + \frac{14556383n^4}{6480} - \frac{12062537n^3}{3240} + \frac{11001347n^2}{3240} - \frac{8084897n}{6480} \end{aligned}$$

A176186 - 6 Queens, board $n \times n$ (Artem M. Karavaev, 10.5.2010):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{720}n^{12} - \frac{5}{72}n^{11} + \frac{77}{48}n^{10} - \frac{73339}{3240}n^9 + \frac{312607}{1440}n^8 - \frac{66917}{45}n^7 + \frac{2226017}{300}n^6 - \frac{9149222687}{340200}n^5 + \frac{102550276811}{1488375}n^4 - \frac{2786721974671}{23814000}n^3 + \frac{453909010753}{3969000}n^2 - \frac{2166093922711}{47628000}n \\
& + \frac{1}{432} * (72n^7 - 2916n^6 + 50580n^5 - 485172n^4 + 2750088n^3 - 8977638n^2 + 14596860n - 7467833) * \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\
& + \frac{2}{243} * (216n^5 - 6480n^4 + 81308n^3 - 525474n^2 + 1650126n - 1364199) * \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \frac{1}{243} * (216n^5 - 6750n^4 + 88940n^3 - 620184n^2 + 2250534n - 3138465) * \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor \\
& + \frac{1}{4} * (116n^3 - 2133n^2 + 12902n - 13728) * \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \frac{1}{4} * (100n^3 - 1984n^2 + 13696n - 26993) * \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor - \frac{1}{4} * (16n^3 - 149n^2 - 794n + 13265) * \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor \\
& + \frac{8}{125} * (100n^3 - 1778n^2 + 16360n - 19739) * \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \frac{4}{125} * (150n^3 - 2842n^2 + 27521n - 65479) * \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor \\
& + \frac{4}{125} * (100n^3 - 1978n^2 + 19118n - 54269) * \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \frac{4}{125} * (50n^3 - 1014n^2 + 10311n - 30319) * \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor \\
& + \frac{2}{27} * (2118n - 4499) * \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \frac{1}{9} * (1934n - 6633) * \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + \frac{2}{27} * (1566n - 10901) * \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor - \frac{4}{9} * (92n + 1067) * \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor - \frac{1}{27} * (2670n + 1903) * \left\lfloor \frac{n+4}{6} \right\rfloor \\
& + \frac{48}{49} * (95n - 173) * \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \frac{4}{49} * (920n - 3597) * \left\lfloor \frac{n+1}{7} \right\rfloor + \frac{8}{49} * (335n - 1672) * \left\lfloor \frac{n+2}{7} \right\rfloor + \frac{4}{49} * (600n - 3409) * \left\lfloor \frac{n+3}{7} \right\rfloor + \frac{8}{49} * (145n - 926) * \left\lfloor \frac{n+4}{7} \right\rfloor + \frac{4}{49} * (160n - 989) * \left\lfloor \frac{n+5}{7} \right\rfloor \\
& + 2 * (2n - 5) * \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 2 * (2n - 9) * \left\lfloor \frac{n+1}{8} \right\rfloor + 2 * (2n - 11) * \left\lfloor \frac{n+2}{8} \right\rfloor + 2 * (2n - 11) * \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor - 12 * \left\lfloor \frac{n+4}{8} \right\rfloor - 4 * \left\lfloor \frac{n+5}{8} \right\rfloor
\end{aligned}$$

$\lfloor x \rfloor = \text{Floor}(x)$ je **celá část** (*largest integer not greater than x*)

Celé části umožňují analogickým způsobem vyjádřit kvazipolynomy podobně jako trigonometrické funkce, pro větší k mohou být dokonce vhodnější.

Odkazy:

[6 Queens problem](#) - popis algoritmu se složitostí $O(n^7)$, jehož autorem je Artem M. Karavaev, v ruštině (*in Russian*). Výpočet až do $n=80$ si vyžádal počítače s 56 jádry, zde nalezneme [výsledky](#). *Fantastic formula by Artem M. Karavaev (computed with help of 56 cores!)*

Alternative formula for 6 queens (Václav Kotěšovec, 6.12.2010)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{720}n^{12} - \frac{5}{72}n^{11} + \frac{77}{48}n^{10} - \frac{73339}{3240}n^9 + \frac{312727}{1440}n^8 - \frac{268283}{180}n^7 + \frac{26932229}{3600}n^6 - \frac{18719233399}{680400}n^5 + \frac{577434913967}{7938000}n^4 - \frac{117739826734}{893025}n^3 + \frac{112056711821}{756000}n^2 - \frac{393833819123}{4762800}n + \frac{749037381271}{68040000} \\
& + \left(\frac{1}{24}n^7 - \frac{27}{16}n^6 + \frac{1405}{48}n^5 - \frac{13477}{48}n^4 + \frac{114587}{72}n^3 - \frac{1496273}{288}n^2 + \frac{1216405}{144}n - \frac{7467833}{1728} \right) * (-1)^n \\
& + \left(\frac{25}{4}n^3 - 124n^2 + 856n - \frac{26993}{16} \right) * \sqrt{2} * \cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{33}{4}n^3 - \frac{1141}{8}n^2 + \frac{3027}{4}n - \frac{463}{16} \right) * \sqrt{2} * \sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\
& + \frac{2}{243} * \left((383792n - 552926) * \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + (493229 - 366386n) * \cos\left(\frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + (531641 - 363074n) * \sin\left(\frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \right) + (366386n - 493229) * \frac{2\sqrt{3}}{729} * \cos\left(\frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \\
& - \left(\frac{16}{81}n^5 - \frac{500}{81}n^4 + \frac{177880}{2187}n^3 - \frac{413456}{729}n^2 + \frac{767584}{729}n - \frac{1105852}{729} \right) * \sqrt{3} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \left(\frac{32}{81}n^5 - \frac{320}{27}n^4 + \frac{325232}{2187}n^3 - \frac{77848}{81}n^2 + \frac{18116}{9}n - \frac{832474}{729} \right) * \sqrt{3} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \\
& + \frac{2n-11}{2} * (\sqrt{2}+1) * \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4} \right) * \left((2n+1) * \sin\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{8}\right) + (2n-7) * \sin\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{3\pi}{8}\right) \right) \\
& + \frac{2n-11}{2} * (\sqrt{2}-1) * \sin\left(\frac{3\pi n}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{4} \right) * \left((7-2n) * \sin\left(\frac{3\pi n}{4} + \frac{\pi}{8}\right) + (2n+1) * \sin\left(\frac{3\pi n}{4} + \frac{3\pi}{8}\right) \right) \\
& + \frac{4\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{3125} * \left((150n^3 - 2842n^2 + 27521n - 65479) * \cos\left(\frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{10}\right) - (100n^3 - 1978n^2 + 19118n - 54269) * \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \right) \\
& + 2 * (100n^3 - 1778n^2 + 16360n - 19739) * \sin\left(\frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{5}\right) - (50n^3 - 1014n^2 + 10311n - 30319) * \sin\left(\frac{2\pi n}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) \\
& + \frac{4\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{3125} * \left((50n^3 - 1014n^2 + 10311n - 30319) * \cos\left(\frac{4\pi n}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) + (100n^3 - 1978n^2 + 19118n - 54269) * \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) \right) \\
& - (150n^3 - 2842n^2 + 27521n - 65479) * \sin\left(\frac{4\pi n}{5} + \frac{\pi}{5}\right) + 2 * (100n^3 - 1778n^2 + 16360n - 19739) * \sin\left(\frac{4\pi n}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) \\
& + \frac{4}{343 * \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} * \left((989 - 160n) * \cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right) + 2 * (335n - 1672) * \cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right) + (3409 - 600n) * \sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right) + 12 * (95n - 173) * \sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right) + 2 * (926 - 145n) * \sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right) + (920n - 3597) * \sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right) \right) \\
& + \frac{4}{343 * \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} * \left(2 * (145n - 926) * \cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right) + (920n - 3597) * \cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right) + (600n - 3409) * \sin\left(\frac{4\pi n}{7}\right) \right) \\
& + (989 - 160n) * \sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right) + 12 * (95n - 173) * \sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right) + 2 * (1672 - 335n) * \sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right) \\
& + \frac{4}{343 * \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} * \left((160n - 989) * \cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right) + 2 * (926 - 145n) * \cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right) + (3409 - 600n) * \sin\left(\frac{6\pi n}{7}\right) \right) \\
& + (3597 - 920n) * \sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right) + 12 * (95n - 173) * \sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right) + 2 * (335n - 1672) * \sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)
\end{aligned}$$

Pro k dam na šachovnici $n \times n$ jsou počáteční členy:

$$q(k) = \frac{n^{2k}}{k!} - \frac{5}{3} * \frac{n^{2k-1}}{(k-2)!} + \frac{(25k+4) * (2k-3) * n^{2k-2}}{36 * (k-2)!} - \dots$$

Speciálně pro $k=7$ bude mít tato funkce tvar:

$$q(7) = \frac{n^{14}}{5040} - \frac{n^{13}}{72} + \frac{1969}{4320} * n^{12} - \dots$$

Při konstantním k je asymptoticky

$$q(k) \sim \frac{n^{2k}}{k!} * \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d 5^d * (k^{2d} + \dots)}{3^d n^d d!} \sim \frac{n^{2k}}{k!} * e^{-\frac{5k^2}{3n}}$$

Proof that generating function is rational. Důkaz, že pro libovolné k je příslušná **vytvorující funkce racionální** (tedy, že jde o podíl dvou polynomů s celočíselnými koeficienty), uvádí v knize **Enumerative Combinatorics**, **Richard P. Stanley** (vol. I, 1986, chapter 4, **exercise 15**, solution **page 280-1**, see also vol. 1, 2ed, 2012, p.558 and 538, exercise 41). Tím je dán tvar řešení pro všechny tyto funkce, který obsahuje vždy polynom s konstantními koeficienty plus součet dalších tzv. kvazipolynomů (**Quasi-polynomials**, nazývaných též "*pseudo-polynomial*" nebo "*polynomial on residue classes*"), což jsou polynomy, jejichž koeficienty jsou periodické funkce s celočíselnou (*integer*) periodou. Nejpřirozenější jsou tyto periodické funkce vyjádřeny pomocí trigonometrických funkcí SIN a COS (jak vyplývá i z obecného tvaru řešení diferenčních rovnic, vyjádřeného pomocí komplexních čísel). Alternativně se ale dá použít i funkce FLOOR (celá část), což je někdy výpočetně výhodnější (viz též str. 537). V tom případě se využívá periodicity zbytku po dělení periodou.

K nalezení příslušného vzorce pro danou sekvenci tak potřebujeme vždy znát jen dostatečný počet známých hodnot (např. jen pro $n=1$ až 50, počet nezbytných hodnot závisí na celkovém počtu neznámých konstant). Potom jde o nalezení nejmenší periody a určení koeficientů příslušných polynomů. Háček je jedině v tom, že časově možný je výpočet členů posloupnosti jen do určité hodnoty n a ta nemusí být postačující pro nalezení všech koeficientů. Všechny zde uvedené vzorce jsou na současné mezi možností výpočetní techniky a vzorce pro vyšší hodnoty k budou postupně přibývat až se zrychlováním počítačů.

Let $B_k(n)$ be the number of ways of placing k non-attacking queens on an $n \times n$ chessboard. For example, $B_1(n) = n^2$, $B_2(3) = 8$. Show that $\sum_{n \geq 0} B_k(n)x^n$ is a rational power series.

Identify an $n \times n$ chessboard with the set $[0, n-1]^2$. Then $k! B_k(n)$ is equal to the number of vectors $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k, \gamma) \in \mathbb{Z}^{2k+1}$ satisfying

$$\gamma = n - 1 \quad (64)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq \gamma, \quad 0 \leq \beta_i \leq \gamma \quad (65)$$

$$i \neq j \Rightarrow [(\alpha_i \neq \alpha_j) \& (\beta_i \neq \beta_j) \& (\alpha_i - \beta_i \neq \alpha_j - \beta_j) \& (\alpha_i + \beta_i \neq \alpha_j + \beta_j)]. \quad (66)$$

Label the $r = 4 \binom{k}{2}$ inequalities of (66), say I_1, \dots, I_r . Let \bar{I}_i denote the negation of I_i , that is, the equality obtained from I_i by changing \neq to $=$. Given $S \subseteq [r]$, let $f_S(n)$ denote the number of vectors v satisfying (64), (65), and I_i for $i \in S$. By the Principle of Inclusion-Exclusion,

$$k! B_k(n) = \sum_S (-1)^{|S|} f_S(n). \quad (67)$$

Now by Theorem 4.6.11 the generating functions $F_S = \sum x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k} y_1^{\beta_1} \cdots y_k^{\beta_k} x^\gamma$ are rational, where the sum is over all vectors v satisfying (65) and \bar{I}_i for $i \in S$. But $\sum f_S(n)x^{n-1}$ is obtained from F_S by setting each $x_i = y_i = 1$, so $\sum f_S(n)x^n$ is rational. It then follows from (67) that $\sum B_k(n)x^n$ is also rational.

Odkazy na literaturu (díky skenování knih na Googlu bylo možné se dostat i k těmto velmi starým pramenům! *Thanks Google for access to very old books!*):

Edouard Lucas: **Théorie des nombres** (1891), (12 MB) - vzorec pro počet rozmístění 2 neohrožujících se dam najdeme na str.98, dále je uveden též v knize

Edouard Lucas: **Récréations mathématiques** (1894), str.132

Naturwissenschaftliche wochenschrift (1896), (81 MB) - v čísle z 2.8.1896, str.367-371 (str.380 v PDF) je článek "Ueber das Achtdamenproblem und seine Verallgemeinerung", jehož autorem je **Edmund Landau**. V článku jsou odvozeny vzorce pro rozmístění 3 dam na šachovnici $n \times n$ (pro sudé a liché n). Je zajímavé, že tento slavný německý matematik objevil vzorec už ve svých 19 letech! *Landau was only 19 years old!*

Této problematice byly věnovány také 2 články ve francouzském časopise "Rex Multiplex". Ve druhém byly publikovány moje nové výsledky.

Rex Multiplex 18/1986, (page 615, Louis Azemard, Echecs et Mathématiques) "Placements et Configurations pour 2, 3 et 4 Dames"

Rex Multiplex 38/1992, (Louis Azemard, Echecs et Mathématiques), **Une communication de Václav Kotěšovec**

Generating function, recurrence and explicit formula - Vytvořující funkce, rekurence a explicitní vzorec

Na tomto místě bude dobré se krátce zmínit o třech základních způsobech, jak lze vyjádřit nějakou posloupnost a o vzájemném vztahu mezi těmito „způsoby zakódování“ jejich hodnot. V předchozím textu byly vzorce vyjádřeny přímo, tzv. **explicitním vzorcem**, kdy pro zvolené n můžeme z takového vzorce přímo vypočítat příslušný člen posloupnosti pomocí běžných matematických operací. Najít explicitní vzorec však není vždy možné a navíc (jak se přesvědčíme ještě mnohokrát v této knize) může být explicitní vzorec někdy zbytečně složitý a komplikovaný ve srovnání s jinými formami definování dané posloupnosti. Druhou možností je proto tzv. **rekurence**, což je rovnice, která určuje jak z několika známých počátečních členů posloupnosti vypočítat další člen (a tím pádem při vícenásobném užití i všechny další členy). Rekurence tedy určuje diferenční rovnici pro danou posloupnost. Nalezení rekurence pro neznámou posloupnost je vždy úspěchem, ale rekurenci je pak třeba obvykle ještě dále řešit, např. proto, abychom našli asymptotické chování dané posloupnosti (tj. zjištění jak se posloupnost chová, pokud jde n k nekonečnu). Pokud je hloubka rekurence (tzv. *recurrence order*) příliš velká, může být obtížné (ne-li v reálném čase nemožné) vypočítat potřebný počet počátečních hodnot. Matematici proto mají nejradši, tzv. **vytvořující funkce** (*generating function*), což je formální vzorec, na jehož základě je možné pomocí diferenciálního počtu vypočítat jednotlivé členy posloupnosti. Vytvořující funkcí je posloupnost zcela definována. S vytvořujícími funkcemi se poměrně dobře pracuje, jen pro nematematiky mohou být špatně srozumitelné. *Ještě bych chtěl poznamenat, že občas užívám v českém textu i termín generační funkce, který vyjadřuje totéž, ale líbí se mi více.*

Vytvořující funkce není přímo explicitním vzorcem pro danou posloupnost, ale příslušná posloupnost z ní jde vytvořit tak, že vygenerujeme **Taylorův rozvoj** pro danou vytvořující funkci a jednotlivé členy této posloupnosti jsou koeficienty tohoto rozvoje. Přesněji: člen a_n posloupnosti je n -tá derivace vytvořující funkce v nule dělena n faktoriál ($n!$). Obvykle není tento postup pro výpočet členů posloupnosti ten nejefektivnější, ale v případech, kdy je obtížné určit explicitní vzorec, může být takový postup rychlejší. Ohledně vytvořujících funkcí je třeba ještě poznamenat, že z jejího jmenovatele lze snadno odvodit **rekurentní vzorec**, který vznikne roznásobením všech členů jmenovatele a nahrazením všech členů x^k výrazy a_{n-k} .

Jmenovatel (denominátor) pak dále určuje tvar partikulárních řešení příslušné diferenční rovnice. Tady ho naopak potřebujeme ve faktorizovaném tvaru a pokud je kořen takto vzniklé rovnice t , je jedním z partikulárních řešení funkce $1/t^n$. Pokud tedy např. obsahuje jmenovatel vytvořující funkce člen $(5x-1)$, odpovídá tomu kořen $1/5$ a partikulární řešení diferenční rovnice 5^n . Poněkud nepřijemnou práci s převrácenými hodnotami lze obejít substitucí $x=1/t$ a po úpravách dostaneme z denominátoru tzv. **charakteristickou rovnici**, jejíž kořeny již přímo určují mocniny pro partikulární řešení.

Každé takovéto partikulární řešení je třeba násobit polynomem (s neznámými koeficienty) jehož stupeň je roven násobnosti příslušného kořene - 1. Pokud byl v denominátoru např. člen $(5x-1)^2$, měl stupeň 2 a tvar příslušného partikulárního řešení bude $(c_0+c_1*x)^* 5^n$, kde konstanty c_0 a c_1 budou určeny podle počátečních hodnot posloupnosti.

V případě, že má charakteristická rovnice komplexní kořeny, je situace složitější. Pokud má rovnice kořen $a+bi$ (jak je známo, musí mít pak současně i komplexně sdružený kořen $a-bi$), pak mají partikulární řešení diferenční rovnice tvar

$$\begin{aligned} & (\sqrt{a^2 + b^2})^n \operatorname{Cos}\left(n * \operatorname{ArcTan}\left(\frac{b}{a}\right)\right) \\ & (\sqrt{a^2 + b^2})^n \operatorname{Sin}\left(n * \operatorname{ArcTan}\left(\frac{b}{a}\right)\right) \end{aligned}$$

Pokud je ve jmenovateli např. člen x^2+1 , dostáváme komplexní kořeny $+i$ a $-i$, kterým odpovídají partikulární řešení $\operatorname{Cos}(\pi n/2)$ a $\operatorname{Sin}(\pi n/2)$. O násobnostech kořenů platí totéž jako v případě kořenů reálných.

k	k Queens on an n x n chessboard - Generating function
1	$\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}$
2	$\frac{-4x^3 * (x+2)}{(x-1)^5}$
3	$\frac{-4x^4 * (9x^4 + 35x^3 + 49x^2 + 21x + 6)}{(x-1)^7(x+1)^2}$
4	$\frac{-2x^4 * (287x^{12} + 1902x^{11} + 6761x^{10} + 14884x^9 + 23445x^8 + 26790x^7 + 23152x^6 + 14678x^5 + 6659x^4 + 1996x^3 + 367x^2 + 38x + 1)}{(x-1)^9(x+1)^4(x^2+x+1)^2}$
5	$\frac{-x^5 * (14206x^{31} + 150238x^{30} + 916976x^{29} + 3972232x^{28} + 13522008x^{27} + 37968860x^{26} + 90996604x^{25} + 190236360x^{24} + 352607230x^{23} + 586165718x^{22} + 881664746x^{21} + 1207443842x^{20} + 1512654886x^{19} + 1738866194x^{18} + 1837742548x^{17} + 1786911600x^{16} + 1598078300x^{15} + 1312598856x^{14} + 987611934x^{13} + 677994354x^{12} + 422347390x^{11} + 236939238x^{10} + 118533110x^9 + 52176470x^8 + 19855936x^7 + 6376140x^6 + 1672768x^5 + 341612x^4 + 50540x^3 + 4836x^2 + 258x + 10)}{(x-1)^{11}(x+1)^6(x^2+1)^2(x^2+x+1)^4(x^4+x^3+x^2+x+1)^2}$
6	$\frac{-4x^6 * (125388x^{74} + 1769106x^{73} + 14475708x^{72} + 86868206x^{71} + 421322394x^{70} + 1733735219x^{69} + 6243623123x^{68} + 20096128176x^{67} + 58720300345x^{66} + 157632673869x^{65} + 392473060699x^{64} + 913299307705x^{63} + 1998986925515x^{62} + 4137125169063x^{61} + 8132464535507x^{60} + 15241746945993x^{59} + 27324795064304x^{58} + 46991003436040x^{57} + 77709213130439x^{56} + 123839006896190x^{55} + 190537440843487x^{54} + 283498964529980x^{53} + 408502373125992x^{52} + 570765121032393x^{51} + 774143005387556x^{50} + 1020253102328739x^{49} + 1307636222431031x^{48} + 1631097942913736x^{47} + 1981371771386641x^{46} + 2345222492958126x^{45} + 2706059061856895x^{44} + 3045052266009747x^{43} + 3342672506335632x^{42} + 3580483108767024x^{41} + 3742970026288202x^{40} + 3819162259356822x^{39} + 3803816547345336x^{38} + 3697993190167173x^{37} + 3508939440356435x^{36} + 3249296395578274x^{35} + 2935747117591644x^{34} + 2587299110418159x^{33} + 2223440299348897x^{32} + 1862408041738532x^{31} + 1519776851512400x^{30} + 1207502931973542x^{29} + 933484654834212x^{28} + 701616116303232x^{27} + 512246494510867x^{26} + 362914602952313x^{25} + 249214616002036x^{24} + 165658741321711x^{23} + 106432971812268x^{22} + 65980784446603x^{21} + 39390545501971x^{20} + 22595990341656x^{19} + 12422932793397x^{18} + 6526629468148x^{17} + 3265443398940x^{16} + 1549727363371x^{15} + 694388440836x^{14} + 292139023877x^{13} + 114647411058x^{12} + 41638044492x^{11} + 13860639977x^{10} + 4178943637x^9 + 1124196463x^8 + 264701695x^7 + 53192307x^6 + 8814849x^5 + 1148407x^4 + 109349x^3 + 6730x^2 + 213x + 1)}{(x-1)^{13}(x+1)^8(x^2+1)^4(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^6(x^4+1)^2(x^4+x^3+x^2+x+1)^4(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2}$

Generating function for k=6 found Artem M. Karavaev 10.5.2010, see [A176186](#)

k	k Queens on an n x n chessboard - Denominators only	degree	highest cyclotomic polynomial
1	$(x - 1)^3$	3	1
2	$(x - 1)^5$	5	1
3	$(x - 1)^7(x + 1)^2$	9	2
4	$(x - 1)^9(x + 1)^4(x^2 + x + 1)^2$	17	3
5	$(x - 1)^{11}(x + 1)^6(x^2 + x + 1)^4(x^2 + 1)^2(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2$	37	5
6	$(x - 1)^{13}(x + 1)^8(x^2 + x + 1)^6(x^2 + 1)^4(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^4(x^2 - x + 1)^2(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2(x^4 + 1)^2$	81	8
7*	$(x - 1)^{15}(x + 1)^{10}(x^2 + x + 1)^8(x^2 + 1)^6(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^6(x^2 - x + 1)^4(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^4(x^4 + 1)^4(x^6 + x^3 + 1)^2(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)^2(x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2(x^4 - x^2 + 1)^2(x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2$	197	13
8*	$(x - 1)^{17}(x + 1)^{12}(x^2 + x + 1)^{10}(x^2 + 1)^8(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^8(x^2 - x + 1)^6(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^6(x^4 + 1)^6(x^6 + x^3 + 1)^4(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)^4(x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^4(x^4 - x^2 + 1)^4(x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^4(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)^2(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)^2(x^8 + 1)^2(x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2(x^6 - x^3 + 1)^2(x^{18} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1)^2(x^{12} - x^{11} + x^9 - x^8 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)^2$	477	21
k		d_k	Fibonacci number $F(k)$

* I když pro $k=7$ není zatím znám dostatečný počet hodnot nezbytných k určení explicitního vzorce, existenci cyklotomických polynomů $C_{13}(x)$, $C_{12}(x)$, $C_{11}(x)$, $C_{10}(x)$ a $C_9(x)$ ve jmenovateli vytvořující funkce jsem potvrdil výpočtem pro pomocnou posloupnost, o které jsem dokázal, že má (až na exponenty) shodné členy ve jmenovateli vytvořující funkce. Více viz str. 27 a 28. Počet různých členů ve jmenovateli pro k se vždy rovná součtu různých členů pro $k-1$ a $k-2$.

Explicit formula for $k=7$ is not yet known, but I already found denominator of generating function for $k=7$ with cyclotomic polynomials $C_{13}(x)$, $C_{12}(x)$, $C_{11}(x)$, $C_{10}(x)$ and $C_9(x)$. See pages 27 and 28 for more. Conjecture: Maximal order of cyclotomic polynomial for k is a sum of maximal orders of cyclotomic polynomial for $k-1$ and $k-2$.

Tvar [jmenovatele vytvořující funkce](#) obsahuje vždy součiny pouze tzv. [cyklotomických polynomů](#), dělitelů $(x^\alpha - 1)$, jejichž kořeny jsou odmocniny z jedné (obecně komplexní čísla), tzv. [roots of unity](#).

Cyklotomické polynomy - Cyclotomic polynomials

k	$\Phi(k)$	cyclotomic polynomial
1	1	$x - 1$
2	1	$x + 1$
3	2	$x^2 + x + 1$
4	2	$x^2 + 1$
5	4	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
6	2	$x^2 - x + 1$
7	6	$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
8	4	$x^4 + 1$
9	6	$x^6 + x^3 + 1$
10	4	$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
11	10	$x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
12	4	$x^4 - x^2 + 1$
13	12	$x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
14	6	$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
15	8	$x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$
16	8	$x^8 + 1$

Ve druhém sloupci jsou uvedeny exponenty příslušných cyklotomických polynomů pro dané k . Tato funkce se nazývá [Euler's totient function](#) (*Degree of the k -th cyclotomic polynomial*) a její hodnoty je možno nalézt např. v OEIS, [A000010](#). Pro prvočísla je polynom vzniklý po dělení

$$\frac{x^p - 1}{x - 1}$$

v reálném oboru nerozložitelný a proto je $\Phi(p) = p - 1$. Pro složená čísla je tato hodnota menší, např. pro $k=12$ je

$$\frac{x^{12} - 1}{x - 1} = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$

ale z toho je jen polynom $(x^4 - x^2 + 1)$ vlastní pro $k=12$, tedy $\Phi(12) = 4$ (ostatní polynomy z rozkladu najdeme již pro $k=2, 3, 4, 6$, tedy pro dělitele čísla 12). Více o vlastnostech této funkce (*more about this function*) viz např. [Elementary theory of numbers](#), Waclaw Sierpiński 1964.

Jako kuriozitu je možno doplnit, že koeficienty těchto polynomů nejsou vždy jen $+1$ (nebo 0), jak by se z několika prvních mohlo zdát. Tento fakt objevil A. Migotti v roce 1883, když našel v rozkladu pro $k=105$ koeficienty rovné 2. Další rozklady byly systematicky prozkoumány až pomocí počítačů. Pro $k = 105, 165, 195, 210, 255, 273, \dots$ dostáváme cyklotomické polynomy, jejichž některé koeficienty jsou rovny $+2$, $k = 385, 595, 665, 770, 935, \dots$ mají některé koeficienty $+3$, atd., viz např. [A013590](#) nebo [A013594](#). Platí však, že koeficienty cyklotomických polynomů jsou symetrické z obou stran, čehož lze s výhodou využít při hledání rekurencí v posloupnostech, kdy k určení závislosti tak stačí méně členů (viz [Metoda 3](#)).

Pokud jmenovatel vytvořující funkce obsahuje člen $C_j(x)^q$, znamená to, že příslušná partikulární řešení diferenční rovnice (rekurence) budou násobená polynomem stupně $q-1$, jehož koeficienty se určí podle počátečních členů sekvence. Exponenty tedy určují stupně příslušných násobících polynomů. Viz též popis na str. 17.

Nyní dokážeme, že jmenovatel vytvořující funkce vždy obsahuje člen $(x - 1)^{2k+1}$, což je sice také cyklotomický polynom, je však trochu specifický, protože souvisí spíše s celkovým počtem možných pozic k kamenů na šachovnici $n \times n$. Označíme-li

$Q_k(n)$ počet pozic k vzájemně se neohrožujících dam na šachovnici $n \times n$ (*number of ways of placing k non-attacking queens on an $n \times n$ chessboard*)

$A_k(n)$ počet pozic k dam, kde se alespoň 2 dámy vzájemně ohrožující (*number of ways of placing k queen with at least two attacking queens*)

Potom platí

$$Q_k(n) + A_k(n) = \binom{n^2}{k}$$

Počet všech kombinací $\binom{n^2}{k}$ je polynom (v n) stupně $2k$ (viz např. rozklad analogických výrazů v kapitole 3.2), jehož vytvořující funkce má jmenovatel

$$(x - 1)^{2k+1}$$

Polynomy $A_k(n)$ mají ale nižší stupeň (*degree of polynomials in n*),

2k-1 pro **liniové** kameny (tedy i dámy) - *for riders (include queens)*

2k-2 pro **bodové** kameny (včetně králů) (viz též tabulka na str. 683) - *for leapers (include kings)*

Výraz n^{2k} proto musí být součástí $Q_k(n)$. *Proved existence of part*

$$(x - 1)^{2k+1}$$

in denominator of generating function for $Q_k(n)$.

Poznámka: Z hlediska efektivity algoritmu je výhodnější nepočítat počet pozic vzájemně se neohrožujících kamenů, ale lepší je vypočítat počet pozic s ohrožujícími se kameny $A_k(n)$ a ten pak odečíst od celkového počtu možných pozic. Tuto metodu jsem použil již v roce 1992 při hledání vzorce pro počet pozic 4 neohrožujících se dam na šachovnici $n \times n$. Při narůstajícím počtu dam se však výhody této metody snižují a je tak vhodná pro k dam na $n \times n$, ale pro n dam na $n \times n$ už vhodná není.

Stupně členů ve jmenovateli vytvořující funkce - Degrees of polynomials in denominator of generating function

Nyní určíme maximální možné hodnoty těchto exponentů (a potvrdíme intuitivní zkušenost, že u členů s větší periodou bývají tyto exponenty velmi malé). Pokud vezmeme nějakou konfiguraci (cluster) vzájemně se ohrožujících dam, můžeme ji kombinovat se zbývajícími dámami do celkového počtu pomocí kombinačních čísel.

napadajících se dam	možností rozestavení zbývajících dam	stupeň polynomu v n
cluster of attacking queens	number of free positions remaining queens	degree of polynomial in n
5	0	0
4	$\binom{n^2 - 4}{1}$	2
3	$\binom{n^2 - 3}{2}$	4
2	$\binom{n^2 - 2}{3}$	6

Například při $k=5$, pokud máme 2 napadající se dámy, je možno je rozmístit na zbytku šachovnice $n \times n$ celkem $\binom{n^2-2}{3}$ způsoby (což je polynom 6.stupně v n).

Generally for q queens

$$\binom{n^2 - q}{k - q}$$

($n^2 - q$ is number of free squares, $k - q$ is number of remaining queens) is polynomial in n of degree $2(k - q)$.

Jinými slovy, s každou úrovní (jejichž meze jsou dány Fibonacciho čísla) směrem od nejvyššího k nejmenšímu, je třeba přičíst k exponentu každého cyklotomického polynomu číslo 2 (rozdíl stupňů polynomů), viz tabulka na str. 23. *For each level is necessary add 2 to all exponents, see table on page 23 for more.*

Hypotéza (Václav Kotěšovec, 31.5.2010)

Jmenovatel vytvořující funkce pro počet rozmístění k neohrožujících se dam na šachovnici $n \times n$ obsahuje součin cyklotomických polynomů stupňů 1 až $F(k)$, kde $F(k)$ je [Fibonacciho číslo](#). Pro $k > 2$

$$D_k(x) = (x - 1)^{2k+1} * \prod_{j=2}^{F(k)} C_j(x)^{e_j}$$

Pro exponenty e_j platí toto. Pokud pro zvolené j vezmeme takové m splňující nerovnost

$$F(m - 1) < j \leq F(m)$$

potom

$$e_j = 2(k - m + 1)$$

Pro stupeň d_k polynomu $D_k(x)$ ve jmenovateli vytvořující funkce (hloubku rekurence) platí vzorec

$$d_k = 2k + 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{i=F(k-j)+1}^{F(k-j+1)} 2j \Phi(i) \right)$$

Kde F jsou [Fibonacciho čísla](#) a Φ je [Euler totient function](#)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}} = \frac{6}{5\pi^2}$$

Conjecture (Václav Kotěšovec, 31.5.2010)

Denominator of generating function for number of ways of placing k non-attacking queens on an $n \times n$ chessboard contains product of cyclotomic polynomials order from 1 to $F(k)$, where $F(k)$ is [Fibonacci number](#). For $k > 2$

$$D_k(x) = (x - 1)^{2k+1} * \prod_{j=2}^{F(k)} C_j(x)^{e_j}$$

For each j set such m which satisfy the following inequality

$$F(m - 1) < j \leq F(m)$$

then exponents

$$e_j = 2(k - m + 1)$$

Formula for degree d_k of polynomial $D_k(x)$ in denominator of generating function (recurrence order)

$$d_k = 2k + 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{i=F(k-j)+1}^{F(k-j+1)} 2j \Phi(i) \right)$$

where F are [Fibonacci numbers](#) and Φ is [Euler totient function](#)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}} = \frac{6}{5\pi^2}$$

k queens on an n x n chessboard - polynomials in denominator of generating function															
F(7)					F(6)			F(5)		F(4)	F(3)			Fibonacci number	
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		cyclotomic polynomial in denominator of generating function	
12	4	10	4	6	4	6	2	4	2	2	1	1		Euler's totient function	
										2	2			exponents	4 queens
										4	2	9	15	degree of a polynomial	
					2	2	4	6						exponents	5 queens
					8	4	8	6	11	37			degree of a polynomial		
				2	2	2	4	4	6	8				exponents	6 queens
				8	12	4	16	8	12	8	13	81		degree of a polynomial	
2	2	2	2	2	4	4	4	6	6	8	10		conjectured	exponents	7 queens
24	8	20	8	12	16	24	8	24	12	16	10	15	197	degree of a polynomial	
											2k+1	recurrence order			

V tabulce každý sloupec odpovídá jednomu cyklotomickému polynomu. Euler's totient function určuje stupeň daného cyklotomického polynomu. Exponenty v řádcích potom určují na kolikátou je tento cyklotomický polynom (ve jmenovateli vytvořující funkce) umocněn. Součinem tohoto exponentu se stupněm příslušného cyklotomického polynomu dostaneme dílčí exponenty těchto členů (řádky pod exponenty - „degree of a polynomials“). Celkový stupeň polynomu (*total degree of a polynomial in denominator of generating function*) ve jmenovateli vytvořující funkce dostaneme pak jako součet všech těchto dílčích exponentů plus $2k+1$. Tento stupeň současně určuje i hloubku rekurence (*recurrence order*) pro dané k . Minimálně tolik členů je třeba vypočítat, abychom mohli nalézt explicitní vzorec pro všechny členy.

Matematicky lze předchozí postup (pro $k > 1$) zapsat tímto vzorcem

$$d_k = 2k + 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{i=F(k-j)+1}^{F(k-j+1)} 2j \Phi(i) \right)$$

kde F jsou [Fibonacciho čísla](#) a Φ je [Euler totient function](#)

Určení asymptotického chování funkce - *proof of formula for limit.*

Nyní budeme hledat limitu, když k jde do nekonečna. K tomu je třeba si nejprve zopakovat několik základních vzorců.

Pro [Fibonacciho čísla](#) platí rekurence (definice)

$$F(k + 1) = F(k) + F(k - 1)$$

Lze je vyjádřit i explicitně

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right)$$

Z toho vztahu vyplývá

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(k + 1)}{F(k)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(2k)}{F(k)^2} = \sqrt{5}$$

Pro druhou mocninu využijeme rovnost

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Platí tato limita (viz např. [Euler's totient function](#) nebo OEIS [A000010](#))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \Phi(i) = \frac{3}{\pi^2}$$

Zkoumejme nyní výraz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{F(k)^2} = \frac{2k + 1 + \sum_{j=2}^k \left(2(k-j+1) \sum_{i=F(j-1)+1}^{F(j)} \Phi(i) \right)}{F(k)^2} = \frac{\sum_{j=2}^k \left(2(k-j+1) \left(\sum_{i=1}^{F(j)} \Phi(i) - \sum_{i=1}^{F(j-1)} \Phi(i) \right) \right)}{F(k)^2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{F(k)^2} = \frac{\sum_{j=2}^k \left(2(k-j+1) * F(j)^2 * \left(\frac{1}{F(j)^2} * \sum_{i=1}^{F(j)} \Phi(i) - \frac{3-\sqrt{5}}{2F(j-1)^2} * \sum_{i=1}^{F(j-1)} \Phi(i) \right) \right)}{F(k)^2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{F(k)^2} = \frac{\sum_{j=2}^k \left(2(k-j+1) * F(j)^2 * \left(\frac{3}{\pi^2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} * \frac{3}{\pi^2} \right) \right)}{F(k)^2} = \frac{3}{\pi^2} (\sqrt{5}-1) * \sum_{j=2}^k \left((k-j+1) * \left(\frac{F(j)}{F(k)} \right)^2 \right)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{F(k)^2} = \frac{3}{\pi^2} (\sqrt{5}-1) * \sum_{j=2}^k \frac{(k-j+1)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2(k-j)}} = \frac{3}{\pi^2} (\sqrt{5}-1) * \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{j-1}} = \frac{3}{\pi^2} (\sqrt{5}-1) * \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) * \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^j}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{F(k)^2} = \frac{3}{\pi^2} (\sqrt{5}-1) * \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) * \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^j} = \frac{3}{\pi^2} (1+\sqrt{5}) * \sum_{j=1}^{\infty} j * \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^j$$

Nekonečná řada je typu

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} x * \frac{d}{dx} \int nx^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x * \frac{d}{dx} x^n = x * \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x * \frac{d}{dx} \frac{x}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Po dosazení

$$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

je suma rovna 1 a dostáváme tak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{F(k)^2} = \frac{3(1+\sqrt{5})}{\pi^2}$$

Jiné možné vyjádření s užitím Fibonacciho čísel je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{F(2k+1)} = \frac{6}{\pi^2 \sqrt{5}}$$

Finální tvar limity pak dostaneme ve tvaru

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}} = \frac{6}{5\pi^2} = 0.12158542 \dots$$

Vzorec jde slovně interpretovat tak, že **hloubka rekurence roste se čtvercem Fibonacciho čísel**.

Dále z toho vyplývá, že

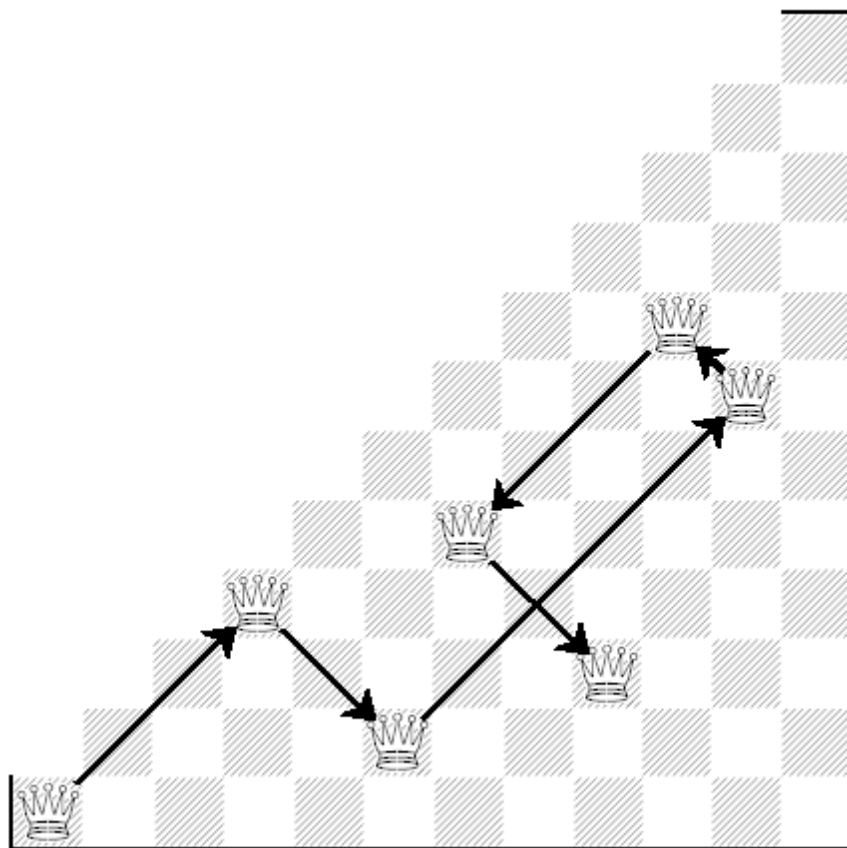
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_{k+1}}{d_k} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2.61803 \dots$$

Pro velká k bude tak s každým k narůstat hloubka rekurence (tedy i minimální počet hodnot, které je třeba vypočítat k určení explicitního vzorce!) přibližně 2.61 krát. Pro $k=7$ tak bude třeba vypočítat minimálně 197 členů a pro $k=8$ minimálně 477 členů. Potřebné výpočty jsou daleko za hranicemi možností současné výpočetní techniky (a to i za použití stovek paralelních procesorů). Přesto, nalezením denominátorů a rekurencí pro všechna k je možno považovat problém k dam na šachovnici $n \times n$ v podstatě za vyřešený, zbytek je „jen“ vždy otázka výpočtu konečného počtu konstant.

*For 7 queens ($k=7$) is minimal 197 values of sequence necessary, for $k=8$ minimal 477 values necessary. This is out of power of current computer systems. But after finding of denominators and recurrences is ***k-Queens problem on an $n \times n$ chessboard in principle resolved***. The rest is “only” problem of computing of finite number of constants.*

Jak jsem vypočítal jmenovatel vytvořující funkce pro $k=7$ / *How I computed denominator of generating function for $k=7$*

Kombinatoricky řečeno, **vytvorující funkce** určuje celkový počet případů s různým chováním, přičemž pro každý z těchto případů platí odlišné vzorce. Abychom dostali celkový počet hledaných možností, sečteme pak všechny dílčí počty možností z jednotlivých případů. Samotný problém k dam na šachovnici $n \times n$ je velmi složitý, právě proto, protože obsahuje značné množství různých případů. Jelikož se současnou úrovní výpočetní techniky bylo možné vyřešit tento problém jen do $k=6$ (k čemuž už i tak byl třeba obrovský výpočetní výkon) a numerické řešení pro $k=7$ nebo vyšší je v nedohlednu, snažil jsem se nejprve vymyslet metodu, jak určit alespoň jmenovatel vytvořující funkce pro $k=7$, který už by mohl hodně napovědět o chování těchto funkcí i pro vyšší k .



Pro určení jmenovatele pro $k=7$ jsem si nejprve vytvořil pomocnou posloupnost. Vtip je v tom, že k jejímu vygenerování je potřeba mnohem menší čas a bylo tak možné (v čase pouhých několika hodin) vygenerovat dostatečný počet členů, které stačily k určení rekurence a tím i hledaného jmenovatele vytvořující funkce.

- 1) vzhledem k symetrii stačí uvažovat pouze trojúhelníkovou šachovnici (vynecháním poloviny polí nepřijde o žádnou reprezentující možnost)
- 2) první dáma může být pevně na a1
- 3) každá nově postavená dáma napadá **pouze** předtím postavenou dámu a to vždy po **střelcové linii kolmé na předchozí linii**

Tato pomocná posloupnost pokrývá všechna možná křížení linií a má proto **shodné členy ve jmenovateli vytvořující funkce** jako úplná posloupnost, ty se liší pouze v exponentech (což je dáno zejména zafixováním dámy a1, které ubralo 1 stupeň volnosti). Toto platí pro libovolné k .

*Following **help sequence** covers all possible intersections of lines and has therefore **same parts in denominator** as full sequence (only exponents may be different), but much less time (several hours only) was necessary for computing of sufficient number of values.*

Conditions for this help sequence:

- 1) only triangle chessboard is sufficient (without loss of configurations)
- 2) first queen was fixed on A1
- 3) Each new queen is under attack **only** by a previous queen. Each next line is **orthogonal** with previous line (on bishop lines).

Že je tato posloupnost jakousi „obálkou“ všech možností typů konfigurací, je možno snadno dokázat sporem. Pokud by existovala linie, po které by se napadalo 3 nebo více dam, rázem nebude možné dosáhnout konfigurace na diagramu (s maximálním množstvím různých linií), protože minimálně jedna linie bude scházet.

Podařilo se mi vypočítat celkem 114 členů této pomocné posloupnosti pro $k=7$ a našel jsem rekurenci hloubky 98, ze které jsem určil denominátor příslušné vytvořující funkce:

$$(x-1)^7(x+1)^5(x^2+x+1)^4(x^2+1)^3(x^4+x^3+x^2+x+1)^3(x^2-x+1)^2(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2(x^4+1)^2(x^6+x^3+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^2+1)(x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

Tento výraz lze v řeči cyklotomických polynomů zapsat také jako (*in language of cyclotomic polynomials*)

$$C_1(x)^7 C_2(x)^5 C_3(x)^4 C_4(x)^3 C_5(x)^3 C_6(x)^2 C_7(x)^2 C_8(x)^2 C_9(x) C_{10}(x) C_{11}(x) C_{12}(x) C_{13}(x)$$

Pro $k=7$ se tedy potvrdilo, že jmenovatel vytvořující funkce obsahuje (navíc proti $k=6$) cyklotomické polynomy $C_{13}(x)$, $C_{12}(x)$, $C_{11}(x)$, $C_{10}(x)$, $C_9(x)$. Proto i jmenovatel vytvořující funkce pro 7 neohrožujících se dam obsahuje tyto polynomy (s exponenty, které jsou větší nebo rovny exponentům pro tuto pomocnou sekvenci - to je dáno zafixováním první dámy i omezením počtu probíraných možností). Současně jsem ověřil vlastnosti těchto pomocných posloupností i pro všechna $k \leq 7$.

I computed total 114 values of this help sequence and found recurrence of order 98. Denominator contains new parts $C_{13}(x)$, $C_{12}(x)$, $C_{11}(x)$, $C_{10}(x)$, $C_9(x)$, therefore also denominator for 7 non attacking queens contains same parts (only exponents are greater or equal than exponents for this help sequence).

Stejným postupem se mi podařilo určit i (do té doby neznámý) tvar denominátoru pro 7 dam na [prstencové šachovnici](#).

With same method I found also denominator for 7 queens on a toroidal board.

Degree of denominator of GF for number of ways to place k non-attacking queens on an $n \times n$ board

k	d_k, A178717	
1	3	<i>computed</i>
2	5	
3	9	
4	17	
5	37	
6	81	
7	197	<i>conjectured</i>
8	477	
9	1197	
10	3077	
11	7989	
12	20649	
13	53885	
14	140601	
15	366917	
16	959685	
17	2511477	
18	6571681	
19	17202449	

20	45027677	<i>conjectured</i>
21	117871345	
22	308581637	
23	807852685	
24	2114904397	
25	5536838045	
26	14495554593	
27	37949503089	
28	99352690141	
29	260108204933	
30	680970807213	
31	1782803565797	
32	4667437084745	
33	12219503347729	
34	31991072445577	
35	83753706559725	
36	219270031563205	
37	574056385796461	
38	1502899094403693	
39	3934640801736837	
40	10301023227534077	

Poznámka: V programu Mathematica dostaneme tyto hodnoty po zadání

```
Table[2*k+1+Sum[Sum[2*j*EulerPhi[i],{i,Fibonacci[k-j]+1,Fibonacci[k-j+1]}],{j,1,k-1}],{k,1,40}]
```

Denominátory jde pak s pomocí programu Mathematica vygenerovat touto mojí procedurou:

```
inversef[j_]:= (m=2;While[j>Fibonacci[m],m=m+1];m);
```

```
Table[(x-1)^(2k+1)*Product[Cyclotomic[j,x]^(2*(k-inversef[j]+1)),{j,2,Fibonacci[k]}],{k,1,8}]
```

Na základě tvaru jmenovatele vytvořující funkce lze formálně určit i tvar explicitního vzorce. To lze učinit buď s pomocí trigonometrických funkcí nebo s pomocí funkce celá část. Postup odpovídá běžnému řešení diferenčních rovnic, kdy denominátor vytvořující funkce určuje charakteristickou rovnici a podle jejích kořenů se určuje tvar partikulárních řešení.

Oba následující vzorce budou dávat shodné hodnoty pro nezáporná celá čísla. Neznámé konstanty je třeba vždy dopočítat podle několika prvních členů příslušné posloupnosti.

Obecný vzorec pro rozmístění k dam na šachovnici $n \times n$ s využitím periodických **trigonometrických funkcí**:

$$q(k) = \sum_{s=0}^{2k} a_{p,t,s}(k) * n^s + \sum_{p=2}^{F(k)} \left(\sum_{t=1}^{\Phi(p)} \left(\cos \frac{2\pi t n}{p} * \sum_{s=0}^{2k-2m+1} b_{p,t,s}(k) * n^s \right) + \sum_{t=1}^{\Phi(p)} \left(\sin \frac{2\pi t n}{p} * \sum_{s=0}^{2k-2m+1} c_{p,t,s}(k) * n^s \right) \right)$$

Konstanty $a_{p,t,s}$, $b_{p,t,s}$ a $c_{p,t,s}$ jsou závislé pouze na k . $\Phi(p)$ je [Euler's totient function](#), $F(k)$ jsou [Fibonacciho čísla](#). Hodnota m se určí podle nerovnosti (pro $p > 1$ se funkce shoduje s [Fibonacci Inverse](#))

$$F(m-1) < p \leq F(m)$$

Alternativní vzorec s využitím funkce celá část
(*Alternative formula with **Floor function***)

$$q(k) = \sum_{s=0}^{2k} a_{p,t,s}(k) * n^s + \sum_{p=2}^{F(k)} \sum_{t=0}^{\Phi(p)-1} \left(\left[\frac{n+t}{p} \right] * \sum_{s=0}^{2k-2m+1} d_{p,t,s}(k) * n^s \right)$$

Konstanty $a_{p,t,s}$ a $d_{p,t,s}$ jsou závislé pouze na k .

Celkový počet **nenulových** konstant v obou těchto vzorcích může být v konkrétních případech o něco menší (než tento horní odhad daný mezemi sum), protože některé lineární rovnice, které dostaneme použitím potřebného počtu počátečních hodnot posloupnosti, mohou být **lineárně závislé** nebo mohou náhodně vyjít některé z konstant rovny 0.

Nejmenší perioda / Least period

Z výrazů obsažených ve jmenovateli vytvořující funkce lze odvodit i periodu pro dané k . Perioda p je takové nejmenší kladné celé číslo, pro které lze vzorce pro n ve tvaru $n=a*p+b$ (kde a, b jsou nezáporná celá čísla) vyjádřit jedním polynomem bez dodatečných kvazipolynomů. Jednoduše řečeno, vzorce pro takovou lineární posloupnost neobsahují trigonometrické funkce (ani příp. funkci celá část apod.). Pokud je p perioda pro tuto posloupnost, pak ale existuje p různých polynomů, každý podle zbytku při dělení n periodou p . Samozřejmě periodou je pak i každý celočíselný násobek p .

Pro vzorce vyjadřující počet rozmístění neohrožujících se k dam na šachovnici $n \times n$ v závislosti na n platí, že nejmenší perioda p je dána výrazem *Least period for formulas for number of ways of placing k non-attacking queens on an $n \times n$ chessboard is LCM of natural numbers from 1 to $F(k)$.*

$$p(k) = \text{LCM}(1, 2, 3, \dots, F(k))$$

kde LCM je **nejmenší společný násobek** (*Least common multiple*) a $F(k)$ je Fibonacciho číslo.

k	F(k)	period, A180402
2	1	LCM(1)=1
3	2	LCM(1,2)=2
4	3	LCM(1,2,3)=6
5	5	LCM(1,2,3,4,5)=60
6	8	LCM(1,2,3,4,5,6,7,8)=840
7	13	LCM(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13)=360360

Např. 6 vzorců pro $k=4$ je rozepsáno na str. 12. Pro $k=7$ tak bude existovat celkem 360360 různých vzorců (polynomů) podle toho, jestli n je typu $360360a$, $360360a+1$, $360360a+2$, ..., $360360a+360359$. Použití metody 2 (viz str. 790) se tak pro větší k ukazuje jako nevhodné.

Poznámka: V programu Mathematica dostaneme tyto periody např. takto: `Table[Apply[LCM, Range[Fibonacci[k]]], {k, 1, 7}]`

Asymptoticky platí (viz např. [A003418](#))

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{LCM}(1..k))}{k} = 1$$

a tedy pro velká k dostaneme přibližný odhad

$$\log p(k) \sim F(k) \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k$$

(je však třeba upozornit, že LCM má velký rozptyl, takže tento odhad je třeba brát spíše teoreticky a **není vhodný** k numerickým výpočtům, zejména pro menší k)

k	Recurrence
2	$a_n = 5a_{n-1} - 10a_{n-2} + 10a_{n-3} - 5a_{n-4} + a_{n-5}$
3	$a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 14a_{n-4} - 14a_{n-5} + 8a_{n-7} - 5a_{n-8} + a_{n-9}$
4	$a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - 9a_{n-3} + 12a_{n-5} + 7a_{n-6} - 15a_{n-7} - 16a_{n-8} + 16a_{n-9} + 15a_{n-10} - 7a_{n-11} - 12a_{n-12} + 9a_{n-14} - a_{n-15} - 3a_{n-16} + a_{n-17}$
5	$a_n = -a_{n-1} + 3a_{n-2} + 7a_{n-3} + 3a_{n-4} - 11a_{n-5} - 21a_{n-6} - 13a_{n-7} + 13a_{n-8} + 41a_{n-9} + 44a_{n-10} + 8a_{n-11} - 49a_{n-12} - 81a_{n-13} - 57a_{n-14} + 15a_{n-15} + 88a_{n-16} + 106a_{n-17} + 48a_{n-18} - 48a_{n-19} - 106a_{n-20} - 88a_{n-21} - 15a_{n-22} + 57a_{n-23} + 81a_{n-24} + 49a_{n-25} - 8a_{n-26} - 44a_{n-27} - 41a_{n-28} - 13a_{n-29} + 13a_{n-30} + 21a_{n-31} + 11a_{n-32} - 3a_{n-33} - 7a_{n-34} - 3a_{n-35} + a_{n-36} + a_{n-37}$
6	$a_n = -5a_{n-1} - 13a_{n-2} - 21a_{n-3} - 19a_{n-4} + 5a_{n-5} + 57a_{n-6} + 127a_{n-7} + 184a_{n-8} + 180a_{n-9} + 70a_{n-10} - 162a_{n-11} - 476a_{n-12} - 768a_{n-13} - 889a_{n-14} - 695a_{n-15} - 114a_{n-16} + 794a_{n-17} + 1806a_{n-18} + 2570a_{n-19} + 2701a_{n-20} + 1929a_{n-21} + 234a_{n-22} - 2072a_{n-23} - 4374a_{n-24} - 5898a_{n-25} - 5950a_{n-26} - 4180a_{n-27} - 771a_{n-28} + 3521a_{n-29} + 7530a_{n-30} + 9994a_{n-31} + 9959a_{n-32} + 7119a_{n-33} + 1994a_{n-34} - 4156a_{n-35} - 9657a_{n-36} - 12909a_{n-37} - 12881a_{n-38} - 9447a_{n-39} - 3464a_{n-40} + 3464a_{n-41} + 9447a_{n-42} + 12881a_{n-43} + 12909a_{n-44} + 9657a_{n-45} + 4156a_{n-46} - 1994a_{n-47} - 7119a_{n-48} - 9959a_{n-49} - 9994a_{n-50} - 7530a_{n-51} - 3521a_{n-52} + 771a_{n-53} + 4180a_{n-54} + 5950a_{n-55} + 5898a_{n-56} + 4374a_{n-57} + 2072a_{n-58} - 234a_{n-59} - 1929a_{n-60} - 2701a_{n-61} - 2570a_{n-62} - 1806a_{n-63} - 794a_{n-64} + 114a_{n-65} + 695a_{n-66} + 889a_{n-67} + 768a_{n-68} + 476a_{n-69} + 162a_{n-70} - 70a_{n-71} - 180a_{n-72} - 184a_{n-73} - 127a_{n-74} - 57a_{n-75} - 5a_{n-76} + 19a_{n-77} + 21a_{n-78} + 13a_{n-79} + 5a_{n-80} + a_{n-81}$
7*	$a(n) = a(n-197) + 11a(n-196) + 66a(n-195) + 284a(n-194) + 979a(n-193) + 2867a(n-192) + 7391a(n-191) + 17167a(n-190) + 36502a(n-189) + 71854a(n-188) + 132001a(n-187) + 227579a(n-186) + 369573a(n-185) + 566345a(n-184) + 818910a(n-183) + 1114468a(n-182) + 1418684a(n-181) + 1667858a(n-180) + 1762862a(n-179) + 1567406a(n-178) + 913631a(n-177) - 382005a(n-176) - 2490306a(n-175) - 5527702a(n-174) - 9503162a(n-173) - 14258598a(n-172) - 19411273a(n-171) - 24310113a(n-170) - 28020291a(n-169) - 29351159a(n-168) - 26940769a(n-167) - 19405263a(n-166) - 5553140a(n-165) + 15346812a(n-164) + 43268288a(n-163) + 77138720a(n-162) + 114608227a(n-161) + 151932369a(n-160) + 184024666a(n-159) + 204725598a(n-158) + 207315406a(n-157) + 185268748a(n-156) + 133212155a(n-155) + 48004017a(n-154) - 70183102a(n-153) - 216930246a(n-152) - 382960078a(n-151) - 554012366a(n-150) - 711346353a(n-149) - 832955143a(n-148) - 895498622a(n-147) - 876864666a(n-146) - 759163548a(n-145) - 531860790a(n-144) - 194674273a(n-143) + 240182841a(n-142) + 746828188a(n-141) + 1285960424a(n-140) + 1806771216a(n-139) + 2250587298a(n-138) + 2556103772a(n-137) + 2665846492a(n-136) + 2533288725a(n-135) + 2129874995a(n-134) + 1451101463a(n-133) + 520790749a(n-132) - 607206046a(n-131) - 1850443990a(n-130) - 3102719461a(n-129) - 4242198625a(n-128) - 5142328327a(n-127) - 5684628585a(n-126) - 5772140029a(n-125) - 5342085203a(n-124) - 4376237801a(n-123) - 2907601789a(n-122) - 1022286568a(n-121) + 1144093134a(n-120) + 3415602536a(n-119) + 5590244180a(n-118) + 7458159648a(n-117) + 8822115392a(n-116) + 9518231826a(n-115) + 9434741790a(n-114) + 8526633540a(n-113) + 6824351658a(n-112) + 4435274433a(n-111) + 1537407289a(n-110) - 1634445881a(n-109) - 4808938651a(n-108) - 7703022656a(n-107) - 10048957558a(n-106) - 11620750186a(n-105) - 12257251526a(n-104) - 11879415820a(n-103) - 10499785534a(n-102) - 8223052813a(n-101) - 5237477687a(n-100) - 1797913038a(n-99) + 1797913038a(n-99) + 5237477687a(n-97) + 8223052813a(n-96) + 10499785534a(n-95) + 11879415820a(n-94) + 12257251526a(n-93) + 11620750186a(n-92) + 10048957558a(n-91) + 7703022656a(n-90) + 4808938651a(n-89) + 1634445881a(n-88) - 1537407289a(n-87) - 4435274433a(n-86) - 6824351658a(n-85) - 8526633540a(n-84) - 9434741790a(n-83) - 9518231826a(n-82) - 8822115392a(n-81) - 7458159648a(n-80) - 5590244180a(n-79) - 3415602536a(n-78) - 1144093134a(n-77) + 1022286568a(n-76) + 2907601789a(n-75) + 4376237801a(n-74) + 5342085203a(n-73) + 5772140029a(n-72) + 5684628585a(n-71) + 5142328327a(n-70) + 4242198625a(n-69) + 3102719461a(n-68) + 1850443990a(n-67) + 607206046a(n-66) - 520790749a(n-65) - 1451101463a(n-64) - 2129874995a(n-63) - 2533288725a(n-62) - 2665846492a(n-61) - 2556103772a(n-60) - 2250587298a(n-59) - 1806771216a(n-58) - 1285960424a(n-57) - 746828188a(n-56) - 240182841a(n-55) + 194674273a(n-54) + 531860790a(n-53) + 759163548a(n-52) + 876864666a(n-51) + 895498622a(n-50) + 832955143a(n-49) + 711346353a(n-48) + 554012366a(n-47) + 382960078a(n-46) + 216930246a(n-45) + 70183102a(n-44) - 48004017a(n-43) - 133212155a(n-42) - 185268748a(n-41) - 207315406a(n-40) - 204725598a(n-39) - 184024666a(n-38) - 151932369a(n-37) - 114608227a(n-36) - 77138720a(n-35) - 43268288a(n-34) - 15346812a(n-33) + 5553140a(n-32) + 19405263a(n-31) + 26940769a(n-30) + 29351159a(n-29) + 28020291a(n-28) + 24310113a(n-27) + 19411273a(n-26) + 14258598a(n-25) + 9503162a(n-24) + 5527702a(n-23) + 2490306a(n-22) + 382005a(n-21) - 913631a(n-20) - 1567406a(n-19) - 1762862a(n-18) - 1667858a(n-17) - 1418684a(n-16) - 1114468a(n-15) - 818910a(n-14) - 566345a(n-13) - 369573a(n-12) - 227579a(n-11) - 132001a(n-10) - 71854a(n-9) - 36502a(n-8) - 17167a(n-7) - 7391a(n-6) - 2867a(n-5) - 979a(n-4) - 284a(n-3) - 66a(n-2) - 11a(n-1)$

*Tento rekurentní vzorec byl odvozen z denominátoru vytvářející funkce, viz str. 19. Rekurence pro $k=8$ má už ale hloubku 477 a příslušný vzorec by zabíral 2 strany (myslím, že ho nemá smysl zde publikovat). V programu Mathematica je jej možno (případně i pro vyšší k) získat takto (může trvat několik minut)

```
inversef[j_]:= (m=2;While[j>Fibonacci[m],m=m+1];m);
denom[k_]:= (x-1)^(2k+1)*Product[Cyclotomic[j,x]^(2*(k-inversef[j]+1)),{j,2,Fibonacci[k]}];
Table[Sum[Coefficient[Expand[denom[k]],x,i]*Subscript[a,n-i],{i,0,Exponent[denom[k],x]}],{k,1,8}]/TraditionalForm
```


Tabulka udává počty rozmístění neohrožujících se k dam na šachovnici $n \times n$, diagonála odpovídá klasickému problému n dam.

n	k queens, n x n							n queens, n x n
	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	
	A036464	A047659	A061994	A108792	A176186	A178721	A252593*	
1								1
2	0	0	0					0
3	8	0	0	0	0	0	0	0
4	44	24	2	0	0	0	0	2
5	140	204	82	10	0	0	0	10
6	340	1024	982	248	4	0	0	4
7	700	3628	7002	4618	832	40	0	40
8	1288	10320	34568	46736	22708	3192	92	92
9	2184	25096	131248	310496	312956	119180	13848	352
10	3480	54400	412596	1535440	2716096	2119176	636524	724
11	5280	107880	1123832	6110256	17117832	23636352	14803480	2680
12	7700	199400	2739386	20609544	84871680	186506000	207667564	14200
13	10868	348020	6106214	60963094	349093856	1131544008	2008758532	73712
14	14924	579264	12654614	162323448	1239869972	5613017128	14752426528	365596
15	20020	926324	24675650	396155466	3905117168	23670094984	87154016752	2279184
16	26320	1431584	45704724	899046952	11139611892	87463182432	432539436508	14772512
17	34000	2148048	80999104	1917743448	29224290600	289367715488	1858901487620	95815104
18	43248	3141120	138170148	3879011584	71402912960	872345119896	?	666090624
19	54264	4490256	227938788	7491080844	164029487484	2427609997716	?	4968057848
20	67260	6291000	365106738	13892164232	357164398040	6305272324272	?	39029188884
21	82460	8656860	569681574	24854703014	741835920276	?	?	314666222712
22	100100	11721600	868289594	43071383040	1477798367368	?	?	2691008701644
23	120428	15641340	1295775946	72532831794	2836053660668	?	?	24233937684440
24	143704	20597104	1897176508	119038462248	5263672510684	?	?	227514171973736
25	170200	26797144	2729909796	190849299076	9478352925488	?	?	2207893435808352

26	200200	34479744	3866439956	299547508728	16606678238496	?	?	22317699616364044
27	234000	43915768	5397191260	461105824676	28378012168908	?	?	?
28	271908	55411720	7434046062	697264240408	47398421913600	?	?	?
29	314244	69312516	10114126790	1037206552414	77522788818316	?	?	?
30	361340	86004800	13604287706	1519678218528	124365738451680	?	?	?
31	413540	105919940	18105920006	2195518394830	195977208395580	?	?	?
32	471200	129537600	23860611236	3130809484640	303748457927000	?	?	?
33	534688	157388960	31156143476	4410583469036	463582807382736	?	?	?
34	604384	190060544	40333505448	6143370199976	697434075907504	?	?	?
35	680680	228197664	51794268148	8466479411308	1035256352634420	?	?	?
36	763980	272508504	66009149958	11552406363136	1517521355687872	?	?	?
37	854700	323767788	83526964218	15616183774498	2198354851112760	?	?	?
38	953268	382821120	104984952954	20924209082128	3149525540545556	?	?	?
39	1060124	450588876	131119515534	27804270360662	4465340754179496	?	?	?
40	1175720	528070800	162778537232	36657476189408	6268789672000200	?	?	?

* Hodnoty pro $k=8$ doplnil do OEIS (až do $n=15$) Antal Pinter 18.12.2014, Václav Kotěšovec pak 20.12.2014 dopočítal hodnoty pro $n=16$ a $n=17$ (výpočet trval 36 hodin).

Related links:

[A q-Queens Problem, I. General theory](#) - Seth Chaiken, Christopher R. H. Hanusa, Thomas Zaslavsky, Electronic Journal of Combinatorics, 21 (2014), no. 3, Paper P3.33, 28 pp.

[A q-Queens Problem. II. The square board](#) - Seth Chaiken, Christopher R. H. Hanusa, Thomas Zaslavsky, Journal of Algebraic Combinatorics, 41 (2015), no. 3, 619-642

[A q-Queens Problem. III. Partial queens](#) - Seth Chaiken, Christopher R. H. Hanusa, Thomas Zaslavsky, 21.2.2014

[A q-Queens Problem. V. The Bishops' Period](#) - Seth Chaiken, Christopher R. H. Hanusa, Thomas Zaslavsky, 14.5.2014

[A q-Queens Problem](#) - Christopher R. H. Hanusa (with Thomas Zaslavsky and Seth Chaiken), [MOVES Conference](#), in New York City, August 2-4, 2015

[The q-Queens Problem: One-Move Riders on the Rectangular Board](#) - Jaimal Ichharam, 27.1.2015

1.1.1) n Queens on an $n \times n$ chessboard - n dam na šachovnici $n \times n$ - A000170

Klasický n -Queens problem. O tomto problému bylo sepsáno již mnoho článků i knih. Jeden z nejúplnějších seznamů odkazů nalezneme např. na stránce [n-Queens - 324 references](#), ve Wikipedii je nejvíce informací v [německé verzi](#). Výpočetní střediska a týmy nadšenců se již řadu let předhánějí v tom, kdo vypočte hodnotu pro další n , ale s rostoucími n to jde (i se stále rychlejšími počítači) dopředu jen pomalu. V roce 2004 bylo pokořeno $n=24$, ale $n=26$ si muselo počkat až do roku 2009. Vše s neobvyklým výpočetním výkonem, za použití stovek paralelních procesorů.

Označíme-li počet různých pozic neohrožujících se n dam na šachovnici $n \times n$ jako $Q(n)$, potom pro tuto funkci je (v roce 2011) známo pouhých 26 hodnot. Z tak malého počtu je nemožné určit obecný vzorec. Osobně se domnívám, že pokud existuje, nebude příliš elegantní a bude mít nekonečně mnoho členů. Z mých vzorců pro délku denominátoru pro k dam na šachovnici $n \times n$ totiž vyplývá, že vytvořující funkce pro klasický n -Queens problem nemůže mít jmenovatel konečné délky. Délka rekurence se zvyšujícím se k exponenciálně narůstá a počet počátečních hodnot nezbytných pro rekurenci narůstá do nekonečna. **Každá hodnota $Q(n)$ je proto zřejmě unikátní!** Je však stále určitá šance, že by přesto šlo takový hypotetický vzorec s nekonečně členy nějak zjednodušit a vyjádřit v uzavřeném tvaru.

Rekurence pro k dam na $n \times n$ (c_j jsou konstanty, $n > d_k$) je:

$$a(n) = \sum_{j=1}^{d_k} c_j a(n-j)$$

Pokud přijmeme mojí hypotézu z předchozí kapitoly, je délka rekurence pro počet neohrožujících se k dam na šachovnici $n \times n$ asymptoticky rovna

$$d_k \sim \frac{6}{5\pi^2} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2k+1}$$

Každá z rekurencí je dána počátečním počtem unikátních hodnot, ze kterých je pak pomocí rekurentního vzorce možno vypočítat všechny hodnoty až do nekonečna. Problém je v tom, že pokud jde k do nekonečna, jde pro tyto posloupnosti i počet těchto unikátních hodnot do nekonečna a je asymptoticky roven d_k . Podle toho se domnívám, že pokud se hodnota k bude přibližovat hodnotě n , půjde i mez počtu unikátních hodnot potřebných pro rekurenci do nekonečna. Všechny hodnoty $Q(n)$ proto budou unikátní (počáteční z hlediska případné rekurence) a vzorec pro $Q(n)$ tak vůbec neexistuje, resp. nemůže mít konečně mnoho členů.

$$a(1) a(2) \dots a(d_k - 1) a(d_k) \quad | \quad a(d_k + 1) a(d_k + 2) \dots a(\infty)$$

initial values

$$k \rightarrow \infty \quad -> \quad d_k \rightarrow \infty$$

*For each recurrence several initial values of sequence must be determined by the problem and all the next values of sequence are possible to compute using recurrence relation. Number of initial values is the order of sequence. For number of ways to place k non-attacking queens on an $n \times n$ board is conjectured recurrence order d_k . If k going to infinity then also number of initial values (asymptotically = d_k) going to infinity. Therefore **each value of $Q(n)$ is probably "initial value"**! In other words all values of $Q(n)$ must be computed by counting and can not be computed from some recurrence. I think that no finite formula for n -Queens problem exists.*

Conjectures on asymptotic behaviour of $Q(n)$ - Hypotézy o funkci $Q(n)$ pro $n \rightarrow \infty$

Něco jiného je odhad průběhu funkce $Q(n)$ pro velká n , v tomto směru existuje několik hypotéz. Následuje přehled hypotéz a tabulka hodnot s příslušnými koeficienty. O asymptotickém chování těchto funkcí obecněji viz kap. 12.

1) Igor Rivin, Ilan Vardi, Paul Zimmermann, [The n-Queens Problem](#), The American Mathematical Monthly, 101 (7/1994), str.629-639. Na straně 631 vyslovili hypotézu, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log Q(n)}{n \log(n)} \right) = a \quad \text{tedy } Q(n) \sim n^{an} \quad (1)$$

kde konstanta $a > 0$ (do tabulky na str. 38 jsem doplnil aktuální výsledky, tehdy byly známy hodnoty jen do $n=20$)

Tento vztah je sice správný, ale jelikož je pravděpodobně $a = 1$, moc toho neříká.

2) Birger Nielsen na své internetové stránce [Dronninger på et skakbræt](#) odhadl 27.9.2000 na základě pravděpodobnosti pro umístění další dámy, $Q(n)$ jako

$$Q(n) \sim n! p^{n-1} \quad (2)$$

kde $p=0.3885\dots$

Tato hypotéza se zdá v současnosti jako nejlepší (= *best conjecture*).

Nyní použijeme [Stirlingův vzorec](#)

$$n! \sim \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}$$

$$\log(n!) \sim n \log(n) - n + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log(n)$$

Pokud přijmeme vztah (2), potom by ale muselo být

$$\begin{aligned} \log(Q(n)) &\sim \log(n!) + (n-1) \log(p) \\ \log(Q(n)) &\sim n \log(n) - n + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log(n) + (n-1) \log(p) \end{aligned}$$

Dosažením do (1) dostaneme

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log(Q(n))}{n \log(n)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \log(n) - n + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log(n) + (n-1) \log(p)}{n \log(n)} \right) = 1$$

Při $a = 1$ nemá vztah (1) žádnou hodnotu (i jen zřejmé $Q(n) \leq n!$ je silnější ...).

3) Benoit Cloitre 10.11.2002 vyslovil podobnou hypotézu, podle něj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \log \left(\frac{n!}{Q(n)} \right) \right) = C \sim 0.90..$$

Je zajímavé, že mezi touto konstantou C a konstantou p z hypotézy B.Nielsena platí jednoduchý vztah

$$C = -\log(p)$$

Takže pokud $p=0.3885\dots$, muselo by být $C=0.9454\dots$

4) Další pozoruhodný výsledek publikovali 28.8.2008 Cheng Zhang and Jianpeng Ma. V článku [Counting Solutions for the N-queens and Latin Square Problems by Efficient Monte Carlo Simulations \(PDF\)](#) došli pomocí simulací metodou Monte Carlo k (zatím asi nejpřesnějšímu) vztahu:

$$\log \left(\frac{n!}{Q(n)} \right) \sim 0.944001 n - 0.937$$

s maximální chybou 0.02 (pro $n > 100$). Zatímco předchozí hypotézy vznikaly na základě pokusů o extrapolaci ze známých (přesných) výsledků, tedy pouze z něco přes 20 čísel, tento výsledek má jiný charakter. Autoři simulovali problém až do šachovnic $n \times n$, kde $n=10000$. Takové výsledky, podložené teorií pravděpodobnosti, mají proto větší váhu. Jejich metoda nám sice nepřinese přesné hodnoty $Q(n)$ pro jednotlivá n , ale u odhadů lze stanovit rozsah pravděpodobné chyby. Je to proto první rovnice, která není jen hypotézou, ale opravdovým výsledkem řešení tohoto problému.

Tento výsledek je téměř shodný s hypotézou Birger Nielsena, neboť přepočtem vychází

$$Q(n) \sim e^{0.937} n! e^{-0.944001 n}$$

po úpravách z toho dostaneme

$$Q(n) \sim 2.552 n! 0.389068^n$$

což se dá napsat také jako

$$Q(n) \sim 0.993 n! 0.389068^{n-1}$$

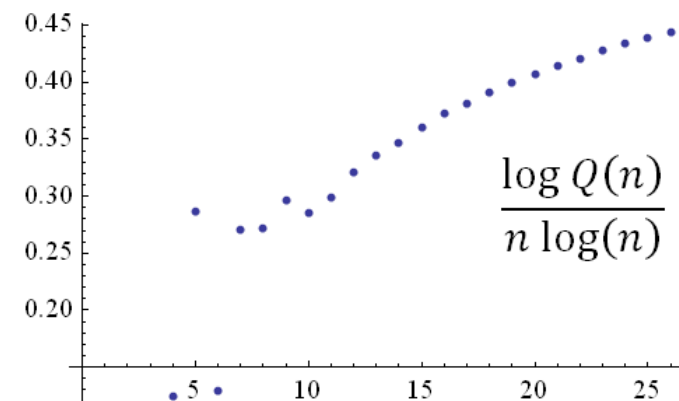
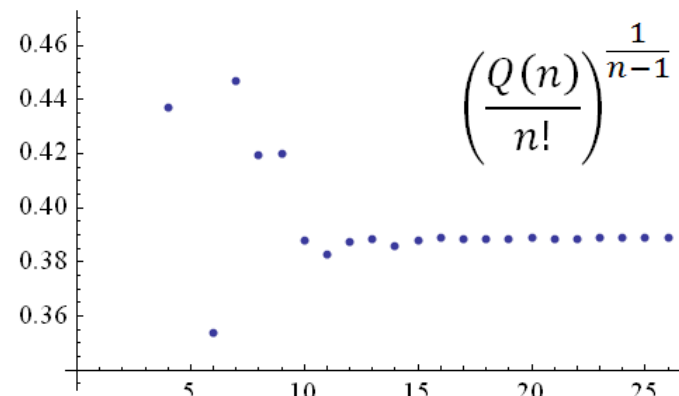
a nyní už je na místě otázka, zda konstanta 0.993 nemá být spíš 1 ?

Pokud bychom obráceně vyšli z (elegantnější) hypotézy Birger Nielsena, lze ji převést do tvaru $\log \left(\frac{n!}{Q(n)} \right) \sim 0.9454n - 0.9454$

5) Další výsledky viz [kapitola 12](#).

V následující tabulce a grafech můžeme porovnat odhady pro známé hodnoty $Q(n)$

n	$Q(n)$	$\frac{\log Q(n)}{n \log(n)}$	$\left(\frac{Q(n)}{n!}\right)^{\frac{1}{n-1}}$	$\frac{1}{n} \log\left(\frac{n!}{Q(n)}\right)$	$\frac{0.937 + \log\left(\frac{n!}{Q(n)}\right)}{n}$
4	2	0.12500	0.436790	0.6212266624	0.855476662
5	10	0.28613	0.537285	0.4969813299	0.684381330
6	4	0.12895	0.353953	0.8654928084	1.021659475
7	40	0.27081	0.446620	0.6908974152	0.824754558
8	92	0.27181	0.419382	0.7603517907	0.877476791
9	352	0.29651	0.420095	0.7709107004	0.875021812
10	724	0.28597	0.388049	0.8519621180	0.945662118
11	2680	0.29926	0.382559	0.8735214338	0.958703252
12	14200	0.32063	0.387578	0.8688514376	0.946934771
13	73712	0.33612	0.388542	0.8726340743	0.944710997
14	365596	0.34669	0.385792	0.8844240718	0.951352643
15	2279184	0.36039	0.387849	0.8839962227	0.946462889
16	14772512	0.37213	0.388976	0.8852238369	0.943786337
17	95815104	0.38156	0.388506	0.8898319151	0.944949562
18	666090624	0.39050	0.388371	0.8932504953	0.945306051
19	4968057848	0.39908	0.388602	0.8954520716	0.944767861
20	39029188884	0.40703	0.388822	0.8974020412	0.944252041
21	314666222712	0.41408	0.388575	0.9002552664	0.944874314
22	2691008701644	0.42087	0.388583	0.9022838241	0.944874733
23	24233937684440	0.42734	0.388717	0.9038217572	0.944560888
24	227514171973736	0.43341	0.388823	0.9052706563	0.944312323
25	2207893435808352	0.43904	0.388796	0.9069115985	0.944391599
26	22317699616364044	0.44438	0.388795	0.9083671268	0.944405588
27	?	?	?	?	?
∞	∞	$\rightarrow 1$?	$\rightarrow 0.3887... ?$	$\rightarrow 0.9454... ?$	$\rightarrow 0.9440... ?$



1.2) k Queens on an $k \times n$ chessboard - k dam na šachovnici $k \times n$

Případ rozmístění k dam na šachovnici $k \times n$ je o něco jednodušší než pro šachovnici $n \times n$. I tyto vzorce byly předmětem intenzivního zájmu matematiků už v 19. století. Ale opět až získání více hodnot pomocí počítačů o 100 let později pomohlo objevit vzorce pro větší hodnoty k .

Vzorce pro šachovnici $k \times n$ jsou vždy polynomy bez tzv. kvazipolynomů (spec. vzorce pro šachovnice sudých a lichých rozměrů jsou vždy shodné). Trigonometrické funkce najdeme u vzorců na šachovnici $n \times n$ a to pouze v případě liniových kamenů (nikoliv pro bodové kameny).

2 Queens, board $2 \times n$:

$$(n - 1)(n - 2)$$

A061989 - 3 Queens, board $3 \times n$: (E.Pauls, 1874), $n \geq 3$

$$(n - 3)(n^2 - 6n + 12)$$

A061990 - 4 Queens, board $4 \times n$: (M.Tarry, 1890), $n \geq 7$

$$n^4 - 18n^3 + 139n^2 - 534n + 840$$

A061991 - 5 Queens, board $5 \times n$: (V.Kotěšovec, 1992), $n \geq 11$

$$n^5 - 30n^4 + 407n^3 - 3098n^2 + 13104n - 24332$$

A061992 - 6 Queens, board $6 \times n$: (V.Kotěšovec, 1992), $n \geq 17$

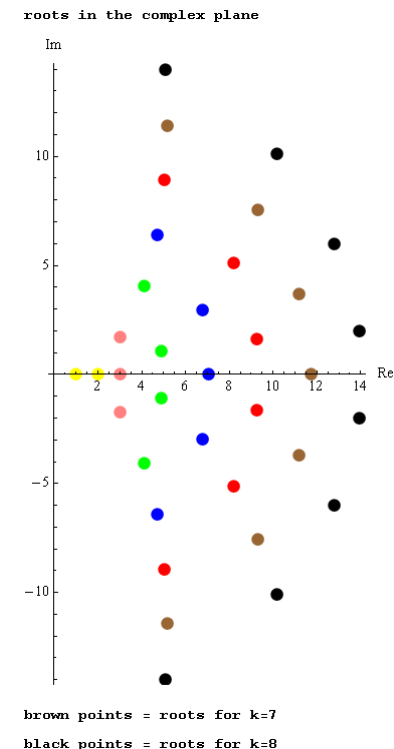
$$n^6 - 45n^5 + 943n^4 - 11755n^3 + 91480n^2 - 418390n + 870920$$

A061993 - 7 Queens, board $7 \times n$: (V.Kotěšovec, 1992), $n \geq 23$

$$n^7 - 63n^6 + 1879n^5 - 34411n^4 + 417178n^3 - 3336014n^2 + 16209916n - 36693996$$

A172449 - 8 Queens, board $8 \times n$: (V.Kotěšovec, 3.2.2010), $n \geq 31$

$$n^8 - 84n^7 + 3378n^6 - 85078n^5 + 1467563n^4 - 17723656n^3 + 145910074n^2 - 745654756n + 1802501048$$



Koeficient u n^{k-1} $3\binom{k}{2}$ jsem určil již v roce 1992, [Rex Multiplex 38/1992](#), článek v rubrice "Echecs et Mathématiques".

Koeficient u n^{k-2} $15\binom{k}{4} + 12\binom{k}{3} + 2\binom{k}{2}^2 + 2\binom{k-1}{3} + \binom{k-2}{2} + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1$ odvodil Ľudovít Lačný v roce 2001,

viz články "150 rokov problému ôsmich dám", Ľ. Lačný, Pat a Mat 32/2001, str. 17-20 a

[Co nového v problému N - dam](#) (*What's new in N-queens problem*), V. Kotěšovec, Pat a Mat 32/2001, str.20-21.

Nyní jsem tento vzorec potvrdil jinou metodou (v jiném tvaru, ale se shodnými hodnotami) a současně ověřil pro $k=8$ (což v roce 2001 byla jen hypotéza).

Obecně mají tyto vzorce tvar:

$$n^k - \frac{3k(k-1)}{2} n^{k-1} + \left(\frac{9k^4}{8} - \frac{29k^3}{12} - \frac{k^2}{8} + \frac{23k}{12} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^k}{4} \right) n^{k-2} - \dots$$

(sekvence u třetího členu by tedy měla pokračovat takto: 0, 2, 30, 139, 407, 943, 1879, 3378, 5626, 8840, ...)

O autorech vzorců pro $k=3$ a $k=4$ se zmiňuje Wilhelm Ahrens ve své knize [Mathematische Unterhaltungen und Spiele](#) (vydání z roku 1921) na str.277.

Vzorec pro $k=3$ publikoval E.Pauls, "Das Maximalproblem der Damen auf dem Schachbrette", Deutsche Schachzeitung, 1874, str.261-263

Vzorec pro $k=4$ publikoval M. Harold Tarry na kongresu francouzských matematiků v roce 1890 v Limoges. Ve své přednášce uvedl i vzorce pro $k=2$ a $k=3$ a je proto v literatuře občas uváděn i jako autor těchto vzorců (vzorec pro $k=3$ však vymyslel již v roce 1874 E.Pauls).

V [Intermédiaire des Mathématiciens](#) 1903, str.297-8 (str.682 v PDF) potom Tarry vyzval matematiky k nalezení obdobného vzorce pro šachovnici $5 \times n$, nikdo však takový vzorec nenalezl. Tento problém pak vyřešil až Václav Kotěšovec v roce 1992.

2) „Über das Achtdamenproblem und seine Verallgemeinerung“, *Naturw. Wochenschrift XI, 2. Aug. 1896.* — Weitere hierhergehörige Formeln, nämlich für 2, 3, 4 Königinnen auf Brettern von bzw. $2 \times n$, $3 \times n$, $4 \times n$ Feldern hatte H. Tarry auf dem Kongreß der Assoc. franç. pour l'avanc. des sc. zu Limoges 1890 entwickelt (vgl. Lucas, „Récréations“, t. I, p. 231); die Formel für 3 Königinnen auf $3 \times n$ Feldern war schon vorher gegeben von E. Pauls, Deutsche Schachzeitung, Bd. 29, 1874, p. 261—263. Eine entsprechende Formel für ein Gebiet von $5 \times n$ Feldern ist von H. Tarry im *Intermédiaire des mathématiciens* (Question 605; t. II, 1895, p. 205, wiederholt t. X, 1903, p. 297/298) gefordert, ohne daß jedoch eine Lösung eingegangen ist.

Poznámka: Ke stejným výsledkům (pro $k=2,3,4,5,6$) došli v článku [Nonattacking queens in a rectangular strip](#) (PDF) (na str.16) Thomas Zaslavsky, Seth Chaiken a Christopher R.H. Hanusa (2009). Bohužel jejich další výsledky (uvedené v tomto článku) pro střelce, jezdce a tátoše jsou ze šachového pohledu chybné, protože uvažovali jen taková rozmístění, kde na každém sloupci stojí právě 1 kámen. To platí pro dámy a věže, ale v případě jiných kamenů může stát na jednom sloupci 2 i více neohrožujících se kamenů stejných hodnot. Pro tyto případy tedy řešili jiný problém (více matematický než šachový).

Formulas for queens and rooks in this article are same, but for bishops, knights and nightriders with additional condition “there is to be one piece in each row”.

Co se týče faktu, že všechny vzorce v této skupině neplatí už od $n = 1$, ale až od určitého n (závislého na k), existuje vztah mezi rozsahem platnosti vzorců a příslušnými **vytvorujícími funkcemi**. Jak jsem již uvedl v kapitole 1.1, vytvořující funkce pro všechny tyto posloupnosti jsou **racionální**, jde tedy o podíl dvou polynomů s celočíselnými koeficienty.

$$G(x) = \frac{A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} \dots + A_1 x^1 + A_0 x^0}{B_q x^q + B_{q-1} x^{q-1} \dots + B_1 x^1 + B_0 x^0}$$

Pokud není stupeň polynomu v čitateli větší než stupeň polynomu ve jmenovateli ($p \leq q$), platí explicitní vzorec už od $n = 1$. V případě, že $p > q$, tedy stupeň polynomu v čitateli je větší než stupeň polynomu ve jmenovateli, potom explicitní vzorec platí až od

$$n \geq p - q + 1$$

Rekurentní vzorec platí v tomto případě až od

$$n \geq p + 1$$

Samotná vytvořující funkce dává platné hodnoty (na rozdíl od explicitních a rekurentních vzorců) vždy už od $n = 1$. Pokud budeme uvažovat (pro k dam na $k \times n$) např. $k = 8$, je číselník (*numerator*) vytvořující funkce polynom 39.stupně ($p = 39$) a jmenovatel polynom 9.stupně ($q = 9$). Explicitní vzorec proto může platit až od $n = 39 - 9 + 1 = 31$ a rekurentní až od $n = 39 + 1 = 40$.

Vytvořující funkce mají některé zajímavé vlastnosti. Pokud vynásobíme tuto funkci x , výsledná posloupnost se nemění, jen dojde k jejímu posunu o 1 doprava (tedy předchozí hodnota a_1 je nyní a_2 atd.). Vynásobení členem x^8 tedy znamená jen to, že posloupnost vlastně začíná až od $n=8$. Zbývající polynom v čitateli má stupeň 31, k jeho určení je proto potřeba určit celkem 32 koeficientů. Na první pohled se to zdá příliš, protože explicitní vzorec je polynom jen 8.stupně, k jehož určení stačí znát jen 9 koeficientů. Ve zbytku čitatele vytvořující funkce je tak navíc zakódována informace o (atypických) počátečních členech posloupnosti.

Jmenovatel (*denominator*) vytvořující funkce přímo určuje tvar **rekurentní posloupnosti**, kterou získáme (po roznásobení) nahrazením všech členů x^j výrazy a_{n-j} , přičemž využijeme fakt, že $x^0=1$. V této skupině vzorců má jmenovatel vždy tvar $(x-1)^{k+1}$, z čehož vyplývá obecný tvar rekurentního vztahu (daný binomickými koeficienty se střídáním znaménka - viz tabulka na straně 44). Speciálně tedy, pokud mají dvě různé posloupnosti explicitní vzorce dané polynomy stejných stupňů a navíc oba vzorce platí pro všechny jejich členy (tedy už od $n=1$), pak mají obě takové posloupnosti **shodný** rekurentní vzorec. Ten ale samotný není (na rozdíl od vytvořující funkce) postačující k určení všech hodnot posloupnosti, k tomu je třeba ještě znát příslušný počet prvních členů této posloupnosti.

Pro právě analyzovanou skupinu vzorců (k dam na $k \times n$) platí

$$p = \frac{2k^2 + 4k - 5 + (-1)^k}{4}$$

$$q = k + 1$$

Takže explicitní vzorec platí až pro

$$n \geq \frac{(2k^2 - 5 + (-1)^k)}{4}$$

a rekurentní vzorce až pro

$$n \geq \frac{(2k^2 + 4k - 1 + (-1)^k)}{4}$$

Tedy např. pro $k=9$ vychází $p=48$, $q=10$, explicitní vzorec bude platit až pro $n \geq 39$ a rekurentní pro $n \geq 49$. Jelikož explicitní vzorec bude polynom 9.stupně, bylo by třeba pro určení jeho 10 koeficientů vypočítat hodnoty posloupnosti pro $n=39$ až $n=48$. Pro tři z těchto koeficientů však už máme obecné vzorce, proto by stačil výpočet hodnot až do $n=45$ plus jedna hodnota pro kontrolu, tedy do $n=46$. K tomu by ale bylo nezbytné prozkoumat $\binom{9 * 46}{9} \sim 9 * 10^{17}$ pozic, což už je nad síly současných PC.

Obráceně, pokud už známe explicitní vzorec a potřebujeme určit vytvořující funkci, tak pro všechny vzorce na šachovnici $k \times n$ je stupeň polynomu ve jmenovateli

$$q = k + 1$$

a pokud označíme n_1 první takové n , pro které explicitní vzorec už platí, pak je stupeň polynomu v čitateli vytvořující funkce roven

$$p = n_1 + k$$

Pro případ k kamenů na šachovnici $k \times n$, kdy jmenovatel vytvořující funkce je vždy $(x-1)^{k+1}$ a explicitní vzorec je proto vždy pouze polynom (bez tzv. kvazipolynomů), lze odvodit vztah mezi koeficienty vytvořující funkce a explicitním vzorcem. Ukažme si to nejprve na příkladu. Pro počet rozmístění 4 neohrožujících se dam na šachovnici $4 \times n$ je vytvořující funkce

$$G(x) = \frac{-2x^4 (x^7 - x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x + 1)}{(x - 1)^5}$$

Stupeň polynomu v čitateli je $p=11$, stupeň polynomu ve jmenovateli je $q=5$. Vytvořující funkci lze zapsat také ve tvaru

$$G(x) = -2x^6 - 8x^5 - 30x^4 - 84x^3 - 200x^2 - 428x - 840 - \frac{1532}{x-1} - \frac{1092}{(x-1)^2} - \frac{544}{(x-1)^3} - \frac{168}{(x-1)^4} - \frac{24}{(x-1)^5}$$

Jelikož je $p > q$, jedná se o dvě části, obecně

$$G(x) = \sum_{t=0}^{p-q} c_t x^t + \sum_{s=1}^q \frac{g_s}{(x-1)^s}$$

kde c_t a g_s jsou konstanty.

Při výpočtu koeficientů [Taylorova rozvoje](#) se stupeň polynomu vlevo každou derivací sníží o 1, až po $p - q + 1$ derivacích bude už stále 0 (tímto způsobem je ve vytvořující funkci „zakódováno“, že několik prvních členů posloupnosti se chová odlišně než její zbytek).

Snadno lze odvodit (a indukcí dokázat) pro $n \geq 1$ následující vztah pro n -tou derivaci v nule výrazu

$$\left(\frac{d}{dx}\right)_{x=0}^n \frac{1}{(x-1)^s} = (-1)^s \prod_{i=0}^{n-1} (s+i) = (-1)^s \frac{(s+n-1)!}{(s-1)!}$$

Nyní můžeme určit členy posloupnosti a_n jako koeficienty Taylorova rozvoje vytvořující funkce pro $n \geq p - q + 1$ takto:

$$a_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)_{x=0}^n G(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)_{x=0}^n \sum_{s=1}^q \frac{g_s}{(x-1)^s} = \frac{1}{n!} \sum_{s=1}^q g_s (-1)^s \frac{(s+n-1)!}{(s-1)!}$$

Zápis explicitního vzorce zjednodušíme substitucí $j = s - 1$ a použitím kombinačních čísel

$$a_n = \sum_{j=0}^{q-1} g_{j+1} (-1)^{j+1} \binom{n+j}{j}$$

V našem konkrétním příkladu máme

$$g_1 = -1532, \quad g_2 = -1092, \quad g_3 = -544, \quad g_4 = -168, \quad g_5 = -24$$

a po dosazení dostáváme

$$a_n = 1532 \binom{n+0}{0} - 1092 \binom{n+1}{1} + 544 \binom{n+2}{2} - 168 \binom{n+3}{3} + 24 \binom{n+4}{4}$$

$$a_n = n^4 - 18n^3 + 139n^2 - 534n + 840$$

pro

$$n \geq p - q + 1 = 11 - 5 + 1 = 7$$

což souhlasí se vzorcem odvozeným jinou metodou.

Když známe explicitní vzorce, jsou obvykle už vytvořující funkce pro danou posloupnost méně zajímavé, přesto je zde pro porovnání přehledně uvádím. *Jen bych ještě poznamenal, že některé velmi dlouhé výrazy (přesahující 1 řádku) nemělo smysl upravovat do matematické sazby a nechal jsem je proto v řádkovém tvaru.*

k Queens on an k x n chessboard				
k	Generating function		Explicit formula	Recurrence
2	$-2 \frac{x^3}{(x-1)^3}$		$n^2 - 3n + 2$	$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$
		$n \geq$	1	4
3	$2x^4 \frac{2x^2 - x + 2}{(x-1)^4}$		$n^3 - 9n^2 + 30n - 36$	$a_n = 4a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4a_{n-3} - a_{n-4}$
		$n \geq$	3	7
4	$-2x^4 \frac{x^7 - x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x + 1}{(x-1)^5}$		$n^4 - 18n^3 + 139n^2 - 534n + 840$	$a_n = 5a_{n-1} - 10a_{n-2} + 10a_{n-3} - 5a_{n-4} + a_{n-5}$
		$n \geq$	7	12
5	$\frac{2x^5 (4x^{11} - 11x^{10} + 16x^9 + 7x^8 - 32x^7 + 38x^6 + 6x^5 + 8x^4 - 8x^3 + 37x^2 - 10x + 5)}{(x-1)^6}$		$n^5 - 30n^4 + 407n^3 - 3098n^2 + 13104n - 24332$	$a_n = 6a_{n-1} - 15a_{n-2} + 20a_{n-3} - 15a_{n-4} + 6a_{n-5} - a_{n-6}$
		$n \geq$	11	17
6	$-2x^6 (4x^{17} - 12x^{16} + 12x^{15} + 10x^{14} - 10x^{13} + 40x^{12} - 278x^{11} + 677x^{10} - 582x^9 - 62x^8 + 654x^7 - 501x^6 + 293x^5 - 46x^4 + 138x^3 - 12x^2 + 33x + 2) / (x-1)^7$		$n^6 - 45n^5 + 943n^4 - 11755n^3 + 91480n^2 - 418390n + 870920$	$a_n = 7a_{n-1} - 21a_{n-2} + 35a_{n-3} - 35a_{n-4} + 21a_{n-5} - 7a_{n-6} + a_{n-7}$
		$n \geq$	17	24
7	$2x^7 (24x^{23} - 140x^{22} + 320x^{21} - 220x^{20} - 284x^{19} + 510x^{18} - 142x^{17} - 308x^{16} + 1998x^{15} - 5672x^{14} + 8326x^{13} - 7831x^{12} + 7462x^{11} - 7616x^{10} + 6472x^9 - 2857x^8 + 264x^7 + 2019x^6 - 1356x^5 + 1292x^4 - 88x^3 + 331x^2 - 4x + 20) / (x-1)^8$		$n^7 - 63n^6 + 1879n^5 - 34411n^4 + 417178n^3 - 3336014n^2 + 16209916n - 36693996$	$a_n = 8a_{n-1} - 28a_{n-2} + 56a_{n-3} - 70a_{n-4} + 56a_{n-5} - 28a_{n-6} + 8a_{n-7} - a_{n-8}$
		$n \geq$	23	31
8	$-2x^8 (36x^{31} - 180x^{30} + 180x^{29} + 660x^{28} - 2104x^{27} + 4532x^{26} - 14179x^{25} + 32645x^{24} - 40080x^{23} + 20775x^{22} + 9741x^{21} - 31157x^{20} + 21956x^{19} + 40810x^{18} - 114212x^{17} + 130860x^{16} - 124057x^{15} + 168145x^{14} - 230282x^{13} + 226719x^{12} - 144237x^{11} + 67626x^{10} - 40135x^9 + 42738x^8 - 24838x^7 + 11807x^6 + 2384x^5 + 897x^4 + 2172x^3 + 773x^2 + 119x + 46) / (x-1)^9$		$n^8 - 84n^7 + 3378n^6 - 85078n^5 + 1467563n^4 - 17723656n^3 + 145910074n^2 - 745654756n + 1802501048$	$a_n = 9a_{n-1} - 36a_{n-2} + 84a_{n-3} - 126a_{n-4} + 126a_{n-5} - 84a_{n-6} + 36a_{n-7} - 9a_{n-8} + a_{n-9}$
		$n \geq$	31	40
k	numerator = polynomial degree $(2k^2 + 4k - 5 + (-1)^k) / 4$		$n^k - 3k(k-1)/2 * n^{k-1} + (9k^4/8 - 29k^3/12 - k^2/8 + 23k/12 - 1/4 + (-1)^{k/4}) * n^{k-2} - \dots$	$a_n = \sum_{i=1}^{k+1} a_{n-i} (-1)^{i-1} \binom{k+1}{i}$
	denominator = polynomial degree $k+1 = (x-1)^{k+1}$	$n \geq$	$(2k^2 - 5 + (-1)^k) / 4$	$(2k^2 + 4k - 1 + (-1)^k) / 4$

Jelikož vzorce pro rozmístění k dam na šachovnici $k \times n$ platí vždy až od jistého n , jsou v následující tabulce počty pro malá n , kde vzorce ještě neplatí, označeny **červenými** čísly. Sloupec vpravo představuje počty rozmístění vzájemně se neohrožujících n dam na šachovnici $n \times n$ (porovnejte s **diagonálou** v tabulce).

n	k queens $k \times n$							n queens, $n \times n$
	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	
1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	0	0	0	0	0	0	0
4	6	4	2	0	0	0	0	2
5	12	14	12	10	0	0	0	10
6	20	36	46	40	4	0	0	4
7	30	76	140	164	94	40	0	40
8	42	140	344	568	550	312	92	92
9	56	234	732	1614	2292	2038	1066	352
10	72	364	1400	3916	7552	9632	7828	724
11	90	536	2468	8492	21362	37248	44148	2680
12	110	756	4080	16852	52856	120104	195270	14200
13	132	1030	6404	31100	117694	335010	707698	73712
14	156	1364	9632	54068	241484	835056	2211868	365596
15	182	1764	13980	89428	463038	1897702	6120136	2279184
16	210	2236	19688	141812	838816	3998456	15324708	14772512
17	240	2786	27020	216932	1448002	7907094	35312064	95815104
18	272	3420	36264	321700	2398292	14818300	75937606	666090624
19	306	4144	47732	464348	3832374	26512942	153942964	4968057848
20	342	4964	61760	654548	5935120	45562852	296590536	39029188884
21	380	5886	78708	903532	8941514	75580634	546621416	314666222712
22	420	6916	98960	1224212	13145292	121520020	968910732	2691008701644
23	462	8060	122924	1631300	18908302	190031678	1659114170	24233937684440
24	506	9324	151032	2141428	26670584	289879092	2754780934	227514171973736

25	552	10714	183740	2773268	36961170	432420154	4449361442	2207893435808352
26	600	12236	221528	3547652	50409604	632159540	7009572728	22317699616364044
27	650	13896	264900	4487692	67758182	907376502	10796663102	?
28	702	15700	314384	5618900	89874912	1280833348	16292133888	?
29	756	17654	370532	6969308	117767194	1780569602	24128511810	?
30	812	19764	433920	8569588	152596220	2440786884	35125842896	?
31	870	22036	505148	10453172	195692094	3302829550	50334575910	?
32	930	24476	584840	12656372	248569672	4416266132	71085565752	?
33	992	27090	673644	15218500	312945122	5840076618	99047961338	?
34	1056	29884	772232	18181988	390753204	7643950612	136295785608	?
35	1122	32864	881300	21592508	484165270	9909701414	185384054238	?
36	1190	36036	1001568	25499092	595607984	12732801060	249435319880	?
37	1260	39406	1133780	29954252	727782762	16224041362	332237569362	?
38	1332	42980	1278704	35014100	883685932	20511325988	438354441528	?
39	1406	46764	1437132	40738468	1066629614	25741598622	573248773718	?
40	1482	50764	1609880	47191028	1280263320	32082912244	743420525208	?

1.3) k Queens on an $n \times n$ toroidal chessboard - k dam na prstencové šachovnici $n \times n$

Prstencová šachovnice je kombinace vertikální a horizontální válcové šachovnice. *Toroidal chessboard (anchor-ring) - board on which the a- and h-files are joined and the bottom and top ranks are also joined. The anchor-ring is a combination of the vertical and horizontal cylinders.*

Z hlediska programátorského umožňuje tato šachovnice (ve stejném čase) výpočet hodnot pro větší n , protože vzhledem k symetrii je možno jeden kámen zafixovat.

A172517 - 2 Queens, toroidal board $n \times n$:

pro n sudé (*even*)

$$\frac{n^2(n-2)^2}{2}$$

pro n liché (*odd*)

$$\frac{n^2(n-1)(n-3)}{2}$$

nebo jedním vzorcem:

$$\frac{n^2(2n^2 - 8n + 7 + (-1)^n)}{4}$$

A172518 - 3 Queens, toroidal board $n \times n$: (*V. Kotěšovec, 31.1.2010*)

pro n sudé (*even*)

$$\frac{n^2(n-2)(n-4)(n^2-6n+12)}{6}$$

pro n liché (*odd*)

$$\frac{n^2(n-1)(n-3)(n^2-8n+18)}{6}$$

nebo jedním vzorcem:

$$\frac{n^2(2n^4 - 24n^3 + 109n^2 - 216n + 150)}{12} + \frac{n^2(n^2 - 8n + 14)(-1)^n}{4}$$



A172519 - 4 Queens, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 5.2.2010)

$$\left(\frac{n^8}{24} - n^7 + \frac{245n^6}{24} - \frac{113n^5}{2} + \frac{2843n^4}{16} - \frac{593n^3}{2} + \frac{4757n^2}{24}\right) + \left(\frac{n^6}{8} - \frac{5n^5}{2} + \frac{305n^4}{16} - \frac{129n^3}{2} + \frac{629n^2}{8}\right) * (-1)^n + \frac{8n^2}{3} * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{9n^2}{2} * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Počet rozmístění 4 neohrožujících se dam na prstencové šachovnici se dá vyjádřit buď jedním vzorcem nebo 12 vzorci odpovídajícími velikosti šachovnice (podle zbytku po dělení 12). Někoho možná překvapí funkce [cosinus](#) ve vzorci, taková řešení však jsou obvyklá, pokud [charakteristická rovnice](#) pro příslušnou [diferenční rovnici](#) má [imaginární kořeny](#). Výsledné hodnoty jsou vždy celočíselné a nejmenší perioda je 12.

4 Queens toroidal $n \times n$, $n=12a+b$	n^8	n^7	n^6	n^5	n^4	n^3	n^2	n^1	n^0
12a	1/24	-1	31/3	-59	787/4	-361	284	0	0
12a+1	1/24	-1	121/12	-54	1269/8	-232	473/4	0	0
12a+2	1/24	-1	31/3	-59	787/4	-361	271	0	0
12a+3	1/24	-1	121/12	-54	1269/8	-232	489/4	0	0
12a+4	1/24	-1	31/3	-59	787/4	-361	280	0	0
12a+5	1/24	-1	121/12	-54	1269/8	-232	473/4	0	0
12a+6	1/24	-1	31/3	-59	787/4	-361	275	0	0
12a+7	1/24	-1	121/12	-54	1269/8	-232	473/4	0	0
12a+8	1/24	-1	31/3	-59	787/4	-361	280	0	0
12a+9	1/24	-1	121/12	-54	1269/8	-232	489/4	0	0
12a+10	1/24	-1	31/3	-59	787/4	-361	271	0	0
12a+11	1/24	-1	121/12	-54	1269/8	-232	473/4	0	0

Alternative formula:

$$n^2 \left(\frac{n^6}{24} - \frac{5n^5}{4} + \frac{46n^4}{3} - \frac{777n^3}{8} + \frac{1303n^2}{4} - \frac{2107n}{4} + 284 + \left(\frac{n^4}{2} - 10n^3 + \frac{305n^2}{4} - 258n + \frac{629}{2} \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 9 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 9 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \right)$$

A173775 - 5 Queens, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 24.2.2010)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{120}n^{10} - \frac{1}{3}n^9 + \frac{143}{24}n^8 - \frac{373}{6}n^7 + \frac{99377}{240}n^6 - \frac{3603}{2}n^5 + \frac{119627}{24}n^4 - \frac{23833}{3}n^3 + \frac{16342}{3}n^2 \\ & + \left(\frac{1}{24}n^8 - \frac{3}{2}n^7 + \frac{1111}{48}n^6 - \frac{391}{2}n^5 + \frac{7595}{8}n^4 - 2487n^3 + \frac{8032}{3}n^2 \right) (-1)^n \\ & + \left(\frac{9}{2}n^4 - 78n^3 + 374n^2 \right) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \left(\frac{8}{3}n^4 - \frac{128}{3}n^3 + \frac{656}{3}n^2 \right) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \\ & + \frac{80}{3}n^2 \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{16}{5}n^2 \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{16}{5}n^2 \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right) (-1)^n \end{aligned}$$

Alternative formula:

$$\begin{aligned} & n^2 \left(\frac{n^8}{120} - \frac{5n^7}{12} + 9n^6 - \frac{2639n^5}{24} + \frac{49693n^4}{60} - \frac{15617n^3}{4} + 11057n^2 - 16630n + \frac{43752}{5} + \left(\frac{n^6}{6} - 6n^5 + \frac{1111n^4}{12} - 782n^3 + \frac{7595n^2}{2} - 9948n + 11024 \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right. \\ & \left. + (8n^2 - 128n) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + (4n^2 - 64n) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor \right. \\ & \left. + (9n^2 - 156n + 748) \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + (9n^2 - 156n + 748) \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + 368 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \right. \\ & \left. + 368 \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - 288 \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 656 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor \right) \end{aligned}$$

period = LCM[1,2,3,4,5,6] = 60

Note about number of necessary values of sequences on an $n \times n$ toroidal board

If $q_k(n)$ is the sequence for k queens on an $n \times n$ toroidal board and $q_{k\text{fixedA1}}(n)$ is a sequence with **fixed first queen on A1**, then $q_k(n) = q_{k\text{fixedA1}}(n) * n^2 / k$. Therefore is necessary know (much simple) recurrence only for $q_{k\text{fixedA1}}(n)$.

For example, for 5 queens on an $n \times n$ toroidal board is denominator for $q_{5\text{fixedA1}}(n)$

$$(-1+x)^9(1+x)^7(1+x^2)^3(1-x+x^2)(1+x+x^2)^3(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

and denominator for $q_5(n)$ then

$$(-1+x)^{11}(1+x)^9(1+x^2)^5(1-x+x^2)^3(1+x+x^2)^5(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$$

added 2 to all exponents!

Degree of denominator for $q_5(n)$ is 58, but only 34 values (= degree of $q_{5\text{fixedA1}}$) need computed!

Pro nalezení rekurence není třeba generovat hodnoty pro výslednou posloupnost, ale stačí vypočítat počet pozic s první dámou na poli a1. Taková rekurence má podstatně kratší hloubku a je tedy nezbytné vygenerovat daleko méně hodnot. Výslednou posloupnost pak získáme vynásobením výrazem n^2/k a taková posloupnost bude mít shodný jmenovatel vytvářející funkce až na to, že ke všem exponentům jeho členů je nutné přičíst 2 (=efekt násobení n^2). Z tohoto denominátoru pak už snadno určíme hledanou rekurenci pro plnou posloupnost.

A178722 - 6 Queens, toroidal board $n \times n$: (*Artem M. Karavaev, after values computed by Andrey Khalyavin, 19.6.2011*)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6}n^2 * \left(\frac{n^{10}}{120} - \frac{5n^9}{8} + \frac{125n^8}{6} - \frac{3275n^7}{8} + \frac{316073n^6}{60} - \frac{371219n^5}{8} + 282695n^4 - \frac{4676911n^3}{4} + \frac{15512322n^2}{5} - 4626944n + 2452536 \right. \\
& \left. + \left(\frac{n^8}{4} - 14n^7 + \frac{1411n^6}{4} - 5227n^5 + \frac{199399n^4}{4} - 313302n^3 + \frac{2530255n^2}{2} - 2984844n + 3117968 \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right. \\
& + (24n^4 - 864n^3 + 12852n^2 - 95112n + 309128) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + (12n^4 - 432n^3 + 6180n^2 - 42384n + 117584) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor \\
& + (27n^4 - 1044n^3 + 16044n^2 - 118296n + 350388) \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + (27n^4 - 1044n^3 + 16044n^2 - 118296n + 360348) \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \\
& + (96n^2 - 1920n + 22248) \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + (48n^2 - 960n + 10224) \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + (48n^2 - 960n + 12024) \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + (48n^2 - 960n + 10224) \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor \\
& + (492n^2 - 10344n + 73960) \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 1968 \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + 984 \left\lfloor \frac{n+1}{7} \right\rfloor + 984 \left\lfloor \frac{n+2}{7} \right\rfloor + 984 \left\lfloor \frac{n+3}{7} \right\rfloor + 984 \left\lfloor \frac{n+4}{7} \right\rfloor + 984 \left\lfloor \frac{n+5}{7} \right\rfloor + 9960 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor \\
& \left. + 9960 \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + 1800 \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor - 1800 \left\lfloor \frac{n+2}{10} \right\rfloor + 1800 \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor \right)
\end{aligned}$$

period = LCM[1,2,3,4,5,6,7,8,10] = 840

In Mathematica:

```

q6texplicit = n^2/6*(n^10/120-5*n^9/8+125*n^8/6-3275*n^7/8+316073*n^6/60-371219*n^5/8+282695*n^4-4676911*n^3/4+15512322*n^2/5-4626944*n+2452536
+(n^8/4-14*n^7+1411*n^6/4-5227*n^5+199399*n^4/4-313302*n^3+2530255*n^2/2-2984844*n+3117968)*Floor[n/2]
+(24*n^4-864*n^3+12852*n^2-95112*n+309128)*Floor[n/3]+(12*n^4-432*n^3+6180*n^2-42384*n+117584)*Floor[(n+1)/3]
+(27*n^4-1044*n^3+16044*n^2-118296*n+350388)*Floor[n/4]+(27*n^4-1044*n^3+16044*n^2-118296*n+360348)*Floor[(n+1)/4]
+(96*n^2-1920*n+22248)*Floor[n/5]+(48*n^2-960*n+10224)*Floor[(n+1)/5]+(48*n^2-960*n+12024)*Floor[(n+2)/5]+(48*n^2-960*n+10224)*Floor[(n+3)/5]
+(492*n^2-10344*n+73960)*Floor[(n+1)/6]
+1968*Floor[n/7]+984*Floor[(n+1)/7]+984*Floor[(n+2)/7]+984*Floor[(n+3)/7]+984*Floor[(n+4)/7]+984*Floor[(n+5)/7]
+9960*Floor[n/8]+9960*Floor[(n+3)/8]
+1800*Floor[(n+1)/10]-1800*Floor[(n+2)/10]+1800*Floor[(n+3)/10]);

```

```
Table[q6texplicit, {n, 1, 100}]
```

Alternative formula (Václav Kotěšovec, after values computed by Andrey Khalyavin, 20.6.2011)

$$\begin{aligned}
 n^2 * & \left(\frac{n^{10}}{720} - \frac{n^9}{12} + \frac{661n^8}{288} - \frac{153n^7}{4} + \frac{615887n^6}{1440} - \frac{80581n^5}{24} + \frac{1801697n^4}{96} - \frac{295355n^3}{4} + \frac{9389033n^2}{48} - \frac{626899n}{2} + \frac{142789469}{630} \right. \\
 & + \left. \left(\frac{n^8}{96} - \frac{7n^7}{12} + \frac{1411n^6}{96} - \frac{5227n^5}{24} + \frac{199399n^4}{96} - \frac{52217n^3}{4} + \frac{843309n^2}{16} - \frac{745349n}{6} + \frac{2315441}{18} \right) (-1)^n \right. \\
 & + \frac{2}{9} (6n^4 - 216n^3 + 3213n^2 - 23778n + 77282) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \left(\frac{9n^4}{4} - 87n^3 + 1337n^2 - 9858n + 29614 \right) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \\
 & + \frac{8}{5} \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right) \left((4n^2 - 80n + 927) \cos\left(\frac{3\pi n}{5}\right) + 75 \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \right) + \frac{2}{9} (123n^2 - 2586n + 18490) \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) \\
 & + \frac{328}{7} \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi n}{7}\right) \right) + 415 \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) \right)
 \end{aligned}$$

V programu Mathematica:

```

q6t = n^2*(n^10/720-n^9/12+661*n^8/288-153*n^7/4+615887*n^6/1440-80581*n^5/24+1801697*n^4/96-295355*n^3/4+9389033*n^2/48-626899*n/2+142789469/630
+(n^8/96-7*n^7/12+1411*n^6/96-5227*n^5/24+199399*n^4/96-52217*n^3/4+843309*n^2/16-745349*n/6+2315441/18)*(-1)^n
+(9*n^4/4-87*n^3+1337*n^2-9858*n+29614)*Cos[Pi*n/2]
+2*(123*n^2-2586*n+18490)*Cos[Pi*n/3]/9+2*(6*n^4-216*n^3+3213*n^2-23778*n+77282)*Cos[2*Pi*n/3]/9
+415*(Cos[Pi*n/4]+Cos[3*Pi*n/4])
+8/5*Cos[Pi*n/5]*(75*Cos[2*Pi*n/5]+(927-80*n+4*n^2)*Cos[3*Pi*n/5])
+328/7*(Cos[2*Pi*n/7]+Cos[4*Pi*n/7]+Cos[6*Pi*n/7]);

```

Poznámka: matematické programy budou mít problém se zjednodušením tohoto vzorce (na symbolické úrovni) pro konkrétní hodnoty n , lze jej však ověřit numericky při zvolené velké přesnosti.

První členy všech těchto vzorců mají tvar:

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{2n^{2k-1}}{(k-2)!} + \frac{(24k^2 - 32k - 11) * n^{2k-2}}{12 * (k-2)!} + \frac{n^{2k-2} * (-1)^n}{4 * (k-2)!} - \dots$$

pro n sudé (if n is even)

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{2n^{2k-1}}{(k-2)!} + \frac{2 * (3k^2 - 4k - 1) * n^{2k-2}}{3 * (k-2)!} - \dots$$

pro n liché (if n is odd)

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{2n^{2k-1}}{(k-2)!} + \frac{(12k^2 - 16k - 7) * n^{2k-2}}{6 * (k-2)!} - \dots$$

k	k Queens on an n x n toroidal chessboard - Generating functions
2	$-4x^4 \frac{(x^3 + 6x^2 + 9x + 8)}{(x - 1)^5(x + 1)^3}$
3	$-4x^5 \frac{(9x^6 + 94x^5 + 199x^4 + 388x^3 + 151x^2 + 94x + 25)}{(x - 1)^7(x + 1)^5}$
4	$\frac{-2x^5(287x^{22} + 5191x^{21} + 25616x^{20} + 105043x^{19} + 280800x^{18} + 651461x^{17} + 1186795x^{16} + 1925172x^{15} + 2611064x^{14} + 3190574x^{13} + 3337574x^{12} + 3161250x^{11} + 2574658x^{10} + 1891298x^9 + 1175308x^8 + 649556x^7 + 291897x^6 + 115771x^5 + 34682x^4 + 8835x^3 + 1294x^2 + 169x + 25)}{((x-1)^9(x+1)^7(x^2+1)^3(x^2+x+1)^3)}$
5	$\frac{-2x^5(7103x^{52} + 176189x^{51} + 1178152x^{50} + 6690562x^{49} + 26779027x^{48} + 94415426x^{47} + 279563853x^{46} + 750808346x^{45} + 1801043139x^{44} + 3994320002x^{43} + 8146382872x^{42} + 15561018583x^{41} + 27783475573x^{40} + 46872093944x^{39} + 74656910348x^{38} + 113052262020x^{37} + 162685265517x^{36} + 223533937605x^{35} + 293148265394x^{34} + 368172254438x^{33} + 442597305769x^{32} + 510546376934x^{31} + 564703474411x^{30} + 600013441108x^{29} + 611836837266x^{28} + 599558786583x^{27} + 563884252818x^{26} + 509487511385x^{25} + 441494279496x^{24} + 367157992414x^{23} + 292378847127x^{22} + 223037242516x^{21} + 162500486193x^{20} + 113097905238x^{19} + 74889473200x^{18} + 47180890077x^{17} + 28120856423x^{16} + 15856794848x^{15} + 8389485232x^{14} + 4166280690x^{13} + 1917289195x^{12} + 818954571x^{11} + 317828058x^{10} + 112664956x^9 + 35083611x^8 + 9747362x^7 + 2226581x^6 + 444424x^5 + 64931x^4 + 8004x^3 + 466x^2 + 15x + 5)}{((x-1)^{11}(x+1)^9(x^2+1)^5(x^2-x+1)^3(x^2+x+1)^5(x^4+x^3+x^2+x+1)^3)}$
6	$\frac{-4x^7(125388x^{116} + 3953720x^{115} + 32836492x^{114} + 232257084x^{113} + 1189300908x^{112} + 5392674028x^{111} + 20846000221x^{110} + 73584828493x^{109} + 234773299887x^{108} + 697892421045x^{107} + 1928756218842x^{106} + 5034929093780x^{105} + 12419958520224x^{104} + 29220027460255x^{103} + 65643910358820x^{102} + 141653053871826x^{101} + 294008868876184x^{100} + 589309910567443x^{99} + 1142173374508559x^{98} + 2146724185630335x^{97} + 3917183427258205x^{96} + 6954371953570134x^{95} + 12024366260400898x^{94} + 20281716045530704x^{93} + 33401023176582406x^{92} + 53776660313618780x^{91} + 84708770724905308x^{90} + 130683016491561602x^{89} + 197579481989106288x^{88} + 293000822336132352x^{87} + 426418908110254301x^{86} + 609470454375361633x^{85} + 855893886211675373x^{84} + 1181667499545313629x^{83} + 1604545613743645244x^{82} + 2143908203394451540x^{81} + 2819717969912338804x^{80} + 3652016016595572947x^{79} + 4659219062572778369x^{78} + 5857346941541708973x^{77} + 7257760044743990155x^{76} + 8866414302182605096x^{75} + 10681354928853616387x^{74} + 12692489575991068455x^{73} + 14879316764634358595x^{72} + 17211787975632629663x^{71} + 19648761092687303261x^{70} + 22140404884027142259x^{69} + 24627674624780394291x^{68} + 27046383034593143900x^{67} + 29327626582763831239x^{66} + 31403186447524716251x^{65} + 33206411183491029589x^{64} + 34678179554584637183x^{63} + 35767440865213274746x^{62} + 36436745298563731140x^{61} + 36661605548973097554x^{60} + 36434691511700560715x^{59} + 35763454904412292323x^{58} + 34672481252386214193x^{57} + 33199329107220848255x^{56} + 31395092536118501672x^{55} + 29318961099336976695x^{54} + 27037559935494136933x^{53} + 24619126307525670419x^{52} + 22132474476599392275x^{51} + 19641770175303338334x^{50} + 17205930391569245588x^{49} + 14874747512713078942x^{48} + 12689229558612355343x^{47} + 10679393690667993989x^{46} + 8865628999647837839x^{45} + 7258021102590980819x^{44} + 5858449933005197060x^{43} + 4660982105652215919x^{42} + 3654221389861114571x^{41} + 2822193002740108377x^{40} + 2146474016598733851x^{39} + 1607077909343135851x^{38} + 1184051517992693543x^{37} + 858065991049661571x^{36} + 611379865287360472x^{35} + 428053922979666507x^{34} + 294358333304358497x^{33} + 198680642842581989x^{32} + 131550990321777283x^{31} + 85378059759031844x^{30} + 54278497892435308x^{29} + 33769260081604088x^{28} + 20544373037398829x^{27} + 12207666141642445x^{26} + 7078574544387041x^{25} + 3999464663894141x^{24} + 2199546280614028x^{23} + 1175289310938736x^{22} + 609371301021822x^{21} + 305858622263000x^{20} + 148389435894588x^{19} + 69370185388754x^{18} + 31192873469484x^{17} + 13433620474106x^{16} + 5529578364218x^{15} + 2162203661885x^{14} + 801369228023x^{13} + 278928646755x^{12} + 90988226059x^{11} + 27404577064x^{10} + 7615967206x^9 + 1902002648x^8 + 428842003x^7 + 82791504x^6 + 14008144x^5 + 1830990x^4 + 208149x^3 + 15463x^2 + 1013x + 49)}{((x-1)^{13}(x+1)^{11}(x^2+1)^7(x^2-x+1)^5(x^2+x+1)^7(x^4+1)^3(x^4-x^3+x^2-x+1)^3(x^4+x^3+x^2+x+1)^5(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^3)}$

k	k Queens on an n x n toroidal chessboard - Denominators only	highest cyclotomic polynomial	degree of denominator (shortest recurrence order)	upper bound for recurrence order	cyclotomic polynomials not present in denominator	number of values necessary for formula **
1	$(x - 1)^3$	1	3	3	-	1
2	$(x - 1)^5(x + 1)^3$	2	8	8	-	4
3	$(x - 1)^7(x + 1)^5$	2	12	12	-	8
4	$(x - 1)^9(x + 1)^7(x^2 + x + 1)^3(x^2 + 1)^3$	4	28	28	-	16
5	$(x - 1)^{11}(x + 1)^9(x^2 + x + 1)^5(x^2 + 1)^5(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^3(x^2 - x + 1)^3$	6	58	58	-	34
6	$(x - 1)^{13}(x + 1)^{11}(x^2 + x + 1)^7(x^2 + 1)^7(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^5(x^2 - x + 1)^5(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^3(x^4 + 1)^3(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)^3$	10	124	142	$C_9(x)$	(72) 78
7*	$(x - 1)^{15}(x + 1)^{13}(x^2 + x + 1)^9(x^2 + 1)^9(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^7(x^2 - x + 1)^7(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^5(x^4 + 1)^5(x^6 + x^3 + 1)^5(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)^5(x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^3(x^4 - x^2 + 1)^3(x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^3(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)^3(x^8 + 1)^3$	16	326	350	$C_{15}(x)$	(182) 190
k		$2 F(k-1)$		t_k		v_k

$F(k)$ jsou [Fibonacciho čísla](#)

Výpočet pro $k=6$ (na základě výsledků soutěže, kterou na své stránce pořádal 9.6.-21.6.2011 Artem M. Karavaev, viz [Zealint Blog](#)) odhalil zajímavou skutečnost, že denominátor vytvořující funkce nemusí obsahovat všechny cyklotomické polynomy (jak jsem původně předpokládal). Pro $k=6$ se sice potvrdilo, že nejvyšší cyklotomický polynom ve jmenovateli je $C_{10}(x)$, ale $C_9(x) = x^6 + x^3 + 1$ byl nadbytečný (vykrátil se proti čitateli). Jinými slovy, rekurence kterou jsem předpokládal, je skutečně pro tuto posloupnost platná, ale existuje ještě i kratší rekurence.

* I když pro $k=7$ není zatím znám dostatečný počet hodnot nezbytných k určení explicitního vzorce, existenci cyklotomického polynomu $C_{16}(x)$ ve jmenovateli vytvořující funkce pro $k=7$ jsem potvrdil výpočtem pro pomocnou posloupnost, o které jsem dokázal, že má (až na exponenty) shodné členy. Více viz str. 27. Zjistil jsem, že v tomto denominátoru jsou kromě $C_{16}(x)$ ještě přítomny všechny cyklotomické polynomy $C_1(x)$ až $C_{14}(x)$, chybí pouze $C_{15}(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$

Explicit formula for $k=7$ is not yet known, but I already found denominator of generating functions with maximal cyclotomic polynomial $C_{16}(x)$. See pages 27 and 28 for more. This denominator is product of cyclotomic polynomials from $C_1(x)$ to $C_{14}(x)$ and $C_{16}(x)$, but $C_{15}(x)$ is not present. This is same situation as for $k=6$ (in this case $C_9(x)$ is missing).

** Pro výpočet hodnot stačí (vzhledem k symetrii) počítat pouze pozice, kde je jeden kámen zafixován (např. na poli A1). Výslednou posloupnost pak dostaneme z vypočtených hodnot vynásobením výrazem n^2/k . Taková posloupnost má denominátor, ve kterém jsou všechny exponenty snižené o 2. Počet nezbytných hodnot je uveden ve sloupci vpravo.

For efficient computing are positions with fixed first piece (queen) on a toroidal board sufficient, then we obtain a final sequence after multiplication n^2/k . In right column are number of values which are necessary for finding of explicit formula (see also note on p. 49).

Hypotéza (Václav Kotěšovec, 5.6.2010, upraveno 20.6.2011)

Úplný jmenovatel vytvořující funkce pro počet rozmístění k neohrožujících se dam na **prstencové** šachovnici $n \times n$ obsahuje součin cyklotomických polynomů stupňů 1 až $2F(k-1)$, kde $F(k)$ je **Fibonacciho číslo**. Pro $k > 2$

$$T_k(x) = (x - 1)^{2k+1}(x + 1)^{2k-1} * \prod_{j=3}^{2F(k-1)} C_j(x)^{e_j}$$

Pro exponenty e_j platí toto. Pokud pro zvolené j vezmeme takové m splňující nerovnost

$$2F(m - 2) < j \leq 2F(m - 1)$$

potom

$$e_j = 2(k - m + 1) + 1$$

Tím je určena horní mez t_k pro hloubku rekurence (stupeň polynomu $T_k(x)$).
Pro $k > 2$

$$t_k = 4k + \sum_{j=1}^{k-2} \left(\sum_{i=2F(k-j-1)+1}^{2F(k-j)} (2j + 1) \Phi(i) \right)$$

Kde F jsou **Fibonacciho čísla** a Φ je **Euler totient function**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k}{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}} = \frac{12}{5\pi^2}$$

Mohou existovat i kratší rekurence.

Conjecture (Václav Kotěšovec, 5.6.2010, modified 20.6.2011)

*Universal denominator of generating function for number of ways of placing k non-attacking queens on an $n \times n$ **toroidal** chessboard contains product of cyclotomic polynomials order from 1 to $2F(k-1)$, where $F(k)$ is **Fibonacci number**. For $k > 2$*

$$T_k(x) = (x - 1)^{2k+1}(x + 1)^{2k-1} * \prod_{j=3}^{2F(k-1)} C_j(x)^{e_j}$$

For each j set such m which satisfy the following inequality

$$2F(m - 2) < j \leq 2F(m - 1)$$

then exponents

$$e_j = 2(k - m + 1) + 1$$

upper bound t_k for recurrence order (degree of polynomial $T_k(x)$) is (for $k > 2$):

$$t_k = 4k + \sum_{j=1}^{k-2} \left(\sum_{i=2F(k-j-1)+1}^{2F(k-j)} (2j + 1) \Phi(i) \right)$$

where F are **Fibonacci numbers** and Φ is **Euler totient function**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k}{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}} = \frac{12}{5\pi^2}$$

Recurrences of shorter order can be exists.

k queens on an n x n toroidal chessboard - polynomials in denominator of generating function																							
2F(6)						2F(5)				2F(4)		2F(3)		2F(2)		F=Fibonacci number							
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	cyclotomic polynomial in denominator of generating function							
8	8	6	12	4	10	4	6	4	6	2	4	2	2	1	1	Euler's totient function							
												3	3				exponents	4 queens					
												6	6	7	9	28	degree of a polynomial						
												3	3	5	5			exponents	5 queens				
												6	12	10	10	9	11	58		degree of a polynomial			
												3	0	3	3	5	5	7	7			exponents	6 queens
												12	(18)	12	18	10	20	14	14	11	13	124	
3	0	3	3	3	3	5	5	5	5	7	7	9	9			conjectured	exponents	7 queens					
24	(24)	18	36	12	30	20	30	20	30	14	28	18	18	13	15	326	degree of a polynomial						
														2k-1	2k+1	recurrence order							

Z tabulky vidíme, že pro $k=6$ a $k=7$ je vždy předposlední exponent, u $2F(k-1)-1$ roven 0, z čehož pak vychází existence i kratších rekurencí, když vždy jeden cyklotomický polynom ve jmenovateli vytvářející funkce je nadbytečný. Hodnota t_k je tak v případě prstencové šachovnice pouze horním omezením pro skutečnou hloubku rekurence. Přes toto zjištění se ale domnívám, že případy „chybějících“ polynomů budou jen raritní a proto asymptoticky budou hodnoty nejkratších délek rekurencí shodné s tímto horním odhadem. Pokud by chyběl vždy jen předposlední cyklotomický polynom, pak pokud označíme r_k nejkratší rekurenci, dostaneme (r_k is order of shortest recurrence)

$$t_k - 3 \Phi(2F(k-1) - 1) \leq r_k \leq t_k$$

$$3 \Phi(2F(k-1) - 1) < 3(2F(k-1) - 1) \sim \frac{6}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k-1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k}{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k}{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2k+1}} = \frac{12}{5\pi^2} = 0.24317084 \dots$$

(člen snižující rekurenci jde v limitě podílu k 0)

Identickým postupem jako pro normální šachovnici (viz str. 23) odvodíme následující vzorce pro limity

Jiná možná vyjádření s užitím Fibonacciho čísel jsou

Dále i pro t_k platí (stejně jako pro d_k)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k}{F(2k+1)} = \frac{12}{\pi^2 \sqrt{5}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2.61803 \dots$$

nebo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k}{F(k)^2} = \frac{6(1 + \sqrt{5})}{\pi^2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k}{d_k} = 2$$

Maximální hloubka rekurence je tedy při stejném rozměru šachovnice pro velká k v případě prstencové šachovnice 2x větší než v případě normální šachovnice. Co se týče výpočetní složitosti je to však obráceně. Vzhledem k symetrii na prstencové šachovnici je (při vhodném programu) čas potřebný na vygenerování hodnoty pro n -tý člen posloupnosti na prstencové šachovnici $n \times n$ n^2/k krát menší než na normální šachovnici. Pro pomocnou posloupnost v_k , která určuje nezbytný počet hodnot nutných k určení explicitního vzorce (a získá se tak, že první kámen je zafixován a členy takto vypočtené posloupnosti je pak třeba vynásobit n^2/k , abychom získali hledanou posloupnost, viz též poznámka na str. 49) platí vztah

$$v_k = t_k - 2 - \sum_{i=2}^{2F(k-1)} 2 \Phi(i)$$

(exponenty všech cyklotomických polynomů jsou sníženy o 2)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k}{v_k} = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} = 1.89442719 \dots$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v_k}{d_k} = 10 - 4\sqrt{5} = 1.05572809 \dots$$

Pro nalezení explicitního vzorce na prstencové šachovnici tedy potřebujeme při stejném k nepatrně více hodnot než pro normální šachovnici. Výpočetní náročnost je však při stejném k výrazně vyšší pro normální šachovnici, protože na prstencové šachovnici můžeme jeden kámen nechat pevný a měnit pozice jen zbývajících $k-1$ kamenů. Pokud budeme předpokládat, že existuje algoritmus se složitostí $O(n^{k+1})$, dostaneme potřebné časy na vygenerování všech potřebných členů posloupnosti

$$Time_k(normal) \sim \frac{d_k^{k+2}}{k+2} \qquad Time_k(toroidal) \sim \frac{v_k^{k+1}}{k+1}$$

Např. pro $k=6$ odtud vychází, že (při užití metody hrubé síly) je čas potřebný pro prstencovou šachovnici asi 38x menší než pro normální šachovnici.

Ještě je možno doplnit, že v soutěži, kterou na své internetové stránce pořádal 9.6.-21.6.2011 Artem M. Karavaev (viz [Zealint Blog](#)), vítěz soutěže Andrey Khalyavin vymyslel pro $k=6$ algoritmus se složitostí $O(n^5)$. Je tedy pravděpodobné, že výpočty pro prstencovou šachovnici mohou být ještě rychlejší.

Obecný vzorec pro rozmístění k dam na prstencové šachovnici $n \times n$ má z principu [podobný tvar](#) jako v případě normální šachovnice $n \times n$, jen se nahradí výraz $F(k)$ výrazem $2F(k-1)$.

$$q_t(k) = \sum_{s=0}^{2k} a_{p,t,s}(k) * n^s + \sum_{p=2}^{2F(k-1)} \left(\sum_{t=1}^{\Phi(p)} \left(\cos \frac{2\pi tn}{p} * \sum_{s=0}^{2(k-m+1)} b_{p,t,s}(k) * n^s \right) + \sum_{t=1}^{\Phi(p)} \left(\sin \frac{2\pi tn}{p} * \sum_{s=0}^{2(k-m+1)} c_{p,t,s}(k) * n^s \right) \right)$$

Konstanty $a_{p,t,s}$, $b_{p,t,s}$ a $c_{p,t,s}$ (z nichž značná část může být nulových) jsou závislé pouze na k . $\Phi(p)$ je [Euler's totient function](#), $F(k)$ jsou [Fibonacciho čísla](#). Hodnota m se určí podle nerovnosti

$$2F(m-2) < p \leq 2F(m-1)$$

Alternativní vzorec s využitím funkce celá část
(*Alternative formula with **Floor function***)

$$q_t(k) = \sum_{s=0}^{2k} a_{p,t,s}(k) * n^s + \sum_{p=2}^{2F(k-1)} \sum_{t=0}^{\Phi(p)-1} \left(\left[\frac{n+t}{p} \right] * \sum_{s=0}^{2(k-m+1)} d_{p,t,s}(k) * n^s \right)$$

Konstanty $a_{p,t,s}$ a $d_{p,t,s}$ jsou závislé pouze na k .

k	shortest recurrence order	upper bound for recurrence order t_k, A178720	number of values necessary for finding of formula v_k	period	
1	3	3	1	1	<i>computed</i>
2	8	8	4	2	
3	12	12	8	2	
4	28	28	16	12	
5	58	58	34	60	
6	124	142	78	840	
7	326	350	190	720720*	<i>conjectured</i>
8		906	482		
9		2320	1236		
10		6056	3204		
11		15778	8346		
12		41024	21716		
13		107132	56624		
14		280184	147980		
15		732998	387054		
16		1918354	1012802		
17		5019810	2650322		
18		13141378	6937170		
19		34398686	18159078		
20		90045424	47534396		

* for $k=7$ is conjectured period = LCM[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,16] = 720720
(tuto hodnotu je však možno považovat už za dokázanou, protože absence $C_{15}(x)$ nebude mít na výsledek vliv)

Poznámka: V programu Mathematica dostaneme hodnoty t_k (pro $k > 2$) po zadání

`Table[4*k+Sum[Sum[(2*j+1)*EulerPhi[i], {i, 2*Fibonacci[k-j-1]+1, 2*Fibonacci[k-j]}], {j, 1, k-2}], {k, 2, 20}]`

O pomocné posloupnosti v_k , která určuje nezbytný počet hodnot nutných k určení explicitního vzorce pro prstencovou šachovnici, viz str. 56.

k	k Queens on an n x n toroidal chessboard - Recurrence
2	$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - 6a_{n-3} + 6a_{n-5} - 2a_{n-6} - 2a_{n-7} + a_{n-8}$
3	$a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2} - 10a_{n-3} - 5a_{n-4} + 20a_{n-5} - 20a_{n-7} + 5a_{n-8} + 10a_{n-9} - 4a_{n-10} - 2a_{n-11} + a_{n-12}$
4	$a_n = -a_{n-1} + 3a_{n-2} + 6a_{n-3} + 3a_{n-4} - 9a_{n-5} - 20a_{n-6} - 11a_{n-7} + 15a_{n-8} + 40a_{n-9} + 31a_{n-10} - 15a_{n-11} - 53a_{n-12} - 50a_{n-13} + 50a_{n-15} + 53a_{n-16} + 15a_{n-17} - 31a_{n-18} - 40a_{n-19} - 15a_{n-20}$ $+ 11a_{n-21} + 20a_{n-22} + 9a_{n-23} - 3a_{n-24} - 6a_{n-25} - 3a_{n-26} + a_{n-27} + a_{n-28}$
5	$a_n = -3a_{n-1} - 5a_{n-2} - 5a_{n-3} + 2a_{n-4} + 17a_{n-5} + 37a_{n-6} + 49a_{n-7} + 35a_{n-8} - 16a_{n-9} - 101a_{n-10} - 185a_{n-11} - 215a_{n-12} - 139a_{n-13} + 56a_{n-14} + 321a_{n-15} + 544a_{n-16} + 588a_{n-17} +$ $368a_{n-18} - 99a_{n-19} - 656a_{n-20} - 1069a_{n-21} - 1111a_{n-22} - 689a_{n-23} + 84a_{n-24} + 929a_{n-25} + 1488a_{n-26} + 1506a_{n-27} + 939a_{n-28} - 939a_{n-30} - 1506a_{n-31} - 1488a_{n-32} - 929a_{n-33} -$ $84a_{n-34} + 689a_{n-35} + 1111a_{n-36} + 1069a_{n-37} + 656a_{n-38} + 99a_{n-39} - 368a_{n-40} - 588a_{n-41} - 544a_{n-42} - 321a_{n-43} - 56a_{n-44} + 139a_{n-45} + 215a_{n-46} + 185a_{n-47} + 101a_{n-48} +$ $16a_{n-49} - 35a_{n-50} - 49a_{n-51} - 37a_{n-52} - 17a_{n-53} - 2a_{n-54} + 5a_{n-55} + 5a_{n-56} + 3a_{n-57} + a_{n-58}$
6	$a(n) = a(n-124) + 5a(n-123) + 19a(n-122) + 53a(n-121) + 126a(n-120) + 256a(n-119) + 460a(n-118) + 731a(n-117) + 1024a(n-116) + 1234a(n-115) + 1180a(n-114) + 631a(n-113) - 677a(n-112)$ $- 2917a(n-111) - 6108a(n-110) - 9923a(n-109) - 13657a(n-108) - 16137a(n-107) - 15876a(n-106) - 11304a(n-105) - 1172a(n-104) + 14879a(n-103) + 35916a(n-102) + 59190a(n-101) +$ $80301a(n-100) + 93334a(n-99) + 92030a(n-98) + 70850a(n-97) + 26815a(n-96) - 39130a(n-95) - 120942a(n-94) - 207185a(n-93) - 282105a(n-92) - 327419a(n-91) - 326009a(n-90) - 265142a(n-$ $89) - 140929a(n-88) + 39571a(n-87) + 256518a(n-86) + 479114a(n-85) + 668872a(n-84) + 785798a(n-83) + 795775a(n-82) + 677688a(n-81) + 430187a(n-80) + 74064a(n-79) - 347112a(n-78) -$ $773130a(n-77) - 1134433a(n-76) - 1364780a(n-75) - 1412189a(n-74) - 1250448a(n-73) - 885628a(n-72) - 357906a(n-71) + 262286a(n-70) + 885029a(n-69) + 1413752a(n-68) + 1762777a(n-67)$ $+ 1870496a(n-66) + 1712484a(n-65) + 1305033a(n-64) + 705009a(n-63) - 705009a(n-61) - 1305033a(n-60) - 1712484a(n-59) - 1870496a(n-58) - 1762777a(n-57) - 1413752a(n-56) -$ $885029a(n-55) - 262286a(n-54) + 357906a(n-53) + 885628a(n-52) + 1250448a(n-51) + 1412189a(n-50) + 1364780a(n-49) + 1134433a(n-48) + 773130a(n-47) + 347112a(n-46) - 74064a(n-45) -$ $430187a(n-44) - 677688a(n-43) - 795775a(n-42) - 785798a(n-41) - 668872a(n-40) - 479114a(n-39) - 256518a(n-38) - 39571a(n-37) + 140929a(n-36) + 265142a(n-35) + 326009a(n-34) +$ $327419a(n-33) + 282105a(n-32) + 207185a(n-31) + 120942a(n-30) + 39130a(n-29) - 26815a(n-28) - 70850a(n-27) - 92030a(n-26) - 93334a(n-25) - 80301a(n-24) - 59190a(n-23) - 35916a(n-22)$ $- 14879a(n-21) + 1172a(n-20) + 11304a(n-19) + 15876a(n-18) + 16137a(n-17) + 13657a(n-16) + 9923a(n-15) + 6108a(n-14) + 2917a(n-13) + 677a(n-12) - 631a(n-11) - 1180a(n-10) - 1234a(n-$ $9) - 1024a(n-8) - 731a(n-7) - 460a(n-6) - 256a(n-5) - 126a(n-4) - 53a(n-3) - 19a(n-2) - 5a(n-1)$

Podle hypotézy je pro prstencovou šachovnici určité funkční rekurence (pro $k=7$ délky 350), kterou (včetně úplného denominátoru) jde v programu Mathematica vygenerovat touto procedurou:

```
inversef[j_] := (m=2; While [j>2*Fibonacci[m-1], m=m+1]; m);
denomt[k_, par_] := (x-1)^(2k+1)*Product[Cyclotomic[j, x]^(2*(k-inversef[j]+1)+par), {j, 2, 2*Fibonacci[k-1]}];
Table[denomt[k, 1], {k, 1, 8}]/TraditionalForm
Table[Exponent[denomt[k, 1], x], {k, 1, 8}]
Table[Sum[Coefficient[Expand[denomt[k, 1], x, i]*Subscript[a, n-i], {i, 0, Exponent[denomt[k, 1], x]}], {k, 1, 7}]/TraditionalForm
```

Předpokládána nejkratší rekurence pro $k=7$ bude mít ale délku 326:

Conjectured shortest recurrence for $k=7$ (order 326)

$$\begin{aligned}
 a(n) = & a(n-326) + 10a(n-325) + 63a(n-324) + 303a(n-323) + 1220a(n-322) + 4299a(n-321) + 13644a(n-320) + 39738a(n-319) + 107663a(n-318) + 274083a(n-317) + 660755a(n-316) + 1517797a(n-315) + 3338641a(n-314) + 7061373a(n-313) + \\
 & 14409856a(n-312) + 28453519a(n-311) + 54498976a(n-310) + 101469579a(n-309) + 183981321a(n-308) + 325381808a(n-307) + 562079941a(n-306) + 949547346a(n-305) + 1570407132a(n-304) + 2545020459a(n-303) + 4044914041a(n-302) + \\
 & 6309229024a(n-301) + 9664080451a(n-300) + 14544256463a(n-299) + 21516023453a(n-298) + 31298907181a(n-297) + 44783179168a(n-296) + 63038404546a(n-295) + 87306851855a(n-294) + 118973926383a(n-293) + 159506222162a(n-292) + \\
 & 210346522809a(n-291) + 272754408751a(n-290) + 347581418391a(n-289) + 434971368874a(n-288) + 533979921585a(n-287) + 642113189435a(n-286) + 754793500522a(n-285) + 864771550921a(n-284) + 961518116340a(n-283) + \\
 & 1030644910679a(n-282) + 1053422404388a(n-281) + 1006481251359a(n-280) + 861801775325a(n-279) + 587110509408a(n-278) + 146811428685a(n-277) - 496420796876a(n-276) - 1379270655836a(n-275) - 2534547623547a(n-274) - \\
 & 3987046535413a(n-273) - 5748526597053a(n-272) - 7811919014445a(n-271) - 10144978271852a(n-270) - 12683712900284a(n-269) - 15326062192416a(n-268) - 17926417100177a(n-267) - 20291705030544a(n-266) - 2217985649819a(n-265) - \\
 & 23301522286772a(n-264) - 23325934516854a(n-263) - 21891685506456a(n-262) - 18623098341530a(n-261) - 13152557880639a(n-260) - 5148833628239a(n-259) + 5649043128968a(n-258) + 19393336375388a(n-257) + 36086204253142a(n-256) + \\
 & 55537600551449a(n-255) + 77325382337706a(n-254) + 100761105112949a(n-253) + 124865437877527a(n-252) + 148357388300792a(n-251) + 169661527066049a(n-250) + 186937080543682a(n-249) + 198132074671914a(n-248) + \\
 & 201064631618132a(n-247) + 193532040789346a(n-246) + 173446374397358a(n-245) + 138993256843852a(n-244) + 88808025886472a(n-243) + 22161076765345a(n-242) - 60858173430863a(n-241) - 159171331761432a(n-240) - \\
 & 270569288769197a(n-239) - 3911613760817794a(n-238) - 517597148918991a(n-237) - 642574644686972a(n-236) - 759480229537529a(n-235) - 860334701578525a(n-234) - 936549161410964a(n-233) - 979321624657979a(n-232) - \\
 & 980117834896861a(n-231) - 931220254877943a(n-230) - 826322033976987a(n-229) - 661135976194369a(n-228) - 433982702461371a(n-227) - 146317864796973a(n-226) + 196844045020578a(n-225) + 586651582862810a(n-224) + \\
 & 1010323226510850a(n-223) + 1451272494396478a(n-222) + 1889475483806646a(n-221) + 2302093068208764a(n-220) + 2664345625295364a(n-219) + 2950622012830194a(n-218) + 3135787418451545a(n-217) + 3196637706586931a(n-216) + \\
 & 3113432111696406a(n-215) + 2871422779994088a(n-214) + 2462289911708893a(n-213) + 1885386166921438a(n-212) + 1148694435121453a(n-211) + 269409622563228a(n-210) - 725931978072601a(n-209) - 1801833063105910a(n-208) - \\
 & 2914758052313079a(n-207) - 4014601501536274a(n-206) - 5046673067479373a(n-205) - 5954136080141262a(n-204) - 6680803621057649a(n-203) - 7174165687530739a(n-202) - 7388495729249644a(n-201) - 7287866621659555a(n-200) - \\
 & 6848896746621790a(n-199) - 6063047614308806a(n-198) - 4938306152506436a(n-197) - 3500107537880136a(n-196) - 1791387665290216a(n-195) + 128303250690114a(n-194) + 2184644858904563a(n-193) + 4291313355613393a(n-192) + \\
 & 6353579627320653a(n-191) + 8272593840722908a(n-190) + 9950162735532187a(n-189) + 11293785699734101a(n-188) + 12221687062915257a(n-187) + 12667567340336174a(n-186) + 12584797061022626a(n-185) + \\
 & 11949794078785504a(n-184) + 10764358667608437a(n-183) + 9056788986868951a(n-182) + 6881660421264611a(n-181) + 4318222718512142a(n-180) + 1467444901367709a(n-179) - 1552184748825218a(n-178) - 4609922368386239a(n-177) - \\
 & 7568848527145552a(n-176) - 10292463371662735a(n-175) - 12651457567396732a(n-174) - 14530300126133946a(n-173) - 15833284831310144a(n-172) - 16489698296636838a(n-171) - 16457813926583657a(n-170) - \\
 & 15727475170057551a(n-169) - 14321105302633792a(n-168) - 12293065415915582a(n-167) - 9727372488910372a(n-166) - 6733880104525117a(n-165) - 3443110191337129a(n-164) + 3443110191337129a(n-162) + 6733880104525117a(n-161) + \\
 & 9727372488910372a(n-160) + 12293065415915582a(n-159) + 14321105302633792a(n-158) + 15727475170057551a(n-157) + 16457813926583657a(n-156) + 16489698296636838a(n-155) + 15833284831310144a(n-154) + \\
 & 14530300126133946a(n-153) + 12651457567396732a(n-152) + 10292463371662735a(n-151) + 7568848527145552a(n-150) + 4609922368386239a(n-149) + 1552184748825218a(n-148) - 1467444901367709a(n-147) - 4318222718512142a(n-146) - \\
 & 6881660421264611a(n-145) - 9056788986868951a(n-144) - 10764358667608437a(n-143) - 11949794078785504a(n-142) - 12584797061022626a(n-141) - 12667567340336174a(n-140) - 12221687062915257a(n-139) - \\
 & 11293785699734101a(n-138) - 9950162735532187a(n-137) - 8272593840722908a(n-136) - 6353579627320653a(n-135) - 4291313355613393a(n-134) - 2184644858904563a(n-133) - 128303250690114a(n-132) + 1791387665290216a(n-131) + \\
 & 3500107537880136a(n-130) + 4938306152506436a(n-129) + 6063047614308806a(n-128) + 6848896746621790a(n-127) + 7287866621659555a(n-126) + 7388495729249644a(n-125) + 7174165687530739a(n-124) + 6680803621057649a(n-123) + \\
 & 5954136080141262a(n-122) + 5046673067479373a(n-121) + 4014601501536274a(n-120) + 2914758052313079a(n-119) + 1801833063105910a(n-118) + 725931978072601a(n-117) - 269409622563228a(n-116) - 1148694435121453a(n-115) - \\
 & 1885386166921438a(n-114) - 2462289911708893a(n-113) - 2871422779994088a(n-112) - 3113432111696406a(n-111) - 3196637706586931a(n-110) - 3135787418451545a(n-109) - 2950622012830194a(n-108) - 2664345625295364a(n-107) - \\
 & 2302093068208764a(n-106) - 1889475483806646a(n-105) - 1451272494396478a(n-104) - 1010323226510850a(n-103) - 586651582862810a(n-102) - 196844045020578a(n-101) + 146317864796973a(n-100) + 433982702461371a(n-99) + \\
 & 661135976194369a(n-98) + 826322033976987a(n-97) + 931220254877943a(n-96) + 980117834896861a(n-95) + 979321624657979a(n-94) + 936549161410964a(n-93) + 860334701578525a(n-92) + 759480229537529a(n-91) + \\
 & 642574644686972a(n-90) + 517597148918991a(n-89) + 391613760816739a(n-88) + 270569288769197a(n-87) + 159171331761432a(n-86) + 60858173430863a(n-85) - 22161076765345a(n-84) - 88808025886472a(n-83) - 138993256843852a(n-82) - \\
 & 173446374397358a(n-81) - 193532040789346a(n-80) - 201064631618132a(n-79) - 198132074671914a(n-78) - 186937080543682a(n-77) - 169661527066049a(n-76) - 148357388300792a(n-75) - 124865437877527a(n-74) - \\
 & 100761105112949a(n-73) - 77325382337706a(n-72) - 55537600551449a(n-71) - 36086204253142a(n-70) - 19393336375388a(n-69) - 5649043128968a(n-68) + 5148833628239a(n-67) + 13152557880639a(n-66) + 18623098341530a(n-65) + \\
 & 21891685506456a(n-64) + 23325934516854a(n-63) + 23301522286772a(n-62) + 22179855649819a(n-61) + 20291705030544a(n-60) + 17926417100177a(n-59) + 15326062192416a(n-58) + 12683712900284a(n-57) + 10144978271852a(n-56) + \\
 & 7811919014445a(n-55) + 5748526597053a(n-54) + 3987046535413a(n-53) + 2534547623547a(n-52) + 1379270655836a(n-51) + 496420796876a(n-50) - 146811428685a(n-49) - 587110509408a(n-48) - 861801775325a(n-47) - \\
 & 1006481251359a(n-46) - 1053422404388a(n-45) - 1030644910679a(n-44) - 961518116340a(n-43) - 864771550921a(n-42) - 754793500522a(n-41) - 642113189435a(n-40) - 533979921585a(n-39) - 434971368874a(n-38) - 347581418391a(n-37) - \\
 & 272754408751a(n-36) - 210346522809a(n-35) - 159506222162a(n-34) - 118973926383a(n-33) - 87306851855a(n-32) - 63038404546a(n-31) - 44783179168a(n-30) - 31298907181a(n-29) - 21516023453a(n-28) - 14544256463a(n-27) - \\
 & 9664080451a(n-26) - 6309229024a(n-25) - 4044914041a(n-24) - 2545020459a(n-23) - 1570407132a(n-22) - 949547346a(n-21) - 562079941a(n-20) - 325381808a(n-19) - 183981321a(n-18) - 101469579a(n-17) - 54498976a(n-16) - 28453519a(n-15) - \\
 & 14409856a(n-14) - 7061373a(n-13) - 3338641a(n-12) - 1517797a(n-11) - 660755a(n-10) - 274083a(n-9) - 107663a(n-8) - 39738a(n-7) - 13644a(n-6) - 4299a(n-5) - 1220a(n-4) - 303a(n-3) - 63a(n-2) - 10a(n-1)
 \end{aligned}$$

k Queens on an n x n toroidal chessboard					
n	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
1					
2	0	0	0		
3	0	0	0	0	0
4	32	0	0	0	0
5	100	100	50	10	0
6	288	576	288	0	0
7	588	2156	2450	882	196
8	1152	7168	16384	13312	3072
9	1944	17496	62208	85536	42768
10	3200	41600	233600	561440	550000
11	4840	82280	638880	2276736	3573856
12	7200	161280	1755072	9471744	25009344
13	10140	280540	3901534	27991470	102800672
14	14112	486080	8772176	85725696	454967744
15	18900	774900	17051850	209107890	1441238400
16	25088	1232896	33507328	525062144	4811118592
17	32368	1844976	59175640	1116665944	12616778208
18	41472	2757888	105557904	2437807104	34692705648
19	51984	3933456	173570244	4691672964	79514466480
20	64800	5606400	287904000	9234168960	189770459200
21	79380	7699860	447885774	16462896030	392908083876
22	96800	10570560	702042000	29919532544	842040318416
23	116380	14081980	1044894554	50215537658	1610365515264

24	139392	18754560	1565385984	85687824384	3172863442176
25	165000	24365000	2247132500	136944081500	5692888800000
26	194688	31647616	3244194304	222030242304	10481865438304
27	227448	40258296	4519015596	340788006540	17850315939984
28	264992	51204608	6326171264	529663525888	31090665289152
29	306124	63979916	8590557654	785790131238	50683412713024
30	352800	79934400	11716668000	1178695280160	84276635943600
31	403620	98348740	15567229390	1698736557198	132395024982128
32	460800	120995840	20763631616	2472214872064	211664845709312
33	522720	146884320	27070819380	3475005224724	322114921688736
34	591872	178301440	35416066816	4927131387904	497905815659648
35	666400	213914400	45416742700	6776457658740	737104418684900
36	749088	256628736	58421984832	9392614619904	1106567765992512
37	837828	304690116	73833633570	12672854468658	1599037256095344
38	935712	361739328	93571390608	17218696084992	2339918645810448
39	1040364	425508876	116731332198	22840988228838	3309836284628640
40	1155200	500505600	145991424000	30491340899840	4735336861548800
41	1277560	583844920	180024039020	39839128802924	6572025179131344
42	1411200	681045120	222499677456	52352705728512	9215856321962976
43	1553160	788487560	271515768944	67478117820624	12574431761849888
44	1707552	912862720	332023922560	87430668092416	17319514793330816
45	1871100	1049687100	401355457650	111314431376010	23271519881109600
46	2048288	1207000256	486095146064	142404689281536	31540135998722736
47	2235508	1379308436	582569828310	179295582644310	41794354001606032
48	2437632	1576194048	699422837760	226741660434432	55823671917333504

(Hodnoty pro $k=6$, $35 < n \leq 81$ vypočítal Andrey Khalyavin v soutěži, kterou na své stránce pořádal 9.6.-21.6.2011 Artem M. Karavaev, viz [Zealint Blog](#))

1.3.1) n Queens on an $n \times n$ toroidal chessboard - n dam na prstencové šachovnici $n \times n$ - A051906

Na prstencové šachovnici 8×8 sice není možné postavení 8 neohrožujících se dam, pro některé rozměry šachovnic však takové rozestavení existuje. Jako první se touto problematikou zabýval **George Pólya**, který dokázal v článku: „Über die Doppelt-Periodischen Lösungen des n -Damen-Problems“ (publikovaném v knize W. Ahrens: **Mathematische Unterhaltungen und Spiele**, 1918, p. 364-374), že v případě válcové nebo prstencové šachovnice má problém n -dam řešení jen pro taková n , která nejsou dělitelná 2 ani 3 ($a(n)=n$ if n is not divisible by 2 and not divisible by 3). Viz též Bernd Eickenscheidt: **Das n -Damen-Problem auf dem Zylinderbrett** (feenschach 50/1980, str.382-5).

Pro některé typy šachovnic však dlouhé roky zůstával otevřený problém, zda je možné na prstencové šachovnici $n \times n$ rozestavit alespoň $n-2$ neohrožujících se dam. Tento problém (s kladným výsledkem) vyřešil až **Paul Monsky** v roce 1989 a to současně i pro amazonky (superqueens), viz Problem E3162, American Mathematical Monthly, vol. 96 (1989), p.258-259. Ve svém článku Monsky nejprve cituje výše uvedené výsledky, které odvodil už Pólya a pak si klade dvě otázky (cituji v původním značení):

- a) *Is it possible, for each value of N , to place $N-2$ superqueens on an N by N board with no two attacking one another?* Odpověď: „Such placements are always possible“ a dále rozebírá jednotlivé případy.
- b) *For what values of N can $N-1$ superqueens be so positioned on an N by N board ?* Odpověď: „**Placing $N-1$ superqueens is possible if and only if N is not divisible by 3 or 4.**“

Konrad Schlude a Ernst Specker (zřejmě bez znalosti práce Monskyho) pak dokázali v článku "Zum Problem der Damen auf dem Torus" (2003): *If n is even but not divisible by 3 and not divisible by 4, then $a(n)=n-1$. If n is divisible by 3, then $a(n)<n-1$. If n is divisible by 4 but not by 8, then $a(n)<n-1$.*

Zkombinujeme-li tyto výsledky a uvědomíme-li si, že pokud je možné rozestavení neohrožujících se amazonek, je určitě možné i rozestavení neohrožujících se dam, vyjde nám tabulka (modulo 12) vpravo. Pro absolutní přesnost je třeba ještě poznamenat, že případ, kdy je n dělitelné 8, je zahrnut v Monskyho části b). Jeho důkaz, že podmínka je nutná, i když je prováděn pro amazonky, nijak pohyblivost jezdce nepoužívá, takže je jej možno aplikovat i na dámy.

Podářilo se mi najít vzorec, zahrnující všechny případy:

Explicit formula for maximum number of non-attacking queens on an $n \times n$ toroidal chessboard (V. Kotěšovec, 13.12.2010):

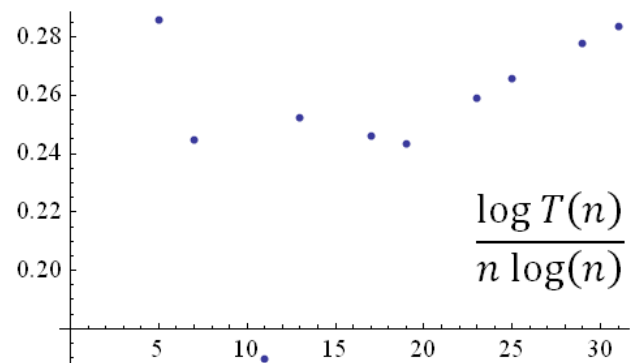
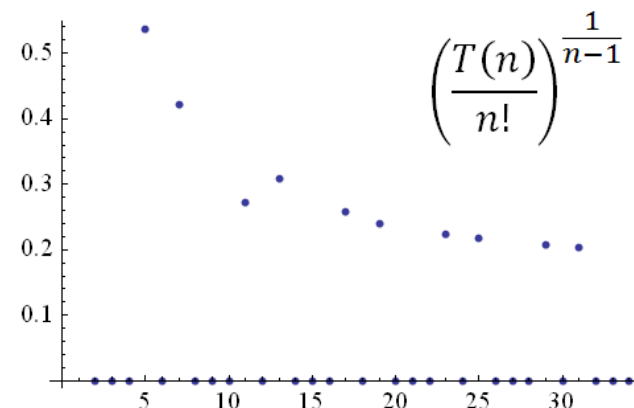
$$n - \frac{1}{6} * \left(2 * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 3 * \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + 5 * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) - \cos\left(\frac{5\pi n}{6}\right) + 3 * \cos(\pi n) + 7 \right)$$

n	Maximum number of non-attacking queens on an $n \times n$ toroidal board, A085801
12k	n-2
12k+1	n
12k+2	n-1
12k+3	n-2
12k+4	n-2
12k+5	n
12k+6	n-2
12k+7	n
12k+8	n-2
12k+9	n-2
12k+10	n-1
12k+11	n

Pokud označíme počet pozic neohrožujících se n dam na prstencové šachovnici $n \times n$ jako $T(n)$, můžeme sestavit následující tabulku a grafy. Pro nějaký serióznější odhad průběhu této funkce však máme stále jen velmi málo hodnot. Dá se však očekávat, že průběh funkce $T(n)$ bude podobný jako $Q(n)$. Více o $T(n)$ najdeme v článku [The n-Queens Problem](#), Igor Rivin, Ilan Vardi, Paul Zimmermann, American Mathematical Monthly, 101 (7/1994), str. 629-639. Hodnoty pro $n=25, 29$ a 31 vypočetl [Matthias Engelhardt](#), poslední z nich v roce 2005 (výpočet trval asi 200 dní na 5 PC!), viz též [A007705](#).

n	$T(n)$	$\frac{\log T(n)}{n \log(n)}$	$\left(\frac{T(n)}{n!}\right)^{\frac{1}{n-1}}$
1	1	-	-
2	0	-	-
3	0	-	-
4	0	-	-
5	10	0.28613	0.5372849659
6	0	-	-
7	28	0.24463	0.4208441059
8	0	-	-
9	0	-	-
10	0	-	-
11	88	0.16974	0.2718521020
12	0	-	-
13	4524	0.25243	0.3079192616
14	0	-	-
15	0	-	-
16	0	-	-
17	140692	0.24612	0.2584193653

18	0	-	-
19	820496	0.24341	0.2395454247
20	0	-	-
21	0	-	-
22	0	-	-
23	128850048	0.25894	0.2238156556
24	0	-	-
25	1957725000	0.26586	0.2175434860
26	0	-	-
27	0	-	-
28	0	-	-
29	605917055356	0.27782	0.2068078126
30	0	-	-
31	13404947681712	0.28394	0.2028031883
32	0	-	-
33	0	-	-
34	0	-	-
35	?	?	?
.			
∞		$\rightarrow 1$?	?



Linky na doplnění: [A006717](#) Toroidal semi-queens on a $(2n+1) \times (2n+1)$ board

[A137279](#) Number of ways of placing $(m+1)/2$ non-attacking queens on an $n \times n$ Mobius chessboard.

2.1) k Kings on an n x n chessboard - k králů na šachovnici n x n

Maximální možný počet neohrožujících se králů na šachovnici $n \times n$ je $n^2/4$ (pro n sudé) a $(n+1)^2/4$ (pro n liché), více viz [Kings Problem](#)

[A061995](#) - **2 Kings**, board $n \times n$: (E. Lucas, 1891)

$$\frac{(n-1)(n-2)(n^2+3n-2)}{2}$$

[A061996](#) - **3 Kings**, board $n \times n$: (E. Landau, before 1901)

$$\frac{(n-1)(n-2)(n^4+3n^3-20n^2-30n+132)}{6}$$

[A061997](#) - **4 Kings**, board $n \times n$: (K.Fabel + K.Soltsien, found 1956, published 1966), $n \geq 3$

$$\frac{n^8 - 54n^6 + 72n^5 + 995n^4 - 2472n^3 - 5094n^2 + 21480n - 17112}{24}$$

[A061998](#) - **5 Kings**, board $n \times n$: (V.Kotěšovec, 1992), $n \geq 4$

$$\frac{(n-4)(n^9 + 4n^8 - 74n^7 - 176n^6 + 2411n^5 + 1844n^4 - 38194n^3 + 18944n^2 + 236520n - 316320)}{120}$$

[A172158](#) - **6 Kings**, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 27.1.2010), $n \geq 5$

$$\frac{n^{12} - 135n^{10} + 180n^9 + 7465n^8 - 18840n^7 - 202665n^6 + 751860n^5 + 2442334n^4 - 13441200n^3 - 3643800n^2 + 89860320n - 108217440}{720}$$

[A194788](#) - **7 Kings**, board $n \times n$: (Andrew Woods, 2.9.2011), $n \geq 6$

$$\frac{n^{14} - 189n^{12} + 252n^{11} + 15211n^{10} - 38640n^9 - 649215n^8 + 2408700n^7 + 14771764n^6 - 75856200n^5 - 144099396n^4 + 1198867488n^3 - 255900576n^2 - 7543005120n + 10617929280}{5040}$$

155

Auch für das entsprechende Problem des Königs sind derartige Anzahlbestimmungen noch kürzlich gewünscht worden.¹⁾ Für die Aufstellung zweier Könige ergeben sich nach (2) sofort

$$\frac{1}{2}(p-1)(p-2)(p^2+3p-2)$$

Möglichkeiten und

$$\frac{1}{6}(p-1)(p-2)(p^4+3p^3-20p^2-30p+132)$$

für die von 3 Königen.²⁾

²⁾ Diese Formel, welche ich einer brieflichen Mitteilung des Herrn Dr. E. Landau-Berlin verdanke, ergibt sich in analoger Weise wie die entsprechende in der „Naturw. Wochenschr.“ (s. Anm. 2 auf voriger Seite) abgeleitete Formel des Königinnen-Problems.

[A201369](#) - **8 Kings**, board $n \times n$: (*V. Kotěšovec, 30.11.2011, after values computed by Andrew Woods*), $n \geq 7$

$$(n^{16} - 252n^{14} + 336n^{13} + 27762n^{12} - 70896n^{11} - 1699656n^{10} + 6330240n^9 + 60677169n^8 - 304864560n^7 - 1181816748n^6 + 8314366704n^5 + 8495481308n^4 - 121101870624n^3 + 74007948336n^2 + 730891869120n - 1180990460160) / 40320$$

[A201771](#) - **9 Kings**, board $n \times n$: (*V. Kotěšovec, 4.12.2011, after values computed by Andrew Woods*), $n \geq 8$

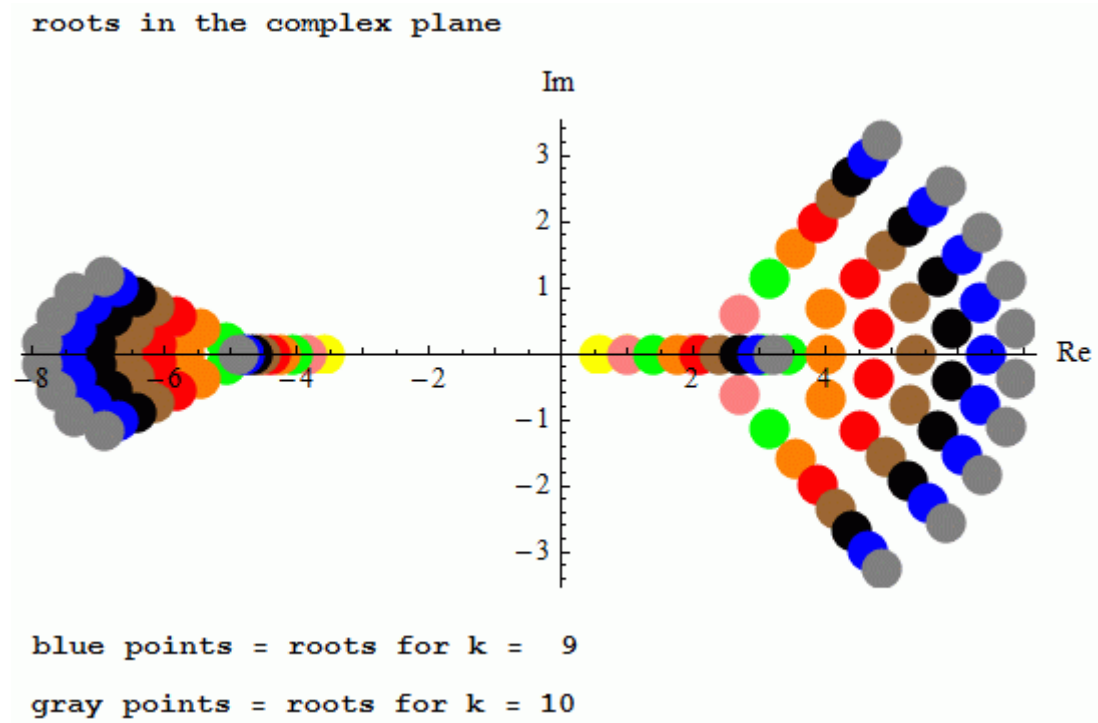
$$n^{18}/362880 - n^{16}/1120 + n^{15}/840 + 1559n^{14}/12096 - 119n^{13}/360 - 7681n^{12}/720 + 479n^{11}/12 + 9383677n^{10}/17280 - 195031n^9/72 - 24176483n^8/1440 + 4447749n^7/40 + 5032857271n^6/18144 - 495178813n^5/180 - 2551293629n^4/2520 + 1588223225n^3/42 - 11469403819n^2/315 - 664490248n/3 + 405670140$$

[A220467](#) - **10 Kings**, board $n \times n$: (*V. Kotěšovec, 15.12.2012*), $n \geq 9$

$$n^{20}/3628800 - n^{18}/8960 + n^{17}/6720 + 353n^{16}/17280 - 53n^{15}/1008 - 29467n^{14}/13440 + 11867n^{13}/1440 + 25901053n^{12}/172800 - 107495n^{11}/144 - 8467959n^{10}/1280 + 122792641n^9/2880 + 32499630031n^8/181440 - 112903333n^7/72 - 16042907329n^6/6720 + 36445613711n^5/1008 - 1784819159n^4/300 - 9997453897n^3/21 + 85979117831n^2/140 + 13635070421n/5 - 5609601346$$

První členy polynomů mají tvar

$$\begin{aligned} & \frac{n^{2k}}{k!} - \frac{9n^{2k-2}}{2(k-2)!} + \frac{6n^{2k-3}}{(k-2)!} + \frac{(243k^2 - 439k - 142)n^{2k-4}}{24(k-2)!} - \frac{(27k-5)n^{2k-5}}{(k-3)!} - \frac{(243k^3 - 588k^2 - 775k + 352)n^{2k-6}}{16(k-3)!} + \frac{(243k^2 - 43k - 136)n^{2k-7}}{4(k-4)!} \\ & + \frac{98415k^4 - 279450k^3 - 899395k^2 + 648462k + 380152}{5760(k-4)!} * n^{2k-8} - \frac{2187k^4 - 8694k^3 - 4267k^2 + 14214k + 7960}{24(k-4)!} * n^{2k-9} + \dots \end{aligned}$$



k	k Kings on an n x n chessboard - Generating function
2	$2x^3 * \frac{x^2 + x - 8}{(x - 1)^5}$
3	$-4x^3 * \frac{11x^4 - 42x^3 + 38x^2 + 21x + 2}{(x - 1)^7}$
4	$-x^3 * \frac{30x^8 - 361x^7 + 1186x^6 - 1060x^5 - 1209x^4 + 1711x^3 + 1312x^2 + 70x + 1}{(x - 1)^9}$
5	$2x^5 * \frac{98x^9 - 958x^8 + 2882x^7 - 1774x^6 - 5149x^5 + 2711x^4 + 18152x^3 - 19768x^2 - 10327x - 987}{(x - 1)^{11}}$
6	$-2x^5 * \frac{465x^{12} - 4432x^{11} + 14622x^{10} - 20892x^9 + 36103x^8 - 162056x^7 + 376992x^6 - 263140x^5 - 287097x^4 + 373248x^3 + 243562x^2 + 24776x + 489}{(x - 1)^{13}}$
7	$\frac{2x^5 * (1930x^{15} - 20052x^{14} + 87663x^{13} - 265681x^{12} + 816798x^{11} - 2117376x^{10} + 2865281x^9 + 557737x^8 - 6577818x^7 + 3848604x^6 + 8828017x^5 - 9464319x^4 - 6316750x^3 - 868616x^2 - 23937x - 121)}{(x - 1)^{15}}$
8	$-x^5 * (14882 * x^{18} - 180784 * x^{17} + 1061244 * x^{16} - 4500406 * x^{15} + 15038864 * x^{14} - 34328850 * x^{13} + 40903004 * x^{12} - 8667835 * x^{11} + 23857551 * x^{10} - 260744627 * x^9 + 545801251 * x^8 - 276255996 * x^7 - 467674682 * x^6 + 484515328 * x^5 + 391528458 * x^4 + 65572237 * x^3 + 2957401 * x^2 + 21333 * x + 27) / (x-1)^{17}$
9	$x^5 * (54764 * x^{21} - 805588 * x^{20} + 6061268 * x^{19} - 31485512 * x^{18} + 117971558 * x^{17} - 312791986 * x^{16} + 620038858 * x^{15} - 1193322246 * x^{14} + 2685590901 * x^{13} - 4918483903 * x^{12} + 3824558880 * x^{11} + 5110355848 * x^{10} - 13987162841 * x^9 + 5213745395 * x^8 + 15789867458 * x^7 - 14255103822 * x^6 - 13342741937 * x^5 - 2791816301 * x^4 - 174938304 * x^3 - 2814508 * x^2 - 3581 * x - 1) / (x-1)^{19}$
10	$-2 * x^7 * (97581 * x^{22} - 1758956 * x^{21} + 16320562 * x^{20} - 100734462 * x^{19} + 443795293 * x^{18} - 1471049082 * x^{17} + 3971393292 * x^{16} - 9304893422 * x^{15} + 17917931016 * x^{14} - 22612415810 * x^{13} + 6949925614 * x^{12} + 21430418050 * x^{11} + 9738010368 * x^{10} - 153051533038 * x^9 + 256884162558 * x^8 - 71451647970 * x^7 - 265785285277 * x^6 + 220345759446 * x^5 + 251887022384 * x^4 + 63841610284 * x^3 + 5432696107 * x^2 + 140661216 * x + 800646) / (x-1)^{21}$

Opět se ukazuje, že i zde platí vztah, který jsem uvedl na str. 41, že pokud je stupeň čitatele vytvořující funkce **p** a stupeň jejího jmenovatele **q**, pak explicitní vzorec platí až od $n \geq p - q + 1$, např. pro $k=6$ je $p=17$, $q=13$ a explicitní vzorec platí až od $n \geq 17 - 13 + 1 = 5$ (viz strana 64).

Další odkazy:

Edouard Lucas: [Théorie des nombres \(1891\)](#), vzorec pro počet rozmístění 2 neohrožujících se králů najdeme na str.98 (ve vzorci vypadlo "/2")

Edouard Lucas: [Récréations mathématiques \(1894\)](#) str.132 (i zde vypadlo "/2", v následujících dvou knihách Ahrense a Fabela je tento vzorec uveden správně).

Vzorec pro $k=3$ uvádí v knize [Mathematische unterhaltungen und spiele \(1901\)](#) Wilhelm Ahrens na str.155 s tím, že mu jej v dopise zaslal Edmund Landau.

Vzorec pro $k=4$ uvádí v knize [Schach und Zahl \(1966\)](#) na str.54 Karl Fabel.

[A166540](#) (Number of ways to place 2 non-attacking kings on an $n \times n \times n$ Raumschach board) a [A194605](#).

n	1 k	2 k	3 kings	4 kings	5 kings	6 kings	7 kings	8 kings	9 kings	10 kings	summed over all k >= 0, A063443 (n+1)
1	1										2
2	4	0	0	0							5
3	9	16	8	1	0	0	0	0	0		35
4	16	78	140	79	0	0	0	0	0	0	314
5	25	228	964	1987	1974	978	242	27	1	0	6427
6	36	520	3920	16834	42368	62266	51504	21792	3600	0	202841
7	49	1020	11860	85275	397014	1220298	2484382	3324193	2882737	1601292	12727570
8	64	1806	29708	317471	2326320	12033330	44601420	119138166	229095676	314949564	1355115601
9	81	2968	65240	962089	10087628	77784658	450193818	1979541332	6655170642	17143061738	269718819131
10	100	4608	129984	2515262	35464464	377818258	3112919712	20142680752	103395053720	423677826986	94707789944544
11	121	6840	240240	5882109	106783320	1492665418	16471667554	145977165234	1051588999820	6210264633994	60711713670028729
12	144	9790	418220	12605095	285336128	5042436754	71393226972	824771174978	7878155295948	62831788827614	69645620389200894313
13	169	13596	693308	25175191	693331146	15062292834	265069706646	3850985758339	46838274976147	481992723228798	144633664064386054815370
14	196	18408	1103440	47443474	1558986816	40736208186	869583076752	15461577137802	232322652402464	2982908737810114	540156683236043677756331721
15	225	24388	1696604	85152487	3286192514	101489568538	2577681275622	54912339921707	995789500001315	15548436178142582	3641548665525780178990584908643
16	256	31710	2532460	146608359	6558317232	235984235970	7020477731884	176153338628674	3784235129731708	70420082692285198	44222017282082621251230960522832336
17	289	40560	3684080	243516365	12488282352	517314078210	17794428237522	518569625849418	12999197522073908	283631426534134042	968503939616343947563582929715005880647
18	324	51136	5239808	392004286	22829958032	1077720399538	42397762374912	1418340918023792	40969826999523768	1034163399690010346	38227887218717761202510261178854062185464315
19	361	63648	7305240	613859609	40269324564	2147500025914	95726217156906	3639736652346172	119876498636101786	3461457325296584554	2720444488584821384410936779813343554469758172682
20	400	78318	10005324	938008287	68817690624	4114538426818	206149749502012	8833161922947702	328726265508168780	10754832937513676198	348970226122589397373342369495005120745703462667115175
21											80700603403721730646640814391653008712705595500769624448529
22											33641616174796469294898513022199100689671634779118656571910751320
23											25281578706433684460290055263926749952595755044481112956327672312862611

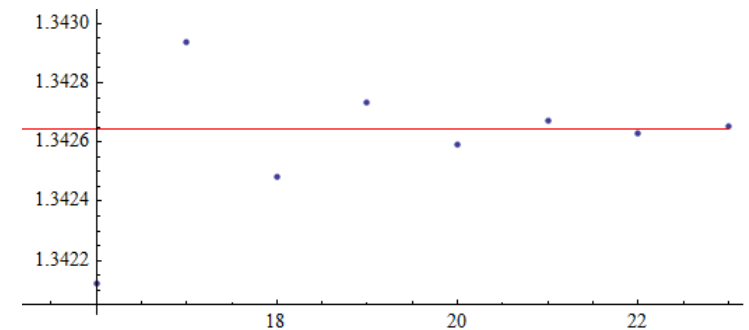
Sloupec vpravo, odpovídající sekvenci [A063443](#)(n+1) nebo [A141483](#)(2n-1), určuje počty všech pozic neohrožujících se k králů na šachovnici $n \times n$ (pro všechna $k \geq 0$). Jde tedy o součty příslušných řádků tabulky + 1. Hodnoty pro $n=16$ až 20 vypočetl 27.8.2011 Andrew Woods, pro $n=21$ až 23 Václav Kotěšovec 1.5.2012 a pro $n=24$ až 39 Johan Nilsson 31.3.2016. Asymptoticky pro naši součtovou sekvenci platí:

$$1.0109 * 1.31125^n * 1.342643951124^{n^2}$$














Jak se zmiňuje Steven R.Finch v článku [Several Constants Arising in Statistical Mechanics](#) (1999), str. 8, konstantu 1.342643951124 objevil v roce 1996 B.D.McKay. Graf vpravo zobrazuje zrychlené limitní přibližování pomocí

$$\frac{\sqrt{a_n a_{n-2}}}{a_{n-1}}$$

O podobné konstantě pro vezíry viz str. 372.



Entropy constants - porovnání pro různé kameny.

Number of arrangements of k non-attacking pieces on an $n \times n$ board, summed over all $k \geq 0$		$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n^2}}$	OEIS	constant
		rooks, semi-riders	1	
A063443		kings (composite pieces wazir + fers)	1.342643951124...	A247413
A066864		composite pieces wazir+semi-fers	1.3954859724793027352295006635668880689541037281446...	A085851 Hard Hexagon Entropy
A141243		knights	$\sim 1.412\dots$	
		composite pieces wazir+semi-knight	$\sim 1.44895\dots$	
		composite pieces fers+semi-knight	$\sim 1.44\dots$ (probably three same constants)	
A067963		composite pieces fers+semi-wazir	$\sim 1.4489\dots$	
A006506		wazirs	1.5030480824753322643220663294755536893857810...	A085850 Hard Square Entropy
A067965		ferses	1.5030480824753322643220663294755536893857810...	A085850 Hard Square Entropy
A067964		composite pieces semi-wazir+semi-fers	1.5030480824753322643220663294755536893857810...	A085850 Hard Square Entropy
A067966		semi-wazirs	1.61803398874989484820458683436563811772030917980576...	A001622 Golden ratio = $(1 + \sqrt{5})/2$
A067962		semi-ferses	1.61803398874989484820458683436563811772030917980576...	A001622 Golden ratio = $(1 + \sqrt{5})/2$
A182562		semi-knights (generally semi-leapers)	1.61803398874989484820458683436563811772030917980576...	A001622 Golden ratio = $(1 + \sqrt{5})/2$
		all arrangements (include attacking pieces)	2	

Hodnoty (pro obecné kameny) se mohou pohybovat pouze v intervalu $\langle 1,2 \rangle$, protože pro rozmístění k libovolných kamenů na šachovnici $n \times n$ (bez ohledu jestli se ohrožují či nikoliv) dostáváme součet přes všechna $k \geq 0$ roven

$$\sum_{k=0}^{n^2} \binom{n^2}{k} = 2^{n^2}$$

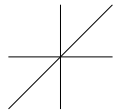
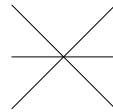
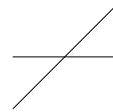
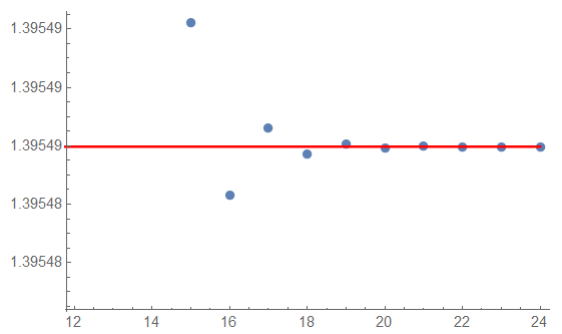
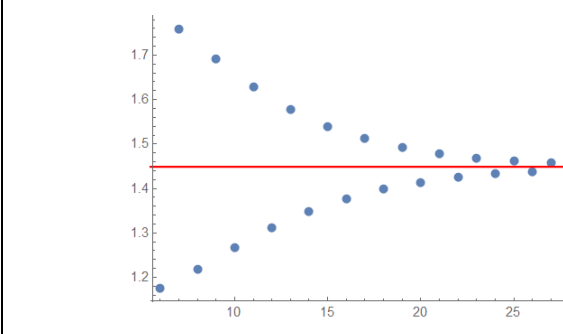
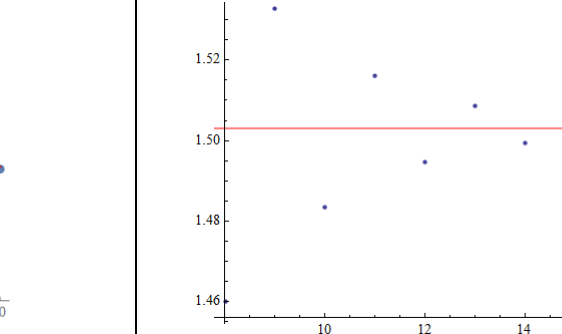
[Hard Hexagon Entropy Constant](#) jde vyjádřit dokonce algebraicky, je kořenem rovnice

$$\begin{aligned} &25937424601x^{24} + 2013290651222784x^{22} + 2505062311720673792x^{20} + 797726698866658379776x^{18} + 7449488310131083100160x^{16} + 2958015038376958230528x^{14} \\ &- 72405670285649161617408x^{12} + 107155448150443388043264x^{10} - 71220809441400405884928x^8 - 73347491183630103871488x^6 \\ &+ 97143135277377575190528x^4 - 32751691810479015985152 = 0 \end{aligned}$$

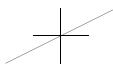


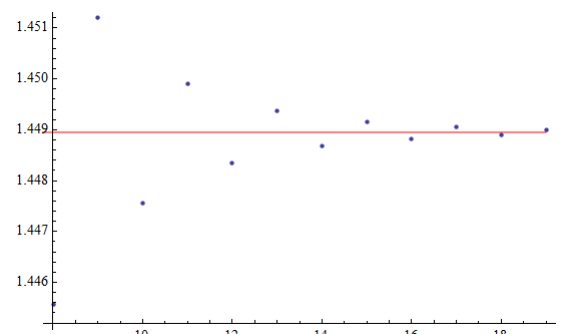
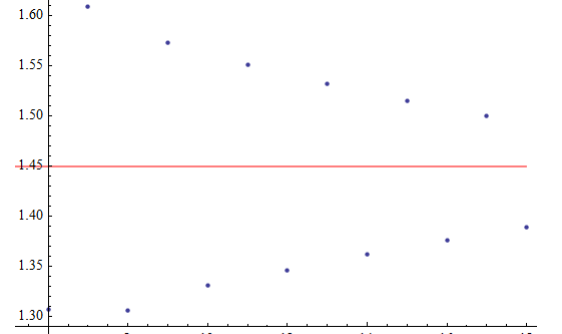
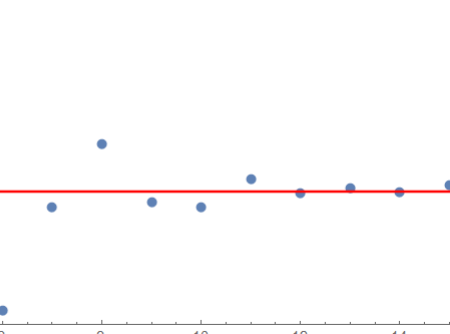
Viz též sekvence [A066863](#) (Number of configurations of non-attacking kings on an $n \times n$ chessboard with regular hexagonal cells) se stejnou limitou.

[Hard Square Entropy Constant](#) vypočetl na 43 desetinných míst v roce 1998 R. J. Baxter, viz [Planar Lattice Gases with Nearest-Neighbour Exclusion](#). Annals of Combinatorics, 3/1999, str. 191-203.

k non-attacking pieces on an n x n normal chessboard, summed over all k >= 0

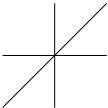
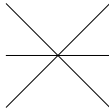
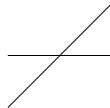
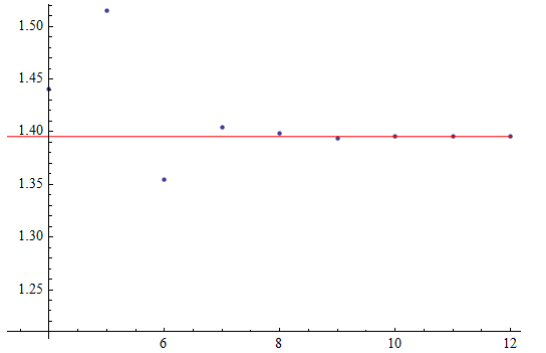
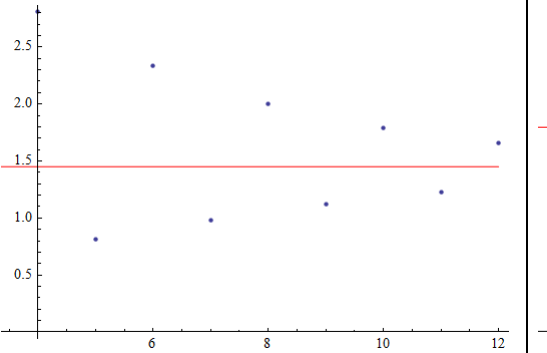
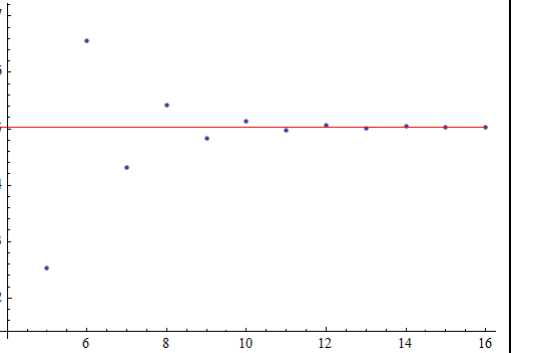
n	composite pieces wazir+semi-fers	composite pieces fers+semi-wazir	composite pieces semi-wazir+semi-fers
	 A066864	 A067963	 A067964
1	2	2	2
2	6	7	8
3	42	77	90
4	524	1152	1876
5	13322	56549	103484
6	647252	3837761	11462588
7	61758332	806190208	3118943536
8	11435477118	251170142257	1808994829500
9	4129523869606	223733272186825	246552660093372
10	2902264461628298	319544298135448960	7394315828592829424
11	3973109800760143708	1210302996752248488817	50975951518289853305508
12	10590895512774862686570	7876274672755293629849313	784977037926751747674903856
13	54979738656662942307796576	127662922218147601317696761088	27509351187362150581313065415008
14	555797909644630436677137498230	3758866349549535184419575245899295	2167705218542258344490649896364635660
15	10941698340065066230952215658836402	262494735113863141064139463349338932401	387057670485382113845659790427906287869964
16	419471520990343359533179780148504998680	34743635578879779735115976640337043283539968	155834562667781961459395304614489091804925069312
17	31316381809372647202456756386758267295913986	10515433254970556796676940890090213283995582491061	141913947289741925555770935391179630944263523887622180
18	4552935219125281961749891635205266853083431076606	6223473542044970945227663535137423211023325768031869705	291742352479852828931266865471488039830113462056487260611668
19	1289028069162063367134701648612243347602968689156939134	8202141246122863321617905882873129193881877372016868870233600	?
20	710696545932110303636788771910109055085229584261997887193434	21616759663705129375548031370293020589188849179772199905497292061241	?
21	for n=21 to n=28 see A066864	for n=21 to n=30 see A067963	?
$\frac{\sqrt{a_n a_{n-2}}}{a_{n-1}}$			
	$n \rightarrow \infty$	1.3954859724793027352295006635668880689541037281446...	~ 1.4489...

k non-attacking pieces on an n x n normal chessboard, summed over all k >= 0

n	composite pieces wazir+semi-knight	composite pieces fers+semi-knight	knights
			
			A141243
1	2	2	2
2	7	15	16
3	57	91	94
4	941	1736	1365
5	33449	79972	55213
6	2459425	6299901	3368146
7	382855589	1285603956	394631712
8	124540929641	447557358957	101693175442
9	85318153466211	385575946455953	50929053498909
10	122472735313450472	589150856687876949	48988729226134301
11	369585935087532984401	2165299584885258183249	96325314726538906164
12	2339591161808503990364333	14426211637344274025661589	375615195988659173454092
13	31111921460224438988574247597	225777618892265062128023623844	2933480442104347575000834468
14	868279850311064548655355081178519	6557218632343634247393874444195975	45480806737377995771543610802659
15	50888619797362714784537744759321918472	437030332314419985181001890123172706068	142290202111889804120495149240353936
16	6260580196602084853841493490169487731798180	55203404314390624514333790253552745415080045	?
17	1617245527998733579378068339783918778697326381217	15689094563691029974045956290320872906543031475179	?
18	877021659816227597310288780299988677506442137659205441	8602674788968200102126733024028459039435090264791842236	?
19	998581981601625128895961431850085952953602924263377326753997	?	?
20	2386982321437520120512161190147308701414947834041381571424140151305	?	?
$\frac{\sqrt{a_n a_{n-2}}}{a_{n-1}}$			
	$n \rightarrow \infty$	~ 1.44895...	~ 1.44...

Zdá se, že další kameny (speciálně jezdec) mají svoje specifické entropiy konstanty, které nejsou závislé jen na počtu polí, která jsou kamenům dostupná.

Pro porovnání uvádím ještě hodnoty pro stejné kameny na **prstencové** šachovnici. Hodnoty konstant vycházejí shodně jako pro normální šachovnici.

k non-attacking pieces on an n x n toroidal chessboard, summed over all k >= 0			
n	composite pieces wazir+semi-fers	composite pieces fers+semi-wazir	composite pieces semi-wazir+semi-fers
			
	A066866, n>1	A067959, n>1	A027683(n-1), n>1 (same as wazirs on an toroidal board)
1	2	2	2
2	5	7	7
3	22	22	34
4	201	547	743
5	4216	9021	25531
6	162314	812830	2406862
7	12329633	70046159	464483559
8	1831137521	24082448515	213256442503
9	528106112383	10363980496342	215560806324388
10	296848246952000	14228018243052057	498819827260367617
11	324932515409958655	29400555005986658803	2590618817013278596997
12	692572885398506075946	166705587265151114516638	30496896080418683388380966
13	2874785146216927021053015	1606507128309318588452521527	809724336154415150287031740151
14	?	?	48609694845429192825410114233405807
15	?	?	6589876632329358971395398453738256596574
16	?	?	2018670118781080042934952855192359574137313799
17	?	?	?
$\frac{\sqrt{a_n a_{n-2}}}{a_{n-1}}$			
$n \rightarrow \infty$	1.3954859724793027352295006635668880689541037281446...	~ 1.44...	1.5030480824753322643220663294755536893857810...

2.1.1) k Kings on a 1 x n and 2 x n chessboard - k králů na šachovnici 1 x n a 2 x n

Na normální šachovnici 1 x n se vejde nejvýše $n/2$ nenapadajících se králů (resp. vezírů) pokud je n sudé a nejvýše $(n+1)/2$ králů (resp. vezírů) pokud je n liché.
Maximal number of non-attacking kings (or wazirs) on a 1 x n chessboard is

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

Pro počet pozic k neohrožujících se králů snadno odvodíme obecný vzorec

2 Kings, board 1 x n: ($n \geq 3$)

$$\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

3 Kings, board 1 x n: ($n \geq 5$)

$$\frac{1}{6}(n-4)(n-3)(n-2)$$

4 Kings, board 1 x n: ($n \geq 7$)

$$\frac{1}{24}(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)$$

Generally, number of ways of placing k non-attacking kings (or wazirs) on a 1 x n chessboard is (for $n \geq 2k - 1$)

$$\binom{n-k+1}{k}$$

Nejzajímavější je ovšem součet přes všechna k (včetně $k=0$)

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right)$$

což je známá [identita](#), která vede na [Fibonacciho čísla](#).

Výsledek se shoduje s údaji v článku [Counting Kings](#) (2006), (N.J. Calkin, K.James, S.Purvis, ...), kde byl tento vzorec odvozen jiným postupem (přes rekurenci).

Ze vzorce pro šachovnici $1 \times n$ snadno odvodíme i vzorec pro **šachovnici $2 \times n$** .

Number of ways of placing k non-attacking kings on a $2 \times n$ chessboard is (for $n \geq 2k - 1$)

$$2^k * \binom{n - k + 1}{k}$$

Vzorec je dán počtem volných polí pro umístění dalšího krále s tím, že král může být vždy libovolně v levém nebo pravém sloupci.

Několik prvních polynomů:

2 Kings, board $2 \times n$:

$$2(n - 2)(n - 1)$$

3 Kings, board $2 \times n$: ($n \geq 2$)

$$\frac{4}{3}(n - 4)(n - 3)(n - 2)$$

4 Kings, board $2 \times n$: ($n \geq 3$)

$$\frac{2}{3}(n - 6)(n - 5)(n - 4)(n - 3)$$

5 Kings, board $2 \times n$: ($n \geq 4$)

$$\frac{4}{15}(n - 8)(n - 7)(n - 6)(n - 5)(n - 4)$$

6 Kings, board $2 \times n$: ($n \geq 5$)

$$\frac{4}{45}(n - 10)(n - 9)(n - 8)(n - 7)(n - 6)(n - 5)$$

Pokud dosadíme za $n \rightarrow 2n$ a pak za $k \rightarrow n$, dostaneme pro počet pozic n nenapadajících se králů na šachovnici $2 \times 2n$

$$2^n * (n + 1)$$

což se shoduje se vzorcem v kapitole [2.3.1](#)

Ještě je zajímavá suma přes všechna k

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} 2^k * \binom{n - k + 1}{k} = \frac{1}{3}(2^{n+2} - (-1)^n)$$

k non-attacking kings on a 2 x n board

n	1 king	2 kings	3 kings	4 kings	5 kings	6 kings	7 kings	8 kings	9 kings	10 kings	summed over all k >= 0
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
3	6	4	0	0	0	0	0	0	0	0	11
4	8	12	0	0	0	0	0	0	0	0	21
5	10	24	8	0	0	0	0	0	0	0	43
6	12	40	32	0	0	0	0	0	0	0	85
7	14	60	80	16	0	0	0	0	0	0	171
8	16	84	160	80	0	0	0	0	0	0	341
9	18	112	280	240	32	0	0	0	0	0	683
10	20	144	448	560	192	0	0	0	0	0	1365
11	22	180	672	1120	672	64	0	0	0	0	2731
12	24	220	960	2016	1792	448	0	0	0	0	5461
13	26	264	1320	3360	4032	1792	128	0	0	0	10923
14	28	312	1760	5280	8064	5376	1024	0	0	0	21845
15	30	364	2288	7920	14784	13440	4608	256	0	0	43691
16	32	420	2912	11440	25344	29568	15360	2304	0	0	87381
17	34	480	3640	16016	41184	59136	42240	11520	512	0	174763
18	36	544	4480	21840	64064	109824	101376	42240	5120	0	349525
19	38	612	5440	29120	96096	192192	219648	126720	28160	1024	699051
20	40	684	6528	38080	139776	320320	439296	329472	112640	11264	1398101
n	1 king	2 kings	3 kings	4 kings	5 kings	6 kings	7 kings	8 kings	9 kings	10 kings	$\frac{1}{3}(2^{n+2} - (-1)^n)$

2.1.2) n Kings on an n x n chessboard - n králů na šachovnici n x n

Pokud upravíme rozvoj ze str. 65 do tvaru

$$\frac{n^{2k}}{k!} \left(1 - \frac{9(k-1)k}{2n^2} + \frac{6(k-1)k}{n^3} + \frac{(k-1)k(243k^2 - 439k - 142)}{24n^4} - \frac{(k-2)(k-1)k(27k-5)}{n^5} - \frac{(k-2)(k-1)k(243k^3 - 588k^2 - 775k + 352)}{16n^6} + \frac{(k-3)(k-2)(k-1)k(243k^2 - 43k - 136)}{4n^7} + \dots \right)$$

vidíme, že pro $k=n$ jdou členy u lichých mocnin n asymptoticky k 0 (polynom v čitateli má stupeň o 1 menší než jmenovatel) a dostaneme tak

$$\frac{n^{2n}}{n!} \left(1 - \frac{9(n-1)n}{2n^2} + \frac{(n-1)n(243n^2 - 439n - 142)}{24n^4} - \frac{(n-2)(n-1)n(243n^3 - 588n^2 - 775n + 352)}{16n^6} + \dots \right) \sim \frac{n^{2n}}{n!} * \left(1 - \frac{9}{2} + \frac{243}{24} - \frac{243}{16} + \dots \right)$$

$$\text{Table}[(-9/2)^n / n!, \{n, 0, 5\}]$$

$$\{1, -\frac{9}{2}, \frac{81}{8}, -\frac{243}{16}, \frac{2187}{128}, -\frac{19683}{1280}\}$$

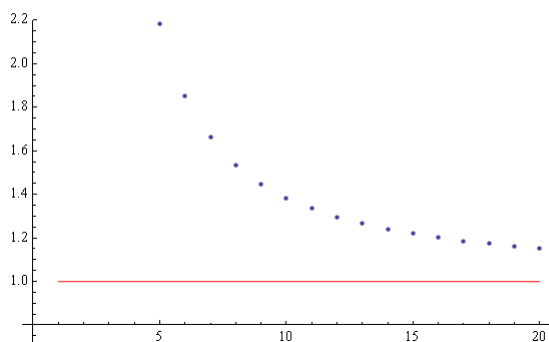
Tento rozvoj tak potvrzuje obecnější větu z kapitoly 13.1, kdy při počtu dostupných polí $m=8$ dostáváme

Number of ways to place n non-attacking kings on an $n \times n$ chessboard is asymptotic (for proof see chapter 13.1) (V. Kotěšovec, 29.11.2011)

$$\frac{n^{2n}}{n!} * \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d 9^d}{2^d d!} = \frac{n^{2n}}{n!} * e^{-\frac{9}{2}} \sim \binom{n^2}{n} * e^{-4}$$

Ze všech možných rozmístění n králů na šachovnici $n \times n$ tak vyhovují (pro velká n) necelá 2%. Nebo jinak, pravděpodobnost že se žádný z n náhodně rozmístěných králů na šachovnici $n \times n$ nebude ohrožovat s jiným je asymptoticky 0.0183156...

```
Show[ListPlot[Table[nkingsnn[[n]] / (n^(2n) / n! * E^(-9/2)),
{n, 1, Length[nkingsnn]}], PlotRange -> {0.7, 2.2}],
Plot[1, {n, 1, Length[nkingsnn]}, PlotStyle -> Red]]
```



n	n kings n x n, A201513
1	1
2	0
3	8
4	79
5	1974
6	62266
7	2484382
8	119138166
9	6655170642
10	423677826986
11	30242576462856
12	2390359529372724
13	207127434998494421
14	19516867860507198208
15	1986288643031862123264
16	217094567491104327256049
17	25357029929230564723578520
18	3151672341378566296926684684
19	415294220890662636616927907958
20	57824201125787566041674560880632
21	?
values for $n > 15$ computed by Andrew Woods, A193580	

2.2) k Kings on an k x n chessboard - k králů na šachovnici k x n

2 kings, board 2 x n:

$$2(n-1)(n-2)$$

A172202 - 3 kings, board 3 x n: (V. Kotěšovec, 27.1.2010), $n \geq 2$

$$\frac{(n-2)(9n^2 - 45n + 70)}{2}$$

A172203 - 4 kings, board 4 x n: (V. Kotěšovec, 27.1.2010), $n \geq 3$

$$\frac{64n^4 - 720n^3 + 3347n^2 - 7569n + 6894}{6}$$

A172204 - 5 kings, board 5 x n: (V. Kotěšovec, 27.1.2010), $n \geq 4$

$$\frac{625n^5 - 9750n^4 + 66415n^3 - 247626n^2 + 504664n - 446544}{24}$$

A172205 - 6 kings, board 6 x n: (V. Kotěšovec, 27.1.2010), $n \geq 5$

$$\frac{2 * (162n^6 - 3240n^5 + 29160n^4 - 151830n^3 + 483798n^2 - 895085n + 749335)}{5}$$

A172206 - 7 kings, board 7 x n: (V. Kotěšovec, 28.1.2010), $n \geq 6$

$$\frac{117649n^7 - 2873997n^6 + 32197753n^5 - 215350695n^4 + 932130286n^3 - 2618213868n^2 + 4424623272n - 3468569760}{720}$$

A172261 - 8 kings, board 8 x n: (V. Kotěšovec, 30.1.2010), $n \geq 7$

$$\frac{1048576n^8 - 30277632n^7 + 406210560n^6 - 3319585920n^5 + 18136811049n^4 - 68048382318n^3 + 171628664735n^2 - 266425935930n + 194935658400}{2520}$$

První členy těchto vzorců mají obecně tvar

$$\frac{(kn)^k}{k!} - \frac{3(k-1)(3k-2)(kn)^{k-1}}{2k!} + \dots$$

což se dá zapsat i jako

$$\frac{(kn)^k}{k!} - \binom{3k-2}{2} \frac{(kn)^{k-1}}{k!} + \dots$$

k	k Kings on an k x n chessboard - Generating function
2	$-\frac{4x^3}{(x-1)^3}$
3	$x^3 * \frac{17x^2 + 2x + 8}{(x-1)^4}$
4	$-x^3 * \frac{68x^4 - 4x^3 + 149x^2 + 34x + 9}{(x-1)^5}$
5	$x^3 * \frac{259x^6 - 204x^5 + 1294x^4 + 622x^3 + 1035x^2 + 104x + 15}{(x-1)^6}$
6	$-2x^3 * \frac{475x^8 - 1015x^7 + 4398x^6 + 194x^5 + 10875x^4 + 5233x^3 + 3012x^2 + 148x + 8}{(x-1)^7}$
7	$x^3 * \frac{3387x^{10} - 13990x^9 + 57102x^8 - 55038x^7 + 217860x^6 + 137902x^5 + 324486x^4 + 120530x^3 + 30546x^2 + 734x + 24}{(x-1)^8}$
8	$-x^3 * \frac{11814x^{12} - 80082x^{11} + 366204x^{10} - 759794x^9 + 1916625x^8 - 283007x^7 + 5337480x^6 + 4589514x^5 + 4426668x^4 + 1103339x^3 + 146808x^2 + 1622x + 25}{(x-1)^9}$

n	2 kings	3 kings	4 kings	5 kings	6 kings	7 kings	8 kings
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	4	8	9	15	16	24	25
4	12	34	79	194	408	926	1847
5	24	105	454	1974	8544	37282	162531
6	40	248	1566	9856	62266	394202	2501726
7	60	490	4103	34475	291908	2484382	21243084
8	84	858	9009	95466	1021254	10999618	119138166
9	112	1379	17484	224589	2916232	38168864	502726650
10	144	2080	30984	468854	7179314	110899878	1724809105
11	180	2988	51221	893646	15790572	281638602	5059647669
12	220	4130	80163	1585850	31795390	643766432	13132889249
13	264	5533	120034	2656976	59638832	1352358921	30905051345
14	312	7224	173314	4246284	105546666	2651129458	67124176002
15	364	9230	242739	6523909	177953044	4906381466	136380034610
16	420	11578	331301	9693986	287974838	8648792662	261909043488
17	480	14295	442248	13997775	449932632	14623854922	479315827404
18	544	17408	579084	19716786	681918370	23851793294	841394145399
19	612	20944	745569	27175904	1006409660	37697787702	1424246670499
20	684	24930	945719	36746514	1450930734	57953320884	2334919892115
21	760	29393	1183806	48849626	2048760064	86929476107	3720787187147
22	840	34360	1464358	63959000	2839684634	127563008202	5780929883024
23	924	39858	1792159	82604271	3870800868	183536011462	8779782913128
24	1012	45914	2172249	105374074	5197362214	259410007946	13063328442266
25	1104	52555	2609924	132919169	6883673384	360775279732	19078137617070

2.3) Number of ways to place $m \times n$ non-attacking kings on a $2m \times 2n$ chessboard

Rozmístění $m \times n$ neohrožujících se králů na šachovnici $2m \times 2n$

Dále se budeme zabývat případem šachovnic sudých rozměrů, kdy králů je na šachovnici možné maximum, tedy právě tolik, že každý musí být ve svém pevném čtverci velikosti 2×2 . Celkový počet králů je v těchto případech roven vždy čtvrtině počtu polí příslušné šachovnice.

Tento problém má zajímavou historii, která je popsána v tabulce na další straně. *See next page for interesting problem history.*

Pro $m=3$ až $m=8$ bylo řešení nalezeno pomocí [transformační matice](#) a [vytvěřujících funkcí](#). Z těchto funkcí bylo pak metodami známými z řešení diferenčních rovnic možno objevit i explicitní vzorce (i když pro větší m bylo možné jejich koeficienty určit pouze numericky). Řešení tohoto problému sáhlo až na hranici možností tehdejších počítačů a programů. Pro ještě větší m se však tato metoda ukázala jako pro počítače časově a hlavně paměťově příliš náročná a řešení pro $m=9$ až $m=12$ bylo pak nalezeno jiným postupem, pomocí vygenerování dostatečného počtu hodnot posloupnosti a hledání nejkratší lineární rekurence.

Problém počtu pozic neohrožujících se králů má několik variant podle typu šachovnice, ze kterých jako nešťastnější volbu považují horizontální válcovou šachovnici. Úloha je to sice stále obtížná, má ale elegantní řešení vedoucí na shodné faktory ve jmenovateli vytvářející funkce jako v případě normální šachovnice, koeficienty v čitateli této funkce jsou však (na rozdíl od normální šachovnice) při vhodném rozkladu jen malá čísla, což umožňuje dostat se v řešení o dost dále než na normální šachovnici. Navíc, pro větší m pomohly výsledky pro horizontální válcovou šachovnici s řešením pro normální šachovnici.

- normální šachovnice, viz tato kapitola [2.3](#) (těžké, nalezeny denominátory až do $m=12$ a úplné generační funkce až do $m=10$)
 - horizontální válcová šachovnice, viz kapitola [2.6](#) (podobné normální šachovnici, exponenty všech faktorů v denominátorech jsou rovny 1, nalezeny denominátory až do $m=20$ a úplné generační funkce až do $m=12$)
 - vertikální válcová šachovnice, viz kapitola [2.6.9](#) (zcela odlišný problém, nalezen obecný tvar denominátoru a úplné generační funkce až do $m=24$)
 - prstencová šachovnice, viz kapitola [2.9](#) (kompletně vyřešeno, nalezen obecný vzorec)
-
- *for **normal** chessboard see chapter [2.3](#) (hard, denominators found up to $m=12$ and full generating functions up to $m=10$)*
 - *for **horizontal cylinder** see chapter [2.6](#) (similar as for normal chessboard, exponents of all factors are equal 1, denominators found up to $m=20$ and full generating functions up to $m=12$)*
 - *for **vertical cylinder** see chapter [2.6.9](#) (different problem, found general form of the denominator, full generating functions found up to $m=24$)*
 - *for **toroidal** board see chapter [2.9](#) (explicit formula found)*

Number of ways to place $m \times n$ non-attacking kings on a $2m \times 2n$ chessboard										
m	normal chessboard					horizontal cylinder				maximal degree of irreducible factor
	determinant of transfer matrix (degree)	recurrence order	found by	number of different roots	maximal exponent**	recurrence order	found by	maximal exponent	number of factors	
1	<i>not used</i>	2	Fabel 1964	1	2	1	Kotěšovec 2011	1	1	1
2	6	4	Bandelow 1966	3	2	3	Kotěšovec 2011	1	2	2
3	14	7	Wilf 1994	4	2	5	Kotěšovec 2011	1	4	2
4	34	17	Wilf 1994	12	2	12	Kotěšovec 2011	1	7	3
5	78	31	Kotěšovec 2010	21	2	22	Kotěšovec 2011	1	12	3
6	178	75	Kotěšovec 2010	49	3	49	Kotěšovec 2011	1	21	4
7	398	124	Kotěšovec 2010	85	4	85	Kotěšovec 2011	1	36	4
8	882	307	Kotěšovec 2010	208	4	208	Kotěšovec + Breger 2011	1	72	5
9	<i>solved with different methods</i>	548	Kotěšovec + Breger 2011	400	4	400	Kotěšovec + Breger 2011	1	124	5
10		1318	Kotěšovec + Breger 2011	916	5	916	Kotěšovec + Breger 2011	1	250	6
11		2321	Kotěšovec + Breger 2011	1829	5	1829	Kotěšovec + Breger 2011	1	469	6
12		5672	Kotěšovec + Breger 2011	4248	6	4248	Kotěšovec + Breger 2011	1	968	7
13						8730*	Alekseyev 2011	1	1856	7
14						19737*	Alekseyev 2011	1	3854	8
15						41996*	Alekseyev 2011	1	7702	8
16						90925*	Alekseyev 2011	1	15619	9
17						193070*	Alekseyev 2011	1	31339	9
18						417125*	Alekseyev 2011	1	63805	10
19						881504*	Alekseyev 2011	1	128084	10
20					1871305*	Alekseyev 2011	1	258503	11	
m	$\frac{(3m+7)2^m + 2(-1)^m}{9}$	$O(m * 2^m)$		$O(m * 2^m)$	$\leq \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$	$O(m * 2^m)$		1	$\sim 2^{m-2}$	$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$

*Rekurence tohoto řádu je určitě platná, nebylo však testováno, jestli se některý z faktorů ve jmenovateli nevykrátí proti čitateli vytvořující funkce (*not checked if any of the factors cancels out in the generating function*). Osobně se však domnívám, že je to málo pravděpodobné. Takže je dokázáno, že toto je maximální možná hodnota nejkratší rekurence.

**Exponenty faktorů ve jmenovateli vytvořující funkce určují násobnost kořenů. *Exponents of irreducible factors in denominator of generating function determined multiplicity of the roots.*

Conjecture 1 (V. Kotěšovec, 29.8.2011):

V případě horizontální válcové šachovnice mají všechny faktory ve jmenovateli vytvořující funkce exponent 1.

For *horizontal cylinder* have all factors in denominator of generating function exponent 1.

Conjecture 2 (V. Kotěšovec, 15.9.2011):

Maximální stupeň faktoru ve jmenovateli vytvořující funkce (pro normální i pro horizontální válcovou šachovnici) je dán následujícím výrazem:

Maximal degree of irreducible factor in denominator of generating function is (same for normal board and for horizontal cylinder)

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$$

Hypotézy 1 a 2 potvrdil pro horizontální válcovou šachovnici Max A.Alekseyev, 15.9.2011: holds for all $m \leq 20$. Platnost hypotézy 2 pro normální šachovnici jsem potvrdil výpočty pro všechna $m \leq 12$. V případě normální šachovnice je zajímavé rozložení maximálních exponentů faktorů podle stupňů těchto faktorů (v případě horizontální válcové šachovnice jsou podle hypotézy č.1 všechna tato maxima rovna 1)

normal chessboard									
m	recurrence order	number of factors	value of largest exponent by factor degree						
			1	2	3	4	5	6	7
1	2	1	2						
2	4	2	2	1					
3	7	3	2	2					
4	17	7	2	2	1				
5	31	11	2	2	2				
6	75	21	2	3	2	1			
7	124	36	4	2	2	2			
8	307	72	3	4	2	2	1		
9	548	124	4	4	2	2	2		
10	1318	250	5	3	3	3	2	1	
11	2321	469	5	3	2	2	2	2	
12	5672	968	6	4	2	3	2	2	1

For example, for $m=12$ factor $(2x-1)^6$ has degree 1 and exponent is 6 (maximal for this degree). For $m=8$ is maximal exponent of quadratic factors 4, factor $(6x^2-6x+1)^4$.

Conjecture 3 (V. Kotěšovec, 15.9.2011): For normal chessboard are exponents of all irreducible factors $\leq \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$

Conjecture 4 (V. Kotěšovec, 20.9.2011): For normal board and m even are all exponents of factors degree $1 + \frac{m}{2}$ equal 1.

Faktory ve jmenovateli vytvořující funkce pro normální a pro horizontální válcovou šachovnici jsou shodné. Tím pádem je stejný i počet různých kořenů.

Conjecture 5 (V. Kotěšovec, 29.8.2011):

Factors in the

- 1) determinant of transfer matrix (see [article](#) by H. Wilf for more)
- 2) denominator of generating function for normal chessboard
- 3) denominator of generating function for horizontal cylinder

are same. Therefore also **number of roots** is same.

Ověřeno výpočty v programu Mathematica až do $m=12$. Jen v případě $m=3$ a $m=5$ chybí ve jmenovateli vytvořující funkce pro normální šachovnici vždy faktor $(x - 1)$. Předpokládám, že úplný tvar denominátoru z principu obsahuje i tento faktor (což bylo potvrzeno i jeho přítomností v transformační matici), jen v případě normální šachovnice se **vykrátí** v generační funkci proti čitateli (což považuji spíše za náhodu, příslušná rekurence by zůstala samozřejmě v platnosti i po vynásobení tímto faktorem, jen by už nebyla tou nejkratší).

Holds for $m \leq 12$. Only in case of $m=3$ and $m=5$ factor $x - 1$ cancels out in the generating function for the normal chessboard.

m=2	exponent		
factor	D	N	H
$3x-1$	2	2	1
x^2-3x+1	2	1	1

m=3	exponent		
factor	D	N	H
$x-1$	2		1
$3x-1$	2	1	1
$4x-1$	2	2	1
$2x^2-4x+1$	4	2	1

m=4	exponent		
factor	D	N	H
$x-1$	4	1	1
$4x-1$	2	1	1
$5x-1$	2	2	1
x^2-4x+1	2	1	1
$3x^2-5x+1$	4	2	1
$5x^2-5x+1$	4	2	1
x^3-6x^2+5x-1	2	1	1

m=5	exponent		
factor	D	N	H
$x-1$	2		1
$2x-1$	8	1	1
$4x-1$	2	1	1
$6x-1$	2	2	1
x^2-4x+1	4	1	1
$2x^2-5x+1$	2	1	1
$2x^2-4x+1$	2	1	1
$4x^2-6x+1$	4	2	1
$6x^2-6x+1$	4	2	1
$7x^2-6x+1$	4	2	1
$2x^3-8x^2+6x-1$	4	1	1
$3x^3-9x^2+6x-1$	4	2	1

In the tables means

D...determinant of [transfer matrix](#)

N...denominator of the generating function for [normal board](#)

H...denominator of the generating function for [horizontal cylinder](#)

m=6 factor	exponent		
	D	N	H
x-1	6	1	1
2x-1	8	1	1
4x-1	4	1	1
7x-1	2	2	1
x^2-3x+1	2	1	1
$2x^2-5x+1$	2	1	1
$3x^2-6x+1$	2	1	1
$3x^2-5x+1$	4	1	1
$5x^2-7x+1$	4	2	1
$8x^2-7x+1$	4	2	1
$9x^2-7x+1$	6	3	1
$11x^2-7x+1$	4	2	1
x^3-9x^2+6x-1	2	1	1
$3x^3-12x^2+7x-1$	4	2	1
$3x^3-11x^2+7x-1$	4	2	1
$4x^3-11x^2+7x-1$	4	1	1
$5x^3-13x^2+7x-1$	4	2	1
$5x^3-12x^2+7x-1$	4	2	1
$7x^3-14x^2+7x-1$	4	2	1
$x^4-8x^3+14x^2-7x+1$	4	1	1
$x^4-7x^3+13x^2-7x+1$	2	1	1

m=7 factor	exponent		
	D	N	H
x-1	20	1	1
2x-1	24	4	1
3x-1	8	1	1
4x-1	6	2	1
5x-1	6	2	1
6x-1	4	2	1
8x-1	2	2	1
x^2-3x+1	8	1	1
$2x^2-6x+1$	4	2	1
$2x^2-5x+1$	4	1	1
$3x^2-6x+1$	4	1	1
$3x^2-5x+1$	2	1	1
$4x^2-7x+1$	2	1	1
$4x^2-6x+1$	2	1	1
$5x^2-5x+1$	2	1	1
$6x^2-8x+1$	4	2	1
$6x^2-6x+1$	2	1	1
$10x^2-8x+1$	4	2	1
$11x^2-8x+1$	4	2	1
$14x^2-8x+1$	4	2	1
x^3-5x^2+6x-1	4	2	1
$2x^3-12x^2+7x-1$	4	1	1
$3x^3-12x^2+7x-1$	4	1	1
$4x^3-15x^2+8x-1$	4	2	1
$6x^3-16x^2+8x-1$	4	1	1
$6x^3-14x^2+8x-1$	4	1	1
$7x^3-17x^2+8x-1$	4	1	1
$7x^3-15x^2+8x-1$	4	2	1
$8x^3-17x^2+8x-1$	4	2	1
$9x^3-17x^2+8x-1$	4	1	1
$10x^3-18x^2+8x-1$	8	2	1
$13x^3-19x^2+8x-1$	4	2	1
$2x^4-16x^3+20x^2-8x+1$	4	1	1
$2x^4-13x^3+19x^2-8x+1$	4	1	1
$2x^4-12x^3+18x^2-8x+1$	8	1	1
$3x^4-17x^3+20x^2-8x+1$	4	2	1

m=8 factor	exponent		
	D	N	H
x-1	30	2	1
2x-1	8	1	1
3x-1	32	3	1
4x-1	2	1	1
5x-1	4	1	1
6x-1	2	1	1
9x-1	2	2	1
x ² -5x+1	2	1	1
x ² -3x+1	16	2	1
2x ² -5x+1	4	1	1
3x ² -6x+1	6	2	1
4x ² -6x+1	4	2	1
5x ² -8x+1	2	1	1
6x ² -6x+1	8	4	1
7x ² -9x+1	4	2	1
7x ² -7x+1	4	1	1
7x ² -6x+1	2	1	1
8x ² -7x+1	2	1	1
12x ² -9x+1	4	2	1
13x ² -9x+1	4	2	1
15x ² -9x+1	4	2	1
16x ² -9x+1	2	1	1
17x ² -9x+1	4	2	1
19x ² -9x+1	4	2	1

x ³ -8x ² +6x-1	2	1	1
x ³ -7x ² +6x-1	8	2	1
x ³ -6x ² +5x-1	2	1	1
2x ³ -8x ² +6x-1	4	1	1
3x ³ -9x ² +6x-1	4	2	1
4x ³ -16x ² +8x-1	2	1	1
4x ³ -15x ² +8x-1	4	1	1
5x ³ -18x ² +9x-1	4	2	1
5x ³ -17x ² +9x-1	4	2	1
6x ³ -16x ² +8x-1	4	1	1
7x ³ -17x ² +8x-1	4	2	1
8x ³ -21x ² +9x-1	4	2	1
8x ³ -20x ² +9x-1	4	2	1
8x ³ -19x ² +9x-1	4	2	1
8x ³ -17x ² +9x-1	4	1	1
9x ³ -22x ² +9x-1	2	1	1
9x ³ -19x ² +9x-1	4	1	1
9x ³ -18x ² +9x-1	4	2	1
11x ³ -22x ² +9x-1	4	2	1
11x ³ -21x ² +9x-1	4	2	1
12x ³ -21x ² +9x-1	8	2	1
13x ³ -22x ² +9x-1	4	2	1
14x ³ -23x ² +9x-1	4	2	1
15x ³ -22x ² +9x-1	4	1	1
16x ³ -23x ² +9x-1	4	2	1
17x ³ -24x ² +9x-1	4	2	1

19x ³ -24x ² +9x-1	4	2	1
x ⁴ -9x ³ +18x ² -8x+1	2	1	1
3x ⁴ -20x ³ +24x ² -9x+1	4	1	1
3x ⁴ -18x ³ +24x ² -9x+1	4	2	1
3x ⁴ -17x ³ +23x ² -9x+1	4	1	1
3x ⁴ -16x ³ +22x ² -9x+1	4	1	1
3x ⁴ -15x ³ +21x ² -9x+1	4	2	1
4x ⁴ -22x ³ +25x ² -9x+1	4	1	1
4x ⁴ -21x ³ +24x ² -9x+1	4	1	1
4x ⁴ -19x ³ +24x ² -9x+1	4	1	1
4x ⁴ -17x ³ +22x ² -9x+1	2	1	1
5x ⁴ -26x ³ +26x ² -9x+1	4	1	1
5x ⁴ -24x ³ +25x ² -9x+1	4	2	1
5x ⁴ -23x ³ +25x ² -9x+1	4	1	1
5x ⁴ -22x ³ +24x ² -9x+1	4	1	1
5x ⁴ -20x ³ +24x ² -9x+1	4	1	1
7x ⁴ -26x ³ +26x ² -9x+1	4	2	1
8x ⁴ -27x ³ +26x ² -9x+1	8	2	1
9x ⁴ -28x ³ +26x ² -9x+1	2	1	1
11x ⁴ -31x ³ +27x ² -9x+1	4	1	1
x ⁵ -15x ⁴ +35x ³ -28x ² +9x-1	2	1	1
x ⁵ -12x ⁴ +31x ³ -27x ² +9x-1	4	1	1

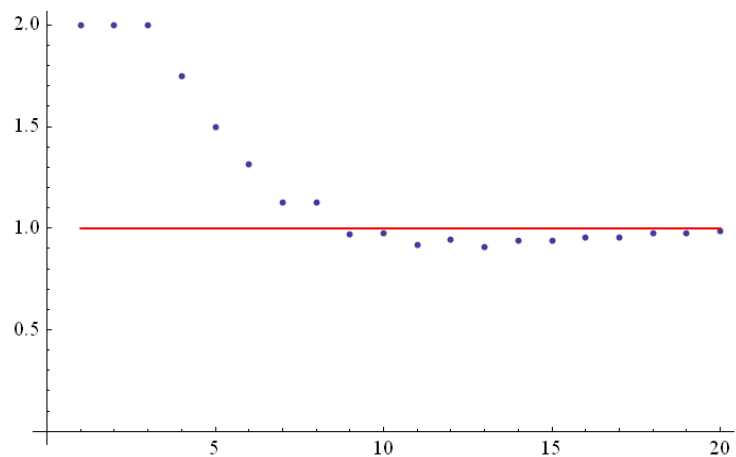
Exponenty faktorů v determinantu transformační matice jsou vždy větší než exponenty stejných faktorů ve jmenovateli vytvořující funkce pro normální šachovnici, rovnost nastává pro každé m vždy pouze u jediného faktoru, pro $m=2,3,4,5,6,7,8,9$ jsou to po řadě faktory $2x-1$, $3x-1$, $4x-1$, $5x-1$, $6x-1$, $7x-1$, $8x-1$, $9x-1$, $10x-1$. Tyto faktory odpovídají vždy největšímu kořenu charakteristické rovnice. Zajímavá vlastnost, i když těžko vysvětlitelná.

m=9 factor	exponent		
	D	N	H
x-1	36	2	1
2x-1	40	4	1
3x-1	40	2	1
4x-1	10	1	1
5x-1	6	2	1
6x-1	8	3	1
10x-1	2	2	1
x ² -5x+1	6	1	1
x ² -4x+1	6	1	1
x ² -3x+1	8	1	1
2x ² -5x+1	8	1	1
2x ² -4x+1	36	3	1
3x ² -6x+1	4	1	1
3x ² -5x+1	8	2	1
4x ² -6x+1	2	1	1
5x ² -5x+1	4	1	1
6x ² -9x+1	2	1	1
6x ² -6x+1	12	3	1
7x ² -6x+1	6	1	1
8x ² -10x+1	4	2	1
8x ² -8x+1	2	1	1
8x ² -7x+1	4	1	1
9x ² -8x+1	4	1	1
10x ² -8x+1	2	1	1
14x ² -10x+1	4	2	1
15x ² -10x+1	4	2	1
18x ² -10x+1	4	2	1
20x ² -10x+1	8	4	1
23x ² -10x+1	4	2	1
x ³ -8x ² +6x-1	8	1	1
x ³ -7x ² +6x-1	4	1	1
x ³ -6x ² +5x-1	8	1	1
2x ³ -10x ² +7x-1	4	1	1
2x ³ -9x ² +7x-1	2	1	1
2x ³ -8x ² +6x-1	2	1	1
3x ³ -10x ² +7x-1	4	1	1
4x ³ -16x ² +8x-1	4	1	1
4x ³ -11x ² +7x-1	8	2	1
5x ³ -17x ² +8x-1	4	2	1
5x ³ -12x ² +7x-1	4	1	1
6x ³ -21x ² +10x-1	4	2	1

6x ³ -20x ² +10x-1	4	2	1
8x ³ -20x ² +9x-1	4	1	1
9x ³ -20x ² +9x-1	4	1	1
10x ³ -25x ² +10x-1	4	2	1
10x ³ -24x ² +10x-1	4	2	1
10x ³ -23x ² +10x-1	4	2	1
10x ³ -21x ² +9x-1	4	2	1
10x ³ -20x ² +10x-1	4	1	1
11x ³ -25x ² +10x-1	4	2	1
11x ³ -21x ² +10x-1	4	2	1
12x ³ -24x ² +10x-1	4	1	1
12x ³ -23x ² +10x-1	4	1	1
14x ³ -27x ² +10x-1	4	1	1
14x ³ -25x ² +10x-1	4	2	1
15x ³ -27x ² +10x-1	4	2	1
15x ³ -25x ² +10x-1	4	2	1
16x ³ -26x ² +10x-1	8	2	1
18x ³ -28x ² +10x-1	4	1	1
18x ³ -26x ² +10x-1	4	1	1
20x ³ -28x ² +10x-1	4	1	1
20x ³ -27x ² +10x-1	4	1	1
21x ³ -29x ² +10x-1	4	2	1
21x ³ -27x ² +10x-1	4	1	1
22x ³ -29x ² +10x-1	8	2	1
22x ³ -28x ² +10x-1	4	2	1
23x ³ -29x ² +10x-1	4	1	1
25x ³ -29x ² +10x-1	4	2	1
26x ³ -30x ² +10x-1	4	2	1
29x ³ -31x ² +10x-1	4	2	1
x ⁴ -12x ³ +19x ² -8x+1	4	1	1
x ⁴ -9x ³ +18x ² -8x+1	4	1	1
x ⁴ -7x ³ +13x ² -7x+1	4	1	1
2x ⁴ -13x ³ +19x ² -8x+1	4	2	1
2x ⁴ -13x ³ +22x ² -9x+1	4	1	1
4x ⁴ -28x ³ +30x ² -10x+1	4	1	1
4x ⁴ -26x ³ +29x ² -10x+1	4	1	1
4x ⁴ -23x ³ +29x ² -10x+1	4	1	1
4x ⁴ -22x ³ +28x ² -10x+1	4	1	1
4x ⁴ -20x ³ +26x ² -10x+1	4	1	1
4x ⁴ -19x ³ +25x ² -10x+1	4	2	1
6x ⁴ -34x ³ +32x ² -10x+1	4	1	1
6x ⁴ -31x ³ +31x ² -10x+1	4	1	1
6x ⁴ -30x ³ +30x ² -10x+1	4	1	1
6x ⁴ -28x ³ +29x ² -10x+1	4	1	1

6x ⁴ -28x ³ +30x ² -10x+1	4	1	1
6x ⁴ -27x ³ +29x ² -10x+1	4	1	1
6x ⁴ -26x ³ +28x ² -10x+1	4	1	1
6x ⁴ -26x ³ +30x ² -10x+1	4	1	1
6x ⁴ -25x ³ +29x ² -10x+1	8	1	1
6x ⁴ -24x ³ +28x ² -10x+1	4	2	1
6x ⁴ -23x ³ +27x ² -10x+1	4	2	1
7x ⁴ -35x ³ +32x ² -10x+1	4	2	1
7x ⁴ -31x ³ +30x ² -10x+1	4	2	1
7x ⁴ -31x ³ +31x ² -10x+1	4	2	1
7x ⁴ -29x ³ +29x ² -10x+1	4	1	1
7x ⁴ -26x ³ +29x ² -10x+1	4	1	1
8x ⁴ -33x ³ +31x ² -10x+1	4	1	1
8x ⁴ -32x ³ +31x ² -10x+1	4	1	1
8x ⁴ -30x ³ +30x ² -10x+1	4	2	1
9x ⁴ -35x ³ +32x ² -10x+1	4	1	1
9x ⁴ -32x ³ +31x ² -10x+1	4	1	1
10x ⁴ -36x ³ +32x ² -10x+1	8	2	1
10x ⁴ -34x ³ +31x ² -10x+1	4	2	1
10x ⁴ -33x ³ +31x ² -10x+1	8	1	1
10x ⁴ -32x ³ +30x ² -10x+1	4	1	1
12x ⁴ -35x ³ +31x ² -10x+1	4	1	1
13x ⁴ -40x ³ +33x ² -10x+1	8	2	1
13x ⁴ -37x ³ +32x ² -10x+1	4	1	1
14x ⁴ -38x ³ +32x ² -10x+1	4	1	1
15x ⁴ -39x ³ +32x ² -10x+1	4	2	1
16x ⁴ -41x ³ +33x ² -10x+1	4	1	1
17x ⁴ -42x ³ +33x ² -10x+1	4	1	1
19x ⁴ -45x ³ +34x ² -10x+1	4	1	1
2x ⁵ -22x ⁴ +46x ³ -34x ² +10x-1	4	1	1
2x ⁵ -19x ⁴ +42x ³ -33x ² +10x-1	4	1	1
2x ⁵ -18x ⁴ +42x ³ -33x ² +10x-1	4	1	1
2x ⁵ -17x ⁴ +39x ³ -32x ² +10x-1	4	1	1
2x ⁵ -16x ⁴ +38x ³ -32x ² +10x-1	4	1	1
3x ⁵ -24x ⁴ +47x ³ -34x ² +10x-1	4	1	1
3x ⁵ -21x ⁴ +43x ³ -33x ² +10x-1	4	1	1
3x ⁵ -20x ⁴ +42x ³ -33x ² +10x-1	4	2	1
4x ⁵ -25x ⁴ +47x ³ -34x ² +10x-1	4	1	1
5x ⁵ -29x ⁴ +51x ³ -35x ² +10x-1	4	1	1

```
Show[ListPlot[Table[nfactors[[m]] / 2^(m - 2),
  {m, 1, 20}], AxesOrigin -> {0, 0}],
Plot[1, {m, 1, 20}, PlotStyle -> Red]]
```



Pro počet faktorů je očekávaná asymptotická hodnota řádu 2^m , přesněji 2^{m-2}

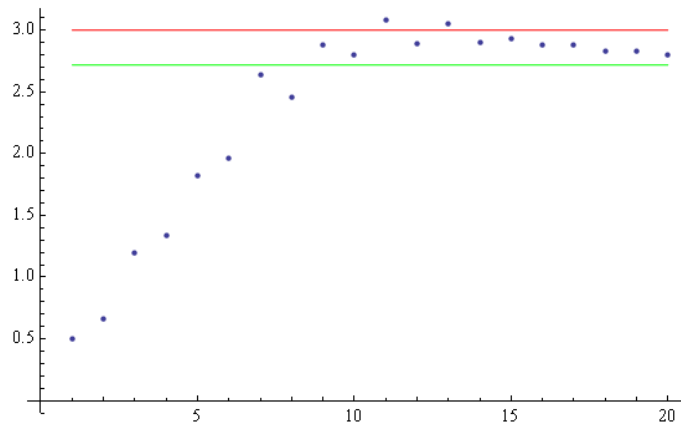
Conjecture 6 (V. Kotěšovec, 15.9.2011):

Asymptotic behavior of **number of irreducible factors** (for horizontal cylinder and also for normal board) is 2^{m-2}

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\text{number of irreducible factors}}{2^{m-2}} = 1$$

Zajímavou shodu jsem objevil v hodnotách stupně polynomu determinantu [transformační matice](#). Hodnoty se (až na posun o 1) shodují se sekvencí [A059570](#), viz tabulka na str. 82 (4.2.2012 ověřeno i pro $m=9$), rekurence pro tuto sekvenci je $a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}$. Pro stupeň jmenovatele vytvořující funkce a počet jeho různých kořenů je tak stupeň polynomu determinantu transformační matice alespoň horním odhadem. Z toho usuzuji, že asymptoticky mají i hloubky rekurencí podobný průběh. *Conjecture: Asymptotic behavior of recurrence order is similar as degree of a polynomial in determinant of transform matrix.*

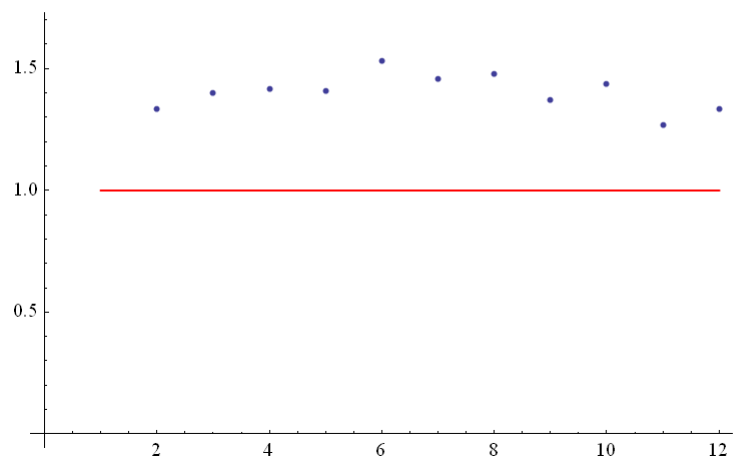
```
Show[ListPlot[Table[(m+2^(m-2))/recorderh[[m]], {m, 1, 20}],
  AxesOrigin -> {0, 0}], Plot[3, {m, 1, 20}, PlotStyle -> Red],
  Plot[E, {m, 1, 20}, PlotStyle -> Green]]
```



Conjecture 7 (V. Kotěšovec, 15.9.2011):

*Asymptotic behavior of **recurrence order** (for normal board and also for horizontal cylinder) is $O(m.2^m)$*

```
Show[ListPlot[Table[recorderh[[m]]/recorderh[[m]], {m, 1, 12}],
  AxesOrigin -> {0, 0}], Plot[1, {m, 1, 12}, PlotStyle -> Red]]
```



Hloubky rekurencí pro normální šachovnici a pro horizontální válcovou šachovnici se s narůstajícím m k sobě přibližují.

Conjecture 8 (V. Kotěšovec, 15.9.2011):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\text{recurrence order normal chessboard}}{\text{recurrence order horizontal cylinder}} = 1$$

2.3.1) $m=1$ / Number of ways to place n non-attacking kings on a $2 \times 2n$ chessboard

V knize [Schach und Zahl \(1966\)](#), jejíž autoři jsou E.Bonsdorff, K.Fabel, O.Riihimaa, najdeme na str.53 (pro tento jednoduchý případ) vzorec:

$$f_1(n) = (n + 1) * 2^n \qquad \text{G. f.: } -\frac{4(x - 1)}{(2x - 1)^2}$$

2.3.2) $m=2$ / Number of ways to place $2n$ non-attacking kings on a $4 \times 2n$ chessboard - [A061593](#)

Tento případ vyřešil Christoph Bandelow před rokem 1966. Na str.53 knihy [Schach und Zahl \(1966\)](#) nalezneme jeho excelentní vzorec

$$f_2(n) = (17n - 109) * 3^n + \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+5} - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+5} \right)$$

Stejný vzorec najdeme v článku [Non-attacking kings on a chessboard](#), D. E. Knuth, 1994. (kdo by čekal ve vzorci [Fibonacciho čísla](#)?)

$$f_2(n) = (17n-109)*3^n + 2*Fibonacci(2n+10)$$

Ještě je možno poznamenat, že tato (poněkud divoká) funkce je řešením [diferenční rovnice](#)

$$a_n = 9a_{n-1} - 28a_{n-2} + 33a_{n-3} - 9a_{n-4}$$

Vytvořující funkce ([generating function](#)):

$$-x * \frac{9x^3 - 33x^2 + 29x - 12}{(1 - 3x + x^2)(-1 + 3x)^2}$$

2.3.3) $m=3$ / Number of ways to place $3n$ non-attacking kings on a $6 \times 2n$ chessboard - A061594

Případ $m=3$ částečně vyřešil Herbert S. Wilf v článku [The Problem of the Kings](#), Electronic Journal of Combinatorics 2/1995, kde správně uvedl vytvořující funkci (*generating function*):

$$\frac{8x(-4 + 25x - 73x^2 + 163x^3 - 203x^4 + 116x^5 - 24x^6)}{(-1 + 3x)(-1 + 4x)^2(1 - 4x + 2x^2)^2}$$

Místo explicitního vzorce však zůstal jen u odhadu. Tento Wilfův odhad zbytku je ale chybný, správně (*right*) mělo být $+ O(n \cdot 3.4142^n)$ a v tom případě pouze členy se 4^n .

$$f_3(n) = 231n4^n - 2377 \cdot 4^n - 384 \cdot 3^n + O(1.707..^n).$$

(this formula by Wilf is wrong)

Podařilo se mi najít přesný vzorec (*exact formula* by Václav Kotěšovec, 5.2.2010):

$$f_3(n) = (231n - 2377) \cdot 4^n - 384 \cdot 3^n + \left(1381 + \frac{1953\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{99}{2} + 35\sqrt{2}\right) \cdot n\right) (2 + \sqrt{2})^n + \left(1381 - \frac{1953\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{99}{2} - 35\sqrt{2}\right) \cdot n\right) (2 - \sqrt{2})^n$$

Příslušná rekurence je

$$a_n = 19a_{n-1} - 148a_{n-2} + 604a_{n-3} - 1364a_{n-4} + 1644a_{n-5} - 928a_{n-6} + 192a_{n-7}$$

Další odkazy na literaturu:

Článek [Non-attacking placements on chessboards \(.ps\)](#), jehož autorem je Sergey Kitaev, má shodné výsledky a kromě králů řeší i rozmístění neohrožujících se pěšců na polích stejné barvy (*number of non-attacking pawns, all of the same colour*).

2.3.4) $m=4$ / Number of ways to place $4n$ non-attacking kings on a $8 \times 2n$ chessboard - [A173782](#)

O případu $m=4$ se krátce zmínil Herbert S. Wilf v článku [The Problem of the Kings](#), Electronic Journal of Combinatorics 2/1995, kde uvádí (správný) odhad

$$f_4(n) \sim (7963567/2610) \cdot n \cdot 5^n + \dots$$

Vytvořující funkci ani explicitní vzorec však ve článku neuvádí.

Odvodil jsem tuto **vytvorující funkci** (*Generating function*), (*V. Kotěšovec, 24.2.2010*):

$$x \cdot (22500x^{16} - 382125x^{15} + 2723005x^{14} - 10917322x^{13} + 27938661x^{12} - 48873227x^{11} + 60780149x^{10} - 54895129x^9 + 36368733x^8 - 17776175x^7 + 6499001x^6 - 1854479x^5 + 446565x^4 - 94300x^3 + 15732x^2 - 1673x + 80) / ((1-x)(x^2-4x+1)(x^3-6x^2+5x-1)(4x-1)(5x-1)^2(3x^2-5x+1)^2(5x^2-5x+1)^2)$$

a **rekurentní vzorec** (*Recurrence*):

$$a_n = 44a_{n-1} - 887a_{n-2} + 10855a_{n-3} - 90083a_{n-4} + 536398a_{n-5} - 2365292a_{n-6} + 7860674a_{n-7} - 19852652a_{n-8} + 38152568a_{n-9} - 55523880a_{n-10} + 60518766a_{n-11} - 48502595a_{n-12} + 27783210a_{n-13} - 10888525a_{n-14} + 2721025a_{n-15} - 382125a_{n-16} + 22500a_{n-17}, \quad n > 17$$

Tvar explicitního vzorce vyplývá ze jmenovatele vytvořující funkce:

$$\begin{aligned}
 f_4(n) &= (f_0 + f_1 * n) * 5^n + p_3 * 4^n + p_4 + p_1 * (2 - \sqrt{3})^n + p_2 * (2 + \sqrt{3})^n \\
 &+ (c_0 + c_1 * n) * \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + (d_0 + d_1 * n) * \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + (a_0 + a_1 * n) * \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right)^n + (b_0 + b_1 * n) * \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right)^n \\
 &+ x_1 * a^n + x_2 * b^n + x_3 * c^n
 \end{aligned}$$

Konstanty a, b, c jsou převrácené hodnoty kořenů kubické rovnice $x^3 - 6x^2 + 5x - 1$, numerické řešení dává tyto výsledky:

$$a = 1.554958132087371191419255..., \quad b = 3.246979603717467061021860..., \quad c = 0.198062264195161747527865...$$

$$a + b + c = 5$$

$$f_0 = -41306.0010866693090236490...$$

$$f_1 = 3051.175095785440613026819...$$

$$p_3 = 1290.666666666666666666666666666666...$$

$$p_4 = -0.0416666666666666666666666666666666...$$

$$p_1 = -0.00264173363558122860165...$$

$$p_2 = -26046.7751360441421965491...$$

$$c_0 = 0.205693095526376627060778...$$

$$c_1 = 0.011423393098813887747739...$$

$$d_0 = 13320.19430690447362337293...$$

$$d_1 = -25.2114233930988138877477...$$

$$a_0 = 0.016247286549426572256187...$$

$$a_1 = 0.004738824796414161533626...$$

$$b_0 = 50967.32103081995944916738...$$

$$b_1 = 2377.824321004263414898295...$$

$$x_1 = -0.26377035674015103140762...$$

$$x_2 = 1775.680242270463563416958...$$

$$x_3 = 0.000114426854513301676567...$$

Pro konstanty x_1, x_2, x_3 platí $x_1 + x_2 + x_3 = 252338184/142129$

Explicitní vzorec v algebraickém tvaru (*V. Kotěšovec, 25.2.2010*):

$$\begin{aligned}
 f_4(n) = & \left(-\frac{12505804889}{302760} + \frac{7963567}{2610} * n \right) * 5^n + \frac{3872}{3} * 4^n - \frac{1}{24} \\
 & + \left(\frac{135343\sqrt{3} - 234421}{18} \right) * (2 - \sqrt{3})^n - \left(\frac{135343\sqrt{3} + 234421}{18} \right) * (2 + \sqrt{3})^n \\
 & + \left(\frac{33301}{5} - \frac{74461\sqrt{5}}{25} + \left(\frac{141\sqrt{5}}{25} - \frac{63}{5} \right) * n \right) * \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{33301}{5} + \frac{74461\sqrt{5}}{25} - \left(\frac{141\sqrt{5}}{25} + \frac{63}{5} \right) * n \right) * \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \\
 & + \left(\frac{4306740 - 1194474\sqrt{13}}{169} + \left(\frac{139103}{117} - \frac{501541\sqrt{13}}{1521} \right) * n \right) * \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right)^n + \left(\frac{4306740 + 1194474\sqrt{13}}{169} + \left(\frac{139103}{117} + \frac{501541\sqrt{13}}{1521} \right) * n \right) * \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right)^n \\
 & + \frac{31542273 * \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 70882767 * \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - 44196885}{142129 * \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} * \frac{8}{\sqrt{7}} * \left(2 * \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \right)^{2n} \\
 & + \frac{141765534 * \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 78680988 * \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + 17511003}{284258 * \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)} * \frac{8}{\sqrt{7}} * \left(2 * \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \right)^{2n} \\
 & + \frac{31542273 * \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 70882767 * \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 44196885}{142129 * \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)} * \frac{8}{\sqrt{7}} * \left(2 * \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) \right)^{2n}
 \end{aligned}$$

Poznámka: Proti prvnímu vydání je tento vzorec zjednodušen užitím vztahu $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) * \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) * \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) = \sqrt{7}/8$

Na tomto místě bych se rád zmínil o jedné málo známé specialitě při řešení [kubických rovnic](#). Jak je známo, případ, kdy má kubická rovnice 3 reálné kořeny, vede (obecně) při řešení buď na výrazy, které mají sice reálnou hodnotu, ale obsahují komplexní čísla a nejdou již dále rozložit (tzv. [casus irreducibilis](#)) nebo k výrazům obsahujícím trigonometrické funkce (které se pak poměrně špatně upravují a zjednodušují).

Řešení případu $m=4$ zde vedlo ke kubické rovnici $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ ve jmenovateli vytvořující funkce. Jelikož potřebujeme ale převrácené hodnoty těchto kořenů, provedeme substituci $x = 1/y$ a po úpravě dostaneme

$$y^3 - 5y^2 + 6y - 1 = 0 \quad (1)$$

Pokud se budeme snažit vyřešit tuto kubickou rovnici na symbolické úrovni matematickými programy (např. programem Derive nebo Mathematica), dostaneme (dost neelegantní) vyjádření kořenů ve tvaru, které už pomocí těchto programů nejde dále zjednodušit (*Simplify not possible*)

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2 * \left(\sqrt{3} - \sqrt{7} * \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} * \text{ATAN}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\right) \right)} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2 * \left(\sqrt{3} - \sqrt{7} * \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} * \text{ACOT}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\right) \right)} \quad c = \frac{\sqrt{3}}{2 * \left(\sqrt{3} + \sqrt{7} * \cos\left(\frac{1}{3} * \text{ATAN}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\right) \right)} \quad (2)$$

V případě určitých typů kubických rovnic však jde využít následujícího vztahu, který vychází z tzv. [de Moivre's formula](#) (1707), více viz např. [Trigonometry Angles](#)

$$8 * \left(z - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \right) * \left(z - \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \right) * \left(z - \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) \right) = 8z^3 + 4z^2 - 4z - 1 \quad (3)$$

Rovnici (1) lze převést na (3) substitucí

$$y = 2z + 2$$

Po úpravách z toho pak dostaneme elegantní vyjádření

$$a = 2 - 2 * \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 4 * \cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) \quad b = 2 + 2 * \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) = 4 * \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \quad c = 2 - 2 * \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = 4 * \cos^2\left(\frac{3\pi}{7}\right) \quad (4)$$

Samozřejmě numericky jsou výrazy (2) a (4) shodné.

Podobně při řešení rovnice (v části [2.3.5](#) dále) $3x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$, po substituci $x = 1/y$,

$$y^3 - 6y^2 + 9y - 3 = 0 \quad (5)$$

jsem využil k řešení vztah

$$8 * \left(z - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \right) * \left(z - \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right) * \left(z - \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) \right) = 8z^3 - 6z + 1 \quad (6)$$

Rovnici (5) lze převést na (6) opět substitucí $y = 2z + 2$, další výsledky viz kapitola [2.3.5](#)

Obecně z rovnic (3) a (6) můžeme lineárními substitucemi dostat nekonečně mnoho kubických rovnic s celočíselnými koeficienty, jejichž kořeny lze takto transformovat na jednodušší výrazy, samozřejmě to však nepokrývá všechny kubické rovnice.

Např. druhá kubická rovnice v části [2.3.5](#) $2x^3 - 8x^2 + 6x - 1 = 0$, po substituci $x = 1/y$, $y^3 - 6y^2 + 8y - 2 = 0$

na některý z podobných tvarů bohužel s největší pravděpodobností upravit nejde a proto hodnoty kořenů zůstávají v oku nelahodícím tvaru.

2.3.5) $m=5$ / Number of ways to place $5n$ non-attacking kings on a $10 \times 2n$ chessboard - A173783

Pro získání této funkce jsem

- 1) napsal poměrně jednoduchý program, který vygeneroval transformační matici (program je obecný pro libovolné m a vygenerování trvá jen pár vteřin)
- 2) k výpočtu vytvářející funkce bylo nutno provést inverzi této matice (pro $m=5$ velikosti 192×192).

Poznámka (24.2.2010): Zajímavé je zde srovnání současných matematických programů, které zvládají výpočty na úrovni symbolických výrazů. Inverzi matice 192×192 zvládne "Derive 6" za 69 minut, "Matlab 7" za 7 minut a "Mathematica 7" za 10 minut, musí se ale nastavit Method \rightarrow "OneStepRowReduction" (což není předdefinovaná hodnota). Při použití stejné metody a funkce "LinearSolve" (místo inverze matice) se dostane "Mathematica 7" dokonce těsně pod 1 minutu, tato metoda však selhává pro větší matice (např. 448×448), protože je nesmírně paměťově náročná, nestačí ani 4 GB RAM. Proto se jako nejvhodnější pro symbolické výpočty s velkými poli zdá program "Matlab 7" (inverze matice je v jeho případě nezbytná, protože analogická funkce "linsolve" lze použít jen pro numerické výpočty). Pro výpočet determinantu matice na symbolické úrovni je naopak nejrychlejší "Mathematica 7" (např. determinant 448×448 zvládne za pouhých 12 vteřin).

Poznámka (26.11.2010): Mathematica 8 zvládá tyto operace (pomocí "LinearSolve") s pamětí pod 2 GB RAM v těchto excelentních časech: $m=5$ - 17 vteřin, $m=6$ - 4 minuty, $m=7$ - 51 minut, $m=8$ - 63 hodin.

Vytvářející funkce (*Generating function*) (V. Kotěšovec, 24.2.2010):

$$2x * (292626432x^{30} - 7695378432x^{29} + 94084706304x^{28} - 712519981056x^{27} + 3757888797696x^{26} - 14715718076160x^{25} + 44556058968960x^{24} - 107273952716256x^{23} + 209645023363168x^{22} - 337824014576768x^{21} + 454329405135504x^{20} - 514643686425920x^{19} + 494203416082160x^{18} - 403847150294172x^{17} + 281135354205764x^{16} - 166453721883480x^{15} + 83456844800670x^{14} - 35182845104124x^{13} + 12345883162136x^{12} - 3557728594620x^{11} + 827346101101x^{10} - 152042822189x^9 + 21726065190x^8 - 2499103126x^7 + 289877178x^6 - 45817212x^5 + 7810422x^4 - 1012942x^3 + 86355x^2 - 4311x + 96) / ((1-2x)(x^2-4x+1)(4x-1)(6x-1)^2(2x^2-4x+1)(2x^2-5x+1)(4x^2-6x+1)^2(6x^2-6x+1)^2(7x^2-6x+1)(2x^3-8x^2+6x-1)(3x^3-9x^2+6x-1)^2)$$

Rekurentní vzorec:

$$a_n = 85a_{n-1} - 3441a_{n-2} + 88303a_{n-3} - 1613002a_{n-4} + 22327010a_{n-5} - 243429637a_{n-6} + 2145452227a_{n-7} - 15565947848a_{n-8} + 94202823084a_{n-9} - 480152808502a_{n-10} + 2075863416838a_{n-11} - 7651361422835a_{n-12} + 24128330540449a_{n-13} - 65240466585284a_{n-14} + 151411770874148a_{n-15} - 301613628545814a_{n-16} + 515173613407544a_{n-17} - 753006145475828a_{n-18} + 939001403456656a_{n-19} - 994821988961592a_{n-20} + 890558910282768a_{n-21} - 668920434927504a_{n-22} + 417832289937792a_{n-23} - 214574645977920a_{n-24} + 89258591798784a_{n-25} - 29486236792320a_{n-26} + 7526493775872a_{n-27} - 1426182018048a_{n-28} + 188221833216a_{n-29} - 15390756864a_{n-30} + 585252864a_{n-31}, n > 31$$

Tvar explicitního vzorce vyplývá ze jmenovatele vytvářející funkce. Nejzajímavější je koeficient "a1" u členu s nejvyšší vahou, který určuje **chování funkce** pro **n** jdoucí do nekonečna.

$$\begin{aligned}
 f_5(n) = & (a_0 + a_1 * n) * 6^n + b_0 * 4^n + c_0 * 2^n + d_0 * (2 + \sqrt{3})^n + d_1 * (2 - \sqrt{3})^n + e_0 * (2 + \sqrt{2})^n + e_1 * (2 - \sqrt{2})^n \\
 & + f_0 * \left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)^n + f_1 * \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}\right)^n + (g_0 + g_1 * n) * (3 + \sqrt{5})^n + (g_2 + g_3 * n) * (3 - \sqrt{5})^n \\
 & + (h_0 + h_1 * n) * (3 + \sqrt{3})^n + (h_2 + h_3 * n) * (3 - \sqrt{3})^n + (i_0 + i_1 * n) * (3 + \sqrt{2})^n + (i_2 + i_3 * n) * (3 - \sqrt{2})^n \\
 & + j_1 * a^n + j_2 * b^n + j_3 * c^n + (k_1 + k_2 * n) * p^n + (k_3 + k_4 * n) * q^n + (k_5 + k_6 * n) * r^n
 \end{aligned}$$

Konstanty [a,b,c], [p,q,r] jsou převrácené hodnoty kořenů kubických rovnic $2x^3 - 8x^2 + 6x - 1 = 0$, $3x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$

Numerické řešení dává tyto výsledky (viz též str. 98):

"a0" = -678713.914029838744250543...	"h2" = 0.058129779240265145814576...
"a1" = 40881.99638391654123778175...	"h3" = 0.001381218104645652763714...
"b0" = -34068.00000000000000000000...	"i0" = 451705.3288256058621516918...
"c0" = -1.166666666666666666666666...	"i1" = -464.669820354223846560962...
"d0" = -51446.4849177672922717349...	"i2" = -105.212207530060402420677...
"d1" = -0.00015892757463292217669...	"i3" = -1.61589393149043915332353...
"e0" = -10107.4970977440220279807...	"j1" = 0.681071493211076255730644...
"e1" = -0.00144453003045015334953...	"j2" = -5142.77599692595609626251...
"f0" = -684492.238277441947051457...	"j3" = 0.015530347678857435892035...
"f1" = -0.01172255805294854295976...	"k1" = -0.01214865752499437628069...
"g0" = 926641.4858544337556115334...	"k2" = 0.001607392808026484702220...
"g1" = 38562.08938946586577992332...	"k3" = 147951.3666730136147131534...
"g2" = 0.050993455065133123680865...	"k4" = 1491.573767571326753514216...
"g3" = 0.004591899029712395988044...	"k5" = 105.3857202386842498663759...
"h0" = -62326.0581297792402651458...	"k6" = -2.43062880321861841180229...
"h1" = 723.9986187818953543472362...	

Pro konstanty platí $j_1 + j_2 + j_3 = -2720160/529$, $k_1 + k_3 + k_5 = 4989255563912/33698267$, $k_2 + k_4 + k_6 = 1398248840/938961$

$$a = 2 - \frac{4\sqrt{3}}{3} * SIN\left(\frac{1}{3} * ASIN\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\right) = 1.460811127189110883474124 ...$$

$$b = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} * SIN\left(\frac{1}{3} * ASIN\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right) + \frac{\pi}{3}\right) = 4.214319743377535187415497 ...$$

$$c = 2 - \frac{4\sqrt{3}}{3} * COS\left(\frac{1}{3} * ACOS\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\right) = 0.3248691294333539291103782 ...$$

$$a + b + c = 6$$

$$p = 2 - 2 * COS\left(\frac{2\pi}{9}\right) = \left(2 * SIN\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)^2 = 0.4679111137620439295952147 ...$$

$$q = 2 + 2 * COS\left(\frac{\pi}{9}\right) = \left(2 * SIN\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right)^2 = 3.879385241571816768108218 ...$$

$$r = 2 - 2 * COS\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \left(2 * SIN\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right)^2 = 1.652703644666139302296566 ...$$

$$p + q + r = 6$$

Výrazy pro kořeny p, q, r byly získány postupem uvedeným v kapitole 2.3.4, výrazy pro kořeny a, b, c však tímto postupem zjednodušit nejde.

Explicitní vzorec v algebraickém tvaru (konstanty $j_1, j_2, j_3, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ viz str. 97) (V. Kotěšovec, 28.2.2010):

$$\begin{aligned}
f_5(n) = & \left(-\frac{409006306732815599}{602619599036} + \frac{173100055287}{4234139} * n \right) * 6^n - 34068 * 4^n - \frac{7}{6} * 2^n \\
& - \left(\frac{911083984\sqrt{3}}{61347} + \frac{1578043760}{61347} \right) * (2 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{911083984\sqrt{3}}{61347} - \frac{1578043760}{61347} \right) * (2 - \sqrt{3})^n \\
& - \left(\frac{1225724\sqrt{2}}{343} + \frac{1733436}{343} \right) * (2 + \sqrt{2})^n + \left(\frac{1225724\sqrt{2}}{343} - \frac{1733436}{343} \right) * (2 - \sqrt{2})^n \\
& - \left(\frac{664055\sqrt{17}}{8} + \frac{2737969}{8} \right) * \left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2} \right)^n + \left(\frac{664055\sqrt{17}}{8} - \frac{2737969}{8} \right) * \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2} \right)^n \\
& + \left(\frac{4299152986099\sqrt{5}}{20748475} + \frac{384527975225}{829939} + \left(\frac{171204588\sqrt{5}}{19855} + \frac{382825188}{19855} \right) * n \right) * (3 + \sqrt{5})^n \\
& + \left(\frac{384527975225}{829939} - \frac{4299152986099\sqrt{5}}{20748475} + \left(\frac{382825188}{19855} - \frac{171204588\sqrt{5}}{19855} \right) * n \right) * (3 - \sqrt{5})^n \\
& - (17992\sqrt{3} + 31163 - (362 + 209\sqrt{3}) * n) * (3 + \sqrt{3})^n + (17992\sqrt{3} - 31163 + (362 - 209\sqrt{3}) * n) * (3 - \sqrt{3})^n \\
& + \left(\frac{77449420}{343} + \frac{54790528\sqrt{2}}{343} - \left(\frac{1146\sqrt{2}}{7} + \frac{1632}{7} \right) * n \right) * (3 + \sqrt{2})^n + \left(\frac{77449420}{343} - \frac{54790528\sqrt{2}}{343} + \left(\frac{1146\sqrt{2}}{7} - \frac{1632}{7} \right) * n \right) * (3 - \sqrt{2})^n \\
& + j_1 * \left(2 - \frac{4\sqrt{3}}{3} * \text{SIN} \left(\frac{1}{3} * \text{ASIN} \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \right) \right)^n + j_2 * \left(2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} * \text{SIN} \left(\frac{1}{3} * \text{ASIN} \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} \right) + \frac{\pi}{3} \right) \right)^n + j_3 * \left(2 - \frac{4\sqrt{3}}{3} * \text{COS} \left(\frac{1}{3} * \text{ACOS} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \right) \right)^n \\
& + (k_1 + k_2 * n) * \left(2 - 2 * \text{COS} \left(\frac{2\pi}{9} \right) \right)^n + (k_3 + k_4 * n) * \left(2 + 2 * \text{COS} \left(\frac{\pi}{9} \right) \right)^n + (k_5 + k_6 * n) * \left(2 - 2 * \text{COS} \left(\frac{4\pi}{9} \right) \right)^n
\end{aligned}$$

2.3.6) $m=6$ / Number of ways to place **6n non-attacking kings on a $12 \times 2n$ chessboard** - A174154

Tento případ vyžadoval provést (na symbolické úrovni!) inverzi matice velikosti 448×448 , což je na hranici možností současných matematických programů (*Derive6 ani Mathematica7 si s tím neporadí, na tyto velké matice je ale vhodný program Matlab7, který inverzi zvládl v čase 68 minut*).

Vytvořující funkce (*Generating function*) (V. Kotěšovec, 8.3.2010):

$$\begin{aligned}
 & -x*(9881265328704000000x^{74} - 745460194573987200000x^{73} + 27058441331237911560000x^{72} \\
 & - 630574519733958189096000x^{71} + 10620992412418133969628300x^{70} - 137991665381256761637404520x^{69} \\
 & + 1441187713449842720703280065x^{68} - 12449684907187405839719194626x^{67} + 90833482252388172827285029638x^{66} \\
 & - 568749753878989316529701677248x^{65} + 3094959104534048177533681352799x^{64} - 14786591491557537432688402148814x^{63} \\
 & + 62546683770100863224056803287942x^{62} - 235893075161001219428756666935555x^{61} + 797978924681191303527565813197295x^{60} \\
 & - 2433648791133257840409309484158509x^{59} + 6721172925589000338821415074614101x^{58} - 16874983210908760792785651385114152x^{57} \\
 & + 38649671515505567165916997301106375x^{56} - 80999469039951794157868014640691605x^{55} + 155756628296635763280353356415757902x^{54} \\
 & - 275499172743267856241417580914101161x^{53} + 449253470876074605154885582765085506x^{52} - 676816476591070935766817355948817667x^{51} \\
 & + 943857986354193371364615928444017845x^{50} - 1220661704439047432548206117121008699x^{49} + 1466533837456537613456821872852081734x^{48} \\
 & - 1639525223616587182652341410467569787x^{47} + 1708305101435402614973823579541075741x^{46} - 1661495320924220763537985553529107570x^{45} \\
 & + 1510621894675464930498400295672730343x^{44} - 1285696520181304471064162857556756892x^{43} + 1025670064685839353596509770775335305x^{42} \\
 & - 767836201105618743331897589888819260x^{41} + 539952432414375273203309417443882230x^{40} - 356956219188072917117313500791428647x^{39} \\
 & + 221967416303673380170960689222016760x^{38} - 129868144295605689997008303392471184x^{37} + 71491160008257450681327802590567504x^{36} \\
 & - 37017322185220125774414395796648083x^{35} + 18017697561193232235536013176700652x^{34} - 8236705210457078339411642367777062x^{33} \\
 & + 3532451891465875904778828049906178x^{32} - 1419311438083676683034744726952652x^{31} + 533432327695298858210381553149285x^{30} \\
 & - 187205875643334525147970829585222x^{29} + 61228416399158699804621484828993x^{28} - 18622737469829899757436340257385x^{27} \\
 & + 5254673072129348277153109543997x^{26} - 1371752804262578223890375168964x^{25} + 330267098353842775956388942842x^{24} \\
 & - 73061510988747055309122504069x^{23} + 14782596349429679171765334301x^{22} - 2719571348796162565504741678x^{21} \\
 & + 451339375837487448675798746x^{20} - 66805240600688222182861662x^{19} + 8661523087250332029653805x^{18} \\
 & - 952009254666126966673796x^{17} + 82335998894700394651901x^{16} - 4266725433179907174031x^{15} \\
 & - 184755253316270694616x^{14} + 83877913428258704659x^{13} - 13092670253017397215x^{12} \\
 & + 1433917521601031600x^{11} - 120787644461247815x^{10} + 7805125834561750x^9 \\
 & - 355282797168619x^8 + 7110673719021x^7 + 486018670449x^6 \\
 & - 61151293377x^5 + 3632842475x^4 - 141485072x^3 \\
 & + 3689608x^2 - 59281x + 448) \\
 & /((x-1)/(2x-1)/(4x-1)/(7x-1)^2/(x^2-3x+1)/(2x^2-5x+1)/(3x^2-5x+1)/(3x^2-6x+1)/(5x^2-7x+1)^2/(8x^2-7x+1)^2/(9x^2-7x+1)^3/(11x^2-7x+1)^2/(x^3-9x^2+6x-1)/(3x^3-11x^2+7x-1)^2/(3x^3-12x^2+7x-1)^2/(4x^3-11x^2+7x-1)/(5x^3-12x^2+7x-1)^2/(5x^3-13x^2+7x-1)^2/(7x^3-14x^2+7x-1)^2/(x^4-7x^3+13x^2-7x+1)/(x^4-8x^3+14x^2-7x+1)
 \end{aligned}$$

Rekurentní vzorec:

$$\begin{aligned}
 a_n = & 200a_{n-1} - 19591a_{n-2} + 1252845a_{n-3} \\
 & - 58827505a_{n-4} + 2162753808a_{n-5} - 64829889078a_{n-6} \\
 & + 1629240689182a_{n-7} - 35031124501133a_{n-8} + 654454967945240a_{n-9} \\
 & - 10752566037209576a_{n-10} + 156879699829988516a_{n-11} - 2048776097631017397a_{n-12} \\
 & + 24108171056426689513a_{n-13} - 257034531080309116618a_{n-14} + 2494772567482865677279a_{n-15} \\
 & - 22133280277582878693605a_{n-16} + 180118887001001382183984a_{n-17} - 1348636789867805112026274a_{n-18} \\
 & + 9315545713899467284553179a_{n-19} - 59499168382845285726017972a_{n-20} + 352120178477097682063693543a_{n-21} \\
 & - 1934323013107671509059832463a_{n-22} + 9878966314646961189006272617a_{n-23} - 46972249732573258020377866081a_{n-24} \\
 & + 208183877121467820793024020729a_{n-25} - 860974589150724576064816096663a_{n-26} + 3325616222441474827288188284748a_{n-27} \\
 & - 12007102646405027060206035093213a_{n-28} + 40549313398041902425202637254740a_{n-29} - 128160961960827405525713512244418a_{n-30} \\
 & + 379279006512370536257299017344107a_{n-31} - 1051368905565268405109177617606550a_{n-32} + 2730662700682795572522784530198834a_{n-33} \\
 & - 6646355208785503282827723317955069a_{n-34} + 15161829507999599355831555503563964a_{n-35} - 32418089419841604310504626066285593a_{n-36} \\
 & + 64963905091650869917279263108816530a_{n-37} - 121998193028385383238635351043687855a_{n-38} + 214657313735486368434302654748877496a_{n-39} \\
 & - 353777524153903526644871915284150291a_{n-40} + 545952447651523245976395515654219577a_{n-41} - 788557229845726031285071277862716138a_{n-42} \\
 & + 1065477899782050092815249173889044974a_{n-43} - 1345958367592910697332763314344919726a_{n-44} + 1588548886423131006699445390007535964a_{n-45} \\
 & - 1750322460004952351721691789849070497a_{n-46} + 1798910520031476972425563369104737493a_{n-47} - 1722886523923952992401312780338774274a_{n-48} \\
 & + 1536009690078173688532095945663171041a_{n-49} - 1273224933191855545781650218877302946a_{n-50} + 979983174726292730062221357725344727a_{n-51} \\
 & - 699362171154778642087707164485332698a_{n-52} + 462015283859449079185102433429700638a_{n-53} - 282037700090254407809166846000612848a_{n-54} \\
 & + 158780300135911015654982957271875917a_{n-55} - 82256781284683621993873503316293537a_{n-56} + 39117488543991922262702977386610326a_{n-57} \\
 & - 17029736085111484438301715527001011a_{n-58} + 6766292666982799092814924628874630a_{n-59} - 2445102358065760086073498440897006a_{n-60} \\
 & + 800463457818116640733412431607635a_{n-61} - 236339003295391504639451351871623a_{n-62} + 62608507068414191797382321464409a_{n-63} \\
 & - 14791881602747947642116948625728a_{n-64} + 3094801634963547035936901282789a_{n-65} - 568588000125534978580839232812a_{n-66} \\
 & + 90798410660368398860732240817a_{n-67} - 12444769805881872152497521690a_{n-68} + 1440691704088085224964754909a_{n-69} \\
 & - 137955444475738809516914520a_{n-70} + 10619160418237292545913100a_{n-71} - 630516845227291857576000a_{n-72} \\
 & + 27057588402917527560000a_{n-73} - 745460194573987200000a_{n-74} + 9881265328704000000a_{n-75}, \quad n > 75
 \end{aligned}$$

Explicitní vzorec (koeficienty pouze numericky, viz též str. 103) (V. Kotěšovec, 9.3.2010):

$$\begin{aligned}
f_6(n) = & (c1 * n + c2) * 7^n + c3 * 4^n + c4 * 2^n + c5 + (c6 * n^2 + c7 * n + c8) * \left(\frac{7 + \sqrt{13}}{2}\right)^n + (c9 * n^2 + c10 * n + c11) * \left(\frac{7 - \sqrt{13}}{2}\right)^n + (c12 * n + c13) * \left(\frac{7 + \sqrt{29}}{2}\right)^n \\
& + (c14 * n + c15) * \left(\frac{7 - \sqrt{29}}{2}\right)^n + (c16 * n + c17) * \left(\frac{7 + \sqrt{17}}{2}\right)^n + (c18 * n + c19) * \left(\frac{7 - \sqrt{17}}{2}\right)^n + (c20 * n + c21) * \left(\frac{7 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + (c22 * n + c23) * \left(\frac{7 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \\
& + c24 * \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + c25 * \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + c26 * \left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)^n + c27 * \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}\right)^n + c28 * \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right)^n + c29 * \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right)^n + c30 * (3 + \sqrt{6})^n + c31 * (3 - \sqrt{6})^n \\
& + (c32 * n + c33) * \left(\frac{7 - 8 * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{37}{64}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + (c34 * n + c35) * \left(\frac{7 + 8 * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{37}{64}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + (c36 * n + c37) * \left(\frac{7 - 8 * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{37}{64}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n \\
& + (c38 * n + c39) * \left(\frac{7 - 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + (c40 * n + c41) * \left(\frac{7 + 2 * \sqrt{13} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + (c42 * n + c43) * \left(\frac{7 - 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n \\
& + (c44 * n + c45) * \left(\frac{7 - 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{5}{2 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + (c46 * n + c47) * \left(\frac{7 + 2 * \sqrt{13} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{5}{2 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + (c48 * n + c49) * \left(\frac{7 - 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{5}{2 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n \\
& + (c50 * n + c51) * \left(\frac{7}{3} + \frac{2 * \sqrt{10} * \cos\left(\frac{4 * \pi + \arccos\left(\frac{1}{10 * \sqrt{10}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + (c52 * n + c53) * \left(\frac{7}{3} + \frac{2 * \sqrt{10} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{1}{10 * \sqrt{10}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + (c54 * n + c55) * \left(\frac{7}{3} + \frac{2 * \sqrt{10} * \cos\left(\frac{2 * \pi + \arccos\left(\frac{1}{10 * \sqrt{10}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n \\
& + (c56 * n + c57) * \left(2 * \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)^{2n} + (c58 * n + c59) * \left(2 * \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right)^{2n} + (c60 * n + c61) * \left(2 * \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^{2n} + c62 * \left(2 * \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right)^{2n} + c63 * \left(2 * \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)^{2n} + c64 * \left(2 * \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right)^{2n} \\
& + c65 * \left(\frac{7 - 8 * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{101}{128}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + c66 * \left(\frac{7 + 8 * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{101}{128}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + c67 * \left(\frac{7 - 8 * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{101}{128}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n \\
& + c68 * \left(\frac{7 - \sqrt{5} + \sqrt{38 - 14 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n + c69 * \left(\frac{7 - \sqrt{5} - \sqrt{38 - 14 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n + c70 * \left(\frac{7 + \sqrt{5} + \sqrt{38 + 14 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n + c71 * \left(\frac{7 + \sqrt{5} - \sqrt{38 + 14 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n \\
& + c72 * \left(\frac{7 + \sqrt{5} + \sqrt{30 + 6 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n + c73 * \left(\frac{7 + \sqrt{5} - \sqrt{30 + 6 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n + c74 * \left(\frac{7 - \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n + c75 * \left(\frac{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

V 5. vydání byl vzorec trochu zjednodušen. I poslední čtveřici je možno vyjádřit pomocí trigonometrických funkcí (viz též tabulka na str. 145)

$$c72 * \left(2 * \sin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right)^{2n} + c73 * \left(2 * \sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)^{2n} + c74 * \left(2 * \sin\left(\frac{\pi}{15}\right)\right)^{2n} + c75 * \left(2 * \sin\left(\frac{4\pi}{15}\right)\right)^{2n}$$

Mocninné členy jsou kořeny rovnice

$$x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 1 = 0$$

Konstanty c1 až c75 byly počítány s přesností na 1000 desetinných míst, zde jsou zobrazeny úvodní cifry. Nejzajímavější je konstanta c1 u členu s nejvyšší vahou, viz též [tabulka](#) dále. *Computed with precision 1000 decimal digits.*

c1 = 563050.92363081393300379199765230403159768863702947623463448...
c2 = -11041671.41369220611578938753335712545455512656948954824184...
c3 = -2357744.324111866969009826152683295540438397581254724111866...
c4 = 21.043199...
c5 = 0.4722...
c6 = 3190.3093489289550735213633882325675910834434758553653835312...
c7 = 337248.16112053204772777686753899003534375968578844963180356...
c8 = 22171312.563933296610849266899248305097494239919852726041270...
c9 = -0.155502775108919675209542078721437237289629701519229685124...
c10 = 163.76534090004156599400547658735608440194160808987647535767...
c11 = 20526.933910569222347887878076756375554546028928917164157447...
c12 = 575846.85478971440158149340989457527674566569838747661347085...
c13 = 16247605.284383505635661890897790721482016266183878849131444...
c14 = 0.0011658345942594746778039988340117364745679841620848575638...
c15 = -0.414418320023937724723884769056678528508189816208487516809...
c16 = 230047.84933344721196144792666703039195606148236049832643267...
c17 = -14463969.67051905429883863835923668195954632864752168219234...
c18 = 0.3389082968540860236935600077917384689613959516219677421881...
c19 = 8.0058903357048764436050339639198438507589802652773239918003...
c20 = -4380.779921172737745731114476436604902285363986862597180603...
c21 = 15521460.861727876999488106542443833841877498708271763054528...
c22 = 74.674260897798473926638910205552777816311618123708065539315...
c23 = -42120.37137969800650206049760523120918665416499073159350475...
c24 = -1466.895990840800952382002160828790154609216662612809709324...
c25 = 0.0000319177407516580256258371399294782058951910950245905942...
c26 = -1363418.292712275958427659206064051032957072625599750710240...
c27 = 0.0539803048045815053599102048791109187794459045563939020808...
c28 = 70759.769960995616485517802428387642650115540190728012312687...
c29 = -0.021225302244113944738813801536714528635745692079387481611...
c30 = -14679723.96536387896646782442560071583932535099414548977578...
c31 = 0.0988375631769941402150744000498516667836191739863142944694...
c32 = 0.0114688152682925079657116516759253953437669057932893520188...
c33 = -34.87126946672551416158209094109658284195530683996332881776...
c34 = -2931.178338254321673522101257460088024540657326868242776207...
c35 = 2359570.4573736716750366870345440989908322336348290466443907...
c36 = -0.010232200986444736153142665986838191809487623536284840906...
c37 = -0.009760712734893563638281903154747000984466339463284462491...
c38 = 79.637022262597016507277698989244757130176859217629187051421...

c39 = 7623.5222837118691704972925367736074076164336295290199507051...
c40 = -25040.51356933272504031836868051979751695627126657067958484...
c41 = -4371055.807928319700032117044192176188659805196657875942614...
c42 = -0.000176458717799396523487167691652292730162178842756084959...
c43 = -0.01873137641764468680808064957513563777761334303658878784...
c44 = 182.84306867731595922919527002152074803077677320748463267709...
c45 = -20509.19076455159419630296316311445834448303562084214989277...
c46 = 43690.152910893550511614555161220924963785284802343078193067...
c47 = -8987171.555128407908763605552599814380150439406121315339016...
c48 = 0.0304344816245589096314488245023624965799780689424403586451...
c49 = 0.0910219099183178510909778766101508410245525059584509705051...
c50 = 81.040592637029327972530451582375567338233877076410932900825...
c51 = 12496.896940894381096241483130889783239505132373869568899256...
c52 = 6218.2283924751388460408279379712731258886480361053681491053...
c53 = 415273.95817991711103511459424274764453631394923526682138041...
c54 = -0.009112447045269675909807815014119379927153467523590407408...
c55 = 0.0706678371905442794273707817096087393896452311550154010930...
c56 = -277.1042479273382457185757679197165730578887836729810076035...
c57 = 28164.458136879162566186226378210224918719996171895315870918...
c58 = -2410.100414060450402471065852672568824244088749085817971396...
c59 = 190684.73637893497011827731719074603413297835886723630697815...
c60 = -0.000060482643142648259159684786839890995048487815012514927...
c61 = -0.039860680564203581447532035970652173615878437204299994238...
c62 = -1145.441679521340694852846318647782570805760655493285875401...
c63 = 57464.216298058807718946764525142628923738894469880493341236...
c64 = -0.000012757854104611226663640158366305278835290933191638522...
c65 = 2.7169230481033208837662696218759234706806363532453701472848...
c66 = -1248442.047763080258596898121671677768695024890016484171295...
c67 = -0.024765861919373924434150169576136219070695644927670073921...
c68 = -9.691216753802898835560015921728057003911002358632788457405...
c69 = 0.0022340552381034417696657432583538965091809456518294637256...
c70 = 32278.484247880188506576401656321633252402437340119991129744...
c71 = -0.012790902540653707994943506339903285297300305028668532579...
c72 = 1446790.5217319340222570999235284778655549609426113114751811...
c73 = -0.171819581089588127280923149891916061749202911609416498254...
c74 = -3559.968359624739588505260492405720499969976412525708015631...
c75 = 0.0007677222027362068613816050749653603347051141974088992482...

2.3.7) $m=7$ / Number of ways to place $7n$ non-attacking kings on a $14 \times 2n$ chessboard - A174155

Tento případ vyžadoval pro získání vytvořující funkce provést (na symbolické úrovni!) inverzi matice velikosti 1024×1024 , což (ke dni výpočtu) z matematických programů na PC zvládl pouze Matlab7 v čase přes 8 hodin. Vytvořující funkce (*Generating function*) (V. Kotěšovec, 9.3.2010):

```
-2x*(54222672911274911289059573760000000x^123 - 6279364401720347209864467972096000000x^122
+ 355916700860805743977756391154647040000x^121 - 13165656678159747994229085738759094272000x^120
+ 357580968786334728976290764494328561664000x^119 - 7606685500377828944402424153754395444510720x^118
+ 132025070498240400453821981247031745011777536x^117 - 1923148717983096485894432339969762419764363264x^116
+ 24001598451495916558037784079325597030940672000x^115 - 260733912714136996693533608123205367579054964736x^114
+ 2496313284158021796255065102282597952375849222144x^113 - 21277865832851787547991827395328601974018991456256x^112
+ 162819416994113682338598213096466301319887512928256x^111 - 1126358581030907656491986254406033294612551232913408x^110
+ 7086514400960731390328723893313619097901288581496832x^109 - 40757758341169693402147178689047453376348442921533440x^108
+ 215257037478349801305513176871426454908220485492801536x^107 - 1048058512243529559822666262068066405115673243213627392x^106
+ 4720742792928429097850271439387849238995832815146369024x^105 - 19732519791798674006897568748598939801049082241955069952x^104
+ 76756113443806605398650302720172795659712890994488901632x^103 - 278543117088434677065138311184638719760885595939909009408x^102
+ 945165490091678324412551307244000361076544393234133614592x^101 - 3005076664126071245872244757805376845758973901952126877696x^100
+ 8969167160819063116493944158832282378058214481923144220672x^99 - 25173494362748757456491747023570336965099474666885947408384x^98
+ 66544578438810679866701792371902931683947858391489794482176x^97 - 165915150472108230394017571109190057361624463233617396158464x^96
+ 390695976354665890074513984612903966800905181381260806209536x^95 - 869962058942296909688656575338098822622973290164727090757632x^94
+ 183382036944076261415773072285821504244851903462283741575168x^93 - 3663162558208576997437411808620528134488856302642268009722880x^92
+ 6940816834168452591527174228257133363210122586267517300846592x^91 - 12485300731198250918868702608084089861324343287261785436221440x^90
+ 21338793564228109772500185812748834074577991696545058663716864x^89 - 34677121465423066397628237863087661065799673463314127032121856x^88
+ 53618151940174275326509797819558207050312413538008687145720320x^87 - 78930471903810521140079827741654338728936679603061202109775616x^86
+ 110684484068511808086435721720485932701236358427760746915584128x^85 - 147931694677541828719396650661604635971538787804520097489430720x^84
+ 18852582462244141244776625994060389394145617566233549010704640x^83 - 229191721343564863372095426973769973171257827414431011627276224x^82
+ 265895245461053857121393536010031648750961599245321451639861696x^81 - 294478601111715286464524887097776472383327199903667055093108064x^80
+ 311429881070928442091929664868298832042011215780888541843889024x^79 - 314591478165462374119104556767298517772413598384303253181601680x^78
+ 303610313847801927302628453791220291803390622403746890286002928x^77 - 280000546810486798955803689372202305079421577088215075049437392x^76
+ 246804103133939308093322655758451920966947006188480655154502768x^75 - 207953075119753681934511769916178379442671053267567217312801856x^74
+ 167516671923783503099492383592992508412397913200612862784395728x^73 - 129028318635429191186157503073887054868563348499260954458336584x^72
+ 95038266464215381821909442668919890469926733009931919704337376x^71 - 66950284625201671155069063428880073031737512053977063096825228x^70
+ 45113692375805864259297990894062359371832009035289711397936572x^69 - 29083271562407026217147121592147394606754705984695471985211124x^68
+ 17941543124532772358042257555368380493701702794985559340294296x^67 - 10594988086421513826949788846676673068705561304545158471667176x^66
+ 5991920401275728684972283544592363416138938055314116591319068x^65 - 3247426373656460046505919451533942542620882729601342871800392x^64
+ 1688165453584027719109749622892479797351061811465406015315584x^63 - 842820130777935012431294163831220960459990279182114470001058x^62
+ 404786291367071435200584329565320034572896308441820233742492x^61 - 187427652608776303903657214006392302066849785191588678445115x^60
+ 83896074599720207110842887078480982574996945714857399371613x^59 - 36421099514154882084087090198951010669125624752881141912710x^58
+ 15389237595338812516875007712544226815442894222052921181201x^57 - 6351568145491846549236967852474091662341017080740623603308x^56
+ 2568470735966551607363059267449023563857322215129129292009x^55 - 1019698617782603122804098776612193889543052048554602751427x^54
+ 397651156321907497202559006733450549773666880896232550657x^53 - 152155733575897092189571737592541028133454734267411181214x^52
+ 56981485495617844103050419523305702033850394150958337929x^51 - 20812575067663039288298005399000342062645182032314841804x^50
+ 7385399296884771556614272143326975515992615453424039706x^49 - 2536378970991959824151513109283300166684452996715135613x^48
+ 840120945435246927097038897868232751926844215337475933x^47 - 267592212832787322394881575729138879628424476161213860x^46
```


$$\begin{aligned}
& + 81762553246257166816899290032251339568459510030642883x^{45} - 23918585500218748129692083027726169290403007263721516x^{44} \\
& + 6688609148248353532236759219142184861585117521757998x^{43} - 1785680002635931884417620662660932079655295846414621x^{42} \\
& + 454652885121393630298466575461039200141902454472294x^{41} - 110298017418873798104313766968125280060424724687194x^{40} \\
& + 25474543483790572391832217810646566581743665805776x^{39} - 5596951496464420802889764068394845225964455321014x^{38} \\
& + 1168846911565928114777696452748844131217296980641x^{37} - 231826928991979522819676069949495409863663665362x^{36} \\
& + 43629602459789761964817967344186988839256111996x^{35} - 7783590869696391606863804898013090431960663692x^{34} \\
& + 1314850860746222381862072936753225528249707603x^{33} - 2100478451742100307713477344736177761444382113x^{32} \\
& + 31685847252072174706283091894572485340220424x^{31} - 4505742353308488104812488551253836156494412x^{30} \\
& + 602733132978025015539972306763269356694723x^{29} - 75657550530238560567564832465918129450573x^{28} \\
& + 8883682779620708497014362847653861413872x^{27} - 971875320372166677407922243420697610663x^{26} \\
& + 98534825191761089609265874805355318687x^{25} - 9189253210485381832768469226798168077x^{24} \\
& + 779442384966136549958627866012748423x^{23} - 59012906619949767531288773139867455x^{22} \\
& + 3845953582977736963079436642919696x^{21} - 197099229113974036917550559274814x^{20} \\
& + 5292802547783405050936604984656x^{19} + 373035447202117049725952469283x^{18} \\
& - 77596506283090099467584030538x^{17} + 8167182777939867059910623158x^{16} \\
& - 661371544219142909103681829x^{15} + 44836253686866816392727278x^{14} \\
& - 2615582192513759386391326x^{13} + 132326561350181298705400x^{12} \\
& - 5789711318908782442591x^{11} + 216507299180594552002x^{10} \\
& - 6754590417985251086x^9 + 167279960378322251x^8 \\
& - 2883766637590816x^7 + 15171573646232x^6 \\
& + 1034726376990x^5 - 43935972146x^4 \\
& + 988301639x^3 - 14215547x^2 \\
& + 124457x - 512) \\
& /((x-1)/(2x-1)^4/(3x-1)/(4x-1)^2/(5x-1)^2/(6x-1)^2/(8x-1)^2/(x^2-3x+1)/(2x^2-5x+1)/(2x^2-6x+1)^2/(3x^2-5x+1)/(3x^2-6x+1)/(4x^2-6x+1)/(5x^2-5x+1)/(4x^2-7x+1)/(6x^2-6x+1)/(6x^2-8x+1)^2/(x^3-5x^2+6x-1)^2/(10x^2-8x+1)^2/(11x^2-8x+1)^2/(14x^2-8x+1)^2/(2x^3-12x^2+7x-1)/(3x^3-12x^2+7x-1)/(4x^3-15x^2+8x-1)^2/(6x^3-14x^2+8x-1)/(7x^3-15x^2+8x-1)^2/(6x^3-16x^2+8x-1)/(7x^3-17x^2+8x-1)/(8x^3-17x^2+8x-1)^2/(9x^3-17x^2+8x-1)/(10x^3-18x^2+8x-1)^2/(13x^3-19x^2+8x-1)^2/(2x^4-12x^3+18x^2-8x+1)/(2x^4-13x^3+19x^2-8x+1)/(2x^4-16x^3+20x^2-8x+1)/(3x^4-17x^3+20x^2-8x+1)^2
\end{aligned}$$

Rekurentní vzorec:

$$\begin{aligned}
a_n &= 355 \cdot a_{n-1} - 62230 \cdot a_{n-2} \\
& + 7181407 \cdot a_{n-3} - 613713773 \cdot a_{n-4} \\
& + 41424053008 \cdot a_{n-5} - 2300132364916 \cdot a_{n-6} \\
& + 108057442428713 \cdot a_{n-7} - 4383953038266400 \cdot a_{n-8} \\
& + 156019190373932213 \cdot a_{n-9} - 4931027930452931529 \cdot a_{n-10} \\
& + 139784688779506280122 \cdot a_{n-11} - 3583425170015054558692 \cdot a_{n-12} \\
& + 8364289832087743078649 \cdot a_{n-13} - 1788040425415361381095757 \cdot a_{n-14} \\
& + 35181295448283382870926529 \cdot a_{n-15} - 639901931020563711201074856 \cdot a_{n-16} \\
& + 10800089806681857038851260471 \cdot a_{n-17} - 169708489277667670527670553256 \cdot a_{n-18} \\
& + 2490164949669281400008934703650 \cdot a_{n-19} - 34209628251326791851770501894019 \cdot a_{n-20} \\
& + 441055288914550947143816216610085 \cdot a_{n-21} - 5347966902979544937526517923821060 \cdot a_{n-22} \\
& + 61104504039422023705912415093725325 \cdot a_{n-23} - 659032554611721554539403323301392328 \cdot a_{n-24} \\
& + 6720192949816044716232213169179554002 \cdot a_{n-25} - 64882805116093293907803507888980509652 \cdot a_{n-26} \\
& + 593920909802707572074736203520468111015 \cdot a_{n-27} - 5160703522797399132569345666788973860423 \cdot a_{n-28} \\
& + 42614522062811899586385927814456985353588 \cdot a_{n-29} - 334751895136451803946683064352275034359880 \cdot a_{n-30} \\
& + 2503907651659320142301076243661317011090301 \cdot a_{n-31} - 17849439080689433456741551238042933830148067 \cdot a_{n-32} \\
& + 121365103409983215634920731453706282402989836 \cdot a_{n-33} - 787682779457226999619540178398463725925966321 \cdot a_{n-34}
\end{aligned}$$

Explicitní vzorec (koeficienty pouze numericky) (*V. Kotěšovec, 10.3.2010*):

$$\begin{aligned}
 f_7(n) = & (c1 * n + c2) * 8^n + (c3 * n + c4) * 6^n + (c5 * n + c6) * 5^n + (c7 * n + c8) * 4^n + c9 * 3^n + (c10 * n^3 + c11 * n^2 + c12 * n + c13) * 2^n + c14 \\
 & + (c15 * n + c16) * (3 + \sqrt{7})^n + (c17 * n + c18) * (3 - \sqrt{7})^n + (c19 * n + c20) * (4 + \sqrt{10})^n + (c21 * n + c22) * (4 - \sqrt{10})^n \\
 & + (c23 * n + c24) * (4 + \sqrt{6})^n + (c25 * n + c26) * (4 - \sqrt{6})^n + (c27 * n + c28) * (4 + \sqrt{5})^n + (c29 * n + c30) * (4 - \sqrt{5})^n \\
 & + (c31 * n + c32) * (4 + \sqrt{2})^n + (c33 * n + c34) * (4 - \sqrt{2})^n + c35 * \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + c36 * \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + c37 * \left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)^n + c38 * \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}\right)^n \\
 & + c39 * \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right)^n + c40 * \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right)^n + c41 * (3 + \sqrt{6})^n + c42 * (3 - \sqrt{6})^n + c43 * (3 + \sqrt{5})^n + c44 * (3 - \sqrt{5})^n \\
 & + c45 * \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + c46 * \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + c47 * \left(\frac{7 + \sqrt{33}}{2}\right)^n + c48 * \left(\frac{7 - \sqrt{33}}{2}\right)^n + c49 * (3 + \sqrt{3})^n + c50 * (3 - \sqrt{3})^n \\
 & + (c51 * n + c52) * \left(\frac{2 * \left(3 + \sqrt{21} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{3 * \sqrt{3}}{2}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + (c53 * n + c54) * \left(\frac{-2 * \left(-3 + \sqrt{21} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{3 * \sqrt{3}}{2}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + (c55 * n + c56) * \left(\frac{-2 * \left(-3 + \sqrt{21} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{3 * \sqrt{3}}{2}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n \\
 & + (c57 * n + c58) * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{19} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{26}{19 * \sqrt{19}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + (c59 * n + c60) * \left(\frac{2 * \left(4 + \sqrt{19} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{26}{19 * \sqrt{19}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + (c61 * n + c62) * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{19} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{26}{19 * \sqrt{19}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n \\
 & + (c63 * n + c64) * \left(\frac{2 * \left(4 + \sqrt{19} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{7}{2 * \sqrt{19}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + (c65 * n + c66) * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{19} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{7}{2 * \sqrt{19}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + (c67 * n + c68) * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{19} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{7}{2 * \sqrt{19}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n \\
 & + (c69 * n + c70) * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{8}{13 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + (c71 * n + c72) * \left(\frac{2 * \left(4 + \sqrt{13} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{8}{13 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + (c73 * n + c74) * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{8}{13 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n \\
 & + (c75 * n + c76) * \left(\frac{8}{3} + \frac{2 * \sqrt{10} * \cos\left(\frac{4 * \pi + \arccos\left(-\frac{1}{10 * \sqrt{10}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + (c77 * n + c78) * \left(\frac{8}{3} + \frac{2 * \sqrt{10} * \cos\left(\frac{\arccos\left(-\frac{1}{10 * \sqrt{10}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + (c79 * n + c80) * \left(\frac{8}{3} + \frac{2 * \sqrt{10} * \cos\left(\frac{2 * \pi + \arccos\left(-\frac{1}{10 * \sqrt{10}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (c81 * n + c82) * \left(\frac{8}{3} + \frac{2 * \sqrt{7} * \cos\left(\frac{4 * \pi + \arccos\left(\frac{1}{2 * \sqrt{7}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n + (c83 * n + c84) * \left(\frac{8}{3} + \frac{2 * \sqrt{7} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{1}{2 * \sqrt{7}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n + (c85 * n + c86) * \left(\frac{8}{3} + \frac{2 * \sqrt{7} * \cos\left(\frac{2 * \pi + \arccos\left(\frac{1}{2 * \sqrt{7}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n \\
& + c87 * \left(\frac{7 + 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{8}{13 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n + c88 * \left(\frac{7 + 2 * \sqrt{13} * \cos\left(\frac{\arccos\left(-\frac{8}{13 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n + c89 * \left(\frac{7 - 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(-\frac{8}{13 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n \\
& + c90 * \left(\frac{7 - 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n + c91 * \left(\frac{7 + 2 * \sqrt{13} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n + c92 * \left(\frac{7 - 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n \\
& + c93 * \left(\frac{2 * \left(4 + \sqrt{22} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{89}{22 * \sqrt{22}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + c94 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{22} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{89}{22 * \sqrt{22}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + c95 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{22} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{89}{22 * \sqrt{22}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n \\
& + c96 * \left(\frac{-8 * \left(-1 + \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{17}{64}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + c97 * \left(\frac{8 * \left(1 + \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{17}{64}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + c98 * \left(\frac{-8 * \left(-1 + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{17}{64}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n \\
& + c99 * \left(\frac{2 * \left(4 + \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + c100 * \left(\frac{2 * \left(4 + \sqrt{13} * \cos\left(\frac{\arccos\left(-\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + c101 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(-\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n \\
& + c102 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{43}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + c103 * \left(\frac{2 * \left(4 + \sqrt{13} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{43}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + c104 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{43}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n \\
& + (c105 * n + c106) * \left(-\sqrt{3} * \sqrt{\frac{2 - \sqrt{7} * \cos\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(187 * \frac{\sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}{3}} + \sqrt{3} * \sqrt{\frac{\sqrt{7} * \sin\left(\frac{\arctan\left(187 * \frac{\sqrt{5871}}{17613}\right)}{3} + \frac{\pi}{3}\right)}{3}} + 2 - \sqrt{3} * \sqrt{\frac{2 - \sqrt{7} * \sin\left(\frac{\arctan\left(187 * \frac{\sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}{3}} + 2 \right)^n \\
& + (c107 * n + c108) * \left(-\sqrt{3} * \sqrt{\frac{2 - \sqrt{7} * \cos\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(187 * \frac{\sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}{3}} - \sqrt{3} * \sqrt{\frac{\sqrt{7} * \sin\left(\frac{\arctan\left(187 * \frac{\sqrt{5871}}{17613}\right)}{3} + \frac{\pi}{3}\right)}{3}} + 2 + \sqrt{3} * \sqrt{\frac{2 - \sqrt{7} * \sin\left(\frac{\arctan\left(187 * \frac{\sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}{3}} + 2 \right)^n \\
& + (c109 * n + c110) * \left(\sqrt{3} * \sqrt{\frac{2 - \sqrt{7} * \cos\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(187 * \frac{\sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}{3}} + \sqrt{3} * \sqrt{\frac{\sqrt{7} * \sin\left(\frac{\arctan\left(187 * \frac{\sqrt{5871}}{17613}\right)}{3} + \frac{\pi}{3}\right)}{3}} + 2 + \sqrt{3} * \sqrt{\frac{2 - \sqrt{7} * \sin\left(\frac{\arctan\left(187 * \frac{\sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}{3}} + 2 \right)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(c111 * n + c112) * \left(\sqrt{3} * \sqrt{\frac{2 - \sqrt{7} * \cos\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(\frac{187 * \sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}{3}} - \sqrt{3} * \sqrt{\frac{\sqrt{7} * \sin\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(\frac{187 * \sqrt{5871}}{17613}\right) + \frac{\pi}{3}\right)}{3}} + 2} - \sqrt{3} * \sqrt{\frac{2 - \sqrt{7} * \sin\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(\frac{187 * \sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}{3}} + 2} \right)^n \\
&+c113 * \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10 + 4 * \sqrt{2}}}{2}\right)^n + c114 * \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{10 + 4 * \sqrt{2}}}{2}\right)^n + c115 * \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10 - 4 * \sqrt{2}}}{2}\right)^n + c116 * \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{10 - 4 * \sqrt{2}}}{2}\right)^n \\
&+c117 * \left(\sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right) + \frac{\pi}{3}\right)}{6}} - \sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \sin\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right)}{6}} - \sqrt{6} * \sqrt{\frac{\sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right) + 5}{6}} + 2} \right)^n \\
&+c118 * \left(\sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right) + \frac{\pi}{3}\right)}{6}} + \sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \sin\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right)}{6}} + \sqrt{6} * \sqrt{\frac{\sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right) + 5}{6}} + 2} \right)^n \\
&+c119 * \left(-\sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right) + \frac{\pi}{3}\right)}{6}} - \sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \sin\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right)}{6}} + \sqrt{6} * \sqrt{\frac{\sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right) + 5}{6}} + 2} \right)^n \\
&+c120 * \left(-\sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right) + \frac{\pi}{3}\right)}{6}} + \sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \sin\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right)}{6}} - \sqrt{6} * \sqrt{\frac{\sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right) + 5}{6}} + 2} \right)^n \\
&+c121 * \left(2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^n + c122 * \left(2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^n + c123 * \left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^n + c124 * \left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^n
\end{aligned}$$

Poslední čtveřici je možno vyjádřit i pomocí trigonometrických funkcí takto:

$$c121 * \left(2 * \cos\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right)^{2n} + c122 * \left(2 * \sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right)^{2n} + c123 * \left(2 * \cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\right)^{2n} + c124 * \left(2 * \sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\right)^{2n}$$

Jde o kořeny rovnice:

$$x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 2 = 0$$

Mocniny u c113 až c116 (na předchozí straně) byly kořenem

$$x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 12x + 2 = 0$$

c99 = 65729.1734408568020190180487666311983873434723300301889668659244004767...
c100= -351421283.56736268041528455131745049642192121685937827804956964019843...
c101= -0.2209597721054416909805158293677972331929171219613182133347560931811...
c102= 63806.8433157732580565966692328351246417296969139414022293145001307833...
c103= 106067496.062181708363723699178029548504389941086564015383676809828018...
c104= -7.7557249983637804106226527903867684602166429258507276189217096365605...
c105= -10990.502094260906099854937164714816308556471355493338888609852938734...
c106= 796664.578084611576513374746315344811039229353152218107789040707168445...
c107= 3.42553524422976866739235648617832403177108327934679516098473504619718...
c108= -55.082763815114658159727906819116256973588195264392146950292860119993...
c109= 116339.605963276828102984736207359920973697638957698185595871419967177...
c110= 11741826.4210651375339710989687041878838736402065284173422045578354351...
c111= 0.00011506747247743186432789794029066319068897147611311957447669929224...

c112= 0.01717462619438062564275195406012015971059205369375980228238879814331...
c113= 297164617.988797253492622126578428628146403470949975951831690874970220...
c114= 11.0101288905225167747959473718233523663757490717563929558432009986284...
c115= 143189.909542810211580693958942886818350604240893021356076158687861907...
c116= 0.23017092280242630470989711521090523202326048349566922383434325398539...
c117= -2.5658607531902114380352029487855661183294331639987441801555104931165...
c118= -395912.48142170558091848222933219431726569377120728378700530416542161...
c119= 14633.1801096354679289574548165093899207056903769406041445301142492612...
c120= 0.00298900237495411267491132072096123182954379344971397512783318030682...
c121= -43179.243392868284276806655289433218343995546632636348079336697112389...
c122= 0.10798060687432243641608482053961524603557548449471501166425096728679...
c123= -1452319.0364650781831740895246618216571411100861070867846965269145675...
c124= 0.00002663846703637260446437833402273039281772473940273688099062330979...

2.3.8) $m=8$ / Number of ways to place $8n$ non-attacking kings on a $16 \times 2n$ chessboard - A174558

Matice velikosti 2304 x 2304 byla zatěžkávací zkouškou současných matematických programů. Programy Matlab 7 (který zvládl případ $m=7$) a Mathematica 7 už neměly šanci. S případem $m=8$ si poradila až **Mathematica 8**, která (pomocí funkce LinearSolve) dokázala najít vytvořující funkci za **63 hodin 8 minut!** Z toho 51 hodin 25 minut trvalo řešení soustavy 2304 lineárních rovnic (na symbolické úrovni!) a zbylých necelých 12 hodin trvalo provedení funkce Factor na výsledném součtu. Program potřeboval paměť 1873 MB RAM. Výsledkem je racionální lomená funkce, v jejímž čitateli je polynom 306. stupně a ve jmenovateli polynom 307. stupně! Na základě této funkce jsem pak doplnil nové hodnoty do tabulky na straně 158 a současně ověřil, že prvních 9 hodnot (vypočtených jinou metodou již dříve) se shodovalo. Je třeba si ale uvědomit, že např. výpočet hodnoty pro $n=20$ představuje provést dvacátou derivaci v nule vytvořující funkce a to je bez počítače absolutně nemožné - přesto, výpočty hodnot pak již nejsou časově příliš náročné.

Vytvořující funkce (*Generating function*) (V. Kotěšovec, 28.11.2010):

```

-(x*(95152124738030787809159027469828519403305641137398977449294320107520000000000000000x^306
-29150299402242557705420693236099828420632256048567429389095467852234752000000000000000x^305
+442134271966302555278632235392305787685660180787940043825108129511553105920000000000000x^304
-442714930299650421227580712678963049464042700688835155368914008393771154145280000000000000x^303
+32925828592963275554181587510493636491749723646832406633316706271760682087088128000000000000x^302
-1940214277458388370004103280455160931681532006755107988844209568701156565844597145600000000000x^301
+9436678872579287413482592894415945846909263947016311171698409069006020755204132044800000000000x^300
-389677378022998230718971479457984612537269644183377596762139660154063190856358248736358400000000x^299
+139471866056836383388884764381953317056230372763067528770551977139049679016042083541372108800000000x^298
-439567356015948541334902025671471041833400382466186731660389686628429548910213188196438638592000000x^297
+12352018798920472593823035043128365163166733397836379610254063248136038240577041958550234359398400000x^296
-312614402284063721350400812930498812421192249113546828318285065009211971540979574764570956770836480000x^295
+7185575730664866620836723761790485122118163472128935543662177740112924775757322458188531910544719872000x^294
-151056707472433874627910950903353807885064182381771029077545181353365305526358811228186636646623477760000x^293
+2921720119407571356562334157215974036106228455912251759087950666740363893231724877424634833858177993277440x^292
-52263054856512236521986227317812342285077444181224282831967027287104108741160580088094683305808619414487040x^291
+868476718217890288048646259490913840460441480318028794640479183677715932436659854314951778555290803131908096x^290
-13459933147484033094196388671499784462210693862703746519255152435144364560435871142168720166500314105579044864x^289
+19523960372257441390121461660462404455563442850066776466488337842725864781017402839920827496879845140206714880x^288
-2658818118808167167717909126363764067832141813456311597320194833191908891094791350119306735001532749378054258688x^287
+34089608598410805423669117978631701560398801035458233579003219713348617447344403493467012888148758455178175184896x^286
-412540737923639190412839623565828673934257253746763602577686773896391727996488854678262034564261454576292043161600x^285
+4723023746125849923348217019617628174786024513080455210759425152424990891575898381721011766298826580751911298793472x^284
-512614265875605453952533447203623616719338458112710637835973339357720776084883082374084071717986664820352858718208x^283
+528457845407065929716776342196679387175418001652177180296945103604283447001272123703562383608110263492328793960873984x^282
-5183741872741082891685515838485962563161871675586218960547466561807938050853896343753989340873596206265490115653533696x^281
+48461220342424581410282330927160266419012256264791681466376262202493952689563889821534421011262920655305851174207488000x^280
-432429163001301130087410044514159927993632465674953099944521187698672273258155723793476747095787760891848959407641919488x^279
+3688160245368714876431066753825995159715480638087764727120372028317351828058450443745574231304381803960370891171157704704x^278
-3010517007827899014188895544633915928781777089901984672138995884169063380893212941054121939787620228119636299263449874432x^277
+235468745021708929079288670619991550158635390422839219189990498907543471844945823896295983752197900426107345227487922724864x^276
-1766755729731225213356418253996076826421977641218383857657945497423518824514058377980126182210572616906818259920566382133248x^275
+12730047204943514377035911718833225334332824882828645988280921410560686686367014505651286166583640659682934239712615907739648x^274
-88170820976392549241672712923661055470711271098592984893445302636657001699325393806188456996878155257825196142614427734797312x^273
+587579475310790549517559722510997499385630697940110700239411466826968926579076699220818398586981544230384565055472607184954368x^272
-3770833252212345464657485950078224925434044530464661888733933931219274920366627098334659755136360238031849489791511807278174976x^271

```


+13418454659754233863892377335734380892009943932075382327338197465481x^38
 -662942970899563925922658737366626185756497217344121488815634682151x^37
 +30853628776624051195562394125265675187377878726657802137174635555x^36
 -1337315330766419482260706268495341358916553567021582486851434838x^35
 +52914764884343999735009093058561230343676335376522117415835565x^34
 -1834369488419024386672186952336332234122646051427615615275754x^33
 +49805110423133033890502011715673709024662092858966511648191x^32
 -548145751876151967729470527359736287545149061220443325606x^31
 -5276384955598510351690261898277166890562002715822118964x^30
 +5502942852726020605003137783465486153573376069293071320x^29
 -356462200655912413056922064545987689470075421123389625x^28
 +19037906413645730657544964761120542698780554139818005x^27
 -900271733710659245921771709894873914961770366127390x^26
 +38772561162214927910340614309146571886019839868503x^25
 -1541278565507699113334428870384382228467071524314x^24
 +56936354647327154973584953237352514239857418312x^23
 -1961044872539296353452600623844632896984304910x^22
 +63052399837916358639552897934467763256899297x^21
 -1892059057841782357500946137489666813989396x^20
 +52917885061183356498072638699041909996037x^19
 -1376215045149575872565911157210351344622x^18
 +33168492263964177463334521015122138468x^17
 -737486160007228189240123394721467128x^16
 +15036873972391791682775890886549001x^15
 -278877277057533255895438933491933x^14
 +4651342435478162499840816451046x^13
 -68585000846898863638196152007x^12
 +868754183793799461425563550x^11
 -8919057398008822360907476x^10
 +62652181184864639024515x^9
 -26475518425561849091x^8
 -7830201665053956801x^7
 +150723801419171023x^6
 -1829331413132458x^5
 +16282474809250x^4
 -107822046729x^3
 +510316107x^2
 -1554595x
 +2304))

$$\begin{aligned}
 & /((x-1)^2(2x-1)(3x-1)^3(4x-1)(5x-1)(6x-1)(9x-1)^2(x^2-5x+1)(x^2-3x+1)^2(2x^2-5x+1)(3x^2-6x+1)^2(4x^2-6x+1)^2(5x^2-8x+1)(6x^2-6x+1)^4(7x^2-9x+1)^2(7x^2-7x+1)(7x^2-6x+1)(8x^2- \\
 & 7x+1)(12x^2-9x+1)^2(13x^2-9x+1)^2(15x^2-9x+1)^2(16x^2-9x+1)(17x^2-9x+1)^2(19x^2-9x+1)^2(x^3-8x^2+6x-1)(x^3-7x^2+6x-1)^2(x^3-6x^2+5x-1)(2x^3-8x^2+6x-1)(3x^3-9x^2+6x- \\
 & 1)^2(4x^3-16x^2+8x-1)(4x^3-15x^2+8x-1)(5x^3-18x^2+9x-1)^2(5x^3-17x^2+9x-1)^2(6x^3-16x^2+8x-1)(7x^3-17x^2+8x-1)^2(8x^3-21x^2+9x-1)^2(8x^3-20x^2+9x-1)^2(8x^3-19x^2+9x- \\
 & 1)^2(8x^3-17x^2+9x-1)(9x^3-22x^2+9x-1)(9x^3-19x^2+9x-1)(9x^3-18x^2+9x-1)^2(11x^3-22x^2+9x-1)^2(11x^3-21x^2+9x-1)^2(12x^3-21x^2+9x-1)^2(13x^3-22x^2+9x-1)^2(14x^3-23x^2+9x- \\
 & 1)^2(15x^3-22x^2+9x-1)(16x^3-23x^2+9x-1)^2(17x^3-24x^2+9x-1)^2(19x^3-24x^2+9x-1)^2(x^4-9x^3+18x^2-8x+1)(3x^4-20x^3+24x^2-9x+1)(3x^4-18x^3+24x^2-9x+1)^2(3x^4-17x^3+23x^2- \\
 & 9x+1)(3x^4-16x^3+22x^2-9x+1)(3x^4-15x^3+21x^2-9x+1)^2(4x^4-22x^3+25x^2-9x+1)(4x^4-21x^3+24x^2-9x+1)(4x^4-19x^3+24x^2-9x+1)(4x^4-17x^3+22x^2-9x+1)(5x^4-26x^3+26x^2- \\
 & 9x+1)(5x^4-24x^3+25x^2-9x+1)^2(5x^4-23x^3+25x^2-9x+1)(5x^4-22x^3+24x^2-9x+1)(5x^4-20x^3+24x^2-9x+1)(7x^4-26x^3+26x^2-9x+1)^2(8x^4-27x^3+26x^2-9x+1)^2(9x^4-28x^3+26x^2- \\
 & 9x+1)(11x^4-31x^3+27x^2-9x+1)(x^5-15x^4+35x^3-28x^2+9x-1)(x^5-12x^4+31x^3-27x^2+9x-1))
 \end{aligned}$$

-28352627262765653852479115764293713415471703380767609628775718514094306794051917829820453307094554553599121*a[n-78]
+4042610609145061967956778254544979748158903735399845576773810791927298122999874686936351398746120851078558*a[n-77]
-565231155352093926249081081717302673637173718450211990743850439623021022954954787010361993800362966062428*a[n-76]
+77486162359871902419755029985017774570864474093840366343775896731727595470057234540492361136471389394970*a[n-75]
-10413395532785240623383539462723336637122481435215633269412334198682351855338172803393942043918793708029*a[n-74]
+1371718181003800977727141308958901335870849644887788540043417645846463637704797506817638133222904065925*a[n-73]
-177081715717309777416035289994849577428512681680970352844050515885663250434217201908075647565490755045*a[n-72]
+22400027272920169590369244278825854364848527742030247674414657660170062780270353252975140680177720619*a[n-71]
-2775982421436567303133211627016272662207389993644549535703822290955911536829718880939019190238267721*a[n-70]
+336979198258678084594560929295953638762330156973995506168799211218041976088777798616103294477555467*a[n-69]
-40061758183369629826800203916833350035708402510169597103284065323734220470477060310192681731755519*a[n-68]
+4663554900552019565166460061361056121616858256284204712711678722445373650384305166560379700608331*a[n-67]
-531473014699035474747785298287655797658971320091399680988792177820173922008832328062034659445197*a[n-66]
+5928384089031309001547119496343613024666580601170173387766792196157490514891800183431223310944*a[n-65]
-6471327181216574603247196459736934719717521429240865865893232580817056733274508620436288116503*a[n-64]
+691130471644246114698430120993902286608748386652390320661556075642957863767999935428730748160*a[n-63]
-72200601614840805262584228395018206514758675644595224816851594506834717816582746694143253858*a[n-62]
+7376267277371984457788289226271040804735179804185490752681871300030275117746914845112117133*a[n-61]
-736791917514180395498183801839831866674646875390681083158734061242852032493208930687279934*a[n-60]
+71938098774704772267959297883783376236966791119904494714387901926259667278552072563445685*a[n-59]
-6863860827641355969788925177719796143654510880988822606948228989852157492442621877858297*a[n-58]
+639821323073021921397387054229383897179944678118349597378033274796538354683355835718565*a[n-57]
-58251964976811919836759936158458953656679587050366519052611562568985889126010942827315*a[n-56]
+5178456573586465084454031288282213898037791520645668810146837683933286102894230601836*a[n-55]
-449365115775429796646285622316307119823974859255027326938270834401672626055169871768*a[n-54]
+38051680668714930359461544680530393479107878197772153364742846596897423017833023294*a[n-53]
-3143290927564430729040950516387089410682129454811539717158463619548031569633124174*a[n-52]
+253213345953482074421715424537600209726526718084896894513303113258823918303111069*a[n-51]
-19885148455218304835044232494387763151132524430434513304540706168857532142450500*a[n-50]
+1521786894894098808162295551499841640661217452638224816014548190679295590630251*a[n-49]
-113448120762481114352395456486644353729043072208061066802374916658882299874504*a[n-48]
+8235457151488900531685063297162488355099080498150515579004699154525917234139*a[n-47]
-581896635787850483025880035051453978756656595108016861585710005678823272937*a[n-46]
+40002241117479555343980056822874570446884018860251836958192988375860974417*a[n-45]
-2674281045771477459621859489775430019093281729066131197293083148731694662*a[n-44]
+173783534673027606063832210853148932128865424447096063189419671008457000*a[n-43]
-10971695504907307250245464198749567844711303789248081584612196442687533*a[n-42]
+672630357876606747147165862766461160388394189164945631300072318475474*a[n-41]
-40020218221038774789652888495610582815181836103180038967527721826808*a[n-40]
+2309580775117335011640124431039704868923563840928996634133804413706*a[n-39]
-129203676435172854556266822674571853778958775002799955036182643912*a[n-38]
+7002090631428580445234412140484376802842878440110149641084352992*a[n-37]
-367366504706399098113909927161212324438839942354120170746944833*a[n-36]
+18645826541096100671451635694913602519787301823460284756153696*a[n-35]
-914844579585963448409703463689171306167370370489844568956454*a[n-34]
+43356122908127073345068012890818007143174315062031928843984*a[n-33]
-1983004066764975796344993261737959261790424491544545636214*a[n-32]
+87453305934674557149618727981913586617807600079673863989*a[n-31]
-3715286730246457622383756042840392472570989584759686646*a[n-30]
+151889603676177919074971617554791291398522475670381657*a[n-29]
-5969098952381375523653730803176147354667721891325201*a[n-28]
+225229870147244294861612253692285132381785932753265*a[n-27]
-8149547358659012936813300576578677275087171953732*a[n-26]
+282386021136843439104718325764959392568867395336*a[n-25]
-9356645771644197417087251014476307955430871589*a[n-24]
+295989969184751012621946914130107076564072070*a[n-23]
-8924150167576441058919447173492654739224733*a[n-22]
+255962245476594968616963398047736527409174*a[n-21]

-6969693498743079664845750786736001043048*a[n-20]
+179763701127271433603692602727266220184*a[n-19]
-4380881105705551363955356880703839201*a[n-18]
+100599312236886362137574200913724336*a[n-17]
-2170039963820427453799061389050155*a[n-16]
+43820951835573367061801101945955*a[n-15]
-825172857250801454435796840439*a[n-14]
+14425472524808367088582302920*a[n-13]
-232928737020983103397025936*a[n-12]
+345345592443904874378651*a[n-11]
-46687800683346103210627*a[n-10]
+570787798148163081625*a[n-9]
-624755091599729168*a[n-8]
+60467465774386020*a[n-7]
-509421615754393*a[n-6]
+3659561949493*a[n-5]
-21794630695*a[n-4]
+103303917*a[n-3]
-365350*a[n-2]
+857*a[n-1]

Numerické řešení dává tento výsledek: $f_8(n)=$

9.00000000000000000000000000000000... $\wedge n$ * (-3.0198821339627005377862437072... $\cdot 10^{10}$) + 1.1783308745133041275204711131... $\cdot 10^{8n}$) +
8.1400549446402591355486512457... $\wedge n$ * (4.89424070127305182327958748181... $\cdot 10^{10}$) + 1.2893540000214252873195485626... $\cdot 10^{8n}$) +
7.3722813232690143299253057341... $\wedge n$ * (-4.2445874985300792874459036137... $\cdot 10^{10}$) + 4.6345256345156003023087005855... $\cdot 10^{8n}$) +
7.3166247903553998491149327366... $\wedge n$ * (-5.9431908251740115876285490183... $\cdot 10^{10}$) +
7.1925824035672520156253552457... $\wedge n$ * (4.24897283242339690011028023422... $\cdot 10^{10}$) + 6.4634505497671663585910609268... $\cdot 10^{8n}$) +
6.7912878474779200032940235968... $\wedge n$ * (-7.9425801359796795343696594813... $\cdot 10^{10}$) + 2.5440724579989218627640736282... $\cdot 10^{8n}$) +
6.6118587098040436870078150572... $\wedge n$ * (-9.2086831252315606356778032331... $\cdot 10^{10}$) +
6.5615528128088302749107049279... $\wedge n$ * (+7.9032171721391331835404623633... $\cdot 10^{10}$) +
6.5046643535880477051501085259... $\wedge n$ * (-3.7521834658637454016875134422... $\cdot 10^{10}$) - 3.5322583136903803624470116288... $\cdot 10^{8n}$) +
6.4114741278097728385130038557... $\wedge n$ * (-3.8062411553571407673266189161... $\cdot 10^{10}$) + 1.3991858726151529890814925814... $\cdot 10^{7n}$) +
6.3027756377319946465596106337... $\wedge n$ * (8.97459708800623879565354137635... $\cdot 10^{10}$) - 2.1732637126756996361162479238... $\cdot 10^{8n}$) +
6.2465513645585649390603852615... $\wedge n$ * (-5.0317085645462651404154177125... $\cdot 10^{10}$) - 4.9992904411469321376314339328... $\cdot 10^{8n}$) +
6.1474302336977534231706649934... $\wedge n$ * (-3.7840848075491459740783852316... $\cdot 10^{10}$) +
6.1004319858103793059913228723... $\wedge n$ * (1.66605317983587527223802668577... $\cdot 10^{10}$) - 8.2548336119667516200111552075... $\cdot 10^{6n}$) +
6.000000000000000000000000000000... $\wedge n$ * (-3.8125459450522049933019753885... $\cdot 10^{10}$) +
5.8188044082259428741444390166... $\wedge n$ * (-8.8614154605461624499754580760... $\cdot 10^{10}$) + 1.7242847600574600553531442527... $\cdot 10^{7n}$) +
5.7912878474779200032940235968... $\wedge n$ * (+1.7856679754059240255485805639... $\cdot 10^{10}$) +
5.7784571182583887318756139886... $\wedge n$ * (1.13838393078504797523083841453... $\cdot 10^{10}$) - 6.9061188618890801077541104228... $\cdot 10^{7n}$) +
5.6690790882822883959576523491... $\wedge n$ * (-1.4333600812447766358119467438... $\cdot 10^{10}$) - 3.3842541924848139013447502223... $\cdot 10^{8n}$) +
5.6180339887498948482045868343... $\wedge n$ * (-6.8509798218394992070414259826... $\cdot 10^{10}$) - 1.3450240849565987791997892099... $\cdot 10^{8n}$) +
5.6016791318831542524643703601... $\wedge n$ * (5.02646787072634782435351333909... $\cdot 10^{10}$) + 8.7207154506496333638723945301... $\cdot 10^{7n}$) +
5.5806494859049152097146696975... $\wedge n$ * (+1.8249138492430698155146805710... $\cdot 10^{10}$) +
5.5615528128088302749107049279... $\wedge n$ * (+3.0817652118436619139734977333... $\cdot 10^{10}$) +
5.5238273960027878205959781982... $\wedge n$ * (-7.1354220721031737855900163202... $\cdot 10^{10}$) +
5.4908636153610320832578586942... $\wedge n$ * (-4.5768737967070681532962411943... $\cdot 10^{10}$) +
5.4494897427831780981972840747... $\wedge n$ * (1.67018532189378129339264242111... $\cdot 10^{10}$) - 4.5156542619439519078006400905... $\cdot 10^{7n}$) +
5.3614687661858265774520738393... $\wedge n$ * (8.22287380460943769671228321843... $\cdot 10^{10}$) - 1.6195308246153055217469632550... $\cdot 10^{8n}$) +
5.3300587395679820293055799707... $\wedge n$ * (-8.1610960308899431662798434132... $\cdot 10^{10}$) - 2.9542728889034826370393670185... $\cdot 10^{8n}$) +
5.3234042760864776257716827907... $\wedge n$ * (-6.5464508497071936787128134724... $\cdot 10^{10}$) +
5.2360679774997896964091736687... $\wedge n$ * (7.00263335742492855650215800707... $\cdot 10^{10}$) - 1.6190209850516444760298810070... $\cdot 10^{6n}$) +
5.1580660243232453481209760063... $\wedge n$ * (-2.5059002790571145027630597959... $\cdot 10^{10}$) +
5.1284190638445773678511798864... $\wedge n$ * (-7.2478674072681738572445976028... $\cdot 10^{10}$) + 11388.726815685335400200346404... $\cdot n$) +
5.1149075414767557985156140607... $\wedge n$ * (6.58222545636619677102701597829... $\cdot 10^{10}$) + 990202.73940516059970491074706... $\cdot n$) +
5.1058173471165319175781819404... $\wedge n$ * (+1.2269524019378689762779959400... $\cdot 10^{10}$) +

5.0861301976514940912496216372... \wedge n * (-8.4701140204904223635564739974... $\times 10^9$) +
 5.0222843396592362227312957727... \wedge n * (+4.1184072429404288694146764020... $\times 10^8$) +
 5.0000000000000000000000000000... \wedge n * (-7.7377582172346712353580485448... $\times 10^8$) +
 4.9290583563976320859565022554... \wedge n * (-5.7006952165633158990032129862... $\times 10^8$) +
 4.9032119259115532874852162240... \wedge n * (+4.1330521620005717098862403770... $\times 10^9$) +
 4.8793852415718167681082185546... \wedge n * (-3.3265967493176753080400653782... $\times 10^{10}$ +505156.62088548750885653346546... $\times n$) +
 4.8760299323938095983107496202... \wedge n * (+2.6846422118136797783718091920... $\times 10^{10}$) +
 4.8608058531117033863858361808... \wedge n * (-6.4157500003764727329761988753... $\times 10^9$ +1.1338277238952327690442997253... $\times 10^7 \times n$) +
 4.8342431843139217171156261258... \wedge n * (+8.8405634150557992410127276360... $\times 10^9$) +
 4.7912878474779200032940235968... \wedge n * (-2.3545576108136755851180871538... $\times 10^8$) +
 4.7625127088298676859976516208... \wedge n * (-7.8844461950486205595565694800... $\times 10^8$ +1.1328837923879318689951646217... $\times 10^7 \times n$) +
 4.7580162627198715615392182742... \wedge n * (+1.45840872228076115713206855474... $\times 10^8$) +
 4.7320508075688772935274463415... \wedge n * (1.49137929861771853513729357618... $\times 10^9$ +1.7353740760630450469509739046... $\times 10^7 \times n$ +69051.917105356611537694583339... $\times n^2$ -454.990405346642660804630626... $\times n^3$) +
 4.6996281482753179562297282916... \wedge n * (-4.6856055519398977725545152004... $\times 10^8$ -293218.11532714190843619385227... $\times n$) +
 4.61128405353112491949611375074... \wedge n * (4.52538815590151667884646175126... $\times 10^8$ -1.2720420031539024524676920768... $\times 10^6 \times n$) +
 4.6031221671731877786857266348... \wedge n * (-1.2887460033317820591923772474... $\times 10^7$) +
 4.5615528128088302749107049279... \wedge n * (-2.7674460740799589490740180667... $\times 10^8$) +
 4.5320888862379560704047853011... \wedge n * (5.12544164018616926429952741224... $\times 10^9$ -1.0484990061954021932744805169... $\times 10^7 \times n$) +
 4.5230955906316699275696530503... \wedge n * (+3.5105238777507365850076133... $\times 10^7$) +
 4.4908636153610320832578586942... \wedge n * (-5.2059516864557916264789053265... $\times 10^9$ -2.8420723286375782402295415158... $\times 10^7 \times n$) +
 4.4382832394028967194767782502... \wedge n * (+3.6760319939094376267852738305... $\times 10^8$) +
 4.4142135623730950488016887242... \wedge n * (-8.1137070829830516766208514158... $\times 10^8$) +
 4.3623398328574395034328547856... \wedge n * (3.89872977086134340886374870163... $\times 10^8$ +463992.18118278008689986417823... $\times n$) +
 4.2839978701420712519329481380... \wedge n * (+9.2347667932062076206365291230... $\times 10^6$) +
 4.2497775113741007919578257248... \wedge n * (+2.4713315828636913866721913617... $\times 10^6$) +
 4.2143197433775351874154977008... \wedge n * (-1.0567811341371536882824185849... $\times 10^7$) +
 4.1267570596172168172849817847... \wedge n * (1.67423453923452878669939320677... $\times 10^7$ -49453.147607566952274225921179... $\times n$) +
 4.1149075414767557985156140607... \wedge n * (-3.4799749437538905510911404298... $\times 10^8$) +
 4.0952939852239144927468167188... \wedge n * (+2.4776502850016305882439290548... $\times 10^8$) +
 4.0264179491869598590352025089... \wedge n * (+3.9169837563731004223516771573... $\times 10^7$) +
 4.0000000000000000000000000000... \wedge n * (+92865.513250725412734831887108... $\times n$) +
 3.8793852415718167681082185546... \wedge n * (4.13414794749849893453823395570... $\times 10^6$ -79342.255876251892673793907262... $\times n$) +
 3.6825070656623623377236232978... \wedge n * (+1.4857898414256080806514296953... $\times 10^6$) +
 3.6566204310471103661422325684... \wedge n * (-746686.95813348707995136553659... $\times n$) +
 3.3819660112501051517954131656... \wedge n * (5.12836242404600182490407309424... $\times 10^9$ -2.0798858917498086108551916326... $\times 10^7 \times n$) +
 3.3472963553338606977034332535... \wedge n * (-3.6143899345131818620680604132... $\times 10^9$ -4.4320746620317318434862472817... $\times 10^7 \times n$) +
 3.3120564934104645800244983164... \wedge n * (-1.5341851096144046312523696181... $\times 10^9$ -3.8074157061031836404847829704... $\times 10^6 \times n$) +
 3.2541016883650524121297778798... \wedge n * (1.82100443675828682985152447390... $\times 10^7$ +397317.83029734648754803262264... $\times n$) +
 3.2469796037174670610500097680... \wedge n * (-1.5438123785687013414949655667... $\times 10^7$) +
 3.2016396757234046614544000842... \wedge n * (1.19105915705424559215194905725... $\times 10^7$ +113467.84978320258126467600409... $\times n$) +
 3.1971262975999526367965303523... \wedge n * (-5.2310226537503745707733476297... $\times 10^6$ +13399.580759515450929036318257... $\times n$) +
 3.1674491911085351562744105995... \wedge n * (6.05845785850026776892164350944... $\times 10^7$ +198772.15442801327476600713840... $\times n$) +
 3.1385642651101725641475378444... \wedge n * (-6.6534153496711988243814876319... $\times 10^7$) +
 3.1117486563092476836756397799... \wedge n * (-24947.629411385073255251062539... $\times n$) +
 3.0974382786556486998819863851... \wedge n * (+1.8864091187418746739302621737... $\times 10^7$) +
 3.0000000000000000000000000000... \wedge n * (683524.591497488461951271868627... $\times n$ -60138.271006427915518824609733... $\times n$ +809.4725252525252525252525... $\times n^2$) +
 2.9137317013176489085811576052... \wedge n * (-3.4391400973722420407852445193... $\times 10^7$) +
 2.9064901072343485796620748984... \wedge n * (+3.4337899185673795334205164566... $\times 10^7$) +
 2.8699856351212955813438829965... \wedge n * (-604429.05527905433140439301847... $\times n$) +
 2.8308300260037728510585482984... \wedge n * (-3.2730455065466151001247644746... $\times 10^6$) +
 2.8257845518853550615002189835... \wedge n * (5.60618039640045950141407024753... $\times 10^7$ +3133.2098062450780344671784476... $\times n$) +
 2.8060634335253695517439154430... \wedge n * (-7.2581591763507605688777636559... $\times 10^7$) +
 2.7983603242765953385455999157... \wedge n * (-3.9736351319844378971842229384... $\times 10^8$ +253874.43261530877029933096954... $\times n$) +
 2.7852614484935653584928516638... \wedge n * (+4.0436922472291089766406018171... $\times 10^8$) +
 2.7678411015499336469518000585... \wedge n * (-5.1659272857771092400530081161... $\times 10^6$) +
 2.7608767217434455357499164966... \wedge n * (-3.6795016285242324856589816599... $\times 10^7$ +168299.12310527726146797335790... $\times n$) +
 2.7458983116349475878702221201... \wedge n * (-1.2648697821436436472064913101... $\times 10^9$ +1.4668510104813544169929156832... $\times 10^7 \times n$) +
 2.7376403052281873783738137605... \wedge n * (-2.4006655061022093792310360396... $\times 10^7$) +

2.7108314535516900309173225418...^n * (-1.0323851049731981868361673332... *10^10 +9.8427807594777798910321512146... *10^6*n) +
2.6972243622680053534403893662...^n * (1.11986199131923592084059841946... *10^10 +6.5982907581125668149650199590... *10^7*n) +
2.6949361557462852614550954808...^n * (-5.9327696306387684304080200824... *10^8) +
2.6601231133768174476677900182...^n * (1.14335111744426568760927558434... *10^9 +1.8399970420224194599947904211... *10^6*n) +
2.6527036446661393022965667464...^n * (-4.0014104196614840918554165795... *10^7 -1.7793071795001864134343580756... *10^6*n) +
2.6180339887498948482045868343...^n * (-3.7582827904944114613882712266... *10^7 +225866.99807256156322179408202... *n) +
2.4913168228415144688308057835...^n * (+5.1969528177521051210036411900... *10^6) +
2.4850839473754210681192505552...^n * (-1.4303137170361207407548567315... *10^8) +
2.4760236029181340344691576771...^n * (1.58549024842355012403621273036... *10^8 +350932.03898257253623033459901... *n) +
2.4384471871911697250892950720...^n * (-1.4815267633495728760858731711... *10^8) +
2.4366029352507051149562878858...^n * (-1.3924794774596491877203714601... *10^9 +3.7266112061674587984350052411... *10^6*n) +
2.4280067316837969814441532297...^n * (+7.7060637260315071750576251518... *10^6) +
2.4231124760836598146707486184...^n * (1.50570012041499496566844530681... *10^9 +4.3272540094640065891673598900... *10^6*n) +
2.4076355297127800897869665660...^n * (+3.7592392836966574809352661856... *10^6) +
2.3579263675184997497039795971...^n * (-44499.520231229873772808241519...) +
2.3433795689528896338577674315...^n * (-676813.17701319443154942731251...) +
2.3388796858734955324106239764...^n * (-1.2218388322870389786081386187... *10^6 -1483.2971537644047231811640194... *n) +
2.2755155282815584627716386131...^n * (-146522.33803171156606729478777...) +
2.2715272481702374673176230982...^n * (+132762.92857761362063858057566...) +
2.2087121525220799967059764031...^n * (68695.0761273874974359227859314... +945.59187846776834306747131934... *n) +
2.1814419482733261635013430142...^n * (-161401.75437038443223415340646...) +
2.1353591133045969741688715773...^n * (-4.1533049469983405652488770510... *10^6 +6881.8926967716101122192254971... *n) +
2.1231304441342996267215678629...^n * (4.23860961260365236860145251653... *10^6 +17466.485534580038048436544136... *n) +
2.00000000000000000000000000...^n * (+1059.7211162015826738858808829...) +
1.8152074690959046272986479524...^n * (-2.2524038481116259031044627479... *10^8 +489455.76778605877299037900889... *n) +
1.8074175964327479843746447542...^n * (2.25250661912897658430976980954... *10^8 +477581.32878828024327870545341... *n) +
1.7458983116349475878702221201...^n * (+34386.749687092764135332358950...) +
1.7153703234534297191124146627...^n * (+18009.543264732669124815533923...) +
1.6815411034252792591542406649...^n * (-30598.695855466612365852759752...) +
1.6586753107111225309566016437...^n * (+384027.30115537861523553356197...) +
1.6527036446661393022965667464...^n * (-490879.90125894042171202803690... -771.01595526958887638494193290... *n) +
1.6277186767309856700746942658...^n * (32623.9066647457588455189699671... +58.224052964312197436918511511... *n) +
1.5857864376269049511983112757...^n * (+18540.713827455371273236454200...) +
1.5549581320873711914221948710...^n * (+23616.412120377046715129879211...) +
1.5227400035259803554577701154...^n * (+8975.6549977843712908460471955...) +
1.5168213642014210669117332420...^n * (-114319.42574373312832292912154... +1834.4931234091919009273011264... *n) +
1.4679111137620439295952146988...^n * (64336.5071503559406696491353756... +3210.4115747309685722213342613... *n) +
1.4608111271891108834741240973...^n * (-15480.863724262493319952971941...) +
1.4384471871911697250892950720...^n * (+8123.2152955754615148157730996...) +
1.4331113724053703662871758127...^n * (+47601.134573520851858525250432...) +
1.4153360045489644112389487184...^n * (+65.436716774013622867647063126...) +
1.3433795689528896338577674315...^n * (230.456124385823103225551622637... -0.0477651091474665053360092575... *n) +
1.3203568144378775117558303971...^n * (1207.17171542147521576632550017... -85.082178880957913877373761912... *n) +
1.2879239137775200704033337805...^n * (-2.7946313370610564916372370008...) +
1.2679491924311227064725536584...^n * (-241.85564467904223293560635432... -5.2443082483147844876567554723... *n +1.3634314261190363140059601950... *n^2 -0.00531287198881292307246651... *n^3) +
1.2525315460920516961272006624...^n * (112.380693082266849339228250338... -0.0023115077783141260879153951... *n) +
1.2255425268069968698658757139...^n * (-2032.7999191963384483712714861...) +
1.2155240105943282986977604449...^n * (-242.61491065686035977454428028...) +
1.2087121525220799967059764031...^n * (+32.508793614434761799383283496...) +
1.1855001230030870313324499189...^n * (+430.05446132733505359698403269...) +
1.1797507493469981287278085841...^n * (+23.604227172231147183674702358...) +
1.165756815686078288843738741...^n * (+38.452905149560358753503590320...) +
1.1391941468882966136141638191...^n * (88.7539588137064097950994272176... +2.1199412594209648064783263642... *n) +
1.1206147584281832318917814453...^n * (-3.2192983101089075122484324101... -0.0400403258502415983291207492... *n) +
1.00000000000000000000000000...^n * (79.6974251443001443001443001443... +0.12499999999999999999999999... *n) +
0.8850924585232442014843859392...^n * (29.7968069898533452497176707330... -0.1970097160233300381762111007... *n) +
0.8715809361554226321488201135...^n * (14.5669537646252742172906945494... -0.0003390733321599244160003230... *n) +
0.8599450553597408644513487542...^n * (7566.26962074663661315117115346... -30.772174412484724698257920498... *n) +

0.8548973087995775695731899737...^n * (-7588.0119521058748497923601827... -21.747239880306784731330271713...*n) +
 0.8438975366607019398266490221...^n * (-109.63079493409495929902069015... -0.0171895456335311232373795220...*n) +
 0.8168434833023157391322773392...^n * (-168.10282592329598549983472574...) +
 0.8090903808745735709698841633...^n * (+15.416285691486337707507070434...) +
 0.7789482417292068259636324354...^n * (+93.415813216035598990674511626...) +
 0.7733184030943225341883481918...^n * (3220.95056818404977595331098921... +7.5432204382350856839689979843...*n) +
 0.7639320225002103035908263312...^n * (-2711.2853452772943007723727512... -1.3921362085456813022258064166...*n) +
 0.7420040563560852498938372141...^n * (-5.6142754428374108314633136686...) +
 0.7381977547400282998678396215...^n * (-14684.153164009502671826259161... +41.100408657728338018768902887...*n) +
 0.7294659794848337820355832989...^n * (-6.2178034637546584092527096407...) +
 0.7214922419005644839038034017...^n * (13861.5112093744511435440188212... +265.75991353654137856325370904...*n) +
 0.6902785321094298718861498550...^n * (-22.809382834075455270986418322...) +
 0.6833752096446001508850672633...^n * (-180.62154131032392616605417898...) +
 0.6819201261324966656569250244...^n * (+333.76097436124414312991870228...) +
 0.6711278180289204133279919922...^n * (+202.86895564250192387487675923...) +
 0.6699412604320179706944200292...^n * (90.1691939798610161271714050221... +0.8385478284946607489040250807...*n) +
 0.6443257060219177734215994050...^n * (+0.4175334220209178000819331829...) +
 0.5606883283161251615980531512...^n * (-11.274831317061859487282111069... -0.3391291143087604568895536028...*n) +
 0.5587090895875386380239205816...^n * (-102.89932743219615249487632536...) +
 0.5505102572168219018027159252...^n * (122.260845317033734680271998184... +1.7926320553361996267263992944...*n) +
 0.5394951299812365080203552116...^n * (23.5557132720641901478964539425... -0.0638780540124900413001289221...*n) +
 0.5311239900964880096628896635...^n * (+5.2144545162697518725278978729...) +
 0.5107114281899212372070634695...^n * (-18.019556554580297430475195199... -4.6380976511513087355912942710...*n) +
 0.5091363846389679167421413057...^n * (+0.1596908882260347694101470179...) +
 0.4915188008193279233110958335...^n * (94.6642966803336382881117283446... -2.3647037153967578157359529920...*n) +
 0.4858630706647089273062251330...^n * (+9.7179177841067468013039362726...) +
 0.4813896011499569143691104004...^n * (-85.896343258171609623929960176...) +
 0.4754759040157565721333382671...^n * (-24.804309002480840114922641954...) +
 0.4710820427056382662735155611...^n * (-0.4035604333903652598659892861... -0.0007753441162002104747314386...*n) +
 0.4679111137620439295952146988...^n * (0.08017336323373423904057758271... +7.1969042658522727188045136848...*10^-6*n) +
 0.4619148596810296618567666649...^n * (-8.4739534063445427230392331885...) +
 0.4384471871911697250892950720...^n * (-13.065056821282283462163567334...) +
 0.4235850966907788497912872003...^n * (-0.3055758959110890295894134291... +0.0115290481799386949692409250...*n) +
 0.3819660112501051517954131656...^n * (9.80278574973298274664117983241... -0.3320000314438162542610064760...*n) +
 0.3599765331073553206810198967...^n * (-68.238633157604728742379746932... +2.1878429293243877429844149335...*n) +
 0.3365729057391930152301897186...^n * (57.0809479058829639974658112298... +1.6452117334566551102673711594...*n) +
 0.3354550777499061676089111771...^n * (+0.1564250200009630240061062337...) +
 0.3347314909357105447008611807...^n * (+15.438809454725718952652796581...) +
 0.3303361593577752462688661200...^n * (-18.076847284071109660091127018... +0.0089702821953669409538940252...*n) +
 0.3248691294333539291103782018...^n * (-0.0176552462927386521009079258...) +
 0.3186693563950226245243376121...^n * (+6.9204353517056780796463254189...) +
 0.3113681871111883412726299236...^n * (-0.8055736575386578699900855563...) +
 0.2907246405630771607708683328...^n * (-0.4172845052969883262800379108...) +
 0.2895888325552252636534228002...^n * (+0.4950758420178534665077169731...) +
 0.2840629917180061321343272512...^n * (0.76834699096389148032562029775... +0.0058270502039801532381437752...*n) +
 0.2608563106922524385720227297...^n * (-0.3181716691856231776350661084...) +
 0.2572493908245052657949465957...^n * (+0.3573828233568896049616239603...) +
 0.2491995779390841304199595331...^n * (-0.2331052776883762301623325235...) +
 0.2434017461399325876478753212...^n * (+0.0055593873105061610677307581...) +
 0.2327619163977085606527151539...^n * (-0.039206290693478961169501154... +0.0102031622344337920947564895...*n) +
 0.2087121525220799967059764031...^n * (-0.1988512364627977145557285424...) +
 0.1980622641951617475277953609...^n * (-6.8694704146869698306418054877...*10^-6) +
 0.1905053648529956212559523447...^n * (+0.0178609654885626468380039419...) +
 0.1657568156860782828843738741...^n * (-0.0114793799610485975456470977... +0.0000249031566301173484690459...*n) +
 0.1570842311666946099974240948...^n * (+0.0097510703116482329763784442...) +
 0.1391941468882966136141638191...^n * (+0.0037332251243631333538466192...) +
 0.1133903548499388114818015038...^n * (-0.0006396209474147878572584850...) +
 0.0810140527710052202192638858...^n * (+6.9487429026714522421054153596...*10^-6)

Předchozí výpočet vyžadoval řešení soustavy 307 lineárních rovnic o 307 neznámých, přičemž vzhledem k vysokým mocninám byla nutná přesnost alespoň 400 desetinných míst. Program Mathematica 8 řešil tuto soustavu (při této přesnosti) 3 hodiny 48 minut a potřeboval 2772 MB RAM (což bylo už na hranici možností 4 GB systému).

Pokud chceme provést numerický výpočet koeficientů pouze u členů s nejvyšší vahou (které určují asymptotické chování této funkce) lze použít i metodu nejmenších čtverců, výsledek pak dostaneme téměř okamžitě. V programu Mathematica použijeme funkci Fit, např. takto (g8 je výše uvedená vytvořující funkce):

```
m=8; Fit[N[Table[{k, SeriesCoefficient[g8, {x, 0, k}]}], {k, 990, 1000}], 100], {(m+1)^n, n*(m+1)^n, ((m+1+Sqrt[m^2-2m+5])/2)^n, n*((m+1+Sqrt[m^2-2m+5])/2)^n}, n]
```

Výsledkem je tento asymptotický vzorec pro m=8 (pro numerický výpočet dalších koeficientů však tuto metodu nelze použít).

$$f_8(n) \sim (117833087.4513304127 \dots * n - 3019882133.9627005377 \dots) * 9^n + (128935400.002 \dots * n + 4894240701.273 \dots) * \left(\frac{9 + \sqrt{53}}{2}\right)^n + \dots$$

2.3.9) more kings on a 2m x 2n chessboard - více králů na šachovnici 2m x 2n

Když jsem v ruském fóru [Zealint blog](#) 5.9.2011 předložil k řešení podobnou úlohu pro [válcové šachovnice](#), nabídl se Alex V. Breger, že vypočte hodnoty potřebné k nalezení rekurencí i pro **normální šachovnici**. Získal jsem tak hodnoty až do $m = 12$ (v tomto případě 12900 hodnot!). Rekurence pro $m = 9$ (hloubky 548) a pro $m = 10$ (rekurence úrovně 1318) jsem potom našel pomocí programu Maple a jeho funkce `rgf_findrecur`, pro $m = 11$ však pro hloubku rekurence 2321 už nestačila paměť na mém tehdejší 4 GB systému (*potřeba bylo 8769 MB RAM, což jsem ověřil až později na 16 GB systému*). Použil jsem proto svůj jiný program, **recurrence order finder**, který najde v posloupnosti hloubku nejkratší lineární rekurence (samozřejmě pokud taková existuje a pokud je k dispozici dostatečný počet počátečních hodnot posloupnosti). Metoda je založena na výpočtu determinantu příslušné matice, který je nulový v případě, že zde existuje lineární závislost. Hledaná hloubka rekurence (hodnota této matice) se najde postupným půlením intervalu a přibližování se k místu, kde pro hledané k je hodnota determinantu nenulová, ale pro $k+1$ už nulová. K urychlení výpočtu s obrovskými čísly se používají zbytky po dělení větším prvočíslem.

Příklad pro normální šachovnici a $m = 12$

(* **Recurrence order finder** (Vaclav Kotesovec, 2011) *)

```
seqrank[seq_, minorder_, maxorder_] := (
  p = 2^31 - 1; rank = 0; zero = 0; low = minorder; high = maxorder;
  seqmod = Mod[seq, p];
  While[high - low > 1, k = Floor[(low + high)/2];
    workmatrix = ConstantArray[0, {k, k}];
    Do[Do[workmatrix[[j, i]] = seqmod[[j + k - i]]; {j, 1, k}];, {i, 1, k}];
    Print[k, " ", Timing[d = Det[workmatrix, Modulus -> p]]];
    If[d == 0, high = k; zero = 1, low = k; rank = k];
  ];
  If[rank == 0, Print["Rank not found, decrease min.order"];];
  If[rank != 0,
    If[rank == high || zero == 0,
      Print["Rank not found, increase max.order"];,
      Print["Rank (possible recurrence order) = ", rank]];
  );
seqrank[kingsm12, 2400, 6500];

4450 {679.556,555509231}
5475 {1262.55,1093485533}
5987 {1649.32,0}
5731 {1447.55,0}
5603 {1353.32,1232670624}
5667 {1399.95,1324885468}
5699 {1423.45,0}
5683 {1411.79,0}
5675 {1405.62,0}
5671 {1402.89,1941735353}
5673 {1407.22,0}
5672 {1407.82,580521332}
Rank (possible recurrence order) = 5672
```


Tímto programem jsem našel hloubky rekurencí až do $m = 12$. Je třeba poznamenat, že program sice najde **hloubku rekurence** (*recurrence order*), ale v tu chvíli ještě není známa rekurence samotná (ze které by pak šlo už snadno odvodit hledaný denominátor vytvářející funkce). Z principu jde sice už o „jednoduchou“ úlohu vedoucí na řešení soustavy lineárních rovnic v celočíselném oboru, ale toto řešení je hlavně z paměťových důvodů extrémně náročné a je až za hranicí kapacity současných matematických programů.

Ovšem s využitím znalosti denominátorů pro $m = 11$ až $m = 12$, které vypočetl Max A. Alekseyev pro [horizontální válcovou šachovnici](#), jsem pak speciálním programem vypočetl 18.9.2011 i denominátory pro normální šachovnici a $m = 11$ a $m = 12$. Vycházel jsem z toho, že faktory budou stejné, jen exponenty pro normální šachovnici už nebudou u všech členů 1 (jako v případě horizontální válcové šachovnice). Moje metoda spočívala v tom, že jsem nejprve odhadl maximální hodnoty exponentů v závislosti na stupni polynomu faktoru a potom jsem tyto stupně postupně snižoval vždy až do hodnoty, kdy příslušná rekurence přestala platit. Tím jsem dostal pro každý faktor minimální exponent. Součin faktorů s nalezenými minimálními exponenty byl pak hledaným denominátorem (přičemž dobrá kontrola byla, že se jeho stupeň shodoval s předtím vypočtenou hloubkou rekurence).

Pro $m = 9$ a $m = 10$ se mi pak podařilo vypočítat nejen denominátory, ale i kompletní generační funkce! Pro řešení soustav lineárních rovnic jsem ve svém programu použil (v programu Mathematica) velmi efektivní funkci LinearSolve. Pro $m = 9$ bez dalších parametrů, pro $m = 10$ však byla už velmi paměťově náročná a nejprve nebylo možné vytvářející funkci vypočítat na mém tehdejší 4 GB systému. Objevil jsem však parametr Method->"Krylov", při kterém je sice řešení asi 4x pomalejší, ale spotřeba paměti je jen asi třetinová, takže bylo možné soustavu 1318 lineárních rovnic pro koeficienty numerátoru pro $m = 10$ vyřešit (paměť asi 900 MB, cca 4 hodiny). Je třeba si však uvědomit o jak náročný výpočet jde, když výsledné koeficienty jsou celá čísla obsahující až 664 dekadických cifer! A při přípravě matice soustavy rovnic musí program vypočítat u 250 faktorů (racionálních lomených funkcí) derivace v nule řádu až 1318.

[A195648](#) - **9n Kings on a 18 x 2n normal chessboard**, $m=9$, recurrence order is 548

Denominator of the generating function (*V. Kotěšovec after values computed by Alex V. Breger, 10.9.2011*).

For full generating function (by *V. Kotěšovec, 26.9.2011*) see [OEIS](#).

$$\begin{aligned} & (x-1)^2 * (2x-1)^4 * (3x-1)^2 * (4x-1) * (5x-1)^2 * (6x-1)^3 * (10x-1)^2 * (x^2-5x+1) * (x^2-4x+1) * (x^2-3x+1) * (2x^2-5x+1) * (2x^2-4x+1)^3 * (3x^2-6x+1) * (3x^2-5x+1)^2 * (4x^2-6x+1) * (5x^2-5x+1) * (6x^2-9x+1) * (6x^2-6x+1)^3 * \\ & (7x^2-6x+1) * (8x^2-10x+1)^2 * (8x^2-8x+1) * (8x^2-7x+1) * (9x^2-8x+1) * (10x^2-8x+1) * (14x^2-10x+1)^2 * (15x^2-10x+1)^2 * (18x^2-10x+1)^2 * (20x^2-10x+1)^4 * (23x^2-10x+1)^2 * (x^3-8x^2+6x-1) * (x^3-7x^2+6x-1) * (x^3- \\ & 6x^2+5x-1) * (2x^3-10x^2+7x-1) * (2x^3-9x^2+7x-1) * (2x^3-8x^2+6x-1) * (3x^3-10x^2+7x-1) * (4x^3-16x^2+8x-1) * (4x^3-11x^2+7x-1)^2 * (5x^3-17x^2+8x-1)^2 * (5x^3-12x^2+7x-1) * (6x^3-21x^2+10x-1)^2 * (6x^3-20x^2+10x-1)^2 * \\ & (8x^3-20x^2+9x-1) * (9x^3-20x^2+9x-1) * (10x^3-25x^2+10x-1)^2 * (10x^3-24x^2+10x-1)^2 * (10x^3-23x^2+10x-1)^2 * (10x^3-21x^2+9x-1)^2 * (10x^3-20x^2+10x-1) * (11x^3-25x^2+10x-1)^2 * (11x^3-21x^2+10x-1)^2 * (12x^3- \\ & 24x^2+10x-1) * (12x^3-23x^2+10x-1) * (14x^3-27x^2+10x-1) * (14x^3-25x^2+10x-1)^2 * (15x^3-27x^2+10x-1)^2 * (15x^3-25x^2+10x-1)^2 * (16x^3-26x^2+10x-1)^2 * (18x^3-28x^2+10x-1) * (18x^3-26x^2+10x-1) * (20x^3-28x^2+10x-1) * \\ & (20x^3-27x^2+10x-1) * (21x^3-29x^2+10x-1)^2 * (21x^3-27x^2+10x-1) * (22x^3-29x^2+10x-1)^2 * (22x^3-28x^2+10x-1)^2 * (23x^3-29x^2+10x-1) * (25x^3-29x^2+10x-1)^2 * (26x^3-30x^2+10x-1)^2 * (29x^3-31x^2+10x-1)^2 * (x^4- \\ & 12x^3+19x^2-8x+1) * (x^4-9x^3+18x^2-8x+1) * (x^4-7x^3+13x^2-7x+1) * (2x^4-13x^3+19x^2-8x+1)^2 * (2x^4-13x^3+22x^2-9x+1) * (4x^4-28x^3+30x^2-10x+1) * (4x^4-26x^3+29x^2-10x+1) * (4x^4-23x^3+29x^2-10x+1) * (4x^4- \\ & 22x^3+28x^2-10x+1) * (4x^4-20x^3+26x^2-10x+1) * (4x^4-19x^3+25x^2-10x+1)^2 * (6x^4-34x^3+32x^2-10x+1) * (6x^4-31x^3+31x^2-10x+1) * (6x^4-30x^3+30x^2-10x+1) * (6x^4-28x^3+29x^2-10x+1) * (6x^4-28x^3+30x^2-10x+1) * \\ & (6x^4-27x^3+29x^2-10x+1) * (6x^4-26x^3+28x^2-10x+1) * (6x^4-26x^3+30x^2-10x+1) * (6x^4-25x^3+29x^2-10x+1) * (6x^4-24x^3+28x^2-10x+1)^2 * (6x^4-23x^3+27x^2-10x+1)^2 * (7x^4-35x^3+32x^2-10x+1)^2 * (7x^4-31x^3+30x^2- \\ & 10x+1)^2 * (7x^4-31x^3+31x^2-10x+1)^2 * (7x^4-29x^3+29x^2-10x+1) * (7x^4-26x^3+29x^2-10x+1) * (8x^4-33x^3+31x^2-10x+1) * (8x^4-32x^3+31x^2-10x+1) * (8x^4-30x^3+30x^2-10x+1)^2 * (9x^4-35x^3+32x^2-10x+1) * (9x^4- \\ & 32x^3+31x^2-10x+1) * (10x^4-36x^3+32x^2-10x+1)^2 * (10x^4-34x^3+31x^2-10x+1)^2 * (10x^4-33x^3+31x^2-10x+1) * (10x^4-32x^3+30x^2-10x+1) * (12x^4-35x^3+31x^2-10x+1) * (13x^4-40x^3+33x^2-10x+1)^2 * (13x^4-37x^3+32x^2- \\ & 10x+1) * (14x^4-38x^3+32x^2-10x+1) * (15x^4-39x^3+32x^2-10x+1)^2 * (16x^4-41x^3+33x^2-10x+1) * (17x^4-42x^3+33x^2-10x+1) * (19x^4-45x^3+34x^2-10x+1) * (2x^5-22x^4+46x^3-34x^2+10x-1) * (2x^5-19x^4+42x^3-33x^2+10x-1) * \\ & (2x^5-18x^4+42x^3-33x^2+10x-1) * (2x^5-17x^4+39x^3-32x^2+10x-1) * (2x^5-16x^4+38x^3-32x^2+10x-1) * (3x^5-24x^4+47x^3-34x^2+10x-1) * (3x^5-21x^4+43x^3-33x^2+10x-1) * (3x^5-20x^4+42x^3-33x^2+10x-1)^2 * (4x^5- \\ & 25x^4+47x^3-34x^2+10x-1) * (5x^5-29x^4+51x^3-35x^2+10x-1) \end{aligned}$$

A195649 - 10n Kings on a 20 x 2n normal chessboard, m=10, recurrence order is 1318

Denominator of the generating function (*V.Kotěšovec after values computed by Alex V. Breger, 10.9.2011*).

For full generating function (by *V. Kotěšovec, 28.9.2011*) see [OEIS](#).

$$\begin{aligned} &(x-1)^3 * (2x-1)^5 * (3x-1)^4 * (4x-1)^3 * (5x-1)^2 * (6x-1)^2 * (8x-1)^2 * (11x-1)^2 * (x^2-5x+1) * (x^2-3x+1) * (2x^2-6x+1) * (2x^2-5x+1) * (2x^2-4x+1)^3 * (4x^2-8x+1)^2 * (4x^2-7x+1)^2 * (4x^2-6x+1) * (5x^2-8x+1)^2 * (5x^2-5x+1)^2 \\ &* (7x^2-10x+1) * (7x^2-7x+1)^2 * (8x^2-8x+1) * (9x^2-11x+1)^2 * (9x^2-8x+1) * (10x^2-9x+1) * (11x^2-9x+1) * (11x^2-8x+1) * (12x^2-9x+1) * (13x^2-8x+1) * (16x^2-11x+1)^2 * (17x^2-11x+1)^2 * (21x^2-11x+1)^2 * (23x^2-11x+1)^2 * \\ &(25x^2-11x+1) * (27x^2-11x+1)^2 * (29x^2-11x+1)^2 * (x^3-9x^2+6x-1) * (x^3-6x^2+5x-1) * (x^3-5x^2+6x-1)^3 * (2x^3-12x^2+7x-1) * (2x^3-10x^2+7x-1) * (2x^3-9x^2+7x-1)^2 * (3x^3-14x^2+8x-1) * (3x^3-13x^2+8x-1) * (3x^3-12x^2+7x-1) \\ &* (3x^3-12x^2+8x-1) * (3x^3-11x^2+7x-1)^2 * (3x^3-10x^2+7x-1) * (3x^3-9x^2+6x-1)^2 * (4x^3-12x^2+8x-1)^2 * (5x^3-17x^2+8x-1) * (5x^3-13x^2+7x-1) * (5x^3-12x^2+7x-1)^2 * (6x^3-14x^2+8x-1) * (7x^3-24x^2+11x-1)^2 * (7x^3-23x^2+11x-1)^2 * (7x^3-15x^2+8x-1) * (8x^3-21x^2+9x-1) * (9x^3-22x^2+9x-1) * (9x^3-17x^2+8x-1)^2 * (12x^3-29x^2+11x-1)^2 * (12x^3-27x^2+11x-1)^2 * (12x^3-24x^2+10x-1) * (12x^3-23x^2+11x-1) * (13x^3-29x^2+11x-1)^2 * (13x^3-25x^2+10x-1)^2 * (13x^3-24x^2+11x-1)^2 * (13x^3-23x^2+9x-1)^2 * (14x^3-27x^2+10x-1) * (15x^3-32x^2+11x-1)^2 * (15x^3-31x^2+11x-1)^2 * (15x^3-27x^2+11x-1) * (16x^3-33x^2+11x-1) * (16x^3-29x^2+11x-1) * (17x^3-32x^2+11x-1)^2 * (17x^3-29x^2+11x-1)^2 * (17x^3-24x^2+9x-1)^2 * (18x^3-29x^2+11x-1)^2 * (19x^3-33x^2+11x-1)^2 * (19x^3-32x^2+11x-1)^2 * (19x^3-30x^2+11x-1)^2 * (20x^3-31x^2+11x-1)^2 * (22x^3-33x^2+11x-1)^2 * (24x^3-33x^2+11x-1) * (24x^3-31x^2+11x-1) * (25x^3-33x^2+11x-1)^2 * (25x^3-32x^2+11x-1)^2 * (25x^3-29x^2+10x-1) * (26x^3-30x^2+10x-1) * (27x^3-35x^2+11x-1)^2 * (27x^3-34x^2+11x-1)^2 * (27x^3-32x^2+11x-1) * (28x^3-34x^2+11x-1)^2 * (28x^3-33x^2+11x-1)^2 * (29x^3-31x^2+10x-1)^2 * (31x^3-36x^2+11x-1)^2 * (31x^3-34x^2+11x-1)^2 * (32x^3-35x^2+11x-1) * (33x^3-36x^2+11x-1)^2 * (34x^3-36x^2+11x-1)^2 * (37x^3-37x^2+11x-1)^2 * (41x^3-38x^2+11x-1)^2 * (2x^4-17x^3+24x^2-9x+1) * (2x^4-13x^3+22x^2-9x+1) * (3x^4-21x^3+25x^2-9x+1) * (3x^4-19x^3+28x^2-10x+1)^2 * (3x^4-18x^3+24x^2-9x+1) * (3x^4-18x^3+27x^2-10x+1) * (3x^4-17x^3+23x^2-9x+1) * (4x^4-31x^3+31x^2-10x+1) * (4x^4-22x^3+25x^2-9x+1)^2 * (4x^4-19x^3+24x^2-9x+1) * (5x^4-34x^3+35x^2-11x+1)^2 * (5x^4-32x^3+31x^2-10x+1) * (5x^4-32x^3+34x^2-11x+1)^2 * (5x^4-28x^3+34x^2-11x+1)^2 * (5x^4-27x^3+33x^2-11x+1)^2 * (5x^4-24x^3+30x^2-11x+1) * (5x^4-23x^3+29x^2-11x+1)^2 * (6x^4-34x^3+32x^2-10x+1)^2 * (7x^4-38x^3+33x^2-10x+1) * (7x^4-26x^3+26x^2-9x+1) * (8x^4-43x^3+38x^2-11x+1)^2 * (8x^4-40x^3+37x^2-11x+1) * (8x^4-39x^3+36x^2-11x+1) * (8x^4-36x^3+36x^2-11x+1) * (8x^4-35x^3+32x^2-10x+1) * (8x^4-35x^3+34x^2-11x+1) * (8x^4-35x^3+35x^2-11x+1) * (8x^4-33x^3+33x^2-11x+1) * (8x^4-33x^3+36x^2-11x+1)^2 * (8x^4-32x^3+35x^2-11x+1) * (8x^4-31x^3+34x^2-11x+1) * (8x^4-30x^3+33x^2-11x+1)^2 * (8x^4-29x^3+32x^2-11x+1)^2 * (9x^4-46x^3+39x^2-11x+1) * (9x^4-44x^3+38x^2-11x+1)^2 * (9x^4-42x^3+38x^2-11x+1) * (9x^4-40x^3+36x^2-11x+1) * (9x^4-39x^3+37x^2-11x+1)^3 * (9x^4-38x^3+35x^2-11x+1)^2 * (9x^4-37x^3+35x^2-11x+1) * (9x^4-36x^3+34x^2-11x+1) * (9x^4-34x^3+36x^2-11x+1) * (9x^4-33x^3+35x^2-11x+1)^2 * (9x^4-32x^3+34x^2-11x+1) * (9x^4-31x^3+33x^2-11x+1) * (11x^4-48x^3+39x^2-11x+1)^2 * (11x^4-46x^3+38x^2-11x+1) * (11x^4-44x^3+38x^2-11x+1)^2 * (11x^4-43x^3+37x^2-11x+1) * (11x^4-39x^3+33x^2-10x+1)^2 * (11x^4-36x^3+36x^2-11x+1) * (12x^4-45x^3+38x^2-11x+1) * (12x^4-44x^3+38x^2-11x+1)^2 * (12x^4-42x^3+37x^2-11x+1)^2 * (12x^4-41x^3+37x^2-11x+1)^2 * (12x^4-39x^3+36x^2-11x+1) * (12x^4-38x^3+35x^2-11x+1) * (13x^4-44x^3+38x^2-11x+1)^2 * (14x^4-52x^3+40x^2-11x+1) * (14x^4-48x^3+39x^2-11x+1) * (14x^4-46x^3+38x^2-11x+1) * (14x^4-44x^3+37x^2-11x+1)^2 * (14x^4-44x^3+37x^2-11x+1)^2 * (14x^4-44x^3+38x^2-11x+1) * (15x^4-49x^3+39x^2-11x+1)^2 * (15x^4-46x^3+38x^2-11x+1) * (15x^4-44x^3+37x^2-11x+1) * (15x^4-43x^3+37x^2-11x+1) * (15x^4-42x^3+36x^2-11x+1) * (16x^4-53x^3+40x^2-11x+1)^2 * (16x^4-47x^3+38x^2-11x+1)^2 * (16x^4-45x^3+38x^2-11x+1) * (16x^4-44x^3+37x^2-11x+1) * (17x^4-50x^3+39x^2-11x+1)^2 * (17x^4-48x^3+39x^2-11x+1)^2 * (17x^4-46x^3+38x^2-11x+1)^2 * (18x^4-49x^3+39x^2-11x+1) * (18x^4-47x^3+38x^2-11x+1)^2 * (18x^4-46x^3+37x^2-11x+1) * (19x^4-54x^3+40x^2-11x+1)^2 * (19x^4-50x^3+39x^2-11x+1)^2 * (20x^4-51x^3+39x^2-11x+1) * (20x^4-49x^3+38x^2-11x+1)^2 * (21x^4-54x^3+40x^2-11x+1)^2 * (21x^4-50x^3+38x^2-11x+1)^2 * (23x^4-58x^3+41x^2-11x+1)^2 * (23x^4-53x^3+39x^2-11x+1) * (24x^4-55x^3+40x^2-11x+1)^2 * (25x^4-59x^3+41x^2-11x+1) * (25x^4-56x^3+40x^2-11x+1) * (27x^4-59x^3+41x^2-11x+1)^2 * (31x^4-64x^3+42x^2-11x+1) * (31x^4-61x^3+41x^2-11x+1) * (x^5-16x^4+44x^3-34x^2+10x-1) * (x^5-13x^4+40x^3-33x^2+10x-1) * (x^5-12x^4+40x^3-33x^2+10x-1) * (3x^5-35x^4+65x^3-42x^2+11x-1)^2 * (3x^5-32x^4+61x^3-41x^2+11x-1) * (3x^5-28x^4+59x^3-41x^2+11x-1) * (3x^5-27x^4+59x^3-41x^2+11x-1) * (3x^5-26x^4+53x^3-39x^2+11x-1) * (3x^5-26x^4+55x^3-40x^2+11x-1) * (3x^5-26x^4+56x^3-40x^2+11x-1)^2 * (3x^5-24x^4+50x^3-38x^2+11x-1)^2 * (3x^5-23x^4+51x^3-39x^2+11x-1)^2 * (4x^5-32x^4+60x^3-41x^2+11x-1) * (4x^5-31x^4+58x^3-40x^2+11x-1) * (4x^5-31x^4+60x^3-41x^2+11x-1) * (4x^5-29x^4+56x^3-40x^2+11x-1) * (4x^5-29x^4+60x^3-41x^2+11x-1) * (4x^5-28x^4+55x^3-40x^2+11x-1)^2 * (4x^5-27x^4+53x^3-39x^2+11x-1) * (4x^5-27x^4+54x^3-39x^2+11x-1) * (4x^5-27x^4+56x^3-40x^2+11x-1) * (4x^5-26x^4+53x^3-39x^2+11x-1) * (4x^5-25x^4+50x^3-38x^2+11x-1) * (5x^5-44x^4+71x^3-43x^2+11x-1) * (5x^5-41x^4+67x^3-42x^2+11x-1)^2 * (5x^5-38x^4+66x^3-42x^2+11x-1)^2 * (5x^5-36x^4+65x^3-42x^2+11x-1) * (5x^5-34x^4+61x^3-41x^2+11x-1) * (5x^5-33x^4+61x^3-41x^2+11x-1)^2 * (5x^5-32x^4+58x^3-40x^2+11x-1)^2 * (5x^5-32x^4+61x^3-41x^2+11x-1) * (5x^5-30x^4+57x^3-40x^2+11x-1)^2 * (6x^5-36x^4+62x^3-41x^2+11x-1) * (6x^5-35x^4+61x^3-41x^2+11x-1) * (6x^5-34x^4+59x^3-40x^2+11x-1) * (6x^5-33x^4+58x^3-40x^2+11x-1) * (7x^5-41x^4+67x^3-42x^2+11x-1)^2 * (7x^5-40x^4+66x^3-42x^2+11x-1) * (7x^5-38x^4+63x^3-41x^2+11x-1) * (7x^5-36x^4+61x^3-41x^2+11x-1) * (8x^5-45x^4+71x^3-43x^2+11x-1) * (8x^5-41x^4+66x^3-42x^2+11x-1) * (8x^5-39x^4+63x^3-41x^2+11x-1) * (9x^5-49x^4+72x^3-43x^2+11x-1) * (9x^5-46x^4+71x^3-43x^2+11x-1)^2 * (9x^5-43x^4+67x^3-42x^2+11x-1)^2 * (11x^5-55x^4+77x^3-44x^2+11x-1)^2 * (11x^5-49x^4+72x^3-43x^2+11x-1) * (x^6-21x^5+70x^4-84x^3+45x^2-11x+1) * (x^6-15x^5+59x^4-78x^3+44x^2-11x+1) * (x^6-14x^5+51x^4-72x^3+43x^2-11x+1) * (x^6-13x^5+50x^4-72x^3+43x^2-11x+1) * (x^6-12x^5+45x^4-67x^3+42x^2-11x+1) * (x^6-12x^5+46x^4-68x^3+42x^2-11x+1) \end{aligned}$$

A195650 - 11n Kings on a 22 x 2n normal chessboard, m=11, recurrence order is 2321

Denominator of the generating function (*V.Kotěšovec after values computed by Alex V. Breger, 18.9.2011*).

$$\begin{aligned} &(x-1)^3 * (2x-1)^5 * (3x-1)^3 * (4x-1)^4 * (5x-1)^2 * (6x-1)^4 * (7x-1)^2 * (12x-1)^2 * (x^2-6x+1) * (x^2-5x+1)^2 * (x^2-4x+1) * (x^2-3x+1)^2 * (2x^2-7x+1)^2 * (2x^2-6x+1) * (2x^2-5x+1) * (2x^2-4x+1)^3 * (3x^2-7x+1) * (3x^2-6x+1) * (3x^2-5x+1)^3 * (4x^2-7x+1) * (4x^2-6x+1) * (5x^2-8x+1)^2 * (5x^2-7x+1) * (5x^2-5x+1)^3 * (6x^2-6x+1)^2 * (7x^2-7x+1) * (7x^2-6x+1)^2 * (8x^2-11x+1) * (8x^2-8x+1) * (8x^2-7x+1)^3 * (9x^2-7x+1)^3 * (10x^2-12x+1)^2 * (10x^2-9x+1)^2 * (10x^2-8x+1)^2 * (11x^2-8x+1) * (11x^2-7x+1)^2 * (12x^2-10x+1) * (12x^2-9x+1) * (13x^2-10x+1) * (13x^2-8x+1)^2 * (14x^2-10x+1) * (14x^2-8x+1) * (16x^2-9x+1) * (18x^2-12x+1)^2 * (19x^2-12x+1)^2 * (22x^2-10x+1) * (24x^2-12x+1)^2 * (26x^2-12x+1)^2 * (28x^2-12x+1)^2 * (30x^2-12x+1)^2 * (31x^2-12x+1)^2 * (34x^2-12x+1)^2 * (x^3-11x^2+7x-1) * (x^3-9x^2+6x-1) * (x^3-6x^2+5x-1) * (2x^3-12x^2+7x-1) * (2x^3-12x^2+8x-1) * (2x^3-12x^2+9x-1)^2 * (2x^3-10x^2+7x-1) * (2x^3-8x^2+6x-1) * (3x^3-14x^2+8x-1) * (3x^3-14x^2+8x-1)^2 * (3x^3-12x^2+7x-1) * (3x^3-11x^2+7x-1) * (3x^3-9x^2+6x-1)^2 * (4x^3-17x^2+9x-1) * (4x^3-16x^2+8x-1) * (4x^3-15x^2+8x-1) * (4x^3-15x^2+9x-1) * (4x^3-13x^2+8x-1) * (4x^3-12x^2+8x-1) * (4x^3-11x^2+7x-1) * (5x^3-15x^2+8x-1) * (5x^3-14x^2+8x-1) * (5x^3-13x^2+7x-1)^2 * (6x^3-26x^2+10x-1) * (6x^3-22x^2+10x-1) * (6x^3-21x^2+9x-1) * (6x^3-16x^2+8x-1) * (6x^3-16x^2+9x-1)^2 * (6x^3-14x^2+8x-1)^2 * (7x^3-23x^2+10x-1) * (7x^3-16x^2+8x-1) * (7x^3-16x^2+9x-1) * (7x^3-15x^2+8x-1) * (7x^3-14x^2+7x-1)^2 * (8x^3-27x^2+12x-1)^2 * (8x^3-26x^2+12x-1)^2 * (8x^3-25x^2+10x-1) * (8x^3-21x^2+9x-1) * (8x^3-17x^2+8x-1) * (9x^3-25x^2+10x-1) * (9x^3-22x^2+9x-1) * (9x^3-18x^2+9x-1) * (9x^3-17x^2+8x-1) * (10x^3-26x^2+10x-1) * (11x^3-25x^2+10x-1) * (11x^3-20x^2+9x-1) * (12x^3-21x^2+9x-1)^2 * (13x^3-19x^2+8x-1)^2 * (14x^3-19x^2+8x-1) * (14x^3-33x^2+12x-1)^2 * (14x^3-32x^2+12x-1) * (14x^3-26x^2+12x-1) * (14x^3-23x^2+12x-1)^2 * (15x^3-28x^2+11x-1) * (15x^3-27x^2+12x-1) * (15x^3-27x^2+12x-1)^2 * (16x^3-30x^2+11x-1)^2 * (16x^3-29x^2+11x-1)^2 * (16x^3-27x^2+10x-1) * (18x^3-37x^2+12x-1)^2 * (18x^3-36x^2+12x-1)^2 * (18x^3-34x^2+12x-1)^2 * (18x^3-32x^2+11x-1) * (18x^3-31x^2+12x-1) * (18x^3-28x^2+10x-1) * (20x^3- \end{aligned}$$

$125x^4+133x^3-62x^2+13x-1)^2 * (39x^5-119x^4+128x^3-61x^2+13x-1)^2 * (41x^5-134x^4+139x^3-63x^2+13x-1) * (41x^5-125x^4+133x^3-62x^2+13x-1)^2 * (43x^5-129x^4+134x^3-62x^2+13x-1) * (44x^5-129x^4+134x^3-62x^2+13x-1) * (47x^5-139x^4+140x^3-63x^2+13x-1)^2 * (3x^6-51x^5+140x^4-140x^3+63x^2-13x+1)^2 * (3x^6-47x^5+130x^4-134x^3+62x^2-13x+1) * (3x^6-41x^5+122x^4-132x^3+62x^2-13x+1)^2 * (3x^6-39x^5+121x^4-132x^3+62x^2-13x+1) * (3x^6-38x^5+113x^4-126x^3+61x^2-13x+1) * (3x^6-38x^5+115x^4-127x^3+61x^2-13x+1) * (3x^6-37x^5+121x^4-132x^3+62x^2-13x+1) * (3x^6-35x^5+112x^4-126x^3+61x^2-13x+1)^2 * (3x^6-34x^5+109x^4-125x^3+61x^2-13x+1) * (3x^6-33x^5+104x^4-124x^3+61x^2-13x+1) * (3x^6-33x^5+107x^4-122x^3+60x^2-13x+1) * (3x^6-33x^5+108x^4-125x^3+61x^2-13x+1) * (3x^6-32x^5+95x^4-114x^3+59x^2-13x+1)^2 * (3x^6-32x^5+99x^4-119x^3+60x^2-13x+1) * (3x^6-32x^5+101x^4-119x^3+60x^2-13x+1)^2 * (3x^6-32x^5+101x^4-117x^3+59x^2-13x+1) * (3x^6-32x^5+102x^4-120x^3+60x^2-13x+1) * (3x^6-31x^5+94x^4-114x^3+59x^2-13x+1)^2 * (3x^6-30x^5+89x^4-109x^3+58x^2-13x+1) * (3x^6-30x^5+90x^4-110x^3+58x^2-13x+1) * (3x^6-30x^5+94x^4-112x^3+58x^2-13x+1) * (3x^6-30x^5+96x^4-118x^3+60x^2-13x+1) * (3x^6-29x^5+91x^4-113x^3+59x^2-13x+1) * (3x^6-29x^5+92x^4-114x^3+59x^2-13x+1) * (3x^6-28x^5+85x^4-107x^3+58x^2-13x+1) * (3x^6-28x^5+87x^4-109x^3+58x^2-13x+1) * (3x^6-28x^5+88x^4-110x^3+58x^2-13x+1) * (3x^6-27x^5+83x^4-105x^3+57x^2-13x+1)^2 * (4x^6-54x^5+141x^4-140x^3+63x^2-13x+1) * (4x^6-53x^5+135x^4-135x^3+62x^2-13x+1) * (4x^6-48x^5+128x^4-133x^3+62x^2-13x+1) * (4x^6-47x^5+124x^4-129x^3+61x^2-13x+1) * (4x^6-47x^5+127x^4-133x^3+62x^2-13x+1) * (4x^6-46x^5+135x^4-139x^3+63x^2-13x+1) * (4x^6-44x^5+126x^4-133x^3+62x^2-13x+1) * (4x^6-43x^5+118x^4-127x^3+61x^2-13x+1) * (4x^6-43x^5+125x^4-133x^3+62x^2-13x+1) * (4x^6-42x^5+117x^4-127x^3+61x^2-13x+1) * (4x^6-42x^5+119x^4-128x^3+61x^2-13x+1) * (4x^6-41x^5+113x^4-123x^3+61x^2-13x+1) * (4x^6-41x^5+117x^4-127x^3+61x^2-13x+1) * (4x^6-41x^5+125x^4-133x^3+62x^2-13x+1) * (4x^6-40x^5+114x^4-126x^3+61x^2-13x+1) * (4x^6-40x^5+114x^4-126x^3+61x^2-13x+1) * (4x^6-40x^5+119x^4-128x^3+61x^2-13x+1) * (4x^6-40x^5+121x^4-132x^3+62x^2-13x+1) * (4x^6-39x^5+110x^4-122x^3+60x^2-13x+1) * (4x^6-39x^5+116x^4-127x^3+61x^2-13x+1) * (4x^6-38x^5+109x^4-125x^3+61x^2-13x+1) * (4x^6-38x^5+109x^4-122x^3+60x^2-13x+1) * (4x^6-38x^5+113x^4-126x^3+61x^2-13x+1) * (4x^6-38x^5+115x^4-127x^3+61x^2-13x+1) * (4x^6-37x^5+103x^4-119x^3+60x^2-13x+1) * (4x^6-37x^5+106x^4-120x^3+60x^2-13x+1) * (4x^6-37x^5+108x^4-125x^3+61x^2-13x+1) * (4x^6-37x^5+111x^4-123x^3+60x^2-13x+1) * (4x^6-36x^5+102x^4-119x^3+60x^2-13x+1) * (4x^6-36x^5+103x^4-120x^3+60x^2-13x+1) * (4x^6-36x^5+106x^4-121x^3+60x^2-13x+1) * (4x^6-35x^5+98x^4-115x^3+59x^2-13x+1) * (4x^6-35x^5+101x^4-119x^3+60x^2-13x+1) * (4x^6-35x^5+102x^4-117x^3+59x^2-13x+1) * (4x^6-34x^5+97x^4-115x^3+59x^2-13x+1) * (4x^6-33x^5+92x^4-110x^3+58x^2-13x+1) * (4x^6-33x^5+94x^4-113x^3+59x^2-13x+1) * (4x^6-32x^5+89x^4-108x^3+58x^2-13x+1) * (4x^6-32x^5+90x^4-109x^3+58x^2-13x+1)^2 * (5x^6-67x^5+160x^4-148x^3+64x^2-13x+1) * (5x^6-67x^5+160x^4-148x^3+64x^2-13x+1) * (5x^6-63x^5+150x^4-142x^3+63x^2-13x+1)^2 * (5x^6-63x^5+150x^4-142x^3+63x^2-13x+1) * (5x^6-58x^5+145x^4-141x^3+63x^2-13x+1) * (5x^6-57x^5+139x^4-136x^3+62x^2-13x+1) * (5x^6-54x^5+141x^4-140x^3+63x^2-13x+1) * (5x^6-51x^5+131x^4-134x^3+62x^2-13x+1) * (5x^6-51x^5+132x^4-134x^3+62x^2-13x+1) * (5x^6-51x^5+140x^4-140x^3+63x^2-13x+1)^2 * (5x^6-49x^5+130x^4-134x^3+62x^2-13x+1) * (5x^6-49x^5+131x^4-134x^3+62x^2-13x+1) * (5x^6-48x^5+127x^4-133x^3+62x^2-13x+1) * (5x^6-48x^5+130x^4-134x^3+62x^2-13x+1) * (5x^6-47x^5+122x^4-128x^3+61x^2-13x+1) * (5x^6-47x^5+124x^4-129x^3+61x^2-13x+1) * (5x^6-46x^5+127x^4-133x^3+62x^2-13x+1)^2 * (5x^6-45x^5+120x^4-128x^3+61x^2-13x+1) * (5x^6-45x^5+129x^4-134x^3+62x^2-13x+1) * (5x^6-44x^5+119x^4-127x^3+61x^2-13x+1)^2 * (5x^6-43x^5+114x^4-126x^3+61x^2-13x+1) * (5x^6-43x^5+117x^4-127x^3+61x^2-13x+1) * (5x^6-43x^5+120x^4-128x^3+61x^2-13x+1) * (5x^6-42x^5+112x^4-122x^3+60x^2-13x+1) * (5x^6-42x^5+113x^4-126x^3+61x^2-13x+1)^2 * (5x^6-40x^5+106x^4-120x^3+60x^2-13x+1) * (5x^6-40x^5+107x^4-121x^3+60x^2-13x+1) * (5x^6-40x^5+109x^4-121x^3+60x^2-13x+1) * (6x^6-70x^5+161x^4-148x^3+64x^2-13x+1) * (6x^6-62x^5+147x^4-141x^3+63x^2-13x+1)^2 * (6x^6-61x^5+146x^4-141x^3+63x^2-13x+1) * (6x^6-60x^5+146x^4-141x^3+63x^2-13x+1) * (6x^6-58x^5+139x^4-136x^3+62x^2-13x+1) * (6x^6-55x^5+141x^4-140x^3+63x^2-13x+1) * (6x^6-53x^5+132x^4-134x^3+62x^2-13x+1) * (6x^6-52x^5+128x^4-130x^3+61x^2-13x+1) * (6x^6-52x^5+132x^4-134x^3+62x^2-13x+1) * (6x^6-51x^5+131x^4-134x^3+62x^2-13x+1) * (6x^6-50x^5+128x^4-133x^3+62x^2-13x+1) * (6x^6-50x^5+131x^4-134x^3+62x^2-13x+1) * (6x^6-49x^5+127x^4-133x^3+62x^2-13x+1)^2 * (6x^6-48x^5+122x^4-128x^3+61x^2-13x+1)^2 * (6x^6-48x^5+124x^4-129x^3+61x^2-13x+1) * (6x^6-47x^5+121x^4-128x^3+61x^2-13x+1) * (6x^6-46x^5+119x^4-127x^3+61x^2-13x+1) * (6x^6-45x^5+115x^4-126x^3+61x^2-13x+1) * (6x^6-43x^5+109x^4-121x^3+60x^2-13x+1) * (7x^6-71x^5+161x^4-148x^3+64x^2-13x+1) * (7x^6-65x^5+150x^4-142x^3+63x^2-13x+1)^2 * (7x^6-61x^5+146x^4-141x^3+63x^2-13x+1) * (7x^6-59x^5+139x^4-136x^3+62x^2-13x+1) * (7x^6-59x^5+142x^4-140x^3+63x^2-13x+1) * (7x^6-55x^5+133x^4-134x^3+62x^2-13x+1) * (7x^6-54x^5+132x^4-134x^3+62x^2-13x+1) * (7x^6-50x^5+123x^4-128x^3+61x^2-13x+1)^2 * (8x^6-71x^5+161x^4-148x^3+64x^2-13x+1) * (8x^6-67x^5+151x^4-142x^3+63x^2-13x+1) * (8x^6-64x^5+147x^4-141x^3+63x^2-13x+1) * (8x^6-63x^5+147x^4-141x^3+63x^2-13x+1) * (8x^6-61x^5+146x^4-141x^3+63x^2-13x+1) * (8x^6-59x^5+137x^4-135x^3+62x^2-13x+1) * (8x^6-59x^5+139x^4-136x^3+62x^2-13x+1) * (9x^6-67x^5+151x^4-142x^3+63x^2-13x+1) * (9x^6-65x^5+150x^4-142x^3+63x^2-13x+1)^2 * (9x^6-63x^5+141x^4-136x^3+62x^2-13x+1) * (9x^6-61x^5+138x^4-135x^3+62x^2-13x+1) * (9x^6-61x^5+140x^4-136x^3+62x^2-13x+1) * (9x^6-60x^5+137x^4-135x^3+62x^2-13x+1)^2 * (10x^6-67x^5+148x^4-141x^3+63x^2-13x+1) * (11x^6-80x^5+167x^4-149x^3+64x^2-13x+1)^2 * (11x^6-78x^5+166x^4-149x^3+64x^2-13x+1)^2 * (11x^6-72x^5+153x^4-142x^3+63x^2-13x+1) * (11x^6-71x^5+152x^4-142x^3+63x^2-13x+1)^2 * (12x^6-81x^5+167x^4-149x^3+64x^2-13x+1) * (12x^6-75x^5+156x^4-143x^3+63x^2-13x+1) * (12x^6-73x^5+153x^4-142x^3+63x^2-13x+1) * (13x^6-91x^5+182x^4-156x^3+65x^2-13x+1)^2 * (15x^6-88x^5+172x^4-150x^3+64x^2-13x+1) * (x^7-20x^6+102x^5-188x^4+157x^3-65x^2+13x-1) * (x^7-19x^6+92x^5-173x^4+150x^3-64x^2+13x-1) * (x^7-17x^6+86x^5-168x^4+149x^3-64x^2+13x-1) * (x^7-16x^6+77x^5-154x^4+142x^3-63x^2+13x-1) * (x^7-16x^6+79x^5-157x^4+143x^3-63x^2+13x-1) * (x^7-15x^6+75x^5-153x^4+142x^3-63x^2+13x-1) * (x^7-14x^6+67x^5-140x^4+135x^3-62x^2+13x-1) * (x^7-14x^6+68x^5-142x^4+136x^3-62x^2+13x-1)$

Rekurence pro vyšší m se zatím nepodařilo vypočítat, podařilo se ale částečně celý problém vyřešit numericky až do $m=19$, viz následující strany.

Asymptotic behavior - Asymptotické odhady

Dokázány byly tyto horní a dolní odhady (*Lower and upper bound*)

Pro libovolná m a n platí [Knuth 1994](#), [Larsen 1995](#) :

$$(m/2)^n * (n/2)^m \leq f_m(n) \leq (m+1)^n * (n+1)^m$$

Na tomto místě je třeba upozornit na jedno úskalí asymptotických rozvoju. Pokud budeme uvažovat výraz

$$(m+1)^n + m^n + (m-1)^n$$

pak v případě, že m je konstantní (*if $m \ll n$*), lze v asymptotickém rozvoji další členy zanedbat, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(m+1)^n + m^n + (m-1)^n}{(m+1)^n} = 1$$

nebo jinak zapsáno

$$(m+1)^n + m^n + (m-1)^n = O((m+1)^n)$$

Pokud však uvažujeme oblast, kdy m a n jsou shodné (*if $m \sim n$*), toto už neplatí! Potom totiž

$$(n+1)^n \sim n^n * e$$

a druhý člen už není asymptoticky zanedbatelný, naopak má (v tomto smyslu) stejnou váhu jako člen první! A totéž platí i o případných dalších členech.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n + n^n + (n-1)^n}{(n+1)^n} = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}$$

Další kapitola pojednává o **rozložení kořenů**. Jelikož kořeny další v pořadí podle velikosti jsou (při n jdoucím do nekonečna) limitně vzdáleny od největšího kořene jen o konstanty (1, 2, ...), nelze jejich váhu v případném asymptotickém rozvoji zanedbat.

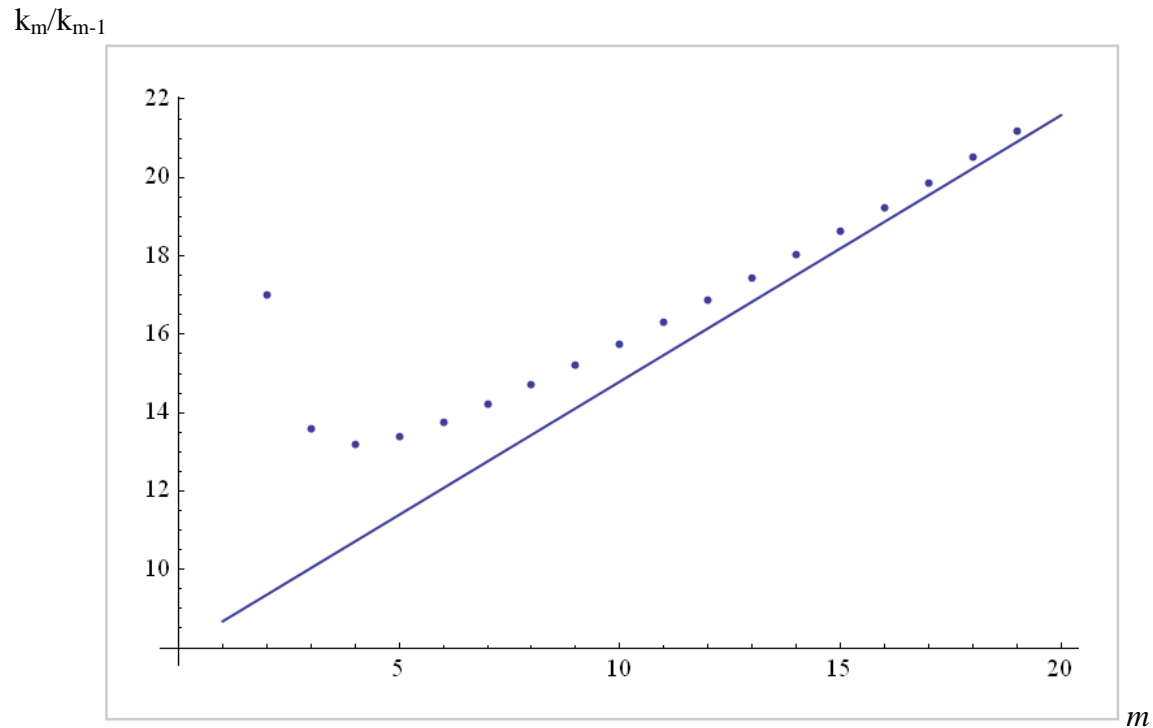
If $m \sim n$ then in the asymptotic expansion is not possible vanish latter term(s).

m	k_m		k_m/k_{m-1}
1	1.00000000000000000000000000000000	Fabel 1964	
2	17.00000000000000000000000000000000	Bandelow 1966	17.0000
3	231.00000000000000000000000000000000	Wilf 1994	13.5882
4	3051.175095785440613026819923371	Wilf 1994	13.2085
5	40881.996383916541237781754448779	Kotěšovec 2010	13.3987
6	563050.923630813933003791997652304	Kotěšovec 2010	13.7725
7	8008508.288587027981899891832842467	Kotěšovec 2010	14.2234
8	117833087.451330412752047111313516657	Kotěšovec 2010	14.7134
9	1794306724.774727261007917982008613128	Kotěšovec 2011	15.2275
10	28276454469.764598028813176916044885234	Kotěšovec 2011	15.7590
11	461049875818.053058870880851667520307966	Kotěšovec 2011	16.3051
12	7775513990776.970461079724357060160146644	Kotěšovec + Breger 2011	16.8648
13	135589372611110.173675086175352488557576470	Kotěšovec + Breger 2011	17.4379
14	2443990803097108.587642148908786180301946421	Kotěšovec + Breger 2011	18.0249
15	45522076785406201.225729623166112570698897006	Kotěšovec + Breger 2011	18.6261
16	875939597341977670.667775345419164879842179086	Kotěšovec + Breger 2011	19.2420
17	17407856624734801679.116137268952603624020753906	Kotěšovec + Breger 2011	19.8733
18	357216046100723515478.428092923668602268901622503	Kotěšovec + Breger 2011	20.5203
19	7567101689641721175327.802726757483751953011052809	Kotěšovec + Breger 2011	21.1835

Zajímá nás jak se funkce $f_m(n)$ chová pokud jde n do nekonečna. Jak odvodil již [Wilf](#) (1994), platí při pevném m (if $m \ll n$) asymptoticky

$$f_m(n) \sim k_m * n * (m + 1)^n$$

kde konstanty k_m jsou závislé pouze na m



Při odhadu asymptotického chování podílu k_m/k_{m-1} musí být člověk dost opatrný. Graf svádí k odhadu, že se tento podíl blíží k vyznačené asymptotě se směrnicí $e/4$. Ovšem není vyloučeno, že průběh nebude lineární a že se zvyšujícím se m se bude od této přímky vzdalovat. Napovědělo by více hodnot, což je ale výpočetně značně náročné. Mám proto zatím jen následující hypotézu:

Conjecture (V. Kotěšovec, 27.8.2011):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k_m}{m * k_{m-1}} \geq \frac{e}{4} = 0.67957 \dots$$

Věřím, že v některém z dalších vydání této knihy budu moct uvést silnější odhad.

Následuje přehledná tabulka vypočtených koeficientů počátečních členů explicitních vzorců u dvou nejvyšších mocnin r_1 (pro $m=1$ až 19) a r_2 (pro $m=2$ až 12). Koeficienty pro $m \leq 12$ jsem vypočetl z přesných hodnot, koeficienty pro $m=13$ až $m=19$ jsem vypočetl metodou nejmenších čtverců z numerických hodnot posloupností, pro které upravil svůj program 11.9.2011 Alex V. Breger.

m			$m+1$			$\frac{m+1+\sqrt{m^2-2m+5}}{2}$
1	(1.0000000000* n	+1.0000000000)*	2^n			
2	(17.0000000000* n	-109.0000000000)*	3^n	+ (0.0000000000* n	+110.0072722464)*	$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
3	(231.0000000000* n	-2377.0000000000)*	4^n	+ (98.9974746830* n	+2761.9795436573)*	$(2+\sqrt{2})^n$
4	(3051.1750957854* n	-41306.0010866693)*	5^n	+ (2377.8243210042* n	+50967.3210308199)*	$\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^n$
5	(40881.9963839165* n	-678713.9140298387)*	6^n	+ (38562.0893894658* n	+926641.4858544337)*	$(3+\sqrt{5})^n$
6	(563050.9236308139* n	-11041671.4136922061)*	7^n	+ (575846.8547897144* n	+16247605.2843835056)*	$\left(\frac{7+\sqrt{29}}{2}\right)^n$
7	(8008508.2885870279* n	-181089995.7487161801)*	8^n	+ (8540270.3882582723* n	+281435037.7821712904)*	$(4+\sqrt{10})^n$
8	(117833087.4513304127* n	-3019882133.9627005377)*	9^n	+ (128935400.0021425287* n	+4894240701.2730518232)*	$\left(\frac{9+\sqrt{53}}{2}\right)^n$
9	(1794306724.7747272610* n	-51442071798.3316034957)*	10^n	+ (2000114518.5350047007* n	+86239744683.8040636980)*	$(5+\sqrt{17})^n$
10	(28276454469.7645980288* n	-897521639829.2414666071)*	11^n	+ (32001188869.9463871955* n	+1547997651367.1224311621)*	$\left(\frac{11+\sqrt{85}}{2}\right)^n$
11	(461049875818.0530588708* n	-16065469868976.3008005223)*	12^n	+ (528914297003.0755507536* n	+28398336684926.1155493584)*	$(6+\sqrt{26})^n$
12	(7775513990776.9704610797* n	-295349806263796.9790817787)*	13^n	+ (9035904749827.6767717864* n	+533561052056563.3819727121)*	$\left(\frac{13+5\sqrt{5}}{2}\right)^n$
13	(135589372611110.1736750861* n	-5580792434029624.0096243514)*	14^n			
14	(2443990803097108.5876421489* n	-108441646314145718.1324256892)*	15^n			
15	(45522076785406201.2257296231* n	-2167697569482565016.0327500435)*	16^n			
16	(875939597341977670.6677753454* n	-44588230624885179382.0902354880)*	17^n			
17	(17407856624734801679.1161372689* n	-943939241875188063530.6483033435)*	18^n			
18	(357216046100723515478.4280929236* n	-20569640644159493984858.5954752799)*	19^n			
19	(7567101689641721175327.8027267574* n	-461425657305852060386818.5400184084)*	20^n			

2.3.10) Largest, second-largest and smallest root - Největší, druhý největší a nejmenší kořen

Hlavní výsledky obsažené v této kapitole, lze shrnout takto:

Main results: *If we compute roots of characteristic equation (=reciprocal values of roots of denominator), then*

- largest root is $m + 1$ (proved by [H. Wilf, 1994](#))
- smallest root is $2 - 2 * \cos\left(\frac{\pi}{m+2+(-1)^m}\right)$ (conjecture by [V. Kotěšovec, 2010](#)), asymptotically is smallest value $\sim \frac{\pi^2}{m^2}$

Zde je třeba si ujasnit **terminologii**. Jmenovatel vytvořující funkce (=denominátor) obsahuje polynom, jehož stupeň odpovídá hloubce rekurence (=recurrence order). Explicitní vzorec dostaneme jako součet partikulárních řešení této diferenční rovnice. Každé partikulární řešení odpovídá jednomu (v reálném oboru dále nerozložitelnému) faktoru ve jmenovateli vytvořující funkce (=irreducible factor). Převrácené hodnoty kořenů každého faktoru odpovídají kořenům charakteristické rovnice a každý takový člen je pak ještě vynásoben polynomem jehož stupeň odpovídá exponentu příslušného faktoru -1.

Pokud tedy bude ve jmenovateli vytvořující funkce např. člen $(x^2 - 4x + 2)^4$, dostaneme po substituci $x \rightarrow \frac{1}{y}$, charakteristickou rovnici $2y^2 - 4y + 1$. Tato **charakteristická rovnice** má dva kořeny $\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$ a $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$

Obecné řešení diferenční rovnice (=explicitní vzorec) dostaneme pak jako součet partikulárních řešení takto: $(ax^3 + bx^2 + cx + d) * \left(\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})\right)^n + (ex^3 + fx^2 + gx + h) * \left(\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})\right)^n$

kde a, b, c, d, e, f, g, h jsou konstanty určité z počátečních členů posloupnosti. Je třeba si ještě uvědomit, že počet těchto neznámých je roven stupni polynomu v denominátoru (v tomto případě byl faktor polynom stupně 2 a exponent faktoru 4, což odpovídá celkem $2*4=8$ neznámým v explicitním vzorci).

Pokud tedy budu v dalším textu používat slovo **kořen** (=root) mám tím vždy na mysli kořeny charakteristické rovnice (nikoliv přímo kořeny denominátoru).

*Important: In following text means „root“, root of characteristic equation (not root of denominator). Roots of denominator are **reciprocal values** of roots of characteristic equation.*

Převrácené hodnoty kořenů určují tvar partikulárních řešení. Pokud tyto hodnoty srovnáme **podle velikosti**, dostaneme tabulku na str.145 a grafy na str. 155. Jak již teoreticky dokázal v článku [The Problem of the Kings](#) H. Wilf, člen s nejvyšší váhou má vždy hodnotu **m+1**, což bylo potvrzeno výpočty pro všechny $m \leq 20$.

$$r_1 = m + 1 \quad (\text{H. Wilf, 1994})$$

Výpočet **čísla druhého v pořadí**, uvedený na konci citovaného článku, je však chybný! *Formula for second-largest root in article by Wilf (1994) is wrong.*

Right formula is (V. Kotěšovec, 27.2.2010):

$$r_2 = \frac{m + 1 + \sqrt{m^2 - 2m + 5}}{2} \quad (\text{for } m > 1)$$

Dalším (poněkud překvapujícím) výsledkem je, že pro **m** jdoucí do nekonečna se první dvě největší čísla nevzdálí více jak o 1, přesněji

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (r_1 - r_2) = 1$$

Číslo druhé v pořadí je kořenem kvadratické rovnice

$$x^2 - (m + 1)x + (m - 1) = 0$$

Polynomy v denominátoru vytvářející funkce odpovídají převráceným hodnotám těchto kořenů, příslušný polynom v denominátoru je proto

$$(m - 1)x^2 - (m + 1)x + 1$$

3.kořen má pak tvar

$$r_3 = \frac{m + 1 + \sqrt{m^2 - 6m + 17}}{2} \quad (\text{for } m > 3) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (r_1 - r_3) = 2$$

Příslušná kvadratická rovnice je polynom v denominátoru

$$\begin{aligned} x^2 - (m + 1)x + 2(m - 2) &= 0 \\ 2(m - 2)x^2 - (m + 1)x + 1 & \end{aligned}$$

4.kořen má tvar

$$r_4 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4m + 12}}{2} \quad (\text{for } m > 3) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (r_1 - r_4) = 2$$

Příslušná kvadratická rovnice je polynom v denominátoru

$$\begin{aligned} x^2 - m x + (m - 3) &= 0 \\ (m - 3)x^2 - m x + 1 & \end{aligned}$$

5.kořen má tvar

$$r_5 = \frac{m + 1 + \sqrt{m^2 - 6m + 13}}{2} \quad (\text{for } m > 3)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (r_1 - r_5) = 2$$

Příslušná kvadratická rovnice je
polynom v denominátoru

$$x^2 - (m + 1)x + 2m - 3 = 0$$

$$(2m - 3)x^2 - (m + 1)x + 1$$

Správnost těchto vzorců byla rovněž potvrzena výpočty až do $m=20$. Tabulka zobrazuje pro každé m 5 největších kořenů.

m	1.root	2.root	3.root	4.root	5.root
	m+1	$\frac{m + 1 + \sqrt{m^2 - 2m + 5}}{2}$	$\frac{m + 1 + \sqrt{m^2 - 6m + 17}}{2}$	$\frac{m + \sqrt{m^2 - 4m + 12}}{2}$	$\frac{m + 1 + \sqrt{m^2 - 6m + 13}}{2}$
1	2				
2	3	2.6180339887498948482			
3	4	3.4142135623730950488			
4	5	4.3027756377319946466	4.0000000000000000000	3.7320508075688772935	3.6180339887498948482
5	6	5.2360679774997896964	4.7320508075688772935	4.5615528128088302749	4.4142135623730950488
6	7	6.1925824035672520156	5.5615528128088302749	5.4494897427831780982	5.3027756377319946466
7	8	7.1622776601683793320	6.4494897427831780982	6.3722813232690143299	6.2360679774997896964
8	9	8.1400549446402591355	7.3722813232690143299	7.3166247903553998491	7.1925824035672520156
9	10	9.1231056256176605498	8.3166247903553998491	8.2749172176353748486	8.1622776601683793320
10	11	10.109772228646443655	9.2749172176353748486	9.2426406871192851464	9.1400549446402591355
11	12	11.099019513592784830	10.242640687119285146	10.216990566028301906	10.123105625617660550
12	13	12.090169943749474241	11.216990566028301906	11.196152422706631881	11.109772228646443655
13	14	13.082762530298219689	12.196152422706631881	12.178908345800273611	12.099019513592784830
14	15	14.076473218982952720	13.178908345800273611	13.164414002968976450	13.090169943749474241
15	16	15.071067811865475244	14.164414002968976450	14.152067347825035363	14.082762530298219689
16	17	16.066372975210777964	15.152067347825035363	15.141428428542849998	15.076473218982952720
17	18	17.062257748298549652	16.141428428542849998	16.132168761236874013	16.071067811865475244
18	19	18.058621384311844882	17.132168761236874013	17.124038404635960360	17.066372975210777964
19	20	19.055385138137416627	18.124038404635960360	18.116843969807042990	18.062257748298549652
20	21	20.052486587271400090	19.116843969807042990	19.110433579144298882	19.058621384311844882

Ještě zajímavější je algebraické vyjádření **nejmenších** kořenů

m	smallest roots			root of a polynomial
1	2.0000000000000000	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$	2	$x - 2$
2	0.381966011250105	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$	$x^2 - 3x + 1$
3	0.585786437626904	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$2 - \sqrt{2}$	$x^2 - 4x + 2$
4	0.198062264195161	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$		$x^3 - 5x^2 + 6x - 1$
5	0.267949192431122	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$2 - \sqrt{3}$	$x^2 - 4x + 1$
6	0.120614758428183	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$		$x^3 - 6x^2 + 9x - 1$
7	0.152240934977426	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$	$2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}$	$x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 2$
8	0.081014052771005	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{11}\right)$		$x^5 - 9x^4 + 28x^3 - 35x^2 + 15x - 1$
9	0.097886967409692	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$	$2 - \sqrt{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})}$	$x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x + 1$
10	0.058116365147895	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{13}\right)$		$x^6 - 11x^5 + 45x^4 - 84x^3 + 70x^2 - 21x + 1$
11	0.068148347421863	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$	$x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 1$
12	0.043704798532388	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{15}\right)$	$\frac{1}{4}\left(9 - \sqrt{5} - \sqrt{6(5 + \sqrt{5})}\right)$	$x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x + 1$
13	0.050144175636352	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$		$x^6 - 12x^5 + 53x^4 - 104x^3 + 86x^2 - 24x + 1$
14	0.034053800632196	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$	$\frac{1}{8}\left(15 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - \sqrt{2\left(34 + 6\sqrt{17} - \sqrt{578 - 34\sqrt{17}} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 8\sqrt{2(17 + \sqrt{17})}\right)}\right)$	$x^8 - 15x^7 + 91x^6 - 286x^5 + 495x^4 - 462x^3 + 210x^2 - 36x + 1$
15	0.038429439193539	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$	$2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	$x^8 - 16x^7 + 104x^6 - 352x^5 + 660x^4 - 672x^3 + 336x^2 - 64x + 2$
16	0.027277393194555	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{19}\right)$		$x^9 - 17x^8 + 120x^7 - 455x^6 + 1001x^5 - 1287x^4 + 924x^3 - 330x^2 + 45x - 1$

17	0.030384493975583	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{18}\right)$		$x^6 - 12x^5 + 54x^4 - 112x^3 + 105x^2 - 36x + 1$
18	0.022338347549742	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{21}\right)$		$x^6 - 13x^5 + 64x^4 - 146x^3 + 148x^2 - 48x + 1$
19	0.024623318809724	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{20}\right)$	$\frac{1}{4} \left(8 - \sqrt{2} - \sqrt{10} - 2\sqrt{5 - \sqrt{5}} \right)$	$x^6 - 13x^5 + 64x^4 - 146x^3 + 148x^2 - 48x + 1$
20	0.018628107927338	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{23}\right)$		$x^{11} - 21x^{10} + 190x^9 - 969x^8 + 3060x^7 - 6188x^6 + 8008x^5 - 6435x^4 + 3003x^3 - 715x^2 + 66x - 1$

For example, last characteristic equation for $m=20$, correspond to factor in denominator: $x^{11} - 66x^{10} + 715x^9 - 3003x^8 + 6435x^7 - 8008x^6 + 6188x^5 - 3060x^4 + 969x^3 - 190x^2 + 21x - 1$

Polynomy odpovídající kosinovým členům můžeme dostat v programu Mathematica takto:

```
Table[{m, MinimalPolynomial[2-2*Cos[Pi/(m+2+(-1)^m)], x]}, {m, 1, 20}]/MatrixForm/TraditionalForm
```

Příslušné polynomy v denominátoru pak takto:

```
Table[{m, polyy=MinimalPolynomial[2-2*Cos[Pi/(m+2+(-1)^m)], y];
```

```
ey=Exponent[polyy, y]; polyx=Simplify[(polyy/.y->(1/x))*x^ey];
```

```
If[Coefficient[polyx, x, Exponent[polyx, x]]<0, Simplify[-polyx], polyx]}, {m, 1, 20}]/MatrixForm/TraditionalForm
```

Conjecture (Václav Kotěšovec, 11.12.2010)

Smallest root is

$$r_{min} = 2 - 2 \cos \left(\frac{\pi}{m + 2 + (-1)^m} \right)$$

Speciálně pro m sudé (for m even)

$$r_{min} = 2 - 2 \cos \left(\frac{\pi}{m + 3} \right)$$

Speciálně pro m liché (for m odd)

$$r_{min} = 2 - 2 \cos \left(\frac{\pi}{m + 1} \right)$$

Z předchozích vzorců vyplývají následující vlastnosti nejmenšího kořene:

Pro všechna m je

$$r_{min} > 0$$

Tedy všechny kořeny leží v intervalu

$$0 < r \leq m + 1$$

Limitně se ale nejmenší kořen blíží 0

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_{min} = 0$$

Dále platí

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^2 * r_{min} = \lim_{m \rightarrow \infty} m^2 * \left(2 - 2 \cos \left(\frac{\pi}{m + 2 + (-1)^m} \right) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} 4m^2 * \sin^2 \left(\frac{\pi}{2m + 4 + 2(-1)^m} \right) = \pi^2$$

Asymptoticky je tedy

$$r_{min} \sim \frac{\pi^2}{m^2}$$

14.9.2011 Roots for normal chessboard and horizontal cylinder are same (with exception of $m=3$ and $m=5$ where is in denominator for horizontal cylinder only one factor $x-1$ more). Therefore is also my conjecture about value of minimal root same also for horizontal cylinder. This conjecture holds for all $m \leq 20$!

root number	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8	generally		$m \rightarrow \infty$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	m+1		m+1
2		2.618033988 $(3+\sqrt{5})/2$	3.414213562 $2+\sqrt{2}$	4.302775637 $(5+\sqrt{13})/2$	5.236067977 $3+\sqrt{5}$	6.192582403 $(7+\sqrt{29})/2$	7.16227766 $4+\sqrt{10}$	8.14005494 $(9+\sqrt{53})/2$	$(m+1 + \sqrt{(m^2-2m+5)})/2$	m>1	$\rightarrow m$
3		0.381966011 $(3-\sqrt{5})/2$	3 3	4 4	4.732050807 $3+\sqrt{3}$	5.561552812 $(7+\sqrt{17})/2$	6.449489742 $4+\sqrt{6}$	7.37228132 $(9+\sqrt{33})/2$	$(m+1 + \sqrt{(m^2-6m+17)})/2$	m>3	$\rightarrow m-1$
4			0.585786437 $2-\sqrt{2}$	3.732050807 $2+\sqrt{3}$	4.561552812 $(5+\sqrt{17})/2$	5.449489742 $3+\sqrt{6}$	6.372281323 $(7+\sqrt{33})/2$	7.31662479 $4+\sqrt{11}$	$(m + \sqrt{(m^2-4m+12)})/2$	m>3	$\rightarrow m-1$
5				3.618033988 $(5+\sqrt{5})/2$	4.414213562 $3+\sqrt{2}$	5.302775637 $(7+\sqrt{13})/2$	6.236067977 $4+\sqrt{5}$	7.19258240 $(9+\sqrt{29})/2$	$(m+1 + \sqrt{(m^2-6m+13)})/2$	m>3	$\rightarrow m-1$
6				3.246979603 $4\cos^2(\pi/7)$	4.214319743 <i>see page 98</i>	4.935432331	6 6	6.79128785 $(9+\sqrt{21})/2$			
7				1.554958132 $4\cos^2(2\pi/7)$	4 4	4.866198262	5.744826077	6.61185871			
8				1.381966011 $(5-\sqrt{5})/2$	3.879385241 $4\sin^2(4\pi/9)$	4.651093408	5.645751311 $3+\sqrt{7}$	6.56155281 $(9+\sqrt{17})/2$			
9				1 1	3.732050807 $2+\sqrt{3}$	4.618033988 $(7+\sqrt{5})/2$	5.507018644	6.50466435			
10				0.697224362 $(5-\sqrt{13})/2$	3.414213562 $2+\sqrt{2}$	4.561552812 $(5+\sqrt{17})/2$	5.449489742 $3+\sqrt{6}$	6.41147413			
11				0.267949192 $2-\sqrt{3}$	2 2	4.460504870	5.414213562 $4+\sqrt{2}$	6.30277564 $(9+\sqrt{13})/2$			
12				0.198062264 $4\cos^2(3\pi/7)$	1.652703644 $4\sin^2(2\pi/9)$	4.390256884 <i>see page 102</i>	5.323404276	6.24655136			
13					1.585786437 $3-\sqrt{2}$	4.302775637 $(5+\sqrt{13})/2$	5.236067977 $3+\sqrt{5}$	6.14743023			
14					1.460811128 <i>see page 98</i>	4.170086486	5.086130197	6.10043199			
15					1.267949192 $3-\sqrt{3}$	4 4	5.048917339	6 6			
16					0.763932022 $3-\sqrt{5}$	3.956295201 $4\sin^2(7\pi/15)$	5 5	5.81880441			

17					0.585786437 $2-\sqrt{2}$	3.801937735 $4\sin^2(3\pi/7)$	4.912229178	5.79128785 $(7+\sqrt{21})/2$		
18					0.467911113 $4\sin^2(\pi/9)$	3.532088886 $4\cos^2(\pi/9)$	4.813606502	5.77845712		
19					0.438447187 $(5-\sqrt{17})/2$	2.618033988 $(3+\sqrt{5})/2$	4.732050807 $3+\sqrt{3}$	5.66907909		
20					0.324869128 <i>see page 98</i>	2.445041868 $4\sin^2(2\pi/7)$	4.699628148	5.61803399 $(9+\sqrt{5})/2$		
21					0.267949192 $2-\sqrt{3}$	2.381966011 $(7-\sqrt{5})/2$	4.685543932 <i>see page 107</i>	5.60167913		
22						2.347296355 $4\cos^2(2\pi/9)$	4.561552812 $(5+\sqrt{17})/2$	5.58064949		
23						2.311107817	4.481194304	5.56155281 $(7+\sqrt{17})/2$		
24						2.239123278	4.460504870	5.52382740 <i>see page 154</i>		
25						2.209056926 $4\sin^2(4\pi/15)$	4.342923082	5.49086362		
26						$\frac{2}{2}$	4.302775637 $(5+\sqrt{13})/2$	5.44948974 $3+\sqrt{6}$		
27						1.837852791	4.246979603	5.36146877		
28						1.789244119	4.143864425	5.33005874		
29						1.726109445	4.061498850	5.32340428		
30						1.697224362 $(7-\sqrt{13})/2$	$\frac{4}{4}$	5.23606798 $3+\sqrt{5}$		
31						1.537401577	3.847759065 $4\cos^2(\pi/16)$	5.15806602		
32						1.438447187 $(7-\sqrt{17})/2$	3.618033988 $(5+\sqrt{5})/2$	5.12841906		
33						$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{3}$	5.11490754		
34						0.807417596 $(7-\sqrt{29})/2$	2.858441954	5.10581735		
35						0.753020395 $4\sin^2(\pi/7)$	2.765366864 $4\cos^2(3\pi/16)$	5.08613020		
36						0.697224362 $(5-\sqrt{13})/2$	2.760876721	5.02228434		

37						0.661738787 $4\sin^2(2\pi/15)$	2.688892182	$\frac{5}{5}$		
38						0.622797146	2.618033988 $(3+\sqrt{5})/2$	4.92905836		
39						0.550510257 $3-\sqrt{6}$	2.585786437 $4-\sqrt{2}$	4.90321193		
40						0.544113219	2.554958132	4.87938524 $1+4\sin^2(4\pi/9)$		
41						0.527166091	2.529316580	4.87602993 <i>see page 154</i>		
42						0.518805695	2.470683419	4.86080585		
43						0.438447187 $(5-\sqrt{17})/2$	2.428006731	4.83424318		
44						0.381966011 $(3-\sqrt{5})/2$	2.396338530	4.79128785 $(5+\sqrt{21})/2$		
45						0.344557618	2.357926367	4.76251271		
46						0.300371851	2.334903985 <i>see page 107</i>	4.75801626		
47						0.227777104	2.286462065	4.73205081 $3+\sqrt{3}$		
48						0.172909084 $4\sin^2(\pi/15)$	2.239123278	4.69962815		
49						0.120614758 $4\cos^2(4\pi/9)$	$\frac{2}{2}$	4.61128405		
50							1.778123837	4.60312217		
51							1.763932022 $4-\sqrt{5}$	4.56155281 $(5+\sqrt{17})/2$		
52							1.604068139	4.53208889 $1+4\cos^2(\pi/9)$		
53							1.550510257 $4-\sqrt{6}$	4.52309559		
54							1.381966011 $(5-\sqrt{5})/2$	4.49086362		
55							1.306177543	4.43828324 <i>see page 154</i>		
56							1.267949192 $3-\sqrt{3}$	4.41421356 $3+\sqrt{2}$		

57							1.234633135 $4\sin^2(3\pi/16)$	4.36233983		
58							1.198062264	4.28399787		
59							1 1	4.24977751		
60							0.837722339 $4-\sqrt{10}$	4.21431974		
61							0.829913513	4.12675706		
62							0.801308756	4.11490754		
63							0.781690346	4.09529399 <i>see page 154</i>		
64							0.763932022 $3-\sqrt{5}$	4.02641795		
65							0.728669629 <i>see page 107</i>	4 4		
66							0.714857518	3.87938524 $4\sin^2(4\pi/9)$		
67							0.697224362 $(5-\sqrt{13})/2$	3.68250707 $4\cos^2(\pi/11)$		
68							0.657076917	3.65662043		
69							0.651105782	3.38196601 $(9-\sqrt{5})/2$		
70							0.643104132	3.34729636 $1+4\cos^2(2\pi/9)$		
71							0.627718676 $(7-\sqrt{33})/2$	3.31205649		
72							0.550510257 $3-\sqrt{6}$	3.25410169		
73							0.539495129	3.24697960 $4\sin^2(\pi/7)$		
74							0.485863070	3.20163968		
75							0.438447187 $(5-\sqrt{17})/2$	3.19712630		
76							0.381966011 $(3-\sqrt{5})/2$	3.16744919		
77							0.354248688 $3-\sqrt{7}$	3.13856427 <i>see page 154</i>		

78							0.318669356	3.11174866		
79							0.307978528	3.09743828		
80							0.300371851	3 3		
81							0.250882452 <i>see page 107</i>	2.91373170		
82							0.235985074	2.90649011 <i>see page 154</i>		
83							0.216003272	2.86998564		
84							0.186393497	2.83083003 $4\cos^2(2\pi/11)$		
85							0.152240934 $4\sin^2(\pi/16)$	2.82578455		
86								2.80606343		
87								2.79836032		
88								2.78526145		
89								2.76784110		
90								2.76087672		
91								2.74589831		
92								2.73764031 <i>see page 154</i>		
93								2.71083145		
94								2.69722436 $(9-\sqrt{13})/2$		
95								2.69493616		
96								2.66012311		
97								2.65270364 $1+4\sin^2(2\pi/9)$		
98								2.61803399 $(3+\sqrt{5})/2$		
99								2.49131682		
100								2.48508395		
101								2.47602360		
102								2.43844719 $(9-\sqrt{17})/2$		
103								2.43660294		

104								2.42800673		
105								2.42311248		
106								2.40763553 <i>see page 154</i>		
107								2.35792637		
108								2.34337957		
109								2.33887969		
110								2.27551553		
111								2.27152725		
112								2.20871215 $(9-\sqrt{21})/2$		
113								2.18144195		
114								2.13535911		
115								2.12313044		
116								2		
117								1.81520747		
118								1.80741760 $(9-\sqrt{29})/2$		
119								1.74589831		
120								1.71537032 $4\cos^2(3\pi/11)$		
121								1.68154110		
122								1.65867531		
123								1.65270364 $4\sin^2(2\pi/9)$		
124								1.62771868 $(9-\sqrt{33})/2$		
125								1.58578644 $3-\sqrt{2}$		
126								1.55495813 $4\sin^2(2\pi/7)$		
127								1.52274000 <i>see page 154</i>		
128								1.51682136		
129								1.46791111 $1+4\sin^2(\pi/9)$		

130								1.46081113		
131								1.43844719 (7-√17)/2		
132								1.43311137		
133								1.41533600		
134								1.34337957		
135								1.32035681		
136								1.28792391		
137								1.26794919 3-√3		
138								1.25253155		
139								1.22554253		
140								1.21552401		
141								1.20871215 (7-√21)/2		
142								1.18550012		
143								1.17975075 <i>see page 154</i>		
144								1.16575682		
145								1.13919415		
146								1.12061476 1+4cos²(4pi/9)		
147								1		
148								0.885092459		
149								0.871580936		
150								0.859945055 (9-√53)/2		
151								0.854897309		
152								0.843897537		
153								0.816843483		
154								0.809090381		
155								0.778948242 <i>see page 154</i>		
156								0.773318403		

157								0.763932023 $3-\sqrt{5}$		
158								0.742004056 <i>see page 154</i>		
159								0.738197755		
160								0.729465979		
161								0.721492242		
162								0.690278532 $4\cos^2(4\pi/11)$		
163								0.683375210 $4-\sqrt{11}$		
164								0.681920126		
165								0.671127818		
166								0.669941260		
167								0.644325706 <i>see page 154</i>		
168								0.560688328		
169								0.558709090		
170								0.550510257 $3-\sqrt{6}$		
171								0.539495130		
172								0.531123990		
173								0.510711428		
174								0.509136385		
175								0.491518801		
176								0.485863071		
177								0.481389601		
178								0.475475904 <i>see page 154</i>		
179								0.471082043		
180								0.467911114 $4\sin^2(\pi/9)$		
181								0.461914860		
182								0.438447187 $(5-\sqrt{17})/2$		

183								0.423585097		
184								0.381966011 $(3-\sqrt{5})/2$		
185								0.359976533		
186								0.336572906		
187								0.335455078		
188								0.334731491		
189								0.330336159		
190								0.324869129		
191								0.318669356		
192								0.311368187		
193								0.290724641		
194								0.289588833 <i>see page 154</i>		
195								0.284062992		
196								0.260856311		
197								0.257249391		
198								0.249199578		
199								0.243401746 <i>see page 154</i>		
200								0.232761916		
201								0.208712153 $(5-\sqrt{21})/2$		
202								0.198062264 $4\cos^2(3\pi/7)$		
203								0.190505365		
204								0.165756816		
205								0.157084231		
206								0.139194147		
207								0.113390355		
208								0.081014052 $4\cos^2(5\pi/11)$		

Některé z kořenů pro $m=8$ jde ještě také vyjádřit pomocí radikálů

$$\begin{aligned} 4.876029932393809 &= (9 + \sqrt{5} + \sqrt{(46 + 10 * \sqrt{5})})/4 \\ 4.438283239402896 &= (9 + \sqrt{5} + \sqrt{(38 + 2 * \sqrt{5})})/4 \\ 4.095293985223914 &= (9 + \sqrt{5} + \sqrt{(22 + 2 * \sqrt{5})})/4 \\ 3.138564265110172 &= (9 - \sqrt{5} + \sqrt{(38 - 2 * \sqrt{5})})/4 \\ 2.906490107234348 &= (9 - \sqrt{5} + \sqrt{(46 - 10 * \sqrt{5})})/4 \\ 2.737640305228187 &= (9 - \sqrt{5} + \sqrt{(22 - 2 * \sqrt{5})})/4 \\ 1.522740003525980 &= (9 + \sqrt{5} - \sqrt{(22 + 2 * \sqrt{5})})/4 \\ 1.179750749346998 &= (9 + \sqrt{5} - \sqrt{(38 + 2 * \sqrt{5})})/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.742004056356085 &= (9 + \sqrt{5} - \sqrt{(46 + 10 * \sqrt{5})})/4 \\ 0.644325706021917 &= (9 - \sqrt{5} - \sqrt{(22 - 2 * \sqrt{5})})/4 \\ 0.475475904015756 &= (9 - \sqrt{5} - \sqrt{(46 - 10 * \sqrt{5})})/4 \\ 0.243401746139932 &= (9 - \sqrt{5} - \sqrt{(38 - 2 * \sqrt{5})})/4 \\ 5.523827396002787 &= (9 + \sqrt{13} + \sqrt{(54 + 10 * \sqrt{13})})/4 \\ 2.407635529712780 &= (9 - \sqrt{13} + \sqrt{(54 - 10 * \sqrt{13})})/4 \\ 0.778948241729206 &= (9 + \sqrt{13} - \sqrt{(54 + 10 * \sqrt{13})})/4 \\ 0.289588832555225 &= (9 - \sqrt{13} - \sqrt{(54 - 10 * \sqrt{13})})/4 \end{aligned}$$

Zajímavé vlastnosti dalších skupin kořenů (pro $m=8$) vyjadřují následující rovnice

$$\left(x - 1 - 4 \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)^2\right) * \left(x - 1 - 4 \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)^2\right) * \left(x - 1 - 4 \sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)^2\right) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$$

$$\left(x - 1 - 4 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)^2\right) * \left(x - 1 - 4 \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)^2\right) * \left(x - 1 - 4 \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)^2\right) = x^3 - 9x^2 + 24x - 17$$

$$\left(x - 4 \cos\left(\frac{\pi}{11}\right)^2\right) * \left(x - 4 \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)^2\right) * \left(x - 4 \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)^2\right) * \left(x - 4 \cos\left(\frac{4\pi}{11}\right)^2\right) * \left(x - 4 \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)^2\right) = x^5 - 9x^4 + 28x^3 - 35x^2 + 15x - 1$$

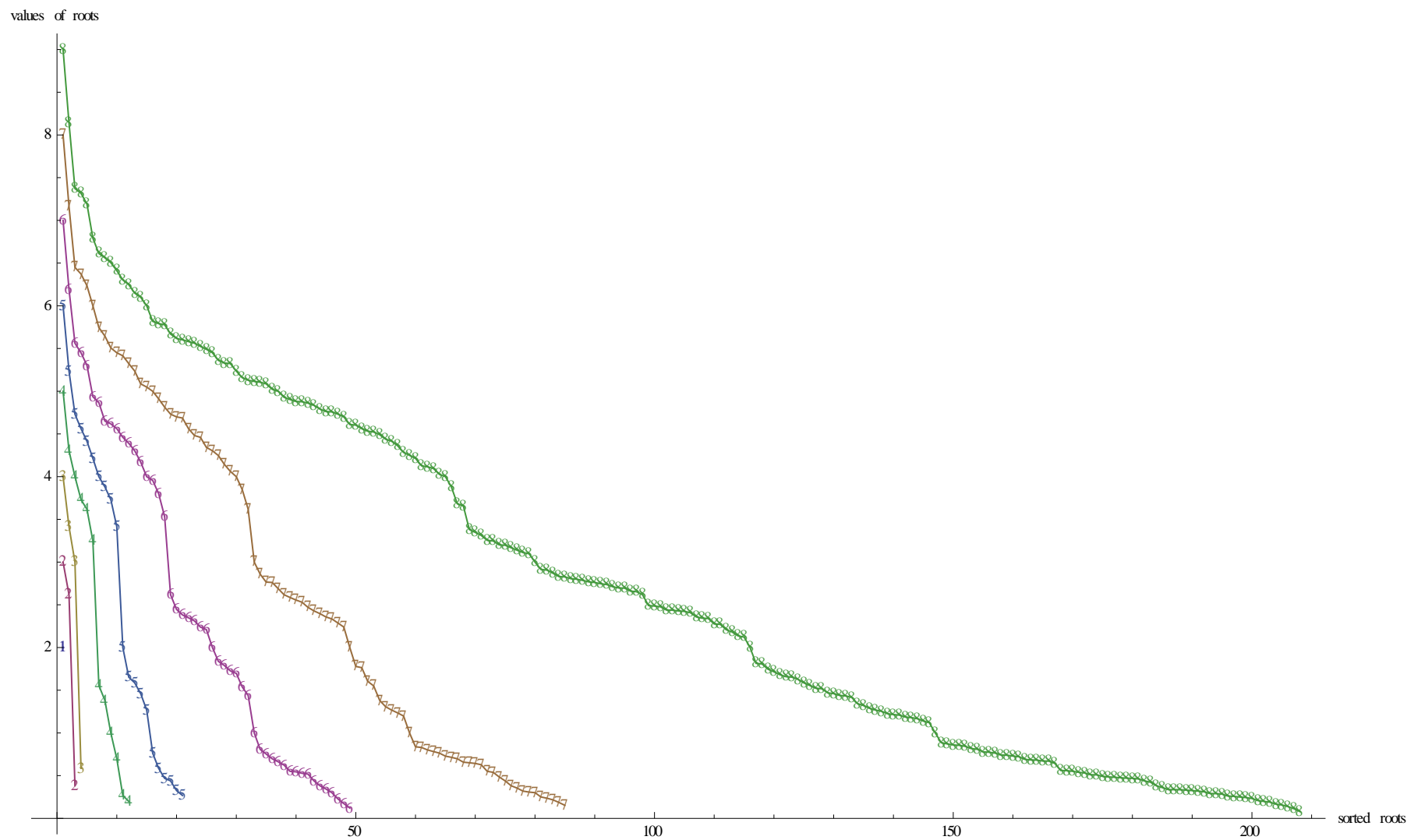
Zejména poslední příklad je (v kombinaci s dalšími identitami) další pěknou ukázkou aplikace [de Moivreova](#) vztahu, jak jsem již popisoval na str. 95 pro případy kubických rovnic. Zde podobným postupem získáme elegantnější vyjádření kořenů rovnice 5. stupně. Obecněji platí, že každý takovýto součin je polynom v x (a trigonometrické výrazy jsou pak kořeny příslušné rovnice).

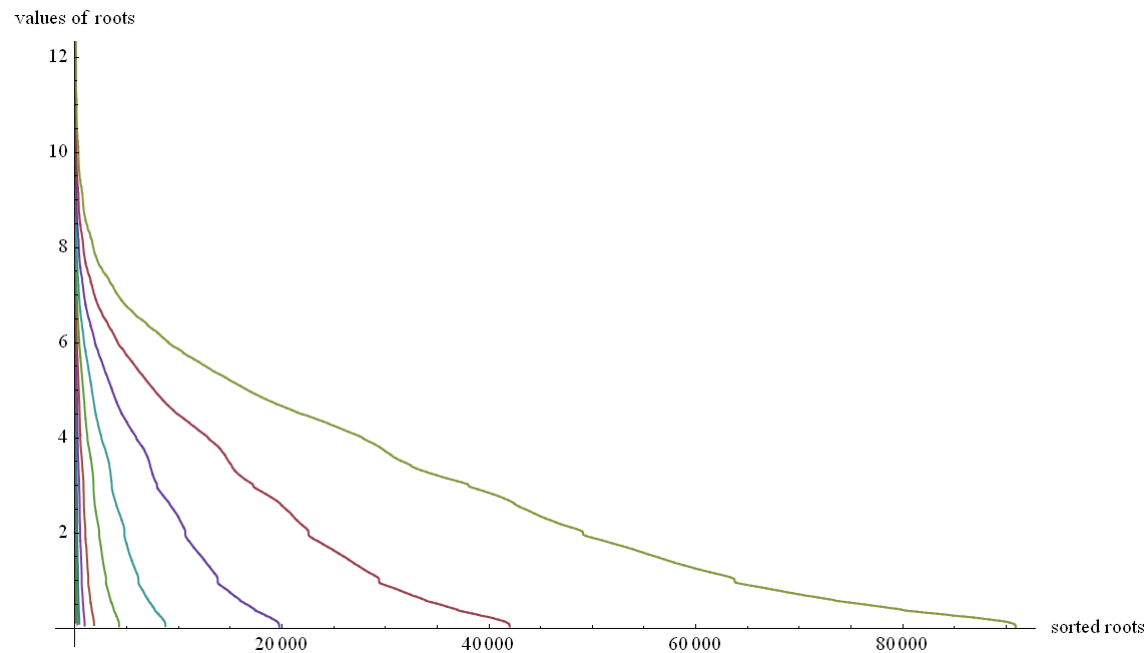
$$\prod_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(x - 4 \cos^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)\right) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n-j-1}{j} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - j}$$

Samozřejmě, ne každý polynom se dá takto rozložit, naopak tento případ je spíše raritní. Jsou tu ještě zajímavé analogie s podobnými typy polynomů, viz např. [Fibonacci Polynomial](#) (tyto polynomy mají shodné koeficienty, ale nestřídají znaménka, navíc se liší v mocninách x).

Sorted values of roots for $m=1$ to 8

Osa x představuje pořadová čísla kořenů (pro každé m seříděných podle velikosti), na ose y jsou hodnoty těchto kořenů

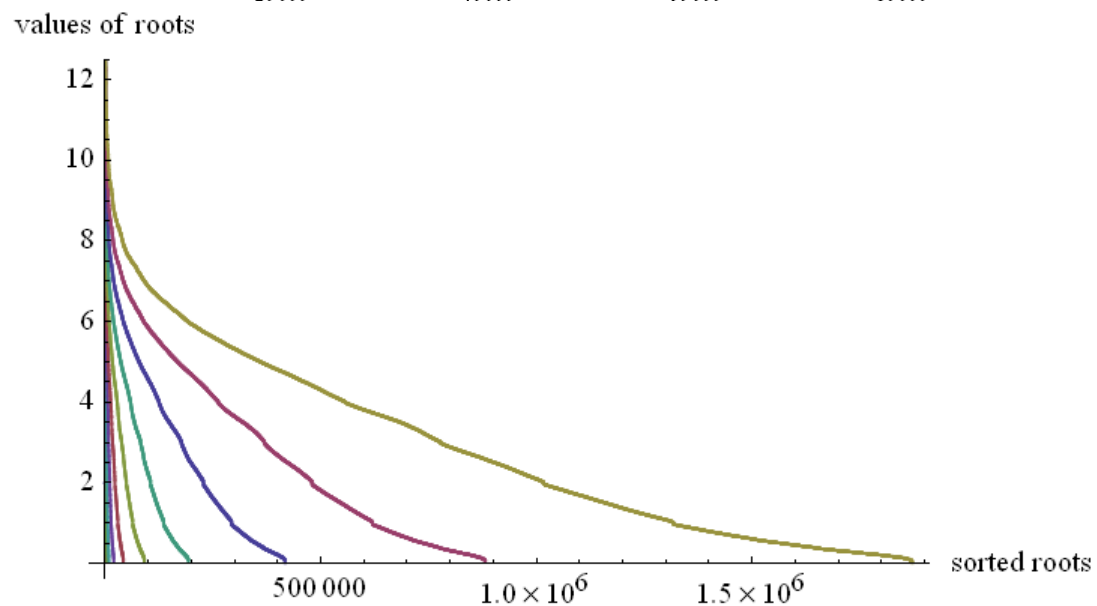




Sorted values of roots for $m=1$ to 16

(roots are same for normal chess and for horizontal cylinder)

Graf s novými hodnotami až do $m=16$ (90925 kořenů)



Sorted values of roots for $m=1$ to 20

(roots are same for normal chess and for horizontal cylinder)

Graf s novými hodnotami až do $m=20$ (1871305 kořenů)
 (kořeny jsou shodné pro normální i horizontální válcovou šachovnici)

Tables - number of ways to place $m \times n$ non-attacking kings on a $2m \times 2n$ chessboard (for $m=1$ to 8, $n=1$ to 20)

	A001787(n+1)			A061593			A061594			A173782		
n	kings	board	1n/2x2n	kings	board	2n/4x2n	kings	board	3n/6x2n	kings	board	4n/8x2n
1	1	2x2	4	2	4x2	12	3	6x2	32	4	8x2	80
2	2	2x4	12	4	4x4	79	6	6x4	408	8	8x4	1847
3	3	2x6	32	6	4x6	408	9	6x6	3600	12	8x6	26040
4	4	2x8	80	8	4x8	1847	12	6x8	26040	16	8x8	281571
5	5	2x10	192	10	4x10	7698	15	6x10	166368	20	8x10	2580754
6	6	2x12	448	12	4x12	30319	18	6x12	976640	24	8x12	21137959
7	7	2x14	1024	14	4x14	114606	21	6x14	5392704	28	8x14	159636030
8	8	2x16	2304	16	4x16	419933	24	6x16	28432288	32	8x16	1134127305
9	9	2x18	5120	18	4x18	1501674	27	6x18	144605184	36	8x18	7683664202
10	10	2x20	11264	20	4x20	5266069	30	6x20	714611200	40	8x20	50123713793
11	11	2x22	24576	22	4x22	18174084	33	6x22	3449705600	44	8x22	317076250136
12	12	2x24	53248	24	4x24	61892669	36	6x24	16333065216	48	8x24	1955475353217
13	13	2x26	114688	26	4x26	208424880	39	6x26	76081271168	52	8x26	11806000507544
14	14	2x28	245760	28	4x28	695179339	42	6x28	349524164224	56	8x28	70004699407151
15	15	2x30	524288	30	4x30	2299608732	45	6x30	1586790140800	60	8x30	408747986045656
16	16	2x32	1114112	32	4x32	7552444115	48	6x32	7130144209024	64	8x32	2355077855615435
17	17	2x34	2359296	34	4x34	24648046806	51	6x34	31752978219904	68	8x34	13413115039118042
18	18	2x36	4980736	36	4x36	79994460139	54	6x36	140298397039232	72	8x36	75623103424916527
19	19	2x38	10485760	38	4x38	258339007890	57	6x38	615604372260736	76	8x38	422575531184296006
20	20	2x40	22020096	40	4x40	830619734681	60	6x40	2684534626000512	80	8x40	2342732055500907753

Tabulku hodnot pro šachovnice typu $8 \times 2n$ (pro $n=1$ až 10) nalezneme už v knize [Schach und Zahl \(1966\)](#), str.53. Je až neuvěřitelné, co dokázal při tehdejší úrovni počítačů Christoph Bandelow vypočítat. Hodnoty v další tabulce (pro $m > 4$) jsem v tomto případě vygeneroval pomocí vytvářících funkcí (přičemž několik prvních hodnot jsem současně ověřil klasickým kombinatorickým postupem).

			A173783			A174154			A174155			A174558								
n	kings	board	5n/10x2n			kings	board	6n/12x2n			kings	board	7n/14x2n			kings	board	8n/16x2n		
1	5	10x2	192			6	12x2	448			7	14x2	1024			8	16x2	2304		
2	10	10x4	7698			12	12x4	30319			14	14x4	114606			16	16x4	419933		
3	15	10x6	166368			18	12x6	976640			21	14x6	5392704			24	16x6	28432288		
4	20	10x8	2580754			24	12x8	21137959			28	14x8	159636030			32	16x8	1134127305		
5	25	10x10	32572756			30	12x10	357365350			35	14x10	3544192112			40	16x10	32580145116		
6	30	10x12	357365350			36	12x12	5109144543			42	14x12	64737165162			48	16x12	749160010737		
7	35	10x14	3544192112			42	12x14	64737165162			49	14x14	1027533353168			56	16x14	14677177838054		
8	40	10x16	32580145116			48	12x16	749160010737			56	14x16	14677177838054			64	16x16	254977173389319		
9	45	10x18	282359109140			54	12x18	8080813574550			63	14x18	193194265398240			72	16x18	4035559337688370		
10	50	10x20	2335042206624			60	12x20	82425144219429			70	14x20	2383116363555182			80	16x20	59315924213143597		
11	55	10x22	18589546217696			66	12x22	803491953235264			77	14x22	27889602664055396			88	16x22	821112680030028632		
12	60	10x24	143422674213726			72	12x24	7545414941610145			84	14x24	312546900470579954			96	16x24	10819171744710664383		
13	65	10x26	1077891352444220			78	12x26	68680800264413920			91	14x26	3378090945290324892			104	16x26	136800806311499633208		
14	70	10x28	7923134615854816			84	12x28	608889093898882615			98	14x28	35412239480510055916			112	16x28	1670597119210336446533		
15	75	10x30	57146364209686016			90	12x30	5278006575696293456			105	14x30	361670315347336810428			120	16x30	19804685547188544317522		
16	80	10x32	405497952834408698			96	12x32	44873569636443901967			112	14x32	3611858972942315054336			128	16x32	228865023358344707514899		
17	85	10x34	2836821801400729056			102	12x34	375159494582050088590			119	14x34	35375586671457852212944			136	16x34	2586924156960003793687130		
18	90	10x36	19601724610147889574			108	12x36	3090799708762482416287			126	14x36	340648108214969253040772			144	16x36	28681715460054576813151389		
19	95	10x38	133975308779739341536			114	12x38	25137927547256761590690			133	14x38	3231742210202924671114360			152	16x38	312656761422008821513384848		
20	100	10x40	906926114664479185714			120	12x40	202136632706910980639569			140	14x40	30258973227371613303664168			160	16x40	3357651442822195404605813501		

			A195648			A195649			A195650			A195651								
n	kings	board	9n / 18x2n			kings	board	10n / 20x2n			kings	board	11n / 22x2n			kings	board	12n / 24x2n		
1	9	18x2	5120			10	20x2	11264			11	22x2	24576			12	24x2	53248		
2	18	18x4	1501674			20	20x4	5266069			22	22x4	18174084			24	24x4	61892669		
3	27	18x6	144605184			30	20x6	714611200			33	22x6	3449705600			36	24x6	16333065216		
4	36	18x8	7683664202			40	20x8	50123713793			44	22x8	317076250136			48	24x8	1955475353217		
5	45	18x10	282359109140			50	20x10	2335042206624			55	22x10	18589546217696			60	24x10	143422674213726		
6	54	18x12	8080813574550			60	20x12	82425144219429			66	22x12	803491953235264			72	24x12	7545414941610145		
7	63	18x14	193194265398240			70	20x14	2383116363555182			77	22x14	27889602664055396			84	24x14	312546900470579954		
8	72	18x16	4035559337688370			80	20x16	59315924213143597			88	22x16	821112680030028632			96	24x16	10819171744710664383		
9	81	18x18	75925129079783308			90	20x18	1314578079936797520			99	22x18	21279238303065874504			108	24x18	325878859655043000344		
10	90	18x20	1314578079936797520			100	20x20	26568150968269086211			110	22x20	498306336520679626558			120	24x20	8788579757709800395287		
11	99	18x22	21279238303065874504			110	20x22	498306336520679626558			121	22x22	10749154284380665611224			132	24x22	216711725342137199240416		
12	108	18x24	325878859655043000344			120	20x24	8788579757709800395287			132	22x24	216711725342137199240416			144	24x24	4963704194366362387891227		
13	117	18x26	4765036384361599508980			130	20x26	147246060712874767006100			143	22x26	4129262403388762742636600			156	24x26	106899958975789427315593702		
14	126	18x28	67005992305769489072298			140	20x28	2362334876238883501403023			154	22x28	75016634741234060492763558			168	24x28	2185515270923751571682231623		
15	135	18x30	911373843678367079288192			150	20x30	36524460392984517732438244			165	22x30	1308529555017588577342694260			180	24x30	42742033252061610112345948662		
16	144	18x32	12045876354416055791256678			160	20x32	547035897487475746003788845			176	22x32	22040301683559753896133018280			192	24x32	804583723052029764342598840093		
17	153	18x34	155309520603782232217425848			170	20x34	7970364383210794543297422104			187	22x34	360149145786269982966787471688			204	24x34	14652355348247814882309058368622		
18	162	18x36	1959522112912794750304926260			180	20x36	113369451090032844210066601511			198	22x36	5731315291381804113135524528938			216	24x36	259233668941994216352098007900049		
19	171	18x38	24257406881812972044430612380			190	20x38	1578865463792113935683828261064			209	22x38	89111829547824780652750579335144			228	24x38	4471487363265755557212629880839120		
20	180	18x40	295291113132133982556242322098			200	20x40	21582482575952717566056822842611			220	22x40	1357401217343394388315209379366858			240	24x40	75418687359133840252078313969539515		

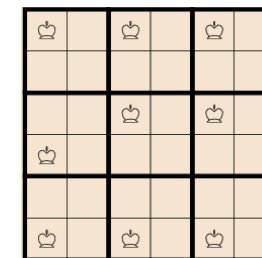
values for $m > 8$ computed by Alex V. Breger (2011), for more values see *b-files in OEIS*

2.4) Number of ways to place n^2 non-attacking kings on $2n \times 2n$ chessboard - A018807

Jinou možností konfigurace králů je případ na obecné čtvercové šachovnici sudých rozměrů $2n \times 2n$, kam se vejde n^2 neohrožujících se králů (tedy opět je zaplněna vždy právě čtvrtina šachovnice). V tomto případě je výsledků zatím málo, alespoň odhad průběhu této funkce v článku [The Problem of Kings \(.ps file\)](#) - Michael Larsen (The Electronic Journal of Combinatorics 2, 1995).

Let $f(n)$ the number of configurations of n^2 mutually non-attacking kings on a $2n \times 2n$ chessboard

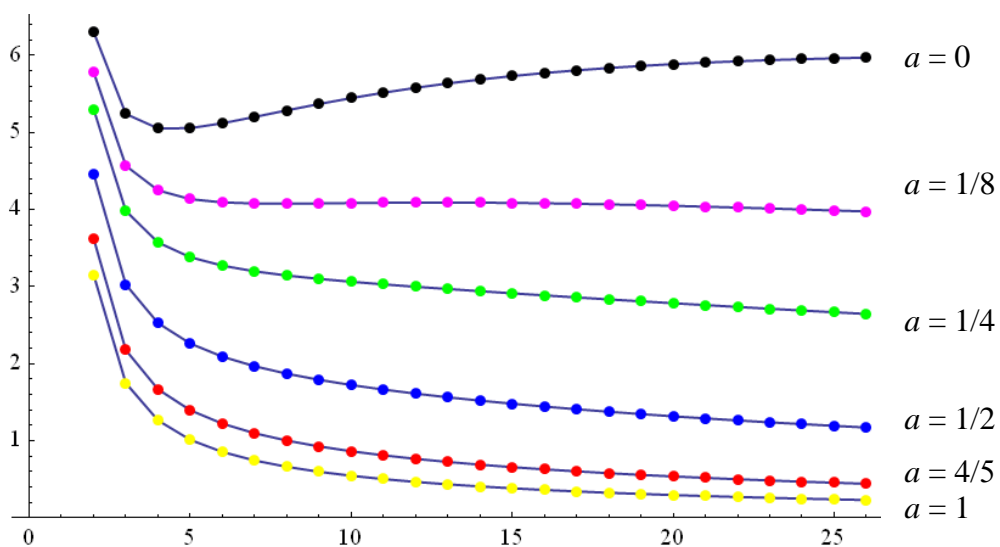
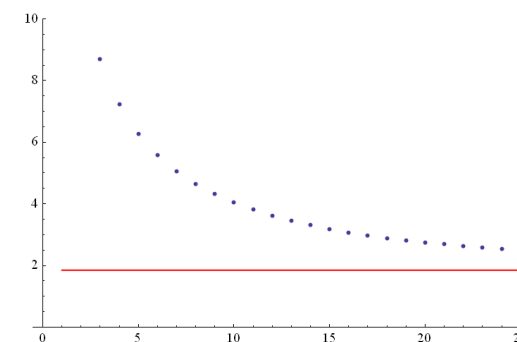
$$\log f(n) = 2n * \log(n) - 2n * \log(2) + O\left((n^{4/5}) * \log(n)\right)$$



Z Larsenova vztahu vyplývá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n+1)}{n^2 f(n)} = \frac{e^2}{4} = 1.847264 \dots$$

Osobně se domnívám, že exponent $n^{4/5}$ půjde ještě zlepšit, tedy že existuje konstanta a , pro kterou je výše uvedený výraz ještě správný s odhadem chyby $n^a * \log(n)$. *Probably better asymptotic formula exists.*



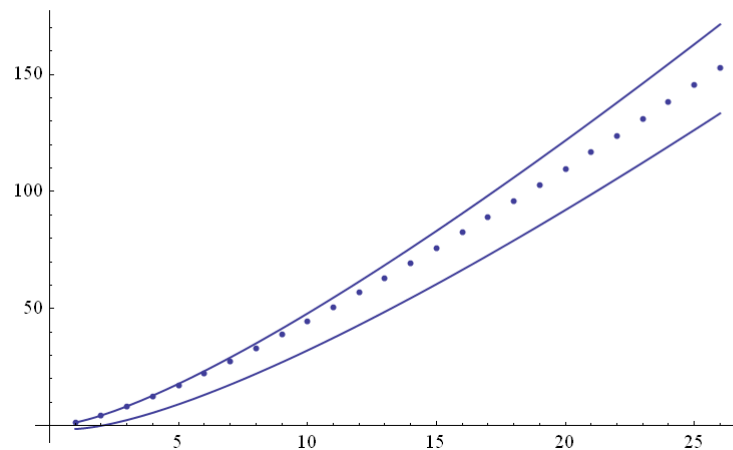
Grafy znázorňují průběhy funkcí

$$\frac{\log(f(n)) - (2n * \log(n) - 2n * \log(2))}{n^a * \log(n)}$$

Mezní exponent je někde v intervalu $0 \leq a \leq 1/2$, dokonce není vyloučeno, že $a=0$.

I když je nyní k dispozici více hodnot, nejde to ale ještě spolehlivě určit. Je však vidět, že grafy nad **červeným** (Larsenovým) grafem jsou stále ještě klesající.

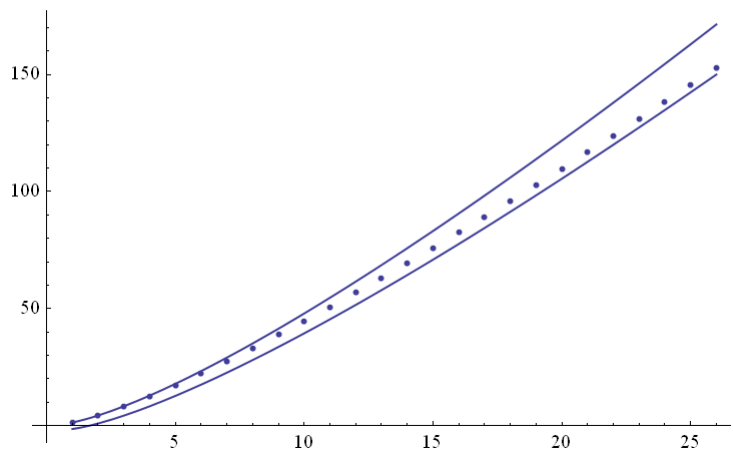

```
Show[ListPlot[Log[kings]], Plot[Log[(n/2)^(2n)], {n, 1, 26}],
Plot[Log[(n+1)^(2n)], {n, 1, 26}], AxesOrigin -> {0, 0}]
```



Jak můžeme vidět na grafu (v logaritmickém měřítku), vypočtené hodnoty jsou skutečně v teoreticky dokázaném pásmu

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{2n} \leq f(n) \leq (n+1)^{2n}$$

```
Show[ListPlot[Log[kings]],
Plot[Log[(n/2)^(2n)] + Sqrt[n] * Log[n], {n, 1, 26}],
Plot[Log[(n+1)^(2n)], {n, 1, 26}], AxesOrigin -> {0, 0}]
```



Pro experimentování doporučuji následující kód v programu Mathematica:

```
Manipulate[Show[ListPlot[Log[kings]],
Plot[Log[(n/2)^(2n)] + n^(alfa) * Log[n], {n, 1, 26}],
Plot[Log[(n+1)^(2n)], {n, 1, 26}], AxesOrigin -> {0, 0}], {alfa, 0, 1}]
```

Pole **kings** obsahuje vypočtené hodnoty a pomocí proměnné **alfa** je možno plynule posouvat dolní mezí. Zjistíme, že nejpravděpodobnější „správná“ hodnota alfa není 0.8, ale asi 0.5 (viz graf vlevo). Samozřejmě toto je ale pouze domněnka, kterou by bylo třeba dokázat i analyticky.

n	n ² kings	board 2n x 2n	A018807
1	1	2x2	4
2	4	4x4	79
3	9	6x6	3600
4	16	8x8	281571
5	25	10x10	32572756
6	36	12x12	5109144543
7	49	14x14	1027533353168
8	64	16x16	254977173389319
9	81	18x18	75925129079783308
10	100	20x20	26568150968269086211
11	121	22x22	10749154284380665611224
12	144	24x24	4963704194366362387891227
13	169	26x26	2588716234142991968960920692
14	196	28x28	1511548995678989691821551648635

15	225	30x30	980916600918165029390915601861216
16	256	32x32	703066055325632897509116263399480311
17	289	34x34	553566164164538758951848363955159341236
18	324	36x36	476550132149153136812897667419399098606255
19	361	38x38	446700013633250141224116671772082056532427712
20	400	40x40	454253561073725156534218620121412788113502357703
21	441	42x42	499497358232990868471441676816136418783201589544420
22	484	44x44	592164459269741145142867933577242446750593983042233185
23	529	46x46	754867224182211583012273355207753302384758857649416296064
24	576	48x48	1032210451608310484545146750800038813036897244006452398722183
25	625	50x50	1510695366603970074479374959524695944196756884581589510634080548
26	676	52x52	2361658429416343345310712093583459956750032068219556304032803845397

Hodnoty pro $9 \leq n \leq 11$ vypočítal [David W. Wilson](#).

Hodnoty pro $12 \leq n \leq 26$ byly vypočteny v soutěži, kterou pořádal na své internetové stránce 1.3. - 14.3.2011 Artem M. Karavaev, viz [Zealint Blog](#).

Speciálně hodnotu pro $n = 26$ vypočetl Shamil Saifutdinov (*value for $n=26$ computed Shamil Saifutdinov 10 hours with help of 8 cores, added 18.6.2011*).

Poznámka: Asymptotický odhad je současně i dolním odhadem pro obdélníkovou šachovnici $2m \times 2n$, protože snadno lze dokázat, že ze všech obdélníkových šachovnic **stejně plochy** je právě ta čtvercová tou, kde počet možností $m \cdot n$ neohrožujících se králů dosáhne minima. Např. 16 neohrožujících se králů můžeme na šachovnici 2×32 rozestavit 1114112 možnými způsoby, na šachovnici 4×16 (stejně plochy) už jen 419933 způsoby a na šachovnici 8×8 dosáhneme minima 281571 možných rozestavení.

2.5) k Kings on an n x n cylindrical chessboard - k králů na válcové šachovnici n x n

A194650 - **2 kings**, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 30.8.2011), $n \geq 3$

$$\frac{1}{2}n(n^3 - 9n + 6)$$

A194651 - **3 kings**, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 30.8.2011), $n \geq 4$

$$\frac{1}{6}n(n^5 - 27n^3 + 18n^2 + 194n - 228)$$

A194652 - **4 kings**, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 30.8.2011), $n \geq 5$

$$\frac{1}{24}n(n^7 - 54n^5 + 36n^4 + 1019n^3 - 1236n^2 - 6690n + 10884)$$

A194653 - **5 kings**, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 30.8.2011), $n \geq 6$

$$\frac{1}{120}n(n^9 - 90n^7 + 60n^6 + 3155n^5 - 3900n^4 - 50910n^3 + 86580n^2 + 318864n - 656160)$$

A194654 - **6 kings**, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 30.8.2011), $n \geq 7$

$$\frac{1}{720}n(n^{11} - 135n^9 + 90n^8 + 7525n^7 - 9420n^6 - 216045n^5 + 378090n^4 + 3192694n^3 - 6899520n^2 - 19450080n + 48327120)$$

Obecně tyto vzorce platí pro

$$n > k$$

a první členy těchto vzorců mají tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{9}{2} * \frac{n^{2k-2}}{(k-2)!} + \frac{3n^{2k-3}}{(k-2)!} + \frac{(243k+47) * n^{2k-4}}{24 * (k-3)!} + \dots$$

k	k Kings on an n x n cylindrical chessboard - Generating function
2	$\frac{x^3(4x^4 - 19x^3 + 35x^2 - 23x - 9)}{(x - 1)^5}$
3	$\frac{x^4(15x^6 - 89x^5 + 196x^4 - 140x^3 - 119x^2 + 169x + 88)}{(x - 1)^7}$
4	$\frac{x^4(54x^9 - 384x^8 + 1052x^7 - 1263x^6 + 657x^5 - 1434x^4 + 4154x^3 - 3567x^2 - 917x - 32)}{(x - 1)^9}$
5	$\frac{x^5(185x^{11} - 1635x^{10} + 6336x^9 - 15496x^8 + 32185x^7 - 62315x^6 + 86237x^5 - 49559x^4 - 35522x^3 + 49422x^2 + 19747x + 655)}{(x - 1)^{11}}$
6	$\frac{x^5(622x^{14} - 6966x^{13} + 37088x^{12} - 130876x^{11} + 344918x^{10} - 655255x^9 + 737997x^8 - 153262x^7 - 639936x^6 + 251910x^5 + 1132096x^4 - 1113158x^3 - 443028x^2 - 27305x - 125)}{(x - 1)^{13}}$

k Kings on an n x n cylindrical chessboard

n	2 kings	3 kings	4 kings	5 kings	6 kings	A212269 , summed over all k >= 0
1						2
2	0	0	0			5
3	9	0	0	0	0	19
4	68	88	32	0	0	205
5	215	785	1205	655	125	3011
6	504	3528	13260	26952	28930	92875
7	1001	11151	74494	309869	809368	4763459
8	1784	28560	291708	1998752	9414152	459630701
9	2943	63513	908973	9124848	66305781	78223965193
10	4580	127520	2416410	33065040	338374560	24270274906085
11	6809	236863	5711530	101473009	1378426060	13497818986883771
12	9756	413736	12327414	274593648	4751038284	13571363009654254429
13	13559	687505	24743693	673080928	14388638901	24562890586806439035377
14	18368	1096088	46797968	1522931256	39296604844	80199120146273882569630015
15	24345	1687455	84216990	3224953725	98605016040	471874707649862024071657639861
16	31664	2521248	145288600	6458355776	230507248912	5005895207027974222377733802848093
17	40511	3670521	241697109	12330557912	507379370525	95724096351235961517780378463501217883
18	51084	5223600	389546478	22588294464	1060395103800	3299898416592847899779771107978510262881723
19	63593	7286063	610597338	39908439249	2118303772332	205065652820217795990961278100725876734896504351
20	78260	9982840	933745570	68290845520	4066797540820	22972650388613699523234197544114590607787319141768893
21	95319	13460433	1396771845	113579839128	7537144196589	4639263971840807451718333317636457822140807347062959552393
22	115016	17889256	2048393204	184145882536	13535598398916	1688922270253494512376187345188827715026638498679195388459885491
23	137609	23466095	2950649438	291764365485	23628635128024	1108387368646648434527989000161664853570430760720956272959259777984263
24	163368	30416688	4181658708	452734505952	40203393674520	1311279770155306020620537777254530515351977295343197124976227670003819862721
25	192575	38998425	5838778525	689287992800	66828011575525	For n=25 to 26 see A212269 (added 25.8.2016)
						$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n^2}} = 1.342643951124... = \text{A247413}$

2.5.1) k Kings on a 1 x n and 2 x n horizontal cylinder - k králů na horizontálním válci 1 x n a 2 x n

Na horizontální válcovou šachovnici 1 x n (for definition see chapter 2.6) se vejde nejvýše $n/2$ nenapadajících se králů (resp. vezírů) pokud je n sudé a $(n-1)/2$ králů (resp. vezírů) pokud je n liché. *Maximal number of non-attacking kings (or wazirs) on a 1 x n horizontal cylinder is*

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

Pro počet pozic k neohrožujících se králů zde platí

2 Kings, cylinder 1 x n: ($n \geq 4$)

$$\frac{1}{2}(n-3)n$$

3 Kings, cylinder 1 x n: ($n \geq 6$)

$$\frac{1}{6}n(n^2 - 9n + 20)$$

4 Kings, cylinder 1 x n: ($n \geq 8$)

$$\frac{1}{24}n(n^3 - 18n^2 + 107n - 210)$$

Tyto vzorce nejsou sice na první pohled tak elegantní jako pro normální šachovnici 1 x n (viz kapitola 2.1.1), jednoduchou úvahou však zjistíme, že jde o rozdíl počtu všech možných pozic neohrožujících se k králů na normální šachovnici 1 x n a počtu pozic, kde jsou 2 kameny na polích se souřadnicemi $[1,1]$ a $[1,n]$ a zbývajících $k-2$ kamenů je rozmístěno na $n-4$ možných polích šachovnice. Je proto třeba odečíst (při použití téhož vzorce jako na normální šachovnici)

$$\binom{n-4-(k-2)+1}{k-2} = \binom{n-k-1}{k-2}$$

Výsledný počet pozic je potom

Number of ways of placing k non-attacking kings (or wazirs) on a 1 x n horizontal cylinder is (for $n \geq 2k$)

$$\binom{n-k+1}{k} - \binom{n-k-1}{k-2} = \frac{n}{n-k} * \binom{n-k}{k}$$

Součet přes všechna k (pro $n > 1$)

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-k} * \binom{n-k}{k} = L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

potom vede na [Lucas numbers](#), jak nám ukáže i Mathematica

Sum[n / (n - k) * Binomial[n - k, k], {k, 0, Floor[n / 2]}]

LucasL[n]



Ze vzorce pro horizontální válcovou šachovnici $1 \times n$ snadno odvodíme i vzorec pro **horizontální válcovou šachovnici $2 \times n$** .

Number of ways of placing k non-attacking kings on a $2 \times n$ horizontal cylinder is (for $n \geq 2k$)

$$2^k * \frac{n}{n-k} * \binom{n-k}{k}$$

Vzorec je dán počtem volných polí pro umístění dalšího krále s tím, že král může být vždy libovolně v levém nebo pravém sloupci.

Několik prvních polynomů:

2 Kings, cylinder $2 \times n$: ($n \geq 3$)

$$2(n-3)n$$

3 Kings, cylinder $2 \times n$: ($n \geq 4$)

$$\frac{4}{3}(n-5)(n-4)n$$

4 Kings, cylinder $2 \times n$: ($n \geq 5$)

$$\frac{2}{3}(n-7)(n-6)(n-5)n$$

5 Kings, cylinder $2 \times n$: ($n \geq 6$)

$$\frac{4}{15}(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)n$$

6 Kings, cylinder $2 \times n$: ($n \geq 7$)

$$\frac{4}{45}(n-11)(n-10)(n-9)(n-8)(n-7)n$$

Pokud v tomto vzorci dosadíme za $n \rightarrow 2n$ a za $k \rightarrow n$, dostaneme pro počet pozic n nenapadajících se králů na horizontální válcové šachovnici $2 \times 2n$

$$2^{n+1}$$

což se shoduje se vzorcem v kapitole [2.6.1](#)

Ještě je zajímavá suma přes všechna $k \geq 0$

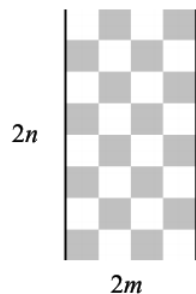
Pro $n > 1$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^k * \frac{n}{n-k} * \binom{n-k}{k} = 2^n + (-1)^n$$

k non-attacking kings on a 2 x n horizontal cylinder

n	1 king	2 kings	3 kings	4 kings	5 kings	6 kings	7 kings	8 kings	9 kings	10 kings	summed over all k >= 0
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
3	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
4	8	8	0	0	0	0	0	0	0	0	17
5	10	20	0	0	0	0	0	0	0	0	31
6	12	36	16	0	0	0	0	0	0	0	65
7	14	56	56	0	0	0	0	0	0	0	127
8	16	80	128	32	0	0	0	0	0	0	257
9	18	108	240	144	0	0	0	0	0	0	511
10	20	140	400	400	64	0	0	0	0	0	1025
11	22	176	616	880	352	0	0	0	0	0	2047
12	24	216	896	1680	1152	128	0	0	0	0	4097
13	26	260	1248	2912	2912	832	0	0	0	0	8191
14	28	308	1680	4704	6272	3136	256	0	0	0	16385
15	30	360	2200	7200	12096	8960	1920	0	0	0	32767
16	32	416	2816	10560	21504	21504	8192	512	0	0	65537
17	34	476	3536	14960	35904	45696	26112	4352	0	0	131071
18	36	540	4368	20592	57024	88704	69120	20736	1024	0	262145
19	38	608	5320	27664	86944	160512	160512	72960	9728	0	524287
20	40	680	6400	36400	128128	274560	337920	211200	51200	2048	1048577
n	1 king	2 kings	3 kings	4 kings	5 kings	6 kings	7 kings	8 kings	9 kings	10 kings	$2^n + (-1)^n$

2.6) $m \times n$ Kings on a $2m \times 2n$ cylindrical chessboard - $m \times n$ králů na válcové šachovnici $2m \times 2n$



V následujících kapitolách je uvažována **horizontální válcová šachovnice**. První a poslední řada šachovnice jsou spojené do válce.

Horizontal cylinder: a chessboard where it is supposed that the rows 1 and $2n$ are in contact (for 8x8 board rows "1" and "8" are in contact).

Move from $[x,y]$ to square $[x + p, y + q]$ is transformed as $[x + p, (y + q) \text{ Mod } 2n]$

$2m = x$ -size of chessboard = number of columns

$2n = y$ -size of chessboard = number of rows

For each sequence m is fixed and n go to infinity.

(Example is for $m=2$)

2.6.1) $m=1$ / n Kings on a $2 \times 2n$ horizontal cylinder - n králů na horizontálním válci $2 \times 2n$

Explicit formula:

$$c_1(n) = 2 * 2^n \qquad G.f.: -\frac{4}{2x-1}$$

2.6.2) $m=2$ / $2n$ Kings on a $4 \times 2n$ horizontal cylinder - $2n$ králů na horizontálním válci $4 \times 2n$

[A194644](#)

Explicit formula (V. Kotěšovec, 29.8.2011):

$$c_2(n) = 2 * 3^n + 2 * \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + 2 * \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Nebo s pomocí [Lucas numbers](#) (což jsou Fibonacciho čísla s jinými počátečními podmínkami, ale snad s ještě zajímavějšími vlastnostmi), viz též [kap.2.3.2](#)

$$c_2(n) = 2 * 3^n + 2 * \text{LucasL}[2n]$$

Recurrence:

$$a_n = 3a_{n-3} - 10a_{n-2} + 6a_{n-1}$$

Generating function:

$$-\frac{2(10x^2 - 12x + 3)}{(3x-1)(x^2 - 3x + 1)} = -\frac{2}{-1+3x} - \frac{2(-2+3x)}{1-3x+x^2}$$

2.6.3) $m=3$ / **3n Kings on a 6 x 2n horizontal cylinder - 3n králů na horizontálním válci 6 x 2n**

A194645

Explicit formula (V. Kotěšovec, 29.8.2011):

$$c_3(n) = 2 * 4^n + 2 * 3^n + 4(2 + \sqrt{2})^n + 4(2 - \sqrt{2})^n + 2$$

Recurrence:

$$a_n = 24a_{n-5} - 86a_{n-4} + 104a_{n-3} - 53a_{n-2} + 12a_{n-1}$$

Generating function:

$$-\frac{2(134x^4 - 308x^3 + 229x^2 - 68x + 7)}{(x-1)(3x-1)(4x-1)(2x^2-4x+1)} = -\frac{2}{-1+x} - \frac{2}{-1+3x} - \frac{2}{-1+4x} + \frac{4(2-4x)}{1-4x+2x^2}$$

Proti normální šachovnici je zda navíc člen $x-1$.

2.6.4) $m=4$ / **4n Kings on a 8 x 2n horizontal cylinder - 4n králů na horizontálním válci 8 x 2n**

A194646

Explicit formula (V. Kotěšovec, 29.8.2011):

$$c_4(n) = 4 + 2 * 5^n + 2 * 4^n + 2(2 + \sqrt{3})^n + 2(2 - \sqrt{3})^n + 4\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + 4\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + 4\left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right)^n + 4\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right)^n \\ + 2\left(2 \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^{2n} + 2\left(2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)^{2n} + 2\left(2 \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right)^{2n}$$

Recurrence:

$$a_n = -300a_{n-12} + 4235a_{n-11} - 23320a_{n-10} + 66422a_{n-9} - 111545a_{n-8} + 118727a_{n-7} - 83449a_{n-6} + 39539a_{n-5} - 12676a_{n-4} + 2708a_{n-3} - 369a_{n-2} + 29a_{n-1}$$

G.f.:

$$-\frac{2(5335x^{11} - 61055x^{10} + 270365x^9 - 620007x^8 + 836705x^7 - 711101x^6 + 394423x^5 - 144635x^4 + 34737x^3 - 5251x^2 + 453x - 17)}{(x-1)(4x-1)(5x-1)(x^2-4x+1)(3x^2-5x+1)(5x^2-5x+1)(x^3-6x^2+5x-1)}$$

nebo

$$-\frac{4}{-1+x} - \frac{2}{-1+4x} - \frac{2}{-1+5x} + \frac{2(2-4x)}{1-4x+x^2} + \frac{4(2-5x)}{1-5x+3x^2} + \frac{4(2-5x)}{1-5x+5x^2} + \frac{2(-3+10x-6x^2)}{-1+5x-6x^2+x^3}$$

2.6.5) $m=5$ / **5n Kings on a 10 x 2n horizontal cylinder - 5n králů na horizontálním válci 10 x 2n**

A194647

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.9.2011):

$$\begin{aligned}
 c_5(n) = & 2 * 6^n + 2 * 4^n + 8 * 2^n + 2 + 4 * (2 + \sqrt{3})^n + 4 * (2 - \sqrt{3})^n + 2 * (2 + \sqrt{2})^n + 2 * (2 - \sqrt{2})^n + 2 * \left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)^n + 2 * \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}\right)^n \\
 & + 4 * (3 + \sqrt{5})^n + 4 * (3 - \sqrt{5})^n + 4 * (3 + \sqrt{3})^n + 4 * (3 - \sqrt{3})^n + 4 * (3 + \sqrt{2})^n + 4 * (3 - \sqrt{2})^n \\
 & + 4 * \left(2 * \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)^{2n} + 4 * \left(2 * \sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right)^{2n} + 4 * \left(2 * \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right)^{2n} \\
 & + 4 * \left(2 - \frac{4}{\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{1}{3} * \arcsin\left(\frac{3}{8} * \sqrt{3}\right)\right)\right)^n + 4 * \left(2 + \frac{4}{\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} * \arcsin\left(\frac{3}{8} * \sqrt{3}\right)\right)\right)^n + 4 * \left(2 - \frac{4}{\sqrt{3}} * \cos\left(\frac{1}{3} * \arccos\left(-\frac{3}{8} * \sqrt{3}\right)\right)\right)^n
 \end{aligned}$$

Recurrence:

$$\begin{aligned}
 a(n) = & -193536*a(n-22) + 4020480*a(n-21) - 37748736*a(n-20) + 213097152*a(n-19) - 811893408*a(n-18) + 2222092032*a(n-17) - 4541105512*a(n-16) + 7111450512*a(n-15) - \\
 & 8690399936*a(n-14) + 8395031504*a(n-13) - 6469161690*a(n-12) + 4000492482*a(n-11) - 1991743054*a(n-10) + 798883747*a(n-9) - 257594833*a(n-8) + 66416673*a(n-7) - 13565686*a(n-6) + \\
 & 2162701*a(n-5) - 263028*a(n-4) + 23541*a(n-3) - 1460*a(n-2) + 56*a(n-1)
 \end{aligned}$$

Generating function:

$$\begin{aligned}
 & -2*(7089408*x^{21} - 132938496*x^{20} + 1125112128*x^{19} - 5717239392*x^{18} + 19578445344*x^{17} - 48082847384*x^{16} + 88003026752*x^{15} - 123138008952*x^{14} + 134072006560*x^{13} - \\
 & 114991853490*x^{12} + 78336556962*x^{11} - 42596878318*x^{10} + 18524447581*x^9 - 6435525481*x^8 + 1778018953*x^7 - 387290192*x^6 + 65568715*x^5 - 8436954*x^4 + 796245*x^3 - \\
 & 51918*x^2 + 2088*x - 39)/((x-1)*(2*x-1)*(4*x-1)*(6*x-1)*(x^2-4*x+1)*(2*x^2-5*x+1)*(2*x^2-4*x+1)*(4*x^2-6*x+1)*(6*x^2-6*x+1)*(7*x^2-6*x+1)*(2*x^3-8*x^2+6*x-1)*(3*x^3- \\
 & 9*x^2+6*x-1))
 \end{aligned}$$

Proti [normální šachovnici](#) je zda navíc člen $x-1$.

Jiné možné vyjádření vytvořující funkce je

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{-1+x} - \frac{8}{-1+2x} - \frac{2}{-1+4x} - \frac{2}{-1+6x} + \frac{4(2-4x)}{1-4x+x^2} + \frac{2(2-5x)}{1-5x+2x^2} + \frac{2(2-4x)}{1-4x+2x^2} + \frac{4(2-6x)}{1-6x+4x^2} + \frac{4(2-6x)}{1-6x+6x^2} + \frac{4(2-6x)}{1-6x+7x^2} + \frac{4(-3+12x-8x^2)}{-1+6x-8x^2+2x^3} + \frac{4(-3+12x-9x^2)}{-1+6x-9x^2+3x^3}
 \end{aligned}$$

Je možno ještě poznamenat, že generační funkce pro normální šachovnici tuto pěknou vlastnost (ani přímou vazbu na koeficienty v explicitním vzorci) nemají.

O použití podobné metody rozkladů generačních funkcí viz též kapitola [1.2](#).

2.6.6) $m=6$ / $6n$ Kings on a $12 \times 2n$ horizontal cylinder - $6n$ králů na horizontálním válci $12 \times 2n$

A194648 - Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.9.2011):

$$\begin{aligned}
c_6(n) = & 2 * 7^n + 4 * 4^n + 8 * 2^n + 6 + 6 * \left(\frac{7 + \sqrt{13}}{2}\right)^n + 6 * \left(\frac{7 - \sqrt{13}}{2}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 + \sqrt{29}}{2}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 - \sqrt{29}}{2}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 + \sqrt{17}}{2}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 - \sqrt{17}}{2}\right)^n \\
& + 4 * \left(\frac{7 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + 2 * \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + 2 * \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + 2 * \left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)^n + 2 * \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}\right)^n + 4 * \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right)^n + 4 * \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right)^n + 2 * (3 + \sqrt{6})^n + 2 * (3 - \sqrt{6})^n \\
& + 4 * \left(\frac{7 + 8 * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{37}{64}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 - 8 * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{37}{64}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 - 8 * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{37}{64}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n \\
& + 4 * \left(\frac{7 - 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 - 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 + 2 * \sqrt{13} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n \\
& + 4 * \left(\frac{7 - 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{5}{2 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 - 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{5}{2 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 + 2 * \sqrt{13} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{5}{2 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n \\
& + 4 * \left(\frac{7}{3} + \frac{2 * \sqrt{10} * \cos\left(\frac{2 * \pi + \arccos\left(\frac{1}{10 * \sqrt{10}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{7}{3} + \frac{2 * \sqrt{10} * \cos\left(\frac{4 * \pi + \arccos\left(\frac{1}{10 * \sqrt{10}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{7}{3} + \frac{2 * \sqrt{10} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{1}{10 * \sqrt{10}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n \\
& + 4 * \left(2 * \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^{2n} + 4 * \left(2 * \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)^{2n} + 4 * \left(2 * \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right)^{2n} + 2 * \left(2 * \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)^{2n} + 2 * \left(2 * \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right)^{2n} + 2 * \left(2 * \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right)^{2n} \\
& + 4 * \left(\frac{7 - 8 * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{101}{128}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 - 8 * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{101}{128}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 + 8 * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{101}{128}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n \\
& + 2 * \left(\frac{7 - \sqrt{5} + \sqrt{38 - 14 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n + 2 * \left(\frac{7 - \sqrt{5} - \sqrt{38 - 14 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n + 2 * \left(\frac{7 + \sqrt{5} + \sqrt{38 + 14 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n + 2 * \left(\frac{7 + \sqrt{5} - \sqrt{38 + 14 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n \\
& + 4 * \left(\frac{7 + \sqrt{5} + \sqrt{30 + 6 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 + \sqrt{5} - \sqrt{30 + 6 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 - \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n + 4 * \left(\frac{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6 * \sqrt{5}}}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

Recurrence:

$$\begin{aligned}
a(n) = & 25147584000*a(n-49) - 1412422401600*a(n-48) + 37366066553760*a(n-47) - 621736878459564*a(n-46) + 7328352058508736*a(n-45) - 65327706620774553*a(n-44) + \\
& 459103033290045078*a(n-43) - 2617610437109862140*a(n-42) + 12365157710942649267*a(n-41) - 49174878927647152193*a(n-40) + 166723091105251092029*a(n-39) - \\
& 486797186990900726158*a(n-38) + 1234232572662337908295*a(n-37) - 2736099335631729732358*a(n-36) + 5334155219056391326621*a(n-35) - 9190302655918861018594*a(n-34) + \\
& 14052187658858602811086*a(n-33) - 19136737348463193623732*a(n-32) + 23283124318667970185580*a(n-31) - 25375425632156076733736*a(n-30) + 24829391878777653306741*a(n-29) - \\
& 21854027730161965985121*a(n-28) + 17330242433059284917247*a(n-27) - 12398045659209581154381*a(n-26) + 8009846446628877143184*a(n-25) - 4676788353519183205994*a(n-24) + \\
& 2469102261987638350625*a(n-23) - 1178957762144560119277*a(n-22) + 509105053427808565774*a(n-21) - 198758740577568913437*a(n-20) + 70110767534529096739*a(n-19) - \\
& 22324060511037585983*a(n-18) + 6408095608117333736*a(n-17) - 1655461203049171846*a(n-16) + 384075945698236159*a(n-15) - 79813193163925620*a(n-14) + 14807521518627422*a(n-13) - \\
& 2442977988253415*a(n-12) + 356686744049422*a(n-11) - 45815780494341*a(n-10) + 5139688443504*a(n-9) - 499005760654*a(n-8) + 41450235787*a(n-7) - 2902322885*a(n-6) + \\
& 167948132*a(n-5) - 7815096*a(n-4) + 280953*a(n-3) - 7321*a(n-2) + 123*a(n-1)
\end{aligned}$$

Generating function:

$$\begin{aligned}
& -2*(89 - 10723*x + 624883*x^2 - 23467472*x^3 + 638482759*x^4 - 13413438823*x^5 + 226473764701*x^6 - 3158289686979*x^7 + 37103633559220*x^8 - 372694837903881*x^9 + \\
& 3237745813930155*x^{10} - 24547968675532954*x^{11} + 163614642504317985*x^{12} - 964304038772421241*x^{13} + 5049759125224371420*x^{14} - 23588023055204532526*x^{15} + \\
& 98596816518900996536*x^{16} - 369749982256505051694*x^{17} + 1246596985141596105568*x^{18} - 3784597631073220306538*x^{19} + 10359024333739520735339*x^{20} - \\
& 25585681777980494528368*x^{21} + 57053755996516362455383*x^{22} - 114888547350422714345765*x^{23} + 208902287314052794121104*x^{24} - 342869470671586467674888*x^{25} + \\
& 507641177125927409932643*x^{26} - 677372760244012841358262*x^{27} + 813609297504705570196666*x^{28} - 878342471490783010304860*x^{29} + 850694012325076563431472*x^{30} - \\
& 737552286681553434746588*x^{31} + 570953207080580401887926*x^{32} - 393443472758624547076877*x^{33} + 240492887995406185027902*x^{34} - 129856401671770146735901*x^{35} + \\
& 61639142225796645736766*x^{36} - 25573570614423905917540*x^{37} + 9210893172737036351470*x^{38} - 2856378339325215858728*x^{39} + 755038783301137591711*x^{40} - \\
& 168008916680174264403*x^{41} + 30973413839355772619*x^{42} - 4632967261563067407*x^{43} + 546417184904397579*x^{44} - 48752942786878302*x^{45} + 3082610022161544*x^{46} - \\
& 122652589076640*x^{47} + 2300138467200*x^{48})/((-1+x)*(-1+2*x)*(-1+4*x)*(-1+7*x)*(1-3*x+x^2)*(1-5*x+2*x^2)*(1-6*x+3*x^2)*(1-5*x+3*x^2)*(1-7*x+5*x^2)*(1-7*x+8*x^2)*(1-7*x+9*x^2)*(1-7*x+11*x^2)* \\
& (-1+6*x-9*x^2+x^3)*(-1+7*x-12*x^2+3*x^3)*(-1+7*x-11*x^2+3*x^3)*(-1+7*x-11*x^2+4*x^3)*(-1+7*x-13*x^2+5*x^3)*(-1+7*x-12*x^2+5*x^3)*(-1+7*x-14*x^2+7*x^3)* \\
& (-1+7*x+14*x^2-8*x^3+x^4)*(1-7*x+13*x^2-7*x^3+x^4))
\end{aligned}$$

Jiné možné vyjádření generační funkce

$$\begin{aligned}
& -\frac{6}{-1+x} - \frac{8}{-1+2x} - \frac{4}{-1+4x} - \frac{2}{-1+7x} + \frac{2(2-3x)}{1-3x+x^2} + \frac{2(2-5x)}{1-5x+2x^2} + \frac{2(2-6x)}{1-6x+3x^2} + \frac{4(2-5x)}{1-5x+3x^2} + \frac{4(2-7x)}{1-7x+5x^2} + \frac{4(2-7x)}{1-7x+8x^2} + \frac{6(2-7x)}{1-7x+9x^2} + \frac{4(2-7x)}{1-7x+11x^2} + \frac{2(-3+12x-9x^2)}{-1+6x-9x^2+x^3} \\
& + \frac{4(-3+14x-12x^2)}{-1+7x-12x^2+3x^3} + \frac{4(-3+14x-11x^2)}{-1+7x-11x^2+3x^3} + \frac{4(-3+14x-11x^2)}{-1+7x-11x^2+4x^3} + \frac{4(-3+14x-13x^2)}{-1+7x-13x^2+5x^3} + \frac{4(-3+14x-12x^2)}{-1+7x-12x^2+5x^3} + \frac{4(-3+14x-14x^2)}{-1+7x-14x^2+7x^3} + \frac{4(4-21x+28x^2-8x^3)}{1-7x+14x^2-8x^3+x^4} + \frac{2(4-21x+26x^2-7x^3)}{1-7x+13x^2-7x^3+x^4}
\end{aligned}$$

2.6.7) $m=7 / 7n$ Kings on a $14 \times 2n$ horizontal cylinder - $7n$ králů na horizontálním válci $14 \times 2n$

A195004

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.9.2011):

$$\begin{aligned}
 c_7(n) &= 2 * 8^n + 4 * 6^n + 6 * 5^n + 6 * 4^n + 8 * 3^n + 24 * 2^n + 20 \\
 &+ 4 * (3 + \sqrt{7})^n + 4 * (3 - \sqrt{7})^n + 4 * (4 + \sqrt{10})^n + 4 * (4 - \sqrt{10})^n + 4 * (4 + \sqrt{6})^n + 4 * (4 - \sqrt{6})^n + 4 * (4 + \sqrt{5})^n + 4 * (4 - \sqrt{5})^n + 4 * (4 + \sqrt{2})^n + 4 * (4 - \sqrt{2})^n \\
 &+ 8 * \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + 8 * \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + 4 * \left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)^n + 4 * \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}\right)^n + 2 * \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right)^n + 2 * \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right)^n + 4 * (3 + \sqrt{6})^n + 4 * (3 - \sqrt{6})^n \\
 &+ 2 * (3 + \sqrt{5})^n + 2 * (3 - \sqrt{5})^n + 2 * \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + 2 * \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + 2 * \left(\frac{7 + \sqrt{33}}{2}\right)^n + 2 * \left(\frac{7 - \sqrt{33}}{2}\right)^n + 2 * (3 + \sqrt{3})^n + 2 * (3 - \sqrt{3})^n \\
 &+ 4 * \left(\frac{2 * \left(3 + \sqrt{21} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{3 * \sqrt{3}}{2}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{-2 * \left(-3 + \sqrt{21} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{3 * \sqrt{3}}{2}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{-2 * \left(-3 + \sqrt{21} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{3 * \sqrt{3}}{2}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n \\
 &+ 4 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{19} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{26}{19 * \sqrt{19}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{2 * \left(4 + \sqrt{19} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{26}{19 * \sqrt{19}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{19} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{26}{19 * \sqrt{19}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n \\
 &+ 4 * \left(\frac{2 * \left(4 + \sqrt{19} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{7}{2 * \sqrt{19}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{19} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{7}{2 * \sqrt{19}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{19} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{7}{2 * \sqrt{19}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n \\
 &+ 4 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{8}{13 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{2 * \left(4 + \sqrt{13} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{8}{13 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n + 4 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{8}{13 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)\right)}{3}\right)^n \\
 &+ 8 * \left(\frac{8}{3} + \frac{2 * \sqrt{10} * \cos\left(\frac{4 * \pi + \arccos\left(-\frac{1}{10 * \sqrt{10}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + 8 * \left(\frac{8}{3} + \frac{2 * \sqrt{10} * \cos\left(\frac{\arccos\left(-\frac{1}{10 * \sqrt{10}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n + 8 * \left(\frac{8}{3} + \frac{2 * \sqrt{10} * \cos\left(\frac{2 * \pi + \arccos\left(-\frac{1}{10 * \sqrt{10}}\right)}{3}\right)}{3}\right)^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4 * \left(\frac{8}{3} + \frac{2 * \sqrt{7} * \cos\left(\frac{4 * \pi + \arccos\left(\frac{1}{2 * \sqrt{7}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n + 4 * \left(\frac{8}{3} + \frac{2 * \sqrt{7} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{1}{2 * \sqrt{7}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n + 4 * \left(\frac{8}{3} + \frac{2 * \sqrt{7} * \cos\left(\frac{2 * \pi + \arccos\left(\frac{1}{2 * \sqrt{7}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n \\
& +4 * \left(\frac{7 + 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{8}{13 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n + 4 * \left(\frac{7 + 2 * \sqrt{13} * \cos\left(\frac{\arccos\left(-\frac{8}{13 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n + 4 * \left(\frac{7 - 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(-\frac{8}{13 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n \\
& +4 * \left(\frac{7 - 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n + 4 * \left(\frac{7 + 2 * \sqrt{13} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n + 4 * \left(\frac{7 - 2 * \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right)}{3} \right)^n \\
& +4 * \left(\frac{2 * \left(4 + \sqrt{22} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{89}{22 * \sqrt{22}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + 4 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{22} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{89}{22 * \sqrt{22}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + 4 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{22} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{89}{22 * \sqrt{22}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n \\
& +4 * \left(\frac{-8 * \left(-1 + \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{17}{64}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + 4 * \left(\frac{8 * \left(1 + \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{17}{64}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + 4 * \left(\frac{-8 * \left(-1 + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{17}{64}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n \\
& +4 * \left(\frac{2 * \left(4 + \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + 4 * \left(\frac{2 * \left(4 + \sqrt{13} * \cos\left(\frac{\arccos\left(-\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + 4 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(-\frac{11}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n \\
& +4 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\arcsin\left(\frac{43}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + 4 * \left(\frac{2 * \left(4 + \sqrt{13} * \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{43}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n + 4 * \left(\frac{-2 * \left(-4 + \sqrt{13} * \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\arccos\left(\frac{43}{26 * \sqrt{13}}\right)}{3}\right) \right)}{3} \right)^n \\
& +4 * \left(\frac{-\sqrt{3} * \sqrt{2 - \sqrt{7} * \cos\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(\frac{187 * \sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}}{3} + \sqrt{3} * \sqrt{\sqrt{7} * \sin\left(\frac{\arctan\left(\frac{187 * \sqrt{5871}}{17613}\right)}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} + 2 - \sqrt{3} * \sqrt{2 - \sqrt{7} * \sin\left(\frac{\arctan\left(\frac{187 * \sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}}{3} + 2 \right)^n \\
& +4 * \left(\frac{-\sqrt{3} * \sqrt{2 - \sqrt{7} * \cos\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(\frac{187 * \sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}}{3} - \sqrt{3} * \sqrt{\sqrt{7} * \sin\left(\frac{\arctan\left(\frac{187 * \sqrt{5871}}{17613}\right)}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} + \sqrt{3} * \sqrt{2 - \sqrt{7} * \sin\left(\frac{\arctan\left(\frac{187 * \sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}}{3} + 2 \right)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4 * \left(\sqrt{3} * \sqrt{\frac{2 - \sqrt{7} * \cos\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(187 * \frac{\sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}{3}} + \sqrt{3} * \sqrt{\frac{\sqrt{7} * \sin\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(187 * \frac{\sqrt{5871}}{17613}\right) + \frac{\pi}{3}\right)}{3}} + 2} + \sqrt{3} * \sqrt{\frac{2 - \sqrt{7} * \sin\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(187 * \frac{\sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}{3}} + 2} \right)^n \\
& +4 * \left(\sqrt{3} * \sqrt{\frac{2 - \sqrt{7} * \cos\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(187 * \frac{\sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}{3}} - \sqrt{3} * \sqrt{\frac{\sqrt{7} * \sin\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(187 * \frac{\sqrt{5871}}{17613}\right) + \frac{\pi}{3}\right)}{3}} + 2} - \sqrt{3} * \sqrt{\frac{2 - \sqrt{7} * \sin\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(187 * \frac{\sqrt{5871}}{17613}\right)}{3}\right)}{3}} + 2} \right)^n \\
& +8 * \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10 + 4 * \sqrt{2}}}{2}\right)^n + 8 * \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{10 + 4 * \sqrt{2}}}{2}\right)^n + 8 * \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10 - 4 * \sqrt{2}}}{2}\right)^n + 8 * \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{10 - 4 * \sqrt{2}}}{2}\right)^n \\
& +4 * \left(\sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right) + \frac{\pi}{3}\right)}{6}} - \sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \sin\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right)}{6}} - \sqrt{6} * \sqrt{\frac{\sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right)}{6}} + 5} + 2} \right)^n \\
& +4 * \left(\sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right) + \frac{\pi}{3}\right)}{6}} + \sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \sin\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right)}{6}} + \sqrt{6} * \sqrt{\frac{\sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right)}{6}} + 5} + 2} \right)^n \\
& +4 * \left(-\sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right) + \frac{\pi}{3}\right)}{6}} - \sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \sin\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right)}{6}} + \sqrt{6} * \sqrt{\frac{\sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right)}{6}} + 5} + 2} \right)^n \\
& +4 * \left(-\sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right) + \frac{\pi}{3}\right)}{6}} + \sqrt{6} * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{73} * \sin\left(\frac{\pi - \operatorname{arccot}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right)}{6}} - \sqrt{6} * \sqrt{\frac{\sqrt{73} * \cos\left(\frac{\operatorname{arctan}\left(3 * \frac{\sqrt{8331}}{1217}\right)}{3}\right)}{6}} + 5} + 2} \right)^n \\
& +4 * \left(2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^n + 4 * \left(2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^n + 4 * \left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^n + 4 * \left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^n
\end{aligned}$$

Recurrence:

a(n) = 8746516217730170880000*a(n-85) - 745091435273014738944000*a(n-84) + 30762599549292146117836800*a(n-83) - 820834685159380646929367040*a(n-82) + 15925650465805208711732920320*a(n-81) - ...

Generating function (V. Kotěšovec, 7.9.2011):

-2*(199 - 46054*x + 5230566*x^2 - 388631455*x^3 + 21246504112*x^4 - 911430234161*x^5 + 31949901383540*x^6 - 941136539784937*x^7 + 23774830446532731*x^8 - 523106905065455281*x^9 + 10147313947087731559*x^10 - ...

nebo

frac(20, -1+x) - frac(24, -1+2x) - frac(8, -1+3x) - frac(6, -1+4x) - frac(6, -1+5x) - frac(4, -1+6x) - frac(2, -1+8x) + frac(8(2-3x), 1-3x+x^2) + frac(4(2-6x), 1-6x+2x^2) + frac(4(2-5x), 1-5x+2x^2) + frac(4(2-6x), 1-6x+3x^2) + frac(2(2-5x), 1-5x+3x^2) + frac(2(2-7x), 1-7x+4x^2) + frac(2(2-6x), 1-6x+4x^2) + ...

2.6.8) more kings on a $2m \times 2n$ horizontal cylinder - více králů na horizontálním válci $2m \times 2n$

V ruském fóru [Zealint blog](#), kde jsem 5.9.2011 úlohu předložil k řešení, měla velký ohlas. K mým původním vzorcům pro $m \leq 7$ rychle přibývaly další výsledky. **Alex V. Breger** vypočítal dostatečný počet hodnot až do $m = 12$. Najít rekurence a dokonce i vytvořující funkce bylo poměrně snadné pro $m = 8$ (hloubka rekurence 208) i pro $m = 9$ (rekurence úrovně 400). Tyto výpočty jsem prováděl mým starým programem REKUR (jehož varianta pro symetrické rekurence je publikována i na konci této knihy). Výpočty pro vyšší m však už byly časově i paměťově příliš náročné, hlavně proto, že jsem předem neznal hloubku rekurence. Podobně jako pro normální šachovnici jsem proto použil program [recurrence order finder](#), kterým jsem našel hloubky rekurencí až do $m = 12$. Plnou rekurenci pro $m = 10$ (hloubky 916) jsem pak vypočítal pomocí programu Maple a jeho funkce `rgf_findrecur`, pro $m = 11$ však pro hloubku rekurence 1829 už nestačila paměť na mém tehdejší 4 GB systému (*potřeba bylo 4499 MB RAM, což jsem ověřil až později na 16 GB systému*).

Potom však přišel **Max A. Alekseyev** pro horizontální válcovou šachovnici s úplně jinou metodou (kdy přímo generoval jednotlivé faktory) a 14.9.2011 vypočítal nejprve denominátory pro $m = 11$ až $m = 16$ (pro $m = 12$ viz OEIS [A195656](#)) a pak dokonce 16.9.2011 ještě i pro $m = 17$ až $m = 20$. Dobrá zpráva byla, že všechny moje hypotézy byly (pro $m \leq 20$) potvrzeny. Max A. Alekseyev k tomu doplnil: *“I can analytically prove that the degree of irreducible factors of the characteristic polynomial does not exceed $m+1$. In other words, the sequence for each fixed m is the sum of a large number of linear recurrent sequences of small order.”* For more see [table](#) on page 82.

Nakonec se mi podařilo objevit, jaké tvary mají obecně čitatelé vytvořujících funkcí a vypočítal jsem i kompletní generační funkce až do $m = 12$.

Následující hypotézu jsem uvedl již na str. 83, ale jelikož je specifická pouze pro horizontální válcovou šachovnici, uvádím ji zde pro přehlednost znovu:

Conjecture (*V. Kotěšovec, 29.8.2011*):

V případě horizontální válcové šachovnice mají všechny faktory ve jmenovateli vytvořující funkce exponent 1.

For horizontal cylinder have all factors in denominator of generating function exponent 1.

Další výsledek je snad ještě silnější. Objevil jsem, že pro každý faktor mají všechny jeho kořeny stejnou váhu! Jinými slovy, explicitní vzorec je součtem partikulárních řešení a každé partikulární řešení má tvar

$$k_F * (r_1^n + r_2^n + \dots + r_{d_F}^n)$$

kde r_1, r_2, \dots jsou kořeny charakteristické rovnice (převrácené hodnoty kořenů denominátoru).

*In the explicit formula, all roots (come from the same factor) have **identical coefficient**.*

Konstanty k_F jsou specifické pro každý faktor a jsou tedy shodné pro všechny kořeny (resp. jejich převrácené hodnoty) pocházející z téhož faktoru denominátoru. Tato skutečnost umožňuje výrazně zjednodušit vzorce a k nalezení neznámých konstant stačí vypočítat řádově méně členů posloupnosti.

V důsledku této vlastnosti se čítec generální funkce dá elegantně vyjádřit pomocí koeficientů polynomu ve jmenovateli, pokud generální funkci rozložíme jako součet více zlomků (odpovídající součtu kratších rekurencí), kde každý dílčí zlomek má ve jmenovateli vždy právě jeden faktor. Pokud je stupeň faktoru (*degree of a factor*) roven d_F , pak každý takový člen v generální funkci má tvar daný následující větou.

About generating function for number of ways to place $m \times n$ non-attacking kings on a $2m \times 2n$ horizontal cylinder.

For each factor with degree d_F is part of the generating function:

$$k_F * \frac{\sum_{j=0}^{d_F-1} (d_F - j) * a_j x^j}{\sum_{j=0}^{d_F} a_j x^j}$$

where k_F is a constant

kde k_F je konstanta specifická pro každý faktor.

Např. ve členu

$$\frac{4(-12x^4 + 62x^3 - 81x^2 + 36x - 5)}{x^5 - 12x^4 + 31x^3 - 27x^2 + 9x - 1} = \frac{4 * (-1 * 12x^4 + 2 * 31x^3 - 3 * 27x^2 + 4 * 9x - 5 * 1)}{x^5 - 12x^4 + 31x^3 - 27x^2 + 9x - 1}$$

vidíme, že čítec dostaneme ze jmenovatele tak, že vynecháme nejvyšší mocninu, člen x^4 ponecháme (vynásobíme 1), člen x^3 vynásobíme 2, člen x^2 vynásobíme 3 atd. Celý čítec je potom vynásoben vždy nějakou specifickou konstantou (v příkladu rovnou 4).

K nalezení kompletní vytvořující funkce (nejen jejího denominátoru) a dokonce i explicitního vzorce, pak potřebujeme nalézt už jen konstanty k_F , jejichž počet je roven počtu faktorů (*number of constants k_F is equal number of irreducible factors*). Viz též tabulka na str. 82. *See also table on page 82.* Nalezení těchto konstant vede na soustavu lineárních rovnic, počet neznámých je však podstatně menší než při klasickém postupu, kdy se předpokládá, že čítec vytvořující funkce má stupeň o 1 menší než jmenovatel, tedy kdy počet neznámých je roven hloubce rekurence.

Např. pro $m=10$ je hloubka rekurence rovna 916, denominátor generální funkce je proto polynom 916. stupně a čítec je polynom 915. stupně. Jeho hledání běžným postupem by znamenalo vyřešit soustavu 916 lineárních rovnic o 916 neznámých, což může být (na symbolické úrovni) už za hranicí kapacity stávajících matematických programů. Pokud použijeme výše popsanou metodu rozkladu na dílčí zlomky zjistíme, že počet faktorů je v tomto případě roven 250, takže pro nalezení generální funkce (a explicitního vzorce) stačí vyřešit soustavu jen 250 lineárních rovnic o 250 neznámých pro konstanty k_F . Vytvořující funkci v klasickém tvaru můžeme pak dostat snadno úpravou z vypočteného tvaru (v tomto případě to však nedoporučuji, protože v čitateli se objeví obrovská čísla).

Důkaz věty o tvaru čitatele GF (*Proof*):

Vytvořující funkce pro posloupnost 2^n je $\frac{1}{1-2x}$,

obecně pro r^n je generální funkce $\frac{1}{1-rx}$

Zkusme nyní složit součet více takových mocnin.

```
Apart [FindGeneratingFunction [Table [2^n + 3^n + 5^n, {n, 0, 20}], x]]
```

$$-\frac{1}{3x-1} - \frac{1}{5x-1} - \frac{1}{2x-1}$$

```
FindGeneratingFunction [Table [2^n + 3^n + 5^n, {n, 0, 20}], x]
```

$$\frac{-31x^2 + 20x - 3}{30x^3 - 31x^2 + 10x - 1}$$

Rozložíme součet např. 5 mocnin, první výpočet představuje rozklad čitatele (numerátoru), v řádcích dostáváme součiny všech možných dvojic, trojic atd.

```
Table[{j, Coefficient[Numerator[Together[-1/(r1*x-1) - 1/(r2*x-1) - 1/(r3*x-1) - 1/(r4*x-1) - 1/(r5*x-1)]],
  x, j]}, {j, 0, 5}] // MatrixForm
```

```
MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & -5 \\ 1 & & & & 4r_1 + 4r_2 + 4r_3 + 4r_4 + 4r_5 \\ 2 & & & & -3r_1r_2 - 3r_1r_3 - 3r_2r_3 - 3r_1r_4 - 3r_2r_4 - 3r_3r_4 - 3r_1r_5 - 3r_2r_5 - 3r_3r_5 - 3r_4r_5 \\ 3 & 2r_1r_2r_3 + 2r_1r_2r_4 + 2r_1r_3r_4 + 2r_2r_3r_4 + 2r_1r_2r_5 + 2r_1r_3r_5 + 2r_2r_3r_5 + 2r_1r_4r_5 + 2r_2r_4r_5 + 2r_3r_4r_5 \\ 4 & & & & -r_1r_2r_3r_4 - r_1r_2r_3r_5 - r_1r_2r_4r_5 - r_1r_3r_4r_5 - r_2r_3r_4r_5 \\ 5 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

```
Table[{j, Coefficient[(r1*x-1)(r2*x-1)(r3*x-1)(r4*x-1)(r5*x-1), x, j]}, {j, 0, 5}] // MatrixForm
```

```
MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & -1 \\ 1 & & & & r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 \\ 2 & & & & -r_1r_2 - r_1r_3 - r_2r_3 - r_1r_4 - r_2r_4 - r_3r_4 - r_1r_5 - r_2r_5 - r_3r_5 - r_4r_5 \\ 3 & r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 + r_1r_2r_5 + r_1r_3r_5 + r_2r_3r_5 + r_1r_4r_5 + r_2r_4r_5 + r_3r_4r_5 \\ 4 & & & & -r_1r_2r_3r_4 - r_1r_2r_3r_5 - r_1r_2r_4r_5 - r_1r_3r_4r_5 - r_2r_3r_4r_5 \\ 5 & & & & r_1r_2r_3r_4r_5 \end{pmatrix}$$

Druhý výpočet představuje rozklad denominátoru. Pokud označíme jeho koeficienty a_0, a_1, a_2, \dots , tak pro koeficienty numerátoru b_0, b_1, \dots dostáváme vztahy $b_0=5a_0, b_1=4a_1, b_2=3a_2, b_3=2a_3, b_4=1a_4, b_5=0$. Toto lze zobecnit do libovolné hloubky a pro koeficienty numerátoru tak máme

$$\sum_{j=0}^{d_F - 1} (d_F - j) * a_j x^j$$

QED

V programu Mathematica můžeme tuto skutečnost ověřit třeba takto (jde jen na numerické úrovni, symbolicky si s tím Mathematica neporadí):

```
polydenominator = x^5-12x^4+31x^3-27x^2+9x-1; df = Exponent[polydenominator, x];
polynumerator = Sum[(df-j)*Coefficient[polydenominator, x, j]*x^j, {j, 0, df-1}]
Table[SeriesCoefficient[polynumerator/polydenominator, {x, 0, n}], {n, 1, 9}]
partikular = Sum[(1/N[Root[polydenominator, j]])^n, {j, 1, df}]
N[Table[partikular, {n, 1, 9}]]
```

```
-5 + 36 x - 81 x^2 + 62 x^3 - 12 x^4
{9, 27, 93, 339, 1274, 4881, 18951, 74291, 293304}
0.11339^n + 0.531124^n + 1.41534^n + 2.91373^n + 4.02642^n
{9., 27., 93., 339., 1274., 4881., 18951., 74291., 293304.}
```

A195652 - 8n Kings on a 16 x 2n horizontal cylinder, m=8

Recurrence order is 208, generating function (*V.Kotěšovec after values computed by Alex V. Breger, 10.9.2011*)

$$\begin{aligned}
 & -\frac{30}{-1+x} - \frac{8}{-1+2x} - \frac{32}{-1+3x} - \frac{2}{-1+4x} - \frac{4}{-1+5x} - \frac{2}{-1+6x} - \frac{2}{-1+9x} + \frac{2(2-5x)}{1-5x+x^2} + \frac{16(2-3x)}{1-3x+x^2} + \frac{4(2-5x)}{1-5x+2x^2} + \frac{6(2-6x)}{1-6x+3x^2} \\
 & + \frac{4(2-6x)}{1-6x+4x^2} + \frac{2(2-8x)}{1-8x+5x^2} + \frac{8(2-6x)}{1-6x+6x^2} + \frac{4(2-9x)}{1-9x+7x^2} + \frac{4(2-7x)}{1-7x+7x^2} + \frac{2(2-6x)}{1-6x+7x^2} + \frac{2(2-7x)}{1-7x+8x^2} + \frac{4(2-9x)}{1-9x+12x^2} + \frac{4(2-9x)}{1-9x+13x^2} + \frac{4(2-9x)}{1-9x+15x^2} \\
 & + \frac{2(2-9x)}{1-9x+16x^2} + \frac{4(2-9x)}{1-9x+17x^2} + \frac{4(2-9x)}{1-9x+19x^2} + \frac{2(-3+12x-8x^2)}{-1+6x-8x^2+x^3} + \frac{8(-3+12x-7x^2)}{-1+6x-7x^2+x^3} + \frac{2(-3+10x-6x^2)}{-1+5x-6x^2+x^3} + \frac{4(-3+12x-8x^2)}{-1+6x-8x^2+2x^3} + \frac{4(-3+12x-9x^2)}{-1+6x-9x^2+3x^3} + \frac{2(-3+16x-16x^2)}{-1+8x-16x^2+4x^3} \\
 & + \frac{4(-3+16x-15x^2)}{-1+8x-15x^2+4x^3} + \frac{4(-3+18x-18x^2)}{-1+9x-18x^2+5x^3} + \frac{4(-3+18x-17x^2)}{-1+9x-17x^2+5x^3} + \frac{4(-3+16x-16x^2)}{-1+8x-16x^2+6x^3} + \frac{4(-3+16x-17x^2)}{-1+8x-17x^2+7x^3} + \frac{4(-3+18x-21x^2)}{-1+9x-21x^2+8x^3} + \frac{4(-3+18x-20x^2)}{-1+9x-20x^2+8x^3} + \frac{4(-3+18x-19x^2)}{-1+9x-19x^2+8x^3} \\
 & + \frac{4(-3+18x-17x^2)}{-1+9x-17x^2+8x^3} + \frac{2(-3+18x-22x^2)}{-1+9x-22x^2+9x^3} + \frac{4(-3+18x-19x^2)}{-1+9x-19x^2+9x^3} + \frac{4(-3+18x-18x^2)}{-1+9x-18x^2+9x^3} + \frac{4(-3+18x-22x^2)}{-1+9x-22x^2+11x^3} + \frac{4(-3+18x-21x^2)}{-1+9x-21x^2+11x^3} + \frac{8(-3+18x-21x^2)}{-1+9x-21x^2+12x^3} + \frac{4(-3+18x-22x^2)}{-1+9x-22x^2+13x^3} \\
 & + \frac{4(-3+18x-23x^2)}{-1+9x-23x^2+14x^3} + \frac{4(-3+18x-22x^2)}{-1+9x-22x^2+15x^3} + \frac{4(-3+18x-23x^2)}{-1+9x-23x^2+16x^3} + \frac{4(-3+18x-24x^2)}{-1+9x-24x^2+17x^3} + \frac{4(-3+18x-24x^2)}{-1+9x-24x^2+19x^3} + \frac{2(4-24x+36x^2-9x^3)}{1-8x+18x^2-9x^3+x^4} + \frac{4(4-27x+48x^2-20x^3)}{1-9x+24x^2-20x^3+3x^4} \\
 & + \frac{4(4-27x+48x^2-18x^3)}{1-9x+24x^2-18x^3+3x^4} + \frac{4(4-27x+46x^2-17x^3)}{1-9x+23x^2-17x^3+3x^4} + \frac{4(4-27x+44x^2-16x^3)}{1-9x+22x^2-16x^3+3x^4} + \frac{4(4-27x+42x^2-15x^3)}{1-9x+21x^2-15x^3+3x^4} + \frac{4(4-27x+50x^2-22x^3)}{1-9x+25x^2-22x^3+4x^4} + \frac{4(4-27x+48x^2-21x^3)}{1-9x+24x^2-21x^3+4x^4} \\
 & + \frac{4(4-27x+48x^2-19x^3)}{1-9x+24x^2-19x^3+4x^4} + \frac{2(4-27x+44x^2-17x^3)}{1-9x+22x^2-17x^3+4x^4} + \frac{4(4-27x+52x^2-26x^3)}{1-9x+26x^2-26x^3+5x^4} + \frac{4(4-27x+50x^2-24x^3)}{1-9x+25x^2-24x^3+5x^4} + \frac{4(4-27x+50x^2-23x^3)}{1-9x+25x^2-23x^3+5x^4} + \frac{4(4-27x+48x^2-22x^3)}{1-9x+24x^2-22x^3+5x^4} + \frac{4(4-27x+48x^2-20x^3)}{1-9x+24x^2-20x^3+5x^4} \\
 & + \frac{4(4-27x+52x^2-26x^3)}{1-9x+26x^2-26x^3+7x^4} + \frac{8(4-27x+52x^2-27x^3)}{1-9x+26x^2-27x^3+8x^4} + \frac{2(4-27x+52x^2-28x^3)}{1-9x+26x^2-28x^3+9x^4} + \frac{4(4-27x+54x^2-31x^3)}{1-9x+27x^2-31x^3+11x^4} + \frac{2(-5+36x-84x^2+70x^3-15x^4)}{-1+9x-28x^2+35x^3-15x^4+x^5} + \frac{4(-5+36x-81x^2+62x^3-12x^4)}{-1+9x-27x^2+31x^3-12x^4+x^5}
 \end{aligned}$$

Vytvořující funkce v obvyklém tvaru viz [OEIS](#). For generating function in common format, see [OEIS](#).

Tento program najde generační funkci podle zadaného denominátoru a tabulky hodnot. Potřebný počet hodnot je dán počtem faktorů pro dané m . Např. pro $m=8$ je počet faktorů 72 a proto je potřeba pouze 72 hodnot (plus nějaké na kontrolu). Při klasickém hledání generační funkce bychom potřebovali 208 hodnot (= hloubka rekurence = stupni denominátoru).

```
(* find generating function in apart form, V. Kotesovec 2011 *)
apartgf[denominator_, seq_] := (flist=Rest[FactorList[denominator]];Print["Number of factors=",Length[flist]]);
gfformula=Sum[polydenominator=flist[[f,1]];df=Exponent[polydenominator,x];
polynumerator=Sum[(df-j)*Coefficient[polydenominator,x,j]*x^j,{j,0,df-1}];polynumerator/polydenominator*Subscript[s,f],{f,1,Length[flist]}];
gfvyp=gfformula/.Solve[Table[seq[[n]]==SeriesCoefficient[gfformula,{x,0,n}],{n,1,Length[flist]}]][[1]];
Print[gfvyp];
Print[Table[seq[[n]]-SeriesCoefficient[gfvyp,{x,0,n}],{n,1,Min[Length[flist]+50,Length[seq]}]]];
```


A195653 - 9n Kings on a 18 x 2n horizontal cylinder, m=9, recurrence order is 400, generating function

(V.Kotěšovec after values computed by Alex V. Breger, 10.9.2011). Gen. funkce v textovém tvaru viz [OEIS](#). For generating function in text format, see [OEIS](#).

$$\begin{aligned}
 & -\frac{36}{-1+x} - \frac{40}{-1+2x} - \frac{40}{-1+3x} - \frac{10}{-1+4x} - \frac{6}{-1+5x} - \frac{8}{-1+6x} - \frac{2}{-1+10x} + \frac{6(2-5x)}{1-5x+x^2} + \frac{6(2-4x)}{1-4x+x^2} + \frac{8(2-3x)}{1-3x+x^2} + \frac{8(2-5x)}{1-5x+2x^2} + \frac{36(2-4x)}{1-4x+2x^2} \\
 & + \frac{4(2-6x)}{1-6x+3x^2} + \frac{8(2-5x)}{1-5x+3x^2} + \frac{2(2-6x)}{1-6x+4x^2} + \frac{4(2-5x)}{1-5x+5x^2} + \frac{2(2-9x)}{1-9x+6x^2} + \frac{12(2-6x)}{1-6x+6x^2} + \frac{6(2-6x)}{1-6x+7x^2} + \frac{4(2-10x)}{1-10x+8x^2} + \frac{2(2-8x)}{1-8x+8x^2} + \frac{4(2-7x)}{1-7x+8x^2} \\
 & + \frac{4(2-8x)}{1-8x+9x^2} + \frac{2(2-8x)}{1-8x+10x^2} + \frac{4(2-10x)}{1-10x+14x^2} + \frac{4(2-10x)}{1-10x+15x^2} + \frac{4(2-10x)}{1-10x+18x^2} + \frac{8(2-10x)}{1-10x+20x^2} + \frac{4(2-10x)}{1-10x+23x^2} + \frac{8(-3+12x-8x^2)}{-1+6x-8x^2+x^3} + \frac{4(-3+12x-7x^2)}{-1+6x-7x^2+x^3} + \frac{8(-3+10x-6x^2)}{-1+5x-6x^2+x^3} \\
 & + \frac{4(-3+14x-10x^2)}{-1+7x-10x^2+2x^3} + \frac{2(-3+14x-9x^2)}{-1+7x-9x^2+2x^3} + \frac{2(-3+12x-8x^2)}{-1+6x-8x^2+2x^3} + \frac{4(-3+14x-10x^2)}{-1+7x-10x^2+3x^3} + \frac{4(-3+16x-16x^2)}{-1+8x-16x^2+4x^3} + \frac{8(-3+14x-11x^2)}{-1+7x-11x^2+4x^3} + \frac{4(-3+16x-17x^2)}{-1+8x-17x^2+5x^3} + \frac{4(-3+14x-12x^2)}{-1+7x-12x^2+5x^3} \\
 & + \frac{4(-3+20x-21x^2)}{-1+10x-21x^2+6x^3} + \frac{4(-3+20x-20x^2)}{-1+10x-20x^2+6x^3} + \frac{4(-3+18x-20x^2)}{-1+9x-20x^2+8x^3} + \frac{4(-3+18x-20x^2)}{-1+9x-20x^2+9x^3} + \frac{4(-3+20x-25x^2)}{-1+10x-25x^2+10x^3} + \frac{4(-3+20x-24x^2)}{-1+10x-24x^2+10x^3} + \frac{4(-3+20x-23x^2)}{-1+10x-23x^2+10x^3} + \frac{4(-3+18x-21x^2)}{-1+9x-21x^2+10x^3} \\
 & + \frac{4(-3+20x-20x^2)}{-1+10x-20x^2+10x^3} + \frac{4(-3+20x-25x^2)}{-1+10x-25x^2+11x^3} + \frac{4(-3+20x-21x^2)}{-1+10x-21x^2+11x^3} + \frac{4(-3+20x-24x^2)}{-1+10x-24x^2+12x^3} + \frac{4(-3+20x-23x^2)}{-1+10x-23x^2+12x^3} + \frac{4(-3+20x-27x^2)}{-1+10x-27x^2+14x^3} + \frac{4(-3+20x-25x^2)}{-1+10x-25x^2+14x^3} + \frac{4(-3+20x-27x^2)}{-1+10x-27x^2+15x^3} \\
 & + \frac{4(-3+20x-25x^2)}{-1+10x-25x^2+15x^3} + \frac{8(-3+20x-26x^2)}{-1+10x-26x^2+16x^3} + \frac{4(-3+20x-28x^2)}{-1+10x-28x^2+18x^3} + \frac{4(-3+20x-26x^2)}{-1+10x-26x^2+18x^3} + \frac{4(-3+20x-28x^2)}{-1+10x-28x^2+20x^3} + \frac{4(-3+20x-27x^2)}{-1+10x-27x^2+20x^3} + \frac{4(-3+20x-29x^2)}{-1+10x-29x^2+21x^3} + \frac{4(-3+20x-27x^2)}{-1+10x-27x^2+21x^3} \\
 & + \frac{8(-3+20x-29x^2)}{-1+10x-29x^2+22x^3} + \frac{4(-3+20x-28x^2)}{-1+10x-28x^2+22x^3} + \frac{4(-3+20x-29x^2)}{-1+10x-29x^2+23x^3} + \frac{4(-3+20x-29x^2)}{-1+10x-29x^2+25x^3} + \frac{4(-3+20x-30x^2)}{-1+10x-30x^2+26x^3} + \frac{4(-3+20x-31x^2)}{-1+10x-31x^2+29x^3} + \frac{4(4-24x+38x^2-12x^3)}{1-8x+19x^2-12x^3+x^4} + \frac{4(4-24x+36x^2-9x^3)}{1-8x+18x^2-9x^3+x^4} \\
 & + \frac{4(4-21x+26x^2-7x^3)}{1-7x+13x^2-7x^3+x^4} + \frac{4(4-24x+38x^2-13x^3)}{1-8x+19x^2-13x^3+2x^4} + \frac{4(4-27x+44x^2-13x^3)}{1-9x+22x^2-13x^3+2x^4} + \frac{4(4-30x+60x^2-28x^3)}{1-10x+30x^2-28x^3+4x^4} + \frac{4(4-30x+58x^2-26x^3)}{1-10x+29x^2-26x^3+4x^4} + \frac{4(4-30x+58x^2-23x^3)}{1-10x+29x^2-23x^3+4x^4} \\
 & + \frac{4(4-30x+56x^2-22x^3)}{1-10x+28x^2-22x^3+4x^4} + \frac{4(4-30x+52x^2-20x^3)}{1-10x+26x^2-20x^3+4x^4} + \frac{4(4-30x+50x^2-19x^3)}{1-10x+25x^2-19x^3+4x^4} + \frac{4(4-30x+64x^2-34x^3)}{1-10x+32x^2-34x^3+6x^4} + \frac{4(4-30x+62x^2-31x^3)}{1-10x+31x^2-31x^3+6x^4} + \frac{4(4-30x+60x^2-30x^3)}{1-10x+30x^2-30x^3+6x^4} \\
 & + \frac{4(4-30x+58x^2-28x^3)}{1-10x+29x^2-28x^3+6x^4} + \frac{4(4-30x+60x^2-28x^3)}{1-10x+30x^2-28x^3+6x^4} + \frac{4(4-30x+58x^2-27x^3)}{1-10x+29x^2-27x^3+6x^4} + \frac{4(4-30x+56x^2-26x^3)}{1-10x+28x^2-26x^3+6x^4} + \frac{4(4-30x+60x^2-26x^3)}{1-10x+30x^2-26x^3+6x^4} + \frac{8(4-30x+58x^2-25x^3)}{1-10x+29x^2-25x^3+6x^4} \\
 & + \frac{4(4-30x+56x^2-24x^3)}{1-10x+28x^2-24x^3+6x^4} + \frac{4(4-30x+54x^2-23x^3)}{1-10x+27x^2-23x^3+6x^4} + \frac{4(4-30x+64x^2-35x^3)}{1-10x+32x^2-35x^3+7x^4} + \frac{4(4-30x+60x^2-31x^3)}{1-10x+30x^2-31x^3+7x^4} + \frac{4(4-30x+62x^2-31x^3)}{1-10x+31x^2-31x^3+7x^4} + \frac{4(4-30x+58x^2-29x^3)}{1-10x+29x^2-29x^3+7x^4} \\
 & + \frac{4(4-30x+58x^2-26x^3)}{1-10x+29x^2-26x^3+7x^4} + \frac{4(4-30x+62x^2-33x^3)}{1-10x+31x^2-33x^3+8x^4} + \frac{4(4-30x+62x^2-32x^3)}{1-10x+31x^2-32x^3+8x^4} + \frac{4(4-30x+60x^2-30x^3)}{1-10x+30x^2-30x^3+8x^4} + \frac{4(4-30x+64x^2-35x^3)}{1-10x+32x^2-35x^3+9x^4} + \frac{4(4-30x+62x^2-32x^3)}{1-10x+31x^2-32x^3+9x^4} \\
 & + \frac{8(4-30x+64x^2-36x^3)}{1-10x+32x^2-36x^3+10x^4} + \frac{4(4-30x+62x^2-34x^3)}{1-10x+31x^2-34x^3+10x^4} + \frac{8(4-30x+62x^2-33x^3)}{1-10x+31x^2-33x^3+10x^4} + \frac{4(4-30x+60x^2-32x^3)}{1-10x+30x^2-32x^3+10x^4} + \frac{4(4-30x+62x^2-35x^3)}{1-10x+31x^2-35x^3+12x^4} + \frac{8(4-30x+66x^2-40x^3)}{1-10x+33x^2-40x^3+13x^4} \\
 & + \frac{4(4-30x+64x^2-37x^3)}{1-10x+32x^2-37x^3+13x^4} + \frac{4(4-30x+64x^2-38x^3)}{1-10x+32x^2-38x^3+14x^4} + \frac{4(4-30x+64x^2-39x^3)}{1-10x+32x^2-39x^3+15x^4} + \frac{4(4-30x+66x^2-41x^3)}{1-10x+33x^2-41x^3+16x^4} + \frac{4(4-30x+66x^2-42x^3)}{1-10x+33x^2-42x^3+17x^4} + \frac{4(4-30x+68x^2-45x^3)}{1-10x+34x^2-45x^3+19x^4} \\
 & + \frac{4(-5+40x-102x^2+92x^3-22x^4)}{-1+10x-34x^2+46x^3-22x^4+2x^5} + \frac{4(-5+40x-99x^2+84x^3-19x^4)}{-1+10x-33x^2+42x^3-19x^4+2x^5} + \frac{4(-5+40x-99x^2+84x^3-18x^4)}{-1+10x-33x^2+42x^3-18x^4+2x^5} + \frac{4(-5+40x-96x^2+78x^3-17x^4)}{-1+10x-32x^2+39x^3-17x^4+2x^5} + \frac{4(-5+40x-96x^2+76x^3-16x^4)}{-1+10x-32x^2+38x^3-16x^4+2x^5} \\
 & + \frac{4(-5+40x-102x^2+94x^3-24x^4)}{-1+10x-34x^2+47x^3-24x^4+3x^5} + \frac{4(-5+40x-99x^2+86x^3-21x^4)}{-1+10x-33x^2+43x^3-21x^4+3x^5} + \frac{4(-5+40x-99x^2+84x^3-20x^4)}{-1+10x-33x^2+42x^3-20x^4+3x^5} + \frac{4(-5+40x-102x^2+94x^3-25x^4)}{-1+10x-34x^2+47x^3-25x^4+4x^5} + \frac{4(-5+40x-105x^2+102x^3-29x^4)}{-1+10x-35x^2+51x^3-29x^4+5x^5}
 \end{aligned}$$

A195654 - 10n Kings on a 20 x 2n horizontal cylinder, m=10

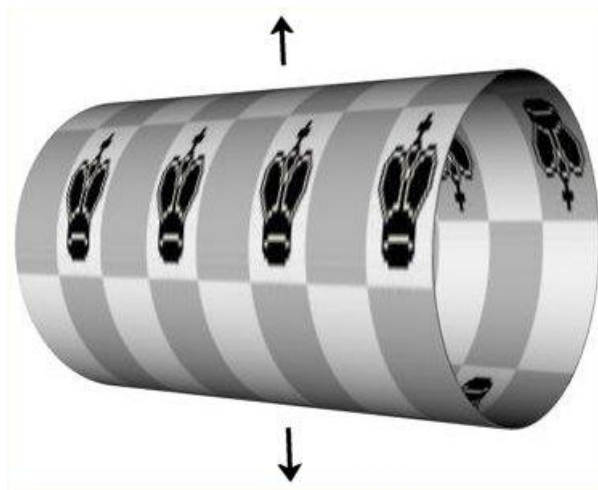
Recurrence order is 916, generating function (*V.Kotěšovec after values computed by Alex V. Breger, 10.9.2011*)

$$\begin{aligned}
& -\frac{88}{-1+x} - \frac{80}{-1+2x} - \frac{56}{-1+3x} - \frac{28}{-1+4x} - \frac{6}{-1+5x} - \frac{4}{-1+6x} - \frac{4}{-1+8x} - \frac{2}{-1+11x} + \frac{8(2-5x)}{1-5x+x^2} + \frac{8(2-3x)}{1-3x+x^2} + \frac{2(2-6x)}{1-6x+2x^2} \\
& + \frac{6(2-5x)}{1-5x+2x^2} + \frac{32(2-4x)}{1-4x+2x^2} + \frac{4(2-8x)}{1-8x+4x^2} + \frac{6(2-7x)}{1-7x+4x^2} + \frac{8(2-6x)}{1-6x+4x^2} + \frac{4(2-8x)}{1-8x+5x^2} + \frac{12(2-5x)}{1-5x+5x^2} + \frac{2(2-10x)}{1-10x+7x^2} + \frac{8(2-7x)}{1-7x+7x^2} + \frac{4(2-8x)}{1-8x+8x^2} + \frac{4(2-11x)}{1-11x+9x^2} \\
& + \frac{2(2-8x)}{1-8x+9x^2} + \frac{2(2-9x)}{1-9x+10x^2} + \frac{4(2-9x)}{1-9x+11x^2} + \frac{4(2-8x)}{1-8x+11x^2} + \frac{2(2-9x)}{1-9x+12x^2} + \frac{2(2-8x)}{1-8x+13x^2} + \frac{4(2-11x)}{1-11x+16x^2} + \frac{4(2-11x)}{1-11x+17x^2} + \frac{4(2-11x)}{1-11x+21x^2} + \frac{4(2-11x)}{1-11x+23x^2} + \frac{2(2-11x)}{1-11x+25x^2} + \frac{4(2-11x)}{1-11x+27x^2} + \frac{4(2-11x)}{1-11x+29x^2} \\
& + \frac{2(-3+12x-9x^2)}{-1+6x-9x^2+x^3} + \frac{2(-3+10x-6x^2)}{-1+5x-6x^2+x^3} + \frac{8(-3+12x-5x^2)}{-1+6x-5x^2+x^3} + \frac{2(-3+14x-12x^2)}{-1+7x-12x^2+2x^3} + \frac{6(-3+14x-10x^2)}{-1+7x-10x^2+2x^3} + \frac{8(-3+14x-9x^2)}{-1+7x-9x^2+2x^3} + \frac{2(-3+16x-14x^2)}{-1+8x-14x^2+3x^3} + \frac{4(-3+16x-13x^2)}{-1+8x-13x^2+3x^3} \\
& + \frac{4(-3+14x-12x^2)}{-1+7x-12x^2+3x^3} + \frac{2(-3+16x-12x^2)}{-1+8x-12x^2+3x^3} + \frac{6(-3+14x-11x^2)}{-1+7x-11x^2+3x^3} + \frac{8(-3+14x-10x^2)}{-1+7x-10x^2+3x^3} + \frac{8(-3+12x-9x^2)}{-1+6x-9x^2+3x^3} + \frac{4(-3+16x-12x^2)}{-1+8x-12x^2+4x^3} + \frac{4(-3+16x-17x^2)}{-1+8x-17x^2+5x^3} + \frac{2(-3+14x-13x^2)}{-1+7x-13x^2+5x^3} \\
& + \frac{4(-3+14x-12x^2)}{-1+7x-12x^2+5x^3} + \frac{4(-3+16x-14x^2)}{-1+8x-14x^2+6x^3} + \frac{4(-3+22x-24x^2)}{-1+11x-24x^2+7x^3} + \frac{4(-3+22x-23x^2)}{-1+11x-23x^2+7x^3} + \frac{4(-3+16x-15x^2)}{-1+8x-15x^2+7x^3} + \frac{4(-3+18x-21x^2)}{-1+9x-21x^2+8x^3} + \frac{4(-3+18x-22x^2)}{-1+9x-22x^2+9x^3} + \frac{4(-3+16x-17x^2)}{-1+8x-17x^2+9x^3} \\
& + \frac{4(-3+22x-29x^2)}{-1+11x-29x^2+12x^3} + \frac{4(-3+22x-27x^2)}{-1+11x-27x^2+12x^3} + \frac{4(-3+20x-24x^2)}{-1+10x-24x^2+12x^3} + \frac{4(-3+22x-23x^2)}{-1+11x-23x^2+12x^3} + \frac{4(-3+22x-29x^2)}{-1+11x-29x^2+13x^3} + \frac{4(-3+20x-25x^2)}{-1+10x-25x^2+13x^3} + \frac{4(-3+22x-24x^2)}{-1+11x-24x^2+13x^3} + \frac{4(-3+18x-23x^2)}{-1+9x-23x^2+13x^3} \\
& + \frac{4(-3+20x-27x^2)}{-1+10x-27x^2+14x^3} + \frac{4(-3+22x-32x^2)}{-1+11x-32x^2+15x^3} + \frac{4(-3+22x-31x^2)}{-1+11x-31x^2+15x^3} + \frac{4(-3+22x-27x^2)}{-1+11x-27x^2+15x^3} + \frac{2(-3+22x-33x^2)}{-1+11x-33x^2+16x^3} + \frac{4(-3+22x-29x^2)}{-1+11x-29x^2+16x^3} + \frac{4(-3+22x-32x^2)}{-1+11x-32x^2+17x^3} + \frac{4(-3+22x-29x^2)}{-1+11x-29x^2+17x^3} \\
& + \frac{4(-3+18x-24x^2)}{-1+9x-24x^2+17x^3} + \frac{4(-3+22x-29x^2)}{-1+11x-29x^2+18x^3} + \frac{4(-3+22x-33x^2)}{-1+11x-33x^2+19x^3} + \frac{4(-3+22x-32x^2)}{-1+11x-32x^2+19x^3} + \frac{4(-3+22x-30x^2)}{-1+11x-30x^2+19x^3} + \frac{4(-3+22x-31x^2)}{-1+11x-31x^2+20x^3} + \frac{4(-3+22x-33x^2)}{-1+11x-33x^2+22x^3} + \frac{4(-3+22x-33x^2)}{-1+11x-33x^2+24x^3} \\
& + \frac{4(-3+22x-31x^2)}{-1+11x-31x^2+24x^3} + \frac{4(-3+22x-33x^2)}{-1+11x-33x^2+25x^3} + \frac{4(-3+22x-32x^2)}{-1+11x-32x^2+25x^3} + \frac{2(-3+20x-29x^2)}{-1+10x-29x^2+25x^3} + \frac{4(-3+20x-30x^2)}{-1+10x-30x^2+26x^3} + \frac{4(-3+22x-35x^2)}{-1+11x-35x^2+27x^3} + \frac{4(-3+22x-34x^2)}{-1+11x-34x^2+27x^3} + \frac{4(-3+22x-32x^2)}{-1+11x-32x^2+27x^3} \\
& + \frac{4(-3+22x-34x^2)}{-1+11x-34x^2+28x^3} + \frac{8(-3+22x-33x^2)}{-1+11x-33x^2+28x^3} + \frac{4(-3+20x-31x^2)}{-1+10x-31x^2+29x^3} + \frac{4(-3+22x-36x^2)}{-1+11x-36x^2+31x^3} + \frac{4(-3+22x-34x^2)}{-1+11x-34x^2+31x^3} + \frac{4(-3+22x-35x^2)}{-1+11x-35x^2+32x^3} + \frac{8(-3+22x-36x^2)}{-1+11x-36x^2+33x^3} + \frac{4(-3+22x-36x^2)}{-1+11x-36x^2+34x^3} \\
& + \frac{4(-3+22x-37x^2)}{-1+11x-37x^2+37x^3} + \frac{4(-3+22x-38x^2)}{-1+11x-38x^2+41x^3} + \frac{4(4-27x+48x^2-17x^3)}{1-9x+24x^2-17x^3+2x^4} + \frac{4(4-27x+44x^2-13x^3)}{1-9x+22x^2-13x^3+2x^4} + \frac{4(4-27x+50x^2-21x^3)}{1-9x+25x^2-21x^3+3x^4} + \frac{4(4-30x+56x^2-19x^3)}{1-10x+28x^2-19x^3+3x^4} + \frac{8(4-27x+48x^2-18x^3)}{1-9x+24x^2-18x^3+3x^4} \\
& + \frac{4(4-30x+54x^2-18x^3)}{1-10x+27x^2-18x^3+3x^4} + \frac{4(4-27x+46x^2-17x^3)}{1-9x+23x^2-17x^3+3x^4} + \frac{4(4-30x+62x^2-31x^3)}{1-10x+31x^2-31x^3+4x^4} + \frac{4(4-27x+50x^2-22x^3)}{1-9x+25x^2-22x^3+4x^4} + \frac{4(4-27x+48x^2-19x^3)}{1-9x+24x^2-19x^3+4x^4} + \frac{4(4-33x+70x^2-34x^3)}{1-11x+35x^2-34x^3+5x^4} \\
& + \frac{4(4-30x+62x^2-32x^3)}{1-10x+31x^2-32x^3+5x^4} + \frac{4(4-33x+68x^2-32x^3)}{1-11x+34x^2-32x^3+5x^4} + \frac{4(4-33x+68x^2-28x^3)}{1-11x+34x^2-28x^3+5x^4} + \frac{4(4-33x+66x^2-27x^3)}{1-11x+33x^2-27x^3+5x^4} + \frac{4(4-33x+60x^2-24x^3)}{1-11x+30x^2-24x^3+5x^4} + \frac{4(4-33x+58x^2-23x^3)}{1-11x+29x^2-23x^3+5x^4} \\
& + \frac{4(4-30x+64x^2-34x^3)}{1-10x+32x^2-34x^3+6x^4} + \frac{4(4-30x+66x^2-38x^3)}{1-10x+33x^2-38x^3+7x^4} + \frac{4(4-27x+52x^2-26x^3)}{1-9x+26x^2-26x^3+7x^4} + \frac{4(4-33x+76x^2-43x^3)}{1-11x+38x^2-43x^3+8x^4} + \frac{4(4-33x+74x^2-40x^3)}{1-11x+37x^2-40x^3+8x^4} + \frac{4(4-33x+72x^2-39x^3)}{1-11x+36x^2-39x^3+8x^4} \\
& + \frac{4(4-33x+72x^2-36x^3)}{1-11x+36x^2-36x^3+8x^4} + \frac{4(4-30x+64x^2-35x^3)}{1-10x+32x^2-35x^3+8x^4} + \frac{4(4-33x+68x^2-35x^3)}{1-11x+34x^2-35x^3+8x^4} + \frac{4(4-33x+70x^2-35x^3)}{1-11x+35x^2-35x^3+8x^4} + \frac{4(4-33x+66x^2-33x^3)}{1-11x+33x^2-33x^3+8x^4} + \frac{4(4-33x+72x^2-33x^3)}{1-11x+36x^2-33x^3+8x^4} \\
& + \frac{4(4-33x+70x^2-32x^3)}{1-11x+35x^2-32x^3+8x^4} + \frac{4(4-33x+68x^2-31x^3)}{1-11x+34x^2-31x^3+8x^4} + \frac{4(4-33x+66x^2-30x^3)}{1-11x+33x^2-30x^3+8x^4} + \frac{4(4-33x+64x^2-29x^3)}{1-11x+32x^2-29x^3+8x^4} + \frac{2(4-33x+78x^2-46x^3)}{1-11x+39x^2-46x^3+9x^4} + \frac{4(4-33x+76x^2-44x^3)}{1-11x+38x^2-44x^3+9x^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4(4-33x+76x^2-42x^3)}{1-11x+38x^2-42x^3+9x^4} + \frac{4(4-33x+72x^2-40x^3)}{1-11x+36x^2-40x^3+9x^4} + \frac{6(4-33x+74x^2-39x^3)}{1-11x+37x^2-39x^3+9x^4} + \frac{4(4-33x+70x^2-38x^3)}{1-11x+35x^2-38x^3+9x^4} + \frac{4(4-33x+70x^2-37x^3)}{1-11x+35x^2-37x^3+9x^4} + \frac{4(4-33x+68x^2-36x^3)}{1-11x+34x^2-36x^3+9x^4} \\
& + \frac{4(4-33x+72x^2-34x^3)}{1-11x+36x^2-34x^3+9x^4} + \frac{4(4-33x+70x^2-33x^3)}{1-11x+35x^2-33x^3+9x^4} + \frac{4(4-33x+68x^2-32x^3)}{1-11x+34x^2-32x^3+9x^4} + \frac{2(4-33x+66x^2-31x^3)}{1-11x+33x^2-31x^3+9x^4} + \frac{4(4-33x+78x^2-48x^3)}{1-11x+39x^2-48x^3+11x^4} + \frac{4(4-33x+76x^2-46x^3)}{1-11x+38x^2-46x^3+11x^4} \\
& + \frac{4(4-33x+76x^2-44x^3)}{1-11x+38x^2-44x^3+11x^4} + \frac{4(4-33x+74x^2-43x^3)}{1-11x+37x^2-43x^3+11x^4} + \frac{4(4-30x+66x^2-39x^3)}{1-10x+33x^2-39x^3+11x^4} + \frac{4(4-33x+72x^2-36x^3)}{1-11x+36x^2-36x^3+11x^4} + \frac{4(4-33x+76x^2-45x^3)}{1-11x+38x^2-45x^3+12x^4} + \frac{4(4-33x+76x^2-44x^3)}{1-11x+38x^2-44x^3+12x^4} \\
& + \frac{12(4-33x+74x^2-42x^3)}{1-11x+37x^2-42x^3+12x^4} + \frac{8(4-33x+74x^2-41x^3)}{1-11x+37x^2-41x^3+12x^4} + \frac{4(4-33x+72x^2-39x^3)}{1-11x+36x^2-39x^3+12x^4} + \frac{4(4-33x+70x^2-38x^3)}{1-11x+35x^2-38x^3+12x^4} + \frac{4(4-33x+76x^2-44x^3)}{1-11x+38x^2-44x^3+13x^4} + \frac{4(4-33x+80x^2-52x^3)}{1-11x+40x^2-52x^3+14x^4} \\
& + \frac{4(4-33x+78x^2-48x^3)}{1-11x+39x^2-48x^3+14x^4} + \frac{4(4-33x+76x^2-46x^3)}{1-11x+38x^2-46x^3+14x^4} + \frac{4(4-33x+74x^2-44x^3)}{1-11x+37x^2-44x^3+14x^4} + \frac{4(4-33x+76x^2-44x^3)}{1-11x+38x^2-44x^3+14x^4} + \frac{4(4-33x+74x^2-43x^3)}{1-11x+37x^2-43x^3+14x^4} + \frac{4(4-33x+72x^2-42x^3)}{1-11x+36x^2-42x^3+14x^4} \\
& + \frac{4(4-33x+80x^2-52x^3)}{1-11x+40x^2-52x^3+15x^4} + \frac{4(4-33x+78x^2-49x^3)}{1-11x+39x^2-49x^3+15x^4} + \frac{8(4-33x+76x^2-46x^3)}{1-11x+38x^2-46x^3+15x^4} + \frac{4(4-33x+76x^2-44x^3)}{1-11x+38x^2-44x^3+15x^4} + \frac{4(4-33x+74x^2-43x^3)}{1-11x+37x^2-43x^3+15x^4} + \frac{4(4-33x+72x^2-42x^3)}{1-11x+36x^2-42x^3+15x^4} \\
& + \frac{4(4-33x+80x^2-53x^3)}{1-11x+40x^2-53x^3+16x^4} + \frac{12(4-33x+76x^2-47x^3)}{1-11x+38x^2-47x^3+16x^4} + \frac{4(4-33x+76x^2-45x^3)}{1-11x+38x^2-45x^3+16x^4} + \frac{2(4-33x+74x^2-44x^3)}{1-11x+37x^2-44x^3+16x^4} + \frac{4(4-33x+78x^2-50x^3)}{1-11x+39x^2-50x^3+17x^4} + \frac{4(4-33x+78x^2-48x^3)}{1-11x+39x^2-48x^3+17x^4} \\
& + \frac{4(4-33x+76x^2-46x^3)}{1-11x+38x^2-46x^3+17x^4} + \frac{4(4-33x+78x^2-49x^3)}{1-11x+39x^2-49x^3+18x^4} + \frac{4(4-33x+76x^2-47x^3)}{1-11x+38x^2-47x^3+18x^4} + \frac{4(4-33x+74x^2-46x^3)}{1-11x+37x^2-46x^3+18x^4} + \frac{4(4-33x+80x^2-54x^3)}{1-11x+40x^2-54x^3+19x^4} + \frac{4(4-33x+78x^2-50x^3)}{1-11x+39x^2-50x^3+19x^4} \\
& + \frac{4(4-33x+78x^2-51x^3)}{1-11x+39x^2-51x^3+20x^4} + \frac{8(4-33x+76x^2-49x^3)}{1-11x+38x^2-49x^3+20x^4} + \frac{12(4-33x+80x^2-54x^3)}{1-11x+40x^2-54x^3+21x^4} + \frac{4(4-33x+76x^2-50x^3)}{1-11x+38x^2-50x^3+21x^4} + \frac{4(4-33x+82x^2-58x^3)}{1-11x+41x^2-58x^3+23x^4} + \frac{4(4-33x+78x^2-53x^3)}{1-11x+39x^2-53x^3+23x^4} \\
& + \frac{12(4-33x+80x^2-55x^3)}{1-11x+40x^2-55x^3+24x^4} + \frac{6(4-33x+82x^2-59x^3)}{1-11x+41x^2-59x^3+25x^4} + \frac{4(4-33x+80x^2-56x^3)}{1-11x+40x^2-56x^3+25x^4} + \frac{4(4-33x+82x^2-59x^3)}{1-11x+41x^2-59x^3+27x^4} + \frac{4(4-33x+84x^2-64x^3)}{1-11x+42x^2-64x^3+31x^4} + \frac{4(4-33x+82x^2-61x^3)}{1-11x+41x^2-61x^3+31x^4} \\
& + \frac{4(-5+40x-102x^2+88x^3-16x^4)}{-1+10x-34x^2+44x^3-16x^4+x^5} + \frac{4(-5+40x-99x^2+80x^3-13x^4)}{-1+10x-33x^2+40x^3-13x^4+x^5} + \frac{2(-5+40x-99x^2+80x^3-12x^4)}{-1+10x-33x^2+40x^3-12x^4+x^5} + \frac{4(-5+44x-126x^2+130x^3-35x^4)}{-1+11x-42x^2+65x^3-35x^4+3x^5} + \frac{4(-5+44x-123x^2+122x^3-32x^4)}{-1+11x-41x^2+61x^3-32x^4+3x^5} \\
& + \frac{4(-5+44x-123x^2+118x^3-28x^4)}{-1+11x-41x^2+59x^3-28x^4+3x^5} + \frac{4(-5+44x-123x^2+118x^3-27x^4)}{-1+11x-41x^2+59x^3-27x^4+3x^5} + \frac{4(-5+44x-117x^2+106x^3-26x^4)}{-1+11x-39x^2+53x^3-26x^4+3x^5} + \frac{4(-5+44x-120x^2+110x^3-26x^4)}{-1+11x-40x^2+55x^3-26x^4+3x^5} + \frac{4(-5+44x-120x^2+112x^3-26x^4)}{-1+11x-40x^2+56x^3-26x^4+3x^5} \\
& + \frac{4(-5+44x-114x^2+100x^3-24x^4)}{-1+11x-38x^2+50x^3-24x^4+3x^5} + \frac{4(-5+44x-117x^2+102x^3-23x^4)}{-1+11x-39x^2+51x^3-23x^4+3x^5} + \frac{2(-5+44x-123x^2+120x^3-32x^4)}{-1+11x-41x^2+60x^3-32x^4+4x^5} + \frac{4(-5+44x-120x^2+116x^3-31x^4)}{-1+11x-40x^2+58x^3-31x^4+4x^5} + \frac{4(-5+44x-123x^2+120x^3-31x^4)}{-1+11x-41x^2+60x^3-31x^4+4x^5} \\
& + \frac{4(-5+44x-120x^2+112x^3-29x^4)}{-1+11x-40x^2+56x^3-29x^4+4x^5} + \frac{4(-5+44x-123x^2+120x^3-29x^4)}{-1+11x-41x^2+60x^3-29x^4+4x^5} + \frac{4(-5+44x-120x^2+110x^3-28x^4)}{-1+11x-40x^2+55x^3-28x^4+4x^5} + \frac{4(-5+44x-117x^2+106x^3-27x^4)}{-1+11x-39x^2+53x^3-27x^4+4x^5} + \frac{4(-5+44x-117x^2+108x^3-27x^4)}{-1+11x-39x^2+54x^3-27x^4+4x^5} \\
& + \frac{4(-5+44x-120x^2+112x^3-27x^4)}{-1+11x-40x^2+56x^3-27x^4+4x^5} + \frac{4(-5+44x-117x^2+106x^3-26x^4)}{-1+11x-39x^2+53x^3-26x^4+4x^5} + \frac{4(-5+44x-114x^2+100x^3-25x^4)}{-1+11x-38x^2+50x^3-25x^4+4x^5} + \frac{4(-5+44x-129x^2+142x^3-44x^4)}{-1+11x-43x^2+71x^3-44x^4+5x^5} + \frac{4(-5+44x-126x^2+134x^3-41x^4)}{-1+11x-42x^2+67x^3-41x^4+5x^5} \\
& + \frac{4(-5+44x-126x^2+132x^3-38x^4)}{-1+11x-42x^2+66x^3-38x^4+5x^5} + \frac{4(-5+44x-126x^2+130x^3-36x^4)}{-1+11x-42x^2+65x^3-36x^4+5x^5} + \frac{4(-5+44x-123x^2+122x^3-34x^4)}{-1+11x-41x^2+61x^3-34x^4+5x^5} + \frac{8(-5+44x-123x^2+122x^3-33x^4)}{-1+11x-41x^2+61x^3-33x^4+5x^5} + \frac{4(-5+44x-120x^2+116x^3-32x^4)}{-1+11x-40x^2+58x^3-32x^4+5x^5} \\
& + \frac{4(-5+44x-123x^2+122x^3-32x^4)}{-1+11x-41x^2+61x^3-32x^4+5x^5} + \frac{4(-5+44x-120x^2+114x^3-30x^4)}{-1+11x-40x^2+57x^3-30x^4+5x^5} + \frac{4(-5+44x-123x^2+124x^3-36x^4)}{-1+11x-41x^2+62x^3-36x^4+6x^5} + \frac{8(-5+44x-123x^2+122x^3-35x^4)}{-1+11x-41x^2+61x^3-35x^4+6x^5} + \frac{4(-5+44x-120x^2+118x^3-34x^4)}{-1+11x-40x^2+59x^3-34x^4+6x^5} \\
& + \frac{4(-5+44x-120x^2+116x^3-33x^4)}{-1+11x-40x^2+58x^3-33x^4+6x^5} + \frac{4(-5+44x-126x^2+134x^3-41x^4)}{-1+11x-42x^2+67x^3-41x^4+7x^5} + \frac{4(-5+44x-126x^2+132x^3-40x^4)}{-1+11x-42x^2+66x^3-40x^4+7x^5} + \frac{4(-5+44x-123x^2+126x^3-38x^4)}{-1+11x-41x^2+63x^3-38x^4+7x^5} + \frac{4(-5+44x-123x^2+122x^3-36x^4)}{-1+11x-41x^2+61x^3-36x^4+7x^5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4(-5 + 44x - 129x^2 + 142x^3 - 45x^4)}{-1 + 11x - 43x^2 + 71x^3 - 45x^4 + 8x^5} + \frac{4(-5 + 44x - 126x^2 + 132x^3 - 41x^4)}{-1 + 11x - 42x^2 + 66x^3 - 41x^4 + 8x^5} + \frac{4(-5 + 44x - 123x^2 + 126x^3 - 39x^4)}{-1 + 11x - 41x^2 + 63x^3 - 39x^4 + 8x^5} + \frac{2(-5 + 44x - 129x^2 + 144x^3 - 49x^4)}{-1 + 11x - 43x^2 + 72x^3 - 49x^4 + 9x^5} + \frac{4(-5 + 44x - 129x^2 + 142x^3 - 46x^4)}{-1 + 11x - 43x^2 + 71x^3 - 46x^4 + 9x^5} \\
& + \frac{8(-5 + 44x - 126x^2 + 134x^3 - 43x^4)}{-1 + 11x - 42x^2 + 67x^3 - 43x^4 + 9x^5} + \frac{4(-5 + 44x - 132x^2 + 154x^3 - 55x^4)}{-1 + 11x - 44x^2 + 77x^3 - 55x^4 + 11x^5} + \frac{4(-5 + 44x - 129x^2 + 144x^3 - 49x^4)}{-1 + 11x - 43x^2 + 72x^3 - 49x^4 + 11x^5} + \frac{2(6 - 55x + 180x^2 - 252x^3 + 140x^4 - 21x^5)}{1 - 11x + 45x^2 - 84x^3 + 70x^4 - 21x^5 + x^6} + \frac{4(6 - 55x + 176x^2 - 234x^3 + 118x^4 - 15x^5)}{1 - 11x + 44x^2 - 78x^3 + 59x^4 - 15x^5 + x^6} \\
& + \frac{2(6 - 55x + 172x^2 - 216x^3 + 102x^4 - 14x^5)}{1 - 11x + 43x^2 - 72x^3 + 51x^4 - 14x^5 + x^6} + \frac{4(6 - 55x + 172x^2 - 216x^3 + 100x^4 - 13x^5)}{1 - 11x + 43x^2 - 72x^3 + 50x^4 - 13x^5 + x^6} + \frac{4(6 - 55x + 168x^2 - 201x^3 + 90x^4 - 12x^5)}{1 - 11x + 42x^2 - 67x^3 + 45x^4 - 12x^5 + x^6} + \frac{4(6 - 55x + 168x^2 - 204x^3 + 92x^4 - 12x^5)}{1 - 11x + 42x^2 - 68x^3 + 46x^4 - 12x^5 + x^6}
\end{aligned}$$

Vytvořující funkce v textovém tvaru viz [OEIS](#). For generating function in text format, see [OEIS](#).



A195655 - 11n Kings on a 22 x 2n horizontal cylinder, m=11

Recurrence order is 1829 (*V. Kotěšovec 13.9.2011*), denominator of the generating function found Max A.Alekseyev 14.9.2011.

Full generating function (*Václav Kotěšovec, 24.9.2011*), see also [OEIS](#).

$$\begin{aligned}
 &-198/(-1+x) \\
 &-264/(-1+2*x) \\
 &-76/(-1+3*x) \\
 &-66/(-1+4*x) \\
 &-24/(-1+5*x) \\
 &-16/(-1+6*x) \\
 &-6/(-1+7*x) \\
 &-2/(-1+12*x) \\
 &+(4*(2-6*x))/(1-6*x+x^2) \\
 &+(12*(2-5*x))/(1-5*x+x^2) \\
 &+(8*(2-4*x))/(1-4*x+x^2) \\
 &+(26*(2-3*x))/(1-3*x+x^2) \\
 &+(8*(2-7*x))/(1-7*x+2*x^2) \\
 &+(10*(2-6*x))/(1-6*x+2*x^2) \\
 &+(10*(2-5*x))/(1-5*x+2*x^2) \\
 &+(76*(2-4*x))/(1-4*x+2*x^2) \\
 &+(4*(2-7*x))/(1-7*x+3*x^2) \\
 &+(2*(2-6*x))/(1-6*x+3*x^2) \\
 &+(34*(2-5*x))/(1-5*x+3*x^2) \\
 &+(4*(2-7*x))/(1-7*x+4*x^2) \\
 &+(8*(2-6*x))/(1-6*x+4*x^2) \\
 &+(4*(2-8*x))/(1-8*x+5*x^2) \\
 &+(6*(2-7*x))/(1-7*x+5*x^2) \\
 &+(36*(2-5*x))/(1-5*x+5*x^2) \\
 &+(8*(2-6*x))/(1-6*x+6*x^2) \\
 &+(4*(2-7*x))/(1-7*x+7*x^2) \\
 &+(4*(2-6*x))/(1-6*x+7*x^2) \\
 &+(2*(2-11*x))/(1-11*x+8*x^2) \\
 &+(2*(2-8*x))/(1-8*x+8*x^2) \\
 &+(12*(2-7*x))/(1-7*x+8*x^2) \\
 &+(8*(2-7*x))/(1-7*x+9*x^2) \\
 &+(4*(2-12*x))/(1-12*x+10*x^2) \\
 &+(4*(2-9*x))/(1-9*x+10*x^2) \\
 &+(8*(2-8*x))/(1-8*x+10*x^2) \\
 &+(4*(2-8*x))/(1-8*x+11*x^2) \\
 &+(12*(2-7*x))/(1-7*x+11*x^2) \\
 &+(2*(2-10*x))/(1-10*x+12*x^2) \\
 &+(6*(2-9*x))/(1-9*x+12*x^2) \\
 &+(4*(2-10*x))/(1-10*x+13*x^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+(4*(2-8*x))/(1-8*x+13*x^2) \\
 &+(2*(2-10*x))/(1-10*x+14*x^2) \\
 &+(2*(2-8*x))/(1-8*x+14*x^2) \\
 &+(2*(2-9*x))/(1-9*x+16*x^2) \\
 &+(4*(2-12*x))/(1-12*x+18*x^2) \\
 &+(4*(2-12*x))/(1-12*x+19*x^2) \\
 &+(4*(2-10*x))/(1-10*x+22*x^2) \\
 &+(4*(2-12*x))/(1-12*x+24*x^2) \\
 &+(4*(2-12*x))/(1-12*x+26*x^2) \\
 &+(4*(2-12*x))/(1-12*x+28*x^2) \\
 &+(4*(2-12*x))/(1-12*x+30*x^2) \\
 &+(4*(2-12*x))/(1-12*x+31*x^2) \\
 &+(4*(2-12*x))/(1-12*x+34*x^2) \\
 &+(4*(-3+14*x-11*x^2))/(-1+7*x-11*x^2+x^3) \\
 &+(4*(-3+12*x-9*x^2))/(-1+6*x-9*x^2+x^3) \\
 &+(8*(-3+10*x-6*x^2))/(-1+5*x-6*x^2+x^3) \\
 &+(8*(-3+14*x-12*x^2))/(-1+7*x-12*x^2+2*x^3) \\
 &+(4*(-3+16*x-12*x^2))/(-1+8*x-12*x^2+2*x^3) \\
 &+(4*(-3+18*x-12*x^2))/(-1+9*x-12*x^2+2*x^3) \\
 &+(8*(-3+14*x-10*x^2))/(-1+7*x-10*x^2+2*x^3) \\
 &+(12*(-3+12*x-8*x^2))/(-1+6*x-8*x^2+2*x^3) \\
 &+(4*(-3+16*x-14*x^2))/(-1+8*x-14*x^2+3*x^3) \\
 &+(6*(-3+14*x-12*x^2))/(-1+7*x-12*x^2+3*x^3) \\
 &+(6*(-3+14*x-11*x^2))/(-1+7*x-11*x^2+3*x^3) \\
 &+(8*(-3+12*x-9*x^2))/(-1+6*x-9*x^2+3*x^3) \\
 &+(2*(-3+18*x-17*x^2))/(-1+9*x-17*x^2+4*x^3) \\
 &+(2*(-3+16*x-16*x^2))/(-1+8*x-16*x^2+4*x^3) \\
 &+(4*(-3+16*x-15*x^2))/(-1+8*x-15*x^2+4*x^3) \\
 &+(2*(-3+18*x-15*x^2))/(-1+9*x-15*x^2+4*x^3) \\
 &+(4*(-3+16*x-13*x^2))/(-1+8*x-13*x^2+4*x^3) \\
 &+(6*(-3+16*x-12*x^2))/(-1+8*x-12*x^2+4*x^3) \\
 &+(2*(-3+14*x-11*x^2))/(-1+7*x-11*x^2+4*x^3) \\
 &+(8*(-3+16*x-15*x^2))/(-1+8*x-15*x^2+5*x^3) \\
 &+(4*(-3+16*x-14*x^2))/(-1+8*x-14*x^2+5*x^3) \\
 &+(10*(-3+14*x-13*x^2))/(-1+7*x-13*x^2+5*x^3) \\
 &+(4*(-3+20*x-26*x^2))/(-1+10*x-26*x^2+6*x^3) \\
 &+(4*(-3+20*x-22*x^2))/(-1+10*x-22*x^2+6*x^3) \\
 &+(4*(-3+18*x-21*x^2))/(-1+9*x-21*x^2+6*x^3) \\
 &+(6*(-3+16*x-16*x^2))/(-1+8*x-16*x^2+6*x^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+(4*(-3+18*x-16*x^2))/(-1+9*x-16*x^2+6*x^3) \\
 &+(8*(-3+16*x-14*x^2))/(-1+8*x-14*x^2+6*x^3) \\
 &+(4*(-3+20*x-23*x^2))/(-1+10*x-23*x^2+7*x^3) \\
 &+(4*(-3+16*x-16*x^2))/(-1+8*x-16*x^2+7*x^3) \\
 &+(4*(-3+18*x-16*x^2))/(-1+9*x-16*x^2+7*x^3) \\
 &+(4*(-3+16*x-15*x^2))/(-1+8*x-15*x^2+7*x^3) \\
 &+(10*(-3+14*x-14*x^2))/(-1+7*x-14*x^2+7*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-27*x^2))/(-1+12*x-27*x^2+8*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-26*x^2))/(-1+12*x-26*x^2+8*x^3) \\
 &+(4*(-3+20*x-25*x^2))/(-1+10*x-25*x^2+8*x^3) \\
 &+(4*(-3+18*x-21*x^2))/(-1+9*x-21*x^2+8*x^3) \\
 &+(2*(-3+16*x-17*x^2))/(-1+8*x-17*x^2+8*x^3) \\
 &+(4*(-3+20*x-25*x^2))/(-1+10*x-25*x^2+9*x^3) \\
 &+(4*(-3+18*x-22*x^2))/(-1+9*x-22*x^2+9*x^3) \\
 &+(4*(-3+18*x-18*x^2))/(-1+9*x-18*x^2+9*x^3) \\
 &+(8*(-3+16*x-17*x^2))/(-1+8*x-17*x^2+9*x^3) \\
 &+(8*(-3+14*x-12*x^2))/(-1+7*x-12*x^2+10*x^3) \\
 &+(4*(-3+20*x-25*x^2))/(-1+10*x-25*x^2+11*x^3) \\
 &+(4*(-3+18*x-20*x^2))/(-1+9*x-20*x^2+11*x^3) \\
 &+(4*(-3+18*x-21*x^2))/(-1+9*x-21*x^2+12*x^3) \\
 &+(4*(-3+16*x-19*x^2))/(-1+8*x-19*x^2+13*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-33*x^2))/(-1+12*x-33*x^2+14*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-32*x^2))/(-1+12*x-32*x^2+14*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-31*x^2))/(-1+12*x-31*x^2+14*x^3) \\
 &+(4*(-3+20*x-27*x^2))/(-1+10*x-27*x^2+14*x^3) \\
 &+(4*(-3+20*x-26*x^2))/(-1+10*x-26*x^2+14*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-26*x^2))/(-1+12*x-26*x^2+14*x^3) \\
 &+(4*(-3+18*x-23*x^2))/(-1+9*x-23*x^2+14*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-33*x^2))/(-1+12*x-33*x^2+15*x^3) \\
 &+(4*(-3+22*x-28*x^2))/(-1+11*x-28*x^2+15*x^3) \\
 &+(4*(-3+20*x-27*x^2))/(-1+10*x-27*x^2+15*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-27*x^2))/(-1+12*x-27*x^2+15*x^3) \\
 &+(4*(-3+22*x-30*x^2))/(-1+11*x-30*x^2+16*x^3) \\
 &+(4*(-3+22*x-29*x^2))/(-1+11*x-29*x^2+16*x^3) \\
 &+(4*(-3+20*x-27*x^2))/(-1+10*x-27*x^2+16*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-37*x^2))/(-1+12*x-37*x^2+18*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-36*x^2))/(-1+12*x-36*x^2+18*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-34*x^2))/(-1+12*x-34*x^2+18*x^3) \\
 &+(4*(-3+22*x-32*x^2))/(-1+11*x-32*x^2+18*x^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+(4*(-3+24*x-31*x^2))/(-1+12*x-31*x^2+18*x^3) \\
 &+(4*(-3+20*x-28*x^2))/(-1+10*x-28*x^2+18*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-38*x^2))/(-1+12*x-38*x^2+20*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-35*x^2))/(-1+12*x-35*x^2+20*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-34*x^2))/(-1+12*x-34*x^2+20*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-33*x^2))/(-1+12*x-33*x^2+20*x^3) \\
 &+(4*(-3+20*x-28*x^2))/(-1+10*x-28*x^2+20*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-33*x^2))/(-1+12*x-33*x^2+21*x^3) \\
 &+(4*(-3+20*x-29*x^2))/(-1+10*x-29*x^2+21*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-34*x^2))/(-1+12*x-34*x^2+22*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-39*x^2))/(-1+12*x-39*x^2+23*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-37*x^2))/(-1+12*x-37*x^2+23*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-39*x^2))/(-1+12*x-39*x^2+24*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-36*x^2))/(-1+12*x-36*x^2+24*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-38*x^2))/(-1+12*x-38*x^2+26*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-39*x^2))/(-1+12*x-39*x^2+30*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-36*x^2))/(-1+12*x-36*x^2+30*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-39*x^2))/(-1+12*x-39*x^2+32*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-38*x^2))/(-1+12*x-38*x^2+32*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-41*x^2))/(-1+12*x-41*x^2+33*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-39*x^2))/(-1+12*x-39*x^2+33*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-37*x^2))/(-1+12*x-37*x^2+33*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-41*x^2))/(-1+12*x-41*x^2+34*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-38*x^2))/(-1+12*x-38*x^2+34*x^3) \\
 &+(4*(-3+22*x-36*x^2))/(-1+11*x-36*x^2+34*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-41*x^2))/(-1+12*x-41*x^2+35*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-39*x^2))/(-1+12*x-39*x^2+35*x^3) \\
 &+(4*(-3+22*x-36*x^2))/(-1+11*x-36*x^2+35*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-40*x^2))/(-1+12*x-40*x^2+36*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-39*x^2))/(-1+12*x-39*x^2+37*x^3) \\
 &+(8*(-3+24*x-42*x^2))/(-1+12*x-42*x^2+38*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-41*x^2))/(-1+12*x-41*x^2+38*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-41*x^2))/(-1+12*x-41*x^2+40*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-42*x^2))/(-1+12*x-42*x^2+42*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-43*x^2))/(-1+12*x-43*x^2+43*x^3) \\
 &+(8*(-3+24*x-43*x^2))/(-1+12*x-43*x^2+45*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-45*x^2))/(-1+12*x-45*x^2+51*x^3) \\
 &+(4*(-3+24*x-45*x^2))/(-1+12*x-45*x^2+53*x^3)
 \end{aligned}$$

+(4*(4-24*x+40*x^2-16*x^3))/(1-8*x+20*x^2-16*x^3+x^4)
 +(4*(4-24*x+38*x^2-14*x^3))/(1-8*x+19*x^2-14*x^3+x^4)
 +(4*(4-27*x+44*x^2-11*x^3))/(1-9*x+22*x^2-11*x^3+x^4)
 +(4*(4-27*x+42*x^2-9*x^3))/(1-9*x+21*x^2-9*x^3+x^4)
 +(4*(4-27*x+50*x^2-21*x^3))/(1-9*x+25*x^2-21*x^3+2*x^4)
 +(4*(4-30*x+56*x^2-20*x^3))/(1-10*x+28*x^2-20*x^3+2*x^4)
 +(4*(4-27*x+48*x^2-17*x^3))/(1-9*x+24*x^2-17*x^3+2*x^4)
 +(4*(4-30*x+56*x^2-17*x^3))/(1-10*x+28*x^2-17*x^3+2*x^4)
 +(4*(4-27*x+38*x^2-12*x^3))/(1-9*x+19*x^2-12*x^3+2*x^4)
 +(4*(4-27*x+40*x^2-12*x^3))/(1-9*x+20*x^2-12*x^3+2*x^4)
 +(4*(4-27*x+36*x^2-11*x^3))/(1-9*x+18*x^2-11*x^3+2*x^4)
 +(4*(4-30*x+58*x^2-24*x^3))/(1-10*x+29*x^2-24*x^3+3*x^4)
 +(4*(4-30*x+56*x^2-21*x^3))/(1-10*x+28*x^2-21*x^3+3*x^4)
 +(4*(4-24*x+40*x^2-17*x^3))/(1-8*x+20*x^2-17*x^3+3*x^4)
 +(4*(4-30*x+52*x^2-17*x^3))/(1-10*x+26*x^2-17*x^3+3*x^4)
 +(4*(4-30*x+54*x^2-17*x^3))/(1-10*x+27*x^2-17*x^3+3*x^4)
 +(4*(4-30*x+60*x^2-26*x^3))/(1-10*x+30*x^2-26*x^3+4*x^4)
 +(4*(4-33*x+66*x^2-24*x^3))/(1-11*x+33*x^2-24*x^3+4*x^4)
 +(4*(4-30*x+58*x^2-23*x^3))/(1-10*x+29*x^2-23*x^3+4*x^4)
 +(4*(4-33*x+64*x^2-23*x^3))/(1-11*x+32*x^2-23*x^3+4*x^4)
 +(4*(4-30*x+56*x^2-22*x^3))/(1-10*x+28*x^2-22*x^3+4*x^4)
 +(8*(4-30*x+60*x^2-27*x^3))/(1-10*x+30*x^2-27*x^3+5*x^4)
 +(4*(4-30*x+58*x^2-26*x^3))/(1-10*x+29*x^2-26*x^3+5*x^4)
 +(4*(4-30*x+60*x^2-25*x^3))/(1-10*x+30*x^2-25*x^3+5*x^4)
 +(4*(4-30*x+58*x^2-24*x^3))/(1-10*x+29*x^2-24*x^3+5*x^4)
 +(4*(4-30*x+56*x^2-23*x^3))/(1-10*x+28*x^2-23*x^3+5*x^4)
 +(4*(4-30*x+58*x^2-23*x^3))/(1-10*x+29*x^2-23*x^3+5*x^4)
 +(4*(4-33*x+78*x^2-46*x^3))/(1-11*x+39*x^2-46*x^3+6*x^4)
 +(4*(4-36*x+80*x^2-40*x^3))/(1-12*x+40*x^2-40*x^3+6*x^4)
 +(4*(4-36*x+78*x^2-33*x^3))/(1-12*x+39*x^2-33*x^3+6*x^4)
 +(4*(4-36*x+76*x^2-32*x^3))/(1-12*x+38*x^2-32*x^3+6*x^4)
 +(4*(4-30*x+62*x^2-31*x^3))/(1-10*x+31*x^2-31*x^3+6*x^4)
 +(4*(4-36*x+68*x^2-28*x^3))/(1-12*x+34*x^2-28*x^3+6*x^4)
 +(4*(4-36*x+66*x^2-27*x^3))/(1-12*x+33*x^2-27*x^3+6*x^4)
 +(4*(4-33*x+68*x^2-27*x^3))/(1-11*x+34*x^2-27*x^3+6*x^4)
 +(8*(4-30*x+60*x^2-26*x^3))/(1-10*x+30*x^2-26*x^3+6*x^4)
 +(4*(4-30*x+58*x^2-25*x^3))/(1-10*x+29*x^2-25*x^3+6*x^4)
 +(4*(4-30*x+60*x^2-27*x^3))/(1-10*x+30*x^2-27*x^3+7*x^4)
 +(4*(4-30*x+58*x^2-26*x^3))/(1-10*x+29*x^2-26*x^3+7*x^4)
 +(4*(4-30*x+62*x^2-31*x^3))/(1-10*x+31*x^2-31*x^3+8*x^4)
 +(4*(4-33*x+78*x^2-47*x^3))/(1-11*x+39*x^2-47*x^3+9*x^4)
 +(4*(4-30*x+62*x^2-32*x^3))/(1-10*x+31*x^2-32*x^3+9*x^4)
 +(4*(4-36*x+88*x^2-52*x^3))/(1-12*x+44*x^2-52*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-33*x+80*x^2-51*x^3))/(1-11*x+40*x^2-51*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-36*x+86*x^2-49*x^3))/(1-12*x+43*x^2-49*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-33*x+78*x^2-48*x^3))/(1-11*x+39*x^2-48*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-36*x+84*x^2-48*x^3))/(1-12*x+42*x^2-48*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-36*x+86*x^2-46*x^3))/(1-12*x+43*x^2-46*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-33*x+76*x^2-44*x^3))/(1-11*x+38*x^2-44*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-36*x+84*x^2-44*x^3))/(1-12*x+42*x^2-44*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-33*x+76*x^2-43*x^3))/(1-11*x+38*x^2-43*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-36*x+82*x^2-43*x^3))/(1-12*x+41*x^2-43*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-33*x+74*x^2-42*x^3))/(1-11*x+37*x^2-42*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-36*x+78*x^2-42*x^3))/(1-12*x+40*x^2-42*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-36*x+76*x^2-40*x^3))/(1-12*x+38*x^2-40*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-36*x+84*x^2-40*x^3))/(1-12*x+42*x^2-40*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-36*x+82*x^2-39*x^3))/(1-12*x+41*x^2-39*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-36*x+78*x^2-37*x^3))/(1-12*x+39*x^2-37*x^3+10*x^4)

+(4*(4-36*x+76*x^2-36*x^3))/(1-12*x+38*x^2-36*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-36*x+74*x^2-35*x^3))/(1-12*x+37*x^2-35*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-30*x+62*x^2-33*x^3))/(1-10*x+31*x^2-33*x^3+10*x^4)
 +(4*(4-36*x+88*x^2-53*x^3))/(1-12*x+44*x^2-53*x^3+11*x^4)
 +(4*(4-36*x+86*x^2-47*x^3))/(1-12*x+43*x^2-47*x^3+11*x^4)
 +(4*(4-36*x+80*x^2-45*x^3))/(1-12*x+40*x^2-45*x^3+11*x^4)
 +(4*(4-36*x+78*x^2-43*x^3))/(1-12*x+39*x^2-43*x^3+11*x^4)
 +(4*(4-36*x+78*x^2-38*x^3))/(1-12*x+39*x^2-38*x^3+11*x^4)
 +(4*(4-30*x+64*x^2-36*x^3))/(1-10*x+32*x^2-36*x^3+11*x^4)
 +(4*(4-30*x+64*x^2-35*x^3))/(1-10*x+32*x^2-35*x^3+11*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-54*x^3))/(1-12*x+45*x^2-54*x^3+12*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-53*x^3))/(1-12*x+45*x^2-53*x^3+12*x^4)
 +(4*(4-36*x+84*x^2-48*x^3))/(1-12*x+42*x^2-48*x^3+12*x^4)
 +(4*(4-36*x+82*x^2-47*x^3))/(1-12*x+41*x^2-47*x^3+12*x^4)
 +(4*(4-33*x+76*x^2-45*x^3))/(1-11*x+38*x^2-45*x^3+12*x^4)
 +(4*(4-36*x+86*x^2-43*x^3))/(1-12*x+43*x^2-43*x^3+12*x^4)
 +(8*(4-36*x+84*x^2-42*x^3))/(1-12*x+42*x^2-42*x^3+12*x^4)
 +(4*(4-36*x+82*x^2-41*x^3))/(1-12*x+41*x^2-41*x^3+12*x^4)
 +(4*(4-36*x+78*x^2-39*x^3))/(1-12*x+39*x^2-39*x^3+12*x^4)
 +(4*(4-36*x+92*x^2-60*x^3))/(1-12*x+46*x^2-60*x^3+14*x^4)
 +(4*(4-36*x+88*x^2-56*x^3))/(1-12*x+44*x^2-56*x^3+14*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-55*x^3))/(1-12*x+45*x^2-55*x^3+14*x^4)
 +(4*(4-33*x+80*x^2-52*x^3))/(1-11*x+40*x^2-52*x^3+14*x^4)
 +(4*(4-33*x+78*x^2-48*x^3))/(1-11*x+39*x^2-48*x^3+14*x^4)
 +(4*(4-36*x+84*x^2-44*x^3))/(1-12*x+42*x^2-44*x^3+14*x^4)
 +(4*(4-36*x+92*x^2-61*x^3))/(1-12*x+46*x^2-61*x^3+15*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-57*x^3))/(1-12*x+45*x^2-57*x^3+15*x^4)
 +(4*(4-36*x+88*x^2-53*x^3))/(1-12*x+44*x^2-53*x^3+15*x^4)
 +(4*(4-36*x+86*x^2-51*x^3))/(1-12*x+43*x^2-51*x^3+15*x^4)
 +(4*(4-33*x+78*x^2-49*x^3))/(1-11*x+39*x^2-49*x^3+15*x^4)
 +(4*(4-36*x+88*x^2-54*x^3))/(1-12*x+44*x^2-54*x^3+16*x^4)
 +(4*(4-36*x+88*x^2-53*x^3))/(1-12*x+44*x^2-53*x^3+16*x^4)
 +(4*(4-36*x+86*x^2-52*x^3))/(1-12*x+43*x^2-52*x^3+16*x^4)
 +(4*(4-36*x+84*x^2-50*x^3))/(1-12*x+42*x^2-50*x^3+16*x^4)
 +(4*(4-36*x+86*x^2-50*x^3))/(1-12*x+43*x^2-50*x^3+16*x^4)
 +(4*(4-33*x+78*x^2-49*x^3))/(1-11*x+39*x^2-49*x^3+16*x^4)
 +(4*(4-36*x+82*x^2-48*x^3))/(1-12*x+41*x^2-48*x^3+16*x^4)
 +(4*(4-36*x+94*x^2-65*x^3))/(1-12*x+47*x^2-65*x^3+18*x^4)
 +(8*(4-36*x+92*x^2-60*x^3))/(1-12*x+46*x^2-60*x^3+18*x^4)
 +(8*(4-36*x+88*x^2-56*x^3))/(1-12*x+44*x^2-56*x^3+18*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-56*x^3))/(1-12*x+45*x^2-56*x^3+18*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-55*x^3))/(1-12*x+45*x^2-55*x^3+18*x^4)
 +(4*(4-36*x+88*x^2-54*x^3))/(1-12*x+44*x^2-54*x^3+18*x^4)
 +(8*(4-36*x+86*x^2-53*x^3))/(1-12*x+43*x^2-53*x^3+18*x^4)
 +(4*(4-36*x+84*x^2-52*x^3))/(1-12*x+42*x^2-52*x^3+18*x^4)
 +(4*(4-36*x+86*x^2-51*x^3))/(1-12*x+43*x^2-51*x^3+18*x^4)
 +(4*(4-36*x+84*x^2-50*x^3))/(1-12*x+42*x^2-50*x^3+18*x^4)
 +(4*(4-33*x+82*x^2-57*x^3))/(1-11*x+41*x^2-57*x^3+19*x^4)
 +(4*(4-33*x+80*x^2-53*x^3))/(1-11*x+40*x^2-53*x^3+19*x^4)
 +(4*(4-36*x+92*x^2-60*x^3))/(1-12*x+46*x^2-60*x^3+20*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-59*x^3))/(1-12*x+45*x^2-59*x^3+20*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-58*x^3))/(1-12*x+45*x^2-58*x^3+20*x^4)
 +(8*(4-36*x+88*x^2-57*x^3))/(1-12*x+44*x^2-57*x^3+20*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-56*x^3))/(1-12*x+45*x^2-56*x^3+20*x^4)
 +(4*(4-36*x+86*x^2-53*x^3))/(1-12*x+43*x^2-53*x^3+20*x^4)
 +(4*(4-36*x+84*x^2-52*x^3))/(1-12*x+42*x^2-52*x^3+20*x^4)
 +(4*(4-36*x+96*x^2-69*x^3))/(1-12*x+48*x^2-69*x^3+21*x^4)
 +(4*(4-36*x+94*x^2-65*x^3))/(1-12*x+47*x^2-65*x^3+21*x^4)

+(4*(4-36*x+92*x^2-61*x^3))/(1-12*x+46*x^2-61*x^3+21*x^4)
 +(8*(4-36*x+90*x^2-60*x^3))/(1-12*x+45*x^2-60*x^3+21*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-59*x^3))/(1-12*x+45*x^2-59*x^3+21*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-57*x^3))/(1-12*x+45*x^2-57*x^3+21*x^4)
 +(4*(4-36*x+96*x^2-70*x^3))/(1-12*x+48*x^2-70*x^3+22*x^4)
 +(4*(4-36*x+94*x^2-67*x^3))/(1-12*x+47*x^2-67*x^3+22*x^4)
 +(4*(4-36*x+94*x^2-66*x^3))/(1-12*x+47*x^2-66*x^3+22*x^4)
 +(4*(4-36*x+92*x^2-64*x^3))/(1-12*x+46*x^2-64*x^3+22*x^4)
 +(4*(4-36*x+92*x^2-62*x^3))/(1-12*x+46*x^2-62*x^3+22*x^4)
 +(4*(4-36*x+92*x^2-60*x^3))/(1-12*x+46*x^2-60*x^3+22*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-58*x^3))/(1-12*x+45*x^2-58*x^3+22*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-57*x^3))/(1-12*x+45*x^2-57*x^3+22*x^4)
 +(4*(4-36*x+88*x^2-56*x^3))/(1-12*x+44*x^2-56*x^3+22*x^4)
 +(4*(4-36*x+94*x^2-66*x^3))/(1-12*x+47*x^2-66*x^3+23*x^4)
 +(4*(4-36*x+88*x^2-57*x^3))/(1-12*x+44*x^2-57*x^3+23*x^4)
 +(4*(4-36*x+94*x^2-67*x^3))/(1-12*x+47*x^2-67*x^3+24*x^4)
 +(8*(4-36*x+90*x^2-61*x^3))/(1-12*x+45*x^2-61*x^3+24*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-60*x^3))/(1-12*x+45*x^2-60*x^3+24*x^4)
 +(4*(4-36*x+88*x^2-58*x^3))/(1-12*x+44*x^2-58*x^3+24*x^4)
 +(4*(4-36*x+86*x^2-57*x^3))/(1-12*x+43*x^2-57*x^3+24*x^4)
 +(4*(4-36*x+94*x^2-68*x^3))/(1-12*x+47*x^2-68*x^3+25*x^4)
 +(4*(4-36*x+92*x^2-63*x^3))/(1-12*x+46*x^2-63*x^3+25*x^4)
 +(4*(4-36*x+96*x^2-71*x^3))/(1-12*x+48*x^2-71*x^3+25*x^4)
 +(4*(4-36*x+94*x^2-66*x^3))/(1-12*x+47*x^2-66*x^3+26*x^4)
 +(4*(4-36*x+94*x^2-66*x^3))/(1-12*x+47*x^2-66*x^3+26*x^4)
 +(4*(4-36*x+92*x^2-63*x^3))/(1-12*x+46*x^2-63*x^3+26*x^4)
 +(4*(4-36*x+88*x^2-60*x^3))/(1-12*x+44*x^2-60*x^3+26*x^4)
 +(4*(4-36*x+94*x^2-67*x^3))/(1-12*x+47*x^2-67*x^3+27*x^4)
 +(4*(4-36*x+88*x^2-61*x^3))/(1-12*x+44*x^2-61*x^3+27*x^4)
 +(4*(4-36*x+92*x^2-64*x^3))/(1-12*x+46*x^2-64*x^3+28*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-63*x^3))/(1-12*x+45*x^2-63*x^3+28*x^4)
 +(4*(4-36*x+96*x^2-71*x^3))/(1-12*x+48*x^2-71*x^3+29*x^4)
 +(4*(4-36*x+94*x^2-68*x^3))/(1-12*x+47*x^2-68*x^3+29*x^4)
 +(4*(4-36*x+90*x^2-64*x^3))/(1-12*x+45*x^2-64*x^3+29*x^4)
 +(8*(4-36*x+96*x^2-72*x^3))/(1-12*x+48*x^2-72*x^3+30*x^4)
 +(4*(4-36*x+94*x^2-68*x^3))/(1-12*x+47*x^2-68*x^3+30*x^4)
 +(4*(4-36*x+94*x^2-67*x^3))/(1-12*x+47*x^2-67*x^3+30*x^4)
 +(8*(4-36*x+92*x^2-66*x^3))/(1-12*x+46*x^2-66*x^3+30*x^4)
 +(4*(4-36*x+96*x^2-73*x^3))/(1-12*x+48*x^2-73*x^3+32*x^4)
 +(8*(4-36*x+94*x^2-69*x^3))/(1-12*x+47*x^2-69*x^3+32*x^4)
 +(4*(4-36*x+96*x^2-73*x^3))/(1-12*x+48*x^2-73*x^3+33*x^4)
 +(4*(4-36*x+96*x^2-72*x^3))/(1-12*x+48*x^2-72*x^3+34*x^4)
 +(8*(4-36*x+96*x^2-73*x^3))/(1-12*x+48*x^2-73*x^3+35*x^4)
 +(4*(4-36*x+92*x^2-69*x^3))/(1-12*x+46*x^2-69*x^3+35*x^4)
 +(4*(4-36*x+94*x^2-71*x^3))/(1-12*x+47*x^2-71*x^3+36*x^4)
 +(4*(4-36*x+98*x^2-78*x^3))/(1-12*x+49*x^2-78*x^3+37*x^4)
 +(4*(4-36*x+98*x^2-78*x^3))/(1-12*x+49*x^2-78*x^3+38*x^4)
 +(4*(4-36*x+96*x^2-74*x^3))/(1-12*x+48*x^2-74*x^3+38*x^4)
 +(4*(4-36*x+98*x^2-78*x^3))/(1-12*x+49*x^2-78*x^3+39*x^4)
 +(8*(4-36*x+96*x^2-75*x^3))/(1-12*x+48*x^2-75*x^3+39*x^4)
 +(4*(4-36*x+98*x^2-79*x^3))/(1-12*x+49*x^2-79*x^3+40*x^4)
 +(4*(4-36*x+98*x^2-78*x^3))/(1-12*x+49*x^2-78*x^3+41*x^4)
 +(4*(4-36*x+96*x^2-76*x^3))/(1-12*x+48*x^2-76*x^3+41*x^4)
 +(4*(4-36*x+100*x^2-83*x^3))/(1-12*x+50*x^2-83*x^3+43*x^4)
 +(4*(4-36*x+100*x^2-84*x^3))/(1-12*x+50*x^2-84*x^3+46*x^4)
 +(4*(4-36*x+100*x^2-84*x^3))/(1-12*x+50*x^2-84*x^3+47*x^4)
 +(4*(4-36*x+100*x^2-85*x^3))/(1-12*x+50*x^2-85*x^3+49*x^4)

$$\begin{aligned}
&+(4*(-5+40*x-93*x^2+62*x^3-11*x^4))/(-1+10*x-31*x^2+31*x^3-11*x^4+x^5) \\
&+(4*(-5+40*x-93*x^2+66*x^3-11*x^4))/(-1+10*x-31*x^2+33*x^3-11*x^4+x^5) \\
&+(4*(-5+40*x-90*x^2+58*x^3-10*x^4))/(-1+10*x-30*x^2+29*x^3-10*x^4+x^5) \\
&+(4*(-5+44*x-123*x^2+116*x^3-24*x^4))/(-1+11*x-41*x^2+58*x^3-24*x^4+2*x^5) \\
&+(4*(-5+44*x-120*x^2+106*x^3-20*x^4))/(-1+11*x-40*x^2+53*x^3-20*x^4+2*x^5) \\
&+(4*(-5+44*x-120*x^2+108*x^3-20*x^4))/(-1+11*x-40*x^2+54*x^3-20*x^4+2*x^5) \\
&+(4*(-5+44*x-123*x^2+118*x^3-27*x^4))/(-1+11*x-41*x^2+59*x^3-27*x^4+3*x^5) \\
&+(4*(-5+44*x-123*x^2+118*x^3-26*x^4))/(-1+11*x-41*x^2+59*x^3-26*x^4+3*x^5) \\
&+(4*(-5+44*x-120*x^2+110*x^3-24*x^4))/(-1+11*x-40*x^2+55*x^3-24*x^4+3*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+160*x^3-45*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+80*x^3-45*x^4+4*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-144*x^2+146*x^3-35*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+73*x^3-35*x^4+4*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-141*x^2+138*x^3-34*x^4))/(-1+12*x-47*x^2+69*x^3-34*x^4+4*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-135*x^2+128*x^3-33*x^4))/(-1+12*x-45*x^2+64*x^3-33*x^4+4*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-132*x^2+122*x^3-31*x^4))/(-1+12*x-44*x^2+61*x^3-31*x^4+4*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-141*x^2+134*x^3-31*x^4))/(-1+12*x-47*x^2+67*x^3-31*x^4+4*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-138*x^2+128*x^3-30*x^4))/(-1+12*x-46*x^2+64*x^3-30*x^4+4*x^5) \\
&+(4*(-5+44*x-123*x^2+120*x^3-29*x^4))/(-1+11*x-41*x^2+60*x^3-29*x^4+4*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-153*x^2+180*x^3-57*x^4))/(-1+12*x-51*x^2+90*x^3-57*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+168*x^3-50*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+84*x^3-50*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-144*x^2+156*x^3-48*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+78*x^3-48*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+158*x^3-46*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+79*x^3-46*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+166*x^3-45*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+83*x^3-45*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+158*x^3-43*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+79*x^3-43*x^4+6*x^5) \\
&+(8*(-5+48*x-144*x^2+150*x^3-42*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+75*x^3-42*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+156*x^3-42*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+78*x^3-42*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+156*x^3-41*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+78*x^3-41*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-141*x^2+142*x^3-40*x^4))/(-1+12*x-47*x^2+71*x^3-40*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-144*x^2+148*x^3-40*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+74*x^3-40*x^4+6*x^5) \\
&+(8*(-5+48*x-141*x^2+142*x^3-39*x^4))/(-1+12*x-47*x^2+71*x^3-39*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-144*x^2+146*x^3-39*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+73*x^3-39*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-138*x^2+136*x^3-38*x^4))/(-1+12*x-46*x^2+68*x^3-38*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-141*x^2+138*x^3-38*x^4))/(-1+12*x-47*x^2+69*x^3-38*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-144*x^2+146*x^3-38*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+73*x^3-38*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-141*x^2+138*x^3-37*x^4))/(-1+12*x-47*x^2+69*x^3-37*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-141*x^2+140*x^3-37*x^4))/(-1+12*x-47*x^2+70*x^3-37*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-138*x^2+132*x^3-36*x^4))/(-1+12*x-46*x^2+66*x^3-36*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-138*x^2+136*x^3-36*x^4))/(-1+12*x-46*x^2+68*x^3-36*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-135*x^2+128*x^3-35*x^4))/(-1+12*x-45*x^2+64*x^3-35*x^4+6*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-153*x^2+182*x^3-60*x^4))/(-1+12*x-51*x^2+91*x^3-60*x^4+7*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+166*x^3-54*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+83*x^3-54*x^4+7*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+170*x^3-52*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+85*x^3-52*x^4+7*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-144*x^2+158*x^3-50*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+79*x^3-50*x^4+7*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-144*x^2+152*x^3-45*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+76*x^3-45*x^4+7*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+158*x^3-45*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+79*x^3-45*x^4+7*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-144*x^2+152*x^3-44*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+76*x^3-44*x^4+7*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-141*x^2+146*x^3-43*x^4))/(-1+12*x-47*x^2+73*x^3-43*x^4+7*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-141*x^2+152*x^3-42*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+76*x^3-42*x^4+7*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-141*x^2+140*x^3-40*x^4))/(-1+12*x-47*x^2+70*x^3-40*x^4+7*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-141*x^2+144*x^3-40*x^4))/(-1+12*x-47*x^2+72*x^3-40*x^4+7*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-153*x^2+184*x^3-63*x^4))/(-1+12*x-51*x^2+92*x^3-63*x^4+8*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+174*x^3-57*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+87*x^3-57*x^4+8*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+170*x^3-52*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+85*x^3-52*x^4+8*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+162*x^3-49*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+81*x^3-49*x^4+8*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+160*x^3-47*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+80*x^3-47*x^4+8*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-144*x^2+152*x^3-46*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+76*x^3-46*x^4+8*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-141*x^2+146*x^3-44*x^4))/(-1+12*x-47*x^2+73*x^3-44*x^4+8*x^5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(4*(-5+48*x-144*x^2+150*x^3-44*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+75*x^3-44*x^4+8*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-141*x^2+142*x^3-42*x^4))/(-1+12*x-47*x^2+71*x^3-42*x^4+8*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-153*x^2+182*x^3-62*x^4))/(-1+12*x-51*x^2+91*x^3-62*x^4+9*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+172*x^3-57*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+86*x^3-57*x^4+9*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+170*x^3-54*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+85*x^3-54*x^4+9*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+162*x^3-51*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+81*x^3-51*x^4+9*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-144*x^2+158*x^3-50*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+79*x^3-50*x^4+9*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+160*x^3-50*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+80*x^3-50*x^4+9*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+168*x^3-50*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+84*x^3-50*x^4+9*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+160*x^3-48*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+80*x^3-48*x^4+9*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-141*x^2+150*x^3-47*x^4))/(-1+12*x-47*x^2+75*x^3-47*x^4+9*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-144*x^2+152*x^3-47*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+76*x^3-47*x^4+9*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-141*x^2+146*x^3-45*x^4))/(-1+12*x-47*x^2+73*x^3-45*x^4+9*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-141*x^2+144*x^3-44*x^4))/(-1+12*x-47*x^2+72*x^3-44*x^4+9*x^5) \\
&+(8*(-5+48*x-153*x^2+182*x^3-62*x^4))/(-1+12*x-51*x^2+91*x^3-62*x^4+10*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+172*x^3-58*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+86*x^3-58*x^4+10*x^5) \\
&+(8*(-5+48*x-150*x^2+172*x^3-56*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+86*x^3-56*x^4+10*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+166*x^3-54*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+83*x^3-54*x^4+10*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+170*x^3-54*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+85*x^3-54*x^4+10*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+170*x^3-53*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+85*x^3-53*x^4+10*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+162*x^3-52*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+81*x^3-52*x^4+10*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+160*x^3-51*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+80*x^3-51*x^4+10*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+160*x^3-50*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+80*x^3-50*x^4+10*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-144*x^2+154*x^3-49*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+77*x^3-49*x^4+10*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-144*x^2+152*x^3-48*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+76*x^3-48*x^4+10*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-144*x^2+150*x^3-47*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+75*x^3-47*x^4+10*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-153*x^2+184*x^3-65*x^4))/(-1+12*x-51*x^2+92*x^3-65*x^4+12*x^5) \\
&+(8*(-5+48*x-153*x^2+182*x^3-62*x^4))/(-1+12*x-51*x^2+91*x^3-62*x^4+12*x^5) \\
&+(8*(-5+48*x-150*x^2+174*x^3-61*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+87*x^3-61*x^4+12*x^5) \\
&+(8*(-5+48*x-150*x^2+174*x^3-59*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+87*x^3-59*x^4+12*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+164*x^3-55*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+82*x^3-55*x^4+12*x^5) \\
&+(8*(-5+48*x-144*x^2+158*x^3-53*x^4))/(-1+12*x-48*x^2+79*x^3-53*x^4+12*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-156*x^2+196*x^3-74*x^4))/(-1+12*x-52*x^2+98*x^3-74*x^4+13*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-153*x^2+186*x^3-68*x^4))/(-1+12*x-51*x^2+93*x^3-68*x^4+13*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-153*x^2+184*x^3-66*x^4))/(-1+12*x-51*x^2+92*x^3-66*x^4+13*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+176*x^3-63*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+88*x^3-63*x^4+13*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-153*x^2+182*x^3-63*x^4))/(-1+12*x-51*x^2+91*x^3-63*x^4+13*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+172*x^3-58*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+86*x^3-58*x^4+13*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-147*x^2+162*x^3-57*x^4))/(-1+12*x-49*x^2+83*x^3-57*x^4+13*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-156*x^2+194*x^3-71*x^4))/(-1+12*x-52*x^2+97*x^3-71*x^4+14*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+176*x^3-62*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+88*x^3-62*x^4+14*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+172*x^3-60*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+86*x^3-60*x^4+14*x^5) \\
&+(8*(-5+48*x-153*x^2+186*x^3-69*x^4))/(-1+12*x-51*x^2+93*x^3-69*x^4+15*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+178*x^3-66*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+89*x^3-66*x^4+15*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-153*x^2+184*x^3-66*x^4))/(-1+12*x-51*x^2+92*x^3-66*x^4+15*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+176*x^3-63*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+88*x^3-63*x^4+15*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-150*x^2+174*x^3-62*x^4))/(-1+12*x-50*x^2+87*x^3-62*x^4+15*x^5) \\
&+(8*(-5+48*x-156*x^2+196*x^3-75*x^4))/(-1+12*x-52*x^2+98*x^3-75*x^4+16*x^5) \\
&+(8*(-5+48*x-153*x^2+184*x^3-67*x^4))/(-1+12*x-51*x^2+92*x^3-67*x^4+16*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-153*x^2+186*x^3-71*x^4))/(-1+12*x-51*x^2+93*x^3-71*x^4+17*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-153*x^2+186*x^3-69*x^4))/(-1+12*x-51*x^2+93*x^3-69*x^4+17*x^5) \\
&+(8*(-5+48*x-156*x^2+196*x^3-76*x^4))/(-1+12*x-52*x^2+98*x^3-76*x^4+18*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-156*x^2+198*x^3-79*x^4))/(-1+12*x-52*x^2+99*x^3-79*x^4+18*x^5) \\
&+(8*(-5+48*x-156*x^2+198*x^3-80*x^4))/(-1+12*x-52*x^2+99*x^3-80*x^4+21*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-159*x^2+210*x^3-89*x^4))/(-1+12*x-53*x^2+105*x^3-89*x^4+23*x^5) \\
&+(4*(-5+48*x-159*x^2+212*x^3-94*x^4))/(-1+12*x-53*x^2+106*x^3-94*x^4+29*x^5) \\
&+(4*(-6+60*x+212*x^2-315*x^3+182*x^4-29*x^5))/(-1+12*x+53*x^2-105*x^3+91*x^4-29*x^5+2*x^6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(4*(6-60*x+208*x^2-300*x^3+168*x^4-26*x^5))/(1-12*x+52*x^2-100*x^3+84*x^4-26*x^5+2*x^6) \\
&+(8*(6-60*x+208*x^2-297*x^3+162*x^4-24*x^5))/(1-12*x+52*x^2-99*x^3+81*x^4-24*x^5+2*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+208*x^2-300*x^3+166*x^4-24*x^5))/(1-12*x+52*x^2-100*x^3+83*x^4-24*x^5+2*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+208*x^2-297*x^3+160*x^4-23*x^5))/(1-12*x+52*x^2-99*x^3+80*x^4-23*x^5+2*x^6) \\
&+(8*(6-60*x+204*x^2-279*x^3+144*x^4-22*x^5))/(1-12*x+51*x^2-93*x^3+72*x^4-22*x^5+2*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+208*x^2-300*x^3+172*x^4-29*x^5))/(1-12*x+51*x^2-95*x^3+76*x^4-22*x^5+2*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+200*x^2-264*x^3+134*x^4-21*x^5))/(1-12*x+50*x^2-88*x^3+67*x^4-21*x^5+2*x^6) \\
&+(8*(6-60*x+204*x^2-279*x^3+142*x^4-21*x^5))/(1-12*x+51*x^2-93*x^3+71*x^4-21*x^5+2*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+200*x^2-261*x^3+130*x^4-20*x^5))/(1-12*x+50*x^2-87*x^3+65*x^4-20*x^5+2*x^6) \\
&+(8*(6-60*x+200*x^2-264*x^3+132*x^4-20*x^5))/(1-12*x+50*x^2-88*x^3+66*x^4-20*x^5+2*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+200*x^2-267*x^3+134*x^4-20*x^5))/(1-12*x+50*x^2-89*x^3+67*x^4-20*x^5+2*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+196*x^2-249*x^3+122*x^4-19*x^5))/(1-12*x+49*x^2-83*x^3+61*x^4-19*x^5+2*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+196*x^2-252*x^3+124*x^4-19*x^5))/(1-12*x+49*x^2-84*x^3+62*x^4-19*x^5+2*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+216*x^2-339*x^3+220*x^4-42*x^5))/(1-12*x+54*x^2-113*x^3+110*x^4-42*x^5+3*x^6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(4*(6-60*x+212*x^2-321*x^3+198*x^4-36*x^5))/(1-12*x+53*x^2-107*x^3+99*x^4-36*x^5+3*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+212*x^2-318*x^3+192*x^4-34*x^5))/(1-12*x+53*x^2-106*x^3+96*x^4-34*x^5+3*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+212*x^2-318*x^3+190*x^4-33*x^5))/(1-12*x+53*x^2-106*x^3+95*x^4-33*x^5+3*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+212*x^2-318*x^3+190*x^4-32*x^5))/(1-12*x+53*x^2-106*x^3+95*x^4-32*x^5+3*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+208*x^2-303*x^3+176*x^4-30*x^5))/(1-12*x+52*x^2-101*x^3+88*x^4-30*x^5+3*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+208*x^2-300*x^3+172*x^4-29*x^5))/(1-12*x+52*x^2-100*x^3+86*x^4-29*x^5+3*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+208*x^2-297*x^3+164*x^4-28*x^5))/(1-12*x+52*x^2-99*x^3+82*x^4-28*x^5+3*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+208*x^2-300*x^3+170*x^4-28*x^5))/(1-12*x+52*x^2-100*x^3+85*x^4-28*x^5+3*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+204*x^2-282*x^3+152*x^4-26*x^5))/(1-12*x+51*x^2-94*x^3+76*x^4-26*x^5+3*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+216*x^2-339*x^3+220*x^4-43*x^5))/(1-12*x+54*x^2-113*x^3+110*x^4-43*x^5+4*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+212*x^2-321*x^3+198*x^4-37*x^5))/(1-12*x+53*x^2-107*x^3+99*x^4-37*x^5+4*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+212*x^2-318*x^3+192*x^4-35*x^5))/(1-12*x+53*x^2-106*x^3+96*x^4-35*x^5+4*x^6) \\
&+(4*(6-60*x+212*x^2-321*x^3+200*x^4-39*x^5))/(1-12*x+53*x^2-107*x^3+100*x^4-39*x^5+5*x^6)
\end{aligned}$$

A195656 - 12n Kings on a 24 x 2n horizontal cylinder, m=12

Recurrence order is 4248 (*V. Kotěšovec 13.9.2011*), denominator of the generating function found Max A.Alekseyev 14.9.2011.

For full generating function (*Václav Kotěšovec, 26.9.2011*), see [OEIS](#).

Vypočtené koeficienty pro $m=8$ až 12 určují současně pro tyto sekvence i tvar explicitních vzorců. Pro $m=8$ a 9 se mi podařilo vyřešit soustavy rovnic pro koeficienty mocninných členů i numericky a tím jsem hodnoty těchto koeficientů (jinou metodou) potvrdil. Tabulka na další straně zobrazuje několik prvních koeficientů u členů s nejvyšší vahou. Obecně je pro konstantní m asymptotický průběh

$$c_m(n) \sim 2 * (m + 1)^n + \dots$$

První členy explicitních vzorců pro horizontální válec (5 největších kořenů seřazeno podle velikosti)

horizontal cylinder - five largest roots and his coefficients (see chapter 2.3.10 for more info about roots)

m	1.root		2.root		3.root		4.root		5.root		maximal coefficient
	$m+1$		$\frac{m+1+\sqrt{m^2-2m+5}}{2}$		$\frac{m+1+\sqrt{m^2-6m+17}}{2}$		$\frac{m+\sqrt{m^2-4m+12}}{2}$		$\frac{m+1+\sqrt{m^2-6m+13}}{2}$		
1	2 *	2^n									2
2	2 *	3^n	+ 2 *	$\left(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right)^n$							2
3	2 *	4^n	+ 4 *	$(2+\sqrt{2})^n$							4
4	2 *	5^n	+ 4 *	$\left(\frac{1}{2}(5+\sqrt{13})\right)^n$	+ 2 *	4^n	+ 2 *	$(2+\sqrt{3})^n$	+ 4 *	$\left(\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})\right)^n$	4
5	2 *	6^n	+ 4 *	$(3+\sqrt{5})^n$	+ 4 *	$(3+\sqrt{3})^n$	+ 2 *	$\left(\frac{1}{2}(5+\sqrt{17})\right)^n$	+ 4 *	$(3+\sqrt{2})^n$	8
6	2 *	7^n	+ 4 *	$\left(\frac{1}{2}(7+\sqrt{29})\right)^n$	+ 4 *	$\left(\frac{1}{2}(7+\sqrt{17})\right)^n$	+ 2 *	$(3+\sqrt{6})^n$	+ 6 *	$\left(\frac{1}{2}(7+\sqrt{13})\right)^n$	8
7	2 *	8^n	+ 4 *	$(4+\sqrt{10})^n$	+ 4 *	$(4+\sqrt{6})^n$	+ 2 *	$\left(\frac{1}{2}(7+\sqrt{33})\right)^n$	+ 4 *	$(4+\sqrt{5})^n$	24
8	2 *	9^n	+ 4 *	$\left(\frac{1}{2}(9+\sqrt{53})\right)^n$	+ 4 *	$\left(\frac{1}{2}(9+\sqrt{33})\right)^n$	+ 2 *	$(4+\sqrt{11})^n$	+ 4 *	$\left(\frac{1}{2}(9+\sqrt{29})\right)^n$	32
9	2 *	10^n	+ 4 *	$(5+\sqrt{17})^n$	+ 4 *	$(5+\sqrt{11})^n$	+ 2 *	$\left(\frac{1}{2}(9+\sqrt{57})\right)^n$	+ 4 *	$(5+\sqrt{10})^n$	40
10	2 *	11^n	+ 4 *	$\left(\frac{1}{2}(11+\sqrt{85})\right)^n$	+ 4 *	$\left(\frac{1}{2}(11+\sqrt{57})\right)^n$	+ 2 *	$(5+3\sqrt{2})^n$	+ 4 *	$\left(\frac{1}{2}(11+\sqrt{53})\right)^n$	88
11	2 *	12^n	+ 4 *	$(6+\sqrt{26})^n$	+ 4 *	$(3(2+\sqrt{2}))^n$	+ 2 *	$\left(\frac{1}{2}(11+\sqrt{89})\right)^n$	+ 4 *	$(6+\sqrt{17})^n$	264
12	2 *	13^n	+ 4 *	$\left(\frac{1}{2}(13+5\sqrt{5})\right)^n$	+ 4 *	$\left(\frac{1}{2}(13+\sqrt{89})\right)^n$	+ 2 *	$(3(2+\sqrt{3}))^n$	+ 4 *	$\left(\frac{1}{2}(13+\sqrt{85})\right)^n$	308

Tables - number of ways to place $m \times n$ non-attacking kings on a $2m \times 2n$ horizontal cylinder

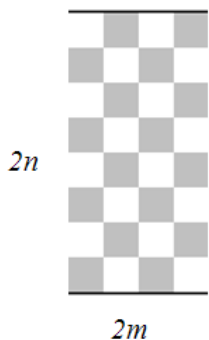
			A194644			A194645			A194646			
n	kings	board	1n/2x2n	kings	board	2n/4x2n	kings	board	3n/6x2n	kings	board	4n/8x2n
1	1	2x2	4	2	4x2	12	3	6x2	32	4	8x2	80
2	2	2x4	8	4	4x4	32	6	6x4	100	8	8x4	276
3	3	2x6	16	6	4x6	90	9	6x6	344	12	8x6	1082
4	4	2x8	32	8	4x8	256	12	6x8	1220	16	8x8	4460
5	5	2x10	64	10	4x10	732	15	6x10	4392	20	8x10	18890
6	6	2x12	128	12	4x12	2102	18	6x12	15988	24	8x12	81606
7	7	2x14	256	14	4x14	6060	21	6x14	58776	28	8x14	358564
8	8	2x16	512	16	4x16	17536	24	6x16	218052	32	8x16	1599820
9	9	2x18	1024	18	4x18	50922	27	6x18	815816	36	8x18	7238864
10	10	2x20	2048	20	4x20	148352	30	6x20	3076180	40	8x20	33175486
11	11	2x22	4096	22	4x22	433500	33	6x22	11682296	44	8x22	153802520
12	12	2x24	8192	24	4x24	1270246	36	6x24	44653028	48	8x24	720390254
13	13	2x26	16384	26	4x26	3731532	39	6x26	171670440	52	8x26	3404944506
14	14	2x28	32768	28	4x28	10987232	42	6x28	663421684	56	8x28	16221905696
15	15	2x30	65536	30	4x30	32418810	45	6x30	2575592664	60	8x30	77820675992

	A194647			A194648			A195004			A195652		
n	kings	board	5n/10x2n	kings	board	6n/12x2n	kings	board	7n/14x2n	kings	board	8n/16x2n
1	5	10x2	192	6	12x2	448	7	14x2	1024	8	16x2	2304
2	10	10x4	708	12	12x4	1732	14	14x4	4100	16	16x4	9476
3	15	10x6	3036	18	12x6	7918	21	14x6	19648	24	16x6	47058
4	20	10x8	13932	24	12x8	39316	28	14x8	103508	32	16x8	259372
5	25	10x10	66532	30	12x10	205628	35	14x10	580664	40	16x10	1536814
6	30	10x12	327192	36	12x12	1118398	42	14x12	3419648	48	16x12	9643562
7	35	10x14	1649420	42	12x14	6286658	49	14x14	20984924	56	16x14	63558566
8	40	10x16	8500668	48	12x16	36383284	56	14x16	133538996	64	16x16	437500380
9	45	10x18	44693472	54	12x18	216134044	63	14x18	877751236	72	16x18	3130270224
10	50	10x20	239238888	60	12x20	1314160492	70	14x20	5937279840	80	16x20	23174548666
11	55	10x22	1301236304	66	12x22	8155899320	77	14x22	41180193352	88	16x22	176740657340
12	60	10x24	7177627944	72	12x24	51526819510	84	14x24	291859775552	96	16x24	1382652697282
13	65	10x26	40078823652	78	12x26	330559583178	91	14x26	2106967145904	104	16x26	11052082053262
14	70	10x28	226167613792	84	12x28	2148524237842	98	14x28	15448890481568	112	16x28	89954475408222
15	75	10x30	1287874058656	90	12x30	14120142260138	105	14x30	114765555945488	120	16x30	743275585245898

			A195653			A195654			A195655			A195656								
n	kings	board	9n / 18x2n			kings	board	10n / 20x2n			kings	board	11n / 22x2n			kings	board	12n / 24x2n		
1	9	18x2	5120			10	20x2	11264			11	22x2	24576			12	24x2	53248		
2	18	18x4	21508			20	20x4	48132			22	22x4	106500			24	24x4	233476		
3	27	18x6	109796			30	20x6	251126			33	22x6	565512			36	24x6	1257754		
4	36	18x8	626780			40	20x8	1473764			44	22x8	3392964			48	24x8	7682812		
5	45	18x10	3877300			50	20x10	9434784			55	22x10	22327496			60	24x10	51698178		
6	54	18x12	25603228			60	20x12	64923594			66	22x12	158877948			72	24x12	378088270		
7	63	18x14	178909300			70	20x14	476033636			77	22x14	1212120160			84	24x14	2980927200		
8	72	18x16	1314748124			80	20x16	3694894500			88	22x16	9849731140			96	24x16	25173962492		
9	81	18x18	10105541204			90	20x18	30179587994			99	22x18	84719304384			108	24x18	226268016376		
10	90	18x20	80812754568			100	20x20	257860425672			110	22x20	766319864440			120	24x20	2149806985106		
11	99	18x22	668845118276			110	20x22	2290966142762			121	22x22	7241521734020			132	24x22	21437333168798		
12	108	18x24	5700499630916			120	20x24	21042965606234			132	22x24	71028444904044			144	24x24	222770819826574		
13	117	18x26	49800720887968			130	20x26	198765197377402			143	22x26	718816489322444			156	24x26	2396574908171782		
14	126	18x28	444140848321356			140	20x28	1921681775292272			154	22x28	7466044767879028			168	24x28	26535227773186536		
15	135	18x30	4029482453905756			150	20x30	18940490557328616			165	22x30	79230397598482712			180	24x30	300870737118178194		
16	144	18x32	37080781799409148			160	20x32	189679152583318596			176	22x32	855840660674700612			192	24x32	3479000496509382748		
17	153	18x34	345278411878468044			170	20x34	1924757095250611458			187	22x34	9381236750764316676			204	24x34	40885324678195409820		
18	162	18x36	3246772078088155432			180	20x36	19746535064318923758			198	22x36	104090420921618696952			216	24x36	486989665584996802228		
19	171	18x38	30781946900321278256			190	20x38	204445858068589675074			209	22x38	1166726840397440860664			228	24x38	5866007127336366609118		
20	180	18x40	293854532019205248960			200	20x40	2133047572317122955744			220	22x40	13189452933510039097184			240	24x40	71326830696492771709282		
21	189	18x42	2821602850067948935276			210	20x42	22399543148593419171392			231	22x42	150178777684384549385092			252	24x42	874210303368687541970862		
22	198	18x44	27227392470984635126112			220	20x44	236521669369146141934114			242	22x44	1720465020510968081991936			264	24x44	10787341509858294538416194		
23	207	18x46	263845660207385480809288			230	20x46	2509276475874569266946236			253	22x46	19813191535511397723131440			276	24x46	133882791569237164996191264		
24	216	18x48	2566072039202333185212740			240	20x48	26729150024690350394992506			264	22x48	229201501762174283661578044			288	24x48	1669927378127986864133800910		
25	225	18x50	25034996299223827083906900			250	20x50	285721313823478458163854284			275	22x50	2661778156729767466624752296			300	24x50	20919099646239649408088816328		

values for $m > 7$ computed by Alex V. Breger (2011), for more values see *b-files in OEIS*

2.6.9) $m \times n$ Kings on a $2m \times 2n$ vertical cylinder - $m \times n$ králů na vertikálním válci $2m \times 2n$



Vertikální válcová šachovnice (běžnější ve skladebním šachu). První a poslední **sloupec** šachovnice jsou spojené do válce.

Vertical cylinder: a chessboard where it is supposed that the columns 1 and $2m$ are in contact (for 8×8 board columns "a" and "h" are in contact).

Move from $[x, y]$ to square $[x + p, y + q]$ is transformed as $[(x + p) \text{ Mod } 2m, y + q]$

$2m = x$ -size of chessboard = number of columns

$2n = y$ -size of chessboard = number of rows

For each sequence m is fixed and n go to infinity.

Případ **vertikální válcové šachovnice** je trochu jednodušší než případy horizontální válcové nebo normální šachovnice. Samozřejmě pro $m=n$ oba případy splývají a z hlediska počtu pozic je pak jedno jakým směrem je šachovnice do válce stočená. V této kapitole volíme m pevné a n jde do nekonečna.

Pro počet rozmístění neohrožujících se $m \times n$ králů na vertikální válcové šachovnici jsem dokonce objevil obecný vzorec pro jmenovatel vytvořující funkce.

For number of ways to place $m \times n$ non-attacking kings on a $2m \times 2n$ vertical cylinder I found **denominator** of generating function (for fixed m)

(Václav Kotěšovec, 30.8.2011)

$$(x - 1)^{m-1} * (2x - 1)^2$$

Odtud vyplývá i obecný tvar rekurence:

(recurrence order is $m+1$)

$$a_n = \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j-1} \binom{m}{j-1} \frac{(j^2 + 2jm - j + m^2 + m)}{jm} a_{n-j}$$

V programu Mathematica dostaneme tabulku těchto rekurencí např. takto (v příkladu od $m=1$ do $m=10$)

```
Table[Sum[Binomial[m, j-1] * (-1)^(j-1) * (m^2+j^2+2j*m+m-j) / (j*m) * Subscript[a, n-j], {j, 1, m+1}], {m, 1, 10} // MatrixForm // TraditionalForm
```

n kings on a vertical cylinder $2 \times 2n$

Recurrence:

$$a_n = -4a_{n-2} + 4a_{n-1}$$

Generating function:

$$\frac{1}{(2x - 1)^2}$$

Explicit formula:

$$(n + 1) * 2^n$$

A195590 - 2n kings on a vertical cylinder 4 x 2n

Recurrence:

$$a_n = 4a_{n-3} - 8a_{n-2} + 5a_{n-1}$$

Generating function:

$$-\frac{1 + 3x}{(x - 1) * (2x - 1)^2}$$

Explicit formula:

$$(5n - 3) * 2^n + 4$$

A195591 - 3n kings on a vertical cylinder 6 x 2n

Recurrence:

$$a_n = -4a_{n-4} + 12a_{n-3} - 13a_{n-2} + 6a_{n-1}$$

Generating function:

$$\frac{1 + 10x + 7x^2}{(x - 1)^2 * (2x - 1)^2}$$

Explicit formula (*Václav Kotěšovec, 8.9.2011*):

$$(31n - 65) * 2^n + 18n + 66$$

A195592 - 4n kings on a vertical cylinder 8 x 2n

Recurrence:

$$a_n = 4a_{n-5} - 16a_{n-4} + 25a_{n-3} - 19a_{n-2} + 7a_{n-1}$$

Generating function:

$$-\frac{1 + 25x + 51x^2 + 11x^3}{(x - 1)^3 * (2x - 1)^2}$$

Explicit formula (*Václav Kotěšovec, 8.9.2011*):

$$(221n - 779) * 2^n + 44n^2 + 324n + 780$$

A195593 - 5n kings on a vertical cylinder 10 x 2n

Recurrence:

$$a_n = -4a_{n-6} + 20a_{n-5} - 41a_{n-4} + 44a_{n-3} - 26a_{n-2} + 8a_{n-1}$$

Generating function:

$$\frac{1 + 56x + 246x^2 + 156x^3 + 11x^4}{(x - 1)^4 * (2x - 1)^2}$$

Explicit formula (*Václav Kotěšovec, 8.9.2011*):

$$(1771n - 8709) * 2^n + \frac{235}{3}n^3 + 880n^2 + \frac{12815}{3}n + 8710$$



A195594 - 6n kings on a vertical cylinder 12 x 2n

Recurrence:

$$a_n = 4a_{n-7} - 24a_{n-6} + 61a_{n-5} - 85a_{n-4} + 70a_{n-3} - 34a_{n-2} + 9a_{n-1}$$

Generating function:

$$\frac{1 + 119x + 984x^2 + 1352x^3 + 307x^4 + 9x^5}{(x-1)^5 * (2x-1)^2}$$

Explicit formula (*Václav Kotěšovec, 8.9.2011*):

$$(15839n - 99729) * 2^n + \frac{231}{2}n^4 + 1767n^3 + \frac{26001}{2}n^2 + 53295n + 99730$$

A195595 - 7n kings on a vertical cylinder 14 x 2n

Recurrence:

$$a_n = -4a_{n-8} + 28a_{n-7} - 85a_{n-6} + 146a_{n-5} - 155a_{n-4} + 104a_{n-3} - 43a_{n-2} + 10a_{n-1}$$

Generating function:

$$\frac{1 + 246x + 3543x^2 + 9080x^3 + 4915x^4 + 442x^5 + 15x^6}{(x-1)^6 * (2x-1)^2}$$

Explicit formula (*Václav Kotěšovec, 8.9.2011*):

$$(157823n - 1211433) * 2^n + \frac{9121}{60}n^5 + \frac{35581}{12}n^4 + \frac{352625}{12}n^3 + \frac{2179835}{12}n^2 + \frac{20456597}{30}n + 1211434$$

A195657- 8n kings on a vertical cylinder 16 x 2n

Recurrence:

$$a_n = 4a_{n-9} - 32a_{n-8} + 113a_{n-7} - 231a_{n-6} + 301a_{n-5} - 259a_{n-4} + 147a_{n-3} - 53a_{n-2} + 11a_{n-1}$$

Generating function:

$$\frac{1 + 501x + 11957x^2 + 52145x^3 + 55651x^4 + 13919x^5 + 695x^6 + 27x^7}{(x-1)^7 * (2x-1)^2}$$

Explicit formula (*Václav Kotěšovec, 8.9.2011*):

$$(1751437n - 15876635) * 2^n + \frac{8431}{45}n^6 + \frac{22263}{5}n^5 + \frac{500633}{9}n^4 + \frac{1381699}{3}n^3 + \frac{117001024}{45}n^2 + \frac{138801256}{15}n + 15876636$$

A195658 - 9n kings on a vertical cylinder 18 x 2n

Recurrence:

$$a_n = -4a_{n-10} + 36a_{n-9} - 145a_{n-8} + 344a_{n-7} - 532a_{n-6} + 560a_{n-5} - 406a_{n-4} + 200a_{n-3} - 64a_{n-2} + 12a_{n-1}$$

Generating function:

$$\frac{1 + 1012x + 38698x^2 + 270088x^3 + 503686x^4 + 270112x^5 + 37900x^6 + 1516x^7 + 25x^8}{(x-1)^8 * (2x-1)^2}$$

Explicit formula (*Václav Kotěšovec, 8.9.2011*):

$$(21623809n - 226349399) * 2^n + \frac{8913}{40}n^7 + \frac{124781}{20}n^6 + \frac{376359}{4}n^5 + 977074n^4 + \frac{294753537}{40}n^3 + \frac{787733819}{20}n^2 + 135269649n + 226349400$$

A195659 - 10n kings on a vertical cylinder 20 x 2n

Recurrence:

$$a_n = 4a_{n-11} - 40a_{n-10} + 181a_{n-9} - 489a_{n-8} + 876a_{n-7} - 1092a_{n-6} + 966a_{n-5} - 606a_{n-4} + 264a_{n-3} - 76a_{n-2} + 13a_{n-1}$$

Generating function:

$$\frac{1 + 2035x + 121804x^2 + 1302988x^3 + 3919832x^4 + 3822444x^5 + 1204400x^6 + 113216x^7 + 3167x^8 + 13x^9}{(x-1)^9 * (2x-1)^2}$$

Explicit formula (*Václav Kotěšovec, 8.9.2011*):

$$(296191755n - 3519976573) * 2^n + \frac{524495}{2016}n^8 + \frac{4217363}{504}n^7 + \frac{2363921}{16}n^6 + \frac{66422455}{36}n^5 + \frac{557314865}{32}n^4 + \frac{8943856601}{72}n^3 + \frac{322704776641}{504}n^2 + \frac{90034143925}{42}n + 3519976574$$

A195660 - 11n kings on a vertical cylinder 22 x 2n

Recurrence:

$$a_n = -4a_{n-12} + 44a_{n-11} - 221a_{n-10} + 670a_{n-9} - 1365a_{n-8} + 1968a_{n-7} - 2058a_{n-6} + 1572a_{n-5} - 870a_{n-4} + 340a_{n-3} - 89a_{n-2} + 14a_{n-1}$$

Generating function:

$$\frac{1 + 4082x + 376245x^2 + 5977500x^3 + 27440106x^4 + 43897316x^5 + 25742850x^6 + 5340248x^7 + 353057x^8 + 5622x^9 + 23x^{10}}{(x-1)^{10} * (2x-1)^2}$$

Explicit formula (*Václav Kotěšovec, 8.9.2011*):

$$(4480441703n - 59644067185) * 2^n + \frac{10913705}{36288}n^9 + \frac{219791627}{20160}n^8 + \frac{6663742261}{30240}n^7 + \frac{1542837967}{480}n^6 + \frac{314791170001}{8640}n^5 \\ + \frac{311982683023}{960}n^4 + \frac{6333872421866}{2835}n^3 + \frac{56561301500209}{5040}n^2 + \frac{46445710897861}{1260}n + 59644067186$$

A195661 - 12n kings on a vertical cylinder 24 x 2n

Recurrence:

$$a_n = 4a_{n-13} - 48a_{n-12} + 265a_{n-11} - 891a_{n-10} + 2035a_{n-9} - 3333a_{n-8} + 4026a_{n-7} - 3630a_{n-6} + 2442a_{n-5} - 1210a_{n-4} + 429a_{n-3} - 103a_{n-2} + 15a_{n-1}$$

Generating function:

$$\frac{1 + 8177x + 1147469x^2 + 26442685x^3 + 177917014x^4 + 436010362x^5 + 423443926x^6 + 163698250x^7 + 23613841x^8 + 1078869x^9 + 9965x^{10} + 41x^{11}}{(x-1)^{11} * (2x-1)^2}$$

Explicit formula (*Václav Kotěšovec, 8.9.2011*):

$$(74405871551n - 1097352668753) * 2^n + \frac{696317}{2016}n^{10} + \frac{420699809}{30240}n^9 + \frac{66463031}{210}n^8 + \frac{26602370087}{5040}n^7 + \frac{33515235289}{480}n^6 \\ + \frac{1076425504013}{1440}n^5 + \frac{32380230257101}{5040}n^4 + \frac{325331895133417}{7560}n^3 + \frac{29685456992323}{140}n^2 + \frac{72053208873316}{105}n + 1097352668754$$

13n kings on a vertical cylinder 26 x 2n

Recurrence:

$$a_n = -4a_{n-14} + 52a_{n-13} - 313a_{n-12} + 1156a_{n-11} - 2926a_{n-10} + 5368a_{n-9} - 7359a_{n-8} + 7656a_{n-7} - 6072a_{n-6} + 3652a_{n-5} - 1639a_{n-4} + 532a_{n-3} - 118a_{n-2} + 16a_{n-1}$$

Generating function:

$$\frac{1 + 16368x + 3469506x^2 + 113898708x^3 + 1089823593x^4 + 3898498176x^5 + 5809335026x^6 + 3724301088x^7 + 1000383151x^8 + 102498644x^9 + 3234934x^{10} + 19072x^{11} + 27x^{12}}{(x-1)^{12} * (2x-1)^2}$$

Explicit formula (*Václav Kotěšovec, 9.9.2011*):

$$(1347719218691n - 21818603939573) * 2^n + \frac{1124677021}{2851200}n^{11} + \frac{1320210749}{75600}n^{10} + \frac{32030907025}{72576}n^9 + \frac{11924438357}{1440}n^8 + \frac{75721345850917}{604800}n^7 \\ + \frac{2814928825111}{1800}n^6 + \frac{836149507816961}{51840}n^5 + \frac{4083917951003293}{30240}n^4 + \frac{402463079270380193}{453600}n^3 + \frac{7753030622285767}{1800}n^2 + \frac{47733093589771694}{3465}n + 21818603939574$$

Další vzorce jsem odvodil na základě hodnot, které pro vertikální válcové šachovnice vypočítal až do $m=24$ Alex V. Breger.
(*Václav Kotěšovec, after values computed by Alex V. Breger, 10.9.2011*)

14n kings on a vertical cylinder 28 x 2n

Explicit formula: $26452911424623^{*2n}n - 466443058539097^{*2n} + (7664578639^{*n12})/17107200 + (61631959727^{*n11})/2851200 + (934171234969^{*n10})/1555200 + (72119457827^{*n9})/5760 + (110395622962609^{*n8})/518400 + (262643604242317^{*n7})/86400 + (56885422319521627^{*n6})/1555200 + (19051565489980837^{*n5})/51840 + (1173423395834671331^{*n4})/388800 + (421952019058890641^{*n3})/21600 + (5566743805196000563^{*n2})/59400 + (19592811446572607^{*n})/66 + 466443058539098$
Generating function: $-(1 + 32751^{*x} + 10430310^{*x^2} + 481029002^{*x^3} + 6394729127^{*x^4} + 32223155853^{*x^5} + 69865986950^{*x^6} + 68673637738^{*x^7} + 30619283445^{*x^8} + 5894552403^{*x^9} + 435661668^{*x^{10}} + 9665940^{*x^{11}} + 36687^{*x^{12}} + 17^{*x^{13}})/((x-1)^{13}(2x-1)^2)$

15n kings on a vertical cylinder 30 x 2n

Explicit formula: $559230930856111^{*2n}n - 10668839875628985^{*2n} + (35015613709^{*n13})/69189120 + (140647659749^{*n12})/5322240 + (284108394917^{*n11})/354816 + (8881154718431^{*n10})/483840 + (167816925966499^{*n9})/483840 + (898265774188499^{*n8})/161280 + (7411236706066439^{*n7})/96768 + (434354871400056533^{*n6})/483840 + (237796726128792311^{*n5})/26880 + (8657671478339220361^{*n4})/120960 + (60916011224576521765^{*n3})/133056 + (40199706506164412717^{*n2})/18480 + (1955051769751553049^{*n})/286 + 10668839875628986$
Generating function: $(1 + 65518^{*x} + 31239313^{*x^2} + 2001949236^{*x^3} + 36303870947^{*x^4} + 250784905618^{*x^5} + 761031078939^{*x^6} + 108538986844^{*x^7} + 742083546933^{*x^8} + 238292107706^{*x^9} + 33634692131^{*x^{10}} + 1822914308^{*x^{11}} + 28906443^{*x^{12}} + 69826^{*x^{13}} + 47^{*x^{14}})/(x-1)^{14}(2x-1)^2)$

16n kings on a vertical cylinder 32 x 2n

Explicit formula: $12664338547810989^{*2n}n - 259905805360778811^{*2n} + (1548880173119^{*n14})/2724321600 + (12432766408189^{*n13})/389188800 + (31379115536609^{*n12})/29937600 + (112078657939331^{*n11})/4276800 + (8470287202483^{*n10})/15552 + (8815190803234843^{*n9})/907200 + (2863631888545758599^{*n8})/19051200 + (5479992896457508741^{*n7})/2721600 + (7875153820611630691^{*n6})/340200 + (10922348138357372983^{*n5})/48600 + (240153649358010151661^{*n4})/133650 + (2366635939198543486603^{*n3})/207900 + (253787646492492230526803^{*n2})/4729725 + (502968378860471879408^{*n})/3003 + 259905805360778812$
Generating function: $-(1 + 131053^{*x} + 93344937^{*x^2} + 8240985821^{*x^3} + 200884032021^{*x^4} + 1862236880977^{*x^5} + 7679279966813^{*x^6} + 15260355329361^{*x^7} + 15121192899363^{*x^8} + 7464871340103^{*x^9} + 1772378526555^{*x^{10}} + 186998780503^{*x^{11}} + 7546673639^{*x^{12}} + 86512891^{*x^{13}} + 135711^{*x^{14}} + 59^{*x^{15}})/((x-1)^{15}(2x-1)^2)$

17n kings on a vertical cylinder 34 x 2n

Explicit formula: $305746711583463979^{*2n}n - 6716461340647400421^{*2n} + (415386691553671^{*n15})/653837184000 + (55535638856237^{*n14})/1452971520 + (71650411725041^{*n13})/53071200 + (4378212756961207^{*n12})/119750400 + (2977617183212303351^{*n11})/3592512000 + (12647601777418709^{*n10})/777600 + (63908721198242735921^{*n9})/228614400 + (35669413225506751783^{*n8})/8467200 + (36152826033307345649023^{*n7})/653184000 + (13649433818897935559321^{*n6})/21772800 + (2160795893600230845318001^{*n5})/359251200 + (40740449196327025393433^{*n4})/8553600 + (61780748506022593879315193^{*n3})/206388000 + (106062726707222116473567269^{*n2})/75675600 + (156747574064022414774307^{*n})/36036 + 6716461340647400422$
Generating function: $(1 + 262124^{*x} + 278541720^{*x^2} + 33647490568^{*x^3} + 1089430112302^{*x^4} + 13323050031852^{*x^5} + 72951678971558^{*x^6} + 195851643753544^{*x^7} + 269755773870982^{*x^8} + 193166374493716^{*x^9} + 70845501937522^{*x^{10}} + 12705938657356^{*x^{11}} + 1018795152796^{*x^{12}} + 31010374816^{*x^{13}} + 259186914^{*x^{14}} + 269536^{*x^{15}} + 35^{*x^{16}})/((x-1)^{16}(2x-1)^2)$

18n kings on a vertical cylinder 36 x 2n

Explicit formula: $7836248271732615701^{*2n}n - 183460728056240211867^{*2n} + (12439505852623^{*n16})/17611776000 + (3291320963246347^{*n15})/72648576000 + (3320663162637577^{*n14})/1937295360 + (2357838125920231^{*n13})/47174400 + (1306493922907667933^{*n12})/1064448000 + (10487819358977868287^{*n11})/399168000 + (1246169194950778251^{*n10})/2508800 + (211260210852954639497^{*n9})/25401600 + (166537054090980695719003^{*n8})/1354752000 + (115484293042330338036091^{*n7})/72576000 + (86176364075799198180829^{*n6})/4838400 + (2111120430353939750195721^{*n5})/1247400 + (1609898489763418327875366857^{*n4})/12108096000 + (380687235695332418078759867^{*n3})/45864000 + (649808828354687750134205371^{*n2})/16816800 + (2388967343240981356337751^{*n})/20020 + 183460728056240211868$
Generating function: $-(1 + 524267^{*x} + 830601702^{*x^2} + 136545164986^{*x^3} + 5814916666052^{*x^4} + 92513363999436^{*x^5} + 660288490798096^{*x^6} + 2337481736561240^{*x^7} + 4334516918514594^{*x^8} + 4312294228625210^{*x^9} + 2299914479712322^{*x^{10}} + 641161111350726^{*x^{11}} + 88419319687832^{*x^{12}} + 5463503828860^{*x^{13}} + 126729088704^{*x^{14}} + 777253400^{*x^{15}} + 538669^{*x^{16}} + 27^{*x^{17}})/((x-1)^{17}(2x-1)^2)$

19n kings on a vertical cylinder 38 x 2n

Explicit formula: $21243788724235064051^{*2n}n - 5280322896715227042001^{*2n} + (138987532302854533^{*n17})/177843714048000 + (50633594184844597^{*n16})/951035904000 + (1872712462990282561^{*n15})/871782912000 + (35100491010889623751^{*n14})/523069747200 + (147334158856735361873^{*n13})/83026944000 + (2365336707908273003407^{*n12})/57480192000 + (170733464921407993289387^{*n11})/201180672000 + (57172257417637078798579^{*n10})/3657830400 + (6259493898111529441245433^{*n9})/24385536000 + (273455392092312661275766457^{*n8})/73156608000 + (38173573480565185087905439^{*n7})/798336000 + (138501357458036303914023419^{*n6})/261273600 + (3267416774329378835168234819081^{*n5})/653837184000 + (8498935714402748570995225079021^{*n4})/217945728000 + (2198040824304718464888851785819^{*n3})/9081072000 + (339396833253871102225810331963^{*n2})/302702400 + (21120429941910324609547385339^{*n})/6126120 + 5280322896715227042002$
Generating function: $(1 + 1048554^{*x} + 2476262097^{*x^2} + 551608080276^{*x^3} + 30647049432358^{*x^4} + 627040395907848^{*x^5} + 5745754317201260^{*x^6} + 26304470322253164^{*x^7} + 64040968961849812^{*x^8} + 85643384362824296^{*x^9} + 63522797003153224^{*x^{10}} + 25848165367690276^{*x^{11}} + 5581149789979088^{*x^{12}} + 600679495942004^{*x^{13}} + 28935414937066^{*x^{14}} + 515706320880^{*x^{15}} + 2331751593^{*x^{16}} + 1075230^{*x^{17}} + 39^{*x^{18}})/((x-1)^{18}(2x-1)^2)$

20n kings on a vertical cylinder 40 x 2n

Explicit formula: $6072098725855384007611^{*2n}n - 159693493392508735093069^{*2n} + (1968397642557977^{*n18})/22865620377600 + (1103994600708274393^{*n17})/17784371404800 + (4175307722148688087^{*n16})/1569209241600 + (7728537285079824491^{*n15})/87178291200 + (563045902740131527397^{*n14})/224172748800 + (142026651122946359069^{*n13})/2264371200 + (18123134088964151353333^{*n12})/12933043200 + (566408774684871338259467^{*n11})/20118067200 + (11162236385405129692239779^{*n10})/21946982400 + (20067264956678728610018333^{*n9})/2438553600 + (2042155452219241220005624891^{*n8})/17244057600 + (718715446596963268556927759^{*n7})/479001600 + (693625553017037412136730177947^{*n6})/42032390400 + (10103485677507113703363237988121^{*n5})/65383718400 + (39195126835235503565957686463311^{*n4})/32691859200 + (6367900463112590090616816139^{*n3})/859950 + (3766139696523317194070945168929^{*n2})/110270160 + (16022713090242194453009749069^{*n})/153153 + 159693493392508735093070$

Generating function: $-(1 + 2097129*x + 7382986811*x^2 + 2220904370595*x^3 + 159894953749454*x^4 + 4166738467431962*x^5 + 48407841083475078*x^6 + 282062182617213082*x^7 + 883541309250552620*x^8 + 1547541281775530108*x^9 + 1542671950277000888*x^{10} + 874781266297141272*x^{11} + 276973228266969018*x^{12} + 47051089989147190*x^{13} + 4001474844243722*x^{14} + 151714636336974*x^{15} + 2091416351651*x^{16} + 6994534779*x^{17} + 2141165*x^{18} + 61*x^{19})/((x-1)^{19}*(2x-1)^2)$

21n kings on a vertical cylinder 42 x 2n

Explicit formula: $182472502512631874815247*2^n*n - 5062334318552371780225497*2^n + (911666067069450493*n^{19})/965437304832000 + (2738559605736280253*n^{18})/38109367296000 + (1578052592327462021*n^{17})/483928473600 + (43127470166284417061*n^{16})/373621248000 + (193078900890622017781*n^{15})/55351296000 + (34870076308061455411393*n^{14})/373621248000 + (671167634159323718215937*n^{13})/298896998400 + (1053482137323160925271323*n^{12})/21555072000 + (1171686839390127109829731*n^{11})/1216512000 + (89575631314732307520649273*n^{10})/5225472000 + (1400485443981433402727083249*n^9)/5109350400 + (112285161712537671453646487231*n^8)/28740096000 + (3669500941868641055310658959647*n^7)/74724249600 + (3758238151721113118959630784383*n^6)/70053984000 + (1777315853849862296471907469381*n^5)/355829760 + (300159616022664411911406713110073*n^4)/7783776000 + (1743339047032462850813521620184483*n^3)/7351344000 + (25031937165196377821589862717339*n^2)/22972950 + (4609390041632145722482624879571*n)/1385670 + 5062334318552371780225498$

Generating function: $(1 + 4194280*x + 22018192540*x^2 + 8919961635004*x^3 + 827459284414157*x^4 + 27241125631563168*x^5 + 397037166439590684*x^6 + 2905706265799447612*x^7 + 11518239299445504236*x^8 + 25875595560815277912*x^9 + 33747668111090811682*x^{10} + 25741621211215756232*x^{11} + 11390391689024377394*x^{12} + 2852328965702083756*x^{13} + 386232063546402228*x^{14} + 26229122929064964*x^{15} + 788989133635193*x^{16} + 8457728260576*x^{17} + 20976293180*x^{18} + 4257256*x^{19} + 63*x^{20})/((x-1)^{20}*(2x-1)^2)$

22n kings on a vertical cylinder 44 x 2n

Explicit formula: $5750587586991362584602039*2^n*n - 167837979160954509117160321*2^n + (671219347789463891*n^{20})/650508558336000 + (152313254405911631309*n^{19})/1843107581952000 + (2303703830283613598039*n^{18})/582033973248000 + (319777699639161412739*n^{17})/2155681382400 + (5435552680263482236319*n^{16})/1141243084800 + (129270134763135024011113*n^{15})/951035904000 + (59981466889869434273082247*n^{14})/17118646272000 + (9372925358763505324191083*n^{13})/114124308480 + (4617744524174065208144131417*n^{12})/2633637888000 + (4980959656097111216842556437*n^{11})/146313216000 + (525658635736671362987264376349*n^{10})/877879296000 + (277498009669261601858254496849*n^9)/29262643200 + (573876416040742347980905271263249*n^8)/4279661568000 + (1194164318103613513071926630894681*n^7)/713276928000 + (38913667473074387118487941008927683*n^6)/2139830784000 + (4005712146933140008838687211198757*n^5)/23775897600 + (19245193973468711068061672372884507*n^4)/14859936000 + (37117455162384171978507487750618681*n^3)/4678128000 + (48441741537855506396284412910300569*n^2)/1333266480 + (585080897807213339859835127497291*n)/5290740 + 167837979160954509117160322$

Generating function: $-(1 + 8388583*x + 65689199530*x^2 + 35762167466214*x^3 + 4254116532694529*x^4 + 175710022310941271*x^5 + 3184207213767263500*x^6 + 28944449837443120768*x^7 + 143203678753136183138*x^8 + 405591027451430188174*x^9 + 677278191836959855722*x^{10} + 675862994149798790026*x^{11} + 40292875533838833016*x^{12} + 141501449778579196748*x^{13} + 28411055924562992492*x^{14} + 3100803271589824168*x^{15} + 169637437065181713*x^{16} + 4075586019241943*x^{17} + 34124240381356*x^{18} + 62897245928*x^{19} + 8463495*x^{20} + 25*x^{21})/((x-1)^{21}*(2x-1)^2)$

23n kings on a vertical cylinder 46 x 2n

Explicit formula: $189627437378964643471393287*2^n*n - 5808156306559090927843260801*2^n + (6165150276983683343*n^{21})/5487748890624000 + (114906693720148664426173*n^{20})/1216451004088320000 + (695127627278488703356583*n^{19})/145974120490598400 + (804063283491368296733387*n^{18})/4268249137152000 + (164005670160666196669525*n^{17})/25609494822912 + (121887247173641633181300581*n^{16})/627683696640000 + (861795758027465550654844799*n^{15})/161404379136000 + (50499976516944737122359572393*n^{14})/376610217984000 + (6966297920414586438185692211297*n^{13})/2259661307904000 + (6261846618025682438819243654749*n^{12})/96566722560000 + (72090919325416962148912509956603*n^{11})/57940033536000 + (418628055070358777717817684477211*n^{10})/19313344512000 + (54967432313155650129229944037181171*n^9)/161404379136000 + (2251858165518903659510140630020331477*n^8)/470762772480000 + (4193150539293656750931878495565098359*n^7)/70614415872000 + (3357167693743835900531273740548926533*n^6)/5230697472000 + (789689821821203904742463596895085554729*n^5)/133382785536000 + (2333092129995407425508067529702532507*n^4)/514594080000 + (5232911435757882632896820041789171031*n^3)/18903456000 + (4118954104109977465552269221935066397*n^2)/3259095840 + (74421448283387257925422236755987159*n)/19399380 + 5808156306559090927843260802$

Generating function: $(1 + 16777190*x + 196062386847*x^2 + 143196953162568*x^3 + 21755499073606827*x^4 + 1120705784265435694*x^5 + 25059186297758143665*x^6 + 280250254942396082504*x^7 + 1710518442056717186662*x^8 + 6021084870821076303744*x^9 + 12646491726400056981366*x^{10} + 1614572788532496535916*x^{11} + 12601662145975777171622*x^{12} + 5975630130174265045796*x^{13} + 1689314649635388523610*x^{14} + 275129150959361906948*x^{15} + 24432068303689779771*x^{16} + 1084889661362846002*x^{17} + 20935848930766319*x^{18} + 137423830725380*x^{19} + 188595698817*x^{20} + 16856034*x^{21} + 47*x^{22})/((x-1)^{22}*(2x-1)^2)$

24n kings on a vertical cylinder 48 x 2n

Explicit formula: $6529470183093136842157132927*2^n*n - 209414829549745122259462547153*2^n + (1903141175986623033361*n^{22})/1561112121913344000 + (25396870727640624821837*n^{21})/236532139683840000 + (192037966127452948623833*n^{20})/33790305669120000 + (177702067716563841609569*n^{19})/750895681536000 + (4530702601898279438065411*n^{18})/533531142144000 + (80811419018370384426974569*n^{17})/296406190080000 + (8749083356424486048730542823*n^{16})/1098446469120000 + (15624579802033108132516606669*n^{15})/73229764608000 + (109966865763603093906425168897*n^{14})/20922789888000 + (4151552217251639227868606284999*n^{13})/34871316480000 + (657189362020987321394502436713811*n^{12})/265558487040000 + (8410483864767303226827566008363*n^{11})/178827264000 + (2790150225871356044761856190232919*n^{10})/3432645216000 + (2322373745924307807278354046709877221*n^9)/183074411520000 + (1158335475648781776987438920107098481*n^8)/6538371840000 + (953896024857532841197600758202560451*n^7)/435891456000 + (196332540099788111950379044816089155809*n^6)/8336424096000 + (2004661694021906695728333350558012676607*n^5)/9262693440000 + (254359278330971459372277281380970727010061*n^4)/153992278440000 + (3440814297165578634063691989304523602033*n^3)/342205063200 + (1538676793650816907740576938636484541583*n^2)/33609425850 + (672313781157342500209273650573901904*n)/4849845 + 209414829549745122259462547154$

Generating function: $-(1 + 33554405*x + 585453017891*n*x^2 + 572873709137575*x^3 + 510780454462934855*x^4 + 7081236437241953799*x^5 + 194082099062365989061*x^6 + 2648692545229030721549*x^7 + 19746351513110116155330*x^8 + 85348410080649973227170*x^9 + 222168227700719413585102*x^{10} + 356295787335526098756854*x^{11} + 355770890071564556382854*x^{12} + 221145494319139110521358*x^{13} + 84643218211121506326234*x^{14} + 19495691961085777496906*x^{15} + 2601156112508313332701*x^{16} + 189471525234871194057*x^{17} + 6873041848543848303*x^{18} + 107050043573440995*x^{19} + 552608846793827*x^{20} + 565551988155*x^{21} + 33660833*x^{22} + 105*x^{23})/((x-1)^{23}*(2x-1)^2)$

For fixed m is general explicit formula

$$(v_m * n + w_m) * 2^n + c_{m-2} * n^{m-2} + c_{m-3} * n^{m-3} + \dots + c_1 * n^1 + c_0$$

where constants are dependent only on m .

Na posloupnostech v_m a w_m je zajímavé, že jde vždy o celá čísla, viz tabulka vpravo.

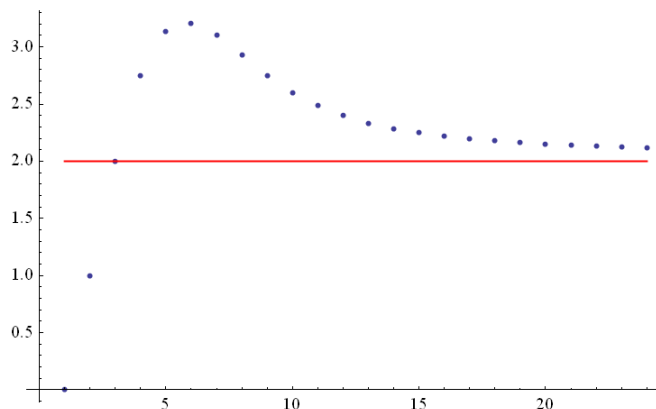
Pro pevné m je asymptotický průběh dán členem

For **fixed** m is asymptotic formula

$$v_m * n * 2^n$$

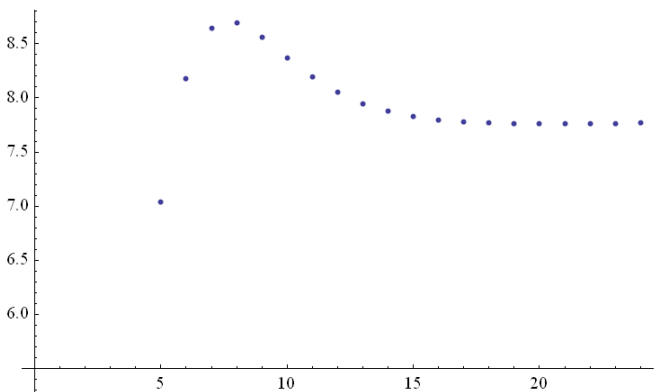
Při pevném m nemá samozřejmě polynom asymptoticky takovou váhu jako mocninný člen, ale vše by se změnilo, kdyby m bylo závislé na n . Pak by naopak převážil člen n^{m-2} což by odpovídalo limitě z kapitoly 2.7 pro $m=n$.

Pro koeficient polynomu u členu s nejvyšší váhou mám tuto hypotézu



Conjecture (VK, 8.9.2011):

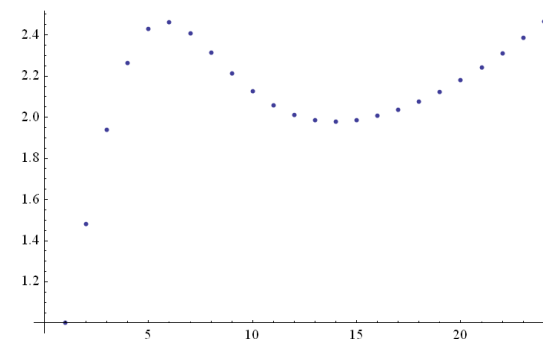
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_{m-2}}{m^2} = 2$$



$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_{m-3}}{m^3} = \text{const.}$$

n	v_m	w_m
1	1	1
2	5	-3
3	31	-65
4	221	-779
5	1771	-8709
6	15839	-99729
7	157823	-1211433
8	1751437	-15876635
9	21623809	-226349399
10	296191755	-3519976573
11	4480441703	-59644067185
12	74405871551	-1097352668753
13	1347719218691	-21818603939573
14	26452911424623	-466443058539097
15	559230930856111	-10668839875628985
16	12664338547810989	-259905805360778811
17	305746711583463979	-6716461340647400421
18	7836248271732615701	-183460728056240211867
19	212437887242350640551	-5280322896715227042001
20	6072098725855384007611	-159693493392508735093069
21	182472502512631874815247	-5062334318552371780225497
22	5750587586991362584602039	-167837979160954509117160321
23	189627437378964643471393287	-5808156306559090927843260801
24	6529470183093136842157132927	-209414829549745122259462547153

ListPlot[Table[v_m[m-1] / ((m/2)^m], {m, 2, Length[v_m] + 1}]]



kings on a vertical cylinder

		A195590	A195591	A195592	A195593	A195594	A195595	A195657	A195658
n	n / 2 x 2n	2n / 4 x 2n	3n / 6 x 2n	4n / 8 x 2n	5n / 10 x 2n	6n / 12 x 2n	7n / 14 x 2n	8n / 16 x 2n	9n / 18 x 2n
1	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
2	12	32	90	256	732	2102	6060	17536	50922
3	32	100	344	1220	4392	15988	58776	218052	815816
4	80	276	1082	4460	18890	81606	358564	1599820	7238864
5	192	708	3036	13932	66532	327192	1649420	8500668	44693472
6	448	1732	7918	39316	205628	1118398	6286658	36383284	216134044
7	1024	4100	19648	103508	580664	3419648	20984924	133538996	877751236
8	2304	9476	47058	259372	1536814	9643562	63558566	437500380	3130270224
9	5120	21508	109796	626780	3877300	25603228	178909300	1314748124	10105541204
10	11264	48132	251126	1473764	9434784	64923594	476033636	3694894500	30179587994
11	24576	106500	565512	3392964	22327496	158877948	1212120160	9849731140	84719304384
12	53248	233476	1257754	7682812	51698178	378088270	2980927200	25173962492	226268016376
13	114688	507908	2769196	17166476	117645348	879980720	7129922604	62193359676	580363147336
14	245760	1097732	6046014	37942900	263992580	2011806182	16675350430	149475988116	1440139184616
15	524288	2359300	13107536	83115188	585640568	4532900488	38293956836	351246183572	3477556916828
16	1114112	5046276	28246370	180699980	1286898262	10091643138	86629645122	810197361564	8210011147304
17	2359296	10747908	60555636	390351420	2805399156	22244251284	193553210580	1840289301660	19021962952188
18	4980736	22806532	129237382	838619524	6074441896	48622120786	427974677968	4126688132548	43385173057846
19	10485760	48234500	274727320	1793087780	13076687560	105526014500	938053730248	9154339355684	97653259485592
20	22020096	101711876	581960106	3817890076	28009586346	227633451206	2040792091884	20122502355004	217359166880016
n	n / 2 x 2n	2n / 4 x 2n	3n / 6 x 2n	4n / 8 x 2n	5n / 10 x 2n	6n / 12 x 2n	7n / 14 x 2n	8n / 16 x 2n	9n / 18 x 2n

kings on a vertical cylinder

	A195659	A195660	A195661			
n	10n / 20 x 2n	11n / 22 x 2n	12n / 24 x 2n	13n / 26 x 2n	14n / 28 x 2n	15n / 30 x 2n
1	2048	4096	8192	16384	32768	65536
2	148352	433500	1270246	3731532	10987232	32418810
3	3076180	11682296	44653028	171670440	663421684	2575592664
4	33175486	153802520	720390254	3404944506	16221905696	77820675992
5	239238888	1301236304	7177627944	40078823652	226167613792	1287874058656
6	1314160492	8155899320	51526819510	330559583178	2148524237842	14120142260138
7	5937279840	41180193352	291859775552	2106967145904	15448890481568	114765555945488
8	23174548666	176740657340	1382652697282	11052082053262	89954475408222	743275585245898
9	80812754568	668845118276	5700499630916	49800720887968	444140848321356	4029482453905756
10	257860425672	2290966142762	21042965606234	198765197377402	1921681775292272	18940490557328616
11	766319864440	7241521734020	71028444904044	718816489322444	7466044767879028	79230397598482712
12	2149806985106	21437333168798	222770819826574	2396574908171782	26535227773186536	300870737118178194
13	5753007728148	60123048359816	657397551407816	7466859257161488	87536396416928860	1053408792545464776
14	14807729805472	161217291701134	1843639061043694	21975843261828724	271156951835070930	3442850572991304914
15	36902750545260	416373921218580	4953451546255928	61632873337172148	796162215698816924	10609740515840572076
16	89523360235366	1041997475699102	12835026767559890	165905163216916278	2233010494687225138	31084768231930146850
17	212335537312668	2539265644237492	32249277650536068	431202887243628972	6021248406894793012	87184854616542091716
18	494171055510052	6050425313244116	78933388025154370	1087557702016220468	15694329684146355844	235455327744395211082
19	1131839140825580	14144230277410496	188922213540928724	2673055529162493760	39724238570410220868	615312727486201311400
20	2557442122622726	32532941685749548	443597279246200510	6425504513765274594	98023129519760219264	156257642662656555436
21	5712402568426288	73799119964859168	1024620340463557640	15152281245607002412	236604328758838483416	3870154670608731363216
22	12634322277714052	165435457674707532	2333501728549182566	35144282176648533846	560267213605429844018	9378376813480669175810
23	27708324882413160	367097756997348624	5250178065774344304	80354012054043091272	1304759817520845915576	22296125365478803038184
24	60325007758993666	807458491872594456	11689098616223542018	181454346546181153678	2994783110074817118710	52127750232372851457362
25	130506899306640288	1762610325363614756	25789321097234053988	405364132651686723528	6787485742677708636844	120101524914063542391116
26	280782503226093232	3822267332260790502	56450625580386607978	897119302875961916950	15214599136624218350440	273183337074140837137948
27	601176672366324240	8240957474870980044	122717680431300653372	1969259755268002011428	33777230300544608908068	614428099185993649999048
28	1281675956126565546	17677989556615587858	265172364662836949198	4291898542807009910590	74356798465989674759640	1368345020379369587565318
29	2722128527362804348	37752553395741883032	569966531889788579880	9295458818068251808952	162480009926068072677556	3020972589795006709929656
30	5761982536923318872	80304255328311915954	1219383943050710552158	20021354469691405396496	352735527969163480285778	6618743653631071135051146
n	10n / 20 x 2n	11n / 22 x 2n	12n / 24 x 2n	13n / 26 x 2n	14n / 28 x 2n	15n / 30 x 2n

kings on a vertical cylinder

n	16n / 32 x 2n	17n / 34 x 2n	18n / 36 x 2n	19n / 38 x 2n	20n / 40 x 2n
1	131072	262144	524288	1048576	2097152
2	95835136	283784412	841611542	2499330540	7431221056
3	10039703172	39273896840	154109956756	606353229752	2391296071460
4	375564803020	1821845982082	8876847931644	43416046650306	213033152875350
5	7390391650172	42688584938548	247956702607932	1447080255512308	8479116559291112
6	93669254201140	626289974615094	4215364545901036	28531464984810918	194028126730583796
7	861942483797204	6533144250310688	49899718750389380	383593821097441412	2964842429047018248
8	6219118726337532	52583297643941856	448492643088144992	3853319870967662784	33310589482215806362
9	37080781799409148	345278411878468044	3246772078088155432	30781946900321278256	293854532019205248960
10	189679152583318596	1924757095250611458	19746535064318923758	204445858068589675074	2133047572317122955744
11	855840660674700612	9381236750764316676	104090420921618696952	1166726840397440860664	13189452933510039097184
12	3479000496509382748	40885324678195409820	486989665584996802228	5866007127336366609118	71326830696492771709282
13	12953204832176027580	162145131468298265224	2059958985376265360708	26495730891462083917536	344345811250347865033356
14	44758769186643232884	593373607086774768478	7995185855561901885212	109197874599680258218752	1508490112615031481365880
15	145075519644555073332	2026525335852346721192	28814825799826940896828	415832918364921503771872	6076218055106534703006988
16	444982726973034212924	6519554974415255925058	97383905766373231052064	1478358825331764353540620	22749998503658769164819310
17	1301097449501622304476	19911203110764903275188	311170706019181269907200	4949234155354667348840036	79893525522429422989830980
18	3649054980075480769924	58107889170913674058604	946564783226311159219150	15716180935291441576171142	265174090289652830613885284
19	9868304303662376011108	162950076343522530809056	2757391620207935189284568	47631429404674467307773380	837251287805989819147456940
20	25849977224840232799868	441203805343365528896030	7731098941507645768534904	138512170470712683735324224	2528751817754976349706118326
21	65846196857753543848508	1158225312898434675534364	20954813767410885959950888	388268970118110878767396972	7341422662035602958282220712
22	163654917774372463659764	2958608978612653070638670	55117368112694031554303640	1053359329703375892041650308	20573588253839367077949708076
23	398054231887326719047060	7377324324979078617746624	141160741525959930166124112	2775593939610475823909421232	55860685625608455318796290160
24	949941094689693944150780	18006801384363772154323180	353058138013933921290557836	7125705998762754387188591134	147432389377728712284110684810
25	2229360233921963781276860	43128765846161483037394700	864616233182729491969911044	17872955720960729165367240000	379345780775912677601043686512
26	5155376183337922876506948	101585606781105765769727590	2078046468085599005509167146	43906942859680162214221800236	954030436888870118115502885256
27	11767897341343188340936324	235757198391449411266312540	4911788407886312898446438212	105875417908918290265270990044	2350630806916849010479158248328
28	26556129542004523155371420	540010507491641036375762808	11438673477674193002668964424	251094885670954803631752990448	5686026362287716652539280152482
29	59326004341131315104262460	1222631441892588740836894352	26289044159256440176249080696	586715405560706481134417118664	13528546435665543602457726266300
30	131357345449838226985324020	2739812609457520759135954646	59713209014487082669789438768	1352851777299425337175690550346	31713588723480654891280141863024
n	16n / 32 x 2n	17n / 34 x 2n	18n / 36 x 2n	19n / 38 x 2n	20n / 40 x 2n

kings on a vertical cylinder

n	21n / 42 x 2n	22n / 44 x 2n	23n / 46 x 2n	24n / 48 x 2n
1	4194304	8388608	16777216	33554432
2	22118855562	65898914432	196498594140	586358987206
3	9449664931176	37407140524084	148300497571992	588693691298244
4	1048198981050148	5169676077206180	25547885780012232	126470641310427598
5	49852445684576540	293953030638453916	1737550976667174160	10292174867667528360
6	1324775005898634662	9075985277296973128	62359179106767410268	429515124218610734806
7	23020986380414887220	179447486636390546560	1403434902965142112796	11007300661225779897920
8	289456536732140797394	2526376863976347148904	22133294202061141008568	194533561852976568978114
9	2821602850067948935276	27227392470984635126112	263845660207385480809288	2566072039202333185212740
10	22399543148593419171392	236521669369146141934114	2509276475874569266946236	26729150024690350394992506
11	150178777684384549385092	1720465020510968081991936	19813191535511397723131440	229201501762174283661578044
12	874210303368687541970862	10787341509858294538416194	133882791569237164996191264	1669927378127986864133800910
13	4514577572702159411715360	59631277156111243931303708	792683431700017730900461428	10595217877604937978718510728
14	21040134683226033553492288	295875349546713313858214930	4189981262412529003168643588	59694829149526573839754613454
15	89727285281411841433847744	1336936827641297887999158888	20073963612060559455735042464	303409744153294247242053599480
16	354147172542838676097536130	5567299365580647829560330414	88257883727925236509011440390	1409308890399503686189422504402
17	1305978149033527462717652016	21577677736740575358277955108	359794082971387126484123847852	6046920442502938188939299427924
18	4535669637415615159703204488	78488410476186445848329216408	1371839394507249619418570766886	24184513617833571943276908114898
19	14936371649825953734185140516	269849031352198972740083297308	4928382715341326744908712460944	90854944376059243107377070101972
20	46911234670290537506185612596	882246176675565411834177554580	16788271058488883506314273376994	322720208741281767246694232741806
21	141230550945276570635100088392	2757386816033295952291039496120	54523863710474286632672238604904	1090039871810263879574620744460712
22	409368398165208867487970639788	8276355199785795726294608142184	169637243705359533757858104557556	3518457899900622529619611537774774
23	1146875621124045833132800781624	23953391052370242641236237087324	507729501918803287606319351173352	10900545795526527443672327166416592
24	3116181946759603363969766676098	67085973834350305273012569336380	1467343328619108230363441712947216	32538850685220441627440374250456290
25	8236772561619649840180632472064	182394734520738713152367161519560	4108208368679818017556652494725040	93907626319996194785020193849148788
26	21237398274380349990875183495774	482771278119542620138763310424774	11175730664601579245411641891101618	262828856905685855498068687788383130
27	53544612672743232207728271560200	1247170592145738806538367167349440	29617820755461296750759096206788352	715339855213640271779957986135840940
28	132298353029651829773664140527598	3151831239920176074422575633285602	76651750015672350373190673337700362	1897998894188272937819692987761928158
29	320979821878643500767945889372084	7808259186938671807854107643845800	194143312979958342028981596821272764	4920385069156276579342940236055793448
30	766060699556203555929463673252346	18998377940529256617385662815283794	482177699241663562880835068040983568	12488443245322566217903307174920115534
n	21n / 42 x 2n	22n / 44 x 2n	23n / 46 x 2n	24n / 48 x 2n

values for $m > 13$ computed by Alex V. Breger (2011)

2.7) n^2 Kings on a $2n \times 2n$ cylindrical chessboard - n^2 králů na válcové šachovnici $2n \times 2n$

Pro počet rozmístění neohrožujících se n^2 králů na válcové šachovnici $2n \times 2n$ (v případě čtvercové válcové šachovnice je lhostejné, zda je vertikálně či horizontálně válcová) platí tato nerovnost

$$2 * (n + 1)^n \leq c(n) < 2^n * (n + 1)^n$$

Důkaz / Proof: Stejně jako v případě prstencové šachovnice (viz kap. 2.9) rozlišíme 2 případy. Dolní mez je dána případem B (viz obrázek), kdy jsou králové v dolní dvojřadě v jedné linii. Tak je lze rozmístit (v první nebo druhé řadě) celkem $2(n+1)$ způsoby. Krále v každé z vyšších dvojřad lze rozmístit vždy $n+1$ způsoby, celkem tedy **vždy existuje** rozmístění $2(n+1)^n$ neohrožujících se n^2 králů na válcové šachovnici $2n \times 2n$.

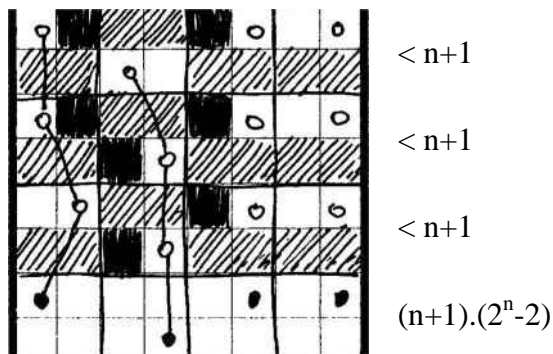
Případ A, kdy králové v první dvojřadě nejsou v jedné linii je složitější. Počet možných rozmístění neohrožujících se králů v první dvojřadě je $(n+1) \cdot 2^n$, musíme ale odečíst možnosti zahrnuté v případě B. Vzhledem k nutnému spřažení králů ve svislém směru (resp. v tom, jak je stočena šachovnice do válce) je počet možností jak rozestavit krále v každé z horních dvojřad omezen hodnotou $n+1$, té však (v případě A) nedosáhne, protože možnost diagonálních kolizí některé z možností vylučuje.

Celkově tak dostaneme pro $n > 2$ nerovnost

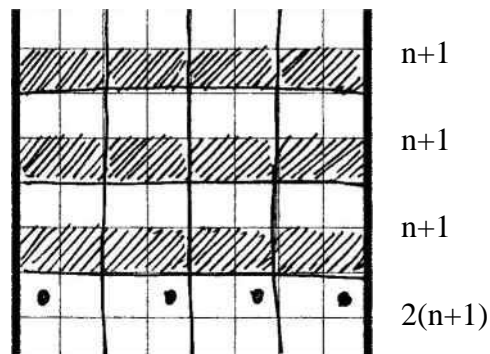
$$2 * (n + 1)^n \leq c(n) < (2^n - 2) * (n + 1)^n$$

nebo (pro všechna n)

$$2 * (n + 1)^n \leq c(n) < 2^n * (n + 1)^n$$



A



B

n	A137432 $c(n)$
1	4
2	32
3	344
4	4460
5	66532
6	1118398
7	20984924
8	437500380
9	10105541204
10	257860425672
11	7241521734020
12	222770819826574
13	7466859257161488
14	271156951835070930
15	10609740515840572076
16	444982726973034212924
17	19911203110764903275188
18	946564783226311159219150
19	47631429404674467307773380
20	2528751817754976349706118326
21	141230550945276570635100088392
22	8276355199785795726294608142184
23	507729501918803287606319351173352
24	32538850685220441627440374250456290
25	2174335830863749936724371980412536172
26	151236326399950056297298993112649900850
27	10932105410468612099036188735215153271496
28	820044457045734108109109406561277222219168
29	63748873475180955339832071132429388775557556
30	5129407130436863270233731521113990193730440354
31	426694523629297006422022284190667711775649380560

values 1-12 by V. Kotěšovec (31.8.2011)
 values 13-20 computed by Alex Chernov (8.9.2011)
 values 21-31 computed by Alex V. Breger (12.9.2011)
 see also [Zealint blog](#)

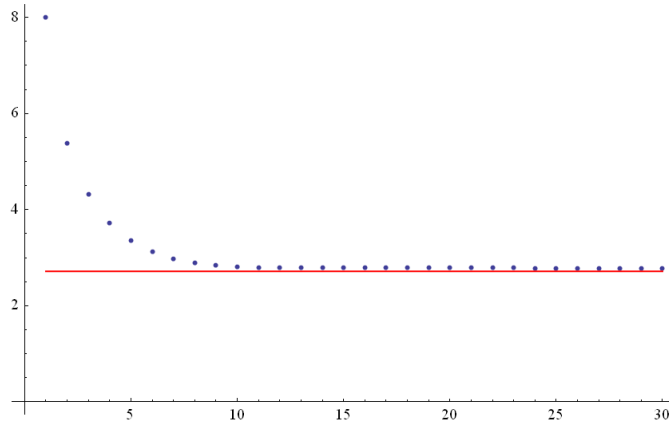
Správnost předchozí nerovnosti si můžeme ověřit i v grafu (v logaritmickém měřítku)

Z této nerovnosti vyplývá

$$e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(n+1)}{n * c(n)} < 2e$$

Domnívám se však, že vliv dalších členů bude už malý a stejně tak jako na obdélníkové válcové šachovnici byl dominantní člen $(m+1)^n$, tak zde bude dominantní pouze člen $(n+1)^n$ a bude platit

```
Show[ListPlot[Table[c[[n+1]] / (n*c[[n]]), {n, 1, Length[c] - 1}],
PlotRange -> All], Plot[E, {n, 1, Length[c] - 1}, PlotStyle -> Red],
AxesOrigin -> {0, 0}]
```



Conjecture (VK, 28.8.2011):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(n+1)}{n * c(n)} = e$$

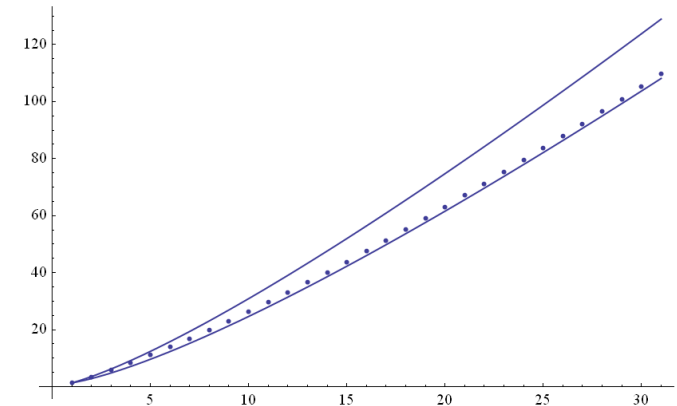
Graf vlevo získaný ze zatím vypočtených hodnot ukazuje, že tato hypotéza je téměř s jistotou správná.

Na druhé straně zatím není jasné, jaká bude hodnota (trochu silnější) limity

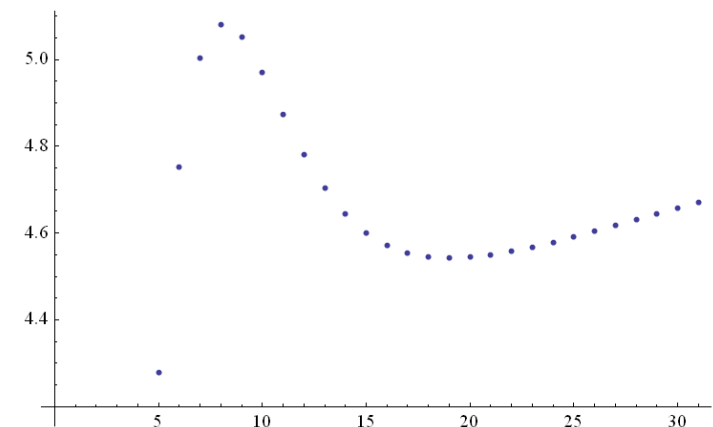
$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(n)}{2(n+1)^n} = \frac{1}{2e} * \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(n)}{n^n} = ?$$

Z nerovnosti na str. 209 samozřejmě vyplývá, že limita musí být ≥ 1 , ale nemusí být konečná. I když graf vpravo určitou šanci dává...

```
Show[ListPlot[Log[c]], Plot[Log[2 * (n+1)^n], {n, 1, Length[c]}],
Plot[Log[2^n * (n+1)^n], {n, 1, Length[c]}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```



```
ListPlot[Table[c[[n]] / (2 * (n+1)^n), {n, 1, Length[c]}]]
```



2.8) k Kings on an n x n toroidal chessboard - k králů na prstencové šachovnici n x n

A179403 - **2 kings**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 6.1.2011), $n \geq 3$

$$\frac{1}{2}n^2(n-3)(n+3) = \binom{n^2}{2} - 4n^2$$

A179404 - **3 kings**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 6.1.2011), $n \geq 4$

$$\frac{1}{6}n^2(n^4 - 27n^2 + 194)$$

A179424 - **4 kings**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 6.1.2011), $n \geq 5$

$$\frac{1}{24}n^2(n^6 - 54n^4 + 1019n^2 - 6798)$$

A179425 - **5 kings**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 6.1.2011), $n \geq 6$

$$\frac{1}{120}n^2(n^8 - 90n^6 + 3155n^4 - 51450n^2 + 332544)$$

A179426 - **6 kings**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 6.1.2011), $n \geq 7$

$$\frac{1}{720}n^2(n^{10} - 135n^8 + 7525n^6 - 217665n^4 + 3289354n^2 - 20949480)$$

A179427 - **7 kings**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 6.1.2011), $n \geq 8$

$$\frac{1}{5040}n^2(n^{12} - 189n^{10} + 15295n^8 - 681135n^6 + 17692024n^4 - 255655596n^2 + 1617230880)$$

A179428 - **8 kings**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 6.1.2011), $n \geq 9$

$$\frac{1}{40320}n^2(n^{14} - 252n^{12} + 27874n^{10} - 1759800n^8 + 68745649n^6 - 1669136028n^4 + 23447322156n^2 - 147931524720)$$

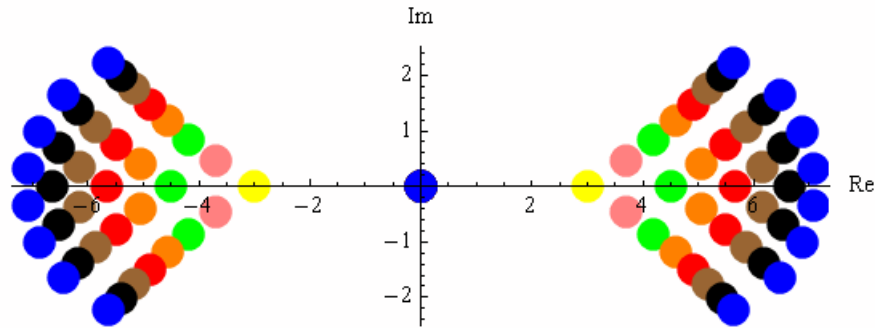


A180067 - **9 kings**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 15.1.2011), $n \geq 10$

$$\frac{1}{362880} n^2 (n^{16} - 324n^{14} + 46914n^{12} - 3975048n^{10} + 216203169n^8 - 7756575876n^6 + 179987135516n^4 - 2481599151792n^2 + 15651056776320)$$

Kořeny polynomů pro prstencovou šachovnici vycházejí symetricky, zajímavé je i srovnání kořenů polynomů pro 9 králů na normální a prstencové šachovnici.

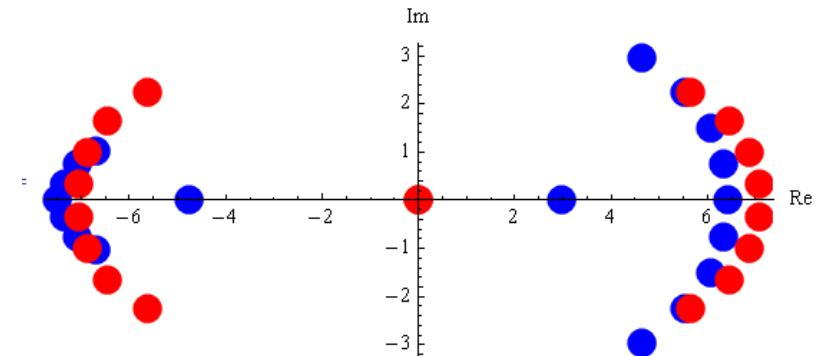
roots in the complex plane



black points = roots for k=8

blue points = roots for k=9

complex roots for 9 kings



blue points = normal board

red points = toroidal board

Obecně předchozí vzorce platí pro

$$n > k$$

a první členy těchto vzorců mají tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{9}{2} * \frac{n^{2k-2}}{(k-2)!} + \frac{(243k+47) * n^{2k-4}}{24 * (k-3)!} - \frac{(243k^2+141k+80) * n^{2k-6}}{16 * (k-4)!} + \frac{(98415k^3+114210k^2+140645k+101762) * n^{2k-8}}{5760 * (k-5)!} - \dots$$

k	k Kings on an n x n toroidal chessboard - Generating function
2	$\frac{2x^4 * (x - 2)(5x^2 - 13x + 14)}{(x - 1)^5}$
3	$\frac{4x^4 * (12x^6 - 67x^5 + 140x^4 - 112x^3 - 21x^2 + 66x + 12)}{(x - 1)^7}$
4	$\frac{x^4 * (160x^9 - 963x^8 + 2054x^7 - 1308x^6 - 963x^5 - 375x^4 + 5288x^3 - 5094x^2 - 467x - 12)}{(x - 1)^9}$
5	$\frac{2x^5 * (260x^{11} - 1932x^{10} + 6567x^9 - 16223x^8 + 38507x^7 - 77869x^6 + 102208x^5 - 61576x^4 - 15301x^3 + 33059x^2 + 7415x + 5)}{(x - 1)^{11}}$
6	$\frac{4x^6 * (426x^{13} - 4263x^{12} + 22311x^{11} - 82449x^{10} + 220918x^9 - 391803x^8 + 369356x^7 + 10716x^6 - 382230x^5 + 163719x^4 + 387689x^3 - 390831x^2 - 87230x - 2649)}{(x - 1)^{13}}$
7	$\frac{-4x^6 * (1379x^{16} - 18219x^{15} + 124755x^{14} - 553765x^{13} + 1657983x^{12} - 3369984x^{11} + 4870575x^{10} - 6400905x^9 + 10992208x^8 - 19069951x^7 + 21246441x^6 - 8631071x^5 - 7797385x^4 + 8273322x^3 + 2866693x^2 + 131389x + 855)}{(x-1)^{15}}$
8	$\frac{x^6 * (17728x^{19} - 301964x^{18} + 2573500x^{17} - 13833040x^{16} + 51521058x^{15} - 143708688x^{14} + 325486412x^{13} - 629393865x^{12} + 996601251x^{11} - 1090603627x^{10} + 426710617x^9 + 807953488x^8 - 1328885640x^7 + 262625618x^6 + 1106513030x^5 - 875387697x^4 - 386005021x^3 - 30462955x^2 - 338119x - 486)}{(x-1)^{17}}$
9	$\frac{-x^6 * (56520x^{22} - 1215064x^{21} + 12642984x^{20} - 82438064x^{19} + 378510176x^{18} - 1315100032x^{17} + 3593010018x^{16} - 7742517098x^{15} + 12798616135x^{14} - 15614945085x^{13} + 14742135008x^{12} - 17197088896x^{11} + 33440162097x^{10} - 55183782403x^9 + 50601858342x^8 - 7249042450x^7 - 32800069391x^6 + 23010354469x^5 + 14572795412x^4 + 1637985772x^3 + 41216559x^2 + 80563x + 28)}{(x-1)^{19}}$

k kings / toroidal board

n	1 king	2 kings	3 kings	4 kings	5 kings	6 kings	7 kings	8 kings	9 kings	summed over all $k \geq 0$, A067958
1	1									2
2	4	0	0	0						5
3	9	0	0	0	0	0	0	0	0	10
4	16	56	48	12	0	0	0	0	0	133
5	25	200	600	575	10	0	0	0	0	1411
6	36	486	3108	9837	14940	10596	3420	486	28	42938
7	49	980	10388	63553	229908	486668	576856	346381	81095	1796859
8	64	1760	27328	265008	1678336	7063520	19760512	36285336	42752576	157763829
9	81	2916	61668	853497	8155404	55345356	270487188	956078397	2436444603	22909432780
10	100	4550	124900	2312925	30614620	299491100	2209065700	12428297150	53633024900	6291183426165
11	121	6776	233288	5532967	96011322	1263811604	12914201256	104000525596	666519047964	3032485231813445
12	144	9720	409008	12037068	263506752	4455716184	59659859232	643409498286	5655962632720	2674030233698391466
13	169	13520	681408	24293243	652150382	13701863604	231216019632	3191250652226	36502953719310	4216437656471537450175
14	196	18326	1088388	46125317	1485650012	37823872044	781647658596	13361641961066	191587564345044	12038380931111061789962901
15	225	24300	1677900	83243925	3161648520	95648273100	2367858314700	48905750870775	854990702601025	?
16	256	31616	2509568	143918272	6355083264	224887404416	6553746728448	160414160371552	3346890268570368	?
17	289	40460	3656428	239811333	12167739256	497181121100	16815788711212	480243686391743	11756179090049177	?
18	324	51030	5206788	387002853	22339050588	1042609380588	40446802230372	1330654487994234	37692541754516628	?
19	361	63536	7266208	607226187	39536586430	2088337713332	92003239814224	3449609146025210	111774885566128630	?
20	400	78200	9959600	929346700	67748508480	4017815773400	199311860224800	8439769551278350	309788198526691600	?
21	441	95256	13433448	1391111127	112804636266	7459198321428	413589922308360	19624142987739108	809220285933001012	?
22	484	114950	17858148	2041198973	183057635420	13414493857116	825997764087012	43616849672119790	2006023021125772484	?
23	529	137540	23430468	2941608713	290261282204	23444476061772	1594007700404532	93112709811981557	4746238014804745771	?
24	576	163296	30376128	4170413232	450688785408	39928736913120	2982430581363072	191696927842663704	10769301899421989056	?
25	625	192500	38952500	5824920625	686540794500	66425550447500	5425904270482500	381920049400830625	23529629366634899375	?
26	676	225446	49451428	8025278157	1027700020828	108162598959740	9622254525739492	738532765420347014	49675703368582666596	?
27	729	262440	62202168	10918558863	1513897376994	172697249542932	16669554533555832	1389708580432837752	101643657889081059216	?
28	784	303800	77574448	14683371948	2197363228480	270794133842456	28264133502586912	2550402748009811870	202097214571492043664	?
29	841	349856	95981648	19535039827	3146046781446	417578468928308	46982453295836640	4573836436177381798	391363057844088660122	?
30	900	400950	117884100	25731386325	4447496831580	634036069773900	76676963241363300	8029626473495462850	739633311774898026100	?

Sloupec vpravo (sekvence [A067958](#)) určuje pro $n > 1$ počty všech možných pozic neohrožujících se k králů na prstencové šachovnici $n \times n$ (součet pro všechna k , včetně $k=0$). Jde tedy o součty příslušných řádků tabulky + 1. Hodnoty této posloupnosti až do $n=13$ vypočítal v roce 2002 R. H. Hardin, 22.8.2016 jsem doplnil hodnotu pro $n=14$.

2.9) n^2 Kings on a $2n \times 2n$ toroidal chessboard - n^2 králů na prstencové šachovnici $2n \times 2n$

Pro tento případ se mi podařilo analyticky odvodit přesný vzorec.
Explicit formula (V. Kotěšovec, 28.8.2011):

$$t(n) = 4 * (2^n - 1)$$

n	$t(n)$
1	4
2	12
3	28
4	60
5	124
6	252
7	508
8	1020
9	2044
10	4092

Důkaz / Proof: Každý král musí stát ve svém čtverci velikosti 2×2 . Na prstencové šachovnici musí být rozmístění v každém svislém i vodorovném pásu velikosti 2 vždy v tomto směru spřažené, jinak by se králové ohrožovali. Základní konfigurace je dána vždy rozmístěním králů na prvních 2 řadách. Rozlišme nyní 2 případy.

A) králové v první dvojřadě **nejsou na jedné linii** (*kings on a first double-row not are in one line*)

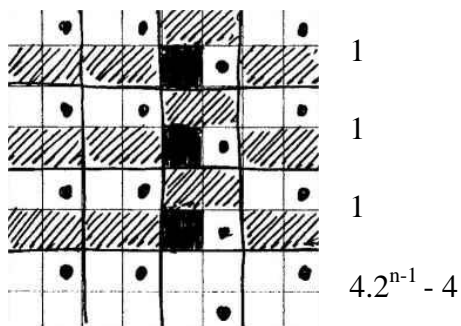
Počet možností rozmístění neohrožujících se králů na prvních 2 řadách určíme jako součin počtu možností v každém čtverci velikosti 2×2 . Prvního krále je vždy možno umístit 4 způsoby (na pole a_1 , a_2 , b_1 nebo b_2), další pak vždy 2 způsoby. Musíme však odečíst možnosti zahrnuté v případě B. Pozice všech králů na vyšších řadách je pak už jediná možná (králové musí být spřaženi ve svislém i vodorovném směru). Celkový počet rozmístění je proto $4 \cdot 2^{n-1} - 4$.

B) králové v první dvojřadě **jsou na jedné linii** (*kings on a first double-row are in one line*)

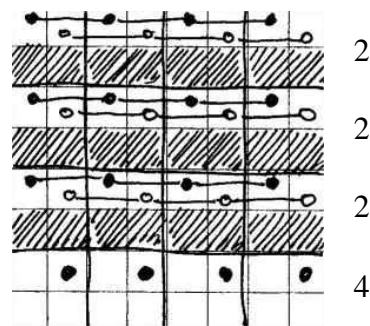
Prvního krále je opět možno umístit 4 způsoby, ale pozice dalších králů na první dvojřadě je pak už pevně dána. Volnost je ale v tomto případě v každé vyšší dvojřadě, kde sice králové musí být spřaženi, ale jsou vždy 2 možnosti jak toho v každé řadě dosáhnout. Počet možných pozic je proto $4 \cdot 2^{n-1}$.

Celkový počet pozic je dán součtem případů A a B, tedy

$$t(n) = 4 * 2^{n-1} - 4 + 4 * 2^{n-1} = 4 * 2^n - 4$$



A



B

3.1) k Rooks on an $n \times n$ chessboard - k věží na šachovnici $n \times n$

Počet postavení k neohrožujících se věží na šachovnici $n \times n$. Tento problém byl zcela vyřešen pro libovolné k , obecný vzorec je

k rooks, board $n \times n$:
$$\binom{n}{k} k!$$

Objevit tento vzorec je poměrně snadné, uvádí jej třeba už Edouard Lucas ve své knize [Théorie des nombres](#) (1891) na str. 98.

2 rooks, board $n \times n$:

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2}$$

A179058 - 3 rooks, board $n \times n$:

$$\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{6}$$

A179059 - 4 rooks, board $n \times n$:

$$\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2}{24}$$

A179060 - 5 rooks, board $n \times n$:

$$\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2(n-4)^2}{120}$$

Speciálně pokud $k = n$, vychází počet možných pozic n neohrožujících se věží na šachovnici $n \times n$ roven $n!$ (n faktoriál)

n rooks, board $n \times n$:

$$n!$$

98

LIVRE I. — LES NOMBRES ENTIERS.

Exemple III. — Le problème des tours au jeu des échecs. — Soit un échiquier rectangulaire de dimensions p et q ; le problème des r tours consiste à placer r tours sur les pq cases de l'échiquier, mais de telle sorte que deux quelconques d'entre elles ne soient pas situées sur une même ligne ou sur une même colonne. Désignons par E_r et E_{r-1} le nombre des solutions du problème des r tours et des $(r-1)$ tours sur cet échiquier; on a d'abord $E_1 = pq$, et, en supposant $q \geq p$, on voit que E_r est nul pour $r > q$. Si l'on supprime l'une des r tours d'une solution E_r , on obtient une solution E_{r-1} ; mais, inversement, si l'on part d'une solution E_{r-1} , on peut placer la $r^{\text{ième}}$ tour sur l'une des

$$(p-r+1)(q-r+1)$$

cases libres; on a donc la formule

$$(1) \quad rE_r = (p-r+1)(q-r+1)E_{r-1};$$

par suite, le nombre E_r est égal à l'une des quatre expressions équivalentes

$$(2) \quad \frac{1}{r!} A_p^r A_q^r, \quad A_p^r C_q^r, \quad A_q^r C_p^r, \quad r! C_p^r C_q^r,$$

dans lesquelles les lettres A et C désignent respectivement des arrangements et des combinaisons simples.

Pro srovnání s ostatními vzorci, počet těchto rozmístění je také polynom, po roznásobení dostaneme jeho koeficienty ve tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{(n!)^2}{((n-k)!)^2 * k!} &= \frac{n^{2k}}{k!} + n^{2k-1} * \frac{(-1)^1}{(k-2)! 1!} \\ &+ n^{2k-2} * \frac{(-1)^2}{(k-2)! 2!} * \frac{3k^2 - 5k + 1}{3} \\ &+ n^{2k-3} * \frac{(-1)^3}{(k-3)! 3!} * k(k-1) * (k-1) \\ &+ n^{2k-4} * \frac{(-1)^4}{(k-3)! 4!} * \frac{15k^5 - 75k^4 + 125k^3 - 81k^2 + 7k + 3}{15} \\ &+ n^{2k-5} * \frac{(-1)^5}{(k-4)! 5!} * k(k-1) * \frac{3k^4 - 14k^3 + 21k^2 - 10k - 3}{3} \\ &+ n^{2k-6} * \frac{(-1)^6}{(k-4)! 6!} * \frac{63k^8 - 630k^7 + 2457k^6 - 4753k^5 + 4557k^4 - 1453k^3 - 612k^2 + 131k + 60}{63} \\ &+ n^{2k-7} * \frac{(-1)^7}{(k-5)! 7!} * k(k-1) * \frac{9k^7 - 90k^6 + 348k^5 - 646k^4 + 530k^3 - 20k^2 - 191k - 60}{9} \\ &+ n^{2k-8} * \frac{(-1)^8}{(k-5)! 8!} * \frac{135k^{11} - 2250k^{10} + 15615k^9 - 58650k^8 + 128275k^7 - 158510k^6 + 84541k^5 + 23230k^4 - 32495k^3 - 13610k^2 + 4269k + 1890}{135} \\ &+ n^{2k-9} * \frac{(-1)^9}{(k-6)! 9!} * \frac{k(k-1)(15k^{10} - 255k^9 + 1800k^8 - 6806k^7 + 14609k^6 - 16481k^5 + 4880k^4 + 7966k^3 - 3349k^2 - 6159k - 1890)}{15} \\ &+ n^{2k-10} * \frac{(-1)^{10}}{(k-6)! 10!} * \frac{99k^{14} - 2475k^{13} + 26730k^{12} - 163581k^{11} + 622974k^{10} - 1513325k^9 + 2253768k^8 - 1668051k^7 - 200574k^6 + 1086969k^5 + 144402k^4 - 705343k^3 - 261879k^2 + 108126k + 45360}{99} \\ &+ n^{2k-11} * \frac{(-1)^{11}}{(k-7)! 11!} * \frac{k(k-1)(9k^{13} - 231k^{12} + 2559k^{11} - 15999k^{10} + 61679k^9 - 148707k^8 + 208749k^7 - 112209k^6 - 106467k^5 + 138243k^4 + 110077k^3 - 120297k^2 - 153486k - 45360)}{9} + \dots \end{aligned}$$

Koeficienty těchto polynomů se dají vyjádřit též pomocí Stirlingových čísel prvního druhu, viz též str. 231, $S_1 =$ [Stirling Numbers of the First Kind](#).

$$\binom{n}{k}^2 k! = \frac{1}{k!} * \left(\sum_{j=0}^k S_1(k, j) * n^j \right)^2 = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{2k} \left(\sum_{i=0}^j S_1(k, i) * S_1(k, j-i) * n^j \right)$$

$$\mathbf{1/k! * Sum[n^j * Sum[StirlingS1[k, i] * StirlingS1[k, j-i], {i, 0, j}], {j, 0, 2k}]}$$

Při konstantním k asymptoticky platí

$$\binom{n}{k}^2 k! = \frac{n^{2k}}{k!} * e^{-\frac{k^2}{n}} * \left(1 + \frac{k}{n} - \frac{(2k^2 - 6k + 1)k}{6n^2} - \frac{(3k^2 - 6k + 2)k^2}{6n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)$$

Nebo přesněji s užitím [Stirlingova vzorce](#), opět ale pouze pro **konstantní** k (vzorec přestává platit, pokud se k přibližuje k n)

$$\binom{n}{k}^2 k! = \frac{n^{2k}}{k!} * e^{-2k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{2k-2n-1} * \left(1 - \frac{k}{6n^2} - \frac{k^2}{6n^3} - \frac{k(60k^2 - 5k - 6)}{360n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)$$

Čítatel vytvořujících funkcí sice začíná vždy výrazem $k! x^{2k}$, ale (na rozdíl od kapitoly 3.2) nejdou koeficienty jeho polynomu vyjádřit obecně. Jmenovatel je vždy roven $(x-1)^{2k+1}$. Na ukázkou několik prvních:

k	k Rooks on an n x n chessboard - Generating function
1	$-\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}$
2	$-\frac{2x^2(x^2+4x+1)}{(x-1)^5}$
3	$-\frac{6x^3(x+1)(x^2+8x+1)}{(x-1)^7}$
4	$-\frac{24x^4(x^4+16x^3+36x^2+16x+1)}{(x-1)^9}$
5	$-\frac{120x^5(x+1)(x^4+24x^3+76x^2+24x+1)}{(x-1)^{11}}$
6	$-\frac{720x^6(x^6+36x^5+225x^4+400x^3+225x^2+36x+1)}{(x-1)^{13}}$
7	$-\frac{5040x^7(x+1)(x^6+48x^5+393x^4+832x^3+393x^2+48x+1)}{(x-1)^{15}}$

Problém byl vyřešen i na **obdélníkových šachovnicích**, počet pozic k neohrožujících se věží na šachovnici $m \times n$ je obecně (*number of ways to place k non-attacking rooks on an $m \times n$ board*):

$$\frac{m! n!}{(m-k)! (n-k)! k!}$$

Viz též [Rook Polynomial](#) nebo [Rook Polynomial](#)

n	1 rook	2 rooks	3 rooks	4 rooks	5 rooks	6 rooks	7 rooks	8 rooks	9 rooks	10 rooks	summed over all k >= 0, A002720
1	1										2
2	4	2	0	0							7
3	9	18	6	0	0	0	0	0	0		34
4	16	72	96	24	0	0	0	0	0	0	209
5	25	200	600	600	120	0	0	0	0	0	1546
6	36	450	2400	5400	4320	720	0	0	0	0	13327
7	49	882	7350	29400	52920	35280	5040	0	0	0	130922
8	64	1568	18816	117600	376320	564480	322560	40320	0	0	1441729
9	81	2592	42336	381024	1905120	5080320	6531840	3265920	362880	0	17572114
10	100	4050	86400	1058400	7620480	31752000	72576000	81648000	36288000	3628800	234662231
11	121	6050	163350	2613600	25613280	153679680	548856000	1097712000	1097712000	439084800	3405357682
12	144	8712	290400	5880600	75271680	614718720	3161410560	9879408000	17563392000	15807052800	53334454417
13	169	12168	490776	12269400	198764280	2120152320	14841066240	66784798080	185513328000	296821324800	896324308634
14	196	16562	794976	24048024	480960480	6492966480	59364264960	363606122880	1454424491520	3636061228800	16083557845279
15	225	22050	1242150	44717400	1082161080	18036018000	208702494000	1669619952000	9090153072000	32724551059200	306827170866106
16	256	28800	1881600	79497600	2289530880	46172206080	659602944000	6678479808000	47491411968000	232707918643200	6199668952527617
17	289	36992	2774400	135945600	4594961280	110279070720	1906252508160	23828156352000	214453407168000	1372501805875200	132240988644215842
18	324	46818	3995136	224726400	8809274880	248127909120	5104345559040	77203226580480	857813628672000	6948290392243200	2968971263911288999
19	361	58482	5633766	360561024	16225246080	530024705280	12796310741760	230333593351680	30967071995059200	30967071995059200	69974827707903049154
20	400	72200	7797600	563376600	28844881920	1081683072000	30287126016000	639815537088000	10237048593408000	123868287980236800	1727194482044146637521

Poslední sloupec (sekvence [A002720](#)) určuje počet pozic neohrožujících se k věží na šachovnici $n \times n$ pro všechna $k \geq 0$. Jde tedy o součty příslušných řádků + 1.

Pro tento počet známe vzorec

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 k! = n! * \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k!}$$

Rekurence je

$$a_n = 2n a_{n-1} - (n-1)^2 a_{n-2}$$

Nejzajímavější je ovšem asymptotický vzorec

$$a_n \sim n! * \frac{e^{2\sqrt{n}}}{2n^{1/4} \sqrt{\pi e}} \sim \frac{n^{n+1/4}}{\sqrt{2} e^{n-2\sqrt{n}+1/2}}$$

See also bishops on toroidal chessboard, p. 280

Exponenciální generační funkce:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right) * e^{\frac{x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$$

Hodnoty této sekvence jdou vyjádřit i jako speciální případ tzv. [Laguerreových polynomů](#), v programu Mathematica: `Table[n!*LaguerreL[n,-1],{n,1,20}]`
Ohledně toho však doporučuji článek: [Too many errors around coefficient C₁ in asymptotic of sequence A002720](#), V. Kotěšovec, 28.9.2012.

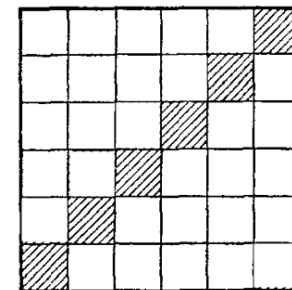
3.1.1) Miscellaneous problems with rooks - Různé další úlohy s věžemi

Problém rozmístění neohrožujících se věží je z principu ze všech probíraných úloh v této knize tím nejjednodušším. Matematici proto hledali (a našli) i pro věže něco více složitějšího. Všechny tyto úlohy považuji ale spíše za okrajové (a z šachového hlediska ne až tak příliš zajímavé) a nebudu se jimi proto zde podrobně zabývat, čtenáře pouze odkážu na literaturu. Přesto některé z těchto úloh stojí aspoň za zmínku. Prvních 7 úloh patří mezi tzv. "permutations with restricted position".

1) [A000166](#) Number of permutations p of $[1, \dots, n]$ such that $p(j) < j$ for all j .

Počet rozestavení n neohrožujících se věží na normální šachovnici $n \times n$ takových, že **žádná věž nestojí na hlavní diagonále** (no rook lies on the squares of the main diagonal). Pro každou permutaci platí $p(j) < j$ pro všechna j od 1 do n . Hodnota se limitně blíží k 36.7% všech možností.

$$a_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \sim \frac{n!}{e}$$



Možné rekurence:

$$a_n = (n - 1) * (a_{n-1} + a_{n-2})$$

$$a_n = n * a_{n-1} + (-1)^n$$

Tento problém vyřešil již [Euler](#) a obsírně se mu věnoval Edouard Lucas ve své knize [Théorie des nombres](#) (1891) na str.211-215 (*Problème des recontres*)

Exponenciální generační funkce:

$$\frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$$

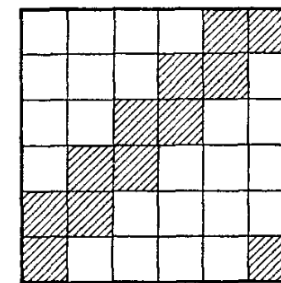
`Table[n!*SeriesCoefficient[E^(-x)/(1-x),{x,0,n}],{n,1,20}]`

V úlohách 1 až 7 jsou "zakázaná" pole určena **staticky**. Vidíme, že pro n kamenů a $k * n$ zakázaných polí vychází asymptotický faktor e^{-k} . Zajímavé je porovnání s kapitolou [12.1](#), kde (při zkoumání n neohrožujících se kamenů se složenou pohyblivostí věže a bodového skokana) docházíme také k definování určitých zakázaných polí, ta však jsou určena až běhově (dynamicky) podle aktuálního rozmístění těchto kamenů. Asymptotické výsledky jsou však podobné.

*In all problems 1-7 are restricted positions defined **statically**. Interesting is comparison with chapter [12.1](#), permutations with **dynamically** restricted positions.*

2) [A000179 Ménage problem](#) Number of permutations p of $[0, \dots, n-1]$ such that $p(j) \not\equiv j$ and $p(i) \not\equiv j+1 \pmod{n}$ for all j .

Tento původně nešachový problém (*Married Couples Problem*) lze interpretovat i jako šachovou úlohu: Počet rozestavení n neohrožujících se věží na **prstencové šachovnici** $n \times n$ takových, že žádná věž nestojí na hlavní diagonále ani na diagonále vedle hlavní diagonály ($p(j) \not\equiv j$, $p(j) \not\equiv j+1$, $p(n) \not\equiv 1$)



Rekurentní vzorec objevil už Lucas, [Théorie des nombres](#), 1891 (ze 2 posloupností uvedených na str. 495 jde o posloupnost λ_n).

Pro $n > 5$ platí

$$a_n = n * a_{n-1} + 2 * a_{n-2} - (n - 4) * a_{n-3} - a_{n-4}$$

nebo (tzv. [Laisant's Recurrence Formula](#))

$$a_n = n * a_{n-1} + \frac{n}{n-2} * a_{n-2} - \frac{4(-1)^n}{n-2}$$

nebo pro $n > 4$

$$a_n = \frac{((n^2 - 3n + 3) * a_{n-1} + a_{n-2}) + (n - 1) * a_{n-3}}{n - 2}$$

Explicitní vzorec objevil J. Touchard. Sur un problème des permutations. Comptes Rendus de L'Acad. des Sciences, T.198, str. 631-633, 1934. Odvození najdeme také v knize N. Vilenkin, [Populyarnaja kombinatorika](#), 1972, str. 170.

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k)! \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k}$$

Generating function (Vladeta Jovovic, 26.6.2007):

$$a_n = \frac{1}{n!} * \left(\frac{d}{dx} \right)_{x=0}^n \left(x + \frac{1-x}{1+x} * \sum_{k=0}^n k! * \left(\frac{x}{(x+1)^2} \right)^k \right)$$

Asymptotické chování zjistil S. M. Kerawala, "Asymptotic solution of the Problème des menages", Bull. Calcutta Math. Soc., 39 (1947), 82-84. Věnují se mu také P. Flajolet a R. Sedgewick v knize [Analytic combinatorics](#) na str. 372. Vypočetl jsem další členy asymptotického rozvoje

$$a_n \sim \frac{n!}{e^2} * \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{37}{24n^4} + \frac{329}{120n^5} + \frac{1501}{720n^6} - \frac{15677}{2520n^7} - \frac{483989}{13440n^8} - \frac{39284461}{362880n^9} - \frac{737652869}{3628800n^{10}} + \dots \right)$$

Tabulka hodnot v programu Mathematica

```
Table[If[n==1, 0, Sum[(-1)^k*(2*n)*Binomial[2*n-k, k]*(n-k)!/(2*n-k), {k, 0, n}]], {n, 1, 25}]
Table[SeriesCoefficient[x*(1-x)/(1+x)*Sum[k!*(x/(1+x)^2)^k, {k, 0, n}], {x, 0, n}], {n, 1, 25}]
```

Velmi zajímavý historický vývoj kolem této úlohy najdeme v knize *Mathematical conversations* (2001), str.277, [On the Probleme des Ménages](#) (Jacques Dutka)

3) A000271 Počet rozestavení n neohrožujících se věží na **normální šachovnici** $n \times n$ takových, že žádná věž nestojí na hlavní diagonále ani na diagonále vedle hlavní diagonály ($p(j) < j$, $p(j) < j+1$). Od úlohy 2 se liší pouze v tom, že druhá diagonála není cyklická, tzv. *Ménages non-circulaires*. Explicitní vzorec je dokonce jednodušší, asymptotické chování podobné.

Explicitní vzorec uvádějí I. Kaplansky and J. Riordan, Le problème des ménages, Scripta Math., 12 (1946), p.113-124.

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k)! \binom{2n-k}{k}$$

Asymptotický vzorec:

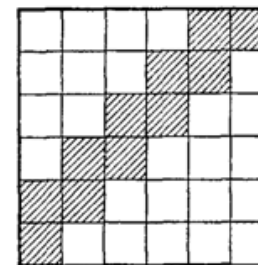
$$a_n \sim \frac{n!}{e^2} * \left(1 - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{3}{8n^4} + \frac{67}{60n^5} + \frac{245}{144n^6} + \frac{1087}{1680n^7} - \frac{12299}{1920n^8} - \frac{2648707}{90720n^9} - \frac{32185541}{403200n^{10}} + \dots \right)$$

Rekurentní vzorec:

$$a_n = (n-1) * a_{n-1} + (n-1) * a_{n-2} + a_{n-3}$$

Tabulka hodnot v programu Mathematica

```
Table[If[n==1, 0, Sum[(-1)^k*Binomial[2*n-k, k]*(n-k)!, {k, 0, n}]], {n, 1, 25}]
```

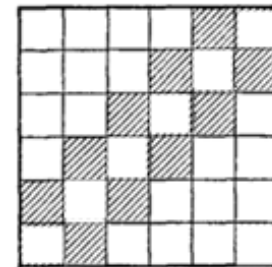


4) [A078480](#) Number of permutations p of $\{1,2,\dots,n\}$ such that $|p(i)-i| < 1$ for all i . Počet rozestavení n neohrožujících se věží na **normální šachovnici** $n \times n$ takových, že žádná věž nestojí na žádné z diagonál kolem hlavní diagonály ($p(j) < j-1$, $p(j) < j+1$).

Asymptotický vzorec odvodil N. S. Mendelsohn, [The asymptotic series for a certain class of permutation problems](#), Canadian Journal of Mathematics, vol. VIII, No.2, 1956, p.234-244 (Example 5).

Rekurentní vzorec:

$$a_n = n * a_{n-1} - (n - 2) * a_{n-3} - a_{n-4}$$



Explicit formula (*Václav Kotěšovec, 28.3.2011*)

$$a_n = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^i (-1)^k (i-k)! \binom{2i-k}{k} \right)$$

Asymptotický vzorec:

$$a_n \sim \frac{n!}{e^2} * \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{4}{3n^3} + \frac{89}{24n^4} + \frac{453}{40n^5} + \frac{27979}{720n^6} + \frac{189061}{1260n^7} + \frac{26000057}{40320n^8} + \frac{1103411357}{362880n^9} + \frac{56391087941}{3628800n^{10}} + \dots \right)$$

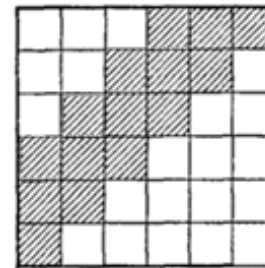
Generating function (*Vladeta Jovovic, 26.6.2007*):

$$a_n = \frac{1}{n!} * \left(\frac{d}{dx} \right)_{x=0}^n \left(\frac{1}{1-x^2} * \sum_{k=0}^n k! * \left(\frac{x}{(x+1)^2} \right)^k \right)$$

Tabulka hodnot v programu Mathematica

```
Table[Sum[Sum[(-1)^k*(i-k)!*Binomial[2i-k,k],{k,0,i}],{i,0,n}],{n,1,25}]
Table[SeriesCoefficient[1/(1-x^2)*Sum[k!*(x/(1+x)^2)^k,{k,0,n}],{x,0,n}],{n,1,25}]
```

5) [A001887 Superménage numbers](#). Počet rozestavení n neohrožujících se věží na **normální šachovnici** $n \times n$ s vyloučením 3 diagonál (pro permutace máme podmínky $p(j) < j$, $p(j) < j+1$, $p(j) < j+2$).



Rekurentní vzorec viz P. Flajolet, [Constrained permutations and the principle of inclusion-exclusion](#), (1997)

$$a_n = (n-1) * a_{n-1} + (n+2) * a_{n-2} - (3n-13) * a_{n-3} - (2n-8) * a_{n-4} \\ + (3n-15) * a_{n-5} + (n-4) * a_{n-6} - (n-7) * a_{n-7} - a_{n-8}$$

nebo pro $n \geq 9$

$$(n-8) * a_n = (n^2 - 8n - 1) * a_{n-1} + 4(n-6) * a_{n-2} - (3n^2 - 33n + 76) * a_{n-3} + (n^2 - 15n + 48) * a_{n-4} + 2(n-7)(n-4) * a_{n-5} - (n-8) * (n-6) * a_{n-6} - (n-7) * a_{n-7}$$

Úlohu (včetně asymptotického vzorce) popisují P. Flajolet a R. Sedgewick v knize [Analytic combinatorics](#) na str. 373.

Doplnil jsem další členy asymptotického rozvoje:

$$a_n \sim \frac{n!}{e^3} * \left(1 - \frac{5}{2n^2} - \frac{5}{2n^3} - \frac{21}{8n^4} - \frac{53}{20n^5} + \frac{59}{48n^6} + \frac{4367}{112n^7} + \frac{118945}{384n^8} + \frac{2311663}{1120n^9} + \frac{1755471197}{134400n^{10}} + \dots \right)$$

Generating function (Vladeta Jovovic, 30.6.2007):

$$a_n = \frac{1}{n!} * \left(\frac{d}{dx} \right)_{x=0}^n \left(\frac{1}{x^2 - 1} * \left(x - \sum_{k=0}^n k! \left(\frac{x(x-1)}{x^3 - 2x - 1} \right)^k \right) \right)$$

Tabulka hodnot v programu Mathematica

```
Table[SeriesCoefficient[1/(x^2-1)*(x-Sum[k!*(x*(x-1)/(x^3-2*x-1))^k,{k,0,n}]),{x,0,n}],{n,1,25}]
```

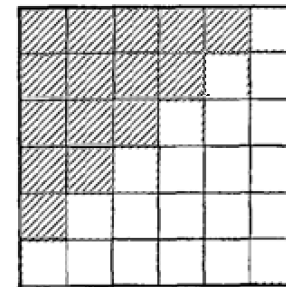

6) Number of ways to place k non-attacking rooks on an **triangle** $n \times n$ board

Pokud ze šachovnice vyřizneme všechna pole nad hlavní diagonálou, jde samozřejmě rozmístit na takovou trojúhelníkovou šachovnici n věží pouze jediným způsobem (všechny na hlavní diagonálu). Zajímavý je však vzorec na rozmístění (menšího počtu) k neohrožujících se věží:

$$a_{k,n} = S_2(n+1, n-k+1)$$

kde S_2 jsou [Stirlingova čísla druhého druhu](#), $S_2 =$ [Stirling numbers of the second kind](#)

Viz např. John Riordan, An Introduction to Combinatorial Analysis, 1958, p.213-216 (chap.6, Triangular Permutations), p.234 (problem 29).

*Similar problem for **queens** - number of ways to arrange k non-attacking queens on the lower triangle of an $n \times n$ board*

Podobný problém pro dámy ($k=3$ až 7) viz OEIS [A194493](#) až [A194497](#), hodnoty vypočítal 26.8.2011 R. H. Hardin. Pro $k=3$ a $k=4$ našel i rekurenci.

k=3, (R. H. Hardin, 26.8.2011)

$$a_n = 3a_{n-1} - 7a_{n-3} + 3a_{n-4} + 6a_{n-5} - 6a_{n-7} - 3a_{n-8} + 7a_{n-9} - 3a_{n-11} + a_{n-12}$$

Explicit formula (V. Kotěšovec, 8.4.2012)

$$\frac{n^6}{48} - \frac{11n^5}{48} + \frac{15n^4}{16} - \frac{29n^3}{18} + \frac{15n^2}{32} + \frac{139n}{96} - \frac{217}{288} + (-1)^n \left(\frac{n^2}{32} - \frac{9n}{32} + \frac{17}{32} \right) - \frac{2}{9\sqrt{3}} \sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + \frac{2}{9} \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right)$$

or

$$\frac{n^6}{48} - \frac{11n^5}{48} + \frac{15n^4}{16} - \frac{241n^3}{144} + \frac{17n^2}{16} - \frac{17n}{144} + \left(\frac{n^2}{8} - \frac{9n}{8} + \frac{17}{8} \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{2}{3} \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

Generating function

$$-2x^5 * \frac{18x^5 + 40x^4 + 51x^3 + 42x^2 + 23x + 6}{(x-1)^7 * (x+1)^3 * (x^2+x+1)}$$

k=4, (R. H. Hardin, 26.8.2011)

$$a_n = 4a_{n-2} + 3a_{n-3} - 5a_{n-4} - 11a_{n-5} - 3a_{n-6} + 11a_{n-7} + 14a_{n-8} + 6a_{n-9} - 7a_{n-10} - 16a_{n-11} - 14a_{n-12} + 14a_{n-14} + 16a_{n-15} + 7a_{n-16} - 6a_{n-17} - 14a_{n-18} - 11a_{n-19} + 3a_{n-20} + 11a_{n-21} + 5a_{n-22} - 3a_{n-23} - 4a_{n-24} + a_{n-26}$$

Explicit formula (V. Kotěšovec, 8.4.2012)

$$\frac{n^8}{384} - \frac{n^7}{16} + \frac{23n^6}{36} - \frac{10363n^5}{2880} + \frac{3427n^4}{288} - \frac{31301n^3}{1440} + \frac{82379n^2}{5760} + \frac{72271n}{5760} - \frac{121631}{8640} + (-1)^n \left(\frac{n^4}{128} - \frac{17n^3}{96} + \frac{193n^2}{128} - \frac{2209n}{384} + \frac{509}{64} \right) + \left(-\frac{n^2}{9\sqrt{3}} + \frac{13n}{9\sqrt{3}} - \frac{64}{9\sqrt{3}} \right) \sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + \left(\frac{n^2}{9} - \frac{13n}{9} + \frac{136}{27} \right) \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + \frac{35}{16} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{11}{16} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{25} \sqrt{50 - 22\sqrt{5}} \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) - \frac{1}{25} \sqrt{50 + 22\sqrt{5}} \sin\left(\frac{8\pi n}{5}\right) + \frac{1}{25} (5 - \sqrt{5}) \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + \frac{1}{25} (5 + \sqrt{5}) \cos\left(\frac{8\pi n}{5}\right)$$

or

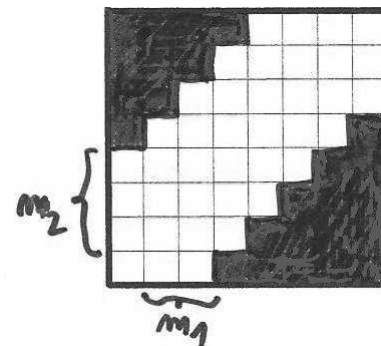
$$\frac{n^8}{384} - \frac{n^7}{16} + \frac{23n^6}{36} - \frac{1301n^5}{360} + \frac{14125n^4}{1152} - \frac{8013n^3}{320} + \frac{83147n^2}{2880} - \frac{2089n}{160} + \left(\frac{n^4}{32} - \frac{17n^3}{24} + \frac{193n^2}{32} - \frac{2209n}{96} + \frac{439}{16} \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{n^2}{3} - \frac{13n}{3} + \frac{136}{9} \right) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \frac{28}{9} \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \frac{23}{4} \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 3 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \frac{4}{5} \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor - \frac{2}{5} \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor - \frac{2}{5} \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor$$

Generating function

$$-2x^6 * \frac{287x^{18} + 1545x^{17} + 4929x^{16} + 11689x^{15} + 22673x^{14} + 36995x^{13} + 51875x^{12} + 63203x^{11} + 67465x^{10} + 63168x^9 + 51807x^8 + 36900x^7 + 22544x^6 + 11587x^5 + 4879x^4 + 1606x^3 + 385x^2 + 59x + 4}{(x-1)^9 * (x+1)^5 * (x^2+1) * (x^2+x+1)^3 * (x^4+x^3+x^2+x+1)}$$

*Number of ways to arrange 2-7 nonattacking **knights** on the lower triangle of an $n \times n$ board.* Podobný problém pro jezdce ($k=2$ až 7) viz OEIS [A194486](#) až [A194491](#) (vzorce, které určil R. H. Hardin, jsou v tomto případě vždy pouze polynomy).

7) Rozmístění n neohrožujících se věží na šachovnici $n \times n$ v **diagonálním pásu pevné šířky**, viz diagram vpravo (kde $m_1=2$, $m_2=3$). V řeči permutací jde o takové permutace, splňující pro všechna $i=1..n$ podmínku $i - m_1 \leq p(i) \leq i + m_2$, kde m_1 a m_2 jsou konstanty (nezávislé na n). Pro počet takových pozic platí triviální odhad $a(n, m_1, m_2) < (m_1 + m_2 + 1)^n$. Obecně lze pro dané dvojice odvodit explicitní vzorce i lepší asymptotické odhady. Touto problematikou se zabývali zejména Torleiv Kløve v článku [Permutations with limited displacement](#), 2008, Vladimír Baltić, [On the number of certain types of strongly restricted permutations](#), 2010 a také D. H. Lehmer, "Permutations with strongly restricted displacements", *Combinatorial Theory and its Applications II*, 1970, str. 755-770. Obecně platí



$$a(n, m_1, m_2) \sim b(m_1, m_2) * c(m_1, m_2)^n$$

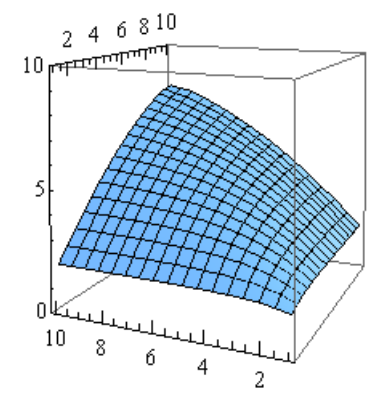
kde $b(m_1, m_2)$ a $c(m_1, m_2)$ jsou konstanty.

Pokud je $m_1 = m_2 = d$, platí nerovnost

$$\frac{2d + 1}{e} \leq c(d, d) \leq ((2d + 1)!)^{\frac{1}{2d+1}}$$

Tabulka numerických hodnot:

$c(m_1, m_2)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.618033989	1.839286755	1.927561975	1.965948237	1.983582843	1.991964197	1.996031180	1.998029470	1.999018633	1.999510402
2	1.839286755	2.333554225	2.607713821	2.762837650	2.853350961	2.907681095	2.941067827	2.961974492	2.975261995	2.983805456
3	1.927561975	2.607713821	3.061773428	3.360085301	3.557549648	3.690132983	3.780521982	3.843032537	3.886816818	3.917825448
4	1.965948237	2.762837650	3.360085301	3.793515545	4.105969055	4.332045682	4.496898974	4.618204494	4.708285833	4.775762174
5	1.983582843	2.853350961	3.557549648	4.105969055	4.526773212	4.848556026	5.095135697	5.284978608	5.431992809	5.546544037
6	1.991964197	2.907681095	3.690132983	4.332045682	4.848556026	5.260823449	5.589234180	5.851187855	6.060774426	6.229126733
7	1.996031180	2.941067827	3.780521982	4.496898974	5.095135697	5.589234180	5.995340631	6.328706912	6.602600994	6.82811
8	1.998029470	2.961974492	3.843032537	4.618204494	5.284978608	5.851187855	6.328706912	6.730156193	7.06737	7.35
9	1.999018633	2.975261995	3.886816818	4.708285833	5.431992809	6.060774426	6.602600994	7.06737	7.464	
10	1.999510402	2.983805456	3.917825448	4.775762174	5.546544037	6.229126733	6.82811	7.35		



Odkazy na jednotlivé sekvence v OEIS, kde je možno nalézt vzorce nebo generační funkce.

m_1, m_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	A000045									
2	A000073	A002524								
3	A000078	A072827	A002526							
4	A001591	A072850	A072854	A072856						
5	A001592	A072852	A072855	A179340	A154654					
6	A122189	A072853	A179341	A179342	A179343	A154655				
7		A179344	A179345	A179346	A179347	A179348	A154656			
8		A179349	A179350	A179351	A179352	A179353	A179354	A154657		
9		A179355	A179356	A179357	A179358	A179359	A179360	A179361	A154658	
10		A179362	A179363	A179364	A179365	A179366	A179367	A179368	A179369	A154659

Konstanty $c(m_1, m_2)$ jsou obecně **kořeny algebraických rovnic**. Pro $m_1=1$ je $c(1, m_2) = x$ kořenem rovnice $x^{m_2+2} = 2x - 1$, a speciálně pokud je i $m_2=1$, vede sekvence na Fibonacciho čísla. Pro $m_1 = m_2 = d$ je stupeň této rovnice (hloubka rekurence) roven

$$2^{d-1} + \frac{1}{2} * \binom{2d}{d}$$

8) [A000085](#) Počet pozic n neohrožujících se věží **symetrických kolem hlavní diagonály** (tedy takových, že pro každou permutaci platí $p(p(j)) = j$ pro všechna j od 1 do n). Rekurenci objevil (při řešení jiného problému, tzv. [involution numbers](#)) už v roce 1800 Heinrich August Rothe.

$$D_{n+1} = D_n + n * D_{n-1}$$

V souvislosti se šachem tuto rekurenci poprvé zmiňuje Edouard Lucas, viz [Théorie des nombres](#) (1891), str.215-217 (*Des permutations figurées, symétriques par rapport à une diagonale de l'échiquier*), kde najdeme i podrobné odvození explicitního vzorce

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2^k k! (n-2k)!}$$

[Exponenciální vytvořující funkce](#) pro tuto sekvenci je

$$e^{\frac{x^2}{2} + x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n x^n}{n!}$$

Elegantní asymptotický vzorec objevil Sarvadaman Chowla, [The asymptotic behavior of solutions of difference equations](#) (p.377), 1950. Netriviální odvození (s užitím integrálů funkcí komplexní proměnné) najdeme v knize "A Course in Combinatorics", J. H. van Lint, R. M. Wilson, 1992, str.127-128, v [second edition](#), 2001, pak na str.147-148 (Example 14.15). Viz též P. Flajolet a R. Sedgewick, [Analytic combinatorics](#), str. 560.

$$D_n \sim \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{2} e^{1/4}} \left(\frac{n}{e} \right)^{\frac{n}{2}} * \left(1 + \frac{7}{24\sqrt{n}} - \frac{119}{1152n} - \frac{7933}{414720n\sqrt{n}} - \frac{215}{6912n^2} - \frac{18013}{2488320n^2\sqrt{n}} + \dots \right)$$

Odvodit členy obsahující výrazy s n lze i s užitím elementární matematiky, obtížné je ale odvození tvaru násobící konstanty, kde se využije toho, že $\int_{-\infty}^{\infty} e^{y-y^2} dy = e^{1/4}\sqrt{\pi}$

Tabulka hodnot v programu Mathematica (výpočet přes binomické koeficienty a [dvojitý faktoriál](#) je v tomto programu výrazně rychlejší)

```
Table[Sum[Binomial[n, 2k] * (2k-1) !! , {k, 0, Floor[n/2]}] , {n, 1, 25}]
```

nebo přes vytvořující funkci

```
Table[SeriesCoefficient[E^(x^2/2+x) * n! , {x, 0, n}] , {n, 1, 25}]
```

Předchozí klasický příklad poměrně jednoduché sekvence s neelementárním asymptotickým rozvojem dává příležitost se zde na chvíli zastavit a porovnat současné možnosti počítačových programů při hledání asymptotických vzorců sekvencí daných rekurencemi nebo vytvořujícími funkcemi. Obecně lze říci, že **hledání asymptotického průběhu sekvence**, zejména když známe jenom několik jejích prvních členů, **je asi tím nejsložitějším, ale současně i tím nejzajímavějším v tomto oboru**. Numerické extrapolace mohou být dobrým odhadem, ale hypotézy z nich pocházející nemusí být vždy správné. Trochu lepší situace nastává, když se nám podaří najít rekurenci nebo [vytvořující funkci](#). Pokud je rekurence lineární s konstantními koeficienty, jde snadno řešit analyticky (vytvořující funkce je racionální lomená, jejíž jmenovatel je dán rekurencí). Nás ale hlavně zajímá složitější případ, když koeficienty jsou polynomy v n . Existují minimálně 3 velmi dobré programy, které nám mohou pomoci. Vždy je však ještě dobré výsledky ověřit i numericky alespoň pro $n=1000$, ale raději větší - pokud to čas výpočtu dovolí.

• AsyRec

Maple package [AsyRec](#) by Doron Zeilberger z let 2008-2009 je asi nejpropracovanější program tohoto typu. Umožňuje najít z lineární rekurence s polynomiálními koeficienty asymptotický průběh. Obsahuje řadu funkcí. Rekurence musí být ve tvaru s kladnými indexy a členy rekurence typu a_{n+i} se zadávají jako N^i . Předchozí sekvenci zadáme pomocí funkce

> `AsyC(N^2 - N - n - 1, n, N, 5, [1, 2], 10000);`

$$0.55069531490320, e^{-\frac{1}{2}n} n^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{7}{24\sqrt{n}} - \frac{119}{1152n} - \frac{7933}{414720n^{3/2}} + \frac{1967381}{39813120n^2} - \frac{57200419}{1337720832n^{5/2}} \right)$$

Velkou výhodou je, že lze určit i násobící konstantu, sice jen numericky (s tím, že program automaticky určuje počet platných cifer), ale občas pomůže funkce programu Maple *identify*, která umí rozpoznat některé konstanty a převést na symbolické výrazy:

> `identify(.55069531490320);`

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} e^{-\frac{1}{4}}$$

Pro maximální přesnost je samozřejmě dobré vygenerovat co nejvíce členů posloupnosti, ale větší vliv na počet platných cifer má počet členů asymptotického rozvoje.

Bohužel tento program (používající tzv. metodu [Birkhoff -Trjitzinsky](#) z roku 1932) umí najít asymptotický průběh jen v některých případech a dost často selže s chybou "*Dominant roots are complex*" nebo "*Dominant real roots are negatives of each other*", např. u sekvence [A002720](#), viz str. 219, `AsyC(N^2-2*(n+2)*N+(n+1)*(n+1), n, N, 5, [2, 7], 1000)`

• Asymptotics.m

V případě sekvence [A002720](#) je úspěšnější program [Asymptotics.m](#) (viz str. 280 a str. 433), jehož autorem je Manuel Kauers (poslední verze je z roku 2011). Modul pracuje pod programem Mathematica (testoval jsem jej pod verzí 7, pod verzí 8 byly občas problémy s kompatibilitou). Program však neumí určit násobící konstantu. Výstupem jsou partikulární členy, z nichž vybereme vždy ten dominantní. Předchozí sekvenci [A000085](#) zadáme takto:

`Asymptotics[d[n+1] - d[n] - n*d[n-1], d[n], Order -> 1]`

$$\left\{ (-1)^n e^{-\sqrt{n} - \frac{n}{2}} \left(1 - \frac{119}{1152n} - \frac{7}{24\sqrt{n}} \right) n^{n/2}, e^{\sqrt{n} - \frac{n}{2}} \left(1 - \frac{119}{1152n} + \frac{7}{24\sqrt{n}} \right) n^{n/2} \right\}$$

Nepovinný parametr *Order* určuje hloubku asymptotického rozvoje.

• Algolib, funkce equivalent

Autorem několika užitečných procedur pro práci s generačními funkcemi je Bruno Salvy. Modul [gfun](#) byl zabudován přímo do programu Maple. Dalším je modul [Algolib](#), obsahující skvělou funkci *equivalent*. Funkce *rectodiffeq* umožňuje převod rekurence na příslušnou diferenciální rovnici pro [generační funkci](#). Tu pak lze řešit pomocí *dsolve*. Pro předchozí příklad (kdy budeme hledat exponenciální gen.funkci) vynásobíme členy rekurence $(n+i)!$.

`with(gfun) : rectodiffeq({(n+1)·a(n+1) - a(n) - a(n-1), a(0) = 1, a(1) = 1}, a(n), f(x));`
`dsolve(rectodiffeq({(n+1)·a(n+1) - a(n) - a(n-1), a(0) = 1, a(1) = 1}, a(n), f(x)));`

$$\left\{ (-x-1)f(x) + \frac{d}{dx}f(x), f(0) = 1 \right\}$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}x(x+2)}$$

Funkce *equivalent* hledá asymptotický průběh podle generační funkce (metody viz P. Flajolet a R. Sedgewick, [Analytic combinatorics](#), kap. VIII, "Saddle Point Asymptotics", str. 507-565).

> `simplify(equivalent(e^{\frac{1}{2}x(x+2)}, x, n, 1)) assuming n > 0;`

$$\frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{1}{4} + \sqrt{n} + \frac{1}{2}n} n^{-\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}} + 2 O\left(e^{\sqrt{n} + \frac{1}{2}n} n^{-1 - \frac{1}{2}n} \right) \sqrt{\pi n}}{n \sqrt{\pi}}$$

Jelikož se jednalo o exponenciální generační funkci, je třeba (abychom se dostali k původní sekvenci) výsledek ještě vynásobit $n!$. Pro porovnání vygenerujeme ještě další člen (v tomto případě vychází správně, ale jinak je u funkce *equivalent* spolehlivý jen první člen).

> `asympt(n! · equivalent(e^{\frac{1}{2}x(x+2)}, x, n, 2), n, 2);`

$$\frac{\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} e^{-\frac{1}{4}} + \frac{7}{96} \sqrt{2} e^{-\frac{1}{4}} \sqrt{4} \sqrt{\frac{1}{n}} + O\left(\frac{1}{n} \right) \right) e^{\sqrt{\frac{1}{n}}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \right)^n \sqrt{e^n}}}$$

Vidíme, že program vypočetl i **násobící konstantu na symbolické úrovni!** Je ovšem třeba dodat, že i tento program má svoje meze a řada funkcí nebo složitějších výrazů je nad jeho síly. Stejně tak se jen málokdy podaří vyřešit diferenciální rovnici určenou ze sekvence.

Viz též článek [Too many errors around coefficient C₁ in asymptotic of sequence A002720](#), V. Kotěšovec, 28.9.2012

9) [A000903](#) *Number of inequivalent ways of placing n non-attacking rooks on $n \times n$ board.*

- Počtem **neidentických konfigurací** neohrožujících se n věží na šachovnici $n \times n$ se jako první zabýval Edouard Lucas ve své knize [Théorie des nombres](#) (1891) na str.215-223.
- Dále viz R. W. Robinson, Counting arrangements of bishops, pp. 198-214 of Combinatorial Mathematics IV (Adelaide 1975), Lecture Notes in Mathematics, 560 (1976). Na str.199 je kapitola "The problem of the rooks".
- V ruštině úlohy č. 1, 2 a 7 popisuje N. Vilenkin v knize [Populyarnaja kombinatorika](#), 1972, str. 165-175.

Dále viz sekvence [A000900](#), [A000898](#), [A037223](#) v OEIS.

Na doplnění ještě několik vzorců, které sice s tématem této knihy přímo nesouvisejí, ale mohou být zajímavé.

10) **Počet možných cest věže z levého dolního do pravého horního rohu** šachovnice. Vytvořující funkce našli M. Erickson, S. Fernando, K. Tran v článku "Enumerating Rook and Queen Paths", Bulletin of the Institute for Combinatorics and its Applications, Volume 60 (2010), p.37-48. Zaujmou zejména asymptotické vzorce.

[A051708](#) *Number of ways to move a chess rook from the lower left corner [1,1] to square [n,n], with the rook moving only up or right.*

$$w_n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} 3^{2n-3}$$

Jsou známy i některé výsledky pro vícerozměrnou věž. Příklad 3D viz sekvence [A144045](#). Rekurenci a asymptotický vzorec našel Frédéric Chyzak (2010):

$$w(3)_n \sim \frac{9\sqrt{3}}{40 \pi n} * 64^{n-1}$$

Další známé výsledky lze nalézt v článku [The Computational Challenge of Enumerating High-Dimensional Rook Walks](#), Manuel Kauers and Doron Zeilberger 2010. Jen je třeba dát pozor na to, že autoři začínají na poli [0,0,0] a končí na [n,n,n], proto v tomto článku vlastně uvažují šachovnice $n+1 \times n+1$. Sekvence v [OEIS](#) naopak začínají (v obvyklém) bodě [1,1,1] a jsou proto o 1 posunuté. Pro d dimenzí existuje asymptotický vzorec, který odvodili Robin Pemantle a Mark C. Wilson (2004), upraveno pro [1,1,1]:

$$w(d)_n \sim \sqrt{\frac{d^{d+2}}{(2\pi n (d+2))^{d-1}}} (d+1)^{dn-d-1}$$

Pro počet nekřížících se cest viz [A160392](#).

[A132595](#) *Number of ways to move a chess queen from the lower left corner [1,1] to square [n,n], with the queen moving only up, right, or diagonally up-right.*

A pro cesty dámy:

$$w_n \sim \frac{1}{8} \sqrt{\frac{10(3\sqrt{5}-5)}{\pi n}} (\sqrt{5}+1)^{2n-2}$$

V porovnání s věží (kdy má mocninný člen hodnotu 9), je možných cest dámy samozřejmě více - mocninný člen má hodnotu 10.4721

Poslední doplňující příklad zůstává na šachovnici 8×8 a určuje počet možných cest krále délky n z rohu do protilehlého rohu šachovnice.

[A025597](#) *Number of n -move king paths on 8×8 board from given corner to opposite corner.* Elegantní vzorec odvodil Andrew Buchanan, 24.6.2012. Zobecnění pro šachovnice jiných rozměrů se ovšem samo nabízí...

$$\frac{4}{81} \sum_j^8 \sum_k^8 (-1)^{j+k} \sin^2\left(\frac{\pi j}{9}\right) \sin^2\left(\frac{\pi k}{9}\right) \left(\left(2 \cos\left(\frac{\pi j}{9}\right) + 1\right) \left(2 \cos\left(\frac{\pi k}{9}\right) + 1\right) - 1 \right)^n$$

3.2) k Rooks on an $k \times n$ chessboard - k věží na šachovnici $k \times n$

Z předchozího vzorce pro obecnou obdélníkovou šachovnici vyplývá (při $m = k$) pro

k rooks, board $k \times n$, explicitní vzorec

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

vytvěřující funkce (*generating function*)

$$\frac{k! x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Pro srovnání s ostatními vzorci, počet těchto rozmístění je také polynom, po roznásobení dostaneme jeho koeficienty ve tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!} &= n^k - n^{k-1} * \frac{k(k-1)}{2} + \\ &n^{k-2} * \frac{k(k-1)(k-2)(3k-1)}{24} - \\ &n^{k-3} * \frac{k^2(k-1)^2(k-2)(k-3)}{48} + \\ &n^{k-4} * \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(15k^3 - 30k^2 + 5k + 2)}{5760} - \\ &n^{k-5} * \frac{k^2(k-1)^2(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)(3k^2 - 7k - 2)}{11520} + \\ &n^{k-6} * \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)(k-6)(63k^5 - 315k^4 + 315k^3 + 91k^2 - 42k - 16)}{2903040} - \dots \end{aligned}$$

Při použití kombinačních čísel, např. "k nad 12" $\binom{k}{12}$ je $\frac{k!}{(k-12)!12!}$ lze zápis tohoto výrazu trochu zjednodušit:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!} &= n^k + n^{k-1} * \frac{(-1)^1}{2^1} * \binom{k}{2} * 2 \\ &+ n^{k-2} * \frac{(-1)^2}{2^2} * \binom{k}{3} * (3k-1) \\ &+ n^{k-3} * \frac{(-1)^3}{2^3} * \binom{k}{4} * 4k(k-1) \\ &+ n^{k-4} * \frac{(-1)^4}{2^4} * \binom{k}{5} * \frac{15k^3 - 30k^2 + 5k + 2}{3} \\ &+ n^{k-5} * \frac{(-1)^5}{2^5} * \binom{k}{6} * 2k(k-1)(3k^2 - 7k - 2) \\ &+ n^{k-6} * \frac{(-1)^6}{2^6} * \binom{k}{7} * \frac{63k^5 - 315k^4 + 315k^3 + 91k^2 - 42k - 16}{9} \\ &+ n^{k-7} * \frac{(-1)^7}{2^7} * \binom{k}{8} * \frac{8k(k-1)(9k^4 - 54k^3 + 51k^2 + 58k + 16)}{9} \\ &+ n^{k-8} * \frac{(-1)^8}{2^8} * \binom{k}{9} * \frac{135k^7 - 1260k^6 + 3150k^5 - 840k^4 - 2345k^3 - 540k^2 + 404k + 144}{15} \\ &+ n^{k-9} * \frac{(-1)^9}{2^9} * \binom{k}{10} * \frac{2k(k-1)(15k^6 - 165k^5 + 465k^4 + 17k^3 - 648k^2 - 548k - 144)}{3} \\ &+ n^{k-10} * \frac{(-1)^{10}}{2^{10}} * \binom{k}{11} * \frac{99k^9 - 1485k^8 + 6930k^7 - 8778k^6 - 8085k^5 + 8195k^4 + 11792k^3 + 2068k^2 - 2288k - 768}{9} \\ &+ n^{k-11} * \frac{(-1)^{11}}{2^{11}} * \binom{k}{12} * \frac{4k(k-1)(9k^8 - 156k^7 + 834k^6 - 1080k^5 - 1927k^4 + 1252k^3 + 4156k^2 + 3056k + 768)}{3} + \dots \end{aligned}$$

Koeficienty těchto polynomů se nazývají Stirlingova čísla prvního druhu, [Stirling Numbers of the First Kind](#). Viz též [Stirling's polynomials](#) nebo [OEIS - A112002](#).

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2) * \dots * (n-k+1) = \sum_{j=0}^k S_1(k,j) * n^j$$

Na tomto místě se chci zmínit o tom, jak nejlépe odhadnout asymptotické chování podobných funkcí (tedy situaci, kdy jde n do nekonečna). Příklad věží je jednoduchý a lze jej vyřešit snadno i analyticky, ale na dalších místech této knihy budou analyzovány mnohem složitější rozvoje (ze kterých někde půjde tímto postupem dokonce odvodit i přesné vzorce, viz např. [semi-wazirs](#)) a je proto třeba mít připravenou vhodnou metodiku.

Můžeme začít tím, že určíme jednoduchý asymptotický rozvoj

V programu Mathematica např. takto

```
Series[n!/(n-k)!/n^k, {n, Infinity, 4}]
```

Trivial asymptotics (green points in graph)

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n^k * \left(1 - \frac{(k-1)k}{2n} + \frac{(k-2)(k-1)(3k-1)k}{24n^2} - \frac{(k-3)(k-2)(k-1)^2k^2}{48n^3} + \frac{(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)k(15k^3 - 30k^2 + 5k + 2)}{5760n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \right)$$

Pro praktické výpočty je však tento odhad značně nepřesný (viz graf níže pro 4 první členy, odhad odpovídá zeleným bodům).

Podle nejvyšších členů můžeme však rozvoje z předchozí strany přepsat do tvaru (*expansions from previous page in different format*):

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n^k * \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d k^{2d}}{2^d n^d d!} * \left(1 - \frac{d(2d+1)}{3k} + \frac{(d-1)d(4d^2+4d+3)}{18k^2} - \frac{(d-1)d(2d-1)(20d^3-11d-48)}{810k^3} + \dots \right)$$

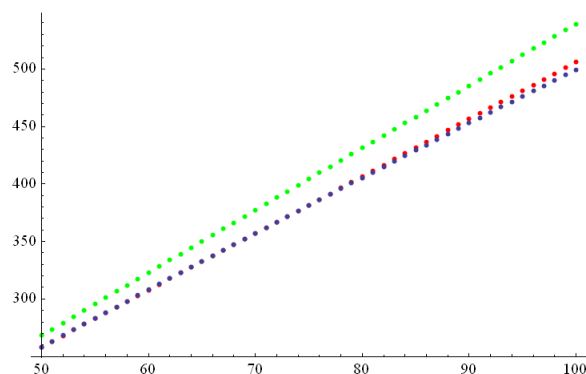
Když sečteme tuto řadu, dostaneme lepší odhad (v grafu odpovídá červeným bodům a pro menší k téměř splývá se skutečnými hodnotami, počet členů je shodný).

Better asymptotics (red points in graph)

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n^k e^{-\frac{k^2}{2n}} * \left(1 + \frac{k}{2n} - \frac{(k-2)k(4k-1)}{24n^2} - \frac{k^2(8k^2-15k+6)}{48n^3} + \frac{k(80k^5-888k^4+1655k^3-900k^2+20k+48)}{5760n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \right)$$

```
Show[ListPlot[Table[{k, Log[asympt1]}, {k, 50, 100}] /. n -> 200, PlotStyle -> Green],
ListPlot[Table[{k, Log[asympt2]}, {k, 50, 100}] /. n -> 200, PlotStyle -> Red],
ListPlot[Table[{k, Log[n!/(n-k)!]}, {k, 50, 100}] /. n -> 200]]
```

V grafu jsou přesné hodnoty označeny modrými body (*exact values = blue points*), graf je v logaritmickém měřítku. Vidíme, že druhý odhad je mnohem přesnější.



Předchozí transformace snížila u členů $\frac{1}{n^d}$ nejvyšší exponenty u k z původních k^{2d} na $k^{\lfloor \frac{3d}{2} \rfloor}$, čímž se zrychlila konvergence.

Poznámka: Samozřejmě, v tomto konkrétním případě lze pomocí [Stirlingova vzorce](#) odvodit ještě lepší asymptotický rozvoj tohoto výrazu

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n^k e^{-k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-n} \sqrt{\frac{n}{n-k}} * \left(1 - \frac{k}{12n^2} - \frac{k^2}{12n^3} - \frac{k(120k^2-5k-12)}{1440n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \right)$$

Šlo však o příklad a vysvětlení metody transformace, která bude použita u složitějších výrazů.

n	2 rooks	3 rooks	4 rooks	5 rooks	6 rooks	7 rooks	8 rooks	9 rooks	10 rooks
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	6	6	0	0	0	0	0	0	0
4	12	24	24	0	0	0	0	0	0
5	20	60	120	120	0	0	0	0	0
6	30	120	360	720	720	0	0	0	0
7	42	210	840	2520	5040	5040	0	0	0
8	56	336	1680	6720	20160	40320	40320	0	0
9	72	504	3024	15120	60480	181440	362880	362880	0
10	90	720	5040	30240	151200	604800	1814400	3628800	3628800
11	110	990	7920	55440	332640	1663200	6652800	19958400	39916800
12	132	1320	11880	95040	665280	3991680	19958400	79833600	239500800
13	156	1716	17160	154440	1235520	8648640	51891840	259459200	1037836800
14	182	2184	24024	240240	2162160	17297280	121080960	726485760	3632428800
15	210	2730	32760	360360	3603600	32432400	259459200	1816214400	10897286400
16	240	3360	43680	524160	5765760	57657600	518918400	4151347200	29059430400
17	272	4080	57120	742560	8910720	98017920	980179200	8821612800	70572902400
18	306	4896	73440	1028160	13366080	160392960	1764322560	17643225600	158789030400
19	342	5814	93024	1395360	19535040	253955520	3047466240	33522128640	335221286400
20	380	6840	116280	1860480	27907200	390700800	5079110400	60949324800	670442572800

4.1) k Bishops on an $n \times n$ chessboard - k střelců na šachovnici $n \times n$

Tento problém byl zcela vyřešen pro libovolné k . Základ k tomu položil ruský matematik S. E. Arshon, jehož (do dnešní doby téměř neznámé!) vzorce z roku 1936 pro rozmístění n neohrožujících se střelců na šachovnici $n \times n$ jdou snadno zobecnit i pro k střelců na $n \times n$, viz str. 254. Přesto z těchto složitých sum automaticky nevyplývají vzorce vyjádřené polynomy v n pro jednotlivá malá (konstantní) k , proto má smysl publikovat současně i tyto mnohem jednodušší vzorce.

Polynomiální vzorce najdeme např. v knize [Schach und Zahl, 1966](#) (str.58-62), jejímž autorem byl Karl Fabel, který sám objevil vzorce pro $k=3$ a $k=4$. Vzorec pro $k=2$ uvádí již [Henry Dudeney](#) ve své knize "Amusements in Mathematics" (1917), str. 96.

A172123 - 2 bishops, board $n \times n$: (H. Dudeney, 1917)

$$\frac{n(n-1)(3n^2-n+2)}{6}$$

A172124 - 3 bishops, board $n \times n$: (K. Fabel, 1966)

pro n sudé (even)

$$\frac{n(n-2)(2n^4-4n^3+7n^2-6n+4)}{12}$$

pro n liché (odd)

$$\frac{(n-1)(2n^5-6n^4+9n^3-11n^2+5n-3)}{12}$$

nebo jedním vzorcem:

$$\frac{4n^6-16n^5+30n^4-40n^3+32n^2-16n+3}{24} - \frac{(-1)^n}{8}$$

A172127 - 4 bishops, board $n \times n$: (K. Fabel, 1966)

pro n sudé (even)

$$\frac{n(n-2)(15n^6-90n^5+260n^4-524n^3+727n^2-646n+348)}{360}$$

pro n liché (odd)

$$\frac{(n-1)(n-2)(15n^6-75n^5+185n^4-339n^3+388n^2-258n+180)}{360}$$

nebo jedním vzorcem:

$$\frac{(n-2)(15n^7-90n^6+260n^5-524n^4+727n^3-646n^2+393n-90)}{360} - (n-2)^2 * \frac{(-1)^n}{8}$$

96 AMUSEMENTS IN MATHEMATICS

	With Attack.	Without Attack.
2 Queens	$\frac{5n^3-6n^2+n}{3}$	$\frac{3n^4-10n^3+9n^2-2n}{6}$
2 Rooks	n^3-n^2	$\frac{n^4-2n^3+n^2}{2}$
2 Bishops	$\frac{4n^3-6n^2+2n}{6}$	$\frac{3n^4-4n^3+3n^2-2n}{6}$
2 Knights	$4n^3-12n+8$	$\frac{n^4-9n^2+24n}{2}$

A172129 - 5 bishops, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 26.1.2010)

pro n sudé (even)

$$\frac{n(n-2)(3n^8 - 34n^7 + 177n^6 - 590n^5 + 1435n^4 - 2592n^3 + 3326n^2 - 2844n + 1344)}{360}$$

pro n liché (odd)

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(3n^7 - 22n^6 + 80n^5 - 204n^4 + 379n^3 - 464n^2 + 378n - 270)}{360}$$

nebo jedním vzorcem:

$$\frac{(n-2)(6n^9 - 68n^8 + 354n^7 - 1180n^6 + 2870n^5 - 5184n^4 + 6697n^3 - 6018n^2 + 3558n - 810)}{720} - (n-2)(3n^3 - 22n^2 + 58n - 54) * \frac{(-1)^n}{48}$$

A176886 - 6 bishops, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 27.4.2010)

pro n sudé (even)

$$\frac{n(n-2)(126n^{10} - 2268n^9 + 18774n^8 - 97216n^7 + 361165n^6 - 1029454n^5 + 2283178n^4 - 3841960n^3 + 4676932n^2 - 3808152n + 1640160)}{90720}$$

pro n liché (odd)

$$\frac{(n-1)(n-3)(126n^{10} - 2016n^9 + 14868n^8 - 69244n^7 + 234017n^6 - 607984n^5 + 1211879n^4 - 1797328n^3 + 1953593n^2 - 1550820n + 722925)}{90720}$$

nebo jedním vzorcem:

$$\frac{n^{12}}{720} - \frac{n^{11}}{36} + \frac{37n^{10}}{144} - \frac{4813n^9}{3240} + \frac{8819n^8}{1440} - \frac{72991n^7}{3780} + \frac{2873n^6}{60} - \frac{100459n^5}{1080} + \frac{199519n^4}{1440} - \frac{498557n^3}{3240} + \frac{14579n^2}{120} - \frac{7517n}{126} + \frac{765}{64} - \left(\frac{n^6}{48} - \frac{n^5}{3} + \frac{221n^4}{96} - \frac{211n^3}{24} + \frac{467n^2}{24} - \frac{47n}{2} + \frac{765}{64} \right) * (-1)^n$$

A187239 - 7 bishops, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 7.3.2011)

$$\frac{n^{14}}{5040} - \frac{n^{13}}{180} + \frac{313n^{12}}{4320} - \frac{383n^{11}}{648} + \frac{14797n^{10}}{4320} - \frac{38233n^9}{2520} + \frac{3217n^8}{60} - \frac{145469n^7}{945} + \frac{1546679n^6}{4320} - \frac{4297801n^5}{6480} + \frac{257903n^4}{270} - \frac{3915679n^3}{3780} + \frac{1787007n^2}{2240} - \frac{318023n}{840} + \frac{9503}{128} + \left(-\frac{n^8}{192} + \frac{n^7}{8} - \frac{389n^6}{288} + \frac{689n^5}{80} - \frac{319n^4}{9} + \frac{1153n^3}{12} - \frac{95965n^2}{576} + \frac{20129n}{120} - \frac{9503}{128} \right) * (-1)^n$$

A187240 - **8 bishops**, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 7.3.2011)

$$\begin{aligned} & \frac{n^{16}}{40320} - \frac{n^{15}}{1080} + \frac{7n^{14}}{432} - \frac{1153n^{13}}{6480} + \frac{53951n^{12}}{38880} - \frac{187277n^{11}}{22680} + \frac{106928053n^{10}}{2721600} - \frac{13957093n^9}{90720} + \frac{182160427n^8}{362880} - \frac{8821499n^7}{6480} \\ & + \frac{1176831457n^6}{388800} - \frac{490477369n^5}{90720} + \frac{8235592409n^4}{1088640} - \frac{726205757n^3}{90720} + \frac{1815275047n^2}{302400} - \frac{7953419n}{2880} + \frac{8491}{16} \\ & + \left(-\frac{n^{10}}{960} + \frac{5n^9}{144} - \frac{307n^8}{576} + \frac{1793n^7}{360} - \frac{90571n^6}{2880} + \frac{201911n^5}{1440} - \frac{513865n^4}{1152} + \frac{477841n^3}{480} - \frac{4271471n^2}{2880} + \frac{1269721n}{960} - \frac{8491}{16} \right) * (-1)^n \end{aligned}$$

A187241 - **9 bishops**, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 7.3.2011)

$$\begin{aligned} & \frac{n^{18}}{362880} - \frac{n^{17}}{7560} + \frac{181n^{16}}{60480} - \frac{14509n^{15}}{340200} + \frac{2101n^{14}}{4860} - \frac{101071n^{13}}{30240} + \frac{112406401n^{12}}{5443200} - \frac{143351879n^{11}}{1360800} + \frac{2465350549n^{10}}{5443200} - \frac{14081834n^9}{8505} + \frac{55888723201n^8}{10886400} \\ & - \frac{6055816813n^7}{453600} + \frac{155816526107n^6}{5443200} - \frac{13489156949n^5}{272160} + \frac{183801705823n^4}{2721600} - \frac{15816472541n^3}{226800} + \frac{30820237351n^2}{604800} - \frac{919392091n}{40320} + \frac{1101239}{256} \\ & + \left(-\frac{n^{12}}{5760} + \frac{11n^{11}}{1440} - \frac{113n^{10}}{720} + \frac{51793n^9}{25920} - \frac{202873n^8}{11520} + \frac{3428791n^7}{30240} - \frac{1050169n^6}{1920} + \frac{8590259n^5}{4320} - \frac{1034689n^4}{192} + \frac{68481311n^3}{6480} - \frac{81534479n^2}{5760} + \frac{465686363n}{40320} - \frac{1101239}{256} \right) * (-1)^n \end{aligned}$$

A187242 - **10 bishops**, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 7.3.2011)

$$\begin{aligned} & \frac{n^{20}}{3628800} - \frac{n^{19}}{60480} + \frac{341n^{18}}{725760} - \frac{45949n^{17}}{5443200} + \frac{235433n^{16}}{2177280} - \frac{308291n^{15}}{291600} + \frac{14982871n^{14}}{1814400} - \frac{43484267n^{13}}{816480} + \frac{175706737n^{12}}{604800} - \frac{2444962049n^{11}}{1796256} + \frac{30003106793n^{10}}{5443200} - \frac{44899907477n^9}{2332800} \\ & + \frac{9919713547n^8}{172800} - \frac{18390588424n^7}{127575} + \frac{217346831209n^6}{725760} - \frac{8233418533709n^5}{16329600} + \frac{104224385179n^4}{155520} - \frac{14600765627n^3}{21600} + \frac{583132621007n^2}{1209600} - \frac{46669993739n}{221760} + \frac{19990663}{512} \\ & + \left(-\frac{n^{14}}{40320} + \frac{n^{13}}{720} - \frac{1267n^{12}}{34560} + \frac{15721n^{11}}{25920} - \frac{730663n^{10}}{103680} + \frac{5532407n^9}{90720} - \frac{98193341n^8}{241920} + \frac{10640393n^7}{5040} - \frac{99209431n^6}{11520} + \frac{1417368727n^5}{51840} - \frac{686809973n^4}{10368} + \frac{2144839679n^3}{18144} - \frac{1683044471n^2}{11520} + \frac{2242597633n}{20160} - \frac{19990663}{512} \right) * (-1)^n \end{aligned}$$

Vzorce pro vyšší hodnoty k jdou vygenerovat programem na str. 257.

Polynomy mají obecně tento tvar:

$$\begin{aligned} & \frac{n^{2k}}{k!} - \frac{2n^{2k-1}}{3(k-2)!} + \frac{(8k^2 - 13k + 12)n^{2k-2}}{36(k-2)!} - \frac{(40k^4 - 155k^3 + 329k^2 - 220k - 6)n^{2k-3}}{810(k-2)!} \\ & + \frac{(320k^5 - 1520k^4 + 4663k^3 - 3076k^2 + 4941k - 15840)n^{2k-4}}{38880(k-3)!} - \frac{(448k^7 - 3696k^6 + 16849k^5 - 33033k^4 + 51841k^3 - 156123k^2 - 10134k + 603936)n^{2k-5}}{408240(k-3)!} \\ & + \frac{(17920k^9 - 221760k^8 + 1430520k^7 - 4791465k^6 + 11248347k^5 - 29856105k^4 + 23634485k^3 + 68756490k^2 + 310766688k - 1019193840)n^{2k-6}}{146966400(k-3)!} - \frac{(-1)^n n^{2k-6}}{8(k-3)!} \\ & - \frac{(2560k^{10} - 36160k^9 + 272040k^8 - 1044825k^7 + 3102987k^6 - 9046263k^5 + 4535375k^4 - 11251100k^3 + 235816038k^2 + 430975908k - 2763208080)n^{2k-7}}{220449600(k-4)!} + \frac{(k+2)(-1)^n n^{2k-7}}{12(k-4)!} \\ & + \frac{(20480k^{12} - 399360k^{11} + 3975808k^{10} - 22250400k^9 + 87971709k^8 - 291941244k^7 + 551097322k^6 - 1272227352k^5 + 6564528701k^4 + 20331630564k^3 - 86046747300k^2 - 558633891888k + 1698750869760)n^{2k-8}}{21163161600(k-4)!} \\ & - \frac{(8k^3 + 3k^2 - 47k - 228)(-1)^n n^{2k-8}}{288(k-4)!} + \dots \end{aligned}$$

Člen s $(-1)^n$ se vyskytuje v polynomu až od n^{2k-6} . Pro $d \geq 6$ mají další členy tvar

$$\frac{n^{2k-d} * (-1)^d}{k!} * (P(k) + (-1)^n * R(k))$$

kde $P(k)$ a $R(k)$ jsou **polynomy v k** . Jejich stupně jsou

$$\begin{aligned} \deg(P(k)) &= 2d && (\text{pro libovolné } d) \\ \deg(R(k)) &= 2d - 9 && (\text{pro } d \geq 6) \end{aligned}$$

nebo po částečné faktorizaci

$$n^{2k-d} * (-1)^d * \binom{k}{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor} * \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor! * (P(k) + (-1)^n * R(k))$$

kde (pro $d \geq 6$) jsou stupně polynomů $P(k)$ a $R(k)$ tentokrát

$$\deg(P(k)) = 2d - \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor \quad \deg(R(k)) = 2d - \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor - 9$$

Pro sudé i liché n (for n even or odd), dostaneme následující obecný rozvoj

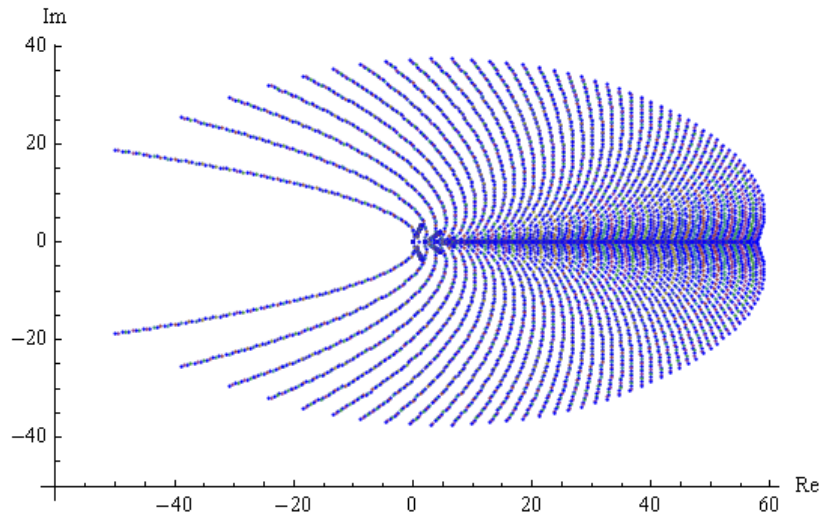
$$\frac{n^{2k}}{k!} * \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d 2^d k^{2d}}{3^d n^d d!} * \left(1 - \frac{d(5d+11)}{16k} + \frac{(d-1)d(375d^2+1613d+7274)}{7680k^2} - \frac{(d-1)d(625d^4+2690d^3+28087d^2-43242d+34776)}{122880k^3} + \dots \right)$$

Asymptoticky (při konstantním k)

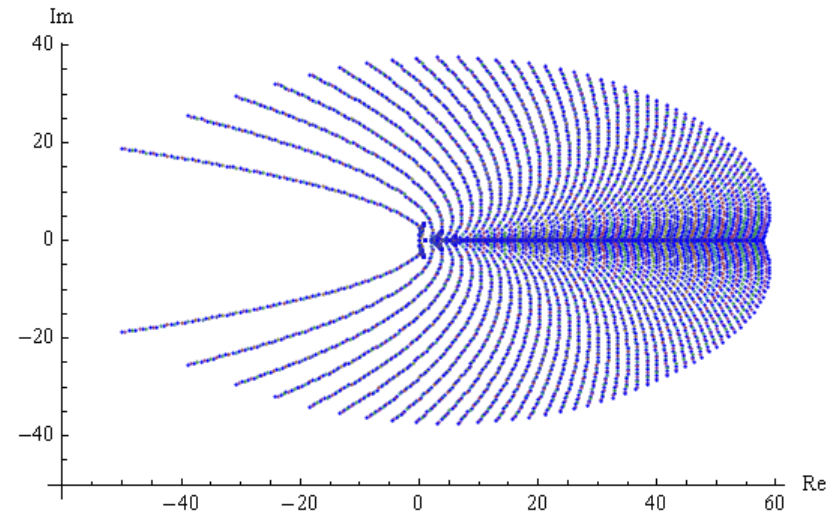
$$\frac{n^{2k}}{k!} * e^{-\frac{2k^2}{3n}} * \left(1 + \frac{2k}{3n} - \frac{(5k^2-25k+12)k}{36n^2} - \frac{(109k^3-369k^2+214k+6)k}{810n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)$$

Je třeba ještě poznamenat, že v tomto vzorci **není** možné volit $k=n$ (jako třeba v případě [semi-vezírů](#)) a platí tedy pouze pro **konstantní** k (nezávislé na n).
(in case of this formula k must be constant, independent on n)

k bishops n x n, n even
complex plane, roots for all k<=100



k bishops n x n, n odd
complex plane, roots for all k<=100



Pro $k > 2$ je jmenovatel vytvořující funkce (*denominator of generating function*) roven

$$\frac{1}{(x-1)^{2k+1}(x+1)^{2k-5}}$$

V případě střelců (na rozdíl od dam) neobsahuje jmenovatel vytvořující funkce žádné další cyklotomické polynomy a to pro libovolné k . Důkaz, že kvazipolynomy pro střelce mají periodu maximálně 2, provedli Thomas Zaslavsky, Seth Chaiken a Chris Hanusa v roce 2010. Toto samozřejmě vyplývá i z explicitních vzorců pro k neohrožujících se střelců na $n \times n$, viz str. 254, které se liší pouze pro šachovnice sudých a lichých rozměrů.

*Thomas Zaslavsky, Seth Chaiken and Chris Hanusa proved theorem **The bishop quasipolynomial has period at most 2**. See [Nonattacking Chess Pieces: The Dance of the Bishops](#) (29.7.2010), Theorem 4.3 (the proof uses the geometric theory of signed graphs).*

Alternative proof - general explicit formulas for number of ways to place k non-attacking bishops on an $n \times n$ board exists (based on formulas by S. E. Arshon, 1936), see page 254.

k	k Bishops on an n x n chessboard - Generating function
2	$-\frac{2x^2(x+1)(x+2)}{(x-1)^5}$
3	$-\frac{2x^3(3x^4+18x^3+48x^2+38x+13)}{(x-1)^7(x+1)}$
4	$-\frac{4x^3(6x^8+57x^7+316x^6+763x^5+1056x^4+791x^3+316x^2+53x+2)}{(x-1)^9(x+1)^3}$
5	$-\frac{8x^4(15x^{11}+186x^{10}+1593x^9+6666x^8+17522x^7+28808x^6+31334x^5+22040x^4+9871x^3+2574x^2+337x+14)}{(x-1)^{11}(x+1)^5}$
6	$-\frac{8x^4(90x^{15}+1332x^{14}+15417x^{13}+93042x^{12}+372376x^{11}+983864x^{10}+1834807x^9+2423054x^8+2310242x^7+1568260x^6+748519x^5+239742x^4+48236x^3+5264x^2+233x+2)}{(x-1)^{13}(x+1)^7}$
7	$-8x^5(630x^{18}+10620x^{17}+153525x^{16}+1211058x^{15}+6621390x^{14}+24647178x^{13}+66958554x^{12}+133891418x^{11}+202680754x^{10}+232634698x^9+204008900x^8+135332502x^7+67245306x^6+24326718x^5+6174582x^4+1024222x^3+99344x^2+4466x+55)/((x-1)^{15}(x+1)^9)$
8	$-16x^5(2520x^{22}+47160x^{21}+808884x^{20}+7825113x^{19}+54648810x^{18}+265795497x^{17}+965510650x^{16}+2638742416x^{15}+5598377728x^{14}+9280070520x^{13}+12189441400x^{12}+12689244954x^{11}+10499675700x^{10}+6853251794x^9+3501200340x^8+1373620536x^7+404231224x^6+85610168x^5+12313860x^4+1085765x^3+49362x^2+797x+2)/((x-1)^{17}(x+1)^{11})$
9	$-64x^6(5670x^{25}+116100x^{24}+2282283x^{23}+25883910x^{22}+220244661x^{21}+1330673229x^{20}+6121839129x^{19}+21511823232x^{18}+59645434477x^{17}+131494649245x^{16}+234424379246x^{15}+339339084372x^{14}+401937236082x^{13}+389328811002x^{12}+308645316626x^{11}+199052247464x^{10}+103780570480x^9+43151321222x^8+14078209111x^7+3508317590x^6+644755881x^5+82579449x^4+6782181x^3+308200x^2+5933x+25)/((x-1)^{19}(x+1)^{13})$
10	$-32x^6(113400x^{29}+2518560x^{28}+55426428x^{27}+713122128x^{26}+7133734665x^{25}+51575533686x^{24}+289157705424x^{23}+1253334719652x^{22}+4339842816598x^{21}+12089938835312x^{20}+27595185140132x^{19}+51899069651452x^{18}+81237872407883x^{17}+106097483667238x^{16}+116126611566624x^{15}+106417824457960x^{14}+81632991696988x^{13}+52161861060464x^{12}+27621327391332x^{11}+11998025297736x^{10}+4224689442543x^9+1183463783138x^8+257650398544x^7+42074808244x^6+4911799606x^5+379785344x^4+17289788x^3+373804x^2+2525x+2)/((x-1)^{21}(x+1)^{15})$

k Bishops on an n x n chessboard

n	1 b	2 b	3 bishops	4 bishops	5 bishops	6 bishops	7 bishops	8 bishops	9 bishops	10 bishops	summed over all k>=0, A201862
1	1										2
2	4	4	0	0							9
3	9	26	26	8	0	0	0	0	0		70
4	16	92	232	260	112	16	0	0	0	0	729
5	25	240	1124	2728	3368	1960	440	32	0	0	9918
6	36	520	3896	16428	39680	53744	38368	12944	1600	64	167281
7	49	994	10894	70792	282248	692320	1022320	867328	389312	81184	3423362
8	64	1736	26192	242856	1444928	5599888	14082528	22522960	22057472	12448832	82609921
9	81	2832	56296	706048	5865552	33001664	126490352	328097824	565532992	627961728	2319730026
10	100	4380	110960	1809464	20014112	154215760	837543200	3209594096	8611750848	15915225216	74500064809
11	121	6490	204130	4199064	59673360	603563504	4412818240	23460698496	90564534336	251806066272	2711723081550
12	144	9284	355000	8992684	159698416	2052729728	19447224864	137045115696	720227187456	2814607288320	110568316431609
13	169	12896	589196	18024072	391202680	6229649352	74255991784	670158151296	4603893554496	24088436720256	5016846683306758
14	196	17472	940072	34170724	890095584	17202203680	251997948736	2835083100640	24675964279680	166645918174848	251180326892449969
15	225	23170	1450134	61784632	1902427800	43870041520	774861621936	10634260782464	114402835995392	969258913391552	13806795579059621930
16	256	30160	2172576	107243472	3853570560	104531112928	2191005028672	36033282628832	469601097840640	4878776675787392	827911558468860287041
17	289	38624	3172944	179645376	7450556064	234870173248	5764306674400	111923478184128	1737913582100864	21731689658569984	53940895144894708523922
18	324	48756	4530912	291667440	13829016768	501360888160	14243327787456	322412415716896	5882030372643968	87161301448676352	3799498445458163685753481
19	361	60762	6342186	460615272	24759442464	1022992697248	33309659739904	869530617762304	18417596366384512	319192073724720448	288400498147873552894868886
20	400	74860	8720520	709686228	42930138864	2005391254960	74194554880960	2212626780591008	53854324059153920	1079363369445639936	23495297656661206429711527769

Sloupec vpravo určuje počet pozic neohrožujících se k střelců na šachovnici $n \times n$, součet přes všechna $k \geq 0$. V programu Mathematica jej dostaneme takto:

```
knbishops[k_, n_] := (If[n==1, If[k==1, 1, 0], (-1)^k/(2n-k)!
*Sum[Binomial[2n-k, n-k+i]*Sum[(-1)^m*Binomial[n-i, m]*m^Floor[n/2]*(m+1)^Floor[(n+1)/2], {m, 1, n-i}]
*Sum[(-1)^m*Binomial[n-k+i, m]*m^Floor[(n+1)/2]*(m+1)^Floor[n/2], {m, 1, n+i-k}], {i, Max[0, k-n], Min[k, n]}]]];
```

```
Table[1+Sum[knbishops[k, n], {k, 1, 2n-1}], {n, 1, 25}]
```

4.1.1) n Bishops on an $n \times n$ chessboard - n střelců na šachovnici $n \times n$ - A002465

Tato úloha má poměrně bohatou historii. Je pro ni však typické, že publikované články upadly v zapomnění a autoři, kteří se touto problematikou po letech zabývali, předchozí práce neznali, necitovali je a objevovali pak již jednou objevené.

This problem has interesting history. Few (non-English) old papers were unknown for other authors.

Nejstarší článek napsal M. Joseph **Perott**, [Sur le probleme des fous](#), Bulletin de la société mathématique de France, Tome XI, 1883, str. 173-186. Cílem článku bylo hlavně vypočítat hodnotu pro $n=8$ a prioritou v nalezení čísla 22522960 tak patří jednoznačně Perottovi. V článku Perott rozdělil problém na počítání zvlášť střelců na bílých polích a zvlášť na černých polích šachovnice. Celkový počet pak složil jako součet všech takovýchto možných součinů. Problém vyřešil pro všechny šachovnice **sudých** rozměrů až do $n=8$. Jeho metoda však byla systematická a i když ji v článku nezobecnil, šla by použít pro libovolné šachovnice sudých rozměrů. Princip je naprosto shodný jako v pozdějším článku Arshona.

Neznámý ruský matematik **Solomon Efimovich Arshon** (1892-1939) pak publikoval v roce 1936 v neznámém ruském časopise [Matematicheskoe prosveshchenie](#) (číslo 8, str. 24-29) článek, ve kterém odvodil obecný vzorec pro rozmístění n neohrožujících se střelců na šachovnici $n \times n$! Arshon použil modifikované vytvářící funkce a (stejně jako Perott) rozdělil problém na počítání střelců na bílých a černých polích. Při tom musel ještě rozlišit šachovnice sudých a lichých rozměrů. Už ale i jenom tyto dílčí vzorce jsou velmi komplikované a jen těžko objevitelné.

Originální pramen: Соломон Ефимович Аршон: "Решение одной комбинаторной задачи", Математическое просвещение. Сборник. Выпуск 8, 1936. V tomto článku se navíc zmiňoval o tom, že chystá k publikaci dokonce celou knihu "Новая комбинаторная алгебра", ve které prý svoje metody zobecnil. Bohužel, jak píše N. Vilenkin v knize [Populyarnaja kombinatorika](#), 1972, na straně 166, po smrti autora k vydání této knihy už nedošlo a rukopis se ztratil během války.

— 173 —

Sur le problème des fous; par M. JOSEPH PEROTT.

(Séance du 16 novembre 1883.)

Ce problème bien connu est le suivant :

Placer un nombre donné de fous sur l'échiquier, de manière qu'aucun fou ne puisse être pris par un autre.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ

С. Е. Аршон (Москва)

Исследуемая задача формулируется следующим образом: сколькими способами на шахматной доске из n^2 клеток можно расставить n слонов так, чтобы никакие два из них не угрожали друг другу?

Malé porovnání částí z obou článků

Perott 1883

La formule de récurSION devient, en faisant $m = 7, n = 8,$

$$(7-k)(8-k)A_1^{k-t+1}A_2^{t-1} = (k-t+2)A_1^{k-t+2}A_2^{t-1} + tA_1^{k-t+1}A_2^t;$$

— 186 —

On aura

7 fous sur des cases noires, 1 fou sur une case blanche.....	16 × 32 =	512
6 f. c. n., 2 f. c. bl.....	632 × 356 =	224992
5 f. c. n., 3 f. c. bl.....	2816 × 1704 =	4798464
4 f. c. n., 4 f. c. bl.....	3532 ² =	12475024
3 f. c. n., 5 f. c. bl.....	1704 × 2816 =	4798464
2 f. c. n., 6 f. c. bl.....	356 × 632 =	224992
1 f. c. n., 7 f. c. bl.....	32 × 16 =	512
Nombre des solutions.....		<u>22522960</u>

Arshon 1936

И, вообще, как нетрудно заметить,

$$p_i = \frac{(9-i)^4(8-i)^3 - C_{7-i}^1(8-i)^4(7-i)^3 + C_{7-i}^2(7-i)^4(6-i)^3 - \dots}{(7-i)!}$$

Обобщая эту формулу на случай доски из $(2k)^2$ клеток, получим:

$$p_i = \frac{(2k+1-i)^k(2k-i)^{k-1} - C_{2k-1-i}^1(2k-i)^k(2k-i-1)^{k-1} + C_{2k-1-i}^2(2k-i-1)^k(2k-i-2)^{k-1}}{(2k-i-1)!}$$

Подставляя найденное значение p_i в формулу (5'), получим искомое значение P_{2k} . Для случая $2k = 8$ будем иметь:

$$p_8 = 22\,522\,960.$$

Překvapující je, že o Perottovu ani Arshonovu článku se nezmiňuje ani John Riordan, An Introduction to Combinatorial Analysis, 1958, p.219-220 (chapter 8, The problem of the bishops), kde se tomuto problému věnuje v sekci "Permutations with Restricted Position II" a označuje jej jako "special case of [Simon Newcomb's problem](#)".

A předchozí práce zjevně neznal ani [Robert W. Robinson](#), viz jeho článek "Counting arrangements of bishops", str. 198-214, Combinatorial Mathematics IV (Adelaide 1975), Lecture Notes in Mathematics, 560 (1976). Robinson se ve svém 17-ti stránkovém článku zabýval **neidentickými** konstelacemi n věží a n střelců na šachovnici $n \times n$, tedy jen takovými, které nejde převést na jiné různými otáčením nebo symetriemi. Pro tyto případy odvodil řadu vzorců, ale obecný problém k neohrožujících se střelců na šachovnici $n \times n$ považoval za dosud nevyřešený (jak se sám zmiňuje v závěru článku na str.213).

05 A 15

COUNTING ARRANGEMENTS OF BISHOPS

ROBERT W. ROBINSON

The problem of the bishops is to determine the number of arrangements of n bishops on an $n \times n$ chessboard such that no bishop threatens another and every unoccupied square is threatened by at least one bishop. Two arrangements are considered equivalent if they are isomorphic by way of one of the eight symmetries of the chessboard. The total number of inequivalent solutions to the problem of the bishops is found, as well as the numbers of solutions which have each of the possible automorphism groups. The values up to $n=16$ are tabulated, and asymptotic formulas are found. A review of analogous results for the problem of the rooks is included, since they are made use of in studying the problem of the bishops.

Number of ways to place i non-attacking bishops on an **white squares** of $n \times n$ board, if n is **even** (for black squares is result same)

Počet vzájemně se neohrožujících " i " střelců rozmístěných pouze na **bílých** polích šachovnice $n \times n$ **sudých** rozměrů, identický vzorec platí též pro **černá** pole (J. Perott, 1883, S. E. Arshon, 1936):

$$\text{peven}(i, n) = \sum_{j=0}^{n-i-1} \frac{(-1)^j \binom{n-i-1}{j} (n-i-j)^{\frac{n}{2}-1} (n-i-j+1)^{\frac{n}{2}}}{(n-i-1)!}$$

Number of ways to place i non-attacking bishops on an **black squares** of $n \times n$ board, if n is **odd** (S. E. Arshon, 1936)

Počet vzájemně se neohrožujících " i " střelců rozmístěných pouze na **černých** polích šachovnice $n \times n$ **lichých** rozměrů:

$$\text{poddblack}(i, n) = \sum_{j=0}^{n-i-1} \frac{(-1)^j \binom{n-i-1}{j} (n-i-j)^{\frac{n-3}{2}} (n-i-j+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-i-1)!}$$

Number of ways to place i non-attacking bishops on an **white squares** of $n \times n$ board, if n is **odd** (S. E. Arshon, 1936)

Počet vzájemně se neohrožujících " i " střelců rozmístěných pouze na **bílých** polích šachovnice $n \times n$ **lichých** rozměrů:

$$\text{poddwhite}(i, n) = \sum_{j=0}^{n-i-1} \frac{(-1)^j \binom{n-i-1}{j} (n-i-j)^{\frac{n-1}{2}} (n-i-j+1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-i-1)!}$$

Tabulku prvních např. 50 hodnot dostaneme v programu **Mathematica** s užitím Arshonových vzorců takto:

```
peven[i_]:= (Sum[(-1)^j*Binomial[n-i-1,j]/(n-i-1)!*(n-i+1-j)^(n/2)*(n-i-j)^(n/2-1),{j,0,n-i-1}]);
poddblack[i_]:= (Sum[(-1)^j*Binomial[n-i-1,j]/(n-i-1)!*(n-i+1-j)^((n+1)/2)*(n-i-j)^((n-3)/2),{j,0,n-i-1}]);
poddwhite[i_]:= (Sum[(-1)^j*Binomial[n-i-1,j]/(n-i-1)!*(n-i+1-j)^((n-1)/2)*(n-i-j)^((n-1)/2),{j,0,n-i-1}]);
Table[If[n==1,1,Sum[If[EvenQ[n],peven[i]*peven[n-i],poddblack[i]*poddwhite[n-i]],{i,1,n-1}]],{n,1,50}]
```

Z těchto dílčích vzorců pak dostaneme finální počty neohrožujících se n střelců na šachovnici $n \times n$. Vzorce jsem ještě trochu zjednodušil.
Number of ways to place n non-attacking bishops on an $n \times n$ board

Pro n **sudé** (if n is even):

$$\text{n_bishops_nxn_n_even} = \text{Beven} = \sum_{i=1}^{n-1} \text{peven}(i, n) * \text{peven}(n - i, n)$$

$$\text{Beven} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\left(\sum_{m=1}^{n-i} \frac{(-1)^m m^{\frac{n}{2}} (m+1)^{\frac{n}{2}}}{(n-i-m)! m!} \right) * \left(\sum_{m=1}^i \frac{(-1)^m m^{\frac{n}{2}} (m+1)^{\frac{n}{2}}}{(i-m)! m!} \right) \right)$$

Pro $n > 1$ **liché** (if $n > 1$ is odd):

$$\text{n_bishops_nxn_n_odd} = \text{Bodd} = \sum_{i=1}^{n-1} \text{poddblack}(i, n) * \text{poddwhite}(n - i, n)$$

$$\text{Bodd} = - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\left(\sum_{m=1}^{n-i} \frac{(-1)^m m^{\frac{n-1}{2}} (m+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-i-m)! m!} \right) * \left(\sum_{m=1}^i \frac{(-1)^m m^{\frac{n+1}{2}} (m+1)^{\frac{n-1}{2}}}{(i-m)! m!} \right) \right)$$

Number of ways to place n non-attacking bishops on an $n \times n$ board, one formula for all $n > 1$ (with Floor function)

Možný je i zápis jedním vzorcem s užitím funkce celá část (pro libovolné $n > 1$):

$$B(n) = (-1)^n * \sum_{i=1}^{n-1} \left(\left(\sum_{m=1}^{n-i} \frac{(-1)^m m^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (m+1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}{(n-i-m)! m!} \right) * \left(\sum_{m=1}^i \frac{(-1)^m m^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (m+1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(i-m)! m!} \right) \right)$$

Nebo s užitím kombinačních čísel (same formula with *binomial coefficients*), $n > 1$

$$B(n) = \frac{(-1)^n}{n!} * \sum_{i=1}^{n-1} \left(\binom{n}{i} * \left(\sum_{m=1}^{n-i} (-1)^m \binom{n-i}{m} m^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (m+1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \right) * \left(\sum_{m=1}^i (-1)^m \binom{i}{m} m^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (m+1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) \right)$$

V programu Mathematica lze užít následující funkci:

```
(* n non-attacking bishops on an n x n chessboard, one formula with Floor function *)
nbishops[n_] := (If[n==1,1,(-1)^n/n!
*Sum[Binomial[n,i]*Sum[(-1)^m*Binomial[n-i,m]*m^Floor[n/2]*(m+1)^Floor[(n+1)/2],{m,1,n-i}]
*Sum[(-1)^m*Binomial[i,m]*m^Floor[(n+1)/2]*(m+1)^Floor[n/2],{m,1,i}],{i,1,n-1}]]);
Table[nbishops[n],{n,1,50}]
```

Zabýval jsem se těmito vzorci podrobněji a podařilo se mi odvodit překvapující vazbu na tzv. [Stirlingova čísla druhého druhu](#). Vyjděme nejprve např. ze vzorce pro funkci *peven* a zjednodušíme jej přeindexováním. Dostaneme

$$peven(n-i, n) = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1)^j \binom{i-1}{j} (i-j)^{\frac{n}{2}-1} (i-j+1)^{\frac{n}{2}}}{(i-1)!} = \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{i}{j} (j(j+1))^{\frac{n}{2}}$$

Pro úpravu výrazu použijeme [binomickou větu](#)

$$(a+b)^x = \sum_{v=0}^x \binom{x}{v} a^v b^{x-v}$$

Pokud položíme

$$a = j^2, \quad b = j, \quad x = n/2$$

dostaneme

$$peven(n-i, n) = \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{i}{j} \sum_{v=0}^{n/2} \binom{n/2}{v} j^{v+\frac{n}{2}}$$

Nyní nastává pointa v přehození sum

$$peven(n-i, n) = \sum_{v=0}^{n/2} \binom{n/2}{v} \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{i}{j} j^{v+\frac{n}{2}} = \sum_{v=0}^{n/2} \binom{n/2}{v} S_2\left(v + \frac{n}{2}, i\right)$$

Celkem tedy máme

$$peven(i, n) = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \binom{\frac{n}{2}}{j} S_2\left(j + \frac{n}{2}, n-i\right)$$

Kde S_2 jsou Stirlingova čísla druhého druhu, $S_2 =$ [Stirling numbers of the second kind](#). Podobným způsobem už snadno odvodíme další vzorce

$$poddblack(i, n) = \sum_{j=0}^{\frac{n+1}{2}} \binom{\frac{n+1}{2}}{j} S_2\left(j + \frac{n-1}{2}, n-i\right)$$

$$poddwhite(i, n) = \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{\frac{n-1}{2}}{j} S_2\left(j + \frac{n+1}{2}, n-i\right)$$

Odtud dostaneme vzorec pro počet pozic n neohrožujících se střelců na šachovnici $n \times n$ ve zcela jiném tvaru

Number of ways to place n non-attacking bishops on an $n \times n$ board

Alternative formula (V. Kotěšovec, 23.3.2011), for $n > 1$

$$B(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}{j} S_2 \left(j + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-i \right) \right) * \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{j} S_2 \left(j + \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, i \right) \right) \right)$$

kde S_2 jsou Stirlingova čísla druhého druhu, $S_2 =$ [Stirling numbers of the second kind](#).

V programu Mathematica jde tento vzorec zapsat takto (*pro velká n však doporučuji k výpočtu použít raději z časových důvodů předchozí [program](#) s binomickými koeficienty*):

```
stnbishops[n_] := (If[n==1, 1,
Sum[Sum[Binomial[Floor[(n+1)/2], j]*StirlingS2[j+Floor[n/2], n-i],
{j, 0, Floor[(n+1)/2]}]*
Sum[Binomial[Floor[n/2], j]*StirlingS2[j+Floor[(n+1)/2], i],
{j, 0, Floor[n/2]}], {i, 1, n-1}]]);
```

```
Table[stnbishops[n], {n, 1, 25}]
```

n	n bishops, board n x n, A002465
1	1
2	4
3	26
4	260
5	3368
6	53744
7	1022320
8	22522960
9	565532992
10	15915225216
11	496911749920
12	17029582652416
13	636101065346560
14	25705530908501760
15	1118038500044633088
16	52054862490790200576
17	2584158975023147147264
18	136217877366318305776640
19	7600582106551216874307072
20	447448480722422443996255232
21	27721863901601408594088435712
22	1802780984038362764883770392576
23	122799306430020050715821997608960
24	8742590208816822264891219578863616
25	649400215683862430515217740518522880

Nesmírně zajímavé je **asymptotické chování** této funkce (tedy průběh pro n se blíží k nekonečnu).

Theorem (V. Kotěšovec, 24.5.2011): *Asymptotic behavior for number of ways to place n non-attacking bishops on an $n \times n$ chessboard is*

$$B(n) \sim b * q^n * (n - 1)!$$

constants ([A238258](#), [A238260](#))

$$q = \frac{2}{z(2 - z)} = 3.088277304741740179115840082025438276836444897142 \dots$$

$$b = 0.63126687887411546797 \dots$$

where $z = 1.59362426004004009 \dots$ is the root of the equation

$$e^z (2 - z) = 2$$

(viz též str. 262 s analogickými vzorci pro *semi-střelce*)

Důkaz (*proof*):

Konstanty q a b jsem analyzoval analyticky i numericky. Pro numerické výpočty je lepší použít vzorce s binomickými koeficienty, ale pro analytické zkoumání se ukázal jako mimořádně vhodný vzorec se [Stirlingovými čísly druhého druhu](#). Pro asymptotické chování těchto čísel totiž existuje řada poměrně dobrých odhadů, které nám umožní přesné vyjádření konstanty q . Základ těmto teoriím položil I. J. Good v článku [An asymptotic formula for the differences of the powers at zero](#), The Annals of Mathematical Statistics (1961), str. 249-256. Asymptotický vzorec pro chování Stirlingových čísel druhého druhu, když druhý parametr je řádově stejný jako první, pak vylepšil A. N. Timashev: [On asymptotic expansions of Stirling numbers of the first and second kind](#), Discrete Mathematics and Applications, 1998, str. 533–544. Jejich výrazy jsou trochu obecnější, já jsem použil pouze případ $n/2$ (druhý výraz je pak s upravenými faktoriály podle [Stirlingova vzorce](#))

$$S_2\left(n, \frac{n}{2}\right) \sim \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)! (z(2 - z))^{n/2} \sqrt{2\pi n(z - 1)}} \sim \frac{\left(\frac{n e^{z-1}}{z}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi n(z - 1)}}$$

kde z je kořen rovnice

$$\frac{z}{1 - e^{-z}} = 2$$

$$z = 1.593624260040040092323 \dots$$

Při asymptotickém zkoumání se stačí omezit jen na šachovnice sudých rozměrů. Graf znázorňuje počet vyhovujících pozic v závislosti na počtu střelců i na šachovnici $n \times n$, přičemž počet pozic neohrožujících se střelců je kvůli přehlednějšímu zobrazení zlogaritmován. Je zcela evidentní, že tato funkce je symetrická kolem středu (hodnoty $i=n/2$). Dále je zřejmé, že celkový počet pozic je určitě větší než samotná jedna hodnota maxima. Co se týče horního odhadu, platí, že

$$B(n) \sim 0.599600835 \dots * \sqrt{n} * peven\left(\frac{n}{2}, n\right)^2$$

Pro účel důkazu vystačíme ale i s daleko slabším odhadem, kdy celkový počet pozic je určitě menší než plocha obdélníku (v původní metrice) s výškou rovnou maximu a šířkou rovnou n , vyjádřeno nerovností (*for purpose of proof is weaker estimate sufficient*)

$$peven\left(\frac{n}{2}, n\right)^2 \leq B(n) \leq n * peven\left(\frac{n}{2}, n\right)^2$$

Pro funkci $peven$ (počet pozic neohrožujících se $n/2$ střelců postavených jen na bílých polích šachovnice $n \times n$ sudých rozměrů) už známe vzorec (se [Stirlingovými čísly druhého druhu](#)), do kterého dosadíme $i = n/2$ a dostaneme tak

$$peven\left(\frac{n}{2}, n\right) = \sum_{j=0}^{n/2} \binom{n/2}{j} S_2\left(j + \frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

Členy v sumě nabývají maxima pro $j=n/2$ a na grafu vlevo (pro $n=1000$ a $n=5000$) vidíme relativní váhu několika posledních členů. Dokážeme, že tyto poměry jsou nezávislé na n . Pokud je m konstantní, platí pro velká n

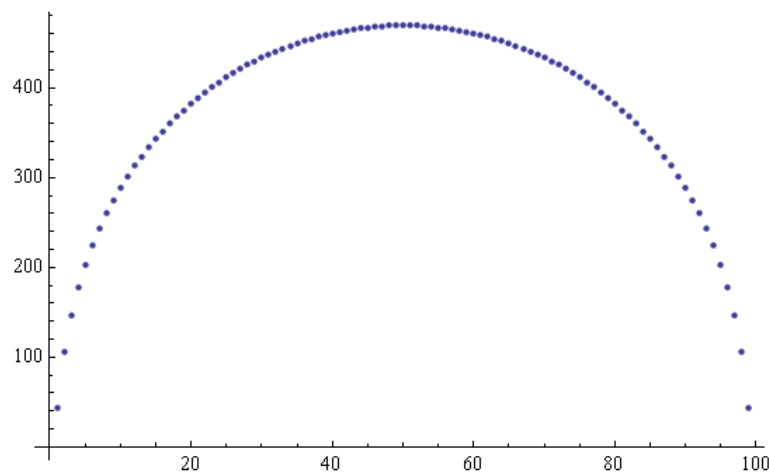
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n/2}{m} S_2\left(n - m, \frac{n}{2}\right)}{S_2\left(n, \frac{n}{2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n/2}{m} * \frac{z^m}{n^m} = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^m}{m!} = \frac{0.79681213002002 \dots^m}{m!}$$

Např. pro $m=1$ vidíme i na grafu, že předposlední bod má vždy váhu cca 80% (nezávisle na n). Po přeindexování dále dostaneme

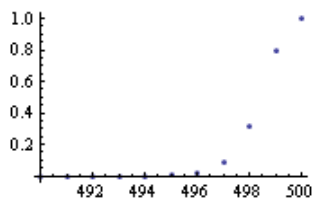
$$peven\left(\frac{n}{2}, n\right) = \sum_{j=0}^{n/2} \binom{n/2}{j} S_2\left(n - j, \frac{n}{2}\right) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^j}{j!} * S_2\left(n, \frac{n}{2}\right) = e^{z/2} * S_2\left(n, \frac{n}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{2-z}} * S_2\left(n, \frac{n}{2}\right)$$

$$peven\left(\frac{n}{2}, n\right) \sim 2.2184574899167 \dots * S_2\left(n, \frac{n}{2}\right)$$

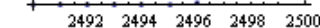
```
n = 100;
ListPlot[Table[Log[peven[i, n] * peven[n - i, n]], {i, 1, n - 1}]]
```



```
n = 1000;
ListPlot[
Table[
{j, Binomial[n/2, j] *
StirlingS2[j + n/2, n/2] /
StirlingS2[n, n/2]},
{j, n/2 - 10, n/2}]]
```



```
n = 5000;
ListPlot[
Table[
{j, Binomial[n/2, j] *
StirlingS2[j + n/2, n/2] /
StirlingS2[n, n/2]},
{j, n/2 - 10, n/2}]]
```



Dosažením do nerovnosti pro $B(n)$ dostaneme

$$S_2\left(n, \frac{n}{2}\right)^2 \leq B(n) \leq \frac{2n}{2-z} * S_2\left(n, \frac{n}{2}\right)^2$$

$$S_2\left(n, \frac{n}{2}\right)^2 \leq (n-1)! * b * q^n \leq \frac{2n}{2-z} * S_2\left(n, \frac{n}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{S_2\left(n, \frac{n}{2}\right)^2}{b * (n-1)!}\right)^{\frac{1}{n}} \leq q \leq \left(\frac{\frac{2n}{2-z} * S_2\left(n, \frac{n}{2}\right)^2}{b * (n-1)!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Nyní už můžeme použít předchozí asymptotický vztah pro [Stirlingova čísla druhého druhu](#) a dostaneme

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_2\left(n, \frac{n}{2}\right)^{2/n}}{\frac{n}{e}} = \frac{2}{z(2-z)} = 3.088277304741740179115840082025438276836444897142013876724773 \dots$$

▪ QED

Jiná možná asymptotická vyjádření $B(n)$ jsou

$$B(n) \sim \pi (z-1) b \sqrt{2\pi n} * S_2\left(n, \frac{n}{2}\right)^2 = 2.95096767 \dots * \sqrt{n} * S_2\left(n, \frac{n}{2}\right)^2$$

$$B(n) \sim b \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{n e^{z-1}}{z}\right)^n$$

Ještě je možno doplnit přímou rovnicí (ne tak elegantní) pro konstantu q

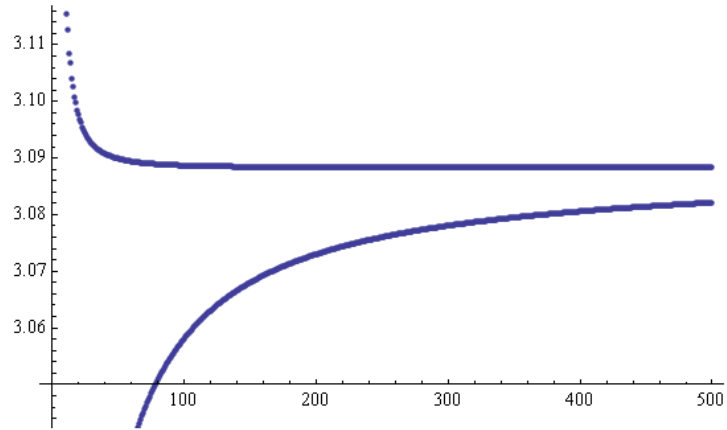
$$e^{1+\sqrt{1-\frac{2}{q}}} = q \left(1 + \sqrt{1-\frac{2}{q}}\right)$$

Konstantu q jde vyjádřit i pomocí tzv. [Lambert W funkce](#)

$$q = -\frac{2}{\text{LambertW}\left(-\frac{2}{e^2}\right) * \left(2 + \text{LambertW}\left(-\frac{2}{e^2}\right)\right)}$$

Numerické výsledky jsou v souladu s analytickými. Graf ukazuje přibližování ke konstantě q pro $n < 500$.

```
Show[ListPlot[Table[bishops[[n+1]]/bishops[[n]]/(n+1), {n, 1, 499}]],
ListPlot[Table[bishops[[n+1]]/bishops[[n]]/n, {n, 1, 499}]]]
```



Pro zpřesnění jsem vypočítal ještě další hodnoty. Výpočet pro $n=10000$ programem Mathematica trval 43 hodin.

n	q	b
1000	3.0882815944796830888	0.6295129979396942
2000	3.0882783792987619797	0.6303882462593924
3000	3.0882777826378637335	0.6306807467379995
4000	3.0882775736470486878	0.6308271382298150
5000	3.0882774768752302134	0.6309150183812846
10000	3.0882773477921684453	0.6310908806085001
...		
∞	3.0882773047417401791	0.6312668788741154
	A238258	A238260

Vedlejším efektem předchozího důkazu bylo odvození asymptotického vzorce pro počet rozmístění neohrožujících se n střelců jen na **černých polích** šachovnice $2n \times 2n$. [A191236](#) - Number of ways to place n non-attacking bishops on an **black squares** of $2n \times 2n$ board (explicit and **asymptotic** formulas):

$$peven(n, 2n) = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} (j(j+1))^n \sim e^{z/2} * S_2(2n, n) \sim \frac{\left(\frac{2ne^{z-1}}{z}\right)^n}{\sqrt{\pi n(z-1)(2-z)}} = 1.14869665494260 \dots * 2.27222745810167 \dots^n * n^{n-\frac{1}{2}}$$

Nebo v jiném tvaru

$$\frac{peven(n, 2n)}{(n-1)!} \sim \frac{\left(\frac{4}{z(2-z)}\right)^n}{\pi\sqrt{2(z-1)(2-z)}} = \frac{(2q)^n}{\pi\sqrt{2(z-1)(2-z)}} = 0.45826366301229935412 \dots * 6.1765546094834803582 \dots^n$$

$$z = 1.59362426004004009 \dots$$

Paul D. Hanna doplnil 13.11.2012 generační funkci

$a_0=1$ a pro $n>0$

$$a_n = \frac{1}{n!} * \left(\frac{d}{dx}\right)_{x=0}^n \sum_{k=0}^n \frac{k^k (k+1)^k e^{-k(k+1)x} x^k}{k!}$$

V programu Mathematica

```
Flatten[{1, Table[SeriesCoefficient[Sum[k^k*(k+1)^k*E^(-k*(k+1)*x)*x^k/k!, {k, 1, n}], {x, 0, n}], {n, 1, 20}]}]
```

nebo

```
Flatten[{1, Table[1/n!*D[Sum[k^k*(k+1)^k*E^(-k*(k+1)*x)*x^k/k!, {k, 1, n}], {x, n}]/.x->0, {n, 1, 20}]}]
```

General formulas for number of ways to place k non-attacking bishops on an $n \times n$ board

S. E. Arshon řešil ve svém článku z roku 1936 pouze případ n střelců na šachovnici $n \times n$, ale jeho vzorce lze snadno zobecnit i pro k neohrožujících se střelců na šachovnici $n \times n$. Pro zjednodušení položíme

$$\text{if } k \geq n \text{ then } \text{peven}(k,n) = 0, \text{poddblack}(k,n) = 0, \text{poddwhite}(k,n) = 0$$

to je v souladu s programem Mathematica (*pokud je horní index sumy menší než dolní*)

Dále (v souladu se vzorci)

$$\text{peven}(0,n) = 1, \text{poddblack}(0,n) = 1, \text{poddwhite}(0,n) = 1$$

Pak pro n **sudé** (*if n is even*):

$$k_bishops_nxn_n_even = \sum_{i=0}^k \text{peven}(i, n) * \text{peven}(k - i, n)$$

$$(-1)^k * \sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(k, n)} \left(\left(\sum_{m=1}^{n-i} \frac{(-1)^m m^{\frac{n}{2}} (m+1)^{\frac{n}{2}}}{(n-i-m)! m!} \right) * \left(\sum_{m=1}^{n+i-k} \frac{(-1)^m m^{\frac{n}{2}} (m+1)^{\frac{n}{2}}}{(n+i-k-m)! m!} \right) \right)$$

Pro $n > 1$ **liché** (*if n is odd*):

$$k_bishops_nxn_n_odd = \sum_{i=0}^k \text{poddblack}(i, n) * \text{poddwhite}(k - i, n)$$

$$(-1)^k * \sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(k, n)} \left(\left(\sum_{m=1}^{n-i} \frac{(-1)^m m^{\frac{n-1}{2}} (m+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-i-m)! m!} \right) * \left(\sum_{m=1}^{n+i-k} \frac{(-1)^m m^{\frac{n+1}{2}} (m+1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n+i-k-m)! m!} \right) \right)$$

Number of ways to place k non-attacking bishops on an $n \times n$ board, one formula for all $n > 1$ (with Floor function)

Možný je i zápis jedním vzorcem s užitím funkce celá část (pro libovolné $n > 1$):

$$B(k, n) = (-1)^k * \sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(k, n)} \left(\left(\sum_{m=1}^{n-i} \frac{(-1)^m m^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (m+1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}{(n-i-m)! m!} \right) * \left(\sum_{m=1}^{n-k+i} \frac{(-1)^m m^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (m+1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(n-k+i-m)! m!} \right) \right)$$

Nebo s užitím kombinačních čísel (same formula with *binomial coefficients*)

$$B(k, n) = \frac{(-1)^k}{(2n-k)!} \sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(k, n)} \left(\binom{2n-k}{n-k+i} \left(\sum_{m=1}^{n-i} (-1)^m \binom{n-i}{m} m^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (m+1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \right) \left(\sum_{m=1}^{n-k+i} (-1)^m \binom{n-k+i}{m} m^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (m+1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) \right)$$

V programu Mathematica můžeme vše zapsat jedinou funkcí (kterou lze použít i třeba pro případy $k=n$ nebo $k=2n-2$). Výpočet je rychlejší při užití druhého tvaru vzorce s binomickými koeficienty.

(* k non-attacking bishops on an n x n chessboard - universal formula *)

knbishops[k_, n_] := (If[n==1, If[k==1, 1, 0], (-1)^k / (2n-k) !

***Sum[Binomial[2n-k, n-k+i] * Sum[(-1)^m * Binomial[n-i, m] * m^Floor[n/2] * (m+1)^Floor[(n+1)/2], {m, 1, n-i}]**

***Sum[(-1)^m * Binomial[n-k+i, m] * m^Floor[(n+1)/2] * (m+1)^Floor[n/2], {m, 1, n+i-k}], {i, Max[0, k-n], Min[k, n]}]]];**

Table[knbishops[2, n], {n, 1, 50}]

Table[knbishops[n, n], {n, 1, 50}]

Table[knbishops[2n-2, n], {n, 1, 50}]

Ještě je možné doplnit, že při $k=1$ dostáváme zajímavou kombinatorickou identitu

$$\sum_{m=1}^{2n-1} (-1)^{m-1} \binom{2n-1}{m} (m(m+1))^n = n * (2n)!$$

Maximální počet neohrožujících se střelců na šachovnici $n \times n$ je $2n - 2$ (kdy složíme $n-1$ střelců na bílých polích a $n-1$ střelců na černých polích) a počet takových pozic je 2^n , což uvádí již Henry Dudeney, "Amusements in Mathematics" (1917), str. 96. Viz též [Bishops Problem](#).

V souladu s tím jsou tyto výsledky:

$$\begin{aligned} \text{peven}(n-1, n) &= 2^{n/2} \\ \text{poddblack}(n-1, n) &= 2^{\frac{n+1}{2}} \\ \text{poddwhite}(n-1, n) &= 2^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned}$$

Maximal number of non-attacking bishops on an $n \times n$ board is $2n-2$, and there are 2^n ways to place them.

Podobně jako v případě $k = n$ jsem odvodil obecný vzorec pro libovolné k rovněž s užitím [Stirlingových čísel druhého druhu](#).

*Number of ways to place k non-attacking bishops on an $n \times n$ board ($n > 1$) - **Alternative formula** (V. Kotěšovec, 23.3.2011)*

$$B(k, n) = \sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(k, n)} \left(\left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}{j} S_2 \left(j + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-i \right) \right) * \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{j} S_2 \left(j + \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, n-k+i \right) \right) \right)$$

$S_2 =$ [Stirling numbers of the second kind](#)

V programu Mathematica jde tento vzorec zapsat takto (pro velká n však doporučuji z časových důvodů použít raději předchozí program s binomickými koeficienty):

```
stknbishops[k_, n_] := (If[n==1, If[k==1, 1, 0],
Sum[Sum[Binomial[Floor[(n+1)/2], j]*StirlingS2[j+Floor[n/2], n-i], {j, 0, Floor[(n+1)/2]}]*
Sum[Binomial[Floor[n/2], j]*StirlingS2[j+Floor[(n+1)/2], n-k+i], {j, 0, Floor[n/2]}], {i, Max[0, k-n], Min[k, n]}]);
Table[stknbishops[2, n], {n, 1, 50}]
Table[stknbishops[n, n], {n, 1, 50}]
Table[stknbishops[2n-2, n], {n, 1, 50}]
```


Je zajímavé, že pro k konstantní, vycházejí z těchto vzorců [polynomy v n](#). Pro libovolné k je dostaneme (včetně vytvářejících funkcí) tímto programem:

```
(* V. Kotěšovec, 3/2011, funkce knbishops viz výše *)
bpolynom[k_]:= (
  Print["===== "];
  Print[k," bishops n x n"];
  rada=Table[knbishops[k,n],{n,1,4k+20}];
  Print[rada];
  (* explicit formula *)
  formula=Sum[Subscript[y,j]*n^j,{j,0,2k}]+(-1)^n*Sum[Subscript[z,j]*n^j,{j,0,2k}];
  neznam=4k+2;
  sol=Solve[Table[rada[[n]]==formula,{n,Length[rada]-neznam,Length[rada]-1}];fvyp=Expand[formula/.sol][[1]];
  Print[TraditionalForm[fvyp]];
  Print[TraditionalForm[Factor[fvyp]]];
  difr=Table[rada[[n]]-fvyp,{n,1,Length[rada]}];
  Print[difr];

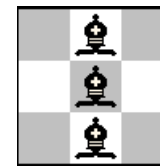
  (* ještě určím vytvářející funkci - generating function *)
  denom=If[k==2,(x-1)^5,(x-1)^(2k+1)*(x+1)^(2k-5)];
  d=Exponent[denom,x];
  gf=(Sum[Subscript[b,i]*x^i,{i,0,d-1}]/denom);
  gfvyp=Factor[gf/.Solve[Table[rada[[i]]==Simplify[SeriesCoefficient[gf,{x,0,i}]],{i,1,d}]]][[1]];
  Print[TraditionalForm[gfvyp]];
  Print[Table[rada[[i]]-SeriesCoefficient[gfvyp,{x,0,i}},{i,1,Length[rada]}]];
);

Do[bpolynom[k];,{k,2,20}];
```

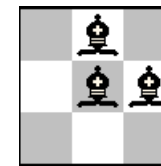
Kompletní polynomiální vzorce (až do $k=10$) je možno nalézt v kapitole [4.1](#).

V případě střelců byl již před mnoha lety kompletně vyřešen problém tzv. **dominance**, tj. nalezení minimálního počtu střelců, kteří pokrývají všechna (prázdná) pole šachovnice. Na šachovnici $n \times n$ je takový počet roven n . Tento počet je shodný pro střelce v obecné pozici i pro střelce, kteří se neohrožují. Byly odvozeny i vzorce pro počty takových pozic.

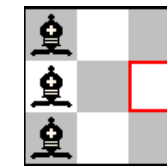
*The minimum number of bishops (**domination** number) needed to attack or occupy every square on an $n \times n$ chessboard is n (same for non-attacking bishops or for bishops in a general position).*



dominating
non-attacking



dominating
attacking



non-dominating
non-attacking

					A122749	A005635	A182333
	b	pb	w = n - b	pw	pb * pw		
board n x n	minimal number of bishops needed on a black squares	number of positions on a black squares	minimal number of bishops needed on a white squares	number of positions on a white squares	total number of arrangements of dominating and non-attacking bishops	(dominating and non-attacking) number of inequivalent solutions	total number of arrangements of dominating bishops (general positions)
1 x 1	1	1		1	1	1	1
2 x 2	1	2	1	2	4	1	4
3 x 3	1	1	2	2	2	1	6
4 x 4	2	4	2	4	16	3	25
5 x 5	3	22	2	2	44	8	104
6 x 6	3	16	3	16	256	36	484
7 x 7	3	6	4	128	768	110	2136
8 x 8	4	72	4	72	5184	666	11664
9 x 9	5	1056	4	24	25344	3250	71136
10 x 10	5	432	5	432	186624	23436	451584
11 x 11	5	120	6	8304	996480	125198	3006720
12 x 12	6	2880	6	2880	8294400	1037520	21902400
13 x 13	7	80400	6	720	57888000	7241272	176774400
14 x 14	7	23040	7	23040	530841600	66360960	1456185600
15 x 15	7	5040	8	794880	4006195200	500827928	12758860800
16 x 16	8	201600	8	201600	40642560000	5080370400	117456998400

Důkaz tvrzení, že k pokrytí šachovnice stačí n střelců (a některé nerovnosti pro dámy), můžeme najít např. v článku [Chessboard Domination Problems](#), E. J. Cockayne, 1986, str.10.

Jiný článek zabývající se dominací dam: [Some New Results for the Queens Domination Problem](#), P. B. Gibbons, J. A. Webb, Australasian Journal of Combinatorics 15/1997, str. 145-160.

Znamé výsledky shrnul ve své diplomové práci [Paired and Total Domination on the Queen's graph](#), Paul Asa Burchett, 2005, zejména zde zaujmou reprodukce pozic, jejichž autorem je L. Welsch.

V knize John Watkins: [Across the Board: The Mathematics of Chessboard Problems](#) (2004), je rozsáhlá kapitola Domination od str. 95.

O dominaci dalších figur viz též OEIS: [A075458](#) (Queens), [A075324](#) (non-attacking Queens), [A075561](#) (Kings), [A189889](#) (Kings - toroidal board), [A006075](#) (Knights).

[A002564](#) total number of arrangements of dominating Queens (general positions), [A002568](#) total number of arrangements of dominating and non-attacking Queens.

A182333 Number of arrangements of n bishops (in general position) such that every square of the board is controlled by at least one bishop

V obecné pozici tento problém vyřešili A. M. Yaglom and I. M. Yaglom, v knize [Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions](#), vol.1, 1987, problem 38d, p.11, p.83-88. Tato kniha vyšla v ruském originále v roce 1954, [Неэлементарные задачи в элементарном изложении](#), Акива Моисеевич Яглом, Иссаак Моисеевич Яглом. Je však zajímavé, že v tomto originále (kde má problém číslo 36), jsou vzorce chybné (*formulas in original Russian text from 1954 are wrong, but in translation from 1987 are all formulas right, I verified it by computer*).

Jejich 4 vzorce (podle toho, jaký zbytek dává n po dělení 4), publikované v anglickém překladu z roku 1987, jsem sloučil do jednoho vzorce a trochu zjednodušil. Současně jsem ověřil počítačem jejich platnost. Pro počet pozic n střelců (v obecné pozici), kteří **dominují** celé šachovnici $n \times n$ platí vzorec

for $n > 1$

$$\frac{1}{128} \left(\left(2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor ! \right)^2 * (n^5 + 3n^4 + n^3 + 35n^2 + 38n + 2 - (n^5 - n^4 - 7n^3 - n^2 - 10n - 30) * (-1)^n - 4(n^3 + 2n^2 + n - 4) * n * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 2(n^5 + n^4 - 11n^3 - 7n^2 - 2n + 2) * \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)) \right)$$

V programu Mathematica dostaneme tabulku hodnot takto:

```
Table[If[n==1,1,(2*Floor[n/4]!)^2/128*(n^5+3*n^4+n^3+35*n^2+38*n+2-(n^5-n^4-7*n^3-n^2-10*n-30)*(-1)^n-4*(n^3+2*n^2+n-4)*n*Cos[Pi*n/2]-2*(n^5+n^4-11*n^3-7*n^2-2*n+2)*Sin[Pi*n/2]],{n,1,25}]
```

A122749 Number of arrangements of n **non-attacking** bishops such that every square of the board is controlled by at least one bishop

Pokud přidáme podmínku, že se střelci navzájem **neohrožují** a stále **dominují** celé šachovnici, počet pozic se zmenší, ale stále bude stačit k pokrytí šachovnice $n \times n$ pouze n střelců. Vzorec pro tento případ odvodil R. W. Robinson, Counting arrangements of bishops, pp. 198-214 of Combinatorial Mathematics IV (Adelaide 1975), Lecture Notes in Mathematics, 560 (1976). Tento článek jsem již citoval v úvodu kapitoly 4.1.1.

Opět jsem raději původní 4 vzorce sloučil do jednoho (a přitom ověřil jeho platnost programem):

$$\frac{1}{768} * \left(2 * (3n^3 + 23n^2 + 17n + 21) * \left(\frac{n-1}{2} ! \right)^2 * \left(1 - (-1)^n + 2 * \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right) - 2 * (3n^3 + 17n^2 - 47n + 3) * \left(\frac{n-3}{2} ! \right) * \left(\frac{n+1}{2} ! \right) * \left((-1)^n + 2 * \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 1 \right) + 3 * (n+2)^4 * \left(\frac{n}{2} - 1 ! \right)^2 * \left((-1)^n - 2 * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 1 \right) + 12 * (n+4)^2 * \left(\frac{n}{2} ! \right)^2 * \left((-1)^n + 2 * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 1 \right) \right)$$

V programu Mathematica dostaneme tabulku hodnot takto:

```
Table[If[n==1,1,1/768*(2*(3*n^3+23*n^2+17*n+21)*((n-1)/2!)^2*(1-(-1)^n+2*Sin[Pi*n/2])-2*(3*n^3+17*n^2-47*n+3)*((n-3)/2)!*((n+1)/2)!*((-1)^n+2*Sin[Pi*n/2]-1)+3*(n+2)^4*((n/2-1)!)^2*((-1)^n-2*Cos[Pi*n/2]+1)+12*(n+4)^2*((n/2)!)^2*((-1)^n+2*Cos[Pi*n/2]+1)],{n,1,25}]
```

4.1.2) n semi-bishops on an $n \times n$ chessboard - n semi-střelců na šachovnici $n \times n$ - A187235

Two semi-bishops do not attack each other if they are in the same northwest-southeast diagonal.

Z matematického hlediska (z šachového nikoliv) jsou ještě zajímaví poloviční střelci, tzv. semi-bishops, kteří mohou tahat jen po jedné z obou diagonál, tedy jen ve směru zleva doprava (a zpět). Po druhé diagonále se neohrožují. Pro určení počtu nenapadajících se semi-střelců na šachovnici $n \times n$ jsem odvodil jednoduchou vytvořující funkci (*simple generating function*)

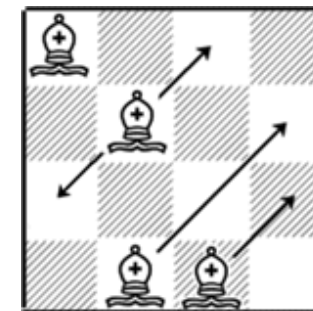
(V. Kotěšovec, February 2011):

$$\prod_{i=1}^n (i+x) \prod_{i=1}^{n-1} (i+x)$$

Koeficient u x^{2n-k-1} určuje tento počet pro k semi-střelců, speciálně koeficient u x^{n-1} určuje počet neohrožujících se n semi-střelců na šachovnici $n \times n$.

Tato metoda je i nejefektivnější pro výpočet hodnot (v příkladu se vygeneruje tabulka prvních 50 hodnot) (*in Mathematica, efficient method*)

```
Table[If[n==1,1,Coefficient[Expand[Product[x+i,{i,1,n}]*Product[x+i,{i,1,n-1}],x],x,n-1]],{n,1,50}]
```



Na základě vytvořující funkce jsem odvodil i **explicitní vzorec**:

Number of ways to place n non-attacking semi-bishops on an $n \times n$ board, explicit formula (V. Kotěšovec, 24.3.2011):

$$\text{SemiB}(n) = (-1)^n * \sum_{j=1}^n S_1(n+1, j) * S_1(n, n-j+1)$$

kde S_1 jsou [Stirlingova čísla prvního druhu](#), $S_1 =$ [Stirling numbers of the first kind](#).

V programu Mathematica dostaneme tabulku hodnot takto:

```
Table[(-1)^n*Sum[StirlingS1[n+1,j]*StirlingS1[n,n-j+1],{j,1,n}],{n,1,50}]
```

Nejzajímavější na této funkci je však její **asymptotické chování**.

Theorem (V. Kotěšovec, 24.5.2011): *Asymptotic behavior for number of ways to place n non-attacking semi-bishops on an $n \times n$ board is*

$$\text{SemiB}(n) \sim b * q^n * (n - 1)!$$

constants ([A238261](#), [A238262](#))

$$q = \frac{1}{z(1 - z)} = 4.9108149645682558987515348052403521978987 \dots$$

$$b = 0.242521912815235985949321 \dots$$

where $z = 0.71533186295916 \dots$ is the root of the equation

$$z = 2(z - 1) \log(1 - z)$$

Důkaz (*proof*): Nejprve provedeme odhad mezí, v další části potom zpřesnění jednotlivých konstant.

Samotná úloha je vlastně více matematická než šachová - rozmístění semi-střelců je ekvivalentní výběru n prvků, vždy jeden z $2n-1$ přihrádek očíslovaných

1	2	3	...	n-2	n-1	n	n-1	n-2	...	3	2	1
---	---	---	-----	-----	-----	---	-----	-----	-----	---	---	---

Pokud vybereme nějakou n -tici, příslušná čísla přihrádek vynásobíme. Takto sečteme všechny možné součiny. Počet výběrů možných n -tic z $2n-1$ přihrádek je dán kombinačním číslem $\binom{2n-1}{n}$ a každý takový součin bude vždy větší než krajní n -tice (z obou stran), tedy $(n/2)!^2$. Na druhé straně bychom mohli udělat podobný odhad podle n -tice nejbližší středu, ten vede ale jen k výrazu $q < 8$. Trochu silnější výsledek dostaneme jednoduchým výpočtem všech možných rozestavení n střelců na šachovnici $n \times n$ (bez ohledu na to, zda se ohrožují či nikoliv). Tento počet je $\binom{n^2}{n}$. Odtud dostáváme s užitím [Stirlingova vzorce](#) pro velká n asymptotickou nerovnost

$$\frac{n2^{n-1}}{\sqrt{2}} \sim \binom{2n-1}{n} \left(\left(\frac{n}{2} \right)! \right)^2 \frac{1}{(n-1)!} < \frac{\text{SemiB}(n)}{(n-1)!} < \binom{n^2}{n} \frac{1}{(n-1)!} \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{e}} e^{2n}$$

ze které už vyplývá tvar asymptotické funkce (tedy, že je řádu q^n , kde q je konstanta) a současně i triviální odhad

$$2 < q < e^2 = 7.389 \dots$$

Dále jsem analyzoval konstanty q a b jednak analyticky, jednak numericky. Pro numerické výpočty je lepší použít vytvořující funkci, ale pro analytické zkoumání se ukázal jako vhodný vzorec se [Stirlingovými čísly prvního druhu](#). Pro asymptotické chování těchto čísel totiž existuje řada poměrně dobrých odhadů. Přes jeden z nich vede cesta k přesnému vyjádření konstanty q . Z existujících odhadů nás budou nejvíce zajímat takové, kdy druhý parametr [Stirlingových čísel prvního druhu](#) je řádově stejný jako první (řada prací analyzuje případ, kdy je druhý parametr konstantní, nezávislý na n , to může být sice zajímavé, ale pro tento účel nepoužitelné).

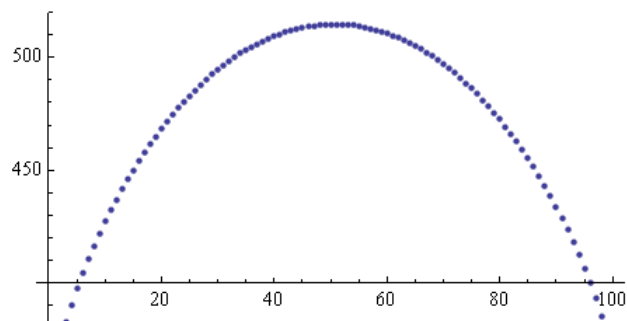
První takový odhad odvodil I. J. Good: [An asymptotic formula for the differences of the powers at zero](#), The Annals of Mathematical Statistics (1961), str. 252. Dále jej pak ještě zlepšil A. N. Timashev: [On asymptotic expansions of Stirling numbers of the first and second kind](#), Discrete Mathematics and Applications, 1998, str. 533–544. Jejich výrazy jsou trochu obecnější, já jsem použil pouze případ $n/2$ (druhý výraz je pak s upravenými faktoriály podle [Stirlingova vzorce](#))

$$\left| S_1\left(n, \frac{n}{2}\right) \right| \sim \frac{n! \sqrt{\frac{1-z}{2\pi n(2z-1)}} (-\log(1-z))^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)! z^n} \sim \left(\frac{n}{ez(1-z)}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{1-z}{\pi n(2z-1)}}$$

kde $z = 0.715331862959\dots$ je kořen rovnice

$$\frac{z}{(z-1)\log(1-z)} = 2$$

```
n = 100;
ListPlot[
Table[
Log[StirlingS1[n+1, j] *
StirlingS1[n, n-j+1]], {j, 1, n}]]
```



Když si zobrazíme průběh zkoumané funkce (v logaritmickeém měřítku), vidíme, že maximum nastává kolem $n/2$, přesněji v bodech $j=n/2$ a $j=n/2+1$. K úpravám výrazů budeme ještě potřebovat známou [rekurenci](#)

$$S_1(n+1, k) = n * S_1(n, k) + S_1(n, k-1)$$

Z předchozích vztahů jde odvodit limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n S_1\left(n, \frac{n}{2} + 1\right)}{S_1\left(n, \frac{n}{2}\right)} \right| = \frac{z}{1-z} = 2.512862417 \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_1\left(n+1, \frac{n}{2}\right)}{n S_1\left(n, \frac{n}{2}\right)} \right| = \frac{1}{z} = 1.397952547 \dots$$

Nyní už celkem snadno určíme (identické) hodnoty v maximum

$$\max_1 = S_1\left(n+1, \frac{n}{2}\right) * S_1\left(n, \frac{n}{2} + 1\right) \sim \frac{n}{z} * S_1\left(n, \frac{n}{2}\right) * \frac{z}{n(1-z)} * S_1\left(n, \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{1-z} * S_1\left(n, \frac{n}{2}\right)^2$$

$$\max_2 = S_1\left(n+1, \frac{n}{2} + 1\right) * S_1\left(n, \frac{n}{2}\right) = \left(n * S_1\left(n, \frac{n}{2} + 1\right) + S_1\left(n, \frac{n}{2}\right)\right) * S_1\left(n, \frac{n}{2}\right) \sim \left(\frac{z}{1-z} + 1\right) * S_1\left(n, \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{1}{1-z} * S_1\left(n, \frac{n}{2}\right)^2$$

Pro součet přes všechna j od 1 do n potom platí, že je určitě menší než plocha obdélníku s výškou rovnou maximum a větší než samotná hodnota maxima, tedy

$$\max \leq \text{SemiB}(n) \leq \max * n$$

$$\max \leq (n-1)! * b * q^n \leq \max * n$$

Stirling Integers of the First Kind. For the Stirling integers of the first kind, we have $(-1)^n t! s(n+t, t) = (n+t)!$ times the coefficient of x^n in $[-x^{-1} \log(1-x)]^t$. (See, for example, Riordan [6], p. 42.) Hence we can obtain an asymptotic formula from the saddlepoint theorem, valid if n/t is not small or large. We here give the first term only, though the other terms could be worked out as above.

$$(13) \quad s(n+t, t) \sim \frac{(-1)^n (n+t)! [-\log(1-\rho)]^t}{t! \rho^{n+t} (2\pi t \kappa_2)^{\frac{1}{2}}},$$

where

$$(14) \quad \kappa_2 = \left(\frac{1}{1-\rho} \cdot \frac{t}{n+t} - 1\right) \frac{(n+t)^2}{t^2}$$

and ρ is now the unique root between 0 and 1 of the equation

$$(15) \quad \frac{\rho}{-(1-\rho)\log(1-\rho)} = \frac{n+t}{t} = 1 + \kappa.$$

$$\left(\frac{1}{1-z} * S_1 \left(n, \frac{n}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{n}} \leq q \leq \left(\frac{1}{1-z} * S_1 \left(n, \frac{n}{2} \right)^2 * n \right)^{\frac{1}{n}}$$

Což (podle předchozího asymptotického vztahu) v limitě splývá v jedinou hodnotu

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 \left(n, \frac{n}{2} \right)^{2/n}}{\frac{n}{e}} = \frac{1}{z(1-z)} = 4.9108149645682558987515348052403521978987052817678471761394112 \dots$$

▪ QED

Jiná možná asymptotická vyjádření $SemiB(n)$ jsou

$$SemiB(n) \sim \frac{2z-1}{1-z} * \pi b \sqrt{2\pi n} * S_1 \left(n, \frac{n}{2} \right)^2 = 2.88928395625 \dots * \sqrt{n} * S_1 \left(n, \frac{n}{2} \right)^2$$

$$SemiB(n) \sim b \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{n}{ez(1-z)} \right)^n$$

Přímá rovnice pro konstantu q

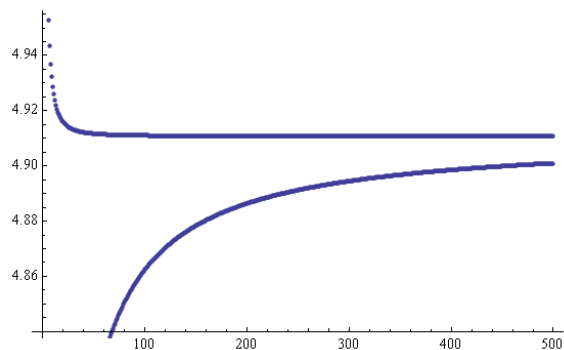
$$e^{-\frac{q}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{q(q-4)}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{q}}$$

Konstantu q jde vyjádřit i pomocí tzv. [Lambert W funkce](#)

$$q = -\frac{\left(2 * LambertW \left(-1, -\frac{1}{2\sqrt{e}} \right) \right)^2}{1 + 2 * LambertW \left(-1, -\frac{1}{2\sqrt{e}} \right)}$$

```
NSolve[E^(1/2-q/4-1/4*Sqrt[q*(q-4)])==1/2-Sqrt[1/4-1/q],q,Reals,50][[1]]
N[-(2*LambertW[-1,-1/(2*Sqrt[E])])^2/(1+2*LambertW[-1,-1/(2*Sqrt[E])]),50]
```

```
Show[ListPlot[Table[semibishops[[n+1]]/semibishops[[n]]/(n+1), {n, 1, 499}],
ListPlot[Table[semibishops[[n+1]]/semibishops[[n]]/n, {n, 1, 499}]]]
```



Numerické výsledky jsou v souladu s analytickými. Graf ukazuje přibližování ke konstantě q pro všechna $n < 500$.

n	q	b
1000	4.9108173475144062283	0.2422864165370192
10000	4.9108149884659158420	0.2424983076514364
12000	4.9108149811647321942	0.2425022409863188
...		
∞	4.9108149645682558987	0.2425219128152359
	A238261	A238262

Poznámka: Určitě je zajímavé srovnání s podobnými výsledky pro střelce na str. 251, vyjadřující i analogii mezi Stirlingovými čísly [prvního](#) a [druhého](#) druhu, dostáváme např. asymptotický vztah

$$\frac{S_2\left(n, \frac{n}{2}\right)}{\left|S_1\left(n, \frac{n}{2}\right)\right|} \sim 1.5964080037 \dots * \left(\frac{q_B}{q_{SB}}\right)^{\frac{n}{2}} = 1.5964080037 \dots * \left(\frac{3.0882773047417401791 \dots}{4.9108149645682558987 \dots}\right)^{\frac{n}{2}} = 1.5964080037 \dots * 0.628872667169 \dots^{n/2}$$

Conjecture by Peter Luschny (9.2.2015): [A187235](#) is a number of parity preserving permutations of the set $\{1, 2, \dots, 2n+1\}$ with exactly $n+1$ cycles (see [A246117](#)).

Explicitní vzorec jde snadno zobecnit i pro k neohrožujících se semi-střelců na šachovnici $n \times n$.

Number of ways to place k non-attacking semi-bishops on an $n \times n$ board, explicit formula (V. Kotěšovec, 24.3.2011):

$$\text{SemiB}(k, n) = (-1)^k * \sum_{j=1}^{2n-k} S_1(n+1, j) * S_1(n, 2n-k-j+1)$$

kde S_1 jsou [Stirlingova čísla prvního druhu](#), $S_1 =$ [Stirling numbers of the first kind](#).

V programu Mathematica dostaneme tabulku hodnot takto:

```
semikn[k_,n_] := (-1)^k*Sum[StirlingS1[n+1,j]*StirlingS1[n,2n-k-j+1],{j,1,2n-k}];
```

```
Table[semikn[2,n],{n,1,20}]
```

```
Table[semikn[n,n],{n,1,20}]
```

```
Table[semikn[2n-1,n],{n,1,20}]
```

Vytvořující funkce (v programu Mathematica, efektivnější pro výpočty) (V. Kotěšovec, 24.3.2011):

```
semigf[k_,n_] := (Coefficient[Expand[Product[x+i,{i,1,n}]*Product[x+i,{i,1,n-1}],x],x,2n-k-1]);
```

```
Table[semigf[2,n],{n,1,20}]
```

```
Table[semigf[n,n],{n,1,20}]
```

```
Table[semigf[2n-1,n],{n,1,20}]
```

Pozornému čtenáři jistě neunikl jeden drobný rozdíl, kdy pro $n > 1$ se na šachovnici $n \times n$ vejde maximálně $2n-1$ neohrožujících se semi-střelců, kdežto střelců jen $2n-2$, tedy o jednoho méně.

Pro konstantní k dostáváme polynomy v n
(V. Kotěšovec, February 2011)

$$\text{SemiB}(1, n) = n^2$$

$$\text{SemiB}(2, n) = \frac{1}{6}(n-1)n(3n^2 + n + 1)$$

$$\text{SemiB}(3, n) = \frac{1}{6}(n-1)n^2(n^3 - n^2 - 1)$$

$$\text{SemiB}(4, n) = \frac{1}{360}(n-2)(n-1)n(15n^5 - 15n^4 + 5n^3 - 21n^2 + 7n + 3)$$

$$\text{SemiB}(5, n) = \frac{1}{360}(n-2)(n-1)n^2(3n^6 - 11n^5 + 11n^4 - 11n^3 + 19n^2 - 11n - 6)$$

$$\text{SemiB}(6, n) = \frac{1}{45360}(n-3)(n-2)(n-1)n(63n^8 - 252n^7 + 315n^6 - 343n^5 + 651n^4 - 571n^3 - 234n^2 + 131n + 60)$$

$$\text{SemiB}(7, n) = \frac{1}{45360}(n-3)(n-2)(n-1)n^2(9n^9 - 72n^8 + 204n^7 - 289n^6 + 399n^5 - 697n^4 + 576n^3 + 203n^2 - 333n - 180)$$

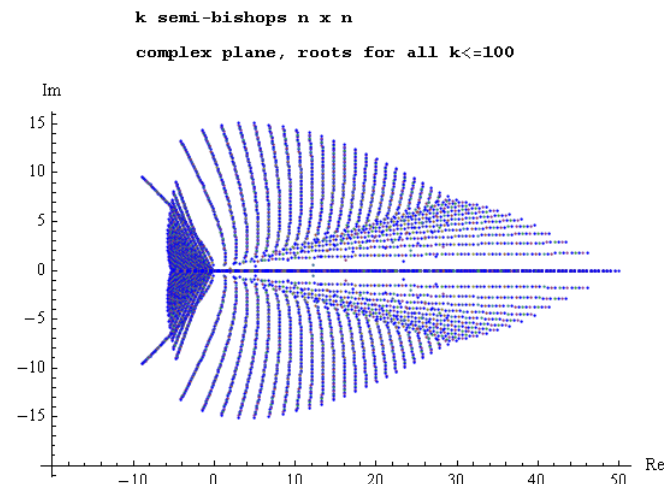
$$\text{SemiB}(8, n) = \frac{1}{5443200}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(135n^{11} - 1170n^{10} + 3735n^9 - 6090n^8 + 8995n^7 - 17390n^6 + 18541n^5 + 2710n^4 - 16775n^3 - 6410n^2 + 4269n + 1890)$$

$$\text{SemiB}(9, n) = \frac{1}{5443200}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(15n^{12} - 210n^{11} + 1155n^{10} - 3266n^9 + 5795n^8 - 9890n^7 + 18301n^6 - 19178n^5 - 3515n^4 + 21270n^3 + 4709n^2 - 15186n - 7560)$$

$$\text{SemiB}(10, n) = \frac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(99n^{14} - 1485n^{13} + 8910n^{12} - 27951n^{11} + 54978n^{10} - 99935n^9 + 201828n^8 - 258225n^7 + 3102n^6 + 340179n^5 - 41058n^4 - 423589n^3 - 137139n^2 + 108126n + 45360)}{359251200}$$

$$\text{SemiB}(2n-2, n) = (n-1)!^2 \left(1 + 2n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \right) \sim 2 * n! (n-1)! \log(n) \sim \frac{4\pi n^{2n} \log(n)}{e^{2n}}$$

$$\text{SemiB}(2n-1, n) = n! (n-1)!$$



Polynomy mají obecně tvar

$$\begin{aligned} & \frac{n^{2k}}{k!} - \frac{n^{2k-1}}{3(k-2)!} + \frac{k n^{2k-2}}{18(k-3)!} - \frac{(5k^4 - 25k^3 + 31k^2 - 5k + 141)n^{2k-3}}{810(k-2)!} + \frac{(5k^5 - 35k^4 + 64k^3 - 25k^2 + 567k + 36)n^{2k-4}}{9720(k-3)!} \\ & - \frac{(7k^6 - 63k^5 + 154k^4 - 105k^3 + 1999k^2 + 258k + 4140)n^{2k-5}}{204120(k-4)!} + \frac{(35k^8 - 525k^7 + 2730k^6 - 5985k^5 + 25089k^4 - 76878k^3 + 112546k^2 - 383172k - 261090)n^{2k-6}}{18370800(k-4)!} \\ & - \frac{(5k^{10} - 110k^9 + 930k^8 - 3855k^7 + 13164k^6 - 51765k^5 + 156820k^4 - 435760k^3 + 594531k^2 - 13140k + 2256660)n^{2k-7}}{55112400(k-4)!} \\ & + \frac{(5k^{11} - 130k^{10} + 1311k^9 - 6576k^8 + 25332k^7 - 108066k^6 + 403987k^5 - 1374404k^4 + 2230593k^3 - 3464784k^2 + 13613292k + 35244720)n^{2k-8}}{1322697600(k-5)!} + \dots \end{aligned}$$

Obecný rozvoj je

$$\frac{n^{2k}}{k!} * \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d k^{2d}}{3^d n^d d!} * \left(1 - \frac{d(d+1)}{2k} + \frac{(d-1)d(15d^2 + 29d + 2)}{120k^2} - \frac{(d-2)(d-1)d(d+3)(5d^2 - d + 6)}{240k^3} + \dots \right)$$

Asymptoticky (při konstantním k)

$$\frac{n^{2k}}{k!} * e^{-\frac{k^2}{3n}} * \left(1 + \frac{k}{3n} - \frac{(k-2)k^2}{18n^2} - \frac{(26k^3 - 36k^2 + 146k - 141)k}{810n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)$$

Number of ways to place k non-attacking semi-bishops on an $n \times n$ board

n	1 semibishop	2 semibishops	3 semibishops	4 semibishops	5 semibishops	6 semibishops	7 semibishops	8 semibishops	9 semibishops	10 semibishops	summed over all $k \geq 0$, A010790
1	1										2
2	4	5	2	0							12
3	9	31	51	40	12	0	0	0	0		144
4	16	106	376	769	904	564	144	0	0	0	2880
5	25	270	1650	6273	15345	24080	23300	12576	2880	0	86400
6	36	575	5370	32523	133848	381065	748530	991276	840216	408960	3628800
7	49	1085	14357	126483	782187	3487055	11323991	26726896	45165064	52965360	203212800
8	64	1876	33376	402598	3483424	22302908	107432288	391861841	1080212000	2227147496	14631321600
9	81	3036	69876	1105062	12730662	110508172	737388252	3824020113	15476988033	48804804048	1316818944000
10	100	4665	134850	2705946	40015680	451846330	3982803100	27780132381	154498312860	687029386845	144850083840000
11	121	6875	243815	6050946	111674046	1589829670	17873300830	161122093781	1175989433861	6987308518815	19120211066880000
12	144	9790	417912	12566191	283029384	4957057600	69180357312	782065529311	7241073300384	55303181876710	2982752926433280000
13	169	13546	685126	24541231	662378431	13993117996	237259381216	3284875447711	37584847273831	358332236958826	542861032610856960000
14	196	18291	1081626	45505005	1449684600	36343839675	735626441550	12237626215815	169457691743340	1970970444835665	114000816848279961600000
15	225	24185	1653225	80713269	2996471205	87940744125	2094031558125	41202999352515	678830404727475	9455145010713675	27360196043587190784000000
16	256	31400	2456960	137767644	5895356544	200202536040	5539347715200	127223756244390	2458690958605440	40387607401869000	7441973323855715893248000000
17	289	40120	3562792	227388124	11109981916	432222101160	13749568384488	364477320648870	8163777493204710	156129270734322600	227724383709984906333888000000
18	324	50541	5055426	364362564	20158780608	890652234164	32276996391384	977972177060910	25127851641568488	553391543115041670	778817392288148379660189696000000
19	361	62871	7036251	568698348	35369151168	1761139113548	72125432023388	2476824107626206	72351554958675486	1817588538407906946	295950609069496384270872084480000000
20	400	77330	9625400	867003117	60222162120	3356641381340	154250134895600	5958948819686578	196355359324984960	5580492342694209180	124299255809188481393766275481600000000
n	1 semibishop	2 semibishops	3 semibishops	4 semibishops	5 semibishops	6 semibishops	7 semibishops	8 semibishops	9 semibishops	10 semibishops	$n! (n + 1)!$

Na doplnění je možno ještě uvést, že pro rozmístění k semi-střelců na prstencové šachovnici $n \times n$ platí

Number of ways to place k non-attacking semi-bishops on an $n \times n$ toroidal board

$$\text{Semi}B_T(k, n) = n^k \binom{n}{k} \quad \text{speciálně pak } \text{Semi}B_T(n, n) = n^n$$

Několik dalších linků na jiné úlohy související s rozmístěním střelců:

[A122749](#) *Number of ways of placing n non-attacking bishops on an $n \times n$ board so that every square is attacked (or occupied),* [A005635](#) *number of inequivalent solutions.*

[A146304](#) *Number of distinct ways to place bishops (up to $2n-2$) on a $n \times n$ chessboard so that no bishop is attacking another and that it is not possible to add another bishop.*

[A035288](#) *Number of ways to place a non-attacking white and black bishop on $n \times n$ chessboard.*

Sekvence související s neidentickými konfiguracemi: [A005631](#), [A123071](#), [A123072](#)

Number of ways to place n non-attacking semi-bishops on an $n \times n$ board

n	n semi-bishops, board $n \times n$ - A187235
1	1
2	5
3	51
4	769
5	15345
6	381065
7	11323991
8	391861841
9	15476988033
10	687029386845
11	33861652925595
12	1834814222811361
13	108411291759763681
14	6936921762461326545
15	477881176664541171375
16	35264213540563039871265
17	2775185864375851234241985
18	232010235620834821000259765
19	20534530616200868936398461635
20	1918188035217208542134822669569
21	188594380862084813207529023586129
22	19467773143753076708336252392936025
23	2105100094330486293572825708026838919
24	237960054534582474981118348821920186609
25	28066738129557897443034823558507625602625
26	3448138749620244917592226161651190829264525
27	440544265864682444278624861869165280146244395
28	58447464684382006149080838559189915437343822305
29	8041162957345894845542763061077222176906521540545
30	1145767426582196241381828466507144202188744457957025

4.2) k Bishops on an k x n chessboard - k střelců na šachovnici k x n

2 bishops, board 2 x n:

$$2n^2 - 3n + 2$$

A172207 - 3 bishops, board 3 x n: (V. Kotěšovec, 26.1.2010), $n \geq 4$

$$\frac{9n^3 - 45n^2 + 106n - 108}{2}$$

A172208 - 4 bishops, board 4 x n: (V. Kotěšovec, 26.1.2010), $n \geq 9$

$$\frac{32n^4 - 336n^3 + 1702n^2 - 4701n + 5844}{3}$$

A172210 - 5 bishops, board 5 x n: (V. Kotěšovec, 26.1.2010), $n \geq 16$

$$\frac{625n^5 - 11250n^4 + 98875n^3 - 515250n^2 + 1566016n - 2194944}{24}$$

A172211 - 6 bishops, board 6 x n: (V. Kotěšovec, 28.1.2010), $n \geq 25$

$$\frac{648n^6 - 17820n^5 + 240930n^4 - 2011545n^3 + 10806047n^2 - 35094560n + 53430940}{10}$$

První členy těchto vzorců mají obecně tvar

$$\frac{(kn)^k}{k!} - (kn)^{k-1} * \frac{(2k-1)}{2(k-2)!} + \dots$$

Jiný možný zápis je

$$\frac{(kn)^k}{k!} - (kn)^{k-1} \frac{\binom{2k-1}{2}}{2(k-1)!} + \dots$$

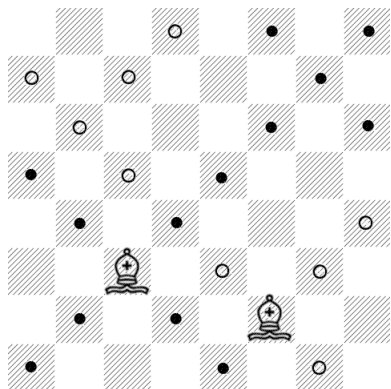
k	k Bishops on an k x n chessboard - Generating function
2	$\frac{7x^2 - 5x + 2}{(x - 1)^3}$
3	$\frac{x(2x^6 + 14x^3 + 8x^2 + 2x + 1)}{(x - 1)^4}$
4	$\frac{x(2x^{12} - 2x^{11} + 4x^{10} - 24x^9 + 50x^8 - 10x^7 + 41x^6 - 23x^5 + 152x^4 + 35x^3 + 26x^2 + 4x + 1)}{(x - 1)^5}$
5	$\frac{x(2x^{20} - 4x^{19} + 8x^{18} - 12x^{17} - 48x^{16} + 140x^{15} - 158x^{14} + 208x^{13} + 134x^{12} - 932x^{11} + 1048x^{10} - 182x^9 + 436x^8 + 396x^7 - 32x^6 + 1288x^5 + 668x^4 + 72x^3 + 86x^2 + 6x + 1)}{(x - 1)^6}$
6	$\frac{-x(2x^{30} - 6x^{29} + 14x^{28} - 26x^{27} + 44x^{26} - 220x^{25} + 596x^{24} - 1060x^{23} + 1654x^{22} - 2266x^{21} + 5622x^{20} - 13570x^{19} + 19848x^{18} - 22392x^{17} + 24048x^{16} - 30525x^{15} + 57673x^{14} - 80154x^{13} + 61962x^{12} - 30874x^{11} + 25832x^{10} - 9360x^9 + 16960x^8 - 4710x^7 + 18006x^6 + 6928x^5 + 1968x^4 + 430x^3 + 222x^2 + 9x + 1)}{(x - 1)^7}$

n	2 bishops	3 bishops	4 bishops	5 bishops	6 bishops
1	1	1	1	1	1
2	4	6	9	12	16
3	11	26	61	143	313
4	22	86	260	770	2320
5	37	211	927	3368	12160
6	56	426	2578	12632	53744
7	79	758	5965	38566	209428
8	106	1234	12066	98968	683524
9	137	1881	22135	222351	1905625
10	172	2726	37678	450682	4664384
11	211	3796	60457	843169	10297579
12	254	5118	92488	1479116	20907590
13	301	6719	136043	2460912	39664250
14	352	8626	193650	3917228	71114916
15	407	10866	268093	6006056	121559433
16	466	13466	362412	8917888	199459466

17	529	16453	479903	12878847	315906248
18	596	19854	624118	18153806	485124352
19	667	23696	798865	25049515	725031335
20	742	28006	1008208	33917724	1057839684
21	821	32811	1256467	45158308	1510706686
22	904	38138	1548218	59222392	2116429956
23	991	44014	1888293	76615476	2914190277
24	1082	50466	2281780	97900560	3950340692
25	1177	57521	2734023	123701269	5279242444
26	1276	65206	3250622	154704978	6964147544
27	1379	73548	3837433	191665937	9078128011
28	1486	82574	4500568	235408396	11705051758
29	1597	92311	5246395	286829730	14940605138
30	1712	102786	6081538	346903564	18893362144
31	1831	114026	7012877	416682898	23685900265
32	1954	126058	8047548	497303232	29455962998

4.3) k Bishops on an $n \times n$ toroidal chessboard - k střelců na prstencové šachovnici $n \times n$

Pro rozmístění k neohrožujících se střelců na prstencové šachovnici $n \times n$ jsem odvodil explicitní vzorec. Proti normální šachovnici je zde jeden zásadní rozdíl: na prstencové šachovnici $n \times n$ je možno rozmístit maximálně jen n neohrožujících se střelců. Řešení tohoto problému se navíc výrazně liší podle toho, jestli je šachovnice $n \times n$ sudých nebo lichých rozměrů.



V případě šachovnice sudých rozměrů je situace podobná jako na normální šachovnici a počet řešení dostaneme jako součet možných kombinací střelců na sudých a lichých polích. Nejprve odvodíme vzorec pro rozmístění neohrožujících se střelců jen na černých polích prstencové šachovnice (pro bílá pole je vzorec identický). Prvního střelce je možno umístit na $n^2/2$ polí. Pro dalšího střelce mám zakázaných celkem $2n-2$ polí (14 v příkladu pro $n=8$), mohu jej tedy umístit na $n^2/2 - 2n + 2$ polí, další průběh ukazuje tabulka

pořadové číslo kamene	nově zakázaných polí v předchozím kroku	volných polí pro tento kámen
1		$n^2/2$
2	$2n-2$	$n^2/2 - 2n + 2$
3	$2n-6$	$n^2/2 - 4n + 8$
4	$2n-10$	$n^2/2 - 6n + 18$

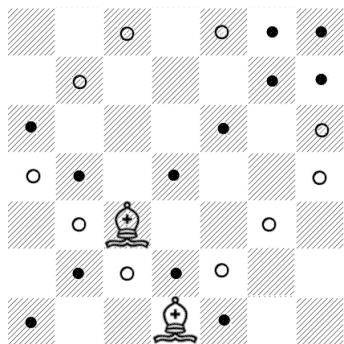
Počet pozic dostaneme jako součin možností rozmístění ve všech krocích (dělený i -faktoriál, protože bychom jinak počítali možnosti vícenásobně), tedy pro i kamenů na černých polích (*number of ways to place i non-attacking bishops on an **black squares** of $n \times n$ toroidal board, if n is even*)

$$\frac{\prod_{j=0}^{i-1} \left(\frac{n^2}{2} - 2jn + 2j^2 \right)}{i!} = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \frac{(n-2j)^2}{2}}{i!} = 2^i * i! * \binom{n/2}{i}^2$$

Celkový počet pozic je pak součet všech možných kombinací i střelců na černých polích a $k-i$ střelců na bílých polích. Po úpravách tak dostaneme pro šachovnici **sudých** rozměrů následující vzorec. *Number of ways to place k non-attacking bishops on an $n \times n$ toroidal board (if n is even)* (V. Kotěšovec, 26.4.2011)

$$B_T(k, n) = 2^k k! \sum_{i=0}^k \frac{\binom{n/2}{i}^2 \binom{n/2}{k-i}^2}{\binom{k}{i}} = \frac{2^k k! \binom{n}{k}^2}{\binom{n}{n/2}^2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{n-k}{n/2-j}^2$$

Speciální případy $k=n$ a $k=n/2$ viz kapitola 4.4



V případě šachovnice lichých rozměrů však střelci mohou **měnit barvu pole** a proto nelze předchozí metodu použít. Problém je v tomto případě ale poměrně jednoduchý. Podobným postupem jako v případě sudých šachovnic dostaneme pro liché šachovnice

pořadové číslo kamene	nově zakázaných polí v předchozím kroku	volných polí pro tento kámen
1		n^2
2	$2n-1$	$n^2 - 2n + 1$
3	$2n-3$	$n^2 - 4n + 4$
4	$2n-5$	$n^2 - 6n + 9$

Počet pozic dostaneme jako součin možností rozmístění ve všech krocích (dělený k -faktoriál), tedy pro k kamenů na všech polích

$$\frac{\prod_{j=0}^{k-1} (n^2 - 2jn + j^2)}{k!} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (n-j)^2}{k!}$$

Pro šachovnici **lichých** rozměrů tak dostaneme

Number of ways to place k non-attacking bishops on an $n \times n$ toroidal board (if n is odd)

(V. Kotěšovec, 26.4.2011)

$$B_T(k, n) = \binom{n}{k}^2 k!$$

(je zajímavé, že tento vzorec je shodný jako pro rozmístění k neohrožujících se **věží na normální šachovnici** $n \times n$)

(*identical formula as for **rooks** on an $n \times n$ normal chessboard*)

V programu Mathematica jde tyto vzorce zapsat takto (všude v těchto vzorcích se využívá toho, že pokud je $x < y$ je $\binom{x}{y} = 0$):

```
tbishops[k_, n_] := (
  (1 + (-1)^n) / 2 * (2^k * k! * Sum[Binomial[n/2, i]^2 * Binomial[n/2, k-i]^2 / Binomial[k, i], {i, 0, k}])
  + (1 - (-1)^n) / 2 * (k! * Binomial[n, k]^2)
);
Table[Factor[tbishops[k, n]], {k, 1, 6}]
```

nebo (*alternative function*)

```
tbishops[k_, n_] :=
  If[EvenQ[n], 2^k * k! * Sum[Binomial[n/2, i]^2 * Binomial[n/2, k-i]^2 / Binomial[k, i], {i, 0, k}], k! * Binomial[n, k]^2];
```

Několik prvních (již dříve odvozených) polynomů zahrnuje oba případy (šachovnice sudých i lichých rozměrů):

A177755 - **2 bishops**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2010)

$$\frac{1}{4} * n^2(2n^2 - 4n + 3 + (-1)^n)$$

A177756 - **3 bishops**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2010)

$$\frac{1}{12} * (n - 2)^2 n^2 (2n^2 - 4n + 5 + 3(-1)^n)$$

A177757 - **4 bishops**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2010)

$$\frac{1}{48} * (n - 2)^2 n^2 (2n^4 - 16n^3 + 50n^2 - 84n + 81 + (6n^2 - 36n + 63) * (-1)^n)$$

A177758 - **5 bishops**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2010)

$$\frac{1}{240} * (n - 4)^2 (n - 2)^2 n^2 (2n^4 - 16n^3 + 54n^2 - 108n + 153 + (10n^2 - 60n + 135) * (-1)^n)$$

A177759 - **6 bishops**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 13.5.2010)

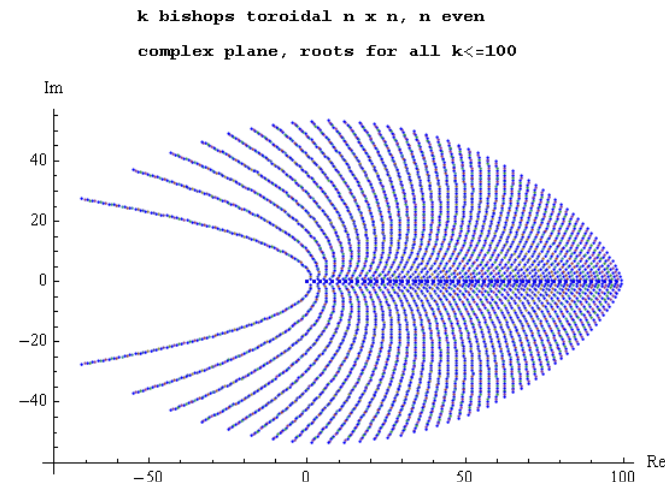
$$\frac{1}{1440} * (n - 4)^2 (n - 2)^2 n^2 (2n^6 - 36n^5 + 269n^4 - 1128n^3 + 3143n^2 - 6330n + 7425 + (15n^4 - 240n^3 + 1545n^2 - 4950n + 6975) * (-1)^n)$$

A178140 - **7 bishops**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 21.5.2010)

$$\frac{1}{10080} (n - 6)^2 (n - 4)^2 (n - 2)^2 n^2 (2n^6 - 36n^5 + 275n^4 - 1224n^3 + 3887n^2 - 9570n + 14625 + (21n^4 - 336n^3 + 2289n^2 - 8190n + 14175) * (-1)^n)$$

A189789 - **8 bishops**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 26.4.2011)

$$\frac{1}{80640} (n - 6)^2 (n - 4)^2 (n - 2)^2 n^2 (2n^8 - 64n^7 + 884n^6 - 7048n^5 + 37382n^4 - 147904n^3 + 468540n^2 - 1108800n + 1422225 + (28n^6 - 840n^5 + 10906n^4 - 80640n^3 + 370468n^2 - 1034880n + 1400175) * (-1)^n)$$



První členy těchto vzorců mají tvar:

$$\begin{aligned} & \frac{n^{2k}}{k!} - \frac{n^{2k-1}}{(k-2)!} + \frac{(6k^2 - 10k + 5)n^{2k-2}}{12(k-2)!} + \frac{(-1)^n n^{2k-2}}{4(k-2)!} - \frac{(2k^3 - 4k^2 + 5k + 3)n^{2k-3}}{12(k-3)!} - \frac{(k+1)(-1)^n n^{2k-3}}{4(k-3)!} \\ & + \frac{(30k^5 - 150k^4 + 340k^3 - 222k^2 - 151k - 669)n^{2k-4}}{720(k-3)!} + \frac{(6k^3 - 4k^2 - 11k - 45)(-1)^n n^{2k-4}}{48(k-3)!} - \frac{(6k^6 - 34k^5 + 100k^4 - 62k^3 + 59k^2 - 309k - 1200)n^{2k-5}}{720(k-4)!} - \frac{(2k^4 + 3k^2 - 21k - 80)(-1)^n n^{2k-5}}{48(k-4)!} \\ & + \frac{(126k^8 - 1260k^7 + 5859k^6 - 12341k^5 + 14154k^4 - 26279k^3 - 91314k^2 + 34975k + 1016940)n^{2k-6}}{90720(k-4)!} + \frac{(15k^6 - 45k^5 + 80k^4 - 371k^3 - 1430k^2 + 551k + 16140)(-1)^n n^{2k-6}}{1440(k-4)!} \\ & - \frac{(18k^9 - 198k^8 + 1065k^7 - 2492k^6 + 4557k^5 - 4943k^4 - 38520k^3 - 131471k^2 + 194664k + 2063880)n^{2k-7}}{90720(k-5)!} - \frac{(3k^7 - 8k^6 + 35k^5 - 61k^4 - 606k^3 - 2091k^2 + 3088k + 32760)(-1)^n n^{2k-7}}{1440(k-5)!} + \dots \end{aligned}$$

Speciálně, pro sudé (*even*) n

$$\begin{aligned} & \frac{n^{2k}}{k!} - \frac{n^{2k-1}}{(k-2)!} + \frac{(3k^2 - 5k + 4)n^{2k-2}}{6(k-2)!} - \frac{(k^3 - 2k^2 + 4k + 3)n^{2k-3}}{6(k-3)!} + \frac{(15k^5 - 75k^4 + 215k^3 - 141k^2 - 158k - 672)n^{2k-4}}{360(k-3)!} \\ & - \frac{(3k^6 - 17k^5 + 65k^4 - 31k^3 + 52k^2 - 312k - 1200)n^{2k-5}}{360(k-4)!} + \frac{(63k^8 - 630k^7 + 3402k^6 - 7588k^5 + 9597k^4 - 24826k^3 - 90702k^2 + 34844k + 1016880)n^{2k-6}}{45360(k-4)!} - \dots \end{aligned}$$

Obecný tvar rozvoje pro n sudé je

$$\frac{n^{2k}}{k!} * \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d k^{2d}}{d! n^d} * \left(1 - \frac{d(d+2)}{3k} + \frac{(d-1)d(d^2+4d+15)}{18k^2} - \frac{(d-1)d(5d^4+20d^3+166d^2-320d+276)}{810k^3} + \dots \right)$$

Pro konstantní k je asymptoticky

$$\frac{n^{2k}}{k!} * e^{-\frac{k^2}{n}} * \left(1 + \frac{k}{n} - \frac{(k-4)(2k-1)k}{6n^2} - \frac{(3k^3-9k^2-k+6)k}{6n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)$$

Pro liché (*odd*) n (shodný jako pro věže na normální šachovnici, asymptotický rozvoj viz str. 217, *same formulas as for rooks*)

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{n^{2k-1}}{(k-2)!} + \frac{(3k^2 - 5k + 1)n^{2k-2}}{6(k-2)!} - \frac{(k-1)^2 k n^{2k-3}}{6(k-3)!} + \frac{(15k^5 - 75k^4 + 125k^3 - 81k^2 + 7k + 3)n^{2k-4}}{360(k-3)!} - \frac{k(k-1)(3k^4 - 14k^3 + 21k^2 - 10k - 3)n^{2k-5}}{360(k-4)!} + \frac{(63k^8 - 630k^7 + 2457k^6 - 4753k^5 + 4557k^4 - 1453k^3 - 612k^2 + 131k + 60)n^{2k-6}}{45360(k-4)!} - \dots$$

Polynomy pro další k vypočteme tímto programem:

```
(* V. Kotěšovec, 4/2011, funkce tbishops viz výše *)
btpolynomial[k_] := (Print["====="];
Print[k, " bishops on an toroidal chessboard nxn"];
rada=Table[tbishops[k,n],{n,1,4k+20}]; Print[rada];
(* explicit formula *)
formula=Sum[Subscript[y,j]*n^j,{j,0,2k}]+(-1)^n*Sum[Subscript[z,j]*n^j,{j,0,2k}]; neznam=4k+2;
sol=Solve[Table[rada[[n]]==formula,{n,Length[rada]-neznam,Length[rada]-1}]; fvyp=Expand[formula/.sol][[1]];
Print[TraditionalForm[fvyp]]; Print[TraditionalForm[Factor[fvyp]]];
diffr=Table[rada[[n]]-fvyp,{n,1,Length[rada]}]; Print[diffr];
(* generating function *)
denom=(x-1)^(2k+1)*(x+1)^(2k-1); d=Exponent[denom,x];
gf=(Sum[Subscript[b,i]*x^i,{i,0,d-1}]/denom);
gfvyp=Factor[gf/.Solve[Table[rada[[i]]==Simplify[SeriesCoefficient[gf,{x,0,i}]],{i,1,d}]]][[1]];
Print[TraditionalForm[gfvyp]];
Print[Table[rada[[i]]-SeriesCoefficient[gfvyp,{x,0,i}],{i,1,Length[rada]}]];);
Do[btpolynomial[k];,{k,2,20}];
```



k	k Bishops on an n x n toroidal chessboard - Generating function
2	$-\frac{2x^2 * (x^5 + 8x^4 + 14x^3 + 18x^2 + 5x + 2)}{(x - 1)^5 * (x + 1)^3}$
3	$-\frac{2x^3 * (3x^8 + 58x^7 + 160x^6 + 518x^5 + 442x^4 + 518x^3 + 160x^2 + 58x + 3)}{(x - 1)^7(x + 1)^5}$
4	$-\frac{8x^4 * (3x^{11} + 122x^{10} + 401x^9 + 2508x^8 + 3316x^7 + 7780x^6 + 5172x^5 + 5236x^4 + 1609x^3 + 666x^2 + 59x + 8)}{(x - 1)^9(x + 1)^7}$
5	$-\frac{24x^5 * (5x^{14} + 406x^{13} + 1333x^{12} + 14880x^{11} + 24307x^{10} + 97498x^9 + 95187x^8 + 175328x^7 + 100307x^6 + 93018x^5 + 28147x^4 + 12832x^3 + 1589x^2 + 278x + 5)}{(x - 1)^{11}(x + 1)^9}$
6	$-48x^6 * (15x^{17} + 2386x^{16} + 6778x^{15} + 133898x^{14} + 235216x^{13} + 1520054x^{12} + 1844806x^{11} + 5402462x^{10} + 4378450x^9 + 6819710x^8 + 3509350x^7 + 3079094x^6 + 926032x^5 + 445642x^4 + 65754x^3 + 14946x^2 + 639x + 48) / ((x - 1)^{13} * (x + 1)^{11})$
7	$-48x^7 * (105x^{20} + 32558x^{19} + 69284x^{18} + 2532234x^{17} + 4270573x^{16} + 43976860x^{15} + 59687712x^{14} + 262529316x^{13} + 264238506x^{12} + 619225992x^{11} + 438942840x^{10} + 606753672x^9 + 289183146x^8 + 243462436x^7 + 72876832x^6 + 36501660x^5 + 6031853x^4 + 1631114x^3 + 110244x^2 + 12078x + 105) / ((x - 1)^{15} * (x + 1)^{13})$
8	$-1152x^8 * (35x^{23} + 21178x^{22} + 27889x^{21} + 2133348x^{20} + 3081175x^{19} + 51948910x^{18} + 72476645x^{17} + 469213640x^{16} + 538879520x^{15} + 1803221880x^{14} + 1580004720x^{13} + 3146148264x^{12} + 2014875632x^{11} + 2544618104x^{10} + 1144092320x^9 + 933224520x^8 + 278242005x^7 + 143723790x^6 + 25756935x^5 + 7854820x^4 + 693025x^3 + 104538x^2 + 2579x + 128) / ((x-1)^{17}*(x+1)^{15})$

Jmenovatel vytvořující funkce (*denominator of generating function*)

$$\frac{1}{(x - 1)^{2k+1}(x + 1)^{2k-1}}$$

Ve srovnání s normální šachovnicí je exponent u členu x+1 o 4 vyšší.

n	1 bishop	2 bishops	3 bishops	4 bishops	5 bishops	6 bishops	7 bishops	8 bishops	A215943, summed over all k >= 0
1	1								2
2	4	4	0	0					9
3	9	18	6	0	0	0	0	0	34
4	16	80	128	64	0	0	0	0	289
5	25	200	600	600	120	0	0	0	1546
6	36	468	2688	6912	6912	2304	0	0	19321
7	49	882	7350	29400	52920	35280	5040	0	130922
8	64	1600	19968	132864	466944	811008	589824	147456	2169729
9	81	2592	42336	381024	1905120	5080320	6531840	3265920	17572114
10	100	4100	89600	1139200	8647680	38784000	98304000	129024000	364466281
11	121	6050	163350	2613600	25613280	153679680	548856000	1097712000	3405357682
12	144	8784	297600	6177600	81838080	699678720	3822059520	12939264000	85143154849
13	169	12168	490776	12269400	198764280	2120152320	14841066240	66784798080	896324308634
14	196	16660	809088	24912384	510478080	7113012480	67711795200	436483031040	26309790300249
15	225	22050	1242150	44717400	1082161080	18036018000	208702494000	1669619952000	306827170866106
16	256	28928	1906688	81636352	2393997312	49416536064	726855843840	7629571031040	10366719612433921
17	289	36992	2774400	135945600	4594961280	110279070720	1906252508160	23828156352000	132240988644215842
18	324	46980	4036608	229423104	9120190464	261526745088	5500708061184	85476013572096	5064730099043043529
19	361	58482	5633766	360561024	16225246080	530024705280	12796310741760	230333593351680	69974827707903049154
20	400	72400	7862400	572788800	29656350720	1128038400000	32142458880000	693478195200000	3000912883089564050721

Poslední sloupec určuje počet pozic neohrožujících se k střelců na **prstencové šachovnici** $n \times n$ pro všechna $k \geq 0$. Jde tedy o součty příslušných řádků + 1. V programu Mathematica dostaneme tabulku těchto hodnot buď přímo pomocí explicitních vzorců (podle toho zda je n sudé nebo liché) takto:

```
Table[Sum[If[EvenQ[n], 2^k*k!*Sum[Binomial[n/2, i]^2*Binomial[n/2, k-i]^2/Binomial[k, i], {i, 0, k}], Binomial[n, k]^2*k!], {k, 0, n}], {n, 1, 50}]
```

nebo je možné získat hodnoty pomocí rekurence (viz dále, tato metoda je efektivnější pro velká n , při větším rozsahu však vyžaduje hodně paměti):

```
bishopt[r_] := RecurrenceTable[{a[n] == ((12*n^5 - 158*n^4 - (6*(-1)^n - 706)*n^3 - (1193 - 41*(-1)^n)*n^2 - 8*(7*(-1)^n - 72)*n - 22*(-1)^n - 28)*a[n-2] + (-12*n^6 + 206*n^5 + 2*(7*(-1)^n - 691)*n^4 + (4545 - 137*(-1)^n)*n^3 + (442*(-1)^n - 7442)*n^2 + (5194 - 544*(-1)^n)*n + 198*(-1)^n - 698)*(n-2)*a[n-4] + 2*(2*n-1)*(n^2 - 7*n + 10)^2*(n-4)^4*a[n-6]) / (2*(n-5)^2*(2*n-5)), a[1] == 2, a[2] == 9, a[3] == 34, a[4] == 289, a[5] == 1546, a[6] == 19321}, a, {n, r, r}][[1]]
```

Celkový počet je pro n **liché** shodný jako pro věže

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 k!$$

Rekurence pro **liché** členy je

$$a_{2n-1} - (8n^2 - 8n + 1) * a_{2n-3} + 4 * (4n^2 - 8n + 3) * (n - 2)^2 * a_{2n-5} = 0$$

Asymptotický průběh pro n **liché** (for n **odd** - same formula as for **rooks**, see A002720). Následující vzorec (resp. jeho první člen) byl dokázán již dříve při řešení jiných problémů (viz Perron asymptotics for the Laguerre polynomials). Výraz vpravo je rovněž správný, ale trochu přesnější.

$$a_n \sim \frac{n^{n+\frac{1}{4}}}{\sqrt{2} e^{n-2\sqrt{n+\frac{1}{2}}}} * \left(1 + \frac{31}{48\sqrt{n}} + \frac{553}{4608n} + \dots\right) \sim \frac{n^{n+\frac{1}{4}}}{\sqrt{2} e^{n+\frac{1}{2}-2\sqrt{n+\frac{1}{2}}}} * \left(1 + \frac{7}{48\sqrt{n}} - \frac{359}{4608n} + \dots\right)$$

Viz též článek: [Too many errors around coefficient \$C_1\$ in asymptotic of sequence A002720](#), V. Kotěšovec, 28.9.2012

Pro **sudé** členy se mi podařilo nalézt rekurenci (Václav Kotěšovec, 27.8.2012)

$$(4n - 5) * a_{2n} - (4n - 1) * (12n^2 - 16n + 1) * a_{2n-2} + 4 * (4n - 5) * (n - 1)^2 * (12n^2 - 16n + 1) * a_{2n-4} - 64 * (n - 2)^4 * (n - 1)^2 * (4n - 1) * a_{2n-6} = 0$$

Asymptotický průběh pro n **sudé** (for n **even**):

$$a_n \sim \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{2 e^{n-2\sqrt{n+\frac{1}{2}}}} * \left(1 + \frac{4}{3\sqrt{n}} + \dots\right) \sim \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{2 e^{n+\frac{1}{2}-2\sqrt{n+\frac{1}{2}}}} * \left(1 + \frac{5}{6\sqrt{n}} + \dots\right)$$

Obě rekurence jde sloučit do jedné univerzální (Václav Kotěšovec, 28.8.2012)

$$\begin{aligned} 2(n-5)^2(2n-5) * a_n &= (12n^5 - 158n^4 - (6(-1)^n - 706)n^3 - (1193 - 41(-1)^n)n^2 - 8(7(-1)^n - 72)n - 22(-1)^n - 28) * a_{n-2} \\ &+ (-12n^6 + 206n^5 + 2(7(-1)^n - 691)n^4 + (4545 - 137(-1)^n)n^3 + (442(-1)^n - 7442)n^2 + (5194 - 544(-1)^n)n + 198(-1)^n - 698)(n-2) * a_{n-4} \\ &+ 2(2n-1)(n^2-7n+10)^2(n-4)^4 * a_{n-6} \end{aligned}$$

nebo do trochu složitější, ale bez členu $(-1)^n$

$$\begin{aligned} &(16n^6 - 524n^5 + 6968n^4 - 48133n^3 + 182087n^2 - 357556n + 284378) * a_n \\ &+ (-80n^8 + 2780n^7 - 40104n^6 + 311057n^5 - 1400695n^4 + 3671110n^3 - 5258962n^2 + 3460368n - 624304) * a_{n-2} \\ &+ (160n^{10} - 6648n^9 + 120064n^8 - 1238950n^7 + 8068506n^6 - 34516121n^5 + 97648713n^4 - 178700997n^3 + 199142935n^2 - 118000636n + 25805782) * a_{n-4} \\ &- (n-4)^2 * (160n^{10} - 7224n^9 + 142656n^8 - 1618158n^7 + 11632690n^6 - 55103075n^5 + 172994355n^4 - 351976656n^3 + 437519928n^2 - 292020020n + 74512396) * a_{n-6} \\ &+ (n-6)^2 * (n-4)^2 * (80n^{10} - 3964n^9 + 85912n^8 - 1068549n^7 + 8408011n^6 - 43486471n^5 + 148633169n^4 - 328315323n^3 + 442368567n^2 - 320703240n + 89950806) * a_{n-8} \\ &- (n-9)^2 * (n-8)^4 * (n-6)^2 * (n-4)^2 * (16n^6 - 332n^5 + 2688n^4 - 10789n^3 + 22441n^2 - 22676n + 8294) * a_{n-10} = 0 \end{aligned}$$

4.4) n Bishops on an $n \times n$ toroidal chessboard - n střelců na prstencové šachovnici $n \times n$ - A189790

Pokud ve vzorcích z kapitoly 4.3 dosadíme $k=n$, dostaneme pro rozmístění n neohrožujících se střelců na prstencové šachovnici $n \times n$ následující vzorce (počet n je současně i maximálním rozmístitelným počtem neohrožujících se střelců na prstencové šachovnici)

Rekurence (V. Kotěšovec, 26.9.2012):

$$a_n = n(2n - 3) * a_{n-2} - (n - 3) n (n - 2)^2 * a_{n-4}$$

Exponenciální generační funkce (V. Kotěšovec, 26.9.2012):

$$\frac{1}{1-x} + \frac{x * \arcsin(x)}{(1-x^2) \sqrt{(1-x^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$$

`Table[n!*SeriesCoefficient[1/(1-x)+x*ArcSin[x]/(1-x^2)^(3/2),{x,0,n}],{n,1,25}]`

Pro šachovnici sudých rozměrů

Number of ways to place n non-attacking bishops on an $n \times n$ toroidal board (if n is even)

(V. Kotěšovec, 26.4.2011)

$$B_T(n, n) = 2^n n! \sum_{i=0}^n \frac{\binom{n/2}{i}^2 \binom{n/2}{n-i}^2}{\binom{n}{i}} = \frac{2^n n!}{\binom{n}{n/2}} = \left(\left(\frac{n}{2} \right)! \right)^2 * 2^n \sim \frac{\pi n^{n+1}}{e^n}$$

(v případě šachovnice sudých rozměrů je z předchozí sumy nenulový pouze člen při volbě $i=n/2$, což odpovídá polovině střelců na sudých a polovině na bílých polích šachovnice).

Pro šachovnici lichých rozměrů

Number of ways to place n non-attacking bishops on an $n \times n$ toroidal board (if n is odd)

$$B_T(n, n) = n!$$

Ještě je zajímavé, že asymptoticky se oba případy odlišují (což je dost neobvyklé).

$$\frac{\text{even}}{\text{odd}} = \frac{\left(\left(\frac{n}{2} \right)! \right)^2 * 2^n}{n!} \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$$

Ještě zajímavější je případ, když ve vzorcích z kapitoly 4.3 dosadíme $k \rightarrow n$, $n \rightarrow 2n$. Potom dostaneme

[A189791](#) - Number of ways to place n non-attacking bishops on an $2n \times 2n$ toroidal board

(V. Kotěšovec, 27.4.2011)

$$B_T(n, 2n) = 2^n n! \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^3$$

Sekvence součtů třetích mocnin binomických koeficientů je známá, viz OEIS [A000172](#) a tato čísla se nazývají **Franel numbers** (J. Franel, *Intermediaire des Mathematiciens*, 1894, p.45-47). Švýcarský matematik Jérôme Franel (1859-1939) ve svém článku odvodil rekurenci a zjistil, že sekvence roste s mocninou 8.

Přesnější asymptotický vzorec (Joe Keane, 2002)

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^3 \sim \frac{2^{3n+1}}{\pi n \sqrt{3}}$$

Asymptotický vzorec pro naši sekvenci:

$$B_T(n, 2n) \sim \frac{2^{4n+1}(n-1)!}{\pi\sqrt{3}} * \left(1 - \frac{1}{3n} + \frac{1}{27n^2} + \frac{1}{81n^3} + \frac{1}{243n^4} + \frac{11}{2187n^5} + \frac{49}{19683n^6} - \frac{317}{19683n^7} - \frac{2797}{59049n^8} - \frac{61741}{1594323n^9} + \frac{734467}{4782969n^{10}} + \dots\right)$$

nebo

$$B_T(n, 2n) \sim \frac{2^{4n+1}n^n}{e^n} \sqrt{\frac{2}{3\pi n}} * \left(1 - \frac{1}{4n} + \frac{11}{864n^2} + \frac{601}{51840n^3} + \frac{14773}{2488320n^4} + \frac{3873169}{627056640n^5} + \dots\right)$$

Pro naši sekvenci platí rekurence

$$n * a_n = (14n^2 - 14n + 4) * a_{n-1} + 32(n-1)^3 * a_{n-2}$$

`Table[2^n*n!*Sum[Binomial[n,i]^3,{i,0,n}],{n,1,20}]`

Franel objevil v roce 1895 ještě rekurenci pro $p=4$. Rekurence pro $p=5$ a $p=6$ našel až v roce 1987 M. A. Perlstadt. Rekurence pro $p=7$ až 10 vypočítal V. Kotěšovec v roce 2012.

Viz OEIS, $p=1$ [A000079](#), $p=2$ [A000984](#), $p=3$ [A000172](#), $p=4$ [A005260](#), $p=5$ [A005261](#), $p=6$ [A069865](#), $p=7$ [A182421](#), $p=8$ [A182422](#), $p=9$ [A182446](#), $p=10$ [A182447](#)

Asymptotický průběh viz Graham, Knuth, Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, 2nd ed., 1994, exercise 9.18 (pro $2n \rightarrow n$), str. 490 a 593. Pro další zobecnění viz článek [Asymptotic of a sums of powers of binomial coefficients * x^k](#), Václav Kotěšovec, 20.9.2012.

Na doplnění ještě uvádím elegantní obecný asymptotický vzorec ($p>0$):

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^p \sim \frac{2^{pn}}{\sqrt{p}} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{p-1}{2}} * \left(1 - \frac{(p-1)^2}{4pn} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Pro relativní váhu centrálního členu odtud dostaneme

$$\frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^p}{\binom{n}{n/2}^p} \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2p}}$$

5.1) k Knights on an n x n chessboard - k jezdců na šachovnici n x n

A172132 - 2 knights, board $n \times n$: (E. Lucas, 1891)

$$\frac{(n-1)(n+4)(n^2-3n+4)}{2}$$

A172134 - 3 knights, board $n \times n$: (K. Fabel, 1966), $n \geq 4$

$$\frac{(n-2)(n+5)(n^4-3n^3-8n^2+66n-108)}{6}$$

A172135 - 4 knights, board $n \times n$: (K. Fabel, 1966), $n \geq 6$

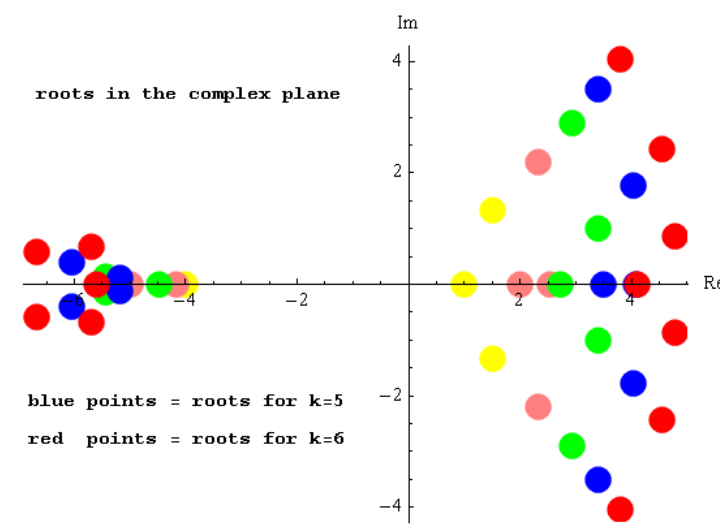
$$\frac{n^8 - 54n^6 + 144n^5 + 1019n^4 - 5232n^3 - 2022n^2 + 51120n - 77184}{24}$$

A172136 - 5 knights, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 25.1.2010), $n \geq 8$

$$\frac{n^{10} - 90n^8 + 240n^7 + 3235n^6 - 16320n^5 - 40530n^4 + 396480n^3 - 231656n^2 - 3359520n + 6509280}{120}$$

A178499 - 6 knights, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 28.5.2010), $n \geq 10$

$$\frac{n^{12}}{720} - \frac{3n^{10}}{16} + \frac{n^9}{2} + \frac{1553n^8}{144} - \frac{163n^7}{3} - \frac{4493n^6}{16} + \frac{4721n^5}{2} + \frac{578777n^4}{360} - \frac{143156n^3}{3} + \frac{124917n^2}{2} + 374990n - 899982$$



Die Berechnung der Anzahl der Anordnungen von 4 Springern ohne gegenseitige Deckung auf einem Brett n^2 machte einige Mühe, insb. der Fall, daß 2 Springer auf weißen und 2 Springer auf schwarzen Feldern stehen. Die von KF abgeleitete Formel lautet:

$$\frac{1}{24} (n^8 - 54n^6 + 144n^5 + 1019n^4 - 5232n^3 - 2022n^2 + 51120n - 77184)$$

První členy polynomu mají vždy tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{9n^{2k-2}}{2(k-2)!} + \frac{12n^{2k-3}}{(k-2)!} + \frac{(243k^2 - 343k - 478)n^{2k-4}}{24(k-2)!} - \frac{2(27k+1)n^{2k-5}}{(k-3)!} + \dots$$

Také v případě jezdců může být jejich počet větší než n (pro šachovnici 8x8 dokonce 32), obecně je tento maximální počet $n^2/2$ (pro $n > 2$ sudé) a $(n^2+1)/2$ (pro $n > 1$ liché), o čemž se stručně zmiňuje už [Henry Dudeney](#), "Amusements in Mathematics" (1917), str.96. Nejrozsáhlejší pojednání o tomto problému jsem našel v článku „Some packing problems“, Francis Scheid, American Mathematical Monthly, 1960 (p.231-5). Viz též AMM 1964 (problem E1585, p.211) nebo [Knights Problem](#)

Odkazy na literaturu:

Edouard Lucas: [Théorie des nombres \(1891\)](#), vzorec pro počet rozmístění 2 neohrožujících se jezdců je na str.98 (zde jsou správně znaménka, ale vypadl znak "p"),
Edouard Lucas: [Récréations mathématiques \(1894\)](#), vzorec najdeme na str.132 (ve vzorci je však tisková chyba, před členem p^2 má být +, ne -. Správně má být tedy $(p-1)(p^3+p^2-8p+16)/2$)

Karl Fabel: [Schach und Zahl, 1966](#) (str.60-62)

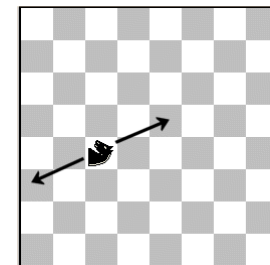
k	k Knights on an n x n chessboard - Generating function
2	$\frac{2 * (12x^4 - 39x^3 + 37x^2 - 20x + 4)}{(x - 1)^5}$
3	$4x^2 * \frac{3x^8 - 20x^7 + 43x^6 - 38x^5 + 23x^4 - 11x^3 - 27x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^7}$
4	$-x^2 * \frac{48x^{12} - 312x^{11} + 690x^{10} - 390x^9 - 1162x^8 + 3606x^7 - 5142x^6 + 3099x^5 - 345x^4 + 1292x^3 + 286x^2 + 9x + 1}{(x - 1)^9}$
5	$2x^3 * \frac{74x^{15} - 518x^{14} + 1110x^{13} + 1046x^{12} - 11332x^{11} + 29950x^{10} - 42430x^9 + 32476x^8 - 11684x^7 - 1000x^6 + 15021x^5 - 18443x^4 - 6352x^3 - 2878x^2 - 159x - 1}{(x - 1)^{11}}$
6	$\frac{-2x^4 * (200x^{18} - 1540x^{17} + 2602x^{16} + 15442x^{15} - 98586x^{14} + 256698x^{13} - 336146x^{12} + 70977x^{11} + 587107x^{10} - 1302115x^9 + 1569905x^8 - 1100786x^7 + 367130x^6 - 212358x^5 + 247682x^4 + 212463x^3 + 48293x^2 + 5587x + 85)}{(x - 1)^{13}}$

n	1 knight	2 knights	3 knights	4 knights	5 knights	6 knights	A141243 , summed over all $k \geq 0$
1	1						2
2	4	6	4	1			16
3	9	28	36	18	2	0	94
4	16	96	276	412	340	170	1365
5	25	252	1360	4436	9386	13384	55213
6	36	550	4752	26133	97580	257318	3368146
7	49	1056	13340	111066	649476	2774728	394631712
8	64	1848	32084	376560	3184708	20202298	101693175442
9	81	3016	68796	1080942	12472084	110018552	50929053498909
10	100	4662	135040	2732909	41199404	481719518	48988729226134301
11	121	6900	247152	6253408	119171110	1781124856	96325314726538906164
12	144	9856	427380	13204356	309957412	5756568738	375615195988659173454092
13	169	13668	705144	26100160	739123094	16676946372	2933480442104347575000834468
14	196	18486	1118416	48819677	1639655452	44127887910	45480806737377995771543610802659
15	225	24472	1715220	87137934	3422020324	108192675468	1422902021111889804120495149240353936
16	256	31800	2555252	149398608	6778432292	248568720338	?
17	289	40656	3711620	247349946	12833460256	539925974784	?
18	324	51238	5272704	397168485	23356032940	1116836380926	?
19	361	63756	7344136	620696612	41051290730	2212958151968	?
20	400	78432	10050900	946921684	69954580804	4220919779218	?

Sloupec vpravo určuje součty přes všechna k (zahrnuje i případ $k = 0$, kdy je hodnota rovna 1). Hodnoty do $n=13$ jako první vypočetli v roce 2008 Max Alekseyev a R. H. Hardin. Hodnoty pro $n=14$ a $n=15$ vypočetl Hiroaki Yamanouchi 28-29.8.2014.

5.1.1) k semi-knights on an n x n chessboard - k semi-jezdců na šachovnici n x n

Semi-jezdec se pohybuje jako jezdec, ale jen po jedné ze čtyřech možných šikmých linií. Definujme jej tak, že jsou mu dostupná pouze pole se změnou souřadnic $[2,1]$ a $[-2,-1]$. *Moves of a semi-knight are allowed only in $[2,1]$ and $[-2,-1]$.*



Počet šikmých linií na šachovnici $n \times n$ je $3n-2$, viz obrázek v kapitole 6.1.1. Odtud systémem shodným jako pro šachovnici $1 \times n$ (viz kapitola 2.1.1) odvodíme maximální počty nenapadajících se semi-jezdců na šachovnici $n \times n$ (viz následující strana).

Pro počty pozic neohrožujících se semi-jezdců platí tyto vzorce:

2 semi-knights, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 27.10.2011)

$$\frac{1}{2}(n-1)(n^3 + n^2 - 2n + 4)$$

3 semi-knights, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 27.10.2011), $n \geq 4$

$$\frac{n^6}{6} - \frac{3n^4}{2} + 3n^3 + \frac{4n^2}{3} - 12n + 12$$

4 semi-knights, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 27.10.2011), $n \geq 6$

$$\frac{n^8}{24} - \frac{3n^6}{4} + \frac{3n^5}{2} + \frac{83n^4}{24} - \frac{33n^3}{2} + \frac{43n^2}{4} + \frac{75n}{2} - 55$$

5 semi-knights, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 27.10.2011), $n \geq 8$

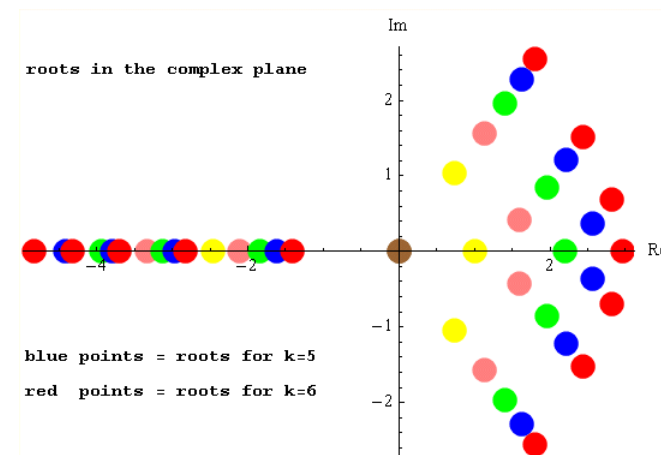
$$\frac{n^{10}}{120} - \frac{n^8}{4} + \frac{n^7}{2} + \frac{59n^6}{24} - \frac{21n^5}{2} - \frac{n^4}{4} + \frac{131n^3}{2} - \frac{1357n^2}{15} - 96n + 224$$

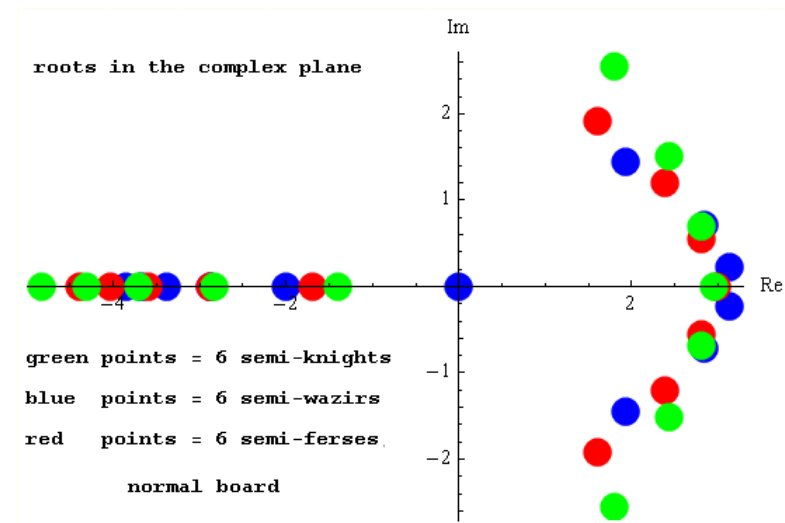
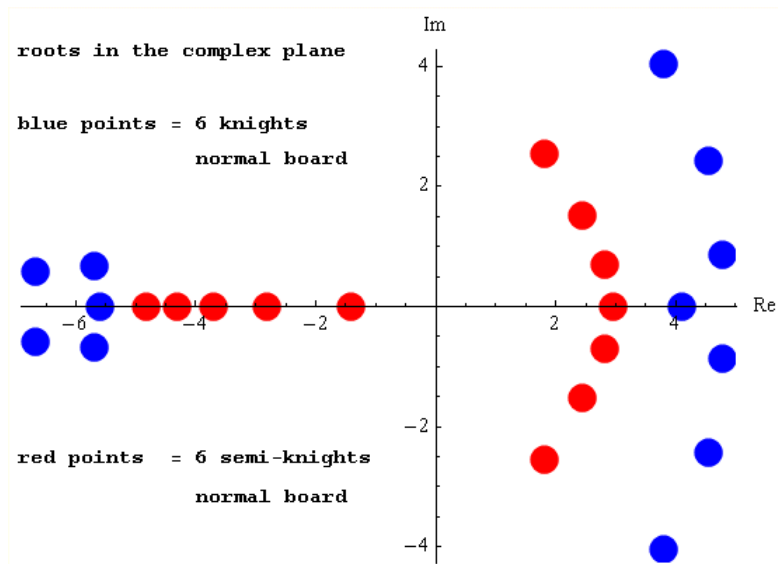
6 semi-knights, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 28.10.2011), $n \geq 10$

$$\frac{n^{12}}{720} - \frac{n^{10}}{16} + \frac{n^9}{8} + \frac{149n^8}{144} - \frac{17n^7}{4} - \frac{67n^6}{16} + \frac{401n^5}{8} - \frac{19183n^4}{360} - 214n^3 + \frac{961n^2}{2} + 166n - 852$$

Obecně mají tyto vzorce tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{3n^{2k-2}}{2(k-2)!} + \frac{3n^{2k-3}}{(k-2)!} + \frac{(27k^2 - 55k - 46) * n^{2k-4}}{24(k-2)!} + \dots$$





Maximal number of non-attacking semi-knights on an $n \times n$ chessboard is
if n is even

$$\frac{n}{4} * (2n + 3) - \frac{n}{4} * (-1)^{\frac{n}{2}}$$

if n is odd

$$\frac{n}{4} * (2n + 3) - \frac{1}{4} * (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Nebo jedním vzorcem

$$\frac{1}{4} \left((2n + 3)n - \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right)$$

Vytvořující funkce pro tato maxima

$$-\frac{x(2x^3 + x + 1)}{(x - 1)^3(x^2 + 1)^2}$$

Poznámka: Na prstencové šachovnici $n \times n$ jsou explicitní vzorce pro počet pozic neohrožujících se k semi-jezdců identické jako pro k semi-vezírů, viz kap. 9.3.1. Je třeba si uvědomit, že počet nezávislých linií zde není $3n-2$ (jako na normální šachovnici), ale je roven n . Pro všechny kameny těchto typů je proto úloha převedena na kombinaci n linií, každá délky n a počty takových pozic jsou proto shodné. Maximální počet neohrožujících se semi-jezdců na prstencové šachovnici $n \times n$ je $n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Number of arrangements of k non-attacking semi-knights on an $n \times n$ toroidal chessboard is identical as number of arrangements of k non-attacking semi-wazirs, see chapter 9.3.1

k semi-knights on an n x n normal board

n	1 s-k.	2 s-k.	3 s-k.	4 semi-knights	5 semi-knights	6 semi-knights	7 semi-knights	8 semi-knights	9 semi-knights	10 semi-knights	A182562, summed over all k>=0
1	1										2
2	4	6	4	1							16
3	9	34	70	85	61	24	4	0	0		288
4	16	114	476	1289	2364	2972	2528	1392	448	64	11664
5	25	288	2027	9743	33864	87903	173523	262752	305553	271341	1458000
6	36	610	6468	48131	267216	1148760	3917808	10774381	24159156	44491946	506250000
7	49	1146	17029	180552	1454267	9250843	47700972	203072249	723322705	2176841904	414720000000
8	64	1974	39084	558245	6128672	53807094	388094724	2344465830	12033488932	53055724786	869730877440000
9	81	3184	80931	1495421	21410927	247248926	2366766329	19155730384	133055587660	802352976614	5045702916833280000
10	100	4878	154692	3586145	64794884	949988108	11619031016	120953360160	1088078615448	8559364525414	77297454895962562560000
11	121	7170	277333	7874856	175034864	3171212534	48153095146	625339844030	7053029820048	69924324887044	3017525202366485003182080000
12	144	10186	471804	16094807	431220368	9449801052	174172477192	2755567133309	38004924985056	462531778135212	307389127582207654481154908160000
13	169	14064	768299	30990385	984350123	25641720994	563342712264	10653633425285	176147610644894	2577613558612579	83016370640108703579427655610531840000
14	196	18954	1205636	56740951	2107229180	64317674108	1659302235256	36930885385919	720275827337916	12461866532831728	58770343311359208383258439665073059266560000
15	225	25018	1832757	99505520	4270342304	150880800438	4513864593013	116711439710433	2649229378623982	53445681120139675	10830915271405985670592463290258007654400000000000
16	256	32430	2710348	168109281	8253534176	334089234316		?	?	?	5223235821873501098962478219904893025000000000000000000
17	289	41376	3912579	274894637	8253534176	703460182578		?	?	?	6611097420248779567916888114481345783181816359840000000000000000
18	324	52054	5528964	436761125	15305882207	1417097228988		?	?	?	
19	361	64674	7666341	676420256	27369111284	2744886008486		?	?	?	
20	400	79458	10450972	1023892995	47383301768	5133820134668		?	?	?	
n	1 s-k.	2 s-k.	3 s-k.	4 semi-knights	5 semi-knights	6 semi-knights	7 semi-knights	8 semi-knights	9 semi-knights	10 semi-knights	for general formula see page 291

Poslední sloupec určuje celkový počet pozic k neohrožujících se semi-jezdců na šachovnici $n \times n$ pro všechna $k \geq 0$. Pro tuto sekvenci i obecněji pro všechny semi-skokany jsem odvodil vzorce, viz dále. Více hodnot dostaneme v programu Mathematica takto:

```
Table[If[EvenQ[n], Fibonacci[n/2+2]^(n+2)*Product[Fibonacci[j+2]^4, {j, 1, n/2-1}],
Fibonacci[(n+1)/2+2]^((n+1)/2)*Fibonacci[(n-1)/2+2]^((n-1)/2)*Product[Fibonacci[j+2]^4, {j, 1, (n-1)/2}], {n, 1, 20}]
```


Number of ways to place n non-attacking semi-knights on an $n \times n$ chessboard is asymptotic (see chapter 13.1 for more)

$$\frac{n^{2n}}{n!} * e^{-\frac{3}{2}} \sim \binom{n^2}{n} * e^{-1}$$

n	n semi-knights, board n x n, A182563
1	1
2	6
3	70
4	1289
5	33864
6	1148760
7	47700972
8	2344465830
9	133055587660
10	8559364525414
11	615266768106190
12	48861588247978827
13	4247584874013608724
14	401107335066453376830
15	40880928693752664368224
16	?

Hodnotu pro $n=15$ jsem vypočetl 6.1.2012 na počítači se 16 GB paměti RAM (výpočet trval přes 32 hodin a využilo se přes 10 GB RAM).

Bohužel pro tento případ nejde odvodit podobný vzorec jako pro součet přes všechna k a proto je zatím známo méně hodnot.

5.1.2) k non-attacking semi-leapers $[r,s]$ on an $n \times n$ normal board, summed over all $k \geq 0$

V souladu s kapitolou 6.1.2 a diagramem na str. 756 můžeme pro tento účel šachovnici rozdělit na $(r + s)n - rs$ šikmých linií. Podle kapitoly 2.1.1 víme, že na každou takovou linii skokana $[r,s]$ můžeme umístit maximálně tolik neohrožujících se skokanů $[r,s]$ jako na šachovnici $1 \times d$, kde d je počet polí na této linii. Počet různých pozic neohrožujících se k skokanů (**přes všechna $k \geq 0$**) na jedné linii s d poli je roven F_{d+2} , kde F_d jsou [Fibonacciho čísla](#). Celkový počet konfigurací neohrožujících se kamenů je pak roven součinu těchto dílčích počtů přes všechny linie.

1	1	1																		
1	1	1																		
2	2	2																		
2	2	2																		
3	3	3																		
3	3	3																		
4	4	4																		
4	4	4																		
5	5	5																		
5	5	5																		
6	6	5																		
6	6	5																		
6	6	5																		
6	6	5																		
6	6	5																		
6	6	5	5	5	4	4	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1				
6	6	5	5	5	4	4	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1				

Úloha však není úplně triviální hlavně proto, že jednotlivé linie jsou různě dlouhé. Na schématu jsou označena počáteční pole jednotlivých linií pro případ $r=2, s=3$ (zebra) s příslušnými počty polí na těchto liniích. Pole jedné z linií jsou zvýrazněna. *On diagram are selected squares of one line with elementary steps $[2,3]$ of the semi-leaper. If number of squares is d , then total number of positions of k semi-leapers (summed for all $k \geq 0$) on this line is F_{d+2} .*

S využitím funkce celá část jsem odvodil analyticky pro celkový počet pozic vzorec

$$\left(\prod_{x=1}^n \left(\prod_{y=1}^r F_{\lfloor \frac{n+s-x}{s} \rfloor + 2} \right) \right) \left(\prod_{x=1}^s \left(\prod_{y=r+1}^{\lfloor \frac{n-r(n-x)}{s} \rfloor} F_{\lfloor \frac{n+s-x}{s} \rfloor + 2} \right) \right) \prod_{x=1}^s \left(\prod_{y=\lfloor \frac{n-r(n-x)}{s} \rfloor + 1}^n F_{\lfloor \frac{n+r-y}{r} \rfloor + 2} \right)$$

který lze trochu zjednodušit a dostáváme tak (pro obecný případ) následující větu:

Theorem (*V. Kotěšovec, 3.5.2012*)

Number of arrangements of k non-attacking semi-leapers $[r,s]$ on normal chessboard $n \times n$, summed over all $k \geq 0$ is (for $0 < r < s, n > s^2$)

$$\left(\prod_{x=1}^n \left(F_{\lfloor \frac{n-x}{s} \rfloor + 3} \right)^r \right) \left(\prod_{x=1}^s \left(\prod_{y=r+1}^{\lfloor \frac{n-r(n-x)}{s} \rfloor} F_{\lfloor \frac{n-x}{s} \rfloor + 3} \right) \right) \prod_{x=1}^s \left(\prod_{y=\lfloor \frac{n-r(n-x)}{s} \rfloor + 1}^n F_{\lfloor \frac{n-y}{r} \rfloor + 3} \right)$$

where F_n is [Fibonacci number](#)

Cílem je ale odvodit hlavně asymptotický vzorec a pro tento účel můžeme předpokládat, že r i s dělí n . Pak se vzorec velmi zjednoduší.

For $0 < r < s, n > s^2$ and $rs|n$

$$\left(F_{\frac{n}{s}+2} \right)^{n(s-r)+rs} * \prod_{j=1}^{\frac{n}{s}-1} (F_{j+2})^{2rs}$$

Odtud po úpravách dostaneme hledaný asymptotický vzorec (= *main result*)

Asymptotic (*V. Kotěšovec, 4.5.2012*)

$$\left(F_{\frac{n}{s}+2}\right)^{n(s-r)+rs} * \prod_{j=1}^{\frac{n}{s}-1} (F_{j+2})^{2rs} \sim \frac{C^{2rs}}{\sqrt{5}^{n(r+s)+3rs}} * \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{(n+2r)(n+2s)}$$

kde F_n jsou [Fibonacciho čísla](#) a $C=1.226742010720353244\dots$ je [Fibonacci Factorial Constant](#).

Tento vzorec platí dokonce i pro $r = s$, jak můžeme porovnat s výsledkem pro [semi-fersy](#) ($r = 1, s = 1$) a i pro $r = 0$, viz [semi-wazirs](#) ($r = 0, s = 1$).

Speciálně je tím dokázáno, že pro všechny semi-leapery je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(čímž dostáváme novou položku do rodiny tzv. entropy constants, viz str. 69)

Případ $r = 1, s = 2$ odpovídá semi-jezdcům. Přesné vzorce jsou následující

Theorem (*V. Kotěšovec, 3.5.2012*)

[A182562](#) - Number of configurations of k non-attacking **semi-knights** on normal chessboard $n \times n$, summed over all $k \geq 0$ is

If n is **even** (pro n sudé)

$$\left(F_{\frac{n}{2}+2}\right)^{n+2} * \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} (F_{j+2})^4$$

If n is **odd** (pro n liché)

$$\left(F_{\frac{n+1}{2}+2}\right)^{\frac{n+1}{2}} * \left(F_{\frac{n-1}{2}+2}\right)^{\frac{n-1}{2}} * \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} (F_{j+2})^4$$

Asymptotic:

$$\frac{C^4}{\sqrt{5}^{3(n+2)}} * \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{(n+2)(n+4)}$$

$C=1.226742010720353244\dots$ je [Fibonacci Factorial Constant](#)

Ještě může být zajímavý maximální možný počet neohrožujících se semi-skokanů, který je možno umístit na šachovnici $n \times n$. Vzorec vychází z maximálního počtu kamenů na šachovnici $1 \times d$, odvozeném v kapitole 2.1.1., který je roven

$$\left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor$$

Maximal number of non-attacking semi-leapers $[r,s]$ on a $n \times n$ chessboard is

$$\sum_{x=1}^n \left(\sum_{y=1}^r \left\lfloor \frac{1}{2} \left(\left\lfloor \frac{n+s-x}{s} \right\rfloor + 1 \right) \right\rfloor \right) + \sum_{x=1}^s \left(\sum_{y=\lfloor n-\frac{r(n-x)}{s} \rfloor + 1}^n \left\lfloor \frac{1}{2} \left(\left\lfloor \frac{n+r-y}{r} \right\rfloor + 1 \right) \right\rfloor \right) + \sum_{x=1}^s \left(\sum_{y=r+1}^{\lfloor n-\frac{r(n-x)}{s} \rfloor} \left\lfloor \frac{1}{2} \left(\left\lfloor \frac{n+s-x}{s} \right\rfloor + 1 \right) \right\rfloor \right)$$

Asymptoticky je tento počet (bez ohledu na r, s) roven polovině šachovnice

$$\frac{1}{2}n^2$$

5.1.3) n Knights on an $n \times n$ chessboard - n jezdců na šachovnici $n \times n$

Number of ways to place n non-attacking knights on an $n \times n$ chessboard is asymptotic (see chapter 13.1 for more)

$$\frac{n^{2n}}{n!} * e^{-\frac{9}{2}} \sim \binom{n^2}{n} * e^{-4}$$

Pravděpodobnost, že se při náhodném rozmístění n jezdců na šachovnici $n \times n$ nebudou ohrožovat, je asymptoticky $1/e^4 = 0.0183156\dots$

n	n knights, board n x n, A201540
1	1
2	6
3	36
4	412
5	9386
6	257318
7	8891854
8	379978716
9	19206532478
10	1120204619108
11	74113608972922
12	5483225594409823
13	448414229054798028
14	40154319792412218900
15	?

Hodnotu pro $n=11$ vypočetl Alois P. Heinz 19.6.2014, hodnoty pro $n=12$ a $n=13$ Václav Kotěšovec 21.6.2014 a pro $n=14$ Václav Kotěšovec 26.8.2016 (na počítači se 128 GB RAM).

5.2) k Knights on an k x n chessboard - k jezdců na šachovnici k x n

2 knights, board 2 x n: $n \geq 2$

$$2n^2 - 3n + 4$$

A172212 - 3 knights, board 3 x n: (V. Kotěšovec, 26.1.2010), $n \geq 4$

$$\frac{9n^3 - 45n^2 + 122n - 144}{2}$$

A172213 - 4 knights, board 4 x n: (V. Kotěšovec, 26.1.2010), $n \geq 6$

$$\frac{8 * (4n^4 - 36n^3 + 170n^2 - 450n + 537)}{3}$$

A172214 - 5 knights, board 5 x n: (V. Kotěšovec, 26.1.2010), $n \geq 8$

$$\frac{625n^5 - 8250n^4 + 57235n^3 - 242778n^2 + 608440n - 705984}{24}$$

A172215 - 6 knights, board 6 x n: (V. Kotěšovec, 26.1.2010), $n \geq 10$

$$\frac{648n^6 - 11340n^5 + 103770n^4 - 606645n^3 + 2328317n^2 - 5466660n + 6051720}{10}$$

A172217 - 7 knights, board 7 x n: (V. Kotěšovec, 29.1.2010), $n \geq 12$

$$\frac{117649n^7 - 2571471n^6 + 29223943n^5 - 216954465n^4 + 1114503256n^3 - 3907492824n^2 + 8562799512n - 8962924320}{720}$$

A174698 - 8 knights, board 8 x n: (V. Kotěšovec, 27.3.2010), $n \geq 14$

$$\frac{262144n^8 - 6881280n^7 + 93456384n^6 - 838693632n^5 + 5361604836n^4 - 24739168020n^3 + 79766188151n^2 - 163079018193n + 160750559340}{630}$$

První členy těchto vzorců mají obecně tvar

$$\frac{(kn)^k}{k!} - \frac{3(k-1)(3k-4)(kn)^{k-1}}{2k!} + \dots$$

Jiný možný zápis je

$$\frac{(kn)^k}{k!} - \frac{\binom{3k-3}{2}(kn)^{k-1}}{k!} + \dots$$

k	k Knights on an k x n chessboard - Generating function
2	$-\frac{x(2x^3 - 2x^2 + 3x + 1)}{(x-1)^3}$
3	$\frac{x(6x^6 - 8x^5 + 2x^4 + 24x^3 - 6x^2 + 8x + 1)}{(x-1)^4}$
4	$-\frac{x(16x^9 - 20x^8 - 40x^7 + 172x^6 - 81x^5 + 41x^4 + 142x^3 + 14x^2 + 11x + 1)}{(x-1)^5}$
5	$\frac{x(42x^{12} - 52x^{11} - 268x^{10} + 884x^9 - 268x^8 - 1188x^7 + 2834x^6 - 720x^5 + 918x^4 + 814x^3 + 106x^2 + 22x + 1)}{(x-1)^6}$
6	$-\frac{x(104x^{15} - 116x^{14} - 1328x^{13} + 3992x^{12} + 806x^{11} - 16380x^{10} + 27343x^9 - 4845x^8 - 15537x^7 + 38275x^6 - 2753x^5 + 11789x^4 + 4910x^3 + 344x^2 + 51x + 1)}{(x-1)^7}$
7	$x(252x^{18} - 272x^{17} - 5134x^{16} + 14468x^{15} + 19721x^{14} - 132666x^{13} + 174233x^{12} + 119440x^{11} - 540473x^{10} + 654954x^9 - 89133x^8 - 93778x^7 + 497782x^6 + 56796x^5 + 119468x^4 + 26652x^3 + 1162x^2 + 70x + 1)/(x-1)^8$
8	$-x*(592x^{21} - 584x^{20} - 18100x^{19} + 49628x^{18} + 134264x^{17} - 735838x^{16} + 584418x^{15} + 2607764x^{14} - 7093608x^{13} + 5656936x^{12} + 5136811x^{11} - 13973779x^{10} + 14583702x^9 - 1612610x^8 + 2009820x^7 + 6682287x^6 + 1572406x^5 + 1050447x^4 + 138871x^3 + 3716x^2 + 72x + 1)/(x-1)^9$

n	2 knights	3 knights	4 knights	5 knights	6 knights	7 knights	8 knights
1	1	1	1	1	1	1	1
2	6	12	16	28	58	78	81
3	13	36	84	259	729	1758	4409
4	24	100	412	1968	8830	38588	175720
5	39	233	1416	9386	60285	383246	2479881
6	58	456	3640	30842	257318	2135344	17925691
7	81	796	7928	82738	858262	8891854	92952858
8	108	1280	15384	192336	2404448	30108310	379978716
9	139	1935	27352	400277	5879329	86669806	1286959255
10	174	2788	45432	763984	12927182	219845764	3765248749
11	213	3866	71480	1360797	26115008	504261973	9805497200
12	256	5196	107608	2291056	49238436	1065642840	23226916560
13	303	6805	156184	3681226	87675623	2104251027	50866495373
14	354	8720	219832	5687022	148787822	3924818982	104288896551
15	409	10968	301432	8496534	242366502	6973786593	202154535834
16	468	13576	404120	12333352	381127124	11884673662	373400685738
17	531	16571	531288	17459691	581249573	19532410762	661407061211
18	598	19980	686584	24179516	862965246	31097451768	1129334088897
19	669	23830	873912	32841667	1251190796	48140491605	1866838857216
20	744	28148	1097432	43842984	1776208532	72688612756	2998390521676
21	823	32961	1361560	57631432	2474393475	107333684073	4693423716457
22	906	38296	1670968	74709226	3388987070	155343835434	7178585300523
23	993	44180	2030584	95635956	4570917554	220788831789	10752346543734
24	1084	50640	2445592	121031712	6079666980	308680170138	15802269635646
25	1179	57703	2921432	151580209	7984184897	425126722984	22825234176903

5.2.1) k Knights on a 2 x n chessboard - k jezdců na šachovnici 2 x n

4	2
3	1
2	4
1	3
4	2
3	1
2	4
1	3

Analogicky jako v případě střelců (**fersů**) lze na šachovnici 2 x n umístit jezdců na celkem 4 nezávislé linie, označené v tabulce vlevo čísly 1 až 4.

Linie typu 1 a 3 mají (v tomto smyslu) délku $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, linie typu 2 a 4 mají délku $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

V souladu s výsledky z kapitoly 2.1.1 je tak maximální počet neohrožujících se jezdců, kteří se vejdou na šachovnici 2xn (viz tabulka vpravo)

[A201629](#) - *Maximal number of non-attacking knights is*

$$2 \left(\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}{2} + \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}{2} \right)$$

Jiné možné vyjádření tohoto maxima je

$$n + 1 - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Počet pozic neohrožujících se k jezdců na šachovnici 2 x n složíme ze všech možných partition takto:

$$\sum_{0 \leq k_1, k_2, k_3, k_4 \leq k} \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - k_1 + 1}{k_1} \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k_2 + 1}{k_2} \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - k_3 + 1}{k_3} \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k_4 + 1}{k_4}$$

kde

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = k$$

Několik prvních polynomů:

2 knights, board 2 x n: $n \geq 2$

$$2n^2 - 3n + 4$$

3 knights, board 2 x n: $n \geq 4$

$$\frac{2}{3}(n-2)(2n^2 - 5n + 12)$$

4 knights, board 2 x n: $n \geq 6$

$$\frac{1}{6}(4n^4 - 36n^3 + 155n^2 - 369n + 396)$$

5 knights, board 2 x n: $n \geq 8$

$$\frac{1}{15}(n-4)(4n^4 - 44n^3 + 239n^2 - 709n + 1020)$$

n	max
1	2
2	4
3	4
4	4
5	6
6	8
7	8
8	8
9	10
10	12
11	12
12	12
13	14
14	16
15	16
16	16
17	18
18	20
19	20
20	20
21	22
22	24
23	24
24	24
25	26
26	28
27	28
28	28
29	30
30	32

6 knights, board 2 x n: $n \geq 10$

$$\frac{1}{90}(8n^6 - 180n^5 + 1850n^4 - 11235n^3 + 42737n^2 - 96540n + 100800)$$

7 knights, board 2 x n: $n \geq 12$

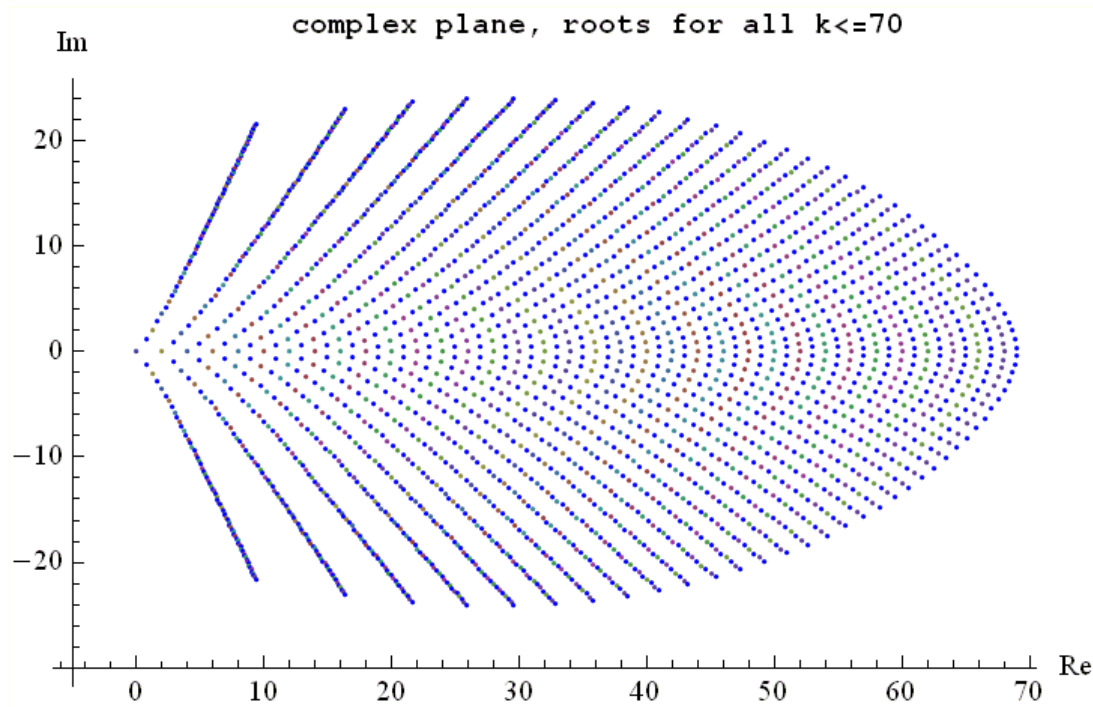
$$\frac{1}{315}(n-6)(8n^6 - 204n^5 + 2402n^4 - 16773n^3 + 73739n^2 - 194244n + 241920)$$

8 knights, board 2 x n: $n \geq 14$

$$\frac{1}{2520}(16n^8 - 672n^7 + 12936n^6 - 150192n^5 + 1158129n^4 - 6106338n^3 + 21578219n^2 - 46810218n + 47736360)$$

9 knights, board 2 x n: $n \geq 16$

$$\frac{1}{11340}(n-8)(16n^8 - 736n^7 + 15592n^6 - 199840n^5 + 1705273n^4 - 9976642n^3 + 39271779n^2 - 95489082n + 110292840)$$



Obecně, vzorce platí pro $n \geq 2k-2$, pro lichá k mají polynomy reálný kořen $k-1$, všechny ostatní kořeny jsou komplexní.

Vypočítal jsem kořeny všech polynomů až do $k \leq 70$, v grafu jsou zobrazeny jako body v komplexní rovině.

Pro kořeny z platí

$$\operatorname{Re}(z) \leq k - 1$$

První členy vzorců mají tvar:

$$\begin{aligned}
& \frac{2^k n^k}{k!} - \frac{3 * 2^{k-2} (k-1) n^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{2^{k-5} (27k^2 - 55k + 98) n^{k-2}}{3(k-2)!} + \frac{2^{k-7} (-9k^3 + 28k^2 - 99k + 32) n^{k-3}}{(k-3)!} \\
& + \frac{2^{k-11} (1215k^4 - 5130k^3 + 27005k^2 - 18258k + 38392) n^{k-4}}{45(k-4)!} + \frac{2^{k-13} (-243k^5 + 1305k^4 - 9095k^3 + 9623k^2 - 38710k - 10880) n^{k-5}}{15(k-5)!} \\
& + \frac{2^{k-16} (45927k^6 - 301077k^5 + 2605365k^4 - 3826151k^3 + 22139124k^2 + 11535788k + 33481824) n^{k-6}}{2835(k-6)!} \\
& + \frac{2^{k-18} (-6561k^7 + 51030k^6 - 526554k^5 + 1004192k^4 - 7446677k^3 - 5363510k^2 - 33252016k - 29987328) n^{k-7}}{945(k-7)!} \\
& + \frac{2^{k-23} (885735k^8 - 8004420k^7 + 95783310k^6 - 227306520k^5 + 2029625815k^4 + 1784022700k^3 + 17839972724k^2 + 31719871472k + 39691467648) n^{k-8}}{42525(k-8)!} \\
& + \frac{2^{k-25} (-98415k^9 + 1016955k^8 - 13829130k^7 + 39636198k^6 - 409920007k^5 - 408962565k^4 - 5910634384k^3 - 15529025628k^2 - 39092645104k - 42999736320) n^{k-9}}{14175(k-9)!} \\
& + \frac{2^{k-28} (5845851k^{10} - 68201595k^9 + 1037818980k^8 - 3513642462k^7 + 40996601415k^6 + 44142417605k^5 + 872781507378k^4 + 3009655393844k^3 + 11436313259976k^2 + 25106697070688k + 28293579333120) n^{k-10}}{1403325(k-10)!} + \dots
\end{aligned}$$

Pokud budeme analyzovat u každého členu koeficient u nejvyšší mocniny, zjistíme, že předchozí vzorec se dá zapsat i jako nekonečná suma

$$\frac{2^k n^k}{k!} * \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d 3^d k^{2d}}{2^{2d} n^d d!} * \left(1 - \frac{d(14d+13)}{27k} + \frac{(d-1)d(196d^2+316d+2715)}{1458k^2} - \frac{(d-1)d(13720d^4+700d^3+506102d^2-297265d-583368)}{590490k^3} + \dots \right)$$

Sečtením této řady dostaneme (pro konstantní k) **asymptotický rozvoj**

$$\frac{2^k n^k}{k!} * e^{-\frac{3k^2}{4n}} * \left(1 + \frac{3k}{4n} - \frac{(28k^2 - 153k + 98)k}{96n^2} - \frac{(48k^3 - 287k^2 + 294k - 64)k}{128n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)$$

Sums over all $k \geq 0$. Zajímavé jsou součty přes všechna $k \geq 0$ (poslední sloupec v tabulce na další straně), [A189145](#)($n+2$) = Number of $n \times 2$ array permutations with each element making zero or one knight moves

Recurrence: (R. H. Hardin, 17.4.2011)

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + 6a_{n-3} - 6a_{n-5} + 3a_{n-6} - 3a_{n-7} + a_{n-8}$$

Generating function: (R. J. Mathar, 15.10.2011)
(modified for shifted sequence)

$$\frac{x^7 - 2x^6 - 3x^4 - 6x^3 + 7x^2 + x + 1}{(x-1)(x+1)(x^2-3x+1)(x^4+3x^2+1)}$$

Explicit formula (V. Kotěšovec, 6.11.2011)

$$\frac{1}{25} * L_{2n+8} - \frac{2}{25} * (3F_{n+3} + F_{n+2}) * \left(2 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right) + \frac{7}{50} * (-1)^n + \frac{1}{10}$$

kde F_n jsou [Fibonacci](#) a L_n [Lucas numbers](#)
nebo

$$\frac{1}{25} * \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+4} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+4} \right) - \frac{4}{25} * \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+4} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+4} \right) * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{2}{25} * \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+4} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+4} \right) * \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{10} + \frac{7}{50} * (-1)^n$$

V programu Mathematica

```
FullSimplify[Table[
LucasL[2n+8]/25 - (3*Fibonacci[n+3]+Fibonacci[n+2]) * (2*Cos[(Pi*n)/2]+Sin[(Pi*n)/2]) * 2/25 + 7*(-1)^n/50 + 1/10,
{n, 1, 20}]]
```

k non-attacking knights normal board 2 x n

n	1 knight	2 knights	3 knights	4 knights	5 knights	6 knights	7 knights	8 knights	9 knights	10 knights	11 knights	12 knights	13 knights	14 knights	15 knights	16 knights	summed over all k >= 0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
2	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16
3	6	13	12	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	36
4	8	24	32	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	81
5	10	39	74	69	28	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	225
6	12	58	144	195	144	58	12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	625
7	14	81	250	444	458	265	78	9	0	0	0	0	0	0	0	0	1600
8	16	108	400	886	1200	972	432	81	0	0	0	0	0	0	0	0	4096
9	18	139	602	1605	2722	2930	1934	724	132	9	0	0	0	0	0	0	10816
10	20	174	864	2701	5532	7490	6612	3678	1228	236	24	1	0	0	0	0	28561
11	22	213	1194	4290	10332	16949	18868	13952	6576	1844	272	16	0	0	0	0	74529
12	24	256	1600	6504	18048	34912	47232	44176	27776	11136	2560	256	0	0	0	0	194481
13	26	303	2090	9491	29862	66718	106724	121693	97284	52848	18512	3828	400	16	0	0	509796
14	28	354	2672	13415	47244	119938	222112	300231	293464	203374	96780	30194	5828	660	40	1	1336336
15	30	409	3354	18456	71984	204935	432126	677737	787200	668581	406086	170446	46970	7860	700	25	3496900
16	32	468	4144	24810	106224	335488	794752	1422051	1920560	1942720	1449600	778650	290000	70500	10000	625	9150625
17	34	531	5050	32689	152490	529480	1393744	2806620	4332536	5106105	4547872	3009481	1441966	481596	105870	13985	23961025
18	36	598	6080	42321	213724	809650	2346480	5258620	9151024	12349128	12839556	10162747	6012264	2589014	781984	157551	62742241
19	38	669	7242	53950	293316	1204409	3813290	9422100	18274520	27844556	33205274	30735718	21789612	11602913	4515158	1235459	164249856
20	40	744	8544	67836	395136	1748720	6008384	16239030	34772240	59134976	79743360	84797100	70421184	45018000	21704896	7670161	429981696
n	1 knight	2 knights	3 knights	4 knights	5 knights	6 knights	7 knights	8 knights	9 knights	10 knights	11 knights	12 knights	13 knights	14 knights	15 knights	16 knights	A189145 (n+2)

5.2.2) k Knights on a 2 x n horizontal cylinder - k jezdců na horizontálním válci 2 x n

				3	1		
			2	4	2	4	
		1	3	1	3	1	3
4	2	4	2	4	2	4	2
3	1	3	1	3	1	3	1
2	4	2	4	2	4	2	4
1	3	1	3	1	3	1	3
4	2	4	2	4	2	4	2
3	1	3	1	3	1	3	1
2	4	2	4	2	4	2	4
1	3	1	3	1	3	1	3

Možné nezávislé linie označíme podobně jako na normální šachovnici $2 \times n$ čísly 1 až 4. Na horizontální válcové šachovnici je však rozdíl v tom, že linie vytvářejí cykly a to v závislosti na tom jaký zbytek dává číslo n po dělení 4, viz tabulka vpravo. Pokud je n dělitelné 4, dostáváme 4 různé cykly délky $n/2$. Pokud dává zbytek 1 nebo 3, dostáváme 1 cyklus délky $2n$ přes všechna pole. Pokud je zbytek 2, dostáváme 2 cykly délky n přes polovinu polí šachovnice.

Jelikož se (podle výsledků z kapitoly 2.5.1) na jednu cyklickou linii délky d vejde maximálně $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ neohrožujících se kamenů, dostáváme ale pro všechny případy shodný výsledek:

Maximální počet neohrožujících se jezdců na horizontální válcové šachovnici $2 \times n$ je n .
Maximal number of non-attacking knights on a 2 x n horizontal cylinder is n.

start of line	end of line (cycle)			
1	1	4	3	2
2	2	1	4	3
3	3	2	1	4
4	4	3	2	1
mod(n,4)	0	1	2	3
cycles	4x1	1x4	2x2	1x4

Pro počet pozic neohrožujících se jezdců na horizontální válcové šachovnici $2 \times n$ platí vzorec (kromě několika počátečních členů je shodný jako pro [ferse](#))

Number of ways to place k non-attacking knights on a 2 x n horizontal cylinder, for $n \geq 4 \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$

$$\frac{2n}{2n-k} * \binom{2n-k}{k}$$

Několik prvních polynomů:

2 knights, cylinder 2 x n: $n \geq 5$

$$n(2n-3)$$

3 knights, cylinder 2 x n: $n \geq 5$

$$\frac{2}{3}(n-2)n(2n-5)$$

4 knights, cylinder 2 x n: $n \geq 9$

$$\frac{1}{6}(n-3)n(2n-7)(2n-5)$$

5 knights, cylinder 2 x n: $n \geq 9$

$$\frac{1}{15}(n-4)(n-3)n(2n-9)(2n-7)$$

6 knights, cylinder 2 x n: $n \geq 13$

$$\frac{1}{90}(n-5)(n-4)n(2n-11)(2n-9)(2n-7)$$

7 knights, cylinder 2 x n: $n \geq 13$

$$\frac{1}{315}(n-6)(n-5)(n-4)n(2n-13)(2n-11)(2n-9)$$

8 knights, cylinder 2 x n: $n \geq 17$

$$\frac{(n-7)(n-6)(n-5)n(2n-15)(2n-13)(2n-11)(2n-9)}{2520}$$

9 knights, cylinder 2 x n: $n \geq 17$

$$\frac{(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)n(2n-17)(2n-15)(2n-13)(2n-11)}{11340}$$

Asymptotický rozvoj těchto polynomů (při konstantním k) je

$$\frac{2^k n^k}{k!} * e^{-\frac{3k^2}{4n}} * \left(1 + \frac{3k}{4n} - \frac{(k-2)k(28k-1)}{96n^2} - \frac{3(16k^2-21k+2)k^2}{128n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)$$

První členy jsou shodné jako pro [normální šachovnici 2 x n](#), liší se až kvadratický člen.

Součty (v posledním sloupci tabulky na další straně) se liší podle toho jestli je n dělitelné 4.

Pokud n není dělitelné 4 jsou výsledky shodné jako pro [ferse](#) na válci 2 x n.

[A201222](#) - *summed over all $k \geq 0$*

(V. Kotěšovec, 5.11.2011)

If $\text{mod}(n,4) \neq 0$

$$L_{2n} + 1 + (-1)^n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 1 + (-1)^n$$

If $\text{mod}(n,4) = 0$

$$L_{n/2}^4 = L_{2n} + 4 * L_n + 6 = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n/2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n/2} \right)^4$$

kde L_n jsou [Lucas numbers](#).

V programu Mathematica:

```
Table[If[Mod[n, 4] == 0, LucasL[n/2]^4, LucasL[2n] + 1 + (-1)^n], {n, 1, 50}]
```

k non-attacking knights horizontal cylinder 2 x n

n	1 knight	2 knights	3 knights	4 knights	5 knights	6 knights	7 knights	8 knights	9 knights	10 knights	A201222 , summed over all $k \geq 0$
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
2	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	9
3	6	9	2	0	0	0	0	0	0	0	18
4	8	24	32	16	0	0	0	0	0	0	81
5	10	35	50	25	2	0	0	0	0	0	123
6	12	54	112	105	36	4	0	0	0	0	324
7	14	77	210	294	196	49	2	0	0	0	843
8	16	104	352	664	704	416	128	16	0	0	2401
9	18	135	546	1287	1782	1386	540	81	2	0	5778
10	20	170	800	2275	4004	4290	2640	825	100	4	15129
11	22	209	1122	3740	8008	11011	9438	4719	1210	121	39603
12	24	252	1520	5814	14688	24756	27504	19521	8456	2136	104976
13	26	299	2002	8645	25194	50388	68952	63206	37180	13013	271443
14	28	350	2576	12397	40964	94962	155040	176358	136136	68068	710649
15	30	405	3250	17250	63756	168245	319770	436050	419900	277134	1860498
16	32	464	4032	23400	95680	283360	615296	980632	1137024	940992	4879681
17	34	527	4930	31059	139230	457470	1118260	2042975	2778446	2778446	12752043
18	36	594	5952	40455	197316	712530	1937520	3996135	6249100	7354710	33385284
19	38	665	7106	51832	273296	1076103	3223350	7413705	13123110	17809935	87403803
20	40	740	8400	65450	371008	1582240	5178240	13147875	26013000	40060024	228886641
n	1 knight	2 knights	3 knights	4 knights	5 knights	6 knights	7 knights	8 knights	9 knights	10 knights	<i>see previous page</i>

5.3) k Knights on an n x n cylindrical chessboard - k jezdců na válcové šachovnici n x n

Válcová šachovnice (vertical cylinder, Vertikalzylinder) je šachovnice stočená do válce tak, aby okrajové sloupce byly vedle sebe. *Vertical cylinder - board with a- and h- files alongside one another.*

A172964 - **2 knights**, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 31.1.2010), $n \geq 5$

$$\frac{n(n^3 - 9n + 12)}{2}$$

A172965 - **3 knights**, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 31.1.2010), $n \geq 6$

$$\frac{n(n-3)(n^4 + 3n^3 - 18n^2 - 18n + 164)}{6}$$

A172966 - **4 knights**, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 31.1.2010), $n \geq 9$

$$\frac{n(n^7 - 54n^5 + 72n^4 + 1115n^3 - 2616n^2 - 8502n + 26712)}{24}$$

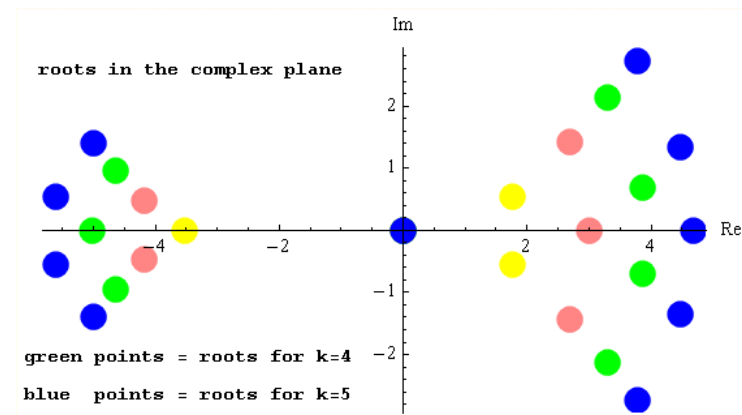
A172967 - **5 knights**, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 31.1.2010), $n \geq 10$

$$\frac{n(n^9 - 90n^7 + 120n^6 + 3395n^5 - 8160n^4 - 62130n^3 + 204000n^2 + 463464n - 1888080)}{120}$$

První členy polynomu mají vždy tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{9n^{2k-2}}{2(k-2)!} + \frac{6n^{2k-3}}{(k-2)!} + \dots$$

Počet pozic na válcové šachovnici $n \times n$ je vždy dělitelný n (to odpovídá tomu, že každou pozici je možno libovolně posunout doleva nebo doprava aniž by se nějak změnilo vzájemné napadání kamenů.)



k	k Knights on an n x n cylindrical chessboard - Generating function
2	$2x^2 * \frac{6x^7 - 30x^6 + 61x^5 - 66x^4 + 45x^3 - 21x^2 + x - 2}{(x - 1)^5}$
3	$-2x^3 * \frac{15x^9 - 141x^8 + 564x^7 - 1276x^6 + 1812x^5 - 1652x^4 + 908x^3 - 272x^2 + 99x + 3}{(x - 1)^7}$
4	$x^4 * \frac{76x^{13} - 684x^{12} + 2856x^{11} - 7714x^{10} + 16164x^9 - 29151x^8 + 45506x^7 - 57766x^6 + 55629x^5 - 39385x^4 + 21484x^3 - 8778x^2 + 389x - 306}{(x - 1)^9}$
5	$-x^4 * (468x^{16} - 7964x^{15} + 57164x^{14} - 238936x^{13} + 664383x^{12} - 1323653x^{11} + 1986964x^{10} - 2334676x^9 + 2209082x^8 - 1718662x^7 + 1118210x^6 - 595746x^5 + 216519x^4 - 38229x^3 + 34186x^2 + 922x + 208) / (x - 1)^{11}$

k knights / cylindrical board

n	1 knight	2 knights	3 knights	4 knights	5 knights	A182407, summed over all k >= 0
1	1					2
2	4	4	0	0		9
3	9	18	6	0	0	34
4	16	92	240	306	208	982
5	25	230	1010	2365	3210	11284
6	36	522	4056	19047	58056	1048768
7	49	1022	12068	90503	458157	48027971
8	64	1808	30000	328324	2524176	23807996588
9	81	2970	65628	981693	10587591	3430123782371
10	100	4610	130480	2547955	36576380	8141109957322587
11	121	6842	240856	5933257	109008735	4098570575535958632
12	144	9792	418968	12681288	289450344	46676507893324203092812
13	169	13598	694200	25284363	700477401	77374614378004006943995980
14	196	18410	1104488	47595023	1570789892	?
15	225	24390	1697820	85357395	3304892985	?
16	256	31712	2533856	146879312	6586928032	?
17	289	40562	3685668	243867873	12530769343	?
18	324	51138	5241600	392452803	22891446252	?

Poznámka: Z matematického pohledu je zajímavější prstencová šachovnice než válcová (z šachového pohledu je to asi obráceně). V případě dam, věží nebo střelců jsou výsledky pro prstencovou šachovnici shodné jako pro válcovou šachovnici. V případě bodových kamenů (např. jezdců) to ale neplatí.

For queens, rooks and bishops are results for toroidal and cylindrical chessboard same, but for leapers (for example knights) are results different.

5.4) k Knights on an n x n toroidal chessboard - k jezdců na prstencové šachovnici n x n

Prstencová šachovnice je kombinace vertikální a horizontální válcové šachovnice. *Toroidal chessboard (anchor-ring) = board on which the a- and h-files are joined and the bottom and top ranks are also joined. The anchor-ring is a combination of the vertical and horizontal cylinders.*

A172529 - **2 knights**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 31.1.2010), $n \geq 5$

$$n^2 * \frac{(n+3)(n-3)}{2}$$

A172530 - **3 knights**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 31.1.2010), $n \geq 6$

$$n^2 * \frac{n^4 - 27n^2 + 218}{6}$$

A172531 - **4 knights**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 31.1.2010), $n \geq 9$

$$n^2 * \frac{n^6 - 54n^4 + 1115n^2 - 8934}{24}$$

A172532 - **5 knights**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 31.1.2010), $n \geq 10$

$$n^2 * \frac{n^8 - 90n^6 + 3395n^4 - 64290n^2 + 522504}{120}$$

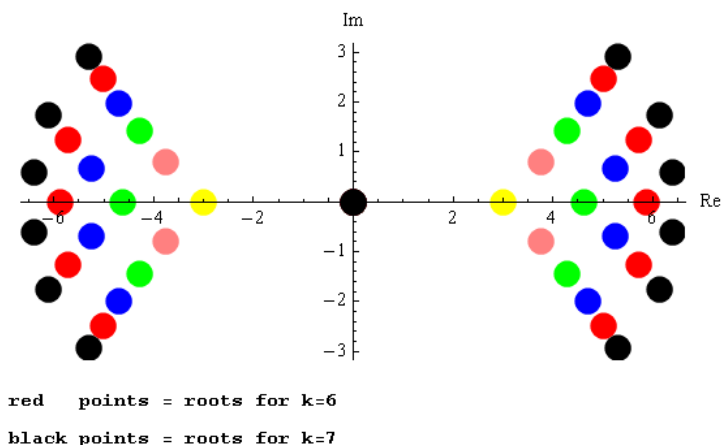
A172533 - **6 knights**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 31.1.2010), $n \geq 13$

$$n^2 * \frac{n^{10} - 135n^8 + 8005n^6 - 262665n^4 + 4816354n^2 - 39858840}{720}$$

A173436 - **7 knights**, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 18.2.2010), $n \geq 14$

$$n^2 * \frac{n^{12} - 189n^{10} + 16135n^8 - 801255n^6 + 24595984n^4 - 445931556n^2 + 3756080880}{5040}$$

roots in the complex plane



První členy polynomu mají vždy tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{9n^{2k-2}}{2(k-2)!} + \frac{(243k+143)n^{2k-4}}{24(k-3)!} - \dots$$

Počet pozic na prstencové šachovnici $n \times n$ je vždy dělitelný n^2 (to odpovídá tomu, že každou pozici je možno libovolně posunout ve směru obou os x nebo y aniž by se nějak změnilo vzájemné napadání kamenů). V případě bodových kamenů se se zvětšujícím se n zmenšuje rozdíl mezi normální a prstencovou šachovnicí, naopak v případě liniových kamenů tento rozdíl zůstává.

k	k Knights on an n x n toroidal chessboard - Generating function
2	$2x^2 * \frac{16x^7 - 71x^6 + 121x^5 - 98x^4 + 40x^3 - 9x^2 - 4x - 1}{(x-1)^5}$
3	$-2x^3 * \frac{50x^9 - 398x^8 + 1425x^7 - 2989x^6 + 3971x^5 - 3325x^4 + 1605x^3 - 365x^2 + 83x + 3}{(x-1)^7}$
4	$x^4 * \frac{192x^{13} - 1728x^{12} + 7452x^{11} - 21238x^{10} + 46658x^9 - 84582x^8 + 125397x^7 - 144875x^6 + 124920x^5 - 79904x^4 + 39969x^3 - 15165x^2 + 1452x - 228}{(x-1)^9}$
5	$-2x^4 * (648x^{16} - 10328x^{15} + 71820x^{14} - 295572x^{13} + 818512x^{12} - 1640088x^{11} + 2492742x^{10} - 2967118x^9 + 2825821x^8 - 2185007x^7 + 1376780x^6 - 677852x^5 + 219349x^4 - 32023x^3 + 18016x^2 - 644x + 64) / (x-1)^{11}$
6	$4x^4 * (240x^{21} - 3120x^{20} + 20470x^{19} - 105106x^{18} + 512024x^{17} - 2216597x^{16} + 7650408x^{15} - 20251702x^{14} + 41149629x^{13} - 64905350x^{12} + 80399423x^{11} - 78967736x^{10} + 61875645x^9 - 38631940x^8 + 19002633x^7 - 7392461x^6 + 2560624x^5 - 840251x^4 - 8486x^3 - 14835x^2 + 182x - 14) / (x-1)^{13}$
7	$-4x^4 * (2535x^{24} - 61497x^{23} + 627330x^{22} - 3849410x^{21} + 16791330x^{20} - 58053150x^{19} + 170691269x^{18} - 438580125x^{17} + 976505385x^{16} - 1844050487x^{15} + 2900976825x^{14} - 3760563305x^{13} + 3991133690x^{12} - 3450574470x^{11} + 2418714751x^{10} - 1370750375x^9 + 628081926x^8 - 228075638x^7 + 56855445x^6 - 6423333x^5 + 4868490x^4 + 36682x^3 + 20508x^2 - 60x + 4) / (x-1)^{15}$

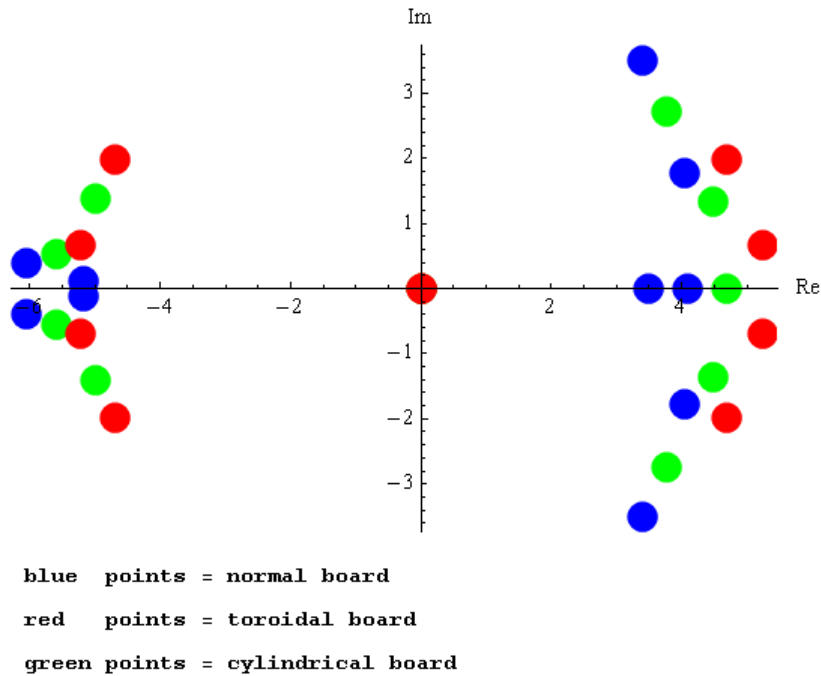
k knights / toroidal board

n	1 knight	2 knights	3 knights	4 knights	5 knights	6 knights	7 knights	A182408, summed over all k >= 0
1	1							2
2	4	2	0	0				7
3	9	18	6	0	0	0	0	34
4	16	88	208	228	128	56	16	743
5	25	200	600	600	120	0	0	1546
6	36	486	3252	12357	30312	54972	80352	598078
7	49	980	10584	68796	283906	764596	1359288	6027057
8	64	1760	27584	275888	1872064	8972896	31404480	10163241031
9	81	2916	61992	872532	8643186	62560728	339256836	242407820869
10	100	4550	125300	2344025	31702920	322246800	2527519400	?
11	121	6776	233772	5580762	98179400	1323868260	14053530964	?
12	144	9720	409584	12107196	267487920	4595943336	63100177488	?
13	169	13520	682084	24392446	659015500	14000143196	240356217660	?
14	196	18326	1089172	46261537	1496908840	38413461800	803630856504	?
15	225	24300	1678800	83426400	3179369070	96746410800	2416671974700	?
16	256	31616	2510592	144157632	6382030592	226834407552	6655251717376	?
17	289	40460	3657584	240119696	12207535134	500492572112	17015566051020	?
18	324	51030	5208084	387393921	22396355496	1048044384360	40822003107000	?
19	361	63536	7267652	607715342	39617305308	2096986629308	92679987456312	?
20	400	78200	9961200	929951100	67860021680	4031211268200	200490192134800	?

Zajímavé je porovnání pro **normální, válcovou a prstencovou** šachovnici.

Komplexní kořeny polynomů.
Pro všechny 3 případy jsou známy vzorce pro 5 jezdců.

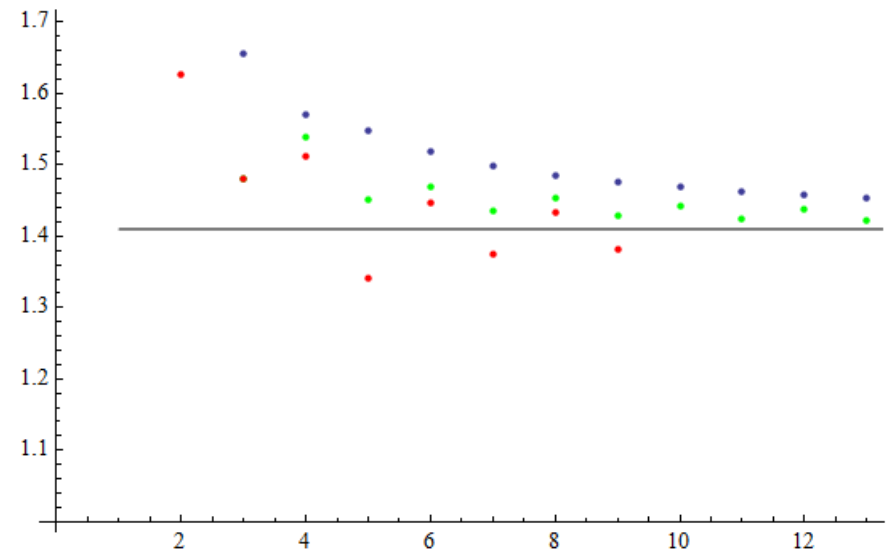
complex roots for 5 knights



Při shodném barevném značení představuje další graf hodnoty příslušných **entropie** konstant, tedy výrazy

$$(a_n)^{\frac{1}{n^2}}$$

Domnívám se, že limitní hodnota bude pro všechny typy šachovnic stejná.



6.1) k Nightriders on an n x n chessboard - k tátošů na šachovnici n x n

Tátoš je liniový kámen s jednotkovým tahem jezdců. Na diagramu se označuje symbolem jezdců otočeným o 180°. Tátoše vynalezl T. R. Dawson 29.11.1924 a první úlohy publikoval v British Chess Magazine 1925 a v [Die Schwalbe 5/1925](#) (viz článek "Der Nachtreiter und seine dreifachen Abenteuer", str.45).

Nightrider is a rider [1,2]. Wikipedia: "One of the most popular fairy chess riders is the nightrider, which can make an unlimited number of knight moves (that is, [1,2] cells) in any direction (though, like other riders, it cannot change direction half-way through its move)."

A172141 - 2 nightriders, board $n \times n$: (C. Poisson, *Rex Multiplex* 29/1990, p.829)

pro n sudé (even)

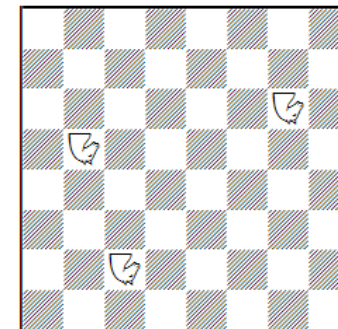
$$\frac{n(3n^3 - 5n^2 + 9n - 4)}{6}$$

pro n liché (odd)

$$\frac{n(n-1)(3n^2 - 2n + 7)}{6}$$

nebo jedním vzorcem:

$$\frac{n(6n^3 - 10n^2 + 18n - 11 + 3(-1)^n)}{12}$$



A173429 - 3 nightriders, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 18.2.2010)

Najít obecný vzorec bylo vzhledem k velké periodě 60 poměrně obtížné.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}n^6 - \frac{5}{6}n^5 + \frac{4031}{1440}n^4 - \frac{621}{100}n^3 + \frac{3313}{288}n^2 - \frac{2623}{150}n + \frac{82321}{43200} + \left(\frac{1}{4}n^3 - \frac{25}{32}n^2 + \frac{77}{50}n - \frac{43}{64}\right)(-1)^n - \frac{1 + (-1)^n}{8} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{8}{27}(-1)^n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) \\ & + \left(-4 * (-1)^n + \left(\sqrt{5} + 3 + \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) * (-1)^n\right) * n\right) * \frac{4}{25} \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \left(\sqrt{(130 + 58\sqrt{5})} - \sqrt{(50 - 22\sqrt{5})} * \frac{(-1)^n}{5}\right) * \frac{16}{25} \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) \\ & + \left(-4 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5} + 1 + (3 - \sqrt{5}) * (-1)^n\right) * n\right) * \frac{4}{25} \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} * \sqrt{(50 + 22\sqrt{5})} - \sqrt{(130 - 58\sqrt{5})} * (-1)^n\right) * \frac{16}{25} \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \end{aligned}$$

Výše uvedený vzorec pro 3 tátoše lze zapsat také ve formě tabulky takto:

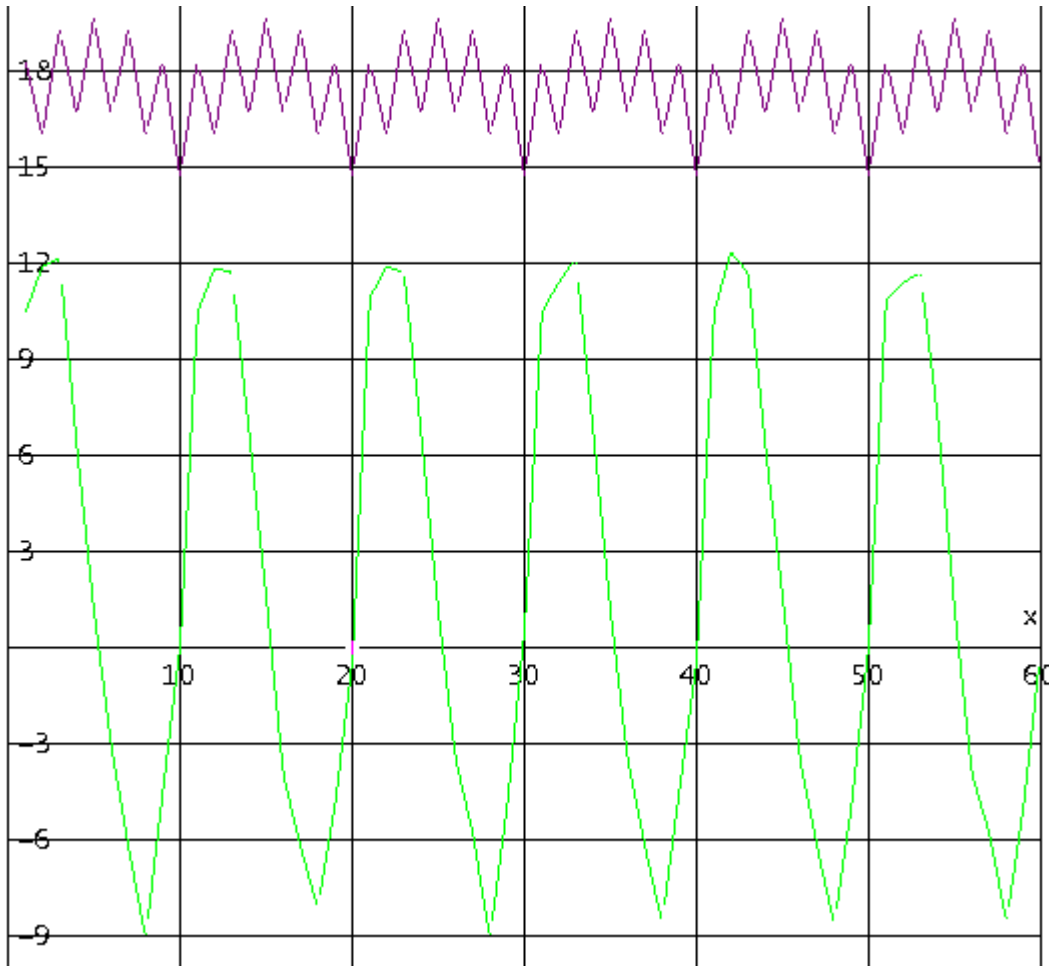
$$\frac{1}{6}n^6 - \frac{5}{6}n^5 + \frac{4031}{1440}n^4 - \frac{621}{100}n^3 + \frac{3313}{288}n^2 - C_n * n + D_n + \left(\frac{1}{4}n^3 - \frac{25}{32}n^2\right) * (-1)^n$$

Konstanty C_n a D_n se opakují s periodou 60, tedy podle zbytku n při dělení 60, kde n je rozměr šachovnice $n \times n$. Existuje tak 60 různých vzorců podle toho, zda je n tvaru $60a$, $60a+1$, ..., $60a+59$ (kde a je celé nezáporné číslo). Konstanta C_n má kratší periodu 10.

n MOD 60	C_n	D_n
0	44/3	0
1	1379/75	75091/7200
2	1196/75	5353/450
3	1451/75	9723/800
4	1244/75	1412/225
5	59/3	331/288
6	1244/75	-151/50
7	1451/75	-44717/7200
8	1196/75	-2044/225
9	1379/75	-3589/800
10	44/3	1/18
11	1379/75	75091/7200
12	1196/75	296/25
13	1451/75	84307/7200
14	1244/75	3049/450
15	59/3	51/32
16	1244/75	-892/225
17	1451/75	-44717/7200
18	1196/75	-407/50
19	1379/75	-35501/7200

20	44/3	-4/9
21	1379/75	8699/800
22	1196/75	5353/450
23	1451/75	84307/7200
24	1244/75	168/25
25	59/3	331/288
26	1244/75	-1559/450
27	1451/75	-4613/800
28	1196/75	-2044/225
29	1379/75	-35501/7200
30	44/3	1/2
31	1379/75	75091/7200
32	1196/75	2564/225
33	1451/75	9723/800
34	1244/75	3049/450
35	59/3	331/288
36	1244/75	-88/25
37	1451/75	-44717/7200
38	1196/75	-3863/450
39	1379/75	-3589/800
40	44/3	-4/9

41	1379/75	75091/7200
42	1196/75	617/50
43	1451/75	84307/7200
44	1244/75	1412/225
45	59/3	51/32
46	1244/75	-1559/450
47	1451/75	-44717/7200
48	1196/75	-216/25
49	1379/75	-35501/7200
50	44/3	1/18
51	1379/75	8699/800
52	1196/75	2564/225
53	1451/75	84307/7200
54	1244/75	361/50
55	59/3	331/288
56	1244/75	-892/225
57	1451/75	-4613/800
58	1196/75	-3863/450
59	1379/75	-35501/7200



Graf znázorňuje periody pro C_n (fialový graf nahoře) a D_n (zelený graf). Zatímco v případě C_n je 6 částí shodných (perioda 10), části grafu pro D_n jsou sice podobné, ale ne zcela identické a nejmenší perioda je až 60.

C_n, D_n periods

Z výše uvedeného obecného vzorce vyplývají vzorce pro:

$$C_n = \frac{2623}{150} - \frac{77}{50} * (-1)^n - \left(\sqrt{5} + 3 + \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) * (-1)^n \right) * \frac{4}{25} * \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right) - \left(\frac{\sqrt{5}}{5} + 1 + (3 - \sqrt{5}) * (-1)^n \right) * \frac{4}{25} * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

$$D_n = \frac{82321}{43200} - \frac{1}{8} * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{16}{25} * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{16}{25} * \sqrt{(130 + 58\sqrt{5})} * \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \frac{16}{125} * \sqrt{(50 + 22\sqrt{5})} * \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

$$+ (-1)^n * \left(-\frac{43}{64} - \frac{1}{8} * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{8}{27} * \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \frac{16}{25} * \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right) - \sqrt{(50 - 22\sqrt{5})} * \frac{16}{125} * \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) - \sqrt{(130 - 58\sqrt{5})} * \frac{16}{25} * \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \right)$$

Na doplnění uvádím ještě jinou variantu vzorce pro počet rozmístění 3 neohrožujících se tátošů na šachovnici $n \times n$, která **neobsahuje součiny** trigonometrických funkcí, má ale více členů než vzorec na str. 312 (*same formula for 3 Nightriders on a $n \times n$ chessboard in different format*).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}n^6 - \frac{5}{6}n^5 + \frac{4031}{1440}n^4 - \frac{621}{100}n^3 + \frac{3313}{288}n^2 - \frac{2623}{150}n + \frac{82321}{43200} + \left(\frac{1}{4}n^3 - \frac{25}{32}n^2 + \frac{77}{50}n - \frac{43}{64}\right) * \cos(\pi n) - \frac{1}{4} * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{8}{27} * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \\ & + \left(\frac{12 + 4\sqrt{5}}{25}\right) * n * \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \frac{16}{25} * \sqrt{(130 + 58\sqrt{5})} * \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \frac{4}{125} * ((5 + \sqrt{5}) * n - 20) * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{16}{125} * \sqrt{(50 + 22\sqrt{5})} * \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \\ & + \left(\frac{12 - 4\sqrt{5}}{25}\right) * n * \cos\left(\frac{3\pi n}{5}\right) + \frac{16}{25} * \sqrt{(130 - 58\sqrt{5})} * \sin\left(\frac{3\pi n}{5}\right) + \frac{4}{125} * ((5 - \sqrt{5}) * n - 20) * \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + \frac{16}{125} * \sqrt{(50 - 22\sqrt{5})} * \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) \end{aligned}$$

Alternative formula (with Floor function) (*V. Kotěšovec, 7.12.2010*):

$$\begin{aligned} & \left(n^3 - \frac{25n^2}{8} + \frac{154n}{25} - \frac{3763}{400}\right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{8}{9} \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \frac{4}{9} \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \left(\frac{32n}{25} + \frac{88}{25}\right) \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + \left(\frac{32n}{25} - \frac{168}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor + \left(\frac{24n}{25} - \frac{96}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+2}{10} \right\rfloor + \left(\frac{24n}{25} - \frac{328}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor + \left(\frac{16n}{25} - \frac{152}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+4}{10} \right\rfloor \\ & + \left(\frac{16n}{25} - 16\right) \left\lfloor \frac{n+5}{10} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{25} - \frac{32}{5}\right) \left\lfloor \frac{n+6}{10} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{25} - \frac{264}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+7}{10} \right\rfloor + \frac{n^6}{6} - \frac{5n^5}{6} + \frac{3311n^4}{1440} - \frac{1759n^3}{400} + \frac{3151n^2}{450} - \frac{30509n}{7200} \end{aligned}$$

k Nightriders on an n x n chessboard		
k	Generating function	Recurrence
2	$-\frac{2x^2(x^2 + 2x + 3)(2x^2 + x + 1)}{(x - 1)^5(x + 1)^2}$	$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} - 5a_{n-3} + 5a_{n-4} + a_{n-5} - 3a_{n-6} + a_{n-7}$
3	$\begin{aligned} & - (36x^{30} + 124x^{29} + 496x^{28} + 1128x^{27} + 2632x^{26} + 4280x^{25} + 7160x^{24} + 9296x^{23} + 12936x^{22} \\ & + 14828x^{21} + 18828x^{20} + 20164x^{19} + 23820x^{18} + 23684x^{17} + 25460x^{16} + 22972x^{15} + \\ & 22412x^{14} + 18532x^{13} + 16820x^{12} + 12996x^{11} + 10912x^{10} + 7552x^9 + 5428x^8 + 3012x^7 + \\ & 1652x^6 + 604x^5 + 204x^4 + 28x^3 + 4x^2) / \\ & ((x+1)^4(x-1)^7(x^2+1)(x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)^2(x^4+x^3+x^2+x+1)^2) \end{aligned}$	$\begin{aligned} a_n = & 2a_{n-1} - a_{n-3} - 2a_{n-5} + 2a_{n-6} + a_{n-8} - 3a_{n-11} + \\ & 2a_{n-13} + 4a_{n-15} - 4a_{n-16} - 2a_{n-18} + 3a_{n-20} - a_{n-23} - \\ & 2a_{n-25} + 2a_{n-26} + a_{n-28} - 2a_{n-30} + a_{n-31} \end{aligned}$

Denominátor pro $k=3$ v řeči [cyklotomických polynomů](#): $C_1(x)^7 C_2(x)^4 C_3(x) C_4(x) C_5(x)^2 C_{10}(x)^2$

n	2 nightriders	3 nightriders	4 nightriders
1			
2	6	4	1
3	28	36	18
4	96	276	412
5	240	1152	3046
6	518	3920	17365
7	980	10568	68540
8	1712	25348	232164
9	2784	53848	655852
10	4310	106292	1680033
11	6380	194732	3855946
12	9136	339416	8279704
13	12688	562652	16532026
14	17206	899796	31456369
15	22820	1388008	56832396
16	29728	2083908	99009508
17	38080	3044992	165941072
18	48102	4356344	270328605
19	59964	6102144	427383994
20	73920	8404204	660479212
21	90160	11380564	996624154
22	108966	15199100	1476091049
23	130548	20019856	2144134416
24	155216	26067112	3066551576
25	183200	33551812	4315580852
26	214838	42766092	5994143473
27	250380	53981600	8213049038
28	290192	67570804	11127498228

29	334544	83876732	14901856642
30	383830	103365728	19763006661
31	438340	126463668	25947796192
32	498496	153745412	33779182556
33	564608	185732188	43590211584
34	637126	223122948	55829979313
35	716380	266547472	70956669486
36	802848	316845560	89582262248
37	896880	374769664	112325177234
38	998982	441318188	140004466369
39	1109524	517381252	173440817244
40	1229040	604134684	213712999188
41	1357920	702622052	261893660420
42	1496726	814216544	319383471333
43	1645868	940132020	387565706626
44	1805936	1081959860	468235451500
45	1977360	1241101728	563154624642
46	2160758	1419389236	674597104817
47	2356580	1618430292	804782203204
48	2565472	1840319784	956559747776
49	2787904	2086891176	1132696905700
50	3024550	2360526732	1336730709817
51	3275900	2663305556	1572079231182
52	3542656	2997922516	1843093512724
53	3825328	3366723560	2153960135830
54	4124646	3772742240	2509987286045
55	4441140	4218613152	2916262205396
56	4775568	4707735876	3379211983828
57	5128480	5243056424	3904973325484

58	5500662	5828368716	4501273430281
59	5892684	6466953812	5175464989786
60	6305360	7163029360	5936777767736
61	6739280	7920235852	6793965666698
62	7195286	8743245188	7757986492521
63	7673988	9636082848	8839202110224
64	8176256	10603906308	10050547464348
65	8702720	11651152152	11404220038404
66	9254278	12783496072	12915407974749
67	9831580	14005812832	14598395786766
68	10435552	15324329940	16470928446364
69	11066864	16744388300	18549653991518
70	11726470	18272801892	20855207572681
71	12415060	19915406448	23406903212928
72	13133616	21679638248	26228631686072
73	13882848	23571857756	29342705362144
74	14663766	25600160124	32776668245393
75	15477100	27771460968	36556191741402
76	16323888	30094552244	40712907563420
77	17204880	32576936124	45276239113838
78	18121142	35228140248	50282377368653
79	19073444	38056285612	55764924209252

80	20062880	41071675484	61765141163540
81	21090240	44283082684	68321269626052
82	22156646	47701627220	75480195460457
83	23262908	51336767992	83285300290326
84	24410176	55200483576	91789690203232
85	25599280	59302953672	101042424542718
86	26831398	63657058652	111103473874721
87	28107380	68273734740	122028154836492
88	29428432	73166808260	133883994646588
89	30795424	78348008556	146733190163536
90	32209590	83832153128	160651568617213
91	33671820	89631801732	175708874084430
92	35183376	95762809460	191990031722652
93	36745168	102238605096	209573050965542
94	38358486	109076128388	228552805830937
95	40024260	116289716172	249016335428616
96	41743808	123897441384	271069375291800
97	43518080	131914588952	294808811705460
98	45348422	140360414436	320352214454665
99	47235804	149251191772	347807188908174
100	49181600	158607409644	377304175866020

Obecně pro k neohrožujících se tátošů na normální šachovnici $n \times n$ je z hlediska **asymptotického chování** odhadnutelný průběh

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{5}{6} * \frac{n^{2k-1}}{(k-2)!} + \dots$$

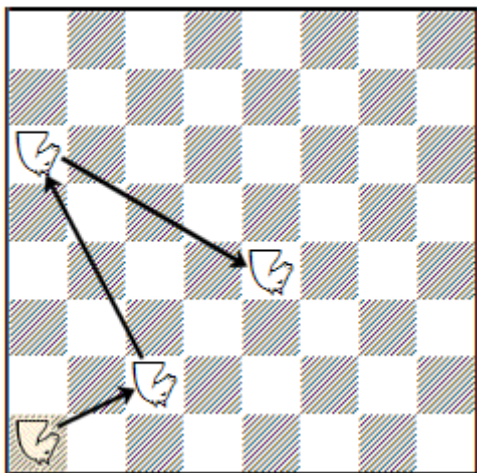
For maximal number of non-attacking nightriders on an $n \times n$ chessboard, see chapter 14

O 4 tátoších na normální šachovnici $n \times n$ / About 4 nightriders on an $n \times n$ chessboard

Vzorec pro 4 tátoše bude mnohem komplikovanější než pro 3 tátoše. Optimalizovaným programem se mi sice podařilo vypočítat celkem 120 hodnot, ale pro nalezení vzorce je to stále málo (odhadem by bylo třeba znát přes 300 hodnot!).

Asymptotický průběh je

$$\frac{1}{24}n^8 - \frac{5}{12}n^7 + 2.39 \dots * n^6 + \dots$$



Pokusil jsem se alespoň určit tvar denominátoru. Použil jsem k tomu podobnou metodu jako při hledání denominátoru pro 7 dam (*similar method as for seven queens*), viz str. 27. Program hledal jen takové kombinace čtyř ohrožujících se tátošů, kde na žádné linii nestojí více než 2 tátoši. Každý nově postavený tátoš napadá jen předchozího tátoše a žádného jiného. Bohužel touto metodou (dávající až na exponenty shodný tvar denominátoru jako kompletní vzorec) bylo možné (v čase desítek hodin) vypočítat jen 180 hodnot, což stále nestačilo. Přidal jsem proto podmínku, že první tátoš je **zafixován na poli A1**. Při této podmínce sice už možné konfigurace nepokrývají na normální šachovnici úplně všechny existující konfigurace (pro přesnost je třeba poznamenat, že na prstencové šachovnici by ještě pokrývaly), ale jsou podmnožinou těchto konfigurací. Jinými slovy, pokud najdeme denominátor pro tuto pomocnou posloupnost, všechny jeho členy budou i součástí denominátoru vytvářející funkce pro rozmístění 4 neohrožujících se tátošů na normální šachovnici $n \times n$.

Podařilo se mi vypočítat celkem 370 členů této pomocné posloupnosti a při hledání lineární rekurence jsem byl tentokrát už úspěšný a našel v této posloupnosti **rekurenci hloubky 231** a z ní už snadno odvodil vytvářející funkci. Její denominátor má tvar:

$$(x-1)^4 * (x+1)^3 * (x^2+x+1)^2 * (x^2+1)^2 * (x^4+x^3+x^2+x+1)^2 * (x^2-x+1) * (x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) * (x^4+1)^2 * (x^4-x^3+x^2-x+1)^2 * (x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) * (x^4-x^2+1) * (x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) * (x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1) * (x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1) * (x^8+1) * (x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) * (x^8-x^6+x^4-x^2+1) * (x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1) * (x^{22}+x^{21}+x^{20}+x^{19}+x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) * (x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1) * (x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1) * (x^{12}-x^{10}+x^8-x^6+x^4-x^2+1) * (x^{16}-x^{12}+x^8-x^4+1) * (x^{20}-x^{15}+x^{10}-x^5+1)$$

V řeči cyklotomických polynomů lze zapsat jako:

$$C_1(x)^4 C_2(x)^3 C_3(x)^2 C_4(x)^2 C_5(x)^2 C_6(x) C_7(x) C_8(x)^2 C_{10}(x)^2 C_{11}(x) C_{12}(x) C_{13}(x) C_{14}(x) C_{15}(x) C_{16}(x) C_{17}(x) C_{20}(x) C_{22}(x) C_{23}(x) C_{25}(x) C_{26}(x) C_{28}(x) C_{40}(x) C_{50}(x)$$

Některé členy v tomto denominátoru se daly očekávat, ale poměrně překvapující jsou zde cyklotomické polynomy řádu 7, 11, 13, 17 a zejména 23. Nalezení kompletního denominátoru pro původní problém umožní až rychlejší počítače, nyní je pouze zřejmé, že jeho stupeň d bude

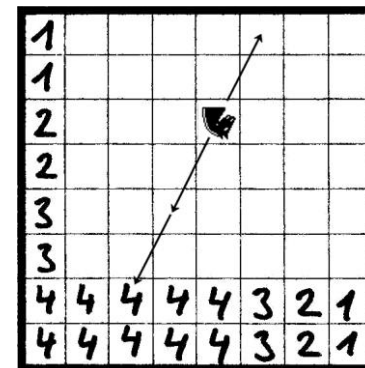
$$d > 231$$

a bude dělitelný výše uvedeným polynomem.

$$period \geq \text{LCM}(1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,16,17,20,22,23,25,26,28,40,50) = 469669200$$

6.1.1) k semi-nightriders on an n x n chessboard - k semi-tátošů na šachovnici n x n

Podobně jako v případě střelců (viz [semi-bishops](#)), jsou z matematického hlediska zajímavé kameny, které se mohou pohybovat jen po jedné z tátošových linií (všechny ve směru [1,2]). *Moves of semi-nightrider are allowed only in one [1,2] line.* Pro počet pozic k neohrožujících se semi-tátošů na šachovnici n x n jsem odvodil vytvářející funkci, ve které koeficient polynomu u členu x^{3n-2-k} určuje příslušný počet pozic. Systém je zřejmý z diagramu. Funkce se liší pro šachovnice sudých a lichých rozměrů.



Pro sudá n je tato funkce (*generating function if n is even*)

$$\left(\frac{n}{2} + x\right)^{n-2} \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (i+x)^4$$

Pro lichá n pak (*generating function if n is odd*)

$$\left(\frac{n-1}{2} + x\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n+1}{2} + x\right)^{\frac{n+1}{2}} \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (i+x)^4$$

Z těchto funkcí jsem odvodil (s užitím [binomické věty](#)) i explicitní vzorce vyjádřené pomocí [Stirlingových čísel prvního druhu](#).

Number of ways to place k non-attacking semi-nightriders on an n x n chessboard, explicit formula (V. Kotěšovec, 2.6.2011), $S_1 =$ *Stirling numbers of the first kind*

for n even

$$\text{SemiN}(k, n) = \sum_{v=0}^{3n-k-2} \left((-1)^v \binom{n-2}{k-2n+v} \left(\frac{n}{2}\right)^{k-2n+v} \sum_{j=0}^v \left(\left(\sum_{i=0}^j S_1\left(\frac{n+1}{2}, i+1\right) * S_1\left(\frac{n+1}{2}, j-i+1\right) \right) \left(\sum_{i=0}^{v-j} S_1\left(\frac{n+1}{2}, i+1\right) * S_1\left(\frac{n+1}{2}, v-j-i+1\right) \right) \right) \right)$$

for n odd, n>1

$$\sum_{v=0}^{3n-k-2} \left((-1)^v \left(\sum_{i=0}^{3n-k-v-2} \binom{n-1}{i} \binom{\frac{n+1}{2}}{3n-2-i-k-v} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}-i} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{i+k+v-\frac{5(n-1)}{2}} \right) \left(\sum_{j=0}^v \left(\left(\sum_{i=0}^j S_1\left(\frac{n+1}{2}, i+1\right) * S_1\left(\frac{n+1}{2}, j-i+1\right) \right) \left(\sum_{i=0}^{v-j} S_1\left(\frac{n+1}{2}, i+1\right) * S_1\left(\frac{n+1}{2}, v-j-i+1\right) \right) \right) \right) \right)$$

V programu Mathematica (pro n>1):

```
semin[k_, n_] := (If[EvenQ[n], Sum[(-1)^v * Binomial[n-2, k-2n+v] * (n/2)^(k-2n+v)
* Sum[(Sum[StirlingS1[n/2+1, i+1] * StirlingS1[n/2+1, j-i+1], {i, 0, j}]]
* (Sum[StirlingS1[n/2+1, i+1] * StirlingS1[n/2+1, v-j-i+1], {i, 0, v-j}]), {j, 0, v}], {v, 0, 3n-2-k}],
Sum[(-1)^v * Sum[Binomial[(n-1)/2, i] * ((n-1)/2)^(i-(n-1)/2) * Binomial[(n+1)/2, 3n-2-k-v-i] * ((n+1)/2)^(k+v+i-5*(n-1)/2), {i, 0, 3n-2-k-v}]
* Sum[(Sum[StirlingS1[(n+1)/2, i+1] * StirlingS1[(n+1)/2, j-i+1], {i, 0, j}]]
* (Sum[StirlingS1[(n+1)/2, i+1] * StirlingS1[(n+1)/2, v-j-i+1], {i, 0, v-j}]), {j, 0, v}], {v, 0, 3n-2-k}]);
```

Na normální šachovnici $n \times n$ se vejde maximálně $3n-2$ semi-tátošů (viz též str. 756). Nejzajímavější případy jsou $k=n$, $k=2n$ a $k=3n-2$. Pro všechny jsem analyzoval asymptotické chování. Pro poslední případ jde navíc explicitní vzorec vyjádřit v mnohem jednodušším tvaru.

Number of ways to place n non-attacking semi-nightriders on an $n \times n$ chessboard			
$\frac{SemiN(n,n)}{(n-1)!} \sim b * q^n$	n	q	b
$q = 5.825866180391528311654\dots$ $b = 0.203477644935953923624\dots$	1000	5.825868659	0.203304
	2000	5.825866801	0.203390
	3000	5.825866456	0.203419
	4000	5.825866335	0.203434
	5000	5.825866279	0.203442

Number of ways to place $2n$ non-attacking semi-nightriders on an $n \times n$ chessboard			
$\frac{SemiN(2n,n)}{(2n-1)!} \sim b * q^n$	n	q	b
$q = 1.0918085210481484762019\dots$ $b = 0.2999180080249988219872\dots$	1000	1.09181099	0.298561
	2000	1.09180914	0.299237
	3000	1.09180879	0.299464
	4000	1.09180867	0.299577

Number of ways to place $3n-2$ non-attacking semi-nightriders on an $n \times n$ chessboard (V. Kotěšovec, 16.5.2011)

If n is even:

$$SemiN(3n-2, n) = \left(\frac{n}{2}\right)^{n-2} \left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^4$$

If n is odd:

$$SemiN(3n-2, n) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^4$$

Asymptotic:

$$SemiN(3n-2, n) \sim \frac{4\pi^2 n^{3n}}{2^{3n} e^{2n}}$$

Následující program generuje tabulky hodnot (výpočet přes vytvářící funkci je efektivnější, i když může být paměťově náročnější).

```
(* Number of ways to place k non-attacking semi-nightriders on an n x n chessboard *)
semitatos[k_, n_] := (Coefficient[Expand[If[EvenQ[n],
(x+n/2)^(n-2) * Product[x+i, {i, 1, n/2}]^4,
(x+(n-1)/2)^(n-1) * (n-1)/2 * (x+(n+1)/2)^(n+1)/2 * Product[x+i, {i, 1, (n-1)/2}]^4], x], x, 3n-2-k]);
```

```
Table[semitatos[n, n], {n, 1, 20}]
Table[semitatos[2n, n], {n, 1, 20}]
Table[semitatos[3n-2, n], {n, 1, 20}]
```

Ještě je možno poznamenat, že na **prstencové** i **válcové** šachovnici $n \times n$ je maximální počet neohrožujících se semi-tátošů roven n a počet takových pozic je roven n^n

Pro konstantní k (na normální šachovnici) dostáváme polynomy v n
(V. Kotěšovec, 2.6.2011)

$$\text{SemiN}(1, n) = n^2$$

$$\text{SemiN}(2, n) = \frac{n^4}{2} - \frac{5n^3}{24} - \frac{11n}{48} + (-1)^n * \frac{n}{16}$$

$$\text{SemiN}(3, n) = \frac{n^6}{6} - \frac{5n^5}{24} + \frac{n^4}{16} - \frac{11n^3}{48} + \frac{7n^2}{48} + \frac{1}{32} + (-1)^n * \left(\frac{n^3}{16} - \frac{n^2}{16} - \frac{1}{32} \right)$$

$$\text{SemiN}(4, n) = \frac{n^8}{24} - \frac{5n^7}{48} + \frac{97n^6}{1152} - \frac{131n^5}{960} + \frac{223n^4}{1152} - \frac{17n^3}{192} + \frac{137n^2}{2304} - \frac{73n}{1920} + (-1)^n * \left(\frac{n^5}{32} - \frac{29n^4}{384} + \frac{3n^3}{64} - \frac{35n^2}{768} + \frac{7n}{128} \right)$$

$$\text{SemiN}(5, n) = \frac{n^{10}}{120} - \frac{5n^9}{144} + \frac{61n^8}{1152} - \frac{421n^7}{5760} + \frac{743n^6}{5760} - \frac{307n^5}{2304} + \frac{221n^4}{2304} - \frac{943n^3}{11520} + \frac{11n^2}{240} - \frac{7n}{768} + (-1)^n * \left(\frac{n^7}{96} - \frac{17n^6}{384} + \frac{49n^5}{768} - \frac{47n^4}{768} + \frac{65n^3}{768} - \frac{n^2}{16} + \frac{7n}{768} \right)$$

$$\text{SemiN}(6, n) = \frac{n^{12}}{720} - \frac{5n^{11}}{576} + \frac{49n^{10}}{2304} - \frac{14521n^9}{414720} + \frac{121n^8}{1920} - \frac{37661n^7}{387072} + \frac{1597n^6}{15360} - \frac{27281n^5}{276480} + \frac{4217n^4}{46080} - \frac{9335n^3}{165888} + \frac{859n^2}{46080} - \frac{149n}{16128} + \frac{1}{1024} \\ + (-1)^n * \left(\frac{n^9}{384} - \frac{13n^8}{768} + \frac{769n^7}{18432} - \frac{901n^6}{15360} + \frac{1471n^5}{18432} - \frac{311n^4}{3072} + \frac{1279n^3}{18432} - \frac{329n^2}{15360} + \frac{n}{768} - \frac{1}{1024} \right)$$

$$\text{SemiN}(7, n) = \frac{n^{14}}{5040} - \frac{n^{13}}{576} + \frac{43n^{12}}{6912} - \frac{5629n^{11}}{414720} + \frac{7207n^{10}}{276480} - \frac{93931n^9}{1935360} + \frac{7759n^8}{107520} - \frac{23657n^7}{276480} + \frac{26471n^6}{276480} - \frac{78013n^5}{829440} + \frac{4421n^4}{69120} - \frac{2971n^3}{80640} + \frac{4675n^2}{258048} - \frac{89n}{30720} + \frac{3}{1024} \\ + (-1)^n * \left(\frac{n^{11}}{1920} - \frac{11n^{10}}{2304} + \frac{325n^9}{18432} - \frac{187n^8}{5120} + \frac{5339n^7}{92160} - \frac{1625n^6}{18432} + \frac{9653n^5}{92160} - \frac{1751n^4}{23040} + \frac{127n^3}{3840} - \frac{229n^2}{36864} + \frac{89n}{30720} - \frac{3}{1024} \right)$$

$$\text{SemiN}(8, n) = \frac{n^{16}}{40320} - \frac{n^{15}}{3456} + \frac{197n^{14}}{138240} - \frac{689n^{13}}{165888} + \frac{73921n^{12}}{7962624} - \frac{149299n^{11}}{7741440} + \frac{24908203n^{10}}{696729600} - \frac{19979n^9}{368640} + \frac{6656131n^8}{92897280} - \frac{293687n^7}{3317760} + \frac{9064717n^6}{99532800} - \frac{284909n^5}{3870720} + \frac{5880551n^4}{111476736} - \frac{61003n^3}{2211840} + \frac{830797n^2}{77414400} - \frac{301n}{122880} \\ + (-1)^n * \left(\frac{n^{13}}{11520} - \frac{49n^{12}}{46080} + \frac{67n^{11}}{12288} - \frac{105169n^{10}}{6635520} + \frac{11831n^9}{368640} - \frac{347117n^8}{6193152} + \frac{6419n^7}{73728} - \frac{44909n^6}{442368} + \frac{1649n^5}{20480} - \frac{1156151n^4}{26542080} + \frac{2053n^3}{147456} - \frac{47843n^2}{5160960} + \frac{265n}{24576} \right)$$

První polynom má vždy stupeň $2k$, polynom u $(-1)^n$ má (pro $k > 1$) stupeň $2k-3$.

Polynomy mají obecně tvar

Pro n sudé (for n even)

$$\begin{aligned} & \frac{n^{2k}}{k!} - \frac{5n^{2k-1}}{24(k-2)!} + \frac{(25k-3)n^{2k-2}}{1152(k-3)!} - \frac{(625k^4 - 3350k^3 + 4847k^2 - 1210k + 68952)n^{2k-3}}{414720(k-2)!} \\ & + \frac{(3125k^5 - 24125k^4 + 52825k^3 - 24499k^2 + 1380618k - 835128)n^{2k-4}}{39813120(k-3)!} - \frac{(21875k^6 - 223125k^5 + 668675k^4 - 494739k^3 + 24219290k^2 - 32152296k + 19154880)n^{2k-5}}{6688604160(k-4)!} \\ & + \frac{(546875k^8 - 9187500k^7 + 55098750k^6 - 137516400k^5 + 1332589011k^4 - 7495509492k^3 + 13600437364k^2 - 13423281648k + 71362304640)n^{2k-6}}{4815794995200(k-4)!} + \dots \end{aligned}$$

Pro n liché (for n odd)

$$\begin{aligned} & \frac{n^{2k}}{k!} - \frac{5n^{2k-1}}{24(k-2)!} + \frac{(25k-3)n^{2k-2}}{1152(k-3)!} - \frac{(625k^4 - 3350k^3 + 4847k^2 - 1210k + 120792)n^{2k-3}}{414720(k-2)!} \\ & + \frac{(3125k^5 - 24125k^4 + 52825k^3 - 24499k^2 + 2417418k + 1031112)n^{2k-4}}{39813120(k-3)!} - \frac{(21875k^6 - 223125k^5 + 668675k^4 - 494739k^3 + 42363290k^2 + 30988824k + 103343040)n^{2k-5}}{6688604160(k-4)!} \\ & + \frac{(546875k^9 - 10828125k^8 + 82661250k^7 - 302812650k^6 + 2652338211k^5 - 13271388525k^4 + 26967065680k^3 - 70073740620k^2 + 300611344464k - 167580213120)n^{2k-6}}{4815794995200(k-3)!} + \dots \end{aligned}$$

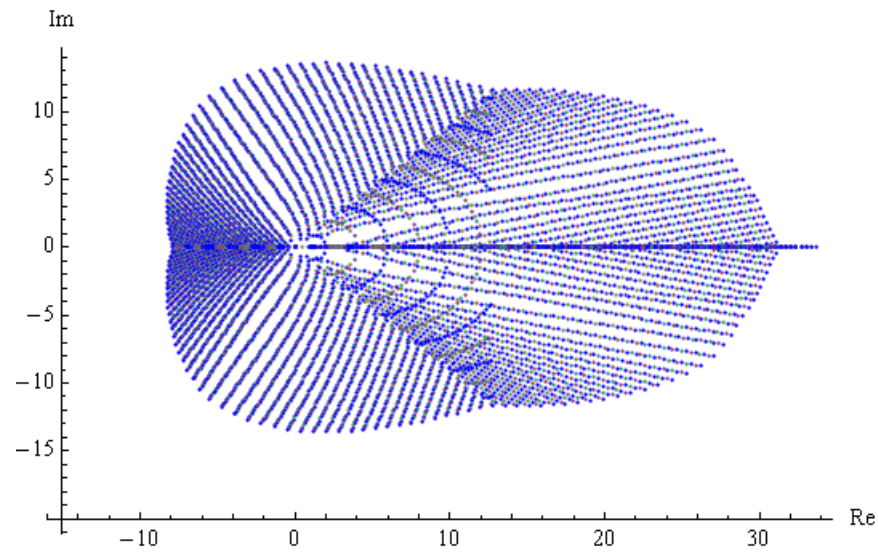
Obecný rozvoj je (první členy jsou shodné pro n sudé i liché)

$$\frac{n^{2k}}{k!} * \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d 5^d k^{2d}}{8^d 3^d n^d d!} * \left(1 - \frac{d(14d+11)}{25k} + \frac{(d-1)d(588d^2+832d+409)}{3750k^2} - \frac{(d-1)d(2d-1)(1372d^3+532d^2-2193d-4968)}{93750k^3} + \dots \right)$$

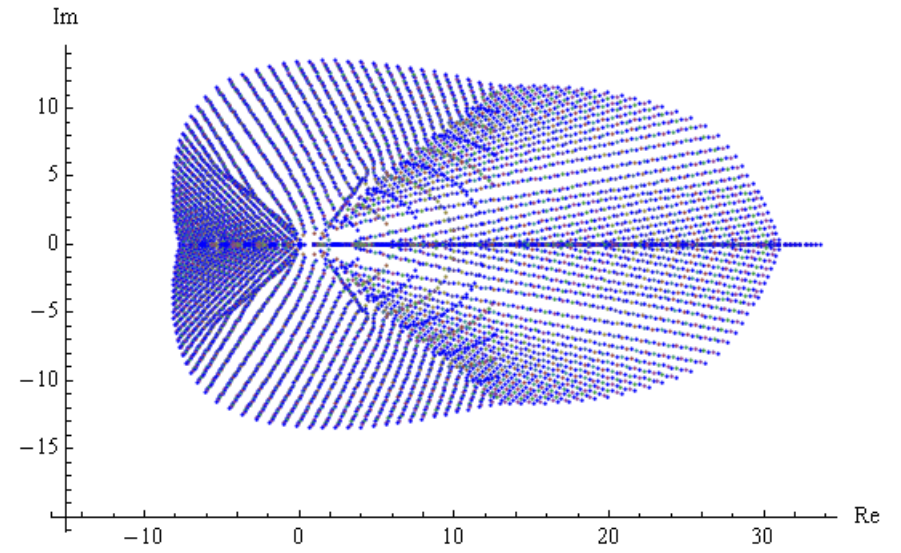
Asymptoticky (při konstantním k)

$$\frac{n^{2k}}{k!} * e^{-\frac{5k^2}{24n}} * \left(1 + \frac{5k}{24n} - \frac{(k-2)(28k-3)k}{1152n^2} - \frac{(3772k^3 - 5607k^2 + 70162k - 68952)k}{414720n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)$$

k semi-nightriders $n \times n$, n even
complex plane, roots for all $k \leq 100$



k semi-nightriders $n \times n$, n odd
complex plane, roots for all $k \leq 100$



Number of ways to place k non-attacking semi-nightriders on an $n \times n$ chessboard

n	1 semiN	2 semiN	3 semiN	4 semiN	5 semiN	6 semiN	7 semiN	8 semi-nightriders	summed over all $k \geq 0$
1	1								2
2	4	6	4	1					16
3	9	34	70	85	61	24	4	0	288
4	16	114	476	1289	2364	2972	2528	1392	11664
5	25	285	1961	9083	29895	71903	127907	168216	746496
6	36	602	6204	44079	228816	897188	2708856	6360703	84934656
7	49	1127	16167	162106	1206674	6912142	31166222	112194901	13271040000
8	64	1940	37040	499686	5064528	40031996	252839600	1296911761	324000000000
9	81	3126	76486	1331907	17565771	182292516	1526799036	10502756967	1007769600000000
10	100	4790	146300	3199821	53357640	705194080	7581326800	67519065506	451377585192960000
11	121	7040	262260	7027636	144272612	2359873936	31579876400	352287645886	245852414446141440000
12	144	10006	446844	14411047	357577836	7101297304	115936694136	1586070588415	182264691956215357440000
13	169	13819	728295	27804036	819330408	19391685100	378711643516	6222410064286	159198985116768408698880000
14	196	18634	1144836	51092475	1765198344	49133628820	1132197363640	22025651581801	181619274981329807458959360000
15	225	24605	1742461	89834199	3593853095	116119096243	3114185356083	70706103699050	238589912669176770955491409920000
16	256	31912	2581184	152304860	6988455488	259567836776	8021283808832	210371301204902	396686356416148108710840851496960000
17	289	40732	3730972	249729082	13021339210	550616605692	19409391569868	581853146142327	7464353642570823641962905600000000000000
18	324	51270	5280660	398069337	23414324400	1118805806048	44644902429600	1517879370793428	173401213127727513600000000000000000000000
19	361	63726	7331346	618117063	40720126431	2182341789476	97821265154696	3741744607810929	449758089122236376647320207360000000000000000000
20	400	78330	10008700	938404117	68836094460	4113406762340	205868630790800	8805195256864578	141153354956103915930650591069954591686656000000000

Poslední sloupec určuje součet počtu pozic přes všechna $k \geq 0$. Pro tuto posloupnost jsem odvodil vzorce, závislé na tom, jestli je n sudé nebo liché.

*Number of arrangements k non-attacking semi-nightriders on an $n \times n$ board, **summed over all $k \geq 0$***

If n is even

$$\left(\frac{n}{2} + 1\right)^{n+2} \left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^4$$

If n is odd

$$\left(\frac{n+3}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\left(\frac{n+1}{2}\right)!\right)^4$$

V programu Mathematica dostaneme tuto sekvenci programem

```
Table[If[EvenQ[n], (n/2+1)^(n+2) * (n/2)!^4, ((n+3)/2)^(n/2) * ((n+1)/2)^(n/2) * ((n+1)/2)!^4], {n, 1, 20}]
```

6.1.2) k semi-riders $[r,s]$ on an $n \times n$ chessboard - k semi-riders $[r,s]$ na šachovnici $n \times n$

Obecně můžeme ještě analyzovat liniové kameny s jednotkovým tahem $[r,s]$, které mohou táhnout ale jen po jedné ze 4 možných linií. V souladu s předchozím značením je budeme nazývat **semi-riders** $[r,s]$.

Na diagramu jsou zobrazeny možné tahy semi-ridera $[2,3]$.

První členy vzorců pro počet pozic nenapadajících se semi-riderů $[r,s]$ na šachovnici $n \times n$ mají obecně tvar *Number of ways to place k non-attacking semi-riders $[r,s]$ on an $n \times n$ chessboard, $0 < r \leq s$, first terms:*

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{(3s-r)}{6s^2} * \frac{n^{2k-1}}{(k-2)!} + \dots$$

Postupem podobným jako pro semi-tátoše jsem odvodil následující obecný rozvoj pro **semi-riders** $[r,s]$, $0 < r \leq s$
General expansion

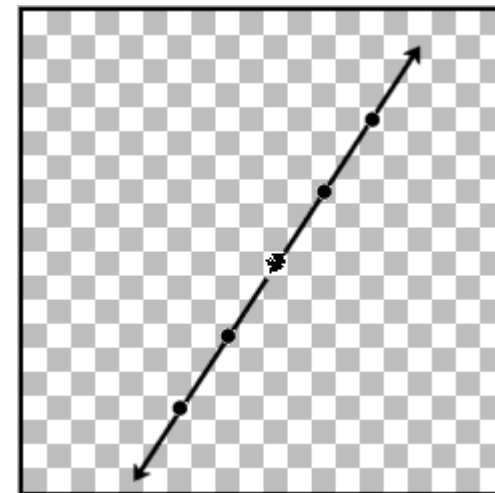
$$\frac{n^{2k}}{k!} * \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d (3s-r)^d k^{2d}}{6^d s^{2d} n^d d!} * \left(1 - \frac{d * (2d * (r^2 - 3rs + 3s^2) + 3s^2 - r^2)}{(3s-r)^2 * k} + \dots \right)$$

Asymptoticky (při konstantním k) pak platí (viz též úvahy o počtu dostupných polí na str. 656)

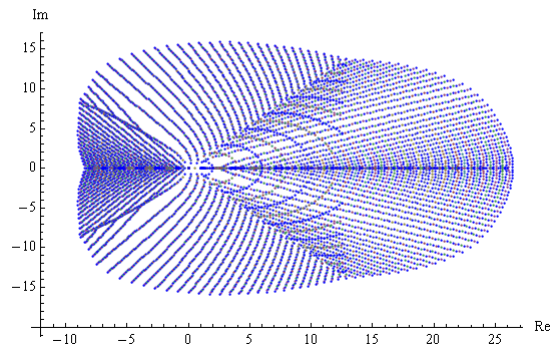
Theorem (V. Kotěšovec, 23.11.2011):

Number of ways to place k non-attacking semi-riders $[r,s]$ on an $n \times n$ chessboard, $0 < r \leq s$, is asymptotic (for constant k):

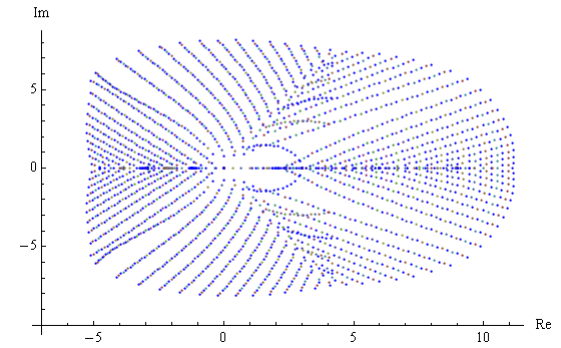
$$\frac{n^{2k}}{k!} * e^{-\frac{(3s-r)*k^2}{6s^2*n}} * \left(1 + \frac{(3s-r) * k}{6s^2 * n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$



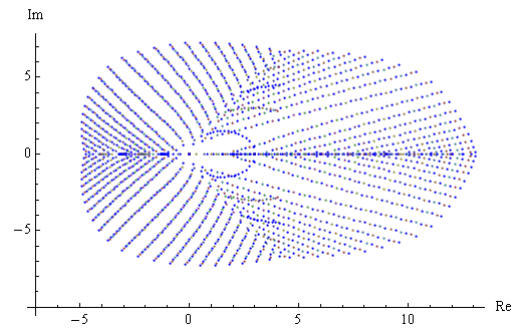
k semi-riders [2,2] n x n
 complex plane, roots for all k<=100



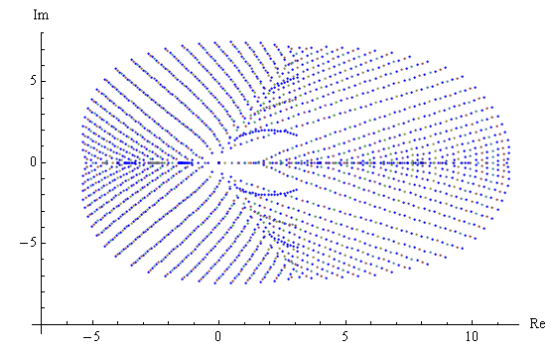
k semi-riders [3,3] n x n
 complex plane, roots for all k<=50



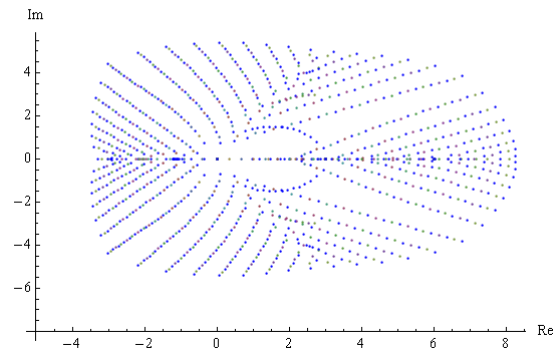
k semi-riders [1,3] n x n
 complex plane, roots for all k<=50



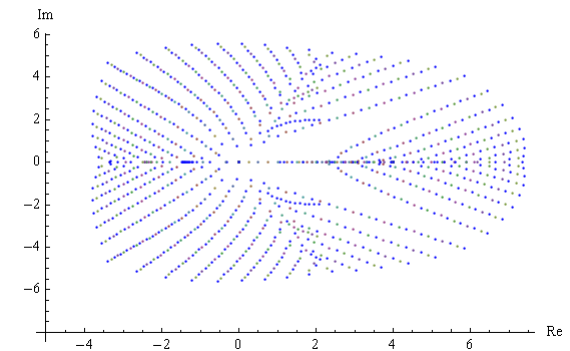
k semi-riders [1,4] n x n
 complex plane, roots for all k<=50



k semi-riders [2,3] n x n
 complex plane, roots for all k<=34



k semi-riders [3,4] n x n
 complex plane, roots for all k<=34



Maximální možný počet semi-riderů $[r,s]$, které se nenapadají, je pro šachovnici $n \times n$ roven

Maximal number m of non-attacking semi-riders $[r,s]$ ($0 < r \leq s$) on an $n \times n$ chessboard is

$$m = (r + s) n - rs$$

Tento počet je roven počtu možných různých linií. Důkaz je identický jako na str. 756, s tím rozdílem, že pro semi-riders platí místo nerovnosti rovnost, protože máme jistotu, že taková pozice vždy existuje.

Zajímavý je počet možných pozic semi-riderů $[r,s]$ pro maximální konfiguraci a jeho **asymptotické chování**. Problém je podobný výběru z m přihrádek (jak byl popsán na straně 261 pro semi-bishops). Bez nějakého většího omezení můžeme pro tento účel předpokládat, že n je násobkem rs (jistě by šlo odvodit i trochu komplikovanější vzorce pro obecné n , které by obsahovaly celé části, ale asymptoticky by se chovaly shodně). Pro počet pozic neohrožujících se semi-riderů $[r,s]$ na šachovnici $n \times n$ (rs/n) dostaneme vzorec, který vyjadřuje součin počtů polí na každé linii.

$$SR_{r,s}((r + s) n - rs, n) = \left(\left(\frac{n}{s}\right)!\right)^{rs} \left(\left(\frac{n}{s}\right)!\right)^{rs} \left(\left(\frac{n}{s}\right)\right)^{\left(\frac{n}{r}-1-\frac{n}{s}\right)*rs} = \left(\left(\frac{n}{s}\right)!\right)^{2rs} \left(\frac{n}{s}\right)^{n(s-r)-rs}$$

Asymptotic formula for number of ways to place $(r + s) n - rs$ non-attacking semi-riders $[r,s]$ ($0 < r \leq s$) on an $n \times n$ chessboard
(V. Kotěšovec, 18.5.2011)

$$SR_{r,s}((r + s) n - rs, n) \sim \frac{(2\pi)^{rs}}{e^{2nr}} \left(\frac{n}{s}\right)^{n(r+s)}$$

Tento vzorec je v souladu se vzorci pro [semi-bishops](#) ($r=1, s=1$) i pro [semi-nightriders](#) ($r=1, s=2$) a platí dokonce i pro $r=0$ nebo $r=s$.

Problém počtu pozic n neohrožujících se semi-riderů $[r,s]$ na šachovnici $n \times n$ je složitější. Opět se omezíme jen na šachovnice $n \times n$, kde n je dělitelné rs (rs/n). Potom je vytvořující funkcí polynom

Generating function:

$$\left(x + \frac{n}{s}\right)^{n(s-r)-rs} * \prod_{j=1}^{n/s} (x+j)^{2rs}$$

Koeficient u $x^{n(r+s)-rs-k}$ určuje počet možných rozmístění k nenapadajících se semi-riderů $[r,s]$ na šachovnici $n \times n$. Pro tento případ zvolíme $k=n$.

Asymptotické chování všech těchto posloupností je shodné, liší se jen konstantami q a b , specifickými pro každou dvojici $[r,s]$. Tabulka zobrazuje numerické hodnoty těchto konstant. Hodnoty pro menší r, s až do $[4,4]$ jsou vypočítány s větší přesností (při použití 2000 členů posloupnosti), další hodnoty jsou vypočítány z 1000 členů posloupnosti.

Asymptotic formulas for number of ways to place n non-attacking semi-riders $[r,s]$ ($0 < r \leq s$) on an $n \times n$ chessboard:

$$\frac{SR_{r,s}(n, n)}{(n-1)!} \sim b_{r,s} * q_{r,s}^n$$

Výběrem krajní n -tice (postupem jako na str. 261) dostaneme pro konstanty q omezení

$$q_{r,s} > \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\binom{(r+s)n - rs}{n} \left(\left(\frac{n}{2s}\right)!\right)^{2s}}{(n-1)!} \right)^{\frac{1}{n}}$$

odkud celkově

$$\frac{(r+s)^{r+s}}{2s(r+s-1)^{r+s-1}} < q_{r,s} < e^2 = 7.38905609893 \dots$$

Poznámka: K výpočtu konstanty q je nejlepší počítat podíly

$$a_n = \frac{SR(n+1, n+1)}{n * SR(n, n)}$$

Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = q$$

r	s	L < q < H		b	r	s	L < q < H		b
		L	H				L	H	
1	1	4.9108149645682558987		0.242522	1	8	6.942572	6.942581	0.16958
1	2	5.8258661803915283116		0.203478	2	8	6.962866	6.962878	0.16903
2	2	6.15611260	6.15611528	0.191231	3	8	6.982984	6.983001	0.16850
1	3	6.27688709	6.27688896	0.188371	4	8	7.002935	7.002955	0.16799
2	3	6.42670737	6.42671018	0.183256	5	8	7.022722	7.022745	0.16750
3	3	6.56765603	6.56765964	0.179109	6	8	7.042350	7.042376	0.16698
1	4	6.53032107	6.53032294	0.180738	7	8	7.061816	7.061850	0.16656
2	4	6.61405523	6.61405803	0.178084	8	8	7.081134	7.081172	0.16611
3	4	6.69489607	6.69489977	0.175739	1	9	6.990587	6.990595	0.16837
4	4	6.77313945	6.77314403	0.173648	2	9	7.006541	7.006554	0.16796
1	5	6.6907854	6.6907929	0.17621	3	9	7.022389	7.022405	0.16755
2	5	6.7438718	6.7438829	0.17462	4	9	7.038131	7.038152	0.16715
3	5	6.7957775	6.7957924	0.17315	5	9	7.053774	7.053796	0.16674
4	5	6.8465832	6.8466009	0.17179	6	9	7.069314	7.069340	0.16635
5	5	6.8963592	6.8963800	0.17052	7	9	7.084750	7.084785	0.16603
1	6	6.8010967	6.8011041	0.17323	8	9	7.100094	7.100134	0.16567
2	6	6.8376486	6.8376601	0.17219	9	9	7.115353	7.115387	0.16523
3	6	6.8736381	6.8736536	0.17120	1	10	7.029298	7.029306	0.16742
4	6	6.9090918	6.9091113	0.17026	2	10	7.042168	7.042180	0.16708
5	6	6.9440349	6.9440578	0.16938	3	10	7.054967	7.054984	0.16677
6	6	6.9784888	6.9785164	0.16853	4	10	7.067699	7.067719	0.16645
1	7	6.8814627	6.8814701	0.17113	5	10	7.080366	7.080387	0.16611
2	7	6.9081254	6.9081370	0.17040	6	10	7.092964	7.092990	0.16579
3	7	6.9344886	6.9345042	0.16969	7	10	7.105499	7.105527	0.16549
4	7	6.9605625	6.9605823	0.16901	8	10	7.117969	7.118000	0.16518
5	7	6.9863595	6.9863811	0.16834	9	10	7.130369	7.130410	0.16498
6	7	7.0118820	7.0119102	0.17621	10	10	7.142724	7.142757	0.16459
7	7	7.0371504	7.0371778	0.17462					

Zde bych se rád zmínil o jednom málo známém triku, pomocí kterého jde zrychlit konvergence sekvencí a který jsem použil k zpřesnění mezí konstant u řad v této kapitole. L. F. Richardson odvodil, že obecně má následující odvozená posloupnost stejnou limitu a konverguje mnohem rychleji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_{2n} - a_n) = q$$

For these sequences I used Richardson's method, sequence $b_n = 2a_{2n} - a_n$ converging more quickly to same limit.

k non-attacking semi-riders [r,s] on an n x n normal board, summed over all k>=0

Metodou podobnou jako pro semi-leapers jsem odvodil následující vzorec pro součet počtu pozic nenapadajících se k semi-riderů [r,s] na šachovnici $n \times n$ přes všechna $k \geq 0$. Vychází z toho, že na každou linii délky d je možno (na rozdíl od semi-leaperů) umístit maximálně jeden kámen. Počet pozic pro jednu linii je tak $d + 1$ (musí být uvažována i možnost, kdy není na linii žádný kámen).

Theorem (V. Kotěšovec, 5.5.2012)

Number of arrangements of k non-attacking semi-riders $[r,s]$ on normal chessboard $n \times n$, summed over all $k \geq 0$ is
(for $0 < r < s, n > s^2$)

$$\left(\prod_{x=1}^n \left(\left\lfloor \frac{n-x}{s} \right\rfloor + 2 \right)^r \right) \left(\prod_{x=1}^s \left(\prod_{y=r+1}^{\lfloor \frac{n-r(n-x)}{s} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n-x}{s} \right\rfloor + 2 \right) \right) \right) \prod_{x=1}^s \left(\prod_{y=\lfloor \frac{n-r(n-x)}{s} \rfloor + 1}^n \left(\left\lfloor \frac{n-y}{r} \right\rfloor + 2 \right) \right)$$

Vzorec se velmi zjednoduší, když budeme uvažovat jen šachovnice takových rozměrů, kdy r i s dělí n . Pak dostaneme i asymptotický průběh.

For $0 < r < s, n > s^2$ and $rs|n$

$$\left(\frac{n}{s} + 1 \right)^{n(s-r)+rs} \left(\left(\frac{n}{s} \right)! \right)^{2rs} \sim \frac{(2\pi)^{rs}}{e^{2nr-s(s-r)}} * \left(\frac{n}{s} \right)^{n(r+s)+2rs}$$

Přesný vzorec souhlasí i pro (již dříve odvozený) případ **semi-bishops** (pro $r = 1, s = 1$) a dokonce i pro **semi-rooks** (pro $r = 0, s = 1$).

Je možno doplnit, že pro všechny semi-ridery je **entropy constant** rovna 1

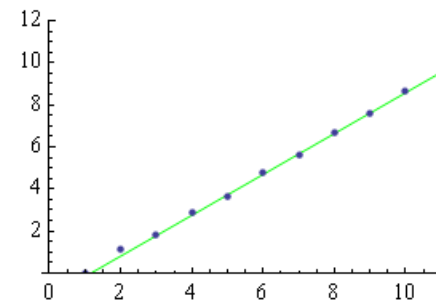
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2\pi)^{rs}}{e^{2nr-s(s-r)}} * \left(\frac{n}{s} \right)^{n(r+s)+2rs} \right)^{1/n^2} = 1$$

6.1.3) n Nightriders on an $n \times n$ chessboard - n tátošů na šachovnici $n \times n$

n	n Nightriders on an $n \times n$ board, A185085
1	1
2	6
3	36
4	412
5	4650
6	85358
7	1414678
8	32042312
9	710371744
10	20080400872
11	546562561108
12	?

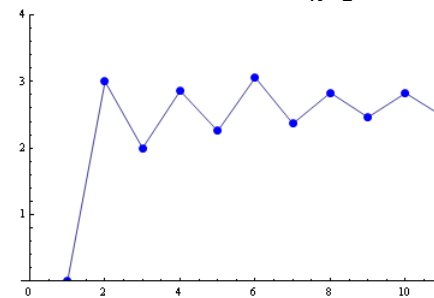
K serióznějšímu odhadu průběhu funkce máme zatím příliš málo hodnot, první graf zobrazuje

$$\log\left(\frac{a_n}{n!}\right)$$



Další graf zobrazuje

$$q \sim \frac{a_n}{n a_{n-1}}$$



6.2) k Nightriders on an k x n chessboard - k tátošů na šachovnici k x n

2 nightriders, board 2 x n: $n \geq 2$

$$2n^2 - 3n + 4$$

A172218 - 3 nightriders, board 3 x n: (V. Kotěšovec, 26.1.2010), $n \geq 8$

$$\frac{9n^3 - 57n^2 + 210n - 344}{2}$$

A172219 - 4 nightriders, board 4 x n: (V. Kotěšovec, 26.1.2010), $n \geq 18$

$$\frac{32n^4 - 432n^3 + 3190n^2 - 13323n + 25530}{3}$$

A172220 - 5 nightriders, board 5 x n: (V. Kotěšovec, 28.1.2010), $n \geq 32$

$$\frac{625n^5 - 15250n^4 + 197915n^3 - 1588634n^2 + 7645896n - 17283552}{24}$$

k	k Nightriders on an k x n chessboard - Generating function
2	$-\frac{x * (2x^3 - 2x^2 + 3x + 1)}{(x - 1)^3}$
3	$\frac{x * (2x^{10} - 4x^9 + 6x^8 - 4x^7 - 6x^6 + 24x^5 - 18x^4 + 24x^3 - 6x^2 + 8x + 1)}{(x - 1)^4}$
4	$-x*(2x^{21}-6x^{20}+10x^{19}-14x^{18}+22x^{17}-30x^{16}-26x^{15}+162x^{14}-272x^{13}+364x^{12}-466x^{11}+526x^{10}-303x^9-207x^8+603x^7-517x^6+489x^5-249x^4+142x^3+14x^2+11x+1)/(x-1)^5$
5	$x*(2x^{36}-8x^{35}+16x^{34}-24x^{33}+38x^{32}-64x^{31}+104x^{30}-156x^{29}+54x^{28}+380x^{27}-944x^{26}+1452x^{25}-2172x^{24}+3376x^{23}-5094x^{22}+7180x^{21}-6614x^{20}-28x^{19}+8814x^{18}-15212x^{17}+21026x^{16}-27284x^{15}+34160x^{14}-40598x^{13}+39882x^{12}-24490x^{11}+3876x^{10}+8558x^9-11326x^8+11266x^7-6006x^6+3256x^5-1028x^4+706x^3+4x^2+22x+1)/(x-1)^6$

n	2 nightriders	3 nightriders	4 nightriders	5 nightriders	6 nightriders
1	1	1	1	1	1
2	6	12	16	28	58
3	13	36	84	157	315
4	24	100	412	1248	3862
5	39	213	1126	4650	19419
6	58	408	2760	15162	85358
7	81	712	5739	37988	256549
8	108	1148	10982	86958	706060
9	139	1745	19695	181423	1689706
10	174	2528	33068	351708	3745158
11	213	3524	52801	648441	7737606
12	256	4760	80638	1127392	15042498
13	303	6263	118731	1874194	28033286
14	354	8060	169368	2988466	49685456
15	409	10178	235135	4602096	84688103
16	468	12644	318890	6870240	138994668
17	531	15485	423733	9983347	220999518
18	598	18728	553028	14163972	341148264
19	669	22400	710389	19672403	513146177
20	744	26528	899690	26812260	753927570

21	823	31139	1125059	35929480	1084629369
22	906	36260	1390880	47418482	1530923606
23	993	41918	1701793	61723238	2123729778
24	1084	48140	2062694	79341720	2900209972
25	1179	54953	2478735	100828175	3904141919
26	1278	62384	2955324	126796852	?
27	1381	70460	3498125	157924785	?
28	1488	79208	4113058	194954956	?
29	1599	88655	4806299	238699512	?
30	1714	98828	5584280	290042826	?
31	1833	109754	6453689	349944662	?
32	1956	121460	7421470	419443276	?
33	2083	133973	8494823	499658555	?
34	2214	147320	9681204	591795132	?
35	2349	161528	10988325	697145517	?
36	2488	176624	12424154	817093220	?
37	2631	192635	13996915	953115876	?
38	2778	209588	15715088	1106788370	?
39	2929	227510	17587409	1279785962	?
40	3084	246428	19622870	1473887412	?

Na objevení vzorce pro 6 tátošů na $6 \times n$ chybí velké množství hodnot. Hlavní problém je v tom, že vzorec bude platit až od poměrně velkého n .

6.3) k Nightriders on an $n \times n$ toroidal chessboard - k tátošů na prstencové šachovnici $n \times n$

A196812 - 2 nightriders, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 18.4.2010), period=60

$$\frac{n^2}{2} * \left(n^2 - 4n + \frac{119}{15} + 2 * (-1)^n + 2 * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{8}{3} * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{16}{5} * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{16}{5} * \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) \right)$$

Alternative formula:

$$n^2 \left(4 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + \frac{n^2}{2} - 11n + \frac{21}{2} \right)$$



A196813 - 3 nightriders, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=3600

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} n^2 \left((24n^2 - 192n + 2764) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (24n^2 - 192n) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + (12n^2 - 96n) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + (12n^2 - 96n + 240) \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + (12n^2 - 96n + 576) \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \right. \\ & + (48n^2 - 384n) \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + (24n^2 - 192n) \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + (24n^2 - 192n) \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + (24n^2 - 192n) \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + 664 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 544 \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - 256 \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor \\ & + 920 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+2}{9} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+5}{9} \right\rfloor + 1296 \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 1680 \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor - 384 \left\lfloor \frac{n+2}{10} \right\rfloor + 1680 \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor \\ & - 1104 \left\lfloor \frac{n+4}{10} \right\rfloor + 2400 \left\lfloor \frac{n+5}{10} \right\rfloor + 1296 \left\lfloor \frac{n+7}{10} \right\rfloor + 192 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 192 \left\lfloor \frac{n+1}{12} \right\rfloor + 192 \left\lfloor \frac{n+3}{12} \right\rfloor + 384 \left\lfloor \frac{n+2}{15} \right\rfloor - 384 \left\lfloor \frac{n+3}{15} \right\rfloor + 384 \left\lfloor \frac{n+4}{15} \right\rfloor \\ & - 384 \left\lfloor \frac{n+6}{15} \right\rfloor + 384 \left\lfloor \frac{n+7}{15} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+7}{16} \right\rfloor + 384 \left\lfloor \frac{n+9}{20} \right\rfloor - 384 \left\lfloor \frac{n+10}{20} \right\rfloor + 240 \left\lfloor \frac{n+4}{25} \right\rfloor - 240 \left\lfloor \frac{n+5}{25} \right\rfloor + 240 \left\lfloor \frac{n+9}{25} \right\rfloor - 240 \left\lfloor \frac{n+10}{25} \right\rfloor \\ & \left. + 240 \left\lfloor \frac{n+14}{25} \right\rfloor - 240 \left\lfloor \frac{n+15}{25} \right\rfloor + 240 \left\lfloor \frac{n+19}{25} \right\rfloor - 240 \left\lfloor \frac{n+20}{25} \right\rfloor + n^4 - 66n^3 + 539n^2 - 3214n + 2740 \right) \end{aligned}$$

k	k Nightriders on an n x n toroidal chessboard - Recurrence (V. Kotěšovec, 19.4.2010)
2	$a_n = -4*a_{n-1} - 10*a_{n-2} - 17*a_{n-3} - 20*a_{n-4} - 11*a_{n-5} + 15*a_{n-6} + 54*a_{n-7} + 90*a_{n-8} + 99*a_{n-9} + 63*a_{n-10} - 18*a_{n-11} - 116*a_{n-12} - 188*a_{n-13} - 194*a_{n-14} - 123*a_{n-15} + 123*a_{n-17} + 194*a_{n-18} + 188*a_{n-19} + 116*a_{n-20} + 18*a_{n-21} - 63*a_{n-22} - 99*a_{n-23} - 90*a_{n-24} - 54*a_{n-25} - 15*a_{n-26} + 11*a_{n-27} + 20*a_{n-28} + 17*a_{n-29} + 10*a_{n-30} + 4*a_{n-31} + a_{n-32}$
3	$a_n = a_{n-244} - a_{n-243} + 4*a_{n-241} + 6*a_{n-238} + 6*a_{n-237} + 10*a_{n-236} + 7*a_{n-235} + 17*a_{n-234} + 30*a_{n-233} + 24*a_{n-232} + 44*a_{n-231} + 60*a_{n-230} + 63*a_{n-229} + 101*a_{n-228} + 118*a_{n-227} + 147*a_{n-226} + 185*a_{n-225} + 218*a_{n-224} + 294*a_{n-223} + 326*a_{n-222} + 374*a_{n-221} + 486*a_{n-220} + 535*a_{n-219} + 619*a_{n-218} + 715*a_{n-217} + 789*a_{n-216} + 914*a_{n-215} + 979*a_{n-214} + 1075*a_{n-213} + 1181*a_{n-212} + 1203*a_{n-211} + 1315*a_{n-210} + 1351*a_{n-209} + 1312*a_{n-208} + 1350*a_{n-207} + 1274*a_{n-206} + 1196*a_{n-205} + 1056*a_{n-204} + 815*a_{n-203} + 641*a_{n-202} + 285*a_{n-201} - 107*a_{n-200} - 481*a_{n-199} - 1077*a_{n-198} - 1599*a_{n-197} - 2219*a_{n-196} - 2963*a_{n-195} - 3651*a_{n-194} - 4493*a_{n-193} - 5246*a_{n-192} - 6047*a_{n-191} - 6966*a_{n-190} - 7638*a_{n-189} - 8434*a_{n-188} - 9139*a_{n-187} - 9640*a_{n-186} - 10197*a_{n-185} - 10460*a_{n-184} - 10644*a_{n-183} - 10641*a_{n-182} - 10291*a_{n-181} - 9968*a_{n-180} - 9172*a_{n-179} - 8148*a_{n-178} - 7037*a_{n-177} - 5400*a_{n-176} - 3706*a_{n-175} - 1693*a_{n-174} + 634*a_{n-173} + 2988*a_{n-172} + 5784*a_{n-171} + 8465*a_{n-170} + 11305*a_{n-169} + 14453*a_{n-168} + 17199*a_{n-167} + 20137*a_{n-166} + 22935*a_{n-165} + 25382*a_{n-164} + 27858*a_{n-163} + 29703*a_{n-162} + 31373*a_{n-161} + 32632*a_{n-160} + 33105*a_{n-159} + 33531*a_{n-158} + 33015*a_{n-157} + 31855*a_{n-156} + 30470*a_{n-155} + 28071*a_{n-154} + 25314*a_{n-153} + 21836*a_{n-152} + 17698*a_{n-151} + 13482*a_{n-150} + 8277*a_{n-149} + 2991*a_{n-148} - 2483*a_{n-147} - 8611*a_{n-146} - 14305*a_{n-145} - 20291*a_{n-144} - 26239*a_{n-143} - 31677*a_{n-142} - 37176*a_{n-141} - 41775*a_{n-140} - 46128*a_{n-139} - 50015*a_{n-138} - 52622*a_{n-137} - 54987*a_{n-136} - 56274*a_{n-135} - 56530*a_{n-134} - 56270*a_{n-133} - 54619*a_{n-132} - 52392*a_{n-131} - 49163*a_{n-130} - 44910*a_{n-129} - 40375*a_{n-128} - 34567*a_{n-127} - 28391*a_{n-126} - 21955*a_{n-125} - 14638*a_{n-124} - 7514*a_{n-123} + 7514*a_{n-121} + 14638*a_{n-120} + 21955*a_{n-119} + 28391*a_{n-118} + 34567*a_{n-117} + 40375*a_{n-116} + 44910*a_{n-115} + 49163*a_{n-114} + 52392*a_{n-113} + 54619*a_{n-112} + 56270*a_{n-111} + 56530*a_{n-110} + 56274*a_{n-109} + 54987*a_{n-108} + 52622*a_{n-107} + 50015*a_{n-106} + 46128*a_{n-105} + 41775*a_{n-104} + 37176*a_{n-103} + 31677*a_{n-102} + 26239*a_{n-101} + 20291*a_{n-100} + 14305*a_{n-99} + 8611*a_{n-98} + 2483*a_{n-97} - 2991*a_{n-96} - 8277*a_{n-95} - 13482*a_{n-94} - 17698*a_{n-93} - 21836*a_{n-92} - 25314*a_{n-91} - 28071*a_{n-90} - 30470*a_{n-89} - 31855*a_{n-88} - 33015*a_{n-87} - 33531*a_{n-86} - 33105*a_{n-85} - 32632*a_{n-84} - 31373*a_{n-83} - 29703*a_{n-82} - 27858*a_{n-81} - 25382*a_{n-80} - 22935*a_{n-79} - 20137*a_{n-78} - 17199*a_{n-77} - 14453*a_{n-76} - 11305*a_{n-75} - 8465*a_{n-74} - 5784*a_{n-73} - 2988*a_{n-72} - 634*a_{n-71} + 1693*a_{n-70} + 3706*a_{n-69} + 5400*a_{n-68} + 7037*a_{n-67} + 8148*a_{n-66} + 9172*a_{n-65} + 9968*a_{n-64} + 10291*a_{n-63} + 10641*a_{n-62} + 10644*a_{n-61} + 10460*a_{n-60} + 10197*a_{n-59} + 9640*a_{n-58} + 9139*a_{n-57} + 8434*a_{n-56} + 7638*a_{n-55} + 6966*a_{n-54} + 6047*a_{n-53} + 5246*a_{n-52} + 4493*a_{n-51} + 3651*a_{n-50} + 2963*a_{n-49} + 2219*a_{n-48} + 1599*a_{n-47} + 1077*a_{n-46} + 481*a_{n-45} + 107*a_{n-44} - 285*a_{n-43} - 641*a_{n-42} - 815*a_{n-41} - 1056*a_{n-40} - 1196*a_{n-39} - 1274*a_{n-38} - 1350*a_{n-37} - 1312*a_{n-36} - 1351*a_{n-35} - 1315*a_{n-34} - 1203*a_{n-33} - 1181*a_{n-32} - 1075*a_{n-31} - 979*a_{n-30} - 914*a_{n-29} - 789*a_{n-28} - 715*a_{n-27} - 619*a_{n-26} - 535*a_{n-25} - 486*a_{n-24} - 374*a_{n-23} - 326*a_{n-22} - 294*a_{n-21} - 218*a_{n-20} - 185*a_{n-19} - 147*a_{n-18} - 118*a_{n-17} - 101*a_{n-16} - 63*a_{n-15} - 60*a_{n-14} - 44*a_{n-13} - 24*a_{n-12} - 30*a_{n-11} - 17*a_{n-10} - 7*a_{n-9} - 10*a_{n-8} - 6*a_{n-7} - 6*a_{n-6} - 4*a_{n-5} + a_{n-1}$

k	k Nightriders on an n x n toroidal chessboard - Generating function
2	$- 2x^2(2x^{29} + 25x^{28} + 151x^{27} + 620x^{26} + 1965x^{25} + 5094x^{24} + 11169x^{23} + 21370x^{22} + 36349x^{21} + 56009x^{20} + 78898x^{19} + 102778x^{18} + 124128x^{17} + 139254x^{16} + 144792x^{15} + 139276x^{14} + 123618x^{13} + 101232x^{12} + 76538x^{11} + 53680x^{10} + 35008x^9 + 21359x^8 + 12037x^7 + 6226x^6 + 2853x^5 + 1122x^4 + 351x^3 + 82x^2 + 13x + 1) / ((x-1)^5(x+1)^3(x^2+1)^3(x^2+x+1)^3(x^4+x^3+x^2+x+1)^3)$
3	$- 2x^3(18x^{240} + 238x^{239} + 1097x^{238} + 3375x^{237} + 8918x^{236} + 17750x^{235} + 34024x^{234} + 102992x^{233} + 170689x^{232} + 334029x^{231} + 581514x^{230} + 1211137x^{229} + 1946821x^{228} + 3261848x^{227} + 6059493x^{226} + 9207559x^{225} + 14701366x^{224} + 25230138x^{223} + 37434596x^{222} + 58377396x^{221} + 88774700x^{220} + 132758252x^{219} + 200673570x^{218} + 290090616x^{217} + 418515022x^{216} + 607341496x^{215} + 861557458x^{214} + 1215557597x^{213} + 1685714477x^{212} + 2341191169x^{211} + 3219651899x^{210} + 4371083830x^{209} + 5915584825x^{208} + 7924831726x^{207} + 10557643302x^{206} + 13985977772x^{205} + 18337941860x^{204} + 23988066249x^{203} + 31106584573x^{202} + 40105490710x^{201} + 51480894072x^{200} + 65613921210x^{199} + 83247672844x^{198} + 104997928822x^{197} + 131723277236x^{196} + 164610197445x^{195} + 204434636025x^{194} + 252850305579x^{193} + 311174992353x^{192} + 381220960985x^{191} + 465166514579x^{190} + 564726823578x^{189} + 682915434782x^{188} + 822445725326x^{187} + 986137978689x^{186} + 1178200387820x^{185} + 1401486629757x^{184} + 1661071235024x^{183} + 1961320551382x^{182} + 2306824950007x^{181} + 2703969741037x^{180} + 3157486064883x^{179} + 3674231748485x^{178} + 4261111512082x^{177} + 4924054143893x^{176} + 5672233094130x^{175} + 6511299186233x^{174} + 7450502529517x^{173} + 8498360385775x^{172} + 9661882454985x^{171} + 10951645005463x^{170} + 12374268174000x^{169} + 13939091979844x^{168} + 15656151228655x^{167} + 17530520390873x^{166} + 19573677123871x^{165} + 21790395339520x^{164} + 24188662241863x^{163} + 26776395207115x^{162} + 29555853822062x^{161} + 32535166656010x^{160} + 35715815965886x^{159} + 39099788860722x^{158} + 42691989336943x^{157} + 46486765430930x^{156} + 50487649366627x^{155} + 54688035964502x^{154} + 59082851562091x^{153} + 63669565025811x^{152} + 68433813486836x^{151} + 73369540833087x^{150} + 78463323097249x^{149} + 83698270419327x^{148} + 89065310025089x^{147} + 94538213517501x^{146} + 100103347862326x^{145} + 105737849546511x^{144} + 111416175681404x^{143} + 117120491777082x^{142} + 122817864879142x^{141} + 128485934576486x^{140} + 134098082976549x^{139} + 139619779202362x^{138} + 145032206182235x^{137} + 150296476874559x^{136} + 15538865165104x^{135} + 160281319456761x^{134} + 164939649511741x^{133} + 169345476518963x^{132} + 173464462172483x^{131} + 177273308402194x^{130} + 180753343490024x^{129} + 183873445638405x^{128} + 186625006299741x^{127} + 188981000016072x^{126} + 190929209478127x^{125} + 192461238454377x^{124} + 193558644425462x^{123} + 194223284956116x^{122} + 194444691793788x^{121} + 194220736776023x^{120} + 193560800673460x^{119} + 192457592242803x^{118} + 190929495372496x^{117} + 188979800936468x^{116} + 186620542458472x^{115} + 183873998655239x^{114} + 180748608220643x^{113} + 177271744869152x^{112} + 173462305326397x^{111} + 169339751623003x^{110} + 164939132384048x^{109} + 160276072337970x^{108} + 155386114335263x^{107} + 150294096245511x^{106} + 145025984474973x^{105} + 139618824299291x^{104} + 134093237147972x^{103} + 128482666378371x^{102} + 122815923325663x^{101} + 117114757459052x^{100} + 111415256505433x^{99} + 105734102224078x^{98} + 100100364987576x^{97} + 94537041341240x^{96} + 89060757409500x^{95} + 83697887240255x^{94} + 78460904044556x^{93} + 73367348881239x^{92} + 68433672330201x^{91} + 63666370369121x^{90} + 59083195994669x^{89} + 54687048473501x^{88} + 50486285659708x^{87} + 46487591434807x^{86} + 42690200201055x^{85} + 39100661716548x^{84} + 35716040182057x^{83} + 32534609006022x^{82} + 29557259716215x^{81} + 26775780018454x^{80} + 24189881457148x^{79} + 21791344797744x^{78} + 19573735635972x^{77} + 17532187845465x^{76} + 15656255388995x^{75} + 13940436854696x^{74} + 12375559083781x^{73} + 10951976364511x^{72} + 9663541904623x^{71} + 8498852387612x^{70} + 7451679982184x^{69} + 6512639167095x^{68} + 5672649742901x^{67} + 4925423055673x^{66} + 4261749961085x^{65} + 3675146509639x^{64} + 3158601465844x^{63} + 2704368593087x^{62} + 2307835236328x^{61} + 1961880407635x^{60} + 1661723921067x^{59} + 1402306954353x^{58} + 1178479455327x^{57} + 986825574762x^{56} + 822863586458x^{55} + 683305469385x^{54} + 565283745208x^{53} + 465331410889x^{52} + 381621201886x^{51} + 311467610658x^{50} + 253049978760x^{49} + 204757386107x^{48} + 164709882669x^{47} + 131924969647x^{46} + 105167883061x^{45} + 83347286281x^{44} + 65776312233x^{43} + 51525156758x^{42} + 40203906660x^{41} + 31192304240x^{40} + 24024064042x^{39} + 18417340626x^{38} + 14000598256x^{37} + 10594706731x^{36} + 7969640791x^{35} + 5922592754x^{34} + 4401872010x^{33} + 3227969072x^{32} + 2350124066x^{31} + 1704520537x^{30} + 1218001196x^{29} + 869271617x^{28} + 610790461x^{27} + 421754937x^{26} + 295059317x^{25} + 201100676x^{24} + 135553746x^{23} + 88709846x^{22} + 59263584x^{21} + 39553870x^{20} + 24303032x^{19} + 15442916x^{18} + 9657900x^{17} + 5699976x^{16} + 3875632x^{15} + 1879068x^{14} + 1086685x^{13} + 772269x^{12} + 320340x^{11} + 173933x^{10} + 115325x^9 + 33306x^8 + 24613x^7 + 8695x^6 + 5434x^5 + 574x^4 + 408x^3 + 252x^2 + 45x + 3) / ((x-1)^7(x+1)^5(x^2+1)^5(x^2-x+1)^3(x^2+x+1)^5(x^4+1)^3(x^4-x^2+1)^3(x^4-x^3+x^2-x+1)^3(x^4+x^3+x^2+x+1)^5(x^6+x^3+1)^3(x^8+1)^3(x^8-x^6+x^4-x^2+1)^3(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)^3(x^20+x^15+x^10+x^5+1)^3)$

Denominátor pro $k=2$ v řeči cyklotomických polynomů: $C_1(x)^5 C_2(x)^3 C_3(x)^3 C_4(x)^3 C_5(x)^3$

Denominátor pro $k=3$ v řeči cyklotom. polynomů: $C_1(x)^7 C_2(x)^5 C_3(x)^5 C_4(x)^5 C_5(x)^5 C_6(x)^3 C_8(x)^3 C_9(x)^3 C_{10}(x)^3 C_{12}(x)^3 C_{15}(x)^3 C_{16}(x)^3 C_{20}(x)^3 C_{25}(x)^3$

Obecně pro k neohrožujících se tátošů na prstencové šachovnici $n \times n$ je z hlediska **asymptotického chování** odhadnutelný průběh

$$\frac{n^{2k}}{k!} - 2 * \frac{n^{2k-1}}{(k-2)!} + \dots$$

Člen u n^{2k-2} sice nejde vzhledem k malému počtu známých vzorců zatím dobře odhadnout, je ale zřejmé, že tento koeficient už není konstanta, ale že je závislý na tvaru n (jde už o kvazipolynom).

Pro 3 tátoše na prstencové šachovnici jsem odvodil vzorec a můžeme si tedy zobrazit graf této funkce v libovolném rozsahu. Graf vpravo znázorňuje

$$koef \sim \frac{t_3(n) - \frac{n^6}{6} + 2n^5}{n^4}$$

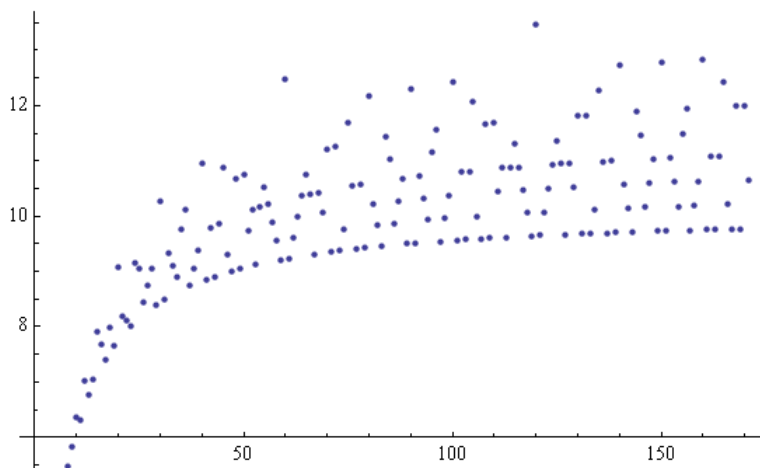
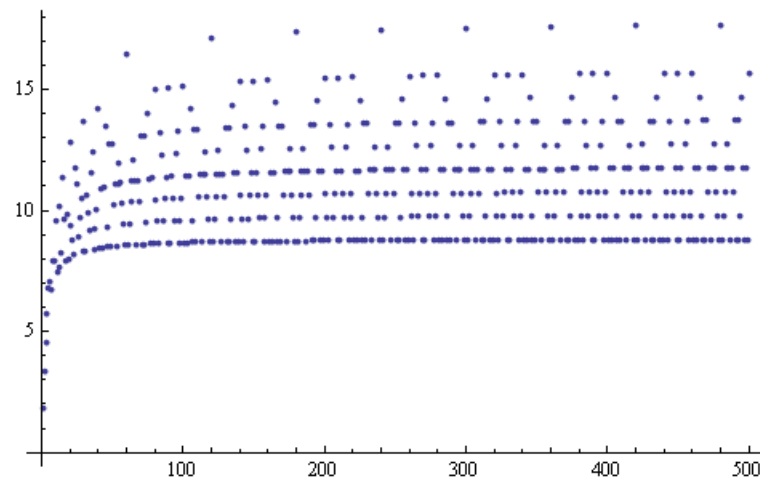
Vidíme, že pro n jdoucí do nekonečna limita neexistuje, ale existuje celkem 9 různých limit podle tvaru n (viz vzorec na str. 333, jsou to kombinace členů, kde je v závorkách ve vzorci n^2 a kde tedy vzorec dosáhne váhy n^4).

Pro 4 tátoše na prstencové šachovnici není dostatek hodnot k určení vzorce. Podařilo se mi ale vypočítat celkem 170 hodnot a na základě této posloupnosti jsem metodou nejmenších čtverců odhadl alespoň asymptotické chování (*asymptotic formula for 4 nightriders on a toroidal chessboard - computed from 170 values with help of least squares method only*)

$$\frac{1}{24}n^8 - n^7 + koef * n^6 + \dots$$

Koeficient u členu n^6 je však (při této metodě) už zatížen značnou chybou, protože jeho limita pro n jdoucí do nekonečna neexistuje a je rozdělena na pravděpodobně 9 různých limit podle tvaru n . Znázorňuje to graf funkce

$$koef \sim \frac{t_4(n) - \frac{n^8}{24} + n^7}{n^6}$$



n	2 nightriders	3 nightriders	4 nightriders
1			
2	2	0	0
3	18	6	0
4	72	96	24
5	200	600	600
6	378	1392	1836
7	588	2156	2450
8	1312	10624	36192
9	2106	22410	102546
10	3650	62400	538800
11	4840	82280	637670
12	7848	210336	3028104
13	10140	280540	3899506
14	14210	495488	9097928
15	20250	955950	26141400
16	25728	1332736	39331200

17	32368	1844976	59175640
18	42282	2924640	118899900
19	51984	3933456	173563746
20	67400	6319200	367095000
21	80262	7954170	477489222
22	97042	10648000	712157600
23	116380	14081980	1044882916
24	141984	19826304	1750680864
25	167500	25502500	2464608750
26	195026	31809856	3277072240
27	228906	41037354	4695908904
28	266952	52338272	6607175288
29	306124	63979916	8590534106
30	358650	84001200	12947543100
31	403620	98348740	15567200560
32	463360	123033600	21472892416
33	524898	148714566	27745683570

34	592450	178819328	35620503104
35	671300	218642900	47438166650
36	754920	262684512	61220593800
37	837828	304690116	73833584286
38	936434	362571072	93999478848
39	1043406	429233298	118775318922
40	1165600	514185600	154108719200
41	1277560	583844920	180024039020
42	1415610	687435504	226687979700
43	1553160	788487560	271515691286
44	1712392	920618336	337672399064
45	1883250	1070294850	417296743650
46	2049346	1208862336	487589837680
47	2235508	1379308436	582569726696
48	2448000	1596443136	717561447552
49	2650704	1790992336	831682346782
50	2891250	2059060000	1014166220000

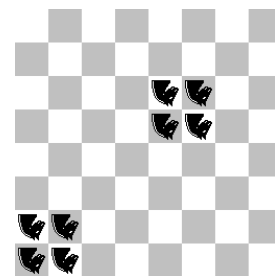
Hodnoty pro $k=3$ jsem vypočítal svým speciálním programem až do $n=1000$ a potom ověřil platnost rekurentního vzorce pro všechny hodnoty.

V této souvislosti mohu ještě poznamenat, že v programu Mathematica je lepší než počítat n -té derivace vytvořující funkce v nule pomocí $D[\text{gf}[x], \{x, n\}]/.x \rightarrow 0$, použít funkci SeriesCoefficient, která je rychlejší a nespotřebává tolik paměti jako D. Při paměti 4 GB RAM bylo možné pomocí D vypočítat maximálně 85-tou derivaci (na vyšší už nestačila paměť), kdežto funkce SeriesCoefficient vypočetla všechny derivace vytvořující funkce v nule až do řádu 1000 za 20 minut.

6.4) n Nightriders on an $n \times n$ toroidal chessboard - n tátošů na prstencové šachovnici $n \times n$

Na prstencovou šachovnici $n \times n$ se vejde maximálně n neohrožujících se tátošů (tedy mnohem méně než na normální šachovnici stejných rozměrů) a takové rozestavení vždy existuje. Důkaz tohoto tvrzení viz kapitola 14.2, kde je i řada příkladů pozic (*for proof and more examples, see page 784*).

Z tabulky vidíme, že počty jsou velmi závislé na typu šachovnice. Speciálně pokud je n prvočíslo, jsou počty možných pozic menší a naopak, pokud je n složené, výrazně narůstá počet vyhovujících pozic. Jde o to, že samotný tátoš na prstencové šachovnici $n \times n$ má dostupných celkem $4n-3$ polí (když zahrneme i výchozí pole), ale to jen v případě, že n je **prvočíslo**. Pokud je n složené, dochází k průsečíkům linií a některá pole jsou dostupná i po více různých liniích (např. na šachovnici 8×8 může tátoš z $a1$ na $c5$ současně po linii $a1-b3-c5$, ale i po linii $a1-b7-c5$). Polí zakázaných pro další kameny je tak méně a proto je pak větší celkový počet pozic neohrožujících se kamenů. Vzhledem k symetrii na prstencové šachovnici $n \times n$ je vždy počet pozic dělitelný n (obecně je dělitelný n^2/k , zde máme $n=k$).



n	n Nightriders on an $n \times n$ toroidal board - A190393	sq = accesible squares for one Nightrider	$4n-3$ -sq	PrimeQ
1	1			
2	2			
3	6			
4	24			
5	120			
6	144	15	6	
7	28	25	0	True
8	1408	23	6	
9	2025	29	4	
10	86400	27	10	
11	1782	41	0	True
12	1092096	35	10	
13	4186	49	0	True
14	31360	51	2	
15	241920000	45	12	
16	23953408	55	6	
17	140692	65	0	True
18	114108912	63	6	
19	1092690	73	0	True
20	?	63	14	

6.5) k Nightriders on an $n \times n$ cylindrical chessboard - k tátošů na válcové šachovnici $n \times n$

A196810 - 2 nightriders, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 2.10.2011), period=60

$$\frac{n^4}{2} - \frac{3n^3}{2} + \frac{572n^2}{225} - \frac{n}{4} + (-1)^n \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{4} \right) + \frac{1}{2} n^2 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{9} n^2 \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + \frac{16}{25} n^2 \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + \frac{16}{25} n^2 \cos\left(\frac{8\pi n}{5}\right)$$

Alternative formula:

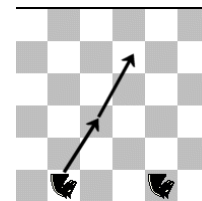
$$\frac{n^4}{2} - \frac{79n^3}{15} + \frac{143n^2}{30} + (2n^2 + n) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{4}{3} n^2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \frac{2}{3} n^2 \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + n^2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + n^2 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \frac{16}{5} n^2 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \frac{8}{5} n^2 \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \frac{8}{5} n^2 \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \frac{8}{5} n^2 \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor$$

A196811 - 3 nightriders, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 2.10.2011), period=3600

$$\begin{aligned} & \frac{n^6}{6} - \frac{79n^5}{15} + \frac{629n^4}{20} - \frac{119221n^3}{900} + \frac{47753n^2}{450} + \left(2n^4 - 11n^3 + \frac{517n^2}{10} + 33n\right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{4n^4}{3} - 8n^3 + \frac{1364n^2}{45} - 8n\right) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left(\frac{2n^4}{3} - 4n^3 + \frac{94n^2}{9} - 8n\right) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + (n^4 - 6n^3 + 16n^2 - 10n) \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \\ & + \left(n^4 - 6n^3 + \frac{557n^2}{15} + 6n\right) \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \left(\frac{16n^4}{5} - \frac{96n^3}{5} + \frac{6208n^2}{75} - 20n\right) \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left(\frac{8n^4}{5} - \frac{48n^3}{5} + \frac{2998n^2}{75} - 20n\right) \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \left(\frac{8n^4}{5} - \frac{48n^3}{5} + \frac{946n^2}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor \\ & + \left(\frac{8n^4}{5} - \frac{48n^3}{5} + \frac{2998n^2}{75} - 20n\right) \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + (8n^2 + 8n) \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + (n^2 + 16n) \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + (3n^2 + 16n) \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + \frac{16}{9} \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor n^2 + \frac{16}{9} \left\lfloor \frac{n+2}{9} \right\rfloor n^2 + \frac{16}{9} \left\lfloor \frac{n+5}{9} \right\rfloor n^2 - \frac{64}{5} \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor n^2 + \left(\frac{96n^2}{5} + 20n\right) \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor \\ & + \left(-\frac{32n^2}{5} - 20n\right) \left\lfloor \frac{n+2}{10} \right\rfloor + \left(\frac{32n^2}{5} + 20n\right) \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor + \frac{16}{3} \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor n^2 - \frac{16}{3} \left\lfloor \frac{n+1}{12} \right\rfloor n^2 + \frac{16}{3} \left\lfloor \frac{n+3}{12} \right\rfloor n^2 + \frac{128}{15} \left\lfloor \frac{n+2}{15} \right\rfloor n^2 - \frac{128}{15} \left\lfloor \frac{n+3}{15} \right\rfloor n^2 + \frac{128}{15} \left\lfloor \frac{n+4}{15} \right\rfloor n^2 - \frac{128}{15} \left\lfloor \frac{n+6}{15} \right\rfloor n^2 + \frac{128}{15} \left\lfloor \frac{n+7}{15} \right\rfloor n^2 \\ & + 2 \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor n^2 + 2 \left\lfloor \frac{n+7}{16} \right\rfloor n^2 + \frac{64}{5} \left\lfloor \frac{n}{20} \right\rfloor n^2 - \frac{64}{5} \left\lfloor \frac{n+1}{20} \right\rfloor n^2 + \frac{64}{5} \left\lfloor \frac{n+3}{20} \right\rfloor n^2 - \frac{64}{5} \left\lfloor \frac{n+5}{20} \right\rfloor n^2 + \frac{64}{5} \left\lfloor \frac{n+7}{20} \right\rfloor n^2 + \frac{196}{25} \left\lfloor \frac{n}{25} \right\rfloor n^2 + \frac{196}{25} \left\lfloor \frac{n+4}{25} \right\rfloor n^2 + \frac{196}{25} \left\lfloor \frac{n+9}{25} \right\rfloor n^2 + \frac{196}{25} \left\lfloor \frac{n+14}{25} \right\rfloor n^2 + \frac{196}{25} \left\lfloor \frac{n+19}{25} \right\rfloor n^2 \end{aligned}$$

V případě liniových kamenů jako je dáma, věž nebo střelec není (z hlediska počtu pozic neohrožujících se kamenů stejných hodnot) žádný rozdíl mezi válcovou šachovnicí $n \times n$ a prstencovou šachovnicí $n \times n$. V případě tátošů je sice na válcové šachovnici $n \times n$ a prstencové šachovnici $n \times n$ shodný maximální počet neohrožujících se kamenů (roven n) a pro oba případy jsou i **shodné rekurence** (tj. i denominátory vytvořujících funkcí), ale počty takových pozic se už liší (např. v pozici diagramu se dva tátoši sice vzájemně ohrožují na prstencové šachovnici 6×6 , ale na válcové šachovnici 6×6 se neohrožují). Explicitní vzorce a vytvořující funkce (jejich čitatelé) jsou proto odlišné. Je třeba ještě poznamenat, že v počtu pozic není rozdíl mezi vertikální válcovou šachovnicí $n \times n$ a horizontální válcovou šachovnicí $n \times n$ (v pozici na diagramu sice rozdíl samozřejmě je, ale vzhledem k symetrii jsou celkové počty pozic shodné).

For queen, rook and bishop are no differences in number of arrangements of non-attacking pieces on a toroidal and on a cylindrical board. For nightriders are recurrences (and denominators of generating function) **same**, but explicit formulas and generating functions (numerators) are different.



k	k Nightriders on an n x n cylindrical chessboard - Generating function
2	$ \begin{aligned} & - (2*x^2*(2 + 17*x + 96*x^2 + 384*x^3 + 1203*x^4 + 3100*x^5 + 6917*x^6 + 13670*x^7 + 24466*x^8 + 39974*x^9 + 60206*x^{10} + 83709*x^{11} + \\ & 107667*x^{12} + 128088*x^{13} + 141070*x^{14} + 143882*x^{15} + 136037*x^{16} + 119239*x^{17} + 96892*x^{18} + 72808*x^{19} + 50428*x^{20} + \\ & 31926*x^{21} + 18321*x^{22} + 9388*x^{23} + 4223*x^{24} + 1622*x^{25} + 514*x^{26} + 127*x^{27} + 22*x^{28} + 2*x^{29})) \\ & / ((-1+x)^5*(1+x)^3*(1+x^2)^3*(1+x+x^2)^3*(1+x+x^2+x^3+x^4)^3) \end{aligned} $
3	$ \begin{aligned} & - (2*x^3*(3 + 69*x + 228*x^2 + 708*x^3 + 1588*x^4 + 6712*x^5 + 12088*x^6 + 31160*x^7 + 57179*x^8 + 136580*x^9 + 239808*x^{10} + 449853*x^{11} + 900591*x^{12} + 1477077*x^{13} + \\ & 2525842*x^{14} + 4589753*x^{15} + 7306716*x^{16} + 12021164*x^{17} + 19128497*x^{18} + 30183091*x^{19} + 47577505*x^{20} + 72032939*x^{21} + 108239562*x^{22} + 162774012*x^{23} + 240095346*x^{24} + \\ & 350381354*x^{25} + 502772319*x^{26} + 720950831*x^{27} + 1021062070*x^{28} + 1428752645*x^{29} + 1987390506*x^{30} + 2736513976*x^{31} + 3742294655*x^{32} + 5079354788*x^{33} + \\ & 6827953028*x^{34} + 9139225932*x^{35} + 12124100004*x^{36} + 15980799998*x^{37} + 20943476282*x^{38} + 27256916379*x^{39} + 35276596816*x^{40} + 45364091725*x^{41} + 58004387513*x^{42} + \\ & 73807879418*x^{43} + 93337164899*x^{44} + 117464218271*x^{45} + 147035351554*x^{46} + 183159374264*x^{47} + 227100738421*x^{48} + 280137583769*x^{49} + 344040499089*x^{50} + \\ & 420621968824*x^{51} + 511906209274*x^{52} + 620460452977*x^{53} + 748658676342*x^{54} + 899759787160*x^{55} + 1076949738312*x^{56} + 1283816648160*x^{57} + 1524655568727*x^{58} + \\ & 1803563002512*x^{59} + 2125557616785*x^{60} + 2495897019374*x^{61} + 2919924912435*x^{62} + 3404238806042*x^{63} + 3954584267130*x^{64} + 4578261153565*x^{65} + 5282468562470*x^{66} + \\ & 6074400376418*x^{67} + 6962508279455*x^{68} + 7954251974953*x^{69} + 9058297858369*x^{70} + 10283589412684*x^{71} + 11637731241377*x^{72} + 13130527274835*x^{73} + 14769509898174*x^{74} + \\ & 16563587291623*x^{75} + 18521241864801*x^{76} + 20649262703124*x^{77} + 22956117999624*x^{78} + 25447691032447*x^{79} + 28129922977627*x^{80} + 31009117817705*x^{81} + \\ & 34087609044623*x^{82} + 37370399159074*x^{83} + 40857940620617*x^{84} + 44551010102080*x^{85} + 48449956292072*x^{86} + 52550389899304*x^{87} + 56849777261924*x^{88} + \\ & 61341700555203*x^{89} + 66017808823137*x^{90} + 70871046711347*x^{91} + 75887010046628*x^{92} + 81054923924903*x^{93} + 86358764556381*x^{94} + 91781015199942*x^{95} + \\ & 97305084410813*x^{96} + 102907868757848*x^{97} + 108569081502386*x^{98} + 114265234250301*x^{99} + 119969285286284*x^{100} + 125658800473469*x^{101} + 131302751877000*x^{102} + \\ & 136875550513111*x^{103} + 142348353514997*x^{104} + 147690384392376*x^{105} + 152875876072676*x^{106} + 157872755891423*x^{107} + 162653418372415*x^{108} + 167191493570328*x^{109} + \\ & 171456585792095*x^{110} + 175427309381084*x^{111} + 179075173512294*x^{112} + 182379141002578*x^{113} + 185319508181282*x^{114} + 187874540498149*x^{115} + 190031327730683*x^{116} + \\ & 191773244203031*x^{117} + 193089008150102*x^{118} + 193972835388484*x^{119} + 194414311933838*x^{120} + 194415275417367*x^{121} + 193972516221455*x^{122} + 193089264361839*x^{123} + \\ & 191773682348600*x^{124} + 190030887405334*x^{125} + 187875493915730*x^{126} + 185319922415008*x^{127} + 182379245480089*x^{128} + 179076141808356*x^{129} + 175426895658259*x^{130} + \\ & 171458018534627*x^{131} + 167191921565244*x^{132} + 162653771625720*x^{133} + 157873659929203*x^{134} + 152875989128015*x^{135} + 147691528445188*x^{136} + 142349123452045*x^{137} + \\ & 136875621869234*x^{138} + 131303979975577*x^{139} + 125658744748306*x^{140} + 119970438846282*x^{141} + 114265801512099*x^{142} + 108569301741370*x^{143} + 102908719685593*x^{144} + \\ & 97305185414449*x^{145} + 91781712644958*x^{146} + 86359484383155*x^{147} + 81054732931959*x^{148} + 75887782559851*x^{149} + 70870923563246*x^{150} + 66018429387408*x^{151} + \\ & 61342037062652*x^{152} + 56849543417100*x^{153} + 52550770364715*x^{154} + 48449960021024*x^{155} + 44551152201271*x^{156} + 40858209226345*x^{157} + 37369925440783*x^{158} + \\ & 34087936929725*x^{159} + 31008894930266*x^{160} + 28129938284322*x^{161} + 25447712833731*x^{162} + 22955740567927*x^{163} + 20649274227522*x^{164} + 18521074726145*x^{165} + \\ & 16563386084043*x^{166} + 14769555840432*x^{167} + 13130040542269*x^{168} + 11637703931745*x^{169} + 10283373333079*x^{170} + 9058137769738*x^{171} + 7954144015720*x^{172} + \\ & 6962138929017*x^{173} + 6074283215900*x^{174} + 5282366733024*x^{175} + 4578015486901*x^{176} + 3954507927336*x^{177} + 3403927379971*x^{178} + 2919863863344*x^{179} + \\ & 2495769821339*x^{180} + 2125381395372*x^{181} + 1803477619996*x^{182} + 1524480510386*x^{183} + 1283717495366*x^{184} + 1076889649733*x^{185} + 899620044342*x^{186} + 748626354612*x^{187} + \\ & 620319293065*x^{188} + 511850443963*x^{189} + 420587012253*x^{190} + 343970311528*x^{191} + 280091185064*x^{192} + 227029978097*x^{193} + 183124065551*x^{194} + 147035529782*x^{195} + \\ & 117404616923*x^{196} + 93315033279*x^{197} + 73774509100*x^{198} + 57995460047*x^{199} + 45354977688*x^{200} + 35247480512*x^{201} + 27246880278*x^{202} + 20936575982*x^{203} + \\ & 15968290330*x^{204} + 12122437446*x^{205} + 9127084641*x^{206} + 6827173044*x^{207} + 5072783726*x^{208} + 3737508411*x^{209} + 2737664548*x^{210} + 1984554719*x^{211} + 1425208511*x^{212} + \\ & 1019646126*x^{213} + 720059752*x^{214} + 504370758*x^{215} + 347711506*x^{216} + 239004051*x^{217} + 163154489*x^{218} + 108398903*x^{219} + 71713365*x^{220} + 46919424*x^{221} + \\ & 30089640*x^{222} + 19497331*x^{223} + 11740812*x^{224} + 7263255*x^{225} + 4525667*x^{226} + 2550669*x^{227} + 1479668*x^{228} + 867636*x^{229} + 447851*x^{230} + 244532*x^{231} + 120550*x^{232} + \\ & 67502*x^{233} + 26630*x^{234} + 12038*x^{235} + 5442*x^{236} + 2179*x^{237} + 645*x^{238} + 150*x^{239} + 18*x^{240})) / ((-1+x)^7*(1+x)^5*(1+x^2)^5*(1-x+x^2)^3*(1+x+x^2)^5*(1+x^4)^3*(1-x^2+x^4)^3*(1-x+x^2-x^3+x^4)^3*(1+x+x^2+x^3+x^4)^5*(1+x^3+x^6)^3*(1+x^8)^3*(1-x^2+x^4-x^6+x^8)^3*(1-x+x^3-x^4+x^5-x^7+x^8)^3*(1+x^5+x^10+x^15+x^20)^3) \end{aligned} $

n	2 nightriders	3 nightriders	4 nightriders
1			
2	4	0	0
3	18	6	0
4	80	144	84
5	200	600	600
6	420	1992	3972
7	756	4592	11424
8	1472	15616	82320
9	2358	31788	213741
10	3860	74840	796660
11	5500	122210	1450493
12	8304	251184	4393716
13	11232	384826	7496619
14	15484	647696	15873900
15	21090	1085190	34030320
16	27392	1616384	58498176
17	34816	2308872	93805252
18	44604	3449880	167116392
19	55404	4783326	259155497
20	69840	7052400	460196420
21	84294	9253734	651960456
22	102124	12454640	981647832
23	122452	16453096	1435626374
24	147264	22180992	2203508112
25	173800	28552450	3103641675

26	203476	36216544	4270024772
27	237762	46089162	5950524330
28	276752	58449104	8278638452
29	318304	72061346	10941152161
30	368340	91140000	15291670440
31	418500	109813780	19475442976
32	478208	135448576	26106705408
33	541398	163436856	33617620245
34	611524	196930176	43327196608
35	689780	237534080	56150204880
36	774576	284081904	71776707732
37	863136	333528582	88683257711
38	963148	394935216	111786753916
39	1071018	464721504	139535928363
40	1191360	549553280	176378561840
41	1312000	632939140	?
42	1449420	738555384	?
43	1592892	851283986	?
44	1752080	986958544	?
45	1921230	1137226500	?
46	2096956	1296060304	?
47	2287396	1478648012	?
48	2496768	1694883840	?
49	2709504	1914090136	?
50	2946500	2180681800	?

Pro $k=3$ jsem speciálním programem vypočítal hodnoty až do $n=300$.

6.6) n Nightriders on an $n \times n$ cylindrical chessboard - n tátošů na válcové šachovnici $n \times n$

Na válcovou šachovnici $n \times n$ se vejde maximálně n neohrožujících se tátošů (stejně jako na prstencovou šachovnici). Podobně jako v případě prstencové šachovnici jsou počty možných pozic podstatně menší, pokud je n prvočíslo. *Maximal number of non-attacking nightriders on an $n \times n$ cylindrical chessboard is n .*

n	n Nightriders on an $n \times n$ cylindrical board - A196814	PrimeQ
1	1	
2	4	True
3	6	True
4	84	
5	120	True
6	784	
7	280	True
8	40816	
9	13806	
10	1361706	
11	110990	True
12	142633176	
13	4263454	True
14	197730660	
15	9246172320	
16	?	
17	?	True
18	?	
19	?	True
20	?	

Diagramy ukazují, že stejně jako na prstencové šachovnici, tak i na válcové šachovnici $n \times n$ (sudých i lichých rozměrů) existuje právě n neprotínajících se tátošových linií.

3	4	5	6	7	8	1	2
5	6	7	8	1	2	3	4
7	8	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	1	2
5	6	7	8	1	2	3	4
7	8	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8

3	4	5	6	7	1	2
5	6	7	1	2	3	4
7	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3
6	7	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6	7

7.1) k Amazons (superqueens) on an $n \times n$ chessboard - k amazonek na šachovnici $n \times n$

Amazonka je kombinovaný kámen s pohyblivostí dámy a jezdce. An *amazon* (superqueen) moves like a queen and a knight.

A172200 - 2 amazons, board $n \times n$: (Christian Poisson, 1990)

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(3n+8)}{6}$$

A172201 - 3 amazons, board $n \times n$: (Panos Louridas, 2007)

pro sudá n (even), $n \geq 4$

$$\frac{2n^6 - 20n^5 + 31n^4 + 314n^3 - 1452n^2 + 2040n - 672}{12}$$

pro lichá n (odd), $n \geq 5$

$$\frac{2n^6 - 20n^5 + 31n^4 + 314n^3 - 1452n^2 + 2034n - 669}{12}$$

nebo jedním vzorcem, $n \geq 4$

$$\frac{4n^6 - 40n^5 + 62n^4 + 628n^3 - 2904n^2 + 4074n - 1341}{24} + (2n-1) * \frac{(-1)^n}{8}$$

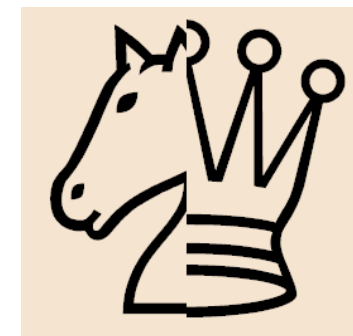
A173214 - 4 amazons, board $n \times n$: (Václav Kotěšovec, 12.2.2010), $n \geq 6$

$$\begin{aligned} & \frac{n^8}{24} - \frac{5n^7}{6} + \frac{47n^6}{9} + \frac{43n^5}{10} - \frac{5053n^4}{24} + \frac{112585n^3}{108} - \frac{15433n^2}{8} + \frac{55669n}{270} + \frac{119917}{54} \\ & + \left(\frac{n^3}{4} - \frac{21n^2}{8} + 7n - \frac{3}{2} \right) * (-1)^n + \frac{32}{27}(n-1) * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{40\sqrt{3}}{81} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \end{aligned}$$

Explicitní vzorec pro 4 amazonky je velmi podobný vzorci pro 4 dámy, periodické členy se SIN a COS jsou shodné a polynom u $(-1)^n$ se liší jen v posledním členu. Rekurentní vzorec je dokonce zcela identický jako pro 4 dámy (sekvence vychází jen z jiných počátečních hodnot).

Alternative formula:

$$\left(n^3 - \frac{21n^2}{2} + 28n - 6 \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{32n}{9} - \frac{32}{9} \right) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left(\frac{16n}{9} - 4 \right) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \frac{n^8}{24} - \frac{5n^7}{6} + \frac{47n^6}{9} + \frac{43n^5}{10} - \frac{5065n^4}{24} + \frac{113179n^3}{108} - \frac{70111n^2}{36} + \frac{59369n}{270} + 2218$$



A178967 - 5 amazons, board $n \times n$: (Václav Kotěšovec, 31.12.2010), $n \geq 10$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{120}n^{10} - \frac{5}{18}n^9 + \frac{253}{72}n^8 - \frac{689}{45}n^7 - \frac{34217}{360}n^6 + \frac{28391}{18}n^5 - \frac{6828569}{810}n^4 + \frac{29655659}{1620}n^3 + \frac{14328773}{1296}n^2 - \frac{779503661}{6480}n + \frac{9261910451}{64800} \\ & + \left(\frac{1}{8}n^5 - \frac{143}{48}n^4 + \frac{79}{3}n^3 - \frac{4711}{48}n^2 + \frac{5171}{48}n + \frac{2549}{32} \right) * (-1)^n + \frac{1}{2} * (29n - 35) * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + (2n + 15) * \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \\ & + \frac{1}{81} * (96n^3 - 1328n^2 + 4744n - 2248) * \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) - \frac{1}{243} * (120n^2 - 1496n + 5224) * \sqrt{3} * \sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right) \\ & + \frac{8}{25} * ((5 - \sqrt{5})n + 2\sqrt{5} - 8) * \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + \frac{8}{25} * ((5 + \sqrt{5})n - 2\sqrt{5} - 8) * \cos\left(\frac{8\pi n}{5}\right) \\ & + \frac{8}{25} * \sqrt{50 - 22\sqrt{5}} * \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) - \frac{8}{25} * \sqrt{50 + 22\sqrt{5}} * \sin\left(\frac{8\pi n}{5}\right) \end{aligned}$$

Alternative formula (Václav Kotěšovec, 31.12.2010), $n \geq 10$:

$$\begin{aligned} & \frac{n^{10}}{120} - \frac{5n^9}{18} + \frac{253n^8}{72} - \frac{689n^7}{45} - \frac{34307n^6}{360} + \frac{57001n^5}{36} - \frac{55000657n^4}{6480} + \frac{60118543n^3}{3240} + \frac{34387307n^2}{3240} - \frac{155720509n}{1296} + 142960 \\ & + \left(\frac{n^5}{2} - \frac{143n^4}{12} + \frac{316n^3}{3} - \frac{4711n^2}{12} + \frac{5123n}{12} + \frac{2309}{8} \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{32n^3}{9} - \frac{1328n^2}{27} + \frac{4744n}{27} - \frac{2248}{27} \right) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left(\frac{16n^3}{9} - \frac{724n^2}{27} + \frac{1040n}{9} - \frac{3736}{27} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor \\ & + (33n - 5) \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + (25n - 65) \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \left(\frac{32n}{5} - \frac{48}{5} \right) \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left(\frac{24n}{5} - \frac{64}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \left(\frac{16n}{5} - \frac{56}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{5} - \frac{32}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor \end{aligned}$$

Průběh této funkce pro k amazonek na šachovnici $n \times n$ je podobný jako pro dámy:

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{5}{3} \frac{n^{2k-1}}{(k-2)!} + \frac{(50k^2 - 67k - 156)}{36} \frac{n^{2k-2}}{(k-2)!} - \dots$$

Speciálně pro 6 amazonek budou první členy:

$$a(6) = \frac{1}{720}n^{12} - \frac{5}{72}n^{11} + \frac{23}{16}n^{10} - \dots$$

Poznámka o vztahu vzorců pro amazonky a pro dámy

Jak jsem již zmínil v různých částech této knihy, pouze **liniové kameny** produkují **kvazipolynomy**, **bodové kameny** nikoliv. V případě bodových kamenů (**jezdec**, **vezír**, **zebra**, ...) jsou vzorce vždy pouze polynomy a jmenovatel vytvořující funkce tak obsahuje pouze mocninu členu $(x-1)$, vzorce jsou stejného tvaru pro všechny možné rozměry šachovnic (neliší se např. pro šachovnice sudých a lichých rozměrů). V případě liniových kamenů (**dáma**, **střelec**, **tátoš**, **amazonka**, ...) dochází k tomu, že vzorce na šachovnicích $n \times n$ se liší podle toho, jaké zbytky dává číslo n po dělení některými (malými) čísly, jejichž výčet je závislý na počtu rozmísťovaných kamenů k . Speciálním liniovým kamenem je **věž**, která jako jediná kvazipolynomy neprodukuje. Zajímavý je rovněž **střelec**, jehož vzorce vystačí vždy s periodou 2, jmenovatel vytvořující funkce tak obsahuje pouze mocniny členů $(x-1)$ a $(x+1)$. U ostatních **liniových kamenů** $[r,s]$, kde $0 < r < s$ expanduje denominátor s narůstajícím počtem kamenů do nekonečna.

Pohyblivost amazonky jde složit jako pohyblivost dámy a jezdece. **Jezdec** však (jako bodový kámen) žádné kvazipolynomy neprodukuje. Nepřekvapí proto, že rekurence, resp. **jmenovatele vytvořujících funkcí pro dámy i amazonky jsou shodné**. Pouze dámská složka z amazonky produkuje kvazipolynomy.

Only riders generated quasi-polynomials, leapers not. Therefore is not surprising, that the recurrence formulas (denominators of generating functions) for queens and for amazons (superqueens) are same.

Hypotéza o posunu denominátorů. Ještě jsem narazil na jednu zajímavost. Vytvoříme-li difference posloupností pro počty neohrožujících se k dam a k amazek, dostaneme posloupnost, jejíž jmenovatel vytvořující funkce dělí jmenovatel vytvořující funkce pro $k-1$ dam. Pro $k=3$ a $k=5$ jsou tyto členy dokonce identické, pro $k=4$ se liší v exponentu.

k	denominator for sequence (k queens - k amazons)	denominator for k queens
2	$(x - 1)^3$	$(x - 1)^5$
3	$(x - 1)^5$	$(x - 1)^7(x + 1)^2$
4	$(x - 1)^7(x + 1)$	$(x - 1)^9(x + 1)^4(x^2 + x + 1)^2$
5	$(x - 1)^9(x + 1)^4(x^2 + x + 1)^2$	$(x - 1)^{11}(x + 1)^6(x^2 + x + 1)^4(x^2 + 1)^2(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2$

Vzhledem k doposud velmi malému množství známých vzorců ale nedokážu s jistotou určit, zda to platí obecně, takže jde **pouze o hypotézu** (nicméně v případě pěti amazek mi tato skutečnost výrazně pomohla k nalezení vzorce, protože při znalosti vzorce pro pět dam nebylo nutno pro pět amazek počítat už tolik hodnot).

Na doplnění ještě uvádím elegantní asymptotický rozvoj funkce rozdílu počtu neohrožujících se dam a amazek (tedy počtu takových pozic, kde se žádné dvě amazonky neohrožují jako dámy, ale alespoň jedna dvojice jako jezdcí)

$$q(k) - a(k) = \frac{4n^{2k-2}}{(k-2)!} + \dots$$

k	k Amazons on an n x n chessboard - Generating function
2	$\frac{4 * (5x^4 - 20x^3 + 20x^2 - 10x + 2)}{(x - 1)^5}$
3	$4x^5 * \frac{x^7 - 7x^6 + 13x^5 + 23x^4 - 32x^3 - 60x^2 - 46x - 12}{(x + 1)^2(x - 1)^7}$
4	$2x^5 * \frac{28x^{17} - 18x^{16} - 162x^{15} - 139x^{14} + 261x^{13} + 1268x^{12} + 2387x^{11} + 1220x^{10} - 5937x^9 - 18637x^8 - 30086x^7 - 31557x^6 - 23251x^5 - 11716x^4 - 3859x^3 - 708x^2 - 53x - 1}{(x + 1)^4(x - 1)^9(x^2 + x + 1)^2}$
5	$2x^7 * (-124 - 3784x - 44667x^2 - 310723x^3 - 1509124x^4 - 5621180x^5 - 16954312x^6 - 42976662x^7 - 93896850x^8 - 180088868x^9 - 307206501x^{10} - 470650261x^{11} - 652017897x^{12} - 820670989x^{13} - 941074901x^{14} - 984212615x^{15} - 938015444x^{16} - 812413066x^{17} - 635893628x^{18} - 445615046x^{19} - 275100707x^{20} - 145295581x^{21} - 61597137x^{22} - 17181649x^{23} + 704005x^{24} + 4589289x^{25} + 3324134x^{26} + 1424132x^{27} + 316332x^{28} - 58210x^{29} - 91844x^{30} - 47684x^{31} - 15863x^{32} - 3119x^{33} + 490x^{34} + 982x^{35} + 632x^{36} + 260x^{37} + 126x^{38} + 54x^{39}) / ((-1+x)^{11} * (1+x)^6 * (1+x^2)^2 * (1+x+x^2)^4 * (1+x+x^2+x^3+x^4)^2)$

Zde je třeba poznamenat, že vytvořující funkce generují správné hodnoty i pro počáteční malá n , kde ještě explicitní vzorce neplatí. V důsledku toho má čítel vytvořující funkce větší stupeň než jmenovatel (což není u racionálních lomených funkcí tohoto typu obvyklé), více o tom viz též str. 41.

k	Recurrence	
2	$a_n = 5a_{n-1} - 10a_{n-2} + 10a_{n-3} - 5a_{n-4} + a_{n-5}$	$n \geq 6$
3	$a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 14a_{n-4} - 14a_{n-5} + 8a_{n-7} - 5a_{n-8} + a_{n-9}$	$n \geq 13$
4	$a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - 9a_{n-3} + 12a_{n-5} + 7a_{n-6} - 15a_{n-7} - 16a_{n-8} + 16a_{n-9} + 15a_{n-10} - 7a_{n-11} - 12a_{n-12} + 9a_{n-14} - a_{n-15} - 3a_{n-16} + a_{n-17}$	$n \geq 23$
5	$a_n = a_{n-37} + a_{n-36} - 3a_{n-35} - 7a_{n-34} - 3a_{n-33} + 11a_{n-32} + 21a_{n-31} + 13a_{n-30} - 13a_{n-29} - 41a_{n-28} - 44a_{n-27} - 8a_{n-26} + 49a_{n-25} + 81a_{n-24} + 57a_{n-23} - 15a_{n-22} - 88a_{n-21} - 106a_{n-20} - 48a_{n-19} + 48a_{n-18} + 106a_{n-17} + 88a_{n-16} + 15a_{n-15} - 57a_{n-14} - 81a_{n-13} - 49a_{n-12} + 8a_{n-11} + 44a_{n-10} + 41a_{n-9} + 13a_{n-8} - 13a_{n-7} - 21a_{n-6} - 11a_{n-5} + 3a_{n-4} + 7a_{n-3} + 3a_{n-2} - a_{n-1}$	$n \geq 47$

n	2 amazons	3 amazons	4 amazons	5 amazons
1				
2	0	0	0	
3	0	0	0	0
4	20	0	0	0
5	92	48	2	0
6	260	424	112	0
7	580	1976	1754	248
8	1120	6616	13074	7320
9	1960	17852	63400	82758
10	3192	41544	234014	562384
11	4920	86660	712248	2756122
12	7260	166288	1882132	10771928
13	10340	298616	4457246	35504296
14	14300	508200	9679760	102677536
15	19292	827168	19584514	267284836
16	25480	1296744	37367934	638673432
17	33040	1968676	67849336	1420555842
18	42160	2907016	118085614	2974232240
19	53040	4189772	198107620	5911536526
20	65892	5910944	321870956	11232560320

21	80940	8182400	508359070	20516606128
22	98420	11136168	782972820	36191817440
23	118580	14926536	1179105738	61893239340
24	141680	19732600	1740089734	102950022616
25	167992	25760588	2521359260	167010533830
26	197800	33246664	3593085246	264869097472
27	231400	42459476	5043058972	411497661102
28	269100	53703216	6980158088	627378473416
29	311220	67320392	9538095102	940130628920
30	358092	83695144	12879874324	1386570370640
31	410060	103256240	17202560582	2015178519904
32	467480	126480648	22742900942	2889176379864
33	530720	153896756	29783283628	4090150245318
34	600160	186088200	38658709554	5722507236712
35	676192	223697308	49764125812	7918655437366
36	759220	267429184	63562947328	10845295301648
37	849660	318055376	80595959410	14710646654420
38	947940	376418216	101491605140	19773136732920
39	1054500	443434712	126976666126	26351274869008
40	1169792	520101144	157888541850	34835414789584

Odkazy na literaturu:

Christian Poisson, *Rex Multiplex* 29/1990, str. 829 (v té době vycházející francouzský časopis)

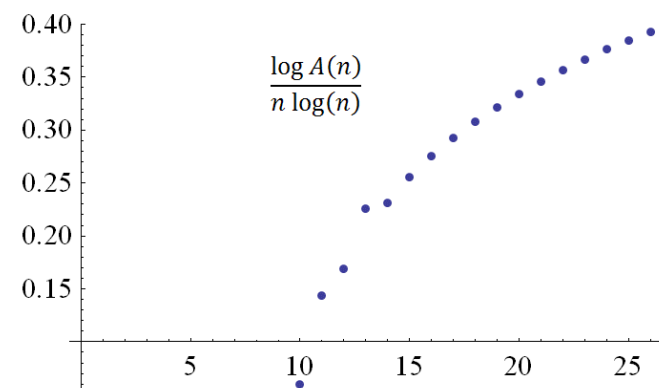
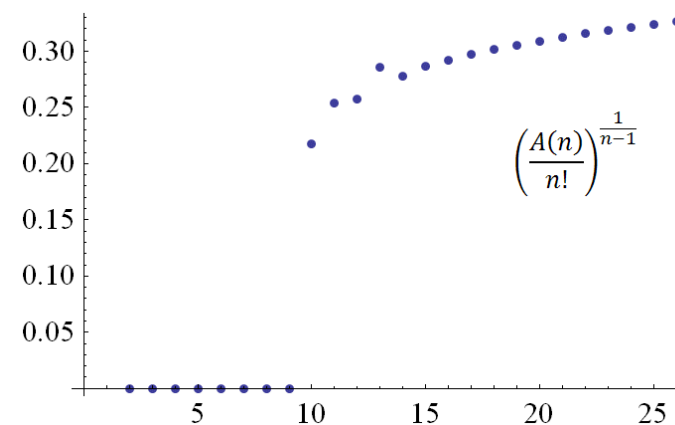
Panos Louridas, *idee & form* 93/2007, str. 2936-2938 (švýcarský časopis věnovaný skladebnímu šachu)

7.1.1) n Amazons (superqueens) on an $n \times n$ chessboard - n Amazonek na šachovnici $n \times n$

Problémem n neohrožujících se amazonek na šachovnici $n \times n$ se jako první zabýval Bill Butler, na jeho stránce [Durango Bill's - The N-Queens Problem](#) najdeme doposud známé výsledky. Na šachovnici 8×8 takové rozestavení pro Amazonky (označované zde jako Superqueen) není možné, ale od šachovnice 10×10 řešení existují! Zkusil jsem vypočítat konstanty pro velká n pro amazonky podle prvních dvou hypotéz pro dámy (viz kapitola 1.1.1).

Hodnoty do $n=20$ vypočetl [Durango Bill](#), hodnoty pro $n=21$ až 23 jsou převzaty ze stránky "The Oprisch Family Web Site" [N x N SuperQueens Solutions Table](#), hodnoty pro $n=24,25,26$ vypočetl [Wolfram Schubert](#) (2009-2011).

n	OEIS - A051223	Birger Nielsen	Rivin+Vardi+Zimmermann	
	n Amazons $n \times n$	$\left(\frac{A(n)}{n!}\right)^{\frac{1}{n-1}}$	$\frac{\log A(n)}{n \log(n)}$	$\frac{Q(n)}{A(n)}$
1	1			1
2	0			
3	0			
4	0			
5	0			
6	0			
7	0			
8	0			
9	0			
10	4	0.2177875229	0.0602059991	181.0000
11	44	0.2536469800	0.1434663320	60.9091
12	156	0.2571896108	0.1693509629	91.0256
13	1876	0.2861405294	0.2260322668	39.2921
14	5180	0.2780659430	0.2314830981	70.5784
15	32516	0.2863046443	0.2557679703	70.0942
16	202900	0.2922654623	0.2754751459	72.8069
17	1330622	0.2973799174	0.2927699845	72.0078
18	8924976	0.3013522738	0.3076183338	74.6322
19	64492432	0.3052738993	0.3214276591	77.0332
20	495864256	0.3090010139	0.3341722647	78.7094
21	3977841852	0.3122951071	0.3457263661	79.1048
22	34092182276	0.3156003918	0.3566365819	78.9333
23	306819842212	0.3186994535	0.3667617725	78.9843
24	2883202816808	0.3215646055	0.3761463830	78.9102
25	28144109776812	0.3241760378	0.3848344687	78.4496
26	286022102245804	0.3266113124	0.3929511251	78.0279
27	?	?	?	?
∞	∞	?	$\rightarrow 1$?	?



Velmi zajímavým problémem je otázka **limity** podílu počtu neohrožujících se dam a počtu neohrožujících se amazonek (*obecně zůstává otevřený problém limity podílu počtu neohrožujících se dam a počtu neohrožujících se kombinovaných kamenů dáma + skokan* [r,s], více viz kap.12.2). Pro amazonky viz sloupec nejvíce vpravo v tabulce na předchozí straně a graf vpravo). V grafu je na ose x hodnota n a na ose y hodnota tohoto podílu.

Zde bych navázal na hypotézy o asymptotickém průběhu funkce $Q(n)$ z kapitoly 1.1.1 a budu považovat za všeobecně přijatou hypotézu Birgera Nielsena

$$Q(n) \sim n! p^{n-1}$$

kde p je konstanta (zpřesněná proti původnímu odhadu na $p = 0.389068\dots$)

Označme nyní limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q(n)}{A(n)} = y$$

a předpokládejme, že jde o konstantu.

Evidentně je

$$y \geq 1$$

(každá pozice neohrožujících se amazonek je současně i pozicí neohrožujících se dam)

Budeme-li dále předpokládat, že asymptotický průběh funkce $A(n)$ je

$$A(n) \sim m b^{n-1} n!$$

dostaneme

$$y = \frac{1}{m} * \left(\frac{p}{b}\right)^{n-1}$$

Pro n jdoucí k nekonečnu může mocninný člen nabývat pouze tří hodnot: 0, 1 nebo nekonečno v závislosti na podílu p/b . Případy 0 a nekonečno jsou však vyloučeny předchozími podmínkami

$$1 \leq y < \infty$$

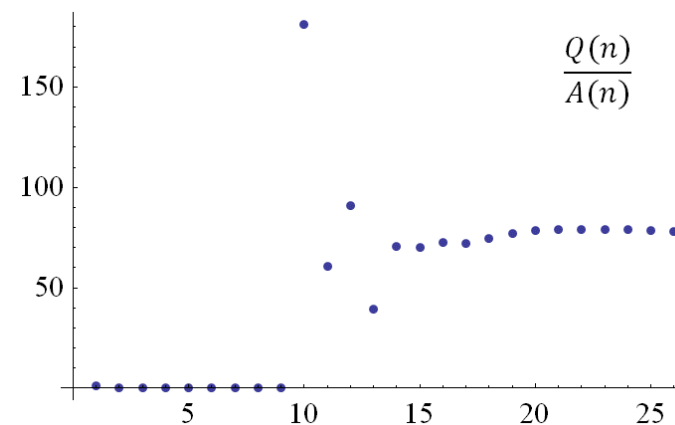
Nutně proto musí být

$$b = p, m = \frac{1}{y}$$

Dostáváme tak tuto hypotézu (podstatné je to, že konstanta p musí být identická jako pro dámy)

Conjecture (Václav Kotěšovec, 3.1.2011)

$$A(n) \sim \frac{p^{n-1} n!}{y} \sim \frac{0.389 \dots^{n-1} * n!}{78. \dots}$$



7.1.2) n pieces Queen+Nightrider on an $n \times n$ chessboard - n kamenů dáma+tátoš na šachovnici $n \times n$

Na doplnění je možno uvést, že je možné i rozestavení n neohrožujících se kamenů s ještě trochu větší pohyblivostí. Vezmeme-li kámen, který je kombinací dámy a tátoše (**Queen + Nightrider**, něm. Nachtreiterin, franc. Eléphant), jsou taková rozestavení možná od šachovnice 10×10 , více viz [A102388](#), kde najdeme hodnoty až do $n=19$. Zabývali se tím v roce 2005 v té době studenti Stefan Wernli a Peter Syski (jejich práci na Harvardu vedl Noam Elkies). Citovaná internetová stránka bohužel už neexistuje, ale dá se najít alespoň nějaká verze na [archive.org](#) (najdeme tam i výstupy z programu s výčty vyhovujících pozic).

Svým rychlejším programem v assembleru jsem dopočítal hodnoty pro $n = 20$ až $n = 28$, určitě zaujme extrémně malý počet vyhovujících pozic. Viz také kap.12.4 Hodnoty pro $n = 29$ až $n = 33$ vypočetl (s využitím víceprocesorových systémů) [Wolfram Schubert](#), 24.7.2011 (27.5.2012 pro $n = 33$).

n	n Elephants on an $n \times n$ chessboard (Queen + Nightrider)	OEIS - A102388
1	1	S. Wernli + P. Syski (2005)
2	0	
3	0	
4	0	
5	0	
6	0	
7	0	
8	0	
9	0	
10	4	
11	44	
12	6	
13	78	
14	8	
15	16	
16	18	
17	234	
18	124	
19	468	

20	516	V. Kotěšovec (17.6.2010)
21	882	
22	2092	
23	7068	
24	22794	
25	85456	V. Kotěšovec (2.2.2011)
26	275732	
27	974048	
28	3698242	W. Schubert (24.7.2011)
29	14120996	
30	59531852	
31	252272512	
32	1163430462	W. Schubert (27.5.2012)
33	5229335374	
34	?	

Co se týče možných rozestavení k těchto kombinovaných kamenů dáma + tátoš na šachovnici $n \times n$ je situace ještě složitější než v případě tátošů. Poměrně snadno jde odvodit vzorce pro $k=2$ a $k=3$ (kde hloubka rekurence vzroste z 31 na 39), ale pro $k=4$ bude tato hloubka už tak velká, že není možné vypočítat nezbytný počet členů posloupnosti.

2 elephants, board $n \times n$: (Christian Poisson, *Rex Multiplex 30/1990*, p. 915, formula 30)

pokud je n sudé (if n is even)

$$\frac{n(n-2)(n^2-3n+1)}{2}$$

pokud je n liché (if n is odd)

$$\frac{n(n-1)^2(n-3)}{2}$$

nebo jedním vzorcem

$$\frac{1}{4}n * (2n^3 - 10n^2 + 14n - 5 + (-1)^n)$$

Generating function:

$$-\frac{4x^4(2x^2+5x+5)}{(x-1)^5(x+1)^2}$$

Recurrence:

$$a_n = a_{n-7} - 3a_{n-6} + a_{n-5} + 5a_{n-4} - 5a_{n-3} - a_{n-2} + 3a_{n-1}$$

3 elephants, board $n \times n$: (Václav Kotěšovec, 10.12.2012)

$$\begin{aligned} & \frac{n^6}{6} - \frac{5n^5}{2} + \frac{2399n^4}{160} - \frac{55559n^3}{1200} + \frac{42391n^2}{600} - \frac{88831n}{2400} + \left(n^3 - \frac{73n^2}{8} + \frac{481n}{20} - \frac{2759}{80}\right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{20n}{3} - \frac{44}{3}\right) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left(\frac{4n}{3} - \frac{4}{3}\right) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left(\frac{9n}{2} + 5\right) \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left(\frac{9n}{2} - 6\right) \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \left(\frac{112n}{25} - 16\right) \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left(\frac{64n}{25} - \frac{56}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor \\ & + \left(\frac{56n}{25} - \frac{328}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{25} + \frac{104}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + (4n-12) \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + \frac{128}{5} \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{5} - \frac{32}{5}\right) \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor + \frac{64}{5} \left\lfloor \frac{n+2}{10} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{5} - \frac{96}{5}\right) \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor \end{aligned}$$

Generating function:

$$\begin{aligned} & -(8*x^5*(29*x^33 + 69*x^32 + 236*x^31 + 425*x^30 + 995*x^29 + 1413*x^28 + 2781*x^27 + 3313*x^26 + 5818*x^25 + 6146*x^24 + 9799*x^23 + 9517*x^22 + 13958*x^21 + 12613*x^20 + \\ & 17162*x^19 + 14550*x^18 + 18293*x^17 + 14682*x^16 + 16930*x^15 + 12910*x^14 + 13679*x^13 + 9784*x^12 + 9572*x^11 + 6351*x^10 + 5651*x^9 + 3447*x^8 + 2684*x^7 + 1471*x^6 + \\ & 962*x^5 + 434*x^4 + 227*x^3 + 72*x^2 + 24*x + 3)) / ((x-1)^7*(x+1)^4*(x^2+1)^2*(x^2-x+1)^2*(x^2+x+1)^2*(x^4-x^3+x^2-x+1)^2*(x^4+x^3+x^2+x+1)^2) \end{aligned}$$

Recurrence:

$$\begin{aligned} a_n = & a_{n-39} - 3a_{n-38} + 5a_{n-37} - 7a_{n-36} + 7a_{n-35} - 5a_{n-34} + a_{n-33} + 5a_{n-32} - 10a_{n-31} + 14a_{n-30} - 16a_{n-29} + 16a_{n-28} - 15a_{n-27} + 13a_{n-26} - 9a_{n-25} + 3a_{n-24} + 5a_{n-23} - 15a_{n-22} \\ & + 23a_{n-21} - 29a_{n-20} + 29a_{n-19} - 23a_{n-18} + 15a_{n-17} - 5a_{n-16} - 3a_{n-15} + 9a_{n-14} - 13a_{n-13} + 15a_{n-12} - 16a_{n-11} + 16a_{n-10} - 14a_{n-9} + 10a_{n-8} - 5a_{n-7} - a_{n-6} \\ & + 5a_{n-5} - 7a_{n-4} + 7a_{n-3} - 5a_{n-2} + 3a_{n-1} \end{aligned}$$

n	2 elephants	3 elephants	4 elephants
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	20	0	0
5	80	24	0
6	228	264	44
7	504	1248	694
8	984	4408	5710
9	1728	12136	29214
10	2840	29072	113656
11	4400	61720	359670
12	6540	121224	996806
13	9360	220912	2429260
14	13020	382696	5466202
15	17640	631216	11368236
16	23408	1003856	22328526
17	30464	1541040	41464320
18	39024	2302672	73920094
19	49248	3350368	126415710
20	61380	4773632	209541980
21	75600	6661928	336414898
22	92180	9142640	526918346
23	111320	12341024	804869706
24	133320	16431832	1205123916
25	158400	21583160	1767856304
26	186888	28028064	2550884132

27	219024	35987944	3619335608
28	255164	45764880	5064486804
29	295568	57642688	6986996304
30	340620	72006128	9526083808
31	390600	89211928	12831899298
32	445920	109741032	17109741850
33	506880	134035576	22577678226
34	573920	162686680	29529598956
35	647360	196234696	38274199550
36	727668	235397080	49222617778
37	815184	280824384	62800778644
38	910404	333378296	79572698334
39	1013688	393835392	100116501420
40	1125560	463217624	?
41	1246400	542441728	?
42	1376760	632710832	?
43	1517040	735098024	?
44	1667820	851006632	?
45	1829520	981683264	?
46	2002748	1128751968	?
47	2187944	1293651448	?
48	2385744	1478249528	?
49	2596608	1684193056	?
50	2821200	1913617560	?

7.2) k Amazons (superqueens) on an k x n chessboard - k Amazonek na šachovnici k x n

Na stránce [The Oprisch Family Web Site](#) nalezneme hodnoty pro šachovnice $k \times n$, včetně vzorců pro $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ a tabulek hodnot. Vzorec pro $k=8$ je nový.

2 amazons, board $2 \times n$: $n \geq 2$

$$(n - 3)(n - 2)$$

3 amazons, board $3 \times n$: $n \geq 4$

$$(n - 6)(n - 5)(n - 4)$$

[A174642](#) - **4 amazons**, board $4 \times n$: $n \geq 7$

$$(n - 7)(n^3 - 21n^2 + 158n - 420)$$

[A174644](#) - **5 amazons**, board $5 \times n$: $n \geq 12$

$$n^5 - 44n^4 + 823n^3 - 8168n^2 + 42796n - 93984$$

[A174645](#) - **6 amazons**, board $6 \times n$: $n \geq 17$

$$n^6 - 63n^5 + 1775n^4 - 28613n^3 + 277462n^2 - 1526716n + 3699966$$

[A174646](#) - **7 amazons**, board $7 \times n$: $n \geq 24$

$$n^7 - 85n^6 + 3329n^5 - 77911n^4 + 1175240n^3 - 11392990n^2 + 65448630n - 171006180$$

[A178372](#) - **8 amazons**, board $8 \times n$: (*Václav Kotěšovec, 26.5.2010*) $n \geq 31$

$$n^8 - 110n^7 + 5684n^6 - 180400n^5 + 3845495n^4 - 56292452n^3 + 551196090n^2 - 3289297810n + 9121996624$$

Obecně má polynom tvar:

$$n^k - \frac{(k + 3)(3k - 4)n^{k-1}}{2} + \dots$$

k	k Amazons on an k x n chessboard - Generating function
2	$-\frac{2x^4}{(x-1)^3}$
3	$\frac{6x^7}{(x-1)^4}$
4	$-12x^8 * \frac{x^3 + 1}{(x-1)^5}$
5	$4x^8 * \frac{x^9 + x^8 + 7x^7 - 6x^6 + 5x^5 + 10x^4 + x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{(x-1)^6}$
6	$-2x^9 * \frac{11x^{14} - 14x^{13} + 3x^{12} + 49x^{11} - 14x^{10} - 22x^9 + 22x^8 + 112x^7 + 24x^6 - 43x^5 + 121x^4 + 41x^3 + 33x^2 + 29x + 8}{(x-1)^7}$
7	$2x^9 * (8x^{22} - 4x^{21} - 9x^{20} + 102x^{18} - 138x^{17} + 29x^{16} + 592x^{15} - 1610x^{14} + 2772x^{13} - 3091x^{12} + 3178x^{11} - 2049x^{10} + 1312x^9 - 625x^8 + 1438x^7 - 449x^6 + 388x^5 + 403x^4 + 148x^3 + 82x^2 + 42x + 1) / (x-1)^8$
8	$-2x^{10} * (72x^{29} - 244x^{28} + 40x^{27} + 1379x^{26} - 3400x^{25} + 4619x^{24} - 6525x^{23} + 10407x^{22} - 8879x^{21} - 901x^{20} + 4213x^{19} + 10475x^{18} - 33273x^{17} + 60823x^{16} - 90147x^{15} + 109862x^{14} - 106589x^{13} + 92686x^{12} - 68408x^{11} + 45714x^{10} - 16426x^9 + 999x^8 + 9801x^7 - 1850x^6 + 2355x^5 + 1922x^4 + 826x^3 + 461x^2 + 132x + 16) / (x-1)^9$

n	2 am.	3 am.	4 am.	5 amazons	6 amazons	7 amazons	8 amazons
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	2	0	0	0	0	0	0
5	6	0	0	0	0	0	0
6	12	0	0	0	0	0	0
7	20	6	0	0	0	0	0
8	30	24	12	4	0	0	0
9	42	60	60	40	16	2	0
10	56	120	180	204	170	100	32
11	72	210	432	708	920	908	552
12	90	336	900	1968	3512	4872	4738
13	110	504	1692	4712	10896	19818	27110
14	132	720	2940	10064	29020	66864	119602
15	156	990	4800	19656	68550	193926	437640
16	182	1320	7452	35744	147240	498924	1376504
17	210	1716	11100	61328	292996	1165544	3835578
18	240	2184	15972	100272	547590	2517036	9697416
19	272	2730	22320	157424	970996	5089430	22605024

20	306	3360	30420	238736	1646446	9731908	49208658
21	342	4080	40572	351384	2686212	17735888	101004522
22	380	4896	53100	503888	4238086	30999920	197024206
23	420	5814	68352	706232	6492580	52234274	367556982
24	462	6840	86700	969984	9690846	85210284	659230078
25	506	7980	108540	1308416	14133316	135059570	1141734758
26	552	9240	134292	1736624	20189062	208627984	1916570390
27	600	10626	164400	2271648	28305876	314889330	3128196492
28	650	12144	199332	2932592	39021070	465423908	4978021504
29	702	13800	239580	3740744	52972996	674966914	7741704218
30	756	15600	285660	4719696	70913286	962031720	11790289180
31	812	17550	338112	5895464	93719812	1349613074	17615725002
32	870	19656	397500	7296608	122410366	1865975260	25861362960
33	930	21924	464412	8954352	158157060	2545530258	37358068642
34	992	24360	539460	10902704	202301446	3429810944	53166624036
35	1056	26970	623280	13178576	256370356	4568544370	74627135274
36	1122	29760	716532	15821904	322092462	6020830164	103416201832
37	1190	32736	819900	18875768	401415556	7856429090	141612643650
38	1260	35904	934092	22386512	496524550	10157166808	191772622812
39	1332	39270	1059840	26403864	609860196	13018457874	257015036746
40	1406	42840	1197900	30981056	744138526	16550955020	341118100224

7.3) k Amazons on an n x n toroidal chessboard - k amazonek na prstencové šachovnici n x n

[A178972](#) - **2 amazons**, toroidal board $n \times n$: (Václav Kotěšovec, 1.1.2011), $n \geq 5$

$$\frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - 4n - \frac{9}{2} + \frac{(-1)^n}{2} \right)$$

Alternative formula:

$$\frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - 5n - 4 + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)$$

[A178973](#) - **3 amazons**, toroidal board $n \times n$: (Václav Kotěšovec, 1.1.2011), $n \geq 7$

$$\frac{1}{3}n^2 \left(\frac{n^4}{2} - 6n^3 + \frac{61n^2}{4} + 42n - \frac{285}{2} + \left(\frac{3n^2}{4} - 6n + \frac{21}{2} \right) (-1)^n \right)$$

Alternative formula:

$$\frac{1}{3}n^2 \left(\frac{n^4}{2} - \frac{15n^3}{2} + 28n^2 + 15n - 132 + (3n^2 - 24n + 42) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)$$

[A178974](#) - **4 amazons**, toroidal board $n \times n$: (Václav Kotěšovec, 1.1.2011), $n \geq 10$

$$\frac{1}{4}n^2 \left(\frac{n^6}{6} - 4n^5 + \frac{197n^4}{6} - 66n^3 - \frac{1941n^2}{4} + 2638n - \frac{18907}{6} + \left(\frac{n^4}{2} - 10n^3 + \frac{289n^2}{4} - 210n + \frac{357}{2} \right) (-1)^n + 18 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{32}{3} \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) \right)$$

Alternative formula:

$$\frac{1}{4}n^2 \left(\frac{n^6}{6} - 5n^5 + \frac{160n^4}{3} - \frac{441n^3}{2} + 7n^2 + 2037n - 2944 + (2n^4 - 40n^3 + 289n^2 - 840n + 714) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 36 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 36 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \right)$$

A178975 - 5 amazons, toroidal board $n \times n$: (Václav Kotěšovec, 2.1.2011), $n \geq 15$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5}n^2 * \left(\frac{1}{24}n^8 - \frac{5}{3}n^7 + \frac{635}{24}n^6 - \frac{1145}{6}n^5 + \frac{4139}{16}n^4 + \frac{10985}{2}n^3 - \frac{916385}{24}n^2 + \frac{273775}{3}n - \frac{128930}{3} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{5}{24}n^6 - \frac{15}{2}n^5 + \frac{5315}{48}n^4 - \frac{1675}{2}n^3 + \frac{25855}{8}n^2 - 4935n - \frac{2290}{3} \right) * (-1)^n \right. \\ & \left. + \left(\frac{45}{2}n^2 - 390n + 1630 \right) * \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{400}{3} * \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \left(\frac{40}{3}n^2 - \frac{640}{3}n + \frac{2480}{3} \right) * \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + 16 * \cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right) + 16 * \cos\left(\frac{8n\pi}{5}\right) \right) \end{aligned}$$

Alternative formula:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5}n^2 * \left(\frac{n^8}{24} - \frac{25n^7}{12} + \frac{125n^6}{3} - \frac{10075n^5}{24} + \frac{24533n^4}{12} - \frac{7405n^3}{4} - 24335n^2 + 84270n - 41118 \right. \\ & \left. + \left(\frac{5n^6}{6} - 30n^5 + \frac{5315n^4}{12} - 3350n^3 + \frac{25855n^2}{2} - 19740n - 1880 \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (40n^2 - 640n) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + (20n^2 - 320n) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor \right. \\ & \left. + (45n^2 - 780n + 3260) \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + (45n^2 - 780n + 3260) \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor \right. \\ & \quad \left. + 1440 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 1440 \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - 1040 \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 2480 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor \right) \end{aligned}$$

První členy těchto vzorců mají tvar:

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{2n^{2k-1}}{(k-2)!} + \frac{(24k^2 - 32k - 59) * n^{2k-2}}{12 * (k-2)!} + \frac{n^{2k-2} * (-1)^n}{4 * (k-2)!} - \dots$$

pro sudé (even) n

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{2n^{2k-1}}{(k-2)!} + \frac{2(k+1)(3k-7) * n^{2k-2}}{3 * (k-2)!} - \dots$$

pro liché (odd) n

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{2n^{2k-1}}{(k-2)!} + \frac{(12k^2 - 16k - 31) * n^{2k-2}}{6 * (k-2)!} - \dots$$

Podobně jako na normální šachovnici (viz str. 345) jsem se zabýval ještě i diferencí počtu dam a amazek na prstencové šachovnici. Zdá se, že hypotéza o posunu denominátorů bude platit i zde (tedy že denominátor pro rozdílovou funkci k dam - k amazek dělí denominátor pro $k-1$ dam). Asymptotický rozvoj funkce rozdílu počtu neohrožujících se dam a amazek na prstencové šachovnici má shodný první člen jako na normální šachovnici, viz [vzorec](#).

k	denominator for sequence (k queens - k amazons) on a toroidal board	denominator for k queens on a toroidal board
2	$(x - 1)^3$	$(x - 1)^5(x + 1)^3$
3	$(x - 1)^5$	$(x - 1)^7(x + 1)^5$
4	$(x - 1)^7(x + 1)^5$	$(x - 1)^9(x + 1)^7(x^2 + x + 1)^3(x^2 + 1)^3$
5	$(x - 1)^9(x + 1)^7(x^2 + x + 1)^3(x^2 + 1)^3$	$(x - 1)^{11}(x + 1)^9(x^2 + x + 1)^5(x^2 + 1)^5(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^3(x^2 - x + 1)^3$

k	k Amazons on an n x n toroidal chessboard - Generating function
2	$\frac{4x^6 * (8x^6 - 7x^5 - 30x^4 + 23x^3 + 44x^2 - 26x - 36)}{(x - 1)^5(x + 1)^3}$
3	$\frac{4x^7 * (36x^{11} - 47x^{10} - 178x^9 + 228x^8 + 354x^7 - 419x^6 - 356x^5 + 297x^4 + 182x^3 + 178x^2 + 538x + 147)}{(x - 1)^7(x + 1)^5}$
4	$\frac{2x^7 * (162x^{30} - 350x^{29} - 1488x^{28} - 718x^{27} + 2389x^{26} + 6635x^{25} + 6157x^{24} - 3372x^{23} - 15873x^{22} - 22215x^{21} - 8561x^{20} + 23622x^{19} + 55919x^{18} + 38469x^{17} - 91949x^{16} - 461696x^{15} - 1076702x^{14} - 1978832x^{13} - 2858196x^{12} - 3576618x^{11} - 3727323x^{10} - 3419559x^9 - 2634463x^8 - 1782420x^7 - 988307x^6 - 472291x^5 - 171451x^4 - 53262x^3 - 10265x^2 - 1713x - 49)}{((x-1)^9 * (x+1)^7 * (x^2+1)^3 * (x^2+x+1)^3)}$
5	$\frac{-2x^8 * (1176x^{64} + 5556x^{63} + 15132x^{62} + 28428x^{61} + 39340x^{60} + 30066x^{59} - 16046x^{58} - 97562x^{57} - 191158x^{56} - 227584x^{55} - 150082x^{54} + 56017x^{53} + 289119x^{52} + 339896x^{51} + 45336x^{50} - 611255x^{49} - 1380704x^{48} - 2278261x^{47} - 3764650x^{46} - 7542849x^{45} - 7704482x^{44} + 18495516x^{43} + 165924351x^{42} + 637466559x^{41} + 1903273538x^{40} + 4724140916x^{39} + 10422040024x^{38} + 20690172375x^{37} + 37875420877x^{36} + 64238796480x^{35} + 102190978070x^{34} + 152823563437x^{33} + 216401077492x^{32} + 290462738417x^{31} + 371272897408x^{30} + 452086367452x^{29} + 526060962825x^{28} + 584865148004x^{27} + 622627590675x^{26} + 634259897550x^{25} + 619201117902x^{24} + 578669435625x^{23} + 518210895306x^{22} + 443951015905x^{21} + 364069798686x^{20} + 285127462600x^{19} + 213313173667x^{18} + 151952471981x^{17} + 103062047860x^{16} + 66251579160x^{15} + 40354587182x^{14} + 23135311545x^{13} + 12479773177x^{12} + 6269223018x^{11} + 2933204824x^{10} + 1256492269x^9 + 493760966x^8 + 172473531x^7 + 54013568x^6 + 14176791x^5 + 3222186x^4 + 525572x^3 + 74355x^2 + 4605x + 320)}{((x-1)^{11} * (x+1)^9 * (x^2+1)^5 * (x^2-x+1)^3 * (x^2+x+1)^5 * (x^4+x^3+x^2+x+1)^3)}$

Polynomy v čitateli vytvořujících funkcí mají větší stupeň než polynomy ve jmenovateli protože vytvořující funkce zahrnuje i několik prvních členů posloupnosti, pro které explicitní vzorce ještě neplatí. Rekurence jsou identické jako pro dámy na prstencové šachovnici, viz tabulka na str. 59.

n	2 amazons	3 amazons	4 amazons	5 amazons
1				
2	0	0	0	
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	144	0	0	0
7	392	588	98	0
8	896	3328	3328	640
9	1620	9720	17496	7290
10	2800	27600	99600	123640
11	4356	59048	316052	640574
12	6624	124992	1041408	3869280
13	9464	226460	2501538	12950132
14	13328	408464	6157536	47022360
15	18000	666900	12531150	123467040
16	24064	1086464	25938944	340840960
17	31212	1650768	47168268	759697190
18	40176	2505168	86938272	1758672648
19	50540	3610000	145818008	3494388306
20	63200	5198400	247240000	7150739360
21	77616	7191828	390084786	13041285516
22	94864	9945232	620964256	24354594440
23	114264	13320220	933865918	41566378136
24	137088	17835264	1414946304	72345297024
25	162500	23265000	2047225000	117101090250

26	191984	30341584	2980849040	192694385416
27	224532	38718648	4177648224	298703838186
28	261856	49401408	5886858432	469581881888
29	302760	61880780	8032809818	702148696580
30	349200	77504400	11012886000	1062719841960
31	399776	95550308	14689386642	1541332566284
32	456704	117788672	19674427392	2259300468736
33	518364	143225280	25732782504	3192255589842
34	587248	174144464	33779841296	4552716843720
35	661500	209210400	43433208000	6288527141890
36	743904	251325504	56027023488	8758324830240
37	832352	298732228	70963952198	11859789616944
38	929936	355068048	90145026976	16178716174856
39	1034280	418062060	112667956362	21527161542900
40	1148800	492217600	141187744000	28834708173440
41	1270836	574646488	174379462912	37773191445530
42	1404144	670863312	215885672352	49780670731848
43	1545764	777245640	263807872228	64307550066622
44	1699808	900480064	323063998400	83528153266976
45	1863000	1036079100	390991159350	106553668230360
46	2039824	1192078224	474133897440	136604763586888
47	2226672	1362979508	568826958938	172286566874516
48	2428416	1558361088	683665993728	218281816392192
49	2641100	1771553840	813689747388	272457414844118
50	2870000	2013890000	970053690000	341507953841000

7.3.1) n Amazons on an $n \times n$ toroidal chessboard - n amazonek na prstencové šachovnici $n \times n$

Tímto problémem se pravděpodobně ještě nikdo nezabýval (i když zbývající trojice kombinací dámy/amazonky-normální/prstencová šachovnice byla studována velmi intenzivně). O tom, na jakých rozměrech šachovnic jsou taková rozestavení vůbec možná, viz str. 62 (pro $n > 10$ jsou v tomto výsledky pro amazonky shodné jako pro dámy na prstencové šachovnici). Vygeneroval jsem sérii prvních hodnot a uvádím opět i hodnoty koeficientů pro asymptotické porovnání, více o tom viz str. 348. Pro podobný odhad limity podílu počtu neohrožujících se dam a počtu neohrožujících se amazonek jako v kap. 7.1.1 není zatím dostatek hodnot.

n	OEIS A178986 n Amazons toroidal $n \times n$	Birger Nielsen $\left(\frac{AT(n)}{n!}\right)^{\frac{1}{n-1}}$	Rivin+Vardi+Zimmermann $\frac{\log AT(n)}{n \log(n)}$	$\frac{QT(n)}{AT(n)}$
1	1			1
2	0			
3	0			
4	0			
5	0			
6	0			
7	0			
8	0			
9	0			
10	0			
11	44	0.253647	0.143466	2.00000
12	0			
13	1092	0.273524	0.209804	4.14286
14	0			
15	0			
16	0			
17	16932	0.226388	0.202160	8.30924
18	0			
19	24776	0.197215	0.180852	33.1166
20	0			
21	0			
22	0			
23	1881492	0.184695	0.200337	68.4829
24	0			
25	?	?	?	?
∞	∞	?	?	?

8.1) k Zebras on an n x n chessboard - k zeber na šachovnici n x n

Zebra je skokan [2,3]. *Zebra is a leaper [2,3].*

A172137 - **2 zebras**, board $n \times n$: (C. Poisson, *Rex Multiplex* 29/1990, p.829), $n \geq 2$

$$\frac{n^4 - 9n^2 + 40n - 48}{2}$$

A172138 - **3 zebras**, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 24.1.2010), $n \geq 6$

$$\frac{n^6 - 27n^4 + 120n^3 + 74n^2 - 1608n + 2976}{6}$$

A172139 - **4 zebras**, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 24.1.2010), $n \geq 9$

$$\frac{n^8 - 54n^6 + 240n^5 + 827n^4 - 8592n^3 + 10362n^2 + 75600n - 204864}{24}$$

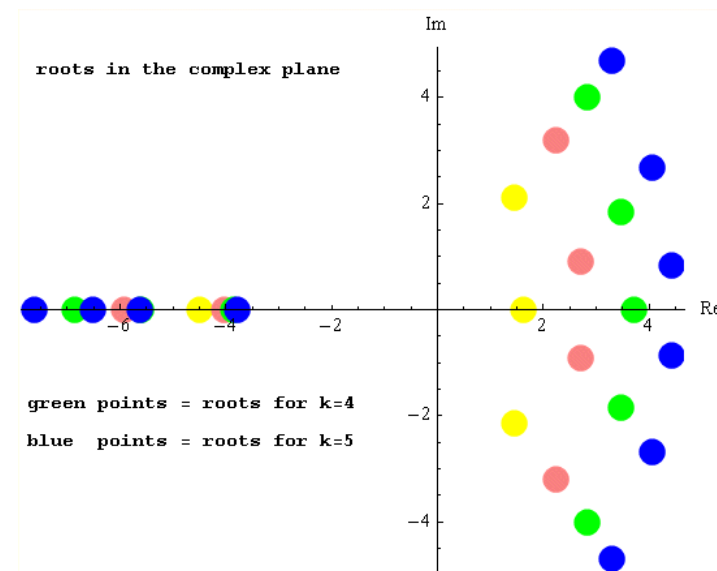
A172140 - **5 zebras**, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 26.1.2010), $n \geq 12$

$$\frac{n^{10} - 90n^8 + 400n^7 + 2915n^6 - 26880n^5 + 2430n^4 + 609920n^3 - 1517496n^2 - 4188480n + 16581120}{120}$$

První členy polynomu mají vždy tvar:

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{9n^{2k-2}}{2(k-2)!} + \frac{20n^{2k-3}}{(k-2)!} + \frac{(243k^2 - 343k - 862) * n^{2k-4}}{24 * (k-2)!} - \dots$$

For maximal number of non-attacking zebras on an $n \times n$ chessboard, see chapter 14



k	k Zebras on an n x n chessboard - Generating function
2	$2x^2 * \frac{4x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 3x - 3}{(x - 1)^5}$
3	$4x^2 * \frac{4x^{10} - 23x^9 + 45x^8 - 33x^7 - x^6 + 9x^5 + 29x^4 - 58x^3 + 13x^2 - 14x - 1}{(x - 1)^7}$
4	$x^2 * (64x^{15} - 376x^{14} + 760x^{13} - 650x^{12} + 1478x^{11} - 6838x^{10} + 15166x^9 - 17006x^8 + 8858x^7 - 462x^6 - 2109x^5 + 1333x^4 + 1274x^3 + 70x^2 + 117x + 1) / (1-x)^9$
5	$2x^3 * (100x^{19} - 648x^{18} + 1450x^{17} - 2126x^{16} + 10452x^{15} - 43872x^{14} + 92798x^{13} - 100834x^{12} + 56460x^{11} - 61636x^{10} + 182288x^9 - 303224x^8 + 275038x^7 - 128982x^6 + 21681x^5 + 1933x^4 - 13072x^3 - 2540x^2 - 323x - 63) / (x-1)^{11}$

n	2 zebras	3 zebras	4 zebras	5 zebras
1				
2	6	4	1	
3	36	84	126	126
4	112	452	1168	2032
5	276	1772	7334	20502
6	582	5596	35749	160696
7	1096	14888	137970	929880
8	1896	34640	438984	4117520
9	3072	72712	1208246	15037036
10	4726	140716	2969389	47368960
11	6972	255036	6662480	132577826

12	9936	437968	13873100	336828368
13	13756	718980	27144408	789558314
14	18582	1136092	50389581	1729320120
15	24576	1737376	89424014	3574328936
16	31912	2582576	152638280	7027309888
17	40776	3744848	251834530	13226773092
18	51366	5312620	403250693	23959787480
19	63892	7391572	628798516	41954706558
20	78576	10106736	957543164	71276149776
21	95652	13604716	1427453780	117848892710
22	115366	18056028	2087456085	190142197976

8.1.1) n Zebras on an $n \times n$ chessboard - n zebras na šachovnici $n \times n$

Number of ways to place n non-attacking zebras on an $n \times n$ chessboard is asymptotic (see chapter 13.1 for more)

$$\frac{n^{2n}}{n!} * e^{-\frac{9}{2}} \sim \binom{n^2}{n} * e^{-4}$$

Vzhledem k tomu, že celkový počet možných rozmístění n zebra na šachovnici $n \times n$ (bez ohledu na to, zda se ohrožují či nikoliv) je $\binom{n^2}{n}$, je pro velká n pravděpodobnost, že se při náhodném rozmístění n zebra na šachovnici $n \times n$ nebudou žádné 2 napadat, rovna asymptoticky $1/e^4 = 0.0183156\dots$

(Poznámka: pro numerické ověření tohoto vzorce by bylo ovšem potřeba vypočítat mnohem více hodnot než zatím jen 10 vypočtených)

n	n zebras, board n x n, A244284
1	1
2	6
3	84
4	1168
5	20502
6	525796
7	18939708
8	802444170
9	38934305898
10	2170312156170
11	?

8.2) k Zebras on an k x n chessboard - k zeber na šachovnici k x n

2 zebras, board 2 x n: =all combinations

$$n(2n - 1)$$

[A172221](#) - **3 zebras**, board 3 x n: (V. Kotěšovec, 26.1.2010), $n \geq 6$

$$\frac{9n^3 - 21n^2 + 50n - 48}{2}$$

[A172222](#) - **4 zebras**, board 4 x n: (V. Kotěšovec, 26.1.2010), $n \geq 9$

$$\frac{4 * (8n^4 - 48n^3 + 202n^2 - 471n + 507)}{3}$$

[A172223](#) - **5 zebras**, board 5 x n: (V. Kotěšovec, 26.1.2010), $n \geq 12$

$$\frac{5 * (125n^5 - 1250n^4 + 7575n^3 - 28426n^2 + 64000n - 67056)}{24}$$

[A172224](#) - **6 zebras**, board 6 x n: (V. Kotěšovec, 26.1.2010), $n \geq 15$

$$\frac{1944n^6 - 27540n^5 + 227070n^4 - 1222555n^3 + 4366071n^2 - 9580580n + 9925860}{30}$$

První členy těchto vzorců mají obecně tvar

$$\frac{(kn)^k}{k!} - \frac{(k-1)(9k-20)(kn)^{k-1}}{2k!} + \dots$$

k	k Zebras on an k x n chessboard - Generating function
2	$\frac{x(3x + 1)}{(x - 1)^3}$
3	$\frac{x(2x^8 - 4x^7 + 2x^6 - 8x^5 + 28x^4 - 20x^3 + 10x^2 + 16x + 1)}{(x - 1)^4}$
4	$\frac{x(4x^{12} - 6x^{11} - 2x^{10} - 52x^9 + 160x^8 - 88x^7 + 2x^6 - 195x^5 + 473x^4 - 172x^3 + 66x^2 + 65x + 1)}{(x - 1)^5}$
5	$\frac{x(14x^{16} - 32x^{15} + 14x^{14} - 292x^{13} + 898x^{12} - 536x^{11} + 514x^{10} - 4232x^9 + 7258x^8 - 3296x^7 + 266x^6 - 2018x^5 + 5148x^4 - 1256x^3 + 428x^2 + 246x + 1)}{(x - 1)^6}$
6	$-x(32x^{20} - 48x^{19} - 84x^{18} - 1004x^{17} + 3350x^{16} - 802x^{15} + 3364x^{14} - 32132x^{13} + 42540x^{12} + 3538x^{11} + 10674x^{10} - 126767x^9 + 151663x^8 - 20769x^7 - 34421x^6 + 9539x^5 + 40807x^4 - 6284x^3 + 2542x^2 + 917x + 1)/(x-1)^7$

n	2 zebras	3 zebras	4 zebras	5 zebras	6 zebras
1	1	1	1	1	1
2	6	20	70	252	924
3	15	84	406	1925	8989
4	28	200	1168	6534	37270
5	45	403	2948	20502	145233
6	66	720	6576	57710	525796
7	91	1180	13122	142312	1605490
8	120	1808	23808	308254	4136952
9	153	2631	40168	606051	9435413
10	190	3676	63996	1105332	19632414
11	231	4970	97344	1897899	37957424
12	276	6540	142516	3100250	69050898

13	325	8413	202072	4857000	119351315
14	378	10616	278828	7344010	197524064
15	435	13176	375856	10771530	314935542
16	496	16120	496484	15387310	486171662
17	561	19475	644296	21479725	729604121
18	630	23268	823132	29380900	1068003424
19	703	27526	1037088	39469835	1529198580
20	780	32276	1290516	52175530	2146783422
21	861	37545	1588024	67980110	2960869583
22	946	43360	1934476	87421950	4018886128
23	1035	49748	2334992	111098800	5376425842
24	1128	56736	2794948	139670910	7098138174
25	1225	64351	3319976	173864155	9258668837

8.3) k Zebras on an $n \times n$ toroidal chessboard - k zeber na prstencové šachovnici $n \times n$

2 zebras, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 6.1.2011), $n \geq 7$

$$\frac{1}{2}n^2(n-3)(n+3) = \binom{n^2}{2} - 4n^2$$

3 zebras, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 6.1.2011), $n \geq 7$

$$\frac{1}{6}n^2(n^4 - 27n^2 + 218)$$



4 zebras, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 6.1.2011), $n \geq 13$

$$\frac{1}{24}n^2(n^6 - 54n^4 + 1115n^2 - 8934)$$

5 zebras, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 6.1.2011), $n \geq 14$

$$\frac{1}{120}n^2(n^8 - 90n^6 + 3395n^4 - 64290n^2 + 522504)$$

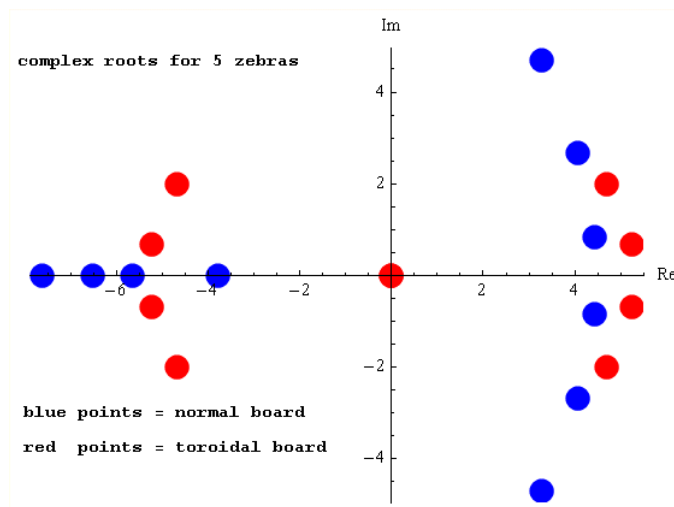
Vzorce pro 2, 3, 4 a 5 zeber jsou identické jako pro [jezdce na prstencové šachovnici](#) (posloupnosti se liší pouze v úvodních členech), od $k=6$ se však obě skupiny vzorců začínají odlišovat. Více viz kap. 10.8. *Formulas for 2, 3, 4 and 5 zebras are identical as for knights on a toroidal chessboard, but since $k=6$ are different.*

6 zebras, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 6.1.2011), $n \geq 19$

$$\frac{1}{720}n^2(n^{10} - 135n^8 + 8005n^6 - 262665n^4 + 4816354n^2 - 39902040)$$

První členy těchto vzorců mají obecně tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{9}{2} * \frac{n^{2k-2}}{(k-2)!} + \frac{(243k + 143) n^{2k-4}}{24(k-3)!} - \dots$$



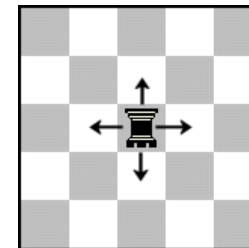
k	k Zebras on an n x n toroidal chessboard - Generating function
2	$\frac{2x^2 * (36x^9 - 155x^8 + 251x^7 - 181x^6 + 51x^5 - 9x^4 + 15x^3 - 9x^2 - 4x - 1)}{(x - 1)^5}$
3	$\frac{2x^3 * (828x^{10} - 5496x^9 + 15336x^8 - 23055x^7 + 19719x^6 - 9109x^5 + 1771x^4 + 17x^3 + 15x^2 - 83x - 3)}{(x - 1)^7}$
4	$x^4 * (432x^{17} - 3888x^{16} + 17052x^{15} - 49788x^{14} + 108624x^{13} - 182160x^{12} + 247608x^{11} - 356352x^{10} + 682544x^9 - 1270926x^8 + 1739265x^7 - 1610243x^6 + 964332x^5 - 342152x^4 + 56781x^3 - 783x^2 - 1798x - 228) / (x-1)^9$
5	$-x^4 * (1352x^{20} - 63832x^{19} + 612920x^{18} - 3022280x^{17} + 9696256x^{16} - 22654080x^{15} + 40943784x^{14} - 58838844x^{13} + 67937299x^{12} - 64367961x^{11} + 53994081x^{10} - 46043623x^9 + 41715592x^8 - 34828904x^7 + 22905810x^6 - 10722754x^5 + 3196673x^4 - 469891x^3 + 33177x^2 + 5337x + 128) / (x-1)^{11}$
6	$4x^4 * (540x^{27} - 7020x^{26} + 45960x^{25} - 203985x^{24} + 683685x^{23} - 1846130x^{22} + 5014670x^{21} - 18305760x^{20} + 72929585x^{19} - 238101716x^{18} + 596116889x^{17} - 1161184972x^{16} + 1804775813x^{15} - 2280577967x^{14} + 2363014284x^{13} - 2006868880x^{12} + 1393003713x^{11} - 797483716x^{10} + 394944745x^9 - 187107010x^8 + 90606893x^7 - 41314636x^6 + 15435629x^5 - 4190091x^4 + 495979x^3 - 41215x^2 - 1593x - 14) / (x-1)^{13}$

k zebras / toroidal board

n	2 zebras	3 zebras	4 zebras	5 zebras	6 zebras	7 zebras
1						
2	2	0	0			
3	18	6	0	0	0	0
4	88	208	228	128	56	16
5	250	1300	3850	6745	7100	4450
6	558	4908	27225	100332	252792	442980
7	980	10584	68796	283906	764596	1359288
8	1760	27584	275888	1872064	8972896	31404480
9	2916	61992	872532	8643186	62560728	339256836
10	4550	125300	2345525	31809320	325631900	2591812000
11	6776	233772	5580762	98179400	1323868260	14053530964
12	9720	409584	12107628	267536880	4598530296	63185049648
13	13520	682084	24392446	659014148	13999957296	240344165256
14	18326	1089172	46261537	1496908840	38413461800	803630856504
15	24300	1678800	83426400	3179369070	96746398800	2416669791300
16	31616	2510592	144157632	6382030592	226834407552	6655251717376
17	40460	3657584	240119696	12207535134	500492554772	17015561803876
18	51030	5208084	387393921	22396355496	1048044367080	?
19	63536	7267652	607715342	39617305308	2096986607648	?
20	78200	9961200	929951100	67860021680	4031211244200	?
21	95256	13435212	1391849802	112956057144	7479454031784	?
22	114950	17860084	2042092921	183260096008	13444475606408	?
23	137540	23432584	2942680996	290528248402	23488010713484	?
24	163296	30378432	4171689072	451036403136	39990864999456	?
25	192500	38955000	5826427500	686988268250	66512828917500	?
26	225446	49454132	8027045897	1028270026056	108283461142376	?
27	262440	62205084	10920619746	1514616507792	172862430028344	?
28	303800	77577584	14685760796	2198262481968	271017166643048	?
29	349856	95985012	19537794102	3147162080324	417876267966864	?
30	400950	117887700	25734546225	4448869586280	634429601458200	?

9.1) k Wazirs on an n x n chessboard - k vezírů na šachovnici n x n

Vezír je [0,1] skokan. Pochází z čínského šachu. V novodobé historii publikoval první úlohu s ním T. R. Dawson 24.4.1913 v Cheltenham Examiner. *Wazir is a leaper [0,1]*.



A172225 - 2 wazirs, board $n \times n$: (C. Poisson, 1990)

$$\frac{n(n-1)(n^2+n-4)}{2}$$

A172226 - 3 wazirs, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 29.1.2010), $n \geq 2$

$$\frac{(n-2)(n^5+2n^4-11n^3-10n^2+42n-12)}{6}$$

A172227 - 4 wazirs, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 29.1.2010), $n \geq 3$

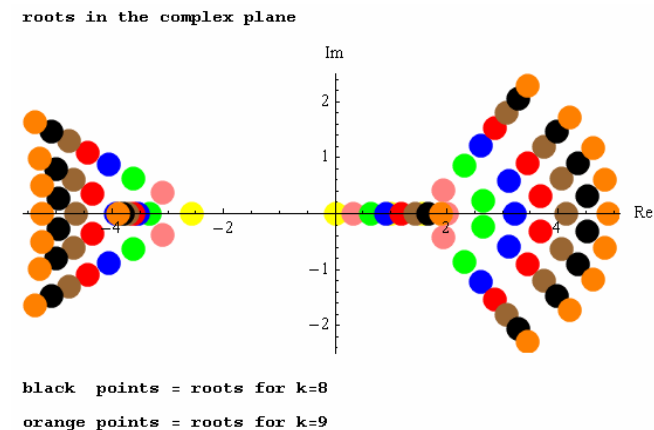
$$\frac{n^8-30n^6+24n^5+323n^4-504n^3-1110n^2+2760n-1224}{24}$$

A172228 - 5 wazirs, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 29.1.2010), $n \geq 4$

$$\frac{n^{10}-50n^8+40n^7+995n^6-1560n^5-8890n^4+21080n^3+24264n^2-97440n+59520}{120}$$

A178409 - 6 wazirs, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 27.5.2010), $n \geq 5$

$$\frac{n^{12}-75n^{10}+60n^9+2365n^8-3720n^7-38085n^6+89580n^5+292834n^4-984960n^3-552240n^2+4128960n-3160800}{720}$$



A201507 - 7 **wazirs**, board $n \times n$: (*V. Kotěšovec, 2.12.2011*), $n \geq 6$

$$\frac{n^{14}}{5040} - \frac{n^{12}}{48} + \frac{n^{11}}{60} + \frac{137n^{10}}{144} - \frac{3n^9}{2} - \frac{1139n^8}{48} + \frac{223n^7}{4} + \frac{59293n^6}{180} - \frac{3191n^5}{3} - \frac{8719n^4}{4} + \frac{51737n^3}{5} + \frac{10914n^2}{7} - 40708n + 37228$$

A201508 - 8 **wazirs**, board $n \times n$: (*V. Kotěšovec, 2.12.2011*), $n \geq 7$

$$\frac{n^{16}}{40320} - \frac{n^{14}}{288} + \frac{n^{13}}{360} + \frac{623n^{12}}{2880} - \frac{41n^{11}}{120} - \frac{5521n^{10}}{720} + \frac{649n^9}{36} + \frac{941767n^8}{5760} - \frac{12485n^7}{24} - \frac{577177n^6}{288} + \frac{3102289n^5}{360} + \frac{12378183n^4}{1120} - \frac{1545219n^3}{20} + \frac{1588751n^2}{120} + \frac{581605n}{2} - 308806$$

A201510 - 9 **wazirs**, board $n \times n$: (*V. Kotěšovec, 2.12.2011*), $n \geq 8$

$$\frac{n^{18}}{362880} - \frac{n^{16}}{2016} + \frac{n^{15}}{2520} + \frac{349n^{14}}{8640} - \frac{23n^{13}}{360} - \frac{277n^{12}}{144} + \frac{163n^{11}}{36} + \frac{199529n^{10}}{3456} - \frac{4381n^9}{24} - \frac{313811n^8}{288} + \frac{1622087n^7}{360} + \frac{1073654363n^6}{90720} - \frac{12207881n^5}{180} - \frac{24979477n^4}{504} + \frac{72278641n^3}{126} - \frac{11491519n^2}{45} - \frac{6271604n}{3} + 2530368$$

První členy polynomu mají tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{5n^{2k-2}}{2(k-2)!} + \frac{2n^{2k-3}}{(k-2)!} + \frac{(75k+23)n^{2k-4}}{24(k-3)!} - \frac{(5k+1)n^{2k-5}}{(k-3)!} - \frac{(125k^3 - 260k^2 - 393k - 48)n^{2k-6}}{48(k-3)!} + \frac{(75k^2 + 53k - 32)n^{2k-7}}{12(k-4)!} + \dots$$

Maximal number of non-attacking wazirs on an $n \times n$ chessboard is $\left\lfloor \frac{n^2+1}{2} \right\rfloor$, see chapter 14 for more.

For number of ways to place k non-attacking wazirs on a $1 \times n$ chessboard, see chapter 2.1.1

k	k Wazirs on an n x n chessboard - Generating function
2	$\frac{2x^2(2x^2 - 7x - 1)}{(x - 1)^5}$
3	$2x^3 * \frac{x^5 - 9x^4 + 22x^3 - 2x^2 - 61x - 11}{(x - 1)^7}$
4	$-\frac{x^3(4x^8 - 26x^7 + 3x^6 + 303x^5 - 736x^4 + 180x^3 + 1595x^2 + 351x + 6)}{(x - 1)^9}$
5	$\frac{x^3(6x^{11} - 26x^{10} - 93x^9 + 527x^8 + 490x^7 - 6710x^6 + 13630x^5 - 3954x^4 - 26364x^3 - 7452x^2 - 293x - 1)}{(x - 1)^{11}}$
6	$-2x^4 * \frac{4x^{13} - 17x^{12} + 3x^{11} - 469x^{10} + 4084x^9 - 10233x^8 - 3482x^7 + 66494x^6 - 125152x^5 + 35457x^4 + 265655x^3 + 93655x^2 + 6584x + 57}{(x - 1)^{13}}$
7	$\frac{2*x^4*(5*x^{16} - 31*x^{15} + 193*x^{14} - 1683*x^{13} + 5093*x^{12} + 12431*x^{11} - 111239*x^{10} + 214181*x^9 + 187845*x^8 - 1518841*x^7 + 2546483*x^6 - 775465*x^5 - 6212549*x^4 - 2702167*x^3 - 286637*x^2 - 6249*x - 10)}{(x-1)^{15}}$
8	$\frac{-x^4*(12*x^{19} - 122*x^{18} + 1130*x^{17} - 6776*x^{16} + 11180*x^{15} + 33894*x^{14} + 82772*x^{13} - 1938093*x^{12} + 7575029*x^{11} - 10487057*x^{10} - 11993287*x^9 + 70715064*x^8 - 109013258*x^7 + 41757444*x^6 + 331980470*x^5 + 173609451*x^4 + 25561181*x^3 + 1022241*x^2 + 7123*x + 2)}{(x-1)^{17}}$
9	$\frac{x^5*(14*x^{21} - 226*x^{20} + 2514*x^{19} - 15414*x^{18} + 54363*x^{17} - 241813*x^{16} + 1440666*x^{15} - 4412622*x^{14} - 2699713*x^{13} + 64333547*x^{12} - 202456488*x^{11} + 209746960*x^{10} + 407620979*x^9 - 1743413585*x^8 + 2469587594*x^7 - 1465834094*x^6 - 9995512037*x^5 - 6126508561*x^4 - 1179686478*x^3 - 74030494*x^2 - 1198134*x - 2578)}{(x-1)^{19}}$

n	1 wazir	2 wazirs	3 wazirs	4 wazirs	5 wazirs	6 wazirs	7 wazirs	8 wazirs	9 wazirs	10 wazirs	summed over all k >= 0, A006506
1	1										2
2	4	2	0	0							7
3	9	24	22	6	1	0	0	0	0		63
4	16	96	276	405	304	114	20	2	0	0	1234
5	25	260	1474	5024	10741	14650	12798	7157	2578	618	55447
6	36	570	5248	31320	127960	368868	763144	1143638	1247116	991750	5598861
7	49	1092	14690	133544	870589	4216498	15516804	44031035	97284860	168434824	1280128950
8	64	1904	35012	446421	4197456	30222074	170842828	771464278	2817340064	8395593732	660647962955
9	81	3096	74326	1258590	16005187	158918030	1264750240	8219304992	44218721793	198973974774	770548397261707
10	100	4770	144544	3126724	51439096	669582340	7084450248	62114308624	457851259868	2868879752822	2030049051145980050
11	121	7040	262398	7042930	145085447	2387463550	32251861624	364798895986	3506596268191	28976973404126	12083401651433651945979
12	144	10032	450580	14669709	369074128	7470004954	125030824732	1765597908290	21355746900992	223875748457940	162481813349792588536582997
13	169	13884	739002	28658436	863338777	21036576578	426265242412	7329246973785	108582220087480	1402736998276334	4935961285224791538367780371090
14	196	18746	1166176	53069000	1883786680	54315955588	1308045124808	26849172347850	477032549147428	7425470237502314	338752110195939290445247645371206783
15	225	24780	1780714	93909924	3875953561	130382565930	3675893768908	88645482921449	1857084405493128	34211618699877534	52521741712869136440040654451875316861275
16	256	32160	2642948	159819965	7583888944	294116445082	9586626461484	268042562131202	6529640029479296	140292065573112244	18396766424410124752958806046933947217821482942
17	289	41072	3826670	262913874	14206566327	628800849110	23445303141400	751635857876290	21044674478336823	520941837886274222	14557601701834111295974187104248827765798599152358303
18	324	51714	5420992	419816676	25617069208	1282821452132	54219244028296	1974215715426992	62903854631232636	1775596290786666966	26024585612650837861658126921792857026992497268285945167621

(wrong values in this table for 4 wazirs on 3x3 and 5 wazirs on 4x4 in 3rd edition were corrected in 4th edition)

Values for $19 \leq n \leq 35$ see [OEIS](#)

Poslední sloupec určuje počet rozmístění **libovolného počtu** neohrožujících se vezírů na normální šachovnici $n \times n$, viz sekvence [A006506](#) - *Number of non-attacking princes on an $n \times n$ board, where a "prince" attacks the four adjacent (non-diagonal) squares.* Názvem "Prince" je zde označován vezír (*Prince = Wazir*). Pokud v tabulce výše sečteme vždy všechna čísla v celé řádce (až do hodnoty 0), platí, že tento součet je roven [A006506](#)(n) - 1. Rozdíl o 1 je způsoben tím, že v sekvenci z OEIS se započítává ještě i případ $k=0$. Tedy např. pro $n=4$ dostáváme pro $k = 1$ až 8 součet 1233, [A006506](#)(4) = 1234. Hodnoty této sekvence jsou známy až do $n \leq 35$, viz [OEIS](#). Na výpočtu této sekvence se podíleli R. H. Hardin, Paul Zimmermann (1996), Robert Gerbicz (16.6.2011), P. Butera a M. Pernici (2014). Asymptotické chování je následující (Brendan McKay, 2003):

$$1.0660826603 * 1.143519129587^n * 1.5030480824753322643220663294755536893857810^{n^2}$$

1.50304808247533226... je tzv. **Hard square entropy constant**, což nás dostává od šachu, např. do teorie kódování, komprese dat a samo-opravných kódů. Na 43 desetinných míst ji vypočetl v roce 1998 R. J. Baxter, viz [Planar Lattice Gases with Nearest-Neighbour Exclusion](#). Annals of Combinatorics, 3/1999, str. 191-203 nebo [OEIS A085850](#). Viz též S. R. Finch, [Several Constants Arising in Statistical Mechanics](#) (1999), str.7. O podobné konstantě pro krále viz str. 69.

Metodou druhých diferencí dostaneme z vypočtených hodnot naší sekvence pro tuto konstantu velmi dobrý odhad:

$$N[E^{(\text{Differences}[\text{Table}[\text{Log}[\text{sumwaznn}[\text{n}]]], \{\text{n}, 20, 33\}], 2) / 2}, 12]$$

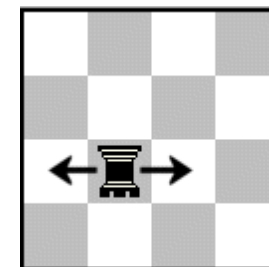
$$\{1.50304807566, 1.50304808557, 1.50304808107, 1.50304808311, 1.50304808219, 1.50304808261, 1.50304808241, 1.50304808250, 1.50304808246, 1.50304808248, 1.50304808247, 1.50304808248\}$$

9.1.1) k semi-wazirs on an n x n chessboard - k semi-vezírů na šachovnici n x n

Two semi-wazirs do not attack each other if they are in the same column.

Tato úloha je spíše matematická než šachová. Semi-vezír je poloviční vezír, který se může pohybovat s krokem $[1,0]$ nebo $[-1,0]$, zůstává tedy pouze ve svém řádku. Z matematického pohledu jde o počet čtvercových binárních matic $n \times n$ (matic obsahujících pouze nuly a jedničky) takových, že v žádném řádku nejsou vedle sebe dvě jedničky.

The numbers of $n \times n$ binary matrices with no adjacent 1s in rows.



Pro jeden řádek byla úloha již vyřešena v kapitole 2.1.1. Odtud vyplývá, že maximální počet nenapadajících se semi-vezírů na šachovnici $n \times n$ je $n \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, více viz tabulka na str. 776. Jednoduchá kombinatorická úvaha pak vede ke vzorci pro počet pozic

$$\sum_{k_j} \prod_{j=1}^n \binom{n - k_j + 1}{k_j}$$

kde suma součinů je přes všechna taková k_j (partitions), že

$$\sum_{j=1}^n k_j = k \quad 0 \leq k_j \leq k$$

V programu Mathematica se dá efektivně počítat takto (program je funkční pro libovolná k, n).

```
(* k non-attacking semi-wazirs, normal board n x n *)
(* V. Kotesovec, 2011 *)
permpak[part_, k_] := (hist=ConstantArray[0, k];
Do[hist[[part[[t]]]]++, {t, 1, Length[part]}];
(Length[part])!/Product[(hist[[t]])!, {t, 1, k}]);
wazln[k_, n_] := (If[n-k+1 < k, 0, Binomial[n-k+1, k]]);
semiwaz[k_, n_] := (psum=0;
Do[p=IntegerPartitions[k, {size}];
psum=psum+Sum[permpak[p[[i]], k]*Binomial[n, Length[p[[i]]]]*Product[wazln[p[[i, j]], n], {j, 1, Length[p[[i]]]}], {i, 1, Length[p]}],
{size, 1, n}];
psum);
(* example, table for k=5 *)
Table[semiwaz[5, n], {n, 1, 20}]
```

Pro pevná k odtud dostáváme následující polynomy

2 semi-wazirs, board $n \times n$:

$$\frac{1}{2}(n-1)^2n(n+2)$$

3 semi-wazirs, board $n \times n$: ($n > 1$)

$$\frac{1}{6}(n-2)n(n+2)(n^3-5n+6)$$

4 semi-wazirs, board $n \times n$: ($n > 2$)

$$\frac{1}{24}n(n+2)(n^6-2n^5-14n^4+40n^3+27n^2-186n+174)$$

5 semi-wazirs, board $n \times n$: ($n > 3$)

$$\frac{1}{120}n(n+2)(n^2-8)(n^6-2n^5-18n^4+56n^3+47n^2-354n+390)$$

6 semi-wazirs, board $n \times n$: ($n > 4$)

$$\frac{1}{720}n(n+2)(n^{10}-2n^9-41n^8+112n^7+581n^6-2182n^5-2611n^4+17972n^3-7770n^2-53340n+67440)$$

7 semi-wazirs, board $n \times n$: ($n > 5$)

$$\frac{n(n+2)(n+4)(n^2-12)(n^9-6n^8-23n^7+228n^6-151n^5-2514n^4+6323n^3+4392n^2-33870n+35700)}{5040}$$

8 semi-wazirs, board $n \times n$: ($n > 6$)

$$\frac{n(n+2)(n^{14}-2n^{13}-80n^{12}+216n^{11}+2578n^{10}-9020n^9-40760n^8+191280n^7+281089n^6-2197658n^5+195400n^4+13033464n^3-13103748n^2-31198440n+50142960)}{40320}$$

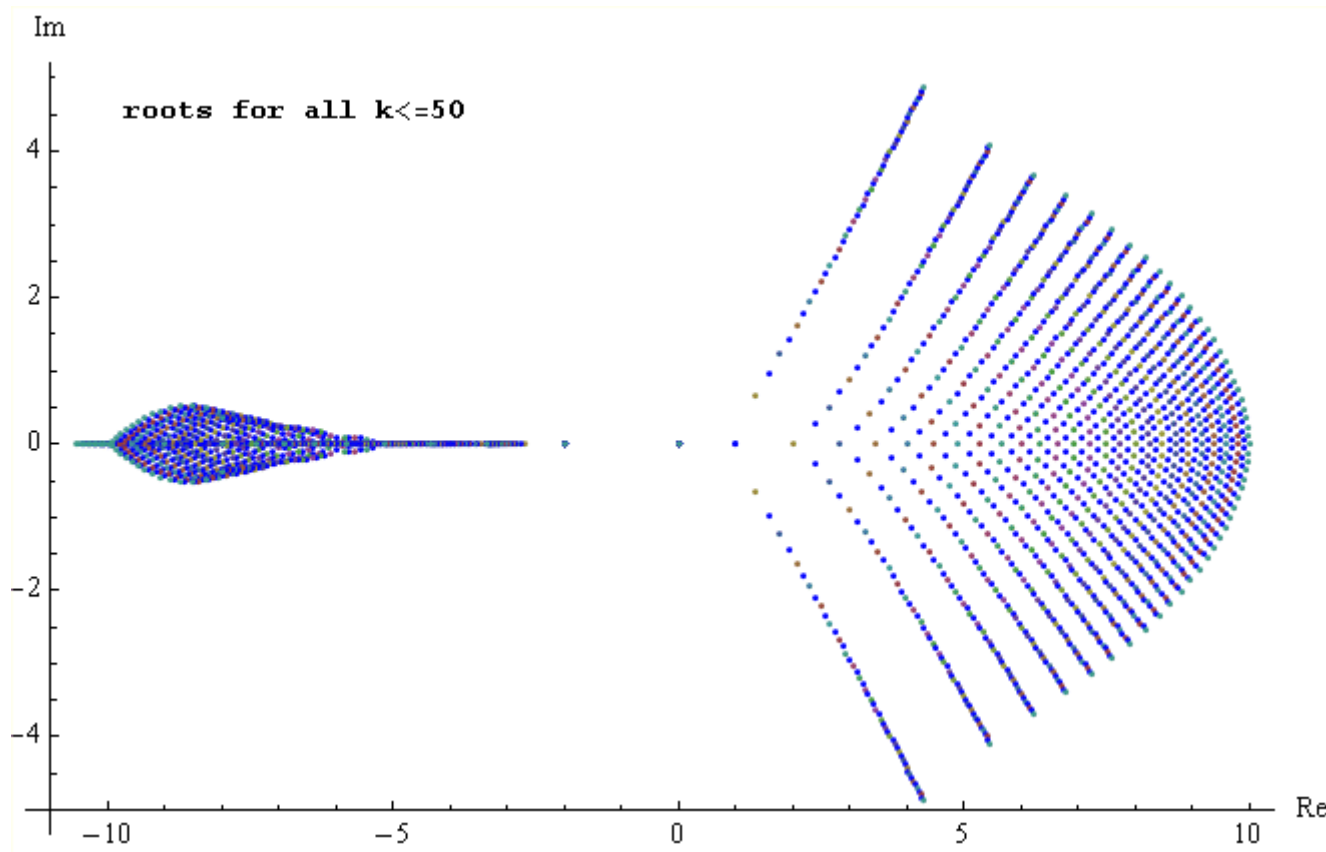
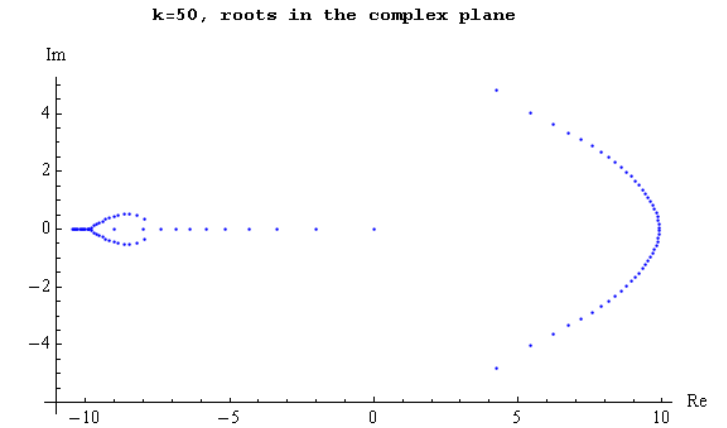
9 semi-wazirs, board $n \times n$: ($n > 7$)

$$\frac{(n-4)n(n+2)(n+4)(n^{14}-2n^{13}-88n^{12}+248n^{11}+3114n^{10}-11628n^9-53552n^8+273712n^7+385577n^6-3460426n^5+720936n^4+22383864n^3-25954596n^2-57816360n+103889520)}{362880}$$

a snadno jdou vypočítat další...

V případě většiny ostatních kamenů bylo vždy možné určit jenom několik prvních polynomů, z čehož se špatně odhadují nějaké obecné vlastnosti. V případě **semi-vezírů** jsem vygeneroval všechny polynomy až do $k=50$, což umožnilo lépe analyzovat rozložení jejich kořenů. Pokud si kořeny zobrazíme jako body v komplexní rovině, dostaneme pro $k=50$ tento zajímavý graf (vpravo).

Následující graf představuje složení všech takovýchto grafů pro všechna $k \leq 50$. Nejvíce zajímavé je to, že kořeny (resp. jejich reálná i imaginární část) jsou vesměs **malá čísla** (*complex roots are small numbers*), i když koeficienty polynomů jsou (relativně) obrovská čísla. Např. pro $k=50$ je koeficient u n^1 roven $266466977784275253706769552716/25 = 1.06587... \cdot 10^{28}$



k	Re(z)		Im(z)		Abs(z)	
	min	max	min	max	min	max
1	0	0	0	0	0	0
2	-2.00000000000000	1.00000000000000	0	0	0	2.00000000000000
3	-2.68909532363766	2.00000000000000	-0.65071133746650	0.65071133746650	0	2.68909532363766
4	-3.16323449054253	2.37982765073838	-0.97187694510989	0.97187694510989	0	3.16323449054253
5	-3.53664870927712	2.82842712474619	-1.22550232918994	1.22550232918994	0	3.53664870927712
6	-3.85437816324293	3.12785481094194	-1.43970691555702	1.43970691555702	0	3.85437816324293
7	-4.14011708231415	3.46410161513775	-1.62708064466060	1.62708064466060	0	4.14011708231415
8	-4.40508519118707	3.72010560672373	-1.79470850189809	1.79470850189809	0	4.40508519118707
9	-4.65332371908249	4.00000000000000	-1.94706417266342	1.94706417266342	0	4.65332371908249
10	-4.88748057855974	4.2749233761235	-2.08718599435407	2.08718599435407	0	4.88748057855974
11	-5.10977163741683	4.44213595499958	-2.21724634542124	2.21724634542124	0	5.10977163741683
12	-5.32182596643449	4.67900202859270	-2.33885968884427	2.33885968884427	0	5.32182596643449
13	-5.52493752571235	4.89897948556636	-2.45326280788390	2.45326280788390	0	5.52493752571235
14	-5.72015334884045	5.09000998422126	-2.56142667862511	2.56142667862511	0	5.72015334884045
15	-5.90832689777928	5.29150262212918	-2.66412921529055	2.66412921529055	0	5.90832689777928
16	-6.09016993683826	5.46987229880604	-2.76200439369814	2.76200439369814	0	6.09016993683826
17	-6.26628130590865	5.65685424949238	-2.85557648102356	2.85557648102356	0	6.26628130590865
18	-6.43717103811008	5.82479754870214	-2.94528452942590	2.94528452942590	0	6.43717103811008
19	-6.60327781041473	6.00000000000000	-3.03150030707142	3.03150030707142	0	6.60327781041473
20	-6.76498204217281	6.15916101010286	-3.11454168755524	3.11454168755524	0	6.76498204217281
21	-6.92261628949468	6.3245532033676	-3.19468282342032	3.19468282342032	0	6.92261628949468
22	-7.07647321906509	6.47618589236320	-3.27216199611462	3.27216199611462	0	7.07647321906509
23	-7.22681202341951	6.63324958071080	-3.34718775683287	3.34718775683287	0	7.22681202341951
24	-7.37386354252100	6.77832923884533	-3.41994378996025	3.41994378996025	0	7.37386354252100
25	-7.51783442375873	6.92820323027551	-3.49059280797289	3.49059280797289	0	7.51783442375873
26	-7.65891053166208	7.06751564105203	-3.55927970237189	3.55927970237189	0	7.65891053166208
27	-7.79725975965438	7.21110255092798	-3.62613411636801	3.62613411636801	0	7.79725975965438
28	-7.93303437366096	7.34528638687437	-3.69127256324878	3.69127256324878	0	7.93303437366096
29	-8.06637297521172	7.48331477354788	-3.75480018425220	3.75480018425220	0	8.06637297521172
30	-8.19740215916884	7.61289874078194	-3.81681221778050	3.81681221778050	0	8.19740215916884
31	-8.32623792125050	7.74596669241483	-3.87739523552285	3.87739523552285	0	8.32623792125050
32	-8.45298686029262	7.87139436641556	-3.93662818888746	3.93662818888746	0	8.45298686029262
33	-8.57774721070222	8.00000000000000	-3.99458329994195	3.99458329994195	0	8.57774721070222
34	-8.70060973342814	8.12164787819716	-4.05132682403297	4.05132682403297	0	8.70060973342814
35	-8.82165848854670	8.24621125123532	-4.10691970583977	4.10691970583977	0	8.82165848854670
36	-8.94097150806705	8.36440215957575	-4.16141814640490	4.16141814640490	0	8.94097150806705
37	-9.05862138431183	8.48528137423857	-4.21487409538521	4.21487409538521	0	9.05862138431183
38	-9.17467578644875	8.60029461147364	-4.26733568015999	4.26733568015999	0	9.17467578644875
39	-9.28919791562346	8.71779788708135	-4.31884758136058	4.31884758136058	0	9.28919791562346
40	-9.40224690738244	8.82987702806518	-4.36945136272691	4.36945136272691	0	9.40224690738244
41	-9.51387818865997	8.94427190999916	-4.41918576185926	4.41918576185926	0	9.51387818865997
42	-9.62414379544733	9.05363089658219	-4.46808694735059	4.46808694735059	0	9.62414379544733
43	-9.73309265630969	9.16515138991168	-4.51618874690192	4.51618874690192	0	9.73309265630969
44	-9.84077084613470	9.27197934768760	-4.56352285029963	4.56352285029963	0	9.84077084613470
45	-9.94722181384559	9.38083151964686	-4.61011899053823	4.61011899053823	0	9.94722181384559
46	-10.0524865872714	9.48529661206174	-4.65600510587906	4.65600510587906	0	10.0524865872714
47	-10.1566039579140	9.59166304662544	-4.70120748522557	4.70120748522557	0	10.1566039579140
48	-10.2596106479716	9.69391559172898	-4.74575089885419	4.74575089885419	0	10.2596106479716
49	-10.3615414616580	9.79795897113271	-4.78965871625248	4.78965871625248	0	10.3615414616580
50	-10.4624294225856	9.89813398645379	-4.83295301257550	4.83295301257550	0	10.4624294225856
51	-10.5623058987491	10.00000000000000	-4.87565466502693	4.87565466502693	0	10.5623058987491

Tabulka minimálních a maximálních hodnot komplexních kořenů polynomů.
Table of minimal and maximal values of complex roots of the polynomials.

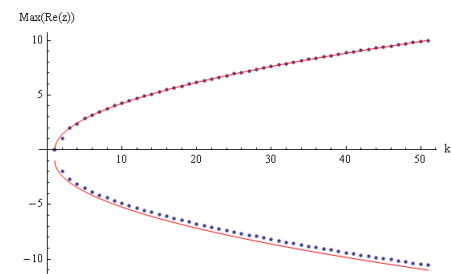
Z tabulky jde vypočítat jednu pěknou závislost. Vidíme, že maximální hodnota reálné části komplexních kořenů polynomu pro $k=9$ je přesně 4, podobně pro $k=19$ přesně 6, pro $k=33$ přesně 8. Kvůli tomu jsem vygeneroval ještě polynom pro $k=51$, kde se potvrdila očekávaná maximální hodnota reálné části rovna 10. Obecně pro tuto k dostáváme

$$\max(\operatorname{Re}(z)) = \sqrt{2(k-1)}$$

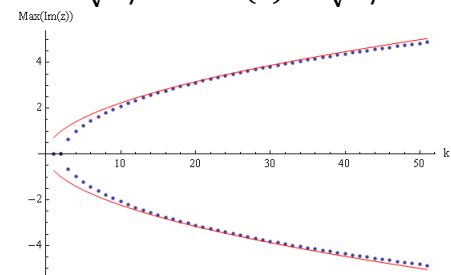
Další analýzou zjistíme, že pro lichá k platí tato rovnost přesně, pro sudá k představuje horní omezení (*this equality is true if k is odd*). Obecně mám tyto hypotézy:

Conjecture:

$$-1 - \sqrt{2k-2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \sqrt{2k-2}$$



$$-\sqrt{k/2} \leq \operatorname{Im}(z) \leq \sqrt{k/2}$$



$$0 \leq \operatorname{Abs}(z) \leq 1 + \sqrt{2k-2}$$

Maximum absolutní hodnoty zde nastává pro kořeny s nulovou imaginární částí (a současně zápornou reálnou částí) - nejvíce vlevo v grafu na předchozí straně.

Všechny polynomy mají kořeny 0 a -2 a ještě jsem našel další typ kořenů, pro $k=7$ má polynom faktor $n+4$, pro $k=11$ faktor $n+5$, pro $k=16$ faktor $n+6$, pro $k=22$ faktor $n+7$, obecně pro

$$k = \frac{j^2 - j + 2}{2}$$

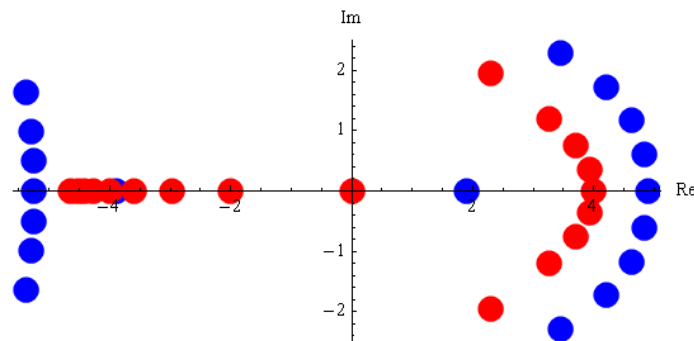
je v rozkladu vždy faktor $(n+j)$ a tedy kořen $-j$.

Odtud dostáváme pro kořeny polynomu stupně $k > 1$ ještě jiné nerovnosti

$$\min(\operatorname{Re}(z)) \leq -\frac{1 + \sqrt{8k - 7}}{2}$$

$$\max(\operatorname{Abs}(z)) \geq \frac{1 + \sqrt{8k - 7}}{2}$$

Roots in the complex plane



blue points = 9 wazirs, normal board

red points = 9 semi-wazirs, normal board

Obecně mají polynomy tvar:

$$\begin{aligned}
& \frac{n^{2k}}{k!} - \frac{3n^{2k-2}}{2(k-2)!} + \frac{n^{2k-3}}{(k-2)!} + \frac{(27k-1)n^{2k-4}}{24(k-3)!} - \frac{(3k-1)n^{2k-5}}{2(k-3)!} - \frac{(9k^2-k-8)n^{2k-6}}{16(k-4)!} + \frac{(27k^2-19k-8)n^{2k-7}}{24(k-4)!} + \frac{(1215k^3-270k^2-4315k-1438)n^{2k-8}}{5760(k-5)!} \\
& - \frac{(27k^3-30k^2-31k+26)n^{2k-9}}{48(k-5)!} - \frac{(243k^4-90k^3-2155k^2-1358k-480)n^{2k-10}}{3840(k-6)!} + \frac{(1215k^4-1890k^3-3415k^2+4762k+7008) * n^{2k-11}}{5760 * (k-6)!} \\
& + \frac{(45927k^5-25515k^4-813645k^3-724661k^2-393162k-967696) * n^{2k-12}}{2903040 * (k-7)!} - \frac{(243k^5-495k^4-1345k^3+2447k^2+7134k+7088) * n^{2k-13}}{3840 * (k-7)!} \\
& - \frac{(6561k^6-5103k^5-203175k^4-226457k^3-121842k^2-877312k-1556352) * n^{2k-14}}{1935360 * (k-8)!} + \frac{(45927k^6-117369k^5-439425k^4+959329k^3+4139730k^2+7720928k+9044352) * n^{2k-15}}{2903040 * (k-8)!} \\
& + \frac{(885735k^7-918540k^6-43834770k^5-57070440k^4-17259305k^3-427662300k^2-1618081516k-2167119216) * n^{2k-16}}{1393459200 * (k-9)!} \\
& - \frac{(19683k^7-61236k^6-298242k^5+752304k^4+4256987k^3+11119284k^2+25369156k+34273872) * n^{2k-17}}{5806080 * (k-9)!} \\
& - \frac{(98415k^8-131220k^7-7297290k^6-10600128k^5+2260615k^4-128093500k^3-780648556k^2-2092806896k-2616614400) * n^{2k-18}}{928972800 * (k-10)!} \\
& + \frac{(885735k^8-3280500k^7-19952730k^6+57032640k^5+395635135k^4+1279965860k^3+4252844084k^2+11572851856k+16034772480) * n^{2k-19}}{1393459200 * (k-10)!} \\
& + \frac{(5845851k^9-9743085k^8-618505470k^7-968893002k^6+1040757795k^5-17007521245k^4-149525774992k^3-600838087916k^2-1494004725488k-1870137815808) * n^{2k-20}}{367873228800 * (k-11)!} - \dots
\end{aligned}$$

Analýzou tohoto rozvoje zjistíme, že jde o dva součty členů u sudých a lichých mocnin n , které mají obecně tvar

$$\begin{aligned}
\text{semiw}(k, n) &= \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d 3^d n^{2k-2d}}{2^d d! k!} * k^{2d} * \left(1 - \frac{d(14d+13)}{27k} + \frac{d(d-1)(196d^2+100d+555)}{1458k^2} + \dots \right) \\
&+ \sum_{d=1}^{\infty} \frac{(-1)^{d-1} 3^{d-1} n^{2k-2d-1}}{2^{d-1} (d-1)! k!} * k^{2d} * \left(1 - \frac{14d^2+21d-8}{27k} + \frac{(d-1)(196d^3+468d^2+443d+48)}{1458k^2} + \dots \right)
\end{aligned}$$

Tyto řady jdou sečíst a dostaneme následující asymptotický rozvoj, který platí pro $k \leq O(n)$.

Theorem (V. Kotěšovec, 15.10.2011)

For $k \leq O(n)$ is asymptotics:

$$\text{semiw}(k, n) = \frac{n^{2k}}{k!} * e^{-\frac{3k^2}{2n^2}} * \left(1 + \frac{3k}{2n^2} + \frac{k(k-1)}{n^3} - \frac{k(k-2)(28k-1)}{24n^4} + \frac{k(k-1)(7k-2)}{2n^5} + \dots \right)$$

Tento výraz vysvětluje (dlouho hledanou) vlastnost těchto vzorců, kdy pro konstantní k jsou to polynomy stupně $2k$, ale chovají se zcela jinak pokud se k blíží k n . Zajímavý je případ $k = n$ (A197989), kdy využijeme příjemnou vlastnost předchozího rozvoje, který platí nejen pro konstantní k . Pokud půjde n do nekonečna, dostaneme (při použití více členů)

$$\text{semiw}(n, n) = \frac{n^{2n}}{n!} * e^{-\frac{3}{2}} * \left(1 + \frac{4}{3n} + \frac{17}{9n^2} + \frac{77}{810n^3} + \frac{229}{1944n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \right)$$

Nebo pomocí limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^{2n}} * \text{semiw}(n, n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j 3^j}{2^j j!} = e^{-\frac{3}{2}}$$

Tento výsledek je i v očekávaném souladu s přesným vzorcem pro prstencovou šachovnici (viz kapitola 9.3.1) a potvrzují ho i numerické výpočty, viz graf. Programem se mi podařilo vypočítat celkem 108 hodnot této posloupnosti. Numericky vychází pro $n=108$ podíl $(n^{2n}/n!)/(e^{3/2})/\text{semiw}(n, n)$ roven 0.987646812 (viz též graf vpravo), použijeme-li však Richardsonovu extrapolaci (viz str. 328) z hodnot pro $n=108$ a $n=54$, dostaneme pro tuto limitu daleko "přesvědčivější" hodnotu 1.000007136. Z předchozího (vícečlenného) asymptotického rozvoje dostaneme pro $n=108$ hodnotu podílu 0.999999999180696424.

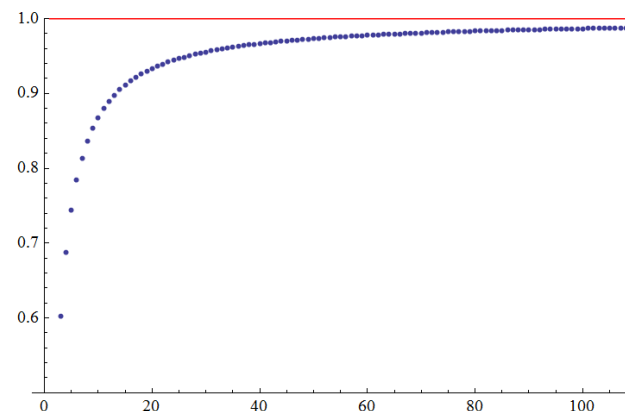
Vezmeme-li jen první člen z asymptotického rozvoje, platí

$$\text{semiw}(n, n) \sim \frac{n^{2n}}{n! e\sqrt{e}} \sim \frac{n^n e^{n-1}}{\sqrt{2\pi en}} \sim n * \binom{n^2 - n - 1}{n-1} \sim \binom{n^2}{n} * e^{-1}$$

Ovšem další členy v asymptotickém rozvoji $n \binom{n^2 - n - 1}{n-1}$ se už liší, viz vzorce pro prstencovou šachovnici, str. 408.

Pravděpodobnost, že se n náhodně rozmístěných semi-vezírů na šachovnici $n \times n$ nenapadá, je asymptoticky $1/e = 0.36787944\dots$

```
Show[ListPlot[Table[(n^(2n)/n!)/(E^(3/2))/semiwn[n],
  {n, 1, Length[semiwn]}], AxesOrigin -> {0, 0.5},
  PlotRange -> {0.5, 1}],
  Plot[1, {n, 1, Length[semiwn]}, PlotStyle -> Red]]
```



Speciálně, pokud bude k násobkem n , $k = p * n$ (v předchozím případě bylo $p = 1$), dostaneme asymptotický vzorec (analogický jako pro prstencovou šachovnici !)

$$\text{semiw}(p * n, n) \sim \frac{n^{2pn}}{(pn)!} * e^{-\frac{3p^2}{2}} \sim \frac{n^{pn} e^{pn}}{p^{pn} \sqrt{2\pi pn}} * e^{-\frac{3p^2}{2}} \sim \binom{n^2 - pn}{pn}$$

Např.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{n^{4n}} * \text{semiw}(2n, n) = e^{-6}$$

k semi-wazirs on an n x n normal board

n	1 semi-wazir	2 semi-wazirs	3 semi-wazirs	4 semi-wazirs	5 semi-wazirs	6 semi-wazirs	7 semi-wazirs	8 semi-wazirs	9 semi-wazirs	summed over all k >= 0, A067966
1	1									2
2	4	4	0	0						9
3	9	30	45	30	9	1	0	0	0	125
4	16	108	400	886	1200	972	432	81	0	4096
5	25	280	1855	8085	24395	52220	79955	87210	66780	371293
6	36	600	6144	43260	222096	860336	2567040	5970864	10888640	85766121
7	49	1134	16485	168882	1296666	7747068	36914493	142645986	452153709	52523350144
8	64	1960	38240	533860	5679072	47864208	328111680	1863645610	8890099680	83733937890625
9	81	3168	79695	1449261	20300643	227916084	2107058382	16354667835	108131503623	350356403707485209
10	100	4860	152960	3505070	62334600	895569840	10683763200	107951007285	937777163620	3833759992447475122176
11	121	7150	274989	7740590	170024998	3034276388	45229655185	574582127548	6316160227520	109879109551310452512114617
12	144	10164	468720	15882762	421688400	9134730304	166006498944	2582751119091	34934211312000	8243206936713178643875538610721
13	169	14040	764335	30668365	967198323	24968004412	542530272310	10127030956575	164924925392435	161915287432152755657581000000000000
14	196	18928	1200640	56267736	2077774496	62962498592	1610150067456	35467174384460	683471602342256	832607152514397063149538100851561865157289
15	225	24990	1826565	98829330	4221728490	148292556860	4405026252525	112946429869290	2539040231542430	1120917738905293103870369860777283473635634507093
16	256	32400	2702784	167166120	8175994560	329361231840	11239138423680	331612553298996	8593278071800000	
17	289	41344	3903455	273606517	15185829819	695151161940	26992778876550	907532979726751	26836546090431883	
18	324	52020	5518080	435034170	27188031384	1402982140416	61482683433600	2335641063247755	78130848473168700	
19	361	64638	7653485	674142686	47116420134	2721616944900	133637329976145	5693857545807180	213835437035567424	
20	400	79420	10435920	1020932990	79312211440	5096473255280	278613624731200	13227388137276445	553994702130080640	
n	1 semi-wazir	2 semi-wazirs	3 semi-wazirs	4 semi-wazirs	5 semi-wazirs	6 semi-wazirs	7 semi-wazirs	8 semi-wazirs	9 semi-wazirs	$(F_{n+2})^n$

Součet přes všechna k (včetně 0) vede na sekvenci [A067966](#) - *Number of binary arrangements without adjacent 1's on $n \times n$ array connected North-South.* (R. H. Hardin, 2.2.2002)

$$(F_{n+2})^n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right) \right)^n$$

kde F_n jsou [Fibonacciho čísla](#). Důkaz tohoto tvrzení vyplývá ihned ze vzorce uvedeného v kapitole 2.1.1, kde byla úloha vyřešena pro jeden řádek. Je třeba si ale uvědomit, že nejde jednoduše sečíst polynomy ze strany 374 přes všechna k , protože tyto vzorce platí až pro $n > k - 2$ (jak je vyznačeno červenými čísly v tabulce na této straně, kde vzorce ještě neplatí).

n	n semi-wazirs on an $n \times n$ board - A197989
1	1
2	4
3	45
4	886
5	24395
6	860336
7	36914493
8	1863645610
9	108131503623
10	7085585223652
11	517329551346608
12	41634263983867842
13	3661077644199252550
14	349191617521920855488
15	35902782820742394839453
16	3958207187579046500083794
17	465777357329812920074875295
18	58266620372069873644711725620
19	7721111579747182071051919076265
20	1080403256362375339106535915829396
21	159187562602673111229234434047939620
22	24634446232096688543775466106209926160
23	3994705831104764614732731905850633023550
24	677366123256703389209019119914799451090546
25	119874228917166659201337589533529212509187240
26	22101805578830373780471452552593311610811547196
27	4238632724845543193197405964897784214451594341188
28	844248176062235259538802199518764901456642057665180
29	174404920472800845185427802067853166371216767605843148
30	37319188464242336140878543420027369652393070904318324480
31-108	

9.1.2) n Wazirs on an $n \times n$ chessboard - n vezírů na šachovnici $n \times n$

Rozklad ze str. 370 můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{n^{2k}}{k!} \left(1 - \frac{5(k-1)k}{2n^2} + \frac{2(k-1)k}{n^3} + \frac{(k-2)(k-1)k(75k+23)}{24n^4} - \frac{(k-2)(k-1)k(5k+1)}{n^5} - \frac{(k-2)(k-1)k(125k^3 - 260k^2 - 393k - 48)}{48n^6} + \frac{(k-3)(k-2)(k-1)k(75k^2 + 53k - 32)}{12n^7} + \dots \right)$$

Při $k=n$ mají členy u lichých mocnin n v čitateli o 1 menší exponent a jdou asymptoticky k nule. Ze sudých členů dostáváme nekonečnou řadu

$$\frac{n^{2n}}{n!} \left(1 - \frac{5(n-1)n}{2n^2} + \frac{(n-2)(n-1)n(75n+23)}{24n^4} - \frac{(n-2)(n-1)n(125n^3 - 260n^2 - 393n - 48)}{48n^6} + \dots \right) \sim \frac{n^{2n}}{n!} * \left(1 - \frac{5}{2} + \frac{75}{24} - \frac{125}{48} + \dots \right)$$

Table [(-5/2)^n / n!, {n, 0, 5}]

{1, -5/2, 25/8, -125/48, 625/384, -625/768}

Tento rozvoj tak potvrzuje obecnější větu z kapitoly 13.1, kdy při počtu dostupných polí $m=4$ pro jednoho vezíra dostáváme

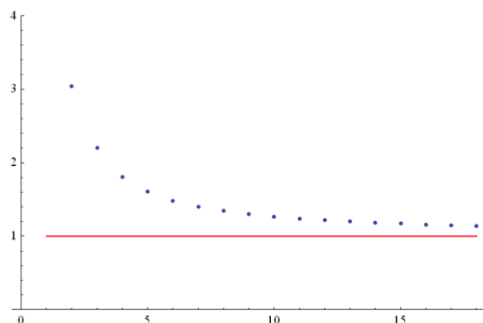
Number of ways to place n non-attacking wazirs on an $n \times n$ chessboard is asymptotic (for proof see chapter 13.1)

(V. Kotěšovec, 29.11.2011)

$$\frac{n^{2n}}{n!} * \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d 5^d}{2^d d!} = \frac{n^{2n}}{n!} * e^{-5/2} \sim \binom{n^2}{n} * e^{-2}$$

V souladu s výsledky z kapitoly 13.1 je pravděpodobnost, že se n náhodně rozmístěných vezírů na šachovnici $n \times n$ nebude ohrožovat, asymptoticky rovna $1/e^2 = 0.13533528\dots$

Show[`ListPlot[Table[wazir[n, n] / (n^(2n) / n! * E^(-5/2)), {n, 1, 18}], PlotRange -> {0, 4}], Plot[1, {n, 1, 18}, PlotStyle -> Red]`



n	n wazirs, board $n \times n$, A201511
1	1
2	2
3	22
4	405
5	10741
6	368868
7	15516804
8	771464278
9	44218721793
10	2868879752822
11	207739939478618
12	16602826428818482
13	1451305771147909684
14	137715836041691050398
15	14096224186664736126206
16	1547966111897855935957132
17	181519663430661533452513680
18	22636566614411901986006002896
19	2991260293412670340723657327292
20	417505401489091140564902916137753
21	?

Values for $11 \leq n \leq 18$ computed by Peter Tittmann

Je zajímavé, že hodnoty až do $n=18$ vypočítal Peter Tittmann při řešení trochu jiného problému, [Polynomials of \$n \times n\$ Grid Graphs](#), jde o polynomy ve sloupci $I(G,x)$ a tuto stránku jsem objevil náhodně, když jsem na internetu hledal číslo 2868879752822. V matematice se občas stane, že se ukáže, že dva jinak formulované problémy jsou vlastně shodné. Hodnoty pro $n=19$ a $n=20$ jsem vypočítal 30.8.2016 na počítači se 128 GB RAM, výpočet trval přes 90 hodin.

9.2) k Wazirs on an k x n chessboard - k vezírů na šachovnici k x n

2 wazirs, board 2 x n:

$$2(n-1)^2$$

A172229 - 3 wazirs, board 3 x n: (V. Kotěšovec, 29.1.2010), $n \geq 2$

$$\frac{(3n-5)(3n^2-8n+8)}{2}$$

A172230 - 4 wazirs, board 4 x n: (V. Kotěšovec, 29.1.2010), $n \geq 3$

$$\frac{64n^4 - 432n^3 + 1235n^2 - 1797n + 1122}{6}$$

A172231 - 5 wazirs, board 5 x n: (V. Kotěšovec, 29.1.2010), $n \geq 4$

$$\frac{625n^5 - 5750n^4 + 23535n^3 - 54202n^2 + 70640n - 41616}{24}$$

A172232 - 6 wazirs, board 6 x n: (V. Kotěšovec, 29.1.2010), $n \geq 5$

$$\frac{2 * (486n^6 - 5670n^5 + 30240n^4 - 95230n^3 + 187899n^2 - 220775n + 120540)}{15}$$

A172234 - 7 wazirs, board 7 x n: (V. Kotěšovec, 29.1.2010), $n \geq 6$

$$\frac{117649n^7 - 1663893n^6 + 10942729n^5 - 43685355n^4 + 114945646n^3 - 199980312n^2 + 213228096n - 107390880}{720}$$

A178410 - 8 wazirs, board 8 x n: (V. Kotěšovec, 27.5.2010), $n \geq 7$

$$\frac{1048576n^8 - 17432576n^7 + 136349696n^6 - 658958720n^5 + 2161896569n^4 - 4945969574n^3 + 7719028159n^2 - 7516702410n + 3494080800}{2520}$$

První členy těchto vzorců mají obecně tvar

$$\frac{(kn)^k}{k!} - (k-1)(5k-2) \frac{(kn)^{k-1}}{2k!} + \dots$$

k	k Wazirs on an k x n chessboard - Generating function
2	$-\frac{2 * (4x^2 - 3x + 1)}{(x - 1)^3}$
3	$x^2 * \frac{3x^3 + 8x^2 + 14x + 2}{(x - 1)^4}$
4	$-x^2 * \frac{4x^5 + 12x^4 + 67x^3 + 120x^2 + 51x + 2}{(x - 1)^5}$
5	$x^2 * \frac{5x^7 + 8x^6 + 129x^5 + 512x^4 + 1323x^3 + 984x^2 + 162x + 2}{(x - 1)^6}$
6	$-2x^2 * \frac{3x^9 - 5x^8 + 100x^7 + 354x^6 + 2548x^5 + 7572x^4 + 9248x^3 + 3262x^2 + 245x + 1}{(x - 1)^7}$
7	$x^2 * \frac{7x^{11} - 48x^{10} + 370x^9 + 40x^8 + 8541x^7 + 45282x^6 + 190420x^5 + 329248x^4 + 209261x^3 + 38958x^2 + 1462x + 2}{(x - 1)^8}$
8	$-x^2 * \frac{8x^{13} - 112x^{12} + 870x^{11} - 2812x^{10} + 15019x^9 + 41114x^8 + 494109x^7 + 2357839x^6 + 5805509x^5 + 5762254x^4 + 2079065x^3 + 219995x^2 + 4356x + 2}{(x - 1)^9}$

n	2 wazirs	3 wazirs	4 wazirs	5 wazirs	6 wazirs	7 wazirs	8 wazirs
1	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2	2
3	8	22	61	174	504	1478	4374
4	18	84	405	1998	10010	50726	259289
5	32	215	1502	10741	78052	573797	4255370
6	50	442	4072	38438	368868	3581924	35093344
7	72	792	9091	107004	1280832	15516804	189681689
8	98	1292	17791	251354	3612344	52550366	771464278
9	128	1969	31660	522528	8774380	149162199	2559099153
10	162	2850	52442	990816	19049692	370817854	7285273805
11	200	3962	82137	1748883	37898664	831571604	18416621598
12	242	5332	123001	2914894	70311824	1717417198	42342480425
13	288	6987	177546	4635639	123209012	3316210152	90097012004
14	338	8954	248540	7089658	205885204	6054985120	179755977430
15	392	11260	339007	10490366	330502992	10545491888	339666241815
16	450	13932	452227	15089178	512631720	17638773534	612682858064
17	512	16997	591736	21178634	771833276	28489610297	1061605357051
18	578	20482	761326	29095524	1132294540	44631652698	1776021648675
19	648	24414	965045	39224013	1623506488	68064067456	2880784715492
20	722	28820	1207197	51998766	2280989952	101350519742	4546364057835

9.2.1) k Wazirs on a 2 x n chessboard - k vezírů na šachovnici 2 x n

For board 1 x n see chapter 2.1.1

2 wazirs, board 2 x n:

$$2(n-1)^2$$

3 wazirs, board 2 x n: (V. Kotěšovec, 18.10.2011), $n \geq 2$

$$\frac{2}{3}(n-2)(2n^2-8n+9)$$

4 wazirs, board 2 x n: (V. Kotěšovec, 18.10.2011), $n \geq 3$

$$\frac{2}{3}(n-3)^2(n^2-6n+11)$$

5 wazirs, board 2 x n: (V. Kotěšovec, 18.10.2011), $n \geq 4$

$$\frac{2}{15}(n-4)(2n^4-32n^3+202n^2-592n+675)$$

6 wazirs, board 2 x n: (V. Kotěšovec, 18.10.2011), $n \geq 5$

$$\frac{2}{45}(n-5)^2(2n^4-40n^3+320n^2-1200n+1773)$$

7 wazirs, board 2 x n: (V. Kotěšovec, 19.10.2011), $n \geq 6$

$$\frac{2}{315}(n-6)(4n^6-144n^5+2230n^4-18960n^3+93076n^2-249456n+284445)$$

8 wazirs, board 2 x n: (V. Kotěšovec, 19.10.2011), $n \geq 7$

$$\frac{2}{315}(n-7)^2(n^2-14n+55)(n^4-28n^3+316n^2-1680n+3501)$$

9 wazirs, board 2 x n: (V. Kotěšovec, 19.10.2011), $n \geq 8$

$$\frac{2}{2835}(n-8)(2n^8-128n^7+3668n^6-61376n^5+654878n^4-4555712n^3+20149092n^2-51729984n+58948155)$$

10 wazirs, board 2 x n: (*V. Kotěšovec, 20.10.2011*), $n \geq 9$

$$\frac{2}{14175}(n-9)^2(2n^8 - 144n^7 + 4656n^6 - 88128n^5 + 1066146n^4 - 8428104n^3 + 42455392n^2 - 124438320n + 162302175)$$

11 wazirs, board 2 x n: (*V. Kotěšovec, 20.10.2011*), $n \geq 10$

$$\frac{2}{155925}(n-10)(4n^{10} - 400n^9 + 18330n^8 - 506400n^7 + 9331392n^6 - 119723520n^5 + 1082138270n^4 - 6797850800n^3 + 28379045754n^2 - 71037955080n + 80903089575)$$

12 wazirs, board 2 x n: (*V. Kotěšovec, 20.10.2011*), $n \geq 11$

$$\frac{2}{467775}(n-11)^2(2n^{10} - 220n^9 + 11110n^8 - 338800n^7 + 6901576n^6 - 98029360n^5 + 982299560n^4 - 6850594080n^3 + 31796085717n^2 - 88620151950n + 112551895575)$$

13 wazirs, board 2 x n: (*V. Kotěšovec, 20.10.2011*), $n \geq 12$

$$(2/6081075)*(n-12)*(4*n^{12} - 576*n^{11} + 38588*n^{10} - 1589280*n^9 + 44788722*n^8 - 909298368*n^7 + 13627722944*n^6 - 151818923520*n^5 + 1247009052124*n^4 - 7360525736256*n^3 + 29618491468518*n^2 - 72913276083600*n + 82999796054175)$$

14 wazirs, board 2 x n: (*V. Kotěšovec, 20.10.2011*), $n \geq 13$

$$(2/42567525)*(n-13)^2*(4*n^{12} - 624*n^{11} + 45344*n^{10} - 2028000*n^9 + 62129262*n^8 - 1372558512*n^7 + 22406173712*n^6 - 272149001280*n^5 + 2439511601644*n^4 - 15729508355184*n^3 + 69210466925184*n^2 - 186492025792800*n + 232613098935525)$$

15 wazirs, board 2 x n: (*V. Kotěšovec, 20.10.2011*), $n \geq 14$

$$(2/638512875)*(n-14)*(8*n^{14} - 1568*n^{13} + 144508*n^{12} - 8296288*n^{11} + 331314984*n^{10} - 9731545824*n^9 + 216703409494*n^8 - 3714765037984*n^7 + 49237671450968*n^6 - 501946235799008*n^5 + 3872440873358148*n^4 - 21914710055548128*n^3 + 85962797228782440*n^2 - 209128894313724000*n + 237969610310557125)$$

16 wazirs, board 2 x n: (*V. Kotěšovec, 20.10.2011*), $n \geq 15$

$$(2/638512875)*(n-15)^2*(n^{14} - 210*n^{13} + 20755*n^{12} - 1278900*n^{11} + 54860197*n^{10} - 1732154550*n^9 + 41492783015*n^8 - 765678391800*n^7 + 10932594150653*n^6 - 120142118488770*n^5 + 999858846269255*n^4 - 6108194394000300*n^3 + 25883570646539649*n^2 - 68074610880004470*n + 83807007880070475)$$

Obecně mají polynomy tvar:

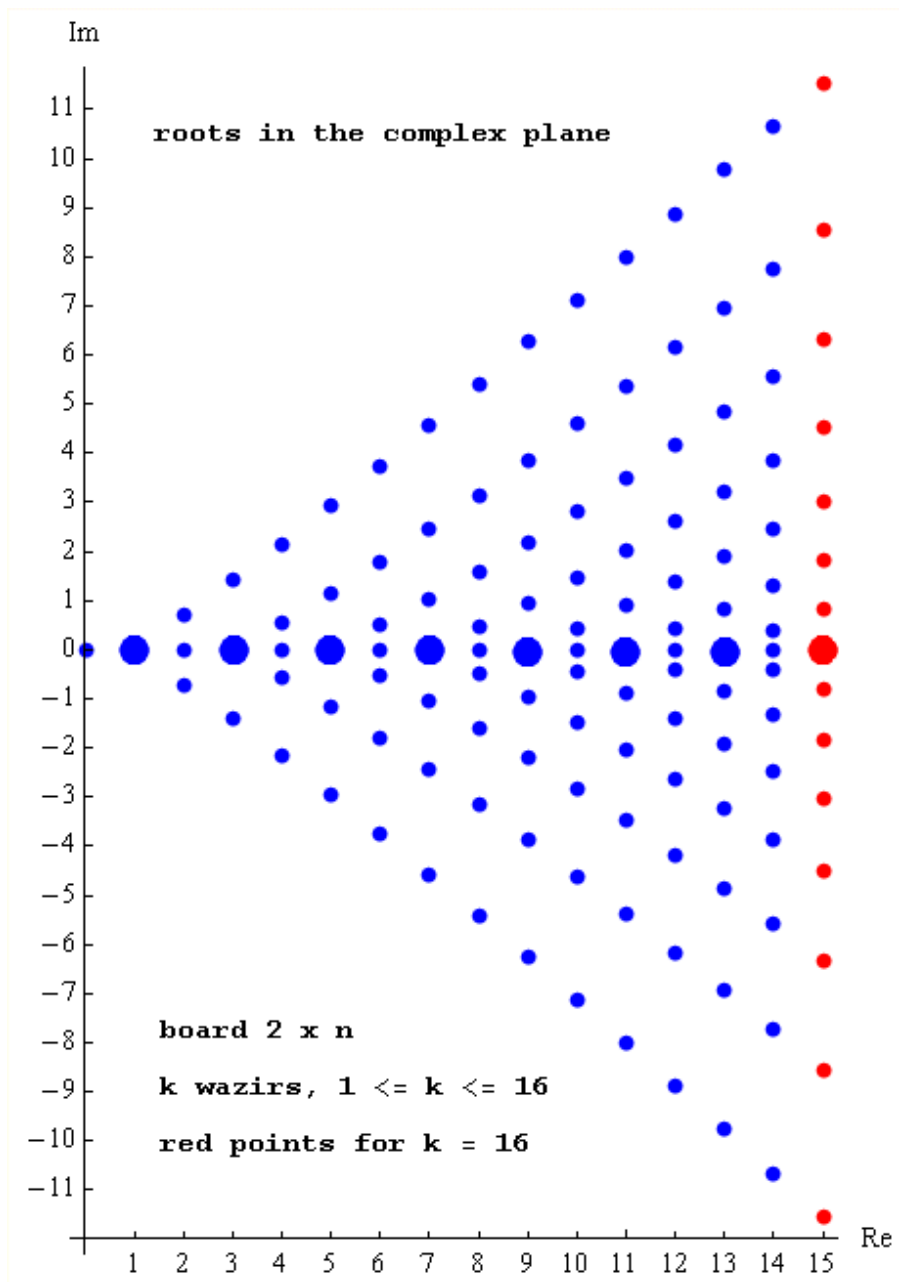
$$\begin{aligned} & \frac{2^k * n^k}{k!} - \frac{2^k * (k-1) * n^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{2^{k-2} * (2k-1) * (3k-4) * n^{k-2}}{3(k-2)!} - \frac{2^{k-2} * (k-1) * k * (2k-3) * n^{k-3}}{3(k-3)!} \\ & + \frac{2^{k-5} * (60k^4 - 180k^3 + 125k^2 + 33k - 32) * n^{k-4}}{45(k-4)!} - \frac{2^{k-5} * (k-1) * k * (12k^3 - 28k^2 - 3k + 25) * n^{k-5}}{45(k-5)!} \\ & + \frac{2^{k-7} * (504k^6 - 1764k^5 + 630k^4 + 2933k^3 - 1995k^2 - 1136k + 768) * n^{k-6}}{2835 * (k-6)!} - \frac{2^{k-7} * (k-1) * k * (72k^5 - 180k^4 - 222k^3 + 569k^2 + 345k - 644) * n^{k-7}}{2835 * (k-7)!} + \dots \end{aligned}$$

Analýza koeficientů u nejvyšší mocniny k u každého členu vede k rozvoji

$$\frac{2^k n^k}{k!} * \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d k^{2d}}{d! n^d} * \left(1 - \frac{d(5d+7)}{12k} + \frac{(d-1)d(25d^2+43d+174)}{288k^2} + \dots \right)$$

Sečtením této řady dostáváme (pro konstantní k) **asymptotický vzorec**

$$\frac{2^k n^k}{k!} * e^{-\frac{k^2}{n}} * \left(1 + \frac{k}{n} - \frac{(5k^2 - 15k + 4)k}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$



I pro vezíry na šachovnici $2 \times n$ jsem zkoumal rozložení komplexních kořenů polynomů a objevil jsem důležité vlastnosti. Body v grafu odpovídají kořenům všech polynomů pro $1 \leq k \leq 16$, přičemž případ $k=16$ (označený červenými body) je vybrán k demonstraci tvrzení, že pro všechny kořeny z platí

For all roots z of the polynomial for k non-attacking wazirs on a normal chessboard $2 \times n$ (V. Kotěšovec, 22.10.2011)

$$\operatorname{Re}(z) = k - 1$$

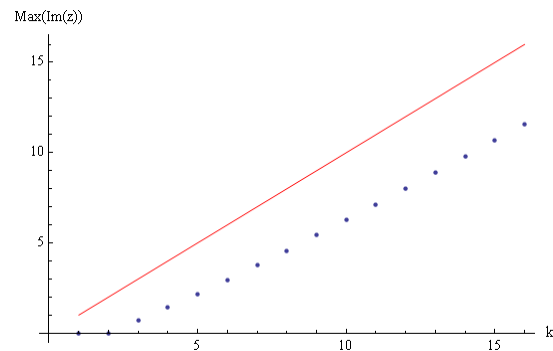
Všechny polynomy stupně k mají (podle [základní věty algebry](#)) celkem k komplexních kořenů (pokud počítáme násobnosti případných vícenásobných kořenů), z nichž je v tomto případě jedním z nich i reálný kořen $k-1$ (s nulovou imaginární částí), pro sudá k je tento kořen dvojnásobný (což je názorně vidět v rozkladech polynomů na předchozí straně a v grafu jsou tyto kořeny označeny větším puntíkem). *If k is even then (real) root $k-1$ is twice.*

I když jde o trochu jinou problematiku, samozřejmě musí každého matematika teď napadnout analogie se slavnou (a dosud nedokázanou) [Riemannovou hypotézou](#), že všechny netriviální kořeny [zeta funkce](#) leží na přímce, kde $\operatorname{Re}(z)=1/2$. Nedalo mi to vložit sem jako poznámku.

Co se týče odhadu rozsahu imaginární části komplexních kořenů, mám hypotézu, že
Conjecture:

$$-k < \operatorname{Im}(z) < k$$

Jak je vidět z grafu, půjde ale tento odhad asi ještě i zlepšit.



Tabulka minimálních a maximálních hodnot komplexních kořenů polynomů <i>Table of minimal and maximal values of complex roots of the polynomials</i>						
k	Re(z)		Im(z)		Abs(z)	
	min	max	min	max	min	max
1	0	0	0	0	0	0
2	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0	0	1.0000000000000000	1.0000000000000000
3	2.0000000000000000	2.0000000000000000	-0.70710678118655	0.70710678118655	2.0000000000000000	2.12132034355964
4	3.0000000000000000	3.0000000000000000	-1.41421356237310	1.41421356237310	3.0000000000000000	3.31662479035540
5	4.0000000000000000	4.0000000000000000	-2.16320352065411	2.16320352065411	4.0000000000000000	4.54746626944833
6	5.0000000000000000	5.0000000000000000	-2.94520536027197	2.94520536027197	5.0000000000000000	5.80295050936804
7	6.0000000000000000	6.0000000000000000	-3.75174302522447	3.75174302522447	6.0000000000000000	7.07640980493078
8	7.0000000000000000	7.0000000000000000	-4.57710327292997	4.57710327292997	7.0000000000000000	8.36360414959162
9	8.0000000000000000	8.0000000000000000	-5.41738185528683	5.41738185528683	8.0000000000000000	9.66167822720209
10	9.0000000000000000	9.0000000000000000	-6.26980600820430	6.26980600820430	9.0000000000000000	10.9686128284535
11	10.0000000000000000	10.0000000000000000	-7.13233541312294	7.13233541312294	10.0000000000000000	12.2829234486456
12	11.0000000000000000	11.0000000000000000	-8.00342302168886	8.00342302168886	11.0000000000000000	13.6034841148913
13	12.0000000000000000	12.0000000000000000	-8.8818660019927	8.8818660019927	12.0000000000000000	14.9294187320657
14	13.0000000000000000	13.0000000000000000	-9.7667091920256	9.7667091920256	13.0000000000000000	16.2600310098597
15	14.0000000000000000	14.0000000000000000	-10.6571803660572	10.6571803660572	14.0000000000000000	17.5947575531655
16	15.0000000000000000	15.0000000000000000	-11.5526455012968	11.5526455012968	15.0000000000000000	18.9331354529204

Jelikož polynom v komplexním oboru má současně ke každému kořenu i kořen komplexně sdružený, vyplývá z předchozího, že polynomy na str. 386 jde vyjádřit i následovně. Pro sudé $k > 2$

$$\sum_{j=0}^k a_j n^j = \frac{2^k}{k!} * (n - k + 1)^2 * \prod_{j=1}^{\frac{k-2}{2}} ((n - k + 1)^2 + b_j^2)$$

kde b_j jsou reálná (nikoliv však už celá) čísla.

Pro hodnotu koeficientu a_0 u členu n^0 polynomu tak dostaneme

$$a_0 = \frac{2^k}{k!} * (k - 1)^2 * \prod_{j=1}^{\frac{k-2}{2}} ((k - 1)^2 + b_j^2)$$

a odtud zajímavou nerovnost

$$\frac{2^k}{k!} * (k - 1)^k < a_0 < \frac{2^{\frac{3k-2}{2}}}{k!} * k^k$$

Pro liché $k > 1$ dostaneme analogicky

$$\sum_{j=0}^k a_j n^j = \frac{2^k}{k!} * (n - k + 1) * \prod_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} ((n - k + 1)^2 + b_j^2)$$

$$a_0 = -\frac{2^k}{k!} * (k - 1) * \prod_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} ((k - 1)^2 + b_j^2)$$

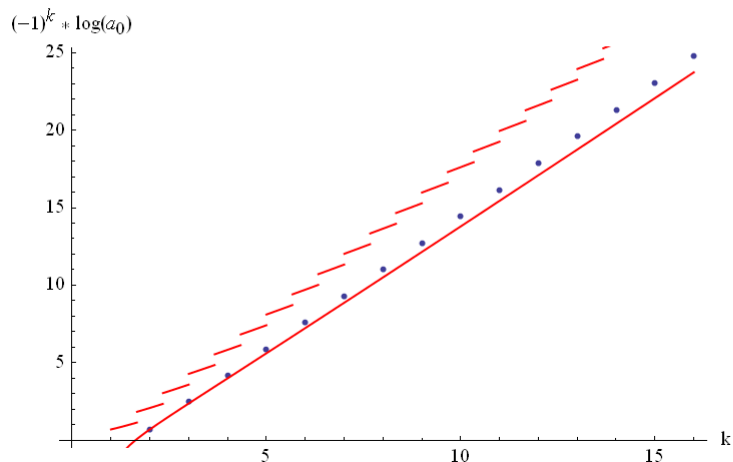
$$\frac{2^k}{k!} * (k - 1)^k < -a_0 < \frac{2^{\frac{3k-1}{2}}}{k!} * k^k$$

Takže pro oba případy

$$\frac{2^k}{k!} * (k - 1)^k \leq (-1)^k * a_0 < \frac{k^k}{k!} * 2^{\lfloor \frac{3k-1}{2} \rfloor}$$

Numerické výsledky z prvních 16 polynomů jsou v grafu (v logaritmickém měřítku)

```
Show[ListPlot[Table[{k, Log[Coefficient[poly2nw[[k]], n, 0] * (-1) ^ k}], {k, 1, 16}],
Plot[Log[2 ^ k / k! * (k - 1) ^ k], {k, 1, 16}, PlotStyle -> Red],
Plot[Log[2 ^ Floor[(3 k - 1) / 2] / k! * k ^ k], {k, 1, 16}, PlotStyle -> Red],
AxesLabel -> {"k", "(-1) ^ k * log(a0)"}]
```



k non-attacking Wazirs on a 2 x *n* chessboard

n	1 w.	2 w.	3 w.	4 wazirs	5 wazirs	6 wazirs	7 wazirs	8 wazirs	9 wazirs	10 wazirs	11 wazirs	12 wazirs	13 wazirs	14 wazirs	15 wazirs	16 wazirs	A001333, summed over all k >= 0
1	2	0															3
2	4	2	0	0													7
3	6	8	2	0	0	0											17
4	8	18	12	2	0	0	0	0									41
5	10	32	38	16	2	0	0	0	0	0							99
6	12	50	88	66	20	2	0	0	0	0	0	0					239
7	14	72	170	192	102	24	2	0	0	0	0	0	0	0			577
8	16	98	292	450	360	146	28	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1393
9	18	128	462	912	1002	608	198	32	2	0	0	0	0	0	0	0	3363
10	20	162	688	1666	2364	1970	952	258	36	2	0	0	0	0	0	0	8119
11	22	200	978	2816	4942	5336	3530	1408	326	40	2	0	0	0	0	0	19601
12	24	242	1340	4482	9424	12642	10836	5890	1992	402	44	2	0	0	0	0	47321
13	26	288	1782	6800	16722	27008	28814	20256	9290	2720	486	48	2	0	0	0	114243
14	28	338	2312	9922	28004	53154	68464	59906	35436	14002	3608	578	52	2	0	0	275807
15	30	392	2938	14016	44726	97880	148626	157184	115598	58728	20330	4672	678	56	2	0	665857
16	32	450	3668	19266	68664	170610	299660	374274	332688	209762	93060	28610	5928	786	60	2	1607521
17	34	512	4510	25872	101946	284000	568150	822560	864146	658048	361550	142000	39210	7392	902	64	3880899
18	36	578	5472	34050	147084	454610	1022760	1690370	2060980	1854882	1229360	596610	209820	52530	9080	1026	9369319
19	38	648	6562	44032	207006	703640	1761370	3281280	4573910	4780008	3742290	2187520	948430	301560	69002	11008	22619537
20	40	722	7788	56066	285088	1057730	2919620	6065410	9545560	11414898	10377180	7159170	3732560	1459810	423092	89090	54608393
21	42	800	9158	70416	385186	1549824	4680990	10746400	18892250	25534368	26572086	21278640	13079250	6140800	2184462	581184	131836323
22	44	882	10680	87362	511668	2220098	7288544	18347010	35704060	53972178	63521352	58227906	41517060	22952610	9785072	3188738	318281039
23	46	968	12362	107200	669446	3116952	11058466	30316544	64797470	108568488	143027898	148321344	121023606	77548920	38878482	15158272	768398401
24	48	1058	14212	130242	864008	4298066	16395516	48663554	113461024	209070018	305568564	354870594	327572856	240089586	139380012	63821826	1855077841
25	50	1152	16238	156816	1101450	5831520	23810534	76117536	192441122	387328512	623207070	803467056	830764794	688686048	457018518	242080320	4478554083
26	52	1250	18448	187266	1388508	7796978	33940120	116323586	317222212	693230658	1219605600	1732242690	1989102444	1847023698	1385794152	838478850	10812186007
27	54	1352	20850	221952	1732590	10286936	47568618	174074240	509663334	1202893992	2300164770	3575055360	4524812190	4666890936	3921503898	2681291520	26102926097
28	56	1458	23452	261250	2141808	13408034	65652532	255582978	800061160	2029779538	4196289420	7094825730	9832110240	11180805570	10435418532	7988589570	63018038201
29	58	1568	26262	305552	2625010	17282432	89347502	368804128	1229718378	3339504032	7428962950	13591279920	20501991330	25537728000	26283115038	22345512000	152139002499
30	60	1682	29288	355266	3191812	22049250	120037968	523804162	1854105484	5369283570	12798246520	25216532290	41188096980	55871829570	63001648608	59064045570	367296043199
31	62	1800	32538	410816	3852630	27866072	159369650	733189632	2746713774	8453107432	21507034122	45443741760	79995909190	117561917880	144411206178	148348809216	886731088897
32	64	1922	36020	472642	4618712	34910514	209284972	1012597250	4003707568	13053926690	35329425124	79749022402	150656183240	238745924050	317844953628	355761664002	2140758220993
n	1 w.	2 w.	3 w.	4 wazirs	5 wazirs	6 wazirs	7 wazirs	8 wazirs	9 wazirs	10 wazirs	11 wazirs	12 wazirs	13 wazirs	14 wazirs	15 wazirs	16 wazirs	$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})^{n+1}$

corrected in the 6th edition

Na normální šachovnici 2 x *n* se vejde maximálně *n* vezírů.

[A001333](#) - Součet přes všechna $k \geq 0$ (poslední sloupec v předchozí tabulce) vede na trochu překvapivý vzorec (žádná Fibonacciho nebo Lucasova čísla)
(V. Kotěšovec, 8.5.2012)

$$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})^{n+1}$$

Generating function:

$$-\frac{x + 1}{x^2 + 2x - 1}$$

Recurrence ($n \geq 3$):

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

(These formulas were corrected in the 6th edition, values for $k=1$ were missing in the 5th edition)

9.2.2) k Wazirs on a 2 x n horizontal cylinder - k vezírů na horizontálním válci 2 x n

2 wazirs, cylinder 2 x n: $n > 2$

$$2(n - 2)n$$

3 wazirs, cylinder 2 x n: (V. Kotěšovec, 18.10.2011), $n > 3$

$$\frac{2}{3}n(2n^2 - 12n + 19)$$

4 wazirs, cylinder 2 x n: (V. Kotěšovec, 18.10.2011), $n > 4$

$$\frac{2}{3}(n - 4)n(n^2 - 8n + 18)$$

5 wazirs, cylinder 2 x n: (V. Kotěšovec, 18.10.2011), $n > 5$

$$\frac{2}{15}n(2n^4 - 40n^3 + 310n^2 - 1100n + 1503)$$

6 wazirs, cylinder 2 x n: (V. Kotěšovec, 18.10.2011), $n > 6$

$$\frac{2}{45}(n - 6)n(2n^4 - 48n^3 + 452n^2 - 1968n + 3335)$$

7 wazirs, cylinder 2 x n: (V. Kotěšovec, 18.10.2011), $n > 7$

$$\frac{2}{315}n(4n^6 - 168n^5 + 3010n^4 - 29400n^3 + 164836n^2 - 502152n + 648315)$$

8 wazirs, cylinder 2 x n: (V. Kotěšovec, 18.10.2011), $n > 8$

$$\frac{2}{315}(n - 8)n(n^2 - 16n + 70)(n^4 - 32n^3 + 406n^2 - 2400n + 5526)$$

9 wazirs, cylinder 2 x n: (V. Kotěšovec, 18.10.2011), $n > 9$

$$\frac{2}{2835}n(2n^8 - 144n^7 + 4620n^6 - 86184n^5 + 1021398n^4 - 7866936n^3 + 38417020n^2 - 108644616n + 136102995)$$

10 wazirs, cylinder 2 x n: (*V. Kotěšovec, 20.10.2011*), $n > 10$

$$\frac{2}{14175}(n-10)n(2n^8 - 160n^7 + 5720n^6 - 119200n^5 + 1581806n^4 - 13672240n^3 + 75090780n^2 - 239367600n + 338783067)$$

11 wazirs, cylinder 2 x n: (*V. Kotěšovec, 20.10.2011*), $n > 11$

$$\frac{2}{155925}n(4n^{10} - 440n^9 + 22110n^8 - 667920n^7 + 13423872n^6 - 187424160n^5 + 1839785090n^4 - 12529051480n^3 + 56613796074n^2 - 153176453100n + 188329659525)$$

12 wazirs, cylinder 2 x n: (*V. Kotěšovec, 20.10.2011*), $n > 12$

$$\frac{2}{467775}(n-12)n(2n^{10} - 240n^9 + 13180n^8 - 435840n^7 + 9603156n^6 - 147204000n^5 + 1588633840n^4 - 11910616320n^3 + 59332916447n^2 - 177227322600n + 240906307950)$$

13 wazirs, cylinder 2 x n: (*V. Kotěšovec, 20.10.2011*), $n > 13$

$$(2/6081075)*n*(4*n^{12} - 624*n^{11} + 45188*n^{10} - 2007720*n^9 + 60925722*n^8 - 1329646032*n^7 + 21388768544*n^6 - 255398938080*n^5 + 2245688712124*n^4 - 14173777476144*n^3 + 60925136401818*n^2 - 160067471487300*n + 194305500756675)$$

14 wazirs, cylinder 2 x n: (*V. Kotěšovec, 20.10.2011*), $n > 14$

$$(2/42567525)*(n-14)*n*(4*n^{12} - 672*n^{11} + 52472*n^{10} - 2516640*n^9 + 82526682*n^8 - 1948250976*n^7 + 33933868856*n^6 - 439156257120*n^5 + 4189003068124*n^4 - 28708862932512*n^3 + 134124282650232*n^2 - 383364836820000*n + 506780603547075)$$

15 wazirs, cylinder 2 x n: (*V. Kotěšovec, 20.10.2011*), $n > 15$

$$(2/638512875)*n*(8*n^{14} - 1680*n^{13} + 165620*n^{12} - 10155600*n^{11} + 432568136*n^{10} - 13533920400*n^9 + 320638957210*n^8 - 5841340705200*n^7 + 82199717303704*n^6 - 888831336753360*n^5 + 7267221700467820*n^4 - 43551700112029200*n^3 + 180784043537374152*n^2 - 465121367611684560*n + 559403578228970475)$$

16 wazirs, cylinder 2 x n: (*V. Kotěšovec, 20.10.2011*), $n > 16$

$$(2/638512875)*(n-16)*n*(n^{14} - 224*n^{13} + 23576*n^{12} - 1544704*n^{11} + 70358988*n^{10} - 2355814272*n^9 + 59772448328*n^8 - 1167000282112*n^7 + 17611772834026*n^6 - 204373209274304*n^5 + 1794491794073496*n^4 - 11556977486390784*n^3 + 51590022945454260*n^2 - 142837784740828800*n + 185005126319013000)$$

Obecně mají polynomy tvar:

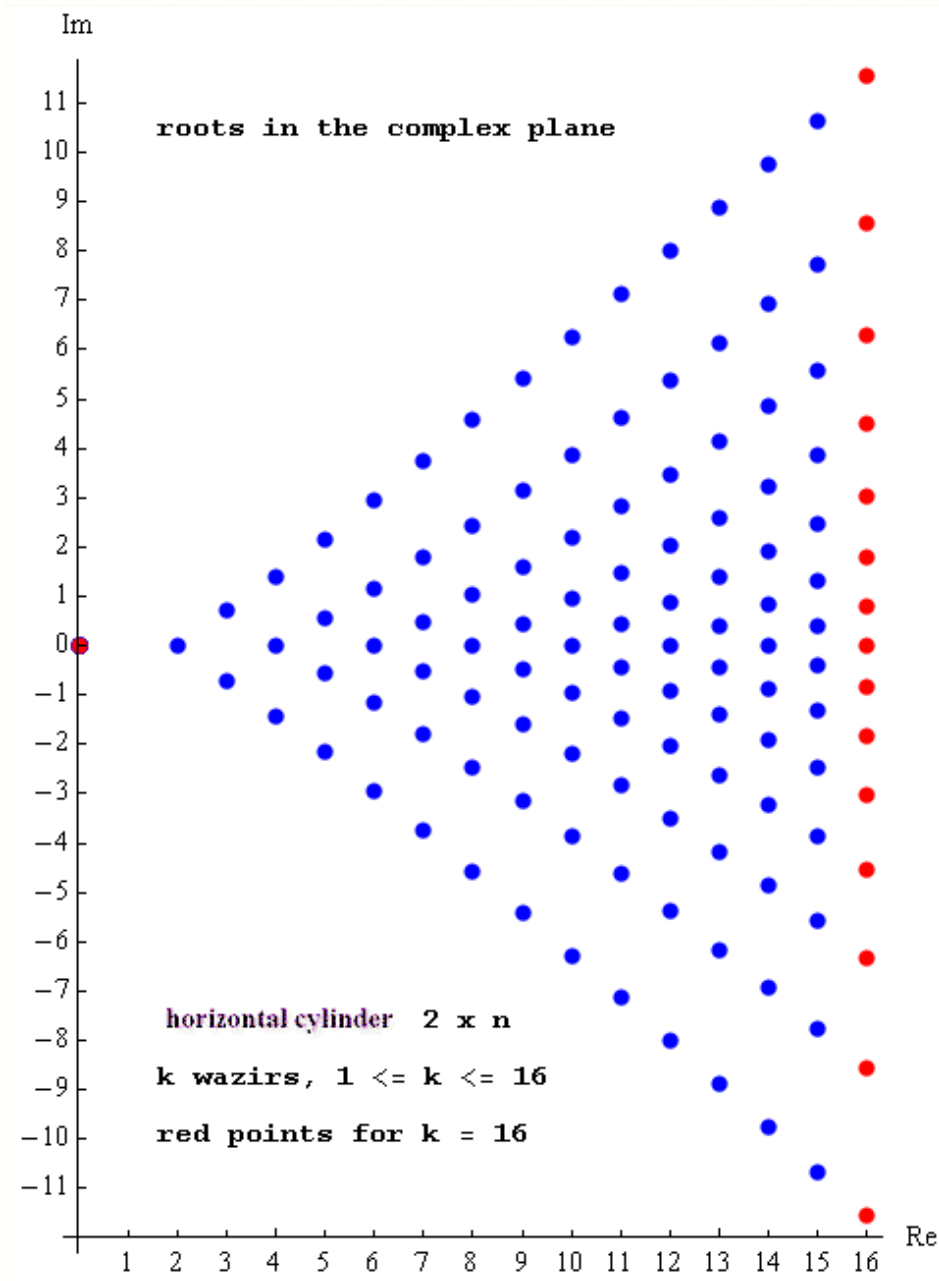
$$\begin{aligned} & \frac{2^k * n^k}{k!} - \frac{2^k * n^{k-1}}{(k-2)!} + \frac{2^{k-2} * (6k+1) * n^{k-2}}{3(k-3)!} - \frac{2^{k-2} * k * (2k+1) * n^{k-3}}{3(k-4)!} \\ & + \frac{2^{k-5} * (60k^3 + 60k^2 + 5k - 7) * n^{k-4}}{45(k-5)!} - \frac{2^{k-5} * k * (12k^3 + 20k^2 + 5k - 7) * n^{k-5}}{45(k-6)!} \\ & + \frac{2^{k-7} * (504k^5 + 1260k^4 + 630k^3 - 847k^2 - 147k + 124) * n^{k-6}}{2835 * (k-7)!} - \frac{2^{k-7} * k * (72k^5 + 252k^4 + 210k^3 - 259k^2 - 147k + 124) * n^{k-7}}{2835 * (k-8)!} + \dots \end{aligned}$$

Analýza koeficientů u nejvyšší mocniny k u každého členu vede k asymptotickému vzorci

$$\frac{2^k n^k}{k!} * \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d k^{2d}}{d! n^d} * \left(1 - \frac{d(5d+7)}{12k} + \frac{(d-1)d(25d^2 + 43d + 30)}{288k^2} + \dots \right)$$

Sečtením této řady dostáváme (pro konstantní k) **asymptotický rozvoj**

$$\frac{2^k n^k}{k!} * e^{-\frac{k^2}{n}} * \left(1 + \frac{k}{n} - \frac{(k-2)(5k+1)k}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$



Rozložení kořenů pro **horizontální válcovou šachovnici** je podobné jako pro normální šachovnici, kořenem je však navíc vždy i 0. Body v grafu odpovídají kořenům všech polynomů pro $1 \leq k \leq 16$, případ $k=16$ je označen **červenými** body.

*Roots of the polynomial for k wazirs on a horizontal cylinder 2 x n.
(V. Kotěšovec, 22.10.2011)*

One root is **zero** and for all other roots z

$$\operatorname{Re}(z) = k$$

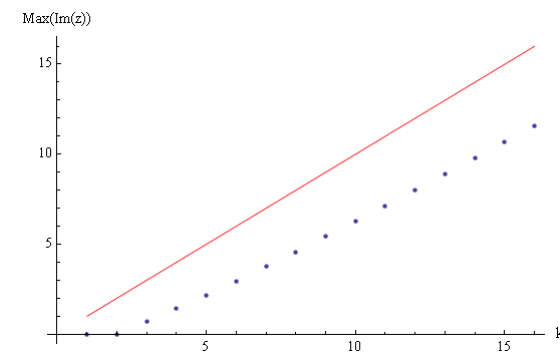
Nenulové reálné kořeny ($=k$) mají jen polynomy pro sudá k .

Co se týče odhadu rozsahu imaginární části komplexních kořenů, mám hypotézu (shodnou jako pro normální šachovnici), že

Conjecture:

$$-k < \operatorname{Im}(z) < k$$

Graf zobrazuje maxima (z tabulky na další straně je vidět, že minima mají vždy jen opačné znaménko) a i v tomto případě se zdá, že odhad půjde ještě zlepšit.



Tabulka minimálních a maximálních hodnot komplexních kořenů polynomů <i>Table of minimal and maximal values of complex roots of the polynomials</i>						
k	Re(z)		Im(z)		Abs(z)	
	min	max	min	max	min	max
1	0	0	0	0	0	0
2	0	2.000000000000000	0	0	0	2.000000000000000
3	0	3.000000000000000	-0.70710678118655	0.70710678118655	0	3.08220700148449
4	0	4.000000000000000	-1.41421356237310	1.41421356237310	0	4.24264068711929
5	0	5.000000000000000	-2.16320352065411	2.16320352065411	0	5.44788486219839
6	0	6.000000000000000	-2.94520536027197	2.94520536027197	0	6.68387871031295
7	0	7.000000000000000	-3.75174302522447	3.75174302522447	0	7.94201332958592
8	0	8.000000000000000	-4.57710327292997	4.57710327292997	0	9.21682561249079
9	0	9.000000000000000	-5.41738185528683	5.41738185528683	0	10.5046668755364
10	0	10.000000000000000	-6.26980600820430	6.26980600820430	0	11.8029855282685
11	0	11.000000000000000	-7.13233541312294	7.13233541312294	0	13.1099278581267
12	0	12.000000000000000	-8.0034230216889	8.0034230216889	0	14.4241041338483
13	0	13.000000000000000	-8.8818660019927	8.8818660019927	0	15.7444448513548
14	0	14.000000000000000	-9.7667091920256	9.7667091920256	0	17.0701086241886
15	0	15.000000000000000	-10.6571803660572	10.6571803660572	0	18.4004210102561
16	0	16.000000000000000	-11.5526455012968	11.5526455012968	0	19.7348326083256

Polynomy jde (analogicky jako v případě normální šachovnice) vyjádřit pro sudé $k > 2$

$$\sum_{j=0}^k a_j n^j = \frac{2^k}{k!} * n(n-k) * \prod_{j=1}^{\frac{k-2}{2}} ((n-k)^2 + b_j^2)$$

kde b_j jsou reálná čísla.

Koeficient a_0 u členu n^0 polynomu je tak roven 0, pro hodnotu koeficientu a_1 u členu n^1 polynomu dostaneme

$$a_1 = \frac{2^k}{k!} * (-k) * \prod_{j=1}^{\frac{k-2}{2}} (k^2 + b_j^2)$$

a odtud nerovnost

$$\frac{2^k}{k!} * k^{k-1} < -a_1 < \frac{2^{\frac{3k-2}{2}}}{k!} * k^{k-1}$$

Pro liché $k > 1$ dostaneme analogicky

$$\sum_{j=0}^k a_j n^j = \frac{2^k}{k!} * n * \prod_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} ((n-k)^2 + b_j^2)$$

$$a_1 = \frac{2^k}{k!} * \prod_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} (k^2 + b_j^2)$$

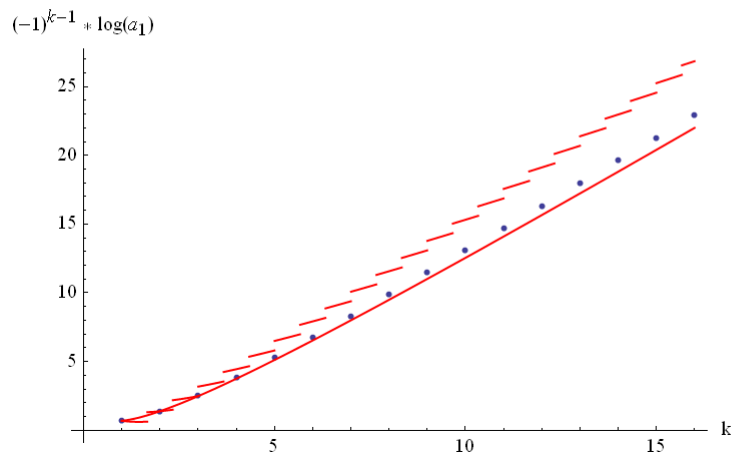
$$\frac{2^k}{k!} * k^{k-1} < a_1 < \frac{2^{\frac{3k-1}{2}}}{k!} * k^{k-1}$$

Pro oba případy

$$\frac{2^k}{k!} * k^{k-1} \leq (-1)^{k-1} * a_1 < \frac{k^{k-1}}{k!} * 2^{\lfloor \frac{3k-1}{2} \rfloor}$$

Numerické výsledky z prvních 16 polynomů jsou v grafu (v logaritmickém měřítku)

```
Show[ListPlot[Table[{k, Log[Coefficient[poly2nwt[[k]], n, 1] * (-1)^(k-1)]},
  {k, 1, 16}], Plot[Log[2^k/k! * k^(k-1)], {k, 1, 16}, PlotStyle -> Red],
  Plot[Log[2^Floor[(3k-1)/2]/k! * k^(k-1)], {k, 1, 16}, PlotStyle -> Red],
  AxesLabel -> {"k", "(-1)^(k-1) * log(a1)"}]
```



k non-attacking Wazirs on a $2 \times n$ horizontal cylinder

n	1 w.	2 w.	3 w.	4 wazirs	5 wazirs	6 wazirs	7 wazirs	8 wazirs	9 wazirs	10 wazirs	11 wazirs	12 wazirs	13 wazirs	14 wazirs	15 wazirs	16 wazirs	A051927, summed over all $k \geq 0$
1	2	0															3
2	4	2	0	0													7
3	6	6	0	0	0	0											13
4	8	16	8	2	0	0	0	0									35
5	10	30	30	10	0	0	0	0	0	0							81
6	12	48	76	48	12	2	0	0	0	0	0	0					199
7	14	70	154	154	70	14	0	0	0	0	0	0	0	0			477
8	16	96	272	384	272	96	16	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1155
9	18	126	438	810	810	438	126	18	0	0	0	0	0	0	0	0	2785
10	20	160	660	1520	2004	1520	660	160	20	2	0	0	0	0	0	0	6727
11	22	198	946	2618	4334	4334	2618	946	198	22	0	0	0	0	0	0	16237
12	24	240	1304	4224	8472	10672	8472	4224	1304	240	24	2	0	0	0	0	39203
13	26	286	1742	6474	15314	23478	23478	15314	6474	1742	286	26	0	0	0	0	94641
14	28	336	2268	9520	26012	47264	57628	47264	26012	9520	2268	336	28	2	0	0	228487
15	30	390	2890	13530	42006	88590	128370	128370	88590	42006	13530	2890	390	30	0	0	551613
16	32	448	3616	18688	65056	156608	264224	314368	264224	156608	65056	18688	3616	448	32	2	1331715
17	34	510	4454	25194	97274	263670	509422	706962	706962	509422	263670	97274	25194	4454	510	34	3215041
18	36	576	5412	33264	141156	426000	929700	1480608	1728292	1480608	929700	426000	141156	33264	5412	576	7761799
19	38	646	6498	43130	199614	664430	1619370	2919730	3915862	3915862	2919730	1619370	664430	199614	43130	6498	18738637
20	40	720	7720	55040	276008	1005200	2709800	5468800	8316200	9560016	8316200	5468800	2709800	1005200	276008	55040	45239075
21	42	798	9086	69258	374178	1480822	4379430	9797970	16704730	21792078	21792078	16704730	9797970	4379430	1480822	374178	109216785
22	44	880	10604	86064	498476	2131008	6865452	16887200	31971500	46813008	53144172	46813008	31971500	16887200	6865452	2131008	263672647
23	46	966	12282	105754	653798	3003662	10477282	28132082	58656670	95489238	121749258	121749258	95489238	58656670	28132082	10477282	636562077
24	48	1056	14128	128640	845616	4155936	15611952	45474816	103675952	186117408	264051504	296642688	264051504	186117408	103675952	45474816	1536796803
25	50	1150	16150	155050	1080010	5655350	22771550	71564050	177282850	348450030	545658150	682443450	682443450	545658150	348450030	177282850	3710155681
26	52	1248	18356	185328	1363700	7580976	32582836	109947552	294321716	629408832	1080225588	1492153104	1661529588	1492153104	1080225588	629408832	8957108167
27	54	1350	20754	219834	1704078	10024686	45819162	165301938	475833318	1101013398	2058084450	3118036842	3836126142	3836126142	3118036842	2058084450	21624372013
28	56	1456	23352	258944	2109240	13092464	63424824	243703936	751082808	1871168432	3788506680	6256346880	8446316088	9333781872	8446316088	6256346880	52205852195
29	58	1566	26158	303050	2588018	16905782	86541974	352947922	1160088682	3098084558	6760688510	12102938010	17820699810	21616224102	21616224102	17820699810	126036076401
30	60	1680	29180	352560	3150012	21603040	116540220	502914720	1756740540	5009256048	11729941500	22652133200	36179984700	47883240000	52566230076	47883240000	304278004999
31	62	1798	32426	407898	3805622	27341070	155049042	705996914	2612603182	7926085270	19837282106	41142763210	70935055910	101883924510	122065694178	122065694178	734592086397
32	64	1920	35904	469504	4566080	34296704	203993152	977586176	3821514816	12295428992	32772623424	72709986816	134729952320	208998965120	271832858688	296697618432	1773462177795
n	1 w.	2 w.	3 w.	4 wazirs	5 wazirs	6 wazirs	7 wazirs	8 wazirs	9 wazirs	10 wazirs	11 wazirs	12 wazirs	13 wazirs	14 wazirs	15 wazirs	16 wazirs	$(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n + (-1)^n$

corrected in the 6th edition

Na horizontální válcovou šachovnici $2 \times n$ se vejde maximálně $2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vezírů.

[A051927](#) (for $n > 1$) - Součet přes všechna $k \geq 0$ (poslední sloupec v předchozí tabulce)

(V. Kotěšovec, 8.5.2012)

For $n > 1$

$$(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n + (-1)^n$$

Recurrence ($n \geq 5$):

$$a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3}$$

Generating function:

$$\frac{2x^4 - 13x^2 - 6x + 3}{(x+1)(x^2+2x-1)} = 2x - 6 + \frac{1}{x+1} + \frac{2(x-1)}{x^2+2x-1}$$

(These formulas were corrected in the 6th edition, values for $k=1$ were missing in the 5th edition)

9.3) k Wazirs on an n x n toroidal chessboard - k vezírů na prstencové šachovnici n x n

A201236 - 2 wazirs, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2010), $n \geq 3$

$$\frac{1}{2}n^2(n^2 - 5)$$

A201237 - 3 wazirs, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2010), $n \geq 4$

$$\frac{1}{6}n^2(n^4 - 15n^2 + 62)$$

A201238 - 4 wazirs, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2010), $n \geq 5$

$$\frac{1}{24}n^2(n^2 - 11)(n^4 - 19n^2 + 114)$$

A201239 - 5 wazirs, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2010), $n \geq 6$

$$\frac{1}{120}n^2(n^8 - 50n^6 + 995n^4 - 9370n^2 + 35424)$$

A201240 - 6 wazirs, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 13.5.2010), $n \geq 7$

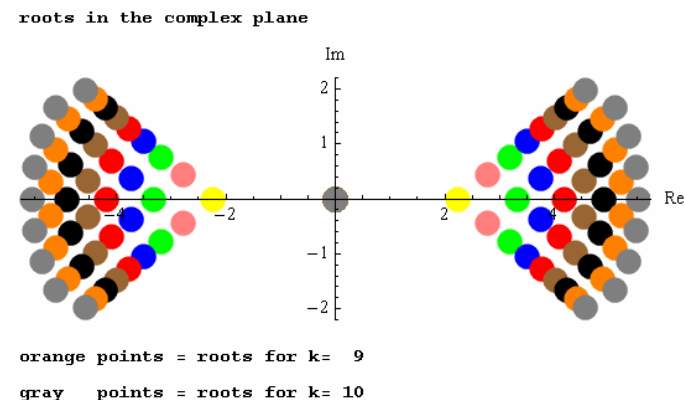
$$\frac{1}{720}n^2(n^{10} - 75n^8 + 2365n^6 - 39285n^4 + 345034n^2 - 1288680)$$

A201241 - 7 wazirs, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 20.5.2010), $n \geq 8$

$$\frac{1}{5040}n^2(n^{12} - 105n^{10} + 4795n^8 - 122115n^6 + 1834084n^4 - 15461460n^2 + 57441600)$$

A201242 - 8 wazirs, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 28.4.2011), $n \geq 9$

$$\frac{1}{40320}n^2(n^{14} - 140n^{12} + 8722n^{10} - 313880n^8 + 7061089n^6 - 99573740n^4 + 817978188n^2 - 3033601200)$$



[A201547](#) - **9 wazirs**, toroidal board $n \times n$: (*V. Kotěšovec, 2.12.2011*), $n \geq 10$

$$\frac{n^{18}}{362880} - \frac{n^{16}}{2016} + \frac{349n^{14}}{8640} - \frac{467n^{12}}{240} + \frac{1049629n^{10}}{17280} - \frac{121049n^8}{96} + \frac{1546301783n^6}{90720} - \frac{346878319n^4}{2520} + \frac{4595485n^2}{9}$$

[A201548](#) - **10 wazirs**, toroidal board $n \times n$: (*V. Kotěšovec, 2.12.2011*), $n \geq 11$

$$\frac{n^{20}}{3628800} - \frac{n^{18}}{16128} + \frac{773n^{16}}{120960} - \frac{761n^{14}}{1920} + \frac{2820613n^{12}}{172800} - \frac{356093n^{10}}{768} + \frac{412940467n^8}{45360} - \frac{2408161207n^6}{20160} + \frac{24029851729n^4}{25200} - 3541971n^2$$

První členy těchto vzorců mají tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{5n^{2k-2}}{2(k-2)!} + \frac{(75k+23)n^{2k-4}}{24(k-3)!} - \frac{(125k^2+115k+48)n^{2k-6}}{48(k-4)!} + \frac{(9375k^3+17250k^2+17045k+12002)n^{2k-8}}{5760(k-5)!} + \dots$$

(od normální šachovnice se liší až v členu n^{2k-3} , který je v případě prstencové šachovnice nulový, koeficienty u členu n^{2k-4} jsou pak již zcela odlišné)

Maximální počet neohrožujících se vezírů na prstencové šachovnici $n \times n$ je $n^2/2$ pokud je n sudé (*even*) a $n(n-1)/2$ pokud je n liché (*odd*), tento počet je stejný jako pro [semi-vezíry](#) na prstencové šachovnici $n \times n$. For more, see [chapter 14](#)

k	k Wazirs on an n x n toroidal chessboard - Generating function
2	$\frac{2x^2 * (2x^5 - 9x^4 + 15x^3 - 9x^2 - 4x - 1)}{(x - 1)^5}$
3	$\frac{2x^3 * (3x^7 - 15x^6 + 25x^5 - 7x^4 - 17x^3 - 15x^2 + 83x + 3)}{(x - 1)^7}$
4	$\frac{x^4 * (8x^9 - 54x^8 + 189x^7 - 551x^6 + 1404x^5 - 2552x^4 + 2685x^3 - 783x^2 - 1798x - 228)}{(x - 1)^9}$
5	$\frac{x^4 * (10x^{12} - 110x^{11} + 685x^{10} - 2771x^9 + 6946x^8 - 9350x^7 + 1710x^6 + 15214x^5 - 21392x^4 + 656x^3 + 33177x^2 + 5337x + 128)}{(x - 1)^{11}}$
6	$\frac{2x^4 * (6x^{15} - 103x^{14} + 873x^{13} - 4241x^{12} + 12757x^{11} - 26112x^{10} + 45344x^9 - 90774x^8 + 189180x^7 - 293907x^6 + 260273x^5 - 25077x^4 - 315215x^3 - 82430x^2 - 3186x - 28)}{(x - 1)^{13}}$
7	$-2x^4 * (7x^{18} - 177x^{17} + 1965x^{16} - 12491x^{15} + 53736x^{14} - 175854x^{13} + 461641x^{12} - 942615x^{11} + 1320318x^{10} - 788656x^9 - 1206129x^8 + 3443471x^7 - 3128600x^6 - 552570x^5 + 7435235x^4 + 2548291x^3 + 188955x^2 + 2105x + 8) / ((x-1)^{15})$
8	$x^4 * (16x^{21} - 566x^{20} + 8182x^{19} - 67700x^{18} + 377824x^{17} - 1531112x^{16} + 4601788x^{15} - 10205035x^{14} + 16637339x^{13} - 21628151x^{12} + 32135719x^{11} - 68863352x^{10} + 138461546x^9 - 189569712x^8 + 133644570x^7 + 20663373x^6 - 378949513x^5 - 174710713x^4 - 19400947x^3 - 520438x^2 - 1516x - 2) / ((x-1)^{17})$
9	$-x^5 * (18x^{23} - 854x^{22} + 15942x^{21} - 168082x^{20} + 1174353x^{19} - 5878707x^{18} + 22139332x^{17} - 65539648x^{16} + 159915785x^{15} - 334575275x^{14} + 598795512x^{13} - 842713520x^{12} + 703597341x^{11} + 289921121x^{10} - 2021527454x^9 + 3166171570x^8 - 1944444195x^7 - 501647511x^6 + 11035282966x^5 + 6335694166x^4 + 1000714522x^3 + 45821802x^2 + 476166x + 250) / (x-1)^{19}$
10	$2x^5 * (10x^{26} - 615x^{25} + 14637x^{24} - 193410x^{23} + 1669110x^{22} - 10270682x^{21} + 47718030x^{20} - 174153546x^{19} + 511148331x^{18} - 1213451007x^{17} + 2302816572x^{16} - 3418379599x^{15} + 4006461091x^{14} - 4626995415x^{13} + 8410419611x^{12} - 19068629603x^{11} + 33871890471x^{10} - 39181017568x^9 + 18018811352x^8 - 5120263515x^7 - 178499919965x^6 - 123414145507x^5 - 25801931589x^4 - 1825246983x^3 - 37482424x^2 - 154182x - 5) / (x-1)^{21}$

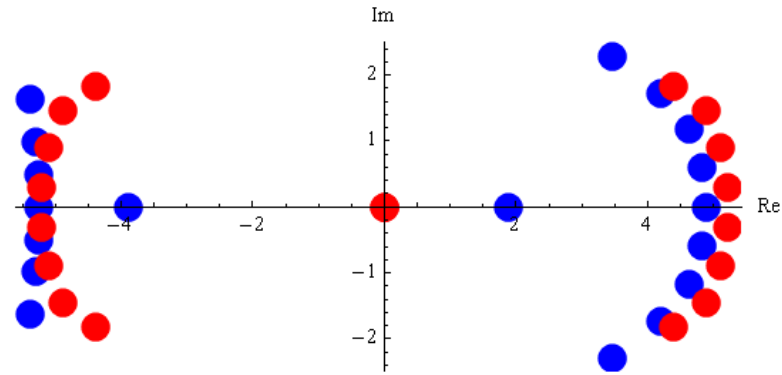
k wazirs / toroidal board

n	1w	2 w	3 wazirs	4 wazirs	5 wazirs	6 wazirs	7 wazirs	8 wazirs	9 wazirs	10 wazirs	11 wazirs	summed over all k >= 0, A027683 (n-1)
1	1											2
2	4	2	0	0								7
3	9	18	6	0	0	0	0	0	0			34
4	16	88	208	228	128	56	16	2	0	0	0	743
5	25	250	1300	3850	6745	7100	4450	1550	250	10	0	25531
6	36	558	4908	27225	100332	252792	442980	546516	480916	308574	150948	2406862
7	49	1078	14112	122892	754453	3378942	11281312	28482279	54916456	81442802	93420068	464483559
8	64	1888	34112	423152	3830016	26249184	139580160	585632520	1962132800	5296005568	11591943552	213256442503
9	81	3078	73008	1213380	15038541	144455454	1103589198	6829066665	34690541994	146127335256	514375761402	215560806324388
10	100	4750	142700	3046025	49207020	625745100	6433276500	54504255500	385983794500	2309813476870	11780172181000	498819827260367617
11	121	7018	259908	6907890	140410699	2271361422	30047250222	331490619174	3095143575007	24738873315596	170797663069044	2590618817013278596997
12	144	10008	447312	14454972	360001152	7192874328	118507673088	1642426038486	19437996015280	198759048859008	1772403670595520	30496896080418683388380966
13	169	13858	734812	28330822	846775007	20427662398	408912072478	6930083422496	100963195651565	1279605298916568	14243518434880410	809724336154415150287031740151
14	196	18718	1160908	52586065	1855033964	53065637212	1265701033492	25686190415144	450398154002132	6906427308782106	93512606860864296	48609694845429192825410114233405807
15	225	24750	1774200	93218400	3828109545	127956238350	3579712962750	85541928717375	1773257833600750	32277449304595350	520957398375944550	6589876632329358971395398453738256596574
16	256	32128	2635008	158854080	7507096576	289628321664	9380986518528	260349711114720	6288010190509312	133788325435448576	2532458780931507712	2018670118781080042934952855192359574137313799
17	289	41038	3817112	261593552	14087087961	620834113614	23027843919870	733731834393719	20398342362118678	500896430870051174	?	?
18	324	51678	5409612	418045617	25436160108	1269178026012	53409035159316	1934755847570808	61282868654684052	1718268150463137018	?	?
19	361	64258	7518908	650576150	44395753647	2488676915070	117860600410206	4813391235753128	172190699515632837	5462521782760829320	?	?
20	400	79000	10270800	988799100	75184958080	4702895069400	248890790976000	11375736647373750	456120623076014000	16243031089247644800	?	?

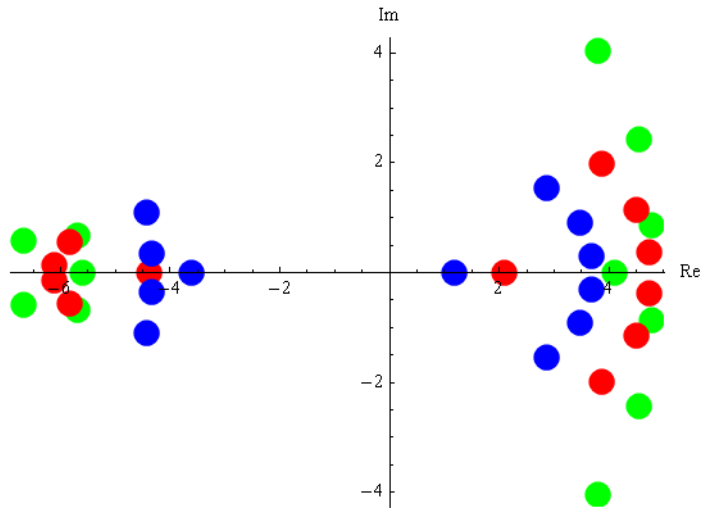
Poslední sloupec určuje počet rozmístění **libovolného počtu** neohrožujících se vezírů na prstencové šachovnici $n \times n$, viz

[A027683](#) - *Number of independent subsets of $n \times n$ toroidal grid*. Pokud v tabulce výše sečteme vždy všechna čísla v celé řádce (až do hodnoty 0), platí pro $n > 1$, že tento součet je roven [A027683](#)(n-1) - 1. Rozdíl o 1 je způsoben tím, že v sekvenci z OEIS se započítává ještě i prázdná podmnožina (případ $k=0$). Tedy např. pro $n=5$ dostáváme pro $k = 1$ až 10 součet 25530, [A027683](#)(4) = 25531. Hodnoty této posloupnosti vypočetl R.H.Hardin (*tyto součty jsou i dobrou kontrolou správnosti ostatních hodnot*).

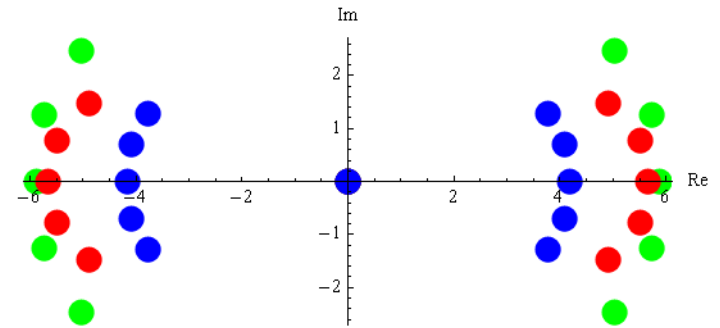
complex roots for 9 wazirs



blue points = normal board
 red points = toroidal board



red points = 6 kings, normal board
 green points = 6 knights, normal board
 blue points = 6 wazirs, normal board



red points = 6 kings, toroidal board
 green points = 6 knights, toroidal board
 blue points = 6 wazirs, toroidal board

9.3.1) k semi-wazirs on an n x n toroidal chessboard - k semi-vezírů na prstencové šachovnici n x n

Pro semi-vezíry na prstencové šachovnici jsem napsal podobný program jako v kapitole 9.1.1, který využívá vzorec pro 1 řádku, odvozený v kapitole 2.5.1

```
(* k non-attacking semi-wazirs, toroidal board n x n *)
(* V. Kotesovec, 2011 *)
permopak[part_,k_]:= (hist=ConstantArray[0,k];
Do[hist[[part[[t]]]]++,{t,1,Length[part]}];
(Length[part])!/Product[(hist[[t]]!,{t,1,k}));

waz1t[k_,n_]:= (If[n<2k,0,n/(n-k)*Binomial[n-k,k]]);

semiwazt[k_,n_]:= (psum=0;
Do[p=IntegerPartitions[k,{size}];
psum=psum+Sum[permopak[p[[i]],k]*Binomial[n,Length[p[[i]]]]*Product[waz1t[p[[i,j]],n],{j,1,Length[p[[i]]]}],{i,1,Length[p]}];
psum);

Table[semiwazt[5,n],{n,1,20}]
```

Na základě vypočtených hodnot jsem pak odvodil nejprve sérii dílčích vzorců a pak i zcela obecný vzorec

2 semi-wazirs, toroidal board $n \times n$: ($n > 2$)

$$\frac{1}{2}n^2(n^2 - 3)$$

3 semi-wazirs, toroidal board $n \times n$: ($n > 3$)

$$\frac{1}{6}(n-2)n^2(n+2)(n^2-5)$$

4 semi-wazirs, toroidal board $n \times n$: ($n > 4$)

$$\frac{1}{24}n^2(n^2-7)(n^2-6)(n^2-5)$$

5 semi-wazirs, toroidal board $n \times n$: ($n > 5$)

$$\frac{1}{120}(n-3)n^2(n+3)(n^2-8)(n^2-7)(n^2-6)$$

k semi-wazirs, toroidal board $n \times n$: ($n > k$)

(V. Kotěšovec, 14.10.2011)

$$\frac{n^2}{k} * \binom{n^2 - k - 1}{k - 1}$$

A197990 - n semi-wazirs, toroidal board $n \times n$: ($k = n$)

$$n * \binom{n^2 - n - 1}{n - 1} + n * (-1)^n = \frac{n^{2n}}{n! e \sqrt{e}} * \left(1 + \frac{1}{3n} + \frac{1}{18n^2} - \frac{103}{810n^3} - \frac{1307}{4860n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) \sim \frac{n^n e^{n-1}}{\sqrt{2\pi en}}$$

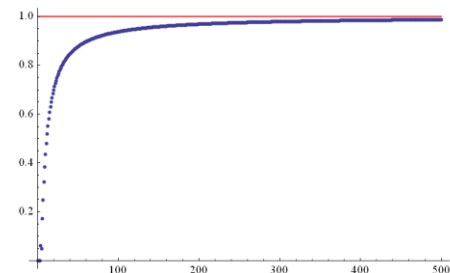
k semi-wazirs, toroidal board $n \times n$: ($n < k < 2n$)

$$\frac{n^2}{k} * \binom{n^2 - k - 1}{k - 1} + (-1)^n * \frac{n^2(n-2)}{k-n} * \binom{n^2 - n - k - 1}{k - n - 1}$$

$2n$ semi-wazirs, toroidal board $n \times n$: ($k = 2n$)

$$\frac{n}{2} * \binom{n^2 - 2n - 1}{2n - 1} + (-1)^n * n(n-2) * \binom{n^2 - 3n - 1}{n - 1} + \binom{n}{2} \sim \frac{n^{3n}}{n!} * \frac{e^{n-6}}{2^{2n} \sqrt{2}} \sim \frac{n^{2n} e^{2n-6}}{2^{2n+1} \sqrt{\pi n}}$$

```
Show[ListPlot[Table[semiwt[2 n, n] / (n^(3 n) / n! * E^(n - 6) / (2^(2 n) * Sqrt[2])),
{n, 1, 500}], AxesOrigin -> {0, 0}], Plot[1, {n, 1, 500}, PlotStyle -> Red]]
```



k semi-wazirs, toroidal board $n \times n$: ($2n < k < 3n$)

$$\frac{n^2}{k} * \binom{n^2 - k - 1}{k - 1} + (-1)^n * \frac{n^2(n-2)}{k-n} * \binom{n^2 - n - k - 1}{k - n - 1} + \frac{n^2(n-1)(n-4)}{2(k-2n)} * \binom{n^2 - 2n - k - 1}{k - 2n - 1}$$

Generally: k semi-wazirs, toroidal board $n \times n$: ($2k < n^2$)

(V. Kotěšovec, 16.10.2011)

$$\text{semiwt}(k, n) = \sum_{c=0}^{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor} (-1)^{cn} \frac{n^2 - 2cn}{n^2 - cn - k} \binom{n}{c} \binom{n^2 - cn - k}{n^2 - 2k}$$

Speciálně pokud je k násobkem n (p je konstantní)

$$k = p * n$$

dostáváme asymptotický vzorec

$$\text{semiwt}(pn, n) \sim \binom{n^2 - pn}{pn} \sim \frac{n^{pn} e^{pn}}{p^{pn} e^{\frac{3p^2}{2}} \sqrt{2\pi pn}}$$

Tento vzorec má zajímavou geometrickou interpretaci. Znamená, že pro velká n je počet pozic neohrožujících se pn semi-vezírů na prstencové šachovnici $n \times n$ zhruba stejný jako počet všech možných rozmístění stejného počtu těchto kamenů (bez ohledu na to jestli se napadají či nikoliv) na šachovnici o rozměrech $n \times (n-p)$. Nejzajímavější je však to, že tento výsledek (odvozený zcela jinou metodou) je naprosto shodný jako pro semi-vezíry na [normální šachovnici](#) !

k semi-wazirs on an n x n toroidal board

n	1 semi-wazir	2 semi-wazirs	3 semi-wazirs	4 semi-wazirs	5 semi-wazirs	6 semi-wazirs	7 semi-wazirs	8 semi-wazirs	9 semi-wazirs	summed over all k >= 0, A067961
1	1									2
2	4	4	0	0						9
3	9	27	27	0	0	0	0	0	0	64
4	16	104	352	664	704	416	128	16	0	2401
5	25	275	1750	7125	19375	35625	43750	34375	15625	161051
6	36	594	5952	40455	197316	712536	1937664	3997647	6258220	34012224
7	49	1127	16170	162239	1209418	6947122	31474709	114191560	334958708	17249876309
8	64	1952	37760	520144	5430656	44662464	296854272	1623421808	7398868224	23811286661761
9	81	3159	79002	1423575	19690290	217468314	1969809516	14915235753	95752130751	84590643846578176
10	100	4850	152000	3460375	60990020	866188050	10186690800	101174877375	861283571500	792594609605189126649
11	121	7139	273702	7667165	167302828	2960532652	43673421528	547946843994	5936090809935	19381341794579313317802199
12	144	10152	467040	15767604	416536992	8965606608	161661386304	2491784419410	33338639935744	1242425797286480951825250390016
13	169	14027	762190	30494529	957974472	24607601928	531472122064	9849564870860	159070472664389	208396491430277954192889648311785961
14	196	18914	1197952	56013615	2062004868	62239989042	1584085344688	34696103340899	664235561285660	91534759488004239323168528670973468727049
15	225	24975	1823250	98467875	4195805670	146917061550	4347435669300	110964789462375	2481410147895250	105248412711097594438987992544216456222918836224
16	256	32384	2698752	166664000	8134796800	326856135424	11118734355456	326848198124448	8433653911119360	
17	289	41327	3898610	272923219	15122252726	690760992894	26752816326612	896719177139775	26423325086385370	
18	324	52002	5512320	434121039	27092418948	1395543563442	61024057254576	2312300017569555	77122342314393948	
19	361	64619	7646702	672941905	46975881656	2709383596920	132792597503280	5645660354617140	211498412527134525	
20	400	79400	10428000	1019376500	79109810080	5076882101200	277108072987200	13131706226603250	5488224774533536000	
n	1 semi-wazir	2 semi-wazirs	3 semi-wazirs	4 semi-wazirs	5 semi-wazirs	6 semi-wazirs	7 semi-wazirs	8 semi-wazirs	9 semi-wazirs	$(L_n)^n$

Součet přes všechna k (včetně 0) vede (pro $n > 1$) na sekvenci [A067961](#) - *Number of binary arrangements without adjacent 1's on $n \times n$ torus connected North-South.* (R. H. Hardin, 2.2.2002)

$$(L_n)^n$$

kde L_n jsou [Lucas numbers](#). Důkaz tohoto tvrzení vyplývá ihned ze vzorce uvedeného v kapitole 2.5.1, kde byla úloha vyřešena pro jeden řádek.

Z obou výsledků vyplývá zajímavá identita, jejíž platnost jsem ověřil v programu Mathematica pro všechna $n \leq 100$ (v příkladu je pro $n \leq 10$)

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor} \text{semiwt}(k, n) = (L_n)^n = \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)^n$$

(* k non-attacking semi-wazirs, over all $k \geq 0$, toroidal board $n \times n$, V. Kotesovec, 2011 *)

```
semiwt[k_, n_] := (If[2k > n^2, 0,
Sum[(-1)^(c*n) * If[(n^2 - c*n - k) == 0, 1, (n^2 - 2c*n) / (n^2 - c*n - k)] * Binomial[n, c] * Binomial[n^2 - c*n - k, n^2 - 2k], {c, 0, Floor[k/n]}]]);
```

```
Table[Sum[semiwt[k, n], {k, 0, Floor[n^2/2]}], {n, 1, 10}]
```

```
Table[LucasL[n]^n, {n, 1, 10}]
```

```
{1, 9, 64, 2401, 161051, 34012224, 17249876309, 23811286661761, 84590643846578176, 792594609605189126649}
```

```
{1, 9, 64, 2401, 161051, 34012224, 17249876309, 23811286661761, 84590643846578176, 792594609605189126649}
```

Z vzorce pro 1 řádku z kapitoly 2.5.1 vyplývá, že maximální počet nenapadajících se semi-vezírů na prstencové šachovnici $n \times n$ je $n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Vzhledem k tomu, že vezíři mají větší pohyblivost než semi-vezíři a lze zkonstruovat pozice totožného počtu nenapadajících se vezírů, je tím dokázáno že i maximální počet nenapadajících se vezírů na prstencové šachovnici $n \times n$ je $n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Dále je ještě třeba poznamenat, že výsledky pro semi-vezíry na válcové šachovnici jsou identické jako na prstencové šachovnici.

9.3.2) n Wazirs on an $n \times n$ toroidal chessboard - n vezírů na prstencové šachovnici $n \times n$

Rozklad ze str. 403 lze upravit do tvaru (liché členy, které byly v případě normální šachovnice, zde dokonce zcela chybí!)

$$\frac{n^{2k}}{k!} \left(1 - \frac{5k(k-1)}{2n^2} + \frac{k(k-1)(k-2)(75k+23)}{24n^4} - \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(125k^2+115k+48)}{48n^6} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(9375k^3+17250k^2+17045k+12002)}{5760n^8} + \dots \right)$$

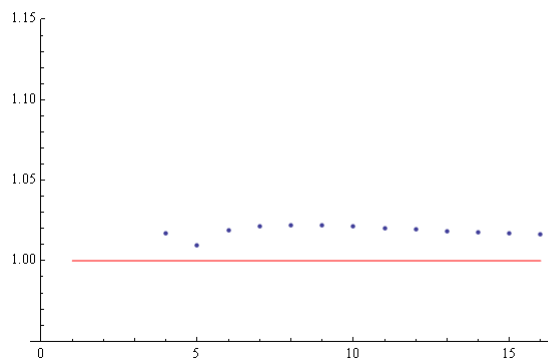
odkud pro $k = n$ dostáváme podobný asymptotický rozvoj jako pro normální šachovnici

$$\frac{n^{2n}}{n!} \left(1 - \frac{5n(n-1)}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(75n+23)}{24n^4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(125n^2+115n+48)}{48n^6} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(9375n^3+17250n^2+17045n+12002)}{5760n^8} + \dots \right) \sim \frac{n^{2n}}{n!} * \left(1 - \frac{5}{2} + \frac{75}{24} - \frac{125}{48} + \frac{9375}{5760} \dots \right)$$

Number of ways to place n non-attacking wazirs on an $n \times n$ toroidal chessboard is asymptotic to
(V. Kotěšovec, 3.12.2011)

$$\frac{n^{2n}}{n!} * \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d 5^d}{2^d d!} = \frac{n^{2n}}{n!} * e^{-\frac{5}{2}} \sim \binom{n^2}{n} * e^{-2}$$

```
Show[ListPlot[Table[nwaznnt[[n]] / (n^(2 n) / n! * E^(-5/2)), {n, 1, 16}],  
PlotRange -> {0.95, 1.15}], Plot[1, {n, 1, 16}, PlotStyle -> Red]]
```



n	n wazirs, toroidal n x n, A201626
1	1
2	2
3	6
4	228
5	6745
6	252792
7	11281312
8	585632520
9	34690541994
10	2309813476870
11	170797663069044
12	13888215374348892
13	1231730727253607451
14	118329596584708240732
15	12241103359460777972760
16	1356712722052907806912016
17	?

9.3.3) k Wazirs on an $n \times n$ cylindrical chessboard - k vezírů na válcové šachovnici $n \times n$

2 wazirs, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2012), $n \geq 3$

$$\frac{1}{2}(n-2)n(n^2+2n-1)$$

3 wazirs, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2012), $n \geq 4$

$$\frac{1}{6}n(n^5-15n^3+6n^2+62n-48)$$

4 wazirs, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2012), $n \geq 5$

$$\frac{1}{24}n(n^7-30n^5+12n^4+323n^3-252n^2-1242n+1380)$$

5 wazirs, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2012), $n \geq 6$

$$\frac{1}{120}n(n^9-50n^7+20n^6+995n^5-780n^4-9310n^3+10540n^2+34464n-49200)$$

6 wazirs, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2012), $n \geq 7$

$$\frac{1}{720}n(n^{11}-75n^9+30n^8+2365n^7-1860n^6-39105n^5+44790n^4+338374n^3-495720n^2-1224240n+2124240)$$

První členy polynomů mají tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{5n^{2k-2}}{2(k-2)!} + \frac{n^{2k-3}}{(k-2)!} + \frac{(75k+23)n^{2k-4}}{24(k-3)!} - \frac{(5k+1)n^{2k-5}}{2(k-3)!} + \dots$$

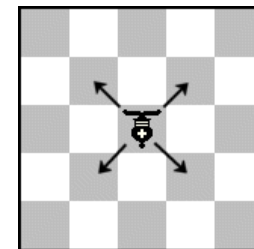
k	k Wazirs on an n x n cylindrical chessboard - Generating function
2	$\frac{x^2(x^2 - 2x - 1)(2x^3 - 5x^2 + 7x + 2)}{(x - 1)^5}$
3	$\frac{x^3(3x^7 - 17x^6 + 36x^5 - 28x^4 + x^3 - 43x^2 + 156x + 12)}{(x - 1)^7}$
4	$\frac{x^4(4x^9 - 33x^8 + 131x^7 - 362x^6 + 828x^5 - 1503x^4 + 1719x^3 - 480x^2 - 1682x - 302)}{(x - 1)^9}$
5	$\frac{x^4(5x^{12} - 63x^{11} + 393x^{10} - 1559x^9 + 4113x^8 - 6699x^7 + 4407x^6 + 5627x^5 - 12814x^4 - 126x^3 + 30376x^2 + 6388x + 192)}{(x - 1)^{11}}$
6	$\frac{x^4(6x^{15} - 113x^{14} + 975x^{13} - 4979x^{12} + 16441x^{11} - 36777x^{10} + 60775x^9 - 96536x^8 + 187626x^7 - 335629x^6 + 363311x^5 - 55149x^4 - 576841x^3 - 179129x^2 - 9189x - 72)}{(x - 1)^{13}}$

k Wazirs on an n x n cylindrical chessboard

n	1 wazir	2 wazirs	3 wazirs	4 wazirs	5 wazirs	6 wazirs	A212270 , summed over all k >= 0
1	1						2
2	4	2	0	0			7
3	9	21	12	0	0	0	43
4	16	92	240	302	192	72	933
5	25	255	1385	4400	8500	10125	36211
6	36	564	5076	29208	113316	305138	3557711
7	49	1085	14399	128121	810530	3774477	746156517
8	64	1896	34560	434652	4009776	28166856	363549830913
9	81	3087	73665	1235808	15514857	151519368	394677987525997
10	100	4760	143620	3086150	50311620	647306720	974602314570939359
11	121	7029	261151	6975133	142730478	2328720449	5418730454986467701985
12	144	10020	448944	14562006	364511784	7330192348	68176187476467835406646029
13	169	13871	736905	28494232	855020257	20729997080	1936241516342334422813929891295
14	196	18732	1163540	52827068	1869359940	53687349716	124281423643836238320564876791634465
15	225	24765	1777455	93563625	3851963970	129164017805	18018270577720149773239661332878801006033
16	256	32144	2638976	159336408	7545404000	291864243216	5902115915714610014755543106193465980780841033
17	289	41055	3821889	262253016	14146712673	624805515744	4367445695491818983620300590884843394029894331908597
18	324	51696	5415300	418930362	25526469348	1275982573704	7301349466942300309265509734850016891336158968754433349967
19	361	64277	7525615	651743453	44529294558	2499973023089	27575256558739249813748119728886227070709000328671450126761816713
20	400	79020	10278640	990316450	75378262680	4721129909540	235279535896373546522624431990064652591614376648757197357867666753191747
21	441	96159	13821801	1473285408	124210105257	8627299501408	4535167300013582716129902876541419476049179552735020613247572070617591319850563
22	484	115940	18326484	2150363776	199772969572	15305887479740	197491676376317086238034375771268015468096595369127422974789270389553078656614541356181
23	529	138621	23990495	3084743417	314323948674	26437681356653	19428968552692023580201970717283106418916518354973431803997465624353317274155556735054148524395
24	576	164472	31040640	4355865588	484769640336	44568241239512	4318138621349162118709161460980939042021659403488318380256344975104820419199796654408025997753556333609
25	625	193775	39735425	6062598000	734099653625	73482027979800	For n=25 to 31 see A212270 (added 24.8.2016)
n	1 wazir	2 wazirs	3 wazirs	4 wazirs	5 wazirs	6 wazirs	$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \frac{1}{n^2} = 1.5030480824753322643220663294755536893857810 \dots$

9.4) k Ferses on an n x n chessboard - k fersů na šachovnici n x n

Fers je skokan [1,1]. Pochází z čaturangy ze 7. století, úlohy s fersem najdeme např. v "Manuscript Bonus Socius" z roku 1266. *Fers is a leaper [1,1]*.



A201243 - 2 ferses, board $n \times n$: (C. Poisson, 1990)

$$\frac{1}{2}(n-1)(n^3 + n^2 - 4n + 4)$$

A201244 - 3 ferses, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 2010), $n \geq 2$

$$\frac{1}{6}(n-2)(n^5 + 2n^4 - 11n^3 + 2n^2 + 54n - 60)$$

A201245 - 4 ferses, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 2010), $n \geq 3$

$$\frac{1}{24}(n^8 - 30n^6 + 48n^5 + 299n^4 - 912n^3 - 462n^2 + 4368n - 4200)$$

A201246 - 5 ferses, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 15.1.2011), $n \geq 4$

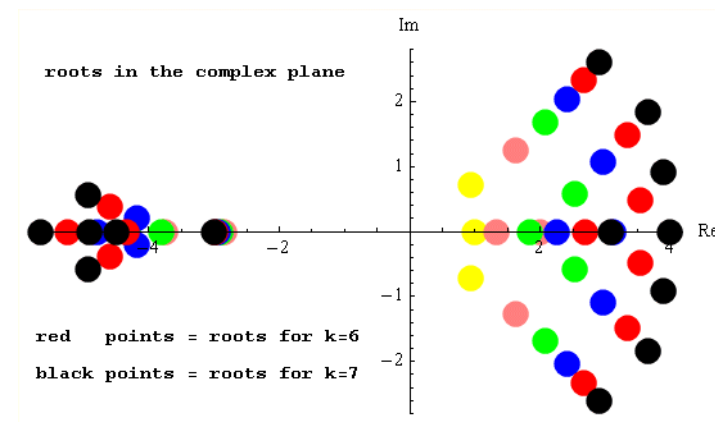
$$\frac{n^{10}}{120} - \frac{5n^8}{12} + \frac{2n^7}{3} + \frac{191n^6}{24} - 24n^5 - \frac{661n^4}{12} + \frac{880n^3}{3} - \frac{937n^2}{15} - 1176n + 1436$$

A201247 - 6 ferses, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 15.1.2011), $n \geq 5$

$$\frac{n^{12}}{720} - \frac{5n^{10}}{48} + \frac{n^9}{6} + \frac{461n^8}{144} - \frac{29n^7}{3} - \frac{2147n^6}{48} + \frac{1289n^5}{6} + \frac{65807n^4}{360} - \frac{6356n^3}{3} + \frac{9185n^2}{6} + \frac{22834n}{3} - 11478$$

A201248 - 7 ferses, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 16.10.2011), $n \geq 6$

$$\frac{n^{14}}{5040} - \frac{n^{12}}{48} + \frac{n^{11}}{30} + \frac{673n^{10}}{720} - \frac{17n^9}{6} - \frac{1019n^8}{48} + \frac{197n^7}{2} + \frac{9772n^6}{45} - \frac{3443n^5}{2} + \frac{47n^4}{4} + \frac{74259n^3}{5} - \frac{1816352n^2}{105} - 49376n + 90660$$



První členy mají vždy tvar:

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{5n^{2k-2}}{2(k-2)!} + \frac{4n^{2k-3}}{(k-2)!} + \frac{(75k^2 - 127k - 94)n^{2k-4}}{24(k-2)!} - \frac{2(5k-1)n^{2k-5}}{(k-3)!} + \dots$$

Maximal number of non-attacking fereses on an $n \times n$ chessboard is $n \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, see chapter 14 for more.

k	k Fereses on an n x n chessboard - Generating function
2	$\frac{2x^2(x+1)(x^2-2x-2)}{(x-1)^5}$
3	$-\frac{2x^3(x^5+3x^4-24x^3+24x^2+37x+19)}{(x-1)^7}$
4	$-\frac{x^3(2x^8-55x^7+230x^6-254x^5-225x^4+173x^3+1380x^2+400x+29)}{(x-1)^9}$
5	$\frac{2x^3(11x^{11}-135x^{10}+549x^9-993x^8+1172x^7-2968x^6+7085x^5-4715x^4-10613x^3-4183x^2-324x-6)}{(x-1)^{11}}$
6	$-\frac{2x^3(41x^{14}-502x^{13}+2506x^{12}-7605x^{11}+18870x^{10}-41305x^9+60117x^8-21366x^7-73987x^6+52960x^5+237560x^4+93891x^3+11196x^2+263x+1)}{(x-1)^{13}}$
7	$2x^4(125x^{16}-1785x^{15}+11715x^{14}-50121x^{13}+158605x^{12}-367485x^{11}+570175x^{10}-533381x^9+460395x^8-1262515x^7+2731225x^6-1795227x^5-5484089x^4-2685639x^3-383115x^2-17415x-108)/(x-1)^{15}$

n	1 fers	2 ferses	3 ferses	4 ferses	5 ferses	6 ferses	7 ferses	8 ferses	9 ferses	10 ferses	summed over all k >= 0, A067965
1	1										2
2	4	4	0	0							9
3	9	28	38	29	12	2	0	0	0		119
4	16	102	340	661	780	552	216	36	0	0	2704
5	25	268	1630	6285	16286	29412	38070	36281	26133	14432	177073
6	36	580	5552	35378	159452	527654	1314600	2510241	3721088	4318118	21836929
7	49	1104	15210	143787	992412	5196928	21191208	68548146	178374762	377507802	6985036032
8	64	1918	35828	468529	4567836	34528698	207830308	1015335608	4084296552	13679413234	4576976735769
9	81	3112	75530	1301351	16959488	173951172	1442794332	9868265160	56484795166	273680844504	7263963336910751
10	100	4788	146240	3202970	53617596	714042302	7775083960	70611785607	542945541684	3576188894116	24830487842030082304
11	121	7060	264702	7170593	149618794	2503447216	34530764200	400594694689	3968602560777	33975328832732	198126078679714777857441
12	144	10054	453620	14872997	377841356	7744201834	131660992164	1894648355686	23434409724072	252146349100808	3494153303407491549112098721
13	169	13908	742918	28969129	879314442	21635290132	443702617356	7740220138881	116641380191321	1536921937560160	141264727800378056245286463971328
14	196	18772	1171120	53527866	1911495356	55540293510	1350258600008	28031868758455	504719881446644	7978193752327604	12779122891585386852029424628087941481
15	225	24808	1786850	94568255	3922051616	132752090192	3771242866680	91773614996072	1943125937637934	36236722615570540	2628141044813862018744988536642011269669959
16	256	32190	2650452	160741233	7657895196	298491879178	9789675562020	?	?	?	1216101433910602069688778938088400688231434960896
17	289	41104	3835730	264175507	14321764860	636559136340	23856321869260	?	?	?	for n=17 to n=18 see A067965
18	324	51748	5431808	421511954	25791609308	1296099575166	55015308882264	?	?	?	?
19	361	64332	7545110	655152581	44921419134	2533344878048	120855465245464	?	?	?	?
20	400	79078	10301460	994751765	75946019596	4774975629082	254284702668580	?	?	?	?

Poslední sloupec (sekvence [A067965](#)) určuje celkový počet pozic k neohrožujících se fersů na šachovnici $n \times n$ přes všechna $k \geq 0$. Hodnoty této sekvence pro $n \leq 13$ vypočetl v roce 2002 R.H.Hardin. Novým programem jsem 6.12.2011 ověřil, že hodnoty jsou správné a vypočetl jsem navíc nejprve hodnotu pro $n=14$ a potom 3.1.2012 na 16 GB systému i pro $n=15$. 1.5.2012 jsem doplnil hodnotu pro $n=16$ a 11.8.2016 na systému se 128 GB RAM pro $n=17$ a pro $n=18$.

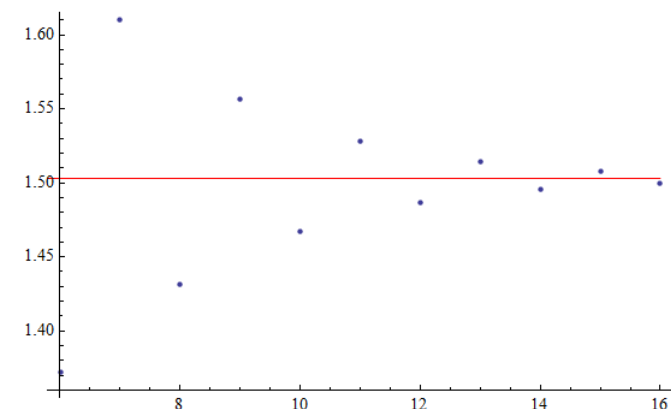
Z hlediska asymptotického chování předpokládám, že bude (stejně jako pro [vezíry](#)) platit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(a_n)^{n^2}} = 1.5030480824753322643220663294755536893857810 \dots$$

Graf vpravo zobrazuje limitní průběh pomocí

$$\frac{\sqrt{a_n a_{n-2}}}{a_{n-1}}$$

Viz též obecná tabulka známých konstant tohoto typu na str. 69.

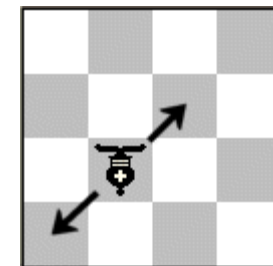


9.4.1) k semi-ferses on an n x n chessboard - k semi-fersů na šachovnici n x n

Two semi-ferses do not attack each other if they are in the same northwest-southeast diagonal. Possible moves of semi-fers are only [1,1] and [-1,-1].

Tato úloha je o něco těžší než pro [semi-vezíry](#). Pro jednu z celkem $2n-1$ diagonál je sice vzorec identický s kapitolou 2.1.1, komplikace je ale v tom, že tyto diagonály nejsou stejně dlouhé. V programu Mathematica lze počet pozic k nenapadajících semi-fersů vypočítat takto:

```
(* k non-attacking semi-ferses, normal board n x n, V. Kotesovec 2011 *)
<< Combinatorica`
fersln[k_,n_] := (If[n-k+1<k,0,Binomial[n-k+1,k]]);
semifers[k_,n_] := (sized=ConstantArray[0,2n-1];
Do[sized[[j]]=j;sized[[2n-j]]=j,{j,1,n}];
sumfers=0;curcomp=Table[If[j==2n-1,k,0],{j,1,2n-1}];
Do[sumfers=sumfers+Product[fersln[curcomp[[j]]],sized[[j]]],{j,1,2n-1}];
curcomp=NextComposition[curcomp];,{i,1,NumberOfCompositions[k,2n-1}}];sumfers
);
```



2 semi-ferses, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 24.10.2011)

$$\frac{1}{2}(n-1)(n^3+n^2-2n+2)$$

3 semi-ferses, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 24.10.2011), $n > 1$

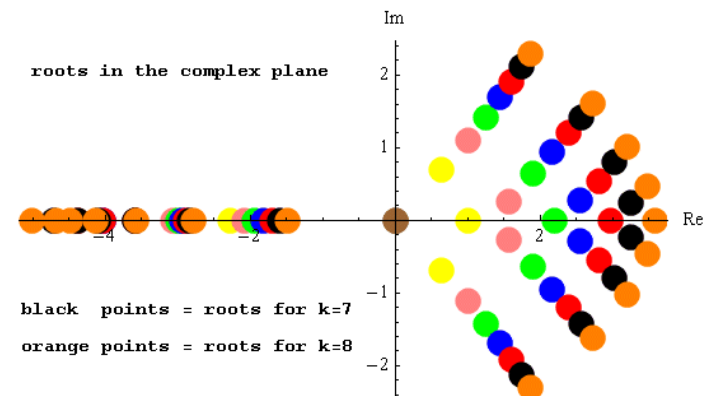
$$\frac{n^6}{6} - \frac{3n^4}{2} + 2n^3 + \frac{7n^2}{3} - 8n + 6$$

4 semi-ferses, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 24.10.2011), $n > 2$

$$\frac{n^8}{24} - \frac{3n^6}{4} + n^5 + \frac{95n^4}{24} - 11n^3 + \frac{3n^2}{4} + 27n - 28$$

5 semi-ferses, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 24.10.2011), $n > 3$

$$\frac{n^{10}}{120} - \frac{n^8}{4} + \frac{n^7}{3} + \frac{21n^6}{8} - 7n^5 - \frac{29n^4}{4} + \frac{137n^3}{3} - \frac{467n^2}{15} - 84n + 118$$



6 semi- ferses, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 24.10.2011), $n > 4$

$$\frac{n^{12}}{720} - \frac{n^{10}}{16} + \frac{n^9}{12} + \frac{155n^8}{144} - \frac{17n^7}{6} - \frac{115n^6}{16} + \frac{413n^5}{12} - \frac{116n^4}{45} - \frac{502n^3}{3} + \frac{799n^2}{4} + \frac{725n}{3} - 472$$

7 semi- ferses, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 25.10.2011), $n > 5$

$$\frac{n^{14}}{5040} - \frac{n^{12}}{80} + \frac{n^{11}}{60} + \frac{229n^{10}}{720} - \frac{5n^9}{6} - \frac{59n^8}{16} + \frac{193n^7}{12} + \frac{2173n^6}{180} - \frac{433n^5}{3} + \frac{581n^4}{5} + \frac{8431n^3}{15} - \frac{207247n^2}{210} - 622n + 1830$$

8 semi- ferses, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 6.12.2011), $n > 6$

$$\frac{n^{16}}{40320} - \frac{n^{14}}{480} + \frac{n^{13}}{360} + \frac{211n^{12}}{2880} - \frac{23n^{11}}{120} - \frac{77n^{10}}{60} + \frac{193n^9}{36} + \frac{55007n^8}{5760} - \frac{1819n^7}{24} + \frac{9901n^6}{480} + \frac{196909n^5}{360} - \frac{8018201n^4}{10080} - \frac{104141n^3}{60} + \frac{523199n^2}{120} + \frac{7655n}{6} - 6948$$

Obecně mají vzorce tvar:

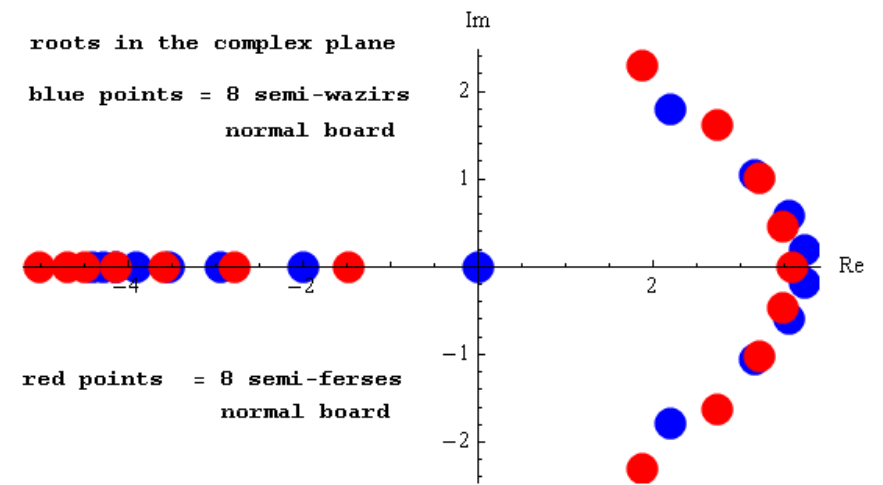
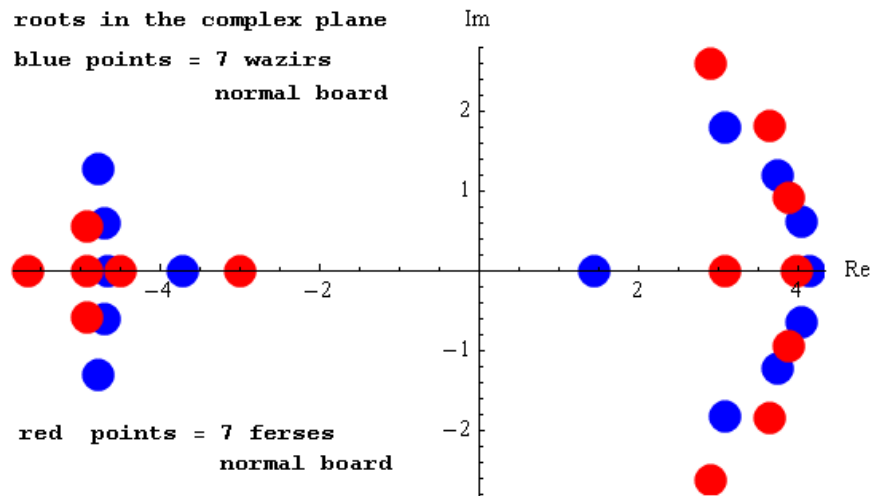
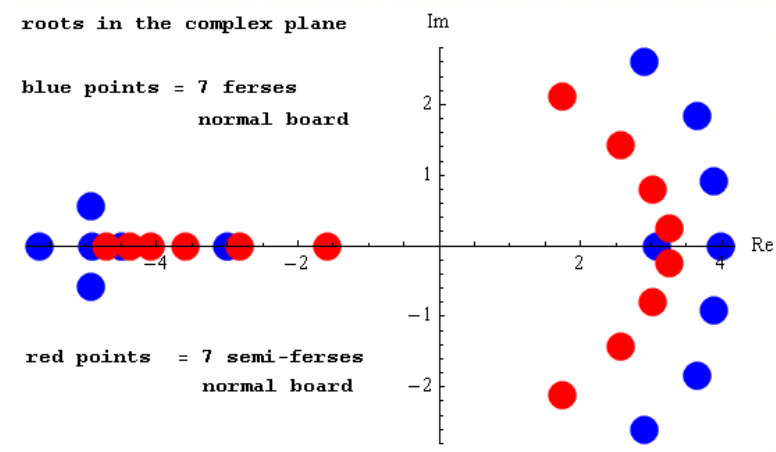
$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{3n^{2k-2}}{2(k-2)!} + \frac{2n^{2k-3}}{(k-2)!} + \frac{(27k^2 - 55k - 22)n^{2k-4}}{24(k-2)!} - \frac{(3k-1)n^{2k-5}}{(k-3)!} - \frac{(k-1)(9k^2 - 19k - 72)n^{2k-6}}{16(k-3)!} + \dots$$

Maximální počet nenapadajících se semi-fersů na normální šachovnici $n \times n$ je roven součtu maximálních počtů na každé z levo-pravých diagonál
Maximal number of non-attacking semi-ferses on an $n \times n$ board

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tento počet je (na rozdíl od fersů) nezávislý na tom, jestli je n sudé nebo liché. Vzhledem k tomu, že pro n liché je na šachovnici $n \times n$ známa pozice totožného počtu fersů (kteří mají větší pohyblivost než semi-fersové), viz kap. 14.1, je tím současně dokázáno, že pro liché n je tato hodnota i maximem počtu nenapadajících se fersů na normální šachovnici $n \times n$. Viz též tabulka na str. 776.

Poznámka: Na prstencové šachovnici $n \times n$ jsou explicitní vzorce pro počet pozic neohrožujících se k semi-fersů identické jako pro k semi-vezírů, viz kap. 9.3.1.
Number of arrangements of k non-attacking semi-ferses on an $n \times n$ toroidal chessboard is identical as number of arrangements of k non-attacking semi-wazirs, see chapter 9.3.1



k semi-ferses on an n x n normal board

n	1 s-f	2 s-f	3 s-f	4 semi-ferses	5 semi-ferses	6 semi-ferses	7 semi-ferses	8 semi-ferses	summed over all k >= 0, A067962
1	1								2
2	4	5	2	0					12
3	9	32	57	53	24	4	0	0	180
4	16	111	438	1084	1750	1857	1272	535	7200
5	25	284	1941	8907	29003	69053	122064	160998	748800
6	36	605	6306	45683	244294	999717	3203004	8152545	204422400
7	49	1140	16757	174699	1374715	8484165	42125233	171275219	145957593600
8	64	1967	38662	546028	5902486	50798160	357457622	2096106904	272940700032000
9	81	3176	80313	1472309	20853433	237499049	2235007983	17723789832	1336044726656640000
10	100	4869	153826	3545567	63560998	922610753	11146501940	114348459022	17122749216831498240000
11	121	7160	276161	7807673	172524261	3102430409	46680051499	599662096906	574502481723130428948480000
12	144	10175	470262	15988724	426446134	9291714136	170065392198	2668385430772	50464872497041500009263431680000
13	169	14052	766317	30829303	975762607	25303941269	552888584869	10388495942481	11605406728144633757130311383449600000
14	196	18941	1203138	56504259	2092485926	63638609717	1634636124796	36194973846216	6987267228814039646155446574633500672000000
15	225	25004	1829661	99167327	4246014103	149584394253	4459284115005	114820501274897	11013603109478613037816414953353734465732680000000
16	256	32415	2706566	167637588	8214736438	331721804376	11352887612614	336127566062948	45449263244523699535279033134427281625546535337984000000
17	289	41360	3908017	274250449	15245820013	699300659457	27220069198643	917802055770010	491020387111913670764092231390544560207043606017119092736000000
18	324	52037	5523522	435897503	27278525638	1410032522753	61918150548756	2357851179857838	13888248953553373303748489975537758944116517627864994379323146240000000
19	361	64656	7659913	675281309	47249803729	2733241450385	134441232417959	5739808655323480	1028420529653451691596851520656678633106555454222938195640621388896665600000000
20	400	79439	10443446	1022412812	79504791318	5115132910928	280049440740310	13318779980563432	199374340783577728731457130892607864475820929150080949460219983153624851257753600000000

Poslední sloupec (sekvence [A067962](#), *Number of binary arrangements without adjacent 1's on n x n array connected nw-se*, pozor jen na její offset 0) určuje celkový počet pozic k neohrožujících se semi-fersů na šachovnici n x n pro všechna k >= 0. Pro tuto sekvenci je znám obecný vzorec (jeho autorem je asi R. H. Hardin, 2002)

$$F_{n+2} * \left(\prod_{i=1}^{n-1} F_{i+2} \right)^2 = F_{n+2} * \left(\prod_{i=1}^{n+1} F_i \right)^2 \sim \frac{C^2}{5^{n+1} \sqrt{5}} * \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{(n+2)^2}$$

kde F_n jsou [Fibonacciho čísla](#) a $C=1.226742010720353244\dots$ je [Fibonacci Factorial Constant](#). Důkaz vyplývá ze vzorce uvedeného v kapitole 2.1.1 (pro šachovnice 1 x n), složime-li všechny diagonální linie a uvědomíme-li si, že nejsou stejně dlouhé. Zobecnění pro skokany [r,s], viz str. 291.

V programu Mathematica dostaneme tabulku hodnot pro tuto sekvenci takto:

```
Table[Fibonacci[n+2]*Product[Fibonacci[i],{i,1,n+1}]^2,{n,1,20}]/ColumnForm
```

Viz též článek [The problem of the pawns \(2003\)](#), Sergey Kitaev a Toufik Mansour, *Annals of Combinatorics* 8 (2004), p.81-91.

Když položíme v rozvoji

$$\frac{n^{2k}}{k!} \left(1 - \frac{3(k-1)k}{2n^2} + \frac{2(k-1)k}{n^3} + \frac{(k-1)k(27k^2 - 55k - 22)}{24n^4} - \frac{(k-2)(k-1)k(3k-1)}{n^5} - \frac{(k-2)(k-1)^2k(9k^2 - 19k - 72)}{16n^6} + \dots \right)$$

$k = n$, vidíme, že členy s lichým exponentem u n ve jmenovateli jdou asymptoticky k 0 a dostaneme tak

$$\frac{n^{2n}}{n!} \left(1 - \frac{3(n-1)n}{2n^2} + \frac{(n-1)n(27n^2 - 55n - 22)}{24n^4} - \frac{(n-2)(n-1)^2n(9n^2 - 19n - 72)}{16n^6} + \dots \right) \sim \frac{n^{2n}}{n!} * \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{27}{24} - \frac{9}{16} + \dots \right)$$

Number of ways to place n non-attacking semi-ferses on an $n \times n$ chessboard is asymptotic (see chapter 13.1 for proof)

$$\frac{n^{2n}}{n!} * \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d 3^d}{2^d d!} = \frac{n^{2n}}{n!} * e^{-\frac{3}{2}} \sim \binom{n^2}{n} * e^{-1}$$

n	n semi-ferses, board n x n, A244288
1	1
2	5
3	57
4	1084
5	29003
6	999717
7	42125233
8	2096106904
9	120194547233
10	7799803041491
11	564856080384900
12	45146219773912540
13	3946445378386791157
14	374482268128153003615
15	38330653031858936914329
16	4209191997519328986666624
17	?

Hodnotu pro $n=15$ jsem vypočetl 4.1.2012 na počítači se 16 GB paměti RAM (výpočet trval přes 24 hodin a využilo se přes 10 GB RAM), hodnotu pro $n=16$ jsem vypočetl 4.9.2016 na počítači se 128 GB paměti RAM (výpočet trval 124 hodin 15 minut a využilo se 39 GB RAM).

9.4.2) n Ferses on an $n \times n$ chessboard - n fersů na šachovnici $n \times n$

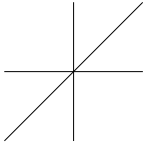
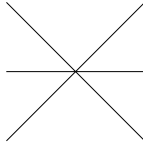
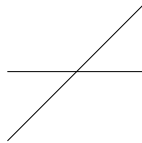
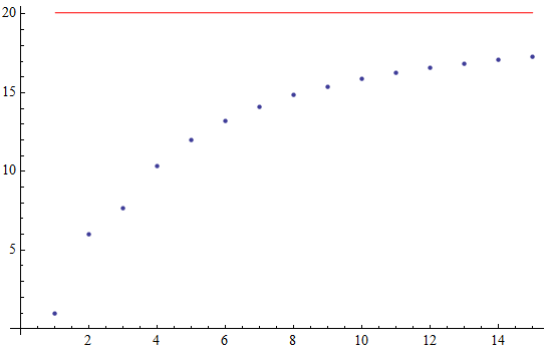
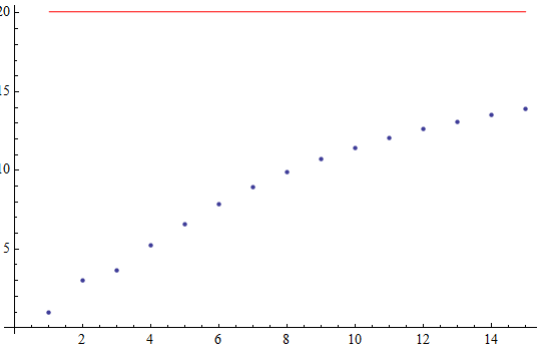
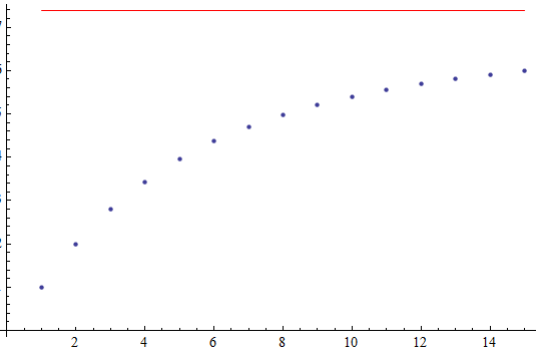
Asymptoticky je rozvoj pro n fersů téměř shodný jako pro n vezírů, hlavní člen je identický.

Number of ways to place n non-attacking ferses on an $n \times n$ chessboard is asymptotic (see chapter 13.1 for more)

$$\frac{n^{2n}}{n!} * e^{-\frac{5}{2}} \sim \binom{n^2}{n} * e^{-2}$$

n	n ferses, board $n \times n$, A201861
1	1
2	4
3	38
4	661
5	16286
6	527654
7	21191208
8	1015335608
9	56484795166
10	3576188894116
11	253756155257774
12	19937566770720487
13	1717714713900798962
14	160977153444563000938
15	16300053518916522372836
16	1773133639291617644092637
17	?

Hodnotu pro $n=15$ jsem vypočetl 3.1.2012 na počítači se 16 GB paměti RAM (výpočet trval přes 9 hodin a využilo se přes 10 GB RAM), Hodnotu pro $n=16$ jsem vypočetl 31.8.2016 na počítači se 128 GB paměti RAM (výpočet trval přes 16 hodin a využilo se přes 38 GB RAM).

n non-attacking pieces on an n x n normal chessboard			
n	composite pieces wazir+semi-fers	composite pieces fers+semi-wazir	composite pieces semi-wazir+semi-fers
			
1	1	1	1
2	1	2	3
3	11	23	30
4	176	348	530
5	4431	8058	13421
6	147502	248676	445298
7	6082000	9621318	18245667
8	298311510	447902044	888818308
9	16934642559	24359133099	50129208311
10	1090944080545	1514496293576	3210254226144
11	78573797586417	105888530708764	229986851764749
12	6253614894192699	8218750195015852	18217727578257756
13	544850551575476634	700890343343792559	1580524194834950745
14	51564565259117506018	65119001340681579158	149015336422938803300
15	5266602956115495200164	6545128344693713930820	15168254619279707961837
16	577314082061579410243550	707445894688022635967310	1657637846418822466823992
$n \rightarrow \infty$	$\binom{n^2}{n} * e^{-3}$	$\binom{n^2}{n} * e^{-3}$	$\binom{n^2}{n} * e^{-2}$
$\frac{\binom{n^2}{n}}{a_n}$			

9.5) k Ferses on an k x n chessboard - k fersů na šachovnici k x n

2 ferses, board 2 x n:

$$2n^2 - 3n + 2$$

3 ferses, board 3 x n: (V. Kotěšovec, 16.1.2011), $n \geq 2$

$$\frac{9n^3}{2} - \frac{33n^2}{2} + 29n - 22$$

4 ferses, board 4 x n: (V. Kotěšovec, 16.1.2011), $n \geq 3$

$$\frac{32n^4}{3} - 64n^3 + \frac{568n^2}{3} - 306n + 221$$

5 ferses, board 5 x n: (V. Kotěšovec, 16.1.2011), $n \geq 4$

$$\frac{625n^5}{24} - \frac{875n^4}{4} + \frac{7305n^3}{8} - \frac{9087n^2}{4} + \frac{9889n}{3} - 2204$$

6 ferses, board 6 x n: (V. Kotěšovec, 16.1.2011), $n \geq 5$

$$\frac{324n^6}{5} - 702n^5 + 3789n^4 - \frac{76123n^3}{6} + \frac{273747n^2}{10} - \frac{107188n}{3} + 21868$$

7 ferses, board 7 x n: (V. Kotěšovec, 16.1.2011), $n \geq 6$

$$\frac{117649n^7}{720} - \frac{521017n^6}{240} + \frac{10356199n^5}{720} - \frac{2899715n^4}{48} + \frac{15455027n^3}{90} - \frac{4917358n^2}{15} + \frac{11604569n}{30} - 216514$$

8 ferses, board 8 x n: (V. Kotěšovec, 17.1.2011), $n \geq 7$

$$\frac{131072n^8}{315} - \frac{32768n^7}{5} + \frac{2317312n^6}{45} - \frac{3897472n^5}{15} + \frac{41064574n^4}{45} - \frac{11350762n^3}{5} + \frac{2449286587n^2}{630} - \frac{125204971n}{30} + 2142252$$

První členy vzorců mají obecně tvar:

$$\frac{(kn)^k}{k!} - (k-1)(5k-4) \frac{(kn)^{k-1}}{2k!} + \dots$$

k	k Ferses on an k x n chessboard - Generating function
2	$\frac{x(2x^2 + x + 1)}{(x - 1)^3}$
3	$\frac{x(6x^4 - 2x^3 + 20x^2 + 2x + 1)}{(x - 1)^4}$
4	$\frac{x(16x^6 - 30x^5 + 131x^4 + 26x^3 + 108x^2 + 4x + 1)}{(x - 1)^5}$
5	$\frac{x(42x^8 - 180x^7 + 658x^6 - 316x^5 + 1796x^4 + 630x^3 + 488x^2 + 6x + 1)}{(x - 1)^6}$
6	$\frac{x(104x^{10} - 796x^9 + 3362x^8 - 6005x^7 + 14791x^6 + 3522x^5 + 22812x^4 + 6818x^3 + 2038x^2 + 9x + 1)}{(x - 1)^7}$
7	$\frac{x(252x^{12} - 3000x^{11} + 16593x^{10} - 50254x^9 + 115356x^8 - 97934x^7 + 309022x^6 + 197956x^5 + 270448x^4 + 56804x^3 + 8287x^2 + 12x + 1)}{(x - 1)^8}$
8	$\frac{x(592x^{14} - 10194x^{13} + 75960x^{12} - 323854x^{11} + 920016x^{10} - 1671559x^9 + 2963175x^8 - 196285x^7 + 6852528x^6 + 4738705x^5 + 2978404x^4 + 416227x^3 + 33484x^2 + 16x + 1)}{(x - 1)^9}$

n	2 ferses	3 ferses	4 ferses	5 ferses	6 ferses	7 ferses	8 ferses
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	6	9	12	16	20	25
3	11	38	143	545	2129	8419	33673
4	22	118	661	3740	21420	123652	718468
5	37	273	2091	16286	128568	1024982	8234362
6	56	530	5201	52026	527654	5405676	55808623
7	79	916	11015	135220	1683955	21191208	268804683
8	106	1458	20813	303628	4495724	67287066	1015335608
9	137	2183	36131	611635	10513318	182716115	3202109106
10	172	3118	58761	1133376	22204878	439955214	8791325685
11	211	4290	90751	1965861	43268665	963297378	21631486285
12	254	5726	134405	3232100	78992052	1953062776	48711676566
13	301	7453	192283	5084228	136657172	3716482108	101965681852
14	352	9498	267201	7706630	225993222	6706075904	200769063355
15	407	11888	362231	11319066	359675423	11566353288	375289103519
16	466	14650	480701	16179796	553870636	19189653750	670864305540
17	529	17811	626195	22588705	828829634	30781955469	1153606909334
18	596	21398	802553	30890428	1209526030	47939473730	1917438663441
19	667	25438	1013871	41477475	1726341861	72736872978	3092786869569
20	742	29958	1264501	54793356	2415799828	107827916052	4857184493698
21	821	34985	1559051	71335706	3321342192	156559374142	7448034914880
22	904	40546	1902385	91659410	4494156326	223099021012	11177818660087
23	991	46668	2299623	116379728	5994046923	312578535032	16452036250675
24	1082	53378	2756141	146175420	7890354860	431252132562	23790198063248
25	1177	60703	3277571	181791871	10262922718	586671756231	33850188884922
26	1276	68670	3869801	224044216	13203106958	787879641654	47456351620205
27	1379	77306	4538975	273820465	16814836753	1045619086130	65631651383925
28	1486	86638	5291493	332084628	21215719476	1372564242864	89634297991854
29	1597	96693	6134011	399879840	26538192844	1783569764256	120999221637892
30	1712	107498	7073441	478331486	32930723718	2295941117800	161584813323891

9.5.1) k Ferses (Bishops) on a 2 x n chessboard - k fersů (střelců) na šachovnici 2 x n

Fersové na šachovnici 2 x n jsou vlastně střelci, přesto tématicky patří tato kapitola spíše k fersům. V případě normální šachovnice 2 x n lze problém převést na umístění kamenů na dvou nezávislých lomených liniích, každé délky n, přičemž na každou z těchto linií se vejde maximálně $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ fersů. Na normální šachovnici 2 x n se tak vejde maximálně $2 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ neohrožujících se fersů.

Pro každou z dílčích linií platí stejné vzorce jako pro rozmístění neohrožujících se vezírů (resp. králů) na šachovnici 1 x n, tak jak byly odvozeny v kapitole 2.1.1. Složením počtu kamenů k jako součtu $k_1+k_2=k$, kde $k \geq k_1, k_2 \geq 0$ dostaneme následující vzorec

Number of ways to place k non-attacking ferses (or bishops) on a 2 x n board (for $n \geq 2k - 1$)

$$f(k, n) = \sum_{j=0}^k \binom{n-j+1}{j} \binom{n+j-k+1}{k-j} = \frac{1+(-1)^k}{2} * \binom{n+1-k/2}{k/2}^2 + 2 * \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{n-j+1}{j} \binom{n+j-k+1}{k-j}$$

Při pevném k jde o polynomy v n stupně k a vzorce platí vždy až od $n \geq k - 1$

Několik prvních polynomů:

$$f(2, n) = 2n^2 - 3n + 2$$

$$f(3, n) = \frac{2}{3}(n-2)(2n^2 - 5n + 6)$$

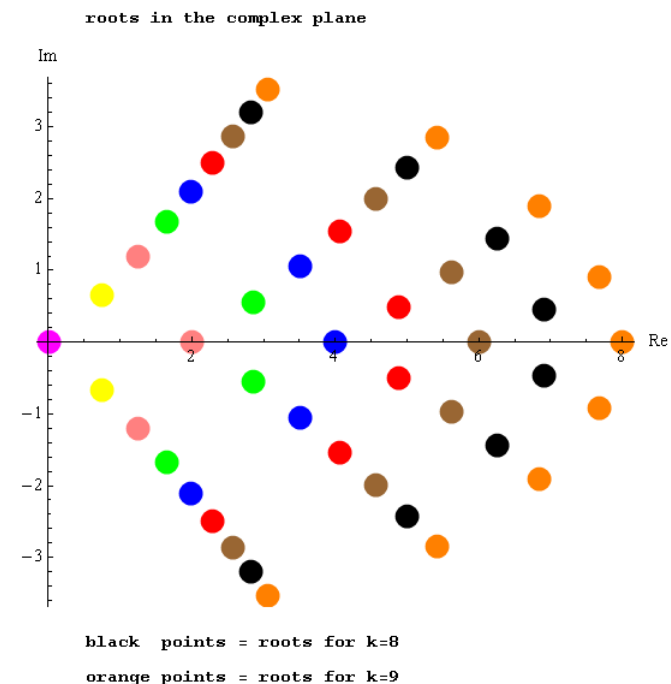
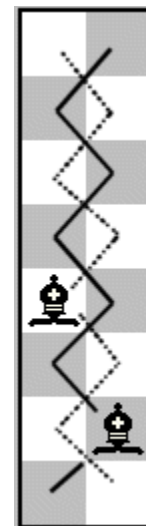
$$f(4, n) = \frac{1}{6}(4n^4 - 36n^3 + 131n^2 - 237n + 186)$$

$$f(5, n) = \frac{1}{15}(n-4)(4n^4 - 44n^3 + 199n^2 - 449n + 450)$$

$$f(6, n) = \frac{1}{90}(8n^6 - 180n^5 + 1730n^4 - 9195n^3 + 28907n^2 - 51780n + 41940)$$

$$f(7, n) = \frac{1}{315}(n-6)(8n^6 - 204n^5 + 2234n^4 - 13581n^3 + 49001n^2 - 101172n + 95340)$$

Pro lichá k polynom vždy obsahuje člen $(n - k + 1)$, ostatní kořeny jsou komplexní.



První členy vzorců mají tvar:

$$\begin{aligned} & \frac{2^k n^k}{k!} - \frac{3 * 2^{k-2} (k-1) n^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{2^{k-5} (27k^2 - 55k + 50) n^{k-2}}{3(k-2)!} + \frac{2^{k-7} (-9k^3 + 28k^2 - 51k + 16) n^{k-3}}{(k-3)!} \\ & + \frac{2^{k-11} (1215k^4 - 5130k^3 + 14045k^2 - 9138k + 7672) n^{k-4}}{45(k-4)!} + \frac{2^{k-13} (-243k^5 + 1305k^4 - 4775k^3 + 4823k^2 - 7830k - 1600) n^{k-5}}{15(k-5)!} \\ & + \frac{2^{k-16} (45927k^6 - 301077k^5 + 1380645k^4 - 1921031k^3 + 4534404k^2 + 1655372k + 3677280) n^{k-6}}{2835(k-6)!} \\ & + \frac{2^{k-18} (-6561k^7 + 51030k^6 - 281610k^5 + 505232k^4 - 1544837k^3 - 746534k^2 - 3643024k - 3058944) n^{k-7}}{945(k-7)!} \\ & + \frac{2^{k-23} (885735k^8 - 8004420k^7 + 51693390k^6 - 114632280k^5 + 426603415k^4 + 238913260k^3 + 1950304244k^2 + 3230742512k + 3286793088) n^{k-8}}{42525(k-8)!} \\ & + \frac{2^{k-25} (-98415k^9 + 1016955k^8 - 7530570k^7 + 20040678k^6 - 87319687k^5 - 52103685k^4 - 644992464k^3 - 1579261788k^2 - 3225753584k - 3141043200) n^{k-9}}{14175(k-9)!} \\ & + \frac{2^{k-28} (5845851k^{10} - 68201595k^9 + 570150900k^8 - 1781538462k^7 + 8852600295k^6 + 5263454405k^5 + 95103689538k^4 + 305607589364k^3 + 940317713544k^2 + 1829784115040k + 1796455718400) n^{k-10}}{1403325(k-10)!} + \dots \end{aligned}$$

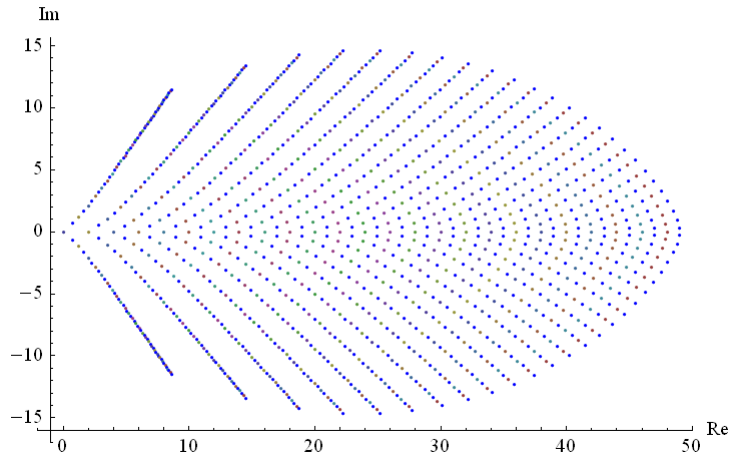
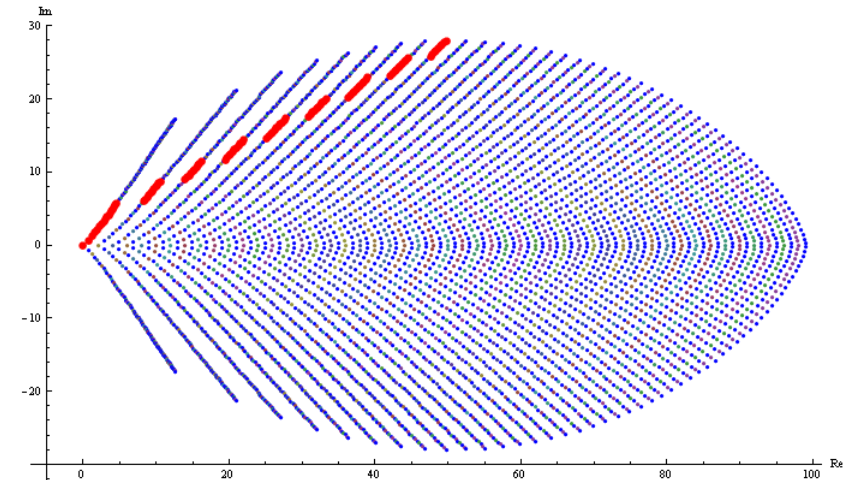
Pokud budeme analyzovat u každého členu koeficient u nejvyšší mocniny, zjistíme, že předchozí vzorec se dá zapsat jako nekonečná suma

$$\frac{2^k n^k}{k!} * \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(-1)^d 3^d k^{2d}}{2^{2d} n^d d!} * \left(1 - \frac{d(14d+13)}{27k} + \frac{(d-1)d(196d^2+316d+1419)}{1458k^2} - \frac{(d-1)d(13720d^4+700d^3+233942d^2-161185d-291768)}{590490k^3} + \dots \right)$$

Sečtením této řady dostaneme (pro konstantní k) **asymptotický rozvoj**

$$\frac{2^k n^k}{k!} * e^{-\frac{3k^2}{4n}} * \left(1 + \frac{3k}{4n} - \frac{(28k^2 - 105k + 50)k}{96n^2} - \frac{(48k^3 - 175k^2 + 150k - 32)k}{128n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)$$

Tento vzorec je téměř shodný jako pro jezdcu na šachovnici $2 \times n$, liší se až počínaje kvadratickým členem.

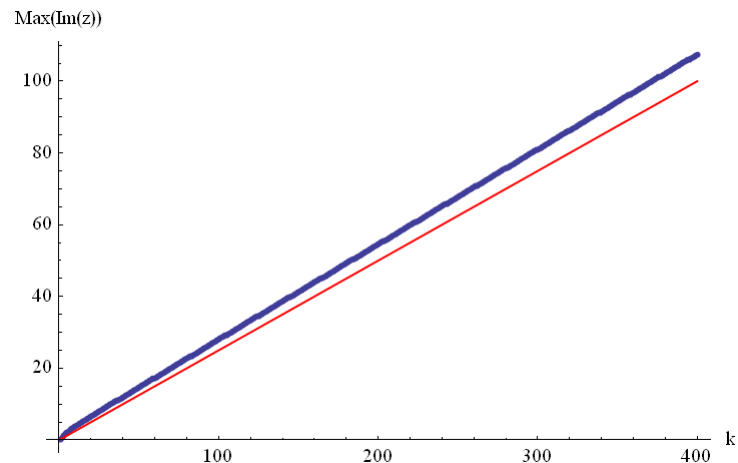
complex plane, roots for all $k \leq 50$ complex plane, roots for all $k \leq 100$
red points = $\text{Max}(\text{Im}(z))$ for fixed k 

Pro všechny komplexní kořeny z platí

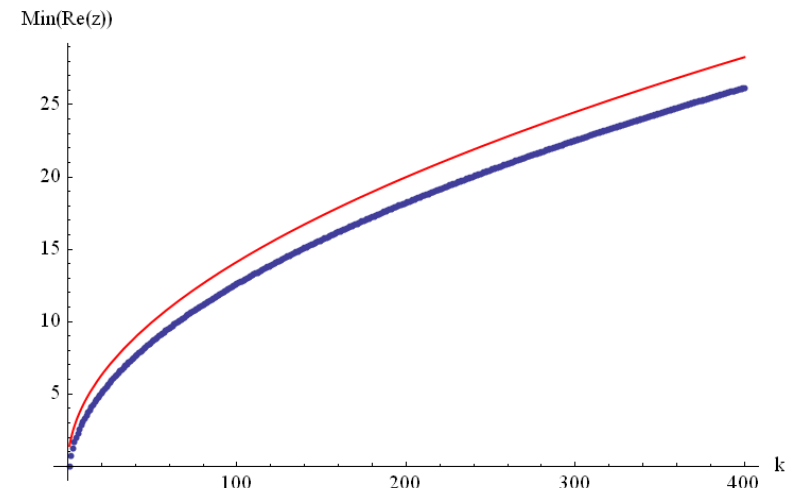
$$\text{Re}(z) \leq k - 1$$

Při pevně zvoleném k nastávají maxima imaginární části v červeně označených bodech (na grafu vpravo nahoře pro $k = 100$).

Hodnota maxima imaginární části je zhruba lineární vzhledem ke k , na grafu je zobrazena červeně přímka $k/4$ (vypočítal jsem polynomy až do $k=400$). Odpovídá to tomu, že obrazce v grafech nahoře si zachovávají stejný tvar.



Minimum reálné části (modrá křivka) je v grafu zobrazeno spolu s funkcí $\sqrt{2k}$ (červená křivka)



Zajímavá je suma přes všechna $k \geq 0$
summed over all $k \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} f(k, n) = F_{n+2}^2 = \frac{1}{5} \left(\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - 2(-1)^n \right) = \frac{L_{2n+4} - 2(-1)^n}{5}$$

kde F_n jsou [Fibonacci numbers](#) a L_n jsou [Lucas numbers](#) (viz též [A007598](#), Squared Fibonacci numbers)

K tomuto výsledku došli také Sergey Kitaev a Toufik Mansour v již citovaném článku [The problem of the pawns](#) (v PDF verzi z roku 2008 je o tom zmínka na str. 12). V tomto článku najdeme i některé další výsledky pro šachovnici $3 \times n$ a vytvářející funkce pro šachovnice $4 \times n$ až $6 \times n$.

Vraťme se však k původnímu vzorci ze str. 428 a probereme ještě speciální případ, když za n dosadíme $2n$ a za k dosadíme n .
[A199033](#) - Number of ways to place n non-attacking ferses (or bishops) on a $2 \times 2n$ board

$$f(n, 2n) = \sum_{j=0}^n \binom{2n-j+1}{j} \binom{n+j+1}{n-j}$$

Recurrence (V. Kotěšovec, 30.10.2011)

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 22$$

$$(112n^4 + 968n^3 + 3048n^2 + 4136n + 2040) * a_{n+2} = (728n^4 + 5914n^3 + 17550n^2 + 22510n + 10530) * a_{n+1} + (189n^4 + 1539n^3 + 4578n^2 + 5886n + 2760) * a_n$$

Asymptotický vzorec je

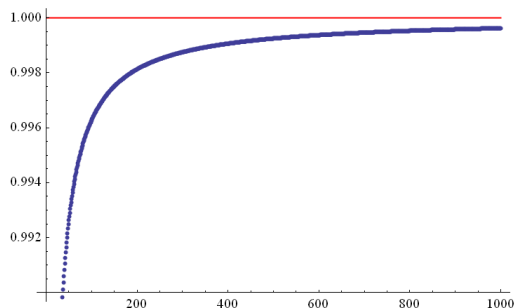
$$\sum_{j=0}^n \binom{2n-j+1}{j} \binom{n+j+1}{n-j} \sim \frac{3^{3n+4}}{2^{2n+5} \sqrt{3\pi n}} * \left(1 - \frac{17}{36n} + \frac{3865}{10368n^2} - \frac{193975}{559872n^3} + \dots \right)$$

nebo také

$$\sum_{j=0}^n \binom{2n-j+1}{j} \binom{n+j+1}{n-j} \sim \frac{27}{16} * \binom{3n}{n} * \left(1 - \frac{3}{8n} + \frac{191}{576n^2} + \dots \right)$$

`Table[Sum[Binomial[2n-j+1, j]*Binomial[n+j+1, n-j], {j, 0, n}], {n, 1, 25}]`

```
Show[
ListPlot[
Table[Sum[Binomial[2n-j+1, j]*Binomial[n+j+1, n-j], {j, 0, n}] /
(27/16*Binomial[3n, n]), {n, 1, 1000}],
Plot[1, {n, 1, 1000}, PlotStyle -> Red, AxesOrigin -> {0, 0.99}]
```



Ze známé rekurence lze hlavní člen asymptotického rozvoje potvrdit i programem [Asymptotics.m](#), jehož autorem je Manuel Kauers (druhý člen v rozvoji $(-1/4)^n$ jde k 0 a je proto nezajímavý). (Main part of this result was confirmed with program [Asymptotics.m](#) by Manuel Kauers)

```
<< Asymptotics.m
```

```
Asymptotics Package by Manuel Kauers – © RISC Linz – V 0.3
```

```
Asymptotics[
  (-2760 - 5886 n - 4578 n^2 - 1539 n^3 - 189 n^4) * a[n] +
  (-10530 - 22510 n - 17550 n^2 - 5914 n^3 - 728 n^4) * a[1 + n] +
  (2040 + 4136 n + 3048 n^2 + 968 n^3 + 112 n^4) * a[2 + n],
  a[n]]
{(-1/4)^n, (27/4)^n / sqrt(n)}
```

Paul D. Hanna doplnil 14.11.2012 generační funkci (viz [A199033](#)), která jde zjednodušit na

$$\frac{27}{\left(1 + 2 \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(1 - \frac{27x}{2}\right)\right)\right)^2 \left(7 - 12 \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(1 - \frac{27x}{2}\right)\right) + 2 \cos\left(\frac{2}{3} \arccos\left(1 - \frac{27x}{2}\right)\right)\right)}$$

V programu Mathematica

```
CoefficientList[Series[1/((1-x*(2/Sqrt[3*x]*Sin[1/3*ArcSin[Sqrt[27*x/4]]])^2*(1-2*x*(2/Sqrt[3*x]*Sin[1/3*ArcSin[Sqrt[27*x/4]]])^2-3*x^2*(2/Sqrt[3*x]*Sin[1/3*ArcSin[Sqrt[27*x/4]]])^4)),{x,0,20}],x]
```

nebo

```
CoefficientList[Series[-(27/((1+2*Cos[1/3*ArcCos[1-(27*x)/2]])^2*(7-12*Cos[1/3*ArcCos[1-(27*x)/2]]+2*Cos[2/3*ArcCos[1-(27*x)/2]]))),{x,0,20}],x]
```

k ferses normal board 2 x n

n	1 fers	2 ferses	3 ferses	4 ferses	5 ferses	6 ferses	7 ferses	8 ferses	9 ferses	summed over all k >= 0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	4
2	4	4	0	0	0	0	0	0	0	9
3	6	11	6	1	0	0	0	0	0	25
4	8	22	24	9	0	0	0	0	0	64
5	10	37	62	46	12	1	0	0	0	169
6	12	56	128	148	80	16	0	0	0	441
7	14	79	230	367	314	130	20	1	0	1156
8	16	106	376	771	920	610	200	25	0	3025
9	18	137	574	1444	2232	2083	1106	295	30	7921
10	20	172	832	2486	4744	5776	4352	1897	420	20736
11	22	211	1158	4013	9142	13820	13672	8518	3108	54289
12	24	254	1560	6157	16336	29618	36568	30086	15792	142129
13	26	301	2046	9066	27492	58277	86662	89402	62292	372100
14	28	352	2624	12904	44064	107104	186880	233108	204528	974169
15	30	407	3302	17851	67826	186166	373596	548591	584082	2550409
16	32	466	4088	24103	100904	308914	701864	1188679	1494384	6677056
17	34	529	4990	31872	145808	492871	1251866	2406241	3498146	17480761
18	36	596	6016	41386	205464	760384	2136704	4601059	7608764	45765225
19	38	667	7174	52889	283246	1139440	3511664	8381596	15559016	119814916
20	40	742	8472	66641	383008	1664546	5585080	14644540	30185504	313679521
n	1 fers	2 ferses	3 ferses	4 ferses	5 ferses	6 ferses	7 ferses	8 ferses	9 ferses	F_{n+2}^2

9.5.2) k Ferses (Bishops) on a 2 x n horizontal cylinder - k fersů (střelců) na horizontálním válci 2 x n

Na horizontální válcové šachovnici 2 x n musíme rozlišit dva případy. Pokud je n **sudé**, lze problém převést na umístění kamenů na **dvou nezávislých cyklických lomených liniích**, každé délky n , přičemž na každou tuto linii se vejde maximálně $n/2$ fersů. Celkově se tak vejde na šachovnici 2 x n maximálně n neohrožujících se fersů. Pro každou z dílčích linií platí stejné vzorce jako pro rozmístění neohrožujících se vezírů (resp. králů) na horizontální válcové šachovnici 1 x n, tak jak byly odvozeny v kapitole 2.5.1.

Number of ways to place k non-attacking ferses (or bishops) on a 2 x n horizontal cylinder, if n is even, for $n \geq k + 1$

$$\sum_{j=0}^k \binom{n-j}{j} \binom{n+j-k}{k-j} * \frac{n^2}{(n-j)(n+j-k)} = \frac{2n}{2n-k} * \binom{2n-k}{k}$$

Pokud je n **liché**, dostáváme na horizontální válcové šachovnici pouze **jednu cyklickou lomenou linii** délky $2n$. Na tuto linii se vejde maximálně n nenapadajících se fersů. Výsledky jsou ale identické jako pro n sudé

Number of ways to place k non-attacking ferses (or bishops) on a 2 x n horizontal cylinder, if n is odd, for $n \geq k$

$$\frac{2n}{2n-k} * \binom{2n-k}{k}$$

Při pevném k jde o polynomy v n stupně k a vzorce platí vždy pro k sudé (if k is even) až od $n \geq k + 1$, ale pro k liché (if k is odd) už od $n \geq \frac{k+1}{2}$

Několik prvních polynomů:

$$fh(2, n) = n(2n - 3)$$

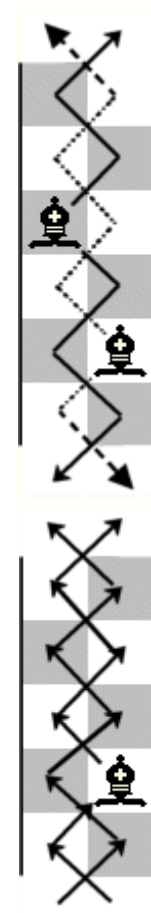
$$fh(3, n) = \frac{2}{3}(n - 2)n(2n - 5)$$

$$fh(4, n) = \frac{1}{6}(n - 3)n(2n - 7)(2n - 5)$$

$$fh(5, n) = \frac{1}{15}(n - 4)(n - 3)n(2n - 9)(2n - 7)$$

$$fh(6, n) = \frac{1}{90}(n - 5)(n - 4)n(2n - 11)(2n - 9)(2n - 7)$$

$$fh(7, n) = \frac{1}{315}(n - 6)(n - 5)(n - 4)n(2n - 13)(2n - 11)(2n - 9)$$



Pro libovolná $n \geq k+1$ lze vzorce z předchozí strany sloučit do jednoho vzorce (ale s tím, že případ $k = n$ je pro sudá n atypický a je ho třeba řešit zvlášť)
For any $n \geq k+1$ are results same

$$fh(k, n) = \frac{2n}{2n-k} * \binom{2n-k}{k}$$

But case $k=n$ is specific

$$\begin{aligned} fh(n, n) &= 4, \text{ if } n \text{ is even} \\ fh(n, n) &= 2, \text{ if } n \text{ is odd} \end{aligned}$$

Ještě je zajímavá suma přes všechna $k \geq 0$
summed over all $k \geq 0$

$$3 + (-1)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2n}{2n-k} * \binom{2n-k}{k} = L_{2n} + 1 + (-1)^n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 1 + (-1)^n$$

kde L_{2n} jsou [Lucas numbers](#)

Další zajímavý vzorec dostaneme, když ve vzorci na předchozí straně za n dosadíme $2n$ a za k dosadíme n .

Number of ways to place n non-attacking ferses (or bishops) on a $2 \times 2n$ horizontal cylinder

(V. Kotěšovec, 30.10.2011)

$$fh(n, 2n) = \frac{4}{3} * \binom{3n}{n} \sim \frac{3^{3n}}{2^{2n-1} \sqrt{3\pi n}} * \left(1 - \frac{7}{72n} + \frac{49}{10368n^2} + \frac{6425}{2239488n^3} - \frac{187103}{644972544n^4} + \dots\right)$$

Generating function:

$$\frac{8 \cos\left(\frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{3\sqrt{3x}}{2}\right)\right)}{3\sqrt{4-27x}}$$

V porovnání s normální šachovnicí je tak pro velká n jen zhruba 79% pozic (64/81), kde se n fersů neohrožuje ani na horizontálním válci stejných rozměrů $2 \times n$.

Více o tomto binomickém koeficientu, viz [A005809](#).

Obecně, s užitím [Stirlingova vzorce](#), je asymptotický rozvoj pro

$$\binom{pn}{n} \sim \left(\frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}\right)^n * \sqrt{\frac{p}{2\pi n(p-1)}} * \left(1 - \frac{p^2-p+1}{12n(p-1)p} + \frac{(p^2-p+1)^2}{288n^2(p-1)^2p^2} + \frac{139p^6-417p^5+402p^4-109p^3+402p^2-417p+139}{51840n^3(p-1)^3p^3} - \frac{(p^2-p+1)(571p^6-1713p^5+1698p^4-541p^3+1698p^2-1713p+571)}{2488320n^4(p-1)^4p^4} + \dots\right)$$

Analogický vzorec s binom. koeficienty viz str. 282

k ferses horizontal cylinder 2 x n

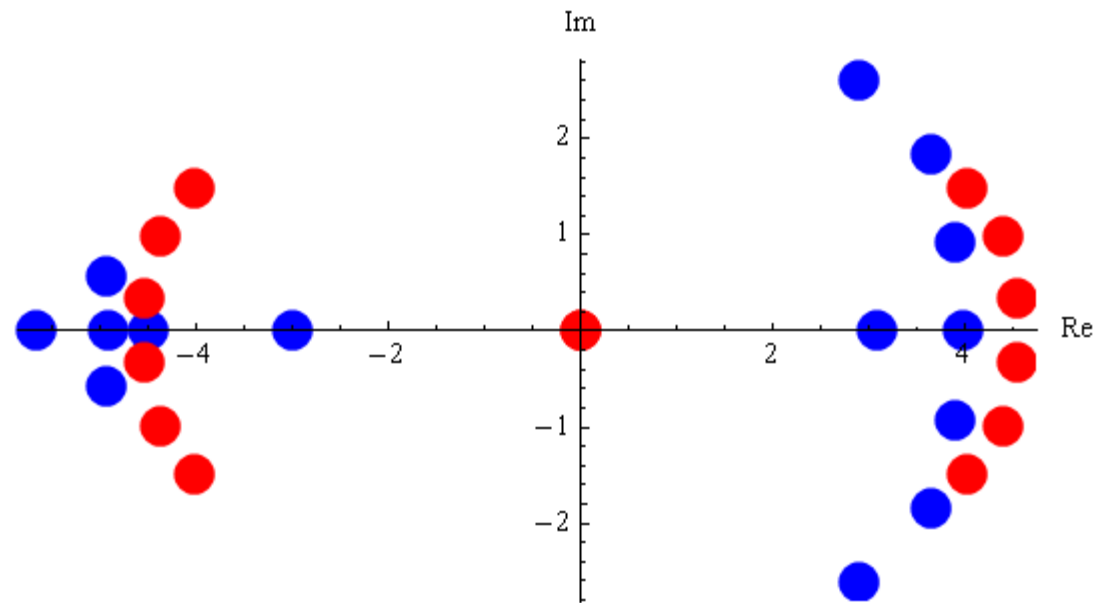
n	1 fers	2 ferses	3 ferses	4 ferses	5 ferses	6 ferses	7 ferses	8 ferses	9 ferses	summed over all k >= 0
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	3
2	4	4	0	0	0	0	0	0	0	9
3	6	9	2	0	0	0	0	0	0	18
4	8	20	16	4	0	0	0	0	0	49
5	10	35	50	25	2	0	0	0	0	123
6	12	54	112	105	36	4	0	0	0	324
7	14	77	210	294	196	49	2	0	0	843
8	16	104	352	660	672	336	64	4	0	2209
9	18	135	546	1287	1782	1386	540	81	2	5778
10	20	170	800	2275	4004	4290	2640	825	100	15129
11	22	209	1122	3740	8008	11011	9438	4719	1210	39603
12	24	252	1520	5814	14688	24752	27456	19305	8008	103684
13	26	299	2002	8645	25194	50388	68952	63206	37180	271443
14	28	350	2576	12397	40964	94962	155040	176358	136136	710649
15	30	405	3250	17250	63756	168245	319770	436050	419900	1860498
16	32	464	4032	23400	95680	283360	615296	980628	1136960	4870849
17	34	527	4930	31059	139230	457470	1118260	2042975	2778446	12752043
18	36	594	5952	40455	197316	712530	1937520	3996135	6249100	33385284
19	38	665	7106	51832	273296	1076103	3223350	7413705	13123110	87403803
20	40	740	8400	65450	371008	1582240	5178240	13147875	26013000	228826129
n	1 fers	2 ferses	3 ferses	4 ferses	5 ferses	6 ferses	7 ferses	8 ferses	9 ferses	$L_{2n} + 1 + (-1)^n$

9.6) k Ferses on an $n \times n$ toroidal chessboard - k fersů na prstencové šachovnici $n \times n$

Vzorce pro 2-10 fersů na prstencové šachovnici jsou (pro $n > k$) identické jako pro 2-10 vezírů na prstencové šachovnici. Posloupnosti se liší jen v několika počátečních členech (a mají proto odlišné vytvořující funkce).

Explicit formulas for ferses on a toroidal chessboard are (for $n > k$) same as for wazirs, only several first values are different and therefore also generating functions are different.

complex roots for 7 ferses



blue points = normal board

red points = toroidal board

k	k Ferses on an n x n toroidal chessboard - Generating function
2	$\frac{2x^2(3x^5 - 14x^4 + 25x^3 - 19x^2 + x - 2)}{(x - 1)^5}$
3	$\frac{2x^3(3x^7 - 15x^6 + 25x^5 - 7x^4 - 17x^3 - 15x^2 + 83x + 3)}{(x - 1)^7}$
4	$\frac{x^4(56x^9 - 486x^8 + 1917x^7 - 4583x^6 + 7452x^5 - 8600x^4 + 6717x^3 - 2511x^2 - 1366x - 276)}{(x - 1)^9}$
5	$\frac{x^4(10x^{12} - 206x^{11} + 1741x^{10} - 8051x^9 + 22786x^8 - 41030x^7 + 46062x^6 - 29138x^5 + 10288x^4 - 15184x^3 + 38457x^2 + 4281x + 224)}{(x - 1)^{11}}$
6	$\frac{2x^4(126x^{15} - 1663x^{14} + 10261x^{13} - 38925x^{12} + 100741x^{11} - 188560x^{10} + 271284x^9 - 332730x^8 + 391668x^7 - 427755x^6 + 330629x^5 - 54457x^4 - 305647x^3 - 84734x^2 - 2822x - 56)}{(x - 1)^{13}}$
7	$\frac{-2x^4 * (7x^{18} - 1833x^{17} + 26805x^{16} - 186379x^{15} + 807336x^{14} - 2437134x^{13} + 5438249x^{12} - 9241815x^{11} + 12000702x^{10} - 11485056x^9 + 7133631x^8 - 1580977x^7 - 828120x^6 - 1330074x^5 + 7620035x^4 + 2519811x^3 + 191451x^2 + 1985x + 16)}{(x-1)^{15}}$
8	$\frac{x^4 * (1136x^{21} - 19606x^{20} + 178646x^{19} - 1137748x^{18} + 5511010x^{17} - 20799626x^{16} + 61645900x^{15} - 144263227x^{14} + 268419443x^{13} - 401732239x^{12} + 495022871x^{11} - 523844008x^{10} + 498305238x^9 - 416834076x^8 + 246720138x^7 - 22696419x^6 - 366580177x^5 - 177184177x^4 - 19091139x^3 - 538854x^2 - 1482x - 4)}{(x-1)^{17}}$
9	$\frac{-x^5 * (18x^{23} - 39254x^{22} + 745542x^{21} - 6785722x^{20} + 39357513x^{19} - 163479147x^{18} + 518306092x^{17} - 1306014688x^{16} + 2690633705x^{15} - 4627167755x^{14} + 6727991832x^{13} - 8262850400x^{12} + 8339394861x^{11} - 6378426799x^{10} + 2893163026x^9 + 137775250x^8 - 405362115x^7 - 1134675831x^6 + 11240455606x^5 + 6285313006x^4 + 1009514962x^3 + 44848242x^2 + 527406x + 250)}{(x-1)^{19}}$
10	$\frac{2x^5 * (2530x^{26} - 53535x^{25} + 836765x^{24} - 9696498x^{23} + 78307311x^{22} - 452007943x^{21} + 1946272800x^{20} - 6482661948x^{19} + 17165497308x^{18} - 36852593676x^{17} + 65030969556x^{16} - 95189100839x^{15} + 116435269429x^{14} - 120546878193x^{13} + 109307806887x^{12} - 93317328239x^{11} + 80071533321x^{10} - 63459257050x^9 + 28764504704x^8 - 9105356739x^7 - 177273501576x^6 - 123721772092x^5 - 25741089171x^4 - 1834175321x^3 - 36618883x^2 - 195303x - 5)}{(x-1)^{21}}$

k ferses / toroidal board

n	1 f.	2 f.	3 ferses	4 ferses	5 ferses	6 ferses	7 ferses	8 ferses	9 ferses	10 ferses	summed over all k >= 0, A067960
1	1										2
2	4	4	0	0							9
3	9	18	6	0	0	0	0	0	0		34
4	16	88	208	276	224	112	32	4	0	0	961
5	25	250	1300	3850	6745	7100	4450	1550	250	10	25531
6	36	558	4908	27225	100332	253032	446292	564660	532156	390816	2722500
7	49	1078	14112	122892	754453	3378942	11281312	28482279	54916456	81442802	464483559
8	64	1888	34112	423152	3830016	26249184	139580160	585633640	1962171200	5296591424	224546142769
9	81	3078	73008	1213380	15038541	144455454	1103589198	6829066665	34690541994	146127335256	215560806324388
10	100	4750	142700	3046025	49207020	625745100	6433276500	54504255500	385983794500	2309813481910	509113406167679889
11	121	7018	259908	6907890	140410699	2271361422	30047250222	331490619174	3095143575007	24738873315596	2590618817013278596997
12	144	10008	447312	14454972	360001152	7192874328	118507673088	1642426038486	19437996015280	198759048859008	30737628149641669227004804
13	169	13858	734812	28330822	846775007	20427662398	408912072478	6930083422496	100963195651565	1279605298916568	809724336154415150287031740151
14	196	18718	1160908	52586065	1855033964	53065637212	1265701033492	25686190415144	450398154002132	6906427308782106	48754690373355654118816600200711441
15	225	24750	1774200	93218400	3828109545	127956238350	3579712962750	85541928717375	1773257833600750	32277449304595350	6589876632329358971395398453738256596574
16	256	32128	2635008	158854080	7507096576	289628321664	9380986518528	260349711114720	6288010190509312	133788325435448576	2020925419076626921354779829715561268121485361
17	289	41038	3817112	261593552	14087087961	620834113614	23027843919870	733731834393719	20398342362118678	500896430870051174	?
18	324	51678	5409612	418045617	25436160108	1269178026012	53409035159316	1934755847570808	61282868654684052	1718268150463137018	2184710661251680812138610069332410066909052859790416601664
19	361	64258	7518908	650576150	44395753647	2488676915070	117860600410206	4813391235753128	172190699515632837	5462521782760829320	?
20	400	79000	10270800	988799100	75184958080	4702895069400	248890790976000	11375736647373750	456120623076014000	16243031089247644800	?

Poslední sloupec určuje celkový počet pozic k neohrožujících se fersů na prstencové šachovnici $n \times n$ pro všechna $k \geq 0$. Pro $n > 1$ odpovídá sekvenci [A067960](#) (jejíž hodnoty až do $n=11$ vypočetl v roce 2002 R.H.Hardin).

Pro **lichá** n lze prstencovou šachovnici pro fersy namapovat stejně jako pro vezíry, viz diagramy 7x7, nahoře vezír, dole fers. Ze sekvence [A027683](#)($n-1$) pro vezíry jde proto použít ještě známé hodnoty pro $n=13$ a $n=15$.

Pro **sudá** n bohužel nelze takové mapování použít. Podobným mapováním dostaneme diagram vpravo pro ferse na černých polích prstencové šachovnice $n \times n$. Celkový počet pozic je pak druhou mocninou počtu rozmístění na černých polích (vypočetl jsem hodnoty až do $n=18$). Pozor ale na to, že toto mapování **neodpovídá** rozmístění vezírů na všech polích prstencové šachovnice $n/2 \times n$ (např. linie e5-d6-c7-b8 se nevrací zpět na pole e5, ale pokračuje na a1). Např. pro $n=6$ je na prstencové šachovnici 6×6 počet pozic nenapadajících se fersů na černých polích roven 1650 (celkový počet na všech polích je pak $1650^2=2722500$), ale počet nenapadajících se vezírů na všech polích prstencové šachovnice 3×6 je jen 1300.

7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	5	5
4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1

4	7	3	6	2	5	1
7	3	6	2	5	1	4
3	6	2	5	1	4	7
6	2	5	1	4	7	3
2	5	1	4	7	3	6
5	1	4	7	3	6	2
1	4	7	3	6	2	5

	4	3	2	1
4		3	2	1
	3		2	1
3		2		1
	2	1		4
2		1	4	3
	1	4	3	2
1	4	3	2	

Ještě je možno poznamenat, že pro semi-ferse (i pro semi-jezdce atd.) je na **prstencové šachovnici** možné mapování identické jako pro **semi-vezíry** na prstencové šachovnici (a to jak pro sudé, tak i liché n), takže těmto podskupinám kamenů jsem (na rozdíl od normální šachovnice) už nevěnoval speciální kapitoly.

9.6.1) k Ferses on an n x n cylindrical chessboard - k fersů na válcové šachovnici n x n

2 ferses, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2012), $n \geq 3$

$$\frac{1}{2}(n-1)n(n^2+n-4)$$

3 ferses, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2012), $n \geq 2$

$$\frac{1}{6}(n-2)n(n+3)(n^3-n^2-8n+14)$$

4 ferses, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2012), $n \geq 5$

$$\frac{1}{24}n(n^7-30n^5+24n^4+323n^3-456n^2-1206n+2280)$$

5 ferses, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2012), $n \geq 5$

$$\frac{1}{120}n(n+4)(n^8-4n^7-34n^6+176n^5+291n^4-2604n^3+1286n^2+12936n-19680)$$

6 ferses, cylindrical board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.5.2012), $n \geq 7$

$$\frac{1}{720}n(n^{11}-75n^9+60n^8+2365n^7-3480n^6-38565n^5+78780n^4+321274n^3-821760n^2-1081320n+3330480)$$

První členy polynomů mají tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{5n^{2k-2}}{2(k-2)!} + \frac{2n^{2k-3}}{(k-2)!} + \frac{(75k+23)n^{2k-4}}{24(k-3)!} - \frac{(5k-1)n^{2k-5}}{(k-3)!} + \dots$$

k	k Ferses on an n x n cylindrical chessboard - Generating function
2	$\frac{2x^2(x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 8x^2 - 2x - 2)}{(x - 1)^5}$
3	$\frac{4x^3(x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 28x - 6)}{(x - 1)^7}$
4	$\frac{x^3(14x^{10} - 126x^9 + 489x^8 - 1080x^7 + 1575x^6 - 1793x^5 + 1652x^4 - 498x^3 - 1579x^2 - 319x - 15)}{(x - 1)^9}$
5	$\frac{2x^3(24x^{12} - 240x^{11} + 1138x^{10} - 3383x^9 + 6721x^8 - 8311x^7 + 4397x^6 + 2024x^5 + 132x^4 - 13947x^3 - 3489x^2 - 183x - 3)}{(x - 1)^{11}}$
6	$\frac{x^3(76x^{16} - 988x^{15} + 5860x^{14} - 21288x^{13} + 53214x^{12} - 95485x^{11} + 122551x^{10} - 117479x^9 + 130611x^8 - 236158x^7 + 324354x^6 - 105454x^5 - 526268x^4 - 184745x^3 - 13853x^2 - 227x - 1)}{(x - 1)^{13}}$

k Ferses on an n x n cylindrical chessboard

n	1 fers	2 ferses	3 ferses	4 ferses	5 ferses	6 ferses	A212271 , summed over all k >= 0
1	1						2
2	4	4	0	0			9
3	9	24	24	15	6	1	80
4	16	96	280	454	432	240	1600
5	25	260	1480	5125	11400	16895	79033
6	36	570	5256	31539	130524	385946	8156736
7	49	1092	14700	133945	877800	4293681	2055960192
8	64	1904	35024	447080	4214144	30481176	1108756350625
9	81	3096	74340	1259595	16039062	159631611	1411080429618656
10	100	4770	144560	3128175	51501660	671290490	3943472747846953216
11	121	7040	262416	7044939	145193026	2391145757	25425527581172360096017
12	144	10032	450600	14672400	369249024	7477321772	365481944233773616212640000
13	169	13884	739024	28661945	863610540	21050197415	11980566143208960475692367828480
14	196	18746	1166200	53073475	1884193500	54339990614	882106482533191605447029340350009049
15	225	24780	1780740	93915525	3876543780	130423121785	147314997388032765439791110273770608260928
16	256	32160	2642976	159826864	7584722688	294182325744	55444614979611027283278524537230343506467225600
17	289	41072	3826700	262922255	14207717258	628904424963	47221148609346127470666974263945966805708000925771369
18	324	51714	5421024	419826735	25618626396	1282979721954	?
19	361	64296	7532360	652924455	44665269198	2511553211717	?
20	400	79040	10286520	991849800	75574725760	4739774999780	?
21	441	96180	13830936	1475250189	124488683760	8656590492431	?
22	484	115962	18337000	2152851635	200161356252	15350896135454	?
23	529	138644	24002524	3087859825	314857187712	26505471390593	?
24	576	164496	31054320	4359731160	485491606656	44668502237320	?
25	625	193800	39750900	6067349875	735064744350	73627868726475	?
n	1 fers	2 ferses	3 ferses	4 ferses	5 ferses	6 ferses	$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \frac{1}{n^2} = 1.5030480824753322643220663294755536893857810 \dots$

9.7) k Grasshoppers on an n x n chessboard - k cvrčků na šachovnici n x n

The *Grasshopper* moves on the same lines as a queen, but must jump over a hurdle to land on the square immediately beyond. Grasshoppers are shown as inverted queens.

Nejznámější exokámen je *cvrček*. Je to přeskakující figura, pohybuje se po frontálách nebo diagonálách na první pole bezprostředně za prvním kamenem, který mu stojí v cestě. Na diagramu (v příkladu s vyznačením všech možných tahů cvrčka d3) se označuje symbolem dámy otočeným o 180°. Vymyslel jej [T. R. Dawson](#) v roce 1912 a od té doby s ním byly složeny tisíce šachových úloh (např. v databázi WinChloe je aktuálně 10242 úloh s tímto kamenem!). Více informací (z šachového pohledu) lze nalézt např. v mé knize [234 best chess problems](#) (2008), str. 8. Z matematického hlediska ale cvrček až tak zajímavý není, zejména proto, že se liší od bodových nebo liniových kamenů tím, že jeho pohyblivost je podmíněna existencí jiných kamenů na šachovnici a je tedy dynamická, což je pro analýzu vlastností z matematického pohledu nedobrá vlastnost. Proto, i když je to můj nejoblíbenější exokámen, jsem mu zatím nevěnoval co se týče matematických vzorců příliš pozornosti (a ani jiní autoři).

K doplnění této kapitoly mě motivovalo až to, že jsem chtěl ověřit, zda diagram, který vymyslel Karl Fabel v roce 1966 ([Schach und Zahl](#), str.62) a na kterém je celkem [22 neohrožujících se cvrčků](#) na šachovnici 8x8, je absolutním rekordem. Skutečně tomu tak je, více o tom viz kapitola [14.1](#). A když už jsem měl napsaný program, který toto analyzoval, šlo jej snadno modifikovat i pro vygenerování počtu pozic neohrožujících se k cvrčků na šachovnicích $n \times n$, potřebných pro získání následujících vzorců.

2 grasshoppers, board $n \times n$: (all combinations)

$$\frac{1}{2}n^2(n^2 - 1)$$

A190395 - 3 grasshoppers, board $n \times n$: (C. Poisson, *Rex Multiplex* 29/1990, p.829)

$$\frac{1}{6}(n - 1)(n^5 + n^4 - 2n^3 - 22n^2 + 76n - 72)$$

A190396 - 4 grasshoppers, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 7.5.2011), $n > 2$

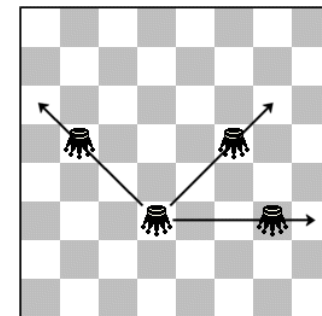
$$\frac{1}{24}(n^8 - 6n^6 - 80n^5 + 431n^4 - 552n^3 - 666n^2 + 2168n - 1392)$$

A190397 - 5 grasshoppers, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 9.5.2011), $n > 3$

$$\frac{1}{120}(n^{10} - 10n^8 - 200n^7 + 1175n^6 - 1136n^5 - 740n^4 - 30520n^3 + 159624n^2 - 289024n + 179175 - 135(-1)^n)$$

A190579 - 6 grasshoppers, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 10.5.2011), $n > 5$

$$\frac{n^{12}}{720} - \frac{n^{10}}{48} - \frac{5n^9}{9} + \frac{509n^8}{144} - \frac{187n^7}{90} + \frac{701n^6}{48} - \frac{14467n^5}{36} + \frac{666917n^4}{360} - \frac{471121n^3}{180} - \frac{59875n^2}{24} + \frac{57101n}{6} - \frac{11339}{2} - (-1)^n * \left(\frac{9n^2}{8} - n - \frac{7}{2} \right)$$



První členy těchto vzorců mají tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{n^{2k-2}}{2(k-2)!} - \frac{10n^{2k-3}}{3(k-3)!} + \frac{(39k+275)n^{2k-4}}{24(k-3)!} + \frac{(18k^2-101k-229)n^{2k-5}}{15(k-3)!} + \dots$$

k	k non-attacking Grasshoppers on an n x n chessboard - Generating function
2	$-\frac{6x^2(x+1)}{(x-1)^5}$
3	$-\frac{4x^2(3x^5-7x^4+4x^3+17x^2+12x+1)}{(x-1)^7}$
4	$-\frac{x^2(2x^9-22x^8+50x^7+78x^6-89x^5-245x^4+1224x^3+612x^2+69x+1)}{(x-1)^9}$
5	$\frac{2x^3(8x^{12}-60x^{11}+75x^{10}+24x^9+441x^8-1948x^7-893x^6+4122x^5-8491x^4-15988x^3-6822x^2-694x-14)}{(x-1)^{11}(x+1)}$
6	$2x^3(8x^{18}-59x^{17}+110x^{16}+71x^{15}+473x^{14}-3017x^{13}-5401x^{12}+23838x^{11}-2727x^{10}-119474x^9-45545x^8-20157x^7-571677x^6-1006961x^5-689547x^4-199704x^3-20861x^2-489x-1) / ((x-1)^{13}(x+1)^3)$

Sice máme spočítáno jen málo vzorců na nějaký serióznější odhad, vzhledem k analogii s prstencovou šachovnicí (viz kap. 9.8) ale předpokládám, že pro $k > 4$ bude jmenovatel vytvářející funkce (*denominator of generating function, conjecture*) roven

$$\frac{1}{(x-1)^{2k+1}(x+1)^{2k-9}}$$

(stupeň u $x+1$ je o 4 menší než pro prstencovou šachovnicí)

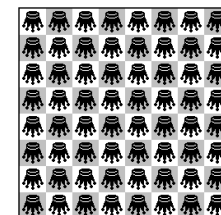
Důvod je zřejmě v tom, že napadání kamenů přes jiné kameny je v podstatě vlastnost bodová a ne liniová (po dané linii je danému kameni dostupné vždy pouze jedno pole v daném směru, ne všechna pole na celé linii jako třeba v případě dámy)

k non-attacking Grasshoppers on an n x n chessboard

n	2 grasshoppers	3 grasshoppers	4 grasshoppers	5 grasshoppers	6 grasshoppers
1					
2	6	4	1		
3	36	76	78	28	2
4	120	516	1278	1668	998
5	300	2172	10002	29092	51618
6	630	6860	50191	252584	873852
7	1176	17904	189208	1441634	8039322
8	2016	40796	584958	6222996	50272978
9	3240	83976	1563488	22004086	240764814
10	4950	159732	3737987	66972760	947860554
11	7260	285220	8181786	181332416	3210392210
12	10296	483604	16669638	446905476	9649651136
13	14196	785316	32003238	1019470032	26316155354
14	19110	1229436	58438623	2179712872	66191981440
15	25200	1865192	102234772	4410518630	155482089002
16	32640	2753580	172344406	8510498516	344411086374
17	41616	3969104	281269668	15756224370	725043524246
18	52326	5601636	446107043	28128603736	1459722296638
19	64980	7758396	689807558	48622240660	2825136685698
20	79800	10566052	1042679982	81660504068	5278863810724
21	97020	14172940	1544166426	133643402268	9557560367842
22	116886	18751404	2244921423	213660267432	16818911594660
23	139656	24500256	3209227248	334404719242	28843079695034
24	165600	31647356	4517779918	513335431316	48313854401754
25	195000	40452312	6270881992	774132898958	79205127636702
n	2 grasshoppers	3 grasshoppers	4 grasshoppers	5 grasshoppers	6 grasshoppers

9.7.1 k Grasshoppers in stalemate - k cvrčků v patu

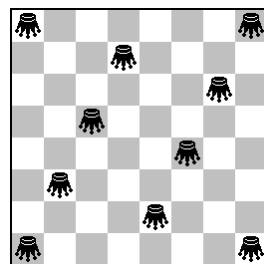
Budeme analyzovat dva případy, počet pozic nenapadajících se cvrčků v patu (*Non-attacking Grasshoppers in stalemate* = GN) a obecný počet pozic cvrčků v patu (*Grasshoppers in stalemate (general positions)* = GS). Obtížnost této úlohy je shodná s *n-Queens problem* (a ještě o trochu těžší). Obecně je samozřejmě možno zaplnit celou šachovnici n^2 cvrčky, kteří budou v patu (ale budou se napadat). *In general case is maximal number of Grasshoppers in stalemate on an $n \times n$ chessboard n^2 .*



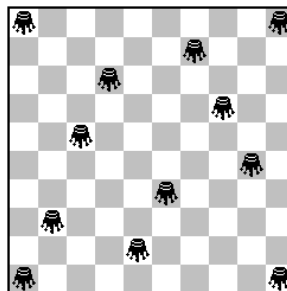
Maximální počet **nenapadajících se cvrčků v patu** pro $n > 9$ je $n + 2$. Toto lze dokázat ohraničením z obou stran. Jelikož maximální počet nenapadajících se **věžových cvrčků** v patu je $n+2$, nemůže existovat pozice s více nenapadajícími se cvrčky v patu, protože ta by musela být současně i takovou pozicí věžových cvrčků. Stačí tedy dokázat, že taková pozice $n+2$ nenapadajících se cvrčků v patu skutečně existuje. Jednou z možností je zkonstruovat na šachovnici $n-2 \times n-2$ pozice $n-2$ nenapadajících se dam, ve kterých nebude stát žádná na ani jedné z hlavních diagonál. Toto je pravda pro $n > 9$ (na šachovnicích 5×5 a 7×7 takové pozice neexistují). Každou takovou pozici lze transformovat přidáním 4 kamenů do všech rohů šachovnice, kdy dostaneme pozici s celkem $n-2 + 4 = n+2$ nenapadajícími se cvrčky v patu. Příklady takových pozic viz diagramy.

n	Maximal number of non-attacking grasshoppers in stalemate on an $n \times n$ normal board
1	1
2	4
3	4
4	4
5	5
6	8
7	8
8	10
9	10
10	12
11	13
12	14

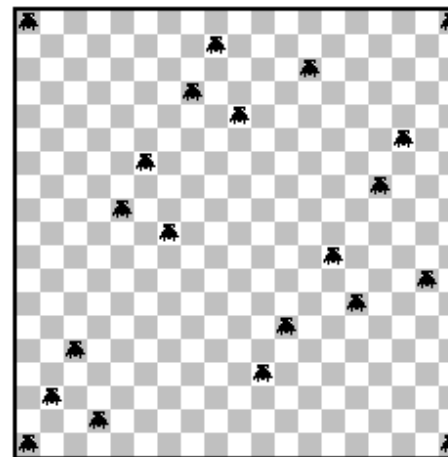
example board 8x8



example board 10x10 (8x8 inside)



example board 19x19 (17x17 inside)



n	Number of arrangements of n non-attacking Queens on an $n \times n$ board, with no Queens on both main diagonals, A225740
1	0
2	0
3	0
4	2
5	0
6	4
7	0
8	12
9	10
10	20
11	88
12	810
13	2502
14	13426
15	91120
16	521240
17	3454652
18	22085852
19	182785512

2 non-attacking grasshoppers in stalemate, board $n \times n$

$$GN(2, n) = \frac{1}{6}(n-1)(3n^3 - 7n^2 + 2n + 36)$$

2 grasshoppers in stalemate, board $n \times n$

$$GS(2, n) = GN(2, n) = \frac{1}{6}(n-1)(3n^3 - 7n^2 + 2n + 36)$$

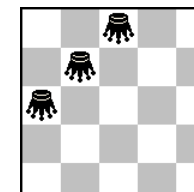
3 non-attacking grasshoppers in stalemate, board $n \times n$, $n \geq 2$

$$GN(3, n) = \frac{n^6}{6} - \frac{5n^5}{3} + \frac{79n^4}{12} - \frac{13n^3}{2} - 27n^2 + \frac{977n}{12} - \frac{487}{8} + (-1)^n * \left(-\frac{3}{4}n + \frac{7}{8}\right)$$

3 grasshoppers in stalemate, board $n \times n$, $n \geq 4$

$$GS(3, n) = GN(3, n) + 4 = \frac{n^6}{6} - \frac{5n^5}{3} + \frac{79n^4}{12} - \frac{13n^3}{2} - 27n^2 + \frac{977n}{12} - \frac{455}{8} + (-1)^n * \left(-\frac{3}{4}n + \frac{7}{8}\right)$$

Na diagramu vidíme jediný možný typ pozice 3 cvrčků, kteří jsou v patu, ale napadají se. Celkem 4 pozice (rozdíl GS-GN) dostaneme symetriemi. Pro větší k jsou však možnosti takových uskupení a jejich vzájemných kombinací mnohem složitější.



4 non-attacking grasshoppers in stalemate, board $n \times n$, $n \geq 2$

$$GN(4, n) = \frac{n^8}{24} - \frac{5n^7}{6} + \frac{65n^6}{9} - \frac{961n^5}{30} + \frac{457n^4}{8} + \frac{10921n^3}{108} - \frac{5649n^2}{8} + \frac{350239n}{270} - \frac{44609}{54} + (-1)^n * \left(-\frac{3}{4}n^3 + \frac{59}{8}n^2 - 19n + \frac{9}{2}\right) - \frac{32}{27\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{32}{27}n \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \frac{200}{27} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

4 grasshoppers in stalemate, board $n \times n$, $n \geq 6$

(V. Kotěšovec, 16.3.2012)

$$GS(4, n) = GN(4, n) + 4(n^2 - 9n + 27)$$

$$GS(4, n) = \frac{n^8}{24} - \frac{5n^7}{6} + \frac{65n^6}{9} - \frac{961n^5}{30} + \frac{457n^4}{8} + \frac{10921n^3}{108} - \frac{5617n^2}{8} + \frac{340519n}{270} - \frac{38777}{54} + (-1)^n * \left(-\frac{3}{4}n^3 + \frac{59}{8}n^2 - 19n + \frac{9}{2}\right) - \frac{32}{27\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{32}{27}n \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \frac{200}{27} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

První členy těchto vzorců mají tvar (jako pro dámy)

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{5n^{2k-1}}{3(k-2)!} + \dots$$

k	k non-attacking Grasshoppers in stalemate on an n x n chessboard - Generating function
2	$\frac{2x^2(3x^3 - 11x^2 + 5x - 3)}{(x - 1)^5}$
3	$\frac{4x^2(2x^8 + 5x^7 - 20x^6 - 48x^5 - 22x^4 - 30x^3 - 7x^2 + x - 1)}{(x - 1)^7(x + 1)^2}$
4	$\frac{x^2(92x^{16} + 553x^{15} + 281x^{14} - 4128x^{13} - 14568x^{12} - 32248x^{11} - 47180x^{10} - 53007x^9 - 43989x^8 - 28387x^7 - 13251x^6 - 4674x^5 - 1182x^4 - 222x^3 - 10x^2 + x - 1)}{(x - 1)^9(x + 1)^4(x^2 + x + 1)^2}$

k	k Grasshoppers in stalemate on an n x n chessboard - Generating function
2	$\frac{2x^2(3x^3 - 11x^2 + 5x - 3)}{(x - 1)^5}$
3	$\frac{4x^2(x^{10} - 6x^9 + 14x^8 + x^7 - 38x^6 - 24x^5 - 26x^4 - 42x^3 + 2x^2 - x - 1)}{(x - 1)^7(x + 1)^2}$
4	$\frac{x^2(8x^{20} - 14x^{19} - 14x^{18} + 42x^{17} - 106x^{16} - 605x^{15} - 241x^{14} + 4218x^{13} + 14542x^{12} + 32060x^{11} + 47188x^{10} + 53225x^9 + 44019x^8 + 28239x^7 + 13171x^6 + 4760x^5 + 1248x^4 + 176x^3 - 8x^2 + 11x + 1)}{(x - 1)^9(x + 1)^4(x^2 + x + 1)^2}$

n	k non-attacking grasshoppers in stalemate on an $n \times n$ chessboard				k grasshoppers in stalemate on an $n \times n$ chessboard			
	2 grasshoppers	3 grasshoppers	4 grasshoppers	5 grasshoppers	2 grasshoppers	3 grasshoppers	4 grasshoppers	5 grasshoppers
1								
2	6	4	1		6	4	1	
3	20	16	2	0	20	24	14	10
4	62	76	17	0	62	80	35	24
5	164	372	266	44	164	376	286	76
6	370	1396	1979	960	370	1400	2015	1024
7	736	4364	10736	10326	736	4368	10788	10486
8	1330	11572	45075	77264	1330	11576	45151	77616
9	2232	27104	156740	434406	2232	27108	156848	435206
10	3534	57380	465925	1929536	3534	57384	466073	1931136
11	5340	112152	1227186	7203296	5340	112156	1227382	7206320
12	7766	205244	2922473	23235904	7766	205248	2922725	23241152
13	10940	355836	6415934	66793592	10940	355840	6416250	66802232
14	15002	589396	13148355	174111680	15002	589400	13148743	174125152
15	20104	939252	25438760	?	20104	939256	25439228	?
16	26410	1447716	46835759	?	26410	1447720	46836315	?
17	34096	2167944	82638764	?	34096	2167948	82639416	?
18	43350	3165252	140474261	?	43350	3165256	140475017	?
19	54372	4519264	231123358	?	54372	4519268	231124226	?
20	67374	6325420	369403753	?	67374	6325424	369404741	?
21	82580	8697412	575405294	?	82580	8697416	575406410	?
22	100226	11768884	875769719	?	100226	11768888	875770971	?
23	120560	15696156	1305451112	?	120560	15696160	1305452508	?
24	143842	20660116	1909498295	?	143842	20660120	1909499843	?
25	170344	26869232	2745470384	?	170344	26869236	2745472092	?
n	2 grasshoppers	3 grasshoppers	4 grasshoppers	5 grasshoppers	2 grasshoppers	3 grasshoppers	4 grasshoppers	5 grasshoppers

9.8) k Grasshoppers on an n x n toroidal chessboard - k cvrčků na prstencové šachovnici n x n

2 grasshoppers, toroidal board $n \times n$: (all combinations)

$$\frac{1}{2}n^2(n^2 - 1)$$

A190398 - 3 grasshoppers, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 7.5.2011), $n > 3$

$$\frac{1}{6}n^2(n^4 - 3n^2 - 24n + 74)$$

A190399 - 4 grasshoppers, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 7.5.2011), $n > 4$

$$\frac{1}{24}n^2(n^6 - 6n^4 - 96n^3 + 347n^2 + 96n - 726) + 4n^2 * (-1)^n$$

A190400 - 5 grasshoppers, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 7.5.2011), $n > 6$

$$\frac{1}{120}n^2(n^8 - 10n^6 - 240n^5 + 995n^4 + 640n^3 + 1870n^2 - 41680n + 69624) + 2n^2(n - 3)(2n + 1) * (-1)^n$$

A190401 - 6 grasshoppers, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 9.5.2011), $n > 8$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{720}n^2(n^{10} - 15n^8 - 480n^7 + 2245n^6 + 2400n^5 + 27255n^4 - 342480n^3 + 639934n^2 + 471600n - 865080) \\ &+ \frac{1}{4}n^2(8n^4 - 40n^3 + 17n^2 - 272n + 1608) * (-1)^n \end{aligned}$$

S největší pravděpodobností se pro větší k již žádné další kvazipolynomy neobjeví a ve vzorcích tak zůstanou jen členy s $(-1)^n$ a perioda zůstane 2.

První členy těchto vzorců mají tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{n^{2k-2}}{2(k-2)!} - \frac{4n^{2k-3}}{(k-3)!} + \frac{(51k+143)n^{2k-4}}{24(k-3)!} + \frac{4(k-1)n^{2k-5}}{3(k-4)!} + \dots$$

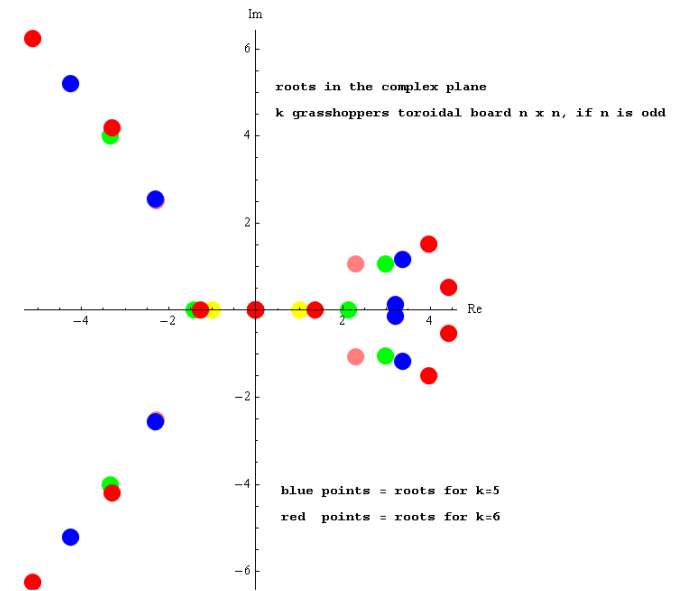
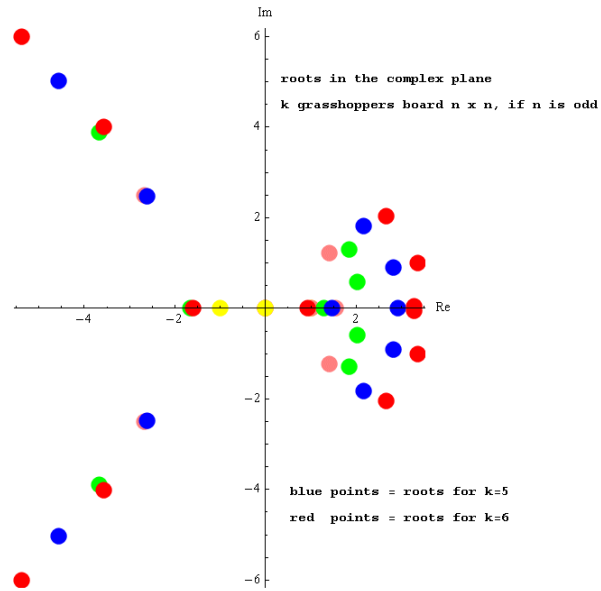
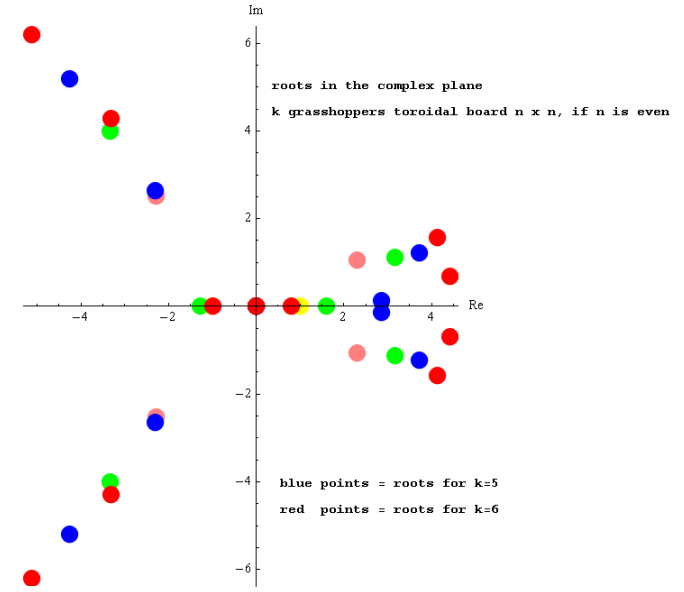
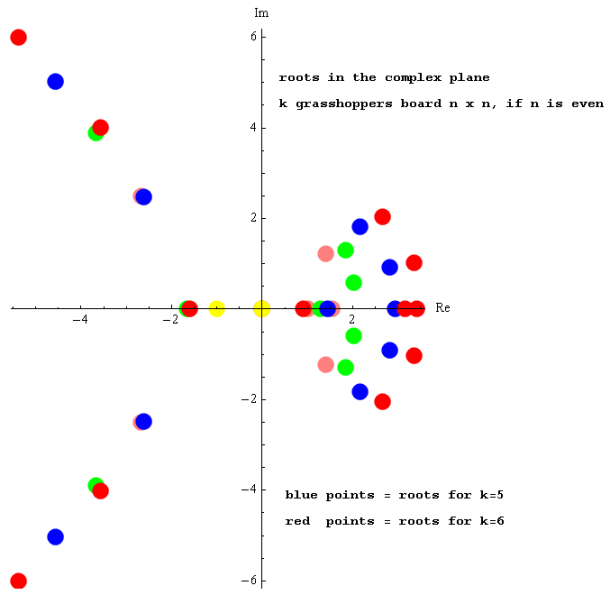
k	k non-attacking Grasshoppers on an n x n toroidal chessboard - Generating function
2	$-\frac{6x^2(x+1)}{(x-1)^5}$
3	$-\frac{4x^2(3x^8 - 17x^7 + 37x^6 - 35x^5 + 11x^4 + 19x^2 + 11x + 1)}{(x-1)^7}$
4	$-\frac{x^2(80x^{14} - 444x^{13} + 768x^{12} + 108x^{11} - 1824x^{10} + 1600x^9 + 1025x^8 - 1200x^7 + 708x^6 + 1772x^5 + 7254x^4 + 2788x^3 + 756x^2 + 48x + 1)}{(x-1)^9(x+1)^3}$
5	$\frac{2x^4(144x^{18} - 874x^{17} + 1356x^{16} + 2195x^{15} - 8778x^{14} + 4282x^{13} + 16170x^{12} - 23696x^{11} - 5686x^{10} + 36079x^9 - 33008x^8 - 33909x^7 - 13310x^6 - 61448x^5 - 197358x^4 - 109070x^3 - 50114x^2 - 6327x - 488)}{(x-1)^{11}(x+1)^5}$
6	$-4x^4 * (128x^{24} - 768x^{23} - 8x^{22} + 9258x^{21} - 17442x^{20} - 25593x^{19} + 103542x^{18} - 19695x^{17} - 252858x^{16} + 225766x^{15} + 297416x^{14} - 465166x^{13} - 63474x^{12} + 488076x^{11} + 515008x^{10} + 582376x^9 + 2358586x^8 + 2976026x^7 + 6280504x^6 + 4731396x^5 + 2785972x^4 + 664045x^3 + 111570x^2 + 4199x + 96) / ((x-1)^{13}(x+1)^7)$

Pro $k > 3$ je jmenovatel vytvářející funkce (*denominator of generating function, conjecture*) roven

$$\frac{1}{(x-1)^{2k+1}(x+1)^{2k-5}}$$

k non-attacking Grasshoppers on an n x n toroidal chessboard

n	2 grasshoppers	3 grasshoppers	4 grasshoppers	5 grasshoppers	6 grasshoppers	7 grasshoppers
1						
2	6	4	1			
3	36	72	54	0	0	0
4	120	496	1068	976	384	64
5	300	2100	8550	18510	19100	8300
6	630	6708	45873	201528	557808	935928
7	1176	17640	177968	1232448	5841780	18629828
8	2016	40384	562032	5637824	41338400	221834560
9	3240	83376	1519560	20502396	209264796	1631234052
10	4950	158900	3662625	63720920	859752800	9132780200
11	7260	284108	8057390	174647286	2982181004	40852673400
12	10296	482160	16477020	434439792	9131392296	156178174608
13	14196	783484	31712850	997037470	25196132260	523212578304
14	19110	1227156	58018793	2141831160	63968987264	1582014765800
15	25200	1862400	101639700	4348204020	151223202900	4379658682500
16	32640	2750208	171525568	8412482304	336724832384	11275312424192
17	41616	3965080	280160068	15605151496	711538908572	?
18	52326	5596884	444636297	27903377016	1437022315440	?
19	64980	7752836	687881890	48291880442	2787781494732	?
20	79800	10559600	1040201500	81188237680	5219454908200	?
21	97020	14165508	1541008350	132977239290	9464698212228	?
22	116886	18742900	2240952065	212739639640	16677643778928	?
23	139656	24490584	3204279960	333146599112	28631251034868	?
24	165600	31636416	4511682288	511644540096	48003158172960	?
25	195000	40440000	6263420000	771881944500	78754960177500	?
n	2 grasshoppers	3 grasshoppers	4 grasshoppers	5 grasshoppers	6 grasshoppers	7 grasshoppers



9.9.1 k Rookhoppers on an n x n chessboard - k věžových cvrčků na šachovnici n x n

The **Rookhopper** moves on the same lines as a rook, but must jump over a hurdle to land on the square immediately beyond (moves like a Grasshopper but only on Rook-lines).

2 rookhoppers, board $n \times n$: (all combinations)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{n^2}{2}$$

3 rookhoppers, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 11.3.2012), $n \geq 2$

$$\frac{n^6}{6} - \frac{n^4}{2} - 2n^3 + \frac{25n^2}{3} - 8n$$

4 rookhoppers, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 11.3.2012), $n \geq 3$

$$\frac{n^8}{24} - \frac{n^6}{4} - 2n^5 + \frac{227n^4}{24} - 7n^3 - \frac{81n^2}{4} + 30n$$

5 rookhoppers, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 11.3.2012), $n \geq 4$

$$\frac{n^{10}}{120} - \frac{n^8}{12} - n^7 + \frac{127n^6}{24} - \frac{7n^5}{3} - \frac{193n^4}{12} - \frac{131n^3}{3} + \frac{4213n^2}{15} - 400n + 144$$

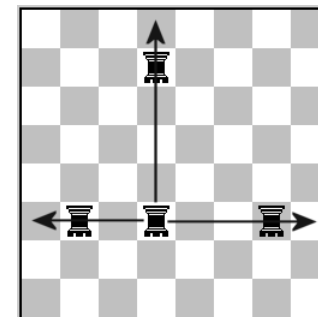
6 rookhoppers, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 11.3.2012), $n \geq 5$

$$\frac{n^{12}}{720} - \frac{n^{10}}{48} - \frac{n^9}{3} + \frac{281n^8}{144} - \frac{n^7}{6} - \frac{211n^6}{48} - \frac{1061n^5}{12} + \frac{145367n^4}{360} - \frac{4597n^3}{12} - \frac{2860n^2}{3} + 2228n - 1152$$

První členy těchto vzorců mají tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{n^{2k-2}}{2(k-2)!} - \frac{2n^{2k-3}}{(k-3)!} + \frac{(27k+119)n^{2k-4}}{24(k-3)!} + \dots$$

Note: For maximal number of non-attacking rookhoppers see chapter 14.1.



K	k non-attacking Rookhoppers on an n x n chessboard - Generating function
2	$-\frac{6x^2(x+1)}{(x-1)^5}$
3	$\frac{2x^2(x^6 - 7x^5 + 12x^4 - 6x^3 - 33x^2 - 25x - 2)}{(x-1)^7}$
4	$-\frac{x^2(4x^9 - 26x^8 + 54x^7 - 8x^6 + 77x^5 - 261x^4 + 1104x^3 + 654x^2 + 81x + 1)}{(x-1)^9}$
5	$\frac{x^3(6x^{11} - 50x^{10} + 187x^9 - 617x^8 + 1878x^7 - 4074x^6 + 1938x^5 + 1586x^4 - 16360x^3 - 12880x^2 - 1809x - 45)}{(x-1)^{11}}$
6	$-\frac{2x^3(4x^{14} - 49x^{13} + 307x^{12} - 1326x^{11} + 3740x^{10} - 4941x^9 - 897x^8 + 13356x^7 + 17906x^6 - 30127x^5 + 164363x^4 + 142602x^3 + 26718x^2 + 981x + 3)}{(x-1)^{13}}$

k non-attacking rookhoppers on an n x n chessboard

n	2 rookhoppers	3 rookhoppers	4 rookhoppers	5 rookhoppers	6 rookhoppers	7 rookhoppers
1						
2	6	4	1			
3	36	78	90	45	6	0
4	120	528	1428	2304	2040	816
5	300	2210	10800	35749	79488	114706
6	630	6948	52965	290304	1161144	3387072
7	1176	18074	196700	1590873	9802684	46564336
8	2016	41088	602080	6690000	58088096	401128192
9	3240	84438	1598238	23242707	268440156	2513919204
10	4950	160420	3802525	69878064	1031037628	12495099016
11	7260	286198	8293670	187529651	3430915436	52021502892
12	10296	484944	16853220	459161472	10179163200	188243002896
13	14196	787098	32291220	1042257321	27489427880	?
14	19110	1231748	58873773	2219960320	68624313264	?
15	25200	1868130	102871800	4478585589	160249718268	?
16	32640	2757248	173252000	8621413008	353319118528	?
17	41616	3973614	282532690	15931229031	741012373316	?
18	52326	5607108	447828885	28397056752	1487331250164	?
19	64980	7764958	692112658	49023922143	2871371901772	?
20	79800	10573840	1045716500	82248381824	5354128049408	?
21	97020	14182098	1548109080	134486914125	9677012981520	?
22	116886	18762084	2249974485	214849180800	17004220000232	?
23	139656	24512618	3215627700	336053631793	29124677618748	?
24	165600	31661568	4525800768	515588980176	48733817914080	?
25	195000	40468550	6280835750	777171749019	79820797229548	?
n	2 rookhoppers	3 rookhoppers	4 rookhoppers	5 rookhoppers	6 rookhoppers	7 rookhoppers

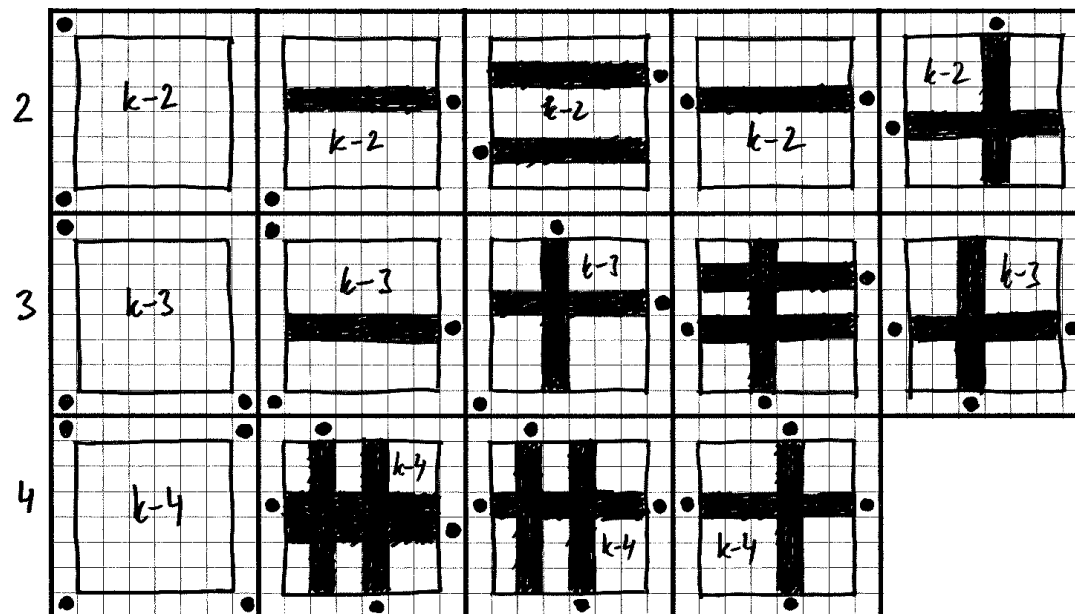
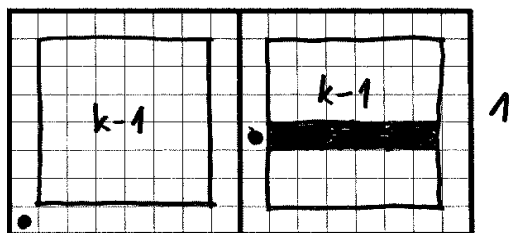
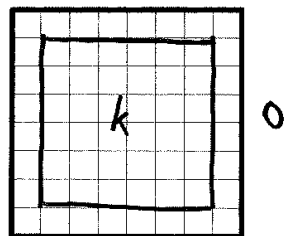
9.9.2 k Rookhoppers in stalemate - k věžových cvrčků v patu

Než se dostaneme k obecným patovým pozicím (*Rookhoppers in stalemate* = RHS), zkoumejme nejprve pozice věžových cvrčků, kteří se ani neohrožují ani nemají možnost skoku, nazýváme je nenapadající se kameny v patu (*Non-attacking Rookhoppers in stalemate* = RHN). Pokud je takový kámen uprostřed šachovnice, nemohou být na příslušné řadě ani sloupci už žádné další kameny. Mohou však být proti sobě na jedné řadě nebo sloupci 2 takové kameny, pokud oba stojí na okraji šachovnice.

Pokud šachovnici rozdělíme na 2 oblasti, okraj a vnitřní šachovnici $n-2 \times n-2$, můžeme rozdělit celý problém na několik případů podle toho kolik kamenů se nachází na okraji šachovnice (maximálně 4). Počet těchto pozic je pak třeba vynásobit počtem možných rozestavení kamenů ve vnitřní šachovnici, který je roven počtu nenapadajících se věží ve stejné oblasti (na což známe vzorec, viz kap. 3.1). Dostaneme tak následující vyjádření a po jeho úpravě i obecný vzorec. Důkaz tohoto vzorce je zřejmý z následujících schémat, seřazených podle toho, kolik kamenů je na okraji šachovnice (resp. v rozích).

(* non-attacking rookhoppers in stalemate - general formula, V. Kotěšovec 12.3.2012 *)

```
r[kk_,mm_,nn_] := (If[kk==0,1,If[kk<0|mm<1|nn<1|mm<kk|nn<kk,0,mm!*nn!/(mm-kk)!/(nn-kk)!/kk!]]
);
RHN[k_,n_] := (If[n==1,If[k==1,1,0],
r[k,n-2,n-2]
+4*r[k-1,n-2,n-2]+4*(n-2)*r[k-1,n-2,n-3]
+6*r[k-2,n-2,n-2]+4*2*(n-2)*r[k-2,n-2,n-3]+2*(n-2)*(r[k-2,n-2,n-3]+(n-3)*r[k-2,n-2,n-4])+4*(n-2)*(n-2)*r[k-2,n-3,n-3]
+4*r[k-3,n-2,n-2]+4*(n-2)*r[k-3,n-2,n-3]+4*(n-2)*(n-2)*r[k-3,n-3,n-3]+4*(n-2)*(n-2)*(r[k-3,n-3,n-3]+(n-3)*r[k-3,n-3,n-4])
+r[k-4,n-2,n-2]+(n-2)*(n-2)*(r[k-4,n-3,n-3]+(n-3)*(n-3)*r[k-4,n-4,n-4]+2*(n-3)*r[k-4,n-3,n-4])]
);
```



2 non-attacking rookhoppers in stalemate, board $n \times n$, $n > 1$

$$\frac{1}{2}n(n+1)(n^2 - 3n + 4)$$

3 non-attacking rookhoppers in stalemate, board $n \times n$, $n > 1$

$$\frac{1}{6}(n^6 - 6n^5 + 13n^4 - 32n^2 + 24n + 24)$$

4 non-attacking rookhoppers in stalemate, board $n \times n$, $n > 1$

$$\frac{1}{24}(n^8 - 12n^7 + 58n^6 - 120n^5 + n^4 + 420n^3 - 516n^2 - 192n + 504)$$

5 non-attacking rookhoppers in stalemate, board $n \times n$, $n > 1$

$$\frac{1}{120}(n-2)^2(n^8 - 16n^7 + 102n^6 - 288n^5 + 113n^4 + 1264n^3 - 2256n^2 - 720n + 3360)$$

6 non-attacking rookhoppers in stalemate, board $n \times n$, $n > 1$

$$\frac{1}{720}(n-3)^2(n-2)^2(n^8 - 20n^7 + 158n^6 - 560n^5 + 401n^4 + 2980n^3 - 6920n^2 - 1920n + 13800)$$

7 non-attacking rookhoppers in stalemate, board $n \times n$, $n > 1$

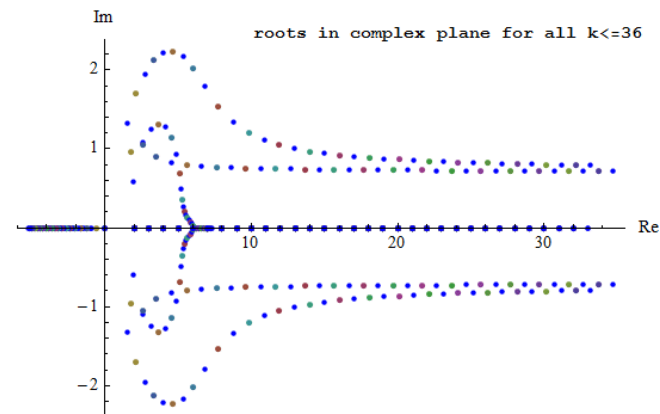
$$\frac{(n-4)^2(n-3)^2(n-2)^2(n^8 - 24n^7 + 226n^6 - 960n^5 + 973n^4 + 6024n^3 - 17160n^2 - 4200n + 42840)}{5040}$$

8 non-attacking rookhoppers in stalemate, board $n \times n$, $n > 1$

$$\frac{(n-5)^2(n-4)^2(n-3)^2(n-2)^2(n^8 - 28n^7 + 306n^6 - 1512n^5 + 1961n^4 + 10948n^3 - 36876n^2 - 8064n + 110544)}{40320}$$

9 non-attacking rookhoppers in stalemate, board $n \times n$, $n > 1$

$$\frac{(n-6)^2(n-5)^2(n-4)^2(n-3)^2(n-2)^2(n^8 - 32n^7 + 398n^6 - 2240n^5 + 3521n^4 + 18400n^3 - 71456n^2 - 14112n + 249984)}{362880}$$



Limitní hodnoty těchto kořenů jsou $\pm\sqrt{k}$ a $k \pm i\sqrt{2}$

Poměrně překvapující je, že v každém dílčím vzorci zůstane (pro $k > 3$) vždy **polynom 8. stupně!** Z koeficientů těchto polynomů lze určit jejich obecný tvar.

Na šachovnici $n \times n$ se vejde maximálně $n+2$ věžových cvrčků tak, aby žádný nemohl táhnout a aby se žádné 2 se nenapadaly.

Maximal number of non-attacking rookhoppers in stalemate on an $n \times n$ normal board is $n + 2$ (for $n > 1$).

Number of arrangements of k non-attacking rookhoppers in stalemate, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.3.2012), $n > 1$

$$RHN(k, n) = (n^8 - 4(k-1)n^7 + 2(3k^2 - 5k + 1)n^6 - 4(k-2)(k-1)(k+1)n^5 + (k^4 - 4k^3 - 3k^2 + 14k - 7)n^4 + 4(k-1)(k^3 - 2k^2 + k - 1)n^3 - 2(k-2)(k-1)(k^3 - k^2 - k - 1)n^2 - 4(k-2)^2(k-1)kn + (k-2)(k-1)^2 k(k^2 - 2k - 1)) * \frac{(n-2)!^2}{k! (n-k+2)!^2}$$

```
RHN[k_, n_] := (If[n==1, If[k==1, 1, 0], If[k>n+2, 0, (n^8-4*(k-1)*n^7+2*(3*k^2-5*k+1)*n^6-4*(k-2)*(k-1)*(k+1)*n^5+(k^4-4*k^3-3*k^2+14*k-7)*n^4+4*(k-1)*(k^3-2*k^2+k-1)*n^3-2*(k-2)*(k-1)*(k^3-k^2-k-1)*n^2-4*(k-2)^2*(k-1)*k*n+(k-2)*(k-1)^2*k*(k^2-2*k-1))*((n-2)!)^2/(k!*(n-k+2)!)^2]]);
```

Některé speciální hodnoty:

$n+2$ non-attacking rookhoppers in stalemate, board $n \times n$

$$RHN(n+2, n) = (n-2)!$$

$n+1$ non-attacking rookhoppers in stalemate, board $n \times n$

$$RHN(n+1, n) = 2n * (n-2)!$$

n non-attacking rookhoppers in stalemate, board $n \times n$

$$RHN(n, n) = \frac{1}{4}(17n^2 - 21n - 2) * (n-2)!$$

$n-1$ non-attacking rookhoppers in stalemate, board $n \times n$

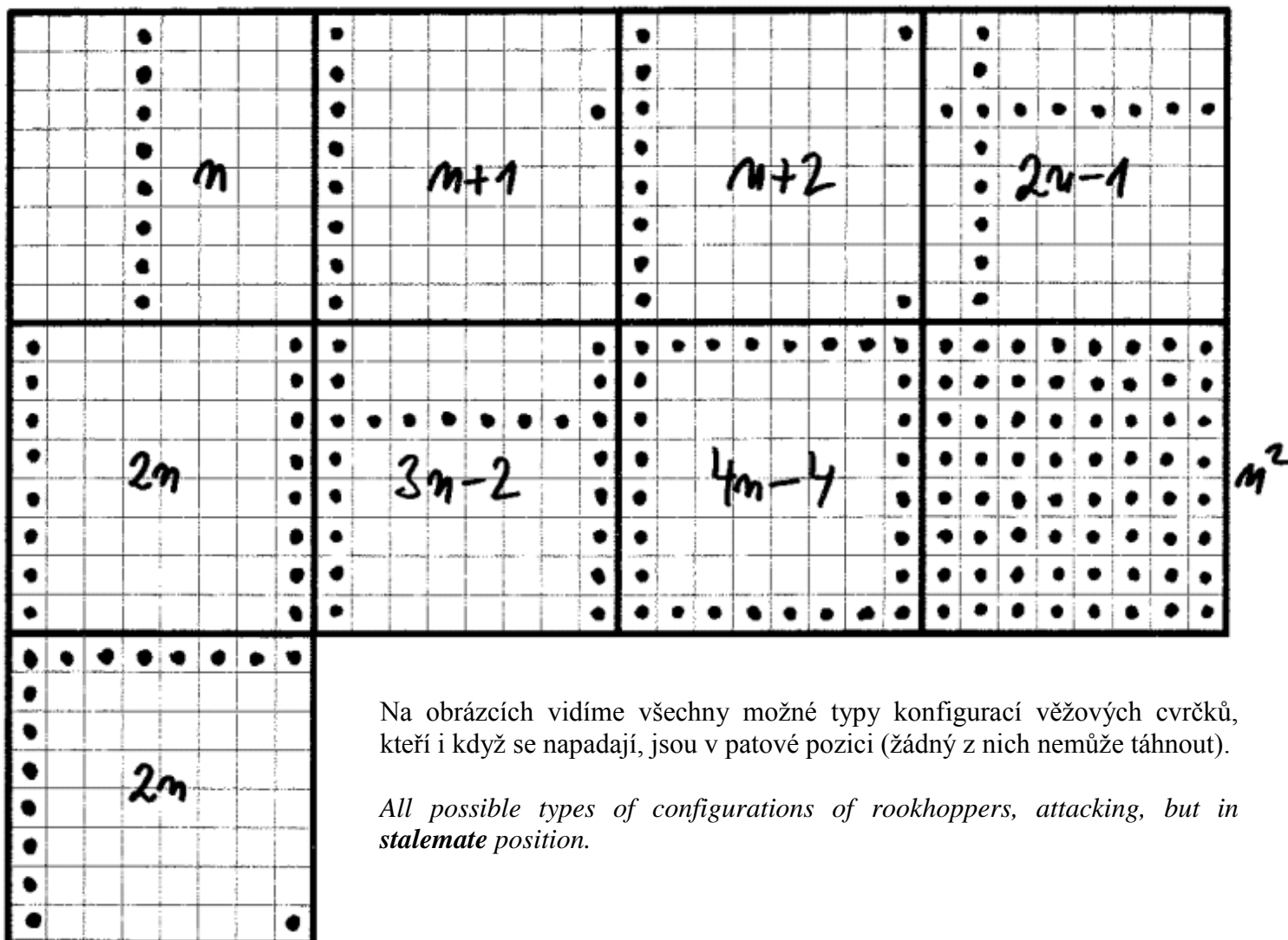
$$RHN(n-1, n) = \frac{1}{18}(41n^3 - 99n^2 + 76n - 12) * (n-2)!$$

$n-2$ non-attacking rookhoppers in stalemate, board $n \times n$

$$RHN(n-2, n) = \frac{1}{576}(257n^4 - 1038n^3 + 1831n^2 - 1530n + 504) * (n-2)!$$

Rookhoppers in stalemate (general positions, not only non-attacking)

Co se týče obecné pozice věžových cvrčků v patu, tak pro $k < n$ jsou tyto počty shodné jako podle předchozího vzorce RHN. Pro $k \geq n$ může ale nastat atypická pozice, kdy na jednom sloupci nebo řadě stojí na všech polích celkem n kamenů, které se sice napadají, ale nemohou táhnout. Maximální počet věžových cvrčků v patu na šachovnici $n \times n$ je tak $k = n^2$, ale taková pozice existuje pouze 1 a i ostatní jsou celkem raritní.



Na obrázcích vidíme všechny možné typy konfigurací věžových cvrčků, kteří i když se napadají, jsou v patové pozici (žádný z nich nemůže táhnout).

All possible types of configurations of rookhoppers, attacking, but in stalemate position.

number of rookhoppers on an $n \times n$ board	number of stalemate positions with k rookhoppers
$k < n$	$RHN(k, n)$
$k = n$	$RHN(n, n) + 2n = (17n^2 - 21n - 2)/4 * (n - 2)! + 2n$
$k = n + 1$	$RHN(n + 1, n) + 4n = 2n * (n - 2)! + 4n$
$k = n + 2$	$RHN(n + 2, n) + 4 = (n - 2)! + 4$
$n + 3 \leq k \leq 2n - 2$	0
$k = 2n - 1$	n^2
$k = 2n$	6
$2n + 1 \leq k \leq 3n - 3$	0
$k = 3n - 2$	$2n$
$3n - 1 \leq k \leq 4n - 5$	0
$k = 4n - 4$	1
$4n - 3 \leq k \leq n^2 - 1$	0
$k = n^2$	1
počet kamenů na šachovnici $n \times n$	počet patových pozic s k věžovými cvrčky na šachovnici $n \times n$

Poznámka: Pro některá malá n se mohou hodnoty **sčítat**, např. pro $n = 3$ je $n + 2 = 2n - 1$, proto se musí započítat obě možnosti.

V programu Mathematica dostaneme tabulky hodnot tímto programem

```
RHN[k_, n_] := (
  If[n == 1, If[k == 1, 1, 0],
  If[k > n + 2, 0, (n^8 - 4*(k-1)*n^7 + 2*(3*k^2 - 5*k + 1)*n^6 - 4*(k-2)*(k-1)*(k+1)*n^5 + (k^4 - 4*k^3 - 3*k^2 + 14*k - 7)*n^4 + 4*(k-1)*(k^3 - 2*k^2 + k - 1)*n^3 - 2*(k-2)*(k-1)*(k^3 - k^2 - k - 1)*n^2 - 4*(k-2)^2*(k-1)*k*n + (k-2)*(k-1)^2*k*(k^2 - 2*k - 1))*(n-2)!^2/(k!*((n-k+2)!)^2)]];
);

RHS[k_, n_] := (
  If[n > 2,
  rhst = 0;
  If[k < n, rhst = RHN[k, n]];
  If[k == n, rhst = (17*n^2 - 21*n - 2)/4*(n-2)! + 2*n];
  If[k == n + 1, rhst = 2*n*(n-2)! + 4*n];
  If[k == n + 2, rhst = (n-2)! + 4];
  If[k == 2*n - 1, rhst = rhst + n^2];
  If[k == 2*n, rhst = rhst + 6];
  If[k == 3*n - 2, rhst = rhst + 2*n];
  If[k == 4*n - 4, rhst = rhst + 1];
  If[k == n^2, rhst = rhst + 1];
  , rhst = RHN[k, n];
  ];
  rhst
);

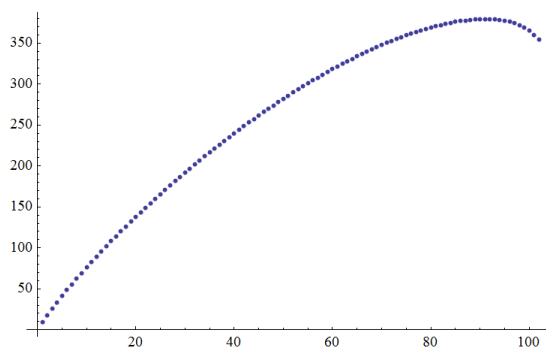
Do[Print["==== k=", k, " ====="]; Print[Table[RHN[k, n], {n, 1, 20}]]; Print[Table[RHS[k, n], {n, 1, 20}]]; , {k, 1, 10}]
```

n	k=1		k=2		k=3		k=4		k=5		k=6		k=7		k=8		k=9		k=10		
	RHN	RHS	RHN	RHS	RHN	RHS	RHN	RHS	RHN	RHS	RHN	RHS	RHN	RHS	RHN	RHS	RHN	RHS	RHN	RHS	
1	1	1																			
2	4	4	6	6	4	4	1	1													
3	9	9	24	24	22	28	6	18	1	14	0	6	0	6	0	1	0	1			
4	16	16	80	80	148	148	93	101	16	32	2	6	0	16	0	6	0	0	0	0	8
5	25	25	210	210	724	724	1006	1006	477	487	60	80	6	10	0	0	0	0	25	0	6
6	36	36	462	462	2644	2644	6921	6921	7648	7648	2904	2916	288	312	24	28	0	0	0	0	0
7	49	49	896	896	7774	7774	33726	33726	70945	70945	64880	64880	20520	20534	1680	1708	120	124	0	0	0
8	64	64	1584	1584	19492	19492	127861	127861	446256	446256	783330	783330	610080	610080	165240	165256	11520	11552	720	724	
9	81	81	2610	2610	43348	43348	402438	402438	2122141	2122141	6191052	6191052	9314550	9314550	6311760	6311760	1494360	1494378	90720	90756	
10	100	100	4070	4070	87844	87844	1099041	1099041	8194432	8194432	36118880	36118880	90470016	90470016	119021280	119021280	71339520	71339520	14999040	14999060	
11	121	121	6072	6072	165334	165334	2685286	2685286	26959473	26959473	167949504	167949504	635771808	635771808	1394656704	1394656704	1629421920	1629421920	875266560	875266560	
12	144	144	8736	8736	293044	293044	5999901	5999901	78147280	78147280	655244370	655244370	3505265280	3505265280	11625556320	11625556320	22678548480	22678548480	23822164800	23822164800	

RHN = Number of arrangements of k non-attacking rookhoppers in stalemate, board $n \times n$
 RHS = Number of arrangements of k rookhoppers in stalemate (general position), board $n \times n$

Hodnoty byly ověřeny ještě i přímou kombinatorickou metodou.

```
ListPlot[Table[Log[RHS[k, 100]], {k, 1, 102}]]
```

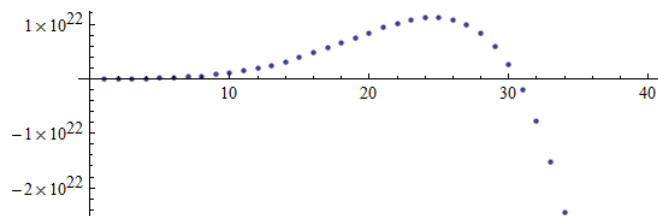


Pro další zkoumání je zajímavý pouze případ $n > k$. Počet patových pozic věžových cvrčků $RHS(k, n)$ má svoje maximum, které leží v oblasti, kdy se k přibližuje k n , ale od konce je trochu vzdáleno (viz graf, v logaritmickeém měřítku). Pro velká n určíme bod maxima a příslušnou hodnotu (počet patových pozic).

Označme $k = n - x$ bod, kde nastává maximum. S použitím [Stirlingova vzorce](#) upravíme obecný vzorec a vypočteme jeho derivaci. Maximum nastává tam, kde je derivace rovna 0.

Po úpravě a vyloučení nepotřebných nenulových násobících členů dostaneme výraz níže vlevo:

```
ListPlot[
Table[
(-x (1+x) (2+x)^2 (-1+x+19 x^2+9 x^3)+2 n^5 (47+96 x+72 x^2+24 x^3+3 x^4)-
n^4 (290+781 x+784 x^2+360 x^3+74 x^4+5 x^5)+
2 n^3 (123+571 x+874 x^2+600 x^3+191 x^4+23 x^5)+
2 n (1+x) (-2+15 x+193 x^2+287 x^3+149 x^4+26 x^5)-
n^2 (22+571 x+1630 x^2+1788 x^3+898 x^4+199 x^5+14 x^6)-
2 (2+x) (-n+x)
(2 n+19 n^2-38 n^3+17 n^4-2 x-14 n x+90 n^2 x-100 n^3 x+
32 n^4 x-x^2-56 n x^2+132 n^2 x^2-96 n^3 x^2+24 n^4 x^2+8 x^3-
68 n x^3+84 n^2 x^3-40 n^3 x^3+8 n^4 x^3+12 x^4-34 n x^4+23 n^2 x^4-
6 n^3 x^4+n^4 x^4+6 x^5-6 n x^5+2 n^2 x^5+x^6) *
(Log[n-x]-2 Log[2+x])) /. n -> 1000, {x, 1, 40}]]
```



Graf ukazuje průběh pro $n=1000$. Maximum zde nastává pro x něco přes 30.

Z funkce vlevo vybereme nejprve 2 části a vydělíme je výrazem $n^5 x^5$.

Pokud n i x jdou k nekonečnu, jde první výraz k nule

```
Limit[
Limit[
(-x (1+x) (2+x)^2 (-1+x+19 x^2+9 x^3)+
2 n^5 (47+96 x+72 x^2+24 x^3+3 x^4)-
n^4 (290+781 x+784 x^2+360 x^3+74 x^4+5 x^5)+
2 n^3 (123+571 x+874 x^2+600 x^3+191 x^4+23 x^5)+
2 n (1+x) (-2+15 x+193 x^2+287 x^3+149 x^4+26 x^5)-
n^2 (22+571 x+1630 x^2+1788 x^3+898 x^4+199 x^5+14 x^6)) /
(n^5 * x^5), n -> Infinity], x -> Infinity]]
```

0

a druhý k hodnotě 2

```
Limit[
Limit[
-(2 (2+x) (-n+x)
(2 n+19 n^2-38 n^3+17 n^4-2 x-14 n x+90 n^2 x-100 n^3 x+
32 n^4 x-x^2-56 n x^2+132 n^2 x^2-96 n^3 x^2+24 n^4 x^2+8 x^3-
68 n x^3+84 n^2 x^3-40 n^3 x^3+8 n^4 x^3+12 x^4-34 n x^4+23 n^2 x^4-
6 n^3 x^4+n^4 x^4+6 x^5-6 n x^5+2 n^2 x^5+x^6)) / (n^5 * x^5),
n -> Infinity], x -> Infinity]
```

2

Odtud vyplývá, že derivace může být rovna 0 pouze tehdy když bude platit

$$\log(n - x) - 2 \log(2 + x) = 0$$

a tedy

$$n - x = (x + 2)^2$$

Ze dvou kořenů je vyhovující pouze

$$x = \frac{1}{2}(-5 + \sqrt{9 + 4n})$$

Maximum tedy nastává pro

Theorem (V. Kotěšovec, 12.3.2012):

Number of stalemate positions of k rookhoppers on an $n \times n$ board is (asymptotically) maximal for

$$k \sim n + \frac{5}{2} - \sqrt{n + \frac{9}{4}}$$

což je (pro velká n) **počet věžových cvrčků, při kterém je na šachovnici $n \times n$ největší možný počet patových pozic.** Tuto hodnotu lze aproximovat i jako $n - \sqrt{n}$

Pokud tuto hodnotu k dosadíme do obecného vzorce, můžeme odtud určit počet těchto pozic (hodnotu v maximu). Asymptoticky dostaneme

Number of stalemate positions in maximum is

$$\max \sim \frac{e^{2\sqrt{n}} n!}{2\pi\sqrt{en}} \sim \frac{n^n}{e^{n-2\sqrt{n}} \sqrt{2\pi e}}$$

Vidíme tedy, že hodnota v maximu je podstatně větší než hodnota pro $k=n$, přesněji

$$\frac{RHS(n - \sqrt{n}, n)}{RHS(n, n)} \sim \frac{2e^{2\sqrt{n}}}{17\pi\sqrt{en}}$$

Ještě může být zajímavý asymptotický odhad celkového počtu patových pozic věžových cvrčků na šachovnici $n \times n$ bez ohledu na počet kamenů (*total number of stalemate positions of k rookhoppers on an $n \times n$ board, over all k*). V souladu s výsledky na str. 219 dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n+2} RHS(k, n) \sim \frac{n^{n+1/4}}{\sqrt{2} e^{n-2\sqrt{n}+1/2}} \sim RHS(n - \sqrt{n}, n) * n^{1/4} \sqrt{\pi}$$

9.9.3 k Rookhoppers on an $n \times n$ toroidal chessboard - k věžových cvrčků na prstencové šachovnici $n \times n$

2 rookhoppers, toroidal board $n \times n$: (all combinations)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{n^2}{2}$$

3 rookhoppers, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 11.3.2011), $n \geq 4$

$$\frac{n^6}{6} - \frac{n^4}{2} - 2n^3 + \frac{19n^2}{3}$$

4 rookhoppers, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 11.3.2011), $n \geq 5$

$$\frac{n^8}{24} - \frac{n^6}{4} - 2n^5 + \frac{179n^4}{24} + 2n^3 - \frac{69n^2}{4}$$

5 rookhoppers, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 11.3.2011), $n \geq 6$

$$\frac{n^{10}}{120} - \frac{n^8}{12} - n^7 + \frac{103n^6}{24} + \frac{8n^5}{3} - \frac{149n^4}{12} - \frac{182n^3}{3} + \frac{656n^2}{5}$$

6 rookhoppers, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 11.3.2011), $n \geq 7$

$$\frac{n^{12}}{720} - \frac{n^{10}}{48} - \frac{n^9}{3} + \frac{233n^8}{144} + \frac{5n^7}{3} - \frac{107n^6}{48} - \frac{521n^5}{6} + \frac{70727n^4}{360} + \frac{371n^3}{2} - \frac{3623n^2}{6}$$

7 rookhoppers, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.3.2011), $n \geq 8$

$$\frac{n^{14}}{5040} - \frac{n^{12}}{240} - \frac{n^{11}}{12} + \frac{65n^{10}}{144} + \frac{2n^9}{3} + \frac{53n^8}{48} - \frac{293n^7}{5} + \frac{6292n^6}{45} + \frac{2393n^5}{12} - \frac{20731n^4}{60} - \frac{11662n^3}{5} + \frac{29478n^2}{7}$$

První členy těchto vzorců mají tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{n^{2k-2}}{2(k-2)!} - \frac{2n^{2k-3}}{(k-3)!} + \frac{(27k+71)n^{2k-4}}{24(k-3)!} + \frac{2(k-1)n^{2k-5}}{3(k-4)!} + \dots$$

k	k non-attacking Rookhoppers on an n x n toroidal chessboard - Generating function
2	$-\frac{6x^2(x+1)}{(x-1)^5}$
3	$-\frac{2x^2(3x^8 - 17x^7 + 37x^6 - 35x^5 + 11x^4 + x^3 + 33x^2 + 25x + 2)}{(x-1)^7}$
4	$\frac{x^2(8x^{11} - 90x^{10} + 454x^9 - 1346x^8 + 2574x^7 - 3242x^6 + 2421x^5 - 819x^4 - 904x^3 - 654x^2 - 81x - 1)}{(x-1)^9}$
5	$-\frac{x^3(10x^{13} - 174x^{12} + 1281x^{11} - 5407x^{10} + 14749x^9 - 27599x^8 + 36900x^7 - 36988x^6 + 32804x^5 - 23892x^4 + 25551x^3 + 11151x^2 + 1809x + 45)}{(x-1)^{11}}$
6	$\frac{2x^3(6x^{16} - 153x^{15} + 1523x^{14} - 8588x^{13} + 31880x^{12} - 84411x^{11} + 167323x^{10} - 255144x^9 + 297882x^8 - 254202x^7 + 108160x^6 - 11723x^5 - 145745x^4 - 155790x^3 - 22674x^2 - 981x - 3)}{(x-1)^{13}}$
7	$-\frac{1}{(x-1)^{15}} 2x^4(7x^{18} - 249x^{17} + 3295x^{16} - 24345x^{15} + 117756x^{14} - 404302x^{13} + 1030670x^{12} - 1999170x^{11} + 2987039x^{10} - 3471131x^9 + 3299145x^8 - 2839847x^7 + 3211100x^6 - 1918962x^5 + 3946410x^4 + 3833850x^3 + 836586x^2 + 40380x + 408)$

k non-attacking rookhoppers on an n x n toroidal chessboard

n	2 rookhoppers	3 rookhoppers	4 rookhoppers	5 rookhoppers	6 rookhoppers	7 rookhoppers
1						
2	6	4	1			
3	36	78	90	45	6	0
4	120	528	1428	2304	2040	816
5	300	2200	10600	34020	71400	93000
6	630	6924	52245	280476	1082376	2982492
7	1176	18032	194922	1555554	9372328	43011360
8	2016	41024	598448	6591488	56407904	381102720
9	3240	84348	1591650	23009508	263168568	2429049384
10	4950	160300	3791525	69386620	1016871700	12200639500
11	7260	286044	8276400	186580548	3397022486	51141168122
12	10296	484752	16827372	457449408	10105099224	185898175200
13	14196	786864	32253988	1039334114	27338961338	602059172728
14	19110	1231468	58821805	2215190236	68336440956	1772008713692
15	25200	1867800	102801150	4471092270	159726014700	4811284160550
16	32640	2756864	173158080	8610017280	352406401408	12191969937920
17	41616	3973172	282410222	15914376872	739479495620	29101046301816
18	52326	5606604	447671853	28372736700	1484838643572	65917184574636
19	64980	7764388	691914260	48989571424	2867432297194	142559409952210
20	79800	10573200	1045469100	82200780480	5348056587800	295872360466400
21	97020	14181384	1547804160	134422066422	9667864702230	591803405669448
22	116886	18761292	2249602597	214762183196	16990712454716	1144957545090172
23	139656	24511744	3215178418	335938526746	29105096104656	2149263229412894
24	165600	31660608	4525262640	515438595072	48705900558432	3925040841295488
25	195000	40467500	6280196250	776977519500	79781596870000	6989851830965000
n	2 rookhoppers	3 rookhoppers	4 rookhoppers	5 rookhoppers	6 rookhoppers	7 rookhoppers

9.9.4 k Bishophoppers on an n x n chessboard - k střelcových cvrčků na šachovnici n x n

The **Bishopper** moves on the same lines as a bishop, but must jump over a hurdle to land on the square immediately beyond (moves like a Grasshopper but only on Bishop-lines).

2 bishophoppers, board $n \times n$: (all combinations)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{n^2}{2}$$

3 bishophoppers, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 11.3.2012), $n \geq 2$

$$\frac{n^6}{6} - \frac{n^4}{2} - \frac{4n^3}{3} + \frac{25n^2}{3} - \frac{50n}{3} + 12$$

4 bishophoppers, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 11.3.2012), $n \geq 3$

$$\frac{n^8}{24} - \frac{n^6}{4} - \frac{4n^5}{3} + \frac{215n^4}{24} - 16n^3 - \frac{31n^2}{4} + \frac{181n}{3} - 58$$

5 bishophoppers, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 11.3.2012), $n \geq 4$

$$\frac{n^{10}}{120} - \frac{n^8}{12} - \frac{2n^7}{3} + \frac{115n^6}{24} - \frac{107n^5}{15} - \frac{29n^4}{2} + \frac{64n^3}{3} + \frac{2783n^2}{15} - \frac{8348n}{15} + \frac{3561}{8} - \frac{9(-1)^n}{8}$$

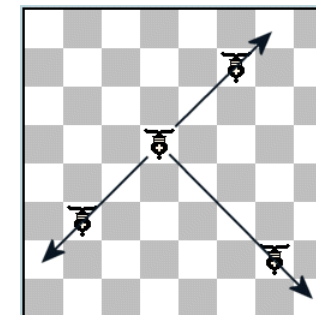
6 bishophoppers, board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 12.3.2012), $n \geq 5$

$$\frac{n^{12}}{720} - \frac{n^{10}}{48} - \frac{2n^9}{9} + \frac{245n^8}{144} - \frac{86n^7}{45} - \frac{383n^6}{48} - \frac{217n^5}{9} + \frac{110687n^4}{360} - \frac{59903n^3}{90} - \frac{8887n^2}{24} + \frac{17249n}{6} - 2538 + (-1)^n * \left(-\frac{9}{8}n^2 + 3n\right)$$

První členy těchto vzorců mají tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{n^{2k-2}}{2(k-2)!} - \frac{4n^{2k-3}}{3(k-3)!} + \frac{5(3k+31)n^{2k-4}}{24(k-3)!} + \dots$$

Note: For maximal number of non-attacking bishophoppers see chapter 14.1.



k	k non-attacking Bishoppers on an n x n chessboard - Generating function
2	$-\frac{6x^2(x+1)}{(x-1)^5}$
3	$-\frac{2x^2(x+1)(x^5-2x^4+4x^2+25x+2)}{(x-1)^7}$
4	$\frac{x^2(2x^9-4x^8+4x^7-86x^6+165x^5-133x^4-842x^3-680x^2-105x-1)}{(x-1)^9}$
5	$\frac{x^3(2x^{12}-12x^{11}-71x^{10}+478x^9-751x^8-644x^7-136x^6+364x^5-16002x^4-26728x^3-14337x^2-2546x-97)}{(x-1)^{11}(x+1)}$
6	$-\frac{1}{(x-1)^{13}(x+1)^3}2x^3(15x^{17}-109x^{16}+273x^{15}-371x^{14}+567x^{13}+949x^{12}-6404x^{11}+10101x^{10}+37520x^9+31957x^8+177025x^7+614759x^6+879635x^5+638299x^4+234994x^3+39559x^2+2327x+24)$

k non-attacking bishoppers on an n x n chessboard

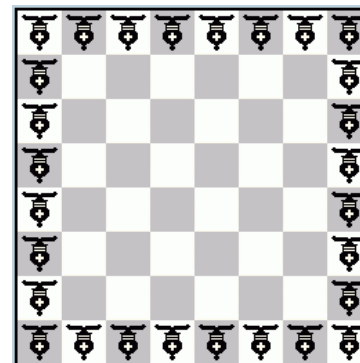
n	2 bishoppers	3 bishoppers	4 bishoppers	5 bishoppers	6 bishoppers	7 bishoppers
1						
2	6	4	1			
3	36	82	114	97	48	12
4	120	548	1670	3516	5134	5100
5	300	2262	11852	45229	128442	273088
6	630	7052	56131	334984	1543100	5574116
7	1176	18254	204384	1746521	11771350	63855062
8	2016	41372	618254	7133404	65818154	496748908
9	3240	84858	1628990	24336819	293488158	2926494026
10	4950	161012	3856687	72301432	1101368982	13977586776
11	7260	287002	8383526	192463291	3607623946	56649097406
12	10296	486004	16995294	468547868	10585376080	201159101940
13	14196	788462	32507144	1059148065	28357625410	?
14	19110	1233468	59191235	2248970440	70370399928	?
15	25200	1870262	103325572	4526474437	163584750302	?
16	32640	2759852	173885046	8697813116	359412601822	?
17	41616	3976754	283397354	16049546167	751724607974	?
18	52326	5610852	448988159	28575565944	1505536268514	?
19	64980	7769378	693641530	49287086263	2901397265682	?
20	79800	10579012	1047703382	82628420860	5402343064852	?
21	97020	14188102	1550657316	135025655093	9752602926538	?
22	116886	18769004	2253203939	215600219784	17120190636244	?
23	139656	24520542	3219676424	337084841425	29299141774950	?
24	165600	31670588	4530826750	516985397404	48991624150322	?
25	195000	40478762	6287018742	779038879835	80195569746862	?
n	2 bishoppers	3 bishoppers	4 bishoppers	5 bishoppers	6 bishoppers	7 bishoppers

9.9.5 k Bishoppers in stalemate - k střelcových cvrčků v patu

Opět budeme analyzovat dva případy, počet pozic nenapadajících se střelcových cvrčků v patu (*non-attacking Bishoppers in stalemate* = BHN) a obecný počet pozic střelcových cvrčků v patu (*Bishoppers in stalemate (general positions)* = BHS). Maximální počet nenapadajících se střelcových cvrčků v patu pro $n > 1$ je $4n - 4$, jde o pozici, kdy jsou všechny kameny na okraji šachovnice, viz diagram. Obecně je samozřejmě možno zaplnit celou šachovnici n^2 střelcovými cvrčky, kteří budou v patu (ale budou se napadat). *In general case is maximal number of Bishoppers in stalemate on an $n \times n$ chessboard n^2 .*

n	maximal number of non-attacking bishoppers in stalemate on an $n \times n$ normal board	
1	1	
2	4	
3	8	
4	12	
5	16	
6	20	
7	24	
8	28	
9	32	
10	36	
11	40	
12	44	
13	48	
14	52	
15	56	
16	60	

$$4n - 4$$



Počítačem ověřeno pro všechna $n \leq 100$

2 non-attacking bishophoppers in stalemate, board $n \times n$, $n \geq 2$

$$BHN(2, n) = \frac{n^4}{2} - \frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{11n}{3} - 6$$

2 bishophoppers in stalemate, board $n \times n$, $n \geq 2$

$$BHS(2, n) = BHN(2, n) = \frac{n^4}{2} - \frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{11n}{3} - 6$$

3 non-attacking bishophoppers in stalemate, board $n \times n$, $n \geq 2$

$$BHN(3, n) = \frac{n^6}{6} - \frac{2n^5}{3} + \frac{5n^4}{4} + \frac{7n^3}{3} - \frac{32n^2}{3} + \frac{46n}{3} - \frac{95}{8} - \frac{(-1)^n}{8}$$

3 bishophoppers in stalemate, board $n \times n$, $n \geq 4$

$$BHS(3, n) = BHN(3, n) + 4 = \frac{n^6}{6} - \frac{2n^5}{3} + \frac{5n^4}{4} + \frac{7n^3}{3} - \frac{32n^2}{3} + \frac{46n}{3} - \frac{63}{8} - \frac{(-1)^n}{8}$$

4 non-attacking bishophoppers in stalemate, board $n \times n$, $n \geq 2$

(V. Kotěšovec, 15.3.2012)

$$BHN(4, n) = \frac{n^8}{24} - \frac{n^7}{3} + \frac{11n^6}{9} - \frac{9n^5}{10} - \frac{485n^4}{72} + \frac{161n^3}{6} - \frac{3143n^2}{72} + \frac{219n}{10} + \frac{13}{2} + (-1)^n * \left(-\frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \right)$$

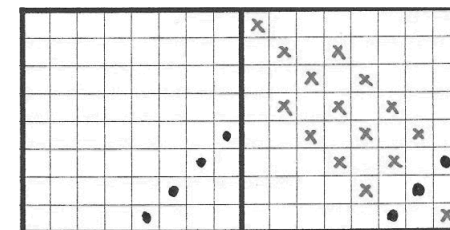
4 bishophoppers in stalemate, board $n \times n$, $n \geq 5$

(V. Kotěšovec, 15.3.2012)

$$BHS(4, n) = BHN(4, n) + 4(n^2 - 3n + 7) = \frac{n^8}{24} - \frac{n^7}{3} + \frac{11n^6}{9} - \frac{9n^5}{10} - \frac{485n^4}{72} + \frac{161n^3}{6} - \frac{2855n^2}{72} + \frac{99n}{10} + \frac{69}{2} + (-1)^n * \left(-\frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \right)$$

Rozdíl pozic, tedy takové patové pozice stělcových cvrčků, kde se kameny napadají, lze snadno analyzovat i analyticky a potvrdit tak vzorce odvozené na základě číselných posloupností vygenerovaných počítačem. Mohou nastat 2 případy. Prvním je čtveřice kamenů umístěná na jedné diagonální linii tak, aby oba konce byly na okraji šachovnice. Taková možná konfigurace je jen jedna a je jí možno jen symetricky otočit, takže dostáváme celkem 4 pozice. Druhý případ je trojice kamenů na jedné diagonální linii a čtvrtý kámen umístěný kdekoliv na šachovnici tak, aby pozice zůstala patová. Z celkového počtu n^2 polí je tak třeba vyloučit n polí na hlavní diagonále a dvakrát $n - 3$ polí na sousedních diagonálách (viz diagramy vpravo). Celkem dostaneme pro počet takových pozic

$$4 + 4 * (n^2 - (n + 2 * (n - 3))) = 4(n^2 - 3n + 7) = BHS(4, n) - BHN(4, n)$$



• = Bishophoppers
x = free squares

5 non-attacking bishoppers in stalemate, board $n \times n$, $n \geq 3$

(V. Kotěšovec, 16.3.2012)

$$BHN(5, n) = \frac{n^{10}}{120} - \frac{n^9}{9} + \frac{49n^8}{72} - \frac{88n^7}{45} + \frac{43n^6}{72} + \frac{2969n^5}{180} - \frac{9067n^4}{144} + \frac{19807n^3}{180} - \frac{9241n^2}{120} - \frac{6341n}{120} + \frac{399}{4} + (-1)^n * \left(-\frac{1}{16}n^4 + \frac{7}{12}n^3 - \frac{9}{8}n^2 - \frac{47}{24}n + \frac{17}{4} \right)$$

5 bishoppers in stalemate, board $n \times n$, $n \geq 6$

(V. Kotěšovec, 16.3.2012)

$$BHS(5, n) = \frac{n^{10}}{120} - \frac{n^9}{9} + \frac{49n^8}{72} - \frac{88n^7}{45} + \frac{43n^6}{72} + \frac{2969n^5}{180} - \frac{8779n^4}{144} + \frac{17167n^3}{180} - \frac{2041n^2}{120} - \frac{6647n}{40} + \frac{843}{4} + (-1)^n * \left(-\frac{1}{16}n^4 + \frac{7}{12}n^3 - \frac{9}{8}n^2 - \frac{47}{24}n + \frac{5}{4} \right)$$

$$BHS(5, n) = BHN(5, n) + 2n^4 - \frac{44n^3}{3} + 60n^2 - \frac{340n}{3} + 111 - 3(-1)^n$$

6 non-attacking bishoppers in stalemate, board $n \times n$, $n \geq 3$

(V. Kotěšovec, 21.3.2012)

$$BHN(6, n) = \frac{n^{12}}{720} - \frac{n^{11}}{36} + \frac{37n^{10}}{144} - \frac{4273n^9}{3240} + \frac{5099n^8}{1440} - \frac{1591n^7}{3780} - \frac{6329n^6}{180} + \frac{156029n^5}{1080} - \frac{144787n^4}{480} + \frac{989323n^3}{3240} + \frac{17663n^2}{360} - \frac{304873n}{630} + \frac{25805}{64} + (-1)^n * \left(-\frac{1}{48}n^6 + \frac{1}{3}n^5 - \frac{173}{96}n^4 + \frac{21}{8}n^3 + \frac{199}{24}n^2 - \frac{161}{6}n + \frac{563}{64} \right)$$

6 bishoppers in stalemate, board $n \times n$, $n \geq 7$

(V. Kotěšovec, 22.3.2012)

$$BHS(6, n) = \frac{n^{12}}{720} - \frac{n^{11}}{36} + \frac{37n^{10}}{144} - \frac{4273n^9}{3240} + \frac{5099n^8}{1440} - \frac{1591n^7}{3780} - \frac{6209n^6}{180} + \frac{146669n^5}{1080} - \frac{117427n^4}{480} + \frac{291643n^3}{3240} + \frac{202103n^2}{360} - \frac{747133n}{630} + \frac{50989}{64} + (-1)^n * \left(-\frac{1}{48}n^6 + \frac{1}{3}n^5 - \frac{173}{96}n^4 + \frac{21}{8}n^3 + \frac{127}{24}n^2 - \frac{53}{6}n - \frac{813}{64} \right)$$

$$BHS(6, n) = BHN(6, n) + \frac{2n^6}{3} - \frac{26n^5}{3} + 57n^4 - \frac{646n^3}{3} + \frac{1537n^2}{3} - 702n + \frac{787}{2} + (-1)^n * \left(-3n^2 + 18n - \frac{43}{2} \right)$$

První členy těchto vzorců mají tvar (jako pro [střelce](#))

$$BHN(k, n) = \frac{n^{2k}}{k!} - \frac{2n^{2k-1}}{3(k-2)!} + \frac{(8k^2 - 13k + 12)n^{2k-2}}{36(k-2)!} - \dots - \frac{(-1)^n n^{2k-6}}{8(k-3)!} + \dots$$

Rozdíl obou vzorců začíná vždy členem

$$BHS(k, n) - BHN(k, n) = \frac{4n^{2k-6}}{(k-3)!} + \dots$$

k	k non-attacking Bishopoppers in stalemate on an n x n chessboard - Generating function
2	$\frac{2x^2(x+1)(x^3-3x^2+2x-3)}{(x-1)^5}$
3	$\frac{2x^2(2x^7-6x^6+11x^5-32x^4-58x^3-16x^2-19x-2)}{(x-1)^7(x+1)}$
4	$\frac{x^2(4x^{11}-17x^{10}-84x^9+241x^8+1440x^7+3178x^6+4240x^5+2942x^4+1116x^3+311x^2+68x+1)}{(x-1)^9(x+1)^3}$
5	$\frac{x^3(31x^{14}-82x^{13}-429x^{12}+48x^{11}+9655x^{10}+54526x^9+149779x^8+236208x^7+244853x^6+168042x^5+76769x^4+22816x^3+4661x^2+746x+57)}{(x-1)^{11}(x+1)^5}$
6	$\frac{-4x^3(23x^{18}-35x^{17}-405x^{16}-1489x^{15}+11774x^{14}+154475x^{13}+737236x^{12}+2031547x^{11}+3776176x^{10}+4878297x^9+4539486x^8+3038989x^7+1470282x^6+506153x^5+122588x^4+20937x^3+2673x^2+246x+7)}{((x-1)^{13}(x+1)^7)}$

K	k Bishopoppers in stalemate on an n x n chessboard - Generating function
2	$\frac{2x^2(x+1)(x^3-3x^2+2x-3)}{(x-1)^5}$
3	$\frac{2x^2(x^9-4x^8+2x^7+10x^6-21x^5+36x^4+62x^3+12x^2+20x+2)}{(x-1)^7(x+1)}$
4	$\frac{x^2(2x^{14}+8x^{13}-76x^{12}+140x^{11}+37x^{10}-476x^9+521x^8+1712x^7+2744x^6+4296x^5+3122x^4+1028x^3+305x^2+76x+1)}{(x-1)^9(x+1)^3}$
5	$\frac{x^3(2x^{18}-40x^{17}+121x^{16}+106x^{15}-913x^{14}+700x^{13}+2463x^{12}-3054x^{11}-11149x^{10}-49484x^9-150863x^8-240146x^7-242331x^6-166796x^5-78339x^4-22762x^3-4297x^2-828x-70)}{(x-1)^{11}(x+1)^5}$
6	$\frac{2x^3(3x^{23}-12x^{22}-79x^{21}+484x^{20}-417x^{19}-2200x^{18}+4527x^{17}+3052x^{16}-10304x^{15}-18132x^{14}-289276x^{13}-1492928x^{12}-4078824x^{11}-7528228x^{10}-9751264x^9-9096296x^8-6076187x^7-2933664x^6-1014941x^5-246420x^4-40863x^3-5316x^2-615x-20)}{((x-1)^{13}(x+1)^7)}$

n	k non-attacking bishoppers in stalemate on an n x n chessboard					k bishoppers in stalemate on an n x n chessboard				
	2 bishoppers	3 bishoppers	4 bishoppers	5 bishoppers	6 bishoppers	2 bishoppers	3 bishoppers	4 bishoppers	5 bishoppers	6 bishoppers
1										
2	6	4	1			6	4	1		
3	32	62	74	57	28	32	64	82	70	40
4	102	348	743	1088	1152	102	352	785	1248	1470
5	254	1392	4688	10619	17380	254	1396	4756	11085	19132
6	538	4412	22329	75080	178196	538	4416	22429	76092	183878
7	1016	11778	85406	413029	1397076	1016	11782	85546	415061	1413472
8	1762	27588	274439	1841688	8678404	1762	27592	274627	1845412	8719896
9	2862	58372	767724	6904087	44039708	2862	58376	767968	6910471	44134920
10	4414	113908	1920881	22440976	188189736	4414	113912	1921189	22451284	188388868
11	6528	208166	4388258	64855441	696166236	6528	208170	4388638	64871329	696554280
12	9326	360364	9298215	169984496	2281509224	9326	360368	9298675	170008012	2282218700
13	12942	596152	18497368	410422387	6750763972	12942	596156	18497916	410456067	6751997008
14	17522	948908	34878697	924232280	18311178364	17522	948912	34879341	924279148	18313226376
15	23224	1461162	62812502	1960495421	46097458804	23224	1461166	62813250	1960559085	46100735744
16	30218	2186132	108697863	3948740040	108788266220	30218	2186136	108698723	3948824692	108793336736
17	38686	3189388	181657620	7601565455	242663107740	38686	3189392	181658600	7601675967	242670733896
18	48822	4550628	294397153	14061920288	515097381968	48822	4550632	294398261	14062062212	515108561420
19	60832	6365582	464254138	25109736169	1046410884060	60832	6365586	464255382	25109915833	1046426912552
20	74934	8748028	714462055	43445328288	2044147399120	74934	8748032	714463443	43445552796	2044169920212
21	91358	11831936	1075658912	73071430251	3855472126820	91358	11831940	1075660452	73071707579	3855503212464
22	110346	15773724	1587666329	119798984552	7045305191908	110346	15773728	1587668029	119799323548	7045347405264
23	132152	20754642	2301574862	191907766037	12510452938196	132152	20754646	2301576730	191908176517	12510509434592
24	157042	26983268	3282162951	300996645752	21643019530836	157042	26983272	3282164995	300997138500	21643094135208
25	185294	34698132	4610689916	463066093063	36560507712988	185294	34698136	4610692144	463066679927	36560605043528
n	2 bishoppers	3 bishoppers	4 bishoppers	5 bishoppers	6 bishoppers	2 bishoppers	3 bishoppers	4 bishoppers	5 bishoppers	6 bishoppers

9.9.6 k Bishophoppers on an $n \times n$ toroidal chessboard - k střelcových cvrčků na prstencové šachovnici $n \times n$

2 bishophoppers, toroidal board $n \times n$: (all combinations)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{n^2}{2}$$

3 bishophoppers, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 11.3.2011), $n \geq 4$

$$\frac{n^6}{6} - \frac{n^4}{2} - 2n^3 + \frac{19n^2}{3}$$

4 bishophoppers, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 11.3.2011), $n \geq 5$

$$\frac{n^8}{24} - \frac{n^6}{4} - 2n^5 + \frac{179n^4}{24} + 2n^3 - \frac{53n^2}{4} + 4(-1)^n n^2$$

5 bishophoppers, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 11.3.2011), $n \geq 7$

$$\frac{n^{10}}{120} - \frac{n^8}{12} - n^7 + \frac{103n^6}{24} + \frac{8n^5}{3} - \frac{101n^4}{12} - \frac{212n^3}{3} + \frac{656n^2}{5} + (-1)^n * (4n^4 - 10n^3)$$

6 bishophoppers, toroidal board $n \times n$: (V. Kotěšovec, 11.3.2011), $n \geq 9$

$$\frac{n^{12}}{720} - \frac{n^{10}}{48} - \frac{n^9}{3} + \frac{233n^8}{144} + \frac{5n^7}{3} - \frac{11n^6}{48} - \frac{581n^5}{6} + \frac{74417n^4}{360} + \frac{315n^3}{2} - \frac{2699n^2}{6} + (-1)^n * (2n^6 - 10n^5 + \frac{41}{4}n^4 - 28n^3 + 154n^2)$$

První členy těchto vzorců mají tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{n^{2k-2}}{2(k-2)!} - \frac{2n^{2k-3}}{(k-3)!} + \frac{(27k+71)n^{2k-4}}{24(k-3)!} + \dots$$

Na prstencové šachovnici jsou pro věžového a střelcového cvrčka hodnoty pro **lichá** n shodné.

k	k non-attacking Bishoppers on an n x n toroidal chessboard - Generating function
2	$-\frac{6x^2(x+1)}{(x-1)^5}$
3	$-\frac{2x^2(3x^8 - 17x^7 + 37x^6 - 35x^5 + 11x^4 + x^3 + 33x^2 + 25x + 2)}{(x-1)^7}$
4	$-\frac{x^2(88x^{14} - 510x^{13} + 976x^{12} - 138x^{11} - 2016x^{10} + 2496x^9 + 97x^8 - 1788x^7 + 2444x^6 + 1610x^5 + 6246x^4 + 2918x^3 + 932x^2 + 84x + 1)}{(x-1)^9(x+1)^3}$
5	$\frac{1}{(x-1)^{11}(x+1)^5}x^3(288x^{19} - 1738x^{18} + 2460x^{17} + 5633x^{16} - 19166x^{15} + 5326x^{14} + 42502x^{13} - 48412x^{12} - 31050x^{11} + 85124x^{10} - 39106x^9 - 77216x^8 - 63250x^7 - 136994x^6 - 364142x^5 - 197912x^4 - 108422x^3 - 19302x^2 - 2258x - 45)$
6	$-\frac{1}{(x-1)^{13}(x+1)^7}2x^3(256x^{25} - 1536x^{24} - 946x^{23} + 23671x^{22} - 41182x^{21} - 68542x^{20} + 260702x^{19} - 54365x^{18} - 631564x^{17} + 621264x^{16} + 672584x^{15} - 1334323x^{14} + 19662x^{13} + 1442685x^{12} + 341956x^{11} + 567181x^{10} + 6020518x^9 + 6961121x^8 + 11629666x^7 + 8589584x^6 + 5596336x^5 + 1565197x^4 + 368806x^3 + 27900x^2 + 1286x + 3)$

k non-attacking bishoppers on an n x n toroidal chessboard

n	2 bishoppers	3 bishoppers	4 bishoppers	5 bishoppers	6 bishoppers	7 bishoppers
1						
2	6	4	1			
3	36	78	90	45	6	0
4	120	528	1460	2528	2608	1440
5	300	2200	10600	34020	71400	93000
6	630	6924	52533	286812	1145016	3342204
7	1176	18032	194922	1555554	9372328	43011360
8	2016	41024	598960	6614016	56875616	387120512
9	3240	84348	1591650	23009508	263168568	2429049384
10	4950	160300	3792325	69446620	1019051500	12251379900
11	7260	286044	8276400	186580548	3397022486	51141168122
12	10296	484752	16828524	457580736	10112439192	186165023904
13	14196	786864	32253988	1039334114	27338961338	602059172728
14	19110	1231468	58823373	2215442684	68356496852	1773053635948
15	25200	1867800	102801150	4471092270	159726014700	4811284160550
16	32640	2756864	173160128	8610459648	352453731712	?
17	41616	3973172	282410222	15914376872	739479495620	?
18	52326	5606604	447674445	28373459868	1484938826316	?
19	64980	7764388	691914260	48989571424	2867432297194	?
20	79800	10573200	1045472300	82201900480	5348251543000	?
21	97020	14181384	1547804160	134422066422	9667864702230	?
22	116886	18761292	2249606469	214763844284	16991067256724	?
23	139656	24511744	3215178418	335938526746	29105096104656	?
24	165600	31660608	4525267248	515440972800	48706511922528	?
25	195000	40467500	6280196250	776977519500	79781596870000	?
n	2 bishoppers	3 bishoppers	4 bishoppers	5 bishoppers	6 bishoppers	7 bishoppers

10) Leapers - Skokani

10.1) 2 leapers on an $n \times n$ chessboard - 2 skokani na šachovnici $n \times n$

Vzorci pro rozmístění neohrožujících se exokamenů různých typů publikoval Christian Poisson v roce 1990 ve francouzském časopise Rex Multiplex. Celkem 44 vzorců (převážně vždy pro rozmístění 2-3 kamenů) vyšlo ve dvou pokračováních Rex Multiplex 29/1990, str. 829-830 a Rex Multiplex 30/1990, str. 914-915.

Nejzajímavější byl tento obecný vzorec pro rozmístění dvou neohrožujících se skokanů $[r,s]$ na šachovnici $n \times n$.

Two *leapers* $[r,s]$ on an $n \times n$ chessboard, $0 \leq r \leq s$ and $r + s \neq 0$

for $r \neq s \neq 0, n \geq s$

$$\frac{n^4 - 9n^2 + 8(r + s)n - 8rs}{2}$$

for $r = s$ or $r = 0, n \geq s$

$$\frac{n^4 - 5n^2 + 4(r + s)n - 4rs}{2}$$

Speciálně pro $r=2$ a $s=3$ dostaneme shodný vzorec pro 2 zebry, pro $r=0$ a $s=1$ pro 2 vezíry a pro $r=1$ a $s=2$ pro 2 jezdce.

Obecnější vzorec objevil už Edouard Lucas v roce 1891, když ve své knize [Théorie des nombres](#) uvádí na str.97 výraz pro počet **ohrožujících** se skokanů $[r,s]$ na šachovnici $p \times q$

$$(2p - r - s)(2q - r - s) - (r - s)^2$$

Když v tomto vzorci položíme $p = q = n$ a uvědomíme-li si, že celkový počet kombinací 2 kamenů na šachovnici $n \times n$ je n^2 nad 2, dostáváme odtud pro počet **neohrožujících** se skokanů $[r,s]$ výraz

$$\binom{n^2}{2} - (4n^2 - 4n(r + s) + 4rs) = \frac{n^4 - 9n^2 + 8n(r + s) - 8rs}{2}$$

což odpovídá výše uvedenému vzorci

CHAPITRE VII. — LA GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

97

Plus généralement, si le saut du cavalier se compose de r pas dans un sens et de s pas dans l'autre, en supposant r et s respectivement plus petits que p et q , le nombre des sauts du cavalier, en comptant l'aller et le retour, est le double de l'expression

$$(2p - r - s)(2q - r - s) - (r - s)^2;$$

cependant, on doit diviser ce nombre par 2, lorsque l'un des nombres r, s ou $(r - s)$ est nul.

2 Leapers on an n x n chessboard																	
n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]
1																	
2	2	6	6	6	6	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6
3	24	30	36	36	36	36	36	28	28	36	36	36	36	36	34	36	36
4	96	104	112	120	120	120	120	102	96	108	120	120	120	120	112	112	120
5	260	270	280	290	300	300	300	268	252	268	284	300	300	300	282	276	288
6	570	582	594	606	618	630	630	580	550	570	590	610	630	630	598	582	598
7	1092	1106	1120	1134	1148	1162	1176	1104	1056	1080	1104	1128	1152	1176	1126	1096	1116
8	1904	1920	1936	1952	1968	1984	2000	1918	1848	1876	1904	1932	1960	1988	1944	1896	1920
9	3096	3114	3132	3150	3168	3186	3204	3112	3016	3048	3080	3112	3144	3176	3142	3072	3100
10	4770	4790	4810	4830	4850	4870	4890	4788	4662	4698	4734	4770	4806	4842	4822	4726	4758
11	7040	7062	7084	7106	7128	7150	7172	7060	6900	6940	6980	7020	7060	7100	7098	6972	7008
12	10032	10056	10080	10104	10128	10152	10176	10054	9856	9900	9944	9988	10032	10076	10096	9936	9976
13	13884	13910	13936	13962	13988	14014	14040	13908	13668	13716	13764	13812	13860	13908	13954	13756	13800
14	18746	18774	18802	18830	18858	18886	18914	18772	18486	18538	18590	18642	18694	18746	18822	18582	18630
15	24780	24810	24840	24870	24900	24930	24960	24808	24472	24528	24584	24640	24696	24752	24862	24576	24628
16	32160	32192	32224	32256	32288	32320	32352	32190	31800	31860	31920	31980	32040	32100	32248	31912	31968
17	41072	41106	41140	41174	41208	41242	41276	41104	40656	40720	40784	40848	40912	40976	41166	40776	40836
18	51714	51750	51786	51822	51858	51894	51930	51748	51238	51306	51374	51442	51510	51578	51814	51366	51430
19	64296	64334	64372	64410	64448	64486	64524	64332	63756	63828	63900	63972	64044	64116	64402	63892	63960
20	79040	79080	79120	79160	79200	79240	79280	79078	78432	78508	78584	78660	78736	78812	79152	78576	78648
21	96180	96222	96264	96306	96348	96390	96432	96220	95500	95580	95660	95740	95820	95900	96298	95652	95728
22	115962	116006	116050	116094	116138	116182	116226	116004	115206	115290	115374	115458	115542	115626	116086	115366	115446
23	138644	138690	138736	138782	138828	138874	138920	138688	137808	137896	137984	138072	138160	138248	138774	137976	138060
24	164496	164544	164592	164640	164688	164736	164784	164542	163576	163668	163760	163852	163944	164036	164632	163752	163840
25	193800	193850	193900	193950	194000	194050	194100	193848	192792	192888	192984	193080	193176	193272	193942	192976	193068
26	226850	226902	226954	227006	227058	227110	227162	226900	225750	225850	225950	226050	226150	226250	226998	225942	226038
27	263952	264006	264060	264114	264168	264222	264276	264004	262756	262860	262964	263068	263172	263276	264106	262956	263056
28	305424	305480	305536	305592	305648	305704	305760	305478	304128	304236	304344	304452	304560	304668	305584	304336	304440
29	351596	351654	351712	351770	351828	351886	351944	351652	350196	350308	350420	350532	350644	350756	351762	350412	350520
30	402810	402870	402930	402990	403050	403110	403170	402868	401302	401418	401534	401650	401766	401882	402982	401526	401638
n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]

2 Leapers on an n x n chessboard																		
n	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]
1																		
2	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
3	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
4	120	120	120	118	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120
5	300	300	300	292	292	300	300	300	298	300	300	300	300	300	300	300	300	300
6	614	630	630	612	606	618	630	630	622	622	630	630	628	630	630	630	630	630
7	1136	1156	1176	1144	1128	1144	1160	1176	1158	1152	1164	1176	1168	1168	1176	1174	1176	1176
8	1944	1968	1992	1966	1936	1956	1976	1996	1984	1968	1984	2000	1998	1992	2004	2008	2008	2014
9	3128	3156	3184	3168	3120	3144	3168	3192	3190	3160	3180	3200	3208	3192	3208	3222	3216	3232
10	4790	4822	4854	4852	4782	4810	4838	4866	4878	4830	4854	4878	4900	4870	4890	4918	4902	4932
11	7044	7080	7116	7132	7036	7068	7100	7132	7162	7092	7120	7148	7188	7140	7164	7210	7180	7228
12	10016	10056	10096	10134	10008	10044	10080	10116	10168	10072	10104	10136	10198	10128	10156	10224	10176	10246
13	13844	13888	13932	13996	13836	13876	13916	13956	14034	13908	13944	13980	14068	13972	14004	14098	14028	14124
14	18678	18726	18774	18868	18670	18714	18758	18802	18910	18750	18790	18830	18948	18822	18858	18982	18886	19012
15	24680	24732	24784	24912	24672	24720	24768	24816	24958	24760	24804	24848	25000	24840	24880	25038	24912	25072
16	32024	32080	32136	32302	32016	32068	32120	32172	32352	32112	32160	32208	32398	32200	32244	32440	32280	32478
17	40896	40956	41016	41224	40888	40944	41000	41056	41278	40992	41044	41096	41328	41088	41136	41374	41176	41416
18	51494	51558	51622	51876	51486	51546	51606	51666	51934	51598	51654	51710	51988	51702	51754	52038	51798	52084
19	64028	64096	64164	64468	64020	64084	64148	64212	64530	64140	64200	64260	64588	64252	64308	64642	64356	64692
20	78720	78792	78864	79222	78712	78780	78848	78916	79288	78840	78904	78968	79350	78960	79020	79408	79072	79462
21	95804	95880	95956	96372	95796	95868	95940	96012	96442	95932	96000	96068	96508	96060	96124	96570	96180	96628
22	115526	115606	115686	116164	115518	115594	115670	115746	116238	115662	115734	115806	116308	115798	115866	116374	115926	116436
23	138144	138228	138312	138856	138136	138216	138296	138376	138934	138288	138364	138440	139008	138432	138504	139078	138568	139144
24	163928	164016	164104	164718	163920	164004	164088	164172	164800	164080	164160	164240	164878	164232	164308	164952	164376	165022
25	193160	193252	193344	194032	193152	193240	193328	193416	194118	193320	193404	193488	194200	193480	193560	194278	193632	194352
26	226134	226230	226326	227092	226126	226218	226310	226402	227182	226302	226390	226478	227268	226470	226554	227350	226630	227428
27	263156	263256	263356	264204	263148	263244	263340	263436	264298	263332	263424	263516	264388	263508	263596	264474	263676	264556
28	304544	304648	304752	305686	304536	304636	304736	304836	305784	304728	304824	304920	305878	304912	305004	305968	305088	306054
29	350628	350736	350844	351868	350620	350724	350828	350932	351970	350820	350920	351020	352068	351012	351108	352162	351196	352252
30	401750	401862	401974	403092	401742	401850	401958	402066	403198	401950	402054	402158	403300	402150	402250	403398	402342	403492
n	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]

10.2) 3 leapers on an $n \times n$ chessboard - 3 skokani na šachovnici $n \times n$

[0,1] leapers - see [Wazirs](#), [1,2] leapers - see [Knights](#), [2,3] leapers - see [Zebras](#)

Obecný vzorec pro rozmístění 3 neohrožujících se skokanů $[r,s]$ na šachovnici $n \times n$.

Three *leapers* $[r,s]$ on an $n \times n$ chessboard

(V. Kotěšovec, 2010)¹

case 1: $0 < r < s$, for $n \geq 2s$

$$\frac{1}{6}n^6 - \frac{9}{2}n^4 + 4(r+s)n^3 - \frac{12rs - 109}{3}n^2 - (44r + 60s)n + 4r^2 + 16s^2 + 56rs$$

case 2: $r = 0$, $s > 0$, for $n \geq 2s$

$$\frac{n^6}{6} - \frac{5n^4}{2} + 2sn^3 + \frac{31n^2}{3} - 16sn + 4s^2$$

case 3: $r = s$, $s > 0$, for $n \geq 2s$

$$\frac{n^6}{6} - \frac{5n^4}{2} + 4sn^3 - \left(2s^2 - \frac{31}{3}\right)n^2 - 28sn + 20s^2$$

Případy 2 a 3 se dají vyjádřit také jedním vzorcem takto:

$r = s$ or $r = 0$, $s > 0$, for $n \geq 2s$

$$\frac{1}{6}n^6 - \frac{5}{2}n^4 + 2(r+s)n^3 - \frac{6r^2 - 31}{3}n^2 - (12r + 16s)n + 16r^2 + 4s^2$$

¹ Tyto vzorce včetně tabulek hodnot byly publikovány jako originál soutěže "Hans Gruber 50 JT", feenschach 183 / 24.8.2010, úloha č.58, str.380, Václav Kotěšovec, Urdruck: "Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei sich nicht beobachtende h:g-Springer auf einem $n \times n$ -Schachbrett anzuordnen?"

V následujících tabulkách jsou červeně označeny hodnoty pro $n < 2s$, kde obecné vzorce ještě nemusí platit.

3 Leapers on an $n \times n$ chessboard

n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]
1																	
2	0	4	4	4	4	4	4	0	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	22	46	84	84	84	84	84	38	36	84	84	84	84	84	70	84	84
4	276	352	452	560	560	560	560	340	276	404	560	560	560	560	448	452	560
5	1474	1656	1856	2074	2300	2300	2300	1630	1360	1624	1948	2300	2300	2300	1900	1772	2032
6	5248	5596	5952	6340	6736	7140	7140	5552	4752	5248	5848	6480	7140	7140	6092	5596	6084
7	14690	15276	15870	16486	17124	17770	18424	15210	13340	14232	15200	16244	17320	18424	16152	14888	15704
8	35012	35920	36836	37760	38724	39696	40676	35828	32084	33532	35012	36628	38276	39956	37328	34640	35920
9	74326	75652	76986	78328	79696	81090	82492	75530	68796	70984	73204	75516	77920	80356	77768	72712	74664
10	144544	146396	148256	150124	152000	153924	155856	146240	135040	138176	141344	144544	147912	151312	149420	140716	143540
11	262398	264896	267402	269916	272438	274990	277572	264702	247152	251468	255816	260196	264684	269280	269052	255036	258956
12	450580	453856	457140	460432	463732	467040	470404	453620	427380	433132	438916	444732	450580	456628	459392	437968	443232
13	739002	743200	747406	751620	755842	760072	764336	742918	705144	712612	720112	727644	735208	742896	750388	718980	725860
14	1166176	1171452	1176736	1182028	1187328	1192636	1197952	1171120	1118416	1127904	1137424	1146976	1156560	1166176	1180588	1136092	1144884
15	1780714	1787236	1793766	1800304	1806850	1813404	1819966	1786850	1715220	1727056	1738924	1750824	1762756	1774720	1798640	1737376	1748400
16	2642948	2650896	2658852	2666816	2674788	2682768	2690756	2650452	2555252	2569788	2584356	2598956	2613588	2628252	2664912	2582576	2596176
17	3826670	3836236	3845810	3855392	3864982	3874580	3884186	3835730	3711620	3729232	3746876	3764552	3782260	3800000	3853232	3744848	3761392
18	5420992	5432380	5443776	5455180	5466592	5478012	5489440	5431808	5272704	5293792	5314912	5336064	5357248	5378464	5452748	5312620	5332500
19	7532326	7545752	7559186	7572628	7586078	7599536	7613002	7545110	7344136	7369124	7394144	7419196	7444280	7469396	7569908	7391572	7415204
20	10286484	10302176	10317876	10333584	10349300	10365024	10380756	10301460	10050900	10080236	10109604	10139004	10168436	10197900	10330560	10106736	10134560
21	13830898	13849096	13867302	13885516	13903738	13921968	13940206	13848302	13539552	13573708	13607896	13642116	13676368	13710652	13882172	13604716	13637196
22	18336960	18357916	18378880	18399852	18420832	18441820	18462816	18357040	17980560	18020032	18059536	18099072	18138640	18178240	18396172	18056028	18093652
23	24002482	24026460	24050446	24074440	24098442	24122452	24146470	24025498	23570764	23616072	23661412	23706784	23752188	23797624	24070408	23657560	23700840
24	31054276	31081552	31108836	31136128	31163428	31190736	31218052	31080500	30535956	30587644	30639364	30691116	30742900	30794716	31131728	30635152	30684624
25	39750854	39781716	39812586	39843464	39874350	39905244	39936146	39780570	39133580	39192216	39250884	39309584	39368316	39427080	39838680	39246296	39302520
26	50385248	50419996	50454752	50489516	50524288	50559068	50593856	50418752	49655552	49721728	49787936	49854176	49920448	49986752	50484332	49782956	49846516
27	63287950	63326896	63365850	63404812	63443782	63482760	63521746	63325550	62431200	62505532	62579896	62654292	62728720	62803180	63399212	62574508	62646012
28	78829972	78873440	78916916	78960400	79003892	79047392	79090900	78871988	77830324	77913452	77996612	78079804	78163028	78246284	78954368	77990800	78070880
29	97426026	97474352	97522686	97571028	97619378	97667736	97716102	97472790	96266376	96358964	96451584	96544236	96636920	96729636	97564548	96445332	96534644
30	119537824	119591356	119644896	119698444	119752000	119805564	119859136	119589680	118199760	118302496	118405264	118508064	118610896	118713760	119691500	118398556	118497780
n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]

3 Leapers on an n x n chessboard

n	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]
1																		
2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84
4	560	560	560	532	560	560	560	560	560	560	560	560	560	560	560	560	560	560
5	2300	2300	2300	2116	2120	2300	2300	2300	2254	2300	2300	2300	2300	2300	2300	2300	2300	2300
6	6608	7140	7140	6528	6340	6736	7140	7140	6868	6872	7140	7140	7072	7140	7140	7140	7140	7140
7	16584	17500	18424	16938	16216	16944	17680	18424	17578	17312	17864	18424	18048	18052	18424	18330	18424	18424
8	37312	38736	40196	38612	36836	38004	39216	40436	39680	38724	39696	40676	40548	40192	40924	41168	41172	41540
9	76696	78808	80952	79722	76132	77884	79704	81568	81392	79080	80628	82184	82792	81564	82808	83898	83440	84688
10	146396	149396	152428	152240	145744	148256	150888	153552	154700	150124	152388	154704	156800	153924	155856	158564	157032	159936
11	262908	266956	271100	272958	262104	265628	269236	272928	276420	268356	271524	274764	279438	273820	276636	282030	278524	284172
12	448528	453856	459360	464628	447556	452332	457140	462100	469328	456144	460432	464848	473492	463732	467604	477120	470404	480244
13	732772	739716	746772	757222	731616	737908	744232	750656	763420	743052	748756	754548	768982	753288	758448	773908	762356	778220
14	1153708	1162564	1171452	1189312	1152352	1160448	1168576	1176736	1197292	1167196	1174596	1182028	1204528	1180624	1187328	1211020	1192636	1216768
15	1759456	1770544	1781664	1809570	1757884	1768096	1778340	1788616	1819640	1776744	1786144	1795576	1828850	1793956	1802544	1837200	1809520	1844690
16	2609808	2623472	2637168	2678388	2608004	2620668	2633364	2646092	2690880	2631536	2643264	2655024	2702388	2653172	2663964	2712912	2672912	2722452
17	3777968	3794576	3811216	3869618	3775916	3791392	3806900	3822440	3884888	3804824	3819232	3833672	3899042	3831572	3844912	3912080	3856160	3924002
18	5352412	5372356	5392332	5472432	5350096	5368768	5387472	5406208	5490860	5385132	5402596	5420092	5508032	5417728	5433984	5523948	5447884	5538608
19	7438868	7462564	7486292	7593302	7436272	7458548	7480856	7503196	7615292	7478236	7499156	7520108	7635878	7517464	7537028	7655060	7553956	7672838
20	10162416	10190304	10218224	10358100	10159524	10185836	10212180	10238556	10384080	10209264	10234064	10258896	10408500	10255956	10279244	10431360	10299600	10452660
21	13669708	13702252	13734828	13914318	13666504	13697308	13728144	13759012	13944740	13724916	13754044	13783204	13973438	13779952	13807404	14000412	13831612	14025662
22	18131308	18168996	18206716	18433408	18127776	18163552	18199360	18235200	18468748	18195804	18229732	18263692	18502192	18260112	18292192	18533740	18320700	18563392
23	23744152	23787496	23830872	24113242	23740276	23781528	23822812	23864128	24154000	23818912	23858136	23897392	24192682	23893468	23930664	24229288	23963944	24263818
24	30734128	30783664	30833232	31180692	30729892	30777148	30824436	30871756	31227392	30820176	30865216	30910288	31271828	30906004	30948828	31314000	30987376	31353908
25	39358776	39415064	39471384	39894330	39354164	39407976	39461820	39515696	39947520	39457184	39508584	39560016	39998250	39555356	39604344	40046520	39648680	40092330
26	49910108	49973732	50037388	50547248	49905104	49966048	50027024	50088032	50607500	50021996	50080324	50138684	50665088	50133632	50189344	50720012	50240012	50772272
27	62717548	62789116	62860716	63469998	62712136	62780812	62849520	62918260	63537908	62844084	62909932	62975812	63602942	62970352	63033372	63665100	63090940	63724382
28	78150992	78231136	78311312	79033652	78145156	78222188	78299252	78376348	79109840	78293392	78367376	78441392	79182932	78435508	78506444	79252928	78571504	79319828
29	96623988	96713364	96802772	97652982	96617712	96703748	96789816	96875916	97738092	96783516	96866276	96949068	97819878	96942744	97022228	97898340	97095396	97973478
30	118597036	118696324	118795644	119789760	118590304	118686016	118781760	118877536	119884460	118775004	118867204	118959436	119975600	118952656	119041344	120063180	119123260	120147200
n	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]

10.3) 4 leapers on an $n \times n$ chessboard - 4 skokani na šachovnici $n \times n$

Tato konfigurace skokanů je zajímavá tím, že přináší nový případ, závisející na vztahu r a s . První z těchto vzorců platí až pro taková s , která jsou alespoň dvakrát větší než r (a pak už pro všechna s až do nekonečna). Druhý případ nastává, když je s v intervalu $(r, 2r)$. Oba tyto případy se liší ale pouze ve členech u n^1 a n^0 , pro ostatní členy jsou oba vzorce shodné.

Four leapers $[r, s]$ on an $n \times n$ chessboard, for $n \geq 3s$

(V. Kotěšovec, 16.5.2010)

case 1: $0 < 2r \leq s$

$$\frac{1}{24}n^8 - \frac{9}{4}n^6 + (2r + 2s)n^5 + \left(\frac{1115}{24} - 2rs\right)n^4 - (62r + 78s)n^3 + \left(12r^2 + 24s^2 + 90rs - \frac{1489}{4}\right)n^2 + (854s + 518r - 16rs^2 - 16r^2s)n + 8r^2s^2 - 92r^2 - 396s^2 - 786rs$$

case 2: $0 < r < s < 2r$, add to previous formula

$$+ 32(2r - s)n - 16(2r - s)(r + 3s)$$

po roznásobení je tvar posledních 2 členů

$$(582r + 822s - 16r^2s - 16rs^2)n + 8r^2s^2 - 124r^2 - 348s^2 - 866rs$$

case 3: $r = 0, s > 0$

$$\frac{n^8}{24} - \frac{5n^6}{4} + sn^5 + \frac{323n^4}{24} - 21sn^3 + \left(6s^2 - \frac{209}{4}\right)n^2 + 115sn - 51s^2$$

case 4: $r = s, s > 0$

$$\frac{n^8}{24} - \frac{5n^6}{4} + 2sn^5 + \left(\frac{323}{24} - s^2\right)n^4 - 38sn^3 + \left(33s^2 - \frac{209}{4}\right)n^2 + (190s - 8s^3)n + 2s^4 - 177s^2$$

Případy 3 a 4 se dají vyjádřit také jedním vzorcem takto:

for $r = s$ or $r = 0, s > 0$

$$\frac{1}{24}n^8 - \frac{5}{4}n^6 + (r + s)n^5 + \left(\frac{323}{24} - rs\right)n^4 - (17r + 21s)n^3 + \left(6s^2 + 27rs - \frac{209}{4}\right)n^2 + (75r + 115s - 8rs^2)n + 2rs^3 - 126rs - 51s^2$$

Řešení tohoto problému se ukázalo jako velmi zábavné a připomínalo některé testy IQ, kdy je třeba podle dané číselné posloupnosti určit další číslo (v tomto případě objevit vzorec). Problém však bylo třeba řešit ve 2 proměnných (r,s).

Nejprve jsem napsal počítačový program, který vygeneroval počty neohrožujících se 4 skokanů pro všech 35 možných kombinací skokanů [r,s], kde $0 < r \leq s \leq 7$, u každého skokana pro všechny šachovnice $n \times n$, kde $0 < n \leq 30$. Celý výpočet trval asi 10 hodin a výsledkem bylo 35 tabulek po 30 hodnotách. Potom jsem pro všech 35 posloupností odvodil explicitní vzorce. Tento krok byl poměrně snadný, protože jsem věděl, že každý vzorec bude vždy polynom 8.stupně a šlo jen o to, určit všech jeho 9 koeficientů pro každou ze 35 posloupností. S tím samozřejmě opět pomohl počítač s pomocí mých starých osvědčených metod. Dostal jsem tak 35 polynomů s konstantními koeficienty, několik dalších (zejména pro $s=8$ a $s=9$ jsem pak musel ještě dopočítat). Příklady těchto vzorců:

[2,3]	$\frac{n^8}{24} - \frac{9n^6}{4} + 10n^5 + \frac{827n^4}{24} - 358n^3 + \frac{1727n^2}{4} + 3150n - 8536$		
[2,4]	$\frac{n^8}{24} - \frac{9n^6}{4} + 12n^5 + \frac{731n^4}{24} - 436n^3 + \frac{3119n^2}{4} + 3684n - 12480$	[3,4]	$\frac{n^8}{24} - \frac{9n^6}{4} + 14n^5 + \frac{539n^4}{24} - 498n^3 + \frac{4799n^2}{4} + 3690n - 15924$
[2,5]	$\frac{n^8}{24} - \frac{9n^6}{4} + 14n^5 + \frac{635n^4}{24} - 514n^3 + \frac{4703n^2}{4} + 4186n - 17328$	[3,5]	$\frac{n^8}{24} - \frac{9n^6}{4} + 16n^5 + \frac{395n^4}{24} - 576n^3 + \frac{6743n^2}{4} + 3936n - 21006$
[2,6]	$\frac{n^8}{24} - \frac{9n^6}{4} + 16n^5 + \frac{539n^4}{24} - 592n^3 + \frac{6479n^2}{4} + 4624n - 22904$	[3,6]	$\frac{n^8}{24} - \frac{9n^6}{4} + 18n^5 + \frac{251n^4}{24} - 654n^3 + \frac{8879n^2}{4} + 4086n - 26640$
[2,7]	$\frac{n^8}{24} - \frac{9n^6}{4} + 18n^5 + \frac{443n^4}{24} - 670n^3 + \frac{8447n^2}{4} + 4998n - 29208$	[3,7]	$\frac{n^8}{24} - \frac{9n^6}{4} + 20n^5 + \frac{107n^4}{24} - 732n^3 + \frac{11207n^2}{4} + 4172n - 33210$
[2,8]	$\frac{n^8}{24} - \frac{9n^6}{4} + 20n^5 + \frac{347n^4}{24} - 748n^3 + \frac{10607n^2}{4} + 5308n - 36240$	[3,8]	$\frac{n^8}{24} - \frac{9n^6}{4} + 22n^5 - \frac{37n^4}{24} - 810n^3 + \frac{13727n^2}{4} + 4162n - 40428$
[2,9]	$\frac{n^8}{24} - \frac{9n^6}{4} + 22n^5 + \frac{251n^4}{24} - 826n^3 + \frac{12959n^2}{4} + 5554n - 44000$	[3,9]	$\frac{n^8}{24} - \frac{9n^6}{4} + 24n^5 - \frac{181n^4}{24} - 888n^3 + \frac{16439n^2}{4} + 4056n - 48294$

Nyní nastala nejzajímavější část, odvodit vzorce pro jednotlivé sloupečky a zobecnit je jako funkci r a s . K tomu jsem si nejprve zvolil vždy pevné r a snažil se zjistit závislost jen pro s . Vidíme, že koeficienty u n^8 a n^6 jsou dokonce konstantní (a u n^7 je nula) a na určení koeficientu u n^5 stačí jistě i nízké IQ :-)

„Každý“ hned vidí, že jde o dvojnásobek součtu $r+s$. Koeficienty u n^4 , n^3 a n^2 odvodíme sice s trochu větším úsilím, ale podstatné je to, že odhadnuté vzorce nevykazují žádné anomálie. Hodně jsem se však „natrápil“ s určením koeficientů u n^1 a n^0 . Dlouho jsem nemohl najít závislost, která by platila pro všechny členy, až po hlubším zkoumání jsem zjistil, že existuje kvadratická závislost, když vynecháme několik prvních členů v těchto sloupcích. Například pro skokany [2,s] se dá vyjádřit koeficient u n^1 jako $-32s^2 + 790s + 1036$, který však platí až od $s \geq 4$. Podobně pro [3,s] je koeficient u n^1 $-48s^2 + 710s + 1554$, ale až od $s \geq 6$.

s	r=2	3	4	5	6				
3	+32n	1							
4		+64n	2						
5		+32n	1	+96n	3				
6				+64n	2	+128n	4		
7				+32n	1	+96n	3	+160n	5

S tím jsem se však ještě nespokojil a pokusil jsem se najít obecný vzorec. Především jsem zjistil, že počet počátečních členů, pro které předchozí výrazy ještě neplatí, se lineárně zvyšuje s narůstajícím r . Když jsem si vytvořil tabulku toho, co u počátečních členů (kde vzorce ještě neplatí) přebývá proti těmto vzorcům, zjistil jsem, že i zde lze odvodit jednoduchou závislost. Všechny rozdíly jsou násobky 32. Pokud je tímto číslem vydělíme (sloupce vpravo), je závislost už zřejmá. Pro tuto oblast ($2r > s$) je třeba připočítat člen

$$+32(2r - s) * n$$

Podobným způsobem jsem pak určil i rozdílový člen pro n^0 .

V následujících tabulkách jsou červeně označeny hodnoty pro $n < 3s$, kde obecné vzorce ještě nemusí platit.

4 Leapers on an $n \times n$ chessboard												
n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]
1												
2	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
3	6	32	126	126	126	126	126	29	18	126	126	126
4	405	664	1165	1820	1820	1820	1820	661	412	926	1820	1820
5	5024	6386	8104	10246	12650	12650	12650	6285	4436	6194	9042	12650
6	31320	35745	40464	46217	52364	58905	58905	35378	26133	31331	39297	48495
7	133544	144682	156278	168928	182694	197010	211876	143787	111066	125834	143400	164404
8	446421	470356	494941	520160	547869	576308	605477	468529	376560	410650	446436	489926
9	1258590	1304670	1351620	1399386	1449344	1501542	1554674	1301351	1080942	1150162	1221870	1300364
10	3126724	3208521	3291416	3375369	3460400	3550241	3641244	3202970	2732909	2860763	2992065	3126743
11	7042930	7179320	7317060	7456128	7596502	7740720	7888830	7170593	6253408	6473432	6697992	6926944
12	14669709	14886072	15104061	15323676	15544845	15767640	15998621	14872997	13204356	13562374	13926144	14295186
13	28658436	28987976	29319442	29652834	29988100	30325266	30668552	28969129	26100160	26656876	27220512	27790716
14	53069000	53554185	54041620	54531305	55023212	55517313	56013664	53527866	48819677	49653507	50495521	51345527
15	93909924	94604046	95300766	96000084	96702000	97406424	98113446	94568255	87137934	88348078	89567766	90796998
16	159819965	160788820	161760645	162735440	163713205	164693876	165677485	160741233	149398608	151108362	152829116	154560870
17	262913874	264237562	265564616	266895036	268228822	269565940	270906356	264175507	247349946	249710254	252083114	254468526
18	419816676	421591521	423370152	425152569	426938772	428728761	430522428	421511954	397168485	400361731	403569177	406790823
19	652912510	655253100	657597920	659946970	662300250	664657760	667019424	655152581	620696612	624940652	629200636	633476564
20	991835749	994877096	997923141	1000973884	1004029325	1007089464	1010154261	994751765	946921684	952474118	958044336	963632338
21	1475233800	1479133620	1483038630	1486948830	1490864220	1494784800	1498710570	1478979173	1413726108	1420888792	1428071196	1435273320
22	2152832664	2157773777	2162720596	2167673121	2172631352	2177595289	2182564932	2157585442	2069939461	2079063259	2088208809	2097376111
23	3087838016	3094030866	3100229962	3106435304	3112646892	3118864726	3125088806	3093803379	2977725410	2989215186	3000728842	3012266378
24	4359706245	4367391540	4375083645	4382782560	4390488285	4398200820	4405920165	4367119121	4215337872	4229657722	4244003676	4258375734
25	6067321574	6076773046	6086231916	6095698184	6105171850	6114652914	6124141376	6076449375	5880282534	5897961258	5915668406	5933403978
26	8332617060	8344144345	8355679640	8367222945	8378774260	8390333585	8401900920	8343762538	8092921533	8114558347	8136226001	8157924495
27	11304678954	11318630592	11332590876	11346559806	11360537382	11374523604	11388518472	11318183177	11000560776	11026831264	11053135104	11079472296
28	15164375581	15181142136	15197917997	15214703164	15231497637	15248301416	15265114501	15180621029	14782061060	14813723366	14845421632	14877155858
29	20129553580	20149570880	20169598170	20189635450	20209682720	20229739980	20249807230	20148967361	19653015832	19690917092	19728857016	19766835604
30	26460846024	26484598521	26508361716	26532135609	26555920200	26579715489	26603521476	26483903210	25871540109	25916623123	25961747601	26006913543
n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]

4 Leapers on an n x n chessboard

n	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]
1												
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	126	126	85	126	126	126	126	126	126	126	126	126
4	1820	1820	1120	1168	1820	1820	1820	1820	1639	1820	1820	1820
5	12650	12650	8536	7334	9840	12650	12650	12650	10654	10738	12650	12650
6	58905	58905	42701	35749	42441	50425	58905	58905	48960	46221	52367	58905
7	187264	211876	162452	137970	153090	171176	191154	211876	178583	163228	178844	195052
8	535920	584458	509228	438984	470384	508312	548568	591452	544903	494940	527226	562404
9	1386268	1475508	1380788	1208246	1271888	1341652	1417770	1497000	1451331	1322882	1383668	1449936
10	3277325	3432059	3345709	2969389	3087393	3208557	3343545	3482341	3473834	3183921	3291439	3410565
11	7168606	7423666	7411146	6662480	6866126	7073892	7293096	7524154	7629093	7036052	7222360	7418770
12	14669732	15072414	15258152	13873100	14205612	14543364	14886116	15253868	15609933	14487360	14793182	15104124
13	28367664	28965646	29560518	27144408	27663194	28188484	28719926	29270538	30104437	28108692	28588572	29074220
14	52203333	53069027	54404773	50389581	51169273	51956861	52751913	53554237	55216186	51846425	52571035	53302637
15	92035150	93282846	95830664	89424014	90559380	91704162	92857528	94019702	97004979	91555026	92614734	93682818
16	156303176	158056258	162513116	152638280	154247488	155867568	157497800	159138376	164169033	155670572	157178290	158695888
17	256866250	259276046	266608352	251834530	254062652	256303198	258555592	260819626	268891343	256047630	258142558	260248998
18	410026669	413275947	424788533	403250693	406273449	409310277	412360777	415424277	427874562	408983937	411835131	414699597
19	637768436	642075708	659490958	628798516	632826258	636869816	640928758	645002604	663590441	636458920	640269228	644094488
20	969238124	974861406	1000409544	957543164	962825100	968124692	973441476	978775196	1005771549	967613776	972624014	977650980
21	1442495164	1449736728	1486257986	1427453780	1434282438	1441130688	1447998034	1454884476	1493174673	1440502512	1446995880	1453507848
22	2106565165	2115775971	2166835677	2087456085	2096172017	2104909573	2113668225	2122447973	2175646978	2104145025	2112451763	2120779069
23	3023827794	3035413090	3105429148	2999819778	3010816504	3021836982	3032880652	3043947514	3116527687	3020914982	3031417266	3041942182
24	4272773896	4287198162	4381583468	4242915176	4256644368	4270399536	4284180088	4297986024	4395419721	4269296940	4282434018	4295595888
25	5951167974	5968960394	6094279724	5914375214	5931352120	5948357322	5965390196	5982450742	6111367419	5947048826	5963322394	5979623010
26	8179653829	8201414003	8365556381	8134700605	8155509713	8176349533	8197219409	8218119341	8386478138	8174807577	8194787395	8214796613
27	11105842840	11132246736	11344614002	11051347640	11076648582	11101982748	11127349450	11152748688	11370027213	11100177420	11124507168	11148868764
28	14908926044	14940732190	15212444488	14843339788	14873873484	14904443012	14935047652	14965687404	15243087437	14902341952	14931745326	14961183092
29	19804852856	19842908772	20187027678	19726445936	19763040978	19799674556	19836345918	19873055064	20223725901	19797242860	19832529908	19867853988
30	26052120949	26097369819	26529139829	25958969789	26002549065	26046169677	26089830841	26133532557	26572812714	26043369801	26085443499	26127556965
n	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]

4 Leapers on an n x n chessboard											
n	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]
1											
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	126	126	126	126	126	126	126	126	126	126	126
4	1820	1820	1820	1820	1820	1820	1820	1820	1820	1820	1820
5	12650	12145	12650	12650	12650	12650	12650	12650	12650	12650	12650
6	58905	54445	54573	58905	58905	57784	58905	58905	58905	58905	58905
7	211876	192571	186920	199150	211876	203256	203436	211876	209715	211876	211876
8	598458	575360	547872	576320	605480	601491	591220	612990	620276	620516	631595
9	1520028	1512602	1426500	1484310	1543112	1565644	1519728	1566876	1608435	1591296	1639120
10	3533439	3586913	3375361	3478617	3587277	3684800	3550241	3641259	3769625	3697641	3835824
11	7625634	7823976	7372076	7545740	7728266	7995489	7673950	7835250	8145585	7944330	8271234
12	15436630	15927884	15044768	15323692	15620848	16211483	15544828	15806526	16460640	15998616	16679551
13	29577254	30600382	28990732	29430590	29885674	31047793	29788792	30195958	31446444	30508058	31799690
14	54041695	55961553	53188001	53856073	54531361	56640304	54411605	55023219	57252021	55517285	57796480
15	94759278	98090600	93528666	94511020	95501678	99086975	95341990	96246590	99993438	96994118	100809851
16	160223342	165708336	158492988	159897760	161311676	167130425	161102784	162403174	168434612	163497632	169620591
17	262366934	271023784	259986558	261946852	263917802	273005027	263648706	265472606	274834390	267030714	276511343
18	417576951	430769297	414365337	417043577	419734145	433472042	419392205	421895507	435982149	424061021	438298808
19	647934508	667450238	643674752	647266138	650871628	671069605	650443132	653813916	674447846	656760852	677584145
20	982694706	1010836940	977130256	981867212	986620176	1015604925	986089532	990551558	1020074760	994488596	1024245651
21	1460038704	1499728346	1452868848	1459025246	1465199684	1505918165	1464549524	1470367368	1511743338	1475541468	1517203121
22	2129127263	2184018409	2120002633	2127898401	2135814145	2191949082	2135025453	2142508571	2199438157	2149210221	2206484842
23	3052490082	3127098012	3041007182	3051013152	3061041130	3137139187	3060092730	3069600610	3146650324	3078168170	3155630583
24	4308782934	4408626848	4294479132	4307022128	4319589260	4421203865	4318457912	4330404954	4433149836	4341229632	4444463873
25	5995951090	6127711380	5978299146	5993867312	6009461838	6143310575	6008122142	6022982938	6158164020	6036513974	6172270779
26	8234835679	8406526681	8213238033	8232386401	8251563449	8425700930	8249987749	8268302603	8443999853	8285052693	8461422466
27	11173262688	11394421634	11147045508	11170401806	11193789200	11417796137	11191947488	11214328176	11440149642	11234879136	11461481117
28	14990655762	15272548652	14959062752	14987333452	15015637760	15300826957	15013497580	15040633350	15327921224	15065642020	15353830373
29	19903215644	20259060758	19865401612	19899378218	19933391040	20293031025	19930917392	19963581204	20325635526	19993785592	20356873133
30	26169710775	26614920545	26124734961	26165300537	26205905033	26655462050	26203060277	26242115283	26694436005	26278340949	26731841234
n	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]

10.4) 2 leapers on an $n \times n$ toroidal chessboard - 2 skokani na prstencové šachovnici $n \times n$

Došel jsem k překvapujícímu výsledku, že pro všechny typy skokanů $[r,s]$ existují 2 společné vzorce nezávislé na souřadnicích skokana! Přesněji, pro několik prvních členů posloupnosti se mohou počty neohrožujících se skokanů odlišovat (v důsledku toho, že šachovnice je ještě „příliš malá“ a skokan může působit i z druhé strany), ale od určitého n jsou pak hodnoty posloupnosti shodné v každé skupině bez ohledu na souřadnice $[r,s]$ skokanů.

Skokany jde zařadit do 2 skupin:

Two *leapers* $[r,s]$ on a *toroidal chessboard* $n \times n$, $s \geq r \geq 0$ and $r + s \neq 0$

for $r \neq s \neq 0$, $n \geq 2s + 1$

$$\frac{1}{2}n^2(n+3)(n-3)$$

for $r = s$ or $r = 0$, $n \geq 2s + 1$

$$\frac{1}{2}n^2(n^2 - 5)$$

Independent on $r, s!$

V tabulce jsou červeně označeny hodnoty pro $n \leq 2s$, které mohou být odlišné podle typu skokana. Pro větší n najdeme ale už jen vždy 2 možné hodnoty.

2 Leapers on an $n \times n$ toroidal chessboard																	
n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]
1																	
2	2	6	2	6	2	6	2	4	2	4	2	4	2	4	6	2	6
3	18	18	36	18	18	36	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
4	88	104	88	120	88	104	88	88	88	88	88	88	88	88	112	88	104
5	250	250	250	250	300	250	250	250	200	200	250	250	250	200	250	250	200
6	558	558	594	558	558	630	558	558	486	558	486	558	558	558	558	558	558
7	1078	1078	1078	1078	1078	1078	1176	1078	980	980	980	980	1078	1078	1078	980	980
8	1888	1888	1888	1952	1888	1888	1888	1888	1760	1760	1888	1760	1760	1888	1888	1760	1888
9	3078	3078	3078	3078	3078	3078	3078	3078	2916	2916	2916	2916	2916	2916	3078	2916	2916
10	4750	4750	4750	4750	4850	4750	4750	4750	4550	4550	4550	4750	4550	4550	4750	4550	4550
11	7018	7018	7018	7018	7018	7018	7018	7018	6776	6776	6776	6776	6776	6776	7018	6776	6776
12	10008	10008	10008	10008	10008	10152	10008	10008	9720	9720	9720	9720	9720	10008	9720	10008	9720
13	13858	13858	13858	13858	13858	13858	13858	13858	13520	13520	13520	13520	13520	13520	13858	13520	13520
14	18718	18718	18718	18718	18718	18718	18914	18718	18326	18326	18326	18326	18326	18326	18718	18326	18326
15	24750	24750	24750	24750	24750	24750	24750	24750	24300	24300	24300	24300	24300	24300	24750	24300	24300
16	32128	32128	32128	32128	32128	32128	32128	32128	31616	31616	31616	31616	31616	31616	32128	31616	31616
17	41038	41038	41038	41038	41038	41038	41038	41038	40460	40460	40460	40460	40460	40460	41038	40460	40460
18	51678	51678	51678	51678	51678	51678	51678	51678	51030	51030	51030	51030	51030	51030	51678	51030	51030
19	64258	64258	64258	64258	64258	64258	64258	64258	63536	63536	63536	63536	63536	63536	64258	63536	63536
20	79000	79000	79000	79000	79000	79000	79000	79000	78200	78200	78200	78200	78200	78200	79000	78200	78200
21	96138	96138	96138	96138	96138	96138	96138	96138	95256	95256	95256	95256	95256	95256	96138	95256	95256
22	115918	115918	115918	115918	115918	115918	115918	115918	114950	114950	114950	114950	114950	114950	115918	114950	114950
23	138598	138598	138598	138598	138598	138598	138598	138598	137540	137540	137540	137540	137540	137540	138598	137540	137540
24	164448	164448	164448	164448	164448	164448	164448	164448	163296	163296	163296	163296	163296	163296	164448	163296	163296
25	193750	193750	193750	193750	193750	193750	193750	193750	192500	192500	192500	192500	192500	192500	193750	192500	192500
26	226798	226798	226798	226798	226798	226798	226798	226798	225446	225446	225446	225446	225446	225446	226798	225446	225446
27	263898	263898	263898	263898	263898	263898	263898	263898	262440	262440	262440	262440	262440	262440	263898	262440	262440
28	305368	305368	305368	305368	305368	305368	305368	305368	303800	303800	303800	303800	303800	303800	305368	303800	303800
29	351538	351538	351538	351538	351538	351538	351538	351538	349856	349856	349856	349856	349856	349856	351538	349856	349856

30	402750	402750	402750	402750	402750	402750	402750	402750	402750	400950	400950	400950	400950	400950	400950	402750	400950	400950
31	459358	459358	459358	459358	459358	459358	459358	459358	459358	457436	457436	457436	457436	457436	457436	459358	457436	457436
32	521728	521728	521728	521728	521728	521728	521728	521728	521728	519680	519680	519680	519680	519680	519680	521728	519680	519680
33	590238	590238	590238	590238	590238	590238	590238	590238	590238	588060	588060	588060	588060	588060	588060	590238	588060	588060
34	665278	665278	665278	665278	665278	665278	665278	665278	665278	662966	662966	662966	662966	662966	662966	665278	662966	662966
35	747250	747250	747250	747250	747250	747250	747250	747250	747250	744800	744800	744800	744800	744800	744800	747250	744800	744800
36	836568	836568	836568	836568	836568	836568	836568	836568	836568	833976	833976	833976	833976	833976	833976	836568	833976	833976
37	933658	933658	933658	933658	933658	933658	933658	933658	933658	930920	930920	930920	930920	930920	930920	933658	930920	930920
38	1038958	1038958	1038958	1038958	1038958	1038958	1038958	1038958	1038958	1036070	1036070	1036070	1036070	1036070	1036070	1038958	1036070	1036070
39	1152918	1152918	1152918	1152918	1152918	1152918	1152918	1152918	1152918	1149876	1149876	1149876	1149876	1149876	1149876	1152918	1149876	1149876
40	1276000	1276000	1276000	1276000	1276000	1276000	1276000	1276000	1276000	1272800	1272800	1272800	1272800	1272800	1272800	1276000	1272800	1272800
n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]	

2 Leapers on an $n \times n$ toroidal chessboard

n	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]
1																		
2	2	6	2	4	2	4	2	4	6	2	6	2	4	2	4	6	2	4
3	18	18	18	36	18	18	36	18	18	18	18	18	18	18	18	36	18	18
4	88	112	88	88	88	88	88	88	120	88	104	88	88	88	88	112	88	88
5	250	200	250	250	200	250	200	250	250	250	250	200	300	250	250	250	200	250
6	486	558	486	612	558	558	594	558	558	486	558	486	558	558	558	630	558	558
7	1078	980	1078	1078	1078	980	980	1078	1078	980	980	1078	1078	980	1078	1078	1078	1176
8	1760	1888	1760	1888	1888	1888	1760	1760	1984	1888	1888	1888	1888	1760	1760	1888	1760	1888
9	2916	2916	3078	3078	2916	2916	3078	2916	3078	3078	2916	2916	3078	2916	2916	3078	2916	3078
10	4750	4550	4550	4750	4550	4750	4550	4750	4750	4750	4750	4550	4900	4750	4750	4750	4550	4750
11	6776	6776	6776	7018	6776	6776	6776	6776	7018	6776	6776	7018	7018	7018	6776	7018	6776	7018
12	9720	10008	9720	10008	9720	9720	10008	9720	10008	9720	10008	9720	10008	10008	10008	10224	10008	10008
13	13520	13520	13520	13858	13520	13520	13520	13520	13858	13520	13520	13520	13858	13520	13520	13858	13858	13858
14	18326	18326	18718	18718	18326	18326	18326	18718	18718	18326	18326	18718	18718	18326	18718	18718	18718	19012
15	24300	24300	24300	24750	24300	24300	24300	24300	24750	24300	24300	24300	24750	24300	24300	24750	24300	24750
16	31616	31616	31616	32128	31616	31616	31616	31616	32128	31616	31616	31616	32128	31616	31616	32128	31616	32128

17	40460	40460	40460	41038	40460	40460	40460	40460	41038	40460	40460	40460	41038	40460	40460	41038	40460	41038
18	51030	51030	51030	51678	51030	51030	51030	51030	51678	51030	51030	51030	51678	51030	51030	51678	51030	51678
19	63536	63536	63536	64258	63536	63536	63536	63536	64258	63536	63536	63536	64258	63536	63536	64258	63536	64258
20	78200	78200	78200	79000	78200	78200	78200	78200	79000	78200	78200	78200	79000	78200	78200	79000	78200	79000
21	95256	95256	95256	96138	95256	95256	95256	95256	96138	95256	95256	95256	96138	95256	95256	96138	95256	96138
22	114950	114950	114950	115918	114950	114950	114950	114950	115918	114950	114950	114950	115918	114950	114950	115918	114950	115918
23	137540	137540	137540	138598	137540	137540	137540	137540	138598	137540	137540	137540	138598	137540	137540	138598	137540	138598
24	163296	163296	163296	164448	163296	163296	163296	163296	164448	163296	163296	163296	164448	163296	163296	164448	163296	164448
25	192500	192500	192500	193750	192500	192500	192500	192500	193750	192500	192500	192500	193750	192500	192500	193750	192500	193750
26	225446	225446	225446	226798	225446	225446	225446	225446	226798	225446	225446	225446	226798	225446	225446	226798	225446	226798
27	262440	262440	262440	263898	262440	262440	262440	262440	263898	262440	262440	262440	263898	262440	262440	263898	262440	263898
28	303800	303800	303800	305368	303800	303800	303800	303800	305368	303800	303800	303800	305368	303800	303800	305368	303800	305368
29	349856	349856	349856	351538	349856	349856	349856	349856	351538	349856	349856	349856	351538	349856	349856	351538	349856	351538
30	400950	400950	400950	402750	400950	400950	400950	400950	402750	400950	400950	400950	402750	400950	400950	402750	400950	402750
31	457436	457436	457436	459358	457436	457436	457436	457436	459358	457436	457436	457436	459358	457436	457436	459358	457436	459358
32	519680	519680	519680	521728	519680	519680	519680	519680	521728	519680	519680	519680	521728	519680	519680	521728	519680	521728
33	588060	588060	588060	590238	588060	588060	588060	588060	590238	588060	588060	588060	590238	588060	588060	590238	588060	590238
34	662966	662966	662966	665278	662966	662966	662966	662966	665278	662966	662966	662966	665278	662966	662966	665278	662966	665278
35	744800	744800	744800	747250	744800	744800	744800	744800	747250	744800	744800	744800	747250	744800	744800	747250	744800	747250
36	833976	833976	833976	836568	833976	833976	833976	833976	836568	833976	833976	833976	836568	833976	833976	836568	833976	836568
37	930920	930920	930920	933658	930920	930920	930920	930920	933658	930920	930920	930920	933658	930920	930920	933658	930920	933658
38	1036070	1036070	1036070	1038958	1036070	1036070	1036070	1036070	1038958	1036070	1036070	1036070	1038958	1036070	1036070	1038958	1036070	1038958
39	1149876	1149876	1149876	1152918	1149876	1149876	1149876	1149876	1152918	1149876	1149876	1149876	1152918	1149876	1149876	1152918	1149876	1152918
40	1272800	1272800	1272800	1276000	1272800	1272800	1272800	1272800	1276000	1272800	1272800	1272800	1276000	1272800	1272800	1276000	1272800	1276000
n	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]

10.5) 3 leapers on an n x n toroidal chessboard - 3 skokani na prstencové šachovnici n x n

I zde jsou shodné vzorce pro každou skupinu skokanů, jen hraniční hodnota n, od které je tomu tak, je vyšší než v případě 2 skokanů.

Three leapers [r,s] on an n x n toroidal chessboard, $s \geq r \geq 0$ and $r + s \neq 0$

for $r \neq s \neq 0, n \geq 3s + 1$

$$\frac{1}{6}n^2(n^4 - 27n^2 + 218)$$

for $r = s$ or $r = 0, n \geq 3s + 1$

$$\frac{1}{6}n^2(n^4 - 15n^2 + 62)$$

Independent on r, s!

V tabulce jsou červeně označeny hodnoty pro $n \leq 3s$, které mohou být ještě odlišné podle typu skokana. Pro větší n najdeme ale už jen vždy 2 možné hodnoty.

3 Leapers on an n x n toroidal chessboard																	
n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]
1																	
2	0	4	0	4	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	4
3	6	6	84	6	6	84	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
4	208	352	208	560	208	352	208	208	208	208	208	208	208	208	448	208	352
5	1300	1300	1300	1300	2300	1300	1300	1300	600	600	1300	1300	1300	600	1300	1300	600
6	4908	4884	5952	4884	4908	7140	4908	4908	3252	4908	3252	4908	4908	4908	4884	4908	4884
7	14112	14112	14112	14112	14112	14112	18424	14112	10584	10584	10584	10584	14112	14112	14112	10584	10584
8	34112	34112	34112	37760	34112	34112	34112	34112	27584	27584	34112	27584	27584	34112	34112	27584	34112
9	73008	73008	72954	73008	73008	72954	73008	73008	61992	61992	61992	61992	61992	61992	73008	61992	61992
10	142700	142700	142700	142700	152000	142700	142700	142700	125300	125300	125300	142700	125300	125300	142700	125300	124900
11	259908	259908	259908	259908	259908	259908	259908	259908	233772	233772	233772	233772	233772	233772	259908	233772	233772
12	447312	447312	447312	447216	447312	467040	447312	447312	409584	409584	409584	409584	447312	409584	447312	409584	409584
13	734812	734812	734812	734812	734812	734812	734812	734812	682084	682084	682084	682084	682084	682084	734812	682084	682084
14	1160908	1160908	1160908	1160908	1160908	1160908	1197952	1160908	1089172	1089172	1089172	1089172	1089172	1160908	1160908	1089172	1089172
15	1774200	1774200	1774200	1774200	1774050	1774200	1774200	1774200	1678800	1678800	1678800	1678800	1678800	1678800	1774200	1678800	1678800
16	2635008	2635008	2635008	2635008	2635008	2635008	2635008	2635008	2510592	2510592	2510592	2510592	2510592	2510592	2635008	2510592	2510592
17	3817112	3817112	3817112	3817112	3817112	3817112	3817112	3817112	3657584	3657584	3657584	3657584	3657584	3657584	3817112	3657584	3657584

18	5409612	5409612	5409612	5409612	5409612	5409396	5409612	5409612	5208084	5208084	5208084	5208084	5208084	5208084	5409612	5208084	5208084
19	7518908	7518908	7518908	7518908	7518908	7518908	7518908	7518908	7267652	7267652	7267652	7267652	7267652	7267652	7518908	7267652	7267652
20	10270800	10270800	10270800	10270800	10270800	10270800	10270800	10270800	9961200	9961200	9961200	9961200	9961200	9961200	10270800	9961200	9961200
21	13812708	13812708	13812708	13812708	13812708	13812708	13812708	13812708	13435212	13435212	13435212	13435212	13435212	13435212	13812708	13435212	13435212
22	18316012	18316012	18316012	18316012	18316012	18316012	18316012	18316012	17860084	17860084	17860084	17860084	17860084	17860084	18316012	17860084	17860084
23	23978512	23978512	23978512	23978512	23978512	23978512	23978512	23978512	23432584	23432584	23432584	23432584	23432584	23432584	23978512	23432584	23432584
24	31027008	31027008	31027008	31027008	31027008	31027008	31027008	31027008	30378432	30378432	30378432	30378432	30378432	30378432	31027008	30378432	30378432
25	39720000	39720000	39720000	39720000	39720000	39720000	39720000	39720000	38955000	38955000	38955000	38955000	38955000	38955000	39720000	38955000	38955000
26	50350508	50350508	50350508	50350508	50350508	50350508	50350508	50350508	49454132	49454132	49454132	49454132	49454132	49454132	50350508	49454132	49454132
27	63249012	63249012	63249012	63249012	63249012	63249012	63249012	63249012	62205084	62205084	62205084	62205084	62205084	62205084	63249012	62205084	62205084
28	78786512	78786512	78786512	78786512	78786512	78786512	78786512	78786512	77577584	77577584	77577584	77577584	77577584	77577584	78786512	77577584	77577584
29	97377708	97377708	97377708	97377708	97377708	97377708	97377708	97377708	95985012	95985012	95985012	95985012	95985012	95985012	97377708	95985012	95985012
30	119484300	119484300	119484300	119484300	119484300	119484300	119484300	119484300	117887700	117887700	117887700	117887700	117887700	117887700	119484300	117887700	117887700
31	145618408	145618408	145618408	145618408	145618408	145618408	145618408	145618408	143796352	143796352	143796352	143796352	143796352	143796352	145618408	143796352	143796352
32	176346112	176346112	176346112	176346112	176346112	176346112	176346112	176346112	174275584	174275584	174275584	174275584	174275584	174275584	176346112	174275584	174275584
33	212291112	212291112	212291112	212291112	212291112	212291112	212291112	212291112	209947584	209947584	209947584	209947584	209947584	209947584	212291112	209947584	209947584
34	254138508	254138508	254138508	254138508	254138508	254138508	254138508	254138508	251495892	251495892	251495892	251495892	251495892	251495892	254138508	251495892	251495892
35	302638700	302638700	302638700	302638700	302638700	302638700	302638700	302638700	299669300	299669300	299669300	299669300	299669300	299669300	302638700	299669300	299669300
36	358611408	358611408	358611408	358611408	358611408	358611408	358611408	358611408	355285872	355285872	355285872	355285872	355285872	355285872	358611408	355285872	355285872
37	422949812	422949812	422949812	422949812	422949812	422949812	422949812	422949812	419237084	419237084	419237084	419237084	419237084	419237084	422949812	419237084	419237084
38	496624812	496624812	496624812	496624812	496624812	496624812	496624812	496624812	492492084	492492084	492492084	492492084	492492084	492492084	496624812	492492084	492492084
39	580689408	580689408	580689408	580689408	580689408	580689408	580689408	580689408	576102072	576102072	576102072	576102072	576102072	576102072	580689408	576102072	576102072
40	676283200	676283200	676283200	676283200	676283200	676283200	676283200	676283200	671204800	671204800	671204800	671204800	671204800	671204800	676283200	671204800	671204800
n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]

3 Leapers on an $n \times n$ toroidal chessboard

n	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]
1																		
2	0	4	0	0	0	0	0	0	4	0	4	0	0	0	0	4	0	0
3	6	6	6	84	6	6	84	6	6	6	6	6	6	6	6	84	6	6
4	208	448	208	208	208	208	208	208	560	208	352	208	208	208	208	448	208	208
5	1300	600	1300	1300	600	1300	600	1300	1300	1300	1300	600	2300	1300	1300	1300	600	1300
6	3252	4884	3252	6528	4908	4908	5952	4908	4884	3252	4884	3252	4908	4908	4908	7140	4908	4908
7	14112	10584	14112	14112	14112	10584	10584	14112	14112	10584	10584	14112	14112	10584	14112	14112	14112	18424
8	27584	34112	27584	34112	34112	34112	27584	27584	39680	34112	34112	34112	34112	27584	27584	34112	27584	34112
9	61992	61992	73008	72954	61992	61992	72954	61992	73008	73008	61992	61992	73008	61992	61992	72954	61992	73008

10	142700	124900	125300	142700	125300	142700	125300	142700	142700	142700	142700	125300	156800	142700	142700	142700	125300	142700
11	233772	233772	233772	259908	233772	233772	233772	233772	259908	233772	233772	259908	259908	259908	233772	259908	233772	259908
12	409584	447312	409584	447312	409584	409584	447312	409584	447216	409584	447312	409584	447312	447312	447312	477120	447312	447312
13	682084	682084	682084	734812	682084	682084	682084	682084	734812	682084	682084	682084	734812	682084	682084	734812	734812	734812
14	1089172	1089172	1160908	1160908	1089172	1089172	1089172	1160908	1160908	1089172	1089172	1160908	1160908	1089172	1160908	1160908	1160908	1216768
15	1678800	1678800	1678800	1774200	1678800	1678800	1677900	1678800	1774200	1678800	1678800	1678800	1774050	1678800	1678800	1774200	1678800	1774200
16	2510592	2510592	2510592	2635008	2510592	2510592	2510592	2510592	2635008	2510592	2510592	2510592	2635008	2510592	2510592	2635008	2510592	2635008
17	3657584	3657584	3657584	3817112	3657584	3657584	3657584	3657584	3817112	3657584	3657584	3657584	3817112	3657584	3657584	3817112	3657584	3817112
18	5208084	5208084	5208084	5409612	5208084	5208084	5208084	5208084	5409612	5208084	5208084	5409612	5208084	5208084	5409396	5208084	5409612	5409612
19	7267652	7267652	7267652	7518908	7267652	7267652	7267652	7267652	7518908	7267652	7267652	7267652	7518908	7267652	7267652	7518908	7267652	7518908
20	9961200	9961200	9961200	10270800	9961200	9961200	9961200	9961200	10270800	9961200	9961200	9961200	10270800	9961200	9961200	10270800	9961200	10270800
21	13435212	13435212	13435212	13812708	13435212	13435212	13435212	13435212	13812708	13435212	13435212	13435212	13812708	13435212	13812708	13435212	13812708	13812414
22	17860084	17860084	17860084	18316012	17860084	17860084	17860084	17860084	18316012	17860084	17860084	17860084	18316012	17860084	17860084	18316012	17860084	18316012
23	23432584	23432584	23432584	23978512	23432584	23432584	23432584	23432584	23978512	23432584	23432584	23432584	23978512	23432584	23432584	23978512	23432584	23978512
24	30378432	30378432	30378432	31027008	30378432	30378432	30378432	30378432	31027008	30378432	30378432	30378432	31027008	30378432	30378432	31027008	30378432	31027008
25	38955000	38955000	38955000	39720000	38955000	38955000	38955000	38955000	39720000	38955000	38955000	38955000	39720000	38955000	38955000	39720000	38955000	39720000
26	49454132	49454132	49454132	50350508	49454132	49454132	49454132	49454132	50350508	49454132	49454132	49454132	50350508	49454132	49454132	50350508	49454132	50350508
27	62205084	62205084	62205084	63249012	62205084	62205084	62205084	62205084	63249012	62205084	62205084	62205084	63249012	62205084	62205084	63249012	62205084	63249012
28	77577584	77577584	77577584	78786512	77577584	77577584	77577584	77577584	78786512	77577584	77577584	77577584	78786512	77577584	77577584	78786512	77577584	78786512
29	95985012	95985012	95985012	97377708	95985012	95985012	95985012	95985012	97377708	95985012	95985012	95985012	97377708	95985012	95985012	97377708	95985012	97377708
30	117887700	117887700	117887700	119484300	117887700	117887700	117887700	117887700	119484300	117887700	117887700	117887700	119484300	117887700	117887700	119484300	117887700	119484300
31	143796352	143796352	143796352	145618408	143796352	143796352	143796352	143796352	145618408	143796352	143796352	143796352	145618408	143796352	143796352	145618408	143796352	145618408
32	174275584	174275584	174275584	176346112	174275584	174275584	174275584	174275584	176346112	174275584	174275584	174275584	176346112	174275584	174275584	176346112	174275584	176346112
33	209947584	209947584	209947584	212291112	209947584	209947584	209947584	209947584	212291112	209947584	209947584	209947584	212291112	209947584	209947584	212291112	209947584	212291112
34	251495892	251495892	251495892	254138508	251495892	251495892	251495892	251495892	254138508	251495892	251495892	251495892	254138508	251495892	251495892	254138508	251495892	254138508
35	299669300	299669300	299669300	302638700	299669300	299669300	299669300	299669300	302638700	299669300	299669300	299669300	302638700	299669300	299669300	302638700	299669300	302638700
36	355285872	355285872	355285872	358611408	355285872	355285872	355285872	355285872	358611408	355285872	355285872	355285872	358611408	355285872	355285872	358611408	355285872	358611408
37	419237084	419237084	419237084	422949812	419237084	419237084	419237084	419237084	422949812	419237084	419237084	419237084	422949812	419237084	419237084	422949812	419237084	422949812
38	492492084	492492084	492492084	496624812	492492084	492492084	492492084	492492084	496624812	492492084	492492084	492492084	496624812	492492084	492492084	496624812	492492084	496624812
39	576102072	576102072	576102072	580689408	576102072	576102072	576102072	576102072	580689408	576102072	576102072	576102072	580689408	576102072	576102072	580689408	576102072	580689408
40	671204800	671204800	671204800	676283200	671204800	671204800	671204800	671204800	676283200	671204800	671204800	671204800	676283200	671204800	671204800	676283200	671204800	676283200
n	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]

10.6) 4 leapers on an n x n toroidal chessboard - 4 skokani na prstencové šachovnici n x n

I zde jsou shodné vzorce pro každou skupinu skokanů .

Four leapers [r,s] on an n x n toroidal chessboard, $s \geq r \geq 0$ and $r + s \neq 0$

for $r \neq s \neq 0, n \geq 4s + 1$

$$\frac{1}{24}n^2(n^6 - 54n^4 + 1115n^2 - 8934)$$

for $r = s$ or $r = 0, n \geq 4s + 1$

$$\frac{1}{24}n^2(n^2 - 11)(n^4 - 19n^2 + 114)$$

V tabulkách jsou červeně označeny hodnoty pro $n \leq 4s$, které mohou být ještě odlišné podle typu skokana. Pro větší n najdeme ale už jen vždy 2 možné hodnoty.

4 Leapers on an n x n toroidal chessboard												
n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]
1												
2	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	126	0	0	126	0	0	0	0	0	0
4	228	664	228	1820	228	664	228	276	228	276	228	276
5	3850	3850	3850	3850	12650	3850	3850	3850	600	600	3850	3850
6	27225	26649	40464	26649	27225	58905	27225	27225	12357	27225	12357	27225
7	122892	122892	122892	122892	122892	122892	211876	122892	68796	68796	68796	68796
8	423152	423184	423152	520160	423152	423184	423152	423152	275888	276912	423152	276912
9	1213380	1213380	1209654	1213380	1213380	1209654	1213380	1213380	872532	872532	872532	872532
10	3046025	3046025	3046025	3046025	3460400	3046025	3046025	3046025	2344025	2344425	2345525	3046025
11	6907890	6907890	6907890	6907890	6907890	6907890	6907890	6907890	5580762	5580762	5580762	5580762
12	14454972	14454972	14455044	14442300	14454972	15767640	14454972	14454972	12107196	12107628	12107196	12109356
13	28330822	28330822	28330822	28330822	28330822	28330822	28330822	28330822	24392446	24392446	24392446	24392446
14	52586065	52586065	52586065	52586065	52586065	52586065	56013664	52586065	46261537	46261537	46261537	46261537
15	93218400	93218400	93218400	93218400	93186450	93218400	93218400	93218400	83426400	83426400	83426400	83426400

16	158854080	158854080	158854080	158854080	158854080	158854080	158854080	158854080	144157632	144157632	144158400	144157632
17	261593552	261593552	261593552	261593552	261593552	261593552	261593552	261593552	240119696	240119696	240119696	240119696
18	418045617	418045617	418045617	418045617	418045617	417978225	418045617	418045617	387393921	387393921	387393921	387393921
19	650576150	650576150	650576150	650576150	650576150	650576150	650576150	650576150	607715342	607715342	607715342	607715342
20	988799100	988799100	988799100	988799100	988799300	988799100	988799100	988799100	929951100	929951100	929951100	929952300
21	1471339170	1471339170	1471339170	1471339170	1471339170	1471339170	1471213044	1471339170	1391849802	1391849802	1391849802	1391849802
22	2147897257	2147897257	2147897257	2147897257	2147897257	2147897257	2147897257	2147897257	2042092921	2042092921	2042092921	2042092921
23	3081651412	3081651412	3081651412	3081651412	3081651412	3081651412	3081651412	3081651412	2942680996	2942680996	2942680996	2942680996
24	4352027760	4352027760	4352027760	4352027760	4352027760	4352027760	4352028048	4352027760	4171689072	4171689072	4171689072	4171689072
25	6057877500	6057877500	6057877500	6057877500	6057877500	6057877500	6057877500	6057877500	5826427500	5826427500	5826427500	5826427500
26	8321097785	8321097785	8321097785	8321097785	8321097785	8321097785	8321097785	8321097785	8027045897	8027045897	8027045897	8027045897
27	11290735962	11290735962	11290735962	11290735962	11290735962	11290735962	11290735962	11290735962	10920619746	10920619746	10920619746	10920619746
28	15147618332	15147618332	15147618332	15147618332	15147618332	15147618332	15147618332	15147618332	14685760796	14685760796	14685760796	14685760796
29	20109546270	20109546270	20109546270	20109546270	20109546270	20109546270	20109546270	20109546270	19537794102	19537794102	19537794102	19537794102
30	26437104225	26437104225	26437104225	26437104225	26437104225	26437104225	26437104225	26437104225	25734546225	25734546225	25734546225	25734546225
31	34440125800	34440125800	34440125800	34440125800	34440125800	34440125800	34440125800	34440125800	33582790792	33582790792	33582790792	33582790792
32	44484865792	44484865792	44484865792	44484865792	44484865792	44484865792	44484865792	44484865792	43445399296	43445399296	43445399296	43445399296
33	57001927752	57001927752	57001927752	57001927752	57001927752	57001927752	57001927752	57001927752	55749246696	55749246696	55749246696	55749246696
34	72494998305	72494998305	72494998305	72494998305	72494998305	72494998305	72494998305	72494998305	70993923057	70993923057	70993923057	70993923057
35	91550441150	91550441150	91550441150	91550441150	91550441150	91550441150	91550441150	91550441150	89761304150	89761304150	89761304150	89761304150
36	114847805340	114847805340	114847805340	114847805340	114847805340	114847805340	114847805340	114847805340	112726035612	112726035612	112726035612	112726035612
37	143171304122	143171304122	143171304122	143171304122	143171304122	143171304122	143171304122	143171304122	140666986946	140666986946	140666986946	140666986946
38	177422322297	177422322297	177422322297	177422322297	177422322297	177422322297	177422322297	177422322297	174479733321	174479733321	174479733321	174479733321
39	218633011740	218633011740	218633011740	218633011740	218633011740	218633011740	218633011740	218633011740	215190124812	215190124812	215190124812	215190124812
40	267981036400	267981036400	267981036400	267981036400	267981036400	267981036400	267981036400	267981036400	263969004400	263969004400	263969004400	263969004400
n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]

4 Leapers on an n x n toroidal chessboard												
n	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]
1												
2	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	126	0	0	126
4	228	276	1120	228	664	228	1120	228	276	228	276	228
5	3850	600	3850	3850	600	3850	600	3850	3850	600	3850	600
6	27225	27225	26649	27225	26649	12357	26649	12357	48960	27225	27225	40464
7	122892	122892	122892	68796	68796	122892	68796	122892	122892	122892	68796	68796
8	275888	423152	423376	275888	423184	275888	423376	275888	423152	423152	423152	275888
9	872532	872532	1213380	872532	872532	872532	872532	1213380	1209654	872532	872532	1209654
10	2345525	2344425	3046025	2345525	2313025	3046025	2313025	2345525	3046025	2344025	3046025	2344025
11	5580762	5580762	6907890	5580762	5580762	5580762	5580762	5580762	6907890	5580762	5580762	5580762
12	14454972	12109356	14454972	12107628	12109356	12107196	14454972	12107196	14455476	12107628	12107628	14455044
13	24392446	24392446	28330822	24392446	24392446	24392446	24392446	24392446	28330822	24392446	24392446	24392446
14	46264477	52586065	52586065	46261537	46261537	46264477	46261537	52586065	52586065	46264477	46261537	46261537
15	83426400	83426400	93218400	83426400	83426400	83426400	83426400	83426400	93218400	83426400	83426400	83244150
16	144157632	144161472	158854080	144157632	144158400	144157632	144162496	144157632	158854080	144158400	144161472	144157632
17	240119696	240119696	261593552	240119696	240119696	240119696	240119696	240119696	261593552	240119696	240119696	240119696
18	387393921	387393921	418045617	387393921	387393921	387393921	387393921	387398781	418045617	387393921	387393921	387398781
19	607715342	607715342	650576150	607715342	607715342	607715342	607715342	607715342	650576150	607715342	607715342	607715342
20	929951100	929951100	988799100	929951100	929951100	929952300	929952700	929951100	988799100	929951100	929952300	929951100
21	1391849802	1391849802	1471339170	1391849802	1391849802	1391849802	1391849802	1391849802	1471339170	1391849802	1391849802	1391849802
22	2042092921	2042092921	2147897257	2042092921	2042092921	2042092921	2042092921	2042092921	2147897257	2042092921	2042092921	2042092921
23	2942680996	2942680996	3081651412	2942680996	2942680996	2942680996	2942680996	2942680996	3081651412	2942680996	2942680996	2942680996
24	4171690800	4171689072	4352027760	4171689072	4171689072	4171689072	4171690800	4171689072	4352027760	4171689072	4171689072	4171690800
25	5826427500	5826427500	6057877500	5826427500	5826427500	5826427500	5826427500	5826427500	6057877500	5826427500	5826427500	5826427500
26	8027045897	8027045897	8321097785	8027045897	8027045897	8027045897	8027045897	8027045897	8321097785	8027045897	8027045897	8027045897
27	10920619746	10920619746	11290735962	10920619746	10920619746	10920619746	10920619746	10920619746	11290735962	10920619746	10920619746	10920619746
28	14685760796	14685763148	15147618332	14685760796	14685760796	14685760796	14685760796	14685760796	14685763148	15147618332	14685760796	14685760796
29	19537794102	19537794102	20109546270	19537794102	19537794102	19537794102	19537794102	19537794102	20109546270	19537794102	19537794102	19537794102
30	25734546225	25734546225	26437104225	25734546225	25734546225	25734546225	25734546225	25734546225	26437104225	25734546225	25734546225	25734546225
31	33582790792	33582790792	34440125800	33582790792	33582790792	33582790792	33582790792	33582790792	34440125800	33582790792	33582790792	33582790792
32	43445399296	43445399296	44484865792	43445399296	43445399296	43445399296	43445399296	43445399296	44484865792	43445399296	43445399296	43445399296
33	55749246696	55749246696	57001927752	55749246696	55749246696	55749246696	55749246696	55749246696	57001927752	55749246696	55749246696	55749246696
34	70993923057	70993923057	72494998305	70993923057	70993923057	70993923057	70993923057	70993923057	72494998305	70993923057	70993923057	70993923057

35	89761304150	89761304150	91550441150	89761304150	89761304150	89761304150	89761304150	89761304150	91550441150	89761304150	89761304150	89761304150
36	112726035612	112726035612	114847805340	112726035612	112726035612	112726035612	112726035612	112726035612	114847805340	112726035612	112726035612	112726035612
37	140666986946	140666986946	143171304122	140666986946	140666986946	140666986946	140666986946	140666986946	143171304122	140666986946	140666986946	140666986946
38	174479733321	174479733321	177422322297	174479733321	174479733321	174479733321	174479733321	174479733321	177422322297	174479733321	174479733321	174479733321
39	215190124812	215190124812	218633011740	215190124812	215190124812	215190124812	215190124812	215190124812	218633011740	215190124812	215190124812	215190124812
40	263969004400	263969004400	267981036400	263969004400	263969004400	263969004400	263969004400	263969004400	267981036400	263969004400	263969004400	263969004400
n	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]

4 Leapers on an $n \times n$ toroidal chessboard

n	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]
1											
2	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	126	0	0
4	276	1820	228	664	228	276	228	276	1120	228	276
5	3850	3850	3850	3850	600	12650	3850	3850	3850	600	3850
6	27225	26649	12357	26649	12357	27225	27225	27225	58905	27225	27225
7	122892	122892	68796	68796	122892	122892	68796	122892	122892	122892	211876
8	276912	575360	423152	423184	423152	423152	275888	276912	423376	275888	423152
9	872532	1213380	1213380	872532	872532	1213380	872532	872532	1209654	872532	1213380
10	3046025	3046025	3046025	3046025	2344025	3684800	3046025	3046025	3046025	2344025	3046025
11	5580762	6907890	5580762	5580762	6907890	6907890	6907890	5580762	6907890	5580762	6907890
12	12107628	14442300	12107196	14454972	12107196	14454972	14454972	14454972	16460640	14454972	14454972
13	24392446	28330822	24392446	24392446	24392446	28330822	24392446	24392446	28330822	28330822	28330822
14	52586065	52586065	46261537	46261537	52586065	52586065	46261537	52586065	52586065	52586065	57796480
15	83426400	93218400	83426400	83426400	83426400	93186450	83426400	83426400	93218400	83426400	93218400
16	144157632	158854976	144158400	144158400	144158400	158854080	144157632	144157632	158854080	144157632	158854080
17	240119696	261593552	240119696	240119696	240119696	261593552	240119696	240119696	261593552	240119696	261593552
18	387393921	418045617	387398781	387393921	387393921	418045617	387393921	387393921	417978225	387393921	418045617
19	607715342	650576150	607715342	607715342	607715342	650576150	607715342	607715342	650576150	607715342	650576150
20	929957100	988799100	929952300	929957100	929951100	988800500	929952300	929952300	988799100	929951100	988799100
21	1391849802	1471339170	1391849802	1391849802	1391849802	1471339170	1391849802	1391849802	1471339170	1391849802	1471213044
22	2042092921	2147897257	2042092921	2042092921	2042100181	2147897257	2042100181	2042092921	2147897257	2042092921	2147897257
23	2942680996	3081651412	2942680996	2942680996	2942680996	3081651412	2942680996	2942680996	3081651412	2942680996	3081651412
24	4171689072	4352027760	4171689072	4171690800	4171689072	4352027760	4171690800	4171697712	4352029776	4171690800	4352027760
25	5826427500	6057877500	5826427500	5826427500	5826427500	6057877500	5826427500	5826427500	6057877500	5826427500	6057877500
26	8027045897	8321097785	8027045897	8027045897	8027045897	8321097785	8027045897	8027045897	8321097785	8027056037	8321097785

27	10920619746	11290735962	10920619746	10920619746	10920619746	11290735962	10920619746	10920619746	11290735962	10920619746	11290735962
28	14685763148	15147618332	14685760796	14685760796	14685763148	15147618332	14685760796	14685763148	15147618332	14685763148	15147621076
29	19537794102	20109546270	19537794102	19537794102	19537794102	20109546270	19537794102	19537794102	20109546270	19537794102	20109546270
30	25734546225	26437104225	25734546225	25734546225	25734546225	26437104225	25734546225	25734546225	26437104225	25734546225	26437104225
31	33582790792	34440125800	33582790792	33582790792	33582790792	34440125800	33582790792	33582790792	34440125800	33582790792	34440125800
32	43445399296	44484865792	43445399296	43445399296	43445399296	44484865792	43445399296	43445399296	44484865792	43445399296	44484865792
33	55749246696	57001927752	55749246696	55749246696	55749246696	57001927752	55749246696	55749246696	57001927752	55749246696	57001927752
34	70993923057	72494998305	70993923057	70993923057	70993923057	72494998305	70993923057	70993923057	72494998305	70993923057	72494998305
35	89761304150	91550441150	89761304150	89761304150	89761304150	91550441150	89761304150	89761304150	91550441150	89761304150	91550441150
36	112726035612	114847805340	112726035612	112726035612	112726035612	114847805340	112726035612	112726035612	114847805340	112726035612	114847805340
37	140666986946	143171304122	140666986946	140666986946	140666986946	143171304122	140666986946	140666986946	143171304122	140666986946	143171304122
38	174479733321	177422322297	174479733321	174479733321	174479733321	177422322297	174479733321	174479733321	177422322297	174479733321	177422322297
39	215190124812	218633011740	215190124812	215190124812	215190124812	218633011740	215190124812	215190124812	218633011740	215190124812	218633011740
40	263969004400	267981036400	263969004400	263969004400	263969004400	267981036400	263969004400	263969004400	267981036400	263969004400	267981036400
n	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]

10.7) 5 leapers on an $n \times n$ toroidal chessboard - 5 skokanů na prstencové šachovnici $n \times n$

Pro $k=5$ nebylo již časově únosné (ani moc zajímavé) prozkoumat všechny kombinace skokanů, ale domnívám se, že vzorce v obou skupinách budou ještě shodné. Stačí proto najít vzorce pouze pro dva reprezentující skokany, každý v jedné ze skupin. Vzorce platící pro vezíra budou platit (od $n > 5s$) také pro všechny skokany typu $[0,s]$ a $[s,s]$, bez ohledu na s ($s > 0$). Analogicky vzorce pro jezdce (možný reprezentující kámen v první skupině) budou platit (na všech šachovnicích $n \times n$, kde $n > 5s$) i pro všechny typy skokanů $[r,s]$, kde r není nula a r je různé od s (a současně menší než s).

V první skupině bylo počítačem ověřeno pro 5 jezdců, 5 zeber a 5 velbloudů, ve druhé skupině pro 5 vezírů, 5 fersů, 5 dabab, 5 skokanů $[0,3]$ a 5 skokanů $[3,3]$.

Formulas for 5 leapers on a toroidal chessboard are probably same in two groups of leapers. In first group verified for 5 knights, 5 zebras and 5 camels, in second group verified for 5 wazirs, 5 ferses, 5 dabbabas, 5 $[0,3]$ leapers and 5 $[3,3]$ leapers.

Group 1 ($0 < r < s$)

5 non-attacking **knights** on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 10$

5 non-attacking **zebras** (*zebra is leaper $[2,3]$*) on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 14$

5 non-attacking **camels** (*camel is leaper $[1,3]$*) on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 13$

$$\frac{1}{120}n^2(n^8 - 90n^6 + 3395n^4 - 64290n^2 + 522504)$$

Group 2 ($r = 0$ or $r = s$)

5 non-attacking **wazirs** (*wazir is leaper $[0,1]$*) on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 6$

5 non-attacking **ferses** (*fers is leaper $[1,1]$*) on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 6$

5 non-attacking **dabbabas** (*dabbaba is leaper $[0,2]$*) on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 11$

5 non-attacking **leapers $[0,3]$** on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 16$

5 non-attacking **leapers $[3,3]$** on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 16$

$$\frac{1}{120}n^2(n^8 - 50n^6 + 995n^4 - 9370n^2 + 35424)$$

5 Leapers on an n x n toroidal chessboard								
n	5 knights	5 camels	5 zebras	5 wazirs	5 ferses	5 dabbabas	5 leapers [0,3]	5 leapers [3,3]
1								
2								
3	0	0	0	0	0	0	126	126
4	128	224	128	128	224	704	128	224
5	120	120	6745	6745	6745	6745	6745	6745
6	30312	100332	100332	100332	100332	94608	197568	274176
7	283906	283906	283906	754453	754453	754453	754453	754453
8	1872064	1907904	1872064	3830016	3830016	3831552	3830016	3830016
9	8643186	8643186	8643186	15038541	15038541	15038541	14918742	14918742
10	31702920	31730520	31809320	49207020	49207020	49206980	49207020	49207020
11	98179400	98179400	98179400	140410699	140410699	140410699	140410699	140410699
12	267487920	267536880	267536880	360001152	360001152	360001152	360010368	360066528
13	659015500	659015500	659014148	846775007	846775007	846775007	846775007	846775007
14	1496908840	1496908840	1496908840	1855033964	1855033964	1855033964	1855033964	1855033964
15	3179369070	3179369070	3179369070	3828109545	3828109545	3828109545	3828109455	3828109455
16	6382030592	6382030592	6382030592	7507096576	7507096576	7507096576	7507096576	7507096576
17	12207535134	12207535134	12207535134	14087087961	14087087961	14087087961	14087087961	14087087961
18	22396355496	22396355496	22396355496	25436160108	25436160108	25436160108	25436160108	25436160108
19	39617305308	39617305308	39617305308	44395753647	44395753647	44395753647	44395753647	44395753647
20	67860021680	67860021680	67860021680	75184958080	75184958080	75184958080	75184958080	75184958080
21	112956057144	112956057144	112956057144	123935571963	123935571963	123935571963	123935571963	123935571963
22	183260096008	183260096008	183260096008	199389702380	199389702380	199389702380	199389702380	199389702380
23	290528248402	290528248402	290528248402	313797119069	313797119069	313797119069	313797119069	313797119069
24	451036403136	451036403136	451036403136	484055619840	484055619840	484055619840	484055619840	484055619840
25	686988268250	686988268250	686988268250	733144325125	733144325125	733144325125	733144325125	733144325125
26	1028270026056	1028270026056	1028270026056	1091907130860	1091907130860	1091907130860	1091907130860	1091907130860
27	1514616507792	1514616507792	1514616507792	1601251540659	1601251540659	1601251540659	1601251540659	1601251540659
28	2198262481968	2198262481968	2198262481968	2314836800640	2314836800640	2314836800640	2314836800640	2314836800640
29	3147162080324	3147162080324	3147162080324	3302334703543	3302334703543	3302334703543	3302334703543	3302334703543
30	4448869586280	4448869586280	4448869586280	4653356643180	4653356643180	4653356643180	4653356643180	4653356643180

10.8) 6 leapers on an $n \times n$ toroidal chessboard - 6 skokanů na prstencové šachovnici $n \times n$

Situace se (poněkud překvapivě) začíná měnit od $k=6$, kdy se vzorce začínají odlišovat! Vzhledem k výpočetní náročnosti bylo možné ověřit pouze takové skokany, kde $s \leq 3$ (pro $s=4$ vzorce platí až od $n \geq 25$, bylo by tedy třeba znát kolem 30 hodnot a už výpočet pro $n=22$ trvá asi 5 hodin...). Přesto je velmi pravděpodobné, že ve skupině 2 (kdy $r=0$ nebo $r=s$) jsou vzorce pro všechny skokany stále shodné, jen skupina 1 (kdy $0 < r < s$) se rozdělí na dvě podskupiny 1A a 1B, kde v každé opět platí shodné vzorce. Do podskupiny 1A patří s velkou pravděpodobností pouze skokani typu $[1,2]$ a $[1,3]$, tedy jezdec a velbloud a jejich násobky, tedy skokani $[2,4],[3,6],[4,8],\dots$ a $[2,6],[3,9],[4,12],\dots$. Do podskupiny 1B pak všichni ostatní (výpočetně ověřeno pouze pro zebry).

For $k=6$ are formulas in Group2 ($r=0$ or $r=s$) probably same, but in Group1 ($0 < r < s$) exists two subgroups 1A and 1B. In subgroup 1A are knight and camel and all leapers with a form $t[1,2]$ and $t*[1,3]$, in subgroup 1B all other leapers. Verified for leapers $[r,s]$, $s \leq 3$ only.*

Group 1A ($0 < r < s$, $s = 2r$ or $s = 3r$)

6 non-attacking **knights** on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 13$

6 non-attacking **camels** on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 19$

$$\frac{1}{720}n^2(n^{10} - 135n^8 + 8005n^6 - 262665n^4 + 4816354n^2 - 39858840)$$

Group 1B ($0 < r < s$, $s \neq 2r$ and $s \neq 3r$)

6 non-attacking **zebras** on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 19$

$$\frac{1}{720}n^2(n^{10} - 135n^8 + 8005n^6 - 262665n^4 + 4816354n^2 - 39902040)$$

Group 2 ($r = 0$ or $r = s$)

6 non-attacking **wazirs** on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 7$

6 non-attacking **forses** on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 7$

6 non-attacking **dabbabas** on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 13$

6 non-attacking **leapers [0,3]** on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 19$

6 non-attacking **leapers [3,3]** on an $n \times n$ toroidal chessboard, $n \geq 19$

$$\frac{1}{720}n^2(n^{10} - 75n^8 + 2365n^6 - 39285n^4 + 345034n^2 - 1288680)$$

Problém odlišných vzorců pro zebry a jezdece (resp. velbloudy) na prstencové šachovnici mě velmi zaujal. Zobecněné výsledky sice zatím nebylo možné potvrdit např. pro 6 žiraf (skokanů [1,4]) nebo 6 antilop (skokanů [3,4]), ale vytvořil jsem speciální počítačový program na zjišťování možných konfigurací 6 skokanů, který činí tyto hypotézy velmi pravděpodobnými. Nejprve je třeba si uvědomit, že pokud hledáme počet neohrožujících se skokanů NA_k , je to vlastně totéž jako od celkového počtu možných rozmístění odečíst počet ohrožujících se skokanů A_k . Tedy

$$NA_k(n) = \binom{n^2}{k} - A_k(n)$$

Jelikož celkový počet možných rozmístění je vždy pevný (daný počtem kamenů a rozměrem šachovnice), tak pokud jsou shodné počty dvou typů ohrožujících se kamenů, jsou shodné i počty neohrožujících se kamenů a naopak, pokud se tyto počty liší, je tomu tak vždy současně v obou případech. Stačí se proto zabývat při analýze možných konfigurací pouze případem **ohrožujících se skokanů**, což je názornější.

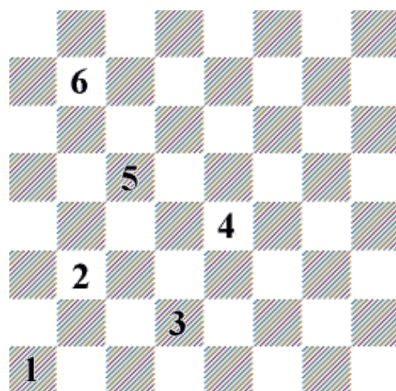
Dále je pro k skokanů $[r,s]$ ($0 < r < s$) rozsah platnosti vzorců až od

$$n > k * s$$

Pokud budeme uvažovat jen dostatečně velké šachovnice (minimální rozměr je dán konstantami k a s), můžeme (vzhledem k tomu, že na prstencové šachovnici lze každou pozici libovolně posunout v kterémkoliv směru, aniž by se změnila struktura vzájemného napadání kamenů) uvažovat pro zjednodušení představitivost místo prstencové šachovnice **šachovnici nekonečnou**, která má v tomto směru shodné vlastnosti (řešení nekomplikují okraje šachovnice).

V dalším dokážu (s pomocí počítačových výsledků) toto:

Pro dva typy skokanů $[r_1,s_1]$ a $[r_2,s_2]$, $0 < r_1 < s_1$ a $0 < r_2 < s_2$ existuje pro $k \leq 5$ vždy stejný počet konfigurací napadajících se skupin k těchto skokanů, ale pro $k = 6$ existují takové dvojice typů skokanů, kde se počty konfigurací liší.



Tato šachovnice je nekonečná ve všech směrech. Vzhledem k symetrii je možné první kámen zafixovat na nějakém poli a i druhý lze zafixovat na jednom z možných polí, odkud napadá první kámen. Pozice dalších kamenů je pak libovolná, ale každý následující kámen vždy napadá předchozí kámen.

piece number	Matrix of attacks					
kámen číslo	1	2	3	4	5	6
1						
2	*					
3	512	*				
4	256	128	*			
5	64	32	16	*		
6	8	4	2	1	*	

Při zjišťování počtu ohrožujících se kamenů je důležité, jakým způsobem se kameny v dané konfiguraci vzájemně napadají (při použití metody *inkluze a exkluze* ke hledání počtu ohrožujících se kamenů je pak v příslušné úrovni taková kombinace podle počtu napadení a tvaru grafu započtena vícenásobně a musí se v následující úrovni korigovat atd.).

Pro každé rozmístění zvolených skokanů jsem si nejprve definoval **matici napadení**. V ní se (z definice cesty) napadají dvojice označené * a ostatním možným napadením jsem přiřadil **binární kód** 1,2,4,8,16,32,128,256,512. Tím vzniká pro kameny s pořadovým číslem 3, 4, 5, 6 teoreticky $2^{10}=1024$ různých možností dalších vzájemných napadení s ostatními kameny (možnost s kódem 0, kdy nedojde k dalším napadením, je nezajímavá, takže zbývá 1023). Výstup z počítačového programu však ukázal, že ve skutečnosti může pro 6 kamenů nastat (z těchto 1023) pouhých 8 následujících možností!

kamenů	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	počty konfigurací pro $k=6$		pro $k=5$	
kódy	$2^9=512$	$2^8=256$	$2^7=128$	$2^6=64$	$2^5=32$	$2^4=16$	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$	skokani násobky [1,2], [1,3]	ostatní skokani	všichni skokani	
2									1		192	192	0	
8							1				114	24	0	
10							1		1		30	30	0	
32					1						186	186	36	
40					1		1				30	30	0	
256		1									192	192	36	
258		1							1		30	30	0	
264		1					1				30	30	0	
type of attack		possible			possible		possible		possible		leapers [1,2], [1,3] and multiples		other leapers	all leapers
											number of configurations for $k=6$		for $k=5$	

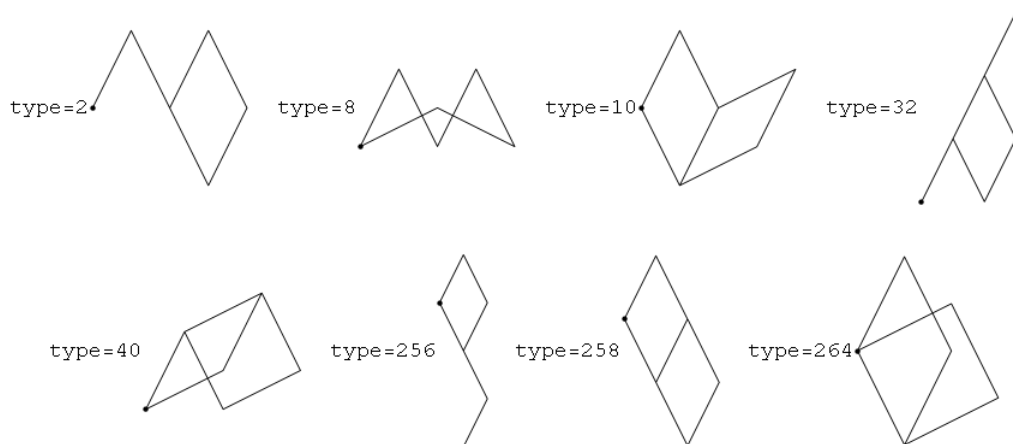


Schéma znázorňuje jednotlivé možné typy napadení série 6 skokanů, pozice prvního z nich je označena zvýrazněným bodem (vygenerováno pro 6 jezdců). Grafy ve spodním řádku jde však snadno přečíslováním uzlů (kamenů) převést na jiné. Typy 40, 258 a 264 převedeme takto na typ 10 a typ 256 převedeme na typ 2.

Podstatné je nyní toto. **Počty možných konfigurací v každé skupině jsou pro všechny skokany shodné s výjimkou skupiny "8" (čisté cykly), kde existují dvě podskupiny typů skokanů, přičemž v každé podskupině jsou shodné počty takových konfigurací.**

Toto jsem ověřil počítačem pro všechny skokany $[r,s]$, kde $0 < r < s < 1000$

Speciálně pro 3, 4 a 5 kamenů vycházejí počty konfigurací vždy shodné pro všechny typy skokanů.

V předchozí tabulce tak celkem 6 vzájemných napadení vůbec nemůže nastat (v nové tabulce označené X) !

kámen číslo	1	2	3	4	5	6
1						
2	*					
3	X	*				
4		X	*			
5	X		X	*		
6		X		X	*	

Kontakt posledního kamene s prvním kamenem (bez žádných dalších napadení) představuje **čistý cyklus** (pro $k=3$ je to kód 512, pro $k=4$ kód 256, pro $k=5$ kód 64 a pro $k=6$ kód 8). Je zcela evidentní, že cykly jsou možné pro všechna sudá k (*even k*). Už je ale těžší dokázat, že cykly pro lichá k (*odd k*) neexistují!

Theorem: if number of pieces k is odd, then such cycle graph not exists

or (in geometrical view)

Theorem: Polygon with odd number of edges and with all edges of the same length and with all vertices in integer points not exists

Na internetu se mi podařilo najít, že toto tvrzení dokázal (při trochu jiné formulaci) už Arthur Engel ve své knize "Problem-Solving Strategies" (1999), p.335, problem 22: "The vertices of an equilateral closed sequence of segments are lattice points. Prove that it has an **even** number of sides." Proof p.344

22. We denote the coordinate differences of the i th side by x_i, y_i . Then the x_i, y_i are integers with $x_i^2 + y_i^2 = R$, where R is independent of i and

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0.$$

From these equalities, we want to deduce that n is even. We consider

$$x_i^2 + y_i^2 \pmod{4}. \quad (1)$$

If (1) is 0, then all x_i, y_i are even, and we can cancel a factor 2, getting an equilateral lattice polygon with the same number of sides. So this case can be excluded. We need consider only the cases

(a) x_i, y_i are both odd for all i , (b) one of x_i, y_i is odd the other even.

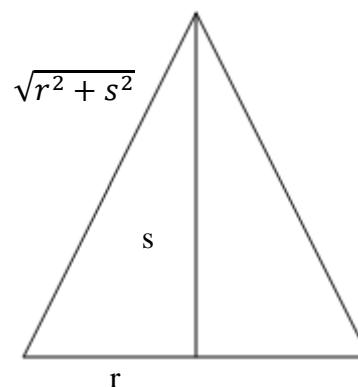
In case (a), n must be even. An odd number of odd terms would give an odd sum. In the remaining case (b), for each i we have x_i odd and y_i even, or vice versa.

$$x_1 + \dots + x_n = 0 \Rightarrow \text{Pairs } (x_i, y_i) \text{ with odd } x_i \text{ are even,}$$

$$y_1 + \dots + y_n = 0 \Rightarrow \text{Pairs } (x_i, y_i) \text{ with odd } y_i \text{ are even.}$$

Thus, n is even.

Tady je ještě pro zajímavost můj triviální (ale zcela jiný) důkaz pro $k=3$. Aby existovala taková konfigurace, musel by být následující trojúhelník rovnostranný a mít vrcholy v celých číslech. Potom by muselo platit



$$\sqrt{r^2 + s^2} = 2r$$

$$r^2 + s^2 = 4r^2$$

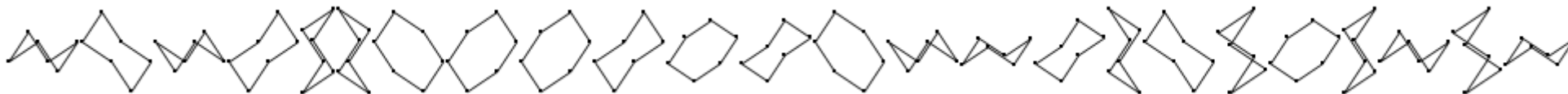
$$s^2 = 3r^2$$

$$\frac{s}{r} = \sqrt{3}$$

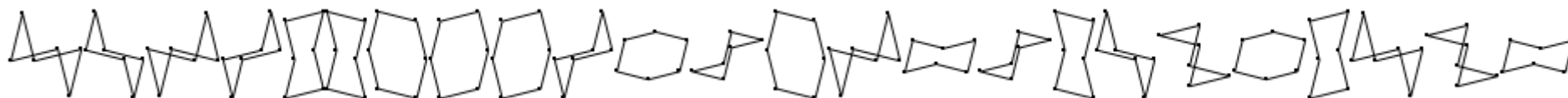
To ale pro $0 < r < s$ nemůže splňovat žádné **racionální číslo**.

Obrátme nyní ještě pozornost k tomu, jak se liší možné grafy v kritické skupině "8" - **čisté cykly** (v teorii grafů jsou označovány jako kružnice = [cycle graph](#)).

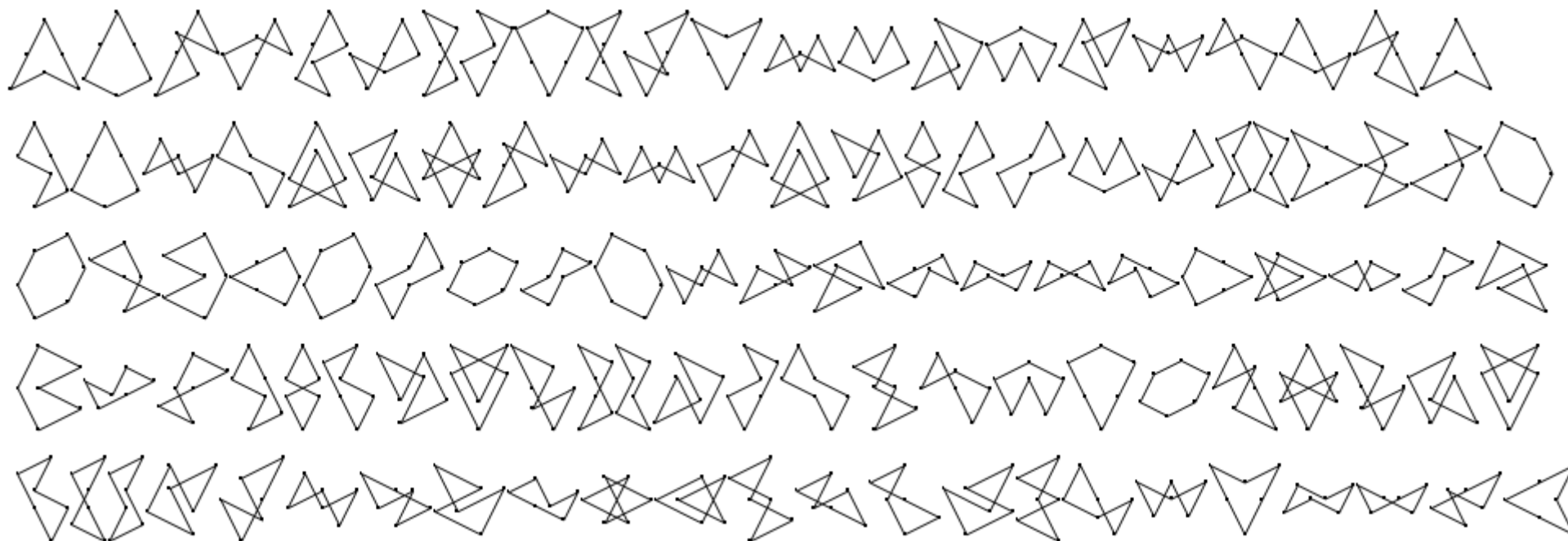
Pro **6 zebř** (skokanů [2,3]) existuje (při zafixovaných prvních 2 kamenech) celkem těchto 24 typů čistých cyklů (v důsledku symetrie mohou být některé shodné nebo jen různě otočené):



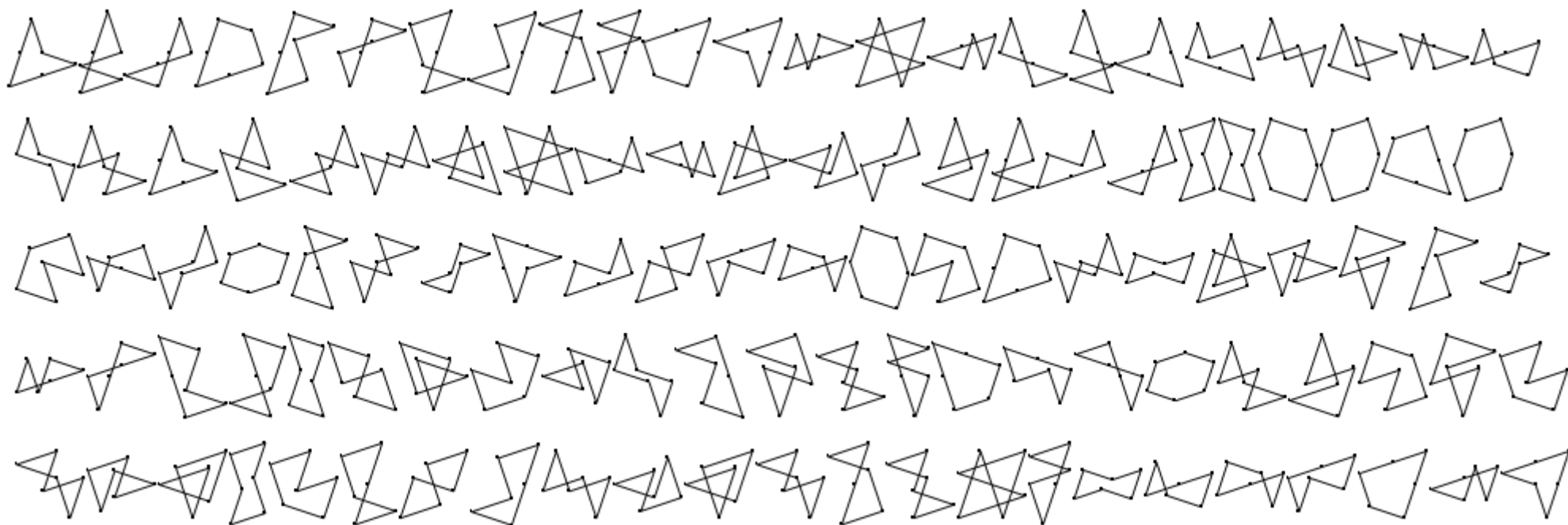
Stejný počet 24 typů čistých cyklů existuje pro **6 žiraf** (skokanů [1,4]). Vidíme, že pro žirafy jsou počty možných konfigurací ve všech skupinách shodné jako pro zebry, je proto velmi pravděpodobné, že i pro rozmístění 6 neohrožujících se žiraf na prstencové šachovnici bude (při $n > 6s$) platit stejný vzorec jako pro rozmístění 6 neohrožujících se zebř.



Pro **6 jezdců** (skokanů [1,2]) ale existuje celkem těchto 114 typů čistých cyklů. **Jsou zde tedy cykly, které pro zebry nebo žirafy nejsou možné a vzorce pro počty neohrožujících se kamenů se z tohoto důvodu liší!**



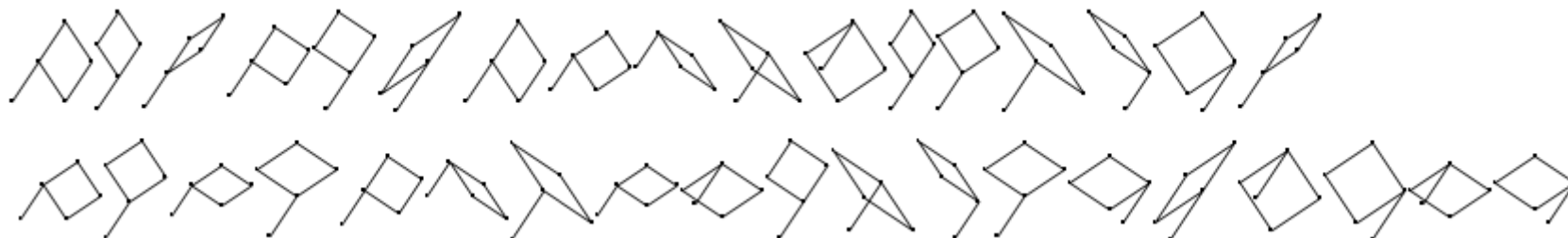
Pro **6 velbloudů** (skokanů [1,3]) existuje stejný počet 114 typů čistých cyklů jako pro jezdce (vzorce pro oba typy skokanů jsou shodné):



Pro porovnání: tady jsou možné konfigurace **5 jezdců** (ve skupině "32" existuje 36 možností)



a možné konfigurace **5 zebí** (ve skupině "32" je stejný počet 36 možných konfigurací, vzorce pro $k=5$ pro jezdce i zebry jsou shodné)



6 Leapers on an n x n toroidal chessboard								
n	6 knights	6 camels	6 zebras	6 wazirs	6 ferses	6 dabbabas	6 leapers [0,3]	6 leapers [3,3]
1								
2								
3	0	0	0	0	0	0	84	84
4	56	112	56	56	112	416	56	112
5	0	0	7100	7100	7100	7100	7100	7100
6	54972	253032	252792	252792	253032	221832	715680	1188096
7	764596	764596	764596	3378942	3378942	3378942	3378942	3378942
8	8972896	9498976	8972896	26249184	26249184	26282848	26249184	26249184
9	62560728	62560728	62560728	144455454	144455454	144455454	142068816	142068816
10	322246800	323124600	325631900	625745100	625745100	625741900	625745100	625745100
11	1323868260	1323868260	1323868260	2271361422	2271361422	2271361422	2271361422	2271361422
12	4595943336	4598544120	4598530296	7192874328	7192874328	7192874376	7193442552	7196954352
13	14000143196	14000143196	13999957296	20427662398	20427662398	20427662398	20427662398	20427662398
14	38413461800	38413477480	38413461800	53065637212	53065637212	53065637212	53065637212	53065637212
15	96746410800	96746410800	96746398800	127956238350	127956238350	127956238350	127956219900	127956219900
16	226834407552	226834412672	226834407552	289628321664	289628321664	289628321664	289628321664	289628321664
17	500492572112	500492572112	500492554772	620834113614	620834113614	620834113614	620834113614	620834113614
18	1048044384360	1048044386520	1048044367080	1269178026012	1269178026012	1269178026012	1269178026120	1269178028280
19	2096986629308	2096986629308	2096986607648	2488676915070	2488676915070	2488676915070	2488676915070	2488676915070
20	4031211268200	4031211268200	4031211244200	4702895069400	4702895069400	4702895069400	4702895069400	4702895069400
21	7479454058244	7479454058244	7479454031784	8598589878606	8598589878606	8598589878606	8598589878606	8598589878606
22	13444475635448	13444475635448	13444475606408	15261688799500	15261688799500	15261688799500	15261688799500	15261688799500
23	23488010745224	23488010745224	23488010713484	26371002575326	26371002575326	26371002575326	26371002575326	26371002575326
24	39990865034016	39990865034016	39990864999456	44469483656928	44469483656928	44469483656928	44469483656928	44469483656928
25	66512828955000	66512828955000	66512828917500	73338195378750	73338195378750	73338195378750	73338195378750	73338195378750
26	108283461182936	108283461182936	108283461142376	118504613250348	118504613250348	118504613250348	118504613250348	118504613250348
27	172862430072084	172862430072084	172862430028344	187924595632686	187924595632686	187924595632686	187924595632686	187924595632686
28	271017166690088	271017166690088	271017166643048	292886512943640	292886512943640	292886512943640	292886512943640	292886512943640
29	417876268017324	417876268017324	417876267966864	449196803878686	449196803878686	449196803878686	449196803878686	449196803878686
30	634429601512200	634429601512200	634429601458200	678718841739900	678718841739900	678718841739900	678718841739900	678718841739900

10.9) more leapers on an n x n toroidal chessboard - more skokanů na prstencové šachovnici n x n

Na základě všech výsledků, uvedených v kapitole 10.8, se domnívám, že vzorce pro $k=7$ budou opět (v obou skupinách) shodné, ale pro $k=8$ může dojít k dalšímu štěpení na více podskupin se shodnými vzorci (podobně jako pro $k=6$). Tyto hypotézy by ale chtělo ověřit (zatím časově nerealizovatelnými) výpočty.

Pro $k=7$ by proto měly opět existovat pouze 2 skupiny skokanů, každá se stejnými vzorci. Ve skupině 2 byla tato hypotéza potvrzena shodnými vzorci pro vezíry a fersy.

Group 1 ($0 < r < s$)

7 knights, toroidal board $n \times n$, $n \geq 14$

$$n^2 * \frac{n^{12} - 189n^{10} + 16135n^8 - 801255n^6 + 24595984n^4 - 445931556n^2 + 3756080880}{5040}$$

Group 2 ($r = 0$ or $r = s$)

7 wazirs, toroidal board $n \times n$, $n \geq 8$

7 ferses, toroidal board $n \times n$, $n \geq 8$

$$\frac{1}{5040} n^2 (n^{12} - 105n^{10} + 4795n^8 - 122115n^6 + 1834084n^4 - 15461460n^2 + 57441600)$$

Pro $k=8$ je zatím znám pouze jeden vzorec (potvrzující shodné vzorce pro vezíry a fersy):

Group 2 ($r = 0$ or $r = s$)

8 wazirs, toroidal board $n \times n$, $n \geq 9$

8 ferses, toroidal board $n \times n$, $n \geq 9$

$$\frac{1}{40320} n^2 (n^{14} - 140n^{12} + 8722n^{10} - 313880n^8 + 7061089n^6 - 99573740n^4 + 817978188n^2 - 3033601200)$$

11) Riders - Liniové kameny

11.1) 2 riders on an n x n chessboard - 2 liniové kameny na šachovnici n x n

Poněkud komplikovanější než rozmístění neohrožujících se skokanů, je rozmístění neohrožujících se liniových kamenů (*angl. riders*). V předchozích kapitolách jsme již probírali věže (rook = rider [0,1]), střelce (bishop = rider [1,1]) a z exokamenů tátoše (nightrider = rider [1,2]). V této kapitole se zabývám zobecněnými liniovými kameny, které mění své souřadnice s jednotkovým krokem [r,s], což je zejména z matematického hlediska nesmírně zajímavé.

Rider - a piece that moves and captures along a line of squares, e.g. Rook, Bishop, Nightrider etc., without hopping or leaping.

Vytvořující funkce pro počet neohrožujících se dvojic liniových kamenů s jednotkovým tahem [r,s] (kde $r \leq s$) na šachovnici $n \times n$ je *Generating function* for number of two non-attacking riders [r,s] ($r \leq s$) on a $n \times n$ chessboard is

$$G(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^3 * (x^s - 1)^2} \quad (V. Kotěšovec, 2010)$$

Polynom $P(x)$ má stupeň $2s + 2$, stupeň polynomu ve jmenovateli je $2s + 3$, což současně určuje i hloubku rekurence. Perioda je s .

Jak se můžeme přesvědčit, tento vzorec zahrnuje i věže, střelce ($s=1$) a tátoše ($s=2$). Jmenovatel vytvořující funkce nezávisí na r (*denominator is independent on r and dependent only on s*), pouze na větším z čísel r, s . Je například shodný pro všechny liniové kameny s jednotkovými tahy [1,5], [2,5], [3,5] nebo [4,5].

s	denominators	general format
1	$(x-1)^5$	$(x-1)^3 * (x^1 - 1)^2$
2	$(x-1)^5(x+1)^2$	$(x-1)^3 * (x^2 - 1)^2$
3	$(x-1)^5(x^2+x+1)^2$	$(x-1)^3 * (x^3 - 1)^2$
4	$(x-1)^5(x+1)^2(x^2+1)^2$	$(x-1)^3 * (x^4 - 1)^2$
5	$(x-1)^5(x^4+x^3+x^2+x+1)^2$	$(x-1)^3 * (x^5 - 1)^2$
6	$(x-1)^5(x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2$	$(x-1)^3 * (x^6 - 1)^2$
7	$(x-1)^5(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2$	$(x-1)^3 * (x^7 - 1)^2$
11	$(x-1)^5(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2$	$(x-1)^3 * (x^{11} - 1)^2$

Ze jmenovatele vytvořující funkce vyplývá, že pro počet rozmístění 2 liniových kamenů s jednotkovým tahem [r,s] platí obecná rekurence

General recurrence:

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} + 2a_{n-s} - 6a_{n-s-1} + 6a_{n-s-2} - 2a_{n-s-3} - a_{n-2s} + 3a_{n-2s-1} - 3a_{n-2s-2} + a_{n-2s-3}$$

Two [0,1] riders (rooks) on an n x n chessboard

Explicit formula (only for completeness)

$$\frac{1}{2}(n-1)^2n^2$$

Generating function:

$$-\frac{2x^2(x^2+4x+1)}{(x-1)^5}$$

Two [0,2] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 11.5.2010)

$$\frac{1}{4}n(2n^3 - 2n^2 + 2n - 1 + (-1)^n)$$

Alternative formula:

$[x]$ = Floor(x) je celá část (*largest integer not greater than x*)

$$n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{n^3}{2}$$

Generating function:

$$-\frac{2x^2(x^4+4x^3+10x^2+6x+3)}{(x-1)^5(x+1)^2}$$

Two [0,3] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 11.5.2010)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{4n}{9} + \frac{4}{9}n * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Alternative formula:

$$\frac{4}{3}n \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \frac{2}{3}n \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{6}$$

Generating function:

$$-\frac{2x^2(x^6+4x^5+9x^4+17x^3+11x^2+9x+3)}{(x-1)^5(x^2+x+1)^2}$$

Two [0,4] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (*C. Poisson, 1990*)
(Ize vyjádřit jedním vzorcem)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{n^3}{4} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{8} + \frac{n}{8}(-1)^n + \frac{n}{2} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$\begin{array}{ll} 19) \text{ 2 Coureurs (0,4)} : n(n-1)(2n^2+n+3)/4 & \text{si } n \text{ impair} \\ & n^2(2n^2-n+2)/4 & \text{si } n=4k \\ & n(2n^3-n^2+2n-4)/4 & \text{si } n=4k+2 \end{array}$$

rex multiplex n°29 (px 9 / t-64 134/ rm 29)

Alternative formula:

$$\frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + n \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{n^3}{4} - \frac{n^2}{4}$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(x^8 + 4x^7 + 9x^6 + 15x^5 + 24x^4 + 16x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x+1)^2(x^2+1)^2}$$

Two [0,5] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (*V. Kotěšovec, 11.5.2010*)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{n^3}{5} + \frac{n^2}{2} - \frac{4n}{5} + \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\right)n * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5\sqrt{5}}\right)n * \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right)$$

Alternative formula:

$$\frac{8n}{5} \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \frac{6}{5}n \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \frac{4}{5}n \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \frac{2}{5}n \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{n^3}{5} - \frac{3n^2}{10}$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(x^{10} + 4x^9 + 9x^8 + 15x^7 + 21x^6 + 31x^5 + 21x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x^4+x^3+x^2+x+1)^2}$$

Two [0,6] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 11.5.2010)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} - \frac{35n}{36} + \frac{n}{12}(-1)^n + \frac{2}{3}n * \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{2}{9}n * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Alternative formula:

$$\frac{n}{3} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{4n}{3} \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \frac{4}{3}n \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + \frac{2}{3}n \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + \frac{2}{3}n \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{3}$$

Alternative formula 2:

(oba vzorce s celými částmi jsou identické)

$$n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{2}{3}n \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \frac{2}{3}n \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 2n \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{3}$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(x^{12} + 4x^{11} + 9x^{10} + 15x^9 + 21x^8 + 27x^7 + 38x^6 + 26x^5 + 27x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2}$$

Two [0,7] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 9.12.2010)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{14}(7n^3 - 2n^2 + 7n - 16)n - \frac{6n \sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)}{49 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{12n \sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{49 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} - \frac{4n \sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{49 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{10n \sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{49 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{2n \cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right)}{49 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} - \frac{4n \cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right)}{49 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{4n \cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right)}{49 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} \\ & + \frac{10n \cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right)}{49 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} - \frac{6n \sin\left(\frac{6\pi n}{7}\right)}{49 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{8n \sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{49 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} - \frac{10n \sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{49 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{12n \sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{49 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{6n \sin\left(\frac{4\pi n}{7}\right)}{49 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} - \frac{2n \sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{49 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{12n \sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{49 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} \\ & - \frac{8n \sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{49 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} - \frac{2n \cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right)}{49 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{8n \cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right)}{49 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \end{aligned}$$

Alternative formula (V. Kotěšovec, 21.5.2010)

$$\frac{1}{14}n \left(-5n - 2n^2 + 7n^3 + 24 \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{1+n}{7} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{2+n}{7} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{3+n}{7} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{4+n}{7} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{5+n}{7} \right\rfloor \right)$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(x^{14} + 4x^{13} + 9x^{12} + 15x^{11} + 21x^{10} + 27x^9 + 33x^8 + 45x^7 + 31x^6 + 33x^5 + 27x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2}$$

Two [1,1] riders (**bishops**) on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (only for completeness)

$$\frac{1}{6}n(n-1)(3n^2 - n + 2)$$

Generating function:

$$-\frac{2x^2(x+1)(x+2)}{(x-1)^5}$$

Two [1,2] riders (**nightriders**) on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (*C. Poisson, 1990*)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{5n^3}{6} + \frac{3n^2}{2} - \frac{11n}{12} + \frac{n}{4}(-1)^n$$

Alternative formula:

$$n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{5n^3}{6} + n^2 - \frac{2n}{3}$$

Generating function:

$$-\frac{2x^2(x^2 + 2x + 3)(2x^2 + x + 1)}{(x-1)^5(x+1)^2}$$

Two [1,3] riders (Camelriders = Mehari) on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (*Christian Poisson, 1990*)

$$\frac{1}{54}n(27n^3 - 32n^2 + 81n - 36) \quad \text{for } n = 3k \quad (\text{vzorec pro tento případ byl v původním článku Rex Multiplex 30/1990, str. 915, uveden chybně})$$

$$\frac{1}{54}(n-1)(27n^3 - 5n^2 + 76n - 8) \quad \text{for } n = 3k+1$$

$$\frac{1}{54}(27n^4 - 32n^3 + 81n^2 - 84n - 8) \quad \text{for } n = 3k+2$$

Odvodil jsem tento jeden obecný vzorec:

$$\frac{1}{162} * \left(81n^4 - 96n^3 + 243n^2 - 204n + 16\sqrt{3} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 96n * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right)$$

Alternative formula:

$$\frac{16}{9}n \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{9} - \frac{4}{9} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{16n^3}{27} + \frac{11n^2}{18} - \frac{14n}{27}$$

Generating function:

$$-\frac{2x^2(2x^6 + 5x^5 + 9x^4 + 17x^3 + 9x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x^2+x+1)^2}$$

Two [1,4] riders (Girafferiders) on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (*V. Kotěšovec, 3.5.2010*)

$$\frac{1}{48} * \left(24n^4 - 22n^3 + 72n^2 - 77n + 9n * (-1)^n + 12 * \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 36n * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right)$$

Alternative formula:

$$\left(\frac{3n}{4} - \frac{1}{2} \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{3n}{2} + \frac{1}{2} \right) \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left(\frac{3n}{2} - \frac{1}{2} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{11n^3}{24} + \frac{3n^2}{8} - \frac{5n}{12}$$

Generating function:

$$-\frac{2x^2(2x^8 + 5x^7 + 9x^6 + 15x^5 + 25x^4 + 13x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x+1)^2(x^2+1)^2}$$

Two [1,5] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 3.5.2010)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{28n^3}{75} + \frac{3n^2}{2} - \frac{146n}{75} + \frac{4}{125} \sqrt{50 + 22\sqrt{5}} * \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{4}{125} \sqrt{50 - 22\sqrt{5}} * \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + \left(\frac{16}{25} + \frac{16}{25\sqrt{5}}\right) * n * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \left(\frac{16}{25} - \frac{16}{25\sqrt{5}}\right) * n * \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right)$$

Alternative formula:

$$\frac{64}{25} n \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left(\frac{48n}{25} - \frac{12}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \left(\frac{32n}{25} - \frac{16}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \left(\frac{16n}{25} - \frac{12}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{28n^3}{75} + \frac{11n^2}{50} - \frac{26n}{75}$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{10} + 5x^9 + 9x^8 + 15x^7 + 21x^6 + 33x^5 + 17x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2}$$

Two [1,6] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 3.5.2010)

$$\frac{1}{324} * \left(162n^4 - 102n^3 + 486n^2 - 741n + 45n * (-1)^n + 72\sqrt{3} * \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + 8\sqrt{3} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 360n * \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + 120n * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)$$

Alternative formula:

$$\left(\frac{5n}{9} - \frac{4}{9}\right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{20n}{9} + \frac{4}{9}\right) \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left(\frac{20n}{9} - \frac{4}{9}\right) \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + \left(\frac{10n}{9} - \frac{2}{9}\right) \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + \left(\frac{10n}{9} - \frac{2}{9}\right) \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{17n^3}{54} + \frac{n^2}{9} - \frac{8n}{27}$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{12} + 5x^{11} + 9x^{10} + 15x^9 + 21x^8 + 27x^7 + 41x^6 + 21x^5 + 27x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2}$$

Two [1,7] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 9.12.2010)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{294} (147n^3 - 80n^2 + 441n - 772)n + \frac{36(1-2n) \sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{144n \sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{16(2-3n) \sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{20(6n-1) \sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{4(6n-5) \cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \\ & + \frac{16(2-3n) \cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{16(3n-2) \cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{20(6n-1) \cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{36(1-2n) \sin\left(\frac{6\pi n}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{32(3n-1) \sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \\ & + \frac{20(1-6n) \sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{144n \sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{36(2n-1) \sin\left(\frac{4\pi n}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{4(5-6n) \sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{144n \sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{32(1-3n) \sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} \\ & + \frac{4(5-6n) \cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{32(3n-1) \cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \end{aligned}$$

Alternative formula (V. Kotěšovec, 21.5.2010)

$$\frac{1}{294} * \left(-76n + 9n^2 - 80n^3 + 147n^4 + 864n \left[\frac{n}{7} \right] + (720n - 120) \left[\frac{1+n}{7} \right] + (576n - 192) \left[\frac{2+n}{7} \right] + (432n - 216) \left[\frac{3+n}{7} \right] + (288n - 192) \left[\frac{4+n}{7} \right] + (144n - 120) \left[\frac{5+n}{7} \right] \right)$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{14} + 5x^{13} + 9x^{12} + 15x^{11} + 21x^{10} + 27x^9 + 33x^8 + 49x^7 + 25x^6 + 33x^5 + 27x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2}$$

Two [2,2] riders (Alfilriders) on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 11.5.2010)

$$\frac{1}{6} n(n-1)(3n^2 + n + 4)$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(x^2 + 2x + 3)}{(x-1)^5}$$

Two [2,3] riders (Zebrariders) on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 3.5.2010)

$$\frac{1}{162} * \left(81n^4 - 84n^3 + 243n^2 - 264n + 32\sqrt{3} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 48n * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right)$$

Alternative formula:

$$\frac{8}{9}n \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left(\frac{4n}{9} - \frac{8}{9} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{14n^3}{27} + \frac{19n^2}{18} - \frac{28n}{27}$$

Generating function:

$$-\frac{2x^2(2x^6 + 5x^5 + 9x^4 + 15x^3 + 11x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x^2+x+1)^2}$$

Two [2,4] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 11.5.2010)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{5n^3}{12} + \frac{3n^2}{2} - \frac{47n}{24} + \frac{n}{8}(-1)^n + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{2}n * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Alternative formula:

$$\left(\frac{n}{2} - 1\right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (n+1) \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + (n-1) \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{5n^3}{12} + \frac{3n^2}{4} - \frac{5n}{6}$$

Generating function:

$$-\frac{2x^2(2x^8 + 5x^7 + 9x^6 + 15x^5 + 23x^4 + 15x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x+1)^2(x^2+1)^2}$$

Two [2,5] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 3.5.2010)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{26n^3}{75} + \frac{3n^2}{2} - \frac{172n}{75} + \frac{8}{125} \sqrt{50 + 22\sqrt{5}} * \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{8}{125} \sqrt{50 - 22\sqrt{5}} * \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + \left(\frac{12}{25} + \frac{12}{25\sqrt{5}}\right) * n * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \left(\frac{12}{25} - \frac{12}{25\sqrt{5}}\right) * n * \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right)$$

Alternative formula:

$$\frac{48}{25} n \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left(\frac{36n}{25} - \frac{24}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \left(\frac{24n}{25} - \frac{32}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \left(\frac{12n}{25} - \frac{24}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{26n^3}{75} + \frac{27n^2}{50} - \frac{52n}{75}$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{10} + 5x^9 + 9x^8 + 15x^7 + 21x^6 + 31x^5 + 19x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2}$$

Two [2,6] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 11.5.2010)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{8n^3}{27} + \frac{3n^2}{2} - \frac{71n}{27} + \frac{n}{9} * (-1)^n + \frac{4}{3\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{4}{27\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{8}{9} n * \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{8}{27} n * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Alternative formula:

$$\left(\frac{4n}{9} - \frac{8}{9}\right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{16n}{9} + \frac{8}{9}\right) \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left(\frac{16n}{9} - \frac{8}{9}\right) \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{9} - \frac{4}{9}\right) \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{9} - \frac{4}{9}\right) \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{8n^3}{27} + \frac{7n^2}{18} - \frac{16n}{27}$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{12} + 5x^{11} + 9x^{10} + 15x^9 + 21x^8 + 27x^7 + 39x^6 + 23x^5 + 27x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2}$$

Two [2,7] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 9.12.2010)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{294} (147n^3 - 76n^2 + 441n - 872)n + \frac{12(6-5n) \sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{120n \sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{8(8-5n) \sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{20(5n-2) \sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{20(n-2) \cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \\ & + \frac{8(8-5n) \cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{8(5n-8) \cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{20(5n-2) \cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{12(6-5n) \sin\left(\frac{6\pi n}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{16(5n-4) \sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{20(2-5n) \sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \\ & + \frac{120n \sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{12(5n-6) \sin\left(\frac{4\pi n}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{20(2-n) \sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{120n \sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{16(4-5n) \sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{20(2-n) \cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \\ & + \frac{16(5n-4) \cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \end{aligned}$$

Alternative formula (V. Kotěšovec, 21.5.2010)

$$\frac{1}{294} * \left(-152n + 81n^2 - 76n^3 + 147n^4 + 720n \left[\frac{n}{7} \right] + (600n - 240) \left[\frac{1+n}{7} \right] + (480n - 384) \left[\frac{2+n}{7} \right] + (360n - 432) \left[\frac{3+n}{7} \right] + (240n - 384) \left[\frac{4+n}{7} \right] + (120n - 240) \left[\frac{5+n}{7} \right] \right)$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{14} + 5x^{13} + 9x^{12} + 15x^{11} + 21x^{10} + 27x^9 + 33x^8 + 47x^7 + 27x^6 + 33x^5 + 27x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2}$$

Two [3,3] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formulas (*C. Poisson, 1990*)

$$\frac{1}{18}n(9n^3 - 4n^2 + 9n - 18) \quad n = 3k$$

$$\frac{1}{18}(n-1)(9n^3 + 5n^2 + 14n - 4) \quad n = 3k + 1 \text{ (tento p\u0159\u00edpad byl v p\u016fvodn\u00edm \u010dl\u00e1nku v Rex Multiplexu 1990 uveden chybn\u011b)}$$

$$\frac{1}{18}(9n^4 - 4n^3 + 9n^2 - 18n - 4) \quad n = 3k + 2$$

Jedn\u00edm vzorcem:

$$\frac{n^4}{2} - \frac{2n^3}{9} + \frac{n^2}{2} - n + \frac{4}{9\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Alternative formula:

$$-\frac{2}{3}\left\lfloor\frac{n+1}{3}\right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{2n^3}{9} + \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{9}$$

Generating function:

$$-\frac{2x^2(x+1)(x^3+2x^2+3x+3)}{(x-1)^5(x^2+x+1)}$$

Two [3,4] riders (Anteloperiders) on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (*V. Kot\u011b\u0161ovec, 3.5.2010*)

$$\frac{1}{16} * \left(8n^4 - 6n^3 + 24n^2 - 37n + n * (-1)^n + 12 * \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 4n * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)$$

Alternative formula:

$$\left(\frac{n}{4} - \frac{3}{2}\right)\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right)\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor + \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\right)\left\lfloor\frac{n+1}{4}\right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{3n^3}{8} + \frac{9n^2}{8} - \frac{5n}{4}$$

Generating function:

$$-\frac{2x^2(2x^8 + 5x^7 + 9x^6 + 15x^5 + 21x^4 + 17x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x+1)^2(x^2+1)^2}$$

Two [3,5] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 3.5.2010)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{8n^3}{25} + \frac{3n^2}{2} - \frac{66n}{25} + \frac{12}{125}\sqrt{50 + 22\sqrt{5}} * \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{12}{125}\sqrt{50 - 22\sqrt{5}} * \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + \left(\frac{8}{25} + \frac{8}{25\sqrt{5}}\right) * n * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \left(\frac{8}{25} - \frac{8}{25\sqrt{5}}\right) * n * \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right)$$

Alternative formula:

$$\frac{32}{25}n \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left(\frac{24n}{25} - \frac{36}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \left(\frac{16n}{25} - \frac{48}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{25} - \frac{36}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{8n^3}{25} + \frac{43n^2}{50} - \frac{26n}{25}$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{10} + 5x^9 + 9x^8 + 15x^7 + 21x^6 + 29x^5 + 21x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2}$$

Two [3,6] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 11.5.2010)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{5n^3}{18} + \frac{3n^2}{2} - \frac{107n}{36} + \frac{n}{12} * (-1)^n + \frac{2}{\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{2}{9\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{2}{3}n * \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{2}{9}n * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Alternative formula:

$$\left(\frac{n}{3} - \frac{4}{3}\right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{4n}{3} + \frac{4}{3}\right) \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left(\frac{4n}{3} - \frac{4}{3}\right) \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + \left(\frac{2n}{3} - \frac{2}{3}\right) \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + \left(\frac{2n}{3} - 2\right) \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{5n^3}{18} + \frac{2n^2}{3} - \frac{8n}{9}$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{12} + 5x^{11} + 9x^{10} + 15x^9 + 21x^8 + 27x^7 + 37x^6 + 25x^5 + 27x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2}$$

Two [3,7] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 9.12.2010)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{98} (49n^3 - 24n^2 + 147n - 324)n + \frac{12(9-4n) \sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{96n \sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{32(3-n) \sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{20(4n-3) \sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{4(4n-15) \cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \\ & + \frac{32(3-n) \cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{32(n-3) \cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{20(4n-3) \cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{12(9-4n) \sin\left(\frac{6\pi n}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{32(2n-3) \sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{20(3-4n) \sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \\ & + \frac{96n \sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{12(4n-9) \sin\left(\frac{4\pi n}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{4(15-4n) \sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{96n \sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{32(3-2n) \sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{4(15-4n) \cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \\ & + \frac{32(2n-3) \cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right)}{343 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \end{aligned}$$

Alternative formula (V. Kotěšovec, 21.5.2010)

$$\frac{1}{98} * \left(-76n + 51n^2 - 24n^3 + 49n^4 + 192n \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + (160n - 120) \left\lfloor \frac{1+n}{7} \right\rfloor + (128n - 192) \left\lfloor \frac{2+n}{7} \right\rfloor + (96n - 216) \left\lfloor \frac{3+n}{7} \right\rfloor + (64n - 192) \left\lfloor \frac{4+n}{7} \right\rfloor + (32n - 120) \left\lfloor \frac{5+n}{7} \right\rfloor \right)$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{14} + 5x^{13} + 9x^{12} + 15x^{11} + 21x^{10} + 27x^9 + 33x^8 + 45x^7 + 29x^6 + 33x^5 + 27x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2}$$

Two [4,4] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 11.5.2010)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} - \frac{4n}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Alternative formula:

$$- \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3)}{(x-1)^5(x^2 + 1)}$$

Two [4,5] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 3.5.2010)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{22n^3}{75} + \frac{3n^2}{2} - \frac{224n}{75} + \frac{16}{125}\sqrt{50 + 22\sqrt{5}} * \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{16}{125}\sqrt{50 - 22\sqrt{5}} * \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + \left(\frac{4}{25} + \frac{4}{25\sqrt{5}}\right) * n * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \left(\frac{4}{25} - \frac{4}{25\sqrt{5}}\right) * n * \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right)$$

Alternative formula:

$$\frac{16}{25}n \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left(\frac{12n}{25} - \frac{48}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{25} - \frac{64}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \left(\frac{4n}{25} - \frac{48}{25}\right) \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{22n^3}{75} + \frac{59n^2}{50} - \frac{104n}{75}$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{10} + 5x^9 + 9x^8 + 15x^7 + 21x^6 + 27x^5 + 23x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2}$$

Two [4,6] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 11.5.2010)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{7n^3}{27} + \frac{3n^2}{2} - \frac{179n}{54} + \frac{n}{18} * (-1)^n + \frac{8}{3\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{8}{27\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{4}{9}n * \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{4}{27}n * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Alternative formula:

$$\left(\frac{2n}{9} - \frac{16}{9}\right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{9} + \frac{16}{9}\right) \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{9} - \frac{16}{9}\right) \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + \left(\frac{4n}{9} - \frac{8}{9}\right) \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + \left(\frac{4n}{9} - \frac{8}{3}\right) \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{7n^3}{27} + \frac{17n^2}{18} - \frac{32n}{27}$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{12} + 5x^{11} + 9x^{10} + 15x^9 + 21x^8 + 27x^7 + 35x^6 + 27x^5 + 27x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2}$$

Two [4,7] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 9.12.2010)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{294}(147n^3 - 68n^2 + 441n - 1072)n + \frac{36(4-n)\sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{72n\sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{8(16-3n)\sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{20(3n-4)\sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{4(3n-20)\cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \\ & + \frac{8(16-3n)\cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{8(3n-16)\cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{20(3n-4)\cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{36(4-n)\sin\left(\frac{6\pi n}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{16(3n-8)\sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \\ & + \frac{20(4-3n)\sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{72n\sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{36(n-4)\sin\left(\frac{4\pi n}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{4(20-3n)\sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{72n\sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{16(8-3n)\sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} \\ & + \frac{4(20-3n)\cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{16(3n-8)\cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \end{aligned}$$

Alternative formula (V. Kotěšovec, 21.5.2010)

$$\frac{1}{294} * \left(-304n + 225n^2 - 68n^3 + 147n^4 + 432n \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + (360n - 480) \left\lfloor \frac{1+n}{7} \right\rfloor + (288n - 768) \left\lfloor \frac{2+n}{7} \right\rfloor + (216n - 864) \left\lfloor \frac{3+n}{7} \right\rfloor + (144n - 768) \left\lfloor \frac{4+n}{7} \right\rfloor + (72n - 480) \left\lfloor \frac{5+n}{7} \right\rfloor \right)$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{14} + 5x^{13} + 9x^{12} + 15x^{11} + 21x^{10} + 27x^9 + 33x^8 + 43x^7 + 31x^6 + 33x^5 + 27x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2}$$

Two [5,5] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 11.5.2010)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{2n^3}{15} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{3} + \frac{2}{25}\sqrt{50 + 22\sqrt{5}} * \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{2}{25}\sqrt{50 - 22\sqrt{5}} * \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right)$$

Alternative formula:

$$-\frac{6}{5}\left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor - \frac{8}{5}\left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor - \frac{6}{5}\left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{2n^3}{15} + \frac{n^2}{2} - \frac{13n}{15}$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(x+1)(x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 3)}{(x-1)^5(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}$$

Two [5,6] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 11.5.2010)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{13n^3}{54} + \frac{3n^2}{2} - \frac{395n}{108} + \frac{n}{36} * (-1)^n + \frac{10}{3\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{10}{27\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{2}{9}n * \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{2}{27}n * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Alternative formula:

$$\left(\frac{n}{9} - \frac{20}{9}\right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{4n}{9} + \frac{20}{9}\right) \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left(\frac{4n}{9} - \frac{20}{9}\right) \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + \left(\frac{2n}{9} - \frac{10}{9}\right) \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + \left(\frac{2n}{9} - \frac{10}{9}\right) \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{13n^3}{54} + \frac{11n^2}{9} - \frac{40n}{27}$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{12} + 5x^{11} + 9x^{10} + 15x^9 + 21x^8 + 27x^7 + 33x^6 + 29x^5 + 27x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2}$$

Two [5,7] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 9.12.2010)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{294}(147n^3 - 64n^2 + 441n - 1172)n + \frac{12(15-2n)\sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{48n\sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{16(10-n)\sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{20(2n-5)\sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{4(2n-25)\cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{16(10-n)\cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \\ & + \frac{16(n-10)\cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{20(2n-5)\cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{12(15-2n)\sin\left(\frac{6\pi n}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{32(n-5)\sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{20(5-2n)\sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{48n\sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \\ & + \frac{12(2n-15)\sin\left(\frac{4\pi n}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{4(25-2n)\sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{48n\sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{32(5-n)\sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{4(25-2n)\cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{32(n-5)\cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \end{aligned}$$

Alternative formula (V. Kotěšovec, 21.5.2010)

$$\frac{1}{294}(-380n + 297n^2 - 64n^3 + 147n^4 + 288n \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + (240n - 600) \left\lfloor \frac{1+n}{7} \right\rfloor + (192n - 960) \left\lfloor \frac{2+n}{7} \right\rfloor + (144n - 1080) \left\lfloor \frac{3+n}{7} \right\rfloor + (96n - 960) \left\lfloor \frac{4+n}{7} \right\rfloor + (48n - 600) \left\lfloor \frac{5+n}{7} \right\rfloor)$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{14} + 5x^{13} + 9x^{12} + 15x^{11} + 21x^{10} + 27x^9 + 33x^8 + 41x^7 + 33x^6 + 33x^5 + 27x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2}$$

Two [6,6] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 11.5.2010)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{n^3}{9} + \frac{n^2}{2} - 2n + \frac{2}{\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{2}{9\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Alternative formula:

$$-\frac{4}{3} \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor - \frac{4}{3} \left\lfloor \frac{n+4}{6} \right\rfloor + \frac{n^4}{2} - \frac{n^3}{9} + \frac{n^2}{2} - \frac{8n}{9}$$

Generating function:

$$-\frac{2x^2(x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 3)}{(x-1)^5(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

Two [6,7] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 9.12.2010)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{98}(49n^3 - 20n^2 + 147n - 424)n + \frac{12(18-n)\sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{24n\sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{8(24-n)\sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{20(n-6)\sin\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{4(n-30)\cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{8(24-n)\cos\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \\ & + \frac{8(n-24)\cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{20(n-6)\cos\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{5\pi}{14}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{12(18-n)\sin\left(\frac{6\pi n}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{16(n-12)\sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{20(6-n)\sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{24n\sin\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} + \frac{12(n-18)\sin\left(\frac{4\pi n}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} \\ & + \frac{4(30-n)\sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{24n\sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{2\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{16(12-n)\sin\left(\frac{4\pi n}{7} + \frac{3\pi}{7}\right)}{343\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{4(30-n)\cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{14}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{16(n-12)\cos\left(\frac{2\pi n}{7} + \frac{3\pi}{14}\right)}{343\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \end{aligned}$$

Alternative formula (V. Kotěšovec, 21.5.2010)

$$\frac{1}{98} \left(-152n + 123n^2 - 20n^3 + 49n^4 + 48n \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + (40n - 240) \left\lfloor \frac{1+n}{7} \right\rfloor + (32n - 384) \left\lfloor \frac{2+n}{7} \right\rfloor + (24n - 432) \left\lfloor \frac{3+n}{7} \right\rfloor + (16n - 384) \left\lfloor \frac{4+n}{7} \right\rfloor + (8n - 240) \left\lfloor \frac{5+n}{7} \right\rfloor \right)$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{14} + 5x^{13} + 9x^{12} + 15x^{11} + 21x^{10} + 27x^9 + 33x^8 + 39x^7 + 35x^6 + 33x^5 + 27x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2}$$

Two [7,7] riders on an n x n chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 9.12.2010)

$$\frac{n^4}{2} - \frac{2n^3}{21} + \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{3} + \frac{18 - 20 \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) + 32 \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)}{49 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} * \sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right) + \frac{-18 + 32 \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) + 20 \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{49 \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} * \sin\left(\frac{4\pi n}{7}\right) + \frac{18 + 20 \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) - 32 \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{49 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} * \sin\left(\frac{6\pi n}{7}\right)$$

Alternative formula (V. Kotěšovec, 21.5.2010)

$$\frac{1}{42} \left(-38n + 21n^2 - 4n^3 + 21n^4 - 60 \left[\frac{1+n}{7} \right] - 96 \left[\frac{2+n}{7} \right] - 108 \left[\frac{3+n}{7} \right] - 96 \left[\frac{4+n}{7} \right] - 60 \left[\frac{5+n}{7} \right] \right)$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(x+1)(x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 3)}{(x-1)^5(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}$$

Two [7,11] riders on an n x n chessboard

(náhodně vybraný kámen s delším jednotkovým krokem - *one randomly selected rider*)

Explicit formula (V. Kotěšovec, 9.12.2010)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{726}(363n^3 - 104n^2 + 1089n - 4348)n + \frac{4(4n-63)\cos\left(\frac{3\pi}{22} + \frac{10n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)} + \frac{32(14-n)\cos\left(\frac{5\pi}{22} + \frac{10n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)} + \frac{12(4n-49)\cos\left(\frac{7\pi}{22} + \frac{10n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)} + \frac{32(21-2n)\cos\left(\frac{9\pi}{22} + \frac{10n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)} + \frac{20(35-4n)\sin\left(\frac{10n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)} + \frac{96(n-7)\sin\left(\frac{10n\pi}{11} + \frac{\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)} \\ & + \frac{28(21-4n)\sin\left(\frac{2\pi}{11} + \frac{10n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)} + \frac{64(2n-7)\sin\left(\frac{3\pi}{11} + \frac{10n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)} + \frac{36(7-4n)\sin\left(\frac{4\pi}{11} + \frac{10n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)} + \frac{160n\sin\left(\frac{5\pi}{11} + \frac{10n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)} + \frac{28(4n-21)\cos\left(\frac{8n\pi}{11} + \frac{\pi}{22}\right)}{1331\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right)} + \frac{32(2n-21)\cos\left(\frac{5\pi}{22} + \frac{8n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right)} + \frac{64(7-2n)\cos\left(\frac{7\pi}{22} + \frac{8n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right)} \\ & + \frac{4(4n-63)\cos\left(\frac{9\pi}{22} + \frac{8n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right)} + \frac{20(4n-35)\sin\left(\frac{8n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right)} + \frac{36(7-4n)\sin\left(\frac{8n\pi}{11} + \frac{\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right)} + \frac{32(n-14)\sin\left(\frac{2\pi}{11} + \frac{8n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right)} + \frac{96(7-n)\sin\left(\frac{3\pi}{11} + \frac{8n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right)} + \frac{160n\sin\left(\frac{4\pi}{11} + \frac{8n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right)} + \frac{12(4n-49)\sin\left(\frac{5\pi}{11} + \frac{8n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{3\pi}{22}\right)} \\ & + \frac{32(21-2n)\cos\left(\frac{6n\pi}{11} + \frac{\pi}{22}\right)}{1331\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right)} + \frac{32(n-14)\cos\left(\frac{3\pi}{22} + \frac{6n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right)} + \frac{36(4n-7)\cos\left(\frac{7\pi}{22} + \frac{6n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right)} + \frac{28(21-4n)\cos\left(\frac{9\pi}{22} + \frac{6n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right)} + \frac{20(35-4n)\sin\left(\frac{6n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right)} + \frac{12(4n-49)\sin\left(\frac{6n\pi}{11} + \frac{\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right)} + \frac{4(63-4n)\sin\left(\frac{2\pi}{11} + \frac{6n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right)} \\ & + \frac{160n\sin\left(\frac{3\pi}{11} + \frac{6n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right)} + \frac{64(7-2n)\sin\left(\frac{4\pi}{11} + \frac{6n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right)} + \frac{96(n-7)\sin\left(\frac{5\pi}{11} + \frac{6n\pi}{11}\right)}{1331\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right)} + \frac{32(14-n)\cos\left(\frac{2n\pi}{11} + \frac{\pi}{22}\right)}{1331\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} + \frac{28(4n-21)\cos\left(\frac{3\pi}{22} + \frac{2n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} + \frac{4(63-4n)\cos\left(\frac{5\pi}{22} + \frac{2n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} + \frac{96(n-7)\cos\left(\frac{7\pi}{22} + \frac{2n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} \\ & + \frac{20(35-4n)\sin\left(\frac{2n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} + \frac{160n\sin\left(\frac{2n\pi}{11} + \frac{\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} + \frac{32(21-2n)\sin\left(\frac{2\pi}{11} + \frac{2n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} + \frac{36(4n-7)\sin\left(\frac{3\pi}{11} + \frac{2n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} + \frac{12(4n-49)\sin\left(\frac{4\pi}{11} + \frac{2n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} + \frac{64(2n-7)\sin\left(\frac{5\pi}{11} + \frac{2n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} + \frac{36(4n-7)\cos\left(\frac{4n\pi}{11} + \frac{\pi}{22}\right)}{1331\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)} \\ & + \frac{96(7-n)\cos\left(\frac{3\pi}{22} + \frac{4n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)} + \frac{12(4n-49)\cos\left(\frac{5\pi}{22} + \frac{4n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)} + \frac{64(2n-7)\cos\left(\frac{9\pi}{22} + \frac{4n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)} + \frac{20(4n-35)\sin\left(\frac{4n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)} + \frac{32(14-n)\sin\left(\frac{4n\pi}{11} + \frac{\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)} + \frac{160n\sin\left(\frac{2\pi}{11} + \frac{4n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)} + \frac{28(21-4n)\sin\left(\frac{3\pi}{11} + \frac{4n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)} \\ & + \frac{32(2n-21)\sin\left(\frac{4\pi}{11} + \frac{4n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)} + \frac{4(63-4n)\sin\left(\frac{5\pi}{11} + \frac{4n\pi}{11}\right)}{1331\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)} \end{aligned}$$

Alternative formula (V. Kotěšovec, 21.5.2010)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{726} * \left(-868n + 609n^2 - 104n^3 + 363n^4 + 960n \left[\frac{n}{11} \right] + (864n - 1512) \left[\frac{1+n}{11} \right] + (768n - 2688) \left[\frac{2+n}{11} \right] + (672n - 3528) \left[\frac{3+n}{11} \right] + (576n - 4032) \left[\frac{4+n}{11} \right] \right. \\ & \quad \left. + (480n - 4200) \left[\frac{5+n}{11} \right] + (384n - 4032) \left[\frac{6+n}{11} \right] + (288n - 3528) \left[\frac{7+n}{11} \right] + (192n - 2688) \left[\frac{8+n}{11} \right] + (96n - 1512) \left[\frac{9+n}{11} \right] \right) \end{aligned}$$

Generating function:

$$\frac{2x^2(2x^{22} + 5x^{21} + 9x^{20} + 15x^{19} + 21x^{18} + 27x^{17} + 33x^{16} + 39x^{15} + 45x^{14} + 51x^{13} + 57x^{12} + 69x^{11} + 53x^{10} + 57x^9 + 51x^8 + 45x^7 + 39x^6 + 33x^5 + 27x^4 + 21x^3 + 15x^2 + 9x + 3)}{(x-1)^5(x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2}$$

2 Riders on an $n \times n$ chessboard

n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]
1																	
2	2	6	6	6	6	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6
3	18	30	36	36	36	36	36	26	28	36	36	36	36	36	34	36	36
4	72	104	112	120	120	120	120	92	96	108	120	120	120	120	112	112	120
5	200	260	280	290	300	300	300	240	240	268	284	300	300	300	280	276	288
6	450	558	594	606	618	630	630	520	518	570	590	610	630	630	590	582	598
7	882	1050	1106	1134	1148	1162	1176	994	980	1060	1104	1128	1152	1176	1106	1084	1116
8	1568	1824	1904	1952	1968	1984	2000	1736	1712	1828	1904	1932	1960	1988	1904	1864	1920
9	2592	2952	3078	3132	3168	3186	3204	2832	2784	2964	3052	3112	3144	3176	3072	3012	3080
10	4050	4550	4710	4790	4850	4870	4890	4380	4310	4542	4670	4770	4806	4842	4710	4614	4710
11	6050	6710	6930	7040	7106	7150	7172	6490	6380	6696	6872	6984	7060	7100	6930	6792	6924
12	8712	9576	9864	10008	10080	10152	10176	9284	9136	9552	9784	9908	10032	10076	9856	9672	9848
13	12168	13260	13624	13806	13910	13988	14040	12896	12688	13212	13504	13680	13816	13908	13624	13372	13592
14	16562	17934	18382	18606	18746	18830	18914	17472	17206	17854	18214	18450	18598	18746	18382	18054	18326
15	22050	23730	24300	24570	24750	24840	24930	23170	22820	23640	24076	24380	24540	24700	24290	23880	24212
16	28800	30848	31520	31872	32064	32192	32288	30160	29728	30700	31264	31592	31816	31988	31520	31000	31424
17	36992	39440	40256	40664	40902	41072	41174	38624	38080	39256	39912	40316	40612	40796	40256	39616	40112
18	46818	49734	50706	51174	51462	51678	51786	48756	48102	49506	50262	50750	51126	51322	50694	49926	50502
19	58482	61902	63042	63612	63954	64182	64334	60762	59964	61608	62524	63104	63504	63776	63042	62112	62804
20	72200	76200	77520	78200	78600	78840	79040	74860	73920	75828	76920	77600	78024	78380	77520	76416	77240
21	88200	92820	94374	95130	95592	95886	96138	91280	90160	92400	93620	94404	94920	95368	94360	93072	94000
22	106722	112046	113806	114686	115214	115566	115830	110264	108966	111510	112926	113822	114438	114910	113806	112294	113366
23	128018	134090	136114	137126	137724	138138	138414	132066	130548	133468	135096	136112	136836	137332	136114	134364	135596
24	152352	159264	161568	162720	163392	163872	164160	156952	155216	158544	160400	161544	162384	162904	161552	159552	160960
25	180000	187800	190400	191700	192500	193000	193350	185200	183200	186952	189044	190400	191280	191908	190400	188104	189688
26	211250	220038	222950	224406	225290	225862	226278	217100	214838	219046	221390	222890	223894	224638	222950	220342	222118
27	246402	256230	259524	261144	262116	262764	263250	252954	250380	255132	257744	259396	260532	261400	259506	256572	258556
28	285768	296744	300384	302232	303296	304024	304584	293076	290192	295452	298424	300236	301512	302512	300384	297072	299320
29	329672	341852	345912	347942	349160	349972	350552	337792	334544	340404	343672	345740	347164	348204	345912	342204	344680
30	378450	391950	396450	398670	400050	400950	401550	387440	383830	390330	393910	396250	397830	398910	396430	392310	395030

31	432450	447330	452290	454770	456258	457250	457932	442370	438340	445500	449492	452020	453760	454984	452290	447700	450724
32	492032	508416	513856	516608	518208	519296	520064	502944	498496	506356	510784	513508	515416	516792	513856	508776	512128
33	557568	575520	581526	584496	586278	587466	588324	569536	564608	573276	578064	581092	583176	584712	581504	575916	579552
34	629442	649094	655622	658886	660858	662150	663102	642532	637126	646558	651814	655162	657430	659134	655622	649462	653446
35	708050	729470	736610	740180	742350	743750	744800	722330	716380	726688	732436	736120	738580	740460	736610	729856	734212
36	793800	817128	824904	828792	831096	832680	833760	809340	802848	814080	820344	824264	827040	828980	824880	817512	822264
37	887112	912420	920856	925074	927590	929292	930476	903984	896880	909060	915852	920128	923112	925236	920856	912804	917952
38	988418	1015854	1024974	1029534	1032270	1034094	1035386	1006696	998982	1012158	1019502	1024150	1027350	1029666	1024974	1016214	1021782
39	1098162	1127802	1137708	1142622	1145586	1147536	1148940	1117922	1109524	1123824	1131744	1136780	1140204	1142720	1137682	1128192	1134204
40	1216800	1248800	1259440	1264800	1268000	1270080	1271600	1238120	1229040	1244412	1253040	1258480	1262136	1264860	1259440	1249144	1255680
41	1344800	1379240	1390720	1396460	1399904	1402200	1403840	1367760	1357920	1374496	1383740	1389592	1393620	1396560	1390720	1379592	1386600
42	1482642	1519686	1532034	1538166	1541862	1544382	1546146	1507324	1496726	1514562	1524446	1530726	1535142	1538306	1532006	1520022	1527526
43	1630818	1670550	1683794	1690416	1694372	1697038	1698930	1657306	1645868	1664992	1675656	1682380	1687056	1690448	1683794	1670872	1678956
44	1789832	1832424	1846592	1853720	1857944	1860760	1862784	1818212	1805936	1826404	1837880	1845064	1850008	1853636	1846592	1832704	1841400
45	1960200	2005740	2020950	2028510	2033100	2036070	2038230	1990560	1977360	1999320	2011504	2019300	2024520	2028392	2020920	2006040	2015288
46	2142450	2191118	2207310	2215406	2220282	2223502	2225802	2174880	2160758	2184150	2197190	2205474	2211126	2215250	2207310	2191350	2201238
47	2337122	2389010	2406306	2414954	2420124	2423602	2426046	2371714	2356580	2381556	2395484	2404272	2410372	2414756	2406306	2389236	2399796
48	2544768	2600064	2618496	2627712	2633184	2636928	2639520	2581616	2565472	2592096	2606944	2616252	2622816	2627468	2618464	2600256	2611520
49	2765952	2824752	2844352	2854152	2860032	2863952	2866794	2805152	2787904	2816208	2831992	2841984	2848864	2853956	2844352	2824912	2836880
50	3001250	3063750	3084550	3094950	3101250	3105350	3108350	3042900	3024550	3054598	3071350	3082050	3089254	3094630	3084550	3063846	3076550
51	3251250	3317550	3339684	3350700	3357330	3361716	3364878	3295450	3275900	3307860	3325612	3336880	3344580	3350248	3339650	3317652	3331124
52	3516552	3586856	3610256	3622008	3628976	3633656	3636984	3563404	3542656	3576460	3595384	3607236	3615448	3621416	3610256	3586864	3601208
53	3797768	3872180	3896984	3909386	3916806	3921788	3925286	3847376	3825328	3861148	3881124	3893736	3902476	3908752	3896984	3872164	3887312
54	4095522	4174254	4200498	4213566	4221450	4226742	4230414	4147992	4124646	4162554	4183614	4197010	4206294	4212886	4200462	4174182	4190166
55	4410450	4493610	4521330	4535190	4543550	4549050	4553010	4465890	4441140	4481172	4503496	4517700	4527360	4534460	4521330	4493484	4510412
56	4743200	4831008	4860240	4874912	4883648	4889472	4893728	4801720	4775568	4817796	4841424	4856280	4866504	4874128	4860240	4830792	4848704
57	5094432	5187000	5217894	5233284	5242518	5248674	5253120	5156144	5128480	5173092	5197892	5213588	5224392	5232360	5217856	5186772	5205592
58	5464818	5562374	5594854	5611094	5620838	5627334	5631974	5529836	5500662	5547582	5573742	5590302	5601702	5610022	5594854	5562022	5581862
59	5855042	5957702	5991922	6009032	6019298	6026142	6030980	5923482	5892684	5942104	5969664	5987112	5999124	6007804	5991922	5957304	5978204
60	6265800	6373800	6409800	6427800	6438600	6445800	6450840	6337780	6305360	6357360	6386360	6404720	6417360	6426408	6409760	6373320	6395320
n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]

2 Riders on an n x n chessboard																		
n	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]
1																		
2	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
3	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
4	120	120	120	118	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120
5	300	300	300	292	292	300	300	300	298	300	300	300	300	300	300	300	300	300
6	614	630	630	612	606	618	630	630	622	622	630	630	628	630	630	630	630	630
7	1136	1156	1176	1142	1128	1144	1160	1176	1158	1152	1164	1176	1168	1168	1176	1174	1176	1176
8	1944	1968	1992	1958	1936	1956	1976	1996	1984	1968	1984	2000	1998	1992	2004	2008	2008	2014
9	3128	3156	3184	3150	3108	3144	3168	3192	3188	3160	3180	3200	3208	3192	3208	3222	3216	3232
10	4790	4822	4854	4818	4750	4810	4838	4866	4870	4830	4854	4878	4900	4870	4890	4918	4902	4932
11	7016	7080	7116	7074	6976	7048	7100	7132	7144	7080	7120	7148	7186	7140	7164	7210	7180	7228
12	9952	10056	10096	10044	9912	9996	10080	10116	10136	10040	10104	10136	10190	10128	10156	10224	10176	10246
13	13736	13852	13932	13864	13680	13792	13888	13956	13982	13848	13924	13980	14050	13960	14004	14096	14028	14124
14	18518	18646	18774	18682	18438	18586	18694	18802	18830	18654	18742	18830	18916	18790	18858	18974	18886	19012
15	24460	24600	24740	24660	24348	24540	24660	24780	24842	24620	24720	24820	24950	24780	24860	25020	24900	25070
16	31696	31888	32040	31970	31584	31800	31960	32092	32192	31904	32032	32144	32324	32104	32196	32408	32248	32470
17	40444	40696	40860	40796	40312	40572	40780	40924	41064	40700	40864	40988	41222	40948	41052	41324	41116	41398
18	50902	51222	51398	51336	50742	51054	51318	51474	51654	51206	51414	51550	51842	51510	51626	51966	51702	52052
19	63280	63624	63864	63798	63084	63456	63744	63952	64172	63632	63864	64040	64394	63984	64128	64542	64216	64642
20	77800	78168	78480	78402	77560	78000	78312	78580	78840	78200	78456	78680	79100	78600	78780	79272	78880	79390
21	94644	95088	95480	95382	94380	94884	95256	95592	95890	95124	95424	95704	96192	95592	95816	96390	95928	96530
22	114102	114630	115046	114982	113806	114382	114822	115182	115566	114662	115014	115318	115914	115206	115454	116142	115590	116306
23	136432	137052	137492	137458	136096	136752	137268	137652	138126	137072	137484	137812	138524	137700	137972	138786	138132	138974
24	161904	162624	163088	163080	161520	162264	162864	163272	163840	162624	163104	163456	164292	163344	163640	164592	163824	164804
25	190800	191560	192116	192128	190332	191200	191840	192324	192988	191600	192120	192532	193500	192400	192740	193840	192948	194078
26	223350	224214	224870	224894	222846	223810	224534	225102	225862	224270	224854	225334	226440	225174	225566	226822	225798	227090
27	259916	260892	261656	261684	259368	260436	261252	261912	262768	260956	261612	262168	263416	261972	262424	263844	262680	264146
28	300816	301912	302792	302814	300216	301396	302312	303072	304024	301976	302712	303352	304746	303112	303632	305224	303912	305564
29	346380	347604	348524	348612	345688	347020	348044	348844	349958	347660	348484	349164	350760	348924	349484	351292	349804	351672
30	396950	398310	399270	399420	396150	397650	398790	399630	400910	398350	399270	399990	401800	399750	400350	402390	400710	402810
31	452804	454300	455384	455590	451956	453588	454840	455784	457234	454372	455380	456184	458218	455920	456584	458870	456984	459332

32	514376	516016	517232	517486	513472	515244	516616	517672	519296	516112	517216	518112	520378	517816	518552	521096	518992	521604
33	582044	583836	585192	585486	581040	582996	584496	585672	587472	583948	585156	586152	588658	585816	586632	589446	587112	590004
34	656198	658150	659654	659978	655078	657234	658870	660174	662150	658270	659590	660694	663448	660310	661214	664310	661734	664922
35	737240	739360	741020	741362	735988	738360	740140	741580	743732	739480	740920	742140	745150	741700	742700	746090	743260	746760
36	825496	827880	829600	830052	824184	826728	828720	830220	832632	827960	829560	830840	834176	830400	831460	835200	832080	835930
37	921472	924036	925916	926472	920052	922816	924960	926596	929274	924160	925884	927276	930950	926808	927956	932064	928636	932856
38	1025606	1028358	1030406	1031058	1024062	1027062	1029366	1031146	1034094	1028518	1030374	1031886	1035910	1031382	1032626	1037118	1033366	1037976
39	1138348	1141296	1143520	1144260	1136664	1139916	1142388	1144320	1147542	1141484	1143480	1145120	1149506	1144572	1145920	1150812	1146720	1151740
40	1260160	1263312	1265720	1266538	1258320	1261840	1264488	1266580	1270080	1263520	1265664	1267440	1272200	1266840	1268300	1273608	1269160	1274610
41	1391416	1394880	1397480	1398364	1389460	1393240	1396140	1398400	1402180	1395064	1397400	1399320	1404464	1398660	1400240	1405980	1401160	1407060
42	1532694	1536486	1539286	1540224	1530606	1534662	1537830	1540266	1544326	1536630	1539174	1541246	1546782	1540518	1542226	1548414	1543206	1549576
43	1684492	1688512	1691512	1692614	1682256	1686604	1689968	1692576	1697016	1688716	1691424	1693640	1699652	1692880	1694704	1701406	1695768	1702654
44	1847320	1851576	1854784	1856042	1844920	1849576	1853144	1855932	1860760	1851832	1854712	1857080	1863584	1856280	1858228	1865464	1859376	1866802
45	2021700	2026200	2029624	2031030	2019072	2024100	2027880	2030856	2036078	2026500	2029560	2032088	2039100	2031240	2033320	2041110	2034552	2042542
46	2208054	2212918	2216566	2218110	2205286	2210634	2214710	2217882	2223502	2213214	2216502	2219198	2226732	2218294	2220514	2228878	2221830	2230408
47	2407032	2412276	2416156	2417826	2404108	2409792	2414180	2417556	2423578	2412552	2416084	2418956	2427024	2417988	2420356	2429314	2421756	2430946
48	2619192	2624832	2628952	2630736	2616096	2622132	2626848	2630436	2636864	2625072	2628864	2631920	2640534	2630880	2633404	2642976	2634888	2644714
49	2845104	2851024	2855524	2857408	2841768	2848224	2853184	2857092	2863928	2851344	2855344	2858660	2867832	2857504	2860228	2870432	2861796	2872282
50	3085350	3091558	3096310	3098422	3081750	3088650	3093862	3097990	3105350	3091950	3096166	3099670	3109500	3098470	3101350	3112262	3103030	3114230
51	3340400	3347028	3352040	3354372	3336636	3343920	3349476	3353832	3361724	3347440	3351924	3355624	3366130	3354372	3357416	3369060	3359208	3371150
52	3610976	3618040	3623320	3625862	3607032	3614716	3620632	3625224	3633656	3618456	3623224	3627128	3638326	3625816	3629032	3641432	3630936	3643648
53	3897696	3905212	3910768	3913508	3893500	3901656	3907948	3912784	3921762	3905616	3910684	3914800	3926706	3913420	3916816	3929996	3918832	3932342
54	4201190	4209174	4215014	4217940	4196718	4205370	4212054	4217142	4226670	4209550	4214934	4219270	4231900	4217814	4221398	4235382	4223526	4237862
55	4522100	4530420	4536700	4539798	4517328	4526500	4533480	4538940	4549022	4530900	4536540	4541180	4554550	4539600	4543420	4558230	4545660	4560850
56	4860944	4869744	4876480	4879734	4855984	4865608	4872984	4878832	4889472	4870272	4876224	4881184	4895308	4879464	4883536	4899192	4885888	4901960
57	5218516	5227812	5234856	5238414	5213292	5223444	5231232	5237352	5248684	5228372	5234652	5239848	5254838	5238072	5242344	5258934	5244840	5261856
58	5595494	5605302	5612662	5616514	5589982	5600686	5608902	5615302	5627334	5605878	5612502	5617942	5633818	5616102	5620582	5638134	5623222	5641214
59	5992568	6002904	6010588	6014722	5986744	5998024	6006684	6013372	6026112	6003480	6010464	6016156	6032938	6014244	6018940	6037482	6021724	6040724
60	6410440	6421320	6429336	6433740	6404280	6416160	6425280	6432264	6445720	6421880	6429240	6435192	6452900	6433200	6438120	6457680	6441048	6461088
n	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]

Vzorce vzniklé řešením diferenčních rovnic je v principu možné vyjádřit pomocí různých periodických funkcí. Nejčastějším způsobem je použití **trigonometrických funkcí** SIN a COS (tento postup je přirozeným důsledkem rozkladu členu e^{in} , když má charakteristická rovnice komplexní kořeny). Jinou možností je použít **celé části** (*Floor*), které jsou výhodnější tam, kde je jinak možné jen numerické vyjádření (ne algebraické). Výrazy s celými částmi se však ještě hůře upravují než trigonometrické funkce a nějaké zjednodušení těchto výrazů je téměř nemožné. Oba vzorce (s trigonometrickými funkcemi i s celými částmi) dávají pro celočíselné kladné hodnoty n shodné výsledky.

Vymyslel jsem postup, jak převést výrazy, obsahující **celé části**, na **trigonometrické funkce**. To může být zajímavé v případě, že není možné vyřešit (na symbolické úrovni) soustavu rovnic pro koeficienty s trigonometrickými funkcemi, ale stejnou soustavu, kde tvar vzorce obsahuje Floor funkce, už ano. Potom lze substitucemi vyjádřit stejný vzorec symbolicky i pomocí trigonometrických funkcí! Tato transformace vzorců je výhodná zejména při periodách 7, 9, 11, 13, ..., kde výrazy s příslušnými trigonometrickými funkcemi nejdou vyjádřit pomocí tzv. radikálů (vnořených odmocnin) v reálném oboru (je to možné jen pomocí komplexních čísel).

Následující vzorec jsem odvodil řešením soustav rovnic, ale nepřisvojuji si jeho autorství, předpokládám, že jej objevil určitě již i někdo jiný. Nová je však metoda, jak pomocí něj transformovat výsledky řešení diferenčních rovnic (nejprve vyřešené pomocí celých částí) na klasické výrazy obsahující trigonometrické funkce. Tím je možno vyřešit libovolnou lineární diferenční rovnici s konstantními koeficienty (libovolného stupně!) na symbolické úrovni!

$$\text{Floor}\left(\frac{n}{p}\right) = \left[\frac{n}{p}\right] = \frac{1}{p} * \left(n - \left[\frac{p}{2}\right] + \frac{1}{4} * (1 - \cos(n\pi)) * (1 + \cos(p\pi)) + \sum_{w=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)w\pi}{p}\right)}{\sin\left(\frac{w\pi}{p}\right)} \right)$$

Speciálně pro p sudé (*for even p*)

$$\left[\frac{n}{p}\right] = \frac{1}{p} * \left(n - \frac{p-1+(-1)^n}{2} + \sum_{w=1}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)w\pi}{p}\right)}{\sin\left(\frac{w\pi}{p}\right)} \right)$$

Speciálně pro p liché (*for odd p*)

$$\left[\frac{n}{p}\right] = \frac{1}{p} * \left(n - \frac{p-1}{2} + \sum_{w=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)w\pi}{p}\right)}{\sin\left(\frac{w\pi}{p}\right)} \right)$$

Rozvoje pro několik prvních členů (tyto vztahy samozřejmě platí jen pro **přirozená čísla n**, nikoliv pro reálná čísla, viz graf porovnání obou funkcí při periodě 7)

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor = n$$

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{1}{4} * (2n - 1 + \cos(n\pi)) = \frac{1}{4} * (2n - 1 + (-1)^n)$$

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3} * \left(n - 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{3}\right) \right) = \frac{1}{3} * \left(n - 1 + \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right)$$

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = \frac{1}{8} * \left(2n - 3 + (-1)^n + 2\sqrt{2} * \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) \right) = \frac{1}{8} * \left(2n - 3 + (-1)^n + 2 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right)$$

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor = \frac{1}{5} * \left(n - 2 + \sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}} * \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{5}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}} * \sin\left(\frac{(4n+2)\pi}{5}\right) \right) = \frac{1}{5} * \left(n - 2 + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} * \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}} * \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) \right)$$

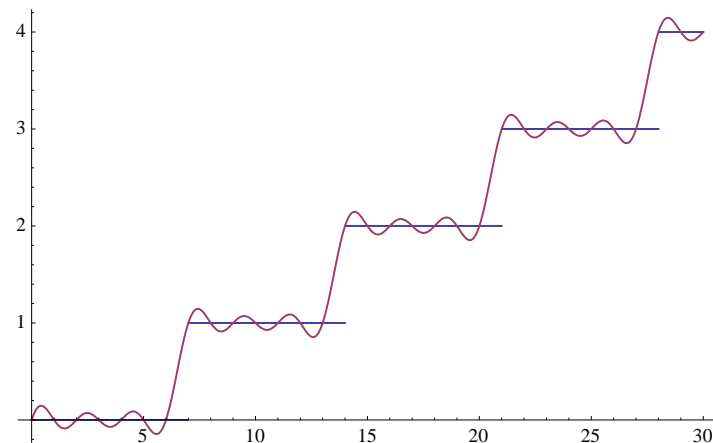
$$\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor = \frac{1}{36} * \left(6n - 15 + 3 * (-1)^n + 12 * \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{6}\right) + 4\sqrt{3} * \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{3}\right) \right) = \frac{1}{36} * \left(6n - 15 + 3 * (-1)^n + 6 * \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + 6\sqrt{3} * \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + 6 * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 2\sqrt{3} * \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right)$$

$$\left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor = \frac{1}{7} * \left(n - 3 + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{(4n+2)\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{(6n+3)\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \right) = \frac{1}{7} * \left(n - 3 + \cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{7}\right) * \sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{7}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{14}\right) * \sin\left(\frac{4\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi n}{7}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{14}\right) * \sin\left(\frac{6\pi n}{7}\right) \right)$$

$$\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor = \frac{1}{16} * \left(2n - 7 + (-1)^n + 2\sqrt{2} * \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} * \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{8}\right) + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} * \sin\left(\frac{(6n+3)\pi}{8}\right) \right) = \frac{1}{8} * \left(n - \frac{7}{2} + \frac{(-1)^n}{2} + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + (\sqrt{2} + 1) \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + (\sqrt{2} - 1) \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right) \right)$$

$$\left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor = \frac{1}{9} * \left(n - 4 + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{9}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{(4n+2)\pi}{9}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)} + \frac{2}{\sqrt{3}} * \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{3}\right) + \frac{\sin\left(\frac{(8n+4)\pi}{9}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)} \right)$$

$$\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor = \frac{1}{10} * \left(\frac{2n-9}{2} + \frac{(-1)^n}{2} + \sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}} * \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{5}\right) + \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}} * \sin\left(\frac{(4n+2)\pi}{5}\right) + (\sqrt{5} + 1) * \cos\left(\frac{(n-2)\pi}{5}\right) - (\sqrt{5} - 1) * \cos\left(\frac{(3n-6)\pi}{5}\right) \right)$$



Možné jsou i obrácené vztahy, vyjádření trigonometrických funkcí pomocí funkce celá část. Vzhledem k tomu, že nenabývají jen celočíselných hodnot, nejsou však obecně příliš elegantní. Několik prvních na ukázkou: (graf porovnává obě funkce při periodě 7, shoda nastává v celých číslech)

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{2}\right) = \cos(\pi n) = (-1)^n = 4\left[\frac{n}{2}\right] - 2n + 1$$

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = 3\left[\frac{n}{3}\right] + \frac{3}{2}\left[\frac{n+1}{3}\right] - \frac{3n}{2} + 1$$

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 2\left[\frac{n}{4}\right] + 2\left[\frac{n+1}{4}\right] - n + 1$$

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\left[\frac{n}{5}\right] + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)\left[\frac{n+1}{5}\right] + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)\left[\frac{n+2}{5}\right] + \frac{1}{4}(5-3\sqrt{5})\left[\frac{n+3}{5}\right] + \left(\frac{\sqrt{5}-5}{4}\right)n + 1$$

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) = \left[\frac{n}{6}\right] + \frac{3}{2}\left[\frac{n+1}{6}\right] + \left[\frac{n+2}{6}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{n+4}{6}\right] - \frac{n}{2} + 1$$

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right) = n\left(\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) - 1\right) + 1 - 2\left(\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) - 1\right)\left[\frac{n}{7}\right] + \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)\right)\left[\frac{n+1}{7}\right] + \left(\frac{3}{2} - 2\sin\left(\frac{\pi}{14}\right)\right)\left[\frac{n+2}{7}\right] + \left(1 - \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)\right)\left[\frac{n+3}{7}\right] + \left(\frac{3}{2} - 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left[\frac{n+4}{7}\right] + \left(2 - 3\sin\left(\frac{\pi}{14}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left[\frac{n+5}{7}\right]$$

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) = (2 - \sqrt{2})\left[\frac{n}{8}\right] + \left[\frac{n+1}{8}\right] + \left[\frac{n+2}{8}\right] + (2 - \sqrt{2})\left[\frac{n+3}{8}\right] + (1 - \sqrt{2})\left[\frac{n+5}{8}\right] + (1 - \sqrt{2})\left[\frac{n+6}{8}\right] + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)n + 1$$

$$\sin\left(\frac{2\pi n}{2}\right) = \sin(\pi n) = 0$$

$$\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\left[\frac{n+1}{3}\right]\right)\sqrt{3}$$

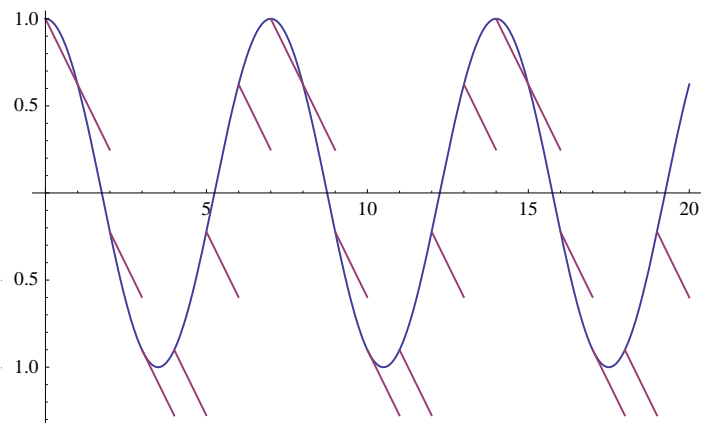
$$\sin\left(\frac{2\pi n}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = n - 2\left[\frac{n+1}{4}\right] - 2\left[\frac{n+2}{4}\right]$$

$$\sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\sqrt{5-\sqrt{5}}\left[\frac{n+1}{5}\right] + \sqrt{5+\sqrt{5}}\left[\frac{n+2}{5}\right] + \sqrt{5-\sqrt{5}}\left[\frac{n+3}{5}\right]\right)$$

$$\sin\left(\frac{2\pi n}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{6}\right] - \left[\frac{n+2}{6}\right] - \left[\frac{n+3}{6}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{n+4}{6}\right]\right)\sqrt{3}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right) = n\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \left(\cos\left(\frac{\pi}{14}\right) - 2\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)\right)\left[\frac{n+1}{7}\right] + \left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)\right)\left[\frac{n+2}{7}\right] - \left(2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)\right)\left[\frac{n+3}{7}\right] + \left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)\right)\left[\frac{n+4}{7}\right] + \left(\cos\left(\frac{\pi}{14}\right) - 2\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)\right)\left[\frac{n+5}{7}\right]$$

$$\sin\left(\frac{2\pi n}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) = \frac{n}{\sqrt{2}} + (1 - \sqrt{2})\left[\frac{n+1}{8}\right] - \left[\frac{n+2}{8}\right] - \sqrt{2}\left[\frac{n+3}{8}\right] - \sqrt{2}\left[\frac{n+4}{8}\right] - \left[\frac{n+5}{8}\right] + (1 - \sqrt{2})\left[\frac{n+6}{8}\right]$$



11.2) 3 riders on an $n \times n$ chessboard - 3 liniové kameny na šachovnici $n \times n$

Obecné vzorce pro rozmístění 3 liniových kamenů s jednotkovým tahem $[r,s]$ na šachovnici $n \times n$ jsou už velmi komplikované. Objevil jsem však společné vlastnosti vytvářejících funkcí. Pokud je číslo

$$r^2 + s^2$$

prvočíslo (větší než 2), vytvářející funkce pro počet neohrožujících se trojic liniových kamenů s jednotkovým tahem $[r,s]$ (kde $r \leq s$) na šachovnici $n \times n$ je
 If $r^2 + s^2$ is *prime number* >2 , then *generating function* for number of three non-attacking *riders* $[r,s]$ ($0 < r \leq s$) on a $n \times n$ chessboard is

$$G(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^7 * \left(\frac{x^{s(r^2+s^2)} - 1}{x-1}\right)^2 * \left(\frac{x^{s^2} - 1}{x-1}\right) * \left(\frac{x^{rs} - 1}{x-1}\right) * \left(\frac{x^{r+s} - 1}{x-1}\right) * R(x)} \quad (V. Kotěšovec, 2010)$$

$P(x)$ a $R(x)$ jsou polynomy, $P(x)$ and $R(x)$ are *polynomial*

3 riders on an $n \times n$ chessboard - Table of denominators (case if r^2+s^2 is prime)										
$[r,s]$	r^2+s^2	degree of denominator	$s(r^2+s^2)$	s^2	rs	r+s	$2s(r^2+s^2)+s^2+rs+r+s$	$R(x) * (x-1)^2$	degree $R(x)$	period
[1,2]	5	31	10	4	2	3	29	$(x-1)^2$	0	60
[2,3]	13	104	39	9	6	5	98	$(x^4-1)(x^2-1)$	4	2340
[1,4]	17	163	68	16	4	5	161	$(x-1)^2$	0	1360
[2,5]	29	334	145	25	10	7	332	$(x-1)^2$	0	10150
[4,5]	41	476	205	25	20	9	464	$(x^8-1)(x^4-1)$	10	73800
[1,6]	37	495	222	36	6	7	493	$(x-1)^2$	0	9324
[5,6]	61	819	366	36	30	11	809	$(x^5-1)^2$	8	120780
[2,7]	53	816	371	49	14	9	814	$(x-1)^2$	0	46746

Poznámka: Kompletní prozkoumání 3 riders umožní až rychlejší počítače. Např. jen vygenerování všech hodnot až do šachovnice 840×840 pro [5,6] trvalo několik hodin!

Remark: Generally, this problem is open, I found only partial results

[0,1] riders - see [rooks](#), [1,1] riders - see [bishops](#), [1,2] riders - see [nightriders](#)

Selected riders:

Three [1,3] riders on an $n \times n$ chessboard (3 Camelriders = Mehari)

Explicit formula (V. Kotěšovec, 8.12.2010), period = 180

$$\begin{aligned} & \left(\frac{16n^3}{9} - \frac{106n^2}{27} + \frac{128n}{15} \right) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left(\frac{8n^3}{9} - \frac{65n^2}{27} + \frac{118n}{45} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \frac{128}{25} n \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \frac{176}{25} n \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \frac{64}{25} n \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \frac{112}{25} n \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor - \frac{32}{5} n \left\lfloor \frac{n+11}{15} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \\ & - \frac{844}{135} \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \frac{164}{135} \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - \frac{299}{135} \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor - \frac{109}{27} \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor - \frac{8}{3} \left\lfloor \frac{n+3}{9} \right\rfloor + \frac{8}{3} \left\lfloor \frac{n+5}{9} \right\rfloor + \frac{144}{25} \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor - \frac{384}{25} \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor + \frac{72}{25} \left\lfloor \frac{n+2}{10} \right\rfloor - \frac{384}{25} \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor \\ & + \frac{184}{25} \left\lfloor \frac{n+4}{10} \right\rfloor - \frac{8}{5} \left\lfloor \frac{n+5}{10} \right\rfloor - \frac{312}{25} \left\lfloor \frac{n+7}{10} \right\rfloor + \left(\frac{32n}{5} - \frac{96}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+4}{15} \right\rfloor + \left(-\frac{16n}{5} - \frac{72}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+5}{15} \right\rfloor + \left(-\frac{16n}{5} - \frac{24}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+6}{15} \right\rfloor + \left(\frac{16n}{5} - \frac{72}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+7}{15} \right\rfloor \\ & + \left(-\frac{16n}{5} - \frac{24}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+8}{15} \right\rfloor + \left(\frac{16n}{5} - \frac{72}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+9}{15} \right\rfloor - \frac{96}{5} \left\lfloor \frac{n+10}{15} \right\rfloor - \frac{13021}{1350} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{n^6}{6} - \frac{16n^5}{27} + \frac{683n^4}{540} - \frac{523n^3}{225} + \frac{3809n^2}{1350} - \frac{3607n}{2700} \end{aligned}$$

Recurrence

$$\begin{aligned} a_n = & a_{n-54} - 4a_{n-53} + 8a_{n-52} - 12a_{n-51} + 15a_{n-50} - 15a_{n-49} + 11a_{n-48} - 4a_{n-47} - 4a_{n-46} + 10a_{n-45} - 11a_{n-44} + 7a_{n-43} - 7a_{n-41} + 11a_{n-40} - 12a_{n-39} \\ & + 12a_{n-38} - 12a_{n-37} + 13a_{n-36} - 15a_{n-35} + 15a_{n-34} - 10a_{n-33} + 12a_{n-31} - 21a_{n-30} + 22a_{n-29} - 14a_{n-28} + 14a_{n-26} - 22a_{n-25} + 21a_{n-24} \\ & - 12a_{n-23} + 10a_{n-21} - 15a_{n-20} + 15a_{n-19} - 13a_{n-18} + 12a_{n-17} - 12a_{n-16} + 12a_{n-15} - 11a_{n-14} + 7a_{n-13} - 7a_{n-11} + 11a_{n-10} - 10a_{n-9} \\ & + 4a_{n-8} + 4a_{n-7} - 11a_{n-6} + 15a_{n-5} - 15a_{n-4} + 12a_{n-3} - 8a_{n-2} + 4a_{n-1} \end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned} & -4x^2(1 + 17x + 25x^2 + 158x^3 + 259x^4 + 440x^5 + 1158x^6 + 1225x^7 + 2278x^8 + 3808x^9 + 3796x^{10} + 6687x^{11} + 8620x^{12} + 8798x^{13} + 13958x^{14} + 15464x^{15} + 16180x^{16} + \\ & 23283x^{17} + 23266x^{18} + 24830x^{19} + 32588x^{20} + 30170x^{21} + 32570x^{22} + 39253x^{23} + 33961x^{24} + 37124x^{25} + 40809x^{26} + 33419x^{27} + 36812x^{28} + 36631x^{29} + 28834x^{30} \\ & + 31635x^{31} + 28430x^{32} + 21635x^{33} + 23533x^{34} + 18763x^{35} + 14023x^{36} + 14841x^{37} + 10273x^{38} + 7615x^{39} + 7680x^{40} + 4320x^{41} + 3357x^{42} + 2954x^{43} + 1251x^{44} + 1097x^{45} \\ & + 696x^{46} + 198x^{47} + 205x^{48} + 50x^{49} + 13x^{50} + 9x^{51}) / ((-1+x)^7(1+x)(1+x^2)(1-x+x^2)(1+x+x^2)^4(1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)^2(1+x^3+x^6)(1-x+x^3-x^4+x^5-x^7+x^8)^2) \end{aligned}$$

Three [2,3] riders on an n x n chessboard (3 Zebrariders)

Explicit formula (V. Kotěšovec, 8.12.2010), period = 2340

$$\begin{aligned}
 & \frac{n^6}{6} - \frac{14n^5}{27} + \frac{262721n^4}{168480} - \frac{241615n^3}{73008} + \frac{1102921n^2}{136890} - \frac{4347673n}{730080} + \left(-\frac{n^2}{24} - \frac{693119}{5616} \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{8n^3}{9} - \frac{16n^2}{9} + \frac{224n}{39} \right) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left(\frac{4n^3}{9} - \frac{16n^2}{9} + \frac{1112n}{351} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - \left(\frac{3}{2} * \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right) - \left(\frac{3}{2} * \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \right) \\
 & + \left(\frac{16}{5} * \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \right) + \left(\frac{4}{5} * \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor \right) + \left(\frac{8}{5} * \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor \right) + \left(\frac{12}{5} * \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor \right) + \left(\frac{21340}{351} * \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \right) - \left(\frac{43532}{351} * \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor \right) + \left(\frac{43064}{351} * \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor \right) - \left(\frac{21724}{351} * \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor \right) + \left(\frac{8}{3} * \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor \right) \\
 & - \left(\frac{16}{3} * \left\lfloor \frac{n+1}{9} \right\rfloor \right) + \left(\frac{8}{3} * \left\lfloor \frac{n+2}{9} \right\rfloor \right) - \left(\frac{8}{3} * \left\lfloor \frac{n+4}{9} \right\rfloor \right) + \left(\frac{8}{3} * \left\lfloor \frac{n+5}{9} \right\rfloor \right) + \left(\frac{32n}{169} + \frac{656}{13} \right) \left\lfloor \frac{n}{13} \right\rfloor + \left(\frac{64n}{169} + \frac{18368}{169} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{13} \right\rfloor + \left(\frac{96n}{169} - \frac{3032}{169} \right) \left\lfloor \frac{n+2}{13} \right\rfloor + \left(\frac{24n}{169} + \frac{5584}{169} \right) \left\lfloor \frac{n+3}{13} \right\rfloor \\
 & + \left(\frac{56n}{169} + \frac{15720}{169} \right) \left\lfloor \frac{n+4}{13} \right\rfloor + \left(\frac{88n}{169} - \frac{6424}{169} \right) \left\lfloor \frac{n+5}{13} \right\rfloor + \left(\frac{16n}{169} + \frac{3112}{169} \right) \left\lfloor \frac{n+6}{13} \right\rfloor + \left(\frac{48n}{169} + \frac{13128}{169} \right) \left\lfloor \frac{n+7}{13} \right\rfloor + \left(\frac{80n}{169} - \frac{8824}{169} \right) \left\lfloor \frac{n+8}{13} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{169} + \frac{1216}{169} \right) \left\lfloor \frac{n+9}{13} \right\rfloor \\
 & + \left(\frac{40n}{169} + \frac{10696}{169} \right) \left\lfloor \frac{n+10}{13} \right\rfloor + \left(\frac{72n}{169} - \frac{10128}{169} \right) \left\lfloor \frac{n+11}{13} \right\rfloor - \left(\frac{2304}{13} * \left\lfloor \frac{n+14}{39} \right\rfloor \right) + \left(\frac{96}{13} - \frac{8n}{13} \right) \left\lfloor \frac{n+15}{39} \right\rfloor + \left(\frac{192}{13} * \left\lfloor \frac{n+16}{39} \right\rfloor \right) - \left(\frac{2112}{13} * \left\lfloor \frac{n+17}{39} \right\rfloor \right) + \left(\frac{288}{13} - \frac{8n}{13} \right) \left\lfloor \frac{n+18}{39} \right\rfloor \\
 & + \left(\frac{384}{13} * \left\lfloor \frac{n+19}{39} \right\rfloor \right) - \left(\frac{1920}{13} * \left\lfloor \frac{n+20}{39} \right\rfloor \right) + \left(\frac{480}{13} - \frac{8n}{13} \right) \left\lfloor \frac{n+21}{39} \right\rfloor + \left(\frac{576}{13} * \left\lfloor \frac{n+22}{39} \right\rfloor \right) - \left(\frac{1728}{13} * \left\lfloor \frac{n+23}{39} \right\rfloor \right) + \left(\frac{672}{13} - \frac{8n}{13} \right) \left\lfloor \frac{n+24}{39} \right\rfloor + \left(\frac{768}{13} * \left\lfloor \frac{n+25}{39} \right\rfloor \right) - \left(\frac{1536}{13} * \left\lfloor \frac{n+26}{39} \right\rfloor \right) \\
 & + \left(-\frac{8n}{13} - \frac{1440}{13} \right) \left\lfloor \frac{n+27}{39} \right\rfloor + \left(\frac{1056}{13} - \frac{8n}{13} \right) \left\lfloor \frac{n+28}{39} \right\rfloor - \left(\frac{1152}{13} * \left\lfloor \frac{n+29}{39} \right\rfloor \right) + \left(-\frac{8n}{13} - \frac{1056}{13} \right) \left\lfloor \frac{n+30}{39} \right\rfloor + \left(\frac{1440}{13} - \frac{8n}{13} \right) \left\lfloor \frac{n+31}{39} \right\rfloor - \left(\frac{768}{13} * \left\lfloor \frac{n+32}{39} \right\rfloor \right) + \left(-\frac{8n}{13} - \frac{672}{13} \right) \left\lfloor \frac{n+33}{39} \right\rfloor \\
 & + \left(\frac{1824}{13} - \frac{8n}{13} \right) \left\lfloor \frac{n+34}{39} \right\rfloor - \left(\frac{384}{13} * \left\lfloor \frac{n+35}{39} \right\rfloor \right) + \left(-\frac{8n}{13} - \frac{288}{13} \right) \left\lfloor \frac{n+36}{39} \right\rfloor + \left(\frac{2208}{13} - \frac{8n}{13} \right) \left\lfloor \frac{n+37}{39} \right\rfloor
 \end{aligned}$$

Recurrence

$$\begin{aligned}
 a_n = & a_{n-104} - a_{n-102} - a_{n-100} - a_{n-99} + a_{n-97} + a_{n-96} + a_{n-94} + a_{n-93} - a_{n-92} + a_{n-90} - a_{n-89} - a_{n-88} - a_{n-86} - a_{n-85} + a_{n-83} + a_{n-82} \\
 & + a_{n-80} - a_{n-78} - 2a_{n-65} + 2a_{n-63} + 2a_{n-61} + 2a_{n-60} - 2a_{n-58} - 2a_{n-57} - 2a_{n-55} - 2a_{n-54} + 2a_{n-53} - 2a_{n-51} + 2a_{n-50} + 2a_{n-49} \\
 & + 2a_{n-47} + 2a_{n-46} - 2a_{n-44} - 2a_{n-43} - 2a_{n-41} + 2a_{n-39} + a_{n-26} - a_{n-24} - a_{n-22} - a_{n-21} + a_{n-19} + a_{n-18} + a_{n-16} + a_{n-15} \\
 & - a_{n-14} + a_{n-12} - a_{n-11} - a_{n-10} - a_{n-8} - a_{n-7} + a_{n-5} + a_{n-4} + a_{n-2}
 \end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned}
 & -4x^2(1 + 21x + 112x^2 + 422x^3 + 1285x^4 + 3128x^5 + 6671x^6 + 12946x^7 + 22650x^8 + 36900x^9 + 56947x^{10} + 82641x^{11} + 114742x^{12} + 154035x^{13} + 198508x^{14} + 248420x^{15} + \\
 & 304285x^{16} + 362171x^{17} + 422664x^{18} + 487045x^{19} + 550048x^{20} + 613569x^{21} + 680383x^{22} + 743947x^{23} + 807498x^{24} + 875070x^{25} + 938344x^{26} + 1001576x^{27} + 1069798x^{28} + \\
 & 1132744x^{29} + 1195650x^{30} + 1264518x^{31} + 1327136x^{32} + 1389722x^{33} + 1459240x^{34} + 1521536x^{35} + 1583802x^{36} + 1653966x^{37} + 1715932x^{38} + 1777860x^{39} + 1848622x^{40} + \\
 & 1910084x^{41} + 1971078x^{42} + 2040820x^{43} + 2098480x^{44} + 2152700x^{45} + 2212274x^{46} + 2253886x^{47} + 2286358x^{48} + 2319020x^{49} + 2328306x^{50} + 2324738x^{51} + 2319540x^{52} + \\
 & 2290926x^{53} + 2251406x^{54} + 2213712x^{55} + 2157958x^{56} + 2096970x^{57} + 2042916x^{58} + 1976628x^{59} + 1909266x^{60} + 1850992x^{61} + 1783250x^{62} + 1715490x^{63} + 1656342x^{64} + \\
 & 1588856x^{65} + 1521412x^{66} + 1461614x^{67} + 1394456x^{68} + 1327338x^{69} + 1266894x^{70} + 1200064x^{71} + 1133266x^{72} + 1072172x^{73} + 1005664x^{74} + 939186x^{75} + 877446x^{76} + \\
 & 811262x^{77} + 745115x^{78} + 682757x^{79} + 616992x^{80} + 551482x^{81} + 489313x^{82} + 425610x^{83} + 363641x^{84} + 306216x^{85} + 250688x^{86} + 199748x^{87} + 155451x^{88} + 116253x^{89} + \\
 & 83502x^{90} + 57819x^{91} + 37742x^{92} + 23138x^{93} + 13391x^{94} + 7053x^{95} + 3348x^{96} + 1457x^{97} + 536x^{98} + 165x^{99} + 49x^{100} + 9x^{101}) / ((-1+x)^{7*(1+x)^3*(1+x^2)*(1-x+x^2)* \\
 & (1+x+x^2)^4*(1+x+x^2+x^3+x^4)*(1+x^3+x^6)*(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12})^2*(1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+x^9-x^{10} \\
 & +x^{12}-x^{14}+x^{15}-x^{17}+x^{18}-x^{20}+x^{21}-x^{23}+x^{24})^2)
 \end{aligned}$$

Three [1,4] riders on an $n \times n$ chessboard (3 Girafferiders)

Explicit formula (V. Kotěšovec, 8.12.2010) , period = 1360

$$\begin{aligned}
 & (989633*n)/1109760 - (6509*n^2)/138720 - (48749*n^3)/36992 + (16639*n^4)/21760 - (11*n^5)/24 + n^6/6 + (576/17 + (288*n)/289)*[n/17] + (13/2)*[n/8] + (32/5)*[n/5] + (14669/272 + \\
 & (2429*n)/272 - (65*n^2)/32 + (3*n^3)/2)*[n/4] + (-242023/2176) + (2107*n)/272 - (113*n^2)/64 + (3*n^3)/4)*[n/2] + (13904/289 + (576*n)/289)*[(1+n)/17] + (1/2)*[(1+n)/8] + (28/5)*[(1+n)/5] \\
 & + (-19123/272) + (3619*n)/272 - (97*n^2)/32 + (3*n^3)/2)*[(1+n)/4] + (27568/289 + (864*n)/289)*[(2+n)/17] + (1/2)*[(2+n)/8] + (16/5)*[(2+n)/5] + (-3616/289) + (1152*n)/289)*[(3+n)/17] - (3/2)*[(3+n)/8] + (4/5)*[(3+n)/5] + (6304/289 + (216*n)/289)*[(4+n)/17] + (9864/289 + (504*n)/289)*[(5+n)/17] + (23520/289 + (792*n)/289)*[(6+n)/17] + 4*[(6+n)/16] + (- \\
 & (7128/289) + (1080*n)/289)*[(7+n)/17] + 4*[(7+n)/16] + (3872/289 + (144*n)/289)*[(8+n)/17] - 4*[(8+n)/16] + (6744/289 + (432*n)/289)*[(9+n)/17] - 4*[(9+n)/16] + (20256/289 + \\
 & (720*n)/289)*[(10+n)/17] + (-9992/289) + (1008*n)/289)*[(11+n)/17] + 8*[(11+n)/16] + (1952/289 + (72*n)/289)*[(12+n)/17] + 8*[(12+n)/16] + (4000/289 + (360*n)/289)*[(13+n)/17] + \\
 & (17232/289 + (648*n)/289)*[(14+n)/17] + (-12752/289) + (936*n)/289)*[(15+n)/17] - (512/17)*[(17+n)/34] - (2560/17)*[(19+n)/34] + (64/17 - (72*n)/17)*[(20+n)/34] - (384/17)*[(21+n)/34] + \\
 & (128/17)*[(22+n)/34] - (2432/17)*[(23+n)/34] + (192/17 - (72*n)/17)*[(24+n)/34] - (256/17)*[(25+n)/34] + (256/17)*[(26+n)/34] - (2304/17)*[(27+n)/34] + (320/17 - (72*n)/17)*[(28+n)/34] - \\
 & (128/17)*[(29+n)/34] + (384/17)*[(30+n)/34] - 128*[(31+n)/34] + (448/17 - (72*n)/17)*[(32+n)/34] - (2048/17)*[(35+n)/68] + (-1984/17 - (72*n)/17)*[(36+n)/68] + (192/17 - (72*n)/17)*[(37+n)/68] + \\
 & (256/17)*[(38+n)/68] - (1792/17)*[(39+n)/68] + (-1728/17 - (72*n)/17)*[(40+n)/68] + (448/17 - (72*n)/17)*[(41+n)/68] + (512/17)*[(42+n)/68] - (1536/17)*[(43+n)/68] + (-1472/17 - \\
 & (72*n)/17)*[(44+n)/68] + (704/17 - (72*n)/17)*[(45+n)/68] + (768/17)*[(46+n)/68] - (1280/17)*[(47+n)/68] + (-1216/17 - (72*n)/17)*[(48+n)/68] + (960/17 - (72*n)/17)*[(49+n)/68] + \\
 & (1024/17)*[(50+n)/68] - (1024/17)*[(51+n)/68] + (-960/17 - (72*n)/17)*[(52+n)/68] + (1216/17 - (72*n)/17)*[(53+n)/68] + (1280/17)*[(54+n)/68] - (768/17)*[(55+n)/68] + (-704/17 - \\
 & (72*n)/17)*[(56+n)/68] + (1472/17 - (72*n)/17)*[(57+n)/68] + (1536/17)*[(58+n)/68] - (512/17)*[(59+n)/68] + (-448/17 - (72*n)/17)*[(60+n)/68] + (1728/17 - (72*n)/17)*[(61+n)/68] + \\
 & (1792/17)*[(62+n)/68] - (256/17)*[(63+n)/68] + (-192/17 - (72*n)/17)*[(64+n)/68] + (1984/17 - (72*n)/17)*[(65+n)/68] + (2048/17)*[(66+n)/68]
 \end{aligned}$$

Recurrence

$$\begin{aligned}
 a_n = & a_{n-163} - 2a_{n-162} + a_{n-161} - a_{n-159} + a_{n-158} + a_{n-157} - a_{n-156} + a_{n-154} - 2a_{n-153} + a_{n-152} - a_{n-147} + 2a_{n-146} - a_{n-145} + a_{n-143} - a_{n-142} \\
 & - a_{n-141} + a_{n-140} - a_{n-138} + 2a_{n-137} - a_{n-136} - 2a_{n-95} + 4a_{n-94} - 2a_{n-93} + 2a_{n-91} - 2a_{n-90} - 2a_{n-89} + 2a_{n-88} - 2a_{n-86} + 4a_{n-85} \\
 & - 2a_{n-84} + 2a_{n-79} - 4a_{n-78} + 2a_{n-77} - 2a_{n-75} + 2a_{n-74} + 2a_{n-73} - 2a_{n-72} + 2a_{n-70} - 4a_{n-69} + 2a_{n-68} + a_{n-27} - 2a_{n-26} + a_{n-25} \\
 & - a_{n-23} + a_{n-22} + a_{n-21} - a_{n-20} + a_{n-18} - 2a_{n-17} + a_{n-16} - a_{n-11} + 2a_{n-10} - a_{n-9} + a_{n-7} - a_{n-6} - a_{n-5} + a_{n-4} - a_{n-2} + 2a_{n-1}
 \end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned}
 & -4x^2(9x^{160} + 31x^{159} + 85x^{158} + 225x^{157} + 677x^{156} + 1250x^{155} + 2245x^{154} + 3711x^{153} + 6276x^{152} + 8490x^{151} + 11720x^{150} + 15504x^{149} + 21147x^{148} + 24813x^{147} + \\
 & 30688x^{146} + 36876x^{145} + 45893x^{144} + 50416x^{143} + 59173x^{142} + 67619x^{141} + 79867x^{140} + 84140x^{139} + 95183x^{138} + 104703x^{137} + 118799x^{136} + 121158x^{135} + 133482x^{134} + \\
 & 143080x^{133} + 158346x^{132} + 158404x^{131} + 171882x^{130} + 181480x^{129} + 197898x^{128} + 195652x^{127} + 210282x^{126} + 219880x^{125} + 237450x^{124} + 232902x^{123} + 248680x^{122} + \\
 & 258280x^{121} + 277002x^{120} + 270150x^{119} + 287078x^{118} + 296682x^{117} + 316554x^{116} + 307398x^{115} + 325478x^{114} + 335082x^{113} + 356106x^{112} + 344646x^{111} + 363878x^{110} + \\
 & 373482x^{109} + 395658x^{108} + 381894x^{107} + 402280x^{106} + 411880x^{105} + 435210x^{104} + 419142x^{103} + 440680x^{102} + 450278x^{101} + 474764x^{100} + 456390x^{99} + 479080x^{98} + \\
 & 488678x^{97} + 514316x^{96} + 493638x^{95} + 517480x^{94} + 527078x^{93} + 553924x^{92} + 530828x^{91} + 555714x^{90} + 565034x^{89} + 591994x^{88} + 565560x^{87} + 589786x^{86} + 596454x^{85} \\
 & + 620412x^{84} + 588474x^{83} + 609240x^{82} + 611272x^{81} + 630226x^{80} + 593006x^{79} + 609704x^{78} + 606928x^{77} + 620212x^{76} + 579044x^{75} + 591130x^{74} + 583838x^{73} + 591962x^{72} + \\
 & 548920x^{71} + 557518x^{70} + 548078x^{69} + 553584x^{68} + 511986x^{67} + 519318x^{66} + 509720x^{65} + 514038x^{64} + 474812x^{63} + 480918x^{62} + 471320x^{61} + 474486x^{60} + 437564x^{59} + \\
 & 442518x^{58} + 432920x^{57} + 434934x^{56} + 400314x^{55} + 404120x^{54} + 394520x^{53} + 395382x^{52} + 363066x^{51} + 365722x^{50} + 356118x^{49} + 355830x^{48} + 325818x^{47} + 327322x^{46} \\
 & + 317718x^{45} + 316278x^{44} + 288570x^{43} + 288922x^{42} + 279318x^{41} + 276726x^{40} + 251322x^{39} + 250520x^{38} + 240920x^{37} + 237174x^{36} + 214074x^{35} + 212120x^{34} + 202522x^{33} + \\
 & 197620x^{32} + 176826x^{31} + 173720x^{30} + 164122x^{29} + 158068x^{28} + 139578x^{27} + 135320x^{26} + 125722x^{25} + 118523x^{24} + 102357x^{23} + 97001x^{22} + 87541x^{21} + 79641x^{20} + \\
 & 66334x^{19} + 60769x^{18} + 52635x^{17} + 45696x^{16} + 36324x^{15} + 31840x^{14} + 26024x^{13} + 21011x^{12} + 15397x^{11} + 12408x^{10} + 8996x^9 + 6207x^8 + 3756x^7 + 2497x^6 + 1343x^5 + \\
 & 627x^4 + 228x^3 + 99x^2 + 19x + 1) / ((x-1)^7*(x+1)^4*(x^2+1)^4*(x^4+1)*(x^4+x^3+x^2+x+1)*(x^8+1)*(x^16-x^15+x^14-x^13+x^12-x^11+x^10-x^9+x^8-x^7+ \\
 & x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)^2*(x^16+x^15+x^14+x^13+x^12+x^11+x^10+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2*(x^32-x^30+x^28-x^26+x^24-x^22+x^20-x^18+x^16-x^14+x^12-x^10+x^8-x^6+x^4-x^2+1)^2)
 \end{aligned}$$

Three [3,4] riders on an $n \times n$ chessboard (3 Anteloperiders)

Explicit formula (V. Kotěšovec, 8.12.2010), period = 8400

$$\begin{aligned}
 & -((205725031*n)/30240000) + (96874369*n^2)/11340000 - (6306877*n^3)/2160000 + (5038759*n^4)/3628800 - (3*n^5)/8 + n^6/6 + (90224/625 + (56*n)/625)*[n/10] + (3/2)*[n/8] + (40/7)*[n/7] - \\
 & (68/27)*[n/6] + (53263/400 + (1039*n)/400 + (71*n^2)/96 + n^3/2)*[n/4] - (2/27)*n^2*[n/3] + (-629066119/2160000) + (21297*n)/10000 - (361*n^2)/192 + n^3/4)*[n/2] - (4/3)*[(1+n)/12] + \\
 & (71096/625 + (296*n)/625)*[(1+n)/10] - (17/2)*[(1+n)/8] + 4*[(1+n)/7] - (32/27)*[(1+n)/6] + (-10877/80) + (1361*n)/400 - (217*n^2)/96 + n^3/2)*[(1+n)/4] + ((4*n)/27 - n^2/27)*[(1+n)/3] + \\
 & (4/3)*[(2+n)/12] + (167312/625 + (152*n)/625)*[(2+n)/10] - (17/2)*[(2+n)/8] - (85/27)*[(2+n)/6] + (4/3)*[(3+n)/12] + (-19024/625) + (192*n)/625)*[(3+n)/10] + (11/2)*[(3+n)/8] + \\
 & (20/7)*[(3+n)/7] - (19/27)*[(3+n)/6] + (11832/125 + (8*n)/125)*[(4+n)/25] - (4/3)*[(4+n)/12] + (14224/625 + (8*n)/625)*[(4+n)/10] + (40/7)*[(4+n)/7] + (14448/125 + (8*n)/125)*[(5+n)/25] - \\
 & 12*[(5+n)/16] + (-608/25) + (248*n)/625)*[(5+n)/10] + (12/7)*[(5+n)/7] + (14264/125 + (8*n)/125)*[(6+n)/25] + (16104/125 + (104*n)/625)*[(6+n)/10] + (2256/25 + (8*n)/125)*[(7+n)/25] + \\
 & 8*[(7+n)/16] + (-96512/625) + (144*n)/625)*[(7+n)/10] + (11496/125 + (8*n)/125)*[(8+n)/25] - 8*[(8+n)/16] + (15144/125 + (16*n)/125)*[(9+n)/25] + (-1344/25) + (8*n)/25)*[(9+n)/20] + \\
 & (16376/125 + (16*n)/125)*[(10+n)/25] - (1536/25)*[(10+n)/20] + 12*[(10+n)/16] + (14008/125 + (16*n)/125)*[(11+n)/25] + (-7872/25) - (8*n)/25)*[(11+n)/20] - 4*[(11+n)/16] + (2608/25 + \\
 & (16*n)/125)*[(12+n)/25] + (-7488/25) - (8*n)/25)*[(12+n)/20] - 4*[(12+n)/16] + (13472/125 + (16*n)/125)*[(13+n)/25] - (768/25)*[(13+n)/20] + (24136/125 + (24*n)/125)*[(14+n)/25] - \\
 & (768/25)*[(14+n)/20] + (24984/125 + (24*n)/125)*[(15+n)/25] + (-7104/25) - (8*n)/25)*[(15+n)/20] + (24432/125 + (24*n)/125)*[(16+n)/25] + (-1344/5) - (8*n)/25)*[(16+n)/20] + (4496/25 + \\
 & (24*n)/125)*[(17+n)/25] + (20128/125 + (24*n)/125)*[(18+n)/25] + (-15792/125) + (32*n)/125)*[(19+n)/25] + (-13368/125) - (8*n)/125)*[(20+n)/25] + (-14184/125) - (8*n)/125)*[(21+n)/25] + \\
 & (-608/5) - (8*n)/125)*[(22+n)/25] + (-13416/125) - (8*n)/125)*[(23+n)/25] - (384/5)*[(29+n)/50] - (384/5)*[(30+n)/50] - (384/5)*[(31+n)/50] - (384/5)*[(32+n)/50] - (384/5)*[(33+n)/50] - \\
 & 384*[(39+n)/50] + (-9408/25) - (8*n)/25)*[(40+n)/50] + (-9024/25) - (8*n)/25)*[(41+n)/50] + (-1728/5) - (8*n)/25)*[(42+n)/50] + (-8256/25) - (8*n)/25)*[(43+n)/50] + (1728/25) - (8*n)/25)*[(44+n)/50] + \\
 & (384/5)*[(45+n)/50] + (384/5)*[(46+n)/50] + (384/5)*[(47+n)/50] + (384/5)*[(48+n)/50] - (1536/5)*[(59+n)/100] + (-7488/25) - (8*n)/25)*[(60+n)/100] + (-7104/25) - \\
 & (8*n)/25)*[(61+n)/100] + (-1344/5) - (8*n)/25)*[(62+n)/100] + (-6336/25) - (8*n)/25)*[(63+n)/100] + (-5952/25) - (8*n)/25)*[(64+n)/100] + (-5568/25) - (8*n)/25)*[(65+n)/100] + (-5184/25) - \\
 & (8*n)/25)*[(66+n)/100] + (-192) - (8*n)/25)*[(67+n)/100] + (-4416/25) - (8*n)/25)*[(68+n)/100] + (3648/25) - (8*n)/25)*[(69+n)/100] + (768/5)*[(70+n)/100] + (768/5)*[(71+n)/100] + \\
 & (768/5)*[(72+n)/100] + (768/5)*[(73+n)/100] + (768/5)*[(74+n)/100] + (768/5)*[(75+n)/100] + (768/5)*[(76+n)/100] + (768/5)*[(77+n)/100] + (768/5)*[(78+n)/100] - (768/5)*[(79+n)/100] + \\
 & (-3648/25) - (8*n)/25)*[(80+n)/100] + (-3264/25) - (8*n)/25)*[(81+n)/100] + (-576/5) - (8*n)/25)*[(82+n)/100] + (-2496/25) - (8*n)/25)*[(83+n)/100] + (-2112/25) - (8*n)/25)*[(84+n)/100] + \\
 & (-1728/25) - (8*n)/25)*[(85+n)/100] + (-1344/25) - (8*n)/25)*[(86+n)/100] + (-192/5) - (8*n)/25)*[(87+n)/100] + (-576/25) - (8*n)/25)*[(88+n)/100] + (7488/25) - (8*n)/25)*[(89+n)/100] + \\
 & (1536/5)*[(90+n)/100] + (1536/5)*[(91+n)/100] + (1536/5)*[(92+n)/100] + (1536/5)*[(93+n)/100] + (1536/5)*[(94+n)/100] + (1536/5)*[(95+n)/100] + (1536/5)*[(96+n)/100] + \\
 & (1536/5)*[(97+n)/100] + (1536/5)*[(98+n)/100]
 \end{aligned}$$

Recurrence

$$\begin{aligned}
 a_n = & a_{n-241} - 2a_{n-238} + a_{n-235} - a_{n-234} + 2a_{n-231} - a_{n-229} - a_{n-228} + 2a_{n-226} - a_{n-225} - a_{n-223} + 3a_{n-222} - 3a_{n-219} + a_{n-218} + a_{n-216} \\
 & - 2a_{n-215} + a_{n-213} + a_{n-212} - 2a_{n-210} + a_{n-207} - a_{n-206} + 2a_{n-203} - a_{n-200} - 2a_{n-141} + 4a_{n-138} - 2a_{n-135} + 2a_{n-134} - 4a_{n-131} \\
 & + 2a_{n-129} + 2a_{n-128} - 4a_{n-126} + 2a_{n-125} + 2a_{n-123} - 6a_{n-122} + 6a_{n-119} - 2a_{n-118} - 2a_{n-116} + 4a_{n-115} - 2a_{n-113} - 2a_{n-112} + 4a_{n-110} \\
 & - 2a_{n-107} + 2a_{n-106} - 4a_{n-103} + 2a_{n-100} + a_{n-41} - 2a_{n-38} + a_{n-35} - a_{n-34} + 2a_{n-31} - a_{n-29} - a_{n-28} + 2a_{n-26} - a_{n-25} - a_{n-23} \\
 & + 3a_{n-22} - 3a_{n-19} + a_{n-18} + a_{n-16} - 2a_{n-15} + a_{n-13} + a_{n-12} - 2a_{n-10} + a_{n-7} - a_{n-6} + 2a_{n-3}
 \end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned}
 & -4x^2(1 + 21x + 140x^2 + 528x^3 + 1543x^4 + 3774x^5 + 8150x^6 + 15656x^7 + 27695x^8 + 45785x^9 + 72070x^{10} + 107828x^{11} + 155144x^{12} + 215570x^{13} + 292230x^{14} + 385227x^{15} + \\
 & 496758x^{16} + 627084x^{17} + 780400x^{18} + 953755x^{19} + 1148843x^{20} + 1362906x^{21} + 1601741x^{22} + 1857832x^{23} + 2132691x^{24} + 2419852x^{25} + 2728731x^{26} + 3047285x^{27} + \\
 & 3378267x^{28} + 3711574x^{29} + 4062342x^{30} + 4414377x^{31} + 4772840x^{32} + 5124145x^{33} + 5490697x^{34} + 5852706x^{35} + 6218574x^{36} + 6571265x^{37} + 6940877x^{38} + 7303750x^{39} + \\
 & 7671092x^{40} + 8021592x^{41} + 8392388x^{42} + 8755270x^{43} + 9123768x^{44} + 9471966x^{45} + 9843914x^{46} + 10206794x^{47} + 10576440x^{48} + 10922332x^{49} + 11295434x^{50} + 11658316x^{51} + \\
 & 12029114x^{52} + 12372700x^{53} + 12746954x^{54} + 13109834x^{55} + 13481782x^{56} + 13823064x^{57} + 14198470x^{58} + 14561350x^{59} + 14934450x^{60} + 15273430x^{61} + 15649990x^{62} \\
 & + 16012870x^{63} + 16387124x^{64} + 16723800x^{65} + 17101510x^{66} + 17464388x^{67} + 17839796x^{68} + 18174172x^{69} + 18553036x^{70} + 18915914x^{71} + 19292472x^{72} + 19624540x^{73} \\
 & + 20004554x^{74} + 20367434x^{75} + 20745146x^{76} + 21074910x^{77} + 21456074x^{78} + 21818954x^{79} + 22197816x^{80} + 22525274x^{81} + 22907590x^{82} + 23270470x^{83} + 23650484x^{84} + \\
 & 23975638x^{85} + 24359108x^{86} + 24721990x^{87} + 25103156x^{88} + 25426008x^{89} + 25810630x^{90} + 26173510x^{91} + 26555826x^{92} + 26876376x^{93} + 27262154x^{94} + 27625036x^{95} + \\
 & 28008504x^{96} + 28326748x^{97} + 28713674x^{98} + 29076544x^{99} + 29461150x^{100} + 29777034x^{101} + 30164872x^{102} + 30526976x^{103} + 30910726x^{104} + 31219900x^{105} + 31600386x^{106} \\
 & + 31948266x^{107} + 32311132x^{108} + 32586286x^{109} + 32924094x^{110} + 33215462x^{111} + 33508924x^{112} + 33697118x^{113} + 33935334x^{114} + 34112228x^{115} + 34278404x^{116} \\
 & + 34324492x^{117} + 34410540x^{118} + 34426698x^{119} + 34426882x^{120} + 34303172x^{121} + 34219332x^{122} + 34070022x^{123} + 33911820x^{124} + 33639612x^{125} + 33416848x^{126} + \\
 & 33142616x^{127} + 32873322x^{128} + 32506502x^{129} + 32201106x^{130} + 31859916x^{131} + 31536832x^{132} + 31131730x^{133} + 30795930x^{134} + 30434804x^{135} + 30098076x^{136} + \\
 & 29687902x^{137} + 29347122x^{138} + 28984250x^{139} + 28645708x^{140} + 28237608x^{141} + 27895612x^{142} + 27532730x^{143} + 27193032x^{144} + 26787234x^{145} + 26444086x^{146} \\
 & + 26081206x^{147} + 25740360x^{148} + 25336868x^{149} + 24992566x^{150} + 24629684x^{151} + 24287686x^{152} + 23886500x^{153} + 23541046x^{154} + 23178166x^{155} + 22835018x^{156} + \\
 & 22436136x^{157} + 22089530x^{158} + 21726650x^{159} + 21382350x^{160} + 20985770x^{161} + 20638010x^{162} + 20275130x^{163} + 19929676x^{164} + 19535400x^{165} + 19186490x^{166} + \\
 & 18823612x^{167} + 18477004x^{168} + 18085028x^{169} + 17734964x^{170} + 17372086x^{171} + 17024328x^{172} + 16634660x^{173} + 16283446x^{174} + 15920566x^{175} + 15571654x^{176} \\
 & + 15184290x^{177} + 14831926x^{178} + 14469046x^{179} + 14118984x^{180} + 13733926x^{181} + 13380410x^{182} + 13017530x^{183} + 12666316x^{184} + 12283562x^{185} + 11928892x^{186} + \\
 & 11566010x^{187} + 11213644x^{188} + 10833192x^{189} + 10477370x^{190} + 10114490x^{191} + 9760974x^{192} + 9382824x^{193} + 9025846x^{194} + 8662964x^{195} + 8308296x^{196} + 7932452x^{197} + \\
 & 7574326x^{198} + 7211448x^{199} + 6855633x^{200} + 6482121x^{201} + 6122972x^{202} + 5760488x^{203} + 5404531x^{204} + 5035526x^{205} + 4679472x^{206} + 4324094x^{207} + 3977997x^{208} + \\
 & 3627145x^{209} + 3291844x^{210} + 2964718x^{211} + 2652748x^{212} + 2346536x^{213} + 2060452x^{214} + 1790561x^{215} + 1541654x^{216} + 1307648x^{217} + 1097068x^{218} + 907539x^{219} \\
 & + 741051x^{220} + 593106x^{221} + 466911x^{222} + 360130x^{223} + 272265x^{224} + 199720x^{225} + 142413x^{226} + 98091x^{227} + 65195x^{228} + 41100x^{229} + 24536x^{230} + 13699x^{231} \\
 & + 7128x^{232} + 3325x^{233} + 1381x^{234} + 506x^{235} + 174x^{236} + 49x^{237} + 9x^{238}) / ((-1 + x)^7(1 + x)^4(1 + x^2)^4(1 - x + x^2)(1 + x + x^2)^3(1 + x^4)(1 - x^2 + x^4)(1 - x + x^2 \\
 & - x^3 + x^4)^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(1 + x^8)(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8)^2(1 - x^5 + x^{10} - x^{15} + x^{20})^2(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \\
 & x^{20})^2(1 - x^{10} + x^{20} - x^{30} + x^{40})^2)
 \end{aligned}$$

Three [1,5] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 8.12.2010), period = 1950

$$\begin{aligned}
 & (2161043*n)/760500 - (421423*n^2)/190125 - (56804*n^3)/63375 + (27959*n^4)/58500 - (28*n^5)/75 + n^6/6 + (704/13 + (320*n)/169)*[n/13] + (42004*[n/10])/1625 + (104/9)*[n/6] + \\
 & ((5952*n)/325 - (436*n^2)/125 + (64*n^3)/25)*[n/5] - (3055063*[n/2])/29250 + (-8720/169) + (640*n)/169*(1+n)/13 + (33244*(1+n)/10)/1625 + (104/9)*[(1+n)/6] + ((24766*n)/1625 - \\
 & (387*n^2)/125 + (48*n^3)/25)*[(1+n)/5] + (4312/169 + (128*n)/169)*[(2+n)/13] + (18079/325)*[(2+n)/10] + (76/9)*[(2+n)/6] + ((24808*n)/1625 - (298*n^2)/125 + (32*n^3)/25)*[(2+n)/5] + \\
 & (13200/169 + (448*n)/169)*[(3+n)/13] - (148691*(3+n)/10)/1625 + (28/9)*[(3+n)/6] + ((13886*n)/1625 - (169*n^2)/125 + (16*n^3)/25)*[(3+n)/5] - (16/5)*[(4+n)/25] + (-48/169) + \\
 & (768*n)/169)*[(4+n)/13] + (147066*(4+n)/10)/1625 - (64/5)*[(5+n)/25] + (4920/169 + (256*n)/169)*[(5+n)/13] - (105062*(5+n)/10)/1625 - (16/5)*[(6+n)/25] + (-8920/169) + \\
 & (576*n)/169)*[(6+n)/13] + (2799/25)*[(6+n)/10] + (16/5)*[(7+n)/25] + (-384/169) + (64*n)/169*(7+n)/13 - (56671*(7+n)/10)/1625 + (32/5)*[(8+n)/25] + (13056/169 + (384*n)/169)*[(8+n)/13] + \\
 & (16/5)*[(9+n)/25] + (-4168/169) + (704*n)/169*(9+n)/13 - (56/5)*[(10+n)/25] + (5872/169 + (192*n)/169)*[(10+n)/13] - (56/5)*[(11+n)/25] + (-12776/169) + (512*n)/169)*[(11+n)/13] - \\
 & (8/5)*[(12+n)/25] + (48/5)*[(13+n)/25] + 32*[(14+n)/26] + (56/5)*[(14+n)/25] - 8*[(15+n)/26] - (16/5)*[(15+n)/25] - (1920/13)*[(16+n)/65] - 8*[(16+n)/25] + (40/13 - (64*n)/13)*[(17+n)/65] - \\
 & 24*[(17+n)/26] - (32/5)*[(17+n)/25] + (80/13)*[(18+n)/65] + 24*[(18+n)/26] + (8/5)*[(18+n)/25] + (80/13)*[(19+n)/65] + 8*[(19+n)/26] + (64/5)*[(19+n)/25] + (80/13)*[(20+n)/65] + \\
 & 24*[(20+n)/26] + (16/5)*[(20+n)/25] - (1840/13)*[(21+n)/65] - 24*[(21+n)/26] - (8/5)*[(21+n)/25] + (120/13 - (64*n)/13)*[(22+n)/65] - (16/5)*[(22+n)/25] + (160/13)*[(23+n)/65] - \\
 & 8*[(23+n)/26] - (8/5)*[(23+n)/25] + (160/13)*[(24+n)/65] + 32*[(24+n)/26] + (160/13)*[(25+n)/65] - (1760/13)*[(26+n)/65] + (200/13 - (64*n)/13)*[(27+n)/65] + (240/13)*[(28+n)/65] - \\
 & (1680/13)*[(29+n)/65] + (280/13 - (64*n)/13)*[(30+n)/65] - (1600/13)*[(31+n)/65] + (360/13 - (64*n)/13)*[(32+n)/65] + (400/13)*[(33+n)/65] - (1520/13)*[(34+n)/65] + (440/13 - (64*n)/13)*[(35+n)/65] - \\
 & (1440/13)*[(36+n)/65] + (40 - (64*n)/13)*[(37+n)/65] + (560/13)*[(38+n)/65] - (1360/13)*[(39+n)/65] + (600/13 - (64*n)/13)*[(40+n)/65] - (1280/13)*[(41+n)/65] + (-1240/13 - \\
 & (64*n)/13)*[(42+n)/65] + (760/13 - (64*n)/13)*[(43+n)/65] - (1120/13)*[(44+n)/65] + (840/13 - (64*n)/13)*[(45+n)/65] - 80*[(46+n)/65] + (-1000/13 - (64*n)/13)*[(47+n)/65] + (1000/13 - \\
 & (64*n)/13)*[(48+n)/65] - (880/13)*[(49+n)/65] + (1080/13 - (64*n)/13)*[(50+n)/65] - (800/13)*[(51+n)/65] + (-760/13 - (64*n)/13)*[(52+n)/65] + (1240/13 - (64*n)/13)*[(53+n)/65] - \\
 & (640/13)*[(54+n)/65] + (-600/13 - (64*n)/13)*[(55+n)/65] + (-40 - (64*n)/13)*[(56+n)/65] + (-440/13 - (64*n)/13)*[(57+n)/65] + (120 - (64*n)/13)*[(58+n)/65] - (320/13)*[(59+n)/65] + (- \\
 & (280/13 - (64*n)/13)*[(60+n)/65] + (-200/13 - (64*n)/13)*[(61+n)/65] + (-120/13 - (64*n)/13)*[(62+n)/65] + (1880/13 - (64*n)/13)*[(63+n)/65]
 \end{aligned}$$

Recurrence

$$\begin{aligned}
 a_n = & a_{n-184} - 4a_{n-183} + 8a_{n-182} - 12a_{n-181} + 16a_{n-180} - 20a_{n-179} + 23a_{n-178} - 24a_{n-177} + 24a_{n-176} - 24a_{n-175} + 23a_{n-174} - 20a_{n-173} + 16a_{n-172} \\
 & - 11a_{n-171} + 4a_{n-170} + 4a_{n-169} - 11a_{n-168} + 16a_{n-167} - 20a_{n-166} + 23a_{n-165} - 24a_{n-164} + 24a_{n-163} - 24a_{n-162} + 23a_{n-161} - 20a_{n-160} \\
 & + 15a_{n-159} - 8a_{n-158} + 8a_{n-156} - 15a_{n-155} + 20a_{n-154} - 23a_{n-153} + 24a_{n-152} - 24a_{n-151} + 24a_{n-150} - 23a_{n-149} + 20a_{n-148} - 16a_{n-147} \\
 & + 11a_{n-146} - 4a_{n-145} - 4a_{n-144} + 11a_{n-143} - 16a_{n-142} + 20a_{n-141} - 23a_{n-140} + 24a_{n-139} - 24a_{n-138} + 24a_{n-137} - 23a_{n-136} + 20a_{n-135} \\
 & - 16a_{n-134} + 12a_{n-133} - 8a_{n-132} + 4a_{n-131} - a_{n-130} - 2a_{n-119} + 8a_{n-118} - 16a_{n-117} + 24a_{n-116} - 32a_{n-115} + 40a_{n-114} - 46a_{n-113} \\
 & + 48a_{n-112} - 48a_{n-111} + 48a_{n-110} - 46a_{n-109} + 40a_{n-108} - 32a_{n-107} + 22a_{n-106} - 8a_{n-105} - 8a_{n-104} + 22a_{n-103} - 32a_{n-102} + 40a_{n-101} \\
 & - 46a_{n-100} + 48a_{n-99} - 48a_{n-98} + 48a_{n-97} - 46a_{n-96} + 40a_{n-95} - 30a_{n-94} + 16a_{n-93} - 16a_{n-91} + 30a_{n-90} - 40a_{n-89} + 46a_{n-88} - 48a_{n-87} \\
 & + 48a_{n-86} - 48a_{n-85} + 46a_{n-84} - 40a_{n-83} + 32a_{n-82} - 22a_{n-81} + 8a_{n-80} + 8a_{n-79} - 22a_{n-78} + 32a_{n-77} - 40a_{n-76} + 46a_{n-75} - 48a_{n-74} \\
 & + 48a_{n-73} - 48a_{n-72} + 46a_{n-71} - 40a_{n-70} + 32a_{n-69} - 24a_{n-68} + 16a_{n-67} - 8a_{n-66} + 2a_{n-65} + a_{n-54} - 4a_{n-53} + 8a_{n-52} - 12a_{n-51} \\
 & + 16a_{n-50} - 20a_{n-49} + 23a_{n-48} - 24a_{n-47} + 24a_{n-46} - 24a_{n-45} + 23a_{n-44} - 20a_{n-43} + 16a_{n-42} - 11a_{n-41} + 4a_{n-40} + 4a_{n-39} - 11a_{n-38} \\
 & + 16a_{n-37} - 20a_{n-36} + 23a_{n-35} - 24a_{n-34} + 24a_{n-33} - 24a_{n-32} + 23a_{n-31} - 20a_{n-30} + 15a_{n-29} - 8a_{n-28} + 8a_{n-26} - 15a_{n-25} + 20a_{n-24} \\
 & - 23a_{n-23} + 24a_{n-22} - 24a_{n-21} + 24a_{n-20} - 23a_{n-19} + 20a_{n-18} - 16a_{n-17} + 11a_{n-16} - 4a_{n-15} - 4a_{n-14} + 11a_{n-13} - 16a_{n-12} + 20a_{n-11} \\
 & - 23a_{n-10} + 24a_{n-9} - 24a_{n-8} + 24a_{n-7} - 23a_{n-6} + 20a_{n-5} - 16a_{n-4} + 12a_{n-3} - 8a_{n-2} + 4a_{n-1}
 \end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned}
 & -4x^2(1 + 17x + 64x^2 + 171x^3 + 204x^4 + 817x^5 + 816x^6 + 2158x^7 + 2304x^8 + 3556x^9 + 6538x^{10} + 5678x^{11} + 12359x^{12} + 9442x^{13} + 16967x^{14} + 20779x^{15} + 20155x^{16} \\
 & + 34529x^{17} + 25633x^{18} + 44458x^{19} + 47084x^{20} + 47704x^{21} + 72370x^{22} + 55494x^{23} + 89732x^{24} + 91483x^{25} + 91546x^{26} + 132587x^{27} + 102536x^{28} + 157856x^{29} + 156914x^{30} \\
 & + 154070x^{31} + 216540x^{32} + 166486x^{33} + 247602x^{34} + 240007x^{35} + 232552x^{36} + 318550x^{37} + 244277x^{38} + 352235x^{39} + 337042x^{40} + 321545x^{41} + 434679x^{42} + 331911x^{43} + \\
 & 467708x^{44} + 444479x^{45} + 417608x^{46} + 561185x^{47} + 424839x^{48} + 590226x^{49} + 556401x^{50} + 517377x^{51} + 691437x^{52} + 519227x^{53} + 714678x^{54} + 668890x^{55} + 617864x^{56} + \\
 & 821947x^{57} + 613713x^{58} + 839196x^{59} + 781370x^{60} + 718382x^{61} + 952433x^{62} + 708223x^{63} + 963608x^{64} + 894030x^{65} + 818606x^{66} + 1083125x^{67} + 801981x^{68} + 1088256x^{69} \\
 & + 1004268x^{70} + 918216x^{71} + 1208655x^{72} + 893077x^{73} + 1205192x^{74} + 1106112x^{75} + 1008284x^{76} + 1319305x^{77} + 972905x^{78} + 1303026x^{79} + 1190130x^{80} + 1079668x^{81} \\
 & + 1405861x^{82} + 1034471x^{83} + 1373252x^{84} + 1249238x^{85} + 1125932x^{86} + 1459819x^{87} + 1070035x^{88} + 1406578x^{89} + 1273414x^{90} + 1138434x^{91} + 1469963x^{92} + 1070533x^{93} \\
 & + 1394508x^{94} + 1255526x^{95} + 1113252x^{96} + 1433343x^{97} + 1036269x^{98} + 1340374x^{99} + 1201058x^{100} + 1057492x^{101} + 1359275x^{102} + 975579x^{103} + 1255454x^{104} + 1119488x^{105} \\
 & + 980170x^{106} + 1257117x^{107} + 895367x^{108} + 1148296x^{109} + 1017900x^{110} + 887680x^{111} + 1135463x^{112} + 803229x^{113} + 1028464x^{114} + 905926x^{115} + 789194x^{116} + \\
 & 1005063x^{117} + 709273x^{118} + 903822x^{119} + 793610x^{120} + 688636x^{121} + 874553x^{122} + 614787x^{123} + 779304x^{124} + 681130x^{125} + 588118x^{126} + 744067x^{127} + 520277x^{128} + \\
 & 654812x^{129} + 568629x^{130} + 487637x^{131} + 613631x^{132} + 425948x^{133} + 530520x^{134} + 456935x^{135} + 387948x^{136} + 485207x^{137} + 333599x^{138} + 409352x^{139} + 350170x^{140} + \\
 & 292298x^{141} + 364916x^{142} + 246233x^{143} + 298267x^{144} + 251911x^{145} + 206277x^{146} + 256590x^{147} + 167916x^{148} + 201270x^{149} + 165698x^{150} + 133344x^{151} + 163911x^{152} + \\
 & 103291x^{153} + 122030x^{154} + 97603x^{155} + 76680x^{156} + 93630x^{157} + 55831x^{158} + 65656x^{159} + 50540x^{160} + 38698x^{161} + 47097x^{162} + 25265x^{163} + 30924x^{164} + 21115x^{165} + \\
 & 16696x^{166} + 18595x^{167} + 8564x^{168} + 11051x^{169} + 5650x^{170} + 5185x^{171} + 4224x^{172} + 1702x^{173} + 2016x^{174} + 601x^{175} + 732x^{176} + 252x^{177} + 112x^{178} + 50x^{179} + 13x^{180} \\
 & + 9x^{181}) / ((-1 + x)^7(1 + x)(1 - x + x^2)(1 + x + x^2)^2(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^4(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 + x^{10} - x^{11} \\
 & + x^{12})(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12})^2(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20})(1 - x + x^5 - x^6 + x^{10} - x^{11} + x^{13} - x^{14} + x^{15} - x^{16} \\
 & + x^{18} - x^{19} + x^{20} - x^{21} + x^{23} - x^{24} + x^{25} - x^{27} + x^{28} - x^{29} + x^{30} - x^{32} + x^{33} - x^{34} + x^{35} - x^{37} + x^{38} - x^{42} + x^{43} - x^{47} + x^{48})^2)
 \end{aligned}$$

Three [2,5] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 8.12.2010), period = 10150

$$\begin{aligned}
 & -((10086547*n)/4415250) + (7167719*n^2)/2207625 - (162584*n^3)/105125 + (19393*n^4)/25375 - (26*n^5)/75 + n^6/6 + (-4240/29) + (1656*n/841)*[n/29] + (921804*[n/10])/3625 + (88/7)*[n/7] \\
 & + ((8712*n)/725 - (312*n^2)/125 + (48*n^3)/25)*[n/5] - (470881*[n/2])/3625 + (-224976/841) + (1224*n/841)*[(1+n)/29] + (860844*(1+n)/10)/3625 + 4*[(1+n)/7] + ((32136*n)/3625 - \\
 & (354*n^2)/125 + (36*n^3)/25)*[(1+n)/5] + (-334816/841) + (792*n/841)*[(2+n)/29] + (359698/725)*[(2+n)/10] + 8*[(2+n)/7] + ((34168*n)/3625 - (316*n^2)/125 + (24*n^3)/25)*[(2+n)/5] + \\
 & (80888/841 + (360*n/841)*[(3+n)/29] - (474506*(3+n)/10)/3625 + (44/7)*[(3+n)/7] + ((14856*n)/3625 - (198*n^2)/125 + (12*n^3)/25)*[(3+n)/5] + (-21632/841) + (2016*n/841)*[(4+n)/29] \\
 & + (24/5)*[(4+n)/25] + (467256*(4+n)/10)/3625 + (32/7)*[(4+n)/7] + (-142648/841) + (1584*n/841)*[(5+n)/29] - (32/5)*[(5+n)/25] + (454548*(5+n)/10)/3625 + (60/7)*[(5+n)/7] + (- \\
 & (243648/841) + (1152*n/841)*[(6+n)/29] + (53414/145)*[(6+n)/10] + (-358040/841) + (720*n/841)*[(7+n)/29] + (16/5)*[(7+n)/25] + (1331234*(7+n)/10)/3625 + (61000/841 + \\
 & (288*n/841)*[(8+n)/29] - (24/5)*[(8+n)/25] + (-43752/841) + (1944*n/841)*[(9+n)/29] + (64/5)*[(9+n)/25] + (-159112/841) + (1512*n/841)*[(10+n)/29] - 8*[(10+n)/25] + (-260024/841) \\
 & + (1080*n/841)*[(11+n)/29] + (32/5)*[(11+n)/25] + (-379896/841) + (648*n/841)*[(12+n)/29] - (8/5)*[(12+n)/25] + (41552/841 + (216*n/841)*[(13+n)/29] + (-66360/841) + \\
 & (1872*n/841)*[(14+n)/29] + 8*[(14+n)/25] + (-176992/841) + (1440*n/841)*[(15+n)/29] - (64/5)*[(15+n)/25] + (-278744/841) + (1008*n/841)*[(16+n)/29] + (56/5)*[(16+n)/25] + (- \\
 & (398296/841) + (576*n/841)*[(17+n)/29] - (32/5)*[(17+n)/25] + (24632/841 + (144*n/841)*[(18+n)/29] + (32/5)*[(18+n)/25] + (-87368/841) + (1800*n/841)*[(19+n)/29] + (32/5)*[(19+n)/25] \\
 & + (-194200/841) + (1368*n/841)*[(20+n)/29] - (24/5)*[(20+n)/25] + (-297720/841) + (936*n/841)*[(21+n)/29] + (32/5)*[(21+n)/25] + (-411152/841) + (504*n/841)*[(22+n)/29] - \\
 & (16/5)*[(22+n)/25] + (12328/841 + (72*n/841)*[(23+n)/29] + (32/5)*[(23+n)/25] + (-104688/841) + (1728*n/841)*[(24+n)/29] + (-208648/841) + (1296*n/841)*[(25+n)/29] + (- \\
 & (314864/841) + (864*n/841)*[(26+n)/29] + (-423104/841) + (432*n/841)*[(27+n)/29] - (17920/29)*[(32+n)/145] + (160/29 - (72*n)/29)*[(33+n)/145] + (320/29)*[(34+n)/145] + \\
 & (320/29)*[(35+n)/145] + (320/29)*[(36+n)/145] - (17600/29)*[(37+n)/145] + (480/29 - (72*n)/29)*[(38+n)/145] + (640/29)*[(39+n)/145] + (640/29)*[(40+n)/145] + (640/29)*[(41+n)/145] - \\
 & (17280/29)*[(42+n)/145] + (800/29 - (72*n)/29)*[(43+n)/145] + (960/29)*[(44+n)/145] + (960/29)*[(45+n)/145] + (960/29)*[(46+n)/145] - (16960/29)*[(47+n)/145] + (1120/29 - \\
 & (72*n)/29)*[(48+n)/145] + (1280/29)*[(49+n)/145] + (1280/29)*[(50+n)/145] + (1280/29)*[(51+n)/145] - (16640/29)*[(52+n)/145] + (1440/29 - (72*n)/29)*[(53+n)/145] + (1600/29)*[(54+n)/145] \\
 & + (1600/29)*[(55+n)/145] + (1600/29)*[(56+n)/145] - (16320/29)*[(57+n)/145] + (1760/29 - (72*n)/29)*[(58+n)/145] + (1920/29)*[(59+n)/145] + (1920/29)*[(60+n)/145] - \\
 & (16000/29)*[(61+n)/145] + (-15840/29 - (72*n)/29)*[(62+n)/145] + (2400/29 - (72*n)/29)*[(63+n)/145] + (2560/29)*[(64+n)/145] + (2560/29)*[(65+n)/145] - (15360/29)*[(66+n)/145] + (- \\
 & (15200/29 - (72*n)/29)*[(67+n)/145] + (3040/29 - (72*n)/29)*[(68+n)/145] + (3200/29)*[(69+n)/145] + (3200/29)*[(70+n)/145] - (14720/29)*[(71+n)/145] + (-14560/29 - (72*n)/29)*[(72+n)/145] \\
 & + (3680/29 - (72*n)/29)*[(73+n)/145] + (3840/29)*[(74+n)/145] + (3840/29)*[(75+n)/145] - (14080/29)*[(76+n)/145] + (-480 - (72*n)/29)*[(77+n)/145] + (4320/29 - (72*n)/29)*[(78+n)/145] \\
 & + (4480/29)*[(79+n)/145] + (4480/29)*[(80+n)/145] - (13440/29)*[(81+n)/145] + (-13280/29 - (72*n)/29)*[(82+n)/145] + (4960/29 - (72*n)/29)*[(83+n)/145] + (5120/29)*[(84+n)/145] \\
 & + (5120/29)*[(85+n)/145] - (12800/29)*[(86+n)/145] + (-12640/29 - (72*n)/29)*[(87+n)/145] + (5600/29 - (72*n)/29)*[(88+n)/145] + (5760/29)*[(89+n)/145] - (12160/29)*[(90+n)/145] \\
 & + (-12000/29 - (72*n)/29)*[(91+n)/145] + (-11680/29 - (72*n)/29)*[(92+n)/145] + (6560/29 - (72*n)/29)*[(93+n)/145] + (6720/29)*[(94+n)/145] - (11200/29)*[(95+n)/145] + (-11040/29 - \\
 & (72*n)/29)*[(96+n)/145] + (-10720/29 - (72*n)/29)*[(97+n)/145] + (7520/29 - (72*n)/29)*[(98+n)/145] + (7680/29)*[(99+n)/145] - (10240/29)*[(100+n)/145] + (-10080/29 - (72*n)/29)*[(101+n)/145] \\
 & + (-9760/29 - (72*n)/29)*[(102+n)/145] + (8480/29 - (72*n)/29)*[(103+n)/145] + (8640/29)*[(104+n)/145] - 320*[(105+n)/145] + (-9120/29 - (72*n)/29)*[(106+n)/145] + (- \\
 & (8800/29 - (72*n)/29)*[(107+n)/145] + (9440/29 - (72*n)/29)*[(108+n)/145] + (9600/29)*[(109+n)/145] - (8320/29)*[(110+n)/145] + (-8160/29 - (72*n)/29)*[(111+n)/145] + (-7840/29 - \\
 & (72*n)/29)*[(112+n)/145] + (10400/29 - (72*n)/29)*[(113+n)/145] + (10560/29)*[(114+n)/145] - (7360/29)*[(115+n)/145] + (-7200/29 - (72*n)/29)*[(116+n)/145] + (-6880/29 - \\
 & (72*n)/29)*[(117+n)/145] + (11360/29 - (72*n)/29)*[(118+n)/145] - (6400/29)*[(119+n)/145] + (-6240/29 - (72*n)/29)*[(120+n)/145] + (-5920/29 - (72*n)/29)*[(121+n)/145] + (-5600/29 - \\
 & (72*n)/29)*[(122+n)/145] + (12640/29 - (72*n)/29)*[(123+n)/145] - (5120/29)*[(124+n)/145] + (-4960/29 - (72*n)/29)*[(125+n)/145] + (-160 - (72*n)/29)*[(126+n)/145] + (-4320/29 - \\
 & (72*n)/29)*[(127+n)/145] + (480 - (72*n)/29)*[(128+n)/145] - (3840/29)*[(129+n)/145] + (-3680/29 - (72*n)/29)*[(130+n)/145] + (-3360/29 - (72*n)/29)*[(131+n)/145] + (-3040/29 - \\
 & (72*n)/29)*[(132+n)/145] + (15200/29 - (72*n)/29)*[(133+n)/145] - (2560/29)*[(134+n)/145] + (-2400/29 - (72*n)/29)*[(135+n)/145] + (-2080/29 - (72*n)/29)*[(136+n)/145] + (-1760/29 - \\
 & (72*n)/29)*[(137+n)/145] + (16480/29 - (72*n)/29)*[(138+n)/145] - (1280/29)*[(139+n)/145] + (-1120/29 - (72*n)/29)*[(140+n)/145] + (-800/29 - (72*n)/29)*[(141+n)/145] + (-480/29 - \\
 & (72*n)/29)*[(142+n)/145] + (17760/29 - (72*n)/29)*[(143+n)/145]
 \end{aligned}$$

Recurrence

$$\begin{aligned}
 a_n = & a_{n-334} - 2a_{n-333} + a_{n-332} - a_{n-327} + 2a_{n-326} - a_{n-325} - a_{n-324} + 2a_{n-323} - a_{n-322} + a_{n-317} - 2a_{n-316} + a_{n-315} - a_{n-309} + 2a_{n-308} - a_{n-307} + a_{n-302} \\
 & - 2a_{n-301} + a_{n-300} + a_{n-299} - 2a_{n-298} + a_{n-297} - a_{n-292} + 2a_{n-291} - a_{n-290} - 2a_{n-189} + 4a_{n-188} - 2a_{n-187} + 2a_{n-182} - 4a_{n-181} + 2a_{n-180} \\
 & + 2a_{n-179} - 4a_{n-178} + 2a_{n-177} - 2a_{n-172} + 4a_{n-171} - 2a_{n-170} + 2a_{n-164} - 4a_{n-163} + 2a_{n-162} - 2a_{n-157} + 4a_{n-156} - 2a_{n-155} - 2a_{n-154} + 4a_{n-153} \\
 & - 2a_{n-152} + 2a_{n-147} - 4a_{n-146} + 2a_{n-145} + a_{n-44} - 2a_{n-43} + a_{n-42} - a_{n-37} + 2a_{n-36} - a_{n-35} - a_{n-34} + 2a_{n-33} - a_{n-32} + a_{n-27} - 2a_{n-26} \\
 & + a_{n-25} - a_{n-19} + 2a_{n-18} - a_{n-17} + a_{n-12} - 2a_{n-11} + a_{n-10} + a_{n-9} - 2a_{n-8} + a_{n-7} - a_{n-2} + 2a_{n-1}
 \end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned}
 & - 4x^2(1 + 19x + 99x^2 + 316x^3 + 642x^4 + 1417x^5 + 2688x^6 + 4663x^7 + 7560x^8 + 10808x^9 + 16372x^{10} + 23239x^{11} + 31669x^{12} + 41982x^{13} + 51958x^{14} + 67488x^{15} + 84464x^{16} \\
 & + 102479x^{17} + 122991x^{18} + 140935x^{19} + 168863x^{20} + 197805x^{21} + 225271x^{22} + 256277x^{23} + 281433x^{24} + 322710x^{25} + 364524x^{26} + 400460x^{27} + 441753x^{28} + 472889x^{29} + \\
 & 527638x^{30} + 581999x^{31} + 623680x^{32} + 672795x^{33} + 706419x^{34} + 771531x^{35} + 834988x^{36} + 876962x^{37} + 929161x^{38} + 960561x^{39} + 1031771x^{40} + 1100701x^{41} + 1138940x^{42} \\
 & + 1191440x^{43} + 1218480x^{44} + 1294246x^{45} + 1367698x^{46} + 1401440x^{47} + 1453938x^{48} + 1476480x^{49} + 1556742x^{50} + 1634700x^{51} + 1663942x^{52} + 1716434x^{53} + 1734480x^{54} \\
 & + 1819240x^{55} + 1901700x^{56} + 1926446x^{57} + 1978936x^{58} + 1992480x^{59} + 2081740x^{60} + 2168700x^{61} + 2188944x^{62} + 2241440x^{63} + 2250480x^{64} + 2344236x^{65} + 2435700x^{66} \\
 & + 2451440x^{67} + 2503940x^{68} + 2508484x^{69} + 2606734x^{70} + 2702700x^{71} + 2713940x^{72} + 2766440x^{73} + 2766486x^{74} + 2869238x^{75} + 2969700x^{76} + 2976438x^{77} + 3028940x^{78} \\
 & + 3024482x^{79} + 3131740x^{80} + 3236702x^{81} + 3238934x^{82} + 3291440x^{83} + 3282480x^{84} + 3394240x^{85} + 3503706x^{86} + 3501436x^{87} + 3553940x^{88} + 3540480x^{89} + 3656740x^{90} \\
 & + 3770704x^{91} + 3763940x^{92} + 3816440x^{93} + 3798476x^{94} + 3919240x^{95} + 4037700x^{96} + 4026440x^{97} + 4078944x^{98} + 4056474x^{99} + 4181740x^{100} + 4304700x^{101} + 4288940x^{102} \\
 & + 4341446x^{103} + 4314478x^{104} + 4444240x^{105} + 4571698x^{106} + 4551440x^{107} + 4603942x^{108} + 4572480x^{109} + 4706742x^{110} + 4838694x^{111} + 4813940x^{112} + 4866440x^{113} + \\
 & 4830480x^{114} + 4969246x^{115} + 5105696x^{116} + 5076440x^{117} + 5128940x^{118} + 5088480x^{119} + 5231744x^{120} + 5372700x^{121} + 5338940x^{122} + 5391436x^{123} + 5346480x^{124} + \\
 & 5494240x^{125} + 5639700x^{126} + 5601444x^{127} + 5653934x^{128} + 5604480x^{129} + 5756740x^{130} + 5906700x^{131} + 5863946x^{132} + 5916438x^{133} + 5862480x^{134} + 6019238x^{135} \\
 & + 6173700x^{136} + 6126442x^{137} + 6178940x^{138} + 6120482x^{139} + 6281734x^{140} + 6440700x^{141} + 6388940x^{142} + 6441440x^{143} + 6378394x^{144} + 6544230x^{145} + 6707658x^{146} \\
 & + 6651238x^{147} + 6703304x^{148} + 6635196x^{149} + 6803902x^{150} + 6969412x^{151} + 6904610x^{152} + 6951320x^{153} + 6872956x^{154} + 7036500x^{155} + 7195230x^{156} + 7113100x^{157} + \\
 & 7144980x^{158} + 7048568x^{159} + 7196768x^{160} + 7339690x^{161} + 7233980x^{162} + 7245458x^{163} + 7128608x^{164} + 7256514x^{165} + 7380092x^{166} + 7250898x^{167} + 7241388x^{168} + \\
 & 7105700x^{169} + 7211324x^{170} + 7313656x^{171} + 7163024x^{172} + 7132944x^{173} + 6980702x^{174} + 7063968x^{175} + 7145614x^{176} + 6979080x^{177} + 6933354x^{178} + 6771550x^{179} \\
 & + 6838674x^{180} + 6906716x^{181} + 6735012x^{182} + 6683114x^{183} + 6521354x^{184} + 6580698x^{185} + 6642380x^{186} + 6473560x^{187} + 6421060x^{188} + 6263520x^{189} + 6318254x^{190} \\
 & + 6375302x^{191} + 6211060x^{192} + 6158562x^{193} + 6005520x^{194} + 6055758x^{195} + 6108300x^{196} + 5948558x^{197} + 5896066x^{198} + 5747520x^{199} + 5793260x^{200} + 5841300x^{201} + \\
 & 5686054x^{202} + 5633564x^{203} + 5489520x^{204} + 5530760x^{205} + 5574300x^{206} + 5423556x^{207} + 5371060x^{208} + 5231520x^{209} + 5268264x^{210} + 5307300x^{211} + 5161060x^{212} + \\
 & 5108560x^{213} + 4973516x^{214} + 5005766x^{215} + 5040300x^{216} + 4898560x^{217} + 4846060x^{218} + 4715514x^{219} + 4743262x^{220} + 4773300x^{221} + 4636062x^{222} + 4583560x^{223} \\
 & + 4457518x^{224} + 4480760x^{225} + 4506298x^{226} + 4373566x^{227} + 4321060x^{228} + 4199520x^{229} + 4218260x^{230} + 4239294x^{231} + 4111064x^{232} + 4058560x^{233} + 3941520x^{234} \\
 & + 3955760x^{235} + 3972296x^{236} + 3848560x^{237} + 3796060x^{238} + 3683524x^{239} + 3693260x^{240} + 3705300x^{241} + 3586060x^{242} + 3533556x^{243} + 3425526x^{244} + 3430760x^{245} + \\
 & 3438300x^{246} + 3323560x^{247} + 3271054x^{248} + 3167522x^{249} + 3168260x^{250} + 3171302x^{251} + 3061060x^{252} + 3008558x^{253} + 2909520x^{254} + 2905758x^{255} + 2904306x^{256} + \\
 & 2798560x^{257} + 2746060x^{258} + 2651520x^{259} + 2643254x^{260} + 2637304x^{261} + 2536060x^{262} + 2483560x^{263} + 2393520x^{264} + 2380756x^{265} + 2370300x^{266} + 2273560x^{267} \\
 & + 2221064x^{268} + 2135520x^{269} + 2118260x^{270} + 2103300x^{271} + 2011056x^{272} + 1958566x^{273} + 1877520x^{274} + 1855760x^{275} + 1836300x^{276} + 1748554x^{277} + 1696062x^{278} \\
 & + 1619520x^{279} + 1593262x^{280} + 1569300x^{281} + 1486058x^{282} + 1433560x^{283} + 1361518x^{284} + 1330766x^{285} + 1302300x^{286} + 1223560x^{287} + 1171060x^{288} + 1103516x^{289} + \\
 & 1068269x^{290} + 1035323x^{291} + 961163x^{292} + 908880x^{293} + 846162x^{294} + 807181x^{295} + 770990x^{296} + 703227x^{297} + 653620x^{298} + 598326x^{299} + 559628x^{300} + 524531x^{301} + \\
 & 467731x^{302} + 425538x^{303} + 381474x^{304} + 348244x^{305} + 318756x^{306} + 276041x^{307} + 244051x^{308} + 212457x^{309} + 187123x^{310} + 165103x^{311} + 136331x^{312} + 114835x^{313} + \\
 & 94957x^{314} + 78466x^{315} + 64820x^{316} + 49016x^{317} + 37803x^{318} + 28409x^{319} + 20894x^{320} + 15297x^{321} + 9740x^{322} + 6351x^{323} + 3941x^{324} + 2295x^{325} + 1296x^{326} + 526x^{327} \\
 & + 225x^{328} + 85x^{329} + 31x^{330} + 9x^{331}) / ((-1 + x)^7(1 + x)^*(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)^*(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^4*(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^*(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} \\
 & + x^{20})^*(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} + x^{19} + x^{20} + x^{21} + x^{22} + x^{23} + x^{24} + x^{25} \\
 & + x^{26} + x^{27} + x^{28})^2(1 - x + x^5 - x^6 + x^{10} - x^{11} + x^{15} - x^{16} + x^{20} - x^{21} + x^{25} - x^{26} + x^{29} - x^{31} + x^{34} - x^{36} + x^{39} - x^{41} + x^{44} - x^{46} + x^{49} - x^{51} + x^{54} - x^{56} + \\
 & x^{58} - x^{61} + x^{63} - x^{66} + x^{68} - x^{71} + x^{73} - x^{76} + x^{78} - x^{81} + x^{83} - x^{86} + x^{87} - x^{91} + x^{92} - x^{96} + x^{97} - x^{101} + x^{102} - x^{106} + x^{107} - x^{111} + x^{112})^2)
 \end{aligned}$$

Three [3,5] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (*V. Kotěšovec, 8.12.2010*) , period = 10200

$$\begin{aligned}
 & -((17822257*n)/3901500) + (68846273*n^2)/11704500 - (431599*n^3)/195075 + (181046*n^4)/172125 - (8*n^5)/25 + n^6/6 + (-3216/17) + (160*n)/289*[n/17] + \\
 & (787812*[n/10])/2125 + 6*[n/8] - (416/135)*[n/6] + ((3424*n)/425 - (116*n^2)/75 + (32*n^3)/25)*[n/5] - [n/4] - (2/135)*n^2*[n/3] - (22241357*[n/2])/114750 + (20312/289 + \\
 & (48*n)/289)*[(1+n)/17] - (214508*[(1+n)/10])/2125 - 2*[(1+n)/8] - (416/135)*[(1+n)/6] + ((17546*n)/2125 - (13*n^2)/5 + (24*n^3)/25)*[(1+n)/5] + 7*[(1+n)/4] + ((2*n)/27 - \\
 & n^2/135)*[(1+n)/3] + (-28008/289) + (208*n)/289*[(2+n)/17] + (324163*[(2+n)/10])/1275 - 2*[(2+n)/8] - (259/135)*[(2+n)/6] + ((8968*n)/2125 - (202*n^2)/75 + \\
 & (16*n^3)/25)*[(2+n)/5] + (41904/289 + (96*n)/289)*[(3+n)/17] - (1161799*[(3+n)/10])/6375 + 6*[(3+n)/8] - (157/135)*[(3+n)/6] + ((8986*n)/2125 - (137*n^2)/75 + \\
 & (8*n^3)/25)*[(3+n)/5] + (24/5)*[(4+n)/25] + (-4416/289) + (256*n)/289*[(4+n)/17] + (8/5)*[(4+n)/15] + (1142674*[(4+n)/10])/6375 - 8*[(5+n)/25] + (-67552/289) + \\
 & (144*n)/289*[(5+n)/17] - (32/15)*[(5+n)/15] + (1220762*[(5+n)/10])/6375 + (16/5)*[(6+n)/25] + (16376/289 + (32*n)/289)*[(6+n)/17] + (8/15)*[(6+n)/15] + \\
 & (20731/255)*[(6+n)/10] + (16/5)*[(7+n)/25] + (-40000/289) + (192*n)/289*[(7+n)/17] + (478141*[(7+n)/10])/6375 + (37224/289 + (80*n)/289)*[(8+n)/17] - (8/15)*[(8+n)/15] + \\
 & (32/5)*[(9+n)/25] + (-18784/289) + (240*n)/289*[(9+n)/17] + (32/15)*[(9+n)/15] - (64/5)*[(10+n)/25] + (-69304/289) + (128*n)/289*[(10+n)/17] - (8/5)*[(10+n)/15] + \\
 & 8*[(11+n)/25] + (3304/289 + (16*n)/289)*[(11+n)/17] + (32/5)*[(12+n)/25] + (-42088/289) + (176*n)/289*[(12+n)/17] - (48/5)*[(13+n)/25] + (24496/289 + \\
 & (64*n)/289)*[(13+n)/17] + (64/5)*[(14+n)/25] + (-22160/289) + (224*n)/289*[(14+n)/17] - (32/5)*[(15+n)/25] + (-80328/289) + (112*n)/289*[(15+n)/17] - (8/5)*[(16+n)/25] + \\
 & (48/5)*[(17+n)/25] + 16*[(18+n)/34] - (24/5)*[(18+n)/25] - 16*[(19+n)/34] + 8*[(19+n)/25] - (7680/17)*[(20+n)/85] + 32*[(20+n)/34] - (24/5)*[(20+n)/25] + \\
 & (120/17 - (16*n)/17)*[(21+n)/85] - 32*[(21+n)/34] - (8/5)*[(21+n)/25] + (240/17)*[(22+n)/85] + 24*[(22+n)/34] + (64/5)*[(22+n)/25] + (240/17)*[(23+n)/85] - 16*[(23+n)/34] - \\
 & (8/5)*[(23+n)/25] + (240/17)*[(24+n)/85] + 8*[(24+n)/34] - (7440/17)*[(25+n)/85] + (360/17 - (16*n)/17)*[(26+n)/85] + 8*[(26+n)/34] + (480/17)*[(27+n)/85] - \\
 & 16*[(27+n)/34] + (480/17)*[(28+n)/85] + 24*[(28+n)/34] + (480/17)*[(29+n)/85] - 32*[(29+n)/34] - (7200/17)*[(30+n)/85] + 32*[(30+n)/34] + (600/17 - (16*n)/17)*[(31+n)/85] - \\
 & 16*[(31+n)/34] + (720/17)*[(32+n)/85] + 16*[(32+n)/34] + (720/17)*[(33+n)/85] + (720/17)*[(34+n)/85] - (6960/17)*[(35+n)/85] + (840/17 - (16*n)/17)*[(36+n)/85] - \\
 & (6720/17)*[(37+n)/85] + (1080/17 - (16*n)/17)*[(38+n)/85] + (1200/17)*[(39+n)/85] - (6480/17)*[(40+n)/85] + (1320/17 - (16*n)/17)*[(41+n)/85] - (6240/17)*[(42+n)/85] + \\
 & (1560/17 - (16*n)/17)*[(43+n)/85] + (1680/17)*[(44+n)/85] - (6000/17)*[(45+n)/85] + (1800/17 - (16*n)/17)*[(46+n)/85] - (5760/17)*[(47+n)/85] + (120 - \\
 & (16*n)/17)*[(48+n)/85] + (2160/17)*[(49+n)/85] - (5520/17)*[(50+n)/85] + (2280/17 - (16*n)/17)*[(51+n)/85] - (5280/17)*[(52+n)/85] + (2520/17 - (16*n)/17)*[(53+n)/85] - \\
 & (5040/17)*[(54+n)/85] + (-4920/17 - (16*n)/17)*[(55+n)/85] + (3000/17 - (16*n)/17)*[(56+n)/85] - (4560/17)*[(57+n)/85] + (3240/17 - (16*n)/17)*[(58+n)/85] - (4320/17)*[(59+n)/85] + \\
 & (-4200/17 - (16*n)/17)*[(60+n)/85] + (3720/17 - (16*n)/17)*[(61+n)/85] - (3840/17)*[(62+n)/85] + (3960/17 - (16*n)/17)*[(63+n)/85] - (3600/17)*[(64+n)/85] + (- \\
 & (3480/17 - (16*n)/17)*[(65+n)/85] + (4440/17 - (16*n)/17)*[(66+n)/85] - (3120/17)*[(67+n)/85] + (4680/17 - (16*n)/17)*[(68+n)/85] - (2880/17)*[(69+n)/85] + (-2760/17 - \\
 & (16*n)/17)*[(70+n)/85] + (-2520/17 - (16*n)/17)*[(71+n)/85] + (-2280/17 - (16*n)/17)*[(72+n)/85] + (5640/17 - (16*n)/17)*[(73+n)/85] - (1920/17)*[(74+n)/85] + (- \\
 & (1800/17 - (16*n)/17)*[(75+n)/85] + (-1560/17 - (16*n)/17)*[(76+n)/85] + (-1320/17 - (16*n)/17)*[(77+n)/85] + (6600/17 - (16*n)/17)*[(78+n)/85] - (960/17)*[(79+n)/85] + (- \\
 & (840/17 - (16*n)/17)*[(80+n)/85] + (-600/17 - (16*n)/17)*[(81+n)/85] + (-360/17 - (16*n)/17)*[(82+n)/85] + (7560/17 - (16*n)/17)*[(83+n)/85]
 \end{aligned}$$

Recurrence

$$\begin{aligned}
 a_n = & a_{n-246} - 3a_{n-245} + 6a_{n-244} - 11a_{n-243} + 18a_{n-242} - 26a_{n-241} + 34a_{n-240} - 42a_{n-239} + 48a_{n-238} - 51a_{n-237} + 51a_{n-236} - 48a_{n-235} + 42a_{n-234} \\
 & - 34a_{n-233} + 26a_{n-232} - 19a_{n-231} + 14a_{n-230} - 11a_{n-229} + 11a_{n-228} - 13a_{n-227} + 15a_{n-226} - 16a_{n-225} + 16a_{n-224} - 14a_{n-223} + 9a_{n-222} \\
 & - 4a_{n-221} + 3a_{n-219} - 3a_{n-218} - 2a_{n-217} + 10a_{n-216} - 19a_{n-215} + 29a_{n-214} - 37a_{n-213} + 40a_{n-212} - 37a_{n-211} + 29a_{n-210} - 16a_{n-209} \\
 & + 16a_{n-207} - 29a_{n-206} + 37a_{n-205} - 40a_{n-204} + 37a_{n-203} - 29a_{n-202} + 19a_{n-201} - 10a_{n-200} + 2a_{n-199} + 3a_{n-198} - 3a_{n-197} + 4a_{n-195} \\
 & - 9a_{n-194} + 14a_{n-193} - 16a_{n-192} + 16a_{n-191} - 15a_{n-190} + 13a_{n-189} - 11a_{n-188} + 11a_{n-187} - 14a_{n-186} + 19a_{n-185} - 26a_{n-184} + 34a_{n-183} \\
 & - 42a_{n-182} + 48a_{n-181} - 51a_{n-180} + 51a_{n-179} - 48a_{n-178} + 42a_{n-177} - 34a_{n-176} + 26a_{n-175} - 18a_{n-174} + 11a_{n-173} - 6a_{n-172} + 3a_{n-171} \\
 & - a_{n-170} - 2a_{n-161} + 6a_{n-160} - 12a_{n-159} + 22a_{n-158} - 36a_{n-157} + 52a_{n-156} - 68a_{n-155} + 84a_{n-154} - 96a_{n-153} + 102a_{n-152} - 102a_{n-151} \\
 & + 96a_{n-150} - 84a_{n-149} + 68a_{n-148} - 52a_{n-147} + 38a_{n-146} - 28a_{n-145} + 22a_{n-144} - 22a_{n-143} + 26a_{n-142} - 30a_{n-141} + 32a_{n-140} - 32a_{n-139} \\
 & + 28a_{n-138} - 18a_{n-137} + 8a_{n-136} - 6a_{n-134} + 6a_{n-133} + 4a_{n-132} - 20a_{n-131} + 38a_{n-130} - 58a_{n-129} + 74a_{n-128} - 80a_{n-127} + 74a_{n-126} \\
 & - 58a_{n-125} + 32a_{n-124} - 32a_{n-122} + 58a_{n-121} - 74a_{n-120} + 80a_{n-119} - 74a_{n-118} + 58a_{n-117} - 38a_{n-116} + 20a_{n-115} - 4a_{n-114} - 6a_{n-113} \\
 & + 6a_{n-112} - 8a_{n-110} + 18a_{n-109} - 28a_{n-108} + 32a_{n-107} - 32a_{n-106} + 30a_{n-105} - 26a_{n-104} + 22a_{n-103} - 22a_{n-102} + 28a_{n-101} - 38a_{n-100} \\
 & + 52a_{n-99} - 68a_{n-98} + 84a_{n-97} - 96a_{n-96} + 102a_{n-95} - 102a_{n-94} + 96a_{n-93} - 84a_{n-92} + 68a_{n-91} - 52a_{n-90} + 36a_{n-89} - 22a_{n-88} + 12a_{n-87} \\
 & - 6a_{n-86} + 2a_{n-85} + a_{n-76} - 3a_{n-75} + 6a_{n-74} - 11a_{n-73} + 18a_{n-72} - 26a_{n-71} + 34a_{n-70} - 42a_{n-69} + 48a_{n-68} - 51a_{n-67} + 51a_{n-66} \\
 & - 48a_{n-65} + 42a_{n-64} - 34a_{n-63} + 26a_{n-62} - 19a_{n-61} + 14a_{n-60} - 11a_{n-59} + 11a_{n-58} - 13a_{n-57} + 15a_{n-56} - 16a_{n-55} + 16a_{n-54} - 14a_{n-53} \\
 & + 9a_{n-52} - 4a_{n-51} + 3a_{n-49} - 3a_{n-48} - 2a_{n-47} + 10a_{n-46} - 19a_{n-45} + 29a_{n-44} - 37a_{n-43} + 40a_{n-42} - 37a_{n-41} + 29a_{n-40} - 16a_{n-39} \\
 & + 16a_{n-37} - 29a_{n-36} + 37a_{n-35} - 40a_{n-34} + 37a_{n-33} - 29a_{n-32} + 19a_{n-31} - 10a_{n-30} + 2a_{n-29} + 3a_{n-28} - 3a_{n-27} + 4a_{n-25} - 9a_{n-24} \\
 & + 14a_{n-23} - 16a_{n-22} + 16a_{n-21} - 15a_{n-20} + 13a_{n-19} - 11a_{n-18} + 11a_{n-17} - 14a_{n-16} + 19a_{n-15} - 26a_{n-14} + 34a_{n-13} - 42a_{n-12} + 48a_{n-11} \\
 & - 51a_{n-10} + 51a_{n-9} - 48a_{n-8} + 42a_{n-7} - 34a_{n-6} + 26a_{n-5} - 18a_{n-4} + 11a_{n-3} - 6a_{n-2} + 3a_{n-1}
 \end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned}
 & -4x^2(1 + 18x + 83x^2 + 270x^3 + 586x^4 + 1446x^5 + 2580x^6 + 5242x^7 + 8349x^8 + 14046x^9 + 21830x^{10} + 32295x^{11} + 49034x^{12} + 65868x^{13} + 94613x^{14} + 123507x^{15} + 165967x^{16} + 216031x^{17} + 269474x^{18} + 346669x^{19} \\
 & + 417769x^{20} + 522325x^{21} + 626065x^{22} + 743681x^{23} + 892982x^{24} + 1027763x^{25} + 1223278x^{26} + 1397092x^{27} + 1606419x^{28} + 1846802x^{29} + 2066120x^{30} + 2379481x^{31} + 2636042x^{32} + 2965828x^{33} + 3309756x^{34} \\
 & + 3634674x^{35} + 4085395x^{36} + 4431561x^{37} + 4904332x^{38} + 5350495x^{39} + 5794798x^{40} + 6383504x^{41} + 6814819x^{42} + 7435468x^{43} + 7964896x^{44} + 8529173x^{45} + 9234993x^{46} + 9738811x^{47} + 10493280x^{48} + 11080162x^{49} + \\
 & 11753122x^{50} + 12547695x^{51} + 13107770x^{52} + 13974771x^{53} + 14593206x^{54} + 15358911x^{55} + 16212496x^{56} + 16811926x^{57} + 17765377x^{58} + 18390626x^{59} + 19227388x^{60} + 20110395x^{61} + 20729128x^{62} + 21740988x^{63} \\
 & + 22349628x^{64} + 23234714x^{65} + 24122238x^{66} + 24743488x^{67} + 25791586x^{68} + 26369773x^{69} + 27287108x^{70} + 28167917x^{71} + 28782379x^{72} + 29858409x^{73} + 30401278x^{74} + 31345931x^{75} + 32217820x^{76} + 32823389x^{77} \\
 & + 33926368x^{78} + 34433312x^{79} + 35404891x^{80} + 36267860x^{81} + 36864349x^{82} + 37994402x^{83} + 38465256x^{84} + 39463937x^{85} + 40317736x^{86} + 40905275x^{87} + 42061702x^{88} + 42496264x^{89} + 43519801x^{90} + 44362896x^{91} \\
 & + 44935623x^{92} + 46113918x^{93} + 46500970x^{94} + 47538439x^{95} + 48353104x^{96} + 48889403x^{97} + 50066590x^{98} + 50372124x^{99} + 51393873x^{100} + 52135956x^{101} + 52596251x^{102} + 53727524x^{103} + 53899876x^{104} + \\
 & 54864463x^{105} + 55473108x^{106} + 55817287x^{107} + 56846998x^{108} + 56839342x^{109} + 57703391x^{110} + 58121290x^{111} + 58316159x^{112} + 59189640x^{113} + 58963586x^{114} + 59685867x^{115} + 59858692x^{116} + 59879527x^{117} + \\
 & 60538560x^{118} + 60069960x^{119} + 60667509x^{120} + 60497066x^{121} + 60329349x^{122} + 60729576x^{123} + 60020510x^{124} + 60346101x^{125} + 59951038x^{126} + 59603559x^{127} + 59735562x^{128} + 58823422x^{129} + 58936591x^{130} \\
 & + 58297852x^{131} + 57796745x^{132} + 57687814x^{133} + 56625000x^{134} + 56547619x^{135} + 55722540x^{136} + 55099747x^{137} + 54792932x^{138} + 53630804x^{139} + 53395149x^{140} + 52442802x^{141} + 51732541x^{142} + 51279568x^{143} + \\
 & 50068094x^{144} + 49717013x^{145} + 48697180x^{146} + 47938897x^{147} + 47396618x^{148} + 46181780x^{149} + 45761717x^{150} + 44723124x^{151} + 43951583x^{152} + 43363056x^{153} + 42173872x^{154} + 41715615x^{155} + 40682062x^{156} + \\
 & 39914579x^{157} + 39297602x^{158} + 38142722x^{159} + 37657069x^{160} + 36632180x^{161} + 35873611x^{162} + 35229632x^{163} + 34110688x^{164} + 33598109x^{165} + 32582140x^{166} + 31832651x^{167} + 31161598x^{168} + 30078724x^{169} \\
 & + 29539082x^{170} + 28532186x^{171} + 27791722x^{172} + 27093888x^{173} + 26047310x^{174} + 25481533x^{175} + 24484764x^{176} + 23755875x^{177} + 23033993x^{178} + 22028744x^{179} + 21442951x^{180} + 20464441x^{181} + 19758703x^{182} \\
 & + 19023462x^{183} + 18077343x^{184} + 17485580x^{185} + 16548137x^{186} + 15884658x^{187} + 15159082x^{188} + 14297375x^{189} + 13720848x^{190} + 12854487x^{191} + 12253688x^{192} + 11565301x^{193} + 10811676x^{194} + 10271866x^{195} + \\
 & 9505412x^{196} + 8983749x^{197} + 8360001x^{198} + 7733532x^{199} + 7251173x^{200} + 6611647x^{201} + 6181651x^{202} + 5651432x^{203} + 5164444x^{204} + 4760737x^{205} + 4267539x^{206} + 3936170x^{207} + 3521932x^{208} + 3173175x^{209} + \\
 & 2861881x^{210} + 2515638x^{211} + 2278462x^{212} + 1985050x^{213} + 1755622x^{214} + 1537236x^{215} + 1317175x^{216} + 1161424x^{217} + 974906x^{218} + 838858x^{219} + 702219x^{220} + 579845x^{221} + 489403x^{222} + 388377x^{223} + \\
 & 319910x^{224} + 249000x^{225} + 194642x^{226} + 152573x^{227} + 110975x^{228} + 85360x^{229} + 58459x^{230} + 42585x^{231} + 28755x^{232} + 18634x^{233} + 12332x^{234} + 6829x^{235} + 4398x^{236} + 2149x^{237} + 1198x^{238} + 495x^{239} + 197x^{240} \\
 & + 81x^{241} + 22x^{242} + 9x^{243}) / ((-1 + x)^7 * (1 + x) * (1 + x^2) * (1 - x + x^2) * (1 + x + x^2)^3 * (1 + x^4) * (1 - x + x^2 - x^3 + x^4) * (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^4 * (1 - x + x^3 - x^4 + x^5 - x^7 + x^8) * (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \\
 & x^7 + x^8 - x^9 + x^{10} - x^{11} + x^{12} - x^{13} + x^{14} - x^{15} + x^{16}) * (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16})^2 * (1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20}) * (1 - x + x^5 - x^6 + x^{10} \\
 & - x^{11} + x^{15} - x^{16} + x^{17} - x^{18} + x^{20} - x^{21} + x^{22} - x^{23} + x^{25} - x^{26} + x^{27} - x^{28} + x^{30} - x^{31} + x^{32} - x^{33} + x^{34} - x^{36} + x^{37} - x^{38} + x^{39} - x^{41} + x^{42} - x^{43} + x^{44} - x^{46} + x^{47} - x^{48} + x^{49} - x^{53} + x^{54} - x^{58} + \\
 & x^{59} - x^{63} + x^{64})^2)
 \end{aligned}$$

Three [4,5] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 8.12.2010), period = 73800

$$\begin{aligned}
 & -((10612048451*n)/1452384000) + (1599380411*n^2)/181548000 - (14618761*n^3)/5379200 + (47513153*n^4)/35424000 - (22*n^5)/75 + n^6/6 + (9120/41 + (64*n)/1681)*[n/41] + (3989788*[n/10])/5125 + (8/3)*[n/9] \\
 & - (5/2)*[n/8] + ((4096*n)/1025 - (4*n^2)/5 + (16*n^3)/25)*[n/5] + (-(67/80) - (3*n)/16 - (9*n^2)/160)*[n/4] + (152/27)*[n/3] + (-(666298711/656000) + (3*n)/16 - (9*n^2)/320)*[n/2] + (789952/1681 + (128*n)/1681)*[(1 + n)/41] - (2609092*[(1 + n)/10])/5125 + 8*[(1 + n)/9] - (5/2)*[(1 + n)/8] + ((18804*n)/5125 - (63*n^2)/25 + (12*n^3)/25)*[(1 + n)/5] + (-(67/80) + (3*n)/16 - (9*n^2)/160)*[(1 + n)/4] + (4/27)*[(1 + n)/3] + (1221528/1681 + (192*n)/1681)*[(2 + n)/41] + (249521*[(2 + n)/10])/1025 + (8/3)*[(2 + n)/9] - (5/2)*[(2 + n)/8] + ((14832*n)/5125 - (74*n^2)/25 + (8*n^3)/25)*[(2 + n)/5] + (1642080/1681 + (256*n)/1681)*[(3 + n)/41] - (5216037*[(3 + n)/10])/5125 - (20/3)*[(3 + n)/9] - (5/2)*[(3 + n)/8] + ((8564*n)/5125 - (53*n^2)/25 + (4*n^3)/25)*[(3 + n)/5] + (-(74160/1681) + (320*n)/1681)*[(4 + n)/41] + (64/5)*[(4 + n)/25] + (5204762*[(4 + n)/10])/5125 + 4*[(4 + n)/9] + (311552/1681 + (56*n)/1681)*[(5 + n)/41] - (8/5)*[(5 + n)/25] - (1210874*[(5 + n)/10])/5125 + (28/3)*[(5 + n)/9] + (740688/1681 + (120*n)/1681)*[(6 + n)/41] - (48/5)*[(6 + n)/25] + (520569*[(6 + n)/10])/1025 + (1173560/1681 + (184*n)/1681)*[(7 + n)/41] - (24/5)*[(7 + n)/25] - (3944857*[(7 + n)/10])/5125 + (1583600/1681 + (248*n)/1681)*[(8 + n)/41] + (64/5)*[(8 + n)/25] + (-(154960/1681) + (312*n)/1681)*[(9 + n)/41] + 16*[(9 + n)/25] + (12/5)*[(9 + n)/20] + (250416/1681 + (48*n)/1681)*[(10 + n)/41] - (48/5)*[(10 + n)/25] - (12/5)*[(10 + n)/20] + (687408/1681 + (112*n)/1681)*[(11 + n)/41] - (72/5)*[(11 + n)/25] + (1116328/1681 + (176*n)/1681)*[(12 + n)/41] + (32/5)*[(12 + n)/25] + (1510608/1681 + (240*n)/1681)*[(13 + n)/41] + (104/5)*[(13 + n)/25] + (4/5)*[(13 + n)/20] + (-(215176/1681) + (304*n)/1681)*[(14 + n)/41] + (48/5)*[(14 + n)/25] - (4/5)*[(14 + n)/20] + (204616/1681 + (40*n)/1681)*[(15 + n)/41] - 16*[(15 + n)/25] - (4/5)*[(15 + n)/20] + (644216/1681 + (104*n)/1681)*[(16 + n)/41] - (32/5)*[(16 + n)/25] + (4/5)*[(16 + n)/20] + (1063936/1681 + (168*n)/1681)*[(17 + n)/41] + (88/5)*[(17 + n)/25] + (1437208/1681 + (232*n)/1681)*[(18 + n)/41] + 16*[(18 + n)/25] + (-(267600/1681) + (296*n)/1681)*[(19 + n)/41] + (8/5)*[(19 + n)/25] + (161360/1681 + (32*n)/1681)*[(20 + n)/41] - (64/5)*[(20 + n)/25] + (598320/1681 + (96*n)/1681)*[(21 + n)/41] + (32/5)*[(21 + n)/25] + (1003592/1681 + (160*n)/1681)*[(22 + n)/41] + (64/5)*[(22 + n)/25] + (1377504/1681 + (224*n)/1681)*[(23 + n)/41] + (32/5)*[(23 + n)/25] + (-(311576/1681) + (288*n)/1681)*[(24 + n)/41] + (121304/1681 + (24*n)/1681)*[(25 + n)/41] + (550376/1681 + (88*n)/1681)*[(26 + n)/41] + (935952/1681 + (152*n)/1681)*[(27 + n)/41] + (1332152/1681 + (216*n)/1681)*[(28 + n)/41] + (-(346448/1681) + (280*n)/1681)*[(29 + n)/41] + (85104/1681 + (16*n)/1681)*[(30 + n)/41] + (501040/1681 + (80*n)/1681)*[(31 + n)/41] + (875120/1681 + (144*n)/1681)*[(32 + n)/41] + (1288360/1681 + (208*n)/1681)*[(33 + n)/41] + (-(385008/1681) + (272*n)/1681)*[(34 + n)/41] + (39968/1681 + (8*n)/1681)*[(35 + n)/41] + (437520/1681 + (72*n)/1681)*[(36 + n)/41] + (835200/1681 + (136*n)/1681)*[(37 + n)/41] + (1260232/1681 + (200*n)/1681)*[(38 + n)/41] + (-(413152/1681) + (264*n)/1681)*[(39 + n)/41] - (51200/41)*[(44 + n)/205] + (320/41 - (8*n)/41)*[(45 + n)/205] + (640/41)*[(46 + n)/205] + (640/41)*[(47 + n)/205] + (640/41)*[(48 + n)/205] - (50560/41)*[(49 + n)/205] + (960/41 - (8*n)/41)*[(50 + n)/205] + (1280/41)*[(51 + n)/205] + (1280/41)*[(52 + n)/205] + (1280/41)*[(53 + n)/205] - (49920/41)*[(54 + n)/205] + (1600/41 - (8*n)/41)*[(55 + n)/205] + (1920/41)*[(56 + n)/205] + (1920/41)*[(57 + n)/205] + (1920/41)*[(58 + n)/205] - (49280/41)*[(59 + n)/205] + (2240/41 - (8*n)/41)*[(60 + n)/205] + (2560/41)*[(61 + n)/205] + (2560/41)*[(62 + n)/205] + (2560/41)*[(63 + n)/205] - (48640/41)*[(64 + n)/205] + (2880/41 - (8*n)/41)*[(65 + n)/205] + (3200/41)*[(66 + n)/205] + (3200/41)*[(67 + n)/205] + (3200/41)*[(68 + n)/205] - (48000/41)*[(69 + n)/205] + (3520/41 - (8*n)/41)*[(70 + n)/205] + (3840/41)*[(71 + n)/205] + (3840/41)*[(72 + n)/205] + (3840/41)*[(73 + n)/205] - (47360/41)*[(74 + n)/205] + (4160/41 - (8*n)/41)*[(75 + n)/205] + (4480/41)*[(76 + n)/205] + (4480/41)*[(77 + n)/205] + (4480/41)*[(78 + n)/205] - (46720/41)*[(79 + n)/205] + (4800/41 - (8*n)/41)*[(80 + n)/205] + (5120/41)*[(81 + n)/205] + (5120/41)*[(82 + n)/205] + (5120/41)*[(83 + n)/205] - (46080/41)*[(84 + n)/205] + (-(45760/41) - (8*n)/41)*[(85 + n)/205] + (6080/41 - (8*n)/41)*[(86 + n)/205] + (6400/41)*[(87 + n)/205] + (6400/41)*[(88 + n)/205] - (44800/41)*[(89 + n)/205] + (-(44480/41) - (8*n)/41)*[(90 + n)/205] + (7360/41 - (8*n)/41)*[(91 + n)/205] + (7680/41)*[(92 + n)/205] + (7680/41)*[(93 + n)/205] - (43520/41)*[(94 + n)/205] + (-(43200/41) - (8*n)/41)*[(95 + n)/205] + (8640/41 - (8*n)/41)*[(96 + n)/205] + (8960/41)*[(97 + n)/205] + (8960/41)*[(98 + n)/205] - (42240/41)*[(99 + n)/205] + (-(41920/41) - (8*n)/41)*[(100 + n)/205] + (9920/41 - (8*n)/41)*[(101 + n)/205] + (10240/41)*[(102 + n)/205] + (10240/41)*[(103 + n)/205] - (40960/41)*[(104 + n)/205] + (-(40640/41) - (8*n)/41)*[(105 + n)/205] + (11200/41 - (8*n)/41)*[(106 + n)/205] + (11520/41)*[(107 + n)/205] + (11520/41)*[(108 + n)/205] - (39680/41)*[(109 + n)/205] + (-(960 - (8*n)/41)*[(110 + n)/205] + (12480/41 - (8*n)/41)*[(111 + n)/205] + (12800/41)*[(112 + n)/205] + (12800/41)*[(113 + n)/205] - (38400/41)*[(114 + n)/205] + (-(38080/41) - (8*n)/41)*[(115 + n)/205] + (13760/41 - (8*n)/41)*[(116 + n)/205] + (14080/41)*[(117 + n)/205] + (14080/41)*[(118 + n)/205] - (37120/41)*[(119 + n)/205] + (-(36800/41) - (8*n)/41)*[(120 + n)/205] + (15040/41 - (8*n)/41)*[(121 + n)/205] + (15360/41)*[(122 + n)/205] + (15360/41)*[(123 + n)/205] - (35840/41)*[(124 + n)/205] + (-(35520/41) - (8*n)/41)*[(125 + n)/205] + (-(34880/41) - (8*n)/41)*[(126 + n)/205] + (16960/41 - (8*n)/41)*[(127 + n)/205] + (17280/41)*[(128 + n)/205] - (33920/41)*[(129 + n)/205] + (-(33600/41) - (8*n)/41)*[(130 + n)/205] + (-(32960/41) - (8*n)/41)*[(131 + n)/205] + (18880/41 - (8*n)/41)*[(132 + n)/205] + (19200/41)*[(133 + n)/205] - (32000/41)*[(134 + n)/205] + (-(31680/41) - (8*n)/41)*[(135 + n)/205] + (-(31040/41) - (8*n)/41)*[(136 + n)/205] + (20800/41 - (8*n)/41)*[(137 + n)/205] + (21120/41)*[(138 + n)/205] - (30080/41)*[(139 + n)/205] + (-(29760/41) - (8*n)/41)*[(140 + n)/205] + (-(29120/41) - (8*n)/41)*[(141 + n)/205] + (22720/41 - (8*n)/41)*[(142 + n)/205] + (23040/41)*[(143 + n)/205] - (28160/41)*[(144 + n)/205] + (-(27840/41) - (8*n)/41)*[(145 + n)/205] + (-(27200/41) - (8*n)/41)*[(146 + n)/205] + (24640/41 - (8*n)/41)*[(147 + n)/205] + (24960/41)*[(148 + n)/205] - 640*[(149 + n)/205] + (-(25920/41) - (8*n)/41)*[(150 + n)/205] + (-(25280/41) - (8*n)/41)*[(151 + n)/205] + (26560/41 - (8*n)/41)*[(152 + n)/205] + (26880/41)*[(153 + n)/205] - (24320/41)*[(154 + n)/205] + (-(24000/41) - (8*n)/41)*[(155 + n)/205] + (-(23360/41) - (8*n)/41)*[(156 + n)/205] + (28480/41 - (8*n)/41)*[(157 + n)/205] + (28800/41)*[(158 + n)/205] - (22400/41)*[(159 + n)/205] + (-(22080/41) - (8*n)/41)*[(160 + n)/205] + (-(21440/41) - (8*n)/41)*[(161 + n)/205] + (30400/41 - (8*n)/41)*[(162 + n)/205] + (30720/41)*[(163 + n)/205] - (20480/41)*[(164 + n)/205] + (-(20160/41) - (8*n)/41)*[(165 + n)/205] + (-(19520/41) - (8*n)/41)*[(166 + n)/205] + (-(18880/41) - (8*n)/41)*[(167 + n)/205] + (32960/41 - (8*n)/41)*[(168 + n)/205] - (17920/41)*[(169 + n)/205] + (-(17600/41) - (8*n)/41)*[(170 + n)/205] + (-(16960/41) - (8*n)/41)*[(171 + n)/205] + (-(16320/41) - (8*n)/41)*[(172 + n)/205] + (35520/41 - (8*n)/41)*[(173 + n)/205] - (15360/41)*[(174 + n)/205] + (-(15040/41) - (8*n)/41)*[(175 + n)/205] + (-(14400/41) - (8*n)/41)*[(176 + n)/205] + (-(13760/41) - (8*n)/41)*[(177 + n)/205] + (38080/41 - (8*n)/41)*[(178 + n)/205] - (12800/41)*[(179 + n)/205] + (-(12480/41) - (8*n)/41)*[(180 + n)/205] + (-(11840/41) - (8*n)/41)*[(181 + n)/205] + (-(11200/41) - (8*n)/41)*[(182 + n)/205] + (40640/41 - (8*n)/41)*[(183 + n)/205] - (10240/41)*[(184 + n)/205] + (-(9920/41) - (8*n)/41)*[(185 + n)/205] + (-(9280/41) - (8*n)/41)*[(186 + n)/205] + (-(8640/41) - (8*n)/41)*[(187 + n)/205] + (43200/41 - (8*n)/41)*[(188 + n)/205] - (7680/41)*[(189 + n)/205] + (-(7360/41) - (8*n)/41)*[(190 + n)/205] + (-(6720/41) - (8*n)/41)*[(191 + n)/205] + (-(6080/41) - (8*n)/41)*[(192 + n)/205] + (45760/41 - (8*n)/41)*[(193 + n)/205] - (5120/41)*[(194 + n)/205] + (-(4800/41) - (8*n)/41)*[(195 + n)/205] + (-(4160/41) - (8*n)/41)*[(196 + n)/205] + (-(3520/41) - (8*n)/41)*[(197 + n)/205] + (48320/41 - (8*n)/41)*[(198 + n)/205] - (2560/41)*[(199 + n)/205] + (-(2240/41) - (8*n)/41)*[(200 + n)/205] + (-(1600/41) - (8*n)/41)*[(201 + n)/205] + (-(960/41) - (8*n)/41)*[(202 + n)/205] + (50880/41 - (8*n)/41)*[(203 + n)/205]
 \end{aligned}$$

Recurrence

$$\begin{aligned}
 a_n = & a_{n-476} - a_{n-472} - a_{n-468} - a_{n-467} + a_{n-464} + a_{n-463} + a_{n-459} - a_{n-456} - a_{n-455} + a_{n-452} - a_{n-451} + a_{n-448} + 2a_{n-447} - a_{n-444} + a_{n-442} - 2a_{n-439} - a_{n-438} + a_{n-435} \\
 & - a_{n-434} + a_{n-431} + a_{n-430} - a_{n-427} - a_{n-423} - a_{n-422} + a_{n-419} + a_{n-418} + a_{n-414} - a_{n-410} - 2a_{n-271} + 2a_{n-267} + 2a_{n-263} + 2a_{n-262} - 2a_{n-259} - 2a_{n-258} \\
 & - 2a_{n-254} + 2a_{n-251} + 2a_{n-250} - 2a_{n-247} + 2a_{n-246} - 2a_{n-243} - 4a_{n-242} + 2a_{n-239} - 2a_{n-237} + 4a_{n-234} + 2a_{n-233} - 2a_{n-230} + 2a_{n-229} - 2a_{n-226} - 2a_{n-225} \\
 & + 2a_{n-222} + 2a_{n-218} + 2a_{n-217} - 2a_{n-214} - 2a_{n-213} - 2a_{n-209} + 2a_{n-205} + a_{n-66} - a_{n-62} - a_{n-58} - a_{n-57} + a_{n-54} + a_{n-53} + a_{n-49} - a_{n-46} - a_{n-45} + a_{n-42} \\
 & - a_{n-41} + a_{n-38} + 2a_{n-37} - a_{n-34} + a_{n-32} - 2a_{n-29} - a_{n-28} + a_{n-25} - a_{n-24} + a_{n-21} + a_{n-20} - a_{n-17} - a_{n-13} - a_{n-12} + a_{n-9} + a_{n-8} + a_{n-4}
 \end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned}
 & -4x^2 * (1 + 21x + 140x^2 + 575x^3 + 1717x^4 + 4307x^5 + 9541x^6 + 19195x^7 + 35812x^8 + 62392x^9 + 103086x^{10} + 162833x^{11} + 247432x^{12} + 363813x^{13} + 518257x^{14} + 718774x^{15} + 973311x^{16} + 1290357x^{17} + \\
 & 1679592x^{18} + 2147306x^{19} + 2703140x^{20} + 3355307x^{21} + 4112881x^{22} + 4986952x^{23} + 5980790x^{24} + 7104564x^{25} + 8364447x^{26} + 9768542x^{27} + 11327895x^{28} + 13038411x^{29} + 14908222x^{30} + 16936809x^{31} + \\
 & 19128089x^{32} + 21490214x^{33} + 24006688x^{34} + 26681665x^{35} + 29504712x^{36} + 32475608x^{37} + 35600803x^{38} + 38851404x^{39} + 42230839x^{40} + 45720392x^{41} + 49320398x^{42} + 53040279x^{43} + 56841605x^{44} + \\
 & 60731451x^{45} + 64684404x^{46} + 68704952x^{47} + 72808165x^{48} + 76947367x^{49} + 81135604x^{50} + 85341251x^{51} + 89575629x^{52} + 93861897x^{53} + 98147279x^{54} + 102453822x^{55} + 106745381x^{56} + 111042911x^{57} + \\
 & 115379591x^{58} + 119697575x^{59} + 1248028374x^{60} + 128330190x^{61} + 132632425x^{62} + 139976239x^{63} + 141296232x^{64} + 145630882x^{65} + 149930034x^{66} + 154229384x^{67} + 158576232x^{68} + 162896234x^{69} + 167233888 \\
 & x^{70} + 171530040x^{71} + 175826390x^{72} + 180176240x^{73} + 184496242x^{74} + 188836896x^{75} + 193130048x^{76} + 197423396x^{77} + 201776246x^{78} + 206096248x^{79} + 210439898x^{80} + 214730048x^{81} + 219020396x^{82} + \\
 & 223376246x^{83} + 227696248x^{84} + 232042898x^{85} + 236330046x^{86} + 240617396x^{87} + 244976248x^{88} + 249296248x^{89} + 253645896x^{90} + 257930042x^{91} + 262214390x^{92} + 266576240x^{93} + 270896238x^{94} + 275248884 \\
 & x^{95} + 279530032x^{96} + 283811382x^{97} + 288176234x^{98} + 292496234x^{99} + 296851882x^{100} + 301130032x^{101} + 305408384x^{102} + 309776234x^{103} + 314096232x^{104} + 318454882x^{105} + 322730032x^{106} + 327005384 \\
 & x^{107} + 331376234x^{108} + 335696232x^{109} + 340057884x^{110} + 344330038x^{111} + 348602390x^{112} + 352976240x^{113} + 357296240x^{114} + 361660892x^{115} + 365930046x^{116} + 370199398x^{117} + 374576246x^{118} + \\
 & 378896246x^{119} + 383263898x^{120} + 387530048x^{121} + 391796398x^{122} + 396176246x^{123} + 400496246x^{124} + 404866898x^{125} + 409130048x^{126} + 413393396x^{127} + 417776246x^{128} + 422096248x^{129} + 426469898 \\
 & x^{130} + 430730046x^{131} + 434990392x^{132} + 439376240x^{133} + 443696240x^{134} + 448072888x^{135} + 452330034x^{136} + 456587382x^{137} + 460976232x^{138} + 465296234x^{139} + 469675884x^{140} + 473930032x^{141} + \\
 & 478184382x^{142} + 482576234x^{143} + 486896234x^{144} + 491278882x^{145} + 495530032x^{146} + 499781382x^{147} + 504176234x^{148} + 508496234x^{149} + 512881882x^{150} + 517130034x^{151} + 521378388x^{152} + 525776240x^{153} + \\
 & 530096240x^{154} + 5344484890x^{155} + 538730042x^{156} + 542975396x^{157} + 547376248x^{158} + 551696246x^{159} + 556087896x^{160} + 560330048x^{161} + 564572398x^{162} + 568976248x^{163} + 573296246x^{164} + 577690896 \\
 & x^{165} + 581930048x^{166} + 586169398x^{167} + 590576246x^{168} + 594896246x^{169} + 599293898x^{170} + 603530048x^{171} + 607766396x^{172} + 612176242x^{173} + 616496240x^{174} + 620896890x^{175} + 625130038x^{176} + \\
 & 629363384x^{177} + 633776232x^{178} + 638096232x^{179} + 642499884x^{180} + 646730034x^{181} + 650960382x^{182} + 655376232x^{183} + 659696234x^{184} + 664102884x^{185} + 668330032x^{186} + 672557382x^{187} + 676976232 \\
 & x^{188} + 681296234x^{189} + 685705884x^{190} + 689930032x^{191} + 694154384x^{192} + 698576238x^{193} + 702896240x^{194} + 707308890x^{195} + 711530040x^{196} + 715751392x^{197} + 720176246x^{198} + 724496248x^{199} + \\
 & 728911896x^{200} + 733130046x^{201} + 737348398x^{202} + 741776248x^{203} + 746096236x^{204} + 750514866x^{205} + 754729956x^{206} + 758945046x^{207} + 763375010x^{208} + 767692708x^{209} + 772109162x^{210} + 776310830 \\
 & x^{211} + 780503868x^{212} + 784904494x^{213} + 789171350x^{214} + 793514638x^{215} + 797604318x^{216} + 801644484x^{217} + 805848584x^{218} + 809859710x^{219} + 813886342x^{220} + 817583424x^{221} + 821155682x^{222} + \\
 & 824817056x^{223} + 828201632x^{224} + 831520632x^{225} + 834419468x^{226} + 837107692x^{227} + 839802416x^{228} + 842134768x^{229} + 844320904x^{230} + 846001324x^{231} + 847393510x^{232} + 848720660x^{233} + 849619628x^{234} + \\
 & 850316646x^{235} + 850456614x^{236} + 850271392x^{237} + 849995966x^{238} + 849282986x^{239} + 848372640x^{240} + 846920666x^{241} + 845173208x^{242} + 843374658x^{243} + 841193448x^{244} + 838877212x^{245} + 836089250 \\
 & x^{246} + 833080588x^{247} + 830095682x^{248} + 826813026x^{249} + 823478966x^{250} + 819761190x^{251} + 815908422x^{252} + 812159830x^{253} + 808201408x^{254} + 804273564x^{255} + 800047402x^{256} + 795763992x^{257} + \\
 & 791652316x^{258} + 787401568x^{259} + 783240158x^{260} + 778839214x^{261} + 774426522x^{262} + 770217028x^{263} + 765901074x^{264} + 761694142x^{265} + 757269666x^{266} + 752844546x^{267} + 748623762x^{268} + 744303768 \\
 & x^{269} + 740092118x^{270} + 735669966x^{271} + 731247616x^{272} + 727023768x^{273} + 722703766x^{274} + 718489112x^{275} + 714069960x^{276} + 709650610x^{277} + 705423760x^{278} + 701103758x^{279} + 696886104x^{280} + \\
 & 692469952x^{281} + 688053604x^{282} + 683823754x^{283} + 679503752x^{284} + 675283102x^{285} + 670869952x^{286} + 666456604x^{287} + 662223754x^{288} + 657903752x^{289} + 653680102x^{290} + 649269954x^{291} + 644859604 \\
 & x^{292} + 640623752x^{293} + 636303752x^{294} + 632077104x^{295} + 627669958x^{296} + 623262610x^{297} + 619023760x^{298} + 614703762x^{299} + 610474116x^{300} + 606069968x^{301} + 601665618x^{302} + 597423766x^{303} + \\
 & 593103766x^{304} + 588871118x^{305} + 584469968x^{306} + 580068616x^{307} + 575823766x^{308} + 571503768x^{309} + 567268118x^{310} + 562869968x^{311} + 558471616x^{312} + 554223766x^{313} + 549903768x^{314} + 545665116x^{315} + \\
 & 541269962x^{316} + 536874610x^{317} + 532623760x^{318} + 528303760x^{319} + 524062108x^{320} + 519669954x^{321} + 515277602x^{322} + 511023754x^{323} + 506703754x^{324} + 502459102x^{325} + 498069952x^{326} + 493680602 \\
 & x^{327} + 489423754x^{328} + 485103754x^{329} + 480856102x^{330} + 476469952x^{331} + 472083604x^{332} + 467823754x^{333} + 463503752x^{334} + 459253102x^{335} + 454869954x^{336} + 450486608x^{337} + 446223760x^{338} + \\
 & 441903760x^{339} + 437650112x^{340} + 433269966x^{341} + 428889618x^{342} + 424623768x^{343} + 420303766x^{344} + 416047116x^{345} + 411669968x^{346} + 407292618x^{347} + 403023766x^{348} + 398703766x^{349} + 394444118 \\
 & x^{350} + 390069968x^{351} + 385695618x^{352} + 381423766x^{353} + 377103766x^{354} + 372841118x^{355} + 368469966x^{356} + 364098612x^{357} + 359823760x^{358} + 355503760x^{359} + 351238110x^{360} + 346869958x^{361} + \\
 & 342501604x^{362} + 338223752x^{363} + 333903754x^{364} + 329635104x^{365} + 325269952x^{366} + 320904602x^{367} + 316623752x^{368} + 312303754x^{369} + 308032104x^{370} + 303669952x^{371} + 299307602x^{372} + 295023754 \\
 & x^{373} + 290703754x^{374} + 286429102x^{375} + 282069952x^{376} + 277710604x^{377} + 273423758x^{378} + 269103760x^{379} + 264826110x^{380} + 260469962x^{381} + 256113616x^{382} + 251823768x^{383} + 247503768x^{384} + \\
 & 243223116x^{385} + 238869966x^{386} + 234516618x^{387} + 230223768x^{388} + 225903766x^{389} + 221620116x^{390} + 217269968x^{391} + 212919618x^{392} + 208623768x^{393} + 204303766x^{394} + 200017116x^{395} + 195669968x^{396} + \\
 & 191322616x^{397} + 187023762x^{398} + 182703760x^{399} + 178414110x^{400} + 174069960x^{401} + 169725608x^{402} + 165423754x^{403} + 161103752x^{404} + 156811104x^{405} + 152469954x^{406} + 148128602x^{407} + 143823752 \\
 & x^{408} + 139503754x^{409} + 135208113x^{410} + 130869993x^{411} + 126531774x^{412} + 122224375x^{413} + 117905535x^{414} + 113609491x^{415} + 109279589x^{416} + 104953907x^{417} + 100659684x^{418} + 96366268x^{419} + \\
 & 92105306x^{420} + 87832889x^{421} + 83585124x^{422} + 79387643x^{423} + 75222073x^{424} + 71117924x^{425} + 67043295x^{426} + 63030981x^{427} + 59103362x^{428} + 55251072x^{429} + 51499248x^{430} + 47825255x^{431} + 44256467 \\
 & x^{432} + 40810672x^{433} + 37484492x^{434} + 34297592x^{435} + 31234299x^{436} + 28315018x^{437} + 25551495x^{438} + 22941991x^{439} + 20498142x^{440} + 18206577x^{441} + 16077509x^{442} + 14113790x^{443} + 12310276x^{444} + \\
 & 10668625x^{445} + 9174552x^{446} + 7828124x^{447} + 6624489x^{448} + 5555108x^{449} + 4614909x^{450} + 3790328x^{451} + 3075994x^{452} + 2464029x^{453} + 1945359x^{454} + 1512563x^{455} + 1154376x^{456} + 863586x^{457} + 631965 \\
 & x^{458} + 451185x^{459} + 313792x^{460} + 211307x^{461} + 137349x^{462} + 85777x^{463} + 51163x^{464} + 29050x^{465} + 15445x^{466} + 7607x^{467} + 3421x^{468} + 1391x^{469} + 524x^{470} + 174x^{471} + 49x^{472} + 9x^{473} / ((-1 + x)^7 \\
 & (1 + x)^3 (1 + x^2)^3 (1 + x + x^2) (1 + x^4) (1 - x + x^2 - x^3 + x^4) (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^4 (1 + x^3 + x^6) (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8) (1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20}) (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \\
 & x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} + x^{19} + x^{20} + x^{21} + x^{22} + x^{23} + x^{24} + x^{25} + x^{26} + x^{27} + x^{28} + x^{29} + x^{30} + x^{31} + x^{32} + x^{33} + x^{34} + x^{35} + x^{36} + x^{37} + x^{38} + x^{39} + x^{40})^2 \\
 & (1 - x + x^5 - x^6 + x^{10} - x^{11} + x^{15} - x^{16} + x^{20} - x^{21} + x^{25} - x^{26} + x^{30} - x^{31} + x^{35} - x^{36} + x^{40} - x^{42} + x^{45} - x^{47} + x^{50} - x^{52} + x^{55} - x^{57} + x^{60} - x^{62} + x^{65} - x^{67} + x^{70} - x^{72} + x^{75} - x^{77} + x^{80} - x^{83} + \\
 & x^{85} - x^{88} + x^{90} - x^{93} + x^{95} - x^{98} + x^{100} - x^{103} + x^{105} - x^{108} + x^{110} - x^{113} + x^{115} - x^{118} + x^{120} - x^{124} + x^{125} - x^{129} + x^{130} - x^{134} + x^{135} - x^{139} + x^{140} - x^{144} + x^{145} - x^{149} + x^{150} - x^{154} + x^{155} \\
 & - x^{159} + x^{160})^2)
 \end{aligned}$$

Three [1,6] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 8.12.2010), period = 9324

$$\begin{aligned}
 & (37948709n)/8279712 - (1064411n^2)/258741 - (364075n^3)/591408 + (21947n^4)/74592 - (17n^5)/54 + n^6/6 + (1968/37 + (1200n)/1369)n/37 + 8n/9 + (120/7)n/7 + (79043/999 + (4567n)/333 - (113n^2)/54 + (20n^3)/9)n/6 + (23/2)n/4 + (-2945263/15984 + (2483n)/333 - (233n^2)/216 + (5n^3)/9)n/2 + (44136/1369 + (2400n)/1369)(1+n)/37 + 8(1+n)/12 + 20(1+n)/7 + (-2569/27) + (6713n)/333 - (161n^2)/54 + (20n^3)/9(1+n)/6 + (23/2)(1+n)/4 + (159048/1369 + (3600n)/1369)(2+n)/37 + 27(2+n)/12 + 16(2+n)/7 + (25411/3996 + (6713n)/666 - (161n^2)/108 + (10n^3)/9)(2+n)/6 + (151152/1369 + (4800n)/1369)(3+n)/37 + 11(3+n)/12 + (60/7)(3+n)/7 + (-563051/3996 + (2953n)/222 - (209n^2)/108 + (10n^3)/9)(3+n)/6 + (265536/1369 + (6000n)/1369)(4+n)/37 - 32(4+n)/12 + (8/7)(4+n)/7 + (-19944/1369 + (7200n)/1369)(5+n)/37 - (56/3)(5+n)/9 - (20/7)(5+n)/7 + (54840/1369 + (1000n)/1369)(6+n)/37 + (22504/1369 + (2200n)/1369)(7+n)/37 + (40/3)(7+n)/18 + (135536/1369 + (3400n)/1369)(8+n)/37 + (56/3)(8+n)/18 + (127536/1369 + (4600n)/1369)(9+n)/37 + (243592/1369 + (5800n)/1369)(10+n)/37 - (32/3)(10+n)/18 + (-38440/1369 + (7000n)/1369)(11+n)/37 + (41568/1369 + (800n)/1369)(12+n)/37 - (40/3)(12+n)/18 + (5280/1369 + (2000n)/1369)(13+n)/37 - (64/3)(13+n)/18 + (116136/1369 + (3200n)/1369)(14+n)/37 + (40/3)(14+n)/18 + (107736/1369 + (4400n)/1369)(15+n)/37 + (32/3)(15+n)/18 + (225168/1369 + (5600n)/1369)(16+n)/37 + (56/3)(16+n)/18 + (-53712/1369 + (6800n)/1369)(17+n)/37 + (31224/1369 + (600n)/1369)(18+n)/37 + (-9312/1369 + (1800n)/1369)(19+n)/37 + (99072/1369 + (3000n)/1369)(20+n)/37 + (89976/1369 + (4200n)/1369)(21+n)/37 + (208488/1369 + (5400n)/1369)(22+n)/37 + (-67536/1369 + (6600n)/1369)(23+n)/37 + 40(23+n)/36 + (22032/1369 + (400n)/1369)(24+n)/37 + 8(24+n)/36 + (-23048/1369 + (1600n)/1369)(25+n)/37 - 24(25+n)/36 + (82568/1369 + (2800n)/1369)(26+n)/37 - 32(26+n)/36 + (72480/1369 + (4000n)/1369)(27+n)/37 - 16(27+n)/36 + (191776/1369 + (5200n)/1369)(28+n)/37 + 16(28+n)/36 + (-81688/1369 + (6400n)/1369)(29+n)/37 + 8(29+n)/36 + (12216/1369 + (200n)/1369)(30+n)/37 + 40(30+n)/36 + (-37704/1369 + (1400n)/1369)(31+n)/37 + 40(31+n)/36 + (64848/1369 + (2600n)/1369)(32+n)/37 + 16(32+n)/36 + (53472/1369 + (3800n)/1369)(33+n)/37 - 16(33+n)/36 + (173256/1369 + (5000n)/1369)(34+n)/37 - 40(34+n)/36 + (-97944/1369 + (6200n)/1369)(35+n)/37 - (3456/37)(37+n)/74 + (6912/37)(39+n)/111 - (10368/37)(39+n)/74 + (6816/37 + (200n)/37)(40+n)/111 + (-6816/37 - (200n)/37)(40+n)/74 + (-288/37 + (200n)/37)(41+n)/111 + (-10080/37 - (200n)/37)(41+n)/74 - (384/37)(42+n)/111 + (480/37 - (200n)/37)(42+n)/74 - (384/37)(43+n)/111 - (2880/37)(43+n)/74 - (384/37)(44+n)/111 + (576/37)(44+n)/74 + (6528/37)(45+n)/111 - (9792/37)(45+n)/74 + (6432/37 + (200n)/37)(46+n)/111 + (-6240/37 - (200n)/37)(46+n)/74 + (-672/37 + (200n)/37)(47+n)/111 + (-9504/37 - (200n)/37)(47+n)/74 - (768/37)(48+n)/111 + (1056/37 - (200n)/37)(48+n)/74 - (768/37)(49+n)/111 - (2304/37)(49+n)/74 - (768/37)(50+n)/111 + (1152/37)(50+n)/74 + (6144/37)(51+n)/111 - (9216/37)(51+n)/74 + (6048/37 + (200n)/37)(52+n)/111 + (-5664/37 - (200n)/37)(52+n)/74 + (-1056/37 + (200n)/37)(53+n)/111 + (-8928/37 - (200n)/37)(53+n)/74 - (1152/37)(54+n)/111 + (1632/37 - (200n)/37)(54+n)/74 - (1152/37)(55+n)/111 - (1728/37)(55+n)/74 - (1152/37)(56+n)/111 + (1728/37)(56+n)/74 + (5760/37)(57+n)/111 - (8640/37)(57+n)/74 + (5664/37 + (200n)/37)(58+n)/111 + (-5088/37 - (200n)/37)(58+n)/74 + (-1440/37 + (200n)/37)(59+n)/111 + (-8352/37 - (200n)/37)(59+n)/74 - (1536/37)(60+n)/111 + (2208/37 - (200n)/37)(60+n)/74 - (1536/37)(61+n)/111 - (1152/37)(61+n)/74 - (1536/37)(62+n)/111 + (2304/37)(62+n)/74 + (5376/37)(63+n)/111 - (8064/37)(63+n)/74 + (5280/37 + (200n)/37)(64+n)/111 + (-4512/37 - (200n)/37)(64+n)/74 + (-1824/37 + (200n)/37)(65+n)/111 + (-7776/37 - (200n)/37)(65+n)/74 - (1920/37)(66+n)/111 + (2784/37 - (200n)/37)(66+n)/74 - (1920/37)(67+n)/111 - (576/37)(67+n)/74 - (1920/37)(68+n)/111 + (2880/37)(68+n)/74 + (4992/37)(69+n)/111 - (7488/37)(69+n)/74 + (4896/37 + (200n)/37)(70+n)/111 + (-3936/37 - (200n)/37)(70+n)/74 + (-2208/37 + (200n)/37)(71+n)/111 + (-7200/37 - (200n)/37)(71+n)/74 - (2304/37)(72+n)/111 + (3360/37 - (200n)/37)(72+n)/74 - (2304/37)(73+n)/111 - (2304/37)(74+n)/111 - (2304/37)(75+n)/111 - (2304/37)(76+n)/111 - (9216/37)(77+n)/111 + (-9120/37 - (200n)/37)(78+n)/111 + (-2016/37 - (200n)/37)(79+n)/111 - (1920/37)(80+n)/111 - (1920/37)(81+n)/111 - (1920/37)(82+n)/111 - (8832/37)(83+n)/111 + (-8736/37 - (200n)/37)(84+n)/111 + (-1632/37 - (200n)/37)(85+n)/111 - (1536/37)(86+n)/111 - (1536/37)(87+n)/111 - (1536/37)(88+n)/111 - (8448/37)(89+n)/111 + (-8352/37 - (200n)/37)(90+n)/111 + (-1248/37 - (200n)/37)(91+n)/111 - (1152/37)(92+n)/111 - (1152/37)(93+n)/111 - (1152/37)(94+n)/111 - (8064/37)(95+n)/111 + (-7968/37 - (200n)/37)(96+n)/111 + (-864/37 - (200n)/37)(97+n)/111 - (768/37)(98+n)/111 - (768/37)(99+n)/111 - (768/37)(100+n)/111 - (7680/37)(101+n)/111 + (-7584/37 - (200n)/37)(102+n)/111 + (-480/37 - (200n)/37)(103+n)/111 - (384/37)(104+n)/111 - (384/37)(105+n)/111 - (384/37)(106+n)/111 - (7296/37)(107+n)/111 + (-7200/37 - (200n)/37)(108+n)/111 + (-96/37 - (200n)/37)(109+n)/111 - (6912/37)(149+n)/222 + (-13728/37 - (200n)/37)(150+n)/222 + (-13440/37 - (400n)/37)(151+n)/222 + (-6144/37 - (400n)/37)(152+n)/222 + (1056/37 - (200n)/37)(153+n)/222 + (1152/37)(154+n)/222 - (5760/37)(155+n)/222 + (-12576/37 - (200n)/37)(156+n)/222 + (-12288/37 - (400n)/37)(157+n)/222 + (-4992/37 - (400n)/37)(158+n)/222 + (2208/37 - (200n)/37)(159+n)/222 + (2304/37)(160+n)/222 - (4608/37)(161+n)/222 + (-11424/37 - (200n)/37)(162+n)/222 + (-11136/37 - (400n)/37)(163+n)/222 + (-3840/37 - (400n)/37)(164+n)/222 + (3360/37 - (200n)/37)(165+n)/222 + (3456/37)(166+n)/222 - (3456/37)(167+n)/222 + (-10272/37 - (200n)/37)(168+n)/222 + (-9984/37 - (400n)/37)(169+n)/222 + (-2688/37 - (400n)/37)(170+n)/222 + (4512/37 - (200n)/37)(171+n)/222 + (4608/37)(172+n)/222 - (2304/37)(173+n)/222 + (-9120/37 - (200n)/37)(174+n)/222 + (-8832/37 - (400n)/37)(175+n)/222 + (-1536/37 - (400n)/37)(176+n)/222 + (5664/37 - (200n)/37)(177+n)/222 + (5760/37)(178+n)/222 - (1152/37)(179+n)/222 + (-7968/37 - (200n)/37)(180+n)/222 + (-7680/37 - (400n)/37)(181+n)/222 + (-384/37 - (400n)/37)(182+n)/222 + (6816/37 - (200n)/37)(183+n)/222 + (6912/37)(184+n)/222 + (96/37 - (200n)/37)(186+n)/222 + (7200/37 - (200n)/37)(187+n)/222 + 384(188+n)/222 + (14112/37 + (200n)/37)(189+n)/222 + (7008/37 + (200n)/37)(190+n)/222 + (96/37 - (200n)/37)(192+n)/222 + (7200/37 - (200n)/37)(193+n)/222 + 384(194+n)/222 + (14112/37 + (200n)/37)(195+n)/222 + (7008/37 + (200n)/37)(196+n)/222 + (96/37 - (200n)/37)(198+n)/222 + (7200/37 - (200n)/37)(199+n)/222 + 384(200+n)/222 + (14112/37 + (200n)/37)(201+n)/222 + (7008/37 + (200n)/37)(202+n)/222 + (96/37 - (200n)/37)(204+n)/222 + (7200/37 - (200n)/37)(205+n)/222 + 384(206+n)/222 + (14112/37 + (200n)/37)(207+n)/222 + (7008/37 + (200n)/37)(208+n)/222 + (96/37 - (200n)/37)(210+n)/222 + (7200/37 - (200n)/37)(211+n)/222 + 384(212+n)/222 + (14112/37 + (200n)/37)(213+n)/222 + (7008/37 + (200n)/37)(214+n)/222 + (96/37 - (200n)/37)(216+n)/222 + (7200/37 - (200n)/37)(217+n)/222 + 384(218+n)/222 + (14112/37 + (200n)/37)(219+n)/222 + (7008/37 + (200n)/37)(220+n)/222
 \end{aligned}$$

Recurrence

$$\begin{aligned}
 a_n = & a_{n-495} - 2a_{n-494} + a_{n-493} - a_{n-489} + a_{n-488} + a_{n-487} - a_{n-486} + a_{n-482} - 2a_{n-481} + a_{n-480} - a_{n-459} + 2a_{n-458} - a_{n-457} + a_{n-453} - a_{n-452} - a_{n-451} \\
 & + a_{n-450} - a_{n-446} + 2a_{n-445} - a_{n-444} - 2a_{n-273} + 4a_{n-272} - 2a_{n-271} + 2a_{n-267} - 2a_{n-266} - 2a_{n-265} + 2a_{n-264} - 2a_{n-260} + 4a_{n-259} - 2a_{n-258} \\
 & + 2a_{n-237} - 4a_{n-236} + 2a_{n-235} - 2a_{n-231} + 2a_{n-230} + 2a_{n-229} - 2a_{n-228} + 2a_{n-224} - 4a_{n-223} + 2a_{n-222} + a_{n-51} - 2a_{n-50} + a_{n-49} - a_{n-45} \\
 & + a_{n-44} + a_{n-43} - a_{n-42} + a_{n-38} - 2a_{n-37} + a_{n-36} - a_{n-15} + 2a_{n-14} - a_{n-13} + a_{n-9} - a_{n-8} - a_{n-7} + a_{n-6} - a_{n-2} + 2a_{n-1}
 \end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned}
 & -4x^2(1 + 19x + 99x^2 + 316x^3 + 775x^4 + 1335x^5 + 2693x^6 + 4652x^7 + 7469x^8 + 11280x^9 + 16190x^{10} + 20801x^{11} + 29216x^{12} + 37657x^{13} + 47465x^{14} + 58535x^{15} + 70865x^{16} + 80698x^{17} + 99756x^{18} + 114929x^{19} \\
 & + 132301x^{20} + 150929x^{21} + 170819x^{22} + 184849x^{23} + 216730x^{24} + 237563x^{25} + 262493x^{26} + 288685x^{27} + 316133x^{28} + 333279x^{29} + 380143x^{30} + 405557x^{31} + 438047x^{32} + 471797x^{33} + 506809x^{34} + 525990x^{35} \\
 & + 589996x^{36} + 618892x^{37} + 658862x^{38} + 699955x^{39} + 742066x^{40} + 761645x^{41} + 843595x^{42} + 872973x^{43} + 917766x^{44} + 962825x^{45} + 1008045x^{46} + 1023450x^{47} + 1119806x^{48} + 1144046x^{49} + 1189404x^{50} + 1234764x^{51} \\
 & + 1280124x^{52} + 1289103x^{53} + 1398439x^{54} + 1416206x^{55} + 1461564x^{56} + 1506924x^{57} + 1552284x^{58} + 1554783x^{59} + 1677079x^{60} + 1688366x^{61} + 1733724x^{62} + 1779084x^{63} + 1824444x^{64} + 1820463x^{65} + 1955719x^{66} \\
 & + 1960526x^{67} + 2005884x^{68} + 2051244x^{69} + 2096604x^{70} + 2086143x^{71} + 2234359x^{72} + 2232686x^{73} + 2278044x^{74} + 2323404x^{75} + 2368764x^{76} + 2351823x^{77} + 2513001x^{78} + 2504844x^{79} + 2550204x^{80} + 2595564x^{81} + \\
 & 2640924x^{82} + 2617503x^{83} + 2791641x^{84} + 2777002x^{85} + 2822366x^{86} + 2867724x^{87} + 2913084x^{88} + 2883183x^{89} + 3070281x^{90} + 3049162x^{91} + 3094526x^{92} + 3139884x^{93} + 3185244x^{94} + 3148863x^{95} + 3348921x^{96} + \\
 & 3321322x^{97} + 3366686x^{98} + 3412044x^{99} + 3457404x^{100} + 3414543x^{101} + 3627561x^{102} + 3593482x^{103} + 3638846x^{104} + 3684204x^{105} + 3729564x^{106} + 3680223x^{107} + 3906201x^{108} + 3865642x^{109} + 3911006x^{110} \\
 & + 3956364x^{111} + 4001724x^{112} + 3945903x^{113} + 4184841x^{114} + 4137804x^{115} + 4183164x^{116} + 4228524x^{117} + 4273884x^{118} + 4211583x^{119} + 4463481x^{120} + 4409964x^{121} + 4455322x^{122} + 4500686x^{123} + 4546044x^{124} + \\
 & 4477263x^{125} + 4742121x^{126} + 4682124x^{127} + 4727482x^{128} + 4772846x^{129} + 4818204x^{130} + 4742943x^{131} + 5020761x^{132} + 4954284x^{133} + 4999642x^{134} + 5045006x^{135} + 5090364x^{136} + 5008623x^{137} + 5299401x^{138} \\
 & + 5226444x^{139} + 5271802x^{140} + 5317166x^{141} + 5362524x^{142} + 5274303x^{143} + 5578041x^{144} + 5498604x^{145} + 5543962x^{146} + 5589326x^{147} + 5634684x^{148} + 5539983x^{149} + 5856681x^{150} + 5770764x^{151} + 5816124x^{152} + \\
 & 5861484x^{153} + 5906844x^{154} + 5805663x^{155} + 6135321x^{156} + 6042924x^{157} + 6088284x^{158} + 6133642x^{159} + 6179006x^{160} + 6071343x^{161} + 6413961x^{162} + 6315084x^{163} + 6360444x^{164} + 6405802x^{165} + 6451166x^{166} \\
 & + 6337023x^{167} + 6692601x^{168} + 6587244x^{169} + 6632604x^{170} + 6677962x^{171} + 6723326x^{172} + 6602703x^{173} + 6971241x^{174} + 6859404x^{175} + 6904764x^{176} + 6950122x^{177} + 6995486x^{178} + 6868383x^{179} + 7249881x^{180} + \\
 & 7131564x^{181} + 7176924x^{182} + 7222282x^{183} + 7267646x^{184} + 7134063x^{185} + 7528521x^{186} + 7403724x^{187} + 7449084x^{188} + 7494444x^{189} + 7539804x^{190} + 7399743x^{191} + 7807161x^{192} + 7675884x^{193} + 7721244x^{194} \\
 & + 7766604x^{195} + 7811962x^{196} + 7665425x^{197} + 8085801x^{198} + 7948044x^{199} + 7993404x^{200} + 8038764x^{201} + 8084122x^{202} + 7931105x^{203} + 8364441x^{204} + 8220204x^{205} + 8265564x^{206} + 8310924x^{207} + 8356282x^{208} + \\
 & 8196785x^{209} + 8643081x^{210} + 8492364x^{211} + 8537724x^{212} + 8583084x^{213} + 8628442x^{214} + 8462465x^{215} + 8921721x^{216} + 8764524x^{217} + 8809884x^{218} + 8855244x^{219} + 8900602x^{220} + 8727843x^{221} + 9200355x^{222} \\
 & + 9036642x^{223} + 9081842x^{224} + 9126768x^{225} + 9171210x^{226} + 8991451x^{227} + 9473917x^{228} + 9299544x^{229} + 9339270x^{230} + 9377008x^{231} + 9412548x^{232} + 9217903x^{233} + 9698913x^{234} + 9505690x^{235} + 9531434x^{236} + \\
 & 9554654x^{237} + 9575354x^{238} + 9363785x^{239} + 9836771x^{240} + 9623306x^{241} + 9633922x^{242} + 9642026x^{243} + 9647606x^{244} + 9421163x^{245} + 9650198x^{246} + 9645698x^{247} + 9645698x^{248} + 9638674x^{249} + 9629138x^{250} \\
 & + 9389983x^{251} + 9833277x^{252} + 9586370x^{253} + 9566750x^{254} + 9544610x^{255} + 9519946x^{256} + 9270543x^{257} + 9692215x^{258} + 9431864x^{259} + 9397284x^{260} + 9360458x^{261} + 9321596x^{262} + 9064315x^{263} + 9463349x^{264} + \\
 & 9195854x^{265} + 9151628x^{266} + 9106870x^{267} + 9061790x^{268} + 8806679x^{269} + 9190165x^{270} + 8925874x^{271} + 8880516x^{272} + 8835156x^{273} + 8789796x^{274} + 8541057x^{275} + 8911241x^{276} + 8653714x^{277} + 8608356x^{278} \\
 & + 8562996x^{279} + 8517636x^{280} + 8275377x^{281} + 8632601x^{282} + 8381554x^{283} + 8336196x^{284} + 8290836x^{285} + 8245476x^{286} + 8009697x^{287} + 8353961x^{288} + 8109394x^{289} + 8064036x^{290} + 8018676x^{291} + 7973316x^{292} + \\
 & 7744017x^{293} + 8075321x^{294} + 7837234x^{295} + 7791876x^{296} + 7746516x^{297} + 7701156x^{298} + 7478337x^{299} + 7796679x^{300} + 7565076x^{301} + 7519716x^{302} + 7474356x^{303} + 7428996x^{304} + 7212657x^{305} + 7518039x^{306} \\
 & + 7292918x^{307} + 7247554x^{308} + 7202196x^{309} + 7156836x^{310} + 6946977x^{311} + 7239399x^{312} + 7020758x^{313} + 6975394x^{314} + 6930036x^{315} + 6884676x^{316} + 6681297x^{317} + 6960759x^{318} + 6748598x^{319} + 6703234x^{320} + \\
 & 6657876x^{321} + 6612516x^{322} + 6415617x^{323} + 6682119x^{324} + 6476438x^{325} + 6431074x^{326} + 6385716x^{327} + 6340356x^{328} + 6149937x^{329} + 6403479x^{330} + 6204278x^{331} + 6158914x^{332} + 6113556x^{333} + 6068196x^{334} \\
 & + 5884257x^{335} + 6124839x^{336} + 5932116x^{337} + 5886756x^{338} + 5841396x^{339} + 5796036x^{340} + 5618577x^{341} + 5846199x^{342} + 5659956x^{343} + 5614598x^{344} + 5569234x^{345} + 5523876x^{346} + 5352897x^{347} + 5567559x^{348} + \\
 & 5387796x^{349} + 5342438x^{350} + 5297074x^{351} + 5251716x^{352} + 5087217x^{353} + 5288919x^{354} + 5115636x^{355} + 5070278x^{356} + 5024914x^{357} + 4979556x^{358} + 4821537x^{359} + 5010279x^{360} + 4843476x^{361} + 4798118x^{362} \\
 & + 4752754x^{363} + 4707396x^{364} + 4555857x^{365} + 4731639x^{366} + 4571316x^{367} + 4525958x^{368} + 4480594x^{369} + 4435236x^{370} + 44290177x^{371} + 4452999x^{372} + 4299156x^{373} + 4253796x^{374} + 4208436x^{375} + 4163076x^{376} + \\
 & 4024497x^{377} + 4174359x^{378} + 4026996x^{379} + 3981636x^{380} + 3936278x^{381} + 3890914x^{382} + 3758817x^{383} + 3895719x^{384} + 3754836x^{385} + 3709476x^{386} + 3664118x^{387} + 3618754x^{388} + 3493137x^{389} + 3617079x^{390} \\
 & + 3482676x^{391} + 3437316x^{392} + 3391958x^{393} + 3346594x^{394} + 3227457x^{395} + 3338439x^{396} + 3210516x^{397} + 3165156x^{398} + 3119798x^{399} + 3074434x^{400} + 2961777x^{401} + 3059799x^{402} + 2938356x^{403} + 2892996x^{404} + \\
 & 2847638x^{405} + 2802274x^{406} + 2696097x^{407} + 2781159x^{408} + 2666196x^{409} + 2620836x^{410} + 2575476x^{411} + 2530116x^{412} + 2430417x^{413} + 2502519x^{414} + 2394036x^{415} + 2348676x^{416} + 2303316x^{417} + 2257958x^{418} \\
 & + 2164735x^{419} + 2223879x^{420} + 2121876x^{421} + 2075161x^{422} + 2031156x^{423} + 1985798x^{424} + 1899055x^{425} + 1945239x^{426} + 1849716x^{427} + 1804356x^{428} + 1758996x^{429} + 1713638x^{430} + 1633375x^{431} + 1666599x^{432} + \\
 & 1577556x^{433} + 1532196x^{434} + 1486836x^{435} + 1441478x^{436} + 1367695x^{437} + 1387959x^{438} + 1305396x^{439} + 1260036x^{440} + 1214676x^{441} + 1169318x^{442} + 1102017x^{443} + 1109324x^{444} + 1033259x^{445} + 987979x^{446} \\
 & + 942836x^{447} + 897935x^{448} + 837674x^{449} + 833370x^{450} + 765724x^{451} + 723181x^{452} + 681632x^{453} + 641182x^{454} + 591456x^{455} + 581251x^{456} + 526573x^{457} + 491021x^{458} + 456731x^{459} + 423701x^{460} + 385677x^{461} + \\
 & 373153x^{462} + 331685x^{463} + 303697x^{464} + 276965x^{465} + 251495x^{466} + 224148x^{467} + 211487x^{468} + 182159x^{469} + 161729x^{470} + 142561x^{471} + 124649x^{472} + 106898x^{473} + 96260x^{474} + 77993x^{475} + 65123x^{476} + \\
 & 53513x^{477} + 43165x^{478} + 33927x^{479} + 27469x^{480} + 19164x^{481} + 13774x^{482} + 9507x^{483} + 6258x^{484} + 3900x^{485} + 2436x^{486} + 1093x^{487} + 526x^{488} + 225x^{489} + 85x^{490} + 31x^{491} + 9x^{492} / ((-1 + x)^{7*(1 + x)^4*(1 + x^2)* \\
 & (1 - x + x^2)^4*(1 + x + x^2)^4*(1 - x^2 + x^4)*(1 - x^3 + x^6)*(1 - x^3 + x^6)*(1 - x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)*(1 - x^6 + x^{12})*(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 + x^{10} - x^{11} + x^{12} - x^{13} + x^{14} \\
 & - x^{15} + x^{16} - x^{17} + x^{18} - x^{19} + x^{20} - x^{21} + x^{22} - x^{23} + x^{24} - x^{25} + x^{26} - x^{27} + x^{28} - x^{29} + x^{30} - x^{31} + x^{32} - x^{33} + x^{34} - x^{35} + x^{36})^2*(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + \\
 & x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} + x^{19} + x^{20} + x^{21} + x^{22} + x^{23} + x^{24} + x^{25} + x^{26} + x^{27} + x^{28} + x^{29} + x^{30} + x^{31} + x^{32} + x^{33} + x^{34} + x^{35} + x^{36})^2*(1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + x^9 - x^{10} + \\
 & x^{12} - x^{13} + x^{15} - x^{16} + x^{18} - x^{19} + x^{21} - x^{22} + x^{24} - x^{25} + x^{27} - x^{28} + x^{30} - x^{31} + x^{33} - x^{34} + x^{36} - x^{38} + x^{39} - x^{41} + x^{42} - x^{44} + x^{45} - x^{47} + x^{48} - x^{50} + x^{51} - x^{53} + x^{54} - x^{56} + x^{57} - x^{59} + x^{60} - \\
 & x^{62} + x^{63} - x^{65} + x^{66} - x^{68} + x^{69} - x^{71} + x^{72})^2*(1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - x^9 - x^{10} + x^{12} + x^{13} - x^{15} - x^{16} + x^{18} + x^{19} - x^{21} - x^{22} + x^{24} + x^{25} - x^{27} - x^{28} + x^{30} + x^{31} - x^{33} - x^{34} + x^{36} - x^{38} - x^{39} \\
 & + x^{41} + x^{42} - x^{44} - x^{45} + x^{47} + x^{48} - x^{50} - x^{51} + x^{53} + x^{54} - x^{56} - x^{57} + x^{59} + x^{60} - x^{62} - x^{63} + x^{65} + x^{66} - x^{68} - x^{69} + x^{71} + x^{72})^2)
 \end{aligned}$$

Three [5,6] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 9.12.2010), period = 120780

$$\begin{aligned}
 & -((33779786191*n)/4420548000) + (3720202499*n^2)/414426375 - (520819691*n^3)/200934000 + (289333151*n^4)/217404000 - (13*n^5)/54 + n^6/6 + (21520/61 + (80*n)/3721)*[n/61] + (120/11)*[n/11] - \\
 & (96/125)*[n/10] - (64/3)*[n/9] + (5306683/8235 + (3377*n)/1647 + (157*n^2)/90 + (4*n^3)/9)*[n/6] - (32/375)*n^2*[n/5] + (35/2)*[n/4] + (-3339621287/3294000 + (2293*n)/1647 - (281*n^2)/120 + n^3/9)*[n/2] + \\
 & (993240/3721 + (160*n)/3721)*[1 + n/61] + 8*[1 + n/12] + (140/11)*(1 + n/11) - (96/125)*[1 + n/10] + (-46217/135) + (5695*n)/1647 - (27*n^2)/10 + (4*n^3)/9)*[1 + n/6] + ((24*n)/125 - (8*n^2)/125)*[1 + n/5] + \\
 & (35/2)*[1 + n/4] + (2496112/3721 + (240*n)/3721)*[2 + n/61] + 15*[2 + n/12] + (80/11)*[2 + n/11] - (212/75)*[2 + n/10] + (8887811/32940 + (5695*n)/3294 - (27*n^2)/20 + (2*n^3)/9)*[2 + n/6] + \\
 & ((32*n)/125 - (16*n^2)/375)*[2 + n/5] + (2248688/3721 + (320*n)/3721)*[3 + n/61] - 17*[3 + n/12] + (4/11)*[3 + n/11] - (268/375)*[3 + n/10] + (-21270859/32940) + (2671*n)/1098 - (643*n^2)/180 + \\
 & (2*n^3)/9)*[3 + n/6] + ((24*n)/125 - (8*n^2)/375)*[3 + n/5] + (3705520/3721 + (400*n)/3721)*[4 + n/61] - (8/5)*[4 + n/15] - 48*[4 + n/12] - (24/11)*[4 + n/11] - (632/375)*[4 + n/10] + (-219640/3721) + \\
 & (480*n)/3721)*[5 + n/61] + (8/15)*[5 + n/15] + (60/11)*[5 + n/11] + (344/375)*[5 + n/10] + (1133080/3721 + (72*n)/3721)*[6 + n/61] + (16/15)*[6 + n/15] + (144/11)*[6 + n/11] - (4/75)*[6 + n/10] + \\
 & (856040/3721 + (152*n)/3721)*[7 + n/61] + 16*[7 + n/18] + (116/11)*[7 + n/11] + (772/375)*[7 + n/10] + (2374512/3721 + (232*n)/3721)*[8 + n/61] - (40/3)*[8 + n/18] + (8/15)*[8 + n/15] + (40/11)*[8 + \\
 & n/11] + (2115848/3721 + (312*n)/3721)*[9 + n/61] - (40/3)*[9 + n/18] + (8/3)*[9 + n/15] - (20/11)*[9 + n/11] + (3534600/3721 + (392*n)/3721)*[10 + n/61] - 8*[10 + n/18] - (16/5)*[10 + n/15] + (- \\
 & (455480/3721) + (472*n)/3721)*[11 + n/61] + (80/3)*[11 + n/18] + (954320/3721 + (64*n)/3721)*[12 + n/61] - (88/3)*[12 + n/18] + (707520/3721 + (144*n)/3721)*[13 + n/61] - 24*[13 + n/18] + (2229392/3721 \\
 & + (224*n)/3721)*[14 + n/61] - 16*[14 + n/18] + (1947288/3721 + (304*n)/3721)*[15 + n/61] + 16*[15 + n/18] + (3315760/3721 + (384*n)/3721)*[16 + n/61] + 32*[16 + n/18] + (-632368/3721) + \\
 & (464*n)/3721)*[17 + n/61] + (822312/3721 + (56*n)/3721)*[18 + n/61] + (593552/3721 + (136*n)/3721)*[19 + n/61] + (24/5)*[19 + n/30] + (2106624/3721 + (216*n)/3721)*[20 + n/61] - (16/5)*[20 + n/30] + \\
 & (1788880/3721 + (296*n)/3721)*[21 + n/61] - (8/5)*[21 + n/30] + (3094872/3721 + (376*n)/3721)*[22 + n/61] + (-793736/3721) + (456*n)/3721)*[23 + n/61] + 8*[23 + n/36] - (8/5)*[23 + n/30] + (693624/3721 \\
 & + (48*n)/3721)*[24 + n/61] - 48*[24 + n/36] - (16/5)*[24 + n/30] + (470704/3721 + (128*n)/3721)*[25 + n/61] - 32*[25 + n/36] + (24/5)*[25 + n/30] + (1962776/3721 + (208*n)/3721)*[26 + n/61] + 32*[26 + \\
 & n/36] + (1597192/3721 + (288*n)/3721)*[27 + n/61] + 64*[27 + n/36] + (2917808/3721 + (368*n)/3721)*[28 + n/61] + 24*[28 + n/36] + (-923480/3721) + (448*n)/3721)*[29 + n/61] - 48*[29 + n/36] + \\
 & (584360/3721 + (40*n)/3721)*[30 + n/61] + 8*[30 + n/36] + (355080/3721 + (120*n)/3721)*[31 + n/61] + 56*[31 + n/36] + (1813952/3721 + (200*n)/3721)*[32 + n/61] + 32*[32 + n/36] + (1388328/3721 + \\
 & (280*n)/3721)*[33 + n/61] - 32*[33 + n/36] + (2770904/3721 + (360*n)/3721)*[34 + n/61] - 56*[34 + n/36] + (-1035264/3721 + (440*n)/3721)*[35 + n/61] + (480856/3721 + (32*n)/3721)*[36 + n/61] + \\
 & (233016/3721 + (112*n)/3721)*[37 + n/61] + (1646488/3721 + (192*n)/3721)*[38 + n/61] + (1208160/3721 + (272*n)/3721)*[39 + n/61] + (2640496/3721 + (352*n)/3721)*[40 + n/61] + (-1142752/3721) + \\
 & (432*n)/3721)*[41 + n/61] + (369448/3721 + (24*n)/3721)*[42 + n/61] + (90848/3721 + (104*n)/3721)*[43 + n/61] + (1446720/3721 + (184*n)/3721)*[44 + n/61] + (1072792/3721 + (264*n)/3721)*[45 + n/61] \\
 & + (2542688/3721 + (344*n)/3721)*[46 + n/61] + (-1229840/3721) + (424*n)/3721)*[47 + n/61] + (266240/3721 + (16*n)/3721)*[48 + n/61] + (-55320/3721) + (96*n)/3721)*[49 + n/61] + (1260520/3721 + \\
 & (176*n)/3721)*[50 + n/61] + (938792/3721 + (256*n)/3721)*[51 + n/61] + (2434048/3721 + (336*n)/3721)*[52 + n/61] + (-1339960/3721) + (416*n)/3721)*[53 + n/61] + (127800/3721 + (8*n)/3721)*[54 + \\
 & n/61] + (-248920/3721) + (88*n)/3721)*[55 + n/61] + (1133760/3721 + (168*n)/3721)*[56 + n/61] + (852032/3721 + (248*n)/3721)*[57 + n/61] + (2360448/3721 + (328*n)/3721)*[58 + n/61] + (- \\
 & (1427240/3721) + (408*n)/3721)*[59 + n/61] - (28800/61)*[61 + n/122] + (57600/61)*[63 + n/183] - (86400/61)*[63 + n/122] + (57120/61 + (8*n)/61)*[64 + n/183] + (-57120/61) - (8*n)/61)*[64 + n/122] + (- \\
 & (1440/61) + (8*n)/61)*[65 + n/183] + (-84960/61) - (8*n)/61)*[65 + n/122] - (1920/61)*[66 + n/183] + (2400/61 - (8*n)/61)*[66 + n/122] - (1920/61)*[67 + n/183] - (25920/61)*[67 + n/122] - (1920/61)*[68 + \\
 & n/183] + (2880/61)*[68 + n/122] + (55680/61)*[69 + n/183] - (83520/61)*[69 + n/122] + (55200/61 + (8*n)/61)*[70 + n/183] + (-54240/61) - (8*n)/61)*[70 + n/122] + (-3360/61) + (8*n)/61)*[71 + n/183] + (- \\
 & (82080/61) - (8*n)/61)*[71 + n/122] - (3840/61)*[72 + n/183] + (5280/61 - (8*n)/61)*[72 + n/122] - (3840/61)*[73 + n/183] - (23040/61)*[73 + n/122] - (3840/61)*[74 + n/183] + (5760/61)*[74 + n/122] + \\
 & (53760/61)*[75 + n/183] - (80640/61)*[75 + n/122] + (53280/61 + (8*n)/61)*[76 + n/183] + (-51360/61) - (8*n)/61)*[76 + n/122] + (-5280/61) + (8*n)/61)*[77 + n/183] + (-79200/61) - (8*n)/61)*[77 + n/122] - \\
 & (5760/61)*[78 + n/183] + (8160/61 - (8*n)/61)*[78 + n/122] - (5760/61)*[79 + n/183] - (20160/61)*[79 + n/122] - (5760/61)*[80 + n/183] + (8640/61)*[80 + n/122] + (51840/61)*[81 + n/183] - (77760/61)*[81 + \\
 & n/122] + (51360/61 + (8*n)/61)*[82 + n/183] + (-48480/61) - (8*n)/61)*[82 + n/122] + (-7200/61) + (8*n)/61)*[83 + n/183] + (-76320/61) - (8*n)/61)*[83 + n/122] - (7680/61)*[84 + n/183] + (11040/61 - \\
 & (8*n)/61)*[84 + n/122] - (7680/61)*[85 + n/183] - (17280/61)*[85 + n/122] - (7680/61)*[86 + n/183] + (11520/61)*[86 + n/122] + (49920/61)*[87 + n/183] - (74880/61)*[87 + n/122] + (49440/61 + (8*n)/61)*[88 \\
 & + n/183] + (-45600/61) - (8*n)/61)*[88 + n/122] + (-9120/61) + (8*n)/61)*[89 + n/183] + (-73440/61) - (8*n)/61)*[89 + n/122] - (9600/61)*[90 + n/183] + (13920/61 - (8*n)/61)*[90 + n/122] - (9600/61)*[91 + \\
 & n/183] - (14400/61)*[91 + n/122] - (9600/61)*[92 + n/183] + (14400/61)*[92 + n/122] + (48000/61)*[93 + n/183] - (72000/61)*[93 + n/122] + (47520/61 + (8*n)/61)*[94 + n/183] + (-42720/61) - (8*n)/61)*[94 + \\
 & n/122] + (-11040/61) + (8*n)/61)*[95 + n/183] + (-70560/61) - (8*n)/61)*[95 + n/122] - (11520/61)*[96 + n/183] + (16800/61 - (8*n)/61)*[96 + n/122] - (11520/61)*[97 + n/183] - (11520/61)*[97 + n/122] - \\
 & (11520/61)*[98 + n/183] + (17280/61)*[98 + n/122] + (46080/61)*[99 + n/183] - (69120/61)*[99 + n/122] + (45600/61 + (8*n)/61)*[100 + n/183] + (-39840/61) - (8*n)/61)*[100 + n/122] + (-12960/61) + \\
 & (8*n)/61)*[101 + n/183] + (-67680/61) - (8*n)/61)*[101 + n/122] - (13440/61)*[102 + n/183] + (19680/61 - (8*n)/61)*[102 + n/122] - (13440/61)*[103 + n/183] - (8640/61)*[103 + n/122] - (13440/61)*[104 + \\
 & n/183] + (20160/61)*[104 + n/122] + (44160/61)*[105 + n/183] - (66240/61)*[105 + n/122] + (43680/61 + (8*n)/61)*[106 + n/183] + (-36960/61) - (8*n)/61)*[106 + n/122] + (-14880/61) + (8*n)/61)*[107 + \\
 & n/183] + (-64800/61) - (8*n)/61)*[107 + n/122] - (15360/61)*[108 + n/183] + (22560/61 - (8*n)/61)*[108 + n/122] - (15360/61)*[109 + n/183] - (5760/61)*[109 + n/122] - (15360/61)*[110 + n/183] + \\
 & (23040/61)*[110 + n/122] + (42240/61)*[111 + n/183] - (63360/61)*[111 + n/122] + (41760/61 + (8*n)/61)*[112 + n/183] + (-34080/61) - (8*n)/61)*[112 + n/122] + (-16800/61) + (8*n)/61)*[113 + n/183] + (- \\
 & (61920/61) - (8*n)/61)*[113 + n/122] - (17280/61)*[114 + n/183] + (25440/61 - (8*n)/61)*[114 + n/122] - (17280/61)*[115 + n/183] - (2880/61)*[115 + n/122] - (17280/61)*[116 + n/183] + (25920/61)*[116 + \\
 & n/122] + (40320/61)*[117 + n/183] - (60480/61)*[117 + n/122] + (39840/61 + (8*n)/61)*[118 + n/183] + (-31200/61) - (8*n)/61)*[118 + n/122] + (-18720/61) + (8*n)/61)*[119 + n/183] + (-59040/61) - \\
 & (8*n)/61)*[119 + n/122] - (19200/61)*[120 + n/183] + (28320/61 - (8*n)/61)*[120 + n/122] - (19200/61)*[121 + n/183] - (19200/61)*[121 + n/122] + (8*n)/183] - (19200/61)*[122 + n/183] - (19200/61)*[122 + n/122] + \\
 & (76800/61)*[125 + n/183] + (-76320/61) - (8*n)/61)*[126 + n/183] + (-17760/61) - (8*n)/61)*[127 + n/183] - (17280/61)*[128 + n/183] - (17280/61)*[128 + n/122] + (129 + n/183] - (17280/61)*[129 + n/183] - (17280/61)*[130 + n/183] - (74880/61)*[131 + \\
 & n/183] + (-74400/61) - (8*n)/61)*[132 + n/183] + (-15840/61) - (8*n)/61)*[133 + n/183] - (15360/61)*[134 + n/183] - (15360/61)*[135 + n/183] - (15360/61)*[136 + n/183] - (72960/61)*[137 + n/183] + (- \\
 & (72480/61) - (8*n)/61)*[138 + n/183] + (-13920/61) - (8*n)/61)*[139 + n/183] - (13440/61)*[140 + n/183] - (13440/61)*[141 + n/183] - (13440/61)*[142 + n/183] - (71040/61)*[143 + n/183] + (-70560/61) - \\
 & (8*n)/61)*[144 + n/183] + (-12000/61) - (8*n)/61)*[145 + n/183] - (11520/61)*[146 + n/183] - (11520/61)*[147 + n/183] - (11520/61)*[148 + n/183] - (69120/61)*[149 + n/183] + (-68640/61) - (8*n)/61)*[150 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& n/183] + (-10080/61)-(8*n)/61)*[(151 + n)/183]-(9600/61)*[(152 + n)/183]-(9600/61)*[(153 + n)/183]-(9600/61)*[(154 + n)/183]-(67200/61)*[(155 + n)/183] + (-66720/61)-(8*n)/61)*[(156 + n)/183] + (-8160/61)-(8*n)/61)*[(157 + n)/183]-(7680/61)*[(158 + n)/183]-(7680/61)*[(159 + n)/183]-(7680/61)*[(160 + n)/183]-(65280/61)*[(161 + n)/183] + (-64800/61)-(8*n)/61)*[(162 + n)/183] + (-6240/61)-(8*n)/61)*[(163 + n)/183]-(5760/61)*[(164 + n)/183]-(5760/61)*[(165 + n)/183]-(5760/61)*[(166 + n)/183]-(63360/61)*[(167 + n)/183] + (-62880/61)-(8*n)/61)*[(168 + n)/183] + (-4320/61)-(8*n)/61)*[(169 + n)/183]-(3840/61)*[(170 + n)/183]-(3840/61)*[(171 + n)/183]-(3840/61)*[(172 + n)/183]-(61440/61)*[(173 + n)/183] + (-60960/61)-(8*n)/61)*[(174 + n)/183] + (-2400/61)-(8*n)/61)*[(175 + n)/183]-(1920/61)*[(176 + n)/183]-(1920/61)*[(177 + n)/183]-(1920/61)*[(178 + n)/183]-(59520/61)*[(179 + n)/183] + (-59040/61)-(8*n)/61)*[(180 + n)/183] + (-480/61)-(8*n)/61)*[(181 + n)/183]-(57600/61)*[(245 + n)/366] + (-114720/61)-(8*n)/61)*[(246 + n)/366] + (-113280/61)-(16*n)/61)*[(247 + n)/366] + (-53760/61)-(16*n)/61)*[(248 + n)/366] + (5280/61)-(8*n)/61)*[(249 + n)/366] + (5760/61)*[(250 + n)/366]-(51840/61)*[(251 + n)/366] + (-108960/61)-(8*n)/61)*[(252 + n)/366] + (-107520/61)-(16*n)/61)*[(253 + n)/366] + (-48000/61)-(16*n)/61)*[(254 + n)/366] + (11040/61)-(8*n)/61)*[(255 + n)/366] + (11520/61)*[(256 + n)/366]-(46080/61)*[(257 + n)/366] + (-103200/61)-(8*n)/61)*[(258 + n)/366] + (-101760/61)-(16*n)/61)*[(259 + n)/366] + (-42240/61)-(16*n)/61)*[(260 + n)/366] + (16800/61)-(8*n)/61)*[(261 + n)/366] + (17280/61)*[(262 + n)/366]-(40320/61)*[(263 + n)/366] + (-97440/61)-(8*n)/61)*[(264 + n)/366] + (-96000/61)-(16*n)/61)*[(265 + n)/366] + (-36480/61)-(16*n)/61)*[(266 + n)/366] + (22560/61)-(8*n)/61)*[(267 + n)/366] + (23040/61)*[(268 + n)/366]-(34560/61)*[(269 + n)/366] + (-91680/61)-(8*n)/61)*[(270 + n)/366] + (-90240/61)-(16*n)/61)*[(271 + n)/366] + (-30720/61)-(16*n)/61)*[(272 + n)/366] + (28320/61)-(8*n)/61)*[(273 + n)/366] + (28800/61)*[(274 + n)/366]-(28800/61)*[(275 + n)/366] + (-85920/61)-(8*n)/61)*[(276 + n)/366] + (-84480/61)-(16*n)/61)*[(277 + n)/366] + (-24960/61)-(16*n)/61)*[(278 + n)/366] + (34080/61)-(8*n)/61)*[(279 + n)/366] + (34560/61)*[(280 + n)/366]-(23040/61)*[(281 + n)/366] + (-80160/61)-(8*n)/61)*[(282 + n)/366] + (-78720/61)-(16*n)/61)*[(283 + n)/366] + (-19200/61)-(16*n)/61)*[(284 + n)/366] + (39840/61)-(8*n)/61)*[(285 + n)/366] + (40320/61)*[(286 + n)/366]-(17280/61)*[(287 + n)/366] + (-74400/61)-(8*n)/61)*[(288 + n)/366] + (-72960/61)-(16*n)/61)*[(289 + n)/366] + (-13440/61)-(16*n)/61)*[(290 + n)/366] + (45600/61)-(8*n)/61)*[(291 + n)/366] + (46080/61)*[(292 + n)/366]-(11520/61)*[(293 + n)/366] + (-68640/61)-(8*n)/61)*[(294 + n)/366] + (-67200/61)-(16*n)/61)*[(295 + n)/366] + (-7680/61)-(16*n)/61)*[(296 + n)/366] + (51360/61)-(8*n)/61)*[(297 + n)/366] + (51840/61)*[(298 + n)/366]-(5760/61)*[(299 + n)/366] + (-62880/61)-(8*n)/61)*[(300 + n)/366] + (-61440/61)-(16*n)/61)*[(301 + n)/366] + (-1920/61)-(16*n)/61)*[(302 + n)/366] + (57120/61)-(8*n)/61)*[(303 + n)/366] + (57600/61)*[(304 + n)/366] + (480/61)-(8*n)/61)*[(306 + n)/366] + (59040/61)-(8*n)/61)*[(307 + n)/366] + 1920*[(308 + n)/366] + (116640/61 + (8*n)/61)*[(309 + n)/366] + (58080/61 + (8*n)/61)*[(310 + n)/366] + (480/61)-(8*n)/61)*[(312 + n)/366] + (59040/61)-(8*n)/61)*[(313 + n)/366] + 1920*[(314 + n)/366] + (116640/61 + (8*n)/61)*[(315 + n)/366] + (58080/61 + (8*n)/61)*[(316 + n)/366] + (480/61)-(8*n)/61)*[(318 + n)/366] + (59040/61)-(8*n)/61)*[(319 + n)/366] + 1920*[(320 + n)/366] + (116640/61 + (8*n)/61)*[(321 + n)/366] + (58080/61 + (8*n)/61)*[(322 + n)/366] + (480/61)-(8*n)/61)*[(324 + n)/366] + (59040/61)-(8*n)/61)*[(325 + n)/366] + 1920*[(326 + n)/366] + (116640/61 + (8*n)/61)*[(327 + n)/366] + (58080/61 + (8*n)/61)*[(328 + n)/366] + (480/61)-(8*n)/61)*[(330 + n)/366] + (59040/61)-(8*n)/61)*[(331 + n)/366] + 1920*[(332 + n)/366] + (116640/61 + (8*n)/61)*[(333 + n)/366] + (58080/61 + (8*n)/61)*[(334 + n)/366] + (480/61)-(8*n)/61)*[(336 + n)/366] + (59040/61)-(8*n)/61)*[(337 + n)/366] + 1920*[(338 + n)/366] + (116640/61 + (8*n)/61)*[(339 + n)/366] + (58080/61 + (8*n)/61)*[(340 + n)/366] + (480/61)-(8*n)/61)*[(342 + n)/366] + (59040/61)-(8*n)/61)*[(343 + n)/366] + 1920*[(344 + n)/366] + (116640/61 + (8*n)/61)*[(345 + n)/366] + (58080/61 + (8*n)/61)*[(346 + n)/366] + (480/61)-(8*n)/61)*[(348 + n)/366] + (59040/61)-(8*n)/61)*[(349 + n)/366] + 1920*[(350 + n)/366] + (116640/61 + (8*n)/61)*[(351 + n)/366] + (58080/61 + (8*n)/61)*[(352 + n)/366] + (480/61)-(8*n)/61)*[(354 + n)/366] + (59040/61)-(8*n)/61)*[(355 + n)/366] + 1920*[(356 + n)/366] + (116640/61 + (8*n)/61)*[(357 + n)/366] + (58080/61 + (8*n)/61)*[(358 + n)/366] + (480/61)-(8*n)/61)*[(360 + n)/366] + (59040/61)-(8*n)/61)*[(361 + n)/366] + 1920*[(362 + n)/366] + (116640/61 + (8*n)/61)*[(363 + n)/366] + (58080/61 + (8*n)/61)*[(364 + n)/366]
\end{aligned}$$

Výpočet tohoto vzorce trval 72 hodin. Vytvořující funkce a rekurence by zabrala dalších několik stran, myslím, že jejich publikace zde je nadbytečná. Zde je pouze denominator:

$$\begin{aligned}
& (-1 + x)^7 (1 + x)^4 (1 + x^2) (1 - x + x^2)^4 (1 + x + x^2)^4 (1 - x^2 + x^4) (1 - x + x^2 - x^3 + x^4) (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^3 (1 - x^3 + x^6) (1 + x^3 + x^6) (1 - x + x^3 - x^4 + x^5 - x^7 + x^8) (1 + x - x^3 - x^4 - x^5 + x^7 + x^8) (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}) (1 - x^6 + x^{12}) (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 + x^{10} - x^{11} + x^{12} - x^{13} + x^{14} - x^{15} + x^{16} - x^{17} + x^{18} - x^{19} + x^{20} - x^{21} + x^{22} - x^{23} + x^{24} - x^{25} + x^{26} - x^{27} + x^{28} - x^{29} + x^{30} - x^{31} + x^{32} - x^{33} + x^{34} - x^{35} + x^{36} - x^{37} + x^{38} - x^{39} + x^{40} - x^{41} + x^{42} - x^{43} + x^{44} - x^{45} + x^{46} - x^{47} + x^{48} - x^{49} + x^{50} - x^{51} + x^{52} - x^{53} + x^{54} - x^{55} + x^{56} - x^{57} + x^{58} - x^{59} + x^{60})^2 (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} + x^{19} + x^{20} + x^{21} + x^{22} + x^{23} + x^{24} + x^{25} + x^{26} + x^{27} + x^{28} + x^{29} + x^{30} + x^{31} + x^{32} + x^{33} + x^{34} + x^{35} + x^{36} + x^{37} + x^{38} + x^{39} + x^{40} + x^{41} + x^{42} + x^{43} + x^{44} + x^{45} + x^{46} + x^{47} + x^{48} + x^{49} + x^{50} + x^{51} + x^{52} + x^{53} + x^{54} + x^{55} + x^{56} + x^{57} + x^{58} + x^{59} + x^{60})^2 (1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + x^9 - x^{10} + x^{12} - x^{13} + x^{15} - x^{16} + x^{18} - x^{19} + x^{21} - x^{22} + x^{24} - x^{25} + x^{27} - x^{28} + x^{30} - x^{31} + x^{33} - x^{34} + x^{36} - x^{37} + x^{39} - x^{40} + x^{42} - x^{43} + x^{45} - x^{46} + x^{48} - x^{49} + x^{51} - x^{52} + x^{54} - x^{55} + x^{57} - x^{58} + x^{60} - x^{62} + x^{63} - x^{65} + x^{66} - x^{68} + x^{69} - x^{71} + x^{72} - x^{74} + x^{75} - x^{77} + x^{78} - x^{80} + x^{81} - x^{83} + x^{84} - x^{86} + x^{87} - x^{89} + x^{90} - x^{92} + x^{93} - x^{95} + x^{96} - x^{98} + x^{99} - x^{101} + x^{102} - x^{104} + x^{105} - x^{107} + x^{108} - x^{110} + x^{111} - x^{113} + x^{114} - x^{116} + x^{117} - x^{119} + x^{120})^2 (1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - x^9 - x^{10} + x^{12} + x^{13} - x^{15} - x^{16} + x^{18} + x^{19} - x^{21} - x^{22} + x^{24} + x^{25} - x^{27} - x^{28} + x^{30} + x^{31} - x^{33} - x^{34} + x^{36} + x^{37} - x^{39} - x^{40} + x^{42} + x^{43} - x^{45} - x^{46} + x^{48} + x^{49} - x^{51} - x^{52} + x^{54} + x^{55} - x^{57} - x^{58} + x^{60} - x^{62} - x^{63} + x^{65} + x^{66} - x^{68} - x^{69} + x^{71} + x^{72} - x^{74} - x^{75} + x^{77} + x^{78} - x^{80} - x^{81} + x^{83} + x^{84} - x^{86} - x^{87} + x^{89} + x^{90} - x^{92} - x^{93} + x^{95} + x^{96} - x^{98} - x^{99} + x^{101} + x^{102} - x^{104} - x^{105} + x^{107} + x^{108} - x^{110} - x^{111} + x^{113} + x^{114} - x^{116} - x^{117} + x^{119} + x^{120})^2
\end{aligned}$$

Three [1,7] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 8.12.2010), period = 9800

$$\begin{aligned}
 & (3999719*n)/643125-(14952089*n^2)/2572500-(301453*n^3)/643125 + (5737*n^4)/34300-(40*n^5)/147 + n^6/6 + (178304/625)*[n/10] + 18*[n/8] + (-191829/1715) + (19584*n)/1225-(990*n^2)/343 + \\
 & (144*n^3)/49)*[n/7] + (4608/625)*n*[n/5] + 13*[n/4]-(47635122*[n/2])/214375-(100184/625)*[(1+n)/10] + 34*[(1+n)/8] + (873484/8575 + (178418*n)/8575-(965*n^2)/343 + (120*n^3)/49)*[(1+n)/7] + \\
 & (2016/625)*n*[(1+n)/5]-3*[(1+n)/4] + (103152/625)*[(2+n)/10] + 34*[(2+n)/8] + ((157856*n)/8575-(884*n^2)/343 + (96*n^3)/49)*[(2+n)/7] + (3024/625)*n*[(2+n)/5] + (381823*[(3+n)/14])/1715- \\
 & (158704/625)*[(3+n)/10] + 18*[(3+n)/8] + ((174186*n)/8575-(747*n^2)/343 + (72*n^3)/49)*[(3+n)/7] + (432/625)*n*[(3+n)/5] + (16152/125 + (288*n)/125)*[(4+n)/25]-(1269743*[(4+n)/14])/8575 + \\
 & (138704/625)*[(4+n)/10] + ((128624*n)/8575-(554*n^2)/343 + (48*n^3)/49)*[(4+n)/7] + (14928/125 + (288*n)/125)*[(5+n)/25]-(232522*[(5+n)/14])/1225 + (1584/25)*[(5+n)/10] + ((4234*n)/1715- \\
 & (305*n^2)/343 + (24*n^3)/49)*[(5+n)/7]-(80/7)*[(6+n)/49] + (12304/125 + (288*n)/125)*[(6+n)/25]-(272014*[(6+n)/14])/8575 + (16704/125)*[(6+n)/10]-(200/7)*[(7+n)/49] + (1656/25 + (288*n)/125)*[(7+n)/25] + \\
 & (272014*[(7+n)/14])/8575-(25552/625)*[(7+n)/10]-(80/7)*[(8+n)/49] + (8856/125 + (288*n)/125)*[(8+n)/25]-(263439*[(8+n)/14])/8575 + (8/7)*[(9+n)/49] + (-12416/125 + (576*n)/125)*[(9+n)/25] + \\
 & (272014*[(9+n)/14])/8575 + (64/7)*[(10+n)/49] + (-1288/5)-(144*n)/25)*[(10+n)/35] + (-6584/125)-(144*n)/125)*[(10+n)/25] + (1645676*[(10+n)/14])/8575 + (88/7)*[(11+n)/49] + (6832/25)*[(11+n)/35] + (- \\
 & (3272/125)-(144*n)/125)*[(11+n)/25]-(997729*[(11+n)/14])/8575 + (80/7)*[(12+n)/49] + (6776/25 + (144*n)/25)*[(12+n)/35] + (-552/25)-(144*n)/125)*[(12+n)/25]-(1891093*[(12+n)/14])/8575-(40/7)*[(13+n)/49] + \\
 & (6664/25 + (144*n)/25)*[(13+n)/35] + (-5048/125)-(144*n)/125)*[(13+n)/25]-(240/7)*[(14+n)/49] + (-168/25 + (144*n)/25)*[(14+n)/35] + (6016/125 + (144*n)/125)*[(14+n)/25]-(240/7)*[(15+n)/49] + \\
 & (-6664/25)-(144*n)/25)*[(15+n)/35] + (1904/125 + (144*n)/125)*[(15+n)/25]-(80/7)*[(16+n)/49]-(112/25)*[(16+n)/35] + (592/125 + (144*n)/125)*[(16+n)/25] + (72/7)*[(17+n)/49] + (-6552/25)- \\
 & (144*n)/25)*[(17+n)/35] + (416/25 + (144*n)/125)*[(17+n)/25] + (160/7)*[(18+n)/49] + (1344/5)*[(18+n)/35] + (6368/125 + (144*n)/125)*[(18+n)/25] + (184/7)*[(19+n)/49] + (6664/25 + (144*n)/25)*[(19+n)/35] + \\
 & (-13992/125 + (432*n)/125)*[(19+n)/25] + (64/7)*[(20+n)/49] + (112/25)*[(20+n)/35] + (-10048/125)-(288*n)/125)*[(20+n)/25]-(176/7)*[(21+n)/49] + (6552/25 + (144*n)/25)*[(21+n)/35] + (- \\
 & (11424/125)-(288*n)/125)*[(21+n)/25]-(256/7)*[(22+n)/49] + (-576/5)-(288*n)/125)*[(22+n)/25]-(208/7)*[(23+n)/49] + (1288/5 + (144*n)/25)*[(23+n)/35] + (-15976/125)-(288*n)/125)*[(23+n)/25]- \\
 & (32/7)*[(24+n)/49]-(6832/25)*[(24+n)/35] + (160/7)*[(25+n)/49] + (-56/25)-(144*n)/25)*[(25+n)/35] + (256/7)*[(26+n)/49] + (1288/5 + (144*n)/25)*[(26+n)/35] + (176/7)*[(27+n)/49]-(112/25)*[(27+n)/35]- \\
 & (64/7)*[(28+n)/49] + (6328/25 + (144*n)/25)*[(28+n)/35]-56*[(29+n)/50]-(184/7)*[(29+n)/49]-(6944/25)*[(29+n)/35]-16*[(30+n)/50]-(208/7)*[(30+n)/49] + (-6888/25)-(144*n)/25)*[(30+n)/35] + 24*[(31+n)/50]- \\
 & (136/7)*[(31+n)/49] + (-6776/25)-(144*n)/25)*[(31+n)/35] + 64*[(32+n)/50] + (32/7)*[(32+n)/49] + (56/25)-(144*n)/25)*[(32+n)/35] + 56*[(33+n)/50] + (240/7)*[(33+n)/49] + (6552/25 + \\
 & (144*n)/25)*[(33+n)/35] + 72*[(34+n)/50] + (240/7)*[(34+n)/49]-8*[(35+n)/50] + (40/7)*[(35+n)/49]-72*[(36+n)/50]-(80/7)*[(36+n)/49]-80*[(37+n)/50]-(136/7)*[(37+n)/49]-32*[(38+n)/50]-(128/7)*[(38+n)/49]- \\
 & 8*[(39+n)/50]-8*[(39+n)/49] + 72*[(40+n)/50] + (80/7)*[(40+n)/49] + 96*[(41+n)/50] + (200/7)*[(41+n)/49] + 64*[(42+n)/50] + (80/7)*[(42+n)/49]-16*[(43+n)/50]-16*[(44+n)/50]-(48/7)*[(44+n)/49]- \\
 & 56*[(45+n)/50]-(64/7)*[(45+n)/49]-40*[(46+n)/50]-(48/7)*[(46+n)/49] + 40*[(48+n)/50]-(1344/5)*[(54+n)/175] + (-6664/25)-(144*n)/25)*[(55+n)/175] + (-6552/25)-(144*n)/25)*[(56+n)/175] + (- \\
 & (1288/5)-(144*n)/25)*[(57+n)/175] + (-6328/25)-(144*n)/25)*[(58+n)/175] + (504/25)-(144*n)/25)*[(59+n)/175] + (112/5)*[(60+n)/175] + (112/5)*[(61+n)/175] + (112/5)*[(62+n)/175] + (112/5)*[(63+n)/175] + \\
 & (112/5)*[(64+n)/175] + (112/5)*[(65+n)/175] + (112/5)*[(66+n)/175] + (112/5)*[(67+n)/175] + (112/5)*[(68+n)/175] + (112/5)*[(69+n)/175] + (112/5)*[(70+n)/175] + (112/5)*[(71+n)/175] + (112/5)*[(72+n)/175] + \\
 & (112/5)*[(73+n)/175] + (112/5)*[(74+n)/175] + (112/5)*[(75+n)/175] + (112/5)*[(76+n)/175] + (112/5)*[(77+n)/175] + (112/5)*[(78+n)/175]-(1232/5)*[(79+n)/175] + (-6104/25)-(144*n)/25)*[(80+n)/175] + \\
 & (-5992/25)-(144*n)/25)*[(81+n)/175] + (-1176/5)-(144*n)/25)*[(82+n)/175] + (-5768/25)-(144*n)/25)*[(83+n)/175] + (1064/25)-(144*n)/25)*[(84+n)/175] + (224/5)*[(85+n)/175] + (224/5)*[(86+n)/175] + \\
 & (224/5)*[(87+n)/175] + (224/5)*[(88+n)/175]-224*[(89+n)/175] + (-5544/25)-(144*n)/25)*[(90+n)/175] + (-5432/25)-(144*n)/25)*[(91+n)/175] + (-1064/5)-(144*n)/25)*[(92+n)/175] + (-5208/25)- \\
 & (144*n)/25)*[(93+n)/175] + (1624/25)-(144*n)/25)*[(94+n)/175] + (336/5)*[(95+n)/175] + (336/5)*[(96+n)/175] + (336/5)*[(97+n)/175] + (336/5)*[(98+n)/175] + (336/5)*[(99+n)/175] + (336/5)*[(100+n)/175] + \\
 & (336/5)*[(101+n)/175] + (336/5)*[(102+n)/175] + (336/5)*[(103+n)/175]-(1008/5)*[(104+n)/175] + (-4984/25)-(144*n)/25)*[(105+n)/175] + (-4872/25)-(144*n)/25)*[(106+n)/175] + (-952/5)- \\
 & (144*n)/25)*[(107+n)/175] + (-4648/25)-(144*n)/25)*[(108+n)/175] + (2184/25)-(144*n)/25)*[(109+n)/175] + (448/5)*[(110+n)/175] + (448/5)*[(111+n)/175] + (448/5)*[(112+n)/175] + (448/5)*[(113+n)/175]- \\
 & (896/5)*[(114+n)/175] + (-4424/25)-(144*n)/25)*[(115+n)/175] + (-4312/25)-(144*n)/25)*[(116+n)/175] + (-168-(144*n)/25)*[(117+n)/175] + (-4088/25)-(144*n)/25)*[(118+n)/175] + (2744/25)- \\
 & (144*n)/25)*[(119+n)/175] + 112*[(120+n)/175] + 112*[(121+n)/175] + 112*[(122+n)/175] + 112*[(123+n)/175]-784/5)*[(124+n)/175] + (-3864/25)-(144*n)/25)*[(125+n)/175] + (-3752/25)- \\
 & (144*n)/25)*[(126+n)/175] + (-728/5)-(144*n)/25)*[(127+n)/175] + (-3528/25)-(144*n)/25)*[(128+n)/175] + (-3416/25)-(144*n)/25)*[(129+n)/175] + (-3304/25)-(144*n)/25)*[(130+n)/175] + (-3192/25)- \\
 & (144*n)/25)*[(131+n)/175] + (-616/5)-(144*n)/25)*[(132+n)/175] + (-2968/25)-(144*n)/25)*[(133+n)/175] + (3864/25)-(144*n)/25)*[(134+n)/175] + (784/5)*[(135+n)/175] + (784/5)*[(136+n)/175] + \\
 & (784/5)*[(137+n)/175] + (784/5)*[(138+n)/175]-112*[(139+n)/175] + (-2744/25)-(144*n)/25)*[(140+n)/175] + (-2632/25)-(144*n)/25)*[(141+n)/175] + (-504/5)-(144*n)/25)*[(142+n)/175] + (-2408/25)- \\
 & (144*n)/25)*[(143+n)/175] + (4424/25)-(144*n)/25)*[(144+n)/175] + (896/5)*[(145+n)/175] + (896/5)*[(146+n)/175] + (896/5)*[(147+n)/175] + (896/5)*[(148+n)/175]-(448/5)*[(149+n)/175] + (-2184/25)- \\
 & (144*n)/25)*[(150+n)/175] + (-2072/25)-(144*n)/25)*[(151+n)/175] + (-392/5)-(144*n)/25)*[(152+n)/175] + (-1848/25)-(144*n)/25)*[(153+n)/175] + (-1736/25)-(144*n)/25)*[(154+n)/175] + (-1624/25)- \\
 & (144*n)/25)*[(155+n)/175] + (-1512/25)-(144*n)/25)*[(156+n)/175] + (-56-(144*n)/25)*[(157+n)/175] + (-1288/25)-(144*n)/25)*[(158+n)/175] + (-1176/25)-(144*n)/25)*[(159+n)/175] + (-1064/25)- \\
 & (144*n)/25)*[(160+n)/175] + (-952/25)-(144*n)/25)*[(161+n)/175] + (-168/5)-(144*n)/25)*[(162+n)/175] + (-728/25)-(144*n)/25)*[(163+n)/175] + (-616/25)-(144*n)/25)*[(164+n)/175] + (-504/25)- \\
 & (144*n)/25)*[(165+n)/175] + (-392/25)-(144*n)/25)*[(166+n)/175] + (-56/5)-(144*n)/25)*[(167+n)/175] + (-168/25)-(144*n)/25)*[(168+n)/175] + (6664/25)-(144*n)/25)*[(169+n)/175] + (1344/5)*[(170+n)/175] + \\
 & (1344/5)*[(171+n)/175] + (1344/5)*[(172+n)/175] + (1344/5)*[(173+n)/175]
 \end{aligned}$$

Recurrence

$$\begin{aligned}
 a_n = & a_{n-446} - 4a_{n-445} + 8a_{n-444} - 12a_{n-443} + 16a_{n-442} - 20a_{n-441} + 24a_{n-440} - 28a_{n-439} + 31a_{n-438} - 32a_{n-437} + 32a_{n-436} - 32a_{n-435} + 32a_{n-434} - 32a_{n-433} + 31a_{n-432} - 28a_{n-431} + 24a_{n-430} - 20a_{n-429} + 16a_{n-428} \\
 & - 12a_{n-427} + 8a_{n-426} - 4a_{n-425} + a_{n-424} + a_{n-421} - 4a_{n-420} + 8a_{n-419} - 12a_{n-418} + 16a_{n-417} - 20a_{n-416} + 24a_{n-415} - 28a_{n-414} + 31a_{n-413} - 32a_{n-412} + 32a_{n-411} - 32a_{n-410} + 32a_{n-409} - 32a_{n-408} \\
 & + 31a_{n-407} - 28a_{n-406} + 24a_{n-405} - 20a_{n-404} + 16a_{n-403} - 12a_{n-402} + 8a_{n-401} - 4a_{n-400} + a_{n-399} - a_{n-397} + 4a_{n-396} - 8a_{n-395} + 12a_{n-394} - 16a_{n-393} + 20a_{n-392} - 24a_{n-391} + 28a_{n-390} - 31a_{n-389} \\
 & + 32a_{n-388} - 32a_{n-387} + 32a_{n-386} - 32a_{n-385} + 32a_{n-384} - 31a_{n-383} + 28a_{n-382} - 24a_{n-381} + 20a_{n-380} - 16a_{n-379} + 12a_{n-378} - 8a_{n-377} + 4a_{n-376} - a_{n-375} - a_{n-372} + 4a_{n-371} - 8a_{n-370} + 12a_{n-369} \\
 & - 16a_{n-368} + 20a_{n-367} - 24a_{n-366} + 28a_{n-365} - 31a_{n-364} + 32a_{n-363} - 32a_{n-362} + 32a_{n-361} - 32a_{n-360} + 32a_{n-359} - 31a_{n-358} + 28a_{n-357} - 24a_{n-356} + 20a_{n-355} - 16a_{n-354} + 12a_{n-353} - 8a_{n-352} + 4a_{n-351} \\
 & - a_{n-350} - 2a_{n-271} + 8a_{n-270} - 16a_{n-269} + 24a_{n-268} - 32a_{n-267} + 40a_{n-266} - 48a_{n-265} + 56a_{n-264} - 62a_{n-263} + 64a_{n-262} - 64a_{n-261} + 64a_{n-260} - 64a_{n-259} + 64a_{n-258} - 62a_{n-257} + 56a_{n-256} - 48a_{n-255} \\
 & + 40a_{n-254} - 32a_{n-253} + 24a_{n-252} - 16a_{n-251} + 8a_{n-250} - 2a_{n-249} - 2a_{n-246} + 8a_{n-245} - 16a_{n-244} + 24a_{n-243} - 32a_{n-242} + 40a_{n-241} - 48a_{n-240} + 56a_{n-239} - 62a_{n-238} + 64a_{n-237} - 64a_{n-236} + 64a_{n-235} \\
 & - 64a_{n-234} + 64a_{n-233} - 62a_{n-232} + 56a_{n-231} - 48a_{n-230} + 40a_{n-229} - 32a_{n-228} + 24a_{n-227} - 16a_{n-226} + 8a_{n-225} - 2a_{n-224} + 2a_{n-222} - 8a_{n-221} + 16a_{n-220} - 24a_{n-219} + 32a_{n-218} - 40a_{n-217} + 48a_{n-216} \\
 & - 56a_{n-215} + 62a_{n-214} - 64a_{n-213} + 64a_{n-212} - 64a_{n-211} + 64a_{n-210} - 64a_{n-209} + 62a_{n-208} - 56a_{n-207} + 48a_{n-206} - 40a_{n-205} + 32a_{n-204} - 24a_{n-203} + 16a_{n-202} - 8a_{n-201} + 2a_{n-200} - 16a_{n-197} - 8a_{n-196} \\
 & + 16a_{n-195} - 24a_{n-194} + 32a_{n-193} - 40a_{n-192} + 48a_{n-191} - 56a_{n-190} + 62a_{n-189} - 64a_{n-188} + 64a_{n-187} - 64a_{n-186} + 64a_{n-185} - 64a_{n-184} + 62a_{n-183} - 56a_{n-182} + 48a_{n-181} - 40a_{n-180} + 32a_{n-179} \\
 & - 24a_{n-178} + 16a_{n-177} - 8a_{n-176} + 2a_{n-175} + a_{n-96} - 4a_{n-95} + 8a_{n-94} - 12a_{n-93} + 16a_{n-92} - 20a_{n-91} + 24a_{n-90} - 28a_{n-89} + 31a_{n-88} - 32a_{n-87} + 32a_{n-86} - 32a_{n-85} + 32a_{n-84} - 32a_{n-83} + 31a_{n-82} \\
 & - 28a_{n-81} + 24a_{n-80} - 20a_{n-79} + 16a_{n-78} - 12a_{n-77} + 8a_{n-76} - 4a_{n-75} + a_{n-74} + a_{n-71} - 4a_{n-70} + 8a_{n-69} - 12a_{n-68} + 16a_{n-67} - 20a_{n-66} + 24a_{n-65} - 28a_{n-64} + 31a_{n-63} - 32a_{n-62} + 32a_{n-61} - 32a_{n-60} \\
 & + 32a_{n-59} - 32a_{n-58} + 31a_{n-57} - 28a_{n-56} + 24a_{n-55} - 20a_{n-54} + 16a_{n-53} - 12a_{n-52} + 8a_{n-51} - 4a_{n-50} + a_{n-49} - a_{n-47} + 4a_{n-46} - 8a_{n-45} + 12a_{n-44} - 16a_{n-43} + 20a_{n-42} - 24a_{n-41} + 28a_{n-40} - 31a_{n-39} \\
 & + 32a_{n-38} - 32a_{n-37} + 32a_{n-36} - 32a_{n-35} + 32a_{n-34} - 31a_{n-33} + 28a_{n-32} - 24a_{n-31} + 20a_{n-30} - 16a_{n-29} + 12a_{n-28} - 8a_{n-27} + 4a_{n-26} - a_{n-25} - a_{n-22} + 4a_{n-21} - 8a_{n-20} + 12a_{n-19} - 16a_{n-18} + 20a_{n-17} \\
 & - 24a_{n-16} + 28a_{n-15} - 31a_{n-14} + 32a_{n-13} - 32a_{n-12} + 32a_{n-11} - 32a_{n-10} + 32a_{n-9} - 31a_{n-8} + 28a_{n-7} - 24a_{n-6} + 20a_{n-5} - 16a_{n-4} + 12a_{n-3} - 8a_{n-2} + 4a_{n-1}
 \end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned}
 & -4x^2(1 + 17x + 64x^2 + 171x^3 + 369x^4 + 702x^5 + 789x^6 + 2437x^7 + 1975x^8 + 5347x^9 + 4577x^{10} + 9913x^{11} + 9075x^{12} + 13820x^{13} + 20705x^{14} + 18031x^{15} + 35316x^{16} + 25203x^{17} + 53021x^{18} + 35574x^{19} + 65552x^{20} \\
 & + 66676x^{21} + 70662x^{22} + 102942x^{23} + 79130x^{24} + 142571x^{25} + 90975x^{26} + 167987x^{27} + 146691x^{28} + 167858x^{29} + 212554x^{30} + 171202x^{31} + 282979x^{32} + 178674x^{33} + 327589x^{34} + 264849x^{35} + 319107x^{36} + 370811x^{37} \\
 & + 313328x^{38} + 487263x^{39} + 311211x^{40} + 563465x^{41} + 433479x^{42} + 548468x^{43} + 588488x^{44} + 531657x^{45} + 767590x^{46} + 510783x^{47} + 888850x^{48} + 669413x^{49} + 869033x^{50} + 876062x^{51} + 838164x^{52} + 1129563x^{53} \\
 & + 784493x^{54} + 1306412x^{55} + 974426x^{56} + 1280722x^{57} + 1229972x^{58} + 1229986x^{59} + 1564509x^{60} + 1125966x^{61} + 1804466x^{62} + 1335511x^{63} + 1771057x^{64} + 1631084x^{65} + 1694820x^{66} + 2048347x^{67} + 1524451x^{68} \\
 & + 2356841x^{69} + 1740519x^{70} + 2317819x^{71} + 2066193x^{72} + 2215795x^{73} + 2568013x^{74} + 1969332x^{75} + 2951399x^{76} + 2183223x^{77} + 2912924x^{78} + 2531036x^{79} + 2788031x^{80} + 3119095x^{81} + 2457241x^{82} + 3581616x^{83} + \\
 & 2659614x^{84} + 3546774x^{85} + 3019084x^{86} + 3399465x^{87} + 3688757x^{88} + 2975432x^{89} + 4228615x^{90} + 3157109x^{91} + 4195584x^{92} + 3519276x^{93} + 4024246x^{94} + 4264520x^{95} + 3502030x^{96} + 4878831x^{97} + 3659213x^{98} + \\
 & 4845899x^{99} + 4021421x^{100} + 4649878x^{101} + 4840760x^{102} + 4028878x^{103} + 5529159x^{104} + 4161367x^{105} + 5496221x^{106} + 4523583x^{107} + 5275496x^{108} + 5417018x^{109} + 4555704x^{110} + 6179513x^{111} + 4663491x^{112} \\
 & + 6146575x^{113} + 5025713x^{114} + 5901146x^{115} + 5993244x^{116} + 5082562x^{117} + 6829835x^{118} + 5165645x^{119} + 6796903x^{120} + 5527865x^{121} + 6526778x^{122} + 6569484x^{123} + 5609410x^{124} + 7480163x^{125} + 5667797x^{126} + \\
 & 7447231x^{127} + 6030017x^{128} + 7152410x^{129} + 7145726x^{130} + 6136252x^{131} + 8130501x^{132} + 6169935x^{133} + 8097577x^{134} + 6532147x^{135} + 7778068x^{136} + 7721938x^{137} + 6663126x^{138} + 8780807x^{139} + 6672105x^{140} \\
 & + 8747891x^{141} + 7034309x^{142} + 8403694x^{143} + 8298180x^{144} + 7189974x^{145} + 9431135x^{146} + 7174257x^{147} + 9398219x^{148} + 7536461x^{149} + 9029326x^{150} + 8874420x^{151} + 7716822x^{152} + 10081463x^{153} + 7676409x^{154} + \\
 & 10048549x^{155} + 8038607x^{156} + 9654968x^{157} + 9450646x^{158} + 8243688x^{159} + 10731769x^{160} + 8178587x^{161} + 10698849x^{162} + 8540785x^{163} + 10280578x^{164} + 10026904x^{165} + 8770522x^{166} + 11382107x^{167} + 8680733x^{168} \\
 & + 11349179x^{169} + 9042937x^{170} + 10906210x^{171} + 10603144x^{172} + 9297370x^{173} + 12032181x^{174} + 9183387x^{175} + 11998715x^{176} + 9545969x^{177} + 11530238x^{178} + 11180158x^{179} + 9821050x^{180} + 12683195x^{181} + \\
 & 9678157x^{182} + 12647887x^{183} + 10034549x^{184} + 12150314x^{185} + 11733808x^{186} + 10334906x^{187} + 13303709x^{188} + 10147279x^{189} + 13262847x^{190} + 10479773x^{191} + 12731934x^{192} + 12226346x^{193} + 10806492x^{194} \\
 & + 13852335x^{195} + 10555977x^{196} + 13809171x^{197} + 10845665x^{198} + 13250212x^{199} + 12623486x^{200} + 11222030x^{201} + 14298801x^{202} + 10896837x^{203} + 14266619x^{204} + 11126829x^{205} + 13693964x^{206} + 12916400x^{207} + \\
 & 11576240x^{208} + 14626919x^{209} + 11165929x^{210} + 14610947x^{211} + 11316221x^{212} + 14031592x^{213} + 13280758x^{214} + 11834758x^{215} + 14808505x^{216} + 1328061x^{217} + 14805067x^{218} + 11380755x^{219} + 14222328x^{220} + \\
 & 13101652x^{221} + 11963720x^{222} + 14807309x^{223} + 11358595x^{224} + 14814519x^{225} + 11307001x^{226} + 14236208x^{227} + 12952434x^{228} + 11944914x^{229} + 14620245x^{230} + 11253235x^{231} + 14638705x^{232} + 11104343x^{233} \\
 & + 14074936x^{234} + 12662288x^{235} + 11785060x^{236} + 14278215x^{237} + 11029715x^{238} + 14311615x^{239} + 10801265x^{240} + 13773656x^{241} + 12268342x^{242} + 11517198x^{243} + 13822033x^{244} + 10723363x^{245} + 13867161x^{246} + \\
 & 10434207x^{247} + 13356838x^{248} + 11805250x^{249} + 11154792x^{250} + 13282237x^{251} + 10341369x^{252} + 13325767x^{253} + 10008439x^{254} + 12835730x^{255} + 11281840x^{256} + 10703058x^{257} + 12675141x^{258} + 9887479x^{259} + \\
 & 12711901x^{260} + 9530739x^{261} + 12242244x^{262} + 10715254x^{263} + 10196776x^{264} + 12028465x^{265} + 9397397x^{266} + 12062099x^{267} + 9034767x^{268} + 11616554x^{269} + 10141480x^{270} + 9669170x^{271} + 11379369x^{272} \\
 & + 8894587x^{273} + 11412301x^{274} + 8532379x^{275} + 10990922x^{276} + 9565240x^{277} + 9142322x^{278} + 10729041x^{279} + 8392433x^{280} + 10761979x^{281} + 8030217x^{282} + 10365304x^{283} + 9898982x^{284} + 8615496x^{285} \\
 & + 10078687x^{286} + 7890309x^{287} + 10111625x^{288} + 7528087x^{289} + 9739654x^{290} + 8412756x^{291} + 8088638x^{292} + 9428365x^{293} + 7388155x^{294} + 9461297x^{295} + 7025935x^{296} + 9114022x^{297} + 7836516x^{298} + 7561790x^{299} \\
 & + 8778037x^{300} + 6886003x^{301} + 8810969x^{302} + 6523783x^{303} + 8488390x^{304} + 7260274x^{305} + 7034948x^{306} + 8127699x^{307} + 6383865x^{308} + 8160623x^{309} + 6021653x^{310} + 7862732x^{311} + 6684062x^{312} + 6508074x^{313} + \\
 & 7477393x^{314} + 5881695x^{315} + 7510309x^{316} + 5519491x^{317} + 7237106x^{318} + 6107820x^{319} + 5981226x^{320} + 6827065x^{321} + 5379543x^{322} + 6859981x^{323} + 5017339x^{324} + 6611474x^{325} + 5531580x^{326} + 5454378x^{327} \\
 & + 6176737x^{328} + 4877391x^{329} + 6209651x^{330} + 4515193x^{331} + 5985832x^{332} + 4955354x^{333} + 4927512x^{334} + 5526431x^{335} + 4475213x^{336} + 5559351x^{337} + 4013015x^{338} + 5360222x^{339} + 4379096x^{340} + 4400678x^{341} + \\
 & 4876093x^{342} + 3873067x^{343} + 4909021x^{344} + 3510863x^{345} + 4734590x^{346} + 3802856x^{347} + 3873830x^{348} + 4225767x^{349} + 3370916x^{350} + 4258712x^{351} + 3008775x^{352} + 4109131x^{353} + 3226985x^{354} + 3347684x^{355} \\
 & + 3576232x^{356} + 2871190x^{357} + 3610354x^{358} + 2511888x^{359} + 3487925x^{360} + 2660263x^{361} + 2829235x^{362} + 2938907x^{363} + 2387328x^{364} + 2976062x^{365} + 2039719x^{366} + 2882907x^{367} + 2127137x^{368} + 2328882x^{369} + \\
 & 2340313x^{370} + 1931147x^{371} + 2378367x^{372} + 1605193x^{373} + 2311206x^{374} + 1640447x^{375} + 1857439x^{376} + 1792420x^{377} + 1509012x^{378} + 1825235x^{379} + 1212653x^{380} + 1777650x^{381} + 1204605x^{382} + 1418302x^{383} \\
 & + 1301673x^{384} + 1125038x^{385} + 1326130x^{386} + 868784x^{387} + 1294116x^{388} + 832671x^{389} + 1023971x^{390} + 887238x^{391} + 791504x^{392} + 905169x^{393} + 584305x^{394} + 886815x^{395} + 536758x^{396} + 696967x^{397} + 562293x^{398} + \\
 & 525288x^{399} + 575404x^{400} + 369729x^{401} + 567688x^{402} + 322491x^{403} + 443557x^{404} + 329527x^{405} + 328155x^{406} + 336757x^{407} + 221501x^{408} + 333862x^{409} + 181219x^{410} + 258158x^{411} + 177283x^{412} + 187062x^{413} + \\
 & 176788x^{414} + 120443x^{415} + 173080x^{416} + 88807x^{417} + 129803x^{418} + 79326x^{419} + 89918x^{420} + 73220x^{421} + 53400x^{422} + 68419x^{423} + 32233x^{424} + 47832x^{425} + 23556x^{426} + 30468x^{427} + 17997x^{428} + 16089x^{429} + \\
 & 15023x^{430} + 7081x^{431} + 8885x^{432} + 3459x^{433} + 4691x^{434} + 1541x^{435} + 1961x^{436} + 855x^{437} + 477x^{438} + 252x^{439} + 112x^{440} + 50x^{441} + 13x^{442} + 9x^{443} / ((-1 + x)^7*(1 + x)^*(1 + x^2)*(1 + x^4)*(1 - x + x^2 - x^3 + \\
 & x^4)*(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^2*(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6)*(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4*(1 - x^5 + x^{10} - x^{15} + x^{20})*(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20})^2*(1 - x + x^5 - x^6 + x^7 - x^8 + x^{10} - x^{11} + x^{12} - \\
 & x^{13} + x^{14} - x^{16} + x^{17} - x^{18} + x^{19} - x^{23} + x^{24})^2*(1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + x^{28} + x^{35} + x^{42})*(1 - x^5 + x^{25} - x^{30} + x^{35} - x^{40} + x^{45} + x^{50} - x^{55} + x^{60} - x^{65} + x^{70} - x^{80} + x^{85} - x^{90} + x^{95} - x^{115} + x^{120})^2
 \end{aligned}$$

Three [2,7] riders on an $n \times n$ chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 10.12.2010), period = 46746

$$\begin{aligned}
 & (9331535*n)/52028298 + (10866655*n^2)/26014149 - (871858*n^3)/963487 + (196166*n^4)/490833 - (38*n^5)/147 + n^6/6 + (18064/53 + (3000*n)/2809)*[n/53] + (64/3)*[n/9] + (-10126938/18179) + (45160*n)/2597 - \\
 & (804*n^2)/343 + (120*n^3/49)*[n/7] + (160/27)*[n/3] + (3239441*[n^2]/18179 + (2054344/2809 + (6000*n)/2809)*[(1 + n)/53] - 8*[(1 + n)/9] + (-13990348/18179) + (228680*n)/18179 - (950*n^2)/343 + \\
 & (100*n^3/49)*[(1 + n)/7] + (476/27)*[(1 + n)/3] + (-637504/2809) + (9000*n)/2809)*[(2 + n)/53] + (64/3)*[(2 + n)/9] + ((233672*n)/18179 - (984*n^2)/343 + (80*n^3/49)*[(2 + n)/7] + (437104/2809 + \\
 & (1400*n)/2809)*[(3 + n)/53] - (3680926*[(3 + n)/14]/18179 + (20/3)*[(3 + n)/9] + ((191936*n)/18179 - (906*n^2)/343 + (60*n^3/49)*[(3 + n)/7] + (1507112/2809 + (4400*n)/2809)*[(4 + n)/53] - (13588734*[(4 + \\
 & n)/14]/18179 - 4*[(4 + n)/9] + ((174032*n)/18179 - (716*n^2)/343 + (40*n^3/49)*[(4 + n)/7] + (2538600/2809 + (7400*n)/2809)*[(5 + n)/53] - (2468040*[(5 + n)/14]/2597 + (44/3)*[(5 + n)/9] + ((40800*n)/18179 - \\
 & (414*n^2)/343 + (20*n^3/49)*[(5 + n)/7] + (-82184/2809) + (10400*n)/2809)*[(6 + n)/53] + (32/7)*[(6 + n)/49] - (3257620*[(6 + n)/14]/18179 + (885408/2809 + (2800*n)/2809)*[(7 + n)/53] - (96/7)*[(7 + n)/49] + \\
 & (3257620*[(7 + n)/14]/18179 + (1984928/2809 + (5800*n)/2809)*[(8 + n)/53] - (48/7)*[(8 + n)/49] - (3221262*[(8 + n)/14]/18179 + (-723856/2809) + (8800*n)/2809)*[(9 + n)/53] + (24/7)*[(9 + n)/49] + (3257620*[(9 + \\
 & n)/14]/18179 + (359256/2809 + (1200*n)/2809)*[(10 + n)/53] - (48/7)*[(10 + n)/49] - (6902188*[(10 + n)/14]/18179 + (1418264/2809 + (4200*n)/2809)*[(11 + n)/53] + (72/7)*[(11 + n)/49] - (10331114*[(11 + \\
 & n)/14]/18179 + (2464192/2809 + (7200*n)/2809)*[(12 + n)/53] - (8/7)*[(12 + n)/49] - (20497542*[(12 + n)/14]/18179 + (-161656/2809) + (10200*n)/2809)*[(13 + n)/53] + (136/7)*[(13 + n)/49] + (826312/2809 + \\
 & (2600*n)/2809)*[(14 + n)/53] - (96/7)*[(14 + n)/49] + (1926704/2809 + (5600*n)/2809)*[(15 + n)/53] + (24/7)*[(15 + n)/49] + (-800712/2809) + (8600*n)/2809)*[(16 + n)/53] - (32/7)*[(16 + n)/49] + (289208/2809 + \\
 & (1000*n)/2809)*[(17 + n)/53] - (40/7)*[(17 + n)/49] + (1335520/2809 + (4000*n)/2809)*[(18 + n)/53] + 8*[(18 + n)/49] + (2394192/2809 + (7000*n)/2809)*[(19 + n)/53] - (80/7)*[(19 + n)/49] + (-238416/2809) + \\
 & (10000*n)/2809)*[(20 + n)/53] + (200/7)*[(20 + n)/49] + (768232/2809 + (2400*n)/2809)*[(21 + n)/53] - 16*[(21 + n)/49] + (1867800/2809 + (5400*n)/2809)*[(22 + n)/53] + (104/7)*[(22 + n)/49] + (-879944/2809) + \\
 & (8400*n)/2809)*[(23 + n)/53] - 8*[(23 + n)/49] + (215088/2809 + (800*n)/2809)*[(24 + n)/53] + (24/7)*[(24 + n)/49] + (1247008/2809 + (3800*n)/2809)*[(25 + n)/53] + (8/7)*[(25 + n)/49] + (2316728/2809 + \\
 & (6800*n)/2809)*[(26 + n)/53] - (48/7)*[(26 + n)/49] + (-324336/2809) + (9800*n)/2809)*[(27 + n)/53] + 16*[(27 + n)/49] + (699296/2809 + (2200*n)/2809)*[(28 + n)/53] - (200/7)*[(28 + n)/49] + (1796344/2809 + \\
 & (5200*n)/2809)*[(29 + n)/53] + (136/7)*[(29 + n)/49] + (-950952/2809) + (8200*n)/2809)*[(30 + n)/53] - (104/7)*[(30 + n)/49] + (147496/2809 + (600*n)/2809)*[(31 + n)/53] + (88/7)*[(31 + n)/49] + (1163328/2809 + \\
 & (3600*n)/2809)*[(32 + n)/53] - (16/7)*[(32 + n)/49] + (2242400/2809 + (6600*n)/2809)*[(33 + n)/53] + (32/7)*[(33 + n)/49] + (-408816/2809) + (9600*n)/2809)*[(34 + n)/53] + (96/7)*[(34 + n)/49] + (630104/2809 + \\
 & (2000*n)/2809)*[(35 + n)/53] - (136/7)*[(35 + n)/49] + (1722936/2809 + (5000*n)/2809)*[(36 + n)/53] + (64/7)*[(36 + n)/49] + (-1003136/2809) + (8000*n)/2809)*[(37 + n)/53] - (120/7)*[(37 + n)/49] + (97032/2809 + \\
 & (400*n)/2809)*[(38 + n)/53] + (96/7)*[(38 + n)/49] + (1095080/2809 + (3400*n)/2809)*[(39 + n)/53] - (72/7)*[(39 + n)/49] + (2181808/2809 + (6400*n)/2809)*[(40 + n)/53] + (104/7)*[(40 + n)/49] + (-481256/2809) + \\
 & (9400*n)/2809)*[(41 + n)/53] + (96/7)*[(41 + n)/49] + (571256/2809 + (1800*n)/2809)*[(42 + n)/53] - (32/7)*[(42 + n)/49] + (1658176/2809 + (4800*n)/2809)*[(43 + n)/53] + 8*[(43 + n)/49] + (-1048368/2809) + \\
 & (7800*n)/2809)*[(44 + n)/53] - (48/7)*[(44 + n)/49] + (51824/2809 + (200*n)/2809)*[(45 + n)/53] + (48/7)*[(45 + n)/49] + (1030392/2809 + (3200*n)/2809)*[(46 + n)/53] - (48/7)*[(46 + n)/49] + (2123080/2809 + \\
 & (6200*n)/2809)*[(47 + n)/53] + 8*[(47 + n)/49] + (-553528/2809) + (9200*n)/2809)*[(48 + n)/53] + (510880/2809 + (1600*n)/2809)*[(49 + n)/53] + (1590192/2809 + (4600*n)/2809)*[(50 + n)/53] + (-1098520/2809) \\
 & + (7600*n)/2809)*[(51 + n)/53] - (69888/53)*[(58 + n)/371] + (224/53 - (200*n)/53)*[(59 + n)/371] + (448/53)*[(60 + n)/371] + (448/53)*[(61 + n)/371] + (448/53)*[(62 + n)/371] + (448/53)*[(63 + n)/371] + \\
 & (448/53)*[(64 + n)/371] - (69440/53)*[(65 + n)/371] + (672/53 - (200*n)/53)*[(66 + n)/371] + (896/53)*[(67 + n)/371] + (896/53)*[(68 + n)/371] + (896/53)*[(69 + n)/371] + (896/53)*[(70 + n)/371] + (896/53)*[(71 + \\
 & n)/371] - (68992/53)*[(72 + n)/371] + (1120/53 - (200*n)/53)*[(73 + n)/371] + (1344/53)*[(74 + n)/371] + (1344/53)*[(75 + n)/371] + (1344/53)*[(76 + n)/371] + (1344/53)*[(77 + n)/371] + (1344/53)*[(78 + n)/371] - \\
 & (68544/53)*[(79 + n)/371] + (1568/53 - (200*n)/53)*[(80 + n)/371] + (1792/53)*[(81 + n)/371] + (1792/53)*[(82 + n)/371] + (1792/53)*[(83 + n)/371] + (1792/53)*[(84 + n)/371] + (1792/53)*[(85 + n)/371] - \\
 & (68096/53)*[(86 + n)/371] + (2016/53 - (200*n)/53)*[(87 + n)/371] + (2240/53)*[(88 + n)/371] + (2240/53)*[(89 + n)/371] + (2240/53)*[(90 + n)/371] + (2240/53)*[(91 + n)/371] + (2240/53)*[(92 + n)/371] - \\
 & (67648/53)*[(93 + n)/371] + (2464/53 - (200*n)/53)*[(94 + n)/371] + (2688/53)*[(95 + n)/371] + (2688/53)*[(96 + n)/371] + (2688/53)*[(97 + n)/371] + (2688/53)*[(98 + n)/371] + (2688/53)*[(99 + n)/371] - \\
 & (67200/53)*[(100 + n)/371] + (2912/53 - (200*n)/53)*[(101 + n)/371] + (3136/53)*[(102 + n)/371] + (3136/53)*[(103 + n)/371] + (3136/53)*[(104 + n)/371] + (3136/53)*[(105 + n)/371] + (3136/53)*[(106 + n)/371] - \\
 & (66752/53)*[(107 + n)/371] + (3360/53 - (200*n)/53)*[(108 + n)/371] + (3584/53)*[(109 + n)/371] + (3584/53)*[(110 + n)/371] - (66304/53)*[(111 + n)/371] + (3808/53 - (200*n)/53)*[(112 + n)/371] + (4032/53)*[(113 + \\
 & n)/371] - (65856/53)*[(114 + n)/371] + (4256/53 - (200*n)/53)*[(115 + n)/371] + (4480/53)*[(116 + n)/371] + (4480/53)*[(117 + n)/371] - (65408/53)*[(118 + n)/371] + (4704/53 - (200*n)/53)*[(119 + n)/371] + \\
 & (4928/53)*[(120 + n)/371] - (64960/53)*[(121 + n)/371] + (5152/53 - (200*n)/53)*[(122 + n)/371] + (5376/53)*[(123 + n)/371] + (5376/53)*[(124 + n)/371] - (64512/53)*[(125 + n)/371] + (5600/53 - (200*n)/53)*[(126 + \\
 & n)/371] + (5824/53)*[(127 + n)/371] - (64064/53)*[(128 + n)/371] + (6048/53 - (200*n)/53)*[(129 + n)/371] + (6272/53)*[(130 + n)/371] + (6272/53)*[(131 + n)/371] - (63616/53)*[(132 + n)/371] + (6496/53 - \\
 & (200*n)/53)*[(133 + n)/371] + (6720/53)*[(134 + n)/371] - (63168/53)*[(135 + n)/371] + (6944/53 - (200*n)/53)*[(136 + n)/371] + (7168/53)*[(137 + n)/371] + (7168/53)*[(138 + n)/371] - (62720/53)*[(139 + n)/371] + \\
 & (7392/53 - (200*n)/53)*[(140 + n)/371] + (7616/53)*[(141 + n)/371] - (62272/53)*[(142 + n)/371] + (7840/53 - (200*n)/53)*[(143 + n)/371] + (8064/53)*[(144 + n)/371] + (8064/53)*[(145 + n)/371] - (61824/53)*[(146 + \\
 & n)/371] + (8288/53 - (200*n)/53)*[(147 + n)/371] + (8512/53)*[(148 + n)/371] - (61376/53)*[(149 + n)/371] + (8736/53 - (200*n)/53)*[(150 + n)/371] + (8960/53)*[(151 + n)/371] + (8960/53)*[(152 + n)/371] - \\
 & (60928/53)*[(153 + n)/371] + (9184/53 - (200*n)/53)*[(154 + n)/371] + (9408/53)*[(155 + n)/371] - (60480/53)*[(156 + n)/371] + (9632/53 - (200*n)/53)*[(157 + n)/371] + (9856/53)*[(158 + n)/371] + (9856/53)*[(159 + \\
 & n)/371] - (60032/53)*[(160 + n)/371] + (10080/53 - (200*n)/53)*[(161 + n)/371] + (10304/53)*[(162 + n)/371] - (59584/53)*[(163 + n)/371] + (-1120 - (200*n)/53)*[(164 + n)/371] + (10976/53 - (200*n)/53)*[(165 + n)/371] + \\
 & (11200/53)*[(166 + n)/371] - (58688/53)*[(167 + n)/371] + (11424/53 - (200*n)/53)*[(168 + n)/371] + (11648/53)*[(169 + n)/371] - (58240/53)*[(170 + n)/371] + (-58016/53 - (200*n)/53)*[(171 + n)/371] + (12320/53 - \\
 & (200*n)/53)*[(172 + n)/371] + (12544/53)*[(173 + n)/371] - (57344/53)*[(174 + n)/371] + (12768/53 - (200*n)/53)*[(175 + n)/371] + (12992/53)*[(176 + n)/371] - (56896/53)*[(177 + n)/371] + (-56672/53 - \\
 & (200*n)/53)*[(178 + n)/371] + (13664/53 - (200*n)/53)*[(179 + n)/371] + (13888/53)*[(180 + n)/371] - (56000/53)*[(181 + n)/371] + (14112/53 - (200*n)/53)*[(182 + n)/371] + (14336/53)*[(183 + n)/371] - \\
 & (55552/53)*[(184 + n)/371] + (-55328/53 - (200*n)/53)*[(185 + n)/371] + (15008/53 - (200*n)/53)*[(186 + n)/371] + (15232/53)*[(187 + n)/371] - (54656/53)*[(188 + n)/371] + (15456/53 - (200*n)/53)*[(189 + n)/371] + \\
 & (15680/53)*[(190 + n)/371] - (54208/53)*[(191 + n)/371] + (-53984/53 - (200*n)/53)*[(192 + n)/371] + (16352/53 - (200*n)/53)*[(193 + n)/371] + (16576/53)*[(194 + n)/371] - (53312/53)*[(195 + n)/371] + (16800/53 - \\
 & (200*n)/53)*[(196 + n)/371] + (17024/53)*[(197 + n)/371] - (52864/53)*[(198 + n)/371] + (-52640/53 - (200*n)/53)*[(199 + n)/371] + (17696/53 - (200*n)/53)*[(200 + n)/371] + (17920/53)*[(201 + n)/371] - \\
 & (51968/53)*[(202 + n)/371] + (18144/53 - (200*n)/53)*[(203 + n)/371] + (18368/53)*[(204 + n)/371] - (51520/53)*[(205 + n)/371] + (-51296/53 - (200*n)/53)*[(206 + n)/371] + (19040/53 - (200*n)/53)*[(207 + n)/371] + \\
 & (19264/53)*[(208 + n)/371] - (50624/53)*[(209 + n)/371] + (19488/53 - (200*n)/53)*[(210 + n)/371] + (19712/53)*[(211 + n)/371] - (50176/53)*[(212 + n)/371] + (-49952/53 - (200*n)/53)*[(213 + n)/371] + (20384/53 - \\
 & (200*n)/53)*[(214 + n)/371] + (20608/53)*[(215 + n)/371] - (49280/53)*[(216 + n)/371] + (-49056/53 - (200*n)/53)*[(217 + n)/371] + (21280/53 - (200*n)/53)*[(218 + n)/371] - (48384/53)*[(219 + n)/371] + (-48160/53 - \\
 & (200*n)/53)*[(220 + n)/371] + (22176/53 - (200*n)/53)*[(221 + n)/371] + (22400/53)*[(222 + n)/371] - 896*[(223 + n)/371] + (-47264/53 - (200*n)/53)*[(224 + n)/371] + (23072/53 - (200*n)/53)*[(225 + n)/371] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (46592/53)*[(226 + n)/371] + (-46368/53)-(200*n)/53)*[(227 + n)/371] + (23968/53-(200*n)/53)*[(228 + n)/371] + (24192/53)*[(229 + n)/371]-(45696/53)*[(230 + n)/371] + (-45472/53)-(200*n)/53)*[(231 + n)/371] + \\
& (24864/53-(200*n)/53)*[(232 + n)/371]-(44800/53)*[(233 + n)/371] + (-44576/53)-(200*n)/53)*[(234 + n)/371] + (25760/53-(200*n)/53)*[(235 + n)/371] + (25984/53)*[(236 + n)/371]-(43904/53)*[(237 + n)/371] + (- \\
& (43680/53)-(200*n)/53)*[(238 + n)/371] + (26656/53-(200*n)/53)*[(239 + n)/371]-(43008/53)*[(240 + n)/371] + (-42784/53)-(200*n)/53)*[(241 + n)/371] + (27552/53-(200*n)/53)*[(242 + n)/371] + (27776/53)*[(243 \\
& + n)/371]-(42112/53)*[(244 + n)/371] + (-41888/53)-(200*n)/53)*[(245 + n)/371] + (28448/53-(200*n)/53)*[(246 + n)/371]-(41216/53)*[(247 + n)/371] + (-40992/53)-(200*n)/53)*[(248 + n)/371] + (29344/53- \\
& (200*n)/53)*[(249 + n)/371] + (29568/53)*[(250 + n)/371]-(40320/53)*[(251 + n)/371] + (-40096/53)-(200*n)/53)*[(252 + n)/371] + (30240/53-(200*n)/53)*[(253 + n)/371]-(39424/53)*[(254 + n)/371] + (-39200/53)- \\
& (200*n)/53)*[(255 + n)/371] + (31136/53-(200*n)/53)*[(256 + n)/371] + (31360/53)*[(257 + n)/371]-(38528/53)*[(258 + n)/371] + (-38304/53)-(200*n)/53)*[(259 + n)/371] + (32032/53-(200*n)/53)*[(260 + n)/371]- \\
& (37632/53)*[(261 + n)/371] + (-37408/53)-(200*n)/53)*[(262 + n)/371] + (32928/53-(200*n)/53)*[(263 + n)/371] + (33152/53)*[(264 + n)/371]-(36736/53)*[(265 + n)/371] + (-36512/53)-(200*n)/53)*[(266 + n)/371] + \\
& (33824/53-(200*n)/53)*[(267 + n)/371]-(35840/53)*[(268 + n)/371] + (-672-(200*n)/53)*[(269 + n)/371] + (-35168/53)-(200*n)/53)*[(270 + n)/371] + (35168/53-(200*n)/53)*[(271 + n)/371]-(34496/53)*[(272 + \\
& n)/371] + (-34272/53)-(200*n)/53)*[(273 + n)/371] + (36064/53-(200*n)/53)*[(274 + n)/371]-(33600/53)*[(275 + n)/371] + (-33376/53)-(200*n)/53)*[(276 + n)/371] + (-32928/53)-(200*n)/53)*[(277 + n)/371] + \\
& (37408/53-(200*n)/53)*[(278 + n)/371]-(32256/53)*[(279 + n)/371] + (-32032/53)-(200*n)/53)*[(280 + n)/371] + (38304/53-(200*n)/53)*[(281 + n)/371]-(31360/53)*[(282 + n)/371] + (-31136/53)-(200*n)/53)*[(283 + \\
& n)/371] + (-30688/53)-(200*n)/53)*[(284 + n)/371] + (39648/53-(200*n)/53)*[(285 + n)/371]-(30016/53)*[(286 + n)/371] + (-29792/53)-(200*n)/53)*[(287 + n)/371] + (40544/53-(200*n)/53)*[(288 + n)/371]- \\
& (29120/53)*[(289 + n)/371] + (-28896/53)-(200*n)/53)*[(290 + n)/371] + (-28448/53)-(200*n)/53)*[(291 + n)/371] + (41888/53-(200*n)/53)*[(292 + n)/371]-(27776/53)*[(293 + n)/371] + (-27552/53)- \\
& (200*n)/53)*[(294 + n)/371] + (42784/53-(200*n)/53)*[(295 + n)/371]-(26880/53)*[(296 + n)/371] + (-26656/53)-(200*n)/53)*[(297 + n)/371] + (-26208/53)-(200*n)/53)*[(298 + n)/371] + (44128/53- \\
& (200*n)/53)*[(299 + n)/371]-(25536/53)*[(300 + n)/371] + (-25312/53)-(200*n)/53)*[(301 + n)/371] + (45024/53-(200*n)/53)*[(302 + n)/371]-(24640/53)*[(303 + n)/371] + (-24416/53)-(200*n)/53)*[(304 + n)/371] + \\
& (-23968/53)-(200*n)/53)*[(305 + n)/371] + (46368/53-(200*n)/53)*[(306 + n)/371]-(23296/53)*[(307 + n)/371] + (-23072/53)-(200*n)/53)*[(308 + n)/371] + (47264/53-(200*n)/53)*[(309 + n)/371]-(22400/53)*[(310 + \\
& n)/371] + (-22176/53)-(200*n)/53)*[(311 + n)/371] + (-21728/53)-(200*n)/53)*[(312 + n)/371] + (48608/53-(200*n)/53)*[(313 + n)/371]-(21056/53)*[(314 + n)/371] + (-20832/53)-(200*n)/53)*[(315 + n)/371] + \\
& (49504/53-(200*n)/53)*[(316 + n)/371]-(20160/53)*[(317 + n)/371] + (-19936/53)-(200*n)/53)*[(318 + n)/371] + (-19488/53)-(200*n)/53)*[(319 + n)/371] + (50848/53-(200*n)/53)*[(320 + n)/371]-(18816/53)*[(321 + \\
& n)/371] + (-18592/53)-(200*n)/53)*[(322 + n)/371] + (-18144/53)-(200*n)/53)*[(323 + n)/371] + (-17696/53)-(200*n)/53)*[(324 + n)/371] + (-17248/53)-(200*n)/53)*[(325 + n)/371] + (-16800/53)- \\
& (200*n)/53)*[(326 + n)/371] + (53536/53-(200*n)/53)*[(327 + n)/371]-(16128/53)*[(328 + n)/371] + (-15904/53)-(200*n)/53)*[(329 + n)/371] + (-15456/53)-(200*n)/53)*[(330 + n)/371] + (-15008/53)- \\
& (200*n)/53)*[(331 + n)/371] + (-14560/53)-(200*n)/53)*[(332 + n)/371] + (-14112/53)-(200*n)/53)*[(333 + n)/371] + (56224/53-(200*n)/53)*[(334 + n)/371]-(13440/53)*[(335 + n)/371] + (-13216/53)- \\
& (200*n)/53)*[(336 + n)/371] + (-12768/53)-(200*n)/53)*[(337 + n)/371] + (-12320/53)-(200*n)/53)*[(338 + n)/371] + (-224-(200*n)/53)*[(339 + n)/371] + (-11424/53)-(200*n)/53)*[(340 + n)/371] + (58912/53- \\
& (200*n)/53)*[(341 + n)/371]-(10752/53)*[(342 + n)/371] + (-10528/53)-(200*n)/53)*[(343 + n)/371] + (-10080/53)-(200*n)/53)*[(344 + n)/371] + (-9632/53)-(200*n)/53)*[(345 + n)/371] + (-9184/53)- \\
& (200*n)/53)*[(346 + n)/371] + (-8736/53)-(200*n)/53)*[(347 + n)/371] + (61600/53-(200*n)/53)*[(348 + n)/371]-(8064/53)*[(349 + n)/371] + (-7840/53)-(200*n)/53)*[(350 + n)/371] + (-7392/53)-(200*n)/53)*[(351 \\
& + n)/371] + (-6944/53)-(200*n)/53)*[(352 + n)/371] + (-6496/53)-(200*n)/53)*[(353 + n)/371] + (-6048/53)-(200*n)/53)*[(354 + n)/371] + (64288/53-(200*n)/53)*[(355 + n)/371] + (-6360/53)-(5376/53)*[(356 + n)/371] + (- \\
& 5152/53)-(200*n)/53)*[(357 + n)/371] + (-4704/53)-(200*n)/53)*[(358 + n)/371] + (-4256/53)-(200*n)/53)*[(359 + n)/371] + (-3808/53)-(200*n)/53)*[(360 + n)/371] + (-3360/53)-(200*n)/53)*[(361 + n)/371] + \\
& (66976/53-(200*n)/53)*[(362 + n)/371]-(2688/53)*[(363 + n)/371] + (-2464/53)-(200*n)/53)*[(364 + n)/371] + (-2016/53)-(200*n)/53)*[(365 + n)/371] + (-1568/53)-(200*n)/53)*[(366 + n)/371] + (-1120/53)- \\
& (200*n)/53)*[(367 + n)/371] + (-672/53)-(200*n)/53)*[(368 + n)/371] + (69664/53-(200*n)/53)*[(369 + n)/371]
\end{aligned}$$

Vytvořující funkce a rekurence by zabrala dalších několik stran, myslím, že jejich publikace zde je nadbytečná. Zde je pouze denominator:

$$\begin{aligned}
& (-1 + x)^7 (1 + x) (1 + x + x^2) (1 + x^3 + x^6) (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6) (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4 (1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + x^{28} + x^{35} + x^{42}) (1 + x + x^2 + x^3 + \\
& x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} + x^{19} + x^{20} + x^{21} + x^{22} + x^{23} + x^{24} + x^{25} + x^{26} + x^{27} + x^{28} + x^{29} + x^{30} + \\
& x^{31} + x^{32} + x^{33} + x^{34} + x^{35} + x^{36} + x^{37} + x^{38} + x^{39} + x^{40} + x^{41} + x^{42} + x^{43} + x^{44} + x^{45} + x^{46} + x^{47} + x^{48} + x^{49} + x^{50} + x^{51} + x^{52})^2 (1 - x + x^7 - x^8 + x^{14} - \\
& x^{15} + x^{21} - x^{22} + x^{28} - x^{29} + x^{35} - x^{36} + x^{42} - x^{43} + x^{49} - x^{50} + x^{53} - x^{54} + x^{56} - x^{57} + x^{60} - x^{61} + x^{63} - x^{64} + x^{67} - x^{68} + x^{70} - x^{71} + x^{74} - x^{75} + x^{77} - x^{78} + \\
& x^{81} - x^{82} + x^{84} - x^{85} + x^{88} - x^{89} + x^{91} - x^{92} + x^{95} - x^{96} + x^{98} - x^{99} + x^{102} - x^{103} + x^{105} - x^{107} + x^{109} - x^{110} + x^{112} - x^{114} + x^{116} - x^{117} + x^{119} - x^{121} + x^{123} \\
& - x^{124} + x^{126} - x^{128} + x^{130} - x^{131} + x^{133} - x^{135} + x^{137} - x^{138} + x^{140} - x^{142} + x^{144} - x^{145} + x^{147} - x^{149} + x^{151} - x^{152} + x^{154} - x^{156} + x^{158} - x^{160} + x^{161} - x^{163} \\
& + x^{165} - x^{167} + x^{168} - x^{170} + x^{172} - x^{174} + x^{175} - x^{177} + x^{179} - x^{181} + x^{182} - x^{184} + x^{186} - x^{188} + x^{189} - x^{191} + x^{193} - x^{195} + x^{196} - x^{198} + x^{200} - x^{202} + x^{203} \\
& - x^{205} + x^{207} - x^{209} + x^{210} - x^{213} + x^{214} - x^{216} + x^{217} - x^{220} + x^{221} - x^{223} + x^{224} - x^{227} + x^{228} - x^{230} + x^{231} - x^{234} + x^{235} - x^{237} + x^{238} - x^{241} + x^{242} - x^{244} \\
& + x^{245} - x^{248} + x^{249} - x^{251} + x^{252} - x^{255} + x^{256} - x^{258} + x^{259} - x^{262} + x^{263} - x^{269} + x^{270} - x^{276} + x^{277} - x^{283} + x^{284} - x^{290} + x^{291} - x^{297} + x^{298} - x^{304} + x^{305} \\
& - x^{311} + x^{312})^2
\end{aligned}$$

3 riders on an $n \times n$ chessboard (selected riders only)												
n	[1,3]	[2,3]	[1,4]	[3,4]	[1,5]	[2,5]	[3,5]	[4,5]	[1,6]	[5,6]	[1,7]	[2,7]
1												
2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84
4	404	452	560	560	560	560	560	560	560	560	560	560
5	1624	1772	1948	2120	2300	2300	2300	2300	2300	2300	2300	2300
6	5248	5596	5848	6340	6480	6608	6736	6872	7140	7140	7140	7140
7	13408	14372	15200	16216	16244	16584	16944	17312	17320	18052	18424	18424
8	30924	32816	35012	36836	36628	37312	38004	38724	38276	40192	39956	40196
9	65100	68376	71156	75224	75516	76696	77884	79080	77920	81564	80356	80952
10	124564	130696	135552	142736	144544	146396	148256	150124	147912	153924	151312	152428
11	225424	235408	243892	255252	256124	259724	263328	266968	264684	273820	269280	271100
12	388416	403444	417700	434500	433964	439808	445740	451712	450580	463732	456628	459360
13	636004	659708	679492	706740	706704	715492	724324	733272	728120	751324	742896	746772
14	1006372	1040984	1069000	1109344	1111472	1123916	1136440	1149020	1138640	1174528	1166176	1171452
15	1544552	1592624	1632288	1688740	1695356	1712284	1729264	1746316	1729248	1780792	1763432	1772096
16	2296948	2365756	2426896	2502852	2504584	2529708	2554848	2580132	2558676	2629172	2600620	2613344
17	3338332	3432108	3509792	3617320	3618172	3653068	3688124	3723312	3698976	3792032	3749796	3767520
18	4752136	4875528	4974844	5119888	5122092	5168664	5215348	5262296	5237376	5356944	5298256	5321900
19	6621764	6787492	6923756	7112872	7119372	7179584	7240008	7300648	7256236	7422992	7350456	7381056
20	9076652	9291788	9477296	9717540	9732224	9808308	9884560	9961060	9893404	10115300	10030108	10068752
21	12255960	12528200	12751224	13066468	13075876	13176744	13277740	13379156	13292580	13578252	13482400	13530248
22	16295812	16645540	16928684	17330180	17336796	17466068	17595652	17725648	17621180	17979888	17840836	17904696
23	21402156	21840404	22199980	22699728	22706968	22868700	23030728	23193336	23072840	23514508	23325532	23407556
24	27790464	28329016	28783976	29394776	29407040	29605424	29804272	30003684	29869968	30405124	30158976	30261748
25	35668152	36337740	36886120	37649660	37689020	37928684	38168792	38409560	38215928	38894040	38595112	38721236
26	45343180	46159952	46822816	47757948	47784896	48083400	48382360	48682212	48435932	49274832	48922220	49074600

27	57131148	58112328	58913596	60040240	60058136	60422384	60787300	61153180	60853524	61872028	61465812	61647384
28	71332148	72521704	73517964	74857256	74870420	75307860	75746004	76185324	75832432	77050436	76591680	76805584
29	88385304	89806032	90968452	92586928	92626696	93145028	93664300	94184852	93779744	95218220	94627356	94889856
30	108733408	110409260	111767568	113694524	113778480	114385984	114994448	115604344	115149244	116830160	116092156	116408196
31	132793320	134785124	136412372	138678672	138734900	139462128	140190400	140920404	140348060	142368728	141490144	141865284
32	161168252	163506888	165453252	168091128	168123340	168981972	169841924	170703748	170009864	172403716	171379008	171818832
33	194458476	197176392	199393740	202503012	202553868	203556272	204560068	205566192	204747220	207549248	206373716	206884356
34	233224820	236403144	238984096	242607964	242697416	243856368	245017000	246180136	245233660	248480420	247150348	247737988
35	278270928	281950500	284954920	289138304	289289688	290618676	291949448	293282892	292207584	295937156	294449968	295121192
36	330388104	334611432	338105376	342895052	342989960	344537716	346087432	347640248	346476276	350728392	348925724	349712444
37	390310828	395183768	399160472	404699296	404793876	406578620	408365716	410156296	408754964	413698356	411589392	412501084
38	459083444	464658516	469188692	475537264	475653564	477694400	479737756	481785140	480137112	485828076	483398920	484445824
39	537725064	544056972	549217836	556439004	556602616	558919208	561238712	563562484	561659400	568156368	565393924	566586376
40	627176452	634400060	640361464	648520588	648760608	651373524	653989536	656610040	654444580	661808120	658700188	660049268
41	728766484	736948276	743623028	752916524	753122544	756104808	759090432	762081304	759706096	767999052	764534280	766051192
42	843782104	852990840	860468572	870978696	871174100	874552504	877934772	881322884	878752824	888039964	884208336	885904928
43	973405780	983810540	992294440	1004106440	1004318136	1008120592	1011927204	1015740324	1012734048	1023284164	1018866816	1020798420
44	1119298452	1130981676	1140601848	1153803628	1154062592	1158317748	1162577608	1166844288	1163384564	1175285336	1170255428	1172438180
45	1283058152	1296105220	1306736224	1321589876	1322025584	1326763224	1331505836	1336255860	1332326192	1345668104	1339999472	1342450404
46	1466147124	1480766480	1492649304	1509263640	1509636024	1514960428	1520290216	1525628372	1521296240	1536172796	1529839840	1532576204
47	1670609700	1686902496	1700185020	1718671992	1719008764	1724957652	1730912600	1736876640	1732152852	1748660116	1741638356	1744678336
48	1898401512	1916471844	1931313204	1951788092	1952121108	1958733544	1965352444	1971981328	1966880468	1985117304	1977383236	1980745232
49	2151305920	2171407352	2187791284	2210595392	2211082008	2218398020	2225721216	2233055076	2227210028	2247578616	2239194664	2242897968
50	2431805236	2454059832	2472153688	2497427036	2498137824	2506198800	2514267400	2522347380	2515729468	2538358700	2528908172	2533040880
n	[1,3]	[2,3]	[1,4]	[3,4]	[1,5]	[2,5]	[3,5]	[4,5]	[1,6]	[5,6]	[1,7]	[2,7]

All generating functions were verified at least for first 500 values for each sequence.

11.3) 2 riders on an $n \times n$ toroidal chessboard - 2 liniové kameny na prstencové šachovnici $n \times n$

Tento případ se ukázal jako nečekaně komplikovaný, ale současně i velmi zajímavý. K prozkoumání bylo nutné vygenerovat tisíce hodnot pro různé kombinace $[r,s]$, což si vyžádalo stovky hodin počítačového času. Poměrně snadné jsou případy $r = 0$ a $r = s$.

Zabývejme se proto nejprve případem $0 < r < s$ (bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že r je menší než s , jinak obě čísla prohodíme). Zde je nutné opět rozlišit několik případů. Problém se mi podařilo kompletně vyřešit, když čísla r a s jsou nesoudělná, tedy největší společný dělitel je roven 1. V obecném případě (pro libovolná $0 < r < s$) mám ale následující hypotézu o velikosti periody. Výpočty byla ověřena její platnost pro všechna $0 < r < s \leq 20$ (LCM je nejmenší společný násobek a GCD je největší společný dělitel):

Conjecture (V. Kotěšovec, 16.12.2010), for any r,s , $0 < r < s$

$$\text{period} = \frac{\text{LCM}((s^2 + r^2), (s^2 - r^2), 2rs)}{\text{GCD}(r, s)}$$

Nyní uvažujme případ, kdy r a s jsou nesoudělná. Potom ještě záleží na tom, zda výraz $r^2 + s^2$ je sudé nebo liché číslo.

Pokud je $0 < r < s$, $\text{GCD}(r,s)=1$ a $r^2 + s^2$ je **liché** číslo, potom je vytvořující funkce pro počet neohrožujících se dvojic liniových kamenů s jednotkovým tahem $[r,s]$ na prstencové šachovnici:

If $0 < r < s$ and $\text{GCD}(r,s)=1$ and $r^2 + s^2$ is **odd**, then *generating function* for number of two non-attacking *riders* $[r,s]$ on an $n \times n$ toroidal chessboard is

$$G(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^5 * \left(\frac{x^{s^2+r^2}-1}{x-1}\right)^3 * \left(\frac{x^{s^2-r^2}-1}{x-1}\right)^3 * \left(\frac{x^{2rs}-1}{x-1}\right)^3} \quad (\text{V. Kotěšovec, 19.5.2010})$$

$P(x)$ je polynom stupně

$$6s(r+s) - 5$$

Hloubka rekurence je

$$6s(r+s) - 4$$

Perioda je

$$\text{LCM}((s^2 + r^2), (s^2 - r^2), 2rs) = 2rs(s^2 + r^2)(s^2 - r^2) = 2rs(s^4 - r^4)$$

(pokud r a s jsou nesoudělná a $r^2 + s^2$ je liché, platí že $2rs, (s^2 + r^2), (s^2 - r^2)$ jsou nesoudělná a tedy jejich nejmenší společný násobek LCM je roven jejich součinu)

Pokud je $0 < r < s$, $\text{GCD}(r,s)=1$ a $r^2 + s^2$ je **sudé** číslo, potom je vytvořující funkce pro počet neohrožujících se dvojic liniových kamenů s jednotkovým tahem $[r,s]$ na prstencové šachovnici:

If $0 < r < s$ and $\text{GCD}(r,s)=1$ and $r^2 + s^2$ is **even**, then *generating function* for number of two non-attacking *riders* $[r,s]$ on an $n \times n$ toroidal chessboard is

$$G(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^5 * \left(\frac{x^{s^2+r^2}-1}{x^2-1}\right)^3 * \left(\frac{x^{s^2-r^2}-1}{x^2-1}\right)^3 * \left(\frac{x^{2rs}-1}{x-1}\right)^3}$$

(V. Kotěšovec, 21.12.2010)

Proti předchozímu případu je tedy jmenovatel vydělen výrazem $((x+1)^2)^3$ a stupeň denominátoru je proto o 6 menší.

P(x) je polynom stupně $6s(r+s) - 11$

Hloubka rekurence je $6s(r+s) - 10$

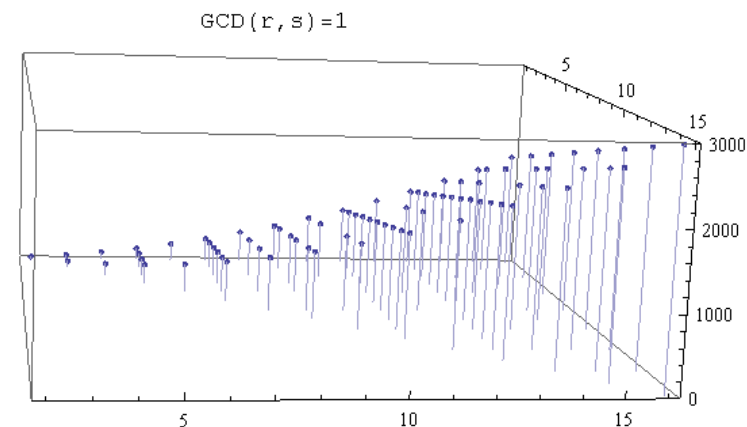
Perioda je $\text{LCM}((s^2+r^2), (s^2-r^2), 2rs) = \frac{rs(s^2+r^2)(s^2-r^2)}{2} = \frac{rs(s^4-r^4)}{2}$

(pokud r a s jsou nesoudělná a $r^2 + s^2$ je sudé, platí že $(r^2 + s^2)$ je dělitelné 2, ale už žádnou vyšší mocninou dvojky)

Stupeň polynomu ve jmenovateli vytvořující funkce (hloubku rekurence) jde pro oba případy vyjádřit tímto společným vzorcem:

If $0 < r < s$ and $\text{GCD}(r,s)=1$ then *recurrence order* is

$$d = 6s(r+s) - 7 - 3(-1)^{r^2+s^2}$$

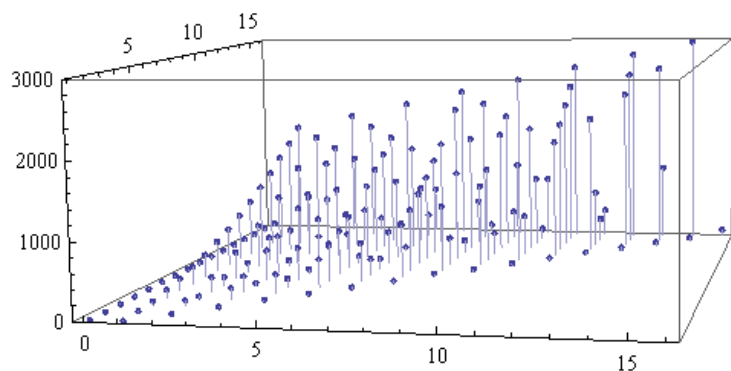


Graf určuje hodnoty d v závislosti na r, s

Poznámky: Pokud jsou čísla r, s **nesoudělná**, nazývají se též **relatively prime** nebo **coprime**. Z náhodně vybraných dvou přirozených čísel má tuto vlastnost asi 61% dvojic (přesněji, pravděpodobnost, že dvě přirozená čísla jsou nesoudělná, je $\frac{6}{\pi^2}$). Do skupiny $\text{GCD}(r,s)=1$ evidentně patří např. dvojice $[1,s]$ nebo $[s-1,s]$.

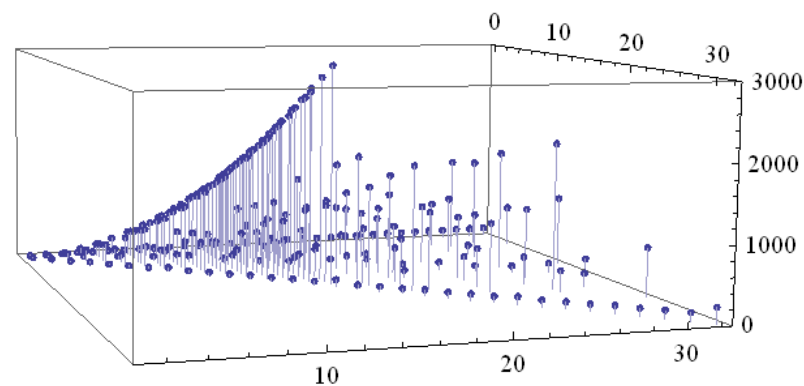
Výrazy $x = s^2 - r^2$, $y = 2rs$, $z = r^2 + s^2$, představují **celočíslná** řešení **diofantické rovnice** $x^2 + y^2 = z^2$, což věděli už Pythagoras a Euclid, viz **Pythagorean Triple**. Pro r, s nesoudělná a opačné parity generují tyto výrazy tzv. primitivní řešení této rovnice (kdy jsou x, y nesoudělná).

Pokud je $0 < r < s$, $\text{GCD}(r,s) > 1$, pro periodu platí vzorec ze str. 564 a hloubka rekurence d (což je stupeň jmenovatele vytvořující funkce) je závislá na prvočíselných rozkladech členů $r^2 + s^2$, $s^2 - r^2$ a $2rs$. Lze ji omezit nerovností



Graf určuje hodnoty d v závislosti na r, s
(všechny hodnoty pro $r, s \leq 16$)

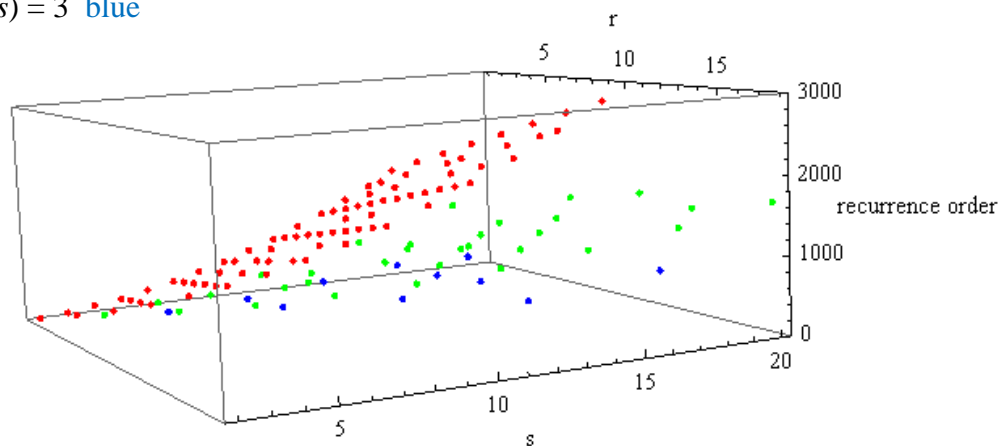
$$d < \frac{6s(r+s)}{\text{GCD}(r,s)}$$



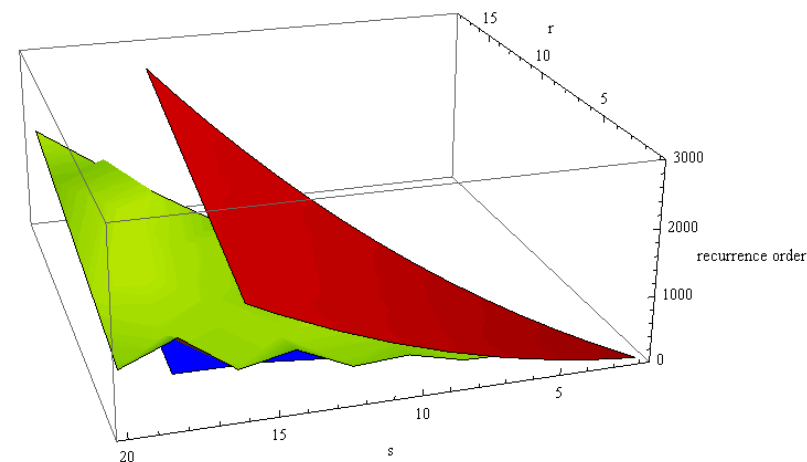
Graf z jiného pohledu s viditelným horním omezením $6s(r+s)$
(v intervalu $16 < r, s \leq 32$ nejsou vypočteny všechny hodnoty)

Následující grafy názorně ukazují jak je hloubka rekurence závislá na největším společném děliteli $\text{GCD}(r,s)$. Pro přehlednost jsou vybrány jen případy 1,2,3. Názorně je vidět, že hodnoty pro nesoudělná r, s (červené body, resp. plocha) vykazují pravidelnost a jsou všude nad ostatními hodnotami.

- $\text{GCD}(r,s) = 1$ red
- $\text{GCD}(r,s) = 2$ green
- $\text{GCD}(r,s) = 3$ blue



Graf vpravo vznikl proložení spojitéch ploch jednotlivými body.



Pro řadu speciálních případů se mi hloubku rekurence podařilo určit přesně, kompletně je vyřešen případ $\mathbf{GCD}(r,s)=2$

Pokud je $0 < r < s$, $\mathbf{GCD}(r,s)=2$ a $r^2 + s^2 = 2^2 * m$, kde m je liché číslo (m is odd number), je hloubka rekurence (*recurrence order*)

$$d = \frac{3}{2}s^2 + 3rs - 3$$

Pokud je $0 < r < s$, $\mathbf{GCD}(r,s)=2$ a $r^2 + s^2 = 2^3 * m$, kde m je liché číslo (m is odd number), je hloubka rekurence

$$d = 3s^2 + 3rs - 21$$

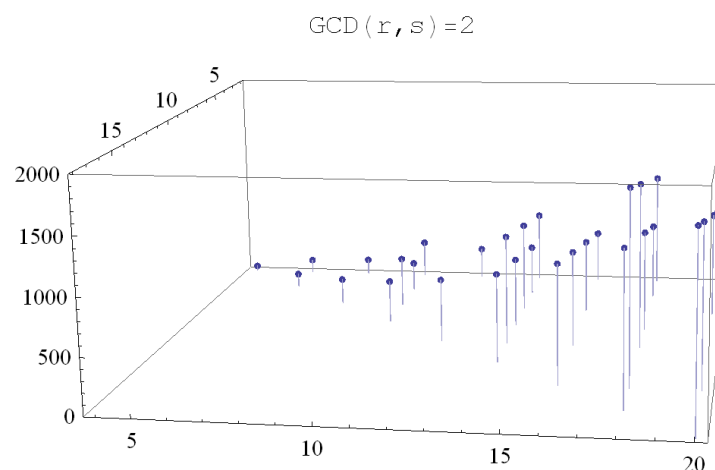
(toto pokrývá všechny možnosti, protože u dvojky mohou být vzhledem k dalším podmínkám pouze exponenty 2 nebo 3)

Oba případy jdou vyjádřit jedním vzorcem:

If $0 < r < s$, $\mathbf{GCD}(r,s)=2$ and $r^2 + s^2 = 2^w * m$, (m is odd number), then *recurrence order* is

$$d = 3(s^2 - 12)2^{w-3} + 3rs + 15 \quad (V. Kotěšovec, 25.12.2010)$$

(w is the greatest dividing exponent of a base 2)



V grafu vidíme, že např. pro $s=16$ nebo $s=20$ jsou body v jedné přímce, kdežto pro $s=14$ nebo $s=18$ jsou dvě skupiny bodů (s lineární závislostí) v různých výškách. Např. dvojice (2,14), (6,14), (10,14) patří všechny do skupiny $w=3$, kdežto dvojice (4,14), (8,14), (12,14) patří do skupiny $w=2$. Dvojice (2,16), (6,16), (10,16), (14,16) patří všechny do skupiny $w=2$. Závislost je možno ověřit i pomocí hodnot v tabulce na str. 572.

Kompletně je vyřešen i případ $\mathbf{GCD}(r,s)=4$

Pokud je $0 < r < s$, $\mathbf{GCD}(r,s)=4$ a $r^2 + s^2 = 2^4 * m$, kde m je liché číslo (m is odd number), je hloubka rekurence (recurrence order)

$$d = \frac{3}{8}s^2 + \frac{3}{2}rs - 1$$

Pokud je $0 < r < s$, $\mathbf{GCD}(r,s)=4$ a $r^2 + s^2 = 2^5 * m$, kde m je liché číslo (m is odd number), je hloubka rekurence

$$d = \frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{2}rs - 43$$

(je třeba ještě poznamenat, že toto pokrývá všechny možnosti, protože u dvojky mohou být pouze exponenty 4 nebo 5)

Oba případy jdou vyjádřit jedním vzorcem:

If $0 < r < s$, $\mathbf{GCD}(r,s)=4$ and $r^2 + s^2 = 2^w * m$, (m is odd number), then *recurrence order* is

$$d = 3s^2 * 2^{2w-11} + \frac{3}{2}rs - 21 * 2^{w-3} + 41 \quad (V. Kotěšovec, 25.12.2010)$$

Částečně je vyřešen případ $\mathbf{GCD}(r,s) = r$

Pokud je $r > 0$, $s = 2r$, $r=2^w$ (if r is power of 2), je hloubka rekurence (recurrence order)

$$d = 13r + 19 = \frac{13}{2}s + 19$$

Pokud je r prvočíslo (if r is prime) > 5 , $s = 2r$, je hloubka rekurence (recurrence order)

$$d = 4r + 28 = 2s + 28$$

(těmto případům je věnována tabulka na str. 577)

Vraťme se nakonec ještě k hraničním případům. Zde se mi podařilo vše kompletně vyřešit.

Případ $r = 0$ má poměrně jednoduché řešení.

If $r=0$ then *generating function* for number of two non-attacking riders $[0,s]$ ($s>0$) on an $n \times n$ toroidal chessboard is

$$G(x) = \frac{P(x)}{(x^s - 1)^4 * (x - 1)} \quad (V. Kotěšovec, 19.5.2010)$$

P(x) je polynom stupně	$4s$
Hloubka rekurence je	$4s + 1$
Perioda je	s

Roznásobením jmenovatele dostaneme pro tento případ i rekurentní vztah

$$a_n = -4a_{n-s-1} + 6a_{n-2s-1} - 4a_{n-3s-1} + a_{n-4s-1} - a_{n-4s} + 4a_{n-3s} - 6a_{n-2s} + 4a_{n-s} + a_{n-1}$$

Případ $0 < r = s$ je závislý na tom, jakou nejvyšší mocninu 2 obsahuje toto číslo ve svém rozkladu. Předpokládejme, že

$$s = 2^w * m$$

kde **m** je liché číslo. Potom je vytvořující funkce následující:

If $s = 2^w * m$, (*m is odd number*) then *generating function* for number of two non-attacking riders $[s,s]$ on an $n \times n$ toroidal chessboard is

$$G(x) = \frac{P(x)}{(x^s - 1)^4 * (x - 1) * (x^{2^w} + 1)^3} \quad (V. Kotěšovec, 19.5.2010)$$

P(x) je polynom stupně $4s + 3 * 2^w$
 Hloubka rekurence je $d = 4s + 1 + 3 * 2^w$
 Perioda je $2s$

Speciální případy (*special cases*)
 If *s is odd number*

$$G(x) = \frac{P(x)}{(x^s - 1)^4 * (x - 1) * (x + 1)^3}$$

If *s is power of 2*

$$G(x) = \frac{P(x)}{(x^s - 1)^4 * (x - 1) * (x^s + 1)^3} = \frac{P(x)}{(x^{2^s} - 1)^3 * (x^s - 1) * (x - 1)}$$

Odtud vyplývá omezení pro stupeň jmenovatele, tedy minimální a maximální hloubku rekurence:

$$4s + 4 \leq d \leq 7s + 1$$

(*d is degree of denominator = recurrence order*)

Poznámka: Případ $[s,s]$ jsem ověřil vygenerováním vytvořujících funkcí pro všechna $s < 50$.

s	d	4(s+1)	w
1	8	8	0
2	15	12	1
3	16	16	0
4	29	20	2
5	24	24	0
6	31	28	1
7	32	32	0
8	57	36	3
9	40	40	0
10	47	44	1
11	48	48	0
12	61	52	2
13	56	56	0
14	63	60	1
15	64	64	0
16	113	68	4
17	72	72	0
18	79	76	1
19	80	80	0
20	93	84	2
21	88	88	0
22	95	92	1
23	96	96	0
24	121	100	3
25	104	104	0
26	111	108	1
27	112	112	0
28	125	116	2
29	120	120	0
30	127	124	1
31	128	128	0
32	225	132	5
33	136	136	0
34	143	140	1
35	144	144	0
36	157	148	2
37	152	152	0
38	159	156	1
39	160	160	0
40	185	168	3

Complete table for all $r, s \leq 7$

r	s	period	r=0	r=s	r^2+s^2	s^2-r^2	2rs	$\text{LCM}(r^2+s^2, s^2-r^2, 2rs)$	$\text{GCD}(r,s)$	recurrence order		r^2+s^2	$6s(r+s)-4$	cyclotomic polynomials
0	1	1	s		1	1	0			5	$4s+1$			1
0	2	2	s		4	4	0			9	$4s+1$			1,2
0	3	3	s		9	9	0			13	$4s+1$			1,3
0	4	4	s		16	16	0			17	$4s+1$			1,2,4
0	5	5	s		25	25	0			21	$4s+1$			1,5
0	6	6	s		36	36	0			25	$4s+1$			1,2,3,6
0	7	7	s		49	49	0			29	$4s+1$			1,7
1	1	2		2s	2	0	2			8				1,2
1	2	60			5	3	4	60	1	32	prime	32		1,2,3,4,5
1	3	120			10	8	6	120	1	62	2.5	68		1,2,3,4,5,6,8,10
1	4	2040			17	15	8	2040	1	116	prime	116		1,2,3,4,5,8,15,17
1	5	1560			26	24	10	1560	1	170	2.13	176		1,2,3,4,5,6,8,10,12,13,24,26
1	6	15540			37	35	12	15540	1	248	prime	248		1,2,3,4,5,6,7,12,35,37
1	7	8400			50	48	14	8400	1	326	2.5^2	332		1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14,16,24,25,48,50
2	2	4		2s	8	0	8			15				1,2,4
2	3	780			13	5	12	780	1	86	prime	86		1,2,3,4,5,6,12,13
2	4	120			20	12	16	240	2	45	$2^2.5$	140		1,2,3,4,5,8
2	5	12180			29	21	20	12180	1	206	prime	206		1,2,3,4,5,7,10,20,21,29
2	6	240			40	32	24	480	2	123	$2^3.5$	284		1,2,3,4,5,6,8,10,12,16,20
2	7	66780			53	45	28	66780	1	374	prime	374		1,2,3,4,5,7,9,14,15,28,45,53
3	3	6		2s	18	0	18			16				1,2,3
3	4	4200			25	7	24	4200	1	164	5^2	164		1,2,3,4,5,6,7,8,12,24,25
3	5	4080			34	16	30	4080	1	230	2.17	236		1,2,3,4,5,6,8,10,15,16,17,30,34
3	6	180			45	27	36	540	3	52	$3^2.5$	320		1,2,3,4,5,9
3	7	24360			58	40	42	24360	1	410	2.29	416		1,2,3,4,5,6,7,8,10,14,20,21,29,40,42,58
4	4	8		2s	32	0	32			29				1,2,4,8
4	5	14760			41	9	40	14760	1	266	prime	266		1,2,3,4,5,8,9,10,20,40,41
4	6	1560			52	20	48	3120	2	123	$2^2.13$	356		1,2,3,4,5,6,8,12,13,24
4	7	120120			65	33	56	120120	1	458	5.13	458		1,2,3,4,5,7,8,11,13,14,28,33,56,65
5	5	10		2s	50	0	50			24				1,2,5
5	6	40260			61	11	60	40260	1	392	prime	392		1,2,3,4,5,6,10,11,12,15,20,30,60,61
5	7	31080			74	24	70	31080	1	494	2.37	500		1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14,24,35,37,70,74
6	6	12		2s	72	0	72			31				1,2,3,4,6
6	7	92820			85	13	84	92820	1	542	5.17	542		1,2,3,4,5,6,7,12,13,14,17,21,28,42,84,85
7	7	14		2s	98	0	98			32				1,2,7

Complete table for all $r, s \leq 16, 0 < r \neq s$

r	s	period	r^2+s^2	s^2-r^2	2rs	$\text{LCM}(r^2+s^2, s^2-r^2, 2rs)$	$\text{GCD}(r,s)$	recurrence order	r^2+s^2	$6s(r+s)-4$	cyclotomic polynomials
1	8	65520	65	63	16	65520	1	428	5.13	428	1,2,3,4,5,7,8,9,13,16,21,63,65
2	8	4080	68	60	32	8160	2	141	$2^2 \cdot 17$	476	1,2,3,4,5,8,15,16,17
3	8	192720	73	55	48	192720	1	524	prime	524	1,2,3,4,5,6,8,11,12,16,24,48,55,73
4	8	240	80	48	64	960	4	71	$2^4 \cdot 5$	572	1,2,3,4,5,8,16
5	8	277680	89	39	80	277680	1	620	prime	620	1,2,3,4,5,8,10,13,16,20,39,40,80,89
6	8	8400	100	28	96	16800	2	237	$2^2 \cdot 5^2$	668	1,2,3,4,5,6,7,8,12,16,24,25,48
7	8	189840	113	15	112	189840	1	716	prime	716	1,2,3,4,5,7,8,14,15,16,28,56,112,113
1	9	29520	82	80	18	29520	1	530	2.41	536	1,2,3,4,5,6,8,9,10,16,18,20,40,41,80,82
2	9	235620	85	77	36	235620	1	590	5.17	590	1,2,3,4,5,6,7,9,11,12,17,18,36,77,85
3	9	360	90	72	54	1080	3	100	$2 \cdot 3^2 \cdot 5$	644	1,2,3,4,5,6,8,9,10,18
4	9	453960	97	65	72	453960	1	698	prime	698	1,2,3,4,5,6,8,9,12,13,18,24,36,65,72,97
5	9	133560	106	56	90	133560	1	746	2.53	752	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,14,15,18,28,30,45,53,56,90,106
6	9	2340	117	45	108	7020	3	160	$3^2 \cdot 13$	806	1,2,3,4,5,6,9,12,13,18,36
7	9	131040	130	32	126	131040	1	854	2.5.13	860	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,13,14,16,18,21,26,32,42,63,65,126,130
8	9	354960	145	17	144	354960	1	914	5.29	914	1,2,3,4,5,6,8,9,12,16,17,18,24,29,36,48,72,144,145
1	10	199980	101	99	20	199980	1	656	prime	656	1,2,3,4,5,9,10,11,20,33,99,101
2	10	3120	104	96	40	6240	2	339	$2^3 \cdot 13$	716	1,2,3,4,5,6,8,10,12,13,16,20,24,26,48,52
3	10	595140	109	91	60	595140	1	776	prime	776	1,2,3,4,5,6,7,10,12,13,15,20,30,60,91,109
4	10	24360	116	84	80	48720	2	267	$2^2 \cdot 29$	836	1,2,3,4,5,7,8,10,20,21,29,40
5	10	300	125	75	100	1500	5	96	5^3	896	1,2,3,4,5,25
6	10	8160	136	64	120	16320	2	459	$2^3 \cdot 17$	956	1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,16,17,20,30,32,34,60,68
7	10	1063860	149	51	140	1063860	1	1016	prime	1016	1,2,3,4,5,7,10,14,17,20,28,35,51,70,140,149
8	10	29520	164	36	160	59040	2	387	$2^2 \cdot 41$	1076	1,2,3,4,5,8,9,10,16,20,40,41,80
9	10	619020	181	19	180	619020	1	1136	prime	1136	1,2,3,4,5,6,9,10,12,15,18,19,20,30,36,45,60,90,180,181
1	11	80520	122	120	22	80520	1	782	2.61	788	1,2,3,4,5,6,8,10,11,12,15,20,22,24,30,40,60,61,120,122
2	11	643500	125	117	44	643500	1	854	5^3	854	1,2,3,4,5,9,11,13,22,25,39,44,117,125
3	11	240240	130	112	66	240240	1	914	2.5.13	920	1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,13,14,16,22,26,28,33,56,65,66,112,130
4	11	1265880	137	105	88	1265880	1	986	prime	986	1,2,3,4,5,7,8,11,15,21,22,35,44,88,105,137
5	11	385440	146	96	110	385440	1	1046	2.73	1052	1,2,3,4,5,6,8,10,11,12,16,22,24,32,48,55,73,96,110,146
6	11	1761540	157	85	132	1761540	1	1118	prime	1118	1,2,3,4,5,6,11,12,17,22,33,44,66,85,132,157
7	11	471240	170	72	154	471240	1	1178	2.5.17	1184	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,17,18,22,24,34,36,72,77,85,154,170
8	11	1855920	185	57	176	1855920	1	1250	5.37	1250	1,2,3,4,5,8,11,16,19,22,37,44,57,88,176,185
9	11	399960	202	40	198	399960	1	1310	2.101	1316	1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,18,20,22,33,40,66,99,101,198,202
10	11	1021020	221	21	220	1021020	1	1382	13.17	1382	1,2,3,4,5,7,10,11,13,17,20,21,22,44,55,110,220,221
1	12	497640	145	143	24	497640	1	932	5.29	932	1,2,3,4,5,6,8,11,12,13,24,29,143,145
2	12	31080	148	140	48	62160	2	285	$2^2 \cdot 37$	1004	1,2,3,4,5,6,7,8,12,24,35,37
3	12	6120	153	135	72	18360	3	208	$3^2 \cdot 17$	1076	1,2,3,4,5,8,9,15,17,45
4	12	480	160	128	96	1920	4	245	$2^3 \cdot 5$	1148	1,2,3,4,5,6,8,10,12,16,20,24,32,40
5	12	2413320	169	119	120	2413320	1	1220	13^2	1220	1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,13,15,17,20,24,30,40,60,119,120,169

6	12	360	180	108	144	2160	6	73	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$	1292	1,2,3,4,5,6,8,9
7	12	3080280	193	95	168	3080280	1	1364	prime	1364	1,2,3,4,5,6,7,8,12,14,19,21,24,28,42,56,84,95,168,193
8	12	3120	208	80	192	12480	4	197	$2^4 \cdot 13$	1436	1,2,3,4,5,6,8,12,13,16,24,48
9	12	12600	225	63	216	37800	3	310	$3^2 \cdot 5^2$	1508	1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,18,24,25,36,72
10	12	80520	244	44	240	161040	2	573	$2^2 \cdot 61$	1580	1,2,3,4,5,6,8,10,11,12,15,20,24,30,40,60,61,120
11	12	1609080	265	23	264	1609080	1	1652	$5 \cdot 53$	1652	1,2,3,4,5,6,8,11,12,22,23,24,33,44,53,66,88,132,264,265
1	13	185640	170	168	26	185640	1	1082	$2 \cdot 5 \cdot 17$	1088	1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,13,14,17,21,24,26,28,34,42,56,84,85,168,170
2	13	1484340	173	165	52	1484340	1	1166	prime	1166	1,2,3,4,5,11,13,15,26,33,52,55,165,173
3	13	555360	178	160	78	555360	1	1238	$2 \cdot 89$	1244	1,2,3,4,5,6,8,10,13,16,20,26,32,39,40,78,80,89,160,178
4	13	2943720	185	153	104	2943720	1	1322	$5 \cdot 37$	1322	1,2,3,4,5,8,9,13,17,26,37,51,52,104,153,185
5	13	907920	194	144	130	907920	1	1394	$2 \cdot 97$	1400	1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,13,16,18,24,26,36,48,65,72,97,130,144,194
6	13	4253340	205	133	156	4253340	1	1478	$5 \cdot 41$	1478	1,2,3,4,5,6,7,12,13,19,26,39,41,52,78,133,156,205
7	13	1190280	218	120	182	1190280	1	1550	$2 \cdot 109$	1556	1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,13,14,15,20,24,26,30,40,60,91,109,120,182,218
8	13	5088720	233	105	208	5088720	1	1634	prime	1634	1,2,3,4,5,7,8,13,15,16,21,26,35,52,104,105,208,233
9	13	1287000	250	88	234	1287000	1	1706	$2 \cdot 5^3$	1712	1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,13,18,22,25,26,39,44,50,78,88,117,125,234,250
10	13	4825860	269	69	260	4825860	1	1790	prime	1790	1,2,3,4,5,10,13,20,23,26,52,65,69,130,260,269
11	13	995280	290	48	286	995280	1	1862	$2 \cdot 5 \cdot 29$	1868	1,2,3,4,5,6,8,10,11,12,13,16,22,24,26,29,48,58,143,145,286,290
12	13	2441400	313	25	312	2441400	1	1946	prime	1946	1,2,3,4,5,6,8,12,13,24,25,26,39,52,78,104,156,312,313
1	14	1075620	197	195	28	1075620	1	1256	prime	1256	1,2,3,4,5,7,13,14,15,28,39,65,195,197
2	14	16800	200	192	56	33600	2	651	$2^3 \cdot 5^2$	1340	1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14,16,20,24,25,28,32,48,50,96,100
3	14	3220140	205	187	84	3220140	1	1424	$5 \cdot 41$	1424	1,2,3,4,5,6,7,11,12,14,17,21,28,41,42,84,187,205
4	14	133560	212	180	112	267120	2	459	$2^2 \cdot 53$	1508	1,2,3,4,5,7,8,9,14,15,28,45,53,56
5	14	5290740	221	171	140	5290740	1	1592	$13 \cdot 17$	1592	1,2,3,4,5,7,9,10,13,14,17,19,20,28,35,57,70,140,171,221
6	14	48720	232	160	168	97440	2	819	$2^3 \cdot 29$	1676	1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14,16,20,21,28,29,40,42,58,80,84,116
7	14	420	245	147	196	2940	7	56	$5 \cdot 7^2$	1760	1,2,3,4,5,7
8	14	240240	260	132	224	480480	2	627	$2^2 \cdot 5 \cdot 13$	1844	1,2,3,4,5,7,8,11,13,14,16,28,33,56,65,112
9	14	8027460	277	115	252	8027460	1	1928	prime	1928	1,2,3,4,5,6,7,9,12,14,18,21,23,28,36,42,63,84,115,126,252,277
10	14	62160	296	96	280	124320	2	987	$2^3 \cdot 37$	2012	1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14,16,20,24,28,35,37,48,70,74,140,148
11	14	7322700	317	75	308	7322700	1	2096	prime	2096	1,2,3,4,5,7,11,14,15,22,25,28,44,75,77,154,308,317
12	14	185640	340	52	336	371280	2	795	$2^2 \cdot 5 \cdot 17$	2180	1,2,3,4,5,6,7,8,12,13,14,17,21,24,28,42,56,84,85,168
13	14	3587220	365	27	364	3587220	1	2264	$5 \cdot 73$	2264	1,2,3,4,5,7,9,13,14,26,27,28,52,73,91,182,364,365
1	15	379680	226	224	30	379680	1	1430	$2 \cdot 113$	1436	1,2,3,4,5,6,7,8,10,14,15,16,28,30,32,56,112,113,224,226
2	15	3036540	229	221	60	3036540	1	1526	prime	1526	1,2,3,4,5,6,10,12,13,15,17,20,30,60,221,229
3	15	4680	234	216	90	14040	3	316	$2 \cdot 3^2 \cdot 13$	1616	1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,13,18,24,26,36,72
4	15	6044280	241	209	120	6044280	1	1706	prime	1706	1,2,3,4,5,6,8,10,11,12,15,19,20,24,30,40,60,120,209,241
5	15	600	250	200	150	3000	5	186	$2 \cdot 5^3$	1796	1,2,3,4,5,6,8,10,25,50
6	15	36540	261	189	180	109620	3	334	$3^2 \cdot 29$	1886	1,2,3,4,5,7,9,10,20,21,29,63
7	15	2531760	274	176	210	2531760	1	1970	$2 \cdot 137$	1976	1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,14,15,16,21,22,30,35,42,44,70,88,105,137,176,210,274
8	15	11166960	289	161	240	11166960	1	2066	17^2	2066	1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,15,16,17,20,23,24,30,40,48,60,80,120,161,240,289
9	15	12240	306	144	270	36720	3	412	$2 \cdot 3^2 \cdot 17$	2156	1,2,3,4,5,6,8,9,10,15,16,17,18,30,34,45,90
10	15	3900	325	125	300	19500	5	150	$5^2 \cdot 13$	2246	1,2,3,4,5,6,12,13,25
11	15	2968680	346	104	330	2968680	1	2330	$2 \cdot 173$	2336	1,2,3,4,5,6,8,10,11,13,15,22,26,30,33,52,55,66,104,110,165,173,330,346
12	15	44280	369	81	360	132840	3	322	$3^2 \cdot 41$	2426	1,2,3,4,5,8,9,10,20,27,40,41
13	15	2151240	394	56	390	2151240	1	2510	$2 \cdot 197$	2516	1,2,3,4,5,6,7,8,10,13,14,15,26,28,30,39,56,65,78,130,195,197,390,394

14	15	5127780	421	29	420	5127780	1	2606	prime	2606	1,2,3,4,5,6,7,10,12,14,15,20,21,28,29,30,35,42,60,70,84,105,140,210,420,421
1	16	2097120	257	255	32	2097120	1	1628	prime	1628	1,2,3,4,5,8,15,16,17,32,51,85,255,257
2	16	131040	260	252	64	262080	2	477	$2^2 \cdot 5 \cdot 13$	1724	1,2,3,4,5,7,8,9,13,16,21,32,63,65
3	16	6283680	265	247	96	6283680	1	1820	5.53	1820	1,2,3,4,5,6,8,12,13,16,19,24,32,48,53,96,247,265
4	16	8160	272	240	128	32640	4	191	$2^4 \cdot 17$	1916	1,2,3,4,5,8,15,16,17,32
5	16	10385760	281	231	160	10385760	1	2012	prime	2012	1,2,3,4,5,7,8,10,11,16,20,21,32,33,40,77,80,160,231,281
6	16	385440	292	220	192	770880	2	669	$2^2 \cdot 73$	2108	1,2,3,4,5,6,8,11,12,16,24,32,48,55,73,96
7	16	14142240	305	207	224	14142240	1	2204	5.61	2204	1,2,3,4,5,7,8,9,14,16,23,28,32,56,61,69,112,207,224,305
8	16	480	320	192	256	3840	8	123	$2^6 \cdot 5$	2300	1,2,3,4,5,8,16,32
9	16	16984800	337	175	288	16984800	1	2396	prime	2396	1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,16,18,24,25,32,35,36,48,72,96,144,175,288,337
10	16	555360	356	156	320	1110720	2	861	$2^2 \cdot 89$	2492	1,2,3,4,5,8,10,13,16,20,32,39,40,80,89,160
11	16	17915040	377	135	352	17915040	1	2588	13.29	2588	1,2,3,4,5,8,9,11,13,15,16,22,27,29,32,44,45,88,135,176,352,377
12	16	16800	400	112	384	67200	4	383	$2^4 \cdot 5^2$	2684	1,2,3,4,5,6,7,8,12,16,24,25,32,48,96
13	16	15381600	425	87	416	15381600	1	2780	$5^2 \cdot 17$	2780	1,2,3,4,5,8,13,16,17,25,26,29,32,52,85,87,104,208,416,425
14	16	379680	452	60	448	759360	2	1053	$2^2 \cdot 113$	2876	1,2,3,4,5,7,8,14,15,16,28,32,56,112,113,224
15	16	7157280	481	31	480	7157280	1	2972	13.37	2972	1,2,3,4,5,6,8,10,12,13,15,16,20,24,30,31,32,37,40,48,60,80,96,120,160,240,480,481
r	s	period	r^2+s^2	s^2-r^2	2rs	$\text{LCM}(r^2+s^2, s^2-r^2, 2rs)$	GCD(r,s)	recurrence order	r^2+s^2	$6s(r+s)-4$	cyclotomic polynomials

V tabulce je možno si ověřit výše uvedené vztahy o **hloubce rekurence** i hypotézu o velikosti **periody**. Zejména při $\text{GCD}(r,s) = 1$ je shoda hodnot u periody a $\text{LCM}(r^2 + s^2, s^2 - r^2, 2rs)$ viditelná na první pohled, stejně tak v případě hloubky rekurence shoda s výrazem $6s(r+s)-4$ pokud je r^2+s^2 liché, resp. že je menší o 6 pokud je r^2+s^2 sudé. Rovněž vidíme, že členy $r^2 + s^2$, $s^2 - r^2$ a $2rs$ se v případě $\text{GCD}(r,s) = 1$ vždy vyskytují mezi čísly **cyklotomických polynomů** obsažených ve jmenovateli vytvořující funkce.

K těmto tabulkám je třeba poznamenat, že nevznikaly nijak snadno (jak by se snad na první pohled mohlo zdát). Např. vygenerování dostatečného počtu hodnot jen pro kombinaci [15,16] trvalo (dost optimalizovaným programem) asi 20 hodin a následné hledání rekurence a vytvořující funkce dalších asi 15 hodin! Ostatní hodnoty si vyžádaly času sice méně, ale i tak často šlo o několik hodin na jednu položku tabulky. Proto jsem v následující tabulce ponechal sadu (zdánlivě neuspořádaných) hodnot, protože každou vypočtenou hodnotu pro r nebo s větší než 16 považuji za cennou, zejména při nízkém $\text{GCD}(r,s)$.

Hodnoty pro $r = s > 7$ je možno nalézt v tabulce na str. 570, hodnoty pro $r = 0$ jsou zřejmé z tabulky na str. 571. Hodnoty pro $[s,r]$ jsou shodné jako pro $[r,s]$.

Table for miscellaneous r, s, $\text{GCD}(r,s) > 1$

r	s	period	r^2+s^2	s^2-r^2	2rs	$\text{LCM}(r^2+s^2, s^2-r^2, 2rs)$	$\text{GCD}(r,s)$	recurrence order	r^2+s^2	$6s(r+s)-4$	cyclotomic polynomials
2	18	59040	328	320	72	118080	2	1059	$2^3 \cdot 41$	2156	1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,16,18,20,32,36,40,41,80,82,160,164
3	18	46620	333	315	108	139860	3	322	$3^2 \cdot 37$	2264	1,2,3,4,5,6,7,9,12,18,35,36,37
4	18	471240	340	308	144	942480	2	699	$2^2 \cdot 5 \cdot 17$	2372	1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,17,18,24,36,72,77,85
6	18	720	360	288	216	4320	6	199	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	2588	1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,16,18,20,36
8	18	907920	388	260	288	1815840	2	915	$2^2 \cdot 97$	2804	1,2,3,4,5,6,8,9,12,13,16,18,24,36,48,65,72,97,144
9	18	540	405	243	324	4860	9	112	$3^4 \cdot 5$	2912	1,2,3,4,5,9,27
10	18	267120	424	224	360	534240	2	1491	$2^3 \cdot 53$	3020	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,15,16,18,20,28,30,36,45,53,56,60,90,106,112,180,212
12	18	4680	468	180	432	28080	6	271	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$	3236	1,2,3,4,5,6,8,9,12,13,18,24,36,72
14	18	262080	520	128	504	524160	2	1707	$2^3 \cdot 5 \cdot 13$	3452	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,16,18,20,21,26,28,32,36,42,52,63,64,65,84,126,130,252,260
15	18	120780	549	99	540	362340	3	754	$3^2 \cdot 61$	3560	1,2,3,4,5,6,9,10,11,12,15,18,20,30,36,45,60,61,90,180
16	18	709920	580	68	576	1419840	2	1347	$2^2 \cdot 5 \cdot 29$	3668	1,2,3,4,5,6,8,9,12,16,17,18,24,29,32,36,48,72,96,144,145,288
2	20	399960	404	396	80	799920	2	717	$2^2 \cdot 101$	2636	1,2,3,4,5,8,9,10,11,20,33,40,99,101
4	20	6240	416	384	160	24960	4	677	$2^5 \cdot 13$	2876	1,2,3,4,5,6,8,10,12,13,16,20,24,26,32,40,48,52,96,104
5	20	10200	425	375	200	51000	5	300	$5^2 \cdot 17$	2996	1,2,3,4,5,8,15,17,25,75
6	20	1190280	436	364	240	2380560	2	957	$2^2 \cdot 109$	3116	1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,13,15,20,24,30,40,60,91,109,120
8	20	48720	464	336	320	194880	4	389	$2^4 \cdot 29$	3356	1,2,3,4,5,7,8,10,16,20,21,29,40,80
10	20	600	500	300	400	6000	10	125	$2^2 \cdot 5^3$	3596	1,2,3,4,5,8,10,25
12	20	16320	544	256	480	65280	4	917	$2^5 \cdot 17$	3836	1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,16,17,20,24,30,32,34,40,60,64,68,120,136
14	20	2127720	596	204	560	4255440	2	1437	$2^2 \cdot 149$	4076	1,2,3,4,5,7,8,10,14,17,20,28,35,40,51,56,70,140,149,280
15	20	21000	625	175	600	105000	5	468	5^4	4196	1,2,3,4,5,6,7,8,12,24,25,125
16	20	59040	656	144	640	236160	4	629	$2^4 \cdot 41$	4316	1,2,3,4,5,8,9,10,16,20,32,40,41,80,160
18	20	1238040	724	76	720	2476080	2	1677	$2^2 \cdot 181$	4556	1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,18,19,20,24,30,36,40,45,60,72,90,120,180,181,360
4	24	62160	592	560	192	248640	4	359	$2^4 \cdot 37$	4028	1,2,3,4,5,6,7,8,12,16,24,35,37,48
4	32	262080	1040	1008	256	1048320	4	575	$2^4 \cdot 5 \cdot 13$	6908	1,2,3,4,5,7,8,9,13,16,21,32,63,64,65
4	40	799920	1616	1584	320	3199680	4	839	$2^4 \cdot 101$	10556	1,2,3,4,5,8,9,10,11,16,20,33,40,80,99,101
8	28	267120	848	720	448	1068480	4	629	$2^4 \cdot 53$	6044	1,2,3,4,5,7,8,9,14,15,16,28,45,53,56,112
8	36	942480	1360	1232	576	3769920	4	917	$2^4 \cdot 5 \cdot 17$	9500	1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,16,17,18,24,36,48,72,77,85,144
12	32	770880	1168	880	768	3083520	4	959	$2^4 \cdot 73$	8444	1,2,3,4,5,6,8,11,12,16,24,32,48,55,64,73,96,192
16	28	480480	1040	528	896	1921920	4	965	$2^4 \cdot 5 \cdot 13$	7388	1,2,3,4,5,7,8,11,13,14,16,28,32,33,56,65,112,224
20	24	161040	976	176	960	644160	4	935	$2^4 \cdot 61$	6332	1,2,3,4,5,6,8,10,11,12,15,16,20,24,30,40,48,60,61,80,120,240
4	28	33600	800	768	224	134400	4	1301	$2^5 \cdot 5^2$	5372	1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14,16,20,24,25,28,32,40,48,50,56,64,96,100,192,200
4	36	118080	1312	1280	288	472320	4	2117	$2^5 \cdot 41$	8636	1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,16,18,20,24,32,36,40,41,64,72,80,82,160,164,320,328
12	28	97440	928	640	672	389760	4	1637	$2^5 \cdot 29$	6716	1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14,16,20,21,24,28,29,32,40,42,56,58,80,84,116,160,168,232
20	28	124320	1184	384	1120	497280	4	1973	$2^5 \cdot 37$	8060	1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14,16,20,24,28,32,35,37,40,48,56,70,74,96,140,148,280,296
3	24	196560	585	567	144	589680	3	808	$3^2 \cdot 5 \cdot 13$	3884	1,2,3,4,5,7,8,9,13,16,21,27,63,65,189
3	30	599940	909	891	180	1799820	3	1252	$3^2 \cdot 101$	5936	1,2,3,4,5,9,10,11,20,27,33,99,101,297
6	21	200340	477	405	252	601020	3	646	$3^2 \cdot 53$	3398	1,2,3,4,5,7,9,14,15,27,28,45,53,135
6	27	706860	765	693	324	2120580	3	808	$3^2 \cdot 5 \cdot 17$	5342	1,2,3,4,5,6,7,9,11,12,17,18,27,36,54,77,85,108
9	24	578160	657	495	432	1734480	3	814	$3^2 \cdot 73$	4748	1,2,3,4,5,6,8,9,11,12,16,18,24,36,48,55,72,73,144

12	21	360360	585	297	504	1081080	3	658	$3^2 \cdot 5 \cdot 13$	4154	1,2,3,4,5,7,8,9,11,13,14,28,33,56,65,99
15	24	833040	801	351	720	2499120	3	856	$3^2 \cdot 89$	5612	1,2,3,4,5,8,9,10,13,16,20,39,40,80,89,117
18	21	278460	765	117	756	835380	3	1048	$3^2 \cdot 5 \cdot 17$	4910	1,2,3,4,5,6,7,9,12,13,14,17,18,21,28,36,42,63,84,85,126,252
3	21	25200	450	432	126	75600	3	616	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	3020	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,16,18,24,25,36,48,50,72,144
3	27	88560	738	720	162	265680	3	640	$2 \cdot 3^2 \cdot 41$	4856	1,2,3,4,5,6,8,9,10,16,18,20,27,40,41,54,80,82
9	21	73080	522	360	378	219240	3	664	$2 \cdot 3^2 \cdot 29$	3776	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,14,18,20,21,29,40,42,58,63,126
7	21	840	490	392	294	5880	7	86	$2 \cdot 5 \cdot 7^2$	3524	1,2,3,4,5,6,7,8,10
7	28	14280	833	735	392	99960	7	140	$7^2 \cdot 17$	5876	1,2,3,4,5,7,8,15,17
7	35	10920	1274	1176	490	76440	7	194	$2 \cdot 7^2 \cdot 13$	8816	1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,13,24,26
14	28	840	980	588	784	11760	14	93	$2^2 \cdot 5 \cdot 7^2$	7052	1,2,3,4,5,7,8,14
14	42	1680	1960	1568	1176	23520	14	171	$2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$	14108	1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14,16,20
21	42	1260	2205	1323	1764	26460	21	124	$3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$	15872	1,2,3,4,5,7,9,21
28	56	1680	3920	2352	3136	47040	28	167	$2^4 \cdot 5 \cdot 7^2$	28220	1,2,3,4,5,7,8,14,16,28
35	70	2100	6125	3675	4900	73500	35	216	$5^3 \cdot 7^2$	44096	1,2,3,4,5,7,25,35
14	21	5460	637	245	588	38220	7	110	$7^2 \cdot 13$	4406	1,2,3,4,5,6,7,12,13
16	24	6240	832	320	768	49920	8	345	$2^6 \cdot 13$	5756	1,2,3,4,5,6,8,12,13,16,24,32,48,96
18	27	7020	1053	405	972	63180	9	382	$3^4 \cdot 13$	7286	1,2,3,4,5,6,9,12,13,18,27,36,54,108
20	30	7800	1300	500	1200	78000	10	203	$2^2 \cdot 5^2 \cdot 13$	8996	1,2,3,4,5,6,8,10,12,13,24,25
22	33	8580	1573	605	1452	94380	11	126	$11^2 \cdot 13$	10886	1,2,3,4,5,6,11,12,13
24	36	9360	1872	720	1728	112320	12	493	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 13$	12956	1,2,3,4,5,6,8,9,12,13,16,18,24,36,48,72,144
26	39	10140	2197	845	2028	131820	13	566	13^3	15206	1,2,3,4,5,6,12,13,169
28	42	10920	2548	980	2352	152880	14	171	$2^2 \cdot 7^2 \cdot 13$	17636	1,2,3,4,5,6,7,8,12,13,14,24
30	45	11700	2925	1125	2700	175500	15	256	$3^2 \cdot 5^2 \cdot 13$	20246	1,2,3,4,5,6,9,12,13,15,18,25,36
18	24	25200	900	252	864	151200	6	529	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	6044	1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,16,18,24,25,36,48,72,144
21	28	29400	1225	343	1176	205800	7	296	$5^2 \cdot 7^2$	8228	1,2,3,4,5,6,7,8,12,24,25,49
24	32	33600	1600	448	1536	268800	8	675	$2^6 \cdot 5^2$	10748	1,2,3,4,5,6,7,8,12,16,24,25,32,48,64,96,192
27	36	37800	2025	567	1944	340200	9	748	$3^4 \cdot 5^2$	13604	1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,18,24,25,27,36,54,72,108,216
30	40	42000	2500	700	2400	420000	10	557	$2^2 \cdot 5^4$	16796	1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,16,24,25,48,125
33	44	46200	3025	847	2904	508200	11	204	$5^2 \cdot 11^2$	20324	1,2,3,4,5,6,7,8,11,12,24,25

Table for selected r, s (s=2r)												
r	s	period	r ² +s ²	s ² -r ²	2rs	LCM(r ² +s ² , s ² -r ² , 2rs)	GCD(r,s)	recurrence order	r	r ² +s ²	6s(r+s)-4	cyclotomic polynomials
11	22	660	605	363	484	7260	11	72	prime	5.11 ²	4352	1,2,3,4,5,11
12	24	720	720	432	576	8640	12	115		2 ⁴ .3 ² .5	5180	1,2,3,4,5,6,8,9,12,16
13	26	780	845	507	676	10140	13	80	prime	5.13 ²	6080	1,2,3,4,5,13
14	28	840	980	588	784	11760	14	93		2 ² .5.7 ²	7052	1,2,3,4,5,7,8,14
15	30	900	1125	675	900	13500	15	148		3 ² .5 ³	8096	1,2,3,4,5,9,15,25
16	32	960	1280	768	1024	15360	16	227	2 ⁴	2 ⁸ .5	9212	1,2,3,4,5,8,16,32,64
17	34	1020	1445	867	1156	17340	17	96	prime	5.17 ²	10400	1,2,3,4,5,17
18	36	1080	1620	972	1296	19440	18	157		2 ² .3 ⁴ .5	11660	1,2,3,4,5,6,8,9,18,27
19	38	1140	1805	1083	1444	21660	19	104	prime	5.19 ²	12992	1,2,3,4,5,19
20	40	1200	2000	1200	1600	24000	20	183		2 ⁴ .5 ³	14396	1,2,3,4,5,8,10,16,20,25
21	42	1260	2205	1323	1764	26460	21	124		3 ² .5.7 ²	15872	1,2,3,4,5,7,9,21
22	44	1320	2420	1452	1936	29040	22	125		2 ² .5.11 ²	17420	1,2,3,4,5,8,11,22
23	46	1380	2645	1587	2116	31740	23	120	prime	5.23 ²	19040	1,2,3,4,5,23
24	48	1440	2880	1728	2304	34560	24	199		2 ⁶ .3 ² .5	20732	1,2,3,4,5,6,8,9,12,16,24,32
25	50	1500	3125	1875	2500	37500	25	416		5 ⁵	22496	1,2,3,4,5,25,125
26	52	1560	3380	2028	2704	40560	26	141		2 ² .5.13 ²	24332	1,2,3,4,5,8,13,26
27	54	1620	3645	2187	2916	43740	27	292		3 ⁶ .5	26240	1,2,3,4,5,9,27,81
28	56	1680	3920	2352	3136	47040	28	167		2 ⁴ .5.7 ²	28220	1,2,3,4,5,7,8,14,16,28
29	58	1740	4205	2523	3364	50460	29	144	prime	5.29 ²	30272	1,2,3,4,5,29
30	60	1800	4500	2700	3600	54000	30	217		2 ² .3 ² .5 ³	32396	1,2,3,4,5,6,8,9,10,15,25,30
31	62	1860	4805	2883	3844	57660	31	152	prime	5.31 ²	34592	1,2,3,4,5,31
32	64	1920	5120	3072	4096	61440	32	435	2 ⁵	2 ¹⁰ .5	36860	1,2,3,4,5,8,16,32,64,128
64	128	3840	20480	12288	16384	245760	64	851	2 ⁶	2 ¹² .5	147452	1,2,3,4,5,8,16,32,64,128,256
r	s	period	r ² +s ²	s ² -r ²	2rs	LCM(r ² +s ² , s ² -r ² , 2rs)	GCD(r,s)	recurrence order	r	r ² +s ²	6s(r+s)-4	cyclotomic polynomials

V této tabulce je vždy s dvojnásobkem r , potom evidentně $\text{GCD}(r,s) = r$. Výrazy pro hloubku rekurence mají lineární tvar v případě, že r je **prvočíslo** (větší než 5) nebo když r je **mocnina 2**. Více viz str. 568.

Two [0,1] riders (Rooks) on a toroidal chessboard

Explicit formula (only for completeness)

$$\frac{1}{2}(n-1)^2 n^2$$

(identical as on a normal chessboard)

Recurrence
$a[n] = a[n-5] - 5a[n-4] + 10a[n-3] - 10a[n-2] + 5a[n-1]$

Generating function
$-\frac{2x^2(x^2 + 4x + 1)}{(x-1)^5}$

Two [0,2] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (*V. Kotěšovec, 17.5.2010*), period=2

$$\frac{1}{4}n^2(2n^2 - 3n + 2 + n * (-1)^n)$$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left(2n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - n + 1 \right)$$

Recurrence
$a[n] = a[n-9] - a[n-8] - 4a[n-7] + 4a[n-6] + 6a[n-5] - 6a[n-4] - 4a[n-3] + 4a[n-2] + a[n-1]$

Generating function
$-\frac{2x^2(x^6 + 6x^5 + 25x^4 + 24x^3 + 31x^2 + 6x + 3)}{(x-1)^5(x+1)^4}$

Two [0,3] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=3

$$\frac{1}{18}n^2 \left(9n^2 - 14n + 9 + 8n * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right)$$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{8}{3}n \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \frac{4}{3}n \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - \frac{n^2}{3} - \frac{2n}{3} + 1 \right)$$

Recurrence

$$a[n] = a[n-13] - a[n-12] - 4a[n-10] + 4a[n-9] + 6a[n-7] - 6a[n-6] - 4a[n-4] + 4a[n-3] + a[n-1]$$

Generating function

$$\frac{2x^2(x^{10} + 8x^9 + 18x^8 + 69x^7 + 93x^6 + 72x^5 + 129x^4 + 60x^3 + 18x^2 + 17x + 1)}{(x-1)^5(x^2+x+1)^4}$$

Two [0,4] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=4

$$\frac{1}{16}n^2 \left(8n^2 - 11n + 8 + 5n * (-1)^n + 2n * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right)$$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{5}{2}n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2}n \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \frac{1}{2}n \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1 \right)$$

Recurrence

$$a[n] = a[n-17] - a[n-16] - 4a[n-13] + 4a[n-12] + 6a[n-9] - 6a[n-8] - 4a[n-5] + 4a[n-4] + a[n-1]$$

Generating function

$$\frac{2x^2(x^{14} + 6x^{13} + 29x^{12} + 40x^{11} + 145x^{10} + 138x^9 + 281x^8 + 160x^7 + 331x^6 + 138x^5 + 167x^4 + 40x^3 + 51x^2 + 6x + 3)}{(x-1)^5(x+1)^4(x^2+1)^4}$$

Two [0,5] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=5

$$\frac{n^2}{2} * \left(n^2 - \frac{42n}{25} + 1 + \frac{16}{25}n * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{16}{25}n * \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) \right)$$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{16}{5}n \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \frac{8}{5}n \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \frac{8}{5}n \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \frac{8}{5}n \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor - \frac{3n^2}{5} - \frac{2n}{5} + 1 \right)$$

Recurrence

$$a[n] = a[n-21] - a[n-20] - 4a[n-16] + 4a[n-15] + 6a[n-11] - 6a[n-10] - 4a[n-6] + 4a[n-5] + a[n-1]$$

Generating function

$$\frac{2x^2(x^{18} + 8x^{17} + 27x^{16} + 64x^{15} + 75x^{14} + 262x^{13} + 311x^{12} + 404x^{11} + 473x^{10} + 300x^9 + 673x^8 + 404x^7 + 311x^6 + 212x^5 + 75x^4 + 114x^3 + 27x^2 + 8x + 1)}{(x-1)^5(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^4}$$

Two [0,6] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=6

$$\frac{1}{36}n^2 \left(18n^2 - 21n + 18 + 7n * (-1)^n - 4n * \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + 12n * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right)$$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{8}{3}n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{2}{3}n \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \frac{2}{3}n \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - \frac{4}{3}n \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 2n \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor - \frac{2n^2}{3} - \frac{n}{3} + 1 \right)$$

Recurrence

$$a[n] = a[n-25] - a[n-24] - 4a[n-19] + 4a[n-18] + 6a[n-13] - 6a[n-12] - 4a[n-7] + 4a[n-6] + a[n-1]$$

Generating function

$$\frac{-2x^2(x^{22} + 6x^{21} + 20x^{20} + 57x^{19} + 141x^{18} + 126x^{17} + 429x^{16} + 360x^{15} + 534x^{14} + 765x^{13} + 1017x^{12} + 504x^{11} + 1191x^{10} + 558x^9 + 600x^8 + 567x^7 + 459x^6 + 126x^5 + 215x^4 + 48x^3 + 34x^2 + 15x + 3)}{((x-1)^5(x+1)^4(x^2-x+1)^4(x^2+x+1)^4)}$$

Two [0,7] riders on an $n \times n$ toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=7

$$\frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - \frac{86n}{49} + 1 + \frac{24}{49}n * \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi n}{7}\right) \right) \right)$$

Zde je možno poznamenat, že výraz $\cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi n}{7}\right)$ nabývá pouze dvou hodnot. Pokud je $n=7k$ (násobek 7), je roven 3, jinak vždy $-1/2$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{24}{7}n \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \frac{12}{7}n \left\lfloor \frac{n+1}{7} \right\rfloor + \frac{12}{7}n \left\lfloor \frac{n+2}{7} \right\rfloor + \frac{12}{7}n \left\lfloor \frac{n+3}{7} \right\rfloor + \frac{12}{7}n \left\lfloor \frac{n+4}{7} \right\rfloor + \frac{12}{7}n \left\lfloor \frac{n+5}{7} \right\rfloor - \frac{5n^2}{7} - \frac{2n}{7} + 1 \right)$$

Recurrence
$a[n] = a[n-29]-a[n-28]-4a[n-22]+4a[n-21]+6a[n-15]-6a[n-14]-4a[n-8]+4a[n-7]+a[n-1]$

Generating function
$\frac{-2x^2(x^{26}+8x^{25}+27x^{24}+64x^{23}+125x^{22}+216x^{21}+196x^{20}+655x^{19}+697x^{18}+892x^{17}+1075x^{16}+1228x^{15}+1333x^{14}+784x^{13}+1921x^{12}+1228x^{11}+1075x^{10}+892x^9+697x^8+508x^7+196x^6+363x^5+125x^4+64x^3+27x^2+8x+1)}{((x-1)^5(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^4)}$

Two [1,1] riders (Bishops) on a toroidal chessboard

Explicit formula (only for completeness), period=2

$$\frac{1}{4}n^2(2n^2 - 4n + 3 + (-1)^n)$$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left(2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n^2 - 3n + 2 \right)$$

Recurrence

$$a[n] = a[n-8] - 2a[n-7] - 2a[n-6] + 6a[n-5] - 6a[n-3] + 2a[n-2] + 2a[n-1]$$

Generating function

$$-\frac{2x^2(x^5 + 8x^4 + 14x^3 + 18x^2 + 5x + 2)}{(x-1)^5(x+1)^3}$$

Two [1,2] riders (Nightriders) on a toroidal chessboard

Explicit formula (only for completeness), period=60

$$\frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - 4n + \frac{119}{15} + 2 * (-1)^n + 2 * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{8}{3} * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{16}{5} * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{16}{5} * \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) \right)$$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left(8 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + n^2 - 22n + 21 \right)$$

Recurrence

$$a[n] = a[n-32] + 4a[n-31] + 10a[n-30] + 17a[n-29] + 20a[n-28] + 11a[n-27] - 15a[n-26] - 54a[n-25] - 90a[n-24] - 99a[n-23] - 63a[n-22] + 18a[n-21] + 116a[n-20] + 188a[n-19] + 194a[n-18] + 123a[n-17] - 123a[n-15] - 194a[n-14] - 188a[n-13] - 116a[n-12] - 18a[n-11] + 63a[n-10] + 99a[n-9] + 90a[n-8] + 54a[n-7] + 15a[n-6] - 11a[n-5] - 20a[n-4] - 17a[n-3] - 10a[n-2] - 4a[n-1]$$

Generating function

$$-2x^2(2x^{29} + 25x^{28} + 151x^{27} + 620x^{26} + 1965x^{25} + 5094x^{24} + 11169x^{23} + 21370x^{22} + 36349x^{21} + 56009x^{20} + 78898x^{19} + 102778x^{18} + 124128x^{17} + 139254x^{16} + 144792x^{15} + 139276x^{14} + 123618x^{13} + 101232x^{12} + 76538x^{11} + 53680x^{10} + 35008x^9 + 21359x^8 + 12037x^7 + 6226x^6 + 2853x^5 + 1122x^4 + 351x^3 + 82x^2 + 13x + 1) / ((x-1)^5(x+1)^3(x^2+1)^3(x^2+x+1)^3(x^4+x^3+x^2+x+1)^3)$$

Two [1,3] riders (Camelriders = Mehari) on a toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=120

$$\frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - 4n + \frac{109}{10} + \frac{149}{30} * (-1)^n + \frac{4}{3} \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + 4 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + \frac{8}{5} \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \frac{24}{5} \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{8}{5} \cos\left(\frac{3\pi n}{5}\right) + \frac{24}{5} \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) \right)$$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left(42 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - 4 \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor - 8 \left\lfloor \frac{n+4}{10} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+5}{10} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+7}{10} \right\rfloor + n^2 - 43n + 42 \right)$$

Recurrence

$$a[n] = a[n-62] - 2a[n-61] + 7a[n-60] - 12a[n-59] + 27a[n-58] - 42a[n-57] + 74a[n-56] - 106a[n-55] + 158a[n-54] - 210a[n-53] + 273a[n-52] - 336a[n-51] + 384a[n-50] - 432a[n-49] + 426a[n-48] - 420a[n-47] + 324a[n-46] - 228a[n-45] + 33a[n-44] + 162a[n-43] - 420a[n-42] + 678a[n-41] - 918a[n-40] + 1158a[n-39] - 1282a[n-38] + 1406a[n-37] - 1342a[n-36] + 1278a[n-35] - 1020a[n-34] + 762a[n-33] - 381a[n-32] + 381a[n-30] - 762a[n-29] + 1020a[n-28] - 1278a[n-27] + 1342a[n-26] - 1406a[n-25] + 1282a[n-24] - 1158a[n-23] + 918a[n-22] - 678a[n-21] + 420a[n-20] - 162a[n-19] - 33a[n-18] + 228a[n-17] - 324a[n-16] + 420a[n-15] - 426a[n-14] + 432a[n-13] - 384a[n-12] + 336a[n-11] - 273a[n-10] + 210a[n-9] - 158a[n-8] + 106a[n-7] - 74a[n-6] + 42a[n-5] - 27a[n-4] + 12a[n-3] - 7a[n-2] + 2a[n-1]$$

Generating function

$$- 2 x^2 (2 x^{59} + 14 x^{58} + 41 x^{57} + 144 x^{56} + 293 x^{55} + 788 x^{54} + 1175 x^{53} + 3336 x^{52} + 3195 x^{51} + 11496 x^{50} + 5971 x^{49} + 33442 x^{48} + 6370 x^{47} + 83106 x^{46} - 1947 x^{45} + 177752 x^{44} - 26845 x^{43} + 330998 x^{42} - 71970 x^{41} + 543140 x^{40} - 133108 x^{39} + 794306 x^{38} - 196101 x^{37} + 1047978 x^{36} - 247416 x^{35} + 1263676 x^{34} - 281372 x^{33} + 1410806 x^{32} - 304345 x^{31} + 1474358 x^{30} - 325662 x^{29} + 1452422 x^{28} - 347455 x^{27} + 1349570 x^{26} - 358694 x^{25} + 1175380 x^{24} - 344002 x^{23} + 948726 x^{22} - 295455 x^{21} + 699482 x^{20} - 221566 x^{19} + 463760 x^{18} - 141432 x^{17} + 272102 x^{16} - 75241 x^{15} + 138944 x^{14} - 31815 x^{13} + 60498 x^{12} - 9830 x^{11} + 21922 x^{10} - 1637 x^9 + 6456 x^8 + 177 x^7 + 1500 x^6 + 205 x^5 + 260 x^4 + 59 x^3 + 36 x^2 + 5 x + 2) / ((x-1)^5 (x+1)^3 (x^2+1)^3 (x^2-x+1)^3 (x^2+x+1)^3 (x^4+1)^3 (x^4-x^3+x^2-x+1)^3 (x^4+x^3+x^2+x+1)^3)$$

Two [1,4] riders (Girafferiders) on a toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=2040

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - 4n + \frac{202}{17} + 3 * (-1)^n + 4 * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{24}{5} * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 2 * \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 2 * \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + \frac{16}{3} * \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{32}{15} * \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{15}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{15}\right) + \cos\left(\frac{8\pi n}{15}\right) + \cos\left(\frac{14\pi n}{15}\right) \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{64}{17} * \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{17}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{17}\right) + \cos\left(\frac{6\pi n}{17}\right) + \cos\left(\frac{8\pi n}{17}\right) + \cos\left(\frac{10\pi n}{17}\right) + \cos\left(\frac{12\pi n}{17}\right) + \cos\left(\frac{14\pi n}{17}\right) + \cos\left(\frac{16\pi n}{17}\right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Suma na posledním řádku, kterou jsem dostal řešením diferenční rovnice, je zajímavá. Nabývá totiž pouze dvou hodnot

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^8 \cos\left(\frac{2\pi j n}{17}\right) &= 8 & \sum_{j=1}^8 \cos\left(\frac{2\pi j n}{17}\right) &= -\frac{1}{2} \\ &\text{pouze pro } n=17k \text{ (násobky 17)} & &\text{pro všechna ostatní } n \end{aligned}$$

Alternative formula

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}n^2 \left(16 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+2}{15} \right\rfloor - 16 \left\lfloor \frac{n+3}{15} \right\rfloor \right. \\ & \quad \left. + 16 \left\lfloor \frac{n+4}{15} \right\rfloor - 16 \left\lfloor \frac{n+6}{15} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+7}{15} \right\rfloor + 64 \left\lfloor \frac{n}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+1}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+2}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+3}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+4}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+5}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+6}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+7}{17} \right\rfloor \right. \\ & \quad \left. + 32 \left\lfloor \frac{n+8}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+9}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+10}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+11}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+12}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+13}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+14}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+15}{17} \right\rfloor + n^2 - 78n + 77 \right) \end{aligned}$$

Na tomto místě jsem si vzpomněl na jeden z nejhezčích matematických vzorců, které jsem v životě viděl:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{2(17 - \sqrt{17})} + 2 \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{2(17 - \sqrt{17})} - 2\sqrt{2(17 + \sqrt{17})}} \right)$$

Tento excelentní vzorec (neobsahující komplexní čísla!), který odvodil už Gauss (viz např. Hans Rademacher: „Lectures on elementary number theory“, 1964), jde ještě trochu zjednodušit:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2 \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}} \right)$$

Recurrence

$$\begin{aligned}
a[n] = & a[n-116] + 4a[n-115] + 10a[n-114] + 20a[n-113] + 35a[n-112] + 56a[n-111] + 84a[n-110] + 120a[n-109] + 162a[n-108] + 208a[n-107] + 256a[n-106] + 304a[n-105] + 350a[n-104] + 392a[n-103] \\
& + 428a[n-102] + 453a[n-101] + 465a[n-100] + 459a[n-99] + 430a[n-98] + 373a[n-97] + 283a[n-96] + 155a[n-95] - 16a[n-94] - 226a[n-93] - 472a[n-92] - 742a[n-91] - 1024a[n-90] - 1306a[n-89] - \\
& 1576a[n-88] - 1822a[n-87] - 2029a[n-86] - 2191a[n-85] - 2293a[n-84] - 2329a[n-83] - 2290a[n-82] - 2167a[n-81] - 1951a[n-80] - 1633a[n-79] - 1213a[n-78] - 688a[n-77] - 82a[n-76] + 584a[n-75] \\
& + 1280a[n-74] + 1976a[n-73] + 2642a[n-72] + 3247a[n-71] + 3769a[n-70] + 4177a[n-69] + 4467a[n-68] + 4626a[n-67] + 4650a[n-66] + 4534a[n-65] + 4273a[n-64] + 3865a[n-63] + 3305a[n-62] + \\
& 2615a[n-61] + 1808a[n-60] + 924a[n-59] - 924a[n-57] - 1808a[n-56] - 2615a[n-55] - 3305a[n-54] - 3865a[n-53] - 4273a[n-52] - 4534a[n-51] - 4650a[n-50] - 4626a[n-49] - 4467a[n-48] - 4177a[n-47] - \\
& 3769a[n-46] - 3247a[n-45] - 2642a[n-44] - 1976a[n-43] - 1280a[n-42] - 584a[n-41] + 82a[n-40] + 688a[n-39] + 1213a[n-38] + 1633a[n-37] + 1951a[n-36] + 2167a[n-35] + 2290a[n-34] + 2329a[n-33] \\
& + 2293a[n-32] + 2191a[n-31] + 2029a[n-30] + 1822a[n-29] + 1576a[n-28] + 1306a[n-27] + 1024a[n-26] + 742a[n-25] + 472a[n-24] + 226a[n-23] + 16a[n-22] - 155a[n-21] - 283a[n-20] - 373a[n-19] - \\
& 430a[n-18] - 459a[n-17] - 465a[n-16] - 453a[n-15] - 428a[n-14] - 392a[n-13] - 350a[n-12] - 304a[n-11] - 256a[n-10] - 208a[n-9] - 162a[n-8] - 120a[n-7] - 84a[n-6] - 56a[n-5] - 35a[n-4] - 20a[n-3] - 10a[n-2] - \\
& 4a[n-1]
\end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned}
& - 2x^2 (2x^{113} + 25x^{112} + 151x^{111} + 626x^{110} + 2046x^{109} + 5628x^{108} + 13569x^{107} + 29874x^{106} + 61053x^{105} + 117390x^{104} + 214062x^{103} + 373134x^{102} + 625085x^{101} + 1011124x^{100} \\
& + 1587295x^{99} + 2425780x^{98} + 3619505x^{97} + 5282582x^{96} + 7553233x^{95} + 10596493x^{94} + 14606353x^{93} + 19806715x^{92} + 26446333x^{91} + 34804018x^{90} + 45179400x^{89} + 57895623x^{88} \\
& + 73293717x^{87} + 91725047x^{86} + 113542047x^{85} + 139092036x^{84} + 168707882x^{83} + 202678398x^{82} + 241251807x^{81} + 284621309x^{80} + 332907419x^{79} + 386146502x^{78} + 444276538x^{77} \\
& + 507120706x^{76} + 574382293x^{75} + 645678947x^{74} + 720500151x^{73} + 798202059x^{72} + 878022868x^{71} + 959091582x^{70} + 1040445633x^{69} + 1121054273x^{68} + 1199831660x^{67} \\
& + 1275625463x^{66} + 1347277026x^{65} + 1413661728x^{64} + 1473700719x^{63} + 1526393046x^{62} + 1570834352x^{61} + 1606243784x^{60} + 1631982170x^{59} + 1647589214x^{58} + 1652785631x^{57} \\
& + 1647474848x^{56} + 1631753039x^{55} + 1605903062x^{54} + 1570389514x^{53} + 1525838162x^{52} + 1473024638x^{51} + 1412864050x^{50} + 1346367111x^{49} + 1274617056x^{48} + 1198739598x^{47} \\
& + 1119882827x^{46} + 1039185362x^{45} + 957766515x^{44} + 876689385x^{43} + 796905582x^{42} + 719272824x^{41} + 644549067x^{40} + 573377043x^{39} + 506274931x^{38} + 443635885x^{37} \\
& + 385720594x^{36} + 332669676x^{35} + 284552456x^{34} + 241337759x^{33} + 202902817x^{32} + 169052295x^{31} + 139534020x^{30} + 114050932x^{29} + 92278332x^{28} + 73877103x^{27} + 58488331x^{26} \\
& + 45760437x^{25} + 35355591x^{24} + 26952680x^{23} + 20253214x^{22} + 14985517x^{21} + 10907139x^{20} + 7799233x^{19} + 5473279x^{18} + 3763835x^{17} + 2532050x^{16} + 1663619x^{15} + 1065946x^{14} \\
& + 665083x^{13} + 402724x^{12} + 235897x^{11} + 132654x^{10} + 71190x^9 + 36238x^8 + 17301x^7 + 7698x^6 + 3141x^5 + 1164x^4 + 354x^3 + 82x^2 + 13x + 1) / ((x-1)^5 (x+1)^3 (x^2+1)^3 (x^2+x+1)^3 (x^4+1)^3 (x^4+x^3+x^2+x+1)^3 (x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)^3 (x^16+x^15+x^14+x^13+x^12+x^11+x^10+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^3)
\end{aligned}$$

Two [1,5] riders on an $n \times n$ toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=1560

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}n^2 \left(114 \binom{n}{2} + 4 \binom{n}{4} + 36 \binom{n+1}{4} + 8 \binom{n}{6} + 32 \binom{n+1}{6} - 4 \binom{n+2}{6} + 12 \binom{n+3}{6} + 8 \binom{n}{8} + 8 \binom{n+3}{8} + 16 \binom{n}{10} + 16 \binom{n+1}{10} + 16 \binom{n+3}{10} - 8 \binom{n+4}{10} \right. \\
& + 24 \binom{n+5}{10} + 16 \binom{n+7}{10} + 24 \binom{n}{12} - 24 \binom{n+1}{12} + 24 \binom{n+3}{12} + 48 \binom{n}{13} + 48 \binom{n+1}{13} + 48 \binom{n+3}{13} + 48 \binom{n+5}{13} + 48 \binom{n+7}{13} + 16 \binom{n+11}{24} \\
& - 16 \binom{n+12}{24} + 48 \binom{n+9}{26} + 48 \binom{n+11}{26} - 24 \binom{n+12}{26} + 24 \binom{n+13}{26} - 48 \binom{n+14}{26} + 48 \binom{n+15}{26} - 48 \binom{n+16}{26} + 48 \binom{n+17}{26} - 48 \binom{n+18}{26} \\
& \left. + 48 \binom{n+19}{26} - 48 \binom{n+20}{26} + 48 \binom{n+21}{26} + 48 \binom{n+23}{26} + n^2 - 115n + 114 \right)
\end{aligned}$$

Recurrence

$$\begin{aligned}
a[n] = & a[n-170] -2a[n-169] +7a[n-168] -12a[n-167] +27a[n-166] -42a[n-165] +77a[n-164] -112a[n-163] +182a[n-162] -252a[n-161] +375a[n-160] -498a[n-159] +693a[n-158] -888a[n-157] \\
& +1173a[n-156] -1458a[n-155] +1848a[n-154] -2238a[n-153] +2743a[n-152] -3248a[n-151] +3874a[n-150] -4500a[n-149] +5250a[n-148] -6000a[n-147] +6872a[n-146] -7744a[n-145] + \\
& 8726a[n-144] -9708a[n-143] +10773a[n-142] -11838a[n-141] +12938a[n-140] -14038a[n-139] +15098a[n-138] -16158a[n-137] +17079a[n-136] -18000a[n-135] +18671a[n-134] -19342a[n-133] \\
& +19652a[n-132] -19962a[n-131] +19812a[n-130] -19662a[n-129] +18977a[n-128] -18292a[n-127] +17024a[n-126] -15756a[n-125] +13878a[n-124] -12000a[n-123] +9503a[n-122] -7006a[n-121] \\
& +3905a[n-120] -804a[n-119] -2853a[n-118] +6510a[n-117] -10630a[n-116] +14750a[n-115] -19180a[n-114] +23610a[n-113] -28131a[n-112] +32652a[n-111] -37000a[n-110] +41348a[n-109] - \\
& 45244a[n-108] +49140a[n-107] -52320a[n-106] +55500a[n-105] -57745a[n-104] +59990a[n-103] -61147a[n-102] +62304a[n-101] -62280a[n-100] +62256a[n-99] -61004a[n-98] +59752a[n-97] - \\
& 57266a[n-96] +54780a[n-95] -51099a[n-94] +47418a[n-93] -42634a[n-92] +37850a[n-91] -32125a[n-90] +26400a[n-89] -19983a[n-88] +13566a[n-87] -6783a[n-86] +6783a[n-84] -13566a[n-83] \\
& +19983a[n-82] -26400a[n-81] +32125a[n-80] -37850a[n-79] +42634a[n-78] -47418a[n-77] +51099a[n-76] -54780a[n-75] +57266a[n-74] -59752a[n-73] +61004a[n-72] -62256a[n-71] + \\
& 62280a[n-70] -62304a[n-69] +61147a[n-68] -59990a[n-67] +57745a[n-66] -55500a[n-65] +52320a[n-64] -49140a[n-63] +45244a[n-62] -41348a[n-61] +37000a[n-60] -32652a[n-59] +28131a[n-58] \\
& -23610a[n-57] +19180a[n-56] -14750a[n-55] +10630a[n-54] -6510a[n-53] +2853a[n-52] +804a[n-51] -3905a[n-50] +7006a[n-49] -9503a[n-48] +12000a[n-47] -13878a[n-46] +15756a[n-45] - \\
& 17024a[n-44] +18292a[n-43] -18977a[n-42] +19662a[n-41] -19812a[n-40] +19962a[n-39] -19652a[n-38] +19342a[n-37] -18671a[n-36] +18000a[n-35] -17079a[n-34] +16158a[n-33] -15098a[n-32] \\
& +14038a[n-31] -12938a[n-30] +11838a[n-29] -10773a[n-28] +9708a[n-27] -8726a[n-26] +7744a[n-25] -6872a[n-24] +6000a[n-23] -5250a[n-22] +4500a[n-21] -3874a[n-20] +3248a[n-19] - \\
& 2743a[n-18] +2238a[n-17] -1848a[n-16] +1458a[n-15] -1173a[n-14] +888a[n-13] -693a[n-12] +498a[n-11] -375a[n-10] +252a[n-9] -182a[n-8] +112a[n-7] -77a[n-6] +42a[n-5] -27a[n-4] +12a[n-3] - \\
& 7a[n-2] +2a[n-1]
\end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned}
& -2x^2(2x^{167+14}x^{166+41}x^{165+144}x^{164+293}x^{163+788}x^{162+1181}x^{161+3378}x^{160+3324}x^{159+11970}x^{158+6973}x^{157+36526}x^{156+11224}x^{155+95550}x^{154+15069} \\
& x^{153+218846}x^{152+18074}x^{151+451508}x^{150+20828}x^{149+859744}x^{148+24082}x^{147+1534772}x^{146+29684}x^{145+2607152}x^{144+25120}x^{143+4274820}x^{142+43980} \\
& x^{141+6834908}x^{140+299518}x^{139+10714514}x^{138+959109}x^{137+16507958}x^{136+2371450}x^{135+24987856}x^{134+5006834}x^{133+37072564}x^{132+9415720}x^{131+53778634}x^{130-} \\
& 16182569x^{129+76153710}x^{128+25873386}x^{127+105196908}x^{126+38971598}x^{125+141793096}x^{124+55853684}x^{123+186668928}x^{122+76770532}x^{121+240350156}x^{120+101868864} \\
& x^{119+303127974}x^{118-131138547}x^{117+374992476}x^{116-164392129}x^{115+455577416}x^{114-201233353}x^{113+544110488}x^{112-241041121}x^{111+639350888}x^{110-282873863} \\
& x^{109+739605214}x^{108-325634468}x^{107+842851018}x^{106-368160227}x^{105+946855828}x^{104-409325721}x^{103+1049299542}x^{102-448132218}x^{101+1147944004}x^{100-483877592} \\
& x^{99+1240716916}x^{98-516067900}x^{97+1325754932}x^{96-544423542}x^{95+1401412576}x^{94-568820654}x^{93+1466264680}x^{92-589242156}x^{91+1519095246}x^{90-605692677} \\
& x^{89+1558922454}x^{88-618202224}x^{87+1584988266}x^{86-626776157}x^{85+1596802810}x^{84-631401726}x^{83+1594173214}x^{82-632021783}x^{81+1577180874}x^{80-628531416} \\
& x^{79+1546177062}x^{78-620790019}x^{77+1501797354}x^{76-608655330}x^{75+1444925896}x^{74-591982850}x^{73+1376646088}x^{72-570679790}x^{71+1298247932}x^{70-544703644} \\
& x^{69+1211201452}x^{68-514148216}x^{67+1117167436}x^{66-479292436}x^{65+1017995634}x^{64-440657829}x^{63+915717520}x^{62-399000095}x^{61+812506150}x^{60-355393848} \\
& x^{59+710596714}x^{58-311057483}x^{57+612122756}x^{56-267257503}x^{55+519000296}x^{54-225198995}x^{53+432815324}x^{52-185929411}x^{51+354706044}x^{50-150168423}x^{49+285351438} \\
& x^{48-118399870}x^{47+225036656}x^{46-90885532}x^{45+173704428}x^{44-67695440}x^{43+131011060}x^{42-48727962}x^{41+96393048}x^{40-33762696}x^{39+69100302}x^{38-22439699} \\
& x^{37+48237934}x^{36-14279294}x^{35+32808748}x^{34-8708234}x^{33+21776872}x^{32-5126176}x^{31+14144858}x^{30-2960779}x^{29+9018122}x^{28-1716508}x^{27+5649968}x^{26-1018416} \\
& x^{25+3472056}x^{24-623424}x^{23+2081852}x^{22-386116}x^{21+1204472}x^{20-231218}x^{19+661444}x^{18-128220}x^{17+338720}x^{16-63940}x^{15+158654}x^{14-26997}x^{13+65778}x^{12-8600} \\
& x^{11+23098}x^{10-1445}x^9+6570x^8+192x^7+1506x^6+205x^5+260x^4+59x^3+36x^2+5x+2) / \\
& ((x-1)^5(x+1)^3(x^2+1)^3(x^2-x+1)^3(x^2+x+1)^3(x^4+1)^3(x^4-x^2+1)^3(x^4-x^3+x^2-x+1)^3(x^4+x^3+x^2+x+1)^3(x^8-x^4+1)^3(x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6- \\
& x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)^3(x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^3)
\end{aligned}$$

Two [1,6] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=15540

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}n^2 \left(24 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 64 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - 4 \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+1}{7} \right\rfloor + 60 \left\lfloor \frac{n+2}{7} \right\rfloor \right. \\
 & + 12 \left\lfloor \frac{n+3}{7} \right\rfloor + 60 \left\lfloor \frac{n+4}{7} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+5}{7} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 8 \left\lfloor \frac{n+1}{12} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+3}{12} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+11}{35} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+12}{35} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+16}{35} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+17}{35} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+18}{35} \right\rfloor \\
 & + 48 \left\lfloor \frac{n+19}{35} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+21}{35} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+22}{35} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+23}{35} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+24}{35} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+25}{35} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+27}{35} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+28}{35} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+29}{35} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+30}{35} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n}{37} \right\rfloor \\
 & + 72 \left\lfloor \frac{n+1}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+2}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+3}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+4}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+5}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+6}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+7}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+8}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+9}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+10}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+11}{37} \right\rfloor \\
 & + 72 \left\lfloor \frac{n+12}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+13}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+14}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+15}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+16}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+17}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+18}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+19}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+20}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+21}{37} \right\rfloor \\
 & + 72 \left\lfloor \frac{n+22}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+23}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+24}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+25}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+26}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+27}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+28}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+29}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+30}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+31}{37} \right\rfloor \\
 & \left. + 72 \left\lfloor \frac{n+32}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+33}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+34}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+35}{37} \right\rfloor + n^2 - 166n + 165 \right)
 \end{aligned}$$

Recurrence

$ \begin{aligned} a[n] = & a[n-248] + 4a[n-247] + 10a[n-246] + 20a[n-245] + 35a[n-244] + 56a[n-243] + 84a[n-242] + 120a[n-241] + 165a[n-240] + 220a[n-239] + 286a[n-238] + 364a[n-237] + 452a[n-236] + 548a[n-235] \\ & + 650a[n-234] + 756a[n-233] + 864a[n-232] + 972a[n-231] + 1078a[n-230] + 1180a[n-229] + 1276a[n-228] + 1364a[n-227] + 1442a[n-226] + 1508a[n-225] + 1563a[n-224] + 1608a[n-223] + 1644a[n-222] \\ & + 1672a[n-221] + 1693a[n-220] + 1708a[n-219] + 1718a[n-218] + 1724a[n-217] + 1727a[n-216] + 1728a[n-215] + 1728a[n-214] + 1725a[n-213] + 1716a[n-212] + 1695a[n-211] + 1656a[n-210] + \\ & 1593a[n-209] + 1500a[n-208] + 1371a[n-207] + 1200a[n-206] + 981a[n-205] + 708a[n-204] + 375a[n-203] - 24a[n-202] - 486a[n-201] - 1008a[n-200] - 1578a[n-199] - 2184a[n-198] - 2814a[n-197] - \\ & 3456a[n-196] - 4098a[n-195] - 4728a[n-194] - 5334a[n-193] - 5904a[n-192] - 6426a[n-191] - 6888a[n-190] - 7287a[n-189] - 7620a[n-188] - 7893a[n-187] - 8112a[n-186] - 8283a[n-185] - 8412a[n-184] - \\ & 8505a[n-183] - 8568a[n-182] - 8607a[n-181] - 8628a[n-180] - 8637a[n-179] - 8637a[n-178] - 8628a[n-177] - 8601a[n-176] - 8544a[n-175] - 8442a[n-174] - 8280a[n-173] - 8043a[n-172] - 7716a[n-171] - \\ & 7284a[n-170] - 6732a[n-169] - 6045a[n-168] - 5208a[n-167] - 4215a[n-166] - 3060a[n-165] - 1764a[n-164] - 348a[n-163] + 1158a[n-162] + 2724a[n-161] + 4320a[n-160] + 5916a[n-159] + 7482a[n-158] \\ & + 8988a[n-157] + 10404a[n-156] + 11700a[n-155] + 12855a[n-154] + 13848a[n-153] + 14685a[n-152] + 15372a[n-151] + 15924a[n-150] + 16356a[n-149] + 16683a[n-148] + 16920a[n-147] + \\ & 17082a[n-146] + 17184a[n-145] + 17241a[n-144] + 17267a[n-143] + 17273a[n-142] + 17261a[n-141] + 17224a[n-140] + 17146a[n-139] + 17008a[n-138] + 16790a[n-137] + 16472a[n-136] + \\ & 16034a[n-135] + 15456a[n-134] + 14718a[n-133] + 13800a[n-132] + 12685a[n-131] + 11356a[n-130] + 9823a[n-129] + 8096a[n-128] + 6212a[n-127] + 4208a[n-126] + 2124a[n-125] - 2124a[n-123] - \\ & 4208a[n-122] - 6212a[n-121] - 8096a[n-120] - 9823a[n-119] - 11356a[n-118] - 12685a[n-117] - 13800a[n-116] - 14718a[n-115] - 15456a[n-114] - 16034a[n-113] - 16472a[n-112] - 16790a[n-111] - \\ & 17008a[n-110] - 17146a[n-109] - 17224a[n-108] - 17261a[n-107] - 17273a[n-106] - 17267a[n-105] - 17241a[n-104] - 17184a[n-103] - 17082a[n-102] - 16920a[n-101] - 16683a[n-100] - 16356a[n-99] - \\ & 15924a[n-98] - 15372a[n-97] - 14685a[n-96] - 13848a[n-95] - 12855a[n-94] - 11700a[n-93] - 10404a[n-92] - 8988a[n-91] - 7482a[n-90] - 5916a[n-89] - 4320a[n-88] - 2724a[n-87] - 1158a[n-86] + \\ & 348a[n-85] + 1764a[n-84] + 3060a[n-83] + 4215a[n-82] + 5208a[n-81] + 6045a[n-80] + 6732a[n-79] + 7284a[n-78] + 7716a[n-77] + 8043a[n-76] + 8280a[n-75] + 8442a[n-74] + 8544a[n-73] + \\ & 8601a[n-72] + 8628a[n-71] + 8637a[n-70] + 8637a[n-69] + 8628a[n-68] + 8607a[n-67] + 8568a[n-66] + 8505a[n-65] + 8412a[n-64] + 8283a[n-63] + 8112a[n-62] + 7893a[n-61] + 7620a[n-60] + \\ & 7287a[n-59] + 6888a[n-58] + 6426a[n-57] + 5904a[n-56] + 5334a[n-55] + 4728a[n-54] + 4098a[n-53] + 3456a[n-52] + 2814a[n-51] + 2184a[n-50] + 1578a[n-49] + 1008a[n-48] + 486a[n-47] + 24a[n-46] - \\ & 375a[n-45] - 708a[n-44] - 981a[n-43] - 1200a[n-42] - 1371a[n-41] - 1500a[n-40] - 1593a[n-39] - 1656a[n-38] - 1695a[n-37] - 1716a[n-36] - 1725a[n-35] - 1728a[n-34] - 1728a[n-33] - 1727a[n-32] - \\ & 1724a[n-31] - 1718a[n-30] - 1708a[n-29] - 1693a[n-28] - 1672a[n-27] - 1644a[n-26] - 1608a[n-25] - 1563a[n-24] - 1508a[n-23] - 1442a[n-22] - 1364a[n-21] - 1276a[n-20] - 1180a[n-19] - 1078a[n-18] - \\ & 972a[n-17] - 864a[n-16] - 756a[n-15] - 650a[n-14] - 548a[n-13] - 452a[n-12] - 364a[n-11] - 286a[n-10] - 220a[n-9] - 165a[n-8] - 120a[n-7] - 84a[n-6] - 56a[n-5] - 35a[n-4] - 20a[n-3] - 10a[n-2] - 4a[n-1] \end{aligned} $

Generating function

$-2x^2(2x^{245}+25x^{244}+151x^{243}+626x^{242}+2046x^{241}+5664x^{240}+13860x^{239}+30694x^{238}+62737x^{237}+120385x^{236}+219116x^{235}+382220x^{234}+642445x^{233}+1045669x^{232}+1654456x^{231}+2551934x^{230}+3846191x^{229}+5676473x^{228}+8218355x^{227}+11692072x^{226}+16370302x^{225}+22584065x^{224}+30731659x^{223}+41288314x^{222}+54815874x^{221}+71969356x^{220}+93507160x^{219}+120304742x^{218}+153362418x^{217}+193817313x^{216}+242952195x^{215}+302202988x^{214}+373167544x^{213}+457620572x^{212}+557544230x^{211}+675117662x^{210}+812748213x^{209}+973062525x^{208}+1158916143x^{207}+1373397981x^{206}+1619843272x^{205}+1901841910x^{204}+2223246199x^{203}+2588179865x^{202}+3001048442x^{201}+3466535157x^{200}+3989536891x^{199}+4575228313x^{198}+5228990069x^{197}+5956470929x^{196}+6763570643x^{195}+7656424359x^{194}+8641385307x^{193}+9724995990x^{192}+10913971491x^{191}+12215173537x^{190}+13635556096x^{189}+15182139061x^{188}+16862034434x^{187}+18682345565x^{186}+20650172748x^{185}+22772497846x^{184}+25056160870x^{183}+27507811646x^{182}+30133844519x^{181}+32940364433x^{180}+35933106687x^{179}+395117384411x^{178}+42498071982x^{177}+46079568450x^{176}+49865690371x^{175}+53859495889x^{174}+58063371478x^{173}+62479035707x^{172}+67107423341x^{171}+71948646471x^{170}+77001957325x^{169}+82265692123x^{168}+87737242493x^{167}+93413019605x^{166}+99288386933x^{165}+105357554208x^{164}+111613631454x^{163}+118049035188x^{162}+124655040732x^{161}+131421678799x^{160}+138337840585x^{159}+145391295424x^{158}+152568714392x^{157}+159855697877x^{156}+167236833162x^{155}+174695703919x^{154}+182214950452x^{153}+189776453621x^{152}+197361309377x^{151}+204949493402x^{150}+212520345225x^{149}+220052800938x^{148}+227525395209x^{147}+234916301853x^{146}+242203431370x^{145}+249364549765x^{144}+256377343357x^{143}+263219603675x^{142}+269869338641x^{141}+276304766785x^{140}+282504478839x^{139}+288447684555x^{138}+294114195975x^{137}+299484434510x^{136}+304539561353x^{135}+309261668497x^{134}+313633845025x^{133}+317640274660x^{132}+321266335158x^{131}+324498638045x^{130}+327325095539x^{129}+329735072214x^{128}+331719421401x^{127}+333270565989x^{126}+334382544594x^{125}+335051077200x^{124}+335273617512x^{123}+335049318578x^{122}+334379049096x^{121}+333265383192x^{120}+331712585234x^{119}+329726568597x^{118}+327314906073x^{117}+324486754984x^{116}+321252770891x^{115}+317625043049x^{114}+313616997678x^{113}+309243348148x^{112}+304519932265x^{111}+299463636453x^{110}+294092349041x^{109}+288424855574x^{108}+282480737407x^{107}+276280302759x^{106}+269844393999x^{105}+263194256259x^{104}+256351529879x^{103}+249338266979x^{102}+242176684717x^{101}+234889004029x^{100}+227497456126x^{99}+220024172565x^{98}+212491002327x^{97}+204919449882x^{96}+197330560323x^{95}+189744827042x^{94}+182182157813x^{93}+174661881053x^{92}+167202523162x^{91}+159821336335x^{90}+152534647740x^{89}+145357900493x^{88}+138305486666x^{87}+131390705056x^{86}+124625770423x^{85}+118021774999x^{84}+111588680010x^{83}+105335310804x^{82}+99269357208x^{81}+93397285368x^{80}+87724456673x^{79}+82255589261x^{78}+76994363747x^{77}+71943379243x^{76}+67104267679x^{75}+62477767695x^{74}+58063765721x^{73}+53861328515x^{72}+49868762182x^{71}+46083651337x^{70}+42502899229x^{69}+39122844354x^{68}+35939257038x^{67}+32947252821x^{66}+30141468375x^{65}+27516168557x^{64}+25065282719x^{63}+22782420812x^{62}+20660925142x^{61}+18693949486x^{60}+16874491452x^{59}+15195455711x^{58}+13649699690x^{57}+12230053705x^{56}+10929432328x^{55}+9740824009x^{54}+8657386299x^{53}+7672413426x^{52}+6779355795x^{51}+5971867143x^{50}+5243822939x^{49}+4589329397x^{48}+4002744605x^{47}+3478688305x^{46}+3012050227x^{45}+2598000417x^{44}+2231920850x^{43}+1909471703x^{42}+1626522439x^{41}+1379211838x^{40}+1163948824x^{39}+977399439x^{38}+816475767x^{37}+678326625x^{36}+560328093x^{35}+460069796x^{34}+375349958x^{33}+304165532x^{32}+244720984x^{31}+195397036x^{30}+154761125x^{29}+121536825x^{28}+94588956x^{27}+72914886x^{26}+55637140x^{25}+41994748x^{24}+31331550x^{23}+23088730x^{22}+16791577x^{21}+12039817x^{20}+8501716x^{19}+5905192x^{18}+4029093x^{17}+2695313x^{16}+1764041x^{15}+1127198x^{14}+701374x^{13}+423949x^{12}+248187x^{11}+140108x^{10}+75830x^9+39161x^8+18979x^7+8518x^6+3432x^5+1200x^4+354x^3+82x^2+13x+1)/$
 $((x-1)^5(x+1)^3(x^2+1)^3(x^2-x+1)^3(x^2+x+1)^3(x^4-x^2+1)^3(x^4+x^3+x^2+x+1)^3(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^3(x^{24}-x^{23}+x^{19}-x^{18}+x^{17}-x^{16}+x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^8+x^7-x^6+x^5-x+1)^3(x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}+x^{30}+x^{29}+x^{28}+x^{27}+x^{26}+x^{25}+x^{24}+x^{23}+x^{22}+x^{21}+x^{20}+x^{19}+x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^3)$

Two [1,7] riders on an $n \times n$ toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=8400

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}n^2 \left(218 \binom{n}{2} + 4 \binom{n}{4} + 84 \binom{n+1}{4} + 8 \binom{n}{6} + 64 \binom{n+1}{6} - 4 \binom{n+2}{6} + 12 \binom{n+3}{6} - 24 \binom{n}{8} + 24 \binom{n+3}{8} + 96 \binom{n}{10} + 96 \binom{n+1}{10} + 96 \binom{n+3}{10} - 48 \binom{n+4}{10} \right. \\
& + 144 \binom{n+5}{10} + 96 \binom{n+7}{10} + 56 \binom{n}{12} - 56 \binom{n+1}{12} + 56 \binom{n+3}{12} + 24 \binom{n}{14} + 24 \binom{n+1}{14} + 24 \binom{n+3}{14} + 24 \binom{n+5}{14} - 12 \binom{n+6}{14} + 36 \binom{n+7}{14} \\
& + 24 \binom{n+9}{14} + 24 \binom{n+11}{14} + 48 \binom{n}{16} + 48 \binom{n+7}{16} - 32 \binom{n+7}{24} + 32 \binom{n+8}{24} + 48 \binom{n+11}{24} - 48 \binom{n+12}{24} + 40 \binom{n+4}{25} - 40 \binom{n+5}{25} \\
& + 80 \binom{n+9}{25} - 80 \binom{n+10}{25} + 40 \binom{n+14}{25} - 40 \binom{n+15}{25} + 80 \binom{n+19}{25} - 80 \binom{n+20}{25} + 32 \binom{n+31}{48} - 32 \binom{n+32}{48} - 32 \binom{n+39}{48} + 32 \binom{n+40}{48} \\
& \left. + 40 \binom{n+29}{50} - 40 \binom{n+30}{50} - 40 \binom{n+34}{50} + 40 \binom{n+35}{50} + 40 \binom{n+39}{50} - 40 \binom{n+40}{50} - 40 \binom{n+44}{50} + 40 \binom{n+45}{50} + n^2 - 219n + 218 \right)
\end{aligned}$$

Two [2,2] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=4

$$\frac{1}{8}n^2 \left(4n^2 - 6n + 5 + (2n + 1) * (-1)^n + 2 * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right)$$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left((2n + 1) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n + 1}{4} \right\rfloor - 2n + 2 \right)$$

Recurrence

$$a[n] = a[n-15] - a[n-14] - a[n-13] + a[n-12] - 3a[n-11] + 3a[n-10] + 3a[n-9] - 3a[n-8] + 3a[n-7] - 3a[n-6] - 3a[n-5] + 3a[n-4] - a[n-3] + a[n-2] + a[n-1]$$

Generating function

$$\frac{2x^2(x^{12} + 6x^{11} + 28x^{10} + 46x^9 + 105x^8 + 92x^7 + 176x^6 + 100x^5 + 123x^4 + 38x^3 + 44x^2 + 6x + 3)}{(x-1)^5(x+1)^4(x^2+1)^3}$$

Two [2,3] riders (Zebrariders) on a toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=780

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - 4n + \frac{2167}{195} + \frac{10(-1)^n}{3} + \frac{10}{3} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{16}{5} \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{16}{5} \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + \frac{4}{3} \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) + \frac{8}{3} \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{16}{3} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{4}{3} \cos\left(\frac{5\pi n}{6}\right) \right. \\ \left. + \frac{48}{13} * \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{13}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{13}\right) + \cos\left(\frac{6\pi n}{13}\right) + \cos\left(\frac{8\pi n}{13}\right) + \cos\left(\frac{10\pi n}{13}\right) + \cos\left(\frac{12\pi n}{13}\right) \right) \right) \end{aligned}$$

Suma na posledním řádku nabývá pouze dvou hodnot

$$\sum_{j=1}^6 \cos\left(\frac{2\pi j n}{13}\right) = 6$$

pouze pro $n=13k$ (násobky 13)

$$\sum_{j=1}^6 \cos\left(\frac{2\pi j n}{13}\right) = -\frac{1}{2}$$

pro všechna ostatní n

Mimoходом pro $\cos\left(\frac{2\pi}{13}\right)$ platí, že ač je reálným kořenem algebraické rovnice, nelze jej algebraicky vyjádřit bez pomoci komplexních čísel, možný rozklad je tento:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{13}\right) = \frac{1}{6} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(26 - 5\sqrt{13} + 3i\sqrt{39})} + \frac{1}{6} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(26 - 5\sqrt{13} - 3i\sqrt{39})} + \frac{\sqrt{13}}{12} - \frac{1}{12}$$

Alternative formula

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}n^2 \left(24 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - 4 \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 8 \left\lfloor \frac{n+1}{12} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+3}{12} \right\rfloor \right. \\ & + 48 \left\lfloor \frac{n}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+1}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+2}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+3}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+4}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+5}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+6}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+7}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+8}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+9}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+10}{13} \right\rfloor \\ & \left. + 24 \left\lfloor \frac{n+11}{13} \right\rfloor + n^2 - 58n + 57 \right) \end{aligned}$$

Recurrence

$$\begin{aligned} a[n] = & a[n-86] + 4a[n-85] + 10a[n-84] + 20a[n-83] + 35a[n-82] + 53a[n-81] + 72a[n-80] + 90a[n-79] + 105a[n-78] + 115a[n-77] + 121a[n-76] + 124a[n-75] + 122a[n-74] + 110a[n-73] + 83a[n-72] + \\ & 35a[n-71] - 40a[n-70] - 139a[n-69] - 250a[n-68] - 361a[n-67] - 460a[n-66] - 535a[n-65] - 583a[n-64] - 610a[n-63] - 619a[n-62] - 604a[n-61] - 556a[n-60] - 463a[n-59] - 310a[n-58] - 91a[n-57] + 173a[n-56] \\ & + 452a[n-55] + 716a[n-54] + 935a[n-53] + 1088a[n-52] + 1181a[n-51] + 1228a[n-50] + 1234a[n-49] + 1195a[n-48] + 1103a[n-47] + 941a[n-46] + 692a[n-45] + 366a[n-44] - 366a[n-42] - 692a[n-41] - \\ & 941a[n-40] - 1103a[n-39] - 1195a[n-38] - 1234a[n-37] - 1228a[n-36] - 1181a[n-35] - 1088a[n-34] - 935a[n-33] - 716a[n-32] - 452a[n-31] - 173a[n-30] + 91a[n-29] + 310a[n-28] + 463a[n-27] + 556a[n-26] \\ & + 604a[n-25] + 619a[n-24] + 610a[n-23] + 583a[n-22] + 535a[n-21] + 460a[n-20] + 361a[n-19] + 250a[n-18] + 139a[n-17] + 40a[n-16] - 35a[n-15] - 83a[n-14] - 110a[n-13] - 122a[n-12] - 124a[n-11] - \\ & 121a[n-10] - 115a[n-9] - 105a[n-8] - 90a[n-7] - 72a[n-6] - 53a[n-5] - 35a[n-4] - 20a[n-3] - 10a[n-2] - 4a[n-1] \end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned} & - 2x^2 (2x^{83} + 25x^{82} + 151x^{81} + 626x^{80} + 2046x^{79} + 5658x^{78} + 13638x^{77} + 29653x^{76} + 59389x^{75} + 111307x^{74} + 196985x^{73} + 332924x^{72} + 541246x^{71} + 849568x^{70} + 1291717x^{69} + \\ & 1908618x^{68} + 2745151x^{67} + 3849865x^{66} + 5275869x^{65} + 7079212x^{64} + 9315487x^{63} + 12040148x^{62} + 15303864x^{61} + 19149690x^{60} + 23601737x^{59} + 28669496x^{58} + 34341386x^{57} + \\ & 40582966x^{56} + 47329955x^{55} + 54508610x^{54} + 62013100x^{53} + 69713081x^{52} + 77456276x^{51} + 85079133x^{50} + 92391106x^{49} + 99206599x^{48} + 105343147x^{47} + 110630282x^{46} + \\ & 114913319x^{45} + 118069096x^{44} + 120000020x^{43} + 120644729x^{42} + 119980752x^{41} + 118028699x^{40} + 114848624x^{39} + 110539350x^{38} + 105230441x^{37} + 99076574x^{36} + 92244899x^{35} + \\ & 84919855x^{34} + 77286946x^{33} + 69529019x^{32} + 61817972x^{31} + 54317717x^{30} + 47154084x^{29} + 40433126x^{28} + 34233569x^{27} + 28607520x^{26} + 23576000x^{25} + 19154156x^{24} + \\ & 15332731x^{23} + 12086190x^{22} + 9375108x^{21} + 7152820x^{20} + 5361001x^{19} + 3940666x^{18} + 2834411x^{17} + 1990165x^{16} + 1359709x^{15} + 900764x^{14} + 577303x^{13} + 357496x^{12} + \\ & 213102x^{11} + 122024x^{10} + 67085x^9 + 35159x^8 + 17263x^7 + 7891x^6 + 3282x^5 + 1200x^4 + 354x^3 + 82x^2 + 13x + 1) / ((x-1)^5 (x+1)^3 (x^2+1)^3 (x^2-x+1)^3 (x^2+x+1)^3 (x^4-x^2+1)^3 \\ & (x^4+x^3+x^2+x+1)^3 (x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^3) \end{aligned}$$

Two [2,4] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=120

$$\frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - 3n + \frac{104}{15} + (n+1) * (-1)^n + 2 * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{8}{3} * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + \frac{16}{5} * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{16}{5} * \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) \right)$$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left((4n+6) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 6 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor - n^2 - 20n + 21 \right)$$

Recurrence

$$a[n] = a[n-45] + 5a[n-44] + 14a[n-43] + 27a[n-42] + 40a[n-41] + 46a[n-40] + 38a[n-39] + 12a[n-38] - 30a[n-37] - 81a[n-36] - 132a[n-35] - 171a[n-34] - 186a[n-33] - 165a[n-32] - 102a[n-31] + 2a[n-30] + 130a[n-29] + 253a[n-28] + 339a[n-27] + 365a[n-26] + 323a[n-25] + 220a[n-24] + 78a[n-23] - 78a[n-22] - 220a[n-21] - 323a[n-20] - 365a[n-19] - 339a[n-18] - 253a[n-17] - 130a[n-16] - 2a[n-15] + 102a[n-14] + 165a[n-13] + 186a[n-12] + 171a[n-11] + 132a[n-10] + 81a[n-9] + 30a[n-8] - 12a[n-7] - 38a[n-6] - 46a[n-5] - 40a[n-4] - 27a[n-3] - 14a[n-2] - 5a[n-1]$$

Generating function

$$\frac{-2x^2(2x^{42}+21x^{41}+146x^{40}+639x^{39}+2189x^{38}+6102x^{37}+14589x^{36}+30684x^{35}+58518x^{34}+102798x^{33}+168676x^{32}+260102x^{31}+379556x^{30}+525582x^{29}+694198x^{28}+877488x^{27}+1066646x^{26}+1248119x^{25}+1407992x^{24}+1529751x^{23}+1602205x^{22}+1616289x^{21}+1571915x^{20}+1472099x^{19}+1328181x^{18}+1152780x^{17}+963359x^{16}+774340x^{15}+599334x^{14}+445116x^{13}+316276x^{12}+213274x^{11}+136146x^{10}+81666x^9+46000x^8+24032x^7+11596x^6+4991x^5+1870x^4+567x^3+139x^2+24x+3)}{(x-1)^5(x+1)^4(x^2+1)^3(x^2+x+1)^3(x^4+1)^3(x^4+x^3+x^2+x+1)^3}$$

Two [2,5] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=12180

$$\frac{1}{2}n^2 \left(40 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + 36 \left\lfloor \frac{n+1}{7} \right\rfloor + 36 \left\lfloor \frac{n+2}{7} \right\rfloor + 36 \left\lfloor \frac{n+3}{7} \right\rfloor + 36 \left\lfloor \frac{n+4}{7} \right\rfloor + 36 \left\lfloor \frac{n+5}{7} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor - 8 \left\lfloor \frac{n+4}{10} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+5}{10} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+7}{10} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+9}{20} \right\rfloor - 16 \left\lfloor \frac{n+10}{20} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+6}{21} \right\rfloor - 24 \left\lfloor \frac{n+7}{21} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+13}{21} \right\rfloor - 24 \left\lfloor \frac{n+14}{21} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+1}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+2}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+3}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+4}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+5}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+6}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+7}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+8}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+9}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+10}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+11}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+12}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+13}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+14}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+15}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+16}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+17}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+18}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+19}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+20}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+21}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+22}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+23}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+24}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+25}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+26}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+27}{29} \right\rfloor + n^2 - 138n + 137 \right)$$

Recurrence

$$\begin{aligned}
a[n] = & a[n-206] + 4a[n-205] + 10a[n-204] + 20a[n-203] + 35a[n-202] + 56a[n-201] + 84a[n-200] + 120a[n-199] + 165a[n-198] + 220a[n-197] + 286a[n-196] + 364a[n-195] + 455a[n-194] + 560a[n-193] \\
& + 680a[n-192] + 816a[n-191] + 969a[n-190] + 1140a[n-189] + 1330a[n-188] + 1540a[n-187] + 1768a[n-186] + 2009a[n-185] + 2258a[n-184] + 2510a[n-183] + 2760a[n-182] + 3003a[n-181] + \\
& 3234a[n-180] + 3448a[n-179] + 3640a[n-178] + 3802a[n-177] + 3926a[n-176] + 4004a[n-175] + 4028a[n-174] + 3990a[n-173] + 3882a[n-172] + 3696a[n-171] + 3424a[n-170] + 3058a[n-169] + \\
& 2590a[n-168] + 2012a[n-167] + 1319a[n-166] + 515a[n-165] - 393a[n-164] - 1398a[n-163] - 2493a[n-162] - 3671a[n-161] - 4925a[n-160] - 6248a[n-159] - 7633a[n-158] - 9064a[n-157] - 10516a[n-156] - \\
& 11964a[n-155] - 13383a[n-154] - 14748a[n-153] - 16034a[n-152] - 17216a[n-151] - 18269a[n-150] - 19168a[n-149] - 19885a[n-148] - 20392a[n-147] - 20662a[n-146] - 20677a[n-145] - 20428a[n-144] - \\
& 19907a[n-143] - 19106a[n-142] - 18017a[n-141] - 16632a[n-140] - 14943a[n-139] - 12942a[n-138] - 10630a[n-137] - 8035a[n-136] - 5194a[n-135] - 2144a[n-134] + 1078a[n-133] + 4435a[n-132] \\
& + 7890a[n-131] + 11406a[n-130] + 14946a[n-129] + 18464a[n-128] + 21905a[n-127] + 25214a[n-126] + 28339a[n-125] + 31237a[n-124] + 33868a[n-123] + 36192a[n-122] + 38169a[n-121] + \\
& 39759a[n-120] + 40921a[n-119] + 41614a[n-118] + 41800a[n-117] + 41468a[n-116] + 40634a[n-115] + 39317a[n-114] + 37536a[n-113] + 35310a[n-112] + 32658a[n-111] + 29599a[n-110] + \\
& 26152a[n-109] + 22345a[n-108] + 18233a[n-107] + 13880a[n-106] + 9350a[n-105] + 4704a[n-104] - 4704a[n-102] - 9350a[n-101] - 13880a[n-100] - 18233a[n-99] - 22345a[n-98] - 26152a[n-97] - \\
& 29599a[n-96] - 32658a[n-95] - 35310a[n-94] - 37536a[n-93] - 39317a[n-92] - 40634a[n-91] - 41468a[n-90] - 41800a[n-89] - 41614a[n-88] - 40921a[n-87] - 39759a[n-86] - 38169a[n-85] - 36192a[n-84] - \\
& 33868a[n-83] - 31237a[n-82] - 28339a[n-81] - 25214a[n-80] - 21905a[n-79] - 18464a[n-78] - 14946a[n-77] - 11406a[n-76] - 7890a[n-75] - 4435a[n-74] - 1078a[n-73] + 2144a[n-72] + 5194a[n-71] \\
& + 8035a[n-70] + 10630a[n-69] + 12942a[n-68] + 14943a[n-67] + 16632a[n-66] + 18017a[n-65] + 19106a[n-64] + 19907a[n-63] + 20428a[n-62] + 20677a[n-61] + 20662a[n-60] + 20392a[n-59] + \\
& 19885a[n-58] + 19168a[n-57] + 18269a[n-56] + 17216a[n-55] + 16034a[n-54] + 14748a[n-53] + 13383a[n-52] + 11964a[n-51] + 10516a[n-50] + 9064a[n-49] + 7633a[n-48] + 6248a[n-47] + 4925a[n-46] \\
& + 3671a[n-45] + 2493a[n-44] + 1398a[n-43] + 393a[n-42] - 515a[n-41] - 1319a[n-40] - 2012a[n-39] - 2590a[n-38] - 3058a[n-37] - 3424a[n-36] - 3696a[n-35] - 3882a[n-34] - 3990a[n-33] - 4028a[n-32] - \\
& 4004a[n-31] - 3926a[n-30] - 3802a[n-29] - 3640a[n-28] - 3448a[n-27] - 3234a[n-26] - 3003a[n-25] - 2760a[n-24] - 2510a[n-23] - 2258a[n-22] - 2009a[n-21] - 1768a[n-20] - 1540a[n-19] - 1330a[n-18] - \\
& 1140a[n-17] - 969a[n-16] - 816a[n-15] - 680a[n-14] - 560a[n-13] - 455a[n-12] - 364a[n-11] - 286a[n-10] - 220a[n-9] - 165a[n-8] - 120a[n-7] - 84a[n-6] - 56a[n-5] - 35a[n-4] - 20a[n-3] - 10a[n-2] - 4a[n-1]
\end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned}
& - 2 x^2 (2 x^{203+25} x^{202+151} x^{201+626} x^{200+2046} x^{199+5628} x^{198+13716} x^{197+30334} x^{196+62017} x^{195+119325} x^{194+217900} x^{193+380764} x^{192+640403} x^{191+1042484} x^{190+1649549} \\
& x^{189+2545196} x^{188+3839033} x^{187+5673473} x^{186+8230639} x^{185+11744754} x^{184+16512657} x^{183+22900947} x^{182+31358507} x^{181+42432179} x^{180+56782263} x^{179+75198811} x^{178+98620450} \\
& x^{177+128157118} x^{176+165119794} x^{175+211034968} x^{174+267663150} x^{173+337024491} x^{172+421422441} x^{171+523466298} x^{170+646098404} x^{169+792614699} x^{168+966685105} x^{167+1172373527} \\
& x^{166+1414154591} x^{165+1696932647} x^{164+2026022367} x^{163+2407184640} x^{162+2846619731} x^{161+3350961462} x^{160+3927266157} x^{159+4582993965} x^{158+5325982588} x^{157+6164412175} \\
& x^{156+7106720424} x^{155+8161551307} x^{154+9337737472} x^{153+10644243440} x^{152+12090078900} x^{151+13684222347} x^{150+15435523292} x^{149+17352603270} x^{148+19443744945} x^{147+21716804525} \\
& x^{146+24179066502} x^{145+26837139588} x^{144+29696829254} x^{143+32763011184} x^{142+36039513576} x^{141+39528988161} x^{140+43232794619} x^{139+47150895530} x^{138+51281754546} x^{137+55622241234} \\
& x^{136+60167561499} x^{135+64911350717} x^{134+69845451614} x^{133+74959866662} x^{132+80242730828} x^{131+85680308966} x^{130+91257018734} x^{129+96955463121} x^{128+102756497056} \\
& x^{127+108639270883} x^{126+114581330298} x^{125+120558779926} x^{124+126546389248} x^{123+132517806307} x^{122+138445685856} x^{121+144301910784} x^{120+150057800216} x^{119+155684330254} \\
& x^{118+161152347595} x^{117+166432835127} x^{116+171497129078} x^{115+176317075490} x^{114+180865289718} x^{113+185115490738} x^{112+189042750562} x^{111+192623736562} x^{110+195836914181} \\
& x^{109+198662744075} x^{108+201083867933} x^{107+203085347212} x^{106+204654772231} x^{105+205782422445} x^{104+206461281487} x^{103+206687121313} x^{102+206458542546} x^{101+205776978355} \\
& x^{100+204646691407} x^{99+203074720583} x^{98+201070821463} x^{97+198647371744} x^{96+195819234987} x^{95+192603696359} x^{94+189020256785} x^{93+185090482546} x^{92+180837729874} \\
& x^{91+176286927346} x^{90+171464352068} x^{89+166397405630} x^{88+161114356016} x^{87+155644078219} x^{86+150015715981} x^{85+144258424504} x^{84+138401222216} x^{83+132472787484} x^{82+126501212016} \\
& x^{81+120513810887} x^{80+114536929606} x^{79+108595767508} x^{78+102714191024} x^{77+96914642947} x^{76+91217968330} x^{75+85643349741} x^{74+80208185792} x^{73+74928033590} x^{72+69816607380} \\
& x^{71+64885753322} x^{70+60145457174} x^{69+55603859965} x^{68+51267297129} x^{67+47140359774} x^{66+43225973352} x^{65+39525647468} x^{64+36039406757} x^{63+32765880745} x^{62+29702415642} \\
& x^{61+26845189254} x^{60+24189325660} x^{59+21729017064} x^{58+19457655780} x^{57+17367951769} x^{56+15452055981} x^{55+13701681786} x^{54+12108200490} x^{53+10662775863} x^{52+9356439138} \\
& x^{51+8180185772} x^{50+7125059056} x^{49+6182231575} x^{48+5343064592} x^{47+4599177427} x^{46+3942486886} x^{45+3365207737} x^{44+2859887397} x^{43+2419474968} x^{42+2037341309} x^{41+1707291186} \\
& x^{40+1423568823} x^{39+1180856911} x^{38+974271545} x^{37+799359431} x^{36+652053683} x^{35+528686279} x^{34+425963426} x^{33+340944414} x^{32+271018335} x^{31+213881451} x^{30+167515328} \\
& x^{29+130159168} x^{28+100287532} x^{27+76587602} x^{26+57935032} x^{25+43377367} x^{24+32121861} x^{23+23508305} x^{22+16989053} x^{21+12113105} x^{20+8512803} x^{19+5891346} x^{18+4010093} x^{17+2678921} \\
& x^{16+1751807} x^{15+1118828} x^{14+696053} x^{13+420692} x^{12+246139} x^{11+138652} x^{10+74614} x^9+38101 x^8+18259 x^7+8158 x^6+3288 x^5+1164 x^4+354 x^3+82 x^2+13 x+1) / \\
& ((x-1)^5 (x+1)^3 (x^2+1)^3 (x^2+x+1)^3 (x^4-x^3+x^2-x+1)^3 (x^4+x^3+x^2+x+1)^3 (x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^3 (x^8-x^6+x^4-x^2+1)^3 (x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)^3 \\
& (x^{28}+x^{27}+x^{26}+x^{25}+x^{24}+x^{23}+x^{22}+x^{21}+x^{20}+x^{19}+x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^3)
\end{aligned}$$

Two [2,6] riders on an $n \times n$ toroidal chessboard

Explicit formula (*V. Kotěšovec, 15.12.2010*), period=240

$$\begin{aligned}
 n^2 & \left(\frac{1}{24} (12n^2 - 36n + 101) - \frac{5}{3} \sin\left(\frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{6} \sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi n}{6} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{25} \sqrt{110\sqrt{5} + 325} \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{7\sqrt{5}}{5} + 3\right) \sin\left(\frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \right. \\
 & + \left(3 - \frac{7\sqrt{5}}{5}\right) \sin\left(\frac{3\pi n}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) + \frac{1}{6} \sqrt{3} \sin\left(\frac{5\pi n}{6}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{8}{5} \sqrt{2\sqrt{5} + 5} \sin\left(\frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{5}\right) + \frac{6}{25} \sqrt{10\sqrt{5} + 50} \sin\left(\frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{5}\right) + \frac{4}{25} \sqrt{50 - 10\sqrt{5}} \sin\left(\frac{2\pi n}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) \\
 & + \frac{6}{25} \sqrt{50 - 10\sqrt{5}} \sin\left(\frac{4\pi n}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) + \frac{2}{25} \sqrt{325 - 110\sqrt{5}} \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) - \frac{2}{3} \cos\left(\frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{120} (60n + 149) \cos(\pi n) + \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right) \\
 & + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\pi n}{8}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{5\pi n}{8}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{7\pi n}{8}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{3\sqrt{5}}{5}\right) \cos\left(\frac{3\pi n}{5} + \frac{\pi}{5}\right) - \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + \frac{3}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}\right) \cos\left(\frac{5\pi n}{6} + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{6} \sqrt{3} \cos\left(\frac{5\pi n}{6}\right) \\
 & + \frac{4}{25} \sqrt{10\sqrt{5} + 50} \cos\left(\frac{4\pi n}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) + \frac{8}{5} \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \cos\left(\frac{3\pi n}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + \frac{5}{3} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{2}{5} \cos\left(\frac{\pi n}{10}\right) + \frac{2}{5} \cos\left(\frac{3\pi n}{10}\right) + \frac{2}{5} \cos\left(\frac{7\pi n}{10}\right) + \frac{2}{5} \cos\left(\frac{9\pi n}{10}\right) + \frac{149}{60} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \left. \right)
 \end{aligned}$$

Alternative formula

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} n^2 & \left((4n + 39) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 19 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - 4 \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor - 8 \left\lfloor \frac{n+4}{10} \right\rfloor \right. \\
 & \left. + 24 \left\lfloor \frac{n+5}{10} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+7}{10} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 4 \left\lfloor \frac{n+1}{12} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+3}{12} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+7}{16} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+9}{20} \right\rfloor - 8 \left\lfloor \frac{n+10}{20} \right\rfloor - n^2 - 41n + 42 \right)
 \end{aligned}$$

Recurrence

$ \begin{aligned} a[n] = & a[n-123] - a[n-122] - a[n-121] + a[n-120] + 6a[n-119] - 6a[n-118] - 6a[n-117] + 6a[n-116] + 21a[n-115] - 21a[n-114] - 21a[n-113] + 21a[n-112] + 53a[n-111] - 53a[n-110] - 53a[n-109] + 53a[n-108] \\ & + 105a[n-107] - 105a[n-106] - 105a[n-105] + 105a[n-104] + 168a[n-103] - 168a[n-102] - 168a[n-101] + 168a[n-100] + 216a[n-99] - 216a[n-98] - 216a[n-97] + 216a[n-96] + 210a[n-95] - 210a[n-94] - \\ & 210a[n-93] + 210a[n-92] + 114a[n-91] - 114a[n-90] - 114a[n-89] + 114a[n-88] - 81a[n-87] + 81a[n-86] + 81a[n-85] - 81a[n-84] - 339a[n-83] + 339a[n-82] + 339a[n-81] - 339a[n-80] - 579a[n-79] + \\ & 579a[n-78] + 579a[n-77] - 579a[n-76] - 703a[n-75] + 703a[n-74] + 703a[n-73] - 703a[n-72] - 639a[n-71] + 639a[n-70] + 639a[n-69] - 639a[n-68] - 381a[n-67] + 381a[n-66] + 381a[n-65] - 381a[n-64] \\ & + 381a[n-59] - 381a[n-58] - 381a[n-57] + 381a[n-56] + 639a[n-55] - 639a[n-54] - 639a[n-53] + 639a[n-52] + 703a[n-51] - 703a[n-50] - 703a[n-49] + 703a[n-48] + 579a[n-47] - 579a[n-46] - 579a[n-45] \\ & + 579a[n-44] + 339a[n-43] - 339a[n-42] - 339a[n-41] + 339a[n-40] + 81a[n-39] - 81a[n-38] - 81a[n-37] + 81a[n-36] - 114a[n-35] + 114a[n-34] + 114a[n-33] - 114a[n-32] - 210a[n-31] + 210a[n-30] + \\ & 210a[n-29] - 210a[n-28] - 216a[n-27] + 216a[n-26] + 216a[n-25] - 216a[n-24] - 168a[n-23] + 168a[n-22] + 168a[n-21] - 168a[n-20] - 105a[n-19] + 105a[n-18] + 105a[n-17] - 105a[n-16] - 53a[n-15] + \\ & 53a[n-14] + 53a[n-13] - 53a[n-12] - 21a[n-11] + 21a[n-10] + 21a[n-9] - 21a[n-8] - 6a[n-7] + 6a[n-6] + 6a[n-5] - 6a[n-4] - a[n-3] + a[n-2] + a[n-1] \end{aligned} $
--

Generating function

$ \begin{aligned} & - 2x^2 (2x^{120} + 9x^{119} + 50x^{118} + 48x^{117} + 190x^{116} + 142x^{115} + 555x^{114} + 603x^{113} + 1696x^{112} + 1021x^{111} + 3316x^{110} + 3604x^{109} + 8465x^{108} + 4338x^{107} + 15261x^{106} + 14445x^{105} + 29254x^{104} + 14135x^{103} + 54818x^{102} + 45634x^{101} + 79803x^{100} + 35989x^{99} + 160985x^{98} + 121571x^{97} + 183684x^{96} + 73096x^{95} + 398785x^{94} + 280715x^{93} + 372351x^{92} + 123735x^{91} + 850530x^{90} + 569750x^{89} + 684997x^{88} + 178165x^{87} + 1591147x^{86} + 1024921x^{85} + 1162538x^{84} + 226975x^{83} + 2648879x^{82} + 1647843x^{81} + 1828213x^{80} + 268048x^{79} + 3977483x^{78} + 2379297x^{77} + 2664741x^{76} + 314682x^{75} + 5441872x^{74} + 3111422x^{73} + 3582483x^{72} + 378858x^{71} + 6848606x^{70} + 3713858x^{69} + 4425372x^{68} + 455671x^{67} + 7984404x^{66} + 4082942x^{65} + 5007542x^{64} + 513381x^{63} + 8663007x^{62} + 4169009x^{61} + 5189648x^{60} + 508096x^{59} + 8762817x^{58} + 3981455x^{57} + 4932463x^{56} + 416020x^{55} + 8254794x^{54} + 3567608x^{53} + 4314401x^{52} + 257354x^{51} + 7215570x^{50} + 2993710x^{49} + 3490008x^{48} + 84989x^{47} + 5821346x^{46} + 2334940x^{45} + 2623716x^{44} - 41709x^{43} + 4305561x^{42} + 1671923x^{41} + 1838446x^{40} - 96017x^{39} + 2898687x^{38} + 1080515x^{37} + 1199485x^{36} - 87820x^{35} + 1761361x^{34} + 619123x^{33} + 721705x^{32} - 52127x^{31} + 958742x^{30} + 306306x^{29} + 394515x^{28} - 17901x^{27} + 462323x^{26} + 126745x^{25} + 191200x^{24} + 780x^{23} + 194891x^{22} + 41585x^{21} + 79885x^{20} + 5475x^{19} + 70378x^{18} + 9914x^{17} + 27437x^{16} + 3880x^{15} + 21033x^{14} + 1329x^{13} + 7364x^{12} + 1559x^{11} + 4836x^{10} - 28x^9 + 1443x^8 + 338x^7 + 719x^6 + 7x^5 + 150x^4 + 38x^3 + 44x^2 + 6x + 3) / ((x-1)^5 (x+1)^4 (x^2+1)^3 (x^2-x+1)^3 (x^2+x+1)^3 (x^4+1)^3 (x^4-x^2+1)^3 (x^4-x^3+x^2-x+1)^3 (x^4+x^3+x^2+x+1)^3 (x^8+1)^3 (x^8-x^6+x^4-x^2+1)^3) \end{aligned} $
--

Two [2,7] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=66780

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - 250n + 56 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 36 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + 60 \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+2}{9} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+3}{9} \right\rfloor + 60 \left\lfloor \frac{n+5}{9} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n}{14} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+1}{14} \right\rfloor \right. \\ & + 48 \left\lfloor \frac{n+3}{14} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+5}{14} \right\rfloor - 12 \left\lfloor \frac{n+6}{14} \right\rfloor + 60 \left\lfloor \frac{n+7}{14} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+9}{14} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+11}{14} \right\rfloor + 64 \left\lfloor \frac{n+2}{15} \right\rfloor - 64 \left\lfloor \frac{n+3}{15} \right\rfloor + 64 \left\lfloor \frac{n+4}{15} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+5}{15} \right\rfloor - 16 \left\lfloor \frac{n+6}{15} \right\rfloor + 64 \left\lfloor \frac{n+7}{15} \right\rfloor \\ & + 24 \left\lfloor \frac{n+13}{28} \right\rfloor - 24 \left\lfloor \frac{n+14}{28} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+20}{45} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+21}{45} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+23}{45} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+24}{45} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+29}{45} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+30}{45} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+32}{45} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+33}{45} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+35}{45} \right\rfloor \\ & - 48 \left\lfloor \frac{n+36}{45} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+41}{45} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+42}{45} \right\rfloor + 208 \left\lfloor \frac{n}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+1}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+2}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+3}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+4}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+5}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+6}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+7}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+8}{53} \right\rfloor \\ & + 104 \left\lfloor \frac{n+9}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+10}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+11}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+12}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+13}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+14}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+15}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+16}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+17}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+18}{53} \right\rfloor \\ & + 104 \left\lfloor \frac{n+19}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+20}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+21}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+22}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+23}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+24}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+25}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+26}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+27}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+28}{53} \right\rfloor \\ & + 104 \left\lfloor \frac{n+29}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+30}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+31}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+32}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+33}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+34}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+35}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+36}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+37}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+38}{53} \right\rfloor \\ & + 104 \left\lfloor \frac{n+39}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+40}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+41}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+42}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+43}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+44}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+45}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+46}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+47}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+48}{53} \right\rfloor \\ & \left. + 104 \left\lfloor \frac{n+49}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+50}{53} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+51}{53} \right\rfloor + 249 \right) \end{aligned}$$

Two [3,3] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=6

$$\frac{1}{36}n^2 \left(18n^2 - 28n + 27 + 9 * (-1)^n + 16n * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right)$$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{8}{3}n \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \frac{4}{3}n \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{n^2}{3} - \frac{5n}{3} + 2 \right)$$

Recurrence

$$a[n] = a[n-16] + 2a[n-15] - 6a[n-13] - 9a[n-12] + 14a[n-10] + 16a[n-9] - 16a[n-7] - 14a[n-6] + 9a[n-4] + 6a[n-3] - 2a[n-1]$$

Generating function

$$\frac{-2x^2(x^{13} + 12x^{12} + 47x^{11} + 152x^{10} + 364x^9 + 576x^8 + 687x^7 + 750x^6 + 651x^5 + 380x^4 + 168x^3 + 76x^2 + 22x + 2)}{(x-1)^5(x+1)^3(x^2+x+1)^4}$$

Two [3,4] riders (Anteloperider) on a toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=4200

$$\frac{1}{2}n^2 \left(48 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 36 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - 4 \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+1}{7} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+2}{7} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+3}{7} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+4}{7} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+5}{7} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 24 \left\lfloor \frac{n+1}{12} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+3}{12} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+11}{24} \right\rfloor - 16 \left\lfloor \frac{n+12}{24} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+4}{25} \right\rfloor - 40 \left\lfloor \frac{n+5}{25} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+9}{25} \right\rfloor - 40 \left\lfloor \frac{n+10}{25} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+14}{25} \right\rfloor - 40 \left\lfloor \frac{n+15}{25} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+19}{25} \right\rfloor - 40 \left\lfloor \frac{n+20}{25} \right\rfloor + n^2 - 110n + 109 \right)$$

Recurrence

a[n] = a[n-164] +4a[n-163] +10a[n-162] +20a[n-161] +35a[n-160] +56a[n-159] +84a[n-158] +117a[n-157] +153a[n-156] +190a[n-155] +226a[n-154] +259a[n-153] +287a[n-152] +308a[n-151] +323a[n-150] +333a[n-149] +339a[n-148] +342a[n-147] +343a[n-146] +343a[n-145] +343a[n-144] +343a[n-143] +343a[n-142] +343a[n-141] +340a[n-140] +328a[n-139] +301a[n-138] +253a[n-137] +178a[n-136] +70a[n-135] -77a[n-134] -260a[n-133] -467a[n-132] -686a[n-131] -905a[n-130] -1112a[n-129] -1295a[n-128] -1442a[n-127] -1550a[n-126] -1625a[n-125] -1673a[n-124] -1700a[n-123] -1712a[n-122] -1715a[n-121] -1715a[n-120] -1715a[n-119] -1715a[n-118] -1715a[n-117] -1712a[n-116] -1694a[n-115] -1646a[n-114] -1553a[n-113] -1400a[n-112] -1172a[n-111] -854a[n-110] -440a[n-109] +49a[n-108] +583a[n-107] +1132a[n-106] +1666a[n-105] +2155a[n-104] +2569a[n-103] +2887a[n-102] +3115a[n-101] +3268a[n-100] +3361a[n-99] +3409a[n-98] +3427a[n-97] +3430a[n-96] +3430a[n-95] +3430a[n-94] +3430a[n-93] +3429a[n-92] +3417a[n-91] +3375a[n-90] +3283a[n-89] +3121a[n-88] +2869a[n-87] +2507a[n-86] +2018a[n-85] +1412a[n-84] +726a[n-83] -726a[n-81] -1412a[n-80] -2018a[n-79] -2507a[n-78] -2869a[n-77] -3121a[n-76] -3283a[n-75] -3375a[n-74] -3417a[n-73] -3429a[n-72] -3430a[n-71] -3430a[n-70] -3430a[n-69] -3430a[n-68] -3427a[n-67] -3409a[n-66] -3361a[n-65] -3268a[n-64] -3115a[n-63] -2887a[n-62] -2569a[n-61] -2155a[n-60] -1666a[n-59] -1132a[n-58] -583a[n-57] -49a[n-56] +440a[n-55] +854a[n-54] +1172a[n-53] +1400a[n-52] +1553a[n-51] +1646a[n-50] +1694a[n-49] +1712a[n-48] +1715a[n-47] +1715a[n-46] +1715a[n-45] +1715a[n-44] +1715a[n-43] +1712a[n-42] +1700a[n-41] +1673a[n-40] +1625a[n-39] +1550a[n-38] +1442a[n-37] +1295a[n-36] +1112a[n-35] +905a[n-34] +686a[n-33] +467a[n-32] +260a[n-31] +77a[n-30] -70a[n-29] -178a[n-28] -253a[n-27] -301a[n-26] -328a[n-25] -340a[n-24] -343a[n-23] -343a[n-22] -343a[n-21] -343a[n-20] -343a[n-19] -343a[n-18] -342a[n-17] -339a[n-16] -333a[n-15] -323a[n-14] -308a[n-13] -287a[n-12] -259a[n-11] -226a[n-10] -190a[n-9] -153a[n-8] -117a[n-7] -84a[n-6] -56a[n-5] -35a[n-4] -20a[n-3] -10a[n-2] -4a[n-1]

Generating function

- 2 x^2 (2 x^161+25 x^160+151 x^159+626 x^158+2046 x^157+5664 x^156+13860 x^155+30816 x^154+63174 x^153+121212 x^152+219798 x^151+380562 x^150+632627 x^149+1014916 x^148+1577809 x^147+2385772 x^146+3517995 x^145+5072043 x^144+7162805 x^143+9928449 x^142+13530957 x^141+18156925 x^140+24018285 x^139+31364175 x^138+40480672 x^137+51690417 x^136+65348265 x^135+81846610 x^134+101617510 x^133+125138848 x^132+152907280 x^131+185440494 x^130+223291038 x^129+267046184 x^128+317321152 x^127+374758822 x^126+440002858 x^125+513724292 x^124+596603555 x^123+689313765 x^122+792505490 x^121+906797033 x^120+1032746917 x^119+1170877911 x^118+1321641849 x^117+1485420145 x^116+1662498067 x^115+1853079991 x^114+2057222081 x^113+2274895855 x^112+2505941200 x^111+2750062553 x^110+3006816116 x^109+3275617730 x^108+3555694290 x^107+3846245832 x^106+4146267102 x^105+4454591730 x^104+4769897512 x^103+5090724304 x^102+5415468591 x^101+5742446898 x^100+6069740283 x^99+6395387617 x^98+6717356022 x^97+7033583043 x^96+7341960974 x^95+7640412070 x^94+7926835414 x^93+8199210250 x^92+8455561150 x^91+8694010192 x^90+8912752199 x^89+9110121770 x^88+9284537195 x^87+9434611317 x^86+9559134255 x^85+9657084246 x^84+9727621216 x^83+9770141734 x^82+9784262332 x^81+9769880138 x^80+9727117750 x^79+9656337874 x^78+9558120054 x^77+9433307646 x^76+9282939987 x^75+9108263227 x^74+8910670997 x^73+8691707774 x^72+8453056055 x^71+8196552490 x^70+7924076476 x^69+7637606060 x^68+7339150876 x^67+7030776904 x^66+6714554292 x^65+6392592195 x^64+6066935502 x^63+5739618215 x^62+5412588843 x^61+5087727222 x^60+4766804209 x^59+4451514010 x^58+4143284728 x^57+3843438796 x^56+3553135374 x^55+3273382128 x^54+3005023864 x^53+2748743594 x^52+2505024170 x^51+2274331641 x^50+2056956994 x^49+1853067505 x^48+1662700731 x^47+1485778441 x^46+1322111041 x^45+1171444805 x^44+1033398369 x^43+907530057 x^42+793322627 x^41+690208997 x^40+597571724 x^39+514778137 x^38+441156155 x^37+376021466 x^36+318686654 x^35+268475524 x^34+224738506 x^33+186868866 x^32+154273950 x^31+126399600 x^30+102727838 x^29+82781038 x^28+66119602 x^27+52325960 x^26+41000553 x^25+31787577 x^24+24367910 x^23+18456399 x^22+13796199 x^21+10162967 x^20+7365189 x^19+5244441 x^18+3663519 x^17+2505717 x^16+1674027 x^15+1090606 x^14+690835 x^13+424408 x^12+251755 x^11+143526 x^10+78144 x^9+40402 x^8+19488 x^7+8646 x^6+3432 x^5+1200 x^4+354 x^3+82 x^2+13 x+1) / ((x-1)^5 (x+1)^3 (x^2+1)^3 (x^2-x+1)^3 (x^2+x+1)^3 (x^4+1)^3 (x^4-x^2+1)^3 (x^4+x^3+x^2+x+1)^3 (x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^3 (x^8-x^4+1)^3 (x^20+x^15+x^10+x^5+1)^3)

Two [3,5] riders on an $n \times n$ toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=4080

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}n^2 \left(122 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 28 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - 4 \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 44 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+2}{10} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor \right. \\ & - 40 \left\lfloor \frac{n+4}{10} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+5}{10} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+7}{10} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+2}{15} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+3}{15} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+4}{15} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+6}{15} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+7}{15} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+7}{16} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n}{17} \right\rfloor \\ & + 64 \left\lfloor \frac{n+1}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+2}{17} \right\rfloor + 64 \left\lfloor \frac{n+3}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+4}{17} \right\rfloor + 64 \left\lfloor \frac{n+5}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+6}{17} \right\rfloor + 64 \left\lfloor \frac{n+7}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+8}{17} \right\rfloor + 64 \left\lfloor \frac{n+9}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+10}{17} \right\rfloor \\ & + 64 \left\lfloor \frac{n+11}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+12}{17} \right\rfloor + 64 \left\lfloor \frac{n+13}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+14}{17} \right\rfloor + 64 \left\lfloor \frac{n+15}{17} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+14}{30} \right\rfloor - 16 \left\lfloor \frac{n+15}{30} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+18}{34} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+19}{34} \right\rfloor \\ & - 32 \left\lfloor \frac{n+20}{34} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+21}{34} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+22}{34} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+23}{34} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+24}{34} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+25}{34} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+26}{34} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+27}{34} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+28}{34} \right\rfloor \\ & \left. + 32 \left\lfloor \frac{n+29}{34} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+30}{34} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+31}{34} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+32}{34} \right\rfloor + n^2 - 155n + 154 \right) \end{aligned}$$

Analyzujeme tuto posloupnost. Graf pro tuto funkci je dost nezajímavý, protože funkce se asymptoticky chová jako polynom 4. stupně a platí

$$f_{3,5}(n) \sim \frac{n^4}{2} - 2n^3 + \dots$$

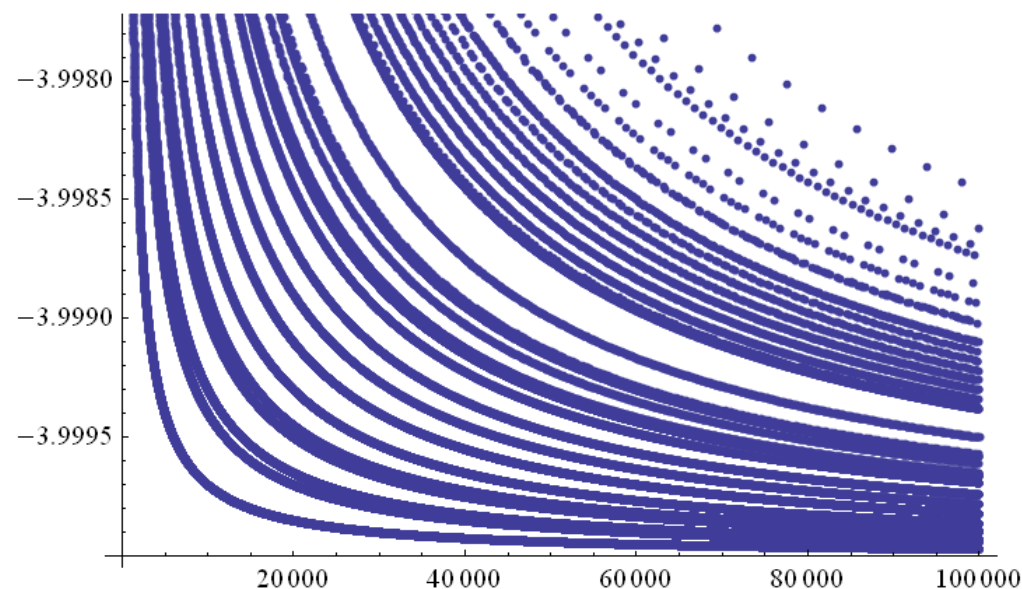
Perioda, tedy taková nejmenší hodnota p , že pro $n = a * p + b$ existuje (při zafixovaném b) vzorec bez kvazipolynomů (zde bez celých částí), je pro tuto posloupnost rovna nejmenšímu společnému násobku dílčích period, tedy

$$p = \text{LCM}(2,4,6,8,10,15,16,17,30,34) = 4080$$

Abychom lépe pochopili anomálie funkce, zobrazme si graf očištěný od „hladké složky“, tedy graf funkce

$$\frac{f_{3,5}(n) * \frac{2}{n^2} - n^2}{n}$$

Tato funkce se pro n jdoucí do nekonečna limitně blíží hodnotě -4 , ale na grafu nádherně vidíme příspěvky jednotlivých členů (které se se zvětšujícím se n stávají tím více zanedbatelnými). „Vrstevnice“ nejvíce nahoře odpovídá [periodě](#) 4080.



Recurrence

$$\begin{aligned}
 a[n] = & a[n-230] - 2a[n-229] + 7a[n-228] - 12a[n-227] + 27a[n-226] - 42a[n-225] + 77a[n-224] - 112a[n-223] + 182a[n-222] - 252a[n-221] + 378a[n-220] - 504a[n-219] + 714a[n-218] - 924a[n-217] \\
 & + 1254a[n-216] - 1584a[n-215] + 2076a[n-214] - 2568a[n-213] + 3268a[n-212] - 3968a[n-211] + 4924a[n-210] - 5880a[n-209] + 7140a[n-208] - 8400a[n-207] + 10010a[n-206] - 11620a[n-205] \\
 & + 13622a[n-204] - 15624a[n-203] + 18054a[n-202] - 20484a[n-201] + 23367a[n-200] - 26250a[n-199] + 29598a[n-198] - 32946a[n-197] + 36753a[n-196] - 40560a[n-195] + 44797a[n-194] - \\
 & 49034a[n-193] + 53644a[n-192] - 58254a[n-191] + 63147a[n-190] - 68040a[n-189] + 73088a[n-188] - 78136a[n-187] + 83168a[n-186] - 88200a[n-185] + 93006a[n-184] - 97812a[n-183] + \\
 & 102146a[n-182] - 106480a[n-181] + 110072a[n-180] - 113664a[n-179] + 116232a[n-178] - 118800a[n-177] + 120062a[n-176] - 121324a[n-175] + 121010a[n-174] - 120696a[n-173] + 118560a[n-172] - \\
 & 116424a[n-171] + 112259a[n-170] - 108094a[n-169] + 101738a[n-168] - 95382a[n-167] + 86733a[n-166] - 78084a[n-165] + 67106a[n-164] - 56128a[n-163] + 42860a[n-162] - 29592a[n-161] \\
 & + 14157a[n-160] + 1278a[n-159] - 18664a[n-158] + 36050a[n-157] - 55069a[n-156] + 74088a[n-155] - 94320a[n-154] + 114552a[n-153] - 135472a[n-152] + 156392a[n-151] - 177394a[n-150] \\
 & + 198396a[n-149] - 218814a[n-148] + 239232a[n-147] - 258370a[n-146] + 277508a[n-145] - 294670a[n-144] + 311832a[n-143] - 326352a[n-142] + 340872a[n-141] - 352145a[n-140] + 363418a[n-139] - \\
 & 370922a[n-138] + 378426a[n-137] - 381753a[n-136] + 385080a[n-135] - 383940a[n-134] + 382800a[n-133] - 377034a[n-132] + 371268a[n-131] - 360852a[n-130] + 350436a[n-129] - 335486a[n-128] \\
 & + 320536a[n-127] - 301313a[n-126] + 282090a[n-125] - 259002a[n-124] + 235914a[n-123] - 209521a[n-122] + 183128a[n-121] - 154120a[n-120] + 125112a[n-119] - 94296a[n-118] + 63480a[n-117] - \\
 & 31740a[n-116] + 31740a[n-114] - 63480a[n-113] + 94296a[n-112] - 125112a[n-111] + 154120a[n-110] - 183128a[n-109] + 209521a[n-108] - 235914a[n-107] + 259002a[n-106] - 282090a[n-105] \\
 & + 301313a[n-104] - 320536a[n-103] + 335486a[n-102] - 350436a[n-101] + 360852a[n-100] - 371268a[n-99] + 377034a[n-98] - 382800a[n-97] + 383940a[n-96] - 385080a[n-95] + 381753a[n-94] - \\
 & 378426a[n-93] + 370922a[n-92] - 363418a[n-91] + 352145a[n-90] - 340872a[n-89] + 326352a[n-88] - 311832a[n-87] + 294670a[n-86] - 277508a[n-85] + 258370a[n-84] - 239232a[n-83] + 218814a[n-82] \\
 & - 198396a[n-81] + 177394a[n-80] - 156392a[n-79] + 135472a[n-78] - 114552a[n-77] + 94320a[n-76] - 74088a[n-75] + 55069a[n-74] - 36050a[n-73] + 18664a[n-72] - 1278a[n-71] - 14157a[n-70] \\
 & + 29592a[n-69] - 42860a[n-68] + 56128a[n-67] - 67106a[n-66] + 78084a[n-65] - 86733a[n-64] + 95382a[n-63] - 101738a[n-62] + 108094a[n-61] - 112259a[n-60] + 116424a[n-59] - 118560a[n-58] \\
 & + 120696a[n-57] - 121010a[n-56] + 121324a[n-55] - 120062a[n-54] + 118800a[n-53] - 116232a[n-52] + 113664a[n-51] - 110072a[n-50] + 106480a[n-49] - 102146a[n-48] + 97812a[n-47] - 93006a[n-46] \\
 & + 88200a[n-45] - 83168a[n-44] + 78136a[n-43] - 73088a[n-42] + 68040a[n-41] - 63147a[n-40] + 58254a[n-39] - 53644a[n-38] + 49034a[n-37] - 44797a[n-36] + 40560a[n-35] - 36753a[n-34] + \\
 & 32946a[n-33] - 29598a[n-32] + 26250a[n-31] - 23367a[n-30] + 20484a[n-29] - 18054a[n-28] + 15624a[n-27] - 13622a[n-26] + 11620a[n-25] - 10010a[n-24] + 8400a[n-23] - 7140a[n-22] + 5880a[n-21] - \\
 & 4924a[n-20] + 3968a[n-19] - 3268a[n-18] + 2568a[n-17] - 2076a[n-16] + 1584a[n-15] - 1254a[n-14] + 924a[n-13] - 714a[n-12] + 504a[n-11] - 378a[n-10] + 252a[n-9] - 182a[n-8] + 112a[n-7] - 77a[n-6] \\
 & + 42a[n-5] - 27a[n-4] + 12a[n-3] - 7a[n-2] + 2a[n-1]
 \end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned}
 & - 2 x^2 (2 x^{227} + 14 x^{226} + 41 x^{225} + 144 x^{224} + 293 x^{223} + 788 x^{222} + 1181 x^{221} + 3378 x^{220} + 3324 x^{219} + 11970 x^{218} + 6979 x^{217} + 36280 x^{216} + 10909 x^{215} + 95994 x^{214} + 13206 x^{213} + 224826 \\
 & x^{212} + 12893 x^{211} + 473756 x^{210} + 13051 x^{209} + 918478 x^{208} + 20878 x^{207} + 1669678 x^{206} + 49055 x^{205} + 2887124 x^{204} + 114083 x^{203} + 4794546 x^{202} + 239292 x^{201} + 7692950 x^{200} + 460079 \\
 & x^{199} + 11987456 x^{198} + 799607 x^{197} + 18239132 x^{196} + 1230551 x^{195} + 27247612 x^{194} + 1600345 x^{193} + 40143490 x^{192} + 1561926 x^{191} + 58479924 x^{190} + 504726 x^{189} + 84321906 x^{188} - 2521017 \\
 & x^{187} + 120344664 x^{186} - 8892885 x^{185} + 169935754 x^{184} - 20499020 x^{183} + 237228326 x^{182} - 39726983 x^{181} + 327090388 x^{180} - 69463875 x^{179} + 445055922 x^{178} - 112982784 x^{177} + 597171350 x^{176} - \\
 & 173814453 x^{175} + 789818172 x^{174} - 255609417 x^{173} + 1029511786 x^{172} - 361978184 x^{171} + 1322653006 x^{170} - 496297943 x^{169} + 1675271392 x^{168} - 661585245 x^{167} + 2092871168 x^{166} - 860449417 \\
 & x^{165} + 2580163044 x^{164} - 1094808895 x^{163} + 3140691710 x^{162} - 1365703014 x^{161} + 3776609094 x^{160} - 1673213685 x^{159} + 4488492516 x^{158} - 2016394109 x^{157} + 5275181704 x^{156} - 2393236445 \\
 & x^{155} + 6133656620 x^{154} - 2800637767 x^{153} + 7058861778 x^{152} - 3234223848 x^{151} + 8043403158 x^{150} - 3688149037 x^{149} + 9077657180 x^{148} - 4155614593 x^{147} + 10150312938 x^{146} - 4629353704 \\
 & x^{145} + 11248740494 x^{144} - 5101898401 x^{143} + 12359291616 x^{142} - 5565840849 x^{141} + 13467636530 x^{140} - 6014082402 x^{139} + 14559144330 x^{138} - 6440151405 x^{137} + 15619435958 x^{136} - 6838723726 \\
 & x^{135} + 16635118024 x^{134} - 7206103166 x^{133} + 17594086636 x^{132} - 7539933004 x^{131} + 18485318212 x^{130} - 7838824952 x^{129} + 19298866416 x^{128} - 8102257020 x^{127} + 20025972540 x^{126} - 8330435018 \\
 & x^{125} + 20659157208 x^{124} - 8524173966 x^{123} + 21192260930 x^{122} - 8684660453 x^{121} + 21620354314 x^{120} - 8813132138 x^{119} + 21939526986 x^{118} - 8910490743 x^{117} + 22146793732 x^{116} - 8977257557 \\
 & x^{115} + 22240258030 x^{114} - 9013620470 x^{113} + 22219161958 x^{112} - 9019386221 x^{111} + 22083886396 x^{110} - 8993988159 x^{109} + 21835939938 x^{108} - 8936500578 x^{107} + 21477936994 x^{106} - 8845707611 \\
 & x^{105} + 21013527590 x^{104} - 8720075484 x^{103} + 20447215872 x^{102} - 8557813546 x^{101} + 19784438964 x^{100} - 8357274672 x^{99} + 19031766432 x^{98} - 8117285564 x^{97} + 18196982044 x^{96} - 7837390660 \\
 & x^{95} + 17289038692 x^{94} - 7517973518 x^{93} + 16317965584 x^{92} - 7160394748 x^{91} + 15294760058 x^{90} - 6767090339 x^{89} + 14231396034 x^{88} - 6341935770 x^{87} + 13141041578 x^{86} - 5890524681 x^{85} + 12037766232 \\
 & x^{84} - 5419675997 x^{83} + 10935820718 x^{82} - 4936898920 x^{81} + 9849099210 x^{80} - 4450059205 x^{79} + 8790775268 x^{78} - 3967113461 x^{77} + 7772981790 x^{76} - 3495831216 x^{75} + 6806526618 x^{74} - 3043512079 \\
 & x^{73} + 5900539508 x^{72} - 2616486219 x^{71} + 5061943468 x^{70} - 2219583479 x^{69} + 4295357124 x^{68} - 1856323413 x^{67} + 3603406662 x^{66} - 1529083870 x^{65} + 2986907918 x^{64} - 1239129835 x^{63} + 2444992620 x^{62} - \\
 & 986642791 x^{61} + 1975273316 x^{60} - 770791051 x^{59} + 1574025256 x^{58} - 589808927 x^{57} + 1236411478 x^{56} - 441187376 x^{55} + 956852146 x^{54} - 321961525 x^{53} + 729288300 x^{52} - 228762213 x^{51} + 547330502 x^{50} - \\
 & 157949184 x^{49} + 404509314 x^{48} - 105810835 x^{47} + 294517156 x^{46} - 68730779 x^{45} + 211402718 x^{44} - 43332452 x^{43} + 149741698 x^{42} - 26613901 x^{41} + 104784144 x^{40} - 16067217 x^{39} + 72517866 x^{38} - 9683448 \\
 & x^{37} + 49674600 x^{36} - 5967836 x^{35} + 33693154 x^{34} - 3860159 x^{33} + 22614700 x^{32} - 2648275 x^{31} + 14982608 x^{30} - 1893811 x^{29} + 9752144 x^{28} - 1363861 x^{27} + 6198446 x^{26} - 961884 x^{25} + 3824202 x^{24} - 652673 \\
 & x^{23} + 2277476 x^{22} - 423505 x^{21} + 1300606 x^{20} - 258986 x^{19} + 704302 x^{18} - 145285 x^{17} + 355388 x^{16} - 72043 x^{15} + 163050 x^{14} - 29562 x^{13} + 65898 x^{12} - 9023 x^{11} + 22816 x^{10} - 1445 x^9 + 6570 x^8 - 192 \\
 & x^7 + 1506 x^6 + 205 x^5 + 260 x^4 + 59 x^3 + 36 x^2 + 5 x + 2) / \\
 & ((x-1)^5 (x+1)^3 (x^2+1)^3 (x^2-x+1)^3 (x^2+x+1)^3 (x^4+1)^3 (x^4-x^3+x^2-x+1)^3 (x^4+x^3+x^2+x+1)^3 (x^8+1)^3 (x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)^3 (x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)^3 (x^{16}-x^{15}+x^{14}- \\
 & x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)^3 (x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^3)
 \end{aligned}$$

Two [3,6] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=180

$$\frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - \frac{28n}{9} + \frac{317}{45} + 2(-1)^n + \left(\frac{16}{9}n + \frac{8}{9} \right) * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 2 * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{16}{5} \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{16}{5} \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + \frac{8}{9} * \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi n}{9}\right) \right) \right)$$

Výraz $\cos\left(\frac{2\pi n}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi n}{9}\right)$ nabývá pouze tři možných hodnot, pro $n=9k$ je roven 3, pro $n=9k+3$ a $n=9k+6$ je roven $-3/2$, jinak je roven 0.

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left(8 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{16n}{3} + 4 \right) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{3} + 4 \right) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+2}{9} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+5}{9} \right\rfloor - \frac{5n^2}{3} - \frac{58n}{3} + 21 \right)$$

Recurrence

$$a[n] = a[n-52] + 5a[n-51] + 15a[n-50] + 34a[n-49] + 62a[n-48] + 93a[n-47] + 115a[n-46] + 113a[n-45] + 75a[n-44] - 2a[n-43] - 109a[n-42] - 228a[n-41] - 339a[n-40] - 423a[n-39] - 462a[n-38] - 439a[n-37] - 338a[n-36] - 150a[n-35] + 113a[n-34] + 412a[n-33] + 687a[n-32] + 875a[n-31] + 931a[n-30] + 843a[n-29] + 632a[n-28] + 337a[n-27] - 337a[n-25] - 632a[n-24] - 843a[n-23] - 931a[n-22] - 875a[n-21] - 687a[n-20] - 412a[n-19] - 113a[n-18] + 150a[n-17] + 338a[n-16] + 439a[n-15] + 462a[n-14] + 423a[n-13] + 339a[n-12] + 228a[n-11] + 109a[n-10] + 2a[n-9] - 75a[n-8] - 113a[n-7] - 115a[n-6] - 93a[n-5] - 62a[n-4] - 34a[n-3] - 15a[n-2] - 5a[n-1]$$

Generating function

$$- 2 x^2 (2 x^{49} + 27 x^{48} + 151 x^{47} + 667 x^{46} + 2412 x^{45} + 7115 x^{44} + 18054 x^{43} + 40792 x^{42} + 83282 x^{41} + 156561 x^{40} + 274705 x^{39} + 453203 x^{38} + 707931 x^{37} + 1053058 x^{36} + 1496462 x^{35} + 2038876 x^{34} + 2673041 x^{33} + 3380349 x^{32} + 4132934 x^{31} + 4896616 x^{30} + 5626869 x^{29} + 6275371 x^{28} + 6797198 x^{27} + 7149588 x^{26} + 7301595 x^{25} + 7242132 x^{24} + 6973905 x^{23} + 6517618 x^{22} + 5912556 x^{21} + 5204651 x^{20} + 4443437 x^{19} + 3679482 x^{18} + 2952700 x^{17} + 2292075 x^{16} + 1718333 x^{15} + 1240354 x^{14} + 858114 x^{13} + 567362 x^{12} + 357115 x^{11} + 212757 x^{10} + 119699 x^9 + 63319 x^8 + 31058 x^7 + 14002 x^6 + 5712 x^5 + 2011 x^4 + 584 x^3 + 141 x^2 + 23 x + 1) / ((x-1)^5 (x+1)^3 (x^2+1)^3 (x^2+x+1)^4 (x^4+x^3+x^2+x+1)^3 (x^6+x^3+1)^3)$$

Two [3,7] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=24360

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - 275n + 218 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 44 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - 4 \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor - 8 \left\lfloor \frac{n+4}{10} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+5}{10} \right\rfloor \right. \\ & - 32 \left\lfloor \frac{n+6}{10} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+7}{10} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n}{14} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+1}{14} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+3}{14} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+5}{14} \right\rfloor - 36 \left\lfloor \frac{n+6}{14} \right\rfloor + 108 \left\lfloor \frac{n+7}{14} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+9}{14} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+11}{14} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+5}{20} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+6}{20} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+7}{20} \right\rfloor \\ & - 32 \left\lfloor \frac{n+8}{20} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+9}{20} \right\rfloor - 16 \left\lfloor \frac{n+10}{20} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+6}{21} \right\rfloor - 24 \left\lfloor \frac{n+7}{21} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+13}{21} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+14}{21} \right\rfloor + 168 \left\lfloor \frac{n}{29} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n+1}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+2}{29} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n+3}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+4}{29} \right\rfloor \\ & + 112 \left\lfloor \frac{n+5}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+6}{29} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n+7}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+8}{29} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n+9}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+10}{29} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n+11}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+12}{29} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n+13}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+14}{29} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n+15}{29} \right\rfloor \\ & + 56 \left\lfloor \frac{n+16}{29} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n+17}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+18}{29} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n+19}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+20}{29} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n+21}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+22}{29} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n+23}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+24}{29} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n+25}{29} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+26}{29} \right\rfloor \\ & + 112 \left\lfloor \frac{n+27}{29} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+23}{40} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+24}{40} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+27}{40} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+28}{40} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+31}{40} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+32}{40} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+35}{40} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+36}{40} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+27}{42} \right\rfloor - 24 \left\lfloor \frac{n+28}{42} \right\rfloor \\ & - 24 \left\lfloor \frac{n+34}{42} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+35}{42} \right\rfloor - 56 \left\lfloor \frac{n+30}{58} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+31}{58} \right\rfloor - 56 \left\lfloor \frac{n+32}{58} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+33}{58} \right\rfloor - 56 \left\lfloor \frac{n+34}{58} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+35}{58} \right\rfloor - 56 \left\lfloor \frac{n+36}{58} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+37}{58} \right\rfloor - 56 \left\lfloor \frac{n+38}{58} \right\rfloor \\ & + 56 \left\lfloor \frac{n+39}{58} \right\rfloor - 56 \left\lfloor \frac{n+40}{58} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+41}{58} \right\rfloor - 56 \left\lfloor \frac{n+42}{58} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+43}{58} \right\rfloor - 56 \left\lfloor \frac{n+44}{58} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+45}{58} \right\rfloor - 56 \left\lfloor \frac{n+46}{58} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+47}{58} \right\rfloor - 56 \left\lfloor \frac{n+48}{58} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+49}{58} \right\rfloor \\ & \left. - 56 \left\lfloor \frac{n+50}{58} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+51}{58} \right\rfloor - 56 \left\lfloor \frac{n+52}{58} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+53}{58} \right\rfloor - 56 \left\lfloor \frac{n+54}{58} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+55}{58} \right\rfloor - 56 \left\lfloor \frac{n+56}{58} \right\rfloor + 274 \right) \end{aligned}$$

Two [4,4] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=8

$$\frac{1}{16}n^2 \left(8n^2 - 11n + 9 + (5n + 1) * (-1)^n + (2n + 2) * \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 2 * \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 2 * \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) \right)$$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left(\frac{5n}{2} + 1 \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor - \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 2 \right)$$

Recurrence

$$a[n] = a[n-29] - a[n-28] - a[n-25] + a[n-24] - 3a[n-21] + 3a[n-20] + 3a[n-17] - 3a[n-16] + 3a[n-13] - 3a[n-12] - 3a[n-9] + 3a[n-8] - a[n-5] + a[n-4] + a[n-1]$$

Generating function

$$-2x^2(x^{26}+6x^{25}+29x^{24}+40x^{23}+148x^{22}+156x^{21}+368x^{20}+296x^{19}+753x^{18}+570x^{17}+1097x^{16}+624x^{15}+1496x^{14}+840x^{13}+1376x^{12}+656x^{11}+1275x^{10}+570x^9+791x^8+264x^7+500x^6+156x^5+176x^4+40x^3+51x^2+6x+3) / ((x-1)^5(x+1)^4(x^2+1)^4(x^4+1)^3)$$

Two [4,5] riders on an $n \times n$ toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=14760

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}n^2 \left(80 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 44 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+2}{9} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+5}{9} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor \right. \\ & - 8 \left\lfloor \frac{n+4}{10} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+5}{10} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+6}{10} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+7}{10} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+5}{20} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+6}{20} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+7}{20} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+8}{20} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+9}{20} \right\rfloor - 16 \left\lfloor \frac{n+10}{20} \right\rfloor \\ & + 32 \left\lfloor \frac{n+23}{40} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+24}{40} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+27}{40} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+28}{40} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+31}{40} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+32}{40} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+35}{40} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+36}{40} \right\rfloor + 160 \left\lfloor \frac{n}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+1}{41} \right\rfloor \\ & + 80 \left\lfloor \frac{n+2}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+3}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+4}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+5}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+6}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+7}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+8}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+9}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+10}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+11}{41} \right\rfloor \\ & + 80 \left\lfloor \frac{n+12}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+13}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+14}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+15}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+16}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+17}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+18}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+19}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+20}{41} \right\rfloor \\ & + 80 \left\lfloor \frac{n+21}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+22}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+23}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+24}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+25}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+26}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+27}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+28}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+29}{41} \right\rfloor \\ & + 80 \left\lfloor \frac{n+30}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+31}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+32}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+33}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+34}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+35}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+36}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+37}{41} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+38}{41} \right\rfloor \\ & \left. + 80 \left\lfloor \frac{n+39}{41} \right\rfloor + n^2 - 178n + 177 \right) \end{aligned}$$

Recurrence

$\begin{aligned} a[n] = & a[n-266] + 4a[n-265] + 10a[n-264] + 20a[n-263] + 35a[n-262] + 56a[n-261] + 84a[n-260] + 120a[n-259] + 165a[n-258] + 217a[n-257] + 274a[n-256] + 334a[n-255] + 395a[n-254] + 455a[n-253] + 512a[n-252] + \\ & 564a[n-251] + 609a[n-250] + 645a[n-249] + 673a[n-248] + 694a[n-247] + 709a[n-246] + 719a[n-245] + 725a[n-244] + 728a[n-243] + 729a[n-242] + 729a[n-241] + 729a[n-240] + 729a[n-239] + 729a[n-238] + 729a[n-237] + \\ & 729a[n-236] + 729a[n-235] + 729a[n-234] + 729a[n-233] + 729a[n-232] + 729a[n-231] + 729a[n-230] + 729a[n-229] + 729a[n-228] + 729a[n-227] + 729a[n-226] + 729a[n-225] + 729a[n-224] + 729a[n-223] + 729a[n-222] + \\ & 729a[n-221] + 729a[n-220] + 729a[n-219] + 729a[n-218] + 729a[n-217] + 729a[n-216] + 729a[n-215] + 729a[n-214] + 729a[n-213] + 729a[n-212] + 729a[n-211] + 729a[n-210] + 729a[n-209] + 729a[n-208] + 729a[n-207] + \\ & 729a[n-206] + 729a[n-205] + 729a[n-204] + 729a[n-203] + 729a[n-202] + 729a[n-201] + 729a[n-200] + 729a[n-199] + 729a[n-198] + 729a[n-197] + 729a[n-196] + 729a[n-195] + 729a[n-194] + 729a[n-193] + \\ & 729a[n-192] + 729a[n-191] + 729a[n-190] + 729a[n-189] + 729a[n-188] + 729a[n-187] + 729a[n-186] + 729a[n-185] + 729a[n-184] + 729a[n-183] + 729a[n-182] + 729a[n-181] + 729a[n-180] + 729a[n-179] + \\ & 729a[n-178] + 729a[n-177] + 729a[n-176] + 729a[n-175] + 729a[n-174] + 729a[n-173] + 729a[n-172] + 729a[n-171] + 729a[n-170] + 729a[n-169] + 729a[n-168] + 729a[n-167] + 729a[n-166] + 729a[n-165] + \\ & 729a[n-164] + 729a[n-163] + 729a[n-162] + 729a[n-161] + 729a[n-160] + 729a[n-159] + 729a[n-158] + 729a[n-157] + 729a[n-156] + 729a[n-155] + 729a[n-154] + 729a[n-153] + 729a[n-152] + 729a[n-151] + \\ & 729a[n-150] + 729a[n-149] + 729a[n-148] + 729a[n-147] + 729a[n-146] + 729a[n-145] + 729a[n-144] + 729a[n-143] + 729a[n-142] + 729a[n-141] + 729a[n-140] + 729a[n-139] + 729a[n-138] + 729a[n-137] + \\ & 729a[n-136] + 729a[n-135] + 729a[n-134] + 729a[n-133] + 729a[n-132] + 729a[n-131] + 729a[n-130] + 729a[n-129] + 729a[n-128] + 729a[n-127] + 729a[n-126] + 729a[n-125] + 729a[n-124] + 729a[n-123] + 729a[n-122] + \\ & 729a[n-121] + 729a[n-120] + 729a[n-119] + 729a[n-118] + 729a[n-117] + 729a[n-116] + 729a[n-115] + 729a[n-114] + 729a[n-113] + 729a[n-112] + 729a[n-111] + 729a[n-110] + 729a[n-109] + 729a[n-108] + \\ & 729a[n-107] + 729a[n-106] + 729a[n-105] + 729a[n-104] + 729a[n-103] + 729a[n-102] + 729a[n-101] + 729a[n-100] + 729a[n-99] + 729a[n-98] + 729a[n-97] + 729a[n-96] + 729a[n-95] + 729a[n-94] + 729a[n-93] + \\ & 729a[n-92] + 729a[n-91] + 729a[n-90] + 729a[n-89] + 729a[n-88] + 729a[n-87] + 729a[n-86] + 729a[n-85] + 729a[n-84] + 729a[n-83] + 729a[n-82] + 729a[n-81] + 729a[n-80] + 729a[n-79] + 729a[n-78] + \\ & 729a[n-77] + 729a[n-76] + 729a[n-75] + 729a[n-74] + 729a[n-73] + 729a[n-72] + 729a[n-71] + 729a[n-70] + 729a[n-69] + 729a[n-68] + 729a[n-67] + 729a[n-66] + 729a[n-65] + 729a[n-64] + 729a[n-63] + \\ & 729a[n-62] + 729a[n-61] + 729a[n-60] + 729a[n-59] + 729a[n-58] + 729a[n-57] + 729a[n-56] + 729a[n-55] + 729a[n-54] + 729a[n-53] + 729a[n-52] + 729a[n-51] + 729a[n-50] + 729a[n-49] + 729a[n-48] + \\ & 729a[n-47] + 729a[n-46] + 729a[n-45] + 729a[n-44] + 729a[n-43] + 729a[n-42] + 729a[n-41] + 729a[n-40] + 729a[n-39] + 729a[n-38] + 729a[n-37] + 729a[n-36] + 729a[n-35] + 729a[n-34] + 729a[n-33] + 729a[n-32] + 729a[n-31] + \\ & 729a[n-30] + 729a[n-29] + 729a[n-28] + 729a[n-27] + 729a[n-26] + 729a[n-25] + 729a[n-24] + 729a[n-23] + 729a[n-22] + 729a[n-21] + 729a[n-20] + 729a[n-19] + 729a[n-18] + 729a[n-17] + 729a[n-16] + 729a[n-15] + 729a[n-14] + \\ & 729a[n-13] + 729a[n-12] + 729a[n-11] + 729a[n-10] + 729a[n-9] + 729a[n-8] + 729a[n-7] + 729a[n-6] + 729a[n-5] + 729a[n-4] + 729a[n-3] + 729a[n-2] + 729a[n-1] \end{aligned}$

Generating function

$$\begin{aligned}
& -2x^2(2x^{263}+25x^{262}+151x^{261}+626x^{260}+2046x^{259}+5628x^{258}+13569x^{257}+29874x^{256}+61302x^{255}+118631x^{254}+217670x^{253}+381419x^{252}+641850x^{251}+1042478x^{250}+1641830x^{249}+2517061x^{248}+3765912x^{247}+5511639x^{246}+7905139x^{245}+11134214x^{244}+15423368x^{243}+21039022x^{242}+28293392x^{241}+37549724x^{240}+49224500x^{239}+63794261x^{238}+81798485x^{237}+103846973x^{236}+130610295x^{235}+162840264x^{234}+201368862x^{233}+247117192x^{232}+301091308x^{231}+364390821x^{230}+438214969x^{229}+523868209x^{228}+622758183x^{227}+736416192x^{226}+866477082x^{225}+1014727910x^{224}+1183103156x^{223}+1373672756x^{222}+1588640933x^{221}+1830345578x^{220}+2101263251x^{219}+2404018714x^{218}+2741376863x^{217}+3116269721x^{216}+3531681434x^{215}+3990660996x^{214}+4496393988x^{213}+5052206638x^{212}+5661552132x^{211}+6327998772x^{210}+7055222790x^{209}+7847002909x^{208}+8707166611x^{207}+9639697374x^{206}+10648686125x^{205}+11738274764x^{204}+12912583763x^{203}+14175722434x^{202}+15531763672x^{201}+16984714518x^{200}+18538473650x^{199}+20196860240x^{198}+21963526609x^{197}+23841975121x^{196}+25835458513x^{195}+27947089209x^{194}+30179742606x^{193}+32536064952x^{192}+35018418990x^{191}+37628911256x^{190}+40369338761x^{189}+43241175437x^{188}+46245520069x^{187}+49383183049x^{186}+52654513822x^{185}+56059520376x^{184}+59597555514x^{183}+63267602075x^{182}+67068147653x^{181}+70997170433x^{180}+75052131526x^{179}+79229969565x^{178}+83527027143x^{177}+87939125167x^{176}+92461346407x^{175}+97088792839x^{174}+101815794750x^{173}+106636098379x^{172}+111542850340x^{171}+116528621414x^{170}+121585426328x^{169}+126704739023x^{168}+131877464691x^{167}+137094197306x^{166}+142344472367x^{165}+147617618069x^{164}+152902502042x^{163}+158187703607x^{162}+163461489860x^{161}+168711859894x^{160}+173926608832x^{159}+179093445645x^{158}+184199854943x^{157}+189233467598x^{156}+194181737340x^{155}+199032350405x^{154}+203772952883x^{153}+208391323608x^{152}+212875363038x^{151}+217213211217x^{150}+221393186731x^{149}+225403903978x^{148}+229234276336x^{147}+232873659289x^{146}+236311592815x^{145}+239538203590x^{144}+242544070938x^{143}+245320378528x^{142}+247858795627x^{141}+250151627306x^{140}+252191867552x^{139}+253973230550x^{138}+255490135422x^{137}+256737876781x^{136}+257712449059x^{135}+258410732125x^{134}+258830415238x^{133}+258970168798x^{132}+258829548832x^{131}+258409011088x^{130}+257709901258x^{129}+256734450363x^{128}+255485746747x^{127}+253967818639x^{126}+252185450884x^{125}+250144251302x^{124}+247850457332x^{123}+245311105760x^{122}+242533857781x^{121}+239527011196x^{120}+236299467146x^{119}+232860675856x^{118}+229220485885x^{117}+225389262691x^{116}+221377736902x^{115}+217197138364x^{114}+212858793937x^{113}+208374385107x^{112}+203755804860x^{111}+199015154514x^{110}+194164626449x^{109}+189216565151x^{108}+184183349250x^{107}+179077402640x^{106}+173911021589x^{105}+168696647391x^{104}+163446456718x^{103}+158172685030x^{102}+152887256012x^{101}+147601920029x^{100}+142328136914x^{99}+137077013081x^{98}+131859259169x^{97}+126685216724x^{96}+121564689789x^{95}+116507203271x^{94}+111521158298x^{93}+106614587462x^{92}+101794906516x^{91}+97068952465x^{90}+92442978966x^{89}+87922647397x^{88}+83513013733x^{87}+79218554251x^{86}+75042987117x^{85}+70990071267x^{84}+67062855592x^{83}+63263900495x^{82}+59595207383x^{81}+56058294995x^{80}+52654206672x^{79}+49383519168x^{78}+46246357420x^{77}+43242520075x^{76}+40371194329x^{75}+37631269661x^{74}+35021218343x^{73}+32539267994x^{72}+30183314826x^{71}+27950975712x^{70}+25839601740x^{69}+23846331531x^{68}+21968063941x^{67}+20201512417x^{66}+18543197119x^{65}+16989541634x^{64}+15536763662x^{63}+14180974686x^{62}+12918163072x^{61}+11744281366x^{60}+10655217281x^{59}+9646835870x^{58}+8715008375x^{57}+7855636572x^{56}+7064641195x^{55}+6338032561x^{54}+5671964730x^{53}+5062781142x^{52}+4506903912x^{51}+4000883662x^{50}+3541400772x^{49}+3125268234x^{48}+2749439162x^{47}+2411016293x^{46}+2107244027x^{45}+1835433220x^{44}+1592945549x^{43}+1377306200x^{42}+1186175099x^{41}+1017353672x^{40}+868774400x^{39}+738495230x^{38}+624699858x^{37}+525698742x^{36}+439941021x^{35}+366019297x^{34}+302620969x^{33}+248548347x^{32}+202698178x^{31}+164063680x^{30}+131728950x^{29}+104862894x^{28}+82710621x^{27}+64597613x^{26}+49920773x^{25}+38149499x^{24}+28805210x^{23}+21470900x^{22}+15783752x^{21}+11432262x^{20}+8149430x^{19}+5710592x^{18}+3928259x^{17}+2648361x^{16}+1745214x^{15}+1121977x^{14}+701726x^{13}+425762x^{12}+249218x^{11}+139721x^{10}+74456x^9+37413x^8+17544x^7+7698x^6+3141x^5+1164x^4+354x^3+82x^2+13x+1) / ((x-1)^5(x+1)^3(x^2+1)^3(x^2+x+1)^3(x^4+1)^3(x^4-x^3+x^2-x+1)^3(x^4+x^3+x^2+x+1)^3(x^6+x^3+1)^3(x^8-x^6+x^4-x^2+1)^3(x^16-x^12+x^8-x^4+1)^3(x^40+x^39+x^38+x^37+x^36+x^35+x^34+x^33+x^32+x^31+x^30+x^29+x^28+x^27+x^26+x^25+x^24+x^23+x^22+x^21+x^20+x^19+x^18+x^17+x^16+x^15+x^14+x^13+x^12+x^11+x^10+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^3)
\end{aligned}$$

Two [4,6] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=1560

$$\frac{1}{2}n^2 \left((4n + 22) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 18 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - 4 \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor \right. \\ \left. + 12 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 12 \left\lfloor \frac{n+1}{12} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+3}{12} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+1}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+2}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+3}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+4}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+5}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+6}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+7}{13} \right\rfloor \right. \\ \left. + 24 \left\lfloor \frac{n+8}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+9}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+10}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+11}{13} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+11}{24} \right\rfloor - 8 \left\lfloor \frac{n+12}{24} \right\rfloor - n^2 - 56n + 57 \right)$$

Recurrence

$a[n] = a[n-123] + 5a[n-122] + 14a[n-121] + 30a[n-120] + 55a[n-119] + 88a[n-118] + 125a[n-117] + 162a[n-116] + 195a[n-115] + 220a[n-114] + 236a[n-113] + 245a[n-112] + 249a[n-111] + 247a[n-110] + 235a[n-109] + 208a[n-108] + 160a[n-107] + 85a[n-106] - 14a[n-105] - 125a[n-104] - 236a[n-103] - 335a[n-102] - 410a[n-101] - 458a[n-100] - 488a[n-99] - 512a[n-98] - 539a[n-97] - 575a[n-96] - 623a[n-95] - 674a[n-94] - 710a[n-93] - 722a[n-92] - 710a[n-91] - 674a[n-90] - 623a[n-89] - 575a[n-88] - 539a[n-87] - 506a[n-86] - 458a[n-85] - 375a[n-84] - 235a[n-83] - 19a[n-82] + 262a[n-81] + 570a[n-80] + 870a[n-79] + 1130a[n-78] + 1318a[n-77] + 1429a[n-76] + 1488a[n-75] + 1520a[n-74] + 1538a[n-73] + 1546a[n-72] + 1539a[n-71] + 1494a[n-70] + 1380a[n-69] + 1194a[n-68] + 960a[n-67] + 702a[n-66] + 453a[n-65] + 255a[n-64] + 123a[n-63] + 36a[n-62] - 36a[n-61] - 123a[n-60] - 255a[n-59] - 453a[n-58] - 702a[n-57] - 960a[n-56] - 1194a[n-55] - 1380a[n-54] - 1494a[n-53] - 1539a[n-52] - 1546a[n-51] - 1538a[n-50] - 1520a[n-49] - 1488a[n-48] - 1429a[n-47] - 1318a[n-46] - 1130a[n-45] - 870a[n-44] - 570a[n-43] - 262a[n-42] + 19a[n-41] + 235a[n-40] + 375a[n-39] + 458a[n-38] + 506a[n-37] + 539a[n-36] + 575a[n-35] + 623a[n-34] + 674a[n-33] + 710a[n-32] + 722a[n-31] + 710a[n-30] + 674a[n-29] + 623a[n-28] + 575a[n-27] + 539a[n-26] + 512a[n-25] + 488a[n-24] + 458a[n-23] + 410a[n-22] + 335a[n-21] + 236a[n-20] + 125a[n-19] + 14a[n-18] - 85a[n-17] - 160a[n-16] - 208a[n-15] - 235a[n-14] - 247a[n-13] - 249a[n-12] - 245a[n-11] - 236a[n-10] - 220a[n-9] - 195a[n-8] - 162a[n-7] - 125a[n-6] - 88a[n-5] - 55a[n-4] - 30a[n-3] - 14a[n-2] - 5a[n-1]$

Generating function

$- 2x^2 (2x^{120} + 21x^{119} + 146x^{118} + 645x^{117} + 2252x^{116} + 6540x^{115} + 16518x^{114} + 37377x^{113} + 77706x^{112} + 150482x^{111} + 274510x^{110} + 475807x^{109} + 790394x^{108} + 1264619x^{107} + 1956829x^{106} + 2938494x^{105} + 4295183x^{104} + 6122960x^{103} + 8531632x^{102} + 11644606x^{101} + 15599273x^{100} + 20543999x^{99} + 26642128x^{98} + 34068057x^{97} + 43006175x^{96} + 53640848x^{95} + 66161385x^{94} + 80749814x^{93} + 97573182x^{92} + 116775527x^{91} + 138491256x^{90} + 162823643x^{89} + 189857778x^{88} + 219655592x^{87} + 252260935x^{86} + 287675134x^{85} + 325863707x^{84} + 366724025x^{83} + 410116282x^{82} + 455839273x^{81} + 503646200x^{80} + 553256994x^{79} + 604395055x^{78} + 656710460x^{77} + 709822151x^{76} + 763297148x^{75} + 816653554x^{74} + 869334441x^{73} + 920795250x^{72} + 970467796x^{71} + 1017825329x^{70} + 1062342897x^{69} + 1103535235x^{68} + 1140925711x^{67} + 1174096326x^{66} + 1202614335x^{65} + 1226133526x^{64} + 1244363677x^{63} + 1257102876x^{62} + 1264192904x^{61} + 1265589681x^{60} + 1261275445x^{59} + 1251315820x^{58} + 1235798986x^{57} + 1214898555x^{56} + 1188839990x^{55} + 1157947589x^{54} + 1122569086x^{53} + 1083157245x^{52} + 1040184107x^{51} + 994150007x^{50} + 945546603x^{49} + 894912874x^{48} + 842762692x^{47} + 789647115x^{46} + 736097544x^{45} + 682653968x^{44} + 629812333x^{43} + 578023428x^{42} + 527639517x^{41} + 478990630x^{40} + 432335174x^{39} + 387889115x^{38} + 345840778x^{37} + 306376309x^{36} + 269612495x^{35} + 235633878x^{34} + 204469177x^{33} + 176105158x^{32} + 150478398x^{31} + 127506457x^{30} + 107078568x^{29} + 89081917x^{28} + 73378650x^{27} + 59818108x^{26} + 48235323x^{25} + 38457472x^{24} + 30293507x^{23} + 23557385x^{22} + 18066124x^{21} + 13646755x^{20} + 10135505x^{19} + 7387512x^{18} + 5272264x^{17} + 3675400x^{16} + 2495075x^{15} + 1645364x^{14} + 1051537x^{13} + 649477x^{12} + 386072x^{11} + 220263x^{10} + 119958x^9 + 61816x^8 + 29786x^7 + 13315x^6 + 5408x^5 + 1942x^4 + 576x^3 + 139x^2 + 24x + 3) / ((x-1)^5 (x+1)^4 (x^2+1)^3 (x^2-x+1)^3 (x^2+x+1)^3 (x^4+1)^3 (x^4-x^2+1)^3 (x^4+x^3+x^2+x+1)^3 (x^8-x^4+1)^3 (x^12+x^11+x^10+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^3)$

Two [4,7] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=120120

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - 306n + 112 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 44 \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - 44 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + 104 \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{n+1}{11} \right\rfloor + 60 \left\lfloor \frac{n+2}{11} \right\rfloor \right. \\ & + 20 \left\lfloor \frac{n+3}{11} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{n+4}{11} \right\rfloor + 60 \left\lfloor \frac{n+5}{11} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{n+6}{11} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{n+7}{11} \right\rfloor + 60 \left\lfloor \frac{n+8}{11} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{n+9}{11} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n}{13} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+1}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+2}{13} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+3}{13} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+4}{13} \right\rfloor \\ & + 24 \left\lfloor \frac{n+5}{13} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+6}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+7}{13} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+8}{13} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+9}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+10}{13} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+11}{13} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n}{14} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+1}{14} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+3}{14} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+4}{14} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+5}{14} \right\rfloor \\ & - 12 \left\lfloor \frac{n+6}{14} \right\rfloor + 108 \left\lfloor \frac{n+7}{14} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+9}{14} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+11}{14} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+11}{28} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+12}{28} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+13}{28} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+14}{28} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+17}{28} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+18}{28} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+19}{28} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+20}{28} \right\rfloor \\ & - 40 \left\lfloor \frac{n+13}{33} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+14}{33} \right\rfloor - 40 \left\lfloor \frac{n+16}{33} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+17}{33} \right\rfloor - 40 \left\lfloor \frac{n+19}{33} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+20}{33} \right\rfloor - 40 \left\lfloor \frac{n+22}{33} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+23}{33} \right\rfloor - 40 \left\lfloor \frac{n+24}{33} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+26}{33} \right\rfloor - 40 \left\lfloor \frac{n+27}{33} \right\rfloor \\ & + 40 \left\lfloor \frac{n+29}{33} \right\rfloor - 40 \left\lfloor \frac{n+30}{33} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+31}{56} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+32}{56} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+35}{56} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+36}{56} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+39}{56} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+40}{56} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+43}{56} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+44}{56} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+47}{56} \right\rfloor \\ & - 48 \left\lfloor \frac{n+48}{56} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+51}{56} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+52}{56} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+17}{65} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+18}{65} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+22}{65} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+23}{65} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+27}{65} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+28}{65} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+30}{65} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+31}{65} \right\rfloor \\ & - 96 \left\lfloor \frac{n+32}{65} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+33}{65} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+35}{65} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+36}{65} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+37}{65} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+38}{65} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+40}{65} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+41}{65} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+42}{65} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+44}{65} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+45}{65} \right\rfloor \\ & \left. + 96 \left\lfloor \frac{n+46}{65} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+47}{65} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+49}{65} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+50}{65} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+51}{65} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+52}{65} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+54}{65} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+55}{65} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+59}{65} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+60}{65} \right\rfloor + 305 \right) \end{aligned}$$

Two [5,5] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=10

$$\frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - \frac{42n}{25} + \frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{2} + \frac{16}{25}n * \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{16}{25}n * \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) \right)$$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{16}{5}n \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \frac{8}{5}n \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \frac{8}{5}n \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \frac{8}{5}n \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{3n^2}{5} - \frac{7n}{5} + 2 \right)$$

Recurrence

$$a[n] = a[n-24] + 2a[n-23] - 2a[n-21] - a[n-20] - 4a[n-19] - 8a[n-18] + 8a[n-16] + 4a[n-15] + 6a[n-14] + 12a[n-13] - 12a[n-11] - 6a[n-10] - 4a[n-9] - 8a[n-8] + 8a[n-6] + 4a[n-5] + a[n-4] + 2a[n-3] - 2a[n-1]$$

Generating function

$$-2x^2(x^{21}+12x^{20}+56x^{19}+174x^{18}+362x^{17}+714x^{16}+1392x^{15}+2202x^{14}+2878x^{13}+3234x^{12}+3382x^{11}+3782x^{10}+3828x^9+3022x^8+2046x^7+1290x^6+812x^5+514x^4+226x^3+58x^2+13x+2) / ((x-1)^5(x+1)^3(x^4+x^3+x^2+x+1)^4)$$

Two [5,6] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=40260

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - 262n + 152 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 28 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 80 \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - 4 \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 44 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+2}{10} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+4}{10} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n+5}{10} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+7}{10} \right\rfloor \right. \\
 & + 40 \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{n+1}{11} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{n+2}{11} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{n+3}{11} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{n+4}{11} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{n+5}{11} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{n+6}{11} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{n+7}{11} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{n+8}{11} \right\rfloor + 20 \left\lfloor \frac{n+9}{11} \right\rfloor + 40 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 8 \left\lfloor \frac{n+1}{12} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+2}{12} \right\rfloor \\
 & + 40 \left\lfloor \frac{n+3}{12} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n}{15} \right\rfloor - 64 \left\lfloor \frac{n+1}{15} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+2}{15} \right\rfloor - 64 \left\lfloor \frac{n+3}{15} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+4}{15} \right\rfloor + 64 \left\lfloor \frac{n+5}{15} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+6}{15} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+3}{20} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+4}{20} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+9}{20} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+10}{20} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+13}{30} \right\rfloor \\
 & + 48 \left\lfloor \frac{n+14}{30} \right\rfloor - 16 \left\lfloor \frac{n+15}{30} \right\rfloor + 64 \left\lfloor \frac{n+16}{30} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+17}{30} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+18}{30} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+19}{30} \right\rfloor - 64 \left\lfloor \frac{n+20}{30} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+43}{60} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+44}{60} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+45}{60} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+46}{60} \right\rfloor \\
 & - 32 \left\lfloor \frac{n+49}{60} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+50}{60} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+51}{60} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+52}{60} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+53}{60} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+54}{60} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+57}{60} \right\rfloor - 32 \left\lfloor \frac{n+58}{60} \right\rfloor + 240 \left\lfloor \frac{n}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+1}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+2}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+3}{61} \right\rfloor \\
 & + 120 \left\lfloor \frac{n+4}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+5}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+6}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+7}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+8}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+9}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+10}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+11}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+12}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+13}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+14}{61} \right\rfloor \\
 & + 120 \left\lfloor \frac{n+15}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+16}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+17}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+18}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+19}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+20}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+21}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+22}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+23}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+24}{61} \right\rfloor \\
 & + 120 \left\lfloor \frac{n+25}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+26}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+27}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+28}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+29}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+30}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+31}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+32}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+33}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+34}{61} \right\rfloor \\
 & + 120 \left\lfloor \frac{n+35}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+36}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+37}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+38}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+39}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+40}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+41}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+42}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+43}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+44}{61} \right\rfloor \\
 & + 120 \left\lfloor \frac{n+45}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+46}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+47}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+48}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+49}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+50}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+51}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+52}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+53}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+54}{61} \right\rfloor \\
 & + 120 \left\lfloor \frac{n+55}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+56}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+57}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+58}{61} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+59}{61} \right\rfloor + 261 \left. \right)
 \end{aligned}$$

Recurrence

$$\begin{aligned}
& a[n] = a[n-392] + 4a[n-391] + 10a[n-390] + 20a[n-389] + 35a[n-388] + 56a[n-387] + 84a[n-386] + 120a[n-385] + 165a[n-384] + 220a[n-383] + 286a[n-382] + 361a[n-381] + 443a[n-380] \\
& + 530a[n-379] + 620a[n-378] + 711a[n-377] + 801a[n-376] + 888a[n-375] + 970a[n-374] + 1045a[n-373] + 1111a[n-372] + 1166a[n-371] + 1211a[n-370] + 1247a[n-369] + 1275a[n-368] \\
& + 1296a[n-367] + 1311a[n-366] + 1321a[n-365] + 1327a[n-364] + 1330a[n-363] + 1331a[n-362] + 1331a[n-361] + 1331a[n-360] + 1331a[n-359] + 1331a[n-358] + 1331a[n-357] \\
& + 1331a[n-356] + 1331a[n-355] + 1331a[n-354] + 1331a[n-353] + 1331a[n-352] + 1331a[n-351] + 1331a[n-350] + 1331a[n-349] + 1331a[n-348] + 1331a[n-347] + 1331a[n-346] \\
& + 1331a[n-345] + 1331a[n-344] + 1331a[n-343] + 1331a[n-342] + 1331a[n-341] + 1331a[n-340] + 1331a[n-339] + 1331a[n-338] + 1331a[n-337] + 1331a[n-336] + 1331a[n-335] \\
& + 1331a[n-334] + 1331a[n-333] + 1328a[n-332] + 1316a[n-331] + 1289a[n-330] + 1241a[n-329] + 1166a[n-328] + 1058a[n-327] + 911a[n-326] + 719a[n-325] + 476a[n-324] + \\
& 176a[n-323] - 187a[n-322] - 610a[n-321] - 1081a[n-320] - 1588a[n-319] - 2119a[n-318] - 2662a[n-317] - 3205a[n-316] - 3736a[n-315] - 4243a[n-314] - 4714a[n-313] - 5137a[n-312] - \\
& 5500a[n-311] - 5800a[n-310] - 6043a[n-309] - 6235a[n-308] - 6382a[n-307] - 6490a[n-306] - 6565a[n-305] - 6613a[n-304] - 6640a[n-303] - 6652a[n-302] - 6655a[n-301] - 6655a[n-300] - \\
& 6655a[n-299] - 6655a[n-298] - 6655a[n-297] - 6655a[n-296] - 6655a[n-295] - 6655a[n-294] - 6655a[n-293] - 6655a[n-292] - 6655a[n-291] - 6655a[n-290] - 6655a[n-289] - 6655a[n-288] - \\
& 6655a[n-287] - 6655a[n-286] - 6655a[n-285] - 6655a[n-284] - 6655a[n-283] - 6655a[n-282] - 6655a[n-281] - 6655a[n-280] - 6655a[n-279] - 6655a[n-278] - 6655a[n-277] - 6655a[n-276] - \\
& 6655a[n-275] - 6655a[n-274] - 6655a[n-273] - 6652a[n-272] - 6634a[n-271] - 6586a[n-270] - 6493a[n-269] - 6340a[n-268] - 6112a[n-267] - 5794a[n-266] - 5371a[n-265] - 4828a[n-264] - \\
& 4150a[n-263] - 3322a[n-262] - 2338a[n-261] - 1219a[n-260] + 5a[n-259] + 1304a[n-258] + 2648a[n-257] + 4007a[n-256] + 5351a[n-255] + 6650a[n-254] + 7874a[n-253] + 8993a[n-252] \\
& + 9977a[n-251] + 10805a[n-250] + 11483a[n-249] + 12026a[n-248] + 12449a[n-247] + 12767a[n-246] + 12995a[n-245] + 13148a[n-244] + 13241a[n-243] + 13289a[n-242] + \\
& 13307a[n-241] + 13310a[n-240] + 13310a[n-239] + 13310a[n-238] + 13310a[n-237] + 13310a[n-236] + 13310a[n-235] + 13310a[n-234] + 13310a[n-233] + 13310a[n-232] + \\
& 13310a[n-231] + 13310a[n-230] + 13310a[n-229] + 13310a[n-228] + 13310a[n-227] + 13310a[n-226] + 13310a[n-225] + 13310a[n-224] + 13310a[n-223] + 13310a[n-222] + \\
& 13310a[n-221] + 13310a[n-220] + 13310a[n-219] + 13310a[n-218] + 13310a[n-217] + 13310a[n-216] + 13310a[n-215] + 13310a[n-214] + 13310a[n-213] + 13309a[n-212] + \\
& 13297a[n-211] + 13255a[n-210] + 13163a[n-209] + 13001a[n-208] + 12749a[n-207] + 12387a[n-206] + 11895a[n-205] + 11253a[n-204] + 10441a[n-203] + 9439a[n-202] + \\
& 8230a[n-201] + 6824a[n-200] + 5258a[n-199] + 3572a[n-198] + 1806a[n-197] - 1806a[n-195] - 3572a[n-194] - 5258a[n-193] - 6824a[n-192] - 8230a[n-191] - 9439a[n-190] - \\
& 10441a[n-189] - 11253a[n-188] - 11895a[n-187] - 12387a[n-186] - 12749a[n-185] - 13001a[n-184] - 13163a[n-183] - 13255a[n-182] - 13297a[n-181] - 13309a[n-180] - 13310a[n-179] - \\
& 13310a[n-178] - 13310a[n-177] - 13310a[n-176] - 13310a[n-175] - 13310a[n-174] - 13310a[n-173] - 13310a[n-172] - 13310a[n-171] - 13310a[n-170] - 13310a[n-169] - 13310a[n-168] - \\
& 13310a[n-167] - 13310a[n-166] - 13310a[n-165] - 13310a[n-164] - 13310a[n-163] - 13310a[n-162] - 13310a[n-161] - 13310a[n-160] - 13310a[n-159] - 13310a[n-158] - 13310a[n-157] - \\
& 13310a[n-156] - 13310a[n-155] - 13310a[n-154] - 13310a[n-153] - 13310a[n-152] - 13307a[n-151] - 13289a[n-150] - 13241a[n-149] - 13148a[n-148] - 12995a[n-147] - 12767a[n-146] - \\
& 12449a[n-145] - 12026a[n-144] - 11483a[n-143] - 10805a[n-142] - 9977a[n-141] - 8993a[n-140] - 7874a[n-139] - 6650a[n-138] - 5351a[n-137] - 4007a[n-136] - 2648a[n-135] - \\
& 1304a[n-134] - 5a[n-133] + 1219a[n-132] + 2338a[n-131] + 3322a[n-130] + 4150a[n-129] + 4828a[n-128] + 5371a[n-127] + 5794a[n-126] + 6112a[n-125] + 6340a[n-124] + \\
& 6493a[n-123] + 6586a[n-122] + 6634a[n-121] + 6652a[n-120] + 6655a[n-119] + 6655a[n-118] + 6655a[n-117] + 6655a[n-116] + 6655a[n-115] + 6655a[n-114] + 6655a[n-113] \\
& + 6655a[n-112] + 6655a[n-111] + 6655a[n-110] + 6655a[n-109] + 6655a[n-108] + 6655a[n-107] + 6655a[n-106] + 6655a[n-105] + 6655a[n-104] + 6655a[n-103] + 6655a[n-102] \\
& + 6655a[n-101] + 6655a[n-100] + 6655a[n-99] + 6655a[n-98] + 6655a[n-97] + 6655a[n-96] + 6655a[n-95] + 6655a[n-94] + 6655a[n-93] + 6655a[n-92] + 6655a[n-91] + 6652a[n-90] \\
& + 6640a[n-89] + 6613a[n-88] + 6565a[n-87] + 6490a[n-86] + 6382a[n-85] + 6235a[n-84] + 6043a[n-83] + 5800a[n-82] + 5500a[n-81] + 5137a[n-80] + 4714a[n-79] + 4243a[n-78] \\
& + 3736a[n-77] + 3205a[n-76] + 2662a[n-75] + 2119a[n-74] + 1588a[n-73] + 1081a[n-72] + 610a[n-71] + 187a[n-70] - 176a[n-69] - 476a[n-68] - 719a[n-67] - 911a[n-66] - 1058a[n-65] - \\
& 1166a[n-64] - 1241a[n-63] - 1289a[n-62] - 1316a[n-61] - 1328a[n-60] - 1331a[n-59] - 1331a[n-58] - 1331a[n-57] - 1331a[n-56] - 1331a[n-55] - 1331a[n-54] - 1331a[n-53] - 1331a[n-52] - \\
& 1331a[n-51] - 1331a[n-50] - 1331a[n-49] - 1331a[n-48] - 1331a[n-47] - 1331a[n-46] - 1331a[n-45] - 1331a[n-44] - 1331a[n-43] - 1331a[n-42] - 1331a[n-41] - 1331a[n-40] - 1331a[n-39] - \\
& 1331a[n-38] - 1331a[n-37] - 1331a[n-36] - 1331a[n-35] - 1331a[n-34] - 1331a[n-33] - 1331a[n-32] - 1331a[n-31] - 1331a[n-30] - 1330a[n-29] - 1327a[n-28] - 1321a[n-27] - 1311a[n-26] - \\
& 1296a[n-25] - 1275a[n-24] - 1247a[n-23] - 1211a[n-22] - 1166a[n-21] - 1111a[n-20] - 1045a[n-19] - 970a[n-18] - 888a[n-17] - 801a[n-16] - 711a[n-15] - 620a[n-14] - 530a[n-13] - \\
& 443a[n-12] - 361a[n-11] - 286a[n-10] - 220a[n-9] - 165a[n-8] - 120a[n-7] - 84a[n-6] - 56a[n-5] - 35a[n-4] - 20a[n-3] - 10a[n-2] - 4a[n-1]
\end{aligned}$$

Generating function

$$\begin{aligned}
 & - 2x^2 (2x^{389} + 25x^{388} + 151x^{387} + 626x^{386} + 2046x^{385} + 5664x^{384} + 13713x^{383} + 30106x^{382} + 61267x^{381} + 117645x^{380} + 215376x^{379} + 378402x^{378} + 640078x^{377} + 1046163x^{376} + 1659699x^{375} + 2563734x^{374} + 3865355x^{373} + 5701838x^{372} + 8245129x^{371} + 11711741x^{370} + 16364765x^{369} + 22522468x^{368} + 30562211x^{367} + 40933382x^{366} + 54162779x^{365} + 70857032x^{364} + 91714472x^{363} + 117534751x^{362} + 149222914x^{361} + 187813141x^{360} + 234452237x^{359} + 290420339x^{358} + 357137702x^{357} + 436175276x^{356} + 529252682x^{355} + 638256917x^{354} + 765250364x^{353} + 912474728x^{352} + 1082357288x^{351} + 1277538610x^{350} + 1500823657x^{349} + 1755244750x^{348} + 2044050090x^{347} + 2370715842x^{346} + 2738965407x^{345} + 3152768971x^{344} + 3616330547x^{343} + 4134125804x^{342} + 4710897579x^{341} + 5351674441x^{340} + 6061724653x^{339} + 6846651173x^{338} + 7712339404x^{337} + 8664993667x^{336} + 9711134093x^{335} + 10857568159x^{334} + 12111439018x^{333} + 13480251044x^{332} + 14971817648x^{331} + 16594415255x^{330} + 18356764914x^{329} + 20267998685x^{328} + 22337606474x^{327} + 24575484201x^{326} + 26991906595x^{325} + 29597549020x^{324} + 32403521043x^{323} + 35421341429x^{322} + 38662936208x^{321} + 42140707105x^{320} + 45867150610x^{319} + 49854899794x^{318} + 54116982103x^{317} + 58666829712x^{316} + 63518277435x^{315} + 68685536556x^{314} + 74183159939x^{313} + 80026052036x^{312} + 86229417714x^{311} + 92808790789x^{310} + 99779882464x^{309} + 107158951711x^{308} + 114962691851x^{307} + 123207991856x^{306} + 131911861501x^{305} + 141091305853x^{304} + 150763386016x^{303} + 160945201249x^{302} + 171653767306x^{301} + 182906126323x^{300} + 194719028300x^{299} + 207109155458x^{298} + 220092880946x^{297} + 233686310699x^{296} + 247905187145x^{295} + 262764959027x^{294} + 278280798548x^{293} + 294467472269x^{292} + 311339282957x^{291} + 328910152243x^{290} + 347193192223x^{289} + 366201234166x^{288} + 385946437947x^{287} + 406440339033x^{286} + 427693797447x^{285} + 449716981774x^{284} + 472519238030x^{283} + 496109170358x^{282} + 520494512757x^{281} + 545682155098x^{280} + 571677885748x^{279} + 598486911722x^{278} + 626113228420x^{277} + 654559877791x^{276} + 683828792570x^{275} + 713920700530x^{274} + 744835283134x^{273} + 776571094295x^{272} + 809125307549x^{271} + 842494046453x^{270} + 876671408598x^{269} + 911650477058x^{268} + 947422727519x^{267} + 983978310009x^{266} + 1021305811684x^{265} + 1059392356108x^{264} + 1098223605432x^{263} + 1137783549500x^{262} + 1178054544179x^{261} + 1219017422530x^{260} + 1260650864002x^{259} + 1302933911587x^{258} + 1345843372987x^{257} + 1389354418995x^{256} + 1433440513188x^{255} + 1478073425586x^{254} + 1523223258428x^{253} + 1568858526200x^{252} + 1614946111416x^{251} + 1661451399352x^{250} + 1708338097507x^{249} + 1755569014963x^{248} + 1803103560101x^{247} + 1850900446052x^{246} + 1898917045192x^{245} + 1947109513066x^{244} + 1995433167874x^{243} + 2043842316634x^{242} + 2092290211078x^{241} + 2140729403440x^{240} + 2189111339357x^{239} + 2237387249036x^{238} + 2285507443229x^{237} + 2333422401737x^{236} + 2381081773526x^{235} + 2428435074209x^{234} + 2475431537054x^{233} + 2522019920855x^{232} + 2568148846070x^{231} + 2613766982134x^{230} + 2658822709723x^{229} + 2703265334674x^{228} + 2747043749163x^{227} + 2790107244204x^{226} + 2832405433071x^{225} + 2873888369731x^{224} + 2914506468236x^{223} + 2954210898371x^{222} + 2992953440586x^{221} + 3030686655919x^{220} + 3067363823398x^{219} + 3102939663746x^{218} + 3137369006263x^{217} + 3170608137322x^{216} + 3202614345629x^{215} + 3233346174610x^{214} + 3262763736313x^{213} + 3290828424941x^{212} + 3317502868568x^{211} + 3342751544927x^{210} + 3366540444994x^{209} + 3388837423330x^{208} + 3409611601756x^{207} + 3428834368622x^{206} + 3446478856407x^{205} + 3462520373331x^{204} + 3476936279350x^{203} + 3489705848887x^{202} + 3500810703985x^{201} + 3510234858508x^{200} + 3517964392482x^{199} + 3523987928763x^{198} + 3528296376477x^{197} + 3530883436230x^{196} + 3531745254462x^{195} + 3530880561248x^{194} + 3528290614896x^{193} + 3523979234490x^{192} + 3517952745755x^{191} + 3510220015347x^{190} + 3500792292900x^{189} + 3489683537960x^{188} + 3476909897977x^{187} + 3462489950377x^{186} + 3446444213836x^{185} + 3428795464155x^{184} + 3409568682315x^{183} + 3388790615380x^{182} + 3366489909382x^{181} + 3342697230262x^{180} + 3317444830274x^{179} + 3290767069241x^{178} + 3262699414742x^{177} + 3233279038255x^{176} + 3202544464783x^{175} + 3170535909268x^{174} + 3137294660803x^{173} + 3102863130916x^{172} + 3067285140037x^{171} + 3030605603596x^{170} + 2992870279636x^{169} + 2954126223553x^{168} + 2914420439600x^{167} + 2873801214005x^{166} + 2832317391266x^{165} + 2790018436749x^{164} + 2746954266765x^{163} + 2703175393638x^{162} + 2658732530057x^{161} + 2613676669684x^{160} + 2568058968721x^{159} + 2521930822488x^{158} + 2475343052924x^{157} + 2428347247409x^{156} + 2380994544844x^{155} + 233335973387x^{154} + 2285422263140x^{153} + 2237303510011x^{152} + 2189029367843x^{151} + 2140649197406x^{150} + 2092211368915x^{149} + 2043764261920x^{148} + 1995355176862x^{147} + 1947031039344x^{146} + 1898837509570x^{145} + 1850819390590x^{144} + 1803020274378x^{143} + 1755482588702x^{142} + 1708247774807x^{141} + 1661355913035x^{140} + 1614845605447x^{139} + 1568754629494x^{138} + 1523117242514x^{137} + 1477966695782x^{136} + 1433334468518x^{135} + 1389250463054x^{134} + 1345742885628x^{133} + 1302838306671x^{132} + 1260561597027x^{131} + 1218935918245x^{130} + 1177882724448x^{129} + 1137721847268x^{128} + 1098170910833x^{127} + 1059347942366x^{126} + 1021268864978x^{125} + 983948136640x^{124} + 947398645558x^{123} + 911631676949x^{122} + 876657127781x^{121} + 842483507360x^{120} + 809117839916x^{119} + 776565902963x^{118} + 744831946175x^{117} + 713919284503x^{116} + 683829286786x^{115} + 654562351744x^{114} + 626117577580x^{113} + 598493014807x^{112} + 571685747488x^{111} + 545691734584x^{110} + 520505905702x^{109} + 496122316858x^{108} + 472533892313x^{107} + 449733054836x^{106} + 427711205552x^{105} + 406458981318x^{104} + 385966228707x^{103} + 366222132279x^{102} + 347215133885x^{101} + 328933063798x^{100} + 311363156707x^{99} + 294492102753x^{98} + 278306000543x^{97} + 262790747717x^{96} + 247931512240x^{95} + 233713160801x^{94} + 220120176155x^{93} + 207136715275x^{92} + 194746738454x^{91} + 182933992160x^{90} + 171681939214x^{89} + 160973855083x^{88} + 150792786016x^{87} + 141121790289x^{86} + 131943713692x^{85} + 123241507711x^{84} + 114998119053x^{83} + 107196610394x^{82} + 99820176953x^{81} + 92852083971x^{80} + 86275789906x^{79} + 80075018353x^{78} + 74233993130x^{77} + 68737547348x^{76} + 63570747977x^{75} + 58719041780x^{74} + 54168220719x^{73} + 49904466780x^{72} + 45914335473x^{71} + 42184784230x^{70} + 38703192226x^{69} + 35457356409x^{68} + 32435475518x^{67} + 29625887237x^{66} + 27017022029x^{65} + 24597780454x^{64} + 22357461811x^{63} + 20285763755x^{62} + 18372805526x^{61} + 16609093073x^{60} + 14985496316x^{59} + 13493275763x^{58} + 12124034006x^{57} + 10869768730x^{56} + 9722906278x^{55} + 8676320035x^{54} + 7723176451x^{53} + 6856987225x^{52} + 6071583760x^{51} + 5361068833x^{50} + 4719845059x^{49} + 4142617999x^{48} + 3624359687x^{47} + 3160360880x^{46} + 2746136057x^{45} + 2377469457x^{44} + 2050396515x^{43} + 1761208350x^{42} + 1506413936x^{41} + 1282753060x^{40} + 1087196773x^{39} + 916928118x^{38} + 769330046x^{37} + 641996894x^{36} + 532671424x^{35} + 439293713x^{34} + 359973440x^{33} + 292983634x^{32} + 236756738x^{31} + 189876599x^{30} + 151059763x^{29} + 119157499x^{28} + 93145222x^{27} + 72115709x^{26} + 55258406x^{25} + 41875976x^{24} + 31360631x^{23} + 23190182x^{22} + 16918601x^{21} + 12164406x^{20} + 8608577x^{19} + 5989607x^{18} + 4091111x^{17} + 2738570x^{16} + 1791521x^{15} + 1142442x^{14} + 707835x^{13} + 424785x^{12} + 245886x^{11} + 136296x^{10} + 72090x^9 + 36421x^8 + 17509x^7 + 7930x^6 + 3285x^5 + 1200x^4 + 354x^3 + 82x^2 + 13x + 1) /
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ((x-1)^5 (x+1)^3 (x^2+1)^3 (x^2-x+1)^3 (x^2+x+1)^3 (x^4-x^2+1)^3 (x^4-x^3+x^2-x+1)^3 (x^4+x^3+x^2+x+1)^3 (x^8-x^6+x^4-x^2+1)^3 (x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)^3 (x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)^3 \\
 & (x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^3 (x^{16}+x^{14}-x^{10}-x^8-x^6+x^2+1)^3 (x^{60}+x^{59}+x^{58}+x^{57}+x^{56}+x^{55}+x^{54}+x^{53}+x^{52}+x^{51}+x^{50}+x^{49}+x^{48}+x^{47}+x^{46}+x^{45}+x^{44}+ \\
 & x^{43}+x^{42}+x^{41}+x^{40}+x^{39}+x^{38}+x^{37}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}+x^{30}+x^{29}+x^{28}+x^{27}+x^{26}+x^{25}+x^{24}+x^{23}+x^{22}+x^{21}+x^{20}+x^{19}+x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x \\
 & ^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^3)
 \end{aligned}$$

Two [5,7] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=31080

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - 331n + 210 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 36 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - 4 \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + 64 \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+2}{10} \right\rfloor + 112 \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor - 56 \left\lfloor \frac{n+4}{10} \right\rfloor \right. \\
 & + 72 \left\lfloor \frac{n+5}{10} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+7}{10} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 24 \left\lfloor \frac{n+1}{12} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+3}{12} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n}{14} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+1}{14} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+2}{14} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+3}{14} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+4}{14} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+5}{14} \right\rfloor + 36 \left\lfloor \frac{n+6}{14} \right\rfloor + 132 \left\lfloor \frac{n+7}{14} \right\rfloor \\
 & + 48 \left\lfloor \frac{n+8}{14} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+9}{14} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+10}{14} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+11}{14} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+11}{24} \right\rfloor - 16 \left\lfloor \frac{n+12}{24} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+10}{35} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+11}{35} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+12}{35} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+15}{35} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+16}{35} \right\rfloor \\
 & + 96 \left\lfloor \frac{n+17}{35} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+18}{35} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+19}{35} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+20}{35} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+21}{35} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+22}{35} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+23}{35} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+24}{35} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+25}{35} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+26}{35} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+27}{35} \right\rfloor \\
 & - 48 \left\lfloor \frac{n+28}{35} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+29}{35} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+30}{35} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+33}{35} \right\rfloor + 216 \left\lfloor \frac{n}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+1}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+2}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+3}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+4}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+5}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+6}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+7}{37} \right\rfloor \\
 & + 72 \left\lfloor \frac{n+8}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+9}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+10}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+11}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+12}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+13}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+14}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+15}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+16}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+17}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+18}{37} \right\rfloor \\
 & + 144 \left\lfloor \frac{n+19}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+20}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+21}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+22}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+23}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+24}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+25}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+26}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+27}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+28}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+29}{37} \right\rfloor \\
 & + 72 \left\lfloor \frac{n+30}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+31}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+32}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+33}{37} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+34}{37} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+35}{37} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+45}{70} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+46}{70} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+47}{70} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+50}{70} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+51}{70} \right\rfloor \\
 & - 48 \left\lfloor \frac{n+52}{70} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+53}{70} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+54}{70} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+55}{70} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+56}{70} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+57}{70} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+58}{70} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+59}{70} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+60}{70} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+61}{70} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+62}{70} \right\rfloor \\
 & - 48 \left\lfloor \frac{n+63}{70} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+64}{70} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+65}{70} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+68}{70} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+38}{74} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+39}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+40}{74} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+41}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+42}{74} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+43}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+44}{74} \right\rfloor \\
 & + 72 \left\lfloor \frac{n+45}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+46}{74} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+47}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+48}{74} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+49}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+50}{74} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+51}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+52}{74} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+53}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+54}{74} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+55}{74} \right\rfloor \\
 & - 72 \left\lfloor \frac{n+56}{74} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+57}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+58}{74} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+59}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+60}{74} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+61}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+62}{74} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+63}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+64}{74} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+65}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+66}{74} \right\rfloor \\
 & \left. + 72 \left\lfloor \frac{n+67}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+68}{74} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+69}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+70}{74} \right\rfloor + 72 \left\lfloor \frac{n+71}{74} \right\rfloor - 72 \left\lfloor \frac{n+72}{74} \right\rfloor + 330 \right)
 \end{aligned}$$

Two [6,6] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=12

$$\frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - \frac{7n}{6} + \frac{5}{4} + \left(\frac{7n}{18} + \frac{1}{4} \right) * (-1)^n - \frac{2n}{9} * \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{2n}{3} * \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right)$$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{2n}{3} \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \frac{2}{3}n \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - \frac{4}{3}n \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 2n \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{3} + 1 \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor - \frac{2n^2}{3} - \frac{4n}{3} + 2 \right)$$

Předchozí vzorec je jen jedním z možných vyjádření této funkce pomocí celých částí. Při jiném nastavení tvaru rovnice s hledanými koeficienty dostaneme např.

Alternative formula 2

$$\frac{1}{2}n^2 \left(2n \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \frac{4}{3}n \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - \frac{2}{3}n \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + \left(\frac{4n}{3} + 1 \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor - \frac{2n^2}{3} - \frac{4n}{3} + 2 \right)$$

Všechny 3 vzorce dávají stejné hodnoty pro celočíselná n , oba vzorce s celými částmi jsou dokonce identické.

Recurrence

$$a[n] = a[n-31] - a[n-30] + 3a[n-29] - 3a[n-28] + 3a[n-27] - 3a[n-26] - 3a[n-25] + 3a[n-24] - 12a[n-23] + 12a[n-22] - 12a[n-21] + 12a[n-20] + 2a[n-19] - 2a[n-18] + 18a[n-17] - 18a[n-16] + 18a[n-15] - 18a[n-14] + 2a[n-13] - 2a[n-12] - 12a[n-11] + 12a[n-10] - 12a[n-9] + 12a[n-8] - 3a[n-7] + 3a[n-6] + 3a[n-5] - 3a[n-4] + 3a[n-3] - 3a[n-2] + a[n-1]$$

Generating function

$$- 2 x^2 (x^{28} + 6 x^{27} + 23 x^{26} + 79 x^{25} + 200 x^{24} + 327 x^{23} + 901 x^{22} + 943 x^{21} + 2236 x^{20} + 2316 x^{19} + 4011 x^{18} + 4041 x^{17} + 6237 x^{16} + 4737 x^{15} + 7746 x^{14} + 4506 x^{13} + 6861 x^{12} + 3969 x^{11} + 4619 x^{10} + 2649 x^9 + 2692 x^8 + 1076 x^7 + 1237 x^6 + 303 x^5 + 338 x^4 + 89 x^3 + 47 x^2 + 15 x + 3) / ((x-1)^5 (x+1)^4 (x^2+1)^3 (x^2-x+1)^4 (x^2+x+1)^4)$$

Two [6,7] riders on an $n \times n$ toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=92820

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - 362n + 216 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 60 \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 136 \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + 8 \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + 136 \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor - 40 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 16 \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - 4 \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 12 \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 56 \left\lfloor \frac{n+1}{12} \right\rfloor + 56 \left\lfloor \frac{n+3}{12} \right\rfloor \right. \\
 & + 48 \left\lfloor \frac{n}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+1}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+2}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+3}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+4}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+5}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+6}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+7}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+8}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+9}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+10}{13} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+11}{13} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n}{14} \right\rfloor \\
 & + 144 \left\lfloor \frac{n+1}{14} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+2}{14} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+3}{14} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+5}{14} \right\rfloor - 36 \left\lfloor \frac{n+6}{14} \right\rfloor + 132 \left\lfloor \frac{n+7}{14} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+8}{14} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+9}{14} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+10}{14} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+11}{14} \right\rfloor + 192 \left\lfloor \frac{n}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+1}{17} \right\rfloor \\
 & + 160 \left\lfloor \frac{n+2}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+3}{17} \right\rfloor + 160 \left\lfloor \frac{n+4}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+5}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+6}{17} \right\rfloor + 160 \left\lfloor \frac{n+7}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+8}{17} \right\rfloor + 160 \left\lfloor \frac{n+9}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+10}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+11}{17} \right\rfloor + 160 \left\lfloor \frac{n+12}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+13}{17} \right\rfloor \\
 & + 160 \left\lfloor \frac{n+14}{17} \right\rfloor + 32 \left\lfloor \frac{n+15}{17} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+4}{21} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+6}{21} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+7}{21} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+9}{21} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+11}{21} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+13}{21} \right\rfloor - 96 \left\lfloor \frac{n+14}{21} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+15}{21} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+11}{28} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+12}{28} \right\rfloor \\
 & + 24 \left\lfloor \frac{n+13}{28} \right\rfloor - 24 \left\lfloor \frac{n+14}{28} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+19}{28} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+20}{28} \right\rfloor + 144 \left\lfloor \frac{n+25}{42} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+26}{42} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n+27}{42} \right\rfloor - 120 \left\lfloor \frac{n+28}{42} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+29}{42} \right\rfloor + 96 \left\lfloor \frac{n+30}{42} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+31}{42} \right\rfloor \\
 & - 96 \left\lfloor \frac{n+32}{42} \right\rfloor - 120 \left\lfloor \frac{n+34}{42} \right\rfloor + 120 \left\lfloor \frac{n+35}{42} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+36}{42} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+59}{84} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+60}{84} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+61}{84} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+62}{84} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+65}{84} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+66}{84} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+67}{84} \right\rfloor \\
 & + 48 \left\lfloor \frac{n+68}{84} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+71}{84} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+72}{84} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+75}{84} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+76}{84} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+77}{84} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+78}{84} \right\rfloor + 48 \left\lfloor \frac{n+81}{84} \right\rfloor - 48 \left\lfloor \frac{n+82}{84} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+21}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+22}{85} \right\rfloor \\
 & - 128 \left\lfloor \frac{n+26}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+27}{85} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+31}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+32}{85} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+36}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+37}{85} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+38}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+39}{85} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+41}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+42}{85} \right\rfloor \\
 & - 128 \left\lfloor \frac{n+43}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+44}{85} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+46}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+47}{85} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+48}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+49}{85} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+51}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+52}{85} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+53}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+54}{85} \right\rfloor \\
 & - 128 \left\lfloor \frac{n+55}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+57}{85} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+58}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+59}{85} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+60}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+62}{85} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+63}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+64}{85} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+65}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+67}{85} \right\rfloor \\
 & \left. - 128 \left\lfloor \frac{n+68}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+69}{85} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+70}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+74}{85} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+75}{85} \right\rfloor + 128 \left\lfloor \frac{n+79}{85} \right\rfloor - 128 \left\lfloor \frac{n+80}{85} \right\rfloor + 361 \right)
 \end{aligned}$$

Two [7,7] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 17.5.2010), period=14

$$\frac{1}{2}n^2 \left(n^2 - \frac{86n}{49} + \frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{2} + \frac{24n}{49} * \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi n}{7}\right) \right) \right)$$

Stejně jako u [0,7], výraz $\cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi n}{7}\right)$ nabývá pouze dvou hodnot. Pokud je $n=7k$ (násobek 7), je roven 3, jinak vždy $-1/2$

Alternative formula

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{24}{7}n \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \frac{12}{7}n \left\lfloor \frac{n+1}{7} \right\rfloor + \frac{12}{7}n \left\lfloor \frac{n+2}{7} \right\rfloor + \frac{12}{7}n \left\lfloor \frac{n+3}{7} \right\rfloor + \frac{12}{7}n \left\lfloor \frac{n+4}{7} \right\rfloor + \frac{12}{7}n \left\lfloor \frac{n+5}{7} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{5n^2}{7} - \frac{9n}{7} + 2 \right)$$

Recurrence

$$a[n] = a[n-32] + 2a[n-31] - 2a[n-29] - a[n-28] - 4a[n-25] - 8a[n-24] + 8a[n-22] + 4a[n-21] + 6a[n-18] + 12a[n-17] - 12a[n-15] - 6a[n-14] - 4a[n-11] - 8a[n-10] + 8a[n-8] + 4a[n-7] + a[n-4] + 2a[n-3] - 2a[n-1]$$

Generating function

$$\frac{-2x^2(x^{29} + 12x^{28} + 56x^{27} + 174x^{26} + 412x^{25} + 818x^{24} + 1293x^{23} + 2028x^{22} + 3476x^{21} + 5152x^{20} + 6499x^{19} + 7822x^{18} + 9124x^{17} + 9526x^{16} + 9478x^{15} + 10654x^{14} + 11284x^{13} + 9706x^{12} + 7816x^{11} + 6346x^{10} + 4705x^9 + 3180x^8 + 2320x^7 + 1736x^6 + 967x^5 + 414x^4 + 176x^3 + 58x^2 + 13x + 2)}{(x-1)^5(x+1)^3(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^4}$$

Two [8,8] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=16

$$\frac{1}{64}n^2 \left(32n^2 - 43n + (-1)^n(21n + 2) + 2(5n + 2) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 2(n + 2) \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 2(n + 2) \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right) + 4 \cos\left(\frac{3\pi n}{8}\right) + 4 \cos\left(\frac{5\pi n}{8}\right) + 4 \cos\left(\frac{7\pi n}{8}\right) + 34 \right)$$

Alternative formula:

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \frac{n}{4} \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \left(\frac{11n}{4} + 1 \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{3n}{4} + 1 \right) \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \left(\frac{n}{4} + 1 \right) \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+7}{16} \right\rfloor - \frac{3n^2}{4} - \frac{5n}{4} + 2 \right)$$

Generating function

$$\frac{-2x^2(3+6x+51x^2+40x^3+179x^4+162x^5+567x^6+288x^7+976x^8+744x^9+1928x^{10}+1040x^{11}+2704x^{12}+1896x^{13}+4664x^{14}+1952x^{15}+5383x^{16}+3606x^{17}+7727x^{18}+3800x^{19}+8503x^{20}+5442x^{21}+11283x^{22}+4672x^{23}+10720x^{24}+6576x^{25}+12272x^{26}+5600x^{27}+11104x^{28}+6576x^{29}+12176x^{30}+4544x^{31}+9577x^{32}+5442x^{33}+8969x^{34}+3800x^{35}+6649x^{36}+3606x^{37}+5685x^{38}+2080x^{39}+3664x^{40}+1896x^{41}+2696x^{42}+1040x^{43}+1552x^{44}+744x^{45}+952x^{46}+288x^{47}+397x^{48}+162x^{49}+149x^{50}+40x^{51}+29x^{52}+6x^{53}+x^{54})}{((-1+x)^5(1+x)^4(1+x^2)^4(1+x^4)^4(1+x^8)^3)}$$

Two [9,9] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=18

$$\frac{1}{243}n^2 \left(\frac{3}{4}(162n^2 - 244n + 243) + \frac{243(-1)^n}{4} - 48\sqrt{3}n \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 88\sqrt{3}n \sin\left(\frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - 8\sqrt{3}n \cos\left(\frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{6n \left(\cos\left(\frac{8\pi n}{9} + \frac{7\pi}{18}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \sin\left(\frac{8\pi n}{9} + \frac{\pi}{3}\right) \right)}{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)} \right. \\ \left. + \frac{6n \left(2 \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{9} + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{9} + \frac{2\pi}{9}\right) \right)}{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} + \frac{6n \left(\sin\left(\frac{4\pi n}{9} + \frac{4\pi}{9}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \cos\left(\frac{4\pi n}{9} + \frac{\pi}{6}\right) \right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)} \right)$$

Alternative formula:

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{28}{9}n \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \frac{16}{9}n \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \frac{4}{9}n \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor + \frac{4}{9}n \left\lfloor \frac{n+2}{9} \right\rfloor + \frac{4}{9}n \left\lfloor \frac{n+5}{9} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{7n^2}{9} - \frac{11n}{9} + 2 \right)$$

Generating function

$$\frac{-2x^2(2+22x+76x^2+176x^3+468x^4+955x^5+1442x^6+2508x^7+4102x^8+5076x^9+6890x^{10}+9996x^{11}+11694x^{12}+13977x^{13}+17808x^{14}+18912x^{15}+20412x^{16}+23919x^{17}+22902x^{18}+21147x^{19}+22548x^{20}+20796x^{21}+17784x^{22}+16923x^{23}+14226x^{24}+10944x^{25}+9354x^{26}+7000x^{27}+4502x^{28}+3344x^{29}+2326x^{30}+1305x^{31}+764x^{32}+412x^{33}+156x^{34}+47x^{35}+12x^{36}+x^{37})}{((-1+x)^5(1+x)^3(1+x+x^2)^4(1+x^3+x^6)^4)}$$

Two [10,10] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=20

$$\frac{1}{200}n^2 \left(100n^2 - 126n + (-1)^n(42n + 25) - 16n \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right) + 48n \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) - 16n \cos\left(\frac{3\pi n}{5}\right) + 48n \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + 50 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 125 \right)$$

Alternative formula:

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{4}{5}n \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + \frac{4}{5}n \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor + \frac{4}{5}n \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor - \frac{8}{5}n \left\lfloor \frac{n+4}{10} \right\rfloor + \frac{12}{5}n \left\lfloor \frac{n+5}{10} \right\rfloor + \frac{4}{5}n \left\lfloor \frac{n+7}{10} \right\rfloor + \left(\frac{14n}{5} + 1 \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor - \frac{4n^2}{5} - \frac{6n}{5} + 2 \right)$$

Generating function

$$\frac{-2x^2(3+6x+56x^2+112x^3+279x^4+462x^5+1018x^6+1142x^7+3074x^8+2234x^9+6914x^{10}+4152x^{11}+12080x^{12}+8758x^{13}+17222x^{14}+15714x^{15}+22086x^{16}+20314x^{17}+29598x^{18}+20918x^{19}+38140x^{20}+20348x^{21}+40704x^{22}+21554x^{23}+35720x^{24}+23386x^{25}+27374x^{26}+20546x^{27}+20582x^{28}+13662x^{29}+15966x^{30}+7824x^{31}+10728x^{32}+4370x^{33}+5578x^{34}+2438x^{35}+2322x^{36}+1198x^{37}+746x^{38}+386x^{39}+177x^{40}+70x^{41}+32x^{42}+6x^{43}+x^{44})}{((-1+x)^5(1+x)^4(1+x^2)^3(1-x+x^2-x^3+x^4)^4(1+x+x^2+x^3+x^4)^4)}$$

Two [11,11] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=22

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{40}{11}n \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + \frac{20}{11}n \left\lfloor \frac{n+1}{11} \right\rfloor + \frac{20}{11}n \left\lfloor \frac{n+2}{11} \right\rfloor + \frac{20}{11}n \left\lfloor \frac{n+3}{11} \right\rfloor + \frac{20}{11}n \left\lfloor \frac{n+4}{11} \right\rfloor + \frac{20}{11}n \left\lfloor \frac{n+5}{11} \right\rfloor + \frac{20}{11}n \left\lfloor \frac{n+6}{11} \right\rfloor + \frac{20}{11}n \left\lfloor \frac{n+7}{11} \right\rfloor + \frac{20}{11}n \left\lfloor \frac{n+8}{11} \right\rfloor + \frac{20}{11}n \left\lfloor \frac{n+9}{11} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{9n^2}{11} - \frac{13n}{11} + 2 \right)$$

Poznámka: Trigonometrický tvar tohoto vzorce jsem také vygeneroval, ale vzorec je příliš rozsáhlý, myslím, že není vhodné jej publikovat

Generating function

$$\frac{-2x^2(2+13x+58x^2+176x^3+414x^4+820x^5+1442x^6+2328x^7+3526x^8+5689x^9+8260x^{10}+9464x^{11}+11136x^{12}+15039x^{13}+19250x^{14}+23024x^{15}+26822x^{16}+30500x^{17}+33914x^{18}+36920x^{19}+41794x^{20}+45972x^{21}+42062x^{22}+37222x^{23}+38718x^{24}+39380x^{25}+36926x^{26}+33920x^{27}+30506x^{28}+26828x^{29}+23030x^{30}+19861x^{31}+16860x^{32}+12348x^{33}+8256x^{34}+6443x^{35}+5082x^{36}+3524x^{37}+2326x^{38}+1440x^{39}+818x^{40}+412x^{41}+174x^{42}+56x^{43}+12x^{44}+x^{45})}{((-1+x)^5(1+x)^3(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10})^4)}$$

Two [12,12] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=24

$$\frac{1}{144}n^2 \left(72n^2 - 77n + (-1)^n(35n + 9) - 20n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + 44n \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - 4n \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) - 4n \cos\left(\frac{5\pi n}{6}\right) + 2(7n + 9) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 18 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 18 \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + 81 \right)$$

Alternative formula:

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \frac{2}{3}n \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \frac{1}{3}n \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor - \frac{4}{3}n \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + 2n \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor - \frac{n}{3} \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor + \frac{1}{3}n \left\lfloor \frac{n+1}{12} \right\rfloor - \frac{1}{3}n \left\lfloor \frac{n+3}{12} \right\rfloor + \left(\frac{17n}{6} + 1\right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{n}{6} + 1\right) \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor - \frac{5n^2}{6} - \frac{7n}{6} + 2 \right)$$

Generating function

$$\begin{aligned} & -2x^2(3+15x+42x^2+40x^3+224x^4+171x^5+677x^6+667x^7+1390x^8+1173x^9+3902x^{10}+2697x^{11}+5727x^{12}+5766x^{13}+11746x^{14}+6825x^{15}+17519x^{16}+14643x^{17}+25621x^{18}+16262x^{19}+34690x^{20}+23799x^{21}+46289x^{22}+29241x^{23}+48501x^{24}+33876x^{25}+63318x^{26}+34809x^{27}+57231x^{28}+42057x^{29}+62943x^{30}+31764x^{31}+56934x^{32}+37017x^{33}+49797x^{34}+26451x^{35}+41325x^{36}+22890x^{37}+33510x^{38}+17459x^{39}+21301x^{40}+12105x^{41}+16879x^{42}+7418x^{43}+8918x^{44}+5397x^{45}+5419x^{46}+2091x^{47}+2940x^{48}+1389x^{49}+1112x^{50}+483x^{51}+493x^{52}+144x^{53}+152x^{54}+49x^{55}+20x^{56}+6x^{57}+x^{58}) / ((-1+x)^5(1+x)^4(1+x^2)^4(1-x+x^2)^4(1+x+x^2)^4(1-x^4)^3(1-x^2+x^4)^4) \end{aligned}$$

Two [13,13] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=26

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{48}{13}n \left\lfloor \frac{n}{13} \right\rfloor + \frac{24}{13}n \left\lfloor \frac{n+1}{13} \right\rfloor + \frac{24}{13}n \left\lfloor \frac{n+2}{13} \right\rfloor + \frac{24}{13}n \left\lfloor \frac{n+3}{13} \right\rfloor + \frac{24}{13}n \left\lfloor \frac{n+4}{13} \right\rfloor + \frac{24}{13}n \left\lfloor \frac{n+5}{13} \right\rfloor + \frac{24}{13}n \left\lfloor \frac{n+6}{13} \right\rfloor + \frac{24}{13}n \left\lfloor \frac{n+7}{13} \right\rfloor + \frac{24}{13}n \left\lfloor \frac{n+8}{13} \right\rfloor + \frac{24}{13}n \left\lfloor \frac{n+9}{13} \right\rfloor + \frac{24}{13}n \left\lfloor \frac{n+10}{13} \right\rfloor + \frac{24}{13}n \left\lfloor \frac{n+11}{13} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{11n^2}{13} - \frac{15n}{13} + 2 \right)$$

Generating function

$$\begin{aligned} & -2x^2(2+13x+58x^2+176x^3+414x^4+820x^5+1442x^6+2328x^7+3526x^8+5084x^9+7050x^{10}+10486x^{11}+14426x^{12}+15868x^{13}+17874x^{14}+23434x^{15}+29398x^{16}+34612x^{17}+39946x^{18}+45256x^{19}+50398x^{20}+55228x^{21}+59602x^{22}+63376x^{23}+70462x^{24}+76660x^{25}+69670x^{26}+61558x^{27}+64498x^{28}+66412x^{29}+63382x^{30}+59608x^{31}+55234x^{32}+50404x^{33}+45262x^{34}+39952x^{35}+34618x^{36}+30418x^{37}+26482x^{38}+19904x^{39}+13842x^{40}+11382x^{41}+9470x^{42}+7048x^{43}+5082x^{44}+3524x^{45}+2326x^{46}+1440x^{47}+818x^{48}+412x^{49}+174x^{50}+56x^{51}+12x^{52}+x^{53}) / ((-1+x)^5(1+x)^3(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12})^4) \end{aligned}$$

Two [14,14] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=28

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{6}{7}n \left\lfloor \frac{n}{14} \right\rfloor + \frac{6}{7}n \left\lfloor \frac{n+1}{14} \right\rfloor + \frac{6}{7}n \left\lfloor \frac{n+3}{14} \right\rfloor + \frac{6}{7}n \left\lfloor \frac{n+5}{14} \right\rfloor - \frac{12}{7}n \left\lfloor \frac{n+6}{14} \right\rfloor + \frac{18}{7}n \left\lfloor \frac{n+7}{14} \right\rfloor + \frac{6}{7}n \left\lfloor \frac{n+9}{14} \right\rfloor + \frac{6}{7}n \left\lfloor \frac{n+11}{14} \right\rfloor + \left(\frac{20n}{7} + 1 \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor - \frac{6n^2}{7} - \frac{8n}{7} + 2 \right)$$

Generating function

$$-2x^2(3+6x+56x^2+62x^3+329x^4+459x^5+1021x^6+1433x^7+2583x^8+2825x^9+5935x^{10}+4923x^{11}+12145x^{12}+7868x^{13}+21240x^{14}+11924x^{15}+31748x^{16}+18820x^{17}+43616x^{18}+31649x^{19}+54323x^{20}+47991x^{21}+62545x^{22}+56863x^{23}+76401x^{24}+57989x^{25}+96803x^{26}+58296x^{27}+112186x^{28}+56956x^{29}+114336x^{30}+57044x^{31}+106214x^{32}+61941x^{33}+92131x^{34}+65143x^{35}+73353x^{36}+57335x^{37}+59105x^{38}+41733x^{39}+51415x^{40}+28756x^{41}+41568x^{42}+19244x^{43}+29052x^{44}+12268x^{45}+18008x^{46}+8263x^{47}+10109x^{48}+5385x^{49}+4991x^{50}+2929x^{51}+2031x^{52}+1195x^{53}+749x^{54}+336x^{55}+227x^{56}+70x^{57}+32x^{58}+6x^{59}+x^{60}) / ((-1+x)^5(1+x)^4(1+x^2)^3(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6)^4(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4)$$

Two [15,15] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=30

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{8}{5}n \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \frac{4}{3}n \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \frac{32}{15}n \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \frac{8}{15}n \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \frac{8}{5}n \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \frac{8}{15}n \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor - \frac{16}{15}n \left\lfloor \frac{n+2}{15} \right\rfloor + \frac{16}{15}n \left\lfloor \frac{n+3}{15} \right\rfloor - \frac{16}{15}n \left\lfloor \frac{n+4}{15} \right\rfloor + \frac{16}{15}n \left\lfloor \frac{n+6}{15} \right\rfloor - \frac{16}{15}n \left\lfloor \frac{n+7}{15} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{13n^2}{15} - \frac{17n}{15} + 2 \right)$$

Generating function

$$-2x^2(2+22x+76x^2+226x^3+568x^4+955x^5+1342x^6+2377x^7+4340x^8+5884x^9+7140x^{10}+9581x^{11}+11998x^{12}+16299x^{13}+22528x^{14}+24672x^{15}+28808x^{16}+38277x^{17}+45522x^{18}+54351x^{19}+60120x^{20}+57564x^{21}+65664x^{22}+86595x^{23}+93258x^{24}+86925x^{25}+90852x^{26}+95166x^{27}+101208x^{28}+114291x^{29}+107262x^{30}+98919x^{31}+108168x^{32}+108078x^{33}+104244x^{34}+98295x^{35}+80646x^{36}+74841x^{37}+82440x^{38}+76632x^{39}+59880x^{40}+51453x^{41}+46374x^{42}+40287x^{43}+37284x^{44}+30052x^{45}+22100x^{46}+19529x^{47}+16274x^{48}+12287x^{49}+9380x^{50}+6248x^{51}+4268x^{52}+3475x^{53}+2426x^{54}+1305x^{55}+664x^{56}+362x^{57}+156x^{58}+47x^{59}+12x^{60}+x^{61}) / ((-1+x)^5(1+x)^3(1+x+x^2)^4(1+x+x^2+x^3+x^4)^4(1-x+x^3-x^4+x^5-x^7+x^8)^4)$$

Two [16,16] riders on an n x n toroidal chessboard

Explicit formula (V. Kotěšovec, 7.12.2010), period=32

$$\frac{1}{256}n^2 \left(128n^2 - 171n + (-1)^n(85n + 4) + n \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \sqrt{2}(21n + 4) \sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 2(5n + 4) \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 2(5n + 4) \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + 2(n + 4) \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right) + 2(n + 4) \cos\left(\frac{3\pi n}{8}\right) + 2(n + 4) \cos\left(\frac{5\pi n}{8}\right) + 2(n + 4) \cos\left(\frac{7\pi n}{8}\right) + 8 \cos\left(\frac{\pi n}{16}\right) + 8 \cos\left(\frac{3\pi n}{16}\right) + 8 \cos\left(\frac{5\pi n}{16}\right) + 8 \cos\left(\frac{7\pi n}{16}\right) + 8 \cos\left(\frac{9\pi n}{16}\right) + 8 \cos\left(\frac{11\pi n}{16}\right) + 8 \cos\left(\frac{13\pi n}{16}\right) + 8 \cos\left(\frac{15\pi n}{16}\right) + 2\sqrt{2}(11n + 2) \cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 132 \right)$$

Alternative formula:

$$\frac{1}{2}n^2 \left(\frac{n}{2} \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \frac{n}{4} \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \left(\frac{23n}{8} + 1 \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{7n}{8} + 1 \right) \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \left(\frac{3n}{8} + 1 \right) \left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + \left(\frac{n}{8} + 1 \right) \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor + \left(\frac{n}{8} + 1 \right) \left\lfloor \frac{n+7}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+15}{32} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+16}{32} \right\rfloor - \frac{7n^2}{8} - \frac{9n}{8} + 2 \right)$$

Generating function

- 2 x^2 (3+6 x+51 x^2+40 x^3+179 x^4+162 x^5+567 x^6+288 x^7+979 x^8+750 x^9+1979 x^10+1080 x^11+2883 x^12+2058 x^13+5295 x^14+2176 x^15+6368 x^16+4368 x^17+9808 x^18+4960 x^19+11744 x^20+7824 x^21+17648 x^22+7488 x^23+19040 x^24+12432 x^25+25936 x^26+12640 x^27+28256 x^28+18192 x^29+40112 x^30+14976 x^31+39383 x^32+25086 x^33+50359 x^34+24040 x^35+51911 x^36+32682 x^37+67403 x^38+27360 x^39+64487 x^40+40134 x^41+77599 x^42+36280 x^43+75671 x^44+46578 x^45+94371 x^46+35072 x^47+84032 x^48+51168 x^49+95584 x^50+43840 x^51+88640 x^52+53472 x^53+102944 x^54+40320 x^55+89408 x^56+53472 x^57+97120 x^58+43840 x^59+86336 x^60+51168 x^61+97952 x^62+34560 x^63+79433 x^64+46578 x^65+81913 x^66+36280 x^67+69209 x^68+40134 x^69+72389 x^70+27360 x^71+57017 x^72+32682 x^73+55441 x^74+24040 x^75+44297 x^76+25086 x^77+44205 x^78+15488 x^79+32480 x^80+18192 x^81+29776 x^82+12640 x^83+22496 x^84+12432 x^85+20720 x^86+7488 x^87+14432 x^88+7824 x^89+12112 x^90+4960 x^91+8288 x^92+4368 x^93+6832 x^94+2176 x^95+4061 x^96+2058 x^97+2845 x^98+1080 x^99+1581 x^100+750 x^101+953 x^102+288 x^103+397 x^104+162 x^105+149 x^106+40 x^107+29 x^108+6 x^109+x^110) / ((-1+x)^5 (1+x)^4 (1+x^2)^4 (1+x^4)^4 (1+x^8)^4 (1+x^16)^3)

2 Riders on an n x n toroidal chessboard																	
n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]
1																	
2	2	6	2	6	2	6	2	4	2	4	2	4	2	4	6	2	6
3	18	18	36	18	18	36	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
4	72	104	72	120	72	104	72	80	72	80	72	80	72	80	112	72	104
5	200	200	200	200	300	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
6	450	558	594	558	450	630	450	468	378	468	378	468	450	468	558	450	558
7	882	882	882	882	882	882	1176	882	588	588	588	588	882	882	882	588	588
8	1568	1824	1568	1952	1568	1824	1568	1600	1312	1600	1568	1600	1312	1600	1856	1312	1824
9	2592	2592	3078	2592	2592	3078	2592	2592	2106	2106	2106	2106	2106	2106	2592	2106	2106
10	4050	4550	4050	4550	4850	4550	4050	4100	3650	4100	3650	4100	3650	4100	4550	3650	4550
11	6050	6050	6050	6050	6050	6050	6050	6050	4840	4840	4840	4840	4840	4840	6050	4840	4840
12	8712	9576	9864	10008	8712	10152	8712	8784	7848	8208	7848	8784	8712	8784	9648	8712	9288
13	12168	12168	12168	12168	12168	12168	12168	12168	10140	10140	10140	12168	10140	10140	12168	12168	10140
14	16562	17934	16562	17934	16562	17934	18914	16660	14210	14308	14210	14308	15386	16660	17934	14210	16758
15	22050	22050	24300	22050	24750	24300	22050	22050	20250	20250	22050	20250	20250	20250	22050	20250	20250
16	28800	30848	28800	31872	28800	30848	28800	28928	25728	26880	26752	26880	25728	28928	30976	25728	29824
17	36992	36992	36992	36992	36992	36992	36992	36992	32368	32368	36992	32368	32368	32368	36992	32368	32368
18	46818	49734	50706	49734	46818	51678	46818	46980	42282	43092	42282	43092	42930	43092	49734	42930	47790
19	58482	58482	58482	58482	58482	58482	58482	58482	51984	51984	51984	51984	51984	51984	58482	51984	51984
20	72200	76200	72200	78200	78600	76200	72200	72400	67400	69200	67400	69200	67400	69200	76400	67400	74600
21	88200	88200	94374	88200	88200	94374	96138	88200	80262	80262	80262	80262	82908	82908	88200	80262	80262
22	106722	112046	106722	112046	106722	112046	106722	106964	97042	97284	97042	97284	97042	97284	112046	97042	107206
23	128018	128018	128018	128018	128018	128018	128018	128018	116380	116380	116380	116380	116380	116380	128018	116380	116380
24	152352	159264	161568	162720	152352	163872	152352	152640	141984	145728	144288	152640	145440	152640	159552	145440	155808
25	180000	180000	180000	180000	192500	180000	180000	180000	167500	167500	167500	167500	167500	180000	180000	167500	167500
26	211250	220038	211250	220038	211250	220038	211250	211588	195026	195364	195026	211588	195026	195364	220038	203138	211926
27	246402	246402	259524	246402	246402	259524	246402	246402	228906	228906	228906	228906	228906	228906	246402	228906	228906
28	285768	296744	285768	302232	285768	296744	304584	286160	266952	267344	266952	267344	271656	276752	297136	266952	287336
29	329672	329672	329672	329672	329672	329672	329672	329672	306124	306124	306124	306124	306124	306124	329672	306124	306124
30	378450	391950	396450	391950	400050	400950	378450	378900	358650	364500	365850	364500	360450	364500	391950	360450	384750
31	432450	432450	432450	432450	432450	432450	432450	432450	403620	403620	403620	403620	403620	403620	432450	403620	403620
32	492032	508416	492032	516608	492032	508416	492032	492544	463360	467968	467456	467968	463360	476160	508928	463360	496128
33	557568	557568	581526	557568	557568	581526	557568	557568	524898	524898	524898	524898	524898	524898	557568	524898	524898
34	629442	649094	629442	649094	629442	649094	629442	630020	592450	593028	610946	593028	592450	593028	649094	592450	630598
35	708050	708050	708050	708050	742350	708050	744800	708050	671300	671300	671300	671300	708050	678650	708050	671300	671300

36	793800	817128	824904	828792	793800	832680	793800	794448	754920	758160	754920	763344	762696	763344	817776	762696	798984
37	887112	887112	887112	887112	887112	887112	887112	887112	837828	837828	837828	837828	887112	837828	887112	837828	837828
38	988418	1015854	988418	1015854	988418	1015854	988418	989140	936434	937156	936434	937156	936434	937156	1015854	936434	989862
39	1098162	1098162	1137708	1098162	1098162	1137708	1098162	1098162	1043406	1043406	1043406	1061658	1043406	1043406	1098162	1061658	1043406
40	1216800	1248800	1216800	1264800	1268000	1248800	1216800	1217600	1165600	1179200	1172000	1179200	1165600	1179200	1249600	1165600	1229600
41	1344800	1344800	1344800	1344800	1344800	1344800	1344800	1344800	1277560	1277560	1277560	1277560	1277560	1277560	1344800	1277560	1277560
42	1482642	1519686	1532034	1519686	1482642	1544382	1546146	1483524	1415610	1420020	1415610	1420020	1429722	1441188	1519686	1419138	1487934
43	1630818	1630818	1630818	1630818	1630818	1630818	1630818	1630818	1553160	1553160	1553160	1553160	1553160	1553160	1630818	1553160	1553160
44	1789832	1832424	1789832	1853720	1789832	1832424	1789832	1790800	1712392	1713360	1712392	1713360	1712392	1713360	1833392	1712392	1793704
45	1960200	1960200	2020950	1960200	2033100	2020950	1960200	1960200	1883250	1883250	1899450	1883250	1883250	1883250	1960200	1883250	1883250
46	2142450	2191118	2142450	2191118	2142450	2191118	2142450	2143508	2049346	2050404	2049346	2050404	2049346	2050404	2191118	2049346	2144566
47	2337122	2337122	2337122	2337122	2337122	2337122	2337122	2337122	2235508	2235508	2235508	2235508	2235508	2235508	2337122	2235508	2235508
48	2544768	2600064	2618496	2627712	2544768	2636928	2544768	2545920	2448000	2462976	2457216	2490624	2461824	2545920	2601216	2461824	2558592
49	2765952	2765952	2765952	2765952	2765952	2765952	2866794	2765952	2650704	2650704	2650704	2650704	2665110	2665110	2765952	2650704	2650704
50	3001250	3063750	3001250	3063750	3101250	3063750	3001250	3002500	2891250	2902500	2891250	2902500	2891250	3002500	3063750	2891250	3013750
n	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,7]	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]	[1,7]	[2,2]	[2,3]	[2,4]

2 Riders on an $n \times n$ toroidal chessboard

n	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]
1																		
2	2	6	2	4	2	4	2	4	6	2	6	2	4	2	4	6	2	4
3	18	18	18	36	18	18	36	18	18	18	18	18	18	18	18	36	18	18
4	72	112	72	80	72	80	72	80	120	72	104	72	80	72	80	112	72	80
5	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	300	200	200	200	200	200
6	378	558	378	612	450	468	594	468	558	378	558	378	468	450	468	630	450	468
7	882	588	882	882	882	588	588	882	882	588	588	882	882	588	882	882	882	1176
8	1312	1856	1312	1600	1568	1600	1312	1600	1984	1568	1824	1568	1600	1312	1600	1856	1312	1600
9	2106	2106	2592	3078	2106	2106	3078	2106	2592	2592	2106	2106	2592	2106	2106	3078	2106	2592
10	4050	4550	3650	4100	3650	4100	3650	4100	4550	4050	4550	3650	4900	4050	4100	4550	3650	4100
11	4840	4840	4840	6050	4840	4840	4840	4840	6050	4840	4840	6050	6050	6050	4840	6050	4840	6050
12	7848	9648	7848	9936	8712	8208	9864	8208	10008	7848	9576	7848	8784	8712	8784	10224	8712	8784
13	10140	10140	10140	12168	10140	10140	10140	10140	12168	10140	12168	12168	12168	10140	10140	12168	12168	12168
14	15386	16758	16562	16660	15386	14308	14210	16660	17934	14210	16758	16562	16660	14210	16660	17934	16562	19012
15	20250	20250	22050	24300	20250	22050	24300	20250	22050	20250	20250	20250	24750	22050	20250	24300	20250	22050
16	25728	30976	25728	28928	26752	28928	25728	26880	32000	26752	29824	26752	28928	25728	26880	30976	25728	28928
17	32368	32368	32368	36992	32368	36992	32368	32368	36992	32368	32368	32368	36992	32368	32368	36992	36992	36992

18	42282	47790	44226	50868	42930	43092	50058	43092	49734	44226	47790	42282	46980	42930	43092	51678	42930	46980
19	51984	51984	51984	58482	51984	51984	51984	51984	58482	51984	51984	51984	58482	51984	51984	58482	51984	58482
20	72200	76400	67400	72400	67400	69200	67400	72400	78200	72200	74600	67400	78800	72200	69200	76400	67400	72400
21	88200	80262	82908	94374	82908	80262	91728	88200	88200	80262	80262	82908	88200	80262	82908	94374	88200	96138
22	97042	107206	97042	106964	97042	97284	97042	97284	112046	97042	107206	101882	106964	101882	97284	112046	97042	106964
23	116380	116380	116380	128018	116380	116380	116380	116380	128018	116380	116380	116380	128018	116380	116380	128018	116380	128018
24	141984	157248	141984	161856	152352	145728	159264	145728	163008	144288	159264	144288	152640	145440	152640	164160	145440	152640
25	167500	167500	167500	180000	180000	167500	167500	167500	180000	167500	167500	167500	192500	167500	167500	180000	167500	180000
26	195026	211926	195026	211588	195026	195364	195026	195364	220038	195026	220038	203138	211588	195026	195364	220038	203138	211588
27	228906	228906	233280	259524	228906	228906	255150	228906	246402	233280	228906	228906	246402	228906	228906	259524	228906	246402
28	271656	287728	285768	286160	271656	267344	266952	276752	302232	266952	287336	285768	286160	266952	276752	297136	285768	304976
29	329672	306124	306124	329672	306124	306124	306124	329672	329672	306124	306124	306124	329672	306124	306124	329672	306124	329672
30	362250	384750	365850	396900	360450	378900	392850	364500	391950	362250	384750	358650	400500	378450	364500	400950	360450	378900
31	403620	403620	403620	432450	403620	403620	403620	403620	432450	403620	403620	403620	432450	403620	403620	432450	403620	432450
32	463360	500736	463360	492544	467456	476160	463360	467968	517120	467456	496128	467456	492544	463360	467968	508928	463360	492544
33	524898	524898	524898	581526	524898	524898	570636	524898	557568	524898	524898	557568	557568	535788	524898	581526	524898	557568
34	592450	630598	592450	630020	592450	630020	592450	593028	649094	592450	630598	592450	630020	592450	593028	649094	610946	630020
35	678650	671300	678650	708050	678650	671300	671300	678650	708050	671300	671300	678650	742350	671300	708050	708050	678650	744800
36	754920	802224	762696	825552	762696	758160	817128	758160	828792	762696	801576	754920	794448	762696	763344	833328	762696	794448
37	837828	837828	837828	887112	837828	837828	837828	837828	887112	837828	837828	837828	887112	837828	887112	887112	837828	887112
38	936434	989862	936434	989140	936434	937156	936434	937156	1015854	936434	989862	936434	989140	936434	937156	1015854	936434	989140
39	1043406	1043406	1043406	1137708	1043406	1043406	1119456	1043406	1098162	1043406	1061658	1061658	1098162	1043406	1043406	1137708	1061658	1098162
40	1184800	1236800	1165600	1217600	1172000	1179200	1165600	1217600	1265600	1216800	1229600	1172000	1268800	1184800	1179200	1249600	1165600	1217600
41	1277560	1277560	1277560	1344800	1277560	1277560	1277560	1277560	1344800	1344800	1277560	1277560	1344800	1277560	1277560	1344800	1277560	1344800
42	1447362	1487934	1436778	1532916	1429722	1420020	1510866	1483524	1519686	1415610	1487934	1436778	1483524	1419138	1441188	1544382	1482642	1547028
43	1553160	1553160	1553160	1630818	1553160	1553160	1553160	1553160	1630818	1553160	1553160	1553160	1630818	1553160	1553160	1630818	1553160	1630818
44	1712392	1794672	1712392	1790800	1712392	1713360	1712392	1713360	1853720	1712392	1793704	1731752	1790800	1731752	1713360	1833392	1712392	1790800
45	1883250	1883250	1960200	2020950	1883250	1899450	2004750	1883250	1960200	1895400	1883250	1883250	2033100	1899450	1883250	2020950	1883250	1960200
46	2049346	2144566	2049346	2143508	2049346	2050404	2049346	2050404	2191118	2049346	2144566	2049346	2143508	2049346	2050404	2191118	2049346	2143508
47	2235508	2235508	2235508	2337122	2235508	2235508	2235508	2235508	2337122	2235508	2235508	2235508	2337122	2235508	2235508	2337122	2235508	2337122
48	2448000	2573568	2448000	2619648	2489472	2481408	2590848	2462976	2628864	2457216	2572416	2457216	2545920	2461824	2490624	2638080	2461824	2545920
49	2665110	2650704	2665110	2765952	2665110	2650704	2650704	2665110	2765952	2650704	2650704	2665110	2765952	2650704	2665110	2765952	2665110	2866794
50	2901250	3013750	2891250	3002500	2941250	2902500	2891250	2902500	3063750	2901250	3013750	2891250	3102500	2901250	2902500	3063750	2891250	3002500
n	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[3,6]	[3,7]	[4,4]	[4,5]	[4,6]	[4,7]	[5,5]	[5,6]	[5,7]	[6,6]	[6,7]	[7,7]

2 Riders on an $n \times n$ toroidal chessboard									
n	[8,8]	[9,9]	[10,10]	[11,11]	[12,12]	[13,13]	[14,14]	[15,15]	[16,16]
1									
2	6	4	6	4	6	4	6	4	6
3	18	36	18	18	36	18	18	36	18
4	120	80	112	80	120	80	112	80	120
5	200	200	300	200	200	200	200	300	200
6	558	612	558	468	630	468	558	612	558
7	882	882	882	882	882	882	1176	882	882
8	2016	1600	1856	1600	1984	1600	1856	1600	2016
9	2592	3240	2592	2592	3078	2592	2592	3078	2592
10	4550	4100	4950	4100	4550	4100	4550	4900	4550
11	6050	6050	6050	7260	6050	6050	6050	6050	6050
12	10008	9936	9648	8784	10296	8784	9648	9936	10008
13	12168	12168	12168	12168	12168	14196	12168	12168	12168
14	17934	16660	17934	16660	17934	16660	19110	16660	17934
15	22050	24300	24750	22050	24300	22050	22050	25200	22050
16	32512	28928	30976	28928	32000	28928	30976	28928	32640
17	36992	36992	36992	36992	36992	36992	36992	36992	36992
18	49734	52164	49734	46980	51678	46980	49734	50868	49734
19	58482	58482	58482	58482	58482	58482	58482	58482	58482
20	78200	72400	79600	72400	78200	72400	76400	78800	78200
21	88200	94374	88200	88200	94374	88200	96138	94374	88200
22	112046	106964	112046	116644	112046	106964	112046	106964	112046
23	128018	128018	128018	128018	128018	128018	128018	128018	128018
24	164448	161856	159552	152640	165312	152640	159552	161856	164448
25	180000	180000	192500	180000	180000	180000	180000	192500	180000
26	220038	211588	220038	211588	220038	227812	220038	211588	220038

27	246402	263898	246402	246402	259524	246402	246402	259524	246402
28	302232	286160	297136	286160	302232	286160	306544	286160	302232
29	329672	329672	329672	329672	329672	329672	329672	329672	329672
30	391950	396900	402750	378900	400950	378900	391950	404100	391950
31	432450	432450	432450	432450	432450	432450	432450	432450	432450
32	521216	492544	508928	492544	517120	492544	508928	492544	523264
33	557568	581526	557568	590238	581526	557568	557568	581526	557568
34	649094	630020	649094	630020	649094	630020	649094	630020	649094
35	708050	708050	742350	708050	708050	708050	744800	742350	708050
36	828792	835920	817776	794448	836568	794448	817776	825552	828792
37	887112	887112	887112	887112	887112	887112	887112	887112	887112
38	1015854	989140	1015854	989140	1015854	989140	1015854	989140	1015854
39	1098162	1137708	1098162	1098162	1137708	1152918	1098162	1137708	1098162
40	1272800	1217600	1275200	1217600	1265600	1217600	1249600	1268800	1272800
41	1344800	1344800	1344800	1344800	1344800	1344800	1344800	1344800	1344800
42	1519686	1532916	1519686	1483524	1544382	1483524	1551438	1532916	1519686
43	1630818	1630818	1630818	1630818	1630818	1630818	1630818	1630818	1630818
44	1853720	1790800	1833392	1868240	1853720	1790800	1833392	1790800	1853720
45	1960200	2041200	2033100	1960200	2020950	1960200	1960200	2045250	1960200
46	2191118	2143508	2191118	2143508	2191118	2143508	2191118	2143508	2191118
47	2337122	2337122	2337122	2337122	2337122	2337122	2337122	2337122	2337122
48	2642688	2619648	2601216	2545920	2647296	2545920	2601216	2619648	2648448
49	2765952	2765952	2765952	2765952	2765952	2765952	2866794	2765952	2765952
50	3063750	3002500	3113750	3002500	3063750	3002500	3063750	3102500	3063750
n	[8,8]	[9,9]	[10,10]	[11,11]	[12,12]	[13,13]	[14,14]	[15,15]	[16,16]

Poznámka: případ 3 Riders na prstencové šachovnici je už enormně složitý a řešení je (kromě triviálních věží a střelců) známo zatím jen pro 3 tátoše.

12) Composite pieces Rook/Queen + Leaper/Rider - Kombinované kameny (permutations with dynamically restricted positions)

V této kapitole se zabývám rozmístěním n neohrožujících se kombinovaných kamenů, které vzniknou složením pohyblivosti věže a jiných (bodových nebo liniových) kamenů. Z matematického hlediska jde o **permutace** $\{1, 2, \dots, n\}$ s nějakými omezujícími vlastnostmi. Sloupce šachovnice (kdy každá věž stojí právě na jednom sloupci) určují pozici v permutaci. Jelikož nalezení obecných vzorců je obtížné, zaměřil jsem se na tzv. asymptotické chování, tj. vlastnosti pro n blížící se k nekonečnu. Smyslem zkoumání těchto posloupností bylo zejména **hledání obecných závislostí** při kombinacích kamenů s různými pohyblivostmi. K tomu bylo potřeba vygenerovat co nejvíce hodnot. Tato kapitola obsahuje celkem 71 sérií hodnot. Jen málo z toho jsou hodnoty již dříve vypočtené (např. dámy nebo amazonky), zbytek je výsledek více než 1000 hodin nových výpočtů optimalizovaným programem v assembleru!

Všechny tyto posloupnosti mají asymptotický průběh

$$a_n \sim b * q^n * n!$$

kde b a q jsou konstanty (specifické pro každý kámen).

Jelikož u většiny posloupností je znám jen relativně malý počet hodnot (explicitní vzorce jsou z těchto 71 posloupností známy jen v případě 2 z nich - a to ještě jen v případě věží a skokanů, kdy je $q=1$), bylo jedinou možností, jak zjistit hodnoty konstant b a q , nějakým způsobem je extrapolovat. Pro tento účel je v matematice nejvhodnější tzv. metoda nejmenších čtverců. Abychom mohli provést lineární regresi, uvažujme (pro interní výpočty) raději zlogaritmovanou posloupnost

$$\log\left(\frac{a_n}{n!}\right) \sim \log b + n * \log q$$

Konstanty získané lineární regresi pak snadno převedeme zpět na původní konstanty b a q . Tyto konstanty jsou zobrazeny v posledních 2 řádcích všech tabulek. Z hlediska přesnosti výpočtů je daleko spolehlivější odhad konstanty q než konstanty b . Naštěstí pro obecné hypotézy je právě konstanta q tou zajímavou. Jinak samozřejmě je přesnost lepší tam, kde bylo známo více hodnot, tedy pro menší hodnoty r a s , kde se během výpočtu vyloučí více možností vzájemně se ohrožujících kamenů a ve stejném čase je proto možné vypočítat hodnoty pro větší n .

Pro výpočet (kdy se prokládá známými body přímka) jsem volil vždy pouze 5 nejvyšších bodů posloupnosti (tento počet byl zjištěn experimentálně, větší počet bodů dával příliš velkou váhu malým hodnotám, které z hlediska asymptotického chování nemají příliš význam). Do grafů jsou však zaneseny všechny hodnoty. Ještě je třeba poznamenat, že pro účely grafů jsem zobrazil funkci $\log\left(\frac{n!}{a_n}\right)$, která dává až na znaménko shodné výsledky, ale vyhnul jsem se tak záporným hodnotám a grafy jsou přehlednější.

Další série grafů vychází z toho, že

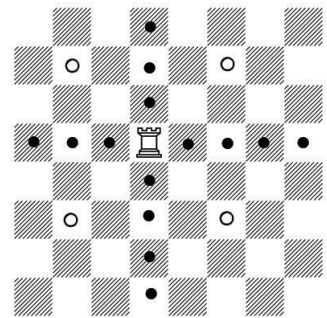
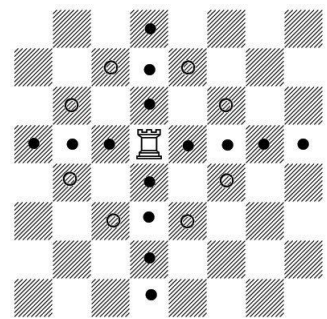
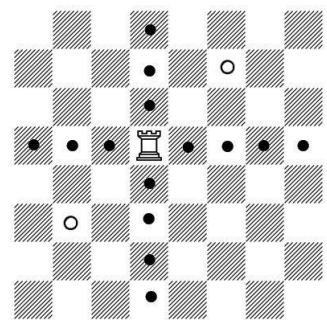
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n a_{n-1}} = q$$

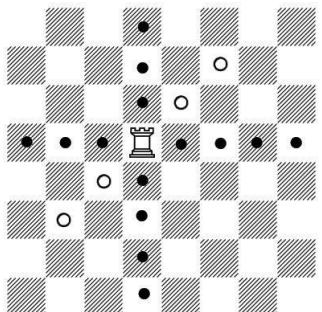
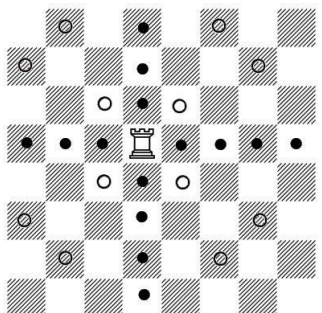
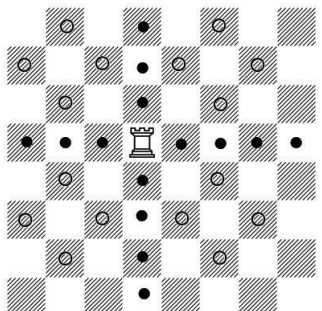
a tedy tento podíl umožňuje s přibývajícím počtem hodnot zpřesňovat přiblížení k limitní hodnotě q .

12.1) n pieces rook+leaper $[r,s]$ on an $n \times n$ chessboard - n kamenů věž+skokan $[r,s]$ na šachovnici $n \times n$

Pro kombinaci kamenů věž + bodový skokan existují přesné asymptotické vzorce.

General asymptotic formulas for number of ways to place n non-attacking composite pieces rook+leaper on an $n \times n$ board:

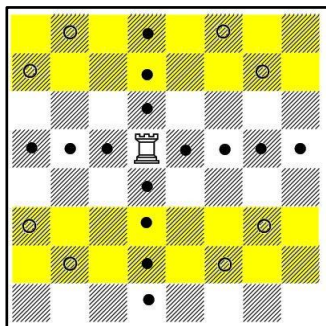
typ kamene (kombinovaného s věží)	počet polí interferujících s jinými permutacemi	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n!}$	příklady	
n composite pieces on an $n \times n$ board	number of squares		examples	
Rook + Leaper [d,d]	4 $ p(j+d) - p(j) < d$ (for all $j=1..n-d$)	$1/e^2$		rook+alfil $d=2$
Rook + Leaper [r,s] ($0 < r < s$)	8 $ p(i+r) - p(i) < s$ $ p(j+s) - p(j) < r$ (for all $i=1..n-r, j=1..n-s$)	$1/e^4$		rook+knight $r=1, s=2$ <i>An empress moves like a rook and a knight</i>
Rook + semi-Leaper [d,d]	2 $p(j+d) - p(j) < d$ (for all $j=1..n-d$)	$1/e$		rook+semi-alfil $d=2$

Rook + semi-Leaper [d₁,d₁] + semi-Leaper [d₂,d₂] (d ₁ <> d ₂)	4	$1/e^2$		rook+ semi-fers+semi-alfil d ₁ =1, d ₂ =2
Rook + Leaper [d,d] + Leaper [r,s] (0 < r < s)	12	$1/e^6$		rook+fers+zebra d=1 r=2, s=3
Rook + Leaper [r₁,s₁] + Leaper [r₂,s₂] (0 < r ₁ < s ₁ , 0 < r ₂ < s ₂ , [r ₁ ,s ₁] <> [r ₂ ,s ₂])	16	$1/e^8$		rook+knight+zebra r ₁ =1, s ₁ =2 r ₂ =2, s ₂ =3
generally	m	$e^{-m/2}$	$(m \text{ je konstanta nezávislá na } n)$	
n composite pieces on an $n \times n$ board	number of squares	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n!}$	examples	

Rozmístění n neohrožujících se věží na šachovnici $n \times n$ můžeme interpretovat také jako **systém permutací n prvků**. Do těchto permutací pak zasahují pole označená bílými kroužky. Tyto kroužky pro každý z n kamenů dynamicky vytvářejí "zakázaná" pole, kam už není možné postavit další kámen. Je tu zajímavé srovnání s kapitolou 3.1.1 (*permutations with restricted position*), kde však byla "zakázaná" pole určena **staticky** (např. $p(j) <> j$). Zde se to děje **dynamicky** (např. $p(j+d) - p(j) <> d$), výsledky jsou však podobné (*permutations with dynamically restricted position*).

Tyto výsledky korespondují s tzv. [Poissonovým rozložením](#), které se používá při zkoumání kombinace "raritních" jevů (tedy takových, které mají velmi malou pravděpodobnost). Největším úskalím teorie pravděpodobnosti je totiž to, že při kombinaci několika jevů v praxi většinou neplatí požadovaná podmínka jejich absolutní nezávislosti (*events are not independent*) a proto nelze použít některé teoreticky odvozené vzorce založené na této podmínce. Poissonovo rozložení umožňuje analyzovat i jevy, mezi nimiž může být i "mírná" závislost (*if there is limited interference between properties*). Pro konečná n tak sice nedostaneme přesné výsledky, ale pro asymptotický průběh (pokud není závislost jevů příliš velká) můžeme takto dostat přesné výsledky! *Effect of the dependence can be ignored if we are only interested in the asymptotic behavior*. Dobrým příkladem mohou být právě kombinace věží a skokanů (kdy interference skokanů s ostatními liniemi je jen mírná) a věží a liniových kamenů (kdy naopak počet průsečíků linií je už tak velký, že ho nelze zanedbat a má vliv na výslednou pravděpodobnost kombinace těchto jevů).

Velmi přesně toto popisují Bengt Aspvall a Frank M. Liang v článku [The Dinner Table Problem](#) (1980), viz Part 2: "The Poisson Approximation for the Number of Permutations Satisfying k Properties", str. 7-12. Těmto typům pravděpodobností se věnovali také P. Flajolet a R. Sedgewick v knize [Analytic combinatorics](#) (2009), str. 372 (Proposition V.11), str. 373 (Examples V.51).



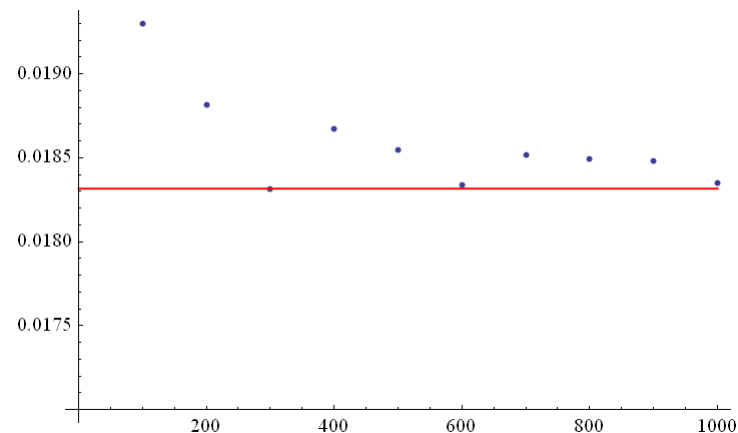
Z pohledu teorie pravděpodobnosti můžeme ale tyto vzorce odvodit i touto úvahou, např. pro věže a skokany $[r,s]$ (v příkladu na diagramu $r=2, s=3$). Předpokládejme, že je již na šachovnici umístěno k těchto kamenů. Po přidání dalšího kamene ubudou na každém sloupci (z původních $n-k$ polí) 4 potenciálně obsaditelná pole (pravděpodobnost kolizí je zanedbatelná). Pokud je n velké, můžeme odhadnout celkovou pravděpodobnost jako součin n takovýchto kroků. Dostáváme tak (při konstantním k).

$$p \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-4-k}{n-k} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-4}{n} \right)^{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-4}{n} \right)^n = \frac{1}{e^4} = 0.018315638888734180294 \dots$$

Je třeba ale poznamenat, že podobný postup nelze aplikovat na kombinované kameny věž + liniový kámen, protože tam už vzájemné interakce linií překročí (z hlediska teorie pravděpodobnosti) "zanedbatelnou" hodnotu (jako tomu je v případě interakce linie s konstantním - na n nezávislým - počtem polí).

Hodnotu $1/e^4$ jsem potvrdil pro kombinované kameny věž + skokan $[r,s]$ ($0 < r < s$) také pomocí tzv. [metody Monte Carlo](#). Ta spočívá v simulování testovaného jevu vygenerováním velkého množství náhodných vzorků. V tomto případě jsem testoval n kamenů s kombinovanou pohyblivostí věže a jezdce (tzv. *empress*) na šachovnicích $n \times n$ pro $n=100$ až 1000 s krokem 100. Pro každou šachovnici jsem vygeneroval milion vzorků. Např. na šachovnici 1000 x 1000 bylo 18347 pokusů z 1000000 vyhovujících. Získané hodnoty jsou vyneseny v grafu (na ose x je n , na ose y vypočtená pravděpodobnost a červená čára určuje očekávanou limitní hodnotu pro n jdoucí do nekonečna).

*This result I confirmed with [Monte Carlo method](#). I used function `RandomSample[Range[n]]` in *Mathematica*, $n=100$ to 1000 with step 100 and 1000000 samples for each n . Red line is a limit value.*



Při hledání na internetu jsem narazil na několik článků o problému rozmístění n lidí u stolu (Dinner Table Problem), který se šachem souvisí jen okrajově. Jde o určení počtu možných permutací, takových aby po přeskupení měl každý u stolu jiné sousedy než měl předtím. Ve speciálním případě je tento problém ekvivalentní s „ways to arrange n non-attacking kings on an $n \times n$ board, with 1 in each row and column“, tedy s počtem rozmístění neohrožujících se n králů na šachovnici $n \times n$ tak, že v každé řadě a v každém sloupci je právě jeden král. Z šachového hlediska se ale vlastně jedná o rozmístění kamenů, které mají pohyblivost jako **věž** + **fers** ! *From chess view is this problem not about kings, but about pieces rook + fers. Fers is leaper [1,1].*

Pro počty rozmístění těchto exokamenů tak dokonce existuje obecný vzorec (*formula in closed form exists*):

n composite pieces **Rook** + **Leaper[1,1]** (rook+fers) on an $n \times n$ chessboard (sekvence [A002464](#) v OEIS). Asi první se tímto problémem zabýval I. Kaplansky, [Symbolic solution of certain problems in permutations](#) (1944), dále pak M. Abramson and W. Moser (1966), kteří pomocí metody inkluze a exkluze (kdy se od celkového počtu n -faktoriál možných rozmístění věží odčítají možnosti napadení fersů, v další úrovni se ale musí přičíst ty možnosti, které byly odečteny vícekrát atd.) došli k explicitnímu vzorci:

$$a_n = n! + \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r (n-r)! \sum_{c=1}^r 2^c \binom{r-1}{c-1} \binom{n-r}{c}$$

Asymptotický vzorec (doplnil jsem členy počínaje n^6)

$$a_n \sim \frac{n!}{e^2} \left(1 - \frac{2}{n^2} - \frac{10}{3n^3} - \frac{6}{n^4} - \frac{154}{15n^5} - \frac{88}{9n^6} + \frac{5336}{105n^7} + \frac{1612}{3n^8} + \frac{2098234}{567n^9} + \frac{36500686}{1575n^{10}} + \dots \right)$$

Rekurence (pro $n > 4$):

$$a_n = (n+1)a_{n-1} - (n-2)a_{n-2} - (n-5)a_{n-3} + (n-3)a_{n-4}$$

Generating function (*Philippe Flajolet*)

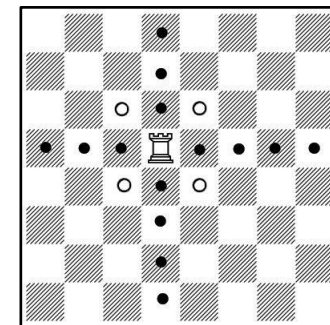
$$a_n = \frac{1}{n!} * \left(\frac{d}{dx} \right)_{x=0}^n \sum_{k=0}^n \frac{k! x^k (1-x)^k}{(x+1)^k}$$

Tabulka hodnot v programu Mathematica

```
Table[n! + Sum[(-1)^r*(n-r)!*Sum[2^c*Binomial[r-1,c-1]*Binomial[n-r,c],{c,1,r}],{r,1,n-1}],{n,1,25}]
```

nebo

```
Table[SeriesCoefficient[Sum[k!*x^k*(1-x)^k/(1+x)^k,{k,0,n}],{x,0,n}],{n,1,25}]
```



Podobný vzorec existuje i pro případ rozmístění těchto kamenů na **prstencové** šachovnici.

***n* composite pieces Rook + Leaper[1,1]** (*rook+fers*) on an $n \times n$ **toroidal chessboard** (sekvence [A089222](#) v OEIS, pro $n > 1$)

Odvodili jej Bengt Aspvall and Frank M. Liang, [The Dinner Table Problem](#) (1980), platí pro $n > 2$.

$$a_n = n! + (-1)^n * 2n + \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \left(\frac{n}{n-r}\right)^2 (n-r)! \sum_{c=1}^r 2^c \binom{r-1}{c-1} \binom{n-r}{c}$$

Asymptotický rozklad

$$\frac{n!}{e^2} \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{20}{3n^3} + \frac{58}{3n^4} + \frac{736}{15n^5} + \frac{8428}{45n^6} + \frac{40174}{63n^7} + \dots \right)$$

uvedený v citovaném článku je však chybný. *Asymptotic expansion in article by Aspvall and Liang is wrong*. Vzorec je takto citován i v [Taurusově](#) článku.

Správný asymptotický rozklad je (*right asymptotic formula is*)

(V. Kotěšovec, 6.4.2012)

$$a_n \sim \frac{n!}{e^2} \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{20}{3n^3} + \frac{58}{3n^4} + \frac{796}{15n^5} + \frac{7858}{45n^6} + \frac{40324}{63n^7} + \frac{140194}{63n^8} + \frac{2444744}{405n^9} + \frac{40680494}{14175n^{10}} + \dots \right)$$

O správnosti mého vzorce se lze snadno přesvědčit numerickým výpočtem, kdy např. pro $n=200$ vychází poměr správné hodnoty ku asymptotické podle vzorce ze článku 1.0000000000125542243 (Aspvall + Liang), kdežto u mého vzorce pro 7 členů 1.0000000000000008990 (Kotěšovec 7 terms), pro 8 členů pak dokonce 1.000000000000000121

Čitatelé i jmenovatelé tohoto rozvoje jsou v OEIS jako samostatné sekvence [A078630](#) a [A078631](#).

Rekurence (Václav Kotěšovec, 13.4.2011), pro $n \geq 14$:

$$a_n = (3n - 30) a_{n-11} + (6n - 45) a_{n-10} + (5n + 18) a_{n-9} - (8n - 139) a_{n-8} - (26n - 204) a_{n-7} - (4n - 30) a_{n-6} \\ + (26n - 148) a_{n-5} + (8n - 74) a_{n-4} - (9n - 18) a_{n-3} - (2n - 15) a_{n-2} + (n + 2) a_{n-1}$$

nebo pro $n \geq 8$:

$$(n - 4)(n - 3)(n - 2)(n - 1)(n^2 - 7n + 9) a_n - (n - 4)(n - 3)(n - 2)(n^3 - 8n^2 + 18n - 21)n a_{n-1} - 4(n - 5)(n - 4)(n - 3)(n - 1)n^2 a_{n-2} \\ + 2(n - 6)(n - 4)(n - 2)(n - 1)(n^2 - 5n + 3)n a_{n-3} - (n - 3)(n - 2)(n - 1)(n^2 - 7n + 9)n a_{n-4} - (n - 4)(n - 3)(n - 2)(n - 1)(n^2 - 5n + 3)n a_{n-5} = 0$$

Tabulka hodnot v programu Mathematica

```
Table[If[n<3, If[n==1, 1, 0],
n!+(-1)^n*2n+Sum[(-1)^r*(n/(n-r))^2*(n-r)!*Sum[2^c*Binomial[r-1,c-1]*Binomial[n-r,c],{c,1,r}],{r,1,n-1}],{n,1,25}]
```

A ještě rozmístění těchto kamenů na **válcové** šachovnici.

n composite pieces **Rook + Leaper[1,1]** (rook+fers) on an $n \times n$ **cylindrical chessboard** (A002493)

Explicitní vzorec (Vladeta Jovovic, 24.11.2007), $n > 2$

$$a_n = n! + \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r (n-r)! \sum_{c=1}^r 2^c \binom{r-1}{c-1} \binom{n-r}{c} - 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \left((n-2k-1)! + \sum_{r=1}^{n-2k-2} (-1)^r (n-2k-r-1)! \sum_{c=1}^r 2^c \binom{r-1}{c-1} \binom{n-2k-r-1}{c} \right)$$

přepsáno do programu Mathematica:

```
b[n_] := (If[n>0, n! + Sum[(-1)^r*(n-r)!*Sum[2^c*Binomial[r-1, c-1]*Binomial[n-r, c], {c, 1, r}], {r, 1, n-1}], 0);
Table[If[n>2, b[n]-2*Sum[b[n-1-2k], {k, 0, Floor[n/2]}], If[n==1, 1, 0]], {n, 1, 25}]
```

Jednodušší vzorec (Andrew Woods, 8.1.2015), $n \geq 5$

$$a_n = n! + \sum_{i=1}^{n-1} \left((-1)^i n (n-i-1)! \sum_{j=0}^{i-1} 2^{j+1} \binom{i-1}{j} \binom{n-i}{j+1} \right)$$

Rekurence (Doron Zeilberger, 14.11.2007):

$$\begin{aligned} & -3(n-2)(n+1)(43n+197)a_n - 5(n-1)(44n^2+477n+1222)a_{n+1} + 2(239n^2+873n-1232)(n+1)a_{n+2} \\ & + 4(55n^3+215n^2-259n+394)a_{n+3} - (349n^3+2718n^2+3699n-7342)a_{n+4} + (349n^2+753n-1222)a_{n+5} = 0 \end{aligned}$$

Asymptotický rozklad (asymptotic expansion)

(Václav Kotěšovec, 6.4.2012)

$$a_n \sim \frac{n!}{e^2} \left(1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{4}{3n^3} + \frac{8}{3n^4} + \frac{326}{15n^5} + \frac{4834}{45n^6} + \frac{154258}{315n^7} + \frac{232564}{105n^8} + \frac{28706108}{2835n^9} + \frac{663613024}{14175n^{10}} + \dots \right)$$

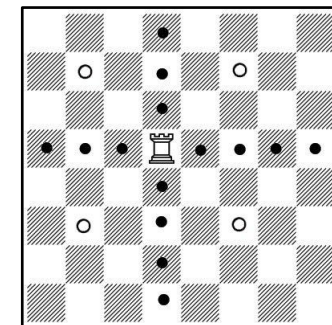
n non-attacking composite pieces **Rook** + **Fers** on a chessboard $n \times n$

n	normal board	toroidal board	cylindrical board
	A002464	A089222 , $n > 1$	A002493
1	1	1	1
2	0	0	0
3	0	0	0
4	2	0	0
5	14	10	10
6	90	36	60
7	646	322	462
8	5242	2832	3920
9	47622	27954	36954
10	479306	299260	382740
11	5296790	3474482	4327510
12	63779034	43546872	53088888
13	831283558	586722162	702756210
14	11661506218	8463487844	9988248956
15	175203184374	130214368530	151751644590
16	2806878055610	2129319003680	2454798429600
17	47767457130566	36889393903794	42130249479562
18	860568917787402	675098760648204	764681923900260
19	16362838542699862	13015877566642418	14636063499474054
20	327460573946510746	263726707757115400	294639009867223880
21	6880329406055690790	5603148830577775218	6223681483119443490
22	151436547414562736234	124568968969991162100	137643067038372067788
23	3484423186862152966838	2892414672938546871250	3180893444110091247070
24	83655126041771262574458	70019837217089733132720	76672486187670765972336
25	2092014180086865279171334	1764352488154548396118450	1924400398260570692302650
n	normal board	toroidal board	cylindrical board

Nejdále se ale v tomto směru dostal Roberto Tauraso ve svém článku [The dinner table problem: the rectangular case](#) (Integers, 2006), kdy (při řešení jiného problému) vlastně odvodil vzorce pro všechny typy kamenů věž + skokan $[d,d]$. Pro $d > 1$ jsou však tyto „vzorce“ nesmírně komplikované (a jde spíše o něco mezi matematickým vzorcem a návodem na počítačový program), takže je aplikovat je obtížné. Více viz str. 631.

Roberto Tauraso found in his article general formula for all composite pieces rook + leaper $[d,d]$ (but formulas for $d > 1$ are very complicated). See page 631 for more.

Např. pro $d=2$ dostaneme kámen s pohyblivostí věž + alfil (*rook + leaper* $[2,2]$), který v pozici diagramu napadá (kromě věžových polí) pole b3, b7, f3, f7. Pro $d=3$ dostaneme exokámen věž + skokan $[3,3]$ (*rook + leaper* $[3,3]$), jemuž by byla dostupná pole a2, a8, g2, g8 atd. *For example rook + alfil, [A110128](#) or rook + leaper $[3,3]$, [A117574](#). Alfil is a leaper $[2,2]$.*



Nejzajímavější na těchto posloupnostech je však jejich **asymptotické chování**. Případem $d = 1$ se (z nešachového pohledu) zabývala řada matematiků. Následující limitu na základě numerických výpočtů nejprve jen odhadl P. Børstad (1979). Důkaz najdeme v již citovaném článku [The Dinner Table Problem](#), Bengt Aspvall a Frank M. Liang (1980) nebo viz David P. Robbins (American Mathematical Monthly 2/1980, str.122 - v jeho článku jde o případ $k=0$).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n!} = \frac{1}{e^2} = 0.13533528 \dots$$

Vidíme tedy, že ze všech možných rozmístění neohrožujících se věží na šachovnici $n \times n$ zůstane jen něco přes 13% takových, kde se kameny neohrožují ani jako fersové.

Roberto Tauraso pak v citovaném článku odvodil, že předchozí elegantní limita platí pro **všechny** tyto kombinované kameny věž + skokan $[d,d]$. Ještě přesněji, že pro $d > 0$ platí

$$\frac{a_{n,d}}{n!} = \frac{1}{e^2} \left(1 + \frac{4(d-1)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

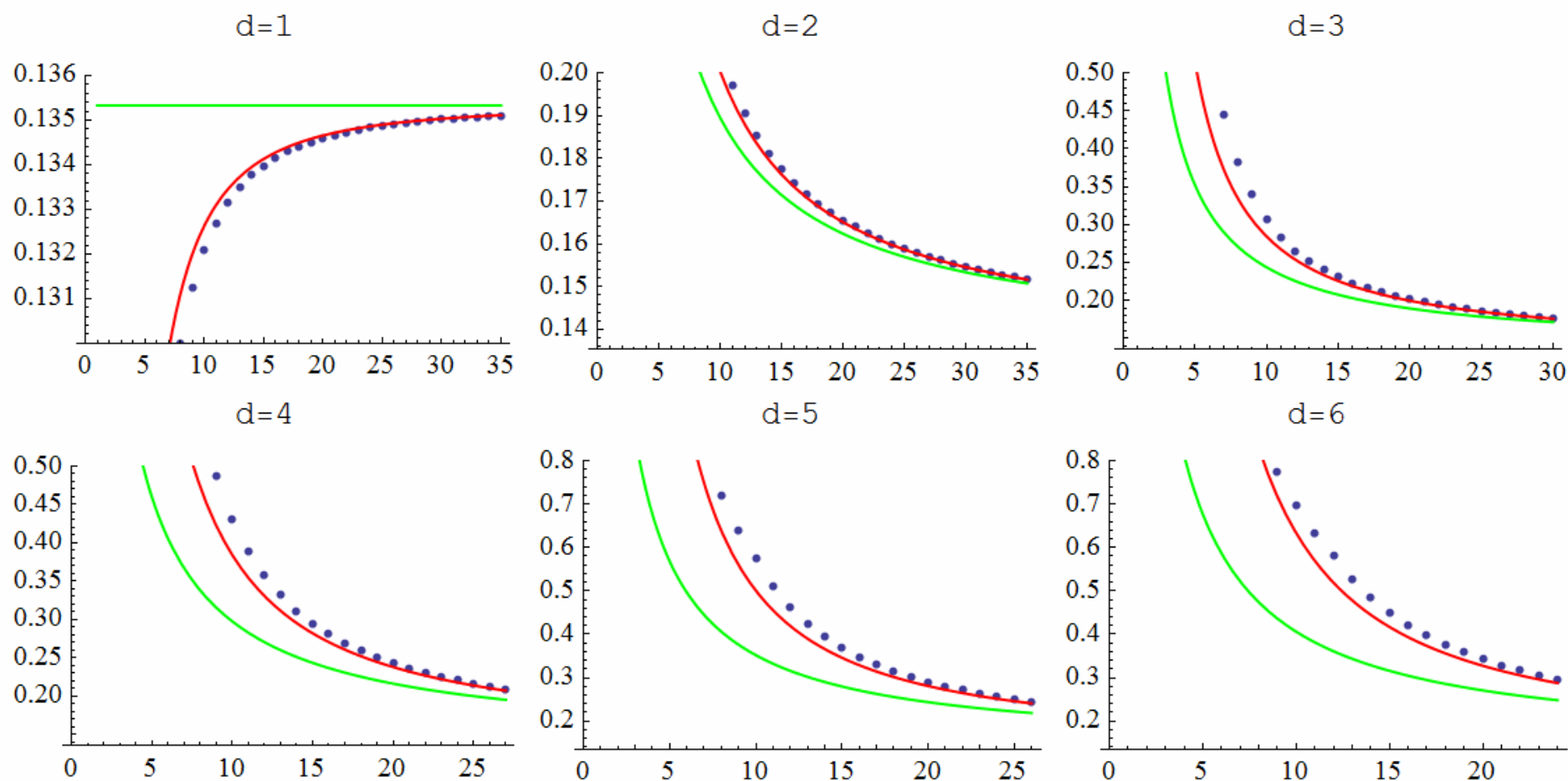
$a_{n,d}$ is number of ways to place n non-attacking composite pieces **rook + leaper** $[d,d]$ on an $n \times n$ chessboard

Zabýval jsem tímto problémem důkladněji a podařilo se mi tento asymptotický vzorec ještě více **zpřesnit**
(more terms by Václav Kotěšovec, 13.4.2011)

$$\frac{a_{n,d}}{n!} = \frac{1}{e^2} \left(1 + \frac{4(d-1)}{n} + \frac{2d(3d-4)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

Díky velké sérii vypočtených hodnot jsem mohl tyto teoreticky odvozené asymptotické odhady ověřit.
 Vidíme značné přiblížení červených asymptotických grafů ke skutečným hodnotám.

———— Tauraso 2006
 ———— Kotěšovec 2011



Pro $d > 1$ je vzorec, který odvodil R. Tauraso, velmi komplikovaný a je poměrně obtížné jej aplikovat. Např. jeho sumy přes všechny indexy, jejichž součet má danou hodnotu (nebo cyklus přes všechny podmnožiny), se nedají zapsat jako klasické matematické sumy, ale představuje to cyklus, který je v programátorském jazyku **backtrackingem** (tedy **NP** problém). Výpočet hodnot pro vyšší n je proto časově dost náročný a hodnoty pro $n > 35$ jsou už nedosažitelné. Přesto je aplikování tohoto vzorce výrazně efektivnější než metoda **hrubé síly**. Tauraso v článku vypočítal hodnoty pro $d \leq 3$ a $n \leq 16$. Další hodnoty jsem vypočetl tak, že jsem jeho vzorec (pro $d=2,3,4,5,6$) naprogramoval v programu Mathematica. Dostal jsem tak řadu nových hodnot. Současně jsem vzorec upravil tak, abych dostal i hodnoty pro případ **semi-Leapers** (v programu to určuje proměnná $semi=1$). Na ukázkou uvádím programy pro $d=2$ a $d=3$ (šlo by je ještě mírně zefektivnit vytknutím některých částí mimo cykly, bylo by to však na úkor přehlednosti). Programy pro $d=4,5,6$ jsou k dispozici jako pomocné soubory u jednotlivých sekvencí v **OEIS**.

(* Vaclav Kotesovec 9.4.2011, based on article by R. Tauraso, 2006 *)

<< Combinatorica`

(* semi=2 Rook + Leaper[d,d] *)

(* semi=1 Rook + semi-Leaper[d,d] *)

(* version for d=2 *)

semi=2;d=2;counter=ConstantArray[0,30];

Do[Print[Timing[If[n>=d,suma=0;

n1=0;Do[If[Mod[i-1,d]==0,n1=n1+1],{i,1,n}];

n2=0;Do[If[Mod[i-2,d]==0,n2=n2+1],{i,1,n}];

Do[Do[

Do[Do[

part1=(-1)^(r1+r2)*semi^(c1+c2)*(n-(r1+r2)-(c1+c2))*Binomial[n1-r1,c1]*Binomial[n2-r2,c2];

If[c1==0,If[r1==0,n11=1,n11=0];,n11=NumberOfCompositions[r1-c1,c1];];

If[c2==0,If[r2==0,n12=1,n12=0];,n12=NumberOfCompositions[r2-c2,c2];];

Do[Do[

If[c1==0,z1={};,z1=Compositions[r1-c1,c1][[11]];];

If[c2==0,z2={};,z2=Compositions[r2-c2,c2][[12]];];

z=Flatten[{z1,z2}];

Do[m=NthSubset[p,Range[c1+c2]];u=Length[m];

If[u==0,s=u,s=u+Sum[z[[m[[i]]]],{i,1,u}];];

If[n1-s>=0 && n2-(r1+r2-s)>=0,

suma=suma+part1*Binomial[n1-s,u]*u!*Binomial[n2-(r1+r2-s),c1+c2-u]*(c1+c2-u)!;];

,{p,0,2^(c1+c2)-1}];

,{12,1,n12}];,{11,1,n11}];

,{c2,0,Min[r2,n2-r2]}];,{c1,0,Min[r1,n1-r1]}];

,{r2,0,n2-1}];,{r1,0,n1-1}];

counter[[n]]=suma,counter[[n]]=n!;n],"r1",d,d,If[semi==1,"semi=","="],Take[counter,n],";";

,{n,1,30}]

```

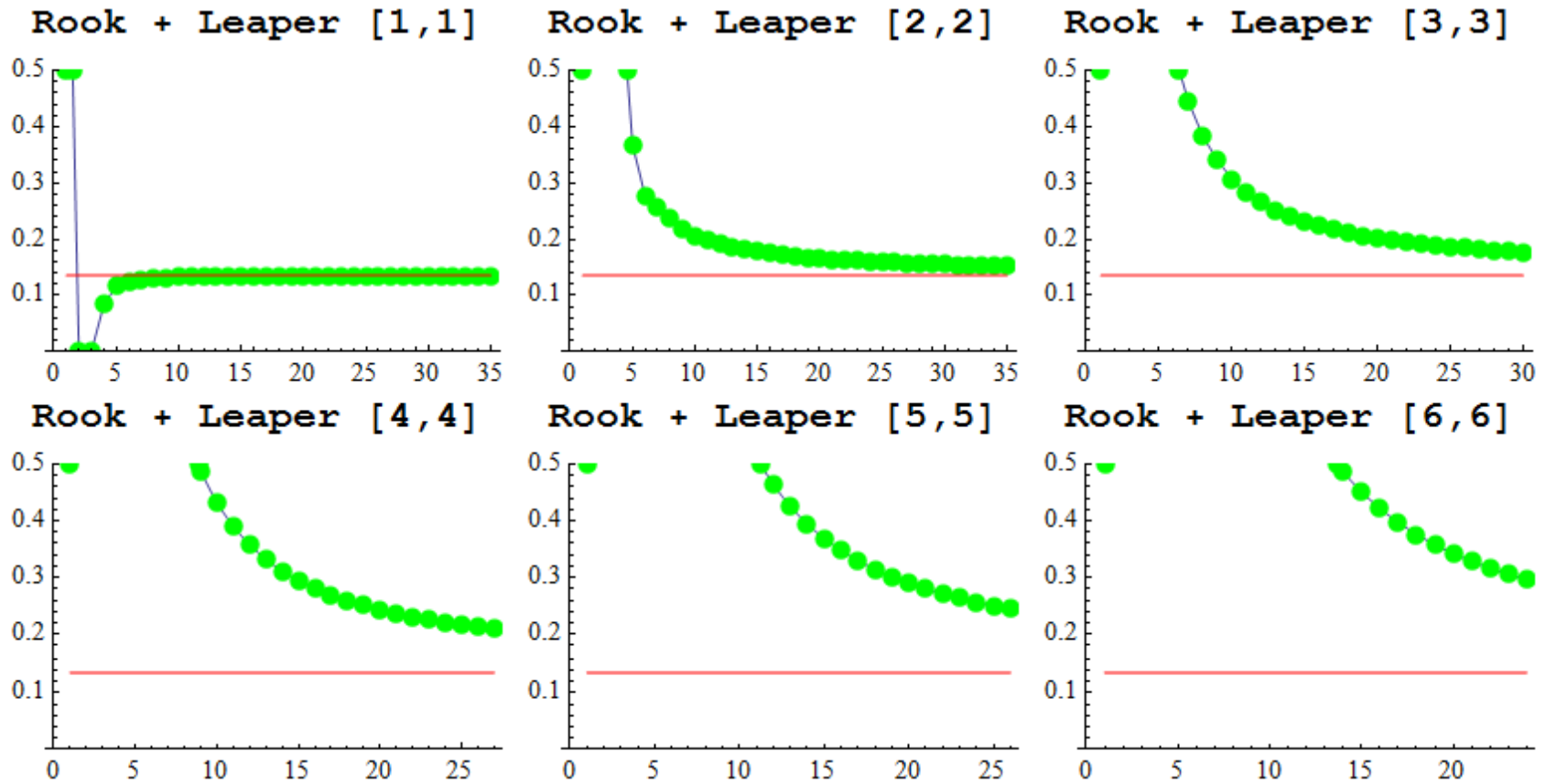
(* Vaclav Kotesovec 9.4.2011, based on article by R. Tauraso, 2006 *)
<< Combinatorica`
(* semi=2 Rook + Leaper[d,d] *)
(* semi=1 Rook + semi-Leaper[d,d] *)
(* version for d=3 *)
semi=2; d=3; counter=ConstantArray[0,30];
Do[Print[Timing[If[n>=d,suma=0;
n1=0;Do[If[Mod[i-1,d]==0,n1=n1+1],{i,1,n}];
n2=0;Do[If[Mod[i-2,d]==0,n2=n2+1],{i,1,n}];
n3=0;Do[If[Mod[i-3,d]==0,n3=n3+1],{i,1,n}];
Do[Do[Do[
Do[Do[Do[
part1=(-1)^(r1+r2+r3)*semi^(c1+c2+c3)*(n-(r1+r2+r3)-(c1+c2+c3))!*
Binomial[n1-r1,c1]*Binomial[n2-r2,c2]*Binomial[n3-r3,c3];
If[c1==0,If[r1==0,n11=1,n11=0];,n11=NumberOfCompositions[r1-c1,c1];];
If[c2==0,If[r2==0,n12=1,n12=0];,n12=NumberOfCompositions[r2-c2,c2];];
If[c3==0,If[r3==0,n13=1,n13=0];,n13=NumberOfCompositions[r3-c3,c3];];
Do[Do[Do[
If[c1==0,z1={};,z1=Compositions[r1-c1,c1][[11]]];];
If[c2==0,z2={};,z2=Compositions[r2-c2,c2][[12]]];];
If[c3==0,z3={};,z3=Compositions[r3-c3,c3][[13]]];];
z=Flatten[{z1,z2,z3}];
Do[m1=NthSubset[p1,Range[c1+c2+c3]];j1=Length[m1];
If[j1==0,s1=0,s1=j1+Sum[z[[m1[[i1]]]],{i1,1,j1}];];
rest2=Complement[Range[c1+c2+c3],m1];
Do[m2=NthSubset[p2,rest2];j2=Length[m2];
If[j2==0,s2=0,s2=j2+Sum[z[[m2[[i2]]]],{i2,1,j2}];];
s3=r1+r2+r3-s1-s2; j3=c1+c2+c3-j1-j2;
If[n1-s1>=0 && n2-s2>=0 && n3-s3>=0,
suma=suma+part1*Binomial[n1-s1,j1]*j1!*Binomial[n2-s2,j2]*j2!*Binomial[n3-s3,j3]*j3!];;
,{p2,0,2^(c1+c2+c3-j1)-1}};,{p1,0,2^(c1+c2+c3)-1}};
,{l3,1,n13}};,{l2,1,n12}};,{l1,1,n11}};
,{c3,0,Min[r3,n3-r3]}};,{c2,0,Min[r2,n2-r2]}};,{c1,0,Min[r1,n1-r1]}};
,{r3,0,n3-1}};,{r2,0,n2-1}};,{r1,0,n1-1}};
counter[[n]]=suma,counter[[n]]=n!;n],"r1",d,d,If[semi==1,"semi=","="],Take[counter,n],";";
,{n,1,30}]

```

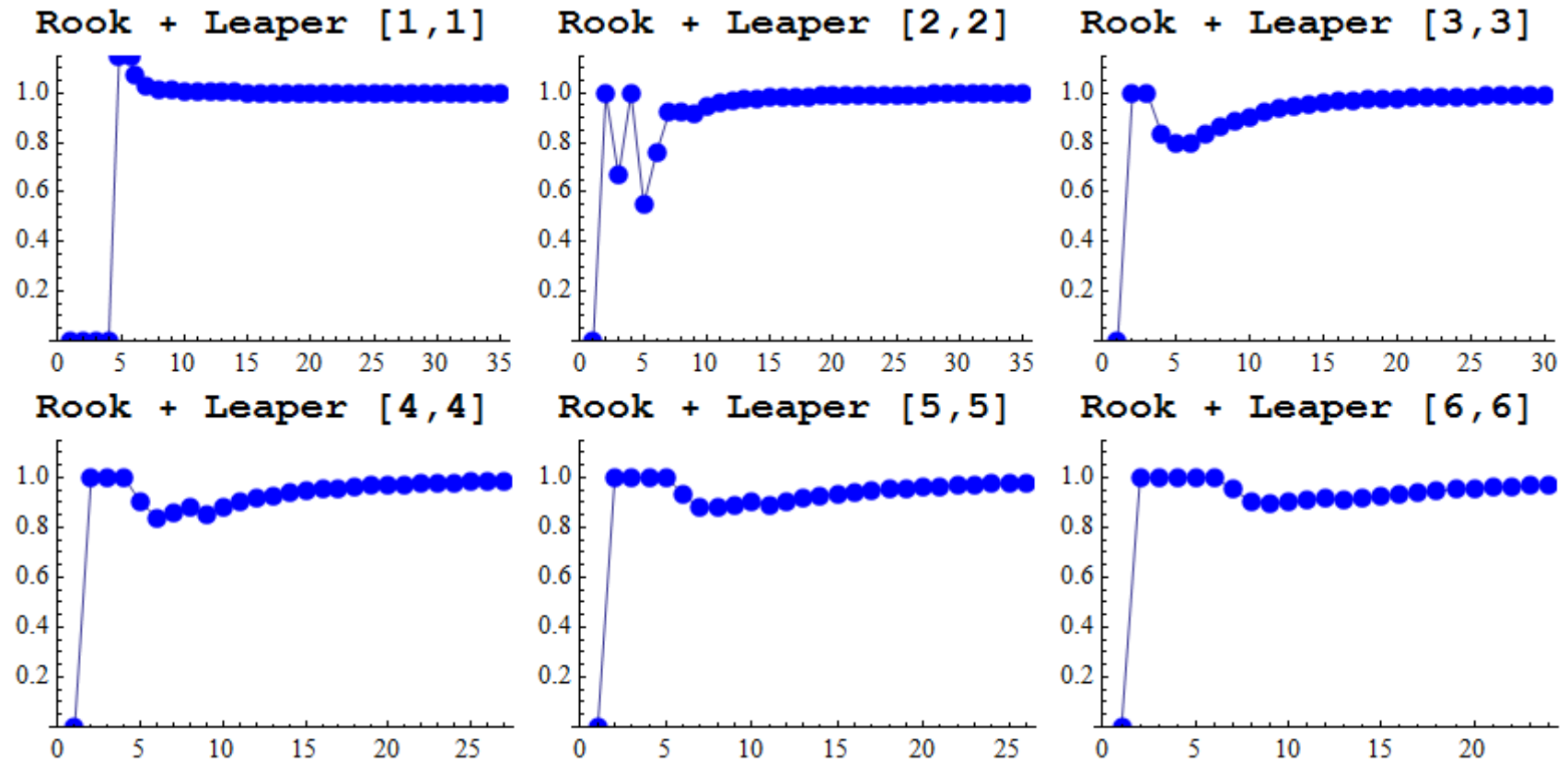

Rook + Leaper [d,d] (b=1/e², q=1)

n	Rook + Leaper [1,1] (Rook + Fers) A002464	Rook + Leaper [2,2] (Rook + Alfil) A110128	Rook + Leaper [3,3] A117574	Rook + Leaper [4,4] A189255	Rook + Leaper [5,5] A189256	Rook + Leaper [6,6] A189271
1	1	1	1	1	1	1
2	0	2	2	2	2	2
3	0	4	6	6	6	6
4	2	16	20	24	24	24
5	14	44	80	108	120	120
6	90	200	384	544	672	720
7	646	1288	2240	3264	4128	4800
8	5242	9512	15424	23040	28992	34752
9	47622	78652	123456	176832	231936	280512
10	479306	744360	1110928	1563392	2088960	2528256
11	5296790	7867148	11287232	15536160	20434944	25282560
12	63779034	91310696	127016304	171172224	221871360	278323200
13	831283558	1154292796	1565107248	2066033472	2645370624	3289036800
14	11661506218	15784573160	20935873872	27146652480	34344038400	42336448512
15	175203184374	232050062524	301974271248	385447394880	482103767040	589351062528
16	2806878055610	3648471927912	4669727780624	5878028516736	7269498483456	8820501301248
17	47767457130566	61080818510972	77046043259824	95776238793504	117240911729664	141215147788800
18	860568917787402	1084657970877416	1350585114106416	1660164417866304	2013265377314688	2407845089203200
19	16362838542699862	20361216987032284	25062108668100208	30496085473606944	36665783917283328	43543159894318080
20	327460573946510746	402839381030339816	490725684463001488	591661117634375040	705762463906133760	832618225074748416
21	6880329406055690790	8377409956454452732	10109820295907492304	12087628978334638752	14313891805008665856	16782891792284791296
22	151436547414562736234	182678001773062774632	218584873235926445712	259353732110769122368	305058200866133496192	355619038157213568000
23	3484423186862152966838	4167828820253946799580	494843337202579395696	5830260198084688642464	6815052066896539474560	7901759178346667289600
24	83655126041771262574458	99292137525499869150056	117052159699521707890992	137021386015707177170304	159241382359638761724672	183700312404587478328320
25	2092014180086865279171334	2465527529988321926145148	2887549945416110999938672	3360010743290968081122336	3883921082001847040221440	?
26	54406969991009281966468810	63704271555280621107183848	74158795581965682470686352	85815593755614101982027328	98699868661535185749114624	?
27	1469338018629653986976409366	1710101405270323112159517916	1979635478643025761775312848	2279036042450233133952884256	?	?
28	41150196372502770671331103322	47626790016894277708127056872	54847606543679146894975981328	?	?	?
29	1193582389760980498221633250022	1374305956375642411982698417148	1575028667838499959325329451376	?	?	?
30	35813584121884333767012044281386	41037883377351622121202567287912	46819703912445220921650905524656	?	?	?
31	1110392038956066804370138783529590	1266656031681902255259486481952476	?	?	?	?
32	35537496393064930638101703032280634	40368253747693813222893788235646568	?	?	?	?
33	1172885751272849638829453912565746118	1327068809196576138131488816314347644	?	?	?	?
34	39882710261949712055631675791418498698	44958361170834617131818573462995145192	?	?	?	?
35	1396041747291640242139965142726500859094	1568218783559279355276983559478585123292	?	?	?	?

$$\frac{a_n}{n!} \rightarrow \frac{1}{e^2} = 0.13533528323661269189 \dots$$



$$q \sim \frac{a_n}{n a_{n-1}} \rightarrow 1$$

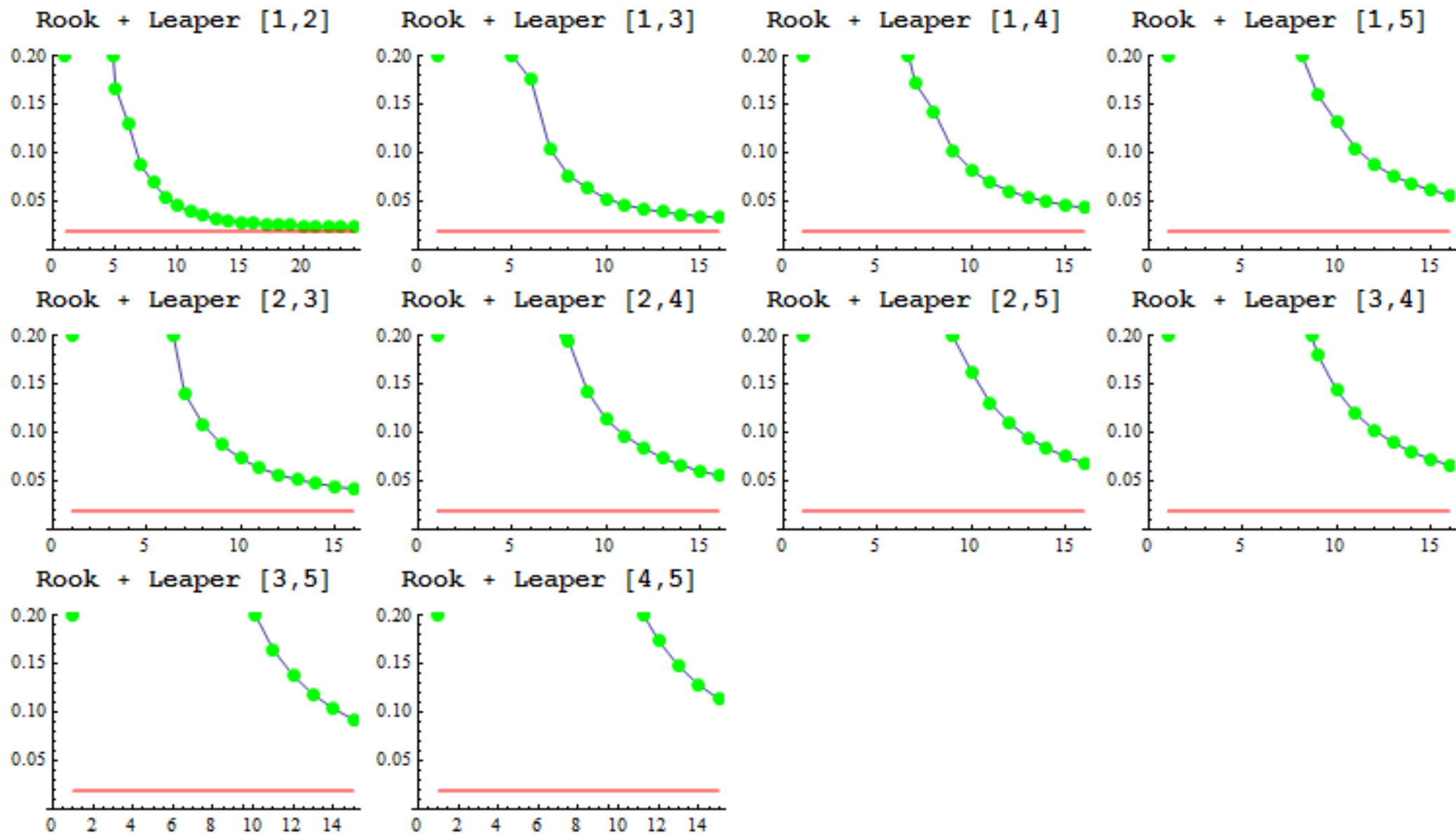


Rook + Leaper [r,s] (0 < r < s)

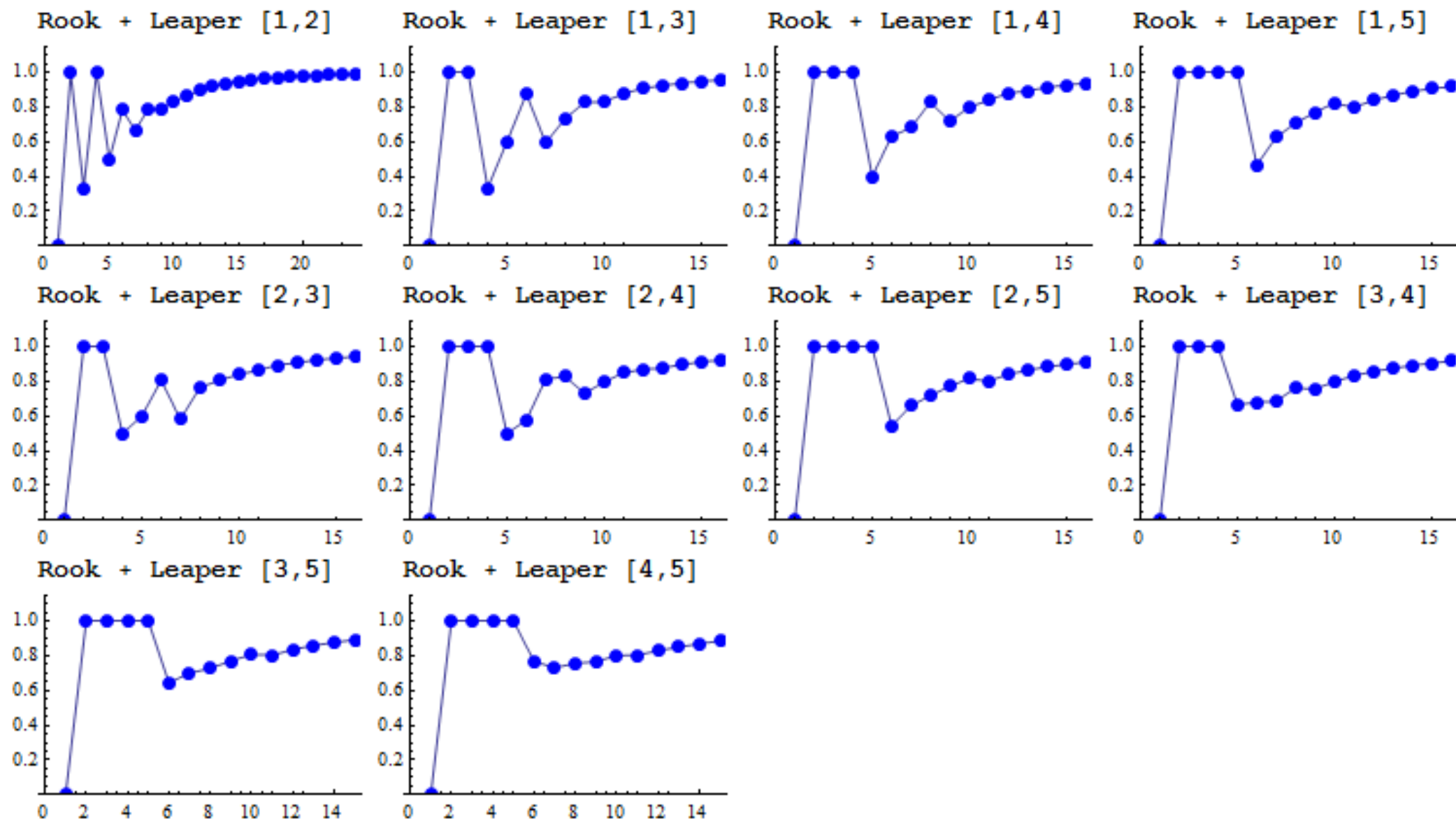
n	Rook + Leaper [1,2] A137774 (Empress)	Rook + Leaper [1,3] A189358 (Rook + Camel)	Rook + Leaper [1,4] A189563 (Rook + Giraffe)	Rook + Leaper [1,5] A189564	Rook + Leaper [2,3] A189565 (Rook + Zebra)	Rook + Leaper [2,4] A189566	Rook + Leaper [2,5] A189567	Rook + Leaper [3,4] A189568 (Rook + Antilope)	Rook + Leaper [3,5] A189569	Rook + Leaper [4,5] A189570
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	6	6	6	6	6	6	6	6	6
4	8	8	24	24	12	24	24	24	24	24
5	20	24	48	120	36	60	120	80	120	120
6	94	126	182	336	174	208	392	326	464	552
7	438	524	868	1474	708	1184	1810	1566	2274	2826
8	2766	3072	5752	8340	4334	7840	10400	9544	13236	17080
9	19480	22854	37156	57756	31424	51636	72228	65036	91760	117816
10	163058	189646	296944	475658	263732	410272	589674	518498	740562	943250
11	1546726	1827114	2738820	4171070	2503296	3836456	5196870	4750006	6541984	8330356
12	16598282	19889946	28894206	41950294	26844578	39971896	52398658	48830634	65632694	82954582
13	197708058	238648524	335399468	472535256	316692056	455888312	588036216	554929274	732880076	915854808
14	2586423174	3131979014	4285522402	5882635676	4090634212	5717233896	7274466172	6926227324	8995905626	11147075946
15	36769177348	44540692612	59536763892	79963449714	57274447458	78164908748	98024173852	93970452970	120367234946	147948526182
16	563504645310	681114241416	892785282788	1173614446044	863488976620	1153568477544	1427556373892	1377573324202	?	?
17	9248221393974	?	?	?	?	?	?	?	?	?
18	161670971937362	?	?	?	?	?	?	?	?	?
19	2996936692836754	?	?	?	?	?	?	?	?	?
20	58689061747521430	?	?	?	?	?	?	?	?	?
21	1210222434323163704	?	?	?	?	?	?	?	?	?
22	26204614054454840842	?	?	?	?	?	?	?	?	?
23	594313769819021397534	?	?	?	?	?	?	?	?	?
24	14086979362268860896282	?	?	?	?	?	?	?	?	?
25	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
b	$1/e^4$	$1/e^4$	$1/e^4$	$1/e^4$	$1/e^4$	$1/e^4$	$1/e^4$	$1/e^4$	$1/e^4$	$1/e^4$
q	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n	Rook + Leaper [1,2]	Rook + Leaper [1,3]	Rook + Leaper [1,4]	Rook + Leaper [1,5]	Rook + Leaper [2,3]	Rook + Leaper [2,4]	Rook + Leaper [2,5]	Rook + Leaper [3,4]	Rook + Leaper [3,5]	Rook + Leaper [4,5]

Hodnoty pro Empress, n=18 až n=24 vypočetl *Wolfram Schubert*, 2011-2012

$$\frac{a_n}{n!} \rightarrow \frac{1}{e^4} = 0.018315638888734180294 \dots$$



$$q \sim \frac{a_n}{n a_{n-1}} \rightarrow 1$$



Z matematického pohledu (nikoliv ze šachového) jsou ještě zajímavé kameny, které mohou tahat na pole jen jedné linie (viz též [semi-bishops](#)). **Semi-Leaper** (český termín *neexistuje, navrhuji semi-skokan*) je **bodový kámen**, který tahá na pole vzdálená o souřadnice $[d,d]$ a $[-d,-d]$, tedy (v obou směrech) jen po jedné z linií (volíme vždy diagonálu z levého dolního do pravého horního rohu). Pro $d=1$ existuje vzorec (byl odvozen při řešení jiných matematických úloh).

n composite pieces **Rook + semi-Leaper[1,1]** (rook+semi-fers) on an $n \times n$ normal chessboard (=A000255 $(n-1)$), pozor sekvence v OEIS je o 1 posunutá! *Sequence in OEIS is shifted*). Platí vzorec pro rook + fers se zaměněním 2^c za 1^c , který se dá ale v tomto případě výrazně zjednodušit (Len Smiley, 2001)

$$a_n = n! + \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r (n-r)! \sum_{c=1}^r \binom{r-1}{c-1} \binom{n-r}{c} = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k)}{k!} \sim \frac{n!}{e} * \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Nebo dokonce takovýmto trikem s užitím funkce celá část (Benoit Cloitre, 2004). Přesto, že je ve jmenovateli číslo e , výsledky jsou celočíselné a přesné.

$$a_n = \left\lfloor \frac{(n+1)(n-1)!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Rekurence (pro $n > 2$):

$$a_n = (n-1) a_{n-1} + (n-2) a_{n-2}$$

jiná možná rekurence

$$a_n = \frac{(n^2 - 1) a_{n-1} - (-1)^n}{n}$$

Jelikož je sekvence posunutá, musí se [exponenciální generační funkce](#) pro A000255 zintegrovat (ovšem tento integrál nejde dále zjednodušit), takže

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} = \int \frac{e^{-x}}{(1-x)^2} dx$$

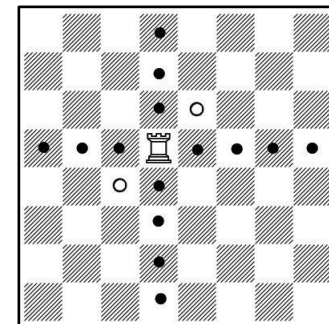
Tabulku hodnot dostaneme v programu Mathematica takto

```
Table[(n-1)!*Sum[(-1)^k*(n-k)/k!,{k,0,n-1}],{n,1,25}]
```

nebo pomocí generačních funkcí

```
Table[(n-1)!*SeriesCoefficient[E^(-x)/(1-x)^2,{x,0,n-1}],{n,1,25}]
```

```
Table[n!*SeriesCoefficient[Integrate[E^(-x)/(1-x)^2,x],{x,0,n}],{n,1,25}]
```



Obecný vzorec pro počet rozestavení na **prstencové** šachovnici:

n composite pieces **Rook** + **semi-Leaper[1,1]** (rook+semi-fers) on an $n \times n$ **toroidal** chessboard

(OEIS [A167760](#), $n > 1$, number of permutations p of $\{n\}$ with no $p(i)+1 = p(i+1) \pmod n$, Joel Barnes, 2009)

For $n > 1$

$$a_n = (-1)^n * n + n! * \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} * \frac{n}{n-k}$$

V programu Mathematica:

```
Table[If[n==1, 1, n*(-1)^n!*Sum[(-1)^k/k!*n/(n-k), {k, 0, n-1}]], {n, 1, 25}]
```

Rekurence (V. Kotěšovec, 11.4.2012), $n \geq 8$

$$a_n = (n-4)a_{n-1} + (4n-8)a_{n-2} + (5n-6)a_{n-3} + (n+6)a_{n-4} - (2n-12)a_{n-5} - (n-5)a_{n-6}$$

nebo pro $n \geq 5$

$$(n-1)(n-3)a_n - n(n-3)^2 a_{n-1} - 2(n-1)n(n-3)a_{n-2} - (n-2)(n-1)n a_{n-3} = 0$$

Asymptotic:

(V. Kotěšovec, 11.4.2012)

$$a_n = \frac{n!}{e} * \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^5} - \frac{9}{n^6} - \frac{9}{n^7} + \frac{50}{n^8} + \frac{267}{n^9} + \frac{413}{n^{10}} + \dots \right)$$

Čísla v čitateli této expanze jsou tzv. Rao Uppuluri-Carpenter numbers (or **complementary Bell numbers**), viz [A000587](#).

Koeficient v čitateli asymptotického rozvoje u $\frac{1}{n^k}$ má hodnotu

$$e * \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j * j^k}{j!} = \sum_{j=0}^k (-1)^j * S_2(k, j)$$

kde S_2 jsou Stirlingova čísla druhého druhu, $S_2 =$ **Stirling numbers of the second kind**.

Obecný vzorec je znám i pro počet rozestavení na **válcové** šachovnici:

n composite pieces **Rook** + **semi-Leaper[1,1]** (rook+semi-fers) on an $n \times n$ **cylindrical** chessboard

(OEIS [A000240](#), *Rencontres numbers: permutations with exactly one fixed point*)

$$a_n = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \sim \frac{n!}{e}$$

Je možné podobné zjednodušení jako u předchozích sekvencí

(Gary Detlefs, 2010), pro $n > 1$

$$a_n = n \left\lfloor \frac{(n-1)! + 1}{e} \right\rfloor$$

Rekurence (pro $n > 3$):

$$a_n = (n-2) a_{n-1} + (2n-3) a_{n-2} + (n-2) a_{n-3}$$

jiná možná rekurence

$$a_n = n * (a_{n-1} - (-1)^n)$$

Exponenciální generační funkce:

$$\frac{x e^{-x}}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$$

Tabulku hodnot dostaneme v programu Mathematica takto

```
Table[n! * Sum[(-1)^k/k!, {k, 0, n-1}], {n, 1, 25}]
```

nebo pomocí generační funkce

```
Table[n! * SeriesCoefficient[x * E^(-x) / (1-x), {x, 0, n}], {n, 1, 25}]
```

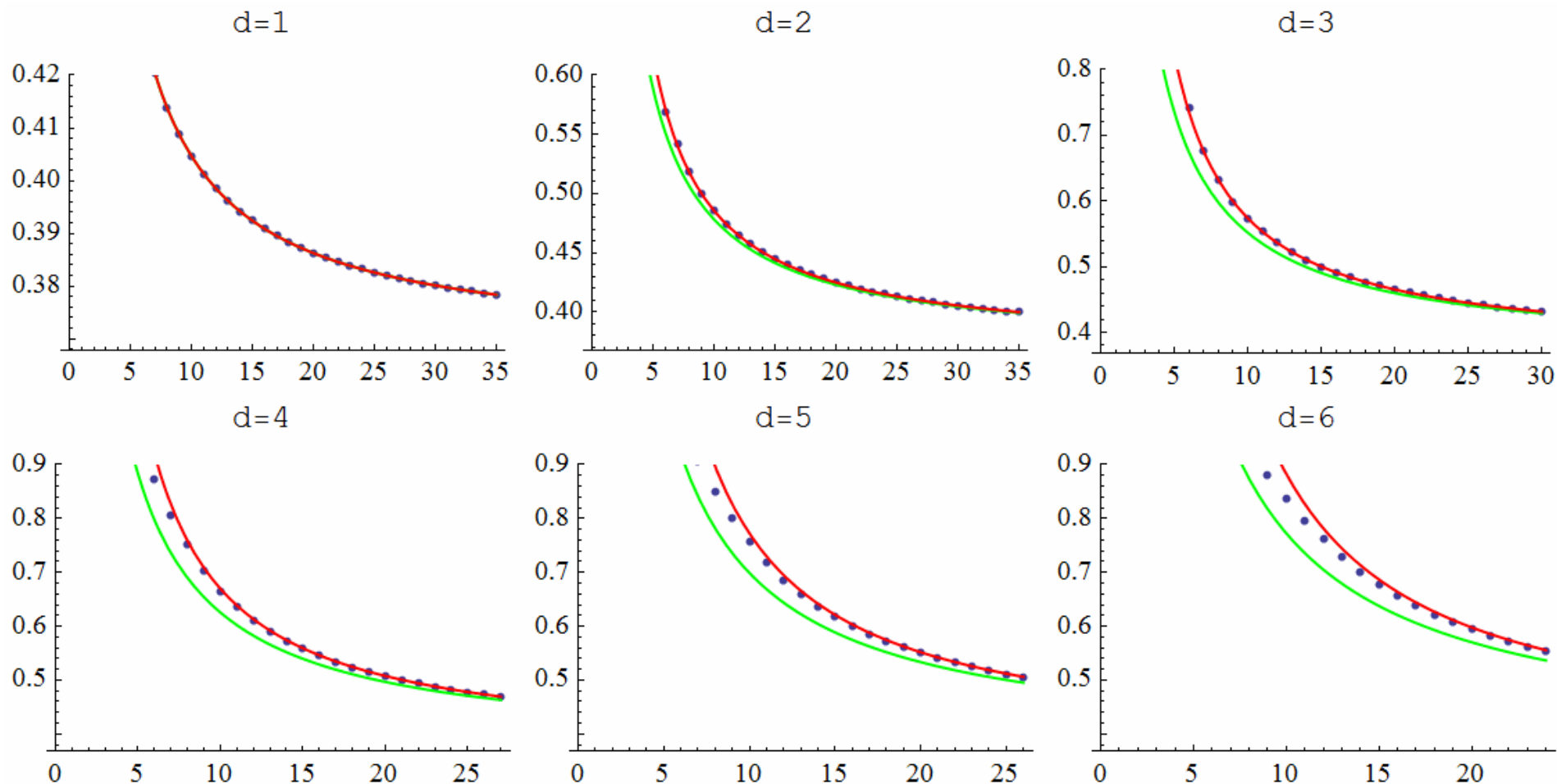
n non-attacking composite pieces **Rook** + **semi-Fers** on a chessboard n x n

n	normal board	toroidal board	cylindrical board
	A000255 (n-1)	A167760 , $n > 1$	A000240
1	1	1	1
2	1	0	0
3	3	3	3
4	11	4	8
5	53	40	45
6	309	216	264
7	2119	1603	1855
8	16687	13000	14832
9	148329	118872	133497
10	1468457	1202880	1334960
11	16019531	13361403	14684571
12	190899411	161638764	176214840
13	2467007773	2115684272	2290792933
14	34361893981	29792671832	32071101048
15	513137616783	449145795915	481066515735
16	8178130767479	7217975402768	7697064251744
17	138547156531409	123180993414224	130850092279665
18	2486151753313617	2224874726830656	2355301661033952
19	47106033220679059	42402252681323859	44750731559645107
20	939765362752547227	850380681002034900	895014631192902120
21	19690321886243846661	17902407539998807896	18795307255050944541
22	432292066866171724421	394741856473979171608	413496759611120779880
23	9923922230666898717143	9097740802923890621491	9510425471055777937263
24	237760636776394448431551	218756916554461567237080	228250211305338670494288
25	5934505493938805432851513	5478383494555902629818600	5706255282633466762357225
n	normal board	toroidal board	cylindrical board

Asymptotický vzorec jsem odvodil i pro věž a **semi-skokany**. Zelené grafy představují asymptotický odhad jen s prvním členem, červené i s kvadratickým členem.

$s_{n,d}$ is number of ways to place n non-attacking composite pieces **rook** + **semi-leaper** $[d,d]$ on an $n \times n$ normal chessboard
(asymptotic formula by Václav Kotěšovec, 13.4.2011)

$$\frac{s_{n,d}}{n!} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{2d-1}{n} + \frac{d(d-1)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

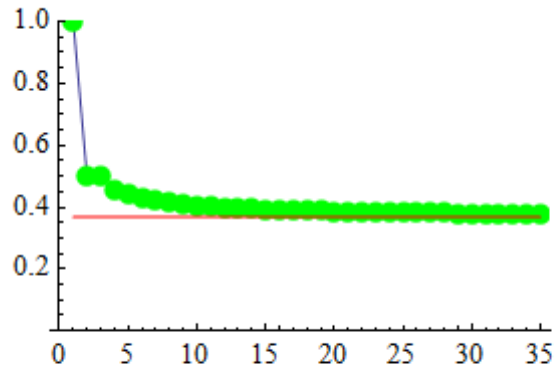


Rook + semi-Leaper [d,d] (b=1/e, q=1)

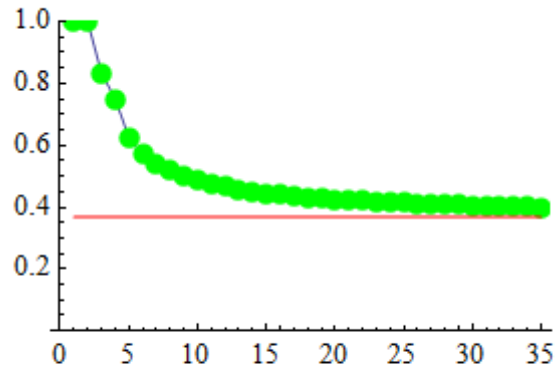
n	Rook + semi-Leaper [1,1] (rook+ semifers) A000255(n-1)	Rook + semi-Leaper [2,2] (rook+ semialfil) A189281	Rook + semi-Leaper [3,3] A189282	Rook + semi-Leaper [4,4] A189283	Rook + semi-Leaper [5,5] A189284	Rook + semi-Leaper [6,6] A189285
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	3	5	6	6	6	6
4	11	18	22	24	24	24
5	53	75	98	114	120	120
6	309	410	534	628	696	720
7	2119	2729	3414	4062	4572	4920
8	16687	20906	25498	30360	34260	37488
9	148329	181499	217338	255186	290328	319644
10	1468457	1763490	2080990	2414292	2751480	3033264
11	16019531	18943701	22076030	25350954	28686024	31784280
12	190899411	222822578	256888218	292378968	328764732	364902480
13	2467007773	2847624899	3252308706	3673917102	4106158164	4538652840
14	34361893981	39282739034	44497313158	49928069188	55495145304	61102571376
15	513137616783	581701775369	654139144158	729534877758	806797105320	885045657564
16	8178130767479	9202313110506	10281397705242	11403682481112	12554890849992	13722397569072
17	138547156531409	154873904848803	172033123244330	189862332575658	208164423163908	226742901078120
18	2486151753313617	2762800622799362	3052895403376110	3354017704180052	3663256621120548	3977354871110160
19	47106033220679059	52071171437696453	57266799403366334	62654508729565554	68188490015132040	73816786920489720
20	939765362752547227	1033855049655584786	1132124282036449570	1233924707891272728	1338490745511631080	1444940702597713008
21	19690321886243846661	21567640717569135515	23524895818926592242	25550498290562247438	27630826605742438968	29750236302549282948
22	432292066866171724421	471630531427793184474	512577206181190933062	554913370184289495780	598383049497841208340	642693417769786746864
23	9923922230666898717143	10787660036599729160073	11685351024627411070118	12612648556263898345758	13564486434215852731596	14535097378893765189240
24	237760636776394448431551	257590656485400508526570	278171270561272398036690	299411750583810718488216	321206759087756505407112	343437047642562028552080
25	5934505493938805432851513	6409633590481106885238443	6902101621895493710920746	7409924986737790240296258	7930808120217133293871320	?
26	154068892631103602583645049	165928838963556686281573922	178206624272932144933612846	190856850583975937020030228	203827200974194835222910072	?
27	41541538457571638029960509099	4462073606461933066205164757	4780478044628193147299363958	510828322440036893650974970	?	?
28	116167945043852116348068366947	124470791290376112779747519538	13304716900303979980813861410	?	?	?
29	3364864615063302680426807870189	3597058248632667485834774744787	3836660497727132031475893228338	?	?	?
30	100833776298063636990123342509997	107559658152025736992729145688602	114493586561621867215142856973830	?	?	?
31	3122594362778744887436077703535391	3324154021716716493547315823808809	?	?	?	?
32	99825438535083000620222109084897031	106067493846954075776733869818571690	?	?	?	?
33	3291214458368797111357625899526302113	3490771207487802026912252686947947027	?	?	?	?
34	111804491159292960694648762175084674721	118383998479651470880820236769742970626	?	?	?	?
35	3909962776542130968292859568637246910243	4133478159186775319059453592629838113797	?	?	?	?

$$\frac{a_n}{n!} \rightarrow \frac{1}{e} = 0.36787944117144232160 \dots$$

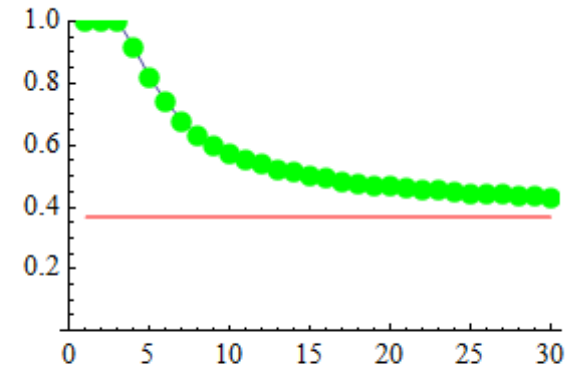
Rook + semi-Leaper [1,1]



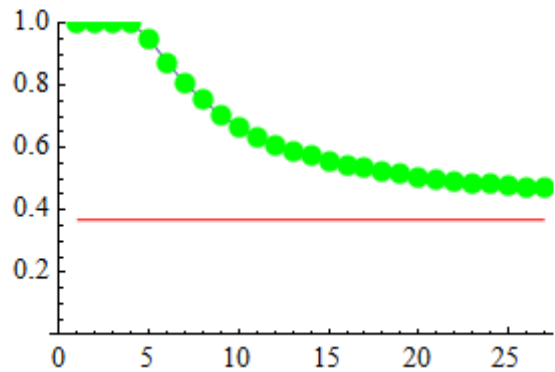
Rook + semi-Leaper [2,2]



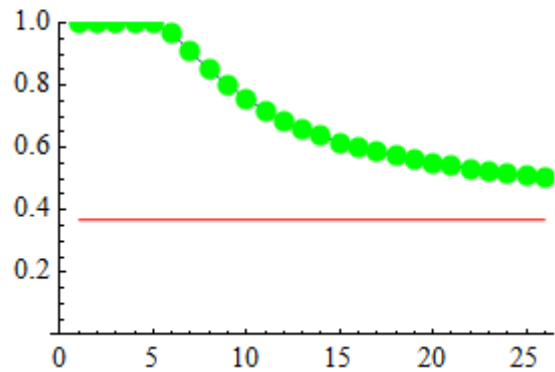
Rook + semi-Leaper [3,3]



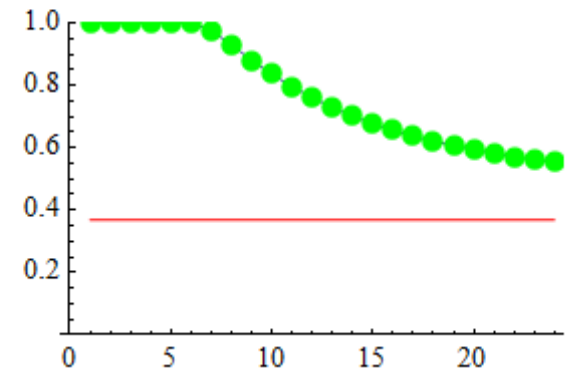
Rook + semi-Leaper [4,4]



Rook + semi-Leaper [5,5]

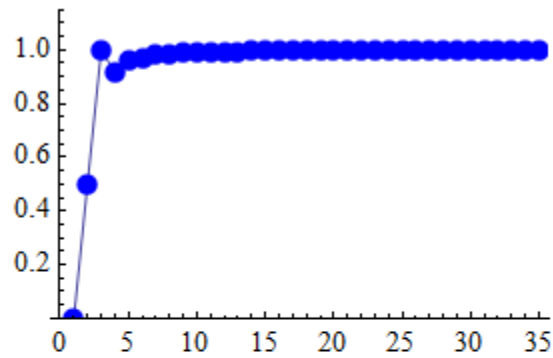


Rook + semi-Leaper [6,6]

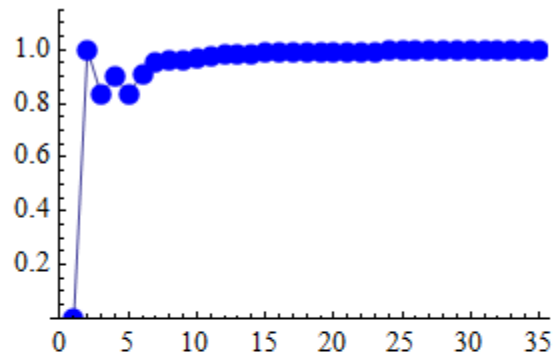


$$q \sim \frac{a_n}{n a_{n-1}} \rightarrow 1$$

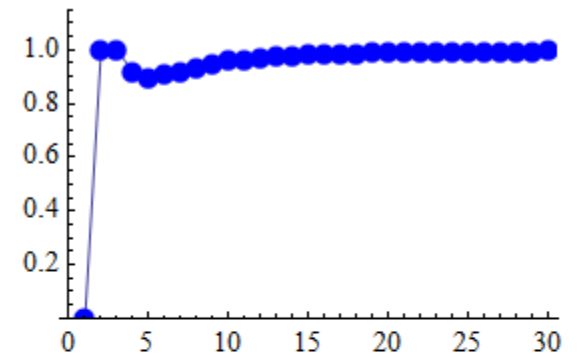
Rook + semi-Leaper [1,1]



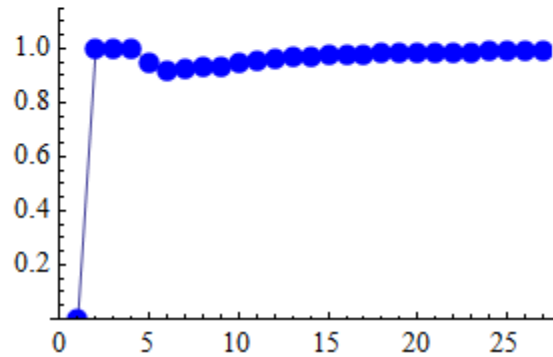
Rook + semi-Leaper [2,2]



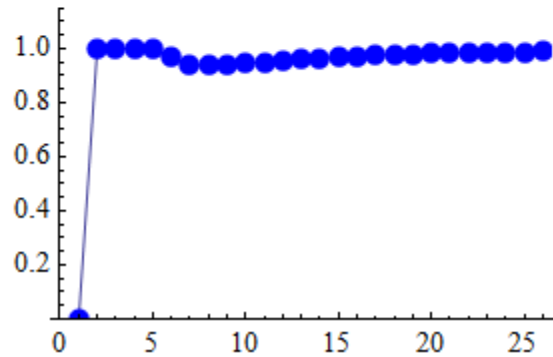
Rook + semi-Leaper [3,3]



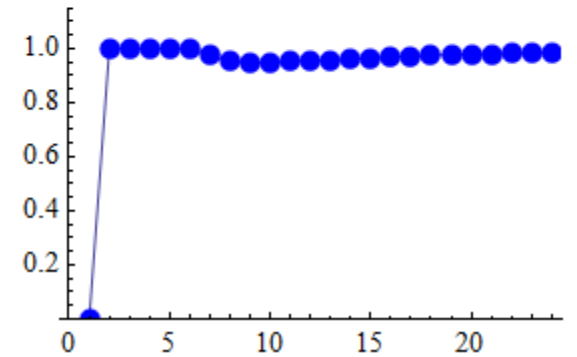
Rook + semi-Leaper [4,4]



Rook + semi-Leaper [5,5]



Rook + semi-Leaper [6,6]



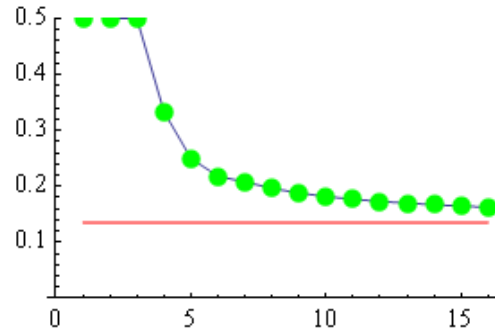
Rook + semi-Leaper $[d_1, d_1]$ + semi-Leaper $[d_2, d_2]$

n	Rook + semi-Leaper [1,1] + semi-Leaper [2,2] (rook+semifers+semialfil)	Rook + semi-Leaper [1,1] + semi-Leaper [3,3]
1	1	1
2	1	1
3	3	3
4	8	10
5	30	44
6	157	243
7	1048	1522
8	7929	11143
9	68251	92786
10	660232	872707
11	7069407	9126803
12	82948157	105014815
13	1058074881	1317128636
14	14574813942	17878539860
15	215575225911	261049562469
16	3407132220806	4079081043391
17	?	?
b	$1/e^2$	$1/e^2$
q	1	1
n	Rook + semi-Leaper [1,1] + semi-Leaper [2,2]	Rook + semi-Leaper [1,1] + semi-Leaper [3,3]

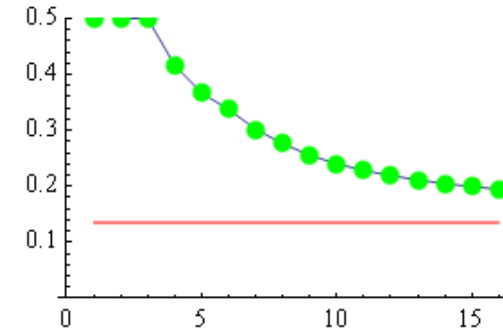
Pokud složíme dva semi-leapery, limity se násobí (situace je stejná jako u jednoho leapera, v obou případech máme shodný počet polí)

$$\frac{a_n}{n!} \rightarrow \frac{1}{e^2} = 0.13533528323661269189 \dots$$

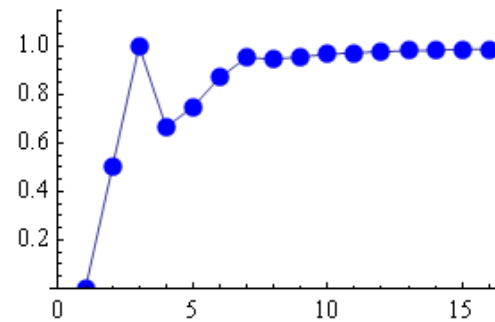
Rook + semi-Leaper [1,1] + semi-Leaper [2,2]



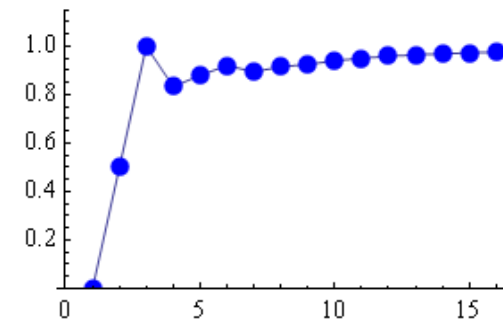
Rook + semi-Leaper [1,1] + semi-Leaper [3,3]



Rook + semi-Leaper [1,1] + semi-Leaper [2,2]



Rook + semi-Leaper [1,1] + semi-Leaper [3,3]



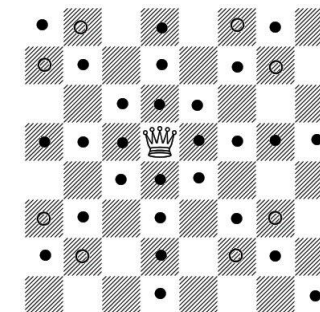
12.2) n pieces queen+leaper[r,s] on an $n \times n$ chessboard - n kamenů dáma+skokan[r,s] na šachovnici $n \times n$

Conjecture (V. Kotěšovec, February 2011): Constant q is **identical** for all sequences in this group.

Hypotéza: konstanta q je pro všechny tyto posloupnosti stejná a rovna konstantě q pro dámu, všechny posloupnosti v této skupině mají asymptotický průběh

$$a_n \sim b * q^n * n!$$

$$q = q_{queen} = 0.389068 \dots$$



Example: queen + zebra (r=2, s=3)

Mám hypotézu, že i konstanty b (jinak specifické pro každý kámen) konvergují v této skupině posloupností k jedné společné konstantě. Vzhledem k tomu, že konstanta b je v tomto případě při výpočtech zatížena značnou chybou (viz grafy na str. 654), nelze její hodnotu spolehlivě určit. *Constant b has in this case big statistical error, computed values are not reliable.* Zatím nejpřesněji byla vypočtena pro Amazonky (queen + knight) viz str. 349.

Conjecture (exists one constant b for all sequences in this group):

$$b = \frac{b_{queen}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q(n)}{A(n)}} \sim \frac{b_{queen}}{78} \sim \frac{2.552 \dots}{78} \sim 0.032 \dots$$

Zajímavou kuriozitou je to, že na šachovnici 8×8 neexistuje rozstavení 8 kamenů s kombinovanou pohyblivostí dáma + antilopa, tj. v každém z 92 možných rozstavení neohrožujících se dam na šachovnici 8×8 existuje aspoň jedna dvojice dam vzdálených o souřadnice [3,4] nebo [4,3]. Totéž platí pro velblouda i zebra, tj. na šachovnici 8×8 je vždy aspoň jedna dvojice dam s rozdílem souřadnic [1,3] (resp. [3,1]) nebo [2,3] (resp. [3,2]).

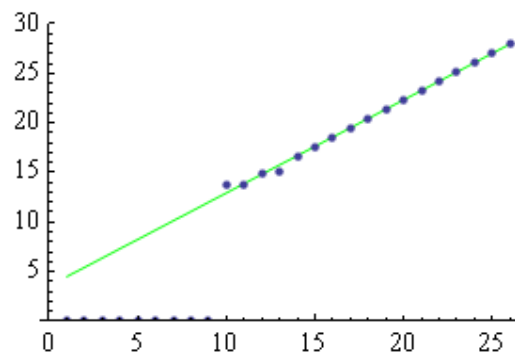
Queen + Leaper [r,s] (0 < r < s)

n	Queen + Leaper [1,2] A051223 (Amazon)	Queen + Leaper [1,3] A189864 (Queen + Camel)	Queen + Leaper [1,4] A189865 (Queen + Giraffe)	Queen + Leaper [1,5] A189866	Queen + Leaper [2,3] A189867 (Queen + Zebra)	Queen + Leaper [2,4] A189868	Queen + Leaper [2,5] A189869	Queen + Leaper [3,4] A189870 (Queen + Antilope)	Queen + Leaper [3,5] A189871	Queen + Leaper [4,5] A189872
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2
5	0	0	10	10	10	0	10	2	10	10
6	0	0	0	0	0	0	4	4	0	4
7	0	0	0	0	0	0	28	28	8	12
8	0	0	4	0	0	0	20	0	24	32
9	0	0	32	40	0	0	56	20	72	96
10	4	4	76	52	48	4	72	52	116	144
11	44	56	196	160	152	64	288	280	384	576
12	156	176	632	500	472	384	1304	1192	1660	2280
13	1876	1932	3368	2656	2696	2936	6368	5520	7344	11988
14	5180	4188	12532	11540	12320	10720	22884	20196	24364	47128
15	32516	26960	79788	67776	74436	62664	125864	115936	130408	232756
16	202900	182456	468286	415716	429620	420272	755412	701836	743360	1290772
17	1330622	1132064	2815088	2610520	2515116	2540584	4565572	4174032	4242704	7383588
18	8924976	7645784	18287968	17450592	16122496	16373760	29862256	27261284	27018788	46039788
19	64492432	58695136	126620984	124903880	113016608	115200080	207238124	193428616	190618152	311958088
20	495864256	470822912	938037664	944965832	843492920	868564232	1540506028	1445733328	1431986780	2263575696
21	3977841852	3792417988	7232141830	7292031780	6575649316	6708291360	11774180220	11133210948	11053915716	16975534432
22	34092182276	32440237692	59774887344	?	54694203188	?	?	?	?	?
23	306819842212	?	?	?	?	?	?	?	?	?
24	2883202816808	?	?	?	?	?	?	?	?	?
25	28144109776812	?	?	?	?	?	?	?	?	?
26	286022102245804	?	?	?	?	?	?	?	?	?
27	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
b	0.0284095	0.0233651	0.173967	0.132252	0.129941	0.159152	0.328469	0.254702	0.277452	0.842935
q	0.391033^n	0.393871^n	0.369264^n	0.374241^n	0.37271^n	0.36929^n	0.366528^n	0.370027^n	0.368272^n	0.356487^n
n	Queen + Leaper [1,2]	Queen + Leaper [1,3]	Queen + Leaper [1,4]	Queen + Leaper [1,5]	Queen + Leaper [2,3]	Queen + Leaper [2,4]	Queen + Leaper [2,5]	Queen + Leaper [3,4]	Queen + Leaper [3,5]	Queen + Leaper [4,5]

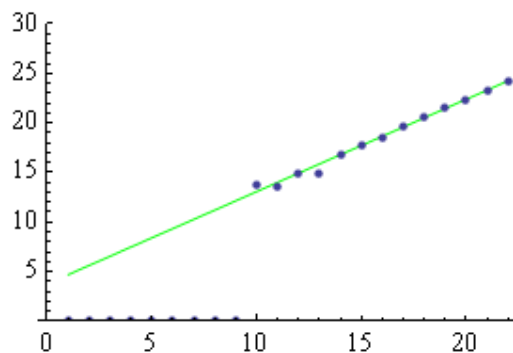
Je třeba zdůraznit, že konstanty b a q jsou vypočteny metodou nejmenších čtverců a jde tedy jen o odhady (*b and q were computed with least squares method only - constant q is probably identical for all columns*). Numerické výpočty jsou velmi blízko hypotéze, že by zde měly být všechny konstanty q shodné. Samozřejmě pro přesnější výsledky bychom potřebovali znát mnohem více hodnot.

$$\log\left(\frac{n!}{a_n}\right) \sim -\log b - n * \log q$$

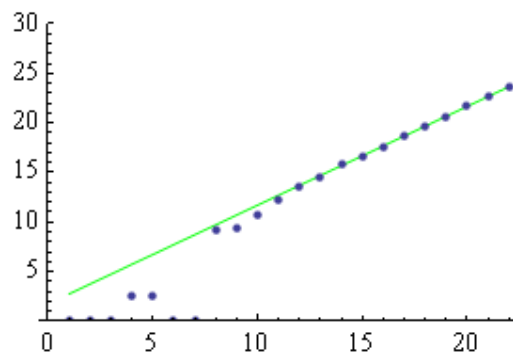
Queen + Leaper [1,2]



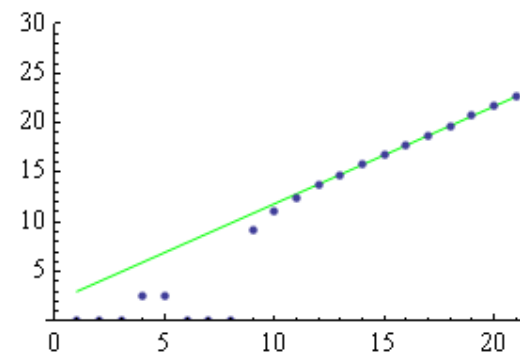
Queen + Leaper [1,3]



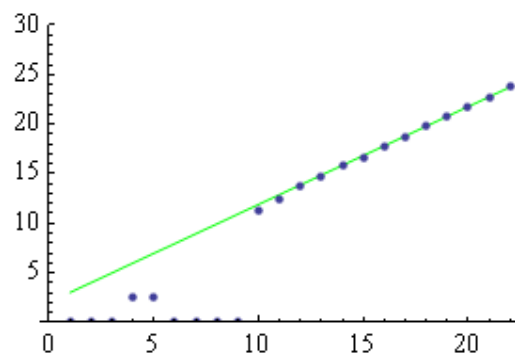
Queen + Leaper [1,4]



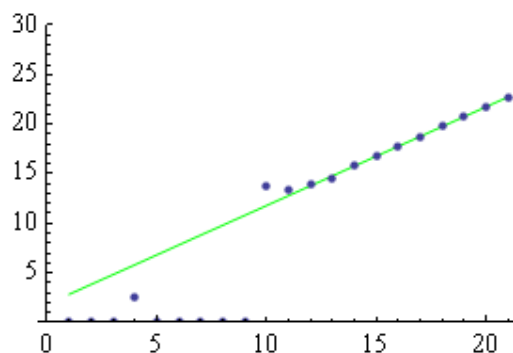
Queen + Leaper [1,5]



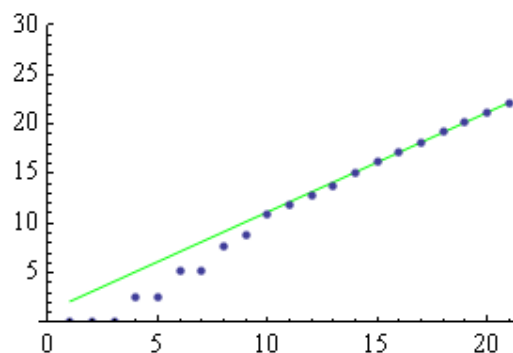
Queen + Leaper [2,3]



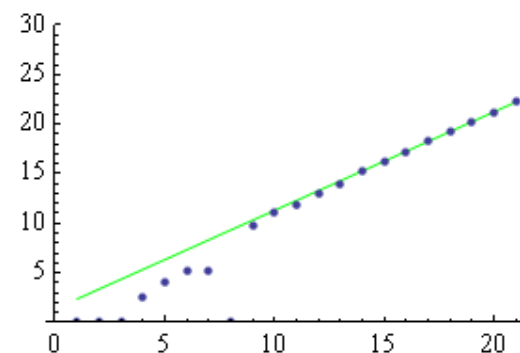
Queen + Leaper [2,4]



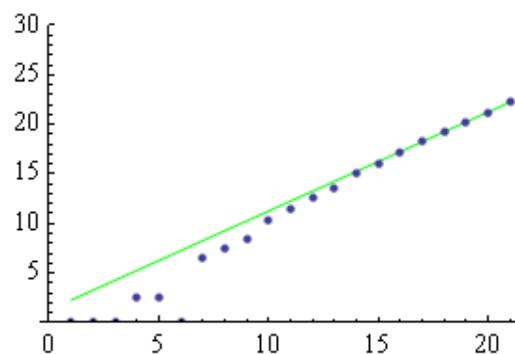
Queen + Leaper [2,5]



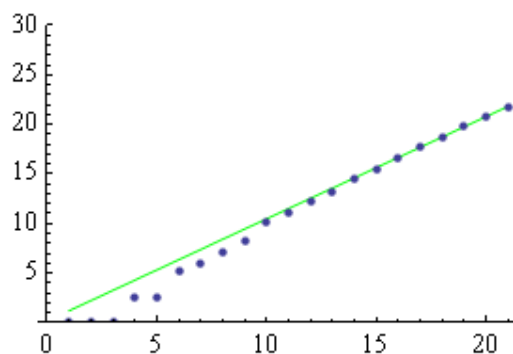
Queen + Leaper [3,4]



Queen + Leaper [3,5]



Queen + Leaper [4,5]

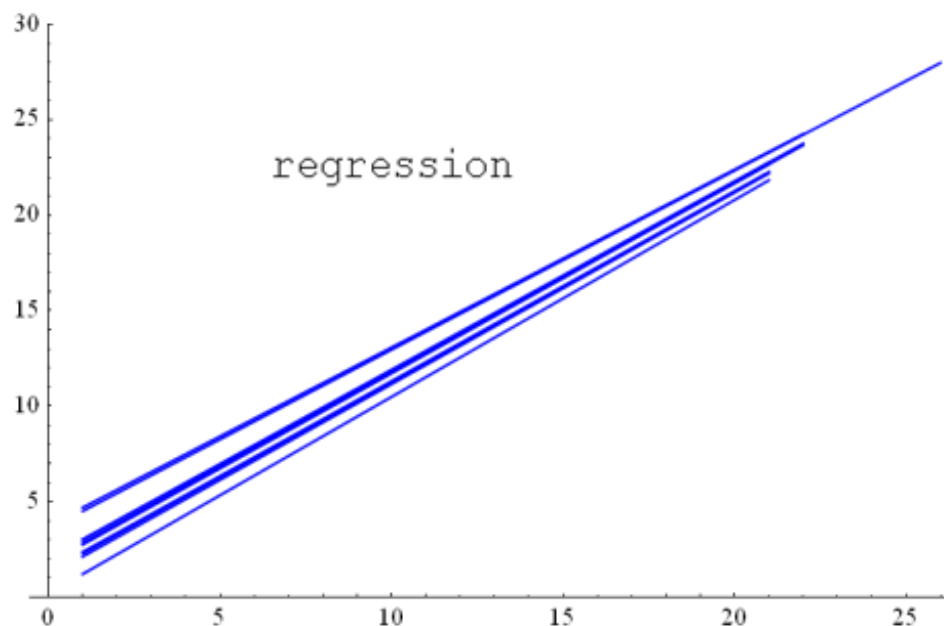
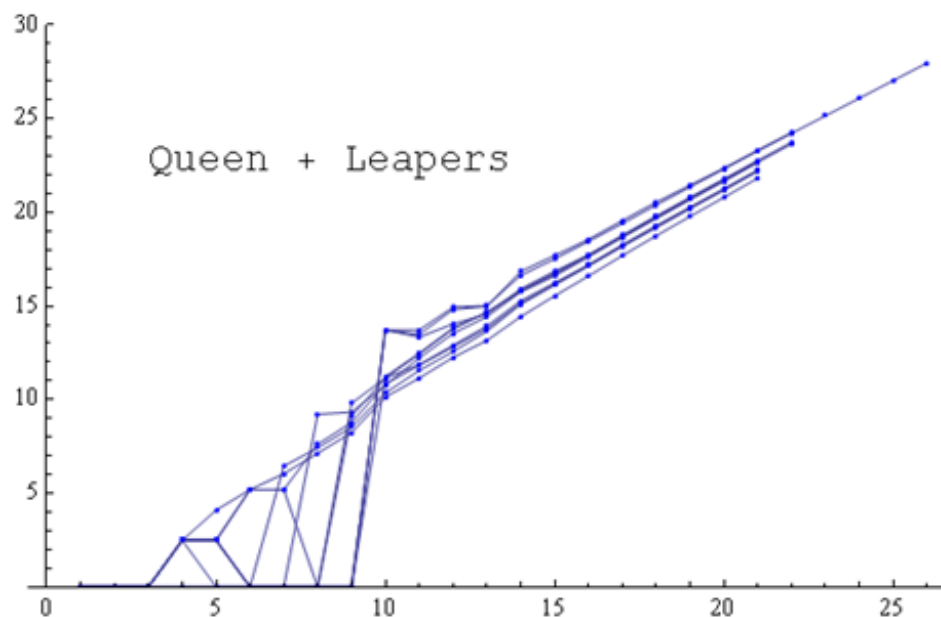


V následujícím grafu jsou zobrazeny společně všechny grafy z předchozí strany, v grafu vpravo potom jen regresní přímky. Vidíme, že tyto přímky jsou (při respektování statistické chyby) všechny **rovnoběžné**, jen vzájemně posunuté. Z rovnoběžnosti lze usuzovat, že konstanta q je pro všechny tyto posloupnosti stejná (rovna konstantě q pro dámu!) a posun souvisí pouze s konstantou b (v grafu je úměrný jejímu logaritmu).

Tyto skutečnosti (i podobné chování kombinovaných kamenů věž + skokan) mě vedly k hypotéze, matematicky zapsané na další straně. Rozptyl (společné) konstanty q je poměrně malý. Konstanty b mohou být specifické pro každou posloupnost, ale spíše bych se přikláněl ke konvergenci k jedné společné konstantě, tak jak tomu bylo v případě věží. V tom případě by se pro velká n svazek přímek sbíhal do jednoho bodu (náznak toho je vidět v grafech). Pro přesnější určení bychom potřebovali aspoň 50 hodnot. Grafy na str. 654 proto ukazují věrohodnější odhad konstant b jen v případě skokanů [1,2] a [1,3], předpokládám však, že od určitého n dojde k ustálení i ostatních grafů pro větší r a s .

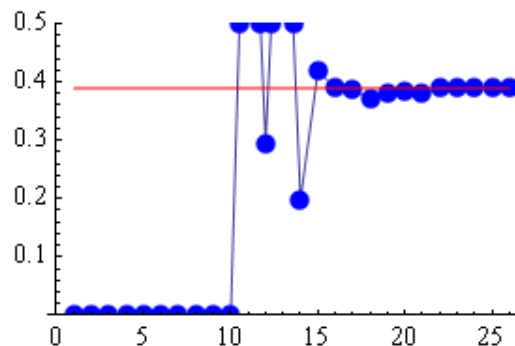
Queen + Leaper [r,s] ($0 < r < s \leq 5$)

$$\log\left(\frac{n!}{a_n}\right) \sim -\log b - n * \log q$$

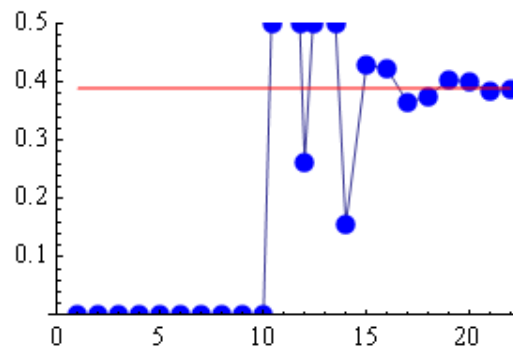


$$q \sim \frac{a_n}{n a_{n-1}} \rightarrow q_{queen} = 0.389068 \dots \text{ (conjecture)}$$

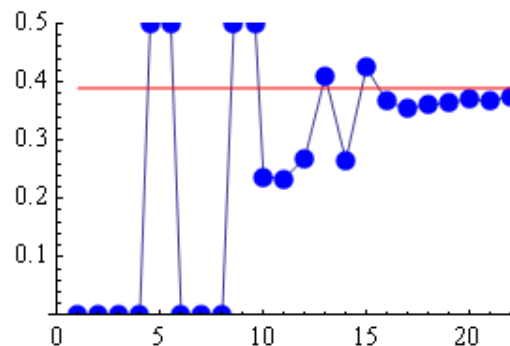
Queen + Leaper [1,2]



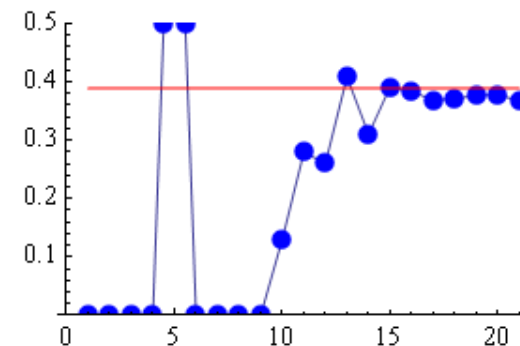
Queen + Leaper [1,3]



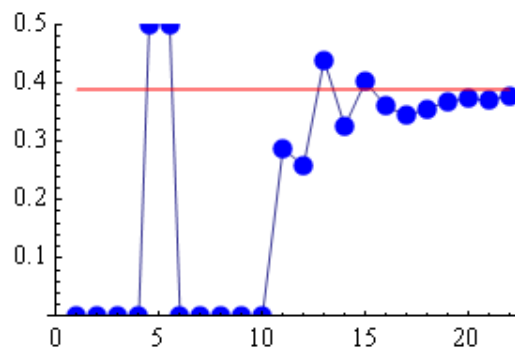
Queen + Leaper [1,4]



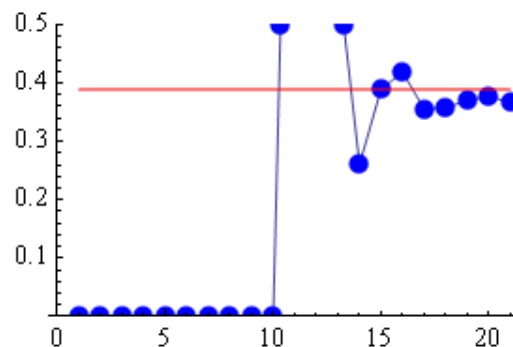
Queen + Leaper [1,5]



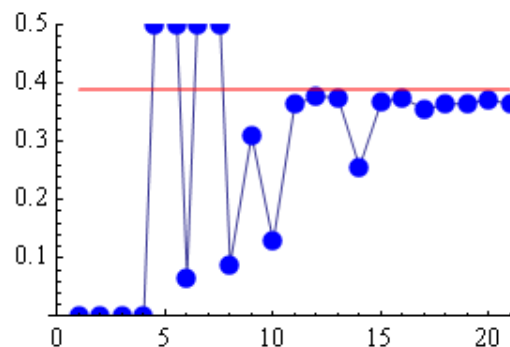
Queen + Leaper [2,3]



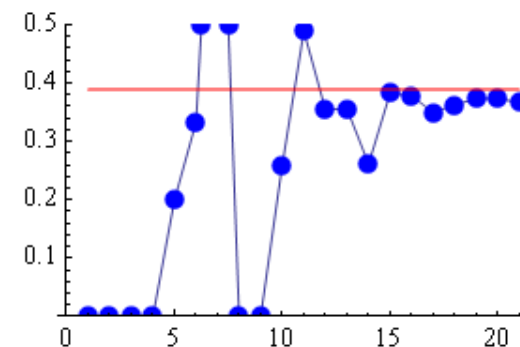
Queen + Leaper [2,4]



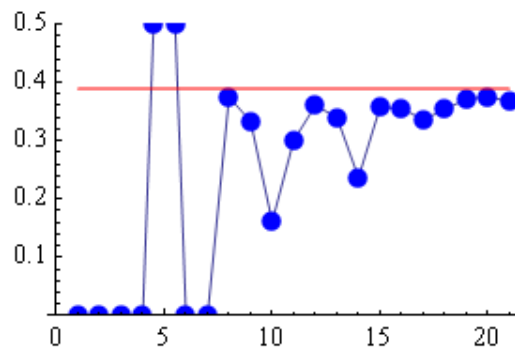
Queen + Leaper [2,5]



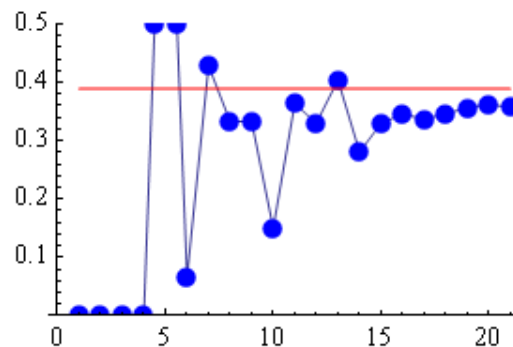
Queen + Leaper [3,4]



Queen + Leaper [3,5]

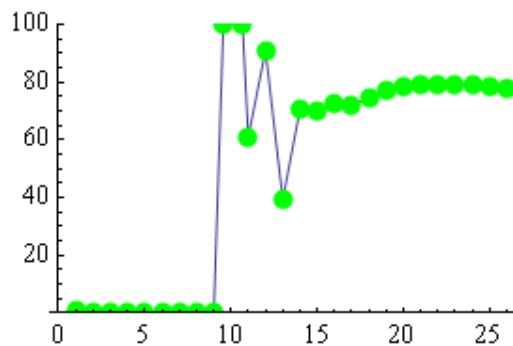


Queen + Leaper [4,5]

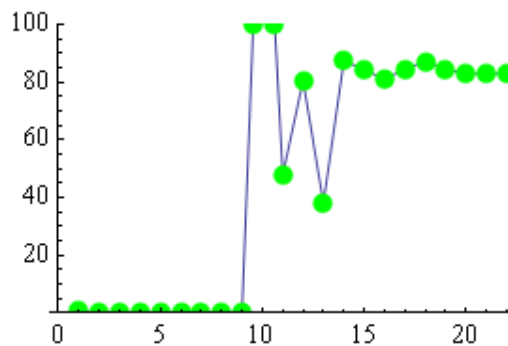


$$\frac{Q(n)}{a_n} \sim \frac{b_{\text{queen}}}{b} \sim \frac{2.552 \dots}{b} \quad (\text{conjecture})$$

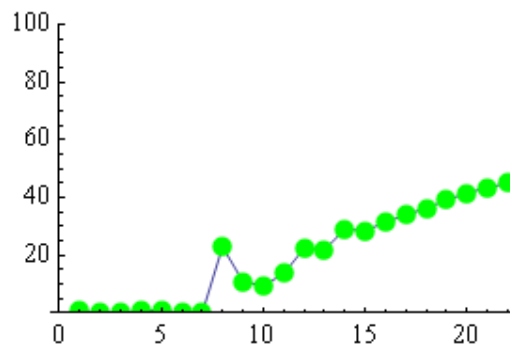
Queen + Leaper [1,2]



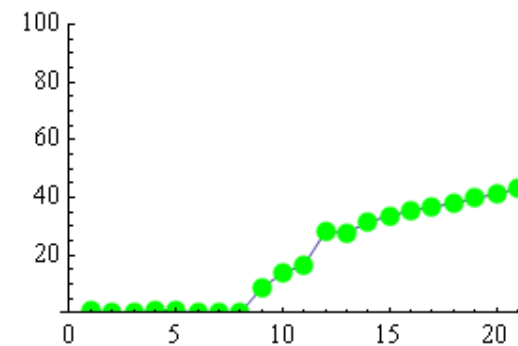
Queen + Leaper [1,3]



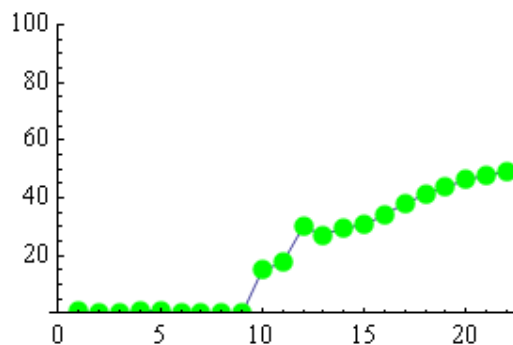
Queen + Leaper [1,4]



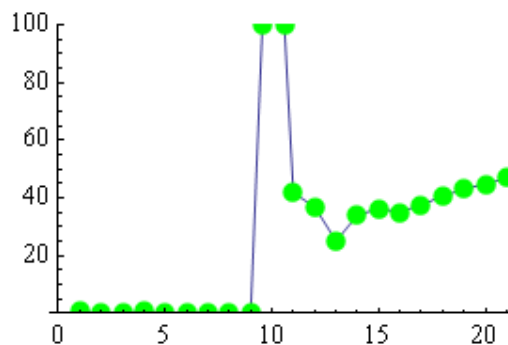
Queen + Leaper [1,5]



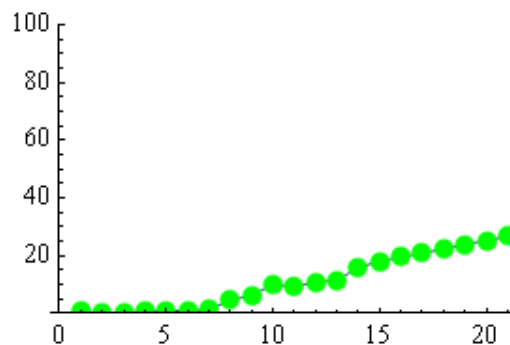
Queen + Leaper [2,3]



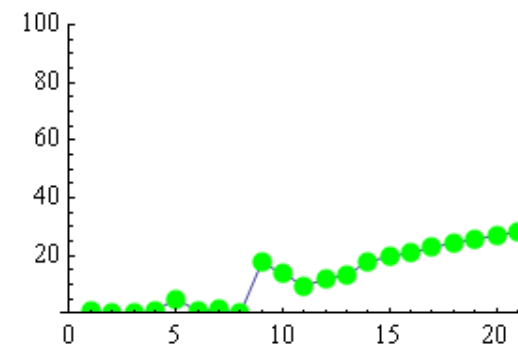
Queen + Leaper [2,4]



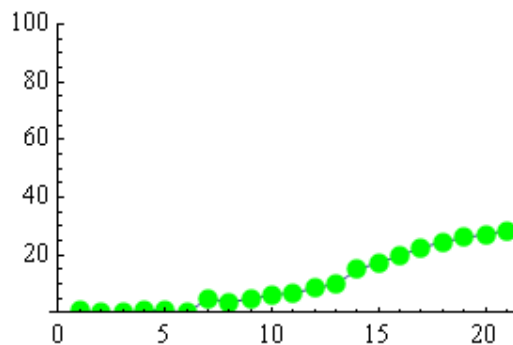
Queen + Leaper [2,5]



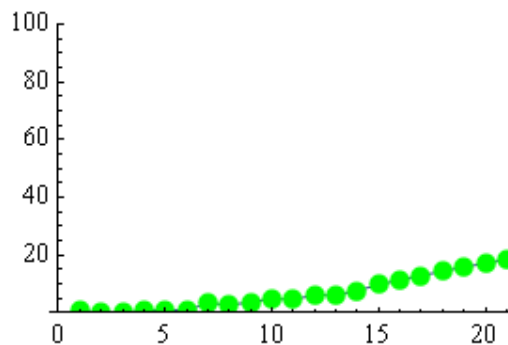
Queen + Leaper [3,4]



Queen + Leaper [3,5]



Queen + Leaper [4,5]



Pro přesnější určení hodnoty tohoto podílu není dostatek hodnot. Je třeba si ještě uvědomit, že první (stabilnější) graf pro amazonky má více hodnot.

12.3) n pieces rook+rider[r,s] on an $n \times n$ chessboard - n kamenů věž+liniový kámen[r,s] na šachovnici $n \times n$

Přesné asymptotické výsledky z kapitoly 12.1 pro skokany bohužel nejdou přímo rozšířit pro liniové kameny, protože zde již nejde vzájemnou interferenci linií úplně zanedbat (*there is **not** limited interference between properties*), můžeme se je ale pokusit použít alespoň pro odhady chování těchto posloupností. Vytvořme si tabulku počtu polí, které pro každý typ kamene přichází v úvahu pro interferenci s ostatními liniemi.

typ kamene (kombinovaného s věží)	počet polí interferujících s jinými permutacemi	násobící pravděpodobnostní faktor
semi-Leaper [d,d]	2	$1/e$
Leaper [d,d]	4	$1/e^2$
Leaper [r,s] ($0 < r < s$)	8	$1/e^4$

Pokud tyto výsledky zobecníme, zjistíme, že (asymptoticky) je vliv jednoho přidaného pole zhruba (*average factor for one square*)

$$\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Pro m polí potom (*factor for m squares*)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^m = e^{-m/2}$$

Nyní můžeme pro účel odhadu provést tutéž úvahu pro liniové kameny. Stačí spočítat přibližný počet polí, která jsou příslušnému liniovému kamenu dostupná v oblasti $n \times n$.

Určíme maximální a průměrné počty dostupných polí.

0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	6
2	3	4	5	6	7	6	5
3	4	5	6	7	6	5	4
4	5	6	7	6	5	4	3
5	6	7	6	5	4	3	2
6	7	6	5	4	3	2	1
7	6	5	4	3	2	1	0

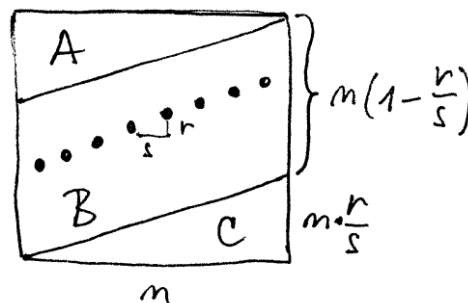
Schéma znázorňuje počet polí dostupných semi-střelci (*semi-rider* [1,1]) z každého pole šachovnice 8x8 ($d=1$). Při zobecnění na šachovnici $n \times n$ dostáváme maximální počet dostupných polí $n-1$ (asymptoticky můžeme uvažovat rovno n). Průměrný počet je (*average number of possible moves from each square*):

$$\frac{(n-1)n + 2 \sum_{j=1}^{n-2} j(j+1)}{n^2} = \frac{2n}{3} + \frac{1}{3n} - 1 \sim \frac{2n}{3}$$

0	0	1	1	2	2	3	3
1	1	2	2	3	3	3	3
2	2	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	2	2
3	3	3	3	2	2	1	1
3	3	2	2	1	1	0	0

Semi-Rider
[1,2]

Schéma ukazuje počet polí dostupných semi-tátoši po jediné linii (*semi-rider* [1,2], $r=1, s=2$) z každého pole šachovnice 8x8. Vidíme, že ve středním pásu jsou tyto počty stejné a závislé pouze na s (větší ze souřadnic), kdežto v obou okrajových oblastech jsou hodnoty menší. Závislost na r je dána úhlem, který svírají hranice těchto oblastí. Speciálně při $r=s$ je prostřední oblast prázdná. Maximální počet dostupných polí je přibližně n/s .



Obecně pro jednu linii semi-ridera $[r,s]$ rozdělme šachovnici $n \times n$ na 3 části. Části A a C jsou shodné. V oblasti B je průměrná dostupnost n/s polí, v částech A a C je pak tento počet polí asymptoticky

$$\frac{2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{n-i}{s} + 1\right) \left(\frac{n-i}{s}\right)}{n^2} \sim \frac{2n}{3s}$$

Pro průměrný počet dostupných polí proto dostáváme přibližně

$$\frac{n^2 \left(1 - \frac{r}{s}\right) * \frac{n}{s} + n^2 \frac{r}{s} * \frac{2n}{3s}}{n^2} = n * \left(\frac{1}{s} - \frac{r}{3s^2}\right)$$

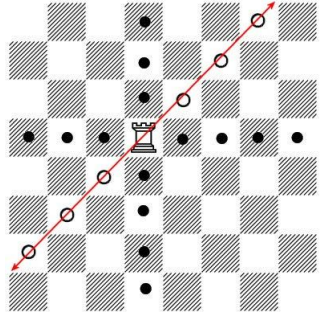
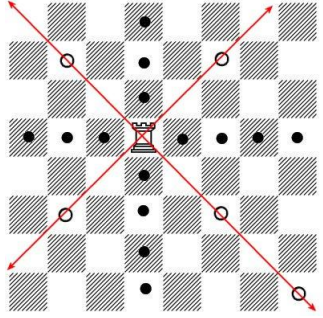
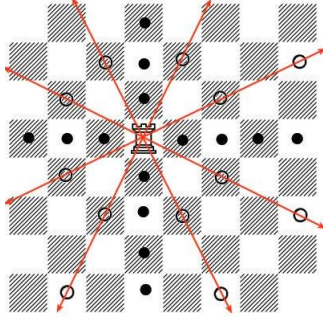
Tento asymptotický vzorec platí i pro případ $r = s = d$, kdy pro jednu semi-linii dostáváme průměrnou hodnotu počtu dostupných polí $\frac{2n}{3d}$

7	7	7	7	7	7	7	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	7	7	7	7	7	7	7

Schéma ukazuje počet polí dostupných střelci (*rider* [1,1] = *bishop*) z každého pole šachovnice 8x8. I zde můžeme snadno odvodit vzorec pro průměrný počet dostupných polí na šachovnici $n \times n$. Pro n sudé (*for even n*) dostaneme metodou soustředných čtverců:

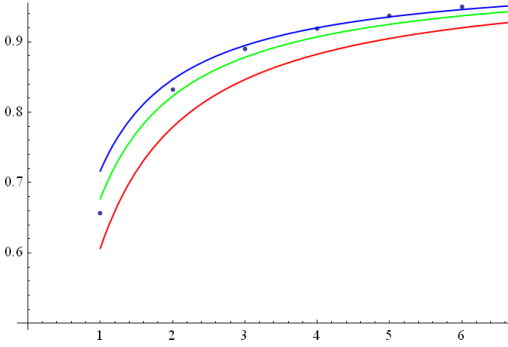
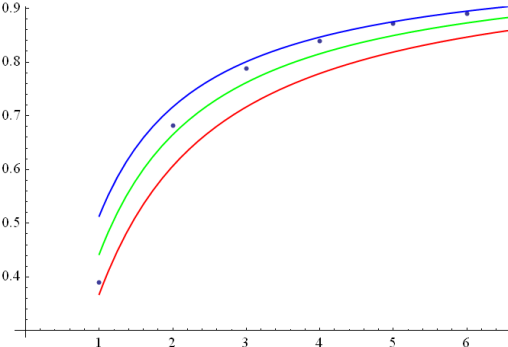
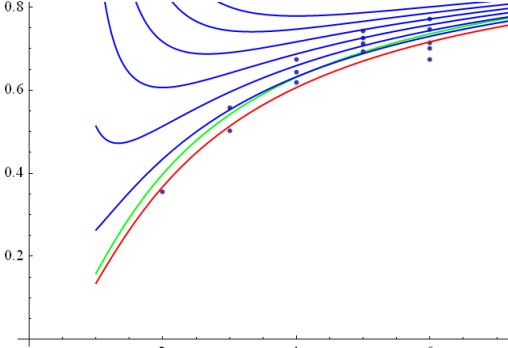
$$\frac{\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} 4(n-2j+1)(n+2j-3)}{n^2} = \frac{4n}{3} + \frac{2}{3n} - 2$$

Vidíme, že jde o dvojnásobek počtu pro semi-střelce a že je v souladu se vzorcem pro $d=1$.

typ kamene (kombinovaného s věží)	počet linií	počet polí interferujících s jinými permutacemi (na všech liniích)	násobící pravděpodobnostní faktor	příklady
<i>piece</i> (composite with rook)	<i>number of lines</i> <i>of riders</i>	<i>number of squares</i> <i>on all lines of riders</i>	<i>probability factor</i> (for n going to infinity)	<i>examples</i>
semi-Rider [d,d]	1	<i>maximal:</i> $\frac{n}{d}$ <i>average:</i> $\frac{2n}{3d}$	$e^{-\frac{n}{2d}}$ $e^{-\frac{n}{3d}}$	 rook+semi-bishop (=semiqueen) d=1
Rider [d,d]	2	<i>maximal:</i> $\frac{2n}{d}$ <i>average:</i> $\frac{4n}{3d}$	$e^{-\frac{n}{d}}$ $e^{-\frac{2n}{3d}}$	 rook+alfilrider d=2
Rider [r,s] ($0 < r < s$)	4	<i>maximal:</i> $\frac{4n}{s}$ <i>average:</i> $4n \left(\frac{1}{s} - \frac{r}{3s^2} \right)$	$e^{-\frac{2n}{s}}$ $e^{-\frac{2n}{s} \left(1 - \frac{r}{3s} \right)}$	 rook+nightrider r=1, s=2

Pole na liniích věžové složky jsou označeny černými kroužky (tyto linie jsou už zabudovány v permutacích). Sčítají se jen pole na liniích riderů (označené bílými kroužky). Odvozené násobící faktory jsou současně i dolními omezeními pro konstanty q v asymptotickém odhadu $a_n \sim b * q^n * n!$

Pro skupiny probírané na dalších stranách dostáváme tak tyto asymptotické odhady pro konstanty q .

kombinované kameny <i>composite pieces</i>	odhad <i>estimate</i>	numerický výpočet <i>numerical results</i>	nelineární regrese <i>non-linear regression</i>	poznámky <i>comments</i>
Rook + semi-Rider [d,d]	$q_d \sim e^{-\frac{1}{2d}}$ $q_d \sim e^{-\frac{1}{3d}}$	$q_d \sim e^{-0.389/d}$		<p>V grafech jsou vypočtené hodnoty q odpovídající vzorci $a_n \sim b * q^n * n!$ (body) <i>Points are computed values from first values of sequences.</i></p> <p>Na ose x jsou hodnoty d, resp. s, na ose y jsou hodnoty q.</p>
Rook + Rider [d,d]	$q_d \sim e^{-\frac{1}{d}}$ $q_d \sim e^{-\frac{2}{3d}}$	$q_d \sim e^{-0.815/d}$		<p>Regresní křivka proložená těmito body metodou nejmenších čtverců je zelená (odpovídá sloupci <i>numerical results</i>)</p> <p>Červená křivka odpovídá odhadům při volbě maximálního počtu dostupných polí (<i>for maximal number of squares</i>).</p>
Rook + Rider [r,s] ($0 < r < s$)	$q_{r,s} \sim e^{-\frac{2}{s}}$ $q_{r,s} \sim e^{-\frac{2}{s}(1-\frac{r}{3s})}$	$q_{r,s} \sim e^{-1.84/s}$		<p>Modrá křivka odpovídá odhadům při volbě průměrného počtu dostupných polí (<i>for average number of squares</i>). V posledním grafu pro $[r,s]$ je zobrazeno současně 6 grafů pro $r=1$ až $r=6$. <i>3D graph for [r,s] see next page.</i></p> <p><i>Queen + Rider [r,s] see page 676.</i></p>

Předchozí odhady vyhovují i zřejmému

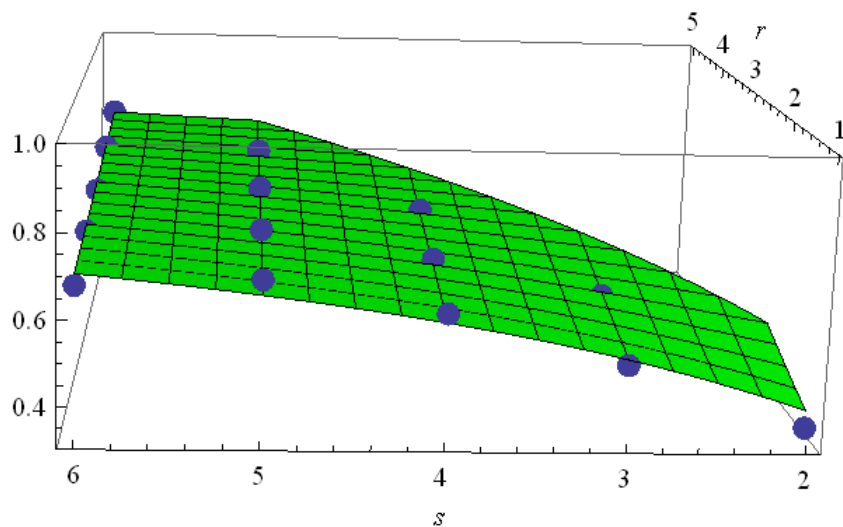
$$\lim_{d \rightarrow \infty} q_d = 1$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} q_{r,s} = 1$$

Konstanty b jsou při numerickém výpočtu zatíženy obrovskou chybou, takže jsem se ani nesnažil o jejich odhad. Můžeme předpokládat, že každá z těchto konstant je specifická pro daný materiál. Z hlediska asymptotického chování těchto funkcí je konstanta b méně zajímavá, o rychlosti růstu rozhoduje zejména konstanta q .

Otevřenou otázkou zůstává v případě liniových kamenů $[r,s]$, zda je konstanta q závislá pouze na hodnotě s (tak jako tomu bylo např. v případě dvou riderů v kapitole 11.1) nebo existuje i nějaká závislost na hodnotě r ? Numerické výpočty sice určitou závislost ukazují, ale je možné, že se zvyšujícím se n se bude tato závislost na r zmenšovat až se pro n blížící se nekonečnu stane zanedbatelnou. Z dosud vypočtených hodnot toto nelze rozhodnout, ale předchozí teoretické úvahy o průměrném počtu dostupných polí, který je na r závislý, mírné závislosti na r nasvědčují, i když dominantním parametrem je hodnota s .

Open problem for Rook+Riders $[r,s]$ is dependence (or independence) on value of r . For small values of n is q dependent also on r , but for n going to infinity can be this dependence low.



Dvojměrná regrese pro proměnné r a s dává výsledek

$$q_{r,s} \sim e^{-\frac{1}{s} (2.279 - 0.869 * \frac{r}{s})}$$

Výsledek (proložení plochy metodou nejmenších čtverců) zobrazuje graf. Vidíme, že závislost na s je zřejmá, ale závislost na r je jen mírná (na hranici statistické chyby).

(least squares method used for this graph)

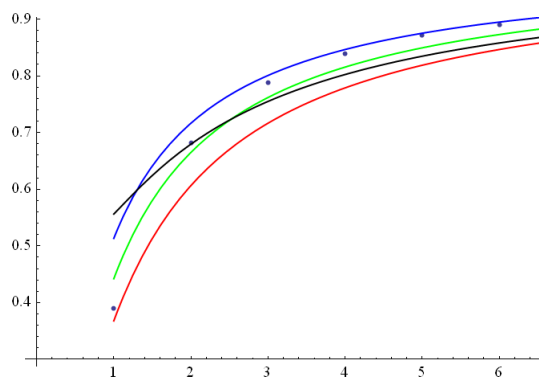
Ještě jiný typ odhadu konstant q , založený na teorii pravděpodobnosti. Pro velká n je pravděpodobnost, že se v náhodně zvolené pozici n kamenů věž + skokan $[d,d]$ (**rook** + **leaper** $[d,d]$) nebudou žádné dva napadat, dána výrazem (viz str. 630)

$$p_{n,d} = \frac{a_{n,d}}{n!} = \frac{1}{e^2} \left(1 + \frac{4(d-1)}{n} + \frac{2d(3d-4)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

Liniový kámen $[d,d]$ můžeme složit jako kombinaci skokanů $[d,d] + [2d,2d] + [3d,3d] + \dots$. Pokud postavíme kámen doprostřed šachovnice, stačí k pokrytí všech linií složení přibližně $n/(2d)$ skokanů. Nutnou podmínkou k tomu, aby se žádné dva kameny nenapadaly je, aby se ani žádná dvojice těchto kamenů nenapadala. Pokud by byly tyto jevy nezávislé, šlo by určit výslednou pravděpodobnost jako součin všech dílčích pravděpodobností. Jelikož tyto jevy zcela nezávislé nejsou, půjde pouze o odhad. Samotný součin pravděpodobností sice konverguje k 0, ale vhodným umocněním z něj přeci jen něco dostaneme. *Events are not absolutely independent, therefore is following equation only estimate*

$$q_d \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{j=1}^{\frac{n}{2d}} p_{n,j} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{j=1}^{\frac{n}{2d}} \frac{1}{e^2} \left(1 + \frac{4(j-1)}{n} + \frac{2j(3j-4)}{n^2} + \dots \right) \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$q_d \sim \left(1 + \frac{2}{d} + \frac{3}{2d^2} \right)^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2d}} * e^{-\frac{2}{d} + \frac{1}{3}\sqrt{2} \text{ArcCot}((d+1)\sqrt{2})}$$



Graf součinu pravděpodobností (složení ridera ze série skokanů) můžeme zanést do předchozího grafu. Dostáváme jiný typ odhadu, viz černý graf.

Black graph is product of probabilities, if rook + rider is composed from leapers.

Analogicky je pro velká n pravděpodobnost, že se v náhodně zvolené pozici n kamenů věž + semi-skokan $[d,d]$ (**rook** + **semi-leaper** $[d,d]$) nebudou žádné dva napadat, dána výrazem (viz str. 643)

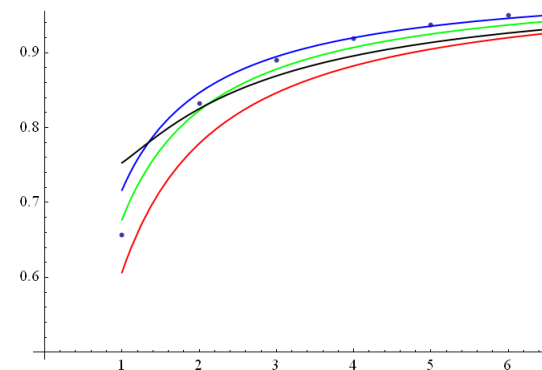
$$p_{n,d} = \frac{s_{n,d}}{n!} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{2d-1}{n} + \frac{d(d-1)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

Odtud dostáváme pro **rook** + **semi-rider** pro součin pravděpodobností výraz (odhad konstanty q)

$$q_d \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{j=1}^{\frac{n}{2d}} p_{n,j} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{j=1}^{\frac{n}{2d}} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{2j-1}{n} + \frac{j(j-1)}{n^2} + \dots \right) \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$q_d \sim \left(1 + \frac{1}{2d} \right)^{2 + \frac{1}{d}} e^{-\frac{3}{2d}}$$

Výsledek opět můžeme zanést do grafu ze strany 658.



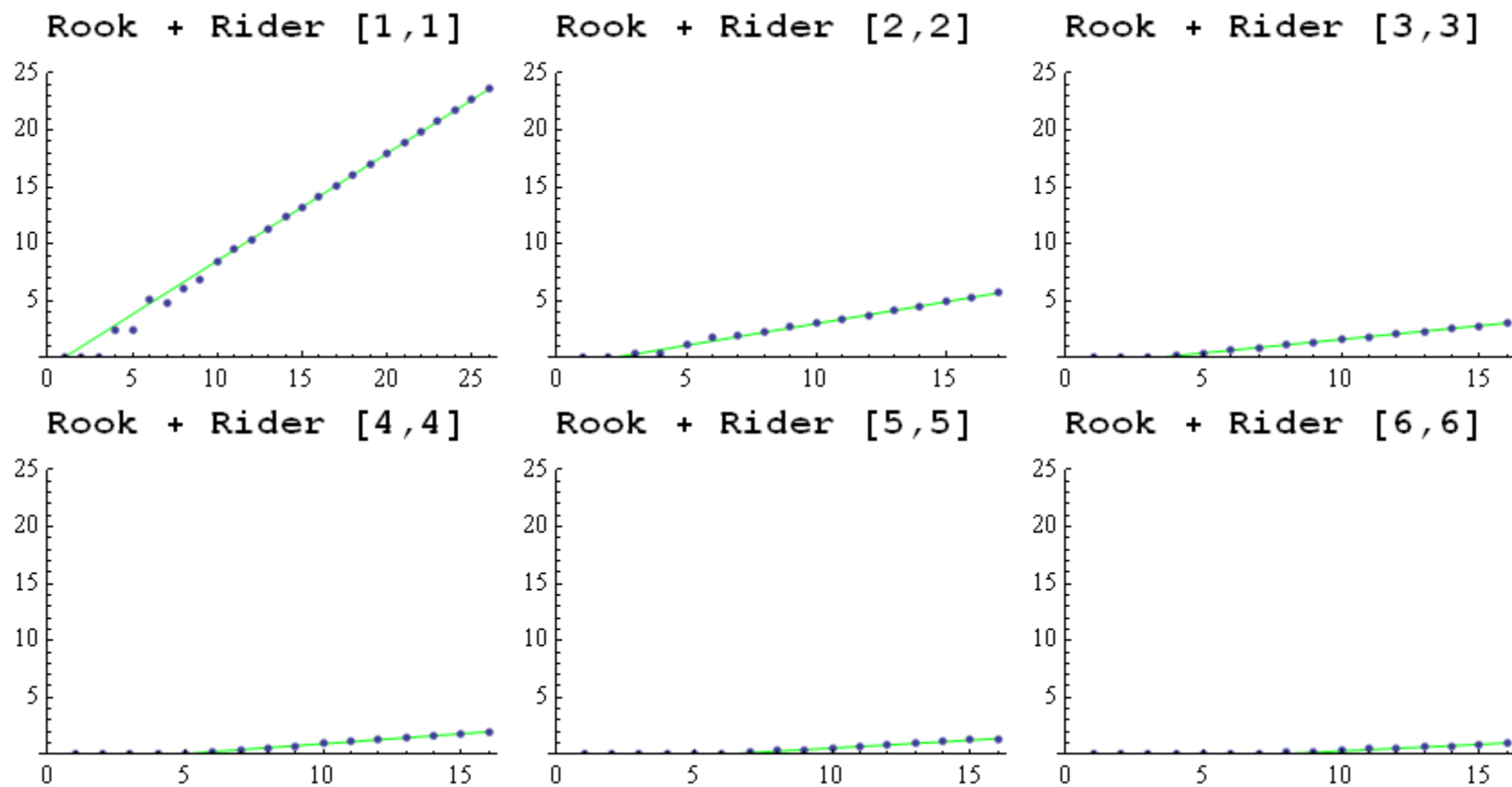
Black graph is product of probabilities, if rook + semi-rider is composed from semi-leapers. For description of other graphs see page 658.

Poznámka: Jelikož se ukázalo, že další člen u $1/n^2$ je kvadratický v d , nelze použít metodu uvedenou ve 3.vydání této knihy na str.33 k důkazu tam uvedené hypotézy (i když tato hypotéza je pravděpodobně správná).

Rook + Rider [d,d]

n	Rook + Rider [1,1] A000170 (Queen)	Rook + Rider [2,2] A189838 (Rook + Alfilrider)	Rook + Rider [3,3] A189839	Rook + Rider [4,4] A189840	Rook + Rider [5,5] A189841	Rook + Rider [6,6] A189842
1	1	1	1	1	1	1
2	0	2	2	2	2	2
3	0	4	6	6	6	6
4	2	16	20	24	24	24
5	10	36	80	108	120	120
6	4	128	384	544	672	720
7	40	672	2112	3264	4128	4800
8	92	4264	12992	23040	28992	34752
9	352	25044	94272	171072	231936	280512
10	724	173712	716800	1409664	2088960	2528256
11	2680	1318904	6141440	12916224	20017152	25282560
12	14200	11069056	58451568	131217408	207208704	278323200
13	73712	96808692	596647568	1428028032	2326900992	3242649600
14	365596	927478976	6555879072	16709309440	28338241536	40330371072
15	2279184	9435033872	77766001056	210367491840	373152276480	536528954880
16	14772512	103783608480	981202169600	2847184825728	5206300028928	7633092132864
17	95815104	1195155968388	?	?	?	?
18	666090624	?	?	?	?	?
19	4968057848	?	?	?	?	?
20	39029188884	?	?	?	?	?
21	314666222712	?	?	?	?	?
22	2691008701644	?	?	?	?	?
23	24233937684440	?	?	?	?	?
24	227514171973736	?	?	?	?	?
25	2207893435808352	?	?	?	?	?
26	22317699616364044	?	?	?	?	?
27	?	?	?	?	?	?
b	2.40076	2.25238	2.14197	2.24161	2.24271	2.3722
q	0.389867^n	0.682034^n	0.787447^n	0.839133^n	0.871478^n	0.889654^n
n	Rook + Rider [1,1]	Rook + Rider [2,2]	Rook + Rider [3,3]	Rook + Rider [4,4]	Rook + Rider [5,5]	Rook + Rider [6,6]

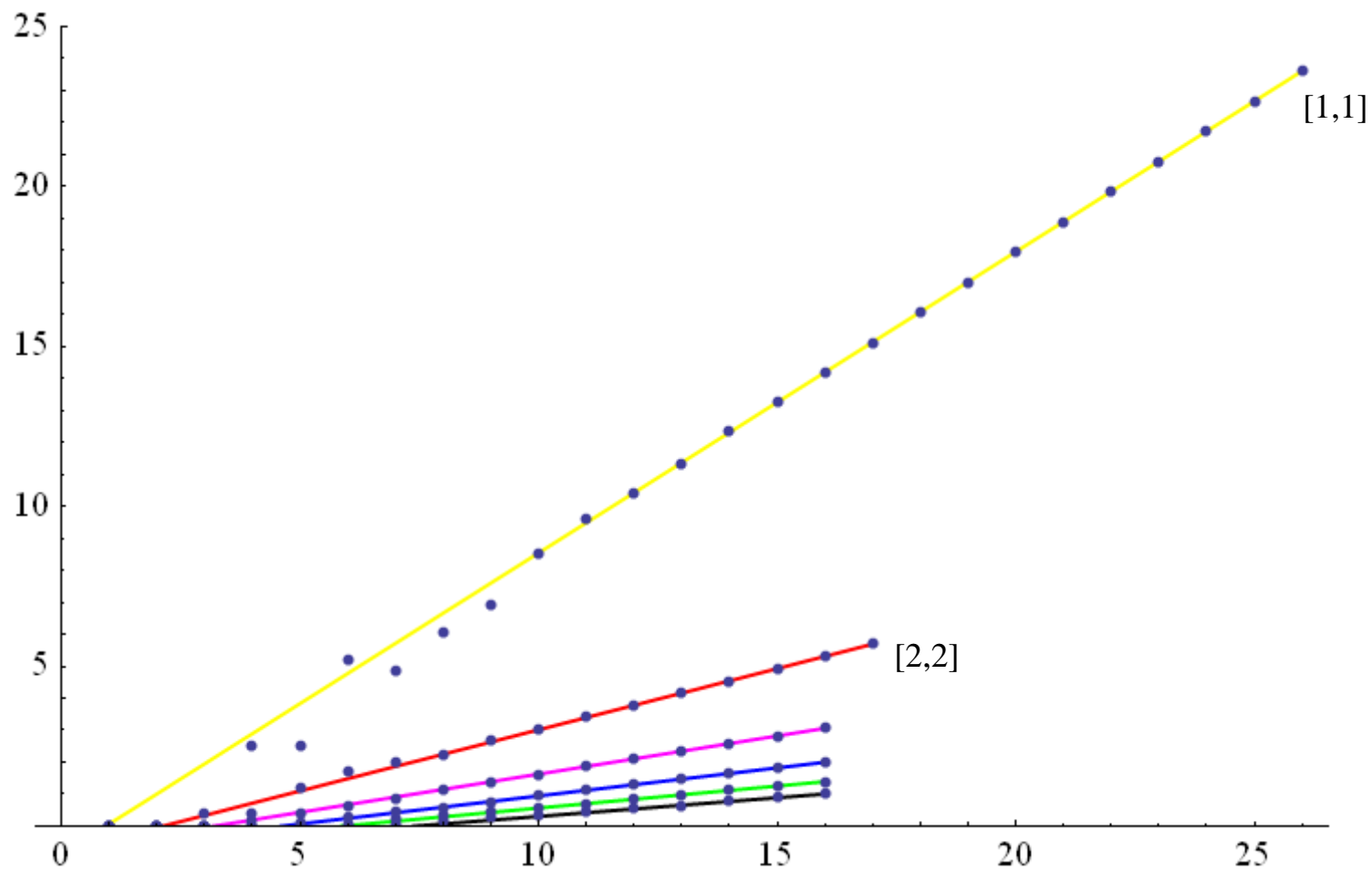
$$\log\left(\frac{n!}{a_n}\right) \sim -\log b - n * \log q$$



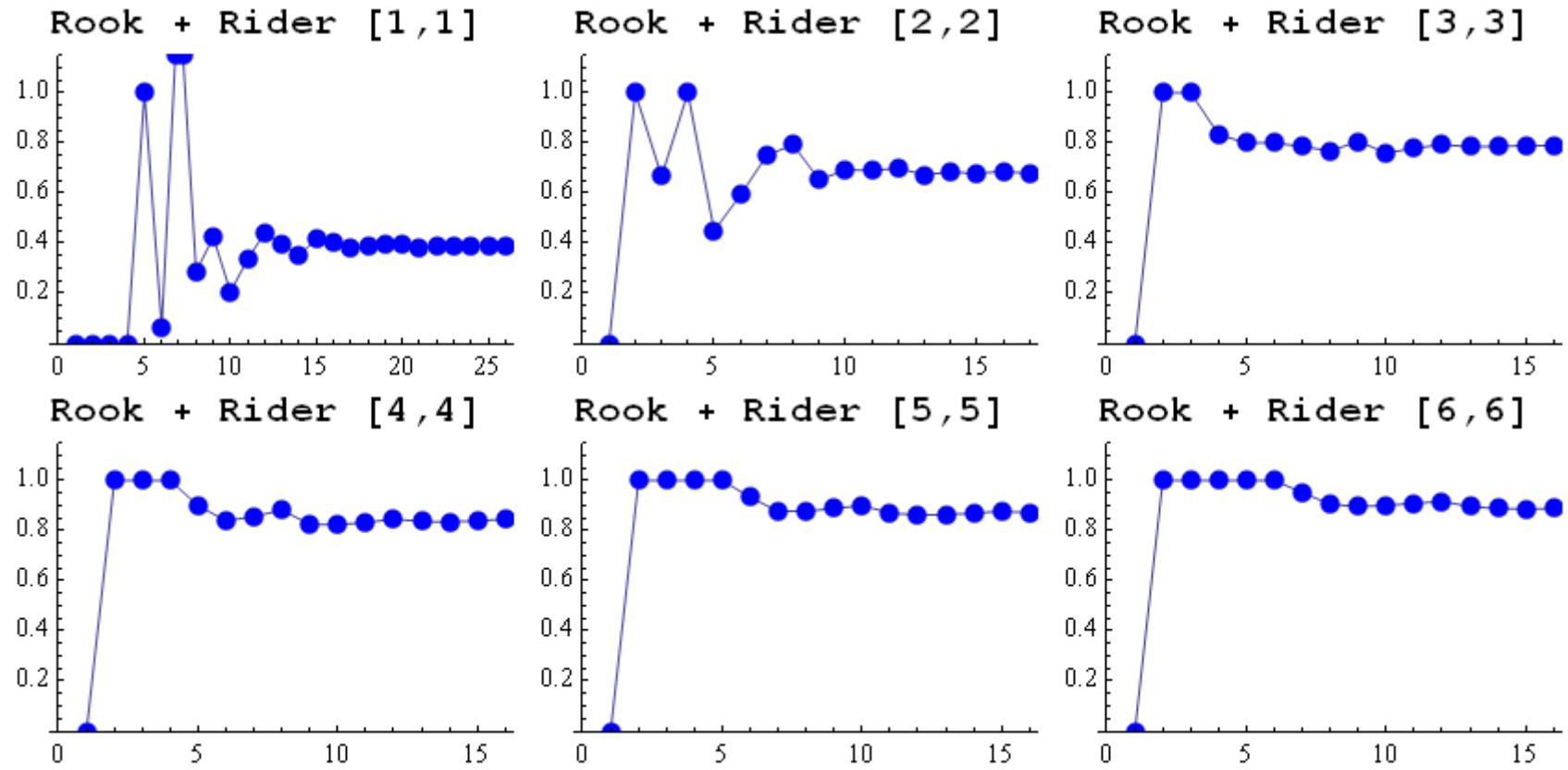
Všechny předchozí grafy pro kombinovaný kámen s pohyblivostí věže a liniového kamene s jednotkovým krokem [d,d] můžeme zobrazit i v jednom grafu. Vidíme, že úhel, který svírají jednotlivé přímky s osou x je **nepřímo úměrný** hodnotám konstant q .

Rook + Rider [d,d] ($0 < d \leq 6$)

$$\log\left(\frac{n!}{a_n}\right) \sim -\log b - n * \log q$$



$$q \sim \frac{a_n}{n a_{n-1}}$$



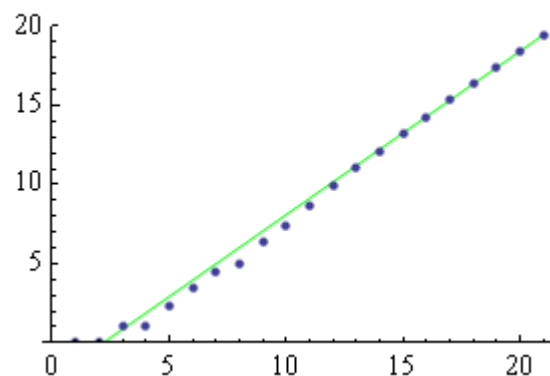
Rook + Rider [r,s] (0 < r < s) Part 1

n	Rook + Rider [1,2] A189837 (Waran)	Rook + Rider [1,3] A189850 (Rook + Camelrider)	Rook + Rider [1,4] A189851 (Rook + Girafferider)	Rook + Rider [1,5] A189852	Rook + Rider [1,6] A189853 (Rook+Flamingorider)	Rook + Rider [2,3] A189854 (Rook + Zebrarider)	Rook + Rider [2,4] A189855	Rook + Rider [2,5] A189856	Rook + Rider [2,6] A189857
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	6	6	6	6	6	6	6	6
4	8	8	24	24	24	12	24	24	24
5	12	24	48	120	120	36	60	120	120
6	22	126	182	336	720	174	208	392	720
7	58	316	868	1474	2640	500	1184	1810	2952
8	276	1344	5752	8340	13596	2052	7840	10400	16064
9	648	7782	22952	57756	87768	12112	36036	72228	104800
10	2304	33930	131766	475658	680274	65092	209664	589674	816160
11	6508	172430	912964	2812910	6090756	407882	1395480	3823906	7327728
12	24528	1106754	7556978	20852460	61678252	2954798	10996728	29420944	74031176
13	96402	6432236	52602390	181255892	482005340	20568796	83573220	266232984	621684168
14	466922	45188572	432795244	1817101242	4454053680	157579774	723835856	2711139976	5950876288
15	2271738	372437930	4121203656	20435345782	46705656280	1346294112	7132494776	30669073348	64694543120
16	13723826	2728674526	44335718598	197871434994	549750105234	11580692142	77976981216	316482938974	777746708096
17	76579326	23648822368	416447624724	?	?	110130002110	790552134804	?	?
18	512425626	233010291526	?	?	?	1145065547108	?	?	?
19	3281233020	2083328647344	?	?	?	?	?	?	?
20	24654941268	?	?	?	?	?	?	?	?
21	175398054696	?	?	?	?	?	?	?	?
22	?	?	?	?	?	?	?	?	?
b	9.48404	8.5271	4.29002	3.57298	13.7666	6.32192	4.02713	3.64365	10.4021
q	0.355448^n	0.50164^n	0.618556^n	0.69243^n	0.673535^n	0.55834^n	0.644209^n	0.711548^n	0.701029^n
n	Rook + Rider [1,2]	Rook + Rider [1,3]	Rook + Rider [1,4]	Rook + Rider [1,5]	Rook + Rider [1,6]	Rook + Rider [2,3]	Rook + Rider [2,4]	Rook + Rider [2,5]	Rook + Rider [2,6]

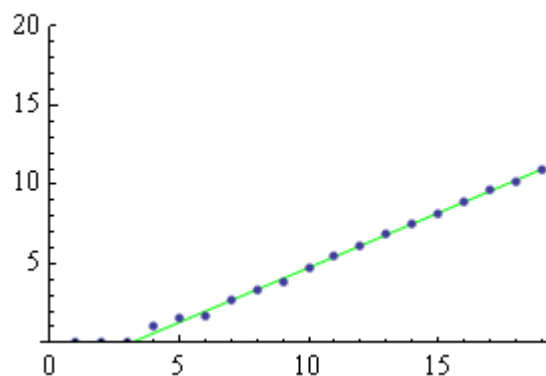
Kamenem s kombinovanou pohyblivostí věž + tátoš se zabýval už T. R. Dawson v roce 1937 a zjistil, že maximální počet neohrožujících se těchto kamenů na šachovnici $n \times n$ je n . Jak píše na své internetové stránce George Jelliss: "**Rook + Nightrider**: This problem was analysed by T. R. Dawson in Comptes rendus de la Congres International de Recreations Mathematiques 1937 (edited by M. Kraitchik), p.49, where it was presented as a problem of arranging Rooks with no two in a line of knight moves. As with Rooks the maximum is n ."

$$\log\left(\frac{n!}{a_n}\right) \sim -\log b - n * \log q$$

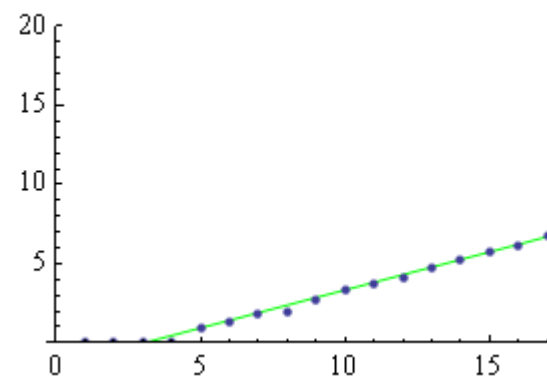
Rook + Rider [1,2]



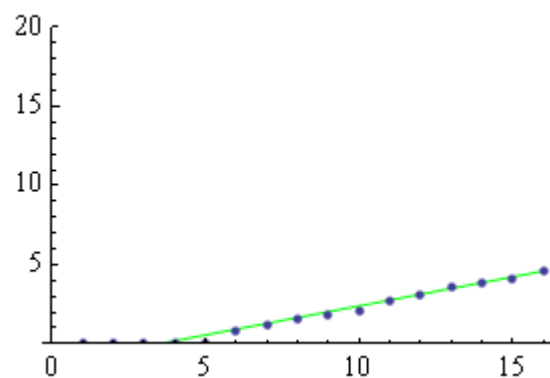
Rook + Rider [1,3]



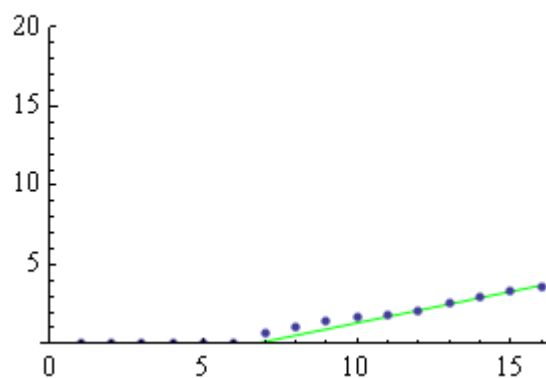
Rook + Rider [1,4]



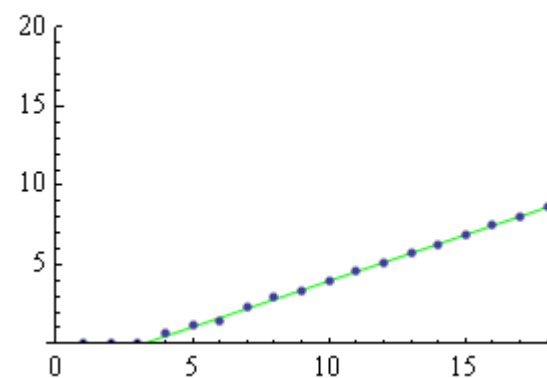
Rook + Rider [1,5]



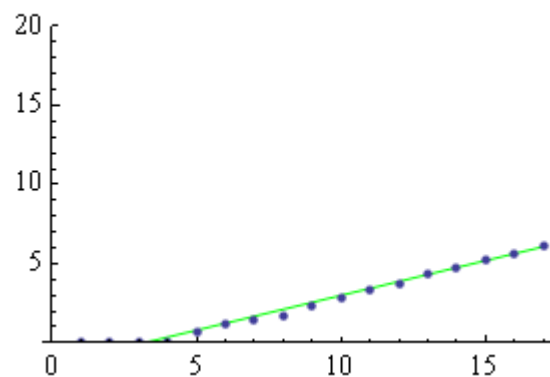
Rook + Rider [1,6]



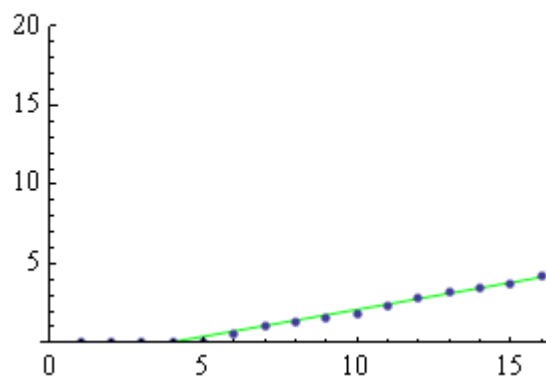
Rook + Rider [2,3]



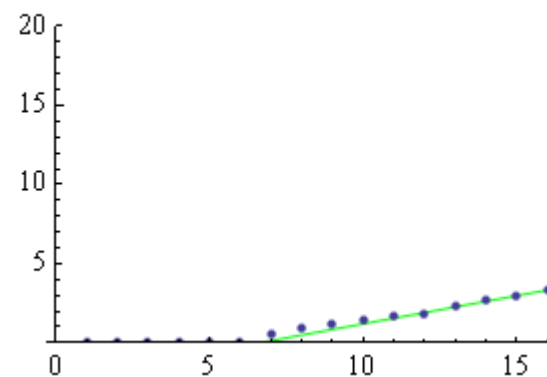
Rook + Rider [2,4]



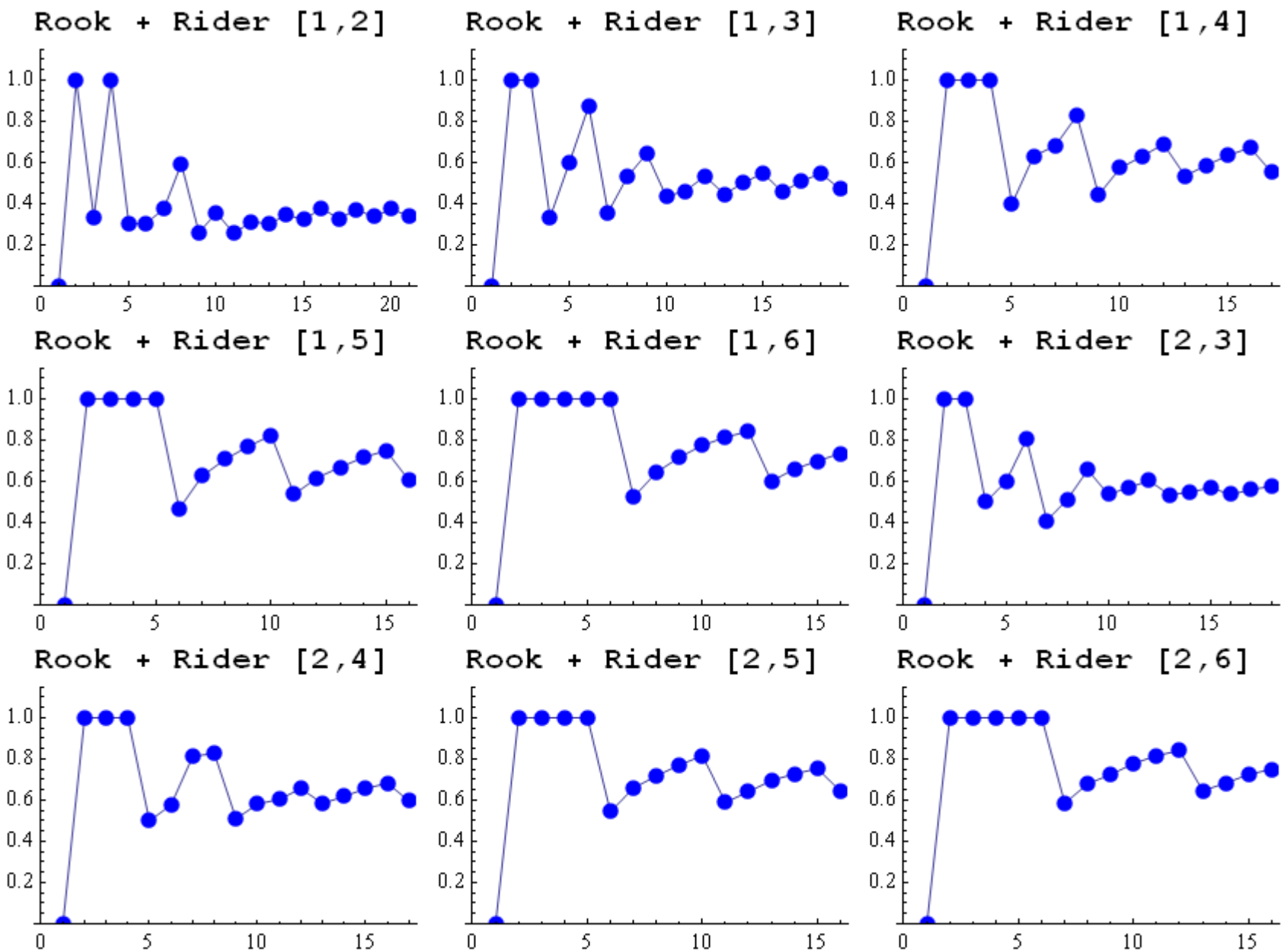
Rook + Rider [2,5]



Rook + Rider [2,6]



$$q \sim \frac{a_n}{n a_{n-1}}$$

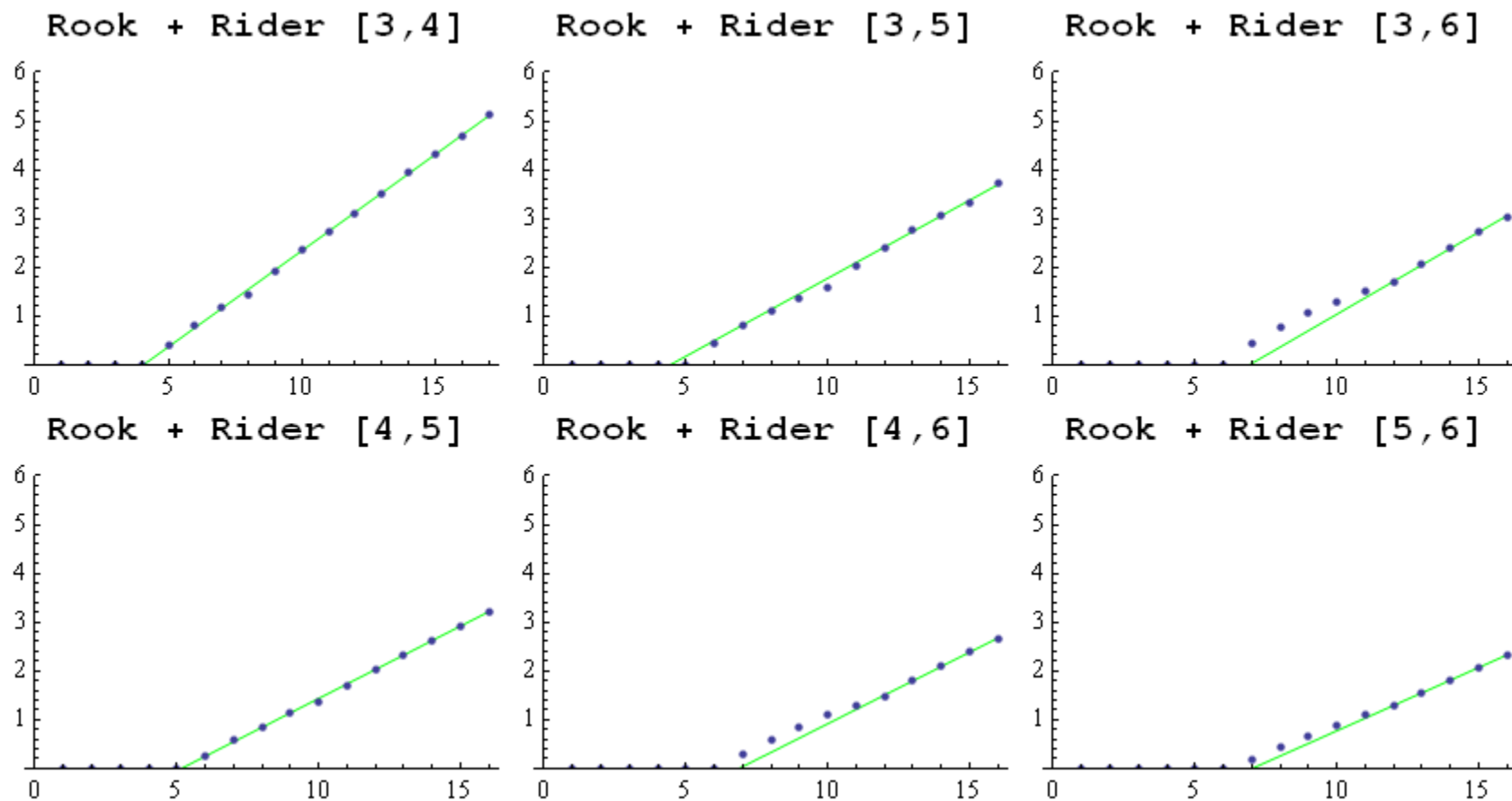


V grafech jsou zajímavé periody způsobené vztahem mezi rozměrem šachovnice a hodnotou souřadnice s .

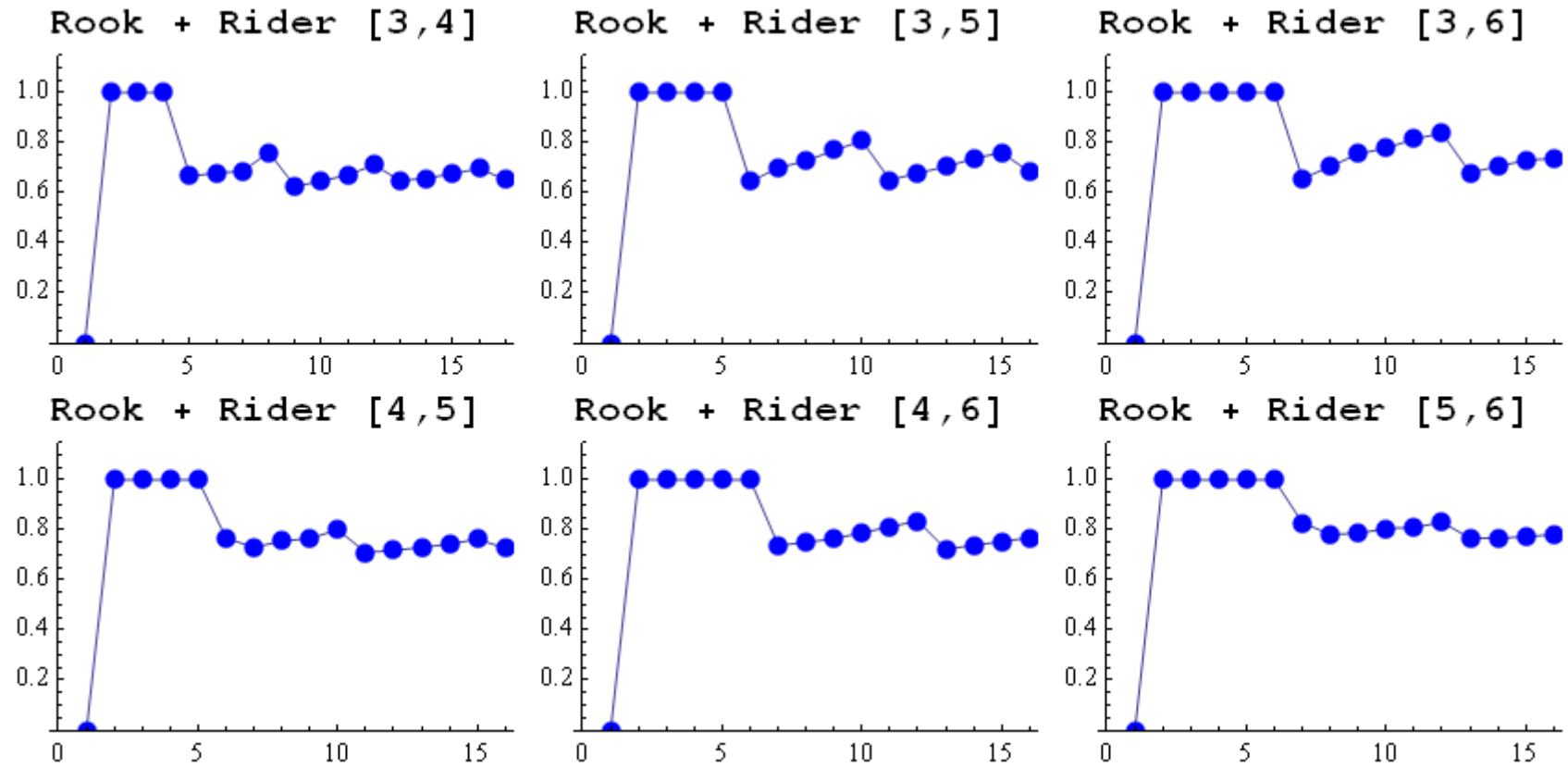
Rook + Rider [r,s] (0 < r < s) Part 2

n	Rook + Rider [3,4] A189858 (Rook + Antiloperider)	Rook + Rider [3,5] A189859	Rook + Rider [3,6] A189860	Rook + Rider [4,5] A189861	Rook + Rider [4,6] A189862	Rook + Rider [5,6] A189863
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	6	6	6	6	6	6
4	24	24	24	24	24	24
5	80	120	120	120	120	120
6	326	464	720	552	720	720
7	1566	2274	3312	2826	3720	4176
8	9544	13236	18688	17080	22336	26140
9	53696	91760	127104	117816	153796	185084
10	347382	740562	990208	943250	1213344	1491098
11	2566892	5305548	8878016	7369128	10849504	13285034
12	21907934	43237840	89267712	63533572	108891704	132514356
13	184868860	395858894	789509184	603300392	1023690268	1321161252
14	1704360992	4087066620	7803741824	6280101222	10593791168	14181339764
15	17294597926	46633569480	85447337472	71927971040	119694887008	164574628260
16	192725663600	509698057110	1008717911040	836503868762	1472935989952	2057033314380
17	2139133978996	?	?	?	?	?
18	?	?	?	?	?	?
b	4.96843	4.14912	10.2789	4.61564	7.49489	6.16692
q	0.67396^n	0.726319^n	0.714119^n	0.743449^n	0.746019^n	0.771717^n
n	Rook + Rider [3,4]	Rook + Rider [3,5]	Rook + Rider [3,6]	Rook + Rider [4,5]	Rook + Rider [4,6]	Rook + Rider [5,6]

$$\log\left(\frac{n!}{a_n}\right) \sim -\log b - n * \log q$$



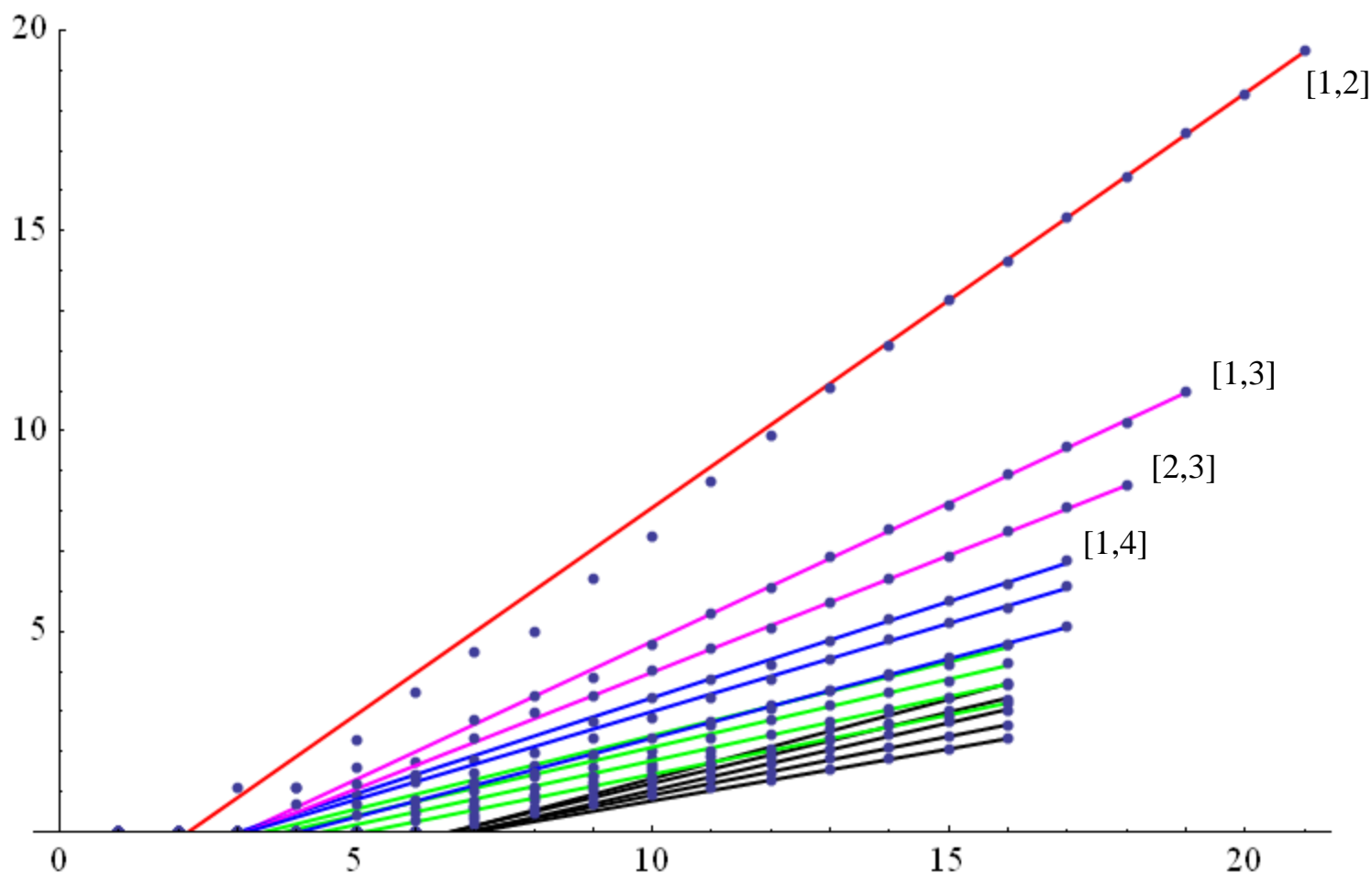
$$q \sim \frac{a_n}{n a_{n-1}}$$



15 předchozích grafů pro kombinovaný kámen s pohyblivostí věže a liniového kamene s jednotkovým krokem $[r,s]$ ($0 < r < s$) je zobrazeno v jednom grafu. **Stejnou barvou** jsou označeny vždy ty regresní přímky odpovídající stejným hodnotám s . Přímky stejné barvy nejsou (pro malá n) zcela rovnoběžné (což je patrné zejména pro fialové přímky v případě $s=3$) a hodnoty q budou proto asi závislé (kromě hodnoty s) určitým způsobem i na hodnotě r . Je však také možné, že se tato závislost bude s narůstajícím n zmenšovat a asymptotická závislost zůstane tak jen na s (na spolehlivé rozluštění této záhady máme ale stále velmi málo hodnot).

Rook + Rider $[r,s]$ ($0 < r < s \leq 6$)

$$\log\left(\frac{n!}{a_n}\right) \sim -\log b - n * \log q$$



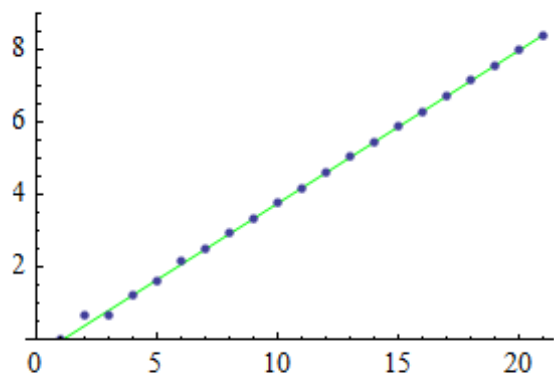
Rook + semi-Rider [d,d]

n	Rook + semi-Rider [1,1] A099152 (semi-queen)	Rook + semi-Rider [2,2] A189843 (Rook + semi-alfilrider)	Rook + semi-Rider [3,3] A189844	Rook + semi-Rider [4,4] A189846	Rook + semi-Rider [5,5] A189847	Rook + semi-Rider [6,6] A189848
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	3	5	6	6	6	6
4	7	18	22	24	24	24
5	23	71	98	114	120	120
6	83	356	534	628	696	720
7	405	2097	3334	4062	4572	4920
8	2113	14212	23724	30360	34260	37488
9	12657	105821	191820	251658	290328	319644
10	82297	887576	1704532	2308648	2751480	3033264
11	596483	8093601	16689868	23351268	28426056	31784280
12	4698655	81310936	179288892	259031232	318900264	364902480
13	40071743	876456695	2069311996	3091784268	3874868280	4509620040
14	367854835	10257217440	25760882744	39697601392	50813711808	59768680032
15	3622508685	127631146697	345073745880	546982720164	716309557440	847746532152
16	38027715185	1705775408656	4900331447624	8064677125440	10721493269568	?
17	424060091065	?	?	?	?	?
18	5006620130753	?	?	?	?	?
19	62395131973755	?	?	?	?	?
20	818456924866815	?	?	?	?	?
21	11271715349614463	?	?	?	?	?
22	?	?	?	?	?	?
b	1.55013	1.52878	1.51902	1.49596	1.4523	1.41182
q	0.65588^n	0.832528^n	0.889743^n	0.918639^n	0.936971^n	0.949652^n
n	Rook + semi-Rider [1,1]	Rook + semi-Rider [2,2]	Rook + semi-Rider [3,3]	Rook + semi-Rider [4,4]	Rook + semi-Rider [5,5]	Rook + semi-Rider [6,6]

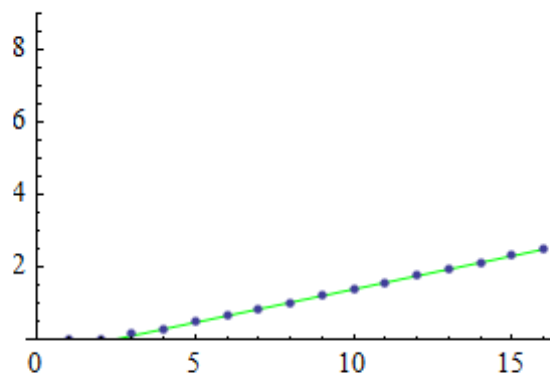
Nové hodnoty pro semi-queen, n=19-21 vypočetl [Wolfram Schubert](#), 27.5.2011 a 26.2.2012

$$\log\left(\frac{n!}{a_n}\right) \sim -\log b - n * \log q$$

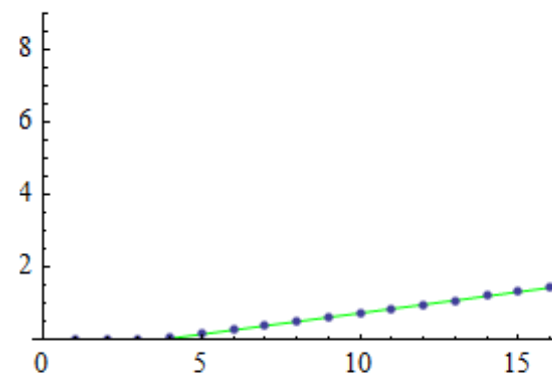
Rook + semi-Rider [1,1]



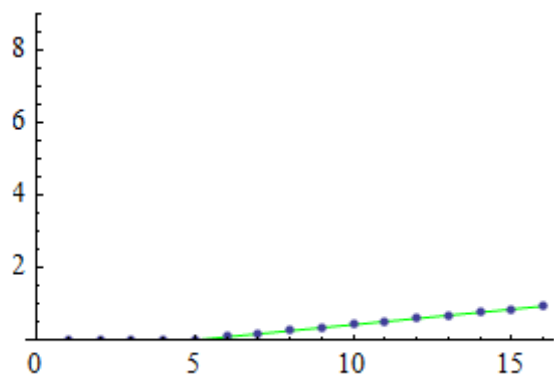
Rook + semi-Rider [2,2]



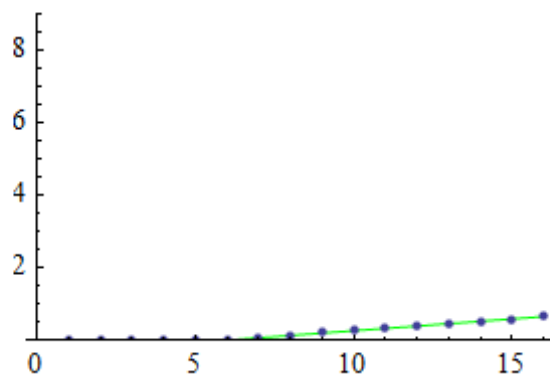
Rook + semi-Rider [3,3]



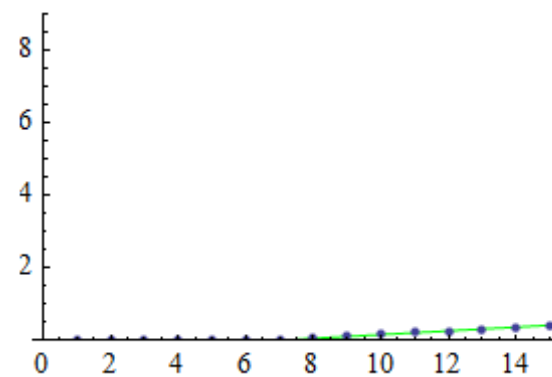
Rook + semi-Rider [4,4]



Rook + semi-Rider [5,5]



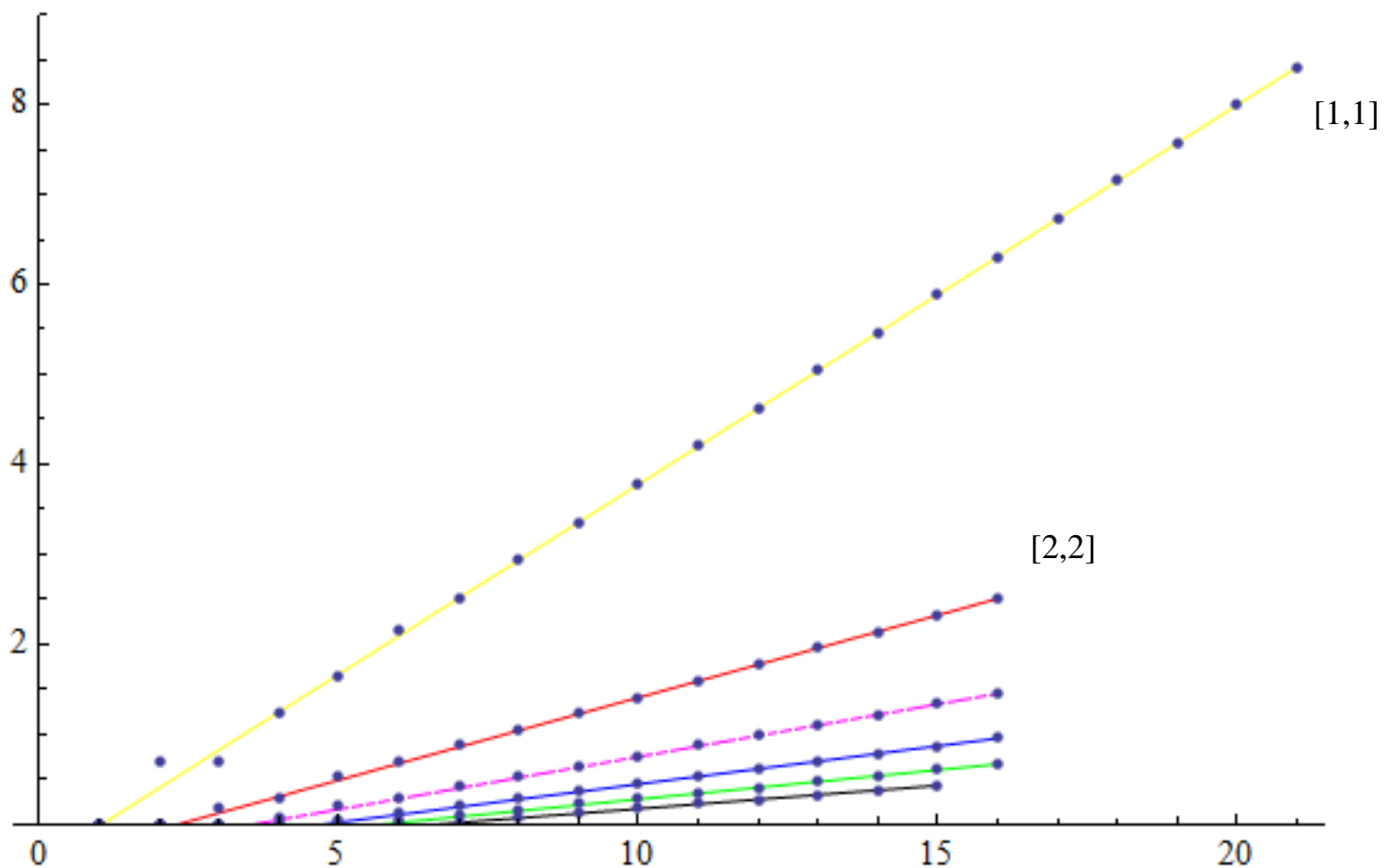
Rook + semi-Rider [6,6]



Předchozích 6 grafů pro kombinovaný kámen s pohyblivostí věže a liniového kamene s jednotkovým krokem [d,d] (který se může pohybovat v obou směrech jen po diagonálách, které vedou z levého dolního rohu do pravého horního rohu) můžeme zobrazit i v jednom grafu. Vidíme, že úhel, který svírají jednotlivé přímky s osou x je **nepřímo úměrný** hodnotám konstant q .

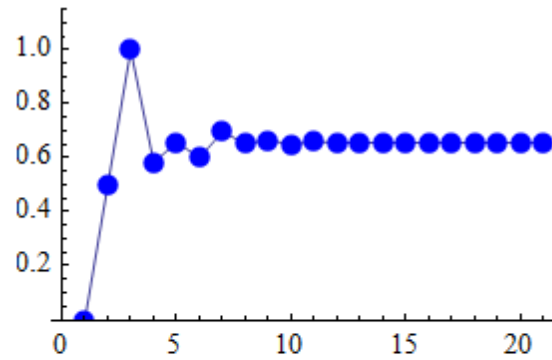
Rook + semi-Rider [d,d] ($0 < d \leq 6$)

$$\log\left(\frac{n!}{a_n}\right) \sim -\log b - n * \log q$$

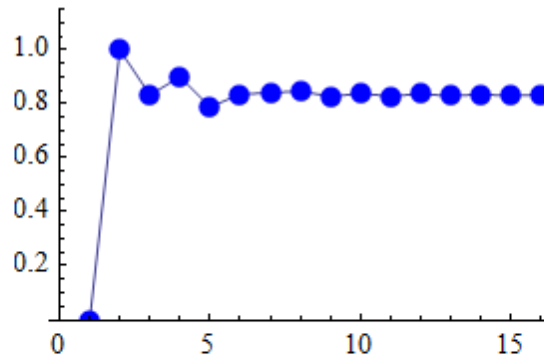


$$q \sim \frac{a_n}{n a_{n-1}}$$

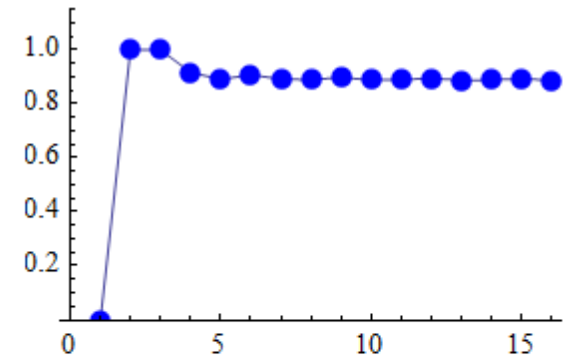
Rook + semi-Rider [1,1]



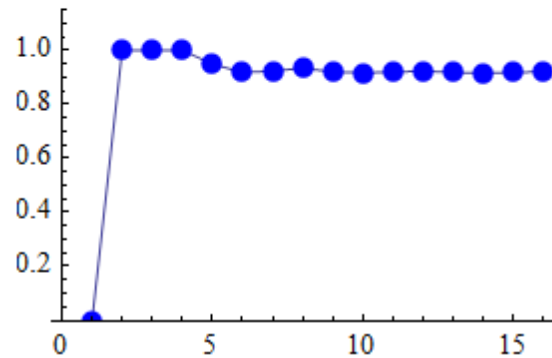
Rook + semi-Rider [2,2]



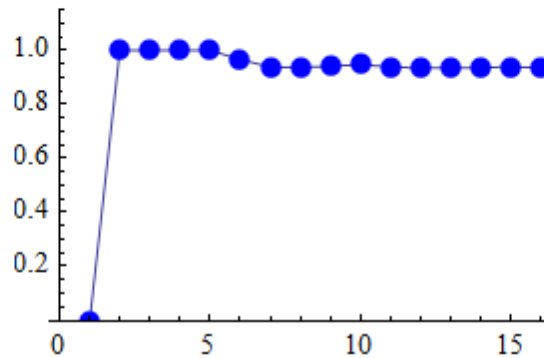
Rook + semi-Rider [3,3]



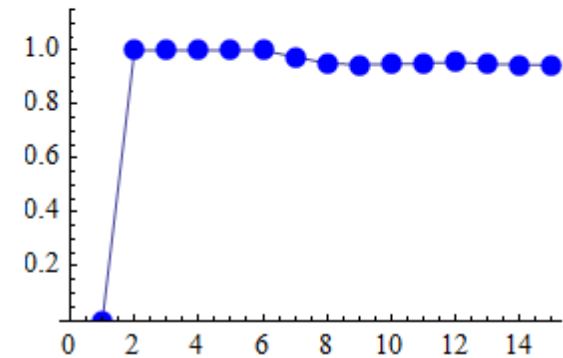
Rook + semi-Rider [4,4]



Rook + semi-Rider [5,5]

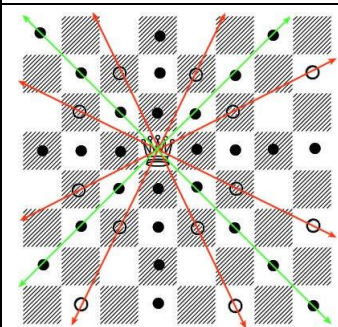


Rook + semi-Rider [6,6]



12.4) n pieces queen+rider[r,s] on an $n \times n$ chessboard - n kamenů dáma+liniový kámen[r,s] na šachovnici $n \times n$

V souladu s výsledky pro kombinované kameny věž + liniový kámen [r,s] (viz kap. 12.2) dostáváme pro dámu

typ kamene (kombinovaného s věží)	počet linií	počet polí interferujících s jinými permutacemi (na všech liniích)	násobící pravděpodobnostní faktor	příklad
<i>piece</i> (composite with rook)	<i>number of lines</i> <i>of riders</i>	<i>number of squares</i> <i>on all lines of riders</i>	<i>probability factor</i> (for n going to infinity)	<i>example</i>
Bishop + Rider [r,s] ($0 < r < s$)	2+4	$2n + \frac{4n}{s}$	$e^{-n} e^{-\frac{2n}{s}}$	 queen+nightrider $r=1, s=2$

Kombinovaný kámen s pohyblivostí věže, střelce a liniového kamene s jednotkovým tahem [r,s] ($0 < r < s$) se může pohybovat celkem na 8 různých liniích. Z toho 2 věžové linie jsou zahrnuty v permutacích, na každé střelcové linii je mu dostupných přibližně n polí a na každé linii ridera přibližně n/s polí. Přesnější odhad závislosti také na hodnotě r (tak jako v kapitole 12.3), je už vzhledem k velkému počtu vzájemně se křížících linií příliš komplikovaný (viz též 3D graf na další straně).

Asymptotický průběh

$$a_n \sim b * q^n * n!$$

Hypotéza: Konstanta q je násobkem konstanty pro dámu a konstanty q pro kombinovaný kámen věž+liniový kámen [r,s].

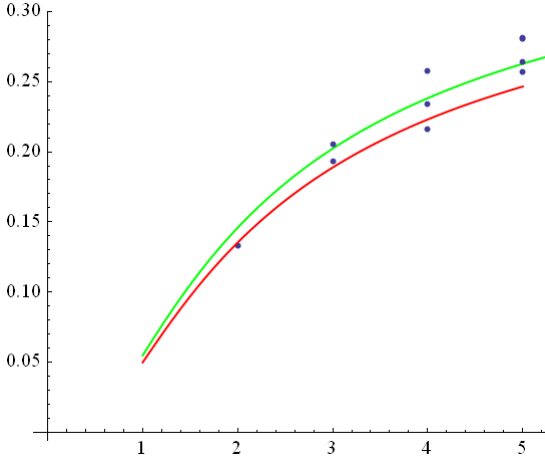
Conjecture:

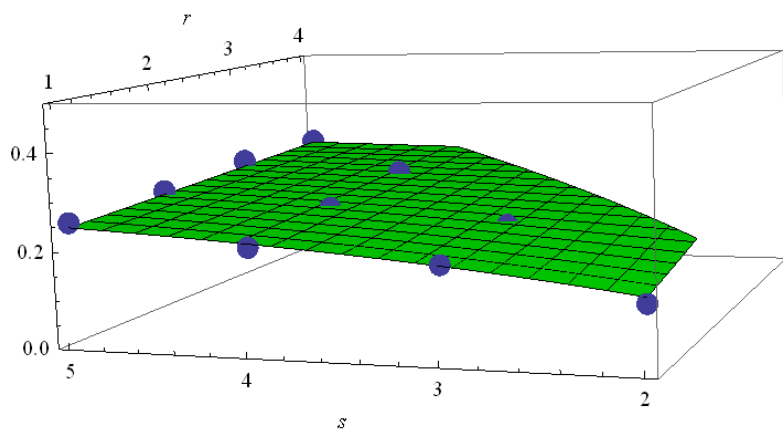
$$q_{Q,r,s} = q_{\text{queen}} * q_{\text{rook+rider [r,s]}}$$

Tento vztah vyhovuje i zřejmému

$$\lim_{s \rightarrow \infty} q_{Q,r,s} = q_{queen} = 0.389068 \dots$$

Asymptotické odhady pro konstanty q

kombinované kameny <i>composite pieces</i>	odhad <i>estimate</i>	numerický výpočet <i>numerical results</i>	Regression
Queen + Rider [r,s] (0 < r < s)	$q_{Q,r,s} \sim \frac{1}{e^{1+\frac{2}{s}}}$	$q_{Q,r,s} \sim 0.389 e^{-1.96/s}$	



Dvojměrná regrese pro proměnné r a s dává výsledek

$$q_{Q,r,s} \sim 0.389 * e^{-\frac{1}{s} (2.46 - 0.99 * \frac{r}{s})}$$

Výsledek (proložení plochy metodou nejmenších čtverců) zobrazuje graf. Vidíme závislost na s , ale závislost na r je na hranici statistické chyby a nelze ji věrohodně určit.

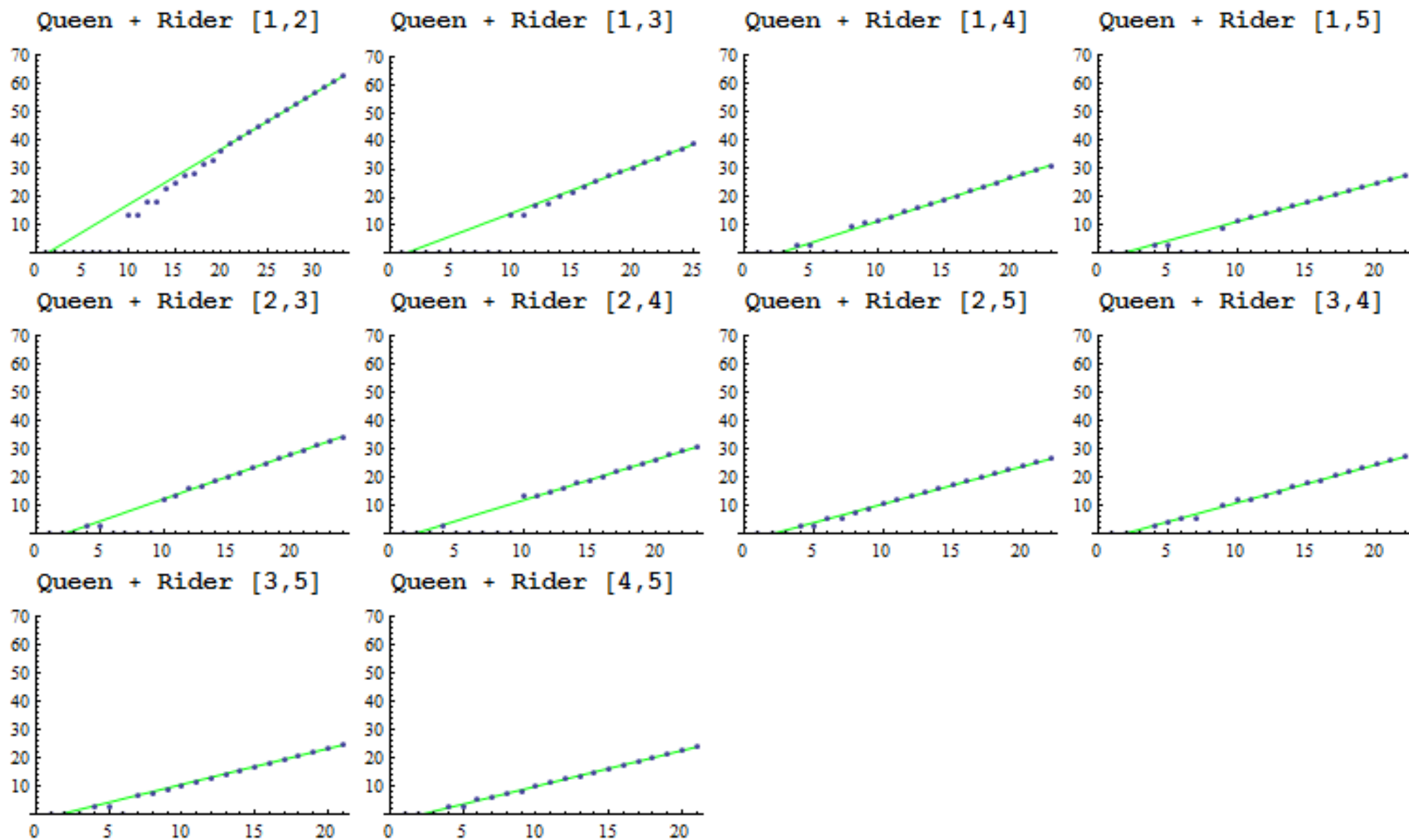
(least squares method used for this graph)

Queen + Rider [r,s] (0 < r < s)

n	Queen + Rider [1,2] A102388 (Elefant)	Queen + Rider [1,3] A189873 (Queen + Camelrider)	Queen + Rider [1,4] A189874 (Queen + Girafferider)	Queen + Rider [1,5] A189875	Queen + Rider [2,3] A189876 (Queen + Zebrarider)	Queen + Rider [2,4] A189877	Queen + Rider [2,5] A189878	Queen + Rider [3,4] A189879 (Queen + Antiloperider)	Queen + Rider [3,5] A189880	Queen + Rider [4,5] A189881
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2
5	0	0	10	10	10	0	10	2	10	10
6	0	0	0	0	0	0	4	4	0	4
7	0	0	0	0	0	0	28	28	8	12
8	0	0	4	0	0	0	20	0	24	32
9	0	0	8	40	0	0	56	20	72	96
10	4	4	28	52	16	4	72	20	116	144
11	44	56	100	152	60	56	200	180	336	528
12	6	18	186	260	40	172	644	520	1124	1712
13	78	116	624	1192	304	680	2940	1888	4056	7472
14	8	112	1720	4144	620	1348	9152	6016	12628	24500
15	16	408	7288	18408	2512	6576	39200	22480	58984	103536
16	18	916	30666	71552	8734	34568	166100	105236	263066	486020
17	234	2400	100220	312936	28410	107624	739924	433500	1124116	2218808
18	124	7228	360208	1498156	94312	413760	3586840	1933604	5388972	11113020
19	468	27368	1517804	7854672	345824	1697288	18640500	9687268	29219680	59242576
20	516	111478	7302336	44923706	1391072	8035558	107580592	50998366	173696136	342584556
21	882	445644	29429672	213840604	5759566	37441416	547737844	269523272	967249940	1981826412
22	2092	1674860	139854636	1156549592	25227796	192483420	3080550788	1507984008	?	?
23	7068	7624368	753288744	?	121663032	1115143224	?	?	?	?
24	22794	38737270	?	?	635977968	?	?	?	?	?
25	85456	178933064	?	?	?	?	?	?	?	?
26	275732	?	?	?	?	?	?	?	?	?
27	974048	?	?	?	?	?	?	?	?	?
28	3698242	?	?	?	?	?	?	?	?	?
29	14120996	?	?	?	?	?	?	?	?	?
30	59531852	?	?	?	?	?	?	?	?	?
31	252272512	?	?	?	?	?	?	?	?	?
32	1163430462	?	?	?	?	?	?	?	?	?
33	5229335374	?	?	?	?	?	?	?	?	?
34	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
b	10.1517	7.91912	54.2874	10.4664	30.7572	13.1742	14.5142	11.9614	7.39265	14.0784
q	0.13955^n	0.19342^n	0.216484^n	0.256926^n	0.205477^n	0.234158^n	0.264475^n	0.258009^n	0.280763^n	0.281611^n
n	Queen + Rider [1,2]	Queen + Rider [1,3]	Queen + Rider [1,4]	Queen + Rider [1,5]	Queen + Rider [2,3]	Queen + Rider [2,4]	Queen + Rider [2,5]	Queen + Rider [3,4]	Queen + Rider [3,5]	Queen + Rider [4,5]

Hodnoty pro kámen Elephant, n=29 až n=33 vypočetl *Wolfram Schubert*, 24.7.2011 a 27.5.2012 (n=33)

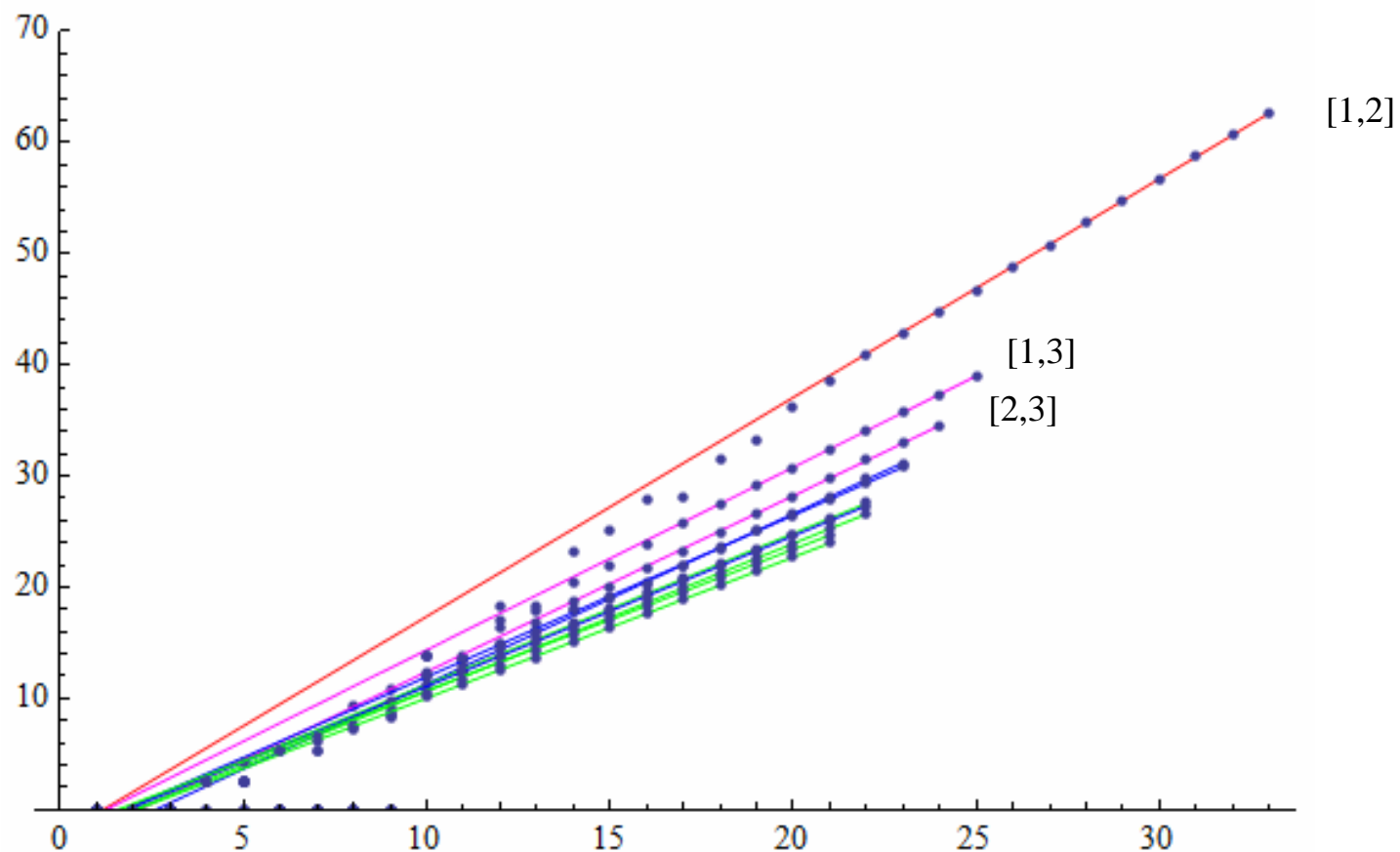
$$\log\left(\frac{n!}{a_n}\right) \sim -\log b - n * \log q$$



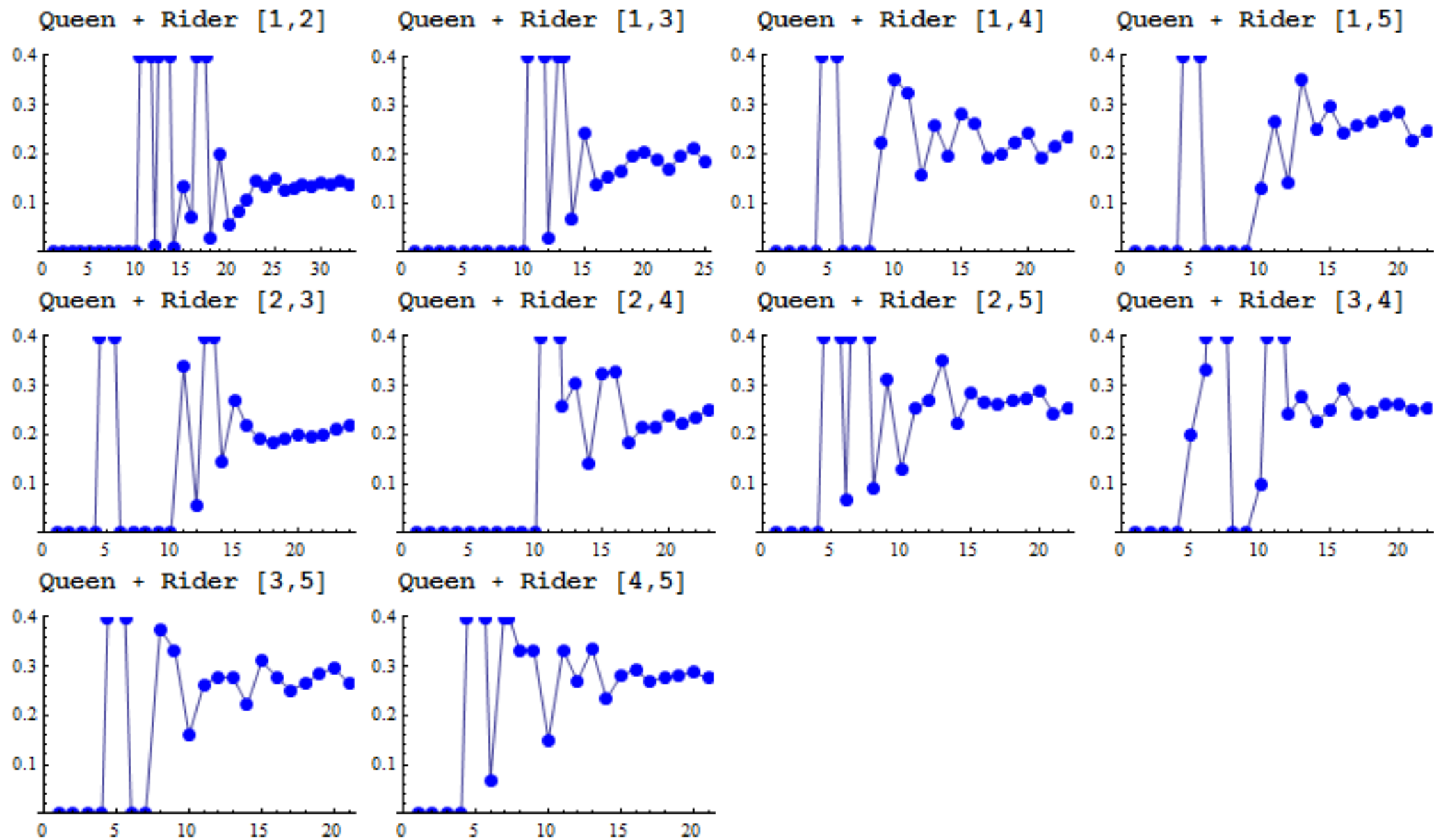
10 předchozích grafů pro kombinovaný kámen s pohyblivostí dámy a liniového kamene s jednotkovým krokem $[r,s]$ ($0 < r < s$) můžeme zobrazit v jednom grafu.
 V grafech jsou **stejnou barvou** označeny vždy ty regresní přímky odpovídající stejným hodnotám s .

Queen + Rider $[r,s]$ ($0 < r < s \leq 5$)

$$\log\left(\frac{n!}{a_n}\right) \sim -\log b - n * \log q$$



$$q \sim \frac{a_n}{n a_{n-1}}$$



13) Comparison of general formulas - Porovnání obecných vzorců

Queens - board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 5/3 * n^{2k-1}/(k-2)! + 1/36 * n^{2k-2} * (25k+4) * (2k-3)/(k-2)! - \dots$	Queens - board $k \times n$	$n^k - 3k(k-1)/2 * n^{k-1} + (9k^4/8 - 29k^3/12 - k^2/8 + 23k/12 - 1/4 + (-1)^k/4) * n^{k-2} - \dots$
Queens - toroidal board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 2 * n^{2k-1}/(k-2)! + (24k^2 - 32k - 11 + 3 * (-1)^n) * n^{2k-2}/12/(k-2)! - \dots$		
Kings - board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 9n^{2k-2}/2/(k-2)! + 6n^{2k-3}/(k-2)! + (243k^2 - 439k - 142) * n^{2k-4}/24/(k-2)! - \dots$	Kings - board $k \times n$	$(kn)^k/k! - 3(k-1)(3k-2)(kn)^{k-1}/2/k! + \dots$ or $(kn)^k/k! - \text{COMB}(3k-2,2)(kn)^{k-1}/k! + \dots$
Kings - cylindrical board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 9/2 * n^{2k-2}/(k-2)! + 3n^{2k-3}/(k-2)! + (243k+47) * n^{2k-4}/24/(k-3)! + \dots$		
Kings - toroidal board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 9/2 * n^{2k-2}/(k-2)! + (243k+47) * n^{2k-4}/24/(k-3)! - (243k^2 + 141k + 80) * n^{2k-6}/16/(k-4)! + (98415k^3 + 114210k^2 + 140645k + 101762) * n^{2k-8}/5760/(k-5)! - \dots$		
Rooks - board $n \times n$	$n^{2k}/k! + n^{2k-1} * (-1)^1/k!/1! * k(k-1) + n^{2k-2} * (-1)^2/k!/2! * k(k-1)(3k^2 - 5k + 1)/3 + n^{2k-3} * (-1)^3/k!/3! * k^2(k-1)^3(k-2) + \dots$	Rooks - board $k \times n$	$n^k + n^{k-1} * (-1)^1 * \text{COMB}(k,2)/2! * 2 + n^{k-2} * (-1)^2 * \text{COMB}(k,3)/2^2 * (3k-1) + n^{k-3} * (-1)^3 * \text{COMB}(k,4)/2^3 * 4k(k-1) + \dots$
Bishops - board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 2n^{2k-1}/3/(k-2)! + (8k^2 - 13k + 12) * n^{2k-2}/36/(k-2)! - \dots$	Bishops - board $k \times n$	$(kn)^k/k! - (kn)^{k-1}(2k-1)/2/(k-2)! + \dots$ or $(kn)^k/k! - (kn)^{k-1} * \text{COMB}(2k-1,2)/2/(k-1)! + \dots$
Bishops - toroidal board $n \times n$	$n^{2k}/k! - n^{2k-1}/(k-2)! + (6k^2 - 10k + 5 + 3 * (-1)^n) * n^{2k-2}/12/(k-2)! - \dots$		
Knights - board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 9n^{2k-2}/2/(k-2)! + 12n^{2k-3}/(k-2)! + (243k^2 - 343k - 478) * n^{2k-4}/24/(k-2)! - \dots$	Knights - board $k \times n$	$(kn)^k/k! - 3(k-1)(3k-4)(kn)^{k-1}/k!/2 + \dots$ or $(kn)^k/k! - \text{COMB}(3k-3,2) * (kn)^{k-1}/k! + \dots$
Knights - cylindrical board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 9n^{2k-2}/2/(k-2)! + 6n^{2k-3}/(k-2)! + \dots$		
Knights - toroidal board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 9n^{2k-2}/2/(k-2)! + (243k+143) * n^{2k-4}/24/(k-3)! - \dots$		
Nightriders - board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 5/6 * n^{2k-1}/(k-2)! + \dots$	Nightriders - board $k \times n$	$(kn)^k/k! - \dots$
Nightriders - toroidal board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 2 * n^{2k-1}/(k-2)! + \dots$		
Amazons - board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 5/3 * n^{2k-1}/(k-2)! + (50k^2 - 67k - 156)/36 * n^{2k-2}/(k-2)! - \dots$	Amazons - board $k \times n$	$n^k - (k+3)(3k-4)n^{k-1}/2 + \dots$
Amazons - toroidal board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 2 * n^{2k-1}/(k-2)! + (24k^2 - 32k - 59 + 3 * (-1)^n) * n^{2k-2}/12/(k-2)! - \dots$		
Zebras - board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 9n^{2k-2}/2/(k-2)! + 20n^{2k-3}/(k-2)! + (243k^2 - 343k - 862)n^{2k-4}/24/(k-2)! - \dots$	Zebras - board $k \times n$	$(kn)^k/k! - (k-1)(9k-20)(kn)^{k-1}/2/k! + \dots$
Zebras - toroidal board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 9/2 * n^{2k-2}/(k-2)! + (243k+143) * n^{2k-4}/24/(k-3)! - \dots$		
Wazirs - board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 5n^{2k-2}/2/(k-2)! + 2n^{2k-3}/(k-2)! + (75k+23) * n^{2k-4}/24/(k-3)! - \dots$	Wazirs - board $k \times n$	$(kn)^k/k! - (k-1)(5k-2) * (kn)^{k-1}/2/k! + \dots$
Wazirs - toroidal board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 5n^{2k-2}/2/(k-2)! + (75k+23) * n^{2k-4}/24/(k-3)! + \dots$		
Ferses - board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 5n^{2k-2}/2/(k-2)! + 4n^{2k-3}/(k-2)! + (75k^2 - 127k - 94) * n^{2k-4}/24/(k-2)! - \dots$	Ferses - board $k \times n$	$(kn)^k/k! - (k-1)(5k-4) * (kn)^{k-1}/2/k! + \dots$
Ferses - toroidal board $n \times n$	$n^{2k}/k! - 5n^{2k-2}/2/(k-2)! + (75k+23) * n^{2k-4}/24/(k-3)! + \dots$		
Grasshoppers - board $n \times n$	$n^{2k}/k! - n^{2k-2}/2/(k-2)! - 10n^{2k-3}/3/(k-3)! + (39k+275) * n^{2k-4}/24/(k-3)! - \dots$		
Grasshoppers - toroidal board $n \times n$	$n^{2k}/k! - n^{2k-2}/2/(k-2)! - 4n^{2k-3}/(k-3)! + (51k+143) * n^{2k-4}/24/(k-3)! - \dots$		
all combinations = $\binom{n^2}{k}$	$n^{2k}/k! - n^{2k-2}/k! * \text{COMB}(k,2) + n^{2k-4}/k! * \text{COMB}(k,3) * (3k-1)/4 - n^{2k-6}/k! * \text{COMB}(k,4) * k(k-1)/2 + \dots$	all combinations = $\binom{nk}{k}$	$(kn)^k/k! - (kn)^{k-1}/k! * \text{COMB}(k,2) + (kn)^{k-2}/k! * \text{COMB}(k,3) * (3k-1)/4 - (kn)^{k-3}/k! * \text{COMB}(k,4) * k(k-1)/2 + \dots$

chessboard n x n	$n^{2k} / k!$	$+ n^{2k-1} k(k-1) / k!$	$+ n^{2k-2} \binom{k}{2} / k!$	$+ n^{2k-3} k(k-1) / k!$	$+ n^{2k-4} \binom{k}{3} / 4 / k!$
Queens	1	- 5/3	$(25k+4)(2k-3)/18$		
Queens (toroidal)	1	- 2	$(24k^2-32k-11+3(-1)^n)/6$	0	
Kings	1	0	- 9	6	$(243k^2-439k-142)/(k-2)$
Kings (toroidal)	1	0	- 9	0	243k+47
Rooks	1	- 1	$(3k^2-5k+1)/3$	$- k(k-1)^2(k-2)/6$	$(15k^5-75k^4+125k^3-81k^2+7k+3)/15$
Bishops	1	- 2/3	$(8k^2-13k+12)/18$	$-(40k^4-155k^3+329k^2-220k-6)/810$	$(320k^5-1520k^4+4663k^3-3076k^2+4941k-15840)/1620$
Bishops (toroidal)	1	- 1	$(6k^2-10k+5+3(-1)^n)/6$	$-(k-2)(2k^3-4k^2+5k+3)/12$ $-(k+1)(k-2)*(-1)^n/4$	$(30k^5-150k^4+340k^3-222k^2-151k-669)/30$ $+ (6k^3-4k^2-11k-45)*(-1)^n/2$
Knights	1	0	- 9	12	$(243k^2-343k-478)/(k-2)$
Knights (cylindrical)	1	0	- 9	6	
Knights (toroidal)	1	0	- 9	0	243k+143
Nightriders	1	- 5/6			
Nightriders (toroidal)	1	- 2			
Amazons	1	- 5/3	$(50k^2-67k-156)/18$		
Amazons (toroidal)	1	- 2	$(24k^2-32k-59+3(-1)^n)/6$		
Zebras	1	0	- 9	20	$(243k^2-343k-862)/(k-2)$
Zebras (toroidal)	1	0	- 9	0	243k+143
Wazirs	1	0	- 5	2	75k+23
Wazirs (toroidal)	1	0	- 5	0	75k+23
Ferses	1	0	- 5	4	$(75k^2-127k-94)/(k-2)$
Ferses (toroidal)	1	0	- 5	0	75k+23
Grasshoppers	1	0	- 1	$- 10(k-2)/3$	39k+275
Grasshoppers (toroidal)	1	0	- 1	$- 4(k-2)$	51k+143
all combinations $\binom{n^2}{k}$	1	0	- 1	0	3k-1

For k non-attacking leapers $[r,s]$ (with access to m squares) on an $n \times n$ chessboard is general formula (see chapter 13.1 for more):

$$\frac{n^{2k}}{k!} * \left(1 - \frac{(m+1)(k-1)k}{2n^2} + \frac{m(r+s)(k-1)k}{2n^3} + \frac{(m+1)^2 ((k-1)^2 k^2 + O(k^3))}{8n^4} + \dots \right)$$

chessboard k x n	n^k	$- n^{k-1} / 2$	$+ n^{k-2} / 2^2$	$- n^{k-3} / 2^3$	$+ n^{k-4} / 2^4$
Queens	1	$3k(k-1)$	$9k^4/2 - 29k^3/3 - k^2/2 + 23k/3 - 1 + (-1)^k$		
Rooks	1	$k(k-1)$	$\binom{k}{3} (3k-1)$	$\binom{k}{4} 4k(k-1)$	$\binom{k}{5} (15k^3 - 30k^2 + 5k + 2) / 3$
Amazons	1	$(k+3)(3k-4)$			

chessboard k x n	$n^k k^k / k!$	$- n^{k-1} k^{k-1} \binom{k}{2} / k!$	$+ n^{k-2} k^{k-2} \binom{k}{3} / k!$	$- n^{k-3} k^{k-3} \binom{k}{4} / k!$	$+ n^{k-4} k^{k-4} \binom{k}{5} / k!$
Kings	1	$(9k-6)/k$			
Bishops	1	$2k-1$			
Knights	1	$(9k-12)/k$			
Nightriders	1				
Zebras	1	$(9k-20)/k$			
Wazirs	1	$(5k-2)/k$			
Ferses	1	$(5k-4)/k$			
all combinations $\binom{nk}{k}$	1	1	$(3k-1)/4$	$k(k-1)/2$	$(15k^3 - 30k^2 + 5k + 2)/48$

13.1) General asymptotic formulas (Leapers) - Obecné asymptotické vzorce (skokani)

Theorem (V. Kotěšovec, 29.11.2011):

Number of ways to place k non-attacking **leapers** $[r,s]$ on an $n \times n$ chessboard, $0 < r \leq s$, $k \leq O(n)$, is asymptotic ($n \rightarrow \infty$):

$$\frac{n^{2k}}{k!} * e^{-\frac{(m+1)*k(k-1)}{2*n^2}}$$

where m is number of accessible squares for one leaper

For semi-leapers $[r,s]$, $m=2$

For leapers $[r,s]$, $0 < r = s$, $m=4$ (for example Wazir, Fers)

For leapers $[r,s]$, $0 < r < s$, $m=8$ (for example Knight, Zebra and also King)

Důkaz (proof). Máme-li rozmístit k skokanů na šachovnici $n \times n$, jde první kámen umístit na n^2 polí. Napadá-li tento kámen m polí (a sám jedno zabírá), můžeme druhý kámen umístit minimálně na n^2-1-m polí, třetí kámen minimálně na n^2-2-2m polí, atd. Při asymptotickém zkoumání můžeme zanedbat možné kolize napadení jednoho pole dvěma nebo více kameny (toto můžeme udělat jen v případě *leapers*, nikoliv však v případě *riders*, kdy tento vliv už není zanedbatelný, viz též str. 624). Přesněji, pokud je na šachovnici $n \times n$ již umístěno j skokanů, kryjí přibližně $j*m$ z n^2 polí. Přidáme-li dalšího, je pravděpodobnost dvojnásobného krytí nějakého pole přibližně: *Probability that at least one square is under attack by two leapers (such events can be ignored if we are only interested in the asymptotic behavior):*

$$p \sim m * \frac{j * m}{n^2} \sim j * m^2 * O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

minimal free squares for	
1. leaper	n^2
2. leaper	$n^2 - 1 - m$
3. leaper	$n^2 - 2 - 2m$
4. leaper	$n^2 - 3 - 3m$

Celkový počet neidentických rozmístění k skokanů je potom **asymptoticky**

$$\frac{1}{k!} * \prod_{j=0}^{k-1} \left(n^2 - j * (m + 1) + j * m^2 * O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{n^{2k}}{k!} * \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j * (m + 1)}{n^2} + j * m^2 * O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)$$

Úpravu součinu provedeme jeho zlogaritmováním a využitím [Taylorova rozvoje](#) rozvoje $\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ v nule

$$\begin{aligned} \log \left(\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j * (m + 1)}{n^2} + j * m^2 * O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) \right) &= \sum_{j=0}^{k-1} \log \left(1 - \frac{j * (m + 1)}{n^2} + j * m^2 * O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) = - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j * (m + 1)}{n^2} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j^2 * (m + 1)^2}{2n^4} - \dots + \frac{(k - 1)k * m^2}{2} * O\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ &= - \frac{(m + 1)}{n^2} * \frac{(k - 1)k}{2} - \frac{(m + 1)^2 * (k^3 + \dots)}{6} * O\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{aligned}$$

Užitím prvního členu dostáváme exponent odpovídající dokazované větě

$$\frac{n^{2k}}{k!} * e^{-\frac{(m+1)*k(k-1)}{2*n^2}}$$

Předchozí vzorec platí nejen pro konstantní k , ale až do $k \leq O(n)$. Nejzajímavější je případ $k = n$.

Členy v předchozím asymptotickém rozvoji mají tvar $\frac{k^{d+1}}{n^{2d}}$, pro $k = n$ tedy $\frac{1}{n^{d-1}}$, což jde pro $d > 1$ k nule a dostaneme tak důležitou větu

Number of ways to place n non-attacking leapers $[r,s]$ on an $n \times n$ chessboard, $0 < r \leq s$, is asymptotic:

(V. Kotěšovec, 29.11.2011)

$$\frac{n^{2n}}{n!} * e^{-\frac{m+1}{2}} \sim \binom{n^2}{n} * e^{-\frac{m}{2}}$$

where m is number of accessible squares for one leaper ($m=4$ for Wazir and Fers, $m=8$ for Knight and Zebra). It's also possible use this theorem for composite pieces (but only for leapers, not for riders, m must be constant, not dependent on n). For example King=Wazir + Fers, $m=8$. Gnu=Knight + Camel, $m=16$. Asymptotic result is in case of the leapers independent on values r and s , important is only number of accessible squares.

Tento výsledek je též v souladu s úvahami o faktoru vlivu jednoho dostupného pole v kapitole 12.3.

leaper	r	s	m	exponent = $-\frac{m+1}{2}$	probability = $e^{-\frac{m}{2}}$
wazir	0	1	4	- 5/2	e^{-2}
fers	1	1	4	- 5/2	e^{-2}
knight	1	2	8	- 9/2	e^{-4}
zebra	2	3	8	- 9/2	e^{-4}
semi-wazir	0	1	2	- 3/2	e^{-1}
semi-fers	1	1	2	- 3/2	e^{-1}
king	0	1	8	- 9/2	e^{-4}
	1	1			

Jelikož výraz $\binom{n^2}{n}$ určuje počet všech možných rozmístění n kamenů na šachovnici $n \times n$ (bez ohledu na to, zda se ohrožují či nikoliv), je pravděpodobnost, že v náhodném rozestavení n skokanů na šachovnici $n \times n$ se nebudou žádné kameny ohrožovat asymptoticky rovna $e^{-\frac{m}{2}}$, kde m je počet polí dostupných jednomu skokanovi. Vzorec jde použít i pro kombinace dvou či více skokanů (např. král = vezír + fers), ale m musí být konstantní, nezávislé na n .

Probability, that in the random arrangements of n leapers on an $n \times n$ chessboard no pieces attacking other is asymptotic $e^{-\frac{m}{2}}$, where m is the number of accessible squares for one leaper.

13.2) Composite pieces Leaper + Leaper - Kombinované kameny skokan + skokan

V předchozích kapitolách jsme se setkali se skokany, kteří měli dostupných 4 nebo 8 polí. V této kapitole probírám ukázky kombinovaných skokanů, kteří mohou skočit celkem na 12 nebo 16 polí. I v tomto případě platí asymptotické vzorce z kapitoly 13.1. V případě jednoduchých skokanů (jimž je dostupných m polí) mají vzorce pro počty neohrožujících se k stejných kamenů tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{(m+1)n^{2k-2}}{2(k-2)!} + \frac{m(r+s)n^{2k-3}}{2(k-2)!} + \dots$$

Při složení více skokanů se sčítají jednotlivé složky

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{(m+1)n^{2k-2}}{2(k-2)!} + \frac{n^{2k-3}}{2(k-2)!} * \sum_i m_i * (r_i + s_i) + \dots$$

Příklady viz tabulka

<i>composite leaper</i>	m	$-\frac{m+1}{2}$	r_i	s_i	$r_i + s_i$	m_i	$\frac{m_i}{2} * (r_i + s_i)$	$\sum_i \frac{m_i}{2} * (r_i + s_i)$
Gnu	16	$-\frac{17}{2}$	1	2	3	8	12	28
			1	3	4	8	16	
Okapi	16	$-\frac{17}{2}$	1	2	3	8	12	32
			2	3	5	8	20	
Bison	16	$-\frac{17}{2}$	1	3	4	8	16	36
			2	3	5	8	20	
Zebu	16	$-\frac{17}{2}$	1	3	4	8	16	36
			1	4	5	8	20	
Knight + Fers	12	$-\frac{13}{2}$	1	2	3	8	12	16
			1	1	2	4	4	
Knight + Wazir	12	$-\frac{13}{2}$	1	2	3	8	12	14
			0	1	1	4	2	
Impala	16	$-\frac{17}{2}$	1	2	3	8	12	40
			3	4	7	8	28	
Squirrel	16	$-\frac{17}{2}$	1	2	3	8	12	24
			0	2	2	4	4	
			2	2	4	4	8	
Auroch	16	$-\frac{17}{2}$	1	2	3	8	12	32
			1	4	5	8	20	
Root-25-leaper	12	$-\frac{13}{2}$	0	5	5	4	10	38
			3	4	7	8	28	
Root-50-leaper	12	$-\frac{13}{2}$	5	5	10	4	20	52
			1	7	8	8	32	

Gnu je kombinovaný kámen s pohyblivostí skokanů [1,2] a [1,3]. *A gnu moves like a camel ([1,3] leaper) and a knight.*

k	Gnu, board n x n		
2	Explicit formula	<i>Christian Poisson, 1990</i>	$n \geq 3$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{17n^2}{2} + 28n - 20 = \frac{1}{2}(n-1)(n^3 + n^2 - 16n + 40)$		
	Generating function		
	$-\frac{2x^2(2x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 2x^2 - x + 3)}{(x-1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 6$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{17n^4}{2} + 28n^3 + \frac{325n^2}{3} - 716n + 920$		
	Generating function		
	$\frac{4x^2(7x^{10} - 29x^9 + 32x^8 - 4x^7 + 15x^6 - 55x^5 + 84x^4 - 77x^3 - 2x - 1)}{(x-1)^7}$		
4	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 9$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{17n^6}{4} + 14n^5 + \frac{3707n^4}{24} - 954n^3 - \frac{3905n^2}{4} + 17694n - 31880$		
	Generating function		
	$-\frac{x^2(96x^{15} - 464x^{14} + 880x^{13} - 1474x^{12} + 4010x^{11} - 9104x^{10} + 12604x^9 - 8656x^8 + 772x^7 + 604x^6 + 785x^5 + 423x^4 + 1204x^3 - 10x^2 + 9x + 1)}{(x-1)^9}$		
5	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 12$
	$\frac{n^{10}}{120} - \frac{17n^8}{12} + \frac{14n^7}{3} + \frac{2327n^6}{24} - 596n^5 - \frac{30325n^4}{12} + \frac{82120n^3}{3} - \frac{130147n^2}{15} - 442860n + 1024712$		
	Generating function		
	$\frac{2x^3(138x^{19} - 786x^{18} + 2024x^{17} - 5640x^{16} + 21332x^{15} - 60272x^{14} + 107844x^{13} - 130544x^{12} + 139149x^{11} - 172959x^{10} + 207160x^9 - 194528x^8 + 127016x^7 - 28668x^6 - 10073x^5 - 9977x^4 - 5481x^3 - 857x^2 + 3x - 1)}{(x-1)^{11}}$		

k GnuS board n x n

n	2 gnus	3 gnus	4 gnus	5 gnus
1				
2	6	4	1	
3	28	36	18	2
4	84	168	116	16
5	220	868	1684	1780
6	490	3332	12789	29992
7	960	10020	62864	253946
8	1708	25336	235000	1453336
9	2824	56468	727900	6444750
10	4410	114260	1954685	23524096
11	6580	214232	4693478	73730016
12	9460	377720	10303324	204625064
13	13188	633136	21021646	514501780
14	17914	1017348	40360605	1192348216
15	23800	1577180	73621780	2580711482
16	31020	2371032	128550168	5270722312
17	39760	3470620	216150184	10241052878
18	50218	4962836	351688021	19055495816
19	62604	6951728	555906410	34137207664
20	77140	9560600	856479500	59141483592

Okapi je kombinovaný kámen s pohyblivostí skokanů [1,2] a [2,3]. *An okapi moves like a zebra ([2,3] leaper) and a knight.*

k	Okapi, board n x n		
2	Explicit formula	<i>Christian Poisson, 1990</i>	$n \geq 2$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{17n^2}{2} + 32n - 32$		
	Generating function		
	$\frac{2x^2(x+1)(4x^3-8x^2+4x-3)}{(x-1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 6$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{17n^4}{2} + 32n^3 + \frac{313n^2}{3} - 848n + 1332$		
	Generating function		
	$\frac{4x^2(4x^{10} - 17x^9 + 10x^8 + 25x^7 - 20x^6 - 11x^5 + 34x^4 - 42x^3 - 10x^2 - 2x - 1)}{(x-1)^7}$		
4	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 9$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{17n^6}{4} + 16n^5 + \frac{3755n^4}{24} - 1120n^3 - \frac{2561n^2}{4} + 21552n - 45860$		
	Generating function		
	$\frac{-x^2(64x^{15} - 208x^{14} - 104x^{13} + 742x^{12} + 598x^{11} - 4508x^{10} + 6692x^9 - 2596x^8 - 3668x^7 + 2824x^6 + 289x^5 + 387x^4 + 1056x^3 + 102x^2 + 9x + 1)}{(x-1)^9}$		
5	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 12$
	$\frac{n^{10}}{120} - \frac{17n^8}{12} + \frac{16n^7}{3} + \frac{2375n^6}{24} - 696n^5 - \frac{29581n^4}{12} + \frac{99368n^3}{3} - \frac{379687n^2}{15} - 556400n + 1504852$		
	Generating function		
	$\frac{2x^3(100x^{19} - 288x^{18} - 402x^{17} + 758x^{16} + 7730x^{15} - 25754x^{14} + 22074x^{13} + 26712x^{12} - 58812x^{11} - 490x^{10} + 90492x^9 - 111688x^8 + 63198x^7 + 9646x^6 - 27025x^5 - 4359x^4 - 5534x^3 - 1424x^2 - 53x - 1)}{(x-1)^{11}}$		

k **Okapis** board $n \times n$

n	2 okapis	3 okapis	4 okapis	5 okapis
1				
2	6	4	1	
3	28	36	18	2
4	88	208	228	128
5	228	1008	2544	4146
6	502	3672	16461	49964
7	976	10684	73864	350752
8	1728	26484	262156	1807076
9	2848	58284	786064	7501276
10	4438	116952	2066885	26241396
11	6612	218032	4893030	79937758
12	9496	382884	10636312	217544260
13	13228	639944	21549610	539453146
14	17958	1026104	41163469	1237688444
15	23848	1588212	74801020	2659038172
16	31072	2384692	130232220	5400393300
17	39816	3487284	218490092	10448068364
18	50278	4982904	354873325	19375795132
19	62668	6975624	560161274	34619435882
20	77208	9588772	862069080	59850286532
21	94132	12967152	1296972310	100473162502
22	113686	17279384	1911932197	164280312028
23	136128	22720364	2767054240	262297612928

Bison je kombinovaný kámen s pohyblivostí skokanů [1,3] a [2,3]. *A bison moves like a camel ([1,3] leaper) and a zebra ([2,3] leaper).*

k	Bison , board $n \times n$		
2	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 3$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{17n^2}{2} + 36n - 36$		
	Generating function		
	$-\frac{2x^2(2x^5 - 14x^4 + 22x^3 - 10x^2 + 3x + 3)}{(x - 1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 6$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{17n^4}{2} + 36n^3 + \frac{301n^2}{3} - 956n + 1620$		
	Generating function		
	$\frac{4x^2(21x^{10} - 118x^9 + 244x^8 - 235x^7 + 117x^6 - 62x^5 + 112x^4 - 138x^3 + 44x^2 - 14x - 1)}{(x - 1)^7}$		
4	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 9$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{17n^6}{4} + 18n^5 + \frac{3707n^4}{24} - 1262n^3 - \frac{1017n^2}{4} + 24746n - 57882$		
	Generating function		
	$-\frac{x^2(624x^{15} - 4112x^{14} + 11100x^{13} - 16916x^{12} + 21272x^{11} - 35448x^{10} + 59986x^9 - 68462x^8 + 45618x^7 - 17006x^6 + 3691x^5 - 561x^4 + 2240x^3 - 464x^2 + 117x + 1)}{(x - 1)^9}$		
5	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 12$
	$\frac{n^{10}}{120} - \frac{17n^8}{12} + 6n^7 + \frac{2359n^6}{24} - 784n^5 - \frac{26677n^4}{12} + 37780n^3 - \frac{218099n^2}{5} - 652892n + 1966380$		
	Generating function		
	$(2x^3(1854x^{19} - 14574x^{18} + 49562x^{17} - 106794x^{16} + 219430x^{15} - 518062x^{14} + 1056150x^{13} - 1523898x^{12} + 1520760x^{11} - 1160566x^{10} + 892182x^9 - 815996x^8 + 673688x^7 - 364912x^6 + 110293x^5 - 27595x^4 - 4626x^3 - 2268x^2 + 315x - 63))/(x - 1)^{11}$		

k **Bisons** board n x n

n	2 bisons	3 bisons	4 bisons	5 bisons
1				
2	6	4	1	
3	36	84	126	126
4	100	328	634	756
5	244	1224	3494	5922
6	522	4032	18519	53604
7	1000	11392	82084	402284
8	1756	27700	284470	2042180
9	2880	60192	835512	8249644
10	4474	119760	2163403	28194620
11	6652	221972	5066666	84506146
12	9540	388212	10929018	227277612
13	13276	646940	22017834	558650950
14	18010	1035072	41880987	1273214708
15	23904	1599480	75862008	2721390420
16	31132	2398612	131754566	5505057900
17	39880	3504232	220618948	10617212256
18	50346	5003280	357784899	19640343876
19	62740	6999852	564066862	35021591306
20	77284	9617300	867219338	60446540620
21	94212	13000452	1303661766	101337867522
22	113770	17317952	1920504003	165509870260
23	136216	22764720	2777905164	264015352712

Zebu je kombinovaný kámen s pohyblivostí skokanů [1,3] a [1,4]. *A zebu moves like a camel ([1,3] leaper) and a giraffe ([1,4] leaper).*

k	Zebu, board n x n		
2	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 4$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{17n^2}{2} + 36n - 28 = \frac{1}{2}(n-1)(n^3 + n^2 - 16n + 56)$		
	Generating function		
	$-\frac{2x^2(4x^6 - 14x^5 + 10x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 3x + 3)}{(x-1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 8$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{17n^4}{2} + 36n^3 + \frac{325n^2}{3} - 988n + 1568$		
	Generating function		
	$\frac{4x^2(11x^{12} - 41x^{11} + 35x^{10} + 40x^9 - 101x^8 + 129x^7 - 186x^6 + 220x^5 - 110x^4 - 37x^3 + 25x^2 - 14x - 1)}{(x-1)^7}$		
4	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 12$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{17n^6}{4} + 18n^5 + \frac{3803n^4}{24} - 1294n^3 - \frac{1497n^2}{4} + 26314n - 60566$		
	Generating function		
	$-\frac{x^2(144x^{18} - 656x^{17} + 768x^{16} + 1120x^{15} - 5614x^{14} + 13906x^{13} - 24892x^{12} + 24360x^{11} + 4x^{10} - 27606x^9 + 31334x^8 - 19826x^7 + 10784x^6 - 6931x^5 + 4419x^4 + 420x^3 - 172x^2 + 117x + 1)}{(x-1)^9}$		
5	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 16$
	$\frac{n^{10}}{120} - \frac{17n^8}{12} + 6n^7 + \frac{797n^6}{8} - 800n^5 - \frac{27805n^4}{12} + 39620n^3 - \frac{687407n^2}{15} - 705204n + 2138964$		
	Generating function		
	$2*x^3*(202*x^{23}-1106*x^{22}+1724*x^{21}+2132*x^{20}-18314*x^{19}+64358*x^{18}-139762*x^{17}+135746*x^{16}+120966*x^{15}-599972*x^{14}+1025004*x^{13}-1182608*x^{12}+1006408*x^{11}-483888*x^{10}-164842*x^9+495608*x^8-381550*x^7+160036*x^6-44773*x^5+567*x^4-10718*x^3-290*x^2+15*x-63)/(x-1)^{11}$		

k **Zebus** board n x n

n	2 zebus	3 zebus	4 zebus	5 zebus
1				
2	6	4	1	
3	36	84	126	126
4	108	404	926	1356
5	252	1352	4302	8566
6	530	4220	20259	61872
7	1008	11552	82562	390488
8	1764	27904	285002	2006076
9	2888	60500	838792	8220284
10	4482	120188	2171759	28237404
11	6660	222536	5082538	84700170
12	9548	388928	10955518	227746676
13	13284	647824	22059194	559629022
14	18018	1036140	41942591	1275096572
15	23912	1600748	75950344	2724770828
16	31140	2400096	131877322	5510797076
17	39888	3505948	220785108	10626512276
18	50354	5005244	358004839	19654839348
19	62748	7002080	564352446	35043453758
20	77292	9619808	867584014	60478597364
21	94220	13003256	1304120662	101383736358
22	113778	17321068	1921074023	165574110980
23	136224	22768164	2778605084	264103636364

k	composite piece Knight + Fers , board $n \times n$		
2	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{13n^2}{2} + 16n - 10 = \frac{1}{2}(n-1)(n^3 + n^2 - 12n + 20)$		
	Generating function		
	$\frac{2x^2(5x^3 - 9x^2 - 2)}{(x-1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 4$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{13n^4}{2} + 16n^3 + \frac{193n^2}{3} - 304n + 304$		
	Generating function		
	$\frac{2x^3(x+1)(6x^6 - 42x^5 + 89x^4 - 66x^3 + 28x^2 - 40x - 5)}{(x-1)^7}$		
4	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 6$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{13n^6}{4} + 8n^5 + \frac{2171n^4}{24} - 408n^3 - \frac{2277n^2}{4} + 5620n - 7633$		
	Generating function		
	$\frac{x^3(48x^{11} - 216x^{10} + 46x^9 + 958x^8 - 1707x^7 + 2174x^6 - 3078x^5 + 991x^4 + 1649x^3 + 644x^2 + 170x + 1)}{(x-1)^9}$		
5	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 8$
	$\frac{n^{10}}{120} - \frac{13n^8}{12} + \frac{8n^7}{3} + \frac{453n^6}{8} - 256n^5 - \frac{14453n^4}{12} + \frac{26356n^3}{3} + \frac{31003n^2}{15} - 105656n + 180360$		
	Generating function		
	$\frac{2x^4(74x^{14} - 286x^{13} - 362x^{12} + 3778x^{11} - 9908x^{10} + 15320x^9 - 8549x^8 - 17129x^7 + 27438x^6 - 3914x^5 + 3805x^4 - 18251x^3 - 6170x^2 - 902x - 64)}{(x-1)^{11}}$		

k composite pieces **Knight+Fers** board n x n

n	2 knight+fers	3 knight+fers	4 knight+fers	5 knight+fers
1				
2	4	0	0	
3	20	10	1	0
4	78	160	179	128
5	220	934	2219	3212
6	500	3604	15260	40632
7	984	10818	73357	327914
8	1750	27248	271743	1852424
9	2888	60370	831725	8052678
10	4500	121364	2204892	28763320
11	6700	226134	5229115	88302108
12	9614	396448	11350667	240512760
13	13380	661198	22928423	594767080
14	18148	1057780	43637780	1358408056
15	24080	1633594	78993617	2902911690
16	31350	2447664	137013295	5863189000
17	40144	3572378	229042377	11281971314
18	50660	5095348	370767428	20814151896
19	63108	7121390	583441935	37009325344
20	77710	9774624	895353067	63694603320
21	94700	13200694	1343558675	106484121252
22	114324	17569108	1975925612	173446515928
23	136840	23075698	2853502133	275967078622

k	composite piece Knight + Wazir , board $n \times n$		
2	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{13n^2}{2} + 14n - 8 = \frac{1}{2}(n-1)(n^3 + n^2 - 12n + 16)$		
	Generating function		
	$\frac{2x^2(4x^3 - 6x^2 - 3x - 1)}{(x-1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 4$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{13n^4}{2} + 14n^3 + \frac{211n^2}{3} - 292n + 272$		
	Generating function		
	$\frac{2x^3(6x^7 - 36x^6 + 55x^5 - 17x^4 + 36x^3 - 74x^2 - 23x - 7)}{(x-1)^7}$		
4	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 6$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{13n^6}{4} + 7n^5 + \frac{2291n^4}{24} - 383n^3 - \frac{2961n^2}{4} + 5723n - 7219$		
	Generating function		
	$\frac{x^3(48x^{11} - 252x^{10} + 386x^9 - 298x^8 + 612x^7 - 43x^6 - 2087x^5 + 886x^4 + 1550x^3 + 765x^2 + 107x + 6)}{(x-1)^9}$		
5	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 8$
	$\frac{n^{10}}{120} - \frac{13n^8}{12} + \frac{7n^7}{3} + \frac{1415n^6}{24} - 237n^5 - \frac{16625n^4}{12} + \frac{26153n^3}{3} + \frac{84863n^2}{15} - 112816n + 178364$		
	Generating function		
	$\frac{x^3(148x^{15} - 780x^{14} + 1172x^{13} + 716x^{12} - 8164x^{11} + 24536x^{10} - 30225x^9 + 1343x^8 + 5650x^7 + 36522x^6 - 14990x^5 - 32222x^4 - 12062x^3 - 1778x^2 - 105x - 1)}{(x-1)^{11}}$		

k composite pieces **Knight+Wazir** board n x n

n	2 knight+wazir	3 knight+wazir	4 knight+wazir	5 knight+wazir
1				
2	2	0	0	
3	16	14	6	1
4	72	144	161	116
5	212	862	1998	2999
6	490	3428	14240	38836
7	972	10478	69886	313283
8	1736	26672	262549	1782140
9	2872	59474	811196	7807853
10	4482	120052	2164236	28071124
11	6680	224298	5155400	86613625
12	9592	393968	11225741	236822924
13	13356	657942	22727714	587361571
14	18122	1053604	43328976	1344520356
15	24052	1628342	78535226	2878271819
16	31320	2441168	136353085	5821443772
17	40112	3564458	228115696	11213954273
18	50626	5085812	369495404	20706979412
19	63072	7110034	581729556	36845293669
20	77672	9761232	893087141	63449859724
21	94660	13185038	1340605670	106127080679
22	114282	17550948	1972129376	172935992932
23	136796	23054782	2848681494	275250102663

Impala je kombinovaný kámen s pohyblivostí skokanů [1,2] a [3,4]. *An impala moves like an antelope ([3,4] leaper) and a knight.*

k	Impala , board $n \times n$		
2	Explicit formula	<i>Christian Poisson, 1990</i>	$n \geq 3$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{17n^2}{2} + 40n - 56$		
	Generating function		
	$\frac{2x^2(4x^5 - 8x^4 + 8x^3 - 8x^2 + x - 3)}{(x - 1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 8$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{17n^4}{2} + 40n^3 + \frac{241n^2}{3} - 1080n + 2280$		
	Generating function		
	$\frac{4x^2(5x^{12} - 26x^{11} + 52x^{10} - 65x^9 + 73x^8 - 67x^7 + 29x^6 + 41x^5 - 66x^4 + 24x^3 - 27x^2 - 2x - 1)}{(x - 1)^7}$		
4	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 12$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{17n^6}{4} + 20n^5 + \frac{3467n^4}{24} - 1420n^3 + \frac{2959n^2}{4} + 27216n - 78308$		
	Generating function		
	$\frac{x^2(80x^{18} - 440x^{17} + 1000x^{16} - 1352x^{15} + 754x^{14} + 3762x^{13} - 15718x^{12} + 30406x^{11} - 36104x^{10} + 31016x^9 - 22732x^8 + 13740x^7 - 6342x^6 + 1323x^5 + 1663x^4 + 328x^3 + 286x^2 + 9x + 1)}{(x - 1)^9}$		
5	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 16$
	$\frac{n^{10}}{120} - \frac{17n^8}{12} + \frac{20n^7}{3} + \frac{2279n^6}{24} - 880n^5 - \frac{18709n^4}{12} + \frac{125548n^3}{3} - \frac{1223677n^2}{15} - 692144n + 2597984$		
	Generating function		
	$2x^3(126x^{23} - 778x^{22} + 2030x^{21} - 3038x^{20} - 486x^{19} + 26970x^{18} - 103356x^{17} + 213700x^{16} - 280174x^{15} + 229676x^{14} - 13274x^{13} - 393084x^{12} + 853682x^{11} - 1067716x^{10} + 891564x^9 - 535942x^8 + 266136x^7 - 107794x^6 + 31673x^5 - 17925x^4 - 5786x^3 - 1164x^2 - 159x - 1)/(x-1)^{11}$		

k **Impalas** board n x n

n	2 impalas	3 impalas	4 impalas	5 impalas
1				
2	6	4	1	
3	28	36	18	2
4	96	276	412	340
5	244	1220	3472	5958
6	526	4128	19465	58740
7	1008	11596	83982	409740
8	1768	28136	290676	2084888
9	2896	61032	854496	8495772
10	4494	121180	2208797	29071456
11	6676	224172	5158998	86879914
12	9568	391416	11098648	232827336
13	13308	651396	22307354	570364522
14	18046	1041052	42347901	1296078688
15	23944	1607280	76581532	2763279296
16	31176	2408552	132822748	5577897568
17	39928	3516656	222156028	10738451380
18	50398	5018556	359938909	19834780832
19	62796	7018372	567017466	35323608130
20	77344	9639480	871181912	60902798384
21	94276	13026732	1308891718	102010521470
22	113838	17348796	1927301333	166480366144
23	136288	22800616	2786619264	265388869128

Squirrel (Ecureuil) je kámen s pohyblivostí skokanů [0,2], [1,2] a [2,2]. *A squirrel moves like a dabbaba ([0,2] leaper), alfil ([2,2] leaper) and a knight.*

k	Squirrel, board n x n		
2	Explicit formula	<i>Christian Poisson, 1990</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{17n^2}{2} + 24n - 16 = \frac{1}{2}(n-1)(n^3 + n^2 - 16n + 32)$		
	Generating function		
	$\frac{2x^2(8x^3 - 16x^2 + 5x - 3)}{(x-1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 4$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{17n^4}{2} + 24n^3 + \frac{337n^2}{3} - 612n + 708$		
	Generating function		
	$\frac{4x^2(13x^8 - 90x^7 + 210x^6 - 219x^5 + 133x^4 - 61x^3 - 18x^2 + 3x - 1)}{(x-1)^7}$		
4	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 6$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{17n^6}{4} + 12n^5 + \frac{3755n^4}{24} - 816n^3 - \frac{5197n^2}{4} + 15058n - 23876$		
	Generating function		
	$\frac{x^2(588x^{12} - 4328x^{11} + 12825x^{10} - 20545x^9 + 20071x^8 - 10511x^7 - 1951x^6 + 5240x^5 - 914x^4 + 1165x^3 + 44x^2 - 5x + 1)}{(x-1)^9}$		
5	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 8$
	$\frac{n^{10}}{120} - \frac{17n^8}{12} + 4n^7 + \frac{781n^6}{8} - 510n^5 - \frac{32929n^4}{12} + 23340n^3 + \frac{81898n^2}{15} - 375076n + 750464$		
	Generating function		
	$\frac{2x^5(2362x^{13} - 20162x^{12} + 73696x^{11} - 149424x^{10} + 166964x^9 - 40126x^8 - 181597x^7 + 304403x^6 - 253834x^5 + 154330x^4 - 59597x^3 - 7757x^2 - 3490x - 888)}{(x-1)^{11}}$		

k **Squirrels** board n x n

n	2 squirrels	3 squirrels	4 squirrels	5 squirrels
1				
2	6	4	1	
3	20	16	4	0
4	72	100	44	0
5	204	748	1501	1776
6	470	3024	11221	26516
7	936	9360	55511	209510
8	1680	24164	214652	1258464
9	2792	54600	681643	5800454
10	4374	111488	1862029	21736524
11	6540	210324	4524261	69406128
12	9416	372420	10015456	195232880
13	13140	626164	20558517	495755520
14	17862	1008400	39648253	1157386812
15	23744	1565928	72565819	2519030294
16	30960	2357124	127032476	5166815040
17	39696	3453680	214025351	10072716834
18	50150	4942464	348779557	18791750636
19	62532	6927500	552002713	33735774180
20	77064	9532068	851329584	58545766224
21	93980	12900924	1283046241	98588765612
22	113526	17202640	1894114821	161610509148
23	135960	22632064	2744531647	258580217562

Auroch je kombinovaný kámen s pohyblivostí skokanů [1,2] a [1,4]. *An auroch moves like a giraffe ([1,4] leaper) and a knight.*

k	Auroch , board $n \times n$		
2	Explicit formula	<i>Christian Poisson, 1990</i>	$n \geq 4$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{17n^2}{2} + 32n - 24 = \frac{1}{2}(n-1)(n^3 + n^2 - 16n + 48)$		
	Generating function		
	$-\frac{2x^2(4x^6 - 16x^5 + 20x^4 - 12x^3 + 8x^2 - x + 3)}{(x-1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 8$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{17n^4}{2} + 32n^3 + \frac{337n^2}{3} - 880n + 1264$		
	Generating function		
	$\frac{4x^2(11x^{12} - 59x^{11} + 140x^{10} - 207x^9 + 201x^8 - 83x^7 - 95x^6 + 219x^5 - 180x^4 + 53x^3 - 27x^2 - 2x - 1)}{(x-1)^7}$		
4	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 12$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{17n^6}{4} + 16n^5 + \frac{3851n^4}{24} - 1152n^3 - \frac{3153n^2}{4} + 23164n - 47732$		
	Generating function		
	$-\frac{x^2(144x^{18} - 1040x^{17} + 3552x^{16} - 7568x^{15} + 9426x^{14} + 718x^{13} - 32442x^{12} + 76550x^{11} - 103316x^{10} + 94140x^9 - 59592x^8 + 23128x^7 - 2794x^6 - 3325x^5 + 4071x^4 - 268x^3 + 286x^2 + 9x + 1)}{(x-1)^9}$		
5	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 16$
	$\frac{n^{10}}{120} - \frac{17n^8}{12} + \frac{16n^7}{3} + \frac{2407n^6}{24} - 712n^5 - \frac{30949n^4}{12} + \frac{105020n^3}{3} - \frac{129039n^2}{5} - 612876n + 1649776$		
	Generating function		
	$2x^3(202x^{23} - 1850x^{22} + 8208x^{21} - 23108x^{20} + 38480x^{19} + 880x^{18} - 219774x^{17} + 721230x^{16} - 1384684x^{15} + 1773122x^{14} - 1359494x^{13} + 18140x^{12} + 1643908x^{11} - 2640866x^{10} + 2485182x^9 - 1607232x^8 + 748078x^7 - 231868x^6 + 37363x^5 - 13095x^4 - 7302x^3 - 480x^2 - 159x - 1)/(x-1)^{11}$		

k Aurochs board n x n

n	2 aurochs	3 aurochs	4 aurochs	5 aurochs
1				
2	6	4	1	
3	28	36	18	2
4	96	276	412	340
5	236	1104	2876	4590
6	510	3772	16509	46724
7	984	10828	74186	343144
8	1736	26672	262412	1776112
9	2856	58576	788956	7478964
10	4446	117364	2074077	26250288
11	6620	218580	4906810	80023350
12	9504	383584	10660120	217837496
13	13236	640812	21587622	540160802
14	17966	1027156	41221013	1239170832
15	23856	1589464	74884528	2661849660
16	31080	2386160	130349324	5405345968
17	39824	3488984	218649720	10456310456
18	50286	4984852	355085797	19388899768
19	62676	6977836	560438398	34639504966
20	77216	9591264	862424248	59880069136
21	94140	12969940	1297420594	100516189090
22	113694	17282484	1912490445	164341045480
23	136136	22723792	2767741172	262381617324

Root-25-leaper je kombinovaný kámen s pohyblivostí skokanů [0,5] a [3,4]. A *Root-25-leaper* is [0,5] leaper and [3,4] leaper.

k	Root-25-leaper , board $n \times n$		
2	Explicit formula	<i>Christian Poisson, 1990</i>	$n \geq 5$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{13n^2}{2} + 38n - 48$		
	Generating function		
	$-\frac{2x^2(4x^7 - 14x^6 + 12x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 3x + 3)}{(x - 1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 10$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{13n^4}{2} + 38n^3 + \frac{91n^2}{3} - 780n + 1816$		
	Generating function		
	$\frac{2x^2(9x^{14} - 27x^{13} + 12x^{12} + 10x^{11} + 49x^{10} - 155x^9 + 368x^8 - 784x^7 + 962x^6 - 486x^5 - 48x^4 + 88x^3 - 28x^2 - 28x - 2)}{(x - 1)^7}$		
4	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 15$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{13n^6}{4} + 19n^5 + \frac{1811n^4}{24} - 1027n^3 + \frac{6535n^2}{4} + 14269n - 49875$		
	Generating function		
	$-x^2(28x^{21} - 80x^{20} + 24x^{19} - 36x^{18} + 440x^{17} - 1646x^{16} + 6614x^{15} - 14920x^{14} + 14604x^{13} - 5036x^{12} + 9437x^{11} - 30615x^{10} + 45205x^9 - 51221x^8 + 54641x^7 - 44089x^6 + 19112x^5 - 432x^4 - 1190x^3 + 722x^2 + 117x + 1)/(x-1)^9$		

k **Root-25-leapers** board n x n

n	2 root-25-leapers	3 root-25-leapers	4 root-25-leapers	5 root-25-leapers
1				
2	6	4	1	
3	36	84	126	126
4	120	560	1820	4368
5	292	2120	10738	40366
6	594	5976	41148	206348
7	1100	15028	140006	944750
8	1888	34112	423101	3827568
9	3048	70900	1144550	13649072
10	4682	136716	2798584	42803400
11	6904	247578	6275432	119906341
12	9840	425368	13085361	305549160
13	13628	699110	25666618	719345283
14	18418	1106332	47789672	1583512048
15	24372	1694566	85081410	3290405003
16	31664	2522968	145689277	6503400112
17	40480	3664058	241108300	12303125641
18	51018	5205580	387195240	22393933800
19	63488	7252482	605395860	39388867609
20	78112	9929016	924213005	67195210512
21	95124	13380958	1380944922	111527056041
22	114770	17777948	2023724900	180576196032
23	137308	23315950	2913894990	285878050909

Root-50-leaper je kombinovaný kámen s pohyblivostí skokanů [5,5] a [1,7]. A *Root-50-leaper* is [5,5] leaper and [1,7] leaper.

k	Root-50-leaper , board $n \times n$		
2	Explicit formula	<i>Christian Poisson, 1990</i>	$n \geq 7$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{13n^2}{2} + 52n - 78$		
	Generating function		
	$-\frac{2x^2(10x^9 - 34x^8 + 37x^7 - 13x^6 + x^5 - x^4 + 3x + 3)}{(x-1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 14$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{13n^4}{2} + 52n^3 + \frac{n^2}{3} - 1084n + 3352$		
	Generating function		
	$\frac{2x^2(46x^{18} - 238x^{17} + 536x^{16} - 744x^{15} + 773x^{14} - 631x^{13} + 376x^{12} - 498x^{11} + 2025x^{10} - 4671x^9 + 5548x^8 - 3296x^7 + 790x^6 - 50x^5 + 34x^4 - 2x^3 - 28x^2 - 28x - 2)}{(x-1)^7}$		

k **Root-50-leapers** board n x n

n	2 root-50-leapers	3 root-50-leapers	4 root-50-leapers	5 root-50-leapers
1				
2	6	4	1	
3	36	84	126	126
4	120	560	1820	4368
5	300	2300	12650	53130
6	628	7072	57784	365056
7	1168	18048	203256	1778424
8	1970	38880	553385	6057536
9	3144	77940	1387720	18921948
10	4792	146628	3220866	54140628
11	7028	261090	6974613	142807584
12	9978	443296	14196153	349301152
13	13780	722474	27387649	800337560
14	18584	1136148	50366666	1726398720
15	24552	1732042	88850349	3534518514
16	31858	2569304	151052243	6904442604
17	40688	3720538	248560769	12940233230
18	51240	5273572	397338348	23376642504
19	63724	7333438	618951187	40866027328
20	78362	10024472	942036271	69365031744
21	95388	13492534	1404042851	114649846146
22	115048	17907348	2053270756	184988483880
23	137600	23464962	2951246465	292009666272

13.3) General asymptotic formulas (Riders) - Obecné asymptotické vzorce (liniové kameny)

První členy vzorců pro počet pozic nenapadajících se liniových kamenů s jednotkovým tahem $[r,s]$ na šachovnici $n \times n$ mají obecně tvar
Number of ways to place k non-attacking riders $[r,s]$ on an $n \times n$ chessboard, $0 < r \leq s$, first terms:

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{L * (3s - r)}{6s^2} * \frac{n^{2k-1}}{(k-2)!} + \dots$$

where L is number of lines for one rider

$L=1$ for semi-riders $[r,s]$ (for example semi-bishop)

$L=2$ for riders $[r,s]$, $0 < r = s$ (for example rook or bishop)

$L=4$ for riders $[r,s]$, $0 < r < s$ (for example nightrider)

V souladu s výsledky pro semi-riders z kapitoly 6.1.2 lze zobecnit i asymptotický vzorec pro více linií. Hodnota k musí být **konstantní**.

Number of ways to place k non-attacking riders $[r,s]$ on an $n \times n$ chessboard, $0 < r \leq s$, is asymptotic (for constant k):

(V. Kotěšovec, 23.11.2011)

$$\frac{n^{2k}}{k!} * e^{-\frac{L*(3s-r)*k^2}{6s^2*n}}$$

rider	r	s	L	$3s - r$	$6s^2$	$-\frac{L*(3s-r)}{6s^2}$	exponent
rook	0	1	2	3	6	- 6/6	- 1
bishop	1	1	2	2	6	- 4/6	- 2/3
nightrider	1	2	4	5	24	- 20/24	- 5/6
semi-rook	0	1	1	3	6	- 3/6	- 1/2
semi-bishop	1	1	1	2	6	- 2/6	- 1/3
semi-nightrider	1	2	1	5	24	- 5/24	- 5/24

Zde je na místě položit si podobnou otázku jako v případě skokanů - je na ni ovšem snadná odpověď - pravděpodobnost, že v náhodném rozestavení n liniových kamenů (*riders*) na šachovnici $n \times n$ se nebudou žádné kameny ohrožovat je asymptoticky rovna 0. Např. pro věže jde o limitu podílu počtu vyhovujících případů a všech možných případů, tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\binom{n^2}{n}} = 0$$

Maximální počet nenapadajících se liniových kamenů (riderů) s jednotkovým tahem $[r,s]$, je na šachovnici $n \times n$ omezen nerovností

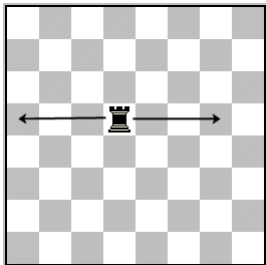
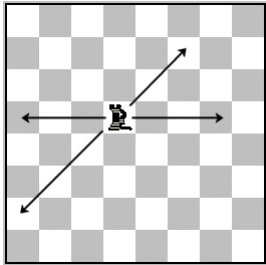
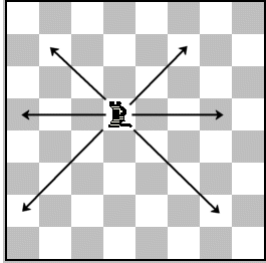
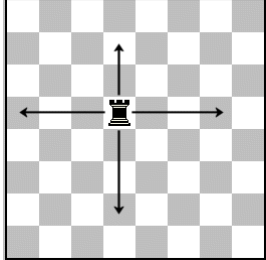
Maximal number M of non-attacking riders $[r,s]$ ($0 < r \leq s$) on an $n \times n$ chessboard satisfy inequality

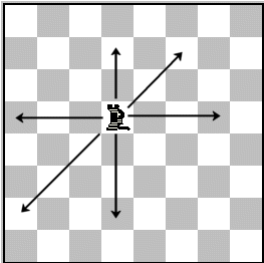
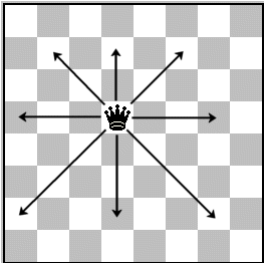
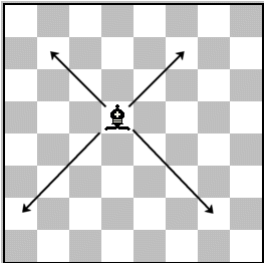
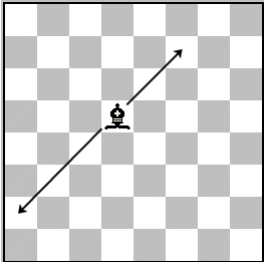
$$M \leq (r + s) n - rs$$

Možné je omezení i druhé strany, více viz str. 764. *See page 764 for more.*

13.4) Composite pieces Rider + Rider - Kombinované liniové kameny

Number of ways to place n non-attacking pieces on an $n \times n$ chessboard, asymptotic behavior

piece kámen		number of lines	formula	asymptotic	b	q
<i>semi-rook</i> semi-věž		1	n^n	<i>for comparison</i> $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^n * (n-1)! * \sqrt{n}$ n^n	0.3989422804	2.7182818284
<i>semi-rook + semi-bishop</i> semi-věž + semi střelec		2	see p.716	$b * q^n * (n-1)! * \sqrt{n}$ $b\sqrt{2\pi} * \left(\frac{q}{e}\right)^n * n^n$	0.8099431005	1.7955607383
<i>semi-rook + bishop</i> semi-věž + střelec		3		<i>conjectured</i> $b * q^n * (n-1)! * \sqrt{n}$ $b\sqrt{2\pi} * \left(\frac{q}{e}\right)^n * n^n$		1.11...
<i>rook</i> věž		2	$n!$	$n!$ $\sqrt{2\pi n} * \left(\frac{1}{e}\right)^n * n^n$	1	1

<p><i>rook + semi-bishop = semi-queen</i> <i>vež + semi-střelec = semi-dáma</i></p>		3		<p><i>conjectured</i> $b * q^n * n!$</p>		0.655...
<p><i>rook + bishop = queen</i> <i>věž + střelec = dáma</i></p>		4		<p><i>conjectured</i> $b * q^n * n!$</p>		0.389068...
<p><i>bishop</i> <i>střelec</i></p>		2	see 4.1.1	$b * q^n * (n - 1)!$	0.631266...	3.0882773047
<p><i>semi-bishop</i> <i>semi-střelec</i></p>		1	see 4.1.2	$b * q^n * (n - 1)!$	0.242522...	4.9108149645
<p><i>semi-nightrider</i> <i>semi-tátoš</i></p>	see chapter 6.1.1	1	see 6.1.1	$b * q^n * (n - 1)!$	0.203478...	5.82586...
<p><i>semi-zebrarider</i> <i>semi-liniová zebra</i></p>	see chapter 6.1.2	1	see 6.1.2	$b * q^n * (n - 1)!$	0.183256...	6.42670...
<p><i>all possible positions</i> <i>všechny možné pozice n kamenů</i></p>			$\binom{n^2}{n}$	$\frac{1}{2\pi\sqrt{e}} * e^{2n} * (n - 1)!$	0.0965323526	7.3890560989

Při složení více liniových kamenů (např. dáma = věž + střelec) se sčítají jednotlivé složky a první členy vzorců mají tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{n^{2k-1}}{(k-2)!} * \sum_i \frac{L_i * (3s_i - r_i)}{6s_i^2} + \dots$$

Příklady viz tabulka

Rider	r	s	L	$3s - r$	$6s^2$	$-\frac{L * (3s - r)}{6s^2}$	$\frac{n^{2k-1}}{(k-2)!}$
Rook	0	1	2	3	6	- 6/6	- 1
Bishop	1	1	2	2	6	- 4/6	- 2/3
Nightrider	1	2	4	5	24	- 20/24	- 5/6
semi-Rook	0	1	1	3	6	- 3/6	- 1/2
semi-Bishop	1	1	1	2	6	- 2/6	- 1/3
semi-Nightrider	1	2	1	5	24	- 5/24	- 5/24

<i>composite piece</i> Rider+Rider	<i>pieces</i>		$\frac{n^{2k-1}}{(k-2)!}$
Queen	Rook	- 1	- 5/3
	Bishop	- 2/3	
semi-Queen	Rook	- 1	- 4/3
	semi-Bishop	- 1/3	
semi-Rook + semi-Bishop	semi-Rook	- 1/2	- 5/6
	semi-Bishop	- 1/3	
semi-Rook + Bishop	semi-Rook	- 1/2	- 7/6
	Bishop	- 2/3	
Bishop + Nightrider	Bishop	- 2/3	- 3/2
	Nightrider	- 5/6	

Určení přesných asymptotických vzorců pro **liniové kameny** ovšem zůstává nejdůležitějším zatím kompletně nevyřešeným problémem z této oblasti. V případě věží, střelců, semi-střelců a kombinace semi-věže a semi-střelce byl problém vyřešen. V ostatních případech existují jen numerické odhady. Zejména v případě dam, jde o úlohu, kterou zatím nevyřešil žádný matematik. Je však možné, že v některých případech navždy zůstane jen u numerických výsledků (a pouze se bude zvyšovat jejich přesnost), protože konstanty v asymptotických rozvoji mohou být specifické a algebraicky (resp. na symbolické úrovni) nevyjádřitelné.

semi-Rook / semi-věž

Z matematického (méně už ze šachového) hlediska je zajímavý kámen semi-věž, který táhne jen po jedné z věžových linií (viz diagram). Na každém řádku může tak být jen jedna (neohrožující se) semi-věž, ale na každém sloupci šachovnice $n \times n$ může nad sebou stát až n neohrožujících se semi-věží.

Two semi-rooks do not attack each other if they are in the same column.

Pro počet pozic neohrožujících se k věží na šachovnici $n \times n$ lze snadno odvodit následující vzorec

Number of ways to place k non-attacking semi-Rooks on an $n \times n$ chessboard

$$\binom{n}{k} n^k$$

Speciálně při $k = n$ (což je maximální počet neohrožujících se semi-věží na šachovnici $n \times n$)

Number of ways to place n non-attacking semi-Rooks on an $n \times n$ chessboard

$$n^n$$

Součet přes všechna $k \geq 0$

summed over all $k \geq 0$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k = (n+1)^n \sim e * n^n$$

Několik prvních polynomů

2 semi-rooks, board $n \times n$

$$\frac{n^4}{2} - \frac{n^3}{2} = \frac{1}{2}(n-1)n^3$$

3 semi-rooks, board $n \times n$

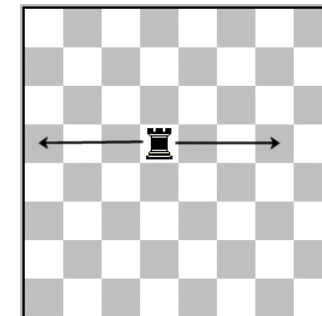
$$\frac{n^6}{6} - \frac{n^5}{2} + \frac{n^4}{3} = \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n^4$$

4 semi-rooks, board $n \times n$

$$\frac{n^8}{24} - \frac{n^7}{4} + \frac{11n^6}{24} - \frac{n^5}{4} = \frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)n^5$$

5 semi-rooks, board $n \times n$

$$\frac{n^{10}}{120} - \frac{n^9}{12} + \frac{7n^8}{24} - \frac{5n^7}{12} + \frac{n^6}{5} = \frac{1}{120}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^6$$



Poznámka: Jak mě upozornil Juraj Lörinc, tento kámen, označovaný jako "horizontal rook", použil již Peter Gvozdják v letech 2003-2006 v několika šachových úlohách, viz jeho kniha "Cyclone 2" z roku 2010, úlohy č. 2497, 2499, 2500, 2501 a 2503. Význam semi-věže není tak pouze matematický, i když její použití bylo (ze šachového pohledu) opravdu jen vyjimečné. Vzhledem k již (v matematice) zavedenému termínu "semi-queen" bych ale raději zůstal u označení "semi-rook" a nevnášel tak do terminologie zbytečný zmatek.

composite piece **semi-Rook + semi-Bishop** / semi-věž + semi-střelec

Odpovídá sekvenci [A088789](#)(n+1), viz též [A038049](#) *Number of labeled rooted trees with 2-colored leaves.*

Pro naši (posunutou) sekvenci je tak znám vzorec

*Number of ways to place n non-attacking composite pieces **semi-Rook+semi-Bishop** on an $n \times n$ chessboard*

$$a_n = \frac{1}{2^{n+1}} * \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} * j^n$$

který jde též vyjádřit ve tvaru

Alternative formula (V. Kotěšovec, 12.12.2011)

$$a_n = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} * \sum_{j=1}^n \frac{2^j}{j!} * S_2(n, n+1-j) = \sum_{j=1}^n \binom{n+1}{j} * \frac{j!}{2^j} * S_2(n, j)$$

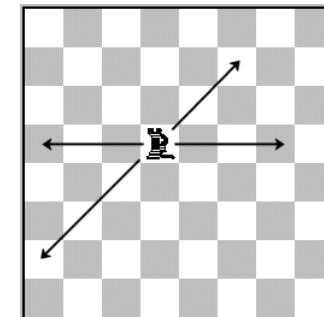
kde S_2 jsou Stirlingova čísla druhého druhu, $S_2 =$ [Stirling numbers of the second kind](#)

Proti sekvenci [A088789](#) je naše sekvence o 1 posunutá, takže má trochu jinou exponenciální generační funkci

$$Egf(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} * \frac{x+2}{1 + LambertW\left(-\frac{x}{2} * exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$$

kde nealgebraická funkce [LambertW](#) je řešením rovnice

$$z = LambertW(z) * e^{LambertW(z)}$$



Poznámka: [Exponenciální vytvořující funkce](#) se liší od normální (tzv. [ordinární vytvořující funkce](#)) tím, že všechny její koeficienty jsou děleny n-faktoriál.

$$Ogf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad Egf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

Zatímco v případě [ordinární vytvořující funkce](#) posuneme sekvenci o 1 doprava násobením x a o 1 doleva dělením x, v případě [exponenciální vytvořující funkce](#) získáme posun doleva derivováním a posun doprava integrováním podle x.

Zabýval jsem se asymptotickým chováním této posloupnosti a došel jsem k následujícímu vzorci

Theorem (V. Kotěšovec, 12.12.2011, extended 25.9.2012)

Asymptotic formula

$$a_n \sim b * q^n * (n - 1)! * \sqrt{n}$$

kde konstanta q je kořen rovnice
where constant q is the root of the equation

$$2q = e^{\frac{1}{2q}+1}$$

in closed form

$$q = \frac{1}{2 * LambertW\left(\frac{1}{e}\right)} \quad b = \frac{1}{2 * LambertW\left(\frac{1}{e}\right)} * \sqrt{\frac{1 + LambertW\left(\frac{1}{e}\right)}{2\pi}}$$

numericky

$$q = 1.7955607383343110683246114628708174210515377007964 \dots$$

$$b = 0.8099431005194540478880429211405367115103988169551 \dots$$

Funkce [LambertW](#) je řešením rovnice

$$z = LambertW(z) * e^{LambertW(z)}$$

Předchozí výraz se dá zapsat i ve tvaru

$$a_n \sim b\sqrt{2\pi} * \left(\frac{q}{e}\right)^n * n^n = c * d^n * n^n$$

kde nové konstanty c a d mají hodnotu

$$d = \frac{1}{2e * LambertW\left(\frac{1}{e}\right)} \quad c = \frac{\sqrt{1 + LambertW\left(\frac{1}{e}\right)}}{2 * LambertW\left(\frac{1}{e}\right)}$$

$$d = 0.66054988100780872848117793543941478081177875007819993\dots$$

$$c = 2.03022627660436210683587656150792063827135766446385548\dots$$

Jinými slovy, násobící pravděpodobnostní faktor semi-střelcové složky (oproti původní pouze semi-věžové) je zhruba 66% na každý přidaný kámen.

Důkaz (proof): Zjistíme, který z členů předchozí sumy je maximální. K tomu použijeme [Stirlingův vzorec](#), ze kterého plyne

$$f(x) = \frac{\binom{n+1}{x} x^n}{2^{n+1}} = \frac{(n+1)! x^n}{2^{n+1} x! (n-x+1)!} \sim \frac{(n+1)! x^n}{2^{n+1} x^x \sqrt{2\pi x} (n-x+1)^{n-x+1} \sqrt{2\pi(n-x+1)}} e^{x-n-x+1}$$

Na grafu vpravo vidíme, že Stirlingův vzorec je velmi přesný a oba grafy téměř splývají. Současně je též zřejmé, že tato funkce nabývá v intervalu $\langle 1, n \rangle$ maxima. K určení bodu, kde maximum nastává, stačí zjistit, kde je tečna rovnoběžná s osou x , tj. kde je derivace této funkce (podle x) rovna 0. Dostaneme

$$f'(x) = \frac{1}{\pi} 2^{-n-3} e^{n+1} (n+1)! (n-x+1)^{-n+x-\frac{5}{2}} x^{n-x-\frac{3}{2}} (2n^2 - 2nx + 2x(n-x+1) \log(n-x+1) + 2x(-n+x-1) \log(x) + n + 2x - 1) = 0$$

Nyní zavedeme substituci

$$x = p * n$$

a rovnice se zjednoduší na

$$-2n^2 p + 2n^2 + 2np + 2np(n(p-1) - 1) \log(np) + 2np(n(-p) + n + 1) \log(n(-p) + n + 1) + n - 1 = 0$$

a pokud řešíme předchozí rovnici pro n jdoucí do nekonečna, můžeme celou rovnici vydělit n^2 a určit limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 p + 2n^2 + 2np + 2np(n(p-1) - 1) \log(np) + 2np(n(-p) + n + 1) \log(n(-p) + n + 1) + n - 1}{n^2} = -2(p-1)(p \log(1-p) - p \log(p) + 1)$$

Kořen $p=1$ nás nezajímá a tak dostaneme pro hledané p rovnici

$$\left(\frac{p}{1-p}\right)^p = e$$

Odkud numericky dostáváme

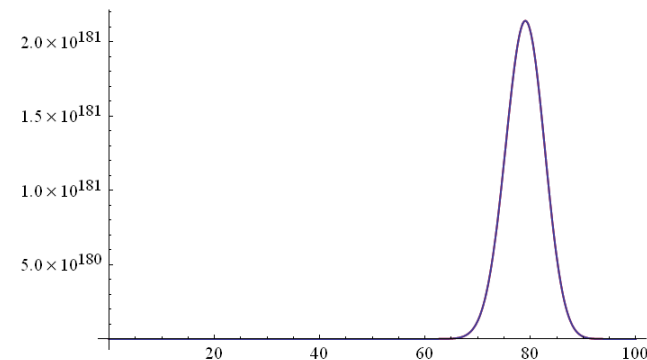
$$p = \frac{1}{1 + \text{LambertW}\left(\frac{1}{e}\right)} = 0.7821882942801999012202970759267447801819084 \dots$$

Nyní, aby byl důkaz korektní, musíme ještě dokázat jakou hodnotu má celková suma. K tomu použijeme stejnou metodu jako na str. 249 nebo na str. 261. Určitě platí, že součet musí být větší než samotná hodnota maxima a menší než plocha obdélníku s jednou stranou rovnou maximu a druhou počtu členů sumy, tedy

$$f(pn) \leq a_n = \frac{1}{2^{n+1}} * \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} * j^n \leq n * f(pn)$$

$$1 \leq \frac{a_n}{f(pn)} \leq n$$

```
n = 100;
Show[Plot[1/2^(n+1) * Binomial[n+1, j] * j^n,
{j, 0, n}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Red],
Plot[1/2^(n+1) * (n+1)! * x^n / x! / (n+1-x)!,
{x, 0, n}, PlotRange -> All]]
```



Když tuto nerovnost umocníme na $1/n$, dostaneme

$$1 \leq \left(\frac{a_n}{f(pn)} \right)^{\frac{1}{n}} \leq n^{1/n}$$

a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{f(pn)} \right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

Hledanou konstantu q určíme potom takto

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{(n-1)! \sqrt{n}} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(pn)}{(n-1)! \sqrt{n}} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} e (1-p)^{p-1} p^{1-p} = \frac{p}{2(1-p)}$$

$$q = \frac{1}{2 \operatorname{LambertW}\left(\frac{1}{e}\right)} = 1.7955607383343110683246114628708174210515377 \dots$$

Odtud už snadno odvodíme i přímou rovnici pro konstantu q

$$2q = e^{\frac{1}{2q}+1}$$

Konstanta b pak vychází (při použití podobného postupu jako v článku [Asymptotic of a sums of powers of binomial coefficients * x^k](#), Václav Kotěšovec, 20.9.2012)

$$b = \frac{q}{\sqrt{2\pi p}} = \frac{1}{2 * \operatorname{LambertW}\left(\frac{1}{e}\right)} * \sqrt{\frac{1 + \operatorname{LambertW}\left(\frac{1}{e}\right)}{2\pi}} = 0.8099431005194540478880429211405367115103988169551 \dots$$

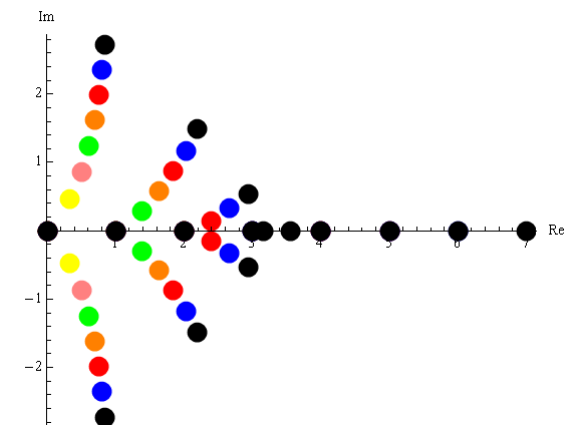
Přímá rovnice pro konstantu b je

$$\left(\sqrt{32\pi b^2 + 1} + 1 \right) * e^{1 + \frac{\sqrt{32\pi b^2 + 1} + 1}{16\pi b^2}} = 16\pi b^2$$

Poznámka: V programu Mathematica se tzv. [Lambert W function](#) (pomocí níž jde výše vypočtené konstanty také vyjádřit) označuje oficiálně jako **ProductLog**, ovšem lze použít i nezdokumentovanou identickou funkci LambertW. Shodné označení má tato funkce i v programu Maple. Tuto funkci zavedl v roce 1758 Johann Heinrich Lambert.

k	composite pieces semi-Rook+semi-Bishop , board n x n		
2	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 15.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{5n^3}{6} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} = \frac{1}{6}(n-1)n(3n^2 - 2n + 1)$		
	Generating function		
	$-\frac{x^2(x+3)(2x+1)}{(x-1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 15.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{5n^5}{6} + \frac{5n^4}{3} - \frac{11n^3}{6} + \frac{7n^2}{6} - \frac{n}{3} = \frac{1}{6}(n-2)(n-1)^2n(n^2 - n + 1)$		
	Generating function		
	$-\frac{2x^3(3x^3 + 21x^2 + 29x + 7)}{(x-1)^7}$		
4	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 15.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{5n^7}{12} + \frac{127n^6}{72} - \frac{509n^5}{120} + \frac{233n^4}{36} - \frac{51n^3}{8} + \frac{67n^2}{18} - \frac{29n}{30} = \frac{1}{360}(n-3)(n-2)(n-1)n(15n^4 - 60n^3 + 110n^2 - 117n + 58)$		
	Generating function		
	$-\frac{2x^4(12x^4 + 134x^3 + 371x^2 + 278x + 45)}{(x-1)^9}$		
5	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 15.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{1}{360}(n-4)(n-3)(n-2)^2(n-1)n(3n^4 - 14n^3 + 32n^2 - 43n + 28)$		
	Generating function		
	$-\frac{2x^5(60x^5 + 948x^4 + 4267x^3 + 6391x^2 + 3085x + 369)}{(x-1)^{11}}$		

roots in the complex plane



6	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 20.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{1}{45360}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(63n^6 - 630n^5 + 2835n^4 - 7651n^3 + 13314n^2 - 14033n + 6834)$		
	Generating function $\frac{4x^6(180x^6 + 3741x^5 + 24319x^4 + 59716x^3 + 56928x^2 + 19595x + 1841)}{(x-1)^{13}}$		
7	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 20.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{1}{45360}(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)^2(n-2)(n-1)n(9n^6 - 99n^5 + 501n^4 - 1549n^3 + 3123n^2 - 3845n + 2214)$		
	Generating function $\frac{16x^7(315x^7 + 8205x^6 + 71442x^5 + 256535x^4 + 400475x^3 + 268335x^2 + 70360x + 5413)}{(x-1)^{15}}$		
8	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 20.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{1}{5443200}(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(135n^8 - 2520n^7 + 21420n^6 - 110670n^5 + 387100n^4 - 946700n^3 + 1577069n^2 - 1620538n + 777048)$		
	Generating function $\frac{8x^8(5040x^8 + 159012x^7 + 1761228x^6 + 8584550x^5 + 19674295x^4 + 21471960x^3 + 10802758x^2 + 2259302x + 146655)}{(x-1)^{17}}$		

Zajímavý výsledek je, že kombinace jedné věžové a jedné střelcové linie dává vzorce bez kvazipolynomů (vzorce jsou vždy jen polynomy).

Obecně mají vzorce tvar

$$\binom{n}{k} * \left(n^k - \frac{(k-1)k}{3} * n^{k-1} + \frac{(k-1)k(k^2 - 2k + 3)}{18} * n^{k-2} - \frac{(k-2)(k-1)k(20k^3 - 60k^2 + 193k - 39)}{3240} * n^{k-3} + \dots \right)$$

k composite pieces **semi-Rook+semi-Bishop** on an $n \times n$ board

n	1 sR +sB	2 sR +sB	3 sR +sB	4 semi-Rook +semi-Bishop	5 semi-Rook +semi-Bishop	6 semi-Rook +semi-Bishop	7 semi-Rook +semi-Bishop	8 semi-Rook +semi-Bishop	9 semi-Rook +semi-Bishop	10 semi-Rook +semi-Bishop	11 semi-Rook +semi-Bishop	12 semi-Rook +semi-Bishop	summed over all $k \geq 0$
1	1												2
2	4	3	0	0									8
3	9	22	14	0	0	0	0	0	0				46
4	16	82	156	90	0	0	0	0	0	0	0	0	345
5	25	220	840	1366	738	0	0	0	0	0	0	0	3190
6	36	485	3100	9796	14288	7364	0	0	0	0	0	0	35070
7	49	938	9030	46816	129360	174112	86608	0	0	0	0	0	446914
8	64	1652	22344	172116	767424	1916776	2424880	1173240	0	0	0	0	6478497
9	81	2712	49056	525756	3442740	13682320	31572720	38019496	17990600	0	0	0	105285482
10	100	4215	98280	1398432	12632256	72989680	264792640	573192856	662999712	308055528	0	0	1896163700
11	121	6270	183150	3340392	39800376	314845168	1645959040	5543205976	11382380856	12732060496	5826331440	0	37488113286
12	144	8998	321860	7321182	111239040	1153887064	8203011696	39498613616	125028335872	245586813088	267036147392	120629547584	807255247537
13	169	12532	538824	14954082	282205638	3715549552	34451937520	224213845856	?	?	?	?	?
14	196	17017	865956	28800772	660900240	10766306980	126165925600	1065763707008	?	?	?	?	?
15	225	22610	1344070	52773448	1447149704	28575758640	412869291120	4390333572768	?	?	?	?	?
16	256	29480	2024400	92653288	2992289664	70420633712	1229665442720	16068926887728	?	?	?	?	?
17	289	37808	2970240	156745848	5888686440	162845692256	3380573260064	53243184900048	?	?	?	?	?
18	324	47787	4258704	256695648	11099649792	356368857728	8674524817920	162041117686448	?	?	?	?	?
19	361	59622	5982606	408483888	20143184400	743105221280	20961579991040	458200632898736	?	?	?	?	?
20	400	73530	8252460	633634914	35346143232	1484842550480	48048814516640	1215001732607936	?	?	?	?	?

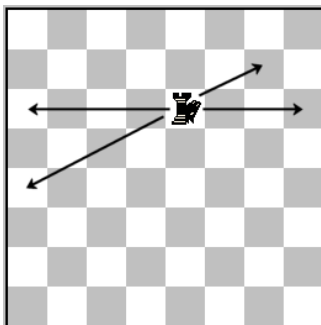
Table of values for n composite pieces semi-Rook+semi-Bishop on an $n \times n$ board see page 724.

semi-Rook + semi-Rider [r,s]

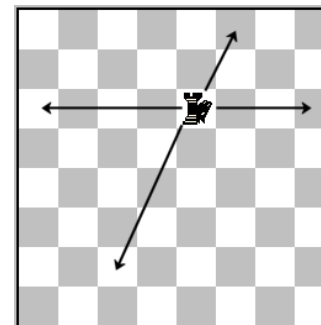
Z matematického hlediska vede cesta k dalším objevům přes jednodušší případy ke složitějším. V případě dam jde o kombinaci celkem 4 linií, což je už velmi složitý případ. Je třeba začít u jedné linie (semi-věž, semi-střelec, semi-tátoš, ...) a pokračovat s analýzou kombinací 2 linií. V předchozí kapitole jsme probrali kombinaci semi-věže a semi-střelce, kompletně je vyřešen i případ semi-střelec + semi-střelec (=střelec).

Další logicky následující kombinací dvou linií je semi-věž + semi-tátoš nebo obecně semi-věž + semi-rider [r,s]. Zde je zajímavé, že jiné počty neohrožujících se kamenů dostaneme pro kombinaci semi-věž + semi-rider [r,s] a jiné pro kombinaci semi-věž + semi-rider [s,r]. Je to dáno tím, že linie těchto kombinovaných kamenů spolu svírají jiný **úhel** (*different angle between lines*). Na diagramech je pohyblivost kombinací semi-věže a dvou různých typů semi-tátošů (zbývající možnosti linií jsou již jen symetrické a nepřinášejí nic nového).

semi-Rook + semi-rider [2,1]



semi-Rook + semi-rider [1,2]



n composite pieces **semi-Rook + semi-Rider [r,s]** on an $n \times n$ board

n	[1,1], A088789 (n+1)	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[2,1]	[2,2]	[2,3]	[2,4]	[2,5]
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	14	21	27	27	27	21	24	27	27	27
4	90	169	208	256	256	164	196	224	256	256
5	738	1596	2205	2625	3125	1563	2024	2420	2750	3125
6	7364	19600	29791	34596	40176	18832	25600	32768	36864	41472
7	86608	268164	432666	556549	634207	259193	378744	499488	596288	664048
8	1173240	4435236	7552272	10556001	11852352	4223632	6492304	8912512	11316496	12487168
9	17990600	79561580	153990656	208513112	255584169	76070235	125226752	183250432	230167232	269879184
10	308055528	1655513344	3295476576	4732889616	6240321451	1563167616	2710660096	4082234112	5309162496	6590815232
11	5826331440	36759983976	80235224280	121292697000	156361252230	34803217389	64495821312	101675149280	137204816000	168366571520
12	120629547584	922007084944	2189909641256	3461445366016	4377071727952	863359950656	1686985345600	2807995147712	3930163511296	4770014560256
13	2713659864832	24411070559680	?	?	?	22898323922635	?	?	?	?
14	65909241461760	?	?	?	?	?	?	?	?	?
15	1718947213795328	?	?	?	?	?	?	?	?	?
16	47912968352783232	?	?	?	?	?	?	?	?	?
17	1421417290991105664	?	?	?	?	?	?	?	?	?
18	44717945211445216640	?	?	?	?	?	?	?	?	?
19	1487040748881346835200	?	?	?	?	?	?	?	?	?
20	52117255681017313721088	?	?	?	?	?	?	?	?	?
n	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[2,1]	[2,2]	[2,3]	[2,4]	[2,5]

n composite pieces **semi-Rook** + **semi-Rider** [r,s] on an $n \times n$ board

n	[3,1]	[3,2]	[3,3]	[3,4]	[3,5]	[4,1]	[4,2]	[4,3]	[4,4]	[4,5]
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27
4	209	225	240	256	256	256	256	256	256	256
5	2185	2415	2645	2875	3125	2640	2760	2880	3000	3125
6	29133	32400	35937	39204	42768	34552	36864	39304	41616	44064
7	426477	496320	571050	637875	694575	551131	592669	636916	681352	725788
8	7402813	8838729	10407600	12117361	13144256	10379520	11182336	12042240	12960000	13824000
9	149429340	180477720	216000000	253125000	284765625	206342704	228363626	252435968	277432832	300259584
10	3216193403	4035806784	4981453344	5929616016	6956883693	4677403968	5263792704	5912248320	6596038656	7339040224
11	78023879268	100319121630	126751561560	154542303000	180982570710	119307362883	135570764775	153785010400	173379750000	194230418400
12	2112289159788	2756961368100	3543788106936	4444945756416	5187218454000	3385005121536	3865722228736	4410944000000	5008715616256	5629630775296
13	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

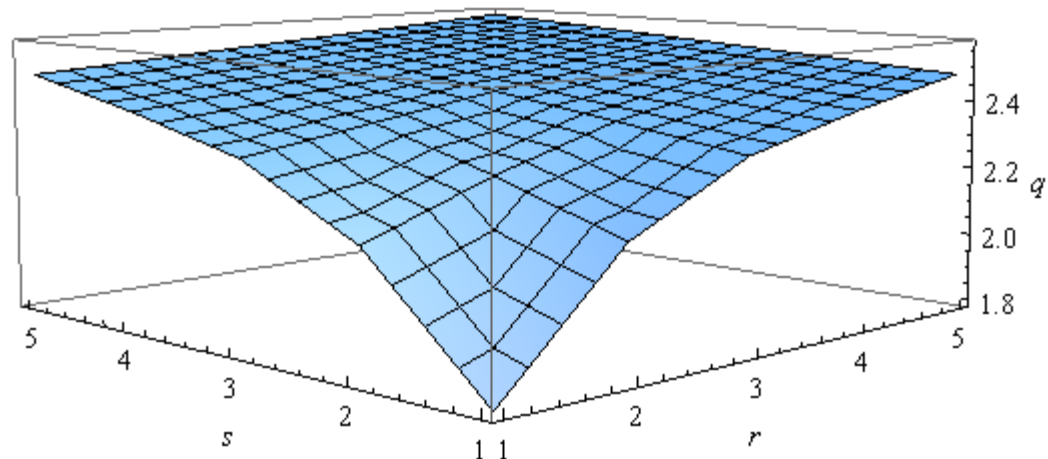
n	[5,1]	[5,2]	[5,3]	[5,4]	[5,5]
1	1	1	1	1	1
2	4	4	4	4	4
3	27	27	27	27	27
4	256	256	256	256	256
5	3125	3125	3125	3125	3125
6	40391	41616	42875	44100	45360
7	635355	664965	695835	726761	757687
8	11807953	12453841	13133056	13845841	14526784
9	253284345	268014285	283593393	299942181	316377369
10	6157184375	6520562500	6905250000	7310250000	7737809375
11	155061901916	167127701298	180093652760	193793285000	208131743750
12	4341715514773	4735537424641	5164260624125	5624486560000	6098220774800
13	?	?	?	?	?

Při předpokládaném asymptotickém průběhu

$$a_n \sim b * q^n * (n - 1)! * \sqrt{n}$$

vychází metodou lineární regrese tyto hodnoty (viz též graf na další straně)

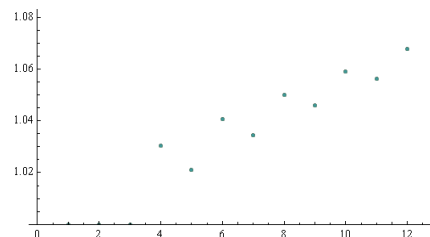
r	s	$b * q^n$ linear regression	exact value
1	1	$0.7657 * 1.79833^n$	$0.8099 * 1.79556^n$
1	2	$0.6685 * 2.15241^n$	
1	3	$0.6193 * 2.32820^n$	
1	4	$0.6306 * 2.41260^n$	
1	5	$0.5873 * 2.48313^n$	
2	1	$0.6644 * 2.14242^n$	
2	2	$0.6346 * 2.27505^n$	
2	3	$0.6064 * 2.38210^n$	
2	4	$0.6104 * 2.44645^n$	
2	5	$0.5740 * 2.50486^n$	
3	1	$0.6208 * 2.32121^n$	
3	2	$0.6094 * 2.37776^n$	
3	3	$0.5962 * 2.43297^n$	
3	4	$0.5923 * 2.47929^n$	
3	5	$0.5622 * 2.52591^n$	
4	1	$0.6315 * 2.40851^n$	
4	2	$0.6116 * 2.44319^n$	
4	3	$0.5924 * 2.47802^n$	
4	4	$0.5761 * 2.51115^n$	
4	5	$0.5518 * 2.54633^n$	
5	1	$0.5870 * 2.48114^n$	
5	2	$0.5755 * 2.50246^n$	
5	3	$0.5642 * 2.52390^n$	
5	4	$0.5545 * 2.54476^n$	
5	5	$0.5426 * 2.56616^n$	



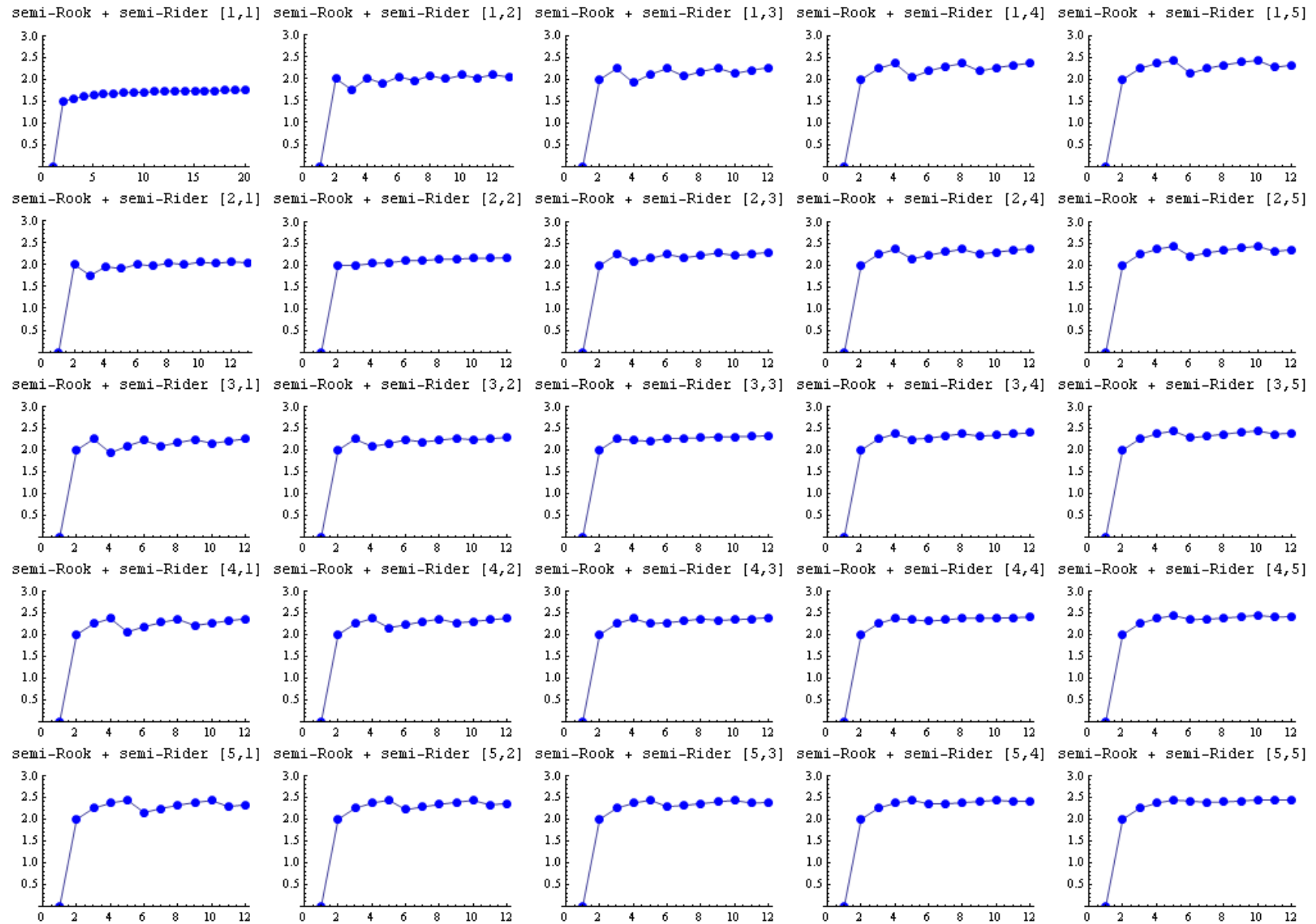
Graf zobrazuje hodnoty odhadů konstant q podle hodnot $[r,s]$.

Pokud půjde r nebo s do nekonečna, je limitní hodnota q rovna $e = 2.71828\dots$

Otevřenou otázkou zůstává jestli budou hodnoty konstant q shodné pro $[r,s]$ a $[s,r]$. Hodnoty počtu pozic se sice liší, je však možné, že limitně obě konstanty splynou. Podle horního grafu se zdá, že by to tak mohlo být (argumentem pro je i to, že počet dostupných polí je pro oba typy kamenů asymptoticky blízký), graf podílu počtu pozic nenapadajících se kamenů semi-Rook+semi-rider[1,2] / semi-Rook+semi-rider[2,1] už ale tak přesvědčivý není.



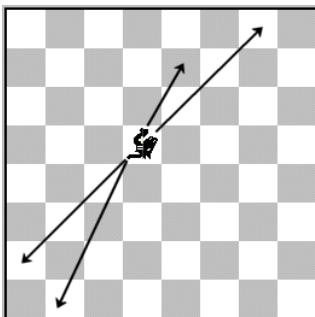
$$q \sim \frac{a_n}{n a_{n-1}}$$



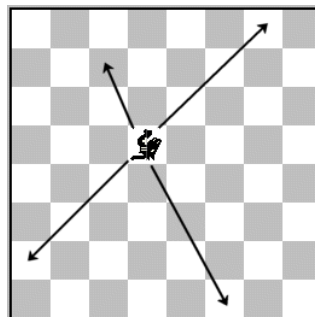
semi-Bishop + semi-Nightrider / semi-střelec + semi-tátoš

Podobně jako v případě semi-věže kombinované se semi-tátošem, tak i v případě semi-střelce kombinovaného se semi-tátošem existují 2 neidentické kombinace různých úhlů linií. Počty pozic jsou zcela odlišné (a je otázka, zda se asymptoticky budou k sobě přibližovat?).

semi-Bishop + semi-rider [1,2]

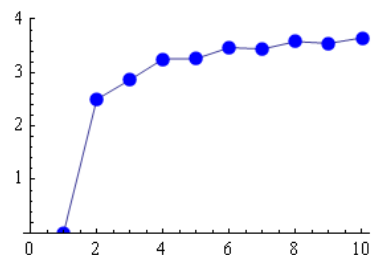
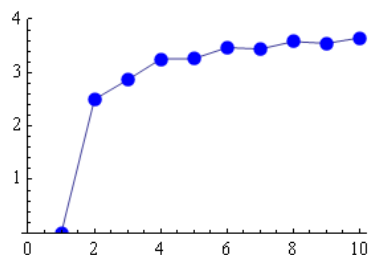


semi-Bishop + semi-rider [1,-2]



$$\frac{a_n}{n a_{n-1}}$$

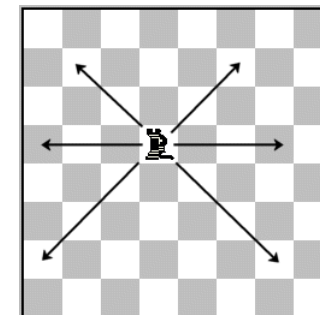
semi-Bishop + semi-Nightrider[1,2] semi-Bishop + semi-Nightrider[1,-2]



n	n composite pieces semi-Bishop+semi-Nightrider on an n x n board	
	[1,2]	[1,-2]
1	1	1
2	5	5
3	43	51
4	560	769
5	9134	15345
6	190138	381065
7	4581634	11323991
8	131269244	391861841
9	4191833774	15476988033
10	153090178661	687029386845
11	?	?

Bishop + semi-Rook / Střelec + semi-věž

k	composite pieces Bishop + semi-Rook , board n x n		
2	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 15.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{7n^3}{6} + n^2 - \frac{n}{3} = \frac{1}{6}(n-1)n(3n^2 - 4n + 2)$		
	Generating function		
	$-\frac{x^2(x+2)(3x+1)}{(x-1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 15.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{7n^5}{6} + \frac{41n^4}{12} - \frac{65n^3}{12} + \frac{53n^2}{12} - \frac{17n}{12} + \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$		
	Generating function		
	$-\frac{x^3(17x^5 + 83x^4 + 172x^3 + 144x^2 + 59x + 5)}{(x-1)^7(x+1)^2}$		
4	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 15.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{7n^7}{12} + \frac{259n^6}{72} - \frac{773n^5}{60} + \frac{2099n^4}{72} - \frac{1106n^3}{27} + \frac{63n^2}{2} - \frac{10651n}{1080} + \left(\frac{n^3}{2} - 4n^2 + \frac{19n}{2} - \frac{23}{4}\right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{9} - \frac{16}{9}\right) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left(\frac{4n}{9} - \frac{10}{9}\right) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$		
	Generating function		
	$-\frac{x^4(151x^{12} + 1265x^{11} + 5952x^{10} + 17006x^9 + 33957x^8 + 48967x^7 + 52935x^6 + 42577x^5 + 25256x^4 + 10524x^3 + 2877x^2 + 429x + 24)}{(x-1)^9(x+1)^4(x^2+x+1)^2}$		

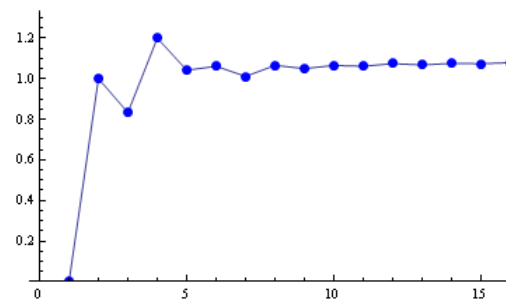


(denominátory vycházejí shodně jako pro dámy)

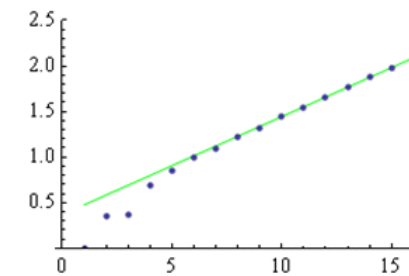
k pieces **Bishop+semi-Rook** board *n* x *n*

n	2 B+sR	3 B+sR	4 B+sR	5 B+sR
1				
2	2	0	0	
3	17	5	0	0
4	68	84	24	0
5	190	524	501	125
6	430	2120	4404	3504
7	847	6561	24021	40313
8	1512	16968	97214	284920
9	2508	38512	318892	1452846
10	3930	79200	896816	5887868
11	5885	150725	2239376	20064370
12	8492	269500	5090054	59787696
13	11882	457740	10716223	159917923
14	16198	744744	21175090	391632000
15	21595	1168209	39661573	890840067
16	28240	1775760	70971974	1903739128
17	36312	2626496	122082352	3855677212
18	46002	3792768	202889934	7453997196
19	57513	5361957	327106374	13834236640
20	71060	7438500	513370692	24767479408
21	86870	10145900	786555219	42941804489
22	105182	13629000	1179357138	72345923652
23	126247	18056225	1734128349	118771639133

<i>n</i>	<i>n</i> composite pieces Bishop + semi-Rook on an <i>n</i> x <i>n</i> board, A185056
1	1
2	2
3	5
4	24
5	125
6	796
7	5635
8	48042
9	453947
10	4834872
11	56433455
12	727449366
13	10099103269
14	152097526360
15	2449915208271
16	42295879864692
17	?



$$\frac{a_n}{n a_{n-1}}$$

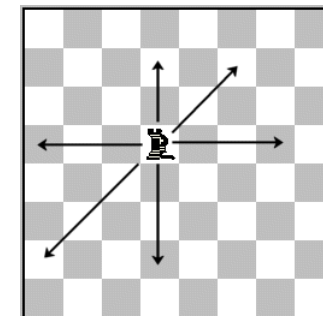


$$\log\left(\frac{a_n}{n!} * \sqrt{n}\right)$$

q ~ 1.11

semi-Queen = Rook + semi-Bishop / **semi-dáma** = věž + semi-střelec

k	semi-Queens, board n x n		
2	Explicit formula, A103220 (n-1)	<i>Václav Kotěšovec, 15.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{4n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{6} = \frac{1}{6}(n-1)n(3n^2 - 5n + 1)$		
	Generating function		
			$-\frac{x^2(3x^2 + 8x + 1)}{(x-1)^5}$
3	Explicit formula, A202654	<i>Václav Kotěšovec, 15.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{4n^5}{3} + \frac{25n^4}{6} - \frac{37n^3}{6} + \frac{25n^2}{6} - n = \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n(n^3 - 5n^2 + 8n - 3)$		
	Generating function		
			$-\frac{x^3(17x^3 + 69x^2 + 31x + 3)}{(x-1)^7}$
4	Explicit formula, A202655	<i>Václav Kotěšovec, 15.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{2n^7}{3} + \frac{41n^6}{9} - \frac{257n^5}{15} + \frac{341n^4}{9} - \frac{97n^3}{2} + \frac{2341n^2}{72} - \frac{87n}{10} + \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$		
	Generating function		
			$-\frac{x^4(151x^6 + 1022x^5 + 2233x^4 + 2132x^3 + 1001x^2 + 174x + 7)}{(x-1)^9(x+1)^2}$
5	Explicit formula, A202656	<i>Václav Kotěšovec, 15.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^{10}}{120} - \frac{2n^9}{9} + \frac{95n^8}{36} - \frac{183n^7}{10} + \frac{14663n^6}{180} - \frac{1201n^5}{5} + \frac{16753n^4}{36} - \frac{25364n^3}{45} + \frac{68293n^2}{180} - \frac{12781n}{120} + \left(\frac{n^3}{2} - 6n^2 + \frac{39n}{2} - \frac{61}{4}\right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$		
	Generating function		
			$-\frac{x^5(1899x^9 + 16515x^8 + 60512x^7 + 116784x^6 + 137646x^5 + 98222x^4 + 41688x^3 + 9608x^2 + 943x + 23)}{(x-1)^{11}(x+1)^4}$



k	semi-Queens, board n x n		
	Explicit formula, A202657	<i>Václav Kotěšovec, 16.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^{12}}{720} - \frac{n^{11}}{18} + \frac{73n^{10}}{72} - \frac{72247n^9}{6480} + \frac{5909n^8}{72} - \frac{320653n^7}{756} + \frac{112795n^6}{72} - \frac{8892919n^5}{2160} + \frac{8086231n^4}{1080} - \frac{5740271n^3}{648} + \frac{2598425n^2}{432} - \frac{13161367n}{7560}$ $+ \left(\frac{n^5}{4} - \frac{77n^4}{12} + \frac{757n^3}{12} - \frac{7007n^2}{24} + \frac{14581n}{24} - \frac{1677}{4} \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{64n}{9} - \frac{88}{9} \right) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{3} - \frac{52}{9} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$		
6	Recurrence		
	$a_n = a_{n-23} - 5a_{n-22} + 4a_{n-21} + 18a_{n-20} - 30a_{n-19} - 24a_{n-18} + 61a_{n-17} + 31a_{n-16} - 74a_{n-15} - 70a_{n-14} + 92a_{n-13} + 104a_{n-12} - 104a_{n-11} - 92a_{n-10} + 70a_{n-9} + 74a_{n-8} - 31a_{n-7} - 61a_{n-6} + 24a_{n-5} + 30a_{n-4} - 18a_{n-3} - 4a_{n-2} + 5a_{n-1}$		
	Generating function		
	$-x^6(31709x^{16} + 377288x^{15} + 2265487x^{14} + 8441426x^{13} + 22166758x^{12} + 43217858x^{11} + 64805639x^{10} + 75943200x^9 + 70077016x^8 + 50738668x^7 + 28477437x^6 + 12074418x^5 + 3711058x^4 + 771370x^3 + 96173x^2 + 5692x + 83) / ((x-1)^{13}(x+1)^6(x^2+x+1)^2)$		

Obecně mají vzorce pro semi-dámy tvar

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{4}{3} * \frac{n^{2k-1}}{(k-2)!} + \frac{k * (16k - 23)}{18} * \frac{n^{2k-2}}{(k-2)!} + \dots$$

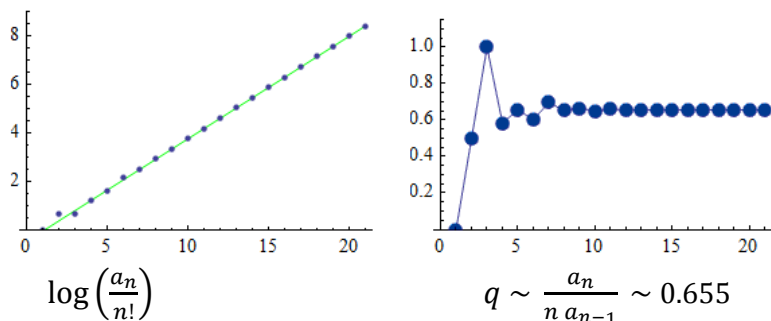
Faktory v denominátoru generační funkce jsou sice shodné jako pro dámy, ale nové členy se objevují vždy až s vyšším k . Např. člen x^2+x+1 , který je v denominátoru pro **dámy** už od $k = 4$, se objeví v případě semi-dam až od $k = 6$.

k semi-Queens board n x n

n	2 sQ	3 sQ	4 sQ	5 sQ	6 semi-Queens
1					
2	1	0	0		
3	13	3	0	0	0
4	58	52	7	0	0
5	170	370	223	23	0
6	395	1620	2429	1104	83
7	791	5285	15045	16945	6107
8	1428	14168	66122	141696	126376
9	2388	33012	230074	810746	1377328
10	3765	69240	675798	3568352	9984758
11	5665	133815	1745318	12948318	54399330
12	8206	242220	4073993	40514560	239675936
13	11518	415558	8764753	112720393	895773148
14	15743	681772	17630795	285073712	2935757573
15	21035	1076985	33522531	666143975	8641608781
16	27560	1646960	60756612	1456288512	23259768860
17	35496	2448680	105666148	3007576740	58039719112
18	45033	3552048	177293340	5913372864	135720432200
19	56373	5041707	288246972	11138305068	299995484600
20	69730	7018980	455749371	20202100224	631220344328

n	n semi-Queens on an $n \times n$ normal board A099152	n Queens on an $n \times n$ normal board A000170	n semi-Queens on an $n \times n$ toroidal board (for $2n+1=$ A006717)	n Queens on an $n \times n$ toroidal board A051906 (for $2n+1=$ A007705)
1	1	1	1	1
2	1	0	0	0
3	3	0	3	0
4	7	2	0	0
5	23	10	15	10
6	83	4	0	0
7	405	40	133	28
8	2113	92	0	0
9	12657	352	2025	0
10	82297	724	0	0
11	596483	2680	37851	88
12	4698655	14200	0	0
13	40071743	73712	1030367	4524
14	367854835	365596	0	0
15	3622508685	2279184	36362925	0
16	38027715185	14772512	0	0
17	424060091065	95815104	1606008513	140692
18	5006620130753	666090624	0	0
19	62395131973755	4968057848	87656896891	820496
20	818456924866815	39029188884	0	0
21	11271715349614463	314666222712	5778121715415	0
22	?	2691008701644	0	0
23	?	24233937684440	452794797220965	128850048
24	?	227514171973736	0	0
25	?	2207893435808352	41609568918940625	1957725000
26	?	22317699616364044	0	0
27	?	?	?	0
28	?	?	0	0
29	?	?	?	605917055356
30	?	?	0	0
31	?	?	?	13404947681712
	<i>Hodnoty pro $n=19-21$ vypočetl Wolfram Schubert</i>	<i>see chapter 1.1.1 for more</i>	<i>Hodnotu pro $n=25$ vypočetl v roce 2006 Yuh-Pyng Shieh</i>	<i>see chapter 1.3.1 for more</i>

n semi-Queens on an $n \times n$ normal board



Kámen **semi-Queen** (semi-dáma, Rook+semi-Rider [1,1]) vymysleli matematici v (zatím marné) snaze najít řešení alespoň zjednodušeného problému n -dam, kdy tyto kameny mají pohyblivost věže a ze střelce využívají jen jednu ze dvou diagonál. Viz OEIS [A099152](#)

Number of solutions to a modified version of the n -queens problem, in which two queens do not attack each other if they are in the same northwest-southeast diagonal.

Z matematického hlediska je ale ještě zajímavější počet rozmístění n neohrožujících se semi-dam na **prstencové** šachovnici, který má blízko k úlohám z abstraktní algebry. Jelikož pro sudá n jsou hodnoty nulové, v OEIS najdeme sekvenci [A006717](#) = *Toroidal semi-queens on a $(2n+1) \times (2n+1)$ board*, s odkazem na článek N. J. Cavenagh and I. M. Wanless, [On the number of transversals in Cayley tables of cyclic groups](#) (Discrete Applied Mathematics 158, 2010). Pro počet rozmístění t_n je zatím nejlepší **dokázaný** asymptotický odhad (McKay, 2006)

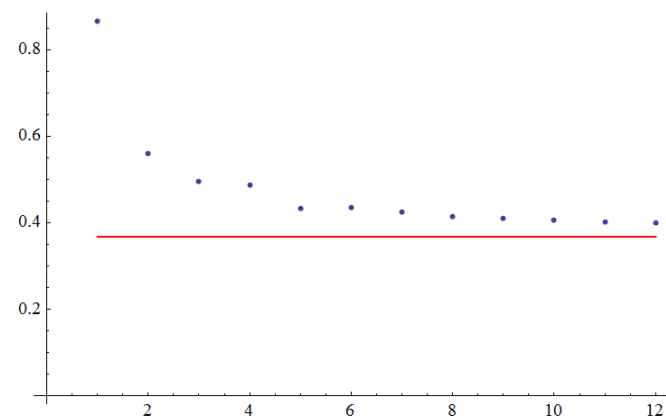
$$3.246^n < t_n < \left(\sqrt{\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})}e^{\sqrt{3}/6}\right)^n * \sqrt{n} * n! \sim 0.6135^n \sqrt{n} * n!$$

Tento odhad je ale (zejména z levé strany) velmi slabý. I. Vardi přišel v roce 1991 s **hypotézou**, která (při přepisu do mého značení) zní

$$t_n \sim q^n * n!, \text{ kde } 0 < q < 1$$

Ve sborníku "Surveys in Combinatorics 2011", str.403-437, mě zaujal článek, Ian M. Wanless: [Transversals in latin squares: a survey](#), ve kterém zejména na str. 417 autor shrnul nejnovější výsledky relevantní k našemu případu. Cituje zde články, v nichž autoři došli k numerickým odhadům (v mém značení) konstanty q . C. Cooper, "Deriving the number of good permutations" (Cybernetics and Systems Analysis 5, 2000), $t_n \sim 0.39^n * n!$, N. Yu. Kuznetsov (Кузнецов Николай Юрьевич), "Applying fast simulation to find the number of good permutations" (Cybernetics and Systems Analysis, Кибернетика и системный анализ, 43, 2007) a "Estimating the number of good permutations by a modified fast simulation method" (Cybernetics and Systems Analysis 44, 2008), $t_n \sim 0.37^n * n!$. Viz graf vpravo. Hypotézu autora posledního článku, že $q=1/e$ však nesdílím, myslím, že půjde sice o numericky blízkou, ale specifickou konstantu. *I think that limit 0.37... is specific constant, not 1/e (=conjecture by Kuznetsov).*

```
Show[ListPlot[Table[1/(2n)*Sqrt[sQr[[2n+1]]/sQr[[2n-1]]], {n, 1, 12}], Plot[1/E, {n, 1, 12}, PlotStyle -> Red]]
```

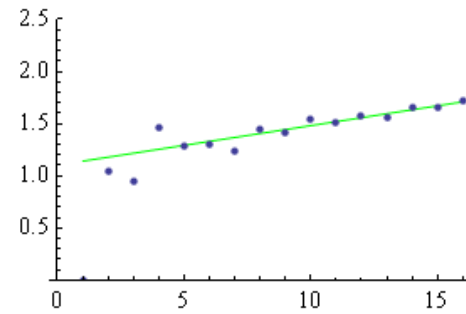


$$q \sim \frac{1}{2n} \sqrt{\frac{t_{2n+1}}{t_{2n-1}}} \sim 0.37 \dots$$

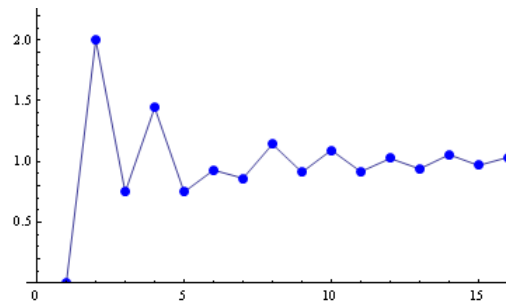
Jelikož každá konfigurace ohrožujících se semi-dam na normální šachovnici je takovou konfigurací i na prstencové šachovnici (ne nutně obráceně), je počet neohrožujících se semi-dam na normální šachovnici určitě větší nebo roven než na prstencové šachovnici (tomu odpovídá i moje vypočtená hodnota pro **normální** šachovnici $q \sim 0.65$, větší než pro prstencovou).

Nightrider + semi-Rook / Tátoš + semi-věž

n	n composite pieces Nightrider + semi-Rook on an $n \times n$ board
1	1
2	4
3	9
4	52
5	195
6	1088
7	6575
8	60140
9	493943
10	5406020
11	54531207
12	671606852
13	8209455393
14	121547788848
15	1765984519213
16	29268855643138
17	?

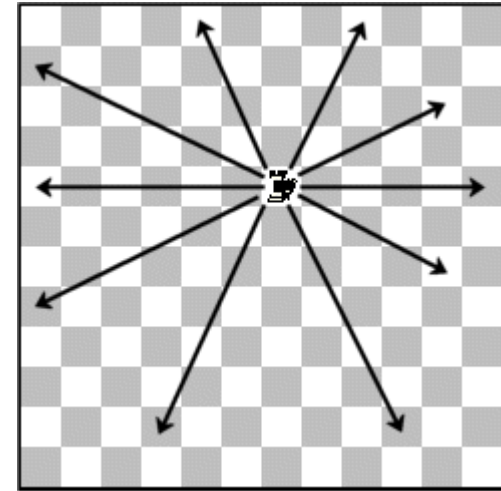


$$\log\left(\frac{a_n}{n!} * \sqrt{n}\right)$$



$$\frac{a_n}{n a_{n-1}}$$

$$q \sim 1.03$$



Bishop + Nightrider / Střelec + Tátoš

V kapitolách 12.3 a 12.4 byly probírány kombinace liniových kamenů, kdy vždy jednou složkou byla pohyblivost věže. Následuje příklad nepravouhlé kombinace liniových kamenů, [1,1] rider + [1,2] rider.

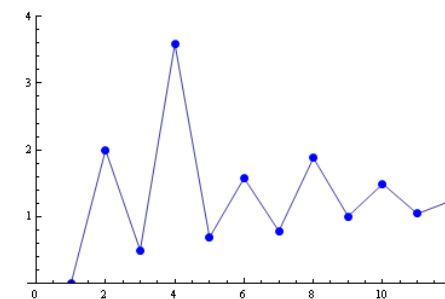
k	composite pieces Bishop+Nightrider , board n x n		
2	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 15.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{3n^3}{2} + 2n^2 - n + n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$		
	Recurrence		
	$a_n = a_{n-7} - 3a_{n-6} + a_{n-5} + 5a_{n-4} - 5a_{n-3} - a_{n-2} + 3a_{n-1}$		
	Generating function		
$-\frac{2x^2(3x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 3x + 2)}{(x-1)^5(x+1)^2}$			
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 15.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{3n^5}{2} + \frac{3037n^4}{480} - \frac{59731n^3}{3600} + \frac{3003n^2}{100} - \frac{132709n}{7200} + \left(n^3 - \frac{41n^2}{8} + \frac{133n}{10} - \frac{2559}{80} \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left(\frac{4n}{3} - \frac{44}{3} \right) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left(\frac{4}{3} - \frac{4n}{3} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left(n + \frac{5}{2} \right) \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left(n - \frac{7}{2} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \left(\frac{16n}{25} - 16 \right) \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left(-\frac{8n}{25} - \frac{8}{25} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{25} - \frac{264}{25} \right) \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \left(\frac{152}{25} - \frac{16n}{25} \right) \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + 24 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + (4n - 12) \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + \frac{128}{5} \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{5} - \frac{32}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor + \frac{64}{5} \left\lfloor \frac{n+2}{10} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{5} - \frac{96}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor$		
	Recurrence		
	$a_n = a_{n-39} - 3a_{n-38} + 5a_{n-37} - 7a_{n-36} + 7a_{n-35} - 5a_{n-34} + a_{n-33} + 5a_{n-32} - 10a_{n-31} + 14a_{n-30} - 16a_{n-29} + 16a_{n-28} - 15a_{n-27} + 13a_{n-26} - 9a_{n-25} + 3a_{n-24} + 5a_{n-23} - 15a_{n-22} + 23a_{n-21} - 29a_{n-20} + 29a_{n-19} - 23a_{n-18} + 15a_{n-17} - 5a_{n-16} - 3a_{n-15} + 9a_{n-14} - 13a_{n-13} + 15a_{n-12} - 16a_{n-11} + 16a_{n-10} - 14a_{n-9} + 10a_{n-8} - 5a_{n-7} - a_{n-6} + 5a_{n-5} - 7a_{n-4} + 7a_{n-3} - 5a_{n-2} + 3a_{n-1}$		
	Generating function		
$\frac{-2x^3(53x^{35} + 117x^{34} + 479x^{33} + 875x^{32} + 2318x^{31} + 3430x^{30} + 7302x^{29} + 9178x^{28} + 16860x^{27} + 18816x^{26} + 30870x^{25} + 31522x^{24} + 47245x^{23} + 44809x^{22} + 62155x^{21} + 55163x^{20} + 71092x^{19} + 59248x^{18} + 70936x^{17} + 55536x^{16} + 61817x^{15} + 45285x^{14} + 46877x^{13} + 31945x^{12} + 30548x^{11} + 19140x^{10} + 16638x^9 + 9342x^8 + 7212x^7 + 3440x^6 + 2292x^5 + 844x^4 + 463x^3 + 107x^2 + 43x + 3)}{((x-1)^7(x+1)^4(x^2+1)^2(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^4-x^3+x^2-x+1)^2(x^4+x^3+x^2+x+1)^2)}$			

k pieces **Bishop+Nightrider** board $n \times n$

n	2 B+N	3 B+N
1		
2	4	0
3	18	6
4	68	104
5	180	496
6	408	1936
7	798	5702
8	1432	14784
9	2376	33316
10	3740	69160
11	5610	131882
12	8124	237896
13	11388	405604
14	15568	664752
15	20790	1047066
16	27248	1601352
17	35088	2377712
18	44532	3450920
19	55746	4895526
20	68980	6820184
21	84420	9330856
22	102344	12579024
23	122958	16709918
24	146568	21927816
25	173400	28425628
26	203788	36471672
27	237978	46316378
28	276332	58304008
29	319116	72752660

30	366720	90095888
31	419430	110730650
32	477664	135194080
33	541728	163974336
34	612068	197727272
35	689010	237045158
36	773028	282718952
37	864468	335458576
38	963832	396207736
39	1071486	465809182
40	1187960	545377472
41	1313640	635903340
42	1449084	738692032
43	1594698	854898834
44	1751068	986040160
45	1918620	1133453244
46	2097968	1298887224
47	2289558	1483879434
48	2494032	1690434408
49	2711856	1920308216
50	2943700	2175784872
51	3190050	2458859590
52	3451604	2772120232
53	3728868	3117821640
54	4022568	3498881600
55	4333230	3917836110
56	4661608	4377959872
57	5008248	4882092740
58	5373932	5433894112
59	5759226	6036531042
60	6164940	6694076640
n	2 B+N	3 B+N

n	n composite pieces Bishop+Nightrider on an $n \times n$ board
1	1
2	4
3	6
4	86
5	298
6	2824
7	15576
8	234450
9	2126294
10	31730472
11	365253566
12	5456584348
13	?



$$\frac{a_n}{n a_{n-1}}$$

13.5) Composite pieces Rider + Leaper - Kombinované kameny liniový kámen + skokan

V kapitolách 12.1 a 12.2 byly probírány kombinace liniových kamenů a skokanů, kdy jedna z liniových složek byla vždy věž. V této kapitole se zabývám i kombinací nepravoúhlých liniových kamenů (střelců a tátošů) a bodových kamenů (skokanů).

Pro počet pozic neohrožujících se k kombinovaných kamenů: libovolný skokan $[x,y]$ + liniový kámen $[r,s]$ s pohyblivostí na L různých linií na šachovnici $n \times n$ jsou první dva členy vzorců ve tvaru jako pro samotný liniový kámen

$$\frac{n^{2k}}{k!} - \frac{L * (3s - r)}{6s^2} * \frac{n^{2k-1}}{(k-2)!} + \dots$$

Jelikož u skokanů je koeficient u n^{2k-1} vždy roven 0, je v kombinaci skokan + liniový kámen vždy rozhodujícím kamenem liniový kámen. Vypočtené vzorce pro kombinované kameny toto tvrzení potvrzují.

Rider	r	s	L	$3s - r$	$6s^2$	$-\frac{L * (3s - r)}{6s^2}$	$\frac{n^{2k-1}}{(k-2)!}$
Rook	0	1	2	3	6	- 6/6	- 1
Bishop	1	1	2	2	6	- 4/6	- 2/3
Nightrider	1	2	4	5	24	- 20/24	- 5/6

composite pieces Rider + Leaper	$\frac{n^{2k-1}}{(k-2)!}$	same as for
Rook + Knight	- 1	= Rook
Bishop + Knight	- 2/3	= Bishop
Bishop + Wazir	- 2/3	
Nightrider + Wazir	- 5/6	= Nightrider
Nightrider + Fers	- 5/6	

Pro počet pozic neohrožujících se n kombinovaných kamenů typu liniový kámen + skokan na šachovnici $n \times n$ mám hypotézu pro asymptotické chování

Conjecture:
Number of ways to place n non-attacking composite pieces **rider** $[r,s]$ + **leaper** $[x,y]$, leaper with access to m squares, on an $n \times n$ chessboard, $0 < r \leq s$, is asymptotic to

$$\text{asymptotics for rider} * e^{-\frac{m}{2}}$$

Liší se tedy pouze v násobící konstantě a nejdůležitější mocninná konstanta q je shodná jako pro počet rozestavení n samotných liniových kamenů (bez složky skokana). Pro věž byla hypotéza dokázána v kapitole 12.1 (for rooks proved in chapter 12.1). Pro důkladné ověření této hypotézy není zatím k dispozici dostatek vypočtených hodnot.

Empress (císařovna) je kombinovaný kámen s pohyblivostí věže a jezdce. *An empress moves like a rook and a knight.*

k	Empress, board n x n		
2	Explicit formula	<i>Christian Poisson, 1990</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^4}{2} - n^3 - \frac{7n^2}{2} + 12n - 8 = \frac{1}{2}(n-1)(n^3 - n^2 - 8n + 16)$		
	Generating function		
	$\frac{2x^2(4x^3 - 9x^2 - 1)}{(x-1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 4$
	$\frac{n^6}{6} - n^5 - \frac{11n^4}{6} + 26n^3 - \frac{154n^2}{3} - 24n + 100$		
	Generating function		
	$\frac{2x^3(2x^7 - 16x^6 + 32x^5 + 6x^4 - 37x^3 - 35x^2 - 11x - 1)}{(x-1)^7}$		
4	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 6$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{n^7}{2} + \frac{5n^6}{12} + 20n^5 - \frac{2447n^4}{24} + \frac{97n^3}{2} + \frac{1579n^2}{2} - 1804n + 880$		
	Generating function		
	$-\frac{8x^4(x^{10} - 7x^9 + 14x^8 - x^7 + 18x^6 - 139x^5 + 95x^4 + 129x^3 + 89x^2 + 10x + 1)}{(x-1)^9}$		
5	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 8$
	$\frac{n^{10}}{120} - \frac{n^9}{6} + \frac{3n^8}{4} + \frac{22n^7}{3} - \frac{10687n^6}{120} + \frac{1445n^5}{6} + \frac{5537n^4}{6} - 6920n^3 + \frac{186982n^2}{15} + 2536n - 18956$		
	Generating function		
	$\frac{4x^5(3x^{13} - 21x^{12} + 52x^{11} - 89x^{10} + 420x^9 - 1217x^8 + 556x^7 + 1582x^6 + 1909x^5 - 4745x^4 - 4496x^3 - 1365x^2 - 144x - 5)}{(x-1)^{11}}$		

k **Empresses** board $n \times n$

n	2 empresses	3 empresses	4 empresses	5 empresses
1				
2	2	0	0	
3	10	2	0	0
4	48	36	8	0
5	152	280	152	20
6	370	1348	1792	796
7	762	4734	12360	13116
8	1400	13348	59248	121780
9	2368	32176	219544	761920
10	3762	69060	674040	3586284
11	5690	135598	1795552	13661128
12	8272	248164	4283320	44252404
13	11640	429048	9356928	126184680
14	15938	707716	19024864	324702700
15	21322	1122190	36444520	767970064
16	27960	1720548	66392112	1692831348
17	36032	2562544	115862680	3515273344
18	45730	3721348	194822008	6935178220
19	57258	5285406	317133984	13087496520
20	70832	7360420	501688600	23754911284

For n nonattacking empresses on $n \times n$ board, see page 636 and [A137774](#).

Princezna je kombinovaný kámen s pohyblivostí střelce a jezdce. *A princess moves like a bishop and a knight.*

k	Princess, board $n \times n$		
2	Explicit formula	<i>Christian Poisson, 1990</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{2n^3}{3} - \frac{7n^2}{2} + \frac{35n}{3} - 8 = \frac{1}{6}(n-1)(3n^3 - n^2 - 22n + 48)$		
	Generating function		
	$\frac{2x^2(4x^3 - 9x^2 + x - 2)}{(x-1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 4$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{2n^5}{3} - \frac{11n^4}{4} + 21n^3 - \frac{56n^2}{3} - \frac{286n}{3} + \frac{1153}{8} - \frac{(-1)^n}{8}$		
	Generating function		
	$\frac{2x^3(6x^8 - 32x^7 + 36x^6 + 44x^5 - 59x^4 - 34x^3 - 44x^2 - 34x - 3)}{(x-1)^7(x+1)}$		
4	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 6$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{n^7}{3} - \frac{7n^6}{9} + \frac{493n^5}{30} - \frac{2765n^4}{72} - \frac{325n^3}{2} + \frac{51841n^2}{72} - \frac{151n}{10} - \frac{3931}{2} + (-1)^n * \left(-\frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \right)$		
	Generating function		
	$\frac{-2x^4(24x^{13} - 100x^{12} - 5x^{11} + 361x^{10} - 49x^9 - 427x^8 - 386x^7 - 428x^6 + 1094x^5 + 2884x^4 + 2455x^3 + 995x^2 + 259x + 43)}{(x-1)^9(x+1)^3}$		
5	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 8$
	$\frac{n^{10}}{120} - \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{72} + \frac{332n^7}{45} - \frac{2701n^6}{72} - \frac{2891n^5}{36} + \frac{155557n^4}{144} - \frac{271133n^3}{180} - \frac{2707183n^2}{360} + \frac{378719n}{24} + \frac{57147}{4} + (-1)^n * \left(-\frac{1}{16}n^4 + \frac{7}{12}n^3 - \frac{13}{8}n^2 + \frac{1}{24}n + \frac{5}{4} \right)$		
	Generating function		
	$\frac{2x^4(66x^{19} - 248x^{18} - 370x^{17} + 1644x^{16} + 623x^{15} - 3170x^{14} + 537x^{13} - 2924x^{12} - 8865x^{11} + 22170x^{10} + 44993x^9 - 19120x^8 - 127299x^7 - 172542x^6 - 133109x^5 - 63676x^4 - 18957x^3 - 3266x^2 - 307x - 20)}{(x-1)^{11}(x+1)^5}$		

k Princesses board $n \times n$

n	2 princesses	3 princesses	4 princesses	5 princesses
1				
2	4	0	0	
3	18	6	0	0
4	68	104	86	40
5	192	628	1034	854
6	440	2464	7162	11256
7	874	7566	35646	96510
8	1568	19520	138090	587312
9	2608	44248	442122	2753770
10	4092	90824	1222238	10560608
11	6130	172418	3011078	34598258
12	8844	307352	6763078	99919312
13	12368	520284	14085706	260421218
14	16848	843504	27553058	623471696
15	22442	1318358	51120926	1389969898
16	29320	1996784	90660866	2916589328
17	37664	2942976	154636410	5809210842
18	47668	4235160	254941574	11058651680
19	59538	5967498	407928966	20233034210
20	73492	8252104	635650142	35743795568

n	A245011 - n Princesses on an $n \times n$ board
1	1
2	4
3	6
4	86
5	854
6	9556
7	146168
8	2660326
9	56083228
10	1349544632
11	36786865968
12	1117327217782
13	?

Kombinované kameny střelec a vezír. *Composite pieces bishop ([1,1] rider) and wazir ([0,1] leaper).*

k	composite piece Bishop+Wazir , board n x n		
2	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{2n^3}{3} - \frac{3n^2}{2} + \frac{5n}{3} = \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n(3n+5)$		
	Generating function		
	$\frac{2(x-7)x^3}{(x-1)^5}$		
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 2$
	$\frac{n^6}{6} - \frac{2n^5}{3} - \frac{3n^4}{4} + \frac{17n^3}{3} - \frac{14n^2}{3} - 2n + \frac{1}{8} - \frac{(-1)^n}{8}$		
	Generating function		
	$\frac{2x^3(x^6 - 6x^5 + 18x^4 - 18x^3 - 81x^2 - 32x - 2)}{(x-1)^7(x+1)}$		
4	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 3$
	$\frac{n^8}{24} - \frac{n^7}{3} + \frac{2n^6}{9} + \frac{143n^5}{30} - \frac{1013n^4}{72} + \frac{23n^3}{6} + \frac{1705n^2}{72} - \frac{323n}{30} - \frac{19}{2} + (-1)^n * \left(-\frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \right)$		
	Generating function		
	$\frac{2x^4(2x^{10} - 13x^9 + 25x^8 + 16x^7 - 242x^6 + 342x^5 + 2064x^4 + 2728x^3 + 1464x^2 + 319x + 15)}{(x-1)^9(x+1)^3}$		
5	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 4$
	$\frac{n^{10}}{120} - \frac{n^9}{9} + \frac{25n^8}{72} + \frac{77n^7}{45} - \frac{331n^6}{24} + \frac{4487n^5}{180} + \frac{1519n^4}{48} - \frac{26033n^3}{180} + \frac{34507n^2}{360} + \frac{1679n}{40} + \frac{35}{2} + (-1)^n * \left(-\frac{1}{16}n^4 + \frac{7}{12}n^3 - \frac{15}{8}n^2 + \frac{55}{24}n - \frac{3}{2} \right)$		
	Generating function		
	$\frac{2x^5(3x^{14} - 22x^{13} + 26x^{12} + 150x^{11} - 529x^{10} + 476x^9 + 4774x^8 - 10788x^7 - 75215x^6 - 144590x^5 - 145650x^4 - 82514x^3 - 25891x^2 - 3864x - 206)}{(x-1)^{11}(x+1)^5}$		

k **Bishop+Wazir** board $n \times n$

n	2 bishop+wazir	3 bishop+wazir	4 bishop+wazir	5 bishop+wazir
1				
2	0	0	0	
3	14	4	0	0
4	68	88	30	0
5	200	634	818	412
6	460	2664	7476	10200
7	910	8304	40556	108862
8	1624	21360	160198	712080
9	2688	48022	511158	3393760
10	4200	97680	1397604	12938312
11	6270	183868	3399112	41791010
12	9020	325320	7539758	118721728
13	12584	547154	15525514	304441988
14	17108	882168	30064724	717983576
15	22750	1372264	55290772	1579159078
16	29680	2069984	97304470	3273987984
17	38080	3040174	164859310	6452251912
18	48144	4361760	270209732	12168448264
19	60078	6129652	430149712	22080669386
20	74100	8456760	667264318	38724597248

n	n composite pieces Bishop+Wazir on an $n \times n$ board
1	1
2	0
3	4
4	30
5	412
6	6548
7	124668
8	2719988
9	67809372
10	1892344428
11	58698438466
12	?

Kombinované kameny tátoš a vezír. *Composite pieces nightrider ([1,2] rider) and wazir ([0,1] leaper).*

k	composite piece Nightrider+Wazir , board $n \times n$		
2	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{5n^3}{6} - n^2 + \frac{4n}{3} + n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$		
	Recurrence		
	$a_n = a_{n-7} - 3a_{n-6} + a_{n-5} + 5a_{n-4} - 5a_{n-3} - a_{n-2} + 3a_{n-1}$		
	Generating function		
$-\frac{2x^2(5x^3 + 13x^2 + 5x + 1)}{(x-1)^5(x+1)^2}$			
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 2$
	$\begin{aligned} & \frac{n^6}{6} - \frac{5n^5}{6} + \frac{431n^4}{1440} + \frac{5123n^3}{1200} - \frac{899n^2}{450} - \frac{56909n}{7200} + 4 + \left(n^3 - \frac{25n^2}{8} + \frac{14n}{5} - \frac{759}{80} \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{8}{9} \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \frac{4}{9} \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \left(\frac{16n}{25} - 16 \right) \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \\ & + \left(-\frac{8n}{25} - \frac{8}{25} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{25} - \frac{264}{25} \right) \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \left(\frac{152}{25} - \frac{16n}{25} \right) \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + \frac{128}{5} \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{5} - \frac{32}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor + \frac{64}{5} \left\lfloor \frac{n+2}{10} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{5} - \frac{96}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor \end{aligned}$		
	Recurrence		
	$a_n = a_{n-31} - 2a_{n-30} + a_{n-28} + 2a_{n-26} - 2a_{n-25} - a_{n-23} + 3a_{n-20} - 2a_{n-18} - 4a_{n-16} + 4a_{n-15} + 2a_{n-13} - 3a_{n-11} + a_{n-8} + 2a_{n-6} - 2a_{n-5} - a_{n-3} + 2a_{n-1}$		
	Generating function		
$(2*x^3*(x^{29}-4*x^{28}-3*x^{27}-13*x^{26}-141*x^{25}-431*x^{24}-1181*x^{23}-2053*x^{22}-3536*x^{21}-4641*x^{20}-6468*x^{19}-7406*x^{18}-9444*x^{17}-10180*x^{16}-12124*x^{15}-12108*x^{14}-13000*x^{13}-11660*x^{12}-11294*x^{11}-9280*x^{10}-8413*x^9-6502*x^8-5441*x^7-3727*x^6-2607*x^5-1373*x^4-691*x^3-215*x^2-58*x-7))/((x-1)^7*(x+1)^4*(x^2+1)*(x^2+x+1)*(x^4-x^3+x^2-x+1)^2*(x^4+x^3+x^2+x+1)^2)$			

k Nightrider+Wazir board $n \times n$

n	2 nightrider+wazir	3 nightrider+wazir
1		
2	2	0
3	16	14
4	72	144
5	200	718
6	458	2804
7	896	8210
8	1600	20888
9	2640	46166
10	4130	93856
11	6160	175670
12	8872	311332
13	12376	522730
14	16842	844584
15	22400	1313554
16	29248	1985512
17	37536	2917374
18	47490	4193364
19	59280	5897002
20	73160	8149128
21	89320	11067042
22	108042	14817536
23	129536	19559834
24	154112	25517020
25	182000	32899138
26	213538	41997016
27	248976	53081322
28	288680	66523104
29	332920	82664330

30	382090	101969812
31	436480	124864286
32	496512	151920968
33	562496	183659866
34	634882	220778176
35	714000	263904378
36	800328	313876404
37	894216	371445326
38	996170	437607568
39	1106560	513251790
40	1225920	599551728
41	1354640	697549410
42	1493282	808615820
43	1642256	933963198
44	1802152	1075180608
45	1973400	1233668014
46	2156618	1411254600
47	2352256	1609546494
48	2560960	1830636044
49	2783200	2076354854
50	3019650	2349082536
51	3270800	2650896254
52	3537352	2984488112
53	3819816	3352202038
54	4118922	3757068708
55	4435200	4201720618
56	4769408	4689554360
57	5122096	5223513766
58	5494050	5807389656
59	5885840	6444460830
60	6298280	7138941724
n	2 nightrider+wazir	3 nightrider+wazir

n	n composite pieces Nightrider+Wazir on an $n \times n$ board
1	1
2	2
3	14
4	161
5	1383
6	23578
7	334968
8	7280162
9	149282992
10	4077694470
11	104127918260
12	?

Kombinované kameny tátoš a fers. *Composite pieces nightrider ([1,2] rider) and fers ([1,1] leaper).*

k	composite piece Nightrider+Fers , board $n \times n$		
2	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 1$
	$\frac{n^4}{2} - \frac{5n^3}{6} - n^2 + \frac{10n}{3} - 2 + n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$		
	Recurrence		
	$a_n = a_{n-7} - 3a_{n-6} + a_{n-5} + 5a_{n-4} - 5a_{n-3} - a_{n-2} + 3a_{n-1}$		
	Generating function		
$\frac{2(2x^6 - 8x^5 - 16x^4 + x^3 - x^2 - 3x + 1)}{(x-1)^5(x+1)^2}$			
3	Explicit formula	<i>Václav Kotěšovec, 12.12.2011</i>	$n \geq 2$
	$\begin{aligned} & \frac{n^6}{6} - \frac{5n^5}{6} + \frac{431n^4}{1440} + \frac{7523n^3}{1200} - \frac{6749n^2}{450} + \frac{79891n}{7200} - 4 + \left(n^3 - \frac{25n^2}{8} + \frac{34n}{5} - \frac{919}{80} \right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{8}{9} \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \frac{4}{9} \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + \left(\frac{16n}{25} - 16 \right) \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \\ & + \left(-\frac{8n}{25} - \frac{8}{25} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{25} - \frac{264}{25} \right) \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor + \left(\frac{152}{25} - \frac{16n}{25} \right) \left\lfloor \frac{n+3}{5} \right\rfloor + \frac{128}{5} \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{5} - \frac{32}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor + \frac{64}{5} \left\lfloor \frac{n+2}{10} \right\rfloor + \left(\frac{8n}{5} - \frac{96}{5} \right) \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor \end{aligned}$		
	Recurrence		
	$a_n = a_{n-31} - 2a_{n-30} + a_{n-28} + 2a_{n-26} - 2a_{n-25} - a_{n-23} + 3a_{n-20} - 2a_{n-18} - 4a_{n-16} + 4a_{n-15} + 2a_{n-13} - 3a_{n-11} + a_{n-8} + 2a_{n-6} - 2a_{n-5} - a_{n-3} + 2a_{n-1}$		
	Generating function		
$(2x^3(x^{29}+7x^{27}+3x^{26}-137x^{25}-429x^{24}-1199x^{23}-2061x^{22}-3548x^{21}-4639x^{20}-6468x^{19}-7414x^{18}-9464x^{17}-10212x^{16}-12132x^{15}-12112x^{14}-12964x^{13}-11644x^{12}-11270x^{11}-9284x^{10}-8413x^9-6498x^8-5431x^7-3711x^6-2603x^5-1371x^4-709x^3-223x^2-70x-5))/((x-1)^7(x+1)^4(x^2+1)(x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)^2(x^4+x^3+x^2+x+1)^2)$			

k Nightrider+Fers board $n \times n$

n	2 nightrider+fers	3 nightrider+fers
1		
2	4	0
3	20	10
4	78	160
5	208	766
6	468	2940
7	908	8462
8	1614	21344
9	2656	46870
10	4148	94928
11	6180	177170
12	8894	313412
13	12400	525466
14	16868	848160
15	22428	1318062
16	29278	1991168
17	37568	2924286
18	47524	4201780
19	59316	5907046
20	73198	8161080
21	89360	11081042
22	108084	14833896
23	129580	19578710
24	154158	25538756
25	182048	32923906
26	213588	42025192
27	249028	53113094
28	288734	66558880
29	332976	82704314

30	382148	102014444
31	436540	124913786
32	496574	151975808
33	562560	183720282
34	634948	220844672
35	714068	263977206
36	800398	313956100
37	894288	371532158
38	996244	437702104
39	1106636	513354314
40	1225998	599662840
41	1354720	697669410
42	1493364	808745340
43	1642340	934102554
44	1802238	1075330464
45	1973488	1233828702
46	2156708	1411426816
47	2352348	1609730586
48	2561054	1830832740
49	2783296	2076564518
50	3019748	2349305928
51	3270900	2651133754
52	3537454	2984740512
53	3819920	3352469734
54	4119028	3757352524
55	4435308	4202020966
56	4769518	4689872096
57	5122208	5223849318
58	5494164	5807743912
59	5885956	6444834234
60	6298398	7139335196
n	2 nightrider+fers	3 nightrider+fers

n	n composite pieces Nightrider+Fers on an $n \times n$ board
1	1
2	4
3	10
4	179
5	1604
6	29148
7	382306
8	8480000
9	166690076
10	4599354356
11	113873719104
12	?

14) Maximal number of non-attacking pieces - Maximální počty neohrožujících se kamenů na šachovnici $n \times n$

Tabulka shrnuje maximální počet neohrožujících se kamenů stejných hodnot na šachovnici $n \times n$ ($n > 1$)

non-attacking	neohrožujících se	normal chessboard $n \times n$			toroidal chessboard $n \times n$		
		even n	odd n	comment	even n	odd n	comment
Kings	králů	$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^2$		(known in 19th century) Kings Problem	$\left\lfloor n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\rfloor$		Watkins + Ricci, 2002 A189889
Queens	dam	n		$n > 3$, Pauls 1874 Ahrens 1901	$n, n-1, n-2$ or 0		Pólya 1918, Monsky 1989 see chapter 1.3.1, A085801
Rooks	věží	n		<i>trivial</i>	n		<i>trivial</i>
Bishops	střelců	$2n-2$		$n > 1$, Dudeney 1917 Bishops Problem	n		<i>easy</i>
Knights	jezdců	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n^2+1}{2}$	$n > 2$, Dudeney 1917 Knights Problem , A030978	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{(n-2)^2+1}{2}$	$n \geq 11$, (conjecture VK)
Nightriders	tátošů	$2n \leq m \leq 3n-2$		$n > 3$ A190394	n		Kotěšovec 2011
Zebras	zeber	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n^2+1}{2}$	$n > 9$, (conjecture VK)	$\frac{n^2}{2}$	$2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \frac{(n-3)(n-4)}{2}$	$n \geq 27$, (conjecture VK)
Amazons	amazonek	n		$n > 9$	$n, n-1, n-2$ or 0		Monsky 1989 (for $n > 10$ same as for queens)
Wazirs	vezírů	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n^2+1}{2}$	Jelliss 2004	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	Kotěšovec 2011
Ferses	fersů	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$	Kotěšovec 2011	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	Kotěšovec 2011
		sudé n	liché n	komentář	sudé n	liché n	komentář
		normální šachovnice $n \times n$			prstencová šachovnice $n \times n$		

E. Pauls byl první, kdo dokázal, že problém n dam má řešení pro libovolné $n > 3$ (first proof that n non-attacking queens can always be placed on an $n \times n$ board for $n > 3$ was by E. Pauls). Maximální počty pro střelce a jezce na normální šachovnici uvádí Henry Dudeney, "Amusements in Mathematics" (1917), str. 96. Maximální počet králů na normální šachovnici uvádí např. Joseph S. Madachy v knize "Mathematics on vacation" (1966), v kapitole "Chessboard placement problems" na str. 39 (ale tento výsledek byl znám již v 19. století). Důkaz vzorce pro maximální počet neohrožujících se králů, které se vejdou na prstencovou šachovnici $n \times n$, viz kniha John Watkins: [Across the Board: The Mathematics of Chessboard Problems](#) (2004), str. 194.

14.1) normal chessboard - normální šachovnice

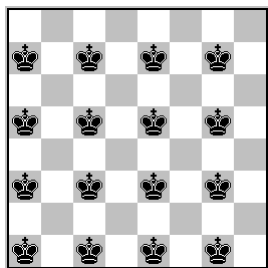
Maximal number of non-attacking / Maximální počet neohrožujících se											
normal chessboard	Kings	Queens	Rooks	Bishops	Knights	Nightriders	Amazons	Wazirs	Ferses	Zebras	Grasshoppers
1 x 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2 x 2	1	1	2	2	4	4	1	2	2	4	4
3 x 3	4	2	3	4	5	5	1	5	6	9	6
4 x 4	4	4	4	6	8	8	2	8	8	12	8
5 x 5	9	5	5	8	13	10	4	13	15	13	10
6 x 6	9	6	6	10	18	16	4	18	18	20	14
7 x 7	16	7	7	12	25	17	5	25	28	28	18
8 x 8	16	8	8	14	32	20	6	32	32	36	22
9 x 9	25	9	9	16	41	21	8	41	45	44	27
10 x 10	25	10	10	18	50	24	10	50	50	50	>= 33
11 x 11	36	11	11	20	61	26	11	61	66	61	>= 37
12 x 12	36	12	12	22	72	32	12	72	72	72*	>= 46
13 x 13	49	13	13	24	85	33	13	85	91	85*	>= 50
14 x 14	49	14	14	26	98	36	14	98	98	98*	>= 61
15 x 15	64	15	15	28	113	39	15	113	120	113*	>= 65
normální šachovnice	králů	dam	věží	střelců	jezdců	tátošů	amazonek	vezírů	fersů	zeber	cvrčků

* - best found to date and an improvement seems unlikely, but an exhaustive search has not been performed

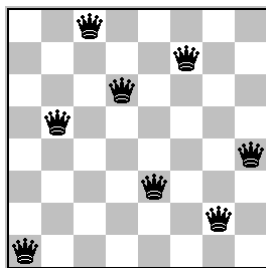
Karl Fabel publikoval v knize [Schach und Zahl](#) (1966) na str.62 dvě zajímavé pozice: 22 neohrožujících se **cvrčků** (viz [diagram](#)) a 20 neohrožujících se **tátošů** (viz [diagram](#)). Počítačem jsem nyní dokázal, že obě tyto hodnoty jsou (na šachovnici 8 x 8) opravdu maximální (*proven optima*)! Co se týče tátošů, ke stejnému výsledku došel i [George Jelliss](#) (*The Games and Puzzles Journal, Issue 37, January-February 2005, Chess-Piece Arrangement Problems*), který uvádí hodnoty 1,4,5,8 (do šachovnice 4x4 shodné jako pro jezdce), 10, 16, 17, 20. Tyto hodnoty jsem ověřil počítačem a vypočítal další (např. na šachovnici 16x16 se vejde 42 nenapadajících se tátošů). Obecný vzorec zatím není znám, odvodil jsem však nerovnost určující meze pro tato maxima (viz str. 758). *Open problems: general formula for maximal number of non-attacking nightriders and grasshoppers.*

George Jelliss publikoval na své internetové stránce i hodnoty pro [zebrý](#) (*The Games and Puzzles Journal, Issue 34, July-August 2004*), ale jen do $n=6$ (s tím, že autorem je T. W. Marlow). I zde jsem doplnil nové hodnoty. Pro větší n budou pravděpodobné maximální počty stejné jako pro jezdce.

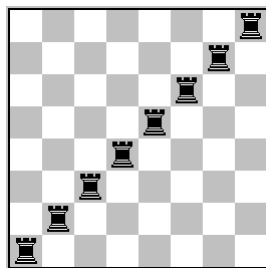
Příklady pozic - Examples



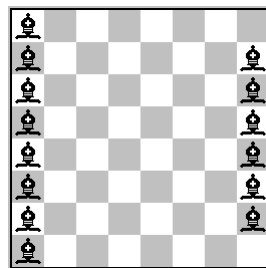
16 kings, 8x8



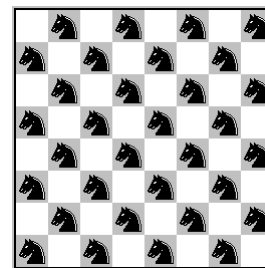
8 queens, 8x8



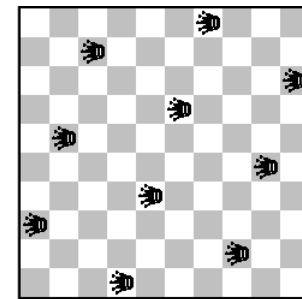
8 rooks, 8x8



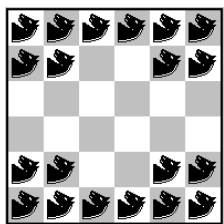
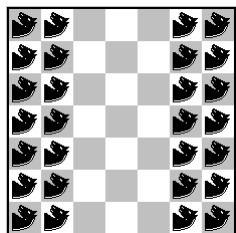
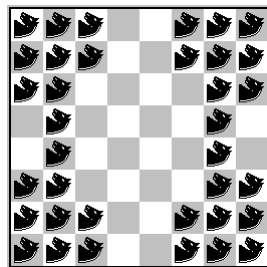
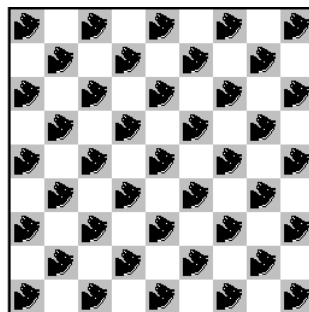
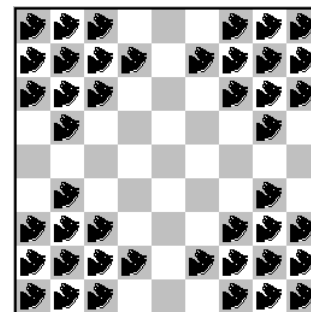
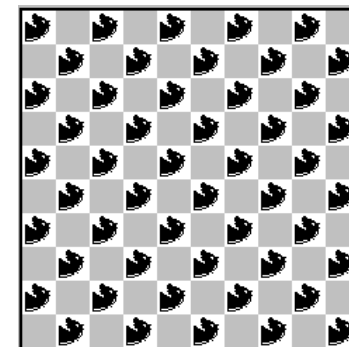
14 bishops, 8x8



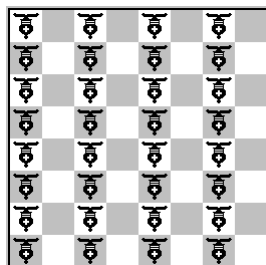
32 knights, 8x8



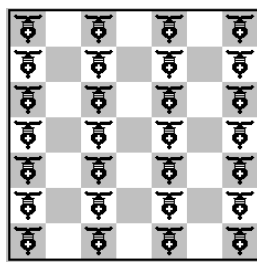
10 amazons, 10x10

20 zebras, 6x6
T. W. Marlow (2004)28 zebras, 7x7
(proven optima)36 zebras, 8x8
V. Kotěšovec (2011)
(proven optima!)41 zebras, 9x9
(not maximal)44 zebras, 9x9
V. Kotěšovec (2011)
(proven optima!)50 zebras, 10x10
(proven optima)

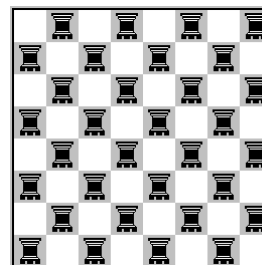
Konstrukce černých kamenů na černých polích je téměř vždy tou s maximálním počtem kamenů. Pro zebra ale až do šachovnice 9x9 existují atypická rozstavení s větším počtem těchto kamenů (např. na 8x8 je 36 více než 32 zebra na všech černých polích). Konstrukce 44 zebra na 9x9 je jediná možná. Od šachovnice 10x10 je však i pro zebra konstrukce s kameny na černých polích už tou maximální (počítačem dokázáno ještě i pro $n=11$). S 50 zebra na 10x10 existují jen 2 pozice (na diagramu je druhá z nich - s kameny pouze na bílých polích).



32 ferses, 8x8

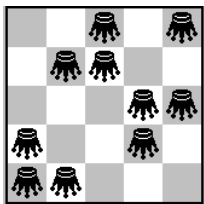


28 ferses, 7x7

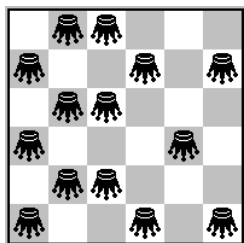


32 wazirs, 8x8

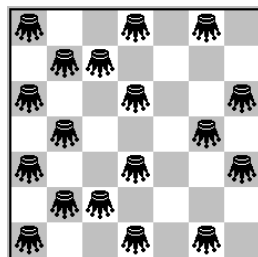
Grasshopper - moves along Queen-lines over another unit of either colour to the square immediately beyond that unit. A capture may be made on arrival, but the hurdle is not affected.



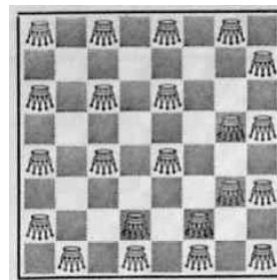
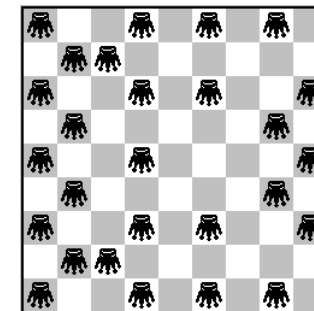
10 grasshoppers, 5x5



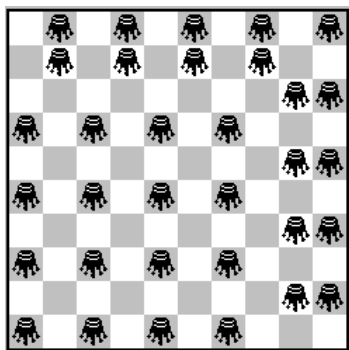
14 grasshoppers, 6x6



18 grasshoppers, 7x7

22 grasshoppers, 8x8
Karl Fabel (1966)
(*proven optima!*)27 grasshoppers, 9x9
V. Kotěšovec (4/2011)
(*proven optima!*)

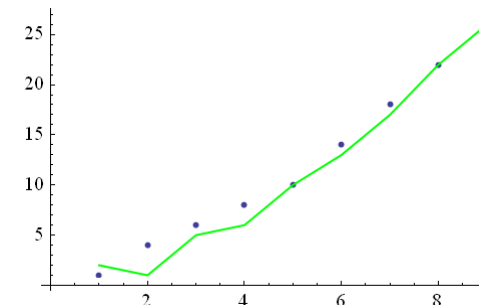
Počítačem jsem dokázal, že **na šachovnici 8x8 lze umístit maximálně 22 neohrožujících se cvrčků** a existuje celkem 74 takových pozic. První takovou pozici zkonstruoval Karl Fabel a najdeme ji v knize [Schach und Zahl](#) (1966) na str.62. Nyní je potvrzeno, že jde o absolutní rekord, na šachovnici 8x8 neexistuje pozice s 23 (nebo více) nenapadajícími se cvrčky. Jinak je zřejmé, že pro šachovnici $n \times n$ se maximum pohybuje někde mezi $n^2/4$ a $n^2/2$ (např. každá pozice nenapadajících se králů jistě vyhovuje i pro cvrčky, na druhé straně počet cvrčků na každé řadě nebo sloupci nemůže přesáhnout $n/2+1$), ale přesný vzorec bude těžké objevit.

33 grasshoppers, 10x10
(*non-proven optima*)

Pomocí konstrukce na diagramu jsem odvodil ještě následující přesnější odhad maxima m . Pro $n > 4$

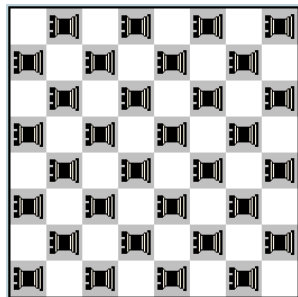
$$m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} - 1 \right\rfloor^2 + 4 \left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1 \right) + 1$$

Numericky je tento odhad zanesen v tabulce na str. 752 a graf ukazuje, že pro zatím vypočtené hodnoty je tento dolní odhad velmi těsný.

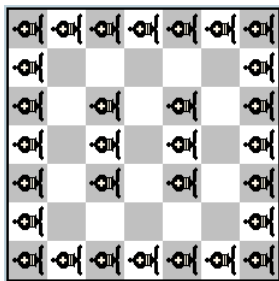


Hodnota 33 pro $n=10$ sice není dokázána počítačem (s jistotou) jako absolutní rekord, ale předpokládám, že už nebude překonána. Počítačem mám v tomto případě pro maximum m dokázanou alespoň nerovnost $33 \leq m \leq 36$.

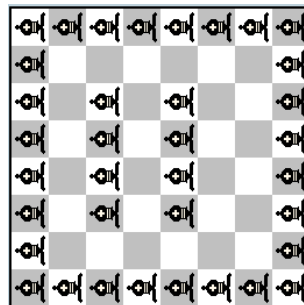
Rookhopper - moves like a Grasshopper but only on Rook-lines. *Bishophopper* - moves like a Grasshopper but only on Bishop-lines.



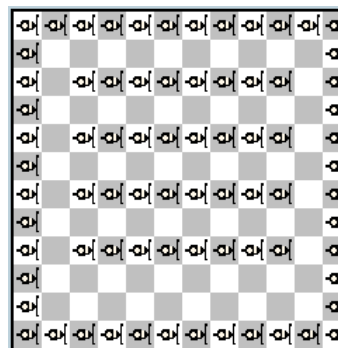
32 rookhoppers, 8x8
(proven optima)



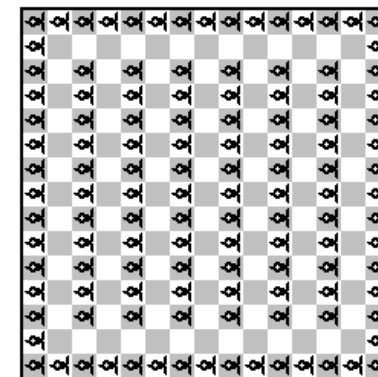
30 bishophoppers, 7x7
(proven optima)



36 bishophoppers, 8x8
(proven optima)



76 bishophoppers, 12x12
(proven optima)



122 bishophoppers, 15x15
(proven optima!)

Jednotlivé cvrčkové složky se nazývají **věžový cvrček** a **střelcový cvrček**. Pro věžového cvrčka dostáváme od $n > 3$ shodné výsledky jako pro vezíra.

Maximal number m of non-attacking rookhoppers on an $n \times n$ normal chessboard, for $n > 3$ is

$$m = \left\lfloor \frac{n^2 + 1}{2} \right\rfloor$$

(hranaté závorky znamenají celou část)

Zajímavější je střelcový cvrček, kde existují optimálnější konfigurace než pro ferse. Konstrukce na diagramech (s kameny na okrajích šachovnice) dává pro maximální počet nenapadajících se střelcových cvrčků na normální šachovnici $n \times n$ následující vzorec.

Maximal number m of non-attacking bishophoppers on an $n \times n$ normal chessboard, for $n > 2$ is (V. Kotěšovec, 13.3.2012)

$$m = 4n - 4 + (n - 4) \left\lfloor \frac{n - 3}{2} \right\rfloor$$

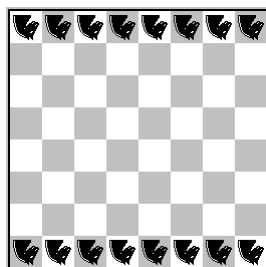
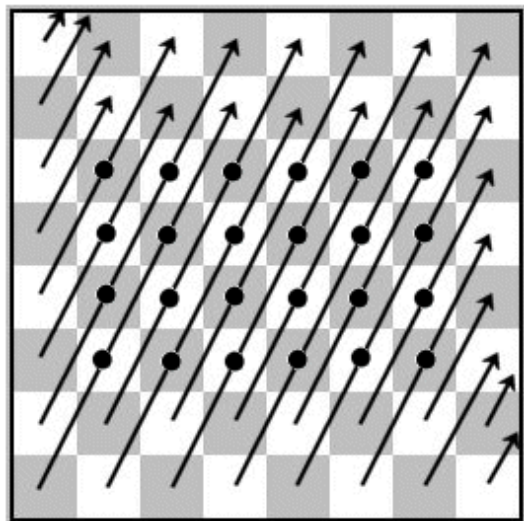
(počítačem ověřeno pro $n \leq 17$).

normal chessboard	Rookhopper	Bishophopper
1 x 1	1	1
2 x 2	4	4
3 x 3	6	8
4 x 4	8	12
5 x 5	13	17
6 x 6	18	22
7 x 7	25	30
8 x 8	32	36
9 x 9	41	47
10 x 10	50	54
11 x 11	61	68
12 x 12	72	76
13 x 13	85	93
14 x 14	98	102
15 x 15	113	122
16 x 16	128	132
17 x 17	145	155
normální šachovnice	věžový cvrček	střelcový cvrček

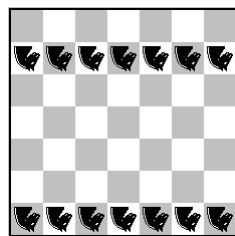
Nightrider - a *Rider* along a straight line on squares lying a Knight's move away from each other.

Theorem (V. Kotěšovec, 5.5.2011): Pro maximální počet m neohrožujících se tátošů, které lze rozmístit na normální šachovnici $n \times n$ ($n > 3$), platí nerovnost
Maximal number m of non-attacking nightriders (A190394) on an $n \times n$ normal chessboard ($n > 3$) satisfy the following inequality

$$2n \leq m \leq 3n - 2$$



even n



odd n

Důkaz: Určíme maximální možný počet rovnoběžných linií s krokem $[1,2]$ na normální šachovnici. Na každé z těchto linií může být vždy nejvýše jeden tátoš. Tyto linie ukazuje diagram. Vidíme, že jejich počet je

$$n + 2(n - 1) = 3n - 2$$

Tím je dokázáno, že na normální šachovnici $n \times n$ nelze umístit $3n - 1$ nebo více neohrožujících se tátošů. Tato část nerovnosti platí dokonce pro všechna n .

Obráceně, abychom dokázali druhou část nerovnosti, je třeba zkonstruovat alespoň jedno takové řešení. Diagramy ukazují (pro $n > 3$) rozmístění $2n$ neohrožujících se tátošů na normálních šachovnicích sudých, resp. lichých rozměrů. Pro sudá n jsou tátoši vždy na krajních řadách, pro lichá n je druhá n -tice vždy na předposlední řadě.

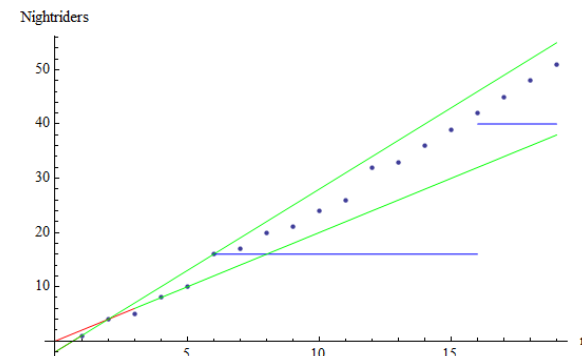
Proof: No more than $3n-2$ parallel lines (with step $[1,2]$) exists. Diagram shows these lines and his "starting points" for a normal chessboard. Arrangements of $2n$ nightriders on an $n \times n$ normal chessboard exists (see constructions for even and odd n).

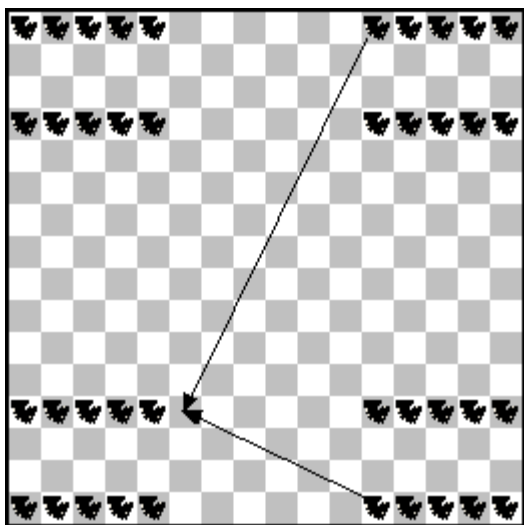
Similar proof for toroidal chessboard, see page 784.

V grafu vpravo znázorňují zelené přímky správnost nerovnosti pro $n > 3$ (green lines). Pro větší n se dá předpokládat, že skutečné hodnoty budou blíže hornímu odhadu.

Modře je označen asymptoticky lepší dolní odhad $m \geq 24 \left\lfloor \frac{n+4}{10} \right\rfloor - 8$ (blue), který bude pro $n \geq 6$ odvozen na další straně.

Výše uvedenou větu jsem současně aplikoval i v počítačovém programu, kdy lze výpočet výrazně urychlit podmínkou, že na každé z uvažovaných linií může být maximálně jeden kámen. Pokud potřebujeme objevit maximální možný počet nenapadajících se kamenů nebo zjistit počet všech takových pozic, je třeba prozkoumat všechny možnosti, ale pokud chceme rychle najít jen jednu vyhovující pozici, vyexperimentoval jsem, že tento postup lze výrazně urychlit tím, že jednotlivé linie setřídíme podle jejich délek a kameny umísťujeme nejprve na ty linie, které jsou nejkratší. Je to jakási obdoba Warnsdorffova algoritmu, který se používá v teorii grafů pro nalezení cesty jezdecke.





Dolní mez je možno ještě zlepšit pomocí konstrukce na diagramu. Pozice na šachovnici 16x16 obsahuje celkem 40 tátošů (a nejde tedy o absolutní rekord, který je 42), ale na tomto principu lze vytvořit obecné pozice, obsahující více než (dokázané dolní omezení) $2n$ tátošů. Pokud umístíme na okraje vždy d tátošů, určují linie vyznačené na diagramu mez pro tento počet a současně i rovnoběžnou řádku, kde bude umístěna shodná skupina tátošů. Celkový počet tak bude $8d$. Rovnice vyznačených přímek obecně pro ridera $[r,s]$ (zde je $r=1$ a $s=2$) jsou

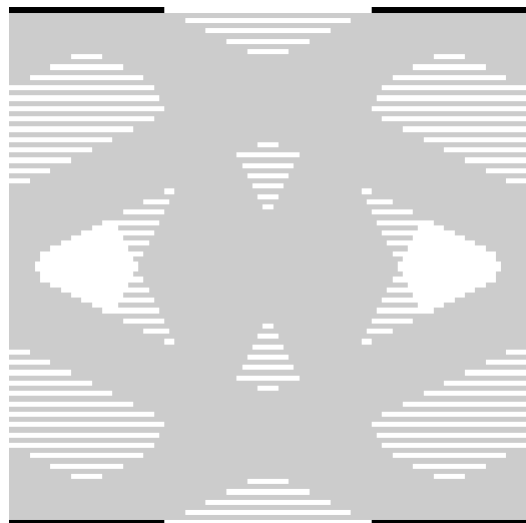
$$y = -\frac{rx}{s} + \frac{r(n-d+1)}{s} + 1 \qquad y = \frac{sx}{r} - \frac{s(n-d+1)}{r} + n$$

Řešením této soustavy nalezneme souřadnice $[x,y]$ průsečíku, s tím, že $d = x - 1$

Dostaneme tak

$$d = \frac{(r^2 - rs + s^2)n + rs}{2(r^2 + s^2)} \qquad y = \frac{nr^2 + s^2}{r^2 + s^2}$$

Toto samozřejmě přesně platí, jen pokud jsou výsledkem celá čísla, tedy když n je sudé a $n - 1$ je násobkem $r^2 + s^2$



Pro hledané maximum dostáváme

$$m \geq \frac{4n(r^2 - rs + s^2) + 4rs}{r^2 + s^2} = 4n - \frac{4(n-1)rs}{r^2 + s^2}$$

Tento odhad obecně není lepší než nerovnost na str. 764 a má význam pouze pro případ $r=1$ $s=2$ (např. pro $r=2$ $s=3$ už je lepší dolní mez $3n$). Pro tátoše a šachovnice typu $n = 10a - 4$ tak dostáváme nerovnost

$$m \geq \frac{12}{5}n + \frac{8}{5}$$

kterou jde zobecnit, když vezmeme pro každé n nejbližší menší celé číslo tvaru $10a - 4$ (zbytek šachovnice ponecháme prázdný). Odtud pak dostaneme pro **všchna** $n \geq 6$

←

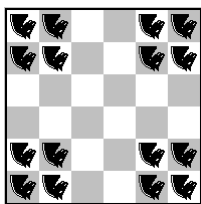
$$m \geq 24 \left\lfloor \frac{n+4}{10} \right\rfloor - 8$$

což má značný význam zejména z asymptotického hlediska, protože odtud (a z předchozí věty) vyplývá, že

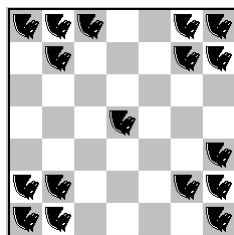
$$\frac{12}{5} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} \leq 3$$

Obrázek vlevo určuje pokrytí šachovnice větších rozměrů tátoši umístěnými ve 4 skupinách na okrajích šachovnice. Bílá místa jsou volná pro umístění dalších kamenů. Další čtveřici skupin kamenů doplníme (podle vzoru jako na horním diagramu) do míst, kde hodnota d nabývá maxima (označeného šipkou).

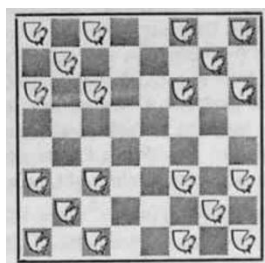
Příklady maximálních konfigurací. Pro $n \leq 19$ jde o absolutní rekordy (*proven optima*).



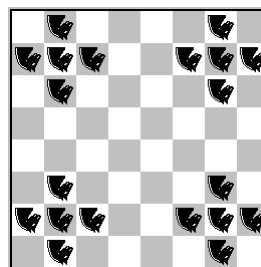
16 nightriders, 6x6
(*proven optima*)
jediná možná pozice



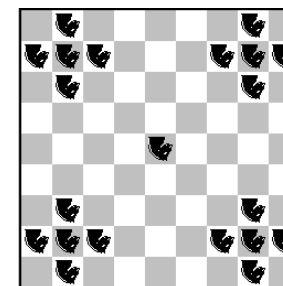
17 nightriders, 7x7
(*proven optima*)



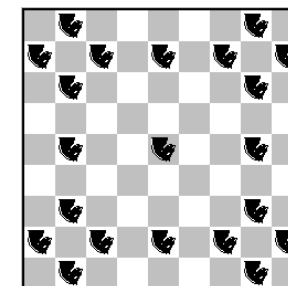
20 nightriders, 8x8
Karl Fabel (1966)
(*proven optima!*)



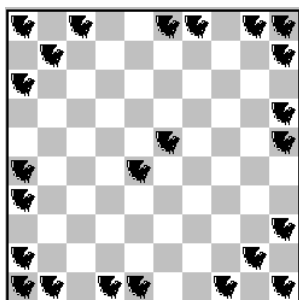
existují pouze tyto 2 pozice!



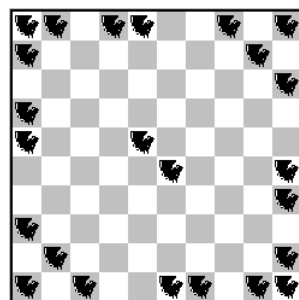
21 nightriders, 9x9
V. Kotěšovec (2011)
(*proven optima*)



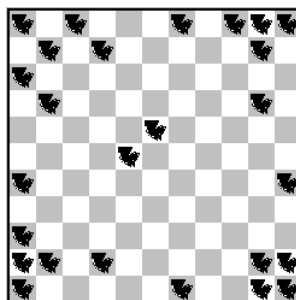
existují pouze tyto 2 pozice!



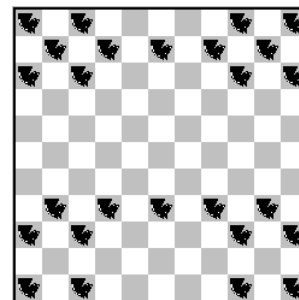
24 nightriders, 10x10
V. Kotěšovec (2011)
(*proven optima*)



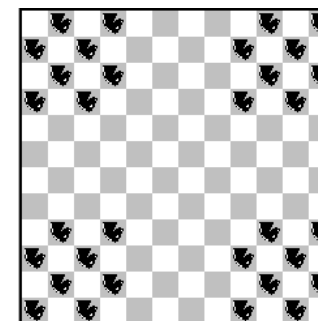
existují pouze tyto 2 pozice!



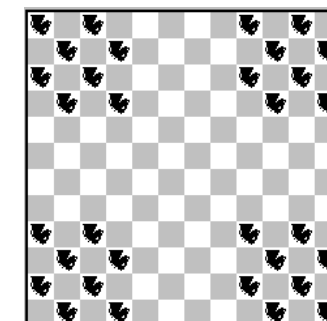
26 nightriders, 11x11
V. Kotěšovec (2011)
(*proven optima*)
existuje celkem 40 různých
pozic



jiná pozice, kde jsou
všechny kameny jen na
černých polích



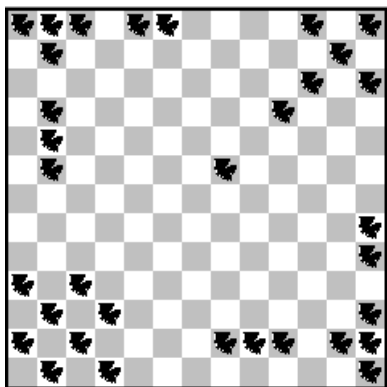
32 nightriders, 12x12
V. Kotěšovec (2011)
(*proven optima*)



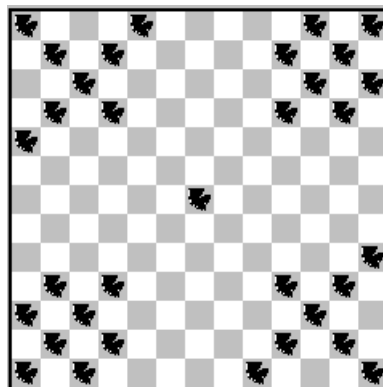
existují pouze tyto 2 pozice!

Primárním cílem tohoto výzkumu bylo samozřejmě nalézt hodnoty maximálních počtů neohrožujících se kamenů různých typů. Jak ale vidíme z diagramů, výsledkem jsou i příklady takových konfigurací, z nichž řada z nich působí esteticky pěkným dojmem. Je to jakýsi průsečík **šachu, matematiky a umění**. Při zkoumání dalších typů liniových kamenů tak už pro mě bylo na prvním místě hlavně nalezení dalších oku lahodících konfigurací.

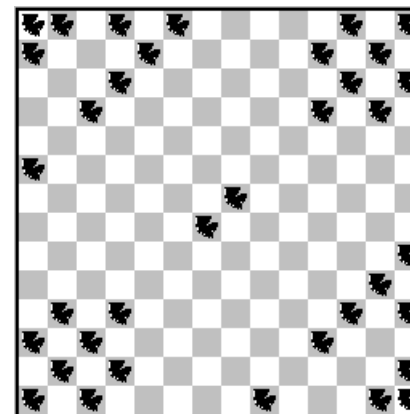
A ještě jednu poznámku. V šachových úlohách je symetrie spíše na závalu, protože symetrické varianty nepřinášejí už nic nového. V případě konfigurací nenapadajících se kamenů je tomu však naopak, právě tyto **symetrické pozice** (ať už je symetrie úplná nebo jen částečná) dodávají diagramům tu uměleckou složku a určitou harmonii.



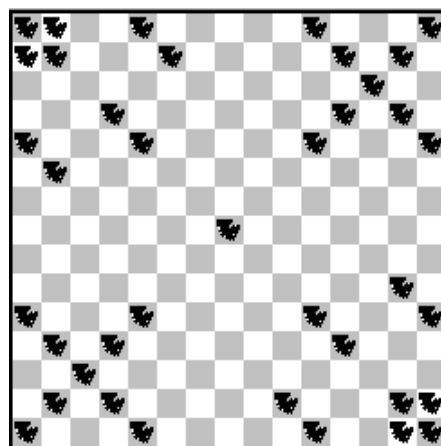
33 nightriders, 13x13
 V. Kotěšovec (2011)
(proven optima)
 existuje celkem 25 různých pozic



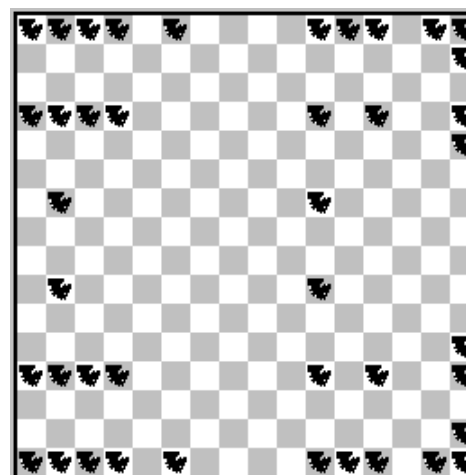
jiná pozice, kde jsou všechny kameny
 jen na černých polích



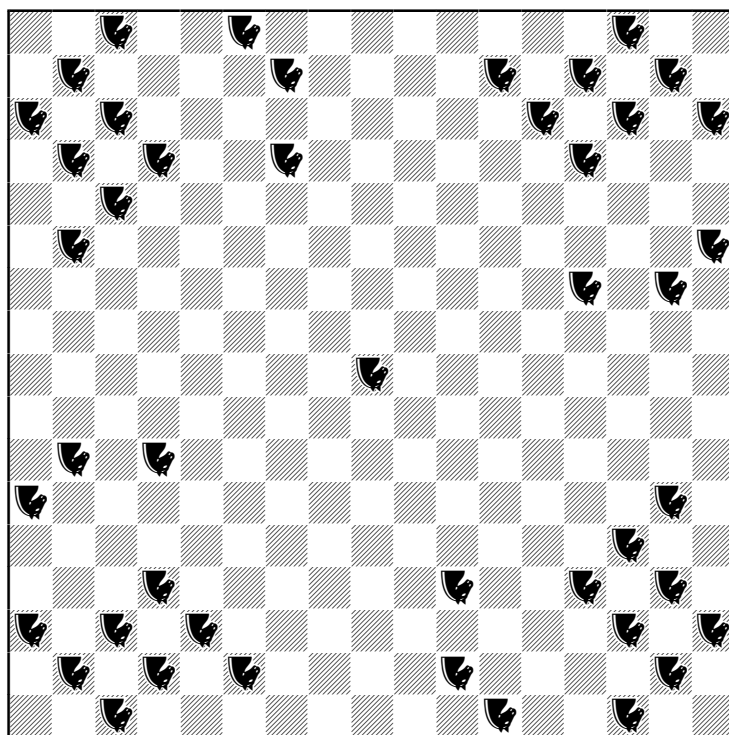
36 nightriders, 14x14
 V. Kotěšovec (2011)
(proven optima)
 existuje celkem 17 různých pozic



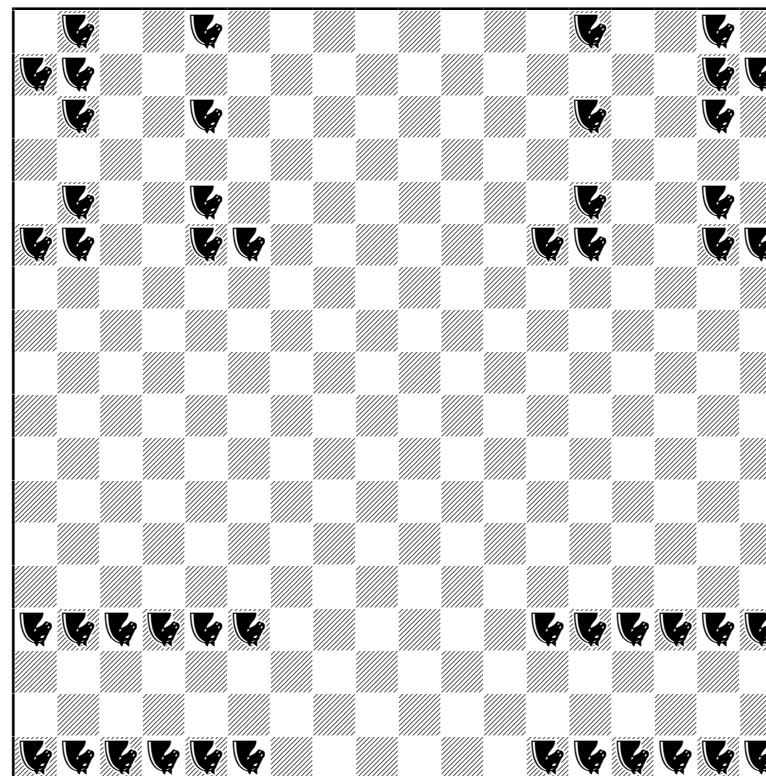
39 nightriders, 15x15
 V. Kotěšovec (2011)
(proven optima)
 existují pouze 2 pozice
 (kromě této už jen zrcadlově otočená)



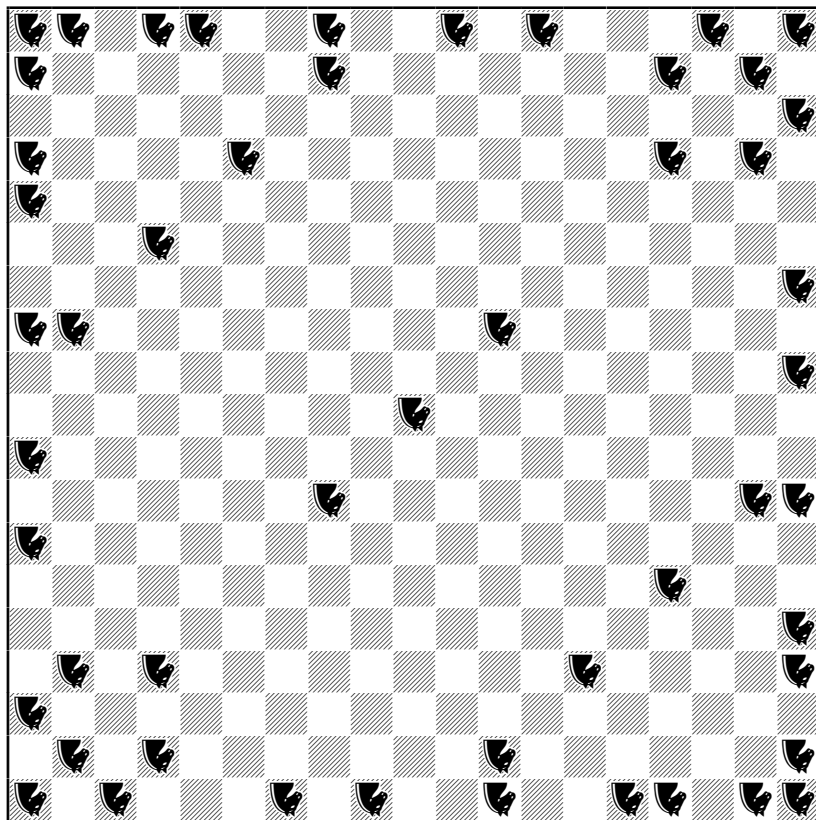
42 nightriders, 16x16
 V. Kotěšovec (2011)
(proven optima)



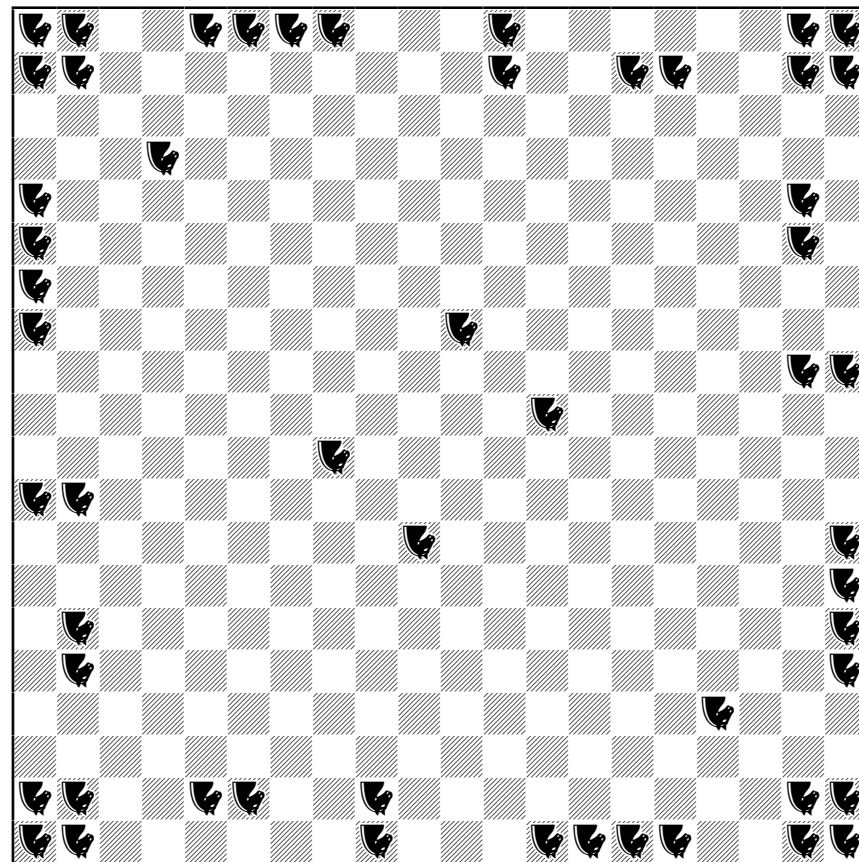
45 nightriders, 17x17
 V. Kotěšovec (2012)
(proven optima)



48 nightriders, 18x18
 V. Kotěšovec (2012)
(proven optima)



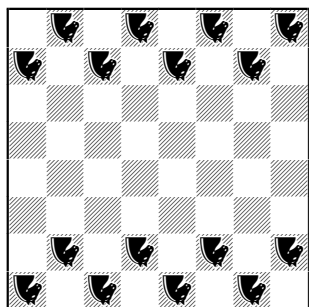
51 nightriders, 19x19
 V. Kotěšovec (31.3.2012)
(proven optima)



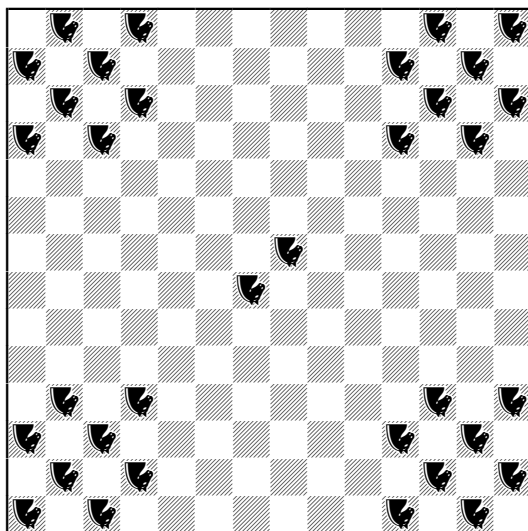
54 nightriders, 20x20
 Rob Pratt (24.6.2015, see [A190394](#))
(proven optima)

Ještě mohou být zajímavé možnosti rozmístění nenapadajících se tátošů jen na **černých polích** šachovnice.

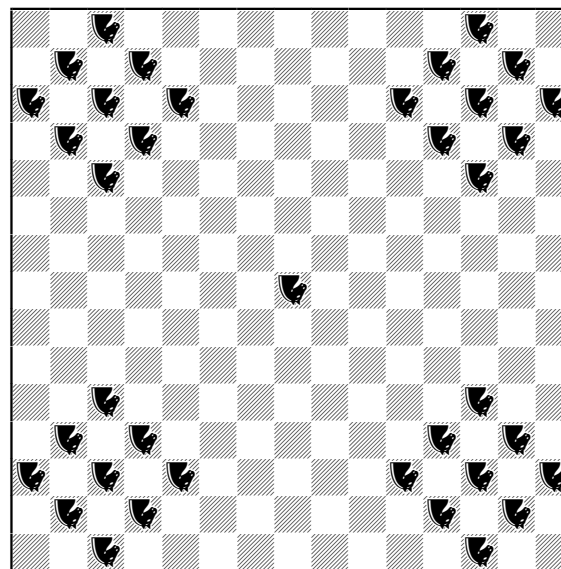
(diagramy pro $n=11$ až 13 viz předchozí sekce)



16 nightriders, 8x8
on a black squares
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)

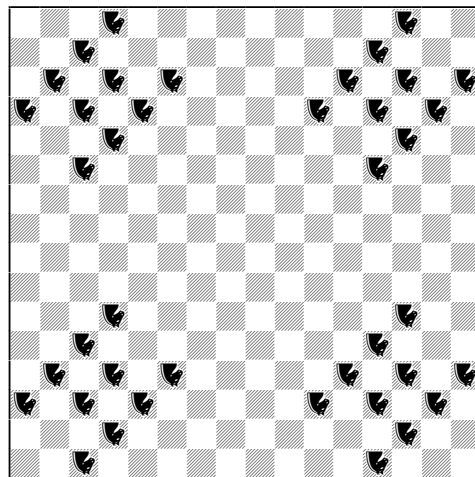


34 nightriders, 14x14
on a black squares
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)

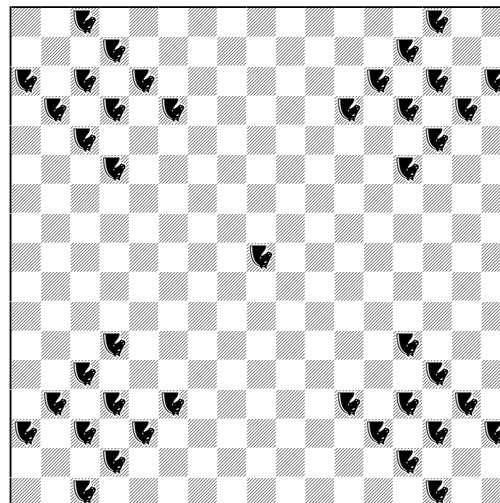


37 nightriders, 15x15
on a black squares
V. Kotěšovec (1.4.2012)
(*proven optima*)

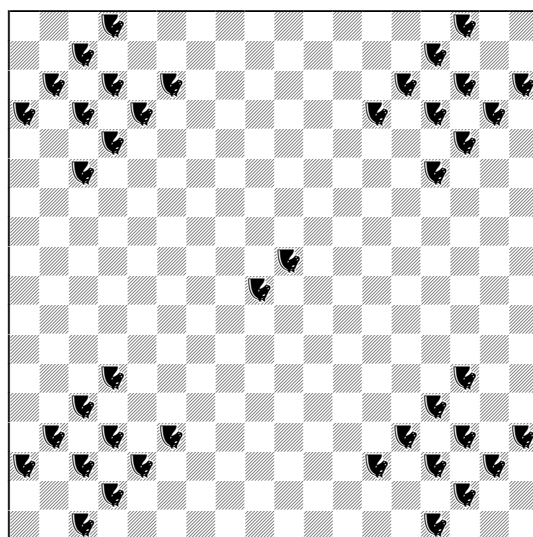
normal chessboard	Nightriders on a black squares
1 x 1	1
2 x 2	2
3 x 3	5
4 x 4	8
5 x 5	9
6 x 6	10
7 x 7	13
8 x 8	16
9 x 9	18
10 x 10	20
11 x 11	26
12 x 12	32
13 x 13	33
14 x 14	34
15 x 15	37
16 x 16	40
17 x 17	41
18 x 18	42
19 x 19	≥ 44
20 x 20	
normální šachovnice	tátoši jen na černých polích



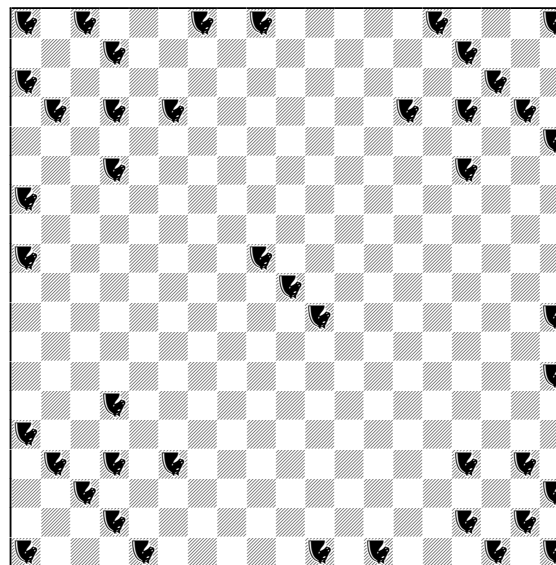
40 nightriders on a black squares, 16x16
V. Kotěšovec (2012, *proven optima*)



41 nightriders on a black squares, 17x17
V. Kotěšovec (2012, *proven optima*)



42 nightriders on a black squares, 18x18
V. Kotěšovec (2012, *proven optima*)

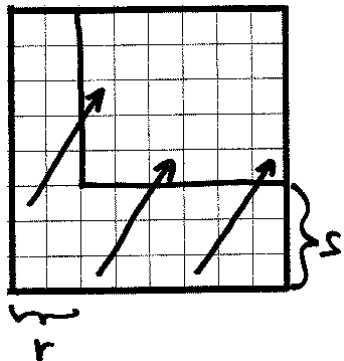


44 nightriders on a black squares, 19x19
V. Kotěšovec (2012, *non proven optima*)

Theorem (V. Kotěšovec, 20.3.2012):

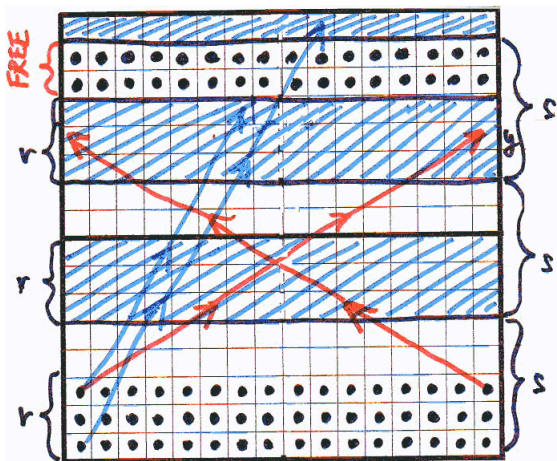
Generally, the maximal number m of non-attacking riders $[r,s]$, $0 < r \leq s$, on an $n \times n$ normal chessboard satisfy for $n \geq s^2$ the following inequality

$$sn \leq m \leq (r + s)n - rs$$



Důkaz (*proof*) platnosti **horní meze**, která je rovna počtu možných linií těchto kamenů ve stejném směru, je identický jako na str.756 pro tátoše, viz též schéma v kapitole 6.1.1. Počet možných linií je určen **plochou** oblasti na schématu vlevo, která je rovna $r * n + s * n - r * s$. Umístění více kamenů než je horní mez nerovnosti na šachovnici $n \times n$ by znamenalo (podle [Dirichletova principu](#)), že na některé z těchto linií musí stát nejméně 2 kameny, tedy že se napadají, což by byl spor.

Tato část nerovnosti platí pro všechna $n \geq r$



Dolní mez lze dokázat tím, že zkonstruujeme alespoň jednu takovou pozici. Pokud umístíme n kamenů na celý řádek, bude celkový počet kamenů roven počet řádků krát n . V případě ridera $[r,s]$ můžeme umístit nenapadající se kameny na prvních r řádků. Pro další umístění jsou tak (do určitého místa) vyloučeny všechny řádky (ve směru $[r,s]$ nahoru) v pásech šířky r s periodou s (modře šrafované oblasti ve schématu pro $r=3, s=5, n=16$). Jelikož je $r < s$, skončí toto omezení dříve ve směru $[s,r]$ a to v bodě se souřadnicí

$$y = r \left(\left\lfloor \frac{n-1}{s} \right\rfloor + 1 \right)$$

Viz červené šipky v grafu. Řádky nad tímto místem, které jsou za následující modře šrafovanou oblastí, jsou pak už volné pro umístění další série kamenů. Šířka každého takového pásu je $s - r$. Nyní mohou nastat 2 případy. Pokud nebude tento pruh širší než r , tedy

$$s \leq 2r$$

můžeme jej zcela zaplnit kameny (které se nebudou ohrožovat) a celkový počet rozmístěných kamenů bude tak

$$r * n + (s - r) * n = s * n$$

Pro tento případ je tak věta dokázána. Následující schéma ukazuje rozsah pokrytí při umístění r plných řádek riderů $[r,s]$ od dolního okraje šachovnice. Zobrazeno pro $n = 100, r = 5, s = 7$. Vidíme, že nahoře vznikají pásy šířky $s - r = 2$. Do jednoho z nich můžeme umístit 2 řady kamenů, čímž dostáváme potřebných $5+2=7 = s$ obsazených řad kamenů.



Současně vidíme, že by se dalo (v tomto případě) umístit ještě určité množství kamenů na bílá pole. **Asymptoticky** tak dostáváme pro případ $s \leq 2r$ dokonce vylepšenou nerovnost

$$s + \frac{2r - s}{s} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} \leq r + s$$

Druhý případ, kdy $s - r > r$, tedy

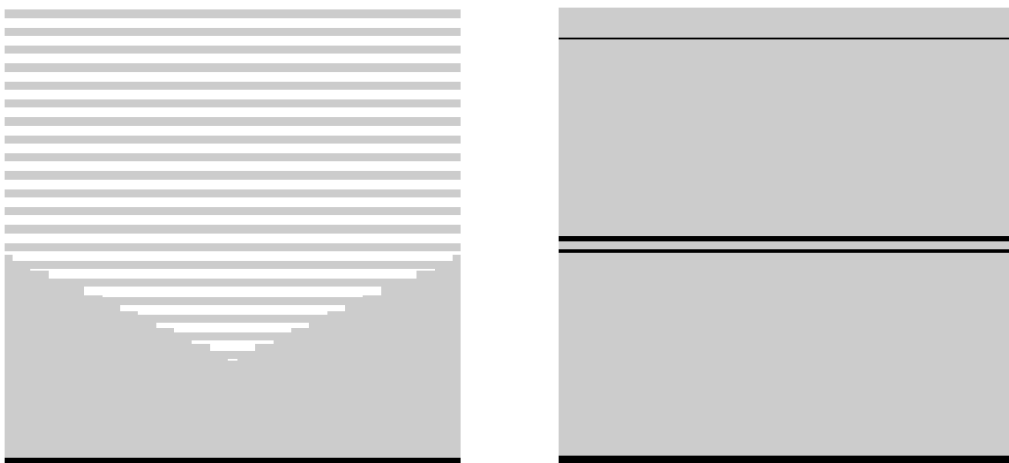
$$s > 2r$$

je složitější. Celý pás šířky $s - r$ nemůžeme zaplnit kameny, protože by se napadaly. Přípustné jsou pouze pásy šířky **maximálně** r . Z modularity podle s je zřejmé, že každá obsazená řádka zabere v celém poli vždy sérii rovnoběžných řádek vzdálených od sebe s . Celkový počet plně obsazených řádek tak nemůže být větší než s (maximální počet zbytků po dělení s). Zbývá dokázat, že taková konfigurace vždy opravdu existuje.

Na následujících schématech jsou při volbě $n = 100$, $r = 2$, $s = 7$ volné pruhy sice šířky 5, ale můžeme přidávat vždy nejvýše 2 ($=r$) nové řádky. Na pravém schématu je tak konfigurace řádek $2+2+2+1=7$ ($=s$). Žádný další kámen už nelze přidat.



Je však zajímavé, že ne vždy funguje algoritmus s přidáváním vždy právě r spojitých řádek na první volnou pozici. Následující schémata znázorňují situaci pro $n = 280$, $r = 5$, $s = 11$. Od prvního volného řádku není k dispozici r řádek v celku a pokud bychom je dali až do dalšího volného pruhu, mohlo by se v některých případech stát, že by se vešlo celkově jen $s-1$ plných řádek. Proto je potřeba r -tici rozdělit a obsazovat nové řádky vždy hned do první bezprostředně možné volné pozice.



Následující funkce (v programu Mathematica) určí pro zadané r , s na šachovnici $n \times n$ maximální počet takových volných řádek, kam lze umístit další kameny.

```
nlines[n_, r_, s_] := (p = ConstantArray[0, n]; lines = 0;
Do[If[p[[base]] == 0,
  Do[If[k <= Floor[(n - 1) / s],
    If[base + k * r <= n, p[[base + k * r]] = 1];
    If[k <= Floor[(n - 1) / r],
      If[base + k * s <= n, p[[base + k * s]] = 1];, {k, 1, n}];
  lines = lines + 1], {base, 1, n}];
lines);
```

Program můžeme ověřit pro data na schématu z předchozí strany. Dostáváme tak pole, ve kterém hodnoty 0 určují řádky, na které lze umístit kameny.

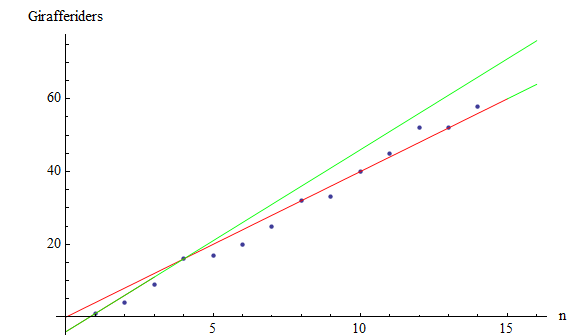
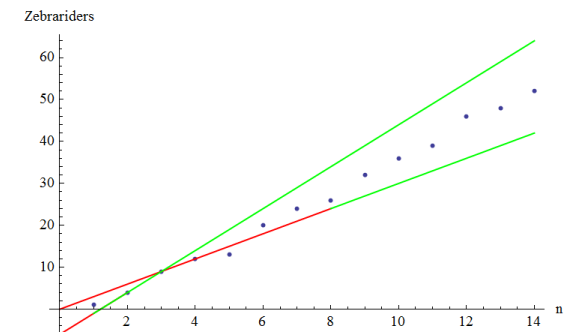
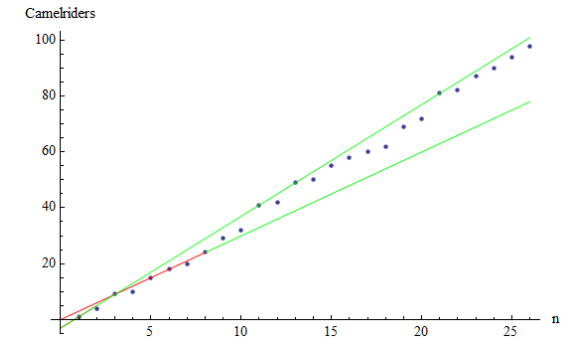
```
nlines[16, 3, 5]; p
{0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1}
```

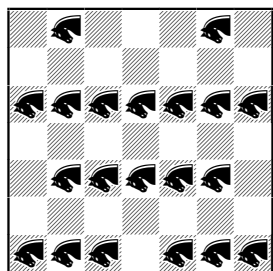
Platnost **dolního omezení**, tedy že existuje s takových řádek, jsem programem ověřil pro všechna $0 < r \leq s \leq 60$. Zajímavý je ještě rozsah platnosti, protože pro malá n dolní omezení ještě vždy neplatí. S jistotou platí pro všechna $n > s^2 - 1$, jak ukazuje výstup z následujícího programu. Této hranice je dosaženo pro ridery $[r, s]$, kde r dělí $(s - 1)$, speciálně vždy pro $[1, s]$ a $[s-1, s]$. Počet hodnot $s^2 - 1$ v každé řádce je roven počtu dělitelů čísla $s - 1$.

```
Do[Print["s=", s, ", s^2-1=", s^2-1, ", for n > ",
  Table[tlines = Table[nlines[n, r, s], {n, 1, 300}]; nenul = 0;
  Do[If[tlines[[n]] != s, nenul = n], {n, 1, Length[tlines]}]; nenul
  , {r, 1, s}], {s, 1, 16}];

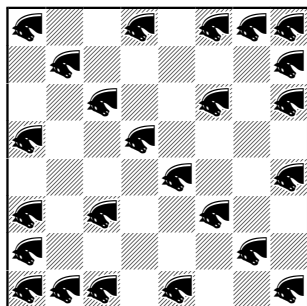
s=1, s^2-1=0, for n > {0}
s=2, s^2-1=3, for n > {3, 1}
s=3, s^2-1=8, for n > {8, 8, 2}
s=4, s^2-1=15, for n > {15, 7, 15, 3}
s=5, s^2-1=24, for n > {24, 24, 13, 24, 4}
s=6, s^2-1=35, for n > {35, 17, 11, 17, 35, 5}
s=7, s^2-1=48, for n > {48, 48, 48, 18, 26, 48, 6}
s=8, s^2-1=63, for n > {63, 31, 37, 15, 22, 31, 63, 7}
s=9, s^2-1=80, for n > {80, 80, 26, 80, 23, 26, 43, 80, 8}
s=10, s^2-1=99, for n > {99, 49, 99, 49, 19, 27, 37, 49, 99, 9}
s=11, s^2-1=120, for n > {120, 120, 73, 50, 120, 28, 31, 42, 64, 120, 10}
s=12, s^2-1=143, for n > {143, 71, 47, 35, 81, 23, 32, 35, 47, 71, 143, 11}
s=13, s^2-1=168, for n > {168, 168, 168, 168, 62, 168, 33, 36, 48, 62, 89, 168, 12}
s=14, s^2-1=195, for n > {195, 97, 121, 97, 63, 97, 27, 37, 40, 53, 68, 97, 195, 13}
s=15, s^2-1=224, for n > {224, 224, 74, 98, 44, 74, 224, 38, 41, 44, 58, 74, 118, 224, 14}
s=16, s^2-1=255, for n > {255, 127, 255, 63, 255, 75, 141, 31, 42, 45, 59, 63, 93, 127, 255, 15}
```

normal chessboard	Maximal number of non-attacking					
	Nightriders	Camelriders	Zebrariders	Girafferiders	Anteloperiders	Riders [1,5]
1 x 1	1	1	1	1	1	1
2 x 2	4	4	4	4	4	4
3 x 3	5	9	9	9	9	9
4 x 4	8	10	12	16	16	16
5 x 5	10	15	13	17	21	25
6 x 6	16	18	20	20	24	26
7 x 7	17	20	24	25	25	31
8 x 8	20	24	26	32	36	34
9 x 9	21	29	32	33	40	45
10 x 10	24	32	36	40	46	50
11 x 11	26	41	39	45	50	52
12 x 12	32	42	46	52	56	56
13 x 13	33	49	48	52	$62 \leq m \leq 75$	65
14 x 14	36	50	52	58		70
15 x 15	39	55	$57 \leq m \leq 66$	$58 \leq m \leq 67$		77
16 x 16	42	58		$64 \leq m \leq 74$		78
17 x 17	45	60				85
18 x 18	48	62				98
19 x 19	51	69				102
20 x 20	54	72				104
21 x 21		81				$104 \leq m \leq 121$
22 x 22		82				
23 x 23		87				
24 x 24		90				
25 x 25		94				
26 x 26		98				
27 x 27		$98 \leq m \leq 105$				
28 x 28						
Rider	[1,2]	[1,3]	[2,3]	[1,4]	[3,4]	[1,5]
number of lines	$3n-2$	$4n-3$	$5n-6$	$5n-4$	$7n-12$	$6n-5$

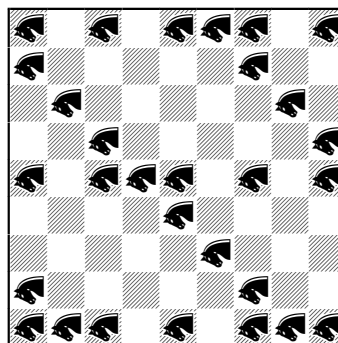




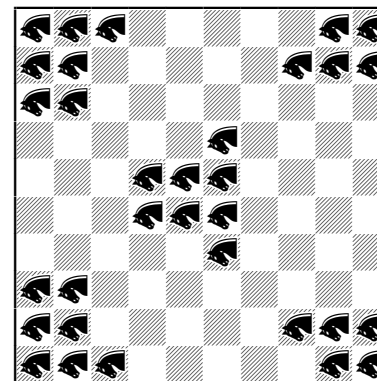
20 Camelriders, 7x7
V. Kotěšovec (2012)
(proven optima)



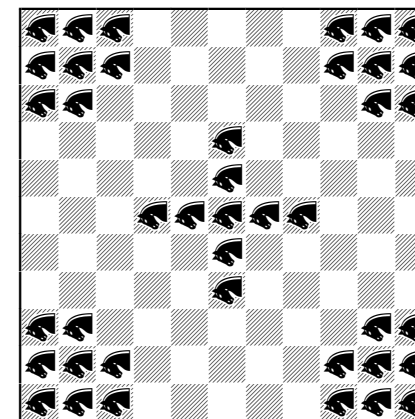
24 Camelriders, 8x8
V. Kotěšovec (2012)
(proven optima)



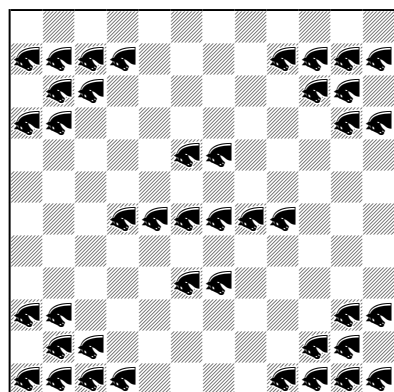
29 Camelriders, 9x9
V. Kotěšovec (2012)
(proven optima)



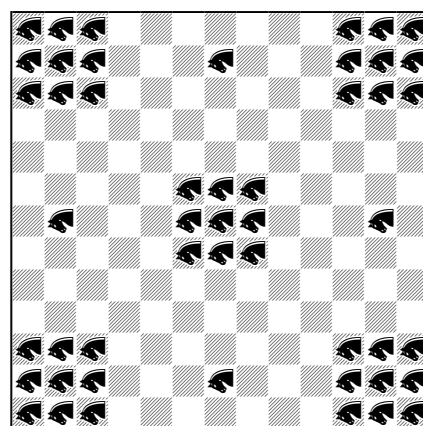
32 Camelriders, 10x10
V. Kotěšovec (2012)
(proven optima)



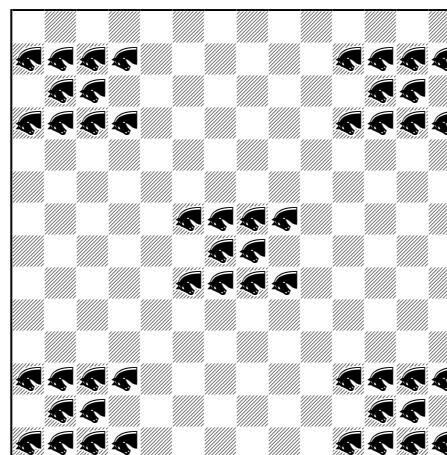
41 Camelriders, 11x11
V. Kotěšovec (2012)
(proven optima)



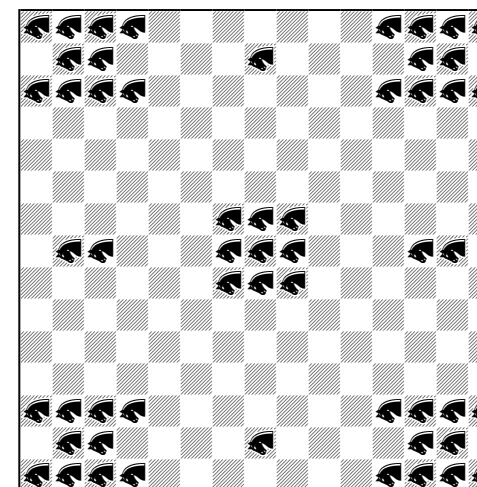
42 Camelriders, 12x12
V. Kotěšovec (2012)
(proven optima)



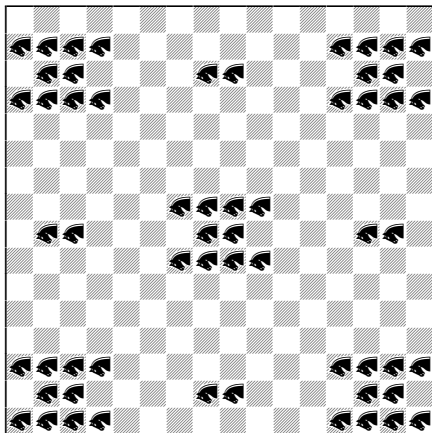
49 Camelriders, 13x13
V. Kotěšovec (2012)
(proven optima)



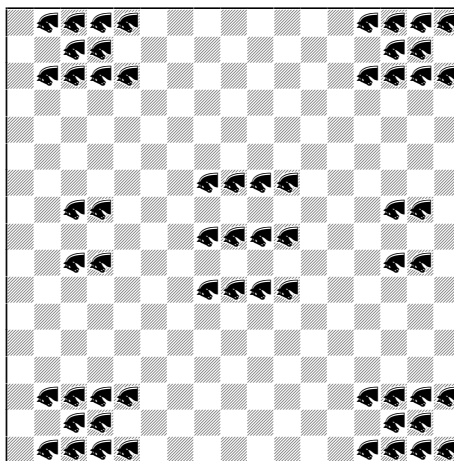
50 Camelriders, 14x14
V. Kotěšovec (2012)
(proven optima)



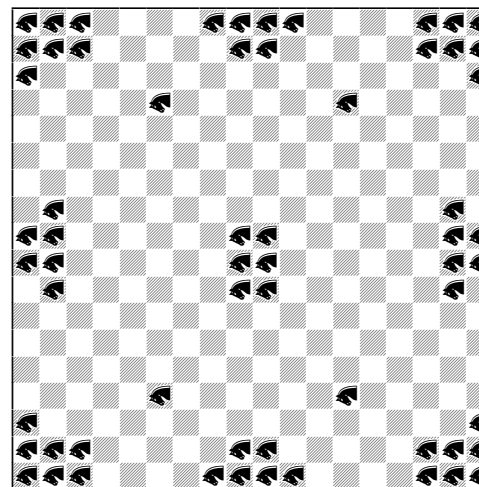
55 Camelriders, 15x15
V. Kotěšovec (2012)
(proven optima)



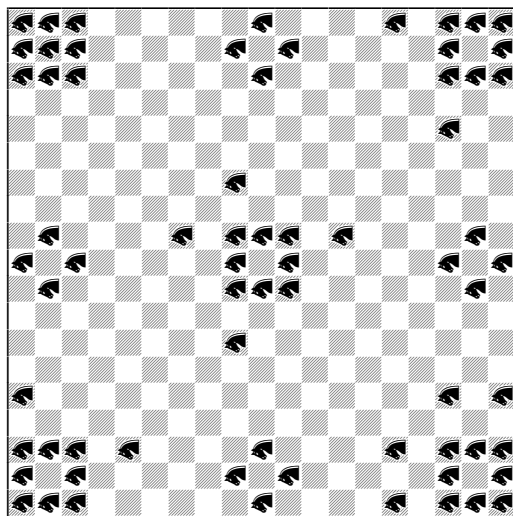
58 Camelriders, 16x16
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



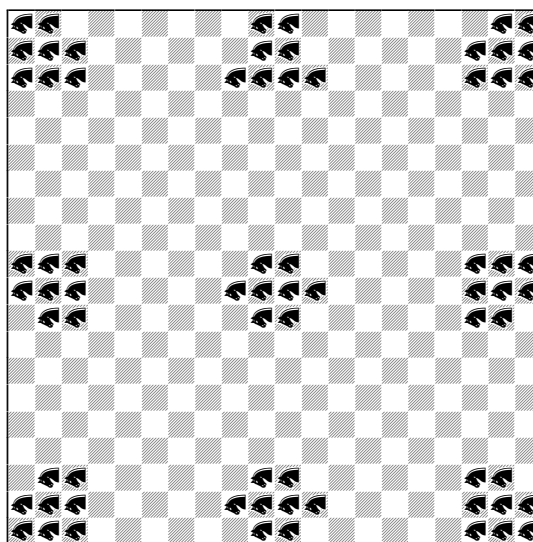
60 Camelriders, 17x17
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



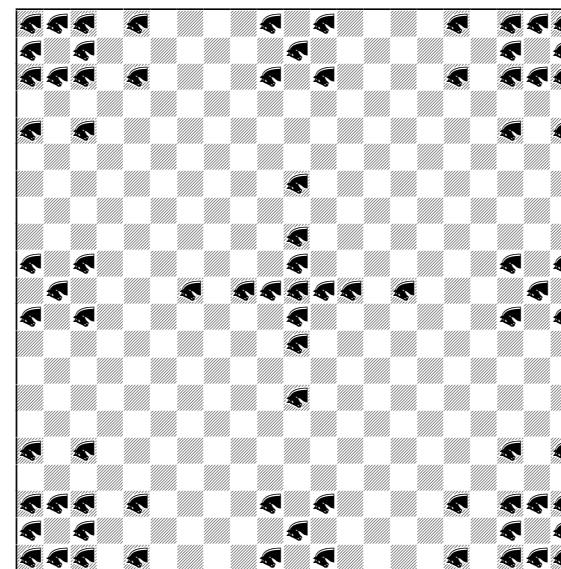
62 Camelriders, 18x18
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



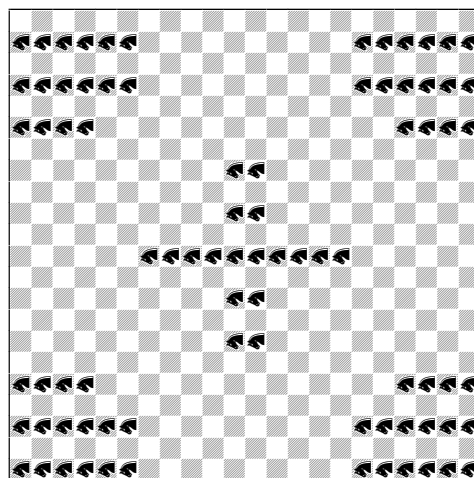
69 Camelriders, 19x19
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



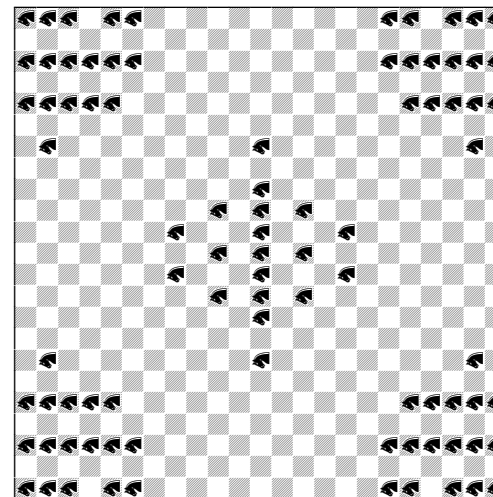
72 Camelriders, 20x20
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



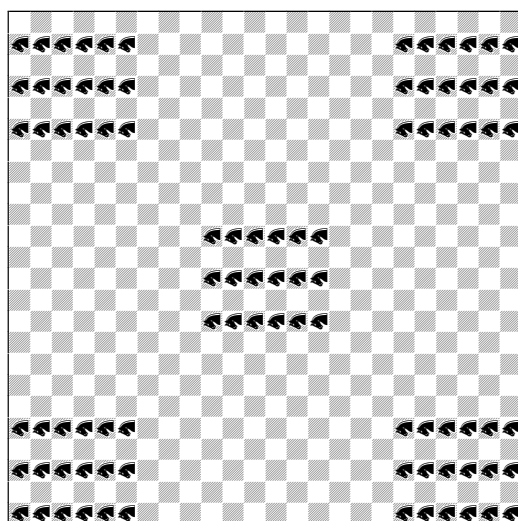
81 Camelriders, 21x21
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



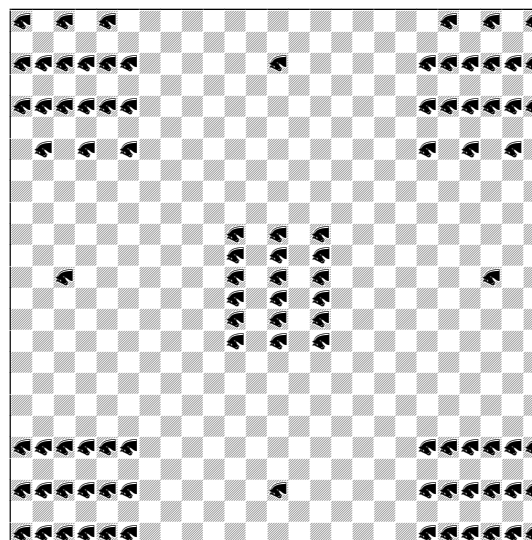
82 Camelriders, 22x22
V. Kotěšovec (2012, *proven optima*)



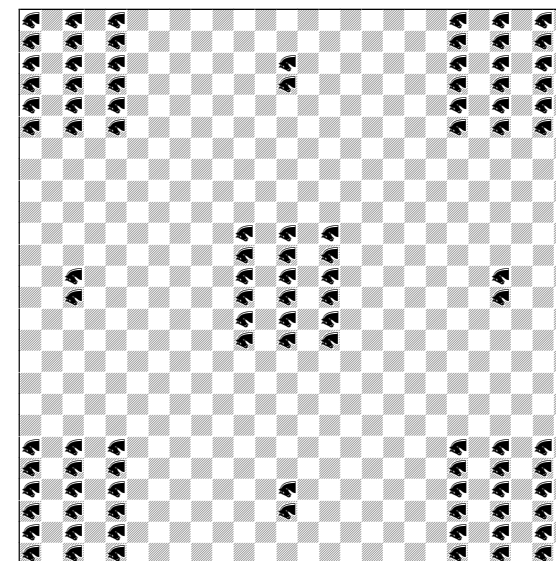
87 Camelriders, 23x23
V. Kotěšovec (2012, *proven optima*)



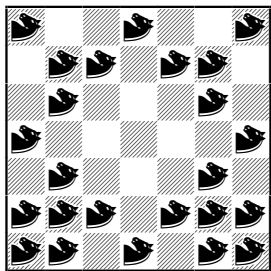
90 Camelriders, 24x24
V. Kotěšovec (2012, *proven optima*)



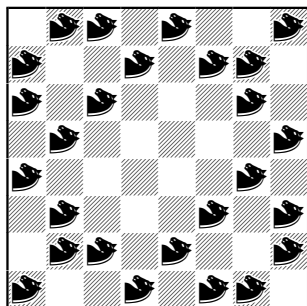
94 Camelriders, 25x25
V. Kotěšovec (2012, *proven optima*)



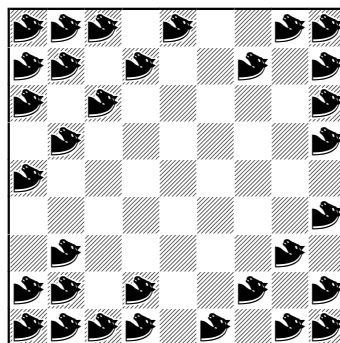
98 Camelriders, 26x26
V. Kotěšovec (2012, *proven optima*)



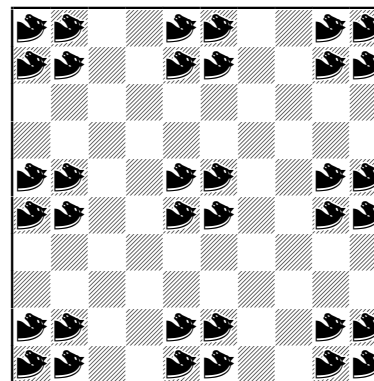
24 Zebrariders, 7x7
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



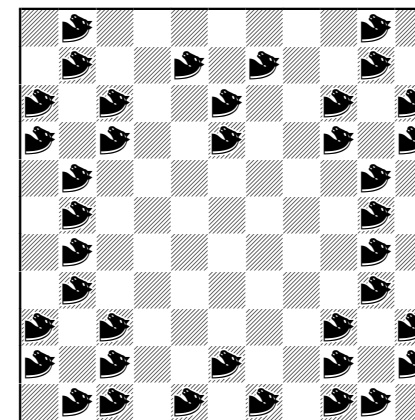
26 Zebrariders, 8x8
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



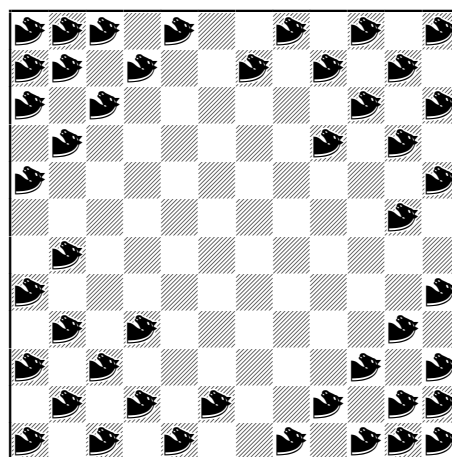
32 Zebrariders, 9x9
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



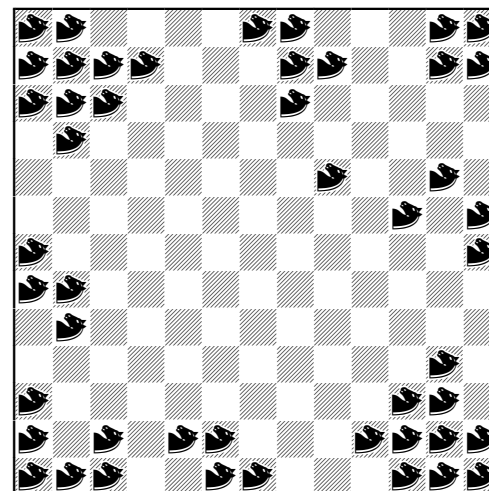
36 Zebrariders, 10x10
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



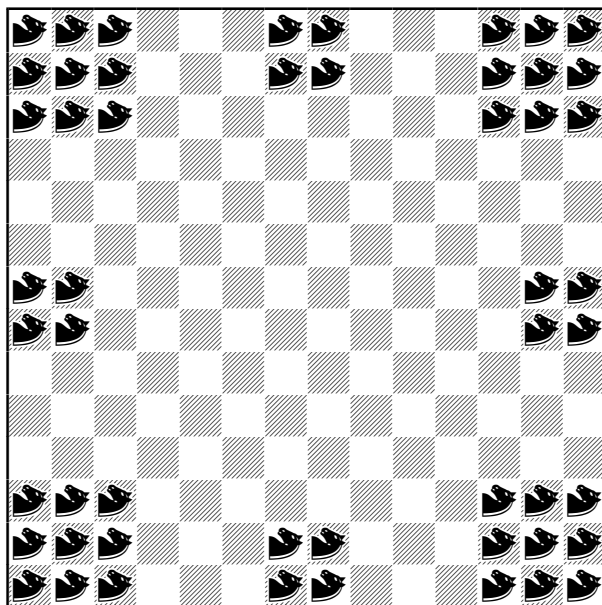
39 Zebrariders, 11x11
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



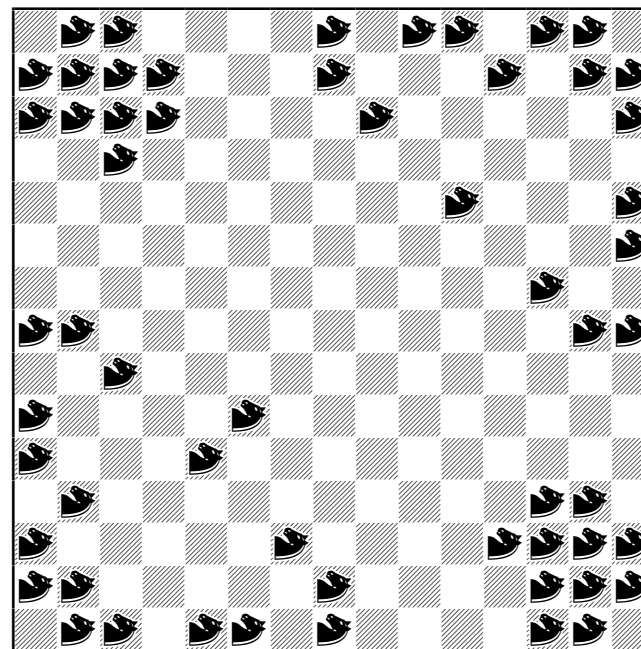
46 Zebrariders, 12x12
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



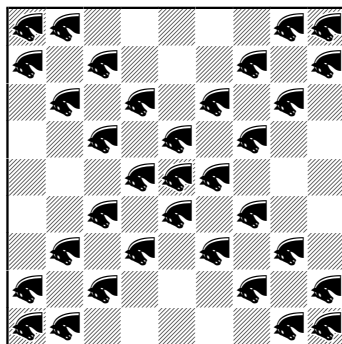
48 Zebrariders, 13x13
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



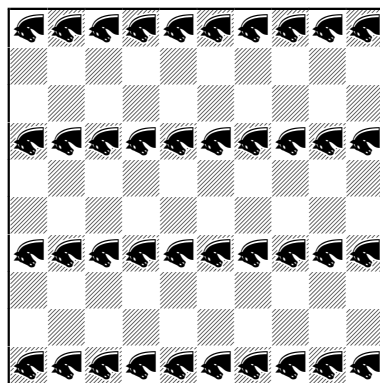
52 Zebrariders, 14x14
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



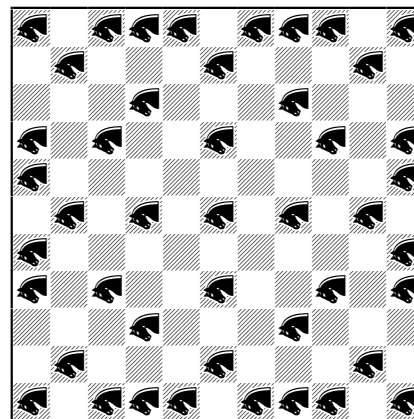
57 Zebrariders, 15x15
V. Kotěšovec (2012)
(*non proven optima*)



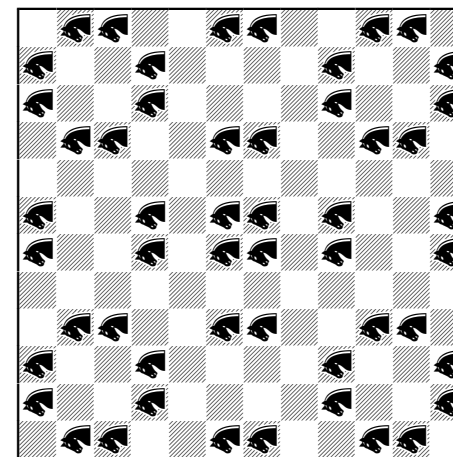
33 Giraffiders, 9x9
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



40 Giraffiders, 10x10
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)

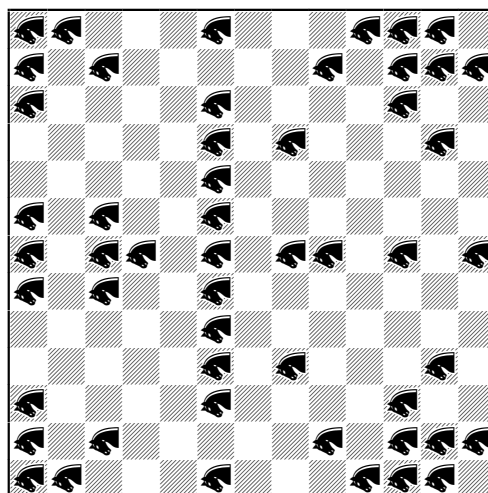


45 Giraffiders, 11x11
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)

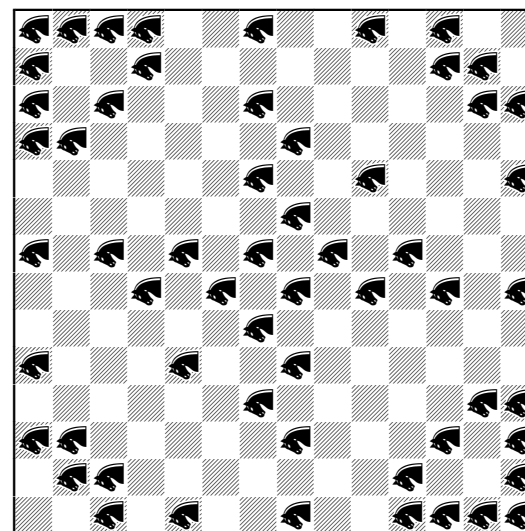


52 Giraffiders, 12x12
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)

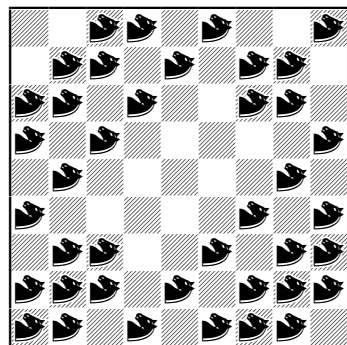
Poznámka: Pro šachovnice 8x8 a menší jsou výsledky pro *Giraffiders* shodné jako pro [žirafy](#), vlastnost liniového kamene se neuplatní.



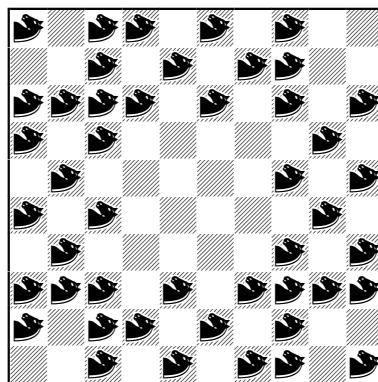
52 Giraffiders, 13x13
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



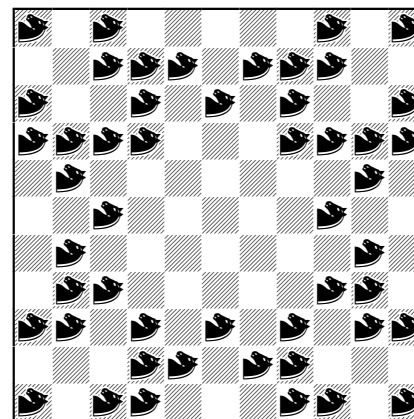
58 Giraffiders, 14x14
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



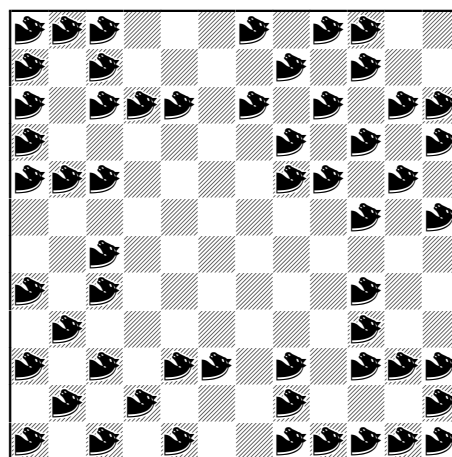
40 Anteloperiders, 9x9
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



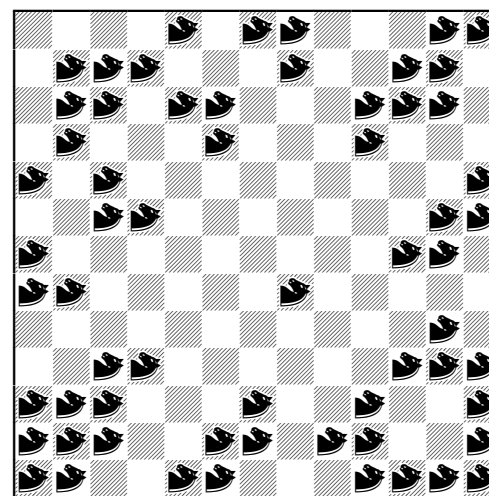
46 Anteloperiders, 10x10
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



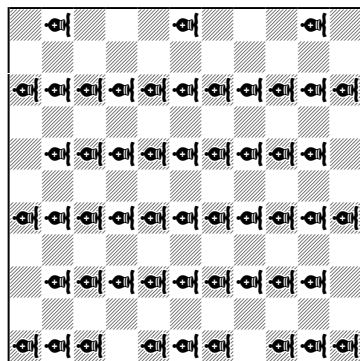
50 Anteloperiders, 11x11
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



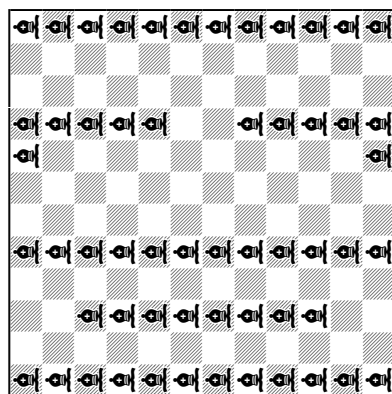
56 Anteloperiders, 12x12
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



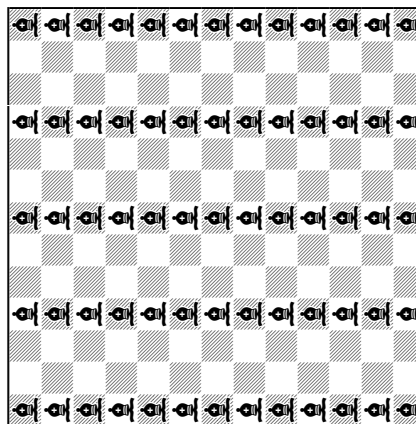
62 Anteloperiders, 13x13
V. Kotěšovec (2012)
(*non proven optima*)



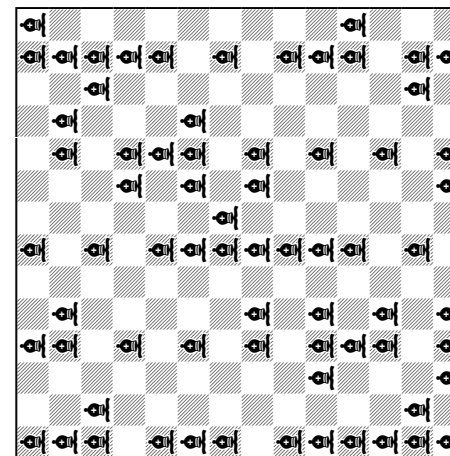
52 Riders [1,5], 11x11
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



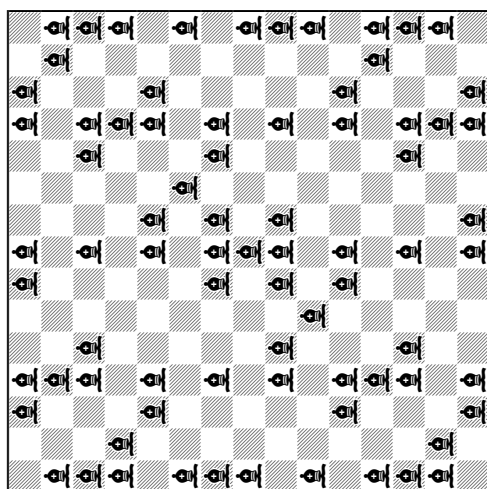
56 Riders [1,5], 12x12
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



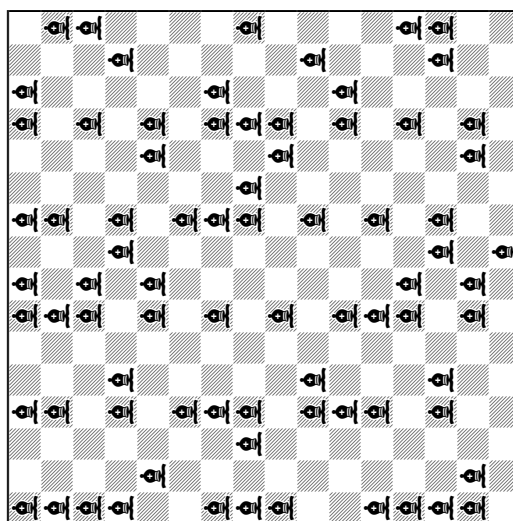
65 Riders [1,5], 13x13
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



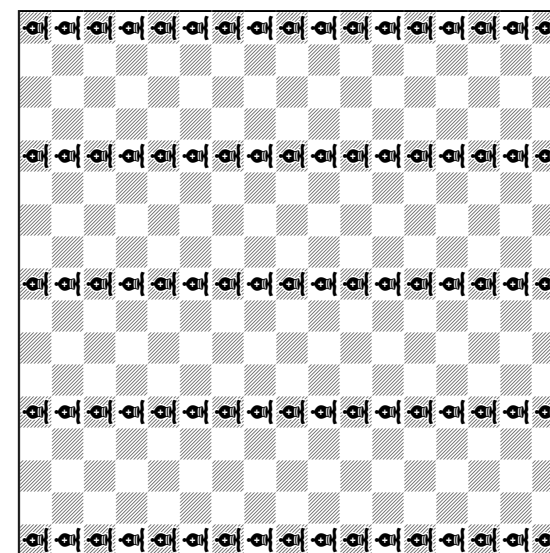
70 Riders [1,5], 14x14
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



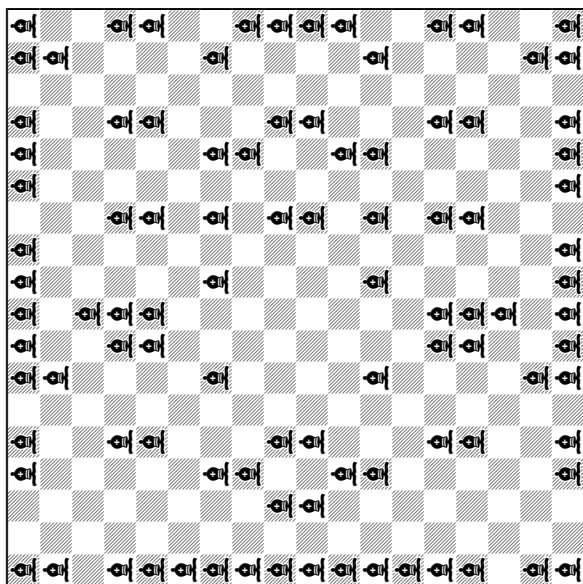
77 Riders [1,5], 15x15
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



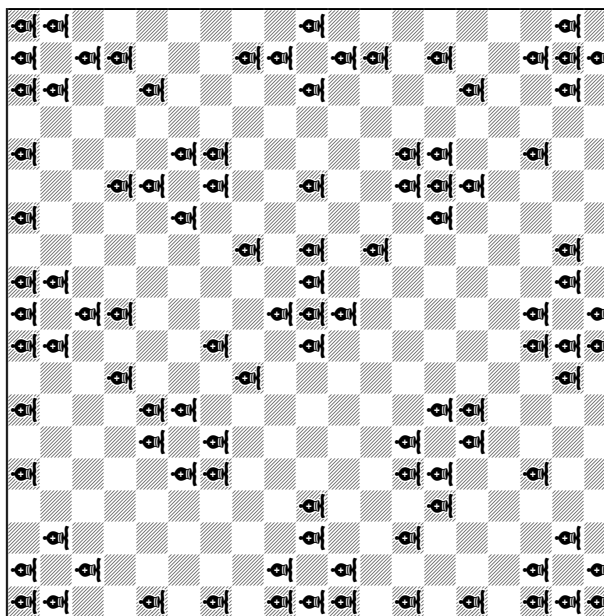
78 Riders [1,5], 16x16
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



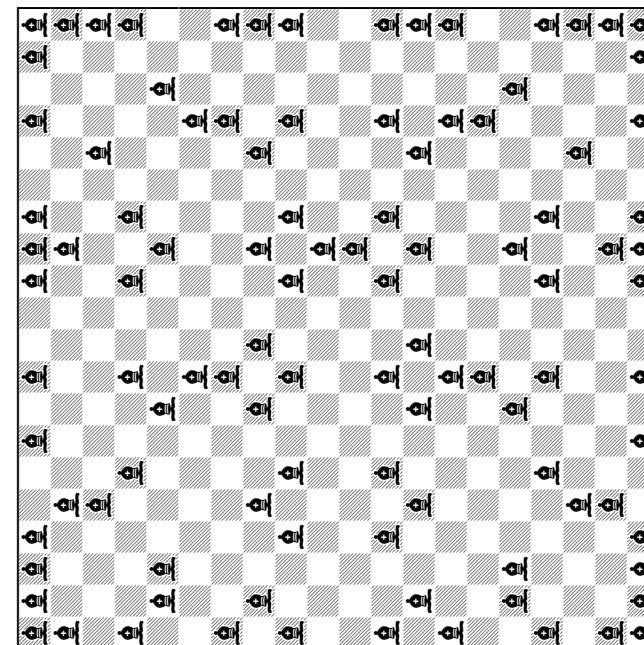
85 Riders [1,5], 17x17
V. Kotěšovec (2012)
(*proven optima*)



98 Riders [1,5], 18x18
 V. Kotěšovec (2012)
(proven optima)



102 Riders [1,5], 19x19
 V. Kotěšovec (2012)
(proven optima)



104 Riders [1,5], 20x20
 V. Kotěšovec (2012)
(proven optima)

Maximální počty **semi-kamenů** a jejich srovnání se shodnými kameny s plnou působností po všech liniích

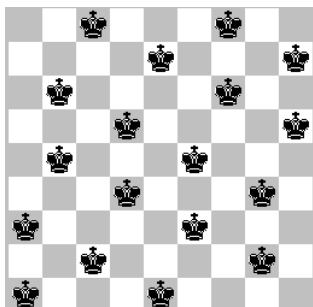
Maximal number of non-attacking / Maximální počet neohrožujících se										
normal chessboard	Bishops	semi-Bishops	Knights	semi-Knights	Nightriders	semi-Nightriders	Wazirs	semi-Wazirs	Ferses	semi-Ferses
1 x 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2 x 2	2	3	4	4	4	4	2	2	2	3
3 x 3	4	5	5	7	5	7	5	6	6	6
4 x 4	6	7	8	10	8	10	8	8	8	10
5 x 5	8	9	13	16	10	13	13	15	15	15
6 x 6	10	11	18	24	16	16	18	18	18	21
7 x 7	12	13	25	30	17	19	25	28	28	28
8 x 8	14	15	32	36	20	22	32	32	32	36
9 x 9	16	17	41	47	21	25	41	45	45	45
10 x 10	18	19	50	60	24	28	50	50	50	55
11 x 11	20	21	61	69	26	31	61	66	66	66
12 x 12	22	23	72	78	32	34	72	72	72	78
13 x 13	24	25	85	94	33	37	85	91	91	91
14 x 14	26	27	98	112	36	40	98	98	98	105
15 x 15	28	29	113	124	39	43	113	120	120	120
16 x 16	30	31	128	136	42	46	128	128	128	136
$n \times n$	$2n - 2$	$2n - 1$	$\left\lfloor \frac{n^2 + 1}{2} \right\rfloor$	$\frac{(2n + 3)n - \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{4}$	$2n \leq m \leq 3n - 2$	$3n - 2$	$\left\lfloor \frac{n^2 + 1}{2} \right\rfloor$	$n \left\lfloor \frac{n + 1}{2} \right\rfloor$	$n \left\lfloor \frac{n + 1}{2} \right\rfloor$	$\frac{n(n + 1)}{2}$
	$n > 1$		$n > 2$		$n > 3$					
normální šachovnice	střelců	semi-střelců	jezdců	semi-jezdců	tátošů	semi-tátošů	vezírů	semi-vezírů	fersů	semi-fersů

14.2) toroidal chessboard - prstencová šachovnice

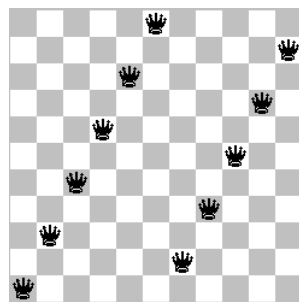
Maximal number of non-attacking / Maximální počet neohrožujících se											
toroidal chessboard	Kings	Queens	Rooks	Bishops	Knights	Nightriders	Amazons	Wazirs	Ferses	Zebras	Grasshoppers
1 x 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2 x 2	1	1	2	2	2	2	1	2	2	4	4
3 x 3	1	1	3	3	3	3	1	3	3	3	4
4 x 4	4	2	4	4	8	4	1	8	8	8	8
5 x 5	5	5	5	5	5	5	1	10	10	10	10
6 x 6	9	4	6	6	18	6	2	18	18	18	12
7 x 7	10	7	7	7	14	7	4	21	21	14	14
8 x 8	16	6	8	8	32	8	5	32	32	32	18
9 x 9	18	7	9	9	27	9	5	36	36	27	22
10 x 10	25	9	10	10	50	10	8	50	50	50	≥ 26
11 x 11	27	11	11	11	41*	11	11	55	55	44	≥ 32
12 x 12	36	10	12	12	72	12	10	72	72	72	≥ 37
13 x 13	39	13	13	13	61*	13	13	78	78	52*	≥ 45
14 x 14	49	13	14	14	98	14	13	98	98	98	≥ 50
15 x 15	52	13	15	15	85*	15	13	105	105	90*	≥ 60
prstencová šachovnice	králů	dam	věží	střelců	jezdců	tátošů	amazonek	vezírů	fersů	zeber	cvrčků

* - best found to date and an improvement seems unlikely, but an exhaustive search has not been performed

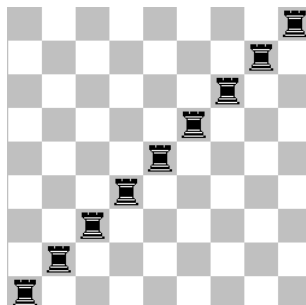
Příklady pozic - Examples



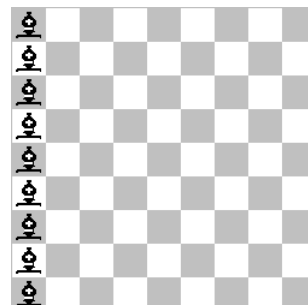
18 kings, toroidal 9x9



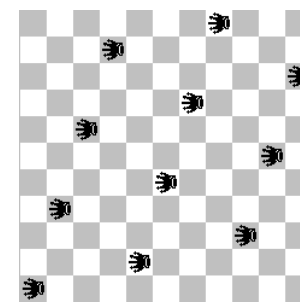
11 queens, toroidal 11x11



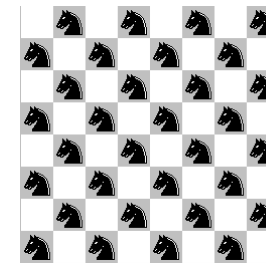
8 rooks, toroidal 8x8



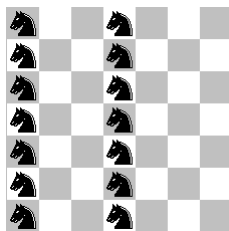
9 bishops, 9x9



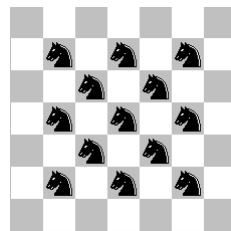
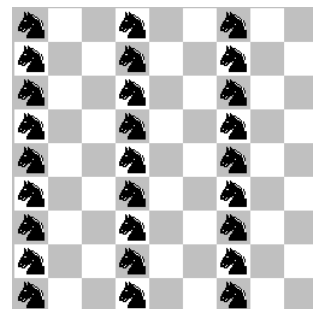
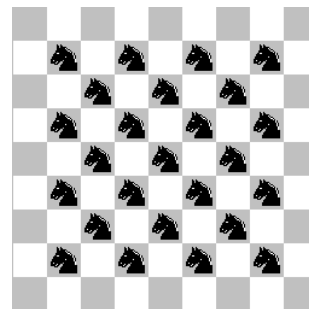
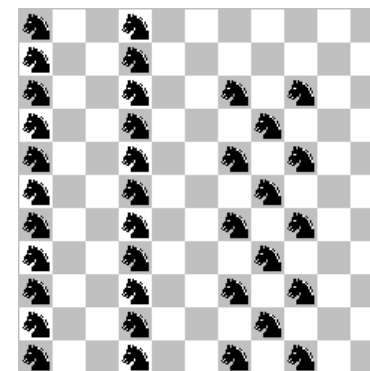
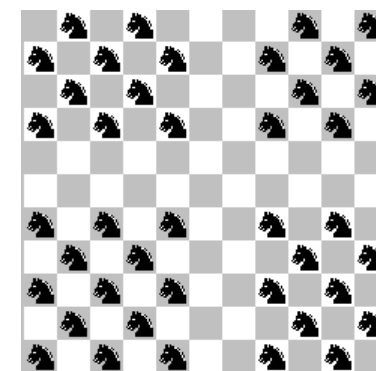
11 amazons, toroidal 11x11



32 knights, toroidal 8x8



14 knights, toroidal 7x7

13 knights, toroidal 7x7
(not maximal!)27 knights, toroidal 9x9
(proven optima!)25 knights, toroidal 9x9
(maximum on black squares,
but not absolute maximum)36 knights, toroidal 11x11
(not maximal!)41 knights, toroidal 11x11
(position shifted for better view)

Určení maximálního počtu neohrožujících se jezdců na prstencové šachovnici je snadné na šachovnicích sudých rozměrů (kde lze použít, stejně jako na normální šachovnici, konfiguraci jezdců pouze na černých polích), ale je poměrně složité na šachovnici lichých rozměrů (kde spolu **sousedí pole stejných barev!**). Jsou možné 2 typy konstrukcí. Pro $n \geq 11$ je opět tou nejlepší konfigurací rozmístění jezdců jen na černých polích s dostatečnou mezerou (alespoň 2 řady a 2 sloupce), aby na sebe nemohli jezdcí na prstencové šachovnici působit. Ale pro šachovnice $n \times n$, kde n je liché a menší než 11, vtěsnáme na šachovnici více kamenů při použití jezdců umístěných ve sloupcích vzdálených od sebe o 3 (pokud je n typu $3k$ nebo $3k+1$) nebo kombinací obou možností (pokud je n typu $3k+2$).

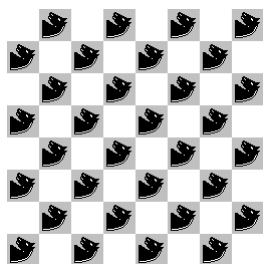
Pro $n \geq 11$ tak dostaneme vzorec pro maximální počet neohrožujících se jezdců na prstencové šachovnici lichých rozměrů (*Maximal number of non-attacking knights on an $n \times n$ toroidal chessboard is, if n is odd, $n \geq 11$*)

$$\frac{(n-2)^2 + 1}{2}$$

Je však možné zahrnout všechny případy do jednoho výrazu. V programu Mathematica dostaneme tabulku maximálních počtů kamenů (zahrnující i šachovnice sudých rozměrů) takto:

```
Table[If[EvenQ[n], n^2/2, Max[If[Mod[n, 3] == 2, n*(n-5)/3 + 3*(n-1)/2 - 1, n*Floor[n/3]], ((n-2)^2 + 1)/2]], {n, 1, 50}]
```

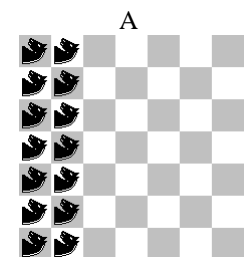
Zebra is a leaper [2,3].



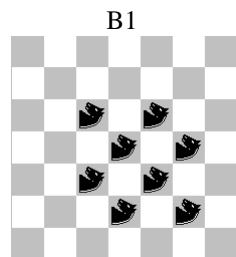
32 zebbras, toroidal 8x8

Pro šachovnice sudých rozměrů je (vzhledem k tomu, že zebry podobně jako jezdcí mění svým tahem barvu pole) nejlepší konstrukcí umístění všech kamenů na černá pole, kterých je v případě prstencových šachovnic sudých rozměrů

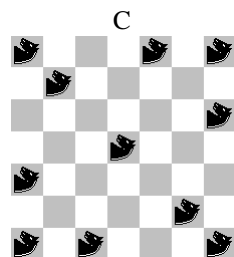
$$\frac{n^2}{2}$$



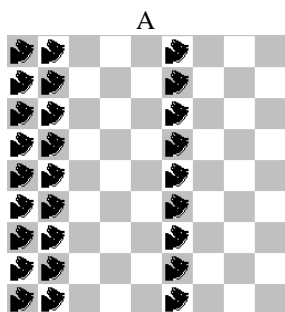
14 zebbras, toroidal 7x7



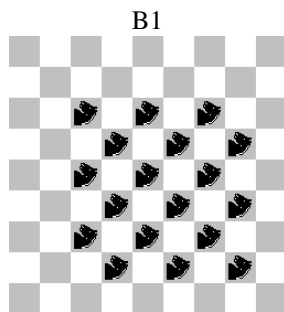
8 zebbras, toroidal 7x7



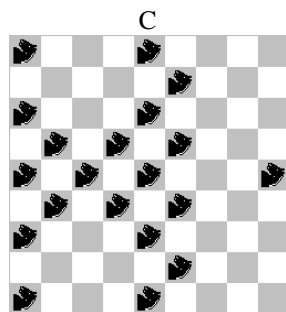
11 zebbras, toroidal 7x7



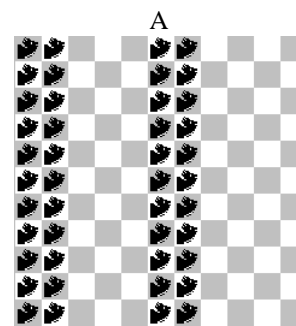
27 zebbras, toroidal 9x9
(*proven optima!*)



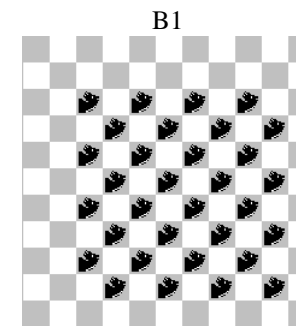
18 zebbras, toroidal 9x9
(*not maximal*)



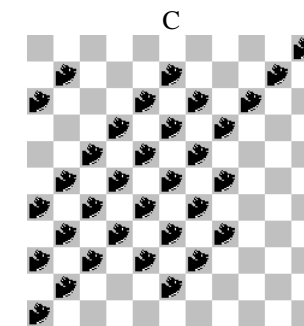
20 zebbras, toroidal 9x9
(*maximal on black squares*)



44 zebbras, toroidal 11x11
(*proven optima!*)



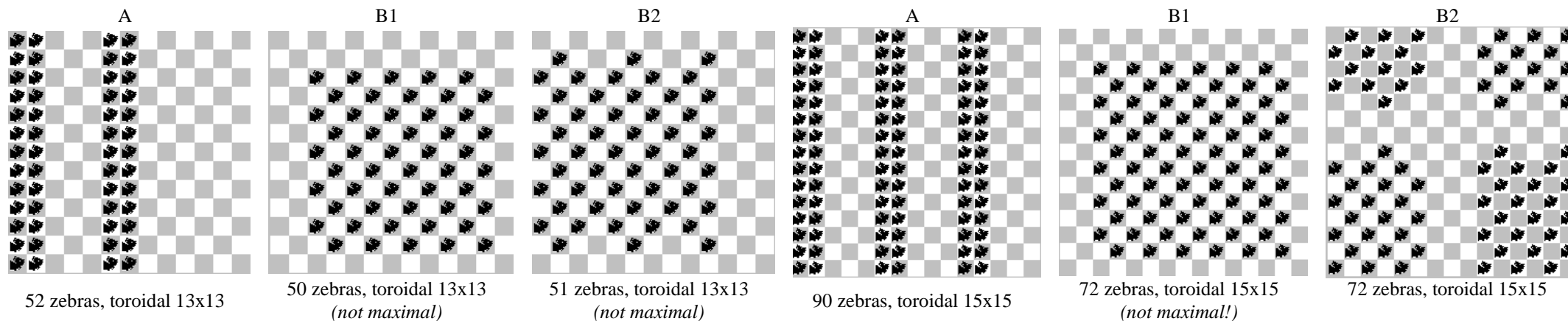
32 zebbras, toroidal 11x11
(*not maximal*)



33 zebbras, toroidal 11x11
(*not maximal*)

n	konstrukce A	konstrukce B1	konstrukce B2	konstrukce C
7	14	8	8	11
9	27	18	19	20
11	44	32	32	33
13	52	50	51	?
15	90	72	72	?
17	102	98	99	
19	133	128	128	
21	168	162	163	
23	184	200	200	
25	250	242	243	
27	270	288	288	
29	319	338	339	
31	372	392	392	
33	396	450	451	
35	490	512	512	
37	518	578	579	
39	585	648	648	

Podobně jako v případě jezdců jsou možné i pro zebry na prstencové šachovnici lichých rozměrů různé typy konstrukcí, které jsem označil jako A, B1, B2, C.



Pro $n \leq 11$ existují různé nepravidelné konstrukce zebber pouze na černých polích (označené jako C), umožňující umístění více zebber než při konstrukcích B1 nebo B2. Pro šachovnici 15x15 však počítač (po asi 10 hodinách) už žádnou atypickou konstrukci nenašel (i když nebylo možné prozkoumat všechny možnosti). Je možné, že konstrukce typu C, které by umožňovaly rozmístění více neohrožujících se zebber, pro větší rozměry prstencových šachovnic už neexistují. Na posledním diagramu jsem konstrukci B2 na prstencové šachovnici 15x15 posunul tak, aby bylo zřejmější napadání jednotlivých polí na prstencové šachovnici.

Pro čtvercovou konstrukci B1 je maximální počet možných kamenů $\frac{(n-3)^2}{2}$. Konstrukce B2 dává stejný výsledek jako B1 pro n typu $4k-1$, ale pro n typu $4k+1$ se na prstencovou šachovnici vejde o 1 kámen více. Maximální počet kamenů tak pro B2 vychází

Conjecture (V. Kotěšovec, 4.5.2011): *Maximal number of non-attacking zebras on an $n \times n$ toroidal chessboard is (if n is odd, $n \geq 27$)*

$$2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

Pro menší hodnoty n je většinou lepší konstrukce A, ve dvou přilehlých sloupcích, oddělených mezerou 3 sloupců od dalších. Záleží ovšem ještě na tom, jaký dává n zbytek po dělení 5. V případě, že je n typu $5k$, $5k+1$, $5k+2$ nebo $5k+3$, vycházejí vždy 2 sloupce vedle sebe. V případě $n=5k+4$ zůstane jeden sloupec osamocený (viz předchozí strana).

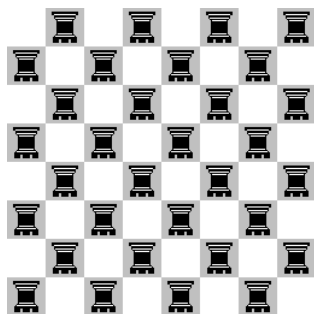
Je však evidentní, že pro velká n musí být konstrukce B vždy lepší než konstrukce A. Velikost pokrytí se v případě konstrukcí B asymptoticky blíží k 50%, kdežto v případě konstrukce A je to pouze 40% pokrytí. Konstrukce B s kameny na černých polích je úspěšnější než konstrukce A ale až od $n \geq 27$ (viz též tabulka na předchozí straně). Od tohoto n je pro prstencové šachovnice lichých rozměrů maximální počet rozmístitelných neohrožujících se zebber daný předchozím vzorcem pro konstrukci B2.

Celkem tedy máme (když zahrneme i atypické hodnoty pro $n \leq 3$)

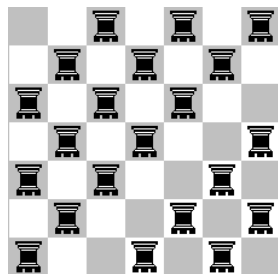
```
Flatten[{{1, 4, 3}, Table[If[EvenQ[n], n^2/2,
Max[If[Mod[n, 5]==4, 2n*Floor[n/5]+n, 2n*Floor[n/5]], (n-3)*(n-4)/2+2*Floor[n/4]], {n, 4, 50}]]}]
```

Pro vezíry a fersy na prstencových šachovnicích lichých rozměrů jsou nejúspornější tyto konstrukce:

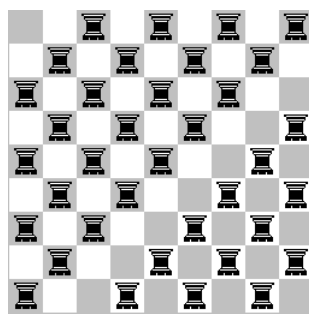
(*Wazir is a leaper [0,1], Fers is a leaper [1,1]*)



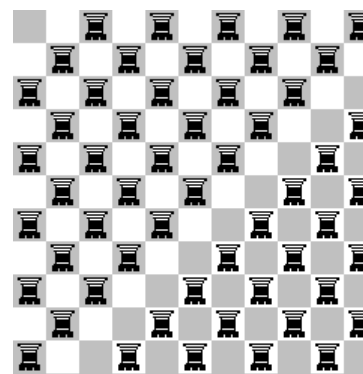
32 wazirs, toroidal 8x8



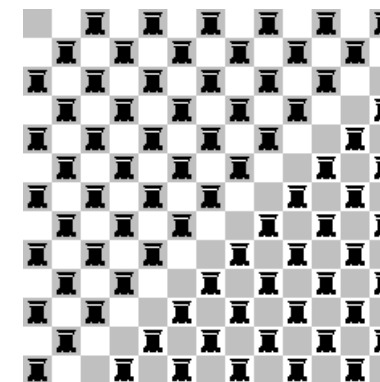
21 wazirs, toroidal 7x7



36 wazirs, toroidal 9x9
(*proven optima!*)

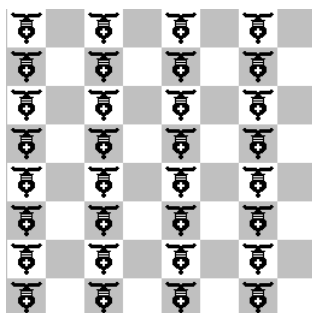


55 wazirs, toroidal 11x11
(*proven optima!*)

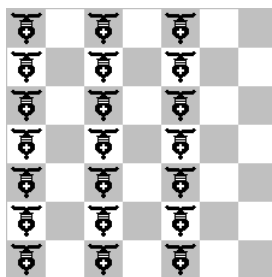


78 wazirs, toroidal 13x13
(*proven optima!*)

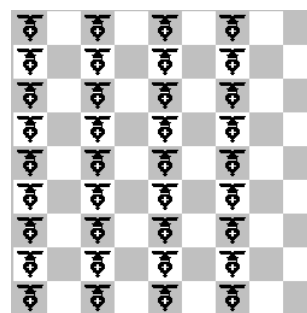
Na prstencové šachovnici 9x9 existuje celkem 18 pozic se 36 nenapadajícími se vezíry. Na prstencové šachovnici 11x11 existuje celkem 22 pozic s 55 nenapadajícími se vezíry. Na prstencové šachovnici 13x13 existuje celkem 26 pozic se 78 nenapadajícími se vezíry.



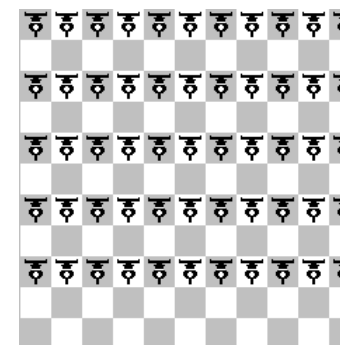
32 ferses, toroidal 8x8
(*proven optima*)



21 ferses, toroidal 7x7
(*proven optima*)

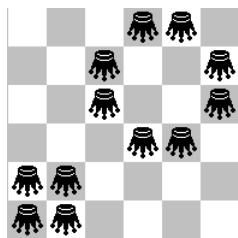


36 ferses, toroidal 9x9
(*proven optima*)

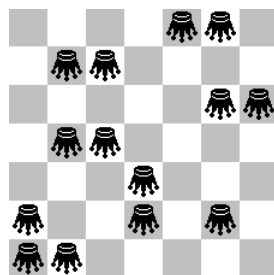


55 ferses, toroidal 11x11
(*proven optima*)

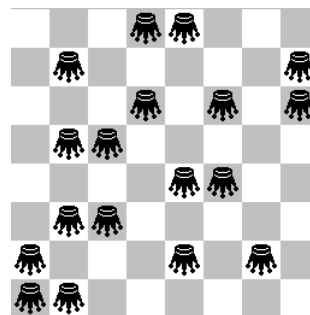
Note: On an $n \times n$ toroidal chessboard are results for rookhoppers (for $n > 3$) same as for wazirs and results for bishophoppers (for $n > 3$) are same as for ferses.



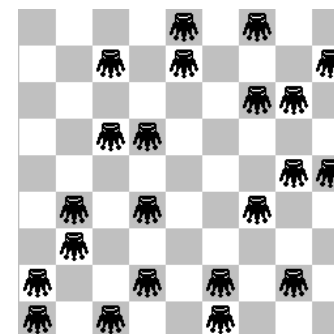
12 grasshoppers, toroidal 6x6
(*proven optima*)



14 grasshoppers, toroidal 7x7
(*proven optima*)

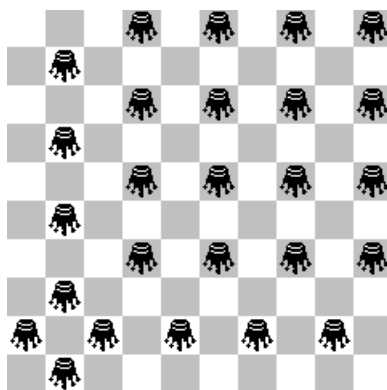


18 grasshoppers, toroidal 8x8
V. Kotěšovec (4/2011)
(*proven optima!*)

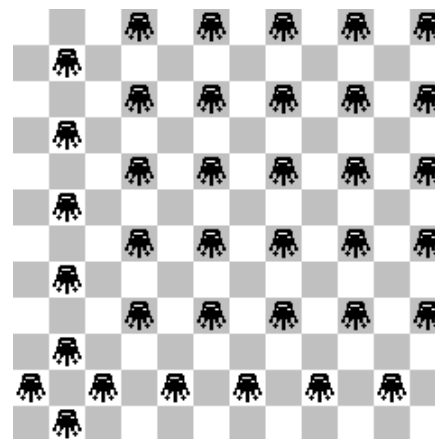


22 grasshoppers, toroidal 9x9
V. Kotěšovec (4/2011)
(*proven optima!*)

Počítačem jsem dokázal, že **na prstencovou šachovnici 8x8 se vejde maximálně 18 nenapadajících se cvrčků**. Možných pozic s 18 kameny je celkem 6784. Pro prstencovou šachovnici 9x9 je nalezené maximum 22, což je rovněž absolutní rekord. Existuje celkem 1620 různých pozic. Rekordy pro šachovnice větších rozměrů mohou být ještě překonány. *Most of the results are "absolute" (proven optima), but some are identified as only "probable" (best found to date and an improvement seems unlikely, but an exhaustive search has not been performed).*

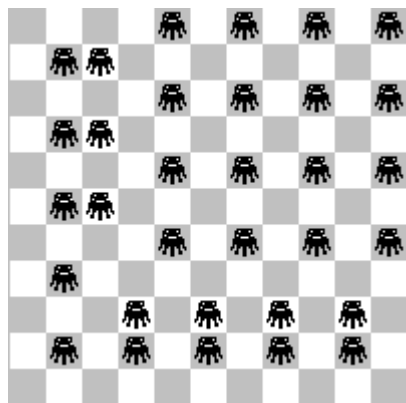


26 grasshoppers,
toroidal 10x10
(*non-proven optima*)

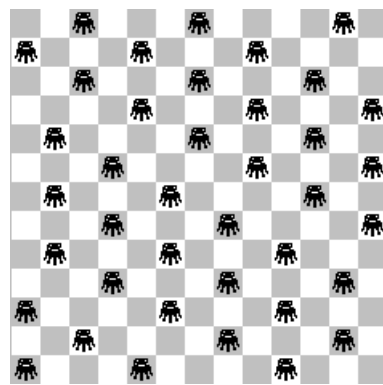


37 grasshoppers,
toroidal 12x12
(*non-proven optima*)

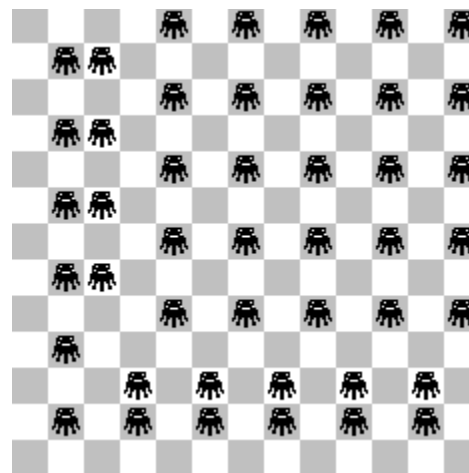
Z konstrukcí na diagramech sudých rozměrů vyplývá (pro $n > 2$) odhad maxima $m \geq \frac{n^2}{4} + 1$, což je o 1 pole lepší než při rozmístění na polích nenapadajících se králů.



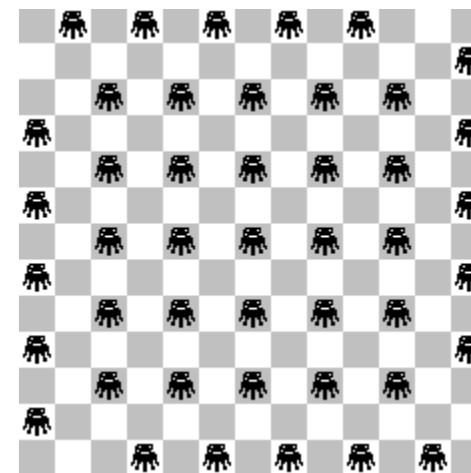
32 grasshoppers, toroidal 11x11
(Pavel Kameník, 5/2011
Cornel Pacurar, 5/2011)
(non-proven optima)



39 grasshoppers, toroidal 13x13
(not maximal)



45 grasshoppers, toroidal 13x13
(Pavel Kameník, 16.5.2011)
(non-proven optima)



45 grasshoppers, toroidal 13x13
(Luis Miguel Martín, 19.5.2011)
(another position, symmetrical)

Pro lichá n se mi dlouho nedařilo najít nějakou pravidelnou konstrukci. Např. pro prstencovou šachovnici 13x13 tak byla v tu chvíli maximální konfigurace 39 nenapadajících se cvrčků umístěných na polích jako při pozici králů (viz diagram). Jelikož nebylo časově únosné prozkoumat počítačem šachovnice větších rozměrů, vypsals jsem 15.5.2011 na mojí [internetové stránce](#) malou soutěž, jestli někdo neobjeví pozici se 40 neohrožujícími se cvrčky na prstencové šachovnici 13x13. Předpokládal jsem totiž, že do té doby nalezená pozice se 39 cvrčky určitě nebude tou maximální. A skutečně, hned 16.5.2011 objevil Pavel Kameník pozici se 45 cvrčky a současně i kýžený mustr pro prstencové šachovnice **lichých** rozměrů. Jeho konstrukce dává pro lichá n vzorec

$$m \geq \frac{1}{4}(n-3)(n+5)$$

Pro $n=9$ je sice lepší nepravidelná konstrukce nalezená počítačem (22 cvrčků proti 21), ale od šachovnice 11x11 je už lepší Pavlova konstrukce.

I announced on my [website](#) tournament (C 31.5.2011): "Find configuration of 40 non-attacking grasshoppers on an 13x13 toroidal chessboard!". Winner Pavel Kameník found arrangements of 45 grasshoppers and simultaneously general scheme if n is odd. His construction is best for $n \geq 11$ (for $n=9$ is better position on previous page). Identical position on an 11x11 toroidal board found also Cornel Pacurar.

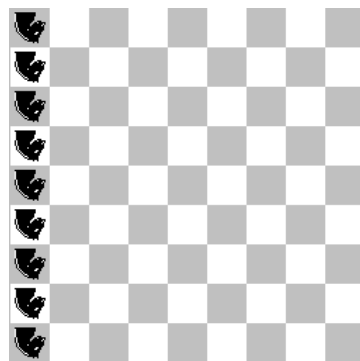
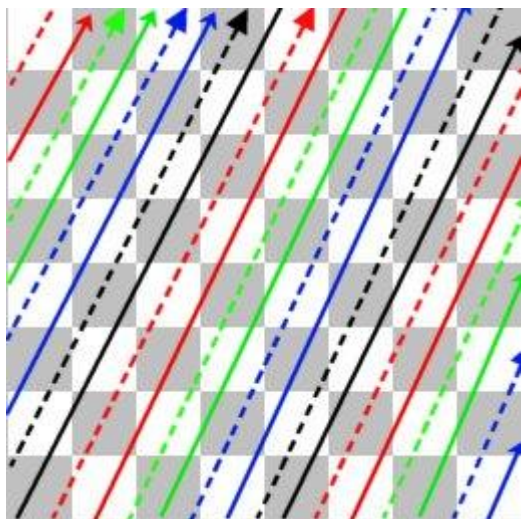
Aktuální známé hodnoty všech maxim (resp. jejich dolních mezí) jsou zaneseny v tabulce na str. 777.

Poznámka: Jako kuriozitu mohu doplnit, že „korektnost“ všech těchto pozic lze ověřit programem WinChloe. Stačí všechny kameny definovat jako neutrální a řešit jako jednotazku s výzvou „Gain de piece“. Pokud nemá taková úloha řešení, je pozice správná, není možné žádné brání a tedy kameny se nenapadají.

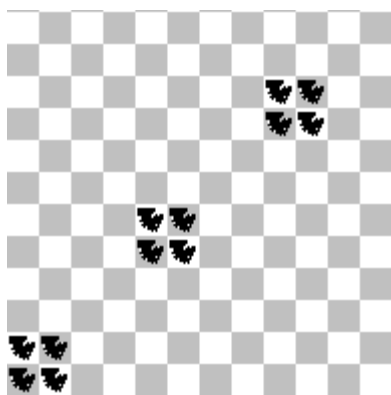
Theorem (V. Kotěšovec, 5.5.2011):

Maximální počet neohrožujících se tátošů, které lze rozmístit na **prstencovou** šachovnici $n \times n$ je n . Řešení existuje pro každé n .

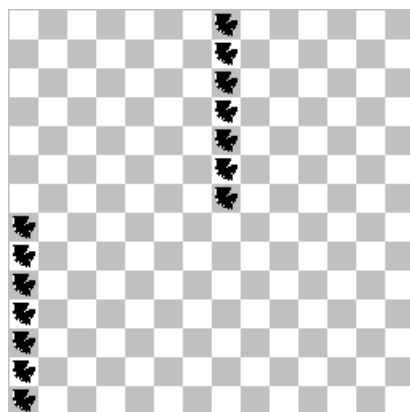
Maximal number of non-attacking nightriders on an $n \times n$ toroidal chessboard is n . Such solution exists for any n .



$$n = 2k + 1$$



$$n = 4k$$



$$n = 4k + 2$$

Maximální počet kamenů je omezen počtem rovnoběžných linií s krokem $[1,2]$, přičemž vzhledem k podmínce, že se tátoši nenapadají, může být na každé z těchto linií nejvýše jeden kámen. Počet takovýchto neidentických linií na prstencové šachovnici $n \times n$ je (podobně jako v případě střelců) roven n . Není proto možné na prstencovou šachovnici $n \times n$ umístit $n+1$ nebo více neohrožujících se tátošů. Viz diagram, ve kterém je každá z potenciálních linií označena jinou barvou (pro prstencovou šachovnici 8×8 je takovýchto linií právě 8).

Proof: No more than n parallel lines (with step $[1,2]$) exists, therefore no arrangements of $n+1$ nightriders on an $n \times n$ toroidal chessboard exists.

Pro důkaz existence řešení rozlišíme celkem 3 případy.

- Pro lichá n sestrojíme vyhovující pozici jednoduše umístěním n tátošů na jednom sloupci nebo řadě.
- Pro sudá n je konstrukce obtížnější. Pokud je n násobkem 4, zkonstruujeme řešení složením celkem $n/4$ bloků 4×4 s konfigurací tátošů ve čtverci 2×2 .
- Pokud je n sudé, ale $n/2$ liché, složíme řešení ze 2 bloků $n/2 \times n/2$ s umístěním vždy $n/2$ tátošů na krajním sloupci každého dílčího bloku.

Takto můžeme vytvořit řešení pro každé n , úloha má tedy vždy alespoň jedno řešení. Viz diagramy.

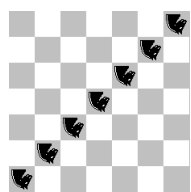
Proof of existence: construction of solution for each of 3 cases of chessboard types.

Ohledně počtu možných rozestavení na prstencové šachovnici, viz kap. 6.4.

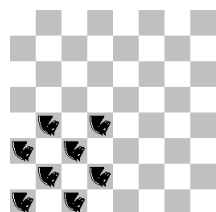
Co se týče válcové šachovnice, viz kap. 6.6 a poznámka na str. 339.

Ještě je zajímavé, že pravděpodobně pro všechna $n > 3$ existují rozestavení n neohrožujících se tátošů taková, že všechny kameny jsou jen na **černých** polích prstencové šachovnice $n \times n$. Toto tvrzení lze dokázat pro všechna n sudá. Pro lichá n jsou konstrukce složitější a existence pro všechna lichá n není jasná.

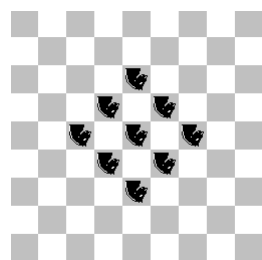
*Examples of special configurations of n non-attacking nightriders on an $n \times n$ toroidal chessboard, all units are on a **black squares**! Existence proved for n even. For n odd not exists solution for $n=3$, but for all $n>3$ probably exists (=conjecture, verified with computer for all $n \leq 38$, case $n=37$ took 279 hours!).*



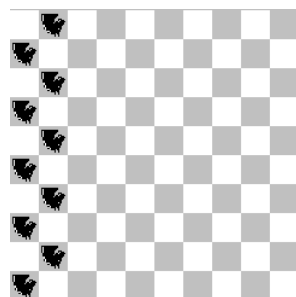
7 nightriders,
toroidal 7x7



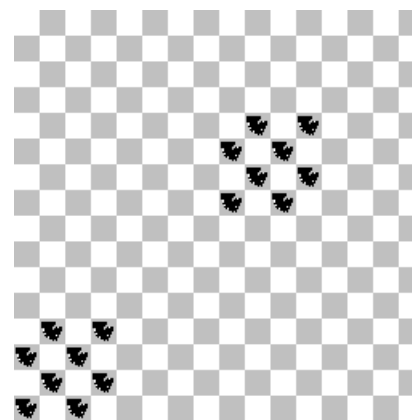
8 nightriders,
toroidal 8x8



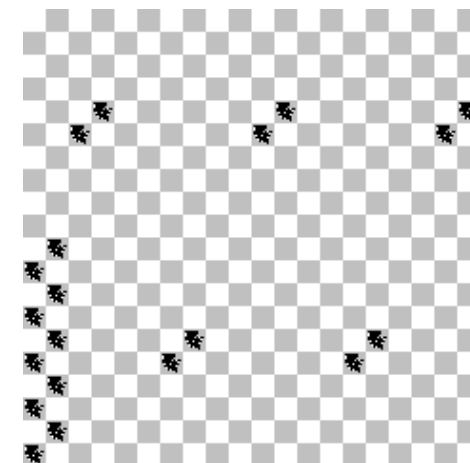
9 nightriders,
toroidal 9x9



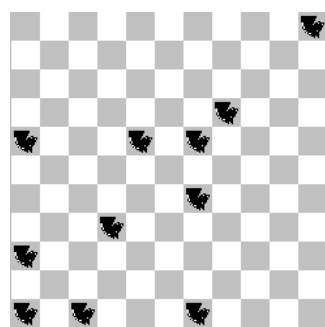
$n=4k+2$



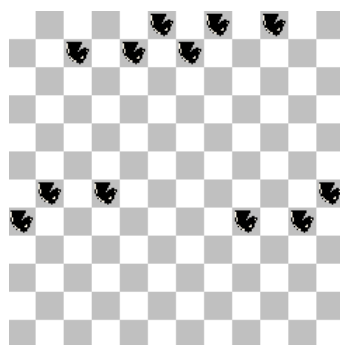
$n=8k$



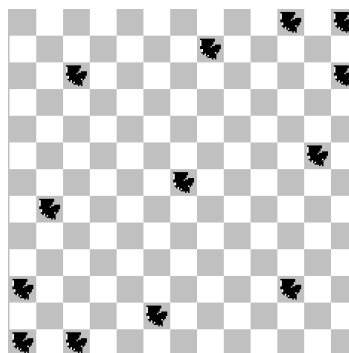
$n=8k+4$



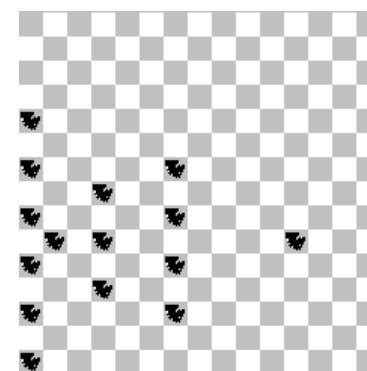
11 nightriders, toroidal 11x11
(až na posuny a symetrie
jediná možná pozice)



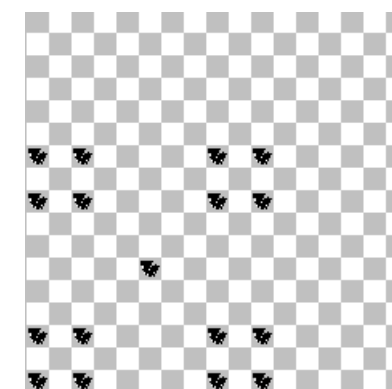
12 nightriders, toroidal 12x12



13 nightriders, toroidal 13x13
(jediná možná pozice)

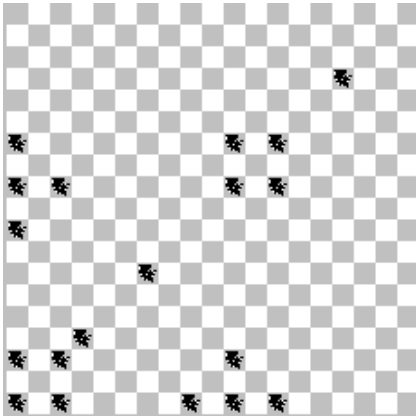


15 nightriders, toroidal 15x15

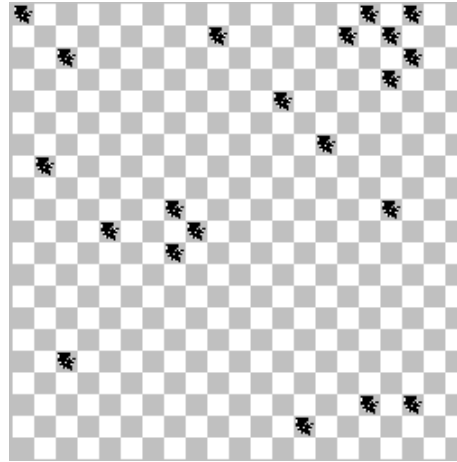


17 nightriders, toroidal 17x17

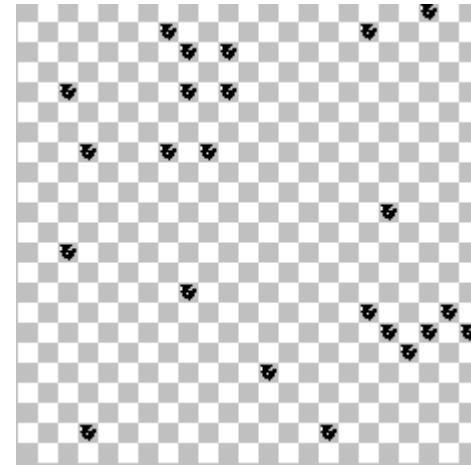
Konfigurace n neohrožujících se tátošů na prstencové šachovnici $n \times n$ s umístěním všech kamenů na **černých** polích neexistuje na šachovnici 3x3, počítačem byla ale nalezena na všech ostatních prstencových šachovnicích (lichých i sudých rozměrů) až do $n \leq 38$. Některá symetrická rozestavení přinášejí i pěkný estetický zážitek. Na diagramech jsou zobrazena postavení na šachovnicích lichých rozměrů a ze sudých pouze typ $8k+4$.



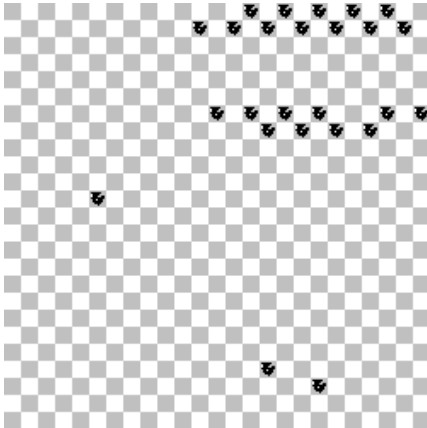
19 nightriders on a black squares,
toroidal 19x19



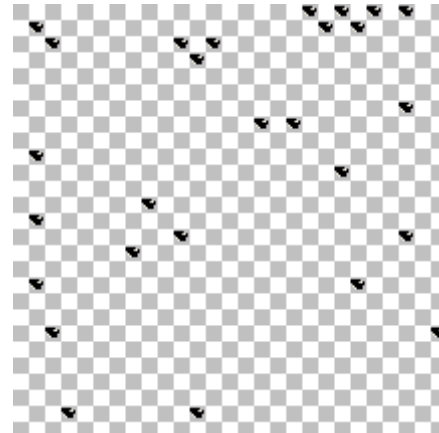
21 nightriders on a black squares,
toroidal 21x21



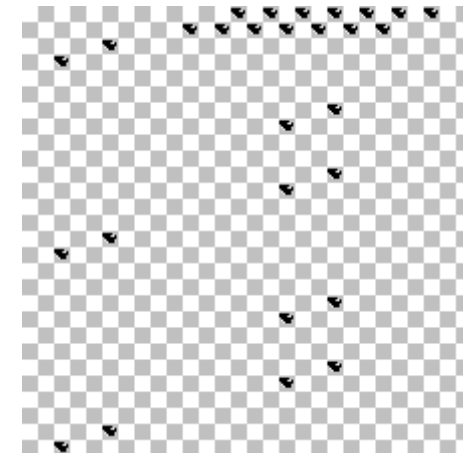
23 nightriders on a black squares,
toroidal 23x23



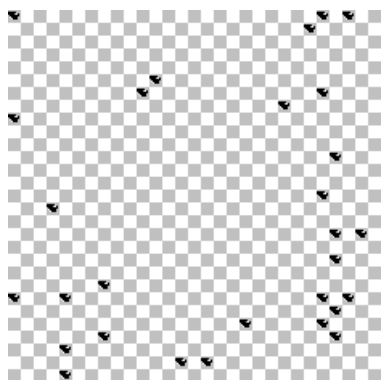
25 nightriders on a black squares,
toroidal 25x25



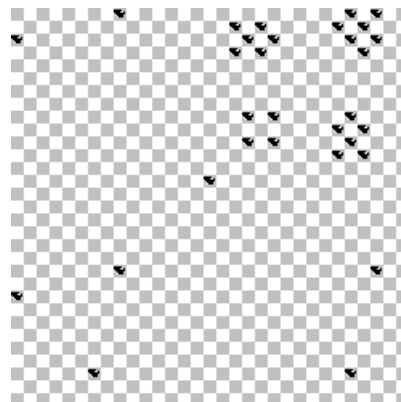
27 nightriders on a black squares,
toroidal 27x27



28 nightriders on a black squares,
toroidal 28x28



29 nightriders on a black squares,
toroidal 29x29



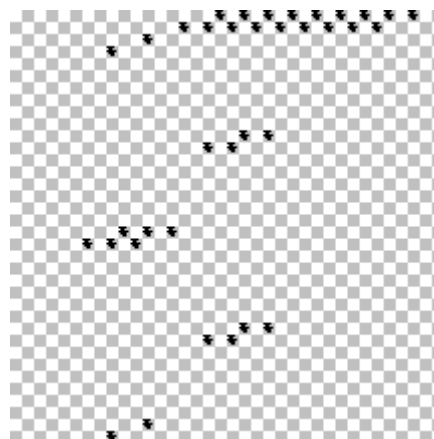
31 nightriders on a black squares,
toroidal 31x31



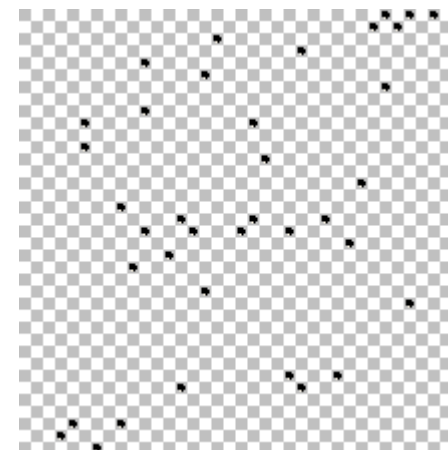
33 nightriders on a black squares,
toroidal 33x33



35 nightriders on a black squares,
toroidal 35x35



36 nightriders on a black squares,
toroidal 36x36



37 nightriders on a black squares,
toroidal 37x37

Nalezení pozice pro prstencovou šachovnici 37 x 37 s 37 nenapadajícími se tátoši na černých polích trvalo 279 hodin! Pozice je tentokrát zcela nepravidelná.

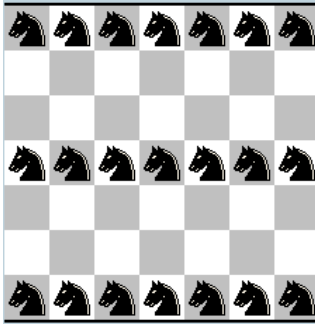
Diagramy v kapitole 14 byly pořízeny pomocí programu WinChloe.

14.3) cylindrical chessboard - válcová šachovnice

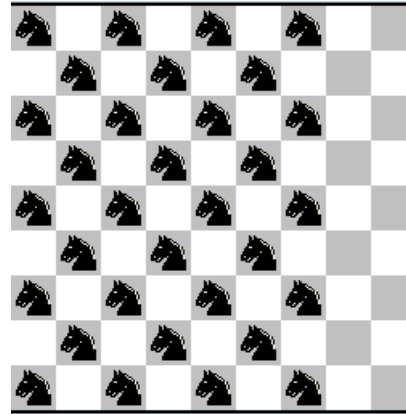
Maximal number of non-attacking / Maximální počet neohrožujících se				
cylindrical chessboard	Kings	Knights	Wazirs	Ferses
1 x 1	1	1	1	1
2 x 2	1	2	2	2
3 x 3	2	3	3	6
4 x 4	4	8	8	8
5 x 5	6	10	10	15
6 x 6	9	18	18	18
7 x 7	12	21	21	28
8 x 8	16	32	32	32
9 x 9	20	32	36	45
10 x 10	25	50	50	50
11 x 11	30	50*	55	66
12 x 12	36	72	72	72
13 x 13	42	72*	78	91
14 x 14	49	98	98	98
15 x 15	56	98*	105	120
$n \times n$ n even / sudé	$\frac{n^2}{4}$	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n^2}{2}$
$n \times n$ n odd / liché	$\frac{(n-1)(n+1)}{4}$	$\frac{(n-1)^2}{2}$ $n \geq 9, (conjecture)$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$
válcová šachovnice	králů	jezdců	vezírů	fersů

Pro dámy, věže a střelce jsou výsledky pro válcovou šachovnici shodné jako pro prstencovou šachovnici.
For queens, rooks and bishops are for cylindrical chessboard maximal numbers identical as for toroidal board.

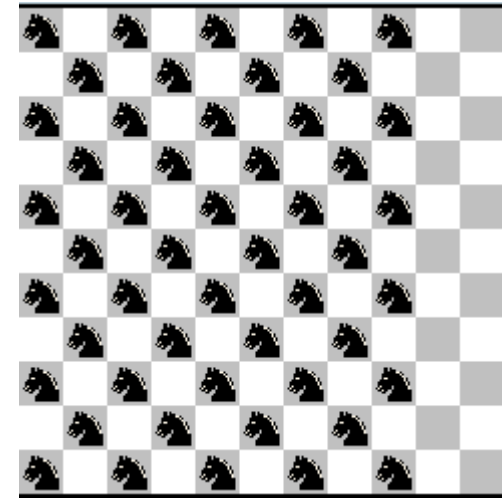
Zajímavý je případ jezdců na válcové šachovnici lichých rozměrů. Od $n=9$ je nejlepší konstrukce s vynecháním 2 sloupců, ta však není nejlepší na 7×7 , kde by obsahovala jen 18 jezdců, přičemž zde existuje konstrukce s 21 jezdcí.



21 knights, cylindrical board 7×7
(*proven optima*)



32 knights, cylindrical board 9×9
(*proven optima*)



50 knights, cylindrical board 11×11

15) Methods - Metody hledání vzorců

Pro hledání vzorců jsem napsal několik počítačových programů, které hledaly (podle zvoleného materiálu a rozměru šachovnic) počty neohrožujících se kamenů stejných hodnot. Po vygenerování dostatečného počtu členů těchto posloupností (*což si pro celou tuto knihu vyžádalo dohromady určitě několik tisíc hodin počítačového času!*), jsem pak postupoval několika možnými metodami (nejvíce se osvědčila metoda č.3).

Metoda 1 - odhad tvaru řešení. Při této metodě vycházíme z toho, že analyzované posloupnosti vedou na [homogenní lineární diferenční rovnici s konstantními koeficienty](#). Podle počtu rozmístovaných kamenů snadno určíme řád této rovnice. Příslušnou diferenční rovnici v tu chvíli sice vůbec neznáme, ale víme, jaký tvar má obecně její řešení. Pokud dobře odhadneme tvar partikulárních řešení, jde pak hledat koeficienty příslušných polynomů, což vede k soustavě lineárních rovnic. Počet neznámých koeficientů je minimálně stupeň tohoto polynomu plus jedna, v případě existence kvazipolynomů (pro každé partikulární řešení) může ale být neznámých mnohem více. Pokud máme ale k dispozici jen několik prvních členů neznámé posloupnosti, je možné stupně kvazipolynomů (které zatím neznáme) volit jen v rozsahu, který nám dovoluje celkový počet vypočtených hodnot (s nutnou rezervou 1-2 hodnot pro ověření vzorce pro $n+1$). Pokud to nestačí, musíme vypočítat další hodnoty. Stupně kvazipolynomů jsou vždy menší než stupeň hlavního polynomu (dost často to dokonce bývají jen konstanty, občas i nula), problém je v tom, že to v okamžiku výpočtu neznáme a tak musíme často experimentovat, zejména pokud máme málo hodnot posloupnosti a výpočet dalších hodnot je časově náročný. Obecně platí, že vyšší stupeň kvazipolynomu jde očekávat u členů s nejkratší periodou (obvykle u $(-1)^n$), kvazipolymomy u členů s delší periodou obvykle nemají vyšší stupeň než 1. Tato metoda je ovšem nejvíce úspěšná pokud vzorec neobsahuje kvazipolymomy a pokud explicitní vzorec platí již od malých hodnot n (často se stává, že vzorec platí až od určité hodnoty n).

Metoda 2 - pokud vzorec obsahuje kvazipolymomy (je závislý na typu rozměru šachovnice sudá/lichá apod.), je k jeho určení třeba více hodnot. K minimalizaci počtu potřebných hodnot je možné se pokusit nejprve **určit periodu** a potom hledat koeficienty jen jednoho (pevného) polynomu pro **aritmetickou posloupnost** $n = ap+b$, kde p je perioda, b je pevná konstanta (zvolíme jeden z možných posunů) a index a se zvětšuje o 1. Tuto metodu jsem použil např. v případě [3 tátošů](#) na normální šachovnici, kde při periodě 60

zkoumáme např. posloupnost $n=10,70,130,190,250,310$. Jelikož víme, že vzorec bude polynom 6.stupně, stačí nám 7 hodnot, ale koeficient u n^6 se dá předpokládat (podle tvaru jiných vzorců) jako $1/6$, proto stačí hodnot jen 6. Optimalizovaným programem jsem proto vygeneroval prvních 310 členů posloupnosti a odtud už se jeden z dílčích vzorců dal určit. Podobným postupem se pak dají odvodit vzorce pro ostatní posuny. Pak je možné hledat závislosti a snažit se vzorec unifikovat. Nejtypičtějším příkladem této metody je (při periodě=2) hledání dvou různých vzorců samostatně pro sudé a samostatně pro liché členy posloupnosti.

Metoda 3 - ve známé číselné řadě se dají hledat [rekurence](#), tj. závislosti nové hodnoty na hodnotách předchozích. Tato metoda opět vede na soustavu lineárních rovnic, jejichž řešení však musí být v **celočíselných koeficientech**. Pokud se nám podaří takovou závislost najít, máme diferenční rovnici, kterou dále řešíme již popsány metodami. Minimalizovat počet nezbytných hodnot se dá při znalosti, že u některých rekurentních rovnic tohoto typu jsou koeficienty zepředu a zezadu navzájem **symetrické a liší se jen obráceným znaménkem**. Zatímco obecná rekurence z q předchozích hodnot vyžaduje znalost $2q$ počátečních hodnot, u symetrické rekurence stejné hloubky je to jen $q + [(q+1)/2]$ hodnot, tedy o čtvrtinu méně (což může být rozhodující při značné náročnosti výpočtů hodnot pro další n). Tuto metodu jsem použil např. pro 5 dam na normální i prstencové šachovnici nebo 4 amazonky na $n \times n$.

Metoda 4 - určení [vytvvořující funkce](#) jde použít jen někdy (např. v případě $m.n$ králů na šachovnici $2m \times 2n$), z takové funkce pak už snadno vyplývá tvar příslušné diferenční rovnice (je dán jmenovatelem) a pomocí [Taylorova rozvoje](#) lze vypočítat potřebný počet počátečních hodnot nezbytných k určení koeficientů ve vzorci. Vytvořující funkce má jednu příjemnou vlastnost, že platí pro všechna n bez výjimky (a to i v případech, kdy explicitní vzorec nebo rekurence platí až od určité hodnoty n). Např. vzorec pro počet rozmístění 4 neohrožujících se dam na šachovnici $4 \times n$ platí až od $n=7$ (rekurence $a_n = 5a_{n-1} - 10a_{n-2} + 10a_{n-3} - 5a_{n-4} + a_{n-5}$ dokonce až pro $n \geq 12$). Pomocí vytvořující funkce $-2x^4(x^3-x^2+x+1)(x^4+4x^2+1)/(x-1)^5$ dostaneme správné hodnoty pro **všechna n** (speciálně tedy i pro $n=4,5,6$). Vypočítat hodnoty posloupnosti ze známé vytvořující funkce $g(x)$ pak zvládne např. program Derive příkazem `vector(subst(dif(g(x),x,k)/k!,x,0),k,1,50)`, výsledkem je vektor s prvními 50 hodnotami. V programu Mathematica dostaneme totéž (pro předtím zadanou funkci g) pomocí

```
Table[SeriesCoefficient[g, {x, 0, n}], {n, 1, 50}]
```

(* Příklad programu na hledání symetrické rekurence (Metoda 3), © V. Kotěšovec 2009

Procedura hledá lineární rekurenci v zadané posloupnosti, určí vytvářející funkci a ověří platnost pro celou posloupnost (tabulka na konci musí vyjít samé 0)

rada - (input sequence) je vstupní posloupnost (předpokládá se, že začíná od indexu 1),

start - (starting order of recurrence, recommended >2) je počáteční hloubka rekurence (je vhodné zvolit třeba 5, ne 1),

poly0 - (1 or know part of denominator) je známý člen denominátoru vytvářející funkce (lze použít ke zmenšení počtu potřebných členů), pokud neznáme, volíme 1,

nadpis - (text in title) je text vypsaný kvůli lepší orientaci

*)

```
rekursym[rada_, start_, poly0_, nadpis_] := (Print["===== symetrical recurrence "];
```

```
  Print[nadpis]; d = Exponent[poly0, x]; nsel = 0;
```

```
  For[m = start, m + Floor[m/2] + d <= Length[rada], m = m + 1, mpul = Floor[m/2];
```

(* s každým krokem se vypisuje: aktuální hloubka rekurence, počet neznámých pro soustavu lineárních rovnic, rozsah indexů členů použitých ze vstupní sekvence *)

(* with each step display: current order of recurrence, number of unknown constants, indexes of values from input sequence *)

```
  Print[m, ",", mpul, ",", m + d, ",", m + Floor[m/2] + d];
```

```
  polyd = Expand[poly0*(-1 + Sum[Subscript[c, j]*x^j, {j, 1, mpul}] - Sum[Subscript[c, m - j]*x^j, {j, mpul + 1, m - 1}] + x^m)];
```

```
  sol = polyd /. Solve[Table[Sum[Coefficient[polyd, x, i]*rada[[n - i]], {i, 0, m + d}] == 0, {n, m + 1 + d, m + mpul + d}];
```

```
  test = Coefficient[sol, x, 2];
```

(* skončím u prvního celočíselného řešení *)

```
  If[test == Floor[test], nsel = 1; Break[]];
```

```
  If[nsel == 0, Print["No solution found"]; Return[0]];
```

(* rekurence nalezena, vypíšu jmenovatel vytvářející funkce (denominator found) *)

```
  denom = Factor[sol]; Print[denom];
```

(* vypíšu nalezenou rekurenci v obvyklém tvaru (print recurrence) *)

```
  Print[TraditionalForm[Sum[Coefficient[sol, x, i]*Subscript[a, n - i], {i, 0, m + d}]]];
```

(* ještě vypočítám vytvářející funkci (generating function) *)

```
  gf = (Sum[Subscript[b, i]*x^i, {i, 0, m + d - 1}]/denom)[[1]];
```

```
  gfvyp = Factor[gf /. Solve[Table[rada[[k]] == Simplify[SeriesCoefficient[gf, {x, 0, k}], {k, 1, m + d}]]][[1]];
```

```
  Print[gfvyp];
```

(* kontrola platnosti pro celou posloupnost - pokud vyjdou některé hodnoty nenulové, není výsledek správný a je nutno zadat více členů vstupní posloupnosti *)

(* verify of formula, all differences must be zero - if not then more input values necessary *)

```
  Print[Table[rada[[k]] - SeriesCoefficient[gfvyp, {x, 0, k}], {k, 1, Length[rada]}];
```

```
  );
```

(* Example - Příklad volání procedury pro 4 dámy na šachovnici n x n *)

```
q4={0,0,0,2,82,982,7002,34568,131248,412596,1123832,2739386,6106214,12654614,24675650,45704724,80999104,138170148,227938788,365106738,569681574,868289594,1295775946,1897176508,2729909796,3866439956,5397191260,7434046062,10114126790,13604287706};
```

```
rekursym[q4, 5, 1, "4 queens on an n x n chessboard"]
```

(* výsledkem je nalezení rekurence hloubky 17, k čemuž bylo při této metodě potřeba minimálně 25 členů posloupnosti *)

(* Ještě je třeba poznamenat, že zabudované funkce FindSequenceFunction, FindGeneratingFunction, FindLinearRecurrence řešení nenajdou *)

(* Note that internal functions FindSequenceFunction, FindGeneratingFunction, FindLinearRecurrence not found solution *)

Index of citations - Jmenný rejstřík citací (jiných autorů)

Abramson Morton	625	Eickenscheidt Bernd	62
Ahrens Wilhelm	40, 67, 751	Elkies Noam	350
Alekseyev Max A.	82, 128, 178, 189, 192, 285	Engel Arthur	508
Arshon Solomon E.	242, 244, 254	Engelhardt Matthias	63
Aspvall Bengt	624, 626	Erickson Martin	229
Azemard Louis	16	Euclid	565
Baltić Vladimir	226	Euler Leonhard	20, 22, 23, 24, 54, 55, 57, 220
Bandelow Christoph	82, 90, 136, 157	Fabel Karl	64, 67, 82, 90, 136, 234, 283, 284, 444, 752, 754
Barnes Joel	640	Fernando Suren	229
Baxter R. J.	70, 372	Fibonacci Leonardo	21, 22, 23, 24, 26, 54, 55, 56, 57, 90, 300, 380, 421, 431
Bell Eric Temple	640	Finch Steven R.	68
Birkhoff George David	228	Flajolet Philippe	221, 224, 227, 228, 624, 625
Bjørstad P.	629	Franel Jérôme	282
Bonsdorff Eero	90	Gauss Carl Friedrich	13
Breger Alex V.	82, 128, 129, 130, 130, 132, 138, 159, 178, 181, 183, 186, 189, 196, 202, 208, 209	Gerbicz Robert	372
Buchanan Andrew	229	Gibbons P. B.	258
Burchett Paul Asa	258	Good Irving John	249, 262
Butera Paolo	372	Graham Ronald L.	282
Calkin N.J.	74	Gvozďák Peter	715
Carpenter John A.	640	Hanna Paul D.	253, 433
Cavenagh Nicholas J.	736	Hanusa Christopher R.H.	34, 40, 239
Chaiken Seth	34, 40, 239	Hardin Ronald H.	71, 214, 225, 285, 300, 372, 380, 405, 409, 417, 421, 440
Chernov Alex	209	Heinz Alois P.	71, 293
Chowla Sarvadaman	227	Ichharam Jaimal	34
Cloitre Benoit	37, 639	James K.	74
Chyzak Frédéric	229	Jelliss George	665, 752
Cockayne E. J.	258	Jovovic Vladeta	221, 223, 224, 627
Cooper C.	736	Kameník Pavel	783
Dawson Thomas Rayner	444, 665	Kaplansky Irving	222, 625
Detlefs Gary	641	Karavaev Artem M.	14, 18, 50, 53, 56, 61, 162, 209
Dlugosz Witold	742	Kauers Manuel	228, 229, 433
Dudeney Henry	234, 256, 284, 751	Keane Joe	282
Durango Bill	348		
Dutka Jacques	221		

Kerawala S. M.	221	Pauls E.	39, 40, 751
Khalyavin Andrey	50, 51, 56, 61	Pemantle Robin	229
Kitaev Sergey	91, 421, 431	Perepechko Sergey	12, 13
Kløve Torleiv	226	Perlstadt Marci A.	282
Knuth Donald E.	90, 135, 282	Pernici M.	372
Kraitchik Maurice	665	Perott Joseph M.	242, 244
Kuznetsov N. Yu.	736	Perron Oskar	280
Lačný Ľudovít	40	Pinter Antal	34
Laguerre Edmond	219, 280	Poisson Christian	312, 343, 347, 351, 361, 369, 415, 444, 480, 515, 517, 518, 524, 688, 690, 700, 702, 704, 706, 708, 741, 743
Laisant Charles-Ange	221	Poisson Siméon Denis	624
Lambert Johann Heinrich	251, 263, 719	Pólya George	62, 751
Landau Edmund	11, 13, 16, 64, 67	Pratt Rob	761
Larsen Michael	135, 160	Purvis S.	74
Lehmer Derrick Henry	226	Pythagoras	565
Liang Frank M.	624, 626	Rao-Uppuluri V. R.	640
Lörinc Juraj	715	Ricci Chris	751
Louridas Panos	11, 343, 347	Richardson Lewis Fry	328, 379
Lucas Edouard	11, 13, 16, 64, 67, 169, 216, 227, 283, 284, 300, 303, 409, 431, 436, 480	Riihimaa Olavi	90
Luschny Peter	264	Riordan John	222, 243
Ma Jianpeng	37	Rivin Igor	36, 63, 348, 360
Madachy Joseph S.	751	Robbins David P.	629
Mansour Toufik	91, 421, 431	Robinson Robert W.	229, 243, 259
Marlow T. W.	752, 753	Rothe Heinrich August	227
Martín Luis Miguel	783	Saifutdinov Shamil	162
Mathar R. J.	300	Salvy Bruno	228
McKay Brendan D.	68, 372, 736	Scheid Francis	284
Mendelsohn N. S.	223	Schlude Konrad	62
Migotti A.	20	Schubert Wolfram	348, 350, 636, 672, 678, 736
de Moivre Abraham	95	Sedgewick Robert	221, 224, 227, 228, 624
Monsky Paul	62, 751	Shieh Yuh-Pyng	736
Moser William O.J.	625	Sierpiński Waclaw	20
Newcomb Simon	243	Sloane Neil J. A.	3
Nielsen Birger	36, 37, 348, 349, 360	Smiley Len	639
Nilsson Johan	68	Soltsien Kay	64
Oprisch family	348, 353	Specker Ernst	62
Pacurar Cornel	783	Stanley Richard P.	16
Patashnik Oren	282		

Stirling James	36, 231, 261, 436, 464, 718	Watkins John	258, 751
Syski Peter	350	Webb J. A.	258
Tarry M. Harold	39, 40	Welsch L.	258
Tauraso Roberto	629, 630, 631	Wernli Stefan	350
Taylor Brook	42, 43, 685, 790	Wilf Herbert S.	82, 91, 92, 136, 139, 140
Timashev A. N.	249, 262	Wilson David W.	162
Tittmann Peter	382	Wilson Mark C.	229
Touchard Jacques	221	Wilson R. M.	227
Tran Khang	229	Woods Andrew	64, 65, 68, 77, 627
Trjitzinsky W. R.	228	Yaglom A. M., I. M.	259
van Lint J. H.	227	Yamanouchi Hiroaki	285
Vardi Ilan	36, 63, 348, 360, 736	Zaslavsky Thomas	34, 40, 239
Vilenkin Naum Ya.	221, 229, 242	Zeilberger Doron	228, 229, 627
Wanless Ian M.	736	Zimmermann Paul	36, 63, 348, 360, 372
Warnsdorff H. C.	756	Zhang Cheng	37

Electronic edition of chess books by Václav Kotěšovec
(seznam knih a brožur doposud vyšlých v této edici)

volume	title	pages	PDF published	printed books
1	Cyklická vazba – 30 let 30 years of cyclical pin (1977-2007)	24	8.11.2007	-
2	Exokoncovky - nové výsledky 2008 Fairy chess endgames - new results 2008	46	14.5.2008	-
3	234 mých nejlepších šachových úloh 234 best chess problems	320	3.9.2008	50 (numbered)
4	Využití teorie grafů v šachových úlohách Application of Graph Theory in Chess Problems (Dual-free Leaper and Hopper tours)	76	31.5.2009	60
5	Rekordy v maximálních a minimálních Records in maximummers and minimummers	304	24.7.2009	-
6	Neohrožující se kameny Non-attacking chess pieces (chess and mathematics)	116	1st edition, 22.4.2010	-
		237	2nd edition , 23.6.2010	
		348	3rd edition , 19.1.2011	
		467	4th edition , 15.6.2011	
		703	5th edition , 9.1.2012	
		795	6th edition , 2.2.2013	
7	Exodvojtažky 2008-2010 Fairy twomovers 2008-2010	54	28.2.2011	50
8	Exokoncovky na šachovnici n x n Fairy chess endings on an nxn chessboard	410	19.7.2013	-

 **Electronic edition of chess books by Václav Kotěšovec, volume 6** 

Neohrožující se kameny © Václav Kotěšovec, 2013

[*Non-attacking chess pieces*]

sixth edition 2.2.2013, several language corrections in the English text 4.1.2015, some new values added 8.9.2016, **version 6.26**

Published on site: <http://www.kotesovec.cz>

Vychází jako elektronická kniha v PDF [*electronic book in PDF*]