МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

выпуск 19

Москва
Издательство МЦНМО
2015

УДК 51.009
ББК 22.1
М34

Адрес редакции:
119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, МЦНМО
(с пометкой «Математическое просвещение»)
Email: matpros@mccme.ru
Web page: www.mccme.ru/free-books/mathpros.html

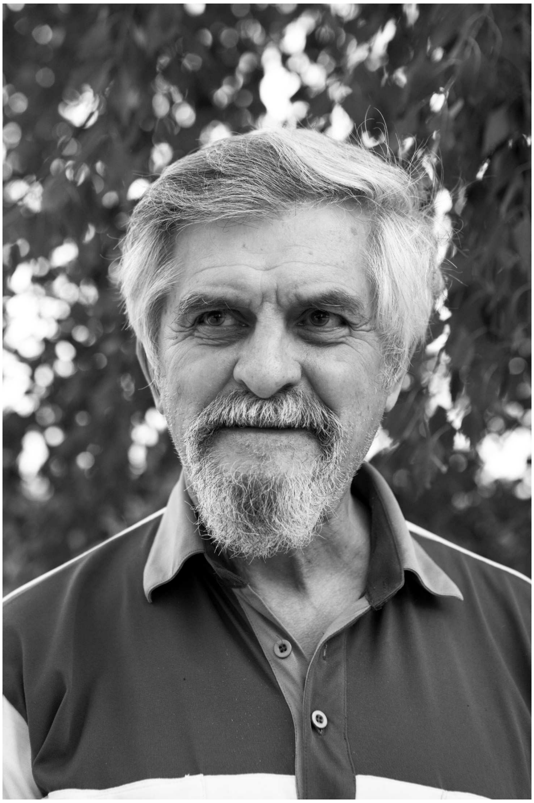
М34 **Математическое просвещение.** Третья серия, вып. 19. — М.: МЦНМО, 2015. — 272 с.
ISBN 978-5-4439-0284-5

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, статьи по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

УДК 51.009
ББК 22.1

ISBN 978-5-4439-0284-5

Поздравляем



Владимира Михайловича Тихомирова

с 80-летием!

В 2014 г. исполнилось 150 лет Московскому математическому обществу. Редколлегия сборника «Математическое просвещение» поздравляет членов Московского математического общества с юбилеем и желает им дальнейшей плодотворной работы.

Содержание

Наш семинар: математические сюжеты

Преподавание и популяризация математики

По мотивам задачника Математического просвещения

Задачник

Нам пишут

Математический юбилей трёхликого сборника

Н. Х. Розов

Сборник «Математическое просвещение» проживает ныне свою третью жизнь. Каждая из этих жизней — специфическая и удивительная, отражающая как зеркало характерные особенности своей эпохи, состояние математической науки и математического образования, увлечения и устремления математиков.

Сегодня читатель держит в руках выпуск 19 третьей серии сборника «Математическое просвещение». Как подметил член нашей редколлегии А. Я. Канель-Белов, можно отметить примечательный «юбилей»: в этой серии окажется столько же выпусков, как и в двух предыдущих сериях вместе. Это хороший повод вспомнить пройденный жизненный путь сборника и тех людей, благодаря которым он оказался неувядающим.

Жизнь первая

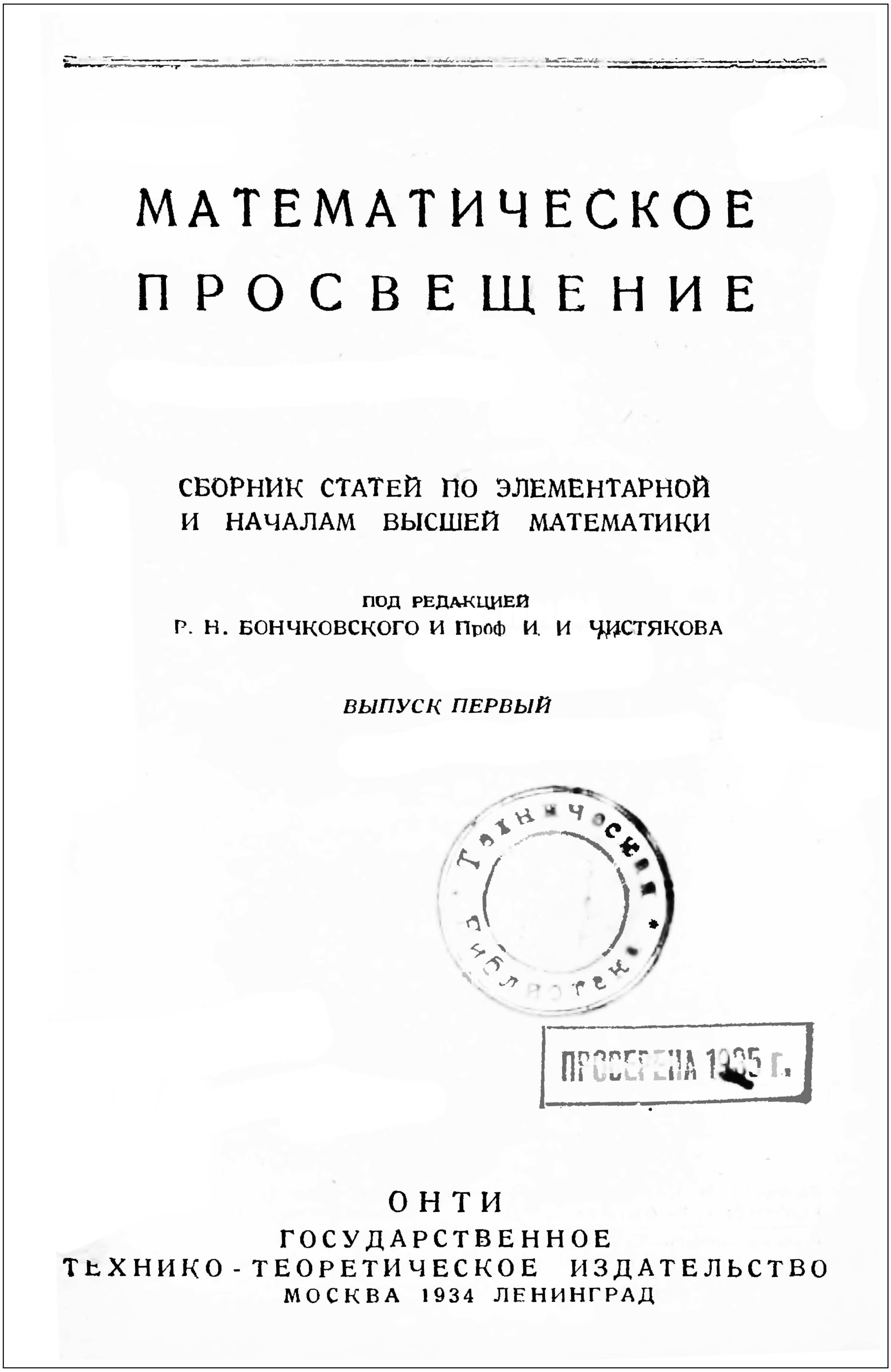
Тридцатые годы двадцатого века были периодом взлёта советской математической школы, когда на её небосводе блистали всемирно уже известные имена «мэтров» и зажигались яркие имена молодых талантов. В перечислении всех этих имён необходимости нет — все мы хорошо помним совсем недавнюю историю своей науки и её корифеев. Но всё же нельзя не назвать один фантастически удивительный феномен того времени — творческий коллектив математиков, так называемую Лузитанию. Феномен Лузитании в чём-то подобен феномену Николя Бурбаки — с той лишь принципиальной разницей, что флагом французского коллектива было символическое имя, а советский сложился вокруг реального человека — Н. Н. Лузина.

Математическая корпорация России всегда с большим вниманием относилась к проблемам преподавания математики в университетах и в школах, к исследованиям по «элементарной» математике, к публикациям методического и научно-популярного характера. Примеров тому в истории дореволюционной России — великое множество. Достаточно вспомнить организационно-педагогическое наследие Н. И. Лобаческого, учебник по геометрии для школы М. В. Остроградского, деятельность П. Л. Чебышёва в области школьного образования, дискуссию между А. А. Марковым и П. А. Некрасовым о введении элементов теории вероятностей в школе, популярность основанного В. П. Ермаковым «Журнала элементарной математики» («Вестника опытной физики и элементарной математики»), активную работу по созданию школьных учебников (в первую очередь — А. П. Киселёва), большое число участников всероссийских съездов учителей математики...

После Октябрьской революции эта деятельность начала возрождаться и обогащаться новыми формами. В частности, в 1928 году был реанимирован журнал «Математическое образование». А в 1934 году в Государственном технико-теоретическом издательстве (Москва — Ленинград), которое занималось изданием литературы по всем областям науки и техники, родилось «Математическое просвещение» — в свет вышел его первый выпуск. Он состоял из 72 страниц, тираж не обозначен, а в качестве адреса редакции указывался адрес ГТТИ: «Москва, Центр, Комсомольский пер., 6».

На титульном листе значилось: «Под редакцией Р. Н. Бончковского и проф. И. И. Чистякова» (издательским редактором также был Р. Н. Бончковский). Об этих людях хотелось бы сказать несколько слов, поскольку они принадлежали к тому поколению отечественных математиков, которое отделено от нас многими десятилетиями.

Ростислав Николаевич Бончковский (1905–1942) в 1929 году окончил МГУ. Он не был крупным исследователем, но вёл активную преподавательскую, редакторскую и просветительскую работу. Именно он являлся секретарём Комитета по проведению зародившихся в 1935 году Московских математических олимпиад для школьников и подготовил книгу об этих олимпиадах («Московские математические олимпиады 1935 и 1936 годов». М.: ОНТИ, 1936), по-видимому первую в нашей стране. Ему принадлежит и научно-популярная книга «Площади и объёмы» (М.: АН СССР, 1937), предназначенная, как он писал, «для учащихся и передовых рабочих, желающих расширить свой кругозор и повысить знания, но число её возможных читателей значительно шире». Когда началась Великая Отечественная война, Р. Н. Бончковский ушёл защищать Родину и погиб в Сталинградской битве. Можно только сожалеть, что его имя не упоминается в наших известных книгах об олимпиадах («Сборник задач московских математических олимпиад» / Сост., автор указаний и решений А. А. Леман / Под ред. В. Г. Болтянского. М.: Просвещение, 1965; Гальперин Г. А., Толпыго А. К. «Московские математические олимпиады» / Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Просвещение, 1986).



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
ПРОСВЕЩЕНИЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Р. Н. БОНЧКОВСКОГО И Проф И. И ЧИСТЯКОВА

ВЫПУСК ПЕРВЫЙ

ОНТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1934 ЛЕНИНГРАД

Титульный лист 1-го выпуска

Иоасаф Иванович Чистяков (1870–1942) в 1893 году окончил физико-математический факультет МГУ и был оставлен на нём для подготовки к профессорскому званию. Ему принадлежат научные работы по математике, её истории и методике, математическому образованию. Он вёл преподавательскую работу во многих вузах Москвы и других городов. И. И. Чистяков был основателем и главным редактором журнала «Математическое образование» (1912–1917), а позже — одним из активных авторов журнала «Математика в школе». В 1911–1914 годах являлся членом организационных комитетов по проведению 1-го и 2-го Всероссийских съездов преподавателей математики, а после Октябрьской революции участвовал в реформе средней школы и возглавлял комиссию по составлению программ по математике для педагогических вузов.

Собственно, «Математическое просвещение» позиционировал себя не как научно-популярный журнал по общедоступной пропаганде интересных и увлекательных математических знаний, а как «Сборник статей по элементарной и началам высшей математики», то есть как научное издание. Однако публикации сборника не были статьями «с передовой линии» математической науки того времени, в нём нет работ ведущих наших учёных-математиков по функциональному анализу, топологии, алгебре, теории вероятностей и т. п. с последними математическими достижениями. Основное содержание «Математического просвещения» составляли достаточно серьёзные оригинальные исследовательские статьи по неким пластам математики, которые обычно называются «элементарными разделами математики» и «простейшими вопросами высшей математики».

Оба эти термина и тогда, и сейчас остаются весьма неопределёнными, поскольку нет чёткого понимания того, что конкретно под ними подразумевается. Но ознакомление с такими статьями не было лёгким развлечением, требовало от читателя заинтересованной, внимательной и кропотливой работы, размышлений и пополнения своих теоретических знаний. Поэтому по задумке основоположников сборник был рассчитан «на весьма широкий круг читателей, интересующихся математикой», поскольку в нём «наиболее сильные учащиеся средней школы, студенты техникумов, вузов и втузов, преподаватели школ, техникумов и частично вузов (особенно педвузов) найдут интересный материал для чтения».

Следующие выпуски «Математического просвещения» (составившие «первую серию», хотя, конечно, тогда этого названия не было) выходили в 1935 (три выпуска), 1936 (пять выпусков) и 1937 (три выпуска) годах, а в 1938 году появился 13-й выпуск — по причинам, которые установить не удалось, оказавшийся последним. Объём выпусков не был фиксированным и сильно колебался — от 70–80 до 140–150 страниц. Качество полиграфического исполнения сборника было довольно посредственным, но он, видимо, пользовался значительной популярностью, поскольку тиражи выпусков регулярно составляли 5000 экземпляров (!). К сожалению, трагическая специфика жизни страны в те времена коснулась и сборника: в 1935 году И. И. Чистяков был репрессирован, и, начиная с 4-го выпуска, на титульном листе осталась лишь одна фамилия Р. Н. Бончковского.

Едва ли возможно подробно рассказать здесь о всех публикациях первой серии сборника, да и едва ли это нужно — ведь у каждого читателя свои собственные интересы. Поэтому мы попытаемся дать лишь общее представление о материалах сборника без их обстоятельного анализа. Для того чтобы составить такое представление, воспроизведём прежде всего содержание 1-го выпуска; это вполне показательно, поскольку, начиная любое издание, его основатели стремятся уже в первом выпуске максимально ясно отобразить его тематику, предназначение и структуру.

Львиную долю публикаций всех выпусков первой серии сборника составляют статьи геометрической тематики; скорее всего, в этом проявилось явное пристрастие редактора. Тематика этих статей была довольно обширной, и в них, в основном, использовались не наглядно-синтетические, а формально-аналитические методы исследования, подчас довольно техничные. Здесь можно видеть небольшие заметки и обширные тексты, посвящённые различным свойствам треугольника (например, связанные с теоремой Чевы) и некоторых многоугольников, решению геометрических задач с помощью циркуля и линейки, упаковке плоскости и пространства, проективным свойствам фигур, некоторым специальным кривым, цилиндру Шварца, построению стереоскопических проекций, отдельным задачам дифференциальной геометрии и массе других вопросов.

На следующее место по частоте появления в сборнике надо поставить публикации по анализу. В основном это носящие методический характер материалы по начальным главам математического анализа: дифференциальное и интегральное исчисление (скажем, использование гиперболических функций при интегрировании) и его применение (скажем, для отыскания экстремумов кубического четырёхчлена), ряды, дифференциальные уравнения и др. Но следует помнить, что многие из таких вопросов тогда ещё не «устоялись» в образовательных программах, требовали тщательного разъяснения (в качестве примера упомянем обширную статью о решении линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами).

Примерно то же следует сказать про алгебраические статьи — они в основном касались «классических» вопросов: деление многочленов, основная теорема алгебры, формула Кардано, решение иррациональных уравнений

СОДЕРЖАНИЕ

Оглавление 1-го выпуска

и проч. Почти все эти статьи, в отличие от многих геометрических, носили, скорее, чисто просветительский характер, излагали уже известные математические факты и идеи. Кроме того, в сборнике регулярно помещались статьи по теории чисел (в том числе — о решении уравнений в целых числах), по приближённым и численным методам (включая достаточно важную в то время номографию), по «дискретной математике» (хотя этого термина ещё не существовало) и некоторым другим разделам математики.

Вокруг сборника сплотился значительный коллектив авторов — исследователей и преподавателей, среди которых мы встречаем имена людей, совсем недавно хорошо известных в математической корпорации и много сделавших для математического образования молодёжи: И. В. Арнольд (отец академика В. И. Арнольда), И. С. Градштейн, С. И. Зетель, П. С. Моденов, Л. Я. Окунев, Д. И. Перепёлкин, Д. М. Синцов, Н. Ф. Четверухин и другие.

К сожалению, многие статьи выпусков первой серии сегодня уже утратили своё значение (впрочем, некоторые могли бы стать истоками для отдельных задач). Увы, это вполне естественно: математическая наука и математическое образование развиваются, и то, что было ново вчера, сегодня уже неактуально, «очевидно» и известно даже студентам. Но отдельные публикации и сейчас представляют определённый интерес (конечно, это мнение субъективно, но я не знаю, как этого избежать): решение С. Е. Аршоном задачи А. Я. Хинчина о существовании n-значных бесконечных асимметричных последовательностей (вып. 2, с. 24–33), доказательство Л. А. Люстерником формулы Стирлинга (вып. 3, с. 48–51), анализ Р. Н. Бончковским задачи о заполнении пространства тетраэдрами (вып. 4, с. 26–40), размышления Д. Д. Мордухай-Болтовского о логической составляющей школьного курса математики (вып. 4, с. 113–128), познавательный очерк В. В. Горячкина об истории математики в Японии (вып. 5, с. 104–116), заметка «О θ в формуле Лагранжа» Б. В. Гнеденко (вып. 7, с. 31–35), исследование С. С. Бюшгенсом классической задачи о качении кривой (вып. 10, с. 40–47), соображения Д. А. Крыжановского «Как не следует писать и издавать массовую математическую литературу» (вып. 10, с. 48–59) и некоторые другие.

Значительное место в выпусках уделялось проблемам математического образования в школе и в вузах. Здесь мы встречаем рецензии на переработанные версии учебников А. П. Киселёва, только что принятых в советской школе, подробный анализ выявленных проверочными работами дефектов в знаниях учащихся школ, обстоятельную информацию о зародившихся математических олимпиадах для учащихся, отдельные заметки — примеры творчества увлечённых математикой школьников. В сборнике был помещён текст лекции Б. И. Сегала «Непрерывные дроби» (вып. 7, с. 46–67) для школьников, что, по-видимому, положило начало традиции публиковать материалы математических кружков, воскресных лекториев и другие научно-популярные тексты по математике.

Обстоятельные документы «Резолюция, принятая на сессии группы математики Академии наук СССР (так тогда именовалось Отделение математики АН СССР. — *Н. Р.*) 20–21 декабря 1936 г. по вопросу о преподавании математики в средней школе и педвузах» и другие на ту же тему (вып. 11, с. 51–60; 12, с. 55–58) дают возможность составить представление о состоянии в то время математического образования в СССР. Интересно заметить, что некоторые положения этих документов не потеряли актуальности и сейчас.

В одной из своих опубликованных в сборнике статей И. И. Чистяков отмечает наблюдающиеся «дефекты в математическом образовании наших школьников»: «...они получают очень слабое теоретическое развитие, а также страдают недостатком геометрического представления. Несколько лучше обстоит дело с техникой буквенных вычислений, но и она, в особенности в области тригонометрии, недостаточна. Вообще математический багаж, получаемый учащимися в школе, в настоящее время является ещё весьма малым. В частности, учащиеся затрудняются ясно, связно и последовательно излагать свои мысли по теоретическим вопросам» (вып. 3, с. 62). Написаны эти слова почти 80 лет тому назад — а как будто о нашей сегодняшней массовой общеобразовательной школе!

В сборнике регулярно вёлся раздел «Задачи и решения». Там, помимо задач для любителей математики, помещались и задачи наших первых математических олимпиад. Просматривая эти задачи, можно наглядно увидеть, как далеко вперёд шагнула подготовка и как существенно вырос запас математических знаний современной молодёжи, интересующейся математикой: многие из них сегодня являются «классическими», общеизвестными или окажутся очень простыми.

Жизнь вторая

Победоносно завершилась Великая Отечественная война, советский народ начал восстановление страны и тяжёлое, но неуклонное движение вперёд. Уже в 1953 году на Ленинских горах в Москве открылся новый комплекс зданий Московского университета и механико-математический факультет МГУ получил новые комфортные условия для работы.

Надо сказать, что советские математики того времени представляли собой достаточно тесно спаянный коллектив единомышленников, воодушевлённых идеями развития математической науки, подготовки молодых математических кадров, подъёма математического образования, пропаганды математических знаний в обществе. Именно в такой обстановке зародилась идея возобновления издания выпусков «Математического просвещения». Она объединила многих ведущих учёных и преподавателей и потому позволила обеспечивать большое количество различных высококачественных материалов по самому широкому спектру направлений.

В 1957 году вышел в свет 1-й выпуск нового «Математического просвещения», открывший вторую жизнь сборника. (Мы бы сейчас сказали

«1-й выпуск второй серии», но основатели издания такое обозначение не использовали.) На титульной странице выпуска значились имена его главных организаторов: «под редакцией Я. С. Дубнова, А. А. Ляпунова, А. И. Маркушевича», но на самом деле в подготовке и редактировании издания принимали участие и многие другие хорошо известные и уважаемые специалисты: И. Н. Бронштейн (он стал издательским редактором), А. М. Лопшиц, И. М. Яглом, не говоря уже о весьма многочисленном коллективе авторов.

Это издание совсем не походило на журнал в традиционном смысле слова: поскольку сборник выходил в 1957 году дважды, а затем в 1958–1961 годах — раз в год, его скорее следовало бы назвать ежегодником. Выпускало его всё то же московское Государственное издательство технико-теоретической литературы. Нельзя не отметить, что художественно-полиграфическое качество сборника, по сравнению с первой серией, намного улучшилось, существенно вырос его объём (разные выпуски содержали от 290 до 370 страниц). Тираж выпусков, однако, постепенно снижался — от 15–20 тысяч экземпляров в начале до 9 тысяч в конце.

Название сборника сопровождалось подзаголовком: «Математика, её преподавание, приложения и история» — он кратко и ёмко отражал всю ту широкую программу, которую предполагали реализовывать организаторы нового издания (и которая существенно отличалась от концепции первой серии). Надо отдать им должное — они очень чутко и точно уловили тот пиетет к математике, который витал в обществе в те годы: «...многочисленные кадры нашей математической интеллигенции — большинство преподавателей вузов и старших классов средней школы, студенты университетов и пединститутов, инженеры, имеющие вкус к математике, — испытывают потребность в постоянном источнике, который расширял бы их научный кругозор, освежал и восполнял знания, наконец, стимулировал бы педагогическую и научную активность... в самых широких рамках: начиная от решения нешаблонных задач и кончая самостоятельными исследованиями».

Собственно, достаточно значительный тираж лучше всяких слов демонстрировал, какой высокой была потребность в таком издании и каким спросом оно пользовалось, с каким интересом читалось, особенно молодёжью. Без сомнения, это объяснялось прежде всего исключительной добротностью — и научной, и педагогической, и даже литературной — публикуемых материалов. Многие статьи выпусков второй серии и сегодня достойны внимания любителей, преподавателей, профессионалов. В частности, эти статьи можно было бы с успехом использовать в классических и педагогических университетах в работе студенческих просеминаров в качестве источников для докладов, для начального обучения чтению математических текстов, для приобщения к самостоятельному творчеству.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

МАТЕМАТИКА, ЕЕ ПРЕПОДАВАНИЕ,
ПРИЛОЖЕНИЯ И ИСТОРИЯ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Я. С. ДУБНОВА, А. А. ЛЯПУНОВА,
А. И. МАРКУШЕВИЧА

ВЫПУСК 1

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1957

Титульный лист 1-го выпуска 2-й серии

Первая публикация начального выпуска второй серии посвящена памяти Ростислава Николаевича Бончковского. Написанная его коллегами, близко его знавшими, она содержит его биографию (и фотографию), информацию о его разносторонней деятельности, список его работ по математике.

Самым обширным по числу публикаций и разнообразным по тематике в выпусках второй серии был раздел, включавший серьёзные и довольно обширные обзоры по отдельным проблемам математики и статьи научно-познавательного характера (в том числе и переводные). Сборник старался обеспечить читателей квалифицированной информацией о направлениях математической науки, изложенной строго, но на уровне, доступном непрофессионалам в этих вопросах. Яркими и поучительными примерами могут служить статьи В. И. Арнольда «О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных» (вып. 3, с. 41–61); В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича «Очерк основных идей топологии» (вып. 2, с. 3–34; вып. 3, с. 5–40; вып. 4, с. 27–52; вып. 6, с. 107–138; очень жаль, что этот мастерски написанный очерк основ топологии так и не был потом оформлен авторами в виде отдельной книги); А. О. Гельфонда «О проблеме приближения алгебраических чисел рациональными» (вып. 2, с. 35–50); И. М. Яглома «Комплексные числа и их применение в геометрии» (вып. 6, с. 61–106) и некоторые другие.

В 1950–60-е годы у нас интенсивно начали развиваться новые ветви математики: программирование, методы использования ЭВМ, теория игр, математическая лингвистика, моделирование шахматной игры — и было очень важно и актуально помочь широкому кругу читателей получить в доступной форме первичные научные представления об этих новациях. Среди авторов таких материалов мы видим имена ведущих специалистов того времени — Р. Л. Добрушина, Л. А. Люстерника, А. А. Ляпунова, других советских и иностранных учёных.

Впрочем, сборник, продолжая традицию первой серии, регулярно публиковал и научные сообщения — небольшого объёма статьи с новыми результатами (как анонсировали редакторы серии, «не слишком частного характера») по элементарной и высшей математике. В частности, здесь можно найти оригинальные работы Н. М. Бескина, В. А. Залгаллера, В. И. Левина, З. А. Скопеца и многих других.

Вторым важным пластом материалов второй серии сборника были публикации, и весьма обстоятельные, по математическому образованию — в школах, университетах, технических и педагогических институтах. Надо сказать, что большое внимание к проблемам преподавания математики в то время проявляли многие профессиональные математики высокого уровня. Эти публикации принадлежали перу наших замечательных учёных и педагогов В. И. Арнольда, В. Г. Болтянского, Н. Я. Виленкина, И. М. Гельфанда, Я. С. Дубнова, А. Н. Колмогорова, П. П. Коровкина, А. Л. Лопшица, А. И. Маркушевича, И. П. Натансона, Г. М. Фихтенгольца, А. Я. Хинчина, И. М. Яглома и других, а также целому ряду зарубежных специалистов.

Такие публикации помещались как среди обзоров и статей, так и в специальных разделах выпусков: «Научно-методические сообщения (Опыт преподавания и педагогический эксперимент)» и «Научная и педагогическая хроника». Конечно, в первую очередь привлекали внимание материалы по общим аспектам преподавания математики: рекомендации международных конференций, переводы статей известных западных педагогов, информация об опыте преподавания математики за рубежом и т. п. Но особый интерес у практикующих преподавателей вызывали (думаю, вызовут и сейчас) методические разработки и зарисовки, посвящённые конкретным вопросам изложения для учеников и студентов отдельных тем в школах и вузах, внеклассной работе со школьниками, проявляющими интерес к математике, содержанию программ по математике, подготовке учительских кадров и т. д. В качестве примера упомянем целую подборку статей «Введение действительных чисел в средней и высшей школе» (вып. 2, с. 131–171).

Здесь исключительную роль играло Московское математическое общество, объединявшее широкий круг математиков. Заседания Общества, проходившие еженедельно, посвящались не только различным актуальным научным проблемам, но и злободневным образовательным вопросам; они проходили в, как правило переполненной, аудитории 16-24 Главного здания МГУ на Ленинских горах. Неповторимая атмосфера заседаний ММО, глубочайшая заинтересованность в решении проблем школьной математики хорошо чувствуется, когда читаешь конспект «Обсуждение новых стабильных учебников по математике» (вып. 1, с. 195–209) или подборки «К вопросу о реформе преподавания математики в средней школе» (вып. 4, с. 129–154; вып. 5, с. 117–132).

Можно только поражаться тому, сколько места сборник выделял этим вопросам, и сожалеть, что времена активности нашей математической общественности в области образования, видимо, безвозвратно ушли. Кстати, при ММО работали две специальные секции — Секция средней школы и Секция высшей технической школы, которые регулярно собирались для обсуждения учебников, различных методических вопросов, докладов о всевозможных «новинках» научного и элементарно-математического характера. Этими секциями руководили уважаемые специалисты, на их заседаниях считали честью выступать и крупные математики, а сборник информировал читателей о работе этих секций.

Нельзя не упомянуть про традиционный отдел задач, который мужественно вёл И. М. Яглом. Среди опубликованных задач, и по элементарной, и по высшей математике, есть много интереснейших, которые подарены сборнику известнейшими нашими математиками. Жаль, если эта коллекция (сейчас уже мало известная) не найдёт себе применения для развития творчества студентов начальных курсов и в студенческих олимпиадах.

Не пренебрегали редакторы сборника своеобразными материалами лёгкого познавательного, занимательного и даже развлекательного характера. Из их числа можно воспроизвести одно шуточное стихотворение, сегодня уже забытое.

Фольклорное стихотворение — вып. 6, с. 362

На дне глубокого сосуда
Лежат спокойно эн шаров.
Попеременно их оттуда
Таскают двое дураков.
Занятье это им приятно,
Они таскают тэ минут,
И каждый шар они обратно,
Его исследовав, кладут.
Ввиду занятия такого,
Как вероятность велика,
Что был один глупей другого
И что шаров он вынул ка?

Вторая жизнь «Математического просвещения» закончилась так же неожиданно, как и первая. По установившейся традиции в конце 6-го выпуска было помещено предварительное оглавление следующего, редакция наметила обширные планы. Но 6-й выпуск оказался последним во второй серии...

Жизнь третья

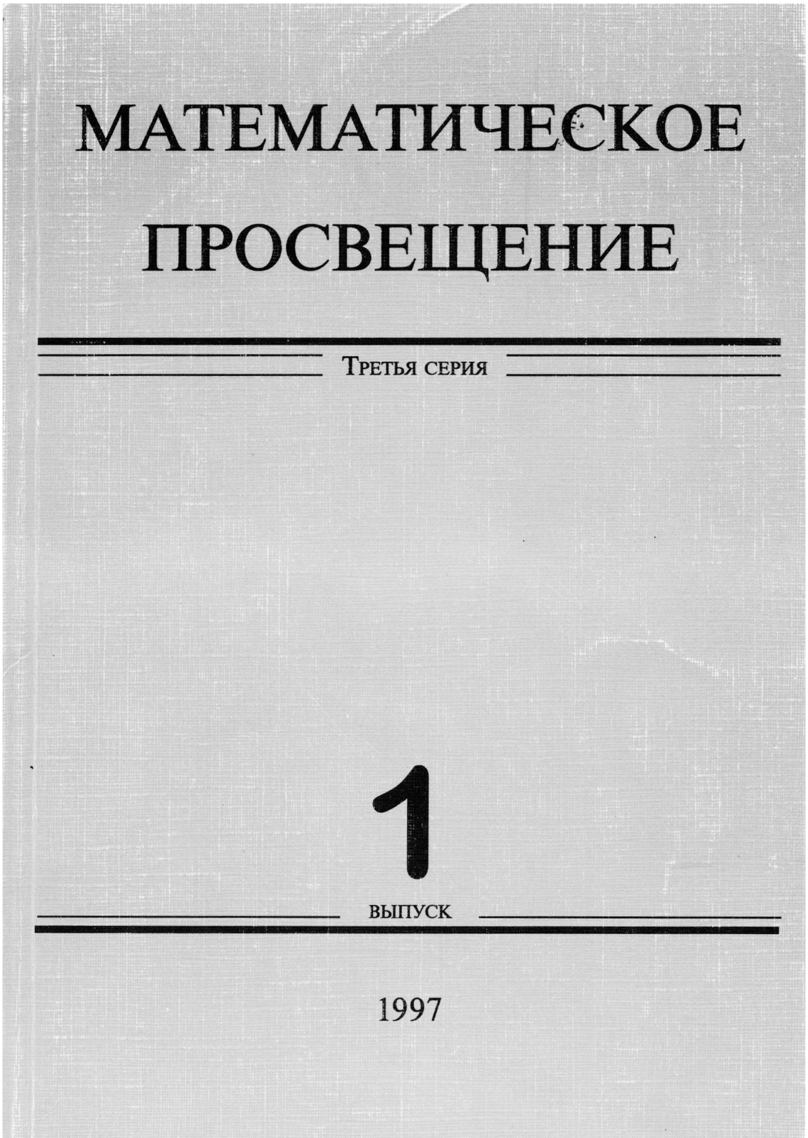
Вторая серия «Математического просвещения» закончилась, но идея сборника не умерла. Правда, прошло много лет, пришли новые поколения исследователей и педагогов, прежде чем снова нашлись люди, которые взялись продолжить уже дважды прерывавшееся дело. Всё же в душе математика, как бы он не был увлечён научными исследованиями, неизбывно живёт потребность учить, передавать знания, воспламенять любовь к математике.

В середине 1990-х годов группа энтузиастов, объединившись на базе Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО) и Независимого московского университета, решила, что перерыв слишком затянулся, что пора, невзирая ни на что, «Математическое просвещение» возрождать. Надо сказать, что, с житейской точки зрения, момент был выбран не самый удачный. Тот, кто был тогда взрослым, хорошо помнит, что представляла собой Россия в политическом и экономическом отношениях, в каком бедственном положении находились наука и образование, по которым ударили практически отсутствие финансирования, массовая внешняя и внутренняя эмиграция специалистов, падение престижа и ценности знаний в глазах молодого поколения. Но, по моему убеждению, именно такие условия 1990-х годов делают факт возрождения «Математического просвещения» событием особо героическим.

И всё же «она вертится»! Начал складываться коллектив единомышленников, которые занялись подготовкой третьей серии — продумывали концепцию нового издания, изыскивали финансирование, решали технические вопросы, писали статьи сами и заказывали их коллегам. На призыв присылать материалы откликнулись, неожиданно, очень многие, финансовую помощь обеспечил Российский фонд фундаментальных исследований, издательскую базу предоставил МЦНМО, всё остальное делалось на голом энтузиазме. В 1995 году вышел в свет «пробный» выпуск — скромный росток ещё не до конца ясного будущего.

Среди большой группы коллег, посадивших этот росток, следует особо отметить исключительную роль Николая Борисовича Васильева, которому, к сожалению, не суждено видеть его расцветание. Не будет преувеличением сказать, что вся жизнь Н. Б. Васильева — подвижническое служение математическому просвещению. В круг его плодотворной деятельности входили и руководство математическими кружками, и проведение Московских и Всесоюзных олимпиад и «Турнира городов», и активное участие в организации Всесоюзной заочной математической школы (ВЗМШ), и исключительный вклад в становление журнала «Квант»... Блестящие статьи Н. Б. Васильева по праву вошли в золотой фонд математической литературы для школьников. И во многом именно благодаря его энтузиазму и настойчивости оказалось возможным возобновить издание нашего сборника.

Наконец, в 1997 году появился 1-й выпуск возрождённого «Математического просвещения». Он сразу позиционировал себя как преемник и продолжатель славных и богатых традиций российской и советской просветительской литературы по математической науке и математическому образованию; это проявилось, в частности, в наименовании «Третья серия». Образовалась представительная редколлегия, объём сборника (около 200 страниц) и тираж (1000 экземпляров) были по тем меркам большим успехом, полиграфическое исполнение — вполне качественным и современным.



Обложка 1-го выпуска третьей серии

Редколлегия чётко сформулировала принципиальную концепцию новой серии: её математическое содержание «должно быть понятно вдумчивому и настойчивому читателю, даже при отсутствии специальной подготовки», а педагогическая составляющая будет отражать реальное состояние преподавания математики (прежде всего, в специализированных классах и школах, а также в педагогических институтах и университетах).

Сборники третьей серии стали выходить ежегодно. Качественно обновилась структура содержания выпусков. Появились такие нестандартные новые разделы, как «Математический мир», «Тема номера», «По-новому о старом: фрагменты классической математики», «Наш семинар: математические сюжеты». Сохранились и аналоги традиционных рубрик, посвящённых выдающимся учёным, статьям для школьников и студентов, математическому образованию, олимпиадам, задачам для читателей. Эта мозаичность материалов позволяет практически любому любопытствующему найти в каждом выпуске что-то интересное и посильное для себя и что-то увлекательное для своего самообразования. И именно мозаичность, широта спектра статей выпусков третьей серии делает весьма затруднительным сколько-нибудь подробный, систематический и содержательный их анализ, отличный от безликого пересказа их богатейшего содержания.

Третья серия «Математического просвещения» — плод коллективных усилий всей редколлегии и многочисленных авторов. Но в любом большом коллективном деле есть конкретные люди, которые взваливают на свои плечи особый труд по координации и планированию. И надо отдать должное тем, кто в первую очередь обеспечивает успех третьей серии. На протяжении многих лет основную организационную работу по отбору и подготовке материалов вели В. М. Тихомиров, являвшийся главным редактором, и М. Н. Вялый, ответственный секретарь редколлегии. Затем их функции продолжили соответственно Э. Б. Винберг и Б. Р. Френкин. Специально и с глубокой благодарностью хочется сказать, что своим становлением и существованием третья серия в значительной мере обязана бескорыстным усилиям М. Н. Вялого, энергии и целеустремлённости которого хватало для решения огромного числа неизбежно возникавших организаторских, содержательных и технических проблем.

Читатель держит в руках уже 19-й выпуск третьей серии «Математического просвещения». Серия успешно и благополучно живёт, её выпуски пользуются большой популярностью среди любителей математики, особенно среди молодёжи. Выпуски третьей серии вполне доступны не только в традиционном «бумажном» исполнении, но и, как это становится всё более привычным в компьютерный век, в электронной форме по адресу `http://www.mccme.ru/free-books/matpros.html`.

Кстати, такая свободная доступность всех этих выпусков также делает обстоятельный обзор их содержания в значительной степени излишним.

На том же сайте выложены в свободном доступе и электронные версии всех выпусков предыдущих двух серий, бумажные версии которых давно уже стали библиографической редкостью. Можно с уверенностью сказать, что ознакомление со всеми этими материалами окажется очень поучительным для современных читателей, а некоторые из них найдут кое-что полезное для использования в своей работе.

Хотелось бы высказать несколько сугубо личных соображений и предложений. По-моему, средний уровень публикуемых в «Математическом просвещении» статей несколько завышен, требования для понимания отдельных публикаций превосходят возможности широкого круга любителей, особенно студентов. Думается, что в текстах стоило бы обеспечивать более подробные объяснения, более доступные и неторопливые рассуждения, большую детализацию выкладок. А вот раздел «Студенческие чтения» имело бы смысл сделать регулярным. Шаги в этом направлении существенно повысили бы авторитет сборника в глазах студенчества.

В выпусках третьей серии явно прослеживается уверенная рука профессионалов-математиков, тогда как, на мой взгляд, удельный вес проблемных материалов о математическом образовании всё же недостаточен. Например, в выпусках весьма слабо представлены такие вопросы, как содержание и пути модернизации программ по математике средней общеобразовательной школы и вузов (прежде всего — педагогических), обстоятельный критический анализ школьных и вузовских учебников, научно-популярной литературы и др. Это отвечало бы нуждам и потребностям практикующих учителей и преподавателей вузов. Конечно, для первых у нас есть журналы «Математика» и «Математика в школе», а на вторых ориентирован журнал «Математика в высшем образовании». Но и «Математическое просвещение» могло бы стать площадкой для полезного диалога математиков-профессионалов с преподавателями и учителями.

Говорят, что Бог троицу любит. Будем надеяться, что третья серия окажется счастливее своих предшественниц и ей уготована долгая и плодотворная жизнь.

Н. Х. Розов, мехмат МГУ
nicolas_rozov@mail.ru

Математический мир

Международный математический конгресс в Сеуле

А. Г. Сергеев

В предлагаемом вниманию читателей обзоре мы попытались, наряду с рассказом о различных мероприятиях конгресса, привести личные впечатления его лауреатов и именитых гостей с тем, чтобы представить конгресс не только «в событиях», но и «в лицах».

Общая информация

XXVII Международный математический конгресс состоялся в столице Южной Кореи Сеуле с 13 по 21 августа 2014 г. Это был четвёртый математический конгресс, происходивший в азиатской стране. Первые три собирались в Японии (Киото, 1990), Китае (Пекин, 2002) и Индии (Хайдарабад, 2010). В конгрессе приняло участие 5193 человека из 122 стран мира. В его подготовке и проведении было задействовано более 300 волонтёров — студентов из 80 колледжей, отобранных в результате конкурса с участием 760 человек.

Конгресс проходил в огромном культурно-торгово-развлекательном комплексе COEX в центре корейской столицы. На первом заседании присутствовало около 3200 человек, в том числе президент Южной Кореи Пак Кын Хе, которая и открыла конгресс, вручив лауреатам Филдсовские медали, премию Неванлинны и другие престижные награды, присуждаемые Международным математическим союзом.

Новым президентом Международного математического союза избран Сигэфуми Мори (Япония). Местом проведения следующего XXVIII Международного математического конгресса в 2018 году стал Рио-де-Жанейро (Бразилия).

Филдсовские лауреаты

Филдсовская премия — высшая награда для математиков — вручается на международных математических конгрессах молодым учёным (не старше 40 лет) за выдающиеся достижения в области математической науки.

Артур Авила

Математическая специализация. Вещественная и комплексная динамика, спектральная теория оператора Шрёдингера, бильярды, гиперболические системы.

Биографические сведения. Родился в Бразилии в 1979 г., в настоящее время является гражданином Франции. Золотой призёр Международной математической олимпиады 1995 г. Получил докторскую степень в 2001 г. в Институте чистой и прикладной математики (IMPA) в Рио-де-Жанейро под руководством Веллингтона де Мело. С 2003 года работает в Национальном центре научных исследований (CNRS) во Франции в должности директора по исследованиям (directeur de recherche). Авила — первый лауреат филдсовской премии из Латинской Америки.

Комментарий к научным исследованиям. В области одномерной вещественной и комплексной динамики: реализация принципа ренормализации, выяснение фрактальной структуры множеств Жюлиа. Суть метода ренормализации Авила объясняет следующим образом: «Ограничивая заданную динамическую систему на малую часть пространства, мы получаем систему, подобную исходной. Повторяя эту процедуру несколько раз с уменьшением масштаба, мы приходим к последовательности микроскопических пространств, которая позволяет изучать поведение системы на всё более малых масштабах. Оказывается, это поведение во многом моделирует поведение исходной системы на больших масштабах».

В области спектральной теории оператора Шрёдингера: описание фазовых переходов между дискретным и абсолютно непрерывным спектрами одночастотного оператора Шрёдингера.

В области теории бильярдов: доказательство гипотезы об эргодичности отображения перестановки интервалов и аналогичного результата для многоугольных бильярдов.

В области теории гиперболических систем: устойчивая эргодичность типичных частично гиперболических систем.

Высказывания:

• Меня привлекает красота математики и богатство её теорий. Но иногда, в силу каких-то таинственных причин, сделанные ранее математические открытия находят неожиданные применения, которые было трудно предвидеть заранее. В математике всегда происходит что-то интересное.

• Я предпочитаю узнавать новое из разговоров с коллегами, а не из чтения статей.

Манджул Бхаргава

Математическая специализация. Высшие законы композиции, описание колец малых рангов (над кольцом целых чисел), оценки среднего ранга эллиптических кривых.

Биографические сведения. Родился в 1974 г. в Канаде, живёт в США. Получил докторскую степень в Принстонском университете под руководством Эндрю Уайлса. С 2003 года является профессором Принстонского университета. Награждён премией Ферма (2011) и избран членом Национальной академии наук США (2013).

Комментарий к научным исследованиям. Бхаргава нашёл новую интерпретацию гауссовой композиции целочисленных бинарных квадратичных форм, отвечающих кольцу ранга 2 (аддитивная группа которого есть свободная абелева группа ранга 2). Эта интерпретация оказалась более эффективной и с вычислительной точки зрения. Благодаря ей Бхаргаве удалось получить обобщение указанного закона композиции на кольца высших (3-го, 4-го и 5-го) рангов и вычислить число таких колец с ограниченным дискриминантом.

Бхаргава так объясняет суть своих исследований, касающихся эллиптических кривых: «Я занимаюсь проблемой вычисления числа целых и рациональных точек на эллиптических кривых. Указанные кривые определяются уравнениями вида

$$y^2 = x^2 + ax + b,$$

где a, b — заданные целые числа. Про такие уравнения до сих пор неизвестно, имеют ли они в общем случае целые или рациональные решения. Есть только алгоритм, позволяющий выяснить, конечным или бесконечным числом таких решений обладает рассматриваемое уравнение. Однако этот алгоритм не обоснован, мне удалось только доказать, что он даёт правильный результат в большинстве случаев (с вероятностью $2/3$). Кроме того, мой метод позволил установить, что известная гипотеза Берча и Свиннертон-Дайера для кубических уравнений от двух переменных справедлива с положительной вероятностью для бесконечного числа уравнений».

Высказывания:

• Будучи 8-летним ребёнком, я пошёл со своей матерью в супермаркет, где увидел пирамиду, сложенную из апельсинов. Я тут же задался вопросом: сколько апельсинов можно уложить в пирамиду, если на каждой стороне их 7? Через несколько месяцев мне удалось найти ответ в общем случае, т. е. в предположении, что на каждой стороне умещается n апельсинов. Он оказался равным $n(n+1)(2n+1)/6$.

• Я родился в Канаде и вырос в США, но в очень индийской семье. Кроме того, пока я учился в школе, то часто проводил по несколько месяцев у своих дедушки и бабушки, проживавших в Джайпуре. Я и сейчас езжу в Индию каждый год, где читаю лекции и занимаюсь со студентами и коллегами.

Мариам Мирзахани

Математическая специализация. Гиперболическая геометрия и динамика на римановых поверхностях и пространствах их модулей.

Биографические сведения. Родилась в 1977 г. в Тегеране. Дважды была победителем Международных математических олимпиад. Получила докторскую степень в 2004 г. в Гарвардском университете под руководством Кёртиса Макмуллена. Работает в должности профессора в Стэнфордском университете. Награждена премией Саттера Американского математического общества (2013).

Комментарий к научным исследованиям. В области гиперболической геометрии: асимптотические формулы и статистика числа простых замкнутых геодезических на римановых поверхностях. Число всевозможных замкнутых геодезических длины, не превосходящей L, растёт экспоненциально с ростом L. Однако если ограничиться только простыми замкнутыми геодезическими (не имеющими самопересечений), то их число растёт уже степенным образом как L^{6g-6}, где g — род римановой поверхности.

В области динамики: установила новые связи между голоморфной и симплектической структурами на пространствах модулей римановых поверхностей, что позволило, в частности, доказать эргодичность и перемешиваемость известного потока Тёрстона (earthquake flow).

В области комплексной геометрии: известно, что замыкания вещественных геодезических на римановых поверхностях могут иметь фрактальную природу. Однако поведение комплексных геодезических оказывается гораздо более регулярным — их замыкания всегда являются алгебраическими множествами.

К сожалению, доклад Мирзахани на конгрессе после переносов, связанных с её болезнью, так и не состоялся.

Мартин Хайрер

Математическая специализация. Исследование решений стохастических уравнений с частными производными, теория регулярных структур на решениях таких уравнений.

Биографические сведения. Родился в 1975 г. Гражданин Австрии. Получил докторскую степень в 2001 г. в Женевском университете под руководством Жан-Пьера Экмана. Работает в должности профессора университета в Уорике. Награждён премией Ферма (2013) и премией Фрёлиха Лондонского математического общества (2014). Член Лондонского королевского общества (2014).

Комментарий к научным исследованиям. Хайрер так объясняет суть своих работ: «Моей целью является исследование влияния шума на поведение решений дифференциальных уравнений. Для обыкновенных дифференциальных уравнений эта проблема была подробно изучена и решена Ито ещё в 40-х годах прошлого века. В случае уравнений в частных производных это сделано только для отдельных классов таких уравнений (например, для линейных уравнений и уравнений со слабой нелинейностью)».

Хайреру удалось установить, пользуясь исчислением Мальявена, эргодичность двумерного стохастического уравнения Навье — Стокса. Предложенная им теория регулярных структур на решениях стохастических уравнений с частными производными позволяет трактовать такие решения как неподвижные точки отображения ренормализации и, пользуясь этим, строить новые классы решений.

Высказывания:

• Для математиков большое финансирование менее важно, чем возможность обмена идеями с коллегами. Нам нужно иметь достаточно денег для того, чтобы приглашать их к себе и самим посещать научные конференции. Сейчас во многих научных фондах усилилась тенденция награждать только победителей, ничего не давая остальным. Но математическое сообщество живёт по другим законам.

Премия Неванлинны

Премия Неванлинны вручается на международных математических конгрессах математикам не старше 40 лет за выдающиеся достижения в области информатики и вычислительной математики.

Субхаш Хот

Математическая специализация. Теория сложности вычислительных алгоритмов.

Биографические сведения. Хот дважды был серебряным призёром Международных математических олимпиад. Выпускник Принстонского университета, где его научным руководителем был Санджив Арора. Работает в должности доцента (associate professor) в Курантовском институте математических наук.

Комментарий к научным исследованиям. Главное направление научной деятельности Хота — исследование так называемых NP-трудных задач, которые не могут быть решены на компьютере за полиномиальное время. С этим классом тесно связан и другой, в который входят задачи, для которых за полиномиальное время нельзя найти приближённое решение с заданной ошибкой, составляющей, например, не более 5 процентов от точного (данное число называется фактором аппроксимации). Имеется целый ряд задач, для которых подобная аппроксимационная проблема становится неразрешимой, если взять фактор меньше некоторого порогового значения. Хот предложил гипотетический пример задачи, так называемой единственной игры (Unique Game), для которой сформулированная аппроксимационная проблема неразрешима. Впоследствии обнаружилось, что многие «неразрешимые» вычислительные задачи на самом деле сводятся к указанной «единственной игре».

Высказывания:

• Я рассматриваю компьютерную науку как часть математики. Её главной отличительной особенностью является то, что целью изучаемых проблем является не столько их решение, сколько ответ на вопрос: как быстро можно решить рассматриваемую задачу и сколько для этого потребуется шагов?

Другие премии

Премия Черна: Филипп Гриффитс

Премия Черна вручается на международных математических конгрессах за выдающиеся достижения в математике. Её лауреат имеет право рекомендовать одну или несколько организаций для получения гранта из фонда Черна.

Математическая специализация. Алгебраическая и дифференциальная геометрия, в том числе теория Ходжа и периоды алгебраических многообразий.

Должность. Почётный профессор (professor emeritus) в Принстонском институте перспективных исследований.

Высказывания:

• Я всегда старался думать об алгебраической геометрии так же, как классики, такие как Пикар. Для них алгебраические кривые и поверхности были объектами, задаваемыми многозначными алгебраическими функциями. Такого же взгляда придерживался и я. Возможно, поэтому мне было трудно освоить коммутативную и гомологическую алгебру, в которых связи с геометрией выглядели не столь очевидно.

• Черн сформировался как математик под влиянием идей Эли Картана и гамбургской школы, но ему удалось сплавить эти два направления в единое целое.

• Черн научил меня многому, но в первую очередь тому, как нужно думать о математике. Он говорил: «Вот интересная задача, давайте подумаем, какую технику можно применить для её исследования и хотя бы частичного решения». Курс всегда начинался с конкретного вопроса или задачи, которые предлагалось решить. При этом не ставилась цель развития какой-то общей теории.

• Я многое получил от чтения классиков, таких как Дарбу, Монж, Пикар и Пуанкаре. Их техника не была слишком сложной, но всегда за вычислениями стояла геометрическая идея. За идеей следовала красивая теорема, которая подкреплялась соображениями, почему эта теорема должна быть верна. Такой подход несколько отличается от того, что принято считать формальным доказательством сегодня.

• Мне всегда хотелось понять, почему какой-либо результат верен, прежде чем пытаться его доказывать с помощью формальных выкладок. Про Соломона Лефшеца, работы которого оказали на меня огромное воздействие, говорили, что он никогда не формулировал неверной теоремы и никогда не давал её совершенно строгого доказательства.

Премия Гаусса: Стэнли Ошер

Премия Гаусса присуждается на международных математических конгрессах за выдающиеся достижения в прикладной математике.

Математическая специализация. Вычислительные методы решения гиперболических уравнений, компьютерные методы визуализации и распознавания изображений.

Комментарий к научным исследованиям. Разработанные Ошером методы, такие как схема Ошера — Энквиста, нашли широкое применение в численном моделировании решений уравнений с частными производными. Он предложил многоуровневые (level set) методы и методы сквозного счёта (shock capturing) решения дифференциальных уравнений, ввёл новые методы усиления и улучшения видео-изображений, которые были затем использованы в работе основанной им компании Cognitex.

Высказывания:

• Как-то в разговоре Леонид Рудин сообщил мне, что метод сквозного счёта может оказаться полезным в теории распознавания образов, о чём я в тот момент даже не подозревал. Я заинтересовался этим наблюдением и занялся его разработкой. Впоследствии указанное направление стало одним из важных компонентов моей научной деятельности. Этот пример демонстрирует всю силу непосредственного общения в математике.

Премия Лилавати: Адриан Паэнца

Премия Лилавати присуждается на международных математических конгрессах за выдающиеся достижения в области популяризации математики.

Математическая специализация. Популяризация математики.

Комментарий. Паэнца — ведущий еженедельной телевизионной программы «Учёные родом из Аргентины», существующей уже более 12 лет. Она включает в себя интервью с известными математиками и учёными других специальностей. Каждый выпуск программы заканчивается математической задачей, решение которой объявляется в следующем выпуске. Кроме того, Паэнца — организатор и ведущий программы «Под знаком Пи», представляющей собой живое математическое шоу с участием школьной аудитории. Он также ведущий колонки «Страница 12» в одной из центральных аргентинских газет. Автор книги «Математика, где ты?», выдержавшей 22 издания и опубликованной во многих странах Латинской Америки, в Испании, Португалии, Чехии, Германии и Китае.

Высказывания:

• У меня есть еженедельная колонка в газете, которая появилась следующим образом. Десять лет назад они попросили меня написать что-нибудь о математике, причём на любую интересную для меня тему. Я написал о том, как можно доказывать теорему Пифагора. К моему удивлению, заметку напечатали, и с тех пор я начал играть в математику на страницах этой газеты.

• В жизни мы ищем решения возникающих перед нами проблем. В школе нам дают готовые решения, а затем предлагают искать под них задачи, о существовании которых мы даже не подозревали.

• Разговаривая с детьми, вы должны играть с ними, вовлекая их в свою игру. Нужно побуждать детей задавать вопросы. Они должны чувствовать себя с вами на равных.

• Однажды я выступал перед 80 детьми 6–7-летнего возраста. Один из них спросил, знаю ли я таблицу умножения на 15. Я ответил, что нет, но мы можем попытаться выучить её вместе. Дети поняли, что хотя у меня и нет ответов на какие-то их вопросы, мы можем искать их вместе.

• Многие дети ненавидят математику, поскольку она их не «задевает». Они обращаются к родителям, которые отвечают что-нибудь вроде: «Подрастёшь — узнаешь!» Что должны дети думать после этого о математике!

Лекции по приглашению

Абелевская лекция: Джон Милнор

Премия Абеля присуждается Международным союзом математиков и Европейским математическим обществом выдающимся математикам современности (лауреатом этой премии в 2014 году стал российский математик Я. Г. Синай). Право выступить с абелевской лекцией на международном математическом конгрессе предоставляется одному из лауреатов премии Абеля.

Математическая специализация. Алгебраическая и дифференциальная топология, теория узлов, дифференциальная геометрия, алгебраическая К-теория, динамические системы, теория игр.

Биографические сведения. Милнору 83 года, он является профессором в университете штата Нью-Йорк в Стоуни-Бруке. Лауреат Филдсовской премии (1962), премии Вольфа (1989), премии Абеля (2011).

Комментарий к научным исследованиям. Милнор начал свою научную деятельность в Принстонском университете, где изучал теорию узлов под руководством Ральфа Фокса. Одним из первых его достижений стала теорема из этой теории, известная ныне как теорема Фэри — Милнора. Замечательным открытием Милнора стало доказательство существования 7-мерных сфер (называемых теперь сферами Милнора) с нестандартными гладкими структурами (1956). Позднее Милнор и Кервер показали, что указанные экзотические сферы составляют циклическую группу порядка 28 относительно операции гладкой связной суммы. Впоследствии Милнор много работал над исследованием топологии особенностей комплексных гиперповерхностей, где его имя закрепилось в таких названиях, как «индекс Милнора особенности», «исчезающий цикл Милнора». Помимо уже перечисленных математических объектов, его имя носят: точная последовательность Милнора, теорема Хилтона — Милнора, гипотеза Милнора в алгебраической К-теории и др.

Милнор — известный педагог, автор многочисленных учебников, математических бестселлеров.

Высказывания:

• Когда я хочу что-нибудь понять, лучший способ — описать это. Когда я что-то записываю, то пытаюсь сделать это так, чтобы было понятно мне самому. Оказывается, текст, написанный подобным образом, понятен и другим. Но для того чтобы достигнуть такого уровня понятности, текст приходится переписывать по многу раз.

Нётеровская лекция: Джорджия Бенкарт

Право выступить с этой лекцией предоставляется Ассоциацией женщин-математиков ежегодно женщинам, внёсшим фундаментальный вклад в математическую науку.

Математическая специализация. Алгебра, p-адический анализ.

Биографические сведения. Джорджия Бенкарт поступила в университет штата Огайо, где сначала обучалась химии, но затем перешла на математику, где занялась научной работой под руководством Курта Малера. Получила докторскую степень под руководством Натана Джекобсона в Йельском университете. Ныне работает в должности профессора в Висконсинском университете в Мэдисоне.

Высказывания:

- Когда я получила премию Фи-Бета-Каппа для студентов, мне предложили выбрать понравившуюся мне книгу по математике. Я выбрала курс современной алгебры ван дер Вардена. В то время я ещё не знала, что ван дер Варден учился под руководством Эмми Нётер и его курс во многом основан на её лекциях. Мой учитель Курт Малер также был учеником Нётер в Гёттингене и занялся p-адическими числами под её влиянием.

Лекция по приглашению: Итан Чжан

Математическая специализация. Теория чисел, в том числе проблема чисел-близнецов.

Биографические сведения. Чжану 58 лет. Он окончил Пекинский университет, получил докторскую степень в университете Пердью в 1991 г.

Комментарий к научным исследованиям. Чжан доказал, что существует бесконечно много пар простых чисел с ограниченной длиной лакун между ними (т. е. отрезков натурального ряда, не содержащих простых чисел). Оценка сверху, полученная самим Чжаном, составляла около 70 млн. Затем в результате усилий математиков — участников международного проекта POLYMATH, организованного по инициативе филдсовского лауреата Теренса Тао, эта оценка была снижена до 246. Главной целью является доказательство существования бесконечного числа простых чисел-близнецов, расстояние между которыми равно 2. Достижение Чжана было во многом достигнуто благодаря известной работе Голдстоуна, Пинца и Ильдирима, которая докладывалась на конгрессе турецким математиком Ильдиримом.

Высказывания:

- Я чувствую себя молодым, хотя физически уже не молод.
- Решайте небольшие задачи, но обязательно держите в уме настоящую проблему.

Лекция по приглашению: Джеймс Саймонс

Математическая специализация. Дифференциальная геометрия, теория калибровочных полей, криптография.

Биографические сведения. Саймонс начал преподавать в Гарвардском университете в возрасте 23 лет. Через 4 года ушёл в Агентство национальной безопасности США, где работал криптографом. Покинув Агентство, некоторое время был профессором университета штата Нью-Йорк в Стоуни-Бруке. Оттуда ушёл в бизнес, где начал свою работу в качестве фондового менеджера. В 1982 году основал компанию «Ренессансные технологии». По сведениям журнала «Форбс», в 2014 году занимал 88-е место в списке наиболее богатых людей мира. Основатель фонда Саймонса.

Комментарий к научной деятельности. Саймонс известен как один из авторов теории Черна — Саймонса, являющейся перспективным направлением в теории калибровочных полей. Награждён премией Веблена Американского математического общества.

Высказывания:

• Я ушёл из Гарварда в Агентство национальной безопасности, поскольку хотел попробовать для себя что-нибудь новое и потому, что увлёкся криптографией.

• Я был вынужден уйти из Агентства, где работал криптографом, из-за того, что в одном из своих интервью открыто высказался против войны во Вьетнаме и кроме того в ответ на вопрос корреспондента, чем я занимаюсь в рабочее время, ответил: «Математикой!» Корреспондент счёл это заявление свидетельством того, что я занимаюсь на рабочем месте посторонними делами. Результатом стало моё увольнение из Агентства.

• Увольнение — один из жизненных опытов, который каждый должен приобрести.

• Когда я покидал позицию профессора в Стоуни-Бруке ради того, чтобы заняться бизнесом, отец заявил мне, что я сумасшедший. Сейчас я думаю, что сказал бы то же самое, если б мой сын учинил нечто подобное.

• В чём секрет моего успеха в бизнесе? Работа в команде, общность интересов всех её членов. Большинство моих коллег по бизнесу — это бывшие учёные и инженеры. На Уолл-стрит прекрасно знают, что мы недолюбливаем финансистов, экономистов и специалистов по бизнесу. Наши решения всегда основаны не на субъективных соображениях, а на математическом анализе данных.

• Почему я поддерживаю фундаментальную науку? Потому, что она не имеет той поддержки, которую заслуживает. Основная часть финансовых вложений в американскую науку идёт на прикладные исследования.

Выступление в связи с демонстрацией фильма «Как я возненавидел математику!»: Седрик Виллани

Математическая специализация. Кинетическая теория газов, теория переноса, уравнения Больцмана и Власова.

Биографические сведения. Профессор Высшей нормальной школы в Лионе с 2000 по 2009 год. Директор института Пуанкаре. Филдсовский лауреат 2010 года.

Стоит, пожалуй, остановиться на внешности Виллани. Это импозантный молодой человек с длинными волосами. Он выступал в тёмном пиджаке, украшенном большим чёрным бантом и брошью в виде паука в петлице.

Краткое изложение содержания фильма. Фильм, режиссёром которого является Оливье Пейсон, начинается с распространённых высказываний «обычных» людей о том, что математика ассоциируется у них со скукой и бесполезностью. Она вызывает в них чувства ненависти, разочарования и даже ярости. Цель фильма — убедить таких людей в том, что математика и математики не так уж скучны и бесполезны. Помимо Виллани, в фильме участвуют также известные математики Бернд Штурмфельс (профессор Университета штата Калифорния в Беркли), Жан-Пьер Бургиньон (президент Европейского исследовательского совета), Герт-Мартин Грейель (директор института в Обервольфахе и глава реферативного журнала «Zentralblatt für Mathematik»), а также упомянутый выше Джеймс Саймонс. Авторы фильма поставили себе целью показать, как математики общаются друг с другом, что именно способно глубоко их заинтересовать и т. д. По мнению Виллани, впервые математики представлены в документальном фильме столь реалистично.

Высказывания:

- Математики должны оправдывать перед налогоплательщиками те деньги, которые на них тратятся.
- Для меня огромная радость и награда представлять математику перед широкой аудиторией.
- Математика сложна и с этим ничего не поделаешь. Она требует, с одной стороны, строгости, а с другой — воображения. Она учит нас думать по-другому.
- Математика — моя профессиональная любовь и жизнь. С её помощью я проникаю в умы и души других людей.
- Математика строга, но креативна. Она абстрактна, но универсальна. Элитарна и одновременно демократична. Это древняя наука, которая всё ещё интенсивно развивается.

Участие российских математиков в конгрессе

Российская математическая школа на этом конгрессе была представлена явно слабее, чем на предыдущих. Впервые за многие годы представители России не вошли в состав Исполкома Международного союза математиков.

Из пленарных докладчиков только трое являются выходцами из российской математической школы: Алексей Бородин, Михаил Любич, Вера Серганова, но все они представляли США.

Из секционных приглашённых докладчиков около 25 происходили из российской математической школы, но только четверо из них представляли Россию: Михаил Вербицкий (ВШЭ), Антон Герасимов (ИТЭФ), Александр Кузнецов (МИАН) и Григорий Ольшанский (ИППИ).

Конечно, наметившаяся тенденция снижения представительства нашей математической школы не может не внушать опасения за будущее российской математики.

Участие женщин в работе конгрессе

Пожалуй, ещё ни на одном из предыдущих конгрессов женщины-математики не играли столь заметной роли, как в Сеуле.

В роли президента Международного союза математиков на конгрессе выступала Ингрид Добеши (заметим, что президентом Европейского математического общества является Марта Сан-Соле). Впервые лауреатом Филдсовской премии стала женщина — Мариам Мирзахани. Одна из именных лекций была представлена Джорджией Бенкарт, а один из пленарных докладов — Верой Сергановой.

Стоит напомнить, что конгресс был открыт также женщиной — президентом Южной Кореи Пак Кын Хе.

Новый президент Международного союза математиков

Новым президентом Международного союза математиков избран Сигэфуми Мори.

Математическая специализация. Алгебраическая геометрия.

Биографические сведения. Мори родился в Нагое в 1951 г. Получил докторскую степень в 1978 г. в университете Киото. Работал в Гарварде, Колумбийском университете и университете штата Юта. Директор Исследовательского института математических наук (RIMS) с 2011 по 2014 гг. Филдсовский лауреат 1990 года. Лауреат премии Коула Американского математического общества.

Комментарий к научной деятельности. Мори предложил программу исследования алгебраических многообразий высших размерностей, известную ныне под названием «программы Мори».

Высказывания:

• Моя задача не наставлять других математиков, а слушать их и вместе с ними двигаться вперёд.

• Наша общая задача — добиться устойчивой и долговременной поддержки математических исследований.

• Работая в RIMS, я не был боссом, скорее служащим, внимательно слушающим других сотрудников. Это мой стиль работы.

Следующий конгресс в Бразилии

Следующий XXVIII Международный конгресс математиков пройдёт с 7 по 15 августа 2018 г. в Рио-де-Жанейро. Председателем Оргкомитета конгресса является Марсело Виана. Это будет первый Международный математический конгресс в Латинской Америке и вообще в южном полушарии.

Сейчас в Бразилии около 2000 активных математиков и профессоров. В Сеуле бразильские математики сделали один пленарный и три секционных приглашённых доклада. Наиболее известными представителями бразильской математической школы являются Матош Пейшото и Леопольдо Нахбин. Они сыграли главную роль в создании Института чистой и прикладной математики (IMPA) в 1952 г. и были первыми приглашёнными докладчиками из Бразилии на международных математических конгрессах. Бразильское математическое общество, входящее в Международный союз математиков, образовано в 1969 г.

Другие мероприятия в рамках конгресса в Сеуле

NANUM

Слово «нанум» можно перевести с корейского языка как «благотворительность». Так была названа беспрецедентная программа финансовой поддержки 1000 математиков из стран Азии, Латинской Америки и Африки (для сравнения укажем, что на предыдущих конгрессах Комитет по развивающимся странам Международного союза математиков поддерживал не более 200 математиков из развивающихся стран). Основная финансовая помощь была предоставлена корейскими компаниями.

MENAO

Данное сокращение означает «математика в развивающихся нациях: достижения и возможности». Так назывался специальный симпозиум, посвящённый проблемам развития и обучения математике в развивающихся странах.

Imaginary

Под этим названием выступает программа популяризации математики, созданная в Германии в 2008 г. Она включает в себя постоянно действующую выставку (и сопутствующий интернет-ресурс), путешествующую по разным странам. Целью программы является объяснение математических закономерностей на языке образов и форм, а также создание оригинальных компьютерных программ для самостоятельного пользования и обучения математике.

Кроме того, в рамках конгресса было организовано несколько рабочих групп, посвящённых обучению математике, её популяризации, цифровой математической библиотеке и т. д. А ещё были выставки, посвящённые взаимодействию математики и искусства (Bridges 2014), сеансы одновременной игры в го (по-корейски бадук) и пр. Ну и, конечно, большое число экскурсий по городу, речные прогулки, выезд в демилитаризованную зону и др.

А. Г. Сергеев, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
`sergeev@mi.ras.ru`

Я. Г. Синай — лауреат премии Абеля*

Ю. С. Ильяшенко

Как известно, личные проблемы Альфреда Нобеля в отношениях с математикой (математиком) лишили «царицу всех наук» заслуженной номинации среди прочих дисциплин Нобелевской премии. Эта несправедливость была устранена лишь в XXI веке, когда правительство Норвегии в 2002 г. учредило Абелевскую премию (Abel Prize) по математике. Своё название она получила в честь знаменитого норвежского математика Нильса Хенрика Абеля, чьё двухсотлетие отмечалось в том году. Собственно, саму идею этой премии выдвигал ещё сто лет назад другой норвежский математик, Софус Ли, но его смерть и политические пертурбации в Норвегии помешали реализовать её. А теперь, начиная с 2003 г., премия, размер которой оставляет 6 млн норвежских крон (более миллиона долларов),

---

* Первоначальный текст статьи опубликован в журнале «Природа».

Материал подготовлен при поддержке департамента образования города Москвы и основан на беседе, которую провела с автором Наталья Иванова-Гладильщикова.

Редакция благодарит И. В. Щурова, содействовавшего в подборе фотографий.

Я. Г. Синай с женой Е. Б. Вул

присуждается ежегодно. Лауреата премии Абеля, быстро завоевавшей признание как аналог Нобелевской, определяет международный комитет из пяти крупнейших математиков, назначенных Международным математическим союзом и Европейским математическим обществом. Норвежская академия наук и литературы объявляет лауреата и вручает премию в Атриуме юридического факультета университета Осло, где прежде вручалась Нобелевская премия мира. В этом году лауреатом уже во второй раз стал наш соотечественник, академик Я. Г. Синай (первый — М. Л. Громов).

26 марта в Осло президент Норвежской академии наук объявил имя лауреата премии Абеля за 2014 г. Им стал выдающийся учёный, представляющий Россию и США, Яков Григорьевич Синай «за фундаментальный вклад в изучение динамических систем, эргодическую теорию и математическую физику». Торжественное вручение премии состоялось 20 мая.

Ученик Колмогорова

Я. Г. Синай родился в Москве 21 сентября 1935 г. в семье микробиологов. В 1957 г. окончил механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, там же защитил кандидатскую (1960), а вскоре и докторскую (1963) диссертации. С 1971 г. сотрудничает с Институтом теоретической физики им. Л. Д. Ландау, оставаясь на своей должности и теперь, хотя с 1993 г. является профессором математики Принстонского университета (США, штат Нью-Джерси). В 1991 г. избран действительным членом РАН.

Я. Г. Синай и В. И. Арнольд, 1963, МГУ (фото Ю. К. Мозера)

Яков Григорьевич — один из самых знаменитых учеников Андрея Николаевича Колмогорова, ученика Николая Николаевича Лузина, который был основателем московской математической школы, разросшейся подобно могучему раскидистому древу. Колмогоров по праву считается одним из самых выдающихся не только математиков, но и учёных XX века. Он вырастил свою громадную школу, в которой кроме Синая прославились многие академики и профессора (назовём лишь одного из них — Владимира Игоревича Арнольда). Создал свою совершенно замечательную школу и Яков Григорьевич, а многие его последователи — свои, став профессорами в разных университетах (один, но очень наглядный пример — филдсовский лауреат Григорий Александрович Маргулис). Синай — выдающийся педагог. Он сохраняет присущий русской математической школе принцип дарения, идущий от его учителя Колмогорова: наставник щедро дарит свои идеи ученикам. В ситуации, когда западные учёные обычно публикуют совместные статьи со своими учениками, и это справедливо (постановка задачи и идея решения часто бывает решающим вкладом), русская традиция состоит в том, чтобы эту постановку и начальный импульс ученику дарить. И Синай, без преувеличения, — очень щедрый даритель.

В последнее время Яков Григорьевич в основном воспитывает учеников в Принстонском университете. Математический факультет Принстона — один из величайших математических факультетов мира, где работает много филдсовских лауреатов. И Синай в этой математической гвардии занимает почётное место. Но каждую весну и лето Синай возвращается в Россию, и тогда интенсивно работает его Московский летний семинар, имеющий уже многолетнюю историю.

Как известно, Колмогоров внёс фундаментальный вклад в самые разные области математики. Особенно знамениты его труды по теории вероятностей и динамическим системам. На стыке этих двух областей с математической физикой и работает всю жизнь Яков Григорьевич.

Детерминизм и вероятность

Теория вероятностей изучает случайные события. Например, вы подбрасываете монетку, и случайно выпадают орёл или решка. Один из главных результатов теории вероятностей — закон больших чисел, доказанный Колмогоровым. Он состоит в том, что в среднем число выпаданий орла или решки при большом числе испытаний будет одинаковым. Но последняя фраза ещё далека от строгой математической формулировки. Одно из главных достижений Колмогорова состояло в том, что этому наивному утверждению он придал точный математический смысл, а затем доказал то, что получилось.

Теория дифференциальных уравнений, или динамических систем, на первый взгляд занимается противоположными задачами. Она исследует так называемые детерминированные, вполне предсказуемые процессы. Исаак Ньютон был первым, кто понял, что дифференциальные уравнения описывают большинство процессов, происходящих в природе с течением времени — например полёт планет. С помощью созданной им теории таких уравнений Ньютон описал вращение планет вокруг Солнца и, в частности, доказал открытые ранее на опыте законы Кеплера, включая и то, что все планеты движутся вокруг Солнца по плоским орбитам, имеющим форму эллипса.

В конце XVIII века математики начали понимать, что дифференциальные уравнения часто обладают так называемым свойством единственности решений. Если мы знаем в какой-то момент времени состояние процесса (например, положение планеты и её скорость), мы можем предсказать в бесконечное время в будущем, а также реконструировать на бесконечное время в прошлом судьбу этой планеты, её полёт, траекторию.

Более того, Пьер Лаплас понял, что этот же принцип детерминизма относится не только к движению планет, но и к движению микроскопических объектов вроде молекул. Свойство единственности решений дифференциальных уравнений универсально. И в своём трактате о теории вероятностей Лаплас написал: «Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех её составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движение величайших тел Вселенной наравне с движениями легчайших атомов; не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же как и прошедшее, предстало бы пред его взором».

Это гораздо больше, чем математический результат. Это философия, которая осмысливает развитие всей Вселенной вокруг нас, — лапласовский детерминизм. Философия, несмотря на патетику Лапласа, довольно унылая. Она состоит в том, что мы живём в мире, в котором всё предсказано. Если бы некий великий ум знал начальные скорости и положения всех молекул и всех остальных тел во Вселенной, он бы спокойно предсказал прошлое и восстановил будущее.

Но такого великого ума не существует. А главное — последующее развитие науки эту философию опровергло. В XIX столетии казалось, что нет более противоположных ветвей математики, чем дифференциальные уравнения и теория вероятностей. Но развитие математики в XX веке показало, что это две тесно переплетённые области. И в понимание этих связей, которые изучает так называемая эргодическая теория, Синай внёс решающий вклад.

Но сначала вспомним о некоторых юношеских работах Синая.

Ранние работы: энтропия

Ричард Фейнман писал, что многообразие законов природы не является удручающе необозримым. Происходит это оттого, что разные процессы описываются одними и теми же математическими формулами. То же самое можно сказать и о дифференциальных уравнениях. Их разнообразие кажется совершенно бесконечным, но только на первый взгляд — существует подход, который позволяет многие дифференциальные уравнения считать одинаковыми. Грубо говоря, такие уравнения получаются друг из друга заменой координат, и потому, несмотря на внешние различия, имеют глубокое внутреннее сходство и почти тождество. Возникает вопрос: как узнать, одинаковы ли два дифференциальных уравнения? Чтобы ответить на этот вопрос, математики изучают так называемые инварианты. Это некие характеристики дифференциальных уравнений, которые не меняются, когда мы делаем замены координат. Если мы увидели два дифференциальных уравнения, непохожих на вид, и инвариант, который мы открыли, вычислен для них и принимает разные значения, значит, никакие замены координат превратить одно уравнение в другое не могут.

Кроме дифференциальных уравнений есть ещё отображения. Если функция сопоставляет одним числам другие, то отображение сопоставляет одним точкам другие. Например, в школе изучают отображения плоскости — повороты, переносы, растяжения, но можно изучать гораздо более сложные отображения плоскости, например, взять прямую комплексных чисел: $z = x + iy$ и рассматривать отображения $p(z) = z^2$ или $p(z) = z^2 + c$. Динамические системы изучают не только дифференциальные уравнения, но и итерации (последовательное применение) отображений. Написать итерационный квадрат отображения p — всё равно что взять отображение p и применить его не к z, а к образу точки z под действием отображения p: $P^2(z) = P(P(z))$. Хорошее упражнение — написать, какой многочлен и какой степени при этом получится. В теории динамических систем рассматривается отображение p, применённое k раз, и исследуется, что происходит с точкой: $p^k(z)$, $k = 1, 2, \ldots$, когда k стремится к бесконечности.

В теории отображений очень популярен так называемый сдвиг Бернулли, который можно понимать как математическую формализацию истории бросания монеты. Мы бросаем монету и записываем выпадания орлов и решек. Теперь представьте себе, что мы кидаем не монету, а, скажем, шестигранную кость. И она выпадает на одну из шести граней. Мы записываем историю этих бросаний. Глядя на получившиеся последовательности, легко придумать отображение (так называемое отображение сдвига на одну позицию), которое я не буду описывать подробно; оно называется сдвигом Бернулли.

Долго стоял вопрос о том, разные это или одинаковые динамические системы: сдвиги Бернулли в последовательности из двух и из шести символов. Колмогоров придумал инвариант, который называется «энтропия» и который позволил доказать, что эти две динамические системы — разные. Другими словами, сдвиг Бернулли для последовательности из двух и из шести символов (у Колмогорова было три символа вместо шести) — разные, неэквивалентные динамические системы.

Юный Яков Синай, будучи аспирантом Колмогорова, принял активное участие в разработке теории нового инварианта, и этот инвариант вошёл в теорию динамических систем, буквально пронизав её насквозь, под названием «энтропия Колмогорова — Синая».

«Капля Минлоса — Синая»

В начале 1960-х годов Р. А. Минлос и Я. Г. Синай создали математическую модель конденсации паров газа с образованием больших капель жидкости (от испарений — к дождю). Модель исходит из дифференциальных уравнений, описывающих движение молекул, т. е. стартует с микроскопического уровня, но выводы должна делать макроскопические. Она должна описать появление капель, хорошо заметных наблюдателю без помощи каких-либо приборов. Одно из ключевых соображений объясняло, почему микроскопические капельки, слившись вместе, не рассыпаются снова на микроскопические капли: им мешает поверхностное натяжение. В фольклоре этот цикл работ называется «капля Минлоса — Синая».

Эргодическая теория

Следующий важный цикл работ Синая относится к эргодической теории. Здесь опять стоит сделать шаг назад и рассказать, откуда эта теория появилась.

С точки зрения Лапласа, движение молекул окружающего нас воздуха описывается дифференциальными уравнениями. Сидя в комнате, мы дышим воздухом, поведение которого представляет собой решение дифференциального уравнения в пространстве с очень-очень большим количеством координат. Вопрос: почему мы дышим однородным воздухом? Почему давление в правом верхнем углу комнаты и в противоположном, левом нижнем, одно и то же? Ведь молекулы в одном углу совсем не знают, что делается в другом. Почему же они ведут себя одинаково?

Австрийский физик Людвиг Больцман в конце XIX века попытался осмыслить этот вопрос и придумал так называемую эргодическую теорию. Он предположил, что решения очень сложных дифференциальных уравнений ведут себя вероятностным образом. На геометрическом языке это предположение выглядит так. Решение дифференциального уравнения — описание движения точки в пространстве. Это пространство, называемое фазовым, может иметь очень много координат (очень большую размерность). Больцман предположил, что если мы подождём достаточно долгое время, то решение сложного дифференциального уравнения успеет побывать во всех областях фазового пространства. Так, вся совокупность молекул в комнате изображается одной точкой в фазовом пространстве колоссальной размерности. Эта точка побывает во всех частях фазового пространства и каждую из них будет навещать с частотой, пропорциональной её размеру. Можно представить себе следующую иллюстрацию: имеется объём в пространстве (условно говоря, комната), и там очень-очень быстро движется одна точка, которая, конечно, в каждый момент времени занимает какое-то определённое положение. Но по прошествии достаточно долгого времени она успеет побывать в каждом кубическом дециметре комнаты. А если мы дадим ей ещё больше времени, она успеет побывать в каждом кубическом сантиметре. Если ещё дольше ждать — в каждом кубическом миллиметре. И так далее...

Эргодическая теория точно формализует, что значит это утверждение, которое выше введено на интуитивном уровне, и превращает его в теорему. Впрочем, Больцман сформулировал только концепции и гипотезы, но ни одной теоремы в эргодической теории не доказал. Можно сказать, что он был своего рода провидцем.

Формализацию эргодической теории произвели в 1930-е годы Джордж Дэвид Биркгоф и Джон фон Нейман, которые впервые сформулировали аккуратные теоремы и доказали их при определённых условиях. Оказалось, они справедливы не для всякой динамической системы, а лишь для такой, которая сохраняет так называемый фазовый объём. Можно уподобить движение точек, описываемое дифференциальным уравнением, движению молекул в потоке газа или движению частиц воды в гидродинамической струе. Так вот, газ сжимаем, а вода — нет. Динамические системы, сохраняющие объём, похожи на течение воды, а не на течение газа. Именно для таких динамических систем Биркгоф и фон Нейман доказали эргодическую теорему.

Эта теорема перебрасывает мост между теорией вероятностей и динамическими системами. Рассмотрим мысленный эксперимент из теории вероятностей: на стол, на котором стоят большие и маленькие тарелки, случайным образом бросают монеты. Теория вероятностей утверждает, что после большого числа бросаний число монет на каждой тарелке будет пропорционально её площади. А вот что говорит теория динамических систем: точка, движущаяся под действием эргодического дифференциального уравнения, посещает каждый участок фазового пространства с такой же частотой, с какой туда попадала бы случайно брошенная монетка.

На динамическую систему для того, чтобы она обладала свойством эргодичности, нужно налагать весьма трудно проверяемые условия. Вовсе не все динамические системы обладают эргодическим поведением, т. е. способностью побывать в любом уголке фазового пространства. Вопрос: правда ли, что системы газовой динамики таким свойством обладают?

Этой проблемой занялся молодой Яков Синай. Одновременно над теорией динамических систем работало славное поколение учёных — Аносов и Арнольд в России, Смейл в США. Смейл приезжал в Россию и оказал очень сильное влияние на наших учёных (и сам писал о том, какое сильное влияние они оказали на него). В частности, одна из задач, поставленных Смейлом, состояла в том, чтобы доказать (что бы это ни означало) структурную устойчивость геодезического потока[1] на многообразии отри-

[1] Геодезическая линия на поверхности — кратчайшая линия между двумя точками. Знакомая всем геодезия занимается измерением расстояний на земле и может считаться «отдалённым предком» геодезических потоков.

цательной кривизны. Обдумывая эту задачу, Дмитрий Викторович Аносов создал теорию так называемых гиперболических динамических систем. Геодезический поток, о котором шла речь, — один из важных, но далеко не единственный пример гиперболической системы.

Синай был первым, кто применил методы гиперболической теории к гипотезе Больцмана и к задачам газовой динамики. Он настолько сильно продвинул доказательство эргодической гипотезы Больцмана, что она называется теперь эргодической гипотезой Больцмана — Синая (над ней сейчас работают его последователи, и эта задача, решённая не до конца, исследована сейчас очень глубоко).

Меры Синая — Рюэля — Боуэна

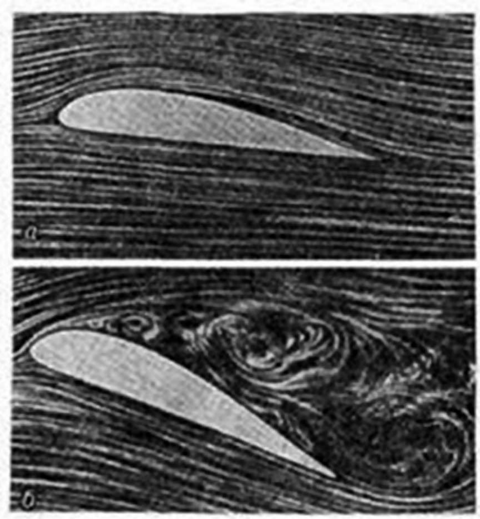
Не все динамические системы похожи на поток воды и сохраняют фазовый объём. Многие из них похожи на бушевание ветра, несущего облака пыли, или на движение распылённого вещества во Вселенной. Это распылённое вещество может с течением времени собираться в скопления, группироваться и образовывать фигуры гораздо меньшего размера, чем то пространство, в котором начиналось движение. Первоначально равномерно распылённое во Вселенной вещество может порождать весьма плотные скопления, и есть смысл говорить о массе разных частей этих скоплений.

Эта картина иллюстрирует то, что математики называют предельной инвариантной мерой для динамической системы. Одна из самых знаменитых и тоже интенсивно изучаемых мер — так называемая мера Синая — Рюэля — Боуэна. Яков Григорьевич был одним из трёх создателей этой концепции, и она тоже оказалась центральной для теории динамических систем.

Общая вера современных математиков состоит в том, что большинство динамических систем демонстрируют одновременно детерминистское и вероятностное поведение. Детерминистское поведение управляет выходом всех частиц на то множество, на то скопление материи, на котором сосредоточена мера Синая — Рюэля — Боуэна. Это скопление называется аттрактором. Теория вероятностей, в свою очередь, управляет движением уже по этому скоплению материи — по аттрактору.

Проблема турбулентности

Когда мы слышим спокойный голос бортпроводника: «Наш самолёт вошёл в зону турбулентности, пристегните ремни», это значит, что самолёт вошёл в зону воздушных вихрей, которые клубятся, сталкиваются и мешают полёту. Примерно так же выглядит турбулентное течение



Возникновение турбулентности. Разрез крыла дан светлым силуэтом. Вверху показано спокойное, так называемое ламинарное, обтекание крыла относительно медленным потоком воздуха. Внизу изображён завихренный, бурный, турбулентный поток, возникающий при быстром обтекании. Зона турбулентности — за крылом

жидкости. В последнее время Яков Григорьевич приложил много усилий к занятиям математической гидродинамикой.

Течение жидкости описывается так называемым уравнением Навье — Стокса, дифференциальным уравнением с частными производными. Его исследование Институт Клэя назвал одной из семи ведущих проблем XXI века, и она входит в число так называемых millennium prize problems, за решение которых объявлена миллионная премия. Проблема состоит в следующем: начать с довольно компактных уравнений Навье — Стокса и с их помощью объяснить совершенно загадочное явление турбулентности, которое тоже в каком-то смысле противоречит детерминистской философии Лапласа. Представим себе следующий эксперимент: возьмём жидкость в сосуде и будем её медленно разгонять. Например, сосуд может быть зазором между двумя цилиндрами, в котором залита жидкость. Один цилиндр неподвижен, а другой начинает постепенно раскручиваться, разгоняясь до очень большой скорости. Этот процесс можно описать дифференциальным уравнением, но только в бесконечномерном пространстве. В соответствии с теорией существования и единственности при двух экспериментах, производимых в тождественном режиме, моделируется одно и то же решение дифференциального уравнения, поэтому картина должна наблюдаться

Чествование Синая в Принстоне: справа от Я.Г.
его ученик Алекс Конторович и коллега по Принстону Джон Нэш.

одна и та же. Между тем сначала действительно эта гипотеза подтверждается (т. е. при двух экспериментах развитие течения примерно одно и то же: есть аккуратные струи, которые легко проследить и описать), но затем появляются мелкие вихри, начинается хаос, и две картины течения при двух практически тождественных экспериментах оказываются абсолютно различными между собой.

Турбулентным может быть течение не только жидкости, но и газа. На рисунке (с. 49) показано возникновение турбулентности при обтекании крыла потоком воздуха. Как объяснить это явление? Гипотеза, сформулированная академиком Арнольдом, состояла в том, что уравнение Навье — Стокса — бесконечномерная гиперболическая система (как видите, всё связано в теории динамических систем). Эта гипотеза до сих пор не доказана. Один из ключевых вопросов относится к уравнению, описывающему движение идеальной жидкости (без вязкости). Такой упрощённый вариант уравнения Навье — Стокса называется уравнением Эйлера. Вопрос состоит в следующем: верно ли, что решения уравнения Эйлера в определённом смысле уходят на бесконечность за конечное время?

Яков Григорьевич ответил на близкий вопрос. Если продолжить решение уравнения Эйлера в комплексную область, то там у них возникают особенности. Это результат последнего времени, и он тоже имеет не только математическую, но и физическую и философскую интерпретацию. Надо подчеркнуть, что Яков Григорьевич всю жизнь работает в тесном контакте с физиками.

Гражданская позиция

В заключение — несколько слов о гражданском мужестве Якова Григорьевича Синая. В конце 1960-х годов математик Есенин-Вольпин (сын поэта) был отправлен в сумасшедший дом за диссидентство (оппозиционную политическую активность). 99 математиков подписали письмо в его защиту. Все они попали в «чёрный список», и карьеры многих из них были «заморожены». Среди них был и Яков Григорьевич.

В 1990-е годы Синай был одним из создателей Независимого московского университета, который он впоследствии очень сильно поддерживал.

Независимый университет стал одним из центров кристаллизации математической жизни Москвы. И в этом — большая заслуга Я. Г. Синая, одного из двенадцати отцов-основателей НМУ.

Ю. С. Ильяшенко, НИУ Высшая школа экономики, Корнельский университет (США), мехмат МГУ, НМУ, МИ им. В. А. Стеклова РАН

`yulijs@gmail.com`

Интервью с Я. Г. Синаем, абелевским лауреатом 2014 года[*]

М. Рауссен, К. Скау

Премия

Профессор Синай, прежде всего разрешите вас поздравить. Вы — двенадцатый лауреат премии Абеля, завтра — церемония награждения. Скажите, вы этого ожидали? Как вы восприняли эту новость?

В начале марта сего года я узнал от друга, что комитет по премии Абеля интересуется моей фотографией. Я решил, что это должно что-то означать: раньше ведь такого не бывало. А затем мне позвонили из Норвежской академии наук и сказали про премию.

Это было прямо в день объявления премии?

Да, 26 марта.

---

[*] Newsletter of the European mathematical society, 93 (September 2014), pp. 12-19. Печатается с согласия правообладателей. Перевод С. М. Львовского.

Речь Я. Г. Синая при вручении премии опубликована в журнале «Математика в высшем образовании», № 12 (2014 г.).

Молодость

Вы родились в 1935 году в Москве, в семье научных работников. Оба ваших родителя были биологами, а ваш дед был известным математиком. Видимо, всё это оказало серьёзное влияние на формирование ваших интересов?

Бесспорно. Как же ответить «нет» на такой вопрос? Всё вращалось вокруг математики. Однако же в то время я предпочитал играть в волейбол.

Влияние математики было не таким прямым, как можно подумать. В школьные годы я участвовал во многих математических олимпиадах, но ничего не добился и не получил ни одной премии. Я так и говорю молодым людям, не имеющим олимпиадных достижений: возможно, в будущем вы отыграетесь.

В то время мой дед[1)] был уже человеком пожилым, и у него не хватало энергии подтолкнуть меня к занятиям математикой. И ещё у меня есть брат, Г. И. Баренблатт, который работал в МГУ и был убеждён, что своей профессией я должен выбрать математику.

А вы помните, когда обнаружилось, что у вас есть выдающиеся математические способности?

Если они и обнаружились, то произошло это очень поздно. Я был уже аспирантом, когда принёс статью об энтропии своему научному руководителю А. Н. Колмогорову и он сказал: «Наконец вы можете соперничать с другими моими учениками». Но я не уверен, что он был прав и что у меня есть какие-то исключительные способности к математике.

Вы ведь, наверное, пошли в школу в тот год, когда нацистская Германия вторглась в Россию. Как повлияла война на ваши первые школьные годы?

Я поступил в школу в 1943 году, когда моя семья вернулась в Москву из эвакуации. В то время мальчики и девочки обучались раздельно, а по окончании каждого класса надо было сдать около десяти экзаменов. До эвакуации жизнь [в Москве] была другой. В московских квартирах запрещалось открывать окна, так как надо было соблюдать режим затемнения. В 1943 году окна разрешили открывать. Никаких прямых признаков войны в Москве заметно не было, но жизнь была трудная, потому что это было сталинское время: надо было знать, как себя вести.

И на школьную жизнь это тоже влияло?

Это было повсюду; за несогласие с официальными мнениями могли исключить из школы и даже посадить в тюрьму.

Были ли в школе учителя, в частности учителя математики, оказавшие на вас серьёзное влияние?

[1)] В. Ф. Каган. — *Прим. пер.*

В старших классах у нас был очень хороший учитель математики, Василий Алексеевич Ефремов. Это был замечательный учитель старой закалки. Задачи, которые он нам задавал, он записывал аккуратным почерком на листках бумаги и раздавал эти листки ученикам. Его уроки были хорошо организованы и увлекательны, так что математику мы очень любили: мы обсуждали его задачи и старались их решить. В то время я не был среди лучших учеников, были другие школьники с заведомо лучшими результатами.

А сколько вам тогда было лет?

Это было в самых последних классах, перед поступлением в университет. Так что, видимо, лет 16–17.

Студент мехмата

Вы в 1952 году поступили на механико-математический факультет МГУ, когда были ещё фактически подростком. Каково было учиться на этом знаменитом факультете в столь юном возрасте?

У нас было много прекрасных профессоров. Например, курс математического анализа читал М. А. Лаврентьев, в то время очень известный учёный. У него было много административных обязанностей, но это был замечательный педагог, и его лекции были очень интересными. Кроме того, у нас был очень хороший преподаватель классической механики — Н. Г. Четаев. Он нам читал лекции на втором курсе. А лекции по геометрии нам читал Н. С. Бахвалов, который был хорошо известен в России, но не слишком известен на Западе. Про Бахвалова есть такая история. Первого сентября, когда мы только поступили в университет, он вошёл в аудиторию со словами: «Ну что же, продолжаем». А ведь это была самая первая лекция!

Лекции по алгебре нам читал Е. Б. Дынкин. Это был прекрасный педагог для тех, кто только начал учиться. Уровень его лекций был очень высок. Особо заинтересованным студентам Дынкин давал дополнительные задачи. На моём курсе к числу таких студентов относились И. Гирсанов, ставший в дальнейшем известным специалистом по теории вероятностей, и Л. Серёгин.

И это под руководством Дынкина вы написали свою первую статью?

Да. Дынкин преподавал у нас на втором и третьем курсах, и под его руководством я сделал свою первую работу. Дынкин сформулировал для меня задачу, а я её решил, так что моя первая статья была опубликована, когда я был третьекурсником. Мне эта работа и тогда нравилась, и до сих пор нравится.

Дынкин хотел, чтоб я занимался марковскими процессами в стиле работ В. Феллера. Статьи Феллера в то время были в Москве очень популярны, и Дынкин настаивал, чтоб я продолжал в том же духе. Но меня это не очень увлекало и не очень интересовало.

В какой степени математика была интегрирована с механикой в учебной программе?

Математика и механика были независимыми разделами программы. Каждый мог посещать лекции и по математике, и по механике. Я ходил и на те, и на другие, и ещё немного на лекции по физике. Но в основном я посещал занятия по математике.

Наряду с Дынкиным, весьма значимыми для вас людьми были А. Н. Колмогоров и И. М. Гельфанд, ведь так?

У Колмогорова было много учеников; я стал одним из них. Ученикам Колмогорова была предоставлена полная свобода: они могли работать над любой задачей. Колмогоров любил обсуждать со своими учениками их результаты. Бывали и случаи, когда Колмогоров писал за них статьи, чтобы продемонстрировать, как должны выглядеть математические тексты.

Колмогоров организовал семинар, который начинался как семинар по случайным процессам, а затем стал семинаром по динамическим системам и эргодической теории. Я начал посещать семинар вместе с такими математиками, как В. И. Арнольд, В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров и др. Потом я стал учеником Колмогорова. Колмогоров тогда интересовался вопросами энтропии в различных компактных и функциональных пространствах — такого рода задачи в то время были очень популярны.

Но ведь Гельфанд тоже хотел взять вас к себе в аспирантуру?

Да. Гельфанд организовал свой знаменитый семинар, на который ходили многие математики разных поколений. Я участвовал в работе этого семинара в течение многих лет. Если правильно помню, началось всё в 1955 году, когда Гельфанд писал один из томов в своей серии «Обобщённые функции». Гельфанд интересовался теорией вероятностей и хотел, чтобы я стал его учеником. Мы обсуждали это предложение несколько раз; я сказал Гельфанду, что мне очень хочется заниматься теорией вероятностей, но я уже написал статью под руководством Дынкина. Тогда Гельфанд меня спросил: «Вы хотите, чтоб теория вероятностей была для вас закуской или десертом?» Я ответил, что хочу, чтоб она была основным блюдом, на чем всё и кончилось...

Это не значит, что после этого мы перестали общаться. Мы много раз встречались, особенно когда Гельфанд занимался задачами из теории представлений, связанными с эргодической теорией (например, орициклами). Мы с ним многократно обсуждали эти задачи. Я много лет ходил на семинар Гельфанда, потому что Гельфанд обладал замечательной способностью просто и ясно объяснять трудные математические теории.

Динамические системы. Энтропия и хаос

А вы можете объяснить, что такое динамическая система?

Под динамическими системами мы понимаем объекты, описывающие эволюцию в любом смысле. Наиболее интересны нелинейные динамические системы — в них уравнение, задающее эволюцию, линейным не является. Эти системы могут обладать самыми разными свойствами, требующими глубокого анализа.

А какие динамические системы называются эргодическими?

У меня есть очень хороший пример эргодической системы, который я всегда привожу моим студентам. Предположим, решили вы купить ботинки, а прямо в вашем доме расположен обувной магазин. Тогда у вас есть две разные стратегии: можно каждый день заходить в тот магазин, что у вас в доме, и смотреть, что там есть, — в конце концов найдёте то, что вам лучше всего подходит; но можно вместо этого сесть в машину, за день объездить все обувные магазины в городе и в тот же день купить то, что вам больше всего понравится. Так вот, система эргодична, если две эти стратегии приводят к одному результату. А энтропия характеризует то, с какой скоростью в динамической системе растёт число возможностей. Впервые мне таким образом объяснил роль энтропии И. М. Гельфанд.

Эргодическая теория происходит из физики, в частности, из теории гамильтоновых уравнений. Можете ли вы в общих чертах объяснить, что такое хаос и как его можно измерить?

Эта тема лекции, которую я прочту послезавтра, но вкратце могу сказать и сейчас. Основной вопрос — это различие между теорией хаоса и теорией вероятностей. В теории вероятностей мы имеем дело со статистическими экспериментами — ну, скажем, мы сто раз подбрасываем монету. В результате этого эксперимента можно получить много разных последовательностей «орлов» и «решек», и их можно анализировать.

Если же вы имеете дело с хаосом — например, хотите измерить температуру в той же точке Земли, в которой вы её уже измеряли в течение года, — то этот эксперимент однократен. Вы не можете сто раз померить температуру в данном месте и в данное время. Так что теория хаоса изучает последовательности, в которых результаты измерения стремятся к некоторому пределу при времени, стремящемся к бесконечности, и изучает, как описать этот предел. А существование предела на самом деле вытекает из некоторых условий на уравнения движения. Так получается существование распределения, определяющего значения всевозможных средних (точнее говоря, из существования распределения вытекает и существование средних, и возможность найти их значения).

Следующий вопрос такой: какими должны быть уравнения движения, чтобы из них получились распределение и средние? Основное утверждение теории хаоса состоит в том, что динамика должна быть неустойчивой. Неустойчивость означает, что малые возмущения начальных условий через некоторое время приводят к большим возмущениям динамики.

Есть математическая теория, которая говорит, что если система неустойчива, то существуют временны́е средние и есть возможность их вычислить. Вот, в общем и целом, как устроена теория хаоса, а для более подробного описания требуется больше математики.

А как измеряют хаос? Верно ли, что именно в этот момент в игру вступает энтропия?

Если понимать хаос так, как мы сказали выше, т. е. как существование временны́х средних плюс перемешивание, то у хаоса имеется естественное описание в терминах некоторого специального распределения. Энтропия используется в теории неустойчивых систем; она характеризует, сколько разных типов динамики может реализоваться у данной системы. Вне всяких сомнений это очень полезное понятие, поскольку положительность энтропии влечёт другие свойства системы, поддающиеся исследованию.

Физики всегда надеялись, что энтропия позволит им понять явление турбулентности (см., например, статью Б. В. Чирикова и книги таких авторов, как Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев и др.). Нельзя сказать, что эти надежды сбылись, но, с другой стороны, в физике возникает много ситуаций, в которых энтропия системы мала.

Определение энтропии для динамических систем

Колмогоров дал определение энтропии для сдвигов Бернулли, но затем заменил это определение на неинвариантное. Затем вы предложили правильное определение. То, что сейчас называют теоремой Колмогорова — Синая, даёт эффективный способ вычисления энтропии.

Колмогоров начал свой семинар с фон-неймановской теории динамических систем с чистым точечным спектром; он излагал эту теорию в рамках чистой теории вероятностей. Позднее я нашёл этот подход в книге Блан-Лапьера и Форте. На колмогоровских семинарах всё было чрезвычайно увлекательным. В то время мы считали, что главная задача эргодической теории — обобщить теорию фон Неймана на системы с непрерывным спектром, причём сделать это с помощью второй группы когомологий спектра с коэффициентами в кольце ограниченных операторов. Это не получилось, но идея осталась. В то время Колмогоров в первую очередь занимался проблемами теории информации и понятием размерности линейного пространства. Не знаю, как так получилось, но однажды Колмогоров пришёл на свою лекцию и сформулировал своё определение энтропии. В современной терминологии можно сказать, что он дал определение энтропии для сдвигов Бернулли и тем самым предложил новый инвариант для динамических систем этого типа. Это был без сомнения великий результат. Колмогоров написал статью, отдал её в печать и отправился на целый семестр в Париж. Как известно, текст, поданный в журнал, отличался от того, что он рассказывал на семинаре. В своей статье он ввёл новый класс динамических систем, названных им квазирегулярными. Позднее их стали называть K-системами (K — в честь Колмогорова), и для этого класса систем он ввёл понятие энтропии. Пока Колмогоров был в отъезде, я думал о понятии энтропии, пригодном для всех динамических систем. Позднее это понятие появилось в моей статье об энтропии. В то время у всех было чёткое ощущение, что для динамических систем, возникающих в теории вероятностей, энтропия положительна, а для динамических систем, соответствующих обыкновенным дифференциальным уравнениям, она должна быть нулевой. Тем самым представлялось, что есть возможность различать два типа динамических систем: происходящих из теории вероятностей и происходящих из анализа.

Расскажите о своём сотрудничестве с В. А. Рохлиным.

История моего сотрудничества с Рохлиным, с которым мы в дальнейшем стали близкими друзьями, началась в 1958 году, когда вышла статья Колмогорова об энтропии. В то время Рохлин жил в Коломне — маленьком провинциальном городе недалеко от Москвы. У него был очень хороший аспирант по имени Леонид Абрамов. Абрамов доказал несколько общих теорем, например об энтропии специальных потоков, и ряд других результатов (например, «формулу Абрамова»). Когда Рохлин узнал о статье Колмогорова, он послал Абрамова в Москву — выяснить, что на самом деле сделано и какова ситуация, а по возможности и добыть текст.

В Москве Абрамов нашёл меня, мы много беседовали, я научил его всему, что знал сам. После этого Абрамов пригласил меня в Коломну побеседовать с Рохлиным, и я это приглашение принял. Я очень хорошо помню свою первую поездку в Коломну. Рохлин жил в очень аккуратной квартире, и сам он был очень хорошо одет. Когда мы стали говорить, он произвёл на меня очень сильное впечатление.

Рохлин в эргодической теории хорошо разбирался: у него по этой тематике было уже несколько публикаций, и его докторская диссертация была посвящена тому же предмету. Ему принадлежит постановка нескольких интересных задач эргодической теории; часть из них была связана с его теорией измеримых разбиений. Измеримые разбиения оказались очень важны для эргодической теории, поскольку с их помощью можно гораздо лучше понять условные вероятности.

Одной из задач, над которыми я стал работать под влиянием Рохлина, было вычисление энтропии для группы автоморфизмов двумерного тора. В то время не было известно, что колмогоровское определение энтропии необходимо изменить; задача оказалась тяжёлой, у меня ничего не выходило. В соответствии с тогдашними представлениями я пытался доказать, что энтропия равна нулю, но как ни старался — доказательства не получалось. Тогда я пошёл к Колмогорову и рассказал ему, что я делаю. Он сказал мне, что в данном случае энтропия, конечно же, должна быть положительна, и тогда я это доказал.

В то время не могло быть и речи о публикации моей статьи: ведь была уже опубликована статья Колмогорова и было непонятно, зачем нужно другое определение энтропии. Через некоторое время, однако, Рохлин указал на недочёты в колмогоровском определении. Стало ясно, что я должен публиковать свою уже готовую работу с определением и вычислением энтропии автоморфизма.

Вот так началось моё сотрудничество с Рохлиным. Он организовал семинар по эргодической теории, на который ходили Арнольд, Аносов, Алексеев и другие. Параллельно Рохлин вёл семинар по топологии, на котором ведущей фигурой был С. П. Новиков.

В дальнейшем Рохлин переехал в Ленинград, а я ездил в этот город к нему на семинар рассказывать о своих результатах.

Бильярдные системы

Затем вы стали заниматься очень интересными примерами эргодических систем, так называемыми бильярдами. Можете объяснить, что это такое?

Бильярд — это, как известно, движение шарика по бильярдному столу. Интересная математическая теория возникает, если рассматривать столы более или менее произвольной формы. Естественный вопрос, поставленный русским учёным А. Н. Крыловым задолго до возникновения теории энтропии, звучит так: в каких бильярдных системах неустойчивость будет такой же, как для динамики частиц, движущихся в пространстве отрицательной кривизны? Частицы в пространстве отрицательной кривизны — лучший пример неустойчивой системы. Теория бильярдов гласит, что если граница стола вогнута, то система неустойчива (в описанном выше смысле): для двух начальных условий с различными скоростями траектории расходятся экспоненциально. Если рассмотреть типичный неустойчивый бильярд, а именно обычный квадратный бильярд, из которого удалён круг, то разница между таким бильярдом и обычным состоит в том, что в неустойчивом бильярде частицы подходят к лункам много быстрее, чем в обычном бильярде.

Следующий вопрос, видимо, будет довольно техническим. Вы доказали очень важную теорему о системах с положительной энтропией. А именно, вы показали, что для системы с положительной энтропией можно найти сдвиг Бернулли, являющийся так называемым фактором, с той же самой энтропией. Стало быть, всякие два сдвига Бернулли с одинаковой энтропией будут по крайней мере слабо изоморфны. Позднее Орнстейн доказал, что энтропия — полный инвариант сдвигов Бернулли. Стало быть, из результатов Орнстейна вытекает, что бильярдные системы — максимально хаотические и что фактически они суть потоки Бернулли?

Из теоремы Орнстейна вытекает, что если у двух эргодических бильярдных систем энтропия одинакова, то они изоморфны. Это замечательный и очень сильный результат.

Значит, подбрасывание монеты в некотором смысле аналогично детерминистской бильярдной системе — удивительный факт.

Согласно моему результату, в системе с положительной энтропией могут быть подсистемы, эволюционирующие аналогично сдвигам Бернулли.

А что с бильярдными системами в высших размерностях? Про них что-нибудь известно?

Известно многое. Например, есть результат венгерского математика Нандора Шиманьи (Nándor Simányi), который работает сейчас в Алабаме. Он исследовал многомерные динамические системы, которые в конце концов становятся неустойчивыми, имеют положительную энтропию и эргодичны.

В своих работах по аносовским диффеоморфизмам вы использовали марковские разбиения. В результате возникло понятие, которое позднее назвали мерой Синая — Рюэля — Боуэна или SRB-мерой. Вы не могли бы это прокомментировать?

Сначала была моя статья, в которой я построил эту меру для так называемых аносовских, или гиперболических, систем. Затем появилась работа Боуэна и Рюэля, в которой они обобщили эту конструкцию на системы, рассматривавшиеся Смейлом, а именно системы с гиперболическим поведением, удовлетворяющие аксиоме A.

SRB-меры важны при исследовании необратимых процессов в таких системах. Пусть, например, мы начинаем с неравновесного распределения и интересуемся, как оно в процессе эволюции стремится к равновесному. Теория таких систем приводит к результату, согласно которому эволюция является в некотором смысле очень неравномерной: по одним направлениям распространение очень медленно, все временны́е средние ведут себя очень хорошо и стремятся к некоторому пределу, в то время как по другим направлениям эта сходимость очень нерегулярна и поддаётся исследованию только с привлечением теории вероятностей. Так что SRB-меры гладки вдоль некоторых устойчивых направлений и чрезвычайно нерегулярны вдоль других направлений. Это класс мер, возникающих в теории эволюции распределений для хаотических систем.

Связаны ли SRB-меры с гиббсовскими мерами?

Да. SRB-меры — это один из примеров гиббсовских мер. Но гиббсовские меры — значительно более общий объект.

Математика и физика

Вернёмся к более общим вопросам. Начнём со взаимосвязи математики и физики. Физик Юджин Вигнер опубликовал в 1960 году статью под названием «Непостижимая эффективность математики в естественных науках». В этой статье он привёл множество примеров, демонстрирующих, как с помощью математического формализма удавалось добиться поразительных продвижений в физике. Есть ли у вас аналогичный опыт?

У меня впечатление, что эффективность математики никого больше не удивляет. Накопилось уже столько примеров! Скажем, теория струн есть фактически математическая теория для физики. В своё время Джоэл Лебовиц организовал обсуждение эффективности математики в свете этого высказывания Вигнера. В результате все пришли к заключению, что эффективность математики — твёрдо установленный факт.

В моём поколении была группа молодых математиков, решивших всерьёз изучить физику. Однако по вопросу о том, как заниматься математической физикой, мнения были разные. Ф. А. Березин всегда утверждал, что математики должны доказывать только такие теоремы, которые интересны физикам. Р. Л. Добрушин и я, напротив, всегда старались находить математические задачи в физических работах.

С другой стороны, имеется, похоже, влияние и в противоположном направлении. Исследования физиков оказали серьёзное влияние на квантовую геометрию и даже на теорию чисел. Физики предложили формализмы, в математике толком не развитые, но приводившие тем не менее к верным предсказаниям, которые математически обосновываются с большим трудом.

Значит, математика эффективна, но в меньшей степени, чем хотелось бы.

В 2006 году вы опубликовали статью под названием «Математики и физики — кошки и собаки?». В чём её основная мысль?

Мне хотелось привести примеры ситуаций, в которых математики и физики по-разному смотрят на одну и ту же задачу. Вот один случай. Мы с моим учеником С. А. Пироговым работали над задачами из теории фазовых переходов в статистической физике. Мы доказали ряд теорем, и я пошёл с ними к знаменитому российскому физику И. М. Лифшицу (Лифшиц заменял Л. Д. Ландау после того, как последний попал в автокатастрофу, превратившую его практически в инвалида). Когда я стал рассказывать ему наши работы, он прервал меня со словами: «Но ведь то, что вы рассказываете, очень просто». И он начал писать формулы, из которых в конечном счёте получился наш результат. Уходя от него в замешательстве, я стал думать, почему так получилось. И я понял, что главный результат нашей теории был для Лифшица очевидным фактом. Он, бесспорно, не знал, как его доказывать, но он и не нуждался в доказательстве: он просто пользовался этим результатом как очевидным фактом.

Известно такое высказывание великого Гаусса: «Итак, результат получен, остаётся только доказать его». Так что интуиция играет в математике важную роль...

Я вам тоже могу рассказать историю, опять связанную с Гельфандом. Как-то я сообщил ему теорему, которую доказали мы с Р. А. Минлосом. Гельфанд на это сказал: «Это очевидно. Все физики это знают». Тогда мы переспросили Гельфанда, стоит ли нам писать текст на двести страниц с полными доказательствами, раз это столь очевидно. Гельфанд посмотрел на нас и ответил: «Конечно, да!»

Математик-еврей в Советском Союзе

Можно теперь задать политический вопрос? Вы сказали, что в сталинское время учиться в школе было непросто и что жизнь оставалась непростой, когда вы поступили в университет и начинали свою карьеру. Вы выросли в еврейской семье, а в СССР, по крайней мере время от времени, был распространён латентный антисемитизм...

Я могу назвать два эпизода в своей карьере, когда я столкнулся с антисемитизмом. Первый случай был, когда я не сдал вступительные экзамены в университет. Чтобы я всё же смог поступить, потребовалось участие моего деда, который возглавлял кафедру дифференциальной геометрии, и помощь ректора МГУ И. Г. Петровского. Это ясно свидетельствовало о том, что всё не так просто.

Второй случай был, когда я сдавал вступительные экзамены в аспирантуру. Это было на экзамене по истории КПСС: я знал этот предмет очень плохо и провалил экзамен (мне бы не хотелось обсуждать подробности). Однако П. С. Александров, который возглавлял отделение математики механико-математического факультета, вместе с А. Н. Колмогоровым пошли к заведующей кафедрой истории КПСС и попросили её разрешить мне пересдачу. Разрешение было получено, на пересдаче мне поставили четвёрку, и этого было достаточно для поступления. То, что в итоге всё кончится хорошо, не было заранее очевидно, события могли бы пойти и по-другому[2].

Невзирая на эти обстоятельства, бесспорно, что многие знаменитые российские математики — еврейского происхождения. Есть ли у вас какие-то объяснения этого удивительного факта?

Начну с банального: стремление к образованию заложено в еврейских традициях сильнее, чем у других народов. Евреи изучали Библию, Талмуд, другие религиозные книги. Они проводили за этим занятием много времени — это и есть традиция учиться. В моё время следовать еврейской религии было строго запрещено; некоторые всё равно это делали, но они находились под большим давлением, а когда ты находишься под давлением, ты и работаешь больше: это что-то вроде закона сохранения. Ну вот в этом, по-моему, и кроется причина еврейских успехов.

То есть вы должны были превосходить окружающих, чтобы получить равные с ними шансы?

Нет, нельзя сказать, что мы считали именно так. Бесспорно, мы тщательно готовились ко всем экзаменам и конкурсам; результат не был заранее известен, но всегда была надежда, что что-нибудь получится.

Возможно, ещё одна причина (*особенно применительно к сталинскому времени, но также и к более позднему*) *была в том, что большое количество одарённых людей заинтересовалось естественными науками, поскольку в них было меньше идеологических ограничений, чем, скажем, в истории или политических науках.*

Бесспорно! Могу привести такой пример. В то время на мехмате было много аспирантов-иностранцев, и существовало такое правило: их научными руководителями могли быть только члены КПСС. Но какие-то аспиранты хотели работать, скажем, с Арнольдом, со мной или ещё с кем-то. Из этой ситуации был такой выход: члены партии становились офици-

---

[2] Оценки на подобных экзаменах нередко предопределялись административно-политическими соображениями, в частности стремлением обеспечить желательный национальный состав. — *Прим. ред.*

альными научными руководителями таких аспирантов, но на самом деле аспиранты работали под руководством беспартийных математиков.

Восток и Запад

Вы рассказывали, что в течение многих лет вам, как и многим другим российским математикам, был запрещён выезд за границу. Затрудняли ли эти ограничения развитие науки? Не помешало ли это должному признанию российских математиков на Западе?

На ваш вопрос ответить очень трудно: ведь вы спрашиваете, что бы случилось, если бы чего-то не случилось. Как о таком судить? Вред эти ограничения, бесспорно, принесли, а насколько большой — неясно.

Позиция Арнольда была категорична: российские математики не имеют должного признания на Западе. В период изоляции их результаты иногда переоткрывались на Западе вследствие слабости контактов. Поэтому российские математики получили меньшее признание, чем заслужили.

На это у меня, может быть, особая точка зрения. Вопрос в том, можно ли какой-то результат украсть. Моё мнение таково, хотя с ним многие, вероятно, не согласятся: если результат можно украсть, то он не слишком хорош.

Расскажите про Институт теоретической физики имени Ландау Российской академии наук — институт, в котором вы проработали много лет.

В течение многих лет Институт Ландау был лучшим научно-исследовательским институтом в России. Его организовали после безвременной смерти Л. Д. Ландау. У директора института И. М. Халатникова был замечательный дар находить для института талантливых людей по всей России. За несколько лет в институте сформировалась очень сильная группа физиков, таких как А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, А. Б. Мигдал, А. И. Ларкин, В. Е. Захаров, А. М. Поляков, А. А. Мигдал и многие другие. Группу математических физиков возглавлял С. П. Новиков; эта группа была гораздо менее многочисленна.

Выяснилось, что в теоретической физике есть большие разделы, в которых математики и физики прекрасно понимают друг друга и могут даже работать над похожими задачами. В числе таких математиков я могу назвать С. П. Новикова, И. М. Кричевера, К. М. Ханина, А. Б. Шабата и О. И. Богоявленского. Иногда мы приглашали физиков на наши семинары с докладами о своих результатах. Традиция совместно обсуждать вопросы, интересные и математикам, и физикам, сохраняется по сей день.

В 1993 году вы перешли из Института Ландау в Принстонский университет, сохранив за собой место в Москве. Почему должность в США была для вас столь привлекательна?

На этот вопрос ответить легко. Во-первых, в Принстоне у меня было много друзей: когда мы встречались, нам было много о чём поговорить, у нас было много общих интересов. Другая причина состояла в том, что многие учёные из России эмигрировали, и это изменило ситуацию в России. В прежнее время все были в Москве или Ленинграде; чтобы задать вопрос или что-то обсудить, достаточно было позвонить по телефону. А теперь такое стало невозможно; условия для работы на Западе, и в частности в Принстоне, стали лучше, чем в России.

Вы в США уже более двадцати лет; наверняка вы знаете американскую систему не хуже, чем российскую. Можете ли вы их сравнить?

Мне представляется, что жизнь научного сообщества и там, и тут устроена примерно одинаково. Впрочем, должен сказать, что в Московском университете я никогда не входил ни в какие комитеты и никогда не приглашался на организационные совещания. Сейчас же я председатель учёного совета Института проблем передачи информации РАН.

Преподавание и сотрудничество

Вы преподавали почти всю свою жизнь. Есть ли у вас какие-то специальные педагогические приёмы и принципы?

Во-первых, преподавать студентам мне нравится больше, чем аспирантам. Когда ты читаешь лекции студентам, тебе сразу видно, как они становятся умнее и образованнее, как они усваивают новые знания. В аспирантских же курсах тема обычно достаточно узка и специальна, а слушателям в первую очередь интересны конкретные темы, нужные им для их диссертаций. Мне такое менее интересно.

Мой основной педагогический принцип таков: если студенты моих объяснений не понимают, то виноват в этом я. Я всегда прошу студентов задавать мне побольше вопросов. У тех, кто задавал мне больше вопросов во время курса, шансы на хорошую отметку будут выше.

Список ваших учеников, добившихся серьёзных успехов в науке, впечатляет. Упомянем хотя бы Григория Маргулиса, который в 1978 году получил филдсовскую премию и который будет на этой неделе читать одну из абелевских лекций, посвящённых вашим работам...

Думаю, причина здесь не во мне, а в том, над какими задачами мы работали. Мы занимались очень интересной математикой и формулировали интересные задачи, привлекавшие студентов. Я полагаю, что дело в этом.

Многие мои ученики предпочитали работать независимо — я никогда против этого не возражал.

Вы — прекрасный пример того, что математики могут успешно работать и в почтенном возрасте. В этом году у вас вышла совместная с двумя учениками статья по теории чисел. По теории чисел у вас есть и другие публикации; значит ли это, что вы по-прежнему интересуетесь этим аспектом эргодической теории?

Бесспорно. В том разделе теории чисел, в котором мы работаем, есть много задач, которые естественнее отнести к эргодической теории. Я не буду вдаваться в подробности, но наша статья скорее вышла бы из-под пера специалиста по эргодической теории, чем теоретико-числовика, так что нам получить результаты было проще.

В вашем списке публикаций присутствует много совместных работ. Видимо, вам нравится работать с большим количеством сотрудников.

Ну да, нравится, и им это нравится! И я никогда никому не предлагал стать моим соавтором. Я могу только обсуждать разные задачи и объяснять, что в них интересного.

И да, у меня было много соавторов. Мне очень нравилось работать с Донгом Ли (Dong Li), который сейчас работает в университете Британской Колумбии. Когда мы работаем над одной задачей, мы перезваниваемся много раз за день. И со многими другими учениками мне нравится работать. С разными людьми работается по-разному. Разумеется, я могу работать и с российскими математиками, и с математиками из других стран. Иногда мне нравится работать одному, но с возрастом мне стали нужны соавторы.

У вас всего одна совместная публикация с Колмогоровым, но вы упоминали, что хотели бы, чтобы их было больше.

В какой-то момент Колмогоров решил, что в Советском Союзе недостаточно развита прикладная статистика. Сам он занимался теоретической статистикой и получил в этой области много красивых и глубоких результатов, но ему не нравилось, что теоремы прикладной статистики не применяются на практике. Он нашёл задачу, связанную с движением земной оси, к которой можно было применить методы математической статистики. Французские обсерватории два раза в месяц публиковали данные о положении земной оси, а Колмогоров хотел построить статистические критерии, позволяющие предсказать её смещение. Он хотел, чтобы мы занялись этой задачей, и пригласил в группу очень хорошего геофизика Евгения Фёдорова — одного из ведущих специалистов в этой области. Сидим мы все, включая Колмогорова и Фёдорова, обсуждаем, и тут Колмогоров говорит: «Вы только посмотрите на этих людей: они лучше напишут статью для „Докладов“, чем будут делать что-нибудь полезное!» (А «Доклады АН СССР» были главным российским научным журналом.) В нашей совместной статье (авторы: М. Арато, Колмогоров и я), написанной по этой теме, практически всё было сделано и записано самим Колмогоровым. Позднее Арато написал на ту же тему большую монографию.

Я стремился рассказывать Колмогорову и более поздние свои результаты. Иногда его реакция была неожиданной: «Почему вы занимаетесь этой задачей? Вы что, уже взрослый?» Но обычно он реагировал в высшей степени дружелюбно. Жаль, что мы с ним вместе так и не поработали. Возможно, причиной тому разница в стиле.

А это не Колмогоров утверждал, что он думает над задачей не больше двух недель?

Колмогоров любил говорить, что ни над одной своей статьёй он не работал долго. Как правило, он писал статью за две недели, и в этом наш с ним стиль работы серьёзно расходится. У Колмогорова был очень сильный темперамент, он не мог ничего делать медленно. Я же над некоторыми статьями работал годами.

Он ведь был выдающейся фигурой не только в российской математике, но и вообще в математике XX века.

Да, бесспорно. Можно я вам расскажу про него ещё одну историю? Когда Колмогорову было уже под восемьдесят, я спросил его, как так вышло, что он стал чистым математиком, хотя он работал над конкретными физическими задачами наподобие турбулентности. Он ответил, что он изучал результаты конкретных экспериментов. У него на полу были разложены статьи с экспериментальными данными, и именно на основе этих данных он сформулировал свои гипотезы о турбулентности.

То есть его интуиция подкреплялась физическими соображениями?

Да. Он выписывал физические журналы, и можно сказать, что он хорошо разбирался в физике.

А про вас тоже можно так сказать? Вы мыслите алгебраически, аналитически, основываясь на геометрической интуиции или у вас присутствует всё это?

Это зависит от задачи. Я могу, например, прийти к заключению, что у данной задачи есть конкретный ответ. Я тут как раз рассказывал журналисту историю о такой задаче. Я решал эту задачу два года и в конце концов нашёл, что ответ равен одной второй!

Но в целом я предпочитаю развивать общие теории, иногда — давать «правильные» определения, а не решать конкретные задачи.

Бывало ли у вас когда-нибудь «озарение по Пуанкаре», когда вы вдруг видите готовое доказательство?

Идеи часто приходят в голову неожиданно, иногда и как озарения. Но это происходит только после длительной напряжённой работы, и этот период работы может длиться годами. У меня не бывало озарений, когда я ловил такси или занимался ещё чем-нибудь в этом роде. Сначала — долго и много работать, а затем вдруг становится ясно, как решается задача.

Как бы выглядел список ваших результатов, которыми вы гордитесь больше всего?

Мне они все нравятся.

Горы

В своих ответах вы упоминали скончавшегося несколько лет назад В. И. Арнольда, блестящего российского математика. Арнольд, помимо многого другого, знаменит своим вкладом в так называемую КАМ-теорию. Вы оба посещали курсы и семинары Колмогорова в 1958 году, и вы говорили, что ваши с Арнольдом деды были близкими друзьями.

И вы, и Арнольд любили походы. Как-то вы вместе с ним ходили на Кавказ — расскажите нам историю про то, как вы пережидали дождь в пастушьем шатре.

Это очень забавная история. Погода была очень плохая, шёл сильный дождь. Мы пришли к пастушьему шатру, и пастухи пустили нас внутрь, чтобы мы обсушились. Мы потеряли в горах нашу палатку, так что решили вернуться и поискать её. Мы собрались было выйти, но у этих пастухов были очень крупные собаки — кавказские овчарки. Пастухи к тому времени уже ушли, а когда собаки увидели, что мы собираемся уходить, они окружили нас и стали яростно лаять. Арнольд в ответ начал ругаться на них самыми страшными ругательствами, и собаки его не тронули, зато они напали на меня. Покусать они меня не покусали, но штаны мне разорвали. В конце концов вернулись пастухи и нас вызволили.

Наш последний вопрос — не про математику. Разумеется, математика была главным делом вашей жизни, но ведь наверняка у вас были и другие интересы?

Я занимался, особенно когда был моложе, многими видами спорта. Я играл в волейбол и увлекался лыжами — и горными, и беговыми. Ещё я любил ходить в горы, хотя не могу сказать, что в этом деле я был профессионалом. Я часто ходил в горы со своим близким другом В. Е. Захаровым, занимавшимся интегрируемыми системами. Однажды мы оказались на очень трудном трёхсотметровом склоне, с которого мы спускались целых четыре часа! Пришлось пользоваться верёвками и прочим снаряжением. Сейчас мои спортивные возможности стали скромнее.

Большое спасибо за чрезвычайно интересную беседу. Мы бы хотели поблагодарить вас от имени Норвежского, Датского и Европейского математических обществ.

Вам большое спасибо.

Мартин Рауссен преподаёт математику в Олборгском университете в Дании. Кристиан Скау — профессор Норвежского научно-технического университета в Трондхейме. Они вместе берут интервью у всех абелевских лауреатов начиная с 2003 г.

Памяти Д. В. Аносова

Ю. С. Ильяшенко

5 августа 2014 года скончался Дмитрий Викторович Аносов. Ушёл из жизни выдающийся математик и замечательный человек.

С именем Аносова связано одно из самых ярких событий в математике XX века — так называемая гиперболическая революция в теории динамических систем. Вопрос о том, как выглядит типичная динамическая система, был поставлен А. А. Андроновым и учителем Дмитрия Викторовича Л. С. Понтрягиным. Они же дали ответ для малых размерностей. Этот ответ вполне соответствовал тому, что можно назвать «привычной интуицией».

Гиперболическая революция принесла с собой, говоря словами Б. Пастернака, «перелом очевидности». Она открыла новый мир зрительных образов в математике. Это произошло в конце 1950-х – начале 1960-х годов благодаря совместным усилиям С. Смейла (США), Д. В. Аносова, В. И. Арнольда, Я. Г. Синая и их учеников. С тех пор «системы Аносова», «диффеоморфизмы Аносова» стали постоянными объектами изучения на протяжении более чем полустолетия.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 19, 2015(70–71)

Ученики Д. В. Аносова и А. Б. Катка — М. И. Брин и Я. Б. Песин — заложили начало «частично гиперболической теории» (1974), которая сейчас интенсивно развивается. При поддержке Дмитрия Викторовича была создана знаменитая «теория Песина», которая быстро завоевала популярность во всём математическом мире.

До наступления перестройки творческая активность учёных еврейской национальности зачастую не встречала поддержки властей в СССР. Дмитрий Викторович приложил много усилий к тому, чтобы такие математики, как М. И. Брин, Я. Б. Песин, М. В. Якобсон, реализовали свой творческий потенциал.

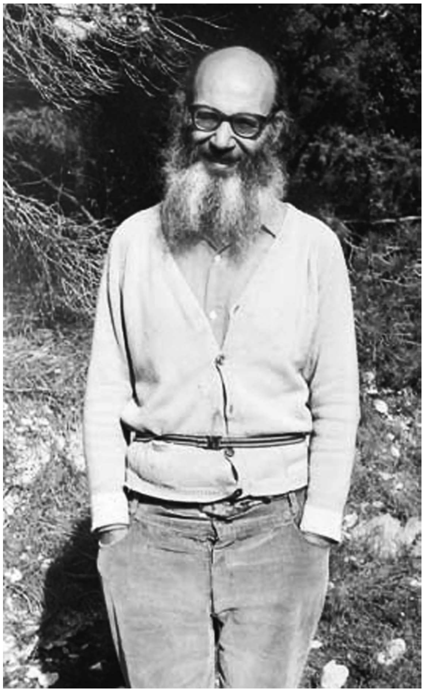
Известен принцип доктора Гааза, одного из подвижников XIX века: «Спешите делать добро!». Дмитрий Викторович всю жизнь следовал этому принципу. Он всегда был готов поддержать достойного человека или доброе начинание, если ему выпадала такая возможность. Двадцать лет назад Дмитрий Викторович участвовал в создании Московского центра непрерывного математического образования. Сейчас эта организация приносит огромную пользу математическому образованию в масштабе всей страны.

Редколлегия сборника выражает глубокое сочувствие супруге Дмитрия Викторовича Лидии Ивановне и дочери Ольге, а также всем его родным и близким.

Ю. С. Ильяшенко, НИУ Высшая школа экономики, Корнельский университет (США), мехмат МГУ, НМУ, МИ им. В. А. Стеклова РАН
yulijs@gmail.com

Уход Александра Гротендика

А. Б. Сосинский



Тринадцатого ноября 2014 года в больнице Сен-Жирона, небольшого городка в предгорьях Пиренеев, в возрасте 86 лет скончался великий французский математик Александр Гротендик.

Жизненный путь Гротендика с самого детства и до конца жизни был тяжёлым, его яркая личность, сложный характер и радикальные взгляды плохо вписывались во французский, да и в мировой научный истеблишмент. Более того, в последние 25 лет жизни он не только полностью порвал с математическим сообществом, но удалился от общества вообще, осознанно превратившись в затворника, жил один в небольшом доме в крохотной горной деревушке Ласер. Но не прекращал заниматься наукой, заполняя тонны бумаги своими математическими и философскими мыслями.

В этой статье я хотел бы по возможности объективно[1)] отследить жизненный путь Гротендика-математика, немного сказать о его научном наследии и попытаться пояснить истоки его жизненной позиции.

Детство и учёба

Александр Гротендик родился в Берлине 28 марта 1928 года. Его отец, Саша Шапиро, родом из Новозыбкова, убеждённый анархист, активно боровшийся с самодержавием, а затем с большевиками, перебрался в Берлин в 1922 году, где сошёлся с Йоганной (Ханкой) Гротендик, немкой из состоятельной протестантской семьи, тоже анархисткой. В 1933 году, опасаясь гитлеровской расистской политики, родители маленького Шурика (так его называли в семье) уехали в Париж, но год спустя отправили мальчика а Гамбург к Вильгельму Хейдорну, протестантскому пастору, антифашисту. Сами же продолжали отстаивать свои анархические взгляды во Франции, а затем в испанской гражданской войне. В 1939 году пастор, увидев, что черты лица взрослеющего мальчика всё более выдают его еврейское происхождение (по фотографиям видно, что взрослый Александр был очень похож на отца), отправил его обратно к родителям в Париж. Они воссоединились ненадолго: началась Вторая мировая война, и семья была интернирована. Мальчика, после нескольких тяжёлых месяцев в лагере, мать сумела отправить в деревню Шамбон-сюр-Линьон на юго-востоке Франции, где швейцарская благотворительная организацию прятала от немцев и воспитывала еврейских детей. Там мальчик продолжил учёбу в местной школе.

Александр получил аттестат зрелости (baccalauréat) в 1945 году, сразу после окончания войны. Его отец погиб в Освенциме в 1942 году, но мать выжила, поселилась на юге Франции в Монпелье, куда затем переехал её сын. Александр поступил в местный университет на математический факультет.

Интерес, вернее, сильное увлечение математикой возникло у Александра очень рано. Десятилетний мальчик остро реагирует и испытывает настоящее озарение, когда понимает, что окружность, этот совершенный геометрический предмет, может быть в точности описана столь же элегантной формулой: $x^2 + y^2 = 1$. Эту реакцию Гротендик очень эмоцио-

[1)] Оговорка про объективность здесь уместна — его затворничество и отказ от обывательских ценностей вызвали ажиотаж у журналистов, которые в некрологах описывали выжившего из ума гения, не гнушаясь преувеличенными описаниями его странностей и прямым вымыслом. Призываю читателя смотреть только некрологи в серьёзных математических журналах, помня при этом, что и их авторы — члены того самого истеблишмента, который Гротендик отверг и демонстративно покинул.

нально и красиво описал в автобиографической книге «Урожаи и посевы» («Récoltes et Semailles»). После такого эпизода можно сказать, что с раннего детства Гротендик был «приговорён» к тому, чтобы стать алгебраическим геометром!

Учился Гротендик очень неровно, практически не ходил на лекции, абстрактные математические предметы сдавал блестяще, но завалил курс астрономии и получил посредственную оценку по теоретической механике. Вместо учёбы он сразу стал заниматься математическим творчеством: его очень заинтересовало понятие объёма, и в течение года он разработал соответствующую теорию. Оказалось, однако, что он «изобрёл велосипед»: его теория, с точностью до терминологии и обозначений, совпадала с теорией интеграла Лебега! На странного, но одарённого мальчика обратил внимание один из преподавателей университета Монпелье и отправил его с рекомендательным письмом в Париж в 1948 году к великому Эли Картану. Но так уж вышло, что он попал не к нему, а к его сыну Анри; тот его приобщил к своему знаменитому семинару, где Гротендик быстро ликвидировал пробелы в своём образовании и заразился идеологией недавно созданной группы Бурбаки. Вскоре Анри Картан предложил Гротендику перебраться в город Нанси, где работали два выдающихся представителя этой группы[2)], Жан Дьёдонне и Лоран Шварц, чтобы подготовить диссертацию по функциональному анализу.

Расцвет математического творчества

Дьёдонне и Шварц предлагают Гротендику на выбор 14 важных задач, при попытках решения которых сами они зашли в тупик. В период с 1948 по 1951 год Гротендик решает их все и публикует шесть статей, каждая из которых могла бы послужить диссертацией. Для защиты он выбирает одну из них: «Топологические тензорные произведения и ядерные пространства». Его работы докладывает в Париже Лоран Шварц, после чего Гротендика кооптируют в группу Бурбаки. С 1950 года он работает научным сотрудником в CNRS (Национальном центре научных исследований), но в 1953 году его увольняют из этой государственной организации. Дело в том, что он апатрид (человек без подданства), и чтобы получить французское гражданство, он должен отслужить в армии, а это противоречит его принципам: он убеждённый пацифист.

[2)] Николя Бурбаки — коллективный псевдоним группы молодых французских математиков, радикально переосмыслявших всю математику; в это время основные члены группы работали в Нанси и Чикаго, поэтому выдуманного учёного Бурбаки они поселили в несуществующий университет «Нанкаго». Подробнее о Бурбаки можно прочитать в [1].

И Гротендик отправляется за границу (1953–1956), сначала в Бразилию, затем в США, где после года в университете в Канзасе он попадает в университет Чикаго — второй оплот бурбакизма, где работал Андре Вейль. Во время заграничных странствий у Гротендика меняются научные интересы, от функционального анализа он переходит к топологии и алгебраической геометрии. Его последующие работы по алгебраической геометрии принесут ему всемирную славу.

Вернувшись во Францию, он застаёт там свою мать умирающей от туберкулёза. После её смерти в 1957 году он впадает в тяжёлую депрессию. А после выхода из неё для Гротендика начнётся самый счастливый и плодотворный период жизни. Он женится (от первого брака у него будет трое детей). Его успешной работе существенно способствует создание Леоном Мочаном[3] Института высших научных исследований (IHÉS), негосударственного физико-математического научного центра, куда с самого начала Гротендик приглашается на позицию постоянного профессора вместе с Жаном Дьёдонне, Рене Томом, Луи Мишелем и Давидом Рюэлем.

Совместно с Серром Гротендик вводит понятие *схемы* алгебраической поверхности, которое перевернёт всё развитие алгебраической геометрии. Мы не будем формулировать здесь определение этого абстрактного понятия, а приведём его поэтическое описание, заимствованное у М. А. Цфасмана: «образно говоря, по Гротендику поверхность состоит не только из точек, но также и из (духов) лежащих на ней кривых и (духа) самой поверхности».

В 1960-е годы Гротендик возглавляет работу над двумя огромными трактатами «Éléments de géométrie algébrique» (1774 страницы, совместно с Дьёдонне) и «Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie» (6521 страница!). Второй трактат опубликован в 1960–1969 годах в виде дюжины толстых книг, авторами которых числится Гротендик с учениками и коллегами. Роль Гротендика здесь была главенствующая: его нельзя считать автором опубликованных текстов, но он безусловно является главным автором их математического содержания. В этих работах введено несколько чрезвычайно важных понятий: *топосы, этальные когомологии, мотивы, мотивная группа Галуа*, ставших темами многочисленных работ таких авторов, как Ж.-П. Серр, П. Делинь, муж и жена М. Рейно, М. Демазюр, Л. Иллюзи, М. Артин. Стоит отметить, что оба трактата, написанные очень

[3] Леон Мочан — ещё один выходец из России, хотел в молодости учиться математике, но не смог из-за бедственного материального положения, занялся бизнесом и очень преуспел. Когда ему было за 50, он вернулся в математику и даже защитил диссертацию, но главное — создал IHÉS, частный научно-исследовательский институт под Парижем. Об этом уникальном научном центре можно прочитать в [2].

подробно и формально на французском языке, на английский переведены лишь частично, а на русский не переведены вовсе.

В 1966 году на Международном конгрессе математиков в Москве Гротендику присуждается высшая награда математиков — медаль Филдса, но в знак протеста против нарушения прав человека в Советском Союзе он отказывается приехать в СССР её принять. По мере выхода из периода фанатического погружения в математическое творчество Гротендик всё больше интересуется общественно-политическими вопросами и экологией. Его антивоенные взгляды усиливаются в результате поездки во Вьетнам в 1967 году, он сильно реагирует на Пражскую весну 1968 года, на майские события 1968 года в Париже и манифестации в США против вьетнамской войны в том же году.

Узнав в 1970 году, что IHÉS частично финансируется военным министерством, Гротендик покидает этот институт. Вскоре он расходится с женой и прекращает публиковать математические работы. Ему 42 года. Начинается новый этап в его жизни.

Экология и жизненная позиция

Гротендик пока ещё не порывает с математическим сообществом. Он становится в 1971 году французским гражданином и получает престижную позицию в Коллеж де Франс, но через год её теряет, когда выясняется, что вместо лекций по математике он читает курс под названием «Нужно ли вообще продолжать научные исследования?», в котором излагает своё радикальные общественные взгляды. После поездки в США он возвращается во Францию и получает в 1973 году профессорскую позицию в своей альма-матер — университете Монпелье. Там он преподаёт математику аспирантам, но не очень успешно — новые ученики уровня Делиня или Иллюзи у него в провинциальном университете не появляются, а тем, кто с ним работает, удаётся в лучшем случае лишь прикоснуться к трудным и глубоким задачам, которые он им предлагает.

В 1972 году он женится на своей американской студентке Джастин Бомби, образует с ней и группой друзей коммуну, сначала под Парижем, а потом недалеко от Монпелье. У них рождается сын, но вскоре жена забирает его и возвращается в США. В этот период Гротендик чередует занятия математикой с медитацией, иногда совмещая их. (Позднее он опишет свои занятия K-теорией как «йогу Римана — Роха — Гротендика».)

Гротендика очень волнуют экологические вопросы. Я помню, как в те годы некоторые мои французские коллеги возмущались: зачем он тратит всё своё время на идиотскую деятельность — закрытие атомных электростанций — вместо того, чтобы доказывать новые математические теоремы? Французские математики его поведение характеризовали примерно так: «наш гений совсем свихивается».

Тогда до Чернобыльской аварии оставалось менее десяти лет.

Но международное математическое сообщество не обращало внимания на странности поведения Гротендика и продолжало высоко ценить его работы. В 1988 году ему (вместе с его учеником П. Делинем) присуждается престижная премия Крафорда, но он от неё отказывается: для жизни, пишет он, мне хватает профессорской зарплаты, да и вообще все кандидаты на эту премию и так имеют достаточно денег и престижа, да к тому же нечего присуждать премию за труды 25-летней давности — ведь я с 1970 года удалился от научной деятельности.

Попытка вернуться в науку

В 1984 году Гротендик предпринял попытку вернуться в основное русло математической науки и подал заявление на исследовательскую позицию в лаборатории CNRS в Монпелье. И получил отказ: отсутствие публикаций за предшествующее десятилетие противоречило формальным правилам приёма в лабораторию этой государственной организации. Отказ вызвал возмущение математической общественности и привёл к тому, что «в виде исключения» Гротендику разрешили вместо списка трудов последних лет представить проект исследований на ближайшие годы. И он такой проект написал: это ныне знаменитый текст *Esquisse d'un programme*[4] («Эскиз программы»).

Я хорошо помню, как этот текст, в виде препринта, попал в Россию. Так уж вышло, что Израиль Моисеевич Гельфанд поручил автору этих строк изложить содержание препринта на его семинаре. Реакции на доклад были самые разные — от откровенного недоумения и непонимания до одобрения и увлечения. Сам Израиль Моисеевич высказал своё положительное отношение к математическому содержанию препринта, но не стал призывать своих учеников заниматься соответствующей тематикой и не назначил продолжения моего доклада (я за один раз успел рассказать лишь около трети математического содержания текста Гротендика).

[4] Это 42-страничный опус, написанный блестящим литературным языком, в котором формальный математический текст перемешан с околоматематическими комментариями, иногда довольно эмоциональными. В этом произведении нет ни теорем с доказательствами, ни выделенных формальных определений, однако в нём вполне строго вводятся новые понятия и формально точно описываются разные математические конструкции. «Эскиз программы» так и не был переведён на русский язык, но перевод на английский доступен в интернете [3].

Не вдаваясь в подробности, хочу сказать несколько слов о математическом содержании этого текста. Прежде всего следует отметить, что Гротендик совершил в нём абсолютно неожиданный и радикальный переход от очень общих и изощрённых абстрактно-алгебраических построений (вроде теории схем, топосов и этальных когомологий) к наглядным геометрическим образам, а именно к изучению римановых поверхностей (комплексных алгебраических кривых). При этом изучении центральным оказалось понятие с удивительным названием *dessins d'enfants* («детские рисунки»). Грубо говоря, детский рисунок — это прообраз при разветвлённом накрытии линий разреза, по которым строится данная риманова поверхность. По поводу геометрии римановых поверхностей вот что пишет сам Гротендик: «С удивлением и изумлением в течение ряда лет я открывал (вернее, переоткрывал) потрясающее, неисчерпаемое богатство и не подозревавшуюся глубину этой темы. Я чувствую в ней <...> привилегированную точку, к которой направлены главные математические идеи и основные конструкции...»

Я оставляю за кадром остальные идеи, содержащиеся в этом тексте, как-то: связь *группоидов Тейхмюллера* и групп Галуа, ∞-*группоиды*, *ручная топология*, *правильные многогранники над конечным полем*, *некоммутативная гомологическая алгебра*.

Эти идеи впоследствии развивались математиками разных стран, но именно понятие детского рисунка оказалось наиболее востребованным и породило огромный поток публикаций в России и за рубежом.

А вот сам Гротендик (и его исследовательский проект) оказался невостребованным в официальных инстанциях: он так и не получил позиции в CNRS! Характерно, что во всех статьях про Гротендика, которые мне довелось читать, об этом позорном факте я не нашёл ни слова. Сегодня можно только гадать, что ещё мог бы придумать и опубликовать Гротендик, если бы он стал тогда работать как математик-исследователь в очень комфортных условиях лаборатории CNRS.

Итак, Гротендик остаётся на профессорской позиции в университете Монпелье и будет там работать до пенсии. На пенсию его отправляют, в соответствии с французским законом, по достижении 60-летнего возраста в 1988 году.

После 1984 года Гротендик по-прежнему не публикует никаких математических статей. В 1985 году он заканчивает 929-страничное автобиографическое произведение «Урожаи и посевы», но ни одно издательство не отваживается его опубликовать [5].

[5] Неполный перевод на русский доступен в интернете. Французский текст опубликован позднее.

Уход

В 1988 году Гротендик покидает общество математиков, а через два года порывает с обществом людей вообще: он уединяется в доме в крохотной пиренейской деревне Ласер, становится настоящим отшельником.

В свой деревенский дом Гротендик перевозит большое количество картонных коробок, содержащих черновики математических текстов, написанных им после 1970 года. В 1991 году пять таких коробок (20 000 листов рукописей) он переправляет своему ученику Жану Маглуару на хранение, но в письме к нему в 2010 году запрещает какую-либо публикацию содержащихся в них записей (коробки сейчас хранятся нетронутые в университете Монпелье). В том же году он сообщает своему любимому ученику Люку Иллюзи, что запрещает какое-либо распространение, электронное или бумажное, своих трудов, так же как их издание или переиздание.

В последние годы жизни Гротендик не пускал в свой дом никого, ни коллег-друзей, ни своих детей, ни соседей. В девяностые и нулевые годы его иногда посещал постоянный профессор IHÉS и бывший коллега по Бурбаки Пьер Картье. Мне Картье рассказывал, что в доме был простой монашеский быт, организованный так, чтобы минимально мешать медитации и работе. Впоследствии Гротендик отказался общаться и с Картье.

Наследие

Конечно, странности в поведении Гротендика во второй половине его жизни, его уход из жизни людей после 1990 года стали поводом для разных спекуляций в средствах массовой информации, которые представляли его для обывателей в образе классического выжившего из ума профессора. Это, увы, многократно встречавшаяся ситуация — человека, думающего не как все, молва объявляет умалишённым. Так в России было с Чаадаевым, а совсем недавно с Перельманом. Кстати, нельзя не отметить несколько совпадений в судьбах и жизненных позициях этих двух математиков: быстрое достижение вершин математического творчества, ранний уход из официальной науки, отказ от премий, аскетический образ жизни, полное отсутствие каких-либо карьерных устремлений и, начиная с определённого момента жизни, — отшельничество.

Для нас, математиков, пошлый публичный ажиотаж вокруг смерти Гротендика не должен затмевать объективную оценку доступной и понятой части его творческого наследия. А что касается неизвестной, неопубликованной части его бумаг, я надеюсь, что найдутся люди, готовые искать и способные обнаружить в десятках тысяч исписанных его рукой листков те самородки, которые наверняка в них содержатся.

В заключение я приведу список основных достижений Гротендика, составленный им самим:

1. Топологические тензорные произведения и ядерные пространства.
2. «Непрерывная» и «дискретная» двойственность (производные категории, «шесть операций»).
3. «Йога» Римана — Роха — Гротендика (K-теория, связь с теорией пересечений). (Под «йогой» Гротендик подразумевает основы теории, исходя из которых её можно развивать.)
4. Схемы.
5. Топосы.
6. Этальные и l-адические когомологии.
7. Мотивы и мотивная группа Галуа ($\otimes$-категории Гротендика).
8. Кристаллы и кристальные когомологии, «йога» коэффициентов де Рама, коэффициентов Ходжа.
9. «Топологическая алгебра»: ∞-стеки, дериваторы; когомологический формализм топосов как основа для новой гомотопической алгебры.
10. Ручная топология.
11. «Йога» анабелевой алгебраической геометрии, теория Галуа — Тейхмюллера.
12. Взгляд на правильные многогранники и правильные конфигурации произвольного рода с точки зрения теории схем или теории чисел.

Более подробные сведения о Гротендике и его работах можно найти на сайте «Grothendieck Circle».

Список литературы

[1] *Сосинский А. Б.* Умер ли Никола Бурбаки? // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 2. М.: МЦНМО, 1998. С. 4–12.

[2] *Сосинский А. Б.* IHÉS // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 10. М.: МЦНМО, 2006. С. 64–70.

[3] *Grothendieck A.* Sketch of a program. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; V. 242). P. 243–283.

А. Б. Сосинский, НМУ

asossinsky@yandex.ru

Памяти Евгения Борисовича Дынкина (1924–2014)

А. Б. Каток, С. Е. Кузнецов

14 ноября 2014 года в возрасте 90 лет скончался Евгений Борисович Дынкин, один из классиков XX века в теории групп Ли и теории вероятностей.

Евгений Борисович родился в Ленинграде 11 мая 1924 года. Отец его был юристом, мать — зубным врачом. До девяти лет Женя в школу не ходил, учился дома, много читал, в том числе научно-популярную литературу, в частности книги Перельмана. В 1933 году он поступил в школу, сразу в третий класс. Вскоре после убийства Кирова (декабрь 1934) семью отправили в административную ссылку в Казахстан. Женю до конца учебного года удалось пристроить в семье сестры матери в Москве. Когда родители обустроились в Актюбинске, они вызвали туда Женю, и там он поступил в железнодорожную (ведомственную) школу. Евгений Борисович отзывался об этой школе в превосходных выражениях; по его словам, ленинградская и московская школы ей во многом уступали. В ноябре 1937 года отца снова арестовали, и на сей раз он исчез в ГУЛаге навсегда.

В 1940 году Женя с блеском окончил школу в возрасте 16 лет и был принят на механико-математический факультет МГУ. Больше того, в статье о приёме в МГУ в газете «Правда» была упомянута его фамилия. Как отмечал Евгений Борисович, ему очень повезло, что он поступил в университет в 1940 году и успел проучиться год до начала войны, иначе он в лучшем случае потерял бы четыре года. Учителями Жени стали выдающиеся математики И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров. Огромное влияние на него также оказал А. С. Кронрод. После начала войны Женя вместе со своей матерью уехал в эвакуацию в Пермь. Он поступил в Пермский университет, где проучился до конца 1943 года. Большое участие в его жизни приняла С. А. Яновская, единственный профессор мехмата МГУ, оказавшийся в то время в Перми. К этому времени Евгений Борисович уже активно интересовался алгеброй. Он сам себе поставил и решил задачу описания всех замкнутых подгрупп конечномерного векторного пространства. Позднее оказалось, что ответ на этот вопрос был получен ещё в XIX веке. Тем не менее, Яновская послала эту работу Гельфанду, и по возвращении в Москву (в конце 1943 года) Гельфанд пригласил его участвовать в своём, впоследствии ставшем знаменитым, семинаре. В армию Евгения Борисовича не призывали: ежегодные медкомиссии постоянно забраковывали его по причине перенесённого в детстве костного туберкулёза и сильной близорукости.

Ещё будучи студентом, Евгений Борисович сдал в печать две научные работы. По окончании университета в 1945 году он поступил в аспирантуру, где его руководителем был Колмогоров. Евгений Борисович досрочно защитил кандидатскую диссертацию и в 1948 году был зачислен старшим преподавателем на кафедру теории вероятностей мехмата МГУ. Ещё через год Евгений Борисович стал доцентом, а в 1951 году он защитил докторскую диссертацию и вскоре стал профессором. Обе диссертации были посвящены группам и алгебрам Ли. Его работы в этом направлении стали классическими. Их фундаментальность увековечена в термине «схемы Дынкина», одном из центральных понятий теории групп Ли и её обобщений. Начиная с 1955 года Дынкин переходит от теории групп Ли к теории вероятностей, в первую очередь к марковским процессам. Его работы в этой области необъятны: здесь и результаты, связанные со строго марковским свойством, и критерии непрерывности, и большой цикл работ по граничной теории марковских процессов. Его фундаментальная монография «Марковские процессы», появившаяся в 1963 году, в течение многих лет служила стандартным источником информации в этой области и продолжает оставаться классическим изложением теории. Особо стоит отметить последний цикл работ, посвящённый суперпроцессам — марковским процессам, связанным с нелинейными уравнениями в частных производных. Менее известны широкому кругу математиков, но не менее замечательны работы Евгения Борисовича по теории игр и математической экономике, выполненные в 1960-х и 1970-х годах. Их значение стало раскрываться только в последние годы, особенно в связи с недавно открытыми применениями «игр Дынкина» в финансовой математике.

Дынкин был одной из самых ярких звёзд в созвездии математиков мехмата МГУ в 1950–1960-х годах. Его влияние как педагога высочайшего уровня было огромным. Созданный им семинар по группам Ли работает до сих пор под руководством его учеников Э. Б. Винберга и А. Л. Онищика, которые создали свои собственные научные школы. Среди учеников Дынкина по теории вероятностей — многие лидеры следующего поколения. Упомянем только тех, у кого, в свою очередь, было много учеников, опуская имена не менее выдающихся математиков, у которых было меньше возможностей работать с аспирантами: Н. В. Крылов, М. Б. Малютов, С. А. Молчанов, А. В. Скороход, М. И. Фрейдлин, Р. З. Хасьминский. Значительное число математиков, включая нескольких, ставших позднее знаменитыми, связывают свои первые научные результаты именно с ним, даже если Евгений Борисович не был их формальным руководителем. Всего под его руководством защитили диссертации 30 математиков. Если же, как это принято сейчас, подсчитать не только учеников, но и учеников учеников и т. д., то таких «научных потомков» у Евгения Борисовича более 500.

Ещё в военные годы Евгений Борисович увлекается организацией математических кружков. В своих интервью, вспоминая время, проведённое в Пермском университете, он рассказывал, что, «следуя московским традициям», организовал «что-то вроде математического кружка» для трёх других студентов МГУ, также оказавшихся в Перми. Вернувшись в Москву, он становится руководителем одной из секций математического кружка для школьников. По материалам работы этой секции в 1945–1947 годах им вместе с участником этого кружка В. А. Успенским была впоследствии написана книга «Математические беседы» (1952 год), ставшая классической в жанре популярной образовательной литературы.

В начале 1960-х годов в связи с проводившейся тогда реформой среднего образования в СССР появились специальные школы с математическим уклоном. Наряду с выдающимися школьными учителями профессиональные математики разных возрастов, от студентов старших курсов и аспирантов до профессоров и академиков, стали добровольно и с энтузиазмом принимать участие в преподавании в математических школах. Евгений Борисович сыграл выдающуюся роль в ранней истории математических школ. В 1963 году он с помощью своих аспирантов и других молодых математиков организует Вечернюю математическую школу (ВМШ) при школе № 2 г. Москвы, а на следующий год, при содействии директора школы В. Ф. Овчинникова, организует в ней же поток (три класса, около ста школьников) для математически одарённых школьников 9–10 классов (1964–1966 годы).

Дынкин не был первым известным математиком, который стал работать со школьниками в формате математических школ, радикально отличавшемся от имевшего большую и славную традицию формата математических кружков и олимпиад. Однако его подход отличался некоторыми уникальными чертами. В работе Дынкина в школе № 2 ярко проявился его организационный талант, не столь частый среди активно работающих математиков. Поток Дынкина в школе № 2 был чётко и глубоко продуманно организован. Дважды в неделю Дынкин читал лекции для всего потока. Шесть его непосредственных ассистентов были ответственны за группы из 15–20 школьников каждый. У каждого из них было по два помощника из числа студентов 3–5-го курсов мехмата. Занятия в группах не были эквивалентом семинарских занятий по курсу в университете. Они скорее походили на более интенсивный и регулярный вариант математического кружка. Это сочетание чётко организованной регулярной системы лекций и спонтанной, но довольно напряжённой атмосферы на групповых занятиях было уникальным.

Несмотря на свою склонность к систематизации и организации, Дынкин поощрял более спонтанный и «хаотический» подход своих помощников. Это была необычная, но замечательная гармония. Первый автор настоящего некролога был одним из шести старших ассистентов Дынкина. Второй автор был школьником из дынкинского потока, а впоследствии стал студентом Евгения Борисовича и долгое время работал с ним в тесном контакте.

Для того чтобы охарактеризовать атмосферу в дынкинском потоке школы № 2, приведём цитату из неопубликованных воспоминаний И. Д. Новикова, который также был одним из старших ассистентов Дынкина: «Учиться было трудно, и особенно трудно потому, что Дынкин всячески стимулировал соревнование. Наказаний не было, но система избирательных поощрений была действенней наказания. Не получать поощрений или получать их в недостаточном количестве было хуже, чем если бы наказывали, родителей, например, вызывали. Были всяческие конкурсы, для них вывешивались дополнительные задачи. За их решение полагалась оплата в „тугриках“. Это были отнюдь не монгольские монеты, а кусочки бумаги с цифрой-достоинством и подписью Дынкина. На эти как бы деньги можно было кое-что купить в организованном Дынкиным магазине ШУМ — школьный универсальный магазин. Это происходило на вечерах несколько раз в год. Дынкин, как многие математики, был меломаном, и у него была большая коллекция пластинок. Он приносил для реализации в магазине часть своих пластинок, может быть, вторые экземпляры. Кроме того, там были выставлены книжечки популярных лекций по математике, стоимостью, наверное, тридцать копеек. Но Дынкин просил своих приятелей-математиков, авторов этих книжек, подписывать их. Таким образом, за тугрики можно было приобрести настоящие раритеты с подписью автора. Но ещё важнее, что результаты этих конкурсов становились известны. Не помню, как именно, но школьники всегда знали, кто сколько решил, и это было огромным стимулом. Дети старались изо всех сил».

Организационный талант Дынкина и его исключительная способность к систематизации и классификации прослеживаются и в других сторонах его деятельности, включая его математические работы и создание им уникальной коллекции интервью с математиками, которые он проводил в течение нескольких десятилетий.

Определённая независимость во взглядах Е. Б. Дынкина не устраивала власти, и весной 1968 года ему пришлось уйти из МГУ. Пробыв какое-то время без работы, он в конце концов становится старшим научным сотрудником отдела математики ЦЭМИ (Центрального экономико-математического института) АН СССР. Даже в это время он организует у себя дома семинар для узкого круга студентов. В 1976 году, спустя некоторое время после отъезда в Израиль семьи дочери, Евгений Борисович решается на эмиграцию. Он принимает предложение Корнельского университета (Cornell University, Ithaca, NY, USA) и получает там почётную именную позицию (A. R. Bullis Professor). Евгений Борисович проработал в Корнеле 33 года и вышел в отставку лишь после того, как ему исполнилось 86 лет. В США его заслуги были оценены достойным образом. В 1978 году он был избран в Американскую академию наук и искусств (Бостонскую академию), в 1985 году — в Национальную академию наук США, а в 1993 году получил самую почётную награду Американского математического общества — премию имени Стила за совокупность математических достижений. Мировое признание отразилось в присуждении ему степени почётного доктора Парижским университетом в 1997 году и Варвикским университетом (Англия) — в 2003 году. Получил он несколько запоздалое признание и в России. В 1995 году Московское математическое общество, вице-президентом которого он был с 1964 по 1971 год, избрало его почётным членом. В 2003 году он получил степень почётного доктора Независимого московского университета.

Всю жизнь опорой и неоценимой помощницей для Евгения Борисовича была его жена Ирина Генриховна. Она всегда старалась организовать жизнь так, чтобы Евгений Борисович мог сосредоточиться на творчестве.

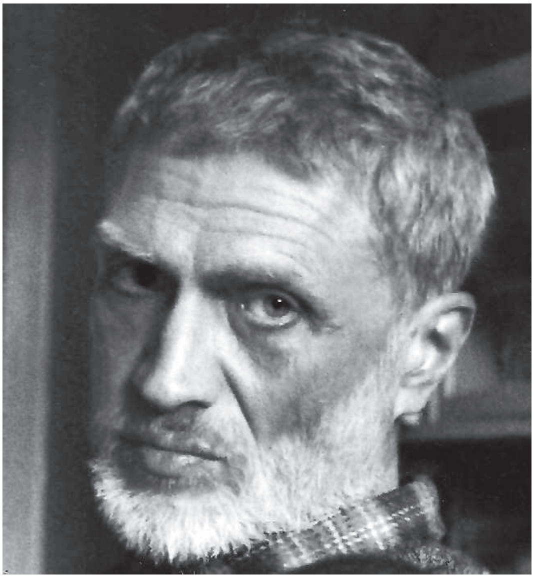
Е. Б. Дынкин — автор более 200 научных работ, восьми научных монографий и трёх популярных образовательных книг. До самого последнего времени он вёл активную научную работу. Последняя из его работ опубликована в 2013 году.

Светлая память об Евгении Борисовиче Дынкине навсегда сохранится в сердцах его учеников, друзей и коллег.

А. Б. Каток, Университет штата Пенсильвания, Юниверсити-парк (США)
katok_a@math.psu.edu

С. Е. Кузнецов, Университет Колорадо, Боулдер (США)
sergei.kuznetsov@Colorado.EDU

Памяти Валерия Анатольевича Сендерова



Б. И. Каневский*

12 ноября 2014 г. ушёл из жизни выдающийся деятель математического образования и правозащитник Валерий Сендеров. Прилёг отдохнуть днём, а когда через некоторое время жена зашла в комнату, его уже не было в живых...

В студенческие годы Валерий часто напевал «неистов и упрям, гори огонь, гори...» Окуджавы. И всё, чем бы он ни занимался, было отмечено страстностью, последовательностью, энергетикой его личности.

В 1984 г. в известном математическом журнале появилась публикация В. С. Рицнера и В. А. Сендерова о спектральной теории в пространствах

---

* Сокращённая версия. Полностью статья публикуется в журнале «Посев».

Понтрягина[1]. Как обычно, приведены данные о местах выполнения работы. Крупный университет — место работы Рицнера, г. Хабаровск — для Сендерова. Место выполнения работы В. Сендерова оставляло простор для фантазии неосведомлённых. Осведомлённые были в полнейшем недоумении. Не столько потому, что в действительности Сендеров был весьма от Хабаровска удалён (как и от Москвы, впрочем). Дело в том, что математический результат требует длительной полной сосредоточенности, огромной внимательности при оформлении. У заключённого пермской политзоны № 35 Валерия Сендерова, казалось бы, условий для этого быть не могло.

Валерий Сендеров родился 19 марта 1945 г. в центре Москвы, в Уланском переулке. Его отец — крупный инженер — будучи беспартийным, достиг довольно высоких постов, был известен бескомпромиссной честностью и полным бескорыстием. Он умер в 1951 г. на 50-м году, сыну было только шесть, и мать, одна из ведущих адвокатов Москвы, посвятила сыну свою жизнь, оставшись вдовой в возрасте около 30 лет. Валерий развивался, как обычный мальчик из интеллигентной семьи. В школе не участвовал в олимпиадах, но с интересом решал олимпиадные задачи.

Окончив школу в 1962 г., он поступил в МФТИ на аэромеханический факультет (где была математическая группа). Уже на первом курсе на него обратили внимание его преподаватели: выпускник аспирантуры МИАН им. Стеклова И. Г. Глобенко и доцент М. В. Федорюк. Неожиданность логических переходов Валерия им нравилась, и они прочили В. Сендерову большое математическое будущее. Довольно скоро он получает индивидуальный план занятий под научным руководством М. А. Наймарка.

Успешному началу научной деятельности помешала склонность к гуманитарным занятиям. Валерий увлекается философией, читает Хайдеггера, Ницше, Шопенгауэра. Начинает появляться на публичных выступлениях лекторов из общества «Знание» в Тургеневской библиотеке и задаёт им «неудобные» вопросы. Вскоре по настоянию КГБ его отчисляют с последнего курса физтеха. Два года Валерий проводит в поисках места дальнейшей учёбы, наконец, в 1970 г. в МФТИ соглашаются принять его дипломную работу (к этому времени у него уже подготовлены несколько публикаций). М. М. Вайнберг из областного пединститута соглашается по рекомендации Наймарка взять Валерия к себе в формальную (он уже самостоятельный исследователь) аспирантуру.

К 1972 г. КГБ снова обращает внимание на Валерия, его просят уйти из аспирантуры, и он снова ищет работу. К этому времени в легендарной

---

[1] *Рицнер В. С., Сендеров В. А.* К спектральной теории линейных отношений в пространстве Понтрягина // Известия вузов. Математика. 1984. № 8. С. 27–29.

уже московской Второй школе после разгрома 1970–1971 годов сменился директор. Из прежних преподавателей математики и физики остались два-три человека, принявшие лозунг физика Рудольфа Карловича Бега и математика Сергея Георгиевича Смирнова: «дети не виноваты, и их необходимо учить». Негласный бойкот создал положение, когда хорошие преподаватели опасались начинать работу в этой школе, плохих по старой памяти старались не брать. Дефицит преподавателей привёл к тому, что весьма осторожный завуч по математике согласился принять на работу В. Сендерова, которого я привёл «на смотрины».

Так начался заметный этап в биографии Валерия. Вторая школа в упадке. Правда, математический ручеёк струится на факультативе С. Г. Смирнова. С приходом Валерия изменения происходят стремительно. Помимо преподавания специального и обязательного школьного курса, он ведёт кружки, готовит школьную сборную к матбоям, занимается с некоторыми учениками индивидуально. Уже в 1973 г. сборная второй школы побеждает в матбою 18-й (колмогоровский) интернат. Валерий организует в школе лекции-встречи с известными учёными, поэтами и литераторами. Атмосфера напоминает прежнюю, уровень занятий растёт, многие победители Московской математической олимпиады оказываются учениками Второй школы.

Между тем антисемитизм при приёме на мехмат МГУ процветал, он часто касался выпускников Второй школы. Валерий начал изучать это, для нашего поколения отчасти новое, явление. Он участвует в подготовке сборной СССР на Международную математическую олимпиаду, для чего иногда использует так называемые еврейские (завальные) задачи с приёмных экзаменов. Он узнаёт некоторые интересные подробности о национальной политике, например, об ограничениях для евреев в сборной. (Побочный эффект: крупный ныне математик, выпускник Второй школы 1975 г., ученик Сендерова Александр Гивенталь, один из самых первых кандидатов, не попадает в сборную и поэтому на мехмат, обучается в Институте нефти и газа.)

В 1978 году во время приёмных экзаменов на мехмате происходит знаменательное событие: Валерию удаётся проникнуть на мехмат, где он даёт пощёчину ответственному секретарю приёмной комиссии, а когда его вывели, он знакомится с Беллой Абрамовной Субботовской[2)], и они обсуждают совместную идею организации альтернативного мехмата, впоследствии названного «Народным университетом». Первый набор в Народный университет произошёл тут же, на ступеньках у входа в клубную часть МГУ, куда выходили после экзаменов все абитуриенты и где каждый

[2)] Подробнее о Б. А. Субботовской и Народном университете см. «Математическое просвещение», 2005, № 9, с. 12–31. — *Прим. ред.*

год (начиная с того же 1978 г.) дежурила бригада, собранная Валерием для экстренной психологической и математической помощи заваленным. Он же стал первым лектором Народного университета. В дальнейшем они с Беллой Абрамовной, будучи очень заняты разнообразными делами, решили привлечь и других преподавателей из числа лучших профессионалов. Вскоре А. М. Виноградов согласился вести анализ и прочёл великолепный и оригинальный курс. Потом в числе лекторов были: в 1978 г. А. Б. Сосинский, в 1979 г. А. Х. Шень с друзьями, в 1980 г. Д. Б. Фукс, А. В. Зелевинский и снова А. Б. Сосинский, затем А. Л. Онищик и В. Б. Шехтман. Последний набор (1982 года) поддерживал Е. Кузницкий, но после ареста Сендерова в июне 1982 г. вести занятия открыто многие опасались. Народный университет просуществовал около пяти лет (продвинутые семинары продолжались и позже). В нём проучились в общей сложности около 400 студентов. Занятия в нём велись совершенно открыто, экзамены по курсам были добровольными. В некоторых вузах Народный университет считали официальной формой дополнительного математического образования. Известен случай, когда студенту МИИТа комитет комсомола его факультета объявил выговор за пропуск занятий этого альтернативного мехмата.

В 1978 г. Валерий обнародовал подборку 13 «еврейских» задач с приёмных экзаменов мехмата. Такой же набор задач подробно обсуждался на семинаре Н. Н. Меймана (хотя имел иные источники). Даже А. Д. Сахаров решил только две задачи из предложенных, это один из лучших результатов среди участников семинара, профессионалов. В 1979 г. Сендеров (с помощью математического логика правозащитника Ю. Шихановича и других) публикует «Результаты приёма на мехмат выпускников шести московских школ». Эта работа уже окончательно доказывает математикам разных стран, что мехмат МГУ стал совершенно антисемитской организацией. Нечто подобное публикуется и после наборов 1980 г. (наиболее известный «интеллектуальный геноцид») и 1981 г. (Впоследствие публикация этих статистических данных и воспоминаний жертв приёмных экзаменов становится частью обвинения В. Сендерова в антисоветской пропаганде и клевете[3].)

В КГБ знают о многих сторонах деятельности Валерия. В 1978–1980 гг. помимо работы в школе, с поступающими и в Народном университете он активно участвует в работе СМОТ (независимый профсоюз), готовит материалы со статистической обработкой результатов поступления на мехмат, участвует в пресс-конференциях, где разоблачает антисемитскую работу

[3] Существенную роль сыграла также статья Б. И. Каневского и В. А. Сендерова «Интеллектуальный геноцид» `https://dl.dropboxusercontent.com/u/829163/ig-text.pdf`. — *Прим. ред.*

приёмной комиссии мехмата МГУ. Директор Второй школы в 1978 г. получает указание уволить его. Директор прекрасно понимает роль Сендерова в жизни школы, но (весьма неохотно) должен выполнить распоряжение. Юридически грамотный Сендеров несколько раз вынуждает руководство школы отменять его приказы из-за несоблюдения формальных правил. Это длится почти год. Только по окончании 1978–1979 учебного года Валерий сам подаёт заявление об уходе.

Вскоре он становится сторожем Института стран Африки АН СССР, где ему полагается сторожка у въезда на территорию. Очень скоро это индивидуальное (посменно) обиталище становится центром интеллектуальной деятельности. Но и это, в некотором смысле привлекательное, место быстро оказывается под надзором. А когда он (в соответствии со своими служебными обязанностями) потребовал предъявить пропуск у директора института Анат. А. Громыко, работа завершилась.

Валерий прекрасно понимал, что арест близок, и был готов к нему постоянно. 17 июня 1982 г. Валерия арестовывают. Приговор предрешён: 7 лет строгого режима + 5 лет ссылки (максимум по статье 70 «Антисоветская агитация и пропаганда») кажутся им достаточным для медленного уничтожения непоколебимого политзэка. Он практически не выходит из ШИЗО (карцера), доходит до крайнего истощения. Но перестройка, в местах заключения неожиданная, вытаскивает Валерия из тюрьмы в марте 1987 г. Выйдя из заключения, он немедленно принимается действовать: ищет семьи неизвестных на Западе политзэков, пытается помочь. Вновь собирает данные о продолжающемся антисемитизме на мехмате, публикует новые математические статьи.

Л. В. Полтерович, бывший в Москве во время августовского путча 1991 г., вспоминал о появлении Сендерова на баррикадах: «…чувствовалось приближение реальной опасности, всё ближе слышны танки. Вдруг появляется колонна марширующих милиционеров (Рязанское, если правильно помню, училище внутренних войск), впереди строя идут двое: начальник училища и Валерий Сендеров со своим неизменным портфельчиком. Он убедил училище присоединиться к протестующим».

Расцветает его талант публициста. И, конечно, остаётся любимая математика. И в виде научной деятельности, и в виде участия в организации математических олимпиад всех уровней, изобретения новых задач, и в виде многочисленных публикаций в математико-педагогических журналах. Он регулярный автор задач основанного Н. Н. Константиновым Турнира городов, Всероссийских олимпиад, его задачи появляются и на международных математических олимпиадах. Он продолжает регулярно публиковать статьи по функциональному анализу в журналах международного уровня.

Два года назад Сендеров тяжело заболевает. У самого́ — как всегда абсолютно бескорыстного — Валерия Анатольевича нет денег. Друзья и ученики быстро собирают необходимую для лечения сумму. Но и болезнь не влияет на продуктивность его деятельности. Статьи (научные и публицистические), задачи и организация олимпиад — всем этим он занимается до последних своих дней.

Конечно, это стало возможным только благодаря самоотверженной поддержке и полному пониманию важности деятельности Валерия со стороны его жены, художницы Юлии Садовской. Радовали и трое детей (двое маленьких, все трое — несовершеннолетние).

Валерий был глубоко верующим православным христианином. При этом главным человеческим качеством для него всегда была независимость мышления, которую он воспитывал (в том числе на личном примере) у своих учеников. Одним из вопросов, интересовавших КГБ, был текст его молитвы: «покарай, Господи, большевиков...». Кажется, будто всего несколько дней назад он говорил, что убеждён, что необратимо формируется нерабская психология у нового поколения людей в России...

Мир пустеет без таких людей.

Б. И. Каневский, Еврейский университет в Иерусалиме (Израиль)
`boris.kanevsky@mail.huji.ac.il`

А. Я. Канель-Белов

Я знал Валерия Анатольевича будучи школьником. Он постоянно организовывал математические бои, а я был их постоянным участником. Помнятся несколько матбоёв, где Саша Разборов [4] был капитаном команды Второй школы, я заместителем, а капитаном команды 91-й школы был Максим Концевич [5].

Валерий Анатольевич Сендеров вместе с Борисом Ильичом Каневским заложили традицию олимпиад и математических боёв во Второй школе, продолжающуюся и по сей день. Очень часто эти матбои Вторая школа выигрывала. Такая традиция принесла плоды не только во Второй школе. Ныне покойный Митя Дерягин (выпускник 1981 года, победитель Всесоюзной олимпиады) впоследствии начал кодификацию правил. Более-менее окончательную форму матбои приняли в начале 1990-х, после синтеза московской и питерской версии правил, большая в этом заслуга Саши Ковальджи (ныне — зам. директора по науке лицея «Вторая школа») [6].

Сендеров научил меня одной важной вещи. Говоря о решении задач, он показывал идейное ядро, где всё и происходит. Оно маленькое, словно «жало» станка, и именно это ядро — главное, что надо увидеть. Станок состоит из большой станины, приводных ремней и т. п., а жало маленькое. Так же устроена и задача: важно выделять, где всё происходит и почему происходит.

Выделению ядра, или «жала», он научил не только меня. Как писал мне другой математик, «В. А. показывал некоторое „ядро“ и „всё остальное“, и делал это так мастерски, как никто другой в контексте олимпиадных задач... И это была даже не красота самих задач, а красота раскладывания на „ядро“ и „всё остальное“».

Однако влияние Сендерова не сводилось к профессиональным вопросам. Очень многие, общаясь с ним, чувствовали, что это героический человек, прошедший через тюрьмы и карцер, и думать рядом с ним о собственном комфорте невозможно.

Чтобы не создалось искажённого представления об общественных взглядах Валерия Анатольевича, следует отметить, что он был государственник. Его последнее интервью можно найти по ссылке `http://www.russ.ru/pole/`

---

[4] Ныне член-корреспондент РАН.

[5] Лауреат Филдсовской премии 1998 года.

[6] См. *Дерягин Д. В., Канель А. Я., Ковальджи А. К. и др.* Математический бой двух команд: Правила, комментарии, опыт проведения // Математика в школе. 1990. № 4. С. 20–25.

`Kak-byvshij-dissident-i-politzaklyuchionnyj-stanovitsya-ohranitelem`[7]. Упомянем также последнюю статью В. А. Сендерова (совместно с Ю. Кублановским и Ф. Разумовским) `http://www.rg.ru/2014/03/12/pismo.html`.

Он высоко ценил «Вехи» — сборник статей о русской интеллигенции, созданный деятелями «серебряного века». Этот сборник перевернул моё сознание, дал мне порцию свободы и понимания, в том числе тех людей, с которыми мне часто приходится иметь дело. Одна из мыслей ему и мне, как человеку, занимающемуся классификацией идей решения олимпиадных задач, оказалась близка. Чтобы разобраться, что такое «правые» и что такое «левые», выпишем типичные «правые» и типичные «левые» взгляды и заметим, что люди мыслят «пакетно», т. е. принимают или отвергают набор идей целиком, редко когда смешиваются взгляды из разных наборов. (Вспоминается остроумное высказывание Валерия Анатольевича о «дискуссиях» между людьми из противоположных лагерей: «они каются в грехах друг друга».) Эти взгляды (вернее «пакеты убеждений») надо объяснять, исходя не из их «истинности» или «ложности», а из их эмоциональной основы. И такая попытка, пусть весьма неполная, была сделана в сборнике «Вехи»[8].

Есть люди, с которыми не во всём соглашаешься, но с их уходом возникает некая пустота (такими, например, для меня были Н. Б. Васильев и И. Ф. Шарыгин). Я хотел обсудить с В. А. ряд вещей, собирался позвонить — но как-то всё откладывалось...

[7] Заголовок и манера, в которой было взято интервью, автору не нравятся — в конце концов, интервьюер не должен давать ярлыки, тем более в заголовке. Автор приводит эту ссылку только потому, что это интервью — последнее.

[8] Я бы добавил, что анализ должен использовать технику, в частности, З. Фрейда и К. Юнга, находивших «смысл» в симптомах. И в этом есть родство с книгой В. Проппа «Исторические корни волшебной сказки» (в первой части классифицируются сюжеты и элементы сказки, даётся структурный анализ, во второй даются объяснения).

А. Я. Канель-Белов, МИОО, Ариэльский университет (Израиль)

kanelster@gmail.com

П. А. Кожевников

Более 15 лет назад Валерий Сендеров начал активную работу в методкомиссии Всероссийской олимпиады школьников по математике (хотя формально никогда не входил в неё). Он стал одним из самых плодовитых авторов задач Всероссийских олимпиад. Более семи десятков (!) его задач вошли в варианты, причём более двух десятков из них предлагались на заключительных этапах олимпиады. Ещё до начала работы комиссии все знали, что Валерий привезёт большое количество задач (иногда более сорока!), в основном по теории чисел и алгебре. Конечно, не все эти задачи выдерживали конкуренцию при составлении варианта олимпиады. Валерий это понимал, но, по-видимому, предлагая задачу, главным образом он хотел поделиться с коллегами своими идеями. А идеи, как многократно случалось, в процессе совместных обсуждений перерождались в новые задачи. Таким образом, Валерий нередко оказывался соавтором задачи, будучи автором начальной мысли. Некоторые его задачи становились украшением олимпиад и были высоко оценены главными критиками — школьниками. Например, на заключительном этапе Всероссийской олимпиады 2013 года его задача, в которой сочеталась изящная оценка с применением малой теоремы Ферма, была признана лучшей по данным опроса участников олимпиады. Некоторые особо трудные задачи Валерия использовались при подготовке команды России к Международной олимпиаде. Одна из его задач прошла многоступенчатый отбор и вошла в вариант Международной олимпиады 2000 года. Ещё одна задача попала в вариант престижной олимпиады Romanian Masters 2013 года.

В 2000-е годы Валерий стал одной из ключевых фигур для Всероссийской олимпиады. Он был ценен тем, что не был ни на кого похож. В отличие от многих других составителей олимпиады, воспитанных на олимпиадном фольклоре недавних лет, Валерий черпал идеи в классических трудах. Наверное, это причина его совершенно особого подхода к задачам. Подчас вещи, трудные для сильного олимпиадника, казались ему простыми, и наоборот. А наличие разных решений и разных взглядов было очень полезно для работы комиссии.

Все, кто работали с Валерием, помнят его стиль общения — тихий голос, уважительный, интеллигентный, с характерным «Господа...» при обращении к большой или не очень большой компании. Кажется, Всероссийская олимпиада и круг её составителей тоже стали важной частью жизни Валерия. Он живо участвовал во всем, что происходило вокруг олимпиад. Его звонки обычно начинались с вопроса «Какие новости?» (значит, есть ли новые задачи, какие последние результаты олимпиад?) и заканчивались словами «Всем приветы!» (всем — это коллегам-составителям олимпиады).

Его волновало всё — опечатки в решениях, статистика решения конкретной задачи на региональном этапе, успехи наших лучших олимпиадников на международной арене. Кстати, этим успехам Валерий придавал большое значение, анализировал динамику результатов, делал выводы о ситуации в математическом образовании разных стран, публиковал в «Посеве» заметки, в которых была и обеспокоенность положением дел, и гордость за российскую математическую школу.

Ниже публикуются некоторые задачи В. А. Сендерова.

Избранные задачи В. А. Сендерова

- (Московская олимпиада 1999 г., задача 8.3, совместно с В. Произволовым.) Найдите какие-нибудь четыре попарно различных натуральных числа a, b, c, d, для которых числа $a^2+2cd+b^2$ и $c^2+2ab+d^2$ являются полными квадратами.
- (Региональный этап Всероссийской олимпиады 2013 г., задача 10.6.) Натуральные числа $a, b, c \geqslant 2$ удовлетворяют равенству
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}.$$
Докажите, что хотя бы одно из чисел $a+c$, $b+c$ составное.
- (Турнир городов 1987/88 гг.) Даны три неотрицательных числа a, b, c. Про них известно, что $a^4+b^4+c^4 \leqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.
а) Докажите, что каждое из них не больше суммы двух других.
б) Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \leqslant 2(ab+bc+ca)$.
в) Следует ли из неравенства пункта б) исходное неравенство?
- (Зональный этап Всероссийской олимпиады 2007 г., задача 9.7, совместно с И. Богдановым.) Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит точный куб натурального числа. Докажите, что она содержит и точный куб, не являющийся точным квадратом.
- (Заключительный этап Всероссийской олимпиады 2006 г., задача 10.2.) Сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел оказалась кубом натурального числа. Докажите, что среднее из этих трёх чисел делится на 4.
- (Заключительный этап Всероссийской олимпиады 2013 г., задачи 10.3, 11.3.)
а) Найдите все такие натуральные k, что произведение первых k простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

б) Та же задача для произведения первых k нечётных простых чисел.

- («Квант», 1982, № 10, с. 26, задача М770; решение: «Квант», 1983, № 3, с. 47. Задача не была подписана, а решение подписано псевдонимом, поскольку автор находился в заключении.) В основании треугольной пирамиды $PABC$ лежит правильный треугольник ABC. Докажите, что если величины углов PAB, PBC, PCA равны, то пирамида $PABC$ правильная.
- (Московская олимпиада 2003 г., задача 11.7.) Дано равенство
$$(a^{m_1}-1)\dots(a^{m_n}-1)=(a^{k_1}+1)\dots(a^{k_l}+1),$$
где a, n, l и все показатели степеней — натуральные числа, причём $a > 1$. Найдите все возможные значения числа a.
- (Заключительный этап Всероссийской олимпиады 2008 г., задача 10.7, совместно с В. Произволовым.) При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1, \dots, b_n$, не все из которых равны, что при всех натуральных k число $(b_1+k)(b_2+k)\dots(b_n+k)$ является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от k, но должен быть всегда больше 1.)
- (Заключительный этап Всероссийской олимпиады 2008 г., задача 11.3.) Дано конечное множество простых чисел P. Докажите, что найдётся натуральное число x такое, что оно представляется в виде $x = a^p + b^p$ (с натуральными a, b) при всех $p \in P$ и не представляется в таком виде для любого простого $p \notin P$.
- (Romanian Masters 2013 г., задача 1.) Для натурального числа a определим последовательность целых чисел $x_1, x_2, \dots$ следующим образом: $x_1 = a$, $x_{n+1} = 2x_n + 1$ при $n \geqslant 1$. Положим $y_n = 2^{x_n} - 1$. Найдите наибольшее возможное k такое, что для некоторого натурального a каждое из чисел $y_1, \dots, y_k$ является простым.
- (Международная олимпиада 2000 г., задача 5.) Существует ли натуральное число n такое, что n имеет ровно 2000 различных простых делителей и $2^n + 1$ делится на n?

П. А. Кожевников, МФТИ

p.kozhevn@gmail.com

Геометрия: классика и современность

Размышления о признании геометрии Лобачевского*

В. В. Прасолов, А. Б. Скопенков†

Признание неевклидовой геометрии происходило непросто. Часто споры вокруг неё представляют упрощённо, в чёрно-белом цвете: «невежи и консерваторы осмеивали гениев и новаторов». И хотя в этом имеется доля истины, дело здесь обстоит сложнее, и до поры до времени для неприятия этой новой теории были довольно веские основания. Мы попытаемся преодолеть этот стереотип, в частности, объяснить, *почему неевклидова геометрия была принята не сразу*, и показать, что для её признания было важно не только открытие её моделей (§ 1), но и *появление её приложений в других областях математики* (§ 2).

Приводимые размышления о приложениях напрямую касаются *современной* математики и связаны с важнейшими практическими вопросами, например: как математику выбирать направления исследования. Эти мысли знакомы некоторым профессиональным математикам. Но мы надеемся, что они будут новы и интересны и для тех, кто изучает математику (на разных уровнях), и для тех, кто интересуется математикой как частью культуры.

---

* Обновляемая версия: http://arxiv.org/abs/1307.4902. Благодарим И. Изместьева, А. Петрунина и членов редколлегии сборника «Математическое просвещение» за полезные обсуждения. Особо благодарим А. Сосинского за разрешение использовать часть написанного им текста.

† А. Б. Скопенков частично поддержан грантом фонда Саймонса.

Мы не рассматриваем *предысторию* геометрии Лобачевского (т. е. труды Аристотеля, Омара Хайяма, Швейкарта, Тауринуса, Ламберта, Саккери и других). Мы лишь коротко пишем об истории открытия геометрии Лобачевского и её моделей (дальнейшее изложение практически не зависит от § 1). Подробнее см. [9], [12] и [13]. Основы самой геометрии Лобачевского можно изучить, например, по [10], [14].

§ 1. Проблема Пятого постулата и геометрия Лобачевского

Пятый постулат Евклида (аксиома параллельных) в более простой эквивалентной форме гласит, что

через точку вне данной прямой проходит не более одной прямой, не пересекающей данную прямую.

Эта аксиома формулируется сложнее, чем другие аксиомы (ибо она требует рассмотрения бесконечной прямой). Поэтому ещё Аристотель рассуждал о возможности вывести её из остальных аксиом. (Точнее, Аристотель рассуждал об эквивалентном утверждении о сумме углов треугольника.) Чтобы сделать это, Карл-Фридрих Гаусс, Янош Бойяи и Николай Иванович Лобачевский, как и их предшественники, рассуждали от противного. Они предположили, что через точку вне данной прямой проходит более чем одна прямая, не пересекающая данную, и стремились отсюда получить противоречие. Но следствия из этой гипотезы, вместо того чтобы привести к противоречию, постепенно выстраивались в очень стройную и богатую, хотя и крайне необычную, теорию. Появилось подозрение, что эта теория так же логически безупречна, как и евклидова. Потом пришла и уверенность в этом. Такая уверенность пришла к Гауссу, Бойяи и Лобачевскому в 1810–1820-х годах. Первая публикация принадлежит Лобачевскому.

Однако в начале XIX века не было ясно, как, развивая неевклидову геометрию, можно решить двухтысячелетнюю проблему о доказуемости Пятого постулата Евклида.

Проблема Пятого постулата была решена после появления *моделей* неевклидовой геометрии, придумать которые помогли труды Лобачевского. Поясним читателю важное понятие модели. Предположим, что дана аксиоматическая теория, непротиворечивость которой мы хотим установить. (Например, неевклидова геометрия.) В этой теории, кроме аксиом, должны быть *неопределяемые понятия* — это понятия, определения которых в теории не даются. Такие понятия в строгой аксиоматической теории необходимы, иначе в определениях будет порочный круг (так же как необходимы недоказываемые *аксиомы*, без которых в доказательствах будет порочный круг).

Попробуем обратиться к другому разделу математики, в непротиворечивости которого мы не сомневаемся (например, к евклидовой геометрии). И построим в нём *модель* данной теории, т. е. переведём неопределяемые понятия данной теории в конкретные термины выбранного раздела математики так, чтобы аксиомы теории (вернее, их перевод) превратились в истинные высказывания этого раздела. Тогда, если имеется противоречие в теории (например, в геометрии Лобачевского), соответствующее противоречие можно получить и в том разделе математики, где реализована наша модель (например, в евклидовой геометрии). Если же в модели противоречия нет, то его нет и в исходной теории. Установленную таким способом непротиворечивость называют *относительной* потому, что она может быть получена лишь в предположении, что тот раздел математики, внутри которого построена модель, сам является непротиворечивым. Так что из существования указанной модели следует, что если есть противоречие в геометрии Лобачевского, то оно есть и в геометрии Евклида[1)].

В своих работах Лобачевский писал, что у обитателей пространства с его геометрией не было бы проблем с евклидовой геометрией, поскольку геометрия на *орисфере* евклидова. (*Орисферой* в геометрии Лобачевского называется «предельная фигура», полученная из сферы устремлением радиуса к бесконечности. При этом предполагается, что сфера проходит через некоторую фиксированную точку, а её центр уходит в бесконечность по фиксированному лучу, выходящему из этой точки. В отличие от евклидовой геометрии, эта фигура не совпадает с плоскостью.) Видимо, он интуитивно пришёл к идее построения модели, но не сформулировал этого явно. Главной трудностью в доказательстве непротиворечивости неевклидовой геометрии в те времена было отсутствие явно высказанной идеи модели. А в наше время идея построения модели для доказательства (относительной) непротиворечивости общеизвестна и даже банальна.

Первая модель неевклидовой геометрии была построена итальянским математиком Эудженио Бельтрами [5]. Тем самым было доказано, что Пятый постулат невозможно вывести из остальных аксиом.

[1)] Это не даёт ответа на важнейший исходный вопрос: есть ли противоречие в геометрии Лобачевского? Но, с одной стороны, в непротиворечивости геометрии Евклида все уверены. С другой стороны, появление моделей и доказательство относительной непротиворечивости подняло вопрос о формальном доказательстве непротиворечивости геометрии Евклида (и других «классических» теорий). Однако даже формализация этого вопроса нетривиальна, и останется проблема корректности самих методов доказательства. Мы благодарны Д. Мусатову за обсуждение этой важной темы и надеемся, что она будет освещена в популярной литературе.

Сначала, в 1868 году, Бельтрами построил модель *малой части* плоскости Лобачевского [1]. Приведём идею его построения. Трактриса (кривая погони) — плоская кривая, для которой длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с фиксированной прямой является постоянной величиной. Такую линию описывает предмет, волочащийся на верёвке заданной длины за точкой, движущейся по прямой. Поверхность вращения трактрисы называется *поверхностью Бельтрами* (хотя она была открыта до Бельтрами)[2]. *Геодезической* на поверхности Бельтрами (и на произвольной поверхности) называется любая линия, достаточно малые дуги которой являются на этой поверхности кратчайшими путями между их концами. Бельтрами доказал, что геометрия на *малой части* поверхности Бельтрами такая же, как на *малой части* плоскости Лобачевского. То есть что перевод

$$\begin{aligned} \text{часть плоскости Лобачевского} &\to \text{поверхность Бельтрами}\\ \text{точка} &\to \text{точка этой поверхности}\\ \text{прямая} &\to \text{геодезическая на этой поверхности} \end{aligned}$$

доставляет модель части плоскости Лобачевского в виде поверхности Бельтрами.

Затем Бельтрами построил модель *всей* плоскости Лобачевского (весьма неожиданную и простую!) [3, 10]. Важные свойства этой модели, на которых сейчас основаны её приложения к другим областям математики, были обнаружены Феликсом Клейном в 1871 году (связь с проективной геометрией, а именно — с проективными преобразованиями, сохраняющими круг). Клейн использовал важную идею Артура Кэли (1859) о связи расстояний на сфере и *двойных отношений* из *проективной геометрии*. Поэтому модель, построенная Бельтрами, называется моделью Кэли — Клейна или Бельтрами — Клейна.

Некоторые другие модели (1883) называют именем Анри Пуанкаре. Хотя Бельтрами и писал о них, именно Пуанкаре указал на связь с другими областями математики (см. подробнее § 2).

Интересно, что когда велись споры вокруг геометрии Лобачевского, другая неевклидова геометрия уже была давно общепризнана. Это геометрия звёздного неба или поверхности земного шара — сферическая геометрия. Ввиду реальности изучаемого объекта и его огромного значения

---

[2] Тригонометрические формулы для поверхности Бельтрами (и других поверхностей постоянной отрицательной кривизны) были получены Фердинандом Миндингом (прибалтийским учеником Гаусса) [8] в 1840 г. Они совершенно идентичны формулам геометрии Лобачевского, открытым Лобачевским!

для астрономии и мореплавания никаких насмешек и борьбы за признание сферической геометрии просто не было. Однако сферическая геометрия до Клейна (может быть — до Римана) воспринималась не как отдельная геометрия, а как часть трёхмерной евклидовой геометрии [3]. Поэтому не было необходимости в построении модели, как не было и самого понятия модели.

§ 2. Признание геометрии Лобачевского и её приложения

Почему Гаусс не публиковал свои работы по неевклидовой геометрии? Гаусс первый осознал, что неевклидова геометрия имеет право на существование. Почему же он не продолжил свои занятия этой областью? Часто приходится читать, что Гаусс не публиковал из «интеллектуальной трусости» — он боялся, что его поднимут на смех [4]. Это подтверждается его письмом 1829 года Бесселю, где Гаусс признаёт состоятельность неевклидовой геометрии, но подчёркивает, что не объявляет это публично во избежание криков «беотийцев» (т. е. невежественных людей). В какой-то мере, возможно, это было и так. Но нам представляется, что более существенны незавершённость попытки решить проблему Пятого постулата, а также следующие весьма достойные причины.

В начале своего научного пути Гаусс занимался «чистой» математикой (в частности, теорией чисел, замечательные приложения которой были обнаружены лишь позднее). Начиная с 1816 года, когда он обосновался в Гёттингене, он занимался разделами математики (теорией вероятностей, векторным анализом, дифференциальной геометрией и др.), связанными с практическими приложениями (астрономией, геодезией, магнетизмом). Значит, Гаусс считал более важными для себя области математики, связанные с изучением реального мира. Это косвенно подтверждает и отрывок из его рецензии [11] (на неудачную попытку доказательства пятого постулата; перевод авторов):

Большая часть [рецензируемой] работы касается утверждения, что, вопреки Канту, достоверность геометрии базируется не на лицезрении, а на определениях и логических правилах вывода. Кант вовсе не хотел отрицать, что эти логические вспомогательные средства всё более и более

---

[3] Пятый постулат пытались вывести из остальных аксиом Евклида. На сфере не все они выполнены. Поэтому сферическая геометрия не воспринималась как неевклидова и как имеющая тесную связь с геометрией Лобачевского.

[4] Кстати, именно это случилось с Лобачевским, о котором с насмешкой писал Чернышевский [3, с. 376]. Да и в журнале «Сын отечества» (известном ещё травлей Пушкина) труды Лобачевского были грубо осмеяны.

используются для описания геометрических истин и связей между ними. Однако любой человек, знакомый с сущностью геометрии, согласится, что логические средства сами по себе не позволяют ничего получить, а дают лишь пустоцвет, если всюду не властвует плодотворное живое лицезрение предметов.

Лобачевский, в отличие от Гаусса, не имеет ярких результатов, связанных с приложениями. Однако его деятельность на посту ректора Казанского университета не менее важна для реальной жизни, чем прикладные исследования. При этом вызывает уважение то, что с одной стороны, сам он продолжал заниматься неевклидовой геометрией, а с другой стороны — не использовал своего высокого служебного положения для продвижения своих исследований. Будучи ректором Казанского университета, он мог бы основать научную школу по неевклидовой геометрии и издавать собственный журнал, не дожидаясь её международного признания. В этом проявилось отличие большого учёного и порядочного человека от профана или карьериста, пытающегося любой ценой продвинуть свои идеи.

Астрономические наблюдения Лобачевского. Как указано в [2], Лобачевский производил астрономические наблюдения с целью проверить, равна ли сумма углов треугольника 180° (что эквивалентно пятому постулату Евклида) или меньше, как в «воображаемой геометрии» [5)].

Здесь мы подходим к одному из ключевых вопросов философии науки: что такое геометрия, о чём эта наука? Современники и предшественники Лобачевского (да и он сам до поры до времени) считали, что трёхмерная геометрия Евклида — это учение о физическом пространстве нашего мира. Но у Лобачевского в какой-то момент забрезжила мысль — а может быть, его геометрия вовсе не такая уж «воображаемая», и именно она, а не геометрия Евклида, и определяет структуру нашего пространства?

Астрономические измерения Лобачевского (мы их здесь не описываем, но заинтересованный читатель может найти рассказ о них в книге [2]) не привели к ответу: сумма углов получилась меньше 180°, но отличие от 180° не превысило ошибку (точность) измерений. Вопрос о том, какая из геометрий и есть геометрия нашей Вселенной, так и остался висеть в воздухе.

[5)] Как указано в [5, с. 26–27], Гаусс производил аналогичные наблюдения на поверхности Земли. Гаусс проводил картографические исследования и, возможно, при этом измерял большие треугольники (образованные вершинами гор) для соединения измерений, выполненных для различных участков карт. Возможно, это и привело к появлению легенды о том, что он проводил этот дорогостоящий эксперимент для удовлетворения своего любопытства, связанного с геометрией Лобачевского.

Первые приложения геометрии Лобачевского. Важнейшую роль в признании геометрии Лобачевского сыграло открытие моделей (§ 1). Были также важны и логический анализ оснований геометрии (Паш, Гильберт и др.), вызванный появлением геометрии Лобачевского и её моделей, и «эрлангенская программа» Клейна [7] вместе с теорией Ли *непрерывных групп*.

Большое значение имело также открытие приложений к другим областям математики.

Сам Лобачевский вычислил множество определённых интегралов, интерпретируя их как объёмы различных тел в неевклидовом пространстве. Однако эти применения были раскритикованы М. В. Остроградским. Он указывал, что один из двух интегралов, вычисленный Лобачевским, известен, а второй неверен [9, с. 14 внизу]. Ввиду критики Остроградского это приложение геометрии Лобачевского не сильно способствовало её признанию. (Мы не обсуждаем здесь вопрос о том, в какой степени эта критика была справедливой.)

Одним из первых приложений геометрии Лобачевского к другим областям математики была теория *автоморфных функций*, разработанная Пуанкаре в 1881–84 годы [5]. В простейшем случае это функции комплексного переменного, определённые в верхней полуплоскости и инвариантные относительно некоторого множества дробно-линейных преобразований вида

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

с вещественными коэффициентами a, b, c и d. Пуанкаре сначала выясняет, как устроены *фундаментальные области*[6] таких преобразований, а затем строит сами функции с помощью рядов. Пуанкаре обнаруживает, что фундаментальные области заполняют верхнюю полуплоскость, причём их размеры уменьшаются при приближении к границе — вещественной прямой. Это напомнило ему геометрию Лобачевского, и неожиданно пришла идея, что эти преобразования совпадают с движениями неевклидовой геометрии. Правильность этой идеи Пуанкаре вскоре легко проверил.

Пуанкаре отмечал, что геометрия Лобачевского служила ему в его исследованиях руководящей нитью, но он избегал использовать её в своём изложении, потому что она была в то время мало знакома математикам. Этому знакомству весьма поспособствовали исследования Пуанкаре, показавшие, что геометрия Лобачевского может иметь приложения и во вполне классических областях математики.

[6] Читатель, не знающий, что это такое, может пропустить этот абзац без ущерба для понимания дальнейшего.

Некоторую роль в признании геометрии Лобачевского могло сыграть также открытие в начале XX века её приложений к физике, точнее к теории относительности [4]. Оказалось, что *пространство скоростей* в этой теории имеет геометрию Лобачевского (иными словами, «совпадает» с моделью Бельтрами — Клейна).

Заключение: «естественно-научный» и «философский» аспекты математики. Лобачевский, Гаусс и Бойяи высказали две важные идеи. Во-первых, логически мыслима не только евклидова геометрия, но и другие геометрии. Во-вторых, эти другие геометрии в принципе могут отражать строение реального пространства. К сожалению, в то время эти две разные идеи не были чётко отделены друг от друга. Споры вокруг неевклидовой геометрии помогли математикам чётко выделить два разных аспекта своей науки. Первый — изучение систем аксиом и вообще формальных конструкций; он ближе к философии. Второй — математическое изучение реального мира; он ближе к естественным наукам (в первую очередь, к физике). Эти аспекты взаимосвязаны: математическое изучение реального мира порождает математические реальности, уже не так непосредственно связанные с реальным миром. Нам близки естественно-научные позиции Гаусса, Пуанкаре, Колмогорова и Арнольда: математическое изучение реального мира — важнейший аспект математики, но изучение формальных конструкций также необходимо.

Конечно, эти идеи важны и достойны более детального обсуждения. Однако оно не является нашей целью, мы хотели лишь ещё раз обозначить их. Будем рады, если это приведёт к последующим обсуждениям и публикациям.

Дополнение: о публикациях

Почему Гаусс не опубликовал свои размышления, написано в начале § 2. В отличие от Гаусса, Я. Бойяи был готов публиковать свою работу сразу. Но это оказалось непросто: где найти издателя, готового опубликовать столь необычный труд? На выручку пришёл его отец, включив эту работу в свою книгу по геометрии в виде приложения. В 1832 году двухтомная книга Фаркаша Бойяи, *Tentamen*, содержащая знаменитый сегодня *Аппендикс* Яноша, выходит в свет.

Лобачевскому тоже непросто было публиковать свои работы в изданиях, читаемых большим количеством математиков. Но, в отличие от Гаусса и Бойяи, он сумел это сделать достаточно полным образом. Проблема была в другом: на публикации Лобачевского по-русски никто из серьёзных учёных не обратил внимания (например, даже выдающийся русский математик Буняковский в своей работе о теории параллельных вовсе не упомянул Лобачевского), да и никто из французских математиков не обратил внимание на его последний труд (*Pangéométrie*). Не было и немецких читателей у его *Geometrische Untersuchungen*. Кроме одного, но зато какого — эту небольшую книгу прочитал Гаусс и был потрясён. Известно, что он стал учить русский язык, возможно, чтобы прочитать более ранние публикации Лобачевского в казанском журнале. Гаусс добился избрания Лобачевского членом-корреспондентом Гёттингенского королевского научного общества.

Современному математику (или физику) гораздо проще сделать свои исследования доступными мировому сообществу учёных (и, тем самым, защитить свой приоритет). Имеются научные конференции и конгрессы. Кроме того, любой автор научной работы может выложить её на международный сервер `http://arxiv.org` (архив). Получить для этого рекомендацию кого-то, кто уже имеет выложенные статьи, нетрудно. Выкладывание работы в архив накладывает определённую ответственность на её автора: его репутация может пострадать, если работа ошибочная или недостаточно обоснованная. Но всё же из-за свободы выкладывания в архив в нём появляется много «мусора». Поэтому само по себе выкладывание в архив не гарантирует, что работу прочитают (и притом она не считается официальной публикацией). В первом приближении, больше шансов быть прочитанными имеют работы,

- ясно написанные;
- представленные на конференциях и семинарах;
- известных авторов;
- по модной тематике;
- не только выложенные в архив, но и параллельно опубликованные в хороших журналах.

Несмотря на все «но», в наше время есть гораздо больше возможностей для распространения новых научных идей, чем во времена Гаусса, Бойяи и Лобачевского.

Список литературы

[1] *Бельтрами Э.* Опыт интерпретации неевклидовой геометрии // Об основаниях геометрии. М.: Гостехиздат, 1956. С. 180–212.

[2] *Васильев А. В.* Николай Иванович Лобачевский. М: Наука, 1992.

[3] *Гиндикин С. Г.* Рассказы о физиках и математиках. М.: МЦНМО, 2013.

[4] *Дубровский В. Н., Смородинский Я. А., Сурков Е. Л.* Релятивистский мир. М.: Наука, 1984. `http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-kvant/kvant34.htm`.

[5] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука, 1989.

[6] *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. М.-Л.: ОНТИ, 1936.

[7] *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа») // Об основаниях геометрии. М.: Гостехиздат, 1956. С. 399–434.

[8] *Миндинг Ф.* Дополнения к теории кратчайших линий на кривых поверхностях // Об основаниях геометрии. М.: Гостехиздат, 1956. С. 176–179. http://www.deepdyve.com/lp/de-gruyter/beitr-ge-zur-theorie-der-k-rzesten-linien-auf-krummen-fl-chen-060ar0lxeG.

[9] *Пападопулос А.* О гиперболической геометрии и истории её признания // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 14. М.: МЦНМО, 2010. С. 10–29.

[10] *Прасолов В. В.* Геометрия Лобачевского. М.: МЦНМО, 2004. http://www.mccme.ru/prasolov.

[11] *Gauss C. F.* Werke. Bd. 4. Göttingen, 1873. (aus Göttingsche gelehrte Anzeigen). S. 364–368.

[12] *Gray J.* Worlds out of nothing. A course in the history of geometry in the 19th century. Springer, 2007. S. 381. http://gen.lib.rus.ec, зеркало: http://free-books.dontexist.com.

[13] http://ru.wikipedia.org/wiki/Геометрия_Лобачевского.

[14] *Petrunin A.* Euclidean and hyperbolic planes; a minimalistic introduction with metric approach. http://arxiv.org/pdf/1302.1630.pdf.

В. В. Прасолов, НМУ

prasolov@mccme.ru, http://www.mccme.ru/prasolov/

А. Б. Скопенков, МФТИ, НМУ

skopenko@mccme.ru, http://www.mccme.ru/~skopenko/

Восстановление треугольника по заданным точкам

С. А. Беляев

§ 1. Постановка задачи

В треугольнике отметили некоторые точки, а потом треугольник стёрли. Как восстановить (с помощью циркуля и линейки) треугольник по отмеченным точкам?

Наверняка такие задачи были известны ещё в Древней Греции. Однако первой печатной работой на эту тему, скорее всего, была статья [9] Л. Эйлера «Лёгкое решение одной трудной геометрической задачи». В ней Эйлер поставил вопрос о восстановлении треугольника по ортоцентру H, центроиду M, инцентру I и центру описанной окружности O. Ясно, что если эти точки совпадают, то треугольник является правильным. Если же эти точки не совпадают, то треугольник по ним определяется однозначно. Другое дело, что треугольник, будучи однозначно определённым, может быть, тем не менее, непостроимым. Так например, не всегда с помощью циркуля и линейки решается задача о трисекции угла.

§ 2. Список Верника

2.1. История вопроса

В [9] Эйлер ограничился минимальным набором точек, зато каких! Тот факт, что три из этих точек (O, M и H) лежат на одной прямой (она сейчас называется *прямой Эйлера*) явилось побочным результатом, которому Эйлер не придал большого значения. Основным результатом своей статьи он считал установление того факта, что если две из перечисленных четырёх точек совпадают, то все четыре совпадают и треугольник является правильным. Кроме того, довольно значительная часть его статьи посвящена вычислению расстояний между замечательными точками треугольника. Как известно, эти расстояния выражаются через длины сторон треугольника, полупериметр и радиусы вписанной и описанной окружности не самым простым образом. Более того, Эйлер делает это не самым коротким путём и не в самых удобных обозначениях. Можно только диву даваться, как после страниц непростых выкладок и нетривиальных преобразований Эйлер называет свою статью «Лёгкое решение одной трудной геометрической задачи». С англоязычным изложением этой статьи можно ознакомиться в [12] [1].

Первое обобщение этого труда Эйлера было сделано в 1982 году Вильямом Верником. В своей статье [14] Верник расширяет список точек для восстановления треугольника до следующего:

A, B, C, O — вершины треугольника и центр описанной окружности;

M_1, M_2, M_3 и M — середины сторон BC, CA и AC соответственно и центроид;

H_1, H_2, H_3 и H — основания высот из вершин A, B и C соответственно и ортоцентр;

L_1, L_2, L_3 и I — основания биссектрис из вершин A, B и C соответственно и инцентр.

Конечно, такие задачи встречались и ранее, но Верник первым задался вопросом их полного перечисления и решения. Три точки из 16 можно выбрать $C_{16}^2 = 560$ способами. Из них лишь 139 троек дают принципиально различные, нетривиальные задачи. Верник так или иначе установил тип 90 из этих 139 задач. 49 задач остались нерешёнными или неклассифицированными. Интересно, что после Верника остались нерешёнными задачи, которые позднее получили своё конструктивное решение.

Следующий прорыв через 14 лет, в 1996 году, сделал Майерс в [11], который решил ещё 29 из вышеупомянутых 49 задач и исправил решение Верника 102-й задачи. В статье Майерса есть такие слова:

> It is an interesting challenge to verify the results shown in the table. One sample verification is shown below; the remaining verifications (and extensions!) are left to the interested reader, who may obtain further information from the author.

Увы, заинтересованному читателю не суждено связаться с автором: статья Майерса вышла с редакторским сообщением о внезапной смерти автора в ноябре 1995 года.

Долгое время не была известна судьба оставшихся 20 задач. Существует мнение, что все задачи списка Верника, которые вообще имеют решение, решены Майерсом и остальные задачи решения не имеют (даже если это

[1] В связи с труднодоступностью этой статьи все желающие могут написать автору по адресу `srgblv@ya.ru`, и я вышлю электронную версию этой статьи.

пока не установлено). Майерс же и был первым, кто применил к неразрешимым задачам технику сведения задачи к кубическому уравнению, про которое известно, что его корни являются (в общем случае) непостроимыми с помощью циркуля и линейки. Именно с помощью этой техники позднее было доказано, что некоторые задачи не имеют решения. Для задач 90, 109, 110, 111 это сделал в 2009 году Шпехт [13], а для задач 81, 132, 136, 138 — А. В. Устинов [6] тоже в 2009 году (оба — через 13 лет после Майерса).

На сегодняшний день остались нерешёнными 12 задач. Надеюсь, они будут решены быстрее, чем за 14 лет, разделяющие самые значимые статьи по этому вопросу.

В этой статье решены все 72 разрешимые (на сегодняшний день) задачи. Я не ставил перед собой цели получить новый математический результат и решить все задачи списка Верника. Моей целью было решить все разрешимые задачи этого списка и предоставить учителю удобный справочный материал по способам решения этих задач, популяризируя их включение в учительскую практику.

2.2. Задачи Верника

Как было отмечено выше, существует 139 нетривиальных принципиально различных троек точек, по которым Верник предложил восстановить треугольник. Тройка (A, B, C) является, очевидно, тривиальной, а из трёх вариантов (A, B, M), (B, C, M) и (A, C, M) естественно оставить только один. Список оставшихся задач и составляет так называемый список Верника.

Список Верника

001	A, B, O	L	015	A, O, H_2	S	029	A, M_2, M	S
002	A, B, M_1	S	016	A, O, H	S	030	A, M_2, H_1	L
003	A, B, M_3	R	017	A, O, L_1	S	031	A, M_2, H_2	L
004	A, B, M	S	018	A, O, L_2	S	032	A, M_2, H_3	L
005	A, B, H_1	L	019	A, O, I	S	033	A, M_2, H	S
006	A, B, H_3	L	020	A, M_1, M_2	S	034	A, M_2, L_1	S
007	A, B, H	S	021	A, M_1, M	R	035	A, M_2, L_2	L
008	A, B, L_1	S	022	A, M_1, H_1	L	036	A, M_2, L_3	S
009	A, B, L_3	L	023	A, M_1, H_2	S	037	A, M_2, I	S
010	A, B, I	S	024	A, M_1, H	S	038	A, M, H_1	L
011	A, O, M_1	S	025	A, M_1, L_1	S	039	A, M, H_2	S
012	A, O, M_2	L	026	$A, M_1 L_2$	U	040	A, M, H	S
013	A, O, M	S	027	A, M_1, I	S	041	A, M, L_1	S
014	A, O, H_1	S	028	A, M_2, M_3	S	042	A, M, L_2	U

043	A, M, I	S
044	A, H_1, H_2	S
045	A, H_1, H	L
046	A, H_1, L_1	L
047	A, H_1, L_2	S
048	A, H_1, I	S
049	A, H_2, H_3	S
050	A, H_2, H	L
051	A, H_2, L_1	S
052	A, H_2, L_2	L
053	A, H_2, L_3	S
054	A, H_2, I	S
055	A, H, L_1	S
056	A, H, L_2	U
057	A, H, I	S
058	A, L_1, L_2	S
059	A, L_1, I	L
060	A, L_2, L_3	S
061	A, L_2, I	S
062	O, M_1, M_2	S
063	O, M_1, M	S
064	O, M_1, H_1	L
065	O, M_1, H_2	S
066	O, M_1, H	S
067	O, M_1, L_1	L
068	O, M_1, L_2	U
069	O, M_1, I	S
070	O, M, H_1	S
071	O, M, H	R
072	O, M, L_1	U
073	O, M, I	U
074	O, H_1, H_2	U
075	O, H_1, H	S
076	O, H_1, L_1	S
077	O, H_1, L_2	
078	O, H_1, I	
079	O, H, L_1	U
080	O, H, I	U
081	O, L_1, L_2	U
082	O, L_1, I	S
083	M_1, M_2, M_3	S
084	M_1, M_2, M	S
085	M_1, M_2, H_1	S
086	M_1, M_2, H_3	S
087	M_1, M_2, H	S
088	M_1, L_1, L_2	U
089	M_1, M_2, L_3	U
090	M_1, M_2, I	U
091	M_1, M, H_1	L
092	M_1, M, H_2	S
093	M_1, M, H	S
094	M_1, M, L_1	S
095	M_1, M, L_2	U
096	M_1, M, I	S
097	M_1, H_1, H_2	S
098	M_1, H_1, I	L
099	M_1, H_1, L_1	L
100	M_1, H_1, L_2	U
101	M_1, H_1, I	S
102	M_1, H_2, H_3	L
103	M_1, H_2, H	S
104	M_1, H_2, L_1	S
105	M_1, H_2, L_2	S
106	M_1, H_2, L_3	U
107	M_1, H_2, I	U
108	M_1, H, L_1	U
109	M_1, H, L_2	U
110	M_1, H, I	U
111	M_1, L_1, L_2	U
112	M_1, L_1, I	S
113	M_1, L_2, L_3	
114	M_1, L_2, I	U
115	M, H_1, H_2	U
116	M, H_1, H	S
117	M, H_1, L_1	S
118	M, H_1, L_2	
119	M, H_1, I	
120	M, H, L_1	U
121	M, H, I	U
122	M, L_1, L_2	U
123	M, L_1, I	
124	H_1, H_2, H_3	S
125	H_1, H_2, H	S
126	H_1, H_2, L_1	S
127	H_1, H_2, L_3	
128	H_1, H_2, I	
129	H_1, H, L_1	L
130	H_1, H, L_2	U
131	H_1, H, I	S
132	H_1, L_1, L_2	
133	H_1, L_1, I	S
134	H_1, L_2, L_3	
135	H_1, L_2, I	
136	H, L_1, L_2	U
137	H, L_1, I	
138	L_1, L_2, L_3	U
139	L_1, L_2, I	S

2.3. Обозначения в списке

Расшифровка условных обозначений в этой таблице такова.

R (*redundant*) — задачи, в которых положение двух точек определяет положение третьей. Например, такой является тройка (A, B, M_3). Такие задачи не имеют однозначного решения. В списке Верника их 3.

L (*locus dependent*) — задачи, в которых присутствует более слабая зависимость точек друг от друга. Точки не могут располагаться произвольно:

одна из них по отношению к другим должна лежать на каком-либо геометрическом месте. В зависимости от взаимного расположения точек задача может не иметь решения или иметь бесконечно много решений. Задач этого типа — 23.

S (*solvable*) — разрешимые (на сегодняшний день) задачи. Их 72.

U (*unsolvable*) — неразрешимые задачи. Таких 29.

Если соответствующее поле в таблице оставлено пустым, то ответ на сегодняшний день не известен. Пока это относится к 12 задачам.

Задача 102 у Верника значилась как S-задача. Майерс показал, что она является задачей L.

§ 3. Задачи списка

3.1. Разрешимые задачи

Как было сказано выше, доказательство невозможности восстановить треугольник по тем или иным точкам сводится к получению некоторого кубического уравнения, корни которого, как известно, вообще говоря невозможно построить с помощью циркуля и линейки.

Поэтому меня, как учителя, больше интересуют задачи списка Верника, которые имеют решение. Важно понять, как их использовать в учебном процессе и в какой именно момент этого процесса можно давать ту или иную задачу. Для этого, очевидно, их надо все решить. В этом и состоит основное содержание этой статьи. Но не только. Ниже приводится решение всех 72 разрешимых задач списка Верника. Однако для четырёх задач мне известно только алгебраическое решение. Это задачи 57 (A, I, H), 69 (O, M_1, I), 82 (O, L_1, I) и 131 (H_1, H, I). Дорогие читатели, если вы или ваши ученики сможете найти геометрическое решение хотя бы одной из этих задач, напишите, пожалуйста, мне по адресу `srgblv@ya.ru`. Я буду вам очень и очень признателен.

3.2. Организация решений

При решении остальных задач мне пришлось использовать довольно обширный арсенал средств элементарной геометрии. Каждое нижеприведённое решение я снабдил метками (или, как теперь модно говорить, тегами), которые показывают, какова основная идея моего решения. Это, конечно же, не означает, что моё решение оптимально и не существует лучшего. Если вам удастся придумать какое-либо интересное на ваш взгляд решение приведённой здесь задачи, пишите мне по указанному адресу.

Кроме того в последней главе этой статьи вы можете найти своеобразный навигатор, в котором можно найти номера тех задач, которые решаются с помощью указанного в навигаторе метода.

Всюду в этой статье я не провожу исследования количества решений задачи, довольствуясь построением только одного треугольника.

§ 4. Основные обозначения

Я привожу максимально сжатые и схематичные пошаговые построения искомого треугольника. Я старался придерживаться принципа «одна линия = один пункт построения», однако однотипные построения иногда приведены в одном пункте. Помимо вышеприведённых обозначений (см. п. 2.3), составляющих лексикографическую основу построения списка Верника, я применяю обозначения, стандартные в геометрии треугольника.

4.1. Точки

Везде считается, что все три заданные точки различны. Треугольники предполагаются остроугольными, что не принципиально.

Везде считается также, что треугольник построен, если построены его вершины A, B и C. При этом в треугольнике ABC вершина A всегда сверху, B — справа, C — слева, причём везде[2] $\angle B > \angle C$.

Запись $M_1 = \frac{1}{2}[BC]$ означает, что строится точка M_1, середина отрезка BC.

Запись типа $C = AM_2 \cap BM_1$ обозначает, что точка C получена как пересечение прямых AM_2 и BM_1.

Запись типа $MM_1 = \frac{1}{2}AM$ означает необходимость продлить отрезок AM на половину его длины и получить точку M_1.

4.2. Отрезки и прямые

Далее a, b, c — стороны; m_a, m_b, m_c — медианы; l_a, l_b, l_c — биссектрисы; h_a, h_b, h_c — высоты; m_1, m_2, m_3 — медиатрисы[3] (= серединные перпендикуляры) сторон треугольника; $m_x(XY)$ — медиатриса (= серединный перпендикуляр) отрезка XY.

---

[2] Это принципиально важно только в одном месте. Угол между высотой и биссектрисой, исходящими из одной вершины, как известно, равен $|\angle B - \angle C|/2$. Чтобы не возиться с перебором случаев ввиду этого модуля, в этой статье везде $\angle B > \angle C$.

[3] Мне очень нравится этот старинный и уже почти совсем забытый термин. Так, например, биссектриса — это луч, но не всякий луч — биссектриса. Так мы называем лишь особый луч. Точно так же медиатриса — это серединный перпендикуляр, но не всякий серединный перпендикуляр — медиатриса, а лишь серединный перпендикуляр к стороне треугольника. Почему же не вернуть этот весьма удачный термин обратно в школу? Заведомо он не хуже всяких там «апофем»!

Прямая, содержащая тот или иной отрезок, обозначается той же буквой с прибавлением нижнего индекса x, например, a_x — прямая, содержащая сторону $BC = a$, h_{a_x} — прямая, содержащая высоту $AH_1 = h_a$, и т. д.

Запись $h_{a_x} = AH$ означает, что прямая, содержащая высоту h_a треугольника, проведена через точки A и H.

Запись $a_x \perp h_{a_x}$ означает, что прямая a_x, содержащая сторону BC треугольника, проведена перпендикулярно прямой h_{a_x}.

Запись $\angle CAL_1 = \angle BAL_1$ обозначает, что нужно отложить угол $\angle CAL_1$, равный уже построенному углу $\angle BAL_1$.

4.3. Окружности

Ω — описанная окружность, R — её радиус; иногда, чтобы подчеркнуть, какая точка определяет описанную окружность, используется запись вида $\Omega(O, OA)$ — это означает, что построена описанная окружность с центром в точке M радиуса OA.

ω (без индексов) — вписанная окружность, r — её радиус;

ω_9 — окружность девяти точек;

$\omega(X, \rho)$ — окружность с центром в точке X радиусом ρ;

$s(XY, A)$ — сегмент, вмещающий угол A = геометрическое место точек, из которых отрезок XY виден под углом A;

$t(X, \pi)$ — касательная из точки X к окружности π.

4.4. Углы

Углы треугольника обозначаются A, B и C, то есть обозначение величины угла треугольника совпадает с обозначением его вершины. В результате этого путаница не возникает, так как такую вольность я допускаю лишь для углов треугольника. Например, ниже широко используется угол $\angle BIC = 90^\circ + A/2$. Обозначение $\angle BIC = 90^\circ + \angle BAC/2$ на мой взгляд более громоздко и менее наглядно.

§ 5. Решения

Перейдём теперь к решениям задач из списка Верника (нумерация как раз и идёт по этому списку). После номера задачи в круглых скобках указана её (примерная) сложность — конечно, субъективно.

Задача 2 (1). (A, B, M_1)

Идея. Медиана делит сторону пополам.

1) $CM_1 = BM_1$.

Задача 4 (1). (A, B, M)

Идея. Медианы делятся в отношении $2:1$, считая от вершины.

1) $MM_1 = \frac{1}{2}AM$; 2) $MM_2 = \frac{1}{2}BM$; 3) $C = AM_2 \cap BM_1$.

Задача 7 (1). (A, B, H)

Идея. Высоты перпендикулярны сторонам.

1) $h_{a_x} = AH$, $h_{b_x} = BH$; 2) $a_x \perp h_{a_x}$, $b_x \perp h_{b_x}$; 3) $C = a_x \cap b_x$.

Задача 8 (1). (A, B, L_1)

Идея. Симметрия относительно биссектрисы.

1) $a_x = BL_1$; 2) $\angle CAL_1 = \angle BAL_1$.

Задача 10 (1). (A, B, I)

Идея. Симметрия относительно биссектрисы.

1) $\angle CAI = \angle BAI$; 2) $\angle CBI = \angle ABI$.

Задача 11 (1). (A, O, M_1)

Идея. O — точка пересечения медиатрис.

1) $a_x \perp OM_1$; 2) $\Omega(O, OA)$; 3) $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 13 (1). (A, O, M)

Идея. O — точка пересечения медиатрис. Медианы делятся в отношении $2:1$, считая от вершины.

1) Ω; 2) $MM_1 = \frac{1}{2}AM$; 3) $b_x \perp OM_1$; 4) $b_x \cap \Omega = B, C$.

Задача 14 (1). (A, O, H_1)

Идея. Высоты перпендикулярны сторонам.

1) Ω; 2) $a_x \perp AH_1$; 3) $a_x \cap \Omega = B, C$.

Задача 15 (1). (A, O, H_2)

Идея. Высоты перпендикулярны сторонам.

1) Ω; 2) $b_x = AH_2$, $b_x \cap \Omega = C$; 3) $h_{b_x} \perp b_x$, $h_{b_x} \cap \Omega = B$.

Задача 16 (2). (A, O, H)

Идея. $OM_1 = \frac{1}{2}AH$.

1) Ω; 2) $OM_1 = \frac{1}{2}AH$, $OM_1 \parallel AH$; 3) $a_x \perp OM_1$, $a_x \cap \Omega = B, C$.

Задача 17 (2). (A, O, L_1)

Идея. Точка W[4].

[4] Имеется в виду факт, что биссектриса угла треугольника и медиатриса противоположной стороны пересекаются на описанной окружности. Многочисленные работы И. А. Кушнира и его коллег из Киева (прежде всего Г. Б. Филипповского) сделали обозначение этой точки de facto стандартным — эта точка называется точкой W.

1) Ω; 2) $l_{a_x} = AL_1$, $l_{a_x} \cap \Omega = W_1$; 3) OW_1; 4) окружность λ на L_1W_1 как на диаметре, $\lambda \cap OW_1 = M_1$; 5) $a_x \perp OM_1$, $a_x \cap \Omega = B, C$.

Задача 18 (2). (A, O, L_2)

Идея. Сегмент.

1) Ω; 2) $b_x = AL_2$, $b_x \cap \Omega = C$; 3) $M_2 = \frac{1}{2}[AC]$, $\angle COM_2 = B$; 4) $s_1(AL_2, B/2)$, $s_2(CL_2, B/2)$; 5) $s_1 \cap s_2 \cap \Omega = B$.

Задача 19 (2). (A, O, I)

Идея. Теорема трилистника[5].

1) Ω; 2) $l_{a_x} = AL_1$, $l_{a_x} \cap \Omega = W_1$; 3) $\omega(W_1, W_1I)$, $\omega \cap \Omega = B, C$.

Задача 20 (1). (A, M_1, M_2)

Идея. Медианы делят стороны пополам.

1) $CM_2 = AM_2$; 2) $BM_1 = CM_1$.

Задача 23 (2). (A, M_1, H_2)

Идея. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$.

1) $b_x = AH_2$; 2) $\omega(M_1, M_1H_2)$, $\omega \cap b_x = C$; 3) $BM_1 = CM_1$.

Задача 24 (2). (A, M_1, H)

Идея. $OM_1 = \frac{1}{2}AH$.

1) $h_{a_x} = AH$; 2) $a_x = M_1H_1 \perp h_{a_x}$; 3) $OM_1 = \frac{1}{2}AH$, $OM_1 \parallel AH$; 4) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 25 (2). (A, M_1, L_1)

Идея. Точка W.

1) $a_x = M_1L_1$, $l_{a_x} = AL_1$; 2) m_1, $m_1 \cap l_{a_x} = W_1$; 3) $m_x(AW_1) \cap m_1 = O$; 4) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 27 (3). (A, M_1, I)

Идея. IM_1 высекает r на высоте h_a.

1) $MA = \frac{2}{3}AM_1$.

После этого задача сводится к задаче 43 (A, M, I).

Задача 28 (1). (A, M_2, M_3)

Идея. Медианы делят стороны пополам.

1) $CM_2 = AM_2$; 2) $BM_3 = AM_3$.

Задача 29 (1). (A, M_2, M)

Идея. Медианы делят стороны пополам.

1) $CM_2 = AM_2$; 2) $BM = 2MM_2$.

---

[5] Точка пересечения медиатрисы с описанной окружностью равноудалена от концов данной стороны и центров вписанной и соответствующей вневписанной окружностей.

Задача 33 (1). (A, M_2, H)

Идея. Медиана делит сторону пополам.

1) $CM_2 = AM_2$; 2) $a_x \perp h_{a_x} = AH$; 3) $c_x \perp h_{c_x} = CH$; 4) $a_x \cap c_x = B$.

Задача 34 (1). (A, M_2, L_1)

Идея. Симметрия относительно биссектрисы.

1) $CM_2 = AM_2$; 2) $c_x\colon \angle CAL_1 = \angle BAL_1$; 3) $a_x = CL_1$; 4) $a_x \cap c_x = B$.

Задача 36 (1). (A, M_2, L_3)

Идея. Симметрия относительно биссектрисы.

1) $CM_2 = AM_2$; 2) $a_x\colon \angle ACL_3 = \angle BCL_3$; 3) $c_x = AL_3$, $c_x \cap a_x = B$.

Задача 37 (1). (A, M_2, I)

Идея. Касательная.

1) $CM_2 = AM_2 = b_x$; 2) $IK_2 \perp b_x \Rightarrow r$; 3) $\omega(I, r)$; 4) $t(A, \omega) \cap t(C, \omega) = B$.

Задача 39 (2). (A, M, H_2)

Идея. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$.

1) $b_x = AH_2$, $h_{b_x} \perp b_x$; 2) $MM_1 = \frac{1}{2}AM$; 3) $\omega(M_1, M_1H_2)$; 4) $\omega \cap b_x = C$, $\omega \cap h_{b_x} = B$.

Задача 40 (2). (A, M, H)

Идея. Прямая Эйлера. Свойства медиан.

1) $OM = \frac{1}{2}MH$; 2) Ω; 3) $MM_1 = \frac{1}{2}AM$; 4) $a_x \perp OM_1$, $a_x \cap \Omega = B, C$.

Задача 41 (2). (A, M, L_1)

Идея. Точка W.

1) $MM_1 = \frac{1}{2}AM$; 2) $a_x = M_1L_1$, $l_{a_x} = AL_1$; 3) m_1, $m_1 \cap l_{a_x} = W_1$; 4) $m(AW_1) \cap m_1 = O$; 5) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 43 (3). (A, M, I)

Идея. IM_1 высекает r на высоте h_a.

Для решения этой задачи нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, интересное само по себе.

В треугольнике ABC через середину M_1 стороны BC и центр вписанной окружности проведена прямая, которая пересекает высоту AH_1 в точке E. Тогда $AE = r$.

Доказательство. Пусть описанная окружность пересекает биссектрису AI_1 в точке W_1. Дуги BW_1 и W_1C равны и $W_1M \perp BC$. Тогда треугольники AEI и W_1MI подобны и верно равенство

$$\frac{AE}{AI} = \frac{M_1W_1}{IW_1}.$$

Из точки I проведём перпендикуляр IT к стороне AC. Треугольники AIT и CW_1M_1 подобны, поэтому

$$\frac{AI}{CW_1} = \frac{r}{W_1M_1}.$$

По теореме трилистника $CW_1 = IW_1$. Из последних двух подобий получим:

$$\frac{AE}{M_1W_1} = \frac{AI}{IW_1} = \frac{AI}{CW_1} = \frac{r}{W_1M_1},$$

то есть $AE = r$. □

Построение:

1) $MM_1 = \frac{1}{2}AM$; 2) $AT \parallel IM_1$, $AT = IM_1$; 3) окружность ω_1 на AT как на диаметре; 4) $\omega_1 \cap (IM_1) = P$, $AP = r$ (!); 5) $\omega(I, r)$; 6) $t(A, \omega) \cap t(M_1, \omega) = B, C$.

Примечание. Это самая сложная задача на построение из списка Верника!

Задача 44 (1). (A, H_1, H_2)

Идея. Высоты перпендикулярны сторонам треугольника.

1) $h_{a_x} = AH_1$, $a_x \perp h_{a_x}$; 2) $C = a_x \cap AH_2$; 3) $h_{b_x} \perp b_x$, $h_{b_x} \cap a_x = B$.

Задача 47 (3). (A, H_1, L_2)

Идея. Биссектриса равноудалена от сторон угла.

1) $h_{a_x} = AH_1$, $a_x \perp h_{a_x}$; 2) окружность ω с центром L_2, касающуюся a_x; 3) $c_x = t(A, \omega)$, $c_x \cap a_x = B$; 4) $AL_2 \cap a_x = C$.

Примечание. Эта задача тождественна задаче 53.

Задача 48 (1). (A, H_1, I)

Идея. Касательная.

1) $h_{a_x} = AH_1$, $a_x \perp h_{a_x}$; 2) $IK_1 \perp a_x$, $IK_1 = r$; 3) $\omega(I, r)$; 4) $t(A, \omega) \cap a_x = B, C$.

Задача 49 (1). (A, H_2, H_3)

Идея. Высоты перпендикулярны сторонам треугольника.

1) $b_x = AH_2$, $h_{b_x} \perp b_x$; 2) $c_x = AH_3$, $h_{c_x} \perp c_x$; 3) $h_{b_x} \cap c_x = B$, $h_{c_x} \cap b_x = C$.

Задача 51 (1). (A, H_2, L_1)

Идея. Симметрия относительно биссектрисы.

1) $b_x = AH_2$, $h_{b_x} \perp b_x$; 2) c_x: $\angle BAL_1 = \angle H_2AL_1$, $c_x \cap h_{b_x} = B$; 3) $a_x = BL_1$, $a_x \cap b_x = C$.

Задача 53 (3). (A, H_2, L_3)

Идея. Биссектриса равноудалена от сторон угла.

1) $b_x = AH_2$, $h_{b_x} \perp b_x$; 2) $c_x = AL_3$, $c_x \cap h_{b_x} = B$; 3) окружность ω с центром L_3, касающаяся b_x; 4) $t(B, \omega) \cap b_x = C$.

Примечание. Эта задача тождественна задаче 47.

Задача 54 (2). (A, H_2, I)

Идея. Касательная.

1) $b_x = AH_1$, $h_{b_x} \perp b_x$; 2) $IK_2 \perp b_x$, $IK_2 = r$; 3) $\omega(I, r)$; 4) $t(A, \omega) \cap h_{b_x} = B$; 5) $t(B, \omega) \cap h_{b_x} = C$.

Задача 55 (3). (A, H, L_1)

Идея. Угол $\varphi = (\angle B - \angle C)/2$.

1) $\varphi = \angle L_1AH = (B - C)/2$; 2) $h_{a_x} = AH$, $a_x \perp h_{a_x}$ (через L_1); 3) N_1 симметрична H относительно a_x; 4) $\angle ABN_1 = B + 90^\circ - C = 90^\circ + 2\varphi$, $s(AN_1, 90^\circ + 2\varphi)$, $s \cap a_x = B$; 5) $\angle N_1BH_1 = 90^\circ - C$, b_x: отложить от AH_1 $\angle H_1AC = 90^\circ - C$; 6) $b_x \cap a_x = C$.

Задача 57 (3). (A, I, H)

Идея. Алгебраический метод.

В этой задаче, как и в других, которые решаются алгебраическим методом, я не буду подробно описывать процесс построения — читатель сможет его легко восстановить. Я же ограничусь лишь анализом. Всё, что необходимо здесь, так это понимание возможности построения корней квадратного уравнения с помощью циркуля и линейки.

Предположим, что задача решена и обозначения выбраны так, как на рис. 1.

Докажем, что треугольники IDW и M_1IW подобны. В самом деле, у них есть общий угол $\angle AWD = \angle IAH = \varphi = (B - C)/2$. Покажем, что их

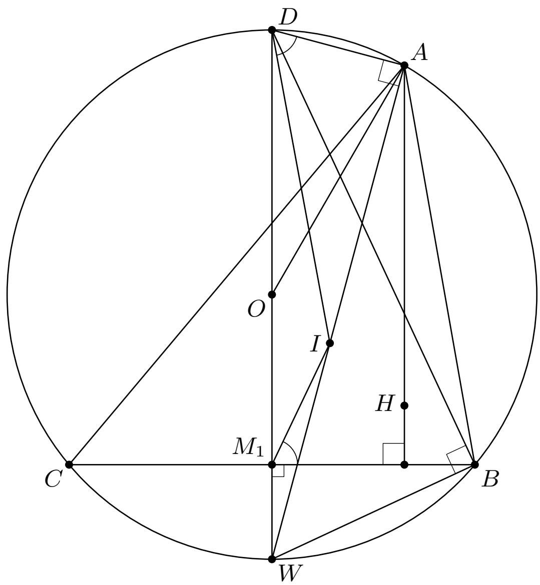


Рис. 1

стороны пропорциональны. В прямоугольном треугольнике BDW с проведённой высотой BM_1 воспользуемся тем, что квадрат катета равен произведению гипотенузы на проекцию этого катета на гипотенузу. Имеем $BW^2 = WD \cdot WM_1$. По теореме трилистника $BW = IW$. Тогда $IW^2 = WD \cdot WM_1$. Последнее соотношение означает пропорциональность сторон треугольников IDW и M_1IW, а в совокупности с указанным равенством углов это доказывает их подобие.

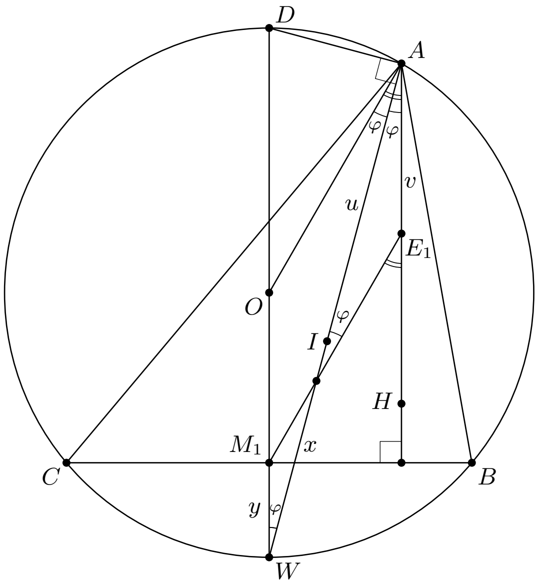


Рис. 2

Обозначим теперь длины отрезков так: $AI = u$, $AE_1 = v = AH/2$, $IW = x$, $WM_1 = y$. Тогда отрезок AW, с одной стороны, равен $x + u$. С другой стороны, он равен сумме длин оснований равнобедренных треугольников[6], образованных пересечением прямых AW и M_1E_1. Значит,

$$x + u = 2y \cos\varphi + 2v \cos\varphi.$$

Откуда

$$WM_1 = y = \frac{x+u}{2\cos\varphi} - v.$$

Так как из прямоугольного треугольника AWD следует, что

$$WD = z = \frac{x+u}{\cos\varphi},$$

[6] Треугольники равнобедренные в силу известного факта, что AOM_1E_1 — параллелограмм.

указанное выше подобие запишется в виде

$$x^2 = yz = \left(\frac{x+u}{2\cos\varphi} - v\right) \cdot \frac{x+u}{\cos\varphi}.$$

Корень x этого квадратного уравнения строится с помощью циркуля и линейки. После этого восстановить треугольник не составляет труда.

Задача 58 (3). (A, L_1, L_2)

Идея. Биссектриса равноудалена от сторон угла.

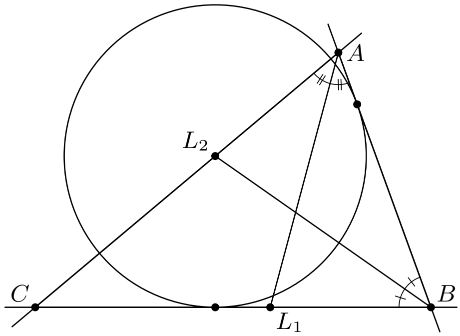


Рис. 3

1) $b_x = AL_2$; 2) c_x симметрична b_x относительно $l_{a_x} = AL_1$; 3) окружность ω с центром L_2, касающаяся c_x; 4) $t(l_1, \omega) = a_x$; 5) $a_x \cap c_x = B$, $a_x \cap b_x = C$.

Задача 60 (2). (A, L_2, L_3)

Идея. Сегмент.

1) $b_x = AL_2$, $c_x = AL_3$, $\angle(b_x, c_x) = A$; 2) $s(L_2L_3, 90^\circ + A/2)$; 3) l_{a_x}, $l_{a_x} \cap \omega = I$; 4) $L_2I \cap c_x = B$, $L_3I \cap b_x = C$.

Задача 61 (1). (A, L_2, I)

Идея. Симметрия относительно биссектрисы.

1) $b_x = AL_2$, $l_{b_x} = IL_2$, $l_{a_x} = AI$; 2) $c_x \colon \angle BAI = \angle L_2AI$, $B = c_x \cap l_{b_x}$; 3) $a_x \colon \angle ABI = \angle CBI$; 4) $a_x \cap b_x = C$.

Задача 62 (1). (O, M_1, M_2)

Идея. Свойства медиан.

Первое решение.

1) $BM_1 = M_1C, AM_2 = M_2C$.

Второе решение.

1) $a_x \perp OM_1$; 2) $b_x \perp OM_2$, $a_x \cap b_x = C$; 3) $\Omega = \Omega(O, C)$; 4) $a_x \cap \Omega = B$, $b_x \cap \Omega = A$.

Задача 63 (1). (O, M_1, M)

Идея. Медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины.

1) $a_x \perp OM_1$; 2) $AM = 2MM_1$; 3) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 65 (2). (O, M_1, H_2)

Идея. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$.

1) $a_x \perp OM_1$; 2) $\omega(M_1, M_1H_2)$, $\omega \cap a_x = B, C$; 3) $b_x = CH_2$; 4) Ω, $\Omega \cap b_x = A$.

Задача 66 (2). (O, M_1, H)

Идея. Прямая Эйлера.

1) $a_x \perp OM_1$; 2) $OM = \frac{1}{2}MH$; 3) $AM = 2MM_1$; 4) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 69 (2). (O, M_1, I)

Идея. Алгебраический метод.

1) $a_x \perp OM_1$; 2) $IK_1 \perp a_x$, $IK_1 = r$; 3) $\omega(I, r)$; 4) $d = OI$, формула Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr \Rightarrow R = r + \sqrt{r^2 + d^2}$. Этот отрезок строится. После этого строится $\Omega = \Omega(O, R)$, $\Omega \cap a_x = B, C$; 5) $t(B, \omega) \cap t(C, \omega) = A$.

Примечание. Редкий случай, когда алгебраические решение эстетично. Синтетическое решение явно будет сложнее, но и его интересно найти. Эта задача оставляется вам, читатель.

Задача 70 (2). (O, M, H_1)

Идея. Прямая Эйлера.

1) $MH = 2OM$; 2) $h_{a_x} = HH_1$; 3) $a_x \perp h_{a_x}$; 4) $OM_1 \perp a_x$; 5) $MA = 2MM_1$; 6) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 75 (2). (O, H_1, H)

Идея. Прямая Эйлера.

1) $h_{a_x} = HH_1$; 2) $a_x \perp h_{a_x}$; 3) $OM_1 \perp a_x$; 4) $OM = \frac{1}{2}MH$; 5) $m_a = MM_1 \cap$ $\cap\, h_{a_x} = A$; 6) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 76 (3). (O, H_1, L_1)

Идея. Биссектриса равноудалена от сторон угла.

1) $a_x = H_1L_1$, $h_{a_x} \perp a_x$; 2) $\omega(L_1, L_1H_1)$; 3) $t(O, \omega)$, $t \cap h_{a_x} = A$; 4) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 82 (3). (O, I, L_1)

Идея. Алгебраический метод.

Пусть T — основание перпендикуляра из точки O на прямую IL_1. Пусть также $AT = WT = x$, $IT = d$, $L_1T = l$. Так как точка L_1 лежит на общей хорде BC описанной окружности Ω и окружности $\omega(W, WI)$, степень этой точки относительно каждой из этих окружностей одинакова (прямая BC является их радикальной осью). Значит, $L_1W \cdot L_1A = L_1I \cdot L_1W'$, где

W' — точка, диаметрально противоположная I относительно W. Получаем $(x-l)\cdot(x+l)=(l-d)\cdot(2x-d-l)$. Построив решение x этого квадратного уравнения, легко восстановить требуемый треугольник.

Задача 83 (1). (M_1, M_2, M_3)

Идея. Треугольник Евклида.

1) Провести три прямые Евклида — прямые, параллельные сторонам серединного треугольника $M_1M_2M_3$. Эти три прямые пересекутся в вершинах исходного треугольника.

Задача 84 (1). (M_1, M_2, M)

Идея. Медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины.

1) $AM = 2MM_1$, $BM = 2MM_2$; 2) $AM_2 \cap BM_1 = C$.

Задача 85 (2). (M_1, M_2, H_1)

Идея. Свойства медиан.

1) $a_x = M_1H_1$, $h_{a_x} \perp a_x$; 2) перпендикуляр l из M_2 к h_{a_x}; 3) $P = l \cap h_{a_x}$, $AP = PH_1$; 4) $C = a_x \cap AM_2$, $BM_1 = M_1C$.

Задача 86 (2). (M_1, M_2, H_3)

Идея. Свойства медиан.

1) $c_x \parallel M_1M_2$ через H_3; 2) $h_{c_x} \perp c_x$ через H_3; $P = h_{c_x} \cap M_1M_2$; $CP = PH_3$; 3) $A = CM_2 \cap c_x$; $B = CM_1 \cap c_x$.

Задача 87 (3). (M_1, M_2, H)

Долгое время в этой задаче мне было известно лишь алгебраическое решение. Я приведу его здесь, чтобы ярче подчеркнуть блестящее геометрическое решение, найденное моим учеником[7)].

1 способ. Идея. Алгебраический метод.

Пусть T — точка пересечения CH и M_1M_2. Ясно, что $CT \perp M_1M_2$. Пусть $M_1T = u$, $M_2T = v$, $HT = d$, $CT = x$. Понятно, что построив на прямой $h_{c_x} = HT \perp M_1M_2$ точку C на расстоянии x от прямой M_1M_2, мы легко сможем восстановить треугольник ABC.

Предположим, что задача решена и требуемый треугольник построен. Тогда по теореме Пифагора $CM_1^2 = x^2 + u^2$, $CM_2^2 = x^2 + v^2$, далее $BC = 2\sqrt{x^2+u^2}$, $AC = 2\sqrt{x^2+v^2}$. По теореме о средней линии $BH_3 = 2u$, $AH_3 = 2v$. Кроме того, $TH_3 = x$, $HH_3 = x - d$. Тогда $BH^2 = 4u^2 + (x-d)^2$.

Так как $AH \perp BC$, получаем, что $CH^2 - BH^2 = AC^2 - AB^2$. Имеем

$$(x+d)^2 - 4a^2 - (x-d)^2 = 4(x^2+v^2) - 4(u+vb)^2.$$

7) Ярославом Колотиловым, учеником 9 класса школы № 1199 «Лиги Школ».

После упрощения получаем квадратное уравнение $x^2 - xd - 2uv = 0$, корни которого легко строятся.

Построение:

1) $h_{c_x} = HT \perp M_1M_2$, $M_1T = u$, $M_2T = v$, $HT = d$; 2) $C \in HT$: $CT = x = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + uv}$; 3) $AC = 2CM_2$.

2 способ. (!) (Идея. Свойства медиан.)

Пусть точка D симметрична точке M_2 относительно точки M_3. Тогда BCM_2D — параллелограмм. Так как прямая BH перпендикулярна стороне CM_2 этого параллелограмма, она перпендикулярна и другой его стороне BD. Значит, треугольник HBD прямоугольный и середина O_1 отрезка HD является центром его описанной окружности. Отразим теперь точку O_1 относительно точки M_3, чтобы получить точку O_2. Из равенства треугольников BO_1M_3 и AO_2M_3 (по двум сторонам $M_3O_1 = M_3O_2$, $BM_3 = AM_3$ и углу между ними) следует, что отрезок AO_2 равен BO_1, то есть половине уже построенного отрезка HD. Следовательно, точка A лежит на окружности с центром в точке O_2 и радиусом $\frac{1}{2}HD$.

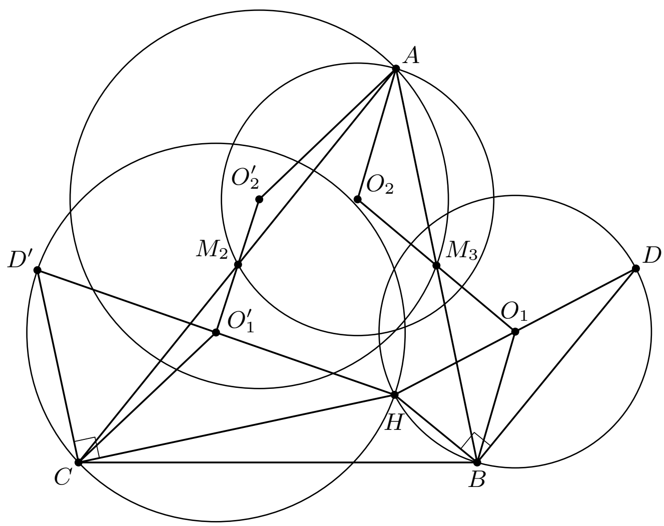


Рис. 4

Построив аналогичную конструкцию, отражая точку M_3 относительно M_2, получим, что точка A лежит на окружности с центром в точке O_2' и радиусом $\frac{1}{2}HD'$ (обозначения см. на рис. 4). Таким образом, можно найти точку A как точку пересечения двух окружностей и окончательно восстановить треугольник.

Построение:

1) $DM_3=M_2M_3$, $D'M_2=M_2M_3$; 2) $O_1=\frac{1}{2}[HD]$, $O_2=\frac{1}{2}[HD']$; 3) $M_3O_2=$ $=M_3O_1$, $M_3O_2'=M_3O_1'$; 4) $\omega_1\left(O_2,\,\frac{1}{2}HD\right)$, $\omega_2\left(O_2',\,\frac{1}{2}HD'\right)$; 5) $\omega_1\cap\omega_2=A$; 6) $CM_2=AM_2$, $BM_3=AM_3$.

Задача 92 (2). (M_1, M, H_2)

Идея. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$.

1) $AM=2MM_1$; 2) $b_x=AH_2$: $h_{b_x}=\perp b_x$; 3) $\omega(M_1, M_1H_2)$; 4) $\omega\cap h_{b_x}=B$; 5) $BM_1\cap\omega=C$.

Задача 93 (2). (M_1, M, H)

Идея. Прямая Эйлера.

1) $AM=2MM_1$; 2) $OM=\frac{1}{2}MH$; 3) Ω; 4) $a_x\perp h_{a_x}=AH$; 5) $a_x\cap\Omega=B, C$.

Задача 94 (2). (M_1, M, L_1)

Идея. Точка W.

1) $AM=2MM_1$; 2) $l_{a_x}=AL_1$, $a_x=M_1L_1$, $a_x\cap l_{a_x}=W_1$; 3) $m_1\cap m(AW_1)=O$; 4) Ω, $\Omega\cap a_x=B,C$.

Задача 96 (3). (M_1, M, I)

Идея. IM_1 высекает r на высоте h_a.

1) $AM=2MM_1$; 2) После этого задача свелась к задаче 43 (A, M, I).

Задача 97 (2). (M_1, H_1, H_2)

Идея. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$.

1) $a_x=M_1H_1$, $h_{a_x}\perp a_x$; 2) $\omega(M_1, M_1H_2)$, $\omega\cap a_x=B, C$; 3) $CH_2\cap h_{a_x}=A$.

Задача 101 (3). (M_1, H_1, I)

Идея. IM_1 высекает r на высоте h_a.

1) $a_x=M_1H_1$, $h_{a_x}\perp a_x$; 2) $IK_1\perp a_x$, $IK_1=r$; 3) $IM_1\cap h_{a_x}=T$, $AT=r$; 4) $\omega(I, r)$; 5) $t(A,\omega)\cap a_x=B, C$.

Задача 103 (2). (M_1, H_2, H)

Идея. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$.

1) $\omega(M_1, M_1H_2)$; 2) $HH_2\cap\omega=B$, $BM_1\cap\omega=C$; 3) $b_x=CH_2\perp BH_2$; 4) $h_{a_x}=HH_1\perp BC$; 5) $b_x\cap h_{a_x}=A$.

Задача 104 (2). (M_1, H_2, L_1)

Идея. Биссектриса равноудалена от сторон угла. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$ (см. рис. 5).

1) $a_x=M_1L_1$; 2) $\omega(M_1, M_1H_2)$, $\omega\cap a_x=B, C$; 3) окружность ω_1 с центром L_1, касающаяся $b_x=CH_2$; 4) $t(B,\omega_1)\cap b_x=A$.

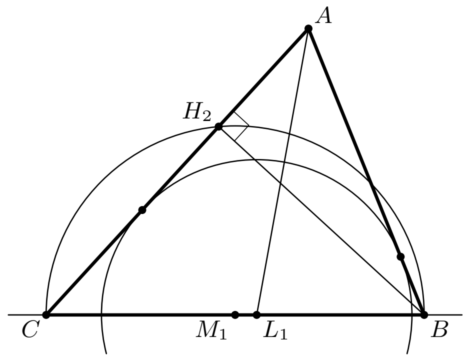


Рис. 5

Задача 105 (2). (M_1, H_2, L_2)

Идея. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$.

1) $b_x = L_2H_2$; 2) $\omega(M_1, M_1H_2)$, $\omega \cap b_x = C$; 3) $CM_1 \cap \omega = B$; 4) $\angle CBL_2 = \angle L_2BA$.

Задача 112 (2). (M_1, L_1, I)

Идея. Точка W. Теорема трилистника.

1) $a_x = M_1L_1$, $l_{a_x} = IL_1$; 2) $IK_1 \perp a_x$, $IK_1 = r$; 3) $\omega(I, r)$; 4) m_1, $m_1 \cap l_{a_x} = W_1$; 5) $\omega_1(W_1, IW_1) \cap a_x = B, C$; 6) $t(B, \omega) \cap l_{a_x} = A$.

Задача 116 (2). (M, H_1, H)

Идея. Прямая Эйлера.

1) $OM = \frac{1}{2}MH$; 2) $h_{a_x} = HH_1$, $a_x \perp h_{a_x}$; 3) $OM_1 \perp a_x$; 4) $MA = 2MM_1$; 5) Ω, $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 117 (2). (M, H_1, L_1)

Идея. Свойства медиан. Точка W.

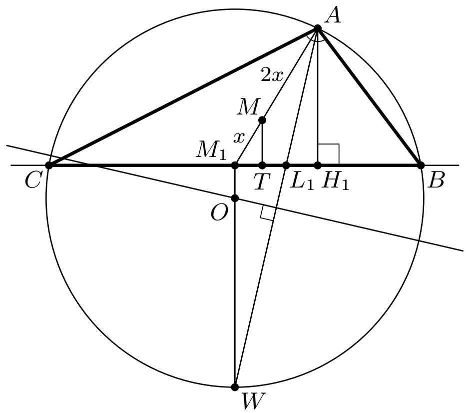


Рис. 6

1) $a_x = L_1H_1$, $h_{a_x} \perp a_x$; 2) $MT \perp a_x$, $TM_1 = \frac{1}{2}H_1T$; 3) $MM_1 \cap h_{a_x} = A$; 4) $l_{a_x} = AL_1$; 5) $m_1 \cap l_{a_x} = W_1$; 6) $m_1 \cap m(AW_1) = O$; 7) $\Omega \cap a_x = B, C$.

Задача 124 (2). (H_1, H_2, H_3)

Идея. $H = I_H$.

1) Построить биссектрисы ортотреугольника и провести к ним перпендикуляры.

Задача 125 (1). (H_1, H_2, H)

Идея. Высоты перпендикулярны сторонам.

1) $a_x \perp HH_1$; 2) $b_x \perp HH_2$; 3) $C = a_x \cap b_x$, $A = b_x \cap HH_1$, $B = a_x \cap HH_2$.

Задача 126 (3). (H_1, H_2, L_1)

Идея. Сегмент.

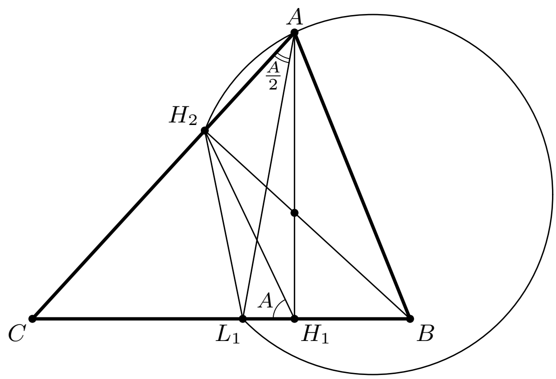


Рис. 7

1) $a_x = L_1H_1$, $h_{a_x} \perp a_x$, $\angle H_2H_1L_1 = A$; 2) $s(H_2L_1, A/2) \cap h_{a_x} = A$; 3) $b_x = AH_2$, $b_x \cap a_x = C$; 4) $c_x\colon \angle(c_x, b_x) = A$, $c_x \cap a_x = B$.

Задача 131 (3). (H_1, H, I)

Идея. Алгебраический метод (см. рис. 8).

Естественны начальные шаги построения: $h_{a_x} = HH_1$, $a_x \perp h_{a_x}$, $IK_1 \perp a_x$; $IK_1 = r$. Пусть T — основание перпендикуляра из точки I на прямую $HH_1 = h_{a_x}$. Обозначим $IT = d$, $AH_1 = x$. Пусть теперь прямая IM_1 пересекает прямую h_{a_x} в точке N. Известно, что $AN = r$ (см. решение задачи 43). Обозначая, как обычно, $\varphi = \angle IAH$, имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{IT}{AT} = \frac{q}{h_a - r}.$$

Пусть теперь E_1 — середина отрезка AH. Тогда $AN = IK_1 = TH_1 = r$, $NH_1 = h_a - r$, $NT = h_a - 2r$, $E_1H_1 = h_a - x/2$. Из подобия треугольников

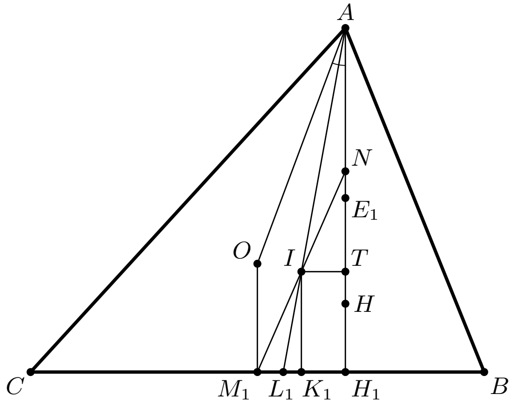


Рис. 8

INT и M_1NH_1 получаем

$$\frac{H_1M_1}{IT} = \frac{NH_1}{NT} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{H_1M_1}{q} = \frac{h_a - r}{h_a - 2r},$$

откуда

$$H_1M_1 = q\frac{h_a - r}{h_a - 2r}.$$

С другой стороны, так как $AO \parallel M_1E_1$, то $\angle M_1E_1H_1 = 2\varphi = B - C$, и из треугольника $M_1E_1H_1$ получаем $H_1M_1 = H_1E_1 \operatorname{tg} 2\varphi$. Тогда

$$H_1M_1 = H_1E_1 \operatorname{tg} 2\varphi = \left(h_a - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Приравнивая два полученных выражения для H_1M_1 и подставляя найденное выше значение для $\operatorname{tg} \varphi$, получаем:

$$q \cdot \frac{h_a - r}{h_a - 2r} = \left(h_a - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{2\dfrac{q}{h_a - r}}{1 - \left(\dfrac{q}{h_a - r}\right)^2}.$$

Это уравнение линейно относительно $x = AH$. Следовательно, этот отрезок строится циркулем и линейкой. Построив точку A, строим N, M_1 и $\Omega(O, OA)$ и получаем точки B и C.

Задача 133 (2). (H_1, L_1, I)

Идея. Касательная.

1) $a_x = L_1H_1$, $h_{a_x} \perp a_x$; 2) $IK_1 \perp a_x$, $IK_1 = r$; 3) $\omega(I, r)$; 4) $L_1I \cap h_{a_x} = A$; 5) $t(a, \omega) \cap a_x = B, C$.

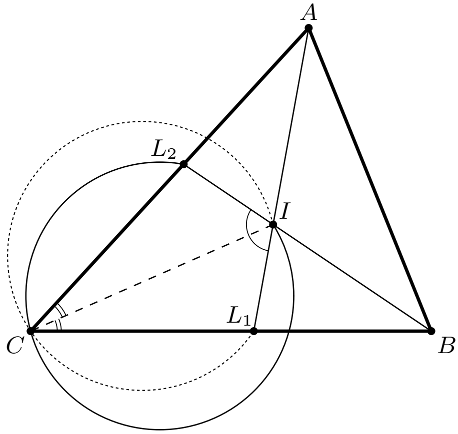


Рис. 9

Задача 139 (3). (I, L_1, L_2)

Идея. Сегмент.

1) $\angle L_1IL_2 = 90^\circ + C/2 \Rightarrow C/2$; 2) $s_1(IL_1, C/2)$, $s_2(IL_2, C/2)$, $s_1 \cap s_2 = C$; 3) $l_{a_x} = IL_1$, $l_{b_x} = IL_2$,; 4) $CL_1 = a_x$, $CL_2 = b_x$; 5) $a_x \cap l_{b_x} = B$, $b_x \cap l_{a_x} = A$.

§ 6. Навигатор

В этом разделе собраны идеи, которые я применял при решении задач списка Верника. Удивительно, но такие простые по постановке задачи обладают широчайшим диапазоном сложности применяемых методов. Некоторые из них настолько просты, что соответствующие решения совсем не нуждаются ни в каких пояснениях и являются простыми упражнениями. Некоторые потребовали применения, например, теоремы Эйлера. Наконец, есть несколько задач, в которых необходимо знание типично олимпиадной тематики, например задача 43 и к ней примыкающие. Я потратил много часов на их решение, но это были счастливые часы.

6.1. Навигатор по номеру

№	Задача	Трудность	Идея
2	A, B, M_1	1	Медиана делит сторону пополам
4	A, B, M	1	Медианы делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины
7	A, B, H	1	Высоты перпендикулярны сторонам

№	Задача	Трудность	Идея
8	A, B, L_1	1	Симметрия относительно биссектрисы
10	A, B, I	1	Симметрия относительно биссектрисы
11	A, O, M_1	1	O — точка пересечения медиатрис
13	A, O, M	1	O — точка пересечения медиатрис. Медианы делятся в отношении $2:1$, считая от вершины
14	A, O, H_1	1	Высоты перпендикулярны сторонам
15	A, O, H_2	1	Высоты перпендикулярны сторонам
16	A, O, H	2	$OM_1 = \frac{1}{2}AH$
17	A, O, L_1	2	Точка W
18	A, O, L_2	2	Сегмент
19	A, O, I	2	Теорема трилистника
20	A, M_1, M_2	1	Медианы делят стороны пополам
23	A, M_1, H_2	2	Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
24	A, M_1, H	2	$OM_1 = \frac{1}{2}AH$
25	A, M_1, L_1	2	Точка W
27	A, M_1, I	3	IM_1 высекает r на высоте h_a
28	A, M_2, M_3	1	Медианы делят стороны пополам
29	A, M_2, M	1	Медианы делят стороны пополам
33	A, M_2, H	1	Медианы делят стороны пополам
34	A, M_2, L_1	1	Симметрия относительно биссектрисы
36	A, M_2, L_3	1	Симметрия относительно биссектрисы
37	A, M_2, I	1	Касательная
39	A, M, H_2	2	Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
40	A, M, H	2	Прямая Эйлера. Свойства медиан

№	Задача	Трудность	Идея
41	A, M, L_1	2	Точка W
43	A, M, I	3	IM_1 высекает r на высоте h_a
44	A, H_1, H_2	1	Высоты перпендикулярны сторонам треугольника
47	A, H_1, L_2	3	Биссектриса равноудалена от сторон угла
48	A, H_1, I	1	Касательная
49	A, H_2, H_3	1	Высоты перпендикулярны сторонам треугольника
51	A, H_2, L_1	1	Симметрия относительно биссектрисы
53	A, H_2, L_3	3	Биссектриса равноудалена от сторон угла
54	A, H_2, I	2	Касательная
55	A, H, L_1	3	Угол $\varphi = \dfrac{B-C}{2}$
57	A, H, I	3	Алгебраический метод
58	A, L_1, L_2	3	Биссектриса равноудалена от сторон угла
60	A, L_2, L_3	2	Сегмент
61	A, L_2, I	1	Симметрия относительно биссектрисы
62	O, M_1, M_2	1	Свойства медиан
63	O, M_1, M	1	Медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины
65	O, M_1, H_2	2	Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
66	O, M_1, H	2	Прямая Эйлера
69	O, M_1, I	2	Алгебраический метод
70	O, M, H_1	2	Прямая Эйлера
75	O, H_1, H	2	Прямая Эйлера

№	Задача	Трудность	Идея
76	O, H_1, L_1	3	Биссектриса равноудалена от сторон угла
82	O, L_1, I	3	Алгебраический метод. Степень точки относительно окружности
83	M_1, M_2, M_3	1	Треугольник Евклида
84	M_1, M_2, M	1	Медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины
85	M_1, M_2, H_1	2	Свойства медиан
86	M_1, M_2, H_3	2	Свойства медиан
87	M_1, M_2, H	3	Алгебраический метод. Свойства медиан
92	M_1, M, H	2	Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
93	M_1, M, H	2	Прямая Эйлера
94	M_1, M, L_1	2	Точка W
96	M_1, M, I	3	IM_1 высекает r на высоте h_a
97	M_1, H_1, H_2	2	Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
101	M_1, H_1, I	3	IM_1 высекает r на высоте h_a
103	M_1, H_2, H	2	Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
104	M_1, H_2, L_1	2	Биссектриса равноудалена от сторон угла. Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
105	M_1, H_2, L_2	2	Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1H_2)$
112	M_1, L_1, I	2	Точка W. Теорема трилистника
116	M, H_1, H	2	Прямая Эйлера
117	M, H_1, L_1	2	Свойства медиан. Точка W

№	Задача	Трудность	Идея
124	H_1, H_2, H_3	2	$H = I_H$
125	H_1, H_2, H	2	Высоты перпендикулярны сторонам
126	H_1, H_2, L_1	3	Сегмент
131	H_1, H, I	3	Алгебраический метод
133	H_1, L_1, I	2	Касательная
139	I, L_1, L_2	3	Сегмент

6.2. Навигатор по трудности

Я различаю здесь трудность и сложность задачи. Трудность понимается как наличие в задаче содержательных геометрических идей. Сложность понимается как «сложенность», то есть наличие в задаче нескольких шагов, не обязательно трудных. В какой-то мере представление о сложности задачи даёт количество пунктов построения. Разумеется, приведённая классификация является субъективной.

Трудность	Задачи	Примечание
1. Простые построения	2, 4, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 20, 28, 29, 33, 34, 36, 37, 44, 48, 49, 51, 61, 62, 63, 83, 84	Построения в этих задачах просты и естественны. Каждая линия логично влечёт следующую. Эти задачи можно рекомендовать для первоначального знакомства
2. Задачи средней трудности	16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 39, 40, 41, 54, 60, 65, 66, 69, 70, 75, 85, 86, 92, 93, 94, 97, 103, 104, 105, 112, 116, 117, 124, 125, 133	Имеется в виду нормальная трудность для выпускника хорошего физико-математического класса
3. Трудные задачи	27, 43, 47, 53, 55, 57[8], 58, 76, 82, 87, 96, 101, 126, 131, 139	Задачи повышенной трудности, иногда содержащие факты олимпиадной тематики

[8] Задачи 57, 82, 87 и 131 ждут своего геометрического решения.

6.3. Навигатор по идеям

При решении задач списка Верника я применял многие факты элементарной геометрии. Не все они входят в стандартный школьный курс. Я не ставил перед собой целью доказать здесь их все: это непомерно увеличило бы объём статьи. Заинтересованный читатель может найти доказательства в разнообразной литературе. Например, заведомо всё есть в классическом сборнике В. В. Прасолова [5]. Интересная подборка задач и обсуждение того факта, что прямая IM_1 высекает на высоте AH_1 отрезок, равный радиусу описанной окружности, можно найти в замечательной статье Г. Б. Филипповского и А. В. Карлюченко «Блестящие свойства прямой M_1I в треугольнике!» в сборнике [7]. Часть терминологии я позаимствовал из книг И. А. Кушнира [3], [4], [2] (точка W, треугольник Евклида[9]).

Идея	Задачи	Примечание
Алгебраический метод	57, 69, 82, 87, 131	Построение отрезка по формуле
Биссектриса равноудалена от сторон угла	47, 53, 58, 76, 104	Простой факт, широко применяемый в задачах на восстановление треугольника
Вспомогательная окружность $\omega(M_1, M_1, H_2)$	23, 39, 65, 92, 97, 103, 104, 105	Так как $\angle BH_2C = \angle BH_3C = 90°$, четыре точки B, C, H_2 и H_3 лежат на одной окружности с диаметром BC и центром M_1
Высоты перпендикулярны сторонам	7, 14, 15, 44, 49, 125	В этих задачах этот факт является единственно используемым, и поэтому они довольно просты
Касательная	37, 48, 54, 133	Линия получается как касательная к уже проведённой окружности.
Прямая Эйлера	40, 66, 70, 75, 93, 116	Точки O, M и H лежат на одной прямой, причём $HM = 2OM$.

[9] Мне хотелось бы защитить этот термин. При доказательстве первой теоремы евклидовой (в отличие от аффинной!) геометрии — теоремы о сумме углов треугольника мы проводим как раз прямую Евклида. Кроме того, проведение трёх прямых Евклида позволяет доказать теорему Эйлера. В книге Ефремова «Новая геометрия треугольника»[1] этот треугольник называется *удвоенным треугольником*. Кстати, именно у Ефремова я позаимствовал термин *медиатриса*.

Идея	Задачи	Примечание
Свойства медиан	2, 4, 13, 20, 28, 29, 33, 40, 62, 63, 84, 85, 86, 87, 117	Медианы делят стороны пополам и делятся в отношении $2:1$, считая от вершины
Сегмент	18, 60, 126, 139	Сегмент, вмещающий данный угол, — ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом
Симметрия относительно биссектрисы	8, 10, 34, 36, 51, 61	Стороны угла симметричны относительно биссектрисы этого угла
Теорема трилистника	19, 112	$CW_1 = IW_1 = BW_1$
Точка W	17, 25, 41, 94, 112, 117	Биссектриса угла треугольника и медиатриса противоположной стороны пересекаются на описанной окружности (в точке W)
Треугольник Евклида	83	Треугольник, образованный прямыми, параллельными сторонам данного треугольника и проходящими через его вершины
Угол $\varphi = \dfrac{B-C}{2}$	55	$\angle(h_a, l_a) = \dfrac{B-C}{2}$
$H = I_H$	124	Ортоцентр треугольника является инцентром его ортотреугольника
IM_1 высекает r на высоте h_a	27, 43, 96, 101	Олимпиадный факт
O — точка пересечения медиатрис	11, 13	Известный факт
$OM_1 = \frac{1}{2}AH$	16, 24	Расстояние от вершины до ортоцентра вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до противоположной стороны

Список литературы

[1] *Ефремов Д.* Новая геометрия треугольника. Одесса, Типография Бланкоиздательства М. Шпенцера, д. №64, 1902.

[2] *Кушнир И. А.* Геометрия на баррикадах 2. Киев: Знання Украины, 2011.

[3] *Кушнир И. А.* Геометрия на баррикадах. Киев: Факт, 2009.

[4] *Кушнир И. А.* Геометрия. Поиск и вдохновение. М.: МЦНМО, 2013.

[5] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2006.

[6] *Устинов А. В.* Можно ли построить треугольник по основаниям биссектрис? // «Потенциал»: Математика, Физика, Информатика. 2013. Т. 10. С. 41–50.

[7] Учим математике 4 (материалы открытой школы-семинара учителей математики) / Под ред. А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова. М.: МЦНМО, 2014.

[8] *Фурсенко В. В.* Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника // Математика в школе. 1937. Т. 5. С. 4–30; 1937. Т. 6. С. 21–45.

[9] *Euler L.* Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum // Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. 1767. V. 11. P. 103–123.

[10] *Marinković V., Janičić P.* Towards understanding triangle construction problems // Intelligent Computer Mathematics. 2012. V. 7362. P. 127–142.

[11] *Meyers L. F.* Update on William Wernick's «triangle constructions with three located points» // Mathematics Magazine. 1996. V. 69, №1. P. 46–49.

[12] *Sandifer E.* How Euler did it. The Euler line // MAA Online. 2009.

[13] *Specht E.* Wernicks liste, `http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/wernick/`.

[14] *Wernick W.* Triangle constructions with three located points // Mathematics Magazine. 1982. V. 55. P. 227–230.

С. А. Беляев, Русская математическая школа,
Фрамингем, Массачусетс (США)

`srgblv@ya.ru`, `sergey.belyaev@metrowestschool.com`

Наш семинар: математические сюжеты

Точки на прямых, шнурки и доминошки

К. П. Кохась, А. И. Храбров

В 2014 г. на Санкт-Петербургской олимпиаде школьников по математике была предложена следующая задача Н. Филонова.

> *На двух параллельных прямых отмечено по* 40 *точек. Их разбивают на* 40 *пар так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом.* (*В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке.*) *Докажите, что число способов это сделать меньше* 3^{39}.

Последовательность, возникающая в этой задаче, обладает богатыми комбинаторными реализациями, их разнообразие просто изумляет. Конечно, число их (пока ещё?) не столь велико, как у чисел Каталана, но и сама последовательность на добрую сотню лет моложе.

В этой статье мы приводим обзор известных (и неизвестных) реализаций этой последовательности.

Треугольник $a_{k,n}$

Рассмотрим следующую комбинаторную конструкцию. Пусть даны две параллельные прямые, на одной отмечено k точек, на другой n точек. Отмеченные точки разбивают на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке. Полученную картинку будем называть *конфигурацией* (точек и отрезков на двух прямых) или *разбиением* (точек на пары). Количество разбиений обозначим через $a_{k,n}$. Например, $a_{2,4} = 4$, как показывает следующий рисунок.

Условимся считать, что $a_{k,n} = 0$, если сумма $k + n$ нечётна или если хотя бы одно из чисел k и n отрицательно. Ненулевые числа $a_{k,n}$ удобно изображать, располагая их в виде треугольника:

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&1&1&&& \\ &&1&2&2&2&1&& \\ &1&3&4&5&4&3&1& \\ 1&4&7&10&11&10&7&4&1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} &&a_{0,0}&& \\ &a_{2,0}&a_{1,1}&a_{0,2}& \\ a_{4,0}&a_{3,1}&a_{2,2}&a_{1,3}&a_{0,4} \\ &&\ldots&& \\ &&\ldots&& \end{array} \tag{1}$$

Рекуррентные соотношения

Выразим число $a_{k+1,n+1}$ через числа $a_{i,j}$ с меньшей суммой индексов. Обозначим точки на верхней прямой буквами $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ (слева направо), а на нижней прямой — $B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}$. Количество разбиений, содержащих ребро A_1B_1, равно $a_{k,n}$, количество разбиений, содержащих ребро A_1A_2, равно $a_{k-1,n+1}$, а количество разбиений с ребром B_1B_2 — $a_{k+1,n-1}$. Тогда $a_{k+1,n+1}$ равно сумме этих трёх чисел, но с поправкой. При подсчёте суммы мы дважды учитываем разбиения, содержащие оба отрезка A_1A_2 и B_1B_2, количество таких разбиений равно $a_{k-1,n-1}$ (рис. 1).

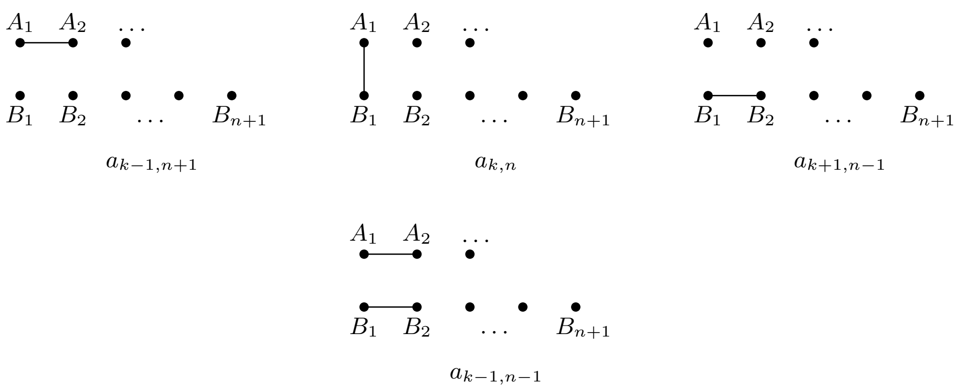


Рис. 1. Количество разбиений при удалении одного ребра

Таким образом, выполнено замечательное рекуррентное соотношение:

$$a_{k+1,n+1} = a_{k,n} + a_{k-1,n+1} + a_{k+1,n-1} - a_{k-1,n-1}. \tag{2}$$

Так, число 11, расположенное в нижней строке числового треугольника (1), равно сумме $4+5+4-2$. Если какие-то из индексов отрицательны, то мы считаем соответствующее число равным нулю, и поэтому соотношение (2) справедливо также и для чисел на краю треугольника.

Докажем ещё одно рекуррентное соотношение для нашей последовательности $a_{k,n}$:

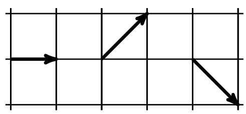
$$a_{k,n} = a_{k-2,n} + (a_{k-1,n-1} + a_{k-1,n-3} + a_{k-1,n-5} + \ldots). \tag{3}$$

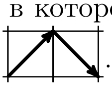
Слагаемое $a_{k-2,n}$ равно числу конфигураций, содержащих ребро A_1A_2. Все остальные конфигурации содержат отрезок, выходящий из точки A_1 на нижнюю прямую, — эти конфигурации учтены в сумме, написанной в скобках. Действительно, точка A_1 может быть в паре лишь с точками $B_3, B_5, \ldots$ (иначе точки, лежащие ниже прямой A_1B_k, не удастся разбить на пары). Если точка A_1 соединена с B_{2i+1}, $i = 0, 1, 2, \ldots$, то эта конфигурация обязательно содержит отрезки $B_1B_2, \ldots, B_{2i-1}B_{2i}$, поэтому число таких конфигураций равно $a_{k-1,n-2i-1}$.

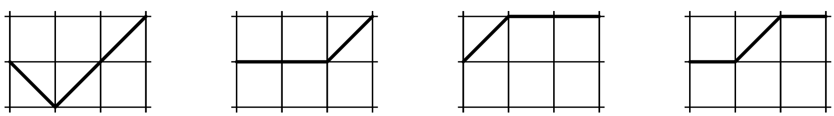
Пользуясь рекуррентным соотношением (3) и симметрией $a_{k,n} = a_{n,k}$, нетрудно проверить по индукции, что в каждой строке числа $a_{k,n}$ возрастают при движении от краёв к центру.

Беспиковые пути Моцкина

Путь Моцкина — это (ориентированная) ломаная на координатной плоскости, у которой все звенья идут в направлениях, показанных на рисунке справа. Обычно считают, что начало пути находится в точке $(0,0)$. *Беспиковым* путём Моцкина будем называть путь Моцкина, в котором нет ни одного «пика»,



т. е. фрагмента вида . Количество беспиковых путей Моцкина, идущих из точки $(0,0)$ в точку (k,n), обозначим через $m_{k,n}$. Очевидно, мы можем считать в этом определении, что $-k \leqslant n \leqslant k$, так как в других точках с абсциссой k путь Моцкина оканчиваться не может. Ниже изображены всевозможные беспиковые пути Моцкина из точки $(0,0)$ в точку $(3,1)$, значит, $m_{3,1} = 4$.



Теорема 1. $m_{k,n} = a_{k-n,k+n}$.

Доказательство. Каким образом беспиковый путь Моцкина может прийти в точку (k, n)? Очевидно, либо из точки $(k-1,\ n-1)$, либо из $(k-1, n)$, либо из $(k-1, n+1)$. В последнем случае путь не должен иметь пика в точке $(k-1, n+1)$, т. е. он не должен приходить в точку $(k-1, n+1)$ из точки $(k-2, n)$. Таким образом, получаем рекуррентное соотношение $m_{k,n} = m_{k-1,n-1} + m_{k-1,n} + m_{k-1,n+1} - m_{k-2,n}$. Оно в точности соответствует соотношению (2). □

Сумма биномиальных коэффициентов

Пусть числа k и n одинаковой чётности. Возьмём конфигурацию из k точек на верхней прямой и n точек на нижней прямой и сотрём отрезки, концы которых лежат на разных прямых. Оставшийся набор горизонтальных отрезков однозначно определяет исходное разбиение точек на пары (рис. 2). Действительно, самая левая из оставшихся точек на верхней прямой должна быть соединена с самой левой из оставшихся точек на нижней прямой, вторая слева точка на верхней прямой должна быть соединена со второй слева точкой на нижней прямой и т. д., поскольку в противном случае отрезки будут пересекаться.

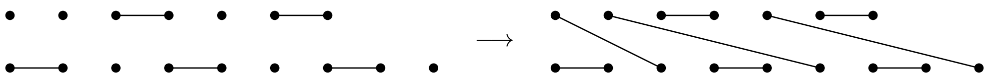
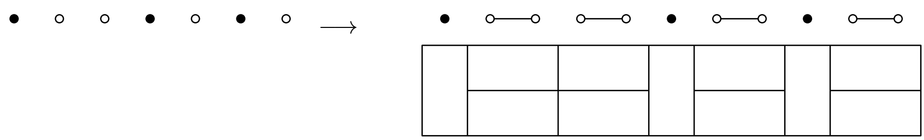


Рис. 2. Горизонтальные отрезки однозначно задают разбиение точек на пары

Решим вспомогательную задачу. Назовём (j, ℓ)-конфигурацией на прямой набор из ℓ непересекающихся отрезков и ещё j точек, не лежащих на этих отрезках. Будем считать, что концы отрезков — белые точки, а остальные точки — чёрные. Найдём, сколько существует различных (j, ℓ)-конфигураций на прямой. Чтобы нарисовать конфигурацию, сначала нарисуем на прямой $j + \ell$ точек, выберем ℓ из них и покрасим их в белый цвет. Затем справа от каждой белой точки нарисуем ещё одну белую точку и соединим их отрезком (рис. 3). Ясно, что для разных способов выбора ℓ белых точек будут получаться разные конфигурации. Таким образом, количество конфигураций равно количеству способов выбора белых точек, т. е. $C_{j+\ell}^{\ell}$.

Если обозначить через k общее количество чёрных и белых точек (j, ℓ)-конфигурации, т. е. $k = j + 2\ell$, то это же самое число конфигураций можно записать в виде $C_{\frac{k+j}{2}}^{\frac{k-j}{2}}$ или $C_{\frac{k+j}{2}}^{j}$. Возвращаясь к исходной задаче о точках, расположенных на двух прямых, мы получаем, что количество



$$11 = 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2$$

$$12 = 1 + (2 + 2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) = 1 + 5 + 3 + 3$$

Рис. 3. *Раскраска точек в два цвета однозначно определяет горизонтальные отрезки, разбиения на домино и композиции*

способов выбрать несколько горизонтальных отрезков на верхней прямой (k точек, из них j одиночных) равно $C^j_{\frac{k+j}{2}}$, а на нижней прямой (n точек, из них j одиночных) — $C^j_{\frac{n+j}{2}}$, при этом напомним, что числа k и n имеют одинаковую чётность, а для того чтобы неодиночные точки распадались на пары, нужно, чтобы число j имело ту же чётность. Таким образом, мы получаем явную формулу для $a_{k,n}$:

$$a_{k,n} = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant \min\{k,n\} \\ j \equiv k \pmod 2}} C^{\frac{k-j}{2}}_{\frac{k+j}{2}} C^{\frac{n-j}{2}}_{\frac{n+j}{2}} = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant \min\{k,n\} \\ j \equiv k \pmod 2}} C^j_{\frac{k+j}{2}} C^j_{\frac{n+j}{2}}.$$

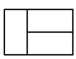
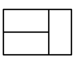
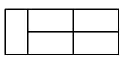
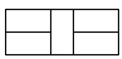
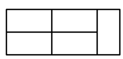
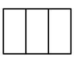
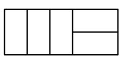
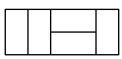
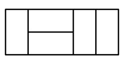
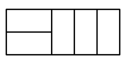
При $k = n$ формула заметно проще, поскольку в этом случае $\frac{n-j}{2} = \frac{k-j}{2} = \ell$ и $\frac{n+j}{2} = \frac{k+j}{2} = k - \ell$, и значит,

$$a_{n,n} = \sum_{\ell=0}^{[n/2]} \left(C^{\ell}_{n-\ell}\right)^2.$$

Доминошки

Обозначим через $d_{k,n}$ число способов замостить доминошками два прямоугольника — $2 \times k$ и $2 \times n$ — так, чтобы замощения содержали одинаковое число вертикальных домино.

Например, в следующей таблице приведены разбиения прямоугольников 2×3 и 2×5, содержащие 1 или 3 вертикальных домино. Рассматривая таблицу, мы приходим к выводу, что $d_{3,5} = 6 + 4 = 10$.

j	2×3	2×5	Число вариантов
1	, 	, , 	$2 \cdot 3 = 6$
3		, , , 	$1 \cdot 4 = 4$

Теорема 2. $d_{k,n} = a_{k,n}$.

Доказательство есть в предыдущем разделе. Нужно вместо слов «(j,ℓ)-конфигурация» читать «замощение прямоугольника $2\times(j+2\ell)$», вместо слов «горизонтальный отрезок» читать «пара горизонтальных домино», а вместо слов «чёрная точка» — «вертикальное домино» (см. рис. 3). □

Числа Фибоначчи

Обозначим через f_m сумму чисел в m-й строке нашего треугольника (1), т. е.

$$f_m = a_{2m,0} + a_{2m-1,1} + a_{2m-2,2} + \ldots + a_{1,2m-1} + a_{0,2m}.$$

Просуммируем соотношения (2) по всем k и n, сумма которых равна $2m+2$. В левой части получим сумму всех элементов $(m+1)$-й строки. В правой части со знаком плюс получим утроенную сумму всех элементов m-й строки, а со знаком минус сумму всех элементов $(m-1)$-й строки. Таким образом, $f_{m+1} = 3f_m - f_{m-1}$. Но такому же рекуррентному соотношению удовлетворяют числа Фибоначчи F_{2m}:

$$F_{2m+2}=F_{2m+1}+F_{2m}=2F_{2m}+F_{2m-1}=2F_{2m}+(F_{2m}-F_{2m-2})=3F_{2m}-F_{2m-2}.$$

Поскольку суммы чисел в первых двух строках равны $F_2 = 1$ и $F_4 = 3$, получаем соотношение $f_m = F_{2m}$. Таким образом, сумма чисел в m-й строке равна $2m$-му числу Фибоначчи.

Из этого наблюдения следует, что для чисел $a_{k,n}$ выполнена оценка $a_{k,n} \leqslant F_{n+k}$. Ей можно придать более конкретный вид благодаря тому, что для чисел Фибоначчи известна явная формула — формула Бине:

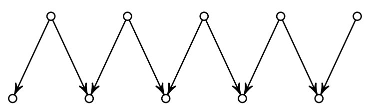
$$F_m = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m}{\sqrt{5}}.$$

Второе слагаемое в числителе мало́ по модулю. Если при чётном m его отбросить, это лишь слегка увеличит правую часть. Значит,

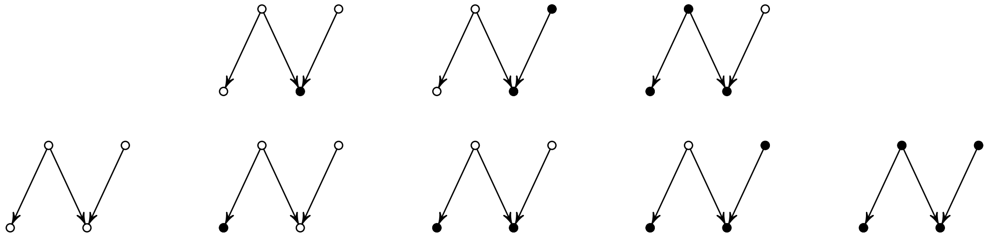
$$a_{k,n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+k}. \qquad (4)$$

«Заборы»

Рассмотрим двудольный ориентированный граф Z_{2n} — «забор», доли которого содержат по n вершин.



Набор вершин A этого графа назовём *замкнутым*, если из него нельзя выйти по стрелочкам, т. е. выполнено свойство: если $x \to y$ — ребро нашего графа и $x \in A$, то $y \in A$. Пусть $z_{2n,k}$ — это количество всевозможных замкнутых наборов вершин графа Z_{2n}, состоящих из k вершин ($0 \leqslant k \leqslant 2n$). Замкнутые наборы графа Z_4 изображены на рис. 4.

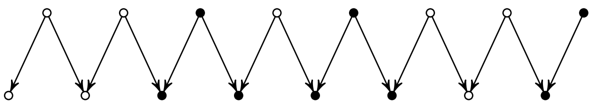


$k = 0$ $z_{4,0} = 1$ $k = 1$ $z_{4,1} = 2$ $k = 2$ $z_{4,2} = 2$ $k = 3$ $z_{4,3} = 2$ $k = 4$ $z_{4,4} = 1$

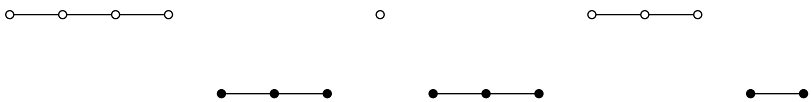
Рис. 4. *Замкнутые наборы графа* Z_4

Теорема 3. $z_{2n,k} = a_{2n-k,k}$.

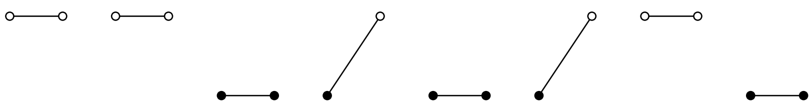
Доказательство. См. рис. 5. □



Пройдём вдоль забора, отмечая вершины, принадлежащие и не принадлежащие замкнутому множеству.



«Разнесём» вершины на две параллельные прямые. На верхней прямой первая (возможно, пустая) группа всегда чётная, остальные — нечётные. На нижней прямой наоборот.



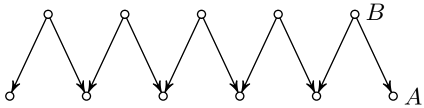
Последнюю вершину в каждой нечётной группе на нижней прямой соединим с первой вершиной следующей нечётной группы на верхней прямой. Остальные вершины в группах разобьём на пары.

Рис. 5. *Биекция между замкнутыми множествами графа* Z_{2n} *и разбиениями точек на пары*

Числа Фибоначчи с нечётными номерами

Внимательного читателя уже, должно быть, некоторое время беспокоит вопрос: почему суммы строк треугольника (1) задаются числами Фибоначчи только с чётными номерами? Куда же делись числа Фибоначчи с нечётными номерами? А вот куда.

Рассмотрим нечётный забор Z_{2n+1}, у которого верхняя доля содержит n вершин, а нижняя — $n+1$.



(5)

Определение замкнутого множества вершин для такого забора не требует никаких изменений. Пусть $z_{2n+1,k}$ — это количество всевозможных замкнутых наборов вершин графа Z_{2n+1}, состоящих из k вершин $(0 \leqslant k \leqslant 2n+1)$. Отметим, что числа $z_{2n+1,k}$, вообще говоря, не обладают свойством симметрии, т. е., как правило, $z_{2n+1,k} \neq z_{2n+1,2n+1-k}$.

Нетрудно проверить, что выполнены рекуррентные соотношения

$$z_{2n,k} = z_{2n-1,k} + z_{2n-2,k-2}, \qquad z_{2n+1,k} = z_{2n,k-1} + z_{2n-1,k}.$$

Например, проверим второе соотношение. Пусть A и B — две последние вершины забора Z_{2n+1} (как на диаграмме (5)). Рассмотрим произвольное замкнутое множество с k вершинами. Если вершина A принадлежит этому замкнутому множеству, то, удалив её, получим замкнутое множество забора Z_{2n} с $k-1$ вершинами. Если же вершина A не принадлежит этому замкнутому множеству, то вершина B тоже не принадлежит и, удаляя обе вершины, мы получим замкнутое множество забора Z_{2n-1}, содержащее k вершин. Нетрудно видеть, что обе операции удаления реализуют биекции между соответствующими семействами замкнутых множеств, откуда и следует доказываемая формула.

Объединив последовательности $z_{n,k}$ для чётных и нечётных n, можно расположить их в виде треугольника, как это делают с биномиальными коэффициентами (рис. 6). Рекуррентные соотношения, написанные выше, проиллюстрированы равенствами $10=7+3$ и $5=4+1$ для чисел в рамочках.

Рассуждая, как в разделе «Числа Фибоначчи», мы сразу приходим к выводу, что суммы чисел в строках удовлетворяют рекуррентному соотношению (и начальным данным) для чисел Фибоначчи: $f_{m+1} = f_m + f_{m-1}$.

Похожая картина будет иметь место, если мы рассмотрим нечётные заборы, у которых верхняя доля содержит $n+1$ вершину, а нижняя — n вершин.

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad \boxed{3} \quad 4 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad \boxed{7} \quad 7 \quad 5 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 7 \quad \boxed{10} \quad 11 \quad 10 \quad 7 \quad 4 \quad 1
\end{array}$$

Рис. 6. *Треугольник* $z_{n,k}$

Производящая функция

Рассмотрим формальный степенной ряд

$$F(x, y) = \sum_{k,n} a_{k,n} x^k y^n.$$

Рекуррентное соотношение (2) означает, что для функции $F(x, y)$ выполнено тождество

$$(1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 - xy)F(x, y) = 1.$$

Отсюда мы можем найти F:

$$F(x, y) = \frac{1}{(1 - x^2)(1 - y^2) - xy}. \tag{6}$$

Композиции

Пусть фиксировано множество S, состоящее из натуральных чисел. *Композицией* числа n называется разложение числа n в сумму нескольких слагаемых, каждое из которых принадлежит S. Разложения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными. Например, (j, ℓ)-конфигурацию на прямой или замощение полоски $2 \times n$ доминошками можно интерпретировать как композицию числа n со слагаемыми из множества $\{1, 2\}$ или как композицию числа $n+1$ с нечётными слагаемыми (см. рис. 3).

Это наблюдение позволяет переформулировать теорему 2, построив ещё пару реализаций последовательности $a_{n,k}$ в терминах композиций.

Теорема 2$'$. *Число $a_{k,n}$ равно количеству пар композиций числа k и числа n со слагаемыми из множества $\{1, 2\}$, в которых количества единиц одинаковы.*

Теорема $2''$. *Число $a_{k,n}$ равно количеству пар композиций числа $k+1$ и числа $n+1$, в которых поровну слагаемых и все слагаемые нечётны.*

Приведём родственную конструкцию, связь которой с конфигурациями и доминошками не столь прозрачна.

Наблюдение. Количество композиций числа n со слагаемыми из множества $\{1, 2\}$, содержащих ℓ двоек ($\ell = 0, 1, \ldots$), равно количеству композиций числа $n+2$ со слагаемыми из множества $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, содержащих $\ell + 1$ слагаемое. Например, для числа 5 существует 4 композиции первого вида, содержащих одну двойку; в то же время для числа 7 существует 4 композиции второго вида, состоящих из двух слагаемых:

$$5 = 1+1+1+2 = 1+1+2+1 = 1+2+1+1 = 2+1+1+1,$$

$$7 = 2+5 = 5+2 = 3+4 = 4+3.$$

Наблюдение обосновывается тем, что количество и тех, и других композиций задаётся формулой $C_{n-\ell}^{\ell}$. Докажите!

С помощью этого наблюдения мы можем подменить вид композиций в теореме $2'$.

Теорема $2'''$. *Пусть для определённости $n \geqslant k$ и числа n и k одинаковой чётности, положим $s = \frac{1}{2}(n-k)$. Число $a_{k,n}$ равно количеству пар композиций числа $k+2$ и числа $n+2$ со слагаемыми из множества $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, в которых композиции числа $n+2$ содержат на s слагаемых больше, чем композиции числа $k+2$.*

Производящая функция композиций

Пусть фиксировано множество S, состоящее из натуральных чисел. Обозначим количество композиций числа n через t_n, а производящую функцию этой последовательности — через $T(x)$. Оказывается, для производящей функции последовательности t_n есть очень простая формула:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n x^n = \frac{1}{1 - \sum\limits_{m \in S} x^m}. \tag{7}$$

Действительно, воспользуемся формулой суммы прогрессии

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

Взяв $q = \sum\limits_{m \in S} x^m$, получаем

$$\frac{1}{1 - \sum\limits_{m \in S} x^m} = 1 + \Big(\sum_{m \in S} x^m\Big) + \Big(\sum_{m \in S} x^m\Big)^2 + \Big(\sum_{m \in S} x^m\Big)^3 + \ldots$$

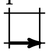
Раскрывая скобки, читатель с лёгкостью обнаружит биекцию между композициями числа n и различными способами появления слагаемого x^n в этой сумме, что и доказывает формулу (7).

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x - y}.$$

Напишем для неё аналогичное разложение:

$$\frac{1}{1 - x - y} = 1 + (x + y) + (x + y)^2 + (x + y)^3 + \ldots$$

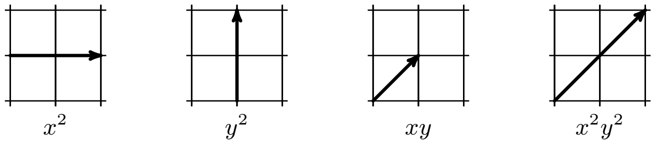
Раскрывая здесь скобки, мы будем получать одночлены вида $x^k y^m$. Если не пользоваться формулами бинома, а раскрывать скобки непосредственно, не приводя подобные члены и не переставляя сомножители в одночленах, каждый такой одночлен будет записан в виде «слова», состоящего из букв x и y. Например x^3y^2 может получиться из произведений $xxxyy$, $xyyxx$ и т. д. Каждое такое произведение можно интерпретировать как «векторную композицию», для этого нарисуем на клетчатой плоскости ломаную, где букве x соответствует звено , а букве y — звено . Тогда всевозможным одночленам $x^k y^m$ будут соответствовать ломаные на клетчатой плоскости, идущие из точки $(0, 0)$ в точку (k, m) (каждое звено такой ломаной направлено вправо или вверх). Иначе говоря, мы представили вектор (k, m) в виде всевозможных сумм, где каждое слагаемое — это вектор $(1, 0)$ или $(0, 1)$. Это и есть векторные композиции. Очевидно, число таких композиций равно C_{k+m}^k. Поэтому рассмотренная функция $f(x, y)$ — это производящая функция для биномиальных коэффициентов:

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x - y} = \sum_{k,m=0}^{+\infty} C_{m+k}^k x^k y^m.$$

Пример 2. Посмотрим на производящую функцию (6):

$$F(x, y) = \frac{1}{1 - (x^2 + y^2 + xy - x^2y^2)} = \sum_k (x^2 + y^2 + xy - x^2y^2)^k.$$

Не будем пока обращать внимание на знак минус перед x^2y^2. Тогда мы можем истолковать раскрытие скобок в правой части как построение векторной композиции. Возьмём в правой части произвольный одночлен $x^k y^m$. Он получается при раскрытии скобок как произведение множителей, каждый из которых — это x^2, y^2, xy или x^2y^2. Каждому из этих множителей сопоставим звено ломаной, как показано на рисунке ниже. С помощью этого сопоставления одночлен будет изображаться некоторой ломаной.



В результате число $a_{k,n}$ будет равно «количеству» ломаных с указанными звеньями, ведущих из начала координат в точку (k, n). Слово *количество* заключено в кавычки, поскольку из-за минуса, на который мы до сих пор не обращали внимания, ломаные, содержащие, скажем, m звеньев вида x^2y^2, должны засчитываться со знаком $(-1)^m$.

Чтобы избавиться от этих минусов, сгруппируем некоторые ломаные парами. Каждой ломаной A, содержащей хотя бы одно звено x^2y^2, поставим в соответствие ломаную B, отличающуюся лишь тем, что вместо первого звена x^2y^2 она имеет пару звеньев — сначала x^2, потом y^2. Если в ломаной первым встречается звено x^2y^2, она относится к типу A, а если пара звеньев x^2, y^2 — то к типу B. Очевидно, разным ломаным A будут соответствовать разные ломаные B, и каждая ломаная B, в которой есть последовательные звенья x^2, y^2, поставлена в соответствие некоторой ломаной A. При этом знаки, с которыми засчитываются эти ломаные, противоположны, и значит, каждая такая пара даёт нулевой вклад в суммарное «количество».

Таким образом, $a_{k,n}$ равно числу «непарных» ломаных с указанными звеньями, ведущими из начала координат в точку (k, n). Очевидно, непарными ломаными являются лишь те, в которых вообще нет звеньев вида x^2y^2 и у которых не встречаются подряд звенья x^2, y^2. Эти ломаные находятся в очевидном взаимно однозначном соответствии с беспиковыми путями Моцкина.

0-1-2 суммы

Будем называть 0-1-2 *суммой* сумму, в которой порядок слагаемых фиксирован, каждое слагаемое равно 0, 1 или 2, и при этом следующее после каждой двойки слагаемое не должно быть нулём.

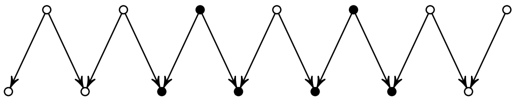
Пусть $s_{n,k}$ — это число 0-1-2 сумм, состоящих из таких n слагаемых, что значение суммы при этом равно k $(0 \leqslant k \leqslant 2n)$. Например, $s_{3,3} = 5$, поскольку получить сумму 3 с помощью трёх слагаемых 0, 1, 2 и запрета «после двойки не нуль» можно лишь следующими способами:

$$3 = 1 + 1 + 1 = 0 + 1 + 2 = 0 + 2 + 1 = 1 + 0 + 2 = 2 + 1 + 0.$$

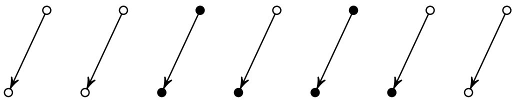
Теорема 4. $s_{n,k} = z_{n,k}$.

Доказательство. См. рис. 7. $\square$

Предъявим ещё одну биекцию для 0-1-2 сумм.



Отметим вершины, принадлежащие
и не принадлежащие замкнутому множеству.



Оставим только рёбра, параллельные первому ребру,
под каждым ребром напишем, сколько у него чёрных вершин.

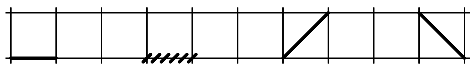
Рис. 7. Биекция между замкнутыми множествами графа Z_{2n} и 0-1-2 суммами

Теорема 5. $m_{n,k-n} = s_{n,k}$.

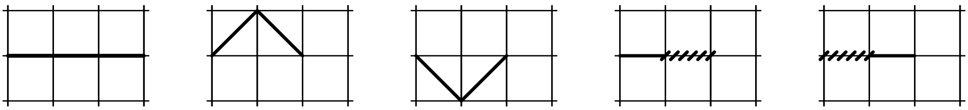
Доказательство. Заметим, что перемещение по звену изменяет сумму координат на 2, перемещение по звену изменяет сумму координат на 1, а перемещение по звену не изменяет сумму координат. Рассмотрим беспиковую ломаную Моцкина, ведущую из точки $(0, 0)$ в точку $(n, k-n)$. В ней n звеньев, а изменение суммы координат при движении вдоль этой ломаной равно k. Заменим звено на 2, звено на 1, а звено на 0. Поскольку фрагмент запрещён, после 2 не может идти 0. Таким образом, мы получим 0-1-2 сумму, состоящую из n слагаемых, значение которой равно k. Ясно, что из 0-1-2 суммы беспиковая ломаная однозначно восстанавливается, поэтому мы построили биекцию между беспиковыми ломаными, ведущими из точки $(0, 0)$ в точку $(n, k-n)$, и 0-1-2 суммами, состоящими из n слагаемых, значения которых равны k. Стало быть, $m_{n,k-n} = s_{n,k}$. □

Пути с весом

Будем рисовать пути Моцкина, при этом назначим «цену» за прорисовку каждого звена. Наклонные восходящее и нисходящее звенья будут стоить 1,5 рубля, а горизонтальные рёбра будем рисовать двумя способами — «дешёвым» за 1 рубль и «дорогим» за 2 рубля.



Через r_k обозначим количество ломаных стоимостью k рублей, у которых начальная и конечная точка лежат на одной горизонтали. Например, $r_3 = 5$, как показывает следующая картинка.



Теорема 6. $r_k = a_{k,k}$.

Доказательство. Сопоставим разбиению на пары конфигурацию из горизонтальных отрезков. Каждую свободную точку изобразим на рисунке чёрной точкой, а каждый горизонтальный отрезок — белой точкой, и расположим эти точки на прямых равномерно. После этого каждой вертикальной паре точек сопоставим звено ломаной (рис. 8): паре $\genfrac{}{}{0pt}{}{\bullet}{\bullet}$ сопоставим дешёвое горизонтальное звено, каждой паре $\genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\circ}$ сопоставим дорогое горизонтальное звено, каждой паре $\genfrac{}{}{0pt}{}{\bullet}{\circ}$ сопоставим звено , а каждой паре $\genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\bullet}$ — звено . $\square$

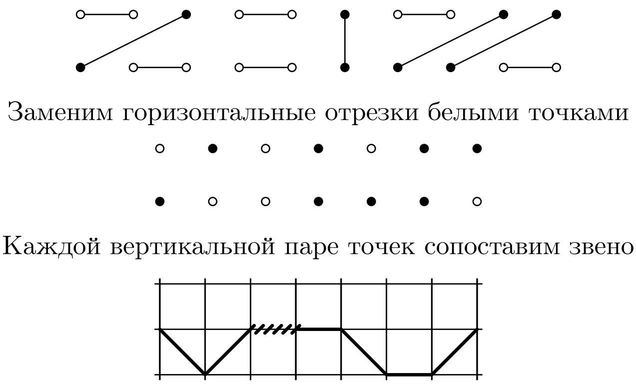


Рис. 8. Биекция между разбиением точек на пары и ломаными с весом

Симметричные конфигурации хорд

Зафиксируем число n и какое-нибудь натуральное число $\ell > 2$. Разобьём окружность на ℓ равных секторов и рассмотрим вершины правильного ℓn-угольника. В каждом секторе будет расположено по n вершин. Некоторые вершины соединим между собой хордами. Нас будут интересовать симметричные конфигурации хорд, удовлетворяющие следующим свойствам:

1) конфигурация обладает симметрией ℓ-го порядка, т. е. переходит в себя при повороте на угол $2\pi/\ell$;

2) хорды не имеют общих точек;
3) хорда не должна соединять соседние точки, лежащие в одном секторе.

Из этих условий, в частности, следует, что если хорда соединяет точки, лежащие в разных секторах, то эти секторы — соседние. Поэтому конфигурация определяется картинкой, которую мы видим в одном секторе, и количество конфигураций не зависит от ℓ. Пример конфигурации для $n = 10$, $\ell = 3$ изображён на рис. 9.

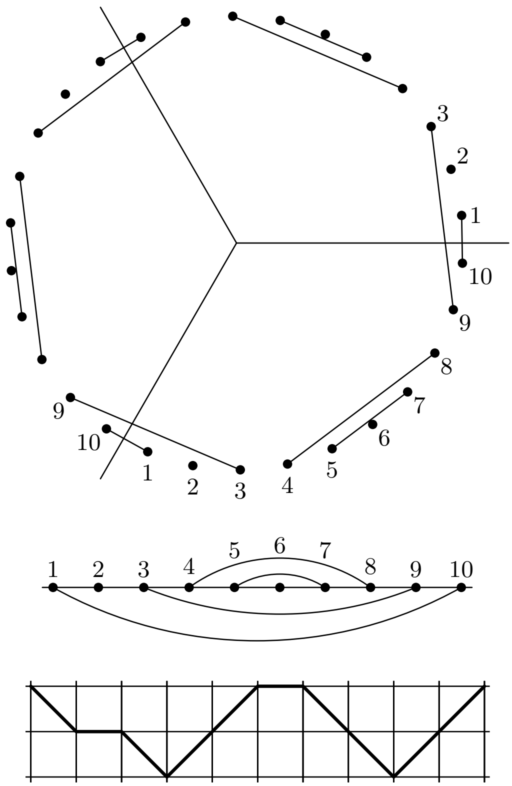
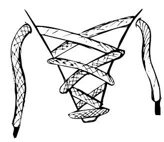


Рис. 9. Конфигурация хорд с симметрией третьего порядка, её дуговая диаграмма и соответствующий беспиковый путь Моцкина

Теорема 7. *Количество симметричных хордовых конфигураций равно* $a_{n,n}$.

Доказательство. Возьмём дугу окружности в одном из секторов и «выпрямим» её. Получится отрезок, на котором отмечено n точек. Хорды, соединявшие точки в этом секторе, изобразим в виде дуг, расположенных выше этого отрезка. Хорду, соединяющую точки соседних секторов, скажем p-ю точку рассматриваемого сектора и q-ю точку предыдущего, изобразим в виде дуги, соединяющей на нашем отрезке p-ю точку с q-й и расположенной ниже отрезка (рис. 9). Теперь мы с лёгкостью можем закодировать эту дуговую диаграмму с помощью n-звенного беспикового пути Моцкина. Для этого просмотрим последовательно все точки: если из данной точки выходит дуга вверх или же в эту точку приходит дуга снизу — рисуем восходящее звено, если точка изолированная — рисуем горизонтальное звено, если же выходит дуга вниз или же в эту точку приходит дуга сверху — рисуем нисходящее звено. □

Шнуровки



Подсчитаем количество способов зашнуровать ботинок, у которого с каждой стороны по n дырочек для продевания шнурков. Примем следующие ограничения:

1) шнуровка должна начинаться и заканчиваться в верхней паре дырочек;
2) шнурок проходит ровно один раз через каждую дырочку;
3) из каждой дырочки есть переход на противоположную сторону (для верхних дырочек это требование выполняется автоматически, когда мы завяжем узел);
4) не будем учитывать, как переплетаются шнурки между дырочками и с какой стороны (сверху или снизу) они вдеваются в дырочки.

Шнуровки, удовлетворяющие этим ограничениям, будем называть *правильными* (рис. 10).

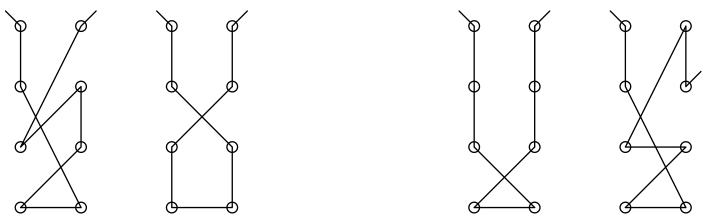


Рис. 10. Две правильных (слева) и две неправильных (справа) шнуровки

Для подсчёта правильных шнуровок рассмотрим сначала несамопересекающиеся шнуровки, начинающиеся в левой верхней, а заканчивающиеся в правой нижней дырочке. Каждая из этих шнуровок полностью определяется набором своих вертикальных фрагментов, соединяющих пары соседних дырочек на одной стороне ботинка. Действительно, если такой

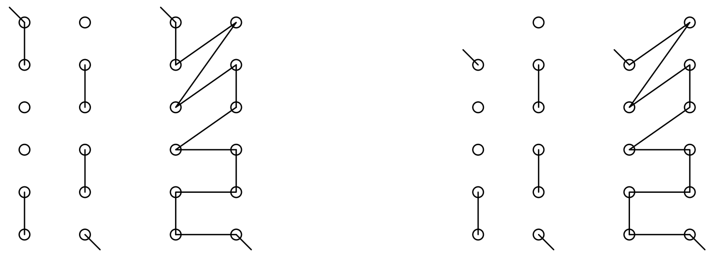


Рис. 11. Конфигурация точек и отрезков полностью определяет несамопересекающуюся шнуровку, в том числе на бракованном ботинке

набор задан, то оставшиеся соединения устроены так: верхние «свободные» дырочки соединены между собой (рис. 11, слева), следующие сверху «свободные» дырочки также соединены между собой и т. д. Но количество способов выбрать такие вертикальные отрезки мы уже считали, оно равно $a_{n,n}$. Таким образом, число несамопересекающихся шнуровок тоже равно $a_{n,n}$.

Из каждой несамопересекающейся шнуровки можно получить $(n!)^2$ новых шнуровок, произвольно переставляя дырочки на каждой стороне; в таких шнуровках начало и конец шнурка могут быть в произвольных местах на разных сторонах ботинка. И наоборот, из произвольной шнуровки, переставляя дырочки на сторонах, можно единственным способом получить несамопересекающуюся: это будет та шнуровка, для которой, двигаясь по шнурку на противоположную сторону, мы всегда попадаем в самую верхнюю из свободных дырочек.

Таким образом, количество шнуровок без ограничения на начальную и конечную дырочки равно $(n!)^2 a_{n,n}$. Правильные шнуровки получаются, если дополнительно потребовать, чтобы начало и конец шнуровки приходились на верхние дырочки, поэтому число правильных шнуровок равно $((n-1)!)^2 a_{n,n}$.

Бракованный ботинок

Рассмотрим теперь шнуровки «бракованного» ботинка, у которого с одной стороны k дырочек, а с другой — n дырочек. Будем считать, что шнуровка по-прежнему удовлетворяет условиям 1–4. Как и в предыдущем разделе, инвертируем порядок дырочек на одной стороне так, чтобы шнуровка начиналась в левой верхней и заканчивалась в правой нижней дырочке.

Для начала рассмотрим несамопересекающиеся правильные шнуровки. Каждая такая шнуровка определяет конфигурацию из точек и отрезков на сторонах ботинка (рис. 11, справа). Каждый элемент конфигурации — точку или отрезок — будем называть *объектом*. От каждого объекта можно перейти на противоположную сторону ботинка двумя способами — двига-

$$
\begin{array}{c}
1\\
0 \qquad 0\\
0 \qquad 1 \qquad 0\\
0 \qquad 1 \qquad \boxed{1} \qquad 0\\
0 \qquad 0 \qquad \boxed{2} \qquad \boxed{0} \qquad 0\\
0 \qquad 0 \qquad 2 \qquad \boxed{2} \qquad 0 \qquad 0\\
0 \qquad 0 \qquad 1 \qquad 5 \qquad 1 \qquad 0 \qquad 0\\
0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 5 \qquad \boxed{5} \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0\\
0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 3 \qquad 11 \qquad 3 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0\\
b_{0,8} \quad b_{1,7} \quad b_{2,6} \quad b_{3,5} \quad b_{4,4} \quad b_{5,3} \quad b_{6,2} \quad b_{7,1} \quad b_{8,0}
\end{array}
$$

Рис. 12. Треугольник $b_{k,n}$ и его рекуррентное соотношение.

ясь по шнурку «вперёд» или «назад». Поэтому у любой конфигурации, которая получена из шнуровки, количество объектов на сторонах ботинка должно быть одинаковым. И наоборот: любая конфигурация с равным числом объектов однозначно задаёт несамопересекающуюся шнуровку.

В связи с этим введём в рассмотрение ещё одну комбинаторную последовательность. Пусть даны две прямые, на одной из которых отмечено k точек, а на другой — n точек. Некоторые соседние точки, лежащие на одной прямой, могут быть соединены отрезками, при этом отрезки не должны пересекаться. Обозначим через $b_{k,n}$ число всевозможных конфигураций такого вида, у которых количество объектов на прямых одинаково. Зададим также «вырожденные» значения чисел $b_{k,n}$ для целых k и n: положим $b_{0,0} = 1$ и $b_{k,n} = 0$, если $(k, n) \neq (0, 0)$, но среди чисел k, n есть неположительные.

Начальные значения последовательности $b_{k,n}$ перечислены в треугольнике на рис. 12. Верхняя единица — это $b_{0,0}$, нумерация элементов нижней строки подписана для удобства. Как и с последовательностью $a_{k,n}$, откидывая в конфигурации по одному крайнему объекту с каждой стороны, получаем рекуррентное соотношение

$$b_{k,n} = b_{k-1,n-1} + b_{k-1,n-2} + b_{k-2,n-1} + b_{k-2,n-2}.$$

Это соотношение верно для всех n и k, кроме $(k, n) = (0, 0)$. Пользуясь этим соотношением, находим производящую функцию

$$B(x, y) = \sum_{k,n} b_{k,n} x^k y^n = \frac{1}{1 - (xy + x^2y + xy^2 + x^2y^2)} - 1. \tag{8}$$

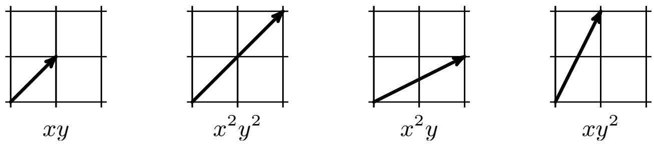
Прямо по определению последовательности $b_{k,n}$ получаем следующее утверждение.

Теорема 8. $a_{n,n} = b_{n,n}$.

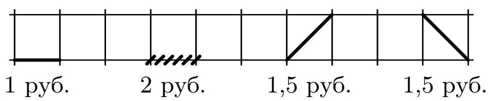
Рассуждая, как в разделе, посвящённом обычным шнуровкам, находим, что последовательность $b_{k,n}$ позволяет перечислить шнуровки любого ботинка: количество правильных шнуровок равно $(k-1)!(n-1)!b_{k,n}$, а количество «произвольных» шнуровок — $k!\,n!\,b_{k,n}$. Заодно получаем, что функция (8) есть экспоненциальная производящая функция числа произвольных шнуровок.

Опишем ещё несколько комбинаторных реализаций последовательности $b_{k,n}$.

Поскольку производящая функция (8) последовательности $b_{k,n}$ похожа на производящую функцию последовательности $a_{k,n}$, мы можем продублировать рассуждения из примера 2. Получится, что $b_{k,n}$ равно количеству ломаных со звеньями четырёх видов, указанных на следующем рисунке, ведущих из начала координат в точку (k, n).



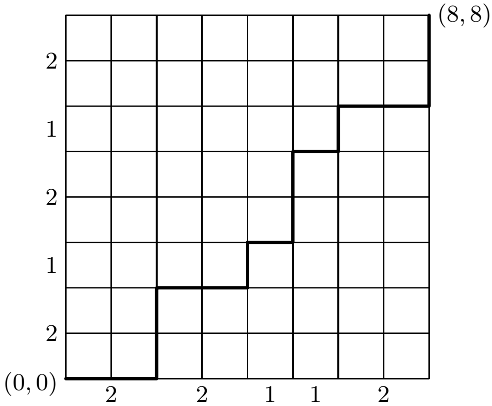
Теперь, мысленно повернув голову на 45° (и приняв диагональ квадратика за единицу), читатель с лёгкостью убедится, что $b_{k,n}$ равно числу «платных» путей Моцкина, встречавшихся нам ранее, ведущих из начала координат в точку $\left(\dfrac{k+n}{2}, \dfrac{k-n}{2}\right)$, причём цены из «прейскуранта» — это в точности длины проекций звеньев на прямую $y = x$.



В частности, мы ещё раз убедились в том, что $b_{k,k} = r_k$.

Напоследок отметим, что прямо по определению $b_{k,n}$ равно числу пар «композиция числа k — композиция числа n» с одинаковым числом слагаемых, где все слагаемые — это единицы или двойки. Такие композиции можно изображать в виде «лестниц», идущих из точки $(0, 0)$ в точку (k, n). Лестница — это ломаная, в которой чередуются вертикальные и горизонтальные звенья, первое звено горизонтально, последнее — вертикально, и длины всех звеньев равны 1 или 2. Например пара композиций

$8 = 2+2+1+1+2 = 2+1+2+1+2$, уже встречавшаяся нам на рис. 5, задаёт следующую лестницу.



Диагональ

В этом и следующем разделах мы используем технику теории функций комплексной переменной. Читатель, ещё не изучивший курс ТФКП, может посмотреть подробности, например, в [3].

Мы уже знаем формулу для производящей функции нашей последовательности $a_{n,k}$:

$$F(x,y) = \sum_{k,n} a_{k,n} x^k y^n = \frac{1}{1-(x^2+y^2+xy-x^2y^2)}.$$

В силу оценки (4), этот ряд сходится при $|x|<\varphi^{-1}$, $|y|<\varphi^{-1}$, где φ — золотое сечение.

Найдём теперь производящую функцию «диагонали»:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,k} x^k.$$

Это делается следующим стандартным трюком. Зафиксируем достаточно малое по модулю значение x, можно считать его вещественным, и рассмотрим функцию

$$H(s) = F\left(\sqrt{s}, \frac{x}{\sqrt{s}}\right) = \frac{-s}{s^2 - s(x^2-x+1)+x^2}.$$

Она представляет собой ряд Лорана

$$\sum_{k,n} a_{k,n} s^k \left(\frac{x}{s}\right)^n$$

по степеням s (и по неотрицательным степеням x). Этот ряд заведомо сходится в кольце $|x|^2\varphi^2 < |s| < \varphi^{-2}$, а сама функция $H(s)$ рациональная и задана во всей комплексной плоскости. Как нетрудно видеть, $g(x)$ — это коэффициент при нулевой степени s в этом ряде. Этот коэффициент вычисляется с помощью интегральной теоремы Коши:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|s|=\rho} \frac{H(s)\,ds}{s} = \sum \operatorname{Res} \frac{H(s)}{s},$$

где интегрирование ведётся по любой окружности, лежащей в кольце сходимости, а вычеты берутся по особым точкам, попавшим внутрь окружности.

В нашем случае у функции $H(s)$ дискриминант знаменателя равен

$$(x^2 - x + 1)^2 - 4x^2 = 1 - 2x - x^2 - 2x^3 + x^4.$$

Это выражение близко к 1 при малых x, поэтому из двух особых точек функции $H(s)$ одна расположена вблизи 1, а другая — вблизи нуля, это точка

$$s_0 = \frac{1 - x + x^2 - \sqrt{1 - 2x - x^2 - 2x^3 + x^4}}{2}.$$

Вычет в этой точке (стандартное несложное вычисление) равен

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x - x^2 - 2x^3 + x^4}}.$$

Рекуррентное соотношение для диагонали $r_n = a_{n,n}$

Воспользуемся найденной производящей функцией диагонали. Заметим, что

$$g'(x) = \frac{1 + x + 3x^2 - 2x^3}{(1 - 2x - x^2 - 2x^3 + x^4)^{3/2}}.$$

Поэтому

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1 + x + 3x^2 - 2x^3}{1 - 2x - x^2 - 2x^3 + x^4}.$$

Следовательно,

$$(1 - 2x - x^2 - 2x^3 + x^4)g'(x) = (1 + x + 3x^2 - 2x^3)g(x).$$

Поскольку

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k r_k x^{k-1},$$

приравняв коэффициенты при x^{n-1}, получим соотношение

$$nr_n - 2(n-1)r_{n-1} - (n-2)r_{n-2} - 2(n-3)r_{n-3} + (n-4)r_{n-4} = \\ = r_{n-1} + r_{n-2} + 3r_{n-3} - 2r_{n-4}.$$

Таким образом,

$$nr_n - (2n-1)r_{n-1} - (n-1)r_{n-2} - (2n-3)r_{n-3} + (n-2)r_{n-4} = 0.$$

Асимптотика диагонали

С помощью метода Дарбу (см. [1, § 4.3]) установим асимптотическую формулу для r_n.

Суть метода Дарбу состоит в следующем. Функция $g(z) = \sum r_n z^n$ задаётся рядом, который автоматически является её рядом Тейлора в точке $z = 0$. Радиус сходимости этого ряда равен расстоянию от 0 до ближайшей к нулю особой точки, обозначим её z_1. Если подобрать «достаточно простую» функцию $h(z) = \sum h_n z^n$, у которой в точке z_1 «такая же» особенность, то разность $g(z) - h(z) = \sum (r_n - h_n) z^n$ может вообще не иметь особенности в точке z_1. Тогда радиус сходимости ряда $\sum (r_n - h_n) z^n$ будет больше, чем у ряда $\sum r_n z^n$. Это возможно, лишь если коэффициенты второго ряда сильно меньше коэффициентов первого, т. е. $r_n - h_n = o(r_n)$ при $n \to +\infty$. И тогда $r_n \sim h_n$.

В случае нашей функции $g(z)$ эта схема осложняется тем, что ближайшая к нулю особая точка есть точка ветвления, и её не удаётся полностью «сократить». Поэтому потребуются чуть более аккуратные рассуждения.

Разложим на множители подкоренное выражение в формуле для $g(z)$:

$$1 - 2z - z^2 - 2z^3 + z^4 = (1 - \varphi^2 z)(1 - \varphi^{-2} z)(1 + z + z^2),$$

где $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение. Пусть

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^{-2} z}\sqrt{1 + z + z^2}}.$$

Функция $g(z)$ эквивалентна $\dfrac{f(\varphi^{-2})}{\sqrt{1 - \varphi^2 z}}$ при $z \to \varphi^{-2}$, и разность этих функций вблизи точки $z = \varphi^{-2}$ ограничена:

$$g(z) - \frac{f(\varphi^{-2})}{\sqrt{1 - \varphi^2 z}} = \frac{f(z) - f(\varphi^{-2})}{\sqrt{1 - \varphi^2 z}} = \sqrt{1 - \varphi^2 z}\, h(z), \tag{9}$$

где функция $h(z)$ имеет особые точки φ^2 и $e^{\pm 2\pi i/3}$.

Лемма. *Пусть*

$$(1-t)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{p,n} t^n$$

— разложение функции $(1-t)^p$ *по формуле Тейлора в точке* $t=0$. *Тогда*

$$\lambda_{-1/2,n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big) \quad \textit{и} \quad \lambda_{1/2,n} = O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big).$$

Для доказательства воспользуйтесь биномом Ньютона и формулой Стирлинга.

Теорема 9. $r_n = \dfrac{\varphi^{2n+2}}{2\sqrt[4]{5}\sqrt{\pi n}} + O\Big(\dfrac{\varphi^{2n}}{n^{3/2}}\Big)$, *где* $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *— золотое сечение.*

Доказательство. По формуле (9) число r_n равно сумме коэффициентов при z^n в разложении функций $\dfrac{f(\varphi^{-2})}{\sqrt{1-\varphi^2 z}}$ и $\sqrt{1-\varphi^2 z}\, h(z)$.

Рассмотрим коэффициент при z^n в разложении функции $\sqrt{1-\varphi^2 z}\, h(z)$. Функция $h(z)$ имеет особые точки φ^2 и $e^{\pm 2\pi i/3}$. Поэтому она раскладывается в ряд Тейлора $h(z) = \sum \alpha_n z^n$, сходящийся в любом круге радиуса $\rho < 1$ с центром в нуле. Отсюда следует, что $|\alpha_n| < c/\rho^n$ (иначе при $z = (\rho+1)/2$ члены ряда стремились бы к бесконечности и он не мог бы быть сходящимся). Таким образом, коэффициент при z^n в разложении функции $\sqrt{1-\varphi^2 z}\, h(z)$ равен

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi^{2k} \lambda_{1/2,k} \alpha_{n-k} = \alpha_n + \sum_{k=1}^{[n/2]} \ldots + \sum_{k=[n/2]+1}^{n} \ldots =$$

$$= O\Big(\frac{1}{\rho^n}\Big) + O\Big(\frac{1}{\rho^{n/2}}\Big) \sum_{k=1}^{[n/2]} \varphi^{2k} \lambda_{1/2,k} + O\Big(\frac{\varphi^{2n}}{n^{3/2}}\Big) \sum_{k=[n/2]+1}^{n} \alpha_{n-k} =$$

$$= O\Big(\frac{1}{\rho^n}\Big) + O\Big(\frac{\varphi^n}{\rho^{n/2}}\Big) O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) + O\Big(\frac{\varphi^{2n}}{n^{3/2}}\Big) O\Big(\frac{1}{1-\rho}\Big) = O\Big(\frac{\varphi^{2n}}{n^{3/2}}\Big).$$

В этих равенствах значки «О большое» с полуцелыми степенями получились в результате применения леммы, в третьем равенстве сумма α_{n-k} оценена сверху суммой сходящейся геометрической прогрессии.

Для доказательства утверждения теоремы осталось лишь заметить, что коэффициент при z^n в разложении функции $\dfrac{f(\varphi^{-2})}{\sqrt{1-\varphi^2 z}}$ существенно крупнее, он равен

$$f(\varphi^{-2}) \varphi^{2n} \lambda_{-1/2,n} = \frac{f(\varphi^{-2})\varphi^{2n}}{\sqrt{\pi n}} + O\Big(\frac{\varphi^{2n}}{n^{3/2}}\Big) = \frac{\varphi^{2n+2}}{2\sqrt[4]{5}\sqrt{\pi n}} + O\Big(\frac{\varphi^{2n}}{n^{3/2}}\Big). \qquad \square$$

Если выписать дальше разложение $g(z)$ по полуцелым степеням $1-\varphi^2 z$, а затем рассуждать аналогично с использованием формулы (2.2) из статьи [7] (это уточнение нашей леммы), то можно получить асимптотическое разложение с точностью до $O(\varphi^{2n}/n^{m+1/2})$ для любого фиксированного натурального m. Весьма громоздкий второй коэффициент этого разложения найден иным способом в работе [8, формула (24)].

Ссылки

Последовательности, о которых шла речь, конечно же, упоминаются в Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей Слоана [10]: числовой треугольник $a_{k,n}$ (точнее говоря, $z_{n,k}$) — это последовательность A079487, треугольник $b_{k,n}$ — A125250, диагональ $a_{n,n}$ — A051286, шнуровки — A078698. Там же приведены краткие сведения, включающие упоминание об основных комбинаторных реализациях. Последовательность $a_{k,n}$ подробно изучена в [9] на языке порядковых идеалов частично упорядоченного множества, мы назвали эту реализацию «заборы», применяется также термин «числа Уитни второго рода». Реализация с помощью симметричных конфигураций хорд дана в [8]. Пути с весом и композиции встречаются в [5]. Композиции и доминошки мы нашли также в [4], а шнуровки — в [6].

Упрощённая версия этой статьи опубликована в [2].

Список литературы

[1] *Грин Д., Кнут Д.* Математические методы анализа алгоритмов. М.: Мир, 1987.

[2] Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике, 2014. М.: МЦНМО, 2014.

[3] *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Часть 1. М.: Наука, 1985.

[4] *Banderier C., Hitczenko P.* Enumeration and asymptotics of restricted compositions having the same number of parts // arxiv:1201.6116v1.

[5] *Bóna M., Knopfmacher A.* On the probability that certain compositions have the same number of parts // Ann. Comb. 2010. V. 14. P. 291–306.

[6] *Duisenberg K.* Ken's puzzle of the week. `http://ken.duisenberg.com/potw/archive/arch07/070904sol.html`.

[7] *Flajolet P., Odlyzko A. M.* Singularity analysis of generating functions // SIAM J. Discr. Math. 1990. V. 3. P. 216–240.

[8] *Hofacker I. L., Reidys C. M., Stadler P. F.* Symmetric circular matchings and RNA folding // Discr. Math. 2012. V. 312. P. 100–112.

[9] *Munarini E., Zagaglia Salvi N.* On the rank polynomial of the lattice of order ideals of fences and crowns // Discr. Math. 2002. V. 259. P. 163–177.

[10] The on-line Encyclopedia of integer sequences, A051286, A078698, A079487, A125250. `https://oeis.org/`.

К. П. Кохась, Санкт-Петербургский государственный университет
`kpk@arbital.ru`

А. И. Храбров, Санкт-Петербургский государственный университет
`aikhrabrov@mail.ru`

Независимость и доказательства существования в комбинаторике*

Д. Г. Ильинский, А. М. Райгородский, А. Б. Скопенков†

Введение

Цель этой заметки — продемонстрировать метод доказательства некоторых интересных комбинаторных результатов (пункты (b) задач 1–4 и задачи 16–26), заключающийся в применении локальной леммы Ловаса (задача 15). Для изучения заметки не нужно предварительных знаний, все необходимые понятия вводятся по ходу изложения.

Следующие две части введения важны, но формально не используются далее.

Об открытии леммы Ловаса и её роли в математике. Локальная лемма Ловаса была доказана в 1973 году выдающимся венгерским математиком Ласло Ловасом. Впрочем, тогда Ловасу было всего 25 лет и, хотя яркие результаты у него уже к тому времени были, всё-таки на тот момент его воспринимали не как классика, но как восходящую звезду. Он уже был трёхкратным победителем международных математических олимпиад (1964, 1965 и 1966 годов). Классиком Ловас станет позже, и весьма серьёзную роль в этом сыграет доказанная им Локальная лемма. Разумеется, не только она: будет и топологический метод в комбинаторике, и мощные результаты в теории алгоритмов, и значительный вклад в науку о графовых пределах, и многое другое. Тем не менее, Локальная лемма — это замечательный инструмент вероятностной комбинаторики, благодаря

* Обновляемая версия: `http://arxiv.org/abs/1411.3171`. Заметка основана на занятиях, проведённых авторами в МФТИ, в Кировской ЛМШ, Московской ВШ, а также на кружке «Олимпиады и математика». Благодарим А. Дайняка, К. Матвеева, А. Шаповалова, членов редколлегии сборника «Математическое просвещение» и участников занятий за полезные замечания и обсуждения.

† А. Б. Скопенков частично поддержан грантом фонда Саймонса.

которому были получены и продолжают получаться многочисленные яркие результаты в области дискретной математики и теории алгоритмов.

Работа, в которой Ловас формулирует и доказывает свою Локальную лемму, написана в соавторстве с Полом Эрдёшем — ещё одним великим специалистом по комбинаторике, основателем большой научной школы, автором множества задач и идей. Среди прочего, Эрдёш был одним из самых активных пропагандистов вероятностного метода в комбинаторике. Поэтому, несмотря на то что Локальную лемму доказал именно Ловас, роль Эрдёша во всём этом не стоит недооценивать. В статье Эрдёша и Ловаса [9] речь шла о раскрасках *гиперграфов* (т. е. наборов подмножеств конечного множества). Как раз ради доказательства существования некоторой раскраски Локальная лемма и придумывалась (т. е. ради обобщения задач 1, 16 и 17; не бойтесь, они формулируются и решаются без слова «гиперграф»). Однако очень быстро стало ясно, насколько это мощный и плодотворный инструмент. Например, почти сразу же с его помощью Дж. Спенсер улучшил нижнюю оценку *числа Рамсея* (см. определение в [2] и задачу 21), которая не поддавалась улучшению в течение сорока лет. Сейчас диапазон применения леммы становится всё шире. Здесь теория графов и гиперграфов, здесь экстремальные задачи комбинаторики, теория алгоритмов и даже комбинаторная геометрия и теория диофантовых приближений.

За прошедшие десятилетия появились разнообразные усовершенствования Локальной леммы, многие из которых уже лишь отдалённо напоминают первоначальный вариант. И это ещё одно свидетельство исключительной плодотворности идеи Ловаса.

Как устроено изложение в этой заметке. Основные идеи демонстрируются по одной и на «олимпиадных» примерах, т. е. на простейших частных случаях, свободных от технических деталей. Мы показываем, *как можно придумать* лемму Ловаса. Путь к её доказательству и применениям намечен в виде задач (всех задач этого и следующего разделов, кроме задач 6 и 7, которые просто поясняют понятие независимости). Обучение путём решения задач не только характерно для серьёзного изучения математики, но и продолжает древнюю культурную традицию[1)].

К важнейшим задачам приводятся указания и решения.

Обычно лемму Ловаса излагают на вероятностном языке. Однако, по нашему мнению, приводимое комбинаторное изложение более доступно и по-

---

[1)] Например, послушники дзенских монастырей обучаются, размышляя над загадками, данными им наставниками. Впрочем, эти загадки являются скорее парадоксами, а не задачами. См. подробнее [8].

лезно для начинающего. Важно излагать вероятностные идеи (например, независимости) и развивать вероятностную интуицию, но при этом сохранять строгость изложения. Разумнее делать это, не определяя понятия вероятностного пространства[2)]. Это как раз подготовит начинающего к введению этого довольно абстрактного понятия, ср. с [6, философско-методическое отступление]. Кроме того, вероятностной интуиции начинающего противоречит получение вероятностными методами абсолютно (а не с некоторой вероятностью) верного результата[3)]. (Впрочем, для человека, уже владеющего понятием вероятностного пространства, изложение на вероятностном языке не хуже комбинаторного.)

Приведём интересные факты, которые можно доказать при помощи леммы Ловаса (*и вряд ли можно доказать без неё!*). Видимо, из задач 1–4 вы сможете решить сейчас только пункты (a). К пунктам (b) разумно вернуться после изучения следующего раздела. Более того, задача 2(b) естественнее по формулировке, но сложнее двух следующих.

1. (a) По каждому из 100 видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ присутствовал специалист по нему. (Сотрудник может быть специалистом по нескольким видам работ; распределение специалистов по видам работ известно тому, кто назначает выходные.)

(b) По каждому из нескольких видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. (Теперь видов работ не обязательно 100.) Каждый вид работ имеет общих специалистов не более чем с 30 другими видами. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ присутствовал специалист по нему.

Замечание. Для каждого вида работ x обозначим через A_x множество распределений выходных, при которых и в субботу, и в воскресенье на работе есть специалист по x. Нужно доказать, что $\cap_x A_x \neq \varnothing$. В п. (a) это делается путём подсчёта количества элементов. В п. (б) этого уже не хватает, нужна идея из следующего раздела. Там мы покажем, как *независимость*

[2)] Отличие элементарной теории вероятностей от перечислительной комбинаторики скорее в том, что речь идёт о *долях* вместо чисел и интерес часто представляют *оценки*, а не равенства.

[3)] Объяснять, как с помощью вероятностных методов можно получить абсолютно верный результат, лучше на более простых примерах. См., например, задачи 5, 10, 11, [4, задача 3 на стр. 3], [3, задача 7.3.a]. Мы хотели бы сделать заметку доступной даже для тех, кто не разбирал таких примеров.

(определённую там) можно применять для оценки количества элементов в пересечении множеств.

Описанную идею можно сформулировать так. Нужное условие мы представляем в виде пересечения некоторого числа условий. При этом ясно, что для каждого из них есть конструкция, ему удовлетворяющая. Иногда отсюда можно вывести, что есть конструкция, удовлетворяющая всем этим условиям одновременно! Эта идея часто применяется в математике. (Для читателя, знакомого с соответствующими понятиями, напомним, что в анализе так доказывается существование решения дифференциального уравнения, в топологии — вложимость n-мерного компакта в $\mathbb{R}^{2n+1}$, ср. [7, § 2].) Число условий может быть бесконечно, поэтому идея пересечения «равносильна» идее итерационного процесса. А в настоящей заметке мы покажем, как применять эту идею в комбинаторике. Несмотря на конечность числа условий, её применение весьма нетривиально.

2. (a) По кругу стоит 200 студентов из 10 групп, в каждой из которых 20 студентов. Докажите, что можно в каждой группе выбрать старосту так, чтобы никакие два старосты не стояли рядом.

(b) По кругу стоит 1600 студентов из 100 групп, в каждой из которых 16 студентов. Докажите, что можно в каждой группе выбрать старосту так, чтобы никакие два старосты не стояли рядом.

3. (a) Докажите, что можно раскрасить первые 8 натуральных чисел в 2 цвета так, чтобы не было одноцветной арифметической прогрессии длины 3.

(b) Докажите, что можно раскрасить первые 15 миллионов натуральных чисел в 2 цвета так, чтобы не было одноцветной арифметической прогрессии длины 32.

4. (a) Докажите, что для любого $M \in \mathbb{R}$ можно раскрасить все вещественные числа в 2 цвета так, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}$ числа x и $x + M$ были не одного цвета.

(b) Докажите, что для любых 25 чисел $M_1, \ldots, M_{25} \in \mathbb{R}$ можно раскрасить все вещественные числа в 3 цвета так, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}$ среди чисел $x, x + M_1, \ldots, x + M_{25}$ были числа каждого из трёх цветов.

Решения пунктов (b) вышеприведённых задач основаны на идее, аналогичной решению задачи 1(b).

Независимость и лемма Ловаса

Приведём задачи, которые подведут нас к лемме Ловаса 15 (почему она интересна, написано в предыдущем разделе).

5. Каждый житель города либо здоров, либо болен, а также либо богат, либо беден. Богатство и здоровье *независимы*, т. е. доля богатых здоровых среди богатых равна доле здоровых среди всех жителей. Известно, что есть богатый горожанин и есть здоровый горожанин. Обязательно ли найдётся богатый здоровый горожанин?

Обозначим через $|X|$ количество элементов в множестве X. Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если

$$|A \cap B| \cdot |M| = |A| \cdot |B|.$$

При $B \neq \varnothing$ это равносильно тому, что доля множества $A \cap B$ в B равна доле множества A в M.

6. Зависимы ли следующие подмножества? (Мы называем *зависимыми* подмножества, не являющиеся независимыми.)

(a) В множестве всех клеток шахматной доски подмножество клеток в первых трёх её строках и подмножество клеток в последних четырёх её столбцах.

(b) Подмножества $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ и $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

(c) Подмножества $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

7. Зависимы ли следующие подмножества множества целых чисел от 1 до 105?

(a) Подмножество чисел, делящихся на 5, и подмножество чисел, делящихся на 7.

(b) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 21.

(c) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 5.

(d) Подмножество чисел, делящихся на 10, и подмножество чисел, делящихся на 7.

8. (Ср. с замечанием после задачи 1(b).) Зависимы ли следующие подмножества множества всех раскрасок чисел $1, 2, \ldots, 400$ в два цвета?

(a) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \ldots, 18\}$ одноцветно.

(b) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ неодноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \ldots, 18\}$ неодноцветно (ср. с задачей 1(b)).

(c) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{6, 7, \ldots, 13\}$ одноцветно.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать.

9. Подмножества A и B конечного множества независимы тогда и только тогда, когда A и $\overline{B}$ независимы.

10. (a) Обязательно ли найдётся богатый здоровый умный горожанин, если в городе доля богатых горожан больше $2/3$, доля здоровых больше $2/3$ и доля умных больше $2/3$?

(b) Тот же вопрос, если в городе есть богатый горожанин, есть здоровый горожанин и есть умный горожанин, богатство, здоровье и ум попарно независимы и доля богатых здоровых умных среди богатых здоровых такая же, как и доля умных среди всех жителей. (Вместе с условием попарной независимости последнее условие называется *независимостью в совокупности*.)

(c) Тот же вопрос, если в городе богатых горожан больше половины, здоровых больше половины, умных больше половины, богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы.

Задача 10 показывает, что чем сильнее условие, характеризующее независимость нескольких множеств, тем меньшей доли каждого множества достаточно, чтобы гарантировать непустоту пересечения. Причём наиболее интересный результат (10(в)) получается «посередине» между крайними условиями — полного отсутствия независимости (10(a)) и независимости в совокупности (10(б)). Так часто бывает: наиболее полезные соображения находятся между «крайними» точками зрения.

11. (a) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — подмножества 720-элементного множества, в каждом из которых более 480 элементов. Если A_k и A_{k+1} независимы для любого $k = 1, 2, 3$, то $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \neq \varnothing$.

(b) Пусть $n \geqslant 2$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых (т. е. $|A_k|/|M|$) больше $1 - \dfrac{1}{n-1}$. Если A_k и A_{k+1} независимы для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

Подробнее о независимости см. [5].

Для формулировки леммы Ловаса нужно ещё более «хитрое» условие независимости на несколько множеств, чем рассмотренные ранее.

Подмножество A конечного множества M называется *независимым от набора подмножеств* $B_1, \ldots, B_k \subset M$, если A независимо с любым подмножеством, являющимся пересечением нескольких (возможно, одного) множеств из $B_1, \ldots, B_k$.

12. Приведите пример подмножеств A, B_1, B_2 конечного множества:

(a) попарно независимых, но для которых A не является независимым от набора B_1, B_2;

(b) не являющихся попарно независимыми, но для которых A независимо от набора B_1, B_2.

13. Обозначим семейство всех раскрасок множества $\{1, 2, \ldots, 400\}$ в два цвета через M. Для подмножества $\alpha \subset \{1, 2, \ldots, 400\}$ обозначим через $A_\alpha \subset M$ подмножество тех раскрасок, для которых α одноцветно. Тогда $A_{\{1,2,\ldots,8\}}$ не зависит от набора $\{A_\alpha \colon \alpha \subset \{9, 10, \ldots, 400\}\}$. (Ср. с замечанием после задачи 1(b).)

14. Следующие условия на подмножества $A, B_1, \ldots, B_k$ равносильны:
- A независимо от набора $B_1, \ldots, B_k$;
- $\overline{A}$ независимо от набора $B_1, \ldots, B_k$;
- $\overline{A}$ независимо от набора $\overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_k$.

15. (a) **Локальная лемма Ловаса в симметричной форме.** *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества. Если для некоторого d и любого k доля подмножества A_k не меньше $1 - \dfrac{1}{4d}$ и существует набор из не менее чем $n - d$ подмножеств A_j, от которого A_k не зависит, то*[4] $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

(b) При $d > 2$ утверждение пункта (a) верно, если заменить $1 - \dfrac{1}{4d}$ на $1 - \dfrac{1}{e(d+1)}$, где e — основание натуральных логарифмов.

Читатель может перед доказательством этой леммы применить её к решению задачи 1(b). Доказательство леммы нетривиально обобщает идеи решения задач 10 и 11. Из этих задач ясно, что нужно оценивать снизу количество элементов в пересечении s из данных множеств, начиная с $s = 1$ и заканчивая $s = n$, при помощи индукции по s. Как часто бывает, наиболее трудная часть — догадаться, какое конкретно утверждение нужно доказывать по индукции (а также, по каким параметрам вести индукцию). Вот оно:

$$|A_1 \cap \ldots \cap A_{k+t}| \geqslant |A_1 \cap \ldots \cap A_k| \Big(1 - \frac{1}{d}\Big)^t \quad \text{для любых } k, t \geqslant 0.$$

Указания и решения к задачам 1–15 (кроме 2(b), 3(b) и 4(b))

1. (a) Посчитаем двумя способами количество всех таких пар (a, x), что a — распределение выходных и x — вид работы, по которому в один из дней не будет специалиста при распределении a. Обозначим через n общее число специалистов. Для каждого вида работ имеется $2 \cdot 2^{n-8} = 2^{n-7}$

[4] Вот формулировка на вероятностном языке, которая не используется в дальнейшем. *Пусть дано вероятностное пространство и $A_1, \ldots, A_n$ — события. Пусть для некоторого d и любого k вероятность события A_k не меньше $1 - \dfrac{1}{4d}$ и существует набор из не менее чем $n - d$ событий A_j, от которого A_k не зависит. Тогда вероятность события $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ положительна.*

распределений выходных, при которых все специалисты по этому виду работ отдыхают в один и тот же день. Так как видов работ 100, количество пар не больше $100 \cdot 2^{n-7} < 2^n$. Общее число распределений выходных равно 2^n. Значит, найдётся распределение выходных, при котором для каждого вида работ не все специалисты по нему отдыхают в один и тот же день.

(b) Обозначим через A множество распределений выходных. Для каждого вида работ x обозначим через $\widehat{x}$ множество специалистов по нему, а через A_x — множество распределений выходных, при которых и в субботу, и в воскресенье на работе есть специалист по x. Тогда $|A_x|/|A| = 2^{-7}$. Подмножество A_x не зависит от набора $\{A_y \colon \widehat{y} \cap \widehat{x} = \varnothing\}$. Так как каждый вид работ имеет общих специалистов не более чем с 30 другими видами, вне этого набора не более 30 подмножеств. Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 15(a)) к дополнениям множеств A_x и $d = 2^5$. Это возможно ввиду утверждения задачи 9 и неравенства $30 < 2^5$. Получим $\cap_x \overline{A}_x \neq \varnothing$.

2. (a) Выберем произвольного студента произвольной группы и назначим его старостой. Далее действуем так: на каждом шаге выбираем из группы, в которой ещё не выбран староста, студента, не являющегося соседом никакого выбранного старосты. Так как выбранных старост не больше 9, соседей у выбранных старост не больше 18. Следовательно, на каждом шаге мы можем найти нужного студента. В итоге получим 10 человек из разных групп, никакие два из которых не являются соседями.

4. (a) Покрасим число $x \in \mathbb{R}$ в чёрный цвет, если $[x/M]$ чётно, и в нечёрный цвет, если $[x/M]$ нечётно.

6. Ответы: (a), (б) независимы, (c) зависимы.

7. Ответы: (a) независимы, (б), (в), (г) зависимы.

8. Ответы: (a), (б) независимы, (c) зависимы.

10. (c) Забудьте про глупых людей!

Приведём более сложное решение. Зато оно подводит к лемме Ловаса. Обозначим через У, Б, З множества умных, богатых и здоровых горожан. Будем пропускать знаки пересечения и числа элементов. Тогда УБ $>$ У$/2 <$ УЗ. Значит,

$$\text{УБЗ} = \text{УБ} - \text{УБ}\overline{\text{З}} > \frac{\text{У}}{2} - \text{У}\overline{\text{З}} > \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right)\text{У} = 0.$$

11. (a) Будем пропускать знаки пересечения и числа элементов. Не теряя общности, можно считать, что $A_2 \geqslant A_3$. Тогда аналогично решению задачи 10(c) получаем $A_1A_2A_3 > A_2/3$. Поэтому

$$A_1A_2A_3A_4 = A_1A_2A_3 - A_1A_2A_3\overline{A}_4 > \frac{A_2}{3} - A_3\overline{A}_4 > \frac{A_2 - A_3}{3} \geqslant 0.$$

15. (a) Можно считать, что $d > 1$, иначе утверждение очевидно. Достаточно доказать для любых $k, t \geqslant 0$ неравенство

$$I(k+t,t)\colon |A_1 \cap \ldots \cap A_{k+t}| \geqslant |A_1 \cap \ldots \cap A_k|\Big(1-\frac{1}{d}\Big)^t.$$

Утверждение леммы получается из $I(n,n)$.

Докажем неравенство $I(k+t,t)$ индукцией по паре[5] (s,t), где $s=k+t$. База $s=k+t=t=0$ очевидна.

Докажем шаг, т. е. докажем неравенство $I(k+t,t)$, предполагая выполненным неравенство $I(k'+t',t')$ для всех пар $(k'+t',t')$, лексикографически меньших, чем пара $(k+t,t)$. Тогда $k+t>0$. Случай $t=0$ очевиден. Пусть теперь $t>0$. Обозначим $A_{1,2,\ldots,m} := A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$.

Случай $t>1$ сводится к последовательному применению неравенств $I(k+t,1)$ и $I(k+t-1,t-1)$:

$$|A_{1,2,\ldots,k+t}| \geqslant |A_{1,2,\ldots,k+t-1}|\Big(1-\frac{1}{d}\Big) \geqslant$$
$$\geqslant |A_{1,2,\ldots,k}|\Big(1-\frac{1}{d}\Big)^{1+t-1} = |A_{1,2,\ldots,k}|\Big(1-\frac{1}{d}\Big)^t.$$

Пусть $t=1$. По условию существует такое $X \subset \{1,2,\ldots,n\}$, что $|X| \geqslant n-d$ и A_{k+1} не зависит от набора $\{A_j\colon j \in X\}$. Тогда

$$|\{1,2,\ldots,k\} - X| \leqslant n - |X| \leqslant n-(n-d) = d.$$

Поэтому можно считать, что A_{k+1} не зависит от набора $A_1, A_2, \ldots, A_{k-d}$ (при $k \leqslant d$ этот набор пуст). Тогда

$$|\overline{A_{k+1}} \cap A_{1,2,\ldots,k}| \overset{(1)}{\leqslant} |\overline{A_{k+1}} \cap A_{1,2,\ldots,k-d}| \overset{(2)}{\leqslant} \frac{|A_{1,2,\ldots,k-d}|}{4d} \overset{(3)}{\leqslant} \frac{|A_{1,2,\ldots,k}|}{4d\Big(1-\frac{1}{d}\Big)^d} \overset{(4)}{\leqslant} \frac{|A_{1,2,\ldots,k}|}{d}.$$

Здесь

• при $k \leqslant d$ по определению считаем, что $A_{1,2,\ldots,k-d}$ есть то данное в условии множество, подмножествами которого являются $A_1, \ldots, A_n$;

• первое неравенство справедливо, поскольку $A_{1,2,\ldots,k} \subset A_{1,2,\ldots,k-d}$;

• второе — ввиду того, что доля подмножества A_{k+1} не меньше $1-\dfrac{1}{4d}$ и, при $k>d$, ввиду независимости $\overline{A_{k+1}}$ от набора $A_1, A_2, \ldots, A_{k-d}$ (см. задачу 9);

• третье есть $I(k,d)$ и верно по предположению индукции;

[5] Подумайте, почему не проходит индукция по паре (k,t) или по $s+t=k+2t$, а также зачем рассматривать $k>0$, если лемма Ловаса вытекает из случая $k=0$.

• четвёртое — поскольку $\left(1-\frac{1}{d}\right)^d \geqslant \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.
Значит,

$$|A_{1,2,\dots,k+1}| = |A_{1,2,\dots,k}| - |\overline{A_{k+1}} \cap A_{1,2,\dots,k}| \geqslant |A_{1,2,\dots,k}|\left(1-\frac{1}{d}\right).$$

Указания к задачам 2(b), 3(b) и 4(b)

2. (b) Обозначим через A семейство подмножеств из 100 студентов, в которых по одному студенту из каждой группы. Для любого студента x обозначим через A_x семейство подмножеств из A, содержащих и студента x, и следующего за ним по часовой стрелке студента x_+.

Если x и x_+ одногруппники, то A_x пусто. Иначе $|A_x|/|A| = 1/256$. Итак, всегда $|A_x|/|A| \leqslant 1/256$.

Множество A_x не зависит от набора α_x всех тех A_y, для которых ни один из студентов y, y_+ не является одногруппником ни со студентом x, ни со студентом x_+. Семейство A_z не входит в набор α_x тогда и только тогда, когда один из студентов z, z_+ является одногруппником с одним из студентов x, x_+. Таких z, которые являются одногруппниками для x, ровно 16. Аналогичное верно с заменой пары (x, z) на любую из пар (x_+, z), (x, z_+), (x_+, z_+). Поэтому количество студентов z, для которых $A_z \notin \alpha_x$, не больше $16 \cdot 4 = 64$.

Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 15(a)) к дополнениям множеств A_x и $d = 64$. Это возможно ввиду утверждения задачи 9 и равенства $4 \cdot 64 = 256$. Получим $\cap_x \overline{A}_x \neq \varnothing$.

3. (b) Положим $n := 15 \cdot 10^6$. Обозначим через A семейство раскрасок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ в 2 цвета. Для любой 32-элементной арифметической прогрессии $\alpha \subset \{1, 2, \dots, n\}$ обозначим через A_α семейство раскрасок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ в 2 цвета, для которых α одноцветна. Тогда $|A_\alpha|/|A| = 2^{-31}$. Подмножество A_α не зависит от набора $\{A_\beta \colon \beta \cap \alpha = \varnothing\}$. Каждую 32-элементную арифметическую прогрессию в $\{1, 2, \dots, n\}$ пересекает не более $32^2[n/31] < 2^{10}2^{19} = 2^{29}$ других таких прогрессий (докажите!). Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 15(a)) к дополнениям множеств A_α и $d = 2^{29}$. Это возможно ввиду утверждения задачи 9. Получим $\cap_\alpha \overline{A}_\alpha \neq \varnothing$.

4. (b) Докажем следующее более слабое утверждение.

Для любых 25 чисел $M_1, \dots, M_{25} \in \mathbb{R}$ и конечного множества $X \subset \mathbb{R}$ можно раскрасить все вещественные числа в 3 цвета так, чтобы для любого $x \in X$ среди чисел x, $x + M_1$, $\dots$, $x + M_{25}$ были числа каждого цвета.

При помощи *соображений компактности* можно вывести из этого утверждения его аналог для бесконечного X, в частности, для $X = \mathbb{R}$ [1, § 5.2].

Обозначим через A семейство раскрасок множества

$$X \cup (M_1 + X) \cup \ldots \cup (M_{25} + X)$$

в 3 цвета. Для любого $x \in X$ обозначим через $A_x \subset A$ подсемейство раскрасок, для которых среди цветов чисел x, $x + M_1$, ..., $x + M_{25}$ не все цвета присутствуют. Тогда $|A_x|/|A| \leqslant 3(2/3)^{26}$. Каждое множество A_x «зависимо не более чем с $25 \cdot 26 = 650$ другими» (т. е. независимо от набора всех множеств, кроме некоторых 650). Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 15(a)) к дополнениям множеств A_x и $d = 650$. Это возможно ввиду утверждения задачи 9 и неравенства

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{26} > 2^{13} > 8000 > 7800 = 3 \cdot 2600 = 3 \cdot 4 \cdot 650.$$

Получим $\cap_x \overline{A}_x \neq \varnothing$.

Задачи для самостоятельного решения

Указания и решения к этим задачам можно найти в [1, 3].

16. Дано семейство k-элементных подмножеств конечного множества M, где (а) $k \geqslant 10$; (б) $k = 9$. Если каждый элемент множества M содержится ровно в k подмножествах семейства, то существует раскраска множества M в два цвета, для которой каждое подмножество семейства содержит элементы обоих цветов. (То есть хроматическое число любого k-однородного k-регулярного гиперграфа равно двум при $k \geqslant 9$. Ср. с задачей 1(b).)

17. В конечном множестве выбрано несколько подмножеств. В каждом из них не менее 3 элементов. Каждое из них пересекается не более чем с a_i выбранными i-элементными подмножествами. Если $\sum_i a_i 2^{-i} \leqslant 1/8$, то можно покрасить элементы данного множества в два цвета так, чтобы каждое выбранное подмножество содержало элементы обоих цветов.

18. (a) Для любого разбиения множества вершин цикла длины $11n$ на n множеств по 11 вершин можно выбрать по вершине из каждого множества так, что между выбранными n вершинами нет рёбер.

(b) В графе степень каждой вершины не превосходит Δ. Все вершины раскрашены в r цветов. Вершин каждого цвета не менее $2e\Delta + 1$. Тогда можно выбрать r вершин разных цветов, никакие две из которых не соединены ребром.

19. (a) Каждую k-элементную арифметическую прогрессию в множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ пересекает не более $k^2\left[\frac{n}{k-1}\right]$ других таких прогрессий.

(b) Для любого натурального k существует раскраска в два цвета первых $\left[\frac{2^{k-3}(k-1)}{k^2}\right]$ натуральных чисел, для которой нет одноцветной k-элементной арифметической прогрессии.

(c) Каждую k-элементную арифметическую прогрессию в множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ пересекает не более nk других таких прогрессий.

(d) Для любого натурального k существует раскраска первых $[2^{k-3}/k]$ натуральных чисел в 2 цвета, для которой нет одноцветной k-элементной арифметической прогрессии.

20. (a) Если $X \subset \mathbb{R}$ — конечное множество и m, r — натуральные числа, для которых $4rm(m-1)(1-1/r)^m < 1$, то для любого m-элементного подмножества $M \subset \mathbb{R}$ существует такая раскраска множества $\mathbb{R}$ в r цветов, что для любого $x \in X$ множество $x + M := \{x + a\colon a \in M\}$ содержит точки каждого из r цветов.

(b) То же для $X = \mathbb{Z}$.

(c) То же для $X = \mathbb{R}$.

21. Определение *числа Рамсея* $R(n, n)$ см., например, в [2].

(a) Если $\binom{n}{2}\binom{k}{n-2} + 1 < 2^{\binom{n}{2}-1}/e$, то $R(n, n) > k$.

(b) $R(n, n) > \sqrt{2}e^{-1}n2^{n/2}(1 + o(1))$.

22. Имеется несколько цветов. Каждой вершине некоторого графа сопоставлен список из не менее чем $10d$ этих цветов, где $d > 1$. Для любых вершины v и цвета из её списка имеется не более d соседей вершины v, в списке которых есть этот цвет. Докажите, что можно так раскрасить каждую вершину графа в некоторый цвет из её списка, чтобы концы любого ребра были разного цвета.

23. В ориентированном графе в каждую вершину входит не больше Δ рёбер и из каждой вершины выходит не меньше δ рёбер. Тогда для любого натурального $k \leqslant \dfrac{1}{1-(4\delta\Delta)^{-1/\delta}}$ в графе найдётся ориентированный цикл длины, кратной k.

24. Клетки доски $n \times n$ раскрашены в несколько цветов. Клеток каждого цвета не больше чем $(n-1)/16$. Тогда можно поставить на доску n попарно не бьющих друг друга ладей, чтобы они стояли на клетках разных цветов.

25. *КНФ-формула* или *формула в конъюнктивной нормальной форме* — конъюнкция набора дизъюнкций нескольких из переменных $x_1, \ldots, x_n$ и их отрицаний. Если в каждом «сомножителе» КНФ-формулы ровно k «слагаемых» и у каждого «сомножителя» есть общие переменные не более чем с 2^{k-2} другими, то булева функция, определяемая формулой, не является тождественным нулём.

Замечание. Одной из центральных в информатике является проблема k-выполнимости (k-SAT problem): *существует ли алгоритм, который по КНФ-формуле, в каждой дизъюнкции которой ровно k переменных, выясняет, является ли тождественным нулём соответствующая булева функция.* При $k = 2$ есть полиномиальный алгоритм её решения. При бо́льших k это наиболее стандартная NP-*полная проблема*. Поэтому полиномиальный алгоритм дал бы и равенство *классов* P *и* NP.

26. (a) **Локальная лемма Ловаса.** *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, $J_1, \ldots, J_n \subset \{1, \ldots, n\}$ и $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in (0, 1)$. Пусть для любого k*

- *доля подмножества A_k не меньше $1 - (1 - \gamma_k) \prod_{j \notin J_k} \gamma_j$;*
- *множество A_k не зависит от набора $\{A_j : j \in J_k\}$.*

Тогда[6] *доля пересечения $\bigcap_{k=1}^n A_k$ не меньше $\prod_{k=1}^n \gamma_k > 0$.*

(b) Существует такое $c > 0$, что $R(3, n) > cn\sqrt{n}$ для любого n.

Список литературы

[1] *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. М.: Бином, 2011.

[2] *Гарднер М.* Рамсеевская теория графов // Квант. 1988. № 4. С. 15–20, 82. http://kvant.mccme.ru/1988/04/ramseevskaya_teoriya_grafov.htm.

[3] *Глибичук А. А., Дайняк А. Б., Ильинский Д. Г. и др.* Элементы дискретной математики в задачах. М.: МЦНМО, 2015. http://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf.

[4] Городская устная математическая олимпиада. М., 2014. http://olympiads.mccme.ru/ustn/ustn14.pdf.

[5] *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.,* Введение в теорию вероятностей. Сер. «Библиотечка „Квант“». Вып. 23. М.: Наука, 1982. http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-kvant/teorver.htm.

[6] Математика в задачах. Сборник материалов московских выездных математических школ / Под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова и др. М.: МЦНМО, 2009. http://www.mccme.ru/free-books/olymp/matprob.pdf.

[6] Вот формулировка на вероятностном языке. *Пусть дано вероятностное пространство, $A_1, \ldots, A_n$ — события, $J_1, \ldots, J_n \subset \{1, \ldots, n\}$ и $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in (0, 1)$. Пусть для любого k вероятность события A_k не меньше $1 - (1 - \gamma_k) \prod_{j \notin J_k} \gamma_j$ и событие A_k не зависит от набора $\{A_j : j \in J_k\}$. Тогда вероятность события $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ не меньше $\prod_{j=1}^m \gamma_j$.*

[7] *Скопенков А. Б.*, Объемлемая однородность. М.: МЦНМО, 2012. http://arxiv.org/abs/1003.5278.

[8] *Судзуки Д.* Основы дзэн-буддизма. Наука дзэн — ум дзэн. Киев: Преса України, 1992.

[9] *Erdős P., Lovász L.* Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions // Infinite and Finite Sets. Amsterdam: North Holland, 1973. (Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai; V. 10). P. 609–627.

Д. Г. Ильинский, ЦЭМИ РАН, МФТИ

nograhol@gmail.com,
http://mipt.ru/education/chairs/da/staff/ilyinsky.php

А. М. Райгородский, МФТИ, МГУ

mraigor@ya.ru,
http://mipt.ru/education/chairs/da/staff/raigorodskii.php

А. Б. Скопенков, МФТИ, НМУ

skopenko@mccme.ru, http://www.mccme.ru/~skopenko/

Метод Рунге для уравнений 4-й степени: элементарный подход

Н. Н. Осипов

В статье предлагается элементарный способ решения диофантовых уравнений 4-й степени с двумя неизвестными, удовлетворяющих условиям применимости метода Рунге.

Введение

Начальным стимулом для написания этой статьи послужила одна из задач Санкт-Петербургской математической олимпиады 2005 года. Вот её формулировка (см. задачу 05.59 в книге [5]).

Задача (А. Храбров). Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$x^3 - x = 2(y^3 - y). \tag{$*$}$$

Без условия взаимной простоты x и y уравнение $(*)$ вряд ли можно решить школьными методами, а самый простой способ воспользоваться этим условием — это заметить, например, что разность $x^2 - 1$ должна делиться на y. Если теперь записать $x^2 - 1 = ky$ и затем исключить x из системы

$$x^2 - 1 = ky, \quad 2(y^2 - 1) = kx,$$

то получим уравнение

$$4y^4 - k^3y - 8y^2 - k^2 + 4 = 0. \tag{$**$}$$

Нетрудно понять, как от уравнения $(**)$ вернуться к уравнению $(*)$. Действительно, имеем

$$(2(y^2 - 1))^2 = 4y^4 - 8y^2 + 4 = k^3y + k^2 = k^2(ky + 1),$$

откуда следует, что $2(y^2 - 1)$ делится на k. Положив $2(y^2 - 1) = kx$ и избавившись от k, мы получим уравнение $(*)$.

Получается, что решение нашей задачи эквивалентно решению уравнения (**) в натуральных числах. Но сама задача, очевидно, решаема каким-то элементарным методом, иначе её не стали бы предлагать на школьной олимпиаде. Следовательно, есть такой метод и для уравнения (**). Но какой?

Автору захотелось разобраться в этой ситуации. После того как уравнение (**) было решено элементарными средствами, захотелось «посмотреть по сторонам» — понять, для какого класса *диофантовых уравнений*

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

4-й степени пригоден найденный подход. Как выяснилось, в этот класс входят все уравнения 4-й степени, к которым применим *метод Рунге* (по версии из книги [10, с. 262]). Изложению обнаруженной *элементарной версии* метода Рунге для уравнений 4-й степени и посвящена данная статья.

Фактически мы продолжим тему, начатую в статье [4], где элементарным способом изучались кубические диофантовы уравнения (1) в условиях применимости метода Рунге. Приводимый там пример семейства уравнений

$$2y^3 - x^2y - x - c = 0$$

показывает, что элементарный подход иногда может конкурировать с неэлементарным по качеству получаемых с их помощью результатов.

Чтобы читатель имел возможность сравнить разные подходы, мы расскажем про оригинальную идею метода Рунге в её наиболее простой форме. Поскольку в любых версиях этого метода ключевую роль играют оценки, необходимо рассказать о *методе Ньютона* разложения в ряд по степеням переменной x неявной функции $y = \Psi(x)$, определяемой уравнением (1). Разумеется, все эти вопросы интересны сами по себе, но в рамках данной статьи мы ограничимся их кратким освещением и ссылками на литературу.

§ 1. О методе Рунге

В работе [11] Рунге получил первую общую теорему о конечности множества целых точек на алгебраических кривых из достаточно широкого класса. Более того, его метод позволяет эффективно найти границы, в пределах которых эти целые точки обязаны находиться. В дальнейшем метод Рунге неоднократно подвергался различным обобщениям и модификациям (см., например, статью [9] и библиографию в ней).

Немецкий математик Карл Рунге (1856–1927) более известен своими работами в области вычислительной математики. Прежде всего следует упомянуть хрестоматийный *метод Рунге — Кутты* численного интегрирования дифференциальных уравнений, а также *теорему Рунге* о приближении аналитических функций многочленами. Помимо чистой и прикладной математики, К. Рунге занимался также спектроскопией, геодезией и астрофизикой (один из кратеров на Луне назван его именем).

Метод Рунге можно отнести к алгебро-аналитическим методам, поскольку он требует разложения всех вещественных ветвей *алгебраической функции* $y = \Psi(x)$ в ряд по степеням x в окрестности бесконечно удалённой точки.

В качестве примера рассмотрим кубическое уравнение

$$y^3 - 2x^2y - x + 1 = 0.$$

Здесь при больших x имеем три вещественных ветви $y = \Psi_i(x)$, и для каждой из них можно получить явное аналитическое выражение с помощью *формулы Кардано*. Например:

$$\Psi_1(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\, x \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{9\sqrt{2}}{8\sqrt{3}} \cdot \frac{x-1}{x^3}\right)\right).$$

Можно предположить, что любые действия с таким громоздким выражением будут сопряжены со значительными вычислительными трудностями, поэтому для разложения в ряд разумно применить какой-то другой метод.

В данном конкретном случае нас выручит *система компьютерной алгебры* типа Maple, и мы сможем получить искомый ряд «в лоб», комбинируя известные разложения для элементарных функций. Однако в общем случае рассчитывать на наличие принципиально простых, пусть и громоздких, аналитических выражений не приходится.

Кроме умения разлагать в ряды, для успешного применения метода Рунге в общем случае требуется знание основ теории *алгебраических чисел*. Это связано с тем, что, как правило, коэффициенты получаемых рядов будут алгебраическими иррациональностями и одними рациональными числами обойтись не удастся. Так, в нашем примере все коэффициенты ряда

$$\Psi_1(x) = \sqrt{2}\, x + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2} - \frac{3\sqrt{2}}{64x^3} + \frac{3\sqrt{2}}{32x^4} + \ldots$$

принадлежат полю $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ — квадратичному расширению поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Идея Рунге состоит в том, чтобы, манипулируя подобными разложениями, для больших x сконструировать дополнительное к (1) уравнение и решать уже систему из двух уравнений. Однако эту идею удаётся реализовать не всегда, а лишь при выполнении некоторого условия, которое в простейшем варианте формулируется так: старшая однородная часть многочлена $f(x, y)$ разложима над $\mathbb{Q}$, но её разложение не содержит кратных неприводимых сомножителей.

В нашем примере с кубическим уравнением это условие выполнено:

$$y^3 - 2x^2y = y(y^2 - 2x^2).$$

Чтобы составить дополнительное уравнение для целых точек ветви $y=\Psi_1(x)$, подберём многочлены $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ с целыми коэффициентами так, чтобы функция

$$\Phi(x) = P_0(x) + P_1(x)\Psi_1(x) + P_2(x)\Psi_1^2(x)$$

удовлетворяла условию

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0.$$

Тогда дополнительным уравнением при больших x будет

$$P_0(x) + P_1(x)y + P_2(x)y^2 = 0.$$

Многочлены $P_j(x)$ будем искать методом неопределённых коэффициентов, считая

$$\deg P_j(x) \leqslant h - j,$$

где h следует подобрать так, чтобы однородная линейная система уравнений на неизвестные коэффициенты $P_j(x)$ была нетривиально разрешима. Число неизвестных равно $3h$, а число уравнений равно $h+1$. Поскольку все коэффициенты в разложении $\Psi_1(x)$ принадлежат $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, все уравнения системы можно представить в виде

$$A + B\sqrt{2} = 0,$$

где A и B суть некоторые линейные комбинации неизвестных с рациональными коэффициентами. Каждое такое уравнение следует заменить системой

$$A = B = 0$$

из двух уравнений. В итоге возникает система из $2(h+1)$ линейных уравнений с рациональными коэффициентами относительно $3h$ неизвестных. При $3h > 2(h+1)$ она будет иметь ненулевое решение и искомые многочлены $P_j(x)$ могут быть найдены. Взяв $h = 3$, находим

$$P_0(x) = 4x^3 + 4x^2, \quad P_1(x) = 1, \quad P_2(x) = -2x - 2.$$

Для таких $P_j(x)$ справедлива оценка

$$\Phi(x) = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big), \quad x \to \infty.$$

Следовательно, дополнительным уравнением будет

$$4x^3 + 4x^2 + y - (2x + 2)y^2 = 0.$$

По понятным причинам оно оказалось нелинейным. Отметим, что предложенная в статье [4] элементарная версия метода Рунге для кубических уравнений гарантирует линейные дополнительные уравнения (см. также § 6, где она воспроизведена в более простом виде).

Более подробно о рассказанной версии метода Рунге читатель может прочитать в книге [7, с. 11–13].

§ 2. Что будет сделано

В принципе метод Рунге можно применять к уравнениям (1) любой степени, поэтому возникает соблазн поискать элементарный подход и в некоторых других частных случаях. Далее мы предложим элементарную версию метода Рунге для уравнений 4-й степени. Предварительно мы продемонстрируем идейную сторону дела на конкретных примерах (§§ 4 и 5) и только потом дадим описание общего алгоритма (§ 6).

О каких именно уравнениях (1) будет идти речь? Предположим, что многочлен

$$f(x, y) = f_4(x, y) + f_{\leqslant 3}(x, y)$$

с целыми коэффициентами является неприводимым над $\mathbb{Q}$, а его старшая однородная часть $f_4(x, y)$ — наоборот, разложима, причём в произведение *взаимно простых* многочленов (по-другому говоря, $f_4(x, y)$ не пропорциональна степени неприводимого многочлена). Это условие мы будем называть *условием Рунге*.

Мы элементарно покажем, что уравнение (1), удовлетворяющее условию Рунге, может иметь лишь конечное множество решений в целых числах, и на примерах объясним, как можно находить все эти решения.

Чтобы упростить изложение, в примерах будем считать неизвестные принимающими только положительные значения. Решение уравнения (1) происходит в два этапа: сначала доказывается, что нет решений (x, y) с большими x (или, как вариант, составляется дополнительное уравнение, которому должны удовлетворять решения с большими x), а затем находятся решения с маленькими x. При любом фиксированном целом x можно, используя какой-нибудь стандартный алгоритм, найти все целые корни уравнения (1) относительно y. Решения с маленькими x мы можем найти полным перебором, для чего лучше привлечь компьютер. При выборе границы, отделяющей маленькие x от больших, мы будем опираться на заранее подготовленные оценки роста функции $y = \Psi(x)$.

Каким образом эти оценки можно получать, будет рассказано в следующем параграфе.

§ 3. О методе Ньютона

Как уже было сказано, уравнение (1) неявно определяет (вообще говоря, многозначную, но в наших примерах, как правило, однозначную) функцию

$$y = \Psi(x),$$

и для обработки больших x нам необходимо уметь оценивать рост этой функции при $x \to \infty$. Покажем на одном примере, как это можно делать.

Пример 1. Пусть дано уравнение

$$x^2(x^2 + 6y^2) + 2x^3 + 6xy^2 - 2y^3 + x^2 = 0. \tag{2}$$

Будем считать $x \geqslant 1$ параметром и запишем левую часть в виде

$$F(y) = -2y^3 + (6x^2 + 6x)y^2 + x^4 + 2x^3 + x^2.$$

Исследуем функцию $F(y)$ с помощью производной. Имеем

$$F'(y) = -6y^2 + 12(x^2 + x)y = 6y(2x^2 + 2x - y),$$

поэтому точки $y = 0$ и $y = 2x^2 + 2x$ являются точками минимума и максимума соответственно. Поскольку

$$F(0) = x^2(x + 1)^2 > 0,$$

функция $F(y)$ имеет единственный нуль $y = \Psi(x)$, причём

$$\Psi(x) > 2x^2 + 2x.$$

Но это — грубая оценка, а более точная оценка может быть такой:

$$3x^2 + 3x < \Psi(x) < 3x^2 + 3x + 1. \tag{3}$$

Действительно, для доказательства достаточно заметить, что

$$F(3x^2 + 3x) = x^2(x + 1)^2 > 0,$$
$$F(3x^2 + 3x + 1) = -17x^4 - 34x^3 - 29x^2 - 12x - 2 < 0.$$

Как видно, оценка (3) уже сама по себе позволяет утверждать, что уравнение (2) неразрешимо в натуральных числах. □

Обосновать оценку (3) легко, но как её получить? В общем случае можно воспользоваться *методом Ньютона* (см., например, [8]).

Предположим, что

$$\Psi(x) \sim \alpha x^{\varepsilon} \quad (x \to \infty), \tag{4}$$

где параметры $\alpha \neq 0$ и $\varepsilon > 0$ подлежат определению. Имеем

$$F(\Psi(x)) = F(\alpha x^{\varepsilon} + o(x^{\varepsilon})) = -2\alpha^3 x^{3\varepsilon} + 6\alpha^2 x^{2\varepsilon+2} + x^4 + o(x^{\mu}),$$

где $\mu = \max\{3\varepsilon, 2\varepsilon + 2, 4\}$. Если среди чисел 3ε, $2\varepsilon + 2$, 4 лишь одно равно μ, то при больших x имеет место условие

$$-2\alpha^3 x^{3\varepsilon} + 6\alpha^2 x^{2\varepsilon+2} + x^4 + o(x^{\mu}) \neq 0.$$

Поэтому хотя бы два из указанных чисел должны быть равны μ.

Вариант $\mu = 3\varepsilon = 2\varepsilon + 2 \geqslant 4$ приводит к $\varepsilon = 2$. В этом случае также должно выполняться равенство $-2\alpha^3 + 6\alpha^2 = 0$ (иначе опять получим противоречие при больших x), откуда $\alpha = 3$.

Вариант $\mu = 3\varepsilon = 4 \geqslant 2\varepsilon + 2$ невозможен.

Наконец, последний вариант $\mu = 2\varepsilon + 2 = 4 \geqslant 3\varepsilon$ даёт $\varepsilon = 1$, однако в этом случае ещё одно необходимое равенство $6\alpha^2 + 1 = 0$ не выполняется ни при каком вещественном α.

Итак, приходим к единственно возможной оценке

$$\Psi(x) \sim 3x^2 \quad (x \to \infty).$$

Эту оценку можно уточнить, записав

$$\Psi(x) - 3x^2 \sim \alpha_1 x^{\varepsilon_1} \quad (x \to \infty)$$

и проделав аналогичные вычисления. В результате получим

$$\Psi(x) - 3x^2 \sim 3x \quad (x \to \infty).$$

Несколько иным выражением этого факта и является оценка (3).

Методом Ньютона можно сколь угодно точно оценить при $x \to \infty$ все ветви неявно заданной уравнением (1) функции $y = \Psi(x)$, разложив их в так называемый *ряд Пюизо* (ряд по дробным степеням переменной x). Для единственной вещественной ветви функции из примера 1 мы получим частный случай этого ряда — *ряд Лорана*:

$$\Psi(x) = 3x^2 + 3x + \frac{1}{18} - \frac{1}{486x^2} + \frac{1}{486x^3} + \ldots$$

Во всех следующих примерах нам будет достаточно оценок типа (4), которые мы будем, как правило, конкретизировать, превращая их в оценки типа (3). Доказательство этих оценок мы предоставим читателю в качестве полезного упражнения. Отметим, что метод Ньютона имеет геометрическую интерпретацию, связанную с понятием *многоугольника Ньютона* (популярное изложение можно найти, например, в статье [2]).

§ 4. Уравнения вида $(a_1x + b_1y)(a_2x^3 + b_2x^2y + c_2xy^2 + d_2y^3) + \ldots = 0$

Здесь мы рассмотрим примеры уравнений, старшая однородная часть которых разлагается так, как указано в заголовке параграфа. Именно к этому типу уравнений относится уравнение (∗∗).

Пример 2. Покажем, что уравнению

$$x(2x^3 - y^3) + x^2y - y^2 - 1 = 0 \tag{5}$$

удовлетворяет только одна пара натуральных чисел $(x, y) = (1, 1)$.

При $x \geqslant 2$ уравнение (5) определяет функцию $y = \Psi(x)$, для которой справедлива оценка

$$2^{1/3}x < \Psi(x) < 2^{1/3}x + 1. \tag{6}$$

Из уравнения (5) следует, что $y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{x}$. Положив $y^2 + 1 = lx$, где l — некоторое целое число, получим $x(2x^3 - y^3) + x^2y - lx = 0$. Сократив на x и снова перейдя к сравнению по модулю x, будем иметь $l \equiv -y^3 \pmod{x}$. Но $-y^3 = -y \cdot y^2 \equiv y \pmod{y^2 + 1}$, поэтому $-y^3 \equiv y \pmod{x}$ и в итоге $l \equiv y \pmod{x}$. Значит, $l = y + mx$ для некоторого целого m. Это m можно выразить через x следующим образом:

$$m = \frac{l - y}{x} = \frac{y^2 - xy + 1}{x^2} = \frac{\Psi(x)^2 - x\Psi(x) + 1}{x^2}.$$

Теперь воспользуемся оценкой (6), из которой, в частности, следует, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Psi(x)}{x} = 2^{1/3}.$$

Как следствие, получим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Psi(x)^2 - x\Psi(x) + 1}{x^2} = 2^{2/3} - 2^{1/3} \approx 0{,}32.$$

Но это значит, что при достаточно больших x мы будем иметь противоречие с целочисленностью m. Формально можно рассуждать следующим образом: пусть, например, $x > 100$, тогда из оценки (6) следуют неравенства $0 < m < 1$, так что m не может быть целым числом. Поэтому уравнение (5) может иметь решения только при $x \leqslant 100$, и завершить доказательство можно компьютерным перебором этих значений x. □

Хотя это и не принципиально, при желании завершающий перебор можно сократить, но ценой решения некоторой дополнительной задачи.

Пример 3. Докажем, что уравнение

$$x(x^3 - 5y^3) + 2x^2 + y^2 + 1 = 0. \tag{7}$$

имеет единственное решение $(x, y) = (1, 1)$ в натуральных числах.

Рассуждая так же, как и в предыдущем примере, получим, что число

$$m = \frac{y^2 + 5xy + 1}{x^2} = \frac{\Psi(x)^2 + 5x\Psi(x) + 1}{x^2}$$

должно быть целым. Здесь $y = \Psi(x)$ — функция, задаваемая уравнением (7) при $x \geqslant 1$. Для этой функции справедлива оценка

$$5^{-1/3}x < \Psi(x) < 5^{-1/3}x + 1, \tag{8}$$

с помощью которой следует оценить число m в зависимости от x. В качестве ориентира можно взять

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Psi(x)^2 + 5x\Psi(x) + 1}{x^2} = 5^{-2/3} + 5^{2/3} \approx 3{,}26.$$

Применение оценки (8) будет тем эффективней, чем больше нижняя граница рассматриваемых значений x. Если считать $x > 100$, то мы получим настолько тесные границы для m, что возникнет противоречие с целочисленностью m. Если же считать, например, $x > 10$, то границы окажутся более размытыми и допускающими значение $m = 4$. Однако дальнейшие рассуждения ясны: теперь мы можем добавить к уравнению (7) ещё одно уравнение, и нам останется решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 - 5xy^3 + 2x^2 + y^2 + 1 = 0, \\ y^2 + 5xy + 1 - 4x^2 = 0, \end{cases} \tag{9}$$

что является стандартной алгебраической задачей. Так, исключив неизвестное y с помощью результанта, получим уравнение

$$674x^4 - 3412x^2 - 361 = 0,$$

которое не имеет решений в целых числах.

Поясним для тех, кто не знаком с понятием *результанта многочленов* (см., например, учебник [1, п. 6.2.5]), как можно получить последнее уравнение. Рассмотрим левые части уравнений системы (9) как многочлены от y и поделим один на другой с остатком:

$$x^4 - 5xy^3 + 2x^2 + y^2 + 1 = (y^2 + 5xy + 1 - 4x^2)(25x^2 - 5xy + 1) + x^2(101x^2 - 145xy - 19).$$

Из этого тождества и системы (9) следует ещё одно уравнение

$$101x^2 - 145xy - 19 = 0.$$

Выразив отсюда y через x и затем подставив во второе уравнение системы (9), после упрощения получим указанное уравнение.

Впрочем, решение системы (9) также сопряжено с довольно громоздкими вычислениями, поэтому такая концовка доказательства — дело вкуса. $\square$

Благодаря случайному стечению обстоятельств уравнение (7) можно решить совершенно «левым» способом.

Заметим, что число $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$ делится на y^2, а значит, x^2+1 кратно y. Кроме того, y^2+1 делится на x. Поскольку x и y взаимно просты, x^2+y^2+1 делится на xy, т. е. для некоторого натурального k имеем

$$x^2 + y^2 + 1 = kxy.$$

Но хорошо известно (см., например, [6, с. 8, упр. 36в]), что последнее равенство возможно только при $k = 3$. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} x^4 - 5xy^3 + 2x^2 + y^2 + 1 = 0, \\ x^2 + y^2 - 3xy + 1 = 0. \end{cases}$$

После исключения y получим уравнение

$$x^6 + x^4 - x^2 - 1 = 0,$$

откуда $x = 1$. Тогда $y = 1$, и задача решена.

В следующем примере первый шаг — переход к сравнению — необходимо модифицировать подходящим образом.

Пример 4. Докажем, что уравнение

$$x(2x^3 - y^3) - y^3 + y^2 = 0 \tag{10}$$

неразрешимо в натуральных числах.

Здесь следует перейти к сравнению по модулю $x+1$, чтобы избавиться от неудобного слагаемого y^3 в левой части. Это даст равенство

$$y^2 + 2 = l(x+1)$$

с некоторым целым l. Теперь имеем

$$2x^4 - (x+1)y^3 + l(x+1) - 2 = 0.$$

После сокращения на $x+1$ это равенство примет вид

$$2(x^3 - x^2 + x - 1) - y^3 + l = 0.$$

Снова переходя к сравнению по модулю $x+1$, получим

$$l + 2y - 8 \equiv 0 \pmod{x+1},$$

откуда $l + 2y - 8 = m(x + 1)$ для некоторого целого m. Тогда

$$m = \frac{y^2 + 2(x+1)y - 8x - 6}{(x+1)^2} = \frac{\Psi(x)^2 + 2(x+1)\Psi(x) - 8x - 6}{(x+1)^2},$$

где $y = \Psi(x)$ — функция, задаваемая уравнением (10) при $x \geqslant 1$. Теперь нужно перейти к оценке m, опираясь на предварительно полученную оценку

$$2^{1/3}x - 1 < \Psi(x) < 2^{1/3}x.$$

Как это делать, мы уже показали в предыдущих примерах. □

Альтернативный вариант решения уравнения (10) состоит в его предварительном упрощении следующим образом. Пусть $d = \gcd(x, y)$ и $x_1 = x/d$, $y_1 = y/d$. Имеем

$$2d^2x_1^4 - d^2x_1y_1^3 - dy_1^3 + y_1^2 = 0,$$

откуда следует, что $2d^2$ делится на y_1^2. Но тогда d делится на y_1, т. е. $d = ky_1$ для некоторого натурального k. После подстановки и сокращения на y_1^2 получим

$$2k^2x_1^4 - k^2x_1y_1^3 - ky_1^2 + 1 = 0.$$

Ясно, что $k = 1$, и мы приходим к уравнению, более простому по сравнению с исходным:

$$x_1(2x_1^3 - y_1^3) - y_1^2 + 1 = 0.$$

Читателю предлагается завершить решение.

Отметим, что кубический сомножитель старшей однородной части совсем не обязан быть неприводимым над $\mathbb{Q}$, как это было в примерах 2–4.

Пример 5. Покажем, что уравнение

$$xy^3 - x^3 - y^3 + y^2 = 0 \tag{11}$$

имеет единственное решение $(x, y) = (1, 1)$ в натуральных числах.

Здесь для соответствующей функции $y = \Psi(x)$ при $x \geqslant 2$ справедлива вот такая оценка:

$$x^{2/3} < \Psi(x) < x^{2/3} + 1. \tag{12}$$

Рассуждая так же, как и в предыдущем примере, получим в итоге, что число

$$m = \frac{y^2 + (x-1)y - 3x + 2}{(x-1)^2} = \frac{\Psi(x)^2 + (x-1)\Psi(x) - 3x + 2}{(x-1)^2}$$

должно быть целым. Однако $0 < m < 1$ при $x > 100$, как это следует из оценки (12). Перебор значений $2 \leqslant x \leqslant 100$ показывает, что решений нет. □

Уравнение (11) можно свести к уравнению

$$x_1^5y_1 - x_1^3 - y_1^3 + 1 = 0, \tag{13}$$

при этом $x = x_1^2 y_1$, $y = x_1^3$. В самом деле, пусть $d = \gcd(x, y)$ и $a = x/d$, $b = y/d$. Тогда

$$d^2ab^3 - da^3 - db^3 + b^2 = 0,$$

откуда b^2 делится на d, а также da^3 делится на b^2. Поскольку $\gcd(a, b) = 1$, последнее означает, что d делится на b^2. Таким образом, $d = b^2$, и после сокращения на b^2 получим

$$ab^5 - a^3 - b^3 + 1 = 0.$$

С точностью до обозначений неизвестных это и есть уравнение (13).

А дальше можно рассуждать различными способами.

I. Пусть $x_1 \geqslant 2$. Здесь получаем оценку

$$x_1^{5/2} - 1 < y_1 < x_1^{5/2}. \tag{14}$$

Если удастся показать, что из равенства (13) вытекает двойное неравенство

$$0 < x_1^2 y_1^2 + y_1 - x_1^7 < 1,$$

то будет получено противоречие с тем, что $x_1^2 y_1^2 + y_1 - x_1^7$ — целое число. Сделаем это.

Поделим $x_1^5 y_1 - x_1^3 - y_1^3 + 1$ на $x_1^2 y_1^2 + y_1 - x_1^7$ с остатком как многочлены от y_1:

$$x_1^5 y_1 - x_1^3 - y_1^3 + 1 = (x_1^2 y_1^2 + y_1 - x_1^7)\frac{1 - x_1^2 y_1}{x_1^4} + \frac{x_1^4 - y_1}{x_1^4}.$$

В силу равенства (13) отсюда следует равенство

$$x_1^2 y_1^2 + y_1 - x_1^7 = \frac{x_1^4 - y_1}{x_1^2 y_1 - 1}.$$

Теперь достаточно убедиться в том, что

$$0 < \frac{x_1^4 - y_1}{x_1^2 y_1 - 1} < 1.$$

Но это легко следует из оценки (14). Действительно, левое неравенство справедливо, так как $y_1 < x_1^{5/2} < x_1^4$, а правое вытекает из неравенства $y_1 > x_1^2$, которое, в свою очередь, является следствием неравенства $y_1 > x_1^{5/2} - 1$ при ограничении $x_1 \geqslant 2$.

Чтобы объяснить читателю, откуда взялось загадочное выражение

$$\Phi(x_1, y_1) = x_1^2 y_1^2 + y_1 - x_1^7,$$

нужно обратиться к оригинальной версии метода Рунге, использующей разложения в ряды. Имеем

$$y_1 = x_1^{5/2} - \frac{1}{2x_1^2} + \frac{1}{2x_1^5} + \ldots$$

(разложение в ряд Пюизо), откуда, возводя в квадрат, получим

$$y_1^2 = x_1^5 - x_1^{1/2} + \frac{1}{x_1^{5/2}} + \ldots$$

Скомбинируем эти разложения так, чтобы справа не осталось «иррациональных» слагаемых с положительными показателями. Видно, что комбинация

$$x_1^2 y_1^2 + y_1 = x_1^7 + \frac{1}{x_1^{1/2}} + \ldots$$

обладает этим свойством. Отправив x_1^7 в левую часть, окончательно получим

$$\Phi(x_1, y_1) = \frac{1}{x_1^{1/2}} + \ldots$$

Теперь ясно, почему при больших x_1 значения выражения $\Phi(x_1, y_1)$ должны оказаться в интервале $(0; 1)$.

II. Это рассуждение не такое экзотическое, как предыдущее, но тоже неожиданное. Перепишем равенство (13) в виде

$$x_1^3(x_1^2 y_1 - 1) = y_1^3 - 1.$$

Отсюда видно, что $y_1^3 - 1$ делится на $ky_1 - 1$, где $k = x_1^2$. Оказывается, мы можем определить, для каких пар (y_1, k) натуральных чисел эта делимость имеет место. Не вдаваясь в детали (см., например, [3]), приведём лишь ответ: $k = 1$ или $y_1 = k^2$. Дальнейшее очевидно.

После всего сказанного уже как-то неинтересно возвращаться к уравнению $(**)$, с которого всё началось. Пусть читатель решит его самостоятельно, ориентируясь на очень похожий пример 3. Впрочем, некоторая интрига здесь есть — все выкладки желательно провести вручную, ведь на реальной математической олимпиаде компьютером пользоваться нельзя. По мнению автора, чисто спортивная составляющая не так важна, как простой и естественный общий подход, но читатель может придерживаться иной точки зрения.

§ 5. Уравнения вида $(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2)(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) + \ldots = 0$

Идею решения уравнений этого типа можно описать следующим образом: нужно «расфасовать» кубическую часть уравнения и привести его к виду

$$XY = Z, \tag{15}$$

где X, Y и Z — многочлены от x и y не выше 2-й степени. Затем следует воспользоваться ограниченностью одного из отношений Z/Y или Z/X при больших x. В итоге появится дополнительное уравнение вида

$$Z = mY \tag{16}$$

(или $Z = mX$), где целочисленный параметр m может принимать лишь конечное множество значений, которое можно указать явно, опираясь на заранее полученную оценку для функции $y = \Psi(x)$, задаваемой исходным уравнением. Таким образом, задача сводится к решению при больших x системы уравнений (15), (16) для каждого из указанных значений m и перебору оставшихся маленьких x.

Пример 6. Покажем, как можно было бы решить уравнение

$$(y^2 - 2x^2)(y^2 + 2x^2) - 2y^3 + 2xy^2 - 4x^2y - 1 = 0 \tag{17}$$

в натуральных числах.

Пусть мы догадались переписать уравнение в виде

$$(y^2 - 2x^2 + x - 2y)(y^2 + 2x^2 + x) = x^2 - 2xy + 1,$$

т. е. обеспечили вид (15) при

$$X = y^2 - 2x^2 + x - 2y, \quad Y = y^2 + 2x^2 + x, \quad Z = x^2 - 2xy + 1.$$

Теперь заметим, что в нашем случае

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Psi(x)}{x} = 2^{1/2}.$$

Это влечёт ограниченность отношения Z/Y, ибо

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{Z}{Y} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x\Psi(x) + 1}{\Psi(x)^2 + 2x^2 + x} = \frac{1 - 2^{3/2}}{4} \approx -0{,}46.$$

Отсюда при достаточно больших x (например, при $x > 100$) следует неравенство $|Z| < |Y|$. Значит, $Z = 0$, т. е.

$$x^2 - 2xy + 1 = 0$$

— ещё одно уравнение, которому должны удовлетворять целочисленные решения уравнения (17) с большими x. □

Конечно, нет никакой нужды в угадывании подходящего перераспределения кубической части уравнения, можно просто воспользоваться методом неопределённых коэффициентов.

Пример 7. Рассмотрим уравнение

$$xy(y^2 - 2x^2) + y^3 - xy^2 - x + 1 = 0, \tag{18}$$

которое по-прежнему будем решать в натуральных числах.

Попробуем подобрать коэффициенты A, B, C, D так, чтобы после раскрытия скобок в выражении

$$(xy + Ax + By)(y^2 - 2x^2 + Cx + Dy)$$

его кубическая часть совпала с $y^3 - xy^2$. Получим систему уравнений

$$-2A = 0, \quad C - 2B = 0, \quad A + D = -1, \quad B = 1,$$

откуда найдём $A=0$, $B=1$, $C=2$, $D=-1$. Тогда вид (15) для уравнения (18) достигается при

$$X = xy + y, \quad Y = y^2 - 2x^2 + 2x - y, \quad Z = -y^2 + 2xy + x - 1.$$

Как и в предыдущем примере, здесь

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Psi(x)}{x} = 2^{1/2},$$

но ограниченным теперь будет отношение Z/X, так как

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Z}{X} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\Psi(x)^2 + 2x\Psi(x) + x - 1}{x\Psi(x) + \Psi(x)} = \frac{2^{3/2} - 2}{2^{1/2}} \approx 0.59.$$

В частности, при $x > 100$ можно получить двойное неравенство

$$0 < Z < X,$$

которое будет противоречить равенству (15). На этом исследование больших значений x завершено. $\square$

I. К уравнению (18) применим также метод из предыдущего параграфа. Переходя к сравнению по модулю $x + 1$, получим

$$y^2 + 2y + 2 - l(x + 1) = 0 \tag{19}$$

для некоторого целого l. Из (18) и (19) следует ещё одно равенство:

$$(2x - 2x^2 + lx + l + 2)y + 5 - 2l - 3lx = 0$$

(чтобы его получить, нужно левую часть (18) разделить с остатком на левую часть (19) и затем остаток сократить на $x + 1$). Снова перейдём к сравнению по модулю $x + 1$, что даст

$$l - 2y + 5 = m(x + 1)$$

для некоторого целого m. Имеем

$$m = \frac{\Psi(x)^2 - 2x\Psi(x) + 5x + 7}{(x + 1)^2} \to 2 - 2^{3/2} \approx -0{,}82$$

при $x \to +\infty$. Таким образом, при больших x число m не может быть целым.

II. Ещё раз рассмотрим уравнение (2), которое подпадает под метод этого параграфа. Это уравнение удобно представить в несколько ином, чем (15), виде

$$U^2 = V^2 + W, \tag{20}$$

где в данном случае имеем

$$U = 3x^2 + 9y^2 + 3x, \quad V = 9y^2 + y, \quad W = -y^2.$$

Видно, что V и W зависят только от y. Это случайное обстоятельство позволяет быстрее понять, почему равенство (20) невозможно. Действительно, число

$$V^2 + W = (9y^2 + y)^2 - y^2$$

оказывается «зажатым» между двумя последовательными квадратами в силу неравенств

$$(9y^2+y-1)^2 < (9y^2+y)^2 - y^2 < (9y^2+y)^2$$

при любом натуральном y.

В заключение рассмотрим пример, в котором функция $y = \Psi(x)$ оказывается многозначной и нужно обрабатывать каждую ветвь отдельно.

Пример 8. Дано уравнение

$$x^2(y^2 - 2x^2) - y^3 - x = 0, \tag{21}$$

и нас интересуют его решения в натуральных числах.

При $x \geqslant 5$ это уравнение определяет две функции $y = \Psi_i(x)$, при этом

$$x^2 - 3 < \Psi_1(x) < x^2 - 2, \quad 2^{1/2}x + 1 < \Psi_2(x) < 2^{1/2}x + 2.$$

Первая из этих оценок показывает, что пара $(x, \Psi_1(x))$ не может состоять из целых чисел, а вот относительно пары $(x, \Psi_2(x))$ это предстоит выяснить.

Уравнение (21) можно переписать в виде (15), где

$$X = x^2 - y, \quad Y = y^2 - 2x^2 - 2y, \quad Z = 2y^2 + x.$$

Если $y = \Psi_2(x)$, то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Z}{X} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\Psi_2(x)^2 + x}{x^2 - \Psi_2(x)} = 4.$$

Отсюда при $x > 100$ следует, что $Z = 4X$, т. е.

$$2y^2 + x = 4(x^2 - y).$$

Это ещё одно уравнение, которое следует добавить к уравнению (21) и решить получившуюся систему. $\square$

Тем же способом, которым уравнение (11) было сведено к уравнению (13), уравнение (21) сводится к уравнению

$$x_1^5(y_1^2 - 2x_1^4) - y_1^3 - 1 = 0,$$

где $x = x_1^3$ и $y = x_1 y_1$. Для наиболее проблемной ветви многозначной функции, определяемой этим уравнением, при $x_1 \geqslant 2$ имеем

$$2^{1/2}x_1^2 < y_1 < 2^{1/2}x_1^2 + 1.$$

Читатель, освоивший разложение в ряды, без труда составит волшебное выражение (см. первый способ решения уравнения (13)), значения которого заключены в интервале $(0; 1)$. К примеру, можно взять

$$x_1 y_1^2 - 2y_1 - 2x_1^5 = \frac{y_1(y_1^3 + 1)}{x_1^9} + \frac{1}{x_1^4}$$

и получить желаемый результат, начиная с $x_1 = 5$.

После рассмотрения конкретных примеров уравнений 4-й степени, удовлетворяющих условию Рунге, перейдём к описанию и обоснованию общего элементарного алгоритма их решения.

§ 6. Общий алгоритм

Для удобства читателя сначала опишем этот алгоритм для более простого случая кубических уравнений, удовлетворяющих условию Рунге:

$$(a_1x+b_1y)(a_2x^2+b_2xy+c_2y^2)+\ldots=0,$$

где многочлены a_1x+b_1y и $a_2x^2+b_2xy+c_2y^2$, в произведение которых разлагается старшая однородная часть, предполагаются взаимно простыми.

Сделав линейную замену неизвестных, можно считать, что $a_1=1$ и $b_1=0$ (и, следовательно, $c_2\neq 0$ в силу взаимной простоты сомножителей). Запишем уравнение в виде

$$x(a_2x^2+b_2xy+c_2y^2)+xL_{\leqslant 1}(x,y)+Ay^2+By+C=0 \tag{22}$$

и заметим, что в оценке его решения

$$y=\Psi(x)\sim\alpha x^{\varepsilon}\quad(x\to\infty), \tag{23}$$

где $\alpha\neq 0$, показатель роста $\varepsilon>0$ не может быть больше единицы. Это следует из метода Ньютона: при $\varepsilon>1$ слагаемое

$$c_2xy^2=c_2x\Psi(x)^2\sim c_2\alpha^2x^{2\varepsilon+1}\quad(x\to\infty)$$

в левой части уравнения (22) превосходило бы по порядку все остальные слагаемые, и тождества не получалось бы при достаточно больших x.

Далее в уравнении (22) можно считать $A=0$, так как этого можно добиться заменой c_2x+A на новое x. Тогда $By+C\equiv 0 \pmod{x}$, т. е. число

$$m=\frac{By+C}{x}$$

должно быть целым. Но при больших x число m находится в малой окрестности предельного значения, равного $B\alpha$ при $\varepsilon=1$ и 0 при $\varepsilon<1$. Это значит, что при больших x у нас появляется дополнительное уравнение вида

$$mx-By-C=0,$$

где целочисленный параметр m принимает лишь конечное множество значений, которое можно явно указать.

Для уравнений из § 4 можно рассуждать аналогичным образом, но на один шаг длиннее. Как и выше, мы можем считать $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, а $d_2 \neq 0$. Имеем уравнение

$$x(a_2x^3 + b_2x^2y + c_2xy^2 + d_2y^3) + xQ_{\leqslant 2}(x, y) + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0.$$

Легко видеть, что показатель ε в оценке (23) его решения также не превышает единицы (в противном случае слагаемое d_2xy^3 после подстановки этого решения оказалось бы единственным максимальным по порядку).

Опять можно считать $A = 0$, иначе заменим $d_2x + A$ новым x (или, как мы это делали в примерах, будем далее рассматривать сравнения не по модулю x, а по модулю $d_2x + A$). Тогда $By^2 + Cy + D \equiv 0 \pmod{x}$, т. е. число

$$l = \frac{By^2 + Cy + D}{x}$$

должно быть целым. Если $B = 0$, то l в силу оценки (23) с $\varepsilon \leqslant 1$ может принимать лишь конечное множество значений, и возникает конечное число дополнительных линейных уравнений. При $B \neq 0$ имеем

$$a_2x^3 + b_2x^2y + c_2xy^2 + d_2y^3 + Q_{\leqslant 2}(x, y) + l = 0,$$

откуда $l \equiv d_2y^3 + q_{\leqslant 2}(y) \pmod{x}$. Далее разделим многочлен

$$B^2(d_2y^3 + q_{\leqslant 2}(y))$$

на многочлен $By^2 + Cy + D$ с остатком:

$$B^2(d_2y^3 + q_{\leqslant 2}(y)) = (My + N)(By^2 + Cy + D) + C_1y + D_1$$

(множитель B^2 гарантирует, что коэффициенты M, N, C_1, D_1 окажутся целыми числами). Перейдя в этом тождестве к сравнению по модулю x, получим

$$B^2l \equiv C_1y + D_1 \pmod{x}.$$

Таким образом, число

$$m = \frac{B^2l - C_1y - D_1}{x} = \frac{B^2(By^2 + Cy + D) - C_1xy - D_1x}{x^2}$$

должно быть целым. При больших x в силу оценки (23) это число должно находиться в малой окрестности предельного значения, равного $B^3\alpha^2 - C_1\alpha$ при $\varepsilon = 1$ и 0 при $\varepsilon < 1$. Таким образом, и в этом случае появляется конечное число дополнительных уравнений, но уже вида

$$mx^2 - B^2(By^2 + Cy + D) + C_1xy + D_1x = 0.$$

В обоих случаях получаемые системы уравнений будут иметь конечное множество решений, причём даже в вещественных числах. Действительно, если составить результант левых частей уравнений системы по переменной y, то получится ненулевой многочлен относительно x (поскольку левая часть исходного уравнения по предположению неприводима, а каждое из дополнительных уравнений имеет меньшую степень). Значит, существует лишь конечное число значений x и, как следствие, конечное число значений y.

Что касается метода решения уравнений из § 5, то здесь в обосновании нуждаются следующие моменты.

I. Нужно объяснить, почему перезапись уравнения в виде (15) всегда возможна. Пусть $p_i(x, y) = a_i x^2 + b_i xy + c_i y^2$. Тогда задача отыскания коэффициентов A, B, C, D, при которых произведение

$$(p_1(x, y) + Ax + By)(p_2(x, y) + Cx + Dy)$$

будет иметь заданную кубическую часть, сводится к решению системы линейных уравнений. Её определитель Δ в точности равен результанту

$$\operatorname{Res}(p_1, p_2) = \det \begin{pmatrix} a_2 & 0 & a_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & c_1 & b_1 \\ 0 & c_2 & 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

а значит, отличен от нуля, поскольку $p_1(x, y)$ и $p_2(x, y)$ взаимно просты. Домножив при необходимости левую часть уравнения на Δ^2, мы можем считать найденные коэффициенты A, B, C, D целыми.

II. Требуется показать, что одно из отношений Z/X или Z/Y, где

$$X = p_1(x, y) + Ax + By, \quad Y = p_2(x, y) + Cx + Dy,$$

а Z — какой-нибудь многочлен от x и y не выше 2-й степени, ограничено при больших x, поскольку будет иметь конечный предел при $x \to \infty$.

Действительно, пусть $\varepsilon > 1$ в оценке (23). Тогда при $c_1 \neq 0$ конечный предел имеет отношение Z/X, а при $c_2 \neq 0$ — отношение Z/Y, при этом оба коэффициента c_i не могут быть одновременно нулевыми. Аналогично рассматривается случай $\varepsilon < 1$.

Если же $\varepsilon = 1$, то при $p_1(1, \alpha) \neq 0$ отношение Z/X будет иметь конечный предел, а при $p_2(1, \alpha) \neq 0$ — отношение Z/Y. Осталось заметить, что числа $p_i(1, \alpha)$ одновременно не равны нулю: это опять вытекает из взаимной простоты многочленов $p_1(x, y)$ и $p_2(x, y)$.

Сделаем несколько заключительных замечаний.

Во-первых, строго говоря, в алгоритме необходимо предусмотреть исследование «тривиальных» ситуаций, когда решение $y = \Psi(x)$ данного уравнения имеет конечный предел при $x \to \infty$ или оно вообще существует только на конечном интервале. Так, например, кривая, заданная уравнением

$$(x^2+y^2)(x^2+2y^2)-x^3-6xy+1=0,$$

будет ограниченной, и это нужно выяснять отдельно.

Во-вторых, случай, когда старшая однородная часть уравнения пропорциональна степени неприводимого многочлена, небезнадёжен в плане применения идей метода Рунге. Вот простой пример: если в уравнении

$$x^4-x^2y-xy^2-y^2+1=0$$

дважды перейти к сравнениям по модулю $x+1$, то получим, что число

$$m=\frac{y+4x+2}{(x+1)^2}$$

должно быть целым, при этом $y=\Psi_i(x)\sim\pm x^{3/2}$ при $x\to+\infty$. Как следует модифицировать условие Рунге, в принципе известно (см., например, [9]), но здесь также хотелось бы обойтись элементарными средствами.

В-третьих, нужно понимать, что требование типа разложимости старшей однородной части уравнения является сильным ограничением метода Рунге. Даже для кубических диофантовых уравнений весьма простого вида могут потребоваться существенно более сложные и заведомо неэлементарные методы исследования. В качестве классических примеров можно привести *уравнение Морделла*

$$y^2-x^3=k$$

и (кубическое) *уравнение Туэ*

$$f_3(x,y)=k,$$

где $k\neq 0$ — целое число, а $f_3(x,y)$ — неприводимый однородный кубический многочлен с целыми коэффициентами. Эти уравнения также имеют конечное множество решений в целых числах, но указать эффективные границы для них очень непросто (см. монографии [10] и [7]).

Список литературы

[1] *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры. М.: МЦНМО, 2009.

[2] *Кушниренко А.* Многоугольник Ньютона // Квант. 1977. №6. С. 19–24.

[3] *Осипов Н. Н.* Решение задачи М1787 // Квант. 2002. №2. С. 14.

[4] *Осипов Н. Н.* Элементарная версия метода Рунге для кубических уравнений // Математика в школе. 2012. №1. С. 64–69.

[5] Петербургские олимпиады школьников по математике. 2003–2005 / Сост.: Иванов С. В., Кохась К. П., Храбров А. И. и др. СПб.: Невский диалект; БХВ-Петербург, 2006.

[6] *Спивак А. В.* Уравнения Пелля // Квант. 2002. № 4. С. 5–11.

[7] *Спринджук В. Г.* Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных. М.: Наука, 1982.

[8] *Чеботарев Н. Г.* Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики // Собр. соч. Т. 3. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 47–80.

[9] *Hilliker D. L.* An algorithm for solving a certain class of diophantine equations // Math. Comput. 1982. V. 38, № 158. P. 611–626.

[10] *Mordell L. J.* Diophantine equations. Academic Press, 1969.

[11] *Runge C.* Über ganzzahlige Lösungen von Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen // J. reine und angew. Math. 1887. V. 100. P. 425–435.

Н. Н. Осипов, Сибирский федеральный университет, Красноярск

nnosipov@rambler.ru

Преподавание и популяризация математики

О концепции учебника геометрии А. В. Погорелова

Э. Б. Винберг

Эта статья была написана в 2002 г. по заказу И. Ф. Шарыгина. Предполагалась её публикация в газете «Первое сентября». Однако в связи с кончиной А. В. Погорелова, а затем и И. Ф. Шарыгина, она не была опубликована в то время. В 2012 г. она вошла в сборник статей «О математике: проблемы преподавания» (М., изд-во «Знак»). Ниже она перепечатывается с небольшими изменениями, учитывающими улучшения, сделанные в последних (посмертных) изданиях учебника.

Очевидными целями школьного курса геометрии являются развитие представлений о геометрии окружающего мира и обучение решению некоторых стандартных задач. Но не менее важно, что этот курс может предоставить прекрасный материал для творчества и способствовать пониманию таких духовных ценностей, как истина и красота. Успех в достижении всех этих целей зависит от учебника (и, конечно, от учителя, но это другая тема).

Начиная с 1983 г. большинство школьников России изучало геометрию по учебнику А. В. Погорелова. В настоящей статье даётся анализ концепции этого учебника[1)].

[1)] Ссылки на пункты учебника даются по изданиям: *Погорелов А. В.* Геометрия 7–9. 2-е изд. М.: Просвещение, 2014; *Погорелов А. В.* Геометрия 10–11. 13-е изд. М.: Просвещение, 2014.

1. По-видимому, ни у кого не вызывает сомнений, что школьный курс геометрии должен (явно или неявно) строиться на базе аксиоматики типа Евклида — Гильберта. Однако здесь возможны разные варианты в зависимости от того, какие понятия считаются основными (неопределяемыми) и какие утверждения принимаются без доказательства, т. е. считаются аксиомами (хотя бы они так и не назывались). Само собой разумеется, что при решении этих вопросов автор школьного учебника должен руководствоваться иными соображениями, нежели профессионал, исследующий основания геометрии.

Если у исследователя имеются веские причины свести к минимуму число недоказываемых утверждений, то у автора учебника таких причин нет. Напротив, стремление к этому приводит к необходимости доказывать некоторые очевидные утверждения, что не может быть правильно понято 12–13-летними детьми. Им остаётся только заучивать доказательства, не понимая их смысла. Что ещё хуже, это с самого начала создаёт у них ложное представление о геометрии как о схоластической науке.

С точностью до того, что вещественные числа считаются как бы данными извне (о чём пойдёт речь ниже), система аксиом учебника Погорелова весьма близка системе аксиом «Оснований геометрии» Д. Гильберта. Эти аксиомы явно формулируются в виде «основных свойств», и от учеников требуется во всех рассуждениях пользоваться только этими свойствами (и уже доказанными теоремами). В качестве образца приводится доказательство очевидной для школьника теоремы о том, что прямая не может пересекать всех сторон треугольника (7–9 кл., п. 12).

Утверждение о том, что прямая разбивает плоскость на две части, относится к числу «основных свойств», а, казалось бы, более простое утверждение о том, что точка разбивает прямую на части (число которых, впрочем, остаётся неясным: см. ниже), выводится из него (7–9 кл., п. 6). Из этого же свойства в учебнике для 10–11 кл. (п. 6) путём довольно сложного рассуждения выводится, что плоскость разбивает пространство на две части. Последний факт без ущерба для чего бы то ни было можно было бы принять без доказательства, особенно если учесть, что при его выводе используются ничуть не более очевидные факты, отнесённые к числу «основных свойств», а именно, что через любые две пересекающиеся прямые проходит плоскость и что линия пересечения двух плоскостей есть прямая.

Это классическая ситуация, о которой писал ещё А. Пуанкаре:

«Если я, без предварительной подготовки, скажу им [ученикам]: „Нет, вы этого не знаете, вы не понимаете того, что вам казалось понятным; я должен вам доказать то, что вы считали очевидным“, — и если я в своих доказательствах буду опираться на посылки, которые им кажутся менее очевидными, чем заключения, то что подумают эти несчастные? Они подумают, что математическая наука есть не что иное, как произвольно собранная груда бесполезных умствований; и они либо почувствуют к ней отвращение, либо будут забавляться ею, как игрою, и в умственном отношении уподобятся греческим софистам». («Наука и метод». В кн.: *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука. 1983. Раздел «Математические определения и преподавание», с. 359.)

Даже профессионалу, только что познакомившемуся с аксиомами учебника для 7–9 кл., нелегко, например, доказать очевидные утверждения, составляющие содержание задач 49 § 1 и 22 § 2, о которых мы расскажем ниже. Проблема состоит в необходимости, отрешившись от наглядных представлений, постоянно держать в голове, какими очевидными свойствами разрешено пользоваться, а какими — нет. Можно ли требовать этого от ученика?

Суть аксиоматического метода, как его понимают современные математики, состоит в том, что основные понятия теории могут интерпретироваться по-разному, лишь бы они удовлетворяли установленным аксиомам, и тогда теоремы, полученные логическим путём из этих аксиом, будут справедливы в любой интерпретации. Поэтому для математика вполне естественна формулировка такого «основного свойства принадлежности точек и прямых»: «Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей» (7–9 кл., п. 2).

Однако эту точку зрения невозможно донести до 12–13-летнего ребёнка. Для него приведённая выше аксиома настолько вопиюще очевидна, что он не может правильно понять её смысла. Если он прочтёт в книжке: «У всякой мухи есть ноги», он подумает: «Конечно, я это хорошо знаю», но он поймёт, что хотел сказать автор, потому что он знает, что, например, у рыбы и червяка ног нет, т. е. понимает альтернативу. Но ему не может прийти в голову, что слова «точка», «прямая» и «принадлежать» могут означать нечто иное, чем те образы, которые так ясно стоят перед его глазами, и тогда может найтись «прямая», которой не «принадлежит» ни одна «точка». Он может подумать: «Раз это написано в учебнике, это должно быть что-то умное; значит, это не то, о чём я думаю, но что именно, я не понимаю». Но, скорее всего, он не станет утруждать себя подобными мыслями, а просто заучит эту формулировку, как заклинание, чтобы ответить урок, и через несколько дней совершенно её забудет. Так какой цели достигает автор учебника, формулируя это «основное свойство»?

В учебнике для 10–11 кл. (п. 5) с помощью хитроумного рассуждения автор доказывает, что из существования точек пространства, лежащих вне данной прямой, следует существование таких точек в любой плоскости, содержащей эту прямую. При этом он пользуется двумя свойствами, принимаемыми без доказательства: существованием точек вне любой данной плоскости и тем, что линия пересечения двух плоскостей есть прямая. Это формально верное доказательство решительно не нужно школьникам и не может быть ими адекватно понято по указанной выше причине.

2. Впрочем, автор учебника сам не всегда выдерживает установленного им уровня строгости. На некоторые случаи, когда он вопреки своей установке прибегает к наглядным представлениям, указывал ещё А. Д. Александров в статье «О строгости изложения в учебном пособии А. В. Погорелова» в журнале «Математика в школе», 1985, № 5, с. 64–68. С тех пор автор кое-что изменил в своём учебнике, но некоторые замечания Александрова остаются в силе. К ним можно добавить и другие претензии.

Так, в учебнике для 7–9 кл., п. 6 автор доказывает, что точка разбивает прямую на части таким образом, что две точки принадлежат одной части тогда и только тогда, когда они лежат «по одну сторону» от данной точки (т. е. данная точка не лежит между ними). Однако число этих частей-«сторон» остаётся невыясненным. То, что их не более двух, можно было бы легко доказать аналогичным рассуждением, но то, что их ровно две, как справедливо заметил Александров, на данном этапе доказано быть не может. Поэтому определение полупрямой и основанное на нём определение угла остаются необоснованными.

В п. 7 (7–9 кл.) автор даёт следующее определение: «Мы будем говорить, что луч проходит между сторонами данного угла, если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла». Хотелось бы знать, что в этом случае данный луч пересекает любой отрезок с концами на сторонах угла. Это составляет содержание задачи 49 § 1, отмеченной как задача повышенной трудности. Очевидно, школьник не обязан знать даже её формулировку. Между тем далее этот факт как бы предполагается известным, например, при определении биссектрисы треугольника.

В п. 18 (7–9 кл.) даётся следующее определение биссектрисы угла: «Биссектрисой угла называется луч, который исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам». Вопрос о существовании биссектрисы не обсуждается, хотя в дальнейшем это как бы считается известным. Казалось бы, можно получить биссектрису, отложив от одной стороны данного угла в полуплоскость, содержащую другую сторону, угол, равный его половине. Но почему вторая сторона отложенного угла будет проходить между сторонами данного? Это вытекает лишь из задачи 22 §2, которая также отмечена как задача повышенной трудности.

Приведённые примеры вовсе не означают, что изложение следует сделать ещё более формальным, полностью отказавшись от обращения к наглядности. Напротив, они лишний раз показывают бессмысленность стремления автора к полной формализации. Если уподобить автора учебника геометрии лоцману, то его задача состоит в том, чтобы, хорошо зная все мели и подводные рифы, не заставлять ученика узнавать их на собственном опыте, но вывести его в открытые воды геометрии, минуя все эти препятствия.

3. Как уже было сказано, автор учебника считает вещественные числа данными извне. Это позволяет ему избежать введения в свою аксиоматику неприятных аксиом Архимеда и непрерывности.

Но откуда школьнику известны вещественные числа? Для него они появляются прежде всего как результаты измерения длины. Описание измерения длины апеллирует к таким геометрическим представлениям, как прямолинейные отрезки, их перемещения (движения) и их сравнение. Эти представления, так или иначе используемые в школьном курсе математики для построения вещественных чисел, могли бы служить прекрасной базой и для построения геометрии. Однако автор нашего учебника геометрии не желает поселиться в этом раю, считая, видимо, рассуждения, связанные с процессом измерения, недостаточно строгими (каковыми они, конечно, и являются с точки зрения математика-профессионала).

В результате автор остаётся один на один с проблемой определения длины отрезка. Он решает её весьма простым и радикальным способом, объявляя длину отрезка неопределяемым понятием, т. е. просто декларируя, что каждый отрезок имеет некоторую положительную длину. Но при этом он забывает о незаконном с его точки зрения происхождении самих вещественных чисел!

Однако пойдём дальше. Так как автор не признаёт априорного понятия о перемещении фигур, он вынужден определять равенство треугольников через равенство соответственных сторон и углов. (Равенство любых фигур ему на этой стадии определить было бы затруднительно.) Аксиома откладывания треугольника от полупрямой (существование треугольника, равного данному и находящегося в стандартном расположении относительно данной полупрямой) в этом контексте выглядит весьма искусственно, и автор вынужден мотивировать её, прибегая к образу перемещения треугольника. Почему же тогда не включить хорошо мотивированное понятие о перемещении фигур в число основных понятий теории и не определить равенство любых фигур через их совмещение, поставив изложение с головы на ноги и сделав его тем самым более понятным?

Мотивируя аксиому откладывания треугольника, автор никак не комментирует случай, когда ориентация треугольника изменяется. Поэтому формально верное доказательство теоремы о равнобедренном треугольнике

(7–9 кл., п. 23) не подкреплено никакими наглядными представлениями и в восприятии школьника есть не более чем словесный фокус.

В п. 82 (конец восьмого класса) автор, наконец, вводит понятие движения как преобразования, сохраняющего расстояния между точками. При этом он вынужден доказывать, что движение переводит прямолинейные отрезки в прямолинейные отрезки и сохраняет углы. Далее он доказывает существование таких специальных видов движений, как параллельный перенос, поворот и симметрия относительно прямой и, наконец, определяет равенство фигур через движение, констатируя, что для треугольников это эквивалентно равенству в старом смысле.

Таким образом, в конце второго года обучения автор определяет и доказывает то, что было ясно его ученикам с самого начала и на что он опирался, мотивируя аксиому откладывания треугольника! Конечно, для математиков это обычное дело, и на то есть свои причины, но нет никаких причин вовлекать в эту игру школьников, тем более что её цель всё равно останется им непонятной.

4. Борьба с формально-логическими трудностями оставляет автору учебника и учащимся меньше возможностей для занятий собственно геометрией. Это делает учебник менее содержательным и интересным, чем хотелось бы видеть учебник геометрии. Например, теорема о пересечении высот треугольника имеется лишь в виде задачи.

Можно спорить о том, должна ли та или иная теорема входить в программу экзамена, но их отсутствие в основном тексте учебника обедняет курс и ограничивает круг интересных задач, которые можно предложить учащимся в процессе обучения.

Недостаток интересной геометрии в учебнике связан ещё и со стремлением автора к скорейшей алгебраизации геометрии. Это стремление просматривается уже в определении равенства треугольников. Далее, теорема о внешнем угле треугольника (п. 34) выводится в учебнике для 7–9 кл. из теоремы о сумме углов треугольника, теорема о сравнении перпендикуляра и наклонной (п. 65) — из теоремы Пифагора, а теорема о сравнении сторон и углов треугольника (п. 112) — из теоремы синусов! Таким образом, объективно более простые теоремы, которые не зависят от постулата о параллельных и могут быть доказаны в самом начале курса, выводятся на более поздних стадиях из теорем, выражающих алгебраические соотношения между сторонами и углами треугольника.

В частности, только на втором году обучения, уже после введения косинуса угла, школьник узнаёт доказательство того, что перпендикуляр короче наклонной и что, следовательно, прямолинейный отрезок является кратчайшим путём между двумя точками. При этом алгебраическое доказательство позволяет лишь формально понять указанные фундаментальные факты, заслоняя их геометрическую суть.

Алгебраические методы в геометрии: метрические соотношения в треугольнике, метод координат и векторная алгебра — более важны для практических приложений, чем продвинутые геометрические теоремы. Они позволяют в принципе просчитать любую конкретную конфигурацию, но они убивают красоту геометрии, сводя всё к рутинным вычислениям, и на школьном уровне едва ли могут служить источником интересных задач (кстати, таких задач и нет в соответствующих параграфах учебника Погорелова).

Вряд ли, однако, можно предположить, что автор считает, что геометрия изучается в школе только ради её практических приложений. Если стать на такую точку зрения в отношении геометрии, то логично перенести её и на другие предметы, а тогда общеобразовательные школы надо заменить специализированными техникумами. С другой стороны, это не вяжется с излишне формализованным построением геометрии в учебнике, которое уж точно не нужно для приложений.

5. Таким образом, концепция учебника Погорелова полностью несостоятельна. Она приводит к тому, что учебник не только не способен пробудить интерес к геометрии, но может вызвать её неприятие, особенно на решающем начальном этапе обучения. Конечно, он сообщает некоторые полезные сведения (которые, впрочем, можно найти и в справочнике), но он не решает задач интеллектуального и духовного воспитания учащихся. Поразительно, что этот учебник в течение столь долгого времени поддерживался и продолжает поддерживаться Министерством просвещения, а затем Министерством образования (и науки) РФ.

Э. Б. Винберг, мехмат МГУ

`vinberg@zebra.ru`

Занятия по математике — листки и диалог*

А. К. Ковальджи, А. Я. Канель-Белов

Однажды я провёл в размышлениях целый день без еды и целую ночь без сна, но я ничего не добился. Было бы лучше посвятить то время учению. Тот, кто учится не размышляя, впадёт в заблуждение. Тот, кто размышляет, не желая учиться, окажется в затруднении.

Учиться и не думать — бесполезно, а думать и не учиться — опасно.

Конфуций

§ 1. Введение

В кружках и математических классах получила распространение так называемая листковая система, которая в силу технического удобства повсеместно вытесняет иные формы занятий [1].

Формы листковой системы могут варьироваться, но, в общем и целом, она заключается в следующем.

1. На занятии учащиеся получают листки с задачами. Иногда туда включается минимум теории.
2. Решив задачу, учащийся поднимает руку, к нему подходит проверяющий.
3. Если задача решена правильно, учащемуся в ведомость вносится знак «плюс».
4. Иначе ему приходится думать дальше.

* Работа поддержана грантом РФФИ № 14-01-00548.

[1] Похожая ситуация сложилась с массовым тестированием (IQ, ЕГЭ, «Кенгуру»).

5. Имеются требования по количеству решённых задач к определённому сроку с учётом их сложности, некоторые задачи объявляются обязательными для решения.

Одна из целей листков — освоение новых областей математики в процессе работы. Сначала проводится «ликбез», когда перечисляются необходимые факты и понятия, а дальше, по мере возрастания сложности задач, ученики самостоятельно выстраивают необходимую теорию, и роль учителя заключается в проверке и корректировке их самостоятельной работы.

Система листков сыграла позитивную роль и в руках профессионалов дала прекрасные результаты, но со временем она стала повсеместно использоваться и во многом потеряла изначальный смысл и традиции. Поэтому возникла необходимость обсудить педагогические цели, которым она служит, а также иные цели, для достижения которых требуется диалог и другие формы работы, незаслуженно отодвинутые в сторону.

Мы обсуждаем историю вопроса, затем — достоинства и недостатки листковой системы. Далее приводим примеры тем занятий, где необходим диалог. В конце мы говорим о синтезе системы листков и диалога.

§ 2. История вопроса

Современный тип математического кружка для школьников является гениальным изобретением Д. О. Шклярского и есть следствие сделанных им нововведений[2)]. Кружок, основанный на решении задач, стал достаточно эффективным и дал замечательные результаты. По всей видимости, технологию Шклярского вызвали к жизни математические олимпиады, получившие распространение к концу 1930-х годов[3)].

Вместе с тем обучение некоторым сторонам деятельности математика неудобно проводить в формате олимпиадного кружка, так что актуальным стал поиск дополнительных форм. Например, проектный (учебно-исследовательский) подход. Научные конференции школьников зачастую проводятся сразу по нескольким предметам, что создаёт условия для общения школьникам с разной специализацией. Самостоятельные исследования являются альтернативной формой деятельности, позволяющей увидеть и развить у школьника полезные для научной работы качества, которые олимпиады не раскрывают. Эти подходы взаимно дополнительны. Надо стремиться к тому, чтобы преподаватели, исповедующие тот или иной

[2)] К сожалению, до сих пор не собраны воспоминания о работе Д. О. Шклярского и его педагогической технологии.

[3)] Работы Г. Полиа и Г. Сегё, а также венгерская комбинаторика (знаменитая так называемая венгерская математика) вызваны к жизни олимпиадами.

подход, не конкурировали между собой, а сотрудничали, понимали друг друга. Проектному подходу посвящены работы [1, 18, 20].

В середине 1960-х – конце 1970-х годов олимпиадное движение достигло определённого пика развития. В жюри олимпиад активно работали такие математики, как А. Н. Колмогоров, И. М. Гельфанд, Е. Б. Дынкин, В. И. Арнольд, Н. Б. Васильев и другие, многое в технологии проведения олимпиад было наработано. (Хотя далеко не всё необходимое. Не осознавалась роль утешительных задач, варианты были хуже сбалансированы, чем современные, однако вкус и научное содержание были в целом выше.) Развившийся задачный подход вызвал к жизни попытки разбиения теоретического материала на задачи. Элементы «листковой системы» возникли в 1960-е годы, в частности, в Вечерней математической школе при Московском математическом обществе, созданной Е. Б. Дынкиным [4)].

2.1. Появление листков

Чуть позднее усилиями Н. Н. Константинова в Москве сложилась форма обучения в кружках по математике — листки с задачами, которые выдавались ученикам на занятиях [5)]. Каждый ученик решал эти задачи в индивидуальном темпе, а учитель проверял правильность решений, делал замечания и давал советы. Листки, как правило, бывают тематическими и рассчитаны на определённый возраст и уровень подготовки учеников. Эти листки стали накопителями идей и популярных задач, которые передавались по городам и весям, помогая всем учителям ценными наработками талантливых математиков-педагогов.

Система листков в 57-й московской школе подробно описана в [8, 9]. При её осуществлении сложились традиции, связанные в частности, с большим числом проверяющих.

Она позволяет начинающему преподавателю начать работать. Студенты не только помогают проводить занятие, но и образуют промежуточное звено между старшим преподавателем и учениками. Так, о молодых преподавателях в книге [8] написано: «Они лучше чувствуют ребёнка — между ними нет психологического барьера (и потому неудивительно, что общение школьников и студентов не ограничивается рамками школьных уроков — это и походы, песни под гитару, обсуждение книг и фильмов; причём всё это

---

4) Авторам представляется крайне важным собрать воспоминания о методике работы этого выдающегося математика, педагога и организатора образования. Памяти Е. Б. Дынкина посвящена статья в настоящем сборнике, с. 81–86.

5) Затем в Ленинграде независимо появилась похожая система, разработанная В. П. Федотовым. Ленинградская (петербургская) система преподавания, созданная в настоящем виде С. Е. Рукшиным, требует отдельной статьи.

часто продолжается и после выпуска). У них огромное желание поделиться тем, чему их самих научили в школе и в вузе. Наконец, они ещё помнят, как их учили; причём не только то, чтó получалось, но и то, чтó преподаватели по их (выпускников) мнению делали неудачно. Поэтому им практически и не нужно специальное педагогическое образование — они сразу готовы учить по данной системе, разумеется, при чутком руководстве». Кроме того, листковая система в 57-й школе не так примитивна, как это зачастую наблюдается в иных местах, поскольку люди осознают и решают непростые педагогические задачи (см. предисловие к книге [8]).

В то же время, как писал И. С. Рубанов, «работа по листочкам очень заманчива: преподавателям не надо диктовать, детям — записывать, материалы занятий остаются в упорядоченном виде. Но она сопряжена с несколькими опасностями. Первая: тематический листочек сам по себе — сильная подсказка. Вторая — листочек сковывает преподавателя, лишает гибкости, сильно ограничивает возможность импровизации. Третья: листочек, раскрывая наперёд все карты, лишает занятие интриги. Выход может быть в частичном отказе от листочков, выдаче их не в начале занятия, дроблении на фрагменты, выдаваемые в нужные моменты. Может быть, иногда вообще имеет смысл распечатывать задачи и теоретические комментарии поодиночке, устраивая каждому ученику индивидуальную траекторию?»

При дальнейшем распространении листковой системы произошло упрощение процесса. При этом достоинства (описанные в [8, 9]) уменьшились, а недостатки усилились, особенно в ситуации одного-двух педагогов на класс и недостаточных традиций. Ослабление методических требований к преподавателям в сочетании с появлением тренеров, специализирующихся на подготовке к олимпиадам (и далёких от научного исследования) сформировало специфический слой людей. В олимпиадном движении накопились проблемы, см. [2]. Эти проблемы усугубили недостатки листковой системы, особенно в руках тренеров. Упростилось и ухудшилось преподавание в некоторых лагерях. Технологизм оказался соблазнительным.

Система рейтингов не обязательна при листковой системе. Но она возникает естественным образом, хотя и не всегда. Вот отзыв участника: «Спецификой листковой и рейтинговой системы является дополнительный стимул оказаться быстрее, выше и сильнее, сдать много задач. Это мотивирует постоянно решать задачи. В то же время положение в рейтинге может демотивировать слабую половину группы. Элемент соревнования может негативно влиять на коллективизм» [6].

[6] К сожалению, рейтингами увлекаются отнюдь не только подростки, но и власть предержащие, попадая при этом в ловушку подчинения сомнительным рейтинговым

Примечателен отзыв другого бывшего олимпиадника: «Начальство судит о крутости кружка по успехам на соревнованиях. Школьник идёт на кружок, если там учат побеждать на соревнованиях. Так было и будет». Листковая система иногда преподносится как единственно возможная. Вот реакция современного олимпиадника на обсуждение иных форм работы: «Сложилось ощущение, что статья написана для кружка, где есть сильный препод или сильный ученик. Если нет ни того, ни другого, то отличные от листковой системы методы надо использовать только в виде исключения».

§ 3. Система листков

Фактически — это система самообучения ученика, предполагающая его инициативу под руководством учителя. Для сильных учеников, умеющих самостоятельно работать, занятие по листкам эффективно, а начинающих кружковцев листки могут разочаровать[7].

Данная система эффективно решает следующие педагогические задачи.

1. Начинающий учитель (даже старшеклассник), получив набор листков, может сразу проводить занятия. При этом, конечно, его квалификации должно хватить на то, чтобы проверить правильность логики ученика, который придумал новое решение задачи. (В дальнейшем, однако, профессиональный рост преподавателя затрудняется, поскольку не возникает остро ощущаемой потребности в умении выступать перед классом и самому готовить занятия.)
2. Общение учеников с проверяющими близкого возраста.

агентствам. Упомянем нелепую программу «топ-100» — добиться включения нескольких российских вузов в 100 вузов наибольшего рейтинга. Согласно результатам престижной международной студенческой олимпиады `http://www.imc-math.org/`, мехмат МГУ и Физтех обычно входят в пятёрку лучших. При этом Физтех до недавнего времени имел 400-й рейтинг. Кроме того, около 20 % выпускников мехмата уже имеют научные результаты, пригодные к публикации. Показатель, неслыханный в западном мире. В то же время рейтинг мехмата довольно низкий. Такой подход к оценке образования антинаучен — следует изучать взаимодействие студента с вузом, принимая во внимание особенности как студента, так и страны, в которой он обучается. Только так можно заимствовать то лучшее, что есть на «Западе» (кстати, «Запад» — это отнюдь не одна точка, а страны с разными культурными традициями). О принципиальной порочности рейтинговой системы см. `http://www.mccme.ru/free-books/bibliometric.pdf`.

[7] Как сообщает С. В. Петухов: «Так получилось, что в основном я работаю как раз со „средними детьми“. Им действительно сложно и не всегда интересно работать по листочку. Добавляю элементы диалога, разбиваю листочек на 3–4 части — и дело идёт намного лучше. Даже более того, листочек без изменений и дополнений считаю неэффективным, так как крайне мало детей способны его разумно решать без дополнительной мотивации и объяснений».

3. Индивидуальный подход к учащемуся. Возможность решать задачи в индивидуальном темпе.
4. Удобство технической «дрессировки» и проработки малоинтересных, но необходимых деталей.
5. Реализация подхода, при котором освоение материала во многом сводится к последовательности решённых задач.
6. Возможность лучше освоить тему самому без посторонней помощи. Доказательство, придуманное самим учеником, дорогого стоит.
7. Листки с предисловием позволяют разобраться в вопросе на хорошем уровне, что используется в дистанционном образовании, например, в ВЗМШ (Всероссийской заочной многопредметной школе), созданной И. М. Гельфандом.

В то же время продолжением достоинств являются недостатки. Критический разбор отнюдь не означает «борьбы» с листковой системой. Наша цель — осознать её ограничения и призвать к необходимости её дополнения иными формами работы.

1. Преподаватель довольно быстро входит в курс дела, но при этом не стимулирован к росту. В результате недостаточно понимается важность педагогической подготовки преподавателя (а лучше сказать — его психологической готовности к работе с детьми).
2. Ученики не видят разные решения, не учатся выступать, слушать друг друга, вести дискуссию. Между тем всё это так же необходимо, как и умение решать задачи.
3. Не стимулируется самостоятельный творческий поиск преподавателя, который приучается работать по готовым чужим материалам. (На Малом мехмате в 90-е годы был возмутительный случай, когда старший по параллели выгнал студента, который вёл занятия не по централизованно раздаваемым листкам.)
4. Реализуется узко технологический подход к математике, во многом эффективный. Однако он всё подминает под себя, создавая узость математического видения. Математика обсуждается локально, тактически в рамках частной задачи, а к стратегическому[8)] обсуждению листковый метод приспособлен плохо. За деревьями ученик должен видеть лес.
5. В рамках исключительно листкового подхода затрудняется и ограничивается развитие теоретического мышления, о чём мы поговорим ниже.
6. Преподавателю скучно повторять одно и то же разным ученикам в течение занятия, ему приходится по много раз объяснять одни и те же ошибки.

8) То есть на уровне плана решения, осознания причин успеха, движущих идей.

7. Слабый учащийся или начинающий может ничего не решить, в то же время проверяющие зачастую уделяют больше времени сильным учащимся. Отметим, что учащиеся *растут неравномерно*. Слабый сегодня может оказаться сильным завтра, если только не проявлять к нему безразличие, что зачастую допускают молодые преподаватели. Ситуация несколько улучшается при наличии утешительных задач.
8. Нужно не только учиться всё делать самому, но и уметь учиться у других, уметь работать в команде. Однако листковая система не способствует этому.

3.1. Связь системы листков с олимпиадами

Ситуация усугубляется тем, что математическое образование зачастую сводят к подготовке к олимпиадам. Так получилось, что бóльшая часть внеклассной работы школьников прямо или косвенно связана с олимпиадами или иными соревнованиями по решению чётко поставленных задач в жёстких временны́х рамках. Даже если руководитель кружка заявляет, что не занимается подготовкой к олимпиадам, материалы кружка в сильной степени основаны на олимпиадных задачах. Олимпиадный подход имеет свои достоинства и недостатки, ему посвящена статья [2]. При этом преподаватель зачастую попадает в ловушку технологизма и утилитаризма, когда достижение локальных целей заслоняет более высокие ценности. Наша критика относится не столько к самой листковой системе, сколько к её неудачному применению.

3.2. Теоретическое и стратегическое мышление

Математика — это не только наука о решении конкретных задач. Это и взгляд на мир, и философия. Математик также строит новые теории, вводит и осмысляет новые понятия. Нужно уметь не только решать задачи, но и их ставить, думать о *мотивировках*. Наряду с *тактикой* есть *стратегия* и даже *надстратегия* (иногда её называют «философией» или «идеологией»)[9]. Помимо тренировки в решении конкретных задач, важно развивать *теоретическое мышление*. Кстати сказать, оно чрезвычайно полезно и для олимпиадных успехов. Бывают задачи, которые не решить напрямую. Надо *понять смысл* условия задачи (см. обсуждение задачи про ломаную, делящую квадрат на две равные части, в [2], см. также [3]), сменить подход и исследовать ситуацию, создав (мини- или не мини-)

[9] Примечательно, что один олимпиадный деятель оспаривал само наличие стратегического и тактического мышления. Между тем помимо преодоления технических трудностей бывает необходимо рассуждать на макроуровне, посмотреть на ситуацию в целом, понять смысл задачи.

теорию. Кстати, работа над достаточно содержательной задачей отнюдь не заканчивается вместе с её решением, см. [21]. (Правда, «философствование» рискует оказаться пустым, и отчасти задачный подход есть реакция на это.)

Например, доказательство на языке ε-δ того, что

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

отнюдь не служит удачным образцом воспитания теоретического мышления[10)].

Не нужно доказывать эквивалентность трёх определений комплексного числа, а полезно обсудить разные интерпретации комплексных чисел. Вместе с тем имеет смысл анализировать разные определения выпуклости фигур, поскольку это даётся сравнительно легко и помогает решать задачи. А в «игре» с определениями комплексных чисел, с одной стороны, имеется стремление подражать «большой науке», а с другой — мало содержания.

§ 4. Диалог

Работу со школьниками один из авторов начал в 1973 году во Всесоюзной заочной математической школе, где было много хороших задач. Самое интересное для него — возникла переписка с талантливыми учениками, например, с Александром Гончаровым из Никополя, ныне известным математиком. В переписке обсуждались обобщения задач, родственные задачи, различные подходы к одним и тем же задачам.

---

10) При выборе дополнительных курсов для школьников зачастую идут по пути копирования вуза, в частности в преподавании математического анализа. Как следствие получается, что бывшие матшкольники на первых курсах бездельничают, а иногда — разучаются работать. У них возникают проблемы, вплоть до исключения. Выбору курсов для школьников следовало бы посвятить отдельную статью, здесь же мы ограничиваемся указанием на проблему. Матанализ может быть сервисом для иных курсов, в особенности физики, и чрезвычайно полезным может быть подход Я. Б. Зельдовича (см. [11, 12]). Его весьма эмоционально — и не всегда корректно — оспаривал Л. С. Понтрягин, но затем с ним согласился.

Использование же аксиоматики вещественного числа как полигона для воспитания культуры мышления представляется авторам неправильным. Прежде всего, теория действительных чисел становится интересной только при обсуждении более продвинутых вопросов, а отнюдь не на начальной стадии, да и сама идеология Дедекинда — Вейерштрасса устарела после развития теории моделей — более правильно развивать мышление в курсе математической логики, доступной для школьников, умеющих программировать. Есть и другие весьма интересные сюжеты, не отражённые в вузовском преподавании. Не случайно создатели Второй школы — выдающиеся учёные — использовали термин «спецматематика».

Такой диалог преподавателя с учеником очень важен. В работе кружка первично содержание занятий, а не их форма, но чем младше школьники, тем форма для них важнее. Многие дети ещё не разобрались, нравится им математика или нет, поэтому они больше стремятся к развлечению и общему развитию, чем к знаниям и математической культуре. Задача учителя — раскрепостить детей, разрешить им задавать много вопросов, подчас наивных и странных, но иначе сложно научить их думать. Дети должны познавать математику активно, споря между собой, совершая ошибки, за которые никто не поставит двойку, приобретая опыт маленьких открытий. Важна и увлечённость учителя, он должен любить решать задачи, коллекционировать идеи решения и типичные ошибки, создавать новые подборки задач, выстраивать по ходу занятия цепочки задач, уметь давать минимальные подсказки, если задача не решается за разумное время.

Но нередко у молодых преподавателей занятия складываются не совсем удачно. Причин бывает много — неумение держать дисциплину, плохая обратная связь, слишком быстрый темп, трудные или неинтересные для детей задачи, сложные языковые конструкции. Могут помешать и однообразные формы работы. Так, в ВМШ (Вечерняя математическая школа) было важно вовлечь всех детей в решение задачи. Для этого подходят разные игровые формы: голосование за различные ответы, личные и командные соревнования, учёт личных достижений, обсуждение парадоксов, исторические байки и т. д.

Диалог хорош тем, что он компенсирует недостаток школьной методики обучения, когда используется только индивидуальная форма работы, а помогать друг другу не положено (подсказка, списывание) и коллективное решение задач не применяется, хотя научиться работать в коллективе тоже важно. Но дети интуитивно чувствуют полезность коллективной работы и охотно на неё отзываются. При этом учитель «дирижирует», подкидывает «дровишки», согласует темп, упорядочивает работу, подводит итоги. Особенно приятно, когда рождается что-то новое, чего учитель не ожидал (идея, задача, шутка и т. д.). Достаточно удачной формой проведения занятия является лекция с диалогом по ходу (взаимные вопросы, голосование и пр.).

4.1. Открытые вопросы

Коллективное обсуждение особенно важно при исследовании «недетерминированных» задач (задач «с открытым ответом»). К сожалению, почти все задачи чётко формулируются — что дано и что надо получить (доказать). Это в определённой мере наводит на путь решения и не способствует развитию творческого поиска[11]. (Когда мы работаем с глубокой задачей на занятии, мы иногда можем давать её как недетерминированную, слегка поменяв вопрос, но тогда мы выходим за рамки листковой системы. Да и таких задач становится всё меньше [2].)

4.2. Вбрасывание задач

Это способ организации диалога. Так же как и в системе листков, в основе стоит задачный подход. Однако здесь мы опираемся на публичность.

Учитель вбрасывает задачу и даёт несколько минут на размышление. Если задача несложная, то учитель ходит по рядам и проверяет решения. Первый решивший получает право быть ассистентом учителя, т. е. проверять решения этой задачи у других. Если задача трудная, то существует форма коллективного решения — ученики набрасывают идеи решения, а учитель отбирает из них перспективные. На этом пути могут понадобиться минимальные подсказки, причём важно спросить детей: «Ну, что, подсказать немножко?» Обычно они отказываются.

4.3. Игровые формы работы

Игровые формы работы полезны для младших возрастов, особенно в том случае, когда группа устала. Игровая форма должна быть завершающей — после этого школьников надо распустить. Математические игры также снимают многие недостатки листковой системы. Особенно важно слушать друг друга на математических боях (см. [10]).

Бывают задачи с подвохом, в которых легко ошибиться, если пытаться угадать ответ или искать его подбором. Учитель не проверяет решения, а выписывает разные ответы на доске. Через 2–3 минуты проводится голосование. Бывает поучительно, когда правильный ответ не набирает большинства голосов. Важно, чтобы работал весь класс, каждый в меру своих сил. Большую роль при этом играет эмоциональная составляющая, поэтому учитель может пошутить, рассказать историю из жизни великого

---

[11] Как сообщает В. Ю. Губарев, в Новосибирске под руководством С. В. Августиновича проводится обсуждение интересных задач, придумывание новых задач, обсуждение возможных обобщений, других формулировок, с чем это может быть связано в математике и т. д. Так появляются и темы для исследования школьниками. Например, при обсуждении пропорций, которые можно получить с бидонами ёмкостью 1 л и 3 л, возникла следующая задача (Новосибирск, школьный тур Всероссийской математической олимпиады, 2013 г., 7–8 кл.). *Есть две цистерны с неограниченными запасами кофе и сливок (в одной кофе, в другой сливки) и цистерна, в которую можно сливать неограниченное количество жидкости. Есть также два бидона вместимостью* 1 *и* 3 *литра. Как с их помощью получить* 1 *литр напитка,* $5/12$ *которого составляет кофе, а* $7/12$ *— сливки?*

математика, выделить интересные идеи решения, кого-то публично похвалить. Выступая, дети учатся говорить, корректно спорить, выслушивать оппонента. Хорошо, когда атмосфера непринуждённая, когда дети учатся не для отметки, а для себя, когда идёт поиск истины.

Приведём сюжет, где полезно голосование.

Можно или нельзя? Целью этого занятия является пропедевтика *математического доказательства*, мы демонстрируем на примерах, что, казалось бы, «очевидные» вещи могут оказаться неверными, формируем потребность в строгих математических рассуждениях. Обсуждение начинается со следующего примера:

Серия 1

1. *Из трёх палочек не всегда можно составить треугольник. А из* 100 *палочек всегда ли можно найти три, из которых треугольник составляется?*

Этот вопрос голосуется, и большинство детей голосуют — ДА, всегда составляется. Затем кто-то находит контрпример (степени двойки и т. п.).

Хорошо, продолжаем.

2. *Пусть у нас есть* 12 *палочек, из которых уже сложены* 4 *треугольника. Верно ли, что из них всегда можно сложить* 3 *четырёхугольника?*

Наученные горьким опытом, дети голосуют «нет, не всегда». *Мы установили истину, или контрпример всё же требуется?* — говорит преподаватель. Строятся контрпримеры, но все не подходят. Всякий раз треугольник с самым маленьким периметром можно «разобрать на запчасти» — вставить его стороны в остальные треугольники. В итоге получается доказательство того, что всегда можно.

Теперь переворачиваем задачу.

3. *Пусть у нас уже есть* 3 *четырёхугольника. Можно ли из них составить* 4 *треугольника?*

Опять большинство голосует за то, что всегда можно, затем возникает контрпример, после чего обсуждаем вопрос о том, а *всегда ли можно составить хотя бы один треугольник?* И это, оказывается, не всегда!

Далее по аналогичному сценарию разбирается тройка задач.

Серия 2

1. *В коробке лежат карандаши. Есть два карандаша разного цвета и два карандаша разного размера. Верно ли, что найдутся два карандаша, различающиеся и по цвету, и по размеру?*

2. *Девочки в классе различаются ростом, весом и размером обуви. Верно ли, что найдутся две девочки, отличающиеся всеми тремя параметрами одновременно?*

3. *В коробке лежат карандаши. Есть карандаши трёх разных цветов и трёх разных размеров. Верно ли, что найдутся три карандаша, попарно различающиеся и по цвету, и по размеру?*

Обсуждаются и некоторые арифметические задачи. Например:

4. *Группа граждан страны А эмигрировала в страну Б. Может ли средний IQ жителей обеих стран возрасти?*

В какой-то момент школьники сердятся: «А может, мы сперва подумаем, а потом голосовать будем?»

§ 5. Примеры тем и целей занятий, для которых листковая система недостаточна

Мы приведём несколько примеров занятий (для учащихся самого разного уровня — от начинающих до продвинутых, вплоть до студентов), при проведении которых необходим диалог с классом. Он нужен, в частности, при воспитании *теоретического мышления*. Конечно, приводимые ниже комментарии можно внести в листок. Но дело в том, что подход к математике, как науке о решении занимательных задач и головоломок, является привычным и его разъяснять не надо. В его рамках проще организовать самостоятельную деятельность. Иное дело, когда ученик встречается (сейчас, увы, реже, чем раньше) с принципиально другим отношением к математике, например, когда объясняется, почему конструкции и понятия именно такие, а не другие, и как они строятся. Здесь необходим диалог.

В 7-м классе, например, детям трудно придумать определение треугольника, они могут дать множество неверных определений. В этой ситуации хороша игра: «Кто опровергнет данное определение?», например, ученик говорит: «это три точки и соединяющие их отрезки, которые образуют три угла». Всему классу кажется, что определение верное, а учитель рисует на доске три отрезка, выходящие из одной точки и образующие три угла... И не надо жалеть времени на игру в определения — ученикам полезно «выстрадать» определение треугольника как замкнутой трёхзвенной ломаной, они поймут цену строгим определениям, приобретут вкус к чёткому мышлению.

5.1. Проблемная ситуация и её модель

В школе и вузе практически не учат постановкам задач, а это насущная ситуация и в фундаментальной науке, и в прикладных исследованиях. Приведём пример задачи, в которой важно осознать чёткую постановку.

Задача 1. *Солнце в зените, над плоской площадкой висит вертолёт. Вопрос: тень от вертолёта больше него, меньше него или равна ему?*

Обычно в классе появляются сторонники всех трёх гипотез.

1. *Больше вертолёта*, потому что Солнце далеко и его можно считать точкой, тогда получаем расходящийся конус лучей (это видно, когда лучи пробиваются между тучами).

2. *Равна вертолёту*, потому что от Солнца идёт параллельный поток лучей (золотой дождь) и под ним все размеры сохраняются.

3. *Меньше вертолёта*, поскольку Солнце больше вертолёта, и от него к вертолёту идёт сходящийся конус лучей.

При голосовании обычно максимальное число голосов набирает первая гипотеза. Затем следует обсуждение. В 6–7 классе оно бывает столь бурным, что учитель получает уникальный опыт наблюдения за своими учениками.

Самое интересное, что если в классе нет грамотного астронома, то ещё не было случая, чтобы ученикам удалось договориться. В какой-то момент учитель вмешивается в ситуацию и задаёт неожиданный вопрос: «*Заметил ли кто-нибудь, что в задаче не дано определение тени? Так что же такое тень? Какие точки плоскости мы будем называть тенью?*» Следует замешательство, но обычно кто-то говорит, что *тень — это откуда не видно солнце*. «Да, — говорит учитель, — это одно из определений *тени*, но можно дать и другое. Вот мы говорим „тень от дерева“, но ведь между листьями солнечные лучи пробиваются — значит, это не полная тень». И появляется второе определение: *Тень — это точки, в которых Солнце хотя бы частично загорожено*. В астрономии говорят, что это область *полутени*.

Теперь мы можем понять, что часть людей понимает под *тенью* полную тень, а часть — полутень. Рисуется картинка, на которой ясно, что полная тень меньше вертолёта, а полутень — больше. Получается, что ответ зависит от определения тени. Это и есть пробел в постановке задачи, который никто не заметил.

Задача 2. *В единичный квадрат бросили* 101 *точку, причём никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что найдётся треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не превосходит* $1/100$.

Задача решалась на математическом бое 10-х классов, и один из авторов сидел в жюри, происходила проверка корректности вызова. Неожиданно для жюри докладчик рассказал удивительно простое и короткое решение. Вот оно:

Выберем произвольную точку и соединим её со всеми остальными, — получится 100 отрезков. Выберем направление по часовой стрелке и последовательно соединим концы отрезков — получится 100 непересекающихся треугольников, суммарная площадь которых не превосходит 1. По принципу Дирихле, найдётся треугольник площади не больше $1/100$.

С тех пор эта красивая ошибка стала предметом разбора на занятиях, а её анализ — поводом для разговора о том, что такое строгое доказательство [12].

Другие аналогичные примеры содержатся в статье [7]. В книге [21] обсуждается забавный сюжет: *Сколько раз надо перегнуть газету, чтобы она достала до Венеры?* Вычисления дают ответ — 50 раз. Даём школьникам газету и просим её перегнуть. По сути дела, во многих суждениях присутствует *неявное* или *скрытое моделирование*. Оно возникает и тогда, когда выписывается та или иная математическая формула. О преподавании математики нематематикам см. [4].

5.2. Построение теории по аналогии. Параллельные миры

В математике довольно часто встречаются аналогичные ситуации и объекты. В этом случае теория строится по образцу теории для аналогичного объекта, переносятся идеи и конструкции, обычно в обе стороны. Мы приводим две темы занятий, содержанием которых является *не фактический материал сам по себе* (его несложно дать в виде листков), а именно *развитие теории по аналогии*. Параллелизм между мирами необходимо обсуждать, это достаточно непривычно для школьников. Здесь необходим диалог преподавателя с учащимися.

5.2.1. Геометрия остатков. Занятие начинается с вопроса: *сколько ферзей можно поставить на шахматной доске* 5×5 *так, чтобы они не били друг друга?* Ответ — 5, и расставляются они ходом коня с переносом, т. е. доска рассматривается как торическая. Аналогично действуем для доски 7×7. Теперь поставим аналогичный вопрос для магарадж (*магараджа* — это фигура, которая ходит и как ферзь, и как конь). Попробуем расставить 7 магарадж на доске 7×7, ставя их ходом большого коня $(3, 1)$, и получаем неудачу. А вот на доске 11×11 всё получается.

Обобщим задачу. Назовём k*-монстром* фигуру, которая ходит вдоль прямых

$$ax + by = 0, \quad |a|, |b| \leqslant k.$$

Ферзь — это 1-монстр, а магараджа — 2-монстр. Оказывается, при простом $p \geqslant k^2 + 1$ на шахматной доске $p \times p$ можно расставить k-монстров в количестве p так, чтобы они не били друг друга.

---

[12] Если все точки образуют вершины выпуклого многоугольника, то получится 99 непересекающихся треугольников, и решение не проходит.

Попробуем это доказать. Вернёмся к расположению ферзей на доске 5×5. Запишем их координаты: $\{(0,0),(1,2),(2,4),(3,1),(4,3)\}$ и постараемся дать *простое описание* этого множества. Начнём нумерацию с нуля. Получаем $y \equiv 2x \pmod 5$. Соответственно, k-монстры ставятся вдоль прямой $y = (k+1)x \pmod p$. Если при этом два монстра будут бить друг друга, то линия боя монстров пересечётся с линией, на которую их поставили, хотя бы дважды. Что невозможно: две прямые, как на дискретной, так и на обычной плоскости, пересекаются не более чем в одной точке. Задача про монстров решена.

Вернёмся к задаче про 101 точку в квадрате (с. 218).

Квадрат режется на 50 равных полосок, в одну из которых попадёт хотя бы 3 точки. Любой треугольник внутри прямоугольника занимает не больше половины площади. Последнее утверждение поучительно доказывается с помощью линейного варьирования: будем менять треугольник, чтобы его площадь возрастала. Если есть вершина, которая не лежит на границе прямоугольника, то передвинем её так, чтобы она попала на границу. Если есть вершина треугольника, которая не лежит в вершине прямоугольника, то передвинем её в одну из соседних вершин так, чтобы площадь увеличилась. Теперь площадь треугольника равна половине площади прямоугольника. Этот метод требует обсуждения, о нём сказано в [13].

Затем переходим к *нижним оценкам*. Найдём такое расположение точек, что площадь любого треугольника с вершинами в них не меньше $\frac{1}{2 \cdot 101^2}$. Увеличив единичный квадрат в 101 раз, приходим к задаче:

В квадрате 101×101 *расположить* 101 *целочисленную точку так, чтобы никакие* 3 *не попали на одну прямую.*

Строим естественную конструкцию. Первая точка имеет координаты $(0,0)$, вторая $(1,0)$, далее $(2,1)$, $(3,3)$ и т. д. На k-м шаге новая точка смещается на 1 вправо и поднимается на k вверх по сравнению с предыдущей. Как и в случае расположения монстров, когда достигнута верхняя сторона квадрата, переходим на нижнюю по циклу (считаем квадрат тором). Но почему никакие три из построенных точек не попадут на одну прямую? Как и в задаче про монстры, запишем их координаты (x, y). Оказывается, $y \equiv x(x-1)/2 \pmod{101}$. И то, что никакие три из отмеченных точек не попадают на одну прямую, отражает тот факт, что парабола с прямой не могут пересечься в трёх точках.

Далее обсуждаются магические квадраты. (*Магический квадрат* — это квадрат $n \times n$, в котором расположены числа от 0 до $n^2 - 1$ так, что суммы по вертикалям, горизонталям и главным диагоналям равны.) Сперва в точку с координатами (k, l) ставим число $nk + l$ (нумерация координат идёт от нуля). Если теперь выбрать *ладейное множество* полей (по одной клетке на вертикали и по одной по горизонтали), то суммы во всех таких множествах будут одинаковы. Любая прямая, кроме горизонтали или вертикали, есть ладейное множество. Итак, вдоль любой прямой, кроме тех, которые нам нужны (вертикалей и горизонталей), суммы постоянны.

Теперь мы выберем две непараллельные прямые (не вертикали и не горизонтали) L и M. Рассмотрим их как *оси координат*. Перерисуем таблицу. В новой таблице в точке с горизонтальной координатой x и вертикальной координатой y будет стоять такое же число, как в старой таблице, с теми же координатами, но в системе (L, M). В новой таблице горизонтали отвечают расположениям чисел вдоль прямой, параллельной L, а вертикали — вдоль прямой, параллельной M. Поэтому суммы по горизонталям и вертикалям равны. (Ещё остаётся позаботиться о том, чтобы при получившемся преобразовании старая вертикаль или горизонталь не оказалась диагональю.) Получаем искомый магический квадрат.

В процессе занятия напоминаем, что такое косоугольная система координат на плоскости, и переносим конструкцию на дискретную плоскость — в данном случае на доску 5×5. Рисуем «косые» оси и числа, в них стоящие, заполняем новую таблицу «руками».

Возникающая отсюда задача позволяет обсудить понятие конечной проективной плоскости:

Городок DIV-GRAD обладает отличной автобусной сетью! С каждой остановки можно проехать на любую другую без пересадок. Каждый маршрут имеет пять остановок, а каждые два маршрута имеют единственную общую остановку. Сколько же автобусных маршрутов в этом дивном граде? Нарисуйте карту.

Таким образом, это занятие демонстрирует аналогию между обычной геометрией и дискретным миром и их взаимосвязь[13)].

При ведении занятий по этой теме, чтобы подчеркнуть параллелизм между арифметическим и вещественным миром, рисуется доска, разграфлённая на две колонки, например:

[13)] Для продвинутых учащихся полезно обсудить следующую задачу ([15]): *Квадрат разбит на треугольники равной площади. Доказать, что их число чётно.*

Идея доказательства: если количество треугольников нечётно, то удвоенная площадь каждого сравнима с нулём по модулю 2, так что векторное произведение векторов, образующих треугольник, равно нулю по модулю два. Тем самым любые три вершины треугольничков разбиения коллинеарны по модулю 2 (если координаты вершин треугольников разбиения есть рациональные числа, в знаменатель которых не входит двойка множителем), а вершины единичного квадрата — нет. Общий случай отличается добавлением алгебраической техники.

Вещественные числа	Остатки по модулю p
Вещественная плоскость	Клетчатая доска
Прямая на плоскости	Линия боя монстра, линия расстановки монстров
Две прямые пересекаются не более чем в одной точке	Монстры не бьют друг друга
Косоугольная система координат	Перерисовка квадрата
Проективная плоскость	город DIV-GRAD

5.2.2. Двойные и комплексные числа, ортогональность и псевдоортогональность. Рассмотрим числа вида $a + bj$, где $j^2 = +1$. Для них строится теория, параллельная теории комплексных чисел. Листок осмыслен только как дополнение к рассказу. Цель занятий — показать *параллелизм* теорий и построение теорий по аналогии. Прежде всего, надо упредить недоразумение — если $j^2 = 1$, то школьники могут считать, что $j = \pm 1$, а это — не так, j есть формальная буква. В свете этого надо обсудить формальное определение комплексного числа как пары вещественных чисел и аналогичное определение *двойного числа* (вместо термина «двойное число» удобнее употреблять термин «гиперболическое») $a + bj$ опять-таки, как пары вещественных чисел, но с несколько другим умножением (в случае комплексных чисел $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, в гиперболическом случае $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$). Далее, легко определить квадрат модуля как $a^2 - b^2$ и проверить свойство произведения. Гораздо важнее понять, почему определение таково.

Рассмотрим аналог комплексных чисел с условием $i^2 = -c$, $c > 0$. Тогда, положив $i' = i/\sqrt{c}$, имеем $(i')^2 = -1$, и мы возвращаемся к теории обычных комплексных чисел. При этом $|z|^2 = a^2 + cb^2$. Теперь положим $c = -1$ и получим, что $|a + bj|^2 = a^2 - b^2$. Аналогом единичной окружности становится гипербола $x^2 - y^2 = 1$. Далее обсуждается концепция *аргумента* как удвоенной площади соответствующего криволинейного сектора. По аналогии с ситуацией, когда $i^2 = -c$, показывается, что при умножении аргументы складываются.

В заключение можно поговорить о *дуальных числах*, когда $j^2 = 0$.

Главное здесь — рассказ о *построении теории* по аналогии, в данном случае речь идёт о приёме введения параметра и подстановки значения из «запретной области», в данном случае из области $c < 0$.

5.2.3. О геометрии Лобачевского. Тема, изложенная в разделе 5.2.2 служит пропедевтикой к изучению неевклидовой геометрии (см. [24]). Одна из лучших ознакомительных книг — [22]. Отметим только псевдонаучность следующего, увы, распространённого подхода: описывается модель (Кэли — Клейна или Пуанкаре) и проверяются аксиомы. Такой листочек легко составить, но смысла в таком занятии (тем более не поддержанном обсуждением) будет немного. При такой подаче модель не возникает естественным образом. Модель Кэли — Клейна естественно возникает, например, при придании смысла понятию *сфера мнимого радиуса* и построении её центральной проекции [14].

Один из авторов сталкивался с ситуацией, которая показательна как тип поведения тренера. Один участник сборов на международную олимпиаду хорошо умел решать задачи, используя *поляритет* [15], который воспринимался как олимпиадный трюк. О связи поляритета с псевдоскалярным произведением и соответствием «экватор — полюс» на сфере школьники не подозревали. На вопрос тренеру о том, почему школьникам это не рассказывали, был получен ответ «нет времени», т. е. смысл понятия и его научное содержание тренеру неважно.

5.3. Ознакомление с новыми концептуально значимыми понятиями

Мы приведём несколько примеров работы с новыми понятиями, где необходим диалог.

---

[14] В истории неевклидовой геометрии есть загадка, на которую авторы не имеют удовлетворительного ответа. Оказывается, что и Лобачевский, и Бойяи, и Гаусс имели модель Кэли — Клейна, но при этом непротиворечивость неевклидовой геометрии так ими и не была доказана! Они рассматривали плоскость, касательную к орисфере, и её проекцию на орисферу вдоль пучка прямых, соответствующего орисфере. Внутренняя геометрия орисферы — обычная евклидова геометрия. Неевклидова плоскость проецировалась на внутренность круга, а прямые — на хорды. Все формулы были известны (см. [22]). Оставалось только сказать слова «модель» и «назовём *плоскостью* внутренность круга, *прямой* — хорду, *расстоянием* — логарифм двойного отношения четвёрки точек, возникающих при сечении» (формула, известная Лобачевскому, Бойяи и Гауссу). Возможно, они попали в ловушку кантовской философии: геометрические понятия даны Богом, отсюда их истинность. Нам представляется разговор об этом со школьниками чрезвычайно важным. При открытии специальной теории относительности также пришлось преодолевать кантовскую философию и ситуация была во многом аналогична открытию неевклидовой геометрии. Об этом пишет Вертгеймер [6] (создатель гештальт-психологии, по совместительству учитель математики, он интервьюировал Эйнштейна). В его книге обсуждаются интересные задачи, которые можно использовать для занятий.

[15] См. `https://ru.wikipedia.org/wiki/Полюс_и_поляра`.

5.3.1. Метод математической индукции. Формирование понятия математической индукции — дело далеко не простое. Соответствующие методические проблемы ставятся и решаются в замечательной работе И. С. Рубанова [19]. В ней подробно разбираются, в частности, диалоги, возникающие при преподавании этой темы. Методические проблемы формирования новых понятий обсуждаются также в работе [5], которая основана на статье И. С. Рубанова. Работа [19] интересна и важна отнюдь не только в плане преподавания специфической темы, но и в более общем контексте.

5.3.2. Теория информации. Цель занятия — не только обучение некоторым приёмам решения олимпиадных задач, но и формирование концепции количества информации. Листок может дополнять, но не заменять диалог. Эту тему можно излагать для учащихся разного уровня — от начинающих до продвинутых. Для начинающих следует ограничиться задачами о взвешивании и угадывании (см. [14, 16]), объяснением, что такое *трит* и как он соотносится с *битом* (понятие *логарифма* здесь можно объяснить по ходу дела). Для более продвинутых можно затронуть вероятностные аспекты. И, наконец, для наиболее продвинутых можно затронуть понятие *энтропии* (см. [23]). В последние годы эта тема (кроме задач на взвешивание) в кружках практически не представлена, но в то же время, в связи с развитием информатики, её значение возросло. Поэтому мы её разбираем подробно.

Занятие начинается со вступления.

Все мы сталкивались с понятием «информация» и её измерением. Мы знаем, что на флешке помещается меньше информации, чем на жёстком диске. Но как выразить математически это бытовое понятие? Например, утверждается, что 15 июля в Сахаре не будет дождя. Такая фраза вызывает улыбку. Тем не менее, какая-то информация заключена в этом прогнозе. Какая именно и как это измерить?

Мы обсуждаем задачи об угадывании задуманного числа, меньшего 1000, за минимальное число вопросов, на каждый из которых возможен ответ «да» или «нет». Далее обсуждается вопрос об обнаружении более тяжёлой фальшивой монеты на чашечных весах без гирь за минимальное число взвешиваний. В первом случае среди 2^n чисел за n вопросов можно угадать задуманное (а из большего набора нельзя), а во втором — из 3^n монет можно определить фальшивую. При этом педалируется идея *пространства вариантов* и его сжатия после каждого действия.

Далее обсуждается случай, когда неизвестно, легче ли фальшивая монета или тяжелее. Как её определить среди 12 монет за 3 взвешивания или среди 39 монет — за 4 взвешивания? Здесь идея пространства вариантов помогает сократить перебор — взвешивания надо подбирать так, чтобы число возможностей при максимальном исходе было минимальным. Подробности см. [14, 16].

Теперь мы говорим о *битах* и *байтах* и о *тритах* и объясняем, почему трит — это $\log_2 3$ бит. (Винчестер с k битами может находиться в 2^k состояниях, а винчестер с l тритами может находиться в 3^l состояниях. Информацию с одного можно перегнать на другой и обратно, если $2^k \sim 3^l$. Отсюда получается, что $k \sim \log_2 3 \cdot l$, т. е. $\log_2 3$ бита приходится на один трит при $k \gg 1$.) Аналогично вводится и обсуждается n*-ит*, содержащий $\log_2 n$ битов. Здесь можно попутно обсудить с учащимися понятие *логарифма*.

Для более продвинутых учащихся можно углубиться далее. Возвращаемся к угадыванию чисел. Если задумано число, меньшее 1000, и мы задали вопрос: «задуманное число больше 500?», то мы получаем один бит информации из ответа. Хорошо, а если зададим вопрос «задуманное число больше 100?», то какую информацию мы получим?

С вероятностью 0,1 мы сократим количество возможностей до 100 и получим информацию, равную $\log_2 1000 - \log_2 100 = \log_2 10$. Но с вероятностью 0,9 мы сократим количество возможностей только до 900 и получим информацию, равную $\log_2 1000 - \log_2 900 = \log_2(10/9)$. Следовательно, матожидание полученной информации будет равно $0{,}1 \cdot \log_2 10 + 0.9 \cdot \log_2(10/9)$. Аналогично, если есть опыт с возможными исходами, вероятности которых равны p и q $(p+q=1)$, то матожидание количества информации будет равно $-p \log_2 p - q \log_2 q$, а если возможных исходов несколько и каждый из них имеет вероятность p_i $(\sum p_i = 1)$, то ожидание количества информации будет равно $-\sum p_i \log_2 p_i$.

Здесь мы уже готовы формально вычислить информацию, которую несёт утверждение о том, что 15 июля 2015 года в Сахаре будет ясная погода (вероятность дождя 10^{-4}), но тем не менее надо понять его *смысл*. Рассмотрим последовательность показаний некоторого датчика. Вероятность регистрации сигнала мала, скажем 10^{-4}, но последовательность показаний достаточно длинная, длины $n \gg 1$. Итак, мы имеем длинную последовательность нулей и единиц, с количеством единиц примерно равным $10^{-4}n$. Двоичный логарифм от числа таких последовательностей и есть информация, которую выдал нам датчик. Разделив эту величину на n и перейдя к пределу, мы поймём, что означает информация, которую даёт одно показание датчика.

Материал такого рода может варьироваться в зависимости от уровня (силы) класса. С достаточно сильными учащимися можно обсудить энтропию и теорию Шеннона.

Все вышеперечисленные вопросы нуждаются в публичном обсуждении перед классом, ибо целью является формирование новых понятий и методологии. Листки здесь могут быть полезны только как дополнение.

5.4. От решения открытой проблемы — к методу

5.4.1. Квадратичный закон взаимности и построение правильных n-угольников. Данная тема предназначена для достаточно продвинутых учащихся.

К. Ф. Гаусс одновременно решил две задачи (публикации различались по времени на неделю). Он выяснил, при каких простых p в поле вычетов $\mathbb{Z}_p$ существует $\sqrt{q}$ (в этом случае будем писать $\sqrt{q} \in \mathbb{Z}_p$), и одновременно построил правильный семнадцатиугольник. Как он действовал?

Легко видеть, что если $\sqrt{q_1}$ и $\sqrt{q_2}$ принадлежат $\mathbb{Z}_p$, то $\sqrt{q_1 q_2} \in \mathbb{Z}_p$, если же $\sqrt{q_1} \in \mathbb{Z}_p$ и $\sqrt{q_2} \notin \mathbb{Z}_p$, то $\sqrt{q_1 q_2} \notin \mathbb{Z}_p$. Несколько труднее показать, что если $\sqrt{q_1} \notin \mathbb{Z}_p$ и $\sqrt{q_2} \notin \mathbb{Z}_p$, то $\sqrt{q_1 q_2} \in \mathbb{Z}_p$. Тем самым задача сводится к выяснению вопроса о принадлежности $\mathbb{Z}_p$ величин $i = \sqrt{-1} = \sqrt[4]{1}$ и $\sqrt{q}$ при простых q.

Используя малую теорему Ферма (в обратном направлении) и тот факт, что многочлен n-й степени имеет не больше n корней, получаем, что $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ тогда и только тогда, когда $i^p - i = 0$. Это — *первая ключевая идея*, нуждающаяся в акцентировании внимания и обсуждении.

Естественно получить более общий факт: если $\xi = \sqrt[n]{1}$ — неприводимый корень n-й степени из единицы, то $\xi^p - \xi = 0 \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{n}$. В частности,

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \sqrt[3]{1} \in \mathbb{Z}_p \quad \Leftrightarrow \quad p = 3k+1.$$

Следовательно, $\sqrt{-3} \in \mathbb{Z}_p \Leftrightarrow p = 3k+1$.

Окрылённые этим успехом, получаем, что $\sqrt{2} = \omega + \omega^{-1}$, где $\omega = \sqrt[8]{1}$. Поэтому

$$\sqrt{2}^{\,p} = (\omega + \omega^{-1})^p = \omega^p + \omega^{-p} = \omega + \omega^{-1} = \sqrt{2},$$

так что $\sqrt{2}^{\,p} = \sqrt{2}$ при $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ и только в этом случае. Теперь ясно, что $\sqrt{5}$ надо выразить через корни пятой степени из 1, т. е. через корни уравнения $x^4+x^3+x^2+x+1=0$. Разделив на x^2 и сделав замену $t = x + 1/x$, находим $t = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. Итак, если $\xi = \sqrt[5]{1}$ неприводим, то $t = \xi + \xi^{-1}$. Рассуждая аналогично, получаем, что $\sqrt{5} \in \mathbb{Z}_p$, если $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$.

По аналогии с предыдущим, стремимся выразить $(-1 \pm \sqrt{\pm 7})/2$ через корни уравнения $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$. Наивное копирование предыдущего случая не проходит: если разделить на x^3 и сделать замену $t = x + x^{-1}$, то возникает уравнение третьей степени. И здесь нужна

Вторая ключевая идея. Что такое неприводимый корень седьмой степени из единицы? Это буква, удовлетворяющая равенству

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

С этой точки зрения x и x^k ничем не отличаются (если только $k \not\vdots\, 7$). Когда корни разбили на пары $(x + x^{-1})$, их получилось три. Замены типа $x^k \to x$ эти три пары переставляли, не нарушая группировки. При этом суммы $x^k + x^{-k}$ оказались корнями многочлена третьей степени. Значит, надо *сгруппировать корни не в три, а в две группы — так, чтобы замена вида $x^k \to x$ сохраняла группировку*. Тогда следует ожидать (по аналогии с предыдущими случаями), что сумма в одной группе равна $(-1 \pm \sqrt{-7})/2$. Если ξ — корень уравнения $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, то с ξ группируются ξ^2, ξ^4. И действительно, легко проверить, что $\xi + \xi^4 + \xi^2 = (-1 \pm \sqrt{-7})/2$. И если $p \equiv 1, 2, 4 \pmod 7$, то $\sqrt{-7} \in \mathbb{Z}_p$, если же $p \equiv 3, 5, 6 \pmod 7$, то $\sqrt{-7} \notin \mathbb{Z}_p$, поскольку тогда

$$(\xi + \xi^4 + \xi^2)^p = \xi^3 + \xi^5 + \xi^6 = 1 - \xi + \xi^4 + \xi^2.$$

Если

$$\xi + \xi^4 + \xi^2 = 1 - \xi + \xi^4 + \xi^2,$$

то

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \xi + \xi^4 + \xi^2 = -\frac{1}{2},$$

так что $\sqrt{-7} \equiv 0 \pmod p$ — противоречие.

Далее разбиваем корни 11-й, 13-й, 17-й, 19-й степени из единицы на две группы. Соответствующие суммы оказываются равными $(-1 \pm \sqrt{-11})/2$ и т. д. Теперь надо дать описание группировки корней на две группы в общем виде. Пусть $\xi = \sqrt[n]{1}$ — неприводимый корень n-й степени из единицы. Что группируется вместе с ξ? Выписываются группировки и затем обнаруживается, что всякий раз берутся квадраты по модулю p (!). Сумма же членов в группе равна $\dfrac{-1 \pm \sqrt{\varepsilon(p)p}}{2}$, где $\varepsilon(p) = 1$ при $p = 4k + 1$ и $\varepsilon(p) = -1$ при $p = 4k - 1$.

Остаётся проверить равенство

$$\sum_{k \equiv s^2 \pmod p} \xi^k = \frac{-1 \pm \sqrt{\varepsilon(p)}}{2}.$$

Далее из этого выводится *квадратичный закон взаимности:* $\sqrt{p} \in \mathbb{Z}_q \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{q} \in \mathbb{Z}_p$, когда хотя бы одно из простых чисел p, q имеет вид $4k + 1$; если же они оба имеют вид $4k - 1$, то $\sqrt{p} \in \mathbb{Z}_q \Leftrightarrow \sqrt{q} \notin \mathbb{Z}_p$.

Вторая ключевая идея позволяет строить правильный семнадцатиугольник. Надо сперва сгруппировать 16 неприводимых корней 17-й степени из единицы на две группы по 8, как раньше, затем каждую подразбить на две группы по 4, а каждую группу по 4 — на две группы по 2 корня. При этом любая подстановка $\xi^s \to \xi$ $(s=1, \ldots, 16)$ должна только переставлять группы, не нарушая их структуры. Полезная курсовая работа для школьника — построить правильный 17-угольник, а также 257- и 65 537-угольники (с помощью компьютера!).

Рассказ о группировке корней служит пропедевтикой к теории Галуа, идейно разгружая дальнейшее изучение. Здесь соответствие Галуа (инвариантные подполя) задаётся группами корней и их построение выступает как эмпирический приём[16].

Данный рассказ позволяет также продемонстрировать учащимся «гуманитарный» способ познания: надо вжиться в героя (в данном случае К. Ф. Гаусса) и через это увидеть, как он действовал.

5.4.2. Задача об $n-2$ треугольниках и линейное варьирование. Более 100 лет (с 1870 по 1979) стояла открытая проблема:

n прямых общего положения (*т. е. никакие две не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке*) *делят плоскость на части. Доказать, что среди частей разбиения найдётся не менее $n-2$ треугольников.*

Эта проблема и вопрос о том, как додуматься до её решения, обсуждается в [13]. Из её решения органично возникает *метод катастроф*. Работу [13] также можно использовать как материал для занятий по этому методу.

5.5. Демонстрация силы понятия

5.5.1. Метод центра масс. Маленькие дети любят машинки с не слишком сложным устройством: здесь батарейка, здесь выключатель, здесь моторчик, здесь шестерёнка. Небольшую теорию, позволяющую решать задачи методом центра масс, можно уподобить такой машинке. Имеется основное понятие — *центр масс*. Имеются две технические леммы: о том, что подсистему грузов можно заменить на груз суммарной массы, расположенный в центре масс подсистемы, и от этого центр масс системы не изменится, и лемма о положении центра масс системы из двух точек

[16] Ловушка в преподавании теории Галуа — в богатстве идей, содержащихся в коротком тексте, но требующих основательной проработки. (Похожая ситуация и с цепными дробями.)

с массами m и M соответственно. Миниатюрная работающая теория служит хорошим *образцом* научной теории.

Подобную демонстрацию можно повторить при преподавании тем «решение задач с помощью момента инерции», «аффинные и проективные преобразования».

5.5.2. Алгебра, теория полей. Цель данной темы — продемонстрировать алгебраические концепции, возникшие в начале XIX века, изменившие лицо алгебры.

Пусть K — некоторое *поле*, т. е. множество (комплексных) чисел, замкнутое относительно арифметических операций, т. е. операций сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль). *Расширение поля* K набором чисел $\{x_i\}$ есть множество чисел, получающееся из поля K и набора $\{x_i\}$ с помощью арифметических операций. Иными словами, это минимальное по включению поле K', содержащее $K \cup \{x_i\}$.

Эти два понятия выглядят совершенно невинно, однако их достаточно для решения знаменитых задач древности об удвоении куба и трисекции угла. Мы это продемонстрируем, чтобы читатель отнёсся с должным уважением и к другим понятиям теории полей, отражающим глубокие идеи, которые необходимо не спеша продумать. Короткие тексты с большой концентрацией идей весьма коварны (например, при изучении цепных дробей также сталкиваются с большим числом идей в коротком тексте, отсюда методические проблемы). Их надо изучать *очень медленно*.

Доказывая невозможность удвоения куба, полезно обсудить феномен *формализации*. Чтобы доказать возможность построения циркулем и линейкой, достаточно понимания процедуры с позиции обычного здравого смысла. Однако для доказательства *невозможности* необходимо саму процедуру построения сделать математическим объектом, т. е. *формализовать*. (Аналогичные разговоры следует вести при изучении построения одной линейкой.) Прежде всего, если задан единичный отрезок, то несложно проверить, что все длины, которые мы можем построить, выражаются через 1 с помощью арифметических действий и вычисления квадратного корня.

Чтобы разгрузить идейную часть, полезно выдать листок с упражнениями. Можно начать с упражнения, которое доступно читателю, знающему, как делить многочлены с остатком.

Упражнение 1. Даны многочлен P третьей степени и многочлен Q второй степени, оба с рациональными коэффициентами. Докажите, что если P и Q имеют общий корень, то многочлен P имеет рациональный корень.

Этот факт легко обобщается для произвольного числового поля:

Упражнение 2. Даны многочлен P третьей степени и многочлен Q второй степени, оба с коэффициентами из поля K. Докажите, что если P и Q имеют общий корень, то многочлен P имеет корень в K.

Квадратичным расширением K' поля K называется расширение K корнем квадратного трёхчлена с коэффициентами из K.

Упражнение 3. Докажите, что каждый элемент из K' либо принадлежит K, либо является корнем квадратного уравнения с коэффициентами из K.

Следствие 1. *Пусть поле K есть квадратичное расширение поля L. Многочлен P с коэффициентами из L имеет степень 3 и не имеет корня в L. Тогда у него нет и корня в K.*

Следствие 2. *Пусть поле K_{i+1} есть квадратичное расширение поля K_i, $i=0, \ldots, n$, а многочлен P с коэффициентами из K_0 имеет степень 3 и не имеет корня в K_0. Тогда у него нет и корня в K_n.*

При разговоре о доказательстве невозможности удвоения куба с помощью циркуля и линейки (доказательство невозможности трисекции угла аналогично) опять говорим о *процедуре формализации*, о том, как формализовать понятие *разрешимости уравнения в радикалах*, а также *разрешимости уравнения в квадратных радикалах*. Обсуждаем понятие *башни (квадратичных) расширений*.

Предположим, что $\sqrt[3]{2}$ выражается через квадратные радикалы. Тогда существует цепочка полей $K_0 = \mathbb{Q} \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n$ таких, что

- $\sqrt[3]{2} \in K_n$,
- K_i есть квадратичное расширение поля K_{i-1} для любого $1 \leqslant i \leqslant n$.

Как видим, здесь есть предмет для публичного обсуждения, листок играет вспомогательную роль. Точно так же, при доказательстве теоремы Руффини — Абеля надо объяснять его «философию», а не ограничиваться набором задач.

§ 6. Синтез листков и диалога

Сказанное не означает, что форма диалога лучше формы листков, — эти формы хороши в разных ситуациях: диалог лучше на начальных этапах работы кружка, особенно для 3–5 классов, а по мере развития учеников уместно чаще использовать тематические листки для упражнения в самостоятельной работе или для сдачи зачёта.

И в диалоге, и при листках успешно работает система плюсиков, т. е. успехи ученика накапливаются, и он может следить, сколько плюсиков у него набралось. При этом нужна умеренность, чтобы плюсики, как внешний стимул к занятиям, не вытеснили главное — внутренние стимулы к развитию.

Полезно использовать разработанные листки и в индивидуальной работе, и в диалоге с классом.

Например, можно давать листок на группу, тогда ученики решают его коллективно. Составляются команды по 4–6 человек, которые получают одинаковые листки с задачами. Каждый член команды должен ответить хотя бы одну задачу. На каждую задачу даётся три попытки, но отвечать должен один и тот же человек. Либо команда решает, кто какую задачу будет отвечать, либо учитель назначает, кто ответит.

Н. Х. Розов писал: «Есть и другие формы работы со школьниками. Я, например, по „листкам“ никогда не занимался — в кружке Н. Бахвалова их не было. Но применялось „монотонное“ изучение теории „по шагам“ и коллективное обсуждение циклов тематически связанных задач. Тогда не то что „листков“ не было — с бумагой было туго, а размножать было просто не на чем. Я всегда предпочитал „ступенчатый“ метод преподавания (изучение „подъёмом по лестнице“) и даже частично применял его в ходе преподавания на мехмате. По моему мнению, этот метод — совершенно самостоятельный, весьма эффективно развивающий креативность и достойный специального разбора. А самым выдающимся примером реализации такого метода служит книга И. М. Яглома и В. Г. Болтянского „Выпуклые фигуры“... Такая система и сейчас иногда применяется в СУНЦе в ходе исследовательской работы школьников» [17].

Благодарности

Авторы признательны В. Ю. Губареву, Г. А. Мерзону, С. В. Петухову, Л. В. Радзивиловскому, М. И. Харитонову, М. И. Ягудину за полезные обсуждения. Особая признательность — Н. Х. Розову и И. С. Рубанову за плодотворное обсуждение и поддержку.

Список литературы

[1] *Белов А. Я.* Научное творчество школьников: где миф и где реальность? // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 18. М.: МЦНМО, 2014. С. 231–247.

[2] *Белов А. Я.* Олимпиады: дверь в математику или спорт? // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 15. М.: МЦНМО, 2011. С. 187–203.

[3] *Белов А. Я., Маркелов С. В.* Разбиения на равные части // Задачи заочного конкурса Турнира городов // ИЦ Турнира городов, Москва, 1998; Математическое образование, № 3–4 (6–7), июль–декабрь 1998 г., с. 146 и далее.

[4] *Белов А. Я., Шнайдер Г. О.* Об адаптированном курсе математики для кружковцев-химиков // Математическое образование. 2014. № 2(70). С. 18–22.

[5] *Белов А. Я., Явич Р.* Проблемы одарённости и стадийность математического образования // Математическое образование. 2010. № 1(53). С. 2–5.

[6] *Вертгеймер М.* Продуктивное мышление. М.: Прогресс, 1987.

[7] *Гейн А., Ковальджи А., Сапир М.* Задачи, модели и ЭВМ // Квант. 1989. № 3. С. 59–64.

[8] *Голенищева-Кутузова Т. И., Казанцев А. Д., Кудряшов Ю. Г. и др.* Элементы математики в задачах с решениями и комментариями. Ч. 1. М.: МЦНМО, 2010.

[9] *Давидович Б. М., Пушкарь П. Е., Чеканов Ю. В.* Математический анализ в 57-й школе. Четырёхгодичный курс. М.: МЦНМО, 2008.

[10] *Дерягин Д. В., Канель А. Я., Ковальджи А. К. и др.* Математический бой двух команд: Правила, комментарии, опыт проведения // Математика в школе. 1990. № 4. С. 56–61.

[11] *Зельдович Я. Б.* Высшая математика для начинающих и её приложения к физике. М.: Физматгиз, 1963.

[12] *Зельдович Я. Б., Яглом И. М.* Высшая математика для начинающих физиков и техников. М: Наука, 1982.

[13] *Канель А. Я., Ковальджи А. К.* Треугольники и катастрофы // Квант. 1992. № 11. С. 42–50.

[14] *Канель-Белов А. Я., Френкин Б. Р.* Дополнение к статье Д. А. Михалина, И. М. Никонова «Одна задача о нахождении фальшивой монеты» // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 12. М.: МЦНМО, 2008. С. 229–231.

[15] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 10. М.: МЦНМО, 2006. С. 280, задача 12.

[16] *Михалин Д. А., Никонов И. М.* Одна задача о нахождении фальшивой монеты // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 11. М.: МЦНМО, 2007. С. 149–158.

[17] *Розов Н. Х.* Академик А. Н. Колмогоров и проблема изучения индивидуальных особенностей психологии творчества // Математика в школе. 1991. № 2. С. 9–10.

[18] *Ройтберг М. А.* О математических проектах в Красноярской летней школе // Математика. 2008. № 13. С. 25–38.

[19] *Рубанов И. С.* Как обучать методу математической индукции? // Математика в школе. 1996. № 1. С. 14–20.

[20] *Сгибнев А. И.* Исследовательские задачи для начинающих. М.: МЦНМО, 2013.

[21] *Уфнаровский В. А.* Математический аквариум. М.: МЦНМО, 2014.

[22] *Широков П. А.* Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. 2-е изд. М.: Наука, 1983.

[23] *Яглом А. М., Яглом И. М.* Вероятность и информация. 3-е изд., переработанное и дополненное. М.: Наука, 1973.

[24] *Яглом И. М.* Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия // Библиотека математического кружка. Вып. 11. М.: Наука, 1969.

А. К. Ковальджи, лицей «Вторая школа» г. Москвы
koval-dji@yandex.ru

А. Я. Канель-Белов, МИОО, Ариэльский университет (Израиль)
kanelster@gmail.com

«Сетевая жизнь» научно-популярных журналов

В. Д. Арнольд

Историю научно-популярной литературы в России принято отсчитывать примерно с начала XX века. На самом деле история богаче — первые подобные журналы в стране выходили уже два века назад. В обзоре[1] Н. Н. Аблова (1937) можно найти упоминание о нескольких журналах, выходивших в 1830-е годы. Успешные опыты регулярных популярных физико-математических журналов на русском языке заведомо известны с 70–80-х годов XIX века. На этих материалах выросло и многому научилось не одно поколение.

Конечно, опыт второй половины XX века значительно шире, сегодняшнее старшее поколение прекрасно помнит не только золотые времена «толстых» — и не очень — художественных журналов (от «Нового мира», «Москвы», «Невы», «Дружбы народов» и «Иностранной литературы» до «Юности», «Огонька», даже детских «Костра» и «Пионера»), но и времена, когда не меньшим событием становился выход очередного номера научно-популярного журнала (будь то «Наука и жизнь» или «Техника молодёжи», «Квант» или «Химия и жизнь»). И те, и другие журналы печатали то, что обсуждалось в обществе, — были источником самой разной информации, оригинальной или неожиданной мысли, задачи, способом узнавать новые имена. Выхода журнала ждали, журналы активно выписывали, передавали из рук в руки. В домах и на дачах хранили подписки за многие годы. Номера журналов помнили по обложке, по 1–2 материалам, «ради которых...».

[1] Обзор Н. Н. Аблова доступен в Сети:

`http://www.mathedu.ru/biblio/ablov-ped_pechat_1803-1916.djvu`.

Интересующимся подробнее и глубже советуем: «Русская периодическая печать» (2 тома, М.: Госполитиздат, 1957 и 1959); «Библиография периодических изданий» (2 кн., 1915, репринт 1995). Все эти тома доступны в Сети: `http://feb-web.ru/feb/periodic/`.

Сейчас иные времена, но многие журналы по-прежнему выходят, их эстетика, конечно, сильно изменилась, их содержание — тоже. Но изменилось — не значит ухудшилось! В выходящих сейчас журналах не меньше интересных статей, только отыскать их в сильно «окрепшем» информационном потоке не стало легче. Сегодня гораздо больше информации стало на прилавках киосков и магазинов (правда, не всегда эту литературу можно считать научно-популярной), много разных программ есть на радио и телевидении (хотя специальные научно-популярные программы пока редкость), огромный объём информации растворён в Интернете.

Совершенно отдельная тема — ежегодники и периодически выходящие (или выходившие) издания. Как и научные журналы, они в основном выходят за рамки настоящей статьи (хотя некоторые упомянуть попробую). Математическим и физико-математическим российским журналам отчасти повезло — большая архивная работа тут проведена (и ведётся) на сайте `mathnet.ru` (на котором или по ссылкам с которого в свободном доступе выложены, например, все «старые» номера многих научных журналов: и «Успехов математических наук», и «Математического сборника», и «Успехов физических наук», и «Писем в ЖЭТФ»...).

Сейчас старые номера замечательных журналов практически недоступны читателям. Имеется ничтожное число библиотек, в которых есть их сколько-нибудь полное собрание. Электронные архивы сильно убыстряют доступ к материалам журналов. (Что уж тут говорить о поиске конкретной информации!)

Живущие сегодня журналы по-разному выстраивают свои «сетевые представительства» — где-то электронную версию размещают одновременно (или даже до) бумажной и внимательно следят за полнотой архива, где-то собирают полный электронный архив и позволяют его размещать (обычно с какой-то задержкой по времени), где-то ограничиваются бумажными версиями (на архив иногда не хватает сил, иногда он есть только в бумажном виде и его оцифровка — дело будущего, иногда не ближайшего). Кто тут более «прав», мне судить сложно (да и не хочется), ведь пока есть и писатели, и читатели статей — пути передачи информации будут видоизменяться. Поэтому ниже попытаюсь только проследить за несколькими примерами (имеющими, естественно, математический уклон). Заранее прошу прощения за неполноту такого обзора.

«Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики» (1886–1917) `http://www.vofem.ru/`

Журнал, заложивший традиции жанра в литературе на русском языке. За 31 год вышло 674 выпуска В. О. Ф. Э. М.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы и многое другое.

Многим может показаться интересным не только просмотреть задачи выпускных экзаменов 120 лет назад, но и порешать «Задачник Вестника».

В электронной версии полный постраничный архив с хронологическим и авторским указателями, а также поискам по рубрикам журнала.

«Квант» (1970–2014–...) `http:/www.kvant.ras.ru/`

С 1970 года ежемесячно в каждом номере журнала выходит по меньшей мере одна статья по математике и одна статья по физике, несколько наборов задач, шахматная страница и многое другое. Материалы, накопленные в журнале, бесценны.

На сайте полный постраничный архив с хронологическим и авторским указателями, а также поиском по рубрикам журнала. Доступны (к сожалению, неполные) тематические указатели.

Современные номера распространяются по подписке, на сайт попадают с существенной задержкой.

«Математика в школе» (1927–2014–...)

Старейший методический журнал о преподавании математики с «ценнейшим собранием методических находок и преподавательского опыта». У многих хороших учителей на рабочем столе часто лежат несколько номеров «МШ».

Наиболее полная коллекция старых номеров (по 1986 год) на сайте `http://www.mathedu.ru/journals-collections/`.

Полного сканирования пока нет, как нет в доступности и полных указателей опубликованного[2].

Современные номера (с 2004 года) распространяются по подписке, в электронном виде продаются на сайте `http://www.schoolpress.ru/`.

«Математика — Первое сентября» (1992–1999–2014–...)
`http://www.mat.1september.ru/`

Выходил как чёрно-белая газета с 1992 года, как ежемесячный цветной журнал — с 1999 года.

[2] Хотя есть, например, книги (см., например, `http://www.math.ru/lib/555`): *Айзенберг А. К., Асимов К. У.* Тематический указатель статей журнала «Математика в школе» (1937–1966). Душанбе, 1970; *Асимов К. У., Котельникова Р. Н.* Тематический указатель статей журнала «Математика в школе» (1967–1975). Душанбе, 1978; *Бусев В. М.* Тематический указатель статей журнала за 1990–2004 годы. Ярославль, 2005.

Всё это время (успешно конкурирует)-(мирно сосуществует) с «Математикой в школе» в той же нише.

Полного электронного архива, к сожалению, нет. Нет и указателей.

Очередные номера появляются на сайте и распространяются по подписке. Отдельные статьи номеров последних лет размещаются в свободном доступе.

«Математическое образование»

Архив — Журнал Московского математического кружка (1912–1917, 1928–1930) — почти все номера доступны на сайте `http://www.mathedu.ru`.

Под тем же названием с 1997 года ежеквартально выходит новый журнал (распространяется по подписке, но номера 2009–2014 года доступны на сайте `http://www.matob.ru`).

Там же есть оглавление всех 69 номеров «нового» журнала. Указатели к этому журналу пока недоступны.

Сборник **«Математическое просвещение»** (1934–1938, 1957–1961, 1997–2014)

Все выпуски всех серий «Математического просвещения» доступны в электронном виде на сайте `http://www.mccme.ru`.

В третьей серии (с 1997 года) ежегодно МП появляется в электронном виде либо одновременно с бумажной версией, либо с задержкой на один номер. Указателей пока нет.

«Историко-математические исследования» (1948–1995–2014–...)

Название ежегодника говорит само за себя. Основанный в 1948 году, он на протяжении более полувека играет роль ведущего отечественного издания в своей области.

Остаётся только сожалеть, что неспециалистам малоизвестны и технически малодоступны опубликованные в ИМИ материалы.

Тем приятнее отметить, что в открытом доступе размещены полностью все вышедшие выпуски обеих серий[3], а в 2011 году издан тематический указатель, подготовленный В. Е. Пырковым.

Упомяну несколько заслуженных журналов, не имеющих столь прямого отношения к математике, но, конечно, вложивших немалую лепту в российское просвещение.

«Природа» (1912–2014–...) `http://priroda.ras.ru/`

Фактически это крупнейшая электронная энциклопедия по естественным наукам, составленная и регулярно пополнявшаяся отечественными

[3] См., например, `http://www.mathedu.ru/journals-collections/` или страницу `http://pyrkov.professorjournal.ru/mediateca/15`.

учёными на протяжении 100 лет! С журналом сотрудничали и сотрудничают крупнейшие физики и астрономы, биологи и геологи, математики и химики...

Большинство статей написаны языком, понятным обычному школьнику.

Современные номера распространяются по подписке, на сайт попадают с некоторой задержкой. На сайте нет только нескольких номеров за военные годы, из указателей доступно единое текстовое оглавление.

«Химия и жизнь» (1965–2014–...) `http://www.hij.ru/`

Полный архив за 45 лет с полнотекстовым поиском и разумными указателями редакция распространяет на диске (со специальной программой только под MS Windows).

На сайте доступны для чтения отдельные статьи многих выпусков «Химия и жизнь».

Современные номера распространяются по подписке синхронно в бумажном и электронном виде.

«Наука и жизнь» (1890–2014–...) `http://www.nkj.ru/archive/`

На сайте доступны отдельные выпуски за многие годы и полные номера с 1999 года.

Современные номера распространяются по подписке синхронно в бумажном и электронном виде, попадают и в розничную продажу.

«Вокруг света» (1861–2014–...) `http://www.vokrugsveta.ru/`

На сайте почти все номера с 1980-х годов, отдельные номера 1861, 1897, 1928, 1939, 1946–1980 годов. О существовании полного электронного архива на сегодня нам неизвестно.

Современные номера распространяются по подписке в бумажном виде, на сайте параллельно выкладывается в свободный доступ flash-версия [4].

В последние годы появилось несколько «общих» коллекций, где удобно собраны ссылки на архивные номера многих журналов, в том числе далеко выходящих за область нашего рассмотрения — для примера назову `http://journal-club.ru/` и `http://publ.lib.ru/` (раздел «Журналы»).

В отличие от упомянутого выше, эта работа может не иметь никакого отношения к современной редакции того или иного журнала. Зато, например, мы знаем, что полностью отсканированы замечательные журналы **«Техника — молодёжи»** (1933–2014–...) и **«64 — Шахматное обозре-**

[4] Это техническое представление позволяет читать с экрана все материалы, но затрудняет их копирование и распечатывание.

ние» (1925, 1928, 1968–2014–...)[5], а номера журнала **«Знание — сила»** (1926–2014–...) отсканированы не все (хотя очень многие)[6].

Завершая этот обзор, хочу ещё раз отметить его неполноту (например, я совсем не говорил о переводной литературе и о чисто электронных журналах) и выразить надежду, что в 119-м выпуске МП (примерно через век) обзор подобного рода будет включать ещё больше хороших примеров для заинтересованных читателей.

[5] К сожалению, разговор о хоть каком-то указателе — хотя бы просто списке всех статей на одной странице — в этом случае даже не начат.

[6] Правда, техническое качество некоторых файлов доставляет мысль о полезности пересканирования.

В. Д. Арнольд, Московский центр непрерывного математического образования

`vitar@mccme.ru`

По мотивам задачника Математического просвещения

Разбиения целочисленных решёток и принцип Дирихле

Е. И. Знак

В сборнике «Математическое просвещение» [2] была поставлена следующая задача на исследование:

Узлы k-мерной целочисленной решётки раскрашены в l цветов. Докажите, что найдётся прямоугольный параллелепипед с рёбрами, параллельными осям решётки, с вершинами одного цвета. Постарайтесь получить оценки на размер области решётки, где можно наверняка найти параллелепипед, в зависимости от k и l. (*А. Я. Белов*)

Естественно начать с простейшего вопроса. *Плоскость разбита на два непересекающихся подмножества. Верно ли, что хотя бы в одном из этих двух множеств найдутся четыре точки, расположенные в вершинах некоторого прямоугольника*?

Отметим бесперспективность поиска ответа через анализ возможной геометрической структуры одного из множеств разбиения. Может случиться так, что ни первое, ни второе множество не имеет внутренних точек — то есть не содержит кругов (хотя бы и «очень маленьких»). Конечно же, если одно из множеств содержит круг, то в этом круге имеется и прямоугольник тоже — и вопрос становится тривиальным. Несложно привести соответствующие примеры.

Тем не менее, ответ на поставленный вначале вопрос является однозначно положительным (то есть при произвольном разбиении плоскости на два множества хотя бы в одном из множеств найдутся четыре точки, расположенные в вершинах прямоугольника), и обосновать это можно довольно легко, указав на плоскости конкретное *конечное множество*, обладающее тем же свойством!

Рассмотрим на координатной плоскости 27 точек $(m; k)$, где $m, k \in \mathbf{Z}$, $1 \leqslant m \leqslant 9$, $1 \leqslant k \leqslant 3$. Воспользуемся традиционной «олимпиадной» лексикой: пусть часть точек окрашена в зелёный цвет, а оставшиеся — в красный (разбиение на два множества по цветовому признаку). Среди девяти точек $(1; 1)$, $(2; 1)$, $(3; 1)$, $\ldots$, $(9; 1)$ найдутся пять точек одного цвета, для определённости — зелёного: $(x_1; 1)$, $(x_2; 1)$, $\ldots$, $(x_5; 1)$. Среди пяти точек $(x_1; 2)$, $(x_2; 2)$, $\ldots$, $(x_5; 2)$ найдутся три точки одного цвета: $(y_1; 2)$, $(y_2; 2)$, $(y_3; 2)$. Если они зелёные, то четыре зелёные точки $(y_1; 1)$, $(y_2; 1)$, $(y_1; 2)$, $(y_2; 2)$ являются вершинами прямоугольника. Допустим теперь, что точки $(y_1; 2)$, $(y_2; 2)$, $(y_3; 2)$ — красные. Среди трёх точек $(y_1; 3)$, $(y_2; 3)$, $(y_3; 3)$ найдутся две точки одного цвета: $(z_1; 3)$, $(z_2; 3)$. Если они зелёные, то четыре зелёные точки $(z_1; 1)$, $(z_2; 1)$, $(z_1; 3)$, $(z_2; 3)$ являются вершинами прямоугольника. Если же точки $(z_1; 3)$, $(z_2; 3)$ красные, то четыре красные точки $(z_1; 2)$, $(z_2; 2)$, $(z_1; 3)$, $(z_2; 3)$ являются вершинами прямоугольника.

Рассмотрим теперь более общую задачу.

*Подмножество d-мерной целочисленной решётки $\mathbf{Z}^d$ будет называться d-мерной **сеткой** типа $m_1 \times \ldots \times m_d$, если оно имеет вид $P_1 \times \ldots \times P_d$ для некоторых конечных множеств $P_1, \ldots, P_d$ целых чисел (при этом $|P_j| = m_j \geqslant 2$, $j = 1, \ldots, d$).*

В данной заметке рассматриваются частные случаи следующей общей комбинаторной задачи.

*Для заданных натуральных d, n и заданного набора натуральных чисел $(m_1; \ldots; m_d)$, $2 \leqslant m_j \leqslant m_{j+1}$, описать множество всех таких наборов $(M_1; \ldots; M_d) \in \mathbf{N}^d$ $(2 \leqslant M_j \leqslant M_{j+1})$, **минимальных** в некотором определённом смысле, что для любой d-мерной сетки X типа $M_1 \times \ldots \times M_d$ и **любого** её разбиения на n попарно непересекающихся подмножеств $X_1, \ldots, X_n$ хотя бы одно из этих подмножеств содержит некоторую d-мерную сетку типа $m_1 \times \ldots \times m_d$.*

С геометрической точки зрения условия $m_j \leqslant m_{j+1}$ или $M_j \leqslant M_{j+1}$ общность никоим образом не ограничивают и служат для упрощения формулировок (позволяют избавиться от несущественной неединственности). Набор $(M_1; \ldots; M_d)$, удовлетворяющий описанным выше условиям, будет называться **подходящим**. Если подходящий набор обладает тем свойством, что для *каждого* $j = 1, \ldots, d$ замена в этом наборе компоненты

M_j на M_{j-1} приводит к *неподходящему* набору (изменяется только одна компонента!), то набор называется **минимальным**. Таким образом, минимальный набор является таким подходящим набором, что уменьшение хотя бы какой-то одной его компоненты приводит к набору, который не является подходящим. Например, выше фактически было доказано, что для параметров $d = 2, n = 2$ и набора $(m_1; m_2) = (2; 2)$ подходящим является набор $(M_1; M_2) = (3; 9)$. Однако этот подходящий набор не является минимальным. Первую компоненту — число 3 — уменьшить нельзя (представьте себе две параллельные прямые, зелёную и красную, из такого множества нельзя выделить четыре точки одного цвета, расположенные в вершинах прямоугольника). Но, оказывается, в данной ситуации набор $(3; 7)$ тоже является подходящим (и уже *минимальным*). В самом деле, рассмотрим на координатной плоскости 21 точку вида $(m; k)$, где $m, k \in \mathbf{Z}$, $1 \leqslant m \leqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant 7$. В принятой выше терминологии это двумерная сетка типа 3×7, и, допустим, её точки раскрашены в два цвета. Для каждого $k = 1, \ldots, 7$ среди трёх точек $(1; k)$, $(2; k)$, $(3; k)$ гарантированно найдутся две точки одного цвета. Имеем всего шесть попарно различных вариантов одноцветных двоеточий, которые можно естественным образом обозначить так:

$$(1; 2; \text{зел}),\ (1; 3; \text{зел}),\ (2; 3; \text{зел}),\ (1; 2; \text{крас}),\ (1; 3; \text{крас}),\ (2; 3; \text{крас}).$$

Следовательно, среди семи «этажей» $k = 1, \ldots, 7$ обязательно найдутся два «этажа» с одинаковыми вариантами. Итак, доказано, что при любом разбиении сетки типа 3×7 на два множества хотя бы в одном из множеств найдутся четыре точки, расположенные в вершинах прямоугольника. То, что число 7 уменьшить нельзя, иллюстрируется конкретным разбиением:

$$\begin{array}{cccccc} \bullet & * & \bullet & * & \bullet & * \\ * & * & \bullet & \bullet & * & \bullet \\ \bullet & \bullet & * & * & * & \bullet \end{array}$$

Далее систематически будет использоваться следующее обобщение принципа Дирихле (леммы про «кроликов в клетках»): *если количество элементов множества X равно $N(K-1)+1$ и множество X разбито в сумму непересекающихся подмножеств $X_1, \ldots, X_N$, то среди этих подмножеств найдётся хотя бы одно, содержащее не менее K элементов.*

Теорема 1. *Для любых натуральных $m \geqslant 2$ и $k \geqslant 2$ и любого разбиения плоской сетки типа*

$$(n(m-1)+1) \times \bigl(n(k-2)C^m_{n(m-1)+1} + 1\bigr)$$

на n подмножеств хотя бы в одном из этих подмножеств найдётся сетка типа $m \times k$.

Доказательство. Продолжим наглядно интерпретировать разбиение на подмножества как раскраску элементов в цвета $1, \ldots, p$. Каждое сечение $\{(1; i), (2; i), \ldots, (n(m-1)+1; i)\}$ данной сетки пометим (**не** *обязательно взаимно однозначно*) значком вида $\langle J|p\rangle$, где J есть некоторое m-элементное подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n(m-1)+1\}$ и p есть номер цвета $(p = 1, \ldots, n)$. Сечение помечается значком $\langle J|p\rangle$, если в нём нашлось m точек с цветом p и абсциссами из J. Общее количество попарно различных меток равно $nC^m_{n(m-1)+1}$.

Следовательно, среди всех «горизонтальных» сечений нашей сетки (их количество по условию равно $n(k-1)C^m_{n(m-1)+1}+1$) найдётся k сечений $\{(1;i_1), (2;i_1), \ldots, (n(m-1)+1;i_1)\}, \ldots, \{(1;i_k), (2;i_k), \ldots, (n(m-1)+1;i_k)\}$ *с одной и той же меткой* $\langle J|q\rangle$. Это означает, что все точки сетки $J \times \times \{i_1, \ldots, i_k\}$ имеют один и тот же цвет с номером q. Теорема доказана. $\square$

При $n = 2$ получаем

Следствие 1.1. *Для любых натуральных $m \geqslant 2$ и $k \geqslant 2$ и любого разбиения плоской сетки типа $(2m-1)\times(2(k-1)C^m_{2m-1}+1)$ на два подмножества хотя бы в одном из этих подмножеств найдётся сетка типа $m \times k$.*

Положив $k = m = 2$ в теореме 1, получаем

Следствие 1.2. *При любом разбиении плоской сетки типа*

$$(n+1) \times \left(\frac{n^2}{2}(n+1)+1\right)$$

на n подмножеств хотя бы в одном из этих подмножеств найдутся четыре точки, расположенные в вершинах некоторого прямоугольника.

Перейдём к пространственному случаю.

Пример. При любом разбиении на два подмножества пространственной сетки типа $3 \times 7 \times 127$ хотя бы в одном из этих подмножеств найдётся восемь точек, расположенных в вершинах некоторого прямого параллелепипеда.

Действительно, рассмотрим на координатной плоскости 21 точку вида $(t; s)$, где $t, s \in \mathbf{Z}$, $1 \leqslant t \leqslant 3$, $1 \leqslant s \leqslant 7$. Это двумерная сетка типа 3×7, которую обозначим П. Данная в условии теоремы пространственная сетка типа $3 \times 7 \times 127$ расслаивается на «горизонтальные» сечения, и можно считать, не умаляя общности, что они суть $\Pi_i = \{(t; s; i) \mid (t; s) \in \Pi,\ i = 1, 2, \ldots, 126, 127\}$. Сетка П содержит $C^2_3 C^2_7 = 3 \cdot 21 = 63$ подмножества типа $A \times B$ с условием $|A| = |B| = 2$ (т. е. типа «четыре вершины прямоугольника»).

Каждое сечение Π_i данной пространственной сетки пометим (**не** *обязательно взаимно однозначно*) меткой вида $\langle A \times B | p \rangle$, где A и B суть некоторые двухэлементные подмножества множеств $\{1, 2, 3\}$ и $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ соответственно, а p есть номер цвета ($p = 1, 2$). Сечение помечается меткой $\langle A \times B | p \rangle$, если в нём нашлось четыре точки с цветом p и двумя первыми координатами из $A \times B$. Общее количество попарно различных меток равно $2 \cdot 63 = 126$. Следовательно, среди всех «горизонтальных» сечений нашей сетки (их количество по условию равно 127) найдётся два сечения Π_i и Π_j *с одной и той же меткой* $\langle A \times B | q \rangle$, где

$$A \times B = \{(\alpha; \gamma), (\alpha; \delta), (\beta; \gamma), (\beta; \delta)\}.$$

Это означает, что точки

$$(\alpha; \gamma; i),\ (\alpha; \delta; i),\ (\beta; \gamma; i),\ (\beta; \delta; i),\ (\alpha; \gamma; j),\ (\alpha; \delta; j),\ (\beta; \gamma; j),\ (\beta; \delta; j),$$

расположенные в вершинах прямого параллелепипеда, окрашены в один и тот же цвет с номером q.

Теорема 2. *Для любых натуральных $m \geqslant 2$, $k \geqslant 2$, $l \geqslant 2$ и любого разбиения пространственной сетки типа*

$$(n(m-1)+1) \times M \times \bigl(n(l-1) C^m_{n(m-1)+1} C^k_M + 1\bigr),$$

где $M = n(k-1) C^m_{n(m-1)+1}$, на n подмножеств хотя бы в одном из этих подмножеств найдётся сетка типа $m \times k \times l$.

Доказательство. Рассмотрим на координатной плоскости точки вида $(t; s)$, где $t, s \in \mathbf{Z}$, $1 \leqslant t \leqslant n(m-1)+1$, $1 \leqslant s \leqslant n(k-1) C^m_{n(m-1)+1} + 1$. Это двумерная сетка типа $(n(m-1)+1) \times \bigl(n(k-1) C^m_{n(m-1)+1} + 1\bigr)$, которую обозначим через Π. Данная в условии теоремы пространственная сетка типа $(n(m-1)+1) \times M \times \bigl(n(l-1) C^m_{n(m-1)+1} C^k_M + 1\bigr)$ расслаивается на «горизонтальные» сечения, и можно считать, не умаляя общности, что они суть

$$\Pi_i = \bigl\{(t; s; i) \mid (t, s) \in \Pi,\ i = 1, 2, \ldots,\ n(l-1) C^m_{n(m-1)+1} C^k_M + 1\bigr\}.$$

Сетка Π содержит $C^m_{n(m-1)+1} C^k_M$ подмножеств типа $A \times B$ с условиями $|A| = m$, $|B| = k$ (т. е. сеток типа $m \times k$). Каждое сечение Π_i данной пространственной сетки можно пометить (**не** *обязательно взаимно однозначно*) меткой вида $\langle A \times B | p \rangle$, где A и B суть некоторые m-элементное и k-элементное подмножества множеств $\{1, \ldots, 2m-1\}$ и $\{1, \ldots, M\}$ соответственно, а p есть номер цвета ($p = 1, \ldots, n$). Сечение имеет метку $\langle A \times B | p \rangle$, если в нём нашлось mk точек с цветом p и *двумя первыми координатами из* $A \times B$

(то есть это подмножество из mk точек имеет цвет p и взаимно однозначно проектируется на двумерную сетку типа $m \times k$ на координатной плоскости). Общее количество попарно различных меток равно $nC^m_{n(m-1)+1}C^k_M$. Следовательно, среди всех «горизонтальных» сечений нашей сетки (их количество по условию равно $n(l-1)C^m_{n(m-1)+1}C^k_M + 1$) найдётся l сечений $\{1, \ldots, n(m-1)+1\} \times \{1, \ldots, M\} \times \{i_1\}, \ldots, \{1, \ldots, n(m-1)+1\} \times \times \{1, \ldots, M\} \times \{i_l\}$ *с одной и той же меткой* $\langle A \times B | q\rangle$. Это означает, что все точки трёхмерной сетки $A \times B \times \{i_1, \ldots, i_l\}$ имеют один и тот же цвет с номером q. Теорема доказана. □

При $n = 2$ получаем

Следствие 2.1. *Для любых натуральных $m \geqslant 2$, $k \geqslant 2$, $l \geqslant 2$ и любого разбиения пространственной сетки типа*

$$(2m-1) \times \big(2(k-1)C^m_{2m-1} + 1\big) \times \big(2(l-1)C^m_{2m-1}C^k_M + 1\big),$$

где $M = 2(k-1)C^m_{2m-1} + 1$, на два подмножества хотя бы в одном из этих подмножеств найдётся сетка типа $m \times k \times l$.

Положив $k = m = l = 2$ в теореме 2, получаем

Следствие 2.2. *При любом разбиении пространственной сетки типа*

$$(n+1) \times (p(n)+1) \times (p(p(n))+1),$$

где $p(x) \equiv \dfrac{x^2}{2}(x+1)$, на n подмножеств хотя бы в одном из этих подмножеств найдётся восемь точек, расположенных в вершинах некоторого прямого параллелепипеда.

Изложенные выше результаты можно развивать в различных направлениях. Например, обобщать для произвольных размерностей. Или вести поиск не сеток (в частности, не четырёх вершин прямоугольника), а множеств какого-то иного вида.

Ниже приведены две теоремы, иллюстрирующие возможные направления развития изложенных результатов.

Теорема 3. *Если последовательность $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ задана рекуррентно соотношениями $M_1 = 3$, $M_{j+1} = 0{,}5M_j(M_j-1)^2 + 1$, то для каждого целого $d \geqslant 2$ всякая d-мерная сетка S типа $M_1 \times \ldots \times M_d$ обладает следующим свойством:*

> *при произвольном разбиении сетки S на два множества хотя бы в одном из них найдутся точки в количестве 2^d, являющиеся вершинами некоторого прямого d-мерного параллелепипеда (то есть в совокупности образующие d-мерную сетку типа $\underbrace{2 \times \ldots \times 2}_{d}$).*

Теорема 4. *Пусть A, B, C суть три* ***идущие подряд*** *вершины* ***правильного шестиугольника****. Через P и Q обозначим точки, симметричные центру данного шестиугольника относительно прямых AB и BC соответственно. Множество M, состоящее из* ***девяти*** *точек — всех вершин шестиугольника, его центра, точек P и Q — обладает следующим свойством: при произвольном разбиении M на два подмножества хотя бы в одном из этих подмножеств найдутся три точки, являющиеся* ***вершинами правильного треугольника****.*

Напомним также обобщённую теорему ван дер Вардена, которая гарантирует при разбиениях плоскости существование одноцветной совокупности вершин многоугольника предписанного типа, а при разбиениях трёхмерного пространства — многогранника предписанного типа (например, правильного). В этом контексте рассматриваются гомотетичные конечные подмножества целочисленных решёток (см. [1]). Поэтому конструкции данной статьи с некоторой натяжкой можно назвать предельными, подразумевая, что параллельный перенос является как бы гомотетией с бесконечно удалённым центром. Однако полученные здесь оценки не следуют из теоремы ван дер Вардена.

Список литературы

[1] *Грэхем Р.* Начала теории Рамсея. М.: Мир, 1984.

[2] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 223, задача 3.

Е. И. Знак, Михайловская военная артиллерийская академия, Санкт-Петербург

evgeny.znak@pochta.ru

Комментарий А. Я. Канель-Белова к статье Е. И. Знака «Разбиения целочисленных решёток и принцип Дирихле»

Данный сюжет представляется весьма интересным, в том числе и для ведения школьного кружка, что отражается на построении данной статьи. Её результаты на первый взгляд выглядят как частные случаи обобщённой теоремы ван дер Вардена (см. [1, 2]). Однако в центре внимания автора лежит не просто доказательство существования, а получение оценок. Такого рода оценки в самой теореме ван дер Вардена принципиально слабее: нижние оценки экспоненциальны, верхние — рекурсивны и запредельно велики (см. [2]). Есть надежда, что обсуждаемые в статье задачи помогут в будущем значительно их улучшить. Заинтересованному читателю советуем обратиться к брошюрам [2, 3], там же находятся более подробные литературные ссылки.

Список литературы

[1] *Бугаенко В. О.* Обобщённая теорема ван дер Вардена. М.: МЦНМО, 2006.

[2] *Грэхем Р.* Начала теории Рамсея. М.: Мир, 1984.

[3] *Райгородский А. М.* Хроматические числа. М.: МЦНМО, 2015.

Задача о сплетниках

А. В. Шаповалов

Посвящается памяти
А. И. Гольберга[1)]

Задача о сплетниках ходила среди московских любителей математики в первой половине 1980-х годов. Автор узнал её от А. И. Гольберга и обсуждал с ним возможную оценку снизу на число звонков. В 1987 году автору удалось придумать достаточно элементарное решение и предложить его в журнал «Квант», но публикации не случилось по недоразумению. Много позднее автору стало известно, что на английском языке несколько решений были опубликованы ещё в начале 1970-х годов [1, 2], более полную библиографию см. [3]; позднейшие публикации см. [4]. В частности, данное решение во многом повторяет решение Бейкер и Шостака [1]. Однако на русском языке публикаций не было. Не претендуя на научную новизну, автор считает, что с методической точки зрения полезно показать, как подобные задачи могут быть решены применением несложных фактов из теории графов.

Задача[2)]**.** *Имеются n сплетников (где $n > 3$). Каждый узнал по одному новому слуху. Созвонившись, двое рассказывают друг другу все известные им слухи. За какое наименьшее число звонков все сплетники узнают все слухи*?

Ответ. За $2n - 4$ звонка.

Обозначения, терминология и конструкция способа оповещения

Большими буквами A, B, C, D, E (возможно, с индексами) мы обозначаем сплетников, AB — звонок между сплетниками A и B; A-слух — слух, известный вначале только сплетнику A.

1) Гольберг Андрей Ильич (1954–1985), математик, призёр Международной олимпиады по математике 1972 года.

2) См. «Математическое просвещение», сер. 3, вып. 13, задача 9 (предложил А. В. Анджанс).

Заметим, что без ограничения общности можно считать все звонки мгновенными и не одновременными.

Способ оповещения для n сплетников $CO(n)$ — это набор звонков с указанием порядка выполнения, доводящий до каждого сплетника все слухи; $|CO(n)|$ — число звонков в этом наборе. Если $|CO(n)| = 2n - d$, то число d назовём *дефицитом* способа оповещения.

Предложение 1. *Для всех $n > 3$ существует способ оповещения из не более чем $2n - 4$ звонков.*

Доказательство. Есть $CO(4)$ из 4 звонков: A_1A_2, A_3A_4, A_1A_3, A_2A_4, то есть с дефицитом 4.

Если новый способ оповещения получается из старого добавлением одного сплетника и двух звонков, то дефицит не изменяется. Но всегда достаточно добавить только два звонка: пусть новый сплетник сделает самый первый и самый последний звонки — кому угодно! Тем самым из $CO(4)$ индуктивно строится $CO(n)$ с дефицитом 4 для всех $n > 4$. □

Наша цель: доказать, что менее чем $2n - 4$ звонками не обойтись. Предположим противное. Тогда есть контрпример: способы оповещения $CO(n)$ с дефицитом больше 4. Выберем минимальный контрпример: способ для наименьшего n, а при данном n — способ с наименьшим числом звонков. Назовём такой способ *минимальным способом оповещения* и обозначим $MCO(n)$. Отметим, что из минимального способа нельзя выкинуть звонок или выкинуть одного сплетника и два звонка.

Определение. Назовём *цепочкой* $A_1A_2A_3 \ldots A_k$ упорядоченный по времени набор звонков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{k-1}A_k$, *циклом* мы будем называть цепочку $AA_1A_2A_3 \ldots A_kA$, где все $A_i \neq A$, при этом A будет *начальником* цикла.

Очевидно, что упорядоченный по времени набор звонков является способом оповещения тогда и только тогда, когда для любой упорядоченной пары сплетников (A, B) найдётся цепочка вида $A \ldots B$.

Лемма о циклах. *В минимальном способе оповещения нет циклов.*

Доказательство. Пусть в $CO(n)$ есть цикл $AA_1A_2A_3 \ldots A_kA$. Достаточно доказать, что из $CO(n)$ можно получить $CO(n-1)$ с таким же дефицитом. Покажем, что можно выкинуть начальника цикла и уменьшить число звонков на 2. А именно, выкинем звонки AA_1 и A_kA, а остальные звонки начальнику переадресуем и. о. начальника. Такими и. о. будут участники цикла, а именно: до звонка A_1A_2 — сплетник A_1, между звонками $A_{i-1}A_i$ и A_iA_{i+1} — сплетник A_i, а после $A_{k-1}A_k$ — сплетник A_k.

Нетрудно убедиться, что теперь в каждый момент времени и. о. знает все те из невыкинутых слухов, которые знал бы в этот момент начальник. Поэтому оставшиеся звонки дают $CO(n-1)$ с тем же дефицитом. $\square$

Определение. Зафиксируем способ оповещения. *Распространяющий набор A-слуха $P(A)$* — это все звонки, входящие в цепочки с началом A. *Собирающий набор A-слуха $C(A)$* — это все звонки, входящие в цепочки с концом A.

Ясно, что звонки распространяющего набора являются рёбрами связного графа с n вершинами, поэтому в нём не менее $n-1$ звонка. То же верно и для собирающего набора.

Лемма о пересечении. *В минимальном способе оповещения наборы $P(A)$ и $C(A)$ могут пересекаться только по звонкам, в которых участвует сплетник A.*

Доказательство. Предположим противное: нашёлся *общий звонок* BC, где B и C отличны от A. Покажем, что способ не минимален. По лемме о циклах достаточно показать, что найдётся цикл. Рассмотрим цепочку из $P(A)$, которая кончается общим звонком, и цепочку из $C(A)$, которая начинается общим звонком. Если конец первой цепочки не совпадает с началом второй цепочки (то есть цепочки имеют вид $A \dots BC$ и $BC \dots A$), то их объединение $A \dots BC \dots A$ будет упорядочено по времени и даст цикл. Если же конец первой совпадает с началом второй (то есть цепочки имеют вид $A \dots DBC$ и $CBE \dots A$), то искомым циклом будет объединение без общего звонка, а именно $A \dots DBE \dots A$ (порядок звонков сохраняется, поскольку все звонки из первой цепочки прошли раньше звонка BC и, значит, раньше звонков второй цепочки). $\square$

Теорема о грубой оценке. *В минимальном способе оповещения для n человек будет не менее $2n-5$ звонков.*

Доказательство. Если каждый сплетник сделал не менее 4 звонков, то всего было не менее $2n$ звонков, поэтому способ оповещения не минимален.

Пусть сплетник A звонил не более 3 раз. Тогда пересечение наборов $P(A)$ и $C(A)$ состоит не более чем из 3 звонков, поэтому их объединение состоит из не менее чем $(n-1)+(n-1)-3 = 2n-5$ звонков. $\square$

Чтобы усилить грубую оценку, нам придётся развить некоторую технику. Очевидна двойственность: если все звонки способа оповещения проделать в обратном порядке, то снова получится способ оповещения; при этом если способ был минимальным, то и двойственный способ будет минимальным.

Далее до конца зафиксируем $MCO(n)$.

Лемма о последнем звонке. *Если звонок AB последний для сплетника A, то он последний и для сплетника B.*

Доказательство. Предположим противное: после звонка AB был ещё звонок BC. Но после своего последнего звонка A знает все слухи, значит B — тоже, в том числе и C-слух. Но тогда в результате звонка BC C-слух пройдёт по кругу, что замкнёт цикл с начальником C. По лемме о циклах это противоречит минимальности способа. □

В силу двойственности, то же верно и для первых звонков. Это даёт корректное определение для *первых* и *последних* звонков в минимальном способе оповещения. А все остальные звонки назовём *средними*. Первые звонки разбивают сплетников на пары, поэтому таких звонков $n/2$; аналогично последних звонков тоже $n/2$. Так как всего звонков не более $2n-4$, получаем, что средних звонков не более $n-4$. Рассмотрим граф средних звонков. В нём n вершин и не более $n-4$ рёбер, поэтому не менее четырёх компонент связности. Обозначим через K_X компоненту, содержащую вершину X.

Выберем, как и в доказательстве теоремы о грубой оценке, сплетника A, сделавшего не более трёх звонков. Пусть AB — его первый звонок. Каким компонентам могут принадлежать средние рёбра набора $P(A)$, то есть рёбра, входящие в цепочки с началом A? Первым звонком может быть только первое ребро такой цепочки, а последним — только последнее. После выкидывания из цепочки первых и последних звонков она может начаться только из A или из B. Значит, средние звонки набора $P(A)$ могут принадлежать только компонентам K_A и K_B. Аналогично среди средних рёбер набора $C(A)$ могут встречаться только рёбра компонент K_A и K_C, где CA — последний звонок. Так как компонент не меньше четырёх, найдётся компонента, чьи рёбра не входят ни в $P(A)$, ни в $C(A)$.

Если в этой компоненте есть хотя бы одно ребро, то

$$|MCO(n)| \geqslant |P(A) \cup C(A)| + 1 \geqslant (2n-5) + 1 = 2n-4.$$

Если же в этой компоненте нет рёбер, то она состоит из изолированной вершины D. Это значит, что сплетник D мог сделать только первый и последний звонок — всего не более двух. Тогда

$$|MCO(n)| \geqslant |P(D) \cup C(D)| \geqslant (n-1) + (n-1) - 2 = 2n-4.$$

Задача решена.

Список литературы

[1] *Baker B., Shostak R.* Gossips and telephones // Discrete Math. 1972. V. 2. P. 191–193.

[2] *Tijdeman R.* On a telephone problem // Nieuw Archief voor Wiskunde. 1971. V. 3, № 19. P. 188–192.

[3] `http://mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/gossips.pdf`.

[4] `http://mathworld.wolfram.com/Gossiping.html`.

А. В. Шаповалов, Equa AB, Сольна, Стокгольм (Швеция)

sasja@achap.info

Задача о книжной полке*

Л. Радзивиловский, Г. Юргин

В задачнике «Математического просвещения» № 18 была помещена

Задача 8. На полке в некотором порядке стоят тома, пронумерованные числами от 1 до n. Библиотекарь берёт том, стоящий не на своём месте, и ставит его на правильное место; при этом некоторые тома сдвигаются[1].

(а) Докажите, что процесс перестановки томов остановится. (*Фольклор*)
(б) Постарайтесь получить оценку на число ходов этого процесса, например полиномиальную. (*А. Я. Белов*)

Пункт (а) имеет много решений. Каждое решение, явно или косвенно, даёт оценку на количество ходов. Доказательство того, что оценка точная, может быть построено на процессе, состоящем из большого количества ходов. Мы докажем, что количество ходов экспоненциально зависит от n, а именно, что процесс заканчивается не более чем за $2^n - 2^{n/2}$ ходов, но может продолжаться $2^{n-1} - 1$ ходов. Многие наши знакомые пытались доказать полиномиальную оценку, но это, как теперь выяснилось, невозможно. Между $2^n - 2^{n/2}$ и $2^{n-1} - 1$ остаётся зазор; мы приглашаем читателей к дальнейшим размышлениям.

Начнём с **примера**. Для двух книг, стоящих в неправильном порядке, процесс закончится за 1 ход. Можно считать, что мы при этом не снимаем книгу 2 с полки.

Продолжим строить примеры по индукции. Предположим, что при начальном расположении книг в порядке $n, 1, 2, \ldots, n-1$ можно упорядочить книги, сделав ровно $2^{n-1} - 1$ ходов, и при этом не нужно снимать том n с полки.

* Исследование поддержано грантом РФФИ 14–01–00548.

[1] Если том с номером i стоял на месте с номером $j > i$, то он перемещается на i-е место, а тома, стоявшие на i-м, ..., $(j-1)$-м местах, перемещаются на $(i+1)$-е, ..., j-е места соответственно. Если $j < i$, то процедура аналогичная.

Возьмём $n+1$ книг, расположенных в порядке $n+1, 1, 2, \ldots, n$. Сделаем ряд ходов, не снимая с полки тома 1 и $n+1$. При этом том $n+1$ будет оставаться на месте, и вся игра будет происходить на n правых позициях. Можно считать, что всего есть n томов, причём том 2 играет роль тома 1, том 3 играет роль тома 2, …, том n играет роль тома $n-1$, а том 1 играет роль тома n:

$$n+1, 2, 3, 4, \ldots, n, 1.$$

Все тома стоят на своих местах, кроме первого и последнего. Первый том переставляется на своё место, и получается

$$1, n+1, 2, 3, 4, \ldots, n.$$

Теперь имеется n книг, с уже знакомой нам начальной ситуацией, и можно произвести ещё $2^{n-1}-1$ ходов; при этом нет необходимости снимать том $n+1$ с полки. Всего мы сделали $(2^{n-1}-1)+1+(2^{n-1}-1) = 2^n - 1$ ходов.

Опишем полуинвариант, который позволит нам оценить сверху количество ходов, а заодно и доказать конечность процесса.

Представим себе две строчки, каждая из $n-1$ лампочек. В первой строчке первая (слева) лампочка горит тогда и только тогда, когда первый том на месте; вторая лампочка горит тогда и только тогда, когда второй том находится на одном из двух первых мест … $(n-1)$-я лампочка горит тогда и только тогда, когда $(n-1)$-й том находится на одном из $n-1$ первых мест.

Вторая строчка лампочек устроена по похожему принципу, только наоборот: первая (слева) лампочка горит тогда и только тогда, когда последний том на своём месте; вторая лампочка горит тогда и только тогда, когда предпоследний том на одном из двух последних мест … $(n-1)$-я лампочка горит тогда и только тогда, когда $(n-1)$-й с конца том на одном из $n-1$ последних мест.

Предположим, что какая-нибудь лампочка гаснет. Мы утверждаем, что одновременно с этим зажигается какая-то лампочка левее в той же строчке. Действительно, если k-й том вытеснен с первых k мест, это значит, что был поставлен на своё место том j, где $j<k$. Аналогично, если k-й с конца том был вытеснен с последних k мест, то только потому, что на место был поставлен j-й ($j<k$) с конца том.

Итак, если считать, что лампочки в каждой строчке представляют собой двоичные цифры какого-то числа, то оба числа не убывают. Более того, с каждым ходом одно из чисел возрастает, ибо постановка тома на своё место всегда зажигает какую-то лампочку (если том сдвинулся влево, то лампочку в первой строке, а если вправо, то во второй).

Таким образом, у нас есть два двоичных $(n-1)$-значных числа, и с каждым ходом одно из них возрастает. Их сумма не меньше чем 0 и не больше чем $2^n - 2$, поэтому всего можно сделать не более чем $2^n - 2$ ходов.

Несложно понять, что эту оценку можно улучшить. Каждой книге с номером k, $1 < k < n$, соответствуют две лампочки — k-я в первой строчке и $(n-k)$-я во второй, и в любой момент горит хотя бы одна из них. Отсюда получается, что начальная сумма двух $(n-1)$-значных чисел не меньше $2^{n/2} - 2$, а число ходов не превышает $2^n - 2^{n/2}$.

Замечание. Имеется задача со схожим сюжетом.

На полке стоят тома. Разрешается брать любые два тома, идущие в обратном порядке, и менять их местами (в обратном порядке значит, что том с большим номером стоит левее тома с меньшим номером). Доказать, что этот процесс закончится.

Доказательство основано на том, что общее число *беспорядков* (т. е. пар томов, когда том с бóльшим номером стоит левее тома с меньшим номером) уменьшается, отсюда получается полиномиальная верхняя оценка на число шагов $n(n-1)/2$. Несложно привести оптимальный пример — тома идут в порядке убывания, переставляются соседи. С другой стороны, несложно убедиться в том, что нижняя оценка на число операций такая же, как в предыдущей задаче, а именно $n-1$. Действительно, пусть тома стоят в таком порядке: $n, 1, \ldots, n-1$. Нужно реализовать цикл длины n, а он не может состоять меньше чем из $n-1$ транспозиций.

Благодарности

Авторы признательны А. Я. Белову за постановку задачи и внимание к работе.

Л. Радзивиловский, Тель-Авивский университет (Израиль)

levr78@hotmail.com

Г. Юргин, лицей «Вторая школа» г. Москвы, 10 класс

g.y.98@mail.ru

Задачник

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. В новогоднем конкурсе участвовало n человек. Все участники получили открытки. Занявшему первое место дали одну открытку и десятую часть оставшихся, за второе место дали две открытки и десятую часть оставшихся, ... за последнее n-е место — n открыток и десятую часть оставшихся. Все открытки были розданы. Сколько было участников? (*А. К. Ковальджи*)

2. В пространстве произвольным образом расположено несколько многогранников (возможно, пересекающихся). Докажите, что в пространстве можно расположить некоторое множество точек так, чтобы каждый многогранник содержал не менее одной точки внутри себя и чтобы любые два многогранника одинакового объёма содержали внутри себя одно и то же число точек. (*Г. А. Гальперин*)

3. Решите уравнения
$$\text{а) } x^2 + y^2 = (x+1)^3; \quad \text{б) } x^2 + xy + 2y^2 = (y+1)^3$$
в целых числах. (*Н. Н. Осипов*)

4. Расстояние между пунктами А и Б равно d. В пункте А имеется n велосипедистов и $k < n$ велосипедов. Скорость пешехода v_1, велосипедиста $v_2 > v_1$. За какое наименьшее время они могут добраться из пункта А в пункт Б? (Разрешается оставлять велосипеды на дороге.)
   (*А. Я. Канель-Белов*)

5. Дана непрерывная поверхность без самопересечений. Известно, что на ней есть две точки, расстояние между которыми максимально для всех пар точек данной поверхности. Известно также, что любая её проекция есть круг. Докажите, что эта поверхность — сфера.
   (*А. А. Шапиро*)

6. Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$ — иррациональное число, β — произвольное число из интервала $(0, 1)$, а $Q(M)$ — минимум дробной части $N \cdot \alpha$, где $N < M$ — целое. Аналогично $R(M)$ есть минимум дробной части $\beta - N \cdot \alpha$. Докажите, что $Q(M) > R(M)$ при бесконечно многих M. (*Фольклор*)

7. Докажите неравенство
   $$\frac{R}{r} < \frac{\pi}{\alpha\beta\gamma},$$
   где R, r — радиусы описаннной и вписанной окружностей треугольника, α, β, γ — его углы в радианах. (*К. Э. Каибханов*)

8. Многочлен $P(x)$ делит $x^n - 1$ при некотором n. Может ли один из его коэффициентов равняться 2014? А если $P(x)$ неприводим?
   (*В. А. Сендеров, А. Я. Канель-Белов*)

9. Дан треугольник ABC и положительные числа p, q такие, что
   $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
   Пусть X — точка плоскости, для которой сумма $AX^p + BX^p + CX^p$ минимальна, а A', B', C' — точки на сторонах BC, CA, AB, для которых сумма $A'B'^q + B'C'^q + C'A'^q$ минимальна. Докажите, что $CX \perp A'B'$.
   (*А. А. Заславский*)

10. (Задача на исследование). На столе лежат круглые салфетки, возможно, разного размера. Любые две пересекаются. Докажите, что их можно прибить 100 гвоздями. Можно ли уменьшить число 100? А если эти салфетки суть единичные круги? А если это выпуклые фигуры, отличающиеся параллельным переносом? (*Фольклор*)

11. Плоскость раскрашена в несколько цветов. Докажите, что существует треугольник единичной площади с вершинами одного цвета.
    (*А. Я. Канель-Белов*)

12. При каких n существует такая бесконечная последовательность над алфавитом $\{1, \ldots, n\}$, что никакая комбинация букв не повторится два раза подряд? При каких n существует такая бесконечная последовательность над алфавитом $\{1, \ldots, n\}$, что никакие три подслова одинаковой длины с одинаковой суммой символов не повторятся три раза подряд?
(*Фольклор*)

Решения задач из прошлых выпусков

16.4. Условие. (Исправленный текст см. МП № 18, с. 270.) Ограничена ли последовательность $\{a_n\}$, заданная рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_2 = x$; $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 1}{a_{n-1}}$, $x \in (-2, 2)$? (*К. Н. Игнатьев*)

Ответ: ограничена.

Решение (см. Б. Рабинович, Об одной последовательности. Вестник трудов ДНТТМ. Москва, 1990, стр. 4–6). Положим $\varphi = \arccos(x/2)$. Заметим, что $\sin\varphi \neq 0$, поскольку $x \in (-2, 2)$. Достаточно показать, что $a_n = \dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$, тогда $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{\sin\varphi}$. При $n = 1, 2$ равенство проверяется непосредственно. Пусть $n \geqslant 2$, проведём переход к $n + 1$. Нужно показать, что

$$\sin(n+1)\varphi = \frac{\sin^2 n\varphi - \sin^2\varphi}{\sin(n-1)\varphi}.$$

Преобразуем числитель правой части:

$$\begin{aligned}(\sin n\varphi + \sin\varphi)(\sin n\varphi - \sin\varphi) &= \\ = 2\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\cdot\cos\frac{(n-1)\varphi}{2}\cdot 2\sin\frac{(n-1)\varphi}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)\varphi}{2} &= \\ = \sin(n+1)\varphi\cdot\sin(n-1)\varphi&,\end{aligned}$$

что и требовалось. (*Б. Рабинович*)

16.9. Условие. В алфавите анчурского языка есть лишь три буквы: A, B и C. Два разных слова обозначают одно и то же понятие, если одно из них может быть получено из другого с помощью следующих операций, которые можно проводить в любой последовательности и в любых количествах:

1) в любом месте слова можно заменять друг на друга следующие комбинации букв: ABA на BAB, ACA на CAC или BC на CB (и наоборот);

2) из любого места можно выкидывать две одинаковые буквы, идущие подряд, а также в любое место можно вставлять две одинаковые буквы.

а) Конечное или бесконечное количество понятий можно выразить с помощью этого языка? Если конечное, то сколько?

б) Тот же вопрос, если замена BC на CB запрещена, однако разрешена замена BCB на CBC. (*В. О. Бугаенко*)

в) Тот же вопрос, если в алфавите всего две буквы A и B, свойство 2 сохраняется и из любого места можно выкидывать $(AB)^n$ и в любое место вставлять это выражение. (*А. Я. Канель-Белов*)

Ответ: а) 24; б) бесконечное; в) $2n$.

Решение. Для удобства начнём с пункта б).

б) Рассмотрим разбиение плоскости на равные правильные треугольники тремя семействами параллельных прямых, образующих углы 60° друг с другом. Выделим один из треугольников и назовём его **исходным**. Прямые, содержащие стороны исходного треугольника, обозначим a, b, c и будем считать их соответствующими буквам A, B и C алфавита соответственно. Каждому слову поставим в соответствие треугольник, получающийся из исходного треугольника последовательными зеркальными отражениями относительно прямых, соответствующих буквам слова.

Оказывается, при этом словам, выражающим одинаковые понятия, будет соответствовать один и тот же треугольник. Действительно, фрагмент слова, состоящий из одинаковых букв, означает двойное отражение относительно одной прямой, т. е. тождественное преобразование. Фрагмент ABA означает отражение относительно прямой, проходящей через точку пересечения прямых a и b и образующей с каждой из них угол $\pi/3$. То же самое означает фрагмент BAB. Аналогично рассматриваются пары (ACA, CAC) и (BCB, CBC).

Докажем, что каждому из треугольников разбиения соответствует по крайней мере одно слово. Для этого нужно показать, что для любого треугольника разбиения существует композиция отражений относительно прямых a, b и c, переводящая исходный треугольник в него. Как было замечено выше, если s_a, s_b и s_c — симметрии относительно трёх прямых, пересекающихся в одной точке под углом $\pi/3$, то каждая из них выражается в виде композиции двух других (а именно, $s_c = s_a \circ s_b \circ s_a$, аналогично s_a и s_b). Из этого наблюдения легко вывести, что симметрия относительно любой прямой разбиения выражается в виде композиции симметрий относительно сторон исходного треугольника. Поэтому достаточно найти композицию симметрий относительно любых прямых разбиения (а не только сторон исходного треугольника), переводящую исходный треугольник в произвольно заданный. Соединим эти два треугольника цепочкой смежных треугольников. Для каждой пары смежных треугольников отражение относительно их общей стороны переводит один из них в другой. Значит, композиция этих отображений переводит начальный треугольник цепочки в конечный.

Взяв по слову, соответствующему каждому из треугольников разбиения, получаем бесконечное число слов, обозначающих различные понятия.

а) Теперь покажем, что в случае (а) количество различных понятий не превосходит 24. Так же как и в случае (б) поставим в соответствие буквам сло́ва некоторые осевые симметрии. Оси, соответствующие буквам A и B, а также буквам A и C, должны образовывать между собой угол 60°. Оси, соответствующие буквам B и C, должны быть перпендикулярны. Таким образом, образуемый ими треугольник должен иметь углы 60°, 60° и 90°. Разумеется, такого треугольника не существует на евклидовой плоскости, однако его можно построить на сфере. Отражая этот треугольник относительно сторон, получим замощение сферы равными треугольниками, подобно тому как в случае (б) мы получили замощение плоскости равными правильными треугольниками. Как и в случае (б), слова, означающие одинаковые понятия, соответствуют одному и тому же треугольнику разбиения. Различие в том, что количество треугольников разбиения в этом случае конечно, а именно равно 24. Таким образом, количество различных понятий языка не меньше 24.

Выпишем по одному слову, соответствующему каждому из треугольников разбиения: $\varnothing$, A, B, C, AB, BA, AC, CA, BC, ABA, ACA, ABC, BAC, BCA, CAB, $ABAC$, $ABCA$, $ACAB$, $BACA$, $BCAB$, $ABACA$, $ABCAB$, $BACAB$, $ABACAB$. Доказательство того, что любое слово эквивалентно одному из перечисленных, оставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения. (*В. О. Бугаенко*)

в) Назовём слово *неуменьшаемым*, если оно не эквивалентно никакому слову меньшей длины. Неуменьшаемые слова не содержат подслов вида AA и BB, значит, они — подслова периодической последовательности $(AB)^\infty = \ldots ABABABABA \ldots$ Далее, в неуменьшаемом слове подслово AB не может повторяться n раз подряд. При этом

$$(BA)^n = A^2(BA)^n = A(AB)^n A = A^2 = \varnothing.$$

Поэтому все неуменьшаемые слова есть подслова в $(AB)^{n-1}A$ или $B(AB)^{n-1}$. Всего таких подслов $2n$.

Остаётся показать, что все они различны. Пусть A обозначает осевую симметрию правильного n угольника, B — симметрию относительно оси, повёрнутой на угол π/n. Легко видеть, что A и B порождают все движения n-угольника, а всего таких движений $2n$. Задача решена.

(*А. Я. Канель-Белов*)

17.10. Условие. Дано векторное пространство W, $\dim W = m$, два его подпространства U и V такие, что $U \cap V = 0$ ($\dim U = n_1$, $\dim V = n_2$), и обратимый оператор $A\colon W \to W$. Докажите, что $A^n(U) \cap V = 0$ при некотором $n \leqslant \min\left(\binom{m}{n_1}, \binom{m}{n_2}\right)$. (*Фольклор*)

Решение. Пусть $n = n_1$, и пусть $\{e_1, \ldots, e_m\}$ — базис пространства W, причём векторы $e_1, \ldots, e_n$ составляют базис подпространства U. Рассмотрим пространство внешних форм порядка n над W, т. е. n-линейных кососимметричных функций на W со значениями в основном поле. В этом пространстве имеется базис B из $r := \binom{m}{n}$ форм вида $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant m$, которые равны 1 на $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\}$ и 0 на любом наборе $\{e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}\}$, где хотя бы одно из $j_1, \ldots, j_n$ не равно ни одному из $i_1, \ldots, i_n$.

Далее, рассмотрим набор из $r + 1$ форм $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, $Ae_1 \wedge \ldots \wedge Ae_n$, $\ldots$, $A^r e_1 \wedge \ldots \wedge A^r e_n$. Некоторая их линейная комбинация, в которой не все коэффициенты нулевые, равна 0. Если $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ входит в неё с нулевым коэффициентом, применим к ней оператор A^{-1}. Повторяя, если нужно, эту процедуру и добавляя слагаемые с нулевыми коэффициентами, придём к соотношению вида

$$e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = \sum_{k=1}^{r+1} \lambda_k A^k e_1 \wedge \ldots \wedge A^k e_n. \qquad (*)$$

Пусть при любом $k = 1, \ldots, r$ найдутся такие коэффициенты $c_{k1}, \ldots, c_{kn}$, не все равные 0, что

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ki} A^k e_i \in V.$$

При каждом k один из ненулевых коэффициентов можно взять равным 1. Например, пусть $c_{k1} = 1$. Тогда

$$A^k e_1 \wedge \ldots \wedge A^k e_n = \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ki} A^k e_i\right) \wedge \ldots \wedge A^k e_n.$$

Выражение в скобках является линейной комбинацией векторов e_j, $j > n$, и потому левая часть равенства есть линейная комбинация выражений вида $e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_n}$, где хотя бы одно из $j_1, \ldots, j_n$ больше n. Это верно для каждого слагаемого в правой части $(*)$. Следовательно, $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ является линейной комбинацией других элементов из B, что невозможно. Полученное противоречие означает, что $A^k U \cap V = 0$ при некотором k, $1 \leqslant k \leqslant r = \binom{m}{n_1}$.

Заменив A на A^{-1} и поменяв местами U и V, получаем, что $A^{-\ell} V \cap U = 0$ при некотором ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant \binom{m}{n_2}$. Поскольку отображение A обратимо, $A^\ell U \cap V = A^\ell(U \cap A^{-\ell} V) = 0$. Этим доказано утверждение задачи. (*А. Скутин*)

18.2. Условие. Последовательность функций задана следующим образом: $Q_1(x) = x$, $Q_{n+1}(x) = Q_n(x+1)/Q_n(x)$. Пусть $Q_n(x) - 1 = A(x)/B(x)$, где $A(x)$, $B(x)$ — многочлены. Найдите отношение старших членов этих многочленов. (*А. А. Шапиро*)

Ответ: $(-1)^{n-2}(n-2)!x^{1-n}$.

Решение. Пусть c_n/x^k — отношение старших членов $A(x)$ и $B(x)$ (где c_n — коэффициент). Тогда

$$Q_n(x) = 1 + \frac{c_n}{x^k} + o\Big(\frac{1}{x^k}\Big) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Следовательно,

$$\ln(Q_n(x)) = \frac{c_n}{x^k} + o\Big(\frac{1}{x^k}\Big) \quad \text{при } x \to \infty,$$

поскольку $\dfrac{\ln(1+t)}{t} \to 1$ при $t \to 0$.

Пусть $\Delta(f) = f(x+1) - f(x)$ — оператор разностной производной с шагом 1. Тогда

$$\Delta(\ln x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=2}^{\infty} d_k \frac{1}{x^k}$$

и

$$\Delta\Big(\frac{1}{x^k}\Big) = -k\frac{1}{x^{k+1}} + \sum_{l=k+1}^{\infty} c_{k,l}\frac{1}{x^{k+l}}$$

для каких-то d_k, $c_{k,l}$ (таким образом, асимптотика разностной производной совпадает с асимптотикой обычной производной).

При $n > 1$ имеем

$$\ln Q_n(x) = \ln Q_{n-1}(x+1) - \ln Q_{n-1}(x) = \Delta(\ln Q_{n-1}(x)).$$

Спускаясь по n, получаем (с учётом предыдущих равенств и условия $Q_1(x) = x$):

$$\ln Q_n(x) = \Delta^{n-1}(\ln x) = (-1)^{n-2}(n-2)!\frac{1}{x^{n-1}} + o\Big(\frac{1}{x^{n-1}}\Big),$$

откуда следует ответ. (*А. Я. Канель-Белов*)

18.7. Условие. Пусть $P(x) \neq \mathrm{const}$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k+1$, делящих его значение в целой точке.

Замечание. При публикации эта задача была приписана И. Богданову. В действительности он предложил задачу, а авторство её неизвестно. Редакция будет благодарна читателям за любые указания по этому поводу.

Ниже в первом решении доказан именно тот факт, который содержится в задаче; при этом используются свойства гауссовых целых чисел. Второе же решение доказывает существенно более общий факт, раскрывая глубинную сущность задачи.

Решение 1. Пусть $q = a + bi$ — некоторое простое гауссово число, делящее значение многочлена $P(m+ni)$ в некоторой целой гауссовой точке $m+ni$, причём $b \neq 0$ и $q \neq \pm 1 \pm i$. Тогда, как известно, $p = q\bar{q} = a^2 + b^2$ — простое число вида $4k+1$. Далее, существует натуральное k такое, что k^2+1 делится на p (годится, например, любое целое решение сравнения $kb \equiv a \pmod{p}$). При этом $k^2 + 1 = (k-i)(k+i)$, а тогда одна из скобок делится на q.

Пусть для определённости $k+i$ делится на q. Тогда имеем

$$P(m - nk) = P(m + ni - n(k+i)) \equiv P(m+ni) \equiv 0 \pmod{q},$$

то есть $P(m-nk)$ делится на q. Поскольку это число целое, оно делится также на $\bar{q}$, а значит, оно делится на p.

Осталось показать, что у значений $P(x)$ в целых гауссовых точках есть бесконечно много простых делителей с ненулевой мнимой частью. Это рассуждение стандартно. Пусть sx^k и r — соответственно старший и свободный члены многочлена $P(x)$. Если $r = 0$, то $P(x)$ делится на x и утверждение тривиально.

В противном случае предположим, что $q_1, \ldots, q_n$ — все простые гауссовы числа, делящие значения $P(x)$. Положим $N = crq_1q_2 \ldots q_n$ для большого по модулю целого гауссового числа c. Тогда нетрудно видеть, что в разложение числа $P(N)$ простые множители q_i входят в той же степени, что и в r. Поскольку других простых сомножителей с ненулевой мнимой частью в разложении $P(N)$ быть не может, приходим к выводу, что $\arg P(N)$ может принимать конечное количество значений. Однако при больших c этот аргумент очень близок к $\arg(sN^k)$. Теперь, подобрав аргумент коэффициента c должным образом, легко прийти к противоречию. (*Д. Клюев*)

Решение 2. В первом решении доказано, что у значений многочлена $P(x)$ в целых точках есть бесконечно много простых делителей, делящих некоторое число вида n^2+1. Это утверждение является частным случаем более общего факта, который мы здесь и докажем.

Факт. *Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два неконстантных многочлена с целыми коэффициентами. Тогда существует бесконечно много простых чисел p, делящих как некоторое значение $P(n)$ в целой точке, так и некоторое значение $Q(m)$ в целой точке.*

Доказательство. Ясно, что достаточно ограничиться случаем, когда $P(x)$ и $Q(x)$ неприводимы над $\mathbb{Z}$ (если они приводимы, достаточно применить факт для некоторых их неприводимых делителей).

Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\beta \in \mathbb{C}$ — некоторые корни многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ соответственно. Рассмотрим алгебраическое расширение $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$; по теореме о примитивном элементе существует такое $\gamma \in \mathbb{C}$, что $\mathbb{Q}[\alpha, \beta] = \mathbb{Q}[\gamma]$. Значит, существуют такие многочлены $F(x), G(x) \in \mathbb{Q}[x]$, что $\alpha = F(\gamma)$ и $\beta = G(\gamma)$.

Далее, число γ также алгебраично над $\mathbb{Q}$, поэтому оно является корнем некоторого неприводимого многочлена $R(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Тогда $\mathbb{Q}[\gamma] \cong \mathbb{Q}[x]/(R(x))$. Это значит, что для любого многочлена $S(x) \in \mathbb{Q}[x]$ мы имеем $S(\gamma)=0$ тогда и только тогда, когда $S(x)$ делится на $R(x)$. Поскольку $P(F(\gamma)) = Q(G(\gamma)) = 0$, заключаем, что $P(F(x))$ и $Q(G(x))$ делятся на $R(x)$, то есть

$$P(F(x)) = R(x)P_1(x) \quad \text{и} \quad Q(G(x)) = R(x)Q_1(x).$$

Заметим, что многочлены $F(x)$, $G(x)$, $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ могут иметь нецелые (но рациональные!) коэффициенты; пусть N — наибольшее простое число, на которое делится какой-нибудь из знаменателей этих коэффициентов.

Для неконстантного многочлена $R(x)$ существует бесконечно много простых чисел, делящих его значения в целых точках (доказательство этого утверждения повторяет концовку предыдущего решения, но содержит меньше технических подробностей). Пусть $p > N$ — такое простое число, и пусть $R(n)$ — соответствующее значение. Тогда числители рациональных чисел $P(F(n)) = R(n)P_1(n)$ и $Q(G(n)) = R(n)Q_1(n)$ делятся на p, поскольку знаменатели чисел $P_1(n)$ и $Q_1(n)$ на него не делятся.

Единственная оставшаяся проблема заключается в том, что числа $F(n)$ и $G(n)$ — рациональные, а не целые. Однако их знаменатели также не делятся на p. Значит, если $F(n) = a/b$ для взаимно простых целых a и b, то можно выбрать такое целое c, что $a \equiv bc \pmod{p}$. Тогда $P(c) \equiv P(a/b) \equiv 0 \pmod{p}$. Аналогично находится значение $Q(x)$ в целой точке, делящееся на p. (*И. Богданов, А. Канель-Белов*)

18.10. Условие. Какую наибольшую размерность может иметь подпространство пространства $(n \times n)$-матриц полем действительных чисел, состоящее только из вырожденных матриц? (*Фольклор*)

Ответ: $n^2 - n$.

Решение. Подпространством коразмерности n, удовлетворяющим условиям задачи, является, например, множество матриц с нулевой первой строкой.

Докажем теперь, что коразмерность подпространства, удовлетворяющего условиям задачи, не меньше n. Подпространство коразмерности k можно задать системой линейных уравнений ранга k, в которой неизвестными являются координаты в стандартном базисе матричных единиц. У этой системы есть k главных неизвестных, а остальные — свободные. Если предположить, что $k < n$, то нетрудно доказать, что с помощью перестановки строк и столбцов можно добиться, чтобы все главные неизвестные оказались под главной диагональю (оставляем читателю этот факт в качестве самостоятельного упражнения). При этом подпространство, задаваемое системой, переходит в другое подпространство той же размерности, задаваемое преобразованной системой, а условие, что оно содержит только вырожденные матрицы, сохраняется. Но свободным неизвестным можно присвоить любые значения. Поставим единицы на главной диагонали и нули над ней. Получим невырожденную матрицу в нашем подпространстве. Это противоречие доказывает утверждение. (*В. О. Бугаенко*)

Нам пишут

К задаче о точках Брокара

В. М. Журавлёв, П. И. Самовол

В сборнике «Математическое просвещение» № 18 (2014 г.) в статье авторов «Об одной задаче о биссектрисах и точках Брокара» на с. 228 приведена

Задача. *Про треугольник известно, что в нём чевианный треугольник точки, являющейся серединой отрезка, соединяющего первую и вторую точки Брокара, является равнобедренным. Верно ли, что данный треугольник также равнобедренный?*

Авторам удалось построить несколько контрпримеров. Для упрощения вычислений использовался онлайн-портал https://cloud.sagemath.com/. Удалось показать, что чевианный треугольник середины отрезка между первой и второй точками Брокара будет равнобедренным при условии $(b-c)g(a,b,c)=0$, где a, b, c — длины сторон исходного треугольника и

$$\begin{aligned}g(a,b,c) = -2a^{10}b^4 - 3a^8b^6 + 2a^6b^8 - 5a^{10}b^2c^2 - 15a^8b^4c^2 + 3a^6b^6c^2 +\\ + 9a^4b^8c^2 - 2a^{10}c^4 - 15a^8b^2c^4 + 23a^4b^6c^4 + 8a^2b^8c^4 - 3a^8c^6 + 3a^6b^2c^6 +\\ + 23a^4b^4c^6 + 15a^2b^6c^6 + 2b^8c^6 + 2a^6c^8 + 9a^4b^2c^8 + 8a^2b^4c^8 + 2b^6c^8.\end{aligned}$$

При $b=1$, $c=1/2$ приходим к уравнению 10-й степени, которое имеет положительный действительный корень $a \approx 0{,}914952661806423$. Неравенства треугольника выполнены, и мы нашли требуемый контрпример.

Взяв $a=1$, $c=0{,}9$, получаем уравнение 8-й степени с положительным действительным корнем $b \approx 0{,}763782383451273$. Для найденных a, b, c неравенства треугольника снова выполнены.

Таким образом, существуют неравнобедренные треугольники, для которых чевианный треугольник середины отрезка между точками Брокара является равнобедренным.

Опечатки, замеченные в № 17

Страница, строка	Напечатано	Следует читать
112, 7 снизу 121, 3 снизу 127, 1 снизу	$g_n=3g_{n-1}-4g_{n-2}+g_{n-4}+g_{n-5}+$ $+3g_{n-6}-g_{n-7}$	$g_n=3g_{n-1}-4g_{n-3}+g_{n-4}+g_{n-5}+$ $+3g_{n-6}-g_{n-7}$
112, 3 снизу 113, 6 сверху	$c_n=g_{n-1}$	$c_n=d_{n-1}$
114, 4 снизу	$a_n=i_n+j_n+e_n+e^*n=i_n+j_n+2e_n$	$a_n=i_n+j_n+e_n+e^*_n=i_n+j_n+2e_n$

Опечатки, замеченные в № 18

Страница, строка	Напечатано	Следует читать
226, 10 сверху	$A_1B_1\neq A_1C_1$, $A_1B_1\neq A_1C_1$, $A_1B_1\neq A_1C_1$	$A_1B_1\neq A_1C_1$, $A_1B_1\neq B_1C_1$, $B_1C_1\neq A_1C_1$

Информация для авторов

Сборник «Математическое просвещение» предназначен для широкого круга математиков — исследователей и преподавателей, а также для студентов, старшеклассников и всех, кто интересуется математикой. Издание публикует материалы по различным разделам математики, интересные и доступные указанной аудитории, а также задачи соответствующего характера и статьи по важнейшим вопросам истории и преподавания математики, внеклассной работы со школьниками. Сборник «Математическое просвещение» не имеет возможности публиковать статьи, содержащие существенно новые научные результаты, оценка которых доступна лишь специалистам в соответствующей области. Он также не публикует материалы по текущим вопросам организации учебного процесса и научной работы.

Сборник выходит один раз в год в марте. Формирование очередного выпуска завершается, как правило, в сентябре–октябре. Редакция просит авторов представлять материалы по электронной почте на адрес `matpros@mccme.ru` в виде файлов pdf и tex (с файлами рисунков и т. п., если требуется). Допускается присылка статей, набранных в Word. Необходимо указать место работы и электронный адрес каждого автора.

Прошлые выпуски «Математического просвещения» доступны на

`http://www.mccme.ru/free-books/matpros.html`.

Авторы опубликованных статей имеют право на 2 экземпляра сборника каждый. По поводу передачи экземпляров необходимо обращаться на `matpros@mccme.ru`.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

Подписано в печать 05.03.2015 г. Формат $70\times100\,{}^1\!/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 17. Тираж 1000 экз. Заказ №