

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

*А. М. Прохоров, Ф. В. Бункин, Е. С. Гочелашвили,
В. И. Шишов*

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	415
2. Исходные уравнения для моментов поля	417
3. Размытие лазерных пучков в случайно-неоднородной среде	421
а) Коллимированный пучок (425). б) Фокусированный пучок (426).	
4. Корреляционные характеристики флуктуаций интенсивности лазерного излучения	428
а) Одномодовый коллимированный пучок (428). 1) Зона Френеля излучающей апертуры (плоская волна) (429). 2) Зона Фраунгофера излучающей апертуры (сферическая волна) (438). 3) Флуктуации интенсивности существенно ограниченного пучка (440). — б) Одномодовый фокусированный пучок (441). в) Сравнение теории с экспериментом (445).	
5. Флуктуации фазы лазерного излучения в случайно-неоднородной среде	448
6. Пространственные выбросы случайного поля интенсивности	449
а) Область слабых флуктуаций интенсивности (450). б) Область насыщенных флуктуаций интенсивности (451).	
7. Заключение	453
Цитированная литература	454

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время сильно возрос интерес к детальному исследованию статистики лазерного излучения при распространении в случайно-неоднородных средах. Этот интерес определяется исключительными возможностями квантового прибора в физических исследованиях турбулентности плазмы, земной атмосферы, гидродинамических потоков и т. п. Выяснение данного вопроса важно также и для многих технических приложений — так, создание систем лазерной связи и локации, работающих в приземном слое атмосферы, несомненно, должно опираться на знание основных закономерностей распространения света в турбулизованной среде.

В широком круге задач, относящихся к данному вопросу, можно выделить довольно узкую область — это исследование распространения лазерного излучения в случайных слабонеоднородных средах с крупномасштабными флуктуациями показателя преломления в рамках применимости линейной оптики *).

*) Влияние нелинейных эффектов при распространении мощного лазерного излучения в материальных средах подробно освещено в работах ^{1, 2} и в данном обзоре не рассматривается.

Основным методом при теоретическом решении различных задач в этой области физики до недавнего времени был метод Рытова (метод плавных возмущений — МПВ). Итоги анализа, основанного на МПВ, подведены в ряде монографий³⁻⁵ и в обзорах⁶⁻⁸. Метод плавных возмущений, однако, ограничен условием малости величины относительных флуктуаций интенсивности⁹; этим методом можно изучать поведение лазерных пучков на достаточно коротких дистанциях распространения или при слабой турбулентности. Между тем наибольший практический и научный интерес привлекают задачи, в которых существенно проявляются эффекты многократного рассеяния волны на флуктуациях показателя преломления. Величина относительных флуктуаций интенсивности, как показывают экспериментальные данные⁸, достигает при этом значений порядка единицы и насыщается на этом уровне при увеличении дистанции распространения.

Неоднократно предпринимавшиеся попытки⁵ решить проблему насыщенных флуктуаций интенсивности путем исследования непосредственно волнового уравнения (как это делается в МПВ) оказались неудачными. Изучение области насыщенных мерцаний потребовало создания новых методов. Такой метод был развит в самое последнее время — это локальный метод малых возмущений и его различные модификации. Физической основой данного метода является слабость изменения характеристик поля на дистанции порядка размера неоднородности a (слабость взаимодействия излучения с одной неоднородностью), и этому допущению соответствует малость параметра $\langle(\Delta S)^2\rangle_{z=a}$ — среднего квадрата флуктуаций набега фазы на дистанции a . В случае турбулентных спектров степенного вида роль a играет внешний масштаб турбулентности L_0 . Локальный метод позволил перейти от стохастического волнового уравнения для поля к замкнутым динамическим уравнениям для моментов поля, что значительно упрощает дальнейший анализ. Следует особо подчеркнуть, что область применимости уравнений для моментов не ограничена условием малости относительных флуктуаций интенсивности. Впервые идея локального метода была высказана Черновым в 1964 г.¹⁰ Практическое применение этот метод получил в 1967 г. в работе Шишова¹¹, где было выведено дифференциальное уравнение для четвертого момента поля, и позднее в работах¹²⁻¹⁴.

Уравнения для моментов поля были получены также методом селективного суммирования рядов теории возмущений¹⁵⁻¹⁷, а в работе¹⁸ они были получены в предположении, что распространение волны можно представить случайным марковским процессом. Все три метода дают эквивалентные результаты. Начиная с 1969 г. уравнения для моментов были получены также в работах¹⁹⁻²⁴.

Точных решений этих уравнений, однако, записать в общем случае не удается, за исключением уравнений для первого и второго моментов поля. Получение численных решений уравнений для более высоких моментов затруднительно даже на наиболее мощных современных ЭВМ. В связи с этим весьма важным является построение асимптотических решений, пригодных на больших дистанциях распространения. Метод построения таких решений был предложен в работах²⁵ и получил дальнейшее развитие в работах^{26, 27}. В этих работах было дано описание корреляционных свойств насыщенных флуктуаций интенсивности излучения в турбулентных средах для случая, когда исходный тип излучения — плоская и сферическая волны.

Особую актуальность исследование области насыщенных флуктуаций интенсивности представляет для случая, когда исходный тип излучения — фокусированный пучок. Связано это с тем, что даже в такой слабонеод-

породной турбулентной среде, какой является земная атмосфера, распространение фокусированного излучения происходит в условиях насыщенных флуктуаций интенсивности уже на расстояниях в несколько сот метров²⁸ (величина относительных флуктуаций интенсивности для исходных плоской или сферической волн при этом может быть весьма мала). Теоретическое описание этого эффекта было дано в работах Гочелашвили²⁹.

Вопросы корреляционной теории флуктуаций интенсивности при распространении излучения на большие дистанции в случайно-неоднородных средах, хотя и составляют основное содержание обзора, но отнюдь его не исчерпывают. В обзоре большое внимание уделено также результатам, полученным в последнее время (в основном методом моментов) по уширению лазерных пучков и угловому распределению рассеянного излучения в случайно-неоднородных средах, дрожанию центра тяжести интенсивности в сечении пучка и флуктуациям фазы. Освещается также сравнительно новый, но важный для практических приложений вопрос исследования пространственных выбросов интенсивности излучения, прошедшего слой турбулентной среды. Начало исследований в этом направлении было положено в работах³⁰.

В обзоре проводится (где это возможно) систематическое сопоставление теоретических результатов с экспериментальными данными. Методы решений, изложенные в обзоре, применимы к целому классу стохастических и динамических дифференциальных уравнений в частных производных, и поэтому могут представлять интерес и для других областей физики.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТОВ ПОЛЯ

Распространение монохроматического излучения в среде, содержащей слабые крупномасштабные флуктуации показателя преломления, описывается скалярным волновым уравнением для какой-либо из компонент электромагнитного поля³⁻⁵

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} + k^2 [1 + 2\mu(\mathbf{r})] \mathcal{E} = 0, \quad (2.1)$$

где $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ не содержит осциллирующей части $\exp(-i\omega t)$, $k^2 = (\omega^2/c^2) \langle \epsilon \rangle$ — волновое число, $2\mu = (\epsilon - \langle \epsilon \rangle) / \langle \epsilon \rangle$ — флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости.

Мы ограничимся рассмотрением распространения лазерных пучков в случайно-неоднородных средах, интегральное рассеяние в которых происходит на малые углы. При этом ограничении³¹ можно перейти от волнового уравнения (2.1) к параболическому уравнению. Для этого представим \mathcal{E} в виде

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}) \exp(ikz), \quad (2.2)$$

где ось z направлена вдоль среднего направления распространения излучения. Для $E(\mathbf{r})$, отбрасывая член $\partial^2 E / \partial z^2$, получаем

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \Delta E + 2k^2 \mu(\mathbf{r}) E = 0, \quad (2.3)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Все методы решения стохастических уравнений (2.1) и (2.3) являются приближенными. Классические методы — метод малых возмущений (приближение Борна), приближение геометрической оптики и метод Рытова — дают связь между E или $\ln E$ и μ в явном виде. В этом их огромное преимущество. Этими методами решено большое число практических задач распространения волновых пучков в турбулентных средах, они не исчерпали

себя и в настоящее время. Однако даже метод Рытова, имеющий наибольшую область применимости, ограничен условием малости флуктуаций интенсивности^{5, 8, 9}.

Существенный прогресс в анализе сильных флуктуаций интенсивности был связан с переходом к локальному применению метода малых возмущений. Локальность означает, что этот метод был применен к нахождению связи между значениями поля на близких дистанциях z_0 и $z_0 + \Delta z$, причем Δz имеет порядок a — характерного масштаба неоднородностей (в случае турбулентных спектров степенного вида роль a играет внешний масштаб турбулентности L_0). Локальный метод не выражает E через μ в явном виде, однако он позволяет перейти от стохастического уравнения (2.3) к дифференциальным уравнениям для моментов поля, условия применимости которых шире условий применимости интегральных методов. Конечно, для установления явной зависимости моментов поля от статистических характеристик среды полученные уравнения еще надо решать, но это уже задача регулярная, и здесь можно пользоваться мощным аппаратом средств дифференциального исчисления. Методам решения уравнений для моментов поля посвящены гл. 3 и 4. Ниже мы приведем, ввиду его физической наглядности и простоты, вывод уравнений для моментов поля, предложенный Черновым¹³.

Статистический момент n -го порядка случайного поля E определим соотношением

$$\langle M_{n, l} \rangle = \left\langle \prod_{\lambda=1}^l E_{\lambda} \prod_{\nu=l+1}^n E_{\nu}^* \right\rangle, \quad (2.4)$$

где поле $E_{\lambda} = E(x_{\lambda}, y_{\lambda}, z)$ удовлетворяет уравнению (2.3), а $E_{\nu}^* = E^*(x_{\nu}, y_{\nu}, z)$ удовлетворяет сопряженному уравнению. Угловые скобки означают усреднение по реализациям μ .

Если умножить уравнение для E_{λ} на $\prod_{\lambda' \neq \lambda} E_{\lambda'}$ $\prod_{\nu=l+1}^n E_{\nu}^*$, а уравнение для E_{ν}^* на $-\prod_{\lambda=1}^l E_{\lambda} \prod_{\nu' \neq \nu} E_{\nu'}^*$ и уравнения сложить, то получим уравнение для момента $\langle M_{n, l} \rangle$:

$$2ik \frac{\partial}{\partial z} \langle M_{n, l} \rangle + \sum_{\lambda=1}^l \Delta_{\lambda} \langle M_{n, l} \rangle - \sum_{\nu=l+1}^n \Delta_{\nu} \langle M_{n, l} \rangle + \\ + 2k^2 \sum_{\lambda=1}^l \langle \mu_{\lambda} M_{n, l} \rangle - 2k^2 \sum_{\nu=l+1}^n \langle \mu_{\nu} M_{n, l} \rangle = 0, \quad (2.5)$$

где $\Delta_{\lambda} = \partial^2 / \partial x_{\lambda}^2 + \partial^2 / \partial y_{\lambda}^2$. В уравнении (2.5) содержатся неопределенные члены типа $\langle \mu_{\lambda} M_{n, l} \rangle$, $\langle \mu_{\nu} M_{n, l} \rangle$, так как μ и $M_{n, l}$ статистически зависимы. Для определения этих членов воспользуемся локальным методом малых возмущений. Представим поля E_{λ} и E_{ν}^* в виде

$$E_{\lambda} \approx E_{\lambda}^{(0)} + E_{\lambda}^{(1)}, \\ E_{\nu}^* \approx E_{\nu}^{(0)*} + E_{\nu}^{(1)*}, \quad (2.6)$$

где $E_{\lambda}^{(0)}$ ($E_{\nu}^{(0)*}$) — поле, которое было бы на расстоянии z , если бы в слое $z - z_0$ отсутствовали флуктуации μ , $E_{\lambda}^{(1)}$ ($E_{\nu}^{(1)*}$) — возмущения поля первого порядка по $\langle \mu^2 \rangle^{1/2}$ обусловленные средой в слое $z - z_0$. На $z - z_0$ наложим два ограничения: 1) $z - z_0 \gg a$, 2) в слое $z - z_0$ изменение поля $E_{\lambda}^{(0)}$ ($E_{\nu}^{(0)*}$) мал.

Решая уравнение (2.3) при $\mu = 0$ в слое $z_0 \leq z' \leq z$, получаем связь между $E^{(0)}(x_\lambda, y_\lambda, z)$ и $E(x', y', z_0)$:

$$E^{(0)}(\rho_\lambda, z) = \frac{k}{2\pi i(z-z_0)} \int d\rho' \exp\left[\frac{ik(\rho_\lambda - \rho')^2}{2(z-z_0)}\right] E(\rho', z_0), \quad (2.7)$$

где $\rho = (x, y)$. Для $E_v^{(0)*}$ получаем сопряженное выражение.

Первое приближение $E_\lambda^{(1)}$ выражается с помощью метода малых возмущений через $E_\lambda^{(0)}$:

$$E^{(1)}(\rho_\lambda, z) = \frac{k^2}{2\pi} \int_{z_0}^z \frac{dz'}{z-z'} \int d\rho' \exp\left[\frac{ik(\rho_\lambda - \rho')^2}{2(z-z')}\right] \mu(\rho', z') E^{(0)}(\rho', z'). \quad (2.8)$$

Используя соотношение (2.6) и отбрасывая члены порядка малости выше первого, получаем

$$\begin{aligned} \langle \mu_\lambda M_n, i \rangle = & \langle \mu_\lambda \prod_{\lambda'=1}^l E_{\lambda'}^{(0)} \prod_{v=l+1}^n E_v^{(0)*} \rangle + \\ & + \sum_{\lambda'=1}^l \langle \mu_\lambda E_{\lambda'}^{(1)} \prod_{\lambda'' \neq \lambda'} E_{\lambda''}^{(0)} \prod E_v^{(0)*} \rangle + \sum_{v'=l+1}^n \langle \mu_\lambda E_{v'}^{(1)*} \prod E_{\lambda'}^{(0)} \prod_{v'' \neq v'} E_{v''}^{(0)*} \rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Флуктуации интенсивности обусловлены только теми неоднородностями, через которые волна прошла. Поэтому между полем нулевого приближения и неоднородностями $\mu(\rho, z)$ при $z - z_0 \gg a$ статистическая связь отсутствует. На этом основании первый член в выражении (2.9) равен нулю:

$$\langle \mu_\lambda \prod E_{\lambda'}^{(0)} \prod E_v^{(0)*} \rangle = 0. \quad (2.10)$$

Все члены первой и второй суммы имеют одинаковую структуру. Поэтому достаточно рассмотреть один из членов первой суммы. В выражении

$$\begin{aligned} \left\langle \mu_\lambda E_{\lambda'}^{(1)} \prod_{\lambda'' \neq \lambda'} E_{\lambda''}^{(0)} \prod E_v^{(0)*} \right\rangle = & \frac{k^2}{2\pi} \int_{z_0}^z \frac{dz'}{z-z'} \int d\rho' \exp\left[\frac{ik(\rho_\lambda - \rho')^2}{2(z-z')}\right] \times \\ & \times \left\langle \mu(\rho_\lambda, z) \mu(\rho', z') E^{(0)}(\rho', z') \prod_{\lambda'' \neq \lambda'} E_{\lambda''}^{(0)} \prod E_v^{(0)*} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.11)$$

имеются три множителя: $\mu(\rho_\lambda, z)$, $\mu(\rho', z')$ и $E^{(0)}(\rho', z') \prod_{\lambda'' \neq \lambda'} E_{\lambda''}^{(0)} \prod E_v^{(0)*}$.

На основании вышесказанного первый и последний множители статистически независимы. Второй и третий множители статистически независимы всюду, кроме области $z' - z_0 \leq a$. Поэтому вне области $z' - z_0 \leq a$ подынтегральное выражение в (2.11) приобретает вид

$$\langle \mu(\rho_\lambda, z) \mu(\rho', z') \rangle \langle E^{(0)}(\rho', z') \prod_{\lambda'' \neq \lambda'} E_{\lambda''}^{(0)} \prod E_v^{(0)*} \rangle. \quad (2.12)$$

С другой стороны, в области $z' - z_0 \leq a$ статистически независимы первый и второй множители, поэтому подынтегральное выражение в (2.11) обращается в нуль. Следовательно, всюду в области интегрирования ($z_0 \leq z' \leq z$) подынтегральное выражение в (2.11) можно заменить на (2.12). Выражение (2.12) существенно отлично от нуля лишь в области $z' - z \leq a$, которая мала по сравнению с продольным масштабом изменения поля. Поэтому поле $E^{(0)}$ в точке (ρ', z') можно заменить полем $E^{(0)}$ в точке (ρ_λ, z) . Учитывая это замечание и пользуясь методом стационар-

ной фазы при вычислении интегралов (2.11) по ρ' , получаем

$$\langle \mu_\lambda E_\lambda^{(1)} \prod_{\lambda'' \neq \lambda'} E_{\lambda''}^{(0)} \prod E_V^{(0)*} \rangle = ik \langle M_{n,l}^{(0)} \rangle R(\rho_\lambda - \rho_{\lambda'}), \quad (2.13)$$

$$R(\rho_\lambda - \rho_{\lambda'}) = \int_{z_0}^z dz' \langle \mu(\rho_\lambda, z) \mu(\rho_{\lambda'}, z') \rangle \approx \int_0^\infty d\zeta B_\mu(\rho_\lambda - \rho_{\lambda'}; \zeta), \quad (2.14)$$

где $\langle M_{n,l}^{(0)} \rangle$ определяется выражением (2.4), в котором E_λ , E_V^* заменены на $E_\lambda^{(0)}$, $E_V^{(0)*}$; B_μ — корреляционная функция флуктуаций показателя преломления:

$$B_\mu(\rho_\lambda - \rho_{\lambda'}, z - z') = \langle \mu(\rho_\lambda, z) \mu(\rho_{\lambda'}, z') \rangle. \quad (2.15)$$

Остается сделать последний шаг — заменить $\langle M_{n,l}^{(0)} \rangle$ на $\langle M_{n,l} \rangle$. Допустимость такой замены обеспечивается малостью изменения $\langle M_{n,l} \rangle$ на дистанции $z - z_0$. Для статистического момента $\langle M_{n,l} \rangle$ получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle M_{n,l} \rangle - \frac{i}{2k} \sum_{\lambda=1}^l \Delta_\lambda \langle M_{n,l} \rangle + \frac{i}{2k} \sum_{\nu=l+1}^n \Delta_\nu \langle M_{n,l} \rangle + k^2 f \langle M_{n,l} \rangle = 0, \quad (2.16)$$

$$f = \sum_{\lambda\lambda'} R_{\lambda\lambda'} + \sum_{\nu\nu'} R_{\nu\nu'} - 2 \sum_{\lambda\nu} R_{\lambda\nu}, \quad (2.17)$$

где $R_{\lambda\lambda'} = R(\rho_\lambda - \rho_{\lambda'})$.

Выпишем уравнения для наиболее важных моментов. Среднее значение поля характеризует долю энергии волнового пучка, проходящую без искажения турбулентной средой. Уравнение для среднего поля имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle E \rangle - \frac{i}{2k} \Delta \langle E \rangle + k^2 R(0) \langle E \rangle = 0. \quad (2.18)$$

Функция когерентности $B_E = \langle M_{2,1} \rangle$ характеризует распределение по направлениям интенсивности излучения, рассеянного турбулентной средой. Уравнение для B_E имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} B_E - \frac{i}{2k} (\Delta_1 - \Delta_2) B_E + \frac{1}{2} D'(\rho_{12}) B_E = 0, \quad \rho_{12} = \rho_1 - \rho_2. \quad (2.19)$$

Это уравнение эквивалентно уравнению переноса излучения в малоугловом приближении¹². Здесь

$$D'(\rho_{12}) = 2k^2 [R(0) - R(\rho_{12})] = 4\pi k^2 \int d\mathbf{q} [1 - \cos(\mathbf{q}\rho_{12})] \Phi(q, q_z = 0); \quad (2.20)$$

величина $D'(\rho_{12})$ имеет физический смысл продольной компоненты градиента структурной функции флуктуаций фазы, вычисленной в линейном геометрооптическом приближении, $\Phi(q)$ — энергетический спектр флуктуации показателя преломления.

Флуктуации интенсивности излучения характеризуются четвертым моментом $W = \langle M_{4,2} \rangle$. Для W имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z} W - \frac{i}{2k} (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4) W + VW = 0, \quad (2.21)$$

где

$$V = \frac{1}{2} [-D'(\rho_{12}) + D'(\rho_{13}) + D'(\rho_{14}) + D'(\rho_{23}) + D'(\rho_{24}) - D'(\rho_{34})]. \quad (2.22)$$

Кратко остановимся на ограничениях, при которых применимы уравнения для моментов. Условия применения локального метода малых возмущений требуют малости изменения флуктуаций фазы на дистанции

$z - z_0$, которую приближенно приравняем a . Это ограничение дает ^{13, 17, 32}

$$k^2 (\mu^2) a^2 \ll 1. \tag{2.23}$$

Требование малости изменения поля за счет дифракции в слое $z - z_0$ при отсутствии неоднородностей в этом слое также приводит к условию (2.23).

Для моментов, содержащих одинаковое число комплексно сопряженных множителей, условие (2.23), по-видимому, можно заменить более мягким условием, зависящим от разности поперечных координат ³³. Однако условие (2.23) является, во всяком случае, достаточным для применимости уравнений для всех моментов. Вопрос о необходимых условиях в настоящее время требует дальнейшего изучения *).

Отметим, что условие (2.23), совместно с условием применимости параболического приближения, не накладывает ограничений на величину относительных флуктуаций интенсивности в волне.

3. РАЗМЫТИЕ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Искажения волнового фронта, вносимые турбулентными флуктуациями показателя преломления на пути распространения лазерного пучка, приводят к перераспределению энергии по его сечению — изменению положения «центра тяжести» интенсивности и к уширению пучка. Экспериментальному изучению этого явления посвящено большое количество работ ^{28, 34-39, 112}. Наиболее интересный результат этих исследований, имеющий как общефизическое, так и большое практическое значение, заключается в существовании насыщения степени фокусировки пучка при увеличении размеров фокусирующей апертуры $2\alpha_0$ (рис. 1). В то время как в случае среды без турбулентности эффективный поперечный размер фокусированного пучка в фокальной плоскости $2\alpha_{эфф} \sim 1/\alpha_0$ и поэтому при увеличении α_0 степень фокусировки в принципе может быть сколь угодно велика ($\alpha_{эфф}$ мало), при наличии турбулентности зависимость $\alpha_{эфф} \sim 1/\alpha_0$ наблюдается только при достаточно малых значениях α_0 , переходя далее (при увеличении α_0) в режим насыщения, когда $\alpha_{эфф}$ перестает зависеть от α_0 . Детальное теоретическое описание эффекта насыщения фокусировки пучков в турбулентной среде впервые было дано в работе ⁴⁰, хотя этот эффект обсуждался ранее ⁴¹ и были получены общие соотношения, определяющие размытие средней диаграммы направленности фокусированного излучателя в турбулентной среде; анализ в ⁴¹ основан на применении теоремы взаимности и МПВ. В работе ⁴² задача об уширении лазерного пучка была рассмотрена в

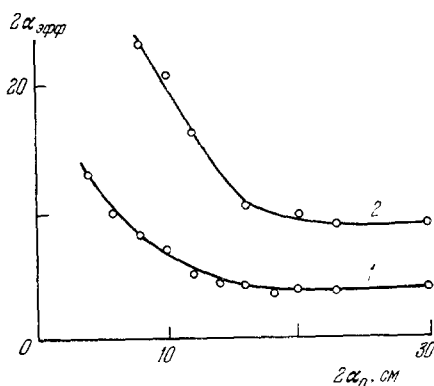


Рис. 1. Зависимость линейных размеров лазерного пучка в фокальной плоскости от диаметра излучающей апертуры на трассе протяженностью 3,5 км ³⁶.
 1 — $C_n^2 = 2,8 \cdot 10^{-16} \text{ см}^{-2/3}$; 2 — $C_n^2 = 7 \times 10^{-16} \text{ см}^{-2/3}$.

*) В работах ^{56, 90} получены существенно более слабые ограничения на применение уравнений для моментов поля; в работе ²³, с другой стороны, для моментов, содержащих неодинаковое число комплексно сопряженных множителей, получено существенно более сильное ограничение. Эти результаты, однако, как показывает тщательный анализ, неправильны.

приближении геометрической оптики; метод малых возмущений при решении скалярного волнового уравнения использовался в ^{43, 44}.

В первом приближении МПВ уширение коллимированного пучка рассматривалось в работе ⁴⁵; однако при этом в качестве невозмущенного решения для поля волны была использована функция, не учитывающая дифракцию на апертуре передатчика; соответственно результаты этой работы применимы лишь во френелевой зоне излучающей апертуры.

Последовательное применение метода Рытова к решению задачи об уширении волнового пучка (как коллимированного, так и фокусированного) в случайно-неоднородной среде было дано в ⁴⁰ и ⁴⁶; отметим, однако, что вычисление среднего значения уровня *) излучения χ в ⁴⁶ было проведено не вполне корректно (сравни расчет в ⁴⁰).

Метод Гюйгенса — Кирхгофа, обобщенный на случай плавно-неоднородных сред в ⁴⁷, был использован (совместно с МПВ) в работах ⁴⁷⁻⁴⁹. Результаты расчета среднего значения интенсивности для фокусированного пучка в ⁴⁸ совпадают с полученными в ⁴¹ — соответствие легко установить при подстановке гауссового распределения поля в качестве исходного в общие формулы ⁴¹, а рассмотрение в ⁴⁷ показало, что для меры уширения, основанной на интерпретации среднего распределения интенсивности как плотности распределения вероятности, турбулентное уширение коллимированного пучка определяется выражением, вычисленным в геометрикооптическом приближении ⁴². Эта мера уширения, однако, придает большой вес значениям $\langle I(\rho, z) \rangle$ при больших ρ , где сосредоточена малая доля энергии пучка.

Приближенные методы расчета, использованные в работах ⁴¹⁻⁴⁹, существенно опираются на условие малости величины относительных флуктуаций интенсивности в волне от точечного источника. Между тем, как следует из сказанного выше, при распространении в слабонеоднородной среде существует широкий интервал дистанций, где относительные флуктуации интенсивности в волне уже насыщены, а условия применимости уравнения (2.19) для второго момента поля еще не нарушаются.

Ниже мы проведем анализ уширения волновых пучков в турбулентной среде на основе исследования решения уравнения (2.19) ⁴⁰. Точное решение уравнения (2.19) может быть записано в виде ^{12, 15, 50-52}

$$\langle E(\mathbf{u}, z) E^*(\mathbf{v}, z) \rangle = \int d\mathbf{q}_a {}_b P(\mathbf{q}_a) P^*(\mathbf{q}_b) \exp \left\{ -i\mathbf{q}_b \mathbf{v} + i\mathbf{q}_a (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + i \frac{z}{2k} (q_b^2 - q_a^2) - \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi D \left[\xi \left(\frac{z}{k} \right) \mathbf{q}_b + \mathbf{u} - \mathbf{v} \right] \right\}, \quad (3.1)$$

где

$$P(\mathbf{q}) = (2\pi)^{-2} \int d\mathbf{u} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{u}) E(\mathbf{u}, 0) \quad (3.2)$$

— фурье-преобразование граничного распределения поля в плоскости $z = 0$ и где в соответствии с (2.20)

$$\int_0^1 d\xi D \left[\xi \left(\frac{z}{k} \right) \mathbf{q}_b + \boldsymbol{\rho} \right] = 4\pi k^2 \int_0^z dz' \int d\mathbf{q} \Phi(z', \mathbf{q}) \left\{ 1 - \exp \left[i(z - z') \frac{1}{k} \mathbf{q}_b \mathbf{q} + i\boldsymbol{\rho} \mathbf{q} \right] \right\}. \quad (3.3)$$

*) Уровень излучения $\chi(\rho, z)$ определяется соотношением $\chi = (1/2) \ln(I^{(0)}/I)$, где $I^{(0)}$ — интенсивность излучения, которая наблюдалась бы в отсутствие турбулентности в точке (ρ, z) , I — интенсивность излучения в той же точке при турбулентности.

В (3.3) учтено, что статистические свойства среды могут плавно изменяться вдоль трассы распространения.

Функция когерентности второго порядка (3.1) содержит информацию о профиле средней интенсивности в плоскости наблюдения z (которую можно получить, полагая в (3.1) $\mathbf{u} = \mathbf{v}$) и об угловом распределении рассеянного излучения — последняя содержится в зависимости $\langle E(\mathbf{u}, z) E^*(\mathbf{v}, z) \rangle$ от разности аргументов $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. При $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ выражение (3.1) тождественно полученному по методу Гюйгенса — Кирхгофа и МПВ в работах 47-49. Отсюда следует, что результаты расчетов, выполненных в работах 41, 47-49 в предположении малости величины структурной функции фазы, вычисленной на радиусе первой зоны Френеля, можно использовать⁵³ и в области больших значений этого параметра.

Анализ выражения (3.1) наиболее удобно провести (и для большинства практических задач вполне достаточно) для пучка с гауссовым распределением поля в плоскости излучения

$$E(u, 0) = E_0 \exp \left[- \left(\frac{11}{2\alpha_0^2} \frac{k}{i2R_i} \right) u^2 \right]; \quad (3.4)$$

здесь $2\alpha_0$ — эффективный размер выходной апертуры излучателя, R — радиус кривизны исходного волнового фронта. Мнимая часть экспоненты (3.4) учитывает возможность фокусировки пучка, при $R = z$ фокальная плоскость совпадает с плоскостью наблюдения; случай $R = \infty$ соответствует коллимированному пучку.

Интенсивность «невозмущенного пучка», т. е. интенсивность, которая наблюдалась бы в точке (\mathbf{u}, z) , если бы отсутствовали флуктуации показателя преломления среды, согласно (3.4) и (3.1) равна

$$I^{(0)}(\mathbf{u}, z) = |E^{(0)}(\mathbf{u}, z)|^2 = E_0^2 \left[\Omega^{-2} + \left(1 - \frac{z}{R} \right)^2 \right]^{-1} \exp \left\{ -u^2 \alpha_0^{-2} \left[\Omega^{-2} + \left(1 - \frac{z}{R} \right)^2 \right]^{-1} \right\}, \quad (3.5)$$

где $\Omega = k\alpha_0^2/z$ — число Френеля излучающей апертуры.

Рассмотрим отношение полного потока излучения к среднему значению интенсивности на оси пучка в плоскости z :

$$\pi \alpha_{\text{эфф}}^2 = \langle I(0, z) \rangle^{-1} \int d\mathbf{u} \langle I(\mathbf{u}, z) \rangle. \quad (3.6)$$

В том случае, когда влияние турбулентности на пучок таково, что его «центр тяжести» смещается мало, величина $\pi \alpha_{\text{эфф}}^2$ эффективно определяет среднюю площадь сечения пучка на расстоянии z . В том же случае, когда происходит существенное смещение («бегание») центра тяжести пучка от его средней оси, величина $\pi \alpha_{\text{эфф}}^2$ определяет, очевидно, средние размеры той области, в которой должно наблюдаться такое «бегание». Подобная ситуация может иметь место для фокусированных пучков (см. гл. 4).

Формулу (3.6) удобно переписать, введя число Френеля эффективной ширины пучка в плоскости $z = \text{const}$:

$$\Omega_{\text{эфф}} = \frac{k \alpha_{\text{эфф}}^2}{z} = E_0^2 \Omega \langle I(0, z) \rangle^{-1}; \quad (3.7)$$

здесь учтено, что в отсутствие поглощения и рассеяния (молекулярного и аэрозольного) полный поток излучения сохраняется.

В отсутствие турбулентности, согласно (3.5),

$$\Omega_{\text{эфф}}^{(0)} = \Omega \left[\Omega^{-2} + \left(1 - \frac{z}{R} \right)^2 \right]; \quad (3.8)$$

определенный таким образом эффективный радиус пучка $\alpha_{эфф}^0$ совпадает с полушириной гауссового распределения интенсивности (3.5) на уровне e^{-1} .

В случайно-неоднородной среде с одним характерным масштабом неоднородностей среднее распределение интенсивности в пучке (3.4) сохраняет гауссову форму^{50, 54, 55}.

В турбулентной среде со степенным спектром неоднородностей, однако, лишь в области очень сильных флуктуаций фазы, т. е. при

$$D(l_0) \gg 1 \text{ и } D\left(\sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{эфф}^{(0)}}}\right) \gg 1, \quad (3.9)$$

где l_0 — внутренний масштаб турбулентности, среднее распределение интенсивности в пучке также гауссово^{49, 54-56}:

$$\langle I(u, z) \rangle = E_0^2 \frac{\Omega}{\Omega_{эфф}^0} \left[1 + \frac{1}{6} D\left(\sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{эфф}^{(0)}}}\right) \right]^{-1} \times \\ \times \exp \left\{ - \left[1 + \frac{1}{6} D\left(\sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{эфф}^{(0)}}}\right) \right]^{-1} \frac{k}{z\Omega_{эфф}^{(0)}} u^2 \right\}; \quad (3.10)$$

при этом

$$\Omega_{эфф} = \Omega_{эфф}^{(0)} \left[1 + \frac{1}{6} D\left(\sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{эфф}^{(0)}}}\right) \right] \quad (3.11)$$

и $\alpha_{эфф} \sim z^{3/2}$. Согласно (3.11) уширение пучка, обусловленное турбулентными флуктуациями показателя преломления, с точностью до численного коэффициента порядка единицы совпадает со средним квадратом поперечного смещения луча⁵:

$$\langle \rho^2 \rangle = 2,19 C_n^2 l_0^{-1/3} z^3;$$

здесь C_n^2 — структурная постоянная показателя преломления. Таким образом, в области (3.9) анализ решения уравнения для второго момента поля приводит к тому же результату, что и приближение геометрической оптики⁴². Формулы (3.10)–(3.11) верны также при выполнении условия

$$\sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{эфф}^{(0)}}} \ll l_0, \quad (3.12)$$

т. е. если дифракционный размер эффективной ширины пучка в плоскости z в отсутствие турбулентности меньше внутреннего масштаба

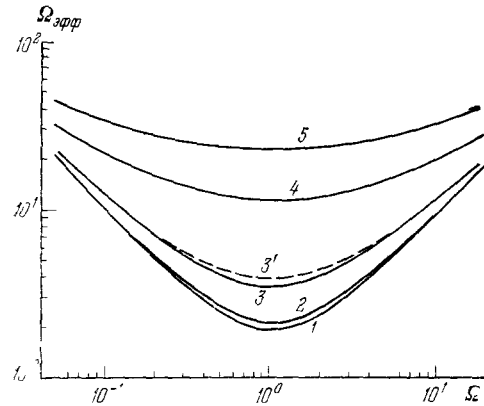


Рис. 2. Зависимость числа Френеля $\Omega_{эфф}$ эффективной ширины коллимированного пучка в плоскости наблюдения от числа Френеля Ω излучающей апертуры.

Сплошные кривые — зависимость (3.16)⁴⁰. $D_{эфф}(\sqrt{z/k}) = 0$ (1), 0,09 (2), 0,88 (3) (z' — МПВ), 4,4 (4) и 8,8 (5).

турбулентности. В (3.9)–(3.11) следует полагать

$$D(u) = 3,44 C_n^2 k^2 z l_0^{-1/3} u^2. \quad (3.13)$$

Зависимость (3.11) проверялась экспериментально³⁷.

Практически наиболее важен случай промежуточных (не очень длинных и не очень коротких) дистанций распространения, когда в большей части области интегрирования в (3.1) функция $D(u)$ имеет вид

$$D(u) = 2,9 C_n^2 k^2 z u^{5/3}. \quad (3.14)$$

Этот случай реализуется при $\sqrt{4z/k\Omega_{\text{эфф}}^{(0)}} \gg l_0$, если $D(\sqrt{4z/k\Omega_{\text{эфф}}^{(0)}}) \ll 1$, и при $D(l_0) < 1$, если $D(\sqrt{4z/k\Omega_{\text{эфф}}^{(0)}}) \gg 1$. При этом согласно (3.1),

$$\langle I(u, z) \rangle = I^{(0)}(0, z) T \left(\sqrt{\frac{4k}{z\Omega_{\text{эфф}}^{(0)}}} u, \frac{1}{2} D_{\text{сф}} \left(\sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{\text{эфф}}^{(0)}}} \right) \right), \quad (3.15)$$

$$\Omega_{\text{эфф}} = \Omega_{\text{эфф}}^{(0)} T^{-1} \left(0, \frac{1}{2} D_{\text{сф}} \left(\sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{\text{эфф}}^{(0)}}} \right) \right), \quad (3.16)$$

где

$$T(x, y) = \int_0^\infty dt \exp(-t - yt^{5/6}) J_0(\sqrt{t}x); \quad (3.17)$$

$D_{\text{сф}}(u) = (3/8) D(u)$ — структурная функция фазы сферической волны; $D(u)$ определяется формулой (3.14).

Функция $T(x, y)$ табулирована для ряда значений аргументов x и y в работах ^{40, 56}. Согласно (3.16) турбулентность вносит, вообще говоря, неаддитивный вклад в $\alpha_{\text{эфф}}^2$. Аддитивность имеет место только при условии

$$\frac{1}{2} D_{\text{сф}} \left(\sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{\text{эфф}}^{(0)}}} \right) < 1, \quad (3.18)$$

но при этом вклад турбулентности в $\alpha_{\text{эфф}}^2$ всегда мал:

$$\Omega_{\text{эфф}} = \Omega_{\text{эфф}}^{(0)} \left[1 + \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{11}{6} \right) D_{\text{сф}} \left(\sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{\text{эфф}}^{(0)}}} \right) \right]. \quad (3.19)$$

В области

$$\frac{1}{2} D_{\text{сф}} \left(\sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{\text{эфф}}^{(0)}}} \right) \gg 1, \quad (3.20)$$

согласно (3.16), получим

$$\Omega_{\text{эфф}} \approx \Omega_{\text{эфф}}^{(0)} \left(\frac{5}{6} \right) \Gamma^{-1} \left(\frac{6}{5} \right) \left[\frac{1}{2} D_{\text{сф}} \left(\sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{\text{эфф}}^{(0)}}} \right) \right]^{6/5}. \quad (3.21)$$

Остановимся теперь подробно на описании уширения коллимированного и фокусированного пучков в практически наиболее интересной области, где $\Omega_{\text{эфф}}$ определяется формулой (3.16) ⁴⁰.

а) Коллимированный пучок. В этом случае $\Omega_{\text{эфф}}^{(0)} = \Omega + \Omega^{-1}$ и неравенство (3.18) выполняется как при достаточно больших, так и при достаточно малых значениях Ω . Таким образом, как в ближней зоне ($\Omega \gg 1$), так и в зоне френгоферовой дифракции ($\Omega \ll 1$) турбулентность среды вносит в размытие коллимированного пучка лишь малый аддитивный вклад. Выражения для самих $\alpha_{\text{эфф}}^2$ на основании (3.19) при этом принимают вид

$$\alpha_{\text{эфф}}^2 \approx \alpha_0^2 + 1,6 C_n^2 k^{1/3} \alpha_0^{1/3} z^{8/3} \quad (\Omega \gg 1), \quad (3.22)$$

$$\alpha_{\text{эфф}}^2 \approx \left(\frac{z}{k\alpha_0} \right)^2 + 1,6 C_n^2 \alpha_0^{-1/3} z^3 \quad (\Omega \ll 1). \quad (3.23)$$

Турбулентность не влияет на положение минимума функции $\alpha_{\text{эфф}}^2(\Omega)$, который всегда должен наблюдаться при $\Omega = 1$. Минимальный поперечный размер пучка при заданных расстоянии z и длине волны $\lambda = 2\pi/k$ дается формулой

$$\alpha_{\text{эфф min}} = \sqrt{\frac{2z}{k}} T^{-1/2} \left(0, \frac{1}{2} D_{\text{сф}} \left(\sqrt{\frac{2z}{k}} \right) \right). \quad (3.24)$$

На рис. 2 приведены графики зависимости $\Omega_{\text{эфф}}(\Omega)$ при различных значениях $D_{\text{сф}}(\sqrt{z/k})$. Здесь же приведены значения $\Omega_{\text{эфф}}$, рассчитанные по

МПВ. Видно, что МПВ всегда дает завышенные значения $\alpha_{\text{эфф}}$. Однако с 20%-ной точностью, например, можно использовать МПВ при $\Omega \sim 1$ со значениями $D_{\text{сф}}(\sqrt{z/k})$ вплоть до единицы.

б) Фокусированный пучок. В этом случае $\Omega_{\text{эфф}}^{(0)} = \Omega^{-1}$ и формула (3.16) принимает вид

$$\Omega_{\text{эфф}} = \Omega^{-1} T^{-1} \left(0, \frac{1}{2} D_{\text{сф}} \left(\sqrt{\frac{4z\Omega}{k}} \right) \right). \quad (3.25)$$

Формула (3.25) описывает эффект насыщения фокусировки в турбулентной среде. В области больших значений величины структурной функции фазы, вычисленной на диаметре передающей апертуры, т. е. при

$$\frac{1}{2} D_{\text{сф}} \left(\sqrt{\frac{4z\Omega}{k}} \right) \gg 1, \quad (3.26)$$

получаем выражение для минимального размера фокусного пятна в состоянии насыщения:

$$\alpha_{\text{эфф, нас}} \approx 1,26 \left[D_{\text{сф}} \left(\sqrt{\frac{z}{k}} \right) \right]^{3/5} \sqrt{\frac{z}{k}}. \quad (3.27)$$

Из (3.27) следует, что при достаточно сильной турбулентности, когда $D_{\text{сф}}(\sqrt{z/k}) > 1$, возможность фокусировки с увеличением α_0 совсем исключена, поскольку при этом условие (3.26) выполняется при всех $\Omega \geq 1$.

Отметим, наконец, что минимальный размер фокального пятна в состоянии насыщения $\alpha_{\text{эфф, нас}}$ становится больше размера апертуры передатчика α_0 лишь в области больших значений величины структурной функции фазы, вычисленной на дифракционном размере, т. е. при

$$D_{\text{сф}} \left(\sqrt{\frac{z}{4k\Omega}} \right) > 1. \quad (3.28)$$

На рис. 3 приведены графики зависимости $\Omega_{\text{эфф}}(\Omega)$ при различных значениях $D_{\text{сф}}(\sqrt{z/k})$ (сплошные кривые). Здесь же приведены результаты расчетов по МПВ (штриховые кривые). Видно, что МПВ предсказывает наличие минимума функции

Рис. 3. Зависимость числа Френеля $\Omega_{\text{эфф}}$ эффективной ширины фокусированного пучка в фокальной плоскости от числа Френеля Ω излучающей апертуры.

Сплошные кривые — зависимость (3.25) ⁴⁰.
 $D_{\text{сф}}(\sqrt{z/k}) = 0$ (1), 0,09 (2), (2' — МПВ), 0,44 (3), 0,88 (4), (4' — МПВ), 4,4 (5) и 8,8 (6).

$\Omega_{\text{эфф}}(\Omega)$ в некоторой точке $\Omega^*(D_{\text{сф}}(\sqrt{z/k}))$ с быстрым возрастанием $\Omega_{\text{эфф}}$ при $\Omega > \Omega^*$. При достаточно слабой турбулентности, однако, когда $\Omega^*(D_{\text{сф}}(\sqrt{z/k})) > 1$, имеется довольно широкий интервал значений Ω ($1 < \Omega < \Omega^*$), для которых МПВ дает удовлетворительную точность.

На рис. 4 приведены результаты экспериментальных измерений ³⁸ уширения фокусированного лазерного пучка в турбулентной атмосфере; эксперименты проводились с He—Ne лазером, работавшим в режиме осевых мод. На этом же рисунке изображена зависимость $\alpha_{\text{эфф}}/\alpha_{\text{эфф}}^{(0)}$ от $\sqrt{D}(\sqrt{4z\Omega/k})$, построенная по формуле (3.25).

Приведенные выше соотношения были получены в предположении, что влиянием внешнего масштаба турбулентности L_0 можно пренебречь.

Это влияние, однако, в реальной атмосфере сказывается ⁵⁷ только на малых расстояниях $z \lesssim z_c$, где $z_c \approx (0,4C_n^2 k^2 L_0^{5/3})^{-1}$ — длина экстинкции, $L_0 = = L_0/2\pi$. В области $z \gg z_c$ (предполагая, однако, что $D(l_0) \ll 1$) влияние внешнего масштаба турбулентности учтем ⁵⁸ в первом порядке теории возмущений

$$D(u) \approx D(u)|_{L_0 \rightarrow \infty} \left(1 - 0,67 \sqrt[3]{\frac{u}{L_0}}\right), \quad (3.29)$$

где $D(u)|_{L_0 \rightarrow \infty}$ определяется формулой (3.14). Подставляя (3.29) в (3.15)—(3.17), при выполнении условий

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D_{\text{сф}} \left(\sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{\text{эфф}}^{(0)}}} \right) \Big|_{L_0 \rightarrow \infty} \gg 1, \\ 0,3 \sqrt[3]{\frac{1}{L_0} \sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{\text{эфф}}^{(0)}}}} D_{\text{сф}} \left(\sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{\text{эфф}}^{(0)}}} \right) \Big|_{L_0 \rightarrow \infty} \gg 1 \end{aligned} \quad (3.30)$$

получим

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{эфф}} = \Omega_{\text{эфф}}|_{L_0 \rightarrow \infty} \left\{ 1 - 0,6\Gamma\left(\frac{12}{5}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{6}{5}\right) \left[\frac{1}{2} D_{\text{сф}} \left(\sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{\text{эфф}}^{(0)}}} \right) \Big|_{L_0 \rightarrow \infty} \right]^{-1/5} \times \right. \\ \left. \times \sqrt[3]{\frac{1}{L_0} \sqrt{\frac{4z}{k\Omega_{\text{эфф}}^{(0)}}}} \right\}, \quad (3.31) \end{aligned}$$

где $\Omega_{\text{эфф}}|_{L_0 \rightarrow \infty}$ определяется выражением (3.21). Таким образом, влияние внешнего масштаба турбулентности проявляется в уменьшении ослабления среднего значения интенсивности на оси пучка; этот результат был получен другими методами в работах ^{43, 57} без ограничений (3.30).

Отметим, наконец, что анализ уширения лазерных пучков при распространении по наклонным трассам, где сила турбулентности изменяется с высотой, проведен в работе ⁵⁹.

Перейдем теперь к характеристике углового спектра рассеянного излучения, определяемого функцией когерентности второго порядка $\langle E(u; z) E^*(v, z) \rangle$. Анализ нормированной двухточечной функции когерентности

$$B_E(u, v, z) = \frac{|\langle E(u, z) E^*(v, z) \rangle|}{\sqrt{\langle I(u, z) \rangle} \sqrt{\langle I(v, z) \rangle}} \quad (3.32)$$

для волновых пучков проведен в работах ^{44, 54, 60}. Работа ⁴⁴ основана на решении скалярного волнового уравнения по методу малых возмущений. В работах ^{54, 60} используется решение уравнения (2.19) для функции когерентности второго порядка, причем рассматривается случай, когда в большей части области интегрирования в (3.1) $D(u) \sim u^2$ (что имеет место для случайной среды с одним характерным масштабом неоднородностей или для турбулентной среды в области сильных флуктуаций фазы, см. условие (3.9)).

Для точечного источника (фраунгоферова зона излучателя) функция когерентности второго порядка имеет вид

$$\begin{aligned} \langle E(u, z) E^*(v, z) \rangle = I^{(0)} \exp \left[-\frac{1}{2} D_{\text{сф}}(\rho) \right], \\ \rho = |u - v|; \end{aligned} \quad (3.33)$$

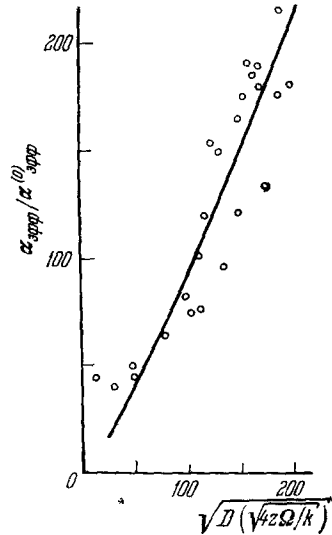


Рис. 4. Сравнение эффективного размера фокусированного лазерного пучка ($\lambda = 0,63$ мкм) с дифракционным для трассы 1,75 км. Сплошная кривая — зависимость (3.25) ⁵⁸.

для случая, когда исходный тип излучения — плоская волна; в показателе экспоненты в (3.33) следует писать структурную функцию фазы плоской волны^{15, 61}.

Определим «радиус когерентности» ρ_0 в волне от точечного источника из соотношения

$$\frac{1}{2} D_{\text{сф}}(\rho_0) = 1. \quad (3.34)$$

Согласно определению «угол рассеяния» $\theta_0 = 1/k\rho_0$ характеризует эффективную ширину углового спектра рассеянного излучения. Для турбулентной среды зависимость структурной функции фазы $D_{\text{сф}}(\rho)$ от поперечной координаты ρ носит сложный характер (см. гл. 5). Можно, однако, выделить⁴⁹ три области дистанций распространения, где существуют простые приближения формулы для определения угла рассеяния θ_0 .

В области $z \ll z_c$ рассеянием на турбулентных неоднородностях показателя преломления можно полностью пренебречь, здесь «радиус когерентности» $\rho_0 \gg L_0$. В практически наиболее интересной области, где $z \gg z_c$, но $D(l_0) \ll 1$, угол рассеяния θ_0 равен

$$\theta_0 \approx 0,7 C_n^{6/5} k^{1/5} z^{3/5}. \quad (3.35)$$

Наконец, в области дистанций распространения, где $D(l_0) \gg 1$, угол θ_0 определяется выражением

$$\theta_0 \approx 0,8 C_n z^{1/2} l_0^{-1/6}. \quad (3.36)$$

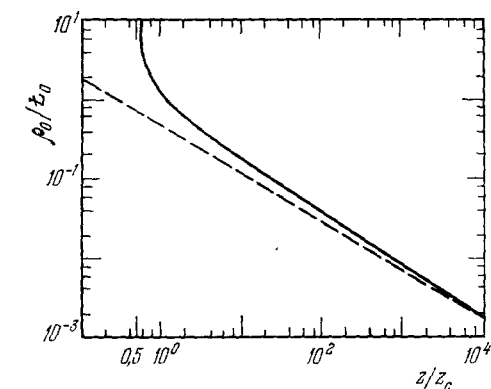


Рис. 5. Нормированный «радиус когерентности» ρ_0/L_0 как функция z/z_c для волны от точечного источника в турбулентной среде с конечным внешним масштабом L_0 (сплошная кривая).

Штриховая кривая обозначает ту же зависимость для колмогоровского (чисто степенного) спектра турбулентности⁵⁷.

График зависимости⁵⁷ ρ_0/L_0 от z/z_c изображен на рис. 5. Сплошная кривая построена для модифицированного спектра турбулентности Колмогорова (спектр фон Кармана); штриховая кривая — для чисто степенного спектра.

Экспериментальное изучение спектра функции когерентности второго порядка проводилось в работе⁶³ с использованием излучения He—Ne лазера, работавшего в одномодовом режиме.

4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Флуктуации интенсивности в приемной апертуре могут быть вызваны двумя различными причинами: 1) смещением лазерного пучка как целого, обусловленного случайной рефракцией на крупномасштабных (по сравнению с размером апертуры источника) неоднородностях, 2) дифракцией излучения на мелкомасштабных неоднородностях, приводящей к возникновению тонкой структуры распределения интенсивности по сечению пучка (этот эффект принято называть мерцаниями). В данной главе мы остановимся в основном на втором эффекте. Мы последовательно рассмотрим флуктуации интенсивности коллимированного и фокусированного лазерных пучков.

а) **Одномодовый коллимированный пучок.** Приближения, в которых можно изучать флуктуации интенсивности колли-

мированного пучка, зависят от соотношения значений двух параметров: френелевского числа апертуры источника $\Omega = k\alpha_0^2/z$ (α_0 — характерный радиус выходной апертуры источника, z — дистанция) и отношения $k\alpha_0\vartheta_0$ характерного угла рассеяния в среде ϑ_0 к дифракционному углу апертуры источника $1/k\alpha_0$ (определение угла рассеяния ϑ_0 смотри в гл. 3). При $\Omega \gg 1$ и $k\alpha_0\vartheta_0 \ll 1$ ограниченность пучка не влияет на значения поля в центральных частях пучка, сечение пучка можно считать постоянным, и флуктуации интенсивности в центральных частях пучка можно рассчитывать как флуктуации интенсивности плоской волны (внутренние части области I на рис. 6). При $\Omega \ll 1$, $k\alpha_0\vartheta_0 \ll 1$ флуктуации интенсивности в центральных частях пучка можно рассчитывать как флуктуации интенсивности сферической волны (внутренние части области II на рис. 6). При $k\alpha_0\vartheta_0 \gg 1 + \Omega$ ограниченность пучка влияет на значения поля во всех точках сечения, в этом случае мы имеем флуктуации интенсивности существенно ограниченного пучка (область III на рис. 6).

Мы рассмотрим последовательно флуктуации интенсивности плоской волны (зона Френеля выходной апертуры источника), сферической волны (зона Фраунгофера выходной апертуры источника) и, наконец, флуктуации интенсивности существенно ограниченного пучка.

1) *Зона Френеля излучающей апертуры (плоская волна)*. Уравнение для функции когерентности четвертого порядка в случае распространения плоской волны в среде, статистические характеристики которой не меняются в плоскости, перпендикулярной среднему направлению распространения излучения, допускает существенное упрощение. Для четвертого момента

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{v}, z) = \langle E(\mathbf{u}, z) E(\mathbf{v}, z) E^*(0, z) E^*(\mathbf{u} + \mathbf{v}, z) \rangle \quad (4.1)$$

уравнение (2.21) принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -VW - \frac{i}{k} \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{v}}, \quad (4.2)$$

$$V = D'(\mathbf{u}) + D'(\mathbf{v}) - \frac{1}{2} D'(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \frac{1}{2} D'(\mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad (4.3)$$

Уравнение (4.2) принимает еще более удобный вид, если использовать спектральное разложение по переменной \mathbf{u} :

$$M(\mathbf{q}, \mathbf{v}, z) = (2\pi)^{-2} \int d\mathbf{u} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{u}) W(\mathbf{u}, \mathbf{v}, z). \quad (4.4)$$

Для $M(\mathbf{q}, \mathbf{v}, z)$ получаем уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{k} (\mathbf{q}\nabla_{\mathbf{v}}) \right] M(\mathbf{q}, \mathbf{v}, z) = -D'(\mathbf{v}) M(\mathbf{q}, \mathbf{v}, z) + D'(\mathbf{v}) \int d\mathbf{q}' M(\mathbf{q}', \mathbf{v}, z) p(\mathbf{q} - \mathbf{q}', \mathbf{v}), \quad (4.5)$$

где

$$p(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = (2\pi)^{-2} \int d\mathbf{u} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{u}) \frac{1}{D'(\mathbf{v})} \left[\frac{1}{2} D'(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \frac{1}{2} D'(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - D'(\mathbf{u}) \right]. \quad (4.6)$$

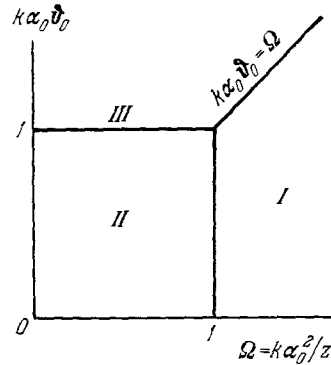


Рис. 6. Схема областей, соответствующая различным приближениям, используемым при изучении флуктуаций интенсивности коллимированного пучка.

Уравнение (4.5) имеет вид уравнения переноса, в котором роль времени играет z , роль скорости — \mathbf{q} , роль координаты — \mathbf{v} , коэффициент поглощения — $D'(\mathbf{v})$, вероятность изменения скорости — $p(\mathbf{q}, \mathbf{v})$. К уравнению (4.5) следует добавить начальное условие

$$M(\mathbf{q}, \mathbf{v}, z)|_{z=0} = I_0^2 \delta(\mathbf{q}), \quad (4.7)$$

которое означает, что на границу слоя среды $z = 0$ падает плоская волна с амплитудой $E_0 = \sqrt{I_0}$.

Решение задачи (4.5) — (4.7) мы разберем для двух моделей среды: для модели фазового экрана, в которой предполагается, что случайно преломляющая среда сосредоточена в геометрически тонком слое, и для статистически однородной среды. Эти две модели представляют собой два предельных случая распределения среды между наблюдателем и источником.

Модель фазового экрана является теоретически наиболее изученной^{25а, 26а, 63-67}. Она с успехом применялась к интерпретации мерцаний радиоисточников на неоднородностях межпланетной плазмы. Если на выходе из слоя среды модулирована только фаза волны (амплитудная модуляция пренебрежимо мала), то $E|_{z=+0} = E_0 e^{iS}$ и

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{v}, z)|_{z=+0} = I_0^2 \exp[-F(\mathbf{u}, \mathbf{v})],$$

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{v}) - \frac{1}{2} D(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \frac{1}{2} D(\mathbf{u} - \mathbf{v}), \quad (4.8)$$

где $D(\mathbf{u})$ — структурная функция флуктуаций фазы. Для спектральной функции флуктуаций интенсивности, решая уравнение (4.5) в вакууме с граничным условием (4.8), получаем выражение

$$I_0^{-2} M(\mathbf{q}, \mathbf{v} = 0, z) \equiv M(\mathbf{q}, z) =$$

$$= (2\pi)^{-2} \int d\mathbf{u} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{u}) \exp\left[-F\left(\mathbf{u}, \mathbf{q} \frac{z}{k}\right)\right]. \quad (4.9)$$

Таким образом, задача определения спектра мерцаний на неоднородностях фазового экрана сводится к вычислению интеграла (4.9), зависящего от параметров \mathbf{q} и $\mathbf{q}z/k$. Метод вычисления этого интеграла состоит в следующем. Если $D(\mathbf{u}) \ll 1$ при всех значениях аргумента \mathbf{u} , то можно разложить $\exp(-F)$ в ряд по степеням F и ограничиться первыми двумя членами — это приближение малых возмущений (борновское приближение). Если $\max D(\mathbf{u}) \gg 1$, то существуют такие малые значения q , при которых в существенной области значений \mathbf{u} , $|F - D(\mathbf{q}z/k)| \ll 1$, и можно разлагать $\exp\{-[F - D(\mathbf{q}z/k)]\}$ в ряд по степеням аргумента, оставляя первые члены разложения. При больших значениях q $|F - D(\mathbf{q}z/k)| \gg 1$ и можно использовать метод перевала: разлагать $F - D(\mathbf{q}z/k)$ по степеням \mathbf{u} , оставляя члены с низшими степенями \mathbf{u} .

Вначале мы рассмотрим фазовый экран с одним характерным масштабом неоднородностей^{25а, 67}. Пусть $D(u)$ зависит только от абсолютной величины u (изотропные неоднородности) и имеет вторую и четвертую производные в нуле:

$$a_2^{-2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} D(0), \quad a_4^{-4} = \frac{\partial^4}{\partial u^4} D(0), \quad (4.10)$$

причем a_2 и a_4 совпадают по порядку величины. Флуктуации интенсивности (мерцания) на фазовом экране с одним характерным масштабом неоднородностей характеризуются двумя параметрами: средним квадратом флуктуаций набега фазы $\langle \Delta S^2 \rangle = D(\infty)/2$ и безразмерным расстоянием от фазового экрана $z/z_0 = z/ka_2^2$. В зависимости от значений этих параметров мы имеем четыре режима мерцаний. Схема областей соответствующую

щих режимов, взятая из работы ⁶⁸ (положение области *IV* уточнено по работе ^{25a}), представлена на рис. 7.

В областях *I* и *II* мерцания слабые. Эти области хорошо описываются методом Рытова. Разлагая экспоненту в выражении (4.9) в ряд по аргументу *F* и оставляя первые два члена этого ряда, получаем для пространственного спектра мерцаний

$$M(\mathbf{q}, z) = \delta(\mathbf{q}) + 4\Phi_s(q) \sin^2\left(\frac{q^2 z}{2k}\right), \quad (4.11)$$

где $\Phi_s(q)$ — спектральная функция флуктуаций фазы:

$$D(u) = 2 \int d\mathbf{q} [1 - \cos(\mathbf{q}u)] \Phi_s(q). \quad (4.12)$$

В области *I* флуктуации интенсивности определяются в основном слабой случайной фокусировкой, индекс мерцаний равен

$$m^2 = \frac{\langle(\Delta I)^2\rangle}{\langle I \rangle^2} = 2 \left(\frac{z}{ka_2^2}\right)^2 \langle(\Delta S)^2\rangle. \quad (4.13)$$

В области *II* флуктуации интенсивности обуславливаются случайной интерференцией рассеянной доли излучения, индекс мерцаний равен

$$m^2 = 2 \langle(\Delta S)^2\rangle \quad (\langle(\Delta S)^2\rangle \ll 1). \quad (4.14)$$

Характерный масштаб дифракционной картины в области *I* примерно равен a_2 , а в области *II* точно равен a_2 .

Область *III* — область насыщенных мерцаний. Флуктуации интенсивности в этой области обуславливаются интерференцией независимо модулированных участков плоской волны. Корреляционная функция в этой области равна ^{25a, 65, 67}

$$B_I(u) = I_0^2 \exp[-D(u)]. \quad (4.15)$$

Спектральная функция флуктуаций интенсивности определяется фурье-преобразованием выражения (4.15), за исключением малых частот $q < q^*$, где q^* определяется выражением

$$D\left(\frac{q^* z}{k}\right) = 1. \quad (4.16)$$

При $q < q^*$ $M(q, z) = \delta(q) \sim q^2$.

Область *IV* — область сильных мерцаний. Эта область была исследована в работах ^{25a, 67}. Мерцания в этой области определяются сильной фокусировкой излучения (область сгущения каустик ⁶⁹). В существенной области частот спектр имеет вид

$$M(\mathbf{q}, z) = (2\pi z^2 \langle(\Delta S)^2\rangle)^{-1} k^2 a_4^4 q^{-2} \exp\left(-\frac{k^2 a_4^4}{2z^2 \langle(\Delta S)^2\rangle}\right); \quad (4.17)$$

$$q^* < q < \frac{ka_2}{z}.$$

Максимальное значение индекса мерцаний, приходящееся на область *IV*, имеет порядок

$$m_{\max}^2 \sim \ln \langle(\Delta S)^2\rangle, \quad \langle(\Delta S)^2\rangle \gg 1. \quad (4.18)$$

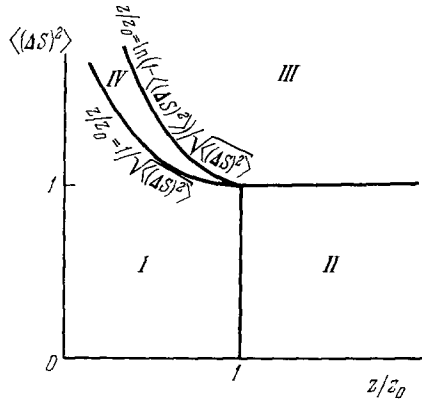


Рис. 7. Схема областей, соответствующих разным режимам мерцаний плоской волны на фазовом экране с одним характерным масштабом неоднородностей ^{25a, 68}.

Численные расчеты поведения m^2 в зависимости от z при различных значениях $\langle(\Delta S)^2\rangle$ представлены на рис. 8, взятом из работы ⁶⁶.

Перейдем к изложению результатов по исследованию дифракции волны на фазовом экране со степенным спектром неоднородностей ^{26a}. Для структурной функции флуктуаций фазы вида

$$D(u) = c(ku)^\alpha \tag{4.19}$$

свойства мерцаний зависят только от одного параметра — значения структурной функции флуктуаций фазы на размере первой зоны Френеля —

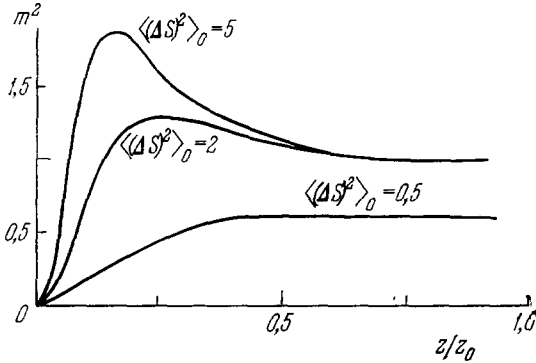


Рис. 8. Зависимость индекса мерцаний m^2 при рассеянии плоской волны на фазовом экране с одним характерным масштабом неоднородностей от расстояния z при различных $\langle(\Delta S)^2\rangle$ ⁶⁶.

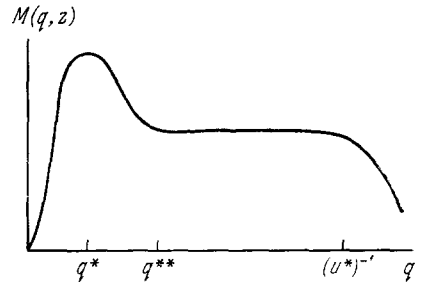


Рис. 9. Качественный вид спектра насыщенных мерцаний при рассеянии плоской волны на фазовом экране со степенным спектром неоднородностей ^{26a}.

$D(\sqrt{z/k})$. При $D(\sqrt{z/k}) < 1$ мерцания являются слабыми, они хорошо описываются методом Рытова. Спектр мерцаний определяется выражением (4.11). Индекс мерцаний равен

$$m^2 = K(\alpha) D\left(\sqrt{\frac{z}{k}}\right), \tag{4.20}$$

$$K(\alpha) = 2^\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{4}\right).$$

Характерный масштаб неоднородностей дифракционной картины по порядку величины совпадает с размером первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda z}$.

При $D(\sqrt{z/k}) > 1$ мерцания становятся насыщенными. Спектр мерцаний в нулевом приближении имеет вид ^{26a}

$$M(q, z) = \begin{cases} \delta(q) + q^4 \left(\frac{z}{k}\right)^2 \Phi_s(q) \exp\left[-D\left(\frac{qz}{k}\right)\right] & (q < q^{**}), \\ (2\pi)^{-2} \int du \exp[-i(uq) - D(u)] & (q > q^{**}); \end{cases} \tag{4.21}$$

здесь

$$q^{**} = q^* \ln^{1/\alpha} \left[\beta D^2 \left(\sqrt{\frac{z}{k}} \right) \right], \tag{4.22}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\pi} 2^\alpha \Gamma^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \Gamma^{-1} \left(\frac{2}{\alpha} \right) \sin \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right).$$

Низкочастотная компонента спектра имеет характерный масштаб $\sim q^*$, она обуславливается двумя конкурирующими эффектами: фокусировкой на крупномасштабных неоднородностях и рассеянием на мелкомасштабных неоднородностях среды. Высокочастотная компонента имеет

масштаб $(u^*)^{-1}$, где $D(u^*) = 1$. Эта компонента формируется интерференцией независимо модулированных участков плоской волны. Качественный вид спектра мерцаний в режиме насыщения показан на рис. 9.

Индекс мерцаний с ростом $D(\sqrt{z/k})$ стремится к 1 сверху:

$$m^2 = 1 + N(\alpha) \left[D \left(\sqrt{\frac{z}{k}} \right) \right]^{-(2/\alpha)(2-\alpha)} \quad \left(D \sqrt{\frac{z}{k}} \gg 1 \right), \quad (4.23)$$

$$N(\alpha) = 2^{\alpha+1} \Gamma^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \Gamma \left(\frac{4}{\alpha} - 1 \right) \frac{1}{\alpha\pi} \sin \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right).$$

Таким образом, при увеличении $D(\sqrt{z/k})$ индекс мерцаний имеет максимум при $D(\sqrt{z/k}) \approx 1$, после прохождения которого он начинает убывать, асимптотически стремясь к 1.

Корреляционная функция флуктуаций интенсивности состоит из трех компонент ^{26a}

$$\frac{B_I(u, z)}{I_0^2} = \exp[-D(u)] + \frac{1}{2} N(\alpha) \left[D \left(\sqrt{\frac{z}{k}} \right) \right]^{-(2/\alpha)(2-\alpha)} \left[b_1(\alpha, q^*u) + b_2 \left(\alpha, \frac{u}{u^*} \right) \right], \quad (4.24)$$

Графики функций b_1 и b_2 изображены на рис. 10 и 11. Основная энергия

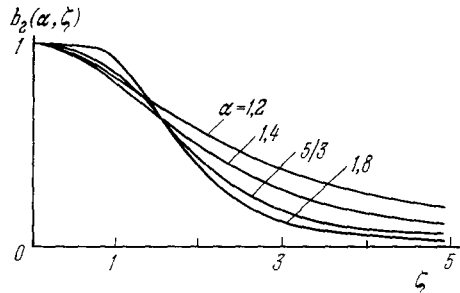
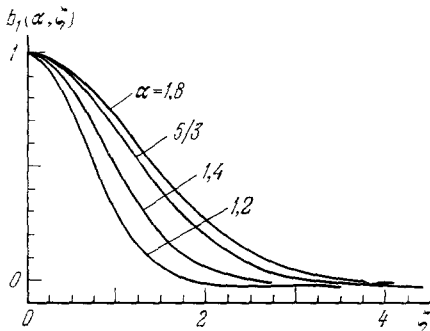


Рис. 10. Компонента $b_1(\alpha, \zeta)$ корреляционной функции флуктуаций интенсивности: рассеяние плоской волны на фазовом экране со степенным спектром неоднородностей ^{26a}.

Рис. 11. Компонента $b_2(\alpha, \zeta)$ корреляционной функции флуктуаций интенсивности: рассеяние плоской волны на фазовом экране со степенным спектром неоднородностей ^{26a}.

флуктуаций приходится на флуктуации с масштабом $u^* = [D(\sqrt{z/k})]^{-1/\alpha} (\sqrt{z/k})$, который убывает с ростом $D(\sqrt{z/k})$. Некоторая доля энергии приходится на флуктуации с масштабом $1/q^*$, который растет с ростом $D(\sqrt{z/k})$:

$$(q^*)^{-1} = \left[D \left(\sqrt{\frac{z}{k}} \right) \right]^{1/\alpha} \sqrt{\frac{z}{k}}.$$

Отметим еще один весьма важный вывод: асимптотическое значение функции когерентности четвертого порядка при $u < (q^*)^{-1}$ связано с функцией когерентности второго порядка так же, как и при нормальном законе распределения флуктуаций поля ^{25a, 26a, 64}

$$W_{ac}(u, v, z) = |B_E(u, z)|^2 + |B_E(v, z)|^2. \quad (4.25)$$

Мерцания на фазовом экране со степенным спектром неоднородностей имеют ряд отличий от мерцаний на фазовом экране с одним характерным масштабом. Так, в режиме слабых мерцаний в первом случае корреляцион-

ная функция флуктуаций интенсивности имеет масштаб порядка радиуса первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda z}$, а во втором случае — порядка размера неоднородностей фазового экрана. В режиме насыщения мерцаний для случая фазового экрана со степенным спектром неоднородностей характерно появление в корреляционной функции флуктуаций интенсивности второго масштаба $1/q^*$ и относительно медленное стремление индекса мерцаний m^2 к 1. Главной особенностью мерцаний на фазовом экране с одним характерным масштабом неоднородностей является наличие режима сильной фокусировки.

Перейдем к изложению результатов по статистически однородной среде. Уравнение (4.5) можно перевести в чисто интегральное с учетом начального условия (4.7) и искать решение интегрального уравнения в виде итерационного ряда. Итерационный ряд будет разложением по кратности рассеяния, если пользоваться аналогией с уравнением переноса. С точки зрения дифракционной теории кратность итерации соответствует кратности интерференции. Мы выпишем итерационный ряд для спектральной функции флуктуаций интенсивности $M(\mathbf{q}, z) = M(\mathbf{q}, \mathbf{v} = 0, z) I_0^{-2}$:

$$M(\mathbf{q}, z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n(\mathbf{q}, z), \quad (4.26)$$

$$M_0 = \delta(\mathbf{q}), \quad (4.27)$$

$$M_n = \int_0^z dz_1 \dots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \int d\mathbf{q}_1 \dots \int d\mathbf{q}_{n-1} \exp(-\mathcal{L}_n) \times \\ \times \prod_{j=1}^n [D'(\mathbf{v}_j) p(\mathbf{q}_{j-1} - \mathbf{q}_j; \mathbf{v}_j)] \quad (n=1, 2, \dots), \quad (4.28)$$

$$\mathbf{v}_j = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^j \mathbf{q}_{m-1} (z_{m-1} - z_m) \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (4.29)$$

$$\mathcal{L}_n = \sum_{i=0}^n \int_{z_{i+1}}^{z_i} D' \left[\mathbf{v}_i + \frac{1}{k} \mathbf{q}_i (z_i - z') \right] dz', \quad (4.30)$$

где $z_0 = z$, $z_{n+1} = 0$, $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}$, $\mathbf{q}_n = 0$.

Метод решения уравнения (4.5), предложенный в ²⁵⁶ и получивший дальнейшее развитие в ²⁶⁶, основан на анализе ряда (4.26). Вклад членов этого ряда в спектр мерцаний зависит от величины $\mathcal{L}_1(\mathbf{q}, z)$. При малых значениях \mathcal{L}_1 основной вклад в спектр мерцаний дает первый член ряда $M_1(\mathbf{q}, z)$, выражение для которого весьма простое. При больших значениях $\mathcal{L}_1(\mathbf{q}, z)$ основной вклад в спектр мерцаний дают члены с большими значениями n (которые в свою очередь также могут быть вычислены методом перевала с учетом большой кратности интегралов по z_i , \mathbf{q}_i , определяющих $M_n(\mathbf{q}, z)$), причем эти члены удается просуммировать.

Попытка решения уравнений (4.5) была предпринята в работе ⁵⁶, где было найдено решение, близкое к решению уравнения переноса в приближении однократного рассеяния. Однако в этой работе величина \mathcal{L}_1 , которая определяет «поглощение», была вычислена некорректно: было учтено только «поглощение» после акта рассеяния, а «поглощение» до акта рассеяния не учитывалось, что совершенно не оправдано. Область применимости выражений, полученных в этой работе, не выходит за рамки

применимости метода Рытова. В работе ⁷⁰ была предпринята попытка вычислить ряды, получаемые для $\langle I^2 \rangle$ методом селективного суммирования. В результате различных приближений автор ⁷⁰ получил выражение, которое эквивалентно оставлению в ряде (4.26) только нулевого и первого членов (т. е. соответствует приближению однократного рассеяния), однако величина $\mathcal{L}_1(\mathbf{q}, z)$ вычислена в геометрикооптическом приближении (зависимость D от v полагается квадратичной). Область применимости выражения для $\langle I^2 \rangle$, полученного в работе ⁷⁰, также не выходит за рамки применимости метода Рытова при $\sqrt{\lambda z} > l_0$.

Рассмотрим вначале среду с одним характерным масштабом неоднородностей. В такой среде структурная функция $D(u)$ имеет вторую и четвертую производные в нуле, масштабы a_2 и a_4 определяются соотношениями, аналогичными (4.10). Свойства флуктуаций интенсивности зависят от двух параметров: $\langle (\Delta S)^2 \rangle_0 = \langle (\Delta S)^2 \rangle_{z=ka_2^2}$ — среднего квадрата флуктуаций набега фазы на дистанции $z_0 = ka_2^2$ и безразмерного расстояния $z/z_0 = z/ka_2^2$. Области значений параметров $\langle (\Delta S)^2 \rangle_0$ и z/z_0 , соответствующие четырем режимам мерцаний, качественно соответствуют областям, нанесенным на рис. 7.

В областях *I* и *II* мерцания являются слабыми, эти области хорошо описываются методом Рытова. Пространственный спектр мерцаний определяется первыми членами ряда (4.26)

$$M(\mathbf{q}, z) = \delta(\mathbf{q}) + 4\Phi_s \frac{1}{z} \int_0^z dz' \sin^2 \left[\frac{q^2(z-z')}{2k} \right], \quad (4.31)$$

где Φ_s — спектральная функция флуктуаций фазы на дистанции z , вычисленная в линейном геометрикооптическом приближении. В области *I* флуктуации интенсивности обуславливаются случайной фокусировкой, индекс мерцаний в этой области равен

$$m^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{z}{z_0} \right)^3 \langle (\Delta S)^2 \rangle_0. \quad (4.32)$$

В области *II* флуктуации интенсивности обуславливаются случайной интерференцией рассеянной доли излучения, индекс мерцаний в этой области равен

$$m^2 = 2 \langle (\Delta S)^2 \rangle_0 \frac{z}{z_0} = 2 \langle (\Delta S)^2 \rangle. \quad (4.33)$$

В области *III* сохраняет свою силу выражение (4.15). В области *IV* при существенных значениях частот спектральная функция в нулевом приближении имеет вид

$$M(\mathbf{q}, z) \propto \frac{1}{q^2} \frac{3z_0 z_1^2}{2\pi \langle (\Delta S)^2 \rangle_0 z^3} \exp \left(-\frac{3z_0 z_1^2}{2z^3} \right), \quad (4.34)$$

$$\frac{1}{a_2} < q < \frac{1}{a_2} \frac{z_0}{z}, \quad z_1 = ka_4^2;$$

а индекс мерцаний равен

$$m^2 \approx \frac{3z_0 z_1^2}{2 \langle (\Delta S)^2 \rangle_0 z^3} \exp \left(-\frac{3z_0 z_1^2}{2 \langle (\Delta S)^2 \rangle_0 z^3} \right) \ln \left(\frac{\langle (\Delta S)^2 \rangle_0 z^2}{z_0^2} \right). \quad (4.35)$$

Численные расчеты ⁷¹ поведения m^2 в зависимости от z/z_0 при различных значениях $\langle (\Delta S)^2 \rangle_0$ показаны на рис. 12.

Перейдем к изучению характеристик мерцаний в статистически однородной среде со степенным спектром неоднородностей. Продольный гра-

диент структурной функции флуктуаций фазы $D'(u)$ зададим в виде

$$D'(u) = C_1 k (ku)^\alpha. \tag{4.36}$$

Анализ здесь удобно проводить, вводя ²⁶⁶ нормировочные масштабы*) для переменных — продольный $z_{||} = k^{-1} C_1^{-2/(2+\alpha)}$ и поперечный $u_{\perp} = k^{-1} C_1^{-1/(2+\alpha)}$; уравнение (4.2) при этом преобразуется к безразмерному виду. Так же как и в модели фазового экрана, свойства мерцаний в статистически однородной среде зависят от одного параметра $D (\sqrt{z/k}) = zD' (\sqrt{z/k})$ — значения структурной функции флуктуаций фазы (вычисленной в линейном геометрооптическом приближении) на масштабе первой зоны Френеля.

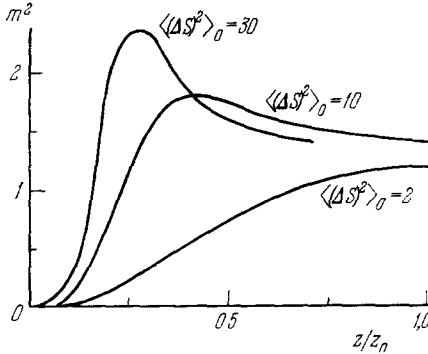


Рис. 12. Индекс мерцаний плоской волны в статистически однородной и изотропной среде с гауссовой корреляционной функцией ⁷¹.

При $D (\sqrt{z/k}) < 1$ мерцания являются слабыми, они хорошо описываются методом Рытова. Спектр мерцаний определяется первым членом ряда (4.26), т. е. (4.31) справедливо и для степенного спектра неоднородностей. В случае трехмерных изотропных неоднородностей имеет вид

$$m^2 = K_3(\alpha) D \left(\sqrt{\frac{z}{k}} \right), \quad K_3(\alpha) = 2^{\alpha+1} (2 + \alpha)^{-1} \Gamma \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha\pi}{4} \right). \tag{4.37}$$

В случае сильно вытянутых неоднородностей (двумерных) выражение (4.37) сохраняет свою силу, но $K(\alpha)$ определяется выражением

$$K_2(\alpha) = 2\Gamma(1 + \alpha) (2 + \alpha)^{-1} \Gamma^{-1} \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha\pi}{4} \right). \tag{4.38}$$

Характерный масштаб дифракционной картины примерно равен $\sqrt{\lambda z}$.

При $D (\sqrt{z/k}) > 1$ мерцания становятся насыщенными. Спектр мерцаний имеет сложную структуру. При $q < q^{**}$

$$q^{**} = \sqrt{\frac{k}{z}} \left[\frac{2\alpha}{\pi} \sin \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) \Gamma^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \Gamma^{-1} \left(\frac{2}{\alpha} \right) \Gamma \left(\frac{3}{\alpha} \right) \right]^{1/(\alpha+1)} \times \left[D \left(\sqrt{\frac{z}{k}} \right) \right]^{(\alpha-1)/\alpha(1+\alpha)}, \tag{4.39}$$

спектр определяется в нулевом приближении первым членом ряда (4.26) и имеет вид

$$M(\mathbf{q}, z) = \delta(\mathbf{q}) + \Phi_s(q) \frac{1}{k^2 z} \int_0^z dz_1 q^4 (z - z_1)^2 \exp(-\mathcal{L}_1), \tag{4.40}$$

где

$$\mathcal{L}_1 = D \left(\frac{qz}{k} \right) \left(1 - \frac{z_1}{z} \right)^\alpha \left(\frac{z_1}{z} \frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} \right).$$

Этот участок спектра определяется двумя конкурирующими эффектами: фокусировкой на крупномасштабных неоднородностях и рассеянием на мелкомасштабных.

*) Введением этих масштабов устанавливаются соотношения подобия пространственной структуры флуктуаций интенсивности.

При $q > q^{**}$ основной вклад в $M(q, z)$ дают члены ряда (4.26) с n в области $n_0 - \sqrt{n_0} \leq n \leq n_0 + \sqrt{n_0}$, где $n_0 = D(\sqrt{z/k}) \gg 1$. Эти члены в соответствии с ²⁶⁶ в нулевом приближении приводят к выражению

$$M(q, z) = (2\pi)^{-2} \int du \exp[-iqu - D(u)]. \quad (4.41)$$

Участок спектра $q > q^{**}$ определяется эффектом интерференции примерно n_0 независимо модулированных пучков. Характерный вид спектра $M(q, z) - \delta(q)$ при $D(\sqrt{z/k}) \gg 1$ такой же, что и в модели фазового экрана (см. рис. 9).

Индекс мерцаний при $D(\sqrt{z/k}) > 1$ в случае изотропных трехмерных неоднородностей равен ²⁶⁶

$$m^2 = 1 + N_3(\alpha) [D(\sqrt{z/k})]^{-(2/\alpha)(2-\alpha)}, \quad (4.42)$$

$$N_3(\alpha) = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi\alpha(\alpha-1)} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma^2\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4}{\alpha} - 1\right) \times \\ \times {}_2F_1\left(\frac{4}{\alpha} - 1, \alpha - 1; \alpha; \frac{\alpha}{\alpha+1}\right), \quad (4.43)$$

где ${}_2F_1(x, y, z, t)$ — гипергеометрический ряд. При $\alpha = 5/3$ $N_3 = 1,20$. В случае двумерных неоднородностей индекс мерцаний сохраняет вид (4.42), однако $N_2(\alpha)$ определяется другим выражением, и при $\alpha = 5/3$ $N_2 = 0,88$. Корреляционная функция флуктуаций интенсивности содержит три основные компоненты

$$I_0^{-2} B_I(u, z) = \exp[-D(u)] + \\ + \frac{1}{2} N_3(\alpha) \left[D\left(\sqrt{\frac{z}{k}}\right) \right]^{-(2/\alpha)(2-\alpha)} \times \\ \times \left[b_1(\alpha, uq^*) + b_2\left(\alpha, \frac{u}{u^*}\right) \right]. \quad (4.44)$$

Вид функции $b_1(\alpha, \xi)$ показан на рис. 13. Первая компонента $\exp[-D(u)]$ в корреляционной функции флуктуаций интенсивности имеет масштаб $u^* = [D(\sqrt{z/k})]^{-1/\alpha} \times (\sqrt{z/k})$, который уменьшается с увеличением $D(\sqrt{z/k})$, вторая компонента b_1 имеет масштаб $1/q^* = [D(\sqrt{z/k})]^{1/\alpha} \sqrt{z/k}$, увеличивающийся с увеличением $D(\sqrt{z/k})$, однако вклад второй компоненты при этом падает. Функция b_2 , так же как и $\exp[-D(u)]$, имеет масштаб u^* , однако она служит лишь поправкой к асимптотическому виду корреляционной функции флуктуаций интенсивности при больших $D(\sqrt{z/k})$.

Уравнение для функции W численно решено в ⁷² для среды с двумерными неоднородностями (функция $D(u)$ зависит только от u_x) при $\alpha = 5/3$. Зависимость m^2 от $D(\sqrt{z/k})(z/z_{||})$, полученная в ⁷², показана на рис. 14. На том же рисунке показаны кривые (штриховые), вычисленные по асимптотическим формулам (4.37), (4.38) и (4.42) для случая двумерной геометрии. При больших значениях $D(\sqrt{z/k})$ кривая, полученная в ⁷², лежит ниже, чем кривая, вычисленная по формуле (4.42). Это связано со следующим обстоятельством. В работе ⁷² введены граничные условия при

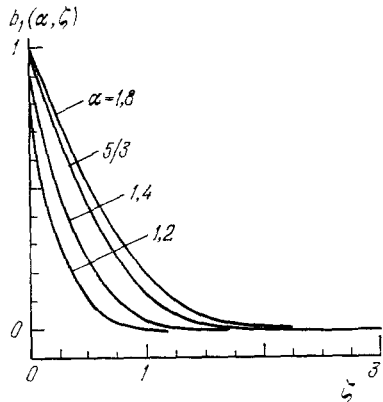


Рис. 13. Компонента $b_1(\alpha, \xi)$ корреляционной функции флуктуаций интенсивности: распространение плоской волны в статистически однородной среде со степенным спектром неоднородностей ²⁶⁶.

$[D (\sqrt{z/k})]^{1/(\alpha+2)} \sqrt{k/z} \begin{pmatrix} u_{x,0} \\ u_{x,0} \end{pmatrix} = 5,36$; тем самым не учитывается поведение спектра неоднородностей среды при $q < 1/u_{x,0}$. Член $N_2(\alpha) \times [D (\sqrt{z/k})]^{-(2/\alpha)(2-\alpha)}$, который дает заметный вклад в m^2 , определяется областью частот $q \lesssim q^*$, которая при больших $D (\sqrt{z/k})$ в расчетах ⁷² исключается.

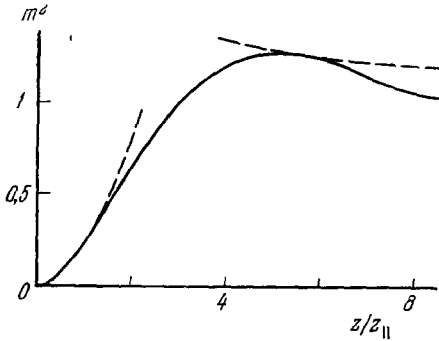


Рис. 14. Зависимость индекса мерцаний m^2 от дистанции z для модели статистически однородной турбулентной среды с двумерными неоднородностями, полученная численно ⁷² (сплошная кривая) и по асимптотическим формулам (штриховые) ²⁸⁶.

2) Зона Фраунгофера излучающей апертуры (сферическая волна). В модели фазового экрана результаты, полученные для плоской волны, сохраняются и для сферической волны, если расстояние z от экрана до наблюдателя заменить на $[(1/z_1) + (1/z_2)]^{-1}$, где z_1 — расстояние от источника до экрана, а z_2 — расстояние от экрана до наблюдателя; кроме того, поперечные координаты u, v следует ⁶³ заменить на

$$\frac{z_1}{z_1 + z_2} u, \quad \frac{z_1}{z_1 + z_2} v.$$

В случае статистически однородной среды результаты, полученные для плоской волны, не имеют столь простого обобщения. Поскольку задача является статистически однородной на сфере, то удобно использовать сферическую систему координат. В работах ^{25в, 27} была введена комплексная амплитуда поля сферической волны

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = E_{сф}(\mathbf{r}) \frac{1}{r} \exp(ikr), \quad (4.45)$$

и для четвертого момента $E_{сф}$ (определяемого соотношением типа (4.1)) было получено уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial r} = -VW - \frac{i}{kr^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_\theta \partial \eta_\theta} + \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_\phi \partial \eta_\phi} \right); \quad (4.46)$$

здесь r — расстояние от источника до наблюдателя, θ — полярный, ϕ — азимутальный углы, $(\xi_\theta, \xi_\phi), (\eta_\theta, \eta_\phi)$ — разности угловых координат. Поскольку нас интересуют только малые значения $(\xi_\theta, \xi_\phi), (\eta_\theta, \eta_\phi)$, систему координат можно выбрать так, чтобы интересующие нас точки (r, θ_i, ϕ_i) лежали вблизи экватора сферической системы координат ($\theta = \pi/2$). Уравнение (4.46) записано именно при таком выборе. Здесь функция V определяется соотношением (4.3), в котором величины u, v следует заменить на $r\xi, r\eta$, где $\xi = (\xi_\theta, \xi_\phi)$ и $\eta = (\eta_\theta, \eta_\phi)$.

Исследование решения уравнения (4.46) при начальном условии $W|_{r=0} = I_0^2$ было проведено в ^{25в} для среды с одним характерным масштабом неоднородностей. Результаты исследования аналогичны тем, что были получены для плоской волны. В режиме слабых мерцаний спектр флуктуаций интенсивности имеет вид

$$M(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{q}) + 4k^2 \int_0^r dr_1 \sin^2 \left[\frac{q^2 r}{2k} \left(\frac{r}{r_1} - 1 \right) \right] \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 F \left(\frac{qr}{r_1} \right), \quad (4.47)$$

где $F(\mathbf{q})$ — спектральное разложение $R(\mathbf{u})$. Индекс мерцаний

сферической волны связан с индексом мерцаний плоской волны простым соотношением

$$m_{сф}^2 = 0,1 m_{пл}^2. \quad (4.48)$$

В режиме сильной фокусировки выражения для корреляционных характеристик флуктуаций интенсивности, полученные для плоской волны, можно сохранить и для случая сферической волны, если $\langle (\Delta S)^2 \rangle_0$ заменить на $0,1 \langle (\Delta S)^2 \rangle_0$. В режиме насыщенных мерцаний корреляционная функция флуктуаций интенсивности имеет асимптотический вид

$$B_{I\ сф}(u) = I_0^2 \exp[-D_{сф}(u)], \quad (4.49)$$

где $D_{сф}(u)$ — структурная функция флуктуаций фазы сферической волны

$$D_{сф}(u) = \frac{1}{3} D(u). \quad (4.50)$$

Для среды со степенным спектром картина мерцаний сферической волны также качественно повторяет картину мерцаний плоской волны²⁷. Анализ уравнения (4.46) здесь удобно проводить, вводя безразмерные переменные*)

$$r' = \left[D \left(\sqrt{\frac{r}{k}} \right) \right]^{2/(\alpha+2)}, \quad (4.51)$$

$$\eta' = \eta (\sqrt{kr}) \left[D \sqrt{\frac{r}{k}} \right]^{-1/(\alpha+2)}, \quad \xi' = \xi (\sqrt{kr}) \left[D \sqrt{\frac{r}{k}} \right]^{-1/(\alpha+2)}.$$

В режиме слабых мерцаний спектр описывается (4.47). Индекс мерцаний сферической волны связан с индексом мерцаний плоской волны соотношением

$$m_{сф}^2 = m_{пл}^2 \cdot \frac{1}{2} (\alpha + 2) \Gamma^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \Gamma^{-1}(\alpha + 2). \quad (4.52)$$

В режиме насыщенных мерцаний $D(\sqrt{r/k}) \gg 1$ индекс мерцаний имеет вид

$$m_{сф}^2 = 1 + N_{сф}(\alpha) \left[D_{сф} \left(\sqrt{\frac{r}{k}} \right) \right]^{-(2/\alpha)(2-\alpha)}, \quad (4.53)$$

где

$$D_{сф}(u) = \frac{1}{\alpha+1} D(u),$$

$$N_{сф}(\alpha) = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi\alpha} (\alpha+1) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma^2\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4}{\alpha} - 1\right) \times$$

$$\times \Gamma^2(\alpha - 1) \Gamma^{-1}(2\alpha - 2). \quad (4.54)$$

Корреляционная функция флуктуаций интенсивности $B_{I\ сф}(u, r)$ имеет три компоненты:

$$I^{(0)2} B_{I\ сф}(u, r) = \exp[-D_{сф}(u)] +$$

$$+ \frac{1}{2} N_{сф}(\alpha) \left[D_{сф} \left(\sqrt{\frac{r}{k}} \right) \right]^{-(2/\alpha)(2-\alpha)} \left\{ b_{1\ сф}(\alpha, u q_{сф}^*) + b_{2\ сф} \left(\alpha, \frac{u}{u_{сф}^*} \right) \right\}, \quad (4.55)$$

где

$$D_{сф}(u_{сф}^*) = 1, \quad D_{сф} \left(q_{сф}^* \frac{r}{k} \right) = 1. \quad (4.56)$$

Функция $b_{2сф}(\alpha, \xi)$ имеет единичный масштаб по ξ и при $\xi = 0$ $b_{2сф} = 1$. График функции $b_{1сф}(\alpha, \xi)$ приведен на рис. 15. Так же, как и для плоской волны, асимптотическое значение функции когерентности четвертого порядка сферической волны при $u < (q_{сф}^*)^{-1}$ связано с функцией когерент-

*) См. сноску на стр. 436.

ности второго порядка соотношением (4.25), т. е. связь такая же, как и при нормальном законе распределения поля.

3) *Флуктуации интенсивности существенно ограниченного пучка.* Задача определения характеристик флуктуаций интенсивности ограниченного пучка является неоднородной в поперечной плоскости и в математическом отношении весьма сложной. Эта задача значительно упрощается, если ввести ⁷³ вместо четвертого момента $\langle M_{4,2} \rangle$ усредненную по сечению пучка величину

$$\tilde{W}(u, v, \rho, z) = \int d\mathbf{R} \langle M_{4,2}(u, v, \rho, \mathbf{R}, z) \rangle; \quad (4.57)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{1}{4}(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4), \\ \rho &= \rho_1 + \rho_2 - \rho_3 - \rho_4, \\ u &= \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4), \\ v &= \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2 - \rho_3 + \rho_4). \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

При $\rho = 0$ функция $\tilde{W}(u, v, z)$ удовлетворяет уравнению (4.2), полученному для плоской волны, а преобразование Фурье этой функции по u или по v удовлетворяет уравнению (4.5). Следует заметить, однако, что задача определения функции $\tilde{W}(u, v, z)$ не идентична задаче определения функции когерентности четвертого порядка для плоской волны; до настоящего времени эта задача в общем виде не решена.

Ниже мы изложим некоторые конкретные результаты, полученные для ограниченного пучка. В работе ²⁴ при решении уравнений для моментов поля были найдены все моменты интенсивности в предположении, что начальное распределение поля по пучку гауссово и что $D'(u) \sim u^2$. Однако предположение о квадратичной зависимости $D'(u)$ здесь фактически означает, что характерное сечение пучка всюду много меньше внутреннего масштаба турбулентности и флуктуации интенсивности полностью обуславливаются эффектом дрожания пучка. Все результаты ²⁴ легко получить из соотношения, определяющего $I(\rho, z)$ — интенсивность излучения на дистанции z :

$$I(\rho, z) = I^{(0)}(\rho - \mathbf{R}(z), z), \quad (4.59)$$

где $I^{(0)}(\rho, z)$ — распределение интенсивности по пучку, полученное без учета рассеяния на неоднородностях, $\mathbf{R}(z)$ — смещение центра пучка, вычисленное в геометрикооптическом приближении ⁴². В применении к реальной атмосфере результаты работы ²⁴ описывают поведение узких пучков на коротких дистанциях.

Флуктуации интенсивности в ограниченных пучках обладают рядом особенностей, которые можно установить уже в приближении Рытова ⁷⁴⁻⁸⁴ или эквивалентным ему методом ⁸⁵. Так, ограниченность пучка может влиять на пространственный спектр мерцаний в области высоких частот ⁸², а относительные флуктуации интенсивности в пучке в плоскости наблюдения возрастают от центра пучка к краю ⁸³. Отметим также, что картина

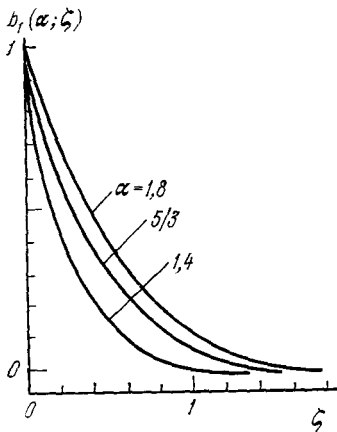


Рис. 15. Компонента $b_{1сф}(\alpha, \zeta)$ корреляционной функции флуктуаций интенсивности: распространение сферической волны в статистически однородной среде со степенным спектром неоднородностей ²⁷.

флуктуаций интенсивности излучения во френгоферовой зоне коллимированного пучка, дифрагированного на фазовом экране, совпадает с полученной для фокальной плоскости фокусированного пучка ^{26a}.

б) Одномодовый фокусированный пучок. При распространении фокусированного излучения даже в такой слабонеоднородной среде, как земная атмосфера, практически на всех представляющих интерес для приложений дистанциях наблюдаемое значение индекса мерцаний близко к единице ²⁸. Величина структурной функции фазы, вычисленной на диаметре передающей апертуры, при этом достигает больших значений:

$$D\left(\sqrt{\frac{4z\Omega}{k}}\right) > 1. \quad (4.60)$$

Это условие насыщения мерцаний фокусированного излучения, однако, не требует выполнения условия $D(\sqrt{z/k}) > 1$, которое определяет насыщение мерцаний плоской волны. Связано это с тем обстоятельством, что фокусировка возможна только в зоне Френеля передающей апертуры ($\Omega > 1$). На дистанции, равной фокальному расстоянию, плоская волна может мерцать слабо, хотя мерцания фокусированного излучения будут становиться насыщенными.

Ограниченный фокусированный пучок можно представить в виде суперпозиции элементарных плоских волн. Вводя фурье-преобразование $P(\mathbf{q})$ (3.2) граничного распределения поля в плоскости $z=0$, на дистанции z имеем

$$E(\rho, z) = \int d\mathbf{q} P(\mathbf{q}) \exp\left[i(\mathbf{q}\rho) - i\frac{z}{2k}q^2\right] \tilde{E}\left(\rho - \mathbf{q}\frac{z}{k}, \mathbf{q}, z\right), \quad (4.61)$$

где \tilde{E} учитывает модуляцию элементарной волны средой. Таким образом, задача определения флуктуаций интенсивности в фокусированном пучке может быть сведена к определению корреляции $W(\rho_{1, 2, 3, 4}, \mathbf{q}_a, b, c, d, z)$ полей четырех элементарных плоских волн, распространяющихся в направлениях $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_c, \mathbf{q}_d$. А уравнение для функции когерентности четвертого порядка \tilde{W} , основываясь на предположении, что элементарные волны мерцают слабо, можно решить ²⁹ в приближении Рытова *).

Для излучателя, работающего в режиме основной гауссовой моды, при фокусировке излучения на плоскость наблюдения z , исходное распределение поля имеет вид

$$E(\rho, z)|_{z=0} = E_0 \exp\left[-\frac{k}{2z}(\Omega^{-1} + i)\rho^2\right]. \quad (4.62)$$

Во френелевой зоне излучающей апертуры ($\Omega > 1$) для граничного распределения поля (4.62) в приосевой области пучка в соответствии со сказанным выше получим

$$I_0^{-2} \langle I(0, z) I(\rho, z) \rangle = \int d\mathbf{q} \exp(-i\mathbf{q}\rho) M(\mathbf{q}, z), \quad (4.63)$$

где $M(\mathbf{q}, z)$ — пространственный спектр флуктуаций интенсивности. Дальнейший анализ связан с вычислением этого интеграла, причем мы ограничимся случаем чисто степенного спектра флуктуаций показателя прелом-

*) Здесь следует отметить, что решение уравнения для \tilde{W} в приближении Борна приводит к результатам, не отличающимся от полученных на основе применения метода Рытова к решению скалярного волнового уравнения ^{75, 76, 79, 84, 86-88} и эквивалентных им результатов ⁸⁵. Эти результаты справедливы лишь в области малых значений параметра $D(\sqrt{4z\Omega}/k)$ и не описывают эффекта насыщения величины относительных флуктуаций интенсивности с ростом дистанции распространения, поэтому мы не будем останавливаться на них в дальнейшем.

ления в среде, когда структурная функция фазы $D(u) \sim u^\alpha$ (4.36); всюду далее будем предполагать, что условие (4.60) выполняется.

При выполнении этого условия низкочастотный участок спектра флуктуаций интенсивности $M^{LF}(\mathbf{q}, z)$ имеет асимптотическое представление

$$M^{LF}(\mathbf{q}, z) = M_{(0)}^{LF}(\mathbf{q}, z) + M_{(1)}^{LF}(\mathbf{q}, z) + \dots; \quad (4.64)$$

здесь $M_{(0)}^{LF}(\mathbf{q}, z)$ описывает среднее распределение интенсивности в плоскости наблюдения:

$$M_{(0)}^{LF}(\mathbf{q}, z) = \frac{1}{2\pi\alpha} \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) \left[\frac{1}{2} D_{сф}\left(\sqrt{\frac{4z\Omega}{k}}\right)\right]^{-2/\alpha} \times \\ \times \frac{z}{k} \Omega^3 \exp\left\{-\frac{1}{2} D_{сф}\left(q \frac{z}{k}\right)\right\}, \quad (4.65)$$

а главный член, описывающий собственно флуктуации интенсивности, в области частот $q \ll \sqrt{4k\Omega/z}$ имеет вид

$$M_{(1)}^{LF}(\mathbf{q}, z) \sim \left[\frac{1}{2} D_{сф}\left(\sqrt{\frac{4z\Omega}{k}}\right)\right]^{2-(4/\alpha)} \left(\frac{\Omega z}{k}\right)^2 q^2 \exp\left[-\frac{1}{2} D_{сф}\left(\frac{qz}{k}\right)\right]. \quad (4.66)$$

Выражение (4.66) имеет максимум на частоте $q_m = (2/\alpha)^{1/\alpha} q_\Phi^*$, где

$$q_\Phi^* = \left[\frac{1}{2} D_{сф}\left(\sqrt{\frac{4z\Omega}{k}}\right)\right]^{-1/\alpha} \sqrt{\frac{4k\Omega}{z}}. \quad (4.67)$$

При $D(\sqrt{4z\Omega/k}) > 1$ высокочастотный участок спектра также может быть представлен в виде асимптотического разложения

$$M^{BЧ}(\mathbf{q}, z) = M_{(0)}^{HF}(\mathbf{q}, z) + M_{(1)}^{HF}(\mathbf{q}, z) + \dots, \quad (4.68)$$

где

$$M_{(0)}^{BЧ}(\mathbf{q}, z) \sim \left[\frac{1}{2} D_{сф}\left(\sqrt{\frac{4z\Omega}{k}}\right)\right]^{-4/\alpha} \frac{z}{k} \Omega^3 \exp\left(-\frac{z}{2k\Omega} q^2\right), \quad (4.69)$$

а первая поправка

$$M_{(1)}^{BЧ}(\mathbf{q}, z) \sim \left[\frac{1}{2} D_{сф}\left(\sqrt{\frac{4z\Omega}{k}}\right)\right]^{-(2/\alpha)(4-\alpha)} \times \\ \times \frac{z}{k} \Omega^3 \left(q \sqrt{\frac{z}{4k\Omega}}\right)^{-2(2-\alpha)} \exp\left(-\frac{z}{2k\Omega} q^2\right). \quad (4.70)$$

Характерная частота обрезания спектра определяется пространственной гармоникой порядка дифракционного размера апертуры.

Низкочастотная и высокочастотная асимптотики спектра сшиваются в области частоты q_Φ^{**} , где

$$q_\Phi^{**} \approx q_\Phi^* \ln^{1/\alpha} \left\{ B \left[\frac{1}{2} D_{сф}\left(\sqrt{\frac{4z\Omega}{k}}\right)\right]^{2-(2/\alpha)} \right\}, \quad (4.71)$$

где B — константа, зависящая от α . Обращая по Фурье разложения (4.64) и (4.68), получим, что главные члены асимптотического ряда (при $D_{сф}(\sqrt{4z\Omega/k}) > 1$) для корреляционной функции флуктуаций интенсивности в приосевой области пучка имеют вид

$$\langle I(0, z) I(u, z) \rangle - \langle I(0, z) \rangle \langle I(u, z) \rangle = \\ = \langle I(0, z) \rangle^2 \left\{ \exp\left(-\frac{k\Omega}{2z} u^2\right) + \left[N_{1\Phi} b_{1\Phi}(\alpha, u q_\Phi^*) + \right. \right. \\ \left. \left. + N_{2\Phi} b_{2\Phi}(\alpha, u \sqrt{\frac{2k\Omega}{z}}) \right] \left[\frac{1}{2} D_{сф}\left(\sqrt{\frac{4z\Omega}{k}}\right)\right]^{-\left(\frac{2}{\alpha}\right)(2-\alpha)} \right\}, \quad (4.72)$$

$$N_{1\phi} = 2^{(2-\alpha)} \pi^{-2} \Gamma^2 \left(\frac{4}{\alpha} \right) \Gamma^{-2} \left(\frac{2}{\alpha} \right) \sin^2 \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) \Gamma^4 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \Gamma^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$N_{2\phi} = 2^{-(\alpha+1)} \alpha^2 (\alpha^2 - 2\alpha + 2) \Gamma^{-2} \left(-\frac{2}{\alpha} \right) \Gamma^2 \left(\frac{4}{\alpha} \right) \Gamma(\alpha - 1);$$

здесь $\langle I(u, z) \rangle$ — среднее распределение интенсивности в фокальной плоскости

$$\langle I(u, z) \rangle = I_0 \left(\frac{2}{\alpha} \right) \Gamma \left(\frac{2}{\alpha} \right) \left[\frac{1}{2} D_{c\phi} \left(\sqrt{\frac{4z\Omega}{k}} \right) \right]^{-(2/\alpha)} \Omega^2 b_{0\phi}(\alpha, uq_{\phi}^*). \quad (4.73)$$

Графики функций b_0 , b_1 и b_2 изображены на рис. 16, 17 и 18.

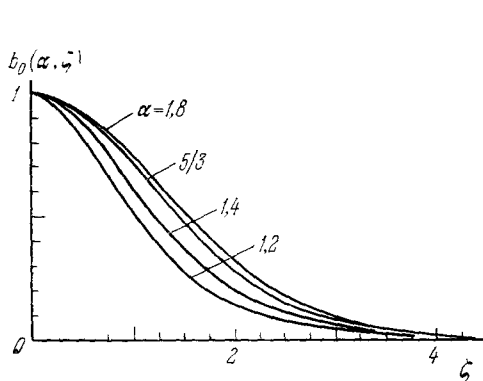


Рис. 16. Нормированное среднее распределение интенсивности в фокальной плоскости гауссового пучка, прошедшего слой турбулентной атмосферы, при $D_{c\phi} \left(\sqrt{4z\Omega/k} \right) \gg 1$ ^{29a}.

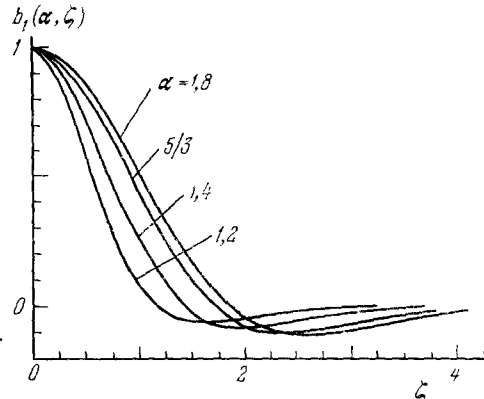


Рис. 17. Компонента $b_{1\phi}(\alpha, \zeta)$ корреляционной функции флуктуаций интенсивности; фокусированный пучок, прошедший слой турбулентной атмосферы (случай $D_{c\phi} \left(\sqrt{4z\Omega/k} \right) \gg 1$) ^{29a}.

Из (4.72) следует, что ширина корреляционной функции флуктуаций интенсивности (на уровне $1/e$) в области больших значений величины структурной функции фазы, вычисленной на диаметре передающей апертуры, определяется размером дифракционного пятна $\sqrt{z/4k\Omega}$, причем имеет место соотношение

$$\sqrt{\frac{z}{4k\Omega}} \ll \frac{1}{q_{\phi}^*}. \quad (4.74)$$

В области поперечных размеров $u > (q_{\phi}^*)^{-1}$ корреляционная функция флуктуаций интенсивности, затухая, осциллирует вблизи нуля. С увеличением параметра $D_{c\phi} \left(\sqrt{4z\Omega/k} \right)$ амплитуда этих осцилляций уменьшается пропорционально $[D_{c\phi} \times (\sqrt{4z\Omega/k})]^{-(2/\alpha)(2-\alpha)}$, а пространственный масштаб увеличивается пропорционально $[D_{c\phi} \left(\sqrt{4z\Omega/k} \right)]^{1/\alpha}$.

Для относительных флуктуаций интенсивности из (4.72) при $u = 0$ получим

$$\frac{\langle I^2(0, z) \rangle}{\langle I(0, z) \rangle^2} - 1 = 1 + N_{\phi}(\alpha) \left[\frac{1}{2} D_{c\phi} \left(\sqrt{\frac{4z\Omega}{k}} \right) \right]^{-(2/\alpha)(2-\alpha)}, \quad (4.75)$$

$$D_{c\phi} \left(\sqrt{\frac{4z\Omega}{k}} \right) \gg 1,$$

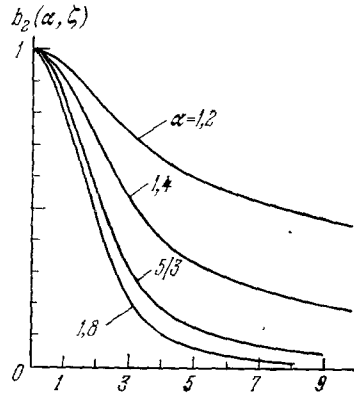


Рис. 18. То же, что и на рис. 17, для компонента $b_{2\phi}(\alpha, \zeta)$ ^{29a}.

где

$$N_{\phi}(\alpha) = N_{1\phi} + N_{2\phi}, \quad N_{\phi}\left(\frac{5}{3}\right) = 3,1. \quad (4.76)$$

Величина относительных флуктуаций интенсивности в области насыщения с увеличением параметра $D_{c\phi} (\sqrt{4z\Omega/k})$ медленно уменьшается, приближаясь к значению, равному единице.

Отметим здесь, что интегральное представление для корреляции интенсивности, аналогичное (4.63), может быть получено по методу Гюйгенса — Кирхгофа, обобщенному на случай плавно-неоднородных сред^{29б, 47, 74}. Численные расчеты⁷⁴ для случая фокусированного пучка в основном подтверждают выводы асимптотического анализа. Однако применение этих интегральных представлений при расчете насыщенных флуктуаций интенсивности в коллимированном пучке связано с определенными логическими затруднениями. Действительно, поскольку при выводе выражения для корреляции $\langle I(\rho_1, z) I(\rho_2, z) \rangle$ делается предположение, что относительные флуктуации интенсивности для точечного источника на трассе распространения малы, то при этом должны быть малы и относительные флуктуации интенсивности в коллимированном пучке⁷⁶. Для фокусированного пучка, как следует из сказанного выше, во френелевой зоне излучающей апертуры это затруднение несущественно. Более того, есть основания полагать, что область применимости анализа, изложенного выше, ограничена лишь условием $D(\sqrt{z/4k\Omega}) < 1$, т. е. условием сильной фокусировки.

Результаты анализа, изложенного выше, применимы и для случая, когда среда представляет собой тонкий слой толщины $L \ll z$, расположенный вблизи излучателя^{26а, 89}. При этом, однако, в формулах следует заменить $D_{c\phi}(u)$ на $D(u)$ — структурную функцию фазы плоской волны; следует также учесть, что в этом случае фазовые искажения накапливаются лишь на толщине слоя L .

Влияние турбулентности атмосферы при распространении фокусированных пучков сильно проявляется также в эффекте дрожания центра тяжести изображения («бегание» пучка в фокальной плоскости). Теоретическое описание этого эффекта можно провести, опираясь на интегральное представление для корреляции интенсивности в фокальной плоскости $\langle I(\rho_1, z) I(\rho_2, z) \rangle$, полученное в работе²⁹.

Определим положение «центра тяжести» изображения пучка в плоскости наблюдения z соотношением

$$R_c = \int d\rho \rho I(\rho, z) \cdot \left[\int d\rho \langle I(\rho, z) \rangle \right]^{-1}. \quad (4.77)$$

Нас будет интересовать среднеквадратичная величина флуктуаций положения центра тяжести изображения пучка в турбулентной среде. Согласно (4.77)

$$\langle R_c^2 \rangle = \int d\rho_1 d\rho_2 \langle I(\rho_1, z) I(\rho_2, z) \rangle \left\{ \int d\rho \langle I(\rho, z) \rangle \right\}^{-2}. \quad (4.78)$$

В отсутствие поглощения и в пренебрежении рассеянием назад в турбулентной среде полный поток излучения сохраняется:

$$\int d\rho \langle I(\rho, z) \rangle = \int d\rho I(\rho, 0) = \text{const}. \quad (4.79)$$

Для пучка с исходным распределением поля (4.62) постоянная в (4.79) равна $E_0^2 \pi \Omega (z/k)$.

Простые, но громоздкие выкладки показывают, что во френелевой зоне для пучка с исходным распределением поля (4.62) выражение (4.78)

может быть записано в виде

$$\langle R_c^2 \rangle = \frac{2z}{k} \int_0^\infty dn \exp(-2n^2) \times \\ \times \left[\frac{z}{k} D_{\text{сф}}'' \left(n \sqrt{\frac{4z\Omega}{k}} \right) n + \sqrt{\frac{z}{4k\Omega}} D_{\text{сф}}' \left(n \sqrt{\frac{4z\Omega}{k}} \right) \right], \quad (4.80)$$

где $D_{\text{сф}}'(u)$ и $D_{\text{сф}}''(u)$ — первая и вторая производные по аргументу от структурной функции фазы.

Для среды с колмогоровским спектром флуктуаций показателя преломления, учитывая⁵⁸ влияние внешнего масштаба турбулентности в первом порядке теории возмущений, на основании (4.80) получим

$$\langle R_c^2 \rangle \sim \frac{z}{4k\Omega} D_{\text{сф}} \left(\sqrt{\frac{4z\Omega}{k}} \right) \left(1 - 0,8 \sqrt[3]{\sqrt{\frac{4z\Omega}{k}} L^{-1/3}} \right), \quad (4.81)$$

где L_0 — внешний масштаб турбулентности и $L_0 = L_0/2\pi$.

Функциональная зависимость, описываемая первым членом этого разложения, совпадает с полученной в работах^{5, 48} другим методом (в работе⁵ проводился расчет дрожания изображения в фокусе телескопа). Из (4.81) видно, что учет конечного значения внешнего масштаба турбулентности приводит к уменьшению флуктуаций центра тяжести изображения.

В турбулентной среде со степенным спектром неоднородностей может иметь место значительная корреляция «блуждания» центров тяжести пучков с разнесенными или пересекающимися осями. Изучение этой корреляции представляет интерес для ряда приложений⁹¹.

В предыдущем изложении мы рассматривали флуктуации интенсивности излучения идеального лазера, работающего в одномодовом режиме. Однако при анализе характеристик мерцаний реального лазерного излучения в турбулентной среде может оказаться необходимым учитывать отклонения от идеальной когерентности в исходном излучении.

Пространственная некогерентность исходного излучения может приводить к замытию дифракционной картины и уменьшению флуктуаций интенсивности^{66, 92, 93}. Влияние временной некогерентности исходного излучения также приводит к уменьшению флуктуаций интенсивности, если радиус частотной корреляции мерцаний двух мод меньше полосы частот излучения. Следует отметить, что в режиме насыщенных мерцаний частотный радиус корреляции может быть весьма мал^{65, 94, 95, 96, 97}.

в) Сравнение теории с экспериментом. В большинстве работ, посвященных экспериментальному изучению флуктуаций интенсивности лазерного излучения в турбулентной атмосфере^{28, 39 98-111}, измерялись моменты логарифма флуктуаций интенсивности: среднее значение и дисперсия. В режиме слабых мерцаний соотношение между m^2 и $\sigma_{\ln I}^2$ весьма простое:

$$\sigma_{\ln I}^2 = \langle (\ln I - \langle \ln I \rangle)^2 \rangle \approx m^2. \quad (4.82)$$

В режиме насыщенных мерцаний для определения m^2 необходимо знать моменты $\ln I$ более высоких порядков (или функцию распределения $\ln I$). Поэтому прямое количественное сопоставление теории с большинством экспериментальных данных невозможно.

На рис. 19 точками нанесена полученная в работе¹⁰⁶ зависимость индекса мерцаний m коллимированного пучка от m_0 — индекса мерцаний плоской волны, вычисленного в первом приближении метода Рытова.

Эксперименты проводились с лазерным пучком на трассах 250 м и 1750 м, длина волны $\lambda = 0,63$ мкм, радиус апертуры источника $\alpha_0 = 15$ см, диаметр апертуры приемника 0,3 мм. Сплошными линиями нанесены теоретические значения m^{266} , вычисленные по асимптотическим формулам (4.37) и (4.42). Мы видим удовлетворительное согласие теории с экспериментом. Однако экспериментальные точки при больших значениях m_0

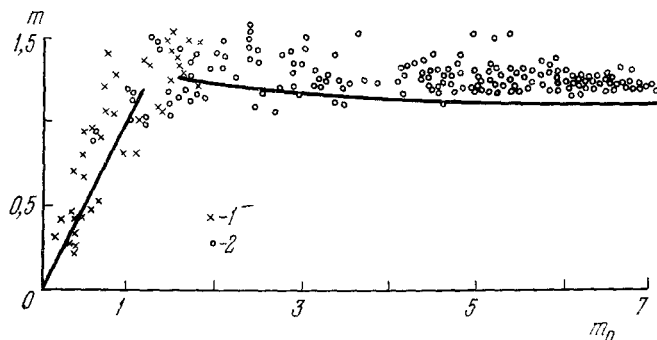


Рис. 19. Зависимость индекса мерцаний коллимированного лазерного пучка в приземном слое атмосферы от m_0 — индекса мерцаний плоской волны, вычисленного в первом приближении метода Рытова¹⁰⁶.

1 — трасса 250 м; 2 — трасса 1750 м. Сплошные кривые построены по асимптотическим формулам (4.37) и (4.42), полученным в работах²⁶⁶ для исходной плоской волны.

лежат выше теоретической кривой. Причиной этого может служить влияние внутреннего масштаба турбулентности, влияние ограниченности пучка, а также неточности в экспериментальном определении

структурной постоянной C_n на трассе распространения. Этими причинами, по-видимому, объясняются и завышенные значения m , полученные в¹⁰⁶ на трассе 8500 м, по сравнению со значениями m , полученными на трассе 1750 м. В режиме насыщения с увеличением m_0 в корреляционной функции четко выделяются два масштаба u_0 и u_1 ¹⁰⁶. Теория²⁶⁶ дает $u_0 \sim m_0^{-2/\alpha} \sqrt{\lambda z}$, $u_1 \sim m_0^{2/\alpha} \sqrt{\lambda z}$; интересно, что $u_0 u_1 = z/k$. Теоретические значения u_0 и u_1 совпадают с экспериментальными по порядку величины. Лучшего согласия трудно ожидать, ибо масштабы u_0 и u_1 определяются весьма разнесенными участками спектра флуктуаций показателя преломления, где на вид спектра

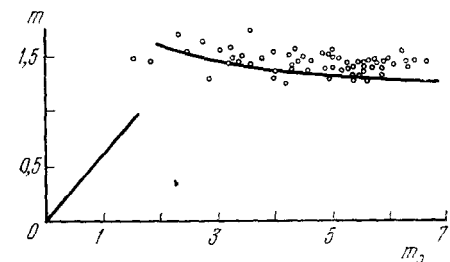


Рис. 20. Зависимость индекса мерцаний расходящегося лазерного пучка в приземном слое атмосферы от m_0 — индекса мерцаний плоской волны, вычисленного в первом приближении метода Рытова¹⁰⁶.

Сплошные кривые построены по асимптотическим формулам (4.52), (4.53), полученным в работе²⁷ для исходной сферической волны.

могут оказывать влияние внешний и внутренний масштабы турбулентности. Кроме того, если параметр $\Omega = k\alpha_0^2/z$ в этом эксперименте был много больше 1, то параметр $k\alpha_0\theta_0$ при больших m_0 был сравним с Ω , и тем самым в данном случае необходимо учитывать ограниченность пучка.

На рис. 20 приведена зависимость m от m_0 , полученная для расходящегося пучка, имитирующего сферическую волну. Радиус апертуры источника составлял 15 см, угол расходимости пучка 1 мрад, трасса 1750 м. Теоретические значения m , полученные по асимптотическим фор-

мулам (4.52), (4.53), показаны сплошными линиями. И в случае сферической волны экспериментальные точки лежат при больших m_0 несколько выше теоретической кривой, что также можно объяснить влиянием внутрениего масштаба турбулентности и ограниченностью пучка. Корреляционная функция, полученная для расходящегося пучка, в режиме насыщения мерцаний также имеет два масштаба u_0 и u_1 , что качественно согласуется с теорией²⁷.

Следует отметить, что уменьшение основного масштаба флуктуаций интенсивности с увеличением силы турбулентности в режиме насыщения впервые наблюдалось экспериментально в работе¹⁰⁰.

Флуктуации интенсивности фокусированного излучения при распространении в приземном слое атмосферы измерялись в работах^{28, 37, 39, 107-110}. На рис. 21 показаны экспериментальные данные^{37, 107}, описывающие изменение среднеквадратич-

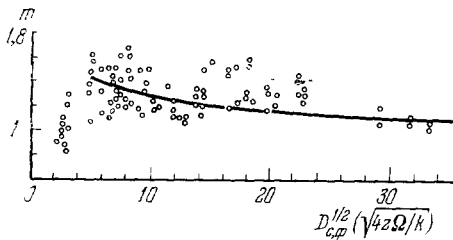


Рис. 21. Зависимость величины относительных флуктуаций интенсивности фокусированного излучения в приземном слое атмосферы от величины структурной функции фазы, вычисленной на диаметре передающей апертуры³⁷.

Сплошная кривая — асимптотическая зависимость, полученная в работах²⁹.

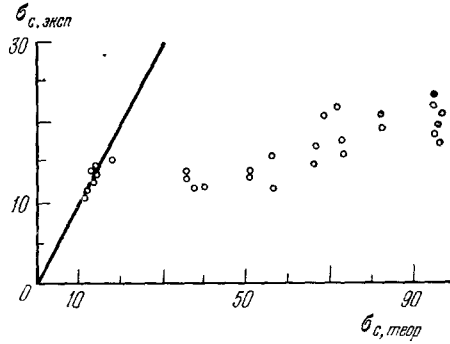


Рис. 22. Сравнение стандартных отклонений центра тяжести изображения фокусированного пучка, полученных в эксперименте $\sigma_{с,эксп}$, с расчетной формулой $\sigma_{с,теор}$ ³⁷.

ного значения относительных флуктуаций интенсивности на оси фокусированного лазерного пучка от величины структурной функции фазы сферической волны, вычисленной на диаметре передающей апертуры. Здесь же приведены теоретические расчеты^{29а, в} — формула (4.75) (сплошная кривая). Измерения корреляционной функции флуктуаций интенсивности в фокальной плоскости пучка^{37, 107} подтверждают теоретический вывод^{29, а, в} о том, что радиус корреляции флуктуаций интенсивности (на уровне e^{-1}) в области насыщенных флуктуаций определяется дифракционным размером передающей апертуры.

Измерения флуктуаций центра тяжести изображения в фокальной плоскости фокусированного пучка проводились в работах^{36, 37, 112, 113}. На рис. 22 приведено сравнение стандартных отклонений центра тяжести изображения $\sigma_{с,эксп}$, полученных в эксперименте³⁷, с расчетной формулой

$$\sigma_{с,теор} = \sqrt{0,76 C_n^2 z^3 (2\alpha_0)^{-1/3}} \tag{4.83}$$

Из рисунка видно, что экспериментальные значения флуктуаций центра тяжести $\sigma_{с,эксп}$ совпадают с рассчитанными по (4.83) только при малых значениях $\sigma_{с,теор}$. При дальнейшем увеличении $\sigma_{с,теор}$ экспериментальные значения $\sigma_{с}$ растут значительно медленнее. Причины этого расхождения неясны.

В работе ¹⁰¹ получено экспериментальное подтверждение теоретического вывода ²⁴ о том, что функция распределения флуктуаций логарифма интенсивности в существенно ограниченном коллимированном пучке в области слабых флуктуаций удовлетворительно описывается законом Райса — Накагами.

5. ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Работы, посвященные экспериментальному и теоретическому описанию флуктуаций фазы лазерного излучения в турбулентной среде, в основном касаются исследований флуктуаций фазы на коротких трассах в режиме слабых мерцаний.

Самый простой способ измерения флуктуаций фазы состоит в измерении функции когерентности второго порядка поля, которая связана со структурной функцией флуктуаций фазы, вычисленной в линейном геометрикооптическом приближении $D(u)$, простым соотношением (3.33). Этот способ был использован в ряде работ ^{114, 115}. Задача экспериментального разделения амплитудных и фазовых флуктуаций весьма сложна, и только в последнее время появились работы, в которых такое разделение проведено ^{116, 117}.

Из перечисленных работ следует, что в режиме слабых мерцаний $D(u)$ практически не отличается от точного значения структурной функции флуктуаций фазы. При распространении в приземном слое атмосферы $D(u)$ подчиняется закону $5/3$ при $0,3 \text{ см} < u < 30 \text{ см}$, при больших u начинаются отклонения от этого закона в сторону насыщения; при меньших u зависимость $D(u)$ приближается к квадратичной. Эти экспериментальные данные находятся в согласии с результатами теоретических расчетов зависимости $D(u)$, проведенных с учетом влияния конечных значений величины внутреннего и внешнего масштаба турбулентности ^{58, 119}. В целом экспериментальные данные, полученные на коротких трассах в режиме слабых мерцаний, согласуются с теорией, основанной на методе Рытова.

В обзоре ⁸ приведены достаточно прозрачные физические соображения в пользу того, что метод Рытова в целом правильно описывает флуктуации фазы и в режиме насыщенных мерцаний.

Однако в ряде случаев метод Рытова в режиме насыщенных мерцаний может дать неправильные результаты. В частности, это касается задачи о корреляции флуктуаций фаз волн с разными частотами. Эта задача возникает, например, при изучении флуктуаций фазы модулирующего колебания ¹¹⁷. На корреляцию полей двух волн с разными частотами существенное влияние оказывает искривленность траекторий лучей ⁹⁴⁻⁹⁶, которая плохо учитывается первым приближением метода Рытова.

Многие задачи, связанные с учетом влияния фазовых искажений, вносимых турбулентной средой, могут быть сведены к анализу функций когерентности второго и четвертого порядка. К таким задачам относятся, например, сопоставление эффективности работы различных лазерных систем связи в приземном слое атмосферы ^{120, 121}. В работе ¹²¹ корреляционная функция флуктуаций интенсивности выбрана эмпирически, с использованием экспериментальных данных работы ¹²². Здесь ¹²², однако, осталось незамеченным наличие основного масштаба флуктуаций интенсивности, который уменьшается с увеличением дистанций распространения. В работе ¹²⁰ рассмотрение основано на результатах асимптотического анализа, изложенного выше.

6. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ВЫБРОСЫ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ ИНТЕНСИВНОСТИ

На практике приемная система обычно является распределенной и обладает порогом срабатывания по интенсивности падающего на нее излучения. При этом выбросы случайной функции $I(x, y)$ — интенсивности излучения в точке (x, y) плоскости приемной апертуры, могут явиться определяющим фактором в режиме работы приемной системы.

Такая ситуация возникает, например, когда средний уровень интенсивности в волне, прошедшей через слой турбулентной среды, ниже порога срабатывания I_{Π} приемной системы.

Для многих приложений достаточно ограничиться определением средних характеристик пространственных выбросов случайного поля интенсивности — средней площади выбросов, средней плотности выбросов и среднего расстояния между ближайшими выбросами в плоскости приемной апертуры, причем наиболее важным для практики является случай выбросов над достаточно высоким уровнем I_{Π} , когда

$$(I_{\Pi} - \langle I \rangle)^2 \gg \sigma_I^2. \tag{6.1}$$

В работе ^{30a} показано, что при ограничении (6.1) для определения указанных средних характеристик выбросов необходимо вычислить вероятность

$$P(I_{\Pi}) = \int_{I_{\Pi}}^{\infty} dI w(I) \tag{6.2}$$

того, что случайная интенсивность $I(\rho, z)$ превышает уровень I_{Π} и $n(I_{\Pi})$ — среднюю плотность выбросов над уровнем I_{Π} «одномерного профиля» интенсивности в плоскости $z = \text{const}$, проходящего через точку $\rho = 0$, т. е. случайной функции $I(x, ax)$. В (6.2) $w(I)$ — плотность распределения поля I .

Рассмотрим случай, когда волновой пучок на входе в среду обладает аксиальной симметрией, а турбулентность среды всюду однородна и изотропна. При этом статистические свойства интенсивности излучения в пучке обладают аксиальной симметрией при любом z , и поэтому направление профиля в плоскости $z = \text{const}$ не играет роли, т. е. константа a может быть положена равной нулю.

Средняя плотность выбросов «одномерного профиля» определяется выражением ¹²³

$$n(I_{\Pi}) = \int_0^{\infty} dI' w_2(I_{\Pi}, I') I', \tag{6.3}$$

где $w_2(I, I')$ — двумерная плотность совместного распределения для интенсивности I и производной $I' = \partial I / \partial x$, взятых в одной и той же точке (x, y) в плоскости $z = \text{const}$.

Используя (6.2) и (6.3), вычислим среднюю площадь выброса

$$\langle S(I_{\Pi}) \rangle \simeq \frac{P^2(I_{\Pi})}{n^2(I_{\Pi})}, \tag{6.4}$$

среднюю плотность выбросов

$$\langle N(I_{\Pi}) \rangle \simeq \frac{n^2(I_{\Pi})}{P(I_{\Pi})} \tag{6.5}$$

и среднее расстояние между выбросами

$$\langle l(I_{\Pi}) \rangle \simeq \frac{1}{2} \frac{\sqrt{P(I_{\Pi})}}{n(I_{\Pi})}. \tag{6.6}$$

Формулы (6.4) — (6.6) применимы при условии

$$\sqrt{P(I_{\Pi})} \ll 1, \quad (6.7)$$

а при умеренно малых значениях $P(I_{\Pi})$ могут быть использованы для оценок по порядку величины.

При определении величин $P(I_{\Pi})$ и $n(I_{\Pi})$ необходимо основываться на предположениях относительно вида функций распределения $w(I)$ и $w_2(I, I')$ случайного поля интенсивности, поскольку точный вид этих функций в настоящее время неизвестен. В предельных случаях, в области слабых и в области насыщенных флуктуаций интенсивности, установить вид функций распределения позволяют довольно простые соображения. Мы рассмотрим эти две области раздельно, учитывая, что процедура вычисления величин $P(I_{\Pi})$ и $n(I_{\Pi})$ в них существенно различна.

Разумеется, главным судьей в решении вопроса о справедливости выбора того или иного вида функций распределения для I должно явиться согласие результатов, полученных на их основе, с экспериментальными данными.

а) Область слабых флуктуаций интенсивности. В области, где относительные флуктуации интенсивности в волне малы, мы будем исходить из предположения, что величина

$$\chi(x, y) = \frac{1}{2} \ln \frac{I^{(0)}(x, y)}{I(x, y)} \quad (6.8)$$

является гауссовой случайной функцией; здесь $I^{(0)}(x, y)$ — интенсивность излучения, которая наблюдалась бы в точке (x, y) , если бы отсутствовали флуктуации показателя преломления среды («невозмущенная» интенсивность). Свойство гауссовости величины χ следует из теоретических рассмотрений в первом приближении метода Рытова^{5, 75} и проверено экспериментально для одномерного распределения χ ^{98, 103, 124}. Мы будем также считать χ и χ' некоррелированными [$\chi = \chi(x, 0)$, $\chi' = \partial\chi(x, 0)/\partial x$], и поэтому применительно к пучкам полученные ниже формулы, строго говоря, относятся только к точкам, расположенным вблизи его оси.

Для искомым статистических характеристик выбросов получаем при сделанных предположениях³⁰⁵

$$\langle S(I_{\Pi}) \rangle = \pi^2 [-B_{\chi}''(0)]^{-1} \exp(\xi_{\Pi}^2) [1 - \Phi(\xi_{\Pi})]^2, \quad (6.9)$$

$$\langle N(I_{\Pi}) \rangle = (2\pi^2)^{-1} [-B_{\chi}''(0)] \exp(-\xi_{\Pi}^2) [1 - \Phi(\xi_{\Pi})]^{-1}, \quad (6.10)$$

$$\langle l(I_{\Pi}) \rangle = \pi [-2B_{\chi}''(0)]^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2} \xi_{\Pi}^2\right) \sqrt{1 - \Phi(\xi_{\Pi})}; \quad (6.11)$$

здесь

$$\Phi(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\xi} dt \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) \quad (6.12)$$

— интеграл вероятности;

$$\xi_{\Pi} = (2\sigma_{\chi})^{-1} \left[\ln\left(\frac{I_{\Pi}}{\langle I \rangle}\right) + 2\sigma_{\chi}^2 \right]; \quad (6.13)$$

дисперсия флуктуаций величины χ , σ_{χ}^2 , связана с индексом мерцаний соотношением

$$\sigma_{\chi}^2 = \frac{1}{4} \ln \left[1 + \left(\frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} \right)^2 \right], \quad (6.14)$$

а коэффициент «поперечной» корреляции флуктуаций величины χ равен

$$B_{\chi}(\rho) = \sigma_{\chi}^{-2} \langle [\chi(0, z) - \langle \chi(0, z) \rangle] [\chi(\rho, z) - \langle \chi(\rho, z) \rangle] \rangle. \quad (6.15)$$

Условие применимости (6.7) формул (6.9) — (6.11) в области $\sigma_\chi < 1$ во всяком случае выполняется, если $I_\Pi \gg \langle I \rangle$. Если же мерцания малы, так что $\sigma_I / \langle I \rangle \ll 1$, то условие (6.7) оказывается выполненным уже при $I_\Pi \gtrsim 2 \langle I \rangle$. Если значение уровня I_Π настолько велико (или мерцания $\sigma_I / \langle I \rangle$ настолько малы), что $\xi_\Pi \gg 1$, то условие (6.7) заведомо выполняется, а формулы (6.9) — (6.11) упрощаются:

$$\langle S(I_\Pi) \rangle \approx 2\pi [-B_\chi''(0)]^{-1} \xi_\Pi^{-2}, \quad (6.16)$$

$$\langle N(I_\Pi) \rangle \approx (2\pi)^{-3/2} [-B_\chi''(0)] \xi_\Pi \exp\left(-\frac{1}{2} \xi_\Pi^2\right), \quad (6.17)$$

$$\langle l(I_\Pi) \rangle \approx \frac{1}{2} (2\pi)^{3/4} \frac{1}{\sqrt{-B_\chi''(0)}} \left(\frac{1}{\xi_\Pi}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{4} \xi_\Pi^2\right). \quad (6.18)$$

Полученные формулы показывают, что для вычисления средних характеристик выбросов интенсивности излучения над уровнем I_Π , в определенное число раз превышающем среднюю интенсивность $\langle I \rangle$, необходимо знать только дисперсию флуктуаций величины χ , σ_χ^2 (или, согласно (6.14), величину относительных флуктуаций интенсивности $\sigma_I / \langle I \rangle$) и дисперсию флуктуаций производной от χ , $\sigma_\chi'^2 = -B_\chi''(0) \sigma_\chi^2$. Определению величины σ_χ^2 для волновых пучков в области слабых флуктуаций интенсивности посвящено большое количество работ (см. гл. 4), где были получены результаты для различных моделей случайно-неоднородной среды и различных исходных типов излучения. Вычислению дисперсии флуктуаций производной χ , $\sigma_\chi'^2$ посвящена лишь работа³⁰⁶, где рассмотрены случаи коллимированного и фокусированного пучков с гауссовым распределением поля в плоскости излучения при распространении в среде с колмогоровским спектром флуктуаций показателя преломления.

б) Область насыщенных флуктуаций интенсивности. В этом разделе мы рассмотрим предельный случай больших дистанций распространения в слабо-неоднородной турбулентной среде с крупномасштабными флуктуациями показателя преломления. При этом мы, однако, будем предполагать, что условия применимости уравнений для моментов поля (см. гл. 2) не нарушаются.

Решение уравнения для первого момента поля¹⁵ показывает, что для произвольного распределения источников в плоскости излучения среднее значение поля в среде на глубине z пропорционально:

$$\langle E(\rho, z) \rangle \sim \exp\left(-\frac{z}{z_c}\right), \quad (6.19)$$

где $z_c^{-1} \approx (0,4c_n^2 k^2 L_0^{5/3})^{-1}$ — коэффициент экстинкции, $L_0 = 2\pi L_0$ — внешний масштаб турбулентности. При $C_n^2 = 3 \cdot 10^{-15} \text{ см}^{-2/3}$ (промежуточной силы турбулентности), $L_0 \approx 6 \text{ м}$ и при длине волны излучения $\lambda = 10,6 \text{ мкм}$ длина экстинкции $z_c \approx 0,1 \text{ км}^{58}$.

Таким образом, уже при турбулентности промежуточной силы на всех представляющих практический интерес дистанциях распространения имеем $z \gg z_c$, и можно полагать среднее значение поля излучения равным нулю. Аналогично, для произвольного распределения поля в плоскости излучения при $z \gg z_c$ следует считать равными нулю все нечетные моменты поля, а также все четные моменты, в которые комплексная амплитуда поля $E(\rho, z)$ и сопряженная величина $E^*(\rho, z)$ входят неодинаковое число раз. Последнее утверждение следует из того, что решения уравнений для соответствующих моментов будут содержать множителем $\exp(-z/z_c)$.

В дальнейшем изложении мы будем предполагать условие $z \gg z_c$ выполненным. Защишем комплексную амплитуду поля излучения в среде

в точке (ρ, z) в виде

$$E(\rho, z) = E_R(\rho, z) + iE_j(\rho, z), \quad (6.20)$$

где $E_R = \text{Re } E$ и $E_j = \text{Im } E$ — действительная и мнимая части комплексной амплитуды поля соответственно. Согласно сказанному выше, имеем

$$\begin{aligned} \langle E_R(\rho, z) \rangle &= 0, \quad \langle E_j(\rho, z) \rangle = 0, \\ \langle E_{R_1} E_{R_2} \rangle &= \langle E_{j_1} E_{j_2} \rangle, \quad \langle E_{R_1} E_{j_2} \rangle = -\langle E_{R_2} E_{j_1} \rangle, \end{aligned} \quad (6.21)$$

где

$$E_{R_k} \equiv E_R(\rho_k, z), \quad E_{j_k} \equiv E_j(\rho_k, z).$$

Обратимся теперь к неисчезающему второму моменту — функции взаимной когерентности $\langle E(\rho_1, z) E^*(\rho_2, z) \rangle$. Решение уравнения для этой функции известно (см. гл. 3) для произвольного распределения источников в плоскости излучения. Использование этого решения позволяет определить корреляции между E_R и E_j :

$$\langle E_{R_1} E_{R_2} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \langle E(\rho_1, z) E^*(\rho_2, z) \rangle \quad (6.22)$$

и

$$\langle E_{j_1} E_{j_2} \rangle = \frac{1}{2} \text{Im} \langle E(\rho_1, z) E^*(\rho_2, z) \rangle, \quad (6.23)$$

а также корреляции между E_R , E_j и производными от этих величин по поперечным координатам E'_R , E'_j .

На больших дистанциях распространения волновое возмущение в некоторой точке пространства образуется как результат суперпозиции многократно рассеянных волн. В предположении, что различные многократно рассеянные компоненты статистически независимы и достаточно многочисленны, применение центральной предельной теоремы показывает, что результирующее поле распределено по нормальному закону. Об этом же говорят некоторые надежно установленные факты *). Так, в работе ⁶⁴ получено, что флуктуации амплитуды поля в режиме насыщенных мерцающей плоской волны на фазовом экране с гауссовыми неоднородностями подчиняются релеевскому закону. В работах ^{256, в} получено, что функция когерентности четвертого порядка волны, распространяющейся в статистически однородной среде с одним характерным масштабом неоднородностей, связана с функцией когерентности второго порядка так же, как и при нормальном законе распределения поля, если мерцания являются насыщенными. В турбулентной среде со степенным спектром неоднородностей расчеты корреляционных характеристик флуктуаций интенсивности показывают, однако, что стремление их к асимптотическому виду с увеличением дистанций распространения (или силы турбулентности) происходит довольно медленно ^{26, 27, 29} (см. гл. 4).

Здесь мы ограничимся использованием нормального закона функции распределения вероятностей для поля, хотя отклонения функции распределения от нормального вида легко учесть, используя разложение в ряд Эджворта ¹²³; будем также считать E_R , E_j , E'_R и E'_j попарно некоррели-

*) В работе ¹²⁵ получено, что на больших дистанциях распространения n -й момент интенсивности пропорционален n , $\langle I^n \rangle \sim n$, где $n = 1, 2, \dots$, и тем самым «опровергается» гипотеза о нормальном распределении для поля на больших глубинах в среде. Легко видеть, однако, что этот результат ошибочен. Действительно, составляя дисперсию величины I^n , получим при $n \geq 2$ $\sigma_I^n = \langle I^{2n} \rangle - \langle I^n \rangle^2 \leq 0$, что невозможно. Результат $\sigma_I^2 = \langle I \rangle^2$ также нельзя считать доказанным в работе ¹²⁵, так как в ¹²⁵ используется один и тот же метод при всех $n = 1, 2, \dots$.

рованными, так что приводимые ниже формулы справедливы только в приосевой области пучка. В этих предположениях для искоемых статистических характеристик выбросов получаем

$$\langle S(I_{\Pi}) \rangle \approx \frac{\pi}{2} \frac{\langle I \rangle^2}{I_{\Pi} \sigma'^2}, \quad (6.24)$$

$$\langle N(I_{\Pi}) \rangle \approx \frac{2}{\pi} \frac{I_{\Pi} \sigma'^2}{\langle I \rangle^2} \exp\left(-\frac{I_{\Pi}}{\langle I \rangle}\right), \quad (6.25)$$

$$\langle l(I_{\Pi}) \rangle \approx \sqrt{\frac{\pi}{2^3}} \frac{\langle I \rangle}{\sqrt{I_{\Pi}} \sigma'} \exp\left(\frac{I_{\Pi}}{2\langle I \rangle}\right); \quad (6.26)$$

$$\sigma'^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \langle E(x_1, 0, z) E^*(x_2, 0, z) \rangle |_{x_1=x_2=0}. \quad (6.27)$$

Эти выражения показывают, что средние характеристики выбросов интенсивности излучения над уровнем I_{Π} , в определенное число раз превышающем среднее значение интенсивности $\langle I \rangle$, определяются частным значением функции взаимной когерентности $\langle E(\rho_1, z) E^*(\rho_2, z) \rangle$ при совпадающих аргументах и второй производной от этой функции по поперечным координатам. Вычисление этих параметров для каждого конкретного случая легко провести, используя результаты, приведенные в гл. 3.

Приведем пример для коллимированного гауссового пучка с исходным эффективным диаметром ≈ 10 см при длине волны излучения $\lambda = 1$ мкм. На дистанции $z \approx 3,7$ км ($\Omega = 4$) при слабой турбулентности, когда $C_n^2 = 3 \cdot 10^{-16}$ см $^{-2/3}$, получим согласно (6.9), (6.10): $\langle S(10\langle I \rangle) \rangle = 1,4$ см 2 , $\langle N(10\langle I \rangle) \rangle \approx 4 \cdot 10^{-3}$ см $^{-2}$.

Отметим, наконец, что задача экспериментального определения параметров пространственных выбросов интенсивности весьма сложна. В этом направлении, однако, уже имеются первые работы¹²⁶.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше были изложены основные результаты исследований распространения электромагнитного излучения в случайных слабонеоднородных средах, полученные в последние годы. Следует подчеркнуть, что в решении центральной проблемы в этой области — проблемы теоретического и экспериментального описания эффектов многократного рассеяния волн на крупномасштабных флуктуациях показателя преломления, в настоящее время достигнут существенный прогресс. Здесь получены дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию моментов поля излучения в случайно-неоднородных средах, и установлены (достаточные) условия их применимости. Разработаны регулярные методы построения асимптотических решений таких уравнений. Получены конкретные результаты для первого и второго моментов интенсивности, для ряда различных типов исходного излучения и различных моделей случайно-неоднородных сред. В большинстве случаев имеется удовлетворительное согласие результатов корреляционной теории насыщенных флуктуаций интенсивности излучения с экспериментальным материалом.

Число задач, представляющих как практический, так и научный интерес в этой области, которые ждут своего решения, однако, весьма велико. Пожалуй, правильно было бы сказать, что работы, выполненные к настоящему времени, заложили лишь принципиальные основы для обширного фронта исследований в будущем. Так, до сих пор не создана теория, описывающая насыщенные флуктуации интенсивности существенно ограниченного пучка. Нет работ, посвященных описанию временных спектров флуктуаций интенсивности в области насыщения, хотя здесь накоплен

обширный экспериментальный материал. Большой интерес представляет изучение асимптотического поведения решения уравнений для более высоких моментов поля. Выяснение этого вопроса важно для установления вида функции распределения поля на больших дистанциях распространения в турбулентной среде. Следует и дальше развивать работы, посвященные экспериментальному и теоретическому изучению пространственных выбросов интенсивности излучения. Наконец, задачи, имеющие чисто прикладной характер, просто невозможно перечислить.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Луговой, А. М. Прохоров, УФН **111**, [203 (1973).
2. S. A. Akhmanov, A. S. Chirkin, K. N. Drabovich, A. I. Kovgigin, R. V. Khokhlov, A. P. Sukhorikov, IEEE J. Quantum Electron. **QE-4**, 568 (1968).
3. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, М., Изд-во АН СССР, 1958.
4. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, М., «Наука», 1966.
5. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, М., «Наука», 1967.
6. E. W. Ockner, IEEE Trans. Communication Technology Com-18, 396 (1970).
7. R. S. Lawrence, J. W. Strohbehn, Proc. IEEE **58**, 1523 (1970).
8. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН **102**, 3 (1970).
9. В. В. Писарева, Изв. вузов (Радиофизика) **4**, 376 (1961).
10. Л. А. Чернов, сборник «III всесоюзный симпозиум по дифракции волн», М., «Наука», 1964, стр. 224.
11. В. И. Шишов, Тр. ФИАН СССР **38**, 171 (1967).
12. Л. С. Долин, Изв. вузов (Радиофизика) **11**, 840 (1968).
13. Л. А. Чернов, Акуст. ж. **15**, 554 (1969).
14. Л. А. Чернов, Сборник рефератов докладов на VI Всесоюзной акустической конференции, М., 1968. А-III.
15. W. P. Gowen, Jr., IEEE Trans. **AP-15**, 81 (1967).
16. D. A. de Wolf, Radio Sci. **2**, 1379 (1967).
17. В. И. Шишов, Изв. вузов (Радиофизика) **11**, 866 (1968).
18. В. И. Татарский, ЖЭТФ **56**, 2107 (1969).
19. J. J. McCouy, J. Opt. Soc. Am. **62**, 30 (1972).
20. M. Vejan, T. Ho, *ibid.* **59**, 1134 (1969).
21. M. J. Vejan, *ibid.* **60**, 518 (1970).
22. J. E. Moloney, *ibid.* **61**, 248 (1971).
23. W. P. Gowen, *ibid.* **62**, 45 (1972).
24. K. Furgutz, *ibid.* p. 240.
25. В. И. Шишов, а) Изв. вузов (Радиофизика) **14**, 85 (1970); б) ЖЭТФ **61**, 1399 (1971); в) Изв. вузов (Радиофизика) **15**, 904 (1972).
26. К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов а) Optica Acta **18**, 313 (1971); Opto electronics **6**, 491 (1974); сборник «Тезисы докладов на II всесоюзном симпозиуме по распространению лазерного излучения в атмосфере», Томск, 1973, стр. 216; б) Optica Acta **18**, 767 (1971); ЖЭТФ **66** 1237 (1974); цит. в ^{26а} сборник, стр. 219.
27. К. С. Гочелашвили, В. Г. Певгов, В. И. Шишов, Квант. электроника **1** 1156 (1974).
28. A. L. Vuck, Appl. Optics **6**, 703 (1967).
29. К. С. Гочелашвили, а) Квант. электроника **1** 848 (1974); б) Препринт ФИАН СССР № 77, Москва, 1970; Изв. вузов (Радиофизика) **14**, 592 (1971); в) Препринт ФИАН СССР № 172, Москва, 1971; Optica Acta **20**, 193 (1973).
30. Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, а) Изв. вузов (Радиофизика) **11**, 1864 (1968); б) *ibid.* **12**, 875 (1969).
31. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ **58**, 621 (1970).
32. W. P. Gowen, Jr., сборник «Modern Optics», Ed. J. Fox, Brooklyn, Polytechnic. Inst. Press, 1967, p. 717.
33. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов (Радиофизика) **14**, 1400 (1971).
34. G. R. Ochs, C. G. Little, Proc. of the Conference on Tropospheric Wave Propagation, London, IEE, 1968, p. 199.

35. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, Сборник рефератов докладов на IX все-союзной конференции по распространению радиоволн, Харьков, 1969.
36. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, Изв. вузов (Физика), № 3, 91 (1972).
37. В. Я. Съедин, Канд. диссертация (Томск, ТГУ, 1973).
38. М. А. Каллпстратова, В. В. Покасов, Изв. вузов (Радиофизика) 14, 1200 (1971).
39. И. А. Старобинец, *ibid.* 15, 738 (1972).
40. Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, Препринт ФИАН СССР № 164, Москва, 1969; Изв. вузов (Радиофизика) 13, 1039 (1970).
41. Н. Г. Денисов, Ю. А. Рыжов, Радиотехн. и электрон. 9, 1944 (1964).
42. Р. Вексман, J. Res. NBS 69, 629 (1969).
43. J. L. Poirier, D. Korff, J. Opt. Soc. Am. 62, 893 (1972).
44. T. L. Ho, *ibid.* 60, 667 (1970).
45. А. И. Кош, В. П. Татарский, Изв. вузов (Радиофизика) 8, 870 (1965).
46. F. G. Gebhardt, S. A. Collins, J. Opt. Soc. Am. 59, 1139 (1969).
47. З. И. Фейзулин, Ю. А. Кравцов, Изв. вузов (Радиофизика) 10, 68 (1967).
48. А. И. Кош, *ibid.* 13, 61 (1970).
49. R. F. Lutomirski, H. T. Yura, Appl. Optics 10, 1652 (1971).
50. S. Okafuji, Technol. Rept. Kiushu Univ. 41, 123 (1968).
51. H. Bremmer, J. Res. NBS D68, 967 (1964).
52. Л. С. Долли, Изв. вузов (Радиофизика) 7, 380 (1964).
53. H. T. Yura, J. Opt. Soc. Am. 62, 889 (1972).
54. W. P. Brown, Jr., *ibid.* 61, 1051 (1971).
55. A. M. Whitman, M. J. Veegan, *ibid.* 60, 1595 (1970).
56. В. И. Татарский, Препринт Отделения океанологии, физики атмосферы и географии АН СССР, № 1, Москва, 1970; The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation (translated for NOAA by Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971), available from U.S. Dept. of Commerce, NTIS, Springfield, Va. 22151.
57. H. T. Yura, J. Opt. Soc. Am. 63, 107 (1973).
58. R. F. Lutomirski, H. T. Yura, *ibid.* 61, 482 (1971).
59. В. Л. Миронов, С. С. Хмелевцов, Изв. вузов (Радиофизика) 15, 743 (1972).
60. M. J. Veegan, A. M. Whitman, J. Opt. Soc. Am. 61, 1044 (1971).
61. R. E. Hufnagel, N. R. Stanley, *ibid.* 54, 52 (1964).
62. А. В. Артемьев, А. С. Гурвич, Изв. вузов (Радиофизика) 15, 734 (1971).
63. В. В. Писарева, Астрон. ж. 36, 112 (1958).
64. R. P. Mercier, Proc. Cambr. Philos. Soc. 58, 382 (1962).
65. E. E. Salpeter, Astrophys. J. 147, 433 (1967).
66. Я. И. Альберт, Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжков, В. П. Урядов, Изв. вузов (Радиофизика) 11, 1371 (1968).
67. R. Vucley, Austr. J. Phys. 24, 351 (1971).
68. M. H. Cohen, E. J. Guderhann, П. Е. Нардебек, Л. Е. Шагр, Astrophys. J. 147, 449 (1967).
69. Ю. А. Кравцов, ЖЭТФ 55, 798 (1968).
70. D. A. de Wolf, J. Opt. Soc. Am. 63, 171 (1973).
71. И. М. Дагкесаманская, В. И. Шишов, Изв. вузов (Радиофизика) 13, 16 (1970).
72. W. P. Brown, Jr., J. Opt. Soc. Am. 62, 966 (1972).
73. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов (Радиофизика) 13, 1061 (1970).
74. В. А. Банах, Г. М. Креков, В. Л. Миронов, *ibid.* 17, 252 (1974).
75. R. A. Schmeltzer, Quart. J. Appl. Math. 34, 339 (1967).
76. D. L. Fried, J. V. Seidman, J. Opt. Soc. Am. 57, 181 (1967).
77. A. Ishimaru, Radio Sci. 4, 1 (1969).
78. З. И. Фейзулин, Радиотехн. и электрон. 15, 1390 (1970).
79. Y. Kinoshita, M. Suzuki, T. Matsumoto, Radio Sci. 3, 287 (1968).
80. Y. Kinoshita, T. Asakura, M. Suzuki, J. Opt. Soc. Am. 58, 1040 (1968).
81. T. Asakura, Y. Kinoshita, Japan J. Appl. Phys. 8, 260 (1969).
82. Н. С. Тиме, Изв. вузов (Радиофизика) 14, 1195 (1971).
83. В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев, *ibid.* 15, 865 (1972).
84. P. J. Titterton, J. Opt. Soc. Am. 63, 439 (1973).
85. R. W. Lee, J. C. Harp, Proc. IEEE 57, 375 (1969).
86. Y. Kinoshita, T. Asakura, M. Suzuki, J. Opt. Soc. Am. 58, 798 (1968).
87. A. Ishimaru, Proc. IEEE 57, 407 (1969).
88. T. L. Ho, J. Opt. Soc. Am. 59, 385 (1969).
89. K. S. Gochelashvili, V. I. Shishov, Optica Acta 19, 327 (1972).

90. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ 57, 952 (1969).
91. А. И. Кон, Изв. вузов (Радиофизика) 15, 533 (1972).
92. L. T. Little, A. Hewish, Mon. Not. RAS 134, 221 (1966).
93. В. И. Шишов, Изв. вузов (Радиофизика) 15, 1277 (1972).
94. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, *ibid.* 10, 620 (1967).
95. L. T. Little, Planet and Space Sci. 16, 749 (1968).
96. В. И. Шишов, Изв. вузов (Радиофизика) 16, 423 (1973).
97. E. E. Salpeter, Nature 221, 31 (1969).
98. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Н. С. Тиме, Изв. вузов (Радиофизика) 11, 1360 (1968).
99. G. R. Ochs, R. R. Bergman, J. R. Snyder, J. Opt. Soc. Am. 59, 231 (1969).
100. G. R. Ochs, R. C. Lawrence, *ibid.*, p. 226.
101. Y. Furuhashi, M. Fikushima, Boundary-Layer Meteorology 4, 433 (1973).
102. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. вузов (Радиофизика) 13, 56 (1970).
103. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, М. Ф. Небольсин, *ibid.*, стр. 44.
104. R. H. Kleen, G. R. Ochs, J. Opt. Soc. Am. 60, 1695 (1970).
105. А. С. Гурвич, Вл. В. Покасов, Изв. вузов (Радиофизика) 16, 913 (1973).
106. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. С. Кашкаров, Вл. В. Покасов, Препринт Отделения океанологии, физики атмосферы и географии АН СССР, № 00, Москва, 1973.
107. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цвык, Изв. вузов (Радиофизика) 15, 798 (1972).
108. J. R. Kerr, J. R. Dunphy, J. Opt. Soc. Am. 63, 1 (1973).
109. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, И. А. Старобинец, Радиотехн. и электрон. 15, 1290 (1970).
110. С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цвык, Изв. вузов (Радиофизика) 13, 146 (1970).
111. P. M. Deitz, N. J. Wright, J. Opt. Soc. Am. 59, 527 (1969).
112. J. A. Dowling, P. M. Livingston, *ibid.* 63, 846 (1973).
113. Э. И. Гельфер, Н. И. Муравьев, С. Е. Финкельштейн, А. М. Черемухин, Изв. вузов (Радиофизика) 14, 1838 (1971).
114. А. Н. Гордеев, А. Лейва, О. М. Феррари, сборник «Радиофизика и распространение электромагнитных волн», Труды Ун-та Дружбы народов 47, 92 (1970).
115. Т. И. Арсеньян, Ф. Ф. Пашков, А. А. Семенов, А. А. Тищенко, Н. Н. Римский, Изв. вузов (Радиофизика) 15, 1228 (1972).
116. S. F. Clifford, G. M. V. Bouricius, G. R. Ochs, M. H. Askleu, J. Opt. Soc. Am. 61, 1279 (1971).
117. В. П. Лукин, В. В. Покасов, С. С. Хмелевцов, Изв. вузов (Радиофизика) 15, 1861 (1972).
118. В. П. Лукин, В. Л. Миронов, В. В. Покасов, С. С. Хмелевцов, Радиотехн. и электрон. 18, 502 (1973).
119. A. Consortini, L. Ronchi, Nuovo Cimento 2, 683 (1969).
120. К. С. Гочелашвили, Радиотехн. и электрон. 17, 1093 (1972).
121. J. P. Laussad, A. Yagiv, J. Somly, Appl. Optics 8, 1607 (1969).
122. М. Е. Грачева, Изв. вузов (Радиофизика) 10, 775 (1967).
123. В. И. Тихонов, Выбросы случайных процессов, М., «Наука», 1970.
124. D. L. Fried, G. E. Mevers, M. P. Keister, J. Opt. Soc. Am. 57, 787 (1967).
125. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ 60, 1300 (1971).
126. Э. И. Гельфер, А. С. Гурвич, А. М. Черемухин, Изв. вузов (Радиофизика) 14, 1208 (1971).