

Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Часть II

Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко

Новосибирский государственный технический университет

E-mail: Lemeshko@fpm.ami.nstu.ru

В работе приводятся уточненные результаты (таблицы процентных точек и модели распределений статистик) для непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно семейств гамма-распределения и двустороннего экспоненциального закона в случае использования оценок максимального правдоподобия.

Ключевые слова: критерии согласия, проверка сложных гипотез, критерий Колмогорова, критерий Крамера-Мизеса-Смирнова, критерий Андерсона-Дарлинга, гамма-распределение, двустороннее экспоненциальное распределение.

1. Введение

Напомним, что при проверке сложных гипотез вида $H_0: F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$, где оценка $\hat{\theta}$ скалярного или векторного параметра распределения $F(x, \theta)$ вычисляется по той же самой выборке, непараметрические критерии согласия Колмогорова, ω^2 Крамера-Мизеса-Смирнова, Ω^2 Андерсона-Дарлинга теряют свойство свободы от распределения.

В настоящей статье, которая является завершением работы [1], представлены результаты исследований распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно семейств гамма-распределений и двустороннего экспоненциального закона. В

данном случае предельные распределения $G(S|H_0)$ статистик критериев согласия зависят не только от вида наблюдаемого закона $F(x, \theta)$, соответствующего справедливой проверяемой гипотезе H_0 ; от типа оцениваемого параметра и числа оцениваемых параметров; от метода оценивания параметров, но и от конкретного значения параметра формы закона.

При проверке гипотез с применением критерия Колмогорова рекомендуется использовать статистику с поправкой Большева [2,3] в форме [4]

$$S_K = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}, \quad (1)$$

где $D_n = \max(D_n^+, D_n^-)$,

$$D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_i, \theta) \right\}, \quad D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{i-1}{n} \right\},$$

n – объем выборки, x_1, x_2, \dots, x_n – упорядоченные по возрастанию элементы выборки.

В критерии ω^2 Крамера-Мизеса-Смирнова используется статистика вида [4]

$$S_\omega = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2, \quad (2)$$

а в критерии типа Ω^2 Андерсона-Дарлинга [4] – статистика в форме

$$S_\Omega = -n - 2 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2i-1}{2n} \ln F(x_i, \theta) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n} \right) \ln(1 - F(x_i, \theta)) \right\}. \quad (3)$$

2. Уточнение моделей распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае гамма-распределения

При проверке сложных гипотез относительно гамма-распределения с плотностью

$$f(x, \theta) = \frac{x^{\theta_0 - 1}}{\theta_1^{\theta_0} \Gamma(\theta_0)} \exp\left(-\frac{x}{\theta_1}\right)$$

предельные распределения $G(S|H_0)$ статистик непараметрических критериев согласия зависят от конкретного значения параметра формы θ_0 . Например, рисунок 1 иллюстрирует зависимость распределения статистики Колмогорова от значения θ_0 при проверке сложных гипотез в случае вычисления оценок максимального правдоподобия (ОМП) масштабного параметра гамма-распределения (только одного из параметров).

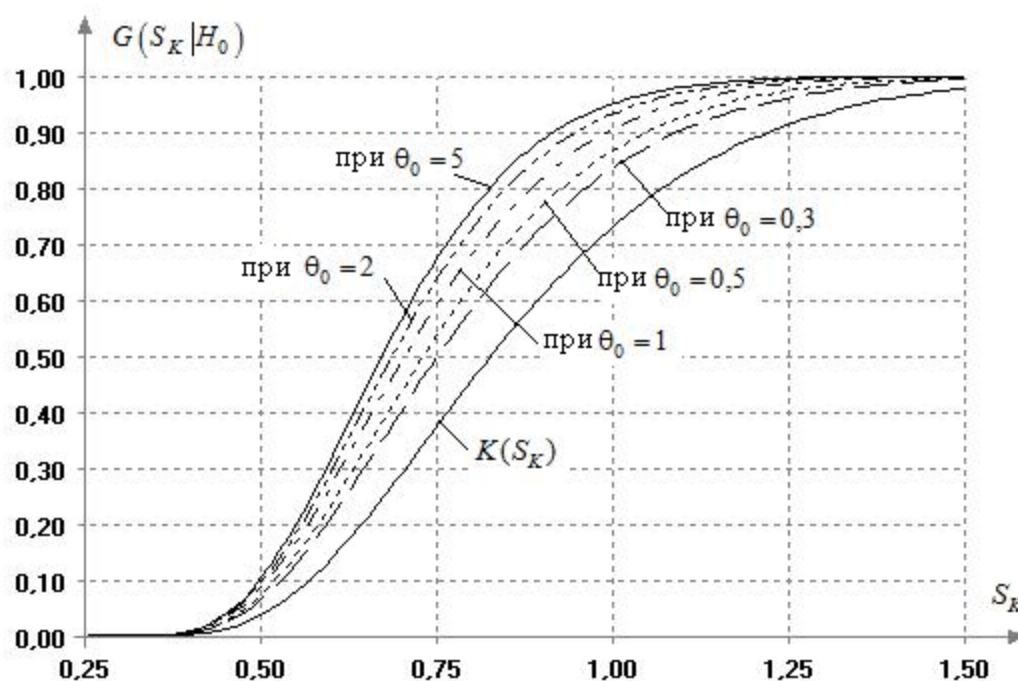


Рис. 1. Распределения статистики (1) критерия Колмогорова при проверке сложных гипотез относительно гамма-распределения при вычислении ОМП только масштабного параметра θ_1 в зависимости от значения параметра формы

Верхние процентные точки, полученные в результате статистического моделирования, и построенные модели предельных распределений статистики критерия Колмогорова при использовании ОМП в случае гамма-распределения приведены в таблице 1, для критерия Крамера-Мизеса-Смирнова – в таблице 2, для критерия Андерсона-Дарлинга – в таблице 3. В этих случаях распределения

статистик хорошо аппроксимируются семейством бета-распределений III-го типа с функцией плотности

$$B_3(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left(\frac{x - \theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \frac{x - \theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1 - 1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1) \frac{x - \theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0 + \theta_1}}.$$

Верхние процентные точки и модели распределений статистик, представленные в таблицах 1-3, уточняют результаты приведенные в рекомендациях по стандартизации Р 50.1.037-2002 [5]. При значениях параметра формы, не совпадающих с табличными, приближенные процентные точки могут быть получены в результате интерполяции.

Таблица 1. Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистики критерия Колмогорова при проверке гипотез относительно гамма-распределения при использовании ОМП

Значение параметра формы	Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
		0.1	0.05	0.01	
0.3	Масштаба	1.096	1.211	1.444	$B_3(6.6871, 4.8368, 4.4047, 1.9440, 0.281)$
	Формы	0.976	1.070	1.262	$B_3(6.4536, 5.7519, 3.3099, 1.6503, 0.280)$
	2 параметра	0.905	0.990	1.162	$B_3(6.9705, 5.6777, 3.6297, 1.5070, 0.270)$
0.5	Масштаба	1.051	1.160	1.379	$B_3(6.9356, 5.0081, 4.3582, 1.8470, 0.280)$
	Формы	0.961	1.052	1.236	$B_3(6.3860, 5.9685, 3.1228, 1.6154, 0.280)$
	2 параметра	0.884	0.965	1.131	$B_3(6.4083, 5.9339, 3.2063, 1.4483, 0.2774)$
1.0	Масштаба	0.994	1.095	1.299	$B_3(6.7187, 5.3740, 3.7755, 1.6875, 0.282)$
	Формы	0.936	1.022	1.191	$B_3(6.1176, 6.4704, 2.6933, 1.5501, 0.280)$
	2 параметра	0.862	0.940	1.097	$B_3(5.6031, 6.1293, 2.7065, 1.3607, 0.2903)$
2.0	Масштаба	0.952	1.044	1.228	$B_3(5.8359, 22.6032, 2.1921, 4.00, 0.282)$
	Формы	0.915	0.995	1.155	$B_3(6.1387, 6.5644, 2.6021, 1.4840, 0.280)$
	2 параметра	0.849	0.924	1.077	$B_3(5.8324, 6.1446, 2.7546, 1.3280, 0.2862)$
3.0	Масштаба	0.933	1.020	1.200	$B_3(5.9055, 24.4312, 2.0996, 4.00, 0.282)$
	Формы	0.906	0.985	1.140	$B_3(6.1221, 6.6131, 2.5536, 1.4590, 0.280)$
	2 параметра	0.845	0.919	1.070	$B_3(6.0393, 6.1276, 2.8312, 1.3203, 0.2827)$
4.0	Масштаба	0.923	1.008	1.181	$B_3(5.9419, 27.1264, 1.9151, 4.00, 0.282)$
	Формы	0.901	0.980	1.132	$B_3(6.0827, 6.7095, 2.4956, 1.4494, 0.280)$
	2 параметра	0.843	0.916	1.066	$B_3(6.1584, 6.1187, 2.8748, 1.31704.00, 0.2807)$
5.0	Масштаба	0.917	1.000	1.170	$B_3(5.8774, 30.0692, 1.7199, 4.00, 0.282)$

	Формы	0.899	0.977	1.127	$V_3(6.0887, 6.7265, 2.4894, 1.4432, 0.280)$
	2 параметра	0.842	0.915	1.063	$V_3(6.1957, 6.1114, 2.8894, 1.3140, 0.2801)$

Таблица 2. Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистики критерия Крамера-Мизеса-Смирнова при проверке гипотез относительно гамма-распределения при использовании ОМП

Значение параметра формы	Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
		0.1	0.05	0.01	
0.3	Масштаба	0.233	0.305	0.482	$V_3(3.2722, 1.9595, 16.1768, 0.750, 0.013)$
	Формы	0.166	0.209	0.316	$V_3(3.0247, 3.2256, 11.113, 0.7755, 0.0125)$
	2 параметра	0.127	0.158	0.233	$V_3(2.3607, 4.0840, 7.0606, 0.6189, 0.0145)$
0.5	Масштаба	0.205	0.264	0.413	$V_3(3.2296, 2.1984, 14.3153, 0.700, 0.013)$
	Формы	0.159	0.199	0.298	$V_3(3.0143, 3.3504, 10.095, 0.7214, 0.0125)$
	2 параметра	0.119	0.146	0.212	$V_3(2.7216, 3.9844, 7.4993, 0.5372, 0.013)$
1.0	Масштаба	0.175	0.220	0.336	$V_3(3.1201, 2.5460, 11.1200, 0.600, 0.013)$
	Формы	0.149	0.186	0.273	$V_3(2.9928, 3.4716, 8.8275, 0.6346, 0.0125)$
	2 параметра	0.111	0.136	0.194	$V_3(3.0000, 3.8959, 7.3247, 0.4508, 0.012)$
2.0	Масштаба	0.155	0.193	0.288	$V_3(2.9463, 3.1124, 9.1160, 0.600, 0.013)$
	Формы	0.142	0.176	0.256	$V_3(2.9909, 3.5333, 8.2010, 0.5786, 0.0125)$
	2 параметра	0.107	0.131	0.185	$V_3(3.0533, 3.9402, 7.1173, 0.4246, 0.0118)$
3.0	Масштаба	0.148	0.184	0.272	$V_3(2.8840, 3.3796, 8.4342, 0.600, 0.013)$
	Формы	0.139	0.172	0.251	$V_3(2.9737, 3.5528, 7.8843, 0.5549, 0.0125)$
	2 параметра	0.106	0.129	0.182	$V_3(3.0703, 3.9618, 7.034, 0.4163, 0.0117)$
4.0	Масштаба	0.145	0.179	0.264	$V_3(2.8522, 3.5285, 8.1044, 0.600, 0.013)$
	Формы	0.138	0.171	0.248	$V_3(2.9677, 3.5426, 7.7632, 0.5418, 0.0125)$
	2 параметра	0.105	0.128	0.180	$V_3(3.0967, 3.9539, 7.064, 0.4122, 0.0116)$
5.0	Масштаба	0.142	0.176	0.259	$V_3(2.8249, 3.6280, 7.8756, 0.6000, 0.013)$
	Формы	0.137	0.169	0.246	$V_3(2.9638, 3.5465, 7.6558, 0.5334, 0.0125)$
	2 параметра	0.105	0.128	0.179	$V_3(4.4332, 3.6256, 10.552, 0.4098, 0.0084)$

Таблица 3. Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистики критерия Андерсона-Дарлинга при проверке гипотез относительно гамма-распределения при использовании ОМП

Значение параметра формы	Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
		0.1	0.05	0.01	
0.3	Масштаба	1.300	1.655	2.543	$V_3(3.3848, 2.8829, 14.684, 6.0416, 0.1088)$
	Формы	1.021	1.258	1.865	$V_3(3.1073, 3.7039, 8.6717, 4.3439, 0.1120)$
	2 параметра	0.718	0.870	1.233	$V_3(4.5322, 4.060, 10.0718, 2.9212, 0.078)$
0.5	Масштаба	1.183	1.490	2.260	$V_3(5.0045, 2.9358, 18.8524, 5.2436, 0.077)$
	Формы	0.993	1.221	1.791	$V_3(3.1104, 3.7292, 8.0678, 4.0132, 0.1120)$
	2 параметра	0.684	0.824	1.145	$V_3(5.0079, 4.056, 10.0292, 2.5872, 0.073)$

1.0	Масштаба	1.058	1.313	1.955	$B_3(5.0314, 3.1848, 15.4626, 4.3804, 0.077)$
	Формы	0.952	1.166	1.696	$B_3(3.1149, 3.7919, 7.4813, 3.6770, 0.1120)$
	2 параметра	0.657	0.785	1.084	$B_3(5.0034, 4.1093, 9.1610, 2.3427, 0.073)$
2.0	Масштаба	0.980	1.203	1.771	$B_3(4.9479, 3.3747, 13.0426, 3.8304, 0.077)$
	Формы	0.922	1.125	1.625	$B_3(3.0434, 4.1620, 7.1516, 3.8500, 0.1120)$
	2 параметра	0.643	0.766	1.051	$B_3(4.9237, 4.2091, 8.6643, 2.2754, 0.073)$
3.0	Масштаба	0.952	1.163	1.702	$B_3(5.0367, 3.4129, 12.9013, 3.6867, 0.077)$
	Формы	0.912	1.110	1.601	$B_3(3.0565, 3.9092, 6.7844, 3.3972, 0.1120)$
	2 параметра	0.639	0.761	1.043	$B_3(4.9475, 4.2070, 8.6686, 2.2512, 0.073)$
4.0	Масштаба	0.937	1.141	1.662	$B_3(4.9432, 3.5038, 12.2240, 3.6302, 0.077)$
	Формы	0.906	1.103	1.590	$B_3(3.0531, 3.9437, 6.7619, 3.3993, 0.1120)$
	2 параметра	0.637	0.758	1.039	$B_3(4.9274, 4.2279, 8.5573, 2.2390, 0.073)$
5.0	Масштаба	0.927	1.130	1.640	$B_3(4.8810, 3.5762, 11.7894, 3.6051, 0.077)$
	Формы	0.902	1.099	1.586	$B_3(3.0502, 3.9640, 6.7510, 3.4024, 0.1120)$
	2 параметра	0.636	0.757	1.037	$B_3(4.9207, 4.2432, 8.4881, 2.2314, 0.073)$

3. Уточнение моделей распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае двустороннего экспоненциального закона

При проверке сложных гипотез относительно закона с плотностью

$$f(x, \theta) = \frac{\theta_0}{2\theta_1\Gamma(1/\theta_0)} \exp\left\{-\left(\frac{|x - \theta_2|}{\theta_1}\right)^{\theta_0}\right\} \quad (4)$$

распределения $G(S|H_0)$ статистик непараметрических критериев согласия зависят от конкретного значения параметра формы θ_0 .

Семейство (4) задает широкий спектр симметричных законов, частными случаями которого являются при значении параметра формы $\theta_0=2$ нормальное распределение, а при $\theta_0=1$ – распределение Лапласа. Иногда это распределение называют двусторонним экспоненциальным [6], хотя, как правило, в этом случае подразумевается, что $\theta_0=1$, иногда – экспоненциальным семейством распределений. Однако в последнем случае следует учитывать, что под определением экспоненциального семейства понимается более широкий класс распределений.

В отличие от ситуации с гамма-распределением, где с ростом параметра формы соответствующие распределения статистик непараметрических критериев согласия сдвигаются в область меньших значений статистик, особенность поведения распределений $G(S|H_0)$ при проверке гипотез относительно семейства (4) заключается в том, что с ростом параметра формы до величины $\theta_0 \approx 1.64$ распределения $G(S|H_0)$ смещаются вправо, а при дальнейшем росте θ_0 начинается смещение в обратном направлении (см. рис. 2).

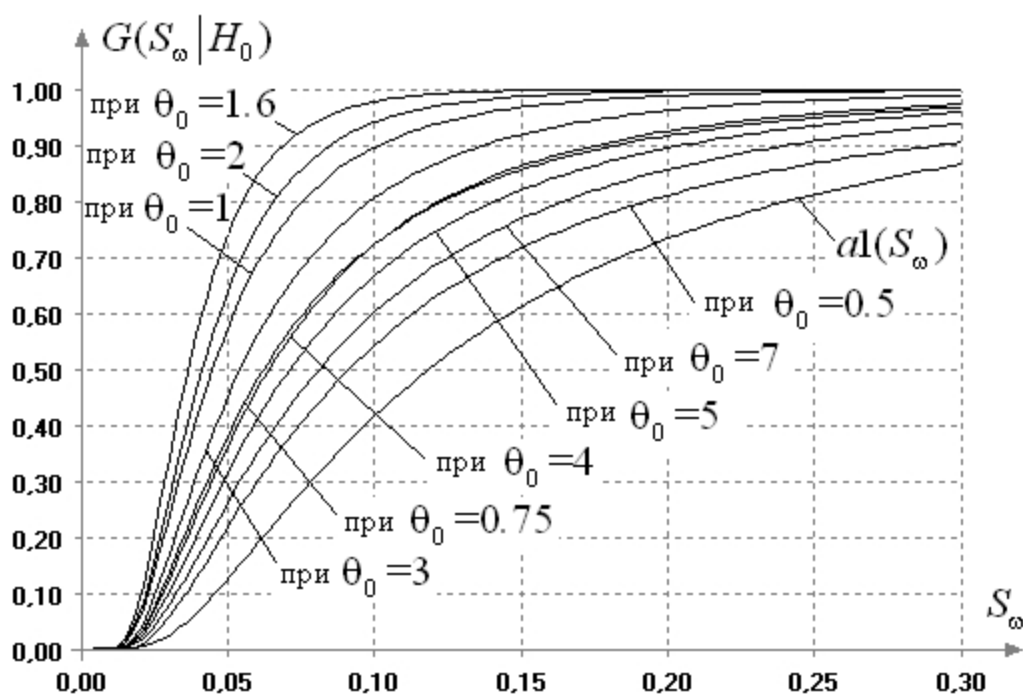


Рис. 2. Распределения статистики (2) критерия Крамера-Мизеса-Смирнова при проверке сложных гипотез относительно распределений семейства (4) при вычислении ОМП всех трех параметров в зависимости от значения параметра формы θ_0

Верхние процентные точки, полученные в результате статистического моделирования, и построенные модели предельных распределений статистик критериев Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга при значениях параметра формы $\theta_0 = 0.5, 0.75, 1, 1.6, 2, 3, 4, 5, 7$ для случая использования ОМП представлены в таблицах 4-12. Эти результаты уточняют и дополняют, приведенные в [7]. При значениях параметра формы θ_0 , не

совпадающих с табличными, приближенные процентные точки могут быть получены в результате интерполяции.

Распределения статистик критериев хорошо аппроксимируются семейством бета-распределений III-го рода B_3 $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, семейством гамма-распределений с плотностью

$$\gamma(\theta_0, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_1^{\theta_0} \Gamma(\theta_0)} (x - \theta_2)^{\theta_0 - 1} e^{-x - \theta_2 / \theta_1},$$

семейством распределений *Sb*-Джонсона

$$Sb(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{\theta_1 \theta_2}{(x - \theta_3)(\theta_2 + \theta_3 - x)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_0 - \theta_1 \ln \frac{x - \theta_3}{\theta_2 + \theta_3 - x} \right]^2 \right\}$$

или *Sl*-Джонсона

$$Sl(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{\theta_1}{x - \theta_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_0 + \theta_1 \ln \frac{x - \theta_3}{\theta_2} \right]^2 \right\}.$$

Таблица 4. Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае использования ОМП параметров распределений семейства (4) при значении параметра формы $\theta_0 = 0.5$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
для критерия Колмогорова				
θ_0	1.184	1.322	1.596	$\gamma(3.7437, 0.1349, 0.325)$
θ_1	1.165	1.303	1.578	$\gamma(3.5811, 0.1366, 0.325)$
θ_2	1.182	1.308	1.560	$\gamma(4.4361, 0.1186, 0.320)$
θ_0, θ_1	1.123	1.259	1.534	$\gamma(3.1115, 0.1442, 0.330)$
θ_0, θ_2	1.144	1.271	1.528	$\gamma(3.8417, 0.1265, 0.322)$
θ_1, θ_2	1.110	1.233	1.480	$\gamma(3.6713, 0.1251, 0.326)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.129	1.255	1.508	$B_3(4.4961, 5.7241, 3.1229, 2.26825, 0.306)$
для критерия Крамера-Мизеса-Смирнова				
θ_0	0.325	0.441	0.723	$B_3(2.6596, 1.5374, 22.6346, 1.100, 0.015)$

θ_1	0.321	0.435	0.718	$B_3(2.3196, 1.5425, 22.7256, 1.2000, 0.016)$
θ_2	0.318	0.421	0.676	$B_3(2.8412, 1.9552, 17.4052, 1.200, 0.014)$
θ_0, θ_1	0.313	0.428	0.711	$B_3(1.6693, 1.3771, 15.5765, 0.940, 0.017)$
θ_0, θ_2	0.300	0.405	0.664	$B_3(2.4600, 1.7966, 19.8161, 1.20, 0.014)$
θ_1, θ_2	0.286	0.388	0.637	$B_3(3.8085, 1.5324, 32.1564, 0.950, 0.011)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.295	0.399	0.656	$B_3(3.0778, 1.6214, 30.1798, 1.2, 0.013)$
для критерия Андерсона-Дарлинга				
θ_0	1.735	2.303	3.697	$B_3(5.1673, 1.7964, 33.1733, 6.000, 0.088)$
θ_1	1.718	2.286	3.676	$B_3(5.3595, 1.7388, 37.1241, 6.000, 0.087)$
θ_2	1.819	2.335	3.617	$B_3(3.4953, 2.2898, 14.9125, 6.400, 0.116)$
θ_0, θ_1	1.671	2.238	3.633	$B_3(5.786, 1.500, 45.3895, 5.200, 0.08)$
θ_0, θ_2	1.631	2.159	3.454	$B_3(3.1191, 2.0392, 20.4775, 6.600, 0.116)$
θ_1, θ_2	1.578	2.093	3.356	$B_3(3.0953, 2.0351, 22.1953, 6.800, 0.118)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.608	2.132	3.416	$B_3(4.5039, 2.0396, 37.0448, 8.000, 0.092)$

Таблица 5. Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае использования ОМП параметров распределений семейства (4) при значении параметра формы $\theta_0 = 0.75$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
для критерия Колмогорова				
θ_0	1.196	1.333	1.605	$\gamma(3.7808, 0.1349, 0.330)$
θ_1	1.172	1.309	1.584	$B_3(4.5525, 4.9086, 3.8651, 2.3718, 0.315)$
θ_2	1.068	1.173	1.384	$B_3(4.7066, 10.8120, 1.8954, 2.50, 0.302)$
θ_0, θ_1	1.126	1.263	1.560	$B_3(4.0450, 4.9340, 3.7586, 2.3832, 0.310)$
θ_0, θ_2	1.021	1.123	1.328	$B_3(4.9912, 6.4499, 2.6816, 1.90, 0.295)$
θ_1, θ_2	0.985	1.084	1.283	$B_3(5.5451, 7.3578, 3.0559, 2.100, 0.280)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.937	1.032	1.223	$B_3(4.5753, 6.8907, 2.74626, 1.8903, 0.294)$
для критерия Крамера-Мизеса-Смирнова				
θ_0	0.329	0.4440	0.726	$B_3(4.9844, 1.4891, 37.5211, 1.001, 0.0085)$
θ_1	0.322	0.437	0.719	$B_3(6.1042, 1.2892, 53.3676, 0.8800, 0.009)$
θ_2	0.226	0.289	0.443	$B_3(3.5628, 2.6431, 16.5587, 1.030, 0.010)$
θ_0, θ_1	0.313	0.428	0.711	$B_3(1.6779, 1.3775, 15.6587, 0.940, 0.017)$
θ_0, θ_2	0.202	0.265	0.420	$B_3(2.5230, 2.8292, 19.5602, 1.4650, 0.014)$
θ_1, θ_2	0.192	0.255	0.408	$B_3(2.6652, 2.4143, 24.7681, 1.300, 0.013)$

$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.184	0.248	0.404	$B_3(3.2636, 1.7846, 29.6713, 0.800, 0.0118)$
для критерия Андерсона-Дарлинга				
θ_0	1.755	2.322	3.715	$B_3(5.5017, 1.7097, 32.6151, 5.4000, 0.09)$
θ_1	1.721	2.290	3.681	$B_3(5.7288, 1.7042, 38.1627, 5.700, 0.085)$
θ_2	1.422	1.779	2.626	$B_3(3.1406, 2.9653, 10.3579, 5.500, 0.12)$
θ_0, θ_1	1.669	2.236	3.632	$B_3(5.7330, 1.5217, 44.0784, 5.200, 0.078)$
θ_0, θ_2	1.208	1.553	2.410	$B_3(5.9765, 2.6769, 32.3123, 6.400, 0.070)$
θ_1, θ_2	1.166	1.509	2.362	$B_3(6.5437, 2.5007, 38.5262, 6.000, 0.07)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.116	1.465	2.322	$B_3(6.2120, 2.1027, 40.3780, 4.800, 0.075)$

Таблица 6. Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае использования ОМП параметров распределений семейства (4) при значении параметра формы $\theta_0=1$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
для критерия Колмогорова				
θ_0	1.204	1.340	1.613	$\gamma(3.9433, 0.1340, 0.3200)$
θ_1	1.177	1.313	1.587	$B_3(4.4680, 4.8450, 3.9105, 2.3784, 0.324)$
θ_2	0.957	1.045	1.223	$B_3(5.3541, 7.2519, 2.5630, 1.7652, 0.302)$
θ_0, θ_1	1.1300	1.268	1.545	$B_3(3.9724, 4.8877, 3.7872, 2.3973, 0.3150)$
θ_0, θ_2	0.911	0.995	1.162	$B_3(4.9365, 8.1400, 2.2383, 1.7312, 0.3)$
θ_1, θ_2	0.863	0.940	1.095	$\gamma(6.2949, 0.0624, 0.2613)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.798	0.870	1.014	$\gamma(5.5391, 0.0606, 0.2700)$
для критерия Крамера-Мизеса-Смирнова				
θ_0	0.333	0.447	0.7295	$B_3(2.8981, 1.5614, 20.0694, 1.00, 0.014)$
θ_1	0.323	0.438	0.719	$B_3(3.9800, 1.4667, 38.0035, 1.13, 0.0111)$
θ_2	0.152	0.187	0.268	$B_3(3.3130, 3.8338, 10.0967, 0.7517, 0.011)$
θ_0, θ_1	0.313	0.428	0.711	$B_3(3.7712, 1.1413, 38.6694, 0.790, 0.011)$
θ_0, θ_2	0.131	0.162	0.234	$B_3(3.9062, 3.9000, 13.5396, 0.7491, 0.009)$
θ_1, θ_2	0.115	0.144	0.213	$B_3(4.4891, 3.7706, 17.5774, 0.7065, 0.0085)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.103	0.132	0.207	$B_3(5.2856, 3.0510, 34.1638, 0.7312, 0.0079)$
для критерия Андерсона-Дарлинга				
θ_0	1.775	2.342	3.734	$B_3(2.9208, 2.5613, 25.6028, 12.5850, 0.117)$
θ_1	1.725	2.290	3.685	$B_3(4.0842, 1.7532, 28.1434, 6.00, 0.105)$

θ_2	1.071	1.302	1.837	$B_3(4.2270, 3.0430, 8.4289, 3.000, 0.09)$
θ_0, θ_1	1.668	2.235	3.630	$B_3(3.7352, 1.5349, 29.4582, 5.300, 0.098)$
θ_0, θ_2	0.871	1.062	1.522	$B_3(4.8431, 4.1424, 14.2651, 4.6769, 0.073)$
θ_1, θ_2	0.798	0.982	1.439	$B_3(5.3576, 3.8690, 17.2148, 4.2386, 0.073)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.726	1.116	1.394	$B_3(5.2973, 3.3781, 27.5085, 4.8145, 0.073)$

Таблица 7. Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае использования ОМП параметров распределений семейства (4) при значении параметра формы $\theta_0 = 1.6$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
для критерия Колмогорова				
θ_0	1.216	1.351	1.621	$B_3(4.2366, 5.7254, 2.8969, 2.4200, 0.330)$
θ_1	1.185	1.322	1.596	$B_3(4.3698, 5.2853, 3.3545, 2.3863, 0.318)$
θ_2	0.851	0.923	1.069	$B_3(5.4129, 7.6381, 2.1289, 1.3936, 0.290)$
θ_0, θ_1	1.141	1.280	1.557	$B_3(4.9730, 4.5743, 4.6422, 2.3576, 0.29)$
θ_0, θ_2	0.828	0.898	1.039	$B_3(6.2506, 7.4916, 2.5914, 1.4130, 0.275)$
θ_1, θ_2	0.770	0.831	0.953	$B_3(5.3623, 7.3149, 2.1379, 1.1702, 0.29))$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.704	0.759	0.873	$B_3(7.4853, 7.2752, 3.2095, 1.14609, 0.260)$
для критерия Крамера-Мизеса-Смирнова				
θ_0	0.339	0.453	0.735	$Sb(3.6139, 1.0337, 3.400, 0.013)$
θ_1	0.325	0.440	0.723	$Sb(2.7348, 0.9148, 1.800, 0.016)$
θ_2	0.121	0.149	0.219	$B_3(4.5239, 3.7332, 15.6889, 0.6596, 0.009)$
θ_0, θ_1	0.314	0.429	0.711	$Sb(2.3111, 0.8115, 1.350, 0.016)$
θ_0, θ_2	0.109	0.134	0.194	$B_3(4.2190, 3.9949, 12.6139, 0.5642, 0.0087)$
θ_1, θ_2	0.087	0.104	0.143	$B_3(4.5491, 4.8658, 9.0448, 0.4000, 0.008)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.069	0.083	0.118	$B_3(6.8750, 4.6392, 18.020, 0.3937, 0.006)$
для критерия Андерсона-Дарлинга				
θ_0	1.819	2.383	3.774	$B_3(3.7982, 2.4042, 26.2612, 10.00, 0.095)$
θ_1	1.735	2.304	3.697	$B_3(3.6908, 2.1990, 32.1310, 10.00, 0.10)$
θ_2	0.864	1.052	1.513	$B_3(4.0782, 5.1594, 17.0570, 7.900, 0.09)$
θ_0, θ_1	1.669	2.235	3.630	$B_3(4.6625, 1.4267, 33.5120, 4.500, 0.09)$
θ_0, θ_2	0.716	0.863	1.207	$B_3(4.5576, 4.2326, 10.9573, 3.23142, 0.08)$

θ_1, θ_2	0.589	0.695	0.941	$B_3(4.5825, 5.3012, 7.9243, 2.5555, 0.0775)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.492	0.587	0.819	$B_3(5.08840, 5.2459, 10.6760, 2.4738, 0.068)$

Таблица 8. Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае использования ОМП параметров распределений семейства (4) при значении параметра формы $\theta_0 = 2$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
для критерия Колмогорова				
θ_0	1.219	1.354	1.624	$B_3(4.6934, 5.6544, 3.0971, 2.4099, 0.315)$
θ_1	1.190	1.327	1.600	$B_3(4.8849, 5.2341, 3.6279, 2.3872, 0.303)$
θ_2	0.888	0.963	1.114	$B_3(5.2604, 7.4327, 2.1872, 1.4774, 0.30)$
θ_0, θ_1	1.148	1.287	1.564	$B_3(4.6127, 4.8440, 4.1337, 2.4080, 0.295)$
θ_0, θ_2	0.880	0.956	1.108	$B_3(5.7052, 7.2179, 2.5877, 1.5433, 0.29)$
θ_1, θ_2	0.835	0.909	1.057	$\gamma(6.4721, 0.0580, 0.2620)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.784	0.861	1.021	$B_3(9.3597, 5.7532, 5.8275, 1.4507, 0.2500)$
для критерия Крамера-Мизеса-Смирнова				
θ_0	0.341	0.456	0.737	$Sb(2.7740, 0.9495, 1.9000, 0.0170)$
θ_1	0.327	0.442	0.725	$Sb(3.3182, 0.94801, 2.9500, 0.016)$
θ_2	0.134	0.165	0.238	$B_3(4.4331, 3.6365, 13.9198, 0.6632, 0.0084)$
θ_0, θ_1	0.315	0.430	0.712	$Sb(2.2458, 0.7970, 1.300, 0.017)$
θ_0, θ_2	0.127	0.156	0.225	$B_3(4.0430, 3.72568, 12.5794, 0.6313, 0.0087)$
θ_1, θ_2	0.103	0.126	0.178	$B_3(4.1153, 4.1748, 11.0347, 0.5116, 0.009)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.086	0.107	0.161	$B_3(6.7594, 3.8575, 28.6668, 0.5921, 0.006)$
для критерия Андерсона-Дарлинга				
θ_0	1.842	2.404	3.796	$B_3(3.0026, 2.7848, 21.7432, 12.5565, 0.111)$
θ_1	1.743	2.309	3.704	$B_3(3.4638, 2.3300, 35.7115, 12.6033, 0.105)$
θ_2	0.892	1.087	1.552	$B_3(4.1081, 5.0598, 16.9721, 7.9065, 0.09)$
θ_0, θ_1	1.672	2.237	3.632	$B_3(4.2125, 1.5874, 32.6127, 5.500, 0.09)$
θ_0, θ_2	0.779	0.945	1.335	$B_3(4.6827, 3.7977, 12.6413, 3.4486, 0.08)$
θ_1, θ_2	0.630	0.750	1.032	$B_3(4.7262, 4.6575, 9.4958, 2.7171, 0.0775)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.529	0.640	0.919	$B_3(4.3857, 5.7110, 17.3440, 5.0052, 0.075)$

Таблица 9. Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае использования ОМП параметров распределений семейства (4) при значении параметра формы $\theta_0 = 3$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
для критерия Колмогорова				
θ_0	1.222	1.357	1.626	$B_3(6.5249, 5.0755, 4.5306, 2.4069, 0.285)$
θ_1	1.197	1.334	1.606	$B_3(5.2350, 5.0903, 3.9316, 2.3905, 0.300)$
θ_2	0.998	1.095	1.291	$B_3(8.5402, 6.1019, 4.4047, 1.8871, 0.250)$
θ_0, θ_1	1.161	1.301	1.577	$B_3(5.5689, 4.6553, 4.9339, 2.4147, 0.280)$
θ_0, θ_2	0.999	1.096	1.293	$B_3(6.5008, 7.8186, 3.25827, 2.1735, 0.270)$
θ_1, θ_2	0.970	1.069	1.269	$B_3(6.8503, 6.2212, 3.9819, 1.9216, 0.265)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.936	1.039	1.247	$\gamma(3.6025, 0.10128, 0.3125)$
для критерия Крамера-Мизеса-Смирнова				
θ_0	0.345	0.459	0.741	$B_3(3.2178, 1.6133, 19.2436, 1.000, 0.0125)$
θ_1	0.330	0.445	0.727	$B_3(3.6534, 1.5249, 28.5258, 1.0550, 0.0117)$
θ_2	0.179	0.224	0.329	$B_3(3.6203, 2.6395, 11.3638, 0.600, 0.010)$
θ_0, θ_1	0.317	0.432	0.715	$B_3(6.6688, 1.2016, 63.6672, 0.830, 0.008)$
θ_0, θ_2	0.177	0.222	0.329	$B_3(3.5065, 2.5837, 11.5972, 0.600, 0.010)$
θ_1, θ_2	0.154	0.196	0.299	$B_3(3.7581, 2.3887, 13.3525, 0.500, 0.010)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.138	0.181	0.289	$Sl(1.1736, 1.2083, 0.1163, 0.0103)$
для критерия Андерсона-Дарлинга				
θ_0	1.881	2.441	3.835	$B_3(3.7511, 2.3357, 19.6979, 8.0000, 0.095)$
θ_1	1.757	2.324	3.718	$B_3(4.1218, 2.1349, 30.0763, 8.500, 0.094)$
θ_2	1.049	1.282	1.823	$B_3(4.6108, 3.3193, 12.0931, 4.0000, 0.079)$
θ_0, θ_1	1.679	2.245	3.638	$B_3(6.0616, 1.6126, 47.4733, 5.800, 0.074)$
θ_0, θ_2	0.989	1.215	1.741	$B_3(4.7371, 3.2610, 13.7406, 4.0000, 0.070)$
θ_1, θ_2	0.819	1.009	1.472	$B_3(5.2098, 3.5915, 16.7524, 4.0000, 0.070)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.716	0.908	1.391	$B_3(5.9548, 2.9777, 28.5342, 3.800, 0.069)$

Таблица 10. Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае использования ОМП параметров распределений семейства (4) при значении параметра формы $\theta_0 = 4$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
для критерия Колмогорова				
θ_0	1.223	1.358	1.626	$B_3(3.6243, 5.3291, 2.4503, 2.1853, 0.36)$
θ_1	1.202	1.338	1.610	$B_3(4.4775, 5.7536, 2.9612, 2.4028, 0.31)$
θ_2	1.060	1.169	1.388	$B_3(3.8031, 7.8639, 1.9955, 2.1337, 0.34)$
θ_0, θ_1	1.172	1.311	1.586	$B_3(2.6607, 6.1554, 2.0175, 2.4197, 0.364)$
θ_0, θ_2	1.061	1.170	1.389	$B_3(4.1178, 7.0193, 2.3554, 2.1116, 0.330)$
θ_1, θ_2	1.039	1.150	1.372	$B_3(4.4530, 6.5204, 2.8504, 2.1247, 0.315)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.013	1.126	1.353	$\gamma(3.5001, 0.1150, 0.3200)$
для критерия Крамера-Мизеса-Смирнова				
θ_0	0.346	0.460	0.742	$B_3(2.6493, 2.3780, 23.7392, 2.3027, 0.0133)$
θ_1	0.332	0.447	0.729	$B_3(2.9074, 1.7706, 24.9344, 1.40, 0.0134)$
θ_2	0.212	0.270	0.409	$B_3(3.2370, 2.7787, 15.5238, 1.05, 0.011)$
θ_0, θ_1	0.319	0.434	0.717	$B_3(2.8323, 1.4558, 24.26690, 1.0, 0.012)$
θ_0, θ_2	0.212	0.271	0.412	$B_3(2.9892, 2.7082, 14.1961, 1.0, 0.0117)$
θ_1, θ_2	0.193	0.250	0.390	$B_3(3.7333, 2.7350, 28.9872, 1.4094, 0.0094)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.178	0.236	0.381	$B_3(3.5304, 2.1937, 29.8592, 1.000, 0.01)$
для критерия Андерсона-Дарлинга				
θ_0	1.899	2.458	3.853	$B_3(2.7055, 3.0084, 16.8946, 12.5483, 0.12)$
θ_1	1.771	2.338	3.729	$B_3(2.6333, 2.6314, 22.5692, 12.5941, 0.125)$
θ_2	1.188	1.467	2.118	$B_3(2.7800, 5.1280, 11.7638, 10.5031, 0.11)$
θ_0, θ_1	1.687	2.255	3.648	$B_3(2.0354, 2.3209, 23.5136, 12.7679, 0.132)$
θ_0, θ_2	1.153	1.432	2.090	$B_3(3.6594, 3.4364, 13.5600, 5.9140, 0.084)$
θ_1, θ_2	0.985	1.239	1.862	$B_3(4.0113, 3.4057, 19.6395, 6.2684, 0.084)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.886	1.143	1.785	$B_3(4.1564, 2.7774, 30.5627, 6.0165, 0.0822)$

Таблица 11. Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае использования ОМП параметров распределений семейства (4) при значении параметра формы $\theta_0 = 5$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
для критерия Колмогорова				
θ_0	1.223	1.357	1.626	$B_3(3.4549, 6.2388, 2.0813, 2.300, 0.3600)$
θ_1	1.205	1.342	1.613	$B_3(3.1581, 6.2159, 1.9964, 2.300, 0.360)$
θ_2	1.097	1.212	1.443	$B_3(4.8171, 5.5295, 3.0757, 2.000, 0.320)$
θ_0, θ_1	1.179	1.318	1.593	$B_3(3.7224, 4.6425, 3.1224, 2.2000, 0.330)$
θ_0, θ_2	1.097	1.213	1.444	$B_3(4.9052, 5.6639, 2.9616, 2.0000, 0.310)$
θ_1, θ_2	1.080	1.196	1.429	$B_3(4.5122, 5.6639, 2.8588, 2.0000, 0.310)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.057	1.176	1.414	$B_3(3.5446, 6.6218, 2.5197, 2.2850, 0.325)$
для критерия Крамера-Мизеса-Смирнова				
θ_0	0.347	0.460	0.742	$B_3(3.3548, 1.7217, 20.2585, 1.1000, 0.012)$
θ_1	0.334	0.448	0.731	$B_3(3.2927, 1.6388, 23.4040, 1.100, 0.012)$
θ_2	0.236	0.303	0.469	$B_3(4.0012, 2.0310, 17.0057, 0.730, 0.0095)$
θ_0, θ_1	0.321	0.436	0.719	$B_3(4.0952, 1.3628, 33.3948, 0.900, 0.0095)$
θ_0, θ_2	0.236	0.304	0.470	$B_3(3.8227, 2.0270, 16.0637, 0.7200, 0.0095)$
θ_1, θ_2	0.219	0.287	0.453	$B_3(4.1888, 1.9896, 21.3460, 0.7450, 0.009)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.206	0.275	0.444	$B_3(4.5253, 1.7162, 31.4699, 0.715, 0.009)$
для критерия Андерсона-Дарлинга				
θ_0	1.908	2.467	3.861	$B_3(3.2750, 2.7257, 19.7022, 11.000, 0.105)$
θ_1	1.782	2.349	3.740	$B_3(3.7185, 2.2262, 24.9194, 8.500, 0.10)$
θ_2	1.292	1.608	2.358	$B_3(3.8528, 2.9989, 12.7999, 5.2000, 0.09)$
θ_0, θ_1	1.696	2.264	3.658	$B_3(3.9441, 1.9099, 34.2183, 8.000, 0.085)$
θ_0, θ_2	1.271	1.588	2.346	$B_3(3.6684, 3.0110, 13.4931, 5.550, 0.085)$
θ_1, θ_2	1.110	1.411	2.153	$B_3(4.1345, 3.0883, 22.0926, 6.800, 0.080)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.014	1.322	2.084	$B_3(4.3601, 2.6164, 38.0670, 7.4729, 0.0785)$

Таблица 12. Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае использования ОМП параметров распределений семейства (4) при значении параметра формы $\theta_0 = 7$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
для критерия Колмогорова				
θ_0	1.222	1.357	1.625	$B_3(3.4527, 6.2874, 2.062, 2.300, 0.3600)$
θ_1	1.210	1.345	1.616	$B_3(3.1789, 6.3997, 1.9239, 2.300, 0.360)$
θ_2	1.137	1.137	1.502	$B_3(4.4660, 5.47624, 2.6851, 2.000, 0.320)$
θ_0, θ_1	1.190	1.328	1.601	$B_3(3.8325, 4.7340, 3.0569, 2.2000, 0.330)$
θ_0, θ_2	1.137	1.259	1.503	$B_3(4.9890, 5.1511, 3.1470, 2.0000, 0.310)$
θ_1, θ_2	1.124	1.247	1.493	$B_3(4.5766, 5.2588, 2.9181, 2.0000, 0.310)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.107	1.232	1.480	$B_3(3.5462, 6.6218, 2.2864, 2.2850, 0.325)$
для критерия Крамера-Мизеса-Смирнова				
θ_0	0.347	0.460	0.742	$B_3(3.4065, 1.72170, 20.5769, 1.1000, 0.012)$
θ_1	0.336	0.451	0.733	$B_3(3.3961, 1.6388, 23.7205, 1.100, 0.012)$
θ_2	0.265	0.345	0.542	$B_3(4.0337, 1.7885, 18.1049, 0.730, 0.0095)$
θ_0, θ_1	0.325	0.440	0.722	$B_3(4.5574, 1.36280, 36.1643, 0.900, 0.0095)$
θ_0, θ_2	0.266	0.346	0.545	$B_3(4.1853, 1.7329, 19.4044, 0.7200, 0.0095)$
θ_1, θ_2	0.253	0.333	0.531	$B_3(4.3597, 1.7257, 23.2817, 0.7450, 0.009)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	0.241	0.323	0.522	$B_3(4.3835, 1.5744, 28.6719, 0.715, 0.009)$
для критерия Андерсона-Дарлинга				
θ_0	1.916	2.475	3.864	$B_3(3.3337, 2.7380, 19.7773, 11.000, 0.105)$
θ_1	1.800	2.366	3.755	$B_3(3.7496, 2.2445, 24.3153, 8.500, 0.10)$
θ_2	1.431	1.804	2.698	$B_3(3.9524, 2.6173, 14.0679, 5.2000, 0.09)$
θ_0, θ_1	1.714	2.282	3.674	$B_3(4.4259, 1.8843, 34.1400, 7.30, 0.085)$
θ_0, θ_2	1.419	1.793	2.697	$B_3(3.6688, 2.7003, 13.7324, 5.550, 0.085)$
θ_1, θ_2	1.279	1.644	2.539	$B_3(4.1773, 2.7020, 22.9667, 6.800, 0.080)$
$\theta_0, \theta_1, \theta_2$	1.188	1.560	2.470	$B_3(4.5480, 2.1191, 28.5121, 5.000, 0.0785)$

4. Пример

Проверить сложную гипотезу о принадлежности нижеприведенной выборки [1] объемом 200 наблюдений закону семейства (4) с параметром формы $\theta_0 = 5$.

-1.270 -1.196 -1.043 -1.018 -1.011 -0.929 -0.916 -0.892 -0.886 -0.877 -0.827 -0.801
-0.791 -0.782 -0.776 -0.766 -0.757 -0.736 -0.723 -0.714 -0.701 -0.700 -0.677 -0.673
-0.667 -0.658 -0.627 -0.615 -0.615 -0.615 -0.604 -0.602 -0.572 -0.567 -0.565 -0.556
-0.543 -0.542 -0.482 -0.475 -0.468 -0.462 -0.458 -0.450 -0.448 -0.437 -0.433 -0.416
-0.410 -0.408 -0.403 -0.382 -0.370 -0.367 -0.365 -0.340 -0.337 -0.331 -0.326 -0.322
-0.309 -0.304 -0.288 -0.282 -0.271 -0.252 -0.245 -0.234 -0.224 -0.224 -0.211 -0.205
-0.178 -0.143 -0.131 -0.129 -0.127 -0.117 -0.115 -0.108 -0.095 -0.093 -0.078 -0.051
-0.044 -0.035 -0.035 -0.034 -0.031 -0.012 -0.012 -0.010 -0.004 0.006 0.008 0.019
0.023 0.037 0.045 0.055 0.056 0.083 0.086 0.092 0.101 0.104 0.114 0.121
0.122 0.124 0.136 0.141 0.141 0.142 0.147 0.150 0.151 0.188 0.194 0.204
0.206 0.211 0.211 0.228 0.231 0.232 0.242 0.252 0.252 0.257 0.270 0.278
0.283 0.294 0.319 0.321 0.336 0.342 0.343 0.361 0.382 0.384 0.404 0.404
0.404 0.405 0.408 0.435 0.468 0.474 0.480 0.482 0.510 0.514 0.533 0.541
0.543 0.552 0.580 0.582 0.582 0.587 0.589 0.600 0.611 0.617 0.627 0.641
0.643 0.643 0.645 0.651 0.668 0.677 0.678 0.679 0.693 0.714 0.737 0.737
0.749 0.750 0.756 0.762 0.780 0.784 0.808 0.809 0.827 0.853 0.853 0.866
0.877 0.883 0.902 0.960 0.994 1.048 1.075 1.114

Вычисленные по выборке ОМП параметров закона (4): масштаба $\hat{\theta}_1 = 0.9549$, сдвига $\hat{\theta}_2 = -0.0025$.

Значение статистики (1) Колмогорова $S_K^* = 0.8226$. Вычисленный в соответствии с бета-распределением III-го типа $B_3(4.5122, 5.6639, 2.8588, 2.0000, 0.310)$ (таблица 11) достигаемый уровень значимости $P\{S_K > S_K^*\} \approx 0.362$.

Значение статистики (2) Крамера-Мизеса-Смирнова $S_\omega^* = 0.1138$. Вычисленный в соответствии с бета-распределением III-го типа $B_3(4.1888, 1.9896, 21.3460, 0.7450, 0.009)$ (таблица 11) достигаемый уровень значимости $P\{S_\omega > S_\omega^*\} \approx 0.329$.

Значение статистики (3) Андерсона-Дарлинга $S_\Omega^* = 0.5773$. Вычисленный в соответствии с бета-распределением III-го типа $B_3(4.1345, 3.0883, 22.0926, 6.800, 0.080)$ (таблица 11) достигаемый уровень значимости $P\{S_\Omega > S_\Omega^*\} \approx 0.382$.

Таким образом, проверяемая гипотеза не отклоняется по всем критериям, и, очевидно, что семейство (4) с параметром формы $\theta_0 = 5$ является более

подходящей моделью для данной выборки, чем нормальный закон (см. пример в [1]).

5. Заключение

Объединяя выводы работы [1] с данными результатами, можно подвести следующие итоги. Построены более точные модели распределений статистик непараметрических критериев согласия Колмогорова, ω^2 Крамера-Мизеса-Смирнова и Ω^2 Андерсона-Дарлингга при проверке сложных гипотез относительно ряда законов распределения вероятностей. Эти результаты уточняют и расширяют, рекомендации по стандартизации Р 50.1.037-2002 [5], уточняют модели, полученные в [7], для статистик непараметрических критериев в случае проверки сложных гипотез относительно семейства распределений (4).

Подчеркнем, что полученные процентные точки и модели обеспечивают корректное применение непараметрических критериев согласия в задачах статистического анализа при использовании ОМП. В силу существенной зависимости распределений статистик рассматриваемых критериев от метода оценивания [8] данные результаты нельзя использовать при других оценках, за исключением тех случаев, когда асимптотические свойства этих оценок совпадают со свойствами ОМП.

При проверке сложных гипотез относительно семейств бета-распределений I, II и III типа распределения статистик непараметрических критериев согласия зависят от значений двух параметров формы этих законов. Модели распределений статистик и таблицы процентных точек для различных комбинаций значений двух параметров формы (более 1500 моделей) построены в диссертации Лемешко С.Б. [9], а результаты исследований частично опубликованы в [10].

Отметим, что при проверке сложных гипотез мощность непараметрических критериев, как правило, существенно выше (при использовании ОМП), чем при проверке простых. Результаты сравнительного анализа мощности критериев согласия (непараметрических и типа χ^2) относительно некоторых пар близких конкурирующих гипотез при проверке простых и сложных гипотез представлены в [11], а более подробно изложены в [12, 13].

Следует надеяться, что материалы данной статьи будут способствовать снижению количества ошибок, совершаемых в задачах статистического анализа при использовании непараметрических критериев согласия [14].

Настоящие исследования выполнены при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00056-а) и Федерального агентства по образованию Минобрнауки РФ в рамках Аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект № 2.1.2/3970).

Литература

1. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I // Измерительная техника. 2009. – № 6. – С.6-11.
2. Большев Л.Н. Асимптотические пирсоновские преобразования // Теория вероятностей и ее применения. 1963. – Т. 8. – № 2. – С. 129-155.
3. Большев Л.Н. Теория вероятностей и математическая статистика / Избранные труды. Под ред. Ю.В. Прохорова. – М.: Наука, 1987. – 286 с.
4. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
5. Р 50.1.037-2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика.

- Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии. – М.: Изд-во стандартов. 2002. – 64 с.
6. Губарев В.В. Вероятностные модели: Справочник. В 2-х ч. / Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1992. – Ч.1. – 198 с.
 7. Лемешко Б.Ю., Маклаков А.А. Непараметрические критерии при проверке сложных гипотез о согласии с распределениями экспоненциального семейства // Автометрия. 2004. №3. – С. 3-20. [Lemeshko B.Yu., Maklakov A.A. Nonparametric Test in Testing Composite Hypotheses on Goodness of Fit Exponential Family Distributions. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, volume 40, 3. pages 3-18, 2004]
 8. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. О зависимости распределений статистик непараметрических критериев и их мощности от метода оценивания параметров // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67. – № 7. – С. 62-71.
 9. Лемешко С.Б. Расширение прикладных возможностей некоторых классических методов математической статистики. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск. 2007.
 10. Лемешко С.Б., Лемешко Б.Ю. Распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке гипотез относительно бета-распределений // ДАН ВШ России. 2007. № 2(9). – С. 6-16.
 11. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н. Мощность критериев согласия при близких альтернативах // Измерительная техника. 2007. № 2. – С.22-27. [Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Postovalov S.N. The power of goodness of fit tests for close alternatives // Measurement Techniques, 2007. V.50, № 2. – P. 132-141]

12. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н. Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах. I. Проверка простых гипотез // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. – Т.11. – № 2(34). – С.96-111.
13. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н. Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких альтернативах. II. Проверка сложных гипотез // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. – Т.11. – № 4(36). – С.78-93.
14. Лемешко Б.Ю. Об ошибках, совершаемых при использовании непараметрических критериев согласия // Измерительная техника. 2004. – № 2. – С.15-20. [Lemeshko B. Yu. Errors when using nonparametric fitting criteria // Measurement Techniques, 2004. Vol. 47, №. 2, – P.134-142]

Statistics distributions models of the nonparametric goodness-of-fit tests in case composite hypothesis testing with using of maximum likelihood estimations. Part II

Lemeshko B. Yu., Lemeshko S.B.

Novosibirsk state technical university

E-mail: Lemeshko@fpm.ami.nstu.ru

In this paper are presented more precise results (tables of percentage points and statistic distribution models) for the nonparametric goodness-of-fit tests in testing composite hypotheses using the maximum likelihood estimate (MLE) for gamma- and double exponential distribution laws.

Keywords: goodness-of-fit test, composite hypotheses testing, Kolmogorov test, Cramer-Mises-Smirnov test, Anderson-Darling test, gamma-distribution, double exponential distribution.