

*ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А.ДОРОДНИЦЫНА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК*

*ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ*

*МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)*

*РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ*

**II Всероссийская научная конференция  
с молодежной научной школой**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ЭКОНОМИКИ**

**посвященная 90-летию со дня рождения  
академика Н.Н.Моисеева.**

**ЭКОМОД-2007**

**г. Киров, 9-15 июля 2007**

**СБОРНИК ТРУДОВ**

Киров - 2007

## УДК 519.83+115.330

II Всероссийская научная конференция с молодежной научной школой  
«Математическое моделирование развивающейся экономики»,  
посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н.Моисеева.

ЭКОМОД-2007, г. Киров, 9-15 июля 2007/Сборник трудов. -Киров, изд-во. ВятГУ,  
2007.- 297 с.

В сборнике трудов конференции обсуждаются теоретические аспекты системного анализа развивающейся экономики и приложения этого актуального направления исследований. Конференция продолжает традиции летних научных школ, проводимых академиком Н.Н. Моисеевым в 1960 – 80-е годы. В работе конференции принимают участие ведущие ученые России и начинающие специалисты – студенты, аспиранты, для которых организуется летняя молодежная школа по математическому моделированию. В рамках конференции также проводятся круглые столы для обсуждения состояния и перспектив математического моделирования развивающейся экономики и подготовки молодых кадров. Конференция проводится Вычислительным центром им. А.А. Дородницына Российской академии наук, Вятским государственным университетом, Московским физико-техническим институтом (ГУ) при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант РФФИ № 07-01-06048-г)

Подп. В печ.

Усл. Печ.л.

Зак.

Тир.

---

ПРИП ВятГУ, 610000, г. Киров, ул. Московская,36

© Вятский государственный университет

**II Всероссийская научная конференция  
с молодежной научной школой  
Математическое моделирование развивающейся экономики,  
посвященная 90-летию со дня рождения  
академика Н.Н. Моисеева**

**ЭКОМОД-2007**

**г. Киров  
9-15 июля 2007 г.**

1-е информационное сообщение

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук, Вятский государственный университет, Московский физико-технический институт (государственный университет) при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и проводят II Всероссийскую научную конференцию с молодежной научной школой "Математическое моделирование развивающейся экономики", посвященную 90-летию со дня рождения выдающегося ученого академика Никиты Николаевича Моисеева, (ЭКОМОД-2007). На конференции будут обсуждаться теоретические аспекты *системного анализа развивающейся экономики* и приложения этого актуального направления исследований. Конференция продолжает традиции летних научных школ, проводимых академиком Н.Н. Моисеевым в 1960 – 80-е годы. На конференцию планируется привлечь ведущих ученых для обсуждения состояния и перспектив математического моделирования развивающейся экономики и подготовки молодых кадров. Ведущие специалисты в области моделирования сложных систем и решений привлекаются для чтения докладов и для руководства секциями и сопутствующими семинарами молодежной школы.

**МЕСТО ПРОВЕДЕНИЯ КОНФЕРЕНЦИИ:**

г. Киров, Вятский государственный университет (на базе Межвузовского научно-исследовательского центра коллективного пользования в живописной местности в 40 км от г. Кирова).

### **Организационный комитет:**

**Петров Александр Александрович**, академик РАН (сопредседатель, ВЦ РАН)

**Пименов Евгений Васильевич**, д.м.н., профессор, ректор ВятГУ (сопредседатель, ВятГУ)

**Шатров Анатолий Викторович**, д.ф.-м.н., профессор (зам.пред., ВятГУ)

**Оленёв Николай Николаевич**, к.ф.-м.н., доцент (ВЦ РАН)

**Бурова Наталия Константиновна**, (ВЦ РАН)

**Голубев Анатолий Дмитриевич**, к.т.н., доцент, декан социально - экономического факультета (ВятГУ)

**Кулагин Владимир Петрович**, д.т.н., профессор, зам. директора ГНИИ информационных технологий и коммуникаций «Информика»

### **Программный комитет:**

**Поспелов Игорь Гермогенович**, д.ф.-м.н., профессор (председатель, ВЦ РАН)

**Частиков Александр Вениаминович**, д.т.н., профессор, проректор по науке (зам. председателя, ВятГУ)

**Павловский Юрий Николаевич**, член-корр. РАН (ВЦ РАН)

**Шананин Александр Алексеевич**, д.ф.-м.н., профессор, декан факультета управления и прикладной математики (МФТИ(ГУ))

**Лотов Александр Владимирович**, д.ф.-м.н., профессор (ВЦ РАН)

**Шамровский Александр Дмитриевич**, профессор (ЗГИА, Украина)

**Сидорова Татьяна Владимировна** (ВЦ РАН)

### **Секретари конференции:**

**Бурова Наталия Константиновна** (ВЦ РАН)

e-mail: [burova@ccas.ru](mailto:burova@ccas.ru)

тел.: +7 495 135 30 23

**Калиниченко Людмила Борисовна** (ВятГУ, зав.лаб., секр.каф. ММЭ)

e-mail: [avshatrov1@yandex.ru](mailto:avshatrov1@yandex.ru)

тел.: +7 8332 62 48 16

## НАУЧНАЯ ПРОГРАММА

### ПРИГЛАШЕННЫЕ ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЧИКИ:

**Петров Александр Александрович**, академик РАН (ВЦ РАН)

Выдающийся российский ученый Н.Н. Моисеев.

**Евтушенко Юрий Гаврилович**, академик РАН, директор (ВЦ РАН)

Параллельные технологии в оптимизации.

**Флеров Юрий Арсениевич**, член-корр. РАН, зам.директора (ВЦ РАН)

Автоматизация проектирования информационно-вычислительных систем финансовой инженерии.

**Павловский Юрий Николаевич**, член-корр. РАН (ВЦ РАН)

Геометрическая теория декомпозиции

**Поспелов Игорь Гермогенович**, д.ф.-м.н., профессор (ВЦ РАН)

Моделирование современной экономики России: методы, технологии, результаты

**Шананин Александр Алексеевич**, д.ф.-м.н., профессор, декан ФУПМ (МФТИ(ГУ))

(1) Экономические индексы и проблема интегрируемости,

(2) Непараметрический метод анализа и прогнозирования потребительского спроса.

**Шатров Анатолий Викторович**, д.ф.-м.н., профессор (ВятГУ)

Моделирование развивающейся региональной экономики с помощью интеллектуальной системы ЭКОМОД.

**Гурман Владимир Иосифович**, д.ф.-м.н., профессор (ИПС РАН, Переславль-Залесский)

Эволюция и перспективы моделей регионального развития.

**Меньшиков Иван Станиславович**, к.ф.-м.н. (ВЦ РАН)

Экспериментальная экономика и теория игр о рациональности экономического поведения.

**Оленёв Николай Николаевич**, к.ф.-м.н., доцент (ВЦ РАН)

Параллельные вычисления в MATLAB при моделировании экономики.

**Пархоменко Валерий Павлович**, к.ф.-м.н., зав.сектором (ВЦ РАН)

Проблемы изменения и моделирования климата.

**Белолипецкий Александр Алексеевич**, д.ф.-м.н., профессор, зав. отделом (ВЦ РАН)

О математическом моделировании сложных физических систем.

## **СЕКЦИИ:**

### **I Системный анализ развивающейся экономики.** Председатель секции проф. Поспелов И.Г.

Подход к анализу процессов структурных перестроек в экономике, названный “Системный анализ развивающейся экономики”, синтезирует методологию математического моделирования сложных систем, развитую в естественных науках, и достижения современной экономической теории. В этом подходе строятся замкнутые математические модели, которые описывают механизмы развития во времени макроэкономических структур, правильно воспроизводя совокупность основных качественных особенностей эволюции изучаемой экономической системы. При описании реальных экономических отношений создаются методы агрегирования исходных микроэкономических описаний в макроструктуры, которые называются экономическими агентами. Выделение экономических агентов определяет степень агрегированности модели и ее структуру. Модели основываются на системе гипотез относительно характера реальных экономических отношений, сложившихся на том или ином этапе переходного периода. Обычно описание поведения экономического агента выводится из принципа оптимальности использования ограниченных ресурсов, которыми располагает агент или которые он получает извне. В экономике такое описание соответствует принципу рациональных ожиданий. Математическая модель представляет собой систему дифференциальных или конечно-разностных уравнений, замкнутую при условии, что построен сценарий решений или действий государственных органов или равнозначных им монополистов. Полная система уравнений материальных и финансовых балансов в моделях замыкается описаниями механизмов регулирования производства и обращения. Описания механизмов основаны на немногих независимых гипотезах, которые явным образом формулируются как результаты системного анализа сложившихся реальных экономических отношений. Модели отражают динамику воспроизводства в целом и дают возможность оценивать последствия макроэкономической политики. Эти оценки можно использовать как опорные исходные данные при последующем детальном анализе экономики традиционными методами политической экономии.

### **II Имитационное моделирование.** Председатель секции член-корр. РАН Павловский Ю.Н.

Современное имитационное моделирование возникло на основе соединения традиционного математического моделирования с новыми информационными технологиями, возникшими на базе ЭВМ. Это соединение, обеспечивая инструментами информатики программирование вычислений по модели, ее идентификацию и эксплуатацию, сделало практически реализуемыми и экономически целесообразными гораздо более сложные модели, чем это было возможно в рамках старой, «домашинной» информационной технологии.

### **III Методы оптимизации и параллельные вычисления.** Председатель секции академик РАН Евтушенко Ю.Г.

Применение параллельных технологий в оптимизации позволяют значительно сократить время поиска оптимального решения, что открывает новые возможности в построении и эксплуатации математических моделей.

Параллельные вычисления на кластерных и многоядерных архитектурах делают возможным решение задач идентификации сложных экономических моделей, содержащих большое число внешних параметров.

#### **IV Математические методы и информационные технологии в экономике.** Председатель секции проф., д.ф.-м.н. Шатров А.В.

Информационные технологии важны в моделировании экономики и региональных систем административно-хозяйственного управления. Инструментальные системы математического моделирования поддерживают разработку проблемно-ориентированных программных систем. Такие системы поддерживают процедуры управления, планирования, проектирования при разработке математических моделей.

#### **СОПУТСТВУЮЩИЕ СЕМИНАРЫ МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ:**

**Шатров А.В.** Новые информационные технологии в моделировании экономики

**Оленев Н.Н** Параллельные вычисления в математическом моделировании развивающейся экономики в системе MATLAB

**Бурнаев Е.В.** Дискретное вейвлет-преобразование в математическом моделировании развивающейся экономики

**Хохлов М.А.** Система экономического моделирования ЭКОМОД

#### **ТЕМЫ КРУГЛЫХ СТОЛОВ:**

Научное наследие академика Н.Н.Моисеева в области математического моделирования сложных процессов и систем

Система экономического моделирования ЭКОМОД в практике разработчиков математических моделей развивающейся экономики

## **СОДЕРЖАНИЕ**

<b>А.А. Петров</b> Выдающийся российский ученый Н.Н.Моисеев.....	9
<b>М.Ю. Андреев</b> Необходимые и достаточные условия эффективности множества равновесий в стохастической модели с капиталом.....	29
<b>А.А. Белолипецкий</b> О математическом моделировании сложных физических систем.....	37
<b>Н.В. Белотелов</b> Математическое моделирование экосистем.....	53
<b>А.Я. Белянков</b> Предварительное дробление параллелепипеда в методах неравномерных покрытий в глобальной оптимизации.....	59
<b>А.Я. Белянков</b> Качественная модель строения смерча.....	63
<b>Е.В. Бурнаев</b> Об обобщенной байесовской постановке задачи о разладке для пуассоновского процесса.....	68
<b>В.В. Быстров, А.В. Горохов</b> Информационная технология концептуального синтеза имитационных моделей.....	72
<b>А.В. Гасников</b> О гипотезе Полтеровича-Хенкина и её обобщении.....	77
<b>В.Н. Глушков, Д.А. Саранча</b> Метод «обратной имитационной задачи» при анализе колебаний численности тундровых животных.....	86
<b>А.И. Голиков, Ю.Г. Евтушенко</b> Решение задач линейной оптимизации большой размерности обобщенным методом Ньютона.....	94
<b>В.И. Гурман</b> Эволюция и перспективы моделей регионального развития.....	108
<b>Г.Ф. Лукиных, И.Г. Лукиных</b> Системный анализ производственных процессов в агроинженерных системах.....	121
<b>В.Д. Матвеев</b> О возможности изменения типа производственной функции: инновации и интересы социальных групп.....	128
<b>И.С. Меньшиков</b> Экспериментальная экономика и теория игр о рациональности экономического поведения.....	140
<b>Н.Н. Оленёв</b> Параллельные вычисления в MATLAB при моделировании экономики.....	159
<b>В.П. Пархоменко</b> Проблемы изменения и моделирования климата.....	174
<b>И.Г. Пospelов</b> Моделирование современной экономики России: методы, технологии, результаты.....	186
<b>И.Г. Пospelов, М.А. Хохлов</b> Идентификация экономических систем на основе метода множеств достижимости.....	205
<b>С.Л. Садов</b> Выбор метода моделирования и анализа систем региональной энергетики.....	216
<b>Д.А. Саранча</b> Об использовании ЭВМ при построении «механизменных моделей» экологических процессов.....	224
<b>Ю.А. Флёрв</b> Автоматизация проектирования информационно-вычислительных систем финансовой инженерии.....	231
<b>А.Ю. Флёрва</b> Математическая модель рынка товаров длительного пользования с различными характеристиками выбытия.....	247
<b>А.Н. Чабан</b> Лаборатория экспериментальной экономики: принципы построения и функционирования.....	252
<b>А.В. Шатров</b> Моделирование развивающейся экономики Кировской области с помощью интеллектуальной системы ЭКОМОД.....	259
<b>А.В. Шатров, Л.Н. Шатрова</b> Дискретные динамические балансовые модели.....	272
<b>Ю.Н. Павловский</b> Геометрическая теория декомпозиции.....	283





## **ВЫДАЮЩИЙСЯ РОССИЙСКИЙ УЧЕНЫЙ Н.Н. МОИСЕЕВ\***

Петров А.А. (*г. Москва*)

23 августа 2007 года исполняется девяносто лет со дня рождения академика Никиты Николаевича Моисеева. Он человек с удивительной судьбой. Выдающийся российский ученый, ровесник Октябрьской революции, пережил крушение Советского Союза. В его судьбе эпоха отразилась не менее точно, чем в научных трудах, и не менее выразительно, чем в художественных повествованиях.

Родился Никита Николаевич в Москве. Дед Сергей Васильевич Моисеев происходил из служилого дворянства. Был он инженером-путейцем и дослужился до начальника Дальневосточного железнодорожного округа. Женился на Ольге Ивановне Шперлинг, дочери профессора математики университета Святого Владимира в Киеве.

---

\* Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект № НШ-5379.2006.1).

Отец, Николай Сергеевич окончил юридический факультет Московского университета по специальности статистика и экономика, был оставлен при университете "для подготовки к профессорскому званию". Война прервала его научные занятия, в университет вернулся только в 1917 году, получив место приват-доцента, которое давало право читать лекции. Однако после революции, в 1918 году Н.С. Моисеев был уволен из университета как социально чуждый. Мать будущего академика, Елена Александровна была приемной дочерью Николая Карловича фон Мекк, сына Надежды Филаретовны фон Мекк, известной по той роли, которую сыграла в жизни П.И. Чайковского. В 1921 году Елена Александровна заболела родовой горячкой и умерла от общего заражения крови.

В 1922 году дед, Сергей Васильевич был приглашен в Москву для работы начальником финансово-контрольного комитета Наркомата путей сообщений. Поняв, что научная карьера не состоялась, отец, Николай Сергеевич поступил экономистом в Наркомат путей сообщения и стал заниматься статистикой речных грузопотоков. Труды его заслужили похвалу известного специалиста профессора Осадчего и рокового, как оказалось, предложения работать вместе. Служебные дела деда и отца складывались хорошо и, по словам Никиты Николаевича, в семье был достаток, которого он не имел, даже став действительным членом АН СССР. Бабушка Ольга Ивановна была незаурядным, образованным человеком, владела тремя европейскими языками. Строго следила за учебой внука, развивала его умственно и нравственно, приучала трудиться, обучила Никиту французскому языку, который потом так пригодился ему в жизни. Моисеев писал: "...сегодня я с удивлением вспоминаю, сколь размеренной, содержательной и умной была тогда жизнь моей семьи; в нашей суетной нелепой теперешней жизни невозможно себе представить, как люди могут жить спокойной рабочей жизнью без нервотрепок и стрессов. Весь тогдашний распорядок жизни был каким-то душеоблагораживающим ... то первоначальное представление об интеллигенции, об интеллигентности, которое я воспринял в детстве, так и осталось со мной на всю жизнь...именно сочетание гражданственности с нравственным началом и гуманистической системой обществоведческих суждений у меня связывается с понятием интеллигентности". Впечатления детства потом проявились в его натуре: потребности непрерывно работать, доброжелательном интересе к людям, открытости ко всяким впечатлениям. Был он внимательным собеседником, чутким к чужому суждению. Когда с кем-то не соглашался, избегал критиковать прямо, тем более в резкой форме, тем более, если собеседник был моложе его или ниже по положению. "Мин херц, тут надо еще разобраться, подумайте" - обычно говорил в таких случаях.

В конце 1928 года неожиданно был арестован дед Николай Карлович фон Мекк, занимавший высокий пост в ВСНХ, и вскоре расстрелян. Через год по «делу Промпартии» был арестован профессор Осадчий, а потом и его сотрудник, отец Моисеева. Сообщили, что Николай Сергеевич умер в тюремной больнице в конце 1930 года, а спустя несколько месяцев умер и дед Сергей Васильевич. Семья погрузилась в нужду, а одиннадцатилетний Никита остался главным мужчиной.

Вместе с нуждой пришло изгойство, оно не покидало Никиту Николаевича много лет. В школе к нему относились как к буржую, сыну репрессированного. Не приняли в комсомол, а он рвался в комсомол, потому что хотел быть, как все, не хотел быть второго сорта. Стал лауреатом математической олимпиады, организованной МГУ, получил право не сдавать экзамен по математике при поступлении на мехмат МГУ, но принят не был. Как когда-то отцу, ему объяснили, что рабоче-крестьянское правительство не будет тратить деньги на обучение таких, как он. Случайно об этом узнал руководитель математического кружка, в котором перед олимпиадой занимался Моисеев, тогда доцент мехмата Израиль Моисеевич Гельфанд. Он настоял, чтобы

Моисееву разрешили экстерном сдать экзамены за первый курс. Только способность использовать счастливый случай, собрав все силы в трудную минуту, помогла Никите Николаевичу поступить на мехмат МГУ.

На мехмате Моисеев специализировался по кафедре теории функций и функционального анализа, участвовал в семинаре Д.Е. Меньшова, но, кажется, больше его привлекала общая интеллектуальная атмосфера университета. Посещал, как он говорил, «взахлеб» лекции и семинары И.Е. Тамма, они оказали сильное влияние на мировоззрение Моисеева. Тамм приобщил его к основам современной физики, диалектике детерминизма и случайности. Никита Николаевич считал Игоря Евгеньевича Тамма одним из своих учителей.

Едва Никита Николаевич окончил университет – началась война. Его отправили на год доучиваться в Военно-воздушную академию им. Жуковского, на факультет авиационного вооружения. И здесь Моисееву повезло: он слушал лекции выдающихся специалистов по баллистике Д.А. Венцеля и по реактивным снарядам Ю.А. Победоносцева, написал дипломную работу у Ю.А. Победоносцева. В апреле 1942 года был включен в команду, которая летела в США, чтобы обеспечивать поставку техники по ленд-лизу. Но он хотел на фронт, поэтому категорически отказался. В мае 1942 года лейтенант Моисеев уехал старшим техником по вооружению самолетов в 14 воздушную армию на Волховский фронт, провоевал четыре года и остался жив. «Американская» команда проработала четыре года на Западном побережье Америки, на обратном пути через Аляску и Сибирь во время посадки в Хабаровске была арестована и пропала.

Осень 1942 года воевал под Шлиссельбургом в полку штурмовой авиации оружейником, сам летал на месте стрелка, два раза был сбит, как говорил, нетривиально выбирался к своим. Неизвестно, долго ли так продержался, но ему «повезло». Во время бомбежки мерзлый ком земли ударил по позвоночнику, и он оказался в госпитале под Волховом. Потом всю жизнь страдал радикулитом. А из оставшихся оружейников больше никого не видел и не слышал, скорее всего, все погибли. После госпиталя попал в старый полк, который в тылу переучивался на новые машины – бомбардировщики.

В 1944 году полк получил трофейные бомбы, на которых были боковые электрические взрыватели. Таких взрывателей у оружейников не было, поэтому приспособили наши с ветрянкой, вращение которой взводило взрыватель. Крепить ветрянку приходилось сбоку, так что ось ее была перпендикулярна оси бомбы. Бомбы очень часто не взрывались. Завели дело, Моисеева отстранили от должности инженера полка по вооружению и отдали под суд. Приехал начальник вооружений армии, взлетел на У-2, сбросил бомбы – все взорвались. Дело запахло вредительством. Тут Моисеева осенило - проверяющий бросал бомбы с У-2, высота и скорость которого невелики. А у бомбардировщиков высота и скорость больше, следовательно, скоростной напор на ветрянку больше в квадрате. Ось ее гнется. Чтобы уменьшить нагрузку, надо откусить все лопасти, кроме двух, симметрично расположенных. Откусили – все бомбы взорвались и потом взрывались безотказно. Моисеев получил благодарность самого командующего 14 воздушной армии. А через десять с лишним лет и по другому поводу узнал, что на Лубянке в его деле хранился донос, написанный приятелем-особистом. История с бомбами была представлена как подрывная предательская деятельность, заслуживающая ареста и осуждения. На доносе стояла резолюция «Отложить...».

Война уже кончилась, когда Моисеева последний раз ранили. Около полевого аэродрома «лесной брат» стрелял в него из автомата. Пуля на излете попала не в глаз, а в бровь. Только остался заметный шрамик над бровью, надо сказать, что Моисеева он красил.

Весной 1946 года капитан Моисеев назначается на полковничью должность инженера дивизии по вооружению. В армии он чувствовал себя уверенно – имея университетский и академический дипломы, видел для себя хорошие перспективы и собирался стать кадровым военным. Но обстановка в армии менялась – раньше приходилось интенсивно работать, теперь дела приходилось придумывать. Моисеев тяготился этим, пытался заниматься в библиотеке и обнаружил, что за годы войны математику изрядно забыл.

Снова случай дал ему шанс круто повернуть свою жизнь. В руки ему попала трофейная немецкая книга о внешней баллистике ракетных снарядов, чтение ее внесло разнообразие в служебную рутину. Разобравшись в методе расчета полета ракет «земля-земля», Моисеев нашел его излишне трудным, по-своему поставил задачу и построил простое решение, позволявшее использовать стандартные баллистические таблицы. Свое сочинение послал Ю. А. Победоносцеву, письмо дошло, и адресат даже вспомнил дипломника сорок второго года. Опус Моисеева оказался первым критическим разбором трофейных немецких документов, поэтому главному ВВС было направлено письмо с просьбой откомандировать капитана Моисеева в распоряжение ракетного ведомства. Так в 1946 году Н.Н. Моисеев стал младшим преподавателем кафедры реактивного вооружения самолетов Военно-воздушной академии им. проф. Н.Е. Жуковского.

Проработав полтора года на кафедре, Моисеев нашел себя в науке, более того, определилась его будущая научная судьба. Лидером факультета авиационного вооружения был генерал, профессор Д.А. Венцель, ученик А.Н. Крылова. Венцель привил Моисееву вкус к прикладным задачам. Моисеев стал понимать, что прикладные задачи не менее важны и сложны, чем чистая теория, потому что возникают на пути к познанию природы и жизни. Это – один из путей к истине. Сила математики в том, что с помощью ее можно описать и понять такие вещи, которые без нее понять сложно и нельзя понять так глубоко. Тут можно вспомнить А. Эйнштейна, заметившего, что природа чаще всего устроена так, как проще всего описывается математически. Под влиянием Д.А. Венцеля Н.Н. Моисеев усвоил, что наука едина, а делится только на глубокую науку и спекуляции на науке.

Осенью 1947 года пришлось покинуть академию – в то время авиационные училища стали укреплять кадрами из Жуковки, и Моисеев был назначен на должность начальника учебного отдела Харьковского высшего авиационного технического училища. Использовал командировки в Москву, чтобы продолжать общаться с бывшими коллегами, старался не пропускать семинары Д.А. Венцеля и начальника кафедры воздушной стрельбы профессора В.С. Пугачева.

На одном из семинаров В.С. Пугачев в докладе о задачах рассеяния авиационных реактивных снарядов сообщил, что метода решения таких задач пока нет. Размышляя о задаче, Моисеев нашел новую, простую постановку задачи обработки стендовых испытаний двигателя и расчета рассеивания снарядов. В Харькове довольно быстро справился с техническими трудностями и доложил работу на семинаре Д.А. Венцеля. Присутствовавший В.С. Пугачев высоко оценил работу и представил ее как диссертацию, согласившись стать оппонентом. В 1947 году диссертация была успешно защищена.

За три года полковой инженер-вооруженец Моисеев превратился в кандидата технических наук, специалиста с прочным авторитетом в ракетной технике. Летом 1948 года демобилизовался и перешел на работу в теоретический отдел НИИ-2, где занимался динамикой управляемых ракетных снарядов. По совместительству исполнял обязанности доцента по кафедре реактивной техники МВТУ, которой заведовал Ю.А. Победоносцев. Вместе с ним совместителями на кафедре работали С.П. Королев, В.Н.

Челомей, В.П. Бармин, В.И. Феодосьев. Никите Николаевичу был поручен курс динамики управляемых ракет и снарядов. Он сам целиком его поставил, подобные курсы не еще читались. Ю.А. Победоносцев ценил Моисеева, поддерживал его работу. В НИИ-2 тоже благожелательно относились к этой работе. Одним словом, сложилось общественное мнение, что лекции надо оформлять монографией и представлять ее в качестве докторской диссертации.

Казалось, будущая карьера состоится в ракетной технике, но тут произошла катастрофа. Мачеха, Маргарита Васильевна Моисеева, учительница младших классов с почти тридцатилетним стажем была арестована. Ее обвинили в подготовке вооруженного восстания, осудили по 58 статье на десять лет и отправили в лагерь близ Тайшета. Вскоре Моисеева лишили допуска к секретным работам, и уволили из НИИ-2, а потом из МВТУ. Оказался на улице без права и возможности работать по специальности: все материалы и рукопись докторской диссертации остались в секретном сейфе. На работу никуда не брали, но вопрос стоял уже не о работе, а о жизни.

Моисеев решил – надо уезжать из Москвы. Попробовал устроиться преподавателем какого-нибудь провинциального вуза. В Главном управлении университетов Министерства высшего образования случайно встретил старого знакомого и рассказал ему о беде. Тот отнесся по-доброму и предложил ехать в Ростов читать механику и гидродинамику в университете. В Ростове. Моисеев оказался во время – через некоторое время им стали интересоваться органы безопасности. Они нашли Моисеева в Ростове в конце 1952 года, начали составлять дело. Вызывали на допросы его знакомых, сослуживцев, но ничего от них не добились. А в марте 1953 года умер Сталин, осенью 1953 года из лагеря вернулась мачеха.

В Ростовском университете Никита Николаевич исполнял обязанности доцента на кафедре теоретической механики. Должен был читать гидродинамику, но в 1950 году гидродинамику совсем не знал. Пришлось, что называется, с нуля готовить четыре курса, курсовые задания студентам по гидродинамике, вести студенческий семинар по математическим методам механики сплошных сред. Все было не в тягость и не пугало – были силы и легкомысленная отвага молодости. Для Никиты Николаевича годы в Ростове стали счастливыми. Напряженная интересная работа, новые друзья, налаженный быт в семье помогли оправиться от свалившихся на него потрясений.

Надо было определяться с собственной научной деятельностью, опять начиная все заново. В университете Моисеев изучал теорию возмущений линейных операторов, в школе Венцеля приобрел вкус к прикладным задачам. Поэтому, составляя задания на курсовые проекты студентам, обратил внимание на задачи о колебаниях свободной поверхности жидкости в сосудах. Понял, что к ним можно приложить спектральную теорию линейных операторов, и вскоре исследовал свойства спектра частот и форм собственных колебаний тяжелой идеальной несжимаемой жидкости в неподвижном сосуде произвольной формы. Результат был доложен на семинаре в Математическом институте им. В.А.Стеклова и представлен М.В. Келдышем в «Доклады Академии наук».

На семинаре по гидромеханике студенты должны были реферировать оригинальные работы, от Моисеева требовалось подбирать темы рефератов. Осенью 1950 года начали реферировать трактат Н.Е Жуковского о движении твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. Классическая теорема Жуковского гласит, что такое тело эквивалентно твердому телу с измененными динамическими характеристиками – массой и моментами инерции. Н.Н. Моисеев уже исследовал колебания свободной поверхности жидкости в неподвижном сосуде, поэтому у него естественно возникло обобщение задачи Жуковского на случай полости, не полностью

заполненной жидкостью. Решил задачу, результаты доложил на семинаре С.А. Соболева в Математическом институте. Выслушав доклад Моисеева, Соболев рекомендовал Никиту Николаевича в докторантуру Математического института АН СССР для завершения диссертации.

Получив два года отпуска для написания диссертации, Моисеев каждый месяц приезжал на неделю в Ростов, чтобы выполнять педагогическую нагрузку – заменить его на кафедре было некому. Хватило года, чтобы опубликовать результаты, напечатать текст диссертации, и в 1955 году Никита Николаевич Моисеев защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в Ученом совете Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Его официальными оппонентами были С.А. Соболев, А.Ю. Ишлинский и И.Н. Векуа.

Удивительная судьба! Мало того, что на войне случай мог так или этак распорядиться жизнью Моисеева, - сам он не раз начинал жизнь заново, пользуясь случаем. Пролетарская власть сгубила достойную, благополучную, интеллигентную семью, обрекла на сиротство, изгойство, закрыла дорогу в университет. Помог случай, он его использовал, приобщился к элитарной интеллектуальной среде мехмата МГУ. После войны высокая должность инженера дивизии, казалось бы, открывала достойную и благополучную карьеру строевого офицера, а он опять, воспользовавшись случаем, начал с начала и стал ведущим специалистом в ракетной технике. Снова власть сломала ему жизнь арестом мачехи, и снова пришел счастливый случай, и опять он использовал его до конца. За неполных восемь лет, с 1947 по 1955 год полковой инженер-вооруженец стал доктором физико-математических наук, профессором, которого ценили академики И.М. Виноградов, М.А. Лаврентьев, С.Л. Соболев, Л.И. Седов, А.Ю. Ишлинский, А.А. Дородницын - цвет нашей математики и механики.

А каждый счастливый случай – встреча с умным, порядочным, великодушным человеком, не убоившимся помочь изгоя в то опасное время. Моисеев располагал к себе живым умом, интеллигентностью, легким нравом, открытостью, доброжелательностью. В годы, когда судьба играла с ним азартную игру, он стал тем Моисеевым, которого все знали, которого мы любили. Обладал какой-то легкой отвагой в жизни, мало чего боялся и верил в случай. Не опускал рук и умел воспользоваться случаем. Не ныл, в самых трудных обстоятельствах делал все, что было в его силах, и каждый раз отыскивал возможность продолжить собственную линию жизни.

Научную деятельность Никита Николаевич завершил созданием философской концепции, которую назвал современным рационализмом. Большая роль в ней отводится случайности и неопределенности как фундаментальной, элементарной причине эволюции. Современный рационализм вырос не только из научного опыта Моисеева, культурного наследия, им освоенного, но и из собственной судьбы.

В докторской диссертации Н.Н. Моисеева легко проследить сочетание высокой математической культуры и прикладной направленности, интерес к интерпретации математических фактов, к тем физическим и техническим следствиям, которые эти факты могли иметь. К решению задачи о движении твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью, он подошел как математик. В линейной постановке выписал систему уравнений движения тела с жидкостью в общей операторной форме. Показал, что линейный оператор задачи расщепляется на бесконечномерный положительно определенный оператор и конечномерный оператор, свойства которого зависят от параметров задачи; от них зависит качественное поведение решения. Далее он действовал как прикладник, прошедший школу Д.А. Венцеля. Усмотрел, что тело с колеблющейся жидкостью можно описать как

механическую систему с бесконечным числом степеней свободы. Задача гидродинамики была отделена от задачи динамики эквивалентного твердого тела, с которым связана бесконечная система математических маятников. Динамические характеристики жидкости с «замороженной» свободной поверхностью вычислялись по методу Н.Е. Жуковского, а колебания свободной поверхности вычислялись через решение задачи о собственных колебаниях жидкости в неподвижной полости. Н.Н. Моисеев доказал полноту главных колебаний системы и обосновал вариационный метод для их вычислений. Это было исчерпывающим решением задачи. Вариационный метод давал возможность эффективно использовать ЭВМ для вычислений динамических характеристик механической системы, эквивалентной телу, содержащему жидкость со свободной поверхностью в полостях сложной формы.

Из теории, построенной Н.Н. Моисеевым, следовало, что для устойчивости равновесия твердого тела, в полости которого может колебаться жидкость, необходимо и достаточно устойчивое эквивалентное твердое тело. Это был классический результат, обобщивший классическую теорему Н.Е. Жуковского. Из теории следовали и важные практические результаты. На активном участке ракета с жидким топливом может быть описана как твердое (или, точнее, упругое) тело, в полостях которого колеблется жидкость. Уравнения движения такой системы необходимо знать, чтобы стабилизировать ее движение. Так, начав с академической постановки задачи и выполнив полное ее математическое исследование, Н.Н. Моисеев получил результаты, имеющие важные приложения к проектированию ракетной техники.

Исследования по гидродинамике и механике Никита Николаевич продолжил в Москве – в 1955 году М.А. Лаврентьев пригласил его занять должность профессора по кафедре «Теория взрыва» Московского физико-технического института. Не прекращая исследования механики тела с жидкостью, на кафедре Моисеев начинает заниматься нелинейными задачами о волнах на поверхности идеальной жидкости. В 1958 году вместе со своими аспирантами Ю.П. Иванчиковым и А.М. Тер-Крикоровым он публикует работу «Об асимптотическом характере формул М.А. Лаврентьева», которая имела большие последствия. Идеи асимптотики узких полос были использованы А.М. Тер-Крикоровым при доказательстве теоремы существования уединенной волны на поверхности тяжелой идеальной несжимаемой жидкости. Исследования уединенной волны проводились в связи с изучением проблемы цунами. Однако цунами – не уединенная волна, а ряд волн разной высоты, следующих одна за другой с разными скоростями. Моисеев высказал гипотезу, что причина этого в неоднородности морской воды. Постановку задачи о нелинейных волнах на поверхности стратифицированной жидкости обсуждал с А.М. Тер-Крикоровым, долго и настойчиво убеждал его взяться за эту задачу. В 1965 году в докторской диссертации А.М. Тер-Крикоров доказал теорему о существовании счетного множества волн типа уединенных, разных амплитуд и распространяющихся с разными скоростями на поверхности жидкости, плотность которой зависит от глубины. Если распределение плотности стремится к постоянной, то все волны вырождаются в равномерный поток, кроме одной, которая вырождается в уединенную. Результат вызвал большой интерес в мире.

В этой истории ярко проявилось одно из свойств его личности Никиты Николаевича. Всегда у него была масса идей, он щедро делился ими со своими учениками и коллегами. И никогда не обижался, если ученик принимал не его, а чужую идею, или брался за свою собственную. Относился к ученикам как к коллегам, не боялся признаться, что чего-то не знает, учился у них.

В 1956 году начался чрезвычайно плодотворный период работы Н.Н. Моисеева в Вычислительном центре АН СССР, который продолжался тридцать лет. До 1966 года он продолжал активно заниматься задачами о движении тел с полостями, содержащими

идеальную жидкость. Предложил общую вариационную формулировку проблемы, распространил ее на случай упругого тела, обосновал вариационный метод численного решения задач о динамических параметрах эквивалентного твердого тела. Численные методы были специально ориентированы на применение ЭВМ в высшей степени актуальной тогда области приложений – ракетной технике. Итогом исследований движения тел с жидкостью стала монография «Динамика тела с полостями, содержащими жидкость», написанная вместе с В.В. Румянцевым и опубликованная в 1965 г. В 1980 году за цикл исследований динамики тел с жидкостью Н.Н. Моисеев вместе с коллегами получил Государственную премию СССР.

Продолжая заниматься динамикой тел с жидкостью, в 1962 году Моисеев приступил к задачам оптимального управления. В первую очередь его интересовали приложения теории к задачам расчета траекторий движения технических объектов, поэтому занимался численными методами. Принцип максимума Понтрягина сводит задачу об управлении объектом к решению сложной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений. Регулярных численных методов решения задачи не было. Моисеев искал новые подходы. На них натолкнуло его исследование задачи о движении космического аппарата в облет радиационных поясов Земли. Опасность попасть в радиационный пояс выражается ограничением на фазовые координаты космического аппарата, поэтому к задаче нельзя применить классический принцип максимума Понтрягина. Моисеев предложил прямые методы решения задачи перебором в пространстве управлений и в пространстве состояний системы, идейно близкие методу направленного перебора Михалевича-Шора. Возник подход к решению широкого класса задач оптимизации, Моисеев с сотрудниками Н.Я. Багаевой и Н.К. Буровой использовал его для расчета оптимальных траекторий космических аппаратов и оптимальных курсов кораблей в океане. Позднее Ф.Л. Черноушко модифицировал метод Моисеева в метод локальных вариаций, который широко использовался для решения разнообразных задач механики. Итог этим исследованиям Н.Н. Моисеева подвела монография «Численные методы в теории оптимальных систем», опубликованная в 1971 году и переизданная в 1975 году.

Примерно в то же время Никита Николаевич со своими учениками начал заниматься асимптотическими методами решения нелинейных дифференциальных уравнений. Интерес к ним возник в связи с задачами о движении космических аппаратов относительно центра масс и задачами оптимального разгона космического аппарата двигателем малой тяги. Результаты этих исследований вошли в монографию Н.Н. Моисеева «Асимптотические методы нелинейной механики», изданную в 1969 году и вторично – в 1981 году.

За пятнадцать лет работы в гидродинамике и механике Моисеев приобрел прочный авторитет и стал известным в науке. Эти работы сделали его ученым. Восполнил образование, отточил технику и изобретательность, расширил кругозор, сформировал собственный подход к задачам. Здесь у Моисеева не только основополагающие, но самые сильные, законченные - исчерпывающие результаты. В эти годы возникла научная школа Моисеева, выросли многие его ученики. В 1966 году пришло официальное признание – Никита Николаевич Моисеев был избран членом-корреспондентом АН СССР по отделению механики и процессов управления.

В науке Моисеев жил очень активно. Участвовал и выступал в научных семинарах, не пропускал конференции, с множеством людей обсуждал интересующие его задачи. Много лет регулярно действовал его собственный семинар, тематика которого менялась соответственно новым интересам руководителя. Потребность в научном общении сохранилась у Никиты Николаевича на всю жизнь, он впитывал новую информацию, усваивал новые идеи. В круг его общений входили не только



коллеги по работе, но и математики, конструкторы новой техники, военные, системщики, экономисты, социологи, биологи, почвоведы, демографы, географы, управленцы, философы, политики и т.д. и т.д. Общение возбуждало собственные мысли, подсказывало подходы к новым задачам. А работал он почти всегда в одиночку, – был у него сильный научный, творческий иммунитет. И ему нравилось быть на виду.

1965-66 годы стали переломными в научной жизни Моисеева. Он еще продолжал заниматься задачами гидродинамики, механики, оптимального управления. А на семинаре уже выступал Э.Б. Ершов, который в НИИ Госплана СССР разрабатывал математические методы анализа экономики. В те годы были сняты запреты на применение методов оптимального программирования Л.В. Канторовича в экономике. Был организован и набирал силу Центральный экономико-математический институт АН СССР, где численными методами математического программирования с помощью ЭВМ рассчитывали планы оптимального развития и размещения отраслевых и территориальных производственных комплексов. Кибернетика перестала быть служанкой буржуазии, и поставлена на службу коммунизму.

Никита Николаевич был чуток к новым веяниям. Понял, что вычислительная техника будет очень быстро совершенствоваться, что ЭВМ открывают широчайшие возможности использовать математические модели и методы в самых разных областях приложений. «Мы должны быть готовы эффективно использовать ЭВМ нового поколения, надо искать новые задачи» - постоянно внушал он своим ученикам. Сам все время искал новые задачи. Его привлекали задачи государственного, народнохозяйственного значения. Они соответствовали его энергии, его гражданскому темпераменту. От деда и отца воспринял он идею служения своей стране.

Избрание членом АН СССР открыло Моисееву новые возможности, он использовал их, чтобы добывать ресурсы для воплощения своих замыслов. Тогда же он стал заместителем по науке директора Вычислительного центра АН СССР академика Анатолия Алексеевича Дородницына, Анатолий Алексеевич одобрял замыслы Никиты Николаевича. Долгие годы они замечательно дополняли друг друга – строгость, основательность Дородницына обеспечивала глубину, увлеченность, инициативность Моисеева придавала размах исследованиям ВЦ АН СССР.

В 1966 году Никита Николаевич установил контакты с Министерством обороны и активно обсуждал с разных сторон вопросы применения ЭВМ в интересах военного ведомства. В ВЦ АН СССР создал сектор, который занимался разработкой моделей экономики с приложениями к задачам военно-экономического планирования. Тогда вместе с Ю.П. Иваниловым я предложил новое семейство моделей, они давали возможность использовать методы оптимального управления для расчета перспективных планов развития экономики с учетом оборонных потребностей. Например, были рассчитаны планы достижения в заданные сроки наилучших социально-экономических показателей при условии, что в любой момент планового периода экономика может быть отобилизованной в заданный срок. Работы велись вместе с научно-исследовательскими организациями Министерства обороны.

Одновременно Н.Н. Моисеев инициирует исследование процессов вооруженной борьбы. П.С. Краснощеков и Ю.Н. Павловский создали модель, которая описывала не только боевые взаимодействия противников, как известная модель Ланчестера, но и распределение сил на местности и перемещения сил. Эту работу делали вместе с Военной академией им. М.В. Фрунзе.

Примерно в то же время Н.Н. Моисеев пригласил в ВЦ АН СССР Юрия Борисовича Гермейера, известного специалиста в области исследования операций, создав для него новую лабораторию. В ВЦ АН СССР Ю.Б. Гермейер разработал общую

концепцию применения методов исследования операций для поддержки принятия решений в условиях неопределенности и конфликта. Сформулировал принцип гарантированного результата, вместе с учениками использовал его для решения прикладных задач.

Известного специалиста в области автоматического регулирования Гермогена Сергеевича Поспелова избрали членом-корреспондентом АН СССР в тот же год, что и Никиту Николаевича. В то время Гермоген Сергеевич уже занимался задачами военно-экономического планирования. Н.Н. Моисеев пригласил Г.С. Поспелова в ВЦ АН СССР, добившись открытия и для него лаборатории. Г.С. Поспелов предложил программно-целевой метод планирования оборонных отраслей, вместе с сотрудниками и учениками разрабатывал модели и методы, обеспечивающие применение ЭВМ в программно-целевом планировании.

Моисеев ставил масштабные задачи, решить их можно было только коллективными усилиями. Надо было вникать в содержание новых задач, создавать новые методы, распространять в новые области приложений накопленный опыт и выработанные принципы. В конце 1960-х-начале 1970-х годов в лабораториях «куста Моисеева» сложилась обстановка всеобщего энтузиазма и тесного научного общения. Идею, высказанную одним, подхватывали другие, приспосабливали ее к своим делам. Так идею программно-целевого планирования распространили на задачи перспективного народно-хозяйственного планирования. Принцип гарантированного результата в теории исследования операций использовали при создании моделей игр с противоположными интересами, которые, в свою очередь, применялись для анализа механизмов взаимодействия субъектов экономики. Идея имитации поведения управляющих субъектов выросла до концепции имитационных систем как средства сочетания формальных математических и неформальных гуманитарных методов в проблемно ориентированных фундаментальных исследованиях. Яркие, самобытные, доброжелательные, Никита Николаевич, Юрий Борисович, Гермоген Сергеевич были популярны у студентов Физтеха и МГУ. От желающих попасть в ученики не было отбоя, но были жесткие ограничения на штатное расписание. Активно пропагандируя свои идеи среди деятелей, ответственных за государственные решения, предлагая проекты государственного значения, Н.Н. Моисеев и Г.С. Поспелов «выбивали» новые ставки и привлекали талантливую молодежь. Молодежь воспитывалась и росла на опыте решения новых трудных задач. Школа Моисеева набирала критическую массу.

Сам Никита Николаевич в конце 1960-х годов продолжал заниматься задачами гидродинамики, механики и теории оптимального управления. И внимательно следил за развитием математических методов оптимизации, за применением ЭВМ в технике, военном деле, в экономике, за прогрессом вычислительной техники. Он активно участвовал в обсуждениях результатов всех инициированных им исследований, хотя не слишком активно занимался технической работой.

Его занимали общие вопросы: как использовать ЭВМ в процессе познания? Какова роль математика-прикладника в проектах анализа и конструирования сложных систем? Размышлял над устройством общественных систем, искал принципы управления в обществе, и ставил себе задачу внедрить научные принципы в сознание людей, ответственных за государственные решения. Начинаясь качественно новый этап научного развития Никиты Николаевича Моисеева.

Одним из первых он понял, что ЭВМ новых поколений предоставляют исследователям средства для оперативного вмешательства в процесс вычислений. Это не простая техническая возможность, а новый инструмент познания. Работая в диалоге

с ЭВМ, можно экспериментировать с математическими моделями, по результатам вычислительных экспериментов проверять гипотезы, заложенные в модели, и приходить к новым гипотезам. Такая возможность особенно плодотворна при создании математических моделей в нетрадиционных для математики областях приложений, где еще только предстоит отыскать фундаментальные принципы математического описания структур и отношений, где нельзя провести контролируемые натурные эксперименты. Н.Н.Моисеев создавал методологию математического моделирования и вычислительных экспериментов с математическими моделями в новых областях приложений одновременно с А.А. Самарским, который создавал ту же методологию в области физических приложений.

Он обобщил свой небогатый опыт экспериментирования с моделью турбулентности, с моделью вычислительного процесса, усвоил опыт сотрудников и учеников, создававших модели общественных процессов и систем. Принимаясь за решение новой проблемы, математик-прикладник, погружался в незнакомую предметную область, должен был найти общий язык со специалистами в этой области, чтобы понять содержание проблемы и нащупать подходы к решению. Для обществоведов важнее качественные данные о событиях, фактах, личностях, чем количественные данные. Количественные данные используются для подтверждения неформальных моделей развертывания во времени событий, связи фактов, отношений людей. Гуманитарии оперируют, скорее, образами, чем понятиями, строят размытые отношения образов-понятий. Возникает проблема, как сочетать их неформальные методы исследования и формальные методы – они необходимы, чтобы включить ЭВМ и вычислительные эксперименты в единый процесс познания общественных процессов и систем. Позже внутренняя логика развития исследований приведет Моисеева к синтезу гуманитарных и естественнонаучных знаний в единой концепции современного рационализма.

В качестве средства соединения формальных моделей и неформальных методов исследования общественных систем Н.Н. Моисеев и его ученики предложили имитационные системы. В общественных системах взаимодействуют процессы разной природы, более или менее изученные. Характерно, что на процессы влияет сознательная деятельность людей. Физические процессы можно описывать формальными моделями, биологические процессы тоже описываются формальными моделями, хотя хуже разработанными, и т.д. Специфические общественные процессы обмена информацией, использования информации для принятия решений людьми, - одним словом, жизнедеятельность людей формализовать трудно. Имитационная система состоит из совокупности математических моделей тех процессов, которые поддаются формализации, алгоритмов вычисления состояния процессов в зависимости от параметров управляющих воздействий и средств диалога, которые дают возможность исследователям, имитирующим поведение людей, задавать параметры управления в зависимости от информированности и, главное, от иррациональных мотивов, свойственных людям. Чтобы эксперименты были контролируемы, поведение исследователей ограничено рамками предписанных сценариев. Чтобы дать исследователям рациональные ориентиры для выбора поведения, имитационная система снабжается набором упрощенных моделей принятия решений.

Моисеев сформулировал требования к архитектуре имитационных систем. Рассматривал имитационные системы как средство познания общественных процессов, обсуждал взаимодействие имитационной модели и упрощенных моделей как процедуру выработки, проверки и отбраковки гипотез относительно структур и отношений людей в общественных системах. Для исследователя имитационная системы – своеобразная экспериментальная установка, она нужна, чтобы вести диалог с

непознанной реальностью: формулировать вопросы-гипотезы и получать ответы-отражения реальности в моделях.

В начале 1970-х годов в Вычислительном центре АН СССР структура имитационных систем и методология имитационных экспериментов вырабатывалась на опыте имитации взаимоотношений трех гипотетических государств. Каждое из государств имело территорию, на которой расположены объекты экономики и вооруженные силы. Государства взаимодействовали посредством торговых обменов и вооруженной борьбы. Деятельность правительств имитировали три группы исследователей. Они вели переговоры, принимали экономические, политические и военные решения. Решения вводились в ЭВМ, и с помощью сложной модели, состоявшей из блоков экономики и вооруженной борьбы, вычислялась «история государств».

С помощью имитационной модели взаимоотношений греческих полисов были не только реконструированы количественные характеристики истории войны Афинского и Пелопонесского союзов, но и системно проанализированы, согласованы разноречивые разнородные данные о хозяйственной, военной и социальной жизни греческих полисов.

На основе разработанной в ВЦ АН СССР модели боевых действий была создана система имитации вооруженной борьбы на театре военных действий. Имитировались перемещения и боевые взаимодействия подразделений разных родов войск на местности, рельеф которой и инженерное обустройство изменялось в ходе борьбы. Была смоделирована трехуровневая система управления войсками (например, батальон-полк-дивизия или полк-дивизия-корпус) с соответствующими штабами, средствами связи, разведкой. По сути дела, это был электронный ящик для штабных игр, на нем отрабатывалась методология проведения игр. У этой работы был забавный конец. В период разрухи 1992-1993 годов, по-видимому, кто-то из наших партнеров продал демонстрационный вариант системы американцам. Осенью 1993 года американцы нашли автора модели боевых действий П.С. Краснощекова и пригласили читать лекции в исследовательский центр армии США. Там ему показали упомянутую «демонстрашку» и не только ее, но и другие отчеты ВЦ АН СССР. Общаясь с сотрудниками центра, Краснощеков выяснил, что в то время уровень наших разработок был существенно выше американских.

Замыслы Н.Н. Моисеева обгоняли возможности ЭВМ. Теперь исследователю предоставлены мощные средства диалога с компьютером, и планы Моисеева воплощаются в полной мере. В последние годы в ВЦ РАН создано несколько имитационных систем и систем автоматизации моделирования. Например, компьютерная система ЭКОМОД поддерживает все этапы создания математической модели экономики, экспериментирования с моделью, модифицирования модели, идентификации и верификации модели по данным статистики, выполнения прикладных расчетов с помощью модели. В основе системы – каноническая форма представления широкого класса моделей, достаточно точно отражающая структуру и механизмы саморазвития экономики, и (что не менее важно) удобная для стандартизации. ЭКОМОД использует возможности, которые современные компьютеры предоставляют исследователю для эффективного диалога.

Политологи часто словом «проект» обозначают смысл и способ существования социума. Много лет Н.Н. Моисеев строил проект социализма, гуманистические идеалы которого крепились бы на каркасе научно выработанного компромисса интересов людей, чья самодеятельность ограничена только границами гомеостаза, очерченными методами системного анализа с помощью ЭВМ.

Еще в начале 1960-х годов в ВЦ АН СССР выполнялись расчеты оптимальных планов хозяйственной деятельности предприятий. Моисеев интересовался ходом работы, ее практическими результатами. Очень скоро понял, что для проблемы повышения эффективности народного хозяйства принятые методы оптимизации планов отраслевых и территориальных комплексов имеют ограниченное значение. Модели оптимального планирования не точно отражают реальные экономические отношения в стране. Критерий оценки качества плана не учитывает несовпадения интересов планового органа с интересами других участников экономического процесса, в моделях нет ограничений, которые накладывают реальные механизмы выполнения планов.

Постепенно у Н.Н. Моисеева сформировался взгляд на экономику как на сложную систему взаимоотношений множества людей во взаимосвязанных процессах экономической деятельности. Каждый из участников экономики имеет собственные интересы и располагает возможностями действовать в собственных интересах. Но результаты действий ограничены тем, что он мало знает о внешней обстановке – о тех факторах, которые могут противодействовать ему. Противодействия возникают не только от недостаточно изученной природы, но и от общества – интересы не совпадают и часто сталкиваются. И есть много причин, почему люди не могут договориться согласовать интересы. Участники экономики всегда действуют в условиях неопределенности, а перед исследователем встает задача изучить природу неопределенности и предложить рациональные принципы управления в условиях неопределенности. Для изучения природы неопределенностей надо привлекать неформальные, гуманитарные методы, а для выработки рациональных принципов – формальные, естественнонаучные методы, сочетая те и другие в вычислительных экспериментах на имитационных системах.

Моисеев не отрицал, что модели оптимального планирования полезны при решении конкретных задач рационального использования ограниченных ресурсов, однако настаивал: проблему управления народным хозяйством нельзя свести к модели оптимального планирования. Прежде всего, невозможно одним критерием выразить качество плана. Состояние и динамичность экономики оцениваются многими (часто противоречивыми) показателями и непонятно, как свести их в один показатель и можно ли это сделать. В качестве альтернативы он предложил использовать неформальные процедуры программно-целевого планирования для выработки программы развития народного хозяйства. Конечная цель формулируется как директивные задания народному хозяйству на перспективу. Конечная цель разветвляется в иерархию промежуточных целей, вплоть до перечня работ, которые необходимо выполнить, чтобы достичь целей нижнего уровня и тем самым – конечной цели. После того, как выработана программа работ, методами оптимизации решается задача о распределении ограниченных ресурсов по работам. Довольно резкие возражения Л.В. Канторовича, главы нашей экономико-математической школы на такую постановку задачи не смущали Никиту Николаевича.

Взгляды Моисеева на проблемы управления в обществе эволюционировали под влиянием новых достижений его сотрудников. Ю. Б. Гермейер предложил общий подход к моделированию и анализу решений в условиях неопределенности и конфликтов. Моисеев использовал результаты Гермейера для анализа механизмов управления в экономике. Вместе с Ю.Б. Гермейером Н.Н. Моисеев предложил информационную модель иерархических систем управления. Модель описывала дилемму: в авторитарной системе все подчинено цели верха, но верх недостаточно информирован о внешних условиях, в иерархии цели нижних уровней не совпадают с целями верха, но нижние уровни лучше информированы. При каких условиях проигрыш верха от несовпадения целей компенсируется выигрышем от лучшей

информированности? Ю.Б. Гермейер и И.А. Ватель предложили игровую конструкцию с иерархически устроенным критерием, выражающим интересы участников. На нижнем уровне - индивидуальные интересы, на следующем – групповые, выше – классовые, и т.д. до верхнего уровня, на котором общие для всех интересы. Эта конструкция обладает замечательным свойством: равновесие по Нэшу одновременно и устойчиво, и эффективно. То есть достигается компромисс интересов, от которого никому не выгодно отступать, и в то же время участники рационально используют ресурсы. Моисеев использовал конструкцию Гермейера-Вателя для анализа общественных компромиссов. С помощью моделей описал гонку вооружений великих держав и изучал возможные механизмы коллективной безопасности в ядерный век.

Н.Н. Моисеев предпринял системный анализ опыта своей школы, чтобы системно подойти к проблеме управления в общественно-экономической области. Отвергал технократический подход к экономике, рассматривал ее как своеобразный организм, жизнедеятельность которого регулируется собственными внутренними механизмами. Следовательно, единая система управления должна пронизывать общественный организм, но *не управлять, а направлять* стихию индивидуальных интересов и самостоятельности в русло общего развития. Пытался представить, на каких принципах должна быть построена эта единая система, какое место могут занять в ней компьютерные технологии обработки информации, основанные на математических моделях и методах. За исходную принял идею А.А. Богданова: форма организации системы решающим образом влияет на ее функционирование, поэтому можно влиять на развитие системы целенаправленным изменением ее организации. Обсуждал, как можно использовать идеи теории управления при решении проблемы управления в социально-экономической области. В теории управления техническими системами нашли адекватное формальное выражение фундаментальные понятия цели управления, качества управления и обратной связи. Разработаны математические методы оптимизации качества управления в форме оптимальных программ функционирования системы и методы оптимизации структуры системы в форме автоматических регуляторов функционирования системы в соответствии с заданной программой. Своеобразие социально-экономических систем в том, что они не конструируются, а возникают исторически в результате направляемой самостоятельности людей. Следовательно, проблема цели – это проблема социального творчества, которым формируется область гомеостаза социально-экономической системы. Проблема обратной связи – проблема *организации, удерживающей* массовую самостоятельность в области гомеостаза, *направляющей* процессы самоорганизации. Н.Н. Моисеев видел в опыте первых лет хозяйственной деятельности советской власти воплощение подобного подхода. Поставив цель в короткий срок преодолеть послевоенную хозяйственную разруху, советское правительство разработало программу электрификации России, создало организационные структуры и хозяйственные механизмы, обеспечившие выполнение программы. Только после того, как решены принципиальные проблемы гомеостаза и организации, можно использовать математические модели иерархии и компромисса, методы оптимизации для рационального распределения ресурсов по уровням иерархии. Исследования проблем управления в технике и в обществе Моисеев завершил монографией «Математические задачи системного анализа», опубликованной в 1981 году.

Однако не научные публикации были главным интересом Н.Н.Моисеева. Он ставил себе целью выработать общий взгляд на проблему управления, которым должен обладать управляющий, создать ту культурную среду, которая должна породить необходимый стандарт мышления управляющего. Писал записки в ЦК КПСС, в Правительство, выступал с докладами, в печати – пытался выращивать культурную

среду. Стал известным в стране и за границей, но попытки привить необходимый стандарт мышления нашим управляющим оказались тщетными. Моисеев легко относился к неудачам, но не мог работать, если не было успеха и признания.

Он потерял интерес к приложениям математики в экономике, а исследования, возникшие по его инициативе, продолжали развиваться в соответствии с внутренней логикой. Нами были предложены математические модели, явным образом отражающие внутренние механизмы саморазвития экономики и воздействие на них государственной макроэкономической политики. Создание модели начинается с системного анализа состояния экономики, особенно – реальных экономических отношений, свойственных изучаемой экономике. Они определяют механизмы саморегулирования экономики. Затем строятся адекватные математические описания, как правило, они сопряжены с серьезными исследованиями. Заканчивается работа настройкой модели на эмпирические данные и вычислительными экспериментами, по результатам которых оцениваются последствия макроэкономической политики. Сейчас это целое направление в математической экономике, названное системный анализ развивающейся экономики. С помощью моделей нами проанализированы перестройка и реформа экономики СССР и России в 1989-2005 годах, предсказаны критические моменты: последствия резкой либерализации экономики в 1992 году и банковский кризис 1998 года.

Еще при решении проблемы оборонной мобилизации экономики возникла постановка задачи о множестве достижимых значений показателей качества управляемого процесса. Она актуальна для социально-экономических приложений, потому что, как правило, качество благ не удается охарактеризовать одним показателем. Возникло целое направление в теории многокритериальной оптимизации – теория множеств достижимости управляемых систем. Изучены свойства множеств достижимости широких классов систем, разработаны эффективные алгоритмы построения множеств и визуализации их в многомерных задачах. Пакеты программ использованы для оценки макроэкономических решений, водохозяйственных проектов, эколого-экономических решений, для анализа социальных компромиссов, для оценки потребительских решений, технических решений.

Научные интересы Н.Н. Моисеева определялись его гражданским самосознанием, а гражданская позиция – научными взглядами. Не переставая, искал он новые приложения математических методов и ЭВМ на благо страны. В 1973 году Генеральный конструктор авиационной техники П.О. Сухой предложил А.А. Дородницину использовать опыт ВЦ АН СССР для создания компьютерной системы поддержки проектирования авиационной техники. Моисеев ухватился за представившуюся возможность и, еще занимаясь проблемами экономики, открыл в ВЦ АН СССР новый отдел и поручил П.С. Краснощекову возглавить исследования с целью сделать систему автоматизации проектирования истребителей. Через десять лет в конструкторском бюро им. П.О. Сухого была установлена первая очередь САПР истребителей. Система обеспечивала компьютерной поддержкой самый ответственный этап эскизного проектирования истребителя, помогала сокращать сроки проектирования. Ее использовали при создании истребителя Су-27.

За эту работу Н.Н. Моисеев вместе с коллегами получил Премию Совета министров СССР.

В те же годы Н.Н. Моисеев активно поддержал предложение В.Р.Хачатурова создать компьютерную систему проектирования развития и обустройства нефтяных и газовых месторождений, открыл для него новый отдел в ВЦ АН СССР, активно

обсуждал проблему. Через десять лет планы развития и обустройства нефтяных месторождений, распечатанные с БЭСМ-6, обсуждались на коллегии министерства.

В 1973 году был учрежден Международный институт прикладного системного анализа (IIASA) с целью сближения ученых разных стран на решении региональных и глобальных проблем методами системного анализа. Одним из первых был объявлен проект моделирования природных стоков воды и загрязнений. Гидродинамика природных вод была близка к прежней деятельности, поэтому Моисеев быстро стал неформальным лидером проекта. Со временем перенес исследования в нашу страну, в сотрудничестве с отраслевыми институтами «Гидропроект» и «Союзгипроводхоз» организовал проект рационального использования водных ресурсов и сохранения уникальных водных объектов. В ВЦ АН СССР разрабатывались методы системного анализа водохозяйственных проектов и оценки последствий выполнения проектов с помощью математических моделей и численных экспериментов на ЭВМ. Одна группа создавала модели движения вод с примесями в естественных водоемах с учетом русловых стоков и водозаборов потребителями, под действием ветра и приливных течений, разрабатывала численные методы исследования моделей и прикладных расчетов. Была сделана диалоговая компьютерная система для помощи непрограммирующим пользователям. Другая группа занималась задачами рационального использования водных ресурсов в народном хозяйстве, задачами проектирования водохозяйственных систем и управления ими. В этом проекте идеи Н.Н. Моисеева об управлении в социально-экономической области нашли технико-экономические приложения. Опыт совместного с «Союзгипроводхозом» выполнения проектов был обобщен в методике построения математического обеспечения проектирования водохозяйственных систем. По ней выполнены проекты в Голландии, Швеции, Ираке, проекты размещения аграрного производства на Европейской территории Союза, в частности, в Волго-Камском бассейне.

Благодаря Н.Н. Моисееву в начале 1980-х годов из водного проекта вырос еще один, сельскохозяйственный проект. В ту пору он стал частым гостем Ставропольского обкома – первый секретарь обкома М.С. Горбачев решил реализовать идеи Моисеева в Ставропольском крае. Вместе с учеными Ставропольского института сельского хозяйства сотрудники ВЦ АН СССР начали работать над комплексным проектом рационального использования природных ресурсов, развития и размещения производства и переработки сельскохозяйственной продукции в Ставрополье. Создавали модели роста растений, динамики поголовья и продуктивности стада, модель жизненного цикла машинного парка. Над ними выстраивали модель размещения ресурсов, теоретико-игровую модель рационального поведения центрального управляющего органа, многоуровневую модель регулирования агропроизводства в нижних уровнях иерархии. После того, как М.С. Горбачева назначили секретарем ЦК КПСС по сельскому хозяйству, проект «Сельское хозяйство Ставрополья» был включен в проекты IIASA. Ф.И. Ерешко, ученик Н.Н. Моисеева был назначен директором Института кибернетики ВАСХНИЛ, многочисленные вакансии в институте заполнены сотрудниками ВЦ АН СССР. В Институт кибернетики ВАСХНИЛ была внесена культура математического моделирования иерархических систем, численные методы исследования моделей с помощью компьютеров. Институт стал головным институтом СЭВ в области информатизации сельского хозяйства, признано, что уровень наших исследований был выше американского. По докладу Президента АН СССР А.П. Александрова на Политбюро ЦК КПСС работа ВЦ АН СССР по информатизации сельского хозяйства была отмечена в числе лучших достижений АН СССР.



В 1984 году Никита Николаевич Моисеев был избран действительным членом Академии наук СССР по новому Отделению информатики, вычислительной техники и автоматизации.

Двадцать лет, с 1966 по 1986 годы по инициативе Н.Н. Моисеева в Вычислительном центре АН СССР широким фронтом велись проблемно ориентированные фундаментальные исследования, они заканчивались созданием прикладных систем народнохозяйственного значения. Был накоплен огромный научный потенциал, но, по большому счету, властью он так и не был востребован. Система проектирования самолетов была похоронена новым руководством КБ, которое пришло во времена перестройки. Система проектирования нефтяных и газовых месторождений не нужна руководству нефтяных компаний, возникших после реформы экономики России 1992 года. Сельскохозяйственный проект встретил сопротивление аграрных чиновников еще при советской власти. За два года до реформы, в 1990 году мы предупреждали органы власти и безопасности, «прорабов» перестройки о катастрофических последствиях резкой либерализации экономики, однако, нас не послушали. О судьбе системы имитации вооруженной борьбы я уже рассказывал.

Однако наследие Никиты Николаевича Моисеева больше, чем научные результаты и прикладные проекты. В 1969 году по инициативе Н.Н. Моисеева в Московском физико-техническом институте был открыт Факультет управления и прикладной математики. Никита Николаевич стал первым деканом ФУПМ, во многом определил лицо факультета, сам создал цикл курсов по методам оптимизации и приложениям. Студенты факультета приходили на базовую кафедру Моисеева в ВЦ АН СССР, лучшие становились его учениками. Он растил учеников на новых, трудных задачах. Четверо из них стали академиками, а двое – членами-корреспондентами РАН. Очень много сделал Никита Николаевич для развития методов оптимизации и теории управления в нашей стране. В 1965 году учредил Всесоюзные летние школы по методам оптимизации и теории управления. Собирались они раз в два года на Украине, в Азербайджане, в Молдавии, в Белоруссии, в Эстонии, на Волге, на Урале, в Сибири, так продолжалось до 1989 года. Школы способствовали росту научной молодежи практически во всех регионах Советского Союза, очень многие участники школ Моисеева выросли в ведущих специалистов с мировым именем. С тех пор во всех республиках бывшего Советского Союза сохраняется неформальное научное и духовное единство, которое называется Школой Моисеева.

Пятнадцать лет выживания академической науки не прошли бесследно, однако все то, что создано Школой Н.Н. Моисеева в области компьютерных методов анализа и проектирования сложных систем и решений, пока еще легко восстановить и пустить в дело. Это просто необходимо для выполнения декларируемой властью программы инновационного развития экономики страны. Пока же созданный школой Моисеева научный потенциал остается не востребованным. Любителей-реформаторов академии занимает только управление потоками бюджетных расходов на науку и имуществом академии, эффективное использование научного потенциала академии даже не входит в круг их понятий.

Интерес Моисеева к проблемам социально-экономического управления пропал не только потому, что он терял надежду воплотить свои идеи в практику управления страной, но и потому, что следовал внутренней логике своего научного развития, складу своей личности. По образованию прикладной математик, как сам себя называл, математик-машинник, по призванию Моисеев был мыслителем. Его привлекали общие вопросы эволюции природы и общества, он искал ответы, объединяя методы естественных наук с методами гуманитарных наук. Его инструментом были

имитационные системы, исходным материалом для гипотез – результаты вычислительных экспериментов. Он откликался на новые идеи, на актуальные проблемы. По-своему перерабатывал их и давал им новое направление.

В конце 1960-х годов группа бизнесменов и интеллектуалов, объединившись в Римский клуб, выступила с декларацией об угрозе гибели цивилизации. Они привлекли внимание общества к деградации природных систем вследствие загрязнения промышленными отходами и истощения природных ресурсов. С тех пор слово «экология» вошло во всеобщий обиход. При поддержке Римского клуба в 1971 году была опубликована книга Дж. Форрестера «Мировая динамика». В квазинаучной форме книга иллюстрировала и пропагандировала идеи и тревоги Римского клуба. По словам Моисеева, значение книги Форрестера в том, что он предпринял первую попытку использовать методы естественных и инженерных наук для системного изучения процессов эволюции природной среды под воздействием промышленной цивилизации. Форрестер проложил дорогу к глобальным проблемам, практическое решение которых требует объединения усилий естественников и гуманитариев.

Однако Моисеев не мог всерьез принять концепцию Форрестера. В 1971 году на первой конференции по глобальным проблемам в Венеции Н.Н. Моисеев выступил со своей программой исследования глобальных проблем. Предложил создать компьютерную систему, имитирующую взаимодействие океана, атмосферы и биоты для изучения взаимодействия процессов в природе и влияния на них деятельности людей. К идеям Моисеева отнеслись скептически, успех имел доклад Д. Медоуза, ученика Дж. Форрестера о пределах роста индустриальной цивилизации. В 1974 году содержание доклада было опубликовано в широко разрекламированной книге Д. Медоуза и др. «Пределы роста».

Для Н.Н. Моисеева глобальные проблемы экологии стали главными, размышляя над ними, в конце жизни он пришел к целостной концепции коэволюции природы и человечества.

Подходя к глобальным проблемам экологии, Моисеев опирался на свою концепцию социально-экономического управления. Экологи высказывают опасение, что энергетическая мощность человечества уже может не вписаться в естественные геохимические циклы. Чтобы разрешить сомнения, надо решить центральную проблему – описать границы гомеостаза, т.е. определить критические значения параметров, за которыми существование человеческой цивилизации невозможно. В 1977 году Моисеев изложил свой подход в статье «Кибернетическое описание эколого-экономических систем».

Чтобы найти границы гомеостаза, надо построить модель биосферы из двух взаимодействующих блоков. Один блок описывает геохимические циклы в биосфере, другой – процессы в океане и атмосфере. После этого можно подключить модель экономики, чтобы оценить влияние деятельности человечества на природные процессы. Проблемы описания процессов в биосфере Моисеев обсуждал Н.В. Тимофеевым-Ресовским, тот ввел его в круг идей В.И. Вернадского, В.Н. Сукачева.

На первом этапе была построена модель взаимодействия процессов в атмосфере и в океане, влияющих на погоду и климат. Н.Н. Моисеев работал над этой моделью вместе В.В. Александровым, тот проводил численное исследование модели и вычислительные эксперименты с ней. Когда американский астроном К. Саган опубликовал сценарий возможных последствий ядерной войны между США и СССР, у Моисеева уже была модель, на которой можно было проверить сценарий Сагана и дать количественные оценки состояния атмосферы и океана после обмена ядерными ударами. Расчеты, проведенные В.В. Александровым, обнаружили феномен «ядерной зимы», вызвавший резонанс в мире и повлиявший на процесс разоружений. Эта работа

принесла Никите Николаевичу мировую известность, а позже он написал: «Само по себе исследование феномена ядерной зимы было более чем второстепенным событием в той большой работе, которую я задумал... Но именно «история ядерной зимы», которая сначала меня особенно не интересовала, получила широкую известность и сделала большую рекламу всему направлению, которое я начал развивать в Вычислительном центре Академии наук СССР. В то же время научные результаты, которые мне представлялись наиболее интересными, так же как и общее понимание смысла проблемы «человек-биосфера» или особенностей самоорганизации материального мира, остались просто незамеченными, а вероятнее всего, и непонятыми».

Результаты исследований глобальных экологических проблем были изложены в монографии «Человек и биосфера», написанной в 1985 году вместе с В.В. Александровым и А.М. Тарко.

Выполнить намеченную программу исследований Н.Н. Моисееву не удалось. Трагически погиб В.В. Александров, началась перестройка, финансирование научных исследований сокращалось. Как и многое другое, то, что было начато Н.Н. Моисеевым, продолжают его ученики В.П. Пархоменко и А.М.Тарко в ВЦ РАН.

В 1987 году Никита Николаевич Моисеев ушел в отставку с поста заместителя директора по науке Вычислительного центра АН СССР. Последний период его жизни был связан с экологической организацией Российский Зеленый Крест, Международным эколого-политологическим независимым университетом, Российским комитетом UNEP, Президентом которых он был до конца своей жизни. Последние годы его жизни наполнены интенсивной интеллектуальной и духовной работой, осмысливанием философских проблем естествознания, проблем синтеза естественных и гуманитарных наук, страстной публицистикой, темой которой были судьба России и ответственность интеллигенции.

Исследования проблем глобальной экологии, стабильности биосферы и антропогенных воздействий на процессы в ней привели Н.Н. Моисеева к критическому осмыслению представлений о значении природы в развитии общества и о роли человечества в процессах планетарного масштаба. Развивая идеи Пуанкаре, Бора, Вернадского, он создал оригинальную концепцию, названную современным рационализмом. В рамках этой концепции Н.Н. Моисеев пришел к своему пониманию принципов коэволюции человека и природы, понял необходимость новых нравственных императивов как условия сохранения биологического вида «человек разумный» на планете.

Свою концепцию Никита Николаевич строил как математик и как философ. Построил и исследовал математическую модель регуляторных свойств биоты и, в то же время, настойчиво указывал на необходимость синтетического подхода естественных и гуманитарных наук к проблемам природы и человечества. В концепции современного рационализма предложил схему мирового процесса самоорганизации, которая сочетала в себе воззрения естествознания и философии. Концепция покоилась на эмпирических обобщениях, вобрала в себя достижения науки XX века. Основные гипотезы о связанности всех элементов Вселенной, о множественности представлений сложной системы, о случайности и неопределенности, которые свойственны явлениям мира, об отборе и т.д. являются философскими осмыслениями фундаментальных положений современных наук о неживой и живой природе. Основываясь на исходных гипотезах, Н.Н. Моисеев представил общую картину коэволюции природы и общества. Применяя общие положения современного рационализма к анализу антропогенеза и цивилизационных разломов, он не только предупреждал о катастрофах, грозящих

техногенной цивилизации, но выявлял их эволюционные и экологические основания, намечал пути общественного развития, на которых их можно было бы избежать.

Никита Николаевич Моисеев был истинным патриотом России. С болью переживал смутное время, наставшее в России с начала 1990-х годов, не только переживал, но и активно противостоял пошлости недоучек, объявивших себя элитой нашего общества. Это нашло отражение в его публицистике, многочисленных публичных выступлениях. Он писал и говорил о формировании мировоззрения, о русской интеллигенции, о традициях российской науки и роли Учителя, о месте России в мире. Никита Николаевич Моисеев был романтиком и оптимистом, несмотря ни на что, верил, что слово, обращенное к людям, найдет отклик и даст плоды. В конце жизни, 1994 году написал книгу «Как далеко до завтрашнего дня...Свободные размышления. 1917-1993». Эта книга о его судьбе и его работе, которые переплелись с судьбой его страны.

# НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ МНОЖЕСТВА РАВНОВЕСИЙ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С КАПИТАЛОМ\*

Андреев М.Ю. (г. Москва)

*Работа посвящена теории полных рынков. В ней рассматривается стохастическая модель взаимодействия потребителей-собственников и фирм-производителей, основанная на модели Эрроу-Дебре. Показано, что в модели с капиталом выполнено тождество Вальраса, и, как следствие, в модели существует множество равновесий. Формулируются необходимые и достаточные условия существования и эффективности множества равновесий.*

**Введение.** Интерес к предмету данной статьи первоначально был вызван прикладными работами, касающимися моделирования экономики страны. Прикладные работы по моделированию экономики, наиболее полно учитывающие структуру экономики и взаимное влияние экономических факторов, с развитием вычислительной техники стали осуществляться в рамках вычислимых моделей общего равновесия (Computable General Equilibrium models). Вычислимые модели общего равновесия являются имитациями реальной экономической среды, которые комбинируют в себе абстрактную структуру общего равновесия, формализованную в моделях Эрроу и Дебре, с описаниями реальных экономических механизмов с целью численного нахождения равновесного спроса, предложения, цен, реализующихся на определенных рынках. В России модели общего равновесия были построены под руководством академика В.Л. Макарова [1], а также в Вычислительном центре имени А.А. Дородницына Российской академии наук в рамках направления исследований САРЭ (Системный анализ развивающейся экономики [2]), развиваемого под руководством академика А.А. Петрова. Одна из моделей, построенная в рамках САРЭ – модель экономики России с учетом теневого оборота [3], позволила восстановить и спрогнозировать несглаженные квартальные временные ряды основных макроэкономических показателей экономики России.

Главной особенностью модели [3] было детерминированное описание взаимодействия фирмы и ее собственника, как процесса управления финансовым капиталом фирмы. Детерминированное описание имело недостаток: цена капитала всех фирм и цена денег были одинаковыми в равновесии. В результате переменные модели были определены неоднозначно: собственникам было все равно вкладывать ли капитал в одну фирму, либо в другую, либо вовсе сохранить благосостояние в денежной форме. Чтобы придать цене капитала нетривиальную динамику и разрушить неоднозначность, был рассмотрен стохастический аналог описания взаимодействия фирм и собственников – стохастическая модель с капиталом.

Оказывается, прямое обобщение концепции Эрроу-Дебре [4] на стохастический случай дает интересные результаты (множественность равновесий модели). Также остается под вопросом прямое использование стохастических моделей в рамках СGE моделей, поскольку в реальности мы видим только одну реализацию траектории экономики, тогда как в стохастической модели возможных реализаций много. Поэтому исследование стохастической модели, несомненно, представляет интерес.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00563), РГНФ (код проекта 07-02-00362а), гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ-5379.2006.1)

**Постановка задачи.** Рассматривается модель идеализированной замкнутой экономики, в которой производится и потребляется единственный продукт<sup>1</sup>. В экономике действуют конечное число агентов двух типов: потребители-собственники  $n \in N$  и фирмы-производители  $m \in M$ . Фирмы выпускают продукт и продают на рынке потребителям. Прибыль фирм от продажи продукта распределяется между потребителями по праву собственности.

Считается, что экономика функционирует конечное число периодов  $t \in T$ ,  $T = \{0, \dots, T\}$ . В каждый период независимо реализуется некая случайная величина, принимающая конечное число значений  $s_t \in \{1, \dots, V\}$ . Таким образом, развитие экономики может пойти по  $V^T$  сценариям  $s_1, \dots, s_T$ , которые представлены в виде дерева

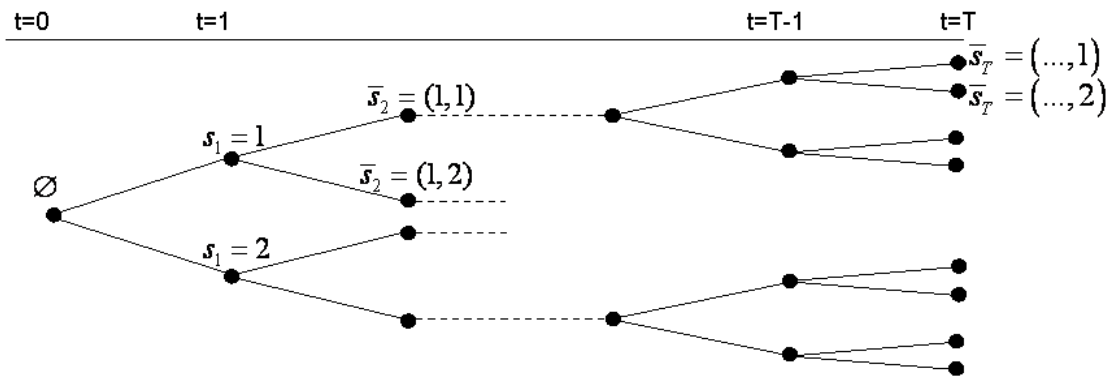


Рис.1. Дерево сценариев: возможные реализации будущего агентов

*Позицией* назовем начальный отрезок реализации случайных величин  $\bar{s}_t = (\emptyset, s_1, \dots, s_t)$ . Распределение всех случайных величин известно всем агентам. Управления агентов  $u$  планируются агентами в начальный период времени  $t = 0$  для каждой позиции  $\bar{s}_t : u = u(\bar{s}_t)$ .

Потребитель  $n \in N$  максимизирует ожидаемую полезность потребления

$$E_{\bar{s}_T} \left( U^n \left( c^n(\emptyset), \dots, c^n(\bar{s}_T) \right) \right) \quad (1)$$

Здесь  $U^n(\cdot)$  – функция полезности, а  $E_{\square}(\square)$  – оператор математического ожидания, нижний индекс которого указывает случайные величины, по которым происходит усреднение.

Оптимизация ожидаемой полезности происходит по управлениям агента-потребителя: объемам потребления  $c^n(\bar{s}_T)$ , денежным остаткам  $\Phi^n(\bar{s}_T)$  и вложениям  $K^{nM}(\bar{s}_T)$  потребителя  $n \in N$  в капитал фирм  $m \in M$ . Эти управления подчинены *финансовым ограничениям*

$$\Phi^n(\bar{s}_t) = \Phi^n(\bar{s}_{t-1}) - p(\bar{s}_t) c^n(\bar{s}_t) + \sum_{m \in M} \theta^m(\bar{s}_t) \left( K^{nm}(\bar{s}_{t-1}) - K^{nm}(\bar{s}_t) \right), \quad t \in T, \quad (2)$$

<sup>1</sup> Рассмотрение многих продуктов не добавляет здесь ничего интересного

$$\Phi^n(\bar{s}_T) \geq 0, \quad K^{NM}(\bar{s}_T) \geq 0. \quad (3)$$

Производитель  $m \in M$  максимизирует капитализацию в начальный момент времени

$$\theta^m(\emptyset) \sum_{n \in N} K_0^{nm} \rightarrow \max, \quad (4)$$

по ценам капитала во все моменты времени  $\theta^m(\bar{s}_T)$ , финансовым остаткам  $\Phi^m(\bar{s}_T)$  и чистым продажам  $y^m(\bar{s}_T)$ . Чистые продажи выбираются из производственного множества  $Y^m$ , которое, в принципе, может быть устроено (описано) достаточно сложным образом:

$$y^m(\bar{s}_T) \in Y^m. \quad (5)$$

Финансовые ограничения производителя имеют вид

$$\Phi^m(\bar{s}_t) = \Phi^m(\bar{s}_{t-1}) + p(\bar{s}_t) y^m(\bar{s}_t) - \theta^m(\bar{s}_t) \sum_{n \in N} (K^{nm}(\bar{s}_{t-1}) - K^{nm}(\bar{s}_t)), \quad t \in T, \quad (6)$$

$$\Phi^m(\bar{s}_T) \geq 0. \quad (7)$$

Основное предположение модели состоит в том, что фирмы назначают цены капитала в рамках следующего ограничения при  $t \in T / T$ :

$$\theta^m(\bar{s}_t) = E_{\bar{s}_{t+1}} \theta^m(\bar{s}_{t+1}) f(\bar{s}_{t+1}), \quad (8)$$

где  $f(\bar{s}_{t+1}) > 0$  – некий общий стохастический тренд цен капитала.

Определение. *Равновесием* в модели с капиталом назовем набор

$$\langle c^N(\bar{s}_T), \Phi^N(\bar{s}_T), K^{NM}(\bar{s}_T), y^M(\bar{s}_T), \Phi^M(\bar{s}_T), I^M(\bar{s}_T), \theta^M(\bar{s}_T), f(\bar{s}_{T/0}), p(\bar{s}_T) \rangle \quad (9)$$

такой, что 1) набор  $\langle c^N(\bar{s}_T), \Phi^N(\bar{s}_T), K^{NM}(\bar{s}_T) \rangle$  является решением задачи собственника (1)-(3); 2) набор  $\langle y^M(\bar{s}_T), \Phi^M(\bar{s}_T), I^M(\bar{s}_T), \theta^M(\bar{s}_T) \rangle$  является решением задачи производителя (4)-(8); 3) цены неотрицательны  $p(\bar{s}_t) \geq 0, t \in T$  и выполнен материальный баланс

$$\sum_{n \in N} c^n(\bar{s}_t) \leq \sum_{m \in M} y^m(\bar{s}_t), \quad t \in T. \quad (10)$$

**Понятие капитала.** Рассматриваемое здесь понятие капитала  $K^{NM}(\bar{s}_T)$  не следует путать с капиталом из модели Эрроу-Дебре [4] с ресурсами, в которой он понимается как основные фонды. В модели Эрроу-Дебре капитал (основные фонды) принадлежат собственникам и сдаются в аренду производителям. Основные фонды являются фактором производства, и за их использование производитель платит собственнику деньги. Для современных условий такое описание кажется неестественным, и может

быть применено, по-видимому, к описанию мелкого бизнеса, работающего на себя самого.

В рассматриваемой конструкции считается, что собственник знает не знает основных фондов той фирмы, которой он владеет. Собственник управляет фирмой на уровне финансовых потоков, а фирма самостоятельно принимает решение о выборе производственного плана  $y^m(\bar{s}_T)$  (и основных фондов, если они существуют и «спрятаны» внутри  $Y^m$ ). Понятие капитала  $K^{NM}(\bar{s}_T)$  относится к финансовой области. Наиболее естественная интерпретация капитала  $K^{nm}(\bar{s}_t)$  это количество акций фирмы  $m \in M$ , находящееся в собственности потребителя  $n \in N$  в позиции  $\bar{s}_t$ , а  $\theta^m(\bar{s}_t)$  – курс акций фирмы. Тогда член  $\theta^m(\bar{s}_t)(K^{nm}(\bar{s}_{t-1}) - K^{nm}(\bar{s}_t))$  из финансовых балансов (2),(6) понимается так, что потребители получают прибыль за счет продажи начального запаса акций  $K_0^{nm}$ , а не, как обычно, за счет дивидендов. Суммарное по всем собственникам количество акций  $\sum_{n \in N} K^{nm}(\bar{s}_t)$  не остается постоянным во времени: собственники

постепенно к концу траектории продают все акции фирме по курсу  $\theta^m(\bar{s}_t)$ , назначаемому самой фирмой (собранием акционеров).

Изменение во времени количества акций фирмы в обращении ни в коем случае не является чем-то неестественным. Наоборот, в последние годы в России активно идет процесс IPO (Initial Public Offering), в результате которого фирмы размещают на рынке дополнительные выпуски акций. Так, только в первом полугодии 2007 года 14 российских компаний провели размещения на 18.8 млрд. долларов США. Процесс скупки собственных акций фирмами также имеет место. А тот факт, что в равновесии к концу траектории количество акций обнуляется, является особенностью рассмотрения задачи на конечном интервале времени.

**Условия регулярности.** Исследование модели с управлением капиталом проведено при некоторых упрощающих предположениях – *условиях регулярности*. Условия регулярности это правила отбора «хороших» равновесий модели. Условия оправдываются с феноменологической точки зрения: мы не требуем, чтобы любые оптимальные при равновесных ценах решения агентов образовывали в совокупности разумную траекторию развития экономики. Мы хотим лишь убедиться, что какая-то из регулярных, т.е. разумных с макроэкономической точки зрения, траекторий цен, курсов и реальных показателей будет самосогласованной.

Среди условий *регулярности модели* следует выделить условие *полноты рынков* [5]: число фирм не меньше числа исходов

$$|M| \geq V, \quad (11)$$

а также условие  $\sum_{n \in N} \Phi_0^n + \sum_{m \in M} \Phi_0^m = 0$ , означающее, что наиболее распространенным и естественным видом денег являются обязательства других агентов. Равновесие (9) в регулярной модели называется *регулярным*, если оно удовлетворяет ряду условий, наиболее важными из которых являются следующие: 1) решения задач потребителя (1)-(3) и производителя (4)-(8) удовлетворяют достаточным условиям оптимальности из теоремы Куна-Таккера с единичными множителями Лагранжа при целевых функциях, 2) представления агентов о рынке капитала согласованны в том смысле, что стохастические тренды  $f(\bar{s}_t)$ ,  $t \in T / 0$ , с помощью которых производители связывают



цены капитала (8), совпадают с отношениями множителей Лагранжа к ограничению (2) задачи потребителя

$$f(\bar{s}_t) = \frac{\lambda^n(\bar{s}_t)}{\lambda^n(\bar{s}_{t-1})}, \quad t \in T / 0. \quad (12)$$

Если в равновесии терминальные сбережения (3), (7) обнуляются, а условия материального баланса (10) выполнены как равенства (так оно и получается на ряде равновесий), то после сложения финансовых балансов (2) и (6) выясняется, что материальные балансы во всех терминальных позициях  $\bar{s}_T$  выполнены тождественно:

$$\sum_{n \in N} c^n(\bar{s}_T) \equiv \sum_{m \in M} y^m(\bar{s}_T) - \text{тождество Вальраса. Материальные балансы (10) служат}$$

условиями для определения цен  $p(\bar{s}_t)$ . Так как в терминальных позициях баланс выполнен тождественно, то терминальные цены  $p(\bar{s}_T)$  произвольны, и каждому их набору соответствует своё равновесие. Поэтому в модели с капиталом существует множество равновесие, а факт произвольности терминальных цен отражен ниже в условиях согласованности (15)-(16).

**Задача благосостояния.** Регулярные равновесия (9) сравниваются с решениями *задачи благосостояния*. Задача благосостояния – задача максимизации линейной свертки полезностей агентов

$$\sum_{n \in N} a_n E_{\bar{s}_T} U^n(\hat{c}^n(\emptyset), \dots, \hat{c}^n(\bar{s}_T)) \rightarrow \max$$

по управлениям  $\hat{c}^N(\bar{s}_T), \hat{y}^M(\bar{s}_T)$  при заданном неотрицательном наборе весовых коэффициентов  $(a_1, \dots, a_{|N|})$  при технологических ограничениях  $\hat{y}^m(\bar{s}_T) \in Y^m$  и ограничениях материального баланса

$$\sum_{n \in N} \hat{c}^n(\bar{s}_t) \leq \sum_{m \in M} \hat{y}^m(\bar{s}_t), \quad t \in T. \quad (13)$$

В задаче благосостояния нет торговли между агентами, нет каких либо денежных потоков. Эту задачу часто называют централизованной или плановой экономикой: планы потребления и производства спускаются агентам сверху «руководящим лицом». Решения задачи благосостояния образуют так называемую *эффективную кривую* или *эффективное множество* и показывают тот максимальный уровень ожидаемой полезности потребления, который в принципе не могут превзойти потребители в результате торговли между собой, в частности, в рамках модели с капиталом. Если же потребителям в результате торговли удастся достичь такого же уровне потребления, как в задаче благосостояния (т.е., если натуральные части решений задач совпадают), то равновесие модели с капиталом называют *эффективным*.

Если равновесие модели с капиталом оказывается эффективным, то равновесные потребления агентов устроены определенным образом. А именно, условия первого порядка для задачи благосостояния дают

$$\frac{a_n \frac{\partial U^n}{\partial \hat{c}^n(\bar{s}_t)}}{\frac{\partial U^k}{\partial \hat{c}^k(\bar{s}_t)}} = 1, \quad \forall \bar{s}_t, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

что формулируется как равенство предельных полезностей потребления всех потребителей. Если потребления эффективны и устроены определенным образом, т.е. связаны друг с другом в различных исходах  $s_t | \bar{s}_{t-1}$  посредством (14), то расходы  $p(\bar{s}_t) c^n(\bar{s}_t)$  также связаны между собой в различных исходах  $s_t | \bar{s}_{t-1}$ . Это значит, чтобы добиться эффективности равновесия, потребители должны особым образом подбирать свои доходы в (2) под «эффективные расходы». В силу того, что в равновесии терминальные капиталы оказываются нулевыми  $K^m(\bar{s}_T) = 0$ , подобрать доходы под расходы в позиции  $\bar{s}_t$  потребители могут только за счет капиталов  $K^m(\bar{s}_{t-1})$  предыдущего момента времени. На число уравнений  $V$  (по числу исходов случайной величины  $s_t | \bar{s}_{t-1}$ ) требуется количество степеней свободы  $|M| \geq V$  в форме существования  $|M|$  штук фирм и, соответственно, их капиталов  $K^m(\bar{s}_{t-1})$ . Поэтому для эффективности равновесий необходимо, чтобы число фирм было не меньше числа исходов:  $|M| \geq V$ . Это объясняет, какое свойство выделяет условие (11) полных рынков.

Забегая вперед, скажем, что множество равновесий модели с капиталом (жирная кривая) изображено на рисунке 2а: оно занимает некоторую область эффективной кривой (тонкая кривая).

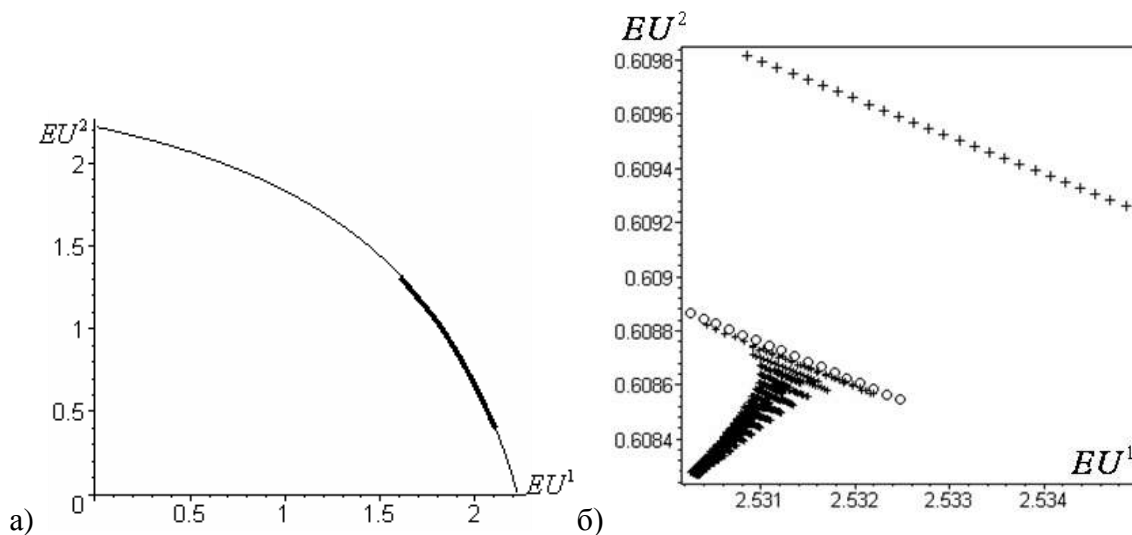


Рис.2. Множество равновесий в модели с капиталом а) в рассматриваемом случае полных рынков б) в не рассматриваемом случае неполных рынков (сверху – часть эффективной кривой, снизу – множество равновесий с незамкнутой границей)

Если бы мы не включили в условия регулярности условие полноты рынков (11) и рассматривали случай неполных рынков  $|M| \leq V$ , то получили бы множество неэффективных равновесий (рис.2б). Множество неэффективных равновесий всегда

незамкнуто и, как правило, не имеет Парето границы: Парето граница представляется особым видом равновесий – равновесиями с актуально бесконечно большими ценами [6].

**Основные результаты.**

**Определение.** Условиями согласованности начальных значений модели с капиталом и решения задачи благосостояния называются следующие условия: для начальных значений  $\langle K_0^{NM}, \Phi_0^N, \Phi_0^M \rangle$  и терминальных цен  $p(\bar{s}_T)$  модели с капиталом и решения задачи благосостояния  $\langle \hat{c}^N(\bar{s}_T), \hat{y}^M(\bar{s}_T) \rangle$ , соответствующее некоторому вектору  $(a_1, \dots, a_{|N|}), a_n > 0$ , существуют числа  $\sigma^M > 0$  такие, что выполнено

$$\sigma^m \sum_{n \in N} K_0^{nm} = \Phi_0^m + \left( E_{\bar{s}_T} \frac{\hat{p}(\bar{s}_T)}{p(\bar{s}_T)} \right)^{-1} E_{\bar{s}_T} \sum_{t \in T} \hat{p}(\bar{s}_t) \hat{y}^m(\bar{s}_t), \quad m \in M, \quad (15)$$

$$\sum_{m \in M} \sigma^m K_0^{nm} = -\Phi_0^n + \left( E_{\bar{s}_T} \frac{\hat{p}(\bar{s}_T)}{p(\bar{s}_T)} \right)^{-1} E_{\bar{s}_T} \sum_{t \in T} \hat{p}(\bar{s}_t) \hat{c}^n(\bar{s}_t), \quad n \in N. \quad (16)$$

Если равновесие существует, то  $\sigma^m$  это цена капитала в начальный период времени  $\theta^m(\emptyset)$ . Поэтому смысл условия (15) состоит в том, что начальные сбережения фирмы  $\Phi_0^m$  должны быть не слишком большим по модулю отрицательным числом (не слишком большой долг), чтобы приведенная будущая прибыль от чистых продаж  $\left( E_{\bar{s}_T} \frac{\hat{p}(\bar{s}_T)}{p(\bar{s}_T)} \right)^{-1} E_{\bar{s}_T} \sum_{t \in T} \hat{p}(\bar{s}_t) \hat{y}^m(\bar{s}_t)$  могла перекрыть долг и обеспечить положительную стоимость фирмы  $\sigma^m \sum_{n \in N} K_0^{nm}$ . А условие (16) означает, что долги потребителя должны

быть не слишком большими, чтобы его начальное благосостояние  $\sum_{m \in M} \sigma^m K_0^{nm} + \Phi_0^n$  могло обеспечить положительное потребление.

**Утверждение 1.** Если существует регулярное равновесие регулярной модели (9), то оно эффективно и выполнены условия согласованности (15)-(16).

**Утверждение 2.** Если выполнены условия согласованности (15)-(16), и матрицы будущих доходов  $\mathbf{A}(\bar{s}_{t-1}), t \in T / 0$

$$\mathbf{A}(\bar{s}_{t-1}) = \left\| \begin{array}{cc} E_{\bar{s}_{t+1}, \bar{s}_T} \sum_{\tau=t}^T \hat{p}(\bar{s}_\tau) \hat{y}^1(\bar{s}_\tau) \Big|_{s_t=1} & \dots & E_{\bar{s}_{t+1}, \bar{s}_T} \sum_{\tau=t}^T \hat{p}(\bar{s}_\tau) \hat{y}^{|\mathbf{M}|}(\bar{s}_\tau) \Big|_{s_t=1} \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{\bar{s}_{t+1}, \bar{s}_T} \sum_{\tau=t}^T \hat{p}(\bar{s}_\tau) \hat{y}^1(\bar{s}_\tau) \Big|_{s_t=V} & \dots & E_{\bar{s}_{t+1}, \bar{s}_T} \sum_{\tau=t}^T \hat{p}(\bar{s}_\tau) \hat{y}^{|\mathbf{M}|}(\bar{s}_\tau) \Big|_{s_t=V} \end{array} \right\|$$

невырожденные, то существует регулярное равновесие регулярной модели и оно эффективно.

Эти два утверждения и составляют необходимые и достаточные условия существования и эффективности множества равновесий.

В матрице  $A(\bar{s}_{t-1})$  множители  $\hat{y}^m(\bar{s}_t)$  – те же чистые продажи из решения задачи благосостояния, что состоят в условиях согласованности (15)-(16). Множители  $\hat{p}(\bar{s}_t)$ , которые часто трактуются как цены, но таковыми не являются, – множители Лагранжа в задаче благосостояния при ограничении  $\sum_{n \in N} \hat{c}^n(\bar{s}_t) \leq \sum_{m \in M} \hat{y}^m(\bar{s}_t)$ . Элементы матрицы

$E_{s_{t+1}, s_t} \sum_{\tau=t}^T \hat{p}(\bar{s}_\tau) \hat{y}^m(\bar{s}_\tau)$  это будущие доходы  $k(\bar{s}_{t-1}) E_{s_{t+1}, s_t} \sum_{\tau=t}^T p(\bar{s}_\tau) y^m(\bar{s}_\tau)$  фирм  $m \in M$ , где  $k(\bar{s}_{t-1})$  – одна и та же константа для всех фирм.

Условия согласованности (15)-(16) полно описывают множество начальных условий  $\langle K_0^{NM}, \Phi_0^N, \Phi_0^M \rangle$  модели с капиталом, при которых равновесия существуют. При этом под произвольные терминальные цены  $p(\bar{s}_T)$  модели с капиталом и произвольное решение задачи благосостояния  $\langle \hat{c}^N(\bar{s}_T), \hat{y}^M(\bar{s}_T) \rangle$  можно подобрать начальные условия так, что условия согласованности (15)-(16) будут выполнены. Это означает, что любое решение задачи благосостояния можно реализовать как некоторое равновесие модели с капиталом, т.е. верна вторая теорема теории благосостояния.

## Литература

1. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973
2. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат. 1996.
3. Андреев М.Ю., Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.А. Новая технология моделирования экономики и модель современной экономики России. М.: МИФИ, 2007. 262 стр.
4. Arrow K.J., Debreu G. Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*, Vol. 22, No. 3, pp. 265-290, 1954.
5. Magill M., Quinzii M. *Theory of Incomplete Markets*. Volume 1. The MIT Press, 1996.
6. Андреев М.Ю., Поспелов И.Г. Стохастическая задача чистого обмена и актуально бесконечно большие цены // *Экономика и математические методы* [принято в печать].

# О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СЛОЖНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Белолипецкий А.А. (г. Москва)

*В статье в первом параграфе дан обзор состояния исследований в области управляемого термоядерного синтеза. Во втором параграфе приведен пример использования методов математического моделирования при решении одной из задач, возникающих в инерциальном термоядерном синтезе.*

## **§ 1. Краткий обзор проблем управляемого термоядерного синтеза.**

Большая часть сведений, содержащихся в этом параграфе, взята из работы [1] автора и его коллег, сотрудников Физического института им. П.Н. Лебедева РАН (ФИАН).

Задача использования для практических целей энергии термоядерного синтеза, которая выделяется при слиянии легких ядер: дейтерия (D) и трития (T), D и D, D и  $^3\text{He}$  была сформулирована учеными полвека тому назад. Существует два основных подхода к решению поставленной задачи. Это магнитный термоядерный синтез (МТС) и инерциальный термоядерный синтез (ИТС). Оба подхода находятся сейчас на такой стадии развития, когда актуальными проблемами становятся разработка реакторных технологий и построение демонстрационного реактора. Исследования в этой области ведутся как на основе национальных программ отдельных стран, так и в рамках международных проектов. Например, "Технический проект ИТЭР" (участники: Россия, Евросоюз, Япония, США, Канада, Корея) – программа построения демонстрационного международного термоядерного реактора, основанного на схеме управляемого термоядерного синтеза с магнитным удержанием. Однако МТС содержит ряд неразрешенных проблем, связанных с изоляцией высокотемпературной плазмы от стенок реактора, устойчивостью нагретой водородной плазмы и др., которые и предполагается решить в проекте ИТЭР. В США существует долгосрочная программа построения к 2040 г. действующей электростанции на основе ИТС [2]. В ней предполагается, что выход на оптимальные технологии произойдет к 2012 г., а демонстрация работы пилотной установки в непрерывном режиме выработки электроэнергии – к 2025 г. Япония, Россия и Европейский Союз также ведут исследования в этом направлении [3-5]. В МАГАТЭ, начиная с 2000 г., при участии представителей 11-ти стран (США, Япония, России, Германия, Испания, Индия, Южная Корея, Чехия, Венгрия, Польша и Узбекистан) осуществляется работа координационного научно-технического проекта «Элементы конструкции энергетической станции на основе ИТС» [6]. В ИТС, в качестве источника энергии для сжатия и нагрева микроскопической мишени с DT-топливом до термоядерных температур, применяется специальный драйвер: лазер, источник ионных пучков, Z-пинч. Начало этому подходу положила работа Н.Г.Басова и О.Н.Крохина [7], в которой показана принципиальная возможность применения излучения лазеров для нагрева плазмы до термоядерных температур. Необходимым условием реализации схемы ИТС с положительным выходом энергии является сжатие топлива до высоких

плотностей  $n \sim 10^{24} \div 10^{26} \text{ см}^{-3}$  ( $100 \div 1000 \text{ г/см}^3$ ), что определяется критерием Лоусона для DT-смеси:  $n\tau > 10^{14} \text{ сек/см}^3$ , где  $\tau \sim 10^{-9} \div 10^{-11} \text{ сек}$  - время удержания сжатой плазмы в схеме ИТС.

Существуют три возможные схемы облучения мишени светом лазера: прямое облучение, не прямое (или рентгеновское) облучение и прямое зажигание (или быстрый поджиг). Структура и параметры мишени существенно зависят от энергии излучения, а также от схемы взаимодействия пары лазер-мишень, в результате которой достигается высокая плотность сжатия и нагрев DT-топлива. Однако, как видно из Рис.1, конструкции мишеней для каждой из перечисленных схем имеют общий элемент – сферическую капсулу, содержащую DT-топливо. В схеме прямого облучения этот элемент и представляет собой лазерную мишень (ЛМ).

При облучении ЛМ оболочка мишени мгновенно испаряется, развивающийся вслед за этим реактивный импульс сжимает мишень. При этом топливо должно сжиматься с высокой скоростью и при минимальной энтропии. Первая ударная волна, движущаяся под действием давления  $P$  через топливо плотностью  $\rho$ , вносит в вещество энтропию порядка  $s \sim P/\rho^{5/3}$ . Поэтому следует использовать топливо с максимально возможной начальной плотностью, т.е. твердое. В оптимальном варианте топливо должно находиться в конденсированном состоянии и представлять собой сферически-симметричный слой (т.н. криогенный слой), покрывающий внутреннюю поверхность сферической капсулы (см. Рис.1).

Требования к качеству криогенного слоя для мишеней прямого облучения являются наиболее жесткими: однородность по массе, сферичность и концентричность лучше, чем 2%, возмущения свободной поверхности  $< 0.1 \text{ мкм}$ . Получение криогенного слоя, удовлетворяющего данным критериям качества, является одной из важнейших задач технологии изготовления мишеней.

Требуемая реакция горения и положительного выхода энергии будет достигнута к 2010-2015 гг. на строящихся установках с энергией лазера от 0.3 МДж (ИСКРА-6, Россия) до 1.8 МДж (NIF, США и LMJ, Франция), а также на установке FIREX (Япония), предназначенной для демонстрации термоядерного горения в схеме прямого

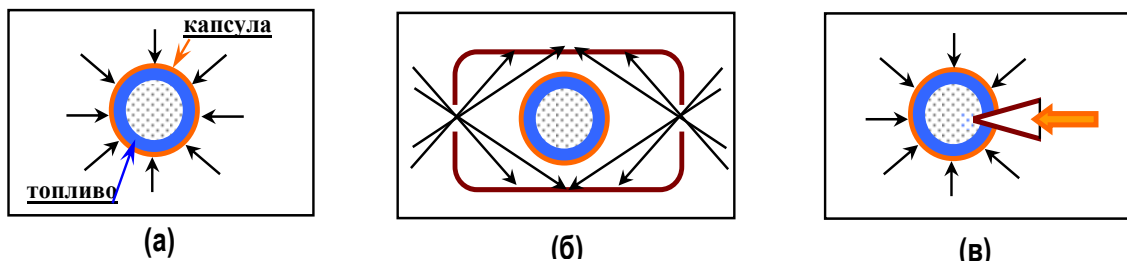


Рис.1. Топливные мишени для трех концепций облучения: (а) прямое облучение, (б) не прямое или рентгеновское облучение, (в) прямой поджиг

поджига. Чтобы нагреть 1 мг топлива до термоядерной температуры (10 кэВ) требуется затратить примерно 1200 МДж, а для сжатия этого количества топлива до плотности, необходимой для поджига по схеме ИТС ( $\sim 100 \div 1000 \text{ г/см}^3$ ) необходимо всего около 7.5-35.0 МДж, вот почему схема абляционного сжатия оболочечных мишеней является наиболее энергетически выгодной. Таким образом, использование топлива в конденсированном состоянии не только обеспечивает оптимальный режим сжатия мишени, но и является единственной практической возможностью реализации современного лазерного эксперимента. В этом смысле актуальность задачи создания криогенных мишеней требуемого качества трудно переоценить. Разработка методов формирования толстого криогенного слоя (толщиной  $> 20 \text{ мкм}$ ) интенсивно ведется в лабораториях США, Японии и России.

Необходимость непрерывной подачи мишеней в зону термоядерного горения с частотой  $\sim 1 \div 10$  Гц (лазерный и ионный драйвер) или 0.1 Гц (Z-пинч) является одной из критических проблем при построении энергетической станции на основе ИТС. Чтобы выполнить это требование, количество мишеней, изготовленных в течение суток, должно достигать, в среднем, 500000 штук. Кроме того, необходимо создать криогенный инжектор, способный работать при  $T < 18$  К с необходимой частотой и делать до  $\sim 500000$  выстрелов в сутки. Поскольку первые реакторы ИТС будут работать на основе радиоактивной DT-смеси, в соответствии с правилами радиационной безопасности, все подсистемы реактора должны функционировать в условиях с минимальным расходом трития.

К сожалению, из всех фундаментальных вопросов, касающихся энергии термоядерного синтеза, массовое производство топливных мишеней менее всего изучено и экспериментально продемонстрировано к настоящему времени. Это связано с тем, что предыдущий опыт проведения экспериментов на установках ИТС позволял работать с мишенью, заранее размещенной в зоне облучения на специальном подвесе. Данный факт привел к развитию технологий «штучного» производства мишеней, причем формирование криогенного слоя проводилось непосредственно перед моментом облучения, когда этап доставки криогенной мишени исключен.

Есть и другие проблемы, препятствующие применению существующих методов в реакторных технологиях. Дело в том, что традиционные методы изготовления термоядерных мишеней с толстым слоем из твердого дейтерия или DT-смеси (толщиной 20-150 мкм) связаны с получением этих веществ в термодинамически равновесном кристаллическом состоянии. Для достижения такого состояния (с требуемым качеством поверхности) необходимо очень медленное охлаждение микросферы, заполненной изотопом водорода, в изотермическом внешнем температурном поле. Несмотря на высокое качество слоя, формируемого внутри мишени, недостатки, свойственные этому подходу, ставят под сомнение перспективу его дальнейшего применения в технологии криогенных мишеней для мощных лазерных установок и реактора. К недостаткам относятся :

- Длительное время формирования. Характерная временная константа симметризации слоя составляет 5-8 часов, полное время формирования (до значения разнотолщинности  $Nu \leq 2\%$ ) составляет около 24-х часов. Это приводит, во-первых, к появлению большого количества пузырьковых дефектов в структуре слоя (из-за выделения  $He^3$  при  $\beta$ -распаде трития) и, как следствие, к снижению его прочности и однородности, а, во-вторых, к нарушению требования о минимизации содержания трития в системах ИТС.
- Эффект разделения компонентов топливной смеси. Поскольку DT-топливо в равновесии представляет собой смесь трех компонент ( $\sim 26\%D_2/26\%T_2/48\%DT$ ) с различным давлением насыщенных паров при заданной температуре, то в процессе длительного формирования смесь разделяется на компоненты (ввиду ректификации и термодиффузии), что приводит к разномассовости слоя, т.е. к снижению эффективности сжатия полученной мишени.
- Ограниченная температурная область существования. При снижении температуры однородного прозрачного кристаллического слоя всего на 0.3-1.5 градуса ниже тройной точки изотопа, твердый слой растрескивается. Таким образом, в процессе доставки мишень не должна изменять свою температуру, а это практически невозможно реализовать, особенно при полете мишени в камере реактора.

Экспертиза, проведенная в 2004 г. в рамках координационного научного проекта МАГАТЭ «Элементы конструкции энергетической станции на основе ИТС», позволила определить весь спектр актуальных проблем в технологии и доставке топливных

мишеней, решение которых позволит значительно продвинуть идею термоядерной энергетики на основе ИТС к ее реальному воплощению. Проблемы следующие:

1. Разработка и реализация технологии массового производства незакрепленных мишеней, содержащих криогенный слой требуемого качества
2. Сохранение параметров криогенного слоя в процессе доставки мишени
3. Доставка мишеней в зону горения с требуемой частотой
4. Быстрый контроль параметров мишени
5. Контроль и управление траекторией движения мишени
6. Стыковка элементов: модуль формирования/инжектор, инжектор/камера реактора.

В отличие от других научных коллективов, в Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН (ФИАН), начиная с 1983 года и по настоящее время, развивались подходы к работе с движущимися незакрепленными мишенями, которые получили название «технологии FST» (FST – это сокращение от free-standing target, что в переводе с английского означает: незакрепленная мишень). В том числе были исследованы возможности инжекционной доставки мишеней при криогенных температурах, способы работы с массивом незакрепленных мишеней на стадиях заполнения газом и формирования слоя, а также методы формирования криогенного слоя внутри незакрепленных движущихся микросфер.

Особенность технологии FST к формированию криогенной мишени заключается в получении криогенного слоя в особом, высокодисперсном, состоянии с размером зерна, меньшим, чем допустимая шероховатость свободной поверхности слоя. Поскольку в данном состоянии материал представляет собой изотропную среду, это позволяет избежать условий деградации и разрушения слоя, связанных с анизотропией таких свойств кристаллических водородов как прочность и теплопроводность. Отметим, что в данном случае под высокодисперсным состоянием понимается изотропное состояние вещества с размером кристаллических образований (кластеров, зерен)  $d < 0.1$  мкм, среди которых выделяются три основных подвида: (1) мелкозернистые поликристаллические ( $150 \text{ \AA} < d < 0.1$  мкм), (2) нано-кристаллические ( $50 \text{ \AA} < d \leq 150 \text{ \AA}$ ) и (3) аморфные ( $d \leq 30\text{-}50 \text{ \AA}$ ) состояния.

Целью работ, проводимых в Лаборатории термоядерных мишеней ФИАН, являлось формулировка и экспериментальное обоснование нового подхода к получению криогенных лазерных мишеней с устойчивым слоем из твердых изотопов водорода, а также разработка новой технологии непрерывного формирования криогенных мишеней с гладким равнотолщинным твердым слоем топлива, устойчивым к воздействию механических и тепловых нагрузок, возникающих в процессе инжекционной доставки мишеней в зону лазерного облучения.

Для решения этой задачи было выполнено следующее:

1. Исследованы особенности образования криогенного слоя с различной микроструктурой, изучены процессы старения слоя, а также закономерности искажения его качества (появление шероховатости и разнотолщинности). Найдено такое структурное состояние твердых изотопов водорода, которое позволяет получить устойчивый криогенный слой. Исследованы процессы симметризации и вымерзания жидкого слоя из изотопа водорода, находящегося внутри незакрепленной движущейся микросферы.
2. Исследованы процессы газопроницаемости и разрушения стенки микросфер при температурах ниже 300 К с целью оптимизации условий заполнения микросфер газообразными изотопами водорода или смесью газов, а также хранения и транспорта заполненных микросфер в зону формирования внутри них криогенного слоя.



3. Исследован круг вопросов, связанных с задачей непрерывной доставки термоядерных мишеней в зону облучения (горения), в том числе:
- исследован процесс ускорения капсулы-носителя мишени в электромагнитном инжекторе при криогенных температурах
  - найдено техническое решение для устройства стыковки модуля формирования и инжектора
  - разработана система контроля скорости и траектории движения мишени, позволяющая синхронизовать приход в зону облучения мишени и лазерного излучения
  - изучены вопросы деградации топливного слоя вследствие нагрева его при инжекции мишени в зону горения.
- Одна из математических моделей, посвященная изучению последнего из приведенных пунктов исследований, приведена ниже.

## § 2. Математическая модель деградации топливного слоя при нагревании мишени электромагнитным излучением стенок в рабочей камере реактора

Лазерная мишень, которую используют в управляемом термоядерном синтезе, представляет собой стеклянную или полистироловую сферическую оболочку. На ее внутренней стенке выморожены твердые изотопы водорода (дейтерий, тритий или их смеси) в виде шарового криогенного слоя (рис.1). Эта начинка из ядерного топлива является шаровым слоем лишь в идеале. Но и геометрически идеальная ЛМ при доставке ее в зону горения реактора подвергается механическим и тепловым нагрузкам, которые частично разрушают топливный слой. Неустойчивость процесса сжатия ЛМ лазерным излучением накладывает высокие требования к геометрическим и физическим параметрам топливного слоя.

Во время инжекции в фокус лазерного пучка мишень короткое время находится в рабочей камере реактора, горячие стенки которого излучают электромагнитные волны, нагревающие мишень. За это время топливный слой успевает частично испариться, и его геометрические свойства изменяются. Задача состоит в том, чтобы оценить вид и время этих изменений. Задача о деградации топливного слоя вследствие нагрева мишени остаточным газом, находящимся в рабочей камере реактора, изучалась в работах [8]-[9]. Обе эти задачи осложняются тем фактом, что в твердом топливе присутствуют кристаллические зоны, коэффициент теплопроводности которых является векторной величиной. Из-за этого задача нагрева и сублимации слоя становится *сферически несимметричной*. Математическая модель представляет собой задачу Стефана для системы уравнений теплопроводности с полулинейными краевыми и начальными условиями.

Ниже будем считать, что коэффициент теплопроводности топливного слоя зависит от пространственных координат, так как главные оси кристалла ориентированы по разному, в силу чего скорость распространения звука, а с нею и коэффициент теплопроводности является векторной величиной с координатами по радиальной и угловым составляющим

$$k_1 = k_s \cdot (1 + \xi_1(\theta, \varphi)), k_2 = k_s \cdot (1 + \xi_2(\theta, \varphi)), \\ k_3 = k_s \cdot (1 + \xi_3(\theta, \varphi)).$$

Функции  $\xi_i(\theta, \varphi)$  описывают зависимость радиальной тангенциальной и азимутальной составляющей коэффициента теплопроводности от азимутальной и тангенциальной переменной  $\varphi, \theta$ .

Будем считать, что в процессе сублимации газ внутри оболочки представляет собой насыщенный пар, и его давление  $p$ , температура  $T$  и удельные объемы  $v_g, v_s$  газообразного и твердого состояния в области тройной точки на фазовой диаграмме связаны уравнением Клапейрона-Клаузиуса

$$\frac{dp_g}{dT_g} = \frac{\lambda_s}{T(v_g - v_s)},$$

где  $\lambda_s$  - удельная теплота сублимации.

Термодинамическое равновесное состояние газообразной фазы внутри оболочки описывается уравнением Ван-дер-Ваальса.

$$P_g = \frac{R T_g \rho_g}{1 - b \rho_g} - a \rho_g^2, \text{ где}$$

$$\rho_g = \frac{1}{v_g} - \text{плотность газа внутри мишени.}$$

Формализуем задачу сублимации газа. Пусть  $T_i(r, t), k_i(T), c_i(T), \rho_i(T)$  обозначают температуру, коэффициент теплопроводности, теплоёмкость и плотность веществ соответственно. Индексы  $i = sh, s, g$ , где  $sh, s$  относится к оболочке и кристаллическому слоям соответственно, а  $g$  к газу.

В криогенном слое тепловой поток в сферических координатах  $r, \theta, \varphi$  задается вектором  $\vec{j}_s = -\left(k_1 \frac{\partial T_s}{\partial r}, k_2 \frac{\partial T_s}{r \partial \theta}, k_3 \frac{\partial T_s}{r \sin \theta \partial \varphi}\right)$ . Здесь  $T_s(r, \theta, \varphi, t)$  - температура в криогенном слое в момент времени  $t$ . Коэффициенты теплопроводности  $k_i(\theta, \varphi), i = 1, 2, 3$ , как уже говорилось, зависят от координат. Динамика температуры в оболочке описывается уравнением теплопроводности

$$\rho_{sh} c_{sh}(T) \frac{dT_{sh}}{dt} = \alpha_{sh} J_{sh},$$

с начальным условием

$$T_{sh}(0) = T_i.$$

Величина  $J$  определяет поток электромагнитного излучения (ЭМИ), испускаемый горячей стенкой рабочей камеры, представляющей собой сферу, в центре которой находится мишень. В этом случае задача облучения сферически симметрична, и для величины потока можно, например, использовать закон Стефана-Больцмана

$$J_{sh} = \sigma T_0^4,$$

где  $\sigma = 5,729 \cdot 10^{-12} \frac{вт}{см^2 K^4}$  - постоянная Стефана-Больцмана, а  $T_0$  - температура

внутренней стенки рабочей камеры. Множитель  $\alpha_{sh}$  - это коэффициент поглощения ЭМИ на единице длины проникновения излучения в среду. Определить его можно следующим образом. Пусть спектр ЭМИ лежит в пределах длин волн  $(\lambda_1, \lambda_2)$ . Примем поток энергии этого излучения за 1. Пусть доля потока энергии, заключённая в спектре  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ , равна  $f(\lambda)d\lambda$ . Если  $\alpha(\lambda)$  доля потока энергии  $f(\lambda)d\lambda$ , поглощаемая средой на глубине проникновения в 1 см, то вся поглощаемая энергия при прохождении

1 см. среды равна  $\alpha = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \alpha(\lambda) f(\lambda) d\lambda$ . Функции  $\alpha(\lambda)$  для полистирола и дейтерия считаются известными.

Здесь и далее  $r_0, r_1$  - внешний и внутренний радиусы оболочки соответственно,  $w_{sh} = r_0 - r_1$  - толщина оболочки.

На границе оболочка - топливный слой температуры обеих сред равны

$$T_{sh}(t) = T_s(r_1, \theta, \varphi, t)$$

Динамика температуры внутри кристаллического слоя в силу отсутствия сферической симметрии имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = & \alpha_s J_s(r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( k_1(\theta, \varphi) r^2 \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k_2(\theta, \varphi) \sin \theta \frac{\partial T_s}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( k_3(\theta, \varphi) \frac{\partial T_s}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

С учетом поглощения излучения оболочкой и топливным слоем величина

$$J_s = J_{sh} e^{-\alpha_{sh} w_{sh} - \alpha_s (r_1 - r)}.$$

Пусть  $w(\theta, \varphi, t)$  - толщина криогенного слоя в момент времени  $t$ . Граница  $\Sigma$  криослой- газ задается уравнением

$$r + w - r_1 = 0.$$

Тогда баланс тепловых потоков на границе  $\Sigma$  с учетом тепла, необходимого для сублимации, запишется как

$$\left( k_1 \frac{\partial T_s}{\partial r} + k_2 \frac{\partial T_s}{r^2 \partial \theta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} + k_3 \frac{\partial T_s}{r^2 \sin^2 \theta \partial \varphi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \Big|_{r=r_1-w(t)} = k_g \frac{\partial T_g}{\partial r} \Big|_{r=r_1-w(t)} - \lambda_s \rho_s \frac{dw}{dt}.$$

Здесь  $\lambda_s$  - удельная теплота сублимации. Так как температура газа предполагается однородной по объему из-за быстрого перемешивания, то первое слагаемое справа равно нулю и последнее равенство запишется в виде

$$\left( k_1 \frac{\partial T_s}{\partial r} + k_2 \frac{\partial T_s}{r^2 \partial \theta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} + k_3 \frac{\partial T_s}{r^2 \sin^2 \theta \partial \varphi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \Big|_{r=r_1-w(t)} = -\lambda_s \rho_s \frac{dw}{dt}.$$

Равенство температур на границе газ - криогенный слой имеет вид

$$T_s \Big|_{r=r_1-w} = T_g(t).$$

Зависимость температуры газа от времени объясняется тем, что в результате сублимации плотность его меняется, а следовательно меняется и температура в силу уравнений Клапейрона-Клаузиуса и Ван-дер-Ваальса.

Плотность газа в момент времени  $t$  вычисляется по формуле

$$\rho_g(t) = \frac{\rho_0 \frac{4}{3} \pi r_1^3 + m(t)}{V(t)},$$

где  $\rho_0$  начальная плотность газа,

$$m(t) = \rho_s \int_0^t \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{dw(\theta, \varphi, \tau)}{d\tau} (r_0 - w(\theta, \varphi, \tau))^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\tau -$$

масса испарившегося топлива, а

$$V(t) = \frac{1}{3} \int_0^t \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r_1 - w(\theta, \varphi, \tau))^3 \sin \theta d\varphi d\theta d\tau -$$

объем газовой полости.

Считаем, что процесс сублимации начинается в момент  $t = 0$ . Пусть  $w_0$ , толщина криослоя в момент  $t = 0$ . Тогда начальные условия таковы:

$$w(0) = w_0,$$

$$T_g(0) = T_i,$$

$$T_{sh}(r, 0) = \phi(r), \quad (1)$$

$$T_s|_{r=0} = \psi(r), \quad (2)$$

где  $T_i$  - температура газа, при которой начался процесс сублимации, а  $\psi(r), \phi(r)$  - начальные температурные профили во внутреннем и внешнем криослое. Считаем, что граничные условия для  $\psi(r), \phi(r)$  согласованы с граничными условиями нашей задачи, то есть

$$\phi(r_1) = T_i, \quad \phi(r_1) = \psi(r_1), \quad \psi(r_1 - w_0) = T_s|_{r=r_1-w_0, t=0} = T_g(0).$$

Пусть  $c, \rho, w, j$  обозначают теплоёмкость, плотность, толщину и количество поглощённого потока для оболочки (индекс  $sh$ ) и криослоя (индекс  $s$ ) соответственно. Далее,  $\eta_{0sh} = c_{sh}(T_i), \eta_{0s} = c_s(T_i),$

$$\eta_{1sh} = (c_{sh}(T_{tp}) - c_{sh}(T_i)) / (T_{tp} - T_i), \quad \eta_{1s} = (c_s(T_{tp}) - c_s(T_i)) / (T_{tp} - T_i).$$

Коэффициенты  $\phi_{sh} = \eta_{0sh} \rho_{sh} w_{sh}, \phi_s = \eta_{0s} \rho_s w_s$ . Тогда можно показать, что время нагрева мишени от температуры  $T_i$  до температуры  $T$  равно

$$t = \frac{T - T_i}{j_{sh} + j_s} \left[ \phi_{sh} + \phi_s + \left( \frac{\phi_{sh} \eta_{1sh}}{\eta_{0sh}} + \frac{\phi_s \eta_{1s}}{\eta_{0s}} \right) (T - T_i) / 2 \right]. \quad (3)$$

Температура оболочки зависит лишь от времени, и эта зависимость определяется формулой (3), в которой  $\phi_s = 0, j_s = 0$ .

Надо отметить, что начальные условия (1)-(2) быстро забываются и практически не влияют на решение задачи. Последняя же состоит в том, чтобы получить функцию  $w(\theta, \varphi, t)$ . Тогда разнотолщинность топливного слоя можно определить как

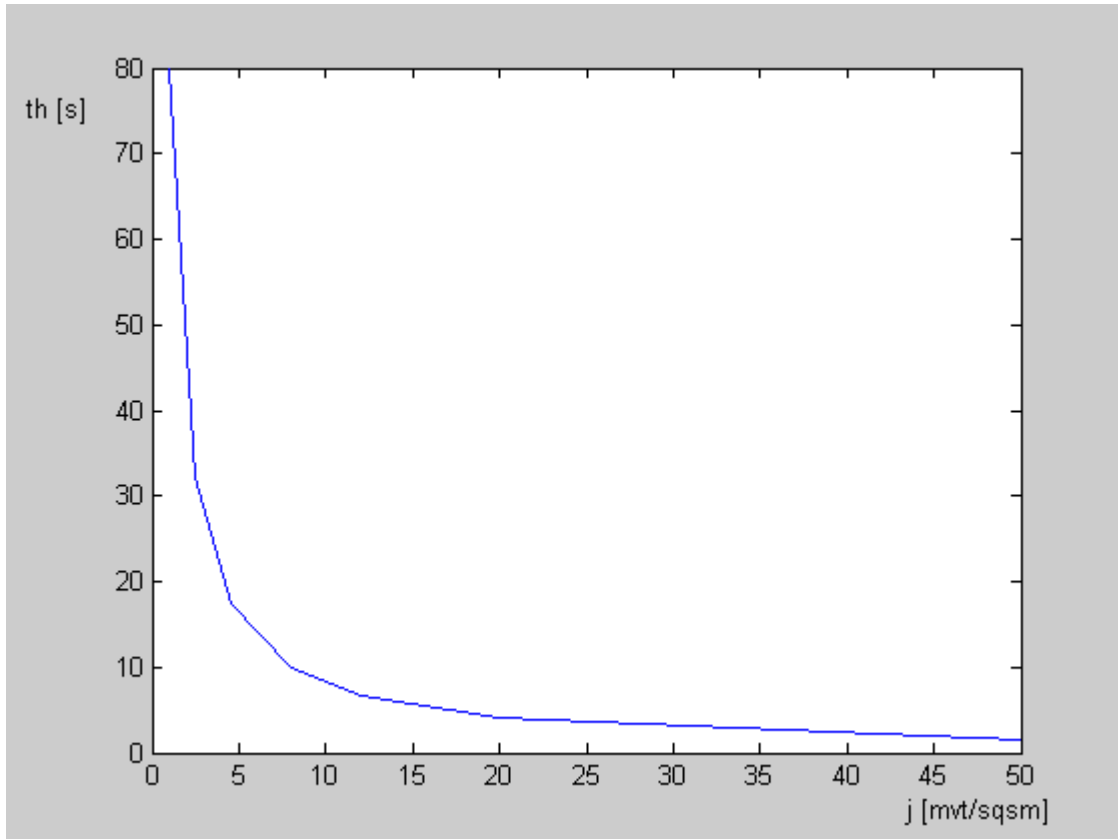
$$\varepsilon(t) = \max_{\theta, \varphi} w(\theta, \varphi, t) - \min_{\theta, \varphi} w(\theta, \varphi, t).$$

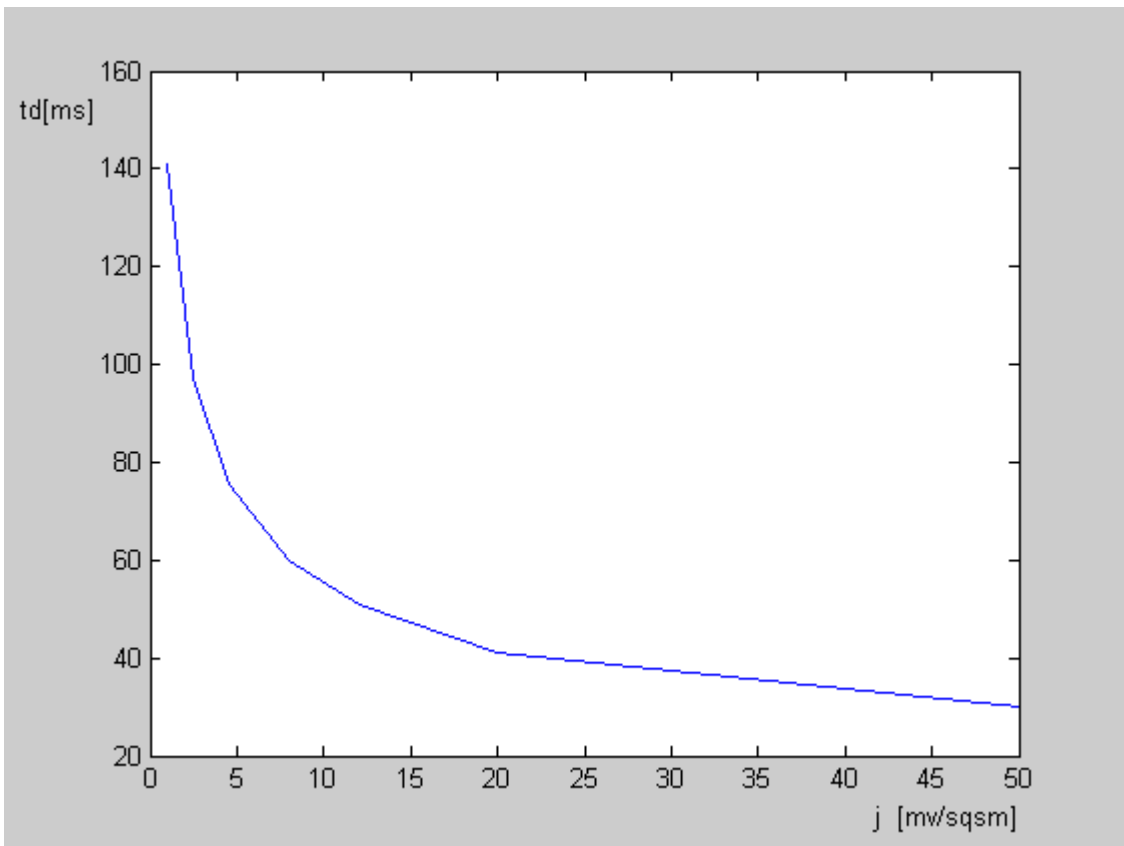
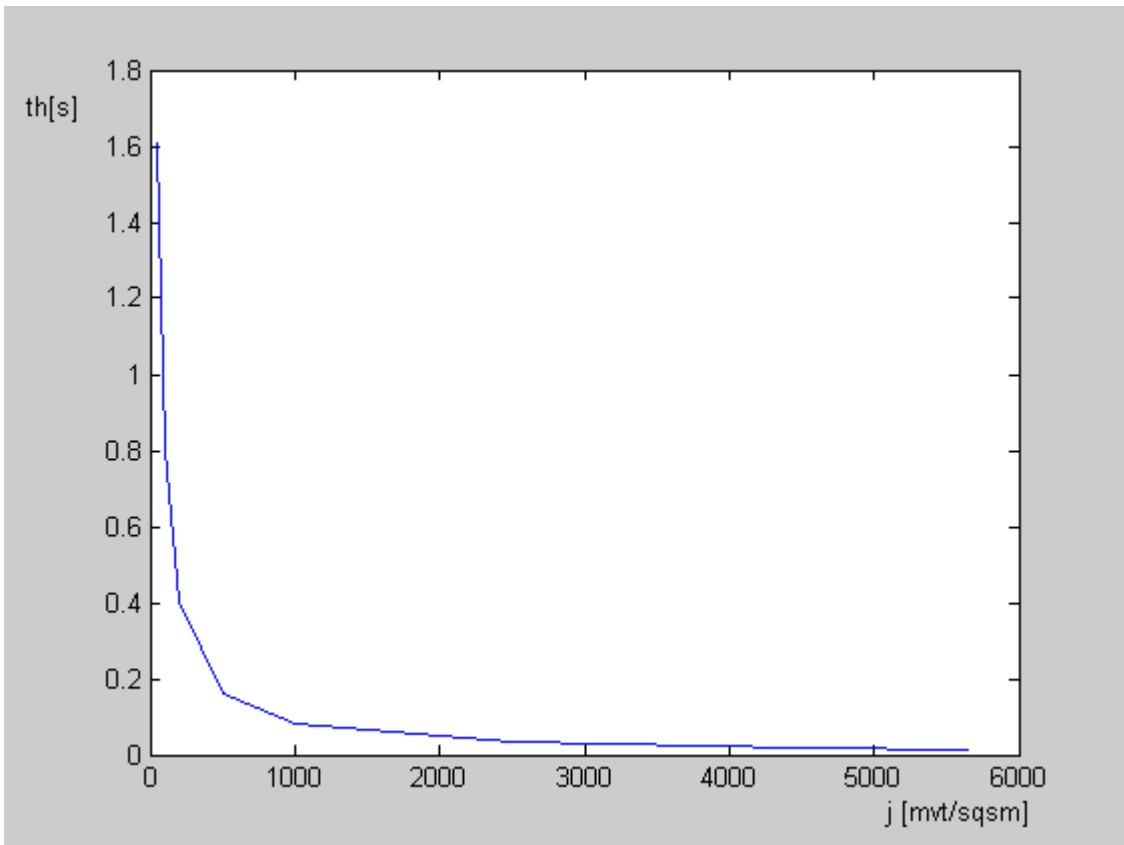
Если  $\varepsilon_0$  максимально допустимая величина разнотолщинности, то время деградации слоя определяется из уравнения

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0.$$

В приведённых ниже расчётах величина  $j_{sh}$  менялась от 0 до 12% от падающего потока в 56.6 Вт/кв.см.

Ниже приведены результаты расчетов в виде таблиц и графиков зависимости времени нагрева  $th$ [сек] мишени и деградации  $td$  [мсек] слоя от поглощаемого потока  $j$ [мвт/кв.см] при условии, что начальная температура  $T = 4.2$  К, а конечная 18 К. При этом толщина оболочки бралась равной 45 мкм, радиус мишени 2 мм, толщина криослоя 200 мкм,  $\varepsilon_0 = 0.5$  мкм.





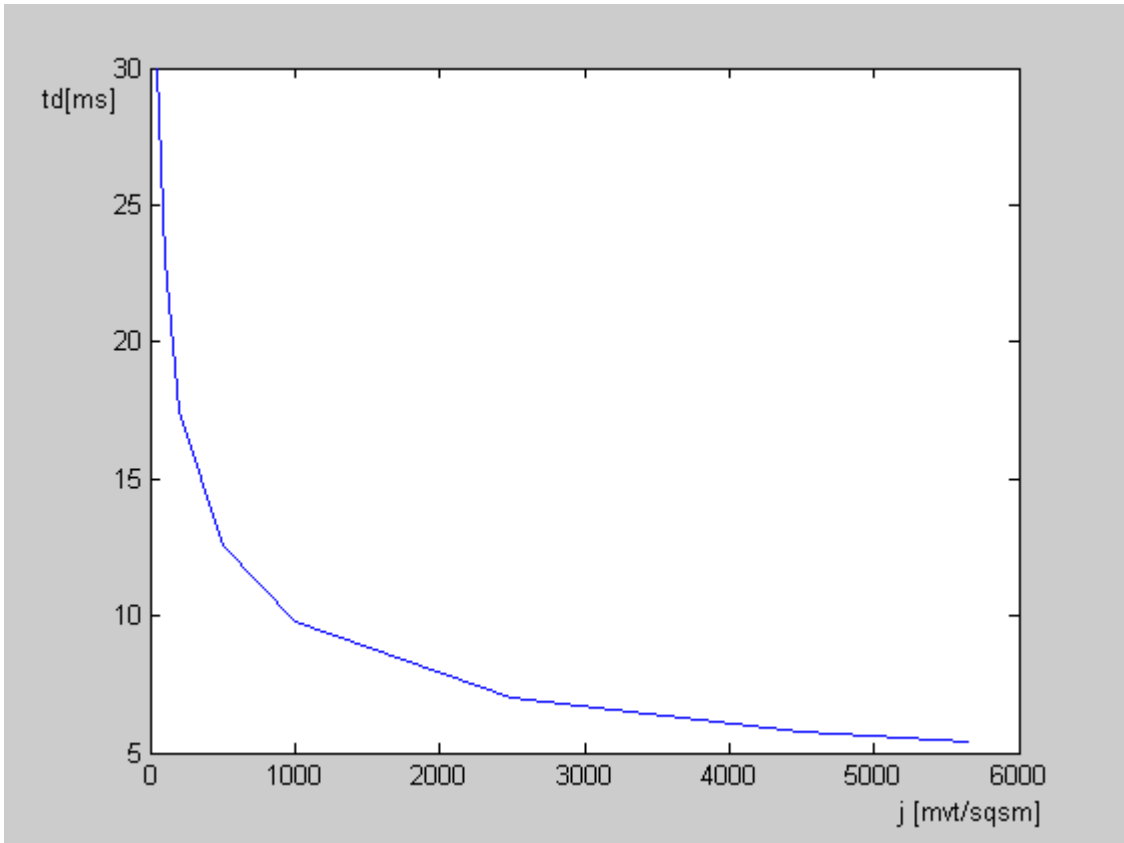


Таблица 1.

Поглощённый поток $j$ в мвт/кв.см	1	2.5	4.6	8	12	20	50	100
Время деградации $td$ в мсек	144	97	75.3	60	51	41	30	23
Время нагрева до $18K$ th в сек	80	32.1	17.5	10	6.7	4	1.6	0.8

Таблица 2.

Поглощённый поток $j$ в мвт/кв.см	200	500	1000	2500	4500	5660
Время деградации $td$ в мсек	17.5	12.6	9.8	7	5.8	5.4
Время нагрева до	0.40	0.16	0.08	0.032	0.018	0.014

18K th в сек

Третий столбец таблицы 1 и шестой столбец таблицы 2 отвечают температурам стенок камеры 300 К и 1773 К соответственно при условии поглощения 10% падающего потока, подчиняющегося закону Стефана – Больцмана.

Видно, что деградация слоя происходит раньше, чем мишень нагревается до  $T=18$  К.

Вышеприведённые данные относятся к мишени, начальная температура которой=4.5 К.

*Если начальная температура мишени равна 10 К, то*

при температуре стенок камеры 300 К  $t_d=81$  мсек,  $t_h=9.78$  с.;

при температуре стенок камеры =1773 К  $t_d=3.8$  мсек,  $t_h=7.9$  мсек.

*Если начальная температура мишени равна 17 К, то*

при температуре стенок камеры 300 К  $t_d=121$  мсек,  $t_h=4.17$  с.;

при температуре стенок камеры =1773  $t_d=4.5$  мсек,  $t_h=3.4$  мсек., и мишень нагреется быстрее, чем деградирует слой.

## Литература

1. Александрова И.В., Белоліпецкий А.А., Корешева Е.Р. Состояние проблемы криогенных топливных мишеней в современной программе инерциального термоядерного синтеза. // Вестник РАН.- 2007, №2.- с.12-17.
2. Meier W.R. An integrated research plan for IFE technology. // Report, 1<sup>st</sup> IAEA-TM on Physics and Technology of Inertial Confinement Fusion Energy Targets and Chambers (June 7-9, 2000, Madrid, Spain)
3. Смирнов В.П. Исследования по термоядерному синтезу. Научное сообщение на заседании Президиума РАН, ноябрь 2002.// Вестник Российской Академии Наук. 2003.- Т.73, N4. - с.1-15
4. Aleksandrova I.V., Belolipetskiy A.A., Koresheva E.R. et al. Free-Standing Target Technologies for ICF. // Fusion Technology.- 2000. V.38, N1. P.166-177.
5. Aleksandrova I.V., Koresheva E.R., Osipov I.E., Belolipetskiy A.A., et al. Cryogenic fuel targets for inertial fusion: Optimization of fabrication and delivery conditions.- 2007. V28, N3. (in Press). <http://springerlink.metapress.com/content/1573-8760/>
6. Elements of power plant design for inertial fusion energy. Final report of a coordinated research project 2000-2004. IAEA-TECDOC-1460, IAEA (Vienna).- 2005.
7. Басов Н.Г., Крохин О.Н. Условие разогрева плазмы излучением оптического генератора.// ЖЭТФ.-1964, т. 47. - с.171-175.
8. И.В.Александрова, А.А.Белоліпецкий, Е.Р.Корешева и др. К решению проблемы сохранения параметров криогенной мишени в процессе ее доставки в зону термоядерного горения. // Вопросы атомной науки и техники.-2007, вып. 3. - с. 27-38.
9. Белоліпецкий А.А. Об одной сингулярно возмущенной задаче Стефана, описывающей разрушение топливного слоя в лазерной мишени.// Вестник МГУ, серия 15, вычислит. матем. и кибернетика, 2008, №1.- с. 9-15



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОСИСТЕМ\*

*«Физика есть стремление осознать  
сущее как нечто такое, что мыслится  
независимым от восприятия.»  
А.Эйнштейн.*

Белотелов Н.В. (г. Москва)

*Математические модели экосистем различного уровня сложности является мощным инструментом для изучения закономерностей функционирования сложно организованных природных комплексов. К настоящему времени разработано огромное число моделей различных природных и антропогенно нарушенных экосистем различных пространственно временных масштабов. Существуют многочисленные «школы», специализирующиеся на тех или иных аспектах количественного описания экологических объектов. [1,4,5,9,10]*

*Целью настоящей статьи является попытка обсудить некоторые нерешенные проблемы математического описания экологических объектов.*

Развитие математического моделирования экологических систем теснейшим образом связано с развитием всего комплекса естественнонаучных дисциплин в 20-ом веке. При описании экосистем можно выделить два подхода не сводимых друг к другу – это масс-энергетическое и популяционное описания. Эти два подхода лежат в основе современных моделей экологических объектов и являются «дополнительными».

*Масс-энергетическое описание* возникло вследствие развития геохимии, что позволило в начале 20-го века осознать, что живые системы взаимодействия друг с другом и окружающими абиотическими факторами организуют круговороты биогенных элементов, которые являются важнейшим фактором геохимической эволюции Земли. На основании этого взгляда на функционирования экологических систем появились такие базовые понятия, как трофические цепи, продуктивность и другие, описание которых в рамках математических моделей и в настоящее время является основой для описания и прогноза поведения экологических объектов. Пионером развития математических моделей такого типа является В.А.Костицын [8].

Как правило, в математических моделях такого класса выделяют переменные, описывающие продукционные процессы, потоки биогенных элементов, процессы синтеза и деструкции органического вещества. Для описания динамики этих переменных широко используют либо аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений, либо разностных уравнений, которые привязываются к пространственной сетке (если модель учитывает пространственную компоненту).

Помимо количественных – биофизических переменных в модели явно или скрыто учитываются эмпирические, феноменологические закономерности функционирования определенных элементов экосистемы, которые формулируют специалисты – биологи.

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 07-07-00071-а

Такого рода зависимости носят скорее качественный, нежели количественный характер, и, поэтому формализуются либо в виде продукционных правил, либо в виде определенных ограничений на количественные переменные.

Другим способом описания экологических объектов является *популяционное описание*. В основе популяционного подхода лежит свойство живых систем образовывать популяции, то есть объекты, состоящие из особей, обитающих на определенном ареале, производящих другие особи и живущие конечное время. Такое описание живых систем лежит в основе широкого класса математических моделей, родоначальниками которого являются В.Вольтерра и А.Лотка. [2,10] Это так называемые вольтеровские модели. Такие модели, в непрерывном или дискретном времени в настоящее время составляют основу математического моделирования экологических систем. Главным естественнонаучным результатом этого подхода на наш взгляд является иллюстрация того факта, что сложные динамические режимы численности популяции, наблюдаемые в природе, могут объясняться межвидовыми или внутривидовыми взаимодействиями. И тот, и другой подход количественного описания экологических объектов используется при моделировании.

Перейдем теперь к обсуждению вопроса: «А для чего строятся математические модели экосистем?». Сейчас можно выделить несколько целей построения таких математических объектов. Первая, это попытка создать адекватный реальному природному объекту математический объект (как правило, компьютерную программу имитационной модели), который позволит прогнозировать (оценивать его реакции на те или иные антропогенные воздействия. Второе направление, - это математическое (теоретическое) изучения возможных типов динамического поведения, возникающих при определенных биологических гипотезах, реализуемых в определенном классе математических объектов (обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, разностные уравнения, уравнения с запаздыванием и т.д.).

Разработано большое количество сложных имитационных моделей, которые развиваются в рамках первого направления. Перечислим проблемы, с которыми сталкивается этот подход. Это, прежде всего, проблемы идентификации, верификации, проблема выбора, так называемых, внешних и внутренних переменных. Следует отметить, что для описания экологической системы требуется моделирование на разных уровнях ее генерализации. Так переход от уровня моделирования отдельного дерева на экосистемный уровень требует введения нового фактора для описания конкуренции между видами и отдельными растениями. Специфика систем каждого уровня моделирования определяется не только различиями объектов, но и различиями в характерных временах и пространственных масштабах. Одной из важнейшей задачей математического моделирования в экологии является разработка и построение иерархии взаимосвязанных моделей.

При моделировании экологических систем важную роль играет выделение ведущих, «лимитирующих» факторов, что позволяет проводить исследования критических режимов и определять границы области существования объекта.

Важной особенностью современного развития теории и практики математического моделирования в экологии является осознание того факта, что математические модели сложных систем, построенные на основании интегрирования большого количества уравнений и переменных, не приводят к ожидаемым удовлетворительным результатам прогнозирования.

Другая проблема использования математических моделей экологических систем заключается в том, что точность экологического прогнозирования существенным образом зависит от возможности корректной идентификации модели. А точность, с

которой измеряются на практике собственно экологических параметров оставляет желать лучшего.

Наиболее широко известны имитационные модели экологических процессов, которые, как правило, являются динамическими балансовыми структурами блочного типа. Это связано с тем, что существо многих реальных процессов заключается в накоплении и расходе вещества и энергии в отдельных естественно выделяемых компартаментах, и их перетоками из одного компартамента в другой. Блочная структура моделей связана с необходимостью описания взаимодействия процессов различной природы (физических, физико-химических, биологических, экологических) и обладающих самыми различными временными масштабами.

Блочный принцип построения модели означает ее декомпозицию как на содержательном, так и на формальном уровне описания, т.е. вывод и обоснование частных математических моделей для отдельных блоков с их последующим объединением в комплексную модель. Ясно, что важным при этом оказывается вопрос организации взаимодействия блоков при «сборке» модели, в том числе при организации передачи и последовательности обработки информации.

Примерами развитых имитационных моделей могут служить глобальные модели биосферных процессов [9], модели водных экосистем, модели агроценозов [4,6]. Разработка реалистичных моделей является весьма трудоемким делом (десятки человеко - лет).

Комплекс моделей, направленный на решение взаимосвязанных задач, вместе с управляющими и обслуживающими программами образуют имитационную систему. Для целей быстрой и оперативной организации машинных экспериментов имитационная система должна быть объединена с информационной базой. Характерным примером такой системы может служить система имитационного моделирования динамики агроэкосистем – СИМОНА [6]

Анализируя существующие имитационные системы, надо отметить достаточно жесткую структуру взаимосвязей между информационной базой и самими моделями, требующую развитых процедур пересчета при внесении изменений в информационную базу и/или проведения машинного эксперимента по выбранному сценарию. Действительно общая организация программных средств имитационной системы должна быть ориентирована на то, чтобы изменяемые в процессе проведения машинного эксперимента входные параметры модели были бы согласованы с той информацией, которая хранится в информационной базе; с другой стороны результат эксперимента также должен фиксироваться в базе и быть доступным для обработки. Это требует создание в составе имитационной системы базы данных, поддерживающей динамические структуры данных.

При создании моделей реальных экосистем на первое место выходит, как ясно из вышесказанного проблема адекватности, используемого математического аппарата. Одним из подходов к ее решению является концепция «минимальной модели», которая была сформулирована Н.Н.Моисеевым. Суть ее заключается в том, что для описания того или иного эффекта необходимо использовать наиболее простой математический объект, который, тем не менее, поддается предметной интерпретации. (Классическим примером является модель «хищник-жертва», предложенная В.Вольтерра).

По существу вопросами адекватности занимается второе направление в математическом моделировании экосистем – изучение возможных типов динамических типов поведения минимальных математических моделей. В русле этого направления создано большое число моделей, но, по существу в настоящее время, это в большей степени раздел прикладной математики, нежели биофизики. Одним из путей возможного объединения этих двух направлений, на наш взгляд, может являться

динамический иерархический биоклиматический подход, который заключается в использовании, как различных биоклиматических генерализаций экосистем, разработанных специалистами – биологами, так и использование детального динамического описания каждой из выделенных единиц генерализации. [7,11,12]

Ниже, на примере модели биоклиматической динамики растительных зон, мы вкратце опишем примет такого типа модели, в которой объединяются эмпирические закономерности климатической ординации лесорастительных зон с балансовым описанием процессов синтеза и деструкции органического углерода в растительном покрове. При таком подходе естественным образом в модели возникает распределенное описание различных экосистем, взаимодействующих друг с другом через внутренние – почвенные переменные, и внешние – климатические.

Для определения связи климата и растительности используют термины "биоклиматический индекс" или "биоклиматическая схема". Под биоклиматическим индексом понимается комбинация климатических параметров (например, таких как радиация, температура, осадки), с которыми сопоставляется та или иная характеристика растительности. Формальным образом биоклиматический индекс может быть представлен отображением "G" множества климатических параметров "C" на множество параметров растительного покрова "B":  $G: C \rightarrow B$

Элементами множества климатических параметров "C" часто являются среднегодовая температура, количество осадков за период вегетации и др. Элементами множества "B" в разных биоклиматических схемах являются такие характеристики растительности как продуктивность, количество биомассы и мортмассы растительных сообществ и т.п. В качестве примера может быть взята классификации Холдриджа [11,12].

Биоклиматические схемы характеризуют равновесное распределение растительных биомов в условиях установившегося климата. В реальных же приложениях возникает задача оценки передвижения границ растительных зон в условиях динамически меняющегося климата. В настоящее время прогнозные оценки изменения климата в основном относятся к предсказаниям нового равновесного состояния для удвоенной концентрации  $CO_2$  в атмосфере. При получении таких прогнозов в первую очередь используются два источника: палеоаналоги предполагаемого состояния и модели общей циркуляции атмосферы. Так, в [13] приведены результаты расчетов, соответствующих четырем различным сценариям климатических изменений, полученных на различных "равновесных" GCM. Однако во всех работах такого рода не учитывается, что прогнозируемое время удвоения  $CO_2$  существенно меньше характерных времен трансформации растительных зон. Поэтому остается неясным, к какому моменту относятся результаты прогнозов: если ко временам климатического сценария, то растительные зоны не успеют прийти в прогнозируемое равновесное положение. Если же результаты этих работ отнести к временам, когда растительные зоны достигнут нового равновесного состояния, то необходимо принять дополнительное предположение о том, что после достижения состояния, определенного сценарием, климат далее не меняется.

В модели предполагается, что в первом приближении характер связи климат-растительность сохраняется и при неравновесных изменениях, можно использовать существующие биоклиматические схемы для получения предварительных оценок динамики растительности. Для этого биоклиматическая схема дополняется процедурой, описывающей переход от одного типа растительности к другому. В процедуре учитывается время, затрачиваемое на переходные процессы между, выделенными в нашей агрегации растительности, типами. Тем самым становится возможным говорить о применении данной модели к исследованию динамических процессов

растительности.

Проведенные расчеты [7,12,13] в первую очередь имели своей целью не прогноз действительного распределения растительных зон: такие оценки на сегодняшний день нельзя признать обеспеченными ни с точки зрения имеющихся биологических концепций, ни с точки зрения методологии их приложения к формализованным схемам. Они являются скорее иллюстрацией необходимости развития подобного динамического подхода, демонстрируя новые возможности прогнозирования на примере анализа полученных результатов. Однако обоснование прогнозных оценок связано с формированием адекватных концептуальных представлений. Мы полагаем, что дальнейшими шагами в развитие предложенного подхода могли бы стать следующие: - расшифровка понятия "биом" на основные составные части: почвенную, гидрологическую и собственно растительную, с выделением основных процессов и характерных времен. - адекватная оценка скоростей смены растительности, основанная на знаниях о процессах расселения и конкуренции, а также о продукционном процессе; создание схемы трансформации почвы; учет таких процессов как пожары, вспышки вредителей и т.д.; - связь в единой имитационной модели процессов двух уровней иерархии: глобального, отражающего динамику смены биомов, и локального уровня, отражающего внутренние механизмы этой смены; - явный учет массового и энергетического потоков; - совместное использование модели динамики растительных биомов с неравновесными моделями климата для учета обратного влияния изменяющихся характеристик растительности на параметры климата.

Таким образом, по нашему мнению, существует возможность объединить в рамках единой модели преимуществ различных подходов, рассмотренных выше, основываясь изначально на целостном биоклиматическом подходе.

Критический анализ состояния дел в математическом моделировании в экологии, как нам кажется, приводит к выводу, что центральной проблемой являются проблемы измерений, проблемы взаимного согласования языков специалистов биологов, математиков с традицией моделирования физических процессов. «То, что мы наблюдаем, - это не сама природа, которая выступает в том виде, в котором она выявляется благодаря нашему способу постановки вопросов» [13]. Так при описании экологических объектов, как правило, полностью исключается из обсуждения вопрос о принципиальной наблюдаемости и измеримости фазовых переменных математических моделей. Тогда как практически все характеристики: продуктивности экосистем, численности популяций, запасы биомассы и др. могут быть измерены лишь с определенной точностью, причем повышение точности приведет к изменению функционирования самого моделируемого объекта. То есть сама возможность наблюдения предполагает наличие определенных физических условий, которые могут оказаться связанными с сущностью изучаемого явления. Это ситуация, с которой сталкивается физика при описании микро процессов. Возможно, что дальнейшее развитие математического моделирования экологических объектов и, в частности, вопрос об адекватности их математического описания, лежит в русле «заимствовании аналогий» из современной физики.

Литература.

1. Алексеев В.В., Крышев И.И., Сазыкина Т.Г. Физическое и математическое моделирование экосистем. Санкт-Петербург, Гидрометеиздат, 1992
2. Вольтера В. Математическая теория борьбы за существование. Наука, М., 1976
3. Гейзенберг В. Физика и философия. Наука, М., 1989

4. Гимельфарб А.А, Гинзбург Л.Р, Полуэктов Р.А., Пых Ю.А, Ратнер В.А. Динамическая теория популяций. Наука, М., 1974.
5. Горшков В.Г. Физические и биологические основы устойчивости жизни. ВИНТИ, М., 1995
6. Заславский Б.Г., Полуэктов Р.А.. Управление экологическими системами. Наука, М.,1988
7. Кириленко А.П., Белотелов Н.В., Богатырев Б.Г. Моделирование сдвига растительных зон с учетом климатической нестабильности., ДАН РАН, 338(1), 1994, 116-118
8. Костицын В.А. Эволюция атмосферы. Биосферы и климата. Наука, М.,1984
9. Моисеев Н.Н., Александров В.В, Тарко А.М. Человек и биосфера. Наука, М.,1985
10. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ, Наука, М.,1978
11. Belotelov N.V., Bogatyrev B.G., Kirilenko A.P., Venevsky S.V. Bioclimatic Indices Used to Estimate Vegetation Pattern Transformation, STEP Inter. 3(3), 1993, 13
12. Belotelov N.V., Bogatyrev B.G., Kirilenko A.P., Venevsky S.V. Modeling of Time-Dependent Biome Shifts Under Global Climate Changes, Ecol.Model.87, 1996, 29-40
13. Smith T/M., Shugart H.H., Bonan G.B., Smith J.B. Modeling the Potential Response of Vegetation to Global Climate Change, Adv.Ecol.Res. 22, 1992, 93-116

# ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ДРОБЛЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА В МЕТОДАХ НЕРАВНОМЕРНЫХ ПОКРЫТИЙ В ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Белянков А.Я. (г. Москва)

*Применительно к методам неравномерных покрытий для глобальной минимизации заданной функции  $f$  на заданном множестве делается попытка оптимального учета специфичной для этих методов формы обрабатываемых множеств, которые суть параллелепипеды со сторонами, параллельными координатным осям. Рассматривается вопрос об оптимизации соотношения сторон параллелепипедов.*

При определении глобального минимума функции  $f$  на множестве  $X \subset R^n$  методом неравномерных покрытий [1] типовым шагом является попытка исключения из дальнейшего рассмотрения параллелепипеда  $P(c, h)$  с центром  $c$  и параллельными координатным осям сторонами  $h$ , соотношение которых известно:

$$h^1 : \dots : h^n = H^1 : \dots : H^n. \text{ Параллелепипед } P(c, h) \text{ исключается, если}$$

$$\min_{x \in P(c, h)} f(x) \geq f_r - \varepsilon, \quad (1)$$

где  $f_r$  — текущий «рекорд», т.е. наименьшее из вычисленных к данному моменту работы алгоритма значений  $f$ . Неравенство (1) несколько усиливают до  $f(c) - \max_{x \in P(c, h)} |f(x) - f(c)| \geq f_r - \varepsilon$ , а для получения верхней оценки фигурирующего здесь максимума используют оценки производных функции  $f$  или аналогичные величины.

В [2] автором была предложена «взвешенная» комбинация

$$L := \sum_{i=1}^n L_i H^i, \text{ где } L_i := \max_{x \in X} |\partial f / \partial x^i|, \quad (2)$$

констант Липшица  $L_i$ , а позже в [3] — несколько лучшая (меньшая) константа

$$L := \max_{x \in X} \left( \sum_{i=1}^n |\partial f / \partial x^i| H^i \right), \quad (3)$$

введение которых мотивируется наличием следующей точной оценки, доказательство которой до последнего времени не было опубликовано.

**Теорема 1.** Для непрерывно дифференцируемой  $f$  и констант (2), (3)

$$|f(x) - f(c)| \leq \frac{1}{2} L(h : H) \quad (4)$$

при всех  $x \in P(c, h)$ .

*Доказательство.* Легко проверяется, что параллелепипед  $P(c, h)$  является обобщенным шаром с центром  $c$  и радиусом  $r = \frac{1}{2}(h : H)$  в метрике, определяемой взвешенной  $C$ -нормой вида

$$\|\Delta x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \left( (\Delta x)^i / H^i \right), \quad (5)$$

по отношению к которой двойственная норма имеет вид

$$\|f'\|_1 := \sum_{i=1}^n |(f')_i| H^i, \quad (6)$$

так что справедливо неравенство Гельдера

$$\left| \sum_{i=1}^n (f')_i (\Delta x)^i \right| \leq \|f'\|_1 \|\Delta x\|_\infty. \quad (7)$$

Согласно теореме о среднем для непрерывно-дифференцируемой функции  $f$  от  $n$  переменных имеет место равенство вида

$$f(x) - f(c) = \sum_{i=1}^n (f'(\xi))_i (x - c)^i, \quad (8)$$

где  $\xi = \xi(c, x, f)$  есть некоторая точка внутри пространственного отрезка, соединяющего точки  $c$  и  $x$ . Применяя (7) к правой части равенства (8) получаем неравенство  $|f(x) - f(c)| \leq \|f'(\xi(c, x, f))\|_1 \|x - c\|_\infty$ . Здесь норма разности  $\|x - c\|_\infty$  не превосходит радиуса  $r = \frac{1}{2}(h : H)$  обобщенного шара  $P(c, h)$ , а норма  $\|f'(\xi(c, x, f))\|_1$  в силу того, что  $\xi(c, x, f) \in P(c, h)$  при любом  $x \in P(c, h)$ , не превосходит мажоранты

$$\max_{\xi \in P(c, h)} \left( \sum_{i=1}^n |(f'(\xi))_i| H^i \right) \leq \max_{x \in X} \left( \sum_{i=1}^n |(f'(x))_i| H^i \right).$$

В итоге получаем неравенство

$$|f(x) - f(c)| \leq \frac{1}{2}(h : H) \max_{x \in X} \left( \sum_{i=1}^n |\partial f / \partial x^i| H^i \right),$$

являющееся, очевидно, оценкой (4) с константой (3). Тем более верна оценка (4) с константой (2), так как константа (2) больше:

$$\max_{x \in X} \left( \sum_{i=1}^n |\partial f / \partial x^i| H^i \right) \leq \sum_{i=1}^n \left( \max_{x \in X} |\partial f / \partial x^i| \right) H^i.$$

Теорема доказана.

В оценке (4) с константами (2) либо (3) оптимально учитывается форма множества  $P(c, h)$ . До введения констант (2), (3) вместо основанной на неравенстве Гельдера (7) оценки вида (4) использовалась основанная на неравенстве Коши

$$\left| \sum_{i=1}^n (f')_i (\Delta x)^i \right| \leq \|f'\|_2 \|\Delta x\|_2,$$

примененном к равенству (8), оценка вида

$$|f(x) - f(c)| \leq \left( \sum_{i=1}^n L_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n (x^i - c^i)^2 \right)^{1/2},$$

где  $\|\bullet\|_2$  есть стандартная евклидова норма, а  $L_i$  — константы Липшица из (2) выше. Форма шара в евклидовой метрике и форма множества  $P(c, h)$  не согласованы, следствием чего была значительная потеря вычислительной эффективности.

Соотношение сторон  $H^1 : \dots : H^n$  рассматривалось выше как наперед известное. Представляется теперь уместным вопрос о варьировании с целью



оптимизации соотношения сторон  $H^1 : \dots : H^n$ . Ограничиваясь сравнительно простым случаем, когда известны фигурирующие в (2) константы Липшица  $L_i$ , рассмотрим естественное в этом случае усиление неравенства (1), имеющее вид

$$f(c) - \sum_{i=1}^n L_i |(x-c)^i| \geq f_r - \varepsilon \quad (9)$$

и описывающее множество точек  $x$ , которые могут быть исключены на текущем шаге. Элементарно определяется вписанный в это множество параллелепипед  $P(c, h)$  максимального объема.

**Теорема 2.** *Стороны указанного параллелепипеда  $P(c, h)$  максимального объема даются равенствами  $nL_i h^i = 2(f(c) - f_r + \varepsilon)$ , так что*

$$h^1 : \dots : h^n = L_1^{-1} : \dots : L_n^{-1} \quad (10)$$

*независимо от  $f(c), f_r, \varepsilon$ .*

*Доказательство.* Перепишем неравенство (9) в виде

$$\sum_{i=1}^n L_i |(x-c)^i| \leq f(c) - f_r + \varepsilon.$$

Тогда, очевидно, для получения соотношения, определяющего стороны любого вписанного параллелепипеда  $P(c, h)$ , нужно подставить в это неравенство вместо всех величин  $|(x-c)^i|$  их соответствующие наибольшие возможные значения  $h^i/2$ , а знак нестроого неравенства заменить знаком равенства. Получим уравнение

$$\sum_{i=1}^n L_i h^i = 2(f(c) - f_r + \varepsilon), \quad (11)$$

связывающее стороны  $h^1, \dots, h^n$  вписанного параллелепипеда  $P(c, h)$ . Требуется максимизировать объем  $V_p := h^1 \dots h^n$  параллелепипеда при наложенном на стороны  $h^1, \dots, h^n$  условии (11). Очевидно, что задача максимизации величины  $V_p$  равносильна задаче максимизации произведения

$$\Pi_{Lh} := (L_1 h^1) \dots (L_n h^n),$$

поскольку  $\Pi_{Lh}$  отличается от  $V_p$  постоянным множителем  $L_1 \dots L_n$ .

Задача максимизации величины  $\Pi_{Lh}$  при условии (11) есть классическая задача максимизации произведения  $n$  положительных переменных  $(L_1 h^1), \dots, (L_n h^n)$  при заданном условии (11) значения их суммы. Решение этой классической задачи характеризуется условием равенства этих переменных:

$$(L_1 h^1) = \dots = (L_n h^n) = \text{const.}$$

Элементарный подсчет значения const. завершает доказательство.

**Следствие.** *При определении глобального минимума функции  $f$  на множестве  $X \subset \mathbb{R}^n$  методом неравномерных покрытий типовой шаг с текущим параллелепипедом можно начинать с попытки предварительного дробления его на меньшие с целью получения параллелепипедов, соотношение сторон которых по возможности приближается к  $L_1^{-1} : \dots : L_n^{-1}$ .*

## Литература

1. Евтушенко Ю.Г. Численный метод поиска глобального экстремума функций (перебор на неравномерной сетке) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1971, Т.11, № 6. – С. 1390–1403.
2. Белянков А.Я., Веселов Е.Н., Евтушенко Ю.Г., Мазурик В.П., Ратькин В.А. Диалоговая система оптимизации ДИСО/ПК. Глобальная минимизация. – М.: ВЦ АН СССР, 1986. – 61 с.
3. Белянков А.Я. Повышение вычислительной эффективности методов неравномерных покрытий в глобальной оптимизации // Методы математического программирования и программное обеспечение: Тезисы докладов. – Свердловск: УрО АН СССР, 1989. – С. 21–22.

## КАЧЕСТВЕННАЯ МОДЕЛЬ СТРОЕНИЯ СМЕРЧА

Белянков А.Я. (г. Москва)

*Предлагается качественная модель, единообразно трактующая многие известные явления, характеризующиеся вращательными эффектами в течениях жидкостей и газов: известное явление «воронки в ванной», атмосферные смерчи (торнадо), огненно-дымовые смерчи и вихри, водяные смерчи и вихри, пылевые и прочие вихри.*

Атмосферные смерчи (торнадо) привлекают интерес многих исследователей как своей загадочностью, так и практической важностью понимания этого небезопасного природного явления. Начальные сведения по этой проблематике можно почерпнуть из небольшой по объему, но содержательной и интересной книги акад. Д.В. Наливкина [1]. В настоящей работе делается попытка приблизиться к пониманию подобных явлений.

### ***Воронка в ванной***

Явление атмосферного смерча имеет внешнее сходство с хорошо известным явлением «воронки в ванной». При определенных условиях характер истечения жидкости через трубу самопроизвольно изменяется таким образом, что начинается так называемое «прорастание вихревой нити» в направлении, обратном направлению истечения. Когда «прорастающая» вихревая нить достигает поверхности жидкости, наблюдается вращение с образованием воронки. Детального понимания этого самопроизвольного изменения характера истечения в настоящий момент, по-видимому, нет.

### ***Атмосферный смерч как воронка в ванной, но «вверх ногами»***

Имеется много подробных описаний явления атмосферного смерча (торнадо). К сожалению, варианты объяснения этого загадочного явления также многочисленны. По мнению автора, образование атмосферного смерча происходит по следующей схеме. На массу сравнительно теплого и влажного (а потому относительно легкого) атмосферного воздуха из приполярных областей надвигается мощная масса сравнительно холодного и сухого (а потому относительно тяжелого) воздуха таким образом, что относительно легкий «придавлен» сверху относительно тяжелым. Контакт теплого влажного с холодным сухим сопровождается конденсацией влаги, что выражается в появлении мощной облачности, сильных гроз и нередко града. Нахождение относительно легкого воздуха под относительно тяжелым неустойчиво. В том или ином месте относительно легкий прорывается, прокладывая канал истечения вверх для всех близко расположенных масс легкого воздуха. И в полной аналогии с процессом вытекания воды из ванной наступает момент самопроизвольного изменения характера истечения легкого воздуха вверх. Начинается «прорастание» вихревой нити в направлении, обратном направлению истечения относительно легкого воздуха, т.е. «прорастание» вниз. Явление атмосферного смерча есть видимая, по существу завершающая часть процесса «прорастания» вихревой нити.

После ухода вверх всего близко расположенного относительно легкого воздуха смерч должен ослабеть. Но в действительности местоположение связанного со смерчем

канала истечения легкого воздуха вверх достаточно быстро перемещается вместе с движением массы относительно тяжелого воздуха. Из-за этого постоянного перемещения смерчу не грозит нехватка легкого воздуха, питающего это явление.

Согласно предложенной схеме особенно «смерчеопасными» являются расположенные в средних широтах обширные равнинные местности, открытые для прихода мощных масс холодного приполярного воздуха.

### ***Огненные смерчи***

Причиной появления больших объемов стремящегося вверх относительно легкого воздуха может стать вулканическое извержение или очень сильный пожар. В результате может возникнуть один или несколько смерчей. Несколько характерных примеров описано в [1]. Можно также предположить, что пожар Москвы в 1812 г. стал бедствием именно из-за возникновения огненного смерча. Пожар Дрездена в начале 1945 г. стал катастрофическим по такой же причине.

Согласно предложенной схеме во всех этих случаях единственно важное обстоятельство — это появление больших объемов горячего воздуха. Несколько по-иному расставлены акценты в книге [1], где обращается неоправданно большое внимание на сопровождающую смерч облачность и на характер этой облачности. Предложена даже терминология («смерч-вихрь» в противопоставление к «смерч»), позволяющая различать, кто из этих двоих (смерч и облачность) появился ранее другого. Термины «материнское облако», «потомковое облако» подсказывают читателю бесплодный вопрос, смерч ли порождает облако, или же облако порождает смерч.

Небезынтересен описанный в [1] пример искусственно полученного огненного смерча. Несколько десятков весьма мощных нефтяных горелок привезли в пустыню Сахара, разместили по окружности и зажгли с целью произвольного вызова дождя. Все вышло по намеченному плану: огненный смерч, затем образовалось громадное кучево-дождевое облако и пошел дождь. К сожалению, проект не получил дальнейшего развития из-за экономической нецелесообразности: соотношение между расходами на получение дождя и пользой от дождя оказалось неблагоприятным.

### ***Водяные смерчи и вихри***

В настоящей работе не поддерживается, а по существу даже отрицается проводимое в книге [1] принципиальное различие между терминами «смерч» и «вихрь». Характерным для обоих случаев является появление больших объемов стремящегося вверх относительно легкого газа. Последний находит путь вверх и устремляется по этому пути. Далее наступает момент самопроизвольного изменения характера истечения легкого газа вверх. Начинается «прорастание» вихревой нити в обратном направлении, т.е. вниз. На последних стадиях процесса «прорастающая» вихревая нить тем или иным образом становится видимой, визуализируется. Те или иные внешние признаки, сопровождающие визуализацию, могут отличаться, отражая именно внешнюю специфику явления. Вряд ли следует возводить эти внешние различия в ранг принципиальных. Гораздо важнее видеть многообразные механизмы, приводящие к появлению больших объемов стремящегося вверх относительно легкого газа.

Для водяных смерчей или вихрей механизм производства относительно легкого воздуха основан на комбинации двух причин: тепловое расширение воздуха и относительная легкость молекулы воды. При солнечном прогреве большого водоема из-за нагревания воздуха и испарения воды у значительной массы воздуха над

поверхностью водоема понижается плотность. Понижение плотности воздуха вследствие его нагревания не требует разъяснения. Менее очевидно уменьшение (а не увеличение) плотности воздуха вследствие повышения содержания в нем водяного пара. Нужно принять во внимание, что при заданных температуре и давлении один кубометр газа содержит вполне определенное, фиксированное число молекул независимо от его состава. Если содержание водяного пара в воздухе повышается, то это означает не добавление молекул воды к имеющемуся в одном кубометре набору молекул, но замена некоторой части молекул молекулами воды с сохранением общего количества молекул в кубометре неизменным. Вес молекул кислорода, азота и воды составляет 32, 28 и 18 атомных единиц массы (а.е.м.). Повышение содержания водяного пара в воздухе означает, что в каждом кубометре некоторая часть молекул, весящих 32 и 28 а.е.м., замещается точно таким же количеством молекул, весящих 18 а.е.м. Ясно, что масса одного кубометра воздуха станет меньше. Оценка показывает, что по масштабу понижения плотности этот эффект сопоставим с эффектом теплового расширения воздуха.

### ***Пылевые вихри***

Почти нет человека, который не встречался бы с пылевым вихрем. После вышеизложенного объяснение этого явления представляется элементарным. Солнечные лучи прогревают землю, и образуется приземный слой теплого, а потому более легкого воздуха. Этот слой неустойчив. В каком-то месте происходит прорыв теплого воздуха вверх и т.д. К этому объяснению нужно сделать два примечания.

Пылевой вихрь возникает на достаточно обширных горизонтальных участках поверхности земли. Всякая неровность способствует «стеканию» теплого воздуха вверх и исчезновению слоя теплого воздуха.

Необходим легкий ветер, обеспечивающий перемещение вихря. Если канал прорыва теплого воздуха вверх не перемещается, то после ухода вверх всего близлежащего теплого воздуха явление должно прекратиться.

Второе примечание имеет общий характер. Рассмотренные выше природные явления могут существовать только при условии непрерывного перемещения. Исключением являются огненные смерчи и вихри, которые, наоборот, «привязаны» к источнику горячего воздуха.

### ***Схематическая модель с двумя симметриями***

Обычно при обсуждении вышеупомянутых явлений на первый план выходит трудноразрешимая проблема выполнения фундаментального закона сохранения момента количества движения: откуда появилось вращение, если в начальном состоянии вращение отсутствовало? При обсуждении атмосферного или водяного смерча есть какая-то возможность невнятно и малоубедительно упомянуть о вращении Земли: для явлений такого масштаба проявление эффекта вращения Земли представляется возможным, хотя и неясным в деталях. Но вопрос о возникновении вращения воды в ванной, о закручивании в огненном смерче или пылевом вихре остается совсем без ответа. Если считать все эти явления имеющими единую сущность, то и ответ на фундаментальный вопрос о сохранении вращения должен быть единым для всех явлений.

Предложенная выше для этих явлений концепция самопроизвольного изменения характера истечения с возникновением встречного «прорастания» вихревой нити

позволила увидеть еще два трудных вопроса, при ответе на которые прояснился заодно и вопрос о сохранении вращения.

Анализируя применение предложенной выше концепции к атмосферному смерчу мы можем заметить поразительное двойное несоответствие масштабов. Истечение прорывающегося вверх относительно легкого воздуха происходит внутри канала, проложенного в среде относительно тяжелого воздуха и имеющего диаметр никак не меньший нескольких сотен или даже тысяч метров. В то же время наблюдавшийся диаметр смерча оценивается метрами, реже десятками метров и очень редко сотнями. Второе несоответствие — в масштабах скоростей. Скорости движения истекающего вверх легкого воздуха намного меньше скорости звука, тогда как скорость на поверхности смерча сопоставима со скоростью звука.

Попытка объяснить это несоответствие масштабов привела к формированию излагаемой ниже схематической модели. Моделируется истечение жидкости или газа в одном направлении, соединенное с «проращением» вихревой нити во встречном направлении. Для определенности будем говорить о происходящем внутри вертикального канала истечении жидкости вверх и «проращении» вихревой нити вниз. Остается открытым вопрос о том, как именно происходит самопроизвольный переход к описываемому в излагаемой схематической модели режиму течения.

Течение подчиняется двум симметриям. Первая есть осевая симметрия целочисленного порядка  $n$ ,  $n \geq 2$ : после поворота на угол  $2\pi/n$  радиан относительно вертикальной оси канала картина течения совмещается сама с собой. Вторая симметрия — винтовая: после вертикального сдвига на произвольное смещение  $\Delta z$  и последующего поворота на угол  $k\Delta z$  радиан картина течения совмещается сама с собой; здесь  $k$  есть вещественная константа, характеризующая «кручение» в данной симметрии.

Переходим к схематизации течения, к собственно схематической модели. Пусть  $n$  одинаковых тонкостенных эластичных шлангов равноудалены от оси канала и одинаково наполнены жидкостью, их оси одинаково отклонены от вертикали в согласии с винтовой симметрией, каждый шланг касается стенки канала и соседних шлангов, а пространство между шлангами также заполнено жидкостью. Пренебрегая трением шлангов друг о друга допустим, что каждый шланг вместе со своим содержимым вращается вокруг своей оси с круговой частотой  $\omega$ ; считаем, что  $\omega > 0$ , если сверху шланг выглядит вращающимся против часовой стрелки. Вся эта конструкция как целое пусть вращается вокруг вертикальной оси с круговой частотой  $\Omega$  и движется вверх с вертикальной скоростью  $V_z > 0$ . Осталось представить стенки шлангов воображаемыми, не существующими в действительности, и описание схематической модели течения закончено.

Не утверждается, что описанное схематическое распределение скоростей удовлетворяет гидродинамическим уравнениям. Вместо этого выражается надежда, что существует такое решение системы гидродинамических уравнений, которое в разумном смысле подходит под предлагаемую схему с надлежаще подобранными параметрами модели.

### ***Объяснение явлений в рамках схематической модели***

В рамках данной схематической модели легко разрешима проблема сохранения момента количества движения. Двух варьируемых параметров  $\omega$  и  $\Omega$  более чем достаточно для поддержания правильного суммарного значения этой величины.

Вблизи осевой линии канала воображаемые стенки шлангов сближаются и сообща формируют отдельное вращательное движение жидкости, идентифицируемое как неоднократно упоминавшаяся «прорастающая вихревая нить». Принципиально различны случаи  $n = 2$  и  $n > 2$ . При  $n = 2$  на осевой линии канала происходит непосредственное скольжение воображаемых стенок двух шлангов друг по другу. Закручиваемая при этом вихревая нить имеет диаметр  $d_0$ , теоретически нулевой, а реально имеющий масштаб «погранслоиных» эффектов. Из-за малости диаметра  $d_0$  велика угловая скорость  $\omega_0$  вращения в вихревой нити. «Проросшая» и ставшая видимой часть вихревой нити соответствует обычному, наиболее распространенному типу смерча, у которого угловая скорость вращения  $\omega_1$  велика (но меньше  $\omega_0$  из-за потери вращения), скорость  $v_1$  на поверхности сопоставима со скоростью звука  $c$ , диаметр  $d_1 = 2v_1 / \omega_1 \leq 2c / \omega_1$  больше  $d_0$  и много меньше диаметра канала истечения, а наружная поверхность — резко ограниченная и гладкая. В случае  $n > 2$  область вращательного движения, сформированного вблизи осевой линии канала, имеет диаметр, по порядку величины сопоставимый с диаметром канала. Это уже не тонкая «нить», но толстый «жгут». Видимая часть этого «вихревого жгута» соответствует иному, довольно редкому типу смерча, названному в [1] расплывчатым из-за нечеткости его наружной поверхности (см. описанные в [1] смерч Трех Штатов и другие). Наблюдавшийся диаметр расплывчатого смерча — от нескольких сот метров до 3 км. Он имеет вид низкого, широкого, медленно движущегося по земле, очень быстро вращающегося столбообразного облака. Разрушительная сила таких смерчей велика.

В заключение отметим, что в изложенной схематической модели содержится возможность очень мощного механизма передачи кинетической энергии вниз. Если параметры модели  $\omega$  и  $k$  разного знака, а параметр  $V_z$  не слишком велик, то при формировании воображаемыми стенками шлангов закручивании вихревой нити ( $n = 2$ ) или жгута ( $n > 2$ ) нити/жгуту придается отрицательная вертикальная скорость. «Прорастание» вниз дополняется или даже заменяется прямым «проталкиванием» вращательной кинетической энергии вниз. Мы не можем определенно утверждать, что этот механизм переноса энергии действителен, поскольку сама схематическая модель пока лишь гипотеза. Но косвенное подтверждение содержится на самой первой странице [1], где констатируется, что внутренняя полость смерча «наполнена воздухом, сравнительно медленно движущимся вниз».

#### Литература

1. Наливкин Д.В. Смерчи. — М.: Наука, 1984. — 112 с., ил.

# ОБ ОБОБЩЕННОЙ БАЙЕСОВСКОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ О РАЗЛАДКЕ\* ДЛЯ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА

Бурнаев Е.В. (г. Москва)

В данной работе рассматривается задача наискорейшего обнаружения изменения интенсивности пуассоновского процесса. Показывается, что обобщенная байесовская постановка задачи может быть переформулирована в терминах условно-экстремальной задачи оптимальной остановки для кусочно-детерминистского марковского процесса. Для поставленной задачи найдено оптимальное решение и подсчитаны асимптотики риска.

## 1. Введение и постановка задачи

Пусть  $N^{\lambda_0} = (N_t^{\lambda_0})_{t \geq 0}$  и  $N^{\lambda_1} = (N_t^{\lambda_1})_{t \geq 0}$  – пуассоновские процессы с известными интенсивностями  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  соответственно, определенные на фильтрованном вероятностном пространстве  $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ . Наблюдается стохастический процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , имеющий вид  $X_t = \int_0^t I(s < \theta) dN_s^{\lambda_0} + \int_0^t I(s \geq \theta) dN_s^{\lambda_1}$ ,  $X_0 = 0$ , где  $I(A)$  – индикатор события  $A$ . Неслучайный неизвестный параметр  $\theta \in [0, \infty]$  интерпретируется как момент появления “разладки” (в соответствии с терминологией [1,2,3]) во время наблюдения за процессом  $X$ : при  $t < \theta$  наблюдается процесс  $X_t = N_t^{\lambda_0}$  и при  $t \geq \theta$  наблюдается процесс  $X_t = N_{\theta}^{\lambda_0} + N_{t-\theta}^{\lambda_1}$ . Появление разладки надо выявить с наименьшей задержкой по возможности избегая ложных тревог.

Пусть  $P_t = \text{Law}(X | \theta = t)$  – распределение процесса  $X$  при условии, что разладка произошла в детерминированный момент времени  $\theta = t$ . В частности,  $P_\infty$  будет распределением процесса  $X$  при условии, что разладки не было, т.е.  $P_\infty = \text{Law}(N_t^{\lambda_0}, t \geq 0)$ , и  $P_0$  будет распределением процесса  $N_t^{\lambda_1}, t \geq 0$ .

Обозначим через  $\tau = \tau(\omega)$  конечный момент остановки относительно фильтрации  $(F_t^X)_{t \geq 0}$ , порожденной процессом  $X_t$ . Будем интерпретировать  $\tau$  как решение о том, что разладка произошла в момент времени  $\tau(\omega)$ .

С точки зрения ложных тревог, качество системы, контролируемой моментом остановки  $\tau$ , может быть охарактеризовано, например, средним временем  $E_\infty \tau$  до ложной тревоги, где через  $E_\theta$  обозначено математическое ожидание относительно вероятностной меры  $P_\theta$ . Для каждого  $T > 0$  обозначим через  $M_T = \{\tau \geq 0 : E_\infty \tau = T\}$  класс моментов остановки со средним временем  $T$  до ложной тревоги.

Будем оценивать качество системы наблюдения, идентифицируемой при выборе момента остановки  $\tau \in M_T$ , величиной  $B(T; \tau) = 1/T \cdot \int_0^\infty E_\theta (\tau - \theta)^+ d\theta$ , где

---

\* Работа частично поддержана аналитической ведомственной целевой программой РНП.2.2.1.1.2467, грантом Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-5379.2006.1, программой фундаментальных исследований Президиума РАН 15, грантом РГНФ 06-02-91821 а/Г, грантом РФФИ 05-01-00944.



$(x)^+ = \max(0, x)$ . Задача заключается в том, чтобы найти такой момент остановки  $\tau_T^* \in M_T$ , если он существует, что  $B(T) = B(T; \tau_T^*) = \inf_{\tau \in M_T} B(T; \tau)$ . Такой момент остановки  $\tau_T^*$  будем называть *оптимальным в классе  $M_T$* . Эта постановка задачи о разладке называется *обобщенной байесовской*, поскольку параметр  $\theta$  можно интерпретировать как обобщенную случайную величину с “равномерным” распределением на  $[0, \infty)$ .

**Замечание 1.** Естественней рассматривать более широкий класс  $\bar{M}_T = \{\tau \geq 0 : T \leq E_\infty \tau < \infty\} \supset M_T$  и попытаться найти такой момент остановки  $\bar{\tau}_T^* \in \bar{M}_T$ , что  $B(T) = \inf_{\tau \in \bar{M}_T} 1/T \cdot \int_0^\infty E_\theta(\tau - \theta)^+ d\theta = 1/T \cdot \int_0^\infty E_\theta(\bar{\tau}_T^* - \theta)^+ d\theta$ .

## 2. Достаточная статистика

Пусть  $L_t = \frac{d(P_0 | F_t^X)}{d(P_\infty | F_t^X)} = \exp\left(\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)X_t - (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot t\right), t \geq 0$  — отношение

правдоподобия и процесс  $\psi = (\psi_t)_{t \geq 0}$  имеет вид  $\psi_t = \int_0^t \frac{L_t}{L_\theta} d\theta$ . Этот процесс удовлетворяет уравнению

$$d\psi_t = dt + (\lambda_1/\lambda_0 - 1)\psi_t d(X_t - \lambda_0 t), \psi_0 = 0. \quad (1)$$

Выполняется следующая

**Лемма 1.** Функция риска  $B(T) = \inf_{\tau \in M_T} 1/T \cdot \int_0^\infty E_\theta(\tau - \theta)^+ d\theta$  равняется значению условно-экстремальной задачи оптимальной остановки для процесса  $(\psi_t)_{t \geq 0}$ , а именно  $B(T) = \inf_{\tau \in M_T} 1/T \cdot E_\infty \int_0^\tau \psi_\theta d\theta$ .

Лемма 1 проясняется причины, по которым процесс  $(\psi_t)_{t \geq 0}$  является достаточной статистикой для рассматриваемой задачи.

## 3. Свойства выборочных траекторий процесса $(\psi_t)_{t \geq 0}$

Для решения условно-экстремальной задачи оптимальной остановки, поставленной в лемме 1, необходимо рассмотреть свойства выборочных траекторий процесса  $(\psi_t)_{t \geq 0}$ .

Обозначим через  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  моменты скачков процесса  $X$  ( $\sigma_0 = 0$ ) и положим  $f(t, z) = (z - 1/(\lambda_1 - \lambda_0)) \exp(-(\lambda_1 - \lambda_0) \cdot t) + 1/(\lambda_1 - \lambda_0)$ . Из уравнения (1) следует, что  $\left. \begin{array}{l} \psi_t = f(t - \sigma_{n-1}, \psi_{\sigma_{n-1}}), t \in [\sigma_{n-1}, \sigma_n) \\ \psi_{\sigma_n} = (\lambda_1/\lambda_0) \psi_{\sigma_{n-1}} \end{array} \right\}, n = 1, 2, \dots$

Сначала рассмотрим случай  $\lambda_1 > \lambda_0$ . Положим  $\hat{z} = 1/(\lambda_1 - \lambda_0)$ . Очевидно, что процесс  $(\psi_t)_{t \geq 0}$  может совершать скачки только вверх, имеет положительный снос на  $[0, \hat{z})$ , отрицательный снос на  $(\hat{z}, \infty)$  и нулевой снос в точке  $\hat{z}$ . Таким образом, если  $(\psi_t)_{t \geq 0}$  начинает или заканчивает свое движение в точке  $\hat{z}$ , то  $(\psi_t)_{t \geq 0}$  остается в этой точке до тех пор, пока процесс  $X$  не совершит скачок. В этот момент процесс  $(\psi_t)_{t \geq 0}$

покидает точку  $\hat{z}$  за счет скачка вверх. Отсюда также следует, что если  $(\psi_t)_{t \geq 0}$  покидает  $[0, \hat{z})$ , то больше в этот полуинтервал процесс не возвращается. Итак, получаем, что для каждого  $A > 0$  и  $\tau_A = \inf \{t \geq 0 : \psi_t \geq A\}$  неравенство  $\psi_{\tau_A} > A$  выполняется с ненулевой вероятностью.

Теперь рассмотрим случай  $\lambda_1 < \lambda_0$ . Очевидно, что  $(\psi_t)_{t \geq 0}$  может совершать скачки только по направлению к нулю (в моменты скачков процесса  $X$ ). Более того, знак коэффициента сноса всегда положителен. Значит,  $(\psi_t)_{t \geq 0}$  всегда движется непрерывно вверх и может совершать скачки вниз. В этом случае  $\psi_{\tau_A} = A$  (Р-п.н.).

#### 4. Оптимальное решение

Оптимальные моменты остановки из классов  $M_T$  и  $\bar{M}_T$  описаны в следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть  $\tau_K = \inf \{t \geq 0 : \psi_t \geq K\}$  и  $f(x; K) = E_\infty^{(x)} \tau_K$ , где  $E_\infty^{(x)}$  – математическое ожидание по мере  $P_\infty^{(x)}$ , относительно которой процесс  $(\psi_t)_{t \geq 0}$  удовлетворяет уравнению (1) с начальным условием  $\psi_0 = x$ . Обозначим через  $A = A(T)$  – решение уравнения

$$E_\infty^{(0)} \tau_{A(T)} = T. \quad (2)$$

В случае  $\lambda_1 < \lambda_0$  для каждого  $T > 0$  уравнение (2) имеет решение  $A(T) = T$ , и момент остановки  $\tau_T^* = \tau_{A(T)}$  будет оптимальным в классах  $M_T$  и  $\bar{M}_T$ .

В случае  $\lambda_1 > \lambda_0$  для каждого  $T \in (0, T_1) \cup [T_2, \infty)$ , где  $T_1 = f(0; \hat{z} -)$  и  $T_2 = f(0; \hat{z})$ , уравнение (2) имеет решение, удовлетворяющее неравенству  $(\lambda_0/\lambda_1) \cdot T < A(T) < T$ , и момент остановки  $\tau_T^* = \tau_{A(T)}$  будет оптимальным в классах  $M_T$  и  $\bar{M}_T$ . При  $T \in [T_1, T_2)$  уравнение (2) решения  $A = A(T)$  не имеет и в классах  $M_T$  и  $\bar{M}_T$  не найдется оптимального момента остановки.

**Замечание 2.** Из раздела 3 следует, что при  $\lambda_1 > \lambda_0$  процесс  $(\psi_t)_{t \geq 0}$  совершает скачки вверх, т.е. перескакивает через любой порог с ненулевой вероятностью. Именно поэтому уравнения (2) не для всех  $T$  имеет решение  $A = A(T)$ .

Пусть  $\lambda_0 \rightarrow \infty$  и  $\lambda_1 \rightarrow \infty$  так, что  $\lambda_1 = \lambda_0 + C \cdot \sqrt{\lambda_0}$  для произвольной фиксированной константы  $C = R$ . Положим  $\varepsilon = 1/\sqrt{\lambda_0}$  и  $\rho = 1/2 \cdot ((\lambda_1 - \lambda_0)/\sqrt{\lambda_0})^2$ . Тогда при  $C > 0$  решение  $A = A(T)$  уравнения (2) имеет следующую структуру

- $A(T) = T$  при  $T < T_1 = \hat{z} = \varepsilon/\sqrt{2\rho}$ ;
- $A(T) = T - \varepsilon^2$  при  $T = T_2 = \hat{z} + \varepsilon^2 = \varepsilon/\sqrt{2\rho} + \varepsilon^2$ ;
- $A(T) \in [T/(1 + \varepsilon\sqrt{2\rho}), T - \varepsilon^2]$  при  $T > T_2 = \hat{z} + \varepsilon^2 = \varepsilon/\sqrt{2\rho} + \varepsilon^2$ .

**Замечание 3.** При  $\lambda_0 \rightarrow \infty$  и  $\lambda_1 \rightarrow \infty$ , связанных соотношением  $\lambda_1 = \lambda_0 + C \cdot \sqrt{\lambda_0}$  для произвольной фиксированной константы  $C \in R$ , отношение правдоподобия  $L_t \xrightarrow{L_{wv}} \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} \tilde{X}_t - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\sigma^2} t\right)$ , где  $\tilde{X}_t = \begin{cases} \sigma B_t, & t < \theta \\ \sigma B_t + \mu \cdot t, & t > \theta \end{cases}$ ,  $B_t$  – броуновское движение и  $\mu = \sigma\sqrt{2\rho}$ . Это означает, что в пределе рассматриваемая задача сходится к

аналогичной задаче о наискорейшем обнаружении изменения коэффициента сноса у броуновского движения в обобщенной байесовской постановке, решенной в [1].

#### 4. Функция риска $B(T)$ и ее асимптотики

Обозначим через  $L_\infty$  – инфинитезимальный генератор процесса  $(\psi_t)_{t \geq 0}$  относительно меры  $P_\infty$ , который действует на функции из класса  $C^1[0, \infty)$  по правилу  $L_\infty f(x) = (1 - (\lambda_1 - \lambda_0)x)f'(x) + \lambda_0(f(\lambda_1/\lambda_0 \cdot x) - f(x))$ .

Для каждого  $T > 0$  функция риска  $B(T) = 1/T \cdot V(0; A(T))$ , где  $V(x; A(T))$  – решение дифференциально-разностного уравнения  $L_\infty V(x; A(T)) = -x$  с краевыми условиями  $V(0; A(T)) < \infty$  и  $V(A(T); A(T)) = 0$ , а  $A = A(T)$  – решение уравнения (2).

К сожалению, выписать решение указанного дифференциально-разностного уравнения в явном виде нельзя (см. аналогичное уравнение в [2]). Тем не менее, удается оценить асимптотику его решения при  $\lambda_0 \rightarrow \infty$  и  $\lambda_1 \rightarrow \infty$ , связанных соотношением  $\lambda_1 = \lambda_0 + C \cdot \sqrt{\lambda_0}$  для произвольной фиксированной константы  $C \in \mathbb{R}$  (т.е. разложить решение по степеням малого параметра  $\varepsilon = 1/\sqrt{\lambda_0}$ ).

Выпишем асимптотики функции риска  $B(T)$  при больших (представляют наиболее значимый практический интерес) и малых значениях среднего времени до ложной тревоги  $T$  предполагая, что  $\lambda_0 \rightarrow \infty$  и  $\lambda_1 \rightarrow \infty$  так, что величина  $\rho = 1/2 \cdot ((\lambda_1 - \lambda_0)/\sqrt{\lambda_0})^2 = const$ .

Обозначим через  $Ce = 0.577\dots$  – константу Эйлера. Рассмотрим такие функции  $B_0(T)$  и  $B_1(T)$ , асимптотики которых при больших и малых значениях  $T$  задаются формулами

$$B_0(T) = \begin{cases} 1/\rho \cdot [\log(\rho T) - 1 - Ce + O(\log^2 \rho T / \rho T)], & T \rightarrow \infty \\ 1/\rho \cdot [\rho T / 2 + O((\rho T)^2)], & T \rightarrow 0 \end{cases}, \quad (3)$$

$$B_1(T) = \begin{cases} (1/3) \cdot \sqrt{2/\rho} \cdot [\log(\rho T) - 5/2 - Ce + O(\log^2 \rho T / \rho T)], & T \rightarrow \infty \\ \sqrt{2/\rho} \cdot [(\rho T)^3 / 6 + O((\rho T)^4)], & T \rightarrow 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Тогда при  $\lambda_1 < \lambda_0$  ( $C < 0$ ) функция риска  $B(T) = B_0(T) + \varepsilon \cdot B_1(T) + \dots$ , где асимптотики  $B_0(T)$  и  $B_1(T)$  выписаны в (3) и (4). В случае  $\lambda_1 > \lambda_0$  ( $C > 0$ ) ситуация сложнее, поскольку не известно точное значение решения уравнения (2) и для члена второго порядка  $B_1(T)$  в разложении функции риска  $B(T)$  по степеням  $\varepsilon$  в некоторых случаях удается получить только оценки сверху и снизу, а именно:

- $T < \varepsilon/\sqrt{2\rho}$ , тогда  $B(T) = B_0(T) + \varepsilon \cdot B_1(T) + \dots$ , где асимптотики функций  $B_0(T)$  и  $B_1(T)$  при  $T \rightarrow 0$  задаются формулами (3) и (4) (в этом случае имеет смысл рассматривать только малые  $T$ );
- $T = \varepsilon/\sqrt{2\rho}$ , тогда  $B(T) = B_0(T) \cdot \{1 - \varepsilon\sqrt{2\rho}\} + O(\varepsilon^2)\dots$ , где асимптотика функции  $B_0(T)$  при  $T \rightarrow 0$  задается формулой (3) (в этом случае имеет смысл рассматривать только малые  $T$ );

- $T > \varepsilon/\sqrt{2\rho} + \varepsilon^2$ , тогда  $B(T) = B_0(T) + \varepsilon \cdot B_1(T) + \dots$ , где асимптотики функции  $B_0(T)$  при  $T \rightarrow 0$  и  $T \rightarrow \infty$  задаются формулами (3),  $LB(T) < B_1(T) < RB(T)$ , причем асимптотики границ  $RB(T)$  и  $LB(T)$  при  $T \rightarrow 0$  равны  $RB(T) = -LB(T) = \sqrt{2/\rho} \cdot [\rho T + O((\rho T)^2)]$ , а при  $T \rightarrow \infty$  равны  $LB(T) = -(1/3) \cdot \sqrt{2/\rho} \cdot [2 \log(\rho T) + 5/2 - 2Ce + O(\log^2 \rho T / \rho T)]$  и  $RB(T) = (1/3) \cdot \sqrt{2/\rho} \cdot [4 \log(\rho T) - 5/2 - 4Ce + O(\log^2 \rho T / \rho T)]$  соответственно.

#### Литература.

1. Feinberg E.A., Shiryaev A.N. Quickest detection of drift change for Brownian motion in generalized Bayesian and minimax settings // Statistics and Decisions. Vol. 24. P.1001-1025. 2006.
2. Peshkir G., Shiryaev A.N. Optimal stopping and free-boundary problems. Birkhauser, 2006.
3. Shiryaev A.N. Optimal stopping rules. Springer-Verlag, 1978.

# ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ КОНЦЕПТУАЛЬНОГО СИНТЕЗА ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Быстров В.В., Горохов А.В. (г. Апатиты)

*Разработана технология концептуальных шаблонов для синтеза динамических моделей сложных систем. Технология обеспечивает интеграцию коллективных экспертных знаний и построение имитационных моделей из типовых шаблонов, что существенно повышает корректность моделей и сокращает сроки их разработки. Эффективность технологии показана на задачах поддержки управления региональным развитием.*

## ВВЕДЕНИЕ

Синтез моделей сложных систем представляет собой итерационный процесс взаимодействия «человек – модель», в ходе которого развивается как модель, так и знания эксперта. К созданию моделей сложных систем привлекаются коллективы экспертов, поэтому актуальной является задача интеграции и согласования их знаний. При моделировании социально-экономических систем задача создания адекватной формальной модели является особенно сложной. Это обусловлено как сложностью самой исследуемой системы, так и субъективными факторами. Достаточно полное представление о системе может быть сформировано только на основе коллективных знаний экспертов в различных предметных областях.

Каждый эксперт обладает собственной ментальной моделью системы, которую он формулирует в некотором поле основных понятий, присущих его предметной области - здесь причины терминологической несогласованности, а порой и понятийной противоречивости. Противоречивость представляемых знаний может быть обусловлена и наличием альтернативных взглядов на свойства системы у экспертов одной предметной области. Качественный характер многих параметров социально-экономических систем предопределяет нечеткость знаний и, как следствие, проблемы при их формализации.

Поиск путей решения названных выше проблем привел к появлению специализированного метода имитационного моделирования – системной динамики [1]. Метод системной динамики позволяет исследовать поведение сложных систем, опираясь на возможности компьютерного моделирования. В отличие от «традиционных» методов компьютерного моделирования системная динамика не требует построения математической модели исследуемого объекта в традиционной форме, а дает исследователю инструментарий для моделирования в виде реализованных на компьютере аналитических описаний системных элементов и связей между ними. Но построение системных диаграмм в случае, когда объект исследования является сложной системой, становится затруднительным, и синтез приемлемой для практического использования динамической модели может занимать до нескольких лет. Поэтому основной упор проведенных исследований делался на поиски путей формализации и автоматизации этого процесса. В качестве аппарата для этого выбрано концептуальное моделирование. Концептуальная модель (КМ) используется для перехода от знаний экспертов к их единому формальному описанию. После чего становится возможен формальный синтез модели системной динамики.

## КОНЦЕПТУАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

В силу ограниченности рационального мышления человека в масштабах сложных систем, знания экспертов удобно представлять в виде древовидных структур. Такие модели дают возможность оперировать небольшим количеством объектов и связей на каждом уровне иерархии сложной системы. Причем количество элементов (понятий) можно оставлять всегда примерно одним и тем же, изменяя степень их агрегирования. Одним из таких подходов к созданию КМ является функционально-целевой подход (ФЦП), развитый для класса задач с древовидными моделями предметной области [2]. Исходная посылка ФЦП – решение проблем через формирование системы целей. Цель достигнута, если решена соответствующая задача. Решение задач обеспечивается соответствующими функциями синтезируемой системы. ФЦП обеспечивает структурный синтез систем, функции которых (т.е. поведение системы) обеспечивают решение соответствующих задач. Методами ФЦП синтезируется КМ предметной области в виде многоуровневой древовидной системы целей. В ФЦП эта иерархия целей используется не только как обычное средство наглядного структурного описания, но и как инструмент структурно-алгоритмического проектирования системы, обеспечивающей учет особенностей структуры предметной области.

Согласно теореме о покрытии [2], система в целом должна строиться из таких подсистем, которые обеспечивают покрытие соответствующих подзадач основной целевой задачи системы. Декомпозиция КМ выполняется экспертами, образуя тем самым альтернативные варианты декомпозиции компонентов КМ. Для экспертов обязательными являются: ограничение на структуру создаваемого фрагмента КМ - он должен быть древовидным; единая идентификация компонентов нижнего уровня КМ. Глубина декомпозиции определяется экспертами по достижении примитивных целей (примитивов), то есть неделимых в пределах моделируемой системы. Каждый эксперт для каждого примитива КМ определяет набор покрывающих действий.

Окончательным вариантом декомпозиции компонента КМ является объединение всех вариантов декомпозиции, где из каждого класса альтернативных вариантов выбран один представитель, предпочтительный с точки зрения принятых критериев качества.

Таким образом, получена единая КМ сложной системы, объединяющая формализованные знания группы экспертов в виде одной или нескольких древовидных структур, что обеспечивает в дальнейшем формальный синтез моделей системной динамики.

## СИНТЕЗ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМНОЙ ДИНАМИКИ НА БАЗЕ ТЕХНОЛОГИИ КОНЦЕПТУАЛЬНЫХ ШАБЛОНОВ

Концептуальная модель объекта моделирования реализуется в виде базы знаний.

В качестве декларативных знаний выделяются:

- дерево целей сложной системы  $T_g$ , содержит цели, полученные в результате декомпозиции глобальной цели и материальные связи между ними;
- множество шаблонов;
- множество экземпляров шаблонов;
- справочник. Эта структура данных содержит необходимую, по мнению экспертов, информацию о предметной области моделируемого объекта.

В свою очередь дерево целей, являющееся представлением концептуальной модели предметной области, может быть формально записано как объединение множества вершин всех уровней декомпозиции и множества примитивов - вершин, для которых дальнейшее разбиение цели не производится.

$$Tr = \bigcup_{k=1}^{n_k} V^k \cup L$$

, где  $k$  – уровень иерархии,  $n_k$  – количество вершин дерева целей на  $k$ -ом уровне иерархии.

Множество  $V^k$  является объединением вершин нижестоящего уровня, где  $m$  – количество нижестоящих вершин для данной вершины.

Для удобного хранения информации о вершине дерева целей, ее можно рассматривать как кортеж  $V_i^* = \langle IdGF \rangle$ ,  $Id$  – идентификатор вершины,  $G$  – цель вершины,  $F$  – закон, описывающий правило объединения дочерних вершин.

Множество  $L$  – множество примитивов дерева целей концептуальной модели. Выделение этих вершин в отдельное множество обусловлено наличием группы специальных процедур вывода, выполняющие действия только над элементами из этого множества.

Под шаблоном [3] подразумевается некоторая конструкция, имеющая установившуюся во времени структуру и набор входных, выходных параметров и начальных значений. В работе шаблон реализуется в виде конструкции на языке системной динамики, и спецификация шаблона производится с учетом этого фактора.

Формально понятие шаблона можно представить следующей записью на языке теории множеств:  $P = \{ St, Fn, X, Y, I \}$ , где  $St$  – структура шаблона,  $Fn$  – закон функционирования шаблона,  $X$  – множество входных параметров шаблона,  $Y$  – множество выходных параметров шаблона,  $I$  – множество начальных значений.

В работе шаблон рассматривается как отдельный объект, обладающий своей внутренней структурой [3]. Данный объект исследуется как «черный ящик», имеющий входные и выходные параметры, и выполняющий определенную функциональную нагрузку.

Необходимо отличать шаблон, заданный его спецификацией, от определенного значениями шаблона, который будем называть экземпляром. Таким образом, экземпляр шаблона – это наполненный шаблон, содержащий информацию не только о составе и структуре шаблона, но и конкретные значения входных, выходных и начальных параметров шаблона и, кроме того, каждый экземпляр адресован экспертом одному из примитивов дерева целей.

Реализация КМ в виде базы знаний обеспечивает возможность использования экспертных знаний без участия экспертов при решении задач синтеза моделей системной динамики. Данные задачи решаются путем преобразования декларативных знаний о предметной области в процедурные знания системной динамики с помощью набора формальных правил.

Декларативная база знаний содержит факты, к которым относятся: набор шаблонов, сопоставленных примитивам, дерево целей, набор вспомогательных переменных, справочники и кодификаторы, содержащие текстовые знания об исследуемой предметной области.

Процедурные знания экспертов реализованы в базе знаний в виде процедур вывода, которые позволяют формализовать процесс синтеза динамической модели. На вход процедур подаются декларативные знания базы знаний, на выходе получают элементы моделей системной динамики. Процедуры вывода представляют собой отображения структуры концептуальной модели в структуру системно-динамических моделей.

База знаний содержит три группы процедур вывода.

1. Процедуры вывода, определяющие для каждого шаблона модели покрывающие действия (процедуры сопоставления). Назначением данных процедур является осуществить покрытие примитива дерева целей концептуальной модели

экземпляром шаблона. Для любого шаблона из множества шаблонов модели существует экземпляр, только тогда, когда каждому элементу структуры шаблона найдется соответствующий элемент множества понятий и терминов и когда каждому начальному значению шаблона будет задано значение из нормативной базы – множества коэффициентов и констант.

2. Процедуры вывода, определяющие материальные связи между шаблонами в динамической модели. В общем случае при условии, что все шаблоны после их заполнения становятся экземплярами, процедуру можно представить как отображение некоторого подмножества экземпляров на декартово произведение этого подмножества на себя.
3. Процедуры вывода, определяющие информационные связи между шаблонами в динамической модели. Рассматриваются три типа информационной связи: связь между элементами структуры двух шаблонов; связь между вспомогательной переменной и элементом структуры шаблона; связь между элементом структуры шаблона и вспомогательной переменной.

Применение к соответствующим наборам декларативных знаний данных процедур обеспечивает формальный синтез состава и структуры системно-динамической модели. Последовательность применения процедур задается алгоритмами синтеза модели на основе шаблонов.

### ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ СИСТЕМОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В данной части статьи представлены некоторые результаты исследования оценки погрешностей потокового класса системно-динамических моделей, включающие в себя методику для оценки методических погрешностей композитных моделей. Данная методика основывается на использовании рекуррентных соотношений, которые достаточно хорошо применимы к вычислительной схеме, используемой в большинстве программных средств автоматизации моделирования.

Ошибки имитационного моделирования, которые будут рассмотрены далее, по своей природе являются ошибками аппроксимации и на этапе создания моделей их разумно отнести к методическим ошибкам. В качестве основного подхода к их количественной оценке используется метод эталонной модели[4]. Данный метод модифицирован так, чтобы непосредственно ориентировать исследование на имитационное моделирование с использованием технологии концептуальных шаблонов.

Предполагая,

(1) что исследуемая динамическая модель  $M$  представляет собой точно известную и однозначно определенную композицию относительно самостоятельных подмоделей, представляющих собой шаблоны;

$$M = \mathcal{K}\{ Mi \mid i \in I \}$$

(2) что для каждой названной в пункте (а) подмодели  $Mi$  известна эталонная рекуррентная модель  $\langle Mi ; \Delta T_i \rangle, i \in I$ ;

(3) что единственными источниками ошибок исследуемой композиционной модели являются:

а) отклонение общесистемного времени  $\Delta T$  от элементарных циклов  $\Delta T_i$  подмоделей (т.е. шагов интегрирования);

б) используемый метод интегрирования в вычислительной схеме.

В качестве относительно независимых подмоделей, рассматриваемых в предлагаемой методике, достаточно хорошо подходят типовые модели системной динамики – шаблоны. Следует отметить, что поведение каждого шаблона можно описать с помощью рекуррентной математической модели, вычисляемой с



«индивидуальным» элементарным циклом (другими словами, шагом интегрирования) и основанной на системе разностных уравнений.

Дополнительным существенным предположением для развитого ниже подхода является предположение о гладкости номинальной характеристической функции ошибок [4] в пределах реальной полосы погрешностей каждой из используемых подмоделей  $M_i, i \in I$ . На практике названное предположение позволяет реальные кривые ошибок подмоделей в пределах зоны погрешностей заменить сглаженной кривой.

Отдельно также следует отметить, что оговоренные в пункте (3) причины погрешностей оказываются аддитивными. Указанное здесь обстоятельство, позволяет вместо совокупности эталонных моделей  $\langle M_i ; \Delta T_i \rangle, i \in I$ , для каждого метода интегрирования, просто рассматривать соответствующие Совокупные Номинальные Функции Ошибок (СНФО).

В методике оценки методической погрешности рекуррентных системно-динамических моделей для построения СНФО используются линейная, параболическая, кубическая аппроксимация функций. Для каждого вида аппроксимации доказываются оптимизационные теоремы, на основе которых строится анализ методических ошибок. Теоремы позволяют осуществить и обосновать правильность выбора оптимального шага интегрирования для композитных системно-динамических моделей. Доказательство теорем проводится с использованием математического аппарата и методов теории решения экстремальных задач, а в частности линейное программирование, поскольку задачу исследования методических погрешностей можно свести к задаче поиска экстремальных точек обобщенной функции ошибок композитной модели.

Каждый шаблон может иметь свой собственный шаг интегрирования или другими словами собственный элементарный цикл. Учитывая данный факт, системное время считается действительной величиной из интервала (0,1]. Это достигается простой нормировкой величин элементарных циклов подмоделей, т.е. масштабированием с

коэффициентом  $\frac{1}{\max_{i \in I} \Delta T_i}$  множества  $\{\Delta T_i \mid i \in I\}$  характеристических циклов

подмоделей. Далее считается  $i = \overline{1,2}$ , что позволит избежать необходимости скрупулезного учета точек «инверсии» для кривых ошибок подмоделей на множестве значений приведенных циклов. Таким образом, для определенности считаем

$\frac{1}{\max_{i \in I} \Delta T_i}$  - нормированные циклы подмоделей, с соответствующими функциями ошибок  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ .

Теорема 1 Если СНФО  $f_i(t), i = \overline{1,2}$  подмоделей  $\{M1; M2\}$  динамической модели  $M$  линейны относительно  $t$ , то оптимальное значение  $\Delta T^*$  системного времени, минимизирующее ошибку аппроксимации  $M$ , совпадает с одной из границ интервала  $[a,b]$ .

Теорема 2 Парная композиция рекуррентных динамических моделей, обладающих одноподобными СНФО вида (1), достигает наименьшей ошибки аппроксимации при

$$\Delta T^* = \frac{k_1 a + k_2 b}{k_1 + k_2} \cdot \begin{cases} f_1(t) = k_1(t-a)^2; \\ f_2(t) = k_2(t-b)^2 \end{cases} \quad (1)$$

**Теорема 3:** Множество оптимальных значений системного времени парной композиции рекуррентных динамических моделей, обладающих однотипными СНФО вида (2), непусто и содержит, по крайней мере, одну точку множества

$$\left\{ \frac{k_1 a_1 b_1 \delta \sqrt{k_2}}{k_1 k_2}; \frac{k_2 a_2 b_2 \delta \sqrt{k_1}}{k_1 k_2} \right\};$$

$$\begin{cases} f_1(t) = k_1 t - \delta^3; \\ f_2(t) = k_2 t - \delta^3. \end{cases} \quad (2)$$

Основанная на приведенных выше теоремах методика оценки методической погрешности системно-динамических моделей апробирована на различных композициях шаблонов. Для применения методики в соответствии с методом эталонной модели в композицию объединялись два относительно независимые друг от друга подмодели. Каждая подмодель взята в качестве шаблона и реализована в инструментальной среде динамического моделирования. Для каждого шаблона заданы эталонные модели, выбирая эталонные значения шага интегрирования. Все погрешности рассчитывались для конкретных уровней относительно эталонной модели на различных временных интервалах. На основе экспериментальных и расчетных данных строились реальные и аппроксимированные функции ошибок (СНФО).

Основным недостатком предлагаемой методики оценки композитных моделей является то, что она оперирует экспериментальными данными. Другими словами, для анализа погрешностей композиции, состоящей из двух шаблонов, необходимо произвести большое количество расчетов и многократный прогон модели и снятие ее показаний. С ростом числа шаблонов, входящих в композитную модель, количество указанных действий возрастает по геометрической прогрессии и ведет к значительным затратам вычислительных ресурсов. Но, по мнению авторов, данная проблема решается с учетом современных темпов развития вычислительной техники.

С другой стороны предлагаемая методика позволяет осуществлять обоснованный выбор шага интегрирования композитной модели. Что является существенным шагом к разработке подхода систематической верификации моделей системной динамики, а может и всего класса имитационных моделей.

## **РЕАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РЕГИОНАЛЬНЫХ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

В Институте информатики и математического моделирования КНЦ РАН разрабатывается Система прогнозирования развития региона. Данная Система представляет собой комплекс системно-динамических моделей региона (Мурманской области), включающий в себя модели основных отраслей экономики региона, таких как промышленный, топливно-энергетический, транспортно-коммуникационный и агропромышленный комплексы, а также трудовых ресурсов региона. Разработка системно-динамических моделей данных комплексов включает в себя определение основных элементов модели, областей их устойчивых состояний, материальных потоков, изменяющих состояния элементов, информационных связей, управляющих потоками и интеграция моделей в единый комплекс, учитывая динамику их взаимного влияния.

К настоящему времени разработаны следующие компоненты Системы: трудовые ресурсы; топливно-энергетический комплекс; рыбопромышленный комплекс. Данные компоненты реализованы средствами системы динамического моделирования Powersim и инструментальной системы автоматизации моделирования динамических

моделей сложных систем. Исследования проводились в интересах программы «Стратегия развития Мурманской области до 2015г.». В первую очередь, с помощью моделей отыскиваются внешние и внутренние параметры, наиболее влияющие на поведение региональной социально-экономической системы.

В качестве примера приводятся результаты исследования рыбопромышленного комплекса Мурманской области.

На рис. 1 – 1 представлены результаты исследования системно-динамической модели рыбопромышленного комплекса Мурманской области. Модель настраивалась по данным 1997 года. Это проводилось для оценки адекватности модели – результаты симуляции сравнивались со статистическими данными за 1998-2004гг. Результаты симуляции с 2005 по 2015 год являются прогнозом. На графиках (рис. 1 – 2) кривая 1 (красная) показывает общий вылов морепродуктов, кривая 2 (зеленая) – величину природных ресурсов в области промысла, кривая 3 (синяя) – общую грузоподъемность судов рыбопромыслового флота Мурманской области.

Рассмотрены сценарии: отсутствие инвестиций в рыбопромышленный комплекс (в настоящее время износ судов комплекса составляет около 60%); различный уровень ежегодных инвестиций от 50 до 500 млн. руб. в год (рассмотрено 10 сценариев). На рис.3 представлены результаты исследования развития рыбопромышленного комплекса Мурманской области без инвестиций. На графике видно, что, начиная с 2006 года, общий вылов морепродуктов будет ограничиваться снижением общей грузоподъемности судов, а не биоресурсами.

На рис.2 представлены результаты исследования развития рыбопромышленного комплекса Мурманской области с ежегодными инвестициями в размере 300 млн. руб. На графике видно, что общий вылов морепродуктов будет ограничиваться только биоресурсами. По этой причине также нецелесообразно и дальнейшее повышение уровня инвестиций.

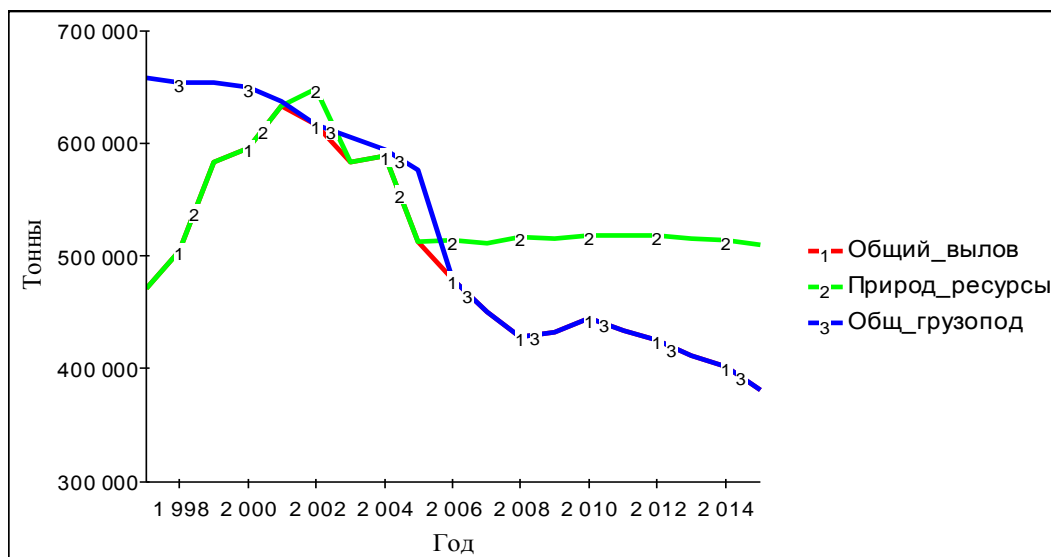


Рис. 1. Общий вылов морепродуктов без инвестиций

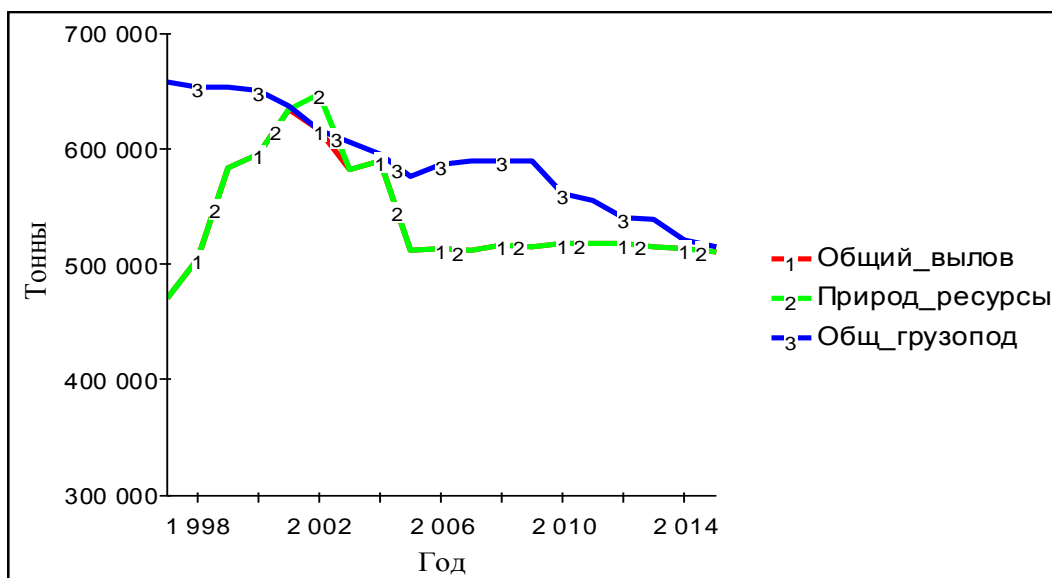


Рис. 2. Общий вылов морепродуктов с инвестициями 300 млн.руб. в год.

Исследование модели позволили определить уровень инвестиций, необходимый для эффективного функционирования рыбопромышленного комплекса Мурманской области.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена информационная технология концептуального синтеза динамических моделей сложных систем. Технология основана на использовании концептуальной модели, интегрирующей коллективные экспертные знания о предметной области. Реализация концептуальной модели в виде базы знаний обеспечивает использование экспертных знаний автономно (без участия экспертов) для автоматизированного синтеза динамических моделей. Разработаны формальные процедуры, обеспечивающие синтез на основе концептуальной модели соответствующей динамической модели из набора типовых шаблонов. Использование формализованных коллективных экспертных знаний на ранних этапах синтеза существенно повышает корректность создаваемых моделей и сокращает сроки их разработки. Эффективность технологии показана на задачах поддержки управления региональным развитием. Модели реализованы в рамках регионального проекта «Разработка стратегии развития Мурманской области до 2015 года».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Forrester, Jay W., 1961. Industrial Dynamics, Portland, OR: Productivity Press. 464 pp.
2. Игнатъев М.Б., Путилов В.А., Смольков Г.Я. Модели и системы управления комплексными экспериментальными исследованиями. М., Наука, 1986, 232 с.
3. Шебеко Ю.А. Имитационное моделирование и ситуационный анализ бизнес процессов принятия управленческих решений (учебное и практическое пособие). – М.: Диаграмма, 1999.
4. Шестаков А.А. Логическое моделирование в условиях неопределенности. – Апатиты: Изд-во КНЦ РАН, 1996.- 182 с.

## О ГИПОТЕЗЕ ПОЛТЕРОВИЧА – ХЕНКИНА И ЕЁ ОБОБЩЕНИИ\*

Гасников А.В. (г. Москва)

*В работе выдвигается гипотеза о поведении на больших временах функции распределения предприятий в отрасли, описываемой моделью Полтеровича – Хенкина с выбытием мощностей. Приводится доказательство сформулированной гипотезы в случае, когда асимптотика имеет вид волны разрежения.*

Рассмотрим отрасль производства. Будем считать, что отрасль состоит из большого количества предприятий, которые распределены по уровням эффективности  $n \in \square$  (показателем эффективности может быть рентабельность предприятия). Обозначим через  $F_n(t) \in [0, 1]$  - долю предприятий, которые находятся в момент времени  $t \in [0, +\infty)$  на уровнях с номерами не большими, чем  $n$ . Эволюция кривой распределения предприятий по уровням эффективности описывается бесконечной системой дифференциальных уравнений [1] – [4]

$$\frac{dF_n(t)}{dt} = -\varphi(F_n(t)) \frac{F_n(t) - F_{n-1}(t)}{h} + \mu(F_n(t)) \frac{F_{n+1}(t) - F_n(t)}{h}, \quad (1)$$

где  $\varphi(F)/h = \alpha(F) + \beta(1 - F)$ . Это означает, что каждое предприятие уровня  $n$ , доля которых составляет  $F_n - F_{n-1}$ , поднимается на более высокий уровень  $n+1$  с интенсивностью (скоростью)  $\alpha(F_n) > 0$  за счет процесса инновации и с интенсивностью  $\beta(1 - F_n) \geq 0$  в результате имитации (имитируются технологии более эффективных фирм, доля которых  $1 - F_n$ ). Предприятия же уровня  $n+1$  (их доля  $F_{n+1} - F_n$ ) опускаются на уровень  $n$  с интенсивностью амортизации  $\mu(F_n)/h \geq 0$ .

Заметим, что при идентификации модели (1) на примере чёрной металлургии, были получены следующие значения функций [3]:

$$\alpha(F) \cong 0, \quad \beta(1 - F) = 0.1431 \cdot (1 - F), \quad \mu(F) \cong 0.4326.$$

Будем считать, что известно начальное распределение предприятий:

$$F_n(0) = F(0, nh) = F^0(nh). \quad (2)$$

Если заменить в (1) конечные разности приближенными выражениями (произвести автомодельную редукцию)

$$\frac{F_n - F_{n-1}}{h} \approx F_n' - \frac{h}{2} F_n'' \quad \text{и} \quad \frac{F_{n+1} - F_n}{h} \approx F_n' + \frac{h}{2} F_n'', \quad \text{то получим}$$
$$\frac{1}{\varphi(F) + \mu(F)} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\varphi(F) - \mu(F)}{\varphi(F) + \mu(F)} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad F(0, x) = F^0(x).$$

Положив

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00942а), по программе государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ – 5379.2006.1), при поддержке аналитической ведомственной целевой программы РНП.2.2.1.1.2467, по программе фундаментальных исследований РАН № 14, ОМН РАН № 3.

$$\eta'(F) = \frac{1}{\varphi(F) + \mu(F)} > 0, \quad \psi'(F) = \frac{\varphi(F) - \mu(F)}{\varphi(F) + \mu(F)}, \quad \varepsilon = \frac{h}{2},$$

приходим к следующей начальной задаче Коши для квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial \eta(F)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(F)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad (3)$$

$$F(0, x) = F^0(x). \quad (4)$$

Интересно проследить на примере этой модели за тем, как распространяются новые технологии. “Забывается” ли информация о начальном распределении на больших временах? Можно ли с помощью такой модели объяснить наличие нескольких укладов в экономике отрасли производства? Для того чтобы ответить на эти вопросы, нужно исследовать поведение  $F_n(t)$  на больших временах. Далее мы попытаемся перенести результаты, полученные в работах [5], [6], посвящённых исследованию асимптотического по времени поведения решения задачи Коши (3), (4), на модель Полтеровича – Хенкина с выбытием мощностей (1), (2).

Положим,  $f(y) = \psi(\eta^{-1}(y))$ ,  $y = \eta(F)$ ,  $F \in [0, 1]$ ,  $y_- = \eta(0)$ ,  $y_+ = \eta(1)$ .

Через  $H(y)$ , обозначим нижнюю границу выпуклой оболочки множества

$$\{(y, v): y \in [y_-, y_+], v \geq f(y)\}.$$

Далее будем считать, что справедливы следующие предположения

$$\{y \in [y_-, y_+]: f(y) > H(y)\} = (\alpha_0, \beta_0) \cup (\alpha_1, \beta_1) \cup \dots \cup (\alpha_{m-1}, \beta_{m-1}) \cup (\alpha_m, \beta_m),$$

где  $y_- = \alpha_0 \leq \beta_0 \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \dots \leq \alpha_{m-1} < \beta_{m-1} \leq \alpha_m \leq \beta_m = y_+$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , и

$$\forall y \in (\beta_0, \alpha_1) \cup (\beta_1, \alpha_2) \cup \dots \cup (\beta_{m-1}, \alpha_m) \rightarrow f''(y) > 0.$$

Результаты работ [5], [6] позволяют выдвинуть следующую гипотезу, обобщающую гипотезу Полтеровича – Хенкина, в которой,  $\mu(u) \equiv 0$ ,  $\alpha_0 \leq \beta_0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_{m-1} < \beta_{m-1} < \alpha_m \leq \beta_m$  (равенство  $\beta_0 = \alpha_1$  возможно только при  $m = 1$ , когда  $\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_1$ ),  $d_k(t)$  не определялись:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| F_n(t) - \tilde{F}\left(t, n, \{d_k(t)\}_{k=0}^m\right) \right| = 0, \text{ где}$$

$$\tilde{F}\left(t, n, \{d_k(t)\}_{k=0}^m\right) = a_0 + \sum_{k=0}^m \left( \tilde{F}_k(n - c_k t + d_k(t)) - a_k \right) + \sum_{k=0}^{m-1} \left( G_k(n/t) - b_k \right),$$

$$a_k = \eta^{-1}(\alpha_k), \quad b_k = \eta^{-1}(\beta_k), \quad k = 0, \dots, m,$$

$$\exists t_0 > 0: \forall t \geq t_0, k = 0, \dots, m \rightarrow F_{c_k t - d_k(t)}^{def}(t) = F(t, c_k t - d_k(t)) \equiv (a_k + b_k)/2,$$

если  $b_k = a_{k+1}$ , то полагаем  $G_k(n/t) \equiv b_k$ , иначе

$$G_k(n/t) = \begin{cases} b_k, & n < f'(\beta_k)t \\ (\varphi(\cdot) - \mu(\cdot))^{-1}(n/t), & f'(\beta_k)t \leq n < f'(\alpha_{k+1})t, \quad k = 0, \dots, m-1, \\ a_{k+1}, & n \geq f'(\alpha_{k+1})t \end{cases}$$

где  $\tilde{F}_k(s)$  - такая монотонно возрастающая функция, не зависящая от  $F_n(0) = F(0, nh) = F^0(nh)$ , что  $\tilde{F}_k(s) \rightarrow a_k$  при  $s \rightarrow -\infty$  и  $\tilde{F}_k(s) \rightarrow b_k$  при  $s \rightarrow \infty$ ,  $k = 0, \dots, m$ .

Заметим, что в цикле работ [1], [2], [4], [7] – [9] гипотеза Полтеровича – Хенкина была доказана. При этом функции  $\tilde{F}_k(n - c_k t)$  являлись решениями уравнения (1) вида бегущей волны, а функции  $d_k(t)$  определялись из “локализованных законов сохранения”.

Ниже приводится доказательство сформулированной гипотезы в случае, когда асимптотика имеет вид волны разрежения. При доказательстве будем следовать работе [4], в которой случай сходимости к волне разрежения был исследован при  $\mu(u) \equiv 0$ . Для удобства сопоставления приводимого ниже доказательства с доказательством работы [4], мы примем обозначения этой работы.

Рассмотрим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dF_n/dt = -\varphi(F_n)(F_n - F_{n-1}) + \mu(F_n)(F_{n+1} - F_n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Поставим начальные условия

$$F_n(0) = F^0(n), \quad (6)$$

где  $F^0(n)$  - функция распределения.

**Предположения.** I.  $\forall F \in [0, 1] \rightarrow \varphi(F) > 0, \mu(F) \geq 0$ ;

II.  $\varphi(F), \mu(F) \in C^2([0, 1])$ ;

III.  $\forall F \in [0, 1] \rightarrow \varphi'(F) \geq 0, \mu'(F) \leq 0, \varphi'(F) - \mu'(F) > 0$ ;

IV.  $\lim_{n \rightarrow -\infty} F_n(0) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(0) = 1, \sum_{n=-\infty}^0 F_n(0) < \infty, \sum_{n=0}^{\infty} (1 - F_n(0)) < \infty$ .

Пусть справедливы предположения I, II. Тогда, рассуждая аналогично [2], получим, что система (5), (6) имеет единственное решение  $F_n(t)$ . Это решение является функцией распределения в любой момент времени.

Введём обозначения,

$$\rho(F) = \varphi(F) - \mu(F), \quad C_0 = \rho(0), \quad C_1 = \rho(1);$$

$$F_n^*(t) = \begin{cases} 0, & n < C_0 t \\ \rho^{-1}(n/t), & C_0 t \leq n < C_1 t \\ 1, & n \geq C_1 t \end{cases}$$

**Теорема** (о сходимости к волне разрежения). Пусть справедливы предположения I – IV. Тогда

$$\exists T_0 > 0, K > 0: \forall t \geq T_0 \rightarrow \sup_{n \in \mathbb{Z}} |F_n(t) - F_n^*(t)| \leq K/\sqrt{t}.$$

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных лемм.

**Лемма 1.** Пусть  $h(y) \in C^1([0, 1])$ , справедливы предположения I – III,

$$H(y, t) = \rho^{-1}(y) + h(y)/t.$$

Тогда  $H_n(t) = H(n/t, t)$  удовлетворяет неравенству

$$\left| dH_n(t)/dt + \varphi(H_n(t))(H_n(t) - H_{n-1}(t)) - \mu(H_n(t))(H_{n+1}(t) - H_n(t)) \right| \leq \mathbf{K}/t^2,$$

где  $\mathbf{K}$  зависит от  $\varphi(\cdot)$ ,  $\mu(\cdot)$ ,  $h(\cdot)$ .

**Доказательство.** По определению функции  $H(y, t)$  имеем, что

$$dH/dt = -y\rho^{-1'}(y)/t - yh'(y)/t^2 - h(y)/t^2, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} H(n/t, t) - H((n-1)/t, t) &= H(y, t) - H(y-1/t, t) = H'_y(y, t)/t + O(1/t^2) = \\ &= \left[ \rho^{-1'}(y) + h'(y)/t \right] / t + O(1/t^2) = \rho^{-1'}(y)/t + O(1/t^2). \end{aligned} \quad (8)$$

$$H((n+1)/t, t) - H(n/t, t) = \rho^{-1'}(y)/t + O(1/t^2). \quad (9)$$

Поскольку

$$\varphi(H(y, t)) - \mu(H(y, t)) = \rho(H(y, t)) = y + \rho'(H)h(y)/t + O(1/t^2),$$

то из формул (7) - (9) следует, что

$$\begin{aligned} dH_n/dt + \varphi(H_n)(H_n - H_{n-1}) - \mu(H_n)(H_{n+1} - H_n) &= \\ = \left[ -y\rho^{-1'}(y) + (\varphi(H_n) - \mu(H_n))\rho^{-1'}(y) \right] / t + O(1/t^2) &= O(1/t^2). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Ниже приводится дифференциально-разностный аналог принципа сравнения.

**Лемма 2.** Пусть  $\forall F \in [0, 1] \rightarrow \varphi'(F) \geq 0$ ,  $\mu'(F) \leq 0$  (или  $\forall F \in [0, 1] \rightarrow \widehat{\varphi}'(F) \geq 0$ ,  $\widehat{\mu}'(F) \leq 0$ ). Пусть также

$$\forall F \in [0, 1] \rightarrow \varphi(F) \leq \widehat{\varphi}(F), \mu(F) \geq \widehat{\mu}(F);$$

$$\forall t \geq T_0 > 0, \gamma_1 t \leq n \leq \gamma_2 t \quad (-\infty \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \infty)$$

$$dG_n/dt \geq -\varphi(G_n)(G_{n+1} - G_n) + \mu(G_n)(G_{n+1} - G_n), \quad (10)$$

$$d\widehat{G}_n/dt \geq -\widehat{\varphi}(\widehat{G}_n)(\widehat{G}_{n+1} - \widehat{G}_n) + \mu(\widehat{G}_n)(\widehat{G}_{n+1} - \widehat{G}_n), \quad (11)$$

$$\widehat{G}_n(t) \geq \widehat{G}_{n-1}(t). \quad (12)$$

Кроме того, справедливы следующие граничные условия:

$$\forall t \geq T_0, -1 \leq n - \gamma_1 t \leq 0, 0 \leq n - \gamma_2 t \leq 1 \rightarrow V_n(t) \geq 0, \quad (13)$$

$$\forall \gamma_1 T_0 \leq n \leq \gamma_2 T_0 \rightarrow V_n(T_0) \geq 0, \quad (14)$$

где  $V_n(t) = G_n(t) - \widehat{G}_n(t)$ ,  $V_{\pm\infty}(t) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} V_n(t)$ . Тогда

$$\forall t \geq T_0, \gamma_1 t \leq n \leq \gamma_2 t \rightarrow V_n(t) \geq 0.$$

**Доказательство.** Вычитая из неравенства (10) неравенство (11), получим

$$\begin{aligned} \forall t \geq T_0 > 0, \gamma_1 t \leq n \leq \gamma_2 t \\ dV_n/dt \geq -\varphi(G_n)(V_n - V_{n-1}) + \mu(G_n)(V_{n+1} - V_n) - \\ - \left( \varphi(G_n) - \widehat{\varphi}(\widehat{G}_n) \right) (\widehat{G}_n - \widehat{G}_{n-1}) + \left( \mu(G_n) - \widehat{\mu}(\widehat{G}_n) \right) (\widehat{G}_{n+1} - \widehat{G}_n). \end{aligned} \quad (15)$$



Допустим противное  $\exists T > T_0, k \in (\gamma_1 T, \gamma_2 T), \chi < 0: V_k(T) = \chi$ . Поскольку выполняются условия (13), (14), то  $\exists T^* > T_0$ :

$$A = \{k: V_k(T^*) = \chi\} \neq \emptyset, \forall t \in [T_0, T^*) \rightarrow \{k: V_k(t) \leq \chi\} = \emptyset. \quad (16)$$

Положим,  $k^* = \inf_{k \in A} k$ . Из (13), (14), (16) следует, что  $-\infty < k^* < \infty$  (т.е.  $k^* = \min_{k \in A} k$ ) и

$$dV_{k^*}(T^*)/dt \leq 0. \quad (17)$$

С другой стороны, поскольку  $V_{k^*}(T^*) = \chi < 0$ , то из формулы (12) следует, что

$$\begin{aligned} \varphi(G_{k^*}(T^*)) &\leq \varphi(\widehat{G}_{k^*}(T^*)) \leq \widehat{\varphi}(\widehat{G}_{k^*}(T^*)) \\ \text{(или } \varphi(G_k(T^*)) &\leq \widehat{\varphi}(G_k(T^*)) \leq \widehat{\varphi}(\widehat{G}_k(T^*)), \\ \mu(G_{k^*}(T^*)) &\geq \mu(\widehat{G}_{k^*}(T^*)) \geq \widehat{\mu}(\widehat{G}_{k^*}(T^*)) \\ \text{(или } \mu(G_k(T^*)) &\geq \widehat{\mu}(G_k(T^*)) \geq \widehat{\mu}(\widehat{G}_k(T^*)), \\ V_{k^*-1}(T^*) &> V_{k^*}(T^*) = \chi, V_{k^*+1}(T^*) \geq V_{k^*}(T^*) = \chi. \end{aligned}$$

Поэтому из предположения I и формулы (15) имеем  $dV_{k^*}(T^*)/dt > 0$ . Пришли к противоречию с формулой (17). Лемма 2 доказана.

Обозначим

$$\Psi(z) = \left( z - \sqrt{b + z^2} \right) / 2\beta,$$

где  $\beta > 0, 2\beta = \zeta = \min_{F \in [0,1]}^{def} \rho'(F) > 0$  (см. предположение III),  $b > 0$ . Тогда:

$$d\Psi/dz = \Psi / (2\beta\Psi - z), \quad d\Psi/dz > 0, \quad (18)$$

$$d^2\Psi/dz^2 = -b / \left( 2\beta(b + z^2)^{3/2} \right) < 0, \quad (19)$$

$$d^3\Psi/dz^3 = 3bz / \left( 2\beta(b + z^2)^{5/2} \right) < 0,$$

$$\forall k = 1, 2, 3 \exists \zeta_k > 0: \forall z \in \square \rightarrow |d^k\Psi/dz^k| \leq \zeta_k, \quad (20)$$

$$G(z) = (\beta\Psi(d\Psi/dz)) / (d^2\Psi/dz^2) = \frac{b + z^2}{2} \frac{\sqrt{b + z^2} - z}{\sqrt{b + z^2} + z}, \quad (21)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} G(z) = b/8, \quad (22)$$

$$dG(z)/dz = -\frac{b + z^2 - z\sqrt{b + z^2}}{\sqrt{b + z^2}} \frac{\sqrt{b + z^2} - z}{\sqrt{b + z^2} + z} < 0. \quad (23)$$

Положим,

$$\widetilde{F}_n(t) = \Psi((n - C_1 t) / \sqrt{t}) / \sqrt{t} + 1, \quad (24)$$

$$\widehat{F}_n(t) = -\Psi((C_0 t - n) / \sqrt{t}) / \sqrt{t}.$$

**Лемма 3.** Пусть справедливы предположения I – III. Тогда

$$\exists T_0 > 0: \forall t \geq T_0, n \in \square, b > 8 \left( \max_{F \in [0,1]} \varphi(F) + \max_{F \in [0,1]} \mu(F) \right) \stackrel{def}{=} 8M$$

$$d\check{F}_n/dt \leq -\varphi(\check{F}_n)(\check{F}_n - \check{F}_{n-1}) + \mu(\check{F}_n)(\check{F}_{n+1} - \check{F}_n), \quad (25)$$

$$d\widehat{F}_n/dt \geq -\varphi(\widehat{F}_n)(\widehat{F}_n - \widehat{F}_{n-1}) + \mu(\widehat{F}_n)(\widehat{F}_{n+1} - \widehat{F}_n). \quad (26)$$

**Доказательство.** Докажем (25). Положим  $z = (n - C_1 t) / \sqrt{t}$ . Из формулы (24) имеем, что

$$d\check{F}_n/dt = -\Psi/(2t^{3/2}) - (d\Psi/dz) \left( z/(2t) + C_1/\sqrt{t} \right) / \sqrt{t}. \quad (27)$$

Поскольку  $\check{F}_{n-1} \leq \check{F}_n$  и  $\rho(F) \leq \rho(1) - \zeta \cdot (1 - F)$  (в силу предположения III и определения  $\zeta$ )

$$\begin{aligned} & \exists \bar{z}_1, \bar{z}_2: |z - \bar{z}_i| \leq 1/\sqrt{t}, \varphi(\check{F}_n)(\check{F}_{n-1} - \check{F}_n) + \mu(\check{F}_n)(\check{F}_{n+1} - \check{F}_n) = \\ & = \varphi(\check{F}_n) \left( \Psi(z - 1/\sqrt{t}) - \Psi(z) \right) / \sqrt{t} + \mu(\check{F}_n) \left( \Psi(z + 1/\sqrt{t}) - \Psi(z) \right) / \sqrt{t} = \\ & = - \left( \varphi(\check{F}_n) - \mu(\check{F}_n) \right) (d\Psi(z)/dz) / t + \\ & + \left( \varphi(\check{F}_n) (d^2\Psi(\bar{z}_1)/dz^2) + \mu(\check{F}_n) (d^2\Psi(\bar{z}_2)/dz^2) \right) / (2t^{3/2}) \geq \\ & \geq - \left( \rho(1) - \beta(1 - \check{F}_n) \right) (d\Psi(z)/dz) / t + \beta \cdot (1 - \check{F}_n) (d\Psi(z)/dz) / t + \\ & + \left( \varphi(\check{F}_n) (d^2\Psi(\bar{z}_1)/dz^2) + \mu(\check{F}_n) (d^2\Psi(\bar{z}_2)/dz^2) \right) / (2t^{3/2}). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \beta \cdot (1 - \check{F}_n) (d\Psi(z)/dz) / t = -\beta \Psi(z) (d\Psi(z)/dz) / t^{3/2} > 0, \\ & \left( \varphi(\check{F}_n) (d^2\Psi(\bar{z}_1)/dz^2) + \mu(\check{F}_n) (d^2\Psi(\bar{z}_2)/dz^2) \right) / (2t^{3/2}) \geq \\ & \geq \left( M / (2t^{3/2}) \right) d^2\Psi(z)/dz^2 - \left( M / (2t^2) \right) \left( |d^3\Psi(\bar{z}_1)/dz^3| + |d^3\Psi(\bar{z}_2)/dz^3| \right). \end{aligned}$$

Из (19) имеем, что

$$\exists T_0 > 0: \forall t \geq T_0, z \in \square$$

$$\left( M / (2t^{3/2}) \right) d^2\Psi(z)/dz^2 < - \left( M / (2t^2) \right) \left( |d^3\Psi(\bar{z}_1)/dz^3| + |d^3\Psi(\bar{z}_2)/dz^3| \right).$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} & \varphi(\check{F}_n)(\check{F}_{n-1} - \check{F}_n) + \mu(\check{F}_n)(\check{F}_{n+1} - \check{F}_n) \geq - \left( \rho(1) - \beta \cdot (1 - \check{F}_n) \right) (d\Psi(z)/dz) / t - \\ & - \beta \Psi(z) (d\Psi(z)/dz) / t^{3/2} + M \cdot (d^2\Psi(z)/dz^2) / t^{3/2}. \end{aligned}$$

Ввиду (18), (20), (21) - (23)

$$\begin{aligned} & \varphi(\check{F}_n)(\check{F}_{n-1} - \check{F}_n) + \mu(\check{F}_n)(\check{F}_{n+1} - \check{F}_n) \geq \\ & \geq \left( \rho(1) - \beta \cdot (1 - \check{F}_n) \right) (d\Psi(z)/dz) / t = d\check{F}_n/dt. \end{aligned}$$

Неравенство (26) доказывается аналогичным образом.

**Лемма 4.** Пусть справедливы предположения I - IV. Тогда  $\exists \gamma_0, \gamma_1 > 0$ :

$$\forall t \geq T_0, n \leq C_0 t \rightarrow F_n(t) \leq \gamma_0 / \sqrt{t}, \quad (28)$$

$$\forall t \geq T_0, n \geq C_1 t \rightarrow F_n(t) \geq 1 - \gamma_1 / \sqrt{t}. \quad (29)$$

**Доказательство.** Из определения функции  $\Psi(z)$  имеем, что

$$z\Psi(z) + b/(4\beta) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty, \Psi(z) - z/\beta \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty,$$

$$\forall z \in \square \rightarrow \Psi(z) < 0.$$

Согласно предположению IV

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 > 0: \forall n \geq N_\varepsilon \rightarrow F_n(0) > 1 - \varepsilon/n.$$

Поэтому, выбирая  $b$  достаточно большим, получим

$$\forall n \in \square \rightarrow \check{F}_n(1) \leq F_n(0). \quad (30)$$

Из предположения IV следует, что [2]

$$\forall t \geq 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow -\infty} F_n(t) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = 1.$$

Поэтому

$$\forall t \geq 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow -\infty} F_n(t) - \check{F}_n(t+1) > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) - \check{F}_n(t+1) = 0. \quad (31)$$

Из **Ошибка! Источник ссылки не найден.** по лемме 2 имеем

$$\forall t \geq 0, n \in \square \rightarrow F_n(t) \geq \check{F}_n(t+1).$$

Следовательно,

$$F_n(t) \geq \left( z - \sqrt{b + z^2} \right) / \left( 2\beta\sqrt{t+1} \right) + 1, \text{ где } z = (n - C_1(t+1)) / \sqrt{t+1}.$$

Если  $n \geq C_1 t$ , то

$$\exists \gamma_1 > 0: \forall t \geq 0 \rightarrow F_n(t) \geq 1 - b / \left( 2\beta \cdot \left( -C_1 + \sqrt{b(t+1) + C_1^2} \right) \right) \geq 1 - \gamma_1 / \sqrt{t}.$$

Неравенство (28) доказывается аналогичным образом.

Введём обозначения,

$$\widehat{F}_n(t) = F_n^*(t) + \gamma / \sqrt{t}, \check{F}_n(t) = F_n^*(t) - \gamma / \sqrt{t}, \gamma > 0.$$

**Лемма 5.** Пусть справедливы предположения I - IV. Тогда

$$\exists \gamma > 0, T \geq T_0:$$

$$\forall t \geq T, C_0 t \leq n \leq C_1 t \rightarrow d\widehat{F}_n/dt \geq -\varphi(\widehat{F}_n)(\widehat{F}_n - \widehat{F}_{n-1}) + \mu(\widehat{F}_n)(\widehat{F}_{n+1} - \widehat{F}_n), \quad (32)$$

$$\forall t \geq T, -1 \leq n - C_0 t \leq 0, 0 \leq n - C_1 t \leq 1 \rightarrow \widehat{F}_n(t) \geq F_n(t), \quad (33)$$

$$\forall C_0 T \leq n \leq C_1 T \rightarrow \widehat{F}_n(T) \geq F_n(T), \quad (34)$$

$$\forall t \geq T, C_0 t \leq n \leq C_1 t \rightarrow d\check{F}_n/dt \leq -\varphi(\check{F}_n)(\check{F}_n - \check{F}_{n-1}) + \mu(\check{F}_n)(\check{F}_{n+1} - \check{F}_n), \quad (35)$$

$$\forall t \geq T, -1 \leq n - C_0 t \leq 0, 0 \leq n - C_1 t \leq 1 \rightarrow \check{F}_n(t) \leq F_n(t), \quad (36)$$

$$\forall C_0 T \leq n \leq C_1 T \rightarrow \check{F}_n(T) \leq F_n(T). \quad (37)$$

**Доказательство.** Для того чтобы доказать (32) заметим, что

$$\begin{aligned} & -\varphi(F_n^*)(F_n^* - F_{n-1}^*) + \mu(F_n^*)(F_{n+1}^* - F_n^*) = \\ & = -\varphi(\widehat{F}_n - \gamma/\sqrt{t})(\widehat{F}_n - \widehat{F}_{n-1}) + \mu(\widehat{F}_n - \gamma/\sqrt{t})(\widehat{F}_{n+1} - \widehat{F}_n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\varphi(\widehat{F}_n)(\widehat{F}_n - \widehat{F}_{n-1}) + \varphi'(A_n^1)(\widehat{F}_n - \widehat{F}_{n-1})\gamma/\sqrt{t} + \\
&+ \mu(\widehat{F}_n)(\widehat{F}_{n+1} - \widehat{F}_n) - \mu'(A_n^2)(\widehat{F}_{n+1} - \widehat{F}_n)\gamma/\sqrt{t}, \text{ и} \\
&\widehat{F}_n - \widehat{F}_{n-1} = 1/(t\rho'(B_n^1)), \widehat{F}_{n+1} - \widehat{F}_n = 1/(t\rho'(B_n^2)).
\end{aligned}$$

Поэтому из предположения III следует, что

$$\begin{aligned}
&\exists T \geq T_0 : \forall t \geq T \\
&-\varphi(F_n^*)(F_n^* - F_{n-1}^*) + \mu(F_n^*)(F_{n+1}^* - F_n^*) \geq \\
&\geq -\varphi(\widehat{F}_n)(\widehat{F}_n - \widehat{F}_{n-1}) + \mu(\widehat{F}_n)(\widehat{F}_{n+1} - \widehat{F}_n) + 3\gamma/(4t^{3/2}).
\end{aligned}$$

Согласно лемме 1

$$\begin{aligned}
&d\widehat{F}_n/dt = dF_n^*/dt - \gamma/(2t^{3/2}) = \\
&= -\varphi(F_n^*)(F_n^* - F_{n-1}^*) + \mu(F_n^*)(F_{n+1}^* - F_n^*) - \gamma/(2t^{3/2}) + O(1/t^2).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$d\widehat{F}_n/dt \geq -\varphi(\widehat{F}_n)(\widehat{F}_n - \widehat{F}_{n-1}) + \mu(\widehat{F}_n)(\widehat{F}_{n+1} - \widehat{F}_n) + \gamma/(4t^{3/2}) + O(1/t^2). \quad (38)$$

Положим,  $\gamma = \sqrt{T}$ , где  $T$  выберем настолько большим, чтобы из неравенства (38) вытекало неравенство (32).

Поскольку,

$$\widehat{F}_n(T) = F_n^*(T) + \sqrt{\gamma/T} = F_n^*(T) + \sqrt{T/T} \geq 1,$$

то справедлива формула (34).

Условие (33) выполняется ввиду леммы 4, если  $\gamma = \sqrt{T} \geq \max\{\gamma_0, \gamma_1\}$  (см. формулы (28), (29)).

Аналогично доказываются соотношения (35) - (37).

**Доказательство теоремы.** Для  $n \leq C_0 t$ ,  $n \geq C_1 t$  следует из леммы 4. Для  $C_0 t \leq n \leq C_1 t$  следует из лемм 2, 5.

## Литература

1. Полтерович В.М., Хенкин Г.М. Математический анализ экономических моделей Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий // Экономика и мат. методы. – 1988, Т. 24, № 6. - с. 1071-1083.
2. Henkin G.M., Polterovich V.M. Shumpetrian dynamics as non-linear wave theory // Journal of Mathematical Economics. – 1991, V. 20. - p. 551-590.
3. Гельман Л.М., Левин М.И., Полтерович В.М., Спивак В.А. Моделирование динамики распределения предприятий отрасли по уровням эффективности (на примере черной металлургии) // Экономика и мат. методы. – 1993, Т. 29, № 3. - с. 460-469.
4. Henkin G.M., Polterovich V.M. A difference-differential analogue of the Burgers equation and some models of economic development // Discrete and continuous dynamic systems. – 1999, V. 5. № 4. - p. 697-728.

5. Гасников А.В. Сходимость по форме решения задачи Коши для квазилинейного уравнения параболического типа с монотонным начальным условием к системе волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2008. – 28 с.
6. Гасников А.В. О промежуточной асимптотике решения задачи Коши для квазилинейного уравнения параболического типа с монотонным начальным условием // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008.- 14 с.
7. Henkin G.M., Shananin A.A. Asymptotic behavior of solutions of the Cauchy problem for Burgers type equations // J. Math. Purés Appl. – 2004, V. 83. - p. 1457-1500.
8. Henkin G.M., Shananin A.A., Tumanov A.E. Estimates for solution of Burgers type equations and some applications // J. Math. Purés Appl. – 2005, V. 84. - p. 717-752.
9. Henkin G.M. Asymptotic structure for solutions of the Cauchy problem for Burgers type equations // J. fixed point theory appl. - in print. – 53 p.

## МЕТОД «ОБРАТНОЙ ИМИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ» ПРИ АНАЛИЗЕ КОЛЕБАНИЙ ЧИСЛЕННОСТИ ТУНДРОВЫХ ЖИВОТНЫХ\*

Глушков В.Н. (г. Киров), Саранча Д.А. (г. Москва)

*В работе рассмотрены особенности использования методики обратной имитационной задачи в процессе математического моделирования экологических систем. Приведены результаты ее применения для поиска ведущих механизмов, определяющих колебания численности тундровых животных.*

В количественной экологии существует потребность в создании моделей, объясняющих характер протекающих процессов («механизменных моделей»). Традиционные имитационные технологии не приспособлены для создания «механизменных моделей».

Имитационная модель большой размерности не может быть самодостаточной. Потребность в понимании ее свойств, ее связи с исходным объектом приводит к необходимости создания наборов взаимосвязанных моделей, в том числе и упрощенных, приводит к необходимости создания тщательно отлаженной процедуры согласования всех этапов построения и анализа модели, к проведению комплексных исследований («Коис»).

Методика Коис включает в себя всю последовательность операций:

- 1) сбор, отбор, анализ и переработка исходной (биологической) информации;
- 2) обоснование выбора объекта, переменных и уравнений для его описания; выбор явления для раскрытия свойств объекта («тестирующего явления»);
- 3) обоснование и построение детальной имитационной математической модели;
- 4) анализ ее свойств и проведение с ней вычислительных экспериментов;
- 5) построение сопряженных моделей, как детальных, проясняющих и уточняющих отдельные аспекты изучаемого явления, так и создание упрощенных моделей для описания исходной (основной) имитационной модели.

Упрощенные модели хорошо аппроксимируют динамику изменения основных переменных исходной модели и в то же время позволяют проводить аналитические исследования. Полученный набор моделей («имитационная система») эффективен при анализе изучаемого (биологического) явления в целом - экологической интерпретации свойств моделей и результатов вычислительных экспериментов, выбора иерархии (безразмерных) показателей для ее описания, формулирования гипотез о ведущих механизмах исследуемого объекта.

Эффективность комплексного подхода показана на примере моделирования тундровых популяций и сообществ, поиска ведущих механизмов, определяющих колебания численности тундровых животных. Была построена модель тундрового сообщества «растительность-лемминги-песцы» (РЛП) [1]. Модель была построена с привлечением экспертных оценок и с учетом сезонного изменения параметров. Имитационные эксперименты показали возможность воспроизведения динамики численности тундровых животных, близкую к реальной. Довольно популярной гипотезой у биологов является гипотеза о ведущей роли популяции леммингов в формировании релаксационных колебаний популяций тундровых животных. Результаты имитационных экспериментов с математической моделью тундрового сообщества подтвердили эту гипотезу. Далее была создана модель популяции леммингов с учетом возрастной структуры. Ее удалось применить для описания двух видов леммингов. В обоих случаях удалось воспроизвести

---

\* Работа поддержана РФФИ, проект 07-01-00473.

динамику численности популяции леммингов близкую к реальной. Она хорошо аппроксимировалась с помощью соответствующих функций последования. Эти типы функций последования удалось использовать и для описания популяции леммингов в рамках модели тундрового сообщества. Тем самым была найдена связь между моделями двух типов.

Связь параметров функции последования и параметров исходной модели тундрового сообщества находилась с помощью решения «обратной имитационной задачи» (ОИЗ) - последовательного упрощения исходной модели таким образом, чтобы редуцированная модель была доступна для аналитического исследования.

*Описание модели РЛП.* Модель описывает динамику численности песцов ( $F$ ), леммингов ( $L$ ), и их корма ( $V$ ):

$$\frac{dV}{dt} = f_V(V, L, t); \quad \frac{dL}{dt} = f_L(V, L, F, t); \quad \frac{dF}{dt} = f_F(L, F, t), \quad (1)$$

где  $\frac{dA}{dt}$  – производная по времени для каждой переменной  $A$ ,  $f_A = R_A - M_A - D_A$ ;  $R_A$  – прирост;  $D_A$  – отчуждение;  $M_A$  – естественное отмирание;  $t$  – модельное время, выраженное в месяцах.

Влияние времени года на динамику моделируется с помощью вспомогательных функций  $S_W^i(t)$ , которые делят модельное время на три сезона – зиму, весну и лето. Зимой численность растительности, леммингов и песцов снижается:  $S_W^1 = S_W^2 = 0^2$ . Весной растительность прироста не имеет, песцы отмирают, лемминги размножаются  $S_W^1 = 1, S_W^2 = 0$ . Летом численности растительности, леммингов и песцов растут:  $S_W^1 = 1, S_W^2 = 1$ .

*Описание подсистемы растительности.* Динамика растительности ( $V$ ) определяется следующим образом:

$$R_V = C_V^4 \cdot (1 - V/V_{\max}) \cdot S_W^1 \cdot V, \\ M_V = C_V^3 \cdot V \cdot (1 - S_W^2).$$

Здесь  $C_V^3, C_V^4$  – коэффициенты прироста и отмирания биомассы растительности соответственно.  $V_{\max}$  – емкость экологической ниши. Прирост растительности рассчитывается следующим образом: летом – по формуле Ферхюльста, зимой происходит экспоненциальное отмирание, весной прирост и отмирание скомпенсированы.

Пусть  $W_T$  – доля территории, на которой растительность доступна в течение всего года. Но лемминги выедают только часть растительности, в основном надземную, которая составляет долю  $d$  от ее общей биомассы. Если биомасса доступной растительности становится меньше определенного числа  $\alpha$ , то есть ее леммингам становится энергетически невыгодно и выедание прекращается. Итак, доступная для выедания растительность вычисляется по формуле:

$$V_d = \begin{cases} d \cdot V, & V > \alpha, \\ 0, & V \leq \alpha. \end{cases}$$

При наличии доступной растительности ( $V_d > 0$ ) ее отторжение пропорционально биомассе леммингов:

$$D_V = \{C_V^1 [1 - S_W^1] + C_V^2 \cdot S_W^1\} L,$$

---

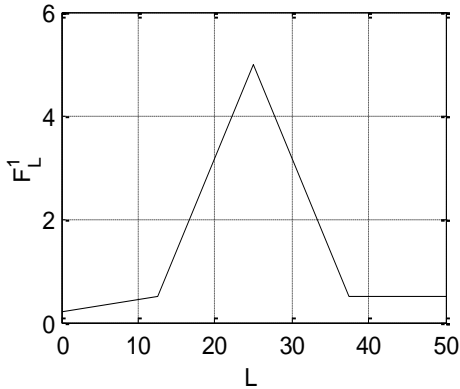
2      Здесь и далее функции  $S_W^i(t)$  для краткости будут обозначаться как  $S_W^i$

где  $C_V^1, C_V^2$  - коэффициенты отчуждения растительности зимой и летом соответственно.

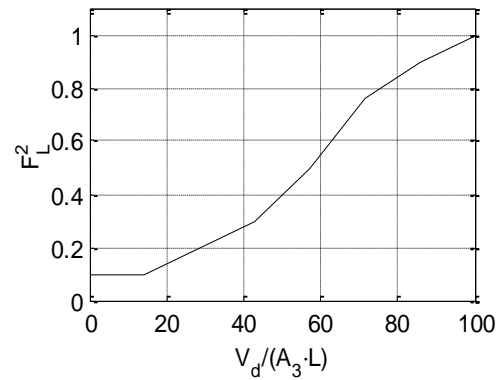
*Описание подсистемы леммингов.* Динамика прироста численности леммингов ( $L$ ) определяется следующим образом:

$$R_L = D_V \cdot F_L^1(L) \cdot F_L^2(V_d / L) \cdot [C_L^9 \cdot S_W^2 + C_L^{10} \cdot S_W^1].$$

Прирост биомассы леммингов ( $R_L$ ) пропорционален произведению трех величин: количества отчужденной растительности ( $D_V$ ), и функций  $F_L^1(L)$  и  $F_L^2(V_d / L)$ . Первая формализует представление о наличии у леммингов оптимальной плотности, а вторая – снижение ценности кормов при их дефиците. Коэффициенты  $C_L^9, C_L^{10}$  характеризуют сезонные изменения перехода биомассы растительности в биомассу леммингов.

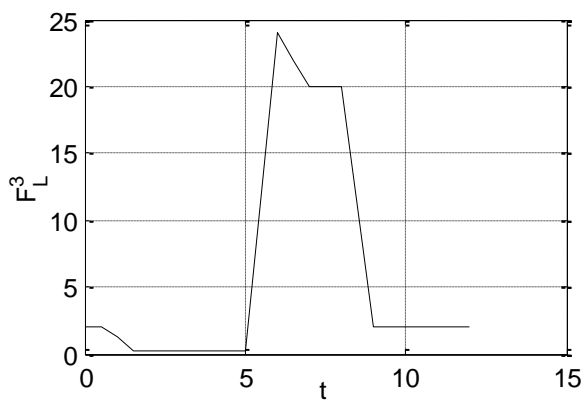


а) функция оптимальной плотности леммингов (функция Олли)

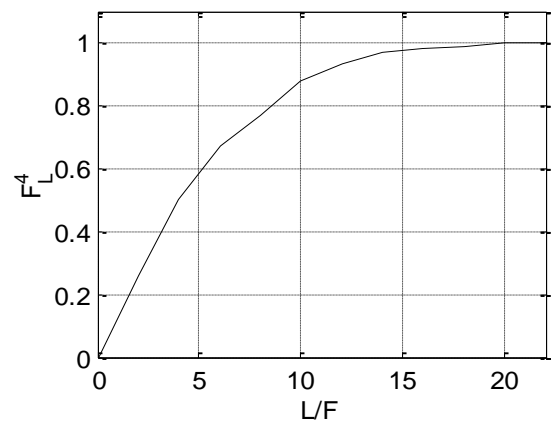


б) функция, формализующая снижение ценности кормов при их дефиците (трофическая функция леммингов)

Рис. 1 – Вспомогательные функции, используемые в модели

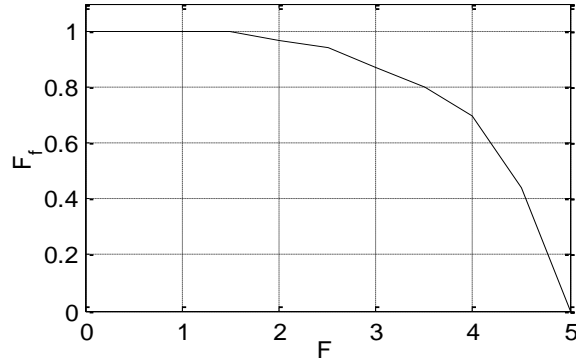


а) функция зависимости смертности леммингов от сезона



б) функция насыщения выедания леммингов песцами (трофическая функция леммингов)





в) функция самолимитирования песцов

Рис. 2 – Вспомогательные функции, используемые в модели

Естественная смертность леммингов зависит от сезона, наличия кормов и определяется так. При достаточном обеспечении кормами  $M_L = C_L^5 \cdot F_L^3(T) \cdot L$ ; при нехватке корма ( $V_d / L < q$ )  $M_L = C_L^4 \cdot [1 - V_d / (L \cdot q)] \cdot F_L^3(T) \cdot L$ ; при отсутствии корма ( $V_d = 0$ ), если все съедено весной  $M_L = C_L^2 \cdot F_L^3(T) \cdot L$ ; при отсутствии корма ( $V_d = 0$ ), если все съедено уже зимой  $M_L = C_L^\beta \cdot L$ , а затем численность считается по третьему варианту. Здесь функция  $F_L^3(T)$  описывает изменение смертности в зависимости от времени года (см. рис. 2а),  $C_L^2, C_L^4, C_L^5, C_L^\beta$  – коэффициенты. Отчуждение леммингов песцами ( $D_L$ ) пропорционально произведению биомасс обоих видов при низкой относительной плотности леммингов ( $L/F$  мало) и пропорционально биомассе песцов при высокой плотности ( $L/F$  велико):

$$D_L = F \cdot F_L^4(L/F) \cdot (C_L^6 + C_L^7 \cdot S_W^1).$$

Здесь коэффициенты  $C_L^6, C_L^7$  характеризуют сезонные изменения интенсивности отлова леммингов.

*Описание подсистемы песцов.* Прирост биомассы песцов:

$$R_F = C_F \cdot F_F(F) \cdot D_L + (C_F^2 + C_F^3 \cdot S_W^1) \cdot F$$

в основном обеспечивается леммингами, но кроме них в рационе песцов есть и иные, неспецифические корма, потребление которых считается пропорциональным биомассе песцов. Прирост биомассы за счет леммингов считается пропорциональным произведению биомассы добытых леммингов на функцию  $F_F(F)$ . Эта функция отражает лимитирующее влияние высокой плотности. Здесь  $C_F^1$  – коэффициент перехода биомассы леммингов в биомассу песцов, коэффициенты  $C_F^2, C_F^3$  описывают вклад в сезонную изменчивость неспецифического питания. Естественная смертность и гибель от охоты считаются пропорциональными биомассе песцов:

$$M_F = C_F^4 \cdot F,$$

$$D_F = C_F^5 \cdot F,$$

где  $C_F^4, C_F^5$  – коэффициенты естественной смертности и интенсивности охоты.

В ходе проведения модельных экспериментов было получено достаточно хорошее соответствие с реальной статистикой, что может свидетельствовать в пользу адекватности модели. Нужно отметить, что объем статистики недостаточно велик – имеются данные только за 10 лет, т.е. только за два периода колебания грызунов. Но поскольку других данных не имеется, приходится довольствоваться тем, что есть. Тем не менее, можно

утверждать, что гипотеза подрыва кормовой базы, заложенная в модели (она заключается в том, что в благоприятный год численность грызунов возрастает настолько, что они подрывают свою кормовую базу. В результате ближайшей зимой смертность резко возрастает, и далее численность леммингов быстро сокращается), может объяснить характерные всплески численности леммингов.

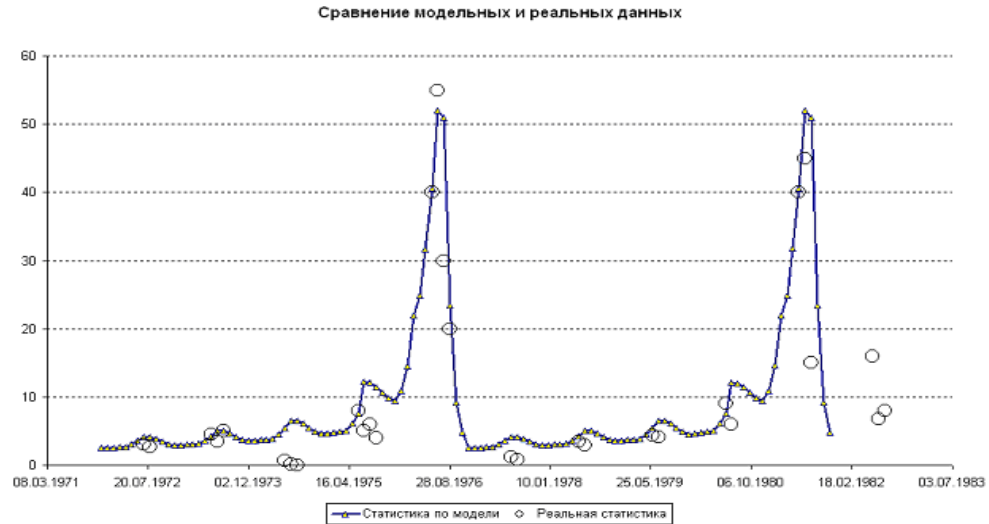


Рис. 3 - Сравнение модельных экспериментов с эмпирическими сведениями о численности копытного лемминга на о. Врангеля за период с 1972 по 1981 гг.

*Решение обратной имитационной задачи.*

Была получена модель, и эмпирическим подбором параметров удалось добиться, чтобы результаты численных расчетов по модели давали циклы колебаний численности нужной длины. Далее задача состоит в том, чтобы получить аналитическое выражение для описания динамики численности грызунов. Однако исходная модель по обилию параметров приближается к имитационным, и поэтому не дает возможности классического аналитического исследования. Для дальнейшего упрощения и по результатам проведенных вычислений в модели приняты следующие допущения. Из модели было удалено уравнение, описывающее динамику песцов, поскольку они согласно биологическим данным с некоторым запаздыванием отслеживают динамику леммингов, но, в свою очередь, мало на нее влияют. Для реализации данного предположения из модели также была убрана функция выедания леммингов песцами  $D_v$ . В результате динамика биомасс оставшихся двух фазовых переменных мало отличалась от соответствующей динамики в исходной модели. Тем не менее, модель оставалась все еще достаточно громоздкой. Основные трудности были связаны с нелинейностью и неавтономностью в модели. Поэтому далее проводилась замена нелинейностей кусочно-линейными функциями, зависимость параметров модели от времени года делалась постоянной внутри каждого из сезонов. При проведении исследования коэффициенты модели подбирались таким образом, чтобы наблюдался трехлетний цикл колебания леммингов. Такая длина цикла считалась в исследовании как наиболее естественная с биологической точки зрения, и потому полагалась базовой длительностью циклов при проведении численных исследований. Первый год таких колебаний получил название фазы депрессии, второй – фазы нарастания, третий – фазы пика.

Путем последовательных упрощений имитационная модель сводилась к набору линейных уравнений, коэффициенты которых считались постоянными внутри каждого сезона:

$$\frac{dL}{dt} = a_{1i} + a_{2i} * L,$$

где коэффициенты  $a_{1i}$ ,  $a_{2i}$  постоянны внутри каждого сезона  $i$ . Только подобное представление упрощенной модели позволяет получить аналитическое решение. Однако первоначальное разбиение модельного времени на сезоны (внутри которых все коэффициенты модели считались постоянными) не дало достаточно точной аппроксимации исходной задачи.

Поэтому далее на основании численных экспериментов проводилось разбиение сезонов на подсезоны таким образом, чтобы внутри каждого из последних значения вспомогательных функций изменялись слабо. Далее значения функций считались постоянными внутри каждого из подсезонов и для каждого из периодов трехгодичного цикла.

На основании проведенных экспериментов были проведены следующие замены. Функция  $F_L^1$  может принимать два различных значения:  $F_L^{1\hat{a}\hat{i}\hat{v}\hat{o}} = 0,5$ , что соответствует фазе депрессии и пика, и  $F_L^{\delta\hat{i}\hat{n}\hat{o}} = 2,75$ , что соответствует оптимальной плотности леммингов в фазе пика. Функция относительной плотности растительности  $F_L^2$  считается константой на протяжении всего года. Функция зависимости смертности от сезона  $F_L^3$  полагается постоянной величиной внутри каждого сезона. Трофическая S-образная функция леммингов  $F_L^4(L/F)$  заменяется линейной с постоянным углом наклона:  $F_L^4 = \frac{F^4 * L}{F}$ , где  $F^4$  - тангенс угла наклона линии, постоянная величина. За счет этого удается исключить уравнение для песцов из упрощенной системы. Динамику биомассы леммингов и растительности стали описывать в предположении, что летом лемминги в избытке обеспечены кормами, изменение баланса леммингов и растительности происходит независимо. Кроме того, было принято допущение, что рост растительности летом далек от насыщения. Для этого необходимо задать значение переменной  $V_{max}$  достаточно большим так, чтобы биомасса растительности никогда не достигала его.

Смертность леммингов стали описывать только двумя способами – либо корма достаточно, либо нет вообще, поскольку согласно вычислительным экспериментам ситуация, когда корм есть, но его не достаточно, кратковременна, и, следовательно, не может существенно влиять на динамику модели. При достаточном обеспечении кормами смертность описывается как  $M_L = C_L^5 \cdot F_L^3(T) \cdot L$ , при отсутствии корма  $M_L = C_L^\beta * L$ .  $C_L^\beta$  подбирается таким образом, чтобы к концу зимы популяция оставалась в оптимальном

биотопе  $\beta$ :  $C_L^\beta = \frac{1}{T_{win}} \ln\left(\frac{\beta}{L_C}\right)$ , где  $T_{win}$  – длительность зимнего сезона,  $L_C$  – численность на

начало зимы. Указанные выше допущения позволяют линеаризовать систему уравнений для каждого из  $i$  сезонов, т.е. представить ее в виде:

$$\frac{dL}{dt} = a_{1i} + a_{2i}L. \quad (2)$$

Решение совокупности уравнений (2) может быть представлено в виде дискретных отображений, выражающих зависимость численности леммингов в год  $n$  от их численности в предыдущий год  $n-1$ :

$$L_n = L_{n-1} \exp(R_{\hat{a}\hat{i}\hat{v}\hat{o}} + R_{\delta\hat{i}\hat{n}\hat{o}} + R_{i\hat{e}\hat{e}}),$$

где  $R_{\hat{a}\hat{i}\hat{v}\hat{o}}$ ,  $R_{\delta\hat{i}\hat{n}\hat{o}}$ ,  $R_{i\hat{e}\hat{e}}$  - коэффициенты прироста численности леммингов для года депрессии, роста и пика. При колебаниях численности с периодом в три года для линеаризованной модели может быть получено аналитическое выражения дискретного отображения,

выражающего зависимость численности леммингов в год  $n$  от численности в предыдущий год  $n-1$  :

$$L_n = \begin{cases} L_{n-1} \cdot \exp\left(R^{\text{ááüð} \text{ ááñá} + R^{\text{ááüð} \text{ éáðí} + R^{\text{ááüð} \text{ çèìà}}\right), 1 - \text{é} \text{ áíä}; \\ L_{n-1} \cdot \exp\left(R^{\text{ðñð} \text{ ááñá} + R^{\text{ðñð} \text{ éáðí} + R^{\text{ðñð} \text{ çèìà}}\right), 2 - \text{é} \text{ áíä}; \\ L_{n-1} \cdot \exp\left(R^{\text{íèé} \text{ ááñá} + R^{\text{íèé} \text{ éáðí} + R^{\text{íèé} \text{ çèìà}}\right), 3 - \text{é} \text{ áíä, éíáö} \text{ éäðà}; \\ 0.3, 3 - \text{é} \text{ áíä, éíáö} \text{ éäðà} \end{cases}$$

Здесь коэффициенты прироста  $R^i$  для численности леммингов в зависимости от сезона и фазы роста определяются исходя из следующей таблицы:

	Весна	Лето	Зима
Депрессия	$4 \cdot C_L^{29} \cdot F_L^{1\text{ááüð}}$ $-4 \cdot C_L^5 \cdot F_L^{3\text{ááñá}} - 4 \cdot C_L^6 \cdot F^4$	$3 \cdot (C_L^{29} + C_L^{210}) \cdot F_L^{1\text{ááüð}}$ $-3 \cdot C_L^5 \cdot F_L^{3\text{éáðí}} - 3 \cdot (C_L^6 + C_L^7) \cdot F^4$	$-5 \cdot C_L^5 \cdot F_L^{3\text{çèìà}} - 5 \cdot C_L^6 \cdot F^4$
Нарастание	$2 \cdot (F_L^{1\text{ááüð}} + F_L^{1\text{ðñð}}) \cdot C_L^{29}$ $-4 \cdot C_L^5 \cdot F_L^{3\text{ááñá}} - 4 \cdot C_L^6 \cdot F^4$	$(2 \cdot F_L^{1\text{ááüð}} + F_L^{1\text{ðñð}}) \cdot (C_L^{29} + C_L^{210})$ $-3 \cdot C_L^5 \cdot F_L^{3\text{éáðí}} - 3 \cdot (C_L^6 + C_L^7) \cdot F^4$	$-5 \cdot C_L^5 \cdot F_L^{3\text{çèìà}} - 5 \cdot C_L^6 \cdot F^4$
Пик	$4 \cdot C_L^{29} \cdot F_L^{1\text{ááüð}}$ $-4 \cdot C_L^5 \cdot F_L^{3\text{ááñá}} - 4 \cdot C_L^6 \cdot F^4$	$3 \cdot (C_L^{29} + C_L^{210}) \cdot F_L^{1\text{ááüð}}$ $-3 \cdot C_L^5 \cdot F_L^{3\text{éáðí}} - 3 \cdot (C_L^6 + C_L^7) \cdot F^4$	$-C_L^\beta \cdot L$

Здесь введены новые коэффициенты  $C_L^{29} = C_V^2 \cdot C_L^9$ ,  $C_L^{210} = C_V^2 \cdot C_L^{10}$ .

Состоятельность проведенного упрощения в модели подтверждается модельными экспериментами. Интегрирование полной и усеченной моделей показало схожую динамику изменения численности грызунов

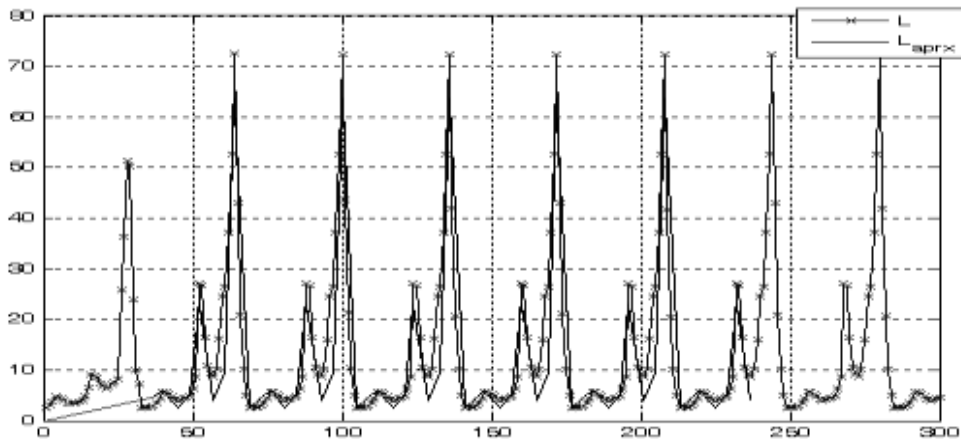


Рис. 4 - Сравнение результатов вычислительных экспериментов для полной и усеченной моделей

Итак, работа позволяет подтвердить гипотезу подрыва кормовой базы в динамике численности леммингов. Удалось выделить ведущие параметры в системе «растительность-лемминги-песцы», оказывающие влияние на динамику модели: 1) скорость прироста биомассы в благоприятный год; 2) максимальная численность; 3) выживаемость в наиболее неблагоприятных условиях. 1-й показатель характеризует баланс между процессами рождаемости и смертности во всех фазах развития, когда нет "давления среды"; 2-й характеризует экосистему в целом и выступает в основном показателем коэволюции леммингов и кормовой базы; 3-й характеризует адаптационные свойства леммингов в экстремальных условиях и во многом определяется локальными характеристиками, в частности рельефом местности в местах перезимовки. Автор полагает, что разработанный

подход анализа имитационных моделей с учетом сезонности, в котором применяется аппарат дискретных отображений, может применяться для изучения и в других предметных областях.

### **Литература**

1. Саранча, Д.А. Количественные методы в экологии. Биофизические аспекты и математическое моделирование. М.: МФТИ, 1997. - 283 с.
2. Бибик Ю.В., Попов С.П., Саранча Д.А. Неавтономные математические модели экологических систем. М.: ВЦ РАН,, 2004. 120 с.
3. Глушков В.Н., Недоступов Э.В., Саранча Д.А, Юферева И.В. Компьютерные методы анализа математических моделей экологических систем. М.: ВЦ РАН,. 2006 74 с.

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ НЬЮТОНА\*

Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. (г. Москва)

Для решения больших линейных систем равенств и/или неравенств, задач линейного программирования весьма эффективным оказалось использование теорем об альтернативах и обобщенного метода Ньютона[1]-[4]. Теоремы об альтернативах дают возможность построить новые эффективные методы нахождения нормального решения линейных систем, существенно упростить вычисления в методах наискорейшего спуска, предложить новые методы решения задач линейного программирования, новые методы построения семейства гиперплоскостей, разделяющих полиэдры и т.д. С исходной линейной системой связана альтернативная система такая, что одна и только одна из этих систем совместна. У альтернативной системы число неизвестных равно общему количеству равенств и неравенств (кроме ограничений на знак переменных) в исходной системе. Если исходная система разрешима, то численный метод нахождения ее нормального решения сводится к минимизации невязки несовместной альтернативной системы. Из результатов этой минимизации по простым формулам находится нормальное решение исходной системы. Так как размерности переменных исходной и альтернативной систем различны, то переход от исходной системы к минимизации невязки альтернативной системы с вычислительной точки зрения может оказаться очень полезен. Эта редукция может привести к задаче минимизации с меньшим числом неизвестных, что упрощает нахождение нормального решения исходной системы с большим числом неизвестных.

Предлагается использовать обобщенный метод Ньютона для безусловной минимизации, возникающей при нахождении нормального решения линейной системы с очень большим (несколько десятков миллионов) количеством неотрицательных переменных и средним (несколько тысяч) количеством линейных равенств. Аналогично обобщенный метод Ньютона предлагается использовать для нахождения проекции заданной точки на множество решений задачи линейного программирования с таким же соотношением между количеством неотрицательных неизвестных и ограничениями-равенствами. Теоремы об альтернативах и обобщенный метод Ньютона позволяют также строить семейство гиперплоскостей, разделяющих полиэдры, заданные большим количеством линейных неравенств (несколько миллионов). Все эти методы реализованы в системе MATLAB и решали указанные задачи большой размерности на Pentium-IV за время порядка десятка-сотен секунд.

1. Пусть  $A$  --- матрица  $m \times n$  задана в следующем виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Здесь прямоугольные матрицы  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$  имеют, соответственно, размерности:  $m_1 \times n_1$ ,  $m_1 \times n_2$ ,  $m_2 \times n_1$ ,  $m_2 \times n_2$ . Пусть векторы  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $b \in R^m$  имеют разбиение  $x^T = [x_1^T, x_2^T]$ ,  $u^T = [u_1^T, u_2^T]$ ,  $b^T = [b_1^T, b_2^T]$ , где  $x_1 \in R^{n_1}$ ,  $x_2 \in R^{n_2}$ ,

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 06-01-00547), гранта Президента по государственной поддержке ведущих научных школ (проект № НШ-2240.2006.1), программы фундаментальных исследований ОТН РАН №3.

$n = n_1 + n_2$ ,  $u_1 \in R^{m_1}$ ,  $u_2 \in R^{m_2}$ ,  $b_1 \in R^{m_1}$  и  $b_2 \in R^{m_2}$ ,  $m = m_1 + m_2$ . Введем два вспомогательных множества  $\Pi_x = \{[x_1, x_2]: x_1 \in R_+^{n_1}, x_2 \in R^{n_2}\}$ ,  $\Pi_u = \{[u_1, u_2]: u_1 \in R_+^{m_1}, u_2 \in R^{m_2}\}$ .

Рассмотрим систему линейных равенств и неравенств

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \geq b_1, A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2, x_1 \geq 0_{n_1}.(I)$$

Определим сопряженную систему к (I)

$$A_{11}^T z_1 + A_{21}^T z_2 \leq 0_{n_1}, A_{12}^T z_1 + A_{22}^T z_2 = 0_{n_2}, z_1 \geq 0_{m_1}.(I')$$

Введем альтернативную к (I) систему

$$A_{11}^T u_1 + A_{21}^T u_2 \leq 0_{n_1}, A_{12}^T u_1 + A_{22}^T u_2 = 0_{n_2}, b_1^T u_1 + b_2^T u_2 = \rho, u_1 \geq 0_{m_1}.(II)$$

Здесь  $\rho > 0$  -- произвольное фиксированное положительное число и  $RbP \neq 0$ .

Введем вектор  $w \in R^{n+1}$ , представимый в виде  $w^T = [w_1^T, w_2^T, w_3]$ , где  $w_1 \in R^{n_1}$ ,  $w_2 \in R^{n_2}$ ,  $w_3 \in R^1$ , и вспомогательное множество  $\Pi_w = \{[w_1, w_2, w_3]: w_1 \in R_+^{n_1}, w_2 \in R^{n_2}, w_3 \in R^1\}$ .

Для системы (II) сопряженная система имеет вид

$$A_{11}w_1 + A_{12}w_2 - b_1w_3 \geq 0_{m_1}, A_{21}w_1 + A_{22}w_2 - b_2w_3 = 0_{m_2}, w_1 \geq 0_{n_1}.(II')$$

Множества решений систем (I), (I'), (II) и (II') обозначим соответственно через  $X$ ,  $Z$ ,  $U$  и  $W$ . В отличие от (I) и (II) системы (I') и (II') всегда имеют решения, так как  $0_m \in Z$  и  $0_{n+1} \in W$ .

**Лемма.** Системы (I) и (II) одновременно неразрешимы.

Ниже из теоремы 3 будет следовать, что всегда имеет решение одна и только одна из систем: либо (I), либо (II). Поэтому эти системы являются альтернативными. Система, альтернативная к (II), сводится к исходной системе (I).

Через  $pen(x, X)$  обозначим штраф в точке  $x \in \Pi_x$  за нарушение условия  $x \in X$ . В качестве штрафа будем использовать евклидову норму вектора невязок

$$pen(x, X) = [\| (b_1 - A_{11}x_1 - A_{12}x_2)_+ \|^2 + \| b_2 - A_{21}x_1 - A_{22}x_2 \|^2]^{1/2}.$$

Аналогично определим

$$pen(u, U) = [\| (A_{11}^T u_1 + A_{21}^T u_2)_+ \|^2 + \| A_{12}^T u_1 + A_{22}^T u_2 \|^2 + (\rho - b_1^T u_1 - b_2^T u_2)^2]^{1/2}.$$

Здесь и ниже  $a_+$  есть неотрицательная часть вектора  $a$ , т.е.  $i$ -я компонента вектора  $a_+$  совпадает с  $i$ -й компонентой вектора  $a$ , если она неотрицательна, и равна нулю в противном случае.

Введем следующие четыре задачи

$$I_1 = \min_{x \in \Pi_x} [pen(x, X)]^2 / 2, \quad (1)$$

$$I_2 = \min_{u \in \Pi_u} [pen(u, U)]^2 / 2, \quad (2)$$

$$I_1^d = \max_{z \in Z} \{b^T z - \|z\|^2 / 2\}, \quad (3)$$

$$I_2^d = \max_{w \in W} \{\rho w_3 - \|w\|^2 / 2\}. \quad (4)$$

В отличие от систем (I), (II), которые могут быть разрешимы или неразрешимы, задачи (1)-(4) всегда имеют решения. Причем задачи (3) и (4) всегда

имеют единственные решения, так как в них допустимые множества  $Z$  и  $W$  непусты и строго вогнутые квадратичные целевые функции ограничены сверху. Задачи (1) и (2) являются взаимно двойственными к задачам (3) и (4) соответственно.

Проекцией точки  $\bar{x}$  на непустое замкнутое множество  $X$  назовем точку  $x^* \in X$ , ближайшую к точке  $\bar{x}$ , т.е.  $x^*$  является решением задачи  $\min_{x \in X} \|\bar{x} - x\|^2/2 = \|\bar{x} - x^*\|^2/2$ . Будем писать  $x^* = pr(\bar{x}, X)$ , расстояние от точки  $\bar{x}$  до множества  $X$  обозначим  $dist(\bar{x}, X) = \|x^* - \bar{x}\|$ .

**Теорема 1.** *Всякое решение  $x^*$  задачи(1) определяет единственное решение  $z^{*\Gamma} = [z_1^{*\Gamma}, z_2^{*\Gamma}]$  задачи (3) по формулам:*

$$z_1^* = (b_1 - A_{11}x_1^* - A_{12}x_2^*)_+, \quad z_2^* = b_2 - A_{21}x_1^* - A_{22}x_2^* \quad (5)$$

и справедливы следующие утверждения

$$\begin{aligned} \|z^*\|^2 &= b^T z^*, \\ z^* \perp Ax^*, \quad z^* \perp (b - z^*), \\ z^* &= pr(b, Z), \quad \|z^*\| = pen(x^*, X), \quad \|b - z^*\| = dist(b, Z), \\ [pen(x^*, X)]^2 + [dist(b, Z)]^2 &= \|b\|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Соотношение (6) следует из равенства оптимальных значений целевых функций взаимно двойственных задач (3) и (1). Это равенство в силу (5) выражено только через  $z^*$  --- решение задачи (3).

Введем матрицу  $\bar{A} = [-A, b]$  размера  $m \times (n+1)$  и вектор  $r \in R^{n+1}$ , представимый в виде  $r^T = [0_n^T, \rho]$ .

**Теорема 2.** *Пусть  $u^{*\Gamma} = [u_1^{*\Gamma}, u_2^{*\Gamma}]$  -- произвольное решение задачи (2). Тогда решение  $w^{*\Gamma} = [w_1^{*\Gamma}, w_2^{*\Gamma}, w_3^{*\Gamma}]$  задачи (4) выражается через решение  $u^*$  задачи (2) по формулам*

$$w_1^* = (A_{11}^T u_1^* + A_{21}^T u_2^*)_+, \quad w_2^* = A_{12}^T u_1^* + A_{22}^T u_2^*, \quad w_3^* = \rho - b_1^T u_1^* - b_2^T u_2^* \quad (7)$$

и справедливы следующие утверждения:

$$\begin{aligned} \|w^*\|^2 &= \rho w_3^*; \\ w^* \perp \bar{A}^T u^*, \quad w^* \perp (r - w^*), \\ w^* &= pr(r, W), \quad \|w^*\| = pen(u^*, U), \quad \|r - w^*\| = dist(r, W), \\ [pen(u^*, U)]^2 + [dist(r, W)]^2 &= \|r\|^2, \\ \|w^*\| \leq \rho, \quad 0 \leq w_3^* \leq \rho, \quad \|w_1^*\|^2 + \|w_2^*\|^2 &\leq \rho^2/4. \end{aligned} \quad (8)$$

Соотношение (8) следует из равенства оптимальных значений целевых функций прямой (4) и двойственной (2) задач. В силу (7) это равенство выражено только через  $w^*$  --- решение задачи (4).

**Теорема 3.** *Пусть  $x^*$  и  $u^*$  --- произвольные решения задач (1) и (2) соответственно, векторы минимальных невязок  $z^*$  и  $w^*$  определяются по формулам (5) и (7). Тогда*

1• системы (I) и (II) - альтернативны, т.е. разрешима одна и только одна из них;



2• если система (I) несовместна, то  $\|z^*\| \neq 0$ , вектор  $\tilde{u}^* = pr(0_m, W)$  --- нормальное решение системы (II) и вектор минимальных невязок  $z^*$  системы (I) коллинеарны и

$$\tilde{u}^* = \rho z^* / \|z^*\|^2, \quad z^* = \rho \tilde{u}^* / \|\tilde{u}^*\|^2;$$

3• если система (II) несовместна, то  $\|w^*\| \neq 0$ , вектор  $\tilde{x}^* = pr(0_n, X)$  --- нормальное решение системы (I), его составляющие имеют вид

$$\tilde{x}_1^* = w_1^*/w_3^*, \quad \tilde{x}_2^* = w_2^*/w_3^*.$$

2. Пусть не равен нулю вектор  $z^*$  - решение задачи (3). Введем нормированные векторы  $z_n = z^* / \|z^*\|$  и  $z_n^* = z^* / \|z^*\|$ . Определим допустимое множество нормированных векторов  $Z_n = \{z_n \in R^m : z_n \in Z, \|z_n\| = 1\}$ , где множество  $Z$  есть сопряженная система (I').

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу

$$I_3 = \max_{z_n \in Z_n} b^T z_n. \quad (9)$$

**Теорема 4.** Пусть  $x^*$  --- произвольное решение задачи (1),  $z^*$  --- решение задачи (3), определяемое по формулам (9), кроме того  $\|z^*\| \neq 0$ . Тогда решением задачи (9) является вектор  $z_n^* = z^* / \|z^*\|$ , причем  $I_3 = b^T z_n^* = \|z^*\|$ .

Задача (9) возникает в методе возможных направлений при решении задачи нелинейного программирования (НЛП)

$$\min_{y \in Y} f(y), \quad Y = \{y \in R^m : h(y) \leq 0_{n_1}, g(y) = 0_{n_2}\}. \quad (10)$$

Здесь  $f: R^m \rightarrow R^1$ ,  $h: R^m \rightarrow R^{n_1}$ ,  $g: R^m \rightarrow R^{n_2}$ , функции  $f(y)$ ,  $h(y)$ ,  $g(y)$  непрерывно дифференцируемы, множество  $Y$  не пусто, задача (10) имеет решение.

Предположим, что фиксирована произвольная допустимая точка  $y \in Y$ . Введем вектор множителей Лагранжа  $x \in R^n$ ,  $x^T = [x_1^T, x_2^T]$ , где  $x_1 \in R^{n_1}$ ,  $x_2 \in R^{n_2}$ ,  $n = n_1 + n_2$  и определим функцию Лагранжа  $L(y, x) = f(y) + h^T(y)x_1 + g^T(y)x_2$ .

Введем условия дополняющей нежесткости

$$x_1^i h^i(y) = 0, \quad 1 \leq i \leq n_1. \quad (11)$$

Компонента  $h^i(y)$  вектора  $h(y)$  называется *активной* в точке  $y \in Y$ , если  $h^i(y) = 0$ . В силу (11) все компоненты вектора  $x_1$ , соответствующие неактивным компонентам вектора  $h(y)$ , равны нулю. Для простоты будем считать, что в функцию Лагранжа входит вектор  $h(y)$ , все компоненты которого активны. Приведем условия Куна-Таккера для задачи (10), вычисленные в точке  $[y, x]$ , где  $y \in Y$

$$L_y(y, x) = f_y(y) + h_y(y)x_1 + g_y(y)x_2 = 0_m, \quad x_1 \geq 0_{n_1}. \quad (I)$$

Введем вектор  $y' = y + \tau z$ , где  $\tau$  --- длина шага, направление спуска  $z \in R^m$ ,  $PzP = 1$ . В задаче (10) линеаризуем целевую функцию и функции, задающие ограничения. Величину  $\tau$  считаем малой, отбрасывая члены высшего порядка малости, приходим к следующей задаче отыскания направления наискорейшего спуска

$$I_4 = \min_{z \in Z_n} z^T f_y(y), \quad Z_n = \{z \in R^m : h_y^T(y)z \leq 0_{n_1}, g_y^T(y)z = 0_{n_2}, \|z\| = 1\}. \quad (12)$$

Если задача (12) имеет решение  $z_n^*$  и при этом  $I_4 < 0$ , то такое направление назовем направлением наискорейшего спуска. Это значит, что по крайней мере в линейном приближении можно "улучшить" точку  $y$ , взяв новый вектор  $y'$ . Тогда при достаточно малом шаге  $\tau$  вектор  $y'$  остается в допустимом множестве  $Y$  и значение целевой функции  $f(y') < f(y)$ . Если задача (12) не имеет такого решения, тогда точку  $y$  невозможно локально улучшить.

Чтобы воспользоваться ранее введенными результатами, будем считать, что

$h_y^T(y) = A_{21}^T$ ,  $g_y^T(y) = A_{22}^T$ ,  $-f_y(y) = b_2$ . Тогда система (II), альтернативная к (I), запишется в виде

$$u^T h_y(y) \leq 0_{n_1}^T, u^T g_y(y) = 0_{n_2}^T, -u^T f_y(y) = \rho > 0. (II)$$

Если система (II) разрешима, то согласно теореме 3 ее нормальное решение имеет вид  $\tilde{u}^* = \rho z^* / \|z^*\|^2$ , где  $z^* = -L_y(y, x^*)$  и вектор  $x^*$  находится из решения задачи безусловной минимизации (1), которая в данном случае записывается следующим образом

$$I_1 = \min_{x_1 \in R_+^{n_1}} \min_{x_2 \in R^{n_2}} \|L_y(y, x)\|^2 / 2. \quad (13)$$

Нормируем вектор  $\tilde{u}^*$ , получим  $\tilde{u}_n^* = z^* / \|z^*\| = z_n^*$ . Вектор  $z_n^*$  принадлежит  $Z_n$  и согласно теореме 4 имеем  $I_4 = -I_3 = -\|z^*\|$ . Т.е. направление  $z_n^*$  является направлением наискорейшего спуска в линеаризованной задаче (12). Это направление существует тогда и только тогда, когда система (I) при фиксированном  $y \in Y$  не может быть разрешима относительно множителей Лагранжа  $x_1 \in R_+^{n_1}$ ,  $x_2 \in R^{n_2}$  задачи (10), т.е.  $I_1 > 0$  в задаче (13).

Таким образом, при применении метода возможных направлений к задаче (10) нет необходимости для определения наискорейшего спуска решать задачу условной минимизации (12). Это направление находится из решения задачи безусловной минимизации (13). Отметим, что такой подход особенно эффективен, когда  $n$  --- количество активных ограничений в точке  $y \in Y$  много меньше размерности вектора  $y$ , так как минимизация в задаче (13) ведется в  $n$ -мерном пространстве.

**3.** Рассмотрим задачу нахождения семейства гиперплоскостей, разделяющих два непересекающихся непустых полиэдра (многогранные множества), которые заданы с помощью систем неравенств с неотрицательными переменными. Для этого случая обобщается теорема о гиперплоскости, разделяющей полиэдры, заданные системами неравенств на всем пространстве [3]. Нормаль и сдвиг разделяющей гиперплоскости выражаются через произвольное решение системы, являющейся альтернативной к несовместной системе. Эта несовместная система состоит из двух совместных подсистем, каждая из которых определяет непустой полиэдр. Система несовместна, так как эти полиэдры не пересекаются. Любое решение альтернативной системы определяет *одно* семейство разделяющих гиперплоскостей для двух полиэдров, заданных на всем пространстве. В случае же полиэдров, заданных с помощью системы линейных неравенств на неотрицательном ортанте, любое решение альтернативной системы определяет уже *два различных* семейства разделяющих гиперплоскостей. Итак, пусть два полиэдра представлены системами неравенств на неотрицательном ортанте, т.е. заданы два непустые множества

$$X_1 = \{x \in R^n : A_1 x \geq b_1, x \geq 0_n\}, X_2 = \{x \in R^n : A_2 x \geq b_2, x \geq 0_n\}$$

такие, что  $X = X_1 \cap X_2 = \emptyset$ . Будем говорить, что гиперплоскость  $c^T x - \gamma = 0$ , где вектор нормали  $c \in R^n$ ,  $PcP \neq 0$  и  $\gamma$  --- скаляр, разделяет множества  $X_1$  и  $X_2$ , если  $c^T x - \gamma \geq 0$  для всех  $x \in X_1$ ,  $c^T x - \gamma \leq 0$  для всех  $x \in X_2$ . Если в этих выражениях знаки неравенств можно заменить на строгие, то гиперплоскость -- строго разделяющая. В соответствии с теоремой об альтернативах для несовместной системы неравенств с неотрицательными переменными

$$A_1 x \geq b_1, \quad A_2 x \geq b_2, \quad x \geq 0_n$$

совместна следующая система:

$$A_1^T u_1 + A_2^T u_2 \leq 0_n, \quad b_1^T u_1 + b_2^T u_2 = \rho, \quad u_1 \geq 0_{m_1}, u_2 \geq 0_{m_2}. \quad (14)$$

Здесь  $\rho$  --- положительная константа.

**Теорема 5.** Пусть два непустых, непересекающихся полиэдра заданы системами неравенств на неотрицательном ортанте. Тогда

1. для любого решения альтернативной системы (14) справедливо  $\|u_1\| \neq 0$ ,  $\|u_2\| \neq 0$ ,  $\|A_1^T u_1\| \neq 0$  и  $\|A_2^T u_2\| \neq 0$ ;

2. любое решение системы (14) определяет два различных семейства разделяющих гиперплоскостей

$$\varphi_1(x, \alpha) = u_1^T (A_1 x - b_1) + \alpha \rho = 0,$$

$$\varphi_2(x, \alpha) = -u_2^T (A_2 x - b_2) - (1 - \alpha) \rho = 0,$$

где  $\alpha \in [0, 1]$  и для любого  $x \geq 0_n$  имеет место  $\varphi_1(x, \alpha) \leq \varphi_2(x, \alpha)$ .

Итак, теорема 5 утверждает, что если найдено решение  $u_1, u_2$  системы (14), то два семейства гиперплоскостей соответственно с векторами нормали  $c = A_1^T u_1$ ,  $c = -A_2^T u_2$  и  $\gamma = b_1^T u_1 - \alpha \rho$ ,  $\gamma = -b_2^T u_2 + (1 - \alpha) \rho$  являются разделяющими.

**Теорема 6.** Пусть гиперплоскость  $c^T x - \gamma = 0$  строго разделяет непустые непересекающиеся полиэдры  $X_1$  и  $X_2$ . Тогда найдется решение  $u_1, u_2$  системы (14) такое, что

$$A_1^T u_1 \leq c, \quad A_2^T u_2 \leq -c, \quad \gamma = b_1^T u_1 - \rho_1 = -b_2^T u_2 + \rho_2,$$

где  $\rho_1 + \rho_2 = \rho$ ,  $\rho_1, \rho_2$  -- произвольные положительные константы.

Теорема 6 устанавливает еще одно отличие полиэдров, заданных на всем пространстве, от полиэдров на неотрицательном ортанте. В ней утверждается, что в случае двух полиэдров, определяемых системами неравенств на неотрицательном ортанте, для заданной разделяющей гиперплоскости не всегда можно подобрать такие  $u_1$  и  $u_2$ , удовлетворяющие совместной альтернативной системе (14), чтобы при этом выполнялось либо условие  $c = A_1^T u_1$ , либо  $c = -A_2^T u_2$ .

4. Большие задачи линейного программирования (ЛП), как правило, имеют неединственное решение. Различные методы решения задач ЛП (симплекс-метод, метод внутренних точек, метод квадратичной штрафной функции) дают возможность получать различные решения в случае неединственности. Так симплекс-метод дает решение, которое принадлежит вершине многогранного множества. Методы внутренней точки сходятся к решению, в котором выполнено условие строгой дополняющей нежесткости. Метод внешней квадратичной функции дает возможность найти точное нормальное решение.

В работе [4] предложен новый метод решения задачи ЛП, близкий к методу квадратичной штрафной функции и модифицированной функции Лагранжа. Его применение к двойственной задаче (ЛП) дает возможность получить точную проекцию

заданной точки на множество решений прямой задачи ЛП в результате однократной безусловной минимизации вспомогательной кусочно квадратичной функции при конечном значении коэффициента штрафа. Применение обобщенного метода Ньютона для минимизации введенной вспомогательной функции дает возможность решать на персональных компьютерах типа Pentium-IV задачи ЛП с очень большим числом неотрицательных переменных (несколько десятков миллионов) при умеренном числе ограничений (несколько тысяч). В [4] предложен несколько нестандартный вид кусочно квадратичного штрафа для задач ЛП и приведены оценки порогового значения коэффициента штрафа, начиная с которого в результате однократной минимизации находится точная проекция заданной точки на множество решений прямой задачи ЛП.

Пусть задана прямая задача ЛП в стандартной форме

$$f_* = \min_{x \in X} c^T x, \quad X = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0_n\}. (P)$$

Двойственная к ней имеет вид

$$f_* = \max_{u \in U} b^T u, \quad U = \{u \in R^m : A^T u \leq c\}. (D)$$

Здесь  $A \in R^{m \times n}$ ,  $c \in R^n$  и  $b \in R^m$  заданы,  $x$  -- вектор прямых переменных, а  $u$  -- двойственных, через  $0_i$  обозначен  $i$ -мерный нулевой вектор.

Предположим, что множество решений  $X_*$  прямой задачи (P) непусто, следовательно множество решений  $U_*$  двойственной задачи (D) также непусто. Необходимые и достаточные условия оптимальности (условия Куна-Таккера) для задач (P) и (D) запишем в виде

$$Ax_* - b = 0_m, \quad x_* \geq 0_n, \quad D(x_*)v_* = 0_n, \quad (15)$$

$$v_* = c - A^T u_* \geq 0_n. \quad (16)$$

Здесь в ограничения двойственной задачи (D) введен неотрицательный вектор дополнительных переменных  $v = c - A^T u \geq 0_n$ . Через  $D(z)$  обозначается диагональная матрица, у которой  $i$ -й диагональный элемент есть  $i$ -я компонента вектора  $z$ .

Рассмотрим задачу нахождения проекции заданной точки  $\hat{x}$  на множество решений  $X_*$  прямой задачи (P)

$$\frac{1}{2} \|\hat{x}_* - \hat{x}\|^2 = \min_{x \in X_*} \frac{1}{2} \|x - \hat{x}\|^2, \quad X_* = \{x \in R^n : Ax = b, c^T x = f_*, x \geq 0_n\}. \quad (17)$$

Здесь и всюду ниже используется евклидова норма векторов,  $f_*$  -- оптимальное значение целевой функции исходной задачи ЛП.

Для этой задачи введем функцию Лагранжа

$$L(x, p, \beta) = \frac{1}{2} \|x - \hat{x}\|^2 + p^T (b - Ax) + \beta(c^T x - f_*),$$

Здесь  $p \in R^m$ ,  $\beta \in R^1$  есть множители Лагранжа для задачи (17). Двойственная задача к (17) имеет вид

$$\max_{p \in R^m, \beta \in R^1} \min_{x \in R_+^n} L(x, p, \beta). \quad (18)$$

Запишем условия Куна-Таккера для задачи (17)

$$x - \hat{x} - A^T p + \beta c \geq 0_n, \quad D(x)(x - \hat{x} - A^T p + \beta c) = 0_n, \quad x \geq 0_n, \quad (19)$$

$$Ax = b, \quad c^T x = f_*, \quad (20)$$

Легко проверить, что формулы (19) эквивалентны выражению

$$x = (\hat{x} + A^T p - \beta c)_+. \quad (21)$$

Эта формула дает решение внутренней задачи минимизации в задаче (18).

Подставляя (21) в функцию Лагранжа  $L(x, p, \beta)$ , получаем двойственную функцию для задачи (18)

$$\hat{L}(p, \beta) = b^T p - \frac{1}{2} \| (\hat{x} + A^T p - \beta c)_+ \|^2 - \beta f_* + \frac{1}{2} \|\bar{x}\|^2.$$

Функция  $\hat{L}(p, \beta)$  вогнута, кусочно квадратична и непрерывно дифференцируема по своим переменным  $p$  и  $\beta$ .

Двойственная задача (18) сводится к решению внешней задачи максимизации

$$\max_{p \in R^m} \max_{\beta \in R^1} \hat{L}(p, \beta). \quad (22)$$

Решив задачу (22), найдем оптимальные  $p$  и  $\beta$ . После их подстановки в (21) получаем решение  $\hat{x}_*$  задачи (17), т.е. проекцию точки  $\hat{x}$  на множество решений прямой задачи ЛП (P). Необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (22) имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{L}_p(p, \beta) &= b - A(\hat{x} + A^T p - \beta c)_+ = b - Ax = 0_m, \\ \hat{L}_\beta(p, \beta) &= c^T (\hat{x} + A^T p - \beta c)_+ - f_* = c^T x - f_* = 0, \end{aligned}$$

где  $x$  определен формулой (21). Эти условия выполнены тогда и только тогда, когда  $x \in X_*$  и  $x = \hat{x}_*$ .

К сожалению задача безусловной оптимизации (22) содержит неизвестную априори величину  $f_*$  -- оптимальное значение целевой функции задачи ЛП. Однако эту задачу можно упростить, избавившись от этого недостатка. Для этого вместо (22) предлагается решать следующую упрощенную задачу безусловной максимизации

$$I = \max_{p \in R^m} S(p, \beta), \quad (23)$$

где скаляр  $\beta$  фиксирован, а функция  $S(p, \beta)$  определена следующим образом

$$S(p, \beta) = b^T p - \frac{1}{2} \| (\hat{x} + A^T p - \beta c)_+ \|^2. \quad (24)$$

Легко проверить, что задача (23) является двойственной к следующей задаче строго выпуклого программирования

$$I' = \min_{x \in X} \left\{ \beta c^T x + \frac{1}{2} \| x - \hat{x} \|^2 - \frac{1}{2} \|\bar{x}\|^2 \right\}, \quad X = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0_n\}. \quad (25)$$

Рассмотрим задачу (23) и ее связь с прямой задачей ЛП (P). Заметим, что в отличие от задачи (17), двойственная к ней задача (22) имеет неединственное решение. Естественно возникает вопрос о нахождении среди всех решений задачи (22) минимального значения  $\beta_*$  множителя Лагранжа  $\beta$ . Тогда в двойственной задаче (22), как будет показано в теореме 6, можно зафиксировать  $\beta \geq \beta_*$  и решать задачу максимизации двойственной функции  $\hat{L}(p, \beta)$  только по переменным  $p$ , т.е. решать задачу (23). При этом пара  $[p, \beta]$  является решением задачи (22), тройка  $[\hat{x}_*, p, \beta]$  --- седловая точка задачи (17), в которой нормальное решение  $\hat{x}_*$  задачи (P) определяется по формуле (21).

Для нахождения минимального  $\beta$  обратимся к условиям Куна-Таккера для задачи (17), которые для этой задачи являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности. Без потери общности предположим, что первые  $l$  компонент вектора  $\hat{x}_*$  строго больше нуля. В соответствии с этим предположением представим векторы  $\hat{x}_*$ ,  $\hat{x}$ ,  $c$  и матрицу  $A$  в виде

$$\hat{x}_*^T = [\hat{x}_*^{lT}, \hat{x}_*^{dT}], \hat{x}^T = [\hat{x}^{lT}, \hat{x}^{dT}], c^T = [c^{lT}, c^{dT}], A = [A_l | A_d] \quad (26)$$

где  $\hat{x}_*^l > 0_l$ ,  $\hat{x}_*^d = 0_d$ ,  $d = n - l$ .

В соответствие с разбиением (26) оптимальный вектор дополнительных переменных  $v_*$  из условий Куна-Таккера (15), (16) для задач (P) и (D) представим в виде  $v_*^T = [v_*^{lT}, v_*^{dT}]$ . Тогда согласно условию дополняющей нежесткости  $x_*^T v_* = 0$ ,  $x_* \geq 0_n$ ,  $v_* \geq 0_n$  выражение (16) запишется в виде

$$v_*^l = c^l - A_l^T u_* = 0_l, \quad (27)$$

$$v_*^d = c^d - A_d^T u_* \geq 0_d. \quad (28)$$

С использованием обозначений из (26) необходимые и достаточные условия оптимальности (19), (20) для задачи (17) можно переписать в развернутом виде

$$\bar{x}_*^l = \bar{x} + A_l^T p - \beta c^l > 0_l, \quad (29)$$

$$\bar{x}_*^d = 0_d, \quad \bar{x}^d + A_d^T p - \beta c^d \leq 0_d, \quad (30)$$

$$A_l \bar{x}_*^l = b, \quad c^{lT} \bar{x}_*^l = f_*. \quad (31)$$

Среди решений системы (29)-(31) найдем такие множители Лагранжа  $[p, \beta]$ , что  $\beta$  является минимальным, т.е. приходим к задаче линейного программирования

$$\beta_* = \inf_{\beta \in R^1} \inf_{p \in R^m} \{ \beta : A_l^T p - \beta c^l = \hat{x}_*^l - \hat{x}^l, A_d^T p - \beta c^d \leq -\hat{x}^d \}. \quad (32)$$

Ограничения в этой задаче совместны, но целевая функция может быть неограничена снизу. В этом случае будем полагать  $\beta_* = \gamma$ , где  $\gamma$  -- некоторое число.

Как будет показано ниже в теореме 6, если система уравнений в (32) однозначно разрешима относительно  $p$ , то величина  $\beta_*$  представима в виде

$$\beta_* = \begin{cases} \max_{i \in \sigma} \frac{(\bar{x}^d + A_d^T (A_l A_l^T)^{-1} A_l (\bar{x}_*^l - \bar{x}^l))^i}{(v_*^d)^i}, & \text{ãñëë } \sigma \neq \emptyset \\ \gamma > -\infty, & \text{ãñëë } \sigma = \emptyset. \end{cases} \quad (33)$$

Здесь введено индексное множество  $\sigma = \{l+1 \leq i \leq n : (v_*^d)^i > 0\}$  и  $\gamma$  -- произвольное число.

**Теорема 7.** Пусть множество решений  $X_*$  задачи (P) непусто. Тогда при любом  $\beta \geq \beta_*$ , где  $\beta_*$  определяется формулой (32), пара  $[p(\beta), \beta]$ , где  $p(\beta)$  -- решение задачи безусловной максимизации (23) или, что то же самое, решение системы

$A(\hat{x} + A^T p - \beta c)_+ = b$ , определяет проекцию  $\hat{x}_*$  заданной точки  $\hat{x}$  на множество решений  $X_*$  прямой задачи (P) по формуле

$$\hat{x}_* = (\hat{x} + A^T p(\beta) - \beta c)_+. \quad (34)$$

Если дополнительно ранг матрицы  $A_l$ , соответствующий ненулевым компонентам вектора  $\hat{x}_*$ , равен  $m$ , то  $\beta_*$  определяется по формуле (33), а точное решение двойственной задачи (D) находится в результате решения задачи безусловной максимизации (23) по формуле

$$u_* = \frac{1}{\beta} (p(\beta) - (A_l A_l^T)^{-1} A_l (\hat{x}_* - \hat{x}^l)).$$

Теорема 7 позволяет заменить задачу (22), содержащую априори неизвестное число  $f_*$ , на задачу (23), в которой вместо этого числа фигурирует полуинтервал  $[\beta_*, +\infty)$ , что существенно проще с вычислительной точки зрения. Отметим, что значение  $\beta_*$ , найденное из решения задачи линейного программирования (32) или формулы (33), может быть отрицательным.

Следующая теорема утверждает, что если известна какая-нибудь точка  $x_* \in X_*$ , то можно получить решение двойственной задачи (D) после однократного решения задачи безусловной максимизации (23).

**Теорема 8.** Пусть множество решений  $X_*$  задачи ЛП (P) непусто. Тогда для любых  $\beta > 0$  и  $\hat{x} = x_* \in X_*$  точное решение двойственной задачи (D) находится по формуле  $u_* = p(\beta)/\beta$ , где  $p(\beta)$  -- решение задачи безусловной максимизации (23).

Для иллюстрации работы этой теоремы обратимся к методу внешнего квадратичного штрафа, примененному к двойственной задаче (D), т.е. рассмотрим задачу

$$\max_{p \in R^m} \{b^T p - \frac{1}{2} \| (A^T p - \beta c)_+ \|^2\}. \quad (35)$$

Оказывается, что можно получить точное решение  $u_*$  двойственной задачи (D), не устремляя в (35) коэффициент штрафа  $\beta$  к  $+\infty$ . Если в задаче (35) коэффициент штрафа  $\beta \geq \beta_*$ , то согласно теореме 7 по формуле (34), в которой  $\hat{x} = 0_n$ , находим нормальное решение  $\tilde{x}_*$  прямой задачи (P). Согласно теореме 8 далее следует решить задачу безусловной максимизации при любом  $\beta > 0$ :

$$\max_{p \in R^m} \{b^T p - \frac{1}{2} \| (\tilde{x}_* + \beta(A^T p - \beta c))_+ \|^2\}. \quad (36)$$

Используя ее решение  $p(\beta)$ , получаем решение  $p(\beta)/\beta = u_* \in U_*$  двойственной задачи (D). Отметим, что задача (36) не сложнее, чем задача (35). Таким образом, решая только две задачи безусловной максимизации, можно получить точные нормальное решение прямой и некоторое решение двойственной задач ЛП, если в задаче (35) взять коэффициент штрафа  $\beta \geq \beta_*$ , а в задаче (36) взять любой положительный коэффициент  $\beta$ .

Для одновременного решения прямой и двойственной задач ЛП предлагается использовать следующий итерационный процесс:

$$x_{k+1} = (x_k + A^T p_{k+1} - \beta c)_+, \quad (37)$$

где произвольный параметр  $\beta > 0$  фиксирован, а вектор  $p_{k+1}$  определяется из решения следующей задачи безусловной максимизации:

$$p_{k+1} \in \arg \max_{p \in R^m} \{b^T p - \frac{1}{2} \|(x_k + A^T p - \beta c)_+\|^2\}. \quad (38)$$

**Теорема 9.** Пусть множество решений  $X_*$  прямой задачи  $(P)$  непусто. Тогда при любом  $\beta > 0$  и при любой начальной точке  $x_0$  итерационный процесс (37), (38) сходится к  $x_* \in X_*$  за конечное число шагов  $\omega$ . Формула  $u_* = p_{\omega+1}/\beta$  дает точное решение двойственной задачи  $(D)$ .

Этот итерационный процесс является конечным и дает точное решение прямой задачи  $(P)$  и точное решение двойственной задачи  $(D)$ . Отметим, что в этом методе не требуется знать пороговое значение коэффициента штрафа. Но если выбранное значение коэффициента меньше порогового значения, то метод за конечное число шагов находит некоторое решение прямой задачи, а не проекцию начальной точки на множество решений прямой задачи ЛП. Заметим, что  $x_\omega = x_* \in X_*$  является проекцией точки  $x_{\omega-1}$  на множество решений  $X_*$  задачи  $(P)$ .

**5.** Безусловная оптимизация, возникающая благодаря применению теорем об альтернативах или модифицированных функций Лагранжа в случае задачи ЛП, может выполняться любым методом, например, методом сопряженного градиента. Но, как показал О.Мангасарьян, для безусловной оптимизации кусочно квадратичной функции особенно эффективен обобщенный метод Ньютона [5], [6]. Приведем краткое описание этого метода и результаты численного эксперимента с задачами ЛП.

Максимизируемая функция  $S(p, \beta, \hat{x})$  в задаче (23) или (38) является вогнутой кусочно квадратичной и дифференцируемой. Для этой функции обычная матрица Гессе не существует. Действительно градиент

$$S_p(p, \beta, \hat{x}) = b - A(\hat{x} + A^T p - \beta c)_+$$

функции  $S(p, \beta, \hat{x})$  не дифференцируем. Но для этой функции можно определить обобщенную матрицу Гессе, которая является  $m \times m$  симметричной отрицательно полуопределенной матрицей следующего вида

$$\partial_p^2 S(p, \beta, \hat{x}) = -AD^\#(z)A^T,$$

где через  $D^\#(z)$  обозначена  $n \times n$  диагональная матрица с  $i$ -м диагональным элементом  $z^i$ , равным 1, если  $(\hat{x} + A^T p - \beta c)^i > 0$ , и равным 0, если  $(\hat{x} + A^T p - \beta c)^i \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Так как обобщенная матрица Гессе может быть вырожденной, используется следующее модифицированное ньютоновское направление

$$-(\partial_p^2 S(p, \beta, \hat{x}) - \delta I_m)^{-1} S_p(p, \beta, \hat{x}),$$

где  $\delta$  есть малая положительная величина (обычно при расчетах полагалось  $\delta = 10^{-4}$ ) и  $I_m$  единичная матрица порядка  $m$ .

В этом случае модифицированный метод Ньютона имеет вид

$$p_{s+1} = p_s - (\partial_p^2 S(p_s, \beta, \hat{x}) - \delta I_m)^{-1} S_p(p_s, \beta, \hat{x}).$$

Критерий окончания его работы полагался следующим

$$\|p_{s+1} - p_s\| \leq tol.$$

О.Мангасарьян исследовал сходимость обобщенного метода Ньютона для безусловной оптимизации подобной вогнутой кусочно квадратичной функции с выбором шага по правилу Армихо. Доказательство конечной глобальной сходимости



обобщенного метода Ньютона для безусловной оптимизации кусочно квадратичной функции можно найти в [5] – [6].

Решались сгенерированные случайным образом задачи ЛП с большим числом неотрицательных переменных (до нескольких десятков миллионов) и средним числом ограничений-равенств (до нескольких тысяч), т.е. имело место  $n \gg m$ .

Итак, задавались числа  $m$  и  $n$ , определяющие количество строк и столбцов матрицы  $A$ , и  $\rho$  -- плотность заполнения матрицы  $A$  ненулевыми элементами. В частности значение  $\rho = 1$  означает, что случайным образом генерировались все элементы матрицы  $A$ , а значение  $\rho = 0.01$  указывает, что в матрице  $A$  генерировались только 1% элементов, а остальные полагались равными нулю. Элементы матрицы  $A$  определялись случайным образом из интервала  $[-50, +50]$ . Решение  $x_*$  прямой задачи ( $P$ ) и решение  $u_*$  двойственной задачи ( $D$ ) генерировались следующим образом. Полагалось, что в векторе  $x_*$  содержится  $n - 3m$  нулевых компонент, а остальные компоненты выбирались случайным образом из интервала  $[0, 10]$ . Половина компонент вектора  $u_*$  полагалась равными нулю, а остальные выбирались случайным образом из интервала  $[-10, 10]$ . Решения  $x_*$  и  $u_*$  использовались для вычисления коэффициентов целевой функции  $c$  и правых частей  $b$  задачи ЛП ( $P$ ). Векторы  $b$  и  $c$  определялись по формулам

$$b = Ax_*, \quad c = A^T u_* + \xi,$$

если  $x_*^i > 0$ , то  $\xi^i = 0$ , , если  $x_*^i = 0$ , то компонента  $\xi^i$  выбиралась случайным образом из интервала

$$0 \leq \gamma^i \leq \xi^i \leq \theta^i.$$

В приведенных ниже результатах расчетов считалось, что все  $\gamma^i = 1$  и  $\theta^i = 10$ . Заметим, что при близких к нулю  $\gamma^i$  величина  $\xi^i = (c - A^T u_*)^i = (v_*^d)^i$  может также оказаться очень малой величиной. Согласно формуле (33) априори неизвестная величина  $\beta_*$  может быть очень большой. Тогда сгенерированная задача ЛП может оказаться трудно решаемой.

Предлагаемый метод решения прямой и двойственной задач ЛП, сочетающий итеративный процесс (37), (38) и обобщенный метод Ньютона, реализован в системе MATLAB 6.5. Для вычислений использовался компьютер с процессором Pentium-4, тактовой частотой 2.6 ГГц, оперативной памятью 1 Гб. Численные эксперименты со случайно сгенерированными задачами ЛП показали высокую эффективность метода при решении задач ЛП с большим числом неотрицательных переменных (решались задачи до 50 миллионов переменных) и средним числом ограничений-равенств (до 5 тысяч). Время решения таких задач составляло от нескольких десятков до нескольких тысяч секунд. Высокая эффективность этих расчетов объясняется тем, что основная вычислительная трудность предлагаемого метода приходится на решение вспомогательной задачи безусловной максимизации, которая решается обобщенным методом Ньютона. Ее размерность определяется количеством ограничений типа равенств, число которых существенно меньше, чем число неотрицательных переменных в исходной задаче ЛП.

Табл.1

$m \times n \times \rho$	Solver	T, sec	Iter.	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$
$500 \times 10^4 \times 1$	EGM (MATLAB)	55.0	12	$1.5 \cdot 10^{-8}$	$1.8 \cdot 10^{-12}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$
	BPMPD (Interior point)	37.4	23	$2.3 \cdot 10^{-10}$	$1.8 \cdot 10^{-11}$	$1.1 \cdot 10^{-10}$
	MOSEK (Interior point)	87.2	6		$3.8 \cdot 10^{-9}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$
	CPLEX (Interior point)	80.3	11	$1.8 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	0.0
	CPLEX (Simplex)	61.8	8308	$8.6 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-10}$	$7.2 \cdot 10^{-3}$
$3000 \times 10^4 \times 0.01$	EGM (MATLAB)	155.4	11	$6.1 \cdot 10^{-10}$	$3.4 \cdot 10^{-13}$	$3.6 \cdot 10^{-8}$
	BPMPD (Interior point)	223.5	14	$4.6 \cdot 10^{-9}$	$2.9 \cdot 10^{-10}$	$3.9 \cdot 10^{-9}$
	MOSEK (Interior point)	42.6	4	$3.1 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$3.7 \cdot 10^{-8}$
	CPLEX (Interior point)	69.9	5	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	0.0
	CPLEX (Simplex)	1764.9	6904	$3.0 \cdot 10^{-3}$	$8.1 \cdot 10^{-9}$	$9.3 \cdot 10^{-2}$
$1000 \times (5 \times 10^6) \times 0.01$	EGM (MATLAB)	1007.5	10	$3.9 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-13}$	$6.1 \cdot 10^{-7}$
$1000 \times 10^5 \times 1$	EGM (MATLAB)	2660.8	8	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-12}$	$7.1 \cdot 10^{-7}$

В приведенной таблице даны результаты расчетов тестовых задач с помощью программы EGM, реализующей на MATLABe метод (37),(38), и с помощью других зарубежных коммерческих и исследовательских пакетов. Все задачи решались на компьютере Celeron 2.02 GHz с оперативной памятью 1.0 Gb. Для сравнения использовались пакеты BPMPD v.2.3 (метод внутренней точки) [7], MOSEK v.2.0 (метод внутренней точки) [8] и широко распространенный коммерческий пакет CPLEX v.6.0.1 (метод внутренней точки и симплекс-метод).

В таблице указаны размерности  $m$ ,  $n$  и  $\rho$  -- плотность ненулевых элементов матрицы  $A$ ,  $T$  -- время решения задачи ЛП в секундах, в столбце *Iter* -- количество итераций (для программы EGM указано общее число решенных систем линейных уравнений в методе Ньютона при решении задач (38)). Везде полагалось  $\beta = 1$ . Вычислялись чебышевские нормы векторов невязок:

$$\Delta_1 = \|Ax - b\|_\infty, \quad \Delta_2 = \|(A^T u - c)_+\|_\infty, \quad \Delta_3 = |c^T x - b^T u|.$$

В третьей строке таблицы даны результаты расчетов задач ЛП с пятью миллионами неотрицательных переменных, тысячей ограничений, однопроцентной заполненностью матрицы  $A$  ненулевыми элементами. Время расчетов по программе EGM1 составило 16 мин. В четвертой строке приведены результаты в случае, когда задача имела 1000 ограничений, матрица  $A$  была полностью заполнена и  $n = 10^5$ . Время расчетов было 44 мин. Обе задачи были решены с высокой точностью (нормы невязок не превосходили  $7.1 \times 10^{-7}$ ). Обе эти задачи не удалось решить другими пакетами.

### Литература

1. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. Отыскание нормальных решений в задачах линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. 12. С. 1766--1786.
2. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т.43. 3. С.354-375.
3. Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г., Кетабчи С. О семействах гиперплоскостей, разделяющих полиэдры. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 2. С. 123-140.
4. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Моллаверди Н. Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 9. С. 1564--1573.
5. Mangasarian O.L. A Finite Newton Method for Classification. Optimizat. Meth. and Software. 2002. V. 17. pp. 913-930.
6. Mangasarian O.L. A Newton Method for Linear Programming. Journal of Optimization Theory and Applications. 2004. V. 121. pp.1-18.
7. Meszaros Cs. The BPMPD interior point solver for convex quadratic programming problems. Optimization Methods and Software. 1999. **11&12**. pp. 431-449.
8. Andersen E.D., Andersen K.D. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: an implementation of homogeneous algorithm. 2000. High Performance Optimization. pp. 197-232. Kluwer. New York.

# ЭВОЛЮЦИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ МОДЕЛЕЙ РЕГИОНАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ\*

В.И. Гурман (г. Переславль-Залесский)

*В работе рассматриваются этапы создания и различные аспекты применения последней версии социо-эколого-экономической модели региона, отражающей инновационные процессы, для поддержки стратегических управленческих решений, отвечающих принципам устойчивого развития. Демонстрируются возможности теоретического анализа. Приводятся примеры моделирования конкретных регионов. Обсуждаются информационные проблемы и организационные схемы их решения с учетом опыта реального моделирования ряда конкретных регионов.*

## 1. Введение

В развитии экономической теории важную роль сыграли классические модели экономического роста [1] допускающие глубокий теоретический анализ. В то же время игнорирование экологических и социальных аспектов не позволяет применять их для решения проблем развития в современной постановке.

Существуют современные модели мировой динамики [2], как раз ориентированные на решение таких проблем и сыгравшие важную роль в оценке угрозы экологического кризиса и формулировке современных концепций устойчивого развития. Однако, они уникальны в своем роде, не допуская сколь-либо глубокого качественного анализа.

В конце 1970-х годов в Сибирском отделении Академии наук в связи с решением проблемы сохранения природного комплекса озера Байкал и прилегающего региона были инициированы исследования с целью объединить достоинства обоих упомянутых типов моделей и одновременно избежать их недостатков, на пути эволюционного развития классических моделей: дополнения их экологическими блоками в сопоставимых терминах при сохранении их преимущественно теоретического характера. Они оказались успешными и вылились в достаточно общую методологию моделирования и системного анализа регионов [3, 4].

С тех пор эта методология развивалась также эволюционно вслед за становлением парадигмы устойчивого развития. Изначальная концепция модели региона как эколого-экономической переросла в социо-эколого-экономическую, и пополнилась новым блоком, отражающим активные инновационные процессы как важнейший фактор развития.

В докладе рассматриваются возможности теоретического анализа и применения последней версии модели для поддержки стратегических управленческих решений, отвечающих принципам устойчивого развития. Обсуждаются информационные проблемы и организационные схемы их решения с учетом опыта реального моделирования ряда конкретных регионов.

## 2. Описание модели и процедура оптимизации

Объектом исследования служит модель, представленная детально в [5], где регион рассматривается как открытая система, разделенная условно на три взаимодействующих подсистемы: экономическую, природную и социальную.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ, проект 06-02-00055 и РФФИ, проект 06-01-00330

Экономическая подсистема включает традиционные производственный и непромышленный секторы и нетрадиционные виды деятельности, направленные на восстановление или улучшение в определенном смысле состояния природной и социальной подсистем. Динамика природной и социальной подсистем описывается однотипно. Территориальное деление не учитывается. Потоки ввоза-вывоза продукции заранее не задаются, а формируются при выборе той или иной стратегии развития с учетом сложившихся экономических связей.

Инновации учитываются через видоизменение созданной ранее региональной модели [3,4] путем дополнения ее специальным блоком, описывающим инновационные процессы. При этом понятие «инновация» трактуется формально как любое целенаправленное изменение параметров исходной модели, которые прежде рассматривались как константы.

Число параметров исходной модели, как правило, велико. Поэтому предусматривается возможность их агрегированного представления в инновационном блоке с разными уровнями агрегирования.

Рассматриваемая концептуальная модель, описывается следующими соотношениями:

$$c = (E - A)y - Bu - A^z z - B^z u^z - A^d d - B^d u^d, \quad (1)$$

$$\dot{r} = \dot{\bar{r}} + N(r - \bar{r}) - Cy - Du - D^z u^z + C^z z + im^r - ex^r \quad (2)$$

$$\dot{k} = u - [\delta]k, \quad \dot{k}^z = u^z - [\delta^z]k^z, \quad \dot{k}^d = u^d - [\delta^d]k^d, \quad (3)$$

$$0 \leq y \leq \Gamma(k), \quad 0 \leq z \leq \Gamma^z(k^z), \quad 0 \leq d \leq \Gamma(k^d), \quad (4)$$

$$\dot{\theta} = -([\delta] + H_{inv} + [H_{dif}]) (\theta - \bar{\theta}), \quad \theta(0) = 0, \quad (5)$$

$$x^i = x_0^i (1 + \theta_j \alpha_{ij}), \quad i \in I_j, \quad \sum_{i \in I_j} \alpha_{ij} = 1 \quad (6)$$

Здесь  $y, z, d$  – векторы выпусков продукции по отраслям, активного природо-социовосстановления, активных инноваций,  $c$  – конечное потребление;  $(k, k^z, k^d)$ ,  $(\Gamma(k), \Gamma^z(k^z), \Gamma^d(k^d))$   $(u, u^z, u^d)$ ,  $(\delta, \delta^z, \delta^d)$  – основные фонды, мощности и инвестиции (векторы) и темпы амортизации (диагональные матрицы) в экономическом, природо-социо-восстановительном и инновационном секторах;  $p$  – матрица-строка цен (ценовых поправок);  $r$  – вектор индексов состояния природной среды и социума;  $\theta$  – вектор инновационных индексов (агрегированное описание изменения за счет инноваций элементов матриц  $A, A^z, B, B^z, C, D, C^z, D^z$  и других параметров);  $\bar{r}(t)$  – заданная функция (опорная), например получаемая из статистического прогноза;  $im^r, ex^r$  – миграционные потоки загрязнений и ресурсов;  $A, A^z, A^d$  – матрицы прямых затрат в экономическом, природо-социовосстановительном и инновационном секторах;  $B, B^z, B^d$  – матрицы фондообразующих затрат в указанных секторах;  $N$  – матрица коэффициентов

взаимовлияния компонентов природной и социальной подсистем;  $C$  – матрица коэффициентов прямого воздействия отраслей экономики на компоненты природной и социальной подсистем, а  $D, D^z$  – матрицы коэффициентов воздействия на указанные компоненты при инвестициях в отрасли экономики и в природо-социовосстановительный сектор;  $H_{inv}, [H_{dif}]$  – матрицы, отражающие влияние инвестиций и диффузии инноваций,

$$H_{inv} = \left[ \left( \sum_i H_{ij} u^i / k^i + \sum_k H_{kj}^z u^{zk} / k^{zk} \right) \right],$$

где  $H_{ij}, H_{kj}^z$  – коэффициенты «инновационности» инвестиций в  $i$ -й отрасли ( $k$ -м секторе), относящийся к  $j$ -му инновационному индексу;  $H_{dif}^j$  – коэффициент диффузии; выражения вида  $(X^j)$  обозначают векторы с компонентами  $X^j, (X_{ij})$  – матрицы с элементами  $X_{ij}, [X]$  – диагональные матрицы, построенные из компонент вектора  $X$ ;  $\alpha_{ij}$  – весовые коэффициенты. Матрицы  $B$  и  $B^z$  зависят от  $[H_{ij}]$  и  $H_{kj}^z$  соответственно, что отражает факт удорожания инвестиционных проектов с ростом их инновационности. Данная модель может трактоваться как непрерывная, так и дискретная по времени. Точкой сверху в непрерывном варианте обозначаются производные по времени (так  $\dot{k} = \frac{dk}{dt}$  и т.д.), а в дискретном – конечные разности ( $\dot{k} = \frac{k(t+h) - k(t)}{h}$  и т.д.), где  $h$  – временной шаг, который удобно задавать равным единице времени (типично – году),  $h=1$ . Все величины в правых частях уравнений и в конечных соотношениях берутся в момент  $t$ .

Предлагаемый способ агрегирования параметров (определения  $\theta$ ) состоит в следующем. Множество индексов  $I$  параметров  $x^i$  делится на подмножества  $I_j, j=1, 2, \dots, m$ , количество элементов множества  $I_j$  обозначим через  $m_j$ . Каждое подмножество связывается со скалярным значением  $\theta^j$  по формуле

$$\theta^j = \left( \sum_{i \in I_j} \frac{\Delta x^i}{|x_0^i|} \right) \frac{1}{m_j}$$

где  $\Delta x^i = x^i - x_0^i$ , а  $x_0^i$  – значение в начале наблюдения. Таким образом  $\theta^j$  имеет смысл среднего процента изменений в  $j$ -й группе,  $\bar{\theta}^j$  – его предельное значение, соответствующее мировому уровню.

Дезагрегирование может проводиться по различным правилам задания весовых коэффициентов  $\alpha_{ij}$ : равномерно по группе, распределению по случайному закону, на основе оптимизации.

В общем случае все матрицы и функции  $\Gamma(k), \Gamma^z(k^z), \Gamma^d(k^d)$  могут зависеть от  $t$  и вектора  $\theta$ , а также от  $r$  для учета инноваций, необратимости природных процессов при чрезмерных воздействиях, экономических ущербов от ухудшения

качества природной среды и т.п. Эти зависимости конкретно задаются при планировании сценарных расчетов, а по умолчанию принимаются линейными, например,

$$\Gamma(k) = \beta k, \quad \beta = \beta^{(0)} + \beta^{(1)}(r - \bar{r}), \quad A = A^{(0)} + A^{(1)}(r - \bar{r})$$

поэлементно, т.е.  $A_{ij} = A_{ij}^0 + A_{ij}^1(r - \bar{r})$ .

Основные ограничения на управляющие воздействия  $y$ ,  $z$  и  $d$  представлены в (5), а остальные управления  $u$ ,  $w$ ,  $u^d$  предполагаются неотрицательными. Возможны дополнительные ограничения вида  $(y, u, z, u^z, d, u^d) \in \Omega(t, k, k^z, k^d, r)$ , среди них наиболее типичны ограничения, связанные с трудовыми ресурсами

$$\lambda_{\min} L \leq l y + l^z z + l^d d \leq \lambda_{\max} L, \quad (7)$$

где  $l, l^z, l^d$  – трудоемкости в соответствующих секторах (матрицы-строки),  $L, \lambda_{\max}, \lambda_{\min}$  – соответственно население и его трудоспособная и минимально допустимая занятая доли, и ограничение на располагаемые инвестиции

$$\sum_i u^i + \sum_k u^{zk} + \sum_j u^{dj} \leq U. \quad (8)$$

Ограничения, отражающие требования устойчивого развития, делятся на «мягкие»  $r \in \Psi(t)$ , и «жесткие»  $r \in \Sigma(t)$ . Первые допускают нарушения, наказываемые штрафом.

Предлагается достаточно очевидный критерий оптимальности – максимум величины (функционала благосостояния)  $\Pi_F = \Pi(t_F)$ , где

$$\dot{\Pi} = (pc - S(r)) e^{-\rho t} = (p((E - A)y - Bu - A^z z - B^z u^z - A^d d - B^d u^d) - S(s, r)) e^{-\rho t}, \quad (9)$$

при заданных ограничениях и заданном состоянии в начале периода:

$$\Pi(0) = 0, \quad k(0) = k_0, \quad k^z(0) = k_0^z, \quad k^d(0) = k_0^d, \quad r(0) = r_0, \quad \theta(0) = 0,$$

где  $p$  – матрица-строка прогнозируемых цен (ценовых поправок),  $S$  – штраф за нарушение условий устойчивого развития,  $s$  – его параметр (штрафной коэффициент);  $\rho$  – коэффициент дисконтирования.

При подходящем выборе параметра  $\rho$  функционал  $\Pi$  можно трактовать и как накопленное душевое потребление, если принять, что население растет экспоненциально (в этом случае  $\rho$  рассматривается как сумма темпов дисконтирования и роста населения).

Для решения этой задачи векторы  $\theta, d$  разбиваются на два подвектора :  $(\theta, d)_{1,2}$ , где первый относится к матрицам  $AC$ , второй – к остальным параметрам. Соответственно разбивается векторное уравнение (4). Реализуется многоступенчатая процедура оптимизации, состоящая из следующих шагов.

1. Уравнения относительно  $(\theta_2, k^z, k^d)$  исключаются, матрицы  $A$  и  $C$  считаются зависящими от  $\theta_1$ , а  $\theta_2$  и остальные параметры модели рассматриваются как константы. Управления  $u, z, d$  считаются полуограниченными, обеспечивающими неравенства

$$\dot{k} \geq 0, \quad \dot{r} \geq 0, \quad \dot{\theta}_1 \geq 0,$$

управления  $d_2, u^z, u^d$  и темп дисконтирования  $\rho$  полагаются нулевыми. Ограничение (7) исключается.

2. Решается задача оптимального управления методом преобразования к производной задаче [6, 7]. При указанных предположениях она имеет первый порядок и сводится для каждого момента времени к конечномерной задаче оптимизации.

3. Шаги 1,2 повторяются для различных  $s$  и выбирается приемлемое значение  $s$  экспертным путем.

5. Восстанавливаются реальные ограничения и решение корректируется соответствующим образом одним из стандартных методов итераций.

### 3. Приложение к конкретным регионам

По методикам, разработанным на основе концептуальной модели (1)-(6) и представленным в монографии [5] был сформирован базовый набор информации для модели региона Переславля (Табл.1), включающих совокупность начальных данных для рассматриваемого горизонта планирования (2006 - 2020 г.г).

Табл.1

	1	2	3	4		1	2	3	4
$k$	210	750	37		$C^z$ (diag)	1	-1	1	1
$k^z$	4	12	1.5	8.5					
					$H$ (diag)	0.01	0.01	0.01	
						$A$	0.08	0.001	10-5
$k^d$	10	10	8			0.5	0.4	0.35	
$r$	5800	8.2	69.5	0.44		0.001	0.006	0.06	
$r_{\max}^h$	-	10	200	1	$B$	0	0	0	
$r_{\max}^s$	-	8.2	120	-			0.45	0.15	0.4
$r_{\min}^s$	5000	-	60	0.4		0	0	0	
$r_{\min}^h$	4000	0	50	0	$A^z$	0.2	27	3	200
$r^*$	6000	1.2	100	0.5			0.4	33	40
$\theta$	0	0	0			0	0.2	20	3000
$\bar{\theta}$	-0.5	-0.8	-0.7		$B^z$	0	0	0	0



$\gamma$	0.4	0.35	0.5			0.3	0.35	0.2	0.15
$\gamma^z$	3.7	0.019	0.03	0.0026		0	0	0	0
$\gamma^d$	0.002	0.003	0.003		$B^d$	0	0	0	
$im^r$	0	0	0.6	0.08		0.3	0.3	0.4	
$ex^r$	0	0	0.1	0.7		0	0	0	
$P$									
(row)	1	1	1		$Q^d$	50	50	50	
$l^y$	0.035	0.09	0.13		$N$	-0.003	-4	-0.05	0.01
$l^z$	0.03	0.3	2.5	40		-0.0001	-0.9	0.01	-0.005
$l^d$	10	10	10			0	-0.0015	-0.005	-0.2
$w$	0.6	60	60	4200		10 <sup>-6</sup>	-0.005	-0.0001	-0.002
$\delta$									
(diag)	0.06	0.06	0.07		$C$	0	0.011	0	
$\delta^z$									
(diag)	0.07	0.09	0.06	0.11		-0.0053	-0.0059	-0.0034	
$\delta^d$						0.0001	0.0005	0.0003	
(diag)	0.06	0.06	0.06			0.0002	0.0001	0.0003	

Напомним принятые размерности переменных состояния как основных величин:  $k_{1-3}, k_{1-4}^z, k_{1-3}^d, r$  – млн руб;  $r_3$  – тыс. чел; остальные переменные ( $r_{2,4}, \theta_{1-3}$ ) безразмерны. Размерности других величин, включая коэффициенты, устанавливаются исходя из их определений в модели. Например, для элементов 2-й строки матрицы  $C$  получается размерность 1/млн руб, для  $\gamma$  – 1/год, для  $l^y$  – тыс. чел.-год/млн руб, и т. д.

Рассматривался ряд сравнительных сценариев развития региона Переславля при следующих значениях параметров  $\rho, \lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ :  $\rho = 0.05, \lambda_{\min} = 0.04, \lambda_{\max} = 0.6$ . Среди них выделены три качественно хорошо различимых. Первый сценарий (А): продолжение тенденций развития базового периода 2001-2005 гг. без оптимизации. Второй (Б) – без активных инноваций. Располагаемые инвестиции: 120 млн руб. в год. Третий (В) – также оптимизационный, с тем же объемом располагаемых инвестиций, но при активной инновационной деятельности. В оптимизационных сценариях (Б, В) учитывалось ограничение, связанное с минимально допустимой занятостью  $\lambda_{\min} L = 27$  тыс. чел.

Результаты расчетов по указанным выше сценариям представлены на рис. 1-3.

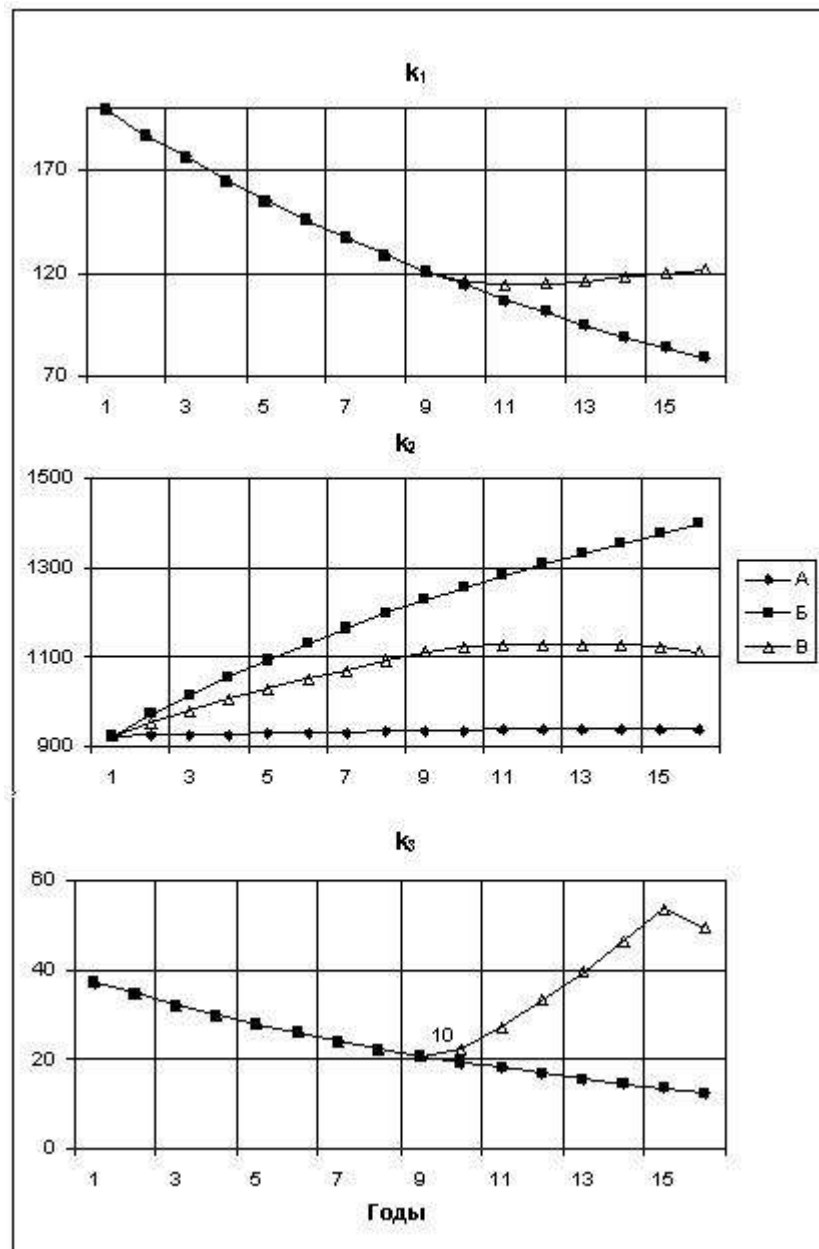


Рис 1.

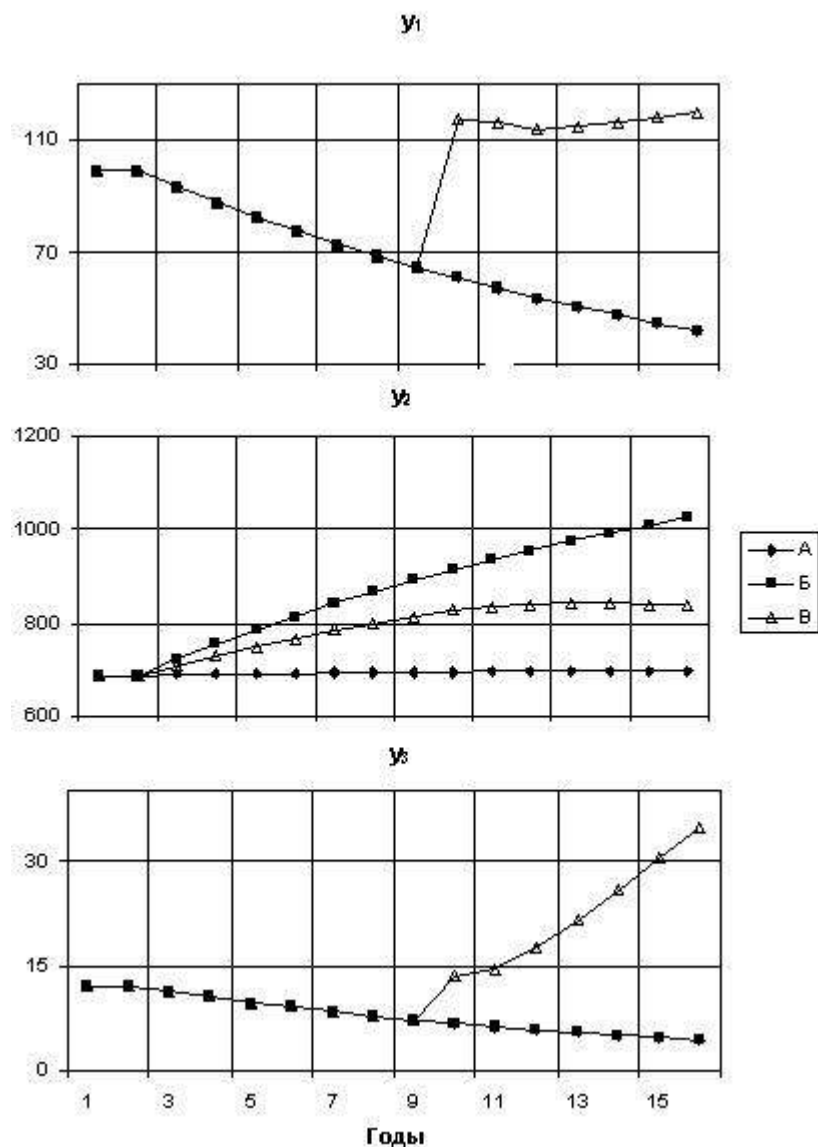


Рис 2.

В базовый сценарий (А) заложены следующие предпосылки: за счет инвестиций обеспечивается только простое воспроизводство основного капитала, в соответствии с нормами амортизации. В целом экономика в этом сценарии характеризуется вялым развитием производства, всецело обусловленным начальными характеристиками и отсутствием активных инновационных процессов. Результатом является его низкая экономическая эффективность. Активное воздействие на состояние природной и социальной среды отсутствует; природа и социум меняются под влиянием одного только фактора – объемов производства.

В сценарии Б получаются следующие эффекты оптимизации. Интенсивно развивается 2-я отрасль за счет ресурсов намного менее эффективной 1-й отрасли. Объем производства 1-й отрасли снижается на 50%, а объем производства 2-й отрасли вырастает почти в 2 раза. Природные ресурсы, несмотря на значительный рост потребляющей их 2-й отрасли, сохраняют тенденцию к росту за счет восстановления. Качество окружающей среды ухудшается из-за роста производства, однако остается в заданных допустимых пределах.

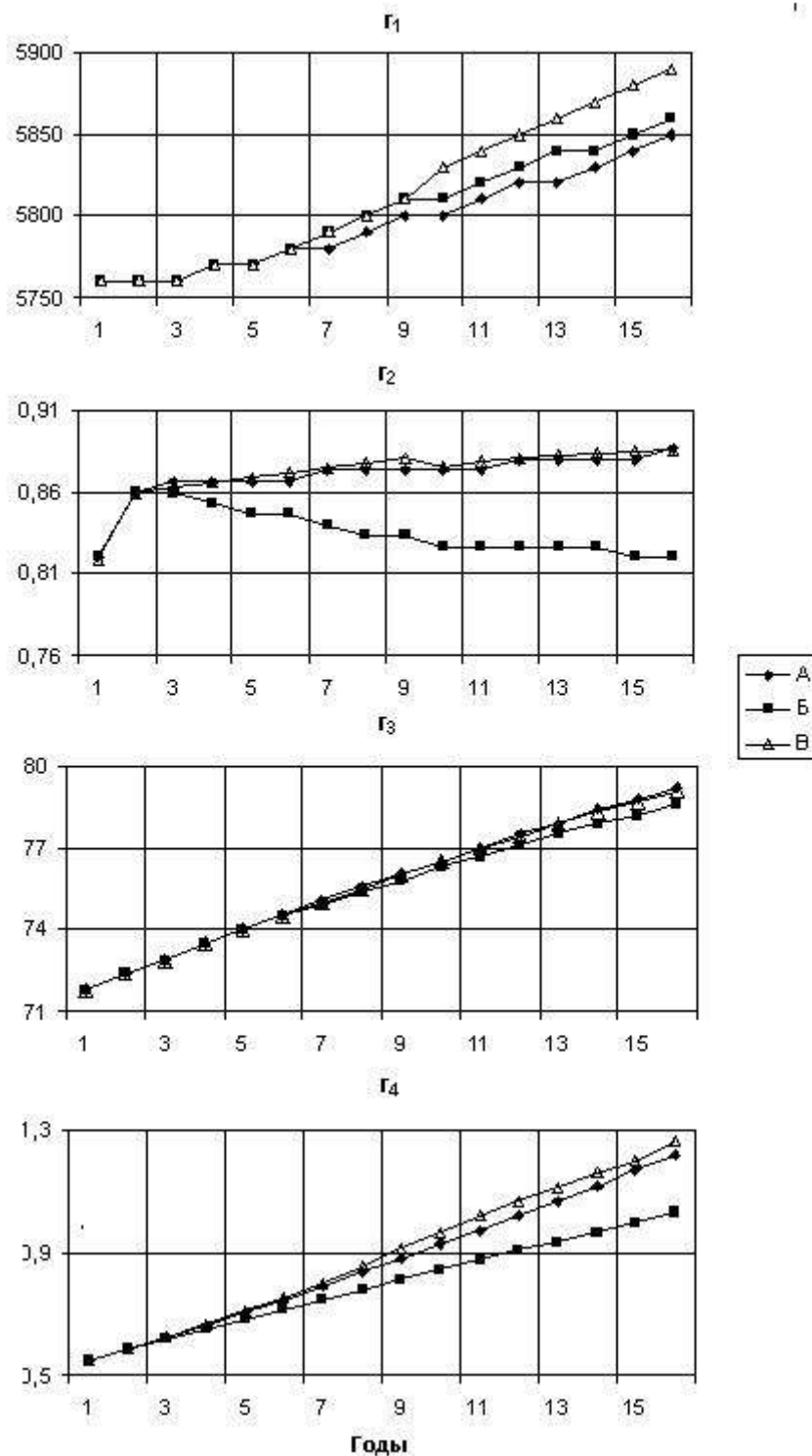


Рис 3.

Положительную динамику имеет индекс социального развития ( $r^4$ ) за счет активизации деятельности по восстановлению социальной среды: наблюдается значительный прирост основных фондов в этот сектор восстановительной деятельности с середины расчетного периода за счет соответствующих инвестиций.

За счет значительного роста производства к концу периода безработица в регионе практически исчезает.

В целом сценарии А и Б ярко демонстрируют структурную неэффективность, в первую очередь – из-за высоких затрат на производство продукции отрасли специализации с учетом природо- и социовосстановления. Одна из причин – отсутствие инвестиций инновационного назначения, предполагаемое в этих сценариях.

Сценарий В характеризуется существенной инновационной активностью (доля инвестиций инновационного назначения – более 30%). Этот сценарий выгодно отличается от остальных тем, что в результате инновационной деятельности примерно с середины периода становятся эффективными и активизируются 1-я и 3-я агрегированные отрасли наряду со 2-й. Это хорошо видно на рис.2, где выпуски этих отраслей переключаются с нижней границы, определяемой допустимым уровнем безработицы, на верхнюю, определяемую располагаемой мощностью. Тем самым демонстрируется важнейшая роль инноваций как эффективного ресурса для перехода региональной экономики на более перспективный путь, отвечающий концепции устойчивого развития.

Среди рассматриваемых сценариев важную роль играют оптимизационные, сгенерированные с использованием описанного алгоритма. Они позволяют получить наибольший экономический эффект при соблюдении жестких социально-экологических требований, чего практически невозможно добиться в иных сценариях, построенных на основе интуиции и опыта исследователей по причине сложности региональной системы и соответственно рассматриваемой модели.

Также проводились аналогичные расчеты для региона Иркутского Прибайкалья, включающего часть водосборного бассейна озера Байкал как зоны особого природопользования [9].

#### **4. Информационные проблемы**

Наиболее трудоемкий и наименее формализованный этап моделирования - формирование эмпирической базы, иными словами - наполнение модели реальной информацией, что в полной мере подтверждается проведенными исследованиями конкретных регионов. Если оставить в стороне проблему надежности существующих данных официальной статистики, которая должна так или иначе решаться статистическими органами, главной проблемой является острый дефицит самих этих данных, в частности, отсутствие систематической информации о взаимодействии подсистем единой региональной системы, которых в силу их комбинаторного характера должно быть на порядок больше, чем типичных данных о состоянии совокупности подсистем.

Это касается не только специфической информации по природной и социальной подсистемам модели, но даже экономической информации. Причина этого состоит в том, что собираемая статистика по своему содержанию формировалась без ориентации на целостную систему анализа развития. Некоторые частные проблемы отражены в статистике намного полнее, чем более важные для принятия стратегических решений. Особенно бессистемно в российской статистике формировалась структура социальной статистики, статистики природных ресурсов и охраны окружающей среды.

Недостаток данных для моделирования часто объясняется узостью, излишней дробностью входящих в нее показателей. Однако такой упрек в адрес рассматриваемых моделей был бы несправедлив. При построении схемы модели учитывались два обстоятельства: требования адекватности содержательной структуры модели, с одной стороны, и информационные возможности наполнения модели - с другой. Можно

сказать, что критерием при этом служил минимум требований к информации, позволяющий в то же время не упустить важных взаимосвязей между блоками модели, а также внутри них. Но даже при такой постановке модель требует информации, отсутствующей в современной статистике.

Принципиально их возможно получить по специальным методикам, реализующим процедуры идеализированных экспериментов, примеры которых приведены в [4,5]. Однако они привязаны к выбранной системе показателей (индексов) состояния - экономических, природных, социальных. Учитывая большую технологическую сложность и трудоемкость разработки и реализации подобных методик, о практической эффективности предлагаемого подхода можно говорить лишь в том случае, когда они будут унифицированы для широкого распространения. Для этого необходима стандартизация расширенной системы показателей. В ней особое место занимают показатели состояния (основные фонды, запасы природных ресурсов, загрязненности природных сред, индексы здоровья, безопасности, культуры и т.п.) как основные, которые следует по крайней мере выделить из официально утвержденного набора, содержащего и показатели других типов, например эффективности, нагрузки и пр. Последние, как показывает структура модели, являются производными от основных и, будучи назначенными самостоятельно, могут им противоречить.

Стандартизация важна также с точки зрения эффективного использования статистических данных на этапе подготовки к расчетам по модели и практической ценности результатов моделирования: они должны представлять собой информацию, выраженную в общепринятых показателях, которыми оперируют лица, принимающие решение. Данная модель на выходе должна быть сориентирована на получение именно стандартных, общепринятых, показателей, позволяющих прийти к практическим рекомендациям.

Стандартная система показателей должна быть организована по иерархическому принципу в расчете на пользователей различных уровней управления - от руководителей региона до конкретных специалистов. Примером может служить модифицированная Система Национальных Счетов (СНС), разработанная в Статистическом Бюро ООН, в которой традиционная СНС дополнена природным и социальным блоками.

К сожалению, в России в этом плане наблюдается откат назад. Если десять лет назад обязательной статистической формой были таблицы "затраты-выпуск" на макроуровне и уровне областей, то сейчас дело обстоит значительно хуже. Последний российский межотраслевой баланс был построен за 1992 г., а областные балансы вообще не строятся. Это существенно затруднило сбор статистических данных. Единственной официальной статистической базой служили статистические ежегодные отчеты, предоставляющие значительно более узкий круг показателей, чем таблицы "затраты-выпуск". Кроме того, в таких отчетах обнаруживаются нестыковки данных, поскольку они зачастую рассчитываются по разным методикам. Совсем неблагоприятная ситуация сложилась на следующем после областей уровне - районном, где о таблицах типа "затраты-выпуск" вообще не шла речь.

Тем не менее, разработанный в рамках модифицированной СНС набор показателей может быть принят уже сейчас в качестве стандарта, а рассматриваемая концепция социо-эколого-экономической модели может быть взята за основу работы по совершенствованию региональной статистики. Модель при этом могла бы внести значительную ясность в содержание региональной статистики: какие именно данные формировать и хранить на региональном уровне (что является предметом серьезных дискуссий [10]), и, как инструмент "глубокой" обработки информации, существенно повысить ее востребованность. Отдельные блоки информации, относящиеся к модели,

могут использоваться самостоятельно при решении конкретных задач развития региона. В то же время модель обеспечивает их согласованность, что крайне важно при выработке стратегических решений.

Сложный междисциплинарный характер проблем регионального развития, который нашел отражение и в концепции модели, и в опыте ее информационного наполнения, показывает необходимость привлечения самой разнообразной информации, выходящей далеко за рамки традиционной статистики. Практически речь должна идти об использовании всех информационных ресурсов; в связи с этим целесообразна их интеграция, в частности, интеграция ресурсов научно-технической информации (НТИ) и статистики, которые традиционно были разделены технологически и организационно и использовались в отдельных направлениях и различными потребителями. Это находится полностью в русле всеобщего процесса информатизации общества, которому ведущие страны мира, включая Россию, уделяют значительное внимание на государственном уровне. Он включает переход на электронные формы хранения и распространения информации, развитие телекоммуникационных сетей, в том числе региональных сетей с выходом в Интернет; комбинацию концентрированных и распределенных баз данных, создание новых поисковых систем с использованием искусственного интеллекта, внедрение информационных технологий во все сферы деятельности.

#### **5. Роль модели в организации статистических исследований**

Как уже говорилось, рассматриваемый подход, основанный на использовании предлагаемой модели, предполагает формирование большого количества данных нового типа - о взаимодействии подсистем, т.е. данных междисциплинарной природы, что требует организации взаимодействия разнородных специалистов, представителей различных дисциплин.

Конкретно организация таких совместных работ состоит прежде всего в формировании полного объема сравнительно однородных (элементарных) заданий. Далее необходимо добиться правильного понимания заданий; для этого они должны быть сформулированы достаточно четко, недвусмысленно, исходя из общей цели. Для выполнения задания необходимы соответствующее методическое обеспечение и план работ. Наконец, должна быть обеспечена возможность проверки правильности выполнения заданий.

Это хорошо известные принципы организации любых работ; научные исследования здесь не составляют исключения. Однако если при традиционных узкоспециальных исследованиях эти принципы реализуются естественно, "автоматически", то междисциплинарное исследование в этом отношении должно больше напоминать работу над проектом в условиях конструкторского бюро или проектного института, где указанные принципы доминируют, как легко проследить, не только в текущем функционировании, но даже в самой организационной структуре. В междисциплинарном исследовании роль такого проекта как раз и должна выполнять математическая модель на стадии абстрактного (концептуального) формулирования, которая предоставляет эффективные средства для практической организации работ.

Таким образом, организацию работ по информационному наполнению можно представить следующим образом. Участники работ делятся на специализированные группы (согласно монодисциплинарным подсистемам модели); кроме того, выделяется общесистемная группа. Задачей каждой специализированной группы является формирование специализированных данных, соответствующих данной подсистеме, вместе с отнесенными к рассматриваемой подсистеме данными по взаимодействиям с другими подсистемами. Таким образом, формируемые массивы междисциплинарных

данных (а их, напомним, подавляющее большинство) распределяются между специализированными группами. Предварительно каждой группой составляется рабочая методика на основе схемы абстрактного эксперимента и обсуждается со всеми участниками работ, что составляет этап контроля правильного понимания задачи. В ходе работы каждая группа формирует также свои "внутренние" задачи, отражающие профессиональные интересы, требующие общесистемной проработки. Задачи общесистемной группы: сбор, первичный контроль, хранение информации; проведение отладочных машинных экспериментов.

Такая схема была в основном выдержана при организации работ по моделированию регионов, так же как и первоначально, при моделировании Байкальского региона на основе абстрактной модели [5]. Имеющийся на сегодня опыт указывает на реальную возможность организации аналогичных исследований в значительно больших масштабах. Основные трудности здесь возникнут из-за необычной (но неизбежной) громоздкости такой модели и системы связанных с ней описаний и методик. Ясно, что для проведения подобных исследований потребуются вовлечение многих участников, и налаживание работы в таком составе вряд ли мыслимо без автоматизации всей методической подготовки. В противном случае трудно себе представить реальное обеспечение полноты и контроля понимания задач. Разумеется, это дело будущего, но с учетом быстрой "интеллектуализации" программно-алгоритмических средств, можно надеяться, что это - недалекое будущее.

## Литература

1. Эрроу К. Применение теории управления к экономическому росту // В кн.: Математическая экономика. - М.: Мир, 1974. 240 с.
2. Форрестер Дж. Мировая динамика. - М.: Наука, 1978. 160 с.
3. Модели управления природными ресурсами /Под ред. В.И.Гурмана - М.: Наука, 1981. 264 с.
4. Эколого-экономическая стратегия развития региона: Математическое моделирование и системный анализ на примере Байкальского региона. - Новосибирск: Наука, 1990. 184 с.
5. Моделирование социо-эколого-экономической системы региона / Под ред. Гурмана В.И., Рюминой Е.В. - М.: Наука, 2001.
6. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М:Наука\*Физматлит, 1997. 288 с.
7. Гурман В.И., Ухин М.Ю. Магистральные решения в задачах оптимизации стратегий развития регионов. А и Т. 2004. №4. С. 108-117.
8. Ухин М.Ю. Исследование инновационных стратегий устойчивого развития региона // Экономика природопользования, 2005, № 2. С. 41-45.
9. Гурман В.И., Урбанович Д.Е., Ухин М.Ю. Применение математических моделей для исследования устойчивого регионального развития // Изв. Кабардино-Балкарского научного центра РАН, 2(14), 2005. С. 6-13 .



## СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В АГРОИНЖЕНЕРНЫХ СИСТЕМАХ

Лукиных Г.Ф., Лукиных И.Г. (г.Киров)

*Цель исследования состояла в обосновании методов повышения надежности и эффективности функционирования технологических комплексов применением совокупности основных, резервных и дополнительных процессов с учетом свойств цикличности, динамичности и нестабильности темпов функционирования. Практическая значимость работы состоит в получении количественных оценок закономерностей процессов динамики систем агроинженерных технологий, в определении резервов, позволяющих повысить в 2...3 раза эффективность систем производства продукции в сельском хозяйстве. Результаты исследований использованы при разработке и применении рекомендаций по снижению потерь урожая при уборке и послеуборочной обработке зерна и кормов в производственных условиях при выполнении работ в хозяйствах.*

Исследование проблемы повышения надежности и эффективности функционирования технологических комплексов производства зерна и кормов обусловлено реальными потребностями специалистов в научной информации о закономерностях динамики процессов и резервах. Продовольственная безопасность страны предопределена уровнем производства в аграрном секторе. Эффективность производства продовольствия напрямую зависит от технической оснащенности, стабильности технологических процессов и компетентности специалистов. Приоритетный национальный проект «Развитие АПК» включает в себя одно из основных направлений: «Ускоренное развитие животноводства». Основными целевыми показателями этого направления являются: увеличение производства мяса на 7%, молока – на 4,5%. Достижение этих целевых показателей возможно только при увеличении производства зерна и кормов и повышении их качества.

Проблема анализа и оптимального синтеза систем занимает центральное место в современной науке, технике и технологии. Поиск решений при системном подходе проводят исходя из признания того факта, что если каждый элемент системы имеет оптимальные конструктивные или функциональные характеристики, то результирующее поведение системы может оказаться субоптимальным (близким к оптимальному) вследствие взаимодействия между отдельными ее подсистемами и изменениями внешних и внутренних условий выполнения процессов.

При изучении закономерностей динамики процессов систем агроинженерных технологий возникли тенденции исследовать совокупность объектов не как отдельные машины, отдельные операции и процессы, а как единую целостную систему. Объективными предпосылками к этому явился общенаучный прогресс и распространение современных научных системных идей и методов информационных технологий познания закономерностей процессов.

Существует необходимость решения многокритериальных задач динамики технологических потоков обрабатываемых материалов по стадиям их обработки не только в отдельных машинах и их рабочих зонах, но и в комплексах машин, в подразделениях хозяйств, в хозяйствах, в районах, в регионах в целом и т.д. Производственно-технологические аспекты и закономерности динамики систем и потоков технологических материалов в сложных процессах изучены недостаточно

полно. Проектирование поточно-цикловых процессов основано на предпосылке о стабильных темпах выполнения технологических операций и процессов в пределах завершенных циклов по линейной зависимости уровня процесса от продолжительности цикла. Адекватное описание поведения агроинженерной технологической системы уборки урожая и других в пределах продолжительности цикла осуществимости процесса может быть выполнено по закономерностям множества классов основных, обратных и преобразованных функций системной динамики. При моделировании процессов необходим учет нестабильности темпов процессов в пределах одиночного цикла и на множестве циклов осуществимости технологий.

В работах [1, 2] рассмотрены теоретические предпосылки повышения эффективности процессов систем агроинженерных технологий. Обоснованы основные свойства закономерностей процессов динамики систем в пределах цикла осуществимости технологий. Разработана концепция исследования фазового портрета агроинженерной технологической системы по множеству критериев: уровень процесса, темп, условная стоимость уровня и др. Установлено, что в реальных системах закономерности динамики процессов функционирования представляют собой нелинейные динамические функции критериев оценки эффективности элементов, ядер и систем в целом по фазам циклов в зависимости от продолжительности осуществимости процессов. Для изучения закономерностей процессов динамики систем в сельском хозяйстве обоснованы основные свойства элементов систем в пределах технологического цикла выполнения процесса.

1. Каждый элемент системы уборки урожая и других, а также ядро системы независимо от уровня иерархии имеет собственный фазовый портрет по уровню процесса, по темпу, по ускорению, по другим высшим производным от уровня процесса функционирования, по ущербности, по живучести, по кратности резервирования системы в динамике завершенного цикла процесса продолжительности выполнения технологии.

2. Идентичность функций фазовых портретов элементов и ядер систем predetermined физической или иной природой системы, а также цикличностью, завершенностью продолжительности цикла, эффектом насыщения по темпу, распознанным верхним пределом значения уровня процесса в конечном кванте функционирования системы.

3. Фазовые портреты элементов, ядер и систем в целом нелинейны и могут быть описаны множествами классов основных, обратных и преобразованных функций системной динамики по продолжительности выполнения процесса.

4. Многостадийные процессы динамики элементов, ядер и систем имеют не менее трех множеств результатов эффективности на выходе технологических операторов в подготовительных, основных, вспомогательных, дополнительных и завершающих операциях процесса.

5. Многостадийное множество результатов эффективности функционирования элементов, ядер и систем может быть объединено в два и более подмножества или разделено на классы по обоснованным критериям – разделяющим функциям.

6. Нестабильность функций фазовых портретов элементов, ядер и систем predetermined появление в фазовых портретах определенно положительных, попеременно положительно-отрицательных и отрицательных значений основных, обратных и преобразованных функций и их производных по продолжительности цикла осуществимости технологии.

7. Множества определенно положительных основных, обратных и преобразованных функций являются счетными. В эти множества входят уровень и темп процесса в классе основных функций; неопределенность отдельного состояния

системы, относительная стоимость уровня процесса – в классе обратных функций; относительный темп процесса, в дальнейшем живучесть системы, как критерий стабильности темпа (производительности, выработки, скорости) в классе преобразованных функций по квантам элемента, ядра и системы по состояниям процессов.

8. В пределах завершеного цикла продолжительность функционирования элемента, ядра и системы представлена счетным множеством равновеликих квантов. За квант принята целочисленная доля от общей продолжительности цикла функционирования системы.

Выявление резервов уровня процесса, квантов (времени, продолжительности), живучести системы и определение структуры основных, резервных и дополнительных технологий осуществляли по множеству критериев: уровень процесса, темп, ускорение, живучесть системы, кратность резервирования системы, ущербность и эффективность технологии и др.

Результаты разработки проекта-прогноза эффективности применения в целом для вариантных структур технологий вместо исходной системы уборки урожая приведены в таблице 1.

В качестве сравниваемых вариантов технологий рассмотрены: резервная (Р), основная (О), дополнительная (Д), модифицированная совокупная (М), исходная (И). В качестве обобщенных критериев приняты: эффекты модификации исходной (Эмс) и основной (Эмо) системы технологий.

Таблица 1 - Проект-прогноз структуры технологий

<b>Критерий</b>	<b>Вариант системы</b>					<b>Эффект</b>	
	Р	О	Д	М	И	Эмс	Эмо
Уровень, У	0,35	0,65	0,74	1,74	1,00	1,74	1,54
Время, Т	0,25	0,35	0,40	1,00	1,00	1,00	2,86
Темп, У1	1,38	1,86	1,86	1,74	1,00	1,74	1,86
Стоимость, С1	0,71	0,54	0,54	0,57	1,00	1,75	1,86
Живучесть, D1	0,72	0,71	0,80	0,75	0,33	2,27	2,15
Кратность резерва, Кр	1,39	1,41	1,25	1,33	3,00	2,25	2,13

Применение совокупности технологий в варианте соотношений уровней: 0,35 – резервная, 0,65 – основная за счет высвобождаемой продолжительности цикла, равной 0,40 от исходной продолжительности процесса позволяет дополнительную технологию выполнить в объеме 0,74. Условная стоимость единицы уровня процесса в единицах времени на единицу уровня процесса может достигнуть 0,57 от средней исходной условной стоимости. Живучесть системы может повыситься в 2,27 раза. Основным путем совершенствования совокупности технологий и каждой из них является снижение задержек времени, расходуемых в неэффективных фазах процессов в состояниях начальной и конечной частей цикла осуществимости процессов. Вторым по важности путем совершенствования технологических систем является повышение живучести систем за счет стабилизации темпа любого из процессов. Применение этих путей совместно позволяет наиболее эффективно, то есть с минимальной необходимой условной стоимостью, в 1,75...1,86 раза ниже существующей в исходной системе, выполнить проектно-прогнозную структуру технологий на уровне хозяйство, район, регион.

Изучено обобщенное состояние агроинженерной системы по фазам цикла осуществимости процесса (табл.2).

Таблица 2 - Обобщенное состояние агроинженерной системы

Модель и режим	Класс стабильности, балл	Живучесть		Кратность резерва	
		диапазон	средняя	диапазон	средняя
линейная	5	0	1	0	1
нелинейная:					
норма	5	1,00...0,8	0,9	1,00...1,25	1,11
риск	4	0,79...0,6	0,7	1,27...1,67	1,43
кризис	3	0,59...0,4	0,5	1,68...2,50	2,00
катастрофа	2	0,39...0,2	0,3	2,56...5,00	3,33
гибель	1	0,19...0	0,1	5,26...∞	10,00

Основная причина нестабильности и ущербности агроинженерной системы состоит в нестабильности темпа процесса функционирования системы в пределах реальной длительности цикла осуществимости процесса с распознанным уровнем процесса по верхнему пределу при наличии эффекта насыщения по темпу. В кванте с максимальной живучестью системы требуют минимальной кратности резервирования. В состоянии *норма* системы функционируют незначительную часть продолжительности цикла осуществимости исходной технологии. Агроинженерные системы уборки урожая и производства продовольствия с живучестью ниже 0,8...0,6 многократно ущербны. Совершенствование состояний *гибель*, *катастрофа* и *кризис* возможно применением резервных и дополнительных технологий с повышенной живучестью систем.

При нестабильном темпе выполнения процесса в исходных, основных, резервных и дополнительных технологиях определение норм выработки и потребности машин в хозяйствах, а также при проектировании комплексов машин в моделях учтены реальная нестабильность темпа процесса, живучесть и кратность резервирования системы.

Кратность резервирования темпа операций процесса

$$Kp_i = g_{\max} / g_i, \quad (1)$$

где  $g_{\max}$  – максимальное значение живучести системы в одном из квантов множества их в ядре, фазе или в системе;  $g_i$  - живучесть системы в кванте.

При максимальном значении живучести  $g_i = g_{\max} = 1$  кратность резервирования  $Kp = 1$ ; при  $g_i = 0$  кратность  $Kp = \infty$ .

Средневзвешенная кратность резервирования темпа процесса

$$Kp_i^* = \frac{\sum_{i=1}^n g_i \cdot Kp_i}{\sum_{i=1}^n g_i}, \quad (2)$$

где  $n$  – количество квантов процесса.

Кратность резервирования процесса по фазам цикла процесса

$$Kp_i^* = n / \sum_{i=1}^n g_i, \quad (3)$$

где  $n$  – количество квантов процесса в целом или в ядре, по фазе, шт.

Коэффициент снижения кратности резервирования процесса в ядре системы

$$cKp = Kp_{\text{я}} / Kp_{\text{с}}, \quad (4)$$

Пример. При уборке урожая ржи озимой в предприятии получено: количество квантов процесса  $n = 18$  дней; количество квантов в ядре системы  $n_{\text{я}} = 7$  дней; сумма живучестей во всех квантах системы  $\sum g_{ic} = 6,56$ ; сумма живучестей в квантах ядра системы  $\sum g_{i\text{я}} = 5,10$ . При указанных условиях кратность резервирования темпа по всем

квантам системы  $Kp_c=2,74$ , а в ядре системы  $Kp_я=1,37$ . Следовательно, в ядре системы уборки урожая возможно снизить резервирование на величину  $cKp=2,74/1,37=2$  раза.

Кратность резервирования темпа процесса использовали при проектировании структуры комплексов машин для выполнения резервных, основных и дополнительных процессов по уровням иерархии систем и при коррекции норм выработки и нормативов потребности в технике в хозяйствах. Эффект модификации ядра системы по сравнению с исходной системой

$$\mathcal{E}_m = D_{мя} / D_u, \quad (5)$$

где  $D_{мя}$  и  $D_u$  – соответственно живучесть ядра модифицированной и исходной системы. При отсутствии модификации  $\mathcal{E}_m=1$ , в деградирующей системе  $\mathcal{E}_m<1$ , в прогрессирующей  $\mathcal{E}_m>1$ .

Методы исследования закономерностей динамики процессов реализованы в алгоритмах, моделях, программах, в базах данных о процессах. В моделях учтены варианты свойства динамичности, нестабильности темпов процессов, живучесть и эффективность систем, их ядер и элементов. Моделирование закономерностей динамики процессов и выявление резервов систем агроинженерных технологий выполняли по схеме динамического моделирования.

Результаты моделирования, прогнозирования и проектирования закономерностей динамики процессов позволяют: повысить живучесть агроинженерных систем применением адаптивных резервных, основных и дополнительных технологий; создать и усовершенствовать проектно-выполнимую структуру адаптивных процессов, операций и комплексов машин в сельском хозяйстве; определить эффективную структуру основных, резервных и дополнительных процессов и технологий при различных природно-климатических условиях.

Методика исследований подробно рассмотрена в работе [1].

Синтез результатов исследования динамики процессов позволяет объединить их в информационно-нормативные динамические модели комплекса работ в завершенных циклах технологий. Это обеспечивает переход от традиционно принимаемой линейной зависимости уровня процесса и стабильных норм выработки к использованию нелинейной зависимости уровня процесса от его продолжительности по S-образной кривой роста, множеств ее производных основных, обратных и преобразованных функций систем.

Определены оценка стабильности темпа процесса по пятибалльной схеме тестов и рекомендации по совершенствованию системы по одному из пяти возможных состояний по живучести системы: норма, риск, кризис, катастрофа, гибель. Программу и методологию исследования закономерностей процессов динамики систем технологий выполняли по этапам.

1. Познание закономерностей динамики процессов функционирования систем по уровням иерархии объектов.

2. Проектирование адаптивных потребностей процессов в ресурсах.

3. Обеспечение выполнения процессов ресурсами.

Процессы изучены по уровням систем: растение (сорт), комплекс машин (зерно- и кормоуборочные), подразделение, хозяйство, район, регион.

Программа введения результатов исследования в практику предусматривала совершенствование процессов агроинженерных систем уборки урожая зерна, уборки урожая кормов по элементам: изучение резервов процессов в организациях, районах и области; разработка рекомендаций по совершенствованию процессов; проведение обучения специалистов и работников; освоение рекомендаций, новых способов и устройств, структуры технологий и комплексов машин, программ для ЭВМ по прогнозированию закономерностей технологического процесса.

Множество выполненных реализаций программы в системах уборки урожая зерновых культур позволили определить, проверить экспериментально в хозяйствах и рекомендовать основные пути совершенствования систем уборки урожая: повышение живучести систем применением адаптивных основных, резервных и дополнительных технологий; совершенствование систем адаптивных процессов, комплексов машин и нормативов; улучшение инженерного обеспечения работы технологических комплексов; стимулирование исполнителей за качество работы; изменение структуры технологий и комплексов машин, производства зерна и кормов.

Использование результатов анализа и синтеза закономерностей процессов динамики систем позволяет выполнить задачи прогнозирования структуры процессов и технологий на перспективу.

1. Определить тренды соотношений эффективных и неэффективных уровней процессов по регионам, районам, организациям, по природно - климатическим зонам.

2. Обосновать структуру систем технологий и техники по выполнению основных, резервных и дополнительных процессов с учетом нестабильности темпов и целевого назначения материалов.

3. Спроектировать субоптимальную структуру материально - технических ресурсов для реализации совокупности технологий.

4. Оценить эффективность совершенствования технологий и техники.

Существующая система уборки урожая зерна и кормов без учета динамики спелости зерна и частей растений и их целевого назначения при выполнении процессов по схеме: вход в процесс – первая фаза; основная фаза процесса с темпом выше среднего – вторая фаза; выход из процесса – третья фаза является неэффективной из-за низкой живучести агроинженерной системы уборки урожая в организациях, районах и в регионе в первой и третьей фазах процесса. Целесообразен переход к уборке урожая растений по комплексу альтернативных вариантных ресурсоэнергосберегающих технологий, взаимно дополняющих друг друга с учетом целевого назначения конечного продукта.

Проведен анализ и синтез закономерностей динамики процессов уборки урожая зерна в Кировской области. Реальные процессы обладают свойствами и параметрами динамичности, цикличности и нестабильности темпов процессов за весь период мониторинга. Продолжительность выполнения процесса за сезон с темпом выше среднего составила 30-40% в среднем по области. Продолжительность уборки урожая зерна с темпом ниже среднего в фазах начальной и конечной совместно составляет 60-70%. В результате процесс уборки урожая в среднем по области осуществляют с 40% ущербностью. Проведен поиск резервов и альтернативных решений по совершенствованию процессов уборки урожая в зоне повышенного увлажнения на примере области, районов и хозяйств на основе разработки методов и критериев прогнозирования, новых способов и средств механизации.

В целом по области вместо одного неэффективного исходного процесса уборки урожая зерна возможно выполнение не менее трех процессов:

1. Уборка урожая многокомпонентных смесей на корм.

2. Уборка урожая зерна в объеме 0,65 за 0,35 продолжительности второй фазы исходного процесса.

3. Послеуборочная обработка почвы, применение удобрений и посев озимых в объеме 0,74 за 0,40 продолжительности высвобождаемой третьей фазы исходного процесса уборки урожая зерна.

Применение программ и баз данных по прогнозированию процессов динамики технологических систем обеспечивает совершенствование структуры и содержания технологических комплексов машин. Это позволяет создавать адаптивные процессы и

системы производства и уборки урожая зерна и кормов, сократить сроки уборки урожая и потери зерна в 2-3 раза, повышает производительность труда на 35...40% при уборке урожая растений по безобмолотной технологии кормоуборочным комплексом машин. В результате освобождается резерв времени до 35...45% на послеуборочную обработку почвы, применение удобрений и посев озимых. При этом снижается на 30...35% объем работ по послеуборочной обработке влажного засоренного вороха зерна и незерновой части урожая.

Предлагаемая структура системы прогнозирования, проектирования и совершенствования основной и резервной технологий уборки урожая зерна и кормов по их целевому назначению содержит следующие новые элементы.

1. Прогнозирование закономерностей динамики процесса и определение структуры резервов технологий осуществляли по программе на ЭВМ в автоматизированном режиме исследований.

2. Диагностирование спелости зерен и растений проводили экспериментально по оригинальной авторской методике с использованием устройства для определения спелости зерен и частей растений по патенту России №1539635.

3. Прогнозирование процесса созревания и срока начала уборки урожая выполняли по результатам определения спелости зерен и частей растений в динамике их роста и созревания в хозяйствах по культурам и полям.

4. Основную и резервную технологию в совокупности при уборке урожая осуществляли: комплексами кормоуборочных машин – резервную на зерносеяж из поликомпонентных смесей, основную – зерноуборочным комплексом машин на семенное и продовольственное зерно.

5. Послеуборочную обработку зернового вороха осуществляли новым способом и устройствами для сепарации и фракционирования зернового вороха по а.с.СССР №1166845 и 1720752.

6. Контроль качества работы и стимулирование исполнителей за качество работы проводили независимо от выполнения нормы выработки по результатам применения Рекомендаций по выбору режимов работы зерноуборочного комбайна при уборке семенного зерна.

7. Решение задач совершенствования комплексной системы уборки урожая зерновых колосовых культур и заготовки кормов выполняли на основе использования базы данных о закономерностях динамики процессов в циклах осуществимости системами агроинженерных технологий.

## **Литература**

1. Лукиных Г.Ф., Лукиных И.Г. и др. Методы совершенствования процессов агроинженерных систем. – Киров: ФГУИПП «Вятка», 2003. – 224 с.
2. Лукиных Г.Ф. Разработка методов повышения надежности и эффективности функционирования технологических комплексов производства зерна и кормов: Автореф. дисс. ... д-ра техн. наук. – Киров, 2007. – 38 с.

## О ВОЗМОЖНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ: ИННОВАЦИИ И ИНТЕРЕСЫ СОЦИАЛЬНЫХ ГРУПП\*

В.Д.Матвеевко (Санкт-Петербург)

*Устанавливаются условия совпадения и несовпадения интересов социальных групп при выборе направления изменения параметра производственной функции. Исследуется влияние на эти условия эластичности замещения факторов. Показано, что возможность различия производственных функций между странами заставляет пересмотреть некоторые известные результаты моделей экономического роста.*

**Введение.** Начиная с работ Р.Солоу [1, 2], модели экономического роста, основанные на производственных функциях, служат одним из основных инструментов экономического анализа. Круг таких моделей существенно расширился, в частности, в связи с развитием теории эндогенного роста (см. обзор [3]). Однако, по мере развития теории роста, становились очевидными проблемы, связанные с ее практическим применением. Создатели неоклассической теории роста в своих моделях имели в виду, прежде всего, экономику США, но с помощью этих же моделей изучались другие страны и проводился межстрановой анализ, при этом предположения моделей далеко не всегда подвергались переоценке.

Часто модели роста, в том числе и ориентированные на экономическую политику, основываются на упрощенных предположениях относительно значений параметров. Например, полагают, что разнотипные страны имеют одинаковое распределение дохода между владельцами факторов производства (труда и капитала). Работа [4] показывает неадекватность такого предположения: доля капитала в промышленности в период 1990-2003 гг. существенно различалась (например, 0,33 в Исландии и 0,82 в Чили), причем в развивающихся странах она была, в среднем, выше, чем в развитых.

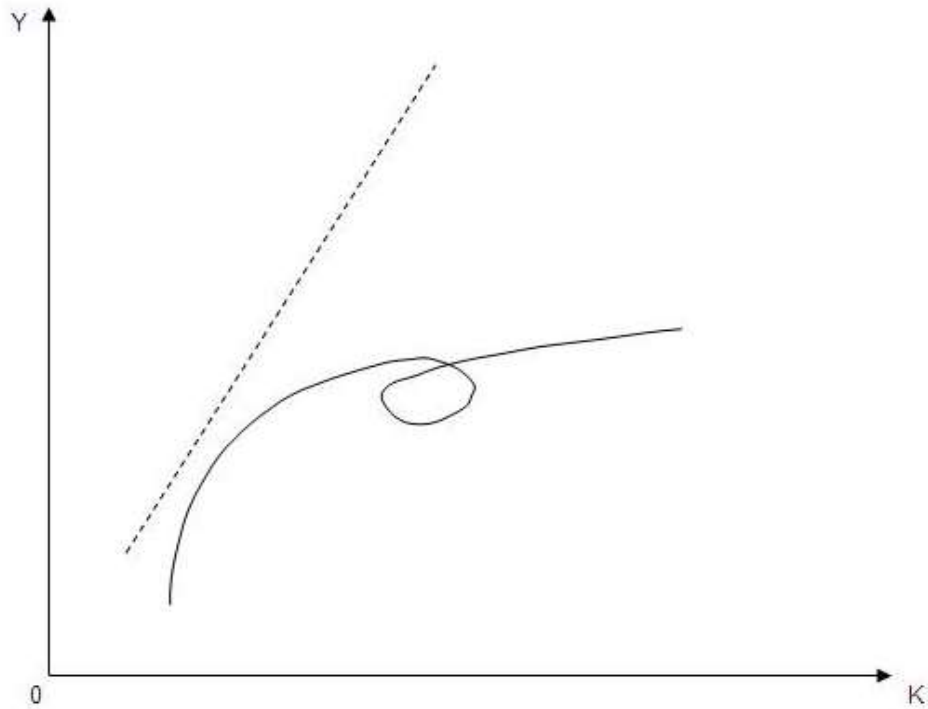
Другое предположение – о свободном обмене технологиями между странами и, соответственно, о совпадении производственных функций – также является чрезмерным упрощением. Даже если все страны имели бы свободный доступ к наиболее современным технологиям, что далеко не так, существующие институты сделали бы в ряде стран невозможным использование этих технологий в неизменном виде.

Гипотезы в большинстве моделей роста соответствуют так называемым стилизованным фактам роста [5, 6], которые плохо описывают динамику многих развивающихся стран, плановых и переходных экономик. Например, такой факт, как постоянство капиталоотдачи (т.е. выпуска на единицу капитала), не соответствует динамике российской экономики, начиная с 1960-х годов (рис. 1). Модели, в основу которых положен этот стилизованный факт, на протяжении нескольких десятилетий использовались в практике Всемирного Банка, и, по мнению У.Истерли [7], именно неадекватность этих моделей была причиной неэффективности помощи развитых стран развивающимся.

---

\* Работа выполнена при поддержке РГНФ (проект № 07-02-04048а).





**Рис. 1** Схематическое изображение траекторий экономик США и России в 1930-2000-х гг. в фазовом пространстве «капитал – выпуск».

Значимость проблем международного экономического развития в условиях глобализации обуславливает сегодня чрезвычайную актуальность теоретических и эмпирических исследований, связанных с основаниями моделей экономического роста и, в частности, с производственными функциями. Модели роста пытаются объяснить колоссальные различия в развитии стран мира и выявить оптимальные пути развития. Для нашей страны подобные исследования тем более актуальны в связи с необходимостью уменьшения ресурсозависимости и перехода к устойчивому развитию на основе экономики знаний. Сказанное объясняет тот интерес, который сегодня связан с теорией производственных функций.

Напомним, что производственная функция показывает выпуск продукта в зависимости от затрат факторов (чаще всего это физический капитал  $K$  и труд  $L$ , точнее, их услуги). Распространение получили:

$$\text{функция Леонтьева: } F(K, L) = \min\{A_K K, A_L L\},$$

$$\text{функция Кобба-Дугласа: } F(K, L) = (A_K K)^\alpha (A_L L)^{1-\alpha},$$

$$\text{функция CES: } F(K, L) = [\alpha(A_K K)^p + (1-\alpha)(A_L L)^p]^{1/p}.$$

Здесь  $A_K, A_L > 0$  - коэффициенты эффективности факторов,  $0 < \alpha < 1$ ,  $p \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$  - параметры. Обычно функцию Кобба-Дугласа записывают в виде  $AK^\alpha L^{1-\alpha}$ . Функция CES в частном случае  $A_K = A_L$  также записывается в виде  $A[\alpha K^p + (1-\alpha)L^p]^{1/p}$ . Коэффициент  $A$  известен как общая производительность факторов (total factor productivity, TFP).

Эти три типа функций тесно связаны между собой. В пределе при  $p \rightarrow 0$  CES-функция превращается в функцию Кобба-Дугласа, а при  $p \rightarrow -\infty$  - в функцию Леонтьева. При обсуждении производственных функций чаще говорят не о параметре  $p$ , а об эластичности замещения  $\sigma$ . Эти две величины связаны между собой

равенством:  $p = 1 - \frac{1}{\sigma}$ . Таким образом, для функции Леонтьева  $\sigma = 0$ , для функции Кобба-Дугласа  $\sigma = 1$ , для CES-функции  $\sigma \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

Укажем некоторые направления современных исследований, относящихся к производственным функциям и их применениям в моделях экономического роста.

В [8] выявляются критические значения параметра  $\sigma$ , при которых качественно меняется характер экономической динамики.

Немало работ последних лет посвящено оцениванию значений  $\sigma$  по данным, относящимся к отдельным странам или выборкам стран (например, [9, 10]). При этом разные авторы получают совершенно разные значения  $\sigma$  (существенно меньшие 1, близкие к 1, существенно большие 1), что лишь подчеркивает необходимость совершенствования теории.

Другое направление составляет исследование коэффициентов эффективности факторов или коэффициента TFP [11-16]. Для нас будет представлять интерес такой результат Д.Акемоглу [14, 15]: при высокой эластичности замещения  $\sigma$  технический прогресс направлен на увеличение эффективности имеющегося в избытке фактора, тогда как при низкой эластичности замещения – на повышение эффективности имеющегося в недостатке фактора.

Ряд работ посвящен возможности представления «глобальной» производственной функции  $F(x)$  как результата оптимального выбора «локальной» технологии из заданного технологического меню:

$$F(x) = \min_{l \in \Lambda} \varphi(x, l).$$

Здесь  $x$  – вектор факторов,  $l$  – локальная технология,  $\varphi(x, l)$  – локальная производственная функция,  $\Lambda$  – технологическое меню. В [17, 18] было получено такое представление произвольной  $n$ -факторной глобальной производственной функции с постоянной отдачей от масштаба через локальные производственные функции Леонтьева. Позднее в [19] было указано аналогичное представление глобальной двухфакторной функции Кобба-Дугласа через локальные функции с эластичностью замещения  $\sigma < 1$ .

Ряд новых результатов в теории роста получен с использованием других типов производственной функции. Так, автором [20-22] разработана «fK-модель», в которой производственная функция имеет вид  $f(V)K$ , где  $K$  – капитал,  $V$  – управляющая переменная, которая представляет собой потребление на единице капитала. Модель имеет микрооснования, учитывающие институты труда, такие, например, как эффективная заработная плата (efficiency wages) или возможности вторичной занятости. Если неоклассические модели практически не объясняют динамику российской экономики (см. рис. 1), то fK модель показывает наличие зон роста и зон спада, границы которых зависят от институциональных параметров (рис. 2).

В настоящей статье рассматривается возможность изменения параметра  $\alpha$  функции Кобба-Дугласа или CES-функции. Предполагаются возможными как изменения этого параметра во времени в одной стране, так и различия между странами. Близкие вопросы рассматривались в [23, 24] применительно к двух- и трехфакторной функции Кобба-Дугласа.

Поскольку нет ни видимых теоретических причин, ни эмпирических данных, которые свидетельствовали бы о том, что технический прогресс состоит лишь в изменении того или иного конкретного параметра производственной функции и не затрагивает другие, возможность изменения параметра  $\alpha$  представляется столь же

интересной, как и возможность изменения коэффициентов эффективности  $A_K, A_L$ , исследовавшаяся в [14, 15].



**Рис. 2. Области роста, спада и дезинвестиций в fK-модели.**

Возможная экономическая постановка вопроса следующая. Пусть страна получает доступ к технологии (производственной функции), которая характеризуется параметром  $\alpha$ , или может выбрать значение  $\alpha$  из некоторого множества (технологического меню). Согласятся ли на определенное значение  $\alpha$  экономические агенты, имеющие несовпадающие интересы, – владельцы труда (работники) и владельцы капитала («капиталисты»)?

**Технический прогресс и изменение производственной функции.** Изменения в характере социально-экономической динамики связаны, прежде всего, с изменениями технологии и, в частности, по-видимому, с несоответствием технологических изменений и существующих институтов. Наиболее распространенным способом описания технологических изменений долгое время было изменение коэффициента TFP. Именно такой способ использовался в работах Ф.Кидленда и Э.Прескотта, отмеченных Нобелевской премией по экономике в 2004 г. Однако, такой подход не учитывает то, что технический прогресс может быть направленным. Почему важен вопрос о направлении технического прогресса? Страна может иметь в избытке тот или иной фактор производства, например, неквалифицированный труд, квалифицированный труд, человеческий капитал, физический капитал, природные ресурсы. То, насколько производительно можно использовать избыточный фактор, зависит от эластичности замещения между факторами. Если эластичность замещения высокая, технологические изменения будут направлены на использование избыточного фактора. Например, когда человеческий капитал мигрировал в США и выращивался внутри страны, одновременно технологии в США менялись в результате инноваций

таким образом, что более интенсивно использовался человеческий капитал, а производство требующее неквалифицированного труда частично переносилось в другие страны. Если же эластичность замещения факторов низкая, то технологии будут модифицироваться таким образом, чтобы усиливался дефицитный фактор.

Возможности технологических изменений определяют путь развития экономики страны. Скажем, в России расхожей стала фраза о перепроизводстве инженеров. Но такой «излишек» превратится в дефицит, если технологические изменения будут направлены на усиление роли человеческого капитала. Точно так же, то, насколько существенна для экономики демографическая проблема, зависит от того, каким будет направление технического прогресса. Кроме того, характер экономической динамики, в частности, возможность устойчивого эндогенного роста или сложной динамики (например, хаотических траекторий) определяется типом производственной функции, а он может изменяться в результате технологических изменений.

Здесь возникает такая проблема: страны - технологические лидеры проводят технологические изменения с учетом того, какого рода ресурсы имеются у них в недостатке или избытке. Но затем технологии переносятся в другие страны, где наделенность факторами производства иная, поэтому новые технологии могут оказаться неэффективными. В этой связи остро стоит вопрос о сохранении фундаментальной науки и НИОКР в России и развитии производства на основе собственных технологий.

Другая проблема состоит в том, что при переносе технологий совсем не обязательно в стране-получателе технология будет использоваться в первоначальном виде. Большую роль играют институты; в частности, в фактически используемых технологиях могут воплощаться интересы социальных групп, поскольку весь производственный процесс в значительной степени связан не только с чисто экономическими, но также с социальными и политическими институтами. «Социальные технологии» (термин Р.Нельсона [25]) используются в производственном процессе наравне с физическими технологиями. (Среди «социальных технологий» методы менеджмента, сила профсоюзов, размер доли, принадлежащей работникам в активах предприятия, разного рода неформальные институты и т.д.)

Выбор параметров производственной функции может происходить как на стадии НИОКР, так и на стадиях распространения инноваций, производства и даже распределения – производственная функция может быть изменена de facto если это выгодно достаточно сильной группе агентов.

**Производственные функции, интересы социальных групп и распределение дохода.** Как известно, в случае совершенной конкуренции, распределение ВВП между владельцами факторов (капиталистами и работниками) совпадает с разложением производственной функции по теореме Эйлера:

$$F(K, L) = \frac{\partial F}{\partial K} K + \frac{\partial F}{\partial L} L.$$

Таким образом, доли владельцев факторов равны  $\theta_K = \frac{\partial F}{\partial K} \frac{K}{F}$ ,  $\theta_L = \frac{\partial F}{\partial L} \frac{L}{F}$ . Для функции Кобба-Дугласа эти доли составляют, соответственно,  $\alpha$  и  $1 - \alpha$ .

Для CES-функции, как нетрудно убедиться, доли владельцев факторов в доходе равны:

$$\theta_K = \frac{\alpha}{\alpha + (1 - \alpha) \left( \frac{A_L L}{A_K K} \right)^p}, \quad \theta_L = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha + \alpha \left( \frac{A_K K}{A_L L} \right)^p}.$$

Если эффективные значения факторов совпадают:  $A_K K = A_L L$ , то, как и для функции Кобба-Дугласа, факторы получают доли  $\alpha$  и  $1-\alpha$ . Если  $A_K K > A_L L$ , будем говорить, что капитал является избыточным фактором. Наоборот, при  $A_K K < A_L L$  избыточным фактором является труд. Видим, что при высокой эластичности замещения ( $\sigma > 1$  и, соответственно,  $0 < p < 1$ ) избыточный фактор получает повышенную долю дохода, по сравнению с распределением  $\alpha : 1-\alpha$ . Например, если труд избыточен, то  $\theta_L > 1-\alpha$ . При низкой эластичности замещения ( $0 < \sigma < 1$  и  $p < 0$ ), наоборот, избыточный фактор получает пониженную долю дохода. Это говорит о том, что в [14, 15] технический прогресс направлен на повышение эффективности того фактора, который получает повышенную долю дохода.

Социальные группы – *работники* и *капиталисты* соглашаются на увеличение/уменьшение параметра  $\alpha$ , если при этом увеличивается их доход. Для функции Кобба-Дугласа доходы социальных групп равны:

$$\frac{\partial F}{\partial K} K = \alpha F(K, L), \quad \frac{\partial F}{\partial L} L = (1-\alpha)F(K, L).$$

Для CES-функции доходы социальных групп составляют:

$$\frac{\partial F}{\partial K} K = \alpha F(K, L)^{1-p} (A_K K)^p, \quad \frac{\partial F}{\partial L} L = (1-\alpha)F(K, L)^{1-p} (A_L L)^p.$$

Считаем далее, что в коротком периоде величины факторов  $K, L$  фиксированы.

**Случай функции Кобба-Дугласа.** Условием возрастания с ростом  $\alpha$  дохода капиталистов (т.е. величины  $\alpha ALk^\alpha$ , где  $k = \frac{K}{L}$ ) является неравенство  $(\alpha k^\alpha)' > 0$ , эквивалентное следующему:  $1 + \alpha \ln k > 0$ .

Условием возрастания с ростом  $\alpha$  дохода работников (величины  $(1-\alpha)ALk^\alpha$ ) является неравенство  $[(1-\alpha)k^\alpha]' > 0$ , эквивалентное  $(1-\alpha) \ln k - 1 > 0$ .

Рассмотрим два случая: 1)  $0 < k < 1$  и 2)  $k > 1$ .

В случае 1) условие возрастания дохода капиталистов эквивалентно неравенству  $\alpha < -\frac{1}{\ln k}$ . Однако, это неравенство активно ограничивает область возрастания дохода

лишь при  $0 < k < \frac{1}{e}$ , тогда как при  $\frac{1}{e} < k < 1$  оно выполняется автоматически, и подходящими являются любые  $\alpha \in (0, 1)$ . Условие возрастания дохода работников

имеет вид:  $\alpha > 1 - \frac{1}{\ln k}$ .

В случае 2) условие возрастания дохода капиталистов выполняется автоматически, т.е. капиталисты безусловно поддерживают увеличение параметра  $\alpha$ .

Условием возрастания дохода работников является неравенство  $\alpha < 1 - \frac{1}{\ln k}$ , при этом допустимыми оказываются лишь точки  $k > e$ .

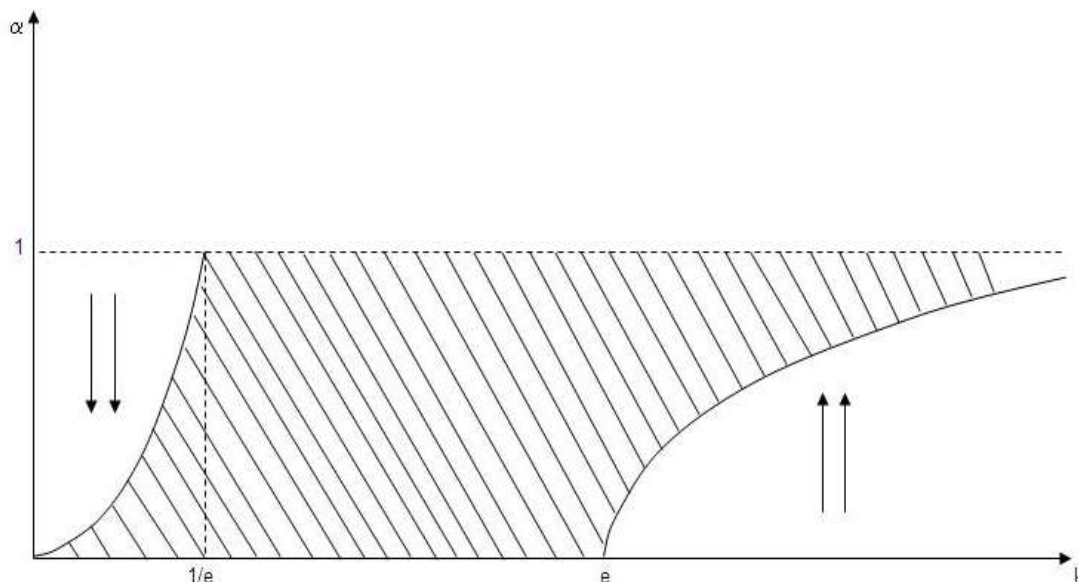
Из сказанного следует, что имеется две области, где интересы групп совпадают, т.е. капиталисты и работники заинтересованы в изменении параметра  $\alpha$  в одном и том же направлении (эти области показаны на рис. 3 сонаправленными стрелками):

а) В области  $\Omega_0^\downarrow = \{(k, \alpha) : 0 < k < \frac{1}{e}, \alpha > -\frac{1}{\ln k}\}$  обе социальные группы соглашаются на уменьшение параметра  $\alpha$ ;

б) В области  $\Omega_0^\uparrow = \{(k, \alpha) : k > e, \alpha < 1 - \frac{1}{\ln k}\}$  обе группы соглашаются на

увеличение параметра  $\alpha$ .

В заштрихованной на рис. 3 части полосы  $0 < \alpha < 1$  интересы социальных групп расходятся: это поле для социальных конфликтов, вплоть до передела собственности, восстаний и гражданских войн – форма конфликта зависит от институтов, существующих в конкретное историческое время в конкретной стране.



**Рис. 3. Области совпадения и несовпадения интересов социальных групп в случае функции Кобба-Дугласа**

**Модель и наблюдаемая динамика.** Данная модель не противоречит наблюдаемой социально-экономической динамике. Например, постоянное увеличение доли капитала в Западной Европе в 1990-2000-х годах объясняется тем что, с ростом капиталовооруженности  $k$ , страны пришли в область  $\Omega_0^\uparrow$  (см. рис. 3), где обе социальные группы заинтересованы в повышении доли капитала.

С помощью модели можно проследить траекторию гипотетической развивающейся страны. При низкой капиталовооруженности страна может находиться на границе области  $\Omega_0^\downarrow$ , затем, по мере роста капиталовооруженности, она вступает в зону социального конфликта, где распределение дохода между социальными группами зависит от их относительной переговорной силы и других институтов. Во многих случаях можно ожидать, что доля труда возрастет. При дальнейшем повышении капиталовооруженности, страна вступает в область  $\Omega_0^\uparrow$ , где обе группы соглашаются на повышение доли капитала – в частности, работники часто сами становятся держателями ценных бумаг.

**Случай CES-функции** интересен, поскольку позволяет исследовать изменение областей совпадения интересов групп в зависимости от эластичности замещения факторов. Условием возрастания дохода капиталистов является неравенство:

$$\frac{\alpha}{p} \left[ 1 - \left( \frac{A_K}{A_L} k \right)^p \right] < 1, \text{ где } k = \frac{K}{L}. \quad (1)$$

Условием возрастания дохода работников является неравенство:

$$\frac{(1-\alpha)}{p} \left[ 1 - \left( \frac{A_L}{A_K k} \right)^p \right] > 1. \quad (2)$$

(Вывод этих неравенств не приводим).

Выделим два случая: 1)  $0 < k < \frac{A_L}{A_K}$ , т.е. труд является избыточным фактором, и

2)  $k > \frac{A_L}{A_K}$ , т.е. капитал является избыточным фактором.

Пусть  $p < 0$ . В случае 1) обратимся сначала к интересам капиталистов. В (1) квадратная скобка отрицательна, и левая часть положительна. Условие возрастания дохода капиталистов эквивалентно неравенству:

$$\alpha < \frac{p}{1 - \left( \frac{A_K}{A_L} k \right)^p}. \quad (3)$$

Заметим, что функция, стоящая в правой части, возрастает по  $k$  и достигает значения 1 в точке:

$$a(p) = \frac{A_L}{A_K} (1-p)^{1/p}.$$

Это значит, что при  $k \in (0, a(p))$  капиталисты заинтересованы в увеличении  $\alpha$  лишь при условии (3), а при  $k \in (a(p), 1)$  – безусловно. Что касается работников, в случае 1) в левой части неравенства (2) стоит отрицательное число, т.е. неравенство (2) несовместно. Это означает, что, работники в случае 1) заинтересованы в уменьшении параметра  $\alpha$ .

В случае 2) левая часть неравенства (1) отрицательна, т.е. (1) выполняется автоматически: капиталисты безусловно заинтересованы в увеличении параметра  $\alpha$ . Для работников, перепишем неравенство (2) в виде:

$$\alpha < 1 - \frac{p}{1 - \left( \frac{A_L}{A_K k} \right)^p}. \quad (4)$$

Правая часть возрастает по  $p$  и меняет знак в точке

$$b(p) = \frac{A_L}{A_K} \left( \frac{1}{1-p} \right)^{1/p}.$$

При  $k \in \left( \frac{A_L}{A_K}, b(p) \right)$  работники заинтересованы в снижении  $\alpha$ , а при  $k > b(p)$  и условии (4) – в повышении  $\alpha$ .

Таким образом, для CES-функции при  $p < 0$  на плоскости  $(k, \alpha)$  имеется две области совпадения интересов социальных групп:

а) В области  $\Omega_p^\downarrow = \{(k, \alpha) : 0 < k < a(p), \alpha > \frac{p}{1 - \left( \frac{A_K}{A_L} k \right)^p}\}$ , обе социальные

группы соглашаются на уменьшение параметра  $\alpha$ ;

б) В области  $\Omega_p^\uparrow = \{(k, \alpha) : k > b(p), \alpha < 1 - \frac{p}{1 - \left(\frac{A_L}{A_R k}\right)^p}\}$  обе социальные группы

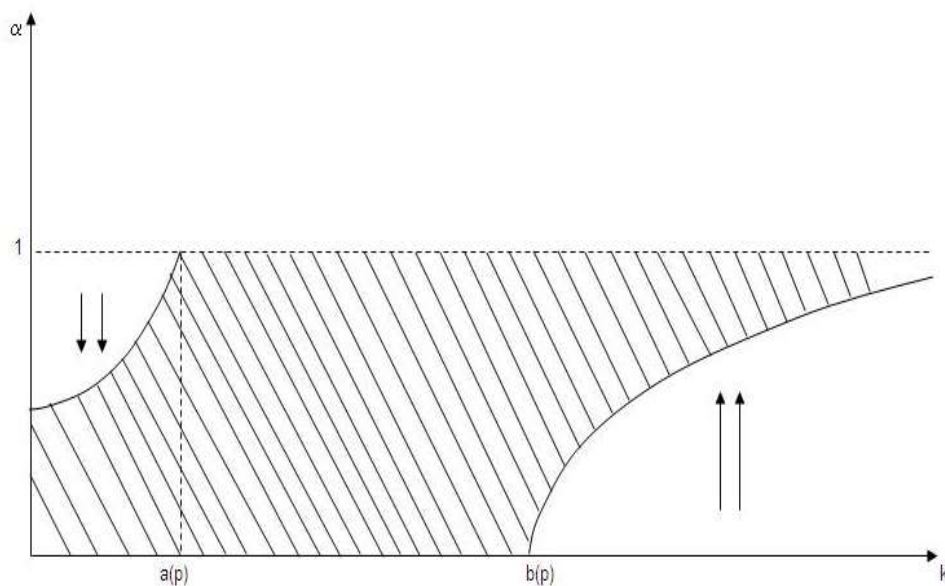
соглашаются на увеличение параметра  $\alpha$ .

В остальной части полосы  $0 < \alpha < 1$  интересы социальных групп расходятся.

Пусть теперь  $0 < p < 1$ . В случае 1) рассмотрим условие возрастания доходов капиталистов (3). Левая часть неравенства положительна, и почти все, что было сказано в случае 1) при  $p < 0$ , остается в силе. Отличие состоит в том, что теперь при  $k \rightarrow 0$  граничное значение  $\alpha$  приближается к  $p$ , а не к 0. Для работников левая часть неравенства (2) отрицательна, это противоречие означает, что работники заинтересованы в уменьшении параметра  $\alpha$ .

В случае 2) капиталисты безусловно поддерживают увеличение  $\alpha$ . Для работников вновь приходим к неравенству (4). Область на плоскости  $(k, \alpha)$ , в которой работники заинтересованы в увеличении  $\alpha$  описывается формально так же, как и в случае 2) при  $p < 0$ .

Таким образом, при  $0 < p < 1$  имеется две области совпадения интересов социальных групп (рис. 4), которые формально описываются так же, как и при  $p < 0$ . В заштрихованной части полосы  $0 < \alpha < 1$  интересы социальных групп расходятся.



**Рис. 4.** Области совпадения и несовпадения интересов социальных групп в случае CES-функции при  $0 < p < 1$

**Последствия повышения эластичности замещения.** Посмотрим, как изменяются области совпадения интересов социальных групп при изменении параметра  $p$  (и, соответственно, эластичности замещения  $\sigma$ ).

Пусть сначала  $p < 0$ , причем модуль  $p$  велик – эластичность замещения факторов  $\sigma$  низка. В таком случае оба граничных значения  $a(p)$  и  $b(p)$  близки к 1. При возрастании параметра  $p$  и его приближении к 1, граница  $a(p)$  монотонно убывая стремится к 0, а граница  $b(p)$  монотонно возрастая расходится к  $+\infty$ . При этом обе области совпадения интересов  $\Omega_p^\downarrow$  и  $\Omega_p^\uparrow$  сжимаются.



С точки зрения направленности технологических изменений, полученные результаты можно интерпретировать следующим образом. В области  $\Omega_p^\downarrow$  страна относительно богата трудом, и технический прогресс (изменение параметра  $\alpha$ ) при относительно низкой эластичности замещения направлен на использование этого избыточного и относительно дешевого фактора. Однако, возросшая эластичность замещения, вносит различие в интересы социальных групп, и установившееся технологическое изменение прекращается. Аналогично, в области  $\Omega_p^\uparrow$  страна относительно богата капиталом, и технический прогресс направлен на использование этого избыточного фактора до тех пор, пока не появляется различие в интересах социальных групп.

Эти результаты, в определенном смысле, дополняют выводы [14] относительно направленности технологических изменений. В [14] при рассмотрении модели изменения параметров эффективности факторов выделяется два эффекта: *эффект цены*, который создает стимул развивать технологии, используемые при производстве более дорогих товаров, использующих дефицитные факторы, и *эффект размера рынка*, благодаря которому выгодно развивать технологии, которые используют имеющиеся в избытке факторы. Эластичность замещения между факторами производства определяет, какой из этих эффектов сильнее и, тем самым, как технологическое изменение отвечает на экономическую ситуацию. Если эластичность замещения низка, то относительно сильнее эффект цены. Если эластичность замещения велика, то преобладает эффект размера рынка.

В нашем случае, технологические изменения состоят в изменении значения  $\alpha$ . Когда интересы социальных групп совпадают, обе они поддерживают эффект размера рынка, но, с ростом эластичности замещения, области совпадения интересов сжимаются, т.е. поддержка эффекта размера рынка ослабевает.

**Следствия межстрановых различий в производственных функциях.** Отказ от предположения о совпадении производственных функций в разнотипных странах приводит к неожиданным выводам. Приведем пример. С.Ребело [26] рассмотрел такую ситуацию. Имеется две условные страны – США и Япония начала 1950-х гг. = которые, в предположениях [26], имеют одну и ту же производственную функцию Кобба-Дугласа, одинаковые численности рабочей силы, но разные уровни капитала. Выпуск в США предполагается в пять раз превышающим выпуск в Японии. Эта модель дает колоссальное различие в процентных ставках: капитал должен был бы устремиться в Японию, чего, однако не происходило по необъяснимым при указанных предположениях причинам. Рассмотрим пример внимательнее, допуская различие в значениях параметра  $\alpha$ .

Итак, пусть имеется две страны, Япония и США с производственными функциями  $AK^{\alpha_J} L^{1-\alpha_J} = Ak^{\alpha_J} L$  и  $AK^{\alpha_{US}} L^{1-\alpha_{US}} = Ak^{\alpha_{US}} L$ . Обозначим через  $k_J$  капиталовооруженность в Японии, а через  $k_{US}$  - в США. Тогда  $k_{US}^{\alpha_{US}} = 5k_J^{\alpha_J}$ . Отношение предельных продуктов капитала в Японии и США равно

$$\frac{MPK_J}{MPK_{US}} = \frac{\alpha_J}{\alpha_{US}} \frac{k_J^{\alpha_J-1}}{k_{US}^{\alpha_{US}-1}} = \frac{1}{5} \frac{\alpha_J}{\alpha_{US}} \frac{k_{US}}{k_J}.$$

Для процентных ставок справедливы равенства:

$$r_J = MPK_J - \delta, \quad r_{US} = MPK_{US} - \delta,$$

где  $\delta$  - коэффициент износа, общий для двух стран. Таким образом,

$$r_J = (r_{US} + \delta) \frac{MPK_J}{MPK_{US}} - \delta.$$

В [26] полагается, что производственные функции в Японии и США совпадают:  $\alpha_J = \alpha_{US}$ . Тогда  $\frac{k_{US}}{k_J} = 5^{1/\alpha_{US}}$  и  $\frac{MPK_J}{MPK_{US}} = 5^{1/\alpha_{US}-1}$ . Если принять  $\alpha_{US} = 1/3$ , то  $\frac{MPK_J}{MPK_{US}} = 25$ . Принимая процентную ставку США равной  $r_{US} = 0,065$ , а коэффициент износа  $\delta = 0,1$ , можно найти процентную ставку в Японии:  $r_J = 4,025$ . Это гигантская процентная ставка – более 400%.

Мы же поступим иначе. Принимая во внимание результаты цитированной уже статьи [4], будем считать, что  $\alpha_J > \alpha_{US}$ , что, по-видимому, составляет типичное отличие развивающейся и развитой стран.

Представим отношение выпусков в США и Японии в виде:  $\frac{k_{US}^{\alpha_{US}}}{k_J^{\alpha_{US}}} \frac{1}{k_J^{\alpha_J - \alpha_{US}}} = 5$ .

Тогда  $\frac{k_{US}}{k_J} = 5^{1/\alpha_{US}} k_J^{\alpha_J/\alpha_{US}-1} = 125 k_J^{3\alpha_J-1}$ , т.е. отношение капиталов в двух странах определяется не только отношением выпусков, но еще и уровнем капитала в Японии. Когда этот уровень мал, будет малым и отношение предельных продуктов капитала в двух странах.

Например, пусть  $\alpha_J = 2/3$ . Тогда  $k_{US} = 125 k_J^2$ . Если  $k_J = 0.05$ , то  $k_{US} = 0.3$ ,  $\frac{MPK_J}{MPK_{US}} = \frac{2}{5} \cdot 6 = 2.4$ .

Получается, что капитал в Японии в 6 раз меньше, чем в США, а не в 125 раз, как в [26]. Предельный продукт капитала в Японии 2.4 раза больше, чем в США, а не в 25 раз. Соответственно, процентная ставка в Японии, при сделанных предположениях, составляет не 400%, а лишь 29%, что для столь грубой прикидочной модели представляется вполне допустимым. Этот пример показывает существенное отличие в выводах, которые могут быть сделаны при принятии или при отказе от предположения о совпадении производственных функций в двух странах.

## Литература

1. Solow R.M. A contribution to the theory of economic growth// Quarterly Journal of Economics. – 1956, v. 70. – pp. 65-94.
2. Solow R.M. Technological Change and the Aggregate Production Function// Review of Economics and Statistics. – 1957, v. 39. – pp. 312-320.
3. Матвеев В.Д., Гуревич А.М. Модели эндогенного роста, их развитие и перспективы// Экономические исследования: теория и приложения. – С.-Петербург, Европейский университет в С.-Петербурге, 2000. – с. 260-295.
4. Rodriguez F., Ortega D. Are capital shares higher in poor countries? Evidence from industrial surveys. Wesleyan Economics Working Papers, № 2006-023. – Middletown, Wesleyan University, 2006.
5. Kaldor N. Capital accumulation and economic growth// Lutz F.A., Hager D.C., eds. The theory of capital. – New York, St. Martin's Press, 1961.
6. Romer P.M. Capital accumulation in the theory of long-run growth// Barro R.J., ed. Modern business cycle theory. – Cambridge (MA), Harvard University Press, 1989. – ch. 2.
7. Easterley W. The elusive quest for growth: Economist's adventures and

- misadventures in the tropics. – Cambridge, London, MIT Press, 2002. Перевод на русский язык: У.Истерли. В поисках роста. Приключения и злоключения экономиста в тропиках. – М., ИКСИ, 2006.
8. de La Grandville O., Solow R.M. A conjecture on general means// J. of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. – 2006, v. 7(1). – article 3.
  9. Duffy J., Papageorgiou C. A cross-country empirical investigation of the aggregate production function specification// J. of Economic Growth. – 2000, v. 5(1). – pp. 87-120.
  10. Bentolila S., Saint-Paul G. Explaining movements in the labor share// Contributions to Macroeconomics. – 2003, v. 3(1). – pp. 1103-1136.
  11. Gundlach E. The Solow model in the empirics of growth and trade// Oxford Review of Economic Policy. – 2007, v. 23(1). – pp. 25-44.
  12. McQuinn K., Whelan K. Solow (1956) as a model of cross-country growth dynamics// Oxford Review of Economic Policy. – 2007, v. 23(1). – pp. 45-62.
  13. Audretsch D.B. Entrepreneurship capital and economic growth// Oxford Review of Economic Policy. – 2007, v. 23(1). – pp. 63-78
  14. Acemoglu D. Directed technical change// Review of Economic Studies. – 2002, v. 69. – pp. 781-809.
  15. Acemoglu D. Labor- and capital augmenting technical change// J. of the European Economic Association. – 2003, v. 1, n. 1. – pp. 1-37.
  16. Klump R., McAdam P., Willman A. The long-term sucCESs of the neoclassical growth mode// Oxford Review of Economic Policy. 2007, v. 23(1). – pp. 94-114.
  17. Matveenko V. On a dual representation of CRS function by use of Leontief functions// Proceedings of the 1st International Conference on Mathematical Economics, Non-Smooth Analysis, and Informatics. – Baku, Institute of mathematics, 1997. – pp. 160-165.
  18. Rubinov A.M., Glover B.M. Duality for increasing positively homogeneous functions and normal sets// Operations Res. – 1998, v. 12, n. 2. – pp. 105-123.
  19. Jones C.J. The shape of production function and the direction of technical change// Quarterly J. of Economics. – 2005, v. 120, n. 2. – pp. 517-549.
  20. Матвеевко В.Д. Теория экономического роста и динамика российской экономики// Теория представлений, динамические системы. XI. Специальный выпуск. Сборник работ под ред. А.М.Вершика. Записки научных семинаров ПОМИ. – 2004, т. 312. – с. 215-238.
  21. Matveenko V.D. Economic growth theory and the dynamics of the Russian economy// J. of Mathematical Sciences. – 2006, v. 133, n. 4. – pp. 1491-1503.
  22. Матвеевко В.Д.. Ресурсозависимость и экономическое развитие: пример России// Реформирование общественного сектора. Поиск путей повышения эффективности. Материалы 7-й Международной конференции, Ч. 2. – СПб: Издат. Дом СПбГУ, 2005. – с. 109-142.
  23. Seater J.J. Share-altering technical progress// Finley L.A., ed. Focus on economic growth and productivity. – New York, Nova Publishers, 2005.
  24. Матвеевко В.Д. Инвестиции, институты и экономический рост: исследование на основе fK-модели// Конкурентность и модернизация экономики. Кн. 1. – М., Издат. Дом ГУ-ВШЭ, 2004. – с. 226-238.
  25. Nelson R.R. What makes an economy productive and progressive? What are the needed institutions? Inaugural Vernon W.Ruttan Lecture on Science and Development Policy. – Rochester, University of Minnesota, 2006.
  26. Rebelo S. The role of knowledge and capital in economic growth. Working Papers, No. 149 – Helsinki, World Institute for Development Economics Research (WIDER), 1998.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЭКОНОМИКА И ТЕОРИЯ ИГР О РАЦИОНАЛЬНОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ\*

Меньшиков И.С. (г. Москва)

*В работе предлагается метод изучения процесса принятия решений в экономических ситуациях на основе изучения поведения участников рынков, созданных в контролируемых условиях лаборатории, оборудованной специальным психофизиологическим программно-аппаратным комплексом.*

В исследовании операций обычно исходят из рациональности лица, принимающего решения (ЛПР). Однако рациональность можно трактовать по-разному, если решение приходится принимать в условиях неопределенности. Характер неопределенности влияет на определение рациональности. В случае «природной» неопределенности речь идет о безличном неконтролируемом факторе. Ю.Б. Гермейер [1] настаивал в этом случае на принципе гарантированного результата, т.е. чтобы ориентироваться на худший случай: исследователь операции не имеет права предлагать ЛПР ничего рискованного. В экономике традиционно неприятие риска носит более мягкий характер. Классический подход фон Неймана и Моргенштерна основан на функции полезности, которая позволяет сочетать отрицательное отношение к риску и готовность рискнуть при достаточно большом потенциальном выигрыше (премии за риск). Современный подход (Prospect Theory), предложенный Канеманом и Тверски, требует учета status quo: рассмотрения зон выигрыша и потерь отдельно. Если в зоне выигрыша по-прежнему постулируется неприятие риска, то в зоне потерь большинство готово рискнуть, лишь бы спасти ситуацию. В любом случае, никакого единого подхода к принятию решений в условиях риска выработано не было. Вид функции полезности или другие параметры модели зависят от *психологии* ЛПР.

Еще более дело усложняется, когда безличный неконтролируемый фактор меняется на совокупность других участников экономической ситуации. Эти участники обладают своими интересами, своей информированностью, да и просто они – люди, с которыми нашему ЛПР приходится вступать в социальные отношения. Несмотря на все успехи теории игр, изучающей ситуации с несколькими ЛПР (игроками), бесспорные рекомендации по рациональному поведению выработаны только в ограниченном количестве совсем простых случаев (см. [2]). Психофизиологические характеристики участников для таких ситуаций оказывают еще большее влияние на процесс принятия решений.

В данной работе сделана попытка начать исследование непосредственного влияния психофизиологии участников на процесс принятия экономических решений. Исследование проводится методами экспериментальной экономики за счет создания в контролируемых условиях лаборатории искусственного рынка с заданными свойствами. Участники этого лабораторного рынка мотивируются либо финансово за счет пересчета набранных в процессе эксперимента очков в деньги, либо используется учебная мотивация, увязывающая набранные очки и оценку по курсу экспериментальной экономики. Лаборатория экспериментальной экономики (ЛЭЭ) МФТИ и ВЦ РАН оснащена также специальным программно-аппаратным комплексом, который позволяет определять психологический тип участника, на основе системы

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 07-01-00605а, 06-01-08057-офи), гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ-5379.2006.1), программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 гг.)» Федерального агентства по образованию (код проекта РНП.2.2.1.1.2467).

тестирования [3], а также измерять его функциональное состояние (ФС) в процессе эксперимента с помощью разработанных в ОКБ «РИТМ» (г. Таганрог) стабиллографических кресел, оснащенных высокочувствительными датчиками, регистрирующими микроизменения позы сидящего человека.

Данный проект является междисциплинарным. К его проведению с самого начала были привлечены психофизиологи из института нейрохирургии им. Бурденко, которые имеют опыт применения подобной аппаратуры как в медицине, так и прикладных проектах [4]. Более того, мы понимали, что вряд ли удастся построить адекватную теоретическую модель изучаемых явлений, поэтому целесообразно было привлечь специалистов по распознаванию образов для поиска достоверных закономерностей [5], вытекающих из результатов экспериментов.

Анализ проведенных экспериментов привел к необходимости искать обобщения классических теоретико-игровых подходов, которые были бы согласованы с результатами экспериментов. В эту работу активно включилось несколько молодых участников проекта [6-8].

Принципы теоретико-игрового моделирования экономических ситуаций сводятся к последовательности следующих этапов.

- Описание экономической ситуации
- Формализация ее в виде «салонной игры»
  - Состав участников («игроков»)
  - Допустимые действия
  - Выигрыши
  - Информированность
- Анализ теоретико-игровых равновесий

Если экономическая ситуация уже представлена в виде салонной игры, то можно провести эту игру в контролируемых условиях лаборатории и сравнить теоретические предсказания поведения участников с результатами экспериментов. Методы экспериментальной экономики успешно применяются для поиска эффективных рыночных механизмов, что было отмечено присуждением в 2002 году Нобелевской премией В. Смиту. Он же одним из первых начал систематический анализ влияния «человеческого фактора» в процессе принятия экономических решений.

Ранее под рациональностью человека в экономике в основном понималось его *корыстолюбие* с поправкой на осторожность, если решение принимается в условиях риска. Многочисленные эксперименты и анализ эмпирических данных показали, что этого явно не достаточно для объяснения поведения людей в экономических ситуациях. Все больший интерес представляют исследования влияния психологических, моральных, этических и социальных ограничений на процесс принятия экономических решений. Это направление называется поведенческая экономика (Behavior Economics). В рамках таких исследований всегда ставится двойная задача: анализ индивидуальных особенностей поведения и вытекающие отсюда свойства агрегированного поведения всех участников.

Остановимся теперь подробнее на составных частях проекта с указанием основного автора по каждой части.

**Методики психологического тестирования** (Меньшикова О.Р., МФТИ). Опишем кратко две основные методики тестирования (МВТИ и Эннеаграмма), которые использовались для определения психологического типа участника эксперимента.

Тест **МВТИ** состоит из 94 вопросов. Ответ на каждый вопрос дает некоторое количество очков в пользу одного из двух полюсов по 4 шкалам.

**Полярные шкалы теста МВТИ**  
экстраверсия **Е**    интроверсия **И**

сенсорность    **S**   **N**   интуиция  
 мышление        **T**   **F**   чувство  
 суждение        **J**   **P**   восприятие

Результатом теста являются 8 целых чисел, приписанных полюсам. Если по каждой шкале взять полюс с большим количеством очков, то получится формула типа, например, **ISTJ**. Всего таких типов 16, но распределение людей по типам далеко не равномерное.

Тест **Эннеграмма** состоит из 144 вопросов, организованных по турнирному правилу. Каждая из 9 шкал встречается с каждой из оставшихся 8 в четырех вопросах. Ответ на вопрос отдает одно очко шкале «победителя».

Удобно представлять 9 шкал Эннеграммы в виде таблицы 3x3, где по строкам стоят *способы принятия решений*, а по столбцам – характер *отношения к людям*.

### Представление Эннеграммы

	Уступчивость	Напористость	Отстраненность
Эмоции	2 – Помощник	3 – Мотиватор	4 – Романтик
Интеллект	6 – Лоялист	7 – Энтузиаст	5 – Мыслитель
Воля	1 – Перфекционист	8 – Лидер	9 – Миротворец

**Главные компоненты.** По результатам тестирования можно оценить матрицу ковариации шкал. У этой матрицы ищем систему собственных чисел и векторов. Собственные числа невырожденной матрицы ковариаций являются действительными и положительными. Каждому из них соответствует собственный вектор. Главными компонентами мы будем считать собственные векторы, упорядоченные по величине собственных значений. Иногда используется вращения системы векторов для поиска независимых факторов с заданными свойствами.

### Две главные компоненты для MBTI

	<b>E</b>	<b>I</b>	<b>S</b>	<b>N</b>	<b>T</b>	<b>F</b>	<b>J</b>	<b>P</b>
1	0.13	-0.11	-0.43	0.31	-0.33	0.2	<b>-0.5</b>	<b>0.54</b>
2	<b>0.66</b>	<b>-0.7</b>	-0.03	0	-0.07	0.01	0.17	-0.2

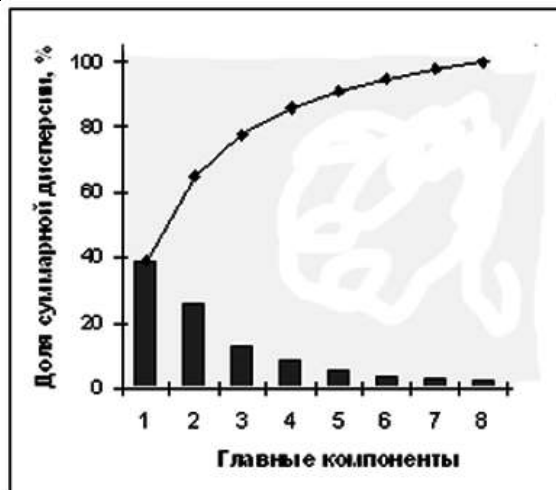


Рис. 1. Главные компоненты MBTI  
 (по результатам тестирования более 3000 человек)

Компонента 1 составляет 44% суммарной дисперсии. Наибольший вес в ней имеют **P** (восприятие) и **J** (суждение). Компонента 2 – 22.4% суммарной дисперсии. Наибольший вес в ней имеют **E** (экстраверсия) и **I** (интроверсия). Две главные компоненты объясняют 66.4%

общей дисперсии. Интересно отметить, что пары **ЕJ** – холерик, **ЕР** – сангвиник, **IJ** – флегматик, **IP** – меланхолик на языке психологии определяют темперамент человека.

### Две главные компоненты Эннеаграммы

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-0.21	0.15	<b>-0.28</b>	<b>0.45</b>	-0.01	0.19	0.01	<b>-0.69</b>	<b>0.37</b>
2	<b>-0.4</b>	<b>0.34</b>	0.04	0.02	-0.16	<b>-0.39</b>	<b>0.71</b>	0.02	-0.2

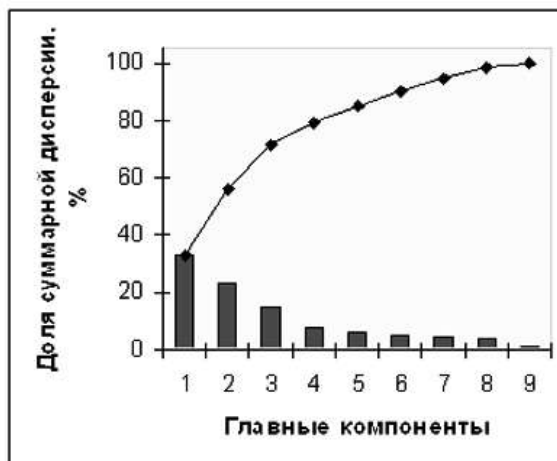


Рис. 2. Главные компоненты Эннеаграммы  
(по результатам тестирования более 3000 человек)

Типологии МВТИ и Эннеаграммы являются в некотором формальном смысле двойственными, что видно по типологическому кубу, составленному по результатам тестирования 4000 человек.

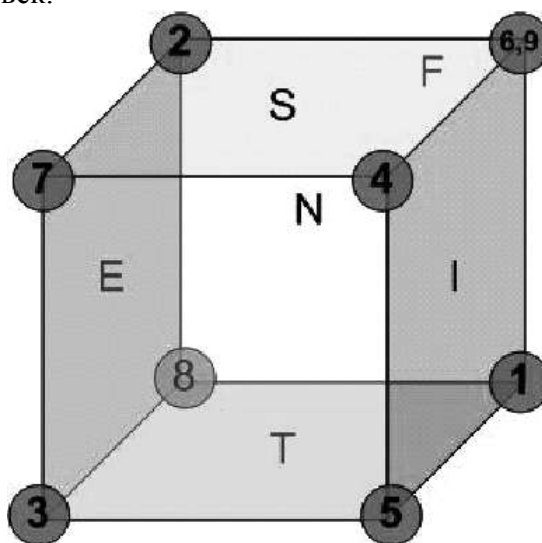


Рис. 3. Типологический куб  
(по результатам тестирования 4000 человек)

Куб обладает следующими интересными свойствами.

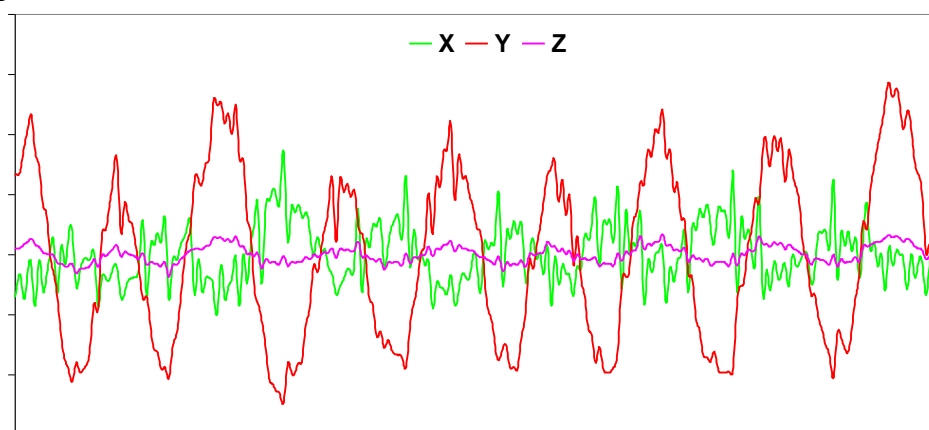
- Куб составлен по матрице корреляций 9 шкал Эннеаграммы и 8 шкал МВТИ.
- отождествлены близкие типы 6 (лоялист) и 9 (миротворец).
- соседним вершинам соответствуют близкие по корреляции типы Эннеаграммы.
- 6 граням куба можно приписать 6 полюсов трех шкал МВТИ.
- на каждой грани лежат наиболее близкие к типу МВТИ типы Эннеаграммы

- Грани (МВТИ) дают в пересечении вершину (Эннеаграмма).
  - Например, 4 (Романтик) соответствует граням INF (*согласуется с результатами тестирования студентов Московской консерватории*).
- Противоположные грани соответствуют трем первым оппозициям Юнга.
- Диагональные плоскости куба 27-15 и 38-49 соответствуют двум первым главным компонентам Эннеаграммы (с точностью до вращения).

Психологический тип человека считается достаточно стабильной характеристикой человека, мало и медленно меняющейся во времени. Он оказывает влияние на процесс принятия решений в условиях неопределенности, когда нет ясного оптимального выбора. Нам хотелось бы иметь и более гибкую интегральную характеристику состояния человека. Шутка, в которой есть доля правды, состоит в том, что решение человека зависит в том числе и от того, когда он его принимает: до обеда или после, – а также принимает ли он это решение стоя, сидя или лежа.

**Оценка функционального состояния** (Лукьянов В.И., Максакова О.А., институт нейрохирургии им. Бурденко). «*Функциональное состояние организма*» определяют как динамическое состояние биологической системы при ее взаимодействии с внешней средой. Функциональное состояние (ФС) человека выступает регулятивной функцией адаптации к окружающей среде и изменению ситуации. Нам удобно понимать под ФС телесное воплощение жизненного процесса, которое можно измерить инструментально.

Сигнал для оценки ФС должен содержать интегральную информацию о текущих процессах в органах и системах тела. Клинические наблюдения показали, что таким сигналом может служить перемещение *общего центра давления* сидящего человека (ОЦД). Сигнал поступает со специального стабиллографического кресла, созданного в ОКБ "РИТМ" по специальному заказу авторов проекта. Этот сигнал характеризуется высокой чувствительностью при разложении его в трехмерном пространстве. При этом отчетливо видны дыхательные волны, высокочастотные колебания сердечных сокращений, произвольная и непроизвольная двигательная активность. Важно отметить, что способ регистрации сигнала позволяет испытуемому выполнять различные мануальные действия, в частности, выполнять обычные действия на компьютере.



**Рис. 4.** Траектория перемещения ОЦД по трем координатам (30 сек.)

Представленные на рис. 4 кривые соответствуют тесту «спокойное бодрствование с открытыми глазами». На рис. 4 приведены все три координаты в зависимости от времени. Y – сагиттальное измерение (вперед – назад, с максимальной амплитудой), X



– фронтальное измерение (влево – вправо, со средней амплитудой),  $Z$  – вертикальное измерение (с минимальной амплитудой).

Показатели функционального состояния – это некоторые агрегированные характеристики исходной кривой в трехмерном пространстве.

**Энергия** оценивалась по скорости  $V^2 = V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2$  по правилу  $\psi = \sqrt{M^2 + S^2}$ , где  $M$  и  $S^2$  – среднее и дисперсия  $V^2$ .

Показатель  $\psi$  позволяет оценить изменения энергетики за период анализа с учетом динамических изменений (быстрых компонент перемещения) и постоянной составляющей (медленных компонент). Из-за большого разброса индивидуальных значений для статистического анализа удобнее использовать величину  $\ln \psi$ .

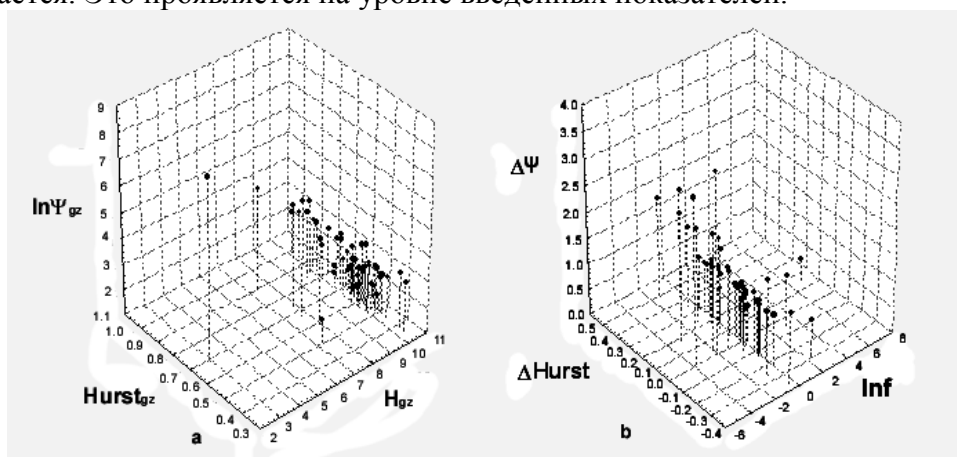
**Устойчивость** энергетики оценивалась с помощью *показателя Хёрста (Hurst)*, определяемого для  $V^2$  на основе *метода нормированного размаха*:  $R(\tau)/S(\tau) = (a \cdot \tau)^{Hurst}$ , где  $R(\tau)$  – *размах* (максимум – минимум) данных на временном интервале  $\tau$ , а  $S(\tau)$  – оценка *стандартного отклонения* на этом интервале.

Известные свойства показателя Хёрста для нашего случая имеют следующую интерпретацию.

- $Hurst = 1/2$  – случайный процесс с независимыми приращениями.
- $Hurst > 1/2$  – типичны существенные всплески энергии.
- $Hurst < 1/2$  – колебания энергии вокруг среднего уровня.

**Энтропия перемещения ОЦД.** Разделим диапазоны перемещения ОЦД по всем трем координатам на  $n$  отрезков. Получится  $n^3$  ячеек. Пусть  $P_i$  – частота попадания ОЦД в ячейку  $i$ . *Энтропия* вычисляется по обычной формуле  $H = -\sum_i P_i \cdot \log_2(P_i)$ , причем суммирование идет по ячейкам с ненулевой частотой.

Оказывается, что ФС человека изменяется при самых минимальных изменениях условий. Показательна реакция человека на закрывание глаз. Оказывается, что при закрывании глаз часть людей успокаивается, а часть возбуждается. Это проявляется на уровне введенных показателей.



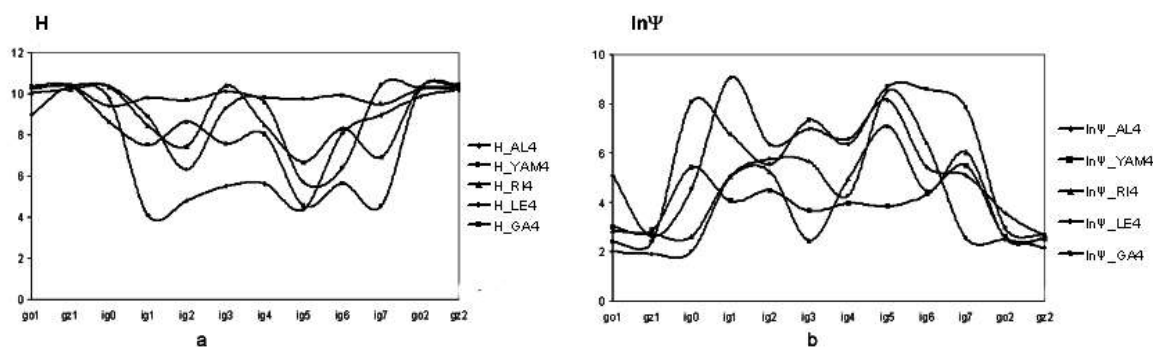
**Рис. 5.** Показатели участников эксперимента

«глаза закрыты»

«глаза открыты» – «глаза закрыты»

В данной работе измерялись показатели 23 участников эксперимента. Их ФС достаточно разнообразно, однако оно не выходило за границы средней нормы, установленной предыдущими исследованиями.

Эксперимент состоял из трех фаз. Центральной являлась фаза торгов на экспериментальном рынке, которую мы для краткости будем называть экономической игрой. До и после этой фазы проводилось измерение фонового состояния участников с помощью теста «глаза открыты – глаза закрыты». Экономическая игра длилась 240 с. Показатели измерялись по отрезкам в 30 с. В итоге для каждого участника получилось 12 величин для каждого показателя.



**Рис. 6.** Динамика параметров ФС в эксперименте

Из рис. 6 видно явное отличие состояния покоя от активной фазы эксперимента. При этом при завершении экономической игры следует возврат к начальному состоянию. Это говорит о том, что нагрузка для участника эксперимента не является чрезмерной. Следует отметить существенное разнообразие динамики ФС по участникам. Посмотрим, как это связано с содержанием экономической игры.

**Эксперимент RE0.** Данный эксперимент является базовым и самым простым из серии экспериментов по информационной эффективности финансовых рынков. Торгуется один актив, стоимость которого в конце торгов определяется равновероятной реализацией одного из трех сценариев цены {30,70,110}. Эта информация является общей для всех участников. Кроме того, у каждого участника есть приватная информация. Каждому сообщают, какого одного сценария из трех не будет. Эта информация непротиворечива. Торговля ведется по правилам непрерывного двойного аукциона. Формируются две динамические очереди заявок на покупку и продажу, упорядоченные по цене заявки. При пересечении очередей заявок на покупку и продажу регистрируются сделки (подробнее см. [2]).

BestBid – это лучшая текущая заявка на покупку (с максимальной ценой). BestAsk – лучшая заявка на продажу (с минимальной ценой). Динамика торгов представлена для одной группы из пяти участников.

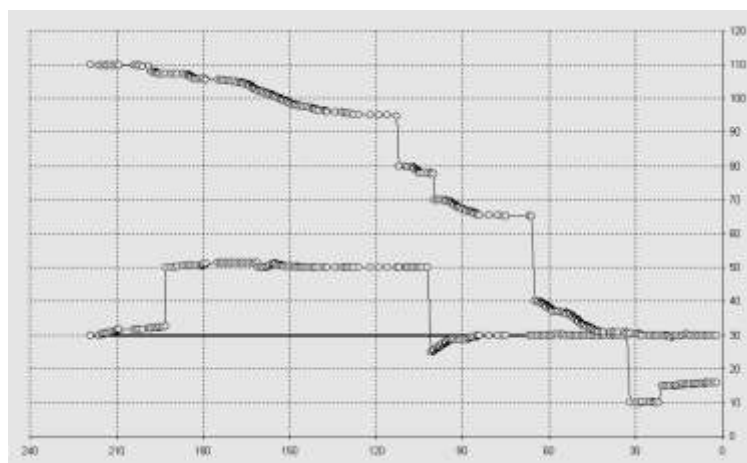


Рис. 7. Динамика торгов на лабораторном рынке

Заметен качественный скачок в динамике цен от 100 до 70 сек. до конца. До этого были сделаны явно рискованные заявки на покупку по цене около 50. Ясно, что часть участников раньше других поняла, каков истинный сценарий, и воспользовалась этим, продавая актив по цене 50. Окончательное «прозрение» наступило примерно за 70 сек. до конца, когда цена продажи опустилась до уровня 40.

Наложим на динамику торгов динамику изменения ФС, оцененную энтропией, как одной из характеристик сложности биомеханической системы человека.

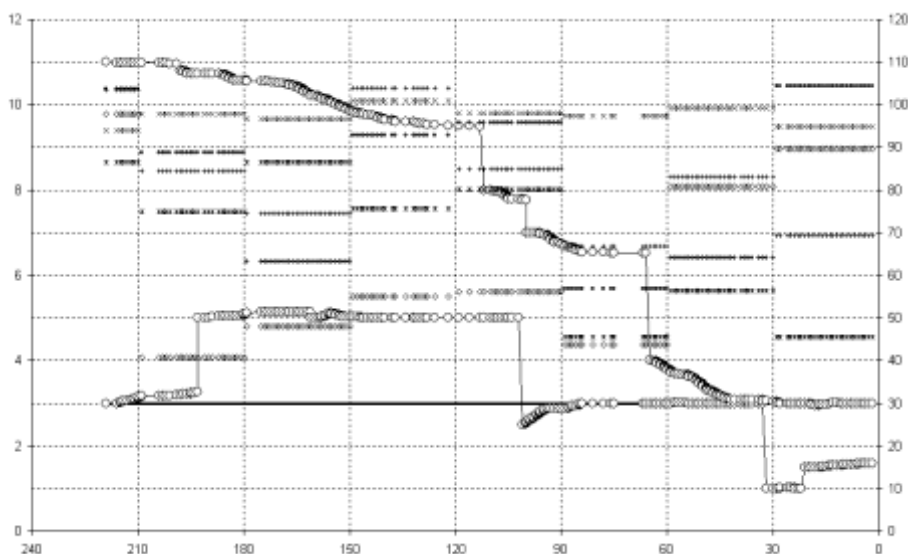
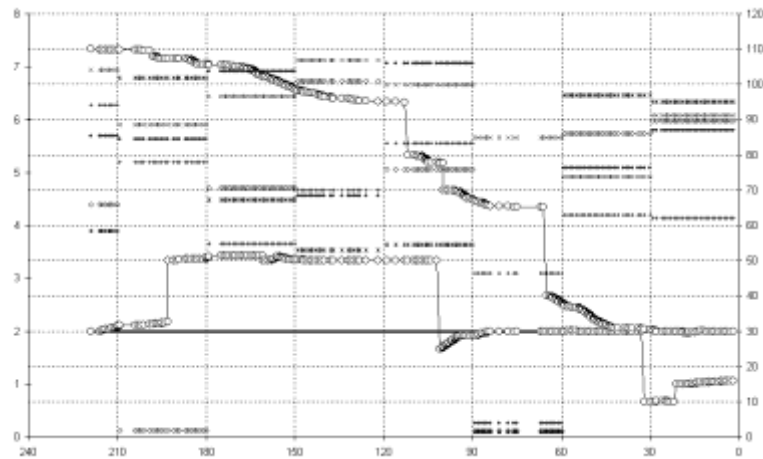


Рис. 8. Падение энтропии в момент выявления информации

На критическом отрезке от 90 до 60 сек. до конца произошло резкое падение энтропии перемещения ОЦД для всех участников, кроме одного. Этот участник был тем, кто понял, каков правильный сценарий, раньше других участников лабораторного рынка и неплохо на этом заработал. Для него эффект выявления информации не был особенно значимым событием.

Еще больше данный эффект синхронизации ФС участников проявляется при переходе от энтропии к корреляционной размерности.



**Рис. 9.** Падение корреляционной размерности при выявлении информации

На рис. 9 заметно синхронное упрощение динамики ОЦД всех участников, что позволяет говорить о *функциональном состоянии группы* под влиянием участия в общем событии.

**Результаты, полученные методами распознавания** (Сенько О.В., ВЦ РАН). На основании предварительных неформальных рассмотрений результатов экспериментов несколько постановок удалось свести к задачам распознавания, которые затем были успешно решены. Ниже будут приведены четыре такие задачи, которые в целом демонстрируют перспективность предлагаемого подхода. Первые три задачи используют результаты стабิโลграфических измерений на платформе в положении стоя. Четвертая задача начинает цикл исследований по данным измерений системы стабิโลграфических кресел.

**Прогноз поведенческого типа по показателям стабิโลграфии** был пробной задачей, возникшей на основе теста «ступенчатое воздействие». Стоя на платформе, испытуемой видел на экранной плоскости положение своего ОЦД в виде маркера в координатах X и Y (вертикальное перемещение для положения стоя несущественно). В центре плоскости изображена круговая мишень. Испытуемого просят удерживать маркер в центре мишени. Затем мишень неожиданно перемещается вверх по оси Y. Задача испытуемого быстро переместить маркер в центр новой мишени. Это движение мишени вверх-вниз повторяется несколько раз. Оказывается, что решение задачи неосознанно раскладывается человеком на несколько этапов. Сначала идет латентный период, когда мишень уже сдвинулась, но человек не успел на это отреагировать. Затем следует размах – движение в сторону от мишени. Потом – энергичное движение в сторону мишени. Затем – выравнивание, когда человек осознал, что маркер находится недалеко от цели и старается сблизить его с центром мишени. Наконец – удержание, т.е. стремление держать маркер близко к цели, несмотря на остаточные колебания.

Размах и бросок осуществляются человеком на подсознательном уровне. Соответствующие этим фазам стабิโลграфические кривые выглядят гораздо более «изящно» по сравнению с «корявыми» кривыми сознательной фазы выравнивания.

По виду данных кривых все испытуемые разбиваются на несколько поведенческих типов, однако принцип такого разбиения разработчиками теста в явном виде не был описан. Из наших испытуемых (67 студентов МФТИ) большинство оказалось в одном из двух типов. В связи с этим была поставлена задача распознавания этих типов. Задача решалась методом оптимальных достоверных закономерностей ([5]), а также с помощью различных методов из системы РАСПОЗНАВАНИЕ ([9]). С помощью метода оптимальных достоверных закономерностей удалось получить

фактический способ типизации, основанный на времени реакции и амплитуде броска при изменении положения цели. Самая высокая точность распознавания была достигнута с использованием метода «Линейная машина» и составила 97.4% для одного типа и 86.4% для другого.

**Прогноз коэффициента Ромберга.** Данная задача предполагает нахождение связи результатов психологического тестирования (МВТІ и Эннеаграмма) и показателей стабิโลграфического обследования на платформе с величинами коэффициента Ромберга, являющегося показателем теста «открытые – закрытые глаза». Коэффициент Ромберга представляет собой процентное отношение площадей двух эллипсов, включающих не менее 95% отклонений ОЦД на платформе в положении стоя в течении 20 с. в каждой фазе. Важность теста с закрыванием глаз уже отмечалась как характеристика фонового состояния испытуемого. Оказалось, что психологические характеристики позволяют объяснить разную реакцию на закрывание глаз.

С помощью методов распознавания удалось обосновать, в частности, что люди типа FP успокаиваются при закрывании глаз, а люди типа TJ возбуждаются, что проявляется в увеличении площади огибающего эллипса. Психологически это объясняется приоритетами важности поступающей информации из окружающего мира по сравнению с сигналами внутреннего мира человека.

Был обнаружен целый ряд значимых закономерностей с тестами МВТІ и Эннеаграммы, однако их анализ требует специального рассмотрения. Главный вывод из данной задачи для нас состоит в том, что психологические характеристики могут быть подтверждены инструментально с помощью стабิโลграфического оборудования.

**Прогноз результативности участников лабораторных рынков.** Для анализа привлекалась обучающая выборка, включающая в себя информацию о результатах лабораторных финансовых рынков, участниками которых были 35 студентов МФТИ, проходивших серию однородных экспериментов в рамках курса по экспериментальной экономике. По среднему количеству очков, набранных за одну попытку, участники были разбиты на две группы. В первую вошли 20 человек с результатом ниже 100 баллов, во вторую – 15 остальных. Для каждого участника были измерены значения показателей психологических тестов и стабילוграфические показатели на платформе.

На основании полученного результата можно сделать вывод о том, что для данного класса экспериментов преимущество имеют участники определенного психологического типа. По-видимому, для каждого психологического типа можно подобрать такой класс экономических ситуаций, в которых он будет доминировать. Конечно, это утверждение должно быть подтверждено серией лабораторных экспериментов.

**Взаимосвязь психологических типов и показателей функционального состояния.** Следующей задачей явилась оценка относительных величин взаимосвязи динамики кинетографических показателей с показателями психологических тестов. Для исследований использовалась выборка из 26 участников игры с известными показателями психологических тестов Эннеаграмма и МВТІ, а также совокупность значений кинетографических параметров по восьми отрезкам игры RE0.

Для анализа результатов применялся метод оптимальных достоверных разбиений. На первом шаге кинетографические показатели переводились в бинарную форму. Оптимальные разбиения искались для выборки, объединяющей восемь этапов игры (всего 208 объектов). Результаты исследований для энтропии перемещения ОЦД в трехмерном пространстве приведены на рис. 10, где максимальный столбец 891 соответствует по табл. 1 воле, а рядом стоят столбцы 567 и 234 – интеллект и эмоции. Отметим также, что высокие уровни столбцов 1 и 4 – это диаметрально противоположные типы по табл.

1: Перфекционист и Романтик. При этом Перфекционистам (по нашей выборке) свойственна высокая энтропия, а романтикам – малая. По сравнению с этим важными находками картина связи с энтропией результатов теста MBTI получается смазанной.

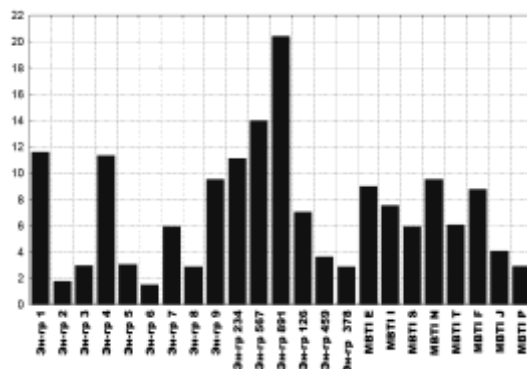


Рис. 10. Взаимосвязь психологических показателей с энтропией ОЦД

### Теория игр для экспериментальной экономики.

Экспериментальная экономика стимулирует развитие новых разделов теории игр. В частности, многократно было замечено, что результаты экспериментов слабо согласуются с теоретико-игровыми понятиями. Индивидуальное поведение участника не является оптимальным ответом на поведение остальных, как это предполагается в равновесии Нэша и аналогичных теоретико-игровых концепциях равновесия. Результаты экспериментов стимулируют развитие новых понятий равновесия, в которых рациональность проявилась бы хотя бы на уровне агрегированного поведения.

Один из вариантов проведения экспериментов использует метод случайного состава группы. Все присутствующие случайным образом разбиваются системой на непересекающиеся группы одинакового размера. Внутри каждой группы участник получает роль в экономической игре. Зная свою роль, участник не знает, кто попал в его группу: это может быть кто угодно из числа всех участников. Такой дизайн эксперимента нужен для того, чтобы исключить известный эффект сговора на основе взаимных угроз. Желательно, чтобы участник настраивался не на конкретного соперника, а на общие наблюдаемые им в процессе повторения игры стереотипы поведения.

Игра со случайным составом группы рассматривалась в двух измерениях. Оба способа дали хорошую согласованность с результатами экспериментов по сетевым рынкам энергетического типа и между собой.

**к-расширение игры** (Голубцов А.А., аспирант ВЦ РАН). Под **к-расширением** понимается обобщение понятия игры в нормальной форме, когда фактически в игре существует  $k$  экземпляров каждого игрока из исходной игры. Выигрыш каждого игрока определяется его выбором, а также выбором тех игроков, которые случайно попали в его группу. Наилучший ответ игрока максимизирует его ожидаемый выигрыш с учетом выбора остальных игроков и случайного состава группы. Для выпуклых множеств стратегий можно ввести среднюю стратегию для игроков, имеющих одинаковую роль. Под **агрегированным равновесием** понимается ситуация, при которой средняя стратегия по каждой роли совпадает с наилучшим ответом на стратегии остальных.

Вводится понятие размаха агрегированного равновесия для каждой игровой роли. Равновесие Нэша получается из агрегированного равновесия при всех нулевых размахах. Построены содержательные примеры агрегированного равновесия с ненулевым размахом.

Для анализа результатов экспериментов кроме понятия равновесия еще нужна некоторая характеристика наблюдаемой траектории, которая состоит из действий, выбранных участниками в каждом повторении. **Равновесная траектория** определяется тем, что средний наблюдаемый выбор участника является оптимальным ответом в предположении, что все остальные могут случайным образом использовать наблюдаемые в эксперименте действия.

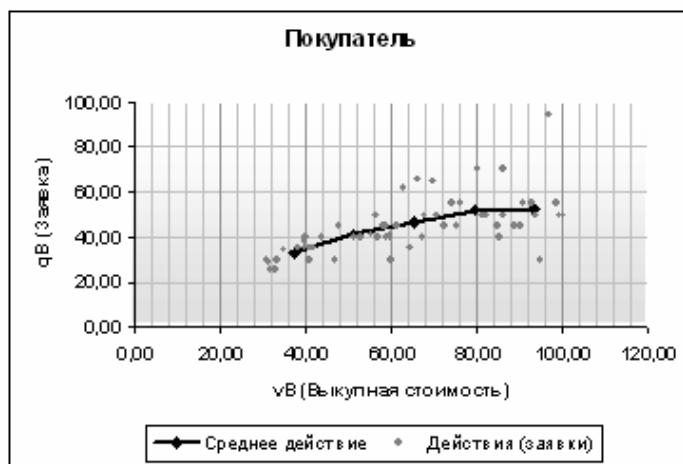
В играх с неполной информацией каждый участник имеет помимо общей еще и приватную информацию о своем *type*, например о параметрах функции затрат или выкупной стоимости. Понятия k-расширение игры и агрегированного равновесия обобщаются для игр с неполной информацией автоматически. При обобщении равновесной траектории приходится вводить разбиения множеств типов игроков. Результатов экспериментов недостаточно для того, чтобы восстановить стратегию игрока, как функцию выбора действия при каждом значении приватного параметра. Поэтому оптимальный ответ приходится строить по элементам разбиения, а уже потом сравнивать со средним ответом по игровой роли.

**Лабораторные сетевые рынки.** Введенные понятия применялись к лабораторным сетевым рынкам. Такой рынок состоит из трех участников: продавца S, транспортировщика T и покупателя B. Сетевой аукцион проводится по следующим правилам. Участники одновременно и независимо друг от друга формируют ценовые заявки  $q_S$ ,  $q_T$  и  $q_B$ . Если  $\Delta = q_B - q_S - q_T \geq 0$ , т.е. покупатель готов заплатить больше, чем суммарно просят продавец и транспортировщик, то регистрируется сделка по ценам  $p_S = q_S + \Delta/3$ ,  $p_T = q_T + \Delta/3$ ,  $p_B = q_B - \Delta/3$ .

Выигрыши участников с учетом их частных параметров определяются так:  $p_S - c_S$ ,  $p_T - c_T$ ,  $v_B - p_B$ , где  $c_S, c_T$  – затраты продавца на единицу проданного товара, а  $v_B$  – выкупная стоимость покупателя от перепродажи товара конечному потребителю.

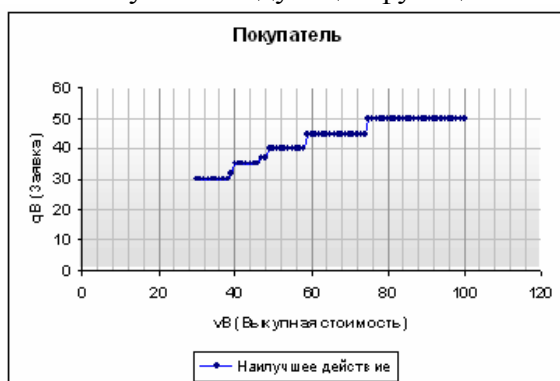
**Результаты экспериментов.** ЛЭЭ провела серию экспериментов по сетевым рынкам энергетического типа. Оказывается, что хотя каждый из участников достаточно сильно отклоняется от наилучшего действия, среднее поведение участников близко к наилучшему ответу. На рис. 11 показаны средние действия для покупателя в эксперименте, который проходил 7 марта 2007 г. в МФТИ.

Среднее действие (рис.10) рассчитывалось согласно определению агрегированного равновесия в байесовской игре: интервал значений выкупной стоимости был разбит на пять равных интервалов. Далее для каждого из пяти интервалов рассчитывалось среднее среди заявок, которые соответствуют этому интервалу.



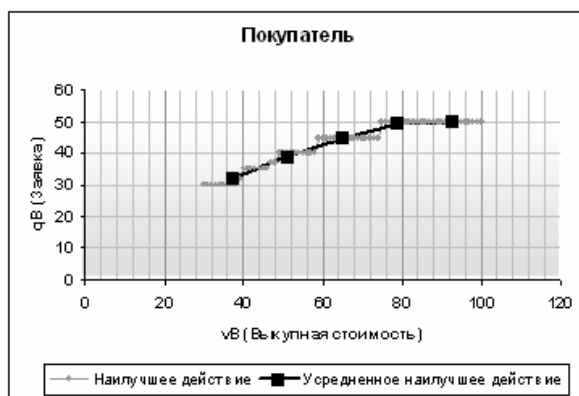
**Рис. 11.** Заявки покупателей и среднее действие

Найдем наилучшее действие для этого эксперимента. Для этого необходимо найти максимум оценки математического ожидания. Задача нахождения максимума решалась численно, в результате была получена следующая функция.



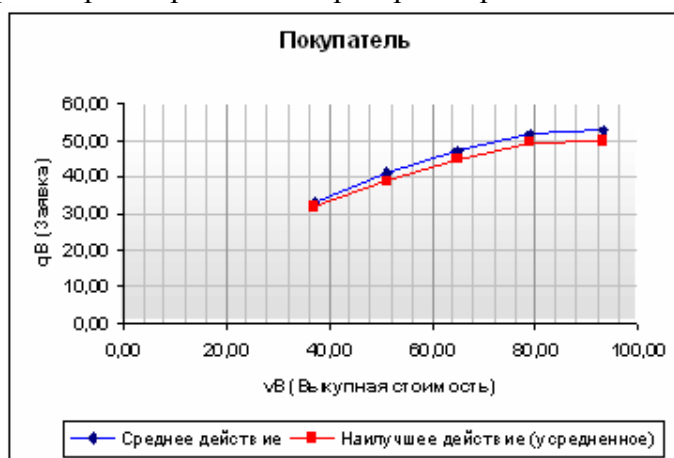
**Рис.12.** Наилучшее действия для покупателя

Далее согласно определению агрегированного равновесия необходимо усреднить полученное наилучшее действие (для того чтобы можно было сравнивать его со средним действием).



**Рис.13.** Усредненное наилучшее действие покупателя

Сравним теперь найденные среднее действие и наилучшее действие. Как видно из рис. 13, оказалось, что среднее действие и наилучшее действие практически совпадают. Это означает что траектория игры для лабораторного рынка близка к равновесной.



**Рис.14.** Среднее и наилучшее действия покупателей

Другие результаты экспериментов приведены в ([10]). Проведенный анализ экспериментальных данных демонстрирует, что агрегированное поведение участников

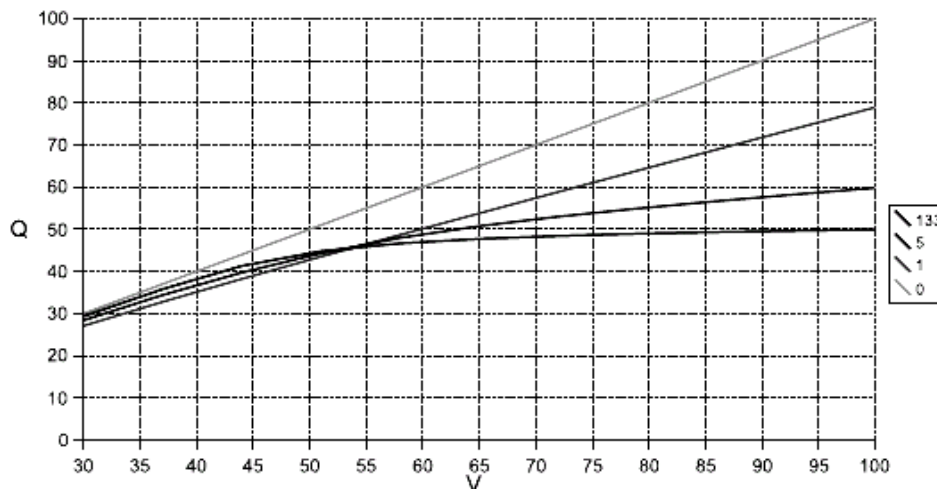


гораздо лучше соответствует теоретико-игровым принципам, чем индивидуальное поведение. Это показывает целесообразность использования введенного понятия агрегированного равновесия и равновесной траектории для анализа лабораторных сетевых энергетических рынков.

**Модифицированное равновесие** (Яминов Р.И., аспирант МФТИ). Другой подход к описанию агрегированного поведения участников основан на понятии **модифицированной игры**. К каждой стратегии участника в исходной игре добавляется случайная добавка с заданным законом распределения. Для простоты будем считать, что речь идет про нормальное распределение с фиксированными математическим ожиданием и дисперсией. Случайная добавка характеризует разброс в возможном выборе стратегии в зависимости от того, кто будет исполнителем роли с учетом случайного формирования группы. Если усреднить выигрыш каждого игрока с учетом случайных добавок остальных, то получим новые функции выигрыша, характеризующие модифицированную игру. Можно найти равновесие Нэша в этой игре, которое будем называть модифицированным равновесием. Интересно посмотреть, к какому равновесию Нэша сходятся модифицированные равновесия при стремлении к нулю дисперсии случайной добавки.

Другим интересным свойством модифицированного равновесия является его устойчивость относительно процедуры Курно последовательного построения наилучших ответов. Начинаем с произвольного профиля стратегий всех игроков. На следующем шаге стратегия каждого игрока является наилучшим ответом на стратегии предыдущего шага. Если процедура Курно сходится, то она сходится к равновесию Нэша. Однако в общем случае ей свойственны все черты динамических систем вплоть до странных аттракторов.

Казалось бы для сетевых рынков применение процедуры Курно не сулит ничего хорошего в силу множественности равновесий для игр данного класса. Численные эксперименты показали, что для сетевых рынков имеет место сходимость к единственному устойчивому равновесию независимо от начальных данных.



**Рис. 15.** Начальная точка: искренние стратегии

На рис. 15 показано несколько итераций процедуры Курно для стратегии покупателей, начиная с искренних стратегий:  $q_S \equiv c_S$ ,  $q_T \equiv c_T$ ,  $q_B \equiv v_B$ . Если изменить начальную стратегию покупателя на отказ от покупки:  $q_B = 0$ , то характер сходимости изменится, но результат – нет (рис. 16).

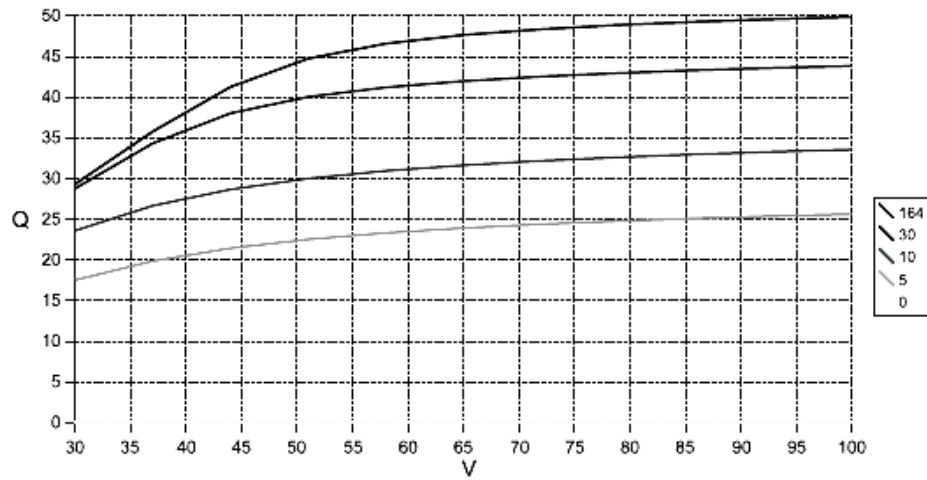


Рис. 16. Начальная точка: отказ от покупки

**Результаты экспериментов на основе модифицируемого равновесия.** Для рассмотренного ранее эксперимента 7.03.2007 проведем анализ на основе модифицированного равновесия. Для этого оценим среднюю дисперсию для стратегии продавцов, транспортировщиков и покупателей. В предположении нормальности случайной добавки найдем модифицированное равновесие. Равновесная стратегия покупателей представлена на рис. 17 вместе с наблюдаемыми в эксперименте заявками.

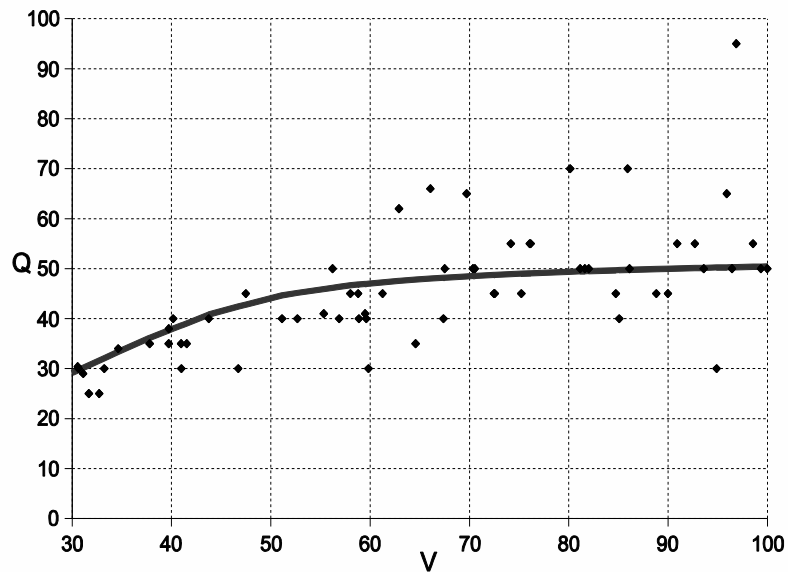
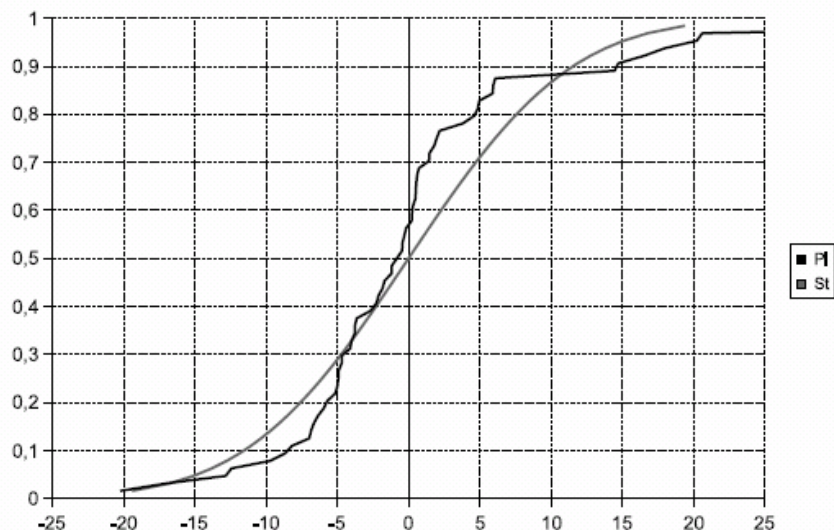


Рис. 17. Наблюдаемые заявки покупателей и равновесная стратегия.

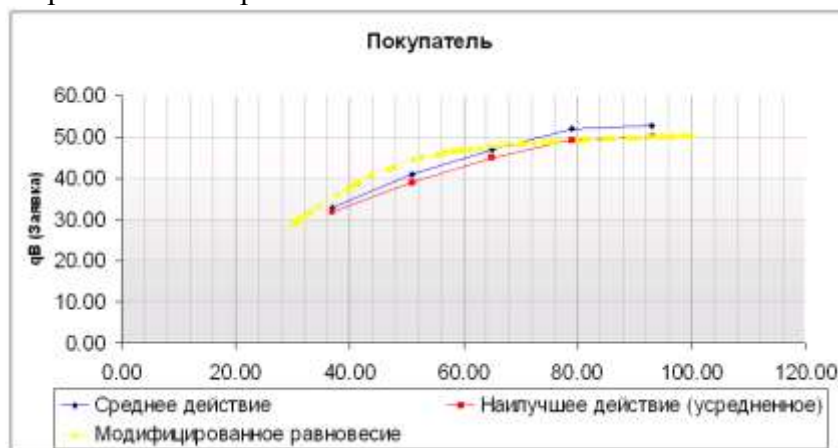
Сравнение эмпирического распределения, построенного по результатам эксперимента, с нормальным представлено на рис. 18.



**Рис. 18.** Эмпирическое и нормальное распределение отклонений

Ясно, что на данном этапе исследований такое совпадение можно считать вполне удовлетворительным, хотя здесь остается большое поле для дальнейших исследований.

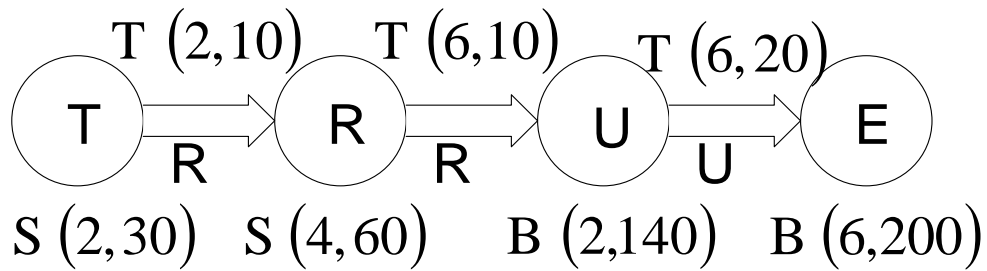
Проведем **сравнение агрегированного и модифицированного равновесий** по данным рассмотренного эксперимента.



**Рис. 19.** Сравнение агрегированного и модифицированного равновесия.

Рис. 19 показывает, что оба подхода приводят для данного эксперимента примерно к одному и тому же результату. Заметим, что модифицированное равновесие берет из результатов эксперимента только оценку дисперсии. Каким образом средний уровень стратегии покупателей в модифицированном равновесии оказывается правильным пока остается загадкой.

**Эксперимент TRUE** (Платонов В.В., аспирант ВЦ РАН). Структура этого эксперимента навеяна экспортом газа из стран СНГ в Европу. Мы не претендуем на какие-то содержательные выводы по этому рынку. Такая форма эксперимента удобна для быстрого понимания экономической ситуации участниками, которые не являются специалистами по сетевым рынкам.



На этом рынке есть два продавца газа: Т и R. В скобках указаны максимальные количества и затраты на единицу. Продавец R имеет вдвое большие возможности, но и большие затраты. Участнику R принадлежат также два газопровода: Т-R и R-U с заданной пропускной способностью и затратами. Участник U может выступать в роли покупателя и транспортировщика по своему газопроводу U-E. Участник E – только покупатель, но зато более крупный по всем параметрам, чем U.

Рынку TRUE соответствует **кооперативная игра**, которая задается характеристической функцией коалиций (см. [11]). В этой игре принимает участие четыре игрока  $N = \{T, R, U, E\}$ . Величина  $v(S)$  характеризует суммарный выигрыш коалиции  $S \subset N$  отдельно от остальных. Нетрудно видеть, что максимальный суммарный выигрыш всех игроков достигается, когда весь газ доходит до покупателя E и равен  $v(N) = 700$ . Ясно также, что коалиция может получить ненулевой выигрыш только, если она содержит участников R и U одновременно. Для остальных коалиций –  $v(S) = 0$ . Есть три коалиции, содержащие R и U:  $v(RU) = 140$ ,  $v(TRU) = 180$ ,  $v(RUE) = 440$ .

Как и всякая кооперативная игра для сетевого рынка игра TRUE обладает свойствами **супераддитивности**:  $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$  для любых непересекающихся коалиций  $S$  и  $T$ . Более того, игра TRUE обладает свойствами **выпуклости**, что, как показывают примеры, характерно не для любого сетевого рынка:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T) \text{ для любой пары коалиций.}$$

Из свойства выпуклости следует непустота **С-ядра** TRUE. Это понятие связано с устойчивостью **дележа** суммарного выигрыша коалиции всех участников. Под множеством дележей понимается симплекс  $X = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N), x_i \geq 0\}$ , где через  $x(S)$  обозначена доля в дележе коалиции  $S$ :  $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ . С-ядро – это устойчивая к отделению коалиций часть дележей:

$$c(V) = \{x \in X \mid x(S) \geq v(S), \forall S \subset N\}.$$

Для игры TRUE во все неравенства с ненулевой правой частью  $x_R$  и  $x_U$  входят одновременно. Если рассмотреть их сумму, то получится симплекс в трехмерном пространстве, который несложно изобразить графически. Ядро оказывается весьма обширным, что порождает необходимость прибегнуть к таким селекторам ядра как вектор Шепли и N-ядро. В данной игре все классические селекторы выбирают такую точку из ядра, где доли R и U одинаковы:  $x_R = x_U$ . Хотелось бы проверить предсказания кооперативной теории в эксперименте. В целом в нашей серии экспериментов обычно получается, что  $x_R > x_U$ . Впрочем, этот результат возможно зависит от места проведения эксперимента в силу легенды, лежащей в его основе.

**Механизм торгов.** Эксперимент проводился на основе правил **сетевого аукциона с диспетчером**. Этот торговый механизм в терминологии В. Смита [12] относится к классу «умных» аукционов, которые содержат процедуру поиска эффективных совместных решений. Укажем кратко основные этапы сетевого аукциона.

1. Все одновременно подают заявки: указывается цена по каждой единице товара.

2. Диспетчер решает потоковую задачу максимизации суммарного выявленного дохода и определения заявок победителей аукциона.
3. Цены назначаются на уровне двойственных оценок балансов в узлах.
4. Проводится регуляризация при множественности двойственных оценок.

**Результаты эксперимента TRUE.** На рис. 20 приведена типичная динамика цен по повторяющимся периодам игры TRUE.

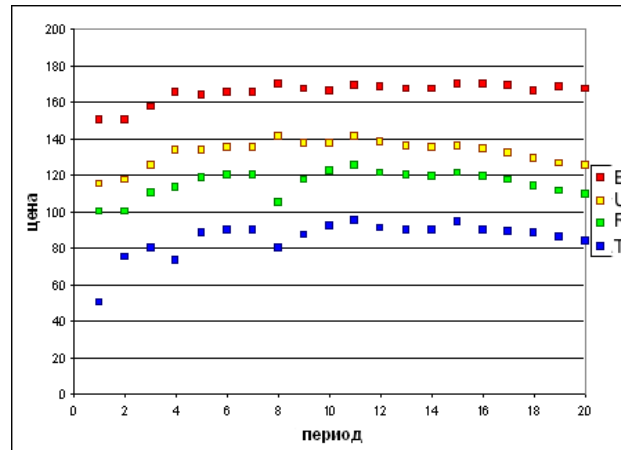


Рис 20. Динамика цен в узлах

Видно, что после некоторого начального этапа цены ведут себя достаточно стабильно. Можно измерить эффективность коллективных действий, соотнеся суммарный выигрыш участников с его теоретическим максимумом, который, кстати, достигается при искренних заявках. На рис. 21 приведен график эффективности экспериментального сетевого аукциона для рынка TRUE.

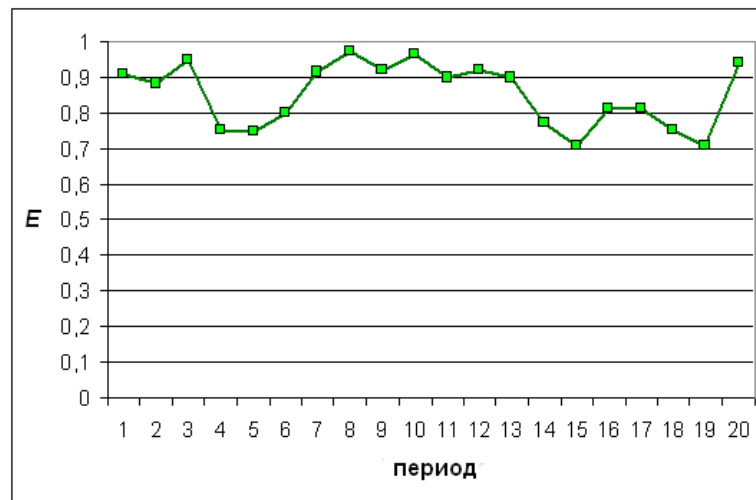


Рис. 21. Эффективность по периодам

Видно, что эффективность не снижается ниже 70%, причем в половине случаев она оказывается больше 90%.

**Заключение.** Хочется выразить искреннюю благодарность всем активным участникам нашего междисциплинарного проекта: О.А. Максаковой и В.И. Лукьянову, институт нейрохирургии им. Бурденко, О.В. Сенько, ВЦ РАН, А.Н. Чабану, зав. ЛЭЭ МФТИ, О.Р. Меньшиковой, МФТИ, моим аспирантам А.А. Голубцову, В.В. Платонову и Р.И. Яминову, материалы которых активно использовались в данной работе.

## Литература

1. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. – М.: Наука, 1976, – 327 с.
2. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. – М.: МЗ Пресс, 2006, – 207 с.
3. Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р. Лабораторные исследования информационной эффективности рынков. – М.: ВЦ РАН, 2006. –58 с.
4. Максакова О.А., Лукьянов В.И., Миронов А.Д. Кинетографические характеристики психофизического состояния человека // Биомеханика-2002. Тез. докл. VI Всероссийск. конф. по биомеханике. Тезисы докладов. Н.Новгород. 2002. с. 145.
5. Senko O. V., Kuznetsova A. V. The Optimal Valid Partitioning Procedures. Statistics on the Internet <http://statjournals.net>. 2006. April.
6. Голубцов А.А. Свойства агрегированного равновесия лабораторных сетевых рынков // Тез. докл. V Московск. междунар. конф. по исследованию операций. 2007. с. 32-34.
7. Платонов В.В.. Лабораторный анализ сетевого аукционного механизма с диспетчером // Тез. докл. V Московск. междунар. конф. по исследованию операций. 2007. с. 42-43.
8. Яминов Р.И. Модифицированное равновесие в лабораторных сетевых рынках // Тез. докл. 13-ой Всероссийск. конф. «Математические методы распознавания образов». 2007.
9. Журавлёв Ю.И., Рязанов В.В., Сенько О.В. РАСПОЗНАВАНИЕ. Математические методы. Программная система. Применения. М.: Фазис, 2006. – 283 с.
10. Голубцов А.А., Меньшиков И.С. Агрегированное равновесие лабораторных сетевых рынков. – М.: ВЦ РАН, 2007. – 38 с.
11. Мулен Э. Принципы кооперативного принятия решений. М.: – Мир, 1991, – 463 с.
12. McCabe K.A., Rassenti S.J., Smith V.L. Designing 'Smart' Computer-Assisted Markets. An Experimental Auction for Gas Networks. European Journal of Political Economy, 1989, V. 5, Issue 2-3, P. 259-283.

## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В MATLAB ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭКОНОМИКИ\*

Оленёв Н.Н. (г. Москва)

*В настоящее время в связи с развитием многопроцессорных и многоядерных архитектур вычислительных систем параллельное программирование начинают применять повсеместно во всех областях науки, техники и бизнеса. В работе рассматривается применение параллельных приложений системы MATLAB в математическом моделировании экономики на примере задачи идентификации экономических моделей. На основе идентификации простейшей динамической модели экономики страны рассмотрены два возможных сценария развития экономики России.*

Мировая информационная индустрия привыкла функционировать в условиях удвоения производительности процессоров каждые два года. Производители создают новые компьютеры, создатели программного обеспечения разрабатывают под эту технику новые версии операционных систем, совершенствуют пакеты специализированных программ. В таких условиях отрасль бурно развивается. Но в 2000 г. был достигнут технологический предел увеличения производительности процессора в 5000 ГГц. Производители для продолжения процесса удвоения производительности вычислительной техники для массового потребителя нашли выход в последовательной разработке многоядерных процессоров. В результате параллельное программирование становится необходимым средством для программистов, разрабатывающих программы для массовых потребителей.

Стандартом де-факто параллельных вычислений служит довольно сложный для первоначального изучения интерфейс передачи сообщений MPI [1]. В последнее время компании – разработчики математических пакетов – стали сами реализовывать приложения для параллельных вычислений. Так компания MathWorks разработала приложения для создания параллельных и распределенных программ с использованием средств библиотеки MPI и их реализации на платформе MATLAB [2], что упрощает на практике применение параллельных вычислений на многоядерных компьютерах, кластерах и GRID-системах.

Лучшие применения параллельных вычислений в моделировании экономики расширяют возможности разработчиков моделей. Появилась возможность идентифицировать внешние параметры сложных нормативных балансовых динамических моделей экономических систем. Можно идентифицировать сложные, пространственно-распределенные модели эколого-экономических систем, чтобы исследовать на них последствия изменения климата на протекание экономических и экологических процессов в различных регионах и странах. Для этого разрабатываются специальные критерии близости и похожести для статистических и рассчитанных по модели временных рядов макропоказателей изучаемой экономической системы страны или региона [3], применяются информационные технологии создания математических моделей с помощью системы ЭКОМОД для уменьшения числа независимых внешних

---

\* Работа выполнена в рамках программы государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ-5379.2006.1) при поддержке РФФИ (коды проектов 07-01-00563-а, 07-01-12032-офи), РГНФ (коды проектов 06-02-91821-а/Г, 07-02-61202 а/Г), программы фундаментальных исследований ОМН РАН № 3, программы фундаментальных исследований РАН № 14, программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 15.

параметров, совершенствуются методы глобальной оптимизации, сокращающие время расчета. Построение специальной эконометрической модели [2] упрощает изложение.

Для администрирования и конфигурирования параллельных вычислений в MATLAB используются два приложения:

- (1) MATLAB Distributed Computing toolbox (DCT),
- (2) MATLAB Distributed Computing Engine (MDCE).

Для проверки наличия этих приложений в системе MATLAB надо выполнить команду:

```
>>ver
```

Для инсталляции и запуска MDCE надо выполнить команду:

```
path\toolbox\distcomp\bin\mdce.bat install,
```

где path='C:\MATLAB\R2006B'

Планировщик запускают командой:

```
path\toolbox\distcomp\bin\startjobmanager.
```

Запуск рабочих процессов осуществляют командой:

```
path\toolbox\distcomp\bin\startworker  
-name worker1 -remotehost mylaptop -jobmanagerhost mylaptop.
```

Получение информации:

```
path\toolbox\distcomp\bin\ nodestatus
```

Рассмотрим простейшую динамическую модель экономики. Пусть валовой внутренний продукт (ВВП) страны в постоянных ценах 2000 года  $Y(t)$  определяется однородной производственной функцией с постоянной эластичностью замещения, (CES-функцией)

$$Y(t) = Y_0 \left[ a(L/L_0)^{-b} + (1-a)(K/K_0)^{-b} \right]^{-1/b}, \quad (1)$$

где  $Y_0, L_0, K_0, a \in (0,1), b$  - параметры. Обычно параметры производственной функции определяют по данным экономической статистики для временных рядов переменных, непосредственно входящих в производственную функцию. Однако, в нашем случае так поступить нельзя, так как выпуск на исследуемом промежутке времени 2000-2006 гг. рос, а труд и капитал практически не менялись. Кроме того, значения второго фактора: капитала, - представляемые статистическими органами, вызывают большое сомнение [2]. На выпуск оказывает влияние только капитал, вовлеченный в процесс воспроизводства, имеющий объективную стоимость, некий "эффективный" капитал, который выражен в постоянных ценах 2000 года и который мы и попытаемся здесь оценить.



Труд, измеряемый в рассматриваемой модели среднегодовым числом занятых в народном хозяйстве, растет с постоянным темпом  $\gamma > 0$ .

$$dL/dt = \gamma L(t), \quad L(0) = L_0, \quad (2)$$

Капитал (эффективная стоимость производственных фондов)

$$dK/dt = J(t) - \mu K(t), \quad K(0) = K_0, \quad (3)$$

где  $\mu > 0$  - темп выбытия (амортизации) капитала. Пусть в каждый момент времени  $t$  выполняется продуктовый баланс в постоянных ценах (ценах 2000 года)

$$Y(t) + \pi_I(t)I(t) = Q(t) + \pi_J(t)J(t) + \pi_E(t)E(t), \quad (4)$$

где  $Y(t)$  - валовой внутренний продукт (ВВП, выпуск) в постоянных ценах,  $J(t)$  - объем инвестиций,  $E(t)$  - объем экспорта,  $I(t)$  - объем импорта,  $Q(t)$  - объем потребления домашних хозяйств, государственных и общественных организаций в ценах выпуска;  $\pi_I(t)$  - относительный индекс цен на импорт,  $\pi_J(t)$  - на инвестиции, а  $\pi_E(t)$  - на экспорт.

На основе статистических данных за 2000-2006 год определены объемы инвестиций  $J(t)$ , экспорта  $E(t)$  и импорта  $I(t)$  в постоянных ценах 2000 года постоянными параметрами: долей  $\sigma$  текущей стоимости инвестиций в сумме текущих стоимостей выпуска и импорта, долей  $\delta$  экспорта в выпуске (по их текущим стоимостям), отношением  $\rho$  импорта к разнице ВВП и экспорта (по их текущим стоимостям).

$$\sigma = \frac{\pi_J(t)J(t)}{Y(t) + \pi_I(t)I(t)}, \quad \delta = \frac{\pi_E(t)E(t)}{Y(t)}, \quad \rho = \frac{\pi_I(t)I(t)}{Y(t) - \pi_E(t)E(t)}. \quad (5)$$

Для идентификации модели надо задать изменение внешних интенсивных параметров модели: трех относительных цен  $\pi_E(t), \pi_I(t), \pi_J(t)$ , - а также определить семь постоянных параметров  $a, b, \gamma, \mu, \sigma, \delta, \rho$  и три начальных значения  $Y_0, K_0, L_0$  таким образом, чтобы расчетные временные ряды макропоказателей (переменных модели) были близки к статистическим временным рядам соответствующих макропоказателей экономики России.

Используемые статистические данные представлены в таблице 1. Источник данных: Федеральная служба государственной статистики РФ, сайт [www.gks.ru](http://www.gks.ru). Составляющие ВВП приведены в постоянных ценах 2000 года, в млрд. руб. Индексы относительных цен получены расчетом на основе данных по изменению составляющих ВВП в текущих и постоянных ценах и имплицитного дефлятора ВВП. Значения величины  $Q(t)$  определены (4).

Таблица 1.

год $t$	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
$L(t)$	65.273	65.124	66.358	67.247	67.244	68.719	69.600
$\pi_E(t)$	1	0.84442	0.76610	0.72863	0.68475	0.69651	0.67010
$\pi_I(t)$	1	0.89204	0.82339	0.73075	0.59196	0.52193	0.45556
$\pi_J(t)$	1	1.02043	1.00752	0.97393	0.93350	0.88821	0.85997
$Y(t)$	7305.6	7676.9	8039.3	8625.8	9268.8	9817.6	10478.0
$I(t)$	1755.8	2084.1	2388.4	2811.2	3466.2	4055.4	4878.7
$J(t)$	1165.2	1265.7	1300.0	1462.2	1633.6	1807.2	2051.7
$E(t)$	3218.9	3354.1	3699.6	4162.0	4653.1	4950.9	5297.5
$Q(t)$	4677.3	5412.2	5861.9	6223.4	6609.5	6880.7	7386.3

Экспоненциальная линия тренда для числа занятых  $L(t)$  согласно данным таблицы 1:

$$L(t) = 64.84e^{0.01124(t-2000)}. \quad (6)$$

Найдены линии тренда для индексов относительных цен согласно данным таблицы 1 (также как среднеквадратическое отклонение расчетных и статистических значений).

$$\pi_E(t) = 0.6684 + 0.3316e^{-0.6142(t-2000)}, \quad (7)$$

$$\pi_I(t) = 1 - 0.0712(t - 2000)^2 e^{-0.2602(t-2000)}, \quad (8)$$

$$\pi_J(t) = 0.811 + 0.189(1 + t - 2000)e^{-0.5276(t-2000)}. \quad (9)$$

В (7)-(9) условие нормировки  $\pi_E(2000) = \pi_I(2000) = \pi_J(2000) = 1$  соблюдается автоматически.

Среднее значение отношения объема инвестиций в основной капитал к сумме ВВП и импорта с 2001 по 2006 год остается практически постоянным:  $\sigma = 0.1346 \pm 0.0026$  (первая цифра - среднее значение, вторая - среднеквадратическое отклонение). Значение этой величины за 2000 год,  $\sigma = 0.1286$ , чуть-чуть не укладывается в этот интервал, что можно объяснить тем, что 2000 год еще следует относить к переходному периоду экономики к новой структуре после дефолта 1998 года. Для периода с 2001 по 2006 год доли  $\delta$  экспорта в ВВП  $\delta = 0.3511 \pm 0.0103$ , а для переходного 2000 года  $\delta = 0.4406$ . То же самое касается параметра  $\rho$  отношения импорта к остатку от ВВП, после вычета из него объема экспорта с 2001 по 2006 год  $\rho = 0.3532 \pm 0.0264$ , а для переходного для установления импорта 2000 года  $\rho = 0.4296$ .

В первом приближении при определении параметров модели можно взять только средние значения параметров  $\gamma, \sigma, \delta, \rho$  и использовать выражения (6)-(9).

Параметры модели определяем косвенным образом, сравнивая выходные временные ряды переменных модели с доступными статистическими временными рядами 2001 – 2006 гг. Временные ряды считаются похожими, если они близки как функции времени (другими словами, между значениями временных рядов существует сильная, возможно нелинейная, связь). Поскольку длины статистических временных рядов, которым мы доверяем, здесь составляют шесть значений, будем использовать коэффициент корреляции Пирсона  $D(X, Y)$ , который является мерой силы и направленности линейной связи между сравниваемыми временными рядами  $X$ ,  $Y$  и, чем он ближе к +1, тем более схоже поведение этих рядов. При этом следует учитывать, что инфляционная составляющая может преувеличивать линейную связь рядов, поэтому при использовании коэффициента корреляции нужно сравнивать показатели в реальных величинах. Если длины сравниваемых временных рядов равны  $n$ , то имеем следующее выражение для коэффициента корреляции Пирсона

$$D(X, Y) = \frac{n \left( \sum_{t=1}^n X_t Y_t \right) - \left( \sum_{t=1}^n X_t \right) \left( \sum_{t=1}^n Y_t \right)}{\sqrt{\left[ n \sum_{t=1}^n X_t^2 - \left( \sum_{t=1}^n X_t \right)^2 \right] \left[ n \sum_{t=1}^n Y_t^2 - \left( \sum_{t=1}^n Y_t \right)^2 \right]}}. \quad (10)$$

Индекс Тейла  $E(X, Y)$  измеряет несовпадение временных рядов  $X_t$  и  $Y_t$  и чем ближе он к нулю, тем ближе сравниваемые ряды. Для удобства проведения расчетов, вместо индекса Тейла будем использовать коэффициент близости  $U(X, Y) = 1 - E(X, Y)$ . Чем выше он (чем ближе он к единице), тем более близки ряды.

$$U(X, Y) = 1 - \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^n (X_t - Y_t)^2}}{\sqrt{\sum_{t=1}^n X_t^2 + \sum_{t=1}^n Y_t^2}}. \quad (11)$$

При сравнении экономических временных рядов используется индекс Тейла, а не среднеквадратическое отклонение. Это связано, например, с тем, что экономические показатели экспоненциально растут на режиме сбалансированного роста, и в экономике этот режим считается вполне нормальным, хорошим.

Декомпозиция модели на отдельные блоки дает возможность за разумное время определить независимые параметры благодаря параллельным вычислениям для перебора параметров модели на заданных интервалах их изменения с последовательно уменьшающимся интервалом изменения параметров.

Для однозначности выбора оптимального варианта можно использовать ту или иную свертку коэффициентов близости  $U(X, Y)$  и корреляции  $D(X, Y)$ , например, если подгонка расчетных и статистических данных для всех макропоказателей имеет примерно равную важность, можно максимизировать среднегеометрическую величину всех коэффициентов.

В формальной записи, требуется найти максимум функционала

$$F(\bar{a}) \rightarrow \max_{\bar{a} \in A}, \quad (12)$$

где множество параметров задано на параллелепипеде

$$A = \{\bar{a} \in R^N : a_i^- \leq a_i \leq a_i^+, 1 \leq i \leq N\}, \quad (13)$$

а функционал представляет собой среднегеометрическое всех критериев близости и корреляции

$$F(\bar{a}) = 2^m \sqrt{\prod_{j=1}^m D_j(\bar{a}) U_j(\bar{a})}. \quad (14)$$

Здесь  $m$  – число макропоказателей;  $j$  - номер макропоказателя,  $j = 1, \dots, m$ .

При этом следует оставлять для дальнейшего перебора только те варианты значений параметров, при которых коэффициенты близости и корреляции выше некоторых заданных положительных величин, например,  $D_j > 0.5$ ,  $U_j > 0.5$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

Для упрощения работы с моделью перейдем в выражениях для труда  $L_t$ , капитала  $K_t$  и выпуска  $Y_t$  к относительным величинам:  $l_t, k_t, y_t$ , соответственно.

$$l_t = \frac{L_t}{L_0}, \quad k_t = \frac{K_t}{K_0}, \quad y_t = \frac{Y_t}{Y_0}. \quad (15)$$

Начальные значения всех этих величин равны единице:  $l_0 = k_0 = y_0 = 1$ . Поскольку временной ряд для эффективного капитала, вовлеченного в процесс воспроизводства, мы считаем неизвестным, за счет его изменения мы можем добиться нужного роста выпуска, и поэтому для описания роста ВВП достаточно рассмотреть однородную производственную функцию. Тогда (1) и (15) дают

$$y_t = [a l_t^{-b} + (1-a) k_t^{-b}]^{-1/b}. \quad (16)$$

$$k_{t+1} = (1-\mu)k_t + \alpha \beta y_t / \pi_t^J, \quad k_0 = 1. \quad (17)$$

В последнем уравнении введены обозначения

$$\alpha = \frac{Y_0}{K_0}, \quad \beta = \sigma(1 + \rho(1 - \delta)), \quad (18)$$

Наша основная задача – найти временной ряд для капитала, который наилучшим образом способствует близости временных рядов для макропоказателей, рассчитанных по модели, с их статистическими аналогами, представленными в таблице 1, поэтому численную реализацию идентификации (нахождения внешних параметров) модели мы начнем с варианта с наименьшим числом параметров. Будем считать следующие ниже параметры фиксированными:  $L_0 = 64.84$ ,  $Y_0 = 7305.6$ ,  $\gamma = 0.01124$ ,  $\rho = 0.3532$ ,

$\delta = 0.3511$ ,  $\sigma = 0.12866$ , а относительные цены заданными (7)-(9). Тогда  $\beta = 0.1569$ . При каждом заданном наборе параметров  $a, b, \mu, \alpha$  с помощью выражений (15) и (18) найдем искомые временные ряды макропоказателей  $Y_t, I_t, Q_t, J_t, E_t$ . Для сравнения близости расчетных временных рядов указанных макропоказателей с их статистическими аналогами вычисляются критерии корреляции и близости (для выпуска, потребления, инвестиций, импорта и экспорта  $Y_t, Q_t, J_t, I_t, E_t$ ) за период 2001-2006 вычисляется свертка критериев (14).

Возможный интервал изменения оцениваемых параметров:  $a \in (0,1)$ ,  $b \in (-1,0)$ ,  $\mu \in (-0.2,0.2)$ ,  $\alpha \in (0,3)$ . Для поиска параметров с помощью параллельных вычислений надо взять сетку по каждому из интервалов, устроить перебор всех возможных сочетаний, распараллелить этот перебор на доступное число процессоров. На каждом из процессоров отбросить варианты, в которых коэффициенты корреляции и близости меньше 0.5. Среди оставшихся вариантов выбрать вариант с наибольшим совокупным критерием  $F(\vec{a})$ , отправить его номер процессору-мастеру, вычислить самый большой критерий среди полученных от процессоров-рабочих и для него рассчитать все временные ряды, нарисовать графики, сравнивающие расчет со статистикой.

Результаты идентификации представлены графически на рис.1-3.

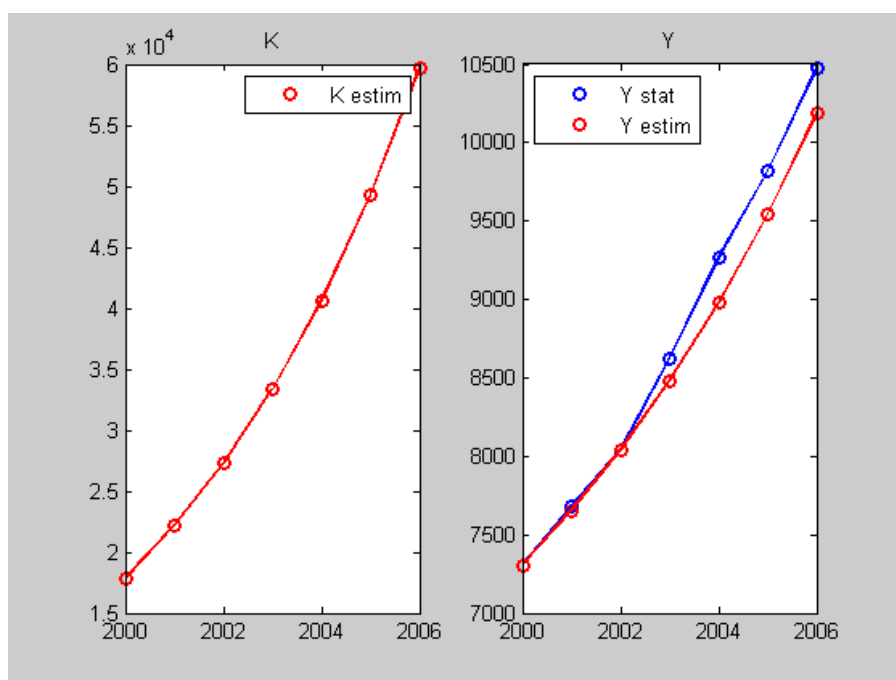


Рис.1. Результаты идентификации капитала  $K$  и выпуска  $Y$ .

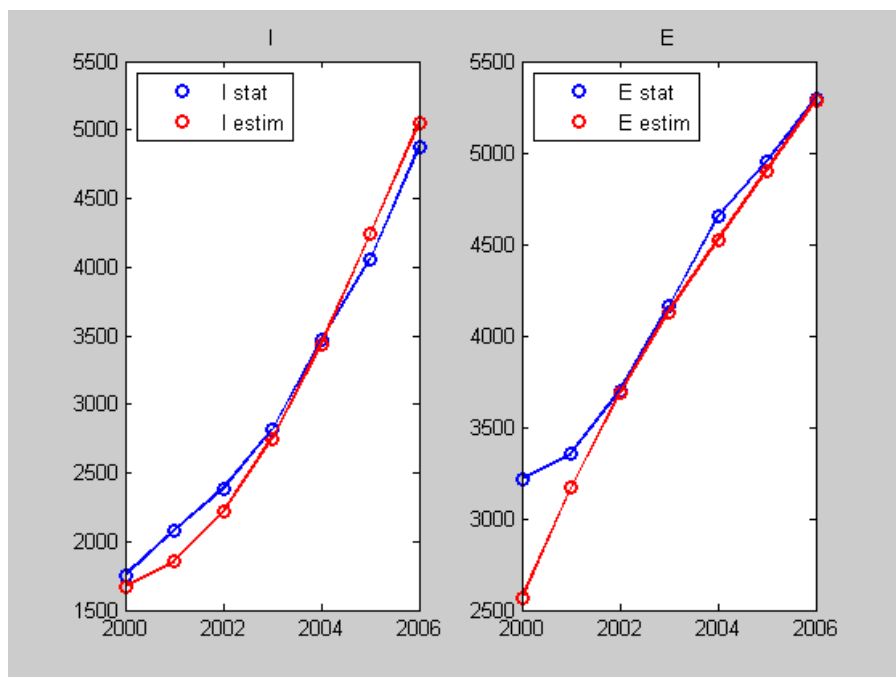


Рис.2. Результаты идентификации импорта  $I$  и экспорта  $E$ .

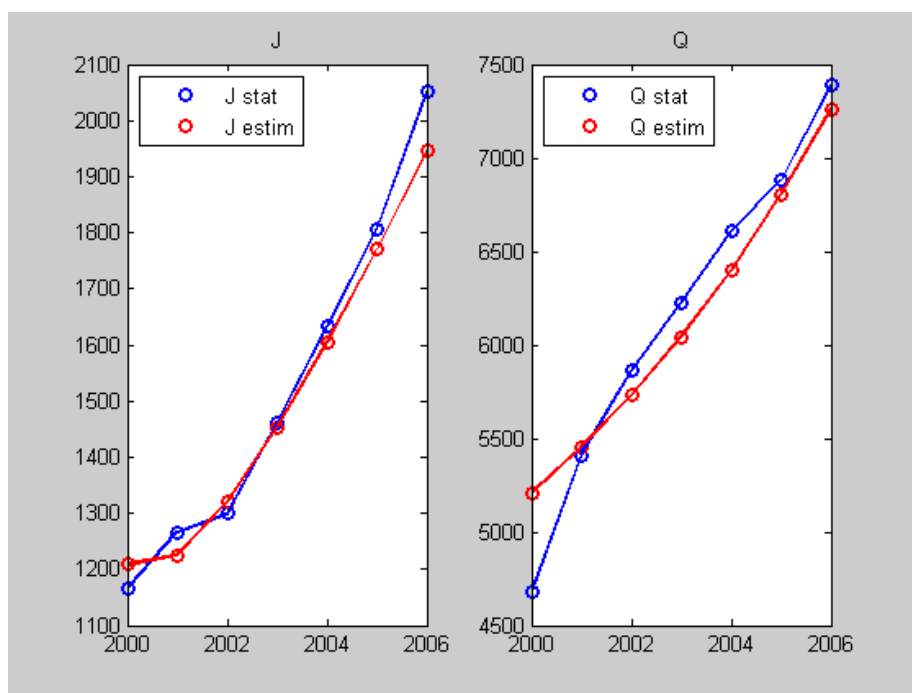


Рис.3. Результаты идентификации реальных инвестиций  $J$  и конечного потребления домашних хозяйств и государственных и общественных организаций  $Q$ .

Численные результаты идентификации:  $a = 0.84$ ,  $b = 0.78$ ,  $\mu = -0.175$ ,  $\alpha = 0.41$ . Тогда  $K_0 = \frac{Y_0}{\alpha} = 17819$  млрд.руб. 2000 г. Отрицательное значение параметра  $\mu$  означает, что эффективный капитал прирастает намного быстрее, чем это обеспечивают инвестиции. Значит в производство вовлекается старый капитал советского времени. Но объем его не безграничен. Можно оценить время его

исчерпания. Допустим, что максимальный объем старого капитала, который может быть вовлечен без инвестиций в четыре раза превышает объем эффективного капитала в 2000 г. Тогда время  $T$  исчерпания старого капитала можно оценить следующим образом.

$$T = \frac{1}{|\mu|} \ln\left(\frac{K_T}{K_0}\right) = \frac{\ln 4}{0.175} \approx 8.$$

В конце 2008 г. исчерпается объем вовлекаемого старого капитала/

Поэтому в базовом варианте прогноза нельзя продолжать текущие тенденции, т.е. базовый сценарий оказывается пессимистическим. Считаем, что все параметры после 2008, за исключением  $\mu$  и  $\gamma$ , принимают значения, определенные при идентификации. Относительные индексы цен меняются в силу оценок (7)-(9). Предполагаем, что труд после 2008 г. прирастать не будет (так как, в силу демографических проблем, скорее всего, он будет снижаться),  $\gamma = 0$  после 2008 г. Считаем, что вовлечение старых мощностей завершится в 2008 г., и далее капитал будет амортизироваться с темпом, равным доле инвестиций в 2000 г.,  $\mu = -0.175$  до 2008 г.,  $\mu = \alpha\beta = J_0/K_0 = 0.0678$  с 2009 г.

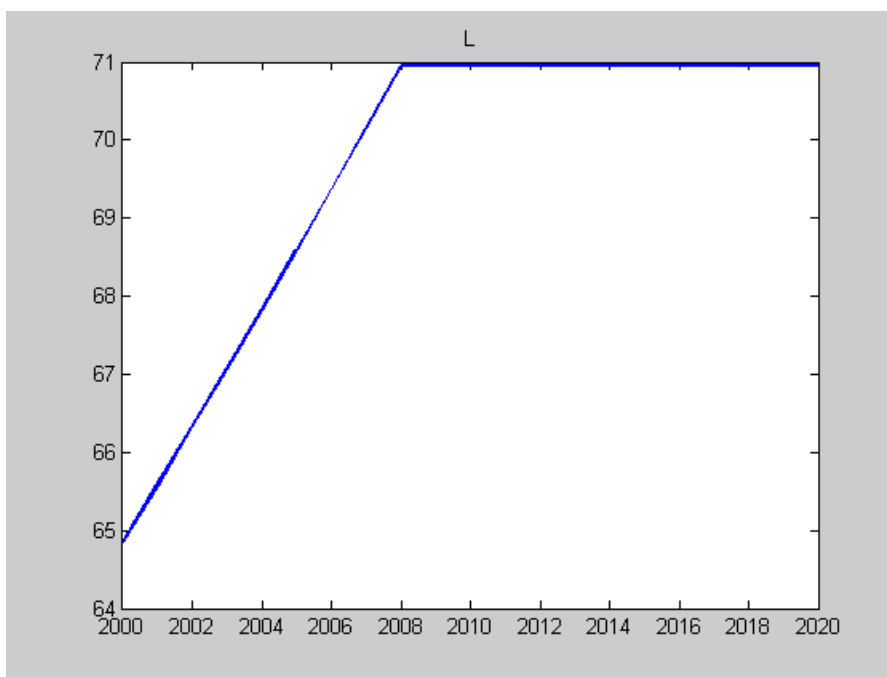


Рис.4. Графическое изображение труда L в базовом сценарии прогноза

В результате расчета получим оценку динамики капитала и выпуска для базового сценария.

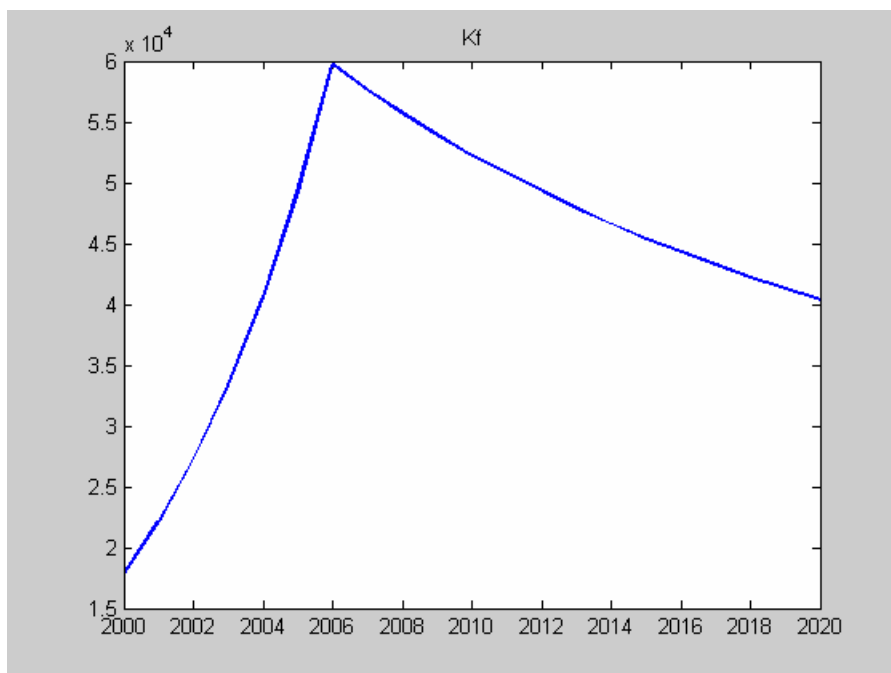


Рис.5. Прогноз динамики капитала  $K$  в базовом сценарии.

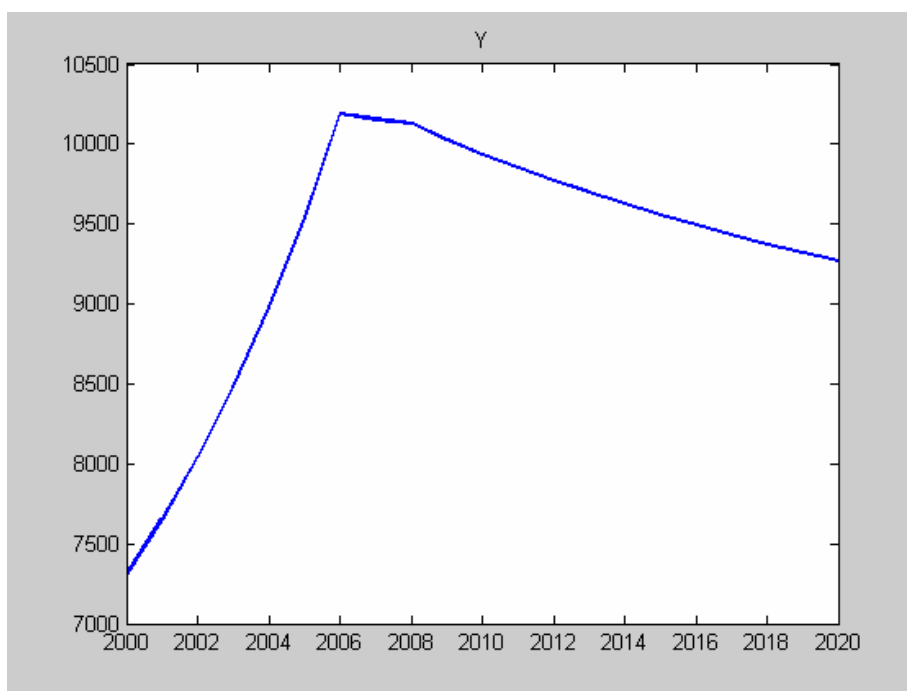


Рис.6. Прогноз динамики выпуска  $Y$  в базовом сценарии.



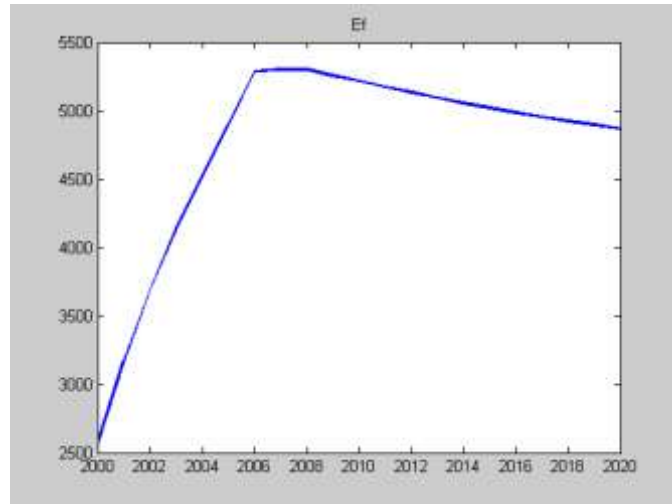


Рис.7. Прогноз динамики экспорта  $E$  в базовом сценарии

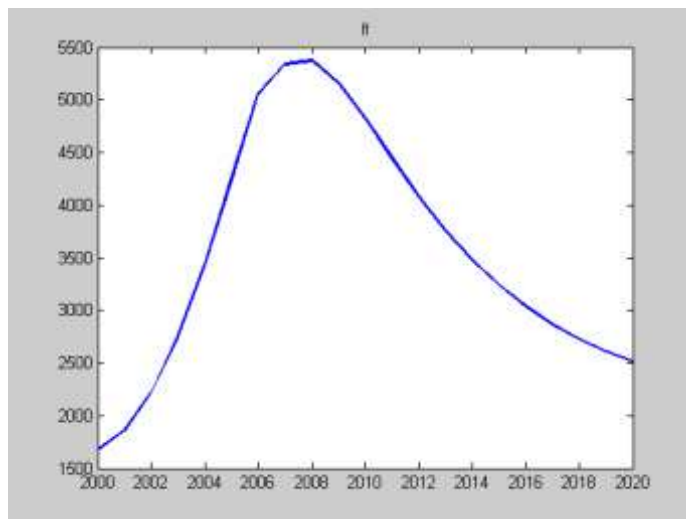


Рис.8. Прогноз динамики импорта  $I$  в базовом сценарии

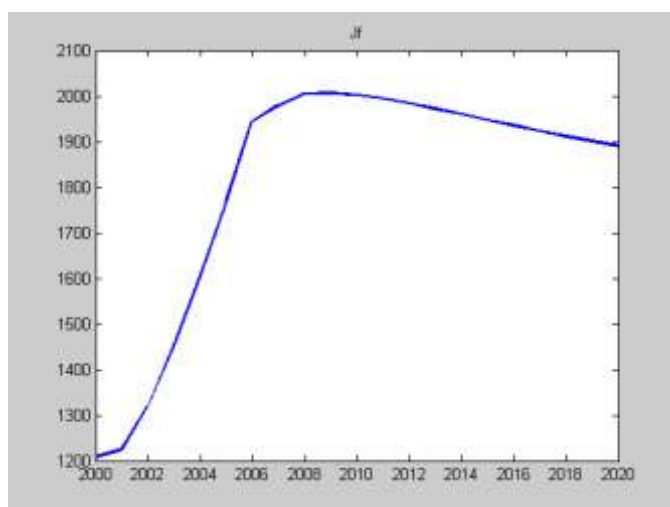


Рис.9. Прогноз динамики инвестиций  $J$  в базовом сценарии

Раз есть пессимистический вариант, можно рассмотреть и оптимистический вариант. В последнее время происходят изменения в экономической политике. Предположим, что эти изменения начались в 2000 г. и рост экономики идет за счет научно-технического прогресса (НТП), имитации лучших зарубежных образцов, осуществления собственных инноваций. Таким образом, предполагаем существование возрастающей отдачи на используемые производственные факторы. Формально это выражается тем, что производственная функция будет однородной степени  $c > 1$ .

$$Y(t) = Y_0 \left[ a(L/L_0)^{-b} + (1-a)(K/K_0)^{-b} \right]^{c/b}, \quad (19)$$

Введение нового параметра приводит к тому, что темп амортизации капитала надо определять из каких-то внешних соображений. Определим темп амортизации из условия, что объем инвестиций в 2000 г. был равен объему амортизации капитала:  $\mu = \alpha\beta = J_0/K_0$ .

Считаем, что, несмотря на демографические проблемы, численность людей занятых в экономике в пересчете на простой труд продолжает расти за счет повышения в экономике, основанной на НТП, уровня используемого в производстве человеческого капитала. По-прежнему считаем, что индексы относительных цен меняются по заданным функциям (таким же, как и в базовом сценарии).

Результаты идентификации параметров в оптимистическом варианте:  $a = 0.9316$ ,  $b = 0.82$ ,  $\alpha = 0.9899$ ,  $\beta = 0.1569$ . Тогда  $\mu = 0.155$ ,  $K_0 = 7380.4$  млрд.руб. 2000 г. Оценка начального значения капитала получается в два раза ниже, чем в базовом варианте.

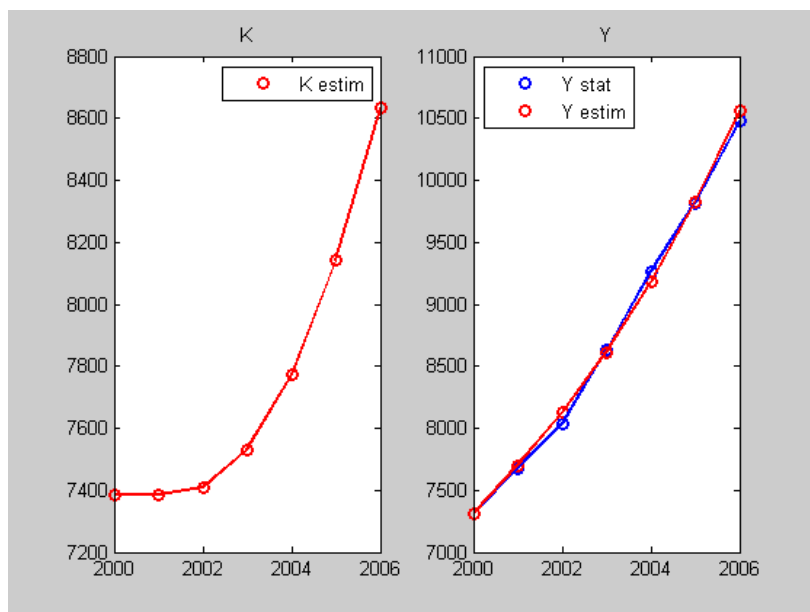


Рис.10. Идентификация капитала  $K$  и выпуска  $Y$  в оптимистическом сценарии  
 Прогноз динамики макропоказателей в оптимистическом сценарии соответствует названию этого сценария.

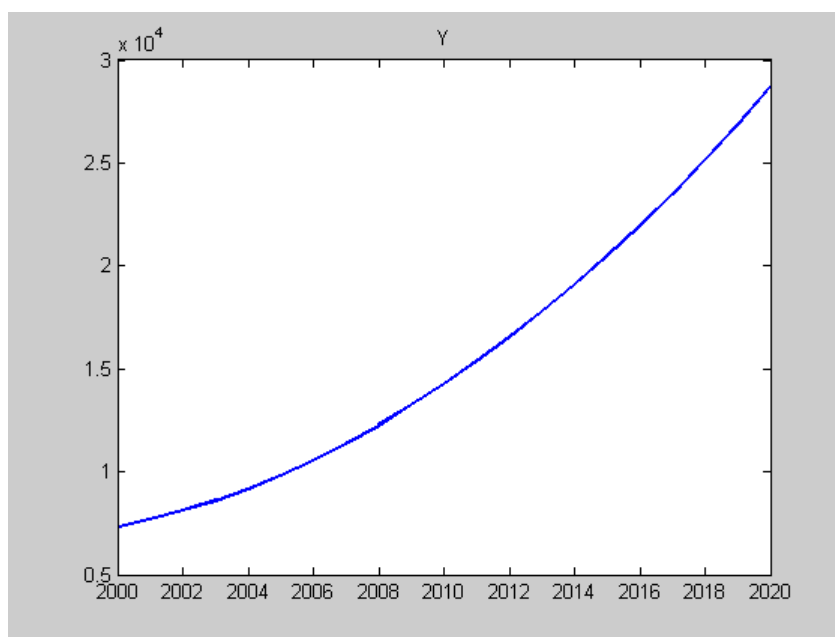


Рис. 11. Прогноз динамики выпуска  $Y$  в оптимистическом сценарии.

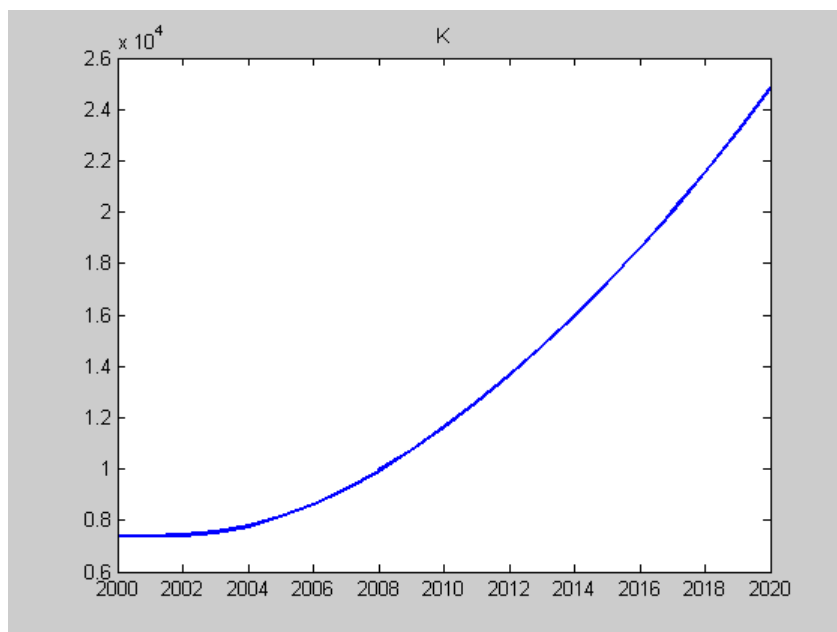


Рис. 12. Прогноз динамики капитала  $K$  в оптимистическом сценарии.

В оптимистическом сценарии выпуск  $Y$ , капитал  $K$ , экспорт  $E$ , потребление  $Q$  растут экспоненциально, рост импорт  $I$  в реальном выражении несколько замедляется, поскольку цены на импорт, по предположению, увеличиваются.

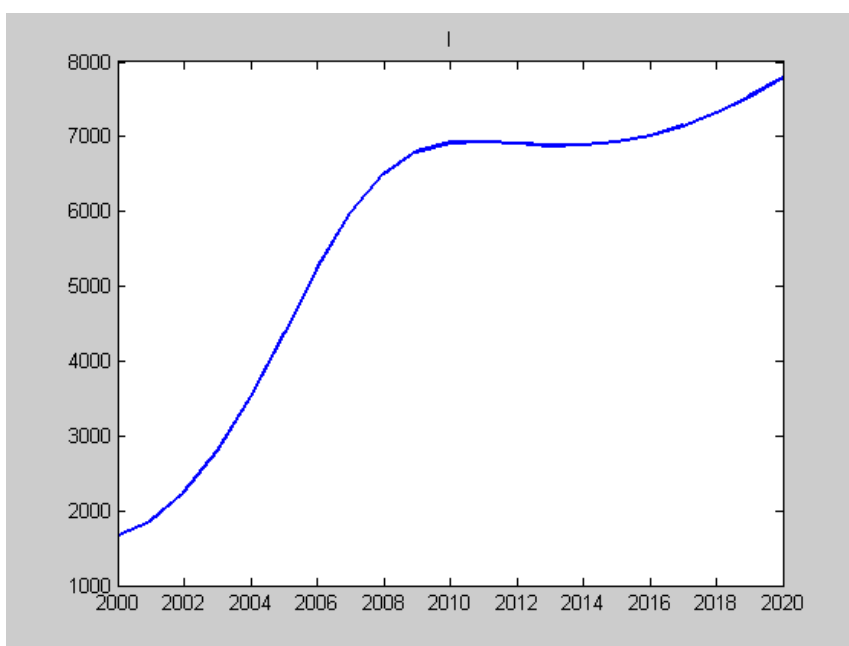


Рис.13. Прогноз динамики импорта  $I$  в оптимистическом сценарии.

Используемая модель не дает возможности однозначно ответить на вопрос, по какому сценарию будет развиваться экономика России. Можно только сделать вывод, что дальнейшее развитие существенно зависит от экономической политики, которая будет проводиться в ближайшее время. Если не предпринимать никаких усилий, то рост за счет вовлечения старых фондов скоро прекратится. Если экономическая

политика будет основываться на использовании достижений научно-технического прогресса, то возможен благоприятный прогноз.

### **Литература**

1. Оленев Н.Н. Основы параллельного программирования в системе MPI. – М.: ВЦ РАН, 2005. 80 стр.
2. Оленёв Н.Н., Печёнкин Р.В., Чернецов А.М. Параллельное программирование в MATLAB и его приложения. - М.: ВЦ РАН, 2007. 120 стр.
3. Burnaev E.V., Olenev N.N., Starikov A.S. Parameter estimation of a macroeconomic model // Proceedings of the Vth Moscow Intern. Conf. on Oper. Res. (ORM2007), dedic. to the outstanding Russian scientists Nikita N. Moiseev 90th birthday. 2007, Moscow. P.71-73.
4. Distributed Computing Toolbox For Use with MATLAB. 2004-2007 by the MathWorks, Inc.
5. MATLAB Distributed Computing Engine For Use with MATLAB. 2004-2007 by the MathWorks, Inc. [http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf\\_doc/mdce/mdce.pdf](http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/mdce/mdce.pdf)

## ПРОБЛЕМЫ ИЗМЕНЕНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ КЛИМАТА\*

Пархоменко В.П. (г. Москва)

*Работы по математическому моделированию глобального климата и выявлению связей происходящих изменений климата с экономической деятельностью были начаты в конце 70-х годов по инициативе академика Н.Н. Моисеева.*

*В течение последних десятилетий создавались различные модели, с помощью которых можно делать оценки изменения климата, обусловленные изменением состава атмосферы и других факторов. Это помогло пониманию механизмов предстоящих и прошлых изменений климата. Вся климатическая система очень сложна, и до сих пор не существует моделей, которые могли бы полностью описать совокупность естественных процессов переноса в атмосфере и у поверхности. Наиболее сложными климатическими моделями являются модели общей циркуляции атмосферы и океана. Кроме того, нужны модели для описания эволюции морского льда, а также различных процессов, происходящих на поверхности суши, таких как образование и изменение снежного покрова, влагосодержания почвы и транспирации растительности.*

*Проведены расчеты по воспроизведению современного климата, многочисленные эксперименты по оценке антропогенных и естественных изменений климата (последствия ядерной войны, увеличение концентрации углекислого газа, крупных вулканических извержений, изменений растительного покрова и др.).*

Климат является одним из основных природных ресурсов, влияющих на такие определяющие секторы экономики страны, как сельское хозяйство, энергетика, водопользование и др. Результаты научных исследований в области климата с возрастающей уверенностью свидетельствуют о том, что человеческая деятельность - важный климатообразующий фактор, и последствия антропогенного воздействия на климатическую систему в течение ближайших десятилетий могут быть катастрофическими. При этом относительно деталей таких изменений, особенно регионального масштаба, остается большая неопределенность. Кроме того, крайне неблагоприятные социально-экономические последствия регионального и даже глобального характера могут быть вызваны естественными климатическими вариациями.

Только при совместном изучении глобальных изменений природной среды и климата могут быть разработаны научные основы для создания системы мер по ограничению негативного воздействия хозяйственной деятельности на природную среду, сбережению энергии и ресурсов, изменению структуры экономики и адаптации народного хозяйства к новым природным и климатическим условиям, т.е. перехода к устойчивому развитию [1].

Благодаря разнообразным наблюдениям, увеличению баз данных и совершенствованию методов анализа в последние несколько лет достигнут значительный прогресс в понимании того, как климатическая система менялась во времени и пространстве. Каждые 5–6 лет МГЭИК (Межправительственная группа экспертов по изменению климата) публикует Оценочные доклады, посвященные исследованию глобального климата и прогнозам его будущих изменений. Согласно последнему, Четвертому оценочному докладу МГЭИК [2], опубликованному в 2007 г.,

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 05-01-00649 и 05-07-90134)

деятельность человека привела к увеличению радиационного воздействия на климатическую систему с 1750 г. на  $1,6 \text{ Вт/м}^2$  и, соответственно, к потеплению. Антропогенный фактор по крайней мере в пять раз превышает эффект колебаний солнечной активности.

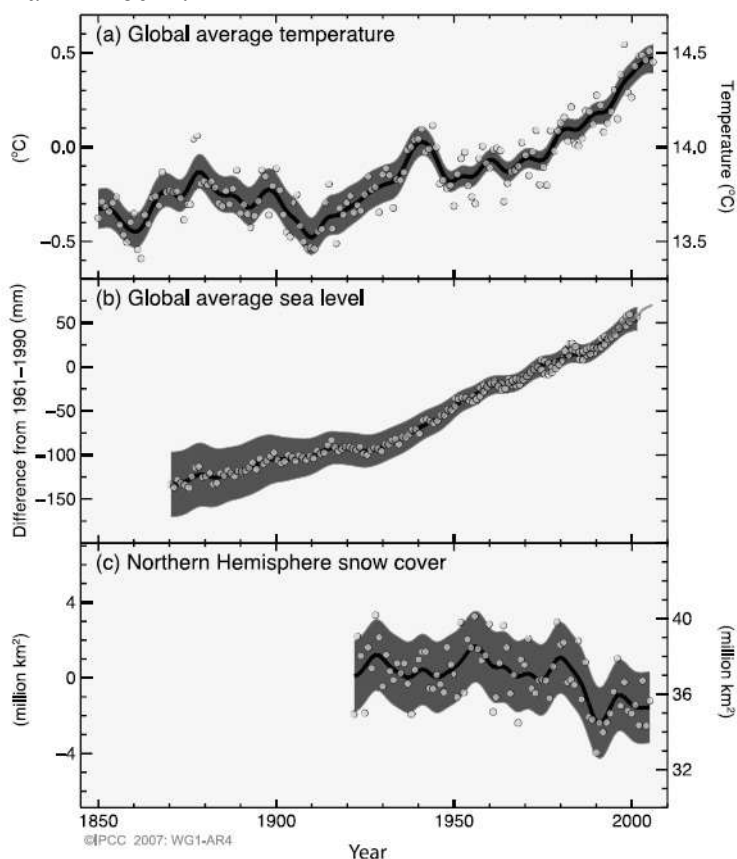


Рис.1. Изменение средней глобальной температуры (а), среднего уровня моря (b) и площади снежного покрова в северном полушарии (с) с 1850 г. по 2005 г [2].

За прошедший век (1907–2006 гг.) изменение средней глобальной температуры воздуха составило  $0,74^\circ\text{C}$ , причем линейный тренд температуры в последние 50 лет ( $0,13^\circ\text{C}$  за десятилетие) почти вдвое превышал соответствующее значение для столетия (Рис.1). В частности, 11 из 12 последних лет (включая 2006 г.) стали самыми теплыми за весь период инструментальных наблюдений за глобальной температурой (с 1850 г.).

Поглощение более 80% дополнительного тепла из атмосферы вызывает термическое расширение воды в океане, которое наряду с таянием ледников приводит к повышению среднего уровня моря, составившему в течение XX в. 0,17 м (Рис.1). За период спутниковых наблюдений (с 1978 г.) отмечалось значительное сокращение ледяного покрова океана в Северном полушарии, в летние месяцы составившее в среднем 7,4% за десятилетие.

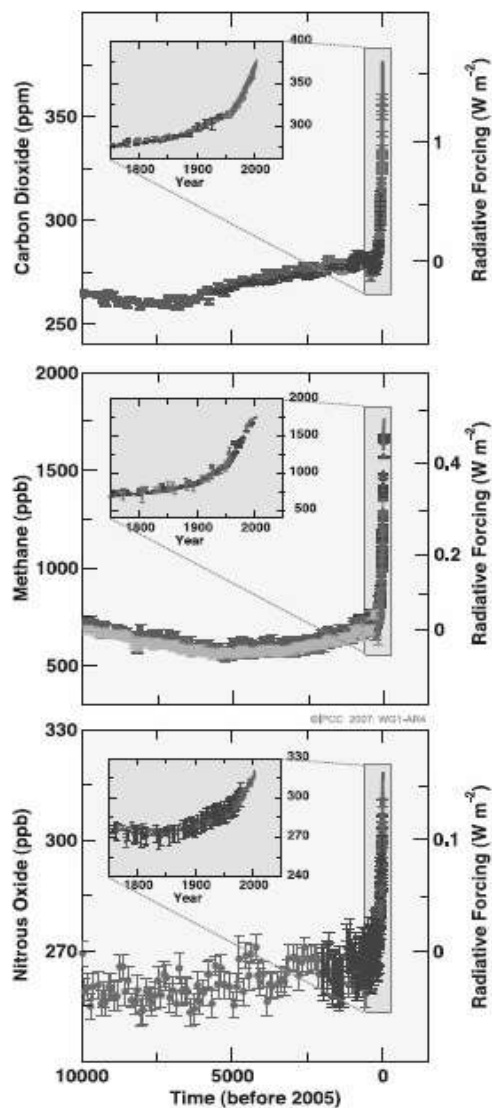


Рис. 2. Глобальные концентрации двуокиси углерода, метана и закиси азота за последние 10000 лет [2]

Значимые изменения произошли не только в средних климатических характеристиках, но и в изменчивости и экстремальности.

Палеоклиматические данные подтверждают необычность происходящих климатических изменений по крайней мере для последних 1300 лет. Результаты анализа ледовых кернов показывают, что современная атмосферная концентрация основного парникового газа (двуокиси углерода) намного превышает соответствующие значения за предыдущие 650 тыс. лет. В 2005 г. концентрация двуокиси углерода достигла 379 ppm (количество частиц на миллион) против 280 ppm в доиндустриальный период, причем ее рост за 1995–2005 гг. составил 1,9 ppm в год (Рис.2). Современные глобальные концентрации других важных парниковых газов, метана и закиси азота, также существенно превысили доиндустриальные значения за многие десятки тысяч лет (Рис.2).

Для оценки будущих изменений климата был реализован масштабный международный проект. В ходе подготовки Четвертого оценочного доклада МГЭИК были проведены эксперименты с 23 сложными физико-математическими моделями атмосферы и океана, представленными 16 ведущими исследовательскими группами из 11 стран. Основу этого проекта составили расчеты климата XX в. при заданных в соответствии с наблюдениями концентрациях парниковых газов и аэрозолей, а также



три сценарных расчета климата XXI в. (для сравнительно «жесткого», «умеренного» и «мягкого» сценариев антропогенных выбросов парниковых газов).

Согласно полученным результатам, в ближайшие два десятилетия, независимо от сценария, глобальное потепление продолжится со скоростью около  $0,2^{\circ}\text{C}$  за десятилетие. Даже при фиксации концентраций на уровне 2000 г. оно продолжалось бы за счет уже накопленных в атмосфере парниковых газов со скоростью  $0,1^{\circ}\text{C}$  за десятилетие. Сохранение эмиссий парниковых газов на современном уровне, не говоря уж об их увеличении, вызовет дальнейшее потепление, а сопутствующие ему многочисленные изменения глобальной климатической системы приведут к более значительным последствиям, чем те, которые наблюдались в XX в. По отношению к последнему двадцатилетию прошлого века, в зависимости от сценария, глобальное потепление составит (в среднем по ансамблю моделей) от  $1,9^{\circ}\text{C}$  («мягкий» сценарий антропогенного воздействия с вероятными пределами от  $1,1^{\circ}\text{C}$  до  $2,9^{\circ}\text{C}$ ) до  $4,0^{\circ}\text{C}$  («жесткий» сценарий с вероятными пределами от  $2,4^{\circ}\text{C}$  до  $6,4^{\circ}\text{C}$ ), а повышение уровня моря — в среднем от  $0,18$  м до  $0,59$  м соответственно (Рис.3).

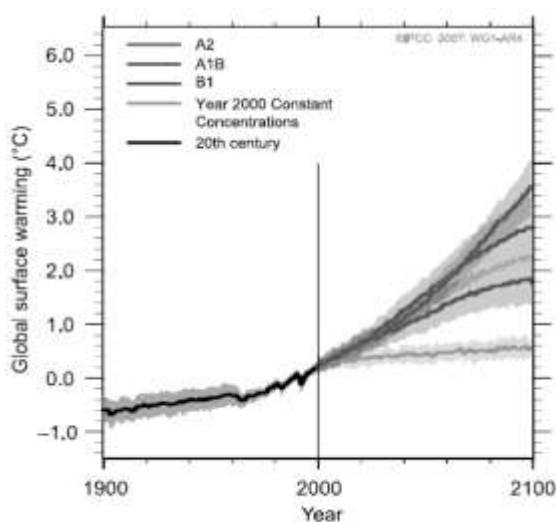


Рис. 3 Прогноз изменения средней глобальной температуры [2]

В отдельной группе расчетов было учтено уменьшение поглощения двуокси углерода океаном и суши при потеплении климата, что для «жесткого» сценария привело к дополнительному увеличению глобального потепления к 2100 г. более чем на  $1^{\circ}\text{C}$ .

Вероятность усиления экстремальности климата, включая волны тепла, сильные ливни и др., оценивается как очень высокая ( $>90\%$ ). Рост температуры воздуха в североатлантическом регионе продолжится. В результате дальнейшего повышения температуры поверхности океана в низких широтах вероятно увеличение интенсивности тропических циклонов (тайфунов). Произойдет смещение к полюсам путей внетропических циклонов. Ожидается сокращение ледяного покрова Мирового океана, причем в некоторых сценариях к концу XXI в. возможно полное освобождение Северного Ледовитого океана ото льда в конце лета. Будущие изменения осадков имеют противоположные тенденции в разных регионах: увеличение осадков в высоких широтах и уменьшение над большей частью суши в субтропиках, что приведет к возрастанию угрозы наводнений в одних регионах и засух в других.

Климат России характеризуется чрезвычайно большим разнообразием вследствие огромной протяженности ее территории. На фоне глобального потепления

региональные изменения климата России будут далеко не одинаковыми, а их влияние на отдельные виды хозяйственной деятельности может быть как благоприятным, так и пагубным.

Смягчение климатических условий может отодвинуть к северу границу зоны комфортного проживания, сократить расходы электроэнергии в отопительный сезон. С другой стороны, потепление чревато вытеснением одних биологических видов другими, ростом повторяемости засух в одних регионах и наводнений в других и т.п. При этом довольно велика неопределенность влияния будущего изменения климата на сельское хозяйство России, ее водные ресурсы, растительный и животный мир, демографическую ситуацию.

Результаты модельных расчетов показывают, что в XXI в. территория России (особенно арктические и субарктические регионы) будет находиться в области заметно большего потепления по сравнению с глобальным. Среднее за год повышение температуры к середине XXI в. может составить  $+2,6 \pm 0,7^\circ\text{C}$  по сравнению с концом XX в. (1980–1999 гг.). Наиболее значительное потепление ожидается зимой, особенно в Сибири и в Арктике. К 2040–60 гг. среднегодовые осадки в среднем по территории России возрастут на  $8,2 \pm 2,5\%$ .

Наиболее значительное увеличение осадков ожидается зимой (особенно в восточных и северных регионах), а в летний период их рост оказывается существенно меньшим. Изменения фазового состояния осадков (дождь или снег) могут оказывать влияние на стоки зимой и в период интенсивного таяния снега весной. На европейской территории России рост суммарных осадков происходит преимущественно за счет увеличения дождевых осадков, в то время как в Западной и Восточной Сибири их доля в основном возрастает за счет снега. Это означает, что в Сибири начинает происходить дополнительное накопление снега зимой, таяние которого создает угрозу учащения наводнений на водосборах сибирских рек весной.

На юго-западе России осадки даже уменьшаются. В тех регионах, где особенно развито сельское хозяйство (Северный Кавказ, Поволжье и др.), может произойти заметное уменьшение влажности деятельного слоя почвы и сокращение стока. Модельные расчеты показывают, что в регионах с ранним сходом снежного покрова тенденция к уменьшению влажности почвы обнаруживается уже весной и усиливается к лету. Это приведет к росту повторяемости засух в южных регионах.

Поглощение дополнительного тепла из атмосферы вызывает термическое расширение воды в океане, которое вместе с таянием ледников приводит к повышению среднего уровня моря

Еще одна опасность будущего изменения климата связана с таянием вечной мерзлоты. Площадь многолетнемерзлых грунтов составляет около 70% территории России. При потеплении климата будет происходить их деградация и увеличение глубины сезонного протаивания. Деградация многолетнемерзлых грунтов может привести к деформации или даже разрушению транспортных путей, трубопроводов, строений и т.п.

Особенно важные последствия глобального потепления для России связаны с вероятным уменьшением ледяного покрова Северного Ледовитого океана. Они столь же многочисленны, сколь и важны как для экосистем, так и для экономики, социальной сферы и даже безопасности России.

Увеличение продолжительности летней навигации приводит к развитию морского судоходства. Северный морской путь открывает небывалые перспективы для морских перевозок грузов и туризма. При этом возросшая скорость дрейфа ледяных полей и высокая степень изменчивости ледовой обстановки может затруднять многие виды морских операций.

Новые возможности для экономики, равно как и проблемы, связанные с экологией, возникают в связи с облегчением доступа по морю к природным ресурсам Арктики, включая месторождения нефти, газа и др. на шельфе Северного Ледовитого океана. В то же время многие объекты хозяйственной деятельности, расположенные в прибрежной зоне, столкнутся с усилением воздействия штормов в сочетании с уменьшением ледяного покрова арктических морей. Ожидаемое таяние морского льда, по-видимому, окажется губительным для некоторых видов животных, например для белого медведя.

Структура наблюдаемых изменений климата оказывается более сложной, чем изменения, полученные в моделях климата. В некоторых районах в отдельные сезоны изменения противоположны результатам моделирования, что свидетельствует о важной роли других климатообразующих факторов или несовершенстве моделей.

Расчеты по моделям общей циркуляции атмосферы (ОЦА) дают в общем согласованные глобальные результаты, однако значительно отличаются на региональном уровне.

При прогнозировании с помощью моделей ОЦА температуры атмосферы Земли в зависимости от концентрации  $\text{CO}_2$  возникает ряд трудностей и неопределенностей. Они связаны с тем, что индуцированное человеком потепление будет протекать на фоне естественных эффектов потепления и похолодания климата, сравнимых по интенсивности с парниковым эффектом. Для точного вычисления этих антропогенных изменений необходимо уметь с большой точностью моделировать естественные изменения климата. При этом появляются две основные трудности - адекватное описание океанов и облачности.

Дело в том, что на величину парникового эффекта оказывают большое влияние течения в океане, которые переносят большие массы воды из одного региона в другой. Включение этого эффекта в расчеты приводит к ослаблению парникового эффекта. Моделирование облачности в моделях климата сталкивается с большими трудностями, так как естественный охлаждающий эффект облаков в десятки раз больше, чем суммарное антропогенное потепление, предсказываемое в следующем веке. Нагревающий эффект облачности (естественный парниковый эффект) также значительно больше, чем антропогенный. Это означает, что небольшие изменения типов и количества облаков могут либо ослабить парниковый эффект (в случае увеличения облачности), либо усилить (в случае уменьшения), в зависимости от отрицательности или положительности обратной связи. Но малые изменения облачности очень трудно правильно моделировать и, следовательно, предсказывать в какую сторону она будет меняться.

При рассмотрении парникового эффекта весьма существенно иметь возможность предсказывать не только глобальные тенденции, но и региональные изменения климата, предположим, в европейской части России или в Сибири. Эти региональные изменения могут существенно отличаться от глобальных климатических трендов. Например, анализ наблюдений температуры за последние 20 лет показывает, что климат в целом потеплел, а в Англии и Западной Европе похолодало.

Увеличение мощности ЭВМ является одним из важнейших требований для более надежных климатических предсказаний [3]. Другой потребностью, настолько же важной, является увеличение количества климатических наблюдений в атмосфере и океане, организация непрерывного мониторинга факторов, вызывающих климатические изменения, таких как концентрация парниковых газов, значение солнечной постоянной, степень прозрачности атмосферы, связанная с вулканическими извержениями и другими естественными и искусственными эффектами [4]. Наблюдения за океанами особенно важны, так как знания о них значительно более

бедные, чем об атмосфере. Необходимы более полные данные о вариациях температуры, солености, течений в зависимости от глубины океана.

Другой важный момент - натурные наблюдения за процессами влажной конвекции в атмосфере, которая определяет количество и тип образующихся облаков. Эти мелкомасштабные процессы в атмосфере, наряду с микрофизикой облаков, остаются недостаточно изученными в настоящее время.

Еще одной проблемой при моделировании климата и его изменений является адекватное описание взаимодействия атмосферы с подстилающей поверхностью. В частности, процессов фильтрации влаги в почве, испарения с поверхности земли при наличии растительного покрова того или иного вида.

Наиболее сложными климатическими моделями являются модели общей циркуляции [5]. В полном варианте для изучения парникового эффекта они должны включать модель атмосферы и модель океана. Кроме того, нужны модели для описания эволюции морского льда, а также различных процессов, происходящих на поверхности суши, таких как образование и изменение снежного покрова, влагосодержания почвы и эвапотранспирации.

Океан представляет собой сложную динамическую систему, но с гораздо более бедными данными наблюдений, чем атмосфера. Температура его поверхности определяется балансом между интенсивностью нагрева поверхности и разнообразными динамическими процессами, при которых происходит перераспределение тепловой энергии. Основные из них - это мелкомасштабное турбулентное перемешивание по вертикали и крупномасштабный горизонтальный перенос энергии морскими течениями. До сих пор еще не существует моделей общей циркуляции океана с достаточным пространственным разрешением, чтобы можно было описать энергосодержащие вихри. Даже в наиболее сложных моделях производится параметризация подсеточных процессов с использованием полуэмпирической теории турбулентной диффузии, что сильно влияет на результаты.

Модель климата Вычислительного Центра РАН [6] включает атмосферный блок, реализованный на базе модели общей циркуляции атмосферы [1] с параметризацией ряда подсеточных процессов, и океанский блок, представляющий собой интегральную модель деятельного слоя океана с заданным полем геострофических течений и модель эволюции морского льда [7]. Разработаны версии модели с более мелким пространственным разрешением и моделью общей циркуляции океана. Взаимодействие между блоками осуществляется в интерактивном режиме.

Модель описывает тропосферу, расположенную ниже предполагаемого уровня изобарической тропопаузы. На Рис. 4 схематично представлена вертикальная структура атмосферы, как она рассматривается в модели циркуляции атмосферы.

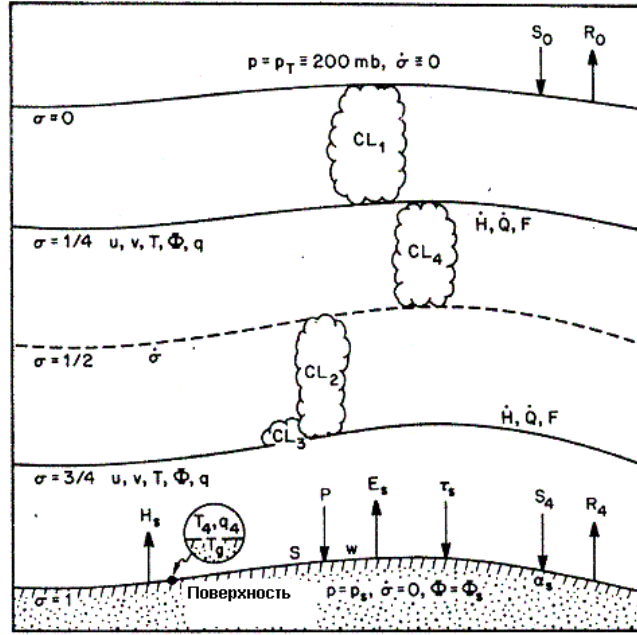


Рис. 4. Вертикальная структура модельной атмосферы

Вводится безразмерная вертикальная координата [5]

$$\sigma \equiv \frac{p - p_T}{p_s - p_T}$$

где  $p$  – давление,  $p_T$  – постоянное давление на уровне тропопаузы,  $p_s$  – переменное давление у поверхности Земли. По определению, на тропопаузе  $\sigma = 0$  и у поверхности земли  $\sigma = 1$ .

Уравнения горизонтального движения (в  $\sigma$ -системе координат) могут быть записаны в векторной форме следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\pi V) + (\nabla \cdot \pi V) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\pi V \dot{\sigma}) + f k \times \pi V + \pi \nabla \Phi + \sigma \pi \alpha \nabla \pi = \pi F$$

где

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{a \cos \varphi} \left[ \frac{\partial A}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi \cos \varphi) \right]$$

для вектора  $A = (A_\lambda, A_\varphi)$ , где  $\lambda$  – долгота и  $\varphi$  – широта точки. Здесь  $V$  – вектор горизонтальных компонент скорости,  $\pi = p_s - p_T$ ,  $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$ ,  $f$  – параметр Кориолиса,  $k$  – единичный вектор в вертикальном направлении,  $\Phi$  – геопотенциал,  $\alpha$  – удельный объем,  $F$  – горизонтальная сила трения.

Термодинамическое уравнение энергии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\pi c_p T) + \nabla \cdot (\pi c_p T V) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\pi c_p T \dot{\sigma}) - \pi \alpha \sigma \left( \frac{\partial \pi}{\partial t} + V \cdot \nabla \pi \right) = \pi \dot{H},$$

где  $c_p$  – удельная теплоемкость сухого воздуха,  $T$  – температура воздуха,  $\dot{H}$  – скорость выделения тепла в единице массы воздуха.

Уравнения неразрывности и переноса влаги, соответственно:

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi V) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\pi \dot{\sigma}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\pi q) + \nabla \cdot (\pi q V) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\pi q \dot{\sigma}) = \pi \dot{Q},$$

где  $q$  – отношение смеси водяного пара,  $\dot{Q}$  – скорость генерации влаги в единице массы воздуха.

Приведённые выше уравнения являются прогностическими (т.е. эволюционными). К ним добавляются уравнение состояния

$\alpha = RT/p$ , где  $R$  – газовая постоянная для влажного воздуха и диагностическое гидростатическое уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \pi \alpha = 0,$$

где  $\Phi$  – геопотенциал.

Наряду с этими уравнениями рассматривается уравнение переноса примеси в атмосфере. Оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\pi s) + \nabla \cdot (\pi s V) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\pi s \dot{\sigma}) = \pi \dot{S},$$

где  $s$  – концентрация примеси в атмосфере,  $\dot{S}$  – источник примеси в данной точке. Он определяется выбросами дыма, сажи, аэрозолей в данной точке, процессами гравитационного осаждения, вымывания с осадками и химических превращений. Вид этого члена пока не конкретизируется.

Уравнения дополняются соответствующими граничными условиями и таким образом получается замкнутая динамическая система в  $\sigma$ -координатах.

Для численного решения атмосфера разбивается на слои в вертикальном направлении пропорционально массе (давлению). По определению, на тропопаузе  $\sigma=0$  и у поверхности земли  $\sigma=1$ . В центре каждого из слоёв расположены отсчётные уровни на которых определены основные переменные. На поверхностях раздела между слоями так же как и на тропопаузе и поверхности Земли, определены дополнительные переменные и граничные условия.

Модель общей циркуляции атмосферы ВЦ РАН активно используется для расчетов атмосферных и климатических процессов на Земле. Проведены расчеты по воспроизведению современного климата, многочисленные эксперименты по оценке антропогенных и естественных изменений климата (последствия ядерной войны, увеличение концентрации углекислого газа, крупных вулканических извержений, изменений подстилающей поверхности и др.). Разрешающая способность глобальной модели может быть увеличена. Она зависит от мощности используемых ЭВМ. Достоверность модели ОЦА исследовалась по качеству воспроизведения ею современного климата в режиме реального сезонного хода. Это общепринятая процедура, которая позволяет проверить адекватность модели по большому количеству параметров климатической системы путем сравнения с данными наблюдений. Проверка имеет статистический характер, поскольку все расчетные характеристики стохастически меняются. Все модели ОЦА подвергаются такой проверке. Сезонные колебания климатических характеристик вокруг их среднегодовых значений весьма значительны. От зимнего к летнему сезону характер циркуляции атмосферы качественно изменяется. Поэтому, если модель удовлетворительно описывает сезонный ход основных климатических характеристик, как в рассматриваемом случае, то можно рассчитывать на пригодность ее для исследования чувствительности климата.

Описываемые ниже расчеты проведены с использованием модели океана [8], в которой рассчитываются основные течения. Рассчитанное по модели изменение средней глобальной температуры приземного воздуха при удвоении  $\text{CO}_2$  для января

составляет  $+4^{\circ}\text{C}$ . Причем потепление сильнее над материками, и наибольшее в Азии в зимний период, где достигает значения  $6^{\circ}\text{C}$  (Рис. 5, 6). Это связано со сдвигом снеговой линии к северу в этот период. В Европе и Северной Атлантике повышение составляет  $0.5^{\circ}$ -  $1^{\circ}\text{C}$ . Наименьшее потепление наблюдается в Южном полушарии, особенно летом над океанами. Интересно отметить, что в процессе выхода на стационарный режим в районе Антарктиды наблюдалось даже некоторое похолодание.

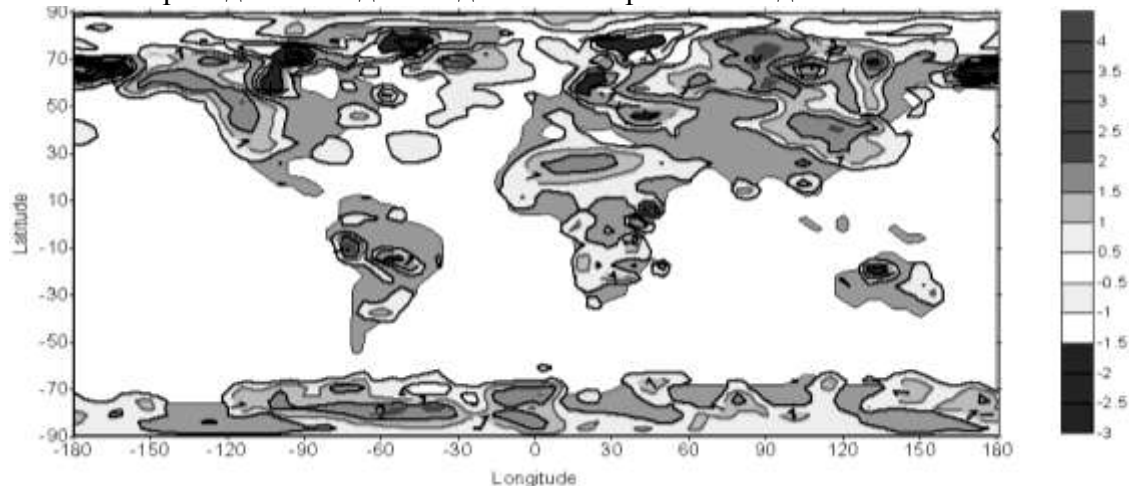


Рис. 5 Изменение температуры при удвоении концентрации двуокиси углерода. Зима.

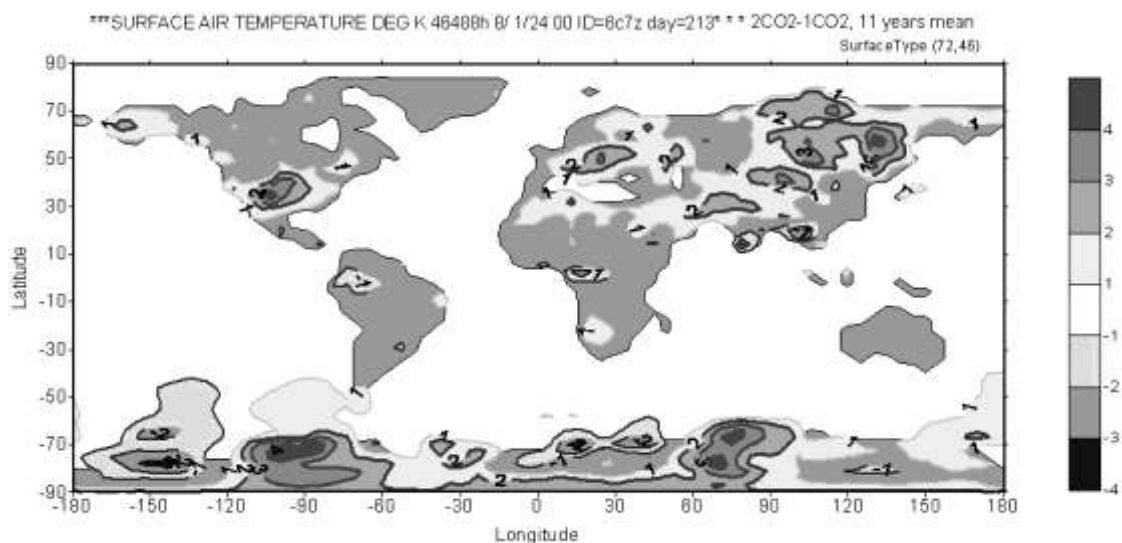


Рис. 6 Изменение температуры при удвоении концентрации двуокиси углерода. Лето.

Анализ показывает "пятнистую" структуру поля изменения осадков (Рис.7). Их рост связан с увеличением испарения с поверхности океана и последующим выпадением. Однако существуют области, где осадки уменьшаются. Это происходит в экваториальной области Южной Америки, в центральных областях Африки, на Юго-востоке Азии и небольшое иссушение Западной Сибири и Запада Северной Америки. Эти процессы происходят в летний период. Зимой в Северном полушарии изменения осадков менее  $0.5$  мм/день.

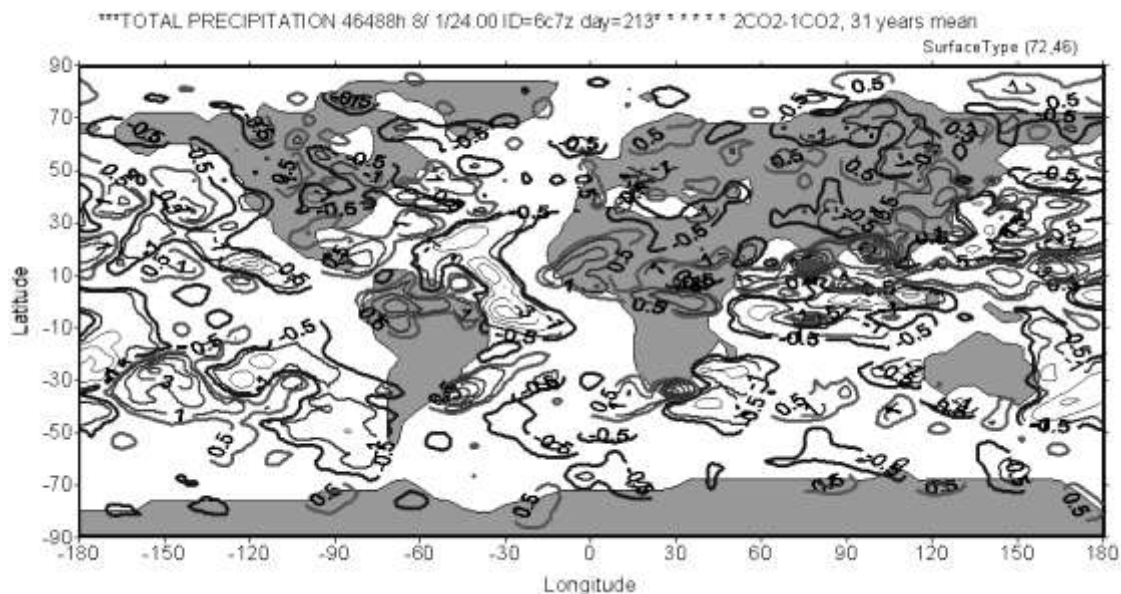


Рис. 7 Изменение количества осадков при удвоении концентрации двуокиси углерода. Лето.

Расчеты показывают уменьшение облачности на несколько процентов в низких широтах. Возможно, что это приводит к некоторому дополнительному прогреву подстилающей поверхности. Изменения зонального ветра достаточно малы, особенно для нижнего уровня (800 мб) - менее 0.5 м/с. Для уровня 400 мбар изменения достигают 1 м/с в средних широтах северного полушария. Это связано с некоторым ростом разницы температур экватор – полюс в верхних слоях атмосферы.

Нынешняя ситуация беспрецедентна в истории Земли - т.к. эмиссия парниковых газов может поднять среднюю глобальную температуру воздуха за несколько десятилетий, в то время как для естественного повышения температуры на ту же величину требовалось не менее нескольких тысячелетий. Беспрецедентна, таким образом, не абсолютная величина грядущих изменений, а скорость их нарастания.

Должна быть выработана стратегия реагирования на изменения природной среды и климата, предусматривающая два ключевых направления: адаптацию отраслей экономики к новым природно-климатическим условиям и разработку мер по ограничению антропогенной нагрузки, ведущей к ощутимым изменениям климата и природной среды. При этом существенно, что меры по ограничению должны носить международный характер и вырабатываться на основе соответствующих международных документов и научно-технических программ. Результаты математического моделирования климата и палеореконструкции дают основания считать, что предстоящие изменения климата приведут в целом к улучшению условий земледелия в России, что окажет положительное влияние на развитие зернового производства. Однако в ряде регионов (например, находящихся на юге России в зоне неустойчивого земледелия), будет происходить ухудшение сельскохозяйственной ситуации.

#### Литература.

1. Моисеев Н.Н., Александров В.В., Тарко А.М. Человек и биосфера. Опыт системного анализа и эксперименты с моделями. М.: Наука, 1985. 272 с
2. Climate Change 2007 – The physical Science Basis. Contribution of Working Group 1 to the Fourth Assessment Report of IPCC . 2007, 989 p. (ISBN 978 0521 88009-1).



3. Пархоменко В.П. Анализ эффективности реализации модели климата на многопроцессорной ЭВМ кластерного типа. Труды третьей международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» (Москва, 2-4 октября 2006 г.). М: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2006, стр. 933-945.
4. Earth System Science. NASA, 1988. 208 p.
5. П.Н.Белов, Е.П.Борисенков, Б.Д.Панин Численные методы прогноза погоды. Л: Гидрометеиздат, 1989, 375 с.
6. Пархоменко В.П. Верификация климатической модели. М.: ВЦ АН СССР, 1988. 34 с.
7. Parkhomenko V.P. Sea Ice Cover Sensitivity analysis in Global Climate Model. Research activities in atmospheric and oceanic modelling. World Meteorological Organization Geneva Switzerland 2003, V. 33, p. 7.19 – 7.20.
8. Ганопольский А.В., Гусев А.М., Нефедов Н.Н. Климатическая интегральная модель деятельного слоя океана // Океанология, 1987. Вып. 4. Т. 27. С.573-578.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВРЕМЕННОЙ ЭКОНОМИКИ РОССИИ: МЕТОДЫ, ТЕХНОЛОГИИ, РЕЗУЛЬТАТЫ \*

И.Г. Пospelов (Москва)

*Рассматривается технология описания и создания экономико-математического моделирования развивающихся экономических систем на основе системного анализа сложных систем, разрабатываемого в ВЦ РАН.*

### Модельная летопись российских экономических реформ

В 1975 г. в Вычислительном центре АН СССР (потом РАН) возникло новое направление исследований: **системный анализ развивающейся экономики**, в котором методология математического моделирования сложных систем, развитая в естественных науках, была синтезирована с достижениями современной экономической теории. Была поставлена цель научиться строить замкнутые математические модели, которые описывали бы механизмы развития во времени макроэкономических структур и правильно воспроизводили совокупность основных качественных особенностей эволюции изучаемой экономической системы. Усилия были сосредоточены на разработке методов описания реальных экономических отношений в изучаемой системе [1].

Исследования начались с моделей рыночной экономики, а в 1988 г. была построена модель, которая воспроизводила основные качественные особенности эволюции плановой экономики. Поэтому к моменту начала экономических преобразований в СССР, а затем в России уже был разработан подход к анализу происходивших в экономике изменений. В частности, за два года до реформы 1992г. были правильно предсказаны краткосрочные ее последствия. Каждая из последующих моделей:

- модель экономики периода высокой инфляции 1992-1995гг.
- модель экономики периода «финансовой стабилизации» 1995-1998гг., предсказавшая кризис 1998 г.,
- модель для оценки перспектив развития экономики после кризиса 1998г

была основана на системе гипотез относительно характера тех экономических отношений, которые складывались в соответствующий период в России.

С помощью моделей удалось понять внутреннюю логику развития экономических процессов, скрывшуюся за видимой, часто казалось бы парадоксальной, картиной экономических явлений, которая не укладывалась в известные теоретические схемы. Опыт применения моделей показал, что они служат надежным инструментом анализа макроэкономических закономерностей, а также прогноза последствий макроэкономических решений **при условии сохранения сложившихся отношений**. Можно сказать, получилась целая «летопись» российских экономических реформ, выраженная языком математических моделей. Эти модели детально описаны в [1, 2], а подробный обзор можно найти в [3, 4].

Главная трудность моделирования советской и российской экономики в период 1986-2004 гг. была в том, что вследствие ее эволюции каждую следующую модель приходилось создавать заново, начиная с системного анализа изменившихся экономических отношений. Создание новой модели – очень трудоемкое дело, оно

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00563-а), Российского гуманитарного научного фонда (код проекта 07-02-00362).

занимает примерно год работы коллектива квалифицированных специалистов. Но даже не в этом главное. Новые экономические отношения описываются новыми переменными, другими соотношениями, часто требуют использования новых математических методов. Поэтому нельзя сказать, что в итоге почти тридцатилетних исследований эволюции советской и российской экономики мы создали *систему* моделей. Перечисленные выше модели трудно сопоставить друг с другом, так же как трудно сопоставлять модели, созданные разными исследовательскими группами. Такое положение дел, увы, типично для моделирования сложных систем [6].

Последняя наша разработка составила качественно новый этап, поскольку она основывается на новой теоретической базе: **модели межвременного равновесия с управлением капиталом**, и целиком выполнена с использованием **новой технологии разработки макромоделей экономики**.

### **Модель современной российской экономики**

Модель была разработана по заказу Главного научно-исследовательского вычислительного центра (ГНИВЦ) Федерального агентства по налогам и сборам (ФАНС) и успешно сдана ему в эксплуатацию. Прагматической целью проекта было создание инструмента системного использования информации из внешних по отношению к налоговой службе источников **для оценки размеров теневого оборота и налогового потенциала России**. В рамках решения этой задачи сам ГНИВЦ выступал исполнителем, поэтому дальнейшая судьба работы зависела от отношения к ней заинтересованных департаментов ФАНС.

Демонстрации модели и обсуждения с руководством и специалистами этих департаментов выявили следующие обстоятельства. С одной стороны, точность данной модели недостаточна для практической работы ФАНС – фактически нужен более короткий, но более точный прогноз. С другой стороны, специалисты ФАНС явно не могли поверить, что демонстрируемые результаты действительно получены на столь небольшой, по сути, информационной базе и при столь малом числе (20-30) настроечных параметров. Со своей стороны, мы не очень настаивали на продолжении работ с существенными кадровыми изменениями в ГНИВЦ, последовавшими за административной реформой 2004г. Так или иначе, проект не был продолжен. Такая же судьба постигла и все предыдущие наши проекты, независимо от их объективного успеха и отношения к ним непосредственных заказчиков.

С научной точки зрения целью проекта была проверка пригодности некоторых теоретических концепций для описания реальных макроэкономических процессов, а также отработка и развитие технологии моделирования. В этом отношении проект оказался гораздо более успешным, чем мы сами ожидали. Полное описание модели, ее теоретической базы и технологии создания приведены в [4].

Модель описывает развитие во времени полного цикла общественного воспроизводства в предельно агрегированном виде. Вся совокупность производимых в стране и импортируемых благ представлена в модели одним показателем – **реальным ВВП**. В модели **производство продуктов, производство услуг и торговля объединяются в один сектор, а финансовый сектор рассматривается отдельно**. Сопровождающие производство, распределение и потребление продукта финансовые потоки описываются как оборот пяти финансовых инструментов: **наличных денег, остатков расчетных счетов, остатков корреспондентских счетов в ЦБ, банковских ссуд, банковских депозитов, иностранной валюты**.

Продукт, труд, перечисленные финансовые инструменты и валюта образуют набор аддитивных величин, для которых в модели выписывается **полная система**

**балансов**, причем потоки финансовых инструментов разделяются на легальные и теневые.

Развитие экономики, выраженное движением макроэкономических показателей, описывается в модели как результат деятельности семи экономических агентов:

1. **Фирмы**, представляющей все нефинансовые коммерческие организации.
2. **Банка**, представляющего все финансовые коммерческие организаций.
3. **Населения**, представляющего физических лиц, выступающих в качестве потребителей и наемных работников.
4. **Собственника**, представляющего физических и юридических лиц, осуществляющих управление движением капитала между секторами национальной экономики и за пределы страны.
5. **Государства**, которое в модели исполняет бюджет и определяет параметры экономической политики (ставки налогов, нормы резервов и др.).
6. **Центрального банка СВ**, который в модели эмитирует деньги, накапливает валютные резервы и служит расчетным центром для банков.
7. **Внешней торговли F**.

Деятельность последних трех агентов описывается **сценариями государственной экономической политики** и независимыми от модели **прогнозами изменения внешнеэкономической конъюнктуры**.

## **Модель идеального межвременного равновесия с управлением капиталом**

### ***Модель Эрроу-Дебре и принцип рациональных ожиданий***

Начнем с краткого описания теоретической базы модели. Исходным пунктом служит хорошо известная модель конкурентного экономического равновесия Эрроу-Дебре [8], которая считается наиболее фундаментальным и строгим, хотя и несколько абстрактным описанием сущности рыночной экономики.

В модели Эрроу-Дебре для описания экономики рассматривается взаимодействие двух групп агентов потребителей-собственников и фирм-производителей. Потребители получают доходы от продажи ресурсов (прежде всего труда и капитала) производителям, а также дивиденды (фиксированную долю прибыли) производителей. Каждый потребитель тратит свой доход на покупку потребительских благ, стараясь максимизировать полезность своего потребления.

Производители располагают технологиями, позволяющими преобразовывать ресурсы и продукты в другие продукты. Каждый из производителей выбирает объем и ассортимент производства так, чтобы максимизировать свою прибыль, которую он потом без остатка распределяет между потребителями по праву их собственности.

Производители и потребители определяют планы продаж и покупок при заданных ценах, исходя из решения задач максимизации прибыли и полезности, соответственно. Поэтому решения оптимизационных задач агентов задают функции спроса и предложения на продукты и ресурсы в зависимости от цен. Цены затем устанавливаются так, чтобы сбалансировать совокупные спрос и предложение по каждому продукту и ресурсу. Сбалансированные величины спроса и предложения задают потоки производства и потребления в равновесии. Равновесие называется конкурентным, потому что все агенты в модели воспринимают цены как данность и не пытаются их изменить в свою пользу своими действиями («невидимая рука рынка»).

Равновесие в модели Эрроу-Дебре существует при весьма общих предположениях о виде функций полезности потребителей и множестве технологических возможностей

производителей. Равновесные цены определяются с точностью до множителя, а равновесные значения потребления обладают замечательным свойством эффективности (парето-оптимальности): величины полезности, которые потребители получают в конкурентном равновесии не могут быть увеличены для всех потребителей одновременно никаким вторичным перераспределением благ<sup>3</sup>. Более того, любое эффективное оптимальное распределение благ может быть реализовано как равновесное при подходящем вторичном перераспределении доходов потребителей<sup>4</sup>.

Пока речь идет о статическом равновесии, модель Эрроу-Дебре как модель идеальной рыночной экономики особых вопросов и возражений не вызывает. Если же попытаться по схеме Эрроу-Дебре построить динамическую модель, мы сразу же столкнемся с одной из главных проблем построения динамических моделей вообще: если функция цели агента зависит от результатов его будущей деятельности, то чтобы планировать эту деятельность, он должен *прогнозировать* будущие значения *информационных переменных* (цен). Казалось бы, мы попадаем в ловушку парадокса: с практической точки зрения модели нужны, чтобы помочь субъектам экономики прогнозировать будущие значения информационных переменных, а оказывается, что для построения модели нужно знать, как эти субъекты делают свои прогнозы.

Не вдаваясь в результаты длительной дискуссии, которая идет по этому поводу в мировой экономической науке, мы использовали самый радикальный путь решения упомянутого парадокса. Именно мы безоговорочно приняли ***принцип рациональных ожиданий*** [8] в самой сильной форме, предполагая, что в рамках модели **все агенты имеют точный прогноз всех нужных им информационных переменных на тот период, на который они планируют свои действия.**

Дело в том, что это предположение является по существу единственной возможностью получить самосогласованную детерминированную модель. Всякая альтернатива этому предположению в рамках детерминированной модели означает, что мы исследуем систематические ошибки в прогнозах агентов, что совершенно непродуктивно. Более эффективно, хотя и менее конкретно, принцип рациональных ожиданий можно сформулировать, как требование дать модельному агенту возможность использовать для своих прогнозов ту самую модель экономики, которую мы строим!

Если мы принимаем принцип рациональных ожиданий, то формальное распространение модели Эрроу-Дебре на описание экономической динамики на конечном множестве последовательных периодов времени не представляет труда. Надо просто рассматривать один и тот же продукт, произведенный или потребленный в разные периоды времени, как разные продукты, а хранение продуктов – как производственный процесс, превращающий сегодняшний продукт в завтрашний. В результате получается так называемая модель ***межвременного равновесия***.

Модели межвременного равновесия известны давно, но до сих пор они применялись исключительно для изучения некоторых теоретических вопросов на стационарных режимах довольно абстрактных моделей экономики [10]. Мы рискнули применить этот странный, но зато полностью самосогласованный подход к описанию реальных нестационарных процессов в современной российской экономике. Более того, мы постарались учесть в описании возможностей агентов специфику сложившихся в России экономических отношений. Например, размеры теневого оборота в модели определяет производитель, исходя из оптимального для него сейчас и в будущем соотношения выгод от экономии на налогах и риска санкций за их неуплату.

---

<sup>3</sup> Первая теорема теории благосостояния – теоретическая основа либеральных экономических программ.

<sup>4</sup> Вторая теорема теории благосостояния – теоретическая основа социал-демократических экономических программ.

### **Модель межвременного равновесия с управлением капиталом (МРК)**

Формально межвременное равновесие в модели Эрроу-Дебре представляет собой траекторию изменения цен, выпусков и объемов потребления продуктов. Однако это описание не является вполне динамическим: в модели отсутствует понятие состояния системы и, поэтому конец равновесной траектории не может быть описан как равновесие в некоей «усеченной» модели. Несколько лет назад нам удалось переформулировать модель межвременного равновесия так, чтобы сделать описание траектории подлинно динамическим [6]. При этом мы отказались от принятого в модели Эрроу-Дебре представления о том, что собственник является пассивным получателем фиксированных долей прибыли фирм. Мы рассматриваем другой механизм взаимодействия фирмы и собственника, когда собственник может вкладывать и извлекать средства из своей фирмы, а также продавать свой пай в фирме, ориентируясь на ее финансовые показатели.

Опуская за недостатком места важные математические условия регулярности задачи и ее решения (см.[6,5]), приведем окончательную формулировку. Рассматривается замкнутая экономика, в которой действует конечное множество  $P$  **производителей** (фирм) и конечное множество  $N$  **потребителей** (-собственников). Эти агенты производят, распределяют и потребляют конечное множество  $M$  **продуктов**. Экономика функционирует *конечное* множество дискретных *периодов* времени  $T = \langle 1, \dots, T \rangle$ .

Функция производителей состоит в том, чтобы преобразовывать одни продукты в другие. Поэтому в каждый период  $t \in T$  каждый производитель  $m \in P$  какие-то продукты приобретает, а какие-то отдает другим агентам в обмен на приобретенные. Разница объемов отданных и полученных продуктов по каждой позиции из списка  $M$  образует вектор  $y_t^m$  пространства  $\square^M$ , который мы будем называть вектором **чистых продаж**. Положительные компоненты вектора  $y_t^m$  показывают количества отданных продуктов, а модули отрицательных компонент – количества приобретенных.

Технологические возможности производителя описываются как ограничения на последовательности векторов чистых продаж (здесь и далее набор индексированных величин обозначается тем же знаком с указанием множества вместо индекса)

$$y_T^m \square \langle y_t^m \rangle_{t \in T} \in Y^m \subset \mathbb{R}^{M \times T}$$

Можно дать следующее достаточно общее конструктивное описание этого множества если исходить из упрощенного материального баланса фирмы [11] в дискретном времени

$$Q_t^m - Q_{t-1}^m = z_t^m - k_t^m - y_t^m, \quad k_t^m \geq 0, \quad (1)$$

где  $Q_t^m \geq 0$  – вектор **запасов** продуктов в конце периода  $t$ , а в правой части стоит алгебраическая сумма потоков:

**чистых выпусков** (производства продуктов за вычетом текущих затрат)  $z_t^m$  за период  $t$ ;

**капитальных затрат**  $k_t^m$ ;

**чистых продаж**  $y_t^m$ .

Вектор чистых выпусков  $z_t^m$  ограничен наличием основных и оборотных фондов. Оборотные фонды естественно сопоставляются с текущими запасами  $Q_t^m$ , а основные фонды образуются за счет предшествующих затрат  $k_t^m$ . Как именно они образуются, конкретизировать не будем, а просто запишем ограничения на выпуск в зависимости от предыстории затрат, в том числе затрат, сделанных до начала равновесной траектории:

$$\mathbf{G}_t^m(k_{\tilde{T}}, Q_t^m, z_t^m) \geq 0, \quad k_{\tilde{T}} = \langle k_t \rangle_{t=-\infty}^{t=T}, \quad \tilde{T} = \langle \dots, -1, 0, 1, \dots, T \rangle. \quad (2)$$

Будем считать, что в список *технологических ограничений*  $\mathbf{G}_t^m$  включено и ограничение неотрицательности запаса. Предполагается, что

$$\mathbf{G}_t^m(k_{\tilde{T}}, Q, z) - \text{гладкие, вогнутые}; \quad \frac{\partial \mathbf{G}_t^m}{\partial k_s}(k_{\tilde{T}}, Q, z) = 0 \quad \text{при} \quad s > t; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_t^m}{\partial k_{\tilde{T}}}(k_{\tilde{T}}, Q, z) \geq 0, \quad \frac{\partial \mathbf{G}_t^m}{\partial Q}(k_{\tilde{T}}, Q, z) \geq 0, \quad \frac{\partial \mathbf{G}_t^m}{\partial z}(k_{\tilde{T}}, Q, z) \leq 0. \quad (4)$$

Равенство в (3) означает, что будущие капитальные затраты не ограничивают текущих выпусков, первые два неравенства в (4) – что увеличение основных и оборотных фондов не уменьшает возможностей производства. Последнее неравенство в (4) означает, что производство ограничивается величиной фондов.

Итак, окончательно:  $y_T^m \in Y^m$  тогда и только тогда, когда найдутся последовательности  $k_T^m, Q_T^m, z_T^m$ , удовлетворяющие вместе с  $y_T^m$  соотношениям (1), (2) при  $t \in T$ , заданных начальных запасах  $Q_0^m$  и заданной предыстории капиталовложений  $\langle k_t^m \rangle_{t=-\infty}^{t=0}$ . Таким образом, выбор допустимой последовательности чистых выпусков предполагает и выбор программы развития производства  $k_T^m$ .

Производитель  $m \in P$  действует в условиях *свободной конкуренции*. Это означает, что он считает возможным продать или купить в период  $t \in T$  на рынке любое количество продуктов по сложившимся в этот период *ценам*  $p_t \in R_+^M$ . Согласно принципу рациональных ожиданий производитель *знает* или правильно прогнозирует всю последовательность цен  $p_T$ . Продажи и покупки продуктов  $y_t^m$  по ценам  $p_t$ , приносят в период  $t \in T$  чистый доход  $p_t y_t^m$ . В этот же период производитель  $m \in P$  выплачивает собственнику  $n \in N$  *дивиденды*  $\psi_t^m$ .

Выражение для дивидендов – ключевая отличительная особенность модели с управлением капиталом. Предполагается, что в каждый момент времени собственник  $n \in N$  делает в фирму  $m \in P$  вложения, покупая «паи» в количестве  $K_t^m$  по не зависящей от времени цене (*курсу*)  $\theta^m$ . Фирма должна вернуть эти вложения в следующий период с определяемой рынком доходностью  $\rho_t$ . Потому чистые выплаты фирмы  $m \in P$  собственнику  $n \in N$  в период  $t \in T$  составляют

$$\psi_t^m = \rho_t \theta^m K_{t-1}^m - \theta^m K_t^m \quad (5)$$

Доходы и выплаты собственникам в период  $t \in T$  не обязаны быть равными друг другу. Их разность накапливается в виде *чистых сбережений*  $\Phi_t^m$ . В условиях

идеального рынка эти сбережения имеют ту же доходность  $\rho_t$ , что и вложения капитала, поэтому

$$\Phi_t^m = \rho_t \Phi_{t-1}^m + \theta^m \sum_{n \in H} (K_t^{nm} - \rho_t K_{t-1}^{nm}) + p_t y_t^m, \quad t \in T, \quad m \in P \quad (6)$$

Чистые сбережения могут быть отрицательными, тогда их абсолютная величина показывает долг данной фирмы другим агентам. Начальное значение чистых сбережений  $\Phi_0^m$  – заданный параметр модели. В конце процесса долги должны быть погашены

$$\Phi_T^m \geq 0, \quad m \in P. \quad (7)$$

Соотношения (1) - (7) образуют систему ограничений на деятельность производителя. Зная точный прогноз цен  $p_T \geq 0$ , доходности  $\rho_t > 0$  и вложений  $K_T^{Hm}$  и начальные чистые сбережения  $\Phi_0^m$ , производитель в рамках этих ограничений выбирает последовательности чистых продаж  $y_T^m$  (а вместе с ними и программу производства  $k_T^m, Q_T^m, z_T^m$ ), последовательность чистых сбережений  $\Phi_T^m$ , а также постоянную величину цены<sup>5</sup> вложений  $\theta^m$  так, чтобы **максимизировать величину своей капитализации**

$$\theta^m \sum_{n \in H} K_0^{nm} \rightarrow \max \quad (8)$$

Каждый потребитель  $n \in H$  в каждый период  $t \in T$  приобретает и потребляет некоторый набор продуктов  $c_t^n \in \square_+^M$ , составляющий вектор **конечного потребления**. Потребленные продукты в дальнейшем в экономических процессах никак не участвуют. Единственный смысл потребления – приносить удовольствие потребителю.

Расходы на покупку потребительских благ  $p_t c_t^n$ , в конечном счете, покрываются за счет выплат фирм  $\psi_T^{mP}$ , но доходы и расходы не обязаны балансироваться в каждый период времени. Разность доходов и расходов образует **чистые сбережения собственника**  $\Phi_t^n$

$$\Phi_t^n = \rho_t \Phi_{t-1}^n + \sum_{m \in P} (\theta^m \rho_t K_{t-1}^{nm} - \theta^m K_t^{nm}) - p_t c_t^n, \quad t \in T, \quad n \in H \quad (9)$$

Собственник, как и производитель, может иметь долги ( $\Phi_t^n < 0$ ) при  $t = 0, 1, \dots, T-1$ , но к концу процесса они должны быть погашены

$$\Phi_T^n \geq 0, \quad n \in H. \quad (10)$$

<sup>5</sup> Неестественное с содержательной точки зрения постоянство курса есть неизбежное следствие детерминированной постановки задачи. В стохастической постановке курсы приобретают естественную подвижность, см. статью М.Ю. Андреева в настоящем сборнике.



В рамках этого ограничения **кредитоспособности** собственник, зная правильные прогнозы цен  $p_T \geq 0$ , доходности  $\rho_t > 0$ , а также курсы всех фирм  $\theta^P$  и имея в начале процесса некоторые величины чистых сбережений  $\Phi_0^n$  и вложений  $K_0^{nP}$ , собственник определяет последовательности чистых сбережений  $\Phi_T^n$ , вложений  $K_T^{nP} \geq 0$  и объемов потребления  $c_T^n$ , так чтобы **максимизировать полезность своего потребления**

$$\omega^n(c_T^n) \rightarrow \max \quad (11)$$

Чаще всего полезность задается как [12]

$$\omega^n(c_T) = \sum_{t \in T} (\Delta_n)^{-t} \varpi^n(c_t), \quad (12)$$

где  $\Delta_n > 1$  – **коэффициент предпочтения времени**, в русской литературе чаще не очень удачно называемый коэффициентом дисконтирования, а  $\varpi^n: \mathbb{R}_+^M \rightarrow \mathbb{R}^1$  – **монотонная** и **вогнутая** (выпуклая вверх) функция полезности текущего потребления.

Описанные выше задачи оптимизации, которые решают потребители и производители определяют<sup>6</sup> последовательности потреблений  $c_T^n$ , чистых продаж  $y_T^m$  и чистых сбережений  $\Phi_T^{P+H}$  в зависимости от траекторий цен  $p_T \geq 0$  и доходности  $\rho_t > 0$ . В замкнутой экономике каждый должник должен иметь кредитора

$$\sum_{a \in H+P} \Phi_t^a = 0,$$

а потребленные продукты должны быть поставлены на рынок производителями

$$\sum_{m \in P} y_t^m = \sum_{n \in H} c_t^n.$$

По идее эти  $(|M| + 1) \times T$  **условий равновесия** должны были бы определить равновесные значения  $(|M| + 1) \times T$  величин цен  $p_T$  и доходности  $\rho_t$ . Но система условий равновесия оказывается закономерно вырожденной (т.н. *ошибка Вальраса*). Поэтому для определения равновесия приходится дополнительно задавать условие нормировки цен

$$p_T \in S = \prod_{t \in T} S_t,$$

---

<sup>6</sup> Эти задачи могут сильно вырождаться, поэтому, строго говоря, в модели с управлением капиталом мы определяем решения агентов не как максимумы, а как седловые точки функций Лагранжа с положительными множителями Лагранжа при условиях кредитоспособности агентов (упомянутые выше условия регулярности).

где  $S_T$  некоторая заданная последовательность симплексов пространства  $R^M$ . Необходимость дополнительного условия нормировки цен указывает на необходимость дополнения рыночных механизмов обмена монетарным регулированием.

### **Свойства модели МРК**

Равновесие в модели МРК существуют не при всех наборах начальных условий (например, для существования равновесия необходимо, чтобы начальные чистые сбережения агентов балансировались). Но когда равновесия существуют, они эффективны в том смысле, что значения полезности, которые потребители получают в равновесии нельзя увеличить все сразу, не выходя за рамки технологических ограничений и ограничений материального баланса. При этом каждую эффективную траекторию потреблений можно реализовать как равновесную при подходящих начальных условиях.

В этом смысле модель МРК эквивалентна модели Эрроу-Дебре, но в отличие от последней МРК дает подлинно динамическое описание равновесной траектории. Если взять промежуточные значения переменных при  $t = s$   $\Phi_s^{P+H}$ ,  $K_s^{HP}$ ,  $Q_s^P$  на равновесной в качестве начальных значений, то конец равновесной траектории при  $t = s + 1, \dots, T$  окажется равновесием в естественным образом усеченной модели.

Важной с нашей точки зрения чертой модели МРК является новое описание взаимодействия фирмы и ее собственника. Чаще всего в динамических моделях равновесия основные производственные фонды отождествляются со сбережениями собственника, который, тем самым, фактически определяет программу развития производства [10]. В модели МРК денежные сбережения отделены от основных фондов. Основные фонды принадлежат фирмам, а собственник управляет фирмой на уровне финансовых потоков, опираясь исключительно на финансовые показатели. **Собственник определяет программу вложений  $K_T^{nm}$ , зная курс  $\theta^m$  и принимая во внимание цены, доходность и курсы других фирм. Фирма определяет курс,  $\theta^m$  зная программу  $K_T^{nm}$  и принимая во внимание цены, доходность и программы вложений других ее собственников. Альтернативная формулировка такова:**

- **собственник определяет желательный темп роста дивидендов**

$$v_t^{nm} = \psi_t^{nm} / \psi_{t-1}^{nm} = (\rho_t K_{t-1}^{nm} - K_t^{nm}) / (\rho_t K_{t-2}^{nm} - K_{t-1}^{nm}); \quad (13)$$

- **фирма максимизирует последовательность дивидендов в заданной временной пропорции**

$$\psi_t^{nm} = \theta^m \prod_{s=0}^t v_s^{nm} \rightarrow \max \quad (14)$$

Плата за эти свойства модели – неединственность равновесий. Если траектория чистых продаж, потреблений и цен определяется в случае общего положения однозначно, то траектории вложений и чистых сбережений в равновесии – практически произвольны. В идеальной ситуации полного предвидения и доверия все активы ликвидны и имеют одинаковую доходность, так что собственнику безразлично, куда и когда вкладывать средства. Эта неединственность, по видимому, и есть причина, по которой в абстрактных моделях равновесия обычно не описывается динамика финансовых показателей активов.

Мы считаем эту неединственность естественным исходным пунктом для построения более реалистичных моделей. Модель экономики России мы получили из модели МРК вводя дополнительные финансовые инструменты и связывая их использован институциональными и технологическими ограничениями, которые можно в целом охарактеризовать как *ограничения ликвидности*. Эти дополнительные по нашему представлению ограничения описывают реальную ограниченность знания и доверия агентов. Будучи введенными в достаточном количестве они ликвидируют исходную неединственность траекторий финансовых величин.

### **Капитал агентов в однородной модели МРК**

В случае типичной для моделей экономики однородности (масштабной инвариантности) [6,7] в модели МРК решение оптимизационных задач агентов характеризуется показателем, который можно интерпретировать как *собственный капитал*. Модель МРК однородна, если в (12)  $\varpi^n(c)$  является однородной функцией степени  $1 - \eta^n$

$$\varpi^n(\lambda c) = \lambda^{1-\eta^n} \varpi^n(c), \quad \eta^n \in (0,1), \quad (15)$$

а в (2) вектор-функция  $\mathbf{G}_t^m$  – линейно-однородна

$$\mathbf{G}_t^m(\lambda k_T^m, \lambda Q_t^m, \lambda z_t^m) = \lambda \mathbf{G}_t^m(k_T^m, Q_t^m, z_t^m). \quad (16)$$

Из баланса (9) на оптимальной траектории собственника вытекает равенство

$$\sum_{m \in P} \theta^m K_t^{nm} + \Phi_t^n = \Omega_t^n, \quad n \in H, \quad t \in 0, T, \quad (17)$$

где

$$\Omega_t^n = \sum_{s=t+1}^T \left( p_s c_s^n / \prod_{j=t+1}^s \rho_j \right), \quad n \in H, \quad t \in 0, T. \quad (18)$$

Соотношение (17) представляет собой аналог бухгалтерского баланса. В его левой части стоят чистые активы, складывающиеся из стоимости вложений и чистых сбережений. Значит, величина  $\Omega_t^n$  должна интерпретироваться как *собственный капитал*. Выражение (18) показывает, что собственный капитал собственника можно рассматривать как его обязательства перед самим собой относительно будущего потребления. Соотношение (18) кажется несколько странным только потому, что балансы такого типа не принято составлять для агентов, не производящих добавленной стоимости.

Из (18) следует, что капитал остается положительным на всей траектории и удовлетворяет соотношению

$$\Omega_t^n = \rho_t \Omega_{t-1}^n - p_t^n c_t^n, \quad \Omega_t^n > 0, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad \Omega_T^n = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) означает, что капитал растет с доходностью  $\rho_t$  и уменьшается за счет потребительских расходов. В конце траектории он обращается в 0, но в начале

может расти, и этот рост может стать неограниченным при неограниченном росте горизонта планирования  $T$ .

При однородной полезности, (15), оптимальный набор потребительских благ выражается в виде

$$c_t^n \in C^n(p_t, \varphi_t^n), \quad C^n(p, \varphi) = \underset{c \geq 0}{\text{Argmax}} \left\{ \varpi^n(c) \mid pc \leq \varphi \right\} = \left\{ c \mid c = \varphi \frac{\nabla \kappa^n(p)}{\kappa^n(p)} \right\}$$

Через сопряженный с полезностью  $\varpi^n$  индекс потребительских цен

$$\kappa^n(p) = \inf_{c \in \mathbb{R}_+^M} \left\{ pc \left( \varpi^n(c) \right)^{-\frac{1}{1-\eta^n}} \mid \varpi^n(c) > 0 \right\}$$

и оптимальную величину потребительских расходов  $\varphi_t^n = p_t c_t^n$ . Последнюю можно представить в форме, аналогичной (5)

$$\varphi_t^n = \rho_t \theta^n K_{t-1}^n - \theta^n K_t^n,$$

где  $\theta^n$  постоянная величина, подлежащая оптимизации, а  $K_t^n$  – «вложения потребителя в собственный капитал», которые в явном виде выражаются через цену и доходность

$$K_t^n = \sum_{s=t+1}^T \left( \prod_{j=t+1}^s \rho_j^{-1} \right) v_s^n(p_T, \rho_T), \quad (20)$$

$$v_t^n(p_T, \rho_T) = \left( \delta_t^n \right)^{\frac{1}{\eta^n}} \left( \iota_t^n \right)^{\frac{1-\eta^n}{\eta^n}} \left( \rho_t \right)^{-\frac{1}{\eta^n}}, \quad \delta_t^n = \frac{\Delta_{t-1}^n}{\Delta_t^n}, \quad \iota_t^n = \frac{\kappa^n(p_t^n)}{\kappa^n(p_{t-1}^n)}.$$

После этих преобразований задача потребителя (9) - (12), (15) приобретает вид полностью аналогичный задаче производителя. Потребитель максимизирует свою «капитализацию»

$$\theta^n K_0^n \rightarrow \max$$

При ограничениях

- **финансового баланса**  $\Phi_t^n = \rho_t \Phi_{t-1}^n - (\rho_t \theta^n K_{t-1}^n - \theta^n K_t^n) + \sum_{m \in} (\rho_t \theta^m K_{t-1}^{nm} - \theta^m K_t^{nm}), t \in T$ ;
- **кредитоспособности**  $\Phi_T^m \geq 0$
- **«технологии»**  $c_t^n \in C^n(p_t, \rho_t \theta^n K_{t-1}^n - \theta^n K_t^n), \quad t \in T$ .

по постоянной цене капитала  $\theta^n$ , объемам потребления,  $c_T^n$ , и вложениям в капиталы фирм  $K_T^{np} \geq 0$  при заданных ценах  $p_t$ , доходности  $\rho_t$  и программе изменения вложений в собственный капитал  $K_t^n$ . Разница только в том, что для фирмы программа вложений в капитал задается собственником, а для собственника – рынком с учетом потребностей собственника (см. (20)).

Для фирмы на оптимальной траектории из (6) получается баланс

$$P_t^m + \Phi_t^m = \Omega_t^m,$$

в котором на стороне активов (слева) кроме чистых сбережений стоит ожидаемая дисконтированная прибыль

$$P_t^m = \sum_{s=t+1}^T \left( p_s y_s^m / \prod_{j=t+1}^s \rho_j \right),$$

а собственный капитал  $\Omega_t^m$  совпадает со стоимостью обязательств перед собственниками

$$\Omega_t^m = \theta^m K_t^m = \sum_{s=t+1}^T \left( \sum_{n \in H} \psi_s^{nm} / \prod_{j=t+1}^s \rho_j \right), \quad K_t^m = \sum_{n \in H} K_t^{nm}, \quad m \in P, \quad t \in 0, T.$$

Эта величина удовлетворяет уравнению аналогичному (19)

$$\Omega_t^m = \rho_t \Omega_{t-1}^m - \sum_{n \in H} \psi_t^{nm}, \quad \Omega_t^m \geq 0, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad \Omega_T^m = 0, \quad m \in P \quad (21)$$

В однородном случае в силу аналога теоремы Нетер дисконтированная прибыль  $P_t^m$  может быть выражена не через будущие доходы, а через запасы и предыдущие капитальные затраты

$$P_t^m = p_{t+1} Q_t^m + B_t^m, \quad B_t^m = B_{t-1}^m + p_t k_t^m - A_t^m, \quad A_t^m = \sum_{r=-\infty}^{t-1} (b_{t-1,r}^m - b_{t,r}^m) k_r^m > 0$$

В этих соотношениях величину  $B_t^m$  естественно трактовать как *балансовую стоимость основных фондов*, а  $A_t^m$  – как *амортизационные отчисления*. Коэффициенты  $b_{tr}$  задающие «истинные текущие цены прошлых капитальных вложений» ( $B_t^m = \sum_{r=-\infty}^t b_{tr}^m k_r^m$ ) выражаются в виде

$$b_{tr} = \sum_{s=r}^T \frac{\mathbf{g}_s^m}{\xi_t^m} \frac{\partial G_s^m}{\partial k_r}, \quad (k_{\bar{t}}, Q_s^m, z_s^m),$$

Через двойственные переменные  $\xi_t^m$  и  $\mathbf{g}_s^m$  к ограничениям (8) и (2), соответственно.

Из приведенных соотношений получается следующее выражение прироста капитала как *нераспределенной балансовой прибыли* с обычной бухгалтерской раскладкой балансовой прибыли:

$$\Omega_t^m - \Omega_{t-1}^m = \underbrace{p_t z_t^m}_{\text{произведенная добавленная стоимость}} + \underbrace{(\rho_t - 1) \Phi_{t-1}^m}_{\text{прибыль от финансовых операций}} + \underbrace{(p_{t+1} - p_t) Q_t^m}_{\text{прибыль от переоценки запасов}} - \underbrace{A_t^m}_{\text{амортизация}} - \underbrace{\sum_{n \in H} \psi_t^{nm}}_{\text{распределенная прибыль}}$$

**валовая прибыль**

---

**балансовая прибыль**

Это соответствие представляется весьма важным. Процедура составления бухгалтерского баланса состоит из двух шагов: суммировании расходов и поступлений по времени и переоценки по определенным правилам остатков некоторых счетов. В результате возникают потоки ниоткуда не полученной прибыли от переоценок запасов и никому не заплаченных амортизационных расходов. Представляется, что

приведенные выше результаты оправдывают процедуры переоценок как стремление превратить оценки активов, полученные суммированием предыдущих затрат в оценки, показывающие будущие доходы от использования активов. Анализ модели МРК показывает, что, по крайней мере, в однородном случае, корректная переоценка теоретически возможна.

### Обобщение модели МРК

В модели МРК, как и в модели Эрроу-Дебре типы агентов и формы их взаимодействия жестко стандартизированы. В прикладных моделях необходимо описывать иные типы агентов (например, банки) и иные формы взаимодействия (например, торговлю по разным каналам, операции с различными финансовыми активами, связанными между собой ограничениями ликвидности). Мы попытались дать унифицированное описание агентов различных типов, обобщая следующие свойства однородной модели МРК

- Все агенты максимизируют свою капитализацию при финансовых и технологических ограничениях при заданной программе вложений в собственный капитал.
- Все агенты характеризуются неотрицательной величиной собственного капитала, который растет за счет доходности и убывает за счет «полезных расходов»  $\chi_t^a$  (дивидендов для фирмы и потребительских расходов для собственника)
- Капитал может быть выражен как чистые активы, как дисконтированная сумма ожидаемых полезных расходов и как рыночная стоимость внешних вложений в собственный капитал
- Полезные расходы агентов выражаются как

$$\chi_t^a = \theta^a \upsilon_t^a, \quad a \in P + H, \quad (22)$$

где постоянная  $\theta^a$  определяется (максимизируется) агентом, а при заданной пропорции  $\upsilon_t^a$ .

Если мы хотим, чтобы поведение агента описывалось вогнутой и однородной задачей, то мы приходим к задаче следующего вида (в непрерывном времени)

$$\bar{\theta}^a \bar{K} \rightarrow \max \quad (23)$$

при ограничениях

$$\dot{\Phi}^a = \alpha \Phi^a + \mathbf{r}\mathbf{x}^a + \mathbf{p}\mathbf{y}^a - \bar{\theta}^a \upsilon, \quad (24)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^a = \mathbf{R}\mathbf{x}^a + \mathbf{P}\mathbf{y}^a, \quad (25)$$

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{x}^a, \mathbf{y}^a, \Phi^a) \geq 0, \quad (26)$$

$$\Phi^a(T) + \bar{\mathbf{a}}\mathbf{x}^a(T) \geq 0,$$

где  $\mathbf{g}(t, \cdot, \cdot, \cdot)$  – вогнута и линейно-однородна.

Здесь переменные  $\mathbf{x}^a, \mathbf{y}^a, \Phi^a$  и постоянная  $\bar{\theta}^a > 0$  определяются агентом при заданных начальных значениях  $\Phi^a(t_0), \mathbf{x}^a(t_0)$ , заданной постоянной  $\bar{K} \geq 0$  и заданных функций времени  $\alpha(t), \mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), \upsilon(t), \mathbf{R}(t), \mathbf{P}(t)$ .

Фазовыми переменными являются по большей части остатки финансовых инструментов и запасы материальных благ. Динамические уравнения для этих величин

суть балансы типа (1), (9), (6). В частности финансовым балансом заведомо является уравнение (24). Финансовый актив  $\Phi^a$  – основные деньги агента – выделен среди прочих тем, что именно этим активом оплачиваются полезные расходы агента  $\bar{\theta}^a \upsilon$  (см. (22)). Коэффициенты этого уравнения  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{p}(t)$  суть информационные переменные агента, которые имеют смысл, соответственно, процентов и цен. Если все платежи осуществляются одними и теми же основными деньгами, то коэффициенты из числа  $\mathbf{R}(t)$ ,  $\mathbf{P}(t)$  в остальных балансовых уравнениях будут равны 0, 1 или -1.

Фазовая переменная может также описывать некий инерционный фактор производства, например, производственную мощность. Дифференциальное уравнение для такой переменной обычно имеет постоянные коэффициенты и описывает этот фактор производства как конечномерную свертку потоков капитальных затрат.

Соотношение (26) служит прямым формальным обобщением условий кредитоспособности (7), (10) для случая, когда у агента много разных активов. Поскольку мы ставим только одно терминальное условие, его коэффициенты  $\bar{\mathbf{a}}$  определяются через другие параметры модели в силу требования разрешимости оптимизационной задачи.

Для агента, описываемого моделью (23) - (26) можно ввести величину капитала

$$\Omega^a = \Phi^a + \frac{\Psi^a \mathbf{x}^a}{\xi^a},$$

где  $\xi^a$ ,  $\Psi^a$  – двойственные переменные к уравнениям (25). Величина капитала удовлетворяет уравнению аналогичному (20), (21)

$$\dot{\Omega}^a = \rho^a \Omega^a - \bar{\theta}^a \upsilon, \quad \rho^a = -\dot{\xi}^a / \xi^a, \quad \Omega^a(T) = 0,$$

которое является прямым аналогом утверждения теоремы Нетер о связи интегралов движения и симметрий гамильтоновой системы. В данном случае речь идет о гамильтоновой системе условия оптимальности и симметрии масштабной инвариантности.

Важнейшее отличие обобщенной задачи (23) - (26) от описания поведения агента в идеальных условиях модели МРК состоит в том, что доходности капиталов агентов  $\rho$ , в модели МРК одинаковы (см. (20), (21)), а обобщенной модели доходности  $\rho^a$  разных агентов, вообще говоря, различны и могут зависеть от распределения вложений между агентами. Поэтому общей модели с управлением капиталом перед собственником встает нетривиальная задача эффективного распределения своих вложений между секторами экономики.

Модель экономики России строилась как модель межвременного равновесия, в которой поведение каждого из массовых агентов (производители, банки, собственники, домохозяйства) агрегировано описывалось задачей приведенного выше вида. Поведение индивидуальных агентов – государства и ЦБ, а также внешней торговли задавалось сценариями [7]. Подчеркнем, что задача производителя включала выбор между теневыми и легальными каналами платежей в условиях угрозы санкций за нарушение налогового законодательства..

## Технология разработки модели

Технически модель межвременного равновесия очень сложна. Для каждого из массовых агентов нужно аналитически решить неавтономную задачу оптимального управления со смешанными ограничениями, подставить решения этих задач в балансы и определить, наконец, прогнозы информационных переменных, выступавшие при решении задач агентов как экзогенные переменные с неконкретизированной зависимостью от времени. Надо еще иметь в виду, что при построении модели приходится рассматривать множество альтернативных гипотез, так что всю процедуру решения надо много раз повторять для различных наборов ограничений в задачах агентов.

Такую работу в разумные сроки невозможно провести обычным способом, записывая модель на бумаге, а потом переводя ее на язык программирования, не говоря уже о том, что при обычной процедуре моделирования практически невозможно избежать ошибок в записи, скажем, балансов и избежать отклонения от исходных гипотез при превращении формул в программу расчета. Успех нашего проекта в значительной степени обусловлен использованием новой технологии моделирования. Эта технология базируется на понятии **канонической формы модели**.

Модель – это не просто система уравнений и неравенств. Соотношения модели имеют определенный смысл, группируются в естественные блоки. Все это – информация о модели, не содержащаяся в системе ее соотношений, и именно эту информацию следует использовать, чтобы судить о правильности модели [5]. Обычно, такого рода информацию извлекают просто из названий-терминов. Однако в данном случае это не удастся сделать из-за «текучести» понятий, описывающих сложную систему. И это не предубеждение, а горький вывод из собственных неудачных попыток построить систему поддержки моделирования, основываясь на соответствии модельных конструкций и экономических понятий. Поэтому при разработке канонической формы мы опирались на структурные характеристики модели.

Модель в канонической форме представляет собой систему неравенств, уравнений (конечных или динамических), а также, возможно, локальных оптимизационных задач, разделенную на **блоки** двух типов: блоки описания **поведения** экономических агентов – ЭА и блоки описания **взаимодействий** экономических агентов – ВД.

**Состояние** агента задается *запасами* (количествами) материальных и финансовых инструментов. Уравнения, описывающие изменение запасов данного блага или финансового актива у разных агентов, образуют систему **балансов**, связывающую описание действий различных агентов в единое целое. В канонической форме мы требуем указывать явно, какие из уравнений следует считать балансовыми.

**Поведение** агента описывается, как *выбор* значений переменных модели, относящихся к «компетенции» этого агента. Мы называем такие переменные **планируемыми переменными** агента.

Выбор агента стеснен *ограничениями* (равенствами или неравенствами) двух типов: *внутренними* и *внешними*. **Внутренние** ограничения связывают между собой только планируемые переменные агента и обычно выражают технологические ограничения, например, ограничение выпуска продукции наличием факторов производства. **Внешние (институциональные)** ограничения, типичным примером которых служит бюджетное ограничение, кроме планируемых агентом величин объемов покупок и денежных затрат, содержит величины цен, агенту не подконтрольные. Таким образом, цены влияют на выбор агента.



Неподконтрольные агенту переменные в ограничениях и/или в функции цели этого агента называются **информационными переменными**. Выбор агента, описанный в соответствующем блоке, оказывается функцией информационных переменных. Фактически это план вида: «если цены будут такими-то, я куплю или продам столько-то». В экономической теории такие называются функциями спроса или предложения.

Значения информационных переменных определяются в блоках, описывающих взаимодействия агентов. В процессе **взаимодействия** агенты согласовывают свои планы. Согласование планов необходимо для выполнения *балансов*. Это согласование происходит за счет фиксации подходящих значений *информационных переменных*.

Внешние ограничения разбиваются на непересекающиеся подгруппы, в каждой из которых фигурируют планируемые и информационные переменные, существенные только для одного взаимодействия. Эти группы мы называем *ролями* агента (роль продавца, роль покупателя, роль кредитора).

Каноническая форма – это строго определенный формальный объект. Доказана в некотором смысле единственность представления модели в канонической форме. Хотя в канонической форме можно записать многие известные модели экономики, это форма не абсолютно универсальна. Существуют эконометрические модели, которые, с одной стороны, игнорируют балансовые соотношения, но с другой – учитывают такие эмпирические корреляции между экономическими показателями, которые невозможно интерпретировать, как результат взаимодействия агентов. Формально описание такой модели в системе ЭКОМОД будет состоять из единственного блока ЭА. Каноническая форма также мало пригодна для записи микроэкономических моделей. Это означает, что каноническая форма отражает некоторые содержательные свойства моделей, что и позволяет контролировать внутреннюю семантическую согласованность модели.

Разработка и использование модели в канонической форме на всех этапах поддерживается оригинальной инструментальной системой ЭКОМОД [5], которая реализована в среде компьютерной алгебры Maple.

- Система контролирует корректность синтаксиса, с переобозначений, системы размерностей, системы балансов и информационных связей агентов.
- Система обеспечивает автоматическую генерацию условий оптимальности, автоматическое упрощение системы соотношений на основе их семантики, расчеты по модели (идентификация, верификация, численные эксперименты).
- Система дает возможность узнать исходный вид и смысл соотношений после любых преобразований, быстро повторить все преобразования при модификации исходных гипотез, сохранять дерево вариантов модели в файловой системе, представлять и хранить результаты расчетов

Модель в системе ЭКОМОД вплоть до получения результатов расчетов записывается в стандартной математической нотации. Информация, на основании которой производится контроль корректности модели, задается в основном разбиением системы соотношений модели на упомянутые выше блоки и группы.

Модель экономики России, о которой здесь идет речь, ни в целом, ни по частям никогда не записывалась ни на бумаге, ни каком либо языке программирования. С другой стороны ее запись в системе ЭКОМОД, которая содержала и пояснительный текст, оказалось возможным практически без изменений использовать для окончательной публикации.

Расчет по модели требует решения нелинейной краевой задачи на большом интервале, и это потребовало разработки специальных методов и подходов (см. статью Поспелова И.Г. и Хохлова М.А. в настоящем сборнике).

## Некоторые результаты исследования модели

Приводимые ниже результаты относятся к 37 версии модели, которым предшествовало исследование 15 версий упрощенного макета. Версии отличались друг от друга определенными изменениями в исходных описаниях блоков, отражавшими альтернативные гипотезы о целях и возможностях экономических агентов.

Каноническая форма модели экономики России состоит из 102 разнородных нелинейных уравнений и неравенств. Автоматические упрощения позволяют сократить их число до 57. Дальнейшее исследование позволяет свести модель к нелинейной неавтономной краевой задаче для 6 дифференциальных и 11 конечных уравнений для 17 неизвестных.

Система содержит 25 постоянных параметров, из которых 15 (ставки налогов, нормы резервирования и др.) задаются просто нормативными документами, а 10 оставшихся параметров подбираются в процессе идентификации.

Несмотря на необычную постановку задачи, модель удивительно хорошо воспроизводит сложную динамику примерно 20 основных макроэкономических показателей за 16 кварталов 2000-2004гг. Модель дает разумные оценки размеров теневого оборота (~20% ВВП и ~50% зарплаты). Она воспроизводит наблюдаемое различие темпов роста ВВП, инвестиций, кредитов и поступления налогов разных видов.

За недостатком места приведем только данные росту реального ВВП (рис. 1), реальным инвестициям (рис. 2) по темпу инфляции (рис. 3) и поступлению подоходного налога (рис. 4).

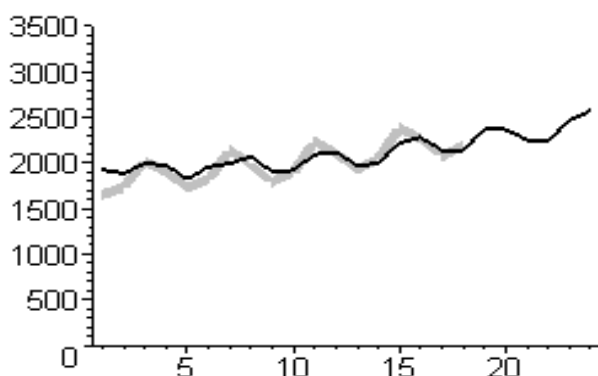


Рис. 1

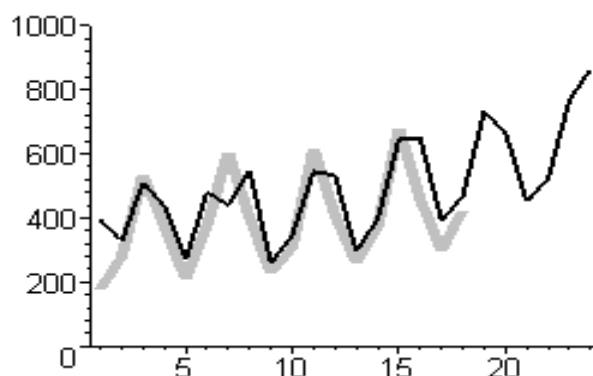


Рис. 2

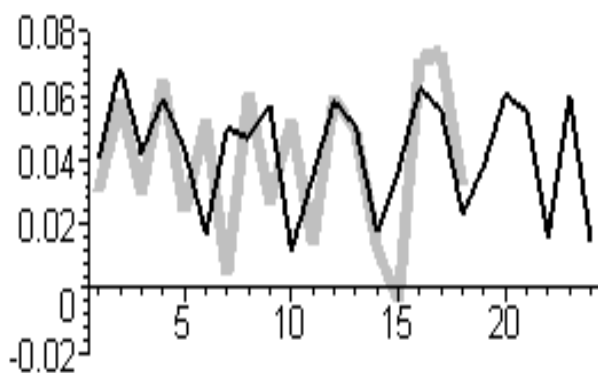


Рис. 3

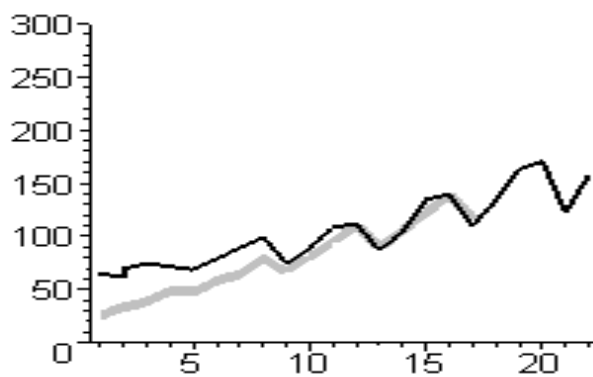


Рис. 4

На всех рисунках толстая серая линия показывает несглаженные квартальные статистические данные, а черная – результат расчетов по модели.

Справедливости ради следует отметить, что существующая модель правильно воспроизводя сложные колебания показателей, сдвинутые друг относительно друга по фазе и различие средних темпов роста этих показателей, не объясняет происхождение этих колебаний. Нам пока не удалось связать экспорт с другими показателями и пришлось задавать его как экзогенную величину и прогнозировать независимо от модели. Зато исследование различных гипотез о механизме формирования экспорта недвусмысленно показало, что пока, к сожалению, экономический рост России определяется экспортом, а не наоборот – экспорт растет, как должно быть во вполне здоровой и самостоятельной экономике.

Модель также показывает, что капиталы до сих пор сосредотачиваются в финансовом секторе, а реальный сектор растет за счет заемных средств. Модель также дает верные оценки вывоза капитала и правильно описывает рост валютных резервов и стабилизационного фонда.

#### Литература

1. Краснощечков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. М.: МГУ, 1983., М.: Фазис, 2000.
2. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат. 1996.
3. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. От Госплана к неэффективному рынку: Математический анализ эволюции российских экономических структур. The Edwin Mellen Press. Lewiston, NY, USA. 1999.
4. Петров А.А., Поспелов И.Г.. Модельная «летопись» российских экономических реформ [http://isir.ras.ru/win/db/show\\_ref.asp?P=id-23268.ln-ru](http://isir.ras.ru/win/db/show_ref.asp?P=id-23268.ln-ru).
5. Андреев М.Ю., Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.А. Новая технология моделирования экономики и модель современной экономики России. М.: МИФИ, 2007, 262с.
6. Поспелов И.Г. Модели экономической динамики, основанные на равновесии прогнозов экономических агентов М.: ВЦ РАН, 2002. <http://www.ccas.ru/mmes/mmest/ecodyn03.htm>

7. *Поспелов И.Г.* Особенности моделирования сложных систем. / Методология современной науки. Моделирование сложных систем // Сб. труд. междунар. научн. конф., посв. 75-летию проф. Р.Г. Баранцева. - Киров: Изд-во ВятГУ, 2007, с.133-140.
8. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Наука, 1972.
9. *Lucas R.E., Sargent T.J.* Rational Expectations and Econometric Practice. Allen & Unwin, London, 1981.
10. *Turnovsky S. J.* Methods of Macroeconomic Dynamics. MIT Press Cambridge, Mass. 2000. 687p.
11. *Поспелов И.Г.* Моделирование экономических структур. М.: ФАЗИС, 2003.
12. *Фишберн П.С.* Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.
13. Maple 9 Learning Guide, Maplesoft, Waterloo Maple Inc., Canada, 2003, лицензия № 920523203.

## **Идентификация экономических систем на основе метода множеств достижимости\***

Поспелов И.Г., Хохлов М.А. (Москва)

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 07-01-00563-а), Российского гуманитарного научного фонда (код проекта 07-02-00362), по программе государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ-5379.2006.1), программе фундаментальных исследований ОМН РАН №3.

*Описывается методы контроля правильности, поиска автомодельных решений и идентификации математических моделей экономики в системе поддержки моделирования ЭКОМОД. Методы основываются на процедуре поиска максимальной подгруппы группы масштабных преобразований, сохраняющей соотношения модели.*

*При проверке модели учитываются дополнительные требования размерности, не содержащиеся в системе уравнений и неравенств. Формализовав определенным образом эти требования, можно делать выводы о правильности модели, исходя из соответствия между существующей максимальной подгруппой и накладываемыми исследователем условиями.*

*В основе поиска автомодельных решений лежит задание системы единиц измерения, состоящей из размерностей материальных и финансовых активов модели, размерности времени и производных от них. Каждой из базовых размерностей приписывается некоторый независимый темп роста, темпы роста всех динамических переменных выражаются через их размерности. Система для нахождения автомодельных решений применяется также для идентификации модели с использованием метода достижимых целей.*

## **Введение**

Необходимость систематически пересматривать модели вызывает потребность в инструменте, который бы проверял новые модели, а также позволял корректно заимствовать использованные ранее в другом контексте описания отдельных процессов. Такого рода проверка, разумеется, невозможна, если модель представлена просто системой абстрактных математических соотношений (или программных модулей). Однако модель – это не просто система уравнений. Уравнения и соотношения модели имеют определенный смысл, группируются в естественные блоки. Все это – информация о модели, не содержащаяся в системе ее соотношений, и именно эту информацию необходимо использовать, чтобы судить о правильности модели [9].

На основе анализа многолетнего опыта моделирования экономики в отделе ММЭС ВЦ РАН была предложена форма записи математических моделей экономики, названная канонической формой модели [1, 2]. Модель в канонической форме представляет собой систему неравенств, уравнений (конечных или динамических), а также, возможно, локальных оптимизационных задач, дополненную классифицирующими признаками (атрибутами), которые хранят структуру модели.

Основным инструментом создания и исследования моделей в канонической форме становится система моделирования Экомод, разработанная коллективом отдела [0]. Она базируется на среде поддержки аналитических преобразований Maple и позволяет объединить в одном технологическом процессе в рамках одного языка:

1. разработку блоков модели,
2. сборку блоков,
3. проверку семантической правильности модели,
4. аналитическое исследование модели,
5. идентификацию,
6. верификацию,
7. численные эксперименты,
8. представление результатов.

В систему Экомод встроены алгоритмы проверки и исследования модели, основанные на поиске максимальной группы растяжений, допускаемых соотношениями модели (мы называем их алгоритмами проверки размерности). Они показали свою значительную эффективность, и, мы надеемся, область их применения

не ограничивается исследованием моделей в канонической форме, записанных в системе Экомод. Их описанию и посвящена настоящая статья.

### **Аддитивные величины и независимые размерности в моделях экономики**

В социально-экономических науках отсутствует развитая система единиц измерения, и особой нужды в ней не ощущается. Поэтому при анализе экономико-математических моделей с позиций размерности приходится полагаться в основном на внутренние свойства данной модели [5].

Отчасти это верно и для моделей физических процессов. Например, энергия и температура имеют одну природу, и в моделях физики высоких энергий эти величины измеряются в одних и тех же единицах (обычно эВ). Однако в технике и «обычной» физике, чтобы избежать необходимости оперировать очень большими или очень малыми числами, энергию и температуру рассматривают как разные величины. Это показывает, что выбор системы базовых единиц измерения определяется не только фундаментальными законами, но и видом конкретной модели.

Для данной модели всегда можно найти максимальную подгруппу растяжений, сохраняющую соотношения модели, и определить соответствующую систему базовых размерностей, но такая процедура ничего не скажет о корректности модели. Дополнительным соображением, ограничивающим произвол в выборе базовых единиц измерения в экономике, может служить, например, подтвержденный опытом денежных реформ факт о возможности произвольного выбора единицы измерения денег.

Известно, что аддитивные величины (меры): длина, угол, площадь, вероятность, масса и различные заряды, импульс и спин, все виды и формы энергии и энтропия, массовые концентрации веществ, биомассы видов живых существ, численность населения и т. п. играют важнейшую роль в количественном описании окружающего мира. В экономике аддитивными величинами являются запасы и потоки материальных благ и финансовых инструментов. Их балансы представляют собой «костяк» наиболее надежных соотношений модели экономики [4]. Набор именно этих аддитивных величин, а также выделенную величину – время, мы и предлагаем использовать как основу для задания независимых единиц измерения. В канонической форме модели экстенсивные величины и соответствующие балансовые уравнения выделяются особо, и в системе Экомод мы требуем указать для каждой экстенсивной величины единицу измерения (возможно, вполне абстрактную), например «рубль», или «деньги», или «продукт», или «рубль 2000 года». Разные экстенсивные величины, например, долги и наличность могут при этом получить одинаковую размерность.

По не вполне понятным нам причинам в прикладных системах контроль размерности применяется довольно редко, а если и применяется, то сводится к требованию задавать для всех величин единицы измерения в некоторой фиксированной системе основных единиц. Мы пошли по другому пути при построении канонической формы модели. Во-первых, задавать для каждой величины размерность очень утомительно. Во-вторых, в отличие от физики, в экономике нет общепринятых основных независимых единиц измерения, кроме единиц измерения времени. Валовой внутренний продукт России может измеряться и в долларах, и в рублях 1990г., и в рублях 2000г., а коэффициенты пересчета этих единиц друг в друга могут вызывать большие споры. Наконец, в разных моделях социально-экономических систем используются существенно различные наборы переменных, иногда довольно необычные. Поэтому мы допускаем, что в каждой модели может быть свой набор независимых базовых размерностей.

## Алгоритм тестирования размерности соотношений канонической формы

Отыскание группы растяжений, относительно которой инвариантна модель, сводится к анализу результата замены переменных. Рассмотрим простой, но типичный пример. Пусть, модель представлена одним уравнением вида

$$\frac{d}{dt}x(t) + a x(t) - b x^2(t) + F(t, x(t)) + c \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t)) = 0 \quad (1)$$

Подразумевается, что это уравнение связывает пять величин: независимую переменную времени  $t$ , зависимую переменную (неизвестную)  $x(t)$ , а также три постоянных параметра  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Что касается функции  $F(\cdot, \cdot)$ , то она (а тем самым, и ее производная) считается заданной, но не конкретизированной на данном этапе исследования модели<sup>7</sup>. Поскольку речь идет об автоматизации проверки размерности, т. е. о формальных манипуляциях с уравнениями как с последовательностями символов, нельзя упускать из виду, что кроме величин, обозначенных буквами, в уравнение (1) входит еще и числовая постоянная «0».

Полную (пятипараметрическую) группу растяжений удобно задать в виде

$$G_{\alpha_t, \alpha_x, \alpha_a, \alpha_b, \alpha_c} : (t, x, a, b, c) \rightarrow (t e^{\alpha_t}, x e^{\alpha_x}, a e^{\alpha_a}, b e^{\alpha_b}, c e^{\alpha_c}) \quad (2)$$

Тогда выделение искомой подгруппы сводится к выяснению связей между генераторами  $\alpha_t, \alpha_x, \alpha_a, \alpha_b$ , которые обеспечивают сокращение экспонент после выполнения подстановки (2) в уравнение (1). Напомним, что, поскольку растяжение значений и аргумента функции  $x(t)$  должно выполняться независимо, при замене переменных функциональная зависимость  $x(\cdot)$  заменяется другой зависимостью  $\tilde{x} : \tilde{x}(\tau) = x(\tau e^{\alpha_t})$ . По традиции эта новая зависимость обозначается той же буквой и несколько некорректно называется «выражением старой функции в новых переменных»<sup>8</sup>. В результате производная преобразуется по правилу [6]:

$$\frac{d}{dt}x(t) \rightarrow e^{\alpha_x - \alpha_t} \frac{d}{dt}x(t).$$

Рассмотрим сначала случай, когда  $F(\cdot, \cdot) = 0$ . В этом случае искомая максимальная подгруппа растяжений определяется двумя линейными соотношениями на генераторы:

$$\alpha_x - \alpha_t = \alpha_a + \alpha_x, \quad \alpha_x - \alpha_t = \alpha_b + 2\alpha_x \quad (3)$$

<sup>7</sup> Например, ее значения определяются при расчетах модели интерполяцией некой таблицы наблюдений.

<sup>8</sup> При работе в системах компьютерной алгебры обозначения для новых функциональных зависимостей приходится реально вводить, хотя бы на время. В этом отличие формальных процедур и привычных правил замены переменных проявляется существенная разница между формальным определением математической функции, жестко связывающей значения зависимых и независимых переменных и не вполне формальным понятием «физической величины» инвариантной к преобразованиям своих аргументов.

Генераторы естественно интерпретировать как «логарифмы размерностей». Поэтому соотношениям (3) можно придать простой смысл: Величины  $t$  и  $x$  имеют независимые (базовые) размерности, скажем, «время» и «деньги», а коэффициенты имеют производные размерности

$$[a] = \text{время}^{-1}, [b] = \text{время}^{-1} \times \text{деньги}^{-1}$$

Если бы мы опустили коэффициент  $a$ , то нам пришлось бы считать время безразмерным. Невозможность изменить единицу измерения времени свидетельствует о крайней специфичности модели и на практике может считаться просто следствием ошибки в записи этой модели. В использовании таких соображений, собственно, и состоит проверка правильности модели с точки зрения системы размерностей.

Обратим внимание на особое положение числа «0» в правой части уравнения (1). Если бы вместо него там стояло число «1», то пришлось бы сделать вывод, что  $t$  и  $x$  имеют одинаковые размерности. Этот пример показывает, что число «0» выделяется среди прочих чисел тем, что числа отличные от «0» мы считаем безразмерными, а для «0» вынуждены допускать любую размерность, какая потребуется, чтобы не вводить лишней связи генераторов группы растяжений<sup>9</sup>.

Пусть теперь  $F(\cdot, \cdot) \neq 0$ . Если мы хотим, чтобы размерности  $t$  и  $x$  оставались независимыми, необходимо потребовать, чтобы функция  $F(\cdot, \cdot)$  не меняла вида при замене  $F(t, x) \rightarrow e^{\alpha t - \alpha x} F(t e^{\alpha}, x e^{\alpha x})$ . На практике это достигается тем, что в конкретную запись функции  $F(\cdot, \cdot)$  вводятся дополнительные размерные нормировочные параметры: например,  $F(t, x) = d \sin(h x t)$ , но не  $F(t, x) = \sin(x t)$ .

Имея в виду эту возможность, будем просто считать, что функциональный символ и каждый из его аргументов могут нести определенную размерность. В данном случае это будут  $\text{деньги} \times \text{время}^{-1}$ ,  $\text{время}$  и  $\text{деньги}$ , соответственно. Эти размерности должны быть, разумеется, одинаковыми для всех вхождений данного функционального символа в соотношения модели, поэтому

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t)) \right] = \text{время}^{-1}, [c] = \text{деньги}.$$

В заключение этого неформального обсуждения подчеркнем, что мы требуем сохранения именно вида соотношений (ковариантности), а не просто сохранения множества решений (собственно инвариантности). Это, в частности, означает, что присутствие в системе, например, уравнения

$$(u(t) - v(t)) \left( \frac{d}{dt} x(t) + a x(t) - b x^2(t) \right) = 0 \quad (4)$$

требует совпадения размерностей  $u$  и  $v$ , даже если другие уравнения модели исключают возможность равенства  $u(t) = v(t)$ , и, тем самым, позволяют при решении уравнений отбросить множитель  $u(t) - v(t)$  в (4). Такое повышенное внимание к форме

<sup>9</sup> Положение аналогично положению дел в линейной алгебре, где один и тот же символ «0» обозначает нулевой вектор или матрицу с таким числом компонент, какое понадобится.



уравнений в нашем подходе вызвано тем, что именно исходная каноническая форма уравнений модели экономики сохраняет связь со структурой моделируемой системы. Эта связь пропадает уже при самых простых и естественных формальных преобразованиях системы соотношений канонической формы модели.

Непосредственная подстановка и сокращение экспонент в системе из нескольких десятков соотношений затруднительна даже при использовании средств компьютерной алгебры. Проще и практичнее заранее проанализировать возможную структуру соотношений и выписать систему правил-аксиом, позволяющих по виду системы сразу выписать уравнения для генераторов максимальной допустимой группы растяжений. Приведем эти правила и условия, которым должна удовлетворять модель, к которым она применяется. Это не самые общие условия и не самый полный возможный набор правил. Это те системы, на работу с которыми рассчитана система Экомод, и те правила, которые использует подсистема проверки размерностей системы Экомод.

Проверке правильности размерностей подлежит система соотношений (конечных или обыкновенных дифференциальных уравнений, граничных условий к ним, а также неравенств)  $S$ , удовлетворяющая следующим условиям:

1. Соотношения системы связывают величины, которыми могут быть
  - 1.1. числа
  - 1.2. постоянные параметры
  - 1.3. переменные (функции времени  $t$ )
  - 1.4. само время  $t$ , как независимая переменная.
2. Правая и левая части соотношений системы  $S$  суть выражения от величин, образованные с помощью
  - 2.1. арифметических операций,
  - 2.2. элементарных функций ( $\max$ ,  $\min$ ,  $\ln$ ,  $\exp$  и т.п.),
  - 2.3. функциональных символов (выражения вида  $F(x(t), \dots, y(t))$ )
  - 2.4. операции дифференцирования (по времени  $\frac{d}{dt}x(t)$  или по переменным  $\partial_k(F)(x(t), \dots, y(t))$ ).
3. Некоторым переменным системы  $S$  приписаны базовые размерности, которые задаются просто как символы. Если система  $S$  есть каноническая форма модели, то базовые размерности приписываются переменной времени и запасам материальных благ и финансовых инструментов.

Задача вычисления и проверки размерности состоит в том, чтобы приписать

- каждой величине, не имеющей базовой размерности,
- каждому функциональному символу,
- каждому аргументу функционального символа (формальному параметру функции),
- каждому выражению, составленному с помощью операций 2.1-2.4,

свою размерность, произведению степеней базовых размерностей так, чтобы соблюдались правила

- a) Числовые константы (кроме нуля) безразмерны.
- b) Нулевая константа может иметь любую размерность (однако, вполне определенную для каждого конкретного вхождения)<sup>10</sup>.
- c) Размерность суммы равна размерности каждого из слагаемых, которые должны иметь одинаковую размерность

<sup>10</sup> Нулевая константа встречается не только как правая или левая часть соотношения, но и например, в составе часто используемого выражения  $\max(0, x)$ .

- d) Размерность произведения равна произведению размерностей множителей.
- e) Размерность степени с числовым показателем равна степени размерности аргумента.
- f) Степень с символьным показателем безразмерна. Основание и показатель такой степени тоже должны быть безразмерны.
- g) Размерность функций  $\max$ ,  $\min$  равна размерности их аргументов, которые должны иметь одинаковую размерность.
- h) Остальные элементарные функции безразмерны. Их аргументы также должны быть безразмерными.
- i) Размерности обеих частей равенства или неравенства одинаковы.
- j) Размерность производной равна отношению размерностей дифференцируемого выражения и переменной дифференцирования.

Легко понять, что эти правила позволяют составить линейную неоднородную систему уравнений для логарифмов размерностей величин, не имеющих базовой размерности (генераторов группы растяжений). Правые части этой системы отвечают величинам, имеющим базовые размерности, и составлены из логарифмов базовых размерностей. Разрешимость указанной линейной системы означает существование непротиворечивой системы размерностей, включающей заданные базовые.

Система Maple различает обыкновенные и десятичные дроби, причем вычисления с обыкновенными дробями она ведет как с целыми числами, т. е. с абсолютной точностью. Пользуясь этим, мы применяем правило e) только к показателям, выраженным обыкновенной дробью, а в экзотических случаях, когда в показателе оказывается десятичная дробь (число типа `float`), применяем правило f). Тогда система для генераторов имеет рациональные коэффициенты, и ее численное решение находится с абсолютной точностью стандартными средствами Maple.

Использованию перечисленных правил существенно помогает то, что Maple хранит соотношения не как строки символов, а как иерархические структуры из операций и операндов.

Проверка размерности может проводиться на любой стадии разработки модели. Запуск процедуры проверки размерности в системе Экомод не требует ввода никакой информации, кроме самой системы, подлежащей проверке, поскольку списки переменных и параметров, а также базовые размерности запоминаются системой Экомод автоматически в процессе ввода соотношений модели.

Опыт показал исключительную эффективность проверки размерности для отыскания пропущенных по ошибке множителей, неправильно написанных аргументов функций и других, допускаемых математическим синтаксисом, но заведомо ошибочных записей.

### **Использование системы размерностей для поиска автомобильных решений**

Подавляющее большинство динамических моделей экономики в той или иной степени обладают свойством однородности относительно экстенсивных величин. Эмпирическим обоснованием этого свойства моделей можно считать то, что в экономике пока не обнаружено ни «мировых постоянных», ни «естественных единиц измерения». Наглядным подтверждением последнего служит тот факт, что изменения в физическом мире мы обычно характеризуем скоростями (производными по времени), а изменения экономических показателей – темпами (логарифмическими производными по времени). Это означает, что в первом случае абсолютные масштабы величин существенны, а во втором – нет.

Однородность – это вид симметрии, а при наличии у системы преобразования симметрии, переводящего решение в решение, представляют особый интерес решения, которые реализует это преобразование вдоль траектории [6]. Такие решения мы будем ниже называть автомодельными. Обычно это термин применяется к определенным классам решений уравнений в частных производных, но смысл в обоих случаях один и тот же: автомодельное решение – это «самоподобное» решение.

Автомодельные решения в исследовании экономических моделей играют ту же фундаментальную роль, какую играют стационарные решения (положения равновесия) в исследовании физических и технических систем. Автомодельные решения, отвечающие однородности – это экспоненциальные решения. В работах по экономической теории обычно рассматривается один класс таких решений – режимы сбалансированного роста, т.е. решения, на которых все экстенсивные переменные растут или падают экспоненциально с одним и тем же темпом [7, 8]. В моделях имеющих прикладную направленность интерес представляют более сложные решения, на которых, скажем, финансовые показатели растут быстрее реальных вследствие инфляции. Однако просто искать всевозможные частные экспоненциальные решения системы не только очень трудно, но и довольно бессмысленно, поскольку эти решения, как показывает приводимый ниже пример, могут вовсе не отражать глубоких свойств симметрии модели. Таким образом, встает задача выделить класс экспоненциальных решений системы, связанных с ее свойствами симметрии.

Сходный вопрос возникает и по другому поводу. Прикладные модели экономики, как правило, оказываются незамкнутыми в том смысле, что часть переменных не определяется уравнениями модели, а задается экзогенно. Однако в отличие от моделей физических и технических систем, экзогенные переменные моделей экономики не описывают каких-либо точно измеряемых внешних возмущений или строго контролируемых воздействий на систему со стороны наблюдателя-экспериментатора. Экзогенные переменные моделей экономики – это сценарии или прогнозы тех показателей, для которых пока не удалось придумать модельного описания. Эти сценарии всегда довольно неопределенны и при расчетах обычно рассматриваются в нескольких вариантах. Поэтому при исследовании модели возникает вопрос о выборе наиболее простых, естественных для модели сценариев изменения экзогенных переменных.

Мы предлагаем решать оба поставленных выше вопроса одним и тем же регулярным способом. Этот способ основывается на том, что система для определения показателей автомодельных решений является частным случаем системы для генераторов допустимой группы растяжений.

Наше предложение состоит в том, чтобы искать экспоненциальные решения системы, приписывая постоянные темпы роста не отдельным переменным, а базовым размерностям.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных и конечных уравнений

$$\Phi\left(\frac{d}{dt}x(t), x(t), s(t), q\right) = 0 \quad (5)$$

Здесь  $x(t) = \{x_i(t)\}$  – набор неизвестных переменных,  $s(t) = \{s_j(t)\}$  – набор экзогенных переменных, а  $q = \{q_k\}$  – набор параметров. Выполним проверку размерности системы и по ее результатам запишем выражения размерностей  $x_i(t), s_j(t)$  через базовые единицы измерения  $d_1, \dots, d_\Omega$ :

$$[x_i] = d_1^{m(i,1)} \cdot \dots \cdot d_\Omega^{m(i,\Omega)}, [s_j] = d_1^{n(j,1)} \cdot \dots \cdot d_\Omega^{n(j,\Omega)},$$

$$[q_k] = d_1^{l(k,1)} \cdot \dots \cdot d_\Omega^{l(k,\Omega)} \quad (6)$$

В соответствии с этими выражениями определим «естественные» сценарии изменения экзогенных переменных как

$$s_j(t) = S_j \exp\left(t \sum_{\omega} n(i, \omega) p_{\omega}\right), \quad (7)$$

и будем искать решения системы (5) в виде

$$x_j(t) = X_j \exp\left(t \sum_{\omega} m(i, \omega) p_{\omega}\right). \quad (8)$$

Ясно, что если «темпы роста размерностей»  $p_1, \dots, p_\Omega$  в соответствии с (6) удовлетворяют равенствам

$$0 = \sum_{\omega} l(i, \omega) p_{\omega}, \quad (9)$$

то в силу того, что показатели  $n(i, \omega)$ ,  $m(i, \omega)$ ,  $l(i, \omega)$  удовлетворяют системе условий на генераторы максимальной допускаемой группы растяжений, все экспоненты при подстановке (7), (8) в (5) сократятся, и останется система конечных уравнений на амплитуды автомодельного решения

$$\Phi_1(p, X, S, q) = 0. \quad (10)$$

Подчеркнем, что данный метод не отыскивает все экспоненциальные решения. Например, в уравнении

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = x_1(t) + s_1(t)(x_1(t) - s_1(t)),$$

где  $s_1(t)$  – экзогенная переменная,  $x_1$  и  $s_1$  могут быть только безразмерными, но  $x_1(t) = e^t$  является решением уравнения при  $s_1(t) = e^t$ . Такие экспоненциальные решения мы считаем «случайными» и не представляющими интереса, поскольку они не отвечают симметриям системы. Фактически, мы накладываем на уравнения модели еще одно требование, не содержащееся в уравнениях, но отражающее их содержательный смысл: требование существования темпов роста, удовлетворяющих соотношениям (9).

### Идентификация модели с применением метода достижимых целей

Задача идентификации является одной из важнейших в математическом моделировании, для ее решения разработаны разнообразные методы. Использование МДЦ позволяет выбрать параметры модели на основе синтеза результатов наблюдений и неформализованного опыта эксперта, осуществляющего идентификацию модели [12].

Традиционный подход к задаче идентификации состоит в следующем. Задается некоторая скалярная функция (так называемая функция ошибок), которая характеризует отклонение результатов наблюдений выходных переменных от значений выходных переменных, рассчитанных по модели для наблюдавшихся значений

выходных переменных. Значение этой функции зависит от величин параметров. В процессе идентификации выбирается такое значение параметров модели, при котором достигается минимальное значение функции ошибки. Таким образом, идентификация модели происходит автоматически, на основе решения задачи оптимизации, без использования опыта и знаний эксперта. Между тем очень часто могут существовать другие значения параметров, при которых значение функции ошибки близко к оптимальному; в этом случае выбор единственного “оптимального” значения параметров может быть достаточно случаен.

Г.К. Каменевым, А.В. Лотовым был предложен способ выбора параметров модели на основе визуализации множества достижимых значений выходных переменных [12]. При этом эксперту представляются все так называемые  $\varepsilon$ -оптимальные значения параметров, т.е. такие, для которых величина функции ошибки превосходит оптимальное значение не более чем на малое положительное число  $\varepsilon$ . Тогда эксперт мог бы выбрать среди  $\varepsilon$ -оптимальных те значения параметров, которые в наибольшей степени соответствуют его знаниям. Задав  $\varepsilon$  разумным образом, эксперт мог бы понять, какова неопределенность в выборе параметров на основе имеющихся наблюдений. Этот подход может быть реализован на основе метода достижимых целей.

Однако, непосредственное его применение к сложным моделям экономической динамики, в частности, моделям межвременного равновесия оказывается затруднительным. Система уравнений может быть чрезвычайно сложна, и перебор значений параметров из достаточно богатого множества окажется невозможным.

В таких случаях мы предлагаем идентифицировать модель, используя не исходные уравнения, а более простые уравнения для сбалансированного роста. В системе Экомод мы используем уравнения (9), (10) не только для поиска автомодельных решений, но и для определения значений параметров  $q$ , обеспечивающих разумные значения темпов роста и амплитуд наблюдаемых переменных  $s_j(t)$ ,  $x_j(t)$ . Таким образом, исследователь выбирает из множества автомодельных решений то, на котором амплитуды и темпы роста переменных наиболее соответствуют ожидаемым значениям.

Пространство параметров, даже после исключения части неизвестных с помощью равенств, является многомерным (часто имеет 5-10 измерений). Совсем не просто выбрать в нем допустимую точку. Здесь очень помогает разработанная в ВЦ РАН система FGNL, которая позволяет визуализировать множества, заданные системами нелинейных неравенств и выбирать нужные значения параметров из этих множеств [10, 11]. Метод, разработанный авторами для системы, базируется на идеях вариантного расчета. Задавая различные варианты точек из множества допустимых значений параметров, можно получать многомерные отклики в виде точек в пространстве автомодельных решений. Среди этих точек происходит отбор, основанный на глобальном зондировании множества параметров. Результатом же является набор небольшого числа точек пространства решений, объединение окрестностей которых дает его аппроксимацию с заданной точностью и полнотой. Система FGNL изображает полученную аппроксимацию либо ее произвольное сечение в виде объединения прямоугольных параллелипипедов.

Система FGNL была встроена в Экомод так, чтобы можно было использовать в качестве описания допустимого множества непосредственно формульную запись системы уравнений в Maple.

Таким образом, процедура идентификации модели содержит следующие шаги:

- Записывается система (алгебраических уравнений и неравенств) для поиска сбалансированного роста. Темпы роста задаются на основе данных о размерности переменных.

- Начальные значения величин и параметры модели считаются новыми переменными. Они делятся на 3 типа:
  - Часть переменных задается **экзогенно** (их значения берутся из статистики или нормативных документов);
  - Часть переменных считается **базовыми**: их значения выбирает эксперт (разработчик модели) на основе визуализации допустимого множества;
  - Оставшиеся выражаются через экзогенные и базовые переменные с использованием соотношений системы.
- Множество значений базовых переменных, удовлетворяющих неравенствам, визуализируется с помощью FGNL (см. рис. 1)
- Выбирается точка из этого множества, т.е. значения базовых переменных, задающие некоторый сбалансированный рост.

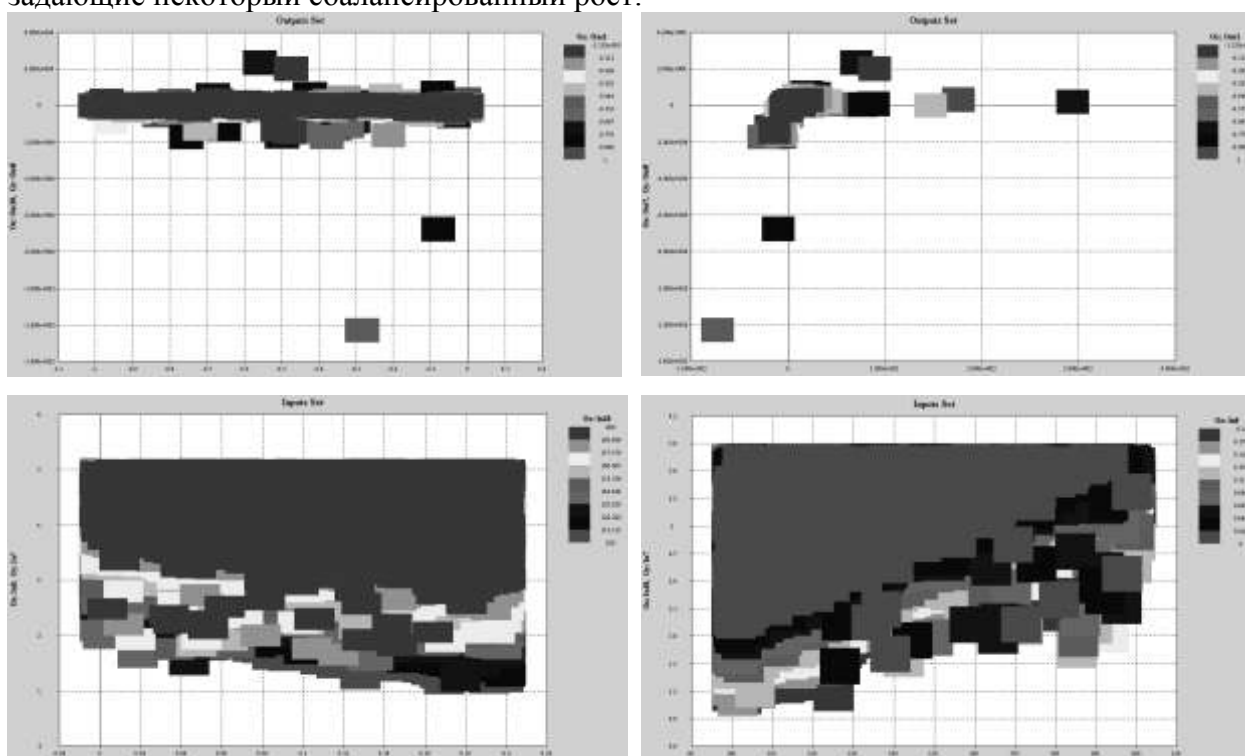


Рис. 1. Примеры множеств допустимых значений параметров, визуализированных с помощью FGNL

Алгоритм идентификации модели, также как и алгоритмы проверки размерности модели и поиска сбалансированного роста, были реализованы в системе Экомод. Они показали свою эффективность при разработке модели межвременного равновесия экономики России с учетом теневого оборота, проводившейся в отделе ММЭС ВЦ РАН по заказу Федерального агентства по налогам и сборам. Подробнее о модели можно прочитать в статье И.Г. Поспелова в настоящем сборнике.

## Литература

1. Комаров С.И., Петров А.А., Поспелов И.Г., Поспелова Л.Я. Представление знаний, содержащихся в математических моделях экономики. // Теория и системы управления, № 5, 1995
2. Завриев Н.К., Поспелов И.Г., Поспелова Л.Я., Чуканов С.В. Развитие системы поддержки математического моделирования экономики ЭКОМОД. Сообщения по прикладной математике, М.: ВЦ РАН, 1999.

3. Петров А.А., Поспелов И.Г., Поспелова Л.Я., Хохлов М.А., «ЭКОМОД – интеллектуальный инструмент разработки и исследования динамических моделей экономики»// Вторая всероссийская научно-практическая конференция по имитационному моделированию и его применению в науке и промышленности «Имитационное моделирование. Теория и практика». Сборник докладов. СПб.: ФГУП ЦНИИТС, 2005. Т. 1. С. 32-41.
4. Завриев Н.К., Поспелов И.Г. Исследование математических моделей средствами инструментальной системы Экомод. // Математическое моделирование. 2003. Т.15, №8. С. 57-74.
5. Поспелов И.Г., Хохлов М.А. Метод проверки размерности для исследования моделей экономической динамики // Математическое моделирование, 2006, т.18, №10, с. 113-122.
6. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука. Физматлит, 1978.
7. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. М. : Наука, 1984.
8. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.
9. Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.А., Шипулина Г.Е. Новые принципы и методы разработки макромоделей экономики и модель современной экономики России, М.: ВЦ РАН, 2006.
10. Каменев Г.К., Кондратьев Д.Л. Об одном методе исследования незамкнутых нелинейных моделей // Математическое моделирование, 1992, №3. С. 105-118.
11. Березкин В.Е. Анализ и реализация методов аппроксимации паретовской границы для нелинейных систем. М.: ВЦ РАН, 2002.
12. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.:Наука, 1997.

## **ВЫБОР МЕТОДА МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА СИСТЕМ РЕГИОНАЛЬНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**

Садов С.Л. (г. Сыктывкар)

*В статье обосновывается выбор комбинаторного моделирования и соответствующих алгоритмов в качестве методической основы исследования перспектив развития систем региональной энергетики.*

Идея об адекватности средств и математического аппарата объекту моделирования постоянно присутствует в работах, посвященных вопросам выбора и разработки модельно-программного инструментария решения задач прогнозирования. Излишне требовать от методов качеств, которыми объект не обладает или которые мы не в состоянии информационно обеспечить. При решении задач моделирования и прогнозирования развития систем региональной энергетики необходимо учитывать их

особенности. Среди них следует отметить, прежде всего, их относительно небольшие масштабы, легкость структуризации на составляющие объекты и дискретизации периода функционирования. Объектами модели в зависимости от решаемых задач могут быть или реальные объекты (электростанции, шахты, месторождения), или группы территориально близких однородных объектов, или, наоборот, отдельные технологически целостные их фрагменты, очереди. Как правило, степень дробности при моделировании находится в обратной зависимости от значимости объекта, его положения в иерархии «локальные объекты – региональные объекты – объекты более высокого уровня».

Комбинируя различные варианты развития объектов модели в ходе полного или усеченного перебора, можно выбрать из них наиболее отвечающие критериям эффективности и ограничениям, в рамках которых происходит развитие исследуемой системы энергетики. Если задачу решать «в лоб», то есть большая вероятность получить неподъемную в вычислительном отношении процедуру. На помощь приходит простой прием, суть которого состоит в том, что глубина и полнота оценки элементов некоего множества должна находиться в обратной зависимости от мощности этого множества.

Принципиальная схема этапов исследования, отражающая суть методологии многовариантного анализа методами комбинаторного моделирования, приведена на рис. 1. На ней буквой А обозначено исходное множество всех возможных вариантов исследуемой системы (представляющих собой сочетания вариантов объектов системы и сценариев внешних условий развития); из него отсеиваются те варианты, которые не удовлетворяют внутренним и внешним ограничениям развития системы. Буквой В представлено множество вариантов, допустимых по балансовым условиям (ограничениям по финансовому, ресурсному и т.п. обеспечению, на объемы производства и потребления, загрязнения окружающей среды и т.д.), D – по динамическим условиям (например, на время и сроки реализации мероприятий и проектов), L – по логическим условиям (указывающих на возможность совместной реализации каких-либо проектов или на необходимость определенной их последовательности). Все возможные ограничения на сочетания вариантов представимы в виде условий указанных трех типов. Пересечение множеств В, D и L дает F – множество допустимых вариантов системы, среди которых и следует, руководствуясь экономическими, социальными, экологическими и другими, в зависимости от решаемых проблем, критериями, искать наилучшие решения. Неопределенность информации о будущем положении дел в экономической, социальной, технологической сферах делает бессмысленным поиск одного оптимального решения. Поэтому на множестве F есть резон выделить субоптимальные варианты системы, т.е. такие, чьи показатели наиболее близки оптимальным значениям критериев. Субоптимальные варианты образуют множество S. На последнем этапе исследования из субоптимальных отбираются наиболее рациональные, приемлемые варианты развития системы (множество R).



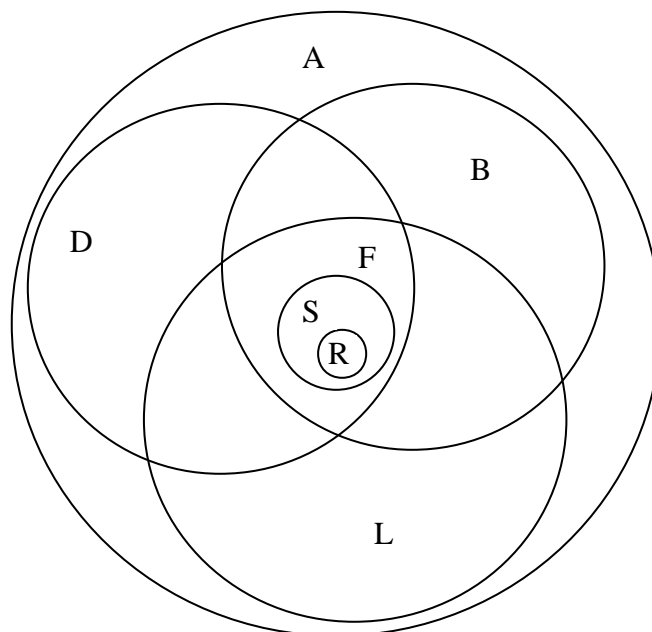
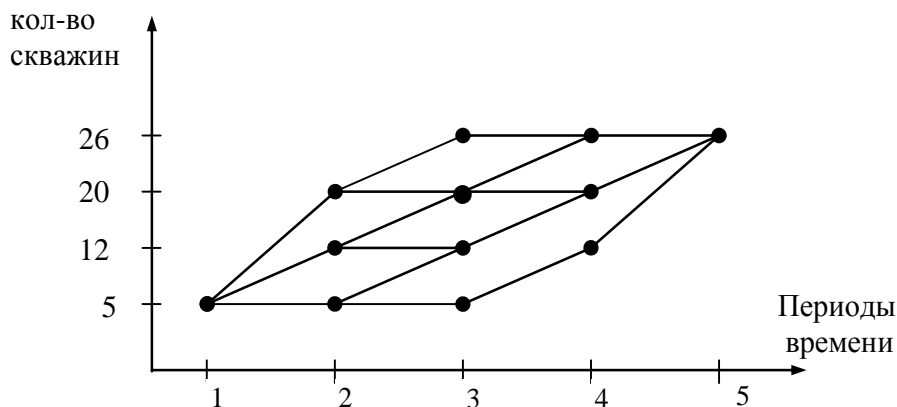


Рис. 1. Выделение множеств вариантов развития системы в ходе многовариантного анализа ее перспектив методами комбинаторного моделирования.

Как отмечалось выше, глубина и полнота анализа на каждом из этапов, а, значит, и количество труда и времени, затрачиваемое на каждый вариант, должны находиться в обратно пропорциональной зависимости от мощности множества, на котором анализ проводится. В противном случае есть опасность или увязнуть в деталях или упустить нужное решение. Поэтому отсев недопустимых по ограничениям вариантов (1-й этап) следует проводить по максимально упрощенной процедуре, желательно целыми группами, а отбор рациональных вариантов из числа субоптимальных (на последнем этапе) – детально, принимая во внимание и те обстоятельства, которые не удалось формализовать и учесть в ограничениях. Последнее определяет роль электронно-вычислительной техники при анализе методами комбинаторного моделирования – первые его два этапа (до получения множества S) следует проводить в виде автоматизированных процедур на ЭВМ. Окончательный анализ и отбор решений лучше оставить за специалистом в проблемной области, что не исключает использование им компьютера в качестве своего рабочего инструмента.

Выбор степени агрегирования при выделении объектов предопределяется постановкой решаемой проблемы и возможностями информационного обеспечения. Причем в рамках комбинаторного моделирования можно естественным образом производить объединение и дезагрегирование объектов – совокупность нескольких объектов одной задачи можно представить как единый объект при исследовании более крупномасштабных проблем.

В Институте социально-экономических и энергетических проблем Севера Коми НЦ УрО РАН имеется опыт предплановых, предпроектных системных исследований перспектив развития энергетики региона, позволяющий реализовать их в виде иерархической системы комбинаторных моделей "энергетика региона – отрасль энергетики – объект" [3;4;8]. В ходе моделирования и анализа от объекта до всей



энергетики (под которой понимается совокупность систем производства и распределения электрической и тепловой энергии, а также топливных ресурсов)

Рис. 2. Варианты освоения условного месторождения нефти.

естественным образом учитываются дискретность вариантов развития объектов, отраслей и энергетики в целом, неопределенность прогнозной информации и вытекающая отсюда многоэтапность процесса принятия решений. При необходимости анализ можно проводить с учетом нескольких критериев развития отдельных объектов, их систем и отраслей энергетики. Влияние общеэкономической ситуации на перспективы развития энергетики региона учитывается при разработке сценариев внешних условий, согласовании уровней производства и потребления энергоресурсов. Совместный анализ вариантов производства и потребления, легко реализуемый при комбинаторном моделировании, позволяет предложить более рациональные решения проблем в области топливо- и энергоснабжения.

Исходным пунктом исследований при использовании методов комбинаторного моделирования является представление основных возможностей (альтернатив) развития объекта в виде вариантов, которые формируются путем выделения основных стадий технической реализации проектов его строительства, реконструкции, либо закрытия. Динамика развития объекта описывается последовательно от одного состояния к другому в фиксированные моменты времени. Такая дискретизация процесса с экономической точки зрения оправдана, поскольку отдача возможна только от технологически завершенного участка объекта – блока электростанции, буровой на месторождении, лавы на шахте. Для наглядности варианты развития объекта в динамике удобно представлять в виде графа (схемы), узлы которого соответствуют состояниям объекта (стадиям реализации проекта), а дуги – переходам от одного состояния к другому. Выделение периодов времени не обязательно производить равномерно – оно диктуется интересами исследования.

На рис. 2 для примера приведена схема вариантов освоения условного месторождения нефти в виде графа. Предполагается, что в процессе подготовки

проекта освоения месторождения было выявлено, что по условиям транспорта, энергоснабжения, расположения относительно магистрального нефтепровода обустройство и эксплуатацию скважин рациональнее вести последовательно группами, включающими пять, семь, восемь и шесть скважин (т.е. общее число скважин будет составлять 5, 12, 20 и 26). Возможности финансового обеспечения, в свою очередь, диктуют различные темпы освоения и подключения скважин к нефтепроводу, что выражается в конечном итоге наличием семи вариантов развития процесса освоения данного месторождения.

Описав таким образом варианты развития объектов отрасли, можно приступить к анализу их совокупности с целью выработки основных вариантов (альтернатив) развития энергетики в целом, т.е. вариантов для более высокого иерархического уровня. При рассмотрении и оценке совокупности вариантов составляющих отрасль объектов необходимо учитывать все существенные системные ограничения на отрасль. Часть ограничений может быть формализована и записана в виде балансовых уравнений или неравенств объемных или темповых показателей, часть – в виде логических условий на совместимость тех или иных проектов, последовательность проведения мероприятий (рис.3). Как правило, подавляющая часть сочетаний вариантов развития объектов не удовлетворяет такой системе ограничений [3].



Рис. 3. Общая схема анализа вариантов развития энергетической системы (отрасли).

Оставшиеся допустимые по отраслевым ограничениям сочетания вариантов анализируются в плане эффективности, согласно принятым в исследовании критериям. Преобладание какого-либо одного сочетания вариантов по всем критериям недостижимо – реальные системы критериев противоречивы. Так, требования

рентабельности входят в противоречие с экологическими, требованиями безопасности и надежности; требования снижения финансового риска при разработке нефтегазовых месторождений конфликтуют со стремлением уменьшить затраты на геологоразведочные работы. В таких ситуациях в практике исследований применяются:

1) принцип оптимальности по Парето;

2) свертка критериев, т.е. сведение их к какому-либо одному или новому комплексному критерию, полученному суммированием всех критериев с весовыми коэффициентами, зависящими от их значимости. Для получения объективных значений весовых коэффициентов полезны процедуры, приведенные в работе [7]. Частным случаем такого подхода можно считать выбор какого-либо критерия в качестве определяющего и проведения расчетов по модели с одним этим критерием (т.е. его весовой коэффициент принимается равным единице, а всех остальных – нулю);

3) упорядочение множества критериев и последовательная оптимизация по каждому из них [2];

4) аппарат теории нечетких множеств, позволяющий по бинарным (парным) отношениям предпочтения ранжировать несопоставимые напрямую варианты по предпочтительности и оценивать их по приоритетности [1].

Важно отметить, что каким бы методом ни решалась задача, полученное решение будет разумно, если оно оптимально по Парето – в противном случае его можно улучшить по одному из критериев, не ухудшая по другим. Известен следующий факт [4]: при любых весовых коэффициентах  $\lambda_i > 0, i = \overline{0, n}$ , в результате решения задачи

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot f_i(x) \xrightarrow{x \in X} \min \quad (1)$$

будет получено одно из Парето-оптимальных решений задачи с целевыми функциями

$$f_i(x) \xrightarrow{x \in X} \min, \quad i = \overline{0, n}, \quad (2)$$

где  $X$  – множество допустимых решений. Варьированием весовых коэффициентов  $\lambda_i$  можно получить набор всех оптимальных по Парето решений. На основе данного свойства можно осуществить экономическую интерпретацию различных критериев. Пусть в рассматриваемом наборе целевых функций (2)  $f_0(x)$  является стоимостной. Умножение на положительную величину, как известно, не меняет оптимального решения. Поэтому задача

$$f_0 + \sum_{i=1}^n \nu_i \cdot f_i(x) \xrightarrow{x \in X} \min, \quad (3)$$

где  $\nu_i = \lambda_i / \lambda_0$ , эквивалентна задаче (1) и имеет то же оптимальное решение. В формуле (3) все составляющие целевой функции имеют стоимостную размерность. Следовательно, величины  $\nu_i$  представляют собой переводные коэффициенты показателей  $f_i(x)$  в стоимостную форму. Например, если  $f_i(x)$  – показатель объемов загрязнения окружающей среды, то  $\nu_i$  интерпретируется как удельный ущерб от данного вида загрязнения. Таким образом, любое Парето-оптимальное решение может быть представлено как решение оптимизационной задачи с одним стоимостным критерием – максимума экономического эффекта или минимума затрат. Поиск Парето-оптимальных решений дискретных задач хорошо вписывается в структуру комбинаторного моделирования; множеством таких решений будет конечный набор точек, число которых равно числу сочетаний вариантов объектов. С точки зрения динамики каждая точка разветвления на графе (рис. 2) может рассматриваться как

момент принятия решений по дальнейшему развитию. Аналогично, в форме графов, могут задаваться сценарии изменения неопределенных факторов – точка ветвления характеризует момент времени, в который будет происходить уточнение ранее не определенных показателей.

Рассмотрим известные приемы и математические методы решения задач выбора оптимального сочетания вариантов развития объектов, входящих в некоторую систему, которые в самом общем виде можно записать как

$$K(x, y, c, s, z, d, p, \dots) \rightarrow \max (\min)$$

при ограничениях

$$U(x, y, c, s, z, d, p, \dots) \geq 0.$$

Здесь  $K$  и  $U$  – вектор-функции критериев и ограничений. Из конкретных параметров приведены наиболее часто встречающиеся:

$x, y$  – булевы переменные, показатели использования вариантов объектов и потребителей, соответственно;

$c$  – вектор цен на энергетический ресурс (в динамике);

$s$  – затраты по вариантам развития объектов;

$z$  – эффективность вариантов покрытия потребностей потребителей;

$d, p$  – добыча и потребление энергетических ресурсов.

Эти приемы и методы решения можно объединить в три большие группы.

1. Редукция к задачам линейного программирования путем замены требования булевости переменных  $x$  и  $y$  на ограничения

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

и решения получившейся задачи симплекс-методом или другим. Полученное таким образом решение обладает существенным недостатком – оно нецелочисленное, т.е. определяет не конкретный вариант добычи или потребления, а набор вариантов для каждого из объектов в некоторой пропорции. Попытки исправить этот недостаток – например, путем выбора варианта с наибольшим "удельным весом", – ведут к решению, оптимальность которого сомнительна; при этом, как правило, нарушаются ограничения. Но в практическом плане это, пожалуй, самый легкий путь.

2. Использование комбинаторных методов, представляющих собой математическую реализацию идей комбинаторного моделирования [6] – проверку на оптимальность сочетаний вариантов в ходе полного или усеченного по простым ясным правилам перебора. Эти методы дают оптимальное целочисленное решение. Для них нелинейность целевой функции и ограничений не является препятствием. Возможности решать многокритериальные задачи или вести параллельную оптимизацию по нескольким критериям, проводить отбор не только оптимального, но и всех субоптимальных решений, открывают дополнительные возможности в исследованиях. Недостатком такого подхода является экспоненциальный рост числа сочетаний вариантов, особенно с увеличением числа рассматриваемых объектов. Современная общедоступная вычислительная техника позволяет уже применять такой подход к небольшим (до 15-25 объектов) системам, и эти возможности будут расширяться. С другой стороны, большое время счета компенсируется сокращением времени на подготовку и отладку программ для ЭВМ, так как они просты.

3. К настоящему времени разработано много алгоритмов для решения задач целочисленного, булевого и смешанного программирования. За счет учета особенностей решаемых задач они ослабляют зависимость объема вычислительной работы от числа вариантов, но при этом теряют многие положительные качества, свойственные более общим комбинаторным методам. Составление и отладка программ

по данным методам, как правило, отнимает много времени. Другое дело, если имеются готовые и проверенные в работе программные модули.

Достоинства и недостатки всех трех приемов ("+" говорит о наличии данного свойства, "-" – о его отсутствии) сведены в табл. 1.

Таблица 1

Характеристика подходов к решению  
дискретных оптимизационных задач

Положительные свойства	П о д х о д ы		
	I	II	III
Целочисленность получаемого решения	–	+	+
Работа с нелинейными целевой функцией и ограничениями	–	+	–
Менее чем экспоненциальная зависимость объема вычислений от числа объектов и вариантов	+	–	+
Универсальность	+	+	–
Минимальное время для самостоятельного составления и отладки программ	–	+	–

Как видно, хотя ни один из подходов не лишен недостатков, комбинаторный имеет больше положительных качеств, чем другие. Так что если число всех сочетаний вариантов (произведение числа вариантов всех объектов) порядка  $10^6$ , то есть все основания воспользоваться простейшими алгоритмами перебора. При более значительных размерах нужно подобрать эффективный для данной задачи путь решения. Необходимо еще отметить, что, как показывает опыт моделирования региональных систем энергетики [6], следует избегать излишней близости вариантов развития объектов, потому что это затрудняет как саму вычислительную работу, так и интерпретацию ее результатов. Если число сочетаний вариантов слишком велико (например, порядка  $10^7$  или выше), то надо вернуться к исходным данным модели, по возможности агрегировать некоторые объекты или сократить число вариантов, оставив наиболее существенные, ключевые.

Чем меньше число объектов в системе, тем более значимыми становятся требования к дискретности получаемых решений, так как погрешность от дискретизации непрерывного решения обратно пропорциональна числу объектов. Поэтому по данной причине для моделей с числом объектов в пределах двух десятков предпочтительны целочисленные алгоритмы. При таких размерностях моделей программы по комбинаторным алгоритмам имеют приемлемое время счета.

Поиск множества субоптимальных вариантов системы (т.е. сочетаний вариантов объектов) можно вести как в процессе поиска оптимального варианта (например, отслеживая лучшую десятку), так и после его нахождения (провести отбор вариантов, отличающихся от оптимального на определенную величину или процент). Анализ множеств субоптимальных решений, полученных для основных сценариев развития экономики региона, даст представление о приоритетах в развитии среди объектов, позволит выделить среди них первостепенные (развитие которых предусматривается почти во всех субоптимальных решениях при всех ситуациях), второстепенные (которые не во всех ситуациях получают "добро" на развитие) и остальные, чьи шансы невелики. Формализовать такой анализ крайне сложно, поэтому разумно оставить его

исследователю, дав ему в помощь человеко-машинные средства, облегчающие проведение анализа и принятие решений.

### Литература

1. Беллман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях // Вопросы анализа и процедура принятия решений. – М.: Мир, 1976. – С. 172-215.
2. Зоркальцев В.И. Относительно внутренняя точка оптимальных решений. – Сыктывкар, 1984. – 48 с. (Научные доклады / Коми филиал АН СССР; вып. 100).
3. Зоркальцев В.И., Кулагина Е.Л., Успенская И.Г. Комплекс программ для исследования альтернатив развития электроэнергетических систем (Битор-М). – Сыктывкар, 1991. – 24 с. (Автоматизация научных исследований / Коми науч. центр УрО АН СССР; вып. 21).
4. Зоркальцев В.И., Луканичева В.П., Садов С.Л. Модель анализа эффективности и напряженности вариантов развития угольной промышленности региона // Проблемы анализа народнохозяйственной эффективности региональных энергетических комплексов. – Сыктывкар, 1988. – С. 57-66.
5. Йохансен Л. Очерки макроэкономического планирования. – М.: Прогресс, 1982. – Т.1. – 398 с.; Т.2. – 471 с.
6. Региональный энергетический комплекс (особенности формирования, методы исследования). – Л.: Наука. Ленингр. отделение, 1988. – 200 с.
7. Саати Т. Принятие решений: метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.
8. Садов С.Л. Комбинаторный подход к решению задачи выбора оптимального варианта развития топливодобывающих отраслей // Проблемы функционирования и развития энергетики Северо-Востока СССР – Сыктывкар, 1987. – С. 85-89. (Труды Коми филиала АН СССР, № 83).

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЭВМ ПРИ ПОСТРОЕНИИ «МЕХАНИЗМЕННЫХ МОДЕЛЕЙ» ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Саранча Д.А. (г. Москва)

*В работе рассмотрены особенности использования методики комплексных исследований в процессе математического моделирования экологических систем. Приведены результаты ее применения для поиска ведущих механизмов, определяющих колебания численности тундровых животных.*

В количественной экологии существует потребность в создании моделей, объясняющих характер протекающих процессов («механизменных моделей»). На эту роль претендовали аналитические модели, созданные в классический период количественной экологии. Но ограниченность подходящих для аналитических исследований математических уравнений вынуждала использовать сильные упрощающие предположения. Неудовлетворенность обоснованностью аналитических моделей побуждало к поиску новых методов моделирования. В данной работе предлагается для построения и анализа механизменных моделей использовать имитационные технологии, сочетающие максимальную приближенность к биологам с преимущественностью достижений предыдущего (докомпьютерного) периода. В отличие от аналитических моделей, описывающих явление в обобщенных терминах, имитационные подходы позволяют построить более детальную модель, сделать ее более конкретной, используя междисциплинарные подходы к заполнению с помощью экспертов «лагуны» недостающей информации.

1. Традиционные имитационные технологии не приспособлены для создания «механизменных моделей». В проведенных эколого-биологических исследованиях под имитационным моделированием понималось следующее.

<<Определение. *Имитационное моделирование* – это искусство создания математических моделей в результате междисциплинарных взаимодействий с использованием ЭВМ в качестве инструмента интеллектуальной поддержки. Оно опирается на технологию использования ЭВМ для создания и исследования набора взаимосвязанных математических моделей при неполных и разноплановых данных о свойствах изучаемого объекта. Важнейшими компонентами такой технологии является искусство использования экспертных оценок и результатов вычислительных экспериментов в процессе формирования, модификации и анализа набора взаимосвязанных математических моделей разной степени детализации, искусство экологической интерпретации полученных результатов. >>

2. Естественное требование «междисциплинарности» - открытости модели ко всем пожеланиям экспертов (биологов) должно быть уравновешено ответственностью «модельера» (математика) за весь процесс создания моделей. *Нужен Единый архитектор модели (ЕАМ) – математик* (разработчик выступает и в роли эксперта), единый «режиссер» процесса моделирования. Лишь ответственность создателя модели может обеспечить успех модельного исследования, в частности эффективно реализовать проблему отбора информации с единых позиций при построении и модификации моделей, провести согласование экологических и математических требований.

«Основным двигателем» процесса имитационного моделирования является разрешение дуализма (противоречия) между принципиальной возможностью создания



сколь угодно детального описания и стремлением избежать «угрозы необозримости модели».

Имитационная модель большой размерности не может быть самодостаточной. Потребность в понимании ее свойств, ее связи с исходным объектом приводит к необходимости создания *наборов взаимосвязанных моделей*, в том числе и *упрощенных*, приводит к необходимости создания тщательно отлаженной процедуры согласования всех этапов построения и анализа модели, к проведению *комплексных исследований (Коис)*.

3. Методика Коис включает в себя *всю последовательность операций*. Сбор, отбор, анализ и переработка исходной (биологической) информации. Обоснование выбора объекта, переменных и уравнений для его описания; выбор явления для раскрытия свойств объекта («тестирующего явления»); обоснование и построение детальной имитационной математической модели; анализ ее свойств и проведение с ней вычислительных экспериментов. Построение сопряженных моделей, как детальных, проясняющих и уточняющих отдельные аспекты изучаемого явления, так и создание упрощенных моделей для описания исходной (основной) имитационной модели. Упрощенные модели хорошо аппроксимируют динамику изменения основных переменных исходной модели и в то же время позволяют проводить аналитические исследования. Полученный набор моделей («имитационная система») эффективен при анализе изучаемого (биологического) явления в целом - экологической интерпретации свойств моделей и результатов вычислительных экспериментов, выбора иерархии (безразмерных) показателей для ее описания, формулирования гипотез о ведущих механизмах исследуемого объекта.

4. Для создания имитационной системы особенно важны «первые шаги». Один из важнейших и определяющих этапов – самый первый – уточнение постановки задачи. В отборе задачи – первый приоритет – заделы в исследовании, предыдущий опыт математического моделирования («ищут под фонарем»). Идет перебор задач, для которых наметились подходы к их решению и анализ информации об исследуемом объекте, с целью выявления тестирующего объекта. Возникает триада – прикладная проблема, метод моделирования, тестирующий эффект, осуществляется поиск «пересечения» этих трех «множеств». Такая процедура существенно конкретизирует постановку задачи.

После появления концепции (конкретизации задачи), в ее рамках осуществляется построение исходной (детальной) имитационной модели. При этом используют три принципа: 1) системность - учитывать многообразие связей внутри и вне изучаемого объекта; 2) соответствие (экологичность) - привлекать предположения, не противоречащие доступным (экологическим) данным; 3) минимальность - использовать минимально возможную математическую структуру, необходимую для имитации изучаемого явления. Среди трех принципов минимальность – ведущий, позволяющий более конструктивно подойти к построению модели.

В рамках уточненной постановки задачи, с использованием указанных выше подходов, формируется математическая структура модели. После этого осуществляется наполнение этой структуры соответствующей информацией: сбор необходимых данных, дополнение недостающих сведений с помощью экспертных оценок. Затем осуществляется процесс формирования имитационной модели, происходит своего рода формализованная обработка количественных и качественных сведений об объекте, экспертных оценок. В результате анализа и обработки первичной информации создается достаточно детальное математическое описание объекта, которое затем реализуется в виде компьютерной программы.

5. После этого проводится исследование математической модели с помощью имитационных экспериментов на ЭВМ, то есть задаются различные "сценарии" изменения некоторого набора параметров, при которых "проигрывается" динамика исследуемой модели. Сначала идет «доказательство теоремы о существовании» - показ возможности в рамках данной модификации модели воспроизвести желательные динамические режимы (при моделировании тундровых популяций и сообществ воспроизведение динамики численности животных, близкой к реальной). Следующий этап – анализ результатов вычислительных экспериментов, их экологическая интерпретация. В процессе такого анализа происходит пересмотр используемых предположений, устранение слабо обоснованных и замена их более обоснованными. Это приводит к многочисленным модификациям модели. Наряду с уточнением (улучшением) экологических предпосылок модели, осуществляется совершенствование ее общесистемных свойств. В рамках компромисса между принципами «минимальности» и «экологичности» происходит поиск таких значений и комбинаций параметров (совместимых с данными и представлениями экологов), которые улучшаются математические свойства модели. Прежде всего осуществляется поиск условий сохранения решений в допустимых рамках (ограничения от возможности попадания в окрестность нуля и в фазу неограниченного роста), а также создание условий для управляемости модели: возможности ее настройки на соответствующие динамические режимы.

Параллельно с критическим анализом модели происходит поиск ведущих механизмов рассматриваемого явления, что и является целью моделирования. Для облегчения понимания свойств модели (и поиска ведущих механизмов) реализуются следующие этапы, помогающие подойти к «пониманию объекта» - это создание сопряженных моделей (модель популяции с учетом возрастной структуры, более детальная модель «растительности» и т.п.) и поиск способов упрощенного описания («нуль–изоклины», построение фазовых моделей двухуровневой системы «растительность- лемминги», ...).

Для создания более детального описания подсистем разумнее оказывается не расширять исходную модель (избежать эффекта «динозавра»), а писать новую независимую модель. Но здесь возникает проблема взаимоувязки различных сопряженных моделей. Эта потребность естественно подводит к необходимости построения упрощенных моделей, которые допускают параметрическое ((квази) аналитическое) исследование. Обоснование упрощенных (аналитических) моделей осуществляется посредством совместного анализа эколого-биологической информации и результатов вычислительных экспериментов, на основании редукции базовых имитационных моделей. Это приводит к созданию набора взаимосвязанных моделей, к созданию «имитационной системы».

6. Следующий этап - работа с имитационной системой. Для количественного анализа изучаемого явления важен весь набор взаимосвязанных моделей, с прослеженными связями от исходной, базовой - имитационной модели до упрощенной – аналитической. Первая - позволяет приблизить процесс создания модели к биологам, удобна для учета дополнительной информации, а вторая - позволяет подойти к анализу ведущих механизмов, к оценке допустимости тех или иных предположений в исходной, базовой модели.

Особое внимание уделяется исследованию упрощенных моделей. Цели такого исследования разнообразны. Первая – понять, как работает и основная модель и ее «новые» подблоки. Вторая – взаимоувязка различных моделей. Третья – возможность использования упрощенных моделей для формулирования (биологических) гипотез об основных механизмах формирования данного явления. Проведение более подробного

исследования упрощенной модели в ряде случаев может привести к более полному пониманию свойств детальных моделей, совершенствованию гипотез о моделируемом явлении, постановке новых вычислительных экспериментов.

7. Взаимное исследование различных классов моделей позволяет более полно понять их связь как друг с другом, так и с исходной информацией об объекте. Это позволяет в ряде случаев поставить и решить «*обратную имитационную задачу*» - выбрать такие постулаты исходной имитационной модели, из которых точно, а не приближенно получается рассматриваемое упрощенное уравнение. Она решается исходя из совместного анализа результатов вычислительных экспериментов и соответствующей биологической информации и основана на том, что в конкретный временной отрезок (сезон) изменение соответствующих переменных происходит в сравнительно узком диапазоне, что позволяет осуществить линеаризацию соответствующих функций.

8. Перейдем к обсуждению предложенной методики Коис моделирования экологических систем. В ее основе лежит Системная динамика Дж. Форрестера – методы составления и анализа уравнений, графические способы представления структуры модели, рекомендации по способам междисциплинарных взаимодействий и т.д. Но для эффективного использования подходов Дж. Форрестера пришлось их существенно модернизировать. Главный стимул развития его подходов заключен в тезисе - *имитационная модель* большой размерности *не может быть самодостаточной*, для своего анализа она требует формирование *набора взаимосвязанных моделей*, в том числе и *упрощенных*, к согласованию всех этапов построения и анализа модели. Это и привело к созданию методики Коис. Опираясь на специфику экологических моделей осуществляется такое согласованное построение. Нацеленность на построение «механизменных моделей» требует выбора удачного «тестирующего эффекта», что и позволяет, используя принцип минимальности, модифицировать и упрощать модели.

9. Представляет определенный интерес сравнение способов использования ЭВМ в качестве средств интеллектуальной поддержки процесса моделирования в системе «Экомод» [ ] и в предложенной работе методике «Коис». Система Экомод создана для анализа экономических математических моделей балансового типа, методика Коис для создания и анализа «механизменных моделей» эколого-биологических процессов. Два способа использования ЭВМ отличаются, прежде всего, целевыми установками – первая для расчета (и прогноза) динамики показателей макросистемы (экономической), вторая для поиска количественного описания ведущих механизмов, формирующих изучаемое (экологическое) явление. В системе Экомод из аналитических выражений формируют «вычислительную модель» большой размерности, при использовании методики Коис, наоборот, от исходной «вычислительной модели» осуществляется переход к упрощенным моделям, допускающим аналитическое (портретное) исследование. Главное отличие двух подходов в степени междисциплинарности в процессе создания и модификации математических моделей. Система Экомод во многом закрытая. В экономических математических моделях балансового типа количественные соотношения достаточно отработаны. Для построения моделей нет необходимости привлекать экспертов. На предварительных этапах возможны междисциплинарные взаимодействия, затем идет, «скрытая от глаз» переработка информации и междисциплинарные взаимодействия откладываются до этапа обсуждения результатов вычислительных экспериментов. Процесс корректировки и модификаций моделей возможен в этой системе, но только на начальных этапах их формирования. Методика Коис направлена на создание комфортных условий для междисциплинарных исследований на максимально возможном числе этапов

моделирования. Это требование обусловлено тем, что экология значительно отстает от экономики по степени «оматематичивания». В экологии нет устоявшихся уравнений и создание наборов математических моделей разной степени детализации, совместная работа над их созданием существенно повышает степень доверия к модели. Математические подходы, по своей сути, как и любые теоретические подходы, опережают экспериментальные подходы и отсутствие базовых уравнений, полученных из первых принципов, приводят к большей необходимости привлечения биологов – экспертов к процессу создания моделей, особенно на стадии проводимых упрощений.

В количественной экологии главное достоинство моделей возможность подстраиваться под различные модификации функциональных зависимостей, предлагаемых экспертами. Важный аспект – сделать свойства модели хорошо анализируемым. Для этого и строится набор моделей, как более детальных так и упрощенных, осуществляется решение «обратной имитационной задачи»: исходя из совместного анализа результатов вычислительных экспериментов и соответствующей биологической информации. Упрощенные модели приближают модели к биологам, позволяют формулировать гипотезы о ведущих механизмах в простой и наглядной форме.

В экономических моделях не стоит так остро вопросы междисциплинарности, нет свободы выбора «тестирующего эффекта», что затрудняет поиск механизмов, описываемых процессом. Экономика в рассматриваемый период может быть достаточно уравновешенной и имеются довольно редкие периоды перестройки ее структуры, когда нет сглаживания взаимодействий за счет «гомеостатирующих процессов».

Если в системе Экомод создается модель и затем исследуется, то в методике Коис проходит создание, обоснование набора моделей. Естественно возникает потребность в нахождении более тесной связи моделей друг с другом, в частности упрощенных, полученных первоначально как некая аппроксимация исходной модели. Это потребность приводит к постановке и решению «обратной имитационной задачи». Такой подход делает возможным постановку задачи о качественном исследовании исходной имитационной модели.

Отличие процесса моделирования в экономике состоит и в характере информации, в экологии нужно ее добыть «из архивов», в экологии же одной из целей моделирования является показать какого типа информацию нужно собрать. А при моделировании экологических процессов приходится широко использовать экспертные оценки.

Сближает два способа моделирования - стремление к пониманию свойств базовой модели, к поиску построения упрощенных моделей. В системе Экомод имеется процедура построения автомодельных решений, в методике Коис – это поиск аппроксимирующих выражений, решение «обратной имитационной задачи».

10. Эффективность комплексного подхода показана на примере моделирования тундровых популяций и сообществ, *поиска ведущих механизмов, определяющих колебания численности тундровых животных*. В результате проведенных исследований получены следующие результаты [1].

Построен набор взаимосвязанных и взаимодополняющих моделей тундровых популяций и сообществ, для описания динамики численности тундровых животных. Основа набора - имитационная модель «растительность-лемминги-песцы» (РЛП), построенная с использованием экспертно оцененных зависимостей, учитывающая сезонные изменения параметров. Для изучения популяции леммингов, определяющих характер колебаний численности животных тундрового сообщества, была построена модель этой популяции с учетом возрастной структурой. Эта модель была

использована для изучения поведения популяций двух видов леммингов Западного Таймыра: сибирского и копытного.

Анализ результатов вычислительных экспериментов с обеими взаимодополняющими моделями, сообщества "растительность-лемминги-песцы" и популяции леммингов, привел к обоснованию упрощенных моделей в виде функций последования, описывающих сезонные зависимости: 1) численности леммингов в конце сезона размножения от численности перезимовавших; 2) численности в начале сезона размножения от численности в конце предыдущего сезона размножения, а также другой тип функций последования - в виде одномерного дискретного уравнения  $L_{n+1} = f(L_n)$ , связывающего численности леммингов  $L_n$  в двух соседних годах, на основании которого удается воспроизвести динамику (суммарной) биомассы леммингов.

В рамках полученного набора моделей наличие дискретных уравнений позволило сформулировать гипотезы о механизмах формирования колебаний численности тундровых животных; выделить ведущие параметры, определяющие колебания численностей видов в системе «растительность-лемминги-песцы». Анализ функций последнего типа создал возможность выделения трех главных показателей, которые формируют динамические режимы колебаний численности леммингов: 1) скорости прироста биомассы в благоприятный год; 2) максимальной численности; 3) выживаемости в наиболее неблагоприятных условиях (или двух безразмерных - относительной скорости прироста популяции и доли гарантированно выживших зверьков). Первый показатель характеризует баланс между процессами рождаемости и смертности во всех фазах развития, когда нет "давления среда"; второй характеризует экосистему в целом и выступает в основном показателем коэволюции леммингов и кормовой базы; третий характеризует адаптационные свойства леммингов в экстремальных условиях и во многом определяется локальными характеристиками, в частности рельефом местности в местах перезимовки.

Использование функций последования другого типа, описывающих сезонные зависимости, позволило выдвинуть гипотезы о моментах, наиболее чувствительных к воздействиях внешних факторов (зима после пика численности и период размножения в фазе нарастания численностей), показать, что у двух типов леммингов в период роста имеется зависимость одного типа (типа Ферхюльста - логистическая кривая), а зимняя выживаемость существенно зависит от региона.

Понимание главного механизма формирования колебания численности тундровых животных позволило провести еще один этап обоснования упрощенных уравнений. Первоначально они были получены как удачная аппроксимация исходных имитационных моделей. Понимание механизмов взаимосвязи эколого-биологической информации и свойств модели позволило, на основании совместного анализа этой информации и результатов вычислительных экспериментов, сформулировать и решить «обратную имитационную задачу» - выбрать такие постулаты исходной имитационной модели, которые позволили бы получить, на основе исходной модели (точно, а не приближенно), указанные выше функции последования. Это удалось осуществить благодаря тому, что анализ вычислительных экспериментов показал, что в каждом конкретном временном интервале - в рассматриваемом конкретном сезоне, в конкретной фазе изменения численностей (для леммингов - это были фазы депрессии, нарастания и пика численностей), используемые (экспертно оцененные) функциональные зависимости изменяются либо мало, либо близки к линейным.

Наличие в наборе упрощенных (аналитических) моделей, в виде функций последования, позволяющих проводить параметрические исследования, качественно изменило технологию и возможности моделирования. Параметрические исследования

соответствующих разностных уравнений позволили определить области параметров, обеспечивающих динамические режимы, близкие к наблюдаемым в природе, сформулировать критерии совместимости исходных (базовых) моделей с зарегистрированными временными рядами динамики численности. Это дало возможность оценивать допустимость тех или иных предположений в исходной имитационной модели. Наличие таких критериев позволило устранить требования к необходимости нелинейности во взаимодействие видов, в «жесткой» внутривидовой регуляции и показало возможность возникновения периодичности за счет особенностей сезонного поведения модели.

Исследование полученных в работе разностных уравнений показало, что существуют "опасные зоны", где возникают нерегулярные (квазистохастические) режимы, и поэтому малые отклонения в функциях последования могут привести к существенно различным динамическим режимам, и, в то же время, более типичны "зоны стабильности": при попадании в такую зону значительные отклонения в функциях последования не влияют на качественную динамику. При этом, при изменении параметров период регулярных колебаний изменяется в последовательности натурального ряда ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ). Имитационные эксперименты с исходной имитационной моделью подтвердили эти выводы.

С помощью полученных дискретных уравнений, как и во многих работах по прикладной математике решается вопрос то степени вклада «игры чисел» и физики процесса, какой вклад вносят чисто количественные аспекты (законы сохранения, балансы, симметрии и т.д) и какова роль процессов, определяемых внутренними (глубинными) механизмами. В контексте моделирования популяции леммингов: факт существования на грани выживаемости приводит к стремлению максимизировать плодовитость, несмотря на ограничения среды и в динамике численности этот аспект реализуется через игру чисел, через дискретные отображения (функции последования) конкретного вида.

*10. В рамках этих исследований рассмотрены общесистемные проблемы: Как вводить количественные методы в описательные науки? Как при этом использовать эволюционные (в математическом смысле) уравнения? А также такие как, влияние на моделирование ЭВМ; распределение усилий между имитационными (вычислительными) и аналитическими подходами; проблема обоснования уравнений (имитационных и аналитических моделей), роль междисциплинарного диалога в этом процессе; проблема построения моделей разного уровня и нахождения взаимосвязей между ними.*

Работа поддержана РФФИ, проект 07-01-00473.

## **Литература**

1. Саранча Д.А. Количественные методы в экологии. Биофизические аспекты и математическое моделирование. М.: МФТИ, 1997. - 283 с.
2. Завриев Н.К., Поспелов И.Г., Поспелова Л.Я., Тюкачев А.Н., Хохлов М.А. Уроки эксплуатации системы Экомод и новые перспективы. М.: ВЦ РАН, 2004.- 72 с.
3. Хохлов М.А. Информационная технология и инструментальная система математического моделирования экономики «Экомод». Автореферат дисс....к. ф.-м. н., М.: ВЦ РАН, 2007.- 22 с.

## **АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ФИНАНСОВОЙ ИНЖЕНЕРИИ\***

Флеров Ю.А. (г. Москва)

*В работе дано общее описание инструментальной системы Генератор проектов, предназначенной для автоматизации проектирования и реализации финансовых информационно-вычислительных комплексов.*

Разработка прикладных программных систем – весьма трудоемкий и дорогостоящий процесс. Как правило, разработку таких систем ведут коллективы специалистов очень высокой квалификации. Основная сложность состоит в том, что эта работа требует, с одной стороны, определенного профессионального уровня в области компьютерных технологий, а с другой стороны, не менее профессионального уровня в понимании особенностей и тонкостей конкретной прикладной области.

Причиной трудностей создания сложных информационно-вычислительных систем является отсутствие технологии разработки таких систем и удобных, доступных средств, которые позволяли бы полностью или частично устранить разрыв между предметной областью и реализацией необходимых задач в виде эффективно работающего программного обеспечения. Настоящая работа как раз и посвящена обсуждению этих вопросов, а также изложению авторского подхода к формализации и автоматизации проектирования, разработки и сопровождения сложных прикладных информационно-вычислительных систем.

Традиционный класс объектов автоматизации проектирования обычно связывают со сложными техническими объектами в машиностроении, в электронике, в строительстве и тому подобное. В рамках этого класса объектов достаточно хорошо проработаны теоретические основы САПР, а также существует целая гамма конкретных реализаций систем автоматизированного проектирования. Вычислительный центр РАН принимал активное участие в работе по созданию САПР летательных аппаратов, которая была начата в 1972 г. по инициативе академиков Дородницына А.А. и Моисеева Н.Н.

С тех пор круг наших интересов в области автоматизации проектирования существенно расширился. Нами был получен ряд теоретических и практических результатов в области автоматизации проектирования информационно-вычислительных систем для различных финансовых структур. Казалось бы, такое изменение предметной области должно было привести к полному изменению средств и методов автоматизации проектирования. Но оказалось, что многие проблемы синтеза сложных систем (а информационно-поисковые и информационно-расчетные финансовые системы очень сложны) инвариантны по отношению к предметной области.

---

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минпобрнауки (контракт № 02.435.11.1007), комплексной программы научных исследований Президиума РАН П 14-1 «Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий» (проект 2.31) и программы поддержки ведущих научных школ НШ-9344.2006.1.

### **Проектный подход к разработке информационных систем**

Вообще говоря, всегда между постановкой проблемы и ее реализацией существует разрыв. Но в большинстве сфер производственной деятельности его научились преодолевать за счет квази – реализации, то есть за счет создания **проектов**. Это непреложная истина: для того, чтобы избежать поспешных решений и неудачных реализаций, для того чтобы получить продуманную, добротную и красивую вещь (здание, конструкцию, машину, программную систему) необходимо сначала разработать ее проект, со всех сторон проанализировать его, обсудить со специалистами, может быть построить макет, и лишь после этого приступать к реализации, неукоснительно следуя проекту. Во многих традиционных сферах этап проектирования узаконен и существуют определенные правила и стандарты создания проектов. Но этого мало, между проектом и конечным объектом, как правило, стоит технология, которая определяет необходимое оборудование, инструменты, оснастку и другие средства конкретной реализации проекта. В области прикладного программирования ситуация несколько иная. Конечно, любой программной разработке обязательно предшествует некий план или техническое задание, или даже проект, например, в виде набора квадратиков и стрелочек между ними. Существуют даже определенные подходы к построению таких проектов.

Проект системы, с нашей точки зрения, с точки зрения программистов, которые его реализуют, должен содержать полную информацию о том, с какими содержательными понятиями и объектами, с какими математическими моделями в данной системе будут иметь дело пользователи, как эти объекты связаны между собой, каковы свойства этих объектов, что с этими объектами можно будет делать, какие функции и процедуры должны быть реализованы в системе, в каком виде должны быть представлены результаты и так далее и тому подобное.

Только такое максимально детализированное описание задачи может в полной степени соответствовать понятию проекта и служить отправной точкой для программирования.

Для того, чтобы уровень программной реализации был бы достаточно высок, одного профессионализма программистов недостаточно - нужны еще хорошо развитые инструментальные средства, которые бы в наибольшей степени соответствовали разрабатываемой системе. Идеальным, с нашей точки зрения, является такой инструментарий, который полностью автоматизирует создание программного кода по проекту системы. В этом случае задачей программиста является разработка такого инструментария или, если необходимо, настройка его под конкретные особенности разрабатываемой системы. Это как раз и означает, что программист становится технологом в полном смысле этого слова.

Надо сказать, что наши взгляды на создание программных проектов формировались постепенно, в процессе более чем двадцатилетней практики разработки прикладных информационных систем. На этом пути нами была создана серия различных технологических инструментальных средств [1-4], которые в течение долгого времени позволяли относительно небольшому коллективу разрабатывать, внедрять и сопровождать различные прикладные информационные системы в самых разных предметных областях.

Идея была реализована в виде инструментальной системы, которая получила название «Генератор проектов». В дальнейшем в течение вот уже более чем десяти лет подавляющее большинство проектов мы разрабатывали с использованием Генератора, который развивался и усложнялся от проекта к проекту. В результате сформировался так называемый «проектный подход» к разработке информационных систем. Подход



позволил с минимальными усилиями перенести множество проектов с MS DOS под MS Windows 3.11, с протокола DECNET на протокол TCP/IP, с VAX/VMS на Windows NT 3.51, с Windows NT 3.51 на ALPHA/AXP под OSF (DecUnix), с СУБД RDB/VMS на MS SQL Server, на Oracle и т.д. и т.п. Менять приходилось, в основном, только некоторые программы Генератора. В дальнейшем были освоены новые клиентские платформы, использующие графический пользовательский интерфейс

Если, в общем, оценивать роль Генератора в разработке информационных систем, то здесь уместна следующая аналогия. Разработка программ на традиционных языках с использованием известных библиотек напоминает строительство зданий. Обилие инструментальных средств – различные оконные интерфейсы (MFC, Delphi, Gtk), и прочие полезные библиотеки – напоминает магазин стройматериалов с огромным ассортиментом. Обилие различных материалов и приспособлений наряду с их доступностью вовсе не гарантирует успешность и быстроту постройки здания. Для этого необходимо, во-первых, навыки проектировщика и строителя, а, во-вторых, время. Использование Генератора проектов в этой аналогии можно сравнить с домостроительным комбинатом, производящим типовые панели, блоки и прочие типовые компоненты, из которых по типовым проектам различных серий можно строить дома с большой скоростью. Вряд ли можно таким образом возвести храм Василия Блаженного или Кельнский собор, но добротный микрорайон с развитой инфраструктурой вполне реально построить и даже очень быстро.

Согласно нашему пониманию проектного подхода, весь процесс разработки прикладных систем состоит из двух этапов. Первый этап - это собственно проектирование системы. Проект прикладной программной системы с нашей точки зрения – это формальный документ или совокупность формальных документов, которые обладают определенной структурой, определенным составом своих компонент, правилами оформления, синтаксисом, семантикой и прочими атрибутами формального объекта. Проект должен адекватно отражать ту предметную область, для которой разрабатывается система. Проект должен быть не только понятен специалистам прикладникам, но эти специалисты, как правило, не искушенные в программировании, должны иметь возможность непосредственно участвовать в проектировании системы. Естественно, что для этого необходимы общедоступные правила построения проектов или отдельных его компонент, соответствующие формальные языковые и программные средства. Для описания основных содержательных понятий и объектов предметной области могут использоваться специальные непроцедурные языки высокого уровня. Для описания интерфейсов должны быть свои языки, определяющие форматы передачи информации между программными компонентами. Очевидно, что наилучшим способом описания некоторых функций, необходимых при решении той или иной задачи, является просто программный текст на универсальном алгоритмическом языке или ссылка на определенное имя в библиотеке программ. Естественно, что совершенно исключать возможность появления программного кода в исходном проекте было бы неразумно. Важно только, чтобы эти вставки были хорошо специфицированы, чтобы они могли быть корректно включены в результирующий программный код системы.

Второй этап – это генерация полного программного кода системы и его технологическая сборка, то есть создание инсталляционного пакета. Второй этап должен быть полностью автоматизирован и не должен допускать изменений с содержательной стороны. Этот этап отражает технологию разработки проекта. Автоматизация требует специального инструментария, который является технологической компонентой проекта. Фактически, инструментарий – это генератор программного кода проекта (**ГЕНЕРАТОР ПРОЕКТА**). С нашей точки зрения,

генератор проекта является неотъемлемой компонентой всей системы в целом, причем, не только на стадии разработки, но и в течение всего ее жизненного цикла. Жизнь проекта программной системы не заканчивается ее реализацией. Длительность жизненного цикла программных систем определяется способностью к модификациям. Как показывает опыт, модификации неизбежны для живущих систем. Изменения условий и правил внешнего мира, устаревание используемого оборудования, новые более совершенные общесистемные средства – все это стимулирует модификацию действующей системы. Однако исправления работающих систем является весьма дорогим и сложным процессом. Если же при разработке системы использовался проектный подход, то процедура модификации существенно упрощается за счет того, что изменения вносятся только в проект, а все дальнейшие изменения в программном коде, в информационном окружении и в прочих компонентах проекта должны осуществляться автоматически. В связи с этим, проектный подход имеет смысл не только на этапе разработки системы, но и в процессе ее эксплуатации и сопровождения.

### **Задачи автоматизации построения ИВС**

Ниже перечислены основные задачи автоматизации, которые приходится решать при проектировании информационно-вычислительных систем:

- создание единого информационного пространства проекта;
- описание архитектуры проектируемой системы;
- разработка математических моделей объектов предметной области;
- описание логических структур и моделей хранимых данных;
- описание серверных компонент системы;
- описание пользовательского интерфейса, механизмы редактирования пользовательских документов, форм, диалогов и прочее;
- создание опытных образцов, макетов, демонстрационных стендов;
- автоматизация программирования, генерация исходного программного кода;
- автоматизация разработки программной и эксплуатационной документации системы;
- автоматизация разработки программы, методики и тестов функциональных, ресурсных и других испытаний системы;
- автоматизация разработки средств загрузки и инсталляции системы, средств, обеспечивающих системное обслуживание и эксплуатацию.

Все эти задачи в той или иной степени приходится решать при разработке финансовых информационно-вычислительных систем. Далее дано более подробное описание некоторых из перечисленных задач. При этом мы здесь будем ориентироваться в основном на свой опыт решения этих задач, который был приобретен при разработке многих финансовых (и не только финансовых) приложений. Как уже говорилось, с каждым проектом мы связываем некоторый специальный инструментарий, который затем становится неотъемлемой частью проекта. Нами был разработан ряд программных продуктов с общим названием Генератор проектов. Каждый финансовый проект оставлял свой отпечаток на этом инструментарии. Возникали новые задачи, новые проблемы автоматизации - в ответ на это возникали новые возможности инструментария, новые версии Генератора проектов.

### **Единое информационное пространство проекта**

Единое информационное пространство проекта (не путать с единым информационным пространством объекта автоматизации!) необходимо для хранения созданной в процессе разработки системы информации и обеспечения коллективного доступа к этой информации. В рамках единого информационного пространства хранятся все документы от технического задания на разработку и вплоть до исполняемых модулей и инсталляционных

пакетов всех разработанных версий. Средствами инструментария необходимо поддерживать целостность хранимой информации, т.е. осуществлять контроль полноты и непротиворечивости данных, соответствие дат, версий и других атрибутов различных компонент разрабатываемого проекта. Создание единого информационного пространства проекта – это первый формальный шаг, с которого начинается разработка прикладной информационной системы.

В рамках Генератора проектов единое информационное пространство содержит полное описание проекта, полный состав исходного программного кода по всем компонентам системы, все версии системы, текущую рабочую, проектную, программную и другую документацию в электронном виде, а также любую другую информацию, которая необходима при разработке и эксплуатации системы.

### **Структурная модель проектируемых систем**

**Общая архитектура проектируемых систем.** В дальнейшем речь пойдет о проектном подходе и об автоматической генерации программного кода в рамках архитектуры «многоуровневый клиент – сервер». Для более точного и полного определения этого класса проектируемых систем представим его в виде структурной модели. Под структурной моделью мы здесь понимаем состав программных компонент системы и связи этих компонент между собой. В общем случае структурная модель проектируемых систем в рамках описываемого здесь проектного подхода представлена на рисунке 1. Информационные системы, имеющие такую структуру, могут решать самый широкий класс прикладных задач. Из приведенной структурной модели видно, что в общем случае это многопользовательские системы с распределенным способом хранения данных. Приведенные на рисунке программные компоненты могут размещаться на разных, в том числе и удаленных вычислительных комплексах, впрочем, некоторые из них могут находиться и на одном компьютере, если это не противоречит логике работы конкретной системы. Все программные компоненты этой структуры вычислительных комплексах, впрочем, некоторые из них могут находиться и на одном компьютере, если это не противоречит логике работы

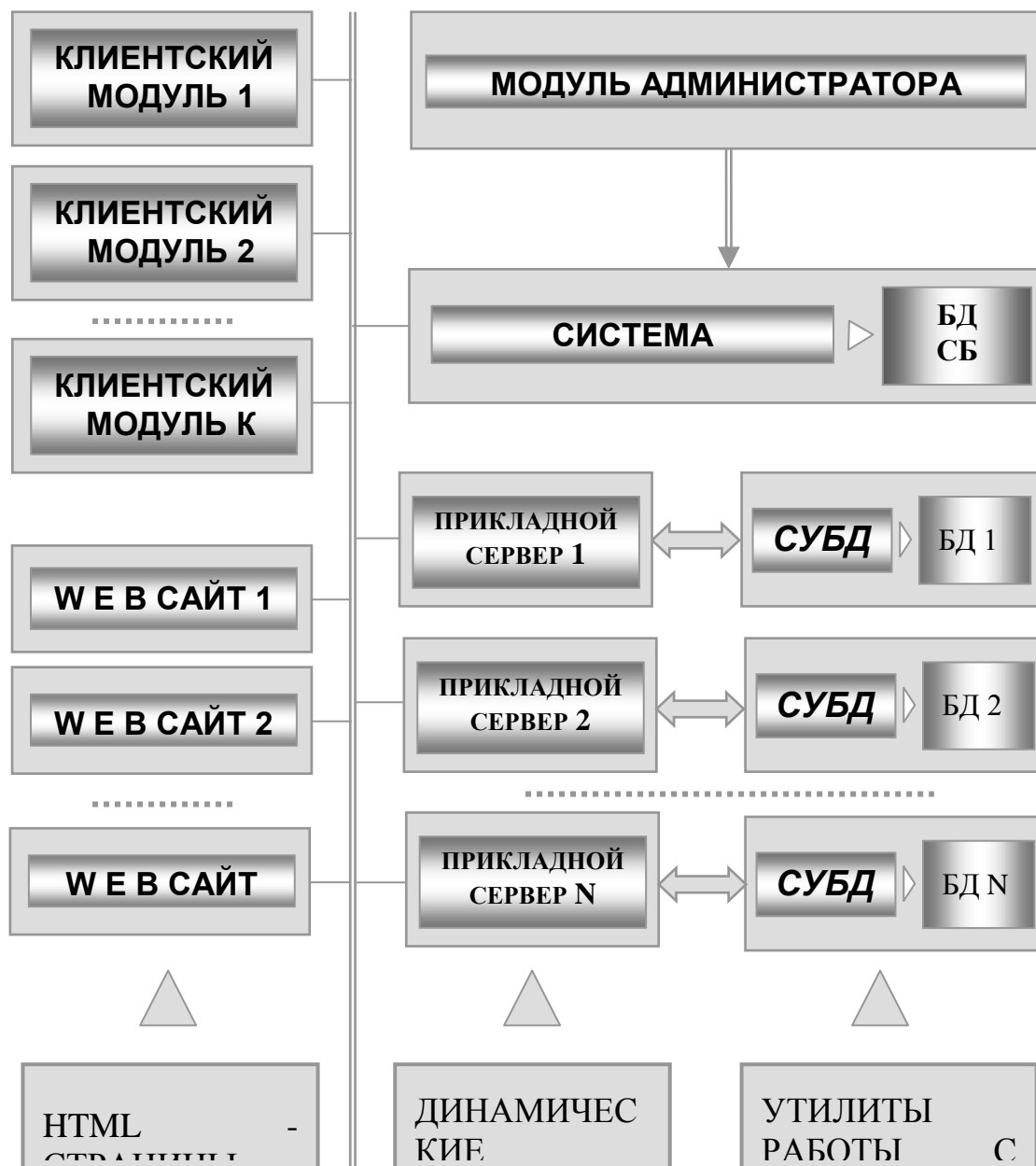


Рис. 1. Структурная схема систем, проектируемых с помощью ГЕНЕРАТОРА ПРОЕКТОВ

конкретной системы. Все программные компоненты этой структуры информационно связаны между собой, а технически эта связь может осуществляться по локальным, корпоративным или публичным телекоммуникационным каналам, в том числе и по каналам ИНТЕРНЕТ.

**Клиенты.** Пользователи таких систем реализуют свои функции с помощью специальных программных компонент системы – клиентских модулей (КМ). Клиентские модули могут быть разных типов, в зависимости от функций различных пользователей или групп пользователей. Количество экземпляров клиентских модулей одного типа ограничиваются только спецификой этого типа и логикой работы системы. Разные экземпляры клиентских модулей работают независимо друг от друга, но могут обмениваться информацией между собой посредством обращения к общим данным, хранящимся в системе. Это не исключает передачу между пользователями адресных сообщений в определенном прикладной системой формате.

Основной задачей клиентских модулей является инициация выполнения функций системы. Для выполнения функций на клиентском модуле должны быть подготовлены все необходимые данные для конкретного действия и переданы от клиента одному из доступных прикладных серверов, с указанием кода (идентификатора, номера) команды. Характер или тип запроса определяет код команды, который является обязательной частью входных данных. Формат входных и выходных данных определяется типом запроса. Очевидно, что запросы инвариантны относительно способов подготовки входной информации и обработки выходной. Поэтому один и тот же запрос может быть использован в разных процедурах и в разных типах клиентских модулей.

Многие современные системы коллективного пользования предоставляют возможность работать большим группам своих клиентов через ИНТЕРНЕТ. В рамках представленной структурной модели для этой цели служат специализированные **WEB-серверы**. Используя только стандартный ИНТЕРНЕТ-браузер, пользователи в рамках выделенных им полномочий могут выполнять определенные запросы к прикладным серверам. WEB – серверы по сути являются специальными клиентскими модулями коллективного пользования.

Часто логика функционирования прикладных информационных систем, их место во внешней среде, требует обеспечения интерфейса с другими программными системами. Для этой цели в нашей структурной модели предусмотрена возможность формирования различных **динамических библиотек**, которые содержат функции, реализующие запросы к прикладным серверам.

**Серверы.** Каждый запрос адресуется одному из прикладных серверов системы. Однако при необходимости прикладной сервер сам может обращаться с запросами к другим прикладным серверам. То есть, прикладные серверы между собой тоже могут находиться в отношении «клиент-сервер». Как правило, в прикладных информационных системах запросы связаны с поиском, хранением и модификацией информации в базах данных. В рамках рассматриваемой структурной схемы каждый прикладной сервер непосредственно может быть связан не более чем с одной базой данных. Непосредственная связь с базой данных осуществляется средствами интерфейса, которые предоставляет СУБД. И хотя непосредственная связь в рамках нашей модели возможна только с одной базой данных, используя запросы к другим серверам, можно одновременно работать разными базами.

В принципе разные серверы могут работать с одной и той же базой данных, однако в этом случае необходимо не допускать пересечение запросов от разных серверов и предпринимать специальные меры для поддержания целостности данных.

Взаимодействие клиентских модулей с прикладными серверами в нашей модели осуществляется посредством транспортного сетевого протокола TCP/IP. На содержательном уровне протокол общения между клиентским модулем и сервером должен носить документарный характер, то есть, каждая содержательная порция данных, передаваемая от клиента к серверу и обратно, должна иметь формат одного из документов, которые определены в рамках прикладной системы.

**Система безопасности.** В силу того, что доступ к информационным ресурсам сервера может осуществляться через публичные каналы связи, особое внимание в нашей модели уделено проблемам безопасности. Функции системы безопасности, которая исключительно для наглядности выделена на рис. 1 в отдельный блок, в реальности распределены по всем компонентам системы. В системе безопасности решаются две задачи. Первая – это аутентификация пользователей и проверка их полномочий доступа к ресурсам серверов, а вторая - это защита информации при передаче по телекоммуникационным каналам.

Для установления взаимной подлинности клиента и сервера в системе могут применяться различные способы аутентификации. Аутентификация на симметричных ключах подразумевает ведение базы данных пользователей с соответствующими им паролями. Эта база данных хранится на серверной стороне. На клиентской стороне вводится имя и пароль при каждом подключении к серверу. Аутентификация с применением так называемых сертификатов использует несимметричные ключи, состоящие из двух частей: закрытый ключ, хранящийся на персональном носителе (дискета, таблетка, смарт-карта), защищенном паролем, и открытый ключ, помещенный в сертификат, и доступный широкому кругу пользователей. Общая концепция подсистемы безопасности с применением сертификатов подразумевает построение иерархической структуры доверительных отношений.

**Модуль администратора** входит в систему безопасности и обеспечивает ведение базы данных пользователей системы их паролей, ключей, сертификатов, а также функциональное разграничение полномочий различных групп пользователей.

Для защиты информационного канала сервера от несанкционированного доступа, т.е. от просмотра и модификации информации посторонними лицами, используются различные методы шифрования/дешифрования данных в каналах передачи. Вся информация, которая передается между клиентом и сервером после аутентификации, шифруется с применением симметричных сессионных ключей. Выработанные случайным образом в процессе аутентификации сессионные ключи действуют только на период текущей сессии. Сессия в подсистеме безопасности начинается с момента установления сетевого соединения с клиентом и заканчивается после разрыва соединения с клиентом.

**Утилиты по работе с базами данных.** Важным аспектом разработки прикладных систем является разработка специальных средств для инсталляции и сопровождения системы. Для поддержания этих функций в нашей структурной модели предусматривается специальная утилита - конфигуратор баз данных. Конфигуратор баз данных используется для построения командных файлов создания пустой базы данных, создания основных объектов базы данных (таблиц, индексов), удаление их из базы данных, а также обновление баз данных при модификации системы. В конфигураторе базы данных предусмотрена также функция генерации командных файлов загрузки и выгрузки информации в текстовые файлы. Такая загрузка и выгрузка может использоваться как для резервного копирования наряду со штатными средствами системы управления базой данных, так и для переноса информации в базу данных под управлением другой СУБД. Например, можно выгрузить информацию из базы данных MS SQL Server и загрузить в базу данных Oracle, используя промежуточное представление в виде текста.

**Многоплатформенность системы.** Конфигурация баз данных является частным случаем конфигурации аппаратно-программной платформы, на которой должна работать прикладная система. В условиях стремительного прогресса, как аппаратных средств компьютерных систем, так и программного обеспечения, актуальной становится задача разработки таких проектов, которые могут работать на различных платформах. Платформы могут отличаться аппаратурой, операционной системой, системами управления базами данных. При этом разные компоненты системы должны уметь работать на разных компьютерах и под разными платформами. Требование многоплатформенности подразумевает сохранение неизменным интерфейса между клиентскими модулями и серверами системы. Это означает, что один и тот же клиентский модуль одинаково успешно работает с серверами на разных платформах, а разные исполнения клиентских модулей на различных платформах могут работать с одним и тем же сервером. Такое свойство обеспечивается стандартизацией протокола взаимодействия клиента и сервера. Другое проявление

многоплатформенности - это одинаково успешная работа одного сервера с различными типами систем управления базой данных или с различными интерфейсами.

Решение задачи многоплатформенности в нашем подходе к проектированию систем отнесено к технологическим проблемам. Решаются эти проблемы на этапе генерации программного кода, указанием конкретных платформ под которые необходимо генерировать систему или ее отдельные компоненты, а также генерации в составе системы специальных конфигурационных файлов. При изменении конфигурации платформы всегда можно перенастроить или даже регенерировать систему без каких-либо изменений в исходном проекте.

### **Проект системы**

**Структура проекта.** Поскольку проект представляет собой формальный объект, то, прежде всего, должны быть определены среда, в которой он существует, правила его представления и оформления, а также структура проекта, то есть состав, связи и свойства основных его составляющих. В рамках нашей технологии под проектом системы мы понимаем совокупность файлов, организованную в виде отдельной директории, имя которой совпадает с именем проекта. В структуре этой директории можно выделить следующие каталоги, в которых хранятся:

- текущая версия генератора проекта;
- полный комплект файлов описания проекта;
- полный комплект файлов генерируемого программного кода системы;
- полный комплект исполняемых файлов системы.

Как говорилось выше, в проектном подходе ГЕНЕРАТОР является неотъемлемой частью системы. Действительно, программный код является функцией проекта и инструментальных средств, с помощью которых он создается. Поэтому очень важно, чтобы текущая версия генератора сохранялась в течение всего жизненного цикла прикладной системы. Необходимо постоянно поддерживать соответствие программного кода текущей версии генератора.

### ***Язык описания проекта***

На вход «Генератора проектов» подается описание проекта разрабатываемой системы. Проект программного комплекса или системы представляет собой набор файлов, в которых содержится описание содержательных понятий и объектов разрабатываемой системы, логических структур данных, бизнес - процедур системы и интерфейса. Основными объектами языка описания проекта являются:

реквизиты проекта

платформы, для которых предполагается генерация программ

пользователи системы

типы данных

документы

сетевые структуры данных

реляционные базы данных

автоматически генерируемые SQL - запросы

произвольные SQL - запросы

прикладные серверы

порты прикладных запросов

WEB - порты серверов

бизнес - процедуры прикладных серверов

«ручные» программы бизнес-процедур

пользовательские окна

пользовательские диалоги

пользовательские (клиентские) модули

Кроме указанных основных понятий и объектов в "Генераторе проектов" есть ряд предопределенных функций и макросов, предназначенных для описания проекта.

В Генераторе процесс генерации предусматривает использование разных платформ. Тексты программ для каждой платформы могут быть сгенерированы независимо в разное время. В качестве основного языка реализации используется Си (не Си++). В зависимости от используемой аппаратной платформы и операционной системы могут использоваться разные компиляторы. В пределах одной платформы используется один компилятор языка Си. В Генераторе в настоящее время реализованы следующие платформы:

Clgtk – оконные приложения для использования в Linux и реализованные с помощью пакета gtk для X Windows.

Clgtw – аналог clgtk, но для MS Windows.

Cltwin – оконные приложения для использования в MS Windows.

Libuni – библиотеки для ручных программ в Linux.

Libwin - библиотеки для ручных программ в MS Windows.

Srvuni – серверы для использования в Linux.

Srvwin – серверы для использования в MS Windows.

Отдельно могут быть заданы платформы по базам данных. При декларации базы данных необходимо указать набор драйверов, которые могут поддерживать интерфейс с конкретным типом СУБД.

В настоящее время в Генераторе предусмотрены следующие драйверы:

win\_dblib7 – интерфейс с MS SQL Server через ntwdlib в MS Windows.

win\_orcl – интерфейс с Oracle через oci32 в MS Windows.

win\_sybase – интерфейс с SYBASE через ctlib в MS Windows.

win\_mysql – интерфейс с MySQL в MS Windows.

uni\_psql – интерфейс с Postgres в Linux.

uni\_sybase – интерфейс с SYBASE через ctlib в Linux.

uni\_mysql – интерфейс с MySQL в Linux.

Кроме возможности выполнения заданных SQL-запросов в драйверах баз данных предусматривается возможность анализа текущего состояния конкретной базы данных на предмет его соответствия требованиям текущей версии программного комплекса. Для этого в составе программ серверных платформ предусматриваются программы генерации sql-скриптов для создания новой пустой базы, а также для приведения существующей базы в состояние, требуемое для новых программ с сохранением содержимого. Это необходимо при смене версии работающей системы, когда программы новой очередной версии требуют изменения состава таблиц базы данных, при этом содержимое базы следует сохранить. Основная сложность в драйверах - именно эта возможность извлечь из существующей базы данных информацию о составе таблиц, полей, ключей, индексов и пр. в виде, пригодном для сравнения с видом, заложенным в проект. К сожалению, в этом вопросе разные СУБД демонстрируют абсолютно различные средства, как по информативности, так и по удобству.

**Типы данных** в описании проекта используются в различных контекстах. Тип данных может задаваться как:

- предопределенный тип данных (numb,char,date,money,...), переопределение ранее определенного прототипа,
- перечислимый тип (enum, radio, mask),



– структура (struct).

Каждое описание типа вводит уникальный идентификатор типа, программное представление, компоненты и ряд опций.

```
type <имя> : <программное представление>  
[(<компоненты>)]  
  {<опции>..}
```

Программное представление может быть задано в форме структуры компонент, в форме перечислимого типа, ссылкой на прототип или ссылкой на предопределенный тип. Компоненты типа используются для задания констант перечислимого типа, констант масочного типа, имен элементов структуры с заданием их типов. Опции типа задают особенности использования этого типа в разных контекстах. Например, для типа может быть задано наименование (*/title=<строка>*), которое по умолчанию будет использовано в элементах диалога, заголовках таблицы и пр. Для перечислимых типов может быть задано представление в диалогах и интернет-браузерах не в виде выпадающего списка (по умолчанию), а в виде набора радио-кнопок. Для типа с программным представлением `double` можно задать количество цифр после десятичной точки. Для текстового типа можно задать, что вводимая текстовая переменная является паролем, т.е. в диалогах и в интернет-браузерах текст должен быть скрыт при вводе. Также для текстового типа можно задать признак использования html-тега `<textarea>` вместо стандартного `<input type=text>`. Структурный тип, как и в большинстве языков, представлен последовательностью именованных компонент, уникальных в пределах данного типа.

**Понятие документа** является одним из центральных в описании проекта. Документ – это описание типа данных, имеющего сложную внутреннюю структуру:

```
document <имя документа>[ : <имя структурного типа>];  
  { record <имя записи> [ : <имя структурного типа >]; }...  
  { set <имя>[owner <владелец>] member <член набора>; }...
```

Имена документов уникальны в пределах проекта. С документом может быть связан структурный тип. Это означает, что в каждом экземпляре такого документа хранится ровно один экземпляр такой структуры. Если других компонент в документе не объявлено, то такой документ можно считать контейнером для хранения структур заданного типа.

В документе может быть декларировано произвольное количество именованных записей (record). Имена записей уникальны в пределах документа. С записью может быть связан структурный тип. Это означает, что в каждом экземпляре записи хранится ровно один экземпляр структуры. Здесь уместна аналогия со структурами реляционных баз данных: запись документа - это таблица базы данных. Соответственно в одном экземпляре документа может быть размещено произвольное количество экземпляров записей. В отличие от базы данных с записью можно не связывать никакую структуру, это не парадокс - такие записи могут использоваться в наборах для организации связей.

В документе может быть декларировано произвольное количество именованных наборов (set). Имена наборов уникальны в пределах документа. Набор описывает связь между записями документа типа “один ко многим”. Для этого с каждым набором связана запись – владелец набора и, отдельно, запись – член набора. Если рассматривать аналогию с реляционной базой данных, то набор – это пара ключей – Primary key и Foreign key, только здесь отсутствуют входящие в состав ключа колонки таблицы, связь между записями организуется на уровне хранения внутренними ссылками. Это свойство и обуславливает уместность применения записей без вложенных в них структур – эти записи используются для связывания, в них хранятся только физические ссылки, напрямую не доступные из программы.

Каждому экземпляру записи, являющемуся владельцем некоторого набора, соответствует, по определению, экземпляр набора. Каждый экземпляр набора, кроме соответствующего экземпляра владельца, может содержать некоторую упорядоченную последовательность экземпляров записей типа члена набора (возможно, пустую).

Набор может быть последовательным и ключевым. В последнем случае задается ключ в виде последовательности компонент записи – члена набора, по которым в лексикографическом порядке упорядочиваются члены набора автоматически при включении в набор. В последовательном наборе порядок записей задается при их включении указанием номера позиции.

Можно также описывать, так называемые сингулярные наборы, у которых отсутствует запись владельца. Каждый сингулярный набор в документе представлен ровно одним экземпляром. В некотором смысле владельцем сингулярного набора можно рассматривать сам документ, вернее, экземпляр документа для экземпляра набора.

Описание документа автоматически предполагает наличие в языке описания проекта операторов манипулирования содержимым документа. К таким операторам, в частности, можно отнести следующие действия:

записать в заданный экземпляр документа структуру.

считать из заданного документа структуру.

создать экземпляр записи данного типа с указанием структуры, содержимое которой нужно разместить в записи.

удалить заданный экземпляр записи.

считать из заданного экземпляра записи структуру.

записать в заданный экземпляр записи структуру.

включить заданный экземпляр записи в экземпляр набора в заданную позицию.

найти по заданному номеру позиции экземпляр члена набора по экземпляру владельца.

перейти от заданного экземпляра члена набора к следующему/предыдущему.

найти экземпляр владельца по заданному экземпляру члена набора.

для заданного владельца ключевого набора и значения ключа найти соответствующий экземпляр члена набора.

Здесь приведен далеко не полный перечень действий–операторов, предусмотренных для документа. Наборы реализуются двусвязными списками. Поэтому время выполнения большинства операций не зависит от количества членов в наборе (в том числе, найти первый/последний член набора). Некоторые операции выполняются за время  $O(\log(N))$ , где  $N$  - количество членов в наборе. И только немногие за время, пропорциональное  $N$  (поиск члена набора по номеру позиции).

**Сетевые структуры данных.** Модель документа есть не что иное, как хорошо забытая (и совершенно напрасно) модель сетевой базы данных по спецификации КОДАСИЛ. Похожесть на модель реляционной базы данных не в счет, так как там, во-первых, primary/foreign key реализуются в виде ограничений целостности, проверяемых во время модификации, а не в виде физических ссылок. Во-вторых, работа с документом предполагает использование операторов перечисленного выше вида, а не использование SQL-запросов (может быть, в будущих версиях Генератора и это будет реализовано, если где-нибудь понадобится).

Описанное выше в общих чертах понятие документа является некоей абстракцией. На самом деле, в Генераторе предполагается, по крайней мере, три реализации этой абстракции.

Первая реализация – документ в памяти компьютера. Эта реализация предполагает использование таких документов для самых разнообразных целей, например, для организации протокола между клиентом и сервером. Спецификация

каждого запроса сервера задает список входных документов и список выходных документов. Это означает, что клиентский модуль перед выполнением запроса должен создать по экземпляру документа из списка входных для данного запроса. Далее эти документы, созданные в памяти приложения, преобразуются в текстовое представление и по сетевому каналу связи передаются на сервер. На сервере принятый текст используется для восстановления клиентских документов в памяти сервера, после чего эти документы передаются на обработку программе, предусмотренной для обработки запроса. Эта программа строит экземпляры документов типов, заданных в спецификации запроса. По завершении программы обработки запроса построенные выходные документы преобразуются в текстовое представление и по сетевому каналу передаются в качестве ответа клиентскому приложению. В клиентском приложении принятый текст вновь используется для восстановления документа в памяти. Полученные таким образом документы в клиентском модуле используются для выдачи информации на экран. Другой пример использования документа в памяти – это просто некоторое хранилище структурированной информации в памяти, вроде как база данных на время выполнения программы.

Вторая реализация - хранение документа в совокупности бинарных файлов с прямым доступом. По сути дела, это есть не что иное, как реализация **сетевой базы данных** с соответствующим интерфейсом. В отличие от документов, хранящихся в памяти компьютера только во время работы программы, данное представление обеспечивает хранение информации произвольно долго, как и должно быть в базе данных. Реализация базы данных обеспечивает однопользовательский (однопрограммный) интерфейс. Преимущество такой базы заключается в значительно более высокой скорости обработки данных, не связанной с поиском по произвольным наборам реквизитов.

И, наконец, третья реализация – сетевой (по TCP/IP) интерфейс к одной из двух предыдущих реализаций. Наиболее реально используемый вариант – сетевой интерфейс к файловой реализации – это многопользовательский интерфейс к сетевой базе данных. Справедливости ради следует отметить, что сетевая реализация может несколько снизить производительность, так как специфика сетевых баз данных - большое количество быстрых операторов, а в реляционной базе - малое количество тяжелых запросов.

**Прикладные серверы** реализуют бизнес-процедуры. С каждым сервером может быть связана одна или несколько баз данных реляционного или сетевого типа. Сервер может иметь один или несколько портов, которые предназначены для связи с разными типами клиентских модулей. Через каждый порт сервера для пользователей доступны только те бизнес-процедуры этого сервера, которые приписаны к данному порту. Сервер может иметь несколько специализированных портов для исполнения запросов к сетевой базе данных. Сервер может иметь несколько портов, работающих по протоколу HTTP, для реализации WEB-интерфейса пользователей. И, наконец, сервер может иметь несколько клиентских интерфейсов для связи с другими серверами, по отношению к которым данный сервер выполняет роль клиента.

**Интернет-порт** является специальным видом серверного порта, предназначенного для обеспечения санкционированного доступа к бизнес-процедурам серверов системы через Интернет. При описании интернет-порта задается состав именованных запросов с параметрами, которые обрабатывает этот порт. Для каждого такого запроса описывается программа реакции на него, в которой можно выполнять запросы к базам данных, другим серверам, которые в свою очередь будут обращаться к базам данных. При завершении работы каждой такой программы должно быть предусмотрено исполнение оператора, предписывающего создать и отправить в

качестве ответа пользователю некоторую html-страницу. Для этого в файле предусмотрена возможность описания совокупности поименованных страниц с формальными параметрами. Описание каждой такой страницы представляет собой иерархическую структуру компонент специального вида, приблизительно соответствующих тегам html-языка. Для обеспечения большей гибкости в качестве одной из таких компонент можно использовать ссылку на один из ранее описанных блоков. Блоки – это аналоги страниц, но без html-заголовка. Интернет-порты сервера могут быть доступны для браузеров напрямую, либо через CGI-интерфейс через стандартный web-сервер (Apache, IIS).

**Бизнес-процедуры прикладных серверов** - это функции сервера, подключенные к определенному порту:

Бизнес-процедуры принимают входные документы от пользователей, обрабатывают их, формируют ответ в виде выходных документов и передают их обратно пользователям. В теле функции бизнес-процедуры могут использоваться любые описанные выше функции, а также функции SQL-запросов используемых реляционных баз данных и операторы работы с сетевыми базами данных.

**Пользовательские окна** – это абстрактное понятие, связанное с внешним представлением описанных в проекте документов. В настоящее время в системе имеются предопределенные оконные классы текстовых окон, таблиц и деревьев. На основе этих классов разработчик может описать именованные оконные типы, задав имена и типы переменных/документов в составе окна, а также задав программы, описывающие поведение окна в разных ситуациях.

Квалифицированный разработчик имеет возможность описывать собственные оконные классы, задав для них программы на языке Си с соблюдением заданных интерфейсов. Эти классы могут быть использованы наравне с предопределенными классами для задания оконных типов. Для реализации типовых табличных окон предусмотрен специальный макрос описания типовых окон.

**Пользовательские диалоги** представляют собой специальный вид окна, открытие которого блокирует доступ к окну приложения до тех пор, пока пользователь не закроет это окно.

Диалоги используются для ввода данных и для просмотра выводимой в диалог информации. В качестве компонент окна можно использовать разнообразные типовые элементы вроде окон ввода текста, выпадающих списков, птичек и пр. стандартных элементов. Кроме того, в окне можно использовать в качестве своих элементов описанные ранее окна. Размещение элементов окна управляется многочисленными опциями и специальными контейнерными элементами типа вертикальная коробочка, горизонтальная коробочка и пр.

**Пользовательские приложения** - это клиентские модули, обеспечивающие интерфейс пользователей с бизнес-процедурами серверов. Для приложения может быть объявлено, что оно является клиентом для заданного списка серверов.

С точки зрения пользовательского интерфейса в приложении декларируется список разных оконных видов - макетов, а также управляющие элементы для каждого макета.

Макет определяет состав и взаимное расположение описанных выше окон внутри главного окна приложения. Управляющие команды определяют схему активизации окон макета, переход от макета к макету, вызов меню и диалогов, обращение к бизнес-процедурам сервера и тому подобное.

Кроме описанных выше основных понятий и объектов в Генераторе проектов есть ряд предопределенных функций и макросов, предназначенных для описания проекта.

Все упомянутые выше понятия и объекты проекта упорядочены и представлены в различных файлах, совокупность которых составляет полное описание проекта.

### ***Язык описания структурно-параметрических моделей в «Генераторе проектов»***

Важной задачей проектирования прикладных информационных систем является формальное описание предметной области, в которой предполагается их использование. Одной из возможностей описания предметной области, которое может быть реализовано с помощью «Генератора проектов», является совокупность связанных между собой структурно-параметрических моделей. Под структурно – параметрической моделью (СПМ) в рамках «Генератора проектов» понимается система логических и арифметических соотношений на конечном иерархически организованном множестве параметров.

В языке исходного описания проектов «Генератора проектов» в явном виде понятие структурно-параметрической модели отсутствует. Однако, с помощью входного языка в конкретных прикладных проектах можно создать ряд сущностей, которые могут быть интерпретированы как структурно-параметрические модели для описания предметной области. Поскольку понятие структурно-параметрических моделей, вообще говоря, носит универсальный характер и может быть использовано в разных предметных областях, то в рамках данной работы, это понятие конкретизируется и реализуется как тиражируемый элемент для включения в прикладные проекты. При этом, естественно, допускается модификация описания СПМ. Возможны два пути при создании СПМ в прикладных проектах. Первый это явное описание в проекте средствами входного языка полного набора этих моделей и связей между ними. Это может быть достигнуто с помощью описанных выше средств описания, таких как [Декларация типов данных], [Декларация документов], [Декларация сетевых баз данных]/

Второй путь состоит в создании в прикладном проекте средств, с помощью которых можно в интерактивном режиме создавать нужный набор СПМ и операций по работе с этими моделями. При этом вся необходимая информация, о структуре моделей, о связях между ними, о текущем состоянии отдельных объектов предметной области будет храниться в базе данных прикладного проекта. При любом способе реализации СПМ необходим определенный язык их представления.

**Компоненты** определяются только для структурных параметров, то есть для тех, у которых тип определен как «структура». Компоненты описываются так же, как и параметры. Рекурсия (т.е. ссылки на вышестоящие типы) в описании параметров не допустима.

**Размер поля параметра** определяется как целое число и регулирует представление параметра на экране или при печати.

**Характер параметра** необходим для интерпретации значения параметра для финансовых СПМ – текущее значение, значение на конец периода (года, квартала, месяца), значение на плановую дату.

**Способ вычисления параметра** определяет метод вычисления или контроля значения параметра. Вычисления и контроль (если они необходимы) осуществляются через другие параметры модели или через другие модели, связанные с данной моделью. Способ вычисления является указателем для планировщика вычислений. В текущей версии «Генератора проектов» предусмотрены следующие способы вычислений:

act\_ana/title="Первичный параметр",  
act\_any/title="Очередное нарастающее числовое значение",  
act\_grp/title="Приращение за интервал времени",  
act\_agr/title="Вычисляемый по формуле параметр",  
act\_ref/title="Ссылка на другой параметр",  
act\_rup/title="Ссылка на параметр вышестоящего объекта",  
act\_syn/title="Сумма по компонентам структуры",

**Подчиненные структуры СПМ.** Структурно-параметрические модели сами могут образовывать иерархические структуры. В отличие от параметров СПМ подчиненные структуры СПМ могут образовывать списки – то есть совокупность однородных объектов.

На этом можно закончить краткое по необходимости краткое описание структуры и возможностей использования генератора проектов.

Более подробную информацию о Генераторе проектов можно найти в [5,6] и на сайте [7].

### **Литература**

1. Вышинский Л.Л., Прибытков Ю.Д., Флеров Ю.А., Шиленко В.И., Широков Н.И. Инструментальная система ФАКИР//Известия Академии наук СССР, Техническая кибернетика, 1986 г., № 3.
2. Вышинский Л.Л., Гринев И.Л., Флеров Ю.А., Шиленко В.И., Широков Н.И. Инструментальные средства САПР. В сб. Задачи и методы автоматизированного проектирования в авиастроении. М.: ВЦ АН СССР, 1991 г.
3. Гринев И.Л., Широков Н.И. Средства управления данными в САПР. В сб. Задачи и методы автоматизированного проектирования в авиастроении. М.: ВЦ АН СССР, 1991 г.
4. Вышинский Л.Л., Гринев И.Л., Демидов А.Ю., Широков Н.И. Технологии разработки и сопровождения АБС// Банковские технологии, 1997, июль-август.
5. Вышинский Л.Л., Гринев И.Л., Флеров Ю.А., Широков А.Н., Широков Н.И. Генератор проектов – инструментальный комплекс для разработки клиент-серверных систем// Информационные технологии и вычислительные системы – № 1-2/2003, - с. 6 – 26.
6. Лакин К., Широков Н. Генпро. Генератор проектов. Ветвь 3. Версия 01.065. М.: Универсальные системы и технологии, 2006.-250 с.
7. <http://www.genprj.ru>

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА ТОВАРОВ ДЛИТЕЛЬНОГО ПОЛЬЗОВАНИЯ С РАЗЛИЧНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ВЫБЫТИЯ\*

Флёрва А.Ю. (г. Москва)

*Согласно гипотезе Коуза, монополист, производящий товары длительного пользования оказывается в условиях конкуренции, т.к. с производимыми товарами конкурируют товары, произведенные и проданные ранее. Для исследования такой возможности, а так же для анализа предложенных Коузом путей возврата монопольной власти, построена динамическая модель рынка товаров длительного пользования. При изучении этой модели возникают интересные задачи оптимального импульсного управления: с запаздываниями и ограничениями на фазовую траекторию. Рассмотрены различные виды товаров длительного пользования, которые характеризуются различными функциями выбытия. Показано, что гипотеза Коуза выполняется не для всех видов товаров длительного пользования и не при всех параметрах рынка.*

Известный американский экономист, нобелевский лауреат Рональд Коуз выдвинул интересную гипотезу [1], о том, что монополист, производящий товары длительного пользования может оказаться в условиях конкуренции, т.к. с производимыми товарами конкурируют товары, произведенные и проданные ранее. По мысли Коуза конкурентом монополиста оказывается он сам, т.е. конкуренция может возникнуть, даже когда существует только один продавец.

Исследование рынка товаров длительного пользования необходимо для совершенствования антимонопольного законодательства и формирования политики регулирования государственного вмешательства на этом рынке. Под влиянием работ Коуза были внесены поправки в федеральное антимонопольное законодательство США, запрещающие монополистический лизинг товаров длительного пользования.

Для исследования гипотезы Коуза и границ её применения, а так же для анализа возможностей возврата монопольной власти, построена динамическая модель рынка товаров длительного пользования.

Пусть монополист производит и продаёт один вид товаров длительного пользования. Исследуем задачу максимизации прибыли монополиста. Исследуем задачу максимизации прибыли предприятия  $N(T)$  за период времени  $[0, T]$ . Обозначим через  $X(t)$  запас товара, находящийся в собственности репрезентативного потребителя в момент времени  $t$ . Будем считать, что скорость выпуска товара длительного пользования равна скорости продажи. Количество товаров, продаваемых потребителю в момент времени  $t$  обозначим  $u(t)$ . В нашей модели это управляющий параметр. Рассмотрим товары не только бесконечного срока использования, но товары с возможностью выбытия. Для этого введем гладкую функцию выбытия товаров  $a(t)$ . Таким образом, изменение запаса товаров у потребителя происходит за счет выбытия товаров по функции  $a(t)$  и покупки новых товаров в размере  $u(t)$ :

---

\* Работа выполнена при поддержке аналитической ведомственной целевой программы РНП.2.2.1.1.2467, РФФИ (05-01-00942, 07-01-12024-офи); РГНФ N05-02-02349а; гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-5379.2006.1); программ фундаментальных исследований ОМН РАН #3 (п. 3.14), РАН #14 (п. 1.11).

$$X(t) = \int_{-\infty}^t a(t-\tau)u(\tau)d\tau.$$

Обозначим через  $p(t, \tau)$  цену товара длительного пользования возраста  $\tau$  в момент времени. Поведение потребителя будем описывать с помощью функции полезности, которая зависит не только от объема товара у потребителей, но и от временной структуры товара, и эта зависимость выражается следующим образом: производная функции полезности имеет вид  $f_1(X(t)) - f_2(\tau)$ . Этому выражению можно дать следующую интерпретацию:  $f_1(X(t))$  - ценность услуг, получаемых от товара длительного пользования, а  $f_2(\tau)$  - стоимость обслуживания (например, ремонта, запчастей и т.д.) товара возраста  $\tau$ , не убывающая по  $\tau$ .

Как же определяется цена товара? Предположим, что мы заняли сумму  $p(t, \tau)dX$  и приобрели в момент времени  $t$  дополнительное количество  $dX$  товара длительного пользования возраста  $\tau$ . Использовали этот товар в течение периода времени  $dt$ , получив услуги, ценностью  $(f_1(X(t)) - f_2(\tau))dtdX$ . Затем продали в момент времени  $t + dt$  по цене  $p(t + dt, \tau + dt)dX$   $a(\tau + dt)/a(\tau)$  и вернули долг с процентами  $e^{rdt} p(t, \tau)dX$ . Во избежание арбитража экономический результат такой операции не может быть положительным, и нет оснований полагать, что он не может быть отрицательным:

$$(f_1(X(t)) - f_2(\tau))dt + p(t + dt, \tau + dt)a(\tau + dt)/a(\tau) - e^{rdt} p(t, \tau) \leq 0.$$

Устремим  $dt$  к 0 и введём дополнительное управление  $w \geq 0$ , такое что  $\frac{dp(t, \tau)}{dt} + \frac{dp(t, \tau)}{d\tau} = p(t, \tau) \left( r - \frac{a'(\tau)}{a(\tau)} \right) - f_1(X(t)) + f_2(\tau) - w(t)$ . Таким образом, монополист может влиять на ценообразование: он всегда может назначить цену на новый товар, меньшую, чем цена на рынке в данный момент. Пусть в начальный момент времени  $p(0, \tau) = p_0(\tau)$ . И пусть  $p_0(0) > c$ .

Доход монополиста  $N(t)$  изменяется за счёт продажи новых товаров в объёме  $u(t)$  по цене  $p(t, 0)$  за вычетом издержек  $c$  (функцию издержек считаем линейной), полученный доход кладется в банк под процент  $r$ :  $\dot{N}(t) = (p(t, 0) - c)u(t) + rN(t)$ .

Итак, рассмотрим задачу максимизации прибыли монополиста в конечный момент времени. Эта задача представляет собой задачу оптимального управления (задача P):

$$N(T) \rightarrow \max,$$

$$\dot{N}(t) = u(t)(p(t, 0) - c) + rN(t),$$

$$X(t) = \int_{-\infty}^t a(t-\tau)u(\tau)d\tau,$$

$$\frac{dp(t, \tau)}{dt} + \frac{dp(t, \tau)}{d\tau} = p(t, \tau) \left( r - \frac{a'(\tau)}{a(\tau)} \right) - f_1(X(t)) + f_2(\tau) - w(t);$$

$$u(t) \geq 0, w(t) \geq 0;$$

$$N(0) = 0, X(0) = X_0, p(0, \tau) = p_0(\tau).$$



Нетрудно заметить, что в случае, когда  $p(t, \tau) = p(t - \tau)$ , т.е. когда цена на товар длительного пользования фиксируется в момент его выпуска и вторичный рынок уже не имеет возможности влиять на цену, задача  $P$  описывает случай монополистического лизинга.

Коуз указал две возможности возврата монопольной власти: *монополистический лизинг* и *снижение долговечности товара*. Монополистический лизинг – сдача товаров длительного пользования в аренду – позволяет закрепить товар за покупателем и ликвидирует возможность торговли на вторичном рынке, тем самым, по мысли Коуза, предотвращая конкуренцию.

В случае монополистического лизинга цена на товар в момент времени  $t$  зависит только от запаса товара у потребителей  $p(t, \tau) = P(X(t))$ . Будем считать, что  $P(X)$  убывает по  $X$ .

Такой случай для товаров с экспоненциальной функцией выбытия, т.е. при  $a(t) = e^{-\mu t}$ , где  $\mu$  - коэффициент выбытия, подробно описан в работе [2]. При этом задача  $P$  оказывается задачей оптимального импульсного управления. Оптимальная траектория в этой задаче имеет магистраль  $\hat{X}$ , где  $\hat{X}$  - решение уравнения  $(\mu + r)(P(X) - c) + \mu X P'_X(X) = 0$ . Справедливо неравенство  $X_M \leq \hat{X} \leq X_C$ , где  $X_M$  - решение уравнения  $P'_X(X)X + P(X) - c = 0$  - выпуск в условиях монополии, а  $X_C$  - решение уравнения  $P(X) - c = 0$  - выпуск в условиях совершенной конкуренции.

При изменении параметра  $\mu/r$  от 0 до  $\infty$  магистраль  $\hat{X}$  монотонно смещается от выпуска при совершенной конкуренции  $X_C$  к монопольному выпуску  $X_M$ . Это означает, что гипотеза Коуза справедлива, если  $\mu \ll r$ . Снижение долговечности (увеличение  $\mu$ ) помогает монополисту избежать конкуренции.

Рассмотрим случай монополистического лизинга для товаров с фиксированным сроком службы  $\alpha$ . Такой товар не теряет своих потребительских качеств в течение срока службы. Функция выбытия таких товаров имеет вид  $a(t) = \theta(\alpha - t)$ , где

$\theta(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$  - функция Хевисайда. В этом случае задача  $P$  становится задачей  $P1$ :

$$N(T) \rightarrow \max,$$

$$\dot{N}(t) = u(t)(P(X(t)) - c) + rN(t),$$

$$\dot{X}(t) = u(t) - u(t - \alpha);$$

$$N(0) = 0, \quad X(0) = X_0;$$

$$u(t) \geq 0.$$

Задача  $P1$  является нетривиальной задачей оптимального импульсного управления с запаздыванием. Задачи такого типа пока мало исследованы. В этой задаче пришлось несколько ограничить общность и зафиксировать начальные условия  $X_0 = 0$  для того, чтобы найти решение.

### Теорема

Оптимальным управлением в задаче  $P1$  является управление

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{k \leq T/\alpha} X_c \delta(t - k\alpha).$$

В этом случае оптимальная траектория устроена следующим образом: в начальный момент времени монополист продает максимально возможное количество товара, цены падают до конкурентных, рынок насыщается и торговля не ведется до того момента, пока не кончится срок службы товара, затем запасы обнуляются и происходит новый скачок.

Таким образом, в случае товаров с фиксированным сроком службы монополист почти всегда оказывается в условиях конкуренции, даже при использовании монополистического лизинга, однако, по конкурентной цене торговля не ведётся.

Снижение долговечности товара также не помогает избежать конкуренции, но чем меньше срок службы товара, тем быстрее наступает момент новой продажи и тем больше доход монополиста.

Теперь вернёмся к общему случаю ценообразования на вторичном рынке. Рассмотрим случай экспоненциального выбытия – свойства товара не изменяются со временем, поэтому цена на товар не будет зависеть от возраста.

В каком случае покупатель захочет приобрести товар? Если он не будет ничего покупать, а просто положит деньги, на которые можно было бы приобрести единицу товара, в банк, то он за время  $T$  получит прибыль в размере  $pe^{rT}$ . Если он приобретет товар длительного пользования, предполагая, что после момента покупки товар больше не будет продавать, и будет его использовать, то его ожидаемая прибыль  $N_1$ :

$$\dot{N}_1(t) = f(X)e^{-\mu t} + rN_1(t),$$

$$\dot{X} = -\mu X, \quad X(0) = X^0;$$

Для того чтобы покупателю было выгодно приобретать товар в этом случае, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$p \leq \int_0^{\infty} f(Xe^{-\mu t})e^{-(r+\mu)t} dt.$$

Можно рассмотреть и другую гипотезу об ожиданиях потребителя: покупая товар, потребитель предполагает количество товаров «на руках» у всех потребителей неизменным, тогда он примет решение о приобретении товара при  $p \leq f(X)/(r + \mu)$ . Принципиального отличия для решения задачи эти гипотезы не имеют, в данном

случае мы рассмотрим первую. Обозначим  $\int_0^{\infty} f(Xe^{-\mu t})e^{-(r+\mu)t} dt = g(X)$ .

Таким образом, мы получили ограничения на фазовую траекторию и задача  $P$  для функции выбытия  $a(t) = e^{-\mu t}$  становится задачей оптимального импульсного управления с фазовыми ограничениями.

Эта задача имеет решение и выглядит оно следующим образом: в начальный момент происходит скачок траектории на ограничение  $g(X)$ . Далее оптимальная траектория остаётся на ограничении, таким образом, цена на товар длительного пользования зависит от запаса товара у покупателей, и мы попадаем в условия задачи для случая монополистического лизинга.

Для товаров с фиксированным сроком службы *задача P* становится задачей оптимального импульсного управления с запаздыванием и фазовыми ограничениями, она имеет аналогичное решение: оптимальная траектория попадает на ограничение и *задача P* становится *задачей P1*.

Без фазовых ограничений *задача P* для рассматриваемых случаев не будет иметь решения.

Таким образом, выбор между продажей товара или сдачей в аренду не оказывает принципиального влияния на поведение монополиста.

Коуз был не прав в своём предположении о том, что монополист может вернуть себе монопольную власть, используя монополистический лизинг. Мы показали, что, даже используя монополистический лизинг, монополист может оказаться в условиях конкуренции.

Уменьшение срока службы товара не всегда позволяет избежать конкуренции, однако, заставляет покупателей чаще приобретать товар, тем самым, увеличивая доход монополиста.

Рассмотрено влияние предположения о законе выбытия товаров. Справедливость гипотезы Коуза зависит от характера выбытия товаров длительного пользования. В случае товаров с экспоненциальным выбытием монополист может оказаться как в условиях совершенной конкуренции, так и в условиях монополии. Для товаров с фиксированным сроком службы (при нулевом начальном запасе) гипотеза выполняется: объём товаров у потребителей держится на конкурентном уровне, однако, по конкурентной цене никто товар не покупает.

Фактически, гипотеза Коуза нашла своё полное подтверждение только для совершенно долговечных товаров (товаров без выбытия). Действительно, в случае нулевой функции выбытия, торговля происходит только в первый момент времени, рынок мгновенно насыщается до конкурентного значения и торговля прекращается. Однако, это состояние конкуренции достигается и при монополистическом лизинге, т.е. предположение Коуза о том, что монополистический лизинг помогает монополисту избежать конкуренции не нашло подтверждения даже в этом тривиальном случае.

#### Литература:

1. *Coase R.H.* Durability and monopoly. *J.Law&Economics*. 1972. v.15. p.143-149.
2. *Флёрова А.Ю.* Исследование влияния вторичного рынка на поведение монополиста, производящего товары длительного пользования, ВЦ РАН, 2006.

## ЛАБОРАТОРИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ: ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ И ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ \*

Чабан А.Н. (г. Москва)

*В работе описываются техническое оснащение, программное обеспечение и методические приемы проведения экспериментов в лаборатории экспериментальной экономики.*

Метод экспериментальной экономики состоит в воспроизводстве рыночной среды в лаборатории с возможностью записывать результаты для последующей проверки гипотез (см.[1]). Анализ лабораторных экспериментов позволяет изучать эффективность тех или иных рыночных механизмов (правил взаимодействия участников).

Процесс принятия решений (формирования стратегий поведения) участниками эксперимента в условиях неопределенности либо дефицита времени для анализа ситуации не сводится к применению набора формальных оптимизационных или теоретико-игровых конструкций. Решения принимаются не только с учетом рациональных соображений, но и всего жизненного опыта и индивидуальных особенностей личности. Для выявления этой зависимости проводится предварительное психологическое тестирование, определяющее психологический тип участника эксперимента (см.[2]).

При изучении влияния личностных факторов интересно было бы разделить постоянную компоненту, которую выявляют психологические тесты, и изменчивость текущего состояния участника эксперимента. Параметры функционального состояния участников во время лабораторного эксперимента регистрируются с помощью специального аппаратно-программного стабิโลграфического комплекса (см.[3]).

Возникающие здесь задачи и являются предметом изучения в лаборатории экспериментальной экономики, функционирующей в Московском физико-техническом институте с 2003 г. Кроме того, для студентов экономических специальностей факультета управления и прикладной математики проводится лабораторный практикум «Экспериментальная экономика».

### **Основные условия**

Для создания экономической ситуации в лаборатории требуются те же условия, что и при проведении физических экспериментов: изучаемый процесс не должен подвергаться воздействиям, существенно искажающим его функционирование, а параметры процесса должны контролироваться исследователем. В применении к экспериментам, в которых участвует человек как объект исследования, эти требования можно переформулировать следующим образом.

Во-первых, все, что происходит в эксперименте, должно быть для его участников не моделью некоторой действительной ситуации, а самой ситуацией, хотя упрощенной и стандартизированной. Тогда участники будут принимать решения «всерьез», как они это делали бы в аналогичных реальных условиях. Это означает, во-первых, что описание ситуации для участника должно быть адекватным его возможностям принимать решения, он должен понимать последствия своих действий и действий

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 05-07-90053-э\_б, 07-01-00605а, 06-01-08057-офи), гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ-5379.2006.1), программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 гг.)» Федерального агентства по образованию (код проекта РНП.2.2.1.1.2467).

других участников. В сложных рыночных экспериментах (например, на финансовых рынках) участникам может потребоваться предварительная подготовка. В других случаях, наоборот, требуется, чтобы они действовали на основе интуитивных соображений.

Во-вторых, чтобы в лабораторных экономических ситуациях участники вели себя так же, как и в реальных условиях, они должны быть правильно мотивированы. Результат их действий оценивается в учебных очках, которые затем трансформируются по заранее известным правилам в денежное вознаграждение. В учебных курсах по экспериментальной экономике денежное вознаграждение могут заменять учебные баллы, из которых складывается итоговая оценка.

### **Общая схема эксперимента**

Для создания рыночной ситуации в лабораторных условиях используется специальное сетевое программное обеспечение, которое состоит из программы управления рынком и рабочих мест участников. Рынок может быть сформирован как в рамках локальной сети, так и с доступом через Интернет. Параметры эксперимента (описание экономической среды и начальных условий участников) являются входными данными для программы управления рынком. После ее запуска участники подключают к ней свои рабочие места, и каждый получает начальные условия. Эксперимент состоит из серии повторяющихся игр, или попыток, с одинаковым набором начальных условий.

Параметры экономического эксперимента описывают:

- объекты экономической среды (рынки, товары и услуги);
- ресурсы участников и набор их возможных действий;
- неопределенные факторы экономической среды и их влияние на участников;
- информированность участников о неопределенных факторах, о ресурсах и действиях друг друга;
- функции выигрыша участников.

В зависимости от типа рыночного механизма участники могут быть разделены на группы из двух или более играющих либо объединены в единый рынок; они могут действовать по очереди либо одновременно. Каждая попытка может быть разбита на несколько этапов (периодов).

После завершения серии попыток очки, набранные участниками, пересчитываются в денежное вознаграждение или учебные баллы. Действия участников протоколируются; протокол эксперимента вместе с его параметрами являются основой для дальнейшего анализа.

### **Специализированное программное обеспечение**

В лабораторных рыночных экспериментах обмен информацией имеет следующие особенности:

- каждое сообщение (очередной шаг часов, отмеряющих время в попытке или этапе, заявка, согласие на сделку и т.д.) невелико по объему;
- плотность сообщений достаточно велика, особенно в случае непрерывной торговли;
- каждое сообщение является ценным, потеря одного сообщения может разрушить рынок;
- сообщения передаются по схеме «звезда», т.е. вся информация проходит через программу управления рынком; это необходимо не только для протоколирования, но и для верификации действий участников.

Для этих целей подходят сетевые программы, реализованные на основе TCP-пакетов, что позволяет при необходимости подключать удаленных участников через Интернет. На рабочем месте участника достаточно знать IP-адрес (и, возможно, номер порта) программы управления рынком.

Другое необходимое свойство программного обеспечения – его гибкость. Невозможно заранее полностью описать круг экспериментов, которые захочется провести. Поэтому программное обеспечение представляет собой программную оболочку, предоставляющую исследователю удобные средства для конструирования широкого спектра экспериментов.

В лаборатории экспериментальной экономики эксплуатируются две программные оболочки:

- z-Tree, (университет Цюриха, Швейцария), – программная оболочка для лабораторий экспериментальной экономики;
- FTS (университет Карнеги-Меллон, Питтсбург, США) – торговая система для конструирования экспериментальных и учебных финансовых рынков.

### **z-Tree**

Программная оболочка z-Tree создана как универсальное средство для проведения экономических экспериментов. Каждая попытка (сессия) включает несколько этапов (стадий). На каждой стадии участники получают сообщения от управляющей программы и отправляют свои сообщения. В управляющей программе реализована табличная форма представления информации, и вычислительные процедуры – это работа с таблицами. Все действия и вычисления выполняются управляющей программой (z-Tree), в ней же описываются все объекты и диалоги, с которыми имеют дело участники на рабочих местах (z-Leaves). Имеются встроенные объекты: сессия, субъекты, контракты, часы, экран участника, элементы диалога на экране и т.д. Описание эксперимента (Treatment) – входная информация для z-Tree – представляет собой последовательность описаний отдельных стадий, диалогов с участниками и обработку их ответов. Программная оболочка z-Tree удобна для реализации теоретико-игровых конструкций, рыночных взаимодействий (например, аукционных механизмов) и других пошаговых механизмов. Для процессов с непрерывным временем, например, биржевой торговли, специальных средств не предусмотрено. Также не предусмотрено подключение внешних модулей (например, вычислительных). В лаборатории экспериментальной экономики МФТИ программная оболочка z-Tree используется для теоретико-игровых задач и сетевых рынков.

### **FTS**

Торговая система FTS (Financial Trading System) разработана специально для описания финансовых рынков. Фактически это учебная электронная биржа с гибкой системой описания финансовых активов и рынков. Основным режим рыночного взаимодействия – непрерывный двойной аукцион (есть и режим аукциона с предварительными заявками). Параметры эксперимента задаются в формате электронной таблицы MS Excel. В качестве финансовых активов рассматриваются ценные бумаги с детерминированным и случайным потоком платежей (например, облигации и акции), производные контракты (фьючерсы, опционы, свопы и др.) и деньги. Задаются характеристики участников (трейдеров): правила начисления учебных очков, начальные запасы активов, возможности работы на тех или иных рынках. Цены на рынках могут предлагаться самими трейдерами (внутренние рынки) и/или формироваться в таблице параметров (внешние рынки). Также в таблице могут задаваться информационные сообщения для трейдеров, приватные либо публичные (например, прогнозы платежей по ценным бумагам).

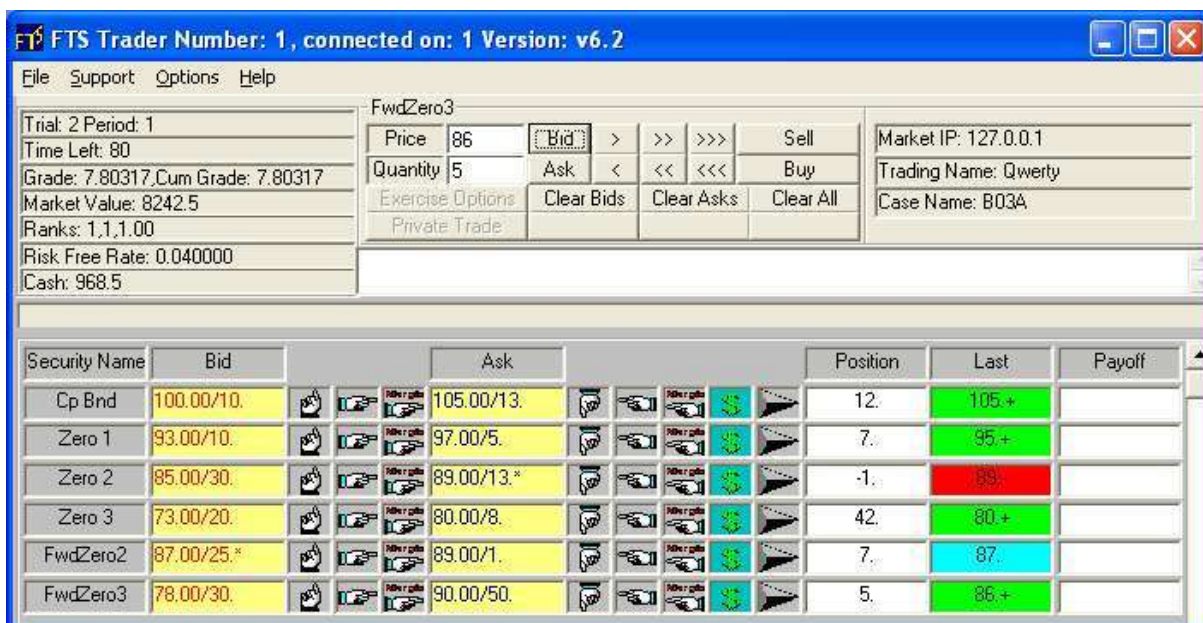


Рис. 1. Рабочее место трейдера FTS. Здесь Bid – наилучшие заявки на покупку, Ask – наилучшие заявки на продажу, Position – текущий портфель ценных бумаг, Last – цены последних сделок, Cash – деньги, Grade – учебные очки. Активы (Security Name) – облигации и форвардные контракты.

Рабочее место трейдера (торговая программа) в отличие от z-Tree не может быть модифицировано при разработке эксперимента. Однако каждый участник может экспортировать поступающую в торговую программу информацию в Excel в реальном времени и анализировать ситуацию по ходу эксперимента с помощью заранее запрограммированных алгоритмов. Кроме того, предусмотрен импорт в торговую программу торговых приказов, формируемых в ячейках электронной таблицы с помощью макросов. Это позволяет создавать различные надстройки над стандартной торговой программой для конкретных экспериментов.

### Психология и психофизиология

Система психологического тестирования начала использоваться для оценки индивидуальных и групповых особенностей участников лабораторных рынков еще в 90-х годах, в процессе преподавания курса «Финансовый анализ и торговля ценными бумагами» в АНХ (Академия народного хозяйства при Правительстве РФ). Оказалось, что результаты предварительного психологического тестирования позволяли хорошо прогнозировать лидеров, набравших максимальное количество очков в учебных финансовых торгах. К настоящему моменту накоплена большая база результатов тестирования, которая служит основой для проведения типизации участников экспериментов (подробнее см.[2]). Психологические типы сопоставляются с типами поведения, наблюдавшимися в эксперименте, а также с вербальными описаниями участников своих стратегий, зафиксированными «по горячим следам» после окончания эксперимента.

Психологический тип человека считается достаточно стабильной характеристикой, медленно меняющейся во времени. Для оперативной оценки состояния участника в процессе эксперимента в лаборатории имеется стабелографический программно-аппаратный комплекс регистрации психофизиологического состояния, что позволяет учитывать динамические аспекты поведения. Комплекс разработан в ОКБ «Ритм», г. Таганрог, и установлен в лаборатории в декабре 2006 г. Ранее регистрация функционального состояния

проводилась на стабилографической платформе (принцип работы и изготовитель тот же) в стоячем положении.



Рис. 2а. Стабилографическое кресло; под сиденьем – блок с датчиками.



Рис.2б. Стабилографическая платформа.

Во время эксперимента функциональное состояние участника может быть измерено безопасным для него образом с помощью специального стабилографического кресла. Датчики, установленные под сиденьем, с частотой 50 Гц и с высокой точностью регистрируют перемещение общего центра давления (ОЦД). Сигналы со всех кресел передаются на центральный компьютер диспетчера эксперимента, который с соседнего компьютера контролирует лабораторный рынок. В результате от каждого эксперимента остаются три группы данных:

- результаты психологического тестирования;
- посекундная запись всех экономических действий каждого участника;
- стабилографический сигнал (x-, y- и z- координаты ОЦД).

В работе [3] описаны первые результаты анализа стабилографической информации при проведении экономического эксперимента.

### **Учебный процесс**

В ходе лабораторного практикума по экспериментальной экономике студенты 5-6 курсов принимают участие примерно в двух десятках экономических экспериментов. Первая часть включает простые экономические приложения теории игр и аукционные механизмы для пары «продавец – покупатель» с предварительными заявками. Во второй части изучаются сетевые рынки. Сетевой рынок можно представить в виде графа, в узлах которого происходит поставка или потребление товара, а по дугам – его транспортировка. Структура собственности описывается как разбиение объединения узлов и дуг на непересекающиеся подмножества.



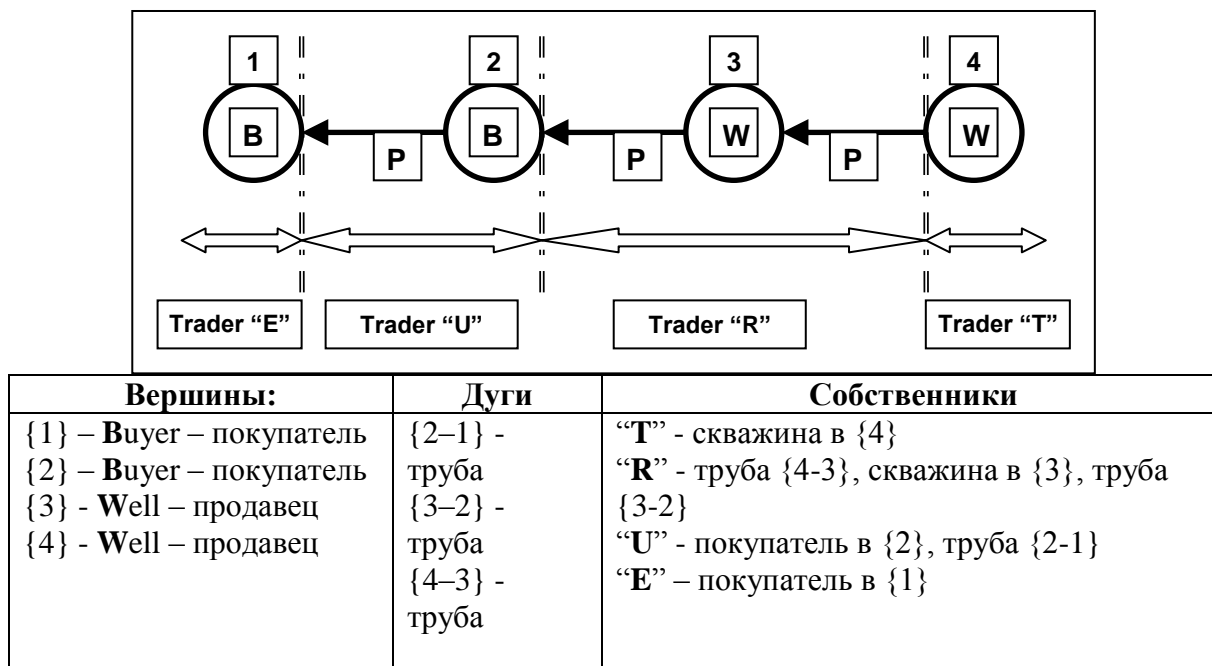


Рис. 3. Пример сетевого рынка: газовый аукцион TRUE (механизм «умного аукциона» на примере транспортировки газа из Средней Азии в Европу, автор – В.В.Платонов, ВЦ РАН).

Третья часть курса посвящена финансовым рынкам. Изучаются вопросы управления риском и информационной эффективности. Для газового аукциона TRUE изучается механизм децентрализованного непрерывного аукциона с использованием фьючерсных контрактов. Лабораторные работы из первых двух частей реализованы в программной оболочке z-Tree, из третьей части – в FTS. Результаты некоторых экспериментов рассмотрены в [3].

Следует подчеркнуть некоторые важные особенности использования методик экспериментальной экономики в процессе обучения. Прежде всего, практические занятия в виде лабораторных рыночных экспериментов существенно обостряют восприятие участников и улучшают усвоение материала. Именно потому, что лабораторный рынок воспринимается его участниками, как настоящий, они получают сильное эмоциональное впечатление. Условно говоря, когда ты слушаешь лекцию или решаешь задачу, уровень эмоций совсем не такой, когда ты на основе прослушанных лекций и произведенных вычислений принимаешь решения на рынке в реальном времени и ... проигрываешь своему товарищу! Желание найти свои ошибки и разобраться в теоретическом материале усиливается многократно. Этот вывод основан на 10-летнем опыте преподавания курса финансового анализа рынков ценных бумаг в АНХ автором и его коллегами (см.[2]).

В курсе экспериментальной экономики ситуация вовлеченности в эксперимент позволяет решать довольно сложные, педагогические и исследовательские, задачи. Дело в том, что студенты в этом курсе играют сразу три роли. Во-первых, они – участники эксперимента, которым приходится «погружаться» в заданную экономическую среду. Во-вторых, после эксперимента они получают протокол действий всех участников и анализируют его (рассчитывают эффективность рыночного механизма, выявляют особенности рыночного поведения в зависимости от психологических типов и т.д.). При этом они не ограничены в выборе инструментов анализа, и иногда получают оригинальные результаты, не предусмотренные

постановщиками заранее. И, наконец, наиболее активные и творчески мыслящие студенты и аспиранты конструируют свои собственные эксперименты, иногда на основе ранее изученных, иногда целиком на собственных идеях (см.[3]).

Таким образом, в результате учебной работы накапливаются не только данные для анализа, но и новые методики анализа экспериментов и вновь разработанные эксперименты.

### **Литература**

1. The Handbook of Experimental Economics / John H. Kagel, Alvin E. Roth, editors – Princeton University Press, 1995.
2. Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р. Лабораторные исследования информационной эффективности рынков. – М.: ВЦ РАН, 2006. –58 с.
3. Меньшиков И.С. Экспериментальная экономика и теория игр о рациональности экономического поведения – труды II Всероссийской научной конференции ЭКОМОД-2007.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ЭКОНОМИКИ КИРОВСКОЙ ОБЛАСТИ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЭКОМОД<sup>\*11</sup>

Шатров А.В. (Киров)

*Система ЭКОМОД была разработана в отделе математического моделирования экономических систем ВЦ РАН с целью поддержки и автоматизации всех этапов разработки и исследования динамических моделей экономики. Система реализована в среде компьютерной алгебры Maple и содержит 6 уровней контроля правильности записи модели.*

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПОДДЕРЖКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИКИ

В последние годы стали появляться публикации, авторы которых делятся опытом использования систем искусственного интеллекта (ИИ) в составе сложных моделей для более адекватного представления деятельности экономических агентов.

В работе [1] рассматривается модель Бертрана, в которой агенты, каждый из которых представлен совокупностью 30 нейронных сетей, принимают решения об установлении цены на свою продукцию. Веса синапсов этих сетей регулируются с помощью генетических алгоритмов. В процессе «игры» агент выбирает результаты, выдаваемые только одной сетью, просчитывая при этом последствия (прибыль, реакцию других агентов) от применения результатов других сетей. В другой работе [2] рассматривается игра, в которой достигается равновесие Нэша. Один из игроков представлен нейронной сетью, обученной на множестве примеров игр с равновесием по Нэшу. Немецкий ученый Гротманн [3] построил нейронную сеть, имитирующую работу валютного рынка. В отличие от прямого использования нейронных сетей для получения прогнозных оценок, в разработанной им сети каждый нейрон, являясь участником валютного рынка, «принимает решение» о покупке валюты той или иной страны. Результатом одновременно принятых решений всей совокупности нейронов сети является ставка обменного курса национальной валюты.

Широкое распространение получила концепция «Вычислимой экономики агентов», реализуемая как самоорганизующаяся система. Наиболее популярным прикладным пакетом для моделирования параллельно распределенного виртуального мира является универсальный пакет *SWARM*, разработанный в *Институте Санта Фе (Santa Fe Institute)*. По своей сути *SWARM* является набором библиотек, написанных на языке *Objective-C*, служащих основой для разработок сложных мульти-агентных систем. Этот пакет в свободном доступе находится в сети по адресу <http://wiki.swarm.org>.

В работе [4] используется вычислимая модель общего экономического равновесия (Computable General Equilibrium Model, CGE модель), реализованная группой исследователей ЦЭМИ РАН под руководством академика В.Л. Макарова в виде совокупности нейронных сетей - симбиоз экономической системы и эмулятора

---

\* Работа выполнена в рамках проекта «Исследование инновационного потенциала Кировской области с целью создания центров трансфера технологий», код проекта ГК 02.449.11.7026, частично поддержана грантом РФФИ № 07-01-06048-г

мозга людей из рассматриваемых в модели «виртуальных обществ». Модели этого класса сами по себе являются новым направлением в прикладной экономике, получившим широкое распространение во всем мире.

В данной работе мы рассматриваем применение системы ЭКОМОД [5,6] к моделированию региональной экономики. Эффективная и надежная работа с моделью обеспечивается тем, что модель разрабатывается в среде системы аналитических преобразований Maple 10. Всё это является основанием считать технологию создания и использования математических моделей экономических структур ЭКОМОД относящейся к системам ИИ.

## ОСОБЕННОСТИ ОПИСАНИЯ ЭКОНОМИКИ РЕГИОНА

Модель описывает региональную экономику в терминах одного продукта (ВРП). Основной принцип - развитие экономики рассматривается как результат взаимодействия 7 типов экономических агентов:

1. Производители (нефинансовые коммерческие организации),
2. Банки (финансовые коммерческие организации),
3. Домашние хозяйства (физические лица как потребители и трудящиеся),
4. Собственники (физические и юридические лица, как управляющие движением капитала между секторами и за пределы области),
5. Область (некоммерческие организации),
6. Центральный банк,
7. Внешняя торговля.

Агенты 6,7 в данной модели были введены для технического замыкания системы балансов.

Поведение области описывается сценариями областной экономической политики, выраженных через значения входных (экзогенных) переменных и параметров модели. Кроме описания поведения агентов, модель также описывает взаимодействия агентов.

Строго говоря, область в целом выступает в региональной экономике как производитель особых общественных благ. Эти блага называются общественными потому, что они не делятся между гражданами. Общественные блага производятся за счет затрат продукта, закупаемого в порядке областного потребления, за счет затрат труда государственных служащих, за который они получают зарплату, и за счет денежных затрат на субсидии и пособия определенным категориям граждан и организаций. Поскольку общественный продукт достается всем членам общества, то оплачивается за счет налогов. Производственная деятельность области отражается в современной системе региональных счетов балансами особой отрасли "Управление". Эта отрасль производит особый продукт и практически не создает добавленной стоимости.

В модели не описывается явно результат производственной деятельности области, а учитываются только расходы на эту деятельность.

Область, как и упомянутые выше агенты ("Банк", "Производитель", "Собственник", "Население") рассматривается в модели как единое лицо, принимающее решения относительно своих планируемых переменных. В базовой модели ЭКОМОД [2-3] этому соответствует агент «Государство». Концепцию описания региональной экономики еще следует уточнять. Можно предположить два принципиально различных подхода описания региональной экономики:

1) государство делегирует все полномочия региону (области) и он принимает на себя все функции агента «Государство»;

2) в базовую модель необходимо ввести еще одного специфического агента «Регион», определив принципы его описания и взаимодействия.

В нашей модели мы, в основном, следовали принципам описания базовой модели (*первый подход*), отдавая, однако отчет в том, что поведение субъекта федерации и самой федерации различно.

Каждый из рассмотренных ранее агентов: *Банк*, *Производитель*, *Собственник* и *Население* - представлял большую совокупность реальных субъектов экономики (финансовых коммерческих организаций, нефинансовых коммерческих организаций, физических и юридических лиц, распоряжающихся большими объемами собственности, домохозяйств живущих за счет зарплаты, пособий и сравнительно небольшой ренты). Таких агентов мы называем *массовыми*. Каждый субъект, представленный массовым агентом, контролирует небольшую часть ресурсов, представленных планируемыми переменными массового агента, и располагает ограниченной информацией.

Основное предположение относительно массовых агентов состоит в том, что за счет конкуренции, подражания и специализации субъектов массовый агент ведет себя более регулярно и рационально, чем каждый из составляющих ее субъектов. Поэтому совокупное поведение массового агента считается возможным описывать вариационным принципом - максимизацией целевого функционала в рамках технологических и институциональных ограничений. Последние как раз и выражают ограниченность информации субъектов, представленных массовым агентом.

Реальная область тоже представляет собой совокупность субъектов - служащих. Между ними тоже есть отношения конкуренции и подражания, но доминируют все же иные отношения - административного подчинения. Доминирующие в областных органах отношения соподчинения вынуждают рассматривать область как реальный субъект экономики, наделенный волей и инициативой.

Модельных агентов, представляющих отдельных особо влиятельных субъектов экономики, мы называем **индивидуальными агентами**. В данной модели их два – «Область» и «Центробанк».

В силу вышесказанного не считается возможным формализовать цели индивидуального агента как задачу оптимизации определенного критерия, а предлагается описывать деятельность такого агента **сценариями** его политики. Иными словами, планируемые переменные области мы задаем просто как функции времени, а затем на экспериментах с моделью сравниваем результаты, полученные при разных наборах траекторий планируемых переменных области.

При сценарном описании поведения агента различие между информационными и планируемыми переменными несколько размывается. Однако важно, чтобы переменные, задаваемые сценарием, отвечали реальным рычагам областного управления. Иначе сценарий невозможно будет сравнить с реально проводившейся политикой.

***Область в модели - это индивидуальный агент, и его поведение описывается сценарием региональной экономической политики, включающем:***

- Программу закупки продуктов областного потребления  $G(t)$
- Программу трансфертов населению - выплат пособий населению и зарплаты бюджетникам за вычетом подоходного налога с этих выплат  $Sub(t)$
- Программу выплат внешнего долга (или поступлений от внешних займов, смотря по знаку)  $LdW(t)$

Платежи бюджета, идущие на оплату продукта, и платежи, передаваемые гражданам и организациям в денежной форме, воздействуют на экономику существенно по-разному, поэтому мы складываем зарплату и пособия, а расходы на

закупки учитываем отдельно. Спецификой данной модели является учет теневого оборота.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ПРОГНОЗНЫХ РАСЧЕТОВ

Итак, имитационная модель предназначена для аналитических и прогнозных расчетов. Система производит расчет при заданных значениях входных данных и выдает значения выходных переменных и их графики в сравнении с исходными данными. Изменяя значения параметров модели, можно обыгрывать различные сценарии развития экономики Кировской области и оценивать ее экономический потенциал в каждом частном случае. Перечислим параметры модели, которые оставались неизменными во всех сценариях:

1. Параметры производственной функции.
2. Налоговые ставки:
  - налог на добавленную стоимость –  $nv = 0,18$ ;
  - налог на прибыль –  $np = 0,24$ ;
  - подоходный налог –  $nd = 0,13$ ;
  - социальный налог –  $ns = 0,26$ .

Остальные параметры варьировались от сценария к сценарию.

**«Пессимистический» сценарий.** Название этого сценария отражает степень участия и влияния Правительства на действия массовых экономических агентов. Его также можно было бы назвать «мягким» с точки зрения Собственников-производителей. В данном сценарии были выбраны и идентифицированы следующие значения параметров:

- $\varepsilon = 100$  - коэффициент, описывающий частоту проверок и величину штрафов, взимаемых налоговой инспекцией. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  санкции налоговой инспекции ожесточаются. В нашем случае санкции нежесткие.

- $i1 = 0,04$  - средний темп инфляции за весь рассматриваемый период. В нашем случае инфляция растет в среднем на 4% за квартал.

- $\xi_n = 0,1$  - норма резервирования привлеченных средств от расчетных счетов производителей. Значение взято непосредственно из нормативных документов Центрального банка.

- $\xi_s = 0,07$  - норма резервирования привлеченных средств от депозитов населения. Значение взято непосредственно из нормативных документов Центрального банка.

- $\tau_s = 1$  - параметр обращения денег легальной зарплаты.

- $\beta_a = 0,7$  - норма амортизации (обратная величина износа основных средств). В нашем случае, основные средства амортизируются в среднем за четыре месяца.

- $\sigma = 0,2$  - доля кредитов в ВРП. В нашем случае кредиты занимают 20% в общем объеме ВРП.

- $\mu = 0,5$  - коэффициент потребления купленного продукта. В нашем случае половина купленного продукта потребляется, а остальная половина переходит в запасы.

- $\beta_s = 1$  - норма привлечения депозитов (обратная величина срока привлечения депозитов). В нашем случае депозиты привлекаются на 1 квартал.

- $\delta = 0,6$  - мера риска собственника. Чем меньше  $\delta$ , тем больше риск собственника не получить планируемый доход. В нашем случае риск ниже среднего уровня.

- $\beta_k = 0,06$  - норма выдачи кредитов производителю (обратная величина срока выдачи кредитов). В нашем случае в процессе идентификации модели срок выдачи кредитов оказался равным 4 года.

- $\tau_{bl} = 6,3$  - параметр обращения денег, полученных от теневой зарплаты. В результате идентификации модели получилось, что деньги, полученные от теневой зарплаты, обращаются в шесть раз быстрее, чем от легальной зарплаты. Результаты сопоставления расчетов со статистикой для 12 кварталов 2002-2004 гг. и прогноз на три года вперед (на 12 кварталов) приведены на рис. 1-2

Как видно на рис.1, инфляция воспроизводится моделью с весьма высокой точностью и отражает колебания инфляции в пределах года. Из прогноза видно, что темп инфляции в 2005-2006 гг. останется на том же уровне, что и в 2002-2004 гг., а к концу 2007 года возрастет. Значения валового накопления, рассчитанные моделью, слегка завышены по сравнению со статистическими данными, но отражают характер колебаний данного показателя в пределах года. Из прогноза видно, что валовое накопление в 2005-2006 гг. будет возрастать высокими темпами, а в 2007 году произойдет резкий спад реальных инвестиций.

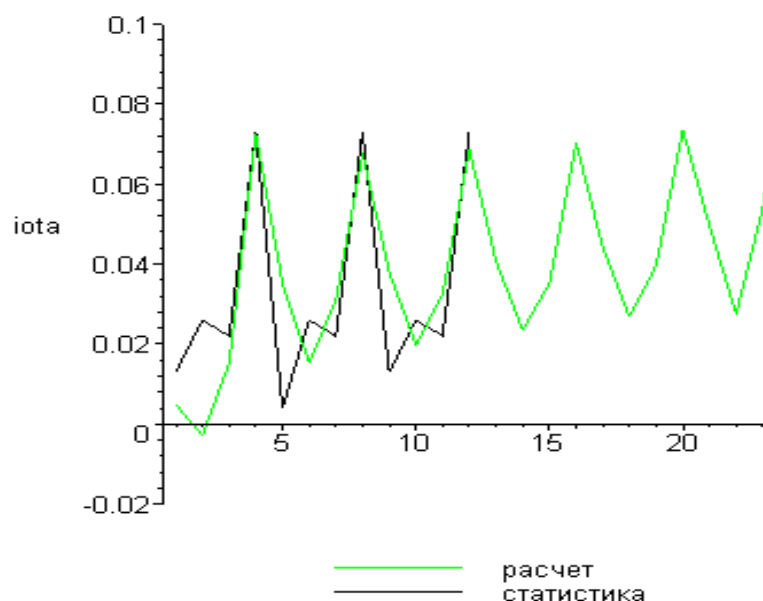


Рис. 1 – Темп инфляции

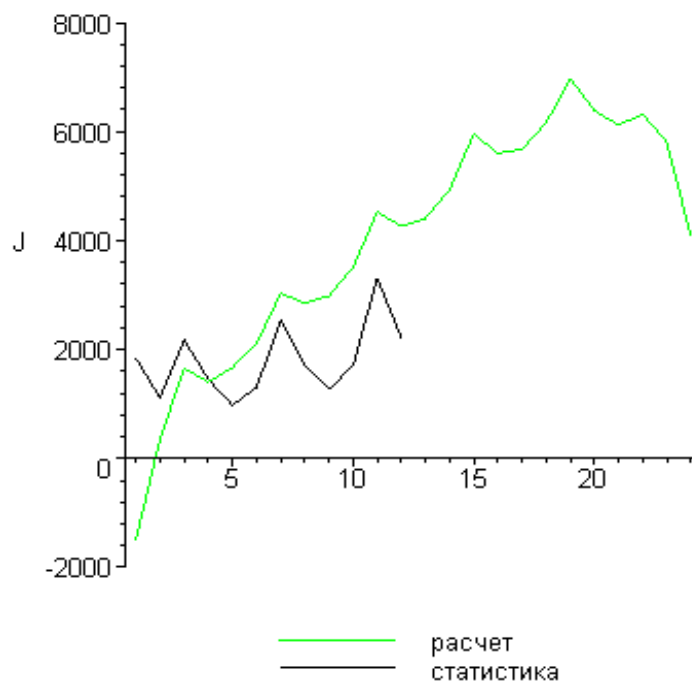


Рис. 2 - Валовое накопление, млн. руб. в реальном выражении в ценах 2002 года

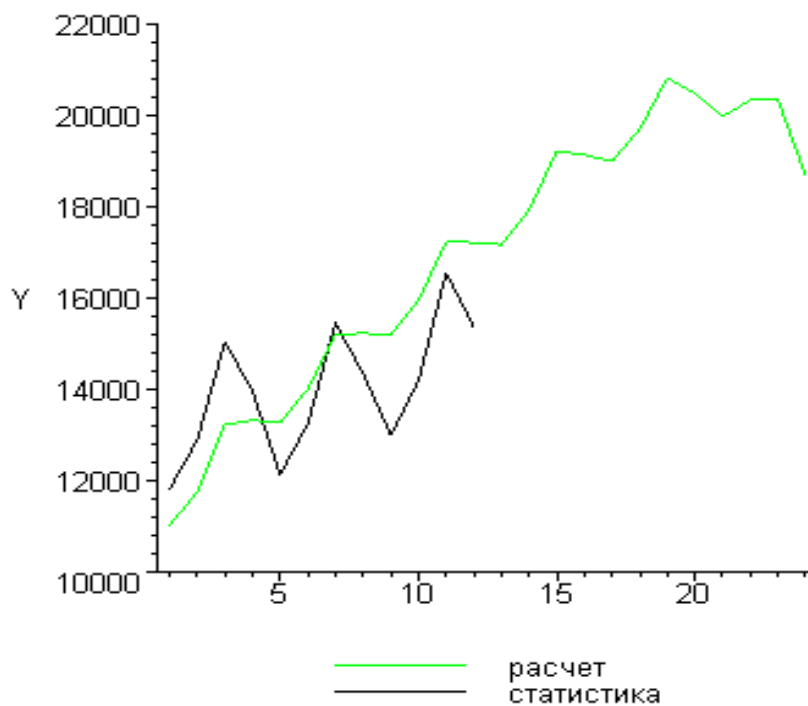


Рис. 4 – ВРП, млн. руб. в реальном выражении в ценах 2002 года



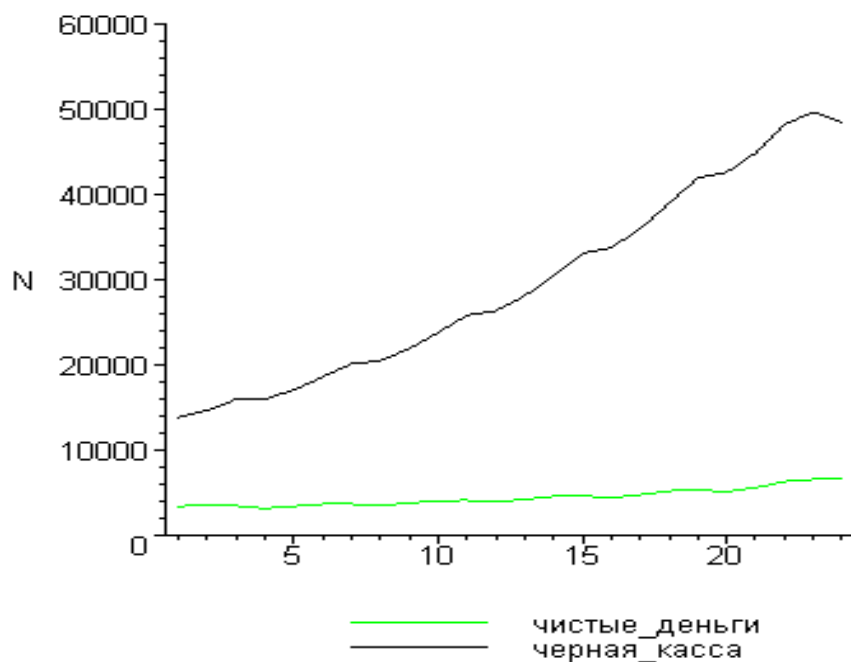


Рис. 5 – Остатки расчетных счетов и запас нелегальных денег у производителей, млн. руб

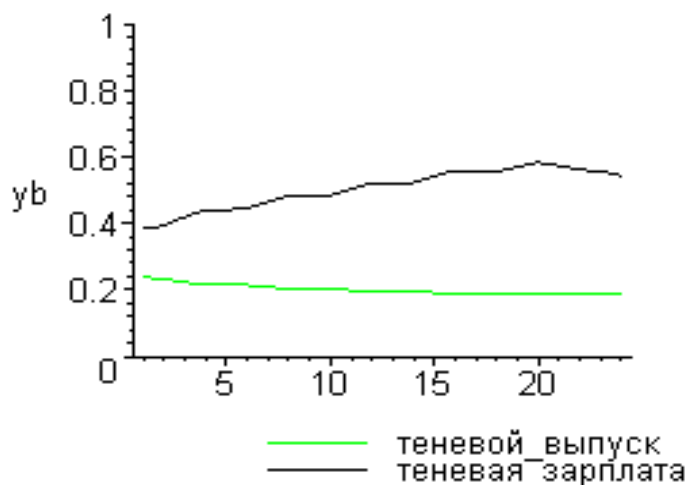


Рис.6 – Доля теневого выпуска в общем выпуске и доля теневого заработка в общей зарплате

**«Оптимистический» сценарий.** В данном сценарии были выбраны и идентифицированы следующие значения параметров:

- $\varepsilon = 10$  - коэффициент, описывающий частоту проверок и величину штрафов налоговой инспекцией. В нашем случае санкции достаточно жесткие.
- $i1 = 0,045$  - средний темп инфляции за весь рассматриваемый период. В нашем случае инфляция растет в среднем на 4,5% за квартал.
- $\xi_n = 0,12$  - норма резервирования привлеченных средств от расчетных счетов производителей. Значение немного преувеличено, чем в нормативных документах.
- $\xi_s = 0,08$  - норма резервирования привлеченных средств от депозитов населения. Значение немного преувеличено, чем в нормативных документах.

- $\tau_s = 2$  - параметр обращения денег, полученных от легальной зарплаты. В данном сценарии этот параметр в 2 раза больше, чем в сценарии 1.
- $\beta_a = 0,7$  - норма амортизации. В нашем случае основные средства амортизируются в среднем за четыре месяца.
- $\sigma = 0,15$  - доля кредитов в ВРП. В нашем случае кредиты занимают 15% в общем объеме ВРП.
- $\mu = 0,6$  - коэффициент потребления купленного продукта. В нашем случае 60% купленного продукта потребляется, а остальная часть переходит в запасы.
- $\beta_s = 0,8$  - норма привлечения депозитов. В нашем случае депозиты привлекаются в среднем на 1,25 квартала.
- $\delta = 0,5$  - мера риска собственника. Чем меньше  $\delta$ , тем больше риск собственника не получить планируемый доход. В нашем случае риск находится на среднем уровне.
- $\beta_k = 0,19$  - норма выдачи кредитов производителю. В нашем случае в процессе идентификации модели срок выдачи кредитов оказался равным примерно 5 кварталам.
- $\tau_{bl} = 0,3$  - параметр обращения денег, полученных от теневой зарплаты. В результате идентификации модели получилось, что деньги, полученные от теневой зарплаты, обращаются гораздо медленнее, чем от легальной зарплаты.

Результаты сопоставления расчетов со статистикой для 12 кварталов 2002-2004 гг. и прогноз на три года вперед (на 12 кварталов) приведены на рис. 7-30.

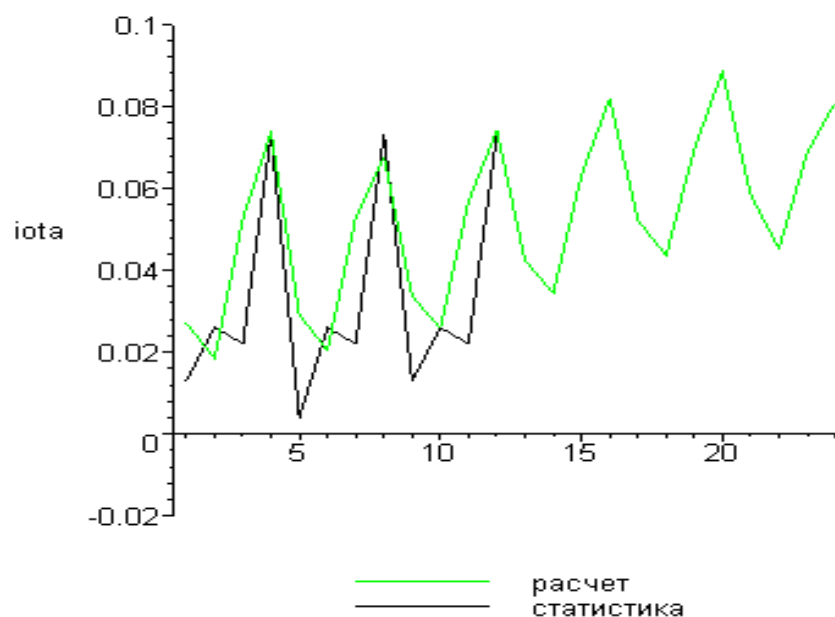


Рис. 7 – Темп инфляции

Как видно из рис.7, инфляция воспроизводится моделью достаточно точно. Из прогноза видно, что темп инфляции в 2005-2006 гг. в среднем возрастает, а в 2007 году немного уменьшается.

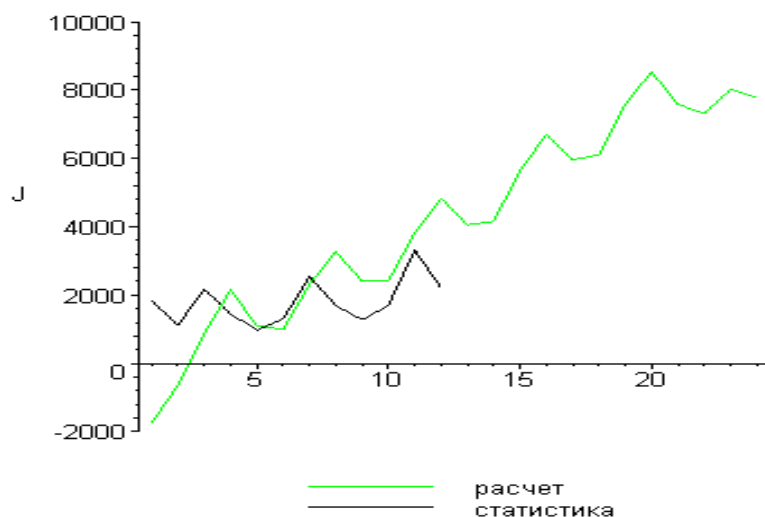


Рис. 8 – Валовое накопление, млн. руб. в реальном выражении в ценах 2002 года

Как видно из рис.8, значения валового накопления, рассчитанные моделью, близки к статистическим значениям, но темп роста инвестиций для расчетных значений выше, чем для фактических данных. Зато колебания описываются достаточно точно. Из прогноза видно, что валовое накопление в 2005-2006 гг. резко возрастает, а в 2007 останавливается в росте и остается на уровне 2006 года.

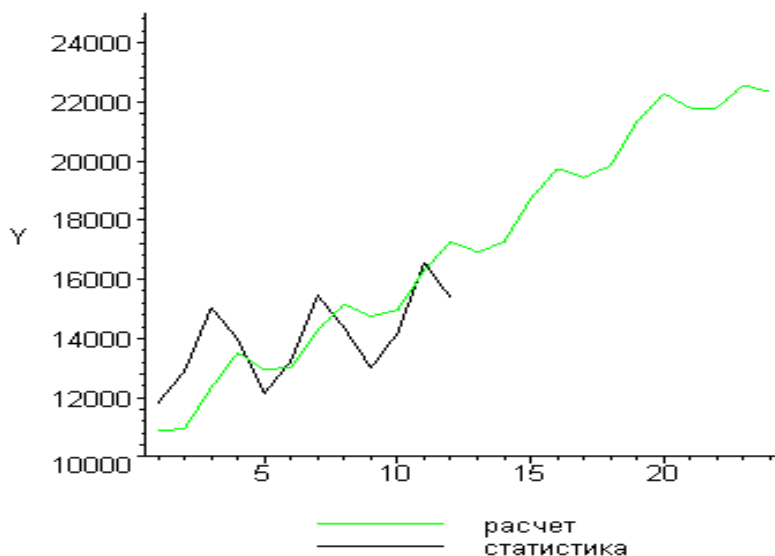


Рис. 9 – ВРП, млн. руб. в реальном выражении в ценах 2002 года

Как видно из рис.9, значения ВРП, рассчитанные моделью, близки к статистическим значениям. Внутригодовые колебания описываются достаточно точно, но являются более сглаженными. Из прогноза видно, что валовое накопление в 2005-2007 гг. постоянно возрастает, и с 12000 млн. руб. в первом квартале 2002 года достигает 22000 млн. руб. в четвертом квартале 2007 года.

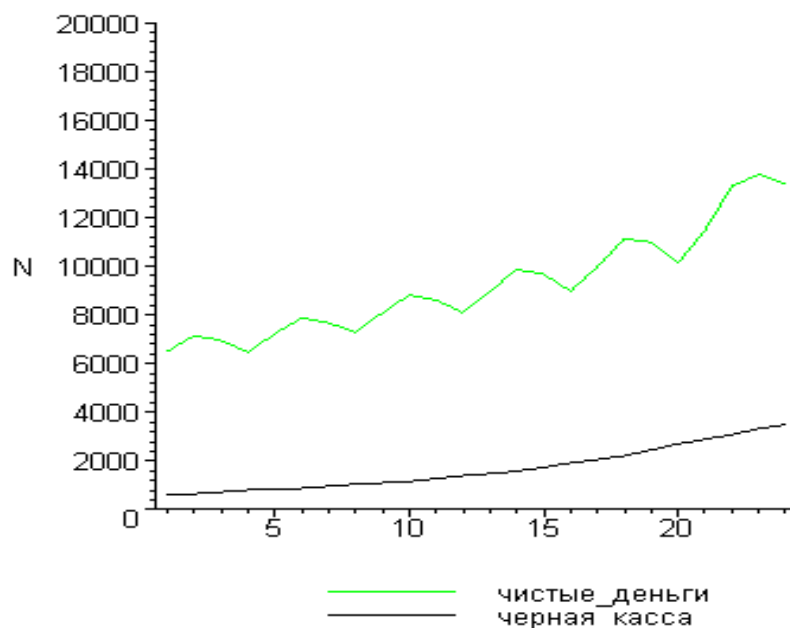


Рис. 10 – Остатки расчетных счетов и запас нелегальных денег у производителей, млн. руб

Как видно из рис. 10, в данном сценарии сумма нелегальной наличности у производителей намного меньше, чем легальной. С 2002 по 2007 год «черная касса» увеличивается, но незначительными темпами. Легальная наличность производителей в 2002-2007 гг. постепенно возрастает и в 2007 году достигает уровня 14000 млн. руб.

На рис. 11 представлена доля теневого выпуска в общем выпуске и доля теневой зарплаты в общей зарплате, определенные в результате расчетов модели для 24 кварталов 2002-2007 гг.

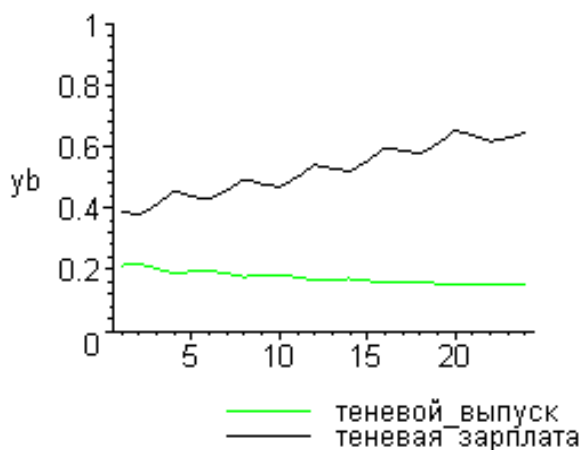


Рис.11 – Доля теневого выпуска в общем выпуске и доля теневой зарплаты в общей зарплате

Как видно из рис. 11, доля теневого выпуска составляет в среднем 18% в общем выпуске продуктов и услуг. Причем эта доля постепенно убывает на протяжении всего периода моделирования. Доля теневой зарплаты ведет себя иначе. В начале 2002 года она составляет 40% в общей зарплате и с каждым последующим годом неуклонно возрастает. В 2007 году доля теневой зарплаты составляет 65%.

## СРАВНЕНИЕ СЦЕНАРИЕВ СО СТАТИСТИКОЙ

Для анализа были рассмотрены 4 сценария. Значения основных параметров приведены в таблице 1

Табл. 1

Сценарии Параметры	<i>Сцен 1</i>	<i>Сцен 2</i>	<i>Сцен 3</i>	<i>Сцен 4</i>
Параметр обращения денег, полученных от легальной з/п	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>2</b>
<u>Параметр обращения денег, полученных от нелег. з/п</u>	<b>6,3</b>	<b>8,5</b>	<b>0,23</b>	<b>0,3</b>
Норма амортизации	<b>0,7</b>	<b>0,25</b>	<b>0,5</b>	<b>0,7</b>
Норма привлечения депозитов	<b>1</b>	<b>0,25</b>	<b>0,5</b>	<b>0,8</b>
<u>Норма выдачи кредитов</u>	<b>0,06</b>	<b>0,01</b>	<b>0,22</b>	<b>0,19</b>
<i>Доля кредитов в ВРП</i>	<b>0,2</b>	<b>0,15</b>	<b>0,15</b>	<b>0,15</b>
Коэффициент потребления купленного продукта	<b>0,5</b>	<b>0,75</b>	<b>0,7</b>	<b>0,6</b>
<i>Мера риска собственника</i>	<b>0,6</b>	<b>0,3</b>	<b>0,7</b>	<b>0,5</b>

Во всех сценариях наблюдаются достаточно весомые доли теневой зарплаты и теневого выпуска (доли теневого оборота). Следовательно, теневая экономика играет существенную роль в экономике Кировской области.

Прогноз изменения валового регионального продукта в последних двух сценариях более оптимистичен: наблюдается отчетливая тенденция роста.

Расчетные значения суммы кредитов предприятиям в 3 и 4 сценариях более адекватно описывают фактические данные. При этом прогнозные значения в данных сценариях выглядят более достоверными в отличие от прогноза первых двух сценариев.

Тенденция роста суммы сбережений населения, полученная в результате применения последних двух сценариев, благоприятно скажется на функционировании банковской системы. Снижение депозитов в первом сценарии отрицательно скажется на потенциале области. Результаты, показанные вторым сценарием (снижения суммы депозитов до отрицательного значения) явно неадекватны.

Первый и второй сценарии развития области показывают значительное превышение нелегальной наличности над легальной, что отрицательно скажется на экономическом потенциале области. Причем объемы нелегальной наличности доходят до 50000 млн. руб., в то время как ВРП находится в среднем на уровне 17000 млн. руб. за квартал. Такое соотношение показателей явно нереально. Таким образом, применение первого и второго сценария нецелесообразно.

Третий и четвертый сценарии дают более оптимистичные оценки: уровень легальной наличности выше уровня нелегальной. При этом четвертый сценарий прогнозирует устойчивый монотонный рост легальной наличности. Рост легальной наличности приводит к увеличению налоговых поступлений в бюджеты всех уровней и

благоприятно сказывается на потенциале области. Поэтому четвертый (оптимистический) сценарий развития является более предпочтительным.

Четвертый сценарий развития прогнозирует постепенное уменьшение доли теневого выпуска продукции, в то время как в третьем сценарии эта доля находится на одном и том же уровне. Среднее значение доли теневого выпуска, полученное в четвертом сценарии, значительно ниже значения третьего сценария.

Прогнозируемая в третьем сценарии доля теневой зарплаты доходит до уровня 90%, в то время как в четвертом сценарии эта доля не превышает 65%. Более низкий уровень теневой зарплаты повышает экономический потенциал области.

После анализа основных показателей всех четырех сценариев, можно выделить четвертый сценарий развития как наиболее благоприятный для увеличения экономического потенциала Кировской области. Таким образом, параметры модели четвертого сценария являются наиболее оптимальными и их можно рекомендовать к использованию при принятии управленческих решений.

Расчёты по модели проводились в тот период, когда в экономике Кировской области наблюдался весьма устойчивый рост ВРП и инвестиций (валовых накоплений). Поэтому результаты по большинству сценариев, предсказывающие в 2007 году снижение темпов роста (а в некоторых сценариях и абсолютное снижение) валовых накоплений казались неожиданными и вызвали критику со стороны специалистов Департамента экономики Правительства Кировской области. Однако данные, полученные из этого Департамента по результатам экономического развития области за 2002-2006 годы и прогноз на 2007-2010 годы<sup>12</sup> свидетельствуют о достаточно хорошем совпадении тенденции снижения валовых накоплений именно в те периоды, которые спрогнозированы нашей моделью. На рис. 12-13 приводятся данные состояния (2002-2006 гг.) и прогноза (2007-2010 гг.).

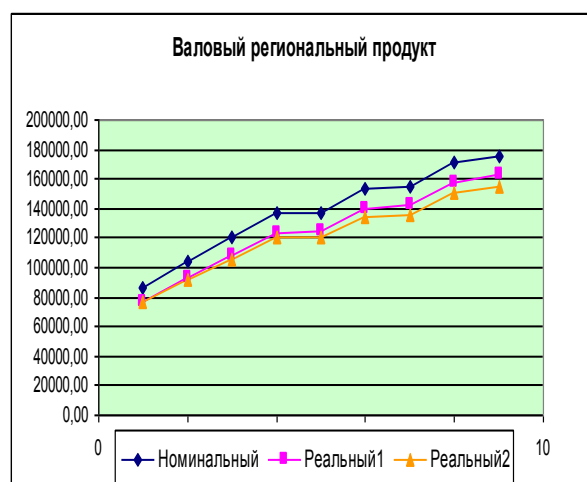


Рис. 12 Данные по ВРП Департамента экономики (номинальные, в существующих ценах) и пересчитанные в ценах 2002 г. (реальные 1), пересчитанные с учётом дефлятора (реальные 2)

<sup>12</sup> Аналитическая записка о социально-экономическом развитии Кировской области

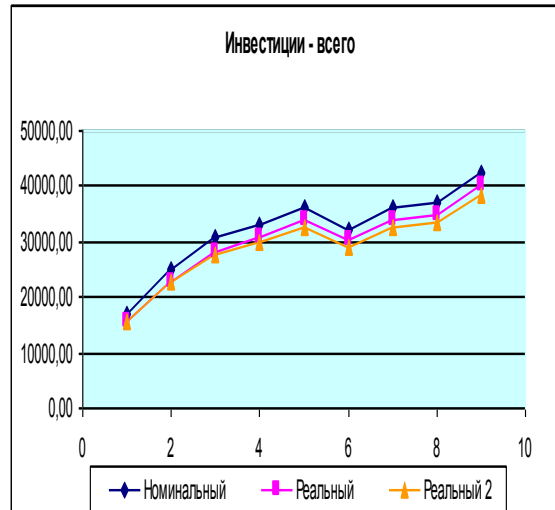


Рис. 12 Данные по валовым накоплениям (инвестициям) Департамента экономики (номинальные, в существующих ценах) и пересчитанные в ценах 2002 г. (реальные 1), пересчитанные с учётом дефлятора (реальные 2)

## Литература

1. Baldassarre G. Neural networks and genetic algorithms for the simulation models of bounded rationality theory: An application to oligopolistic markets // Rivista di Politica Economica. V. 12, 1997, pp. 107-146.
2. Zizzo D.J., Sgroi D. Bounded-Rational Behavior by Neural Networks in Normal Form Games. Nuffield College Oxford Economics Discussion Paper. 2000, No. 2000-W30.
3. Grothmann R. Multi-Agent Market Modeling based on Neural Networks. Thesis presented for the Degree of Doctor of Economics. Bremen University, 2002.
4. Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Бахтизина Н.В. CGE модель социально-экономической системы России со встроенными нейронными сетями. – М.: ЦЭМИ РАН, 2005. – 152 с.
5. Завриев Н.К., Поспелов И.Г., Поспелова Л.Я. Уроки эксплуатации системы ЭКОМОД и новые перспективы. – М.: ФАЗИС – ВЦ РАН, 2004.
6. Шатров А.В., Осипова О.Н. Имитационная модель и сценарии развития экономики Кировской области / Сборник трудов летней школы ЭКОМОД-2006.- Киров, изд. ВятГУ, с.25-90

# ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

Шатров А.В., Шатрова Л.Н. (г. Киров)

Данная работа посвящена вопросам составления дискретных экономических моделей и анализу сценариев развития на базе этих моделей.

Дискретные модели позволяют учесть ряд вопросов более точно, чем непрерывные; в то же время их реализация на компьютере более проста и естественна, чем в непрерывном случае.

## 1. Введение

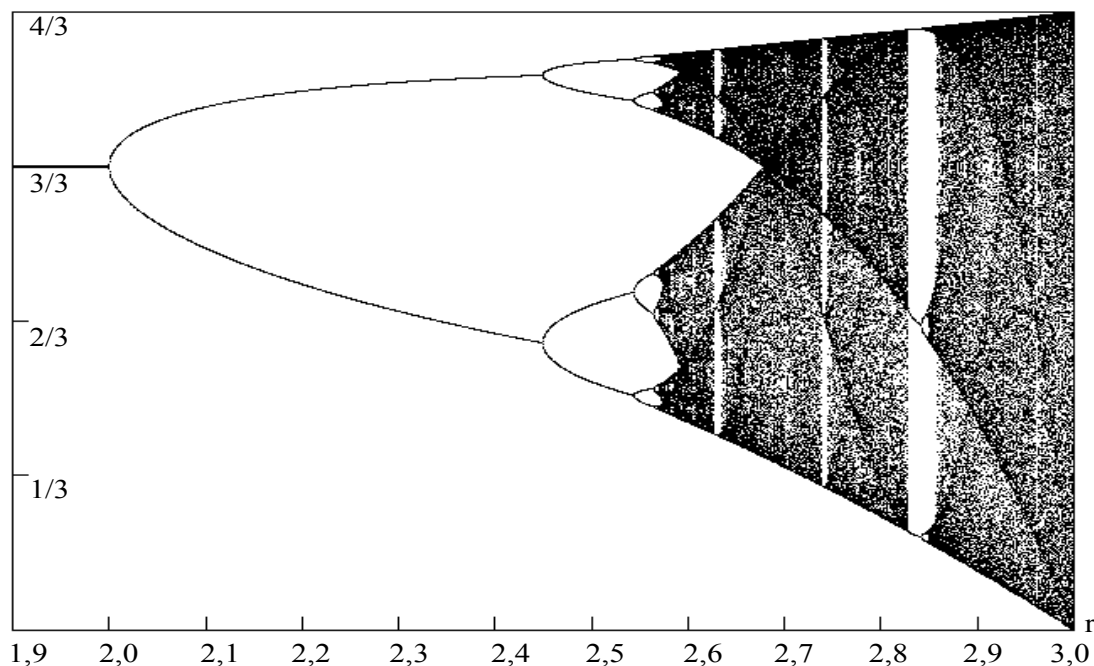
Обычно при описании динамики экономических систем принят аппарат дифференциальных уравнений, как хорошо развитый в математическом отношении и позволяющий уверенно реализовывать как этап составления модели, так и этап решения уравнений и анализа результатов решения.

В то же время, известно, что экономические процессы носят принципиально дискретный характер. Платежи происходят через конечные промежутки времени и конечными суммами. Доход той или иной экономической системы – предприятия, государства – исчисляется также через конечные промежутки времени и конечными суммами. Все это позволяет утверждать, что непрерывные модели, опирающиеся на аппарат дифференциальных уравнений, являются в данном случае заведомо приближенными, сглаживающими реальные дискретные процессы.

Наиболее очевидны и хорошо изучены эффекты дискретизации в динамических моделях биологических популяций [1-3]. В случае дискретного отображения Ферхюльста

$$x_{n+1} = f(x_n) = (1 + r)x_n - rx_n^2 \quad (1.1)$$

можно получить представление о всех возможных типах поведения популяции. Здесь окажется полезной *бифуркационная диаграмма*, отражающая зависимость динамики от параметра  $r$ .





Для каждого значения  $r$  первые 5000 итераций были оставлены "в тени", чтобы процесс успел войти в свой *аттрактор* (который характеризует асимптотическое поведение, не включающее особенности переходного периода), а следующие 120 итераций были нанесены на диаграмму для того, чтобы показать природу этого аттрактора. Он состоит из одной точки при  $r < 2$ , из двух точек при  $2 < r < \sqrt{6}$ , затем из 4, 8, 16, ... точек вплоть до области хаоса, где точки аттрактора могут заполнять целые полосы.

Подводя итог, следует подчеркнуть, что даже в таком, казалось бы, простом и хорошо изученном в континуальном варианте случае как динамика отдельно взятой популяции с учетом смертности дискретная модель не только значительно упрощает вычисления, но и позволяет выявить некоторые характерные явления, которые принципиально невозможно обнаружить в континуальном случае. При этом важно, что такие явления носят объективный характер, а не являются математической выдумкой.

Континуальная модель сглаживает скачки процесса, усредняя результаты для больших промежутков времени. Однако в процессе функционирования популяции бывают явления, которые в принципе невозможно сгладить. Например, рыбы мечут икру в громадных количествах, однако большинство появившихся мальков вскоре погибает. Таким образом, за один цикл наблюдается вначале большой скачок роста популяции, а затем не менее большой скачок убывания. Подобные явления усреднить нельзя. Очевидно, что такие же явления возникают в экономических процессах как на микро- так и макроуровнях.

## 2. Графическое моделирование односекторной экономической системы

Рассмотрим более подробно процесс моделирования односекторной экономической системы [4-5]. С этой целью начнем с графической интерпретации.

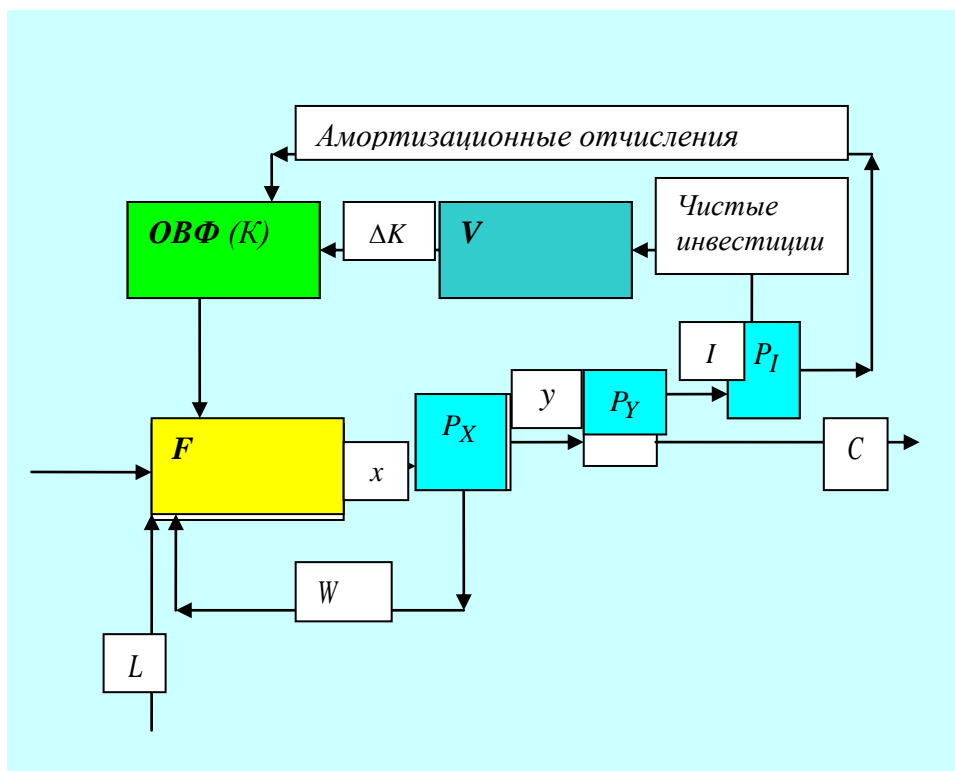


Рис. 2.1.

На рис.2.1 изображены факторы, которые характеризуют производственный процесс: труд  $L$ ; производственные средства, то есть основные производственные фонды (ОВФ), или производственный капитал  $K$ ; предметы труда, которые слагаются из природных ресурсов  $W^E$ , и предметы труда  $W$ , возвращенные в производство как часть валового продукта  $x$ .

Валовой продукт  $x$  распределяется в блоке распределения  $P_x$  на часть  $W$ , которая идет на производственное потребление, и конечный продукт  $y$ . В свою очередь, конечный продукт разделяется в блоке распределения  $P_y$  на валовые капиталовложения (инвестиции)  $I$  и на непроизводственное потребление  $C$ . Инвестиции  $I$  разделяются на амортизационные отчисления  $A$  и чистые инвестиции  $I_1$ , которые идут на расширение ОВФ (блок  $P_1$ ).

В простейшей односекторной модели делаются предположения, что валовые инвестиции в том же году полностью расходуются на прирост ОВФ и на амортизацию. В дискретном случае эта связь имеет вид:

$$I_t = q\Delta K_t + A_t, \quad (2.1)$$

где  $\Delta K_t = K_{t+1} - K_t$  – прирост производственного капитала в году  $t$ ,  $q$  – коэффициент пропорциональности (параметр модели),  $A_t = \mu K_t$  – амортизационные отчисления,  $\mu$  – коэффициент амортизации,  $K_t$  – производственный капитал (ОВФ) в году  $t$ .

В случае непрерывного времени аналогом этого уравнения является:

$$I(t) = q \frac{dK(t)}{dt} + \mu K(t) \quad (2.2)$$

Отсюда можно вывести уравнение движения капитала (фондов):

$$K'(t) = \frac{dK(t)}{dt} = \frac{1}{q}(I(t) - \mu K(t)). \quad (2.3)$$

Присоединяя уравнение связи, получаем односекторную динамическую макромоделю в дискретном варианте:

$$x_t = W_t + q\Delta K_t + \mu K_t + C_t, \quad (2.4)$$

потому что  $x_t = W_t + y_t$ ,  $y_t = I_t + C_t$ .

Если считать производственные затраты  $W$  пропорциональными выпуску валовой продукции  $x$ :

$$W = ax, \quad (2.5)$$

то дискретная односекторная динамическая модель экономики приобретает вид:

$$x_t = ax_t + q\Delta K_t + \mu K_t + C_t \quad (2.6)$$

или

$$\Delta K_t = \frac{1}{q}[(1-a)x_t - \mu K_t - C_t] \quad (2.7)$$

В непрерывном варианте эта модель имеет вид:

$$K'(t) = \frac{1}{q} [(1-a)x(t) - \mu K(t) - C(t)] \quad (2.8)$$

Иногда используют упрощенные варианты односекторной динамической макромоделей.

### 3. Линейная односекторная динамическая модель Леонтьева.

Считается, что все валовые инвестиции направлены на введение в действие новых ОВФ (основной производственный капитал не изнашивается), причем прирост выпуска продукции  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  пропорционален инвестициям,

$$I_t = v \Delta x_t \quad (3.1)$$

Тогда из уравнения (2.1), учитывая (2.5), (2.9), получаем модель Леонтьева [4-5]

$$x_t = ax_t + v \Delta x_t + C_t. \quad (3.2)$$

В непрерывном варианте из аналогичных соображений эта модель имеет вид:

$$x(t) = ax(t) + v \frac{dx(t)}{dt} + C(t) \quad (3.3)$$

### 4. Двухсекторная динамическая макроэкономическая модель

Пусть теперь экономика изображается двумя отраслями или секторами хозяйства, каждая из которых выпускает валовую продукцию  $X^1, X^2$ , используя труд, средства и предметы труда. Далее, продукция каждой их отраслей или секторов распределяется в блоках распределения  $P_{X^1}, P_{X^2}$  (рис. 4.1) на конечные продукты отраслей  $Y^1, Y^2$  и производственные потребления  $W^1, W^2$ :

$$X^i = W^i + Y^i, \quad i = 1, 2. \quad (4.1)$$

Однако в двухсекторной модели промежуточный продукт  $W^i, i=1, 2$  расходуется на производство не только в своей отрасли, но и другой, причем соответствующее распределение совершается в блоках  $P_{W^1}, P_{W^2}$ :

$$W^i = W_i^i + W_j^i, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (4.2)$$

Если межотраслевые потоки  $W_j^i$  пропорциональны продукции  $X^j$   $j$ -й отрасли,  $W_j^i = a_{ij} X^j$ , где  $a_{ij}$  – норма затрат продукции  $i$ -й отрасли на единицу продукции  $j$ -й отрасли, то распределение валовой продукции, как и в случае статической модели Леонтьева имеет вид:

$$\begin{aligned} X^1 &= a_{11}X^1 + a_{12}X^2 + Y^1, \\ X^2 &= a_{21}X^1 + a_{22}X^2 + Y^2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Следовательно, блоки распределения  $P_{W^1}, P_{W^2}$  создают подсистему межотраслевых связей. Двухсекторная модель межотраслевого баланса изображена на схеме рис. 2.

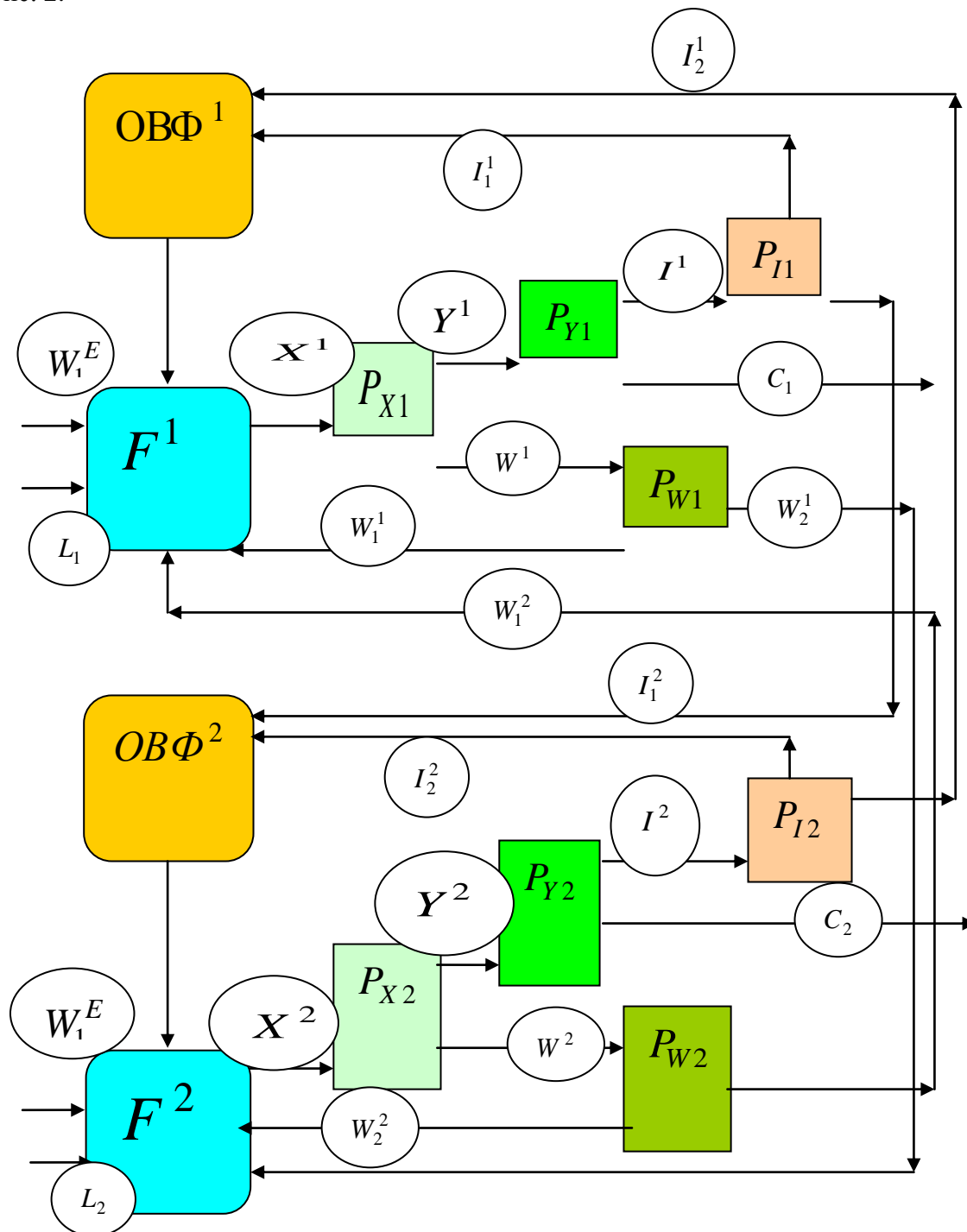


Рис.4.1

Разделение конечных продуктов  $Y^i$ ,  $i=1,2$  отраслей на инвестиции  $I^i$  и непроеизводственное потребление  $C^i$  производится в блоках распределения  $P_Y^i$ ,  $i = 1,2$ :

$$Y^i = I^i + C^i, \quad i = 1,2. \quad (4.4)$$

Если для упрощения модели считать, что отсутствуют амортизационные отчисления, то следующая затрата  $I^i$  производится в блоках  $P_I^i$  по схеме  $I^i = I_i^i + I_j^i$ ,  $i, j = 1,2$ ,  $i \neq j$ . При инвестициях, пропорциональных приросту валовой продукции,

$$I_j^i = v_{ij} \Delta X^j, \quad i, j = 1,2. \quad (4.5)$$

Подставляя в (4.3) формулы (4.4), (4.5), получаем двухсекторную динамическую модель для дискретного времени:

$$\begin{aligned} X_t^1 &= a_{11} X_t^1 + a_{12} X_t^2 + v_{11} \Delta X_t^1 + v_{12} \Delta X_t^2 + C_t^1, \\ X_t^2 &= a_{21} X_t^1 + a_{22} X_t^2 + v_{21} \Delta X_t^1 + v_{22} \Delta X_t^2 + C_t^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Используя подобные соображения, можно получить аналогичную двухсекторную динамическую модель для непрерывного времени. Она будет иметь вид:

$$\begin{aligned} X^1(t) &= a_{11} X^1(t) + a_{12} X^2(t) + v_{11} \frac{dX^1(t)}{dt} + v_{12} \frac{dX^2(t)}{dt} + C^1(t), \\ X^2(t) &= a_{21} X^1(t) + a_{22} X^2(t) + v_{21} \frac{dX^1(t)}{dt} + v_{22} \frac{dX^2(t)}{dt} + C^2(t). \end{aligned} \quad (4.7)$$

### 5. Решение задач на основе дискретной модели для односекторной экономики

Рассмотрим дискретное уравнение (3.2), преобразовав его к виду:

$$\Delta x_t = \frac{1}{v} [(1-a)x_t - C_t] \quad (5.1)$$

Это уравнение позволяет вычислить приращение валового продукта  $\Delta x_t$  при известном  $x_t$ . Повторяя эти вычисления циклически, получаем зависимость  $x_t$  от времени (дискретную). Рассмотрим, для начала, постоянные значения величин  $a$  и  $C$ . Так же, как в континуальном случае, вначале решим статическую задачу, отвечающую  $\Delta x = 0$ :

$$(1-a)x_t - C_t = 0 \quad (5.2)$$

Отсюда:

$$x_t^* = \frac{C_t}{1-a} \quad (5.3)$$

Если мы выберем начальное значение  $x_t$  равным  $x_t^*$ , то величина  $x_t$  в дальнейшем не изменяется. Если выбрать начальное значение  $x_t$  меньшим, чем  $x_t^*$ , то  $x_t$  в дальнейшем убывает. Соответствующие графики приведены на рис. 5.5.1.

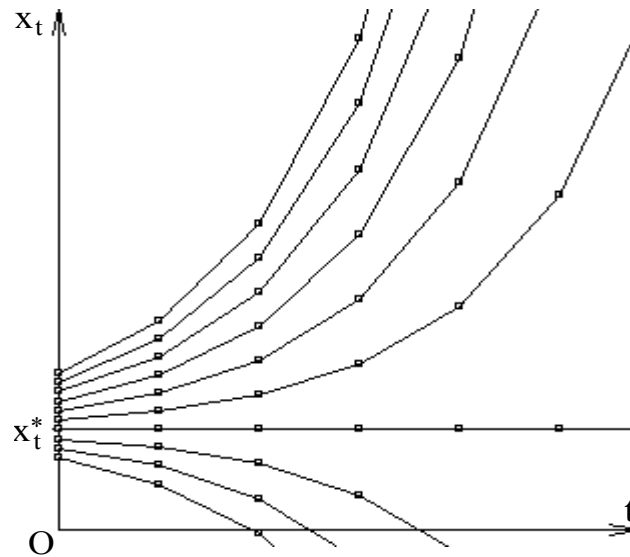


Рис. 5.5.1.

Хотя, в отличие от непрерывного случая, здесь графики являются ломаными линиями, в целом характер этих графиков ничем принципиально не отличается от аналогичных непрерывных графиков. Состояние равновесия  $x_t^*$  является неустойчивым; любые отклонения от него в дальнейшем нарастают. Это типично для линейной задачи.

Перейдем к нелинейному обобщению одномерного случая (односекторной экономики), выбирая квадратичную функцию для зависимости функции затрат. Выбор нелинейности такого вида по существу означает учёт второго члена разложения нелинейной функции затрат в ряд Тейлора по степеням  $x$ . В уравнении (2.5) правую часть  $W = ax$  заменим на:

$$a_0 + a_1x_t + a_2x_t^2, \quad (5.4)$$

а величину  $C_t$  на:

$$b_0 + b_1x_t + b_2x_t^2 \quad (5.5)$$

В итоге вместо (3.2) получаем:

$$x_t = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x_t + (a_2 + b_2)x_t^2 + v\Delta x_t \quad (5.6)$$

Отсюда:

$$\Delta x_t = \frac{1}{v} \left[ -a_0 - b_0 + (1 - a_1 - b_1)x_t - (a_2 + b_2)x_t^2 \right] \quad (5.7)$$

Рассмотрим решение этого уравнения. Вновь начнем со статической задачи. Случаю  $\Delta x_t = 0$  соответствует статическое уравнение:

$$(a_2 + b_2)x_t^2 - (1 - a_1 - b_1)x_t + a_0 + b_0 = 0 \quad (5.5.8)$$

Оно имеет два корня:

$$x_{t,1,2} = \frac{1 - a_1 - b_1 \pm \sqrt{(1 - a_1 - b_1)^2 - 4(a_2 + b_2)(a_0 + b_0)}}{2(a_2 + b_2)} \quad (5.5.9)$$

Если эти корни действительны, то они отвечают двум состояниям равновесия системы. Так же, как в непрерывном случае, при начальном значении  $x_t$ , меньшем меньшего из корней наблюдается дальнейшее убывание  $x_t$ . Если выбрать начальное значение  $x_t$  в промежутке между двумя положениями равновесия, то величина  $x_t$  возрастает, стремясь асимптотически к большему из корней. Если выбрать начальное значение  $x_t$  большим, чем больший из корней, то наблюдается убывание к значению этого корня (рис. 5.5.2).

До сих пор дискретные результаты и в нелинейном случае ничем принципиально не отличаются от аналогичных непрерывных результатов. Вспомним, что при изучении динамики популяции новые результаты получались при увеличении коэффициента рождаемости. Его аналогом в данном случае является коэффициент фондоемкости  $v$ . Уменьшая этот коэффициент, мы увеличиваем приращение  $\Delta x_t$  при прочих равных условиях. В результате получаются в точности те же эффекты, что и в динамике Ферхюльста. На рисунках 5.5.3..5.5.6 приведены соответствующие результаты.

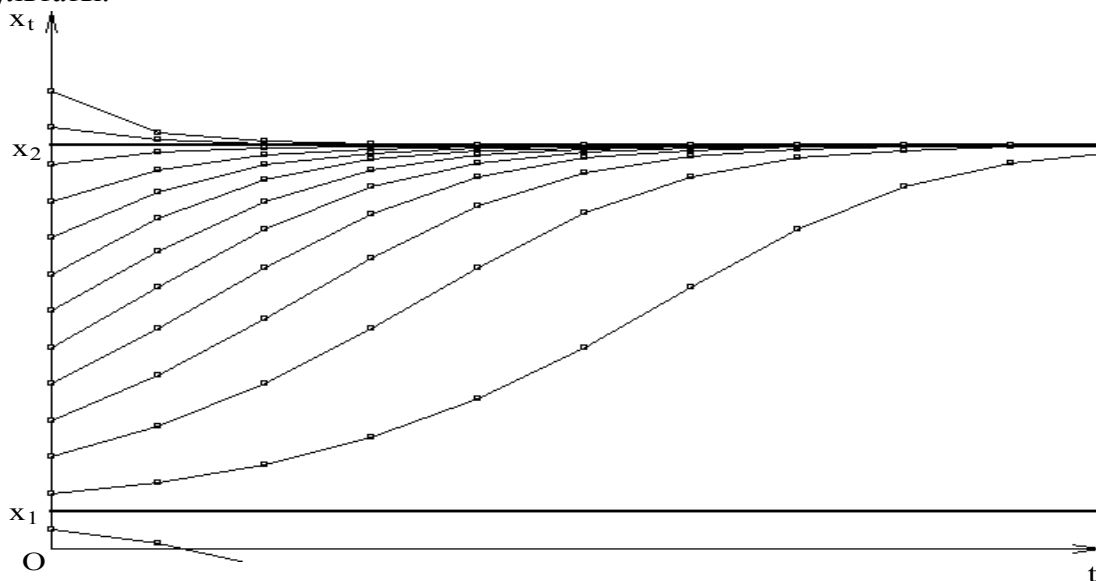


Рис. 5.5.2.  $v = 1$ .

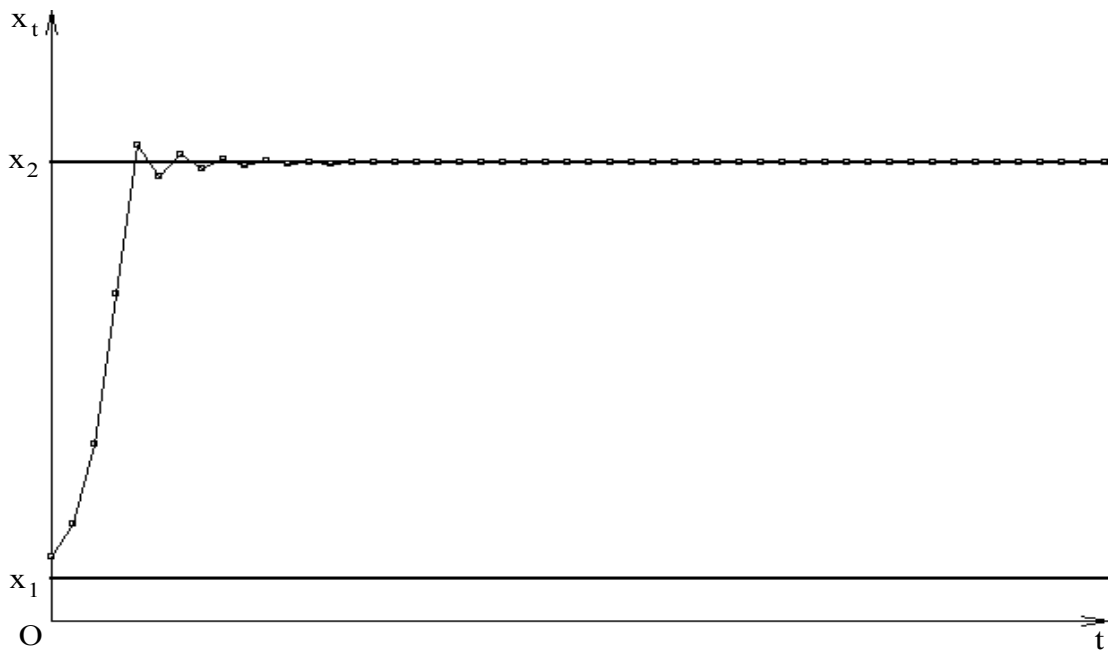


Рис. 5.5.3.  $\nu = 0.4$ .

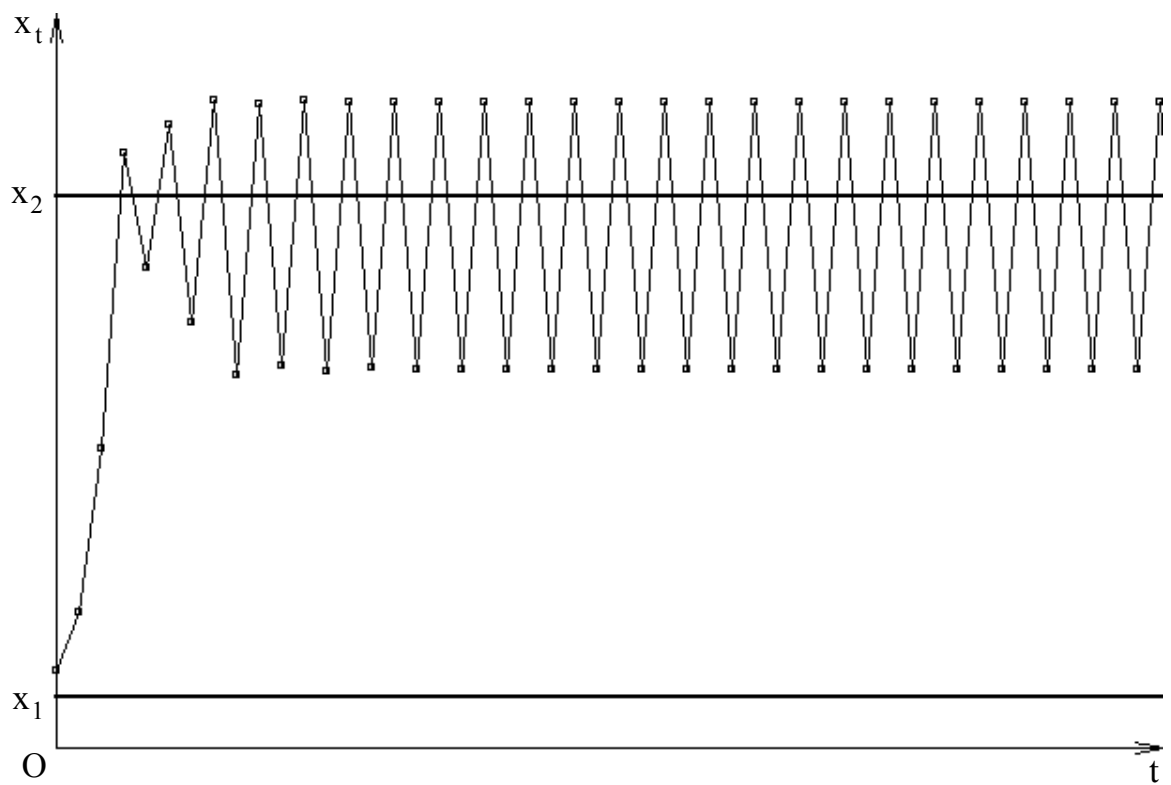


Рис. 5.5.4.  $\nu = 0.28$



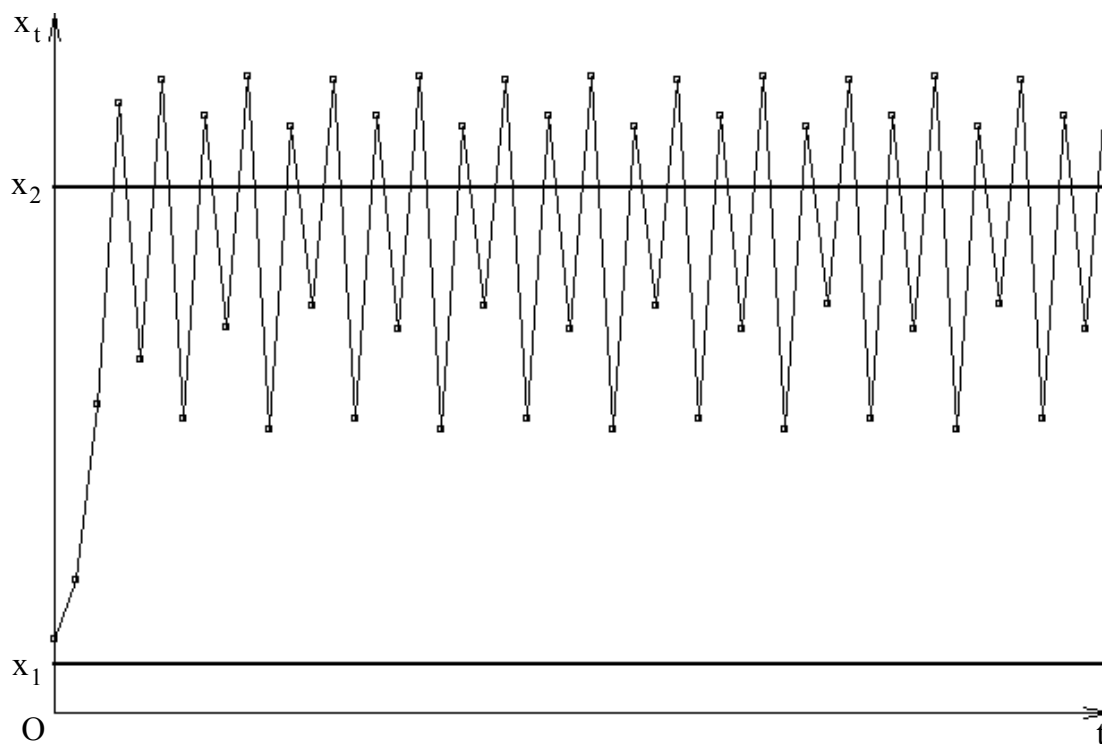


Рис. 5.5.5.  $\nu = 0.26$ .

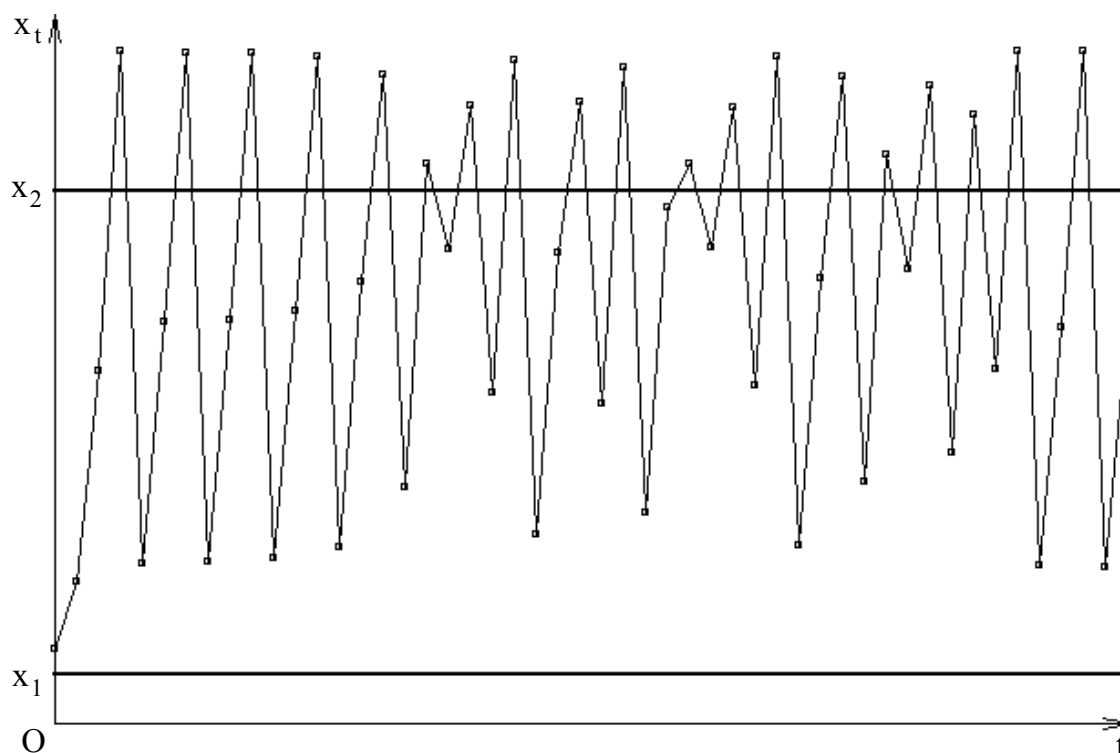


Рис. 5.5.6.  $\nu = 0.2339$ .

Мы видим, что с уменьшением величины  $\nu$  вначале нарушается плавность ломаной (рис. 5.5.3), затем вместо одного состояния равновесия появляются два (рис. 5.5.4), затем четыре (5.5.5) и, наконец, ломаная приобретает хаотический характер (5.5.6).

С экономической точки зрения этот результат представляет значительный интерес. Известно, что рыночная экономика является неустойчивой, что проявляется, в

частности, в ее стремлении к хаотическим, непрогнозируемым изменениям. Для моделирования таких хаотических явлений обычно применяются недетерминированные, вероятностные модели. Однако, как мы видим, вполне возможно моделирование хаотического изменения экономических параметров и на основе детерминированной модели, что создает дополнительные возможности для решения задач прогнозирования.

### **Выводы**

Рассмотрены методы построения дискретных экономических моделей, обладающих большей достоверностью, по сравнению с континуальными, и в то же время более удобных для реализации на компьютерах.

Уже первые попытки решения задач при помощи таких моделей показали возможность выявления, с их помощью, таких явлений, которые невозможно выявить при помощи континуальных моделей.

Отметим, что дискретные экономические модели в настоящее время почти не применяются на практике, например, с целью прогнозирования развития той или иной экономической системы.

### **Литература**

1. Базыкин, А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций./ А.Д. Базыкин. – М.: Наука, 1985. – 182 с.
2. Ризниченко, Г.Ю. Лекции по математической биофизике./ Г.Ю. Ризниченко. – Москва – Ижевск: R&CD, 2002. – 220 с.
3. Данилов, Ю.А. Лекции по нелинейной динамике./ Ю.А. Данилов. – М.: КомКнига, 2006. – 204 с.
4. Краснощёков, П.С. Принципы построения моделей./ П.С. Краснощёков, А.А. Петров. – М.: ФАЗИС: ВЦ РАН, 2000. – 412 с.
5. Поспелов, И.Г. Моделирование экономических структур/ И.Г. Поспелов. – М.: ФАЗИС: ВЦ РАН, 2003. – 194 с.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕКОМПОЗИЦИИ\*

Ю.Н. Павловский (г. Москва)

*В работе рассмотрена геометрическая теория декомпозиции.*

1. Геометрическая теория декомпозиции [1-12] – языковая среда, в рамках которой реализуется следующий подход к проблеме декомпозиции математических объектов и моделей: объект (модель) загружается в класс объектов, где определено понятие об изоморфизме и его декомпозицией считается его сохраняющееся при изоморфизмах «представление» с помощью семейства более «простых» объектов из данного класса, причем по этому «представлению» исходный объект должен восстанавливаться однозначно. Естественно, будут даны точные эквиваленты понятиям, использованным в приведенном интуитивном описании подхода к проблеме декомпозиции.

Геометрическая теория декомпозиции возникла из чисто практических потребностей, определявшихся основным направлением работы отдела "Имитационные системы" (см. <http://www.ccas.ru>), где сотрудничает автор. Это направление состоит в продвижении математического компьютерного моделирования и информатики в новые, сложные области исследований и практической деятельности. Средствами для этого являются:

- разработка математических моделей конкретных сложных процессов;
- разработка инструментальных средств, поддерживающих создание компьютерных систем, осуществляющих анализ процессов и прогноз их развития с помощью сложных математических моделей;
- создание таких компьютерных систем и попытки внедрить их в практику исследований, планирования, управления, проектирования.

В связи с этим и возникла потребность понять когда можно, а когда нельзя разбить модель на более простые «части» и, если это можно в принципе, то как именно это сделать. Кроме того, возникла также потребность в разработке понятийного аппарата, с помощью которого можно было бы ориентироваться в вопросе о границе применимости математических средств при изучении реальных процессов, а также в вопросе о взаимодействии математических и гуманитарных средств при их анализе и прогнозе.

2. В качестве инструментального средства в геометрической теории декомпозиции используется бурбаковский формализм, поскольку в нем имеются удобные средства для формализации тех понятий, которые использовались при описании интуитивного подхода к проблеме декомпозиции. В частности, класс «родственных объектов» формализуется с помощью понятия «род структуры». Род структуры в бурбаковском формализме является записью, в том смысле, в котором это определяется в языках программирования, например, в Паскале. Ниже выписан некоторый род структуры, обозначенный буквой  $\Sigma$ . Поля записи  $\Sigma$  заключены в ломаные скобки и разделены точкой с запятой. Те поля, которые могут отсутствовать, заключены в квадратные скобки.

$$\Sigma = \langle X; [(A, \omega)]; \sigma \subset S(X, A); [P(X, \sigma, A, \omega)] \rangle$$

---

\* Работа поддержана грантом РФФИ 07-07-00071-а.

Поясним синтаксис и семантику полей записи  $\Sigma$ . Первое поле синтаксически является буквой (или несколькими буквами, разделенными запятой), называемой базисным (базисными) множеством. Это множество будет снабжаться структурой. Второе поле рода структуры  $\Sigma$  является вспомогательным математическим объектом (их может быть несколько, тогда они разделяются запятой, или не быть ни одного). Что такое математический объект определяется ниже с помощью понятия о роде структуры. Третье поле называется соотношением типизации (их может быть несколько, тогда они разделяются запятой). Слева в соотношении типизации фигурирует буква, называемая «родовой константой» рода структуры  $\Sigma$ . Как будет ясно из дальнейшего изложения, это и есть структура, которой снабжается базисное множество  $X$ . Справа в соотношении типизации фигурирует множество  $S(X, A)$ , которое построено из  $X$  и  $A$  с помощью операций взятия множества частей и декартова (прямого) произведения, а буква  $S$  означает схему этого построения, указывающую с какими множествами и в каком порядке осуществляются эти операции.

3. Поясним это более подробно. Для определения схемы необходимо перенумеровать базисные и вспомогательные множества. Пусть, например, множество  $X$  имеет номер 1, множество  $A$  имеет номер 2. Тогда схема построения множества  $X$  есть 1, схема построения множества  $A$  есть 2. Схема построения множества  $X \times A$  есть  $1 \times 2$ . Если  $\beta(X)$  есть множество частей множества  $X$ , то схема построения этого множества есть  $\beta(1)$ , схема построения множества  $\beta(X \times A)$  есть  $\beta(1 \times 2)$ . И так далее. В схеме участвуют номера множеств. Множество, построенное по некоторой схеме, получается из схемы с помощью операции подстановкой вместо номеров множеств самих множеств. (Множество схем можно описать с помощью формальной грамматики [12].)

Таким образом, структура, которой снабжается базисное множество, есть часть множества, построенного из базисного и вспомогательного с помощью операций декартова произведения и взятия множества частей.

Далее понадобится понятие о распространении отображений по некоторой схеме. Пусть  $S(1,2)$  — некоторая схема и  $S(X, A)$  — множество, построенное по этой схеме из  $X$  и  $A$ . Пусть  $X'$  — еще одно множество и  $f: X \rightarrow X'$  — отображение. Это отображение можно распространить по схеме  $S(1,2)$  до отображения  $S(f, id_A): S(X, A) \rightarrow S(X', A)$ , где  $id_A: A \rightarrow A$  — тождественное отображение множества  $A$ . Для того, чтобы определить все такие распространения достаточно определить распространение на декартово произведение и распространение на множество частей. Пусть  $f: X \rightarrow X'$ ,  $g: Y \rightarrow Y'$  — отображения. Их распространение на декартово произведение есть отображение  $f \times g: X \times Y \rightarrow X' \times Y'$ , определенное формулой  $f \times g(x, y) = (f(x), g(y))$ . Распространение  $\beta(f): \beta(X) \rightarrow \beta(X')$  отображения  $f: X \rightarrow X'$  на множество частей определено формулой  $\beta(f)(U) = f(U)$ .

Последнее поле  $P(X, \sigma, A, \omega)$  рода структуры  $\Sigma$ , называемое его аксиомой, (оно может отсутствовать) является соотношением, предъявляющим к структуре некоторые требования. Аксиома рода структуры должна быть переносима при биекциях [10].

4. Примеры родов структур.

$BO = \langle X; \sigma \subset X \times X \rangle$  --- род структуры бинарного отношения (ориентированного графа).

$MAPS = \langle X; \sigma \subset X \times X; (\forall x \in X)(\exists! x' \in X)((x, x') \in \sigma) \rangle$  — род структуры отображения множества в себя.

$EQ = \langle X; \sigma \subset X \times X; \sigma \text{ рефлексивно, симметрично, транзитивно} \rangle$  — род структуры отношения эквивалентности

$PO = \langle X; \sigma \subset X \times X; \sigma \text{ рефлексивно, антисимметрично, транзитивно} \rangle$  — структуры частичного порядка.

$GR = \langle X; \sigma \subset X \times X \times X; \sigma \text{ задает на } X \text{ всюду определенную алгебраическую операцию, с нейтральным элементом, относительно которой каждый элемент обратим} \rangle$  — род структуры абстрактной группы.

Пусть  $(G, \omega)$  — некоторая абстрактная группа. Ее можно использовать в качестве вспомогательного объекта при определении одного из родов структуры, соответствующего тому, что именуется группой преобразований:

$TR(G, \omega) = \langle X; (G, \omega); \sigma \subset G \times X \times X; ATR(G, \omega)(X, \sigma, G, \omega) \rangle$  — род структуры действия группы  $(G, \omega)$  на множестве  $X$ . Через  $ATR(G, \omega)(X, \sigma, G, \omega)$  обозначена известная аксиома этого рода структуры. Это один из родов структур, с помощью которого в рамках бурбаковского формализма интерпретируется теория групп преобразований. В этом роде структуры абстрактная группа является вспомогательным множеством. Другим родом структуры, соответствующим теории групп преобразований, является следующий род структуры.

$TRGR = \langle X, G; \omega \subset X \times X \times X, \sigma \subset G \times X \times X; ATRGR(X, \sigma, G, \omega) \rangle$  — род структуры группы преобразований. Через  $ATRGR(X, \sigma, G, \omega)$  обозначена известная аксиома этого рода структуры. Это еще один из родов структур, с помощью которого в рамках бурбаковского формализма интерпретируется теория групп преобразований.

$LVP = \langle X; (C, \omega); \sigma \subset X \times X \times X, \lambda \subset C \times X \times X; ALVP(G, \omega)(X, \sigma, \lambda, G, \omega) \rangle$  — род структуры линейного векторного пространства над полем комплексных чисел. Это поле обозначено здесь через  $C$ , а структура на этом множестве обозначена через  $\omega$ .

$LLVP = \langle X; (C, \omega); \sigma \subset X \times X \times X, \lambda \subset C \times X \times X, \delta \subset X \times X; ALOLVP(G, \omega)(X, \sigma, \lambda, \delta, G, \omega) \rangle$  — род структуры линейного оператора в линейном векторном пространстве.

5. Математические объекты. Пусть  $\Sigma = \langle X; [(A, \omega)]; \sigma \subset S(X, A); [P(X, \sigma, A, \omega)] \rangle$  — род структуры,  $(E, \tau)$  — пара множеств, таких, что имеет место  $\tau \subset S(E, A)$  и  $P(E, \tau, A, \omega)$ . Тогда  $(E, \tau)$  есть  $\Sigma$ -объект. Говорят также, что множество  $E$  снабжено структурой  $\tau$  рода  $\Sigma$  или  $\tau$  есть структура рода  $\Sigma$  на множестве  $E$ . С каждым родом структуры, таким образом, ассоциируется класс  $\Sigma$ -объектов.

Изоморфизмы. В этом классе единым образом для всех родов структур водится понятие об изоморфизме. Пусть  $(E, \tau)$  и  $(E', \tau')$  — два  $\Sigma$ -объекта. Биекция  $f: E \rightarrow E'$  есть изоморфизм из  $(E, \tau)$  на  $(E', \tau')$ , если имеет место  $\tau' = S(f, id_A)(\tau)$ .

С каждым  $\Sigma$ -объектом  $(E, \tau)$  ассоциируется множество  $Aut(E, \tau)$  его автоморфизмов. Это множество снабжается структурой  $GA(E, \tau)$  рода абстрактной группы, а множество  $E$  снабжается структурой  $TA(E, \tau)$  действия этой группы на  $E$ . Таким образом, с каждым  $\Sigma$ -объектом  $(E, \tau)$  ассоциируются GR-объект  $(Aut$

$(E, \tau)$ ,  $GA(E, \tau)$ , а также TRGR-объект  $(E, Aut(E, \tau), GA(E, \tau), TA(E, \tau))$ -объект. Эту группу преобразований принято называть группой симметрии объекта  $(E, \tau)$ .

6. Бурбаковские морфизмы Для того, чтобы воспользоваться средствами геометрической теории декомпозиции, необходимо в класс  $\Sigma$ -объектов ввести бурбаковские морфизмы: с каждой парой  $\Sigma$ -объектов  $(E, \tau)$  и  $(E', \tau')$  сопоставляется множество  $M(E, \tau, E', \tau')$  отображений из  $(E, \tau)$  в  $(E', \tau')$ , называемых морфизмами так, чтобы суперпозиция морфизмов была морфизмом и биекция тогда и только тогда была изоморфизмом, когда она и обратная к ней биекция — морфизмы.

В основе геометрической теории декомпозиции лежат только два двойственных друг другу понятия: понятие о P-декомпозиции и понятие о F-декомпозиции математического объекта. Все остальные конструкции вводятся с помощью этих двух понятий.

Определение. Семейство  $((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$  —  $\Sigma$ -объектов  $(E_i, \tau_i)$  и морфизмов  $f_i : E_i \rightarrow E$  ( $f_i : E \rightarrow E_i$ ) называется P-декомпозицией (F-декомпозицией)  $\Sigma$ -объекта  $(E, \tau)$ , реализуемой семейством  $(E_i, \tau_i)$ , посредством морфизмов  $f_i : E_i \rightarrow E$  ( $f_i : E \rightarrow E_i$ ), если для любого  $\Sigma$ -объекта  $(E', \tau')$  и любого отображения  $g : E \rightarrow E'$  ( $g : E' \rightarrow E$ ) условие  $(\forall i \in I)(g \circ f_i \text{ — морфизмы})$  ( $(\forall i \in I)(f_i \circ g) \text{ — морфизмы}$ ) влечет условие  $g \text{ — морфизм}$ . ■

Ниже приведена схема, поясняющая сформулированное определение:

$$(E_i, \tau_i) \xrightarrow{f_i} (E, \tau) \xrightarrow{g} (E', \tau') \quad | \quad (E', \tau') \xrightarrow{g} (E, \tau) \xrightarrow{f_i} (E_i, \tau_i)$$

Если далее речь будет идти о декомпозициях некоторого объекта без указания вида декомпозиции (P- или F-), то высказываемое положение или вводимая конструкция будет касаться обоих этих видов декомпозиции.

Определение. Декомпозиция  $((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$  называется конечной, если множество  $I$  конечно. Декомпозиция  $((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$  называется тривиальной, если существует  $i \in I$ , такое, что  $f_i$  — изоморфизм.

По своей декомпозиции объект восстанавливается единственным образом. Более точно, существует лишь одна структура  $\tau$  на множестве  $E$ , для которой заданное семейство  $((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$   $\Sigma$ -объектов и отображений  $f_i : E_i \rightarrow E$  ( $f_i : E \rightarrow E_i$ ) является его P-(F-) декомпозицией.

Свойство объекта иметь декомпозиции «сохраняется» при изоморфизмах. Более точно, если  $((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$  — P-декомпозиция  $\Sigma$ -объекта  $(E, \tau)$  и  $a : E \rightarrow E'$  — изоморфизм объекта  $(E, \tau)$  в объект  $(E', \tau')$ , то  $((E_i, \tau_i), a \circ f_i)_{i \in I}$  — P-декомпозиция объекта  $(E', \tau')$ .

7. Определение. Пусть  $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$  — семейство  $\Sigma$ -объектов,  $\prod_{i \in I} E_i$  — декартово произведение семейства множеств  $(E_i)_{i \in I}$ ,  $pr_i : \prod_{i \in I} E_i \rightarrow E_i$  — канонические проекции.

Если множество  $\prod_{i \in I} E_i$  можно снабдить структурой  $\tau^d$  так, что семейство  $(E_i, \tau_i), pr_i)_{i \in I}$  будет F-декомпозицией для объекта  $(\prod_{i \in I} E_i, \tau^d)$ , то этот объект называется декартовым произведением семейства  $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ . Пусть  $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$  — семейство  $\Sigma$ -объектов,  $\sum_{i \in I}^c E_i$  — дизъюнктивная сумма семейства множеств  $(E_i)_{i \in I}$ ,  $j_i: E_i \rightarrow \sum_{i \in I}^c E_i$  — канонические вложения. Если множество  $\sum_{i \in I}^c E_i$  можно снабдить структурой  $\tau^c$  так, что семейство  $(E_i, \tau_i), j_i)_{i \in I}$  будет P-декомпозицией для объекта  $(\sum_{i \in I}^c E_i, \tau^c)$ , то этот объект называется дизъюнктивной суммой семейства  $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ . ■

Ниже приведена схема, поясняющая сформулированное определение и подчеркивающая двойственность между декартовым произведением и дизъюнктивной суммой.

$$(E_i, \tau_i) \xrightarrow{j_i} (\sum_{i \in I}^c E_i, \tau^c) \rightarrow (E', \tau') \mid (E', \tau') \xrightarrow{g} (\prod_{i \in I} E_i, \tau^d) \xrightarrow{pr_i} (E_i, \tau_i), \tau$$

8. *Определение.* Пусть  $(E, \tau)$   $\Sigma$ -объект,  $U \subset E$ ,  $\omega: U \rightarrow E$  — каноническая инъекция. Если множество  $U$  можно снабдить структурой  $\tau_U$  так, что семейство  $((E, \tau), \omega)$  (состоящее в данном случае из единственного элемента) является F-декомпозицией объекта  $(U, \tau_U)$ , то объект  $(U, \tau_U)$  называется P-объектом объекта  $(E, \tau)$ . Множество  $U$  называется в этом случае P-множеством, структура  $\tau_U$  — P-структурой структуры  $\tau$ . Пусть  $Q$  — отношение эквивалентности на  $E$ ,  $E_Q$  — соответствующее фактор-множество,  $\pi: E \rightarrow E_Q$  — каноническая проекция. Если  $E_Q$  можно снабдить структурой  $\tau_Q$  так, что семейство  $((E, \tau), \pi)$  (состоящее в данном случае из единственного элемента) является P-декомпозицией объекта  $(E_Q, \tau_Q)$ , то объект  $(E_Q, \tau_Q)$  называется F-объектом объекта  $(E, \tau)$ , отношение  $Q$  называется F-отношением, структура  $\tau_Q$  — F-структурой структуры  $\tau$ . ■

Ниже приведена схема, поясняющая сформулированное определение и подчеркивающая двойственность между P-объектами и F-объектами.

$$(E', \tau') \xrightarrow{g} (U, \tau_U) \xrightarrow{\omega} (E, \tau) \mid (E', \tau') \xrightarrow{g} (E, \tau) \xrightarrow{\pi} (E_Q, \tau_Q)$$

P-объект P-объекта есть P-объект исходного объекта, аналогично для F-объектов. Однако, F-объект P-объекта может не иметь какого-либо отношения к F-объектам исходного объекта, также, как P-объект F-объекта может не иметь какого-либо отношения к P-объектам исходного объекта. Поэтому используется еще такая терминология. P-объекты называются P-редукциями исходного объекта, F-объекты — его F-редукциями. P- и F-редукции являются редукциями первого уровня. F-объекты P-объектов исходного объекта называются его FP-редукциями, P-объекты F-объектов исходного объекта называются его PF-редукциями. PF- и FP-редукции являются редукциями второго уровня. Аналогично определяются PFP-, FPF-редукции, которые являются редукциями третьего уровня и так далее.

С каждым  $\Sigma$ -объектом ассоциируется класс его P-декомпозиций и класс его F-декомпозиций, а также множество его P-объектов и множество его F-объектов.

На классах декомпозиций объектов можно определить три стандартных (независимо от того, каков род структуры и каковы морфизмы) отношения. Здесь будут упомянуты два из них.

9. Определение. Пусть  $(E, \tau)$   $\Sigma$ -объект,  $((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$  — его декомпозиция. Пусть  $J \subset I$ . Если  $((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in J}$  — также является декомпозицией для  $(E, \tau)$ , то она называется более простой, чем декомпозиция  $((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$ .

Отношение «более простая» является отношением частичного порядка на классе декомпозиций (P- или F-)

Определение. Объект называется P-компактным, если для всякой его P-декомпозиции существует более простая конечная (состоящая из конечного количества элементов) P-декомпозиция. Объект называется F-компактным, если для всякой его F-декомпозиции существует более простая конечная (состоящая из конечного количества элементов) P-декомпозиция. ■

Примером P-компактных объектов являются компактные топологические пространства. Примером F-компактных объектов автор не располагает.

Определение. Пусть  $((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$  и  $((E'_i, \tau'_i), f'_i)_{i \in I}$  — две P-декомпозиции одного и того же объекта  $(E, \tau)$  и существуют отображения  $h_i: E_i \rightarrow E'_i$ , такие, что  $f'_i = f_i \circ h_i$ . Тогда декомпозиция  $((E'_i, \tau'_i), f'_i)_{i \in I}$  называется «более близкой» к объекту  $(E, \tau)$ , чем декомпозиция  $((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$ .

Всякий морфизм  $f: (E, \tau) \rightarrow (E', \tau')$  можно канонически разложить  $f = \omega \circ b \circ \pi$  на проекцию  $\pi: E \rightarrow E_Q$ , где  $Q$  — отношение эквивалентности, ассоциированное с  $f$ ,  $E_Q$  — соответствующее фактор-множество, биекцию  $b: E_Q \rightarrow f(E)$  и инъекцию  $\omega: f(E) \rightarrow E'$ .

Определение. Если на множестве  $E_Q$  существует F-структура  $\tau_Q$  структуры  $\tau$ , на множестве  $f(E)$  существует P-структура  $\tau_{f(E)}$  структуры  $\tau'$ , то морфизм  $f$  называется PF-морфизмом. В этом случае биекция  $b$  обязательно является морфизмом. Если биекция  $b$  является изоморфизмом, то называется HPF-морфизмом. Если все морфизмы являются PF-морфизмами, то род структуры относительно этих морфизмов называется PF-родом, если все морфизмы являются HPF-морфизмами, то род структуры относительно этих морфизмов называется HPF-родом. ■

В PF- (а, значит и в HPF-) родах структур имеет место следующий факт: для всякой P- (F-) декомпозиции некоторого объекта существует более близкая к этому объекту P- (F-) декомпозиция, реализуемая его P- (F-) объектами посредством канонических инъекций (проекций). В силу этого обстоятельства в PF- и HPF родах структур класс декомпозиций объекта характеризуется следующими множествами: множеством  $P(E, \tau)$  P-объектов, множеством  $F(E, \tau)$  F-объектов, множеством  $PD(E, \tau)$  P-декомпозиций, реализуемых P-объектами, множеством  $FD(E, \tau)$  F-декомпозиций, реализуемых F-объектами. Множества  $P(E, \tau)$  и  $F(E, \tau)$  естественным образом (по включению P-множеств и F-отношений) снабжаются



структурами, соответственно,  $V(E, \tau)$  и  $W(E, \tau)$  частичного порядка (как правило, это более сильные структуры). Множества  $PD(E, \tau)$  и  $FD(E, \tau)$  снабжаются структурами частичного порядка, каковыми являются отношения «более простая» на этих множествах. Поскольку между  $P$ -множествами и  $P$ -объектами существует естественная каноническая биекция, то множество  $P$ -множеств и структура частичного порядка на нем по включению  $P$ -множеств будет обозначаться также через  $P(E, \tau)$  и  $V(E, \tau)$ , соответственно. Каждый раз из контекста будет ясно, о чем идет речь. То же касается множеств  $F$ -отношений, множеств семейств  $P$ -объектов, участвующих в  $P$ -декомпозиции, множеств семейств  $F$ -отношений, участвующих в  $F$ -декомпозиции.

Объекты

$$(P(E, \tau), V(E, \tau)), (F(E, \tau), W(E, \tau)), (SP(E, \tau), SV(E, \tau)), \\ SF D(E, \tau), SW(E, \tau))$$

будут называться декомпозиционными, соответственно,  $P$ -,  $F$ -,  $SP$ -,  $SF$ - структурами исходного объекта  $(E, \tau)$ . Дальнейшие построения будут происходить в  $PF$  или  $HPF$  – родах структур и декомпозиции объектов будут считаться реализуемыми семействами  $P$ -( $F$ -) объектов посредством канонических инъекций (проекций).

Пусть  $((U_i, \tau_{U_i}), \omega_i)_{i \in I}$  –  $P$ -декомпозиция объекта  $(E, \tau)$ , такая, что подмножества  $U_i$  множества  $E$  являются классами эквивалентности по некоторому отношению эквивалентности  $Q$ . Такая декомпозиция называется  $CC$ -декомпозицией, а отношение  $Q$  называется  $CC$ -декомпозирующим. Если в рассматриваемом роде структуры с введенными морфизмами существует дизъюнктивная сумма любого семейства объектов, то объект  $(E, \tau)$  изоморфен дизъюнктивной сумме семейства  $(U_i, \tau_{U_i})_{i \in I}$  своих  $P$ -объектов.

Пусть  $((E_{Q_i}, \tau_{Q_i}), \pi_i)_{i \in I}$  –  $F$ -декомпозиция объекта  $(E, \tau)$ , такая, что  $F$ -отношения  $Q_i \cap x_{iQ_i}$  не пусто и содержит единственный элемент. Такая декомпозиция называется  $DP$ -декомпозицией, а отношение. Если род в рассматриваемом роде структуры с введенными морфизмами существует декартово произведение любого семейства объектов, то объект  $(E, \tau)$  изоморфен декартовому произведению семейства  $(E_{Q_i}, \tau_{Q_i})_{i \in I}$  своих  $F$ -объектов.

Множество  $CC$ -декомпозиций (множество  $P$ -множеств, участвующих в  $CC$ -декомпозиции) объекта  $(E, \tau)$  обозначается через  $CC(E, \tau)$ , структура частичного порядка на нем по включению  $CC$ -декомпозирующих отношений – через  $VCC(E, \tau)$ . Объект  $(CC(E, \tau), VCC(E, \tau))$  будет называться декомпозиционной  $CC$ -структурой. Аналогично, множество  $DP$ -декомпозиций объекта  $(E, \tau)$  обозначается через  $DP(E, \tau)$ , структура частичного порядка на этом множестве – через  $WDP(E, \tau)$ . Объект  $(DP(E, \tau), WDP(E, \tau))$  будет называться декомпозиционной  $DP$ -структурой.

В излагаемой языковой среде. возникает по крайней мере шесть типов простоты объектов:  $P$ -простота,  $F$ -простота,  $PD$ - простота,  $FD$ - простота,  $CC$ - простота,  $DP$ -простота – когда множества, соответственно,  $P(E, \tau)$ ,  $F(E, \tau)$ ,  $PD(E, \tau)$ ,  $FD(E, \tau)$ ,  $CC(E, \tau)$ ,  $DP(E, \tau)$  состоят из единственного элемента.

10. Имеется канонический способ снабдить класс  $\Sigma$ -объектов морфизмами. Пусть  $(E, \tau)$  и  $(E', \tau')$  —  $\Sigma$ -объекты,  $f: E \rightarrow E'$  — отображение. Это отображение называется естественным каноническим морфизмом (ЕКМ), если имеет место  $S(f, id_A) \subset \tau'$ .

*Примеры естественных канонических морфизмов.*

▪ Для рода структуры MAP произвольного отображения ЕКМ из объекта  $f: E \rightarrow E'$  в объект  $g: H \rightarrow H'$  есть пара отображений  $m: E \rightarrow H$ ,  $m': E' \rightarrow H'$ , такая, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} f: E & \rightarrow & E' \\ m \downarrow & & \downarrow m' \\ g: H & \rightarrow & H' \end{array}$$

коммутативна.

▪ Для упорядоченных множеств ЕКМ — монотонные отображения.  
 ▪ ЕКМ для алгебраических объектов ЕКМ — гомоморфизмы.  
 ▪ Для топологических пространств ЕКМ зависимости от аксиом, которыми задается топология. Если топология на  $E$  задана множеством пар  $(U, a)$ , где  $U$  — часть  $E$ ,  $a$  — точка прикосновения для  $U$ , то ЕКМ --- непрерывные отображения. Если топология задана множеством открытых множеств, то ЕКМ — открытые отображения. Если топология задана множеством замкнутых множеств, то ЕКМ — замкнутые отображения. Если топология задана множеством пар  $(U, V)$ , где  $U$  — часть  $E$ , а  $V$  — замыкание  $U$ , то ЕКМ --- отображения одновременно непрерывные и замкнутые

- Для линейных векторных пространств ЕКМ — линейные отображения.
- Для групп преобразований ЕКМ — эквивариантные отображения.
- Для дифференцируемых многообразий ЕКМ — гладкие отображения.

$R$ -объекты относительно ЕКМ принято называть подобъектами или индуцированными объектами,  $F$ -объекты относительно ЕКМ принято называть фактор-объектами.

Часть содержания теорий конкретных математических объектов с позиций геометрической теории декомпозиции трактуется как изучение декомпозиционных структур относительно естественных канонических морфизмов.

Для иллюстрации высказанного положения переведем на язык геометрической теории декомпозиции ряд понятий и фактов нескольких конкретных теорий. Если не оговорено противное, то морфизмами считаются ЕКМ.

▪ Всякому открытому покрытию топологического пространства соответствует его  $R$  — декомпозиция относительно как морфизмов, являющихся непрерывными отображениями, так и морфизмов, являющихся открытыми отображениями.  $R$ -объектами, составляющими  $R$ -декомпозицию являются подпространства исходного пространства, которые индуцируются им на множествах покрытия. Компактность топологического пространства --- свойство его декомпозиционной  $R$ -структуры: со для всякой открытой  $R$ -декомпозицией топологического пространства существует более простая конечная (состоящая из конечного количества элементов)  $R$ -декомпозиция.

▪ Простая группа, простая алгебра являются в излагаемой языковой среде  $F$ -простыми объектами.

▪ Простое поле (подполе) является в излагаемой языковой среде  $R$ -простым объектом.

▪ Любое поле является  $F$ -простым объектом.

▪ Любая абстрактная группа является  $CC$ -простым объектом.

▪ Топологическое пространство связно тогда и только тогда, когда оно является  $CC$ -простым объектом.

▪. Граф является связным тогда и только тогда, когда он является СС-простым объектом.

▪. Группа преобразований является транзитивной тогда и только тогда, когда она является Р-простым объектом.

▪. Группа преобразований является примитивной тогда и только тогда, когда она является F-простым объектом.

▪. Нильпотентный оператор в ЛВП является СС-простым объектом в роде структуры отображений абстрактных множеств в себя.

▪. Семейство транзитивных групп преобразований, генерируемых группой преобразований на классах эквивалентности по ассоциированному с ней отношению эквивалентности --- максимальная СС-декомпозиция этой группы преобразований на СС-простые подобъекты.

▪. Жорданово представление линейного оператора в конечномерном ЛВП над полем комплексных чисел является максимальной DP-декомпозицией этого оператора на декартово произведение DP-простых фактор-объектов.

▪. Нетривиализуемое расслоение дифференцируемого многообразия — такая Р-декомпозиция DP-простого объекта, каждый элемент которой не является DP-простым.

11. Для произвольных отображений, отображений в себя, их семейств имеют место следующие факты. Отношение эквивалентности, порождаемое на  $E$  каждым Р-объектом группы симметрий соответствующей некоторому Р-объекту группы автоморфизмов объекта  $(E, \tau)$  является F-отношением для  $(E, \tau)$  (относительно естественных канонических морфизмов), а каждому F-отношению соответствует СС-декомпозиция объекта  $(E, \tau)$  на дизъюнктивную сумму. Таким образом, для перечисленных родов структур имеют место отображения:

$$PAF: P(Aut(E, \tau), GA(E, \tau)) \rightarrow F(E, \tau)$$

из множества Р-объектов группы автоморфизмов объекта  $(E, \tau)$  в множество его F-отношений.

$$FCC: F(E, \tau) \rightarrow CC(E, \tau)$$

из множества F-отношений объекта  $(E, \tau)$  в множество его СС-декомпозиций.

Тем самым существует также суперпозиция

$$PACC = FCC \circ PAF: P(Aut(E, \tau), GA(E, \tau)) \rightarrow CC(E, \tau),$$

действующая из множества  $P(Aut(E, \tau), GA(E, \tau))$  подгрупп группы автоморфизмов объекта  $(E, \tau)$  в множество  $CC(E, \tau)$  его СС-декомпозиций.

Далее на существование этих отображений для объектов указанных выше родов структур (относительно естественных канонических морфизмов) будем ссылаться как на «симметричное свойство» этих объектов.

Ниже приведена схема поясняющая изложенное.

$$P(Aut(E, \tau), GA(E, \tau)) \xrightarrow{PAF} F(E, \tau) \xrightarrow{FCC} CC(E, \tau)$$

Поскольку системы дифференциальных уравнений определяют семейства отображений (решений), то симметричное свойство можно сформулировать в терминах дифференциальных уравнений, где оно принимает форму некоторых конструкций и утверждений группового анализа дифференциальных уравнений.

12. *Декомпозиция систем обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Рассматривается система обыкновенных уравнений

$$dy^i / dt = f^i(t, y^1, \dots, y^n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

правые части которой определены в области  $D \subset R^{n+1}$  и являются там гладкими. Пусть сохраняющим  $t$  диффеоморфизмом

$$z^k = I^k(t, y^1, \dots, y^n), k = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$x^l = J^l(t, y^1, \dots, y^n), l = 1, \dots, n - m, \quad (3)$$

эта система приводится к виду

$$dz^k / .dt = \varphi^k(t, z^1, \dots, z^m), k = 1, \dots, m, \quad (4)$$

$$dx^l / .dt = \psi^l(t, z^1, \dots, z^m, x^1, \dots, x^{n-m}), l = 1, \dots, n - m. \quad (5)$$

Тогда система (5) является фактор-объектом объекта (1) по F-отношению, ассоциированному с функциями (2). (Естественными каноническими морфизмами для объекта (1) являются сохраняющие  $t$  гладкие отображения фазовых пространств, переводящие решения в решения.) Если  $z^k = z^k(t)$ ,  $k = 1, \dots, m$  являются решениями фактор-объекта (4), то множество в  $R^{n+1}$  размерности  $n - m$ , определяемое соотношениями

$$y^i = K^i(t, z(t), x), i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где

$$y^i = K^i(t, z, x), i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

есть диффеоморфизм, обратный диффеоморфизму (4), (5), является P-множеством для (1), а система

$$dz^l / .dt = \psi^l(t, z^1(t), \dots, z^m(t), x^1, \dots, x^{n-m}), l = 1, \dots, n - m. \quad (8)$$

является P-объектом для объекта (1), определенным на P-множестве (6). Вся совокупность P-объектов вида (8) образует СС-декомпозицию объекта (1).

Поскольку всякой факторизации (4) объекта (1) соответствует подгруппа группы автоморфизмов этого объекта выполненные построения являются иллюстрацией симметричного свойства семейства решений системы (1).

### 13. Декомпозиция моделей управляемых процессов.

Рассматривается модель

$$dy^i / dt = f^i(t, y^1, \dots, y^n, u^1, \dots, u^r, v^1, \dots, v^s), i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

где  $y$  — фазовые переменные,  $u$  и  $v$  — управления,  $(t, y) \in D \subset R^{n+1}$ ,  $u \in U \subset R^r$ ,  $v \in V \subset R^s$ , Правые части гладкие по  $(t, y)$  в  $D$  при всяких  $u \in U$ ,  $v \in V$ , непрерывны по  $u$  и  $v$ . Пусть диффеоморфизмом вида (2), (3) система (9) сводится к виду

$$dz^k / .dt = \varphi^k(t, z^1, \dots, z^m, u^1, \dots, u^r), k = 1, \dots, m, \quad (10)$$

$$dx^l / .dt = \psi^l(t, z^1, \dots, z^m, x^1, \dots, x^{n-m}, u^1, \dots, u^r, v^1, \dots, v^s), l = 1, \dots, n - m. \quad (11)$$

Если систему (9) трактовать как совокупность систем обыкновенных дифференциальных уравнений, параметризованную значениями  $u \in U$  и  $v \in V$ , то система (10) есть ее фактор-объект, а система (11) «представляет» ее порождаемую факторизацией (10) СС-декомпозицию, аналогично тому, как это имело место для системы (1). Другими словами, декомпозиция (10), (11) системы (9) является иллюстрацией симметричного свойства соответствующего семейства отображений.

С декомпозицией (10), (11) системы (1) связаны следующие классические проблемы в теории управления.

(I) Управляемость. Если в системе (10) отсутствуют управления  $u$ , то процесс, описываемый (9) неуправляем, поскольку у этой системы существуют нетривиальные первые интегралы, независимые от управлений. Каждому такому интегралу соответствует разбиение фазового пространства на многообразия, определяемые начальными условиями. Система (9), находясь на таком многообразии в некоторый момент будет на нем оставаться независимо от того, каковы управления.

(II) Наблюдаемость. Если при функционировании системы, описываемой (9) измеряются как функции времени характеристики  $z^1, \dots, z^m$ , фигурирующие в фактор-объекте, то относительно такого наблюдателя система ненаблюдаема, поскольку в измеренных характеристиках нет никакой информации о значениях  $x^1, \dots, x^{n-m}$ .

(III) Реализация. Часто интерес представляют не все фазовые переменные  $y^1, \dots, y^n$ , а меньшее число характеристик, называемых «показателями». Возникает задача извлечения из модели (9) как можно более простой модели, содержащей показатели. Фактор-объект (10) является решением такой задачи, если показателями являются характеристики  $z^1, \dots, z^m$ .

(IV) Инвариантность. Очевидно, что наличие декомпозиции (10), (11) у процесса, описываемого системой (9) означает, что управлениями  $v^1, \dots, v^s$  нельзя повлиять на характеристики  $z^1, \dots, z^m$ , фигурирующие в фактор-объекте (10). Такая ситуация называется в теории управления «инвариантностью» [19]. В настоящее время известен конструктивный алгоритм [19], позволяющий по предъявленной системе (9) установить имеются ли у этой системы свойства «инвариантности», состоящие в том, что некоторые ее характеристики, являющиеся функциями фазовых переменных, не зависят от части управлений (т.е. допускает ли она декомпозиции вида (9), (10)). При формулировке этого алгоритма в [19] использовалась не подгруппа группы симметрий, «ответственная» за это свойство, поскольку она зависит от управлений, а так называемая факторизующая группа, инвариантами которой являются функции (2). Координаты инфинитезимальных операторов этой группы удовлетворяют переопределенной системе дифференциальных уравнений в частных производных. Выписывая условия совместности этой системы можно конструктивно (без использования операций интегрирования) установить факт существования всех декомпозиций системы (9) вида (10), (11).

Конструктивность охарактеризованного алгоритма связана с принципиальной переопределенностью задачи отыскания факторизующей группы системы (9). Этот факт в свою очередь связан с тем, что (выражаясь хотя и жаргонно, зато кратко) мера множества систем вида (8), имеющих нетривиальные декомпозиции вида (9), (10) равна нулю. Другими словами, «произвольная» система вида (8) никаких декомпозиций вида (9), (10) не допускает.

(V) Возможность иерархизовать управление процессом. Декомпозиция (10), (11) системы (9) позволяет предложить для ее управления двух уровневую иерархическую

организацию. Верхний уровень этой организации функционирует на базе фактор-объекта (10), т.е. ставить себе цель в терминах характеристик  $z^1, \dots, z^m$  и добивается ее исполнения выбором управлений  $u^1(t), \dots, u^r(t)$ . Решив свою задачу управления верхний уровень «спускает» свои «решения»  $z^1(t), \dots, z^m(t)$ ,  $u^1(t), \dots, u^r(t)$  в систему (11), т.е. подставляет туда эти величины. После этой операции в системе (11) остается еще ресурс управления — величины  $v^1, \dots, v^s$ , который используется нижним уровнем для постановки и решения «своей» задачи управления. Естественно, могут существовать более сложные организации. Их множество описывается декомпозиционной СС-структурой системы (9). Каждой такой организации соответствует иерархия целей (ценностей, предпочтений), которые могут достигаться в ее рамках (более точно — иерархия терминов, с помощью которых можно формулировать эти цели).

15. Как уже говорилось, «произвольная» система вида (9) никаких декомпозиций вида (10), (11) не допускает. С другой стороны, управление всеми достаточно сложными системами в природе и обществе, обладающими информационными возможностями, т.е. возможностью измерять некоторые свои характеристики и характеристики окружающего мира, иерархизовано, т.е. такими системами управляют иерархические организации. Каждый орган в такой организации должен обладать возможностью прогнозировать последствия принимаемых им решений, поскольку в противном случае существование его бессмысленно. (Из этого не следует, что в реальных иерархических системах управления отсутствуют органы управления, существование которых не только бессмысленно, но вредно). Но возможность прогнозировать последствия своих действий означает, что в распоряжении данного органа имеется замкнутая модель «своей части» того процесса, которым управляет вся организация. С позиции геометрической теории это трактуется следующим образом. Все достаточно сложные системы, обладающие информационными возможностями, тратят часть своих управлений для назначения их функциями измеряемых системой характеристик так, чтобы система приобрела декомпозиционные свойства, т.е. «структуру» позволяющую достигать иерархии целей (ценностей, предпочтений), стоящих перед системой. В рамках геометрической теории декомпозиции возможна постановка задач, состоящих в таком выборе управлений в виде обратных связей, чтобы управляемая система, (например, вида (9)), приобрела декомпозицию, характеризующуюся определенной «структурой» и позволяющую реализовать заданную иерархию целей. Возможны различные строгие постановки таких задач. Такие задачи будем называть задачами управления структурами систем, понимая, что это название не вполне точно их характеризует. Опишем некоторые задачи такого характера. По-видимому, у очень сложных управляемых систем на самом верхнем уровне иерархии целей находится задача удержания некоторой совокупности характеристик системы, которую естественно назвать «внутренней средой системы» в очень узких пределах. Например, для системы (9) соответствующая задача может быть сформулирована таким образом. Пусть при функционировании системы (9) измеряются некоторые величины  $m = I(t, y)$ , характеризующие саму систему, а также внешние воздействия на систему  $v$ . Необходимо назначить управления  $u$ , фигурирующие в (9), в виде обратных связей

$$u = u(I(t, y), u, w), \quad (12)$$

где  $w$  – «новые» управления», «привносимые» в систему (если это допустимо с конструктивной и энергетической точек зрения) , так, чтобы заданные характеристики системы

$$c^j = C^j(t, y), \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (13)$$

стали первыми интегралами системы

$$dy^i / dt = f^i(t, y^1, \dots, y^n, u^1(I(t, y), v, w), \dots, u^r(I(t, y), v, w), v^1, \dots, v^s), i = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Это требование означает, что система (12) должна заменой

$$c^j = C^j(t, y), \quad j = 1, 2, \dots, J, \\ z^k = Z^k(t, y), \quad k = 1, 2, \dots, n - J,$$

сводится к виду

$$dc^j / dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (15)$$

$$dz^k / dt = g^k(t, c^1, \dots, c^j, z^1, \dots, z^{n-j}, v, w). \quad (16)$$

Вид (15), (16) системы (14) есть простейшая иерархическая декомпозиция, характеризующаяся очевидной структурой, к фактор-системе которой предъявлены дополнительные требования. Обратные связи (12) естественно назвать механизмами гомеостаза, обеспечивающими «стабильность» внутренней среды системы, т.е. постоянство величин  $c^j = C^j(t, y), \quad j = 1, 2, \dots, J$ . Наблюдение за управляемыми системами в природе и обществе оставляет впечатление, что они не могут существовать вне рамок некоторой «стабильности». Если обратные связи (12) не могут по каким-то причинам обеспечивать стабильность внутренней среды системы (например, в результате сильного внешнего воздействия), то она или разрушается, или переходит в состояние, когда другими обратными связями поддерживается «другая» стабильность. «Новые» управления, «привнесенные» в систему обратными связями (2) позволяют в свою очередь назначить их функциями измеряемых в процессе функционирования системы (15) характеристик так, чтобы система (15) приобрела нужную структуру, удобную для реализации иерархии целей, стоящих перед системой. Таким образом, сложные управляемые системы в природе и обществе обладают «встроенными» в них механизмами обратных связей, которые поддерживают стабильность внутренней среды системы и ее «структуру».

16. Декомпозиции и распределенные и параллельные вычисления. Несомненно, что и параллельные и распределенные [21] вычисления связаны с декомпозициями соответствующих объектов. Изложенные в настоящей статье языковые средства непосредственно касаются распределенных вычислений. Тем не менее, дадим некоторые комментарии и параллельным вычислениям. Параллельные вычисления основаны на декомпозиции вычислительных процессов, реализующих решение сложных задач, в том числе задач, в рамках некоторых моделей. Распределенные вычисления основаны на декомпозиции самих задач и самих моделей, в рамках которых задачи сформулированы. Задача, модель могут не допускать никакой декомпозиции, однако, вычислительный процесс, реализующий решение задачи может допускать распараллеливание. Допуская некоторую вольность, можно сказать, что параллельные вычисления основаны на декомпозиции вычислительного процесса на

дизъюнктивную сумму (см. определение в пункте 7) в рамках итерационного процесса, с помощью которого осуществляется решение задачи. Декомпозиции, на которых основаны распределенные вычисления, выполняются «на другом уровне» по сравнению декомпозициями, на которых основаны параллельные вычисления.

Чем сложнее система, тем «ближе» она к некоторой системе, обладающей декомпозицией. Это интуитивное утверждение в некоторой мере подтверждается выполненным в [22] исследованием. В рамках данной статьи возможно охарактеризовать лишь его основные идеи. В [22] всякое утверждение о приближенных свойствах некоторого объекта трактуется как утверждение о точных свойствах объекта, к нему «близкого». Вместе с исходным объектом, являющимся множеством, снабженным структурой некоторого рода, рассматривается множество объектов, на том же множестве, снабженных структурой такого же рода. Если на этом множестве удастся ввести топологию, то возникает реализуемое этой топологией представление о «близости» исходного объекта к некоторому множеству таковых. Можно, таким образом, поставить вопрос о существовании среди объектов, близких к исходному объекту, таких, которые обладают нетривиальной декомпозицией. В [22] этот вопрос для ряда родов структур решается положительно, т.е. с каждым объектом этих родов структур можно сопоставить «близкий» объект, обладающий нетривиальной декомпозицией.

Одним из центральных направлений в развитии математического моделирования является разработка и эксплуатации все более сложных моделей. Перспективность технологий распределенных вычислений при компьютерной реализации сложных моделей, когда различные «части» модели реализуются на разных компьютерах с организацией взаимодействия между ними, определяется обсуждаемыми обстоятельствами: чем сложнее модель, тем легче она «разваливается» на части и тем слабее связи между частями.

## Литература

1. Павловский Ю.Н. Декомпозиция снабженных структурой множеств на свободную сумму и прямое произведение. Доклады РАН, 1995, т. 340, № 3, с. 314-316.
2. Павловский Ю.Н. О P- и F - декомпозициях  $\Sigma$  - объектов. Доклады РАН, 1996, т. 351, № 5, с. 603-605.
3. Павловский Ю.Н. О декомпозициях снабженных структурой над подчиненными структурами. Доклады РАН, 1997, т. 357, № 5, с. 589-591.
4. Павловский Ю.Н. О шкалах родов структур. Доклады РАН, 1998, т.363, №2, с.163-165.
5. Павловский Ю.Н. О HPF- и PF- морфизмах. Доклады РАН, 1999, т. 369, № 6, с. 745-746.
6. Павловский Ю.Н. О декомпозиционном методе построения образов подмножеств снабженных структурой множеств. Доклады РАН 2000, т.374, №4, с450-452.
7. Павловский Ю.Н. Об одном декомпозиционном подходе к построению образов изображений. Доклады РАН 2003, т.392, №6, с. 733 -735.
8. Павловский Ю.Н. О декомпозиционных структурах математических объектов. Доклады РАН 2004, т.399, №1, с. 15-17.
9. Павловский Ю.Н. Декомпозиции и аттракторы динамических систем, ассоциированные с отображениями в себя. Доклады РАН 2005, т.404, №2, с. 159-161.



10. Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г. Проблема декомпозиции в математическом моделировании. М.: Фазис. 1998. 272 с.
11. Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г. Шкалы родов структур, термы и соотношения, сохраняющиеся при изоморфизмах. М.: ВЦ РАН. 2003. 93 с.
12. Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г. Введение в геометрическую теорию декомпозиции. М.: Фазис. 2006. 169 с.
13. Elkin V.I., Pavlovsky J.N. Decomposition of models of control processes. *Journal of Mathematical science*. Vol. 88., No. 5, pp. 723-761, 1998.
14. Елкин В.И. Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход. М.: Наука. 1997.
15. Яковенко Г.Н. Групповые свойства динамических систем. М.: МФТИ. 1994.
16. Елкин В.И. Методы алгебры и геометрии в теории управления. Аффинные распределения и аффинные системы. М.: МФТИ. 1996.
17. Данилов Н.Ю., Павловский Ю.Н., Соколов В.И., Яковенко Г.Н. Геометрические и алгебраические методы в теории управления: учебное пособие. М.: МФТИ. 1999.
18. Ивашко Д.Г. Трехмерные аффинные управляемые системы. М.: ВЦ РАН. 2000.
19. Елкин В.И. Редукция нелинейных управляемых систем. Декомпозиция и инвариантность по возмущениям. М.: Фазис. 2003.
20. Пятницкий Е.С. Принцип декомпозиции при управлении механическими системами//Доклады АН СССР. 1988. Т. 300.№2. С. 300-303.
21. Афанасьев А.П., Волошинов В.В., Кривцов В.Е., Рогов С.В., Сухорослов О.В. Использование информационно-алгоритмических ресурсов для организации распределенных вычислений. // Проблемы вычислений в распределенной среде: организация вычислений в глобальных сетях. Сборник трудов ИСА РАН, М.: УРСС, 2004.
22. Боровиков И.А. Выбор декомпозиционной структуры оптимальных процессов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М. : МФТИ. 1989.