А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

Избранные труды

Том 3

СТАТЬИ РАЗНЫХ ЛЕТ

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

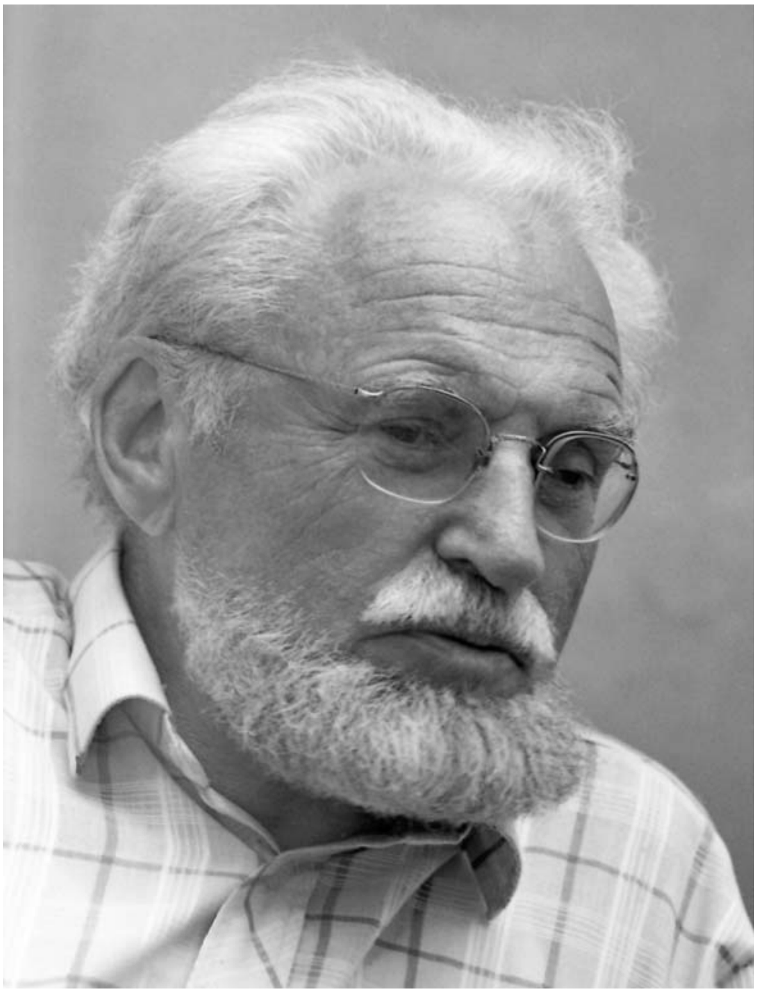
Избранные труды

Том 3

СТАТЬИ РАЗНЫХ ЛЕТ

Новосибирск
«Наука»
2008

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Отделение математических наук Сибирское отделение
Институт математики им. С. Л. Соболева



УДК 51(01) + 514
ББК 22.1
А46

Серия основана в 1932 г.

Александров А. Д. Статьи разных лет / А. Д. Александров. — Новосибирск: Наука, 2008. — iv + 804 с. — (Избранные труды; Т. 3).

ISBN 5–02–XXXXXX–X (т. 3).

ISBN 5–02–XXXXXX–X.

Академик А. Д. Александров (1912–1999) — один из крупнейших геометров XX века. В том 3 включен перевод его выдающихся статей об аддитивных функциях множеств в абстрактных пространствах и об одном обобщении римановой геометрии, ранее не публиковавшихся на русском языке, его избранные статьи по философским и мировоззренческим проблемам математики, теории относительности и квантовой механики, проблемам организации науки и образования, положению науки в обществе и ее взаимоотношениям с религией, а также его публицистические выступления.

Предназначена научным работникам в области математики, физики, философии и истории науки, аспирантам и студентам старших курсов физико-математических и философских специальностей, преподавателям средней и высшей школы и читателям, интересующимся общими проблемами науки.

Alexandrov A. D. Articles of the different years / A. D. Alexandrov. — Novosibirsk: Nauka, 2008. — iv + 804 p. — (Selected Works; Vol. 3).

Academician A. D. Alexandrov (1912–1999) is one of the greatest geometers of the XXth century. Volume 3 contains the Russian translations of his famous papers on additive set functions and on one generalization of Riemannian geometry which were never published in Russian before. The volume also contains his selected papers on the philosophy of science, relativity, quantum mechanics, management in science, and high education. His essays on the place and role of science in society are included together with as a few articles of publicism.

The book is aimed at the wide readership and will be of use to reseachers as well as graduate and postgraduate students in mathematics, physics, philosophy, and history of science.

Утверждено к печати Ученым советом
Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

ТП–0X–X–№XX

ISBN 5–02–XXXXXX–X (т. 2)
ISBN 5–02–XXXXXX–X

От редколлегии

В конце 2003 г. Российская академия наук приняла решение издать в трех томах избранные труды Александра Даниловича Александрова.

Творчество академика А. Д. Александрова исключительно многогранно. В его трудах по теории смешанных объемов и теории поверхностей «в целом», теории многообразий ограниченной кривизны и теории уравнений Монжа — Ампера, в работах по принципу максимума для эллиптических дифференциальных уравнений и основаниям теории относительности решены фундаментальные проблемы и поставлены новые принципиальные вопросы, вызвавшие к жизни огромное число публикаций. А. Д. Александров стал одним из основателей отечественной школы геометрии «в целом».

В том 1 избранных трудов, увидевший свет в 2006 г., вошли математические статьи А. Д. Александрова, опубликованные им на русском языке, а также библиография его трудов и очерк его жизни и творчества. Том 2, вышедший в 2007 г., представляет собой переиздание его знаменитой книги «Выпуклые многогранники». Том 3 открывается переводами знаменитых статей А.Д. Александрова «Аддитивные функции множеств в абстрактных пространствах» и «Об одном обобщении римановой геометрии» ранее не публиковавшихся на русском языке, но оказавших значительное влияние на развитие математики. Специально для настоящего издания части I–III первой из этих статей перевел с английского А.Е. Гутман, часть IV — С.А. Малюгин; вторую из обсуждаемых статей перевел с немецкого И.Ф. Майник. Помимо этого, в том 3 вошли избранные статьи А.Д. Александрова по философским проблемам науки, общим вопросам математики, теории относительности и квантовой механики, проблемам организации науки и образования, положению науки в обществе и ее взаимоотношениям с религией, а также его публицистические выступления. В этих статьях и выступлениях А.Д. Александров рассматривает вечные мировоззренческие и этические проблемы науки, человека и общества, руководствуясь своими идеалами универсального гуманизма, научности и объективности.

Укажем некоторые особенности настоящего издания. Прежде всего отметим, что в нем использованы современные стандарты правописания, оформления библиографии и, по мере возможности, — современные математические обозначения. Например: вместо «итти» мы пишем «идти», «формулированные результаты» — «сформулированные результаты», «эвклидово пространство» — «евклидово пространство», «двухмерное многообразие» — «двумерное многообразие». В процессе редактирования были также устранены замеченные опечатки, очевидные описки и стилистические погрешности.

Мы благодарим всех, кто содействовал подготовке этой книги к печати, и прежде всего сотрудников отдела анализа и геометрии Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научное наследие А. Д. Александрова вошло в золотой фонд отечественной науки, стало неотъемлемой частью современной математики. Мы надеемся, что издание трудов первого геометра России XX в. будет способствовать сохранению и развитию науки в нашей стране.

В. А. Александров, С. С. Кутателадзе, Ю. Г. Решетняк

Аддитивные функции множеств в абстрактных пространствах. I

Математический сборник. 1940. Т. 8, № 2. С. 307–348

Введение. Согласно известной теореме Рисса — Радона, любой линейный функционал $L(f)$ на пространстве C непрерывных функций f может быть представлен в виде интеграла Радона по некоторой аддитивной функции множества $\mu(E)$:

$$L(f) = \int\limits_R f(x)\,\mu(dE), \tag{1}$$

где R — множество (например, в n-мерном евклидовом пространстве), на котором определены функции f. Таким образом, в функциональном анализе аддитивные функции множества связаны с системами непрерывных функций и линейными функционалами на этих системах. С другой стороны, аддитивные функции множества являются объектом исследования теории меры, где их свойства связываются со свойствами пространства, на котором они определены.

Отправным пунктом нашего исследования является соединение этих точек зрения и последующее изучение связей, возникающих между упомянутыми выше понятиями, а именно, системами функций, линейными функционалами, пространствами и аддитивными функциями множества. Таким образом, нам необходимо адекватно специализировать эти понятия, поскольку в противном случае наша задача стала бы слишком неопределенной. Сразу отметим, что мы будем рассматривать только ограниченные функции $f(x)$ и линейные функционалы $L(f)$, удовлетворяющие условию

$$|L(f)| \leqslant N \sup |f(x)|.$$

Рассмотрим связь между пространствами и системами функций. Мы располагаем, с одной стороны, топологическими пространствами, а с другой — линейными системами функций как естественными областями определения линейных функционалов. Тем не менее мы не видим никакой простой связи между этими двумя общими понятиями. Стало быть, нам необходимо расширить понятие топологического пространства и одновременно специализировать рассматриваемые линейные системы функций так, чтобы каждая такая система была системой всех ограниченных непрерывных функций, заданных на пространстве, и наоборот, чтобы каждой системе функций соответствовало некоторое пространство, все ограниченные непрерывные функции на котором образуют данную систему функций. Все это, конечно же, следует понимать в том смысле, что функции определены на некотором множестве R, которое становится пространством, как только мы указываем в нем подмножества, объявляемые замкнутыми. Предполагаемое обобщение понятия топологического пространства состоит в том, что мы требуем замкнутость пересечения лишь счетного числа замкнутых множеств, в то время как в топологических пространствах, рассматриваемых до сих пор, требуется замкнутость пересечения любого числа замкнутых множеств (см. определение 1, § 1). В качестве систем функций мы берем обычные полные или, как их еще называют, бэровские системы функций, и тогда требуемая связь между пространствами и системами функций описывается некоторой уже известной теоремой (см. теорему 1, § 1) [1)].

Что касается специализации рассматриваемых функций множества и установления их связи с линейными функционалами, мы исходим из работы А. А. Маркова [9] [2)], где это уже было сделано в несколько более частном случае. Мы рассматриваем функции множества $\mu(E)$, определенные на алгебре [3)] множеств E, порожденной замкнутыми подмножествами какого-либо пространства R, и удовлетворяющие следующим условиям: 1) аддитивность, 2) ограниченность ($|\mu(E)| \leqslant N$ для всех E) и 3) регулярность [4)], т. е. для любых E и $\varepsilon > 0$ существует открытое множество G, содержащее E, такое, что $|\mu(E) - \mu(G)| < \varepsilon$. Последнее условие по своему характеру является требованием определенного рода непрерывности и происходит, разумеется, от аналогичного свойства меры Лебега, которая, как известно, равна точной нижней грани мер открытых множеств, содержащих данное множество. Если принять это определение, то связь между такими функциями множества и линейными функционалами на ограниченных непрерывных функциях, определенных на этом же пространстве, может быть установлена

[1)] Указанная здесь связь, конечно же, не является единственно возможной. О связи между топологическими пространствами и системами функций см. [7] и п. 3°, § 4 данной работы.

[2)] Как отмечает автор упомянутой работы, она, в свою очередь, базируется на идеях статьи Дж. Неймана [11].

[3)] Современными аналогами используемых автором терминов являются «кольцо» и «решетка» соответственно. Учитывая, что все возникающие в данной работе кольца подмножеств R оказываются алгебрами (т. е. содержат R), мы посчитали уместным использовать именно этот, более распространенный в теории меры, термин. — *Прим. перев.*

[4)] Этот термин заимствован у К. Каратеодори, который, впрочем, использовал его в несколько более узком смысле; см. [5].

в точности так же, как это было сделано А. А. Марковым в [9]. Эта связь, конечно же, устанавливается формулой (1). Теперь полное имя рассматриваемой функции множества — аддитивная ограниченная регулярная функция множества, определенная на алгебре множеств, порожденной замкнутыми множествами, — оказывается довольно длинным, в то время как называть ее мерой представляется неудобным, поскольку ее сходство с мерой в обычном смысле недостаточно полно (мы не предполагаем ни ее положительности, ни счетной аддитивности). Поэтому, руководствуясь естественной физической аналогией, мы будем называть ее *зарядом.*

Впрочем, раскрываемая здесь взаимосвязь общих идей возникает не сама по себе, а из исследования слабой сходимости аддитивных функций множества. Последовательность аддитивных функций множества $\mu_1(E), \mu_2(E), \ldots$ на пространстве R называется слабо сходящейся к функции $\mu(E)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f(x)\,\mu_n(dE) = \int_R f(x)\,\mu(dE)$$

для каждой ограниченной непрерывной функции $f(x)$, определенной на R.

Например, в теории выпуклых тел с каждым выпуклым телом естественным образом связаны определенные аддитивные функции множества, имеющие простой геометрический смысл (см., например, [1] и [2]). Сходящейся последовательности выпуклых тел соответствует слабо сходящаяся последовательность таких функций множества. Было бы желательно, а в определенных случаях и необходимо [5)], рассмотреть слабую сходимость этих функций множества с чисто геометрической точки зрения и, в частности, дать чисто геометрические (т. е. не привлекающие понятия непрерывной функции, интеграла и т. п., а использующие лишь понятия замкнутого множества, вложения и т. п.) критерии слабой сходимости. Анализ этой конкретной задачи показал, что получающиеся в этом направлении результаты имеют очень общую природу. Стремясь выделить предположения — или, если угодно, аксиомы, — которые оказались бы достаточными для получения этих результатов, мы и пришли к тому общему подходу, который был изложен выше. Исследование слабой сходимости аддитивных функций множества является одной из основных задач данной работы.

Работа разделена на 6 глав, содержание которых сводится к следующему.

Глава I. Пространства. В § 1 этой главы мы рассматриваем пространства в их связи с непрерывными функциями, определенными на них. Мы выделяем два вида пространств, играющих особо важную роль в дальнейшем изложении: нормальные пространства, определяемые в соответствии с заимствованной терминологией (определение 4, § 1), и совершенно нормальные пространства — в которых каждое замкнутое множество представимо в

[5)] В статье [3] имеется ссылка на один из результатов данной работы.

виде множества нулей непрерывной функции. Результаты этого параграфа являются основой для всей работы. В отличие от них остальные три параграфа главы I лишь отчасти необходимы для дальнейшего изложения. Их цель — прояснить некоторые вопросы, тесно связанные с результатами главы III, и показать, что введенные нами пространства, несколько более общие, чем топологические пространства, допускают столь же содержательное исследование, как и последние. В основном мы рассматриваем компактные [6)] пространства и компактные расширения пространств (определения 4, § 2 и 1, § 3). Здесь имеются не только простые обобщения фактов, уже известных из топологии, но и некоторые новые результаты.

Глава II. Линейные функционалы и заряды. В этой главе после рассмотрения некоторых свойств линейных функционалов и зарядов, необходимых для дальнейшего изложения, мы доказываем следующую основную теорему: в нормальном пространстве R для любого линейного функционала $L(f)$ на непрерывных ограниченных функциях, определенных на R, существует, и притом единственный, заряд $\mu(E)$ такой, что

$$L(f) = \int\limits_R f(x)\,\mu(dE).$$

Здесь нет ничего существенно нового, если не принимать во внимание предложенный нами более общий подход, тем более, что доказательство упомянутой теоремы является всего лишь модификацией доказательства, данного А. А. Марковым в [9] для аналогичного факта.

Глава III. Счетно аддитивные и реальные заряды. Здесь мы доказываем, в том числе, следующие теоремы о счетно аддитивных зарядах.

1. В нормальном пространстве каждый заряд счетно аддитивен тогда и только тогда, когда оно счетно компактно (см. определение 7, § 2).

2. В совершенно нормальном пространстве заряд, соответствующий данному линейному функционалу (по формуле (1)), является счетно аддитивным тогда и только тогда, когда этот функционал непрерывен относительно ограниченной сходимости функций, т. е. когда из $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ и $|f_n(x)| < N$ для всех n следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} L(f_n) = L(f)$.

3. Если пространство R гомеоморфно борелевскому подмножеству какого-либо компактного совершенно нормального пространства, то всякий счетно аддитивный заряд в R сосредоточен на объединении счетного числа компактных множеств, т. е. заряд любого множества, не имеющего общих точек с этим объединением, равен нулю.

[6)] Мы заменили используемые автором термины «бикомпактность» и «компактность» их современными версиями — «компактность» и «счетная компактность» соответственно. — *Прим. перев.*

Например, в полном сепарабельном метрическом пространстве любой заряд сосредоточен на объединении счетного числа компактных множеств.

4. Если пространство R удовлетворяет свойству, фигурирующему в предыдущей теореме, то любой заряд в нем однозначно представляется в виде суммы счетно аддитивного заряда и заряда, равного нулю на каждом компактном множестве.

Одновременно с известным условием счетной аддитивности мы вводим более сильное условие реальности заряда.

Определение реального заряда звучит следующим образом. Исчезающим направлением в пространстве мы называем совокупность непустых замкнутых множеств $\{F\}$, имеющую пустое пересечение и такую, что для любых двух множеств из $\{F\}$ существует содержащееся в них множество из $\{F\}$ (см. определение 5, § 2). Мы называем заряд реальным, если точная нижняя грань значений его вариации (определяемой обычным образом) на множествах произвольного исчезающего направления равна нулю. Если для какого-либо исчезающего направления эта точная нижняя грань отлична от нуля, то это означает, что некоторая часть заряда расположена как бы вне пространства и в этом смысле не является реальной. Этому утверждению можно придать точную математическую форму, использовав понятие компактного расширения пространства. Именно из такого интуитивного представления и возникает термин «реальный».

Четыре сформулированные выше теоремы могут быть перенесены на реальные заряды, и изменения, которые необходимо для этого внести в указанные теоремы, по существу состоят, помимо замены условия счетной аддитивности условием реальности, в замене счетной компактности компактностью, а сходимости в обычном смысле — сходимостью в смысле общего предела по Муру — Смиту. Кроме того, введение понятия реального заряда и соответствующего ему функционала позволяет в некоторой степени обобщить основную теорему главы II на пространства, не являющиеся нормальными, но, скажем, вполне регулярные (в смысле Тихонова). Такое частичное обобщение заслуживает внимания еще и потому, что вместе с ним мы доказываем существование в каждом пространстве, не являющемся нормальным, такого линейного функционала, что процесс, используемый нами для определения в каждом нормальном пространстве (а в упомянутом выше случае и в каждом вполне регулярном пространстве) заряда, соответствующего данному функционалу, приводит к неаддитивной функции множества.

Заметим, что понятия направления и предела по направлению в смысле Мура — Смита [7] играют в нашей работе важную роль, и без них мы бы едва ли легко пришли ко многим из наших результатов. Мы напомним опреде-

---

[7] См. [10]. Используемые нами свойства предела по Муру — Смиту доказываются совершенно очевидным образом.

ления направления и предела по направлению. Направлением называется система $\{x\}$ каких-либо элементов x, в которой для некоторых пар элементов установлено транзитивное отношение следования $x \geqslant y$ (x следует за y), причем выполнено следующее условие: для любых двух элементов из $\{x\}$ существует элемент из $\{x\}$, следующий за ними обоими. Пусть каждому элементу x направления $\{x\}$ сопоставлена некоторая совокупность чисел $f(x)$ (эти совокупности предполагаются непустыми). Говорят, что число a является пределом $f(x)$ по направлению $\{x\}$: $a = \lim\limits_{\{x\}} f(x)$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_0 \in \{x\}$ такой, что для любого $x \geqslant x_0$ ($x \in \{x\}$) и любого выбора элемента $b \in f(x)$ имеет место неравенство $|b - a| < \varepsilon$. Легко показать, что $f(x)$ не может иметь двух пределов по одному направлению. Кроме того, легко видеть, что все фундаментальные теоремы теории пределов могут быть перенесены на пределы по направлению. Выше мы определили понятие исчезающего направления в пространстве. Очевидно, что если интерпретировать отношение включения как отношение следования, то направление в пространстве, состоящее из замкнутых множеств, будет направлением в смысле Мура — Смита.

Глава IV. Необходимые и достаточные условия слабой сходимости зарядов. Эта глава никак не связана с главой III, в ней используются лишь результаты главы II. Сначала мы показываем, что исследование слабой сходимости произвольных аддитивных функций множества в нормальном пространстве может быть сведено к исследованию слабой сходимости зарядов. Мы получаем ряд необходимых и достаточных условий слабой сходимости зарядов в нормальном пространстве. Чтобы продемонстрировать характер полученных результатов, сформулируем два из этих условий.

1. Для того чтобы последовательность положительных зарядов $\mu_1(E)$, $\mu_2(E), \ldots$ слабо сходилась к заряду $\mu(E)$, необходимо и достаточно, чтобы

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(R) = \mu(R)$, где R — все пространство, на котором определены заряды, и

2) $\mu(F) \geqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mu_n(F)$ для каждого замкнутого множества F.

2. Для того чтобы последовательность зарядов $\mu_1(E), \mu_2(E), \ldots$ в совершенно нормальном пространстве слабо сходилась к заряду $\mu(E)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого замкнутого множества F и любого содержащего его открытого множества G существовала последовательность замкнутых множеств $F_1, F_2, \ldots$ такая, что

1) $F \subset F_n \subset G$ для всех n,

2) для каждого n существует m такое, что $F_n \supset F_{n+k}$ при $k \geqslant m$,

3) $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = F$ и

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(F_n) = \mu(F)$.

Интуитивный смысл этой теоремы состоит в том, что заряды как бы плывут в пространстве, стремясь к предельному распределению, в то время как множества F_n в некотором роде вталкивают заряд в множество F, который в пределе оказывается внутри F. Эта интуитивная картина по существу объясняет природу всех полученных нами теорем о слабой сходимости. Например, первая из сформулированных теорем может быть интерпретирована следующим образом. Заряды, движущиеся в пространстве, могут проникнуть в пределе в замкнутое множество F, затронув его границу, но выйти из него они не могут *лишь* в пределе, ведь для этого они вынуждены *отдалиться* от этого замкнутого множества, а это невозможно в пределе и осуществимо лишь на некотором этапе их движения, т. е. до перехода к пределу. Если вообразить точечный заряд, непрерывно движущийся в пространстве, то это становится уже совершенно очевидным.

Глава V. Некоторые теоремы о слабой сходимости зарядов. В этой главе мы прежде всего вводим важное понятие ускользающей нагрузки. Оно имеет следующее определение. Последовательность замкнутых множеств F_n назовем *расходящейся*, если никакие два из этих множеств не имеют общих точек и объединение любого числа множеств этой последовательности является замкнутым множеством. Будем говорить, что в данной совокупности зарядов имеется *ускользающая нагрузка*, если в этой совокупности можно выделить последовательность зарядов $\mu_n(E)$ так, что найдутся число $a \neq 0$ и расходящаяся последовательность замкнутых множеств F_n, для которых при каждом n

$$\frac{\mu_n(F_n)}{a} \geqslant 1.$$

Например, представим себе последовательность единичных точечных зарядов, сосредоточенных на прямой в последовательных целочисленных точках и уходящих в бесконечность. В этом случае возникает ускользающая нагрузка.

Мы доказываем следующую теорему, которая в дальнейшем играет важную роль: в слабо сходящейся последовательности зарядов нет ускользающей нагрузки.

Приложения этого результата приводят, в частности, к следующим теоремам.

1. Предел слабо сходящейся последовательности счетно аддитивных зарядов в совершенно нормальном пространстве является счетно аддитивным зарядом.

2. Предположим, что в локально счетно компактном метрическом пространстве со счетной базой последовательность зарядов $\mu_n(E)$ слабо сходится к заряду $\mu(E)$. Тогда счетно аддитивные части зарядов $\mu_n(E)$ слабо сходятся к счетно аддитивной части заряда $\mu(E)$.

Упомянутые в этой теореме счетно аддитивные части зарядов определяются однозначно — в соответствии с теоремой, доказанной в главе III и сформулированной выше.

3. Для того чтобы совокупность зарядов в локально счетно компактном метрическом пространстве со счетной базой была слабо счетно компактной (т. е. чтобы всякое ее бесконечное подмножество содержало слабо сходящуюся последовательность зарядов), необходимо и достаточно, чтобы заряды этой совокупности были равномерно ограничены (т. е. $|\mu(E)| < N$, где N одно и то же для всех μ и E) и чтобы в ней не было ускользающей нагрузки.

В частном случае, когда пространство счетно компактно, ускользающая нагрузка невозможна и поэтому необходимым и достаточным условием слабой счетной компактности совокупности зарядов в таком пространстве является их равномерная ограниченность [8)].

В последнем параграфе главы V мы прилагаем наши общие результаты и методы к рассмотрению слабой сходимости функций ограниченной вариации многих переменных. Мы единообразным способом получаем обобщения ряда результатов, уже известных для функций одной переменной, а также некоторые результаты, которые, насколько нам известно, оказываются новыми даже для функций одной переменной.

Глава VI. Дополнение. В этой главе рассмотрены некоторые обобщения и модификации теории, развитой в предшествующих главах. Кроме того, приведены различные конструкции зарядов и мер. (*Мерой* мы называем положительную, счетно аддитивную, регулярную, но, вообще говоря, не ограниченную функцию множества.) Здесь целью является в том числе построение примеров для общей теории, развитой в предшествующих главах. Впрочем, упомянутые конструкции представляют самостоятельный интерес. Особо важную роль играет приведенная нами конструкция инвариантной меры в компактных группах. Эта конструкция является естественным обобщением конструкции, приведенной А. Хааром для групп со счетной базой, и основана на замене обычного предела пределом в смысле Мура — Смита. Важность полученного результата состоит в том, что в рамках теории счетно компактных топологических групп он позволяет избавиться от второй аксиомы счетности, оставив лишь условие компактности.

Мы стремились к достаточно детальному изложению и привели некоторые доказательства во всех подробностях не потому, что они кажутся нам оригинальными, а лишь с целью достичь ясности и упростить понимание. Почти все результаты, принимаемые в дальнейшем без доказательств, можно найти в книге Ф. Хаусдорфа [8].

Обозначения. Почти всегда мы будем иметь дело с некоторым пространством, обозначаемым символом R. Буквы x, y, z обозначают точки этого пространства. Слово «множество» всегда означает подмножество пространства R. Все прочие множества, возникающие в ходе изложения (мно-

[8)] Впрочем, этот результат является прямым обобщением одной теоремы Хелли и содержится в известной теореме функционального анализа о слабой счетной компактности сферы в пространстве, сопряженном к сепарабельному пространству.

жества функций, зарядов, множеств и т. д.), мы будем именовать совокупностями, системами и т. п. Таким образом, говоря о множестве, мы не будем всякий раз уточнять, что речь идет о множестве, содержащемся в R. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. Объединение, пересечение и разность множеств обозначаются соответственно через $A \cup B$, $\bigcup_\xi A_\xi$; $A \cap B$, $\bigcap_\xi A_\xi$; $A \diagdown B$, причем в последнем случае мы не предполагаем, что $A \supset B$. Символ включения ($A \supset B$) всегда понимается в широком смысле, т. е. соотношение $A \supset B$ не исключает равенства $A = B$. Индексы, принимающие положительные целочисленные значения, обозначаются буквами i, k и т. п., в то время как индексы, пробегающие некоторую, вообще говоря, произвольную и не обязательно счетную совокупность, обозначаются буквами ξ, η, ζ.

Символ $\{\Phi(x)\}$ обозначает множество всех тех точек x рассматриваемого пространства R, которые удовлетворяют условию $\Phi(x)$. В случае возможной двусмысленности мы будем писать $\{x \in R : \Phi(x)\}$.

Символы $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$ обозначают точные верхнюю и нижнюю грани значений функции $f(x)$ на пространстве R.

Символы вида $\sup\limits_{\Phi(A)} f(A)$ и $\inf\limits_{\Phi(A)} f(A)$ обозначают точные верхнюю и нижнюю грани значений функции $f(A)$ переменной A (множества, функции) по всем значениям этой переменной, удовлетворяющим условию $\Phi(A)$.

ГЛАВА I. ПРОСТРАНСТВА

§ 1. *Пространства и непрерывные функции*

1°. Определение 1. Множество R назовем *пространством*, если в нем выделена система подмножеств F, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) пересечение счетного или конечного числа множеств F принадлежит F;
2) объединение конечного числа множеств F принадлежит F;
3) пустое множество принадлежит F;
4) само R принадлежит F.

Множества F будем называть *замкнутыми* в пространстве R. Их дополнения будут называться *открытыми* и обозначаться буквой G. В дальнейшем символы F и G всегда обозначают соответственно замкнутые и открытые множества некоторого пространства. Элементы множества R мы называем точками пространства R. Очевидно, что вместо замкнутых множеств в определении пространства мы могли бы взять открытые множества, потребовав, чтобы их совокупность выдерживала счетные объединения, конечные пересечения и содержала R и пустое множество.

Определение 2. Каждому множеству M сопоставим его *замыкание* $\overline{M}$ — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих M. Замыкание, вообще говоря, не является замкнутым множеством.

Из аксиом, описывающих замкнутые множества, и из определения замыкания легко вывести следующие его свойства:

1) $\overline{M_1} \cup \overline{M_2} = \overline{M_1 \cup M_2}$;

2) $\overline{M} \supset M$;

3) $\overline{M} = \overline{\overline{M}}$;

4) $\overline{\varnothing} = \varnothing$,

которые представляют собой аксиомы топологического пространства (см. [8, § 22.1, с. 110]). Тем самым каждому пространству R сопоставляется топологическое пространство, которое мы будем называть *топологическим продолжением* R и обозначать символом tR.

Пространство назовем *топологическим*, если в нем пересечение любого числа замкнутых множеств оказывается замкнутым. Это одно из традиционных определений топологического пространства. Ясно, что топологическое пространство совпадает со своим топологическим продолжением.

По определению пространство имеет счетную базу, если каждое из его открытых множеств является объединением открытых множеств, принадлежащих некоторой их счетной системе — базе пространства. В пространстве со счетной базой объединение любого числа открытых множеств представляется в виде объединения счетного числа множеств базы и тем самым является открытым. Следовательно, *пространство со счетной базой всегда является топологическим.*

Окрестностью точки x пространства R мы называем любое открытое множество, содержащее x.

Из того факта, что множество M содержит окрестность каждой своей точки, еще не следует, что оно является открытым.

Ниже мы приведем естественные примеры нетопологических пространств.

2°. Определение 3. Отображение пространства R в пространство R_1 назовем *непрерывным*, если оно однозначно и прообраз любого замкнутого множества замкнут. В случае отображения пространства R в вещественную прямую, которая, очевидно, также является пространством, мы будем говорить о *непрерывной функции*. В дальнейшем мы будем часто говорить просто «функция», всегда подразумевая непрерывную ограниченную функцию. Взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение называется, как обычно, *гомеоморфизмом*. Ясно, что отображение R в R_1 непрерывно тогда и только тогда, когда оно однозначно и прообразы открытых множеств открыты. Обычный критерий Коши — отображение $y = \varphi(x)$ непрерывно, если каждой окрестности $V(y)$ соответствует окрестность $U(x)$, образ которой содержится в $V(y)$, — вообще говоря, недостаточен, поскольку объединение окрестностей может не оказаться открытым множеством.

Лемма 1. *Для того чтобы функция $f(x)$ на пространстве R была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы множества $\{f(x) > a\}$,*

$\{f(x) < a\}$ *были открыты или чтобы множества* $\{f(x) \geqslant a\}$, $\{f(x) \leqslant a\}$ *были замкнуты для любого числа* a.

Указанные два условия эквивалентны. Их необходимость очевидна из определения непрерывной функции. Докажем, что первое из них является достаточным.

Каждое открытое подмножество числовой прямой является объединением счетного числа открытых интервалов. Каждый интервал (a, b) имеет прообраз $\{b > f(x) > a\} = \{f(x) < b\} \cap \{f(x) > a\}$, являющийся открытым множеством, поскольку множества $\{f(x) < b\}$ и $\{f(x) > a\}$ открыты по условию. Следовательно, прообраз любого открытого множества открыт, будучи объединением счетного числа открытых множеств вида $\{b > f(x) > a\}$.

Полной системой функций на множестве R назовем (см. [8, § 37.1, с. 224]) систему функций, обладающую следующими свойствами:

1) каждая постоянная функция принадлежит системе;

2) максимум и минимум двух функций системы принадлежат системе;

3) сумма, произведение и частное (если делитель всюду отличен от нуля) двух функций системы также принадлежат системе;

4) предел равномерно сходящейся последовательности функций системы принадлежит системе.

Справедлива следующая важная

Теорема 1. *Все непрерывные функции на произвольном заданном пространстве образуют полную систему. Для любой полной системы функций существует такое пространство, что все определенные на нем непрерывные функции в точности образуют эту систему. Такое пространство можно получить, объявив замкнутыми множества вида* $\{f(x) \geqslant a\}$, *где* $f(x)$ *принадлежит данной полной системе и* a *— произвольное число.*

Это известная теорема. Ее первая часть доказывается достаточно просто. Что касается второй части, несложно доказать, что, взяв множества $\{f(x) \geqslant a\}$ в качестве замкнутых, мы действительно получим пространство. Соответственно нам остается показать, что все непрерывные функции на этом пространстве образуют именно данную полную систему. Все это можно найти у Хаусдорфа. В самом деле, говорят, что $f(x)$ является функцией класса (G, F), если множества $\{f(x) > a\}$ являются множествами G, а множества $\{f(x) \geqslant a\}$ — множествами F [8, § 37.1, с. 223]. Лемма 1 утверждает, что функции класса (G, F) совпадают с непрерывными функциями на рассматриваемом пространстве. Следовательно, теорема 1 представляет собой переформулировку известной теоремы о классах функций, определенных указанным способом [8, § 37.1, теорема III и § 37.3, теорема VIII].

Пример. Рассмотрим в качестве полной системы функций $f(x)$ первый класс Бэра на отрезке $[0, 1]$. Для функций первого класса Бэра множества $\{f(x) \geqslant a\}$ и $\{f(x) > a\}$ являются множествами типа G_δ и F_σ соответственно.

Следовательно, мы получаем пространство, чьи точки — числа на отрезке $[0,1]$, а замкнутые множества — все множества типа G_δ. Замыканием любого множества M в этом случае будет само множество M, поскольку на числовой прямой каждое множество является пересечением всех содержащих его открытых множеств, а значит и множеств типа G_δ.

Таким пространством определяется каждый класс Бэра. Этот пример вскрывает суть цели, к которой направлено наше обобщение понятия пространства. Действительно, при таком подходе мы не можем отделить рассмотрение классов Бэра и других сходных систем функций от рассмотрения непрерывных функций на топологических пространствах и, аналогичным образом, отделить борелевские множества от замкнутых и открытых подмножеств пространств.

3°. Определение 4. Пространство называется *нормальным*, если любые два непересекающихся замкнутых множества могут быть включены в непересекающиеся открытые множества.

Для нормальных пространств справедлива известная лемма Урысона, доказанная им для случая нормальных топологических пространств. В нашем более общем случае нам придется немного модифицировать его рассуждения, а поскольку эта лемма играет исключительно важную роль для дальнейшего изложения, мы приведем ее полное доказательство.

Скажем, что функция $f(x)$, определенная на пространстве R, *связывает* множество F_0 с множеством F_1, если она непрерывна, равна нулю на F_0, равна единице на F_1 и всюду удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Для краткости мы будем в дальнейшем постоянно использовать этот термин, предполагая при этом, что если функцию $f(x)$ можно выбрать так, чтобы $F_0 = \{f(x) = 0\}$ и $F_1 = \{f(x) = 1\}$, то $f(x)$ выбирается именно с этими условиями.

Лемма 2. *В нормальном пространстве для любых двух замкнутых множеств, не имеющих общих точек, существует функция, связывающая эти множества.*

Пусть в нормальном пространстве R заданы два замкнутых множества F и F', не имеющие общих точек. Достаточно рассмотреть случай, когда оба множества непусты. В силу нормальности пространства существуют открытые множества, содержащие F и F' и не имеющие общих точек. Пусть

$$G_{\frac{1}{2}} \supset F, \quad G'_{\frac{1}{2}} \supset F', \quad G_{\frac{1}{2}} \cap G'_{\frac{1}{2}} = \varnothing. \tag{1}$$

Если положить

$$F = F_0, \quad R \diagdown G'_{\frac{1}{2}} = F_{\frac{1}{2}}, \quad R \diagdown F' = G_1,$$

то в силу (1) мы получим

$$F_0 \subset G_{\frac{1}{2}} \subset F_{\frac{1}{2}} \subset G_1.$$

Продолжим построение по индукции, вводя новую пару для каждой пары $F \subset G$. А именно, предположим, что мы уже определили множества $F_{\frac{m}{2^n}}$ и $G_{\frac{m+1}{2^n}}$, $F_{\frac{m}{2^n}} \subset G_{\frac{m+1}{2^n}}$. Тогда существуют множества G' и G'', содержащие $F_{\frac{m}{2^n}}$ и $R \setminus G_{\frac{m+1}{2^n}}$ соответственно и не имеющие общих точек. Положим

$$G' = G_{\frac{2m+1}{2^{n+1}}}, \quad R \setminus G'' = F_{\frac{2m+1}{2^{n+1}}};$$

тогда

$$F_{\frac{m}{2^n}} \subset G_{\frac{2m+1}{2^n}} \subset F_{\frac{2m+1}{2^{n+1}}} \subset G_{\frac{m+1}{2^n}}.$$

Тем самым мы построили систему множеств F_p и G_p, где p — двоично-рациональная дробь. Кроме того, положим $G_0 = \varnothing$, $F_1 = R$. Из построения с очевидностью следует, что

$$G_p \subset F_p \subset G_q \quad \text{при } q > p. \tag{2}$$

Для каждой точки x положим

$$f(x) = \inf_{x \in F_p} p, \tag{3}$$

т. е. определим значение $f(x)$ как точную нижнюю грань тех двоично-рациональных дробей p, для которых $x \in F_p$. Покажем, что определенная таким способом функция удовлетворяет всем необходимым условиям.

Уже из определения $f(x)$ видно, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Далее, поскольку $F = F_0$, на F мы имеем $f(x) = 0$, а поскольку, напротив, F' не пересекается ни с одним из множеств F_p для $p < 1$, на F' мы имеем $f(x) = 1$.

Теперь покажем, что

$$\{f(x) \leqslant a\} = \bigcap_{p > a} F_p \tag{4}$$

для каждого вещественного a. Пусть $f(x) \leqslant a$. Согласно (3) это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $p < a + \varepsilon$ такое, что $x \in F_p$. Поскольку из (2) следует $F_q \supset F_p$ при $q > p$, мы имеем $x \in \bigcap_{p>a} F_p$, а значит,

$$\{f(x) \leqslant a\} \subset \bigcap_{p > a} F_p. \tag{5}$$

Наоборот, если $x \in \bigcap_{p>a} F_p$, то в силу (3) мы имеем $f(x) \leqslant a$, так как точная нижняя грань всех p, больших чем a, равна a. Следовательно,

$$\{f(x) \leqslant a\} \supset \bigcap_{p > a} F_p. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует (4).

Покажем, что

$$\{f(x) < a\} = \bigcup_{p<a} G_p. \tag{7}$$

Пусть $f(x) < a$. Согласно (3) это означает, что существует $p < a$, для которого $x \in F_p$. Но для $p < a$ существует двоично-рациональная дробь q между p и a. В силу (2) мы тем самым имеем $x \in G_q$ и, следовательно,

$$\{f(x) < a\} \subset \bigcup_{q<a} G_q. \tag{8}$$

Пусть $x \in \bigcup_{q<a} G_q$, т. е. существует $q < a$, для которого $x \in G_q$. Но тогда в силу (2) мы имеем $x \in F_q$, а значит, $f(x) \leqslant q < a$ благодаря (3). Следовательно,

$$\{f(x) < a\} \supset \bigcup_{q<a} G_q. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует (7).

Поскольку множество рациональных дробей счетно, в формулах (4) и (7) задействованы счетные пересечения замкнутых и счетные объединения открытых множеств. Следовательно, они являются замкнутым и открытым множествами соответственно. По лемме 1 отсюда следует, что функция $f(x)$ непрерывна.

Как и в случае топологических пространств, из только что доказанной леммы немедленно вытекает теорема о продолжении непрерывной функции (см. [8, § 25.3, с. 133]).

Теорема 2. *Если непрерывная ограниченная функция $f(x)$ определена на замкнутом подмножестве F нормального пространства R, то существует непрерывная ограниченная функция, определенная на всем R и совпадающая с $f(x)$ в точках множества F.*

4°. Определение 5. Подмножество F пространства R назовем *функционально замкнутым*, если существуют определенная на R непрерывная функция $f(x)$ и число a такие, что $F = \{f(x) \geqslant a\}$. Дополнения к совершенно замкнутым множествам будем называть *функционально открытыми*[9]. Ясно, что функционально открытые множества могут быть определены как множества, представимые в виде $\{f(x) < a\}$.

[9] А. Д. Александров использовал термины «totally closed set» и «totally open set» соответственно, которые стали малоупотребительными. Отметим еще, что в современной топологии функционально замкнутые множества называют также *нуль-множествами*. — *Прим. ред.*

Мы теперь установим некоторые свойства функционально замкнутых множеств, необходимые для дальнейшего изложения. Функционально замкнутые множества мы условимся обозначать символами F^*, а функционально открытые — символами G^*.

Лемма 3. *Для любого F^* существует определенная на R непрерывная функция $f(x)$ такая, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ и $F^* = \{f(x) = 0\}$.*

Если $F^* = \{g(x) \geqslant a\}$, то, полагая $h(x) = a - \min[g(x), a]$ и затем $f(x) = \min[h(x), 1]$, мы получаем $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ и $F^* = \{f(x) = 0\}$.

Лемма 4. *Если множества F_0^* и F_1^* не имеют общих точек, то существует непрерывная функция $f(x)$ такая, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$,*

$$F_0^* = \{f(x) = 0\}, \quad F_1^* = \{f(x) = 1\}.$$

Пусть $F_0^* = \{f_0(x) = 0\}$ и $F_1^* = \{f_1(x) = 0\}$, где $0 \leqslant f_0(x), f_1(x) \leqslant 1$ (см. лемму 3). Тогда

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{f_0(x) + f_1(x)}$$

будет искомой функцией.

Лемма 5. *Прообраз функционально замкнутого множества относительно непрерывного отображения является функционально замкнутым множеством.*

Пусть φ — непрерывное отображение R в R_1. Рассмотрим функционально замкнутое подмножество $F_1^* = \{f(x_1) \geqslant a\}$ пространства R_1, где $f(x_1)$ — непрерывная функция, определенная на R_1. Функция $f\big(\varphi(x)\big)$ непрерывна на R, поскольку она является композицией двух непрерывных отображений φ и f. Прообразом множества F_1^* будет множество

$$\varphi^{-1}(F_1^*) = \big\{f\big(\varphi(x)\big) \geqslant a\big\},$$

являющееся функционально замкнутым.

Лемма 6. *Если множества F_i^* $(i = 1, 2, \dots)$ образуют убывающую (в широком смысле) последовательность, то существует убывающая последовательность множеств G_i^* такая, что $G_i^* \supset F_i^*$ и*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i^* = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i^*.$$

Пусть $F_i^* = \{f^i(x) = 0\}$, $0 \leqslant f^i(x) \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \dots)$. Положим

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f^i(x).$$

Тогда $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ и $F_n^* = \{f_n(x) = 0\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Положим $G_n^* = \{f_n(x) < \frac{1}{n}\}$. Из $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ следует $G_n^* \supset G_{n+1}^*$, а из $F_n^* = \{f_n(x) = 0\}$ следует $G_n^* \supset F_n^*$. Таким образом, последовательность G_n^* убывает и

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^* \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^*.$$

Покажем, что выполнено обратное включение. Пусть

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^*.$$

Тогда для всех n и m мы имеем $f_n(x) \leqslant f_{n+m}(x) < \frac{1}{n+m}$, откуда в силу произвольности m следует $f_n(x) = 0$ для всех n. Таким образом, $x \in F_n^*$ для всех n. Следовательно,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^* \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^*.$$

Доказанная выше лемма является усилением утверждения о том, что каждое множество F^* является пересечением счетного семейства множеств G^*: достаточно взять $F_1^* = F_2^* = \cdots$.

Лемма 7. *Для того чтобы замкнутое подмножество нормального пространства было функционально замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно было пересечением счетного семейства открытых множеств.*

Необходимость этого условия, как уже было отмечено, содержится в лемме 6. Докажем его достаточность. Пусть

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Если функции $f_n(x)$ связывают F с $R \diagdown G_n$ (а такие функции существуют в силу нормальности пространства), то, полагая

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x),$$

мы получаем непрерывную функцию $f(x)$, удовлетворяющую равенству $F = \{f(x) = 0\}$.

Лемма 8. *Каждое множество, принадлежащее алгебре $\mathfrak{G}^*$, порожденной*[10] *множествами F^*, является пересечением счетного числа множеств G^* и одновременно объединением счетного числа множеств F^*.*

---

[10] Алгебра множеств, порожденная множествами F^*, является совокупностью всех множеств, получаемых из F^* с помощью операций объединения, разности и пересечения, примененных конечное число раз (см. [8, гл. V, § 17]).

Пусть $\mathfrak{F}^*_\sigma$ — совокупность всех объединений счетных семейств множеств F^* данного пространства и пусть $\mathfrak{G}^*_\delta$ — совокупность всех пересечений счетных семейств множеств G^*. Обе эти совокупности являются решетками множеств, так как множества F^* и G^* образуют решетки. Каждое множество из $\mathfrak{G}^*_\delta$ является дополнением к некоторому множеству из $\mathfrak{F}^*_\sigma$ и наоборот. Следовательно, общая часть этих решеток является алгеброй множеств. Поскольку в силу леммы 6 каждое множество F^* входит в $\mathfrak{G}^*_\delta$ и вместе с тем очевидным образом входит в $\mathfrak{F}^*_\sigma$, мы заключаем, что рассматриваемая алгебра содержит все множества F^*. Тем самым лемма доказана.

5°. Определение 6. Пространство называется *совершенно нормальным*, если каждое его замкнутое множество является функционально замкнутым.

Теорема 3. *Для того чтобы пространство было совершенно нормальным, необходимо и достаточно, чтобы* 1) *оно было нормальным и* 2) *каждое его замкнутое множество было пересечением счетного числа открытых множеств* [11)].

Необходимость нормальности следует из леммы 4. Действительно, если множества F_0 и F_1 функционально замкнуты и не пересекаются, а функция $f(x)$ такова, что $F_0 = \{f(x) = 0\}$ и $F_1 = \{f(x) = 1\}$, то множества $\left\{f(x) < \frac{1}{2}\right\}$ и $\left\{f(x) > \frac{1}{2}\right\}$ открыты и разделяют F_0 и F_1. Необходимость второго условия обосновывается леммой 6.

Достаточность условий теоремы вытекает из леммы 7.

Теорема 4. *Если объявить замкнутыми только функционально замкнутые множества данного пространства, то в результате получится пространство, причем совершенно нормальное.*

Согласно определению совершенно нормального пространства эта теорема представляет собой переформулировку теоремы 1.

Рассмотрим всю систему непрерывных функций на пространстве R и построим по нему пространство, объявив замкнутыми множества $\{f(x) \geqslant a\}$. Построенное таким способом пространство мы всегда будем обозначать символом R^*. Ясно, что R и R^* имеют одни и те же непрерывные функции. Не менее очевидно, что рассмотрение функционально замкнутых множеств пространства R и связанных с ними понятий эквивалентно рассмотрению пространства R^*.

Теорема 5. *Всякое непрерывное отображение пространства R в пространство R_1 является непрерывным отображением R^* в R_1^*.*

Согласно определениям непрерывного отображения и пространства R^* эта теорема представляет собой переформулировку леммы 5.

---

11) Для случая топологических пространств эта теорема была доказана Н. Б. Веденисовым [12], а также Э. Чехом.

В дальнейшем мы установим еще несколько важных свойств совершенно нормальных пространств.

Приведем один пример нормального пространства R и соответствующего совершенно нормального пространства R^*. Пусть точками R будут числа на отрезке $[0, 1]$, а в качестве замкнутых множеств рассмотрим суслинские множества A на этом отрезке. Открытыми в этом случае будут дополнения ${}^{c}A$ суслинских множеств. Мы действительно получим пространство, поскольку пересечение и объединение счетного числа A-множеств является A-множеством. Пространство является нормальным, так как по теореме Лузина два A-множества без общих точек разделяются борелевскими множествами, которые вместе с тем являются дополнениями борелевских, а значит и суслинских множеств. По лемме 7 функционально замкнутыми в нашем пространстве будут множества, являющиеся одновременно A-множествами и счетными пересечениями множеств ${}^{c}A$. Но счетное пересечение ${}^{c}A$-множеств вновь является ${}^{c}A$-множеством. Следовательно, функционально замкнутыми будут те A-множества, которые одновременно являются ${}^{c}A$-множествами. По теореме Суслина это будут борелевские множества.

§ 2. *Некоторые специальные виды пространств*

1°. В общей теории топологических пространств выделение специальных видов пространств в целом следует трем направлениям: 1) введение различных аксиом отделимости, 2) ограничение мощности базы пространства, 3) постулирование возможности извлечения из покрытия пространства открытыми множествами подпокрытия меньшей мощности. Мы не будем сосредоточивать внимание на рассмотрении пространств с базами данной мощности. Пространства со счетной базой всегда являются топологическими. Из аксиом отделимости мы рассмотрим только те, которые будут использованы в дальнейшем изложении. Наиболее важная из них уже была введена в определении нормального пространства. Затем мы обратимся к счетно компактным и компактным пространствам.

Определение 1. Пространство R называется T_1-*пространством*, если для любых двух его точек x, y существует окрестность точки x, не содержащая y, и — из соображений симметрии — существует окрестность точки y, не содержащая x. Или, что то же самое, для любых двух точек x, y существует замкнутое множество, содержащее точку x и не содержащее точку y. Это равносильно совпадению любого одноэлементного множества с его замыканием. Отсюда тем не менее не вытекает замкнутость любого одноэлементного множества, как это имеет место в случае топологических T_1-пространств.

Определение 2. Пространство называется *вполне регулярным*, если оно, во-первых, является T_1-пространством и, во-вторых, для любого его замкнутого множества F и любой точки $x \notin F$ существует непрерывная функция, равная нулю на F и равная единице в точке x.

Это — дословное повторение определения, введенного Тихоновым в случае топологических пространств.

Лемма 1. *Во вполне регулярном пространстве для любой пары точек x, y существует непрерывная функция, равная нулю в x и единице в y.*

Поскольку вполне регулярное пространство является T_1-пространством, для каждой пары точек x, y существует замкнутое множество, содержащее x и не содержащее y. Следовательно, по определению вполне регулярного пространства отсюда вытекает существование требуемой функции.

Определение 3. Пусть пространство R_1 имеет те же точки, что и пространство R. Предположим, что замкнутые множества пространства R являются замкнутыми и в R_1, но R_1 может иметь и другие замкнутые множества, которые тем не менее являются пересечениями замкнутых множеств пространства R. В этом случае мы будем называть пространство R_1 *продолжением пространства* R и писать $R_1 = pR$.

Всякое пространство R имеет единственное продолжение, не допускающее дальнейшего продолжения; таковым является не что иное, как топологическое продолжение tR.

Лемма 2. *Пространство pR является T_1-пространством тогда и только тогда, когда R является T_1-пространством.*

Действительно, как легко видеть, определение 1 эквивалентно следующему: R является T_1-пространством, если каждая его точка совпадает с пересечением содержащих ее замкнутых множеств. Следовательно, утверждение леммы непосредственно вытекает из определения 3.

Аналогично из определения продолжения можно легко заключить, что если пространство R является продолжением совершенно нормального пространства, то оно является продолжением своего собственного R^*.

Теорема 1. *Для того чтобы пространство R_1 было продолжением совершенно нормального пространства, необходимо и достаточно, чтобы для любого его замкнутого множества F_1 и любой точки $x_1 \notin F_1$ существовала функция, непрерывная на R_1, равная нулю на F_1 и равная единице в x_1.*

Необходимость. Пусть R_1 — продолжение совершенно нормального пространства R. Пусть F_1 — замкнутое множество в R_1 и $x_1 \notin F_1$. Поскольку F_1 является пересечением замкнутых в R множеств, существует множество F, замкнутое в R, содержащее F_1 и не включающее x_1. В силу совершенной нормальности R существует непрерывная на R — и тем самым непрерывная на R_1 — функция $f(x)$ такая, что $F = \{f(x) = 0\}$. Положим

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x_1)}.$$

Эта функция непрерывна, равна единице в точке x_1 и равна нулю на F_1.

Достаточность. Пусть R_1 удовлетворяет условию теоремы. Пусть R_1^* — совершенно нормальное пространство, которое мы получаем из R_1, объявляя замкнутыми лишь функционально замкнутые множества.

Пусть F_1 замкнуто в R_1 и $x_1 \notin F_1$. По условию существует непрерывная функция $f(x)$, равная единице в x_1 и равная нулю на F_1. Множество $\{f(x) = 0\}$ функционально замкнуто, содержит F_1, но не включает x_1. Тогда F_1 совпадает с пересечением всех функционально замкнутых множеств, содержащих его. Следовательно, R_1 является продолжением R_1^*.

Из теоремы 1, определения 2 и леммы 2 вытекает

Теорема 1*. *Пространство вполне регулярно тогда и только тогда, когда оно является продолжением совершенно нормального T_1-пространства.*

Следовательно, пространство pR вполне регулярно тогда и только тогда, когда R вполне регулярно.

2°. Определение 4. *Пространство называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.*

Теорема 2. *Продолжение компактного пространства компактно.*

Пусть $R_1 = pR$, где R компактно. Очевидно, что продолжение можно определить исходя из открытых множеств: pR представляет собой пространство, в котором каждое открытое множество является объединением множеств, открытых в R, и каждое множество, открытое в R, открыто и в pR. Пусть теперь $\{G_{\xi,1}\}$ является покрытием R_1. Из только что приведенного определения продолжения следует, что каждое множество $G_{\xi,1}$ представляется в виде $G_{\xi,1} = \bigcup_\eta G_{\xi,\eta}$, где $G_{\xi,\eta}$ открыты в R. Множества $G_{\xi,\eta}$ образуют покрытие R. В силу компактности R из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Оно будет одновременно покрытием R_1, поскольку всякое множество, открытое в R, является открытым и в R_1.

Как обычно, мы будем называть точку x точкой полного накопления множества M, если в каждой окрестности точки x содержится часть множества M, равная ему по мощности.

Лемма 3. *Точка x является точкой полного накопления множества M в pR тогда и только тогда, когда она является точкой полного накопления M в R.*

Поскольку каждое открытое в R множество открыто в pR, любая окрестность точки x в R является ее окрестностью и в pR. Следовательно, если x — точка полного накопления M в pR, то она является таковой и в R. С другой стороны, каждое открытое множество в pR содержит открытое множество в R. Следовательно, если x — точка полного накопления M в R, то она является таковой и в pR.

Теорема 3. *Пространство является компактным тогда и только тогда, когда каждое бесконечное множество в нем имеет точку полного накопления.*

Для случая топологических пространств эта теорема доказана П. С. Александровым и П. С. Урысоном [4]. Пусть R компактно. Тогда по теореме 2 его топологическое продолжение также является компактным. Обратное утверждение — о том, что из компактности tR следует компактность R, — очевидно. Поскольку доказываемая теорема справедлива для tR, в силу леммы 3 она справедлива и для R.

Определение 5. *Направлением* в пространстве R мы называем всякую систему непустых замкнутых множеств в R такую, что для любых двух множеств этой системы существует содержащееся в них множество этой системы. Направление назовем *исчезающим*, если пересечение всех входящих в него множеств пусто.

Понятие направления заимствовано нами из общей теории пределов, развитой С. О. Шатуновским, Э. Муром и Г. Смитом. А именно, направлением в этой теории называется система элементов, для которых определено понятие следующего элемента, причем для любых двух элементов системы в ней имеется элемент, следующий за этими двумя. Если интерпретировать отношение включения как отношение следования, то становится ясно, что направление в смысле нашего определения является направлением в смысле общей теории пределов. Эта связь будет для нас весьма существенной.

Теорема 4. *Пространство является компактным тогда и только тогда, когда в нем нет исчезающих направлений.*

Пусть R компактно и $\{F\}$ — направление в R. Если бы оно было исчезающим, то множества $R\diagdown F$ образовывали бы покрытие R, не содержащее конечного подпокрытия. В противном случае пересечение конечного числа множеств из $\{F\}$ было бы пустым, что, конечно же, противоречит определению направления.

Предположим, что R не является компактным и что имеется покрытие пространства R открытыми множествами $\{G\}$, не содержащее конечного подпокрытия. Тогда дополнения к объединениям конечных семейств множеств этого покрытия образуют исчезающее направление, поскольку в противном случае $\{G\}$ не являлось бы покрытием пространства R.

Характеристическое свойство компактного пространства, устанавливаемое последней теоремой, играет фундаментальную роль в дальнейшем изложении, и мы будем использовать его без явных ссылок на нашу теорему.

Теорема 5. *Если пространство компактно, то произвольное его продолжение является нормальным тогда и только тогда, когда нормальным является само пространство.*

Пусть R — компактное нормальное пространство. Пусть F_0 и F_1 — замкнутые множества в pR, не имеющие общих точек. По определению продолжения множества F_0 и F_1 являются пересечениями всех замкнутых в R множеств, содержащих их:

$$F_0 = \bigcap_{\xi} F_{0\xi}, \quad F_1 = \bigcap_{\eta} F_{1\eta}. \tag{1}$$

Среди $F_{0\xi}$ и $F_{1\eta}$ встречаются множества, не имеющие общих точек. Действительно, предположим, что $F_{0\xi} \cap F_{1\eta}$ всегда непусты. Тогда эти пересечения образуют направление, поскольку в $F_{0\xi_1} \cap F_{1\eta_1}$ и $F_{0\xi_2} \cap F_{1\eta_2}$ содержится $(F_{0\xi_1} \cap F_{0\xi_2}) \cap (F_{1\eta_1} \cap F_{1\eta_2})$, а множества $F_{0\xi_1} \cap F_{0\xi_2}$ и $F_{1\eta_1} \cap F_{1\eta_2}$ замкнуты в R и содержат F_0 и F_1 соответственно. Поскольку F_0 и F_1 не имеют общих точек, это направление должно быть исчезающим согласно (1), что противоречит компактности R. Следовательно, найдутся множества $F_{0\xi} \supset F_0$, $F_{1\eta} \supset F_1$, замкнутые в R и не имеющие общих точек. Благодаря нормальности R они разделяются открытыми множествами. Но это означает, что F_0 и F_1 также разделяются.

Пусть теперь R компактно и pR — нормальное пространство. Пусть F_0 и F_1 замкнуты в R и не имеют общих точек. Поскольку они замкнуты также и в pR, в силу нормальности pR имеются следующие открытые в pR множества:

$$G_0 \supset F_0, \quad G_1 \supset F_1, \quad G_0 \cap G_1 = \varnothing.$$

В то же время по определению продолжения мы имеем

$$G_0 = \bigcup_{\xi} G_{0\xi}, \quad G_1 = \bigcup_{\eta} G_{1\eta},$$

где $G_{0\xi}$ и $G_{1\eta}$ открыты в R. Эти множества образуют покрытия множеств F_0 и F_1. Очевидно, что благодаря компактности R из этих покрытий мы можем выбрать конечные подпокрытия $G_{0\xi_1}, \dots, G_{0\xi_n}$ и $G_{1\eta_1}, \dots, G_{1\eta_n}$. Множества $\bigcup_{i=1}^{n} G_{0\xi_i}$ и $\bigcup_{i=1}^{n} G_{1\eta_i}$ открыты в R, содержат F_0 и F_1 соответственно и не имеют общих точек. Нормальность R тем самым доказана.

Из теорем 5 и 1^* вытекает

Теорема 6. *Вполне регулярное компактное пространство является нормальным.*

В то же время из леммы 1 непосредственно следует, что во вполне регулярном пространстве любые две точки можно окружить непересекающимися окрестностями. Пространство, обладающее этим свойством, называется хаусдорфовым или T_2-пространством. Справедлива следующая теорема:

Теорема 6′. *Компактное T_2-пространство является нормальным.*

Эта теорема доказывается в точности так же, как и в случае топологических пространств (см. [8, § 27.5, с. 145]).

Теорема 7. *Если R компактно, то $(pR)^* = R^*$, т. е. всякое множество, функционально открытое (функционально замкнутое) в продолжении пространства R, является функционально открытым (функционально замкнутым) в самом R. Иными словами, всякая функция, непрерывная на pR, непрерывна и на R.*

Пусть R компактно и G^* — функционально открытое множество в pR. Каждое функционально открытое множество является объединением счетного числа замкнутых множеств, как это следует из леммы 8, § 1. Следовательно,

$$G^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \tag{2}$$

где F_n — замкнутые множества в pR. По определению продолжения мы имеем

$$G^* = \bigcup_{\xi} G_\xi, \tag{3}$$

где G_ξ — открытые множества в R. Множества G_ξ образуют покрытие каждого из F_n. Но в силу компактности R пространство pR также компактно, а значит, в любом покрытии каждого из множеств F_n мы можем выбрать конечное подпокрытие. Объединение всех этих конечных покрытий в силу (2) и (3) будет счетным покрытием множества G^*. Следовательно, G^* представляется в виде объединения счетного числа открытых в R множеств и тем самым является открытым в R.

Таким образом, всякое множество, функционально открытое в pR, является открытым в R.

Если функция $f(x)$ непрерывна на pR, то прообразы открытых подмножеств вещественной прямой функционально открыты в pR. Значит, они открыты в R. Следовательно, $f(x)$ непрерывна на R, и упомянутые множества являются функционально открытыми в R. Тем самым теорема доказана.

3°. Определение 6. *Направлением* в системе функций Φ мы называем такую совокупность функций из Φ, что для любых двух функций из этой совокупности имеется функция из этой же совокупности, не превосходящая (всюду) обе эти функции.

Здесь мы вновь имеем направление в смысле общей теории пределов. В полном соответствии с этой теорией вводится понятие сходимости направления в системе функций. Будем говорить, что такое *направление сходится* к $f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого x существует такая функция этого направления, что для нее и для всех следующих за ней функций $h(x)$ имеет место неравенство $|f(x) - h(x)| < \varepsilon$. Направление сходится к $f(x)$ равномерно, если такую функцию можно выбрать одной и той же для всех x.

Теорема 8. *Если пространство компактно, то любое направление в системе непрерывных на нем функций, сходящееся к нулю, сходится равномерно. Если в пространстве, являющемся продолжением совершенно нормального пространства, каждое сходящееся к нулю направление в системе непрерывных на нем функций сходится равномерно, то такое пространство компактно.*

Пусть R компактно и $\{f\}$ — направление в системе непрерывных на R функций, сходящееся к нулю. Зададим $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множества

$\{f(x) \geqslant \varepsilon\}$, где $f \in \{f\}$. Если $f_3(x) \leqslant f_1(x)$ и $f_3(x) \leqslant f_2(x)$, то

$$\{f_3(x) \geqslant \varepsilon\} \subset \{f_1(x) \geqslant \varepsilon\} \cap \{f_2(x) \geqslant \varepsilon\}.$$

Следовательно, если бы множества $\{f(x) \geqslant \varepsilon\}$ были непусты, то они образовывали бы направление. Вместе с тем, поскольку направление $\{f\}$ сходится к нулю, направление множеств $\{f(x) \geqslant \varepsilon\}$ было бы исчезающим вопреки компактности R. Отсюда следует, что среди этих множеств должно встретиться пустое — например, $\{f_0(x) \geqslant \varepsilon\} = \varnothing$. Тогда это же соотношение справедливо для всех функций $f \in \{f\}$, не превосходящих f_0, т. е. $f(x) < \varepsilon$ для всех таких f. Функции сходящегося к нулю направления, очевидно, положительны [12], а значит, из только что доказанного вытекает равномерная сходимость направления $\{f\}$.

Пусть R_1 — продолжение совершенно нормального пространства R, удовлетворяющее условиям второй части теоремы. Всякая функция, непрерывная на R, непрерывна и на R_1, а значит, R тоже удовлетворяет условиям теоремы. Если мы докажем компактность R, то в силу теоремы 2 тем самым будет доказана и компактность R_1.

Пусть R компактно и пусть $\{F\}$ — исчезающее направление в R. Поскольку R является совершенно нормальным, каждое множество $F \in \{F\}$ представляется в виде пересечения открытых множеств:

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n. \tag{4}$$

Для каждой пары F, G_n мы построим функцию $f(x)$, связывающую $R \setminus G_n$ с F, т. е.

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \tag{5}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in R \setminus G_n; \\ 1, & \text{если } x \in F. \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим все такие функции и всевозможные произведения их конечных наборов. В силу неравенства (5) мы получаем направление $\{h\}$ в семействе непрерывных функций на пространстве R. Если $h(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$, $f_i(x) = 1$ на $F_i \in \{F\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то $h(x) = 1$ на $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$. Поэтому каждая функция направления $\{h\}$ равна единице на одном из множеств направления $\{F\}$ (на множестве, содержащемся

[12] Адаптируя терминологию, связанную с отношением порядка, мы сочли уместным перевести термины «non-negative», «non-increasing» и т. п. как «положительный», «убывающий» и т. п. — *Прим. перев.*

в $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$). В то же время, ввиду того, что пересечение всех множеств F пусто, пересечение всех множеств G_n также пусто. Но поскольку в силу (6) каждая функция из $\{h\}$ зануляется вне некоторого G_n, направление $\{h\}$ сходится к нулю. Коль скоро каждая функция из $\{h\}$ допускает значение 1, сходимость не является равномерной вопреки условию теоремы. Следовательно, пространство R должно быть компактным.

Если пространство R не представляет собой продолжение совершенно нормального пространства, то из условия последней теоремы, вообще говоря, нельзя заключить, что пространство является компактным. Пусть, например, точками пространства R будут все натуральные числа $1, 2, \dots$, а замкнутыми множествами — все сегменты натурального ряда, начинающиеся с любого числа [13]. Такое пространство не является компактным. В то же время любая непрерывная функция на нем равна константе, поскольку единственным замкнутым множеством, содержащим единицу, является само R. Следовательно, каждое сходящееся к нулю направление в системе этих функций автоматически сходится равномерно.

4°. Определение 7. Пространство называется *счетно компактным*, если из любого его счетного покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема 9. *Пространство является счетно компактным тогда и только тогда, когда в нем нет исчезающих последовательностей [14] непустых замкнутых множеств.*

Доказательство очевидно. Сформулированное в теореме характеристическое свойство счетно компактных пространств будет в дальнейшем использоваться как определяющее.

Теорема 10. *Если пространство является счетно компактным, то любая сходящаяся к нулю убывающая последовательность непрерывных на нем функций сходится равномерно. Если пространство является совершенно нормальным и любая сходящаяся к нулю убывающая последовательность непрерывных на нем функций сходится равномерно, то это пространство является счетно компактным.*

Доказательство этой теоремы представляет собой лишь упрощение доказательства теоремы 8. Нужно только вместо направления в пространстве рассмотреть исчезающую последовательность замкнутых множеств, а вместо направления в системе непрерывных функций — убывающую последовательность этих функций.

Точкой накопления множества M в пространстве R называется точка, в любой окрестности которой содержится бесконечное множество точек из M. В точности так же, как и лемма 3, доказывается

[13] Т. е. множества вида $\{i : i \geqslant n\}$. — *Прим. перев.*

[14] Т. е. $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing$.

Лемма 4. *Точка x является точкой накопления множества M в pR тогда и только тогда, когда она является точкой накопления M в R.*

Теорема 11. *Если любое бесконечное множество в пространстве R имеет точку накопления, то R является счетно компактным.*

Из леммы 4 непосредственно следует, что если R обладает указанным в теореме свойством, то его топологическое продолжение tR также обладает этим свойством. Но для топологических пространств наша теорема уже известна [15)]. С другой стороны, если tR счетно компактно, то, очевидно, R также счетно компактно.

В случае топологических пространств теорема 11, как известно, допускает обращение. Для пространств нашего более общего вида это не так. Мы приведем пример, доказывающий это утверждение, который окажется поучительным и в других отношениях.

Пример. Возьмем последовательность всех ординалов $\alpha \leqslant \Omega$ [16)], снабженную обычной рассматриваемой на них топологией, и последовательность ординалов $1, 2, \ldots, \omega_0$ также с обычной топологией (все одноточечные множества $\{1\}, \{2\}, \ldots$ открыты, а окрестностями точки ω_0 являются сегменты рассматриваемой последовательности, начинающиеся с любого n). Построим топологическое произведение этих двух пространств. Его точками будут пары (α, β) $(\alpha \leqslant \Omega,\ \beta \leqslant \omega_0)$. Удалим точку (Ω, ω_0). Мы получим топологическое пространство R. Оно вполне регулярно и не является счетно компактным. (Последовательность $(\Omega, 1), (\Omega, 2), \ldots$ не имеет точки накопления.)

Легко убедиться в справедливости того известного факта, что каждая функция, непрерывная на последовательности ординалов $\alpha < \Omega$, становится постоянной начиная с некоторой точки.

Таким образом, для любой последовательности непрерывных функций на R существует ординал γ такой, что на всех сегментах $\{(\alpha, \beta) : \alpha > \gamma\}$, $\beta = 1, 2, \ldots, \omega_0$, все функции этой последовательности постоянны. Если эта последовательность монотонно сходится к нулю, то на указанных сегментах она сходится равномерно, в то время как на оставшейся части пространства она тоже сходится равномерно в силу компактности этой части. Следовательно, каждая последовательность непрерывных функций на R, монотонно сходящаяся к нулю, сходится равномерно. Тем не менее R не является счетно компактным.

---

15) См. [8, § 27.1, с. 141 (русское издание)]. Впрочем, необходимо отметить, что в этом месте в книге Хаусдорфа имеется ошибка. Вместо понятия предельной точки, введенного на с. 124 этой книги, следует использовать понятие точки накопления. В противном случае теоремы Кантора и Гейне — Бореля не будут верны. В этом можно убедиться на примере пространства, рассмотренного нами в конце п. 3°. Оно — топологическое и не является счетно компактным, хотя любое его непустое подмножество имеет предельную точку (в смысле определения Хаусдорфа на с. 124); таковой будет любое число, большее чем наименьшее из чисел, входящих в данное множество.

16) Здесь Ω — первый несчетный ординал. — *Прим. перев.*

Если мы теперь возьмем пространство R^*, то оно уже будет счетно компактным в силу теоремы 9. Тем не менее последовательность его точек $(\Omega, 1), (\Omega, 2), \ldots$ не имеет точки накопления. Несмотря на то, что R^* является совершенно нормальным T_1-пространством, одноточечные множества (Ω, n) в нем не замкнуты. Далее, R, будучи вполне регулярным пространством, является продолжением R^*. Следовательно, мы видим, что продолжение счетно компактного пространства может не быть счетно компактным. Наконец, R не является нормальным. Множества $\{(\Omega, n) : n < \omega_0\}$ и $\{(\alpha, \omega_0) : \alpha < \Omega\}$ замкнуты в R и не имеют общих точек, но, как легко видеть, они не разделяются непересекающимися открытыми множествами. Следовательно, продолжение нормального счетно компактного пространства может не быть нормальным.

§ 3. *Компактные расширения пространств*

1°. Определение 1. Всякое подмножество M пространства R можно превратить в пространство, рассмотрев в качестве его замкнутых множеств пересечения M с замкнутыми подмножествами R. Определенное таким способом пространство называется *подпространством* пространства R. Пространство R называется *расширением* пространства R_1, если R_1 является подпространством R и плотно в R, т.е. каждое открытое в R множество пересекается с R_1.

Определение 2. *Максимальным направлением* в пространстве R мы называем всякое направление в R (см. определение 5, § 2), не содержащееся ни в каком отличном от него направлении.

Лемма 1. *Если $\{F\}$ — максимальное направление и $F_0 \notin \{F\}$, то существует множество $F \in \{F\}$ такое, что $F_0 \cap F = \varnothing$.*

Если бы это было не так, то, добавив к $\{F\}$ множество F_0 и все его пересечения с множествами из $\{F\}$, мы бы получили направление, содержащее $\{F\}$, что противоречит максимальности $\{F\}$.

Лемма 2. *Любое направление может быть дополнено до максимального.*

Доказательство проведем трансфинитной индукцией. К данному направлению $\{F\}$ добавляем некоторое не принадлежащее ему замкнутое множество F_1, пересекающееся со всеми множествами из $\{F\}$, а также все пересечения F_1 с множествами из $\{F\}$. Получаем направление $\{F\}_1$. Повторяем построение для него и т. д.

Определение 3. *Уолменовским расширением* пространства R мы называем пространство ωR, получаемое с помощью следующей конструкции, предложенной по существу Г. Уолменом [13]. К точкам пространства R в качестве новых точек добавляются исчезающие максимальные направления пространства R. Замкнутые множества в ωR определяются следующим образом. К каждому замкнутому в R множеству F добавляем все исчезающие максимальные направления, в которые входит F; в результате получаем множество $\overline{F}$. Замкнутым множеством в ωR объявляется пересечение любого числа множеств $\overline{F}$, если только общая часть этого пересечения и R замкнута в R.

Чтобы обосновать это определение, мы должны показать, что ωR действительно является пространством и что R — его плотное подпространство. Для этого необходимо показать, что множества в ωR, объявленные замкнутыми, удовлетворяют всем четырем условиям, участвующим в определении пространства. Очевидно, что пустое множество и само ωR замкнуты. Очевидно также, что пересечение счетного числа множеств, объявленных замкнутыми, является замкнутым.

Символом $\overline{F}$ мы будем обозначать множество, замкнутое в ωR и согласно нашему построению соответствующее некоторому замкнутому в R множеству F. Непосредственно из определения следует, что оно является пересечением всех замкнутых в ωR множеств, содержащих F, и тем самым представляет собой замыкание множества F в ωR. Покажем, что

$$\overline{F_1} \cup \overline{F_2} = \overline{F_1 \cup F_2}. \tag{1}$$

Если $x \in \overline{F_1}$, то либо $x \in F_1$, и тогда $x \in F_1 \cup F_2 \subset \overline{F_1 \cup F_2}$, либо $x \in \overline{F_1} \setminus F_1$, и тогда по определению множества $\overline{F_1}$ мы имеем $F_1 \in \{F\} = x$, где $\{F\}$ — исчезающее направление, являющееся рассматриваемой точкой x. Поскольку $\{F\}$ максимально, вместе с F_1 оно должно содержать и $F_1 \cup F_2$. Таким образом, $x \in \overline{F_1 \cup F_2}$. Точно так же можно показать, что из $x \in \overline{F_2}$ следует $x \in \overline{F_1 \cup F_2}$. Следовательно,

$$\overline{F_1} \cup \overline{F_2} \subset \overline{F_1 \cup F_2}. \tag{2}$$

Пусть $x \in \overline{F_1 \cup F_2}$. Если $x \in F_1 \cup F_2$, то либо $x \in F_1$, либо $x \in F_2$. Пусть $x \in \overline{F_1 \cup F_2} \setminus F_1 \cup F_2$. Это означает, что $F_1 \cup F_2 \in \{F\} = x$. Если ни F_1, ни F_2 не принадлежат $\{F\}$, то по лемме 1 имеются $F', F'' \in \{F\}$ такие, что $F' \cap F_1 = F'' \cap F_2 = \varnothing$. Но тогда $F' \cap F'' \cap (F_1 \cup F_2) = \varnothing$ вопреки тому факту, что все три множества F', F'', $F_1 \cup F_2$ входят в одно и то же направление. Поэтому либо F_1, либо F_2 принадлежит $\{F\}$, а значит, $x = \{F\}$ принадлежит либо $\overline{F_1}$, либо $\overline{F_2}$. Следовательно,

$$\overline{F_1} \cup \overline{F_2} \supset \overline{F_1 \cup F_2}. \tag{3}$$

Включения (2) и (3) доказывают равенство (1).

Пусть теперь $\bigcap_\xi \overline{F_\xi}$ и $\bigcap_\eta \overline{F'_\eta}$ — два замкнутых в ωR множества. Имеет место следующая очевидная формула:

$$\bigcap_\xi \overline{F_\xi} \;\cup\; \bigcap_\eta \overline{F'_\eta} \;=\; \bigcap_\xi \bigcap_\eta (\overline{F_\xi} \cup \overline{F'_\eta}). \tag{4}$$

По условию $R \cap \bigcap_\xi \overline{F_\xi}$ и $R \cap \bigcap_\eta \overline{F'_\eta}$ замкнуты в R и тем самым из (4) следует, что $R \cap \bigcap_\xi \bigcap_\eta \big(\overline{F_\xi} \cup \overline{F'_\eta}\big)$ также является замкнутым в R. Согласно формуле (1), множества $\overline{F_\xi} \cup \overline{F'_\eta}$ замкнуты в ωR. Следовательно, по нашему определению множество $\bigcap_\xi \bigcap_\eta \big(\overline{F_\xi} \cup \overline{F'_\eta}\big)$ замкнуто, а значит, формула (4) доказывает, что объединение двух замкнутых в ωR множеств замкнуто в ωR. Тем самым мы показали, что ωR является пространством.

Тот факт, что R является подпространством ωR, непосредственно вытекает из определения замкнутых в ωR множеств. Поскольку R принадлежит каждому максимальному направлению в нем, пересечение всех замкнутых в ωR множеств, содержащих его, совпадает с самим ωR. Следовательно, R плотно в ωR.

Лемма 3. *Если $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} = \varnothing$.*

Действительно, если $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то не существует направления, в которое одновременно входили бы F_1 и F_2, а значит, непосредственно по определению множеств $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ мы имеем $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} = \varnothing$.

Лемма 4. *Пространство ωR компактно.*

Рассмотрим направление в ωR. Удалим из этого направления всякое множество, не имеющее вид $\overline{F}$, и заменим его теми множествами вида $\overline{F}$, пересечением которых оно является. Кроме того, добавим пересечения конечных наборов таких множеств. В результате мы получим направление $\{\overline{F}\}$. На основании леммы 3 легко видеть, что множества $F = R \cap \overline{F}$ также образуют направление $\{F\}$. Если оно не является исчезающим, то первоначально рассмотренное направление также не является исчезающим. Предположим, что $\{F\}$ — исчезающее направление. Дополним его до максимального направления $\{F\}_1$. По определению ωR направление $\{F\}_1$ является точкой пространства ωR, причем если $F \in \{F\}_1$, то $\{F\}_1 \in \overline{F}$. Следовательно, $\{F\}_1$ принадлежит пересечению всех множеств из $\{\overline{F}\}$. Тогда направление $\{\overline{F}\}$, а значит и первоначально рассмотренное направление, не является исчезающим. Тем самым доказана компактность ωR.

Лемма 5. *Если $x \in \omega R \setminus R$, то одноточечное множество $\{x\}$ замкнуто.*

Если $x_1 \in \omega R \setminus R$, то $x_1 = \{F\}_1$, где $\{F\}_1$ — исчезающее максимальное направление в R. Если $F \in \{F\}_1 = x_1$, то $x_1 \in \overline{F}$, а значит,

$$x_1 = \{F\}_1 \in \bigcap_{F \in \{F\}_1} \overline{F}.$$

С другой стороны, если $x_2 = \{F\}_2 \neq \{F\}_1$, то по лемме 1 существуют $F_1 \in \{F\}_1$, $F_2 \in \{F\}_2$ такие, что $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Но тогда по лемме 3 мы имеем $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} = \varnothing$ и тем самым $x_2 \notin \bigcap_{F \in \{F\}_1} \overline{F}$. Следовательно,

$$\{x_1\} = \bigcap_{F \in \{F\}_1} \overline{F},$$

и замкнутость одноточечного множества $\{x_1\}$ доказана.

Полученные выше результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Для любого пространства R существует компактное расширение ωR такое, что*

1) *если F_1 и F_2 замкнуты в R и не пересекаются, то их замыкания в ωR не пересекаются;*

2) *если $x \in \omega R \setminus R$, то одноточечное множество $\{x\}$ замкнуто.*

2°. **Теорема 2**. *Пусть f — непрерывное отображение пространства R в компактное вполне регулярное пространство R'. Тогда это отображение можно продолжить на ωR. А именно, полагая*

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in R; \\ \bigcap\limits_{F \in x} \overline{f(F)}, & \text{если } x = \{F\} \in \omega R \setminus R\,^{17)}, \end{cases} \tag{5}$$

мы получаем непрерывное отображение ωR на замыкание образа R в R'.

Пусть $x' = f(x)$ — непрерывное отображение пространства R в компактное вполне регулярное пространство R'. Пусть $\{F\}$ — исчезающее максимальное направление в R. Рассмотрим пересечение

$$\bigcap_{F \in \{F\}} \overline{f(F)} = X',$$

где $\overline{f(F)}$ — замыкание образа F. Пересечение конечного числа множеств $\overline{f(F)}$ непусто, так как пересечение конечного числа множеств F направления $\{F\}$ непусто. А поскольку R' компактно, X' непусто. Мы покажем, что оно состоит из одной точки.

Предположим, что имеются две точки x_1' и x_2', принадлежащие X'. В силу регулярности R' существует непрерывная на R' функция $h(x')$, равная нулю в x_1' и единице в x_2'. Положим

$$F_0' = \left\{h(x') \leqslant \tfrac{1}{3}\right\}, \quad F_1' = \left\{h(x') \geqslant \tfrac{2}{3}\right\}.$$

Пусть $F \in \{F\}$. Тогда

$$F_0' \cap f(F) \neq \varnothing,$$

поскольку $x_1' \in \overline{f(F)}$ и, следовательно, каждая окрестность точки x_1', а значит и множество F_0', пересекается с $f(F)$.

---

17) В случае $x \in \omega R \setminus R$ нам следовало бы написать $\{g(x)\} = \bigcap\limits_{F \in x} \overline{f(F)}$, поскольку в правой части фигурирует множество, а не точка. Символ $\overline{f(F)}$ обозначает замыкание образа множества F в R'. Мы берем пересечение таких замыканий для всех множеств, принадлежащих тому направлению, которое является точкой x.

Следовательно, $F \cap f^{-1}(F_0') \neq \varnothing$ для всех $F \in \{F\}$. Ввиду максимальности направления $\{F\}$ отсюда вытекает, что $f^{-1}(F_0') \in \{F\}$. Но точно так же мы можем показать включение $f^{-1}(F_1') \in \{F\}$, которое не может выполняться, поскольку $f^{-1}(F_0') \cap f^{-1}(F_1') = \varnothing$. Полученное противоречие показывает, что X' состоит из одной точки.

Теперь определим отображение ωR в R' формулой (5). Из доказанного выше следует однозначность этого отображения. Покажем, что оно непрерывно.

Пусть F_0' — замкнутое множество в R'. Поскольку R' вполне регулярно, множество F_0' является пересечением всех функционально замкнутых множеств, содержащих его. Каждое из таких множеств представимо в виде $\{h(x') = 0\}$ и является пересечением множеств $\left\{|h(x')| \leqslant \frac{1}{n}\right\}$. Следовательно, F_0' является пересечением замкнутых множеств F_ξ', каждое из которых содержит некоторую окрестность множества F_0',

$$F_0' = \bigcap_\xi F_\xi'. \tag{6}$$

Покажем, что

$$g^{-1}(F_0') = \bigcap_\xi \overline{f^{-1}(F_\xi')}. \tag{7}$$

Пусть $x_0 \in g^{-1}(F_0')$. Если $x_0 \in R$, то

$$x_0 \in f^{-1}(F_0') = \bigcap_\xi f^{-1}(F_\xi') \subset \bigcap_\xi \overline{f^{-1}(F_\xi')}. \tag{8}$$

Но если $x_0 \in \omega R \diagdown R$, то $x_0 = \{F\}$, где $\{F\}$ — исчезающее максимальное направление в R. На основании определения отображения g мы имеем $g(x_0) \in \overline{f(F)}$ для всех $F \in \{F\}$. Следовательно, каждая окрестность точки $g(x_0)$ имеет общую точку с $f(F)$. Тогда согласно выбору множеств F_ξ' мы имеем $f(F) \cap F_\xi' \neq \varnothing$, т. е. для всех F_ξ' и $F \in \{F\}$

$$f^{-1}(F_\xi') \cap F \neq \varnothing.$$

Согласно лемме 1, это означает, что все множества $f^{-1}(F_\xi')$ принадлежат $\{F\}$ и тем самым

$$\{F\} = x_0 \in \bigcap_\xi \overline{f^{-1}(F_\xi')}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что

$$g^{-1}(F_0') \subset \bigcap_\xi \overline{f^{-1}(F_\xi')}. \tag{10}$$

Пусть теперь
$$x_0 \in \bigcap_{\xi} \overline{f^{-1}(F'_\xi)}. \tag{11}$$

Если $x_0 \in f^{-1}(F'_\xi)$, то по определению отображения g имеем $x_0 \in g^{-1}(F'_\xi)$, а поскольку это верно для всех ξ, отсюда вытекает $x_0 \in g^{-1}(F'_0)$. Если, с другой стороны, $x_0 = \{F\}$, то из (11) следует, что все множества $f^{-1}(F'_\xi)$ принадлежат $\{F\} = x_0$. Но тогда по формуле (5) мы имеем

$$g(x_0) = \bigcap_{F \in \{F\}} \overline{f(F)} \subset \bigcap_{\xi} \overline{f\bigl(f^{-1}(F'_\xi)\bigr)} = \bigcap_{\xi} F'_\xi = F'_0.$$

Тогда из (11) следует, что $g(x_0) \in F'_0$, а значит,

$$g^{-1}(F'_0) \supset \bigcap_{\xi} \overline{f^{-1}(F'_\xi)}. \tag{12}$$

Формулы (10) и (12) дают (7).

Более того, мы с очевидностью имеем

$$R \cap \bigcap_{\xi} \overline{f^{-1}(F'_\xi)} = \bigcap_{\xi} f^{-1}(F'_\xi) = f^{-1}(F'_0),$$

а это множество замкнуто в R благодаря непрерывности отображения f. Поэтому на основании определения замкнутых множеств в ωR отсюда вытекает, что множество $\bigcap_\xi \overline{f^{-1}(F'_\xi)}$ замкнуто. Следовательно, множество $g^{-1}(F'_0)$ замкнуто, что доказывает непрерывность отображения g.

Очевидно, что $g(\omega R)$ содержится в замыкании $f(R)$ в R'. Покажем, что

$$g(\omega R) = \overline{f(R)}. \tag{13}$$

Пусть $x' \in \overline{f(R)} \setminus f(R)$. Поскольку пространство R' вполне регулярно, точка x' является пересечением замкнутых множеств F'_ξ, каждое из которых содержит ее вместе с некоторой ее окрестностью. Пересечения $F'_\xi \cap f(R)$ образуют в $f(R)$ исчезающее направление, которому в R соответствует исчезающее направление, состоящее из множеств $f^{-1}(F'_\xi)$. Дополнив это направление до максимального $\{F\} = x$, мы получим

$$\{g(x)\} = \bigcap_{F \in \{F\}} \overline{f(F)} \subset \bigcap_{\xi} \overline{f\bigl(f^{-1}(F'_\xi)\bigr)} = \bigcap_{\xi} F'_\xi = \{x'\}.$$

Тем самым доказано равенство (13), а значит, g является отображением ωR на $\overline{f(R)}$.

3°. Теорема 3. *Если R вполне регулярно, то ωR можно непрерывно отобразить на любое вполне регулярное компактное расширение R' пространства R, причем так, что точки пространства R останутся неподвижными, а $\omega R \setminus R$ отобразится на $R' \setminus R$.*

Если R' — компактное вполне регулярное расширение пространства R, то $R \subset R'$ и $\overline{R}^{R'} = R'$ (замыкание R в R' совпадает с R'). Мы попадаем в условия предыдущей теоремы для случая тождественного отображения R в R'. По доказанному выше его можно продолжить на ωR; при этом ωR отобразится на $\overline{R}^{R'} = R'$. Остается показать, что $\omega R \setminus R$ отобразится на $R' \setminus R$. Пусть $\{F\} = x \in \omega R \setminus R$. Мы имеем

$$\{g(x)\} = \bigcap_{F \in x} \overline{f(F)} = \bigcap_{F \in x} \overline{F}^{R'}, \tag{14}$$

так как отображение f является тождественным. Далее,

$$R \cap \overline{F}^{R'} = F, \tag{15}$$

а поскольку пересечение всех $F \in \{F\}$ пусто, из (14) и (15) следует, что $R \cap \{g(x)\} = \varnothing$, т. е. $g(x) \in R' \setminus R$, ч. т. д.

Теорема 4. *Для того чтобы ωR было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы R было нормальным.*

Необходимость. Пусть ωR нормально и пусть F_1 и F_2 — замкнутые множества в R, не имеющие общих точек. Тогда по лемме 3 мы имеем $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} = \varnothing$, и в силу нормальности ωR существуют открытые в ωR множества G_1 и G_2, содержащие $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ соответственно и не имеющие общих точек. Множества $R \cap G_1$ и $R \cap G_2$ открыты в R, содержат F_1 и F_2 и не имеют общих точек.

Достаточность. Пусть F' и F'' — замкнутые множества в ωR и $F' \cap F'' = \varnothing$. Они представляются в виде пересечений замыканий в ωR замкнутых в R множеств. Среди этих замыканий имеются непересекающиеся, так как в противном случае ввиду равенства $F' \cap F'' = \varnothing$ их пересечения образовывали бы исчезающее направление вопреки компактности ωR. Пусть $\overline{F_1} \supset F'$, $\overline{F_2} \supset F''$ и $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} = \varnothing$. Если R нормально, то существует функция $f(x)$, связывающая F_1 с F_2. По теореме 2 эта функция может быть продолжена на ωR. (Функция $f(x)$ представляет собой непрерывное отображение пространства R в отрезок $[\inf f(x), \sup f(x)]$.) Пусть $g(x)$ — соответствующая функция на ωR. Тогда открытые множества $\{g(x) < \frac{1}{2}\}$, $\{g(x) > \frac{1}{2}\}$ содержат $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ и не имеют общих точек.

Теорема 5. *Для того чтобы ωR было вполне регулярным, необходимо и достаточно, чтобы R было вполне регулярным и нормальным.*

Необходимость вполне регулярности R очевидна. По теореме 6, § 2 вполне регулярное компактное пространство нормально. Следовательно, если ωR вполне регулярно, то оно нормально и тогда по предыдущей теореме таковым является и R.

Пусть теперь R вполне регулярно и нормально. По предыдущей теореме ωR нормально. Для того чтобы обосновать вполне регулярность ωR, мы покажем, что, во-первых, для любой точки $x \in \omega R$ и любого множества F, замкнутого в ωR и не содержащего x, существует функция, равная нулю в x и единице на F, и, во-вторых, для любой пары точек x_1 и x_2 пространства ωR существует функция, равная нулю в x_1 и единице в x_2.

Пусть F_1 замкнуто в ωR, $x \notin F_1$. Множество F_1 является пересечением множеств $\overline{F}$ — замыканий в ωR замкнутых в R множеств. Следовательно, существует такое множество $\overline{F} \supset F_1$, что $x \notin \overline{F}$. Если $x \in R$, то ввиду вполне регулярности R существует функция, непрерывная на R, равная нулю в x и равная единице на $F = R \cap \overline{F}$. Продолжив ее на ωR, мы получим функцию, равную нулю в x и единице на $\overline{F} \supset F$. Если $x \notin R$, то одноточечное множество $\{x\}$ замкнуто и, следовательно, требуемая функция существует в силу нормальности ωR.

Пусть $x_1 \neq x_2$. Если, скажем, $x_1 \in \omega R \setminus R$, то одноточечное множество $\{x_1\}$ замкнуто, и тогда функция, равная единице в x_2 и нулю в x_1, существует в силу доказанного выше. Если же $x_1, x_2 \in R$, то такая функция существует благодаря вполне регулярности R (лемма 1, § 2) и тому факту, что ограниченная непрерывная функция, определенная на R, продолжается на ωR.

§ 4. *Компактные расширения совершенно нормальных пространств и их продолжения*

1°. Теорема 1. *Для любого совершенно нормального T_1-пространства R существует компактное совершенно нормальное T_1-расширение* (т. е. расширение, являющееся T_1-пространством) $(\omega R)^*$, *обладающее следующими свойствами:*

1. *Всякое непрерывное отображение пространства R в компактное совершенно нормальное T_1-пространство продолжается на $(\omega R)^*$.*

2. *Если R' — компактное совершенно нормальное T_1-расширение пространства R, то $(\omega R)^*$ можно непрерывно отобразить на R' так, что точки пространства R останутся неподвижными, а $(\omega R)^* \setminus R$ отобразится на $R' \setminus R$.*

3. *Если R' — компактное совершенно нормальное T_1-расширение пространства R, причем такое, что любая непрерывная ограниченная функция, определенная на R, продолжается на R', то упомянутое в пункте 2 отображение $(\omega R)^*$ на R' будет гомеоморфизмом.*

Пусть R — совершенно нормальное T_1-пространство. Устройство пространства $(\omega R)^*$ уже отражено в его обозначении. А именно, мы строим уолменовское расширение ωR пространства R и затем берем соответствующее ему совершенно нормальное пространство $(\omega R)^*$. Поскольку по теореме 2, § 3 любая непрерывная ограниченная функция, определенная на R, продолжается на ωR, всякое функционально замкнутое множество в R является пересечением R с некоторым функционально замкнутым множеством в ωR. Поскольку R совершенно нормально, отсюда следует, что оно будет подпространством $(\omega R)^*$, причем плотным, так как R плотно в ωR.

Будучи совершенно нормальным T_1-пространством, R является вполне регулярным, а значит, по теореме 5, § 3 пространство ωR вполне регулярно. Следовательно, как легко видеть, $(\omega R)^*$ также вполне регулярно и, в частности, является T_1-пространством.

Теперь, когда природа пространства $(\omega R)^*$ уже прояснилась, мы последовательно докажем все три утверждения теоремы.

(1) Пусть R' — компактное совершенно нормальное T_1-пространство. Тогда R' является вполне регулярным. Пусть R отображается в R'. По теореме 2, § 3 это отображение продолжается на ωR. Но поскольку R' совершенно нормально, а ωR — нормально по теореме 4, § 3, согласно теореме 5, § 1, это отображение будет непрерывным отображением $(\omega R)^*$ в R'. Первое утверждение теоремы доказано.

(2) Пусть теперь R' обладает теми же свойствами, причем содержит R как плотное подпространство. Тогда по теореме 3, § 3 пространство ωR можно непрерывно отобразить на R', оставив точки пространства R неподвижными и отобразив $\omega R \setminus R$ на $R' \setminus R$. Согласно доказанному выше, это отображение можно интерпретировать как непрерывное отображение $(\omega R)^*$ на R', что доказывает второе утверждение теоремы.

(3) Пусть теперь R' обладает теми же свойствами, что и в (2), причем мы можем продолжить на R' любую непрерывную ограниченную функцию, определенную на R. Пусть g — отображение $(\omega R)^*$ на R', фигурирующее в (2). Оно является продолжением на $(\omega R)^*$ тождественного отображения R в R', а значит, согласно теореме 2, § 3, может быть выражено в виде

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in R; \\ \bigcap\limits_{\{F\}} \overline{F}^{R'} \ ^{18)}, & \text{если } \{F\} = x \in (\omega R)^* \setminus R. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $x_1 = \{F\}_1$ и $x_2 = \{F\}_2$, $x_1 \neq x_2$. Среди элементов направлений $\{F\}_1$ и $\{F\}_2$ встречаются множества F_1, F_2, не имеющие общих точек. Пусть $f(x)$ — функция, связывающая F_1 с F_2. По условию она может быть продолжена на R'. Пусть $h(x')$ — функция $f(x)$, продолженная на R'. Множества $\{h(x') = 0\}$, $\{h(x') = 1\}$ не имеют общих точек и, очевидно, содержат

[18] Символ R', расположенный на уровне черты над символом множества, обозначает замыкание в R'.

множества $\overline{F_1}^{R'}$, $\overline{F_2}^{R'}$. Следовательно, два последних множества также не имеют общих точек. На основании (1) отсюда следует, что $g(x_1) \neq g(x_2)$. Тем самым доказана взаимная однозначность отображения g.

Любая функция $f(x)$, ограниченная и непрерывная на R, может быть продолжена на R', причем единственным способом ввиду плотности R в R'. Пусть $h(x')$ — продолженная функция, $x'_0 = g(x_0)$, $x_0 = \{F\}_0$ и $h(x'_0) = a$. Множество $F_\varepsilon = R \cap \{|h(x') - a| \leqslant \varepsilon\}$ замкнуто в R и непусто, так как R плотно в R'. Оно входит в $\{F\}_0$, поскольку в противном случае в $\{F\}_0$ нашлось бы множество F, не имеющее общих с ним точек, и тогда на F, а значит и на $\overline{F}^{R'}$, мы бы имели $|h(x') - a| \geqslant \varepsilon$ вопреки тому факту, что $x'_0 \in \overline{F}^{R'}$ согласно (1). Следовательно, $F_\varepsilon \in \{F\}_0$ для всех $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает, что значение функции $h(x')$ в точке $x'_0 = g(x_0)$ ($x_0 = \{F\}_0$) является пределом в смысле Мура — Смита по направлению $\{F\}_0$ значений функции $f(x)$ на множествах, входящих в $\{F\}_0$. С другой стороны, очевидно, что по тем же причинам значение функции $h_1(x)$, полученной продолжением $f(x)$ на ωR, в точке $x_0 = \{F\}_0$ будет равно этому же пределу. Следовательно, в точках x и $g(x)$ функции $h(x')$ и $h_1(x)$ совпадают (для точек $x \in \omega R \setminus R$ это доказано, а для $x \in R$ мы имеем $h(x) = h_1(x) = f(x)$).

Пусть теперь F замкнуто в $(\omega R)^*$ и пусть функция $h_1(x)$ такова, что $F = \{h_1(x) = 0\}$. Тогда ввиду доказанного выше множество $g(F)$ совпадает с $\{h(x') = 0\}$ и поэтому замкнуто. Следовательно, доказана непрерывность отображения g в обоих направлениях.

2°. Теорема 2. *Для любого вполне регулярного пространства R существует компактное вполне регулярное расширение βR, обладающее следующими свойствами:*

1. *У пространства βR нет продолжений, содержащих R как подпространство, помимо самого βR.*
2. *Любое непрерывное отображение пространства R в компактное вполне регулярное пространство продолжается на βR.*
3. *Если R' — компактное вполне регулярное расширение пространства R, то βR можно непрерывно отобразить на R' так, что точки пространства R останутся неподвижными, а $\beta R \setminus R$ отобразится на $R' \setminus R$.*
4. *Если R' — компактное вполне регулярное расширение пространства R, обладающее свойством 1 и такое, что любая непрерывная ограниченная функция, определенная на R, продолжается на R', то упомянутое в пункте 3 отображение будет гомеоморфизмом.*

(1) Пусть R — вполне регулярное пространство. Оно является продолжением совершенно нормального T_1-пространства, а именно, своего собственного R^*:

$$R = pR^*.$$

Построим уолменовское расширение ωR^* пространства R^*, рассмотрим

$(\omega R^*)^*$ и продолжим это пространство, объявив замкнутыми те пересечения замкнутых в $(\omega R^*)^*$ множеств, чьи общие части с R замкнуты в R. Тот факт, что в результате мы получим пространство, можно легко доказать с помощью формулы (4), § 3 точно так же, как это было сделано для ωR в § 3. Полученное пространство мы и возьмем в качестве βR:

$$\beta R = p(\omega R^*)^*.$$

В силу теорем § 2 о продолжении пространств пространство βR будет компактным, вполне регулярным и будет содержать R как плотное в βR множество. Непосредственно из определения замкнутых в βR множеств ясно, что R является подпространством βR и никакое продолжение пространства βR, кроме самого βR, не может содержать R как подпространство.

Остается доказать утверждения 2–4 теоремы.

(2) Пусть f — непрерывное отображение пространства R в компактное вполне регулярное пространство R_1. По теореме 5, § 1 оно в то же время будет непрерывным отображением R^* в R_1^*. Согласно теореме 1, его можно продолжить на $(\omega R^*)^*$. Пусть g — полученное в результате отображение $(\omega R^*)^*$ в R_1^*. Покажем, что оно также является непрерывным отображением βR в R_1. Пусть F_1 замкнуто в R_1. Пространство R_1 является продолжением R_1^*, а значит,

$$F_1 = \bigcap_{\xi} F_{1\xi}^*,$$

где $F_{1\xi}^*$ замкнуты в R_1^*. Поскольку прообраз пересечения совпадает с пересечением прообразов,

$$g^{-1}(F_1) = \bigcap_{\xi} g^{-1}(F_{1\xi}^*). \tag{2}$$

Благодаря непрерывности g на $(\omega R^*)^*$ мы имеем здесь пересечение замкнутых в $(\omega R^*)^*$ множеств. Так как g продолжает отображение f, непрерывное на R, справедливо равенство

$$R \cap g^{-1}(F_1) = f^{-1}(F_1),$$

а значит, $f^{-1}(F_1)$ замкнуто в R. Следовательно, множество

$$R \cap \bigcap_{\xi} g^{-1}(F_{1\xi}^*) = R \cap g^{-1}(F_1)$$

замкнуто в R. В силу (2) по определению замкнутых множеств в βR отсюда вытекает, что $g^{-1}(F_1)$ замкнуто в βR. Следовательно, g является непрерывным отображением βR в R_1.

Согласно теореме 2, § 3 заключаем, что g отображает ωR^* на замыкание образа R^* в R_1^*. Поскольку пространство R_1 вполне регулярно, оно является продолжением R_1^*, а значит, замыкание в R_1^* совпадает с замыканием в R_1. Следовательно, g отображает βR на замыкание образа R в R_1.

(3) Пусть R_1 — компактное вполне регулярное расширение пространства R. Тогда R отображается тождественно в R_1. По доказанному выше это отображение можно продолжить на βR, и тем самым βR будет отображаться на замыкание R в R_1, т. е. на R_1. Остается показать, что $\beta R \setminus R$ отобразится на $R_1 \setminus R$. Для этого заметим, что мы изначально определили продолжающее отображение как отображение R^* в R_1^*, продолженное на ωR^*. Это продолжение устанавливается формулой (5), § 3 и для $\{F\} = x \in \omega R^* \setminus R^* = \beta R \setminus R$ определяется по правилу

$$g(x) = \bigcap_{\{F^*\}} \overline{F^*}^{R_1^*} = \bigcap_{\{F^*\}} \overline{F^*}^{R_1} \qquad (F^* \text{ замкнуты в } R^*),$$

поскольку, как мы уже отмечали, замыкания в R_1^* и в R_1 совпадают. Ввиду того что R является подпространством R_1, мы имеем $R \cap \overline{F^*}^{R_1} = F^*$, а поскольку $\{F^*\}$ — исчезающее направление, $R \cap g(x) = \bigcap F^* = \varnothing$, т. е. $g(x) \in R_1 \setminus R$, ч. т. д.

(4) Теперь дополнительно предположим, что R_1 не имеет продолжений (кроме себя самого), содержащих R как подпространство, и что любая функция продолжается с R на R_1. Тогда, очевидно, R^* является подпространством R_1^*, причем R_1^* — компактное совершенно нормальное T_1-расширение пространства R^*. Следовательно, по теореме 1 оно гомеоморфно $(\omega R^*)^*$, причем гомеоморфизм оставляет точки пространства R неподвижными. Но поскольку пространства R_1 и βR являются продолжениями R_1^* и $(\omega R^*)^*$, уже не допускающими дальнейших продолжений, содержащих R, они с очевидностью гомеоморфны.

3°. Теорема 3. *Для любого вполне регулярного пространства R существует топологическое пространство $t\beta R$, обладающее следующими свойствами:*

1. *Пространство $t\beta R$ компактно.*

2. *Топологическое продолжение пространства R является подпространством $t\beta R$, плотным в нем.*

3. *Пространство $t\beta R$ вполне регулярно.*

4. *Любое непрерывное отображение пространства $t\beta R$ в совершенно нормальное пространство индуцирует непрерывное отображение R в это же пространство.*

5. *Любое непрерывное отображение пространства R в компактное вполне регулярное пространство продолжается на $t\beta R$.*

6. *Пространство $t\beta R$ можно непрерывно отобразить на любое пространство R_1, обладающее свойствами* 1–4, *так, что точки пространства R останутся неподвижными, а $t\beta R \setminus R$ отобразится на $R_1 \setminus R$.*

7. *Любое топологическое пространство R_1, обладающее свойствами* 1–5, *гомеоморфно $t\beta R$, если в пунктах* 4 *и* 5 *упомянутые там произвольные отображения заменить непрерывными функциями. Этот гомеоморфизм оставляет точки пространства R неподвижными.*

Пусть R вполне регулярно: $R = pR^*$. Устройство пространства $t\beta R$ уже отражено в его обозначении: мы берем топологическое продолжение пространства βR, т. е. — с учетом определения βR — топологическое продолжение пространства $(\omega R^*)^*$:

$$t\beta R = t(\omega R^*)^*.$$

Из теорем о продолжении компактных пространств непосредственно вытекают первые три свойства $t\beta R$. Далее, если $t\beta R$ отображается в совершенно нормальное пространство R_1, то, поскольку прообразы функционально замкнутых множеств функционально замкнуты, это будет непрерывное отображение $(\omega R^*)^*$ в R_1. Следовательно, оно индуцирует непрерывное отображение пространства R^* в R_1 и, более того, пространства R в R_1. Тем самым доказано четвертое свойство $t\beta R$.

Любое непрерывное отображение пространства R в компактное вполне регулярное пространство можно, согласно теореме 2, продолжить на βR, а тогда и на $t\beta R$.

Пусть R_1 обладает свойствами 1–4. Поскольку по свойству 4 любая функция, непрерывная на R_1, индуцирует в точках, принадлежащих R, функцию, непрерывную на R, пересечение с R множества, функционально замкнутого в R_1, является функционально замкнутым в R. Следовательно, R тождественно и непрерывно отображается в R_1. Это отображение можно продолжить на $(\omega R^*)^*$. А поскольку $t\beta R$ является топологическим продолжением $(\omega R^*)^*$, прообраз пересечения любого числа замкнутых в R_1^* множеств будет замкнут в $t\beta R$. Следовательно, у нас имеется непрерывное отображение $t\beta R$ на R_1. Тот факт, что оно отображает $t\beta R \setminus R$ на $R_1 \setminus R$, может быть доказан в точности так же, как и аналогичное утверждение в предыдущей теореме.

Пусть R_1 — топологическое пространство, обладающее свойствами 1–5. Из свойств 1–4 мы заключаем, как и раньше, что R^* тождественно и непрерывно отображается в R_1^*. Из свойства 5 следует, что R^* содержится в R_1^* как подпространство, т. е. каждое замкнутое в R^* множество является пересечением с R множества, замкнутого в R_1^*. Следовательно, по теореме 1 пространства R_1^* и $(\omega R^*)^*$ гомеоморфны. Тогда их топологические продолжения также гомеоморфны, т. е. R_1 гомеоморфно $t\beta R$.

Только что доказанная теорема позволяет, например, отобразить интервал $(0,1)$ в некоторое компактное вполне регулярное пространство R так, что между непрерывными функциями на R и ограниченными бэровскими функциями на интервале будет установлено взаимно однозначное соответствие: каждая ограниченная бэровская функция на $(0,1)$ продолжается до функции, непрерывной на R, и каждая непрерывная на R функция индуцирует бэровскую функцию на $(0,1)$.

Если пространство R является вполне регулярным топологическим пространством, то теоремы 2 и 3 с очевидностью совпадают и представляют собой результат, ранее полученный Э. Чехом [6]. С другой стороны, теорема 3 позволяет связать с каждой полной системой функций некоторое компактное топологическое пространство [19]. Тем не менее эта важная связь не является более простой, нежели связь между полными системами и пространствами, более общими чем топологические, введенными нами в § 1. Дело в том, что возникающие здесь компактные пространства уже в самых простых случаях имеют весьма сложное устройство.

4°. В теоремах 1 и 2 мы предполагаем, что пространство является T_1-пространством. Тем не менее это требование не является существенным. В теореме 1 мы можем рассмотреть произвольное совершенно нормальное пространство, а в теореме 2 — продолжение такого пространства.

Чтобы это показать, рассмотрим операцию, предложенную для топологических пространств Э. Чехом [6] и позволяющую связать с каждым пространством некоторое вполне регулярное пространство. Пусть задано пространство R. Факторизуем его, разместив точки x_1 и x_2 в одном классе в том случае, когда любая непрерывная на R функция принимает в этих точках равные значения. Иными словами, в один класс попадают точки, не разделяемые никакими функционально замкнутыми множествами. Тогда в каждое функционально замкнутое множество такой класс будет входить полностью. Рассмотрим эти классы точек как точки нового пространства, а замкнутыми множествами объявим функционально замкнутые множества пространства R. Мы получим, очевидно, нормальное T_1-пространство, которое будем обозначать символом rR^*.

Продолжим теперь пространство rR^* следующим образом. Объявим замкнутым каждое замкнутое в R множество, которое является пересечением множеств, замкнутых в rR^* (несмотря на то что элементы множеств в rR^* являются уже классами точек пространства R, мы тем не менее можем, конечно же, мыслить множества в rR^* составленными из точек пространства R, что мы и будем делать в дальнейшем). Нам необходимо показать, что определенные таким способом замкнутые множества удовлетворяют всем

[19] Этот результат получен в значительно более общей форме И. М. Гельфандом [7].

четырем условиям в определении пространства. Тот факт, что R и пустое множество замкнуты, а также что пересечение счетного числа замкнутых множеств замкнуто, в нашем случае с очевидностью выполнены.

Пусть

$$F_1 = \bigcap_{\xi} F^*_{1\xi}, \quad F_2 = \bigcap_{\xi} F^*_{2\xi},$$

где $F^*_{1\xi}$ и $F^*_{2\xi}$ замкнуты в rR^*. Справедлива формула

$$\bigcap_{\xi} F^*_{1\xi} \ \cup \ \bigcap_{\xi} F^*_{2\xi} = \bigcap_{\xi}\bigcap_{\eta} (F^*_{1\xi} \cup F^*_{2\eta}). \tag{1}$$

Если F_1 и F_2 замкнуты в R, то их объединение замкнуто в R, причем, согласно (1), оно в то же время является пересечением множеств $F^*_{1\xi} \cup F^*_{2\eta}$, замкнутых в R^*. Следовательно, объединение множеств, замкнутых по нашему определению, замкнуто.

Таким образом, мы имеем пространство, которое будем обозначать символом rR. По теореме 1^*, § 2 оно вполне регулярно.

Из построения пространства rR ясно, что если R является продолжением совершенно нормального пространства, т. е. если $R = pR^*$, то всякое множество, замкнутое в R, будет замкнутым в rR. Если же R вполне регулярно, то имеет место равенство $rR = R$, которое непосредственно вытекает из того факта, что во вполне регулярном пространстве для любых двух точек существует непрерывная функция, равная нулю в одной из них и единице в другой (лемма 1, § 3).

Далее, очевидно, что сопоставив каждой точке x из R тот класс $r(x)$, которому она принадлежит по построению rR, мы получим непрерывное отображение r пространства R в rR. Всякое непрерывное отображение f пространства R в произвольное вполне регулярное пространство R_1 является в то же время непрерывным отображением rR в R_1 или, иначе говоря, существует непрерывное отображение g пространства rR в R_1 такое, что $f = gr$. Действительно, предположим, что две точки $x, y \in R$ отображаются в различные точки $x_1, y_1 \in R_1$. Тогда в R_1 существует непрерывная функция h, равная нулю в x_1 и единице в y_1. При этом hf будет функцией, непрерывной на R и принимающей в точках x, y значения ноль и один. Поэтому точки x, y принадлежат разным классам. Следовательно, точки одного и того же класса отображаются в одну точку пространства R_1, и мы тем самым имеем отображение g пространства rR в R_1. Относительно отображения f прообраз множества, функционально замкнутого в R_1, функционально замкнут в R. Функционально замкнутому множеству в R соответствует функционально замкнутое множество в rR (составленное из тех же точек). Следовательно, g представляет собой непрерывное отображение rR^* в R_1^*. Поскольку R_1 вполне регулярно, оно является продолжением R_1^*. Поэтому если F_1 замкнуто в R_1, то

$$F_1 = \bigcap_{\xi} F_{\xi}^*,$$

где F_{ξ}^* замкнуты в R_1^*. Следовательно,

$$f^{-1}(F_1) = \bigcap_{\xi} f^{-1}(F_{\xi}^*).$$

Благодаря непрерывности f каждое множество $f^{-1}(F_{\xi}^*)$ замкнуто в R^*, а множество $f^{-1}(F_1)$ замкнуто в R. Поэтому из определения замкнутых в rR множеств следует, что $f^{-1}(F_1)$ замкнуто в rR. Иными словами, если считать множество $f^{-1}(F_1)$ состоящим из классов точек $r(x)$, то $g^{-1}(F_1)$ замкнуто в rR. Тем самым доказана непрерывность отображения g.

Теперь совершенно ясно, как можно строить компактные расширения совершенно нормальных пространств и их продолжений в случае, когда они не являются T_1-пространствами. Предположим, что R совершенно нормально. Построим пространство rR, которое будет уже совершенно нормальным T_1-пространством. Затем построим его уолменовское расширение ωrR и возьмем $(\omega rR)^*$. Наконец, заменим точки пространства rR теми классами точек пространства R, которые они представляют. Обозначим полученное пространство символом bR. Непрерывное отображение пространства R в совершенно нормальное T_1-пространство R_1 является в то же время непрерывным отображением rR в R_1. Теперь любое из таких отображений rR в компактное R_1 можно продолжить на $(\omega rR)^*$. Следовательно, любое непрерывное отображение пространства R в компактное совершенно нормальное T_1-пространство R_1 можно продолжить на bR.

Дальнейшее приведение теоремы 1 к пространству bR представляется излишним. Мы лишь сформулируем результат. В следующей формулировке под T_1-расширением пространства R мы понимаем такое его расширение R_1, что $R_1 \setminus R$ является T_1-пространством. Тогда справедлива

Теорема 1′. *Для любого совершенно нормального пространства R существует компактное совершенно нормальное T_1-расширение bR, обладающее следующими свойствами:*

1. *Всякое непрерывное отображение пространства R в компактное совершенно нормальное T_1-пространство продолжается на bR.*

2. *Если R_1 — компактное совершенно нормальное T_1-расширение пространства R, то bR можно отобразить на R_1 так, что точки пространства R останутся неподвижными, а $bR \setminus R$ отобразится на $R_1 \setminus R$.*

3. *Если помимо свойств, указанных в пункте 2, пространство R_1 обладает также тем свойством, что любая непрерывная ограниченная функция,*

определенная на R, продолжается на R_1, то bR можно гомеоморфно отобразить на R_1 так, что точки R останутся неподвижными.

Совершенно аналогично теорема 2 может быть приведена к случаю продолжений совершенно нормальных пространств, не являющихся T_1-пространствами.

5°. В заключение мы укажем характеристическое свойство совершенно нормальных счетно компактных пространств.

Теорема 4. *Совершенно нормальное пространство является счетно компактным тогда и только тогда, когда в любом его компактном совершенно нормальном расширении отсутствуют* (*непустые*) *замкнутые множества, не имеющие с ним общих точек.*

Пусть R' — компактное совершенно нормальное пространство и пусть R плотно в R'. Возьмем произвольное непустое замкнутое множество F' в R'. Пусть $f(x')$ — непрерывная функция на R' такая, что $F' = \{f(x') = 0\}$. Поскольку R плотно в R', каждое множество $F'_n = \left\{|f(x')| \leqslant \frac{1}{n}\right\}$ имеет общие с R точки. Пересечения $R \cap F'_n$ замкнуты в R и образуют убывающую последовательность. В то же время

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} R \cap F'_n = R \cap F'.$$

Следовательно, если R счетно компактно, то $R \cap F'$ непусто.

Предположим, что R не является счетно компактным. Пусть F_n — непустые замкнутые в R множества, образующие исчезающую последовательность. Каждое из них представляется в виде $R \cap F'_n$, где F'_n замкнуто в R'. Пересечение всех множеств F'_n замкнуто в R' и непусто в силу компактности R', но не имеет общих с R точек.

Статья поступила в редакцию
17.IV.1940

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. I: Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел // Мат. сб. 1937. Т. 2, вып. 5. С. 947–970. (См. также т. 1 наст. изд., с. 30–58.)

2. *Александров А. Д.* О поверхностной функции выпуклого тела: Замечание к работе «К теории смешанных объемов выпуклых тел» // Мат. сб. 1939. Т. 6, вып. 1. С. 167–173. (См. также т. 1 наст. изд., с. 144–151.)

3. *Александров А. Д.* Применение теоремы об инвариантности области к доказательствам существования // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. № 3. С. 243–255.

4. *Alexandroff P., Urysohn P.* Mémoire sur les espaces topologiques compacts // Verhandelingen Amsterdam. 1929. T. 14, No. 1. P. 1–93. (Русский перевод: *Александров П. С., Урысон П. С.* Мемуар о компактных топологических пространствах. М.: Наука, 1971.)

5. *Carathéodory C.* Vorlesungen über reelle Funktionen. 2. Aufl. Leipzig: Teubner, 1927.

6. *Čech Ed.* On bicompact spaces // Ann. Math. 1937. Bd 38. S. 823–844 .

7. *Gelfand I.* On normed rings // Докл. АН СССР. 1939. Т. 23. С. 430–432.

8. *Хаусдорф Ф.* Топология. М.: ОНТИ, 1937.

9. *Markoff A.* On mean values and exterior densities // Мат. сб. 1938. Т. 4, № 1. С. 165–190. (Русский перевод: *Марков А. А.* О средних значениях и внешних плотностях // В кн.: *Марков А. А.* Избранные труды. Т. 1. Математика, механика, физика. М.: Изд-во МЦНМО, 2002. С. 150–179.)

10. *Moore E. H., Smith H. L.* A general theory of limits // American J. 1922. Vol. 44. P. 102–121.

11. *von Neumann J.* Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen // Compos. Math. 1934. Vol. 1. P. 106–114.

12. *Vedenisoff N.* Sur un problème de M. Paul Alexandroff // Ann. Math. 1936. Vol. 37. P. 427–428.

13. *Wallman H.* Lattices and topological spaces // Ann. Math. 1938. Vol. 39. P. 112–126.

Аддитивные функции множеств в абстрактных пространствах. II, III

Математический сборник. 1941. Т. 9, № 3. С. 563–628

ГЛАВА II. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ЗАРЯДЫ

§ 5. *Линейные функционалы*

1°. Определение 1. Пусть Φ — система вещественных ограниченных функций $f(x)$, определенных на некотором множестве R и обладающих следующими свойствами:

1) если $f_1(x), f_2(x) \in \Phi$, то $f_1(x) + f_2(x) \in \Phi$;
2) если $f(x) \in \Phi$, то $\lambda f(x) \in \Phi$ для любого вещественного λ;
3) если $f_1(x), f_2(x) \in \Phi$, то $\min[f_1(x), f_2(x)] \in \Phi$;
4) если $e(x)$ — функция, равная единице для всех $x \in R$, то $e(x) \in \Phi$.

Пусть каждой функции $f \in \Phi$ сопоставлено вещественное число $L(f)$ так, что

1) $L(f+g) = L(f) + L(g)$;
2) $|L(f)| \leqslant N \sup |f(x)|$, где N одно и то же для всех $f \in \Phi$.

Будем говорить, что $L(f)$ является *линейным функционалом на* Φ. Наименьшее из чисел N, для которых выполнено условие 2), называется *нормой* $L(f)$.

Линейный функционал $L(f)$ назовем *положительным*, если $L(f) \geqslant 0$ для любой функции $f \in \Phi$, принимающей лишь положительные значения [1)].

Добавив к Φ пределы всех равномерно сходящихся последовательностей функций из Φ, мы получим систему функций $\overline{\Phi}$, обладающую теми же четырьмя свойствами, что и Φ, и дополнительным пятым свойством: предел равномерно сходящейся последовательности функций из $\overline{\Phi}$ принадлежит $\overline{\Phi}$. Систему ограниченных функций, обладающую всеми пятью свойствами, можно назвать *замкнутой*.

[1)] Напомним, что положительными мы условились называть числа, бо́льшие или равные нулю. — *Прим. перев.*

Как легко видеть, линейный функционал, определенный на Φ, может быть единственным образом продолжен на $\overline{\Phi}$. По этой причине мы не нарушим общность, если будем рассматривать линейные функционалы только на замкнутых системах функций.

Теорема 1. *Пусть Φ — замкнутая система функций на множестве R. Объявив замкнутыми все множества вида*

$$F = \{f(x) \leqslant a\} \quad (f \in \Phi) \tag{1}$$

и только такие множества, мы превратим R в совершенно нормальное пространство R_Φ, на котором все функции системы Φ окажутся непрерывными.

Подставляя в (1) вместо $f(x)$ функцию $g(x) = \max[f(x) - a, 0]$, а затем $h(x) = \min[g(x), 1]$, мы видим, что каждое множество F представимо в виде

$$F = \{h(x) = 0\}, \quad 0 \leqslant h(x) \leqslant 1, \quad h \in \Phi.$$

Пусть

$$F_n = \{f_n(x) = 0\} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1).$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x) = f(x)$$

сходится равномерно, а значит, $\{f(x) = 0\}$ является одним из множеств F. В то же время очевидно, что

$$\{f(x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n(x) = 0\}.$$

Следовательно, пересечение счетного числа множеств F вновь является одним из множеств F. Сохраняя обозначения, мы имеем

$$\{\min[f_1, f_2] = 0\} = \{f_1 = 0\} \cup \{f_2 = 0\}.$$

Следовательно, объединение двух множеств F тоже является одним из множеств F. Тот факт, что само R и пустое множество являются множествами F, вполне очевиден. Таким образом, доказано, что R превращается в пространство R_Φ с замкнутыми множествами F.

Все функции из Φ непрерывны на R_Φ в силу леммы 1, § 1, а значит, R_Φ является совершенно нормальным непосредственно по определению совершенно нормального пространства.

Система всех ограниченных непрерывных функций на пространстве R_Φ представляет собой замкнутую систему Φ_R (она, вообще говоря, шире системы Φ, с помощью которой мы определили пространство R_Φ в теореме 1). Линейный функционал на этой системе мы будем называть *линейным функционалом в* R. По известной теореме о продолжении линейных функционалов каждый линейный функционал, определенный на Φ, может быть продолжен на систему всех ограниченных непрерывных функций на пространстве R_Φ. Поэтому во многих случаях рассмотрение лишь линейных функционалов в пространстве не приводит к ограничению общности.

В данном параграфе мы фиксируем некоторую систему функций Φ указанного выше вида (не обязательно замкнутую), и все рассматриваемые функции предполагаются принадлежащими этой системе. Символ $L(f)$ обозначает произвольный линейный функционал на Φ.

Отметим некоторые свойства линейных функционалов, которые мы примем без доказательства.

1. Для любого вещественного λ мы имеем $L(\lambda f) = \lambda L(f)$.

2. Если $L_1(f)$ и $L_2(f)$ — линейные функционалы, то $\alpha_1 L_1(f) + \alpha_2 L_2(f)$ для любых вещественных α_1 и α_2 также является линейным функционалом.

3. Если линейный функционал $L(f)$ является положительным и $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ для всех x, то $L(f_1) \geqslant L(f_2)$.

Лемма 1. *Если для всех положительных $f(x)$ мы имеем $L_1(f) \geqslant L_2(f)$ и $L_1(e) = L_2(e)$, то для всех $f(x)$*

$$L_1(f) = L_2(f).$$

Какова бы ни была функция $f(x)$, мы имеем $f(x) - \inf f(x) \geqslant 0$, а значит,

$$L_1(f - \inf f) \geqslant L_2(f - \inf f),$$

или

$$L_1(f) - L_1(e) \inf f(x) \geqslant L_2(f) - L_2(e) \inf f(x).$$

Но поскольку $L_1(e) = L_2(e)$, мы имеем $L_1(f) \geqslant L_2(f)$. Заменяя $f(x)$ на $-f(x)$, мы точно так же докажем, что $L_1(-f) \geqslant L_2(-f)$, т. е. $L_1(f) \leqslant L_2(f)$. Следовательно, $L_1(f) = L_2(f)$.

2°. В этом пункте мы покажем, что каждый линейных функционал является разностью двух положительных функционалов [2)].

Лемма 2. *Для любых $L(f)$ и $f(x) \geqslant 0$ существуют* [3)]

$$L^+(f) = \sup_{0 \leqslant h \leqslant f} L(h), \quad L^-(f) = \sup_{0 \leqslant h \leqslant f} L(-h). \tag{2}$$

[2)] Этот результат не является новым. Его доказательство при очень общих предположениях дано, например, в работе Л. В. Канторовича [4].

[3)] В авторском варианте вместо L^+ и L^- используются менее традиционные обозначения L^p и L^n. — *Прим. перев.*

Это следует из второго условия в определении линейного функционала.

Лемма 3. *Если* $L_1(f) = -L_2(f)$, *то*

$$L_1^+(f) = L_2^-(f), \quad L_1^-(f) = L_2^+(f).$$

Это вытекает непосредственно из (2).

Лемма 4. *Для* $f(x) \geqslant 0$ *и* $g(x) \geqslant 0$ *мы имеем*

$$L^+(f) + L^+(g) = L^+(f+g), \quad L^-(f) + L^-(g) = L^-(f+g).$$

Благодаря предыдущей лемме достаточно показать эти соотношения для $L^+(f)$. Пусть $0 \leqslant h(x) \leqslant f(x) + g(x)$. Положим

$$h_f(x) = \min[h(x), f(x)], \quad h_g(x) = h(x) - h_f(x)$$

(с учетом свойств системы Φ эти функции принадлежат Φ и значение $L(f)$ для них определено). Ясно, что

$$0 \leqslant h_f(x) \leqslant f(x), \quad 0 \leqslant h_g(x) \leqslant g(x), \quad h_f(x) + h_g(x) = h(x). \tag{3}$$

Пусть теперь функция $h(x)$ такова, что для заданного $\varepsilon > 0$

$$L^+(f+g) < L(h) + \varepsilon.$$

Тогда в силу (3) и (2) мы имеем

$$L^+(f+g) < L(h_f) + L(h_g) + \varepsilon \leqslant L^+(f) + L^+(g) + \varepsilon. \tag{4}$$

С другой стороны, если мы определим $h_f(x)$ и $h_g(x)$ так, что

$$0 \leqslant h_f(x) \leqslant f(x), \quad 0 \leqslant h_g(x) \leqslant g(x)$$

и

$$L^+(f) < L(h_f) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad L^+(g) < L(h_g) + \frac{\varepsilon}{2},$$

то, сложив два последних неравенства, мы получим

$$L^+(f) + L^+(g) < L(h_f + h_g) + \varepsilon. \tag{5}$$

С учетом $0 \leqslant h_f(x) + h_g(x) \leqslant f(x) + g(x)$ мы имеем

$$L(h_f + h_g) \leqslant L^+(f+g).$$

Следовательно, из (5) мы получаем

$$L^+(f) + L^+(g) < L^+(f+g) + \varepsilon.$$

Это неравенство вместе с неравенством (4) ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ дает

$$L^+(f+g) = L^-(f) + L^+(g).$$

Определение 2. Формулой (2) мы определили функционалы $L^+(f)$, $L^-(f)$ для $f(x) \geqslant 0$. Для знакопеременной функции $f(x)$,

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

где $f_1(x), f_2(x) \geqslant 0$, положим

$$L^+(f) = L^+(f_1) - L^+(f_2), \quad L^-(f) = L^-(f_1) - L^-(f_2). \tag{6}$$

Это определение является однозначным, так как в случае $f_1(x) - f_2(x) = f'(x) - f''(x)$, где все функции положительны, мы имеем

$$L^+(f_1 + f'') = L^+(f_2 + f'),$$

а значит, по лемме 4

$$L^+(f_1) + L^+(f'') = L^+(f_2) + L^+(f'),$$

т. е.

$$L^+(f_1) - L^+(f_2) = L^+(f') - L^+(f'').$$

Определенные таким образом функционалы $L^+(f)$ и $L^-(f)$ мы называем *положительной и отрицательной частями линейного функционала* $L(f)$.

Лемма 5. *$L^+(f)$ и $L^-(f)$ являются положительными линейными функционалами.*

Разумеется, достаточно показать это для $L^+(f)$.

1) Пусть $f(x) \geqslant 0$. Если $h(x) = 0$ для всех $x \in R$, то $L(h) = 0$, откуда следует, что

$$L^+(f) = \sup_{0 \leqslant h \leqslant f} L(h) \geqslant 0.$$

2) Тот факт, что $L^+(f) + L^+(g) = L^+(f+g)$, вытекает из леммы 4 и определения $L^+(f)$.

3) Пусть задана функция $f(x)$. Положим

$$f_1(x) = \max[f(x), 0], \quad f_2(x) = f_1(x) - f(x).$$

Тогда

$$\sup|f(x)| = \max[\sup f_1(x), \sup f_2(x)], \tag{7}$$

$$|L^+(f)| = |L^+(f_1) - L^+(f_2)| = \left|\sup_{0\leqslant h\leqslant f_1} L(h) - \sup_{0\leqslant h\leqslant f_2} L(h)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max\left[\sup_{0\leqslant h\leqslant f_1} L(h), \sup_{0\leqslant h\leqslant f_2} L(h)\right].$$

Привлекая второе условие из определения линейного функционала и используя (7), получаем

$$|L^+(f)| \leqslant N \sup|f(x)|.$$

Тем самым лемма доказана.

Теорема 2. *Каждый линейный функционал является разностью двух положительных линейных функционалов, а именно*

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f).$$

Достаточно доказать эту формулу для положительных функций $f(x)$. Пусть заданы $f(x) \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$. Пусть

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant f(x), \quad 0 \leqslant f''(x) \leqslant f(x)$$

и

$$L(f') \leqslant L^+(f) < L(f') + \varepsilon, \quad -L(f'') \leqslant L^-(f) < -L(f'') + \varepsilon.$$

Возьмем функцию $f(x) - f'(x) - f''(x)$ и прибавим ее к $f'(x)$ или к $f''(x)$ в зависимости от того, положительно число $L(f - f' - f'')$ или нет. Тогда мы получим две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ такие, что

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f(x), \quad 0 \leqslant f_2(x) \leqslant f(x),$$
$$f_1(x) + f_2(x) = f(x)$$

и

$$|L(f_1) - L^+(f)| < \varepsilon, \quad |L(f_2) + L^-(f)| < \varepsilon.$$

Из этих неравенств следует, что

$$|L(f) - L^+(f) + L^-(f)| < 2\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, теорема доказана.

Лемма 6. *Если $L(f) = L_1(f) - L_2(f)$, где $L_1(f)$, $L_2(f)$ — положительные линейные функционалы, то для всех $f(x) \geqslant 0$ мы имеем*

$$L_1(f) \geqslant L^+(f), \quad L_2(f) \geqslant L^-(f).$$

Действительно, поскольку $L_2(f)$ — положительный функционал, то для $h(x) \geqslant 0$ мы имеем $L(h) \leqslant L_1(h)$, а значит,

$$L^+(f) = \sup_{0 \leqslant h \leqslant f} L(h) \leqslant \sup_{0 \leqslant h \leqslant f} L_1(h).$$

Но $L_1(h)$ — тоже положительный линейный функционал, и поэтому

$$\sup_{0 \leqslant h \leqslant f} L_1(h) = L_1(h).$$

Следовательно, $L_1(f) \geqslant L^+(f)$. Точно так же доказывается, что $L_2(f) \geqslant L^-(f)$.

Очевидно, что положительная и отрицательная части линейного функционала единственным образом определяются их свойствами, установленными в последней лемме.

§ 6. *Заряды*

1°. В настоящем параграфе мы рассматриваем произвольное множество R, в котором выделена система подмножеств F такая, что объединение и пересечение любых двух множеств F является одним из множеств F и пустое множество также является одним из множеств F. В дальнейшем буквой F обозначается произвольное множество этой системы. Множества, дополнительные (относительно R) к F, мы обозначаем буквами G. Все множества F и G порождают некоторую алгебру множеств $\mathfrak{E}$ (т. е. совокупность множеств, получающихся из F и G с помощью операций объединения, пересечения и разности, примененных конечное число раз). В дальнейшем символ $\mathfrak{E}'$ будет обозначать произвольную алгебру множеств, содержащую $\mathfrak{E}$, а буквы E — произвольные множества из $\mathfrak{E}'$.

В следующих параграфах R будет пространством (см. определение 1, § 1), а буквы F и G будут обозначать его замкнутые и открытые множества. Но в данном параграфе счетные пересечения множеств F не будут рассматриваться вовсе.

Определение 1. Функцию множества $\mu(E)$, определенную на алгебре множеств, содержащей алгебру $\mathfrak{E}$, назовем *зарядом*, если она

1) аддитивна, т. е. $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ в случае $E_1 \cap E_2 = \varnothing$;

2) ограничена, т. е. $|\mu(E)| \leqslant N$, где N одно и то же для всех E;

3) регулярна [4)], т. е. для любых E и $\varepsilon > 0$ существует множество $F \subset E$ такое [5)], что $|\mu(E) - \mu(F)| < \varepsilon$.

[4)] Этот термин заимствован у К. Каратеодори. Как будет показано ниже, для положительных зарядов это условие в точности означает регулярность в смысле Каратеодори [5].

[5)] В любом E содержится по меньшей мере одно множество F, а именно пустое.

Заряд назовем *положительным*, если $\mu(E) \geqslant 0$ для всех E.

В том случае, когда R является пространством, а множества F — замкнутыми в нем множествами, функция $\mu(E)$ будет называться *зарядом в* R. При этом она предполагается определенной (и удовлетворящей трем сформулированным выше условиям) по меньшей мере на алгебре $\mathfrak{E}$, но в некоторых случаях более удобно рассматривать ее на более обширной алгебре — например, на алгебре борелевских множеств.

Лемма 1. *Условие регулярности заряда эквивалентно следующему условию: для любых E и $\varepsilon > 0$ существует множество $G \supset E$ такое, что*

$$|\mu(E) - \mu(G)| < \varepsilon.$$

Пусть $\mu(E)$ удовлетворяет условию регулярности. Возьмем произвольные $E \in \mathfrak{E}'$ и $\varepsilon > 0$. Множество $R \setminus E$ также принадлежит $\mathfrak{E}'$, так как $\mathfrak{E}'$ содержит R и E. Следовательно, значение $\mu(R \setminus E)$ определено, и в силу аддитивности $\mu(R \setminus E) = \mu(R) - \mu(E)$. Пусть множество $F \subset R \setminus E$ таково, что

$$|\mu(R \setminus E) - \mu(F)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Множество $R \setminus F$ является одним из множеств G, что позволяет нам положить $R \setminus F = G$. Поскольку $F \subset R \setminus E$, мы имеем $G \supset E$. В силу соотношений $\mu(R \setminus E) = \mu(R) - \mu(E)$ и $\mu(R) - \mu(F) = \mu(G)$ неравенство (1) эквивалентно следующему: $|\mu(E) - \mu(G)| < \varepsilon$, ч. т. д.

Если выполнено условие леммы, то доказательство регулярности можно провести в точности так же, как это было сделано выше — необходимо лишь поменять ролями множества F и G.

2°. В этом пункте мы докажем некоторые простые леммы об аддитивных положительных функциях множества, определенных на кольце множеств. В леммах 3–5 символ $\mu(E)$ обозначает произвольную функцию такого вида.

Лемма 2. *Если $\mu(E)$ — аддитивная функция множества, чье значение определено, в частности, для пустого множества $\varnothing$, то $\mu(\varnothing) = 0$.*

Лемма 3. *Если $E_1 \supset E_2$, то $\mu(E_1) \geqslant \mu(E_2)$.*

Если $E_1 \supset E_2$, то в силу аддитивности $\mu(E_1) = \mu(E_2) + \mu(E_1 \setminus E_2)$, а поскольку рассматриваемая функция положительна, $\mu(E_1 \setminus E_2) \geqslant 0$.

Лемма 4. *Справедливо неравенство $\mu(E_1 \cup E_2) \leqslant \mu(E_1) + \mu(E_2)$.*

По лемме 3 мы имеем $\mu(E_1 \setminus E_2) \leqslant \mu(E_1)$ и в силу аддитивности $\mu(E_1 \setminus E_2) + \mu(E_2) = \mu(E_1 \cup E_2)$.

Лемма 5. *Если $E_i \subset E_i'$ и*

$$\mu(E_i) + \varepsilon_i > \mu(E_i') \qquad (i = 1, 2), \tag{2}$$

то

$$\mu(E_1 \cup E_2) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > \mu(E_1' \cup E_2'),$$
$$\mu(E_1 \cap E_2) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > \mu(E_1' \cap E_2').$$

Поскольку $E_i \subset E_i'$, неравенства (2) могут быть переписаны следующим образом:

$$\mu(E_i' \setminus E_i) < \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2). \tag{3}$$

Мы имеем

$$\begin{gathered}\mu(E_1' \cup E_2') = \mu(E_1 \cup E_2) + \mu\big((E_1' \cup E_2') \setminus (E_1 \cup E_2)\big), \\ (E_1' \cup E_2') \setminus (E_1 \cup E_2) \subset (E_1' \setminus E_1) \cup (E_2' \setminus E_2).\end{gathered} \tag{4}$$

В силу лемм 2 и 3 из этого включения следует, что

$$\mu\big((E_1' \cup E_2') \setminus (E_1 \cup E_2)\big) \leqslant \mu(E_1' \setminus E_1) + \mu(E_2' \setminus E_2).$$

Согласно (3), правая часть этого неравенства меньше $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, а значит, благодаря (2) мы имеем $\mu(E_1' \cup E_2') < \mu(E_1 \cup E_2) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Аналогичным образом, исходя из соотношений

$$\begin{gathered}\mu(E_1' \cap E_2') = \mu(E_1 \cap E_2) + \mu\big((E_1' \cap E_2') \setminus (E_1 \cap E_2)\big), \\ (E_1' \cap E_2') \setminus (E_1 \cap E_2) \subset (E_1' \setminus E_2) \cup (E_2' \setminus E_1),\end{gathered}$$

мы получаем $\mu(E_1' \cap E_2') < \mu(E_1 \cap E_2) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

3°. Теорема 1. *Для того чтобы функция множества $\mu(E)$, определенная на $\mathfrak{E}'$, была положительным зарядом, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующим двум условиям:*

1) $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ *в случае* $E_1 \cap E_2 = \varnothing$,

2) *для всех* E

$$\mu(E) = \sup_{F \subset E} \mu(F) \tag{5}$$

или для всех E

$$\mu(E) = \inf_{G \supset E} \mu(G). \tag{6}$$

(Эти формулы осмыслены, так как каждое E содержит некоторое множество F — например, пустое множество — и каждое E содержится в R, являющемся одним из множеств G.)

Необходимость. Необходимость первого условия очевидна, так как оно является условием аддитивности. Мы докажем необходимость второго условия, показав, что оно следует из регулярности.

Пусть $\mu(E)$ — положительный заряд. Возьмем произвольное E. По лемме 3 для любого $F \subset E$ мы имеем $\mu(F) \leqslant \mu(E)$, а значит,

$$\mu(E) \geqslant \sup_{F \subset E} \mu(F). \tag{7}$$

В то же время по условию регулярности для каждого $\varepsilon > 0$ существует множество $F \subset E$ такое, что $|\mu(E) - \mu(F)| < \varepsilon$, а значит,

$$\mu(E) \leqslant \sup_{F \subset E} \mu(F). \tag{8}$$

Формулы (7) и (8) дают (5).

Вторая форма второго условия, выражаемая соотношением (6), доказывается точно так же — нужно лишь воспользоваться леммой 1.

Достаточность. Пусть функция $\mu(E)$ удовлетворяет условиям теоремы. Докажем, что она удовлетворяет трем условиям, участвующим в определении заряда, и, кроме того, является положительной.

Аддитивность функции $\mu(E)$ уже дана. Докажем ее ограниченность. Из формулы (5) $\big($или формулы (6)$\big)$ следует, что если $E_1 \supset E_2$, то $\mu(E_1) \geqslant \mu(E_2)$, а поскольку все E содержатся в R, мы имеем $\mu(E) \leqslant \mu(R)$. Регулярность $\mu(E)$ вытекает непосредственно из формулы (5). $\big($Из (6) регулярность получается точно так же, но с помощью леммы 1.$\big)$

Покажем, что $\mu(E) \geqslant 0$. Поскольку функция $\mu(E)$ аддитивна, по лемме 2 мы имеем $\mu(\varnothing) = 0$. Пустое множество является одним из множеств F и содержится в любом E. Следовательно, из (5) следует, что $\mu(E) \geqslant 0$. Если же исходить из формулы (6), то можно рассуждать следующим образом. Так как пустое множество содержится в любом G, в формуле

$$\mu(\varnothing) = \inf_{G \supset \varnothing} \mu(G)$$

инфимум берется по всем G. Поскольку $\mu(\varnothing) = 0$, мы получаем $\mu(G) \geqslant 0$ для всех G, а значит в силу (6) мы имеем $\mu(E) \geqslant 0$ для всех E.

4°. В этом пункте мы покажем, что каждый заряд является разностью двух положительных зарядов.

Лемма 6. *Линейная комбинация положительных зарядов является зарядом.*

Пусть $\mu_1(E), \mu_2(E)$ — два положительных заряда и α_1, α_2 — числа. Функция множества $\mu(E) = \alpha_1\mu_1(E) + \alpha_2\mu_2(E)$ определена на элементах алгебры $\mathfrak{E}$, аддитивна и ограничена. Покажем, что она регулярна. Возьмем E и $\varepsilon > 0$. По теореме 1 имеются F_1 и F_2, содержащиеся в E и такие, что

$$\mu_i(E) \geqslant \mu_i(F_i) > \mu_i(E_i) - \varepsilon \qquad (i = 1, 2).$$

В то же время F_1 и F_2 содержатся в множестве $F_1 \cup F_2$, которое, в свою очередь, содержится в E. Следовательно, по лемме 3

$$\mu_i(E) \geqslant \mu_i(F_1 \cup F_2) > \mu_i(E) - \varepsilon \qquad (i = 1, 2).$$

Домножая на α_i и складывая, получаем $|\mu(E) - \mu(F_1 \cup F_2)| < (|\alpha_1| + |\alpha_2|)\varepsilon$, что доказывает регулярность $\mu(E)$.

Лемма 7. *Пусть $\mu(E)$ — заряд. Для любого E_0 существуют*[6)]

$$\mu^+(E_0) = \sup_{E \subset E_0} \mu(E) = \sup_{F \subset E_0} \mu(F), \tag{9}$$

$$\mu^-(E_0) = \sup_{E \subset E_0} -\mu(E) = \sup_{F \subset E_0} -\mu(F). \tag{10}$$

Это следует из ограниченности заряда и из того факта, что для любого $E \subset E_0$ существуют $F \subset E \subset E_0$, для которых значения $\mu(F)$ сколь угодно близки к $\mu(E)$.

Определение 2. Функции множества $\mu^+(E)$ и $\mu^-(E)$, определяемые формулами (9) и (10), называются соответственно *положительной и отрицательной частями* $\mu(E)$. Их сумму мы называем вариацией заряда $\mu(E)$ и обозначаем ее символом $|\mu|(E)$.

Легко видеть, что такое определение вариации эквивалентно традиционному определению.

Лемма 8. *Функции множества $\mu^+(E)$, $\mu^-(E)$, $|\mu|(E)$ являются положительными зарядами.*

Докажем это для $\mu^+(E)$. Пусть $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Тогда

$$\sup_{E \subset E_1 \cup E_2} \mu(E) = \sup_{E \subset E_1 \cup E_2} \big(\mu(E \cap E_1) + \mu(E \cap E_2)\big). \tag{11}$$

Но если E — произвольное множество, содержащееся в $E_1 \cup E_2$, то множества $E \cap E_1$ и $E \cap E_2$ являются произвольными множествами, содержащимися в E_1 и E_2. Следовательно,

$$\sup_{E \subset E_1 \cup E_2} \big(\mu(E \cap E_1) + \mu(E \cap E_2)\big) = \sup_{E \subset E_1} \mu(E) + \sup_{E \subset E_2} \mu(E). \tag{12}$$

Формулы (11) и (12), согласно определению $\mu^+(E)$, влекут

$$\mu^+(E_1 \cup E_2) = \mu^+(E_1) + \mu^+(E_2). \tag{13}$$

Из определения $\mu^+(E)$ вытекает, что $\mu^+(F) \leqslant \mu^+(E)$ при $F \subset E$. Поэтому

$$\mu^+(E) \geqslant \sup_{F \subset E} \mu^+(F). \tag{14}$$

В то же время согласно (9) мы имеем

$$\mu^+(E) = \sup_{F \subset E} \mu(F),$$

6) В авторском варианте вместо μ^+ и μ^- используются менее традиционные обозначения μ^p и μ^n. — *Прим. перев.*

откуда в силу очевидного неравенства $\mu(F) \leqslant \mu^+(F)$ следует, что

$$\mu^+(E) \leqslant \sup_{F \subset E} \mu^+(F).$$

Это вместе с (14) дает

$$\mu^+(E) = \sup_{F \subset E} \mu^+(F). \tag{15}$$

На основании теоремы 1 из формул (13) и (15) следует, что $\mu^+(E)$ является положительным зарядом.

Точно так же доказывается, что $\mu^-(E)$ является положительным зарядом — нужно лишь заменить $\mu(E)$ на $-\mu(E)$. Тот факт, что $|\mu|(E)$ является положительным зарядом, теперь следует из леммы 4.

Теорема 2. *Каждый заряд является разностью двух положительных зарядов, а именно, его положительной и отрицательной частей, т. е.*

$$\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E). \tag{16}$$

Возьмем произвольные E и $\varepsilon > 0$. Пусть E' и E'' содержатся в E и таковы, что

$$\mu^+(E) < \mu(E') + \varepsilon, \quad \mu^-(E) < -\mu(E'') + \varepsilon. \tag{17}$$

Вычтем множество $E' \cap E''$ из E'' или из E' в зависимости от того, положительно число $\mu(E' \cap E'')$ или нет. Аналогично, добавим множество $E \setminus (E' \cup E'')$ к E' или к E'' в зависимости от того, положительно число $\mu\big(E \setminus (E' \cup E'')\big)$ или нет. Мы получим два таких множества E_1 и E_2, что

$$\mu(E_1) \geqslant \mu(E'), \quad \mu(E_2) \leqslant \mu(E''), \tag{18}$$

$$E_1 \cap E_2 = \varnothing, \quad E_1 \cup E_2 = E. \tag{19}$$

Объединяя неравенства (17) и (18), мы получаем

$$\mu^+(E) - \mu(E_1) < \varepsilon, \quad \mu^-(E) + \mu(E_2) < \varepsilon. \tag{20}$$

Кроме того, из определения $\mu^+(E)$ и $\mu^-(E)$ следует, что

$$\mu^+(E) - \mu(E_1) \geqslant 0, \quad \mu^-(E) + \mu(E_2) \geqslant 0. \tag{21}$$

Наконец, из (19) вытекает, что $\mu(E_1) + \mu(E_2) = \mu(E)$. Поэтому неравенства (20) и (21) с очевидностью влекут $|\mu(E) - \mu^+(E) + \mu^-(E)| < \varepsilon$, откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ мы получаем (16).

Среди всевозможных представлений данного заряда в виде разности двух положительных зарядов каноническое представление, выраженное формулой (16), характеризуется следующим свойством минимальности.

Лемма 9. *Если $\mu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E)$, где $\mu_1(E)$ и $\mu_2(E)$ — положительные заряды, то $\mu_1(E) \geqslant \mu^+(E)$, $\mu_2(E) \geqslant \mu^-(E)$.*

Учитывая, что $\mu_2(E) \geqslant 0$, мы имеем $\mu(E) \leqslant \mu_1(E)$ и, следовательно, для каждого E_0

$$\mu^+(E_0) = \sup_{E \subset E_0} \mu(E) \leqslant \sup_{E \subset E_0} \mu_1(E). \tag{22}$$

Но поскольку заряд $\mu_1(E)$ является положительным, $\mu_1(E) \leqslant \mu_1(E_0)$ при $E \subset E_0$, а значит,

$$\sup_{E \subset E_0} \mu_1(E) \leqslant \mu_1(E_0).$$

Объединяя это неравенство с (22), мы получаем $\mu^+(E_0) \leqslant \mu_1(E_0)$.

Неравенство $\mu^-(E_0) \leqslant \mu_2(E_0)$ доказывается аналогично.

Заметим также, что поскольку каждый заряд является разностью двух положительных зарядов, лемма 6 может быть сразу обобщена на произвольные заряды, и мы получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Линейная комбинация зарядов является зарядом.*

5°. **Теорема 4**. *Пусть $\mu(E)$ — заряд. Для любых E_0 и $\varepsilon > 0$ существуют F и G такие, что $F \subset E_0 \subset G$ и для всякого E, заключенного между*[7] *F и G, справедливо неравенство $|\mu(E) - \mu(E_0)| < \varepsilon$.*

Пусть $\mu(E)$ — заряд и $\mu^+(E)$, $\mu^-(E)$ — его положительная и отрицательная части. По предыдущей теореме имеем $\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E)$ (см. (16)). Возьмем произвольные E_0 и $\varepsilon > 0$. Так как $\mu^+(E)$ и $\mu^-(E)$ — положительные заряды, то, согласно (5), существуют F_1 и F_2, содержащиеся в E_0, такие, что

$$\mu^+(E_0) < \mu^+(F_1) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^-(E_0) < \mu^-(F_2) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{23}$$

Аналогично, существуют G_1 и G_2, содержащие E_0, такие, что

$$\mu^+(E_0) > \mu^+(G_1) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^-(E_0) > \mu^-(G_2) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{24}$$

Положим $F = F_1 \cup F_2$, $G = G_1 \cap G_2$. Тогда $F \subset E_0 \subset G$. Пусть E заключено между F и G. Тогда оно заключено между F_1 и G_1, а значит, $\mu^+(G_1) \geqslant \mu^+(E) \geqslant \mu^+(F_1)$. Сравнивая это соотношение с первыми неравенствами в (23) и (24), получаем

$$\mu^+(E_0) + \frac{\varepsilon}{2} > \mu^+(E) > \mu^+(E_0) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{25}$$

Совершенно аналогично из соотношения $\mu^-(G_2) \geqslant \mu^-(E) \geqslant \mu^-(F_2)$ и вторых неравенств в (23) и (24) получаем

$$\mu^-(E_0) + \frac{\varepsilon}{2} > \mu^-(E) > \mu^-(E_0) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{26}$$

[7] Будем говорить, что множество A заключено между множествами B и C, если $B \subset A \subset C$ или $B \supset A \supset C$.

Если теперь вычесть неравенства (26) из неравенств (25), то, используя формулу (16), получим $\mu(E_0)+\varepsilon > \mu(E) > \mu(E_0)-\varepsilon$, ч. т. д.

6°. Теорема 5. *Пусть функция $\mu(E)$, определенная на $\mathfrak{E}$, удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$, *если существует множество $F \supset E_1$ такое, что $F \cap E_2 = \varnothing$,*

2) *для любого E имеет место равенство $\mu(E) = \sup\limits_{F\subset E} \mu(F)$ $\big($или $\mu(E) = \inf\limits_{G\supset E} \mu(G)\big)$.*

Тогда $\mu(E)$ — положительный заряд.

Поскольку условие 2) совпадает с условием 2) теоремы 1, нам остается лишь доказать аддитивность функции $\mu(E)$. Мы сделаем это, доказав, что если функция $\mu(E)$, определенная на $\mathfrak{E}$, удовлетворяет условию 1) теоремы, то она аддитивна. Имея в виду дальнейшие приложения, мы дадим соответствующее доказательство в несколько более общей форме.

Пусть $\mu(M)$ — функция множества, определенная на произвольной алгебре [8)] подмножеств R [9)]. Множество A называется *μ-измеримым* [10)], если $\mu(A)$ определено и для любого M, для которого $\mu(M)$ определено, выполняется равенство $\mu(M) = \mu(M\cap A) + \mu(M\diagdown A)$.

Лемма 10. *Если A μ-измеримо, то $R\diagdown A$ также μ-измеримо.*

Это следует из определения.

Лемма 11. *Если A и B μ-измеримы, то $A\cap B$ μ-измеримо.*

Пусть M — произвольное подмножество R, для которого $\mu(M)$ определено. Поскольку A измеримо,

$$\mu(M\cap B) = \mu(M\cap B\cap A) + \mu\big((M\cap B)\diagdown A\big). \tag{27}$$

Поскольку B также измеримо,

$$\mu(M) = \mu(M\cap B) + \mu(M\diagdown B) \tag{28}$$

и

$$\begin{aligned}\mu\big(M\diagdown(A\cap B)\big) &= \mu\big(\big(M\diagdown(A\cap B)\big)\cap B\big) + \mu\big(\big(M\diagdown(A\cap B)\big)\diagdown B\big) = \\ &= \mu\big((M\cap B)\diagdown A\big) + \mu(M\diagdown B).\end{aligned} \tag{29}$$

8) В оригинальной версии статьи автор говорит о «кольце подмножеств R, содержащем само R». Такие кольца принято сейчас называть алгебрами подмножеств R. — *Прим. перев.*

9) Для нас важны два случая: когда эта алгебра совпадает с $\mathfrak{E}$ и когда она состоит из всех подмножеств R.

10) Это определение и дальнейшие заключения об измеримых множествах принадлежат по существу К. Каратеодори, см. [5], с. 258.

Подставив в (28) выражение для $\mu(M \cap B)$ из (27) и выражение для $\mu(M \setminus B)$ из (28), получим $\mu(M) = \mu(M \cap B \cap A) + \mu\big(M \setminus (A \cap B)\big)$, что и означает измеримость $A \cap B$.

Лемма 12. *Если A μ-измеримо и $A \cap B = \varnothing$, то*[11)]

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{30}$$

В силу измеримости A мы имеем $\mu(A \cup B) = \mu\big((A \cup B) \cap A\big) + \mu\big((A \cup B) \setminus A\big)$, а поскольку $A \cap B = \varnothing$, это в точности равенство (30).

Лемма 13. *Пусть $\mu(E)$ — функция, определенная на произвольной алгебре подмножеств множества R. Множества, измеримые относительно этой функции, образуют алгебру множеств, причем $\mu(M)$ аддитивна на этой алгебре.*

Это следует из лемм 9–11. Действительно, если совокупность измеримых множеств содержит их дополнения и пересечения, то она также содержит их объединения и разности[12)], а значит, является алгеброй.

Лемма 14. *Если функция $\mu(E)$ определена на $\mathfrak{E}$ (или на алгебре, содержащей алгебру $\mathfrak{E}$) и удовлетворяет первому условию теоремы* 5, *то все множества $E \in \mathfrak{E}$ являются μ-измеримыми и, следовательно, эта функция аддитивна на $\mathfrak{E}$.*

Убедимся прежде всего в том, что каждое множество F измеримо. Действительно, для всякого M мы имеем $M \cap F \subset F$, $(M \setminus F) \cap F = \varnothing$, а значит, согласно первому условию теоремы 5, справедливо равенство $\mu(M) = \mu(M \cap F) + \mu(M \setminus F)$. Это означает, что F μ-измеримо. Тогда по лемме 10 каждое множество G также является μ-измеримым и, наконец, по лемме 13 каждое множество E μ-измеримо, поскольку алгебра $\mathfrak{E}$ порождается всеми множествами F и G.

Теорема 5 непосредственно вытекает из леммы 14.

7°. Выкладки предшествующего пункта не были связаны с тем фактом, что рассматриваемая функция определена только на элементах алгебры $\mathfrak{E}$. Поэтому мы можем утверждать, что если функция $\mu(E)$, удовлетворяющая условиям теоремы 5, определена на всех подмножествах R, то на $\mathfrak{E}$ эта функция представляет собой положительный заряд. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 6. *Положительный заряд $\mu(E)$ можно продолжить на алгебру всех подмножеств R, полагая*[13)] *для произвольного M*

$$\mu_*(M) = \sup_{F \subset M} \mu(F) \tag{31}$$

---

11) В предположении, что значение $\mu(A \cup B)$ определено. — *Прим. перев.*

12) $A \cup B = R \setminus \big((R \setminus A) \cap (R \setminus B)\big)$, $A \setminus B = A \cap (R \setminus B)$.

13) Корректность доопределения с помощью формул (31) и (32) вытекает из теоремы 1.

или

$$\mu^*(M) = \inf_{G \supset M} \mu(G). \tag{32}$$

В результате мы получим функции, удовлетворяющие двум условиям теоремы 5, где второе из условий будет выполняться в форме, соответствующей той из формул (31) и (32), которая была выбрана для продолжения заряда.

Второе условие будет выполнено непосредственно в силу определения по формуле (31) (или (32)), поскольку $\mu_*(F) = \mu(F)$[14]. Нам остается доказать, что первое условие также выполняется. Мы будем рассуждать, исходя из формулы (31); в случае, когда продолжение осуществляется в соответствии с формулой (32), доказательство будет аналогичным. Заметим, что формула (31) влечет $\mu_*(M_1) \geqslant \mu_*(M_2)$ при $M_1 \supset M_2$. Возьмем два произвольных множества M_1 и M_2 без общих точек и любое $\varepsilon > 0$. В силу формулы (31) существуют $F_1 \subset M_1$, $F_2 \subset M_2$ такие, что $\mu_*(F_1) > \mu_*(M_1) - \varepsilon$, $\mu_*(F_2) > \mu_*(M_2) - \varepsilon$. Тогда, поскольку $F_1 \cup F_2 \subset M_1 \cup M_2$, мы имеем

$$\mu_*(M_1 \cup M_2) \geqslant \mu_*(F_1 \cup F_2) = \mu_*(F_1) + \mu_*(F_2) > \mu_*(M_1) + \mu_*(M_2) - 2\varepsilon. \tag{33}$$

Здесь мы использовали аддитивность μ_* для множеств F_1 и F_2, что допустимо ввиду равенства $\mu_*(F) = \mu(F)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из (33) следует

$$\mu_*(M_1 \cup M_2) \geqslant \mu_*(M_1) + \mu_*(M_2). \tag{34}$$

Предположим теперь, что существует $F \supset M_1$ такое, что $F \cap M_2 = \varnothing$. Согласно (31), имеется множество $F_3 \subset M_1 \cup M_2$, удовлетворяющее неравенству

$$\mu_*(F_3) > \mu_*(M_1 \cup M_2) - \varepsilon. \tag{35}$$

Поскольку $F \cap M_2 = \varnothing$ и $F_3 \subset M_1 \cup M_2$, мы имеем $F \cap F_3 \subset M_1$ и $F_3 \setminus F \subset M_2$. Следовательно,

$$\mu_*(M_1) + \mu_*(M_2) \geqslant \mu_*(F \cap F_3) + \mu_*(F_3 \setminus F) = \mu_*(F). \tag{36}$$

Здесь мы использовали аддитивность функции μ_* для множеств $F \cap F_3$ и $F_3 \setminus F$, что допустимо, так как эти множества входят в $\mathfrak{C}$. Из (35) и (36) следует

$$\mu_*(M_1) + \mu_*(M_2) \geqslant \mu_*(M_1 \cup M_2) - \varepsilon,$$

и в силу произвольности $\varepsilon > 0$ мы имеем

$$\mu_*(M_1) + \mu_*(M_2) \geqslant \mu_*(M_1 \cup M_2). \tag{37}$$

[14] Формуле (32) соответствует аналогичное равенство $\mu^*(G) = \mu(G)$. — *Прим. перев.*

Эта формула вместе с (34) дает

$$\mu_*(M_1) + \mu_*(M_2) = \mu_*(M_1 \cup M_2),$$

и теорема тем самым доказана [15].

Эта теорема легко обобщается на произвольные заряды. Разложив данный заряд $\mu(E)$ на его положительную и отрицательную части, мы можем продолжить их на все подмножества R и затем взять разность полученных функций. Тем самым мы продолжим заряд $\mu(E)$ до функции $\mu_*(E)$ или $\mu^*(E)$. Эти функции являются аналогами внутренней и внешней меры, что подтверждается следующим утверждением.

Теорема 7. *Для того чтобы множество M было измеримым относительно μ_* (или μ^*) по Каратеодори в смысле приведенного выше определения, необходимо и достаточно, чтобы*

$$(\mu^+)_*(M) = (\mu^+)^*(M), \quad (\mu^-)_*(M) = (\mu^-)^*(M),$$

где индексы + и − указывают, что функция является продолжением соответственно положительной и отрицательной части данного заряда.

Множества, измеримые относительно μ_* (или μ^*), образуют алгебру множеств, причем функция $\mu_*(M)$ $\big($и $\mu^*(M)\big)$ аддитивна на этой алгебре. Более того, любая алгебра подмножеств R, на которой $\mu_*(M)$ $\big($или $\mu^*(M)\big)$ аддитивна, содержится в этой алгебре [16].

Мы опустим доказательство этой теоремы. Фигурирующее здесь продолжение заряда, очевидно, является существенным только для счетно аддитивных зарядов, поскольку для них все борелевские множества будут измеримыми. Но счетно аддитивный положительный заряд есть не что иное, как регулярная мера Каратеодори, а для таких мер наша теорема по существу содержится в [5].

В § 8 и 11 мы увидим, что заряды могут быть продолжены с сохранением аддитивности некоторым совершенно иным методом, нежели рассмотренный здесь.

§ 7. *Связь между линейными функционалами и зарядами в нормальных пространствах*

1°. Пусть R — нормальное пространство. Рассмотрим совокупность всех ограниченных непрерывных функций на этом пространстве и линейные

[15] Теоремы 5 и 6 устанавливают взаимно однозначное соответствие между положительными зарядами, удовлетворяющими условию $\mu(R) = 1$, с одной стороны, и внешними плотностями, рассмотренными А. А. Марковым, с другой. Как легко видеть из наших результатов, первое условие в определении Маркова внешней плотности следует из второго и четвертого условий, участвующих в формулировке теоремы 4 из [6].

[16] Для колец множеств это не так, поскольку любая функция аддитивна на кольце, состоящем из произвольного множества и пустого множества.

функционалы в R, т. е. функционалы, определенные на этой совокупности. Как известно (см. теорему 1, § 1), совокупность ограниченных непрерывных функций на пространстве удовлетворяет всем условиям определения 1, § 5. Поэтому мы можем применять все результаты § 5. Замкнутые множества F пространства удовлетворяют всем условиям, налагаемым на множества F в § 6. Поэтому мы можем рассматривать заряды в пространстве R и применять к ним все результаты § 6.

В дальнейшем R будет обозначать заданное нормальное пространство, F и G — соответственно замкнутые и открытые множества в R, E — произвольное множество из алгебры $\mathfrak{E}$, порожденной замкнутыми множествами пространства R. Символы $f(x)$, $g(x)$ и т. д. будут обозначать ограниченные непрерывные функции на R. Никакие другие функции мы в дальнейшем не рассматриваем, и поэтому мы будем часто называть их просто функциями.

Пусть в R задан заряд $\mu(E)$. Для любой непрерывной функции $f(x)$ множества $\{a > f(x) \geqslant b\}$, $\{a \geqslant f(x) > b\}$ принадлежат алгебре $\mathfrak{E}$, а значит, заряд определен на них. Следовательно, мы можем обычным образом определить интеграл Лебега — Радона:

$$\int\limits_R f(x)\,\mu(dE) = \lim_{\max|f_i - f_{i-1}|\to 0} \sum f_i\,\mu(E_i),$$

где

$$E_i = \{f_{i+1} > f(x) \geqslant f_i\}, \quad \inf f(x) < f_1 < f_2 < \dots < f_n < \sup f(x).$$

Как известно, интеграл Лебега — Радона является линейным функционалом, определенным на совокупности ограниченных непрерывных функций; а именно, мы имеем

$$\int\limits_R \bigl(f(x) + g(x)\bigr)\,\mu(dE) = \int\limits_R f(x)\,\mu(dE) + \int\limits_R g(x)\,\mu(dE),$$

$$\left|\int\limits_R f(x)\,\mu(dE)\right| \leqslant |\mu|(R)\sup|f(x)|.$$

Заметим также, что если $\mu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E)$, то

$$\int\limits_R f(x)\,\mu(dE) = \int\limits_R f(x)\,\mu_1(dE) - \int\limits_R f(x)\,\mu_2(dE). \tag{1}$$

Введем следующее определение, которым сразу же воспользуемся.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ *охватывает* множество M, если она непрерывна, ограничена, положительна и всюду на M не меньше единицы.

Условимся говорить, что $f(x)$ следует за $g(x)$, если всюду $f(x) \leqslant g(x)$. Тогда совокупность всех функций, охватывающих M, становится направлением. Действительно, если $f(x)$ и $g(x)$ охватывают M, то $\min[f(x), g(x)]$ также охватывает M и следует за $f(x)$ и $g(x)$. Обозначим это направление символом $D(M)$.

Теорема 1. *Для любого линейного функционала $L(f)$ в нормальном пространстве R существует, и притом единственный, заряд $\mu(E)$ в R такой, что*

$$L(f) = \int_R f(x)\,\mu(dE). \tag{2}$$

Этот заряд выражается через $L(f)$ следующим образом: для всех F

$$\mu(F) = \lim_{D(F)} L(f) \tag{3}$$

(предел по направлению $D(F)$).

Согласно условию регулярности, задание заряда на замкнутых множествах пространства полностью определяет его, так что заряд $\mu(E)$ полностью определяется формулой (3).

Если функционал $L(f)$ положителен, то формула (3) может быть переписана в более простом виде:

$$\mu(F) = \inf_{D(F)} L(f). \tag{4}$$

Действительно, в этом случае при $f(x) \leqslant g(x)$ мы имеем $L(f) \leqslant L(g)$, так что $L(f)$ представляет собой монотонно убывающую функцию на направлении $D(F)$. Предел такой функции совпадает с ее точной нижней гранью.

Доказательство сформулированной теоремы будет завершено, если мы докажем следующие утверждения.

1) Каждому положительному функционалу $L(f)$ соответствует заряд, определенный формулой (4).

2) Функционал $L(f)$ выражается через этот заряд формулой (2).

3) Разложив произвольный линейный функционал $L(f)$ на его положительную и отрицательную части, мы можем определить по ним соответствующие заряды и, основываясь на формуле (1), представить $L(f)$ в виде интеграла по разности этих зарядов, т. е. по некоторому заряду. Этот заряд является единственным и определяется формулой (3).

Пункты 2°, 3° и 4° содержат доказательства этих утверждений в указанном порядке.

Пусть Φ — замкнутая система функций, определенных на множестве R (см. п. 1°, § 5). По теореме 1, § 5 мы можем с помощью Φ превратить R в пространство R_Φ, на котором функции системы Φ будут непрерывны. Линейный функционал на Φ может быть продолжен на все непрерывные ограниченные функции на R_Φ, а по нашей теореме такой функционал представляется в виде интеграла по заряду в R_Φ. Следовательно, из теоремы 1 следует, что *каждый линейный функционал на Φ представляется в виде интеграла по заряду в R_Φ.*

2°. Пусть $L(f)$ — положительный линейный функционал в R. Для каждого F положим

$$\mu(F) = \inf_{D(F)} L(f), \tag{4}$$

а для всех остальных E положим

$$\mu(E) = \sup_{F\subset E} \mu(F). \tag{5}$$

Такое определение возможно, так как функция $f(x)$, охватывающая F, по определению положительна и, следовательно, $L(f) \geqslant 0$, поскольку $L(f)$ — положительный функционал. Поэтому $\inf\limits_{D(F)} L(f)$ существует.

В этом пункте $\mu(E)$ обозначает функцию, определенную формулами (4) и (5). Нам предстоит доказать, что она представляет собой положительный заряд в R. Согласно теореме 5, § 6, для этого достаточно показать, что

1) $\mu(E) = \sup\limits_{F\subset E} \mu(F)$ для всех E, и

2) $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$, если существует множество $F \supset E_1$, не имеющее общих с E_2 точек.

Лемма 1. *Если $F_1 \supset F_2$, то $\mu(F_1) \geqslant \mu(F_2)$.*

Каждая функция, охватывающая F_1, охватывает также и $F_2 \subset F_1$. Поэтому лемма является прямым следствием формулы (4).

Лемма 2. *Для каждого E мы имеем $\mu(E) = \sup\limits_{F\subset E} \mu(F)$.*

Непосредственно по определению $\mu(E)$ эта формула справедлива для всех E, не являющихся множествами F. Но для множеств F она тоже выполняется. По предыдущей лемме из $F \subset F_0$ вытекает $\mu(F) \leqslant \mu(F_0)$, в то время как F_0 является одним из множеств F, содержащихся в F_0. Поэтому для всех F_0 мы имеем $\mu(F_0) = \sup\limits_{F\subset F_0} \mu(F)$.

Лемма 3. *Если $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то $\mu(F_1 \cup F_2) \geqslant \mu(F_1) + \mu(F_2)$.*

Пусть задано $\varepsilon > 0$. По формуле (4) существует функция $f(x)$, охватывающая $F_1 \cup F_2$, такая, что

$$L(f) < \mu(F_1 + F_2) + \varepsilon. \tag{6}$$

Пусть $f'(x)$ — функция, связывающая F_1 с F_2, т.е. равная нулю на F_1, единице на F_2 и заключенная всюду между нулем и единицей. Такая функция существует в силу леммы 2, § 1. Положим $f_1(x) = f(x)\bigl(1 - f'(x)\bigr)$, $f_2(x) = f(x)f'(x)$. Тогда, как это с очевидностью вытекает из свойств функции $f'(x)$,

$$f_1(x) \in D(F_1), \quad f_2(x) \in D(F_2), \quad f_1(x) + f_2(x) = f(x).$$

Следовательно, во-первых,

$$\mu(F_i) \leqslant L(f_i) \qquad (i = 1, 2) \tag{7}$$

и, во-вторых,

$$L(f) = L(f_1) + L(f_2). \tag{8}$$

Объединяя (6)–(8), получаем $\mu(F_1 \cup F_2) + \varepsilon > L(f) = L(f_1) + L(f_2) \geqslant$ $\geqslant \mu(F_1) + \mu(F_2)$, и ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ лемма доказана.

Лемма 4. *Если $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то $\mu(E_1 \cup E_2) \geqslant \mu(E_1) + \mu(E_2)$.*

Пусть задано $\varepsilon > 0$. По лемме 2 существуют $F_i \subset E_i$ $(i = 1, 2)$ такие, что

$$\mu(F_i) > \mu(E_i) - \varepsilon \qquad (i = 1, 2). \tag{9}$$

Поскольку $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, мы имеем $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ и по предыдущей лемме

$$\mu(F_1 \cup F_2) \geqslant \mu(F_1) + \mu(F_2). \tag{10}$$

В то же время в силу включения $F_1 \cup F_2 \subset E_1 \cup E_2$ по лемме 2 мы имеем

$$\mu(F_1 \cup F_2) \leqslant \mu(E_1 \cup E_2). \tag{11}$$

Объединяя (9)–(11), получаем $\mu(E_1 \cup E_2) > \mu(E_1) + \mu(E_2) - 2\varepsilon$, и в силу произвольности $\varepsilon > 0$ лемма доказана.

Лемма 5. *Если для E_1 и E_2 существует множество F, содержащее E_1 и не имеющее общих с E_2 точек, то $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.*

Пусть $F \supset E_1$ и $F \cap E_2 = \varnothing$. Возьмем $F_1 \subset E_1 \cup E_2$ и рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, охватывающую пересечение $F_1 \cap F$. Пусть, кроме того, задано ε, $0 < \varepsilon < 1$. Положим

$$\{f(x) \leqslant 1 - \varepsilon\} = F_2. \tag{12}$$

Возьмем функцию $g(x)$, охватывающую пересечение $F_1 \cap F_2$. Пусть $x \in F_1$. Тогда либо $x \in F_1 \setminus F_2$, либо $x \in F_1 \cap F_2$. В первом случае $f(x) > 1 - \varepsilon$, так как каждая точка x, для которой $f(x) \leqslant 1-\varepsilon$, по условию (12) принадлежит F_2. Во втором случае $g(x) \geqslant 1$, так как $g(x)$ охватывает $F_1 \cap F_2$. Следовательно,

$$f(x) + g(x) > 1 - \varepsilon \qquad (x \in F_1), \tag{13}$$

а значит,

$$\frac{f(x)+g(x)}{1-\varepsilon} \in D(F_1).$$

В силу (4) отсюда следует, что $L(f) + L(g) = L(f+g) > (1-\varepsilon)\mu(F_1)$. Поскольку $g(x)$ обозначает здесь произвольную функцию, охватывающую $F_1 \cap F_2$, мы можем заменить $L(g)$ точной нижней гранью всех $L(g)$ и получить

$$L(f) + \mu(F_1 \cap F_2) \geqslant (1-\varepsilon)\mu(F_1). \tag{14}$$

Из соотношений $F_1 \subset E_1 \cup E_2$ и $E_2 \cap F = \varnothing$ следует, что $F_1 \cap F \subset E_1 \cap F$, а поскольку $F \supset E_1$, мы имеем

$$F \cap F_1 \subset E_1. \tag{15}$$

Остальная часть множества F, т. е. $F_1 \diagdown (F \cap F_1)$, тем самым содержится в E_2.

Функция $f(x)$ охватывает $F \cap F_1$, а значит, множество $F_2 = \{f(x) \leqslant 1-\varepsilon\}$ не имеет общих с $F \cap F_1$ точек. Следовательно, $F_1 \cap F_2 \subset F_1 \diagdown (F \cap F_1)$, а последнее множество, как уже было отмечено, содержится в E_2. Поэтому $F_1 \cap F_2 \subset E_2$, а значит, $\mu(F_1 \cap F_2) \leqslant \mu(E_2)$. Из (14) следует, что

$$L(f) + \mu(E_2) \geqslant (1-\varepsilon)\mu(F_1).$$

В этой формуле ε обозначает произвольное число между нулем и единицей, и поэтому мы можем утверждать, что $L(f) + \mu(E_2) \geqslant \mu(F_1)$. Но здесь $f(x)$ обозначает произвольную функцию, охватывающую $F \cap F_1$, а значит, мы можем заменить $L(f)$ точной нижней гранью всех $L(f)$ и получить $\mu(F \cap F_1) + \mu(E_2) \geqslant \mu(F_1)$. В силу (15) мы имеем $F \cap F_1 \subset E_1$ и поэтому $\mu(F \cap F_1) \leqslant \mu(E_1)$. Следовательно, $\mu(E_1) + \mu(E_2) \geqslant \mu(F_1)$. Множество F_1 — произвольное замкнутое подмножество в $E_1 \cup E_2$. Поэтому $\mu(F_1)$ можно заменить точной верхней гранью всех $\mu(F_1)$, и мы тем самым получаем $\mu(E_1) + \mu(E_2) \geqslant \mu(E_1 \cup E_2)$. В то же время по лемме 4 $\mu(E_1) + \mu(E_2) \leqslant \mu(E_1 \cup E_2)$ и, следовательно, $\mu(E_1) + \mu(E_2) = \mu(E_1 \cup E_2)$, ч. т. д.

Из лемм 2 и 5 на основании теоремы 5, § 6 вытекает

Лемма 6. *Если $L(f)$ — положительный линейный функционал в R, то формулы*

$$\mu(F) = \inf_{D(F)} L(f), \quad \mu(E) = \sup_{F \subset E} \mu(F)$$

определяют положительный заряд в R.

В следующем пункте мы покажем, что $L(f)$ является интегралом от $f(x)$ по этому заряду.

3°. Лемма 7. *Пусть $L(f)$ — положительный линейный функционал и $\mu(E)$ — заряд, соответствующий ему по лемме 6. Тогда для любой положительной функции $f(x)$*

$$\int\limits_R f(x)\,\mu(dE) \geqslant L(f).$$

Пусть $f(x) \geqslant 0$. Возьмем произвольное натуральное число n и определим целое число m_n так, чтобы $\frac{m_n}{n} > \sup f(x)$. Положим

$$F_k = \left\{f(x) \geqslant \tfrac{k}{n}\right\} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m_n). \tag{16}$$

Тогда

$$F_k \diagdown F_{k+1} = \left\{\tfrac{k+1}{n} > f(x) \geqslant \tfrac{k}{n}\right\}.$$

Поскольку $\mu(E)$ — положительный заряд, из определения интеграла с очевидностью следует, что

$$\int\limits_R f(x)\,\mu(dE) \geqslant \sum_{k=0}^{m_n-1} \frac{k}{n}\,\mu(F_k \diagdown F_{k+1}) \tag{17}$$

$\bigl(\frac{k}{n}$ является наименьшим среди возможных значений $f(x)$ на $F_k \diagdown F_{k+1}$, а значит, с последовательными подразбиениями интервала $[0, \frac{m_n}{n}]$ суммы могут только возрастать, но в то же время они стремятся к интегралу$\bigr)$.

Заметив, что $\mu(F_k \diagdown F_{k+1}) = \mu(F_k) - \mu(F_{k+1})$ и что F_{m_n} пусто, легко установить равенство

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} \frac{k}{n}\,\mu(F_k \diagdown F_{k+1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m_n} \mu(F_k),$$

а тогда вместо (17) мы получаем

$$\int\limits_R f(x)\,\mu(dE) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m_n} \mu(F_k). \tag{18}$$

По лемме 6 мы можем для каждого множества F_k найти такую охватывающую его функцию $f_k(x)$, что

$$\mu(F_k) > L(f_k) - \frac{1}{m_n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m_n).$$

Суммировав эти неравенства и разделив на n, мы получим

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m_n}\mu(F_k) > L\biggl(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m_n} f_k\biggr) - \frac{1}{n}. \tag{19}$$

Из определения F_k $\bigl($см. (16)$\bigr)$ ясно, что $F_l \supset F_k$ при $l \leqslant k$. Поэтому функция $f_l(x)$, охватывающая F_l, охватывает также и F_k. Следовательно, на F_k все функции $f_l(x)$ больше либо равны единице при $l \leqslant k$, а так как в то же время все функции $f_i(x)$ всюду положительны, на F_k мы имеем

$$\sum_{i=1}^{m_n} f_i(x) \geqslant k \qquad (x \in F_k).$$

С другой стороны, $f(x) < \frac{k+1}{n}$ на $F_k \diagdown F_{k+1}$. Следовательно, $f(x)$ нигде не может превосходить $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m_n} f_i(x)$ более чем на $\frac{1}{n}$, т. е.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m_n} f_i(x) + \frac{1}{n} > f(x).$$

Поскольку функционал $L(f)$ является положительным, отсюда следует, что

$$L\biggl(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m_n} f_i\biggr) + \frac{N}{n} > L(f),$$

где N — норма функционала $L(f)$. Объединяя это неравенство с неравенством (19), получаем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m_n}\mu(F_k) > L(f) - \frac{N+1}{n},$$

откуда в силу неравенства (18) следует, что

$$\int\limits_R f(x)\,\mu(dE) > L(f) - \frac{N+1}{n}.$$

Но здесь n является произвольным натуральным числом, а значит,

$$\int\limits_R f(x)\,\mu(dE) \geqslant L(f), \qquad \text{ч. т. д.} \tag{20}$$

Интеграл в левой части неравенства (20) представляет собой положительный линейный функционал, так как заряд $\mu(E)$ является положительным. Неравенство (20) выполняется для всех положительных $f(x)$, а если мы возьмем $f(x) = 1$ на R, то в (20) будет иметь место равенство. Следовательно, на основании леммы 1, § 5 строгое неравенство в (20) исключается и мы получаем следующее утверждение.

Лемма 8. *Если $L(f)$ — положительный линейный функционал и $\mu(E)$ — заряд, соответствующий ему по лемме 6, то*

$$L(f) = \int_R f(x)\,\mu(dE).$$

4°. Пусть теперь $L(f)$ — произвольный линейный функционал в R. По теореме 2, § 5 его можно представить в виде разности положительных функционалов:

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f). \tag{21}$$

По лемме 8 функционалам $L^+(f)$ и $L^-(f)$ соответствуют заряды $\mu_+(E)$ и $\mu_-(E)$ такие, что

$$L^+(f) = \int_R f(x)\,\mu_+(dE), \quad L^-(f) = \int_R f(x)\,\mu_-(dE) \tag{22}$$

и для всех F

$$\mu_+(F) = \inf_{D(F)} L^+(f), \quad \mu_-(F) = \inf_{D(F)} L^-(f). \tag{23}$$

Положим

$$\mu(E) = \mu_+(E) - \mu_-(E). \tag{24}$$

По теореме 3, § 6 функция $\mu(E)$ будет зарядом. Из соотношений (21), (22), (24) следует, что

$$L(f) = \int_R f(x)\,\mu(dE). \tag{25}$$

Как мы уже отмечали в п. 1°, формулы (23) эквивалентны следующим:

$$\mu_+(F) = \lim_{D(F)} L^+(f), \quad \mu_-(F) = \lim_{D(F)} L^-(f).$$

Вычитая второе равенство из первого и учитывая, что разность пределов равна пределу разности, мы получаем на основании (21) и (24)

$$\mu(F) = \lim_{D(F)} L(f). \tag{26}$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

Лемма 9. *Для любого линейного функционала $L(f)$ в R существует заряд $\mu(E)$ в R такой, что $L(f)$ выражается через $\mu(E)$ формулой* (25), *а $\mu(E)$ через $L(f)$ — формулой* (26).

Доказательство теоремы 1 теперь будет полностью завершено, если мы докажем следующую лемму.

Лемма 10. *Для любого линейного функционала $L(f)$ существует лишь один заряд $\mu(E)$ такой, что*

$$L(f) = \int\limits_R f(x)\,\mu(dE).$$

Предположим, что имеются два таких заряда — $\mu_1(E)$ и $\mu_2(E)$. Полагая $\mu_1(E) - \mu_2(E) = \mu(E)$, мы получаем для всех $f(x)$

$$\int\limits_R f(x)\,\mu(dE) = 0,$$

откуда в силу леммы 11 (см. ниже) следует, что $\mu(E) = 0$, т. е. $\mu_1(E) = \mu_2(E)$, ч. т. д.

Лемма 11. *Если для всех $f(x)$*

$$\int\limits_R f(x)\,\mu(dE) = 0,$$

то $\mu(E) = 0$.

Возьмем произвольные F и $\varepsilon > 0$. Пусть $|\mu|(E)$ — вариация заряда $\mu(E)$. Вариация сама является положительным зарядом, и поэтому существует такое множество $G \supset F$, что

$$|\mu|(G \setminus F) < \varepsilon. \tag{27}$$

Пусть теперь $f(x)$ — функция, связывающая множество $R \setminus G$ с F:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in R \setminus G; \\ 1, & \text{если } x \in F. \end{cases}$$

Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} \int\limits_R f(x)\,\mu(dE) = \int\limits_F f(x)\,\mu(dE) + \int\limits_{G \setminus F} f(x)\,\mu(dE) + \int\limits_{R \setminus G} f(x)\,\mu(dE) = \\ = \mu(F) + \int\limits_{G \setminus F} f(x)\,\mu(dE). \end{aligned} \tag{28}$$

Поскольку $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, на основании (27) мы получаем

$$\left| \int\limits_{G \setminus F} f(x)\, \mu(dE) \right| \leqslant |\mu|(G \setminus F) < \varepsilon. \tag{29}$$

Интеграл в левой части равенства (28) по условию равен нулю, а значит, из (28) и (29) следует, что $|\mu(F)| < \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ мы получаем $\mu(F) = 0$. Это верно для каждого F. Далее, ввиду регулярности для каждого E существует F такое, что $\mu(F)$ сколь угодно близко к $\mu(E)$. Следовательно, для всех E мы также имеем $\mu(E) = 0$.

5°. **Теорема 2**. *Положительная и отрицательная части заряда, соответствующего по теореме* 1 *функционалу* $L(f)$, *являются зарядами, соответствующими положительной и отрицательной частям* $L(f)$.

Пусть $\mu_+(E)$ и $\mu_-(E)$ — заряды, соответствующие $L^+(f)$ и $L^-(f)$. По построению, приведенному в начале п. 4°, зарядом, соответствующим $L(f)$, будет

$$\mu(E) = \mu_+(E) - \mu_-(E). \tag{30}$$

По лемме 9, § 6 $\mu_+(E) \geqslant \mu^+(E)$, $\mu_-(E) \geqslant \mu^-(E)$. Следовательно, для каждой положительной функции $f(x)$

$$\begin{aligned} L^+(f) &= \int\limits_R f(x)\, \mu_+(dE) \geqslant \int\limits_R f(x)\, \mu^+(dE), \\ L^-(f) &= \int\limits_R f(x)\, \mu_-(dE) \geqslant \int\limits_R f(x)\, \mu^-(dE). \end{aligned} \tag{31}$$

В то же время, поскольку $\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E)$, мы имеем

$$L(f) = \int\limits_R f(x)\, \mu^+(dE) - \int\limits_R f(x)\, \mu^-(dE).$$

Интегралы в левых частях являются положительными линейными функционалами, а значит, по лемме 6, § 5

$$\int\limits_R f(x)\, \mu^+(dE) \geqslant L^+(f), \quad \int\limits_R f(x)\, \mu^-(dE) \geqslant L^-(f). \tag{32}$$

Объединяя (31) и (32), мы получаем на основании леммы 10 $\mu^+(E) = \mu_+(E)$, $\mu^-(E) = \mu_-(E)$, ч. т. д.

§ 8. Заряды в R и в R^*

1°. Как уже отмечалось в § 1 (теорема 4), для любого пространства R существует пространство R^*, в котором замкнутыми множествами являются только функционально замкнутые множества пространства R. Системы всех непрерывных функций на этих двух пространствах совпадают. Поэтому всякий линейный функционал в R будет также линейным функционалом в R^* и наоборот. Пространство R^* всегда является нормальным, а значит, к нему применима теорема 1, § 7. Для пространства R есть две возможности: либо R является нормальным, либо R не является нормальным. В первом случае теорема 1, § 7 может быть применена и к пространству R. Тогда, если мы имеем линейный функционал $L(f)$ в R, а значит и в R^*, то ему соответствует заряд $\mu(E)$ в R и заряд $\mu^*(E^*)$ в R^*. Какова связь между этими зарядами? Ответ на этот вопрос мы дадим ниже в теореме 1, суть которой состоит в том, что заряд $\mu(E)$ является результатом продолжения заряда $\mu^*(E^*)$ на более обширную алгебру $\mathfrak{E}$. Алгебра $\mathfrak{E}^*$, порожденная замкнутыми множествами пространства R^*, т. е. функционально замкнутыми множествами пространства R, содержится в алгебре $\mathfrak{E}$, порожденной всеми замкнутыми множествами пространства R.

В дальнейшем символом E^* мы обозначаем произвольные множества алгебры $\mathfrak{E}^*$, а символами F^* и G^* — соответственно замкнутые и открытые множества пространства R^*.

Теорема 1. *Пусть R — нормальное пространство. Всякий заряд $\mu(E)$ в R определяет заряд в R^*, равный $\mu(E)$ на алгебре $\mathfrak{E}^*$. Наоборот, для любого заряда $\mu^*(E^*)$ в R^* существует единственный заряд в R, совпадающий с $\mu^*(E^*)$ на алгебре $\mathfrak{E}^*$. Этот заряд в R определяется данным зарядом в R^* следующим образом: для каждого F*

$$\mu(F) = \lim_{\{F^*\}} \mu^*(F^*), \tag{1}$$

где $\{F^*\}$ — направление всех F^*, содержащих F.

Сначала мы докажем общую лемму о зарядах, на которой будет основываться доказательство этой теоремы, а затем докажем все три утверждения теоремы.

2°. **Лемма 1**. *Если на алгебре $\mathfrak{E}$ задана аддитивная функция $\mu(E)$ такая, что для каждого G*

$$\mu(G) = \sup_{F \subset G} \mu(F),$$

то она является положительным зарядом.

Ввиду теоремы 1, § 6 достаточно показать, что для каждого E

$$\mu(E) = \sup_{F \subset E} \mu(F). \tag{2}$$

Заметим прежде всего, что если для некоторого E эта формула выполнена, то для $E' = R \setminus E$ мы имеем

$$\mu(E') = \inf_{G \supset E'} \mu(G) \tag{3}$$

и наоборот. Действительно,

$$\mu(R \setminus E) = \mu(R) - \mu(E) = \mu(R) - \sup_{F \subset E} \mu(F) = \inf_{F \subset E} \mu(R \setminus F),$$

причем $R \setminus F$ является множеством $G \supset R \setminus E$ при $E \supset F$.

Обозначим через K_0 совокупность всех множеств F и G. Далее, обозначим через K_1 совокупность всех множеств, являющихся объединениями конечных семейств множеств F и G или дополнениями этих объединений. По индукции определяется совокупность K_{n+1} всех множеств, являющихся объединениями конечных семейств множеств из K_n или дополнений этих объединений. Из определения алгебры $\mathfrak{E}$ очевидно, что каждое $E \in \mathfrak{E}$ принадлежит некоторому K_n [17]. Следовательно, мы можем доказывать формулу (2) с помощью индукции.

Покажем сначала, что формула (2) справедлива для множеств из K_0. Для множеств G она выполняется по условию. В то же время формула (3) имеет место для $R \setminus G = F$, т. е.

$$\mu(F) = \inf_{G \supset F} \mu(G).$$

Следовательно, если $F_1 \supset F_2$, то $\mu(F_1) \geqslant \mu(F_2)$, откуда следует, что для каждого F

$$\mu(F) = \sup_{F' \subset F} \mu(F').$$

Таким образом, формула (2), а значит и формула (3), справедлива для множеств F и G.

Пусть теперь обе эти формулы (2) и (3) справедливы для множеств, входящих в K_n. Покажем, что тогда они будут верны для объединений конечных семейств этих множеств. Пусть заданы $E_i \in K_n$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и $\varepsilon > 0$. Согласно формулам (2) и (3), которые по предположению справедливы для E_i, существуют такие F_i и G_i, что $F_i \subset E_i \subset G_i$ и

$$\mu(F_i) + \frac{\varepsilon}{m} > \mu(E_i) > \mu(G_i) - \frac{\varepsilon}{m} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{4}$$

[17] С учетом формулы $R \setminus (A \cup B) = (R \setminus A) \cap (R \setminus B)$ операция пересечения сводится к операциям объединения и дополнения. Поэтому мы получаем все множества, которые можно построить из F и G с помощью этих операций, примененных конечное число раз, т. е. алгебру $\mathfrak{E}$.

Положим

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i, \quad F = \bigcup_{i=1}^{m} F_i, \quad G = \bigcup_{i=1}^{m} G_i.$$

Тогда в силу леммы 5, § 6 на основании неравенств (4) мы можем заключить, что $\mu(F) + \varepsilon > \mu(E) > \mu(G) - \varepsilon$, где $F \subset E \subset G$. Следовательно,

$$\sup_{F \subset E} \mu(F) \geqslant \mu(E) \geqslant \inf_{G \supset E} \mu(G).$$

Но благодаря формуле (2) для множеств G мы имеем

$$\sup_{F \subset E} \mu(F) \leqslant \inf_{G \supset E} \mu(G),$$

а значит, наконец,

$$\mu(E) = \sup_{F \subset E} \mu(F) = \inf_{G \supset E} \mu(G).$$

Таким образом, формулы (2) и (3) доказаны для объединений конечных семейств множеств из K_n. Согласно сделанному выше замечанию, они тогда выполняются и для дополнений этих объединений. Следовательно, они справедливы для всех множеств из K_{n+1}, ч. т. д.

3°. Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Мы рассматриваем нормальное пространство R; F и G — замкнутые и открытые множества в R.

Лемма 2. *Пусть $\mu(E)$ — заряд в R. Для любого множества F и любого содержащего его множества G существует заключенное между ними множество F^* (т. е. $F \subset F^* \subset G$) такое, что $\mu(E) = \mu(F)$ для всякого E, заключенного между F^* и F.*

Пусть заданы F_0 и G_0, $G_0 \supset F_0$. На основании теоремы 4, § 6 существует последовательность открытых множеств G_n, заключенных между F_0 и G_0 и таких, что для всякого E, заключенного между F_0 и G_0,

$$|\mu(F_0) - \mu(E)| < \frac{1}{n} \qquad (F_0 \subset E \subset G_n \subset G_0). \tag{5}$$

Пусть $f_n(x)$ — функция, связывающая F_0 с $R \diagdown G_n$. Множество $F_n^* = \{f_n(x) = 0\}$ функционально замкнуто и заключено между F_0 и G_n. Следовательно, для каждого n

$$F_0 \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k^* \subset G_n \subset G_0.$$

Поскольку n может быть сколь угодно велико, на основании (5) мы заключаем, что если $F_0 \subset E \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k^*$, то $\mu(E) = \mu(F_0)$. Так как пересечение счетного числа функционально замкнутых множеств функционально замкнуто, лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\mu(E)$ — положительный заряд в R. Для любого G мы имеем*

$$\mu(G) = \sup_{F^* \subset G} \mu(F^*).$$

Согласно теореме 1, § 6,

$$\mu(G) = \sup_{F \subset G} \mu(F).$$

Но по лемме 2 для каждого $F \subset G$ существует $F^* \subset G$ такое, что $\mu(F^*) = \mu(F)$. Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать первую часть теоремы 1, а именно тот факт, что *заряд в R определяет на алгебре $\mathfrak{E}^*$ заряд в R^*.*

Пусть $\mu(E)$ — заряд в R и пусть $\mu^+(E)$, $\mu^-(E)$ — его положительная и отрицательная части. Поскольку алгебра $\mathfrak{E}^*$ содержится в алгебре $\mathfrak{E}$, $\mu^+(E)$ и $\mu^-(E)$ определены и аддитивны на $\mathfrak{E}^*$. В то же время по лемме 3 для каждого G^*

$$\mu^+(G^*) = \sup_{F^* \subset G^*} \mu^+(F^*)$$

и аналогично для $\mu^-(G^*)$. Следовательно, на основании леммы 1 мы заключаем, что $\mu^+(E)$ и $\mu^-(E)$ представляют на $\mathfrak{E}^*$ заряды в R^*. Тогда их разность $\mu(E)$ также представляет на алгебре $\mathfrak{E}^*$ заряд в R^*.

Докажем теперь вторую часть теоремы 1, а именно тот факт, что *каждый заряд в R^* имеет продолжение на алгебру $\mathfrak{E}$, являющееся зарядом в R.*

Пусть $\mu^*(E^*)$ — заряд в R^*. Интеграл от ограниченных непрерывных функций на R^* по этому заряду будет линейным функционалом как в R^*, так и в R, поскольку непрерывные функции на R^* и на R одни и те же. Этому функционалу в R по теореме 1, § 7 соответствует заряд $\mu(E)$ в R. По доказанному выше этот заряд определяет на алгебре $\mathfrak{E}^*$ заряд $\mu_1^*(E^*)$ в R^*. Поскольку интегралы по $\mu(E)$ и по $\mu^*(E^*)$ совпадают, а в вычислении интеграла участвуют только лебеговские множества подынтегральной функции, причем они являются множествами из $\mathfrak{E}^*$, мы заключаем, что интегралы по $\mu_1^*(E^*)$ и по $\mu^*(E^*)$ совпадают. Следовательно, по лемме 10, § 7 $\mu_1^*(E^*) = \mu^*(E^*)$, т. е. заряд $\mu(E)$ является продолжением заряда $\mu^*(E^*)$ на алгебру $\mathfrak{E}$. Тот факт, что заряд, продолженный на $\mathfrak{E}$, определяется формулой (1), непосредственно вытекает из леммы 2.

ГЛАВА III. СЧЕТНО АДДИТИВНЫЕ И РЕАЛЬНЫЕ ЗАРЯДЫ

§ 9. *Основные свойства счетно аддитивных и реальных зарядов*

1°. Функция множества $\mu(E)$ называется *счетно аддитивной*, если

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \tag{1}$$

при условии, что множества E_i попарно не имеют общих точек, а функция $\mu(E)$ определена как на них, так и на их объединении.

Теорема 1. *Всякий счетно аддитивный заряд в R можно продолжить с сохранением счетной аддитивности и регулярности на алгебру борелевских множеств пространства R. Если $\mu(E)$ — заряд, являющийся таким счетно аддитивным продолжением, и E — произвольное борелевское множество, то существуют $F_\sigma \subset E$ и $G_\delta \supset E$ (объединение счетного числа замкнутых и пересечение счетного числа открытых множеств) такие, что*

$$\mu(E) = \mu(F_\sigma) = \mu(G_\delta).$$

Алгебра борелевских множеств пространства R является наименьшей алгеброй, содержащей все замкнутые множества пространства R и счетные объединения множеств, входящих в нее [18].

Нашу теорему можно считать известной. Будем называть произвольное множество M измеримым относительно μ [19], если

$$\sup_{F\subset M} \mu^+(F) = \inf_{G\supset M} \mu^+(G), \qquad \sup_{F\subset M} \mu^-(F) = \inf_{G\supset M} \mu^-(G).$$

Тогда в полном соответствии со случаем меры Лебега можно доказать, что измеримые множества образуют алгебру, содержащую счетные объединения входящих в нее множеств и, следовательно, содержащую все борелевские множества. Ниже мы докажем, что $\mu(E)$ можно продолжить с сохранением счетной аддитивности и регулярности на алгебру измеримых множеств и что для каждого измеримого множества будет иметь место (1) [20].

В дальнейшем на основании теоремы 1 мы будем без явного ее упоминания считать всякий счетно аддитивный заряд уже определенным на борелевских множествах пространства, и в этом случае символ E будет обозначать произвольное борелевское множество.

---

[18] Поскольку, вообще говоря, G не является множеством типа F_σ, алгебра борелевских множеств получается применением одних лишь счетных объединений и пересечений не для всякого R; необходимо привлечь еще и операцию дополнения.

[19] См. также теорему 7, § 6.

[20] См., напр., [3, гл. VII, § 29].

Теорема 2. *Для того чтобы заряд $\mu(E)$ был счетно аддитивным, необходимо, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n) = 0$ для любой исчезающей последовательности множеств E_n* [21]*, и достаточно, чтобы это было верно для любой исчезающей последовательности замкнутых множеств.*

Напомним, что последовательность множеств E_n называется исчезающей, если $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ и их пересечение пусто.

Необходимость. Пусть множества E_n образуют исчезающую последовательность. Тогда множества $R\diagdown E_1$, $E_1\diagdown E_2$, ... попарно не имеют общих точек и их объединение равно R. Следовательно, если заряд $\mu(E)$ счетно аддитивен, то

$$\mu(R) = \mu(R\diagdown E_1) + \mu(E_1\diagdown E_2) + \ldots. \tag{2}$$

Поскольку $E_n \supset E_{n+1}$, мы имеем $\mu(E_n\diagdown E_{n+1}) = \mu(E_n) - \mu(E_{n+1})$. Следовательно, из (2) вытекает, что

$$\mu(R) = \lim_{n\to\infty}\bigl(\mu(R) - \mu(E_n)\bigr),$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n) = 0$.

Достаточность. Пусть $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ и пусть множества E_m попарно не имеют общих точек. Множества $E^n = E\diagdown\bigcup_{m=1}^{n} E_m$ образуют исчезающую последовательность и

$$\mu(E^n) = \mu(E) - \sum_{m=1}^{n}\mu(E_m).$$

Поэтому если мы покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E^n) = 0$, то мы тем самым докажем, что

$$\mu(E) = \sum_{m=1}^{\infty}\mu(E_m),$$

т. е. что заряд $\mu(E)$ счетно аддитивен.

Разложим заряд на положительную и отрицательную части. На основании его регулярности для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие F_k и F'_k, содержащиеся в E^k, что

$$\mu^+(E^k) - \mu^+(F_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \qquad \mu^-(E^k) - \mu^-(F'_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \tag{3}$$

Положим

$$F^m = \bigcap_{k=1}^{m} F_k \cap F'_k. \tag{4}$$

[21] Заметим, что множества E всегда являются борелевскими.

Тогда $F^{m+1} \subset F^m \subset E^m$ и, поскольку множества E^m образуют исчезающую последовательность, множества F^m также образуют исчезающую последовательность. Следовательно, по условию теоремы

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F^m) = 0. \tag{5}$$

По лемме 5, § 6 если $E_i' \supset E_i$ и $\mu(E_i') - \mu(E_i) < \varepsilon_i$, то

$$\mu\biggl(\bigcap_{i=1}^{m} E_i'\biggr) - \mu\biggl(\bigcap_{i=1}^{m} E_i\biggr) < \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i.$$

Применяя эту формулу к неравенствам (3), мы заключаем на основании (4), что для каждого m справедливы неравенства $\mu^+(E^m) - \mu^+(F^m) < \varepsilon$, $\mu^-(E^m) - \mu^-(F^m) < \varepsilon$. Если теперь вычесть второе неравенство из первого и заменить разность положительной и отрицательной частей заряда самим зарядом, то мы получим $|\mu(E^m) - \mu(F^m)| < \varepsilon$. Это неравенство справедливо для каждого m, а значит, переходя к пределу и используя (5), мы получаем

$$\Bigl|\lim_{n\to\infty} \mu(E^n)\Bigr| < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E^n) = 0$, ч. т. д.

Теорема 3. *Для того чтобы заряд был счетно аддитивным, необходимо и достаточно, чтобы его положительная и отрицательная части были счетно аддитивны.*

Необходимость доказывается так же, как и аддитивность положительной части любого заряда в лемме 8, § 6. Достаточность очевидна.

Теорема 4. *Если заряд $\mu(E)$ счетно аддитивен, то существует такое множество E^+, что $\mu^+(E) = \mu(E \cap E^+)$ и $\mu^-(E) = -\mu(E \setminus E^+)$ для всех E.*

Пусть $\mu(E)$ — счетно аддитивный заряд в R. Согласно определению $\mu^+(E)$, существует последовательность множеств E_m такая, что

$$\mu^+(R) - \mu(E_m) < \frac{1}{m} \qquad (m = 1, 2, \dots). \tag{6}$$

Произведем теперь для каждого E_m следующее построение. Если в E_m содержится какое-либо множество E_{m1}, для которого $\mu(E_{m1}) < -1$, то возьмем $E^{m1} = E_m \setminus E_{m1}$. Если это множество содержит какое-либо множество E_{m2}, для которого $\mu(E_{m2}) < -1$, то возьмем $E^{m2} = E^{m1} \setminus E_{m2}$ и т. д. Ввиду ограниченности заряда мы за конечное число шагов придем к некоторому множеству $E^{mk_1} \subset E_m$, не содержащему подмножеств, на которых значение заряда $\mu(E)$ меньше -1. Далее по индукции построим последовательность множеств E^{mk_i}. А именно, если множество $E^{mk_{i-1}}$ уже построено, то мы последовательно исключим из него множества, на которых значение заряда меньше $-\frac{1}{i}$, и за конечное число шагов придем к множеству $E^{mk_i} \subset E^{mk_{i-1}}$. При этом $\mu(E^{mk_i}) \geqslant \mu(E^{mk_{i-1}}) \geqslant \mu(E_m)$. Обозначив пересечение полученной последовательности множеств через E^m, мы ввиду счетной аддитивности заряда получим

$$\mu(E^m) = \lim_{i\to\infty} \mu(E^{mk_i}) \geqslant \mu(E_m) \qquad (m = 1, 2, \dots). \tag{7}$$

В то же время, как это видно из построения, множества E^m уже не содержат подмножеств с отрицательными значениями заряда. Поэтому если мы положим

$$E^+ = \bigcup_{m=1}^{\infty} E^m,$$

то ввиду счетной аддитивности заряда $\mu(E)$

$$\mu(E^+) \geqslant \mu(E^m) \qquad (m = 1, 2, \dots). \tag{8}$$

Объединив (6)–(8), получим $\mu^+(R) \leqslant \mu(E^+)$. Поскольку обратное неравенство с очевидностью выполнено, имеем $\mu^+(R) = \mu(E^+)$.

Будучи объединением множеств E^m, множество E^+, как и все E^m, не содержит подмножеств с отрицательными значениями заряда. Наоборот, если $E \subset R \diagdown E^+$, то $\mu(E) \leqslant 0$, так как в этом случае $\mu(E) + \mu(E^+) = \mu(E \cup E^+) \leqslant \mu^+(R) = \mu(E^+)$. Поэтому в определении положительной части нашего заряда для любого E мы можем взять точную верхнюю грань значений заряда на множествах, содержащихся в E^+. Следовательно, $\mu^+(E) = \mu(E \cap E^+)$, а поскольку $\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E)$ и в то же время $\mu(E) = \mu(E \cap E^+) + \mu(E \diagdown E^+)$, мы имеем $\mu^-(E) = -\mu(E \diagdown E^+)$.

2°. Перейдем к лемме, которая сыграет важную роль в доказательстве некоторых дальнейших теорем.

Лемма 1. *Пусть в пространстве R задано направление $\{F\}$* [22]. *Тогда в R существует положительный линейный функционал $L(f)$ такой, что для каждого множества $F \in \{F\}$*

$$\inf_{D(F)} L(f) = 1.$$

Приступая к доказательству, мы сначала рассмотрим те функции $f(x)$, для которых существует $\lim\limits_{\{F\}} f(F)$ [23]. Этот предел является положительным

---

[22] См. определение 5, § 2. Направление в пространстве — это некоторая совокупность непустых замкнутых множеств, образующих направление в смысле Мура — Смита, где включение понимается как следование. Направление является исчезающим, если пересечение всех входящих в него множеств пусто.

[23] Здесь $f(F)$ — образ множества F на числовой прямой. Предел по Муру — Смиту вводится, как известно, для многозначной функции по направлению.

линейным функционалом. По известной теореме о продолжении линейных функционалов (см. [1, с. 30]) его можно продолжить на все ограниченные непрерывные функции на R. Пусть $L(f)$ — положительный линейный функционал, являющийся таким продолжением [24].

Если $f(x)$ охватывает множество $F_0 \in \{F\}$, то функция $g(x) = \min[f(x), 1]$ также охватывает F_0 и равна единице как на F_0, так и на всех $F \in \{F\}$, следующих за F_0. Следовательно,

$$L(g) = \lim_{\{F\}} g(F) = 1.$$

В то же время $L(f) \geqslant L(g)$, а значит,

$$\inf_{D(F_0)} L(f) = 1.$$

Теорема 5. *Всякий заряд в счетно компактном пространстве является счетно аддитивным. В любом нормальном пространстве, не являющемся счетно компактным, существует заряд, не являющийся счетно аддитивным.*

Первая часть теоремы является прямым следствием теоремы 2 и определения счетно компактного пространства (см. определение 7 и теорему 9, § 2), согласно которому любая исчезающая последовательность замкнутых множеств такого пространства начиная с некоторого члена состоит из пустых множеств, а значит, условие теоремы 2 выполняется.

Вторая часть теоремы вытекает из леммы 1. Действительно, если R не является счетно компактным, то в нем существует исчезающая последовательность непустых замкнутых множеств F_n. Она представляет собой исчезающее направление в R. Следовательно, в R существует положительный линейный функционал $L(f)$ такой, что для всех n

$$\inf_{D(F_n)} L(f) = 1.$$

Но по теореме 1, § 7 (ввиду нормальности пространства R)

$$\inf_{D(F_n)} L(f) = \mu(F_n).$$

Следовательно, мы имеем заряд, не удовлетворяющий условию теоремы 2 и тем самым не являющийся счетно аддитивным.

[24] Функционал предела допускает положительное продолжение по теореме Крейна — Рутмана, так как его область определения содержит постоянные функции и тем самым является массивным подпространством упорядоченного векторного пространства всех ограниченных непрерывных функций на R. — *Прим. перев.*

3°. Определение 1. Заряд $\mu(E)$ в R назовем *реальным*, если для любого исчезающего направления $\{F\}$ в R

$$\lim_{\{F\}} \mu(F) = 0.$$

Из этого определения и теоремы 2 немедленно следует

Теорема 6. *Реальный заряд счетно аддитивен.*

В дальнейшем мы будем использовать для реальных зарядов все установленные выше свойства счетно аддитивных зарядов без явных ссылок на теорему 6.

Теорема 7. *Пусть $\mu(E)$ — реальный заряд, E_0 — борелевское множество. Пусть направление $\{F\}$ таково, что пересечение всех его множеств не имеет общих с E_0 точек. Тогда*

$$\lim_{\{F\}} \mu(E_0 \cap F) = 0.$$

Иными словами, реальный заряд $\mu(E)$ индуцирует на каждом борелевском множестве E_0, рассматриваемом как подпространство R, реальный заряд $\mu'(E) = \mu(E)$ $(E \subset E_0)$.

Пусть заряд $\mu(E)$ является реальным. Согласно теореме 4, § 6, для любого борелевского множества E_0 и любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $F_0 \subset E_0$ такое, что

$$|\mu(E)| < \varepsilon \qquad (E \subset E_0 \setminus F_0). \tag{9}$$

Пусть $\{F\}$ — такое направление, что пересечение всех его множеств не имеет общих с E_0 точек. Тогда совокупность всех множеств $F \cap F_0$ $(F \in \{F\})$ либо образует исчезающее направление, либо содержит пустое множество. В любом из этих случаев ввиду реальности $\mu(E)$ найдется такое $F_1 \in \{F\}$, что для всех F, следующих за ним, мы будем иметь

$$|\mu(F \cap F_0)| < \varepsilon \qquad (F \in \{F\},\ F \subset F_1). \tag{10}$$

Из неравенств (9) и (10) следует, что для каждого F, следующего за F_1 в направлении $\{F\}$, имеем $|\mu(E_0 \cap F)| = \big|\,\mu(F_0 \cap F) + \mu\big((E_0 \cap F) \setminus (F_0 \cap F)\big)\big| < 2\varepsilon$, а это в точности означает, что

$$\lim_{\{F\}} \mu(E_0 \cap F) = 0.$$

Вторая формулировка нашей теоремы сразу следует из доказанного. Нужно лишь доказать, что, положив $\mu'(E) = \mu(E)$ для всех $E \subset E_0$, мы получим заряд в E_0. Впрочем, это очевидно.

Теорема 8. *Для реальности заряда необходимо и достаточно, чтобы его положительная и отрицательная части были реальными.*

Достаточность условия очевидна. Докажем его необходимость. Пусть $\mu(E)$ — реальный заряд, $\{F\}$ — исчезающее направление и E^+ — множество, определенное в теореме 4. Тогда с помощью теорем 4 и 7 мы получаем

$$\lim_{\{F\}} \mu^+(F) = \lim_{\{F\}} \mu(F \cap E^+) = 0.$$

Реальность $\mu^-(E)$ доказывается аналогично.

Теорема 9. *Всякий заряд в компактном пространстве реален. В любом нормальном некомпактном пространстве существует заряд, не являющийся реальным.*

Первая часть теоремы сразу вытекает из определения 1, так как в компактном пространстве нет исчезающих направлений (теорема 4, § 2). Вторая часть теоремы доказывается с помощью леммы 1 в точности так же, как и вторая часть теоремы 5.

Теорема 10. *Если любое покрытие пространства R открытыми множествами содержит не более чем счетное подпокрытие, то всякий счетно аддитивный заряд в R является реальным.*

Пусть R обладает свойством, указанным в теореме, и пусть $\{F\}$ — исчезающее направление в R. Множества $R\diagdown F$, где $F \in \{F\}$, образуют покрытие R. Выберем в нем счетное подпокрытие $R\diagdown F_1$, $R\diagdown F_2$, ...; при этом $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \varnothing$. Поскольку все F_n входят в $\{F\}$, существует множество $F^2 \in \{F\}$ такое, что $F^2 \subset F_1 \cap F_2$; далее, существует $F^3 \in \{F\}$, $F^3 \subset$ $\subset F^2 \cap F_3$ и т. д. Таким образом, мы получаем исчезающую последовательность множеств из $\{F\}$. Если теперь $\mu(E)$ — счетно аддитивный заряд, то по теореме 3 его вариация также является счетно аддитивной, а тогда в силу теоремы 2

$$\lim_{n\to\infty} |\mu|(F^n) = 0.$$

Но поскольку $F^n \in \{F\}$,

$$\inf_{\{F\}} |\mu|(F) = 0,$$

а значит, $\lim\limits_{\{F\}} \mu(F) = 0$.

§ 10. *Линейные функционалы, соответствующие счетно аддитивным и реальным зарядам*

1°. Теорема 1, § 7 устанавливает для нормального пространства взаимно однозначное соответствие между зарядами и линейными функционалами. Говоря о зарядах и линейных функционалах, соответствующих друг другу, мы всегда имеем в виду это соответствие.

Определение 1. Функционал $L(f)$ назовем *секвенциально непрерывным*[25], если он непрерывен относительно ограниченной сходимости функций, т. е. если для любой последовательности функций $f_n(x)$, ограниченных в совокупности и сходящихся к некоторой функции $f(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) = L(f),$$

где все $f_n(x)$ и $f(x)$ предполагаются принадлежащими той системе функций, на которой определен функционал $L(f)$.

Мы покажем, что счетно аддитивные заряды соответствуют линейным функционалам, секвенциально непрерывным в этом смысле. Как легко видеть, для секвенциальной непрерывности линейного функционала необходимо и достаточно, чтобы

$$L\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} L(f_n)$$

как только частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ограничены в совокупности. Естественно назвать это свойство счетной аддитивностью функционала, и тогда упомянутый результат может быть сформулирован как утверждение о том, что счетно аддитивные заряды соответствуют счетно аддитивным функционалам.

Лемма 1. *Если линейный функционал $L(f)$ положителен и для любой последовательности функций $f_n(x)$, монотонно сходящейся к нулю, $\lim_{n\to\infty} L(f_n) = 0$, то $L(f)$ секвенциально непрерывен.*

Пусть $L(f)$ — линейный функционал, удовлетворяющий условию леммы, и $f_n(x)$ — функции, ограниченно сходящиеся к $f(x)$. Положим

$$h_n(x) = \sup_{m\geqslant n} |f(x) - f_m(x)|\,^{26)}. \tag{1}$$

Очевидно, что $h_n(x) \geqslant h_{n+1}(x)$. Если бы с ростом n функции $h_n(x)$ не сходились к нулю, то нашлись бы точка x_0 и число $a > 0$ такие, что $h_n(x_0) > a$ для сколь угодно больших n. Но в этом случае для некоторых $m \geqslant n$ мы бы по определению $h_n(x)$ имели $|f(x_0) - f_m(x_0)| > a$, что противоречит сходимости $f_m(x)$ к $f(x)$. Следовательно, функции $h_n(x)$ монотонно сходятся к нулю. Значит, согласно условию леммы,

$$\lim_{n\to\infty} L(h_n) = 0. \tag{2}$$

[25] В оригинальной версии статьи автор использует термины «continuous» и «completely continuous» для функционалов, сохраняющих пределы последовательностей и направлений соответственно. Согласно современной терминологии мы называем такие функционалы «секвенциально непрерывными» и «непрерывными». — *Прим. перев.*

[26] Супремум по $m \geqslant n$ берется при фиксированном x.

На основании (1) имеем $h_n(x) \geqslant f(x) - f_n(x) \geqslant -h_n(x)$, а так как функционал $L(f)$ положителен, то отсюда следует, что $L(h_n) \geqslant L(f) - L(f_n) \geqslant -L(h_n)$. С учетом (2) это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} L(f_n) = L(f)$.

Теорема 1. *Для того чтобы заряд в совершенно нормальном пространстве был счетно аддитивен, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий ему линейный функционал был секвенциально непрерывен.*

Необходимость. Пусть $\mu(E)$ — счетно аддитивный заряд. Если мы докажем, что его положительной и отрицательной частям (которые, согласно теореме 3, § 9, также являются счетно аддитивными) соответствуют секвенциально непрерывные функционалы, то мы докажем, что и самому $\mu(E)$ соответствует секвенциально непрерывный функционал, так как разность секвенциально непрерывных функционалов, очевидно, секвенциально непрерывна. Следовательно, мы можем ограничиться случаем, когда заряд $\mu(E)$ является положительным. Тогда соответствующий ему линейный функционал $L(f)$ также будет положительным. Если для произвольной последовательности функций f_n, монотонно сходящейся к нулю, мы покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) = 0, \tag{3}$$

то ввиду леммы 1 мы покажем, что функционал $L(f)$ секвенциально непрерывен.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Положим

$$F_n = \{|f_n(x)| \geqslant \varepsilon\}. \tag{4}$$

Поскольку функции $f_n(x)$ монотонно сходятся к нулю, множества F_n образуют исчезающую последовательность. Поэтому в силу счетной аддитивности заряда $\mu(E)$ из теоремы 2, § 9 следует существование такого m, что при $n > m$

$$\mu(F_n) < \varepsilon \qquad (n > m). \tag{5}$$

Из представления $L(f)$ в виде интеграла по положительному заряду $\mu(E)$ мы с легкостью получаем

$$|L(f_n)| \leqslant \mu(F_n) \sup_{F_n} |f_n(x)| + \mu(R \setminus F_n) \sup_{R\setminus F_n} |f_n(x)|. \tag{6}$$

На основании (4) мы имеем

$$\sup_{R\setminus F_n} |f_n(x)| < \varepsilon. \tag{7}$$

Более того, поскольку функции $f_n(x)$ ограничены и монотонно сходятся к нулю,

$$\sup_{F_n} |f_n(x)| \leqslant \sup_{R} |f_1(x)| = N. \tag{8}$$

Наконец, поскольку заряд $\mu(E)$ положителен,

$$\mu(R\diagdown F_n) \leqslant \mu(R). \tag{9}$$

С учетом неравенств (5) и (7)–(9) из (6) следует, что $|L(f_n)| < \big(N + \mu(R)\big)\varepsilon$ при $n > m$, откуда вытекает (3).

Достаточность. Пусть $L(f)$ — секвенциально непрерывный линейный функционал и $\mu(E)$ — соответствующий ему заряд в совершенно нормальном пространстве. Для того чтобы доказать его счетную аддитивность, согласно теореме 2, § 9, достаточно показать, что для любой исчезающей последовательности замкнутых множеств F_n

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0. \tag{10}$$

Пусть F_n образуют исчезающую последовательность. По лемме 6, § 1 ввиду совершенной нормальности пространства R существует исчезающая последовательность открытых множеств G_n, содержащих соответствующие множества F_n. По определению заряда, соответствующего линейному функционалу $L(f)$,

$$\mu(F_n) = \lim_{D(F_n)} L(f). \tag{11}$$

В направлении $D(F_n)$ имеются функции, равные нулю все G_n (функции, связывающие $R\diagdown G_n$ с F_n). Всякая функция, следующая в $D(F_n)$ за такой функцией (т. е. не превосходящая эту функцию) также равна нулю вне G_n. Поэтому в (11) можно ограничиться только такими функциями. Отсюда следует существование $f_n(x)$ таких, что

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1, \quad f_n(x) = 0 \quad \text{при } x \in R\diagdown G_n, \tag{12}$$

$$\big|\,\mu(F_n) - L(f_n)\big| < \frac{1}{n}. \tag{13}$$

Поскольку последовательность множеств G_n является исчезающей, функции $f_n(x)$ ограниченно сходятся к нулю. Функционал $L(f)$ секвенциально непрерывен, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} L(f_n) = 0$. Отсюда в силу (13) вытекает (10).

В доказательстве необходимости счетной аддитивности заряда мы не использовали совершенную нормальность пространства и доказали, что *в любом пространстве интеграл от ограниченных непрерывных функций по счетно аддитивному заряду является секвенциально непрерывным линейным функционалом.* В доказательстве достаточности условие совершенной нормальности, наоборот, является существенным. Мы покажем это на примере.

Пусть точками пространства R будут числа натурального ряда, а замкнутыми множествами в R — сегменты натурального ряда, начинающиеся с любого числа n, т. е. множества чисел $i \geqslant n$. Это пространство является нормальным, так как в нем нет непустых замкнутых множеств без общих точек. В то же время всякая непрерывная функция на нем постоянна, поскольку единственным замкнутым множеством, содержащим 1, является все R. Следовательно, всякий линейный функционал в R — это просто линейная функция, а значит непрерывная. Но, с другой стороны, в R вовсе отсутствуют счетно аддитивные заряды (кроме тождественно нулевого), так как любой заряд принимает равные значения на всех замкнутых множествах в R (это следует из того факта, что единственным открытым множеством, содержащим какое-либо замкнутое, является само R), а замкнутые множества в R тем не менее образуют исчезающую последовательность.

Укажем два следствия теоремы 1.

Теорема 2. *Для секвенциальной непрерывности линейного функционала необходима и достаточна секвенциальная непрерывность его положительной и отрицательной частей.*

Достаточность очевидна. Необходимость вытекает из теоремы 1 и теоремы 3, § 9. То обстоятельство, что в теореме 1 пространство предполагается совершенно нормальным, не является ограничением, так как каждому пространству R соответствует совершенно нормальное пространство R^* с теми же непрерывными функциями и, следовательно, с теми же функционалами.

Теорема 3. *Для того чтобы каждый линейный функционал на полной системе функций* Φ *был секвенциально непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы каждая монотонно сходящаяся к нулю последовательность функций из* Φ *сходилась равномерно.*

Функции системы Φ определены на некотором множестве, которое, согласно теореме 1, § 1, можно превратить в совершенно нормальное пространство R такое, что все непрерывные ограниченные функции на нем образуют систему Φ.

По теореме 10, § 2 условие нашей теоремы необходимо и достаточно для счетной компактности R, а по теореме 5, § 9 счетная компактность необходима и достаточна для счетной аддитивности всех зарядов в R. Следовательно, наша теорема вытекает из теоремы 1.

Впрочем, теоремы 2 и 3 справедливы не только для линейных функционалов на полных системах функций, но и для линейных функционалов, определенных на более узких системах функций, удовлетворяющих лишь четырем условиям, сформулированным в определении 1, § 5. Поэтому мы приведем прямые доказательства теорем 2 и 3, предполагая, что линейные функционалы определены на произвольной системе функций указанного вида.

Доказательство теоремы 2. Пусть $L(f)$ — секвенциально непрерывный линейный функционал. Пусть последовательность положительных функций $f_n(x)$ монотонно сходится к нулю. На основании определения положительной части линейного функционала существуют такие $g_n(x)$, что

$$0 \leqslant L^+(f_n) < L(g_n) + \frac{1}{n}, \quad 0 \leqslant g_n(x) \leqslant f_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{14}$$

Функции $g_n(x)$ ограничены в совокупности и сходятся к нулю. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} L(g_n) = 0$ и, согласно (14), мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty} L^+(f_n) = 0$. По лемме 1 тем самым доказана секвенциальная непрерывность $L^+(f)$.

Доказательство теоремы 3. *Необходимость.* Пусть в системе Φ имеется последовательность функций $f_n(x)$, сходящаяся к нулю монотонно, но не равномерно. Тогда существуют $\varepsilon > 0$, строго возрастающая последовательность чисел n_i и последовательность точек x_i такие, что $|f_{n_i}(x_i)| > \varepsilon$. Без потери общности мы можем считать, что $f_{n_i}(x_i) > \varepsilon$. Тогда, полагая $L(f) = \operatorname*{Lim}\limits_{i\to\infty} f(x_i)$, где предел понимается в смысле Банаха [1, с. 34], мы получаем линейный функционал, не являющийся секвенциально непрерывным, так как $L(f_{n_i}) > \varepsilon$ для всех $f_{n_i}(x)$ [27].

Достаточность. Предположим, что в системе Φ всякая последовательность функций, монотонно сходящаяся к нулю, сходится равномерно. Тогда для любой такой последовательности $f_1(x), f_2(x), \dots$ для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется n такое, что $|f_m(x)| < \varepsilon$ при $m \geqslant n$. В этом случае для всякого положительного линейного функционала $L(f)$ с нормой N мы имеем $|L(f_m)| \leqslant N\varepsilon$, а значит, $\lim\limits_{m\to\infty} L(f_m) = 0$. По лемме 1 отсюда следует секвенциальная непрерывность $L(f)$. Но если всякий положительный линейный функционал на Φ секвенциально непрерывен, то секвенциально непрерывны и все линейные функционалы, так как они являются разностями положительных функционалов.

2°. Изучим линейные функционалы, соответствующие реальным зарядам.

Определение 2. Линейный функционал $L(f)$ на системе функций Φ назовем *непрерывным* [28], если для любого сходящегося направления $\{f\}$ в системе Φ (см. определение 6, § 2 [29])

$$\lim_{\{f\}} L(f) = L(f_0),$$

где $f_0(x)$ — предел направления $\{f\}$.

[27] Действительно, поскольку последовательность функций $f_n(x)$ монотонно убывает, для всех $j \geqslant i$ мы имеем $f_{n_i}(x_j) \geqslant f_{n_j}(x_j) > \varepsilon$, а значит, $L(f_{n_i}) = \operatorname*{Lim}\limits_{j\to\infty} f_{n_i}(x_j) > \varepsilon$. — *Прим. перев.*

[28] В оригинальной версии статьи автор использует термин «completely continuous». — *Прим. перев.*

[29] Направление в Φ — это система функций, в которой для любых двух функций имеется третья, не превосходящая их обеих. Направление $\{f\}$ сходится к $f_0(x)$, если для любых ε и x существует функция $f_1 \in \{f\}$ такая, что $|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon$ для всех $f \in \{f\}$, следующих за f_1 (т. е. не превосходящих f_1 — *прим. перев.*).

Теорема 4. *Для того чтобы заряд в нормальном продолжении совершенно нормального пространства был реальным, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий ему функционал был непрерывен.*

Необходимость. Пусть $\mu(E)$ — реальный заряд в R и $L(f)$ — соответствующий ему линейный функционал. Пусть направление функций $\{f\}$ сходится к $f_0(x)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и положим $F_f = \{f(x) - f_0(x) \geqslant \varepsilon\}$. Эти множества образуют исчезающее направление, так как функции $f(x)$ образуют направление, сходящееся к $f_0(x)$ $\big($если $f_1(x), f_2(x) \geqslant f_3(x)$, то соответственно $F_{f_1}, F_{f_2} \supset F_{f_3}\big)$. Поскольку вариация реального заряда также реальна, существует функция $f_1 \in \{f\}$ такая, что для любой функции $f \in \{f\}$, следующей за f_1,

$$|\mu|(F_f) < \varepsilon \qquad (f \leqslant f_1 \in \{f\}). \tag{15}$$

Из выражения $L(f)$ в виде интеграла по $\mu(E)$ мы с легкостью получаем

$$|L(f - f_0)| \leqslant |\mu|(F_f) \sup_{F_f} |f(x) - f_0(x)| + |\mu|(R \setminus F_f) \sup_{R \setminus F_f} |f(x) - f_0(x)|. \tag{16}$$

Мы можем считать, что все функции $f \in \{f\}$ следуют за выбранной выше функцией. Тогда они в совокупности равномерно ограничены. Пусть, например,

$$\sup_{F_f} |f(x) - f_0(x)| < N. \tag{17}$$

Кроме того, согласно определению F_f

$$\sup_{R \setminus F_f} |f(x) - f_0(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{18}$$

Далее, мы с очевидностью имеем

$$|\mu|(R \setminus F_f) \leqslant |\mu|(R). \tag{19}$$

Используя (15) и (17)–(19), мы выводим из (16) неравенство $|L(f - f_0)| < \big(N + |\mu|(R)\big)\varepsilon$. Следовательно,

$$\lim_{\{f\}} L(f) = L(f_0).$$

Достаточность. Пусть $L(f)$ — непрерывный линейный функционал и $\mu(E)$ — соответствующий ему заряд в нормальном пространстве R, являющемся продолжением совершенно нормального пространства. Пусть $\{F\}$ — исчезающее направление в R. Каждое F является пересечением функционально замкнутых множеств, каждое из которых, в свою очередь, является пересечением открытых множеств. Следовательно, каждое $F \in \{F\}$ является пересечением открытых множеств G, которые в совокупности также образуют исчезающее направление $\{G\}$ (если мы условимся считать, что G_1 следует за G_2 в случае $G_1 \subset G_2$; это направление состоит не из замкнутых, а из открытых множеств).

Рассмотрим направления $D(F)$ функций, охватывающих множества $F \in \in \{F\}$. В каждом $D(F)$ мы можем оставить лишь функции, не превосходящие 1, так как это не влияет на предел по $D(F)$. Тогда, взяв объединение всех $D(F)$ $(F \in \{F\})$, мы получим направление, поскольку если $f_1 \in D(F_1)$, $f_2 \in D(F_2)$ и $f_1 \leqslant 1$, $f_2 \leqslant 1$, то $f_1 f_2 \leqslant 1$ и $f_1 f_2 \in D(F_3)$, где $F_3 \subset F_1 \cap F_2$. Обозначим это направление через D. Покажем, что оно сходится к нулю.

Действительно, среди функций $f \in D$ есть функции, равные нулю вне множеств $G \in \{G\}$ (функции, связывающие $R \diagdown G$ с F). Направление $\{G\}$ является исчезающим и, следовательно, для любой точки x имеется функция $f \in D$ такая, что $f(x) = 0$ $\big($и тогда $g(x) = 0$ для всех g, следующих за $f\big)$. Но это означает, что направление D сходится к нулю.

Ввиду непрерывности $L(f)$ мы имеем $\lim\limits_{D} L(f) = 0$. Это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon \in D$ такая, что для всех $f \leqslant f_\varepsilon$ $(f \in D)$

$$|L(f)| < \varepsilon. \tag{20}$$

Но так как $\mu(F) = \lim\limits_{D(F)} L(f)$ и $D(F) \subset D$, то для любого множества F, охватываемого функцией f_ε (т. е. $F \subset \{f_\varepsilon(x) \geqslant 1\}$) мы имеем, согласно (20), $|\mu(F)| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\lim_{\{F\}} \mu(F) = 0, \qquad \text{ч. т. д.}$$

В доказательстве необходимости мы не воспользовались ни нормальностью пространства, ни тем фактом, что оно является продолжением совершенно нормального пространства. На самом деле мы доказали, что *в любом пространстве интеграл от ограниченных непрерывных функций по реальному заряду является непрерывным линейным функционалом.*

Приведем некоторые свойства непрерывных линейных функционалов. Доказательство этих свойств можно получить, сведя их к соответствующим свойствам реальных зарядов. Полная система функций Φ, на которой определены рассматриваемые функционалы, определяет некоторое совершенно нормальное пространство (см. теоремы 1 и 4, § 1), а по теореме 4 непрерывным функционалам в этом пространстве соответствуют реальные заряды и наоборот.

Теорема 5. *Непрерывный линейный функционал является секвенциально непрерывным.*

Это следует из теоремы 6, § 9.

Теорема 6. *Для того чтобы линейный функционал был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы его положительная и отрицательная части были непрерывны.*

Это следует из теоремы 8, § 9.

Теорема 7. *Для того чтобы каждый линейный функционал на полной системе функций Φ был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы каждое сходящееся направление в Φ сходилось равномерно.*

Это следует из теорем 9, § 9 и 8, § 2.

Теоремы 5–7, как и теоремы 2 и 3, сохраняют силу для линейных функционалов, определенных на любой системе функций, удовлетворяющей четырем условиям, сформулированным в определении 1, § 5. Теоремы 6 и 7 доказываются для этого случая аналогично теоремам 2 и 3 с тем единственным исключением, что последовательности заменяются произвольными направлениями. Теорема 5 для положительных функционалов следует из леммы 1, откуда на основании теоремы 6 вытекает ее справедливость для любых линейных функционалов.

§ 11. Продолжение реального заряда на продолжение пространства

1°. Теорема 1. *Пусть пространство R является продолжением*[30] *пространства R^0. Каждому реальному заряду $\mu_0(E^0)$ в R^0 соответствует однозначно определяемый реальный заряд $\mu(E)$ в R такой, что $\mu(E^0) = \mu_0(E^0)$ для всякого E^0 (принадлежащего алгебре $\mathfrak{E}^0$ пространства R^0)*[31].

Этот заряд определяется следующим условием: для каждого замкнутого в R множества F

$$\mu(F) = \lim_{\{F^0\}} \mu_0(F^0),$$

где $\{F^0\}$ — направление, образованное всеми замкнутыми в R^0 множествами F^0, содержащими F.

Пусть R является продолжением пространства R^0. Множества, принадлежащие алгебре $\mathfrak{E}^0$ пространства R^0, мы будем снабжать верхним индексом 0. Пусть в R^0 задан положительный реальный заряд $\mu_0(E^0)$. Определим в R функцию множества $\mu(E)$ следующим образом: для всякого замкнутого в R множества F

$$\mu(F) = \inf_{G^0 \supset F} \mu_0(G^0), \tag{1}$$

[30] См. определение 3, § 2. Пространство R имеет те же точки, что и пространство R^0, но помимо множеств, замкнутых в R^0, оно может иметь другие замкнутые множества, являющиеся пересечениями замкнутых множеств в R^0.

[31] Здесь и ниже $\mathfrak{E}^0$ — алгебра, порожденная замкнутыми множествами пространства R^0. — *Прим. перев.*

а для всякого незамкнутого E

$$\mu(E) = \sup_{F \subset E} \mu(F). \tag{2}$$

Докажем, что определенная таким способом функция множества будет зарядом в R. Доказательство очень походит на доказательство первой части теоремы о связи зарядов с линейными функционалами, где заряд определяется по линейному функционалу с помощью аналогичной формулы. Мы разобьем рассуждение на отдельные леммы.

Лемма 1. *Для всякого F справедливо равенство $\mu(F) = \inf\limits_{F^0 \supset F} \mu_0(F^0)$.*

Из регулярности $\mu_0(E^0)$ следует, что $\mu_0(F^0) = \inf\limits_{G^0 \supset F^0} \mu_0(G^0)$, а значит, согласно (1), мы имеем $\mu(F^0) = \mu_0(F^0)$ и, кроме того, $\mu_0(F^0) \geqslant \mu(F)$ при $F^0 \supset F$. Следовательно,

$$\mu(F) \leqslant \inf_{F^0 \supset F} \mu_0(F^0). \tag{3}$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $G_1^0 \supset F$ такое, что

$$\mu(F) > \mu_0(G_1^0) - \varepsilon. \tag{4}$$

Поскольку пространство R является продолжением R^0, множество F совпадает с пересечением всех F^0, содержащих его. Поэтому либо существует $F^0 \subset G_1^0$, либо множества $F^0 \cap (R \diagdown G_1^0)$ образуют исчезающее направление, и тогда ввиду регулярности заряда $\mu_0(E^0)$ существует множество F^0 такое, что $\mu_0\big(F^0 \cap (R \diagdown G_1^0)\big) < \varepsilon$. Для такого F^0 справедливо неравенство $\mu_0(G^0) > \mu_0(F^0) - \varepsilon$, и, согласно (4), мы имеем $\mu(F) > \mu_0(F^0) - 2\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\mu(F) \geqslant \inf_{F^0 \supset F} \mu_0(F^0).$$

С учетом (3) это неравенство доказывает лемму.

Лемма 2. *Если $E^0 \supset F$, то $\mu_0(E^0) \geqslant \mu(F)$.*

Ввиду регулярности заряда мы имеем $\mu_0(E^0) = \inf\limits_{G^0 \supset E^0} \mu_0(G^0)$, а значит, данная лемма вытекает из леммы 1.

Лемма 3. *Если $E_1 \supset E_2$, то $\mu(E_1) \geqslant \mu(E_2)$.*

Это с очевидностью следует из (1) и (2).

Лемма 4. *Для любого E $\mu(E) = \sup_{F \subset E} \mu(F)$.*

Для незамкнутого E это постулируется формулой (2), а для замкнутого E это следует из леммы 3.

Лемма 5. *Если $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то $\mu(F_1 \cup F_2) \geqslant \mu(F_1) + \mu(F_2)$.*

По лемме 1 для всякого $\varepsilon > 0$ существует множество $F^0 \supset F_1 \cup F_2$ такое, что

$$\mu_0(F^0) < \mu(F_1 \cup F_2) + \varepsilon. \tag{5}$$

Пусть F_1^0, F_2^0 — замкнутые в R^0 множества, содержащие соответственно F_1 и F_2. Если среди таких множеств встречаются непересекающиеся, т. е. $F_1^0 \cap F_2^0 = \varnothing$, то в силу положительности заряда $\mu_0(E^0)$

$$\mu_0(F^0) \geqslant \mu_0\big((F^0 \cap F_1^0) \cup (F^0 \cap F_2^0)\big) = \mu_0(F^0 \cap F_1^0) + \mu_0(F^0 \cap F_2^0),$$

и по лемме 1 с учетом включений $F^0 \cap F_1^0 \supset F_1$, $F^0 \cap F_2^0 \supset F_2$ мы имеем $\mu_0(F^0) \geqslant \mu(F_1) + \mu(F_2)$. Следовательно, используя (5) и учитывая произвольность ε, мы получаем $\mu(F_1 \cup F_2) \geqslant \mu(F_1) + \mu(F_2)$.

Предположим теперь, что среди множеств F_1^0, F_2^0 не встречаются непересекающиеся. Тогда их пересечения $F_1^0 \cap F_2^0$ образуют направление. Это направление является исчезающим, так как пространство R представляет собой продолжение R^0 и, следовательно, F_1 является пересечением всех F_1^0, а F_2 — пересечением всех F_2^0, причем F_1 и F_2 не имеют общих точек. С учетом реальности заряда $\mu_0(E^0)$ отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют F_1^0 и F_2^0 такие, что

$$\mu_0(F_1^0 \cap F_2^0) < \varepsilon. \tag{6}$$

Поскольку $\mu_0(E^0)$ — положительный заряд, мы имеем для всех F^0

$$\mu_0(F^0) \geqslant \mu\big((F^0 \cap F_1^0) \cup (F^0 \cap F_2^0)\big) = \mu(F^0 \cap F_1^0) + \mu(F^0 \cap F_2^0) - \mu(F^0 \cap F_1^0 \cap F_2^0)$$

и, с учетом (6),

$$\mu_0(F^0) > \mu_0(F^0 \cap F_1^0) + \mu_0(F^0 \cap F_2^0) - \varepsilon. \tag{7}$$

Пусть теперь $F^0 \supset F_1 \cup F_2$ и пусть F^0 удовлетворяет неравенству (5). Тогда $F^0 \cap F_1^0 \supset F_1$, $F^0 \cap F_2^0 \supset F_2$ и, применяя лемму 2 и формулу (5), мы выводим из (7)

$$\mu(F_1 \cup F_2) + \varepsilon > \mu(F_1) + \mu(F_2) - \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности ε следует, что $\mu(F_1 \cup F_2) \geqslant \mu(F_1) + \mu(F_2)$.

Лемма 6. *Если $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то $\mu(E_1 \cup E_2) \geqslant \mu(E_1) + \mu(E_2)$.*

По лемме 4 для любого $\varepsilon > 0$ существуют $F_1 \subset E_1$ и $F_2 \subset E_2$ такие, что

$$\mu(F_1) > \mu(E_1) - \varepsilon \quad \text{и} \quad \mu(F_2) > \mu(E_2) - \varepsilon. \tag{8}$$

Поскольку $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, по лемме 5

$$\mu(F_1 \cup F_2) \geqslant \mu(F_1) + \mu(F_2), \tag{9}$$

а поскольку $F_1 \cup F_2 \subset E_1 \cup E_2$, по лемме 4

$$\mu(F_1 \cup F_2) \leqslant \mu(E_1 \cup E_2). \tag{10}$$

Объединяя (8)–(10) и учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, мы получаем $\mu(E_1\cup \cup E_2) \geqslant \mu(E_1) + \mu(E_2)$.

Лемма 7. *Если существует множество $F \supset E_1$ такое, что $F \cap E_2 = \varnothing$, то $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.*

Пусть $F \supset E_1$ и $E_2 \cap F = \varnothing$. Возьмем $F_1 \subset E_1 \cup E_2$ и $F_1^0 \supset F_1 \cap F$. Далее, возьмем множество $F_2^0 \subset R\diagdown F_1^0$ такое, что

$$\mu_0(F_2^0) > \mu_0(R\diagdown F_1^0) - \varepsilon \tag{11}$$

(это возможно благодаря регулярности заряда $\mu_0(E^0)$). Теперь возьмем $F_3^0 \supset F_1 \cap F_2^0$. Тогда $F_1 = F_1 \cap \Big(F_1^0 \cup F_2^0 \cup \big(R\diagdown(F_1^0 \cup F_2^0)\big)\Big) \subset F_1^0 \cup F_3^0 \cup \big(R\diagdown(F_1^0\cup \cup F_2^0)\big)$. Следовательно, по лемме 2 $\mu(F_1) \leqslant \mu_0\Big(F_1^0 \cup F_3^0 \cup \big(R\diagdown(F_1^0 \cup F_2^0)\big)\Big)$.

Поскольку заряд $\mu_0(E^0)$ является положительным, это неравенство можно переписать с помощью (11) в следующем виде:

$$\mu(F_1) \leqslant \mu_0(F_1^0) + \mu_0(F_3^0) + \varepsilon. \tag{12}$$

Так как F_3^0 — произвольное замкнутое в R^0 множество, содержащее $F_1 \cap F_2^0$, на основании леммы 1 вместо (12) мы можем написать

$$\mu(F_1) \leqslant \mu_0(F_1^0) + \mu(F_1 \cap F_2^0) + \varepsilon. \tag{13}$$

Поскольку $F_2 \subset R\diagdown F_1^0$ и $F_1^0 \supset F_1 \cap F$, мы имеем $F_1 \cap F_2^0 \subset F_1\diagdown(F_1 \cap F)$, а значит, на основании леммы 3 мы можем вместо (13) написать $\mu(F_1) \leqslant \leqslant \mu_0(F_1^0) + \mu\big(F_1\diagdown(F_1 \cap F)\big) + \varepsilon$, откуда ввиду произвольности ε следует, что

$$\mu(F_1) \leqslant \mu_0(F_1^0) + \mu(F_1\diagdown F). \tag{14}$$

Поскольку F_1^0 — произвольное замкнутое в R^0 множество, содержащее $F_1 \cap F$, используя лемму 1 мы получаем из (14)

$$\mu(F_1) \leqslant \mu(F_1 \cap F) + \mu(F_1\diagdown F). \tag{15}$$

Так как $F_1 \subset E_1 \cup E_2$ и $F \cap E_2 = \varnothing$, мы имеем $F_1 \cap F \subset E_1$, а поскольку $F \supset E_1$, справедливо включение $F_1\diagdown F \subset E_2$. Следовательно, с учетом леммы 3 из (15) следует, что

$$\mu(F_1) \leqslant \mu(E_1) \cup \mu(E_2). \tag{16}$$

Наконец, поскольку F_1 — произвольное замкнутое множество, содержащееся в $E_1 \cup E_2$, с учетом (2) из (16) следует, что $\mu(E_1 \cup E_2) \leqslant \mu(E_1) + \mu(E_2)$. Но по лемме 6 выполняется и обратное неравенство, а значит, $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.

Лемма 8. *Функция множества $\mu(E)$ является реальным положительным зарядом в R.*

Из лемм 4 и 7 на основании теоремы 5, § 6 следует, что $\mu(E)$ является положительным зарядом в R. Докажем, что этот заряд реален. Возьмем произвольное исчезающее направление $\{F\}$ в R. Поскольку R является продолжением R^0, каждое F совпадает с пересечением всех содержащих его F^0. Возьмем все F^0, содержащие множества F из направления $\{F\}$. Мы получим направление $\{F^0\}$, так как если $F_1 \cap F_2 \supset F_3$, $F_1^0 \supset F_1$, $F_2^0 \supset F_2$, то $F_1^0 \cap F_2^0$ содержится в F_1^0 и F_2^0 и содержит F_3, а значит, принадлежит $\{F^0\}$, как только F_1, F_2, F_3 принадлежат $\{F\}$. Направление $\{F^0\}$ исчезающее, поскольку каждое $F \in \{F\}$ является пересечением множеств из $\{F^0\}$, а направление $\{F\}$ исчезающее. Отсюда в силу реальности заряда $\mu_0(E^0)$ следует, что

$$\inf_{\{F^0\}} \mu_0(F^0) = 0.$$

Но по лемме 2 из $F \subset F^0$ вытекает $\mu(F) \leqslant \mu_0(F^0)$, а значит, мы также имеем

$$\inf_{\{F\}} \mu(F) = 0,$$

что доказывает реальность заряда $\mu(E)$.

Лемма 9. *$\mu(E^0) = \mu_0(E^0)$ для любого E^0.*

Поскольку $\mu(E)$ — заряд, $\mu(E^0)$ является аддитивной функцией множества на алгебре $\mathfrak{E}^0$. В то же время по лемме 1 мы имеем $\mu(F^0) = \mu_0(F^0)$, а значит, $\mu(G^0) = \mu(R) - \mu(R \diagdown G^0) = \mu_0(R) - \mu_0(R \diagdown G^0) = \mu_0(G^0)$. Тогда на основании формулы (1) мы заключаем, что

$$\mu(F^0) = \inf_{G^0 \supset F^0} \mu(G^0). \tag{17}$$

Так как $\mu(E^0)$ — аддитивная функция множества на $\mathfrak{E}^0$, удовлетворяющая соотношению (17), по лемме 1, § 8 она является положительным зарядом на $\mathfrak{E}^0$. Но $\mu_0(E^0)$ — тоже положительный заряд на $\mathfrak{E}^0$, причем $\mu_0(F^0) = \mu(F^0)$ для всех F^0. Ввиду регулярности заряда отсюда следует, что $\mu_0(E^0) = \mu(E^0)$ для всех E^0.

Лемма 10. *Пусть $\mu_1(E)$ и $\mu_2(E)$ — такие реальные заряды в R, что $\mu_1(F^0) = \mu_2(F^0)$ для всех F^0. Тогда $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ для всех E.*

По теореме 4, § 6 для любых F и $\varepsilon > 0$ найдутся $G_i \supset F$ $(i = 1, 2)$ такие, что для всех E, заключенных между G_i и F,

$$|\mu_i(E) - \mu_i(F)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2).$$

Тогда, полагая $G = G_1 \cap G_2$, мы имеем при $G \supset E \supset F$

$$|\mu_i(E) - \mu_i(F)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2). \tag{18}$$

Но F является пересечением всех содержащих его F^0. Если какое-либо из таких F^0 содержится в G, то по формуле (18)

$$|\mu_i(F^0) - \mu_i(F)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2). \tag{19}$$

Если же таких F^0 нет, то множества $F^0 \cap (R \diagdown G)$ образуют исчезающее направление, и ввиду реальности заряда $\mu_i(E)$ $(i = 1, 2)$ существует множество F_i^0 такое, что $|\mu_i|\big(F_i^0 \cap (R \diagdown G)\big) < \varepsilon$. Положим $F^0 = F_1^0 \cap F_2^0$. Тогда $|\mu_i|\big(F^0 \cap (R \diagdown G)\big) < \varepsilon$ для $i = 1, 2$, откуда следует, что

$$|\mu_i(F^0 \diagdown G)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2). \tag{20}$$

Но $F^0 = (F^0 \diagdown G) \cup (F^0 \cap G)$ и $F^0 \cap G \subset G$, а значит, согласно (18) и (20), мы имеем

$$|\mu_i(F^0) - \mu_i(F)| < 2\varepsilon \qquad (i = 1, 2). \tag{21}$$

Но по условию справедливо равенство $\mu_1(F^0) = \mu_2(F^0)$, поэтому ввиду произвольности ε из формул (19) и (21) следует, что $\mu_1(F) = \mu_2(F)$. Учитывая, что F — произвольное замкнутое множество, мы заключаем в силу регулярности, что $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ для всех E.

Теперь мы готовы к завершению доказательства теоремы. Пусть в R^0 задан реальный заряд $\mu_0(E^0)$. Его положительная и отрицательная части $\mu_0^+(E), \mu_0^-(E)$ являются реальными положительными зарядами, а значит, мы можем с помощью формул (1) и (2) определить по ним заряды в R, удовлетворяющие леммам 8 и 9. Разность этих зарядов будет реальным зарядом в R, совпадающим с $\mu_0(E^0)$ для каждого E^0. Но по лемме 10 может существовать только один такой заряд.

Формула леммы 1 может быть переписана в следующем виде:

$$\mu_+(F) = \inf_{F^0 \supset F} \mu_0^+(F^0) = \lim_{\{F^0\}} \mu_0^+(F^0)$$

и аналогично для заряда $\mu_0^-(E^0)$. Следовательно, построенный нами заряд определяется формулой

$$\mu(F) = \mu_+(F) - \mu_-(F) = \lim_{\{F^0\}} \mu_0(F^0).$$

Наша теорема тем самым полностью доказана.

2°. **Теорема 2**. *Для любого непрерывного линейного функционала $L(f)$ в пространстве R, являющемся продолжением совершенно нормального пространства, существует заряд в R такой, что*

$$L(f) = \int\limits_{R} f(x)\,\mu(dE) \tag{22}$$

и для всех замкнутых в R множеств F

$$\mu(F) = \lim_{D(F)} L(f). \tag{23}$$

Если пространство R является продолжением совершенно нормального пространства, то оно является продолжением своего собственного R^*. На R и R^* непрерывные функции, а значит и линейные функционалы, одни и те же. По теореме 4, § 10 непрерывный функционал в R^* определяет в R^* реальный заряд $\mu^*(E^*)$ такой, что

$$L(f) = \int\limits_{R^*} f(x)\,\mu^*(dE^*), \tag{24}$$

$$\mu^*(F^*) = \lim_{D(F^*)} L(f). \tag{25}$$

По теореме 1 этот заряд определяет заряд $\mu(E)$ в R такой,что для всех E^*

$$\mu(E^*) = \mu^*(E^*). \tag{26}$$

В определении интеграла задействованы только лебеговские множества непрерывной функции $f(x)$, причем все они являются множествами E^*. Таким образом, (22) следует из (24) и (26).

Для доказательства формулы (23) мы сначала покажем, что фигурирующий в ней предел существует. Мы имеем $L(f) = L^+(f) - L^-(f)$ и

$$\lim_{D(F)} L^+(f) = \inf_{D(F)} L^+(f), \quad \lim_{D(F)} L^-(f) = \inf_{D(F)} L^-(f),$$

так как $L^+(f)$ и $L^-(f)$ определяют на направлении $D(F)$ монотонно убывающие функции. Отсюда сразу следует существование предела в (23). Положим

$$\lim_{D(F)} L(f) = a.$$

Пусть задано множество F. Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть функция $f_\varepsilon \in D(F)$ такова, что для всех $f \leqslant f_\varepsilon$ $\bigl(f \in D(F)\bigr)$

$$|L(f) - a| < \varepsilon. \tag{27}$$

Положим $\{f_\varepsilon(x) \geqslant 1\} = F_\varepsilon^*$. Очевидно, что $F_\varepsilon^* \supset F$. Далее, если $F^* \supset F$ и $F^* \subset F_\varepsilon^*$, то $f_\varepsilon(x)$ охватывает F^* и любая функция $f(x)$, охватывающая F^* $\bigl($т. е. $f \in D(F^*)\bigr)$, охватывает также и F. Но для таких функций f в случае $f \leqslant f_\varepsilon$ выполняется (27). Следовательно, (27) выполняется также для всех функций из $D(F^*)$, следующих за f_ε. На основании (25) отсюда следует, что как только $F \subset F^* \subset F_\varepsilon^*$

$$|\mu^*(F^*) - a| < \varepsilon \qquad (F \subset F^* \subset F_\varepsilon^*). \tag{28}$$

Но по теореме 1

$$\lim_{\{F^*\}} \mu^*(F^*) = \mu(F),$$

откуда в силу (28) следует, что $|\mu(F) - a| < \varepsilon$. Учитывая произвольность ε и вспоминая определение числа a, мы получаем формулу (23).

3°. Следующая теорема показывает, что условие непрерывности функционала в теореме 2 и условие нормальности пространства в теореме 1, § 7 являются существенными.

Теорема 3. *Если пространство R не является нормальным, то в нем существует такой положительный линейный функционал $L(f)$, что функция замкнутого множества, определяемая формулой*

$$\mu(F) = \lim_{D(F)} L(f) = \inf_{D(F)} L(f), \tag{29}$$

не аддитивна.

Пусть R не является нормальным. Тогда в нем имеются два непустых замкнутых множества F_1 и F_2 без общих точек, не разделяемые открытыми множествами. Рассмотрим всевозможные функционально замкнутые множества F_1^* и F_2^*, содержащие соответственно F_1 и F_2. Если бы какая-либо пара таких множеств F_1^* и F_2^* не имела общих точек, то они бы разделялись функционально открытыми множествами (например, в силу нормальности R^*). Однако тогда бы F_1 и F_2 разделялись. Следовательно, каждая пара F_1^* и F_2^* имеет общие точки.

Пересечения $F_1^* \cap F_2^* = F^*$ образуют направление $\{F^*\}$. Дополним направление $\{F^*\}$ всеми функционально замкнутыми множествами, содержащими F_1 или F_2. По лемме 1, § 9 существует положительный линейный функционал $L(f)$ такой, что для каждого множества F^* из дополненного направления $\{F^*\}$

$$\inf_{D(F^*)} L(f) = 1. \tag{30}$$

Всякая функция f, охватывающая F_i $(i = 1, 2)$, охватывает множество $F^* = \{f(x) \geqslant 1\} \supset F_i$, которое по условию входит в наше направление. По этой причине из (30) следует, что

$$\inf_{D(F_i)} L(f) = 1 \qquad (i = 1, 2). \tag{31}$$

Поскольку всякое функционально замкнутое множество, содержащее $F_1 \cup F_2$, также входит в наше направление, мы аналогичным образом выводим из (30), что

$$\inf_{D(F_1 \cup F_2)} L(f) = 1. \tag{32}$$

Из (29), (31) и (32) следует, что $\mu(F_1) = \mu(F_2) = \mu(F_1 \cup F_2) = 1$, а поскольку $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, функция $\mu(F)$ не является аддитивной.

Доказанная выше теорема 3 тем не менее вовсе не означает, что в пространстве, не являющемся нормальным, не всякий линейный функционал представи́м в виде интеграла по заряду. Мы ничего не можем сказать по этому поводу [32] и лишь приведем простой пример пространства, не являющегося нормальным, в котором каждый линейный функционал представи́м в виде интеграла по заряду, но такой заряд не определяется единственным образом.

Пусть R состоит из трех точек — чисел 1, 2, 3. Помимо пустого множества и самого R объявим замкнутыми множества $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$. Такое пространство не является нормальным и, более того, всякая непрерывная функция на нем постоянна. Следовательно, любой линейный функционал в R имеет вид $L(f) = af$. Определим заряд для $L(f)$:

$$\mu(R) = a, \quad \mu(\{1\}) = \lambda a, \quad \mu(\{2\}) = (1 - \lambda)a,$$

а для остальных множеств — по аддитивности; λ произвольное, $L(f)$ с очевидностью является интегралом от f по этому заряду.

Заметим также, что в теореме 2 в отличие от теоремы 1, § 7 не утверждается единственность заряда, в виде интеграла по которому представляется функционал. Но мы не можем привести пример, который показал бы, что единственность действительно не имеет места.

§ 12. *Распределение по пространству счетно аддитивного и реального заряда*

1°. Лемма 1. *Счетно аддитивная ограниченная функция множества, определенная на алгебре $\mathfrak{E}$ в совершенно нормальном пространстве, является зарядом.*

По лемме 8, § 1 каждое множество E из алгебры $\mathfrak{E}$ в совершенно нормальном пространстве является объединением счетного числа замкнутых множеств. Пусть

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

[32] Т. е. по поводу существования линейного функционала, не представимого в виде интеграла по заряду. — *Прим. перев.*

где $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$, что можно всегда предполагать. Если функция множества $\mu(E)$ счетно аддитивна, то $\mu(E) = \mu(F_1) + \mu(F_2 \setminus F_1) + \ldots$, т. е. $\mu(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(F_n)$. Следовательно, $\mu(E)$ регулярна и, будучи ограниченной и аддитивной, является зарядом.

Лемма 2. *Пусть R — подпространство совершенно нормального пространства R' и $\mu(E)$ — счетно аддитивный заряд в R. Полагая $\mu'(E') = \mu(R \cap E')$ для всех $E' \subset R'$, мы получаем счетно аддитивный заряд в R'.*

Определение заряда $\mu'(E')$, фигурирующее в лемме, является возможным, так как из определения подпространства (определение 1, § 3) непосредственно следует, что если E' принадлежит алгебре $\mathfrak{C}$ в R', то $R \cap E'$ принадлежит алгебре $\mathfrak{C}$ в R (это же верно и для борелевских множеств).

Пусть $\mu'(E') = \mu(R \cap E')$. Счетная аддитивность и ограниченность $\mu'(E')$ сразу следует из счетной аддитивности и ограниченности $\mu(E)$. Регулярность $\mu'(E')$ обосновывается леммой 1.

Множество в пространстве R называется компактным (счетно компактным), если оно представляет собой компактное (счетно компактное) подпространство пространства R.

Теорема 1. *Если пространство R гомеоморфно борелевскому множеству совершенно нормального счетно компактного (компактного) пространства, то всякий счетно аддитивный заряд $\mu(E)$ в R сосредоточен на объединении F_σ счетного числа замкнутых счетно компактных (компактных) множеств, т. е. $\mu(E) = \mu(E \cap F_\sigma)$ для всех E.*

Пусть $R \subset R'$, где R' — совершенно нормальное пространство и R — борелевское множество в R'. Пусть $\mu(E)$ — счетно аддитивный заряд в R. Его вариация $|\mu|(E)$ также будет счетно аддитивным зарядом (см. теорему 3, § 9), и по лемме 2 мы можем определить счетно аддитивный заряд в R', полагая

$$\mu'(E') = |\mu|(R \cap E'). \tag{1}$$

Поскольку R — борелевское множество в R', по теореме 1, § 9 существует множество $F_\sigma \subset R$ такое, что $\mu'(R) = \mu'(F_\sigma)$ или, с учетом (1),

$$|\mu|(R) = |\mu|(F_\sigma). \tag{2}$$

Здесь F_σ является объединением счетного числа множеств, замкнутых в R' и содержащихся в R — а значит, замкнутых в R — и счетно компактных (компактных), если R' счетно компактно (компактно). Равенство (2) с очевидностью эквивалентно утверждению, что $\mu(E) = 0$ при $E \cap F_\sigma = \varnothing$ или что $\mu(E) = \mu(E \cap F_\sigma)$ для всех E.

Лемма 3. *Если счетно аддитивный заряд сосредоточен на объединении F_σ счетного числа компактных множеств, то он реален.*

Поскольку из любого покрытия компактного множества можно выбрать конечное подпокрытие, из любого покрытия счетного объединения компактных множеств можно выбрать счетное подпокрытие. Заряд, сосредоточенный на F_σ, можно рассматривать как заряд, заданный в пространстве F_σ (подпространстве данного пространства). Следовательно, наша лемма содержится в теореме 10, § 9.

Теорема 2. *Если пространство R гомеоморфно борелевскому множеству совершенно нормального компактного пространства, то всякий счетно аддитивный заряд в R реален.*

Действительно, по теореме 1 такой заряд сосредоточен на объединении счетного числа компактных множеств, а по лемме 3 такой заряд реален.

Согласно теореме 1, § 4, совершенно нормальное пространство допускает совершенно нормальное компактное расширение $(\omega R)^*$, обладающее тем свойством, что его можно непрерывно отобразить на любое совершенно нормальное компактное расширение R' пространства R так, что точки R останутся неподвижными, а $(\omega R)^* \diagdown R$ отобразится на $R' \diagdown R$. Относительно такого отображения прообраз R совпадает с самим R. Поскольку относительно непрерывного отображения прообраз борелевского множества является борелевским множеством, мы заключаем, что если R является борелевским множеством в R', то оно является борелевским множеством и в $(\omega R)^*$. Тем самым мы доказали следующее утверждение.

Лемма 4. *Если R гомеоморфно борелевскому множеству какого-либо совершенно нормального компактного пространства, то оно является борелевским множеством в $(\omega R)^*$.*

Следовательно, условия теорем 1 и 2 можно проверять, рассматривая лишь $(\omega R)^*$.

2°. Для реальных зарядов справедлива теорема, аналогичная теореме 1, но значительно более общая. Доказательство этой теоремы будет основано на следующей теореме, которая представляет самостоятельный интерес и будет существенно использована в следующем параграфе.

Теорема 3. *Для любого заряда $\mu(E)$ в R существует заряд $\mu'(E')$ в уолменовском расширении ωR пространства R* [33] *такой, что для всякого замкнутого в ωR множества F'*

$$\mu'(F') = \lim_{\{F\}} \mu(F), \tag{3}$$

[33] См. определение 3, § 3. Пространство ωR получается добавлением к R в качестве новых точек исчезающих максимальных направлений в R. Замкнутые множества в ωR определяются следующим образом. К каждому замкнутому в R множеству F добавляются все исчезающие максимальные направления, в которые оно входит; в результате образуется множество $\overline{F}$. Замкнутым множеством в ωR объявляется пересечение любого числа таких множеств $\overline{F}$, если только общая часть этого пересечения и R замкнута в R.

где $\{F\}$ — направление, образованное замкнутыми в R множествами F, пересечение замыканий в ωR которых совпадает с F' (в частности, для $F' = \overline{F}$ формула (3) дает равенство $\mu'(\overline{F}) = \mu(F)$).

Для того чтобы заряд $\mu(E)$ был реальным, необходимо и достаточно, чтобы $\mu'(F') = 0$ для любого множества F', не имеющего общих с R точек.

Сначала покажем, что формула (3) имеет смысл, т. е. фигурирующее в нем направление существует и соответствующий предел также существует. Для этого докажем следующее утверждение.

Лемма 5. *Если F_1, F_2 замкнуты в R, то для их замыканий $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ в уолменовском расширении ωR пространства R справедливо равенство*

$$\overline{F_1} \cap \overline{F_2} = \overline{F_1 \cap F_2}$$

(замыкание пересечения совпадает с пересечением замыканий).

Если $x \in \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$, то либо $x \in F_1 \cap F_2$, либо x является исчезающим максимальным направлением в R и F_1, F_2, а значит и $F_1 \cap F_2$, входят в это направление (непосредственно по определению замыканий в ωR). Отсюда — вновь по определению замыканий в ωR — вытекает, что $x \in \overline{F_1 \cap F_2}$. Следовательно, $\overline{F_1 \cap F_2} \supset \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$, а поскольку включение $\overline{F_1 \cap F_2} \subset \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$ всегда выполнено, наша лемма доказана.

Лемма 6. *Все замкнутые в R множества, пересечение замыканий которых является данным замкнутым в ωR множеством, образуют направление в R.*

По определению уолменовского расширения каждое замкнутое в нем множество F' является пересечением замыканий $\overline{F}$ множеств F, замкнутых в R. Все $\overline{F}$, содержащие F', с очевидностью образуют направление. Однако тогда соответствующие F тоже образуют направление, так как, согласно лемме 5, из $\overline{F_1}, \overline{F_2} \supset F'$ следует $\overline{F_1 \cap F_2} \supset F'$.

Приведем еще одну лемму.

Лемма 7. *Пусть F_1', F_2' замкнуты в ωR и не имеют общих точек. Тогда существуют $\overline{F_1} \supset F_1'$, $\overline{F_2} \supset F_2'$ (замыкания множеств, замкнутых в R), также не имеющие общих точек.*

Действительно, если бы для всякой пары $\overline{F_1} \supset F_1'$ и $\overline{F_2} \supset F_2'$ мы имели $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \neq \varnothing$, то, как легко видеть, эти пересечения образовывали бы направление, причем исчезающее, так как пересечение $F_1' \cap F_2'$ пусто. Это тем не менее противоречит компактности ωR.

Лемма 8. *Если $\mu(E)$ — заряд, а $\{F\}$ — направление в R, то предел $\lim\limits_{\{F\}} \mu(F)$ существует.*

Положительная и отрицательная части заряда представляют собой монотонные функции на направлении $\{F\}$, а значит, для них предел по этому направлению существует. Следовательно, он существует и для самого заряда.

Леммы 6 и 8 показывают, что формула (3) всегда имеет смысл.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 3. Поскольку в общем случае оно оказывается довольно громоздким, мы сначала приведем значительно более простое доказательство в предположении, что пространство R является нормальным.

Пусть R — нормальное пространство и пусть в R задан заряд $\mu(E)$. В то же время в R задан линейный функционал $L(f)$ — интеграл от $f(x)$ по $\mu(E)$. Поскольку любая ограниченная непрерывная функция, определенная на R, продолжается на ωR (см. теорему 2, § 3), имеется взаимно однозначное соответствие между непрерывными ограниченными функциями на R и на ωR. Следовательно, $L(f)$ можно также рассматривать как линейный функционал в ωR. Если R — нормальное пространство, то пространство ωR тоже является нормальным (см. теорему 4, § 3), а значит, применив теорему 1, § 7, мы можем сопоставить функционалу $L(f)$ заряд $\mu'(E')$ в ωR, определяемый следующим условием: для каждого замкнутого в ωR множества F'

$$\mu'(F') = \lim_{D(F')} L(f).$$

Всякая функция, охватывающая F в R, продолжается до функции, охватывающей $\overline{F}$, и наоборот. Поэтому направления $D(F)$ и $D(\overline{F})$ состоят из функций, на которых значения $L(f)$ совпадают. Следовательно,

$$\lim_{D(\overline{F})} L(f) = \lim_{D(F)} L(f).$$

Однако по теореме 1, § 7 этот предел равен $\mu(F)$, а значит,

$$\mu'(\overline{F}) = \mu(F). \tag{4}$$

Покажем, что

$$\mu'(F') = \lim_{\{F\}} \mu'(\overline{F}). \tag{5}$$

Действительно, пусть задано $\varepsilon > 0$ и пусть $G' \supset F'$ — такое множество, что для всякого E', заключенного между G' и F', $|\mu'(E') - \mu'(F')| < \varepsilon$ (см. теорему 4, § 6). Среди множеств $\overline{F}$ $(F \in \{F\})$ встречаются множества, заключенные между G' и F'. В противном случае все пересечения $\overline{F} \cap (\omega R \setminus G')$ были бы непустыми и, как легко видеть, образовывали бы исчезающее направление вопреки компактности ωR. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует (5).

Согласно равенству (4), формулу (5) можно переписать в виде (3):

$$\mu'(F') = \lim_{\{F\}} \mu(F).$$

Если $F' \cap R = \varnothing$, то направление $\{F\}$, соответствующее множеству F', является исчезающим. Наоборот, пересечение замыканий множеств F, образующих исчезающее направление, не имеет общих с R точек. Поэтому из формулы (3) и определения реального заряда непосредственно следует, что заряд $\mu(E)$ реален тогда и только тогда, когда $\mu'(F')=0$ для всех F', не пересекающихся с R. Этот вывод справедлив, конечно же, для любого пространства R.

Теперь перейдем к доказательству нашей теоремы в общем случае. Мы можем ограничиться рассмотрением положительного заряда, так как если формула (3) будет установлена для положительной и отрицательной частей заряда, то вычитанием мы установим ее справедливость для разности этих частей, т. е. для самого заряда.

Пусть $\mu(E)$ — положительный заряд в R. Для каждого F' положим

$$\mu'(F')=\inf_{\{F\}}\mu(F), \tag{6}$$

а для всех остальных множеств E' из алгебры $\mathfrak{E}$ пространства ωR положим

$$\mu'(E')=\sup_{F'\subset E'}\mu'(F'). \tag{7}$$

Из (6) следует, что $\mu'(F'_1)\leqslant\mu'(F'_2)$ при $F'_1\subset F'_2$. Поэтому формула (7) справедлива также и для замкнутых множеств, а значит для всех множеств E'. Остается доказать аддитивность $\mu'(E')$. Заметим, что в случае $F'=\overline{F}$ формула (6) упрощается до равенства

$$\mu'(\overline{F})=\mu(F). \tag{8}$$

Пусть $F'_1\cap F'_2=\varnothing$. Тогда по лемме 7 существуют $\overline{F_1}\supset F'_1$, $\overline{F_2}\supset F'_2$, также не имеющие общих точек. Поэтому направления $\{F_1\}$ и $\{F_2\}$, соответствующие F'_1 и F'_2, начиная с некоторого члена состоят из непересекающихся множеств, а направление $\{F\}$, соответствующее $F'_1\cup F'_2$, состоит из попарных объединений этих множеств. Следовательно, на основании формулы (6) мы имеем

$$\mu'(F'_1)+\mu'(F'_2)=\lim_{\{F_1\}}\mu(F_1)+\lim_{\{F_2\}}\mu(F_2)=\lim_{\{F_1\cup F_2\}}\mu(F_1\cup F_2)=\mu'(F'_1\cup F'_2), \tag{9}$$

откуда, используя (7), легко получить, что при $E'_1\cap E'_2=\varnothing$

$$\mu'(E'_1\cup E'_2)\geqslant\mu'(E'_1)+\mu(E'_2) \tag{10}$$

(это доказывается дословным повторением доказательства леммы 4, § 7).

Докажем теперь, что для любого открытого в ωR множества вида $\omega R\diagdown\overline{F_0}$

$$\mu'(\omega R\diagdown\overline{F_0})=\mu(R\diagdown F_0). \tag{11}$$

Пусть $F \subset \omega R \diagdown \overline{F_0}$. Покажем, что тогда $\overline{F} \subset \omega R \diagdown \overline{F_0}$. Действительно, если $F \subset \omega R \diagdown \overline{F_0}$, то $F \cap F_0 = \varnothing$, откуда по лемме 5 следует, что $\overline{F \cap F_0} = \overline{F} \cap \overline{F_0} = \varnothing$, т. е. $\overline{F} \subset \omega R \diagdown \overline{F_0}$.

Согласно доказанному выше с учетом формулы (8), мы имеем

$$\sup_{\overline{F} \subset \omega R \diagdown \overline{F_0}} \mu'(\overline{F}) = \sup_{F \subset \omega R \diagdown \overline{F_0}} \mu(F). \tag{12}$$

Пусть $F' \subset \omega R \diagdown \overline{F_0}$. Тогда существует множество $\overline{F}$ такое, что $F' \subset \overline{F} \subset \omega R \diagdown \overline{F_0}$. В противном случае пересечения с $\overline{F_0}$ всех множеств $\overline{F}$, содержащих F', образовывали бы исчезающее направление вопреки компактности ωR. Поэтому в формуле (7) мы можем взять для $\mu'(\omega R \diagdown \overline{F_0})$ не все $F' \subset \omega R \diagdown \overline{F_0}$, а только $\overline{F} \subset \omega R \diagdown \overline{F_0}$, так что

$$\mu'(\omega R \diagdown \overline{F_0}) = \sup_{\overline{F} \subset \omega R \diagdown \overline{F_0}} \mu'(\overline{F}). \tag{13}$$

Из формул (12) и (13) следует, что

$$\mu'(\omega R \diagdown \overline{F_0}) = \sup_{F \subset \omega R \diagdown \overline{F_0}} \mu(F). \tag{14}$$

Но поскольку $F \subset R$, в выражении $F \subset \omega R \diagdown \overline{F_0}$ множество F пробегает все замкнутые в R множества, содержащиеся в $R \cap (\omega R \diagdown \overline{F_0}) = R \diagdown F_0$, и поэтому

$$\sup_{F \subset \omega R \diagdown \overline{F_0}} \mu(F) = \sup_{F \subset R \diagdown F_0} \mu(F),$$

а это $\mu(R \diagdown F_0)$. Следовательно, из (14) вытекает (11).

Из доказанного выше очевидно, что $\mu'(\overline{F_0}) + \mu'(\omega R \diagdown \overline{F_0}) = \mu(F_0) + \mu(R \diagdown F_0) = \mu(R) = \mu'(\omega R)$. Значит, используя формулу (13), получаем

$$\mu'(\overline{F_0}) = \mu'(\omega R) - \sup_{\overline{F} \subset \omega R \diagdown \overline{F_0}} \mu'(\overline{F}) = \inf_{\overline{F} \cap \overline{F_0} = \varnothing} \mu'(\omega R \diagdown \overline{F}). \tag{15}$$

Покажем теперь, что при $\overline{F_1} \cap (\omega R \diagdown \overline{F_2}) = \varnothing$

$$\mu'(\overline{F_1}) + \mu'(\omega R \diagdown \overline{F_2}) = \mu'\big(\overline{F_1} \cup (\omega R \diagdown \overline{F_2})\big). \tag{16}$$

Применяя (15) к $\mu'(\overline{F_1})$, мы получаем для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\mu'(\overline{F_1}) + \mu'(\omega R \diagdown \overline{F_2}) + \varepsilon > \mu'(\omega R \diagdown \overline{F_3}) + \mu'(\omega R \diagdown \overline{F_2}), \tag{17}$$

где $\omega R\diagdown\overline{F_3} \supset \overline{F_1}$. Следовательно, дважды применяя формулу (11), мы получаем

$$\begin{aligned}\mu'(\omega R\diagdown\overline{F_3}) + \mu'(\omega R\diagdown\overline{F_2}) = \mu(R\diagdown F_3) + \mu(R\diagdown F_2) \geqslant \\ \geqslant \mu\big((R\diagdown F_3) \cup (R\diagdown F_2)\big) = \mu\big(R\diagdown(F_3 \cap F_2)\big) = \\ = \mu'(\omega R\diagdown\overline{F_3 \cap F_2}) = \mu'\big((\omega R\diagdown\overline{F_3}) \cup (\omega R\diagdown\overline{F_2})\big),\end{aligned} \tag{18}$$

поскольку по лемме 5 мы имеем $\overline{F_1 \cap F_2} = \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$. Наконец, из (7) с очевидностью следует, что $\mu'(E_1') \geqslant \mu'(E_2')$ при $E_1' \supset E_2'$, а поскольку $\omega R\diagdown\overline{F_3} \supset \overline{F_1}$,

$$\mu'\big((\omega R\diagdown F_3) \cup (\omega R\diagdown F_2)\big) \geqslant \mu'\big(\overline{F_1} \cup (\omega R\diagdown\overline{F_2})\big). \tag{19}$$

Объединяя (19), (18), (17) и используя (10), мы получаем (16).

Покажем теперь, что если $F' \supset E_1'$ и $F' \cap E_2' = \varnothing$, то $\mu'(E_1' \cup E_2') = \mu(E_1') + +\mu(E_2')$, и тогда на основании теоремы 5, § 6 будет доказана аддитивность $\mu'(E')$. Пусть $F' \supset E_1'$ и $F' \cap E_2' = \varnothing$. Возьмем $F_1' \subset E_1' \cup E_2'$ и $\overline{F_1} \supset F' \cap F_1'$. Далее, согласно (13), для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $\overline{F_2} \subset \omega R\diagdown\overline{F_1}$ такое, что $\mu'(\omega R\diagdown\overline{F_1}) - \mu'(\overline{F_2}) < \varepsilon$, или, с учетом (16), $\mu'\big(\omega R\diagdown(\overline{F_1} \cup \overline{F_2})\big) < \varepsilon$. Возьмем $\overline{F_3} \supset F_1' \cap \overline{F_2}$. Тогда $F_1' = F_1' \cap \Big(\overline{F_1} \cup \overline{F_2} \cup \big(\omega R\diagdown(\overline{F_1} \cup \overline{F_2})\big)\Big) \subset \subset \overline{F_1} \cup \overline{F_3} \cup \big(\omega R\diagdown(\overline{F_1} \cup \overline{F_2})\big)$. Следовательно,

$$\mu'(F_1') \leqslant \mu'\Big(\overline{F_1} \cup \overline{F_3} \cup \big(\omega R\diagdown(\overline{F_1} \cup \overline{F_2})\big)\Big). \tag{20}$$

Но поскольку $\overline{F_1} \cup \overline{F_2} = \overline{F_1 \cup F_2}$, мы можем применить формулу (16) к правой части неравенства (20). С другой стороны, применяя формулу (8) к $\mu'(\overline{F_1} \cup \overline{F_3})$, мы получаем $\mu'(\overline{F_1} \cup \overline{F_3}) = \mu(F_1 \cup F_3) \leqslant \mu(F_1) + \mu(F_3) = = \mu'(\overline{F_1}) + \mu'(\overline{F_3})$. Поэтому из (20) вытекает

$$\mu'(F_1') \leqslant \mu'(\overline{F_1}) + \mu'(\overline{F_3}) + \varepsilon. \tag{21}$$

Ввиду произвольности $\overline{F_3} \supset F_1' \cap \overline{F_2}$ мы можем, используя (6) и (8), переписать (21) в следующем виде:

$$\mu'(F_1') \leqslant \mu'(\overline{F_1}) + \mu'(F_1' \cap \overline{F_2}) + \varepsilon. \tag{22}$$

Поскольку $\overline{F_2} \subset \omega R\diagdown\overline{F_1}$ и $\overline{F_1} \supset F_1' \cap F'$, мы имеем $F_1' \cap \overline{F_2} \subset F_1'\diagdown F'$, а значит, $\mu'(F_1' \cap \overline{F_1}) \leqslant \mu'(F_1'\diagdown F')$. Кроме того, ввиду произвольности ε из (22) мы получаем

$$\mu'(F_1') \leqslant \mu'(\overline{F_1}) + \mu'(F_1'\diagdown F'), \tag{23}$$

а ввиду произвольности $\overline{F_1} \supset F_1' \cap F'$ с учетом (6) из (23) вытекает

$$\mu'(F_1') \leqslant \mu'(F_1' \cap F') + \mu'(F_1' \setminus F'). \tag{24}$$

Далее, поскольку $F_1' \subset E_1' \cup E_2'$ и $F' \cap E_2' = \varnothing$, мы имеем $F_1' \cap F' \subset E_1'$, а поскольку $F' \supset E_1'$, мы имеем $F_1' \setminus F' \subset E_2'$. Поэтому из (24) следует, что

$$\mu'(F_1') \leqslant \mu'(E_1') + \mu'(E_2'). \tag{25}$$

Используя (7) и учитывая произвольность множества $F_1' \subset E_1' \cup E_2'$, из (25) выводим $\mu'(E_1' \cup E_2') \leqslant \mu'(E_1') + \mu(E_2')$, что вместе с (10) дает $\mu'(E_1' \cup E_2') = \mu'(E_1') + \mu(E_2')$.

Таким образом, мы доказали, что $\mu'(E')$ является зарядом. Второе утверждение теоремы вытекает из формулы (3), как уже было доказано. Тем самым теорема полностью доказана.

Если заряд $\mu(E)$ является реальным, то согласно доказанному выше $\mu'(F') = 0$ при $F' \cap R = \varnothing$.

Следовательно, используя регулярность $\mu'(E')$, мы заключаем, что имеет место более общее утверждение: если $E' \cap R = \varnothing$, то $\mu'(E') = 0$. Реальный заряд имеет, так сказать, четко выраженный субстрат в пространстве. Если заряд не является реальным и $\{F\}$ — исчезающее направление, для которого $\lim\limits_{\{F\}} \mu(F) \neq 0$, то несмотря на то что множества $R \setminus F$, $F \in \{F\}$, исчерпывают пространство, заряд на них не исчерпывает весь заряд. Остается некоторая «не локализованная» часть заряда. При вложении R в ωR она оказывается размещенной вне пространства, а именно, на множестве F', являющемся пересечением замыканий множеств F, принадлежащих $\{F\}$.

3°. Теорема 4. *Пусть пространство R является борелевским множеством в своем уолменовском расширении ωR. Тогда всякий реальный заряд $\mu(E)$ в R сосредоточен на множестве F_σ, являющемся счетным объединением компактных замкнутых множеств, т. е. $\mu(E) = 0$ при $E \cap F_\sigma = \varnothing$.*

Пусть в R задан реальный положительный заряд $\mu(E)$. Согласно теореме 3, ему соответствует заряд $\mu'(E')$ в ωR такой, что

$$\mu'(\overline{F}) = \mu(F), \tag{26}$$

где $\overline{F}$ — замыкание в ωR замкнутого в R множества F и $\mu'(F') = 0$ при $F' \cap R = \varnothing$. Из последнего соотношения на основании регулярности заряда следует более общее утверждение:

$$\mu'(E') = 0 \quad \text{при } E' \cap R = \varnothing. \tag{27}$$

Пусть R является борелевским множеством в ωR и пусть E' — произвольное борелевское множество в ωR. Тогда, во-первых, множество $E' \setminus R$ является борелевским и, во-вторых, согласно (27), $\mu'(E \setminus R) = 0$, т. е.

$$\mu'(E') = \mu'(E' \cap R). \tag{28}$$

Поскольку $\overline{F} \cap R = F$, из равенств (26) и (28) следует, что

$$\mu'(F) = \mu(F) \tag{29}$$

и, в частности,

$$\mu'(R) = \mu(R). \tag{30}$$

Но ввиду регулярности заряда $\mu'(E')$ существует такая последовательность множеств F_n, замкнутых в ωR и содержащихся в R, что

$$\mu'(R) = \lim_{n\to\infty} \mu'(F_n). \tag{31}$$

Более того, поскольку заряд $\mu'(E')$ является положительным, мы можем считать, что $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$.

Учитывая (29) и (30) и используя счетную аддитивность заряда $\mu'(E')$ (поскольку пространство ωR компактно, этот заряд является реальным, а следовательно, счетно аддитивным), мы получаем из (31)

$$\mu(R) = \mu\biggl(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\biggr). \tag{32}$$

Здесь F_n замкнуты в ωR и содержатся в R. Следовательно, они компактны и замкнуты в R. Поскольку заряд $\mu(E)$ является положительным, из (32) следует, что $\mu(E) = 0$ в случае

$$E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing.$$

Если теперь $\mu(E)$ — произвольный реальный заряд в пространстве R, являющемся борелевским множеством в ωR, то, разлагая его на положительную и отрицательную части и применяя к ним полученный результат, мы приходим к утверждению теоремы.

Те же рассуждения применимы и в предположении, что R является не обязательно борелевским множеством в ωR, а просто измеримым относительно μ'. Поэтому мы получаем следующее утверждение.

Если реальный заряд $\mu(E)$ в R таков, что при его продолжении в ωR по теореме 3 множество R оказывается измеримым относительно μ', то в R существует такое множество F_σ, равное счетному объединению замкнутых компактных множеств, что $\mu(E) = 0$ при $E \cap F_\sigma = \varnothing$.

Условие, что пространство является борелевским множеством в его уолменовском расширении, представляется довольно сложным, так как уолменовское расширение само по себе имеет достаточно громоздкую структуру. Тем не менее в некоторых случаях это условие можно заменить более простым. Рассмотрим следующие случаи.

Если пространство R является вполне регулярным (см. определение 2, § 2), то, согласно теореме 3, § 3, пространство ωR можно непрерывно отобразить на любое вполне регулярное компактное расширение R' пространства R, оставив точки пространства R неподвижными и отобразив $\omega R\setminus R$ на $R'\setminus R$. Прообразом R относительно такого отображения будет само R. Но прообраз борелевского множества относительно непрерывного отображения также является борелевским множеством. По этой причине справедлива

Лемма 9. *Если пространство R вполне регулярно, то для того чтобы оно было борелевским множеством в ωR, достаточно, чтобы оно было таковым в каком-либо его вполне регулярном компактном расширении.*

К таким пространствам относятся, например, топологически полные пространства, рассмотренные Э. Чехом (см. [2, с. 383]). Он называет пространство R топологически полным, если существует компактное хаусдорфово (и, следовательно, вполне регулярное) пространство, содержащее R как G_δ-множество. Э. Чех показал, что полное метрическое пространство является топологически полным. В силу леммы 9 с учетом определения топологической полноты отсюда следует

Лемма 10. *Если R — метрическое пространство, то для того чтобы оно было борелевским множеством в ωR, достаточно, чтобы оно было таковым в своем пополнении.*

4°. Приведем пример, показывающий, что утверждения теорем 1 и 4, вообще говоря, перестают быть верными, если пространство не является борелевским множеством в соответствующем компактном расширении.

Пусть R — неизмеримое по Лебегу подмножество отрезка $[0,1]$, имеющее внешнюю меру 1. Оно является метрическим пространством, а отрезок $[0,1]$ представляет собой его компактное метрическое расширение. (Как известно, такое множество можно получить, например, разделив все числа отрезка $[0,1]$ на классы, относя к одному и тому же классу числа с рациональными разностями, и затем удалив из каждого класса по одному числу.) Пусть T — дополнение множества R до отрезка $[0,1]$. Оно имеет нулевую внутреннюю меру, а значит, для любого содержащегося в T борелевского подмножества E' отрезка $[0,1]$ мы имеем $m(E')=0$, где m обозначает меру Лебега.

Пусть E — борелевское множество в R и E'_1, E'_2 — борелевские подмножества отрезка $[0,1]$ такие, что $E = R\cap E'_1 = R\cap E'_2$. Тогда $(E'_1\setminus E'_2)\cup$ $\cup(E'_2\setminus E'_1)\subset T$ и, следовательно, $m(E'_1)=m(E'_2)$. Поэтому каждому E мы можем сопоставить однозначно определяемое число $\mu(E)=m(E')$, где E' таково, что $R\cap E'=E$. Легко доказать, что тем самым мы определим счетно аддитивный заряд $\mu(E)$ в R (согласно теореме 7, § 10, он также будет реальным). Его ограниченность очевидна. Счетная аддитивность устанавливается легко. Действительно, пусть $E_i\cap E_k=\varnothing$ $(i,k=1,2,\ldots;\ i\neq k)$.

Тогда, взяв E_i' так, что $E_i = R \cap E_i'$, мы будем иметь $E_i' \cap E_k' \subset T$ $(i \neq k;$ $i, k = 1, 2, \ldots)$ и, следовательно, $m(E_i' \cap E_k') = 0$. Поэтому

$$m\biggl(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i'\biggr) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i'),$$

что с учетом определения $\mu(E)$ означает

$$\mu\biggl(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\biggr) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Тот факт, что $\mu(E)$ является зарядом, теперь вытекает из леммы 1.

Если бы существовало множество $F_\sigma \subset R$ такое, что $\mu(F_\sigma) = \mu(R)$, то мы бы имели $m(F_\sigma) = \mu(R) = 1$ и R оказалось бы измеримым вопреки предположению. Всякое компактное подмножество отрезка $[0, 1]$ с необходимостью замкнуто, а значит, счетное объединение таких множеств является F_σ-множеством.

§ 13. *Реальная и счетно аддитивная части заряда*

1°. Определение 1. *Реальной* (*счетно аддитивной*) *частью положительного заряда* $\mu(E)$ в R мы называем такой реальный (счетно аддитивный) заряд $\bar{\mu}(E)$ в R, что, во-первых, $\bar{\mu}(E) \leqslant \mu(E)$ для всех E и, во-вторых, если реальный (счетно аддитивный) заряд $\mu_1(E)$ в R таков, что $\mu_1(E) \leqslant \mu(E)$ для всех E, то $\bar{\mu}(E) \geqslant \mu_1(E)$.

Реальной (*счетно аддитивной*) *частью заряда* назовем разность реальных (счетно аддитивных) частей его положительной и отрицательной частей. Проще говоря, реальную (счетно аддитивную) часть заряда можно охарактеризовать как наибольший реальный (счетно аддитивный) заряд, содержащийся в данном заряде.

Из определения непосредственно следует, что если заряд имеет реальную (счетно аддитивную) часть, то она единственна.

Теорема 1. *Каждый заряд имеет реальную часть. Она обладает следующим свойством: если E содержится в компактном множестве* (данного пространства, разумеется), *то* $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$.

Согласно определению 1, теорему достаточно доказать для положительного заряда.

Пусть в пространстве R задан положительный заряд $\mu(E)$. Погрузим R в его уолменовское расширение ωR и, используя теорему 3, § 12, определим в ωR заряд $\mu'(E')$ [34]. Поскольку ωR — компактное пространство, этот заряд

[34] В этом параграфе штрих означает, как и раньше, что множество рассматривается в ωR. Символами E', F', G' обозначаются соответственно борелевские, замкнутые и открытые множества в ωR; $\overline{F}$ — замыкание множества F в ωR.

реален и поэтому счетно аддитивен. Кроме того, он, как и $\mu(E)$, является положительным.

На основании теоремы 1, § 9 мы можем считать, что заряд $\mu'(E')$ определен на всех борелевских множествах пространства ωR. Очевидно, существует такое множество $G'_\delta \supset R$ (пересечение счетного числа открытых в ωR множеств), что

$$\mu'(G'_\delta) = \inf_{G' \supset R} \mu'(G'). \tag{1}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Согласно (1), существует такое множество $G'_\varepsilon \supset R$, что как только $G'_\varepsilon \supset G' \supset R$

$$\mu'(G') - \mu'(G'_\delta) < \varepsilon. \tag{2}$$

Если $F' \subset G'_\delta \setminus R$, то $R \subset G'_\varepsilon \setminus F' \subset G'_\varepsilon$, и поэтому в силу (2) мы имеем $\mu'(F') < \varepsilon$. Ввиду произвольности ε мы получаем $\mu'(F') = 0$. Отсюда следует более общее соотношение:

$$\mu'(E') = 0 \quad \text{при } E' \subset G'_\delta \setminus R. \tag{3}$$

Пусть теперь E — борелевское множество в пространстве R. Тогда, как это ясно из включений $R \subset G'_\delta \subset \omega R$, существует множество $E' \subset G'_\delta$, которое является борелевским множеством в ωR и удовлетворяет равенству $E = R \cap E'$. Если E'_1 и E'_2 — два таких множества, то

$$(E'_1 \setminus E'_2) \cup (E'_2 \setminus E'_1) \subset G'_\delta \setminus R,$$

а значит, согласно (3), мы имеем $\mu'(E'_1) = \mu'(E'_2)$. Следовательно, полагая

$$\bar{\mu}(E) = \mu'(E') \qquad (E = E' \cap R,\ E' \subset G'_\delta), \tag{4}$$

мы получим однозначную функцию, определенную на всех борелевских множествах пространства R. Покажем, что она будет реальной частью заряда $\mu(E)$.

Ограниченность функции $\bar{\mu}(E)$ очевидна. Докажем ее аддитивность. Если $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ и $E_i = E'_i \cap R$, $E'_i \subset G'_\delta$ $(i = 1, 2)$, то $E'_1 \cap E'_2 \subset G'_\delta \setminus R$. Следовательно, в силу (3) мы имеем $\mu'(E'_1 \cap E'_2) = 0$, а в силу (4)

$$\bar{\mu}(E_1) + \bar{\mu}(E_2) = \mu'(E'_1) + \mu'(E'_2) = \mu'(E'_1 \cup E'_2) = \bar{\mu}(E_1 \cup E_2).$$

Для доказательства регулярности зададим $\varepsilon > 0$ и выберем $F' \subset E' \subset G'_\delta$ так, что $\mu'(E') - \mu'(F') < \varepsilon$. Множество $F = R \cap F'$ будет замкнутым в R и $F \subset E = E' \cap R$. Поэтому на основании (4) мы имеем $\bar{\mu}(E) - \bar{\mu}(F) < \varepsilon$, что доказывает регулярность.

Пусть теперь $\{F\}$ — исчезающее направление в R. Положим

$$F' = \bigcap_{\{F\}} \overline{F}.$$

Тогда $F' \cap R = \varnothing$ и, следовательно, $F' \cap G'_\delta \subset G'_\delta \setminus R$. Поэтому на основании (3) мы имеем $\mu'(F' \cap G'_\delta) = 0$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $G' \supset F'$ такое, что $\mu'(G' \setminus F') < \varepsilon$. В этом случае $\mu'\big((G' \cap G'_\delta) \setminus (F' \cap G'_\delta)\big) < \varepsilon$, а поскольку $\mu'(F' \cap G'_\delta) = 0$,

$$\mu'(G' \cap G'_\delta) < \varepsilon. \tag{5}$$

Так как $G' \supset F'$ и $F' = \bigcap\limits_{\{F\}} \overline{F}$, найдется множество $F_1 \in \{F\}$ такое, что $\overline{F_1} \subset G'$ $\big($в противном случае все $\overline{F} \cap (\omega R \setminus G')$ образовывали бы исчезающее направление вопреки компактности $\omega R\big)$. Тогда для всякого $F \subset F_1$ мы будем иметь $\overline{F} \subset G'$ и, в силу (5), $\mu'(\overline{F} \cap G'_\delta) < \varepsilon$. Однако из формулы (4) следует, что $\mu'(\overline{F} \cap G'_\delta) = \bar{\mu}(F)$, так как $F = \overline{F} \cap R$. По этой причине последнее неравенство влечет $\bar{\mu}(F) < \varepsilon$, а поскольку это верно для всех $F \subset F_1$, ввиду произвольности ε мы получаем

$$\lim_{\{F\}} \bar{\mu}(F) = 0,$$

что доказывает реальность заряда $\bar{\mu}(E)$.

Пусть теперь $\mu_1(E)$ — такой реальный заряд в R, что для всех E

$$\mu_1(E) \leqslant \mu(E). \tag{6}$$

Пусть $\mu'_1(E')$ — заряд в ωR, соответствующий ему по теореме 3, § 12. Из (6) с учетом определений $\mu'_1(E')$ и $\mu'(E')$ по теореме 3, § 12 следует, что для всех E'

$$\mu'_1(E') \leqslant \mu'(E'). \tag{7}$$

Взяв теперь произвольное множество F, из (4) и (7) можно вывести

$$\bar{\mu}(F) = \mu'(\overline{F} \cap G'_\delta) \geqslant \mu'_1(\overline{F} \cap G'_\delta). \tag{8}$$

Поскольку заряд $\mu_1(E)$ реален, по теореме 3, § 12 мы имеем $\mu'_1(F') = 0$ при $F' \cap R = \varnothing$, откуда ввиду регулярности заряда следует более общее соотношение: $\mu'_1(E') = 0$ при $E' \cap R = \varnothing$. Но поскольку $R \subset G'_\delta$ и, следовательно, $\big(\overline{F} \setminus (\overline{F} \cap G'_\delta)\big) \cap R = \varnothing$, мы имеем $\mu'_1\big(\overline{F} \setminus (\overline{F} \cap G'_\delta)\big) = 0$, т. е.

$$\mu'_1(\overline{F} \cap G'_\delta) = \mu'_1(\overline{F}). \tag{9}$$

Однако по теореме 3, § 12
$$\mu_1'(\overline{F}) = \mu_1(F). \tag{10}$$
Объединяя (8)–(10), мы заключаем, что для всех замкнутых множеств $\bar{\mu}(F) \geqslant \mu_1(F)$. Благодаря регулярности заряда отсюда следует, что и для всех E $\bar{\mu}(E) \geqslant \mu_1(E)$. Следовательно, $\bar{\mu}(E)$ действительно является реальной частью заряда $\mu(E)$.

Предположим, что E содержится в компактном подмножестве пространства R. Тогда всякое вложенное в E замкнутое множество является компактным, а будучи компактным, является замкнутым в ωR (оно не входит ни в какое исчезающее направление и, следовательно, по построению ωR при формировании замыкания в ωR к этому множеству никакие точки не добавляются). Однако для множеств F, замкнутых в ωR и содержащихся в R, формула (4) дает равенство $\bar{\mu}(F) = \mu'(F)$. В то же время по определению $\mu'(E')$ для таких F мы имеем $\mu'(F) = \mu(F)$ (так как $F = \overline{F}$). Следовательно, $\bar{\mu}(F) = \mu(F)$, откуда ввиду регулярности заряда следует, что $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$. Таким образом, доказательство нашей теоремы завершено.

2°. Определение 2. Заряд в R назовем *сингулярным* (*счетно сингулярным*[35]), если он равен нулю на любом компактном (счетно компактном) подмножестве R. *Сингулярной частью положительного заряда* $\mu(E)$ в R мы называем такой сингулярный заряд $\bar{\bar{\mu}}(E)$, что, во-первых, $\bar{\bar{\mu}}(E) \leqslant \mu(E)$ для всех E и, во-вторых, если $\mu_1(E)$ — сингулярный заряд в R такой, что $\mu_1(E) \leqslant \mu(E)$ для всех E, то $\bar{\bar{\mu}}(E) \geqslant \mu_1(E)$.

Под *сингулярной частью заряда* мы понимаем разность сингулярных частей его положительной и отрицательной частей. Аналогичным образом определяется счетно сингулярная часть заряда.

Проще говоря, сингулярная часть заряда есть наибольший сингулярный заряд, содержащийся в нем.

Используя это определение, можно переформулировать вторую часть теоремы 1 следующим образом: разность между зарядом и его реальной частью является сингулярным зарядом.

Сингулярность заряда в определенном смысле противоположна его реальности, но ниже мы покажем, что не тождественно нулевой сингулярный заряд может быть реальным.

Из определения непосредственно вытекает, что если заряд имеет сингулярную часть, то она единственна.

Теорема 2. *Каждый заряд $\mu(E)$ имеет сингулярную часть $\bar{\bar{\mu}}(E)$, причем существует такое множество F_σ, являющееся объединением счетного числа компактных замкнутых множеств, что $\bar{\bar{\mu}}(E) = \mu\big(E \cap (R \setminus F_\sigma)\big)$. Разность $\mu(E) - \bar{\bar{\mu}}(E)$ является реальным зарядом, который можно выразить через*

[35] В оригинальной версии статьи счетно сингулярные заряды называются «сингулярными в более узком смысле». — *Прим. перев.*

$\mu(E)$ следующим образом: каждому множеству E сопоставляется направление $K(E)$[36]*, составленное из всех содержащихся в E компактных замкнутых множеств F, где следование F_1 за F_2 означает включение $F_1 \supset F_2$, и тогда*

$$\mu(E) - \bar{\bar{\mu}}(E) = \lim_{K(E)} \mu(F). \tag{11}$$

Согласно определению 2, теорему достаточно доказать для положительного заряда. В этом случае $\mu(F)$ является монотонно возрастающей функцией на $K(E)$, и поэтому вместо (11) мы можем написать

$$\mu(E) - \bar{\bar{\mu}}(E) = \sup_{K(E)} \mu(F). \tag{12}$$

Пусть $\mu(E)$ — положительный заряд в R. Положим

$$\widetilde{\mu}(E) = \sup_{K(E)} \mu(F). \tag{13}$$

Если E содержится в компактном множестве, то всякое $F \subset E$ компактно, а значит, для такого E условия $F \in K(E)$ и $F \subset E$ равносильны и, следовательно,

$$\mu(E) = \sup_{K(E)} \mu(F) = \widetilde{\mu}(E). \tag{14}$$

Далее, из (13) непосредственно вытекает, что при $E_1 \supset E_2$

$$\widetilde{\mu}(E_1) \geqslant \widetilde{\mu}(E_2) \qquad (E_1 \supset E_2). \tag{15}$$

Ограниченность и регулярность функции $\widetilde{\mu}(E)$ содержатся в формуле (13). Докажем ее аддитивность.

Пусть $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ и пусть задано $\varepsilon > 0$. На основании (13) существуют $F_1 \in K(E_1)$ и $F_2 \in K(E_2)$ такие, что $\widetilde{\mu}(E_i) - \mu(F_i) < \varepsilon$ для $i = 1, 2$. Тогда $\widetilde{\mu}(E_1) + \widetilde{\mu}(E_2) - 2\varepsilon < \mu(F_1) + \mu(F_2) = \mu(F_1 \cup F_2) \leqslant \widetilde{\mu}(E_1 \cup E_2)$ и, следовательно,

$$\widetilde{\mu}(E_1) + \widetilde{\mu}(E_2) \leqslant \widetilde{\mu}(E_1 \cup E_2). \tag{16}$$

С другой стороны, существует множество $F \in K(E_1 \cup E_2)$ такое, что

$$\widetilde{\mu}(E_1 \cup E_2) < \mu(F) + \varepsilon = \mu(E_1 \cap F) + \mu(E_2 \cap F) + \varepsilon. \tag{17}$$

Так как $E_i \cap F \subset F$, а F компактно, на основании (14) мы получаем $\mu(E_i \cap F) = \widetilde{\mu}(E_i \cap F)$ для $i = 1, 2$, а поскольку $E_i \cap F \subset E_i$, согласно (15), мы

[36] В оригинальной версии статьи это направление обозначается символом $B(E)$. — *Прим. перев.*

имеем $\widetilde{\mu}(E_i \cap F) \leqslant \widetilde{\mu}(E_i)$. Поэтому, используя (17) и произвольность $\varepsilon > 0$, мы заключаем, что
$$\widetilde{\mu}(E_1 \cup E_2) \leqslant \widetilde{\mu}(E_1) + \widetilde{\mu}(E_2). \tag{18}$$

Формулы (16) и (18) доказывают аддитивность $\widetilde{\mu}(E)$. Следовательно, $\widetilde{\mu}(E)$ является зарядом, как и $\mu(E) - \widetilde{\mu}(E)$.

Так как для любого E, содержащегося в компактном множестве, $\widetilde{\mu}(E) = \mu(E)$, заряд $\mu(E) - \widetilde{\mu}(E)$ сингулярен, а поскольку заряд $\widetilde{\mu}(E)$ с очевидностью положителен, $\mu(E) - \widetilde{\mu}(E) \leqslant \mu(E)$.

Пусть $\mu_1(E)$ — такой сингулярный заряд, что для всех E
$$\mu_1(E) \leqslant \mu(E). \tag{19}$$

На основании (13) для произвольного E мы имеем
$$\mu(E) - \widetilde{\mu}(E) = \mu(E) - \sup_{K(E)} \mu(F) = \inf_{K(E)} \mu(E \diagdown F). \tag{20}$$

Но в силу (19)
$$\inf_{K(E)} \mu(E \diagdown F) \geqslant \inf_{K(E)} \mu_1(E \diagdown F), \tag{21}$$

а поскольку заряд $\mu_1(E)$ сингулярен, для $F \in K(E)$ мы имеем $\mu_1(F) = 0$, т. е. $\mu_1(E \diagdown F) = \mu_1(E)$, и тогда из (21) вытекает, что
$$\inf_{K(E)} \mu(E \diagdown F) \geqslant \mu_1(E). \tag{22}$$

Объединяя (21) и (22), мы получаем $\mu(E) - \widetilde{\mu}(E) \geqslant \mu_1(E)$, откуда следует, что $\mu(E) - \widetilde{\mu}(E)$ является сингулярной частью заряда $\mu(E)$.

Остается доказать, что заряд $\widetilde{\mu}(E)$ реален и сосредоточен на объединении счетного числа компактных замкнутых множеств. Тем самым теорема будет полностью доказана, так как из $\widetilde{\mu}(E) = \mu(F_\sigma \cap E)$ следует, что $\bar{\bar{\mu}}(E) = \mu(E) - \widetilde{\mu}(E) = \mu\bigl(E \cap (R \diagdown F_\sigma)\bigr)$.

Поскольку
$$\widetilde{\mu}(R) = \sup_{K(R)} \mu(F) \tag{23}$$

и $\widetilde{\mu}(F) = \mu(F)$ для компактных F, существует последовательность компактных множеств $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$ такая, что
$$\widetilde{\mu}(R) - \mu(F_n) = \widetilde{\mu}(R) - \widetilde{\mu}(F_n) < \frac{1}{n}. \tag{24}$$

Положим
$$F_\sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Пусть F компактно и пусть $F \cap F_\sigma = \varnothing$. Если $\mu(F) \neq 0$, то существует такое n, что $\mu(F) > 1/n$, и тогда, согласно (24), мы имеем $\widetilde{\mu}(R) < \mu(F_n \cup F)$. Это противоречит (23), а значит, $\mu(F) = 0$. Если $E \cap F_\sigma = \varnothing$ и $F \in K(E)$, то $F \cap F_\sigma = \varnothing$ и F компактно и, следовательно, $\mu(F) = 0$. Поэтому на основании (13) мы имеем $\widetilde{\mu}(E) = 0$, если $E \cap F_\sigma = \varnothing$, т. е. заряд $\widetilde{\mu}(E)$ сосредоточен на F_σ.

Пусть $\{F\}$ — исчезающее направление. Поскольку множества F_n, фигурирующие в формуле (24), компактны, для каждого n существует множество $F^n \in \{F\}$ такое, что $F^n \cap F_n = \varnothing$. Так как неравенство (24) утверждает, что $\widetilde{\mu}(R \diagdown F_n) < 1/n$, мы имеем $\widetilde{\mu}(F^n) < 1/n$. Это неравенство справедливо также для всех $F \subset F^n$, и тем самым доказано, что $\lim\limits_{\{F\}} \widetilde{\mu}(F) = 0$, т. е. что заряд $\widetilde{\mu}(E)$ является реальным.

3°. Теорема 3. *Если пространство R является борелевским множеством в своем уолменовском расширении ωR, то каждый заряд в R равен сумме его реальной и сингулярной частей, причем это — единственно возможное его представление в виде суммы реального и сингулярного зарядов.*

В частности, в таком пространстве сингулярный заряд не может быть реальным, если он не является тождественно нулевым.

Пусть R удовлетворяет условиям теоремы. Предположим, что заряд $\mu(E)$ в R представляется двумя способами в виде суммы реального и сингулярного зарядов: $\mu(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E) = \mu_3(E) + \mu_4(E)$. Тогда $\mu_1(E) - \mu_3(E) = \mu_4(E) - \mu_2(E)$, где в левой части фигурирует реальный заряд, а в правой части — сингулярный. Следовательно, если мы покажем, что всякий заряд в R, являющийся одновременно реальным и сингулярным, обязан тождественно равняться нулю, то мы докажем единственность представления любого заряда в R в виде суммы реального и сингулярного зарядов.

Итак, пусть $\mu(E)$ — реальный и в то же время сингулярный заряд в R. По теореме 4, § 12 существует множество F_σ, являющееся объединением счетного числа компактных замкнутых множеств, и такое, что $\mu(E) = 0$ при $E \cap F_\sigma = \varnothing$. Всякое множество $E \subset F_\sigma$ является объединением счетного числа попарно непересекающихся множеств, содержащихся в компактных множествах [37]. Поскольку заряд $\mu(E)$ сингулярен, он равен нулю на таких множествах, а так как он реален и, следовательно, счетно аддитивен, то он равен нулю и на их объединении, т. е. $\mu(E) = 0$ при $E \subset F_\sigma$. Но всякое множество E равно $(E \cap F_\sigma) \cup (E \diagdown F_\sigma)$, а значит, $\mu(E) = 0$ для всех E.

Рассмотрим теперь произвольный заряд в R. Согласно теореме 1, он представляется в виде суммы своей реальной части и некоторого сингулярного заряда. С другой стороны, по теореме 2 он также представляется в виде суммы своей сингулярной части и некоторого реального заряда. На основании

[37] Если $F_\sigma = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$, то $E = (E \cap F_1) \cup \big(E \cap (F_2 \diagdown F_1)\big) \cup \ldots$.

доказанной единственности такого представления заряда в R мы заключаем, что эти два представления совпадают, так что заряд в R равен сумме его реальной и сингулярной частей.

Теперь мы приведем пример, показывающий, что, вообще говоря, если пространство не удовлетворяет условию теоремы 3, то в нем возможно существование заряда, являющегося одновременно реальным и сингулярным. Для этого вернемся к примеру, приведенному в п. 4°, § 12. Пусть пространство R и заряд $\mu(E)$ в нем такие же, как в том примере. Как уже было отмечено, этот заряд является реальным и удовлетворяет соотношению $\mu(R) > \sup\limits_{F' \subset R} \mu(F')$, где F' — замкнутые подмножества отрезка $[0, 1]$. Так как условия $F = F' \subset R$ и $F \in K(R)$ равносильны, из (12) мы заключаем $\bar{\bar{\mu}}(R) > 0$, а поскольку $0 \leqslant \bar{\bar{\mu}}(E) \leqslant \mu(E)$, заряд $\bar{\bar{\mu}}(E)$ является реальным $\Big($если $\inf\limits_{\{F\}} \mu(F) = 0$, то тем более $\inf\limits_{\{F\}} \bar{\bar{\mu}}(F) = 0\Big)$.

Отметим также, что теорема 2 о существовании сингулярной части заряда может быть доказана другим способом — отличным от приведенного выше и аналогичным доказательству теоремы 1. Пусть $\mu(E)$ — заряд в некотором пространстве R и пусть $\mu'(E')$ — заряд в ωR, соответствующий ему по теореме 3, § 12. Как легко видеть, существует множество F'_σ, являющееся объединением счетного числа множеств, замкнутых в ωR и содержащихся в R, такое, что

$$\mu'(F'_\sigma) = \sup_{F' \subset R} \mu'(F'). \tag{25}$$

Положим

$$\widetilde{\mu}(E) = \mu'(E \cap F'_\sigma). \tag{26}$$

Несложно показать, что $\widetilde{\mu}(E)$ является реальным зарядом, сосредоточенным на F'_σ.

Далее, можно показать, что он удовлетворяет формуле (13). Затем так же, как это уже было сделано, доказывается тот факт, что $\mu(E) - \widetilde{\mu}(E)$ является сингулярной частью заряда $\mu(E)$.

Такое доказательство теоремы 2 подчеркивает ее аналогию с теоремой 1 и придает теореме 3 бóльшую полноту. Действительно, если R — борелевское множество в ωR, то $\mu'(F'_\sigma) = \mu'(G'_\delta)$, где F'_σ определяется формулой (25), а G'_δ вводится так же, как в теореме 1, т. е. формулой (1). Сравнивая определение $\widetilde{\mu}(E)$ по формуле (26) с определением $\bar{\mu}(E)$ по формуле (4), видим, что $\widetilde{\mu}(E) = \bar{\mu}(E)$, а это в точности означает, что $\mu(E) = \bar{\mu}(E) + \bar{\bar{\mu}}(E)$.

4°. Мы не можем доказать существование счетно аддитивной части для любого заряда, но можем доказать, что всякий заряд имеет счетно сингулярную часть.

Теорема 4. *Каждый заряд $\mu(E)$ имеет счетно сингулярную часть $\bar{\bar{\mu}}(E)$, причем существует такое множество F_σ, являющееся счетным объединением* *счетно компактных замкнутых множеств, что* $\bar{\bar{\mu}}(E) = \mu\big(E \cap (R \setminus F_\sigma)\big)$. *Разность* $\mu(E) - \bar{\bar{\mu}}(E)$ *является счетно аддитивным зарядом, который можно выразить через* $\mu(E)$ *следующим образом: каждому множеству* E *сопоставляется направление* $K_\sigma(E)$ [38], *составленное из всех содержащихся в* E *счетно компактных замкнутых множеств* F, *где следование* F_1 *за* F_2 *означает включение* $F_1 \supset F_2$, *и тогда*

$$\mu(E) - \bar{\bar{\mu}}(E) = \lim_{K_\sigma(E)} \mu(F).$$

Эта теорема совершенно аналогична теореме 2. Ее доказательство можно получить из доказательства теоремы 2, заменив компактные множества счетно компактными, а исчезающие направления — исчезающими последовательностями замкнутых множеств. Мы не будем вдаваться в дальнейшие подробности.

Теорема 5. *Если пространство* R *гомеоморфно борелевскому множеству какого-либо совершенно нормального счетно компактного пространства, то каждый заряд в* R *имеет счетно аддитивную часть и равен сумме своих счетно аддитивной и счетно сингулярной частей. Это единственно возможное его представление в виде суммы счетно аддитивного и счетно сингулярного зарядов.*

Единственность такого представления заряда в пространствах указанного вида доказывается дословно так же, как и соответствующее утверждение в теореме 3, — с той лишь разницей, что помимо замены терминов «реальный», «сингулярный» и «компактный» соответственно на «счетно аддитивный», «счетно сингулярный» и «счетно компактный» следует сделать ссылку не на теорему 3, § 12, а на теорему 1, § 12.

Таким образом, если R гомеоморфно борелевскому множеству совершенно нормального счетно компактного пространства и $\mu(E)$ — заряд в R, то фигурирующее в теореме 4 представление этого заряда $\mu(E) = \widetilde{\mu}(E) + \bar{\bar{\mu}}(E)$ является единственно возможным его представлением в виде суммы счетно аддитивного и счетно сингулярного зарядов.

Нам осталось доказать, что $\widetilde{\mu}(E)$ — счетно аддитивная часть заряда $\mu(E)$. Можно считать, что заряд $\mu(E)$ является положительным (это следует из определения счетно аддитивной части заряда как разности счетно аддитивных частей его положительной и отрицательной частей).

Пусть $\mu_1(E)$ — счетно аддитивный заряд такой, что $\mu_1(E) \leqslant \mu(E)$. По теореме 1, § 12 существует такое множество F_σ, являющееся объединением счетно компактных множеств, что для всех E $\mu_1(E) = \mu_1(E \cap F_\sigma)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется счетно компактное множество $F \subset F_\sigma$ такое, что

[38] В оригинальной версии статьи это направление обозначается символом $K(E)$. — *Прим. перев.*

$|\mu_1|(E_1) < \varepsilon$ при $E_1 \subset F_\sigma \diagdown F$. Тогда $\big|\mu_1\big((E \cap F_\sigma) \diagdown (E \cap F)\big)\big| < \varepsilon$, а значит,

$$|\mu_1(E) - \mu_1(E \cap F)| < \varepsilon. \tag{27}$$

В то же время $\mu_1(E \cap F) \leqslant \mu(E \cap F)$, а поскольку F счетно компактно, $\bar{\bar{\mu}}(E \cap F) = 0$ и, следовательно, $\widetilde{\mu}(E \cap F) = \mu(E \cap F)$. Поэтому $\mu_1(E \cap F) \leqslant \leqslant \mu(E \cap F) = \widetilde{\mu}(E \cap F) \leqslant \widetilde{\mu}(E)$.

Сравнивая это неравенство с неравенством (27) и учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, мы получаем $\mu_1(E) \leqslant \widetilde{\mu}(E)$. Это показывает, что $\widetilde{\mu}(E)$ является счетно аддитивной частью заряда $\mu(E)$.

Статья поступила в редакцию
11.X.1940

ЛИТЕРАТУРА

1. *Banach S.* Théorie des opérations linéaires. Warszawa: Subwncji Funduszu Narodowej, 1932.
2. *Čech Ed.* On bicompact spaces // Ann. Math. 1937. Bd 38. S. 823–844.
3. *Гливенко В. И.* Интеграл Стилтьеса. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
4. *Канторович Л. В.* Linear operations in semiordered spaces. I // Мат. сб. 1940. Т. 7, вып. 2. С. 209–279.
5. *Carathéodory C.* Vorlesungen über reelle Funktionen. Leipzig: B.G. Teubner, 1927.
6. *Markoff A.* On mean values and exterior densities // Мат. сб. 1938. Т. 4, № 1. С. 165–190. (Русский перевод: *Марков А. А.* О средних значениях и внешних плотностях // В кн.: *Марков А. А.* Избранные труды. Т. 1. Математика, механика, физика. М.: Изд-во МЦНМО, 2002. С. 150–179.)

Аддитивные функции множеств в абстрактных пространствах. IV

Математический сборник. 1943. Т. 13, № 2–3. С. 169–238

Пусть $\mu(E)$ — ограниченная (т. е. $|\mu(E)| < N$ для всех E) аддитивная функция множеств, определенная на алгебре множеств, порожденной всеми замкнутыми множествами данного пространства R. Для любой ограниченной непрерывной функции на R определен интеграл

$$\int\limits_R f(x)\,\mu(dE).$$

Рассмотрим последовательность функций множеств $\mu_n(E)$ указанного типа. Говорим, что эта последовательность слабо сходится к функции множеств $\mu(E)$, если для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_R f(x)\,\mu_n(dE) = \int\limits_R f(x)\,\mu(dE).$$

Так как интегралы являются линейными функционалами, то это определение слабой сходимости функций множеств согласуется с соответствующим определением для функционалов. Цель настоящей статьи состоит в изучении таким образом определенной слабой сходимости функций множеств с «геометрической точки зрения», т. е. мы ищем такие свойства слабой сходимости, которые можно выразить через свойства самих функций множеств и через свойства топологии пространства (или множества M), на котором эти функции определены.

Наглядно суть наших результатов можно проиллюстрировать с помощью следующей физической модели.

Представим себе электрические заряды, которые движутся в пространстве. Пусть функции множеств $\mu_n(E)$, $n = 1, 2, \ldots$, представляют распределение этих зарядов в моменты времени t_n, где $t_n \to t_0$, а функция множеств $\mu(E)$ представляет распределение зарядов в момент времени t_0. Тогда

$\mu_n(E) \underset{w}{\longrightarrow} \mu(E)$. Считается, что заряды могут объединяться и делиться. Таким образом, заряды противоположного знака могут взаимно уничтожаться, а затем снова появляться.

Почти все доказанные далее теоремы могут быть легко поняты с этой точки зрения, несмотря на то что они формулируются в довольно общей и абстрактной форме.

ГЛАВА IV. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ ЗАРЯДОВ

§ 14. *Введение*

1°. Прежде всего мы напомним те результаты из предыдущих глав настоящей статьи, которые будут играть основную роль в этой и последующих главах.

Под пространством R мы понимаем некоторое множество R, в котором заданы замкнутые множества F, удовлетворяющие следующим условиям:

1) R и пустое множество $\varnothing$ являются замкнутыми,

2) пересечение счетного семейства замкнутых множеств замкнуто, и

3) объединение двух замкнутых множеств замкнуто.

Открытые множества G определяются как дополнения к замкнутым множествам. Функция $f(x)$, определенная на R, называется *непрерывной*, прообраз замкнутого множества прямой (f отображает R в числовую прямую) является замкнутым [1]. Называем пространство *нормальным*, если для любых двух замкнутых множеств, не имеющих общих точек, всегда существуют содержащие их два открытых множества, также не имеющих общих точек. В нормальном пространстве для любых двух замкнутых множеств F_0 и F_1, не имеющих общих точек, всегда существует «разделяющая» их функция, т. е. такая непрерывная функция $f(x)$, что $0 \leqslant f \leqslant 1$ и $f(x) = 0$ на F_0, $f(x) = 1$ на F_1 (см. § 1).

Под *линейным функционалом* $L(f)$ в R мы понимаем функционал, определенный на непрерывных ограниченных функциях в R, принимающий вещественные значения и удовлетворяющий двум условиям:

1) $L(f + g) = L(f) + L(g)$ и

2) $|L(f)| \leqslant N \sup\limits_R f(x)$, где N не зависит от f.

---

[1] В дальнейшем F и G обозначают всегда замкнутое и открытое множества из рассматриваемого пространства; E обозначает произвольное множество из алгебры, порожденной замкнутыми множествами. Все функции, с которыми мы будем далее встречаться, предполагаются непрерывными и ограниченными. Символы F, G, E и термин «функция» будут далее употребляться в указанном выше смысле без явных указаний на это соглашение.

Под *зарядом* в R мы понимаем функцию множеств $\mu(E)$, заданную на алгебре множеств, порожденной замкнутыми множествами пространства R, и удовлетворяющую следующим условиям:

1) аддитивность, т. е. $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$, если $E_1 \cap E_2 = \varnothing$,

2) ограниченность, т. е. $\mu(E) \leqslant N$, где N не зависит от E, и

3) регулярность, т. е. для любого E и любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F \subset E$, такое, что $|\mu(E) - \mu(F)| < \varepsilon$.

Любой заряд является разностью двух положительных[2)] зарядов: его положительной и отрицательной части: $\mu(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E)$, где по определению

$$\mu^+(E) = \sup_{E' \subset E} \mu(E'), \quad \mu^-(E) = -\inf_{E' \subset E} \mu(E'), \tag{1}$$

или, применяя условие регулярности:

$$\mu^+(E) = \sup_{F \subset E} \mu(F), \quad \mu^-(E) = -\inf_{F \subset E} \mu(F), \tag{2}$$

см. теорему 2, § 6.

Мы имеем следующую фундаментальную теорему:

Теорема 1. *В нормальном пространстве R для любого линейного функционала $L(f)$ существует однозначно определенный в R заряд $\mu(E)$, такой, что*[3)]

$$L(f) = \int_R f(x)\mu(dE). \tag{3}$$

Эта теорема была доказана в § 7; здесь мы дополним ее следующей леммой, которая будет применяться в дальнейшем.

Мы будем говорить, что функция $f(x)$ *подчинена* множеству M, если она непрерывна, положительна, не превосходит единицы и зануляется вне M.

Лемма 1. *Положительную и отрицательную часть заряда $\mu(E)$ можно определить с помощью соответствующего линейного функционала*

$$L(f) = \int_R f(x)\mu(dE)$$

следующим образом: для любого открытого множества G

$$\mu^+(G) = \sup_{S(G)} \int_R f(x)\mu(dE), \quad \mu^-(G) = -\inf_{S(G)} \int_R f(x)\mu(dE); \tag{4}$$

[2)] Напомним, что в оригинальной статье использован термин «non-negative», который в настоящем издании всюду переведен как «положительный». — *Прим. ред.*

[3)] Здесь, как и всюду в этой статье, интеграл понимается в смысле Лебега — Радона.

где $S(G)$ — семейство всех функций, подчиненных G.

Пусть $F \subset G$ такое, что

$$\mu^+(G) - \mu(F) < \varepsilon, \tag{5}$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно. Из (2) следует, что такое F существует.

Из регулярности заряда следует, что существует такое открытое множество $G_1 \supset F$, что $G_1 \subset G$ и для любого $E \subset G_1 \diagdown F$ имеет место

$$|\mu(E)| < \varepsilon \quad (E \subset G_1 \diagdown F) \tag{6}$$

(см. § 6, теорема 4). Пусть функция $f(x)$ разделяет $R \diagdown G$ и F; тогда

$$\int\limits_R f(x)\mu(dE) = \int\limits_F f(x)\mu(dE) + \int\limits_{G_1 \diagdown F} f(x)\mu(dE) < \mu(F) + 2\varepsilon, \tag{7}$$

так как $f(x) = 1$ на F, $f(x) = 0$ на $R \diagdown G_1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ на $G_1 \diagdown F$ и, кроме этого, мы имеем неравенство (6).

Из неравенств (5) и (7) получаем, что

$$\mu^+(G) < \int\limits_E f(x)\mu(dE) + 3\varepsilon. \tag{8}$$

В то же самое время для любой функции $g(x)$, подчиненной множеству G, мы получаем

$$\int\limits_R g(x)\mu(dE) = \int\limits_G g(x)\mu^+(dE) - \int\limits_G g(x)\mu^-(dE),$$

так как $g(x) = 0$ вне G и $\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E)$. Но, так как $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ и $\mu^+(E)$, $\mu^-(E)$ положительны, то

$$\int\limits_R g(x)\mu(dE) \leqslant \int\limits_G g(x)\mu^+(dE) \leqslant \mu^+(dE). \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует первое равенство (4). Второе равенство доказывается в точности так же.

2°. Говорят, что последовательность линейных функционалов $L_n(f)$ сходится слабо, если для любой функции f, на которой функционалы L_n определены, числовая последовательность $L_n(f)$ сходится. Имеет место следующая фундаментальная теорема:

Нормы линейных функционалов, образующих слабо сходящуюся последовательность, ограничены в совокупности [4].

Отсюда сразу вытекает следующая важная теорема:

Предел слабо сходящейся последовательности линейных функционалов является линейным функционалом.

По теореме 1, каждому линейному функционалу в нормальном пространстве однозначным образом сопоставляется заряд. Таким образом, мы приходим к следующему определению слабой сходимости зарядов.

Определение 1. Будем говорить, что в нормальном пространстве R последовательность зарядов $\mu_1(E)$, $\mu_2(E)$, $\ldots$ *слабо сходится*, если для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$ на R существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_R f(x)\mu_n(dE).$$

Это означает, что последовательность соответствующих линейных функционалов сходится. Следовательно, благодаря теореме 1 и второй теореме о слабой сходимости линейных функционалов, мы приходим к следующей теореме:

Теорема 2. *В нормальном пространстве R для любой слабой сходящейся последовательности зарядов $\mu_n(E)$ существует единственным образом определенный заряд $\mu(E)$ — предел зарядов $\mu_n(E)$, такой, что для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$ на R имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_R f(x)\mu_n(dE)=\int\limits_R f(x)\mu(dE).$$

Мы говорим, что $\mu_n(E)$ слабо сходится к $\mu(E)$ и пишем $\mu_n(E) \underset{w}{\longrightarrow} \mu(E)$.

Так как теорема 1, вообще говоря, справедлива только в нормальных пространствах, слабо сходящаяся последовательность зарядов может иметь неединственный предел [5]. Поэтому мы ограничимся только рассмотрением слабой сходимости зарядов в нормальных пространствах и в дальнейшем под пространством мы всегда будем подразумевать нормальное пространство. Легко видеть, что норма линейного функционала равна вариации соответствующего ему заряда на всем пространстве (вариация определяется

[4] Доказательство даже более общего утверждения можно найти в книге [1]. Условие полноты пространства функций, на котором рассматриваемые функционалы определены, очевидно выполнено, так как мы имеем дело с пространством непрерывных функций и равномерной сходимостью.

[5] Априори она может вообще не иметь ни одного предела, но мы не располагаем соответствующим примером, однако у нас есть примеры, когда данному функционалу можно сопоставить не один, а много зарядов.

стандартным образом). Следовательно, благодаря первой из упомянутых выше теорем о слабой сходимости функционалов мы получаем следующее

Теорема 3. *Заряды в слабо сходящейся последовательности ограничены в совокупности.*

3°. Можно конечно определить понятие слабой сходимости для любых аддитивных функций множеств $\lambda(E)$, заданных на алгебре $\mathfrak{G}$, порожденной замкнутыми множествами, используя тот факт, что $\int f(x)\lambda(dE)$ — есть линейный функционал. Однако в линейном пространстве линейный функционал может быть выражен через единственным образом определенный заряд и, следовательно, мы можем взять вместо функции множеств $\lambda(E)$ соответствующий ей (или, как говорят, слабо эквивалентный ей) заряд $\mu(E)$.

Этот переход от $\lambda(E)$ к $\mu(E)$ можно осуществить в явном виде следующим образом. Функция множеств $\lambda(E)$ разлагается на свои положительную и отрицательную составляющие, что может быть сделано таким же способом, как и в случае зарядов. Затем положительная и отрицательная части заряда $\mu(E)$, слабо эквивалентного $\lambda(E)$, получаются из следующего условия: для любого замкнутого множества

$$\mu^+(F) = \inf_{G \supset F} \lambda^+(G), \quad \mu^-(F) = \inf_{G \supset F} \lambda^-(G). \tag{10}$$

На остальных множествах E, $\mu^+(E)$ и $\mu^-(E)$ определяются исходя из условия регулярности.

Мы не будем доказывать формулу (10), так как она в дальнейшем не понадобится; хотя ее доказательство довольно простое.

4°. Наше дальнейшее изучение слабой сходимости зарядов будет основываться на сведéнии ее к слабой сходимости функций ограниченной вариации. Это возможно благодаря следующей простой лемме.

Лемма 2. *Если $F \subset G$ и $g(x)$ — функция, разделяющая F и $R \diagdown G$, тогда полагая*

$$G_t = \{x : g(x) < t\}, \quad F_t = \{x : g(x) \leqslant t\} \tag{11}$$

и

$$\varphi(t) = \mu(G_t), \quad \psi(t) = \mu(F_t), \tag{12}$$

мы получаем функции ограниченной вариации.

Для любой ограниченной непрерывной функции $f(t)$, определенной на отрезке $[-1, 2]$, получаем

$$\int\limits_0^2 f(t)d\varphi(t) = \int\limits_R f\big(g(x)\big)\mu(dE), \quad \int\limits_{-1}^1 f(t)d\psi(t) = \int\limits_R f\big(g(x)\big)\mu(dE). \tag{13}$$

Достаточно рассмотреть функцию $\varphi(t)$, определенную первым способом, так как для второго определения все будет аналогично.

Если $\mu(E) < N$, то

$$\sum_i |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| = \sum_i |\mu(G_{t_i} \diagdown G_{t_{i-1}})| < 2N,$$

что можно увидеть, если сложить отдельно все положительные и все отрицательные выражения вида $\mu(G_{t_i} \diagdown G_{t_{i-1}})$. Следовательно, функция $\varphi(t)$ имеет ограниченную вариацию. Пусть теперь $f(t)$ — ограниченная непрерывная функция на отрезке $[0, 2]$; функция $\varphi(t)$ также определена на этом отрезке (так как $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$, то $G_t = R$ при $t > 1$ и $G_t = \varnothing$ при $t \leqslant 0$). Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 2$, тогда

$$\int_0^2 f(t) d\varphi(t) = \lim_{\max |t_1 - t_{i-1}| \to 1} \sum_{i=1}^n f(t_i)(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^n f(t_i) \mu(G_{t_i} \diagdown G_{t_{i-1}}). \tag{14}$$

Здесь $f(t_i)$ означает число, взятое из области значений функции $f(g(x))$ на множестве $G_{t_{i+1}} \diagdown G_{t_i}$. Хотя при $t_i > 1$ нет точек, для которых $g(x) = t_i$, зато в этом случае множества $G_{t_{i+1}} \diagdown G_{t_i}$ пусты.

Далее, из определения множеств G_t и непрерывности функции $f(t)$ следует, что вариация функции $f(g(x))$ на множествах $G_{t_i} \diagdown G_{t_{i-1}}$ стремится к нулю, когда $|t_i - t_{i-1}| \to 0$. Следовательно, предел правой части формулы (14) равен

$$\int_R f(x) \mu(dE),$$

что доказывает первое равенство формулы (13).

Мы выбрали верхний предел в первом интеграле из (13) равным 2 только ради определенности; нам необходимо только, чтобы он был больше 1. Действительно, если бы мы положили его равным 1, то последний член правой части формулы (14) имел бы вид $f(t_i)\mu(G_1 \diagdown G_{t_{i-1}})$ (наибольшее t_i было бы равно 1). Однако $G_1 = \{x : g(x) < 1\} \subset G$ и мы бы тогда не смогли распространить интегрирование на все пространство R. Аналогичная причина заставляет нас полагать нижний предел в интеграле по $d\psi(t)$ (во втором из равенств (13)) равным -1. Иначе мы бы при интегрировании не учли ту часть пространства R, которая относится к множеству $F_0 = \{x : g(x) \leqslant 0\}$.

Так как $\varphi(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $\psi(t) = 1$ при $t \geqslant 1$, то для любой непрерывной функции $f(t)$, определенной на отрезке $[-1, 2]$, мы имеем

$$\int_0^2 f(t) d\varphi(t) = \int_{-1}^2 f(t) d\varphi(t), \quad \int_{-1}^1 f(t) d\psi(t) = \int_{-1}^2 f(t) d\psi(t),$$

так что в обеих случаях мы можем брать одинаковые пределы.

Из леммы 2 непосредственно следует

Лемма 3. *Пусть* $\mu_n(E) \underset{w}{\longrightarrow} \mu(E)$. *Для любой пары множеств* $F \subset G$ *определим функции* $\varphi_n(t)$ *и* $\varphi(t)$ [*или* $\psi_n(t)$, $\psi(t)$] *соответствующие функциям множеств* $\mu_n(E)$ *и* $\mu(E)$ *согласно лемме 2. Тогда* $\varphi_n(t) \underset{w}{\longrightarrow} \varphi(t)$, *т. е. для любой непрерывной функции* $f(t)$ *мы имеем*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^2 f(t) d\varphi_n(t) = \int\limits_0^2 f(t) d\varphi(t),$$

и аналогично для функций $\psi_n(t)$ *и* $\psi(t)$.

§ 15. *Общий критерий слабой сходимости зарядов*

1°. Нам необходима следующая теорема Хелли ([2], см. также гл. IV в [3]): *из любого семейства функций ограниченной вариации, определенных на отрезке* $[a, b]$, *вариации которых ограничены в совокупности, можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой функции ограниченной вариации и, в то же самое время, сходится к этой же функции всюду, за исключением счетного числа точек;* в частности, эта подпоследовательность сходится на концах отрезка $[a, b]$.

Мы будем также применять следующее предложение: *если для любой непрерывной функции* $f(t)$ *выполняется*

$$\int\limits_a^b f(t) d\varphi(t) = \int\limits_a^b f(t) d\psi(t), \tag{1}$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — *функции ограниченной вариации и* $\varphi(a) = \psi(a)$, *то* $\varphi(t) = \psi(t)$ *во всех точках непрерывности функций* $\varphi(t)$, $\psi(t)$, т. е. это свойство выполняется всюду, за исключением, быть может, счетного множества точек. Обратно, если $\varphi(t) = \psi(t)$ всюду, за исключением, возможно, счетного множества точек, то выполняется равенство (1).

Лемма 1. *Если последовальность функции* $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$, *имеющих ограниченную вариацию на отрезке* $[a, b]$, *слабо сходится и если* $\varphi_1(a) = \varphi_2(a) = \ldots$, *то для любого отрезка* $[t_1, t_2]$ $(a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b)$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует* n, *такое, что для всех* $m, k \geqslant n$

$$\inf_{t_1 < t < t_2} |\varphi_m(t) - \varphi_k(t)| < \varepsilon.$$

Допустим, что это не верно. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность пар $\varphi_{m_i}(t)$, $\varphi_{k_i}(t)$, такие, что для всех t из некоторого интервала (t_1, t_2) имеет место неравенство

$$|\varphi_{m_i}(t) - \varphi_{k_i}(t)| > \varepsilon. \tag{2}$$

Очевидно, можно предполагать, что вариации функций $\varphi_n(t)$ ограничены в совокупности[6)]. Следовательно, по теореме Хелли можно из последовательности пар $\varphi_{m_i}(t)$, $\varphi_{k_i}(t)$ выбрать такую подпоследовательность пар $\varphi_{m_{i_j}}(t)$, $\varphi_{k_{i_j}}(t)$, что эти функции будут слабо сходиться и, кроме того, будут сходиться к некоторым функциям $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$ всюду, за исключением, возможно, счетного множества точек. Однако по условиям леммы вся последовательность $\varphi_n(t)$ слабо сходится и $\varphi_1(a) = \varphi_2(a) = \ldots$. Поэтому, исходя из сделанного выше замечания, мы можем, изменяя значения функций $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$ в не более чем счетном множестве точек, сделать их равными друг другу: $\varphi'(t) = \varphi''(t) = \varphi(t)$.

Но, по самому определению функций $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, в отрезке $[t_1, t_2]$ должны существовать такие t, что

$$\varphi(t) = \lim_{j\to\infty} \varphi_{m_{i_j}}(t), \quad \varphi(t) = \lim_{j\to\infty} \varphi_{k_{i_j}}(t).$$

Для этих t можно найти такое j_0, что $|\varphi_{m_{i_j}}(t) - \varphi_{k_{i_j}}(t)| < \varepsilon$ при $j > j_0$. Однако это противоречит предполагаемому неравенству (2), что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Если $\varphi_n(E) \underset{w}{\longrightarrow} \varphi(t)$ и $\varphi_n(a) \to \varphi(a)$, то на любом интервале (t_1, t_2) $(a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b)$ мы имеем*

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{t_1<t<t_2} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| = 0.$$

Предположим противное. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$ и такая последовательность $\varphi_{n_i}(t)$, что для всех t из интервала (t_1, t_2) мы имеем $|\varphi_{n_i}(t) - \varphi(t)| > \varepsilon$. Тогда по теореме Хелли мы можем выбрать подпоследовательность $\varphi_{n_{i_j}}(t)$, которая сходится всюду, за исключением счетного множества точек, к функции ограниченной вариации $\psi(t)$ и, в то же самое время, слабо сходится к $\psi(t)$. Но так как $\varphi_n(a) \to \varphi(a)$, то, после изменения функции $\psi(t)$ в не более чем счетном множестве точек, можно получить

[6)] Это сразу следует из общей теоремы об ограниченности норм линейных функционалов, образующих слабо сходящуюся последовательность. Нормы линейных функционалов $\int f(t) d\varphi_n(t)$ совпадают с так называемыми усеченными вариациями функций $\varphi_n(t)$. Полагая в точках разрыва $\varphi'_n(t) = \varphi_n(t+0)$, мы получаем функции, вариации которых равны усеченным вариациям функций $\varphi_n(t)$. Поэтому изменение значений функций в точках разрыва не может повлиять на результат.

равенство $\varphi(t) = \psi(t)$. Следовательно, в интервале (t_1, t_2) найдется такое t, что при достаточно больших j получим $|\varphi_{n_{i_j}} - \varphi(t)| < \varepsilon$, что противоречит первоначальному предположению.

2°. Теорема 1. *Для того чтобы последовательность зарядов $\mu_n(E)$ была слабо сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы все $\mu_n(E)$ были равномерно ограничены и чтобы для любого замкнутого множества F_0 и содержащего его открытого множества G_0 существовало, при любом $\varepsilon > 0$, такое n, что для всех $m, r > n$ выполняется*

$$\inf_{F_0 \subset G \subset G_0} |\mu_m(G) - \mu_k(G)| < \varepsilon. \tag{3}$$

В терминах дополнений к рассматриваемым множествам этот критерий может быть заменен на следующий: для любых $F_0 \subset G_0$ и $\varepsilon > 0$ существует такое n, что для всех $m, k > n$ выполняется

$$\inf_{F_0 \subset F \subset G_0} |\mu_m(F) - \mu_k(F)| < \varepsilon.$$

Необходимость условия равномерной ограниченности была установлена в теореме 3, § 14. Осталось доказать необходимость второго условия.

Для данной пары множеств $F_0 \subset G_0$ и некоторой функции $g(x)$, разделяющей F_0 и $R \diagdown G_0$, мы определим, согласно лемме 2, § 14, множества $G_t = \{x : g(x) < t\}$ и функции ограниченной вариации $\varphi_n(t) = \mu_n(G_t)$, $n = 1, 2, \ldots,\ 0 \leqslant t \leqslant 2$. Если заряды $\mu_n(E)$ слабо сходятся, то функции $\varphi_n(t)$ тоже слабо сходятся (по лемме 3, § 14). Так как $G_0 = \varnothing$, то для всех n получаем $\varphi_n(0) = 0$. По лемме 1 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что для все $m, k > n$ имеем

$$\inf_{0 < t < 1} |\varphi_m(t) - \varphi_k(t)| < \varepsilon.$$

Подставляя сюда $\mu_n(G_t)$ вместо $\varphi_n(t)$, получаем неравенство (3), так как при $0 < t < 1$ выполняются включения $F_0 \subset G_t \subset G_0$.

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и $|f(x)| < N$. Пусть $\mu_n(E) < M$, $n = 1, 2, \ldots$. Для заданного $\varepsilon > 0$ положим $G_p = \{x : f(x) < p\varepsilon\}$, $F_p = \{x : f(x) \leqslant p\varepsilon\}$, где p — целое число. Так как $|f(x)| < N$, то можно ограничиться такими p, для которых

$$-\frac{N}{\varepsilon} - 1 < p < \frac{N}{\varepsilon} + 1.$$

Так как для любого p имеет место $G_p \subset F_p \subset G_{p+1}$, то для любой пары множеств G_p, G_{p+1} можно найти по условию теоремы такое n_p, что при

$m, k > n_p$ существует G_p^{mk}, для которого $G_p \subset G_p^{mk} \subset G_{p+1}$ (мы могли бы даже положить $F_p \subset G_p^{mk} \subset G_{p+1}$) и

$$|\mu_m(G_p^{mk}) - \mu_k(G_p^{mk})| < \varepsilon^2. \tag{4}$$

Полагая n равным наибольшему из всех номеров n_p, мы можем считать, что при $m, k > n$ неравенство (4) будет выполняться для всех p.

Так как $G_{p+1} \supset G_p^{mk} \supset G_p$, $G_p \supset G_{p-1}^{mk} \supset G_{p-1}$, то

$$G_p^{mk} \diagdown G_{p-1}^{mk} \subset G_{p+1} \diagdown G_{p-1}. \tag{5}$$

Так как по построению множеств G_p имеем $f(x) < (p+1)\varepsilon$ на G_{p+1} и $f(x) > (p-1)\varepsilon$ вне G_{p-1}, мы из (5) получаем $(p-1)\varepsilon \leqslant f(x) < (p+1)\varepsilon$ для $x \in G_p^{mk} \diagdown G_{p-1}^{mk}$.

Следовательно, для всех $m, k > n$ и для всех i выполняется

$$\left| \int\limits_R f(x)\mu_i(dE) - \sum_p p\varepsilon\mu_i(G_p^{mk} \diagdown G_{p-1}^{mk}) \right| \leqslant 2M\varepsilon, \tag{6}$$

так как из $|\mu_i(F)| < M$ следует, что вариация $|\mu_i|(F) \leqslant 2M$.

С другой стороны, из неравенства (4) получаем, что для всех $m, k > n$

$$\begin{aligned} \left| \sum_p p\varepsilon\mu_m(G_p^{mk} \diagdown G_{p-1}^{mk}) - \sum_p p\varepsilon\mu_k(G_p^{mk} \diagdown G_{p-1}^{mk}) \right| \leqslant \\ \leqslant \left| \sum_p p\varepsilon\big(\mu_m(G_p^{mk}) - \mu_k(G_p^{mk})\big) \right| + \\ + \left| \sum_p p\varepsilon\big(\mu_m(G_{p-1}^{mk}) - \mu_k(G_{p-1}^{mk})\big) \right| < 2\varepsilon^2 \sum_p |p|\varepsilon. \end{aligned} \tag{7}$$

Так как $|p| < \frac{N}{\varepsilon} + 1$, то $|p|\varepsilon < N + 1$, и поэтому

$$\sum_{|p| < \frac{N}{\varepsilon} + 1} |p|\varepsilon < 2(N+1)\left(\frac{N}{\varepsilon} + 1\right) < \frac{2(N+1)^2}{\varepsilon}.$$

Значит, из неравенств (7) следует, что

$$\left| \sum_p p\varepsilon\mu_m(G_p^{mk} \diagdown G_{p-1}^{mk}) - \sum_p p\varepsilon\mu_k(G_p^{mk} \diagdown G_{p-1}^{mk}) \right| \leqslant 4(N+1)^2\varepsilon. \tag{8}$$

Комбинируя это неравенство с неравенством (6), мы получаем, что как только $m, k > n$, имеет место неравенство

$$\left| \int\limits_R f(x)\mu_m(dE) - \int\limits_R f(x)\mu_k(dE) \right| < \bigl(2M + 4(N+1)^2\bigr)\varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\mu_i(E)$ слабо сходится.

Теорема 2. *Для того чтобы последовательность зарядов слабо сходилась к заряду $\mu(E)$, необходимо и достаточно, чтобы все $\mu_n(E)$ были равномерно ограничены и чтобы для любого замкнутого множества F_0 и содержащего его замкнутого множества G_0 выполнялось*

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{F_0 \subset G \subset G_0} |\mu_n(G) - \mu(G)| = 0.$$

Доказательство необходимости условий этой теоремы отличается от аналогичного доказательства предыдущей теоремы только тем, что вместо леммы 1 применяется лемма 2. Доказательство достаточности тоже близко к ее доказательству в предшествующей теореме: все изменения сводятся к формальному удалению из всех формул индекса k.

Теорема о слабой сходимости функций ограниченной вариации, аналогичная теореме 2, была доказана А. Н. Колмогоровым, см. с. 157 в [3].

§ *16. Слабая сходимость положительных зарядов*

Мы начнем с теоремы о произвольных, не обязательно положительных, зарядах.

Теорема 1. *Если $\mu_n(E) \underset{w}{\longrightarrow} \mu(E)$, то для любого открытого множества G*

$$\mu^+(G) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \mu_m^+(G), \quad \mu^-(G) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \mu_m^-(G). \tag{1}$$

Пусть даны открытое множество G и $\varepsilon > 0$. По лемме 1, § 14 существует такая функция $f(x)$, подчиненная множеству G, что

$$\int\limits_R f(x)\mu(dE) > \mu^+(G) - \varepsilon. \tag{2}$$

В то же самое время, очевидно, имеем

$$\int\limits_R f(x)\mu_m(dE) \leqslant \mu_m^+(G). \tag{3}$$

Так как $\mu_m(E) \underset{w}{\longrightarrow} \mu(E)$, то, начиная с некоторого $m(\varepsilon)$, будем иметь

$$\int\limits_R f(x)\mu_m(dE) > \int\limits_R f(x)\mu(dE) - \varepsilon. \tag{4}$$

Сопоставляя формулы (2)–(4) видим, что при $m > m(\varepsilon)$ имеет место неравенство $\mu^+(G) - 2\varepsilon < \mu_m^+(G)$, из которого вытекает первая формула (1). Вторая формула доказывается в точности так же.

Теорема 2. *Для того чтобы последовательность положительных зарядов $\mu_m(E)$ слабо сходилась к $\mu(E)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_m(R) = \mu(R)$ и для любого открытого множества G*

$$\mu(G) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \mu_m(G); \tag{5}$$

или для любого замкнутого множества

$$\mu(F) \geqslant \varlimsup_{m\to\infty} \mu_m(F). \tag{6}$$

Условия (5) и (6) полностью эквивалентны друг другу, что можно легко заметить, переходя к дополнениям множеств.

Необходимость условия (5) доказана в теореме 1. Необходимость условия $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_m(R) = \mu(R)$ очевидно следует из того факта, что $\mu(R)$ есть интеграл по мере $\mu(E)$ от функции тождественно равной единице, и то же самое можно сказать про $\mu_m(E)$.

Переходим к доказательству того, что условия теоремы являются достаточными.

Прежде всего заметим, что заряд $\mu(E)$ положителен. Действительно, заряды $\mu_m(E)$ положительны по предположению и поэтому из условия (6) следует $\mu(F) \geqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(F) \geqslant 0$, и для любого множества E существует, при любом $\varepsilon > 0$, такое множество $F \subset E$, что $|\mu(E) - \mu(F)| < \varepsilon$; так что $\mu(E) \geqslant 0$.

Пусть теперь функция $f(x)$ непрерывна и $|f(x)| \leqslant N$. Положим $F_t = \{x : f(x) \leqslant t\}$ и

$$\varphi_n(t) = \mu_n(F_t); \quad \varphi(t) = \mu(F_t). \tag{7}$$

Так как заряды $\mu_n(E)$ и $\mu(E)$ положительны, то эти функции монотонны.

Условие (6) влечет

$$\varlimsup_{n\to\infty} \varphi_n(t) \leqslant \varphi(t). \tag{8}$$

Если положим $G_t = \{x : f(x) < t\}$, то из положительности заряда $\mu(E)$ мы очевидно имеем $\mu(F_t) \geqslant \mu(G_t) \geqslant \mu(F_{t_1})$ для всех $t_1 < t$; и аналогично для $\mu_n(E)$. Благодаря формуле (6) это дает $\mu(G_t) \geqslant \varphi(t-0)$ и $\mu_n(G_t) \leqslant \varphi_n(t)$.

Следовательно, из условия (5) мы получаем

$$\varphi(t-0) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \varphi_n(t). \tag{9}$$

Из определения множеств F_t и формулы (7) мы, в точности так же, как в лемме 2, § 14, получаем

$$\int\limits_R f(x)\mu(dE) = \int\limits_{-N}^{+N} t d\varphi(t)$$

и аналогично для $\mu_n(E)$. Интеграл берется от $-N$ до $+N$, так как $|f(x)| < N$ и, следовательно, $\varphi(t) = 0$ при $t \leqslant -N$, $\varphi(t) = \mu(R)$ при $t \geqslant N$.

Интегрирование по частям дает (так как $\varphi(-N) = 0$, $\varphi(N) = \mu(R)$)

$$\int\limits_R f(x)\mu(dE) = \mu(R) - \int\limits_{-N}^{+N} \varphi(t)\,dt$$

и аналогично для $\mu_n(E)$.

По предположению $\mu(R) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(R)$ и осталось показать, что

$$\int\limits_{-N}^{+N} \varphi(t)\,dt = \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_{-N}^{+N} \varphi_n(t)\,dt. \tag{10}$$

Условие (8) дает

$$\int\limits_{-N}^{+N} \varphi(t)\,dt \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \int\limits_{-N}^{+N} \varphi_n(t)\,dt. \tag{11}$$

Так как множество точек разрывности функции $\varphi(t)$ счетно, то

$$\int\limits_{-N}^{+N} \varphi(t)\,dt = \int\limits_{-N}^{+N} \varphi(t-0)\,dt,$$

и поэтому из условия (9) следует, что

$$\int\limits_{-N}^{+N} \varphi(t)\,dt \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_{-N}^{+N} \varphi_n(t)\,dt. \tag{12}$$

Это неравенство вместе с неравенством (11) дает равенство (10), ч. т. д.

Теорема 3. *Для того чтобы положительный заряд $\mu_m(E)$ слабо сходился к положительному заряду $\mu(E)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mu(G) = \lim_{m\to\infty} \mu_m(G) \tag{13}$$

для любого открытого множества G, такого, что существует замкнутое множество $F \supset G$, для которого $\mu(G) = \mu(F)$ [*в топологическом пространстве мы можем сказать: $\mu(G) = \mu(\overline{G})$, где черта означает замыкание*].

Необходимость. Пусть заряды μ_m положительны и слабо сходятся к $\mu(E)$. Пусть для множества G существует множество $F \supset G$, такое, что

$$\mu(F) = \mu(G). \tag{14}$$

По теореме 2

$$\varliminf_{m\to\infty} \mu_m(G) \geqslant \mu(G), \quad \varlimsup_{m\to\infty} \mu_m(F) \leqslant \mu(F). \tag{15}$$

В то же время, так как $F \supset G$ и заряды $\mu_m(F)$ положительны, то $\mu_m(G) \leqslant \mu_m(F)$ для всех m. Поэтому из (15) следует, что

$$\mu(G) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \mu_m(G) \leqslant \varlimsup_{m\to\infty} \mu_m(F) \leqslant \mu(F).$$

Следовательно, из (14) получаем, что $\mu(G) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu_m(G)$.

Достаточность. Пусть положительные заряды $\mu_m(E)$, $\mu(E)$ удовлетворяют условиям теоремы. Возьмем непрерывную ограниченную функцию $f(x)$, $|f(x)| < N$. Рассмотрим множества $G_t = \{x : f(x) < t\}$, $\quad F_t = \{x : f(x) \leqslant t\}$ и функцию $\varphi(t) = \mu(G_t)$. Так как заряд $\mu(E)$ положителен, то эта функция монотонна. Если она непрерывна в точке t, то очевидно $\mu(G_t) = \mu(F_t)$ (при $t'' > t'$ имеем $\mu(G_{t''}) \geqslant \mu(F_{t'}) \geqslant \mu(G_{t'})$; так как функция $\varphi(t)$ непрерывна в точке t', то $\mu(G_{t'}) = \lim\limits_{t''\to t'} \mu(G_{t''})$ и мы получаем $\mu(G_{t'}) = \mu(F_{t'})$). Так как монотонная функция не может иметь несчетное множество точек разрыва, мы можем выбирать точки t_i $(-N = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = N)$ так, чтобы они были точками непрерывности и чтобы $t_{i+1} - t_i < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда на каждом множестве $G_{t_{i+1}} \diagdown G_{t_i}$ функция $f(x)$ отличается от t_i не более чем на ε. Далее, так как R одновременно открыто и замкнуто, мы по условию имеем $\mu(R) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu_m(R)$ и, следовательно, все $\mu_m(R)$ ограничены, скажем, числом M: $\mu(R), \mu_m(R) < M$. Поэтому получаем

$$\begin{gathered} \left| \int\limits_R f(x)\mu(dE) - \sum_i t_i \mu(G_{t_{i+1}} \diagdown G_{t_i}) \right| < \varepsilon M, \\ \left| \int\limits_R f(x)\mu_m(dE) - \sum_i t_i \mu_m(G_{t_{i+1}} \diagdown G_{t_i}) \right| < \varepsilon M, \quad m = 1, 2, \dots . \end{gathered} \tag{16}$$

Так как $\mu(G_{t_i}) = \mu(F_{t_i})$, то по условию теоремы получаем

$$\lim_{m\to\infty} \mu_m(G_{t_i}) = \mu(G_{t_i}), \quad \lim_{m\to\infty} \mu_m(G_{t_{i+1}} \diagdown G_{t_i}) = \mu(G_{t_{i+1}} \diagdown G_{t_i}).$$

Поэтому из неравенств (16) следует, что, при достаточно больших m,

$$\left| \int\limits_R f(x)\mu_m(dE) - \int\limits_R f(x)\mu(dE) \right| < 3\varepsilon M, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Теорема 4. *Для того чтобы последовательность положительных зарядов $\mu_m(E)$ слабо сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого множества F_0 и содержащего его открытого множества G_0 существовало такое открытое множество G, что $F_0 \subset G \subset G_0$ и существует предел $\lim \mu_m(G)$.*

Необходимость. Если заряды $\mu_m(E)$ положительны и слабо сходятся, то они имеют предел $\mu(E)$: $\mu_m(E) \underset{w}{\longrightarrow} \mu(E)$, причем заряд $\mu(E)$ положителен. Для любой пары множеств $F_0 \subset G_0$ мы можем построить функцию $g(x)$, разделяющую F_0 и $R \diagdown G_0$ и можем положить $G_t = \{x : g(x) < t\}$, $F_t = \{x : g(x) \leqslant t\}$, $\varphi(t) = \mu(G_t)$. Для всех точек t, в которых $\varphi(t)$ непрерывна, выполняются равенства $\mu(G_t) = \mu(F_t)$ и, следовательно, по предыдущей теореме $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_m(G_t) = \mu(G_t)$.

В то же время $F_0 \subset G_t \subset G_0$, что завершает доказательство.

Достаточность условий теоремы следует из теоремы 1 предыдущего параграфа, так как они являются усилением условий той теоремы. Ограниченность зарядов $\mu_m(E)$ получается из того, что само R одновременно открыто и замкнуто; следовательно, по предположению, существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_m(R)$. Теперь из положительности зарядов сразу следует их равномерная ограниченность.

Мы можем очевидно переписать теорему 4 в следующем виде:

Теорема 5. *Для того чтобы положительные заряды $\mu_m(E)$ слабо сходились к $\mu(E)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого множества F_0 и содержащего его открытого множества G_0 существовало такое открытое множество G, что $F_0 \subset G \subset G_0$ и*

$$\mu(G) = \lim_{m\to\infty} \mu_m(G).$$

Можно отметить, что (как это ясно из приведенного выше построения множеств G) для любой функции $g(x)$, разделяющей множества F_0 и $R \diagdown G_0$, все множества $G_t = \{x : g(x) < t\}$ при всех значениях t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, за исключением, возможно, некоторого их счетного числа, удовлетворяют условию теоремы.

§ 17. *Слабая сходимость зарядов в* R^*

1°. Если в пространстве R мы объявим в качестве замкнутых множеств только функционально замкнутые множества, т. е. такие, которые являются множествами нулей непрерывных функций, то получится новое пространство, которое будем обозначать через R^*. Любая функция, непрерывная в R, будет также непрерывной в R^* и наоборот (см. § 1, теоремы 4 и 5). Следовательно, линейный функционал в R будет также линейным функционалом в R^*, и так как пространство R^* всегда нормально, то линейному функционалу в R^* сопоставляется однозначным образом заряд. В § 8 была доказана следующая теорема: *Пусть R — нормальное пространство, $\mathfrak{G}$ — алгебра множеств, порожденная функционально замкнутыми множествами. Любой заряд $\mu(E)$ в R определяет заряд в R^*, равный $\mu(E)$ на алгебре $\mathfrak{G}^*$. Обратно, для любого заряда $\mu^*(E^*)$ в R^* существует единственным образом определенный заряд в R, совпадающий с $\mu^*(E^*)$ на алгебре $\mathfrak{G}^*$.*

Благодаря этой теореме изучение слабой сходимости в нормальном пространстве R можно свести к изучению слабой сходимости зарядов в R^*, если мы интересуемся только ее поведением на множествах из алгебры $\mathfrak{G}^*$. По этой причине результаты данного параграфа можно применять к зарядам в любом нормальном пространстве. Однако мы будем иметь дело только с их поведением на множествах из алгебры $\mathfrak{G}^*$.

В дальнейшем R^* будет обозначать совершенно нормальное пространство (т. е. такое пространство, в котором любое замкнутое множество есть множество нулей некоторой непрерывной функции), F^*, G^*, E^* — соответственно функционально замкнутые, функционально открытые множества и множества, принадлежащие алгебре, порожденной множествами F^*.

2°. Наше исследование снова будет основываться на сведении слабой сходимости зарядов к слабой сходимости функций ограниченной вариации.

Лемма 1. *Пусть последовательность функций ограниченной вариации $\varphi_n(t)$, определенных на отрезке $[a,b]$, слабо сходится к функции $\varphi(t)$ и $\varphi_n(a) \to \varphi(a)$. Тогда для любого t_0 $(a \leqslant t_0 \leqslant b)$ существует последовательность $t_1, t_2, \ldots$, сходящаяся к t_0 справа (т. е. $t_n \geqslant t_0$, $n = 1, 2, \ldots$ и $t_n \to t_0$), и такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t_n) = \varphi(t_0 + 0).$$

Если $t_0 = b$, то лемма дает $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(b) = \varphi(b)$. Этот частный случай очевиден. В терминах зарядов это означает, что если $\mu_n(E) \underset{w}{\to} \mu(E)$, то $\mu_n(R) \to \mu(R)$. Следовательно, можно считать, что $t_0 < b$.

Для доказательства леммы рассмотрим такую последовательность $t^1 > t^2 > \ldots$, сходящуюся к t_0, что при $t_0 \leqslant t \leqslant t^n$ выполняется

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0 + 0)| < \frac{1}{n}. \tag{1}$$

По лемме 2, § 15 мы можем найти номера m_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, такие, что при $m > m_n$ справедливо неравенство

$$\inf_{t_0 \leqslant t \leqslant t^n} |\varphi_m(t) - \varphi(t)| < \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Можно очевидно считать, что $m_{n+1} > m_n$. Для каждого m, лежащего между m_n и m_{n+1} $(m_n < m \leqslant m_{n+1})$, выберем точку t_m из отрезка $[t_0, t^n]$, так, чтобы

$$|\varphi_m(t_m) - \varphi(t_m)| < \frac{1}{n} \qquad (t_0 < t_m < t^n).$$

Это возможно благодаря неравенству (2).

В этом случае мы получаем из (1), что

$$|\varphi_m(t_m) - \varphi(t_0 + 0)| < \frac{2}{n} \qquad (m_{n+1} \geqslant m > m_n).$$

Но, если выбор точек t_m провести для всех интервалов $m_{k+1} \geqslant m > m_k$, то это неравенство будет выполняться для всех $m > m_n$, так как $1/k \leqslant 1/n$ при $k \geqslant n$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(t_m) = \varphi(t_0 + 0)$$

и, так как $t_0 \leqslant t_m \leqslant t^n$ при $m > m_n$ и $t_n \to t_0$, то лемма доказана.

Факт, установленный в этой лемме, можно объяснить, сказав, что если $\varphi_n(t) \underset{w}{\longrightarrow} \varphi(t)$, то $\varphi_n(t)$ сходится к $\varphi(t)$ справа. Такое объяснение кажется более естественным. Мы покажем далее, что условие сходимости справа является также достаточным для слабой сходимости (конечно, при условии равномерной ограниченности усеченных вариаций).

Мы покажем на примере, что последовательность t_1, t_2, ... , фигурирующую в лемме 1, вообще говоря, нельзя выбрать монотонной [7].

Рассмотрим последовательность ступенчатых функций на отрезке $[0, 1]$, разбитую на последовательность из конечных семейств. В первом семействе будет одна функция, во втором — три, ... , в n-м семействе — $2n - 1$ функций. Функции в n-м семействе мы будем обозначать через $\varphi_m^n(t)$, где m — текущий номер в n-м семействе функций из последовательности. Пусть

$$\varphi_m^n(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{m-1}{2n} \leqslant 1 - t \leqslant \frac{m+1}{2n}; \\ \\ 0, & \text{если } 1 - t > \frac{m+1}{2n} \quad \text{или } 1 - t < \frac{m-1}{2n}. \end{cases}$$

[7] Ниже мы покажем, что если функции $\varphi_n(t)$ монотонны, то последовательность t_1, t_2, ... можно выбрать монотонной. Приведенный здесь пример показывает, что такая модификация леммы 1 невозможна для немонотонных $\varphi_n(t)$.

Такая последовательность слабо сходится к функции, тождественно равной нулю.

Возьмем, например, $t_0 = 1/2$ и потребуем, чтобы номера функций из последовательности и соответствующие номера значений t_n^m, фигурирующих в лемме 1, были настолько большими, что

$$\left|\varphi_m^n(t_n^m) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right| = |\varphi_m^n(t_n^m)| < \frac{1}{2}.$$

Тогда из определения функции $\varphi_n^1(t)$ получаем

$$t_n^1 < 1 - \frac{1}{n},$$

а если мы требуем, чтобы последовательность чисел t_n^m была монотонной, то

$$t_n^2 < t_n^1 < 1 - \frac{1}{n},$$

и точно так же из определения функции $\varphi_n^2(t)$ получаем

$$t_n^2 < 1 - \frac{3}{2n}.$$

Рассуждая далее тем же способом, в конце концов мы получим неравенство $t_n^{2n-1} < 0$, что невозможно.

Для того чтобы иметь возможность применять лемму 1 к зарядам в R^*, мы докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть $\mu(E^*)$ — заряд в R^*. Для любой пары множеств F^*, F_1^*, не имеющих общих точек, существует разделяющая их функция $f(x)$, такая, что если мы положим $F_t^* = \{x : f(x) < t\}$, то*

$$\lim_{t\to 0}\mu(F_t^*) = \mu(F^*).$$

По теореме 4, § 6 существуют множества $G_n^* \supset F_0^*$, такие, что для любого E^*, лежащего между F_0^* и G_n^* (т. е. $F_0^* \subset E^* \subset G_n^*$), выполняются неравенства $|\mu(E^*) - \mu(F_0^*)| < 1/n$. Если мы пересечем все эти G_n^* с множеством $R^* \diagdown F_1^*$ и заменим далее каждое G_n^* на его пересечение со всеми предыдущими G_m^*, то получим убывающую последовательность множеств G^{*n}. По лемме 6, § 1 множество F_0^* является пересечением последовательности функционально открытых множеств. Образуем теперь пересечения множеств G^{*n} и множеств этой последовательности, имеющих одинаковые номера. В результате всех этих операций мы получим последовательность множеств, которую снова обозначим через G_n^*, обладающих следующими свойствами:

1) $F_0^* \subset G_n^* \subset R \diagdown F_1^*$,
2) $G_n^* \supset G_{n+1}^*$,
3) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n^* = F_0^*$,
4) если $F_0^* \subset E^* \subset G_n^*$, то $|\mu(E^*) - \mu(F_0^*)| < 1/n$.

К множествам G_n^* мы добавим в качестве G_0^* множество $R \diagdown F^*$.

Пусть теперь $g_n(x)$ — функция, разделяющая $R \diagdown G_n^*$ и F_0^* (т. е. такая, что $0 \leqslant g_n(x) \leqslant 1$, $\{x : g_n(x) = 0\} = R \diagdown G_n^*$, $\{x : g_n(x) = 1\} = F_0^*$). Положим

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n(x). \tag{3}$$

Эта функция непрерывна и, так как $0 \leqslant g_n(x) \leqslant 1$, то $0 \leqslant g(x) \leqslant 2$. Так как $\{x : g_n(x) > 0\} = G_n^*$ и $G_n^* \supset G_{n+1}^*$, то

$$\{x : g(x) = 0\} = R \diagdown G^* = F_1^*. \tag{4}$$

Для любого n имеем $\{x : g_n(x) = 1\} = F_0^*$. В то же время, если $x \notin F_0^*$, то существует множество G_n^*, также не содержащее x, и тогда для всех $m \geqslant n$ имеем $g_m(x) = 0$. Следовательно,

$$\{x : g(x) = 2\} = F_0^*. \tag{5}$$

Если теперь положить

$$f(x) = 1 - \frac{g(x)}{2},$$

то получим требуемую функцию.

В самом деле, благодаря соотношениям (3)–(5), эта функция разделяет F_0^* и F_1^*. Далее, из определения функций $g_n(x)$ мы имеем $g_n(x) = 0$ при $x \notin G_m^*$ для всех $n \geqslant m$ (так как при этом $G_n^* \subset G_m^*$). Значит, если $x \notin G_m^*$, то

$$g(x) \leqslant \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right).$$

Следовательно, если $x \notin G_m^*$, то $f(x) \geqslant 1/2^{m+1}$. Из этого видно, что если мы положим $F_t^* = \{x : f(x) \leqslant t\}$, то при $t \leqslant 1/2^{m+1}$ будем иметь

$$F_t^* = \left\{x : f(x) \leqslant \frac{1}{2^{m+1}}\right\} \subset G_m^*,$$

а отсюда, благодаря четвертому свойству множеств G_n^*, получаем

$$\lim_{t \to 0} \mu(F_t^*) = \mu(F_t^*).$$

3°. Теорема 1. *Для того чтобы заряды $\mu_n(E^*)$ в R^* слабо сходились к заряду $\mu(E^*)$ в R^*, необходимо и достаточно, чтобы заряды $\mu_n(E^*)$ были равномерно ограничены и чтобы для любого замкнутого множества F_0^* и содержащего его функционально открытого множества G_0^* существовала последовательность функционально замкнутых множеств F_n^*, такая, что 1) $F_0^* \subset F_n^* \subset G_0^*$, 2) для любого n существует такое m, что $F_{n+k}^* \subset F_n^*$ при $k \geqslant m$, 3) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n^* = F_0^*$ и 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(F_n^*) = \mu(F_0^*)$.*

Эта теорема может быть просто проинтерпретирована следующим образом: множества F_n^*, сходящиеся к F_0^* сверху, ведут себя так, что они перемещают и содержащийся внутри себя заряд к его предельному значению.

Необходимость равномерной ограниченности зарядов $\mu_n(E^*)$ уже доказана. Пусть $\mu_n(E^*) \underset{w}{\longrightarrow} \mu(E^*)$. Пусть далее множество F_0^* функционально замкнуто, а множество $G_0^* \supset F_0^*$ функционально открыто. По лемме 2 существует такая функция $f(x)$, разделяющая F_0^* и $R \diagdown G_0^*$, что если мы положим $F_t^* = \{x : F(x) \leqslant t\}$, то

$$\lim_{t\to 0} \mu(F_t^*) = \mu(F_0^*). \tag{6}$$

Пусть

$$\mu(F_t^*) = \varphi(t), \quad \mu_n(F_t^*) = \varphi_n(t). \tag{7}$$

По лемме 2, § 14 эти функции имеют ограниченные вариации и $\varphi_n(t) \underset{w}{\longrightarrow} \varphi(t)$. Поэтому по лемме 1 существует стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $t_1, t_2, \ldots$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t_n) = \varphi(+0).$$

Но из (6), (7) следует, что $\varphi(+0) = \mu(F_0^*)$ и $\varphi_n(t_n) = \mu_n(F_{t_n}^*)$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(F_{t_n}^*) = \mu(F_0^*)$$

и последовательность множеств $F_{T_n}^*$ теперь в точности такая, какая требуется в теореме.

Достаточность[8]. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и $|f(x)| < N$. Далее, пусть $|\mu_n(E)|, |\mu(E)| < M$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Для заданного $\varepsilon > 0$ положим $F_p^* = \{x : f(x) \leqslant p\varepsilon\}$, $G_p^* = \{x : f(x) < p\varepsilon\}$. Начиная с этого момента p обозначает целое число и, так как $|f(x)| < N$, можно считать, что

$$-\frac{N}{\varepsilon} - 1 < p \leqslant \frac{N}{\varepsilon} + 1.$$

[8] Доказательство почти дословно повторяет доказательство достаточности условий теоремы 1, § 16.

Из определения интеграла мы получаем

$$\left|\int\limits_R f(x)\mu(dE) - \sum_p p\varepsilon\mu(F_p^*\diagdown F_{p-1}^*)\right| < 2M\varepsilon. \tag{8}$$

С другой стороны, по условию теоремы для любой пары множеств F_p^* и G_{p+1}^* существует номер n_0, такой, что для всех $n > n_0$ существует такое множество F_p^{*n}, что $F_p^* \subset F_p^{*n} \subset G_{p+1}^*$ и

$$|\mu(F_p^*) - \mu(F_p^{*n})| < \varepsilon^2. \tag{9}$$

Очевидно можно выбрать номер n_0 одним и тем же для всех p. Так как $|p\varepsilon| < N$, то для $n \geqslant n_0$ получаем, благодаря (9), что

$$\left|\sum_p p\varepsilon\mu(F_p^*\diagdown F_{p-1}^*) - \sum_p p\varepsilon\mu_n(F_p^{*n}\diagdown F_{p-1}^{*n})\right| < 4(N+1)^2\varepsilon. \tag{10}$$

Так как $F_{p-1}^* \subset F_{p-1}^{*n} \subset F_p^{*n} \subset F_{p+1}^{*n}$, то вариация функции $f(x)$ на множестве $F_p^{*n}\diagdown F_{p-1}^{*n}$ не превосходит 2ε. Значит, для всех n получаем

$$\left|\int\limits_R f(x)\mu_n(dE) - \sum_p p\varepsilon\mu(F_p^{*n})\diagdown F_{p-1}^{*n}\right| < 2M\varepsilon. \tag{11}$$

Комбинируя теперь (8)–(10), мы получим, что для всех $n > n_0$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_R f(x)\mu(dE) - \int\limits_R f(x)\mu_n(dE)\right| < 4(M+(N+1)^2)\varepsilon, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Теорему 1 можно переформулировать очевидным образом, переходя к дополнениям всех множеств, которые там встречаются. Тогда получается, что для любого функционально открытого множества существует последовательность функционально открытых множеств, сходящихся к нему изнутри; образно говоря, они выталкивают из него все излишки заряда.

4°. Теорема 1 допускает обобщение на произвольные множества из алгебры множеств $\mathfrak{G}^*$.

Теорема 2. *Для того чтобы заряды $\mu_n(E^*)$ в R^* слабо сходились к заряду $\mu(E^*)$ в R^*, необходимо и достаточно, чтобы заряды $\mu_n(E^*)$ были равномерно ограничены и чтобы для любого множества $E_0^* \in \mathfrak{G}^*$, любого функционально замкнутого множества F_0^*, любого функционально открытого множества G_0^*, таких, что $F_0^* \subset E_0^* \subset G_0^*$, существовала последовательность* *множеств* $E_n^* \in \mathfrak{G}^*$, *обладающая следующими свойствами*: 1) $F_0^* \subset E_n^* \subset G_0^*$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} E_n^* = E_0^*$, и 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(E_n^*) = \mu(E_0^*)$.

Здесь и далее сходимость последовательности множеств понимается в обычном теоретико множественном смысле [9]).

Необходимость. Пусть E_0^* и $F_0^* \subset E_0^* \subset G_0^*$ — заданные множества. По лемме 8, § 1 E_0^* — есть объединение некоторой последовательности множеств F^{*n} и пересечение некоторой последовательности множеств G^{*n}. Кроме того, по теореме 4, § 6 для каждого n существуют множества $\overline{F}^{*n}$ и $\overline{G}^{*n}$, такие, что $\overline{F}^{*n} \subset E_0^* \subset \overline{G}^{*n}$ и для любого множества E^*, лежащего между $\overline{F}^{*n}$ и $\overline{G}^{*n}$, выполняется $|\mu(E_0^*) - \mu(E^*)| < 1/n$. Теперь положим

$$F_n^* = F_0^* \cup \bigcup_{k=1}^{n} (\overline{F}^{*k} \cup F^{*k}), \quad G_n^* = G_0^* \cap \bigcap_{k=1}^{n} (\overline{G}^{*k} \cap G^{*k}) \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Так определенные множества удовлетворяют следующим свойствам: 1) $F_0^* \subset F_n^* \subset E_0^* \subset G_n^* \subset G_0^*$ для всех n, 2) $F_n^* \subset F_{n+1}^*$ и $G_n^* \supset G_{n+1}^*$ для всех n, 3) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n^* = E_0^*$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n^* = G_0^*$, 4) для любого множества E^*, лежащего между F_n^* и G_n^*, имеет место $|\mu(E_0^*) - \mu(E^*)| < 1/n$.

По теореме 1 для любой пары множеств F_n^* и G_n^* можно найти такой номер m_n, что при $m \geqslant m_n$ существуют множества F_{nm}^*, для которых

$$F_n^* \subset F_{nm}^* \subset G_n^*, \tag{12}$$

$$|\mu(F_n^*) - \mu(F_{nm}^*)| < \frac{1}{n}. \tag{13}$$

Мы можем очевидно считать, что для каждого n справедливо $m_{n+1} > m_n$.

Составим следующую последовательность

$$\begin{array}{l}
F_{01}^*\ ,\ F_{02}^*\ \ \ \ ,\ \dots\ ,\ F_{0m_1-1}^* \\
F_{1m_1}^*,\ F_{1m_1+1}^*,\ \dots\ ,\ F_{1m_2-1}^* \\
F_{2m_2}^*,\ F_{2m_2+1}^*,\ \dots\ ,\ F_{2m_3-1}^* \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F_{nm_n}^*,\ F_{nm_n+1}^*,\ \dots\ ,\ F_{nm_{n+1}-1}^* \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Пронумеруем эти множества в одну последовательность и обозначим ее через F^{*k}. По формуле (12) мы можем утверждать, что $F_n^* \subset F^{*k}$ при $k \geqslant m_n$ и, следовательно, $\bigcap\limits_{k=m_n}^{\infty} F^{*k} \supset F_n^*$. Но так как $E_0^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n^*$, то

$$E_0^* \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} F^{*k}.$$

---

9) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, E_n^* = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} E_n^*$, $\quad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, E_n^* = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=m}^{\infty} E_n^*$.

С другой стороны, при $k \geqslant m_n$ справедливы включения $F^{*k} \subset G_n^* \subset G_{n-1}^*$, и поэтому $\bigcup\limits_{k=m_n}^{\infty} F^{*k} \subset G_n^*$. Но так как $E_0^* = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n^*$, то

$$E_0^* \supset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} F^{*k}.$$

Однако, известно, что всегда

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} F^{*k} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} F^{*k},$$

следовательно,

$$E_0^* = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} F^{*k} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} F^{*k},$$

т. е.

$$E_0^* = \lim_{k\to\infty} F^{*k}. \tag{14}$$

С одной стороны, из четвертого свойства множеств F_n^* следует

$$|\mu(F_n^*) - \mu(E_0^*)| < \frac{1}{n}. \tag{15}$$

С другой стороны, неравенство (13) показывает, что при $k \geqslant m_n$

$$|\mu(F_n^*) - \mu_k(F_k^*)| < \frac{1}{n}.$$

Отсюда и из (15) мы получаем, что при $k \geqslant m_n$ имеет место

$$|\mu(E_0^*) - \mu_k(F_k^*)| < \frac{2}{n},$$

т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k(F^{*k}) = \mu(E_0^*).$$

Вместе с (14) это доказывает, что множества F^{*k} составляют требуемую последовательность.

Достаточность. Доказательство достаточности принципиально ничем не отличается от доказательства достаточности условий теоремы 1. Мы считаем, что нет необходимости его повторять с незначительными изменениями конструкций, изложенных не только в доказательстве теоремы 1, а также в доказательстве теоремы 1, § 15.

5°. В этом пункте мы отдельно рассмотрим слабую сходимость положительных зарядов. В частности, мы покажем, что теорема 1 в этом случае может быть усилена в том аспекте, что фигурирующую в ней последовательность множеств F_n^* можно выбрать монотонной.

Прежде всего докажем следующую теорему, которая в некотором смысле усиливает теорему 2, § 16.

Теорема 3. *Если $\mu_n(E) \underset{w}{\longrightarrow} \mu(E)$ и заряды $\mu_n(E)$ положительны, то для любого замкнутого множества F и любой последовательности замкнутых множеств F_n, удовлетворяющих двум условиям 1) для любого n существует такое m, что $F_{n+k} \subset F_n$ при $k \geqslant m$ и 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu(F)$, справедливо следующее неравенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(F_n) \leqslant \mu(F).$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. В силу второго условия, которому подчиняются множества F_n, при некотором m получим

$$\mu(F_m) < \mu(F) + \varepsilon. \tag{16}$$

По теореме 2, § 16 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(F_m) \leqslant \mu(F_m)$. Значит, при достаточно больших n и некотором n_0 получим

$$\mu_n(F_m) < \mu(F_m) + \varepsilon \qquad (n > n_0). \tag{17}$$

По первому условию, которому подчиняются множества F_n, существует такое k, что $F_{m+i} \subset F_m$ при $i \geqslant k$, и тогда для любого n получаем $\mu_n(F_{m+i}) \leqslant \mu_n(F_m)$. Следовательно, из неравенств (17) вытекает, что как только $n > \max[n_0, m+k]$, то $\mu_n(F_n) < \mu(F_m) + \varepsilon$. Но тогда из (16) мы получаем, что как только $n > \max[n_0, m+k]$, то $\mu_n(F_n) < \mu(F) + 2\varepsilon$, ч. т. д.

Теорема 4. *Для того чтобы положительные заряды $\mu_n(E^*)$ в R^* слабо сходились к заряду $\mu(E^*)$ в R^*, необходимо и достаточно, чтобы для любого функционально замкнутого множества F_0^* и любого содержащего его функционально открытого множества G_0^* существовала такая последовательность функционально замкнутых множеств, что 1) $F_0^* \subset F_n^* \subset G_0^*$, 2) $F_{n+1}^* \subset F_n^*$, 3) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n^* = F_0^*$ и 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(F_n^*) = \mu(F_0^*)$.*

Эта теорема отличается от уже доказанной теоремы 1 тем, что здесь последовательность множеств F_n^* монотонно убывает. Пример, приведенный в конце пункта 2, показывает, что такая формулировка теоремы 1 для произвольных зарядов невозможна. Так как условия настоящей теоремы более сильные, чем условия теоремы 1, то их достаточность вытекает из достаточности условий теоремы 1. Нам осталось доказать только необходимость.

Пусть заряды $\mu_n(E^*)$ положительны и слабо сходятся к $\mu(E^*)$. Возьмем функционально замкнутое множество F_0^* и содержащее его функционально открытое множество G_0^*. Мы повторим часть конструкции, изложенной в доказательстве теоремы 1.

Пусть $f(x)$ — функция, разделяющая множества F_0^* и $R \diagdown G_0^*$, такая, что если

$$F_t^* = \{x : f(x) \leqslant t\}, \tag{18}$$

то

$$\lim_{t\to 0} \mu(F_t^*) = \mu(F_0^*). \tag{19}$$

По лемме 2 такая функция существует.

Как было показано в доказательстве теоремы 1, можно выбрать последовательность множеств $F_{T_1}^*$, $F_{T_2}^*$, ... так, чтобы $t_n \to +0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_{t_n}^*) = \mu(F_0^*). \tag{20}$$

Так как $t_n \to 0$, то для любого n существует t_{m_n} — наибольшее среди всех t_k, начиная с t_n. Пусть

$$F_n^* = F_{t_{m_n}}^* \qquad (t_{m_n} = \max_{k\geqslant n} t_k). \tag{21}$$

По построению множеств F_t^*, для любого n имеем

$$F_0^* \subset F_n^* \subset G_0^*. \tag{22}$$

Из определения множеств F_n^*, см. (21), получаем

$$F_n^* \supset F_{n+1}^*. \tag{23}$$

Далее, так как $t_k \to 0$, то $t_{m_n} \to 0$. Поэтому из определения множеств F_t^* следует

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^* = F_0^*. \tag{24}$$

Из определения (21) следует $F_n^* \supset F_{t_n}^*$, откуда мы заключаем, в силу положительности $\mu_n(E^*)$, что $\mu_n(F_n^*) \geqslant \mu_n(F_{t_n}^*)$.

Теперь из равенства (20) мы получаем

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(F_n^*) \geqslant \mu(F_0^*). \tag{25}$$

Так как $F_n^* = F_{t_{m_n}}^*$ и $t_{m_n} \to 0$, то из (19) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(F_n^*) = \mu(F_0^*)$. Следовательно, из теоремы 3 вытекает $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mu_n(F_n^*) \leqslant \mu(F_0^*)$, и вместе с неравенством (25) это дает

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(F_n^*) = \mu(F_0^*). \tag{26}$$

Формулы (22)–(24) и (26) выражают, по порядку, все четыре условия теоремы, которым должны удовлетворять множества F_n^*. Только что доказанную теорему можно усилить в следующем виде:

Дополнение к теореме 4. *Если положительные заряды $\mu_n(E^*)$ в R^* слабо сходятся к заряду $\mu(E^*)$ в R^*, то для любого функционально замкнутого множества F_0^* и содержащего его функционально замкнутого множества G_0^* существует такая последовательность функционально замкнутых множеств F_n^*, что 1) $F_0^* \subset F_n^* \subset G_0^*$, 2) $F_n^* \supset F_{n+1}^*$, 3) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n^* = F_0^*$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(F_n^*) = \mu(F_0^*)$ и 5) для любой последовательности замкнутых множеств F^{*n}, такой, что $F^{*n} \supset F_n^*$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(F^{*n}) = \mu(F_0^*)$, мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(F^{*n}) = \mu(F_0^*)$.*

Пусть F_n^* — последовательность, построенная в теореме 4. Она удовлетворяет первым четырем условиям. Докажем, что она удовлетворяет также пятому условию.

Если $F^{*n} \supset F_n^*$, то $\mu_n(F^{*n}) \geqslant \mu_n(F_n^*)$. В то же время, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(F_n^*) = \mu(F_0^*)$, и, следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty} \mu_n(F^{*n}) \geqslant \mu(F_0^*). \tag{27}$$

С другой стороны, если $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(F^{*n}) = \mu(F_0^*)$, то благодаря теореме 3 получаем, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(F^{*n}) \leqslant \mu(F_0^*). \tag{28}$$

Неравенства (27), (28) показывают, что пятое условие тоже удовлетворяется.

Теорему 4 можно очевидно переформулировать в терминах функционально открытых множеств, если перейти к дополнениям.

ГЛАВА V. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ ЗАРЯДОВ

§ 18. *Ускользающая нагрузка*

1°. Определение. Мы называем последовательность замкнутых множеств *расходящейся*, если она состоит из попарно непересекающихся множеств, и объединение любого числа множеств из этой последовательности является замкнутым множеством [10)].

[10)] Легко видеть, что в топологическом пространстве последовательность замкнутых множеств F_n является расходящейся тогда и только тогда, когда ни одна последовательность точек x_n, принадлежащих различным F_n, не имеет предельных точек.

Мы говорим, что в семействе зарядов (из данного пространства) имеется *ускользающая нагрузка, равная* a, если можно выделить из этого семейства такую последовательность зарядов $\mu_n(E)$, что для некоторой расходящейся последовательности замкнутых множеств F_n и всех $n = 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство

$$\frac{\mu_n(F_n)}{a} \geqslant 1.$$

Представим себе на вещественной прямой точечный заряд, движущийся в бесконечность. Это и есть ускользающая нагрузка. Строго говоря, мы должны взять последовательность зарядов $\mu_n(E)$ на вещественной прямой R, такую, что $\mu_n(\{x_n\}) = 1$, $\mu_n(R\diagdown\{x_n\}) = 0$, где $\{x_n\}$ — множество, состоящее из одной точки x_n и $x_n \to \infty$. Такая последовательность зарядов на вещественной прямой не может быть слабо сходящейся. Для доказательства этого достаточно рассмотреть непрерывную функцию, принимающих в точках x_n значения $(-1)^n$. Тогда интеграл от этой функции по n-му заряду будет тоже равен $(-1)^n$ и, следовательно, не будет иметь никакого предела.

Наша цель — доказать общую теорему, утверждающую, что в слабо сходящейся последовательности зарядов не может быть никакой ускользающей нагрузки. Эта теорема будет затем применяться для получения серии дальнейших результатов. Ее доказательство основывается на нескольких леммах о линейных функционалах в пространстве, состоящем из счетного числа изолированных точек; эти леммы приводятся в следующем пункте.

2°. Рассмотрим пространство R, состоящее из изолированных точек, которые можно считать натуральными числами $1, 2, \ldots$ Утверждение, что точки изолированы, означает, что каждая из них есть одновременно замкнутое и открытое множество. Ограниченная непрерывная функция в таком пространстве — это просто любая ограниченная последовательность чисел $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$. В этом пункте Ξ всегда обозначает ограниченную последовательность, а $L(\Xi)$ — линейный функционал на таких последовательностях.

Лемма 1. *Если функционал $L(\Xi)$ положителен*[11]*, то он представляется в виде*

$$L(\Xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \Xi_i + \mu L^*(\Xi),$$

где числа $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ положительны и такие, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i$ сходится, а символ $L^*(\Xi)$ обозначает линейный функционал, удовлетворяющий следующим свойствам:

1) *$L^*(\Xi)$ принимает одинаковые значения на последовательностях, отличающихся только в конечном числе элементов,*

[11] Т. е. $L(\Xi) \geqslant 0$, если все $\xi_i \geqslant 0$.

2) $\varliminf\limits_{i\to\infty} \xi_i \leqslant L^*(\Xi) \leqslant \varlimsup\limits_{i\to\infty} \xi_i$ [12].

Доказательство. Пусть $L(\Xi)$ — положительный линейный функционал, Ξ_n — последовательность, состоящая только из нулей, за исключением одной единицы, которая стоит на n-м месте. Пусть $\mu_n = L(\Xi_n)$. Так как функционал $L(\Xi)$ положителен, то $\mu_n \geqslant 0$. Сумма $\sum\limits_{n=1}^{m}$ ограничена, так как $\sum\limits_{n=1}^{m} = L(\sum\limits_{n=1}^{m}) \leqslant N \sup \xi_i = N$ [N — это норма функционала $L(\Xi)$], потому что все элементы последовательности $\sum\limits_{n=1}^{m} \Xi_n$ либо нули, либо единицы.

Рассмотрим

$$L'(\Xi) = L(\Xi) - \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \xi_i. \tag{1}$$

Ясно, что $L'(\Xi)$ — линейный функционал, так как он есть разность двух линейных функционалов. Если все элементы последовательности Ξ положительны, то

$$L(\Xi) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \xi_i = L(\Xi) - \sum_{i=1}^{n} \xi_i L(\Xi_i) = L\left(\Xi - \sum_{i=1}^{n} \Xi_i\right) \geqslant 0,$$

так как в последовательности $\Xi - \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \Xi_i$ первые n элементов нулевые, а все остальные такие же, как и в Ξ, т. е. они положительны. В пределе вышеприведенное неравенство дает $L'(\Xi) \geqslant 0$. Следовательно, $L'(\Xi)$ — положительный функционал.

Если последовательности Ξ' и Ξ'' отличаются только в конечном числе элементов, то $\Xi' = \Xi'' + \sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i' - \xi_i'')\Xi_i$. Следовательно, из формулы (1) мы получаем

$$L'(\Xi') = L(\Xi'') + \sum_{i=1}^{n} (\xi_i' - \xi_i'') L(\Xi_i) - \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \xi_i.$$

И так как $L(\Xi) = \mu_i$ и $\xi_i' = \xi_i''$ при $i > n$, то

$$L'(\Xi') = L(\Xi'') - \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \xi_i'' = L'(\Xi'').$$

[12] Этот функционал является обобщением банахова предела, который удовлетворяет более сильному условию, чем условие 1), а именно $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \xi_n = \operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty} \xi_{n+1}$. Например, $L^*(\Xi)$ может быть равно пределу частичной подпоследовательности из Ξ, скажем $L^*(\Xi) = \lim \xi_{2n}$, в то время как предел оставшейся части последовательности может вовсе не существовать. В случае банахова предела такое невозможно.

Следовательно, функционал $L'(\Xi')$ принимает одно и то же значение для всех последовательностей, отличающихся только в конечном числе элементов.

Так как $L'(\Xi)$ положителен, то

$$\mu \inf_{i>0} \xi_i \leqslant L'(\Xi) \leqslant \mu \sup_{i>0} \xi_i, \tag{2}$$

где μ — норма функционала $L'(\Xi)$.

Так как $L'(\Xi)$ не изменяется при изменении конечного числа элементов последовательности Ξ, то можно все их до n-го включительно взять между числами $\inf\limits_{i>0} \xi_i$ и $\sup\limits_{i>0} \xi_i$. Для получившейся последовательности будем иметь $\inf\limits_{i>0} \xi_i = \inf\limits_{i>n} \xi_i$, $\sup\limits_{i>0} \xi_i = \sup\limits_{i>n} \xi_i$, а значение $L'(\Xi)$ останется тем же самым. Следовательно, вместо (2) мы можем написать

$$\mu \inf_{i>n} \xi_i \leqslant L'(\Xi) \leqslant \mu \sup_{i>n} \xi_i,$$

и, так как это верно для любого n, то

$$\mu \varliminf_{i\to\infty} \xi_i \leqslant L^*(\Xi) \leqslant \mu \varlimsup_{i\to\infty} \xi_i.$$

Тем самым, лемма доказана.

В дальнейшем $L^*(\Xi)$ всегда будет обозначать линейный функционал такого же типа, как в лемме 1.

Лемма 2.

$$L(\Xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \xi_i + \mu' L_1^*(\Xi) - \mu'' L_2^*(\Xi),$$

где $\mu, \mu' \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\mu_i| < \infty$.

Это следует из предыдущей леммы, если мы разложим функционал $L(\Xi)$ на его положительную и отрицательную составляющие (по теореме 2, § 5).

Лемма 3. *Для любой последовательности функционалов $L_n^*(\Xi)$ существует такая последовательность Ξ, состоящая только из нулей и единиц и содержащая бесконечное число единиц, что для всех n имеем $L_n^*(\Xi) = 0$.*

Пусть дана последовательность L_1^*, L_2^*, ... Мы построим последовательность, о существовании которой сказано в лемме, по индукции, начиная с последовательности Ξ_0, состоящей из одних единиц, и заменяя часть этих единиц на нули. Таким путем мы получим последовательности Ξ_1, Ξ_2, ..., в которых единицы будут встречаться все реже и реже, но все же на каждом шаге единиц в некотором интервале не становится мало. В пределе мы получим требуемую последовательность. Важно отметить, что так как элементы всех последовательностей, которые мы будем рассматривать, равны либо нулю, либо единице, то по второму свойству из леммы 1 мы будем иметь для всех $L_n^*(\Xi)$ и всех Ξ_m

$$0 \leqslant L_n^*(\Xi_m) \leqslant 1. \tag{3}$$

Таким образом, пусть Ξ_0 — последовательность из одних единиц. Мы разобьем ее в сумму двух последовательностей так, что в одной последовательности единицы стоят на нечетных местах, а нули на четных; а в другой — все наоборот. По крайней мере для одной из этих последовательностей выполняется $L_1^*(\Xi) \leqslant \frac{1}{2}$, иначе мы придем, при сложении их, к противоречию с формулой (3). Обозначим эту последовательность через Ξ_1. Она обладает следующими свойствами:

1) $L_1^*(\Xi_1) \leqslant \frac{1}{2}$, (4)

2) единицы встречаются с частотой $\frac{1}{2}$,

3) один из первых двух ее элементов равен единице.

Разложим теперь Ξ_1 в сумму трех последовательностей так, чтобы в каждой из них единицы встречались с одинаковой частотой (после пяти нулевых элементов шестой равен единице), но чтобы единица, которая стояла в Ξ_1 на одном из первых двух мест осталась там же в каждой из этих трех последовательностей (это не повлияет на значение $L^*(\Xi)$!). Среди этих последовательностей найдется по крайней мере две, для которых

$$L_1^*(\Xi) \leqslant \frac{1}{2} L_1^*(\Xi_1). \tag{5}$$

Если бы существовала только одна такая последовательность, то, складывая две других, для которых $L_1^*(\Xi) > \frac{1}{2} L_1^*(\Xi_1)$, мы получили бы последовательность, элементы которой не больше элементов из Ξ_1, а соответствующее значение $L_1^*(\Xi)$ больше, чем $L_1^*(\Xi_1)$. Но это противоречит тому, что функционал $L_1^*(\Xi)$ положителен.

Аналогично, существуют две из наших последовательностей, для которых

$$L_2^*(\Xi) \leqslant \frac{1}{2} L_2^*(\Xi_1). \tag{6}$$

Поэтому среди трех рассматриваемых последовательностей найдется хотя бы одна, которая удовлетворяет обоим неравенствам (5) и (6). Обозначим эту последовательность через Ξ_2. Она обладает следующими свойствами:

1. $L_1^*(\Xi_2) \leqslant \frac{1}{2^2}$, $L_2^*(\Xi_2) \leqslant \frac{1}{2}$. (Первое неравенство следует из (4) и (5), а второе — из (3) и (6)).

2. Единицы встречаются в ней с частотой $\frac{1}{2 \cdot 3}$.

3. На местах с номерами $\leqslant 2$ есть единица, а на местах с номерами, бо́льшими чем 2 и не превосходящими $2 + 2 \cdot 3$ есть еще одна единица.

Теперь ясно, как индуктивно строятся следующие последовательности. Допустим, что мы построили последовательность Ξ_n со следующими свойствами:

$$1)\ 0 \leqslant L_k^*(\Xi_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-k+1}} \qquad (k = 1, 2, \dots, n), \tag{7}$$

2) единицы в Ξ_n имеют плотность $\dfrac{1}{(n+1)!}$,

3) в любом отрезке последовательности с номерами от $\sum\limits_{k=2}^{m} k!$ до $\sum\limits_{k=2}^{m+1} k!$ есть хотя бы одна единица $(m = 1, \dots, n)$.

Фиксируя в Ξ_n начальный отрезок длины $\sum\limits_{k=2}^{m+1} k!$, мы разложим оставшуюся часть последовательности в сумму $(n+2)$ слагаемых. Таким образом, мы получим $(n+2)$ последовательности, совпадающих с Ξ_n на начальном отрезке указанной длины, и далее, имеющих в $(n+2)$ раза меньшую плотность единиц. Для любого $i \leqslant n+1$ можно выбрать из этих $(n+2)$ последовательностей $(n+1)$ таких, что для них

$$L_i^*(\Xi) \leqslant \frac{1}{2} L_i^*(\Xi_n) \qquad (i = 1, \dots, n+1) \tag{8}$$

(иначе значение L_i^* от суммы всех этих последовательностей станет больше чем $L_i^*(\Xi_n)$). Так как для любого $i \leqslant n+1$ среди $(n+2)$-х найдется $(n+1)$ таких последовательностей, то должна найтись хотя бы одна, удовлетворяющая всем неравенствам (8) одновременно. Эту последовательность мы возьмем в качестве Ξ_{n+1}. Тогда из (7) и (8) получаем

$$L_n^*(\Xi_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2^{n+1-k+1}} \qquad (k = 1, 2, \dots, n+1).$$

Из построения последовательности Ξ_{n+1} очевидно, что единицы в ней встречаются с частотой $\frac{1}{(n+2)!}$ и что в любом отрезке последовательности с номерами от $\sum\limits_{k=2}^{m} k!$ до $\sum\limits_{k=2}^{m+1} k!$ встречается хотя бы одна единица. Для $m \leqslant n$ это следует из того, что соответствующий отрезок последовательности Ξ_n остался без изменений, а для $m = n+1$ это следует из того, что плотность единиц в Ξ_{n+1} равна $\frac{1}{(n+2)!}$, так что в отрезке последовательности длины $(n+2)!$ есть, конечно, одна единица.

Таким образом, можно повторять нашу конструкцию до бесконечности. На каждом шаге этой конструкции все более длинные участки полученных последовательностей остаются в дальнейшем без изменений. Поэтому мы можем рассмотреть такую последовательность Ξ, в которой единицы стоят только на тех местах, на которых они стоят во всех Ξ_n (при достаточно больших n). Тогда для любых k и $n > k$ выполняется следующее неравенство, вытекающее из неравенства (7):

$$0 \leqslant L_k^*(\Xi) \leqslant L_k^*(\Xi_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-k+1}}$$

и, следовательно, $L_k^*(\Xi) = 0$ для всех k, ч. т. д.

Лемма 4. *Пусть $L_n(\Xi) \underset{w}{\longrightarrow} 0$. Пусть формула*

$$L_n(\Xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^{(n)} \xi_i + \mu_1^{(n)} L_{n1}^*(\Xi) - \mu_2^{(n)} L_{n2}^*(\Xi) \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

дает представление $L_n(\Xi)$ согласно лемме 2. Тогда невозможно, чтобы для любой последовательности Ξ, состоящей из нулей и единиц, и для любого n выполнялось

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^{(n)} \xi_i \right| \geqslant a\xi_n \qquad (a > 0). \tag{9}$$

Допустим противное. По лемме 3 существует такая последовательность Ξ_0, состоящая из нулей и единиц и содержащая бесконечно много единиц, что для всех n $L_{n1}^*(\Xi_0) = L_{n2}^*(\Xi_0) = 0$. Следовательно, для всех n

$$L_n(\Xi_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^{(n)} \xi_i.$$

Так как последовательность Ξ_0 содержит бесконечно много единиц и мы предположили, что выполняются неравенства (9), то должны существовать сколь угодно большие n, для которых

$$|L_n(\Xi_0)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^{(n)} \xi_i \right| \geqslant a > 0.$$

Однако это противоречит тому, что $L_n(\Xi) \underset{w}{\longrightarrow} 0$.

Легко видеть, что только что доказанная лемма утверждает невозможность ускользающей нагрузки в некотором специальном случае, так как коэффициенты μ_i дают заряд, сконцентрированный в i-й точке. На основании этой леммы мы дадим в n° 4 доказательство общей теоремы об отсутствии ускользающей нагрузки в слабо сходящейся последовательности зарядов. Но сначала мы должны доказать еще две леммы о расходящихся последовательностях замкнутых множеств, которые будут применяться в доказательстве вышеупомянутой теоремы.

3°. Лемма 5. *Замкнутые множества в нормальном пространстве, образующие расходящуюся последовательность, можно покрыть попарно непересекающимися открытыми множествами.*

Пусть замкнутые множества F_n образуют расходящуюся последовательность в нормальном пространстве. По определению расходящейся последовательности множество $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} F_n$ замкнуто и не пересекается с F_1. Значит, существуют открытые множества $G_1 \supset F_1$ и $G' \supset \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} F_n$, не имеющие общих точек. Далее будем рассуждать по индукции. Допустим, что мы покрыли непересекающимися открытыми множествами все F_n до m-го включительно, а также множество $\bigcup\limits_{n=m+1}^{\infty} F_n$. Обозначим через G^m открытое множество, содержащее $\bigcup\limits_{n=m+1}^{\infty} F_n$. Множества F_{m+1} и $\bigcup\limits_{n=m+2}^{\infty} F_n$ замкнуты и не имеют общих точек. Поэтому они могут быть покрыты непересекающимися открытыми множествами G' и G''. Если мы теперь положим $G_{m+1} = G' \cap G^m$ и $G^{m+1} = G'' \cap G^m$, то множества G_{m+1} и G^{m+1}, содержащие F_{m+1} и $\bigcup\limits_{n=m+2}^{\infty} F_n$, не будут пересекаться с открытыми множествами, содержащими F_n при $n \leqslant m$, так как G^m не пересекается с этими множествами.

Лемма 6. *Допустим, что в нормальном пространстве R замкнутые множества F_n образуют расходящуюся последовательность. Пусть G_n — попарно непересекающиеся открытые множества, содержащие множества F_n. Существуют функции f_n, разделяющие $R \setminus G_n$ и F_n (т. е. $f_n(x)$ непрерывны и $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$, причем $f_n(x) = 0$ для $x \in R \setminus G_n$ и $f_n(x) = 1$ для $x \in F_n$), и такие, что любая их линейная комбинация с ограниченными коэффициентами является непрерывной функцией.*

Так как последовательность множеств F_n расходится, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ — замкнутое множество. Оно не имеет общих точек с замкнутым множеством $R \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, потому что $G_n \supset F_n$. По лемме Урысона (§ 1, лемма 2) существует функция $f(x)$, разделяющая $R \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in G_n; \\ 0, & \text{если } x \in R \setminus G_n \qquad (n = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Покажем, что так определенные функции как раз те, которые удовлетворяют условиям леммы.

Так как $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, то

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1. \tag{10}$$

Так как $f(x) = 1$ на F_n, то

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in G_n; \\ 0, & \text{если } x \in R \diagdown G_n. \end{cases} \tag{11}$$

Если мы покажем, что все $f_n(x)$ непрерывны, то из формул (10) и (11) будет следовать, что $f_n(x)$ разделяет $R \diagdown G_n$ и F_n. Но мы даже покажем, что сумма любого числа функций $f_n(x)$ есть непрерывная функция.

Пусть $g(x) = \sum f_{n_i}(x)$, где n_i пробегает некоторый набор значений.

Если $a < 0$, то множество $\{x : g(x) < a\}$ пусто, а $\{x : g(x) > a\} = R$. Пусть $a \geqslant 0$. Так как $g(x) > 0$ только на множествах G_{n_i}, то

$$\{x : g(x) > a\} = \{x : f(x) > a\} \cap \bigcup_i G_{n_i},$$
$$\{x : g(x) < a\} = \{x : f(x) < a\} \cup \bigcup_{n \neq n_i} G_n,$$

где последнее объединение распространяется по всем n, отличных от выбранных n_i. Эти формулы показывают, что множества $\{x : g(x) > a\}$ и $\{x : g(x) < a\}$ открыты. Следовательно, функция $g(x)$ непрерывна.

Пусть теперь $h(x)$ является линейной комбинацией функций $f_n(x)$ с ограниченными коэффициентами:

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x), \qquad |c_n| \leqslant C \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Возьмем произвольное целое положительное m и разобьем отрезок $[-C, C]$ на $2m$ равных частей. Рассмотрим множество N_k всех номеров n, для которых

$$\frac{k-1}{m} C < c_n \leqslant \frac{k}{m} C, \qquad n \in N_k, \qquad |k| \leqslant m. \tag{12}$$

Пусть $g_k(x) = \sum\limits_{n \in N_k} f_n(x)$. Как было доказано выше, все функции $g_k(x)$ непрерывны. Поэтому функция $h_m(x) = \sum\limits_{k=-m}^{m} \frac{k}{m} C g_k(x)$ также непрерывна. Но из формулы (12) следует $|h(x) - h_m(x)| \leqslant \frac{C}{m}$ и, так как m произвольно, то функция $h(x)$ есть предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, поэтому она сама непрерывна.

4°. Теорема 1. *Если последовательность зарядов $\mu_n(E)$ (в нормальном пространстве) слабо сходится, то она не имеет ускользающей нагрузки.*

Допустим, что, вопреки утверждению теоремы, в слабо сходящейся последовательности зарядов $\mu_n(E)$ есть ускользающая нагрузка $a \quad (a \neq 0)$. Можно считать, что $a > 0$ [если $a < 0$, то мы рассмотрим вместо последовательности $\mu_n(E)$ последовательность $-\mu_n(E)$]. Тогда существует расходящаяся последовательность замкнутых множеств F_n и последовательность зарядов $\mu_{n_m}(E)$, такая, что $\mu_{n_m}(F_m) \geqslant a$ для всех m.

Пусть $\mu_n(E) \underset{w}{\longrightarrow} \mu(E)$. Начиная с некоторого m_0 имеем $\mu(F_m) > a/2$. Иначе заряд $\mu(E)$ не будет ограниченным, так как множества F_m не пересекаются. Значит, начиная с m_0 мы получаем неравенства $\mu_{n_m}(F_m) - \mu(F_m) > a/2$. Введем следующие обозначения: заменяем $\mu_{n_{m+m_0}}(E) - \mu(E)$ на $\mu_m(E)$, F_{m+m_0} на F_m и $a/2$ на c. Тогда мы получаем следующие условия:

1) $\mu_n(E) \underset{w}{\longrightarrow} 0$,

2) последовательность замкнутых множеств F_m расходится,

3) для любого m имеет место $\mu_m(F_m) > c > 0$.

Нам нужно показать, что эти условия не совместны.

По лемме 5 существуют попарно непересекающиеся множества G_m, содержащие F_m. Благодаря регулярности вариации зарядов $\mu_m(E)$, каждое множество G_m может быть выбрано так, чтобы [13)]

$$|\mu_m|(G_m \diagdown F_m) < \mu_m(F_m) - c. \tag{13}$$

Пусть множества G_m выбраны именно такими. По лемме 6 существуют функции $f_m(x)$, разделяющие $R \diagdown G_m$ и F_m, такие, что сумма любого их подсемейства есть непрерывная функция. Пусть

$$L_m(f) = \int\limits_E f(x)\mu_m(dE).$$

Так как

$$f_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in F_n; \\ 0, & \text{если } x \in R \diagdown G_n, \end{cases}$$

то

$$L_m(f_m) = \int\limits_{F_m} f_m(x)\mu_m(dE) + \int\limits_{G_m \diagdown F_m} f_m(x)\mu_m(dE) + \int\limits_{R \diagdown G_m} f_m(x)\mu_m(dE) =$$

---

13) Из регулярности вариации $|\mu_m|(E)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $G \supset F_m$, такое, что $|\mu_m|(G) - |\mu_m|(F_m) = |\mu_m|(G \diagdown F_m) < \varepsilon$. Положим $\varepsilon = \mu_m(F_m) - c$, и пусть G_m есть пересечение соответствующего G с открытым множеством, которое отделяет данное множество F_m от остальных.

$$= \mu_m(F_m) + \int\limits_{G_m \setminus F_m} f_m(x)\mu_m(dE). \qquad (14)$$

Так как $0 \leqslant f_m(x) \leqslant 1$, то, благодаря неравенству (13), мы имеем

$$\left| \int\limits_{G_m \setminus F_m} f_m(x)\mu_m(dE) \right| < \mu_m(F_m) - c,$$

и поэтому из (14) следует, что

$$L_m(f_m) > c. \qquad (15)$$

Теперь можно построить последовательность индексов m_k, такую, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} |L_{m_k}(f_{m_i})| < \frac{c}{4}, \quad \sum_{i=k+1}^{\infty} |L_{m_k}(f_{m_i})| < \frac{c}{4}. \qquad (16)$$

Будем строить эту последовательность индуктивно. Положим $m_1 = 1$. Так как $L_m(f) \underset{w}{\longrightarrow} 0$, существует такое M, что при $m \geqslant M$

$$|L_m(f_1)| < \frac{c}{4}.$$

Так как заряд $\mu_1(E)$ ограничен и множества G попарно не пересекаются, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_1|(G_n)$ сходится. В то же время, так как $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, то $|L_1(f_n)| \leqslant |\mu_1|(G_n)$. Следовательно, существует такое N, что

$$\sum_{n=N}^{\infty} |L_1(f_n)| < \frac{c}{4}.$$

Возьмем m_2 равным наибольшему из чисел M и N. Тогда

$$|L_{m_2}(f_{m_1})| < \frac{c}{4}, \quad \sum_{m=m_2+1}^{\infty} |L_{m_2}(f_m)| < \frac{c}{4}.$$

Допустим, что мы уже выбрали m_k и хотим определить m_{k+1}. Так как $L_{m_k}(f) \underset{w}{\longrightarrow} 0$, то существует M, такое, что при $m \geqslant M$ выполняется

$$|L_m(f_{m_i})| < \frac{c}{4k} \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

так что

$$\sum_{i=1}^{k} |L_m(f_{m_i})| < \frac{c}{4} \qquad (m \geqslant M). \tag{17}$$

Так как заряд $\mu_{m_k}(E)$ ограничен и множества G_n не имеют общих точек, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_{n_1}|(G_n)$ сходится. В то же время, так как $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$, то $|L_{m_k}(f_n)| \leqslant |\mu_{m_k}|(G_n)$. Следовательно, существует такое N, что

$$\sum_{n=N}^{\infty} |L_{m_k}(f_n)| < \frac{c}{4}. \tag{18}$$

Возьмем m_{k+1} равным наибольшему из чисел M и N. Таким образом, мы получаем последовательность $m_1, m_2, \ldots$ Для этой последовательности удовлетворяется первое из неравенств (16), так как оно совпадает с неравенством (17) (следует только заменить k на $k-1$). Второе из неравенств (16) получается из (18), так как сумма в неравенстве (18) содержит все члены $|L_{m_k}(f_n)|$ при $n \leqslant m_{k+1}$, а сумма в неравенстве (16) только ее часть.

Рассмотрим теперь ограниченную последовательность $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$. По лемме 6 функция вида

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_{m_k}(x) \tag{19}$$

будет непрерывной и $\sup|g(x)| = \sup(\xi_k)$, так как $0 \leqslant f_{m_k}(x) \leqslant 1$.

Таким образом, формула (19) сопоставляет каждой последовательности Ξ непрерывную функцию с такой же верхней границей, а сумме последовательности – сумму функций. Представление функции $g(x)$ формулой (19) единственно, так как каждая функция $f_{m_k}(x)$ отлична от нуля только там, где все остальные равны нулю, и следовательно, равенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\xi_k' - \xi_k'') f_{m_k}(x) = 0$ возможно только при $\xi_k' = \xi_k''$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Это замечание показывает, что любой линейный функционал, определенный на функциях, представимых формулой (19), можно рассматривать как линейный функционал на ограниченных последовательностях Ξ.

Мы имеем линейные функционалы $L_{m_k}(f)$, заданные на R. Ограничиваясь рассмотрением функций вида (19), сведем их к функционалам от последовательностей $L_k(\Xi)$. Каждый такой функционал представим в виде

$$L_k(\Xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^{(k)} \xi_i + \mu' L_k^{*\prime}(\Xi) - \mu'' L_k^{*\prime\prime}(\Xi),$$

где $\mu_i^{(k)} = L_k(\Xi_i)$ и Ξ_i — последовательность, все члены которой равны нулю, за исключением i-го, который равен единице. Такой последовательности сопоставляется по формуле (19) функция $g(x) = f_{mi}(x)$. Следовательно,

$$\mu_i^{(k)} = L_k(\Xi_i) = L_{m_k}(f_{m_i}).$$

Поэтому неравенства (15) и (16) могут быть переписаны следующим образом:

$$\mu_k^{(k)} > c, \quad \sum_{i=1}^{k-1} |\mu_i^{(k)}| < \frac{c}{4}, \quad \sum_{i=k+1}^{\infty} |\mu_i^{(k)}| < \frac{c}{4},$$

и поэтому, если последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ состоит только из нулей и единиц, то для все k имеем

$$|\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^{(k)} \xi_i| \geqslant \frac{c}{2}\xi_k \qquad (k = 1, 2, \dots). \tag{20}$$

Однако мы имеем $L_{m_k}(f) \underset{w}{\longrightarrow} 0$ и, следовательно, $L_k(f) \underset{w}{\longrightarrow} 0$, так что по лемме 4 неравенство (20) невозможно, ч. т. д.

§ 19. *Слабая сходимость вполне аддитивных зарядов в совершенно нормальном пространстве*

1°. В этом параграфе мы будем применять доказанную выше теорему к вполне аддитивным зарядам в совершенно нормальном пространстве. Основной результат, который мы хотим получить, звучит следующим образом: предел слабо сходящейся последовательности вполне аддитивных зарядов в совершенно нормальном пространстве является вполне аддитивным зарядом.

Лемма 1. *Пусть в пространстве R дана убывающая к пустому множеству последовательность замкнутых множеств F_n и содержащая ее убывающая к пустому множеству последовательность открытых множеств G_n (т. е. $G_n \supset F_n$, $n = 1, 2, \dots$). Тогда замкнутые множества $F_n \diagdown G_{n+1}$ образуют расходящуюся последовательность.*

То, что различные множества $F_n \diagdown G_{n+1}$ не имеют общих точек, очевидно следует из того факта, что $G_n \supset F_n \supset F_m$ $(m < n)$. Осталось доказать, что объединение любого числа таких множеств замкнуто. Это будет следовать из формулы, которую мы сейчас докажем:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (F_{n_i} \diagdown G_{n_i+1}) = F_{n_1} \cap ((R \diagdown G_{n_1+1}) \cup F_{n_2}) \cap ((R \diagdown G_{n_2+1}) \cup F_{n_3}) \dots, \tag{1}$$

где, очевидно, множества в правой части равенства замкнуты, а значит, таким же будет и их пересечение (предполагается, что $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$).

Итак, докажем формулу (1). Пусть $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(F_{n_i} \diagdown G_{n_i+1})$. Тогда существует такое i, что $x \in F_{n_i} \diagdown G_{n_i+1}$. Следовательно,

$$x \in F_{n_i}, \qquad x \notin G_{n_i+1}. \tag{2}$$

Так как для $j \leqslant i$ имеем $F_{n_i} \subset F_{n_j}$, то первое включение влечет

$$x \in F_{n_j} \quad \text{для всех} \quad j \leqslant i. \tag{3}$$

Так как для $j \geqslant i$ выполняется $G_{n_i+1} \supset G_{n_j+1}$, то из второго включения (2) вытекает

$$x \notin G_{n_j+1} \quad \text{для всех} \quad j \geqslant i. \tag{4}$$

Из включений (3) и (4) следует, что $x \in (R \diagdown G_{n_i+1}) \cup F_{n_i+1}$ для всех i.

Следовательно,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(F_{n_i} \diagdown G_{n_i+1}) \subset F_{n_1} \cap ((R \diagdown G_{n_1+1}) \cup F_{n_2}) \cap ((R \diagdown G_{n_2+1}) \cup F_{n_3}) \dots . \tag{5}$$

Теперь пусть $x \in F_{n_1} \cap ((R \diagdown G_{n_1+1}) \cup F_{n_2}) \cap ((R \diagdown G_{n_2+1}) \cup F_{n_3}) \dots$. Тогда $x \in F_{n_1}$ и далее, для каждого i либо $x \in R \diagdown G_{n_i+1}$, либо $x \in F_{n_{i+1}}$.

Но x не может принадлежать всем $F_{n_{i+1}}$, так как эти множества имеют пустое пересечение. Значит, существует такое i, что $x \in R \diagdown G_{n_i+1}$. Если мы возьмем наименьшее такое i, то в то же время будем иметь $x \in F_{n_i}$ (так как если $x \notin F_{n_i}$, то $x \in R \diagdown G_{n_{i-1}+1}$ и выбранное i не является наименьшим). Следовательно, $x \in F_{n_i} \diagdown G_{n_i+1}$. Таким образом, имеет место включение, обратное включению (5), что доказывает формулу (1).

Лемма 2. *Пусть замкнутые множества F_n образуют расходящуюся последовательность. Тогда любые содержащиеся в них замкнутые множества F^n (т. е. $F^n \subset F_n$) тоже образуют расходящуюся последовательность.*

Пусть замкнутые множества F_n образуют расходящуюся последовательность. Пусть даны замкнутые множества $F^n \subset F_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Так как множества F_n попарно не пересекаются, то же самое верно и для множеств F^n. Нам необходимо доказать, что объединение любого числа множеств F^n замкнуто. Рассмотрим объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F^{n_i}$. Очевидно, мы имеем

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F^{n_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(F_{n_j} \diagdown F_{n_i}) \cup F^{n_i}\right) \tag{6}$$

(т. е. в правой части пересекаются объединения всех F_{n_j} за исключением одного, которое заменено на F^{n_i}). Так как последовательность F_n расходится, то $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(F_{n_j}\diagdown F_{n_i})$ является замкнутым множеством. Следовательно, правая часть равенства (6), как пересечение замкнутых множеств, является замкнутым множеством, ч. т. д.

Теорема 1. *Для того чтобы данное семейство вполне аддитивных зарядов в совершенно нормальном пространстве R не имело ускользающей нагрузки, необходимо и достаточно, чтобы для любой убывающей к пустому множеству последовательности замкнутых множеств F_n существовало, при каждом $\varepsilon > 0$, такое N, что для всех $n > N$ и всех зарядов из данного семейства выполнялись неравенства $|\mu|(F_n) < \varepsilon$ (т. е. вариации всех зарядов на всех множествах F_n должны быть меньше ε при $n > N$).*

Необходимость. Допустим, что сформулированное в теореме условие не выполнено. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что для некоторой последовательности зарядов $\mu_n(E)$ из рассматриваемого семейства и некоторой убывающей к пустому множеству последовательности замкнутых множеств F_m имеют место неравенства $|\mu_m|(F_m) > \varepsilon$ $(m = 1, 2, \dots)$, т. е. $\mu_m^+(F_m) + \mu_m^-(F_m) > \varepsilon$.

По крайней мере одно из чисел $\mu_m^+(F_m)$, $\mu_m^-(F_m)$ остается больше $\varepsilon/2$ для бесконечного числа индексов m. Допустим, например, что это имеет место для $\mu_m^+(F_m)$. Взяв соответствующую последовательность индексов $m_1, m_2, \dots$ и переобозначив μ_{m_n} через μ_n, F_{m_n} через F_n, мы получим

$$\mu_n^+(F_n) > \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n = 1, 2, \dots), \tag{7}$$

где множества F_n образуют убывающую к пустому множеству последовательность.

Так как рассматриваемое пространство совершенно нормально, по лемме 6, § 1 существует убывающая к пустому множеству последовательность открытых множеств $G_n \supset F_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Так как по предположению заряд $\mu_1(E)$ вполне аддитивен, по теореме 3, § 9 его положительная часть также вполне аддитивна, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mu_1^+(G_n) = 0.$$

Следовательно, существует такое n_1, что $\mu_1^+(G_{n_1}) < \varepsilon/4$. Тогда из (7) получаем $\mu_1^+(F_1\diagdown G_{n_1}) > \varepsilon/4$. Аналогичным образом, из полной аддитивности заряда $\mu_{n_1}(E)$ выводим $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{n_1}^+(G_n) = 0$, и, следовательно, существует такое $n_2 > n_1$, что $\mu_{n_1}^+(G_{n_2}) < \varepsilon/4$. Из (7) мы тогда получаем $\mu_{n_1}^+(F_{n_1}\diagdown G_{n_2}) > \varepsilon/4$.

Такое построение можно очевидно продолжать индуктивно и мы получим последовательность индексов $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, такую, что

$$\mu_{n_i}^{+}(F_{n_i} \diagdown G_{n_{i+1}}) > \frac{\varepsilon}{4} \qquad (i = 1, 2, \dots). \tag{8}$$

Из определения положительной части заряда следует, что для каждого i можно найти замкнутое множество $F^i \subset F_{n_i} \diagdown G_{n_{i+1}}$, такое, что

$$\mu_{n_i}(F^i) > \mu_{n_i}^{+}(F_{n_i} \diagdown G_{n_{i+1}}) - \frac{\varepsilon}{8}.$$

Поэтому из (8) мы получаем

$$\mu_{n_i}(F^i) > \frac{\varepsilon}{8} \qquad (i = 1, 2, \dots). \tag{9}$$

Так как $G_{n_i} \supset F_{n_i}$, и множества G_{n_i}, также как и F_{n_i}, образуют убывающую к пустому множеству последовательность, то по лемме 1 множества $F_{n_i} \diagdown G_{n_{i+1}}$ будут образовывать расходящуюся последовательность. Множества F^i замкнуты и содержатся в $F_{n_i} \diagdown G_{n_{i+1}}$. По лемме 2 они тоже образуют расходящуюся последовательность. Следовательно, неравенства (9) означают, что в нашем семействе зарядов имеется ускользающая нагрузка.

Достаточность. Допустим, что в данном семействе зарядов имеется ускользающая нагрузка, равная a. Тогда существует последовательность зарядов $\mu_n(E)$ из этого семейства и расходящаяся последовательность замкнутых множеств, такие, что

$$\frac{\mu_n(F_n)}{a} \geqslant 1 \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{10}$$

Из определения расходящейся последовательности замкнутых множеств следует, что множества $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, $\bigcup\limits_{k=2}^{\infty} F_k$, ... замкнуты. Более того, они образуют убывающую к пустому множеству последовательность, так как множества F_n не имеют общих точек. В то же время очевидно

$$|\mu_n| \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k \right) \geqslant |\mu_n|(F_n) > |a| \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

как это следует из (10). Полученное неравенство показывает, что условие теоремы не выполнено, ч. т. д.

2°. Пользуясь только что доказанной теоремой 1, мы можем дать новую формулировку теоремы из предыдущего параграфа для случая вполне аддитивных зарядов в совершенно нормальном пространстве.

Теорема 2. *Если последовательность вполне аддитивных зарядов $\mu_n(E)$ в совершенно нормальном пространстве R слабо сходится, то для любой убывающей к пустому множеству последовательности замкнутых множеств F_n и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что как только $n > N$, то $|\mu_m|(F_n) < \varepsilon$ при всех m.*

На основании этой теоремы мы теперь докажем следующую теорему:

Теорема 3. *Предел слабо сходящейся последовательности вполне аддитивных зарядов в совершенно нормальном пространстве является вполне аддитивным зарядом.*

Пусть последовательность вполне аддитивных зарядов $\mu_n(E)$ в совершенно нормальном пространстве R слабо сходится и пусть $\mu(E)$ есть заряд, являющийся ее пределом. Допустим, что он не вполне аддитивен. Тогда по теореме 2, § 9 существует убывающая к пустому множеству последовательность замкнутых множеств F_n, такая, что последовательность $\mu(F_n)$ не стремится к нулю. Можно очевидно считать, что существует $a > 0$, такое, что для всех n

$$\mu(F_n) > a > 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{11}$$

Так как пространство R совершенно нормально, по лемме 6, § 1 существует убывающая к пустому множеству последовательность открытых множеств G_n, такая, что $F_n \subset G_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. По лемме 2, примененной к вариации меры μ, для любой пары множеств $G_n \supset F_n$ существует функция $h_n(x)$, разделяющая F_n и $R \diagdown G_n$ [14], такая, что если мы положим $\{x : h_n(x) \leqslant t\} = F_{nt}$, то $\lim\limits_{t\to 0} |\mu|(F_{nt}) = |\mu(F_n)|$, другими словами

$$\lim_{t\to 0} |\mu|(F_{nt} \diagdown F_n) = 0. \tag{12}$$

Теперь положим $f_1(x) = h_1(x)$, $f_2(x) = \max[f_1(x), h_2(x)]$, и в общем случае

$$f_n(x) = \max[f_{n-1}(x), h_n(x)]. \tag{13}$$

Легко доказывается с помощью индукции, что функции $f_n(x)$ непрерывны и $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$, $\{x : f_n(x) = 0\} = F_n$, $\{x : f_n(x) = 1\} = R \diagdown G_n$ (это следует из включений $G_{n-1} \supset G_n$, $F_{n-1} \supset F_n$ и из того факта, что такие же соотношения справедливы для функций $h_n(x)$), т. е. функции $f_n(x)$ разделяют F_n^* и $R \diagdown G_n^*$. Далее, из (13) следует

$$f_n(x) \geqslant h_n(x), \quad f_n(x) \geqslant f_{n-1}(x).$$

Поэтому если мы положим $\{x : f_n(x) \leqslant t\} = F_{nt}$, то

$$F_{nt} \subset F'_{nt}, \quad F_{nt} \subset F_{n-1,t}, \quad F_{nt'} \subset F_{nt''} \qquad (t' > t''). \tag{14}$$

[14] $F_n = \{x : h_n(x) = 0\}$, $R \diagdown G_n = \{x : h_n(x) = 1\}$.

Из первого включения и формулы (12) получаем $\lim_{t\to 0}|\mu|(F_{nt}\diagdown F_n) = 0$ и, следовательно,

$$\lim_{t\to 0}\mu(F_{nt}) = \mu(F_n).$$

Поскольку множества F_{nt}, определяемые с помощью функций $f_n(x)$, удовлетворяют этому соотношению, мы можем применить конструкцию из теоремы 1, § 17. Именно для нашей последовательности зарядов $\mu_i(E)$, слабо сходящейся к $\mu(E)$, можно для каждого n найти такую последовательность положительных чисел t_i, сходящуюся к нулю, что

$$\lim_{n\to\infty}\mu_i(F_{nt_i}) = \mu(F_n). \tag{15}$$

Мы можем считать, что все $t_i > 0$. Действительно, фиксируя i и прибавляя к t_i некоторое $\tau > 0$, мы получим $t = t_i + \tau > 0$. Если считать, что τ стремится к нулю, то множества $F_{nt}\diagdown F_{nt_i}$ образуют убывающую к пустому множеству последовательность. Так как заряд $\mu_i(E)$ вполне аддитивен, то $\mu_i(F_{nt}\diagdown F_{nt_i})$ стремится к нулю. Следовательно, взяв t достаточно близким к t_i, мы можем добиться того, чтобы $|\mu_i(F_{nt}) - \mu_i(F_{nt_i})|$ стало меньше, чем $1/i$. Подбирая такие t для каждого i, мы получим последовательность положительных чисел t, для которых остаются верными равенства (15).

По формуле (15) существует такой номер i_1, что

$$|\mu_{i_2}(F_{1t_{i_1}}) - \mu(F_1)| < \frac{a}{2},$$

где a то же самое, что и в неравенстве (11).

Еще раз применяя формулу (15), найдем такой номер i_2, что

$$|\mu_{i_2}(F_{2t_{i_2}}) - \mu(F_2)| < \frac{a}{2},$$

причем i_2 мы можем взять настолько большим, что $t_{i_2} > t_{i_1}$, так как $t_{i_1} > 0$ и $t_i \to 0$.

Такое построение можно очевидно продолжать индуктивно и мы получим последовательность $t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}, \ldots$, такую, что

$$t_{i_1} > t_{i_2} > t_{i_3} > \ldots, \tag{16}$$

$$|\mu_{i_n}(F_{nt_{i_n}}) - \mu(F_n)| < \frac{a}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Из неравенства (16) следует, благодаря второму и третьему включению (14), что

$$F_{1t_{i_1}} \supset F_{2t_{i_2}} \supset F_{3t_{i_3}} \supset \ldots,$$

и так как все эти множества последовательно содержатся в множествах $G_1, G_2, \ldots$, образующих убывающую к пустому множеству последовательность, то сами они тоже образуют убывающую к пустому множеству последовательность.

Из (11) и (17) следует, что для всех n имеем $\mu_{i_n}(F_{nt_{i_n}}) > a/2 > 0$. Это однако противоречит теореме 2, и наша теорема доказана.

В § 10 мы доказали (теорема 1, § 10), что вполне аддитивный заряд определяет в любом пространстве «непрерывный» линейный функционал [т. е. $L(f_n) \to L(f)$, если $f_n \to f$ и все f_n равномерно ограничены] и что в совершенно нормальном пространстве непрерывный в этом смысле линейный функционал определяет вполне аддитивный заряд. Но при рассмотрении линейных функционалов в произвольном пространстве R их можно заменить на функционалы в пространстве R^*, которое всегда является совершенно нормальным (в R и R^* непрерывные функции и, следовательно, функционалы одни и те же). Таким образом, мы можем дать следующую переформулировку теоремы 3:

Теорема 4. *В любом пространстве предел слабо сходящейся последовательности непрерывных линейных функционалов есть непрерывный линейный функционал.*

3°. Мы теперь дадим пример нормального пространства, в котором не все замкнутые множества являются функционально замкнутыми и в котором можно определить последовательность вполне аддитивных зарядов, слабо сходящуюся к не вполне аддитивному заряду. Этот пример показывает, что условие совершенной нормальности пространства в формулировках теорем 1–3 является существенным.

Пусть пространство R состоит из сегмента $0 \leqslant x \leqslant 1$ и всех натуральных чисел 2, 3, … . Пусть замкнутыми множествами в этом пространстве являются множества одного из следующих типов: 1) замкнутые множества сегмента $[0, 1]$, не содержащие 1; 2) сегмент из всех чисел натурального ряда, больших некоторого числа; 3) объединения множеств первого и второго типа; и 4) замкнутые множества сегмента $[0, 1]$, содержащие 1, плюс весь натуральный ряд. Легко проверяется, что полученное таким способом пространство нормально. Замкнутые множества в нем не имеют общих точек только тогда, когда одно из них является замкнутым множеством сегмента $[0, 1]$, не содержащим 1. Значит отделимость замкнутых множеств, не имеющих общих точек, в точности такая же, как и для сегмента $[0, 1]$.

В этом пространстве любая непрерывная функция непрерывна на сегменте $[0, 1]$ в обычном смысле, и она принимает одно и то же значение на числах натурального ряда, так как все такие числа принадлежат любому замкнутому множеству, содержащему единицу.

Пусть теперь в R дана последовательность линейных функционалов, сопоставляющих функции $f(x)$ ее значение в точках $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, … , $\frac{n-1}{n}$, … . Эти функционалы слабо сходятся к функционалу, равному значению этой функции в точке 1. Рассматриваемым функционалам соответствуют заряды, имеющие единичные точечные нагрузки в точках $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\ldots$. Такие заряды, очевидно, вполне аддитивны. Но их предел не будет вполне аддитивным зарядом. Так как любая непрерывная функция принимает одно и то же значение на всех натуральных числах, то функция, доминирующая какой-то сегмент из натурального ряда, доминирует весь натуральный ряд. Поэтому на всех сегментах натурального ряда заряд, соответствующий функционалу, равному $f(1)$, будет принимать значение 1. Но такие сегменты образуют последовательность, убывающую к пустому множеству, и, следовательно, предельный заряд не вполне аддитивен.

§ 20. *Слабая сходимость зарядов в локально компактном метрическом пространстве со счетной базой*

1°. Локально компактное метрическое пространство R со счетной базой очевидно является объединением счетного числа компактных множеств. По хорошо известной теореме Урысона оно вкладывается в компактное метрическое пространство — гильбертов параллелепипед, и так как любое компактное множество в гильбертовом параллелепипеде должно быть замкнутым, то пространство R гомеоморфно объединению счетного числа замкнутых множеств гильбертова параллелепипеда. В § 15 мы уже доказали (теорема 5, § 15), что если пространство R гомеоморфно борелевскому подмножеству совершенно нормального пространства, то любой заряд можно единственным образом представить в виде суммы вполне аддитивного и сингулярного (в узком смысле) заряда, т. е. такого заряда, который равен нулю на любом множестве, включающемся в некоторое компактное множество [15].

Так как гильбертов параллелепипед является совершенно нормальным компактным пространством и так как в метрическом пространстве множество содержится в компактном множестве тогда и только тогда, когда оно имеет компактное замыкание, мы получаем следующее предложение:

Теорема 1. *В локально компактном метрическом пространстве со счетной базой любой заряд единственным образом представляется в виде суммы вполне аддитивного и сингулярного заряда, т. е. заряда, равного нулю на любом множестве с компактным замыканием.*

Эти заряды мы называем соответственно вполне аддитивной и сингулярной частью данного заряда. Вполне аддитивная часть $\overline{\mu}(E)$ заряда $\mu(E)$

[15] В пространстве со счетной базой любое компактное множество является бикомпактом. Следовательно, заряд в таком пространстве, сингулярный в узком смысле, будет просто сингулярен, т. е. равен нулю на любом множестве, включающемся в бикомпактное множество. Поэтому мы будем пользоваться в дальнейшем термином «сингулярный заряд» вместо «сингулярный заряд в узком смысле».

характеризуется следующим свойством: для любого E имеют место неравенства $\overline{\mu}^+(E) \leqslant \mu^+(E)$, $\overline{\mu}^-(E) \leqslant \mu^-(E)$ и для любого вполне аддитивного заряда $\mu_1(E)$, такого, что $\mu_1^+(E) \leqslant \mu^+(E)$, $\mu_1^-(E) \leqslant \mu^-(E)$, справедливы неравенства $\mu_1^+(E) \leqslant \overline{\mu}^+(E)$, $\mu_1^-(E) \leqslant \overline{\mu}^-(E)$ (здесь индексы $+$ и $-$ обозначают, как обычно, положительную и отрицательную части заряда). Короче говоря, вполне аддитивная часть заряда — это максимальный вполне аддитивный заряд, содержащийся в нем. Аналогичным образом можно охарактеризовать сингулярную часть заряда.

Мы докажем, что если последовательность зарядов $\mu_n(E)$ в локально компактном метрическом пространстве со счетной базой слабо сходится к заряду $\mu(E)$, то вполне аддитивные и сингулярные части зарядов $\mu_n(E)$ слабо сходятся соответственно к вполне аддитивной и сингулярной части заряда $\mu(E)$. Кроме того, мы дадим необходимое и достаточное условие слабой сходимости семейства зарядов в локально компактном метрическом пространстве со счетной базой. Семейство зарядов называется слабо компактным, если любая выбранная из него последовательность содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.

2°. Теорема 2. *Для слабой сходимости последовательности вполне аддитивных зарядов $\mu_n(E)$ в локально компактном метрическом пространстве R со счетной базой необходимо и достаточно, чтобы* 1) *для любой функции $f(x)$, отличной от нуля на некотором открытом множестве с компактным замыканием, существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_R f(x)\mu_n(dE)$ *и* 2) *в этой последовательности отсутствует ускользающая нагрузка.*

Необходимость первого условия очевидна: необходимость второго условия доказана в теореме 1, § 18. Докажем достаточность.

Пусть G^1, G^2, ... — открытые множества с компактными замыканиями, образующие покрытие пространства R. Пусть $G_1 = G^1$. Множества G^1, G^2, ... образуют покрытие $\overline{G}_1$. Так как $\overline{G}_1$ компакт, то из этого покрытия мы можем выбрать конечное покрытие $G^{i_1}, \ldots, G^{i_k}$. Пусть m – наибольший из номеров этих множеств. Открытое множество $G_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} G^i$ содержит $\overline{G}_1$ и имеет компактное замыкание. Таким же способом мы можем построить G_3 по G_2 и т. д. В результате получим последовательность открытых множеств G_n, покрывающих все пространство и таких, что $\overline{G}_n \subset G_{n+1}$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Замкнутые множества $R \setminus G_n$ образуют убывающую к пустому множеству последовательность. Если у последовательности вполне аддитивных зарядов $\mu_i(E)$ отсутствует ускользающая нагрузка, то по теореме 4, § 19 существует такое n, что [16)]

$$|\mu_i|(R \setminus G_n) < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

[16)] Символ $|\mu|(E)$ обозначает, как обычно, вариацию заряда $\mu(E)$.

Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная ограниченная функция на R. Пусть $|f(x)| \leqslant N$. Рассмотрим непрерывную функцию $g(x)$, разделяющую $\overline{G}_n$ и $R \diagdown G_{n+1}$. Положим $f_1(x) = f(x)g(x)$, $f_2(x) = f(x)\bigl(1 - g(x)\bigr)$. Тогда

$$f_1(x) + f_2(x) = f(x), \quad |f_1(x)| \leqslant N, \quad |f_2(x)| \leqslant N, \tag{2}$$

$$f_1(x) = 0, \quad x \in \overline{G}_n; \quad f_2(x) = 0, \quad x \in R \diagdown G_n. \tag{3}$$

Так как $f_2(x) = 0$ вне G_{n+1}, то из первого условия теоремы следует существование такого k, что для всех $i, j \geqslant k$ имеет место

$$\left| \int\limits_R f_2(x)\mu_i(dE) - \int\limits_R f_2(x)\mu_j(dE) \right| < \varepsilon. \tag{4}$$

В то же время из неравенств (1) и (3) следует, что для всех i

$$\left| \int\limits_R f_1(x)\mu_i(dE) \right| < \varepsilon N. \tag{5}$$

Из (2), (4) и (5) легко следует, что для всех $i, j \geqslant k$

$$\left| \int\limits_R f(x)\mu_i(dE) - \int\limits_R f(x)\mu_j(dE) \right| < \varepsilon(2N+1),$$

и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то слабая сходимость зарядов $\mu_i(E)$ доказана.

Лемма 1. *Для сингулярности заряда $\mu(E)$ в локально компактном пространстве со счетной необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f(x)$, отличной от нуля только на некотором открытом множестве с компактным замыканием, выполнялось*

$$\int\limits_R f(x)\mu(dE) = 0. \tag{6}$$

Необходимость сразу следует из определения сингулярного заряда. Докажем *достаточность* приведенного условия. Пусть множество E имеет компактное замыкание. Тогда существует окрестность множества E, имеющая компактное замыкание. Пусть G_0 — такая окрестность. По заданному $\varepsilon > 0$ возьмем G таким, чтобы $E \subset G \subset G_0$ и $|\mu(E) - \mu(G)| < \varepsilon$ (по теореме 4, § 6 такое множество G существует). Так как $G \subset G_0$, то G имеет компактное замыкание. Следовательно, для любой функции $f(x)$, равной нулю вне G, имеет место равенство (6). Но тогда по лемме 1, § 14 получаем $\mu(G) = 0$, следовательно, $|\mu(E)| < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\mu(E) = 0$, ч. т. д.

Теорема 3. *Если в локально компактном метрическом пространстве со счетной базой заряды $\mu_n(E)$ слабо сходятся к заряду $\mu(E)$, то их вполне аддитивные и сингулярные составляющие слабо сходятся соответственно к вполне аддитивной и сингулярной составляющей заряда $\mu(E)$. Если метрическое пространство не локально компактно, то в нем можно построить последовательность сингулярных зарядов, слабо сходящихся к ненулевому вполне аддитивному заряду.*

Докажем сначала первую часть теоремы. Пусть в локально компактном метрическом пространстве R, со счетной базой, дана слабо сходящаяся последовательность зарядов $\mu_i(E)$. Пусть черта над μ обозначает вполне аддитивную часть, а две черты — сингулярную часть заряда μ.

Если E имеет компактное замыкание, то из определения сингулярной составляющей заряда получаем $\bar{\bar{\mu}}_i(E) = 0$, и, следовательно, $\overline{\mu}_i(E) = \mu_i(E)$. Значит, если функция $f(x)$ отлична от нуля только на некотором множестве с компактным замыканием, то

$$\int\limits_R f(x)\mu_i(dE) = \int\limits_R f(x)\overline{\mu}_i(dE), \tag{7}$$

и так как последовательность $\mu_i(E)$ слабо сходится, то интегралы в правой части равенства сходятся к некоторому конечному пределу. В то же время слабая сходимость зарядов $\mu_i(E)$ влечет отсутствие ускользающей нагрузки. Поэтому в последовательности вполне аддитивных составляющих зарядов $\mu_i(E)$ тоже отсутствует ускользающая нагрузка [17]. Следовательно, оба условия предыдущей теоремы удовлетворены и заряды $\overline{\mu}_i(E)$ слабо сходятся. Предел слабо сходящейся последовательности вполне аддитивных зарядов есть вполне аддитивный заряд. Тем самым мы имеем $\overline{\mu}_i(E) \underset{w}{\longrightarrow} \mu_1(E)$, где $\mu_1(E)$ — вполне аддитивный заряд.

Но если $\mu_i(E) \underset{w}{\longrightarrow} \mu(E)$ и при этом $\overline{\mu}_i(E) \underset{w}{\longrightarrow} \mu_1(E)$, то $\mu_i(E) - \overline{\mu}_i(E) = \bar{\bar{\mu}}_i(E) \underset{w}{\longrightarrow} \mu(E) - \mu_1(E)$. Из леммы 1 сразу же следует, что предел сингулярных зарядов есть сингулярный заряд, поэтому $\mu(E) - \mu_1(E)$ — сингулярный заряд. Из теоремы 1 следует, что представление заряда $\mu(E)$ в виде суммы вполне аддитивного заряда и сингулярного заряда единственно. Следовательно, $\mu_1(E)$ и $\mu(E) - \mu_1(E)$ есть соответственно вполне аддитивная и сингулярная составляющая заряда $\mu(E)$. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Переходим к доказательству второй части. Пусть R — метрическое пространство и пусть x_0 — некоторая его точка, не имеющая окрестностей

[17] Это сразу следует из неравенств $\overline{\mu}_i^{+}(E) \leqslant \mu_i^{+}(E)$, $\overline{\mu}_i^{-}(E) \leqslant \mu_i^{-}(E)$.

с компактными замыканиями. Будем выбирать последовательности в замкнутых сферических окрестностях точки x_0 радиуса $1/n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Так как все эти окрестности некомпактны, мы можем в каждой из них выбрать последовательность $x_n^1, x_n^2, \dots$, не имеющую предельных точек. Определим теперь функционалы $L_n(f) = L^*(\{f(x_n^i)\})$, где L^* — один из функционалов на последовательности $\{f(x_n^i)\}$, определенный в лемме 1, § 18. Например, это может быть один из банаховых пределов. Эти функционалы слабо сходятся к функционалу $L(f) = f(x_0)$, которому соответствует заряд, представляющий так сказать точечную нагрузку в x_0. Однако все заряды, соответствующие функционалам L_n, сингулярны. Действительно, пусть множество E_0 имеет компактное замыкание. Так как множество $\overline{E}_0$ компактно, то оно содержит только конечное число точек $x_n^1, x_n^2, \dots$ (иначе, в силу компактности $\overline{E}_0$, они имели бы предельную точку). Допустим, что $\overline{E}_0$ уже не содержит точек $x_n^i, x_n^{i+1}, \dots$. Множество $\{x_n^i, x_n^{i+1}, \dots\}$ замкнуто, так как последовательность $x_n^i, x_n^{i+1}, \dots$, не имеет предельных точек, и поэтому множество $G_0 = R \diagdown \{x_n^i, x_n^{i+1}, \dots\}$ открыто. Для любой функции f, отличной от нуля только на множестве, содержащемся в G_0, имеем $L_n(f) = 0$ (в силу определения функционала $L_n(f)$). Следовательно, по лемме 1, § 14 для любого $G \subset G_0$ получаем $\mu_n(G) = 0$, где $\mu_n(E)$ есть заряд, соответствующий функционалу $L_n(f)$. И так как $E_0 \subset G_0$ и $\mu(G) = 0$ для любого G, такого, что $E_0 \subset G \subset G_0$, то из регулярности заряда (лемма 1, § 6) получаем $\mu_n(E_0) = 0$, что доказывает сингулярность заряда $\mu_n(E)$.

Таким образом, нашим функционалам соответствуют сингулярные заряды, но они слабо сходятся к функционалу $L(f) = f(x_0)$, которому соответствует вполне аддитивный заряд.

3°. Лемма 2. *Равномерно ограниченное семейство зарядов в компактном метрическом пространстве является слабо компактным.*

Нам эта лемма необходима для того, чтобы установить условие слабой компактности семейства зарядов в локально компактном метрическом пространстве. Хотя этот факт считается хорошо известным, мы все же приведем его доказательство, так как оно совершенно простое.

Пусть дана равномерно ограниченная последовательность зарядов $\mu_n(E)$ (т. е. $|\mu_m(E)| < M$ для всех m и E) в компактном метрическом пространстве R. Мы построим последовательность разбиений пространства R на такие множества E, что их диаметры $< 1/n$ и число множеств в каждом разбиении конечно. Пользуясь равномерной ограниченностью данных зарядов, мы можем выбрать из них подпоследовательность $\mu_{11}(E), \mu_{12}(E), \dots$, которая сходится на всех множествах из первого разбиения [18]. Из этой последовательности мы можем выбрать подпоследовательность $\mu_{21}(E), \mu_{22}(E), \dots$, сходящуюся на множествах второго разбиения, и т. д. Из всех построенных

[18] Т. е. для любого множества E_i' из первого разбиения существует предел $\lim \mu_{1m}(E_i')$.

таким образом последовательностей выберем диагональную последовательность $\mu_{11}(E), \mu_{22}(E), \ldots$, которая уже сходится на множествах каждого разбиения. Покажем, что полученная последовательность слабо сходится.

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на R. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подбираем n настолько большим, чтобы на любом множестве диаметра $< 1/n$ колебание функции $f(x)$ было меньше ε. Так как диаметры множеств E_i^n из n-го разбиения меньше $1/n$, то для любых $m > n$ получаем

$$\left| \int\limits_R f(x)\mu_{mm}(dE) - \sum_i f(x_i^n)\mu_{mm}(E_i^n) \right| < \varepsilon M, \tag{8}$$

где $x_i^n \in E_i^n$ и M есть верхняя грань всех чисел $|\mu_{mm}(E)|$. Так как последовательность чисел $\mu_{mm}(E)$ сходится для фиксированных n и i, то существует такое m_0, что для $m, l \geqslant m_0$ получим

$$\left| \sum_i f(x_i^n)\mu_{ll}(E_i^n) - \sum_i f(x_i^n)\mu_{mm}(E_i^n) \right| < \varepsilon N, \tag{9}$$

где $N = \sup|f(x)|$. Комбинируя неравенства (8) и (9), мы получим, что при $m, l \geqslant \max[n, m_0]$ будем иметь

$$\left| \int\limits_R f(x)\mu_{mm}^{+}(dE) - \int\limits_R f(x)\mu_{ll}^{+}(dE) \right| < (2M + N)\varepsilon.$$

Тем самым последовательность интегралов $\int\limits_R f(x)\mu_{mm}(dE)$ сходится; и так как это установлено для любой функции $f(x)$, то последовательность $\mu_{mm}(E)$ должна слабо сходиться.

Теорема 4. *Для того чтобы семейство вполне аддитивных зарядов в локально компактном метрическом пространстве со счетной базой было «слабо компактным», необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным*[19] *и не имело ускользающей нагрузки.*

Необходимость требования ограниченности уже доказана в теореме 3, § 14, а необходимость отсутствия ускользающей нагрузки доказана в теореме 1, § 18. Докажем достаточность этих условий.

Пусть пространство R локально компактно, метризуемо и имеет счетную базу. Его можно представить объединением возрастающей последовательности открытых множеств G_m, имеющих компактные замыкания.

[19] Т. е. $|\mu(E)| < M$, с одной и той же постоянной M для всех зарядов μ из этого семейства и всех E.

Пусть в пространстве R дано семейство зарядов, которое является ограниченным и не имеет ускользающей нагрузки. Пусть из этого семейства выбрана последовательность $\mu_1(E), \mu_2(E), \ldots$. На замыкании каждого множества G_m, если его рассматривать как пространство, заряды $\mu_i(E)$ определяют заряды

$$\mu_i^m(E) = \mu_i(E). \tag{10}$$

Так как пространства $\overline{G}_m$ компактны и метризуемы, а заряды $\mu_i^m(E)$ ограничены в совокупности, то по лемме 2 из них можно выбрать слабо сходящуюся последовательность. Пусть последовательность $\mu_{i_1}^1, \mu_{i_2}^1, \ldots$, является слабо сходящейся в пространстве $\overline{G}_1$. Зарядам из этой последовательности соответствуют по формулам (10) заряды на пространстве R, а им соответствуют по той же формуле заряды на $\overline{G}_2$. Продолжая этот процесс, мы построим последовательности, которые слабо сходятся в пространствах $\overline{G}_3, \overline{G}_4, \ldots$, и т. д. После этого мы образуем диагональную последовательность

$$\mu_{j_1}^1, \mu_{j_2}^2, \ldots,$$

и так как $\overline{G}_1 \subset \overline{G}_2 \subset \ldots$, она слабо сходится в каждом пространстве $\overline{G}_n$. Зарядам из этой последовательности соответствуют по формуле (10) заряды $\mu_{j_1}, \mu_{j_2}, \ldots$, в пространстве R. Так как они слабо сходятся в каждом $\overline{G}_m$, то для любой функции f, равной нулю вне некоторого множества G_n, существует $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_R f(x)\mu_{j_k}(dE)$. В то же время в последовательности зарядов $\mu_{j_k}(dE)$ отсутствует ускользающая нагрузка. Значит, по теореме 2 эта последовательность слабо сходится. (Хотя в теореме 2 требуется, чтобы существовали пределы $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_R f(x)\mu_{j_k}(dE)$ для любой функции, равной нулю вне некоторого множества с компактным замыканием, а не только вне множеств G_n, это не так существенно, так как если E имеет компактное замыкание, то существует множество $G_n \supset E$. Действительно, все G_n образуют покрытие множества $\overline{E}$, и так как $\overline{E}$ компактно, то можно выбрать конечное подпокрытие, а из $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ следует существование одного множества $G_n \supset \overline{E}$.)

Отметим, что теорему 4 можно немного усилить следующим образом:

Теорема 5. *Если последовательность вполне аддитивных зарядов в локально компактном метрическом пространстве ограничена и не имеет ускользающей нагрузки, то из нее можно выбрать последовательность зарядов $\mu_n(E)$, положительные и отрицательные части которой тоже слабо сходятся. Сама такая последовательность тоже слабо сходится и, если $\mu(E)$ — ее предел, то он тоже будет вполне аддитивным зарядом и для любой пары множеств $F_0 \subset G_0$ существует такое G, что $F_0 \subset G \subset G_0$ и* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(G) = \mu(G)$. (Можно сказать, что заряды $\mu_n(E)$ сходятся к заряду $\mu(E)$ на плотном семействе множеств.)

Доказательство теоремы 5 очевидно. Если последовательность зарядов ограничена и не имеет ускользающей нагрузки, то последовательности ее положительных и отрицательных частей обладают этими же свойствами. Следовательно, мы можем выбрать подпоследовательность зарядов $\mu_n(E)$, для которой положительные и отрицательные части слабо сходятся:

$$\mu_m^+(E) \underset{w}{\longrightarrow} \mu'(E), \quad \mu_p^-(E) \underset{w}{\longrightarrow} \mu''(E).$$

Вообще говоря $\mu'(E)$ и $\mu''(E)$ не обязательно являются положительной и отрицательной составляющей заряда $\mu'(E) - \mu''(E) = \mu(E)$, к которому стремятся заряды $\mu_n(E)$. Пусть $F_0 \subset G_0$. Как следует из замечания в конце § 16, для любой функции $f(x)$, разделяющей множества F_0 и $R \diagdown G_0$, существует континуум таких значений переменной t, что для множеств

$$G_t = \{x : f(x) < t\} \qquad (F_0 \subset G_1 \subset G_0)$$

выполняются равенства

$$\lim_{m\to\infty} \mu_m^+(G_t) = \mu'(G_t), \quad \lim_{m\to\infty} \mu_m^-(G_t) = \mu''(G_t).$$

Отсюда следует, что для континуума значений переменной t выполняются равенства

$$\lim_{m\to\infty} \mu_m(G_t) = \mu(G_t) = \mu'(G_t) - \mu''(G_t),$$

и наша теорема полностью доказана.

Теорема 6. *Для того чтобы последовательность вполне аддитивных зарядов $\mu_n(E)$ в локально компактном метрическом пространстве со счетной базой слабо сходилась к заряду $\mu(E)$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной, не имела ускользающей нагрузки и чтобы любая ее подпоследовательность содержала под-подпоследовательность, сходящуюся к $\mu(E)$ на плотном семействе множеств* (в смысле, указанном в конце формулировки теоремы 5).

Необходимость очевидна в силу теоремы 5, достаточность легко следует из замечания после теоремы 2, § 15, так как сходимость на плотном семействе множеств достаточна для слабой сходимости.

§ 21. *Слабая сходимость функций ограниченной вариации*

1°. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве R задан вполне аддитивный заряд $\mu(E)$. (Любая вполне аддитивная функция множеств, определенная на алгебре, порожденной замкнутыми множествами в совершенно нормальном и, в частности, в евклидовом пространстве, является зарядом.)

Рассмотрим в R декартову систему координат $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и обозначим через $E_{\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n}$ множество точек $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, для которых $\xi_1 \leqslant \zeta_1$, $\xi_2 \leqslant \zeta_2, \dots, \xi_n \leqslant \zeta_n$. Положим

$$U(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \mu(E_{\zeta_1,\dots,\zeta_n}). \tag{1}$$

Из аддитивности и ограниченности заряда следует, что $U(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ является функцией ограниченной вариации. Если η_i стремится к ζ_i $(i = 1, 2, \dots)$, оставаясь больше ζ_i, то множества $E_{\eta_1,\dots,\eta_n} \setminus E_{\zeta_1,\dots,\zeta_n}$ образуют убывающую к пустому множеству последовательность. Следовательно, из вполне аддитивности заряда $\mu(E)$ получаем $\mu(E_{\eta_1,\dots,\eta_n}) \to \mu(E_{\zeta_1,\dots,\zeta_n})$, поэтому функция $U(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ непрерывна справа, т. е.

$$U(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = U(\zeta_1 + 0, \dots, \zeta_n + 0). \tag{2}$$

Если все ζ_i постоянны, кроме ζ_k, которое стремится к $-\infty$, то множества $E_{\zeta_1,\dots,\zeta_n}$ образуют последовательность, убывающую к пустому множеству, и так как заряд $\mu(E)$ вполне аддитивен, то $\lim\limits_{\zeta_k \to -\infty} \mu(E_{\zeta_1,\dots,\zeta_n}) = 0$, т. е.

$$\lim_{\zeta_k \to -\infty} U(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = 0. \tag{3}$$

(Можно сказать, что $U(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ зануляется на $-\infty$.)

Если, с другой стороны, нам дана функция ограниченной вариации $U(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, удовлетворяющая условиям (2) и (3), то по той же формуле (1) мы можем определить вполне аддитивный заряд. Если мы возьмем n-мерный интервал $I(\zeta_1 \geqslant \xi_1 > \zeta_1 - \eta_1, \dots, \zeta_n \geqslant \xi_n > \zeta_n - \eta_n)$, открытый слева и замкнутый справа, то заряд на нем определяется естественным образом; например, в двумерном случае:

$$\mu(I) = U(\zeta_1, \zeta_2) - U(\zeta_1 - \eta_1, \zeta_2) - U(\zeta_1, \zeta_2 - \eta_2) + U(\zeta_1 - \eta_1, \zeta_2 - \eta_2). \tag{4}$$

Из определения интеграла Радона и Стилтьеса (точнее говоря, Римана и Радона [20]) очевидно следует, что если $\mu(E)$ и $U(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ связаны между собой формулами (1) и (4), то для любой непрерывной ограниченной функции $f(x) = f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ будем иметь

$$\int\limits_R f(x)\mu(dE) = \int f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)\, dU(\zeta_1, \dots, \zeta_n). \tag{5}$$

[20] До этого мы пользовались определением интеграла Лебега. Однако здесь определение Римана является более удобным.

Заметим, что в общем случае из (5) не следует (1), так как можно изменить значение функции $U(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ в точках разрыва, не меняя значения ее интеграла; например мы можем добавить к ней произвольное слагаемое, зависящее только от $n-1$ переменных ζ_i. Используя это соображение мы всегда можем добиться выполнения условий (2) и (3), а тогда при этих дополнительных условиях из (5) будет следовать (1). Поэтому во всех вопросах, в которых основную роль играют интегралы по функциям ограниченной вариации, можно считать выполненными условия (2) и (3). При этом между такими функциями и вполне аддитивными зарядами имеется взаимно однозначное соответствие, даваемое формулой (1).

На основании этого замечания можно переносить полученные нами результаты о слабой сходимости зарядов на функции ограниченной вариации. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что условия (2) и (3) выполняются.

Разложению заряда на положительную и отрицательную части соответствует представление функции ограниченной вариации в виде разности двух неубывающих функций; а вариации заряда соответствует вариация полученной функции $U(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$.

Так как евклидово пространство локально компактно и имеет счетную базу, мы можем применять теоремы из предыдущих параграфов: теорема 4 вместе с теоремой 1, § 19, раскрывающей суть понятия ускользающей нагрузки, дает следующий факт:

Теорема 1. *Для слабой компактности семейства функций ограниченной вариации, необходимо и достаточно, чтобы полная вариация функций из этого семейства была равномерно ограничена и чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой куб, что полная вариация любой функции из семейства вне этого куба была $< \varepsilon$* [21].

2°. Исследование слабой сходимости функций ограниченной вариации можно проводить тем же методом, которым мы исследовали слабую сходимость зарядов в произвольных пространствах; этот метод основывается на леммах 2 и 3, § 14 и на изучении лебеговых множеств $\{x : f(x) < t\}$, $\{x : f(x) \leqslant t\}$ для непрерывных функций. Для того чтобы иметь возможность применять это к зарядам в евклидовом пространстве и получать результаты, которые можно выражать в терминах функций ограниченной вариации, нам потребуется лемма, приведенная ниже.

Будем называть непрерывную ограниченную функцию $f(x)$ q-функцией, если ее лебеговы множества $\{x : f(x) < t\}$ есть множества $E_{\zeta_1, \ldots, \zeta_n}$ либо, если ее лебеговы множества $\{x : f(x) \leqslant t\}$ есть $E_{\zeta_1, \ldots, \zeta_n}$.

[21] По определению полная вариация функции $U(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ есть точная верхняя грань сумм модулей значений $\mu(I)$, вычисленных по формуле (4), для непересекающихся интервалов I. В нашем случае следует брать интервалы вне указанного куба.

Лемма 1. *Любая непрерывная функция, отличная от нуля только в ограниченной области пространства, может быть равномерно приближена с любой точностью конечными суммами q-функций.*

Для простоты мы дадим доказательство этой леммы в случае плоскости. Ее доказательство в случае n-мерного пространства совершенно аналогично.

Рассмотрим на плоскости координаты ξ, η и будем считать ξ-ось горизонтальной, ориентированной вправо, а η-ось вертикальной, направленной вверх.

Пусть $f(\xi,\eta)$ — непрерывная функция, отличная от нуля только в некоторой ограниченной области. Заключим эту область в квадрат Q со сторонами, параллельными координатным осям. Разделим квадрат Q на столь мелкие квадратики q, чтобы вариация функции $f(\xi,\eta)$ на каждом из них была меньше некоторого заданного числа ε. Занумеруем эти квадратики так, чтобы квадратики с меньшими номерами лежали либо выше, либо правее любого квадратика с большим номером. Разделим каждый квадратик на половинки диагоналями, параллельными биссектрисе положительного квадранта. Строим теперь функцию $h(\xi,\eta)$, равную нулю вне Q, линейную на каждом из полученных треугольников, и равную $f(\xi,\eta)$ в вершинах треугольников. Эта функция приближает функцию $f(\xi,\eta)$ с точностью до ε. Мы докажем, что она является суммой q-функций.

Рассмотрим первый квадратик q_1. Пусть его вершины есть A_1, A_2, A_3, A_4 и пусть треугольник $A_1A_2A_4$ лежит выше диагонали A_1A_4, а треугольник $A_1A_3A_4$ — ниже ее. В первом треугольнике $h(\xi,\eta)$ представляет линейный функционал $h_1(\xi,\eta)$, а во втором — линейный функционал $h_2(\xi,\eta)$. Оба эти функционала мы считаем продолженными на всю плоскость. Определим теперь функцию $q_1(\xi,\eta)$ следующим образом: $q_1(\xi,\eta)=0$ в каждой точке, лежащих выше или правее всех точек квадрата q_1, $q_1(\xi,\eta)=h(A_4)$ во всех точках, лежащих ниже или левее точки A_4. Остались не рассмотренными еще две полосы, одна горизонтальная, другая вертикальная, граничащих по отрезку A_1A_4. В первой полосе полагаем $q_1(\xi,\eta)=h_1(\xi,\eta)$, а во второй — $q_1(\xi,\eta)=h_2(\xi,\eta)$. Так определенная функция $q_1(\xi,\eta)$ является очевидно q-функцией.

Функция $h(\xi,\eta)-q_1(\xi,\eta)$ снова будет кусочно линейной, равной нулю выше или правее всех точек квадрата и равной нулю в квадратике q_1. С помощью этой функции мы определим функцию $q_2(\xi,\eta)$, начиная с квадрата q_2, в точности так же, как мы определяли функцию $q_1(\xi,\eta)$, исходя из функции $h(\xi,\eta)$ и начиная с квадратика q_1. Мы получим вторую q-функцию и функция $h(\xi,\eta)-q_1(\xi,\eta)-q_2(\xi,\eta)$ будет равна нулю не только на q_1, но и на q_2. Продолжая этот процесс, мы придем к функции $g(\xi,\eta)=$ $=h(\xi,\eta)-\sum\limits_{i=1}^{n} q_i(\xi,\eta)$, которая равна нулю на квадрате Q, а также всюду выше или правее квадрата Q. В то же время она постоянна в области, лежащей ниже и левее нижней левой вершины квадрата Q, и линейна на каждой из полос (вертикальных и горизонтальных), являющихся продолжениями тех полос, на которые разбит квадрат Q (оба свойства функции $g(\xi,\eta)$ следуют прямо из определения функций $q_i(\xi,\eta)$ и из того факта, что $h(\xi,\eta)$ равна нулю всюду вне квадрата Q). Но на границе области, образованной этими полосами, функция $g(\xi,\eta)$ равна нулю. Следовательно, она всюду равна нулю. Поэтому

$$h(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{n} q_i(\xi,\eta)$$

и лемма доказана.

В случае n-мерного пространства мы рассматриваем такой куб Q, со сторонами параллельными координатным осям, вне которого $f(\xi_1,\ldots,\xi_n)=0$ и делим его на кубики q_i. Каждый из этих кубиков мы разбиваем на симплексы, вершины которых являются вершинами куба, и которые имеют общее ребро, параллельное прямой, проходящей через точки $(0,\ldots,0)$ и $(1,\ldots,1)$. Далее мы строим функцию $h(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, равную нулю вне куба Q, линейную на каждом из этих симплексов и равную $f(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ в их вершинах. Такая функция будет суммой q-функций. Для доказательства этого факта мы возьмем самый «правый верхний кубик» q_1. Все его вершины, за исключением одной вершины A, лежат на границе куба Q и, следовательно, на этом кубике $h(\xi_1,\ldots,\xi_n)=0$. Определим $q_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ следующим образом: $q_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)=0$ во всех точках, лежащих «правее и выше» кубика q_1, $q_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)=h(A)$ во всех точках, лежащих «ниже и левее» кубика q_1. Осталось еще n зон (число, равное размерности), пересекающих диагональ кубика q_1. На них мы считаем функцию $q_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ линейной. Тогда на кубике q_1 будет $q_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)=h(\xi_1,\ldots,\xi_n)$. В самом деле, $h(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ равна нулю также на «правых верхних» гранях кубика q_1, конечно равна $h(A)$ в точке A, и линейна на симплексах, на которые разбит кубик q_1. Но если два симплекса граничат по одной и той же «правой верхней» грани кубика q_1, то на каждом из них $h(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ есть одна и та же линейная функция, так как на таких гранях $h(\xi_1,\ldots,\xi_n)=0$. Поэтому $h(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ линейна на тех же областях, что и $q_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, следовательно, на q_1 мы получаем $h(\xi_1,\ldots,\xi_n)=q_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)$.

Рассмотрев функцию $h(\xi_1,\ldots,\xi_n)-q_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, мы можем с помощью нее построить функцию $q_2(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, равную ей на кубике q_2. Конструкция будет в точности такой же, так как на «правых верхних» гранях кубика q_2 имеем $h(\xi_1,\ldots,\xi_n)-q_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)=0$. Остальная часть доказательства проводится тем же способом, что и в случае плоскости.

3°. В предыдущем параграфе мы доказали (теорема 2): *для того чтобы последовательность зарядов $\mu_n(E)$ в локально компактном метрическом пространстве со счетной базой была слабо сходящейся, необходимо и доста-*

точно, чтобы для любой функции $f(x)$, отличной от нуля только на некотором множестве с компактным замыканием, существовал предел

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_R f(x)\mu_m(dE)$$

и чтобы последовательность μ_n не имела ускользающей нагрузки. Комбинируя эту теорему с леммой 1 и формулируя отсутствие ускользающей нагрузки для вполне аддитивных зарядов в явном виде, мы получаем:

Теорема 2. *Для слабой сходимости последовательности вполне аддитивных зарядов $\mu_m(E)$ в евклидовом пространстве необходимо и достаточно, чтобы для любой q-функции существовал предел*

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_R q(x)\mu_m(dE)$$

и чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал куб, вне которого вариации всех зарядов $\mu_m(E)$ были меньше ε.

Эта теорема позволяет нам при изучении слабой сходимости рассматривать только q-функции. В свою очередь, это позволяет нам придать теоремам о слабой сходимости зарядов такую форму, что они могут буквально переноситься на функции ограниченной вариации. Например рассмотрим общую теорему о необходимом и достаточном условии для слабой сходимости, доказанную в § 15. Приведем здесь ее новую формулировку.

Теорема 3. *Для слабой сходимости последовательности зарядов $\mu_n(E)$ в евклидовом пространстве необходимо и достаточно, чтобы* 1) *заряды $\mu_n(E)$ были слабо ограничены,* 2) *для любого $\varepsilon > 0$ должен существовать куб, что вне него вариация всех зарядов $\mu_n(E)$ меньше ε,* 3) *для любого $\varepsilon > 0$ и любых наборов точек $\xi_1,\dots,\xi_n$, $\eta_1,\dots,\eta_n$, таких, что $\xi_1 > \eta_1,\dots,\xi_n > \eta_n$, должен существовать такой номер m, что при $i,k > m$ выполняются неравенства*

$$\inf_{E_{\eta_j}\leqslant E_{\zeta_j}\leqslant E_{\xi_j}} |\mu_i(E_{\zeta_1,\dots,\zeta_n}) - \mu_k(E_{\zeta_1,\dots,\zeta_n})| < \varepsilon. \tag{6}$$

Необходимость первого условия уже доказана (теорема 1). Докажем необходимость второго условия. Мы построим q-функцию, скажем $q(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$, разделяющую $E_{\eta_1,\dots,\eta_n}$ и $R\diagdown E_{\xi_1,\dots,\xi_n}$ (т. е. равную нулю на $E_{\eta_1,\dots,\eta_n}$ и единице на $R\diagdown E_{\xi_1,\dots,\xi_n}$). Рассмотрим множества

$$F_t = \{(\zeta_1,\dots,\zeta_n) : q(\zeta_1,\dots,\zeta_n) \leqslant t\} \qquad (-1 \leqslant t \leqslant 1) \tag{7}$$

и функции ограниченной вариации (см. лемму 2, § 14)

$$\varphi_m(t) = \mu_m(F_t) \qquad (m = 1, 2, \dots) \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1).$$

Если заряды $\mu_m(E)$ слабо сходятся, то по лемме 3, § 14 функции $\varphi_m(t)$ тоже слабо сходятся. Кроме того, поскольку $F_{-1} = \varnothing$, то $\varphi_m(-1) = 0$. Поэтому по лемме 1, § 15 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое m, что при $i, k > m$ получим неравенство

$$\inf_{0<t<1} |\varphi_k(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon.$$

Мы можем сюда подставить $\mu_k(F_t)$ и $\mu_i(F_t)$ вместо $\varphi_k(t)$ и $\varphi_i(t)$. Но так как F_t, определяемые по формуле (7), есть множества вида $E_{\zeta_1,\dots,\zeta_n}$ (потому что $q(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ является q-функцией), мы получаем в результате формулу (6).

Мы видим, что доказательство в точности такое же, как в теореме 1, § 15.

Достаточность условий теоремы тоже доказывается тем же способом, что и в теореме 1, § 15. Единственное отличие состоит в том, что мы можем здесь ограничиться рассмотрением q-функций. Тогда их лебеговы множества, возникающие при доказательстве, будут множества $E_{\zeta_1,\dots,\zeta_n}$, и все сводится к замене произвольных открытых (или замкнутых) множеств на множества $E_{\zeta_1,\dots,\zeta_n}$.

Теперь уже ясно, что мы можем аналогичным образом поступать со всеми теоремами из предыдущего параграфа: замкнутые и открытые множества заменять на множества $E_{\zeta_1,\dots,\zeta_n}$, а вместо произвольных ограниченных непрерывных функций рассматривать только q-функции. Преобразованные таким способом теоремы можно сразу переформулировать для случая функций ограниченной вариации, которые связаны с зарядами при помощи формулы (1). Таким образом, мы получаем следующие теоремы:

Теорема 4. *Для слабой сходимости последовательности функций ограниченной вариации $U(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, непрерывных справа и стремящихся к нулю на $-\infty$* [*условия* (2) *и* (3)], *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *полная вариация функций $U_m(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ равномерно ограничена;*

2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует куб, вне которого вариация всех функций $U_m(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ меньше ε;*

3) *для любого $\varepsilon > 0$ и для любой пары точек $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $(\eta_1, \dots, \eta_n)$, таких, что $\xi_1 > \eta_1, \dots \xi_n > \eta_n$, существует такое m, что при $k, l > m$ выполняются неравенства*

$$\inf_{\eta_j<\zeta_j<\xi_j} |U_i(\zeta_1, \dots, \zeta_n) - U_k(\zeta_1, \dots, \zeta_n)| < \varepsilon \qquad (j = 1, \dots, n).$$

(Эта теорема является модификацией теоремы 3 и соответствует теореме 1, § 15.)

В следующей теореме мы для краткости не приводим условий того, что функции ограниченной вариации являются непрерывными справа и стремятся к нулю на $-\infty$ [условия (2) и (3)], но мы подразумеваем их выполнение [22].

Теорема 5. *Для слабой сходимости* $U_m(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \underset{w}{\longrightarrow} U(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* 1), 2) *теоремы* 4 *и следующее условие* 3): *для любой пары точек* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *и* $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, *таких, что* $\xi_1 > \eta_1, \ldots, \xi_n > \eta_n$, *имеет место равенство*

$$\lim_{m\to\infty} \inf_{\eta_i \leqslant \zeta_i \leqslant \xi_i} |U_m(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) - U(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)| = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

(Эта теорема соответствует теореме 2, § 15.)

Теорема 6. *Для слабой сходимости* $U_m(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \underset{w}{\longrightarrow} U(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* 1), 2) *теоремы* 4 *и следующее условие* 3): *функции* $U_m(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ *сходятся справа к функции* $U(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, *т. е. для любой точки* $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ *существует стремящаяся к ней последовательность точек* $(\zeta_1^m, \ldots, \zeta_n^m)$, *такая, что* $\zeta_1^m \geqslant \zeta_1, \ldots, \zeta_n^m \geqslant \zeta_n$, *и при этом имеет место равенство*

$$\lim_{m\to\infty} U_m(\zeta_1^m, \ldots, \zeta_n^m) = U(\zeta_1, \ldots, \zeta_n).$$

(Эта теорема соответствует теореме 1, § 17.)

Теорема 7. *Если все* [23] *функции* $U_m(x)$ *являются неубывающими, то для слабой сходимости* $U_m(x) \underset{w}{\longrightarrow} U(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись условия* 1), 2) *теоремы* 4 *и чтобы для любой точки* x *выполнялось неравенство*

$$U(x) \geqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} U_m(x).$$

(Эта теорема соответствует теореме 2, § 16.)

Теорема 8. *Если все функции* $U_m(x)$ *являются неубывающими, то для слабой сходимости* $U_m(x) \underset{w}{\longrightarrow} U(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись условия* 1), 2) *теоремы* 4 *и чтобы в точках непрерывности* $U_m(x)$ *сходились к* $U(x)$.

(Эта теорема соответствует теореме 3, § 16).

Теорема 9. *Для слабой сходимости* $U_m(x) \underset{w}{\longrightarrow} U(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись условия* 1), 2) *теоремы* 4, *и чтобы из любой подпоследовательности* $U_{m_i}(x)$ *можно было извлечь подподпоследовательность* $U_{m_{i_k}}(x)$, *сходящуюся к* $U(x)$ *на всюду плотном множестве точек.*

---

[22] Все условия 3) следующих далее теорем, за исключением, возможно, теорем 6 и 7, уже известны по крайней мере для функций одной переменной, определенных на сегменте. Условие 3) теоремы 5 получено А. Н. Колмогоровым, а условия теоремы 8 — Э. Хелли.

[23] Для краткости мы пишем $U(x)$ вместо $U(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

(Эта теорема соответствует теореме 6, § 20.)

В итоге мы видим, что легко можно показать эквивалентность условия 3) теоремы 5 и любого из следующих условий (предполагается, что выполнены условия 1), 2) теоремы 4 [24]): 1) $U_m(x)$ сходится по мере к $U(x)$, 2) для любых $x_1 > x_0$, т. е. $\xi_1' > \xi_1^0, \ldots, \xi_n' > \xi_n^0$ имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\xi_1^0}^{\xi_1'} \cdots \int\limits_{\xi_n^0}^{\xi_n'} U_m(\xi\ldots)\,d\xi = \int\limits_{\xi_1^0}^{\xi_1'} \cdots \int\limits_{\xi_n^0}^{\xi_n'} U(\xi\ldots)\,d\xi.$$

4°. До этого мы рассматривали функции ограниченной вариации, определенные на всем пространстве; теперь мы сосредоточим свое внимание на функциях, определенных в кубе. Функция ограниченной вариации $U_0(x)$, определенная в кубе Q, может быть продолжена на все пространство так, чтобы вариация продолженной функции вне куба была равна нулю. Для этого проведем плоскости через все грани куба Q. Они делят все пространство на области следующего типа: 1) области, имеющие с кубом только одну общую вершину, 2) области, имеющие с кубом одно общее ребро, и так далее, до областей (n-го типа), имеющих с кубом одну общую $(n-1)$-мерную грань, $(n+1)$-й тип области — это сам куб. В областях первого типа полагаем $U(x)$ равным значению $U_0(x)$ в соответствующей вершине куба Q, в областях второго типа считаем $U(x)$ константой в любой плоскости ($(n-1)$-мерной), перпендикулярной соответствующему ребру куба Q, которая равна значению $U_0(x)$ в точке пересечения плоскости с указанным ребром, и т. д. В областях n-го типа $U(x)$ полагается равной константе на любой прямой, перпендикулярной соответствующей грани куба Q, именно, равной значению $U_0(x)$ в точке пересечения этой прямой с указанной гранью куба Q. Внутри самого куба мы считаем, что $U_0(x) = U(x)$. Построенная таким образом функция будет, в любой области вне куба, Q, будет зависеть только от части переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, и поэтому ее вариация там будет равна нулю. Значит, для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$, определенной на всем пространстве, будем иметь

$$\int\limits_R f(x)\,dU(x) = \int\limits_Q f(x)\,dU_0(x).$$

Следовательно, изучение слабой сходимости функций, определенных в кубе, сводится к изучению слабой сходимости функций, определенных на

[24] Условие 1) было введено Г. М. Фихтенгольцем, а условие 2) для функций, заданных на сегменте, — Ф. Риссом; см. с. 146–159 в [3]. Были найдены также другие формулировки этих условий для функций одной переменной. Они могут быть легко обобщены на функции n переменных.

всем пространстве. Их можно считать непрерывными справа и стремящимися к нулю в $-\infty$. Тогда к таким функциям можно применять теоремы 4–9. Теперь условие 2) в этих теоремах можно опустить, так как вне куба Q вариации всех рассматриваемых функций равны нулю. Однако они опять возникают естественным образом в формулировках условий слабой сходимости для функций, определенных на кубе (не продолженных на все пространство).

В этом случае мы нормируем все рассматриваемые функции таким образом, чтобы, во-первых, они были равны нулю на всех нижних и левых гранях куба Q (эти грани характеризуются тем, что внешние нормали к ним направлены в противоположном направлении по отношению к координатным ортам), и, во-вторых, они должны быть непрерывны справа всюду в кубе Q, за исключением, возможно, его «нижних и левых» граней [25].

При этих условиях функция, продолженная на все пространство, будет автоматически обращаться в нуль в $-\infty$. Требуя непрерывность функции справа, мы изменяем ее только на нижних левых гранях куба Q. Условие слабой сходимости в теоремах 4–9 должно удовлетворяться во всех областях рассмотренного выше типа. Но в областях, соответствующих вершинам, ребрам и т. д., лежащим на нижних левых гранях куба Q и в областях, соответствующих самим этим граням, рассматриваемые функции по условию равны нулю, и поэтому любое из условий 3) в теоремах 4–9 автоматически там выполняется. Если мы рассмотрим область, соответствующую самой правой верхней вершине x_0 куба Q, то в ней все рассматриваемые функции являются константами, и, следовательно, условия 3) в этой области заменяются на условие

$$U_m(x_0) \to U(x_0).$$

В области, соответствующей любой из n правых верхних ребер (граничащих с x_0), скажем в области, соответствующей ребру, параллельному i-й координатной оси, для всех рассматриваемых функций мы имеем по определению

$$U(x) \equiv U(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = U(\xi_1, \xi_1^0, \dots, \xi_n^0), \tag{8}$$

где $\xi_2^0, \dots, \xi_n^0$ — значение координат указанного ребра. Поэтому мы можем вместо требования, чтобы в рассматриваемой области удовлетворялись условия 3), требовать их выполнение на соответствующем ребре. Например, при выполнении равенств (8) условие

$$\lim_{m\to\infty} \inf_{\zeta_i \leqslant \xi_i \leqslant \eta_i} |U_m(\xi_1, \dots, \xi_n) - U(\xi_1, \dots, \xi_n)| = 0$$

---

[25] Условие непрерывности справа на нижних и левых гранях может противоречить условию равенства нулю функции на этих гранях. Более того, вводя такое условие, мы исключаем скачки функции на этих гранях, что приведет к изменению значения интегралов от этой функции.

эквивалентно условию

$$\lim_{m\to\infty} \inf_{\zeta_i \leqslant \xi_i \leqslant \eta_i} |U_m(\xi_1, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0) - U(\xi_1, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0)| = 0.$$

Аналогичный результат мы получим для областей, соответствующих верхним правым граням (т. е. граням, содержащим вершину x_0). Следовательно, мы можем сформулировать следующее общее утверждение, предполагая, что все функции нормированы в указанном выше смысле.

Теорема 10. *Для слабой сходимости функций ограниченной вариации $U_m(x)$, заданных в кубе Q, к функции $U(x)$, необходимо и достаточно, чтобы вариации всех функций $U_m(x)$ были равномерно ограничены и чтобы одно из условий* 3) *в теоремах* $5, 6, 9$ *удовлетворялось внутри всего куба Q и на всех его верхних правых гранях любой размерности от* 0 *до* $n-1$.

Мы можем аналогичным образом поступать с условием 3) из теоремы 4 и с условиями 3) из теорем 7 и 8 для монотонных функций, а также с условиями, сформулированными в конце п. 3°, которые эквивалентны условию 3) из теоремы 5.

При переходе от зарядов к функциям ограниченной вариации главную роль играет частичный порядок в евклидовом пространстве, который вводится с помощью координат следующим образом: $(\xi_1, \dots, \xi_n) > (\eta_1, \dots, \eta_n)$, если $\xi_1 > \eta_1, \dots, \xi_n > \eta_n$. Легко проверяется, что в любом локально компактном пространстве со счетной базой, на котором можно задать такого типа координатный порядок, мы можем осуществить такой же переход по формуле (1) от зарядов к функциям ограниченной вариации. Например, это можно осуществить в гильбертовом параллелепипеде. В этом случае все теоремы из предыдущего параграфа могут быть соответствующим образом переформулированы для таких пространств. Например в гильбертовом параллелепипеде справедлива теорема 10, а также другие, упомянутые после нее, теоремы о слабой сходимости функций ограниченной вариации (теряют смысл только условия, в которых встречается сходимость по мере).

ГЛАВА VI. ДОПОЛНЕНИЕ

1°. Во введении к настоящей работе говорилось, что в главе VI будет рассмотрено «обобщение и модификация теории, развитой в предыдущих главах». Однако некоторые вещи следует исключить как недостаточно вписывающиеся в общее направление исследования этой статьи, другие же кажутся мне совершенно очевидными. Поэтому мы не будем здесь рассматривать «обобщение и модификацию теории, развитой в предыдущих главах».

Во введении также говорилось, что в дополнении будут рассматриваться инвариантные меры на локально компактных группах. Этого однако здесь не сделано, так как результаты, которые я собирался привести, уже опубликованы в другой статье [4]. Таким образом, из всего, что предполагалось изложить в дополнении, остается только вопрос о примерах зарядов в достаточно общих пространствах. Приводя эти примеры, мы намереваемся показать, что наша теория не является беспредметной. Некоторое количество примеров было приведено раньше, но они в основном носили слишком частный характер.

В любом пространстве можно определить линейный функционал $L(f) = f(x_0)$, где x_0 — заданная точка, или, в более общем виде,

$$L(f) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f(x_i),$$

где x_i — заданные точки и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ сходится. Такому функционалу соответствует, как говорят, дискретный заряд; в совершенно нормальном пространстве такой заряд состоит из нагрузок a_i в точках x_i. Эта конструкция тривиальна; интерес представляет построение примеров зарядов в каком-то смысле противоположной природы, не равных нулю ни на каком открытом множестве. Однако осуществление такого манифеста невозможно в пространствах, в которых существуют несчетные семейства открытых попарно непересекающихся множеств. Вопрос о таких вполне аддитивных зарядах мы рассмотрим далее в случае метрических пространств со счетной базой.

Можно начать построение зарядов во вполне регулярном пространстве, используя хорошо известную теорему Тихонова, в которой утверждается, что такое пространство вкладывается в произведение достаточно большого числа сегментов, или в произведение окружностей. Последнее произведение можно рассматривать как группу и, следовательно, там можно задать инвариантную меру $\mu(E)$, которая является, очевидно, зарядом. Но в таком простом случае нет необходимости использовать общую конструкцию инвариантной меры в компактной группе. Достаточно применить следующее замечание: если в компактном пространстве R_ξ задан положительный заряд $\mu_\xi(E_\xi)$, такой, что $\mu_\xi(R_\xi) = 1$, то в произведении этих пространств мы имеем заряд $\mu(E)$, который на множествах тихоновской базы этого произведения выражается следующим образом:

$$\mu(G) = \mu_{\xi_1}(G_{\xi_1})\mu_{\xi_2}(G_{\xi_2})\dots\mu_{\xi_n}(G_{\xi_n}),$$

где $\xi_1, \dots, \xi_n$ — индексы тех пространств, в которых выбраны открытые множества G_{ξ_i}, дающие в произведении с остальными пространствами R_ξ данную тихоновскую окрестность G [26].

[26] Для любой функции $f(x)$, непрерывной на произведении пространств R_ξ, и любого

Пусть R есть произведение окружностей. Если множество $R' \subset R$ измеримо, то полагая $\mu'(E') = \mu(E')$ при $E' \subset R'$, мы получаем по теореме 7, § 9 реальный заряд $\mu'(E')$ в R', так как R — компакт и поэтому любой заряд в R является реальным. Но если множество R' неизмеримо, то берем $G_\delta \supset R'$ таким, что $\mu(G_\delta)$ равно внешней мере множества R'. Пусть $B' \subset R'$ — борелевское множество в R'. Возьмем борелевское множество $B \subset G_\delta$ таким, чтобы $B \cap R' = B$, и положим $\mu'(B') = \mu(B)$. Такое определение корректно, так как если $B' = B_1 \cap R' = B_2 \cap R'$, то

$$(B_1 \diagdown B_2) \cup (B_2 \diagdown B_1) \subset G_\delta \diagdown R$$

и, следовательно, это множество имеет нулевую меру. Функция $\mu'(E')$ будет реальным зарядом в R'. Эта конструкция совпадает с построением реальной части заряда, изложенным в § 13. Конструкция нереальных зарядов указывается в лемме 1, § 9 и теореме, обратной к теореме 2, § 12; это дает нам возможность по заданному заряду в компактном пространстве определить его на подпространстве этого пространства.

2°. Мы дадим сейчас более простую, но очень полезную конструкцию зарядов.

Теорема 1. *Пусть в пространстве R задана вполне аддитивная функция множеств $\mu(E)$, определенная на всех борелевских множествах. Пусть φ — не обязательно однозначное отображение пространства R в пространство R', но такое, что прообразы замкнутых множеств замкнуты и на множестве точек, где φ неоднозначна, вариация $\mu(E)$ равна нулю*[27]*. Тогда $\mu\big(\varphi^{-1}(E')\big)$ — вполне аддитивная функция множеств, определенная на борелевских множествах E' пространства R'. Если пространство R совершенно нормально, то эта функция является зарядом в R.*

Если множество E' замкнуто, то по условию множество $\varphi^{-1}(F')$ также замкнуто. Следовательно, значение $\mu\big(\varphi^{-1}(F')\big)$ определено. Если значения

$\varepsilon > 0$, существует конечное число пространств $R_{\xi_1}, \ldots, R_{\xi_n}$, таких, что вариация функции $f(x)$ $(x = \{x_\xi\})$, при фиксированных $x_{\xi_1}, \ldots, x_{\xi_n}$ и произвольным образом меняющихся остальных x_ξ, будет $< \varepsilon$. Следовательно, все интегралы

$$\int\limits_{R_{\xi_1}} \cdots \int\limits_{R_{\xi_n}} f(x)\mu_{\xi_1}(dE_{\xi_1})\mu_{\xi_n}(dE_{\xi_n}), \qquad (*)$$

рассматриваемые как функции от остальных переменных x_ξ, будут иметь вариацию $< \varepsilon$. Конечные наборы индексов ξ образуют направление: один набор индексов следует за другим набором, если он его содержит. Из вышеизложенного ясно, что существует предел по этому направлению от интегралов (*).

[27] Такое множество M может не быть борелевским и тогда заряд $|\mu|(M)$ не определен; в этом случае мы рассмотрим $\inf |\mu|(E)$ (здесь уже E — борелевское множество). Такие множества M, для которых $\inf\limits_{E \supset M} |\mu|(E) = 0$, мы называем множествами меры нуль.

$\mu\big(\varphi^{-1}(E_i')\big)$ $(i = 1, 2, \dots)$ определены, т. е. $\varphi^{-1}(E_i')$ есть либо борелевские множества, либо отличаются от борелевских на множества меры нуль, то значение $\mu(\varphi^{-1}\big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i')\big)$ также определено, так как

$$\varphi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i'\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi^{-1}(E_i').$$

Далее, если значение $\mu\big(\varphi^{-1}(E')\big)$ определено (т. е. если снова $\varphi^{-1}(E')$ есть либо борелевское множество, либо отличается от борелевского на множество меры нуль), то значение $\mu\big(\varphi^{-1}(R' \setminus E')\big)$ тоже определено. Действительно,

$$\varphi^{-1}(R') = \varphi^{-1}(R' \setminus E') \cup \varphi^{-1}(E'),$$

и так как $(R' \setminus E') \cap E' = \varnothing$, то вариация меры μ на множестве $\varphi^{-1}(R' \setminus E') \cap \varphi^{-1}(E')$ по условию равна нулю, и мы можем положить

$$\mu\big(\varphi^{-1}(R' \setminus E')\big) = \mu\big(\varphi^{-1}(R')\big) - \mu\big(\varphi^{-1}(E')\big).$$

Из доказанного выше следует, что функция $\mu\big(\varphi^{-1}(E')\big)$ определена на борелевских множествах пространства R'. Она является аддитивной, так как если $E_1' \cap E_2' = \varnothing$, то по условию, наложенному на функцию φ, будем иметь $\mu(\varphi^{-1}\big(E_1') \cap \varphi^{-1}(E_2')\big) = 0$, поэтому

$$\mu(\varphi^{-1}\big(E_1' \cup E_2')\big) = \mu\big(\varphi^{-1}(E_1')\big) + \mu\big(\varphi^{-1}(E_2')\big).$$

Кроме того, $\mu\big(\varphi^{-1}(E')\big)$ абсолютно аддитивна. Чтобы это увидеть, достаточно показать, что если множества $E_1', E_2', \dots$ образуют убывающую к пустому множеству последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\big(\varphi^{-1}(E_n')\big) = 0$. Но если $E_n' \supset E_{n+1}'$, то $\varphi^{-1}(E_n') \supset \varphi^{-1}(E_{n+1}')$, и если пересечение всех этих множеств пусто, то, как известно из теории меры, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\big(\varphi^{-1}(E_n')\big) = 0$ (см., например, [5]). Но если $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}(E_n') = E_0 \neq \varnothing$ и $x \in E_0$, то мы получим φ-образ точки x во всех множествах E_n'. Но пересечение всех множеств E_n' пусто и значит отображение φ неоднозначно в точке $x \in E_0$. Поэтому вариация μ на E_0 равна нулю и опять получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\big(\varphi^{-1}(E_n')\big)\mu(E_0) = 0$.

Если пространство R' совершенно нормально, то любая вполне аддитивная функция, заданная на его борелевских множествах, является зарядом (лемма 1, § 12).

Из доказанной теоремы следует

Теорема 2. *В любом локально компактном метрическом пространстве со счетной базой существует вполне аддитивный заряд, не равный нулю ни на одном открытом множестве.*

Пусть R' — компактное метрическое пространство. Как хорошо известно, оно является непрерывным образом совершенного канторова множества R из отрезка $[0,1]$. Мы можем, конечно, выбрать это множество R таким, что любое непустое множество E из R, являющееся открытым относительно R, имеет положительную меру $\mu(E)$. Если φ — непрерывное отображение R на R', то оно очевидно удовлетворяет условиям теоремы 1 и, более того, φ-образ открытых множеств тоже открыт. Следовательно, $\mu\bigl(\varphi^{-1}(E')\bigr)$ $(E' \subset R')$ будет вполне аддитивным зарядом в R, отличным от нуля на любом открытом множестве.

Если R' — локально компактное пространство, имеющее счетную базу, то оно является объединением счетного числа компактных пространств $R'_1 \subset R'_2 \subset \ldots$. Если $\mu_1(E'), \mu_2(E'), \ldots$ — положительные заряды, определенные соответственно в $R'_1, R'_2, \ldots$ и отличные от нуля на любом открытом множестве в $R'_1, R'_2, \ldots$, то

$$\mu(E') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(E' \cap R'_n)$$

будет зарядом в R', отличным от нуля на любом открытом множестве.

Теорема 3. *Пусть метрическое пространство R со счетной базой является метрически абсолютно борелевским, т. е. борелевским в своем пополнении и поэтому в любом содержащем его метрическом пространстве* (*вообще говоря, R можно брать абсолютно измеримым, т. е. измеримым в своем пополнении относительно любого заряда; например, R может быть абсолютно аналитическим*). *Любой вполне аддитивный заряд в R сосредоточен на счетном объединении компактных подмножеств, т. е. на топологически абсолютном $F_\sigma \subset R$. В то же время, какое бы ни было дано счетное объединение компактных множеств $F_\sigma \subset R$, всегда существует вполне аддитивный заряд в R, сосредоточенный на F_σ, и отличный от нуля на любом открытом множестве, пересекающемся с F_σ.*

Первая часть теоремы содержится в теореме 1, § 12. Обобщение на случай, когда R уже не борелевское, но абсолютно измеримое, следует из замечания к теореме 3, § 12. Вторая часть нашей теоремы следует из теоремы 1 на основании точно той же конструкции, которая использовалась при доказательстве теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть в пространстве R задана вполне аддитивная функция $\mu(E)$, определенная на борелевских множествах. Пусть отображения $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, пространства R в пространство R' удовлетворяют условиям теоремы 1 и пусть отображения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ стремятся к φ в том смысле, что для любого элемента $x \in R$, на котором φ однозначно, выполняется $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$*[28]. *Тогда функции $\mu\bigl(\varphi_n^{-1}(E')\bigr)$ слабо сходятся к $\mu\bigl(\varphi^{-1}(E')\bigr)$.*

[28] Определение сходимости $\varphi_n(x)$ к $\varphi(x)$ самое обычное: для любого открытого множества G, содержащего $\varphi(x)$, найдется n_0 такое, что $\varphi_n(x) \subset G$ для всех $n > n_0$.

Пусть отображения $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ удовлетворяют условиям теоремы. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на R'. Мы покажем,что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{R'} f(x')\mu\bigl(\varphi_n^{-1}(dE')\bigr) = \int\limits_{R'} f(x')\mu\bigl(\varphi^{-1}(dE')\bigr). \tag{1}$$

Разобьем интервал $[\inf f, \sup f]$ на отрезки длины ε и пусть f_i — какое-нибудь значение из i-го сегмента, а E_i' – множество, на котором $f(x')$ принимает значения в i-м сегменте. Тогда

$$\left|\int\limits_{R} f(x')\mu\bigl(\varphi^{-1}(dE')\bigr) - \sum_i f_i\mu\bigl(\varphi^{-1}(E_i')\bigr)\right| < \varepsilon M, \tag{2}$$

и то же самое выполняется для все φ_n, где M — верхняя грань вариаций всех $\mu\bigl(\varphi_n^{-1}(E')\bigr)$, $\mu\bigl(\varphi^{-1}(E')\bigr)$, т. е. полная вариация от $\mu(E)$, $f\bigl(\varphi(x)\bigr), f\bigl(\varphi_n(x)\bigr)$ — функции, определенные на R. Множество, на котором $f\bigl(\varphi(x)\bigr)$ принимает значения, лежащие в i-м сегменте длины ε, это в точности $\varphi^{-1}(E_i')$, и аналогично для $f\bigl(\varphi_n(x)\bigr)$. Функции $f\bigl(\varphi(x)\bigr)$, $f\bigl(\varphi_n(x)\bigr)$, вообще говоря, неоднозначны. Но множества, на которых они неоднозначны, имеют нулевую меру (в указанном выше смысле). На дополнениях к этим множествам все функции $f\bigl(\varphi(x)\bigr)$, $f\bigl(\varphi_n(x)\bigr)$ однозначны и непрерывны, так как функция $f(x')$ непрерывна, а у функций φ и φ_n прообразы замкнутых множеств замкнуты. Как известно, удаление множества меры нуль не влияет на значение интеграла. Следовательно, функции $f\bigl(\varphi(x)\bigr)$, $f\bigl(\varphi_n(x)\bigr)$ интегрируемы относительно μ, и из формулы (2) мы получаем (так как ε произвольно)

$$\int\limits_{E'} f(x')\mu\bigl(\varphi^{-1}(dE')\bigr) = \int\limits_{R} f\bigl(\varphi(x)\bigr)\mu(dE) \tag{3}$$

и аналогично для функций φ_n.

На дополнительных множествах, там где φ, φ_n неоднозначны, функции $f\bigl(\varphi(x)\bigr)$ и $f\bigl(\varphi_n(x)\bigr)$ являются непрерывными, ограниченными и, кроме того, по условию теоремы $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$, так что $f\bigl(\varphi_n(x)\bigr) \to f\bigl(\varphi(x)\bigr)$. Так как поведение функций $f\bigl(\varphi(x)\bigr)$, $f\bigl(\varphi_n(x)\bigr)$ на множествах меры нуль не играет никакой роли, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{R} f\bigl(\varphi_n(x)\bigr)\mu(dE) = \int\limits_{R} f\bigl(\varphi(x)\bigr)\mu(dE).$$

Из этого равенства и из (3) следует равенство (1), т. е. наша теорема доказана.

Дадим пример применения теорем 1 и 3.

Пусть S — единичная сфера в n-мерном евклидовом пространстве и H — замкнутая выпуклая поверхность (т. е. поверхность выпуклого тела) в этом же пространстве. Пусть x — точка на S, а $\varphi(x)$ — множество тех точек на поверхности H, через которые проходит опорная плоскость к H с внешней нормалью, параллельной внешней нормали к S в точке x_0. На S мы имеем функцию множеств $\mu(E)$ — площадь. Как известно, отображение φ удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, $K(E) = \mu\bigl(\varphi^{-1}(E)\bigr)$ $(E \subset H)$ есть вполне аддитивная положительная функция множеств на поверхности H. Она называется *интегральной кривизной* выпуклой поверхности.

Пусть замкнутые выпуклые поверхности H_n стремятся к замкнутой выпуклой поверхности H. Можно, конечно, предположить, что все H_n и H имеют общую внутреннюю точку 0. Возьмем единичную сферу S' с центром в 0 и спроектируем на нее все поверхности H_n и H. Интегральная кривизна любой из поверхностей H_n и H может рассматриваться как функция множеств на S'. Обозначим ее через $K_n(E')$ и $K(E')$. С другой стороны, отображение φ сферы S на H (обратное сферическое отображение) вместе с проекцией H на S' можно рассматривать как одно отображение ψ сферы S на сферу S'. Аналогичным образом определим отображения ψ_n для поверхностей H_n. Легко видеть, что отображения ψ_n сходятся к отображению ψ в том смысле, что $\psi_n(x) \to \psi(x)$ для любой точки $x \in S$, в которой отображение ψ однозначно. Следовательно, условия теоремы 3 удовлетворяются и мы получаем, что $K_n(E)$ слабо сходится к $K(E)$.

В итоге мы видим, что если в некотором пространстве R задан заряд $\mu(E)$ и отображение φ пространства R в пространство R' такое, что как образы, так и прообразы замкнутых (открытых) множеств являются замкнутыми (открытыми), а множество, на котором φ неоднозначно, имеет нулевую меру, то функция множеств $\mu\bigl(\varphi^{-1}(E')\bigr)$ $(E' \subset R')$ является зарядом в R'.

Теорема 4 также может быть аналогичным образом переписана.

Статья поступила в редакцию
28.XII.1940

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: ОНТИ, 1937.
2. *Helly Ed.* Über lineare Funktionaloperationen // Wien. Ber. 1912. Bd 121. S. 265–297.
3. *Гливенко В. И.* Интеграл Стилтьеса. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
4. *Александров А. Д.* О группах с инвариантной мерой // Докл. АН СССР. 1942. Т. 34, № 1. С. 7–11.
5. *Saks S.* Théorie de l'intégrale. Warszawa: Subw. Fund. Kult. Narod, 1933. (Русский перевод: *Сакс С.* Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.)

Об одном обобщении римановой геометрии [1)]

Jahresber. Humb. Univ., Berlin. 1955. S. 3–65

Содержание

§ 1. Введение

1°. В настоящей работе заложены основы геометрии пространств, которые можно назвать пространствами кривизны, не превосходящей некоторой постоянной K. Короче говоря, *пространство кривизны не большей* K — это метрическое пространство, для которого, по крайней мере локально, выполнены следующие два условия:

а) любые две точки соединимы отрезком, или как мы будем говорить, кратчайшей, т. е. кривой, длина которой равна расстоянию между этими точками;

б) сумма соответствующим образом определенных углов любого треугольника не превосходит суммы углов треугольника с теми же длинами сторон на поверхности постоянной кривизны K. В случае $K = 0$ мы имеем дело с пространством неположительной кривизны.

[1)] Данная статья содержит подробное и расширенное изложение доклада, сделанного автором в марте 1955 г. в Университете им. В. Гумбольдта в Берлине. Часть результатов была опубликована ранее в «Трудах Математического института им. В. А. Стеклова» (1951. Т. 38. С. 5–23.) (см. также с. 269–297 т. 1 настоящего издания. — *Прим. ред.*); бо́льшая часть публикуется впервые.

С одной стороны, любое риманово пространство, кривизна которого ограничена сверху некоторым числом K, является пространством кривизны не большей K. С другой стороны, пространство кривизны не большей K не обязано быть не только римановым пространством, но даже многообразием. Так, например, фигура, составленная из двух плоских (евклидовых) треугольников, состыкованных в одной общей вершине, представляет собой двумерное пространство неположительной кривизны, если расстояние между точками определено как длина соединяющей их кратчайшей в этой фигуре.

Тем не менее все эти пространства обладают многими общими свойствами, и их геометрия представляет такое обширное поле для исследований, что подробное ее описание превосходит допустимый для статьи объем. Здесь я намереваюсь представить некоторые элементы этой геометрии. Кроме того, мы получим некоторые результаты, которые иллюстрируют введенные нами общие понятия. Эти результаты будут получены геометрическими методами, которые в известном смысле близки методам элементарной геометрии. Кстати, насколько известно автору, часть этих результатов является новой и в рамках римановой геометрии. Представляемая здесь теория использует те же идеи, что лежат в основе внутренней геометрии поверхностей, как она развита в [1] и [2]. В следующих пунктах этого параграфа даются более точные определения исходных понятий, формулируются основные результаты и демонстрируется связь представляемой теории с работами [2] и [3].

2°. Кратчайшая и треугольник. Все наши определения относятся к метрическим пространствам. Как обычно принято, $\rho(X,Y)$ означает расстояние между точками X и Y в рассматриваемом пространстве. Для краткости мы будем часто обозначать это расстояние просто XY.

Как известно, понятие длины кривой в метрическом пространстве R вполне аналогично обычному понятию длины. Если кривая L задана с помощью непрерывного отображения X_t ($X \in R$, $t \in [0,1]$), то ее длина равна

$$\rho(L) = \sup \sum_{k=0}^{n-1} \rho(X_{t_k}, X_{t_{k+1}}), \qquad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1.$$

Кратчайшая — это кривая, длина которой равна расстоянию между ее концами. Это равносильно тому, что кратчайшая, как непрерывный образ отрезка $[0,1]$ числовой оси, обладает следующим свойством: если X_t точка на кратчайшей, то для любой упорядоченной тройки $t_1 < t_2 < t_3$, $t_i \in [0,1]$, справедливо равенство

$$\rho(X_{t_1}, X_{t_2}) + \rho(X_{t_2}, X_{t_3}) = \rho(X_{t_1}, X_{t_3}).$$

Очевидно, что каждый отрезок кратчайшей также является кратчайшей. Кратчайшую, соединяющую точки A и B, т. е. такую, что $X_0 = A$, $X_1 = B$, мы обозначаем AB.

Треугольником ABC называется объединение трех кратчайших AB, BC, CA, соединяющих попарно различные точки A, B и C. Эти точки называются вершинами, кратчайшие AB, BC и CA — сторонами треугольника. Не исключается, что стороны пересекаются или частично совпадают, в частности может быть, что две стороны полностью покрывают третью: $AB + BC = AC$, так что треугольник вырождается.

Ключевую роль играет в дальнейшем следующая конструкция: для данного треугольника $T = ABC$ рассматривается треугольник T^K со сторонами той же длины на K-плоскости, т. е. на поверхности постоянной кривизны K. Под *K-плоскостью* имеется в виду евклидова плоскость в случае $K = 0$, плоскость Лобачевского в случае $K < 0$ и открытая полусфера в случае $K > 0$. Мы говорим, что треугольник T^K на K-плоскости со сторонами той же длины *соответствует* данному треугольнику T в R.

Если $K \leqslant 0$, то треугольник T^K существует для любого треугольника T (при этом, естественно, допускается вырождение треугольника в отрезок). Если же $K > 0$, то треугольник T^K существует только при условии, что сумма сторон удовлетворяет неравенству

$$AB + BC + CA < \frac{2\pi}{\sqrt{K}}.$$

В дальнейшем мы всегда предполагаем, что это условие выполнено, не упоминая об этом. Если $K > 0$, для этого можно ограничиться рассмотрением треугольников, которые содержатся в достаточно малой (по диаметру) части пространства R.

3°. Угол. (Все определения этого пункта можно найти в [1].) Пусть L и M — две кривые, исходящие из точки O [2]. Пусть X и Y — отличные от O точки на L и M соответственно. Построим на K-плоскости треугольник T^K со сторонами, равными расстояниям OX, OY, XY (рис. 1). Угол этого треугольника при вершине O', соответствующей вершине O, обозначим через $\gamma^K_{L,M}(X, Y)$ или $\gamma(X, Y)$. Если L и M — кратчайшие, то положение точек X и Y однозначно определяется расстояниями $x = OX$, $y = OY$. Поэтому иногда мы обозначаем угол через $\gamma^K_{L,M}(x, y)$ или $\gamma(x, y)$.

Верхним углом между кривыми L и M называется верхний предел угла $\gamma(X, Y)$ при $X, Y \to O$:

$$\alpha_{L,M} = \varlimsup_{X,Y \to O} \gamma(X, Y).$$

Так как $0 \leqslant \gamma(X, Y) \leqslant \pi$, то из этого определения ясно, что верхний угол всегда существует. Поскольку углы бесконечно малого треугольника на K-плоскости бесконечно мало отличаются от углов на евклидовой плоскости,

[2] Кривая называется *исходящей* из точки O, если она допускает такую параметризацию X_t, $t \in [0, 1]$, что $X_0 = O$.

то верхний предел угла $\gamma^K(X,Y)$ при $X, Y \to O$ не зависит от K. Это означает, что верхний угол $\alpha_{L,M}$ не зависит от K и определяется лишь самими кратчайшими L и M.

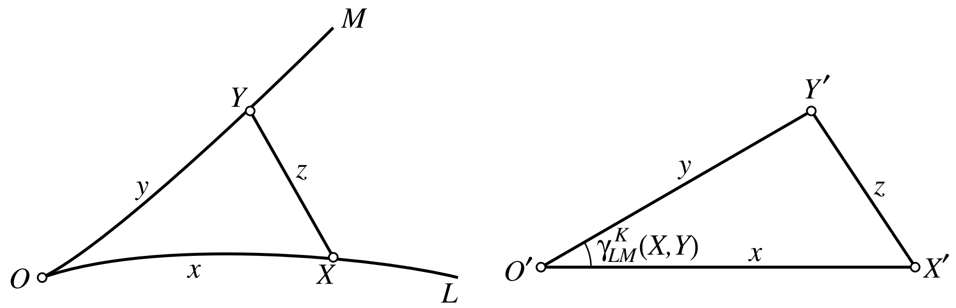


Рис. 1

Если существует предел $\alpha = \lim\limits_{X,Y\to O} \gamma(X,Y)$, то мы говорим, что определен *угол* между кривыми L и M и что он равен α.

Углом (*верхним углом*) при вершине A треугольника ABC называется угол (верхний угол) между его сторонами AB и AC.

Наконец, разность между суммой верхних углов треугольника T и суммой углов соответствующего треугольника T^K мы называем K*-избытком* треугольника T и обозначаем через $\delta_K(T)$.

4°. Пространство кривизны $\leqslant K$. *Пространство кривизны* $\leqslant K$ характеризуется тем, что для всякого достаточно малого треугольника T его K-избыток $\delta_K(T)$ неположителен: $\delta_K(T) \leqslant 0$. Точнее говоря, мы обозначаем через R_K область метрического пространства со следующими свойствами:

а) любые две точки из R_K можно соединить кратчайшей, которая при этом не обязательно должна лежать в R_K;

б) K-избыток $\delta_K(T)$ произвольного треугольника с вершинами в R_K неположителен;

с) в случае $K > 0$ сумма длин сторон произвольного треугольника с вершинами в R_K меньше, чем $2\pi/\sqrt{K}$.

Свойство с) необходимо для существования соответствующего треугольника на K-плоскости. Можно естественным образом просто потребовать, чтобы диаметр R_K был достаточно мал.

Под пространством кривизны $\leqslant K$ имеется в виду метрическое пространство, в котором каждая точка имеет окрестность, являющуюся областью R_K. Все дальнейшие заключения относятся к областям R_K, а глобальные свойства пространств кривизны $\leqslant K$ здесь не изучаются.

Отметим, что данное выше определение равносильно следующему: пространством кривизны $\leqslant K$ является метрическое пространство, в котором каждая точка обладает окрестностью U такой, что 1) любые две ее точки можно соединить кратчайшей (не обязательно лежащей в U) и 2) для каждого треугольника T, лежащего в U, справедлива оценка $\delta_K(T) \leqslant 0$. (Кстати, мы докажем далее, что в R_K каждая точка обладает выпуклой окрестностью, т. е. окрестностью, любые две точки которой можно соединить лежащей в ней кратчайшей. Поэтому все утверждения можно относить к таким окрестностям.)

Заметим, что пространство постоянной кривизны получится, если K-избыток каждого треугольника не только неположителен, но равен нулю. Точнее говоря, как будет показано в конце § 3, справедливо следующее утверждение: *если область R_K гомеоморфна области в n-мерном евклидовом пространстве и $\delta_K(T) = 0$ для всякого треугольника T в R_K, то R_K изометрична некоторой области в n-мерном пространстве постоянной кривизны K.*

Определению пространства кривизны $\leqslant K$ можно дать другую форму, теснее связанную с обычным определением кривизны. Пространство кривизны $\leqslant K$ можно определить следующими условиями:

а) у каждой точки есть окрестность, в которой любые две точки можно соединить кратчайшей;

б) для всякой последовательности треугольников T, которые сходятся к точке, выполнено следующее неравенство:

$$\varlimsup \frac{\delta_0(T)}{S(T^0)} \leqslant K, \tag{1}$$

где $\delta_0(T)$ обозначает «абсолютный» избыток (или просто *избыток*) треугольника, т. е. избыток относительно кривизны нуль: $\delta_0(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$, а $S(T^0)$ — площадь соответствующего плоского треугольника.

Эквивалентность этого определения предыдущему будет доказана в конце § 3.

Следует отметить, что в (1) допускается равенство $S(T^0) = 0$. Имеется в виду, что для таких треугольников T (по крайней мере для членов последовательности с достаточно большими номерами) выполнено неравенство $\delta_0(T) \leqslant 0$ [3)]. В (1) нельзя исключить случай $S(T^0) = 0$, поскольку иначе данное определение для пространства кривизны $\leqslant K$ не было бы, строго говоря, эквивалентно данному выше. Тривиальным примером пространства неположительной кривизны является прямая: на ней все треугольники вырождаются и имеют избыток нуль, так что $S(T^0) = \delta_0(T) = 0$.

[3)] Равенство $S(T^0) = 0$ означает, что в треугольнике T сумма двух сторон равна третьей, например $AB + BC = AC$. В этом случае стороны AB и BC вместе составляют кратчайшую и угол между ними поэтому равен π, так что выполнено условие $\delta_0(T) \geqslant 0$. Это означает, что в (1) при $S(T^0) = 0$ должно выполняться равенство $\delta_0(T) = 0$.

Хотя чисто формально такие одномерные или даже нульмерные пространства являются пространствами кривизны $\leqslant K$, настоящего интереса они не представляют [4)].

5°. Основные свойства R_K. Фундаментальная теорема о пространствах кривизны $\leqslant K$, которую мы докажем в § 3 и которая, как ясно видно, характеризует эти пространства, утверждает:

В области R_K угол $\gamma^K_{L,M}(x,y)$ для любых выходящих из одной точки кратчайших L и M является неубывающей функцией от x и y.

Из монотонности $\gamma(x,y)$ следует, что существует предел $\lim\limits_{x,y\to 0}\gamma(x,y)$, т. е. выполнена теорема:

В области R_K определен угол между любыми выходящими из одной точки кратчайшими.

Сверх того оказывается, что в R_K не только, как это утверждается в определении, сумма углов треугольника T не больше суммы углов соответствующего треугольника T^K на K-плоскости, но даже *каждый угол треугольника T не больше соответствующего угла треугольника T^K.*

В самом деле, поскольку $\gamma(x,y)$ — неубывающая функция переменных x и y, для произвольных x и y справедливо неравенство $\gamma(x,y)\geqslant\lim\limits_{x,y\to 0}\gamma(x,y)$, так что для угла $\alpha_{L,M}$ между кратчайшими L, M выполнено неравенство

$$\alpha_{L,M}\leqslant\gamma^K_{L,M}(x,y). \tag{2}$$

Пусть T — треугольник в R_K с углом α при вершине A, а α^K — угол в соответствующем треугольнике T^K. Очевидно, что α^K не что иное, как $\gamma^K_{L,M}(a,b)$, где L и M — стороны треугольника T, выходящие из вершины A, а a и b — их длины. Поэтому неравенство (2) означает, что $\alpha\leqslant\alpha^K$. Но это значит, что в R_K каждый угол треугольника T не превосходит соответствующего угла T^K.

Утверждение предыдущей теоремы, что угол $\gamma(x,y)$ является неубывающей функцией, наглядно означает, что кратчайшие, выходящие из одной и той же точки в R_K, расходятся не медленнее, чем на K-плоскости. Объяснить это можно, например, следующим образом:

Пусть A и B — точки на кратчайших L и M, выходящих из точки O (рис. 2). Треугольнику $T=OAB$ соответствует треугольник $T^K=O'A'B'$, а его угол при вершине O' равен $\gamma^K(a,b)$, где $a=OA$, $b=OB$. Если теперь X и Y — точки на OA и OB, а X' и Y' соответствующие им точки на $O'A'$ и $O'B'$ (т. е. если $x=OX=O'X'$, $y=OY=O'Y'$), то $XY\leqslant X'Y'$.

[4)] Сейчас известно, что к таким пространствам относятся так называемые R-деревья, введенные в рассмотрение Жаком Титсом (Jacques Tits) и нашедшие многочисленные приложения в геометрии, топологии многообразий и геометрической теории групп. — *Прим. В. Н. Берестовского.*

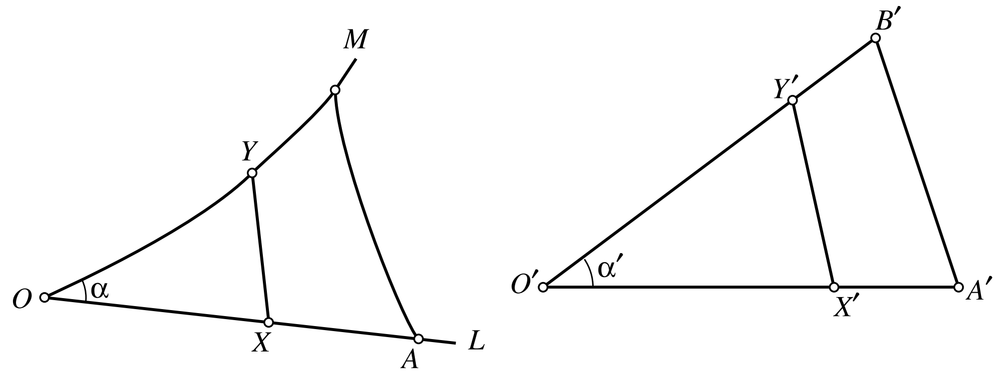


Рис. 2

В самом деле, $\gamma(x, y)$ — угол в треугольнике на K-плоскости со сторонами $x, y, z = XY$, а $\gamma(a, b)$ — угол треугольника со сторонами $x, y, z' = X'Y'$, и поскольку $\gamma(x, y) \leqslant \gamma(a, b)$, то $XY \leqslant X'Y'$.

Если, в частности, взять в качестве X и Y середины сторон OA и OB, то мы получаем следующий результат:

Средняя линия треугольника $T = OAB$ в R_K не превосходит средней линии соответствующего треугольника T^K.

Из того, что выходящие из одной точки кратчайшие в R_K расходятся не медленнее, чем соответствующие кратчайшие на K-плоскости следует, что *в R_K кратчайшая, соединяющая две данные точки, единственна.* Кратчайшие, выходящие из одной точки, не могут вновь встретиться при удалении от точки, поскольку они расходятся не медленнее, чем на K-плоскости.

Выходящие из одной точки O кратчайшие могут однако на определенном участке OA совпадать и расходиться уже только за точкой A. Это имеет место на многограннике в каждой вершине A, в которой полный угол более 2π. За такую вершину A проходящая через нее кратчайшая продолжается неоднозначно.

Кроме этих основных свойств области R_K мы получим в § 3–6 еще ряд других. Так в § 5 будет введено понятие площади поверхности и доказана следующая теорема:

На каждую замкнутую кривую в R_K можно натянуть поверхность, площадь которой не превосходит площади круга с тем же периметром на K-плоскости. (В случае $K > 0$ предполагается, что выполнено неравенство $l\sqrt{K} < 2\pi$, поскольку иначе указанный круг просто не существует.)

Эта теорема обобщает известное максимальное свойство круга, а также известную теорему Карлемана о том, что в евклидовом пространстве площадь минимальной поверхности, натянутой на данный контур, не превосходит площади круга с тем же периметром [4].

6°. Общая теорема об углах. Основой для доказательства теоремы о монотонности угла $\gamma(x, y)$, и тем самым основой для построения всей теории пространств кривизны $\leqslant K$, служит следующая общая теорема об углах треугольника:

Пусть ABC — треугольник в произвольном метрическом пространстве с единственным условием, что любые две точки на сторонах этого треугольника можно соединить кратчайшей. Пусть α — верхний угол этого треугольника при вершине A, а α_K — соответствующий ему угол в соответствующем треугольнике на K-плоскости. (Здесь K произвольно, с единственным условием, что $AB + BC + AC < 2\pi/\sqrt{K}$ в случае $K > 0$.) Пусть, наконец, ν есть верхняя грань K-избытков треугольников AXY, стороны которых AX и AY лежат на сторонах AB и AC. Тогда справедливо неравенство $\alpha - \alpha_K \leqslant \nu$.

Поскольку по определению области R_K в ней для произвольного треугольника выполнено неравенство $\nu \leqslant 0$, то из этой общей теоремы следует, что для R_K всегда $\alpha \leqslant \alpha_K$, т. е. верхний угол произвольного треугольника T не превосходит соответствующего угла треугольника T^K. Это свойство является исходным пунктом при исследовании свойств области R_K.

7°. Примеры пространств кривизны $\leqslant K$.

1) Если в области R риманова пространства кривизна ограничена сверху числом K, то R является пространством кривизны $\leqslant K$.

2) Всякое замкнутое выпуклое множество M в римановом пространстве является областью R_K, если кривизна в нем ограничена сверху и K является верхней гранью кривизн в M. (*Выпуклое множество* — это такое множество, что любые две его точки можно соединить в нем кратчайшей.) В частности замкнутое выпуклое множество M в евклидовом пространстве является областью R_0. Однако не только выпуклые множества могут быть областями R_0. Так, например, областью R_0 является замкнутое множество евклидова пространства, составленное из двух выпуклых тел, соприкасающихся в общей граничной точке, если расстояния в M измеряются длинами соединяющих кратчайших. Представляет интерес вопрос: какие условия необходимы и достаточны, чтобы множество M в пространстве постоянной кривизны K было областью R_K, если расстояние XY определено как нижняя грань длин кривых, соединяющих X и Y в M?

3) Многогранная поверхность, составленная из треугольников K-плоскости, является пространством кривизны $\leqslant K$, если сумма углов вокруг каждой, не лежащей на границе, вершины $\geqslant 2\pi$. То же справедливо для многогранников, составленных из n-мерных симплексов постоянной кривизны K так, что сумма двумерных углов вокруг каждой внутренней $(n-2)$-мерной грани $\geqslant 2\pi$ (при некоторых дополнительных условиях, которые здесь опускаются).

4) Можно, в определенном смысле, утверждать, что пространство, метрика которого является пределом метрик пространств кривизны $\leqslant K$, само

является пространством кривизны $\leqslant K$. В частности, предел римановых метрик с кривизной $\leqslant K$ является метрикой кривизны $\leqslant K$ [5)].

Не уточняя, при каких условиях это утверждение остается в силе в самой общей форме, укажем простейший и одновременно наиболее важный частный случай. Пусть в шаре S n-мерного евклидова пространства определены непрерывные функции $\rho_m(X,Y)$, $m = 1, 2, \ldots$, от переменных X и Y, удовлетворяющие обычным условиям метрики. Пусть шар S является также шаром в каждой из метрик ρ_m и одновременно областью R_K с одним и тем же значением K при всех m. Пусть, далее, функции $\rho_m(X,Y)$ равномерно сходятся к функции $\rho(X,Y)$, которая только тогда равна нулю, когда $X = Y$, так что $\rho(X,Y)$ также является метрикой. Тогда S является шаром в метрике ρ, а также областью R_K с тем же значением K [6)].

Доказательство этого утверждения основано на следующем замечании: если выходящие из точки O кратчайшие L_m и M_m относительно метрики ρ_m сходятся к кривым L и M соответственно, то эти кривые являются кратчайшими в метрике ρ. Одновременно, в соответствии с п. 3, углы $\gamma_m^K(x,y)$, определенные для кратчайших L_m и M_m, сходятся к углу $\gamma^K(x,y)$, определенному для кратчайших L и M в метрике ρ. Из этого и неубывания $\gamma_m^K(x,y)$ по x и y следует, что то же самое справедливо и для функции $\gamma^K(x,y)$. Это свойство угла $\gamma^K(x,y)$ таким образом установлено по крайней мере для тех кратчайших L и M, которые являются пределами кратчайших относительно метрик ρ_m. Из результатов п. 5, однако, следует, что предельное пространство обладает свойством единственности кратчайших и поэтому само является областью R_K.

Поэтому можно сказать, что предел римановых метрик кривизны $\leqslant K$ есть метрика кривизны $\leqslant K$. Встает фундаментальный вопрос, справедливо ли обратное, т. е. будет ли (при соответствующих условиях) общая метрика кривизны $\leqslant K$, заданная, например, в области евклидова пространства, пределом римановых метрик кривизны $\leqslant K$. В случае двумерных многообразий ответ положителен и по существу доказан в [2] [7)].

8°. Связь с некоторыми другими работами. В моих исследованиях по внутренней геометрии поверхностей я исхожу из понятия пространства с внутренней метрикой, а именно такого метрического пространства, в котором расстояние $\rho(X,Y)$ между произвольной парой точек равно нижнему пределу длин соединяющих эти точки кривых. Все длины здесь измеря-

---

[5)] Это утверждение верно лишь при некоторых дополнительных предположениях, например, при равномерной ограниченности снизу положительной константой «радиусов инъективности». — *Прим. В. Н. Берестовского.*

[6)] В случае $K > 0$ подразумевается, что периметр любого треугольника предельного пространства меньше $2\pi/\sqrt{K}$. — *Прим. В. Н. Берестовского.*

[7)] Ответ на этот вопрос, насколько мне известно, не найден до сих пор. — *Прим. В. Н. Берестовского.*

ются в той же метрике ρ. При условии, что такое пространство локально компактно [8)], любые две точки соединимы кратчайшей. Если, с другой стороны, существуют кратчайшие, то метрика внутренняя, так как по определению кратчайшей ее длина равна расстоянию между ее концами. Поэтому (по крайней мере для локально компактных пространств «в малом», т. е. в определенной окрестности произвольной точки) требование из определения области R_K о существовании кратчайшей равносильно требованию, чтобы метрика была внутренней.

Представленное в п. 1 основополагающее свойство R_K — для любых двух выходящих из одной точки кратчайших угол $\gamma^K_{L,M}(x,y)$ является неубывающей функцией от x и y — было мной установлено в [1] для выпуклых поверхностей с «удельной кривизной» $\leqslant K$. Я называл его «K-вогнутостью» — в противоположность «K-выпуклости», которая характеризирует метрику выпуклых поверхностей в трехмерных пространствах постоянной кривизны K и состоит в том, что угол $\gamma(x,y)$, напротив, является невозрастающей функцией от x и y.

Ранее я уже характеризовал в [5] и [6] [9)] внутреннюю метрику выпуклых поверхностей тем свойством, что средняя линия на этих поверхностях не короче средней линии соответствующего треугольника на K-плоскости (при дополнительном условии, что в каждой точке существует касательный конус). С этим естественным образом связан вопрос об условии, при котором метрика пространства неположительной кривизны или кривизны $\leqslant K$ сама может быть охарактеризована свойством, что средняя линия треугольника не превосходит средней линии треугольника на K-плоскости.

Г. Буземан в большой работе [3] определил пространства неположительной кривизны условием, что для каждого малого треугольника средняя линия не превосходит половины соответствующей стороны этого треугольника. На этой основе (при других достаточно общих условиях: 1) компактность ограниченных замкнутых множеств, 2) существование и 3) единственность продолжения кратчайшей) он построил теорию таких пространств [10)] и показал, что они обладают свойствами, во многом аналогичными свойствам римановых пространств неположительной кривизны.

Пространства Буземана охватывают, однако, широкий класс финслеровых пространств. Пространство кривизны нуль по Буземану есть произвольное пространство с метрикой Минковского, т. е. аффинное пространство, в котором в качестве шара берется любая центрально-симметричная ограниченная выпуклая замкнутая область. В таком пространстве средняя линия треугольника в точности равна половине соответствующей стороны, а сумма верхних углов треугольника как правило больше π.

[8)] И полно. — *Прим. В. Н. Берестовского.*

[9)] В оригинале ссылка на эту работу пропущена. — *Прим. ред.*

[10)] Так называемых G-пространств Буземана неположительной кривизны, см. *Г. Буземан.* Геометрия геодезических. М.: Физматгиз, 1962. — *Прим. В. Н. Берестовского.*

Таким образом, мы имеем две возможности для определения пространств кривизны $\leqslant K$:

а) средняя линия каждого треугольника не превосходит половины соответствующей стороны соответствующего треугольника на K-плоскости;

б) K-избыток каждого треугольника неположителен.

Как видно из п. 5, а) следует из б). Обратное, как видно из примера метрики Минковского, неверно.

Поэтому ясно, что результаты Буземана можно использовать для пространств неположительной кривизны в нашем смысле (конечно, при условии 1) компактности замкнутых ограниченных множеств и 2) единственности продолжения кратчайшей). Многие его заключения, базирующиеся на этом свойстве средней линии, допускают непосредственное обобщение на пространства кривизны $\leqslant K$ [11)].

Настоящая работа, однако, мало пересекается по своим результатам с работой Г. Буземана, поскольку наше внимание посвящено прежде всего локальным свойствам, связанным с понятием угла, а также некоторым другим свойствам, характерным для римановых, но не обязательно для финслеровых, пространств. Отметим, кстати, что в наших выводах нигде не ставится требование о единственности продолжения кратчайшей. Кратчайшая может иметь много продолжений, как, например, на многограннике с вершиной, в которой полный угол больше 2π.

В заключение сто́ит отметить, что сформулированная в п. 6 общая теорема о верхних углах является основой для исследования двумерных метрических многообразий, которые я называю *многообразиями ограниченной кривизны*, см. [2]. Однако оказывается, что эти многообразия можно определить иначе, чем это сделано в [2]. Именно такое многообразие R можно определить так:

а) R является двумерным метрическим многообразием с внутренней метрикой;

б) в окрестности произвольной точки сумма избытков для каждого конечного множества попарно непересекающихся треугольников ограничена сверху: $\sum \delta(T_i) \leqslant N$. Здесь N зависит только от окрестности. Избыток определяется как $\alpha + \beta + \gamma - \pi$, где α, β и γ — верхние углы треугольника. Вместо этих избытков можно было бы взять также K-избытки $\delta_K(T_i)$ для произвольно выбранного фиксированного значения K.

Обобщение, в сравнении с определением из [2], состоит в том, что там берется сумма значений избытков $|\delta(T_i)|$. Оказывается, однако, что из огра-

[11)] G-пространство Буземана кривизны, ограниченной сверху или снизу по А. Д. Александрову, является римановым C^0-многообразием (В. Н. Берестовский), а G-пространство Буземана кривизны, ограниченной сверху и снизу по А. Д. Александрову, является римановым $C^{1,\alpha}$-многообразием для всех $0 < \alpha < 1$ (И. Г. Николаев). В последнем случае аксиомы Буземана эквивалентны условию, что пространство является топологическим многообразием. — *Прим. В. Н. Берестовского.*

ниченности сверху следует также и ограниченность снизу. Доказательство этого результата принадлежит В. А. Залгаллеру [12)].

Это замечание показывает, что в двумерном случае теория многообразий ограниченной кривизны включает как частный случай теорию многообразий кривизны $\leqslant K$.

§ 2. *Общие теоремы о верхних углах*

1°. Мы хотим сперва представить некоторые общие теоремы о верхнем угле (как он определен в п. 3 § 1) в произвольном метрическом пространстве.

Теорема 1. *Если α_{12}, α_{23} и α_{13} — верхние углы между кривыми L_1, L_2 и L_3, выходящими из одной точки, то $\alpha_{12} + \alpha_{23} \geqslant \alpha_{13}$.*

Этот общий результат доказан в [1]. Если L_1 и L_2 — ветви одной кратчайшей, то очевидно $\alpha_{13} = \pi$. Поэтому из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Сумма дополнительных верхних углов не меньше π.*

2°. **Теорема 3**. *Для любых кратчайших L и M, выходящих из одной точки O, справедливо следующее равенство для верхнего угла между ними:*

$$\alpha = \varlimsup_{x\to 0} \gamma^K_{L,M}(x, y), \tag{1}$$

где $\gamma^K_{L,M}$ — угол, определенный в п. 3 § 1, см. рис. 1.

Согласно определению $\alpha = \varlimsup\limits_{x,y\to 0} \gamma^K_{L,M}(x, y)$, а в формуле (1) берется верхний предел при $x \to 0$, в то время как y может меняться произвольно, т. е. точка X на L стремится к O в то время как Y на M может меняться произвольно. Естественно, что x и y здесь можно поменять ролями.

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме:

Лемма. *Для любого K*

$$\cos\gamma^K = \frac{y - z}{x} + \varepsilon, \tag{2}$$

где $\varepsilon \to 0$ при $x/y \to 0$. Здесь x, y, z и γ^K имеют тот же смысл, что и в теореме 3: $x = OX$, $y = OY$, $z = XY$, а точки X и Y лежат на L и M соответственно. (Так как $Y \in M$, то y ограничено, и поэтому из $x/y \to 0$ следует, что $x \to 0$.)

Доказательство леммы. Пусть, к примеру, $K < 0$. Положим $K = -k^2$. По известным формулам геометрии Лобачевского для треугольника T^K со сторонами x, y и z выполнено равенство

$$\operatorname{ch} kz = \operatorname{ch} kx \operatorname{ch} ky - \operatorname{sh} kx \operatorname{sh} ky \cos\gamma^K,$$

где ch и sh — гиперболический косинус и синус соответственно.

[12)] См. *А. Д. Александров, В. А. Залгаллер.* Двумерные многообразия ограниченной кривизны: (Основы внутренней геометрии поверхностей). М.; Л.: АН СССР, 1962. (Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР; Т. 63). — *Прим. В. Н. Берестовского.*

Отсюда получаем, обозначая kx, ky и kz для краткости через x, y и z,

$$\cos\gamma^K = \frac{\operatorname{ch} y - \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y} + \frac{\operatorname{ch} y\,(\operatorname{ch} x - 1)}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}. \tag{3}$$

Так как

$$\operatorname{ch} y - \operatorname{ch} z = 2\operatorname{sh}\frac{y-z}{2}\operatorname{sh}\frac{y+z}{2}, \qquad \operatorname{ch} x - 1 = 2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = 2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2},$$

то из (3) получаем

$$\cos\gamma^K = \frac{2\operatorname{sh}\dfrac{y-x}{2}}{\operatorname{sh} x}\cdot\frac{\operatorname{sh}\dfrac{y+z}{2}}{\operatorname{sh} y} + \frac{\operatorname{ch} y\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}}{\operatorname{sh} y\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}}. \tag{4}$$

Если x и x/y стремятся к нулю, то стремится к нулю второе слагаемое в правой части. Кроме того, по неравенству треугольника $|y-z|\leqslant|x|$, и поэтому

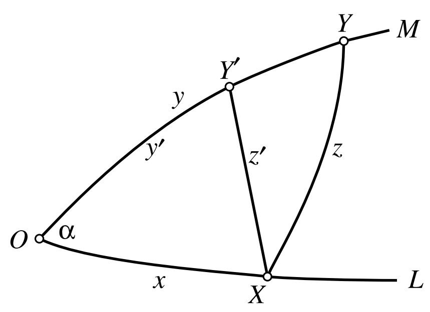


Рис. 3

$$\frac{\operatorname{sh}\dfrac{y+z}{2}}{\operatorname{sh} y} \to 1 \quad \text{при} \quad \frac{x}{y} \to 0,$$

а $2\operatorname{sh}\dfrac{y-z}{2}$ и $\operatorname{sh} x$ эквивалентны $y-z$ и x. Тем самым из (4) следует:

$$\cos\gamma^K = \frac{y-z}{x} + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \to 0$ при $x, x/y \to 0$. Ч. т. д.

Теперь докажем теорему 3, т. е. докажем для верхнего угла α равенство $\alpha = \varlimsup\limits_{x\to 0}\gamma^K(x,y)$. Поскольку по определению $\alpha = \varlimsup\limits_{x,y\to 0}\gamma^K$, то достаточно доказать, что

$$\alpha \geqslant \varlimsup_{\substack{x\to 0\\ y>a>0}} \gamma^K(x,y), \tag{5}$$

где предел находится при условии, что $x \to 0$ в то время как y остается больше некоторого положительного числа a.

Итак, пусть точка X лежит на кратчайшей L и стремится к O, а Y лежит на кратчайшей M и остается на определенном положительном удалении от O. Возьмем переменную точку Y' на M, стремящуюся к O так, что $x/y' \to 0$, где $y' = OY'$. Пусть $z' = XY'$. Тогда $YY' \geqslant XY - XY'$ в силу неравенства треугольника (рис. 3). Следовательно, $y - y' \geqslant z - z'$, т. е. $y - z \geqslant y' - z'$.

Из этого в силу доказанной леммы, см. (2), следует

$$\cos\gamma^K(x,y)+\varepsilon \geqslant \cos\gamma^K(x,y')+\varepsilon',$$

или

$$\gamma^K(x,y) \leqslant \gamma^K(x,y')+\varepsilon''. \tag{6}$$

Но $x, y' \to 0$, а значит, по определению верхнего угла, $\alpha \geqslant \gamma^K(x,y')-\varepsilon'''$, где $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''' \to 0$ при $x, y' \to 0$. Поэтому из (6) вытекает $\alpha \geqslant \overline{\lim\limits_{x\to 0}}\, \gamma^K(x,y)$, ч. т. д.

3°. Теорема 4. *В условиях и обозначениях теоремы* 3 *справедливо неравенство*

$$\cos\alpha \leqslant \lim_{x/y\to 0}\frac{y-z}{x}. \tag{7}$$

Доказательство. По теореме 3, $\alpha \geqslant \overline{\lim\limits_{x/y\to 0}}\, \gamma^K(x,y)$ и, следовательно,

$$\cos\alpha \leqslant \lim_{x/y\to 0}\cos\gamma^K(x,y);$$

а по формуле (2)

$$\cos\gamma^K(x,y)=\frac{y-z}{x}+\varepsilon,$$

откуда и следует (7). Ч. т. д.

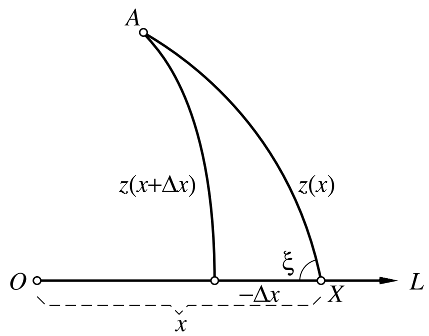


Рис. 4

Следствие. *Пусть даны кратчайшая L, переменная точка X на ней и длина x отрезка этой кратчайшей от ее начала O до точки X (рис. 4). Пусть $z(x)$ — длина кратчайшей, идущей из некоторой заданной точки A в точку X. Пусть, наконец, ξ — верхний угол между отрезком OX кратчайшей L и кратчайшей AX (любой из кратчайших, если их много). Тогда для нижней левой производной функции $z(x)$ по x выполнено неравенство*

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{\text{н. лев}} \geqslant \cos\xi. \tag{8}$$

В неравенстве (8) индекс «н» указывает, что берется нижняя, а «лев» — левая производная. Для доказательства достаточно подставить в неравенство (7) ξ вместо α, $z(x)$ и $z(x-\Delta x)$ вместо y и z, и $-\Delta x$ вместо x.

Замечание. Функция $z(x)$ удовлетворяет условию $|z(x+\Delta x)-z(x)| \leqslant$ $\leqslant |\Delta x|$, которое очевидным образом получается из неравенства треугольника. Следовательно, эта функция почти всюду дифференцируема. Как известно, в евклидовом, и более общо, в римановом случае, производная dz/dx всегда существует и равна $\cos\xi$.

4°. Теперь вернемся к сформулированной в п. 6 § 1 теореме о верхних углах треугольника.

Рассмотрим треугольник ABC в некотором метрическом пространстве, предполагая только, что любые две точки на его сторонах можно соединить кратчайшей. Пусть α — верхний угол между сторонами AB и AC. Задача состоит в оценке разности между этим углом и соответствующим углом α_K треугольника $A'B'C'$ со сторонами той же длины на K-плоскости.

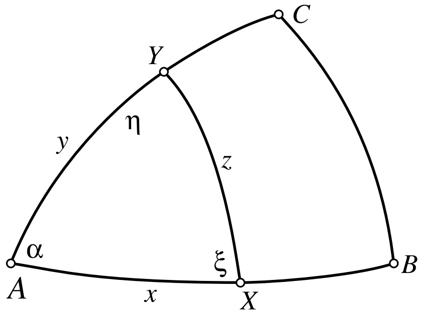


Рис. 5

Рассмотрим случай $K < 0$ [13].

На сторонах AB и AC треугольника ABC возьмем точки X и Y и рассмотрим треугольник AXY, стороны AX и AY которого являются отрезками сторон AB и AC (рис. 5). Обозначим $AX = x$, $AY = y$, $XY = z$. Пусть ξ — верхний угол между AX и XY, а η — верхний угол между AY и XY. Построим на K-плоскости соответствующий треугольник $A'X'Y'$ (т. е. треугольник со сторонами, длины которых равны x, y и z) и обозначим через γ_K, ξ_K, η_K углы, соответствующие α, ξ и η. Угол γ_K является функцией от $x = AX$ и $y = AY$.

5°. Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы получить следующую оценку для левой нижней производной:

Лемма 1. *Если в треугольнике ни одна из сторон не равна сумме двух других, так что ξ_K и η_K отличны от 0 и π, то*

$$\frac{\partial \gamma_K}{\partial x} \geqslant \frac{\cos\xi - \cos\xi_K}{\sin\xi_K} \cdot \frac{k}{\operatorname{sh} kx}, \tag{9}$$

где $\partial\gamma_K/\partial x$ здесь и в последующем обозначает левую нижнюю производную, а $k^2 = -K$ [14].

Доказательство. По известной теореме Лобачевского справедливо равенство

$$\operatorname{ch} kz = \operatorname{ch} kx \operatorname{ch} ky - \operatorname{sh} kx \operatorname{sh} ky \cos\gamma_K,$$

или, после замены kx, ky, kz и γ_K на x, y, z и γ, —

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \cos\gamma. \tag{10}$$

---

[13] В случае $K \geqslant 0$ доказательство выглядит так же. При $K > 0$ надо только предполагать, что периметр треугольника ABC меньше $2\pi/\sqrt{K}$. Если эти условия выполнены, то существуют все рассматриваемые в дальнейшем треугольники.

[14] Аналогичное неравенство справедливо, естественно, и для $\partial\gamma_K/\partial y$. Если $K = 0$, то $k/\operatorname{sh} kx$ надо заменить на $1/x$, а в случае $K > 0$ — на $k/\sin kx$. Доказательство для этих двух случаев дословно повторяет приведенное далее доказательство для $K < 0$.

Для левой нижней производной, также как для обычной, получаем

$$\operatorname{sh} z \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \cos\gamma + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \sin\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x} \tag{11}$$

(там, где $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \sin\gamma$ — неотрицательные непрерывные функции).

Преобразуем оба первых слагаемых правой части равенства (11), выразив для этого $\operatorname{sh} y \cos\gamma$ из (10). Получим

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \cos\gamma = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} z - \operatorname{ch} y}{\operatorname{sh} x}.$$

По формуле, аналогичной (10),

$$\frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} z - \operatorname{ch} y}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{sh} z \cos\xi_K.$$

Последнее слагаемое в равенстве (11) мы преобразуем по теореме синусов

$$\operatorname{sh} y \sin\gamma = \operatorname{sh} z \sin\xi_K.$$

Применяя последние три равенства, мы получаем из (11) после сокращения на $\operatorname{sh} z$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\xi_K + \operatorname{sh} x \sin\xi_K \frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

или, после возвращения от x, z, γ опять к переменным kx, kz, γ_K,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\xi_K + \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \sin\xi_K \frac{\partial \gamma_K}{\partial x}. \tag{12}$$

В силу следствия из теоремы 4, см. (8),

$$\frac{\partial z}{\partial x} \geqslant \cos\xi.$$

Из этого, а также (12), следует

$$\frac{\partial \gamma_K}{\partial x} \geqslant \frac{\cos\xi - \cos\xi_K}{\sin\xi_K} \cdot \frac{k}{\operatorname{sh} kx}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

6°. Теперь мы докажем лемму, с помощью которой общая теорема об углах треугольника, сформулированная в п. 6 § 1, может быть уже легко доказана.

Лемма 2. *Если в треугольнике AXY ни одна из сторон не равна сумме двух других и $\xi_K - \xi \geqslant \varepsilon > 0$, то существует такое $x' < x$, что*

$$\gamma(x,y) - \gamma(x',y) > a \ln \frac{x}{x'},$$

где $a > 0$ зависит только от ε, K и диаметра треугольника ABC.

Для доказательства преобразуем полученную ранее оценку (9) для $\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}$. При условии $\xi_K - \xi \geqslant \varepsilon > 0$ мы имеем

$$\frac{\cos\xi - \cos\xi_K}{\sin\xi_K} \geqslant \frac{\cos(\xi_K - \varepsilon) - \cos\xi_K}{\sin\xi_K} = \sin\varepsilon - (1-\cos\varepsilon)\operatorname{ctg}\xi_K.$$

Из $\xi_K \geqslant \varepsilon$ следует $-\operatorname{ctg}\xi_K \geqslant -\operatorname{ctg}\varepsilon$, и потому

$$\frac{\cos\xi - \cos\xi_K}{\sin\xi_K} \geqslant \sin\varepsilon - (1-\cos\varepsilon)\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{1-\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon} = \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}.$$

Применяя это неравенство мы получаем из (9)

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} \geqslant \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{k}{\operatorname{sh} kx}. \tag{13}$$

Функция $\dfrac{kx}{\operatorname{sh} kx}$ непрерывна и положительна в замкнутом интервале $[0,d]$, где d — диаметр треугольника ABC. Тем самым она ограничена снизу положительным числом:

$$\frac{kx}{\operatorname{sh} kx} \geqslant b > 0, \qquad \text{а значит} \qquad \frac{k}{\operatorname{sh} kx} \geqslant \frac{b}{x}.$$

(Можно взять $b = \dfrac{kd}{\sin kd}$, поскольку $\dfrac{kx}{\operatorname{sh} kx}$ — убывающая функция переменной x.)

Следовательно, мы можем вместо (13) написать [15]:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} \geqslant 2a\frac{1}{x} = 2a\frac{d\ln x}{dx}, \qquad \text{где} \qquad 2a = b\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку здесь $\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}$ — левая нижняя производная, то очевидно можно найти такое значение x', $x' < x$, что

$$\gamma(x,y) - \gamma(x',y) > a(\ln x - \ln x') = a\ln\frac{x}{x'}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

[15] В случае $K > 0$ надо использовать: $\dfrac{\partial\gamma}{\partial x} \geqslant \operatorname{tg}\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\dfrac{k}{\sin kx} \geqslant \operatorname{tg}\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\dfrac{1}{x}$.

7°. Теперь мы докажем общую теорему о верхних углах треугольника.

Теорема 5. *Если α — верхний угол между сторонами AB и AC треугольника ABC, а α_K — соответствующий угол треугольника со сторонами той же длины на K-плоскости, то*

$$\alpha - \alpha_K \leqslant \nu, \tag{14}$$

где ν — верхняя грань K-избытков треугольников AXY, т.е. верхняя грань значений $(\alpha + \xi + \eta) - (\gamma + \xi_K + \eta_K)$, а $\xi, \eta, \gamma, \xi_K, \eta_K$ имеют тот же смысл, что и выше.

Доказательство. По определению ν, $(\alpha - \gamma) + (\xi - \xi_K) + (\eta - \eta_K) \leqslant \nu$. Треугольник ABC сам является треугольником AXY, если X и Y совпадают с B и C соответственно. Тогда $\gamma = \alpha_K$, и поэтому

$$(\alpha - \alpha_K) + (\xi - \xi_K) + (\eta - \eta_K) \leqslant \nu. \tag{15}$$

Положим $AB = x_0$ и $AC = y_0$.

Для треугольника ABC есть две возможности: либо сумма некоторых двух его сторон равна третьей, либо это не так.

Мы хотим показать, что в первом случае оценка (14) несомненно справедлива. Пусть, например, $x_0 + y_0 = z_0$, т.е. $AB + AC = BC$, так что AB и AC вместе образуют кратчайшую. Тогда $\alpha = \pi$, и соответствующий треугольник на K-плоскости вырожден, так что $\alpha_K = \pi$, $\xi_K = \eta_K = 0$. Но так как $\xi \geqslant 0$ и $\eta \geqslant 0$, то в силу неравенства (15) имеем

$$\nu \geqslant (\alpha - \alpha_K) + (\xi - \xi_K) + (\eta - \eta_K) \geqslant \alpha - \alpha_K.$$

Вполне аналогичные заключения остаются в силе, если $x_0 + z_0 = y_0$, т.е. $AB + BC = AC$. Тогда $\xi = \xi_K = \pi$, $\eta_K = 0$ и $\eta \geqslant 0$, так что

$$\nu \geqslant (\alpha - \alpha_K) + (\xi - \xi_K) + (\eta - \eta_K) \geqslant \alpha - \alpha_K.$$

Случай $y_0 + z_0 = x_0$ аналогичен.

Таким образом, остается рассмотреть общий случай, когда в треугольнике ABC длина ни одной из сторон не равна сумме длин двух других.

Предположим, что утверждение не верно, так что $\alpha - \alpha_K > \nu$ или, что равносильно,

$$\alpha - \alpha_K \geqslant \nu + 2\varepsilon, \tag{16}$$

где ε, например, равно $\frac{1}{2}(\alpha - \alpha_K - \nu)$. Тогда в силу неравенства (15) получаем

$$(\xi_K - \xi) + (\eta_K - \eta) \geqslant (\alpha - \alpha_K) - \nu \geqslant 2\varepsilon,$$

и поэтому по крайней мере одна из разностей $\xi_K - \xi$ или $\eta_K - \eta$ не меньше ε. Пусть, например, $\xi_K - \xi \geqslant \varepsilon$. Тогда, согласно доказанной лемме, на стороне AB можно выбрать такую точку X', $AX' = x' < x_0$, что

$$\gamma(x_0, y_0) - \gamma(x', y_0) > a \ln \frac{x_0}{x'}.$$

Если $\eta_K - \eta \geqslant \varepsilon$, то справедлива аналогичная оценка

$$\gamma(x_0, y_0) - \gamma(x_0, y') > a \ln \frac{y_0}{y'}.$$

Объединяя эти случаи, можно сказать, что есть такие числа $x' \leqslant x_0$, $y' \leqslant y_0$, причем $x'y' < x_0y_0$, что

$$\gamma(x_0, y_0) - \gamma(x', y') > a \ln \frac{x_0 y_0}{x'y'}. \tag{17}$$

Рассмотрим треугольник $AX'C$ (или ABY' или $AX'Y'$ в общем случае). Для него угол $\gamma(x', y')$ играет роль угла $\alpha_K = \gamma(x_0, y_0)$. В силу (17) выполнено неравенство $\gamma(x', y') < \gamma(x_0, y_0)$, и поэтому согласно (16) имеем

$$\alpha - \gamma(x', y') \geqslant \alpha - \alpha_K \geqslant \nu + 2\varepsilon. \tag{18}$$

Это неравенство играет для треугольника $AX'Y'$ ту же самую роль, что неравенство (16) для треугольника ABC, и, следовательно, для треугольника $AX'Y'$ повторяется та же самая ситуация, как для треугольника ABC. В самом деле, величина ν для «меньшего» треугольника $AX'Y'$ может быть только меньше, чем для «большего» ABC, и поэтому ν из (18) можно применить для треугольника $AX'Y'$. Тогда неравенство (18) означает, что требуемая оценка для угла α треугольника $AX'Y'$ не выполнена. Значит в этом треугольнике сумма двух сторон не может быть равна третьей, поскольку для этого случая оценка заведомо верна. Следовательно, неравенство (18) имеет для треугольника $AX'Y'$ такой же смысл, что (16) для треугольника ABC.

Поэтому мы можем повторить рассуждения и найти такие числа $x'' \leqslant x'$, $y'' \leqslant y'$, что $x''y'' < x'y'$ и

$$\gamma(x', y') - \gamma(x'', y'') > a \ln \frac{x'y'}{x''y''}.$$

Соединив это неравенство с (17), получим

$$\gamma(x_0, y_0) - \gamma(x'', y'') > a \ln \frac{x_0 y_0}{x''y''}.$$

Теперь очевидно, что для треугольника $AX''Y''$ и т. д. можно повторить те же рассуждения.

Рассмотрим все значения x и y, для которых

$$\gamma(x_0, y_0) - \gamma(x, y) \geqslant a \ln \frac{x_0 y_0}{xy}. \tag{19}$$

Так как здесь заведомо $\alpha_K = \gamma(x_0, y_0) > a \ln \dfrac{x_0 y_0}{xy}$, то произведение чисел x и y, для которых справедливо (19), ограничено снизу положительным числом: $xy > c > 0$, причем $c = x_0 y_0 e^{-\alpha_K / a}$.

Пусть p точная нижняя грань произведений тех x и y, для которых справедливо (19), так что $p \geqslant c > 0$. Тогда существуют x_n и y_n, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что 1) для них выполнено (19), 2) $x_n y_n \to p$, 3) x_n и y_n сходятся к некоторым $\overline{x}$ и $\overline{y}$ соответственно. Из непрерывности логарифма и угла γ, как функций от x и y, следует, что неравенство (19) справедливо также для $\overline{x}$, $\overline{y}$. Это значит, что для соответствующего треугольника $A\overline{XY}$ мы имеем ту же ситуацию, что и для ABC. Поэтому можно найти $x' \leqslant \overline{x}$ и $y' \leqslant \overline{y}$ (где хоть одно из неравенств строгое), так что для них (19) также справедливо. Таким образом, мы имеем $x'y' < \overline{xy} = p$, т. е. p, в противоречие с его определением, не является точной нижней гранью произведений пар чисел x и y, для которых выполнено (19). Полученное противоречие показывает, что наше предположение о том, что необходимая оценка для разности $\alpha - \alpha_K$ несправедлива, ошибочно. Поэтому она верна, ч. т. д.

§ *3. Основные свойства* R_K

1°. Напомним данное в п. 4 § 1 определение области R_K: R_K — это область в метрическом пространстве со следующими свойствами:

а) две любые ее точки можно соединить кратчайшей;

б) любой треугольник с вершинами в R_K имеет неположительный K-избыток;

с) в случае $K > 0$ периметр любого треугольника со сторонами в R_K меньше чем $2\pi/\sqrt{K}$.

Все заключения этого и следующих параграфов относятся к области R_K.

Из общей теоремы о верхних углах треугольника, доказанной в § 2, следует

Лемма 1. *Верхние углы α, β и γ любого треугольника в R_K не превосходят соответствующих углов α_K, β_K и γ_K соответствующего треугольника на K-плоскости.*

Это следует из неположительности K-избытка: $\nu \leqslant 0$ и того, что согласно этой теореме, например, $\alpha - \alpha_K \leqslant \nu$. Так что $\alpha \leqslant \alpha_K$.

2°. В дальнейшем важную роль играет следующий факт элементарной геометрии:

Лемма 2. *Пусть многоугольник Q на K-плоскости ограничен ломаными AB, BC и CA, вогнутыми внутрь Q (рис. 6). Пусть T — треугольник, который получается из Q разгибанием ломаных AB, BC и CA, т. е. треугольник, стороны которого имеют ту же длину, что ломаные AB, BC и CA. (Не исключено, что одна или две из этих ломаных являются прямолинейными отрезками.)*

Тогда углы многогранника Q при A, B и C меньше, чем соответствующие углы треугольника T.

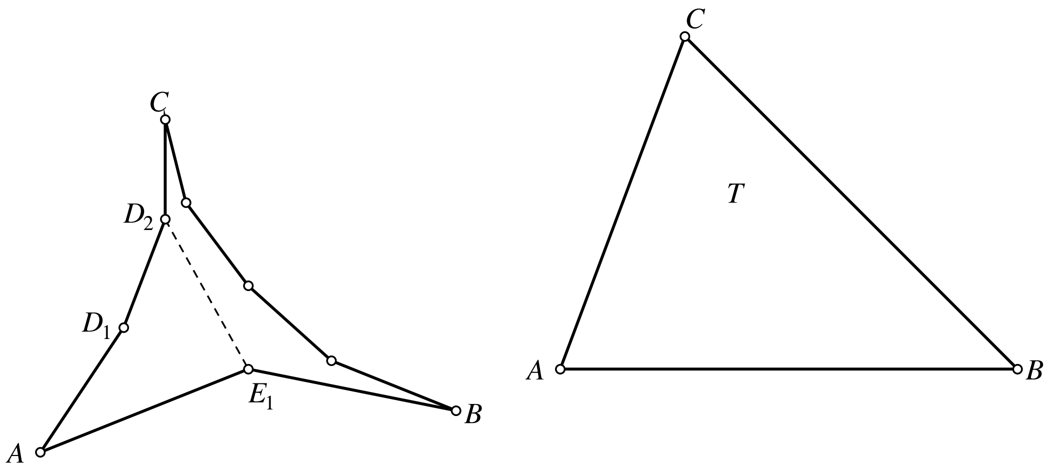


Рис. 6

Доказательство. Отметим сперва, что треугольник T существует, поскольку длина каждой из ломаных AB, BC и CA меньше суммы длин двух других. В случае $K > 0$ здесь предполагается, что периметр Q меньше $2\pi/\sqrt{K}$.

Докажем сначала утверждение для простейшего случая, когда многоугольник Q является четырехугольником $ABCD$ с включенной вершиной D (рис. 7). Мы докажем, что углы этого четырехугольника меньше соответствующих углов треугольника T со сторонами AB, BC и $AD + DC$. Для угла при B это очевидно. Докажем это, например, для угла при A.

Продолжим сторону AD нашего четырехугольника кратчайшей DE так, что $DE = DC$ (см. рис. 7). Тогда в треугольниках DBC и DBE равны стороны при вершине D, в то время как угол в первом из этих треугольников больше, чем во втором. Тем самым $BE < BC$.

Из этого следует, что в треугольнике ABE угол при A (т. е. угол при A в нашем четырехугольнике) меньше, чем угол при A в треугольнике со сторонами AB, BC и $AD + DC$. Это, однако, как раз треугольник T, так что для частного случая утверждение доказано.

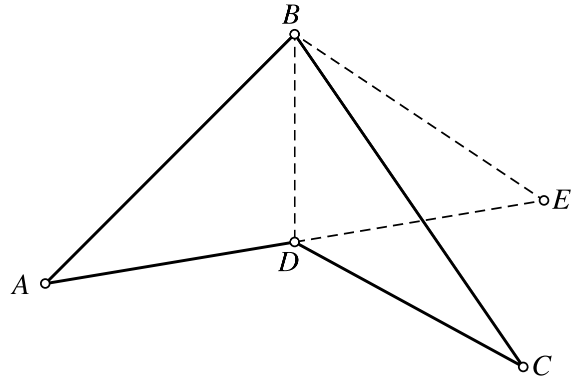


Рис. 7

Утверждение для общего случая докажем индукцией по числу вершин многоугольника Q.

Проведем диагональ D_2E_1 и отсечем от многоугольника Q четырехугольник $AD_1D_2E_1$ (см. рис. 6). Разгибанием ломаной AD_1D_2 мы преобразуем этот четырехугольник в треугольник с большими углами, т. е. уменьшаем число вершин в многоугольнике Q на единицу. Поскольку по доказанному выше углы при D_2 и E_1 при этом увеличиваются, то ломаные AB и AC нового многоугольника остаются вогнутыми. Точно также увеличивается угол A. Повторяя эту операцию, мы увеличиваем каждый раз угол при A, одновременно уменьшая число вершин. Следовательно, угол при вершине A (и аналогично при вершинах B и C) в многоугольнике Q меньше соответствующего угла в треугольнике T. Лемма доказана.

3°. Теперь мы докажем основную теорему об областях R_K:

Теорема 1. *Для любых двух выходящих из одной точки кратчайших L, M в R_K угол $\gamma^K_{L,M}(x,y)$ является неубывающей функцией переменных x, y.*

Доказательство. Угол $\gamma(x,y) = \gamma^K_{L,M}(x,y)$ определен в п. 3 § 1. Пусть кратчайшие L и M выходят из точки O. Возьмем на M точку Y, а на L точки X и X_1 так, что $OX < OX_1$ (рис. 8). Обозначим $OY = y$, $OX = x$ и $OX_1 = x_1$.

Проводя кратчайшие XY и X_1Y, мы получаем треугольники $T = OXY$ и $T_1 = X_1XY$. Рассмотрим соответствующие треугольники на K-плоскости $T^K = O'X'Y'$ и $T_1^K = X_1'X'Y'$ и совместим их сторонами $X'Y'$ так, что они образуют четырехугольник $Q = O'X'X_1'Y'$.

По лемме 1 углы в треугольниках T^K и T_1^K не меньше углов в T и T_1. В то же время по теореме 2 сумма верхних углов при точке X в треугольниках T и T_1 не меньше π, так как эти углы смежные. Поэтому сумма соответствующих углов треугольников T^K и T_1^K тем более не меньше π. Поскольку эти углы вместе образуют угол X' четырехугольника Q, то этот четырехугольник имеет в точке X' угол, обращенный внутрь, или представляет собой в

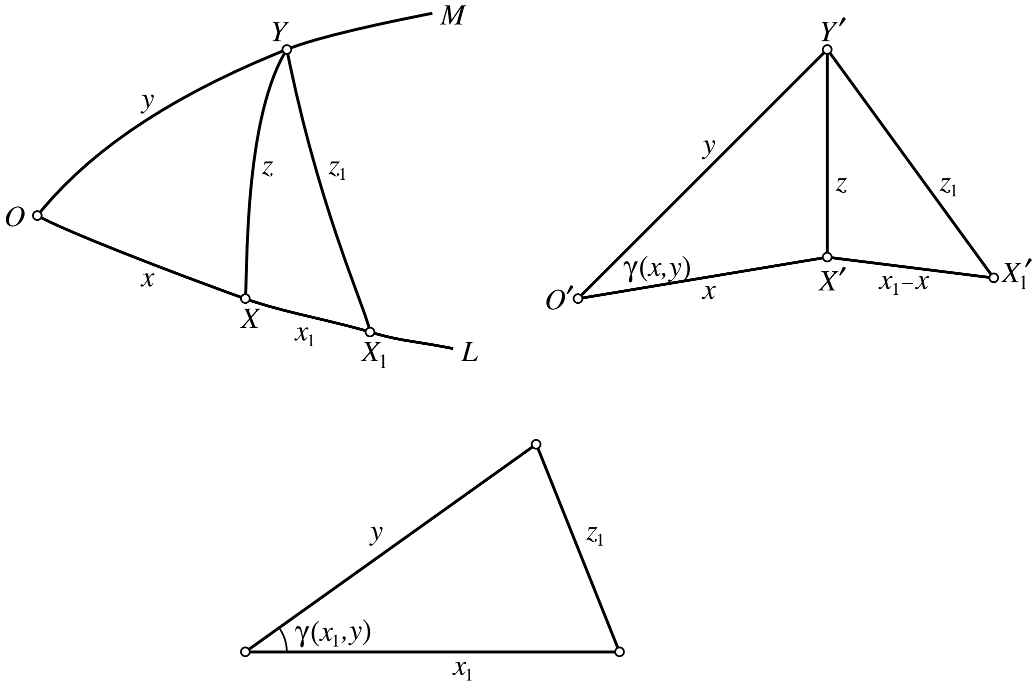


Рис. 8

экстремальном случае — когда угол при X' равен π — треугольник.

Если мы с помощью разгибания угла X' превратим четырехугольник Q в треугольник T_2^K, то, согласно лемме 2, угол при вершине O' увеличится (или не изменится, если Q уже является треугольником).

Соответствующий угол в треугольнике T_2^K есть не что иное, как $\gamma(x_1, y)$. Но угол при вершине O' в четырехугольнике Q одновременно является углом в треугольнике T^K, т. е. как раз углом $\gamma(x, y)$.

Таким образом, $\gamma(x, y) \leqslant \gamma(x_1, y)$, ч. т. д.

Как было отмечено в п. 5 § 1, теорему 1 можно сформулировать еще и так:

Теорема 2. *Пусть X и Y — точки на сторонах AB и AC треугольника $T = ABC$ в R_K, а X' и Y' — соответствующие точки на сторонах соответствующего треугольника $T^K = A'B'C'$ (т. е. $A'X' = AX$ и $A'Y' = AY$). Тогда $XY \leqslant X'Y'$.*

4°. **Теорема 3**. *В R_K между любыми выходящими из одной точки кратчайшими L и M существует угол $\alpha_{L,M}$ и для произвольных $x > 0$ и $y > 0$ верна оценка $\alpha_{L,M} \leqslant \gamma_{L,M}^K(x, y)$.*

Доказательство. Так как по теореме 1 угол $\gamma_{L,M}^K(x, y)$ является неубывающей функцией, то существует предел $\lim\limits_{x,y\to 0} \gamma_{L,M}^K(x, y)$, т. е. существует угол $\alpha_{L,M}$ и он для любых x и y не больше, чем $\gamma_{L,M}^K(x, y)$.

Теорема 4. *Углы треугольника в R_K не превосходят соответствующих углов соответствующего треугольника на K-плоскости.*

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 3.

Отметим еще, что лемма 2 есть только частный случай теоремы 4. Здесь дело в том, что многоугольник Q на K-плоскости с точки зрения своей внутренней метрики представляет собой область R_K. Если Q к тому же ограничен тремя вогнутыми внутрь ломаными, то эти ломаные являются кратчайшими в Q. Поэтому многоугольник Q с точки зрения своей внутренней метрики является треугольником в области $R_K = Q$, и потому, согласно теореме 4, его углы не превосходят соответствующих углов соответствующего треугольника T_K.

5°. **Теорема 5**. *В R_K любые две точки можно соединить единственной кратчайшей.*

Допустим, что выходящие из некоторой точки O кратчайшие L и M имеют общий конец A. Полагая $OA = a$, очевидно, имеем $\gamma^K_{L,M}(a, a) = 0$. Так как γ — неубывающая функция, то для каждого $x \leqslant a$ получаем $\gamma^K_{L,M}(x, x) = 0$. Следовательно L и M совпадают.

Теорема 6. *В R_K кратчайшая непрерывно зависит от своих концов, т. е. если $A_n \to A$ и $B_n \to B$ при $n \to \infty$, то кратчайшие A_nB_n сходятся к кратчайшей AB.*

Доказательство. Пусть $A_n \to A$ и $B_n \to B$. Возьмем на кратчайшей AB произвольную точку C, а на кратчайших A_nB_n такие точки C_n, что

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_nC_n}{A_nB_n}.$$

Проведем кратчайшую AB_n и возьмем на ней точку D_n, которая делит ее в том же отношении, рис. 9.

Применяя к треугольнику ABB_n теорему 2 и учитывая, что $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD_n}{AB_n}$, видим, что CD_n стремится к нулю вместе с BB_n. Точно так же стремится к нулю D_nC_n вместе с AA_n. Но так как $CC_n \leqslant CD_n + D_nC_n$, из $AA_n \to 0$ и $BB_n \to 0$ следует $CC_n \to 0$. Поскольку C произвольная точка кратчайшей AB, A_nB_n сходятся к AB, если A_n и B_n сходятся к A и B соответственно.

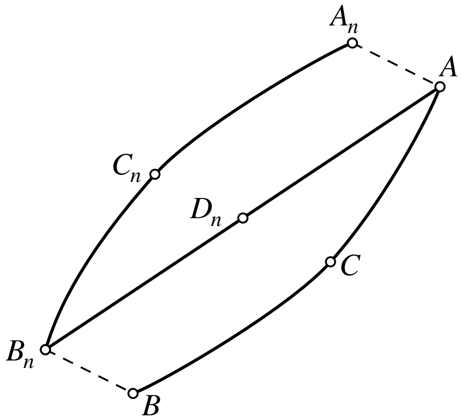


Рис. 9

6°. **Теорема 7**. *Если точка O в R_K имеет окрестность U, гомеоморфную (открытому) n-мерному шару, и r есть расстояние между O и границей U, то любую выходящую из O кратчайшую можно продолжить до кратчайшей длины r.*

Доказательство. Пусть $S(r)$ — сфера радиуса r с центром в точке O, т. е. множество всех точек X, удаленных от O на расстояние $\rho(O,X)=r$. Из условия следует, что $S(r)\subset U$. Отображая U на шар в n-мерном евклидовом пространстве, можно считать, что $S(r)$ расположена в евклидовом пространстве и является там границей замкнутого множества (образа r-окрестности точки O).

Определим деформацию сферы $S(r)$ следующим образом.

Согласно теореме 5, в каждую точку $X\in S(r)$ приходит одна единственная кратчайшая OX. Для каждого t, $0\leqslant t\leqslant 1$, сопоставим точке X точку X_t, лежащую на OX так, что $\rho(O,X_t)=tr=t\rho(O,X)$. Непрерывность таким образом определенной деформации гарантирована непрерывной зависимостью кратчайшей OX от точки X (теорема 6). Предположим, что в r-окрестности точки O есть такая точка A, что кратчайшая OA не может быть продолжена до длины r, т. е. до сферы $S(r)$. Такая точка не лежит ни на одном из радиусов сферы $S(r)$. Поэтому она при описанной деформации сферы $S(r)$ никогда не попадает на образ сферы $S(r)$. В то же время точка A лежала до деформации внутри ограниченной сферой $S(r)$ области, но для малых t она лежит вне сферы $S(tr)$. Это противоречит известной теореме топологии, см., например, теорему 10 из гл. VI книги [7]. Следовательно, теорема 7 доказана.

7°. **Теорема 8**. *Сфера в R_K выпукла. Это означает, что если любые две точки сферы в R_K соединяются лежащей в R_K кратчайшей, то она выпукла в R_K: если в R_K точки A и B удалены от некоторой точки O не более, чем на определенное расстояние r, так что, например, $OA\leqslant OB\leqslant r$, то любая точка X кратчайшей AB, лежащей в R_K, удалена от O тоже не более, чем на r. В случае $K>0$ здесь предполагается $r\leqslant\dfrac{\pi}{2\sqrt{K}}$.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник OAB (в R_K) и соответствующий треугольник $O'A'B'$ на K-плоскости. Возьмем на AB точку X, а на $A'B'$ соответствующую точку X', т. е. такую, что $A'X'=AX$. Тогда, по теореме 2, $O'X'\geqslant OX$. Одновременно $O'X'$ не больше суммы длин сторон $O'A'$ и $O'B'$. Это свойство выполнено при $K\leqslant 0$ для любого треугольника на K-плоскости. Если же $K>0$, то это заведомо выполнено, если длины сторон $O'A'$ и $O'B'$ не превосходят $\dfrac{\pi}{2\sqrt{K}}$, т. е. не более внутреннего радиуса (половины диаметра) той полусферы, которая в этом случае представляет K-плоскость. Поэтому $OX'\leqslant O'X'\leqslant O'B'=OB\leqslant r$, ч. т. д.

8°. В определении области R_K требуется неположительность K-избытка для произвольного треугольника. Желательно ослабить это условие, потребовав неположительность K-избытков только для достаточно малых треугольников. Естественно, что само по себе это условие недостаточно; например, замкнутый цилиндр в этом смысле имеет неположительную кривизну, но не является областью R_0, так как на нем есть точки, которые можно соединять различными кратчайшими. Если, однако, потребовать дополнительно непрерывную зависимость кратчайшей от ее концов, то мы получим условия, которые определяют область R_K.

Это утверждение является содержанием теоремы 9, которая будет доказана далее.

Отметим в связи с этим, что непрерывная зависимость кратчайшей от концов в некоторой компактной области гарантируется единственностью соединяющей две точки кратчайшей между двумя точками. Действительно, в компактной области из любой последовательности кратчайших можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Если одновременно $A_n \to A$, $B_n \to B$, то предел всякой сходящейся подпоследовательности из кратчайших A_nB_n является кратчайшей AB. Если кратчайшая единственна, то $A_nB_n \to AB$.

Теорема 9. *Пусть область G метрического пространства удовлетворяет следующим условиям:*

1) любые две точки из G можно соединить кратчайшей;

2) кратчайшая непрерывно зависит от концов, т. е. если $A_n \to A$ и $B_n \to B$, то $A_nB_n \to AB$;

3) у каждой точки есть окрестность, в которой K-избыток любого треугольника неположителен.

Тогда K-избыток произвольного треугольника в G неположителен.

Доказательство. Так как по условиям теоремы в окрестности произвольной точки выполнены условия, которые определяют область R_K, то в такой окрестности выполнены все выше установленные для R_K свойства. Поэтому между любыми двумя кратчайшими в G определен угол и, кроме того, для «достаточно малого» треугольника его углы не больше углов соответствующего треугольника на K-плоскости (теоремы 3 и 4). Мы будем использовать оба эти свойства.

Пусть $T = ABC$ — произвольный треугольник в G. Для доказательства теоремы достаточно проверить, что каждый из углов этого треугольника, например угол α при вершине A, не превосходит соответствующего угла в треугольнике T^K.

Возьмем на BC точки $D_0 = B, D_1, D_2, \ldots, D_n = C$ и проведем кратчайшие $AD_0, AD_1, \ldots, AD_n$. Мы получим «узкие» треугольники $T_i = AD_{i-1}D_i$. Так как в силу условия 2) кратчайшая AD непрерывно зависит от точки D, то соседние кратчайшие AD_{i-1} и AD_i близки друг к другу, если точки D_i расположены на BC достаточно плотно. На кратчайших AD_i возьмем точки $E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{im}$. Соединив эти точки на сторонах «узких» треугольников T_i так, как показано на рис. 10, мы получим «малые» треугольники T_{ij}.

Сопоставляя каждому треугольнику T_{ij} соответствующий треугольник T_{ij}^K на K-плоскости, мы получим развертку Q, составленную из этих треугольников T_{ij}^K. Q состоит также из «узких» многоугольников Q_i, соответствующих «узкому» треугольнику T_i (т. е. Q_i составлен из треугольников $T_{i1}^K, T_{i2}^K, \dots$). При достаточно плотном расположении точек D_i и E_{ij} треугольники T_{ij} будут настолько малыми, что у каждого из них углы не больше соответствующих углов треугольника T_{ij}^K.

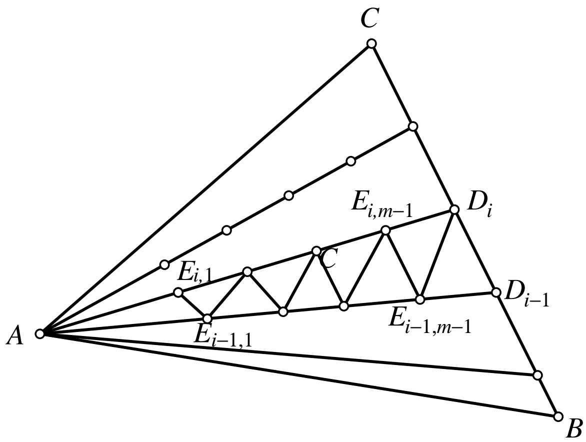


Рис. 10

Имеется три типа углов в треугольниках T_{ij} и T_{ij}^K:

а) углы α_i и α_i^K при вершине A;

б) углы при вершинах E_{ij} внутри кратчайших AD_i;

с) углы при вершинах D_i.

Если α — угол исходного треугольника T при вершине A, то, согласно теореме 1 § 2, $\alpha \leqslant \sum \alpha_i$. Но так как $\alpha_i \leqslant \alpha_i^K$, то

$$\alpha \leqslant \sum \alpha_i^K. \qquad (1)$$

Далее, сумма прилегающих к одной расположенной на кратчайшей AD_{i-1} или AD_i вершине углов треугольников T_{ij}, «вписанных» в узкий треугольник T_i, не меньше π (следует из теорем 1 и 2 § 2). Тем более сумма соответствующих углов с общей вершиной в треугольниках T_{ij}^K не меньше π. Это значит, что ломаные $A'D'_{i-1}$ и $A'D'_i$, которые ограничивают узкий многоугольник Q_i, вогнуты внутрь.

Поэтому мы можем воспользоваться леммой 2. В силу этой леммы углы в многоугольнике Q_i не больше углов треугольника T_i^K, который получается распрямлением ограничивающих Q_i ломаных. (Каждый такой треугольник T_i^K является, очевидно, не чем иным, как треугольником, соответствующим узкому треугольнику T_i, и поэтому имеет стороны той же длины.) Если мы обозначим $\overline{\alpha}_i^K$ угол треугольника T_i^K при вершине, соответствующей A, то $\alpha_i^K \leqslant \overline{\alpha}_i^K$, так что из (1) следует

$$\alpha \leqslant \sum \overline{\alpha}_i^K. \qquad (2)$$

Далее, сумма углов малых треугольников, сходящихся в общей вершине в одной из точек D_i внутри стороны AB, не меньше π (опять на основании теорем 1 и 2 § 2). Поэтому сумма соответствующих углов треугольников T_{ij}^K и подавно не меньше π, и тем более сумма углов треугольников T_i^K и T_{i+1}^K при вершине D_i не меньше π.

Это значит, что многоугольник P, получающийся последовательным прикладыванием треугольников T_i^K друг к другу, ограничен выпуклой ломаной $B''C''$, изгибающейся внутрь P. Если эту ломаную разогнуть, то очевидно получится треугольник T^K, который соответствует исходному треугольнику T. Длины сторон этих треугольников равны. Опять применяя лемму 2, мы убеждаемся, что угол многоугольника P при вершине A'' не больше соответствующего угла треугольника T^K, так что $\sum \overline{\alpha}_i^K \leqslant \alpha^K$. Сравнивая это неравенство с неравенством (2), видим, что $\alpha \leqslant \alpha^K$, ч. т. д.

9°. В заключение этого параграфа мы докажем эквивалентность двух определений пространства кривизны $\leqslant K$, которые приводятся в п. 5 § 1.

Теорема 10. *Для того чтобы метрическое пространство было пространством кривизны $\leqslant K$ в том смысле, что каждая точка имеет окрестность R_K, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

1) *каждая точка имеет окрестность, в которой любые две точки можно соединить кратчайшей;*

2) *для любой последовательности треугольников T, сходящихся к некоторой точке,*

$$\varlimsup \frac{\delta_0(T)}{S(T^0)} \leqslant K, \tag{3}$$

где $\delta_0(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ избыток треугольника T, а $S(T^0)$ — площадь треугольника T^0 на евклидовой плоскости, соответствующего T.

Доказательство. Здесь подразумевается, что если $S(T^0) = 0$, то $\delta_0(T) \leqslant 0$ (по крайней мере для треугольников из последовательности с достаточно большими номерами), так что стоящая в неравенстве (3) дробь есть $-\infty$ или $0/0$ и мы считаем, что оно выполнено.

Докажем сперва необходимость условий. Очевидно, достаточно доказать только необходимость второго условия. Для этого заметим, что K-избыток $\delta_K(T) = (\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha^K + \beta^K + \gamma^K)$ можно представить в виде

$$\delta_K(T) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) - (\alpha^K + \beta^K + \gamma^K - \pi) = \delta_0(T) - \delta_0(T^K), \tag{4}$$

т. е. K-избыток треугольника T есть разность «абсолютных» избытков треугольников T и T^K.

Избыток $\delta_0(T^K)$ треугольника на K-плоскости, как известно, пропорционален площади $S(T^K)$, т. е.

$$\delta_0(T^K) = KS(T^K). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что условие $\delta_K(T) \leqslant 0$ равносильно условию

$$\delta_0(T) \leqslant KS(T^K). \tag{6}$$

Если треугольник T^K мал, то отношение его площади к площади треугольника T^0 на евклидовой плоскости близко к 1 и при этом $S(T^K) = 0$

в точности тогда, когда $S(T^0) = 0$. Поэтому можно утверждать, что $S(T^K) = A(T)S(T^0)$, где $A(T) \to 1$, если стороны треугольника стремятся к нулю.

Следовательно, вместо (6) можно писать

$$\delta_0(T) \leqslant KS(T^0)A(T). \tag{7}$$

Для произвольной последовательности треугольников T, стягивающихся к некоторой точке, мы имеем $A(T) \to 1$, и из (7) следует неравенство

$$\overline{\lim}\, \frac{\delta_0(T)}{S(T^0)} \leqslant K.$$

Здесь допускается $S(T^0) = 0$, тогда $\delta_0(T) \leqslant 0$ вследствие (7).

Теперь докажем достаточность. Из второго условия теоремы следует, что для каждого $K' > K$, для любой точки O можно найти окрестность U, в которой для каждого треугольника T выполнено неравенство

$$\delta_0(T) \leqslant K'S(T^0). \tag{8}$$

В силу первого условия эту окрестность можно выбрать к тому же так, что в ней любые две точки можно соединить кратчайшей.

Как известно, $S(T^0) \geqslant S(T^{K'})$, если $K' \leqslant 0$ и $S(T^0) \leqslant S(T^{K'})$, если $K' \geqslant 0$[16]. Поэтому из (8) следует, что $\delta_0(T) \leqslant K'S(T^{K'})$. Но так как $K'S(T^{K'}) = \delta_0(T^{K'})$, то $\delta_{K'}(T) = \delta_0(T) - \delta_0(T^{K'}) \leqslant 0$, т. е. в окрестности U избыток любого треугольника относительно K' неположителен.

Вследствие сказанного ранее, в окрестности U выполнены два первых условия теоремы 9, а именно 1) о существовании кратчайших и 2) о непрерывной зависимости кратчайшей от концов. Кроме того, на основании только что доказанного, для любого $K' > K$ каждая точка из U имеет окрестность, в которой K'-избытки треугольников неположительны. Это значит, что для любого $K' > K$ в U выполнено также и третье условие теоремы 9.

Тогда в силу теоремы 9 для произвольного треугольника T, $T \subset U$, при любом $K' > K$ справедлива оценка $\delta_{K'}(T) \leqslant 0$. Так как это верно для каждого $K' > K$, то $\delta_K(T) \leqslant 0$. В самом деле, $\delta_{K'}(T) = (\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha^{K'} + \beta^{K'} + \gamma^{K'})$ и для данного T при $K' \to K$ углы $\alpha^{K'}$, $\beta^{K'}$ и $\gamma^{K'}$ очевидно сходятся к α^K, β^K и γ^K, т. е. $\delta_{K'}(T) \to \delta_K(T)$.

Таким образом, окрестность U оказалась областью R_K, и поскольку каждая точка O имеет окрестность такого типа, наше пространство является пространством кривизны $\leqslant K$.

[16] Этот результат, кстати, автоматически следует также из теоремы 1 § 5 о площадях треугольников в R_K.

§ 4. *Направление кривой и угол конуса направлений*

1°. Направление. Следующее определение «направления» относится к произвольному метрическому пространству.

Мы говорим, что кривая, выходящая из некоторой точки, имеет в этой точке направление, если верхний угол, который она образует сама с собой, равен нулю.

Из определения кратчайшей легко следует:

Теорема 1. *Всякая кратчайшая имеет направление в своей начальной точке.*

Можно доказать, что в римановом пространстве существование направления кривой в смысле данного определения равносильно существованию касающейся геодезической.

Мы говорим далее, что две выходящие из одной точки кривые L_1 и L_2 имеют в этой точке *одно и то же направление*, если верхний угол между ними равен нулю. Тогда обе эти кривые имеют определенное направление, так как, в силу теоремы 1 § 2, справедливо неравенство $\alpha_{12} + \alpha_{21} \geqslant \alpha_{11}$, где α_{ij} обозначает угол между L_i и L_j, и из $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$ следует $\alpha_{11} = 0$. Аналогично $\alpha_{22} = 0$.

Лемма 1. *Если выходящие из одной точки кривые L_1 и L_2 имеют общее направление с кривой L_3, то они сами имеют одно и то же направление.*

В самом деле, так как $\alpha_{12} \leqslant \alpha_{13} + \alpha_{32}$, то из $\alpha_{13} = \alpha_{32} = 0$ следует, что $\alpha_{12} = 0$.

Лемма 2. *Если выходящие из одной точки кривые L_1 и L_2 имеют одинаковое направление, то для любой выходящей из этой же точки кривой L_3 верхний угол α_{13} между L_1 и L_3 равен верхнему углу α_{23} между L_2 и L_3.*

По теореме 1 § 2, $\alpha_{13} + \alpha_{12} \geqslant \alpha_{23}$, так что $\alpha_{13} \geqslant \alpha_{23}$, если $\alpha_{12} = 0$. Точно так же $\alpha_{23} \geqslant \alpha_{13}$. Тем самым $\alpha_{13} = \alpha_{23}$, ч. т. д.

На основании леммы 1 множество кривых, выходящих из одной точки и имеющих в этой точке направление, распадается на классы кривых с общим направлением. Это позволяет определить направление в заданной точке, не связывая его с определенной кривой, а лемма 2 позволяет говорить о верхнем или обычном угле между направлениями.

Если α_{12}, α_{23} и α_{31} верхние углы между направлениями D_1, D_2 и D_3, то из теоремы 1 § 2 непосредственно вытекает неравенство $\alpha_{12} + \alpha_{23} \geqslant \alpha_{13}$. Это можно сформулировать еще так:

Теорема 2. *Направления в данной точке образуют метрическое пространство с верхним углом между ними в качестве расстояния.*

2°. Направления в R_K. В R_K не только определено направление кратчайшей в ее исходной точке, но кроме того, между кратчайшей и направлением существует непрерывная зависимость. Последнее означает, что если выходящие из одной точки кратчайшие L_n сходятся к L, то их направления сходятся к направлению L. Если в R_K у точки O имеется окрестность, гомеоморфная открытому шару (евклидова пространства), то в каждом направлении выходит кратчайшая. При этом, однако, в одном направлении в O может выходить континуум кратчайших. Эти утверждения содержатся в следующих теоремах.

Теорема 3. *Если в R_K выходящие из одной точки кратчайшие L_n и M_n сходятся к кратчайшим L и M соответственно, то углы $\alpha(L_n, M_n)$ сходятся к углу $\alpha(L, M)$. В частности, если $L_n \to L$, то $\alpha(L_n, L) \to 0$.*

Доказательство. Последнее свойство получается автоматически, если положить $L = M_1 = M_2 = \dots$. Поскольку угол между направлениями кратчайших по определению равен углу между кратчайшими, то это утверждение можно понимать как утверждение о сходимости направлений сходящихся кратчайших.

Рассмотрим кратчайшие, выходящие из данной точки O в R_K. Пусть $L_n \to L$. Возьмем на L_n и L одинаково удаленные от O точки A_n и A соответственно, так что $OA_n = OA = a$. Если теперь $\gamma_n(a, a)$ — угол треугольника на K-плоскости, соответствующего OAA_n, то по теореме 1 § 3 справедливо неравенство $\gamma_n(a, a) \geqslant \alpha(L, L_n)$. Но так как $L_n \to L$, то $\gamma_n(a, a) \to 0$, и потому $\alpha(L, L_n) \to 0$.

Пусть теперь $L_n \to L$ и $M_n \to M$. По «неравенству треугольника» для углов, $|\alpha(L, M) - \alpha(L_n, M_n)| \leqslant \alpha(L, L_n) + \alpha(M, M_n)$. Так как по доказанному $\alpha(L, L_n) \to 0$ и $\alpha(M, M_n) \to 0$, то $\alpha(L_n, M_n) \to \alpha(L, M)$, ч. т. д.

Лемма 3. *Если выходящая из точки O в R_K кривая L имеет в этой точке направление, то верхний угол между L и ее секущей OX, т. е. кратчайшей OX для $X \in L$, стремится к нулю при $X \to O$.*

Доказательство. Утверждение теоремы можно другими словами выразить так: направление кривой есть предел направлений ее секущих.

По определению верхний угол равен

$$\alpha(L, OX) = \varlimsup_{Y,Z \to O} \gamma(Y, Z),$$

где $Y \in L$ и $Z \in OX$. Так как по теореме 1 § 3 угол γ является неубывающей функцией от OZ, то $\gamma(Y, Z) \leqslant \gamma(Y, X)$ и, следовательно,

$$\alpha(L, OX) \leqslant \varlimsup_{Y \to O} \gamma(Y, X).$$

Но так как у кривой есть направление, то

$$\varlimsup_{Y,X \to O} \gamma(Y, X) = 0.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{Y \to O} \alpha(L, OX) = 0.$$

Теорема 4. *Если у точки O в R_K есть окрестность, гомеоморфная (открытому) шару (евклидова пространства), то из O в каждом направлении выходит кратчайшая.*

Доказательство. Пусть D — некоторое направление в точке O и L — кривая, выходящая из O в этом направлении. Возьмем на L точки $X_n \to O$, и проведем кратчайшие OX_n. По теореме 7 § 3 их можно продолжить до кратчайших длины r. Из полученных таким образом кратчайших M_n выберем сходящуюся подпоследовательность. Предельная кривая M есть кратчайшая, имеющая в точке O данное направление D. Это видно из того, что направления кратчайших M_n сходятся к направлению D_M предельной кратчайшей M, а по лемме 3 они же сходятся к направлению D кривой L. Поэтому направления D_M и D совпадают.

Замечание 1. Следующий простой пример показывает, что условие теоремы 4 существенно. Обычный (замкнутый) круг на плоскости является, очевидно, пространством кривизны $\leqslant 0$, однако из точки на границе вообще не выходит ни одной кратчайшей в направлении граничной окружности.

Замечание 2. Из доказательства теоремы 4 непосредственно следует: если точка O в R_K имеет окрестность, гомеоморфную (открытому) шару (евклидова пространства), и выходящая из O кривая L имеет направление, то у L есть касательная кратчайшая. Это видно из того, что каждая последовательность секущих содержит подпоследовательность, которая сходится к кратчайшей в том же направлении. Простые примеры показывают однако, что эта касательная не единственна, так что в общем случае надо говорить о связке касательных кратчайших данного направления.

Теорема 5. *Если выходящие из одной точки O в R_K кривые L и M имеют направления, то существует угол между ними, причем он равен пределу углов между секущими. Если X и Y точки на L и M соответственно, то*

$$\alpha(L, M) = \lim_{Y\to O} \alpha(L, OY) = \lim_{X\to O} \alpha(OX, M) = \lim_{X,Y\to O} \alpha(OX, OY).$$

Доказательство. Отметим сперва, что если положить $M = L$, то мы получаем утверждение леммы 3 о том, что для $X \in L$ из $X \to O$ следует $\alpha(L, OX) \to 0$.

Пусть $\overline{\alpha}(L, M)$ — верхний угол между L и M. По определению

$$\overline{\alpha}(L, M) = \varlimsup_{X,Y\to O} \gamma(X, Y). \tag{1}$$

С другой стороны, по «неравенству треугольника» для верхних углов, $\overline{\alpha}(L, M) \leqslant \alpha(OX, OY) + \overline{\alpha}(L, OX) + \overline{\alpha}(M, OY)$. Так как по лемме 3 $\lim \overline{\alpha}(L, OX) = \lim \overline{\alpha}(M, OY) = 0$, то

$$\overline{\alpha}(L, M) \leqslant \varliminf_{X,Y\to O} \alpha(OX, OY). \tag{2}$$

Кроме того, по теореме 1 § 3

$$\alpha(OX, OY) \leqslant \gamma(X, Y). \tag{3}$$

Сравнивая (1)–(3), получаем $\alpha(L, M) = \lim \gamma(X, Y) = \lim \alpha(OX, OY)$. Это означает, во-первых, что существует предел $\lim \gamma(X, Y)$, т. е. угол между L и M, и во-вторых, что этот угол равен пределу углов $\alpha(OX, OY)$. Другие равенства из утверждения теоремы доказываются аналогично.

3°. Угол конуса направлений. Рассмотрим для точки O в метрическом пространстве пространство направлений в этой точке. Конус C направлений D в O мы определяем как кривую в этом пространстве направлений, т. е. он задается непрерывной функцией $D(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Угол такого конуса по определению равен длине этой кривой в угловой метрике, т. е. угол β конуса C $(D(t), a \leqslant t \leqslant b)$ равен

$$\beta(C) = \sup \sum_{i=1}^{n} \alpha(D(t_{i-1}), D(t_i)),$$

где $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, а α — угол между направлениями.

Так как любая выходящая из O кратчайшая имеет направление, то конус $L(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, исходящих из O кратчайших определяет одновременно конус направлений. Угол конуса кратчайших по определению равен углу соответствующего конуса направлений. (Для двумерных многообразий этот угол, по существу, совпадает с углом сектора, как он определен в [1].) Однако даже в случае, когда из точки O в каждом направлении выходит кратчайшая, конус направлений не обязательно однозначно определяет конус кратчайших. Это происходит, если в одном и том же направлении выходит несколько разных кратчайших. Если же в каждом направлении из O выходит в точности одна кратчайшая и связь между кратчайшими и направлениями непрерывна как в R_K, то каждый конус направлений однозначно определяет конус кратчайших, если точка O имеет окрестность, гомеоморфную открытому шару евклидова пространства.

Для двух направлений D_1 и D_2 в некоторой точке любого метрического пространства — аналогично кратчайшей, связывающей две точки — естественным образом определяется соединяющий их конус направлений с наименьшим углом. Такой «кратчайший курс» представляет аналогию с плоским сектором и дает одновременно метрическое определение этого плоского элемента. Естественно, такой конус не обязан существовать в случае произвольного метрического пространства, а в случае, когда он существует, его угол может оказаться больше, чем угол между направлениями D_1 и D_2.

Но в R_K, по крайней мере для направлений, в которых из данной точки выходят кратчайшие, последнее исключено. Это показывает теорема 7, которая будет далее доказана в данном параграфе. Однако сперва мы хотим исследовать конус, состоящий из кратчайших, соединяющих точку A с точками некоторой кратчайшей BC.

4°. Мы берем в некоторой области R_K произвольный треугольник ABC и проводим из точки A кратчайшие AX во все точки X стороны BC. Поскольку кратчайшая AX по теореме 6 § 3 непрерывно изменяется при непрерывном изменении точки X, то кратчайшие AX образуют своего рода поверхность. Здесь сто́ит отметить, что даже в простых случаях кратчайшие AX могут на некоторых участках совпадать, как это показано на рис. 11. Так полученную поверхность мы называем *натянутым из точки A поверхностным треугольником ABC*. Это *конус кратчайших*.

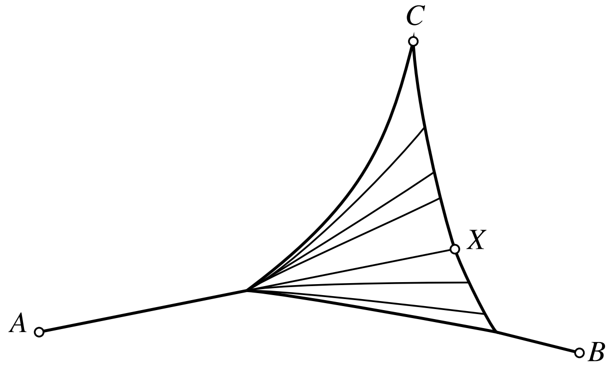


Рис. 11

Такой поверхностный треугольник можно следующим образом представить в виде непрерывного образа плоского треугольника. Пусть плоский треугольник $A'B'C'$ имеет те же длины сторон, что и ABC. Точке X' на $B'C'$ сопоставим точку X на BC так, что $B'X' = BX$, а отрезку $A'X'$ сопоставим кратчайшую AX. Точке Y' на $A'X'$ сопоставим точку Y на AX так, что $\dfrac{A'Y'}{A'X'} = \dfrac{AY}{AX}$. При этом треугольник $A'B'C'$ отображается на поверхностный треугольник ABC. В силу непрерывной зависимости кратчайшей от концов (теорема 6 § 3) это отображение является непрерывным. Так определенное отображение мы будем далее называть *стандартным*.

Так как кратчайшие AX образуют непрерывное семейство, то в силу теоремы 3 их направления также образуют непрерывное семейство.

Угол сектора, образованного кратчайшими AX, по данному выше определению, есть точная верхняя граница суммы углов между кратчайшими AX_{m-1} и AX_m, которые последовательно соединяют точку A с точками $X_0 = B, X_1, \ldots, X_n, X_{n+1} = C$. Этот угол естественно называть *углом поверхностного треугольника*.

5°. **Теорема 6**. *Пусть $T = ABC$ — натянутый из точки A поверхностный треугольник, а $T^K = A'B'C'$ — треугольник со сторонами той же длины на K-плоскости. Если α и α_K углы треугольников T и T^K в точках A и A' в смысле данного выше определения угла поверхностного треугольника, то*

$$\alpha \leqslant \alpha_K, \tag{4}$$

причем $\alpha = \alpha_K$ только тогда, когда треугольник T изометричен T^K.

Доказательство. Начнем с замечания о связи данного результата с предыдущими. Так как угол поверхностного треугольника, очевидно, не менее угла между его сторонами, то неравенство (4) уточняет теорему 4 § 3. Если угол между AB и AC равен α_K, то неизбежно справедливо равенство $\alpha = \alpha_K$. Тогда по утверждению теоремы треугольники T и T^K изометричны. Поэтому в теореме 6 содержится необходимое условие для равенства углов между сторонами треугольников ABC и $A'B'C'$.

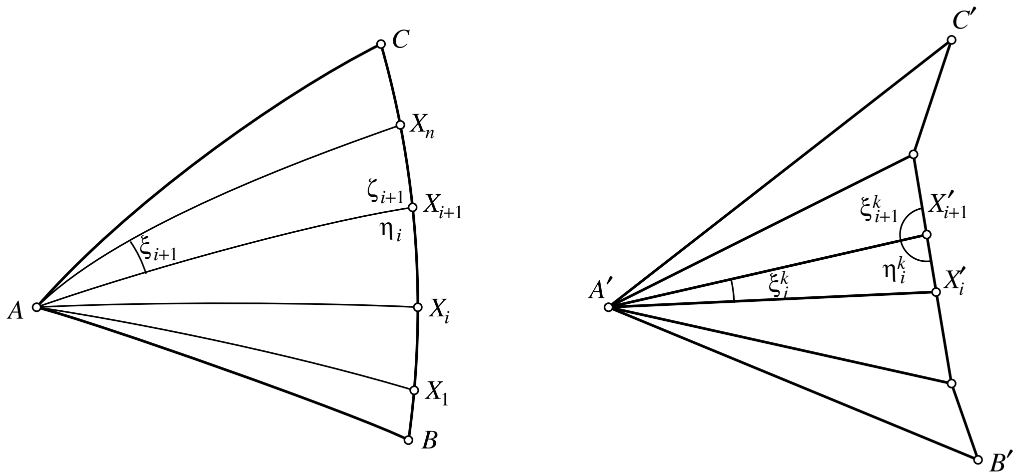


Рис. 12

Докажем неравенство (4). Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. На стороне BC треугольника ABC возьмем точки $X_0 = B, X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1} = C$, которые следуют на BC друг за другом. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ углы между AB и AX_1, AX_1 и AX_2 и т. д. (рис. 12). Можно выбрать точки X_i настолько плотно, что выполнено неравенство

$$\alpha - \varepsilon < \sum_{i=0}^{n} \xi_i. \tag{5}$$

На K-плоскости построим треугольники $T_i^K = A'X_i'X_{i+1}'$ с теми же сторонами, что у треугольников $T_i = AX_iX_{i+1}$. Если ξ_i^K угол треугольника T_i^K при вершине A', то по теореме 4 § 3

$$\xi_i^K \geqslant \xi_i. \tag{6}$$

Приложив треугольники T_i^K друг к другу в том же порядке, как треугольники T_i, получим многоугольник $P = A'B'X_1' \dots X_n'C'$. Его угол при вершине A' равен $\sum \xi_i^K$, и в силу (5) и (6) справедлива оценка

$$\sum \xi_i^K > \alpha - \varepsilon. \tag{7}$$

В то же время углы многоугольника P в вершинах X_i' не меньше π. Действительно, каждый из этих углов составлен из углов η_i^K и ζ_{i+1}^K соседних треугольников T_i^K и T_{i+1}^K. По теореме 4 § 3 эти углы не меньше соответствующих углов η_i и ζ_{i+1} треугольников T_i и T_{i+1}, т.е. $\eta_i^K \geqslant \eta_i$ и $\zeta_{i+1}^K \geqslant \zeta_{i+1}$. Но углы η_i и ζ_{i+1} являются дополнительными, и поэтому $\eta_i + \zeta_{i+1} \geqslant \pi$. Следовательно, тем более $\eta_i^K + \zeta_{i+1}^K \geqslant \pi$.

Поэтому к многоугольнику P можно применить лемму 1: разогнув его в треугольник, мы увеличим его угол при вершине A'. Разгибание, однако, дает не что иное, как треугольник $T^K = A'B'C'$, и поэтому речь идет об угле α_K. Так как угол многоугольника P при вершине A' равен $\sum \xi_i^K$, мы имеем

$$\sum \xi_i^K \leqslant \alpha_K.$$

Вместе с (7) это дает $\alpha_K > \alpha - \varepsilon$, и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\alpha_K \geqslant \alpha$.

Теперь докажем, что если $\alpha_K = \alpha$, то треугольники T и T^K изометричны. Возьмем на BC произвольную точку D (рис. 13) и рассмотрим поверхностные треугольники $T_1 = ABD$ и $T_2 = ACD$ и соответствующие им треугольники T_1^K и T_2^K. Если $\alpha', \alpha'', \alpha_K'$ и α_K'' углы этих треугольников, то

$$\alpha' + \alpha'' = \alpha, \tag{8}$$

$$\alpha_K' \geqslant \alpha', \qquad \alpha_K'' \geqslant \alpha''. \tag{9}$$

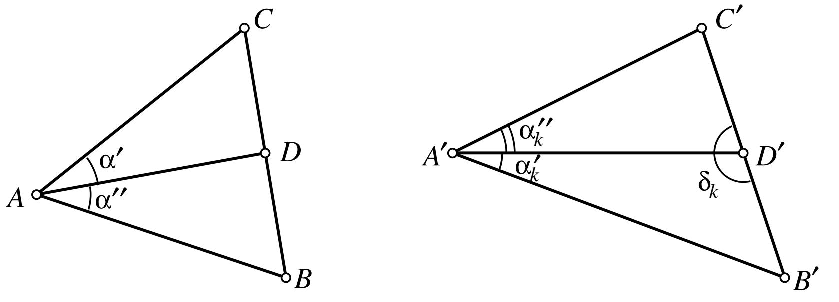


Рис. 13

Рассмотрим четырехугольник, составленный из T_1^K и T_2^K. По лемме 2 § 3 для угла δ_K при вершине D' этого многоугольника имеем $\delta_K \geqslant \pi$.

Поэтому по лемме 1 § 3

$$\alpha'_K + \alpha''_K \leqslant \alpha_K, \tag{10}$$

и при этом равенство $\alpha'_K + \alpha''_K = \alpha_K$ выполнено только в случае $\delta_K = \pi$. Однако из (8)–(10) следует, что $\alpha_K \geqslant \alpha'_K + \alpha''_K \geqslant \alpha$. Из $\alpha = \alpha_K$ тогда следует равенство $\alpha'_K + \alpha''_K = \alpha_K$, так что $\delta_K = \pi$, т. е. четырехугольник $T_1^K \bigcup T_2^K$ совпадает с треугольником T^K.

Это означает: 1) $AD = A'D'$, если точка D' на $B'C'$ такова, что $B'D' = BD$, 2) угол сектора между AB и AD равен углу между $A'B'$ и $A'D'$. Так как точка D была выбрана произвольно, отсюда следует, что при стандартном отображении треугольника T^K на T, во-первых, имеет место равенство $AX = A'X'$ и, во-вторых, угол (AB, AX) равен углу $(A'B', A'X')$.

Пусть теперь P и Q две произвольные точки треугольника T, лежащие на некоторых кратчайших AX и AY, $X, Y \in BC$. Пусть P', Q', X' и Y' соответствующие точки в треугольнике T^K. По доказанному треугольники AXY и $A'X'Y'$ имеют равные стороны и одинаковые углы при вершинах A и A'. Поэтому из теоремы 2 § 3 следует, что $PQ = P'Q'$. Следовательно, треугольник T изометричен треугольнику T^K (в смысле метрики в области R_K, а потому, естественно, и в смысле общей внутренней метрики). Ч. т. д.

6°. Теорема 7. *Пусть O — точка в R_K, а L и M две выходящие из нее кратчайшие. Если угол между ними удовлетворяет условию $\alpha(L, M) < \pi$, то существуют такие соединяющие L и M конусы кратчайших, что их угол сколь угодно близок к $\alpha(L, M)$. Если, кроме того, точка O имеет окрестность, гомеоморфную (открытому) шару (евклидова пространства), то существует конус выходящих из O кратчайших между L и M такой, что его угол в точности равен $\alpha(L, M)$.*

Доказательство. Пусть X и Y — точки на L и M соответственно. Вследствие условия $\alpha(L, M) < \pi$ кратчайшая XY — если X и Y отличны от O и достаточно близки к ней — не проходит через O и не лежит целиком на $L \bigcup M$. Поэтому кратчайшие OZ, идущие из O в точки Z, $Z \in XY$, образуют конус C_{XY} между L и M. В то же время они являются кратчайшими, образующими поверхностный треугольник, натянутый из вершины O на OXY.

По теореме 6 угол $\beta(C_{XY})$ конуса C_{XY} (поверхностного треугольника) удовлетворяет неравенству $\beta(C_{XY}) \leqslant \gamma(X, Y)$. Вместе с тем очевидно неравенство $\beta(C_{XY}) \geqslant \alpha(X, Y)$, а по определению $\alpha(L, M) = \lim\limits_{X,Y\to 0} \gamma(X, Y)$. Из этого следует $\alpha(L, M) = \lim\limits_{X,Y\to 0} \beta(C_{XY})$, что доказывает первое утверждение теоремы.

Если точка O имеет гомеоморфную (открытому) шару (евклидова пространства) окрестность, то можно, во-первых, продолжить каждую выходящую из O кратчайшую до кратчайшей длины $r > 0$ (так что весь конус состоит из кратчайших такой длины) и, во-вторых, из этих конусов можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Предельный конус имеет угол, равный $\alpha(L, M)$. Теорема доказана.

7°. Теорема 6 позволяет доказать следующее утверждение:

Теорема 8. *Если точка в R_K имеет окрестность, гомеоморфную n-мерному (открытому) шару, и K-избыток всякого содержащегося в ней треугольника равен нулю, то эта окрестность точки O изометрична области n-мерного пространства постоянной кривизны K.*

Доказательство. Пусть точка O имеет окрестность U, удовлетворяющую условиям теоремы. Естественно, можно предполагать, что $n \geqslant 2$. По теореме 6 каждый поверхностный треугольник в U изометричен плоскому треугольнику, т. е. треугольнику на K-плоскости. Это замечание составляет основу доказательства.

По теореме 7 § 3 каждую выходящую из точки O кратчайшую можно продолжить за точку O. Это продолжение единственно, так как иначе можно было бы получить треугольник с двумя частично совпадающими сторонами. Такой треугольник, однако, ни в коем случае не был бы изометричен плоскому треугольнику.

Пусть L_1 и L_2 две выходящие из O и друг друга не продолжающие кратчайшие, а L_1' и L_2' — их продолжения за O. Тогда каждый из четырех углов между L_1 и L_2, L_1' и L_2' и т. д. меньше π. Действительно, если бы, например, угол между L_1 и L_2' был равен π, то кратчайшая L_1 была бы, как легко понять, продолжением L_2', так что продолжение для L_2' не было бы единственным. Взяв на кратчайших L_1, L_2, L_1' и L_2' точки A_1, A_2, A_1' и A_2' соответственно, построим четыре поверхностных треугольника OA_1A_2, OA_2A_1' и т. д. (рис. 14.) По доказанному их углы в точке O меньше π, так

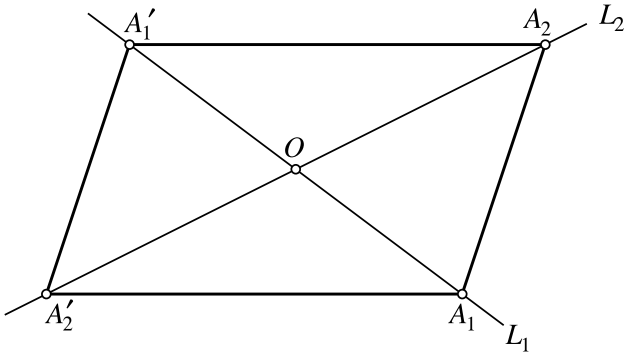


Рис. 14

что ни один из них не вырождается, и на основании теоремы 6 каждый из этих треугольников изометричен плоскому. Кроме того, как легко понять из упоминавшейся ранее единственности продолжения, сумма любой пары соседних углов этих треугольников в точке O будет равна π.

Из всего этого следует, что построенные треугольники образуют поверхность Q^2, которая изометрична четырехугольнику на K-плоскости.

Если окрестность U точки O имеет размерность $n = 2$, то уже поверхность Q^2 образует окрестность U точки O (так как окрестность точки O согласно предположению гомеоморфна (открытому) шару, т. е. при $n = 2$ кругу). Если же $n > 2$, так что Q^2 не образует окрестность точки O, то из точки O можно выпустить кратчайшую L_3, не лежащую на Q^2. Пусть L'_3 — продолжение этой кратчайшей за O. Возьмем на L_3 и L'_3 точки A_3 и A'_3 соответственно. Кратчайшие L_1, L_2 и L_3 вместе с их продолжениями образуют своего рода координатные оси. На них мы имеем точки A_1, $A_2, A_3, \ldots$. Построим теперь тетраэдры с общей вершиной в точке O и вершинами $A_1, A_2, A_3, \ldots$.

Рассмотрим, например, точки A_1, A_2 и A_3 и построим поверхностный треугольник $A_1A_2A_3$. Он изометричен треугольнику на K-плоскости и тем самым не зависит от того, из какой вершины он натянут. Если мы проведем кратчайшие из точки O во все точки этого треугольника $A_1A_2A_3$, мы получим тетраэдр T, который изометричен тетраэдру в пространстве постоянной кривизны K.

Для этого построим в пространстве постоянной кривизны тетраэдр $T^K = O''A''_1A''_2A''_3$ с теми же ребрами. Тогда его боковые поверхности изометричны соответствующим боковым поверхностям тетраэдра T. Изометрия оснований $A_1A_2A_3$ и $A''_1A''_2A''_3$ задает соответствие между кратчайшими OX и $O''X''$, которые идут из вершин O и O'' в соответствующие точки оснований. Мы хотим доказать, что эти кратчайшие также равны, т. е. что $OX = O''X''$ (рис. 15).

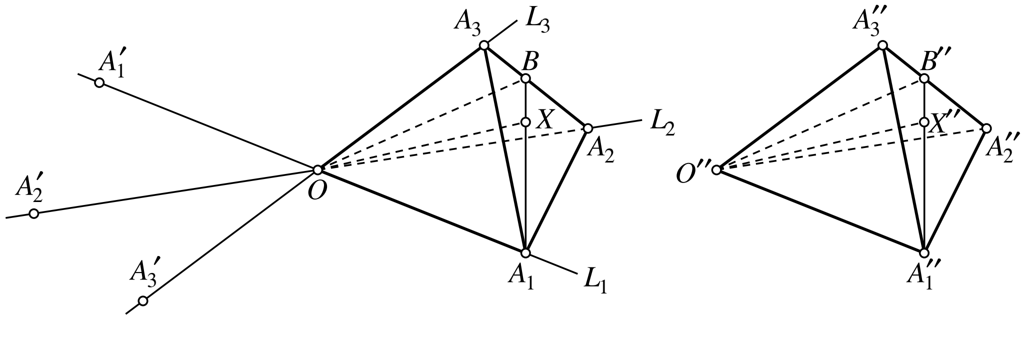


Рис. 15

Для этого проведем плоскость через $O''X''$ и $O''A''_1$. Она рассекает тетраэдр T^K по некоторому треугольнику $O''A_1''B''$. Вследствие изометрии боковых поверхностей тетраэдров T и T^K этому треугольнику соответствует треугольник OA_1B со сторонами той же длины. Следовательно, треугольник OA_1B изометричен $O''A_1''B''$, и из этого видно, что $OX = O''X''$.

Таким образом, тетраэдры T и T^K образованы отрезками OX и $O''X''$ равной длины, которые при этом идут в соответствующие точки изометрических треугольников $A_1A_2A_3$ и $A_1''A_2''A_3''$. Из этого видно, что эти тетраэдры изометричны.

Наши рассуждения о тетраэдре $T = OA_1A_2A_3$ можно повторить для каждого из восьми тетраэдров $OA_1A_2A_3$, $OA_1'A_2'A_3'$ и т. д. Из этого видно, что точка O окружена восемью тетраэдрами, которые изометричны соответствующим восьми тетраэдрам в пространстве постоянной кривизны K. Эти тетраэдры, как легко понять, вместе образуют фигуру O^3, изометричную октаэдру в пространстве постоянной кривизны K.

Если размерность n окрестности точки O равна 3, то этот октаэдр O^3 уже образует окрестность U этой точки. Если же $n > 3$, то мы рассматриваем выходящую из точки O кратчайшую L_4, которая не лежит в O^3. Мы рассматриваем ее продолжение L_4', выбираем точки A_4 и A_4' на L_4 и L_4' соответственно и опять получаем своего рода координатные оси, образованные кратчайшими L_1, L_2, L_3, L_4 и их продолжениями. Затем рассматриваем симплексы $OA_1A_2A_3A_4$ и т. п. — всего их 16 — и доказываем аналогично предыдущему, что они изометричны симплексам в пространстве постоянной кривизны K. При этом, естественно, сперва устанавливается, что это справедливо для их оснований $A_1A_2A_3A_4$ и т. п.

Продолжая эту конструкцию до исчерпания окрестности U точки O, убеждаемся в том, что U изометрична области в пространстве постоянной кривизны K. Ч. т. д.

§ 5. *Площадь и изопериметрическое неравенство в* R_K

1°. Определение площади. Рассмотрим поверхность F, заданную непрерывным отображением f некоторой жордановой области D. Пусть M триангулированный многоугольник или, если угодно, комплекс треугольников, содержащихся в D. Возьмем какой-нибудь треугольник T_i комплекса M. Его вершинам A, B и C соответствуют точки $f(A)$, $f(B)$ и $f(C)$ на поверхности F. Построим плоский треугольник T_i^0 со сторонами, равными расстояниям между точками $f(A)$, $f(B)$ и $f(C)$. Пусть $S(T_i^0)$ обозначает площадь этого треугольника.

Рассмотрим сумму площадей $S(T_i^0)$ всех треугольников T_i^0 , соответствующих треугольникам T_i:

$$S_0(M) = \sum_i S(T_i^0).$$

Площадь поверхности, заданной отображением f области D, мы определяем как нижний предел величины $S_0(M)$ при условии, что вершины комплекса M бесконечно сгущаются в D и многоугольник M исчерпывает всю внутреннюю часть области D:

$$S(F, D, f) = \underline{\lim}\, S_0(M).$$

Одну и ту же поверхность F можно задать разными отображениями f области D. Чтобы избежать вопроса о зависимости площади поверхности от выбора представления поверхности, достаточно определить площадь поверхности формулой

$$S(F) = \inf S(F, D, f),$$

где нижняя грань величин $S(F, D, f)$ берется по всем отображениям f области D, определяющим одну и ту же поверхность.

Данное определение вполне аналогично определению площади поверхности как нижнего предела площадей вписанных многогранников.

В данном определении мы исходили из плоских треугольников T_i^0, но можно исходить и из треугольников T_i^K на произвольной K-плоскости. Это следует из того, что если длины сторон треугольника T_i^0 стремятся к нулю, то отношение площадей треугольников T_i^0 и T_i^K со сторонами той же длины стремится к 1, и потому

$$\underline{\lim} \sum S(T_i^0) = \underline{\lim} \sum S(T_i^K).$$

Это замечание совершенно естественно при исследовании площади некоторой поверхности в R_K. Оно позволяет использовать в этом случае треугольники на K-плоскости.

С комплексом M, который фигурирует в определении площади поверхности F, свяжем следующую конструкцию:

Каждому треугольнику $T_i = ABC$ комплекса M соответствует треугольник T_i^K со сторонами, равными $\rho(f(A), f(B))$, и т. п. Эти треугольники T_i^K образуют комплекс, изоморфный комплексу M. Этот новый комплекс P^K, называемый также *разверткой*, представляет собой аналог вписанного в поверхность многогранника, рассматриваемого при этом только с точки зрения его внутренней геометрии. Можно сказать, что комплекс M определяет развертку P^K (абстрактный многогранник P^K), вписанную в поверхность F. Величина $S_K(M) = \sum S(T_i^K)$ есть не что иное, как площадь развертки P^K, так что площадь поверхности у нас определяется именно с помощью вписанного абстрактного многогранника P^K.

2°. **Теорема 1**. *Площадь треугольника T в R_K не превосходит площади соответствующего треугольника T^K на K-плоскости и равна ей только тогда, когда T и T^K изометричны.*

Для доказательства теоремы нам необходима следующая лемма, представляющая не что иное, как простейший вариант этой теоремы.

Лемма. *Пусть многоугольник P на K-плоскости ограничен тремя вогнутыми внутрь ломаными $\widetilde{AB}$, $\widetilde{AC}$ и $\widetilde{BC}$, причем одна или две из этих ломаных могут быть просто отрезками (рис. 16). Тогда треугольник T, получаемый разгибанием сторон многоугольника (так что стороны треугольника T равны длинам ломаных $\widetilde{AB}$, $\widetilde{AC}$ и $\widetilde{BC}$), имеет бо́льшую площадь, чем многоугольник P.*

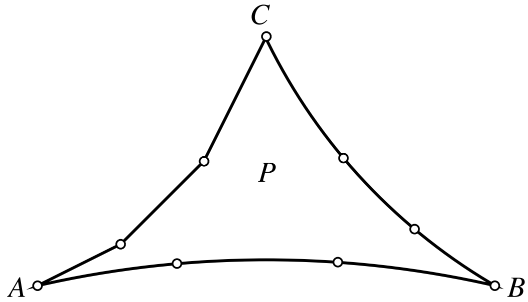


Рис. 16

Доказательство. Отметим сначала, что поскольку каждая ломаная $\widetilde{AB}$, $\widetilde{AC}$ и $\widetilde{BC}$ вогнута внутрь, то длина каждой из этих ломаных меньше суммы длин двух других. Тем самым длины сторон удовлетворяют неравенству треугольника так, что треугольник T существует.

Сначала рассмотрим случай, когда многоугольник P кроме вершин A, B и C имеет только вершину D, так что мы имеем четырехугольник $ABDC$. Разрежем этот четырехугольник на треугольники ABD и ACD. Согласно лемме 2 § 3, при превращении четырехугольника $ABDC$ в треугольник T разгибанием ломаной BDC увеличиваются углы A, B и C. Поэтому, если наложить треугольник ABD на T так, что сторона AB совпадет с соответствующей стороной треугольника T, и аналогично треугольник ACD так, что AC совпадет с соответствующей стороной треугольника T, то оба треугольника будут находиться внутри T и не перекрываться (рис. 17). Поэтому площадь четырехугольника P меньше площади треугольника T.

В общем случае докажем утверждение индукцией по числу вершин многоугольника. Отрежем от многоугольника, у которого более четырех вершин, четырехугольник (например, $ADEF$, как на рис. 18), проведя подходящую диагональ. Разгибанием ломаной ADE мы уменьшаем число вершин на одну, а именно на D, и увеличиваем при этом площадь многоугольника, так как четырехугольник $ADEF$ заменяется на бо́льший треугольник. При этом, согласно лемме 2 § 3, угол при вершине E может только увеличиться.

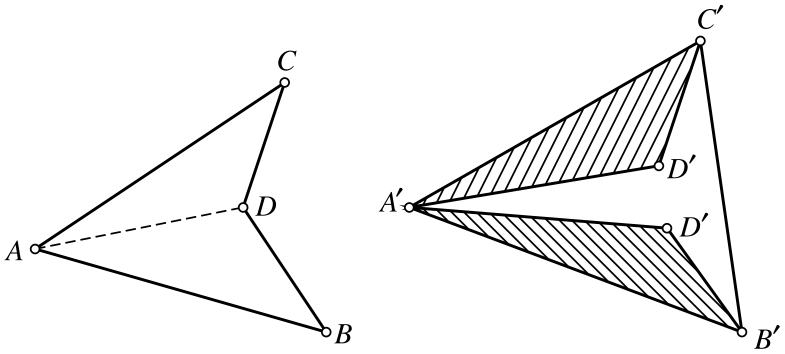


Рис. 17

Следовательно, ломаная $\widetilde{AB}$ опять будет вогнута в направлении угла C, и мы получим многоугольник с теми же свойствами, но с меньшим числом вершин. Это доказывает лемму.

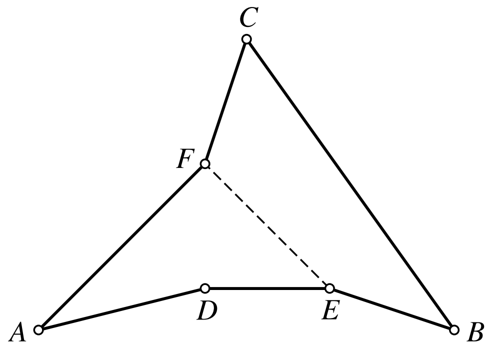


Рис. 18

3°. Доказательство теоремы 1. Пусть T — поверхностный треугольник в R_K, натянутый из угла A на треугольник ABC. Пусть T^K — соответствующий ему треугольник на K-плоскости. Возьмем на BC последовательно точки $D_0 = B, D_1, \ldots, D_n, D_{n+1} = C$ и разрежем треугольник T на «узкие» треугольники $T_i = AD_iD_{i+1}$, проведя кратчайшие AD_i, $i = 1, \ldots, n$. Каждому «узкому» треугольнику T_i поставим в соответствие соответствующий треугольник T_i^K на K-плоскости. Треугольники T_i^K составляют многогранник Q, ограниченный отрезками $A'B'$, $A'C'$ и ломаной $B'D_1' \ldots D_n'C'$.

Ломаная $B'D_1' \ldots D_n'C'$ вогнута внутрь многоугольника Q. Это следует из того, что сумма двух дополнительных углов в треугольниках T_{i-1} и T_i с общей вершиной на стороне BC не меньше π, а при переходе к треугольникам T_{i-1}^K и T_i^K они могут только увеличиться. Так что углы многоугольника Q в вершинах D_i' не меньше π, т. е. ломаная $\widetilde{B'C'}$ вогнута внутрь Q.

Следовательно, к многоугольнику Q применима только что доказанная лемма, и

$$S(Q) = S(\bigcup T_i) \leqslant S(T^K), \tag{1}$$

причем равенство достигается только тогда, когда многоугольник Q изометричен T^K.

Теперь возьмем на кратчайших AD_i точки E_{ij}, $j = 1, \ldots, m$, с одним и тем же числом m для всех i. Эти точки на сторонах каждого «узкого» треугольника можно соединить кратчайшими (рис. 19). В результате мы получаем «маленькие» треугольники T_{ik}, начиная с треугольника при вершине A и кончая треугольником, прилегающим к стороне BC.

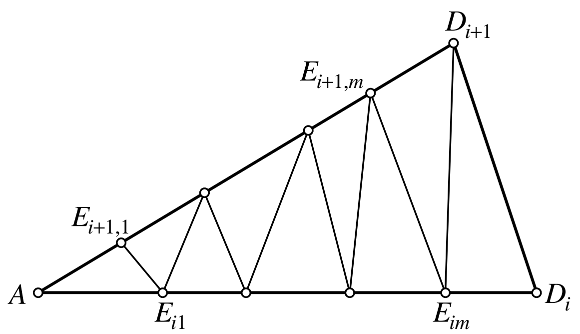


Рис. 19

Поставив в соответствие каждому «маленькому» треугольнику T_{ik} соответствующий треугольник на K-плоскости, строим абстрактный многогранник P, вписанный в поверхность T, как это описано выше в п. 1.

Многогранник P составляется из «узких многоугольников» P_i, соответствующих узким треугольникам. При этом кратчайшим AD_{i-1} и AD_i соответствуют ломаные $\widetilde{AD}_{i-1}$ и $\widetilde{AD}_i$, которые вместе с отрезком $D_{i-1}D_i$ ограничивают многоугольник P_i. «Узкий многоугольник» P_i составляется из маленьких треугольников, соответствующих маленьким треугольникам T_{ik}. Согласно теореме о дополнительных углах (теорема 2 § 2), сумма углов треугольников T_{ik}, сходящихся в общей вершине E_{ij}, не меньше π. При переходе к соответствующим треугольникам на K-плоскости углы не уменьшаются, и следовательно, их сумма тоже не меньше π. Это означает, что ломаные $\widetilde{AD}_{i-1}$ и $\widetilde{AD}_i$ вогнуты внутрь многоугольника P_i. Согласно доказанной лемме, площадь узкого многоугольника не превосходит площади соответствующего треугольника.

Этот треугольник является одновременно не чем иным, как треугольником T_i^K, соответствующим «узкому» треугольнику T_i. Тем самым

$$S(P_i) \leqslant S(T_i^K), \tag{2}$$

и равенство здесь имеет место только тогда, когда многоугольник P_i является треугольником T_i^K.

Суммированием неравенств (2) мы получаем для площади всего абстрактного вписанного многогранника P неравенство $S(P) \leqslant S(\cup T_i^K)$, и на основании (1)

$$S(P) \leqslant S(T^K). \tag{3}$$

Поскольку, согласно определению, площадь треугольника T равна нижнему пределу площадей соответствующих вписанных многогранников, то из (3) следует, что

$$S(T) \leqslant S(T^K). \tag{4}$$

Тем самым первая часть утверждения доказана.

Остается показать, что в (4) равенство имеет место лишь при изометрии T и T^K. Для этого мы покажем, что равенство в (4) может иметь место только тогда, когда оно имеет место в (2) и (3).

Для доказательства выберем, например, на стороне AD_i узкого треугольника T_i еще одну точку F между точками E_{ij} и E_{ij+1}. Тогда при построении узкого многоугольника P_i вместо треугольника, соответствующего маленькому треугольнику со стороной $E_{ij}E_{ij+1}$, появляется четырехугольник со сторонами, равными $E_{ij}F$ и FE_{ij+1}, и с углом $\geqslant \pi$ при вершине F. При разгибании этого четырехугольника в треугольник площадь увеличится.

Из этого замечания следует, что добавление новых вершин на кратчайшей AD_i и — на том же основании — добавление новых вершин на стороне BC может только уменьшить площадь соответствующего вписанного многогранника P. Значит нижний предел площадей этих многогранников P не превосходит площади самих этих многогранников, т. е. $S(T) \leqslant S(P)$. Соединяя это с неравенством (3), получаем $S(T) \leqslant S(P) \leqslant S(T^K)$. Следовательно, из $S(T) = S(T^K)$ вытекает $S(P) = S(T^K)$. Это значит, что при $S(T) = S(T^K)$ обязательно имеет место равенство также в (3). Но тогда это выполнено и для (2) и (1). Но в (1), как уже отмечалось выше, равенство имеет место только тогда, когда каждый узкий многоугольник в действительности является треугольником T_i^K, а многоугольник $Q = \bigcup T_i^K$ является треугольником T^K.

Как видно из проведенных рассуждений, это должно выполняться для произвольно выбранной точки D_i на стороне BC и для произвольно выбранной точки E_{ij} на кратчайшей AD_i.

Теперь возьмем две произвольные точки X_1 и X_2 в треугольнике T, лежащие на кратчайших AD_1 и AD_2 соответственно, $D_1, D_2 \in BC$. Эти кратчайшие разбивают треугольник T на три «узких» треугольника, которые в свою очередь делятся на маленькие треугольники так, что X_1 и X_2 являются вершинами (рис. 20). Узкие многоугольники Q_i должны здесь стать треугольниками T_i^K, а составленный из них многоугольник Q должен стать треугольником T^K.

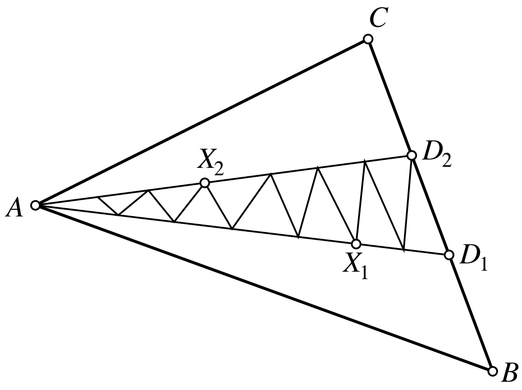


Рис. 20

Это означает следующее: 1) если точки D_1' и D_2' на стороне $B'C'$ треугольника T^K соответствуют точкам D_1 и D_2 (т. е. $B'D_i' = BD_i$, $i = 1, 2$), то $A'D_1' = AD_1, A'D_2' = AD_2$; 2) если точки X_1' и X_2' на сторонах $A'D_1'$ и $A'D_2'$ соответствуют точкам X_1 и X_2 (т. е. $A'X_i' = AX_i$, $i = 1, 2$), то $X_1'X_2' = X_1X_2$. Но поскольку точки X_1 и X_2 взяты произвольно, последнее равенство означает как раз, что треугольники T и T^K изометричны. Ч. т. д.

4°. Легко получить следующее усиление теоремы 1:

Теорема 2. *Пусть L — замкнутая ломаная в R_K, и P — «многоугольник», «натянутый» на L, т. е. поверхность, образованная кратчайшими, выходящими из одной вершины A во все точки ломаной L. Тогда площадь многоугольника P не превосходит площади многоугольника P^K на K-плоскости со сторонами той же длины, вписанного в кривую постоянной кривизны. При этом площади поверхностей P и P^K совпадают только если эти поверхности изометричны.*

Доказательство. Отметим сперва, что теорему можно доказать также для многоугольников P, образованных кратчайшими, которые выходят не из одной вершины ломаной L, а из разных. Например, если ломаная имеет последовательные вершины $ABCD$, то можно из вершины A выпускать кратчайшие во все точки на отрезке BC, а из точки C во все точки отрезка AD.

Разрежем многоугольник P на треугольники диагоналями, т. е. кратчайшими, выходящими из A в другие вершины. Если заменить каждый такой треугольник T_i соответствующим треугольником T_i^K на K-плоскости и приложить последние друг к другу так, как приложены треугольники T_i, то получается многоугольник $Q = \bigcup T_i^K$.

По теореме 1 $S(P) \leqslant S(Q)$. Равенство здесь имеет место только тогда, когда все треугольники T_i изометричны соответствующим треугольникам T_i^K, т. е. когда многоугольник P изометричен Q.

Так как на K-плоскости среди многоугольников с данными сторонами многоугольник, вписанный в кривую постоянной кривизны, имеет наибольшую площадь, то площадь поверхности P не превосходит площади поверхности P^K. Эти площади равны только в случае изометрии P и P^K.

Специальный случай теоремы 2 представляют многоугольники на поверхностях кривизны не большей K, в частности многоугольники на многогранниках, составленных из кусков K-плоскостей и имеющих в каждой вершине отрицательную кривизну, т. е. внутренние углы с полным углом больше 2π.

5°. Теорема 3. *Если взять на замкнутой спрямляемой кривой L в R_K точку O и провести из нее кратчайшие во все другие точки кривой, то мы получим поверхность F, площадь которой не превосходит площади круга C в R_K с периметром, равным длине кривой. Из равенства площадей следует изометрия F и C. В случае $K > 0$ длина кривой здесь не превосходит $2\pi/\sqrt{K}$, так что круг существует*[17].

Доказательство. Здесь доказывается только первая часть сформулированного утверждения, т. е. что площадь поверхности F не превосходит площади круга C. Доказательство изометричности в случае, когда площади равны, мы не приводим, поскольку оно не такое простое, как хотелось бы. Из первой части утверждения автоматически следует, что *на замкнутую спрямляемую кривую в R_K можно натянуть поверхность, площадь которой не превосходит площади круга C в K-плоскости с периметром, равным длине кривой*.

Отметим сперва, что из непрерывной зависимости кратчайшей OX от положения ее конца X на кривой L легко вывести, что поверхность F можно задать с помощью непрерывного образа круга. Мы хотим построить абстрактный многогранник P, который вписан в поверхность F. Для простоты мы строим этот многогранник без использования триангуляции круга, непрерывным образом которого является поверхность F. Вместо этого рассматривается сама поверхность F. Возьмем на кривой L кроме точки O еще точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и на каждой кратчайшей OA_i возьмем точки $B_{i1}, B_{i2}, \ldots, B_{im_i}$. После этого рассмотрим треугольники с вершинами

[17] См. также *Ю. Г. Решетняк.* Нерастягивающие отображения в пространстве кривизны, не большей K // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 4. С. 918–927. — *Прим. В. Н. Берестовского.*

на соседних кратчайших OA_i и OA_{i+1}. Этим треугольникам сопоставляются треугольники со сторонами той же длины на K-плоскости и из них строится развертка или абстрактный вписанный многогранник P.

Многогранник P ограничен замкнутой ломаной, которая не длиннее кривой L. Длина ломаной стремится к длине кривой, когда точки A_i выбираются на L достаточно плотно.

Покажем, что кривизна во всех внутренних вершинах развертки P^K неположительна, т. е. полный угол $\geqslant 2\pi$.

Каждая внутренняя вершина B соответствует некоторой точке B_{ij} на одной из кратчайших OA_i. Сходящиеся в этой вершине B треугольники $T_1^K, \ldots, T_p^K$ соответствуют треугольникам $T_1, \ldots, T_p$, сходящимся в B_{ij}. По теореме 4 § 3 углы в треугольниках T_l^K не меньше углов в треугольниках T_l, т. е. $\alpha_l^K \geqslant \alpha_l$, и, следовательно, мы получаем для полного угла Θ вокруг точки B

$$\Theta(B) = \sum_l \alpha_l^K \geqslant \sum_l \alpha_l. \tag{5}$$

Так как точка B_{ij} лежит внутри кратчайшей OA_i, множество треугольников $T_1, \ldots, T_p$ делится на две группы: у одной вершины лежат на OA_i и соседней кратчайшей OA_{i-1}, у другой вершины лежат на OA_i и соседней кратчайшей OA_{i+1}. Углы в треугольниках каждой из групп, сходящиеся в точке B, по теореме 1 § 2 вместе не меньше угла между выходящими из точки B_{ij} ветвями кратчайшей OA_i, т. е. не меньше π.

Поэтому сумма всех сходящихся в B_{ij} углов не меньше 2π, т. е. $\sum_l \alpha_l \geqslant 2\pi$. Согласно (5), из этого следует, что $\Theta(B) \geqslant 2\pi$.

Так как кривизна в каждой вершине развертки неположительна, то к P применима теорема 2, точнее — следствие из этой теоремы, отмеченное в конце п. 4. Поэтому площадь поверхности P не превосходит площади многоугольника P^K на K-плоскости со сторонами той же длины, т. е. $S(P) \leqslant S(P^K)$.

Но площадь поверхности P^K меньше площади круга C' с тем же периметром, а потому меньше, чем площадь круга C с периметром, равным длине исходной кривой L (так как длина кривой L не меньше периметра многоугольника P). Поэтому справедлива оценка $S(P) \leqslant S(C)$. Однако по определению площади поверхности $S(F) \leqslant \varliminf S(P)$, а значит $S(F) \leqslant S(C)$. Теорема доказана.

§ 6. *Дополнение к предыдущим результатам*

1°. Угол в сильном смысле. В этом параграфе мы представляем, большей частью без доказательства, некоторые результаты об областях R_K, которые во многом дополняют результаты § 3–5. Важную роль в целом ряде заключений играет следующая теорема, которая усиливает теорему 3 § 3 о существовании угла между кратчайшими.

Теорема 1. *В R_K для любых двух выходящих из одной точки кратчайших существует «угол в сильном смысле», т. е. существует не только предел $\alpha = \lim\limits_{x,y\to 0} \gamma(x,y)$, но также*

$$\alpha = \lim_{x\to 0} \gamma(x,y) = \lim_{y\to 0} \gamma(x,y). \tag{1}$$

Доказательство. Утверждение теоремы означает, что существует предел угла $\gamma(x,y)$ при единственном условии, что x или y стремится к нулю в то время, как другая переменная изменяется вполне произвольно. Понятие угла в сильном смысле было ранее введено в [1] и играло там важную роль. Отметим, что понятие угла в [1] совпадает с определением (1).

Докажем, например, что предел $\lim\limits_{x\to 0} \gamma(x,y)$ существует и равен α. Согласно теореме 3 § 2, для верхнего угла α верно равенство

$$\alpha = \varlimsup_{x\to 0} \gamma(x,y). \tag{2}$$

Однако в нашем случае существует, как доказано в теореме 3 § 3, даже угол $\alpha = \lim\limits_{x,y\to 0} \gamma(x,y)$.

С другой стороны, по теореме 4 § 3 для любых x и y справедливо неравенство $\alpha \leqslant \gamma(x,y)$, а значит

$$\alpha = \varliminf_{x\to 0} \gamma(x,y). \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что предел $\lim\limits_{x\to 0} \gamma(x,y)$ существует и равен α.

Теорема 2. *Пусть в R_K даны точка A и кратчайшая OB. Пусть X точка на OB и $x = OX$, $z(x) = AX$, а ξ есть угол между XO и XA. Тогда существует левая производная функции $z(x)$ по x и она равна*

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{\text{лев}} = \cos\xi.$$

Эта теорема выводится из теоремы 1 вполне аналогично тому, как в § 2 выводится более слабое утверждение

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{\text{н. лев}} \geqslant \cos\xi.$$

Теорема 1 допускает обобщение на случай угла между кратчайшей и кривой. В соответствии с этим теорему 2 можно распространить на случай, когда вместо кратчайшей OB дана кривая, удовлетворяющая соответствующим условиям. Эти теоремы допускают различные применения, которые прежде всего касаются расстояния от точки до некоторой кривой.

2°. Пространства кривизны $\geqslant K'$. Теорема 1 еще потому важна, что в случае существования углов в сильном смысле возможна оценка для углов треугольника, двойственная к оценке из теоремы 4 § 3. А именно, справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть ABC — треугольник в некотором метрическом пространстве такой, что две произвольные точки на его сторонах можно соединить единственной кратчайшей, причем между этой кратчайшей и соответствующими отрезками сторон существуют углы в сильном смысле. Пусть далее K' произвольное число и $\mu_{K'}$ есть нижняя грань K'-избытков треугольников AXY с вершинами X и Y на AB и AC соответственно.*

Тогда для угла α при вершине A треугольника ABC и соответствующим углом $\alpha_{K'}$ треугольника со сторонами той же длины на K'-плоскости выполнено неравенство $\alpha - \alpha_{K'} \geqslant \mu_{K'}$.

Доказательство этой теоремы похоже на доказательство соответствующей теоремы из § 3. Она доказана в гл. VII книги [1] для случая $\mu = 0$ и $K' = 0$ в двумерном пространстве. Те же рассуждения можно, однако, в более общей форме использовать при доказательстве теоремы 3.

Эта теорема может служить исходным пунктом при изучении пространств кривизны $\geqslant K'$.

Так как в R_K требования теоремы 3 выполнены, то ее можно использовать для R_K. В частности, можно изучать свойства областей R_K, кривизна которых $\geqslant K'$[18]. Это такие области R_K, где K'-избыток произвольного треугольника неотрицателен. Поэтому $\mu_{K'} \geqslant 0$, и из теоремы 3 следует:

Теорема 4. *Если в области R_K кривизна $\geqslant K'$, $K' \leqslant K$, то для угла α справедлива оценка $\alpha_{K'} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_K$, где $\alpha_{K'}$ — угол соответствующего треугольника на K'-плоскости, а α_K — угол треугольника на K-плоскости.*

Кроме того, справедливо следующее утверждение:

Теорема 5. *Если для области R_K кривизна $\geqslant K'$, $K' \leqslant K$, то для любых двух выходящих из одной точки кратчайших угол $\gamma^{K'}(x, y)$ является невозрастающей функцией от x и y.*

Доказательство этой теоремы похоже на доказательство теоремы 1 § 3 и приведено в гл. XI в [1]. Есть и другие теоремы, смысл которых состоит в том, что свойства пространства кривизны $\geqslant K'$ и $\leqslant K$ составляют, так сказать, нечто среднее между свойствами пространств с постоянной кривизной K' и K. В [1] такие результаты доказаны для выпуклых поверхностей, но они могут быть соответствующим образом обобщены.

3°. Линейчатые поверхности в R_K. Под линейчатой поверхностью мы понимаем поверхность, которая образована кратчайшими. При этом мы предполагаем, что каждая точка поверхности имеет окрестность, в кото-

[18] См. результаты И. Г. Николаева, упомянутые в примечании [11] на с. 198. — *Прим. В. Н. Берестовского.*

рой любые две точки можно соединить кратчайшей линией на поверхности. Можно доказать, что поверхность в R_K, образованная кратчайшими, концы которых лежат на двух спрямляемых кривых, обладает упомянутым свойством. Если здесь одна из кратчайших вырождается в точку, то поверхность является конусом.

Важнейший результат о линейчатых поверхностях гласит:

Теорема 6. *Линейчатая поверхность в R_K является с точки зрения своей внутренней метрики двумерным пространством с кривизной $\leqslant K$.*

Это утверждение является непосредственным обобщением известного факта, что линейчатые поверхности в евклидовом пространстве имеют неположительную кривизну.

Доказательство теоремы 6 основано на исследовании конечных последовательностей кратчайших и применении теоремы 2.

Отметим здесь, что определенный в п. 4 § 4 поверхностный треугольник является линейчатой поверхностью и, естественно, сам является треугольником на ней. Поэтому в силу теоремы 6 теорема 5 в § 4 об углах этого треугольника является в действительности простым повторением теоремы 3 § 3, которая относится к треугольникам в произвольной области R_K.

Из этой же теоремы 6 и следующей теоремы 7 непосредственно вытекает теорема 2 в § 5 о площади поверхности, натянутой на контур.

Теорема 7. *Площадь односвязной области G в двумерном многообразии кривизны $\leqslant K$, ограниченной замкнутой кривой длины l, не превосходит площади круга C на K-плоскости с тем же периметром l. При этом площадь области G равна площади круга C только тогда, когда G и C изометричны. В случае $K > 0$ здесь предполагается, что $l \leqslant 2\pi/\sqrt{K}$.*

Доказательство первой части этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 2 § 5. При несколько более сильных предположениях этот результат доказан мной в [5].

Ввиду теоремы 6, из теоремы 7 немедленно следует не только теорема 2 § 5, но и следующее ее обобщение:

Произвольная линейчатая поверхность F в R_K, натянутая на контур длины l, имеет площадь, не превосходящую площади соответствующего круга C на K-плоскости. При этом площадь поверхности F равна площади круга C только тогда, когда F и C изометричны.

4°. Конус в R_K. Пусть в R_K даны точка O и спрямляемая кривая L. Кратчайшие OX, где X лежит на L, образуют конус с вершиной O и направляющей L.

Мы говорим, что конус C развернут на конус (точнее говоря, на сектор) C^K на K-плоскости, если имеется отображение C на C^K со следующими свойствами:

1) вершине O конуса C сопоставлена вершина O' конуса C^K;

2) каждой образующей OX конуса C сопоставлена образующая $O'X'$

конуса C^K, причем $O'X' = OX$. Отображение образующих OX на $O'X'$ происходит, таким образом, с сохранением длин соответствующих частей;

3) направляющая линия конуса C отображается на направляющую линию конуса C^K с сохранением длин;

4) при движении X вдоль L кратчайшая $O'X'$ монотонно обращается вокруг O'.

Очевидно, такое отображение всегда возможно и определено однозначно с точностью до поворота конуса вокруг O'.

Если направляющая линия L является кратчайшей, то конус C представляет собой поверхностный треугольник, натянутый из точки O на эту кратчайшую. Получаемая посредством развертывания фигура обладает следующими свойствами:

Теорема 8. *Пусть $T = OAB$ поверхностный треугольник в R_K, образованный кратчайшими, идущими из точки O во все точки стороны AB. При его развертывании на K-плоскость получается фигура $T' = O'A'B'$, ограниченная отрезками $O'A' = OA$, $O'B' = OB$ и дугой $\widetilde{A'B'}$, вогнутой внутрь T'. При этом дуга $\widetilde{A'B'}$ является отрезком, а T' соответственно треугольником T^K только тогда, когда поверхностный треугольник T изометричен T^K. Если это не так, то*

1) угол α' между отрезками $O'A'$ и $O'B'$ меньше соответствующего угла α_K треугольника T^K;

2) площадь S' поверхности T' меньше площади треугольника T^K.

В § 4 и 5 были доказаны теоремы об угле и площади поверхностных треугольников, а также теорема 2 § 5 о площади поверхности конуса, натянутого на направляющий контур в случае, когда его вершина сама лежала на этой кривой.

Эти теоремы являются следствиями общей теоремы, которая относится к развертке C^K произвольного конуса C на K-плоскость.

Теорема 9. *Между конусом C в R_K и конусом C^K, получаемого развертыванием конуса C на K-плоскость, имеются следующие соотношения.*

1) Если α и α_K — угол при вершине C и C^K соответственно, то $\alpha \leqslant \alpha_K$ и $\alpha = \alpha_K$ только тогда, когда конус C изометричен C^K.

2) Если M — некоторая кривая на C, а M^K — соответствующая кривая на C^K, то для их длин имеет место неравенство $\rho(M) \leqslant \rho(M^K)$. Если при этом спрямляемая кривая M пробегает все образующие конуса (т. е. имеет с каждой образующей общую точку, отличную от вершины), то $\rho(M) = \rho(M^K)$ только тогда, когда конус C изометричен C^K.

3) Если S и S^K — площади конусов C и C^K соответственно, то $S \leqslant S^K$ и $S = S^K$ только тогда, когда конус C изометричен C^K.

Утверждение 1) соответствует теореме 4 § 3 об угле треугольника. Из нее, вместе с теоремой 8, следует, в частности, теорема 6 § 4 об угле поверхностного треугольника.

Утверждение 2) соответствует теореме 2 § 3.

Из утверждения 3) очевидным образом следует теорема 2 § 5 о площади натянутой на контур поверхности. Из нее и теоремы 8 следует, в частности, теорема 1 § 5 о площади поверхностного треугольника.

5°. Отклонение кривой от кратчайшей. Результаты § 3 о кратчайших в R_K, а именно теоремы 5 и 6 § 3 о единственности кратчайшей в R_K и непрерывной зависимости кратчайшей от концов, существенно дополняются и обобщаются следующим утверждением:

Теорема 10. *Если длина кривой, соединяющей точки A и B в R_K, мало отличается от расстояния между этими точками, то сама кривая мало отклоняется от кратчайшей AB.*

Из этого утверждения очевидно следует единственность кратчайшей, а также близость кратчайших с близкими концами. Действительно, если точки A_n и B_n близки к A и B соответственно, то длина ломаной $AA_n \bigcup A_nB_n \bigcup B_nB$ мало отличается от длины AB, и потому эта ломаная мало отклоняется от AB. Но тогда и A_nB_n мало отклоняется от AB.

Доказательство. Итак, пусть кривая L соединяет точки A и B. Рассмотрим все кратчайшие, идущие из точки A в точки кривой L. Получившийся конус развернем на K-плоскость. Тогда кривая L перейдет с сохранением длины и расстояния между ее концами ($AB = A'B'$) в кривую L^K на K-плоскости.

Но из утверждения 2) теоремы 9 следует, что отклонение кривой L^K от отрезка $A'B'$ не меньше отклонения кривой L от AB. Рассмотрение эллипса той же длины, как кривая L^K, с фокусами в точках A' и B', и с большой осью, равной сумме фокальных радиусов, сразу показывает, что максимум расстояния достигается тогда, когда L^K состоит из двух отрезков равной длины. После этого ясно, как завершить доказательство.

Точнее теорему 10 можно сформулировать следующим образом:

Пусть точки A и B в R_K, лежащие на расстоянии r друг от друга, соединены кривой L длины l. Тогда отклонение кривой L от кратчайшей, (т. е. максимум расстояния от точек кривой L до AB) не превосходит высоты равнобедренного треугольника на K-плоскости, имеющего основание длины r и сумму l боковых сторон.

На K-плоскости боковые стороны равнобедренного треугольника образуют кривую, которая при данной длине максимально отклоняется от основания. При $K \leqslant 0$, т. е. в пространстве неположительной кривизны, отклонение h кривой L от кратчайшей AB удовлетворяет неравенству

$$h^2 \leqslant \frac{l^2 - r^2}{4}.$$

Естественно, если $K > 0$, то предполагается, что упомянутый треугольник существует, так что $l + r < \dfrac{2\pi}{\sqrt{K}}$.

Данное выше доказательство основано на теореме 9, доказательство которой мы здесь не привели и которое, кстати, достаточно сложно. Между тем, в случае $K \leqslant 0$ или, по крайней мере, в предположении, что при $K > 0$ расстояние между точками A и B удовлетворяет неравенству $r < \dfrac{\pi}{2\sqrt{K}}$, теорема 10 может быть доказана значительно проще. При этих предположениях утверждение можно доказать следующим образом.

Выберем на кривой L, соединяющей A и B, точку C, наиболее удаленную от кратчайшей AB. Если D — ближайшая к C точка AB, то длина кратчайшей CD в точности равна отклонению кривой L от кратчайшей AB, т. е. $CD = h$. Проведем кратчайшие AC и CB. Если l — длина кривой L, то $AC + BC \leqslant l$. На K-плоскости построим треугольник $A'B'C'$, соответствующий треугольнику ABC. Отклонение его сторон $A'C'$ и $B'C'$ от основания $A'B'$ в точности равно отклонению вершины C' от $A'B'$. При $K \leqslant 0$ это очевидно, но при $K > 0$, вообще говоря, может не выполняться, однако справедливо при дополнительном условии, что $A'B' < \dfrac{\pi}{2\sqrt{K}}$.

По теореме 2 § 3 расстояния между точками на сторонах треугольника $A'B'C'$ не меньше расстояний между соответствующими точками на сторонах ABC. Тем самым отклонение ломаной $A'C' \bigcup C'B'$ от основания $A'B'$ не меньше отклонения ломаной $AC \bigcup CB$ от кратчайшей AB. Следовательно, h не больше расстояния от вершины C' до основания $A'B'$. Однако для данного основания и данной суммы длин сторон $A'C' + B'C'$ максимальное отклонение вершины С$'$ от основания $A'B'$ достигается для равнобедренного треугольника. Поскольку здесь, кроме того, $A'C' + B'C' \leqslant l$, то h не превосходит высоты равнобедренного треугольника с основанием $A'B'$ и суммой боковых сторон l.

Из полученной оценки отклонения кривой от кратчайшей сразу следует оценка расстояния d (по Фреше) между двумя кривыми, соединяющими две данные точки A и B. А именно, расстояние между ними не больше суммы их отклонений от кратчайшей AB. Поэтому расстояние между кривыми оценивается через расстояние $r = AB$ и длины l_1 и l_2 этих кривых и, естественно, зависит от K. В частности, в случае $K = 0$,

$$d^2 + r^2 \leqslant \frac{l_1^2 + l_2^2}{2}.$$

В случае двумерных многообразий эту оценку ранее доказал А. Бьёрлинг в [8] совсем другим способом. Наше доказательство не только обобщает результат Бьёрлинга, но раскрывает, как нам кажется, его геометрическое содержание.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. (Английский перевод [19]: *Alexandrov A. D.* Selected Works. Part II: Intrinsic Geometry of Convex Surfaces. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006.)
2. *Alexandrow A. D.* Die innere Geometrie der konvexen Flächen. Berlin: Akademie-Verlag, 1955. (Перевод [20] с русского оригинала: *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.; Л.: ОГИЗ, 1948.)
3. *Busemann H.* Spaces with non-positive curvature // Acta Math. 1948. Vol. 80. P. 259–311.
4. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
5. *Александров А. Д.* Внутренняя метрика выпуклых поверхностей в пространстве постоянной кривизны // Докл. АН СССР. 1944. Т. 45, № 1. С. 3–6.
6. *Александров А. Д.* Изопериметрические неравенства на кривых поверхностях // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47, № 4. С. 239–242.
7. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. М.: ИЛ, 1948.
8. *Beurling A.* Sur la géométrie métrique des surfaces à curbure totale $\leqslant 0$ // Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz. 1952. P. 7–11.

[19] По личному указанию А. Д. Александрова английский перевод выполнен с русского оригинала 1948 г. — *Прим. ред.*

[20] К немецкому переводу А. Д. Александров добавил Appendix (с. 487–520), представляющий собой обзор результатов, полученных после 1947 г., т. е. после выхода русского издания. — *Прим. ред.*

Наука и этика

Доклад на совещании по истории и методологии науки. Звенигород, 1983 г. [1)]

Начну с несколько субъективного замечания. Я говорю о себе, что я человек 20-х гг., т. е. входил в сознательный возраст в те годы. В 1929 г. поступил в университет. Как я понимал, наша общая нравственная задача состояла в построении лучшего общества, при этом до́лжно руководствоваться научной теорией. Тем самым органическая неразрывная связь нравственности и науки представлялась аксиомой; она заключалась в самой основе складывающегося мировоззрения. Так это представление и сохранялось как нечто в своей основе само собой разумеющееся, хотя и подлежащее более развернутому пониманию. Поэтому, когда на вопрос «Литературной газеты» о связи науки и нравственности последовали ответы, отрицавшие такую связь, это представилось мне прямым недомыслием. Последующие размышления и дискуссии привели меня к тому, что основным в вопросе о связях науки и этики можно считать отношение к истине. О нем я и буду говорить главным образом.

Но прежде хотелось бы оговорить один важный пункт. Утверждение о необходимой связи этики с наукой часто воспринимают как утверждение, будто этику, мораль можно вывести из науки. Это, конечно, чепуха. Этику и мораль невозможно вывести из науки по чисто логической причине, замеченной еще Пуанкаре, если не кем-нибудь еще раньше.

Наука выражается в изъявительном наклонении: она говорит о бытии. Мораль же выражается в повелительном наклонении: она говорит о должном. Это может быть и неявным, но если в суждении не подразумевается повеление «делай так», то в нем нет этического содержания. Из утверждений изъявительного наклонения повелительное наклонение не следует. Констатация «вы больны» не включает сама собою повеление «лечитесь»; она может подразумевать и совсем другое.

[1)] Частично опубликован под названием «Нет ничего прекраснее истины» в журнале «Знание — сила» (1984, № 7). (Здесь печатается по книге: *А. Д. Александров.* Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. — *Прим. ред.*)

Связь морали и науки часто понимают неверно, потому что люди склонны воспринимать и слышать не то, что есть и было сказано, а то, что они хотели бы услышать или к чему привыкли. Но как раз один из необходимых этических принципов заключается в объективности. Хотя мораль нельзя вывести из науки, это еще не значит, что она не может находить в знании обоснование, подкрепление или ограничение. Прежде всего ее требования не должны противоречить реальным возможностям, иначе желание добра может обернуться злом. Но, как бы то ни было, повеление должно иметь место, а из констатации оно не следует. Словом, мораль из науки не вытекает.

Скорее наоборот, можно сказать, что наука, вернее, научный подход следует из требований морали. Не наука лежит в основании этики, а этика — в основании науки. Конечно, этика — первая область духовной культуры и возникла вместе с человеческим обществом, а наука гораздо позже, причем не из этики, но высказанный афоризм имеет реальный смысл. И мы как раз постараемся убедиться в этом.

В некотором смысле связь этики и научного подхода ярко выступает в образе Будды. Процветающий принц, выйдя в мир, увидел человеческие страдания. Они потрясли его, и он задумался о их причинах и возможных путях избавления. Долгие поиски решения увенчались, наконец, успехом, и он стал Буддой — просветленным. Это и есть путь, о котором идет речь. Моральное потрясение и вызванная им задача повлекли размышления о причинах и путях избавления, упорное стремление найти ответ, а упорство в размышлении, в поисках причин и путей решения проблем — не есть ли именно черты научного подхода в самой его сущности?

Более чем через две тысячи лет другой мыслитель — Карл Маркс совсем в других исторических условиях задумался о человеческих страданиях, но не вообще, а о том, что можно назвать социальным страданием. К. Маркс исследовал и решил проблему, руководствуясь научным методом. Подлинное мировоззрение Маркса и есть в своей сущности органическое соединение последовательной научности с активным гуманизмом. К. Маркс был ученый, но его научные исследования были побуждены если не полностью, то в значительной степени моральной проблемой.

Моральные учения, в особенности христианство, выдвинули как всеобщий принцип любовь, служение людям. Однако во многих случаях этого недостаточно, ибо нужно понимать, что нужно людям, что нужно данному человеку. Любящая мать может повредить своим детям, искренне думая, что делает для них лучше (самая, можно сказать, обычная ситуация). Точно так же человек из лучших побуждений может давать медицинские советы без необходимого понимания или, скажем, накормив голодающего, довести его до смерти. Тем более преобразователи общества и другие «слуги народа» могут служить людям совсем не тем, что людям нужно. В больших и малых проблемах верно заключение известной басни И. А. Крылова «Пустынник и медведь»: «услужливый дурак опаснее врага».

Словом, одной любви и служения недостаточно, в серьезных случаях далеко не достаточно. Нужно еще соответствующее знание и понимание. Нужно стремиться понять другого человека, понять, что ему нужно, понять реальность как она есть, независимо от наших желаний, без этого даже любовь может оборачиваться злом.

Точно так же категорический императив И. Канта — ни один человек не должен быть для другого только средством, но и целью — означает: нужно учитывать то, что человеку нужно, а это требует понимания, преодоления субъективности.

Всякий сколько-нибудь серьезный подход к морали неизбежно приводит к выводу: в нее должно быть включено как важное требование стремление узнать и понять другого человека, узнать, что ему нужно, объективно выяснить внешние обстоятельства, понять причины происходящего, понять, что и как можно сделать. Вместе с тем это есть основное требование или условие научного подхода: стремление узнать и понять, соединенное с объективностью.

Люди постоянно судят о происходящем, о других людях, о их поступках, и часто выносят свои суждения, свои приговоры. Но всякое такое суждение может быть справедливым, нравственным, только если оно получает достаточное объективное основание. Поэтому и здесь необходимо стремление разобраться, стремление сохранить объективность при всех возможных эмоциях и взглядах, обусловленных моральными установками, личными привязанностями, привычками, предрассудками, давлением мнения других людей — все это должно, насколько хватает сил, уступить место объективности.

Требование объективности можно определить примерно следующим образом.

Рассматривать предмет, явление, отстраняя по возможности все личное, преодолевая свои предрассудки; стараться вникнуть, исследовать и понять, «как оно есть на самом деле», а не так, как кажется с первого взгляда или хочется, чтобы было, считаться с фактами и логикой, а не со своими предубеждениями и мнениями авторитетов.Чужие мнения, как и свое собственное, должны быть восприняты с той же объективной критичностью.

Это требование объективности составляет вместе с тем основу научной позиции, без него научная деятельность, как направленная на достижение объективного знания, невозможна. И. В. Гёте писал: «Всякий исследователь должен смотреть на себя как на вызванного в суд присяжного заседателя. Его долг — со вниманием следить, насколько полно доложено дело и как доклад подкреплен доказательствами. После этого он приводит к краткому итогу свое убеждение и подает голос, независимо от того, совпадает ли оно с мнением докладчика или нет» [1, с. 411]. Итак, позиция исследователя — научная позиция — может рассматриваться как распространение моральной позиции на все явления, попадающие в сферу исследования.

Общее во всем, о чем было сказано, представляет требование объективности, требование стремиться найти истину и безусловно считаться с ней, ибо истина и есть выражение того, что имеет место независимо от человека и с чем человек должен поэтому считаться как с данным. Стремление найти истину и безусловно считаться с ней необходимым образом входит в мораль, без этого мораль окажется бессильной, когда человек не может делать, что считает должным, и противоречащей сама себе, когда результат действий человека не тот, какой он бы считал должным. Поэтому нравственность можно кратко определить как органическое соединение трех компонентов: человечности, ответственности и преданности истине.

Но мы не можем здесь рассматривать все эти три момента, сосредоточимся на последнем. Наши выводы привели к тому, что первый элемент сплошь и рядом неосуществим без этого третьего, так же как без него ответственность лишается настоящего содержания, сводясь, может быть, к одним терзаниям совести по поводу ошибок и невольных злодеяний.

Нравственное значение стремления к истине и преданности ей этим еще далеко не исчерпывается. Приверженность к истине как к тому, что не зависит от человека, дает основание к серьезному общению, к согласованию мнений и позиций. Б. Расселл писал: «В сумбуре сталкивающихся фанатизмов одной из немногих объединяющих сил является научная приверженность к истине, под которой я понимаю привычку основывать свои убеждения на наблюдениях и выводах, настолько неличных и настолько освобожденных от местных предрассудков и предубеждений темперамента, насколько это возможно для человеческого существа» [2, p. 836].

Точно так же приверженность к истине не дает человеку слишком возомнить о себе и о своих возможностях, ибо понимание истины ставит перед ним то, что не зависит от него, что он преступить не может. «Понятие истины как чего-то, основанного на фактах, в значительной степени лежащих вне человеческого контроля, было одним из способов, каким философия до сих пор включала необходимый элемент скромности. Когда это ограничение гордыни снято, совершается еще один шаг по пути к определенному виду безумия — к упоению властью» [2, p. 828]. Достоевский устами своего героя сказал, что, если бога нет, все становится дозволенным. Он ошибался: если бога нет, то все же остается истина и не все становится возможным. Поиск и принятие истины налагают на человека ограничение скромности, не дающее ему слишком выдвинуть свое Я.

Вместе с тем знание истины открывает человеку большие возможности, расширяет его свободу, обогащает его духовно. И в этом смысле стремление найти истину, распространить и утвердить ее среди людей оказывается существенным элементом моральной позиции по отношению к людям, не говоря о тех материальных результатах, которые дает знание истины.

Знание истины обогащает человека, позволяет ему лучше ориентироваться в действительности. Поэтому ложь не просто противна истине. Тот, кто лжет, как бы обкрадывает человека, мешает ему понимать происходящее и находить верные пути, стесняет его свободу, налагает на него оковы искаженного взгляда на действительность. Искажение и сокрытие истины всегда служило угнетению. Неуважение к истине, безразличие к ней выражает неуважение, безразличие к людям; надо совершенно презирать людей, чтобы с апломбом вещать им с высокой трибуны, не заботясь об истине.

С древнейших времен боролись и борются истина и ложь, Правда и Кривда, как в древней египетской сказке: «Пусть приведут Правду и ослепят его на оба глаза, — сказал Кривда, — и пусть сидит привратником у ворот моего дома». Но в конце концов Правда торжествует [3, с. 68]. Тот же мотив есть и в русских сказках, и, так или иначе, повсеместно.

Само понятие «правда» охватывало и объективную, и моральную правду. Как мы бы сказали теперь — объективную истину и моральную правоту. В народном сознании эти понятия соединились теснейшим образом, и если теперь мы понимаем их глубокое различие, то мы также должны понимать их глубокую связь. Без истины не может быть моральной правоты, и истина не может быть открыта и утверждена без того же условия объективности, какое заключено в морали. Между прочим, в английском языке правда и истина обозначаются одним словом «truth».

Истина выражает то, что имеет место, хотим мы того или не хотим, на что человек не может повлиять (он, конечно, может создать какую-нибудь новую ситуацию, но она станет фактом, и в этом смысле человек уже не может на нее повлиять). Истину можно искать, открыть (но ни придумать, ни сделать); искать с настойчивостью, двигаясь вперед в поисках все более прочных оснований, все более точного знания, соединяя уверенность с сомнением и духовную свободу с критическим контролем разума. Истина прекрасна сама по себе как таковая, и, хотя соображения красоты могут помочь в ее розысках, она не нуждается ни в каких эстетических критериях.

Как говорил Будда: «Нет наслаждения большего, чем созерцание истины», «Нет ничего прекраснее истины».

Наука в существе своем состоит в систематическом разыскании и утверждении истины. Поэтому для науки, для научного мировоззрения, для ученого вопрос об истине является основным. Именно здесь — через истину — осуществляется органическая внутренняя связь науки и этики. Наука не дает оценок, она констатирует. Между тем приходится встречаться с такими, например, заявлениями, будто «расовая теория возникла в науке». Однако это заблуждение, если не нарочитая ложь против науки, основанная на смешении науки и морали. Расизм древнее науки; он выражался, например, в представлениях о превосходстве своего племени, своего рода. Наука в ее подлинном виде констатирует различия, но не оценивает, что высшее, что низшее, и уж тем более не направляет эмоций презрения, неприязни, ненависти. К. Маркс писал: «... человека, стремящегося *приспособить* науку к такой точке зрения, которая почерпнута не из самой науки (как бы последняя ни ошибалась), а *извне*, к такой точке зрения, которая продиктована *чуждыми* науке, *внешними* для нее интересами, — такого человека я называю „*низким*" » [4, с. 125]. Истину нужно искать и принимать, отстраняя все посторонние соображения, не исключая даже соображения добра. Ради них можно отказаться от поисков истины, скажем, в исследовании смертоносных ядов. Но и в самый поиск истины ничто постороннее нельзя вносить — это может исказить ее, что, по выражению Маркса, было бы «низким».

Нередко рассуждают о том, будто «наука докажет нам», что это вот хорошо, а это вот плохо (так писали о науке, например, Л. Н. Толстой и Ф. М. Достоевский). Но наука не дает оценок.

Та же строгая объективность в искании истины необходима и в моральных проблемах, потому что иначе можно установить не то, что есть или было на самом деле; истина может предстать извращенной внесенными субъективными соображениями, посторонними намерениями, и моральное решение не получит основания или вовсе не реализуется.

Эту научную позицию, совпадающую с моральной в ее отношении к истине, можно коротко определить как интеллектуальную добросовестность в соединении с бескорыстной заинтересованностью.

Научное исследование направляется заинтересованностью исследователя, который не стремится заранее извлечь из объекта какую-либо пользу, а хочет лишь узнать и понять (нравственное значение сходного отношения к человеку едва ли нуждается в пояснении). В отличие от этой чисто научной позиции инженерно-научный, «прикладной» подход направляется желанием извлечь из объекта определенную пользу.

Чтобы желание узнать и понять могло осуществиться, оно должно следовать некоторым общим требованиям. Первое из них: ищи истину настойчиво и будь, насколько возможно, объективным, не затемняй свое сознание предвзятыми мнениями, авторитетами, личными соображениями.

Необходимо искать доказательства фактами и логикой и не утверждать, не принимать ничего недоказанного, иначе как в качестве предположения, но доказанное следует принимать, подчиняясь истине. Однако при этом необходимо быть вдумчивым и критичным, в частности к самому себе, сохраняя возможность сомнения как условие движения к более совершенному и обоснованному знанию. Нужно быть готовым пересмотреть свое, даже основанное на доказательствах, убеждение, если того потребуют новые аргументы фактов и логики. Вера как признание чего-либо истинным с силой, превосходящей аргументы фактов и логики (В. С. Соловьёв), противна науке, и она также противна подлинной нравственности, если человек из веры отстраняется от фактов и не принимает логики.

Обращаясь к человеку с истиной, обращаются к его разуму. Истина утверждается только доказательством, но не внушением, не приказом, не силой — ничем, что подавляет свободный критический дух человека. В этом, в частности, состоит специфический гуманизм науки.

Науку часто рисуют как область холодного рассудка. Однако в основе стремления к научной деятельности лежат страсти человека; без них упорное стремление к истине и утверждение ее невозможно. Искание истины и тем более отстаивание ее, будь то в науке или в моральных проблемах, требует мужества. «Пойдем на костер, будем гореть, но от убеждений своих не откажемся»,— говорил Н. И. Вавилов (цитируется по [5, с. 94]).

Важная моральная проблема, лежащая вне самой науки, но необходимо предшествующая научному исследованию, касается выбора объекта исследования: всюду ли допустимо искать истину? Конкретные люди по своей безответственности и подлости могут обернуть открытие в чрезвычайное зло, и ученые должны понимать это, но даже не столько ученые, сколько те, кто применяет и используют их результаты (они ведь не дети, которым нельзя давать играть спичками). Уже довольно давно, когда наука продемонстрировала свою чрезвычайную и в некотором отношении зловещую мощь, начались рассуждения об этике ученого, о моральной саморегуляции науки, хотя дело касается не столько самой науки, как ее применений. Великие открытия Л. Пастера вместе с основаниями современной медицины породили возможность бактериологической войны. Но, кажется, еще не нашлось моралиста, обвинившего в этом Л. Пастера.

При всем единстве отношения к истине в науке и морали в конкретной научной деятельности оно приобретает особый характер, отличный от того, каков он в обычных моральных проблемах.

Во-первых, эти проблемы относятся преимущественно к области человеческих отношений, наиболее трудной для исследования и все еще малодоступной науке (хотя все же движение происходит). Развитая же наука занимается совсем другими областями действительности, где (особенно при детальной разработке частных проблем) найти связь стремления их исследовать с нравственными императивами без натяжек едва ли возможно. Естественно, при работе в таких областях общая связь науки и нравственности исчезает из поля зрения. Во-вторых, в тех областях, где наука разработана, действуют достаточно определенные теоретические представления и правила научной деятельности, превращающие поиск истины в профессиональное занятие, в котором человек проявляет свое специальное искусство, порой не особенно задумываясь об истине.

Утверждают порой, что наука может привлекать человека строгостью выводов, логичностью и т. д., но при этом забывают указать на истину, забывают, что наука обогащает человека новым знанием, более глубоким пониманием действительности. Крупные ученые, хотя бы самые утонченные теоретики, всегда видели перед собой природу, в которую стремились проникнуть глубже, насколько позволяли их силы. И. Ньютон, например, писал об «океане неизвестного».

Узкий профессионализм, заслоняя человеку это величие общей задачи познания, заслоняет ему и нравственный смысл принципа быть верным истине; требуя строго искать и утверждать истину в специальной области, он допускает возможность вне ее пренебрегать истиной.

Искажение истины представляют собой иные учебники, где сообщаются порой неверные сведения, переходящие из издания в издание даже тогда, когда авторы уже знают, что ошиблись. Так ошибки, происходящие либо от невежества, либо от недостатка добросовестности, превращаются в прямую ложь, которую миллионы учащихся должны воспринимать как истину, обязательную для усвоения.

Математика не представляет исключения, хотя, казалось бы, присущая ей точность должна была удержать от искажения ее истин. Но ни в аппарате Министерства просвещения СССР, ни в Академии педагогических наук СССР это не вызывает особой реакции, разве что называется «отдельными ошибками», которые тем самым считаются несущественными, и среди ученых-математиков находятся такие, кто так же не заботится здесь об истине. Более того, последние преобразования школьного преподавания математики начались с выступления, наполненного неверными утверждениями о самой математике и пропагандировавшего учебник, содержащий грубейшие ошибки. Это выступление было поддержано многими учеными-математиками... и последствия сказались. Через некоторое время появился учебник геометрии для педагогических институтов, т. е. для будущих учителей, написанный с таким пренебрежением истиной, которое превосходит всякое воображение, и являющийся в смысле небрежности несомненным рекордом в математической литературе. Учебник получил гриф Министерства высшего и среднего специального образования СССР, был рекомендован для введения в педвузы Минпросом СССР и вышел вторым изданием без единого исправления.

Критика ошибок учебника была отброшена новыми рецензентами, которые его явно даже не прочли, и компетентными (с позволения сказать) органами Минвуза. Критику школьных учебников органы Минпроса СССР и Академии педагогических наук СССР считают вообще неуместной, потому что (говорят они) «нельзя подрывать веру учителя в учебник», следовательно, веру в те ошибки и путаницу, которые содержатся в учебниках. Надо, однако, понимать, что тут искажение истины адресовано миллионам молодежи (четыре миллиона в одном классе) и сообщается под видом истины, обязательной для усвоения.

Правда, можно сказать, нужна людям как воздух. И в первую очередь, казалось бы, должны заботиться о ней те, кто профессионально призван искать истину и утверждать ее среди людей, те, к чьим словам поэтому люди относятся с большим доверием. Но если истиной пренебрегают люди от науки, то где же ей искать прибежище?

Область довольно распространенных искажений истины представляет собой полемика, в которой тому или иному автору нередко приписывают не то, что он написал на самом деле, а то, что якобы «видно из текста» или что хотят видеть в тексте, чтобы оглупить и «разоблачить» автора. Это так удобно — не приводить подлинных цитат, в убеждении, что читатель не станет их сверять.

В этом духе, например, об авторе, выступившем по вопросу о наследовании психики, было написано, будто он делает свои выводы, опираясь лишь на ходячие обыденные представления (а точнее сказать, предрассудки) о генетической предопределенности психики и интеллекта человека. Но разоблачаемый автор писал черным по белому, что действительная проблема состоит в исследовании того, какие черты психики, каким образом, в какой степени зависят от наследственности или от социальных условий.

Бывает, автора даже цитируют, но подходящим для разоблачения образом. Так, некий специалист по этике в разоблачение другого привел из его книги цитату, якобы представляющую точку зрения автора, хотя автор излагал здесь взгляды Ф. Ницше, что им и было явно указано. Говоря о другом авторе, тот же специалист по этике обрывал цитаты, чтобы изобразить автора в самом невыгодном свете.

В общем приемы обрывания цитат, выведение желаемого из того, что якобы «видно из текста», приписывание авторам точек зрения, какие они не только не высказывали, но порой прямо противоположных явно высказанным, — явление не столь уж редкое. В приведенных примерах я не назвал ни авторов, ни критиков, так как дело не в отдельных личностях или сочинениях — их перечень может быть длинным. Суть в самом явлении: не просто неточные ссылки, а искажение истины, смыкающееся с клеветой; суть в том, что это не считается особым злом.

Однако признавать истину чем-то неважным — то же, что считать возможным судить, не устанавливая истины, судить из предубеждения, из голого «правосознания», для пользы дела или еще как-нибудь — независимо от истины. Если истина не считается важной, становятся допустимыми ложные показания, подделка доказательств и как результат — чудовищность необоснованного приговора.

Такова еще одна, зловещая, сторона пренебрежения истиной. Если, по словам И. В. Гёте, исследователь должен быть подобен заседателю в суде, то тем более верно обратное: судья должен, подобно ученому, всемерно стремиться к установлению истины — без этого суд недопустим.

За пределами непосредственной данности вопрос об истине всегда содержит большие или меньшие возможности сомнения: так, сделанное в суде, казалось бы достоверное, заключение может все-таки оказаться ошибочным. Тем более сложен вопрос о любой общей истине, будь то закон природы, характеристика какого-либо класса явлений или какое-либо теоретическое представление.

Истина — отражение объективного в сознании человека — легко может соединяться с элементами догадки, гипотезы, домысла и всегда укладывается в рамки сложившихся представлений и стандартов мышления.

В связи с этими трудностями в понятии истины появились воззрения, пытающиеся объявить вопрос об истине неважным или даже бессмысленным. Очень ярко такой взгляд на истину представлен в известной книге Т. Куна «Структура научных революций». В конце своего сочинения он подчеркивает, что в нем понятие истины не фигурировало вовсе, кроме как в цитате из Ф. Бэкона, и что оно неосновательно и вовсе не нужно [6, с. 223]. В Дополнении он особо ополчается против взгляда, что следующие друг за другом теории все больше и больше приближаются к истине, и пишет: «...представления о соответствии между онтологией теории и ее реальным подобием в самой природе кажутся мне теперь в принципе иллюзорными»; это подобие он считает «невероятным» [6, с. 269]. Свои взгляды Т. Кун обосновывает с помощью подмены понятий и фальсификации фактов. А в самом конце он пишет: «...мы будем, видимо, недалеки от истины, если скажем, что науки... развиваются не таким образом, как любая другая область культуры» [6, с. 272]. Выходит, что для естествознания понятие истины отменяется, но для мнений самого Т. Куна сохраняется. Истина, которую настойчиво выгоняли, оказалась тут как тут. И не мудрено: без понятия истины все же не обойтись, хотя его можно выражать и другими терминами. Гони ее в дверь, она войдет в окно! Даже Т. Кун не мог обойтись без истины!

Интересно, однако, что сочинение Куна встретило у нас в общем радушный прием, ему расточались похвалы, причем изгнание истины не было даже замечено (против него выступил только физик В. Л. Гинзбург) [7]. Фальсификация фактов и явная путаница тоже не были замечены.

Впрочем, некоторые авторы не без отсылки к Т. Куну явно отрицают саму аргументацию ссылками на факты. Так, один философ, иронически беря слово «факты» в кавычки, писал: «...на всякий набор „фактов“ можно найти другой набор „фактов“ же, противоречащих первому набору. Поэтому, аргументируя от „фактов“, спорящие стороны рискуют навсегда остаться каждая на своей субъективной точке зрения. Происходит это потому, что не существует фактов самих по себе. Выбор эмпирического события, формирование из него научного или философского факта — сложный процесс, имеющий в основе сложившиеся способы мышления, отношение к действительности, логику — то, что в сфере исследования науки принято называть парадигмой» [8, с. 116].

Это поучение в самом деле поучительно.

Во-первых, можно заметить, что в сфере человеческой деятельности и восприятия нет ничего «самого по себе», не только фактов. «Эмпирические события» тоже укладываются в рамки сложившихся представлений. Но из них факты не обязательно «формировать», если только не заниматься словесными упражнениями, что есть факт, а что еще не факт. Они сами суть факты. Что такое философские факты — это уж вовсе непонятно.

Во-вторых, общие заявления о наборе противоречащих фактов представляют собой образец предвзятого вздора. Факты могут «противоречить» друг другу лишь в рамках каких-либо взглядов, в пределах какой-то теории, но в таком случае одни из них противоречат не другим фактам, а теории.

Факты могут быть сложными, могут быть по-разному истолкованы; то, что принимается за факт, может оказаться в действительности недоразумением; факты могут не дать окончательного доказательства того, к подтверждению чего они привлекаются, основания устанавливаемой истины сложны и могут и должны подвергаться сомнению — все это так. Но если мы заранее опорочили факты как основание выводов об истине, то мы откроем свободное поле для неправды, для клеветы, для необоснованных приговоров. В самом деле, если на любой набор фактов можно предъявить противоречащий набор фактов же, то приговор не может основываться на фактах.

Объявив, что выступает от лица марксизма, цитированный выше автор благожелательно ссылается на мнение одного известного поэта, что «наука меряет все низшей мерой», так что К. Маркс и Ф. Энгельс, превратив социализм из утопии в науку, померяли его низшей мерой. Таков уровень согласования суждений...

На этом примере, как и на примере Т. Куна, мы видим, каковы борцы с истиной и аргументацией от фактов. И можно было бы не придавать значения их самодовольному недомыслию, если бы оно не встречало отклика, не распространялось, если бы за ним не стояли вещи практические, не давалось своего рода теоретического обоснования широчайшему распространению искажения фактов и извращения и сокрытия истины. Отрицание доказательств, основанных на фактах, дает философское обоснование судебной практике, когда судят не по фактам, а из предубеждений, из «парадигмы» извращенного «классового сознания».

Как серьезные люди относятся к фактам и их искажению можно видеть на примере английского историка Р. Дж. Коллингвуда, когда он с возмущением писал о «беспардонной и беспринципной фальсификации фактов», совершаемой в угоду общей концепции [9, с. 175]. Тем более известно отношение к фактам таких преданных истине мыслителей, как К. Маркс и Ф. Энгельс. Приведем только одну цитату: «Впрочем, при таком понимании вещей когда они берутся такими, каковы они в действительности и как они возникли, всякая глубокомысленная философская проблема... сводится попросту к некоторому эмпирическому факту» [10, с. 43].

Нередко мы с несомненностью можем лишь очертить круг нашего знания-незнания в основаниях истины, но и это достигается только ответственной и самокритичной опорой на факты. Само признание существенности фактов приводит к критичности мышления, а ее отрицание — к отсутствию сдерживающего начала в утверждении принятых взглядов и преследовании желаемых целей.

Философия должна отправляться прежде всего от жизни и обращаться к ней, в частности, в том же вопросе об истине и фактах. Можно не говорить высокого слова «истина», а проще: что есть, что произошло, что было на самом деле, верно ли то, что мы думаем, или то, что нам сообщают. Эти вопросы возникают постоянно, и истина или, напротив, ложь и заблуждение встают нередко во всей остроте, как например истина сообщения о смерти близкого человека или о рождении сына, без схоластики претенциозного и поверхностного философствования. Когда же истина оказывается труднодоступной, то только серьезный, настойчивый и критичный поиск и ведет нас к ней.

Как ни трудны поиски истины, как ни могут быть подвергнуты сомнению ее основания в фактах, нельзя от них отказываться. Потому что другого средства нет, и, отказавшись от него, мы откажемся от понимания действительности. Тогда на место истины, на место понимания того, что есть, становятся безответственные взгляды, предубеждения, мнения авторитетов, вера, фанатизм, хотя бы их называли «парадигмой», «системным подходом» или еще как-нибудь. И вместе с этим на место доказательства неизбежно встает внушение или насилие, ибо факт можно показать, но предубеждение — разве что внушить. Насилие бывает в разных формах: духовное, когда разум человека подавляют демагогией, авторитетом или запугиванием, и насилие угрозой, лишениями, вплоть до физического насилия.

Именно так в биологии внедрялась лысенковская парадигма против фактов генетики. «Гены — выдумка и иллюзия», «набору фактов генетики противостоит противоречащий набор фактов», сформированных лысенковской парадигмой, — вполне в духе утверждения цитированного выше автора. «Генетика ведет к расизму», и, как позже заявил один «философ», вообще «расовая теория возникла в науке» — этот аргумент должен приписать защитникам истины фашистскую идеологию и соответственно обеспечить расправу с ними. Хотя, как уже было сказано, расовая теория из науки никак не следует.

Аналогичное возможно в суде, если предъявляются «факты», сформулированные парадигмой, а подлинные отбрасываются, так как доказательство от фактов отрицается. В старину же вместо судебного разбирательства применялась пытка.

Остановимся и подумаем...

В самом деле, если на всякий набор фактов можно выставить противоположный, то доказательство фактами отпадает, и если все же требовать обоснования приговора, то его можно найти только в признании подсудимого, и чтобы получить это признание — пытают или в лучшем случае запугивают, подавляют...

Запуганные и не слишком стойкие среди вейсманистов-морганистов каялись, отрекались от своих убеждений, от истины, к торжеству идей, отбрасывающих истину и аргументацию фактами.

Конечно, теперь, кажется, никого не пытают, но духовное насилие может быть применено, чтобы подчинить не слишком стойкого человека, подавить его критическую способность ссылками на авторитет, угрозой сползания к идеализму и пр. И тогда может распространяться обильное искажение истины. Хотя есть мнение, что «это не важно». Так и сказал один из академиков, а когда ему напомнили о временах господства Лысенко, он спокойно отметил: «Было, да прошло». Словом, не стоит беспокоить себя заботами об истине. Нередки случаи, когда, столкнувшись с безобразной клеветой, либо говорят, что «тут ничего такого нет», либо хотя и признают клевету, но не протестуют: лучше замолчать, замазать — меньше беспокойства.

Нельзя поддаваться такому цинизму в отношении к истине, оставляя заботу о ней только в узкопрофессиональных пределах, да и то не ради нее самой, а ради карьеры и пр. Нельзя также уводить вопрос об истине в безразличную отвлеченность философствования. Нужно понимать, что за пренебрежением истиной стоит возможность клеветы, страшная возможность произвольного приговора и применения насилия вместо доказательства. Необходимо всячески беречь и укреплять интерес и уважение к истине не только как к средству достижения внешних для нее целей, но также в ее безусловной самоценности.

Идея истины — это то звено, которое скрепляет науку и этику. Убрав ее, мы не только разъединим их, но и разрушим — разрушим и этику, и науку. Наука будет внешне набором указаний для практики, какой она была еще в Древнем Египте; внутри же, как деятельность, она будет представляться не добыванием истин, а предприятием для достижения успеха в степенях, званиях, доходах, в возвышении «сценциарно»-социального[2] статуса, в приобретении влияния и власти. Кстати, Т. Кун так и характеризовал науку как предприятие, в котором главным мотивом его участников служит желание успеха.

Этика вполне будет соответствовать этому: этика приличного, т. е. не слишком подлого карьериста, для которого в конце концов все не так

[2] Вводя искусственный термин «сценциарно» вместо «научно», докладчик вышучивает наукообразие в терминологии, сопутствующее карьеризму. — *Прим. ред. изд. 1988 г.*

уж важно, кроме личного благополучия и успеха, ради которых можно поступиться и истиной, и честью. Впрочем, сами эти термины уже исчезают из лексикона[3] ...

Интеллектуальная честность, сознание ответственности за истину, честь ученого и философа, состоящая в безусловном, бескомпромиссном и бескорыстном стремлении к истине и отстаивании ее, — не бледнеют ли, не исчезают ли эти понятия среди нашей интеллигенции? А если ученые и философы сами пренебрегают этим, то кто же будет отстаивать значение истины? В циничном отношении к истине и чести обнаруживает себя духовный распад в среде интеллигенции. Говорят о «духовности», но в это понятие не вкладывают должного содержания, включающего как важнейший элемент высокое отношение к истине, стремление к объективному пониманию.

Каждый из нас, кто еще не погрузился в трясину духовного распада, должен осознать свою ответственность, осознать связь духовной жизни, в силу которой философия так или иначе выражает направления и тенденции общественного сознания и в свою очередь влияет на них, отчего «философское» истребление истины, пренебрежение ею выражает и со своей стороны подталкивает известное общее падение духовного уровня и, сверх того, связано с вещами более практическими и зловещими. Кто же сохранит идею истины против возрастающего искажения правды и пренебрежения ею?

Я написал это пять лет назад. Теперь в стране идет перестройка, в этом процессе во всех сферах — в материальной, политической, духовной — растет и должно еще больше возрастать стремление к истине и верности ей во всем многообразии ее проявлений — как величайшей ценности после самой жизни. Но процесс этот только разворачивается, и усилия к утверждению истины должны преумножаться и никогда не ослабевать, ибо всегда найдутся в обществе силы, которым искажение и сокрытие истины будет выгодно, будь то в мелочной полемике или в проблемах общегосударственного масштаба.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гёте И. В.* Из архива Макарии // Соч. М.: Худож. лит., 1979. Т. 8.
2. *Russell B.* A history of western philosophy. New York, 1945[4].
3. Повесть Петеисе III : Древнеегипетская проза. М.: Худож. лит., 1978.
4. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1963. 2-е изд. Т. 26, ч. II.
5. *Дяченко С. С.* Уроки Вавилова // Коммунист. 1987. № 4.
6. *Кун Т.* Структура научных революций. М.: Прогресс, 1977.
7. *Гинзбург В. Л.* Как развивается наука?: Замечания по поводу книги Т. Куна «Структура научных революций» // В кн.: *Гинзбург В. Л.* О физике и астрофизике. М.: Наука, 1985.
8. *Арсеньев А. С.* Наука и человек // В кн.: *Дробницкий О. Г., Соловьев Э. Ю., Логешов В. Т., Арсеньев А. С.* Наука и нравственность. М.: Изд-во политич. лит., 1971. С. 114–322.
9. *Коллингвуд Р. Дж.* Идея истории. М.: Наука, 1980.
10. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1955. 2-е изд. Т. 3.

[3] Напомним, что доклад был прочитан в 1983 г. — *Прим. ред. изд. 1988 г.*

[4] Русский перевод: *Б. Расселл.* История западной философии. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1999. — *Прим. ред.*

Математика

Философская энциклопедия. М., 1964. Т. 3. С. 329–335

Математика — наука о формах и отношениях, взятых в отвлечении от их содержания. Первый и основной предмет математики составляют количественные и пространственные отношения и формы. «Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишенные измерений, линии, лишенные толщины и ширины, разные a и b, x и y, постоянные и переменные величины...» [1, с. 37]. Если, например, социолог интересуется ростом народонаселения с течением времени, а физик — изменением давления газа в связи с изменением температуры, то математик видит здесь только функциональную зависимость числа y от числа x.

Кроме количественных и пространственных отношений и форм в математике изучаются другие отношения и формы, в частности в математической логике — формы логического вывода, в геометрии — n-мерные пространства, которые, конечно, не являются пространственными формами в обычном смысле слова, но имеют прообразы в действительности, например в виде множества всех возможных состояний той или иной механической системы (так называемое фазовое пространство системы). В общем в предмет математики могут входить любые формы и отношения действительности, которые объективно обладают такой степенью независимости от содержания, что могут быть от него полностью отвлечены и отражены в понятиях с такой ясностью и точностью, с сохранением такого богатства связей, чтобы дать основание для чисто логического развития теории.

Кроме того, в математике рассматриваются не только формы и отношения, непосредственно абстрагированные из действительности, но и логически возможные, определяемые на основе уже известных форм и отношений [1)]. Именно так появились «мнимые» числа, «воображаемая» геометрия

[1)] Приведенная выше цитата из «Анти-Дюринга» завершается словами: «... и только в самом конце мы доходим до продуктов свободного творчества и воображения самого разума, а именно — до мнимых величин».

Лобачевского и др., причем сами слова «мнимые», «воображаемая» подчеркивают, что речь идет о мыслимых объектах, реальный смысл которых выяснился не сразу. В настоящее время определение новых объектов математических теорий стало столь обычным делом, а способы их истолкования настолько развиты, что разделение их на действительные и лишь логически возможные по большей части утрачивается. Тут имеется переход — через ряд абстракций и определений — от понятий, реальный смысл которых ясен (например, целое число), к таким, которым не удается дать наглядной интерпретации (например, некоторые понятия теории множеств). Математика может быть определена как наука о логически возможных, чистых (т. е. отвлеченных от содержания) формах, или, что то же, о системах отношений, так как форма есть система отношений частей целого, а отношения в математике всегда фигурируют как система отношений между какими-либо абстрактными объектами [2)].

Если две системы M и N таковы, что объекты и отношения одной можно сопоставить с объектами и отношениями другой так, что объектам из M, находящимся в данном отношении, всегда отвечают объекты из N, находящиеся в соответствующем отношении, и обратно, то такое сопоставление называется изоморфизмом, а системы — изоморфными. То общее, что есть в изоморфных системах, и есть чистая форма. Соответственно математика рассматривает разные системы с точностью до изоморфизма (кроме, конечно, тех случаев, когда объектом изучения служит само отношение изоморфизма или для изучения системы рассматривается ее конкретное представление). Безразличие чистых форм к содержанию означает лишь то, что они встречаются с совершенно разным содержанием (как одна и та же формула может выражать законы разных по своей природе явлений). Но это вовсе не значит, что эти формы всегда имеют внешний или чисто количественный характер, например симметрия кристаллической решетки (определяемая математически) является существенной качественной ее характеристикой.

Особенности математики. 1. Форма, отвлеченная от содержания, выступает как самостоятельный объект, так что непосредственным предметом математики оказываются числа, а не совокупности предметов, геометрические фигуры, а не реальные тела и т. п. В природе есть, например, тела более или менее шарообразной формы, но шарообразная форма, взятая сама по себе, превращается в идеальный объект — геометрический шар; в природе есть разнообразные связи переменных величин, чистая же форма такой связи выступает в математике как идеальный объект — функция, и т. д.

Абстракции и идеализации есть во всякой другой науке, но там им не придается такого самодовлеющего значения, они всегда сверяются с дей-

[2)] Это понятие о предмете математики можно удачнее выразить, сказав, что его составляют чистые структуры.

ствительностью. Математика же абсолютизирует свои абстракции; ее понятия, возникнув и определившись, закрепляются и рассматриваются как данные, а сравнение их с действительностью есть задача не самой математики, а ее приложений. Поэтому в математике не заботятся, например, о том, что не только практически невозможно абсолютно точное измерение, но и объективно не существует абсолютно точных значений реальных величин. За некоторыми пределами уточнения количественные изменения влекут качественные, и данная величина теряет смысл, тело оказывается состоящим из атомов, давление газа — из ударов молекул и т. д. Но такой переход количества в качество зависит от природы величины, а раз в математике отвлекаются от этой природы, то в ней переход исчезает. Величина, взятая в отвлечении от содержания, величина вообще, мыслится как допускающая неограниченно уточняющееся измерение. Это необходимо связано с логическим методом математики, так как совершенно точное (формальное) рассуждение требует совершенно точных понятий (абсолютизированный абстрактный предмет математики сформирован вместе с ее методом). Точно так же, хотя современная физика установила, что реальное пространство не является точно евклидовым, никто не считает от этого евклидову геометрию как математическую теорию неточной или нестрогой. Ее строгость и точность определяются соответствием ее выводов основным посылкам, закрепленным и выраженным в аксиомах.

2. Результаты математики — теоремы получаются путем логического вывода из основных понятий и посылок, ссылка же на опыт не считается математическим аргументом (математические выкладки суть не более как концентрированные в символической форме логические выводы). Это, так же как предыдущая особенность математики, вовсе не означает, что математика не заимствует свои понятия из опыта и что она не имеет отношения к действительности. Но математика исследует формы и отношения, полностью отвлеченные от содержания, сохраняя в них лишь то, что содержится в их определении. Поэтому естественно, что в математике ее результаты получаются путем логического вывода из самих этих определений, из самих понятий о соответствующих формах, так что чистая математика имеет дедуктивный, умозрительный характер (невозможны опыты, например, с бесконечным натуральным рядом; общие законы в нем можно только выводить из закона его построения; формирование математических понятий и метода обусловливали друг друга).

3. Отличительной особенностью математики является непреложность ее выводов. Логически допустимо нарушение законов физики, но невообразимо, например, чтобы дважды два не было четыре. Эта непреложность выводов математики объясняется не более как их логической связью с принятыми посылками. Они логически необходимы лишь постольку, поскольку приняты посылки. «Дважды два — четыре» следует из определения умно-

жения. Следовательно, во-первых, указанная особенность математики вытекает из предыдущих, а во-вторых, она относительна: вывод обязателен лишь постольку, поскольку приняты его основания.

4. Для математики характерно наличие ряда ступеней абстракции и образование новых понятий на базе ранее сложившихся. Уже понятия о бесконечно продолжаемом ряде целых чисел, о любом вещественном числе суть результаты ряда абстракций; затем уже внутри самой математики возникли понятия комплексного и далее гиперкомплексного числа. Аналогично возникли понятия о не евклидовых и многомерных пространствах и др. Для современной математики вообще характерно сознательное введение новых понятий на базе уже имеющихся. Эта черта математики естественно связана с ее основной, определяющей особенностью, потому что, во-первых, достаточно полное отвлечение тех или иных форм и отношений от содержания происходит не сразу, а через ряд абстракций, а во-вторых, придавая своим понятиям самодовлеющие значения, математика уже тем самым делает их основанием для образования новых понятий, для новых ступеней абстракции.

5. Особенностью математики является также универсальность ее применений. В любой области, где только удается поставить задачу математически, математика дает результат с точностью, соответствующей точности постановки задачи. Мы одинаково считаем любые предметы, лишь бы они были строго разграничены. Одни и те же уравнения могут описывать совершенно разные по существу явления. Таким образом, в абстрактности математики заключается ее сила: чем больше отвлечение от содержания, тем шире возможности приложения. Но по той же причине универсальность приложений математики не абсолютна: правомерность ее применения в данной области, к данной задаче должна быть обоснована анализом содержания.

6. Математика занимает особое положение среди других наук, так как, исследуя формы и отношения, встречающиеся в природе, обществе, а также в мышлении, она отвлекается от содержания и исключает из допускаемых внутри нее аргументов наблюдение и эксперимент. Поэтому ее нельзя причислить к естествознанию или к общественным наукам.

Тем не менее математика зародилась из практики как естественная наука и только в результате достаточно длительного накопления знаний, выяснения понятий и связей между отдельными результатами превратилась в чистую математику, дальнейшее развитие которой, продолжая идти в тесной связи с естествознанием, включало существенное расширение ее предмета, восхождение к более высоким ступеням абстракции. Так, если у Евклида имеются в виду геометрические объекты в их обычном наглядном, хотя и отвлеченном от материального содержания, смысле, то теперь в основаниях геометрии говорят о «любых объектах», лишь бы они удовлетворяли соответствующим аксиомам.

Словом, отвлечение от содержания исследуемых математикой форм и отношений шло постепенно, и этот процесс продолжается. Хотя определения математических понятий все более уточняются, они не становятся абсолютными; математическая точность и строгость выводов также развивается, и то, что считалось строгим прежде, уже не считается таким теперь.

В этом отношении хорошим примером может служить арифметика. Предмет ее составляет система натуральных чисел 1, 2, 3... с их отношениями: большего к меньшему, суммы к слагаемым и т. д. Отдельное число само по себе не имеет свойств; если мы спрашиваем о свойствах, например, числа 6, то замечаем, что $6 = 5 + 1$, $6 = 2 \cdot 3$ и т. п., так что свойства данного числа состоят в его отношениях к другим числам. Отношения же эти суть отвлеченные образы реальных количественных отношений между совокупностями предметов.

Каждое отдельное число («два», «пять» и т. п.) есть свойство совокупности предметов, общее у совокупностей, предметы которых можно сопоставить по одному, и различное у таких, для которых подобное сопоставление невозможно. Наличие такого свойства устанавливалось в процессе практического счета предметов. Первоначальное число определялось сравнением с каким-либо конкретным предметом (например, «пять» — «рука»). Первая ступень абстракции состояла в отвлечении от конкретных предметов, когда число выделилось как свойство их совокупности; так, говорили: «три камня», «три лодки» и т. д. Следующая ступень абстракции состояла в том, что появилось понятие о числах самих по себе, без связи с какими-либо предметами; числа выступили как самостоятельные идеальные объекты [3)].

Одновременно возникли действия над числами как абстрактное отображение реальных действий над совокупностями предметов, например умножение происходит из счета совокупностями по два, по три и т. п. В процессе практического счета люди открывали не только связи между отдельными числами, но и общие законы, как например то, что сумма не зависит от порядка слагаемых.

Так формировалась система чисел. История ее фактического возникновения служит прямым подтверждением правильности материалистического понимания математики. Материализм признает как факт идеальный характер непосредственного объекта арифметики, но в противоположность идеализму признает также, что «идеальное есть не что иное, как материальное, пересаженное в человеческую голову и преобразованное в ней» [2, с. 21].

В становлении арифметики важную роль играло введение обозначений для чисел. Это позволило оперировать числами, лежащими за пределами наглядного представления. Как понятие вообще выражается словом, так

[3)] Ср. образование понятий о других свойствах, например: «как уголь», «черный», «чернота»; здесь грамматическая форма существительного придает свойству характер самостоятельного объекта.

отвлеченное число — словом или знаком. Как «язык есть непосредственная действительность мысли» (К. Маркс), так и математические обозначения есть «непосредственная действительность» математических понятий.

Следующая за указанными выше ступень абстракции состояла в образовании понятия о любом целом числе вообще, в отвлечении от практической ограниченности счета, и, следовательно, в осознании потенциальной возможности неограниченного продолжения числового ряда, закономерности которого, естественно, выводятся логически из понятия об этом ряде как бесконечной последовательности, образуемой с помощью единственной операции — прибавления единицы (или перехода от данного к следующему). Так, арифметика как искусство счета переросла в теоретическую арифметику, что знаменовало возникновение чистой, дедуктивной математики.

Следующая ступень абстракции, ясно выявившаяся лишь в XIX в., состояла в формировании понятия о множестве всех целых чисел, которое мыслится как целое, как *актуальная* бесконечность в отличие от *потенциальной* бесконечности неограниченно продолжаемого ряда чисел. Такое понимание бесконечности натурального ряда послужило естественной основой для введения существенно нового понятия трансфинитных порядковых чисел, на основе которого в свою очередь метод математической индукции был дополнен новым методом доказательства и определения, так называемой трансфинитной индукцией. Далее были подвергнуты более глубокому анализу самое понятие о целом числе и логические средства теоретической арифметики.

Развитие математики. История математики делится на ряд этапов. Формирование на основе повседневной практики простейших понятий арифметики и геометрии восходит к очень ранним ступеням развития человеческого общества. Моментом зарождения собственно математики — превращения накопленных знаний в науку — следует считать систематизацию этих знаний и формирование законов и правил (в данном случае — правил решения арифметических задач и определения простейших площадей и объемов; само слово «геометрия» означает «землемерие»). Это произошло в III–II тысячелетиях до н. э. в ряде стран: Египте, Вавилоне, Китае, Индии. В то время математические правила на конкретных примерах формулировались на основе практики.

Но постепенно наряду с накоплением математических знаний, с установлением связей между получаемыми результатами и унификацией правил решения задач складывались теоретические способы вывода новых результатов и первые математические доказательства. В конечном итоге это привело к качественному скачку: сложилась чистая математика с ее дедуктивным методом. Конечно, скачок был достаточно длительным. Насколько известно, это произошло в VII–V вв. до н. э. в Греции, куда математические знания перешли из Египта и Вавилонии. Есть указания на то, что простейшие теоремы геометрии доказывались уже Фалесом. В V в. до н. э. появляется систематическое изложение геометрии, тогда же Демокрит дал глубокие для своего времени выводы, содержавшие как бы первый зародыш интегрального исчисления.

Открытие несоизмеримых отрезков и последовавшее за ним создание теории отношений несоизмеримых величин было большим достижением греческой математики. Это логическое построение, явно выходившее за пределы эмпирически данного, очень четко обозначало окончательное оформление чистой математики[4]. Принципиальное значение для развития математики имело появление понятия о бесконечности, которое играет в математике такую роль, что математику порой даже определяют как науку о бесконечности. Помимо понятия о бесконечно продолжаемом ряде целых чисел и неограниченно продолжаемой прямой возникло также представление о неограниченной делимости геометрических фигур. Непрерывное, первоначально не подвергавшееся анализу, выступает как неограниченно делимое, содержащее неограниченное число частей, точек, моментов.

Дальнейшее развитие математики идет в следующих направлениях: 1) накопление новых результатов в рамках уже определившихся понятий; 2) расширение предмета математики, включение в него новых форм и отношений и, следовательно, формирование принципиально новых понятий; 3) изобретение новых методов решения задач и доказательств теорем; 4) восхождение к более высоким абстракциям и более широким обобщениям; 5) углубление основных понятий. Соответственно развитие математики не сводится к количественному росту, но включает качественные изменения, связанные с существенным расширением ее предмета и образованием новых понятий и теорий. При этом, однако, не происходит отказа от существующих теорий, они лишь углубляются и обобщаются. Так, геометрия Лобачевского не опровергает геометрию Евклида, но обе теории включаются в некоторую общую систему. В этом состоит одно из своеобразий развития математики.

Развитие математики идет как под влиянием других наук и техники, так и «внутренним» путем. Роль каждого из этих факторов различна в каждом конкретном случае. В конечном счете решающим является влияние других наук и главным образом через них — практики. Если последовательность развития определяется объективной логикой предмета математики, то скорость его определяется общественными условиями.

Первый этап развития чистой математики после ее оформления в VII–V вв. до н. э. — это эпоха элементарной математики. Она продолжается до XVII в. и делится в свою очередь на два существенно различных периода.

[4] Следует различать знание математических фактов от установления их логических доказательств. Так, составляющее содержание теоремы Пифагора соотношение между квадратами, построенными на сторонах прямоугольного треугольника, было известно до Пифагора, но соответствующая теорема едва ли была доказана.

Первый (период греческой математики) характеризуется глубоким развитием и господством геометрии, которую греки подвели вплотную к аналитической геометрии и интегральному исчислению; второй — преимущественным развитием элементарной алгебры и формированием понятия вещественного числа (Индия, Средняя Азия, страны арабского Востока, Западной Европы) и завершается, когда Р. Декарт ввел современную алгебраическую символику, так что алгебра обрела форму, наиболее адекватную ее содержанию.

Следующий этап в развитии математики охватывает период с начала XVII в. до середины XIX в. Его обычно определяют как эпоху переменных величин, тогда как элементарную математику определяют как науку о постоянных величинах и простейших геометрических фигурах. Такое определение неточно. Скорее элементарную математику нужно определять как *конструктивную* математику. В ней изучаются не только связи между постоянными, но и между переменными величинами, т. е. функции (зависимость площади круга от радиуса, синус угла и т. п.), кривые линии и поверхности; используется по существу понятие предела (например, при определении длины окружности). Все это было в греческой математике, но речь шла о конструктивно заданных фигурах и функциях, об *определенном* процессе приближения к пределу. *Общие* же понятия кривой, функции, предела в элементарной математике просто отсутствуют. У греков кривая, не заданная определенным геометрическим построением, считалась «механической». Переворот, знаменовавший новую эпоху, состоял прежде всего именно в том, что в предмет математики были включены зависимости между переменными величинами вообще, появилось соответственно общее понятие функции и возник аппарат исследования функций (дифференциальное и интегральное исчисление, ряды), т. е. возникла теория функций — анализ бесконечно малых. Создание анализа подготавливалось с начала XVII в. в работах ряда ученых и было оформлено И. Ньютоном и Г. Лейбницем.

Это новое направление математики имело три источника. Первый составляло изучение движения, зависимостей между переменными в природе (астрономические законы Кеплера, законы падения, открытые Г. Галилеем, и др.). Решающее влияние задач механики на развитие анализа видно из следующего примера. Второй закон динамики в формулировке самого И. Ньютона утверждает, что изменение количества движения пропорционально силе; но это «изменение» есть производная по времени, так что закон приобретает точную форму, только если ввести понятие производной. Для определения же движения по его «изменению» необходимо интегрирование. Поэтому И. Ньютон, можно сказать, был вынужден изобрести анализ, чтобы дать общие методы формулировки законов и решения задач механики. Второй источник представляла геометрия с ее задачами вычисления площадей и объемов и проведения касательных. Третий — алгебра, дававшая удобную символику и формальный аппарат, приведший, например, к представлению функций в виде рядов. Метод координат связал геометрию с алгеброй (Р. Декарт, 1637 г.), а затем и с анализом — кривые задаются функциями, функции изображаются кривыми. Этот синтез сыграл важную роль в становлении и развитии как анализа, так и геометрии. Предметом последней также становятся любые (достаточно «гладкие») кривые. После И. Ньютона и Г. Лейбница математический анализ получил чрезвычайно интенсивное развитие. Его идеи и методы проникли в более старые области математики (геометрию, алгебру, теорию чисел), возникли новые его приложения и ответвления (теория дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, дифференциальная геометрия). Выяснение основ анализа (общее определение функции, теория пределов и др.) совпало с началом следующего периода в развитии математики.

Этот следующий этап длится с первой половины XIX в. до середины XX в. и характеризуется тем, что в предмет математики включаются формы и отношения, не являющиеся уже пространственными и количественными в первоначальном смысле слова, причем некоторые из этих форм и отношений определяются внутри самой математики. Одновременно интенсивно развиваются и подвергаются воздействию новых идей ранее определившиеся области математики. В результате всего этого математика превращается из науки о количественных и пространственных отношениях и формах, какой она была прежде, в науку о логически возможных чистых формах, только сходных, вообще говоря, с количественными и пространственными. Этот переворот идет несколькими путями. Появляется неевклидова геометрия (Н. И. Лобачевский, 1826 г., Я. Бойаи, 1832 г.), формируется понятие многомерного пространства, выделяются теории отдельных свойств фигур (проективная геометрия, топология и др.). На место одной евклидовой геометрии пришло бесконечное множество разных геометрий — теорий возможных, формально сходных с пространственными форм и отношений. Из них важнейшие риманова геометрия (1854 г.) и топология.

Полученная на пороге XIX в. геометрическая интерпретация введенных еще в XVI в. мнимых (точнее — комплексных) чисел сняла с них покров таинственности и дала толчок дальнейшему расширению понятия числа и величины (гиперкомплексные числа, векторы, тензоры и др.), а также созданию новой области анализа — теории функций комплексной переменной. Одновременно (начиная от Э. Галуа) складываются совершенно новые направления алгебры: теория групп и других алгебраических систем. Каждая такая система есть множество каких-либо элементов, между которыми имеются отношения, формально сходные с отношениями между числами (между слагаемыми и суммой, сомножителями и произведением, отношение порядка больше-меньше и др.). Алгебра из учения о формальных действиях с числами и решении уравнений превратилась в науку о любых таких системах.

В этот же период идет бурное развитие сохраняющего свою центральную роль математического анализа, а также уточнение его основных понятий: предела, функции, переменной (т. е. произвольного вещественного числа; числовая прямая стала рассматриваться как множество чисел). Вершиной этого процесса явилось создание Г. Кантором в 1871–1884 гг. теории множеств (в том числе специально теории точечных множеств), оказавшей громадное влияние на математику. Во-первых, на почве теории точечных множеств были обобщены основные понятия анализа (функция, производная, интеграл и др.), вошедшие затем в аппарат теорий, непосредственно связанных с приложениями (например, теории дифференциальных уравнений), а также в геометрию, где теперь исследуются фигуры гораздо более общие, чем прежде. Во-вторых, теория множеств породила в математике общую теоретико-множественную точку зрения, согласно которой всякий объект математики трактуется как множество каких-то элементов, в котором имеются те или иные отношения (между элементами, между элементами и подмножествами — частями этого множества, между подмножествами). Пространство определяется как множество точек (тогда как, например, Б. Риман определял его как «протяженность»), область изменения переменной — как множество ее допустимых значений; функция может быть определена как множество упорядоченных пар (значение x и соответствующее значение y) и т. д. Это придало математике большую ясность и единообразие и облегчило точные определения вновь вводимых понятий.

Вершиной рассматриваемого этапа в развитии математики явился функциональный анализ, возникший в начале XX в. В нем соединились идеи и методы современного анализа, геометрии и алгебры. Он дал новую постановку многим задачам теории функций, теории дифференциальных и интегральных уравнений и вариационного исчисления, открыл новые сильные методы их решения и явился адекватным аппаратом для квантовой механики.

Середина XX в. — начало нового этапа в развитии математики, который опять-таки характеризуется существенным расширением ее предмета и развитием принципиально новых идей. Приобретают особую роль разделы, посвященные исследованию самих способов и возможностей математического вывода (математическая логика, теория алгоритмов). Эти математические дисциплины оказывают существенное влияние на более старые области математики: пишутся схемы решений, которые можно осуществлять на машинах, оформилось целое конструктивное направление в математике, изучающее проблемы алгоритмического решения задач, доказательства теорем, построения математических теорий. Возникли новые дисциплины: теория информации, теория автоматов, теория игр (помимо игр в собственном смысле эта теория рассматривает вопросы военной тактики, производственные и экономические задачи, вопросы выбора системы экспериментов и др.; к ней примыкают также специальные методы планово-экономических расчетов). Характерным является также усиление роли и расширение приложений теории вероятностей (с которой связана теория информации и другие указанные новые дисциплины), зародившейся еще в XVII в. и развивавшейся с нарастающей интенсивностью, особенно по мере того как со второй половины XIX в. стало все более выясняться значение статистических закономерностей. Все это связано с распространением применения математики в биологии, лингвистике, новых областях техники, практических задачах планирования производства, общественных науках и др. Можно сказать, что новый предмет математики составляют «сложные» системы, их структура и «поведение», т. е. переходы из одних состояний в другие.

Основания математики. Основание всякой науки лежит в действительности, которую она отражает. Однако математика имеет непосредственным предметом не сами объекты действительности, а их образы, которые она рассматривает умозрительно, исключая из своих аргументов ссылку на опыт. Отсюда проистекает особая, характерная для математики постановка вопросов о ее основаниях. Задачу оснований математики составляет анализ ее основных понятий, основных посылок ее теорий и способов доказательства. Сюда же примыкают вопросы об истинности математических утверждений и существования математических объектов.

Основания математики стали предметом исследования вместе с формированием чистой математики. Греки, приведя геометрию в логическую систему, выявили те основные положения (аксиомы), которые могли быть положены в ее основу. Теперь ясно, что система аксиом Евклида была далеко не полной, но важен самый факт сознательного и уже довольно тонкого анализа оснований геометрии [5]. Греки же начали исследование возможной зависимости одних аксиом геометрии от других: они стремились вывести аксиому о параллельных из других аксиом Евклида. Двухтысячелетняя история этих попыток завершилась построением геометрии Лобачевского, в основе которой лежит отрицание данной аксиомы. Возникновение неевклидовой геометрии и других абстрактных теорий, знаменовавшее в XIX в. новый этап в развитии математики, вместе с анализом основ более старых теорий привело к существенно более глубокому исследованию оснований математики. На почве этих исследований оформилось следующее понимание аксиоматического обоснования математической теории.

Предмет любой данной теории составляет некоторое множество объектов с некоторыми отношениями между ними, а также подмножествами, причем природа объектов никак не определена. Свойства же отношений точно формулируются в соответствующих аксиомах. В этом виде аксиоматика данной теории составляет определение ее предмета. Конкретным же предметом тео-

[5] Для арифметики подобный анализ явился делом уже XIX в., что естественно, так как понятие целого числа представляется более очевидным и более ясным, чем основные понятия геометрии.

рии может служить любое множество объектов с отношениями, для которых выполняются аксиомы, если входящие в них термины истолкованы соответствующим образом.

Важнейшим из относящихся к любой аксиоматической системе вопросов является вопрос ее непротиворечивости (т. е. попросту осмысленности, так как противоречивая теория заведомо не может иметь никакого реального смысла). Она доказывается тем, что дается какая-нибудь интерпретация (модель) системы аксиом. Такая модель строится на основе какой-либо другой математической теории, и тем самым вопрос сводится к непротиворечивости последней. Так, геометрия Лобачевского истолковывается в евклидовой геометрии, а этой последней дают аналитическую интерпретацию, в которой точка плоскости определяется как пара чисел. Однако понятие (аксиоматика) вещественного числа также нуждается в выяснении непротиворечивости. В общем метод интерпретации не дает окончательного доказательства непротиворечивости никакой теории, а лишь сводит одну теорию к другой, так что вопрос о непротиворечивости математической теории не может быть решен на этом пути в рамках самой математики. В конечном счете убеждение состоятельности таких теорий математики, как например арифметика, оказывается той же природы, что и убеждение в состоятельности теорий естествознания: оно основано на том, что в этих теориях при всем их долгом развитии не обнаруживаются противоречия, что эти теории имеют громадное поле приложений, что они отражают действительность.

Однако анализ оснований математики породил другой путь решения той же проблемы, состоящий в исследовании самих логических средств математического доказательства, что составляет задачу математической логики. Если мы отвлекаемся от какой бы то ни было интерпретации, то единственным критерием правильности теоремы оказывается то, что она строго доказана. Математический объект (например, решение какого-либо уравнения) считается существующим, если доказано его существование. Речь идет не об истине как соответствии утверждения действительности, не об объективном существовании, а о логической доказуемости. Но что значит точное доказательство? Противоречия, обнаружившиеся в некоторых далеких выводах теории множеств, обострили этот вопрос, поскольку идеи теории множеств пронизали все основания математики. Убеждение в истинности математики, основанное на ее гигантских достижениях, не могло снять указанного вопроса. Отказ от его решения означал бы подрыв доверия к строгости дедуктивного метода математики. Стремясь спасти положение, Д. Гильберт поставил проблему оснований математики следующим образом. Математическая теория трактуется чисто формально (отсюда название учения Гильберта — формализм), т. е. она строится на основе перечня основных понятий, точного описания правил формулирования допустимых (считающихся осмысленными в этой теории) утверждений и определений, формулировок исходных утверждений (аксиом), указания правил вывода одних утверждений из других. Тогда утверждения теории можно записывать в подходящих символах и рассматривать правила формулирования и вывода просто как правила оперирования с этими символами. Теория превращается в формальную схему, и вопрос о непротиворечивости, о доказуемости в ее пределах той или иной теоремы сводится к исследованию данной схемы. Значение этой точки зрения состоит не только в том, что она очень четко ставит вопрос математического доказательства, но и в том, что, превращая теорию в схему механических выкладок, позволяет, хотя бы в принципе, передать осуществление этих выкладок машине. В этой связи особое значение приобретает теория алгоритмов. Машина же есть объективный предмет, и ее работа — объективный процесс, а не теория, так что здесь основания математики опять приходят к объективной действительности, хотя и другим образом (математике как совокупности таких формальных схем противопоставляется метаматематика как учение о самих этих схемах, но на самом деле формальная схема уже не есть наука, так что метаматематика и есть математика).

Однако очень скоро выяснилось, что указанный подход не решает проблемы: было доказано, что никакая формальная теория не может исчерпать даже арифметику; доказательство непротиворечивости формальной теории не может быть получено в рамках самой этой теории. Всегда неизбежен переход от данной теории к более широкой и т. д. Например, непротиворечивость обычной арифметики доказана с помощью так называемых конструктивных трансфинитных чисел. Но хотя такое доказательство удается провести средствами, убедительность которых весьма велика (логически их база есть «минимальная логика»), относительно них также может быть поставлен вопрос о непротиворечивости и т. д. Таким образом, дедуктивный метод математики был спасен не в том окончательном смысле, как надеялся Д. Гильберт. Перед основаниями математики лежит путь бесконечного развития и уточнения, а окончательные основания математики так или иначе упираются в отношение ее к действительности.

Отношение математики к действительности и к другим наукам. Возникнув из прямого отражения природы, постоянно заимствуя из нее новые понятия, математика отделяет их от действительности, закрепляет их и идет дальше в значительной мере путем внутреннего развития, путем логического доказательства теорем, образования новых понятий, построения новых теорий. А эти теоремы, понятия, теории применяются потом к исследованию действительности. По мере восхождения ко все более высоким абстракциям связь математики с практикой, с действительностью становится все менее непосредственной и осуществляется через другие науки. Во-первых, математика черпает в них новые задачи, новые понятия, источники новых теорий и импульсы к развитию. Например, вся теория дифференциальных уравнений возникла и развивается под решающим влиянием механики и физики. Во-вторых, математика выступает по отношению к другим наукам как метод формулировки количественных закономерностей, как аппарат для построения и разработки теорий, как средство решения задач.

Влияние математики распространилось в настоящее время не только на точные науки (механику, астрономию, физику), но и на другие естественные науки и некоторые области общественных наук. При этом математика служит не только средством исследования отдельных вопросов (например, математическая статистика применялась в общественных науках уже давно), но также влияет на формирование новых понятий и теорий. Математика приобретает все большее эвристическое значение, особенно в физике, где порой сначала пишутся уравнения, а потом выясняется их физический смысл. Так было, например, с квантовой механикой.

Значение математики состоит именно в том, что она оказывается методом, своего рода «идеальной техникой», создающей аппарат для других наук. Это ясно видно из таких выражений, как например «математический аппарат квантовой механики», или из отношения римановой геометрии к общей теории относительности, для которой она явилась готовым аппаратом. Понимание математики как идеальной техники не противоречит ее определению как науки о чистых формах, поскольку дедуктивное исследование логически возможных чистых форм и есть построение математического аппарата[6)].

Отделяя формы действительности от их содержания и придавая им характер самостоятельных объектов, математика не просто копирует действительность, она упрощает и вместе с тем дополняет ее (например, математический континуум включает свойства, которыми не обладают реальные величины, так как они не имеют абсолютно точных значений). Это тем более верно в отношении логически возможных форм, определяемых внутри самой математики: они создаются, а не копируются, так же как далеко идущие логические выводы из исходных понятий могут вести и ведут к результатам, не имеющим прямого прообраза в природе (как, например, теорема о существовании неизмеримых множеств).

Невозможность прямой опытной проверки подобных выводов и самое исключение опыта из математической аргументации влечет специфическую постановку вопроса об истинности таких выводов, об истинности математических теорий вообще. Теорема считается верной, если она доказана. Мате-

---

[6)] Подобно тому как в материальной технике люди, извлекая из природы нужные материалы, преобразуя и комбинируя их, создают средства овладения природой в материальной практике, так в математике, извлекая из природы путем абстракции свои понятия, преобразуя и комбинируя их, люди создают мыслительные аппараты для овладения природой в мышлении. Поэтому математика может быть названа идеальной техникой.

матическая теория верна (осмыслена), если она логически последовательна, непротиворечива. Но истина состоит в соответствии с действительностью, а логическая связь понятий и выводов — лишь ступень в ее познании.

Чистая математика лишь постольку оказывается наукой, а не произвольным логическим построением, поскольку она отражает действительность, но устанавливается это на высокой ступени абстракции не непосредственно, а через другие науки. Чистая математика исходит из практики и возвращается к ней в виде прикладной математики. В этом постоянном взаимном переходе прикладной математики в чистую и обратно и состоит главная движущая сила развития математики. Поэтому математическая теория, будучи сама по себе (а тем более в ее формально-аксиоматическом понимании) только возможной схемой описания каких-либо сторон, явлений действительности, оказывается истинной или ложной только в приложении. А такое приложение не бывает абсолютно точным и потому не устанавливает истинности теории во всем ее логически возможном развитии. Так, некоторым результатам теоретико-множественной геометрии (независимо от того, непротиворечива ли она) не удается приписать никакого реального смысла (например, теорема о существовании разбиения сферы на такое конечное число частей, из которых можно составить две сферы того же радиуса).

Сказанное выражает коренное диалектическое противоречие в самой сущности математики, являющееся специфическим для нее проявлением того общего противоречия познания, что отображение мыслью всякого элемента действительности, выхватывая его из общей связи природы, упрощает, огрубляет и вместе с тем придает ему дополнительные свойства. Проявлением этого противоречия математики служит то, что в ее абстрактности и точности заключаются ее сила и ее ограниченность. Это же противоречие обусловливает трудности ее оснований.

Структура математики. Математика состоит из следующих основных разделов: 1) алгебра; 2) теория чисел, научающая закономерности натурального ряда и других числовых систем; 3) геометрия, из которой выделяется 4) топология, изучающая топологические пространства, т. е. пространства, в которых определены понятия предела и непрерывности; 5) теория функций (одной и нескольких вещественных или комплексных переменных, функций множества, обобщенных функций); 6) теория дифференциальных уравнений; 7) функциональный анализ (разделы 5–7 часто объединяют под общим названием математического анализа); 8) вычислительные методы (примыкающие к алгебре и анализу); 9) теория вероятностей; 10) математическая логика и теория алгоритмов.

Сложная структура математики весьма приблизительно описывается приведенной классификацией; отнесение какой-либо конкретной математической проблемы к одному из ее разделов часто бывает условным. Так, на стыке 1-го и 4-го разделов лежит топологическая алгебра, предмет которой — алгебраические системы, являющиеся в то же время топологическими пространствами (простейший пример — числовая прямая); геометрия переплетается с анализом и т. п. При другой классификации можно выделить, например, «математические проблемы кибернетики», куда попадают такие математические дисциплины, как теория автоматов из 1-го раздела, теория информации из 9-го, теория игр и т. д. Наконец, из 5-го обособилась теория множеств, исследования по которой вместе с проблемами математической логики можно рассматривать в качестве содержания специальной математической дисциплины — оснований математики.

Математика и философия. Математика всегда играла большую роль в философии и испытывала на себе ее влияние. Так, математические понятия о бесконечности, о непрерывности с момента их появления служили предметом философского анализа; с ними связаны апории Зенона Элейского, в XVII в. — рассуждения о бесконечно малых и пр. Борьба материализма и идеализма в математике идет через всю ее историю от Древней Греции, где против материализма Фалеса, Демокрита и других философов выступил идеализм Пифагора, Платона и др. Идеализм находит в математике удобную почву из-за ее абстрактного, умозрительного характера. Уже в элементарной абстракции, как отметил Ленин, заключается возможность идеализма. Платон считал достойной внимания истинного философа только чисто теоретическую геометрию, исключая из нее даже исследование конических сечений, поскольку для вычерчивания они «нуждаются в применении орудий пошлого ремесла». Положение платонизма о самостоятельном бытии идей несомненно связано по своему происхождению с отделением понятий математики от их конкретного основания.

Позже математика сыграла решающую роль в формировании рационализма, который видел в ее умозрительном, строго логическом характере идеал познания. Кант в построении своей философии исходил прежде всего из вопроса о том, как возможна чистая математика. Упуская из виду ее происхождение из опыта, а видя лишь обязательность ее выводов, он приписывал ей априорный характер. Представление об априорности геометрии повлекло представление о пространстве как об априорной форме созерцания и т. д. Таким образом, кантианство в большей мере выросло из неправильного понимания математики.

Начиная с греков математика играла несомненную роль в развитии логики. Особенно эта роль усилилась в середине XIX в. в связи с исследованием основ математики анализом ее логических средств, возникновением математической логики, что оказало на саму логику громадное преобразующее влияние. На этой почве выросла философия логического позитивизма, подобно тому как «физический идеализм» вырос на почве революции в физике.

Особенности математики служили источниками разнообразных идеалистических течений в понимании ее сущности. Это прежде всего платонизм в математике, приписывающий математическим абстракциям самостоятельное существование. Он более или менее осознанно сохраняется на всем протяжении истории математики, но особенно ясно был выражен Г. Кантором, который приписывал бесконечным множествам, а вместе с ними всем понятиям математики объективное самостоятельное существование (как «транзиентной реальности») [3, с. 79–80]. Это платоновско-канторовское воззрение может быть охарактеризовано как теоретико-множественный идеализм.

Затруднения в обосновании теории множеств вызвали против нее субъективно-идеалистическую реакцию интуиционизма и ряд других течений: логицизм, конвенционализм, эффективизм, формализм, причем интуиционизм и особенно формализм сыграли большую роль в выяснении оснований математики.

Крупнейшие математики, особенно те, чьи исследования были тесно связаны с естествознанием, придерживались, как правило, материалистических взглядов на свою науку. Диалектико-материалистическое понимание сущности математики, намеченное Ф. Энгельсом в «Анти-Дюринге», разрабатывается советскими математиками, см. [4, 5]. Важны для понимания математики данные В. И. Лениным в его «Философских тетрадях» положения о сложности пути познания, о роли абстракции, о единстве и борьбе противоположностей в познании и др. Метафизический материализм, «основная *беда* коего есть неумение применить диалектики к Bildertheorie [7], к процессу и развитию познания» [6, с. 322], не может верно понять математику во всей сложности ее развития и отношения к действительности. Он либо стремится придать математическим абстракциям слишком непосредственный объективный смысл и тогда смыкается с платоновско-канторовским идеализмом, либо доходит до отрицания правомерности математических абстракций, т. е. до отрицания правомерности чистой математики. В противоположность всем оттенкам идеализма и метафизики с их односторонностью и неполнотой диалектико-материалистический подход к математике стремится рассматривать ее такой, как она есть, во всем богатстве и сложности ее связей и развития, и поэтому ведет к верному ее пониманию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1961. 2-е изд. Т. 20.
2. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1960. 2-е изд. Т. 23.
3. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985.
4. *Колмогоров А. Н.* Математика // БСЭ. М.: Сов. энцикл., 1974. 3-е изд. Т. 15. С. 467–478.
5. Математика, ее содержание, методы и значение. М.: АН СССР, 1956. Т. 1–3.
6. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1963. 5-е изд. Т. 29.

[7] Теория отражения. — *Прим. ред.*

Математика и диалектика

Сибирский математический журнал. 1970. Т. 11, № 2. С. 243–263

§1. *Математика в ее развитии*

Действительность предстает перед нами в разнообразии ее элементов, связанных многообразными отношениями. В самом общем смысле совокупность или, как говорили прежде, многообразие каких-либо элементов с какими-либо отношениями называется структурой. Наука выделяет и исследует более или менее определенные структуры той или иной степени общности. Физика отличается от других наук тем, что изучает наиболее общие взаимосвязи и соответственно структуры природы. Первой общей структурой, ставшей предметом практического овладения и отображения в первоначальных абстракциях, была структура конечных множеств с их отношениями включения, суммирования и т. п. и соответственно «арифметическая структура» — натуральные числа с их отношениями. Формирование понятия о все больших и больших числах было чрезвычайно длительным и лишь в итоге достаточно сложного процесса привело к ясному представлению о неограниченной продолжаемости натурального ряда. Здесь арифметика окончательно вышла за пределы данного в область потенциально возможного и превратилась в теорию чисел, отделившуюся от практической науки счета. Из физики конечных множеств выросла математическая арифметика.

Одновременно шло практическое и теоретическое овладение другой общей структурой — геометрической, охватывающей пространственные отношения тел и их частей и тем самым их пространственные формы. Геометрия складывается как эмпирическая наука и по своему первоначальному содержанию несомненно относится к физике. Только долгий и сложный путь развития привел к превращению геометрии в математическую науку с ее логической связью — доказательствами утверждений и отвлечением ее предмета от исходного содержания. Эмпирическое основание элиминируется; ссылка на опыт исключается из числа аргументов математической геометрии, хотя и сохраняется в идеализированной форме обращения к чертежу и в таких стандартных оборотах, как «проведем прямую AB», «наложим треугольник ABC на треугольник $A'B'C'$» и т. п.

Разрыв с эмпирией был резко обозначен открытием несоизмеримости стороны и диагонали квадрата. Это открытие было логическим выводом, исходящим из теоремы Пифагора, и хотя последняя была первоначально вовсе не теоремой, а геометрическим фактом, эмпирически установленным физическим законом, тем не менее логический вывод привел к результату, из опыта не выводимому и в точном смысле не имеющему прямого эмпирического содержания. Если раньше еще можно было думать, что неточность связана с ограниченностью наших возможностей измерения, то теперь известно, что реальные тела не имеют точных размеров, и есть все основания полагать, что всякая физическая величина за некоторыми пределами уточнения теряет свой смысл, количественное уточнение влечет переход к другому качеству; это во всяком случае несомненно для всех макроскопических величин.

Именно в указанных двух пунктах разрыва с эмпирическими данными — в представлении о неограниченном ряде чисел и в открытии несоизмеримых отрезков — наиболее ясно обозначалось формирование математики в ее существенном отличии от физики, которой она принадлежала по своему происхождению и первоначальному содержанию. Логическая связь выводов, касающихся идеализированных объектов, характерна для всякой развитой науки. Выводы одних законов физики из других осуществляются не только применением математического аппарата; специфический для физики прием мысленных экспериментов, широко примененный еще в механике и термодинамике (например, цикл Карно), в принципе не отличается от мысленного эксперимента геометрии, состоящего в проведении отрезков и дуг окружности, наложении треугольников и др. Точно так же в физике рассматриваются такие идеализированные объекты, как материальные точки, абсолютно черное тело и др. Однако всякая нематематическая теория подразумевает проверку опытом, и соответственно его показаниям изменяются применяемые понятия. Особенность же математики состоит в том, что она абсолютизирует свои абстракции; ее понятия, возникнув и определившись, закрепляются и рассматриваются как данные, сравнение же их с действительностью является задачей не самой математики, а ее приложений. Предметом математики служат сами идеализированные объекты, чистые формы, числа, а не совокупности вещей, геометрические фигуры, а не тела. Соответственно математика, как она сложилась еще в Древней Греции, определяется как наука о количественных отношениях и о пространственных формах, взятых в идеализированном, отвлеченном от содержания виде. Ее чисто дедуктивный метод является неизбежным следствием такой фиксации ее предмета, поскольку идеализированные объекты тривиальным образом не могут быть предметом опыта.

Однако нет ничего абсолютного, всякое абсолютное также и относительно. Абсолютизация абстракций математики имеет свои границы, выход за которые в самой математике порождает трудности, требующие уточнения, развития этих абстракций и способов оперирования с ними. Тем не менее исходные ее абстракции были выделены столь хорошо, что указанные трудности не возникали очень долго, так долго, что эти абстракции представлялись как абсолютные. Не они сверялись с действительностью, но эта последняя подчинялась им.

Физика нового времени в ее представлении об абсолютном пространстве, мыслившемся как само по себе евклидово, приняла это понятие из геометрии. А позже И. Кант придал пространству статус априорной формы созерцания. Словом, источник геометрии, ее возникновение как второй (вслед за физикой конечных множеств) главы физики было основательно забыто, хотя грекам оно было хорошо известно. Понадобился гений Н. И. Лобачевского, чтобы вернуться к пониманию подлинной связи геометрии с физикой и найти в этом возврате основание для совершенно нового и еще более абстрактного развития геометрии.

Развитие математики не сводится к установлению новых теорем, изобретению новых методов и определению понятий в круге уже сформировавшихся. Оно содержит также выработку существенно новых понятий, включение новых предметов и построение принципиально новых теорий. Такие наиболее существенные изменения обозначали этапы в развитии математики, как например этап, определенный возникновением анализа, или этап перехода от греческой геометрии к развитию алгебры, имевший важнейший источник в Индии. Однако, как ни были существенны эти изменения, математика оставалась наукой о количественных и пространственных отношениях и формах действительности, хотя и исследуемых в виде абсолютизируемых абстракций. «Переменные» представлялись не более как идеализированными образами реальных переменных величин физики, так же как функции — идеализированными образами реальных зависимостей. Кривые и поверхности дифференциальной геометрии были такими же идеализированными образами реальных нитей и поверхностей, как например абсолютно твердое тело или материальные точки в механике. Правда, появившиеся еще в XVI в. комплексные числа оставались мнимыми, реальный смысл их был непонятен, но они не играли существенной роли и выступали как «чудесное» пособие для решения некоторых вещественных задач.

Новое развитие математики с начала XIX в. было вызвано главным образом потребностью решать ее собственные проблемы, приобретшие, можно сказать, характер загадок. Первой по времени ее появления была загадка постулата Евклида, напрасные попытки доказательства которого тянулись уже две тысячи лет. Решение этой загадки было дано утверждением Лобачевского, что выводы из отрицания V постулата представляют собой возможную или, как он сам говорил, «воображаемую» геометрию. Решение было завершено последовавшим через сорок лет доказательством непротиворечивости геометрии Лобачевского. Вместе с другими новыми «геометриями» это превратило геометрию в науку о разного рода пространствах. Общее понятие пространства, включая и функциональные, было явно выражено Б. Риманом в его работе «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии».

Второй загадкой была загадка мнимых чисел — проблема обоснования их применения. Ее решение, данное определением комплексной плоскости и сделавшее мнимые числа «реальными», повлекло развитие теории функций комплексной переменной и образование понятия о гиперкомплексных числах. Третьей загадкой была проблема решения алгебраических уравнений; она должна была представляться загадкой потому, что хотя уравнения 3-й и 4-й степени были решены еще в XVI в., все усилия и грандиозные успехи математики не помогли пойти здесь дальше. Решение этой проблемы в теории Галуа, повлекшее разработку теории групп, вместе с гиперкомплексными числами дало толчок совершенно новому развитию алгебры, превратившему ее из учения о формальных действиях с числами и решении уравнений в науку о разнообразных алгебраических системах. Наконец, четвертой была загадка, лежавшая в само́м анализе, в понимании его основных понятий: бесконечно малых, функции и переменной. Вопрос, можно сказать, шел о смысле выражения $\lim f(x)$: что значит в нем $\lim$, f, x? Решался он именно в такой последовательности, противно логике. Коши изгнал мистические бесконечно малые, определив предел, далее последовало общее определение функции, и, наконец, в начале 1870-х гг. было дано определение вещественного числа x, более пригодное для теории, чем старое его определение как отношения любых величин, которое давал еще Омар Хайям. Но главным было все же не само по себе решение «загадки x», а создание Г. Кантором в этой связи общей теории множеств. Так загадки науки в своем решении влекут совершенно новые теории, преобразуя всю науку в целом: в физике потребность объяснить закон излучения абсолютно черного тела повлекла квантовую теорию, а загадка опыта Майкельсона — теорию относительности.

Появление воображаемой геометрии выдвинуло вопрос о ее непротиворечивости, который для геометрии Евклида, естественно, не ставился, поскольку ее основания представлялись очевидными и безусловно достойными признания: само слово «аксиома» означает «достойное признания». Отсюда и из других внутренних вопросов математики пошло развитие аксиоматического метода, остававшегося без движения со времени создания его греками. Вместе с этим методом свободное оперирование произвольными множествами дало общие приемы определения понятий математики, позволившие охватить единым образом все ее сложившиеся и вновь возникающие объекты.

Согласно этой теоретико-множественной точке зрения, всякий предмет математики есть структура, т. е. множество каких-либо объектов с теми или иными отношениями между ними и подмножествами (функция уже включается в это общее понятие, если определить ее как множество упорядоченных пар). При этом либо природа объектов и отношений остается вовсе не определенной и лишь фиксируются в аксиомах формальные свойства этих последних, как например в аксиомах группы, либо объекты и отношения определяются псевдоконструктивно, исходя из объектов и отношений, считающихся данными, как вещественное число определяется, исходя из рациональных, т. е. в конечном счете из целых чисел. Тот же псевдоконструктивный прием применяется для построения структур, служащих моделями для структур, определяемых аксиоматически, причем наличие такой модели принимается как свидетельство непротиворечивости аксиоматического определения и строящейся на нем теории.

Соответственно этому математика определяется как наука о любых возможных чистых структурах, возможных в смысле логически мыслимых, хотя бы в остальном лишь воображаемых и «мнимых», и «чистых» в том смысле, что их элементы и отношения не содержат ничего, кроме данного в самом определении этих структур [1)]. Свобода теоретико-множественных определений дала основание Г. Кантору сказать гордые слова: «Сущность математики — в ее свободе!». Однако действительная свобода требует понимания необходимости, ибо иначе субъективно свободная деятельность может вести к неожиданным результатам или даже вовсе не осуществляется, оказываясь тем самым объективно вовсе не свободной. Так произошло со свободой, провозглашенной Г. Кантором: вместе с грандиозными успехами она привела к парадоксам. Теоретико-множественная установка оказалась подорванной, и вместе с нею оказалось подорванным все стройное здание математики. В верхних его этажах шло энергичное строительство: кирпичи теорем, соединяемые цементом логики, укладывались в рамки уже определившихся разделов и воздвигались каркасы новых теорий, но в теоретико-множественном фундаменте обнаружились расширяющиеся трещины парадоксов и под ними зыбучие пески и то́пи логических трудностей. Архитекторы и инженеры — логицисты, интуиционисты, эффективисты, конвенционалисты, реалисты, формалисты — выдвигали разнообразные проекты вплоть до разрушения существенной части всего здания, как предлагали поступить интуиционисты, в частности, с чистыми теоремами существования. Единство в понимании математики было утрачено, и было заявлено, например, что для интуициониста математическая истина — в голове математика, а для формалиста — на бумаге.

Во спасение прекрасного здания математики Д. Гильберт выдвинул свой проект подвести под него прочный фундамент формализации. Математика

[1)] Это определение математики перефразирует то, которое было дано А. Н. Колмогоровым в [1].

должна опираться на строго определенные правила оперирования с символами, а так как сами эти символы, их комплексы — формулы и последовательности формул — суть достаточно определенные внешние предметы, то всякая зыбкость оснований будет исключена этой внешней предметной ясностью. Однако проект оказался неосуществимым; его собственное развитие привело к доказательству того, что никакая сколь-нибудь содержательная часть математики не может быть полностью формализована, а для той, которая формализована, непротиворечивость не может быть доказана в рамках формализовавшей ее системы. Так не на философском, а на математическом уровне было установлено, что бесконечность не может быть полностью включена в конечное и что анализ и упрочнение оснований математики не имеют пределов, не могут быть завершены. Анализ оснований оказывается столь же нескончаемым процессом, как воздвижение на этих основаниях новых теорий. Но так же, как это было с решением загадок математики начала XIX в., главным последствием исследования оснований математики в начале XX в. явилось развитие существенно преобразовавших математику новых теорий: математической логики [2)], теории алгоритмов, теории автоматов и связанной с ними теории математических машин, а также кибернетики с возникшими из других источников теориями информации, игр и др. В этих теориях в той же свойственной математике форме абсолютизированной идеализации исследуется прежде всего сама деятельность человека: возможности математического вывода и решения задач теми или иными данными средствами, передача информации, управление и др. В этом смысле математика стала и гуманитарной наукой [3)]. А появление математических машин сделало ее наукой технической. Соответственно всему этому можно говорить о существенно новом этапе в развитии математики, оформившемся в 1950-х гг.

§2. *Что такое математика*

Современный этап в развитии математики не дает основания отказаться от ее определения как науки о возможных чистых структурах. Но как при переходе к теоретико-множественной точке зрения изменилось представление о возможности и чистоте, т. е. о допустимых абстракциях, так оно изменяется и теперь при переходе к современным точкам зрения. Для уточнения мы воспользуемся принятой терминологией, различающей математику и метаматематику, хотя, как нам представляется, последняя есть то, чем занимаются математики, и является поэтому собственно математикой. В указанной

[2)] Хотя математическая логика зародилась еще в 40-х гг. XIX в., она оставалась на границе математики и философии, но теперь стала действенной частью математики со своими практическими приложениями.

[3)] Суждение о математике как о гуманитарной науке и о том, что теоремы скорее изобретают, чем открывают, я впервые слышал от А. А. Маркова уже довольно давно.

терминологии под математикой понимается совокупность формальных теорий, т. е. развиваемых по достаточно точно определенным правилам систем формальных выводов. При этом мы можем иметь в виду несколько различные уровни формализации; крайним представляется тот, который позволяет превратить теорию в определенным образом действующую машину. Но построение и исследование формальных теорий выходит за пределы математики в этом смысле и составляет предмет уже метаматематики, так что можно сказать: «Метаматематика есть наука о математике». Формальные теории сами по себе являются структурами, а другие структуры, входящие в сферу математики вообще и понимаемые с той или иной степенью содержательности на том или ином уровне абстракции, служат предметом формализации либо для интерпретации формальных теорий. Разумеется, они остаются предметом математики в общем смысле.

То же представление о математике можно выразить более наглядно. Подобно тому как материальная техника извлекает из природы разнообразные материалы, преобразует и комбинирует их, создавая человеку средства для овладения природой в практической деятельности, так и математика, извлекая из природы путем абстракции свои первоначальные понятия, преобразуя и комбинируя их, создает средства для теоретического овладения природой. Она может быть поэтому определена как «идеальная техника». Такие ходячие выражения, как «математический аппарат квантовой механики» и т. п., совершенно ясно выражают это техническое значение математических теорий. Математика в общем смысле, или, говоря уже, метаматематика, является, стало быть, наукой о математических аппаратах, и в этом смысле оказывается наукой технической. Как технические науки исследуют не саму по себе природу, а возможности ее использования человеком, так и математика исследует возможности человека: как мы можем решить ту или иную задачу. Как техника дополняет естественные органы человека своими аппаратами, позволяя экспериментатору проникнуть в области, недоступные этим органам, так математика дополняет мыслительные способности человека своими аппаратами и позволяет строить теории других наук и решать задачи, недоступные ни воображению, ни непосредственному мышлению. Но так же как всякий эксперимент завершается тем, что человек воспринимает и затем интерпретирует показания приборов, так и применение математического аппарата необходимо завершается непосредственным восприятием и пониманием его результата. Математические машины представляют не что иное, как материальную реализацию тех же аппаратов математики.

Математика и зародилась как идеальная техника — техника счета, техника решения практических задач измерения участков земли и др. Арифметика есть именно аппарат, созданный человеком путем абстракции из природы, практики понятий о числах и действий с ними. Для миллионов людей, которые пользуются арифметикой, она является таким аппаратом. То же демонстрирует возникновение анализа. И. Ньютон был вынужден изобрести аппарат для выражения законов механики и решения ее задач: дифференциальное и интегральное исчисление и явилось таким аппаратом. Уже «изменение движения», о котором говорится в ньютоновской формулировке его второго закона, в точном смысле означает производную от количества движения по времени, а определение движения по скорости или ускорениям требует интегрирования. Возникнув, анализ явился могущественным средством решения массы других задач и в свою очередь получал импульсы к развитию из физики. Напомним лишь один пример: обобщенные функции, которые в виде δ-функции были введены физиками до того, как математики создали теорию обобщенных функций. Из примеров, когда заготовленный внутри математики аппарат оказался решающим орудием развития физики, упомянем использование римановой геометрии в построении общей теории относительности, задач на собственные значения — в создании квантовой механики, теории групп — в классификации спектров и в создании теории элементарных частиц. В познании этих глубоко скрытых от нашего прямого восприятия и недоступных наглядному представлению областей природы роль математики становится особенно значительной и выступает с чрезвычайной отчетливостью. Физики сначала создают математическую форму теории, как они говорят, «математический формализм», и лишь потом начинают понимать его, что оказывается по большей части делом более трудным. Написание уравнений Шредингера и Дирака предшествовало пониманию их смысла, и до сих пор идут дискуссии об интерпретации квантовой механики среди тех, кто с успехом применяет ее математический аппарат в решении разнообразных конкретных задач.

Современный этап в развитии математики в ее отношении к другим наукам характеризуется не только этим математическим конструированием новых физических теорий. Не меньшее значение имеет проникновение математики во все науки: в биологию, экономику и т. д., вплоть до филологии. Но в этом, пожалуй, нет ничего удивительного. Поскольку всякий предмет любой данной науки есть некоторая структура, то лишь только эта структура в каком-либо ее аспекте и части оказывается достаточно четко определенной и фиксированные в ней отношения оказываются достаточно богатыми, чтобы дать почву для ее исследования в качестве чистой структуры, как она тем самым уже входит в сферу математики. Математика вырастает как универсальное средство всякой науки. Такой она была, впрочем, с самого начала, ибо ни одна наука не обходится без счета, но теперь дело идет о применениях математики не только в решении несравненно более сложных задач, но и в самом формировании понятий и теоретических представлений той или иной науки, как это было уже давно в физике и в сравнительно недавнее время стало в экономике или лингвистике.

Понимание математики как идеальной техники выясняет, далее, вопрос об истине в математике. Трудность его состоит в том, что идеальные объекты математики не только не сопоставляются в ней с действительностью, но и не имеют в этой последней точного прообраза. Достаточно вспомнить иррациональные числа, не говоря уже о таких вещах, как бесконечные множества различных мощностей. Когда в аксиоматическом определении какого-либо предмета математики речь идет о неком множестве объектов произвольной природы, то правильным оказывается афоризм Б. Рассела, что математика есть доктрина, в которой неизвестно, о чем мы говорим, и верно ли то, что мы говорим. Решение проблемы состоит, однако, попросту в понимании того, что этой проблемы нет. Математика создает свои аппараты, и бессмысленно говорить о том, истинны они или ложны: аппарат либо работает, либо не работает, а если работает, то либо продуктивно, либо плохо. Совершенно так же нелепо спрашивать: «Истинный это станок или ложный?»; станок просто есть, и осмысленным является вопрос о том, как он работает, на что он годится. Так и идеальная техника математики с ее аппаратами просто есть, она существует как особая форма социальной действительности и работает в своей сфере не хуже материальной техники. Вопрос об истине встает лишь в применениях математики, и ответ зависит уже не от нее самой, а от того, насколько правомерно данное ее применение. Конечно, сказанное упрощает и утрирует фактическое положение, так как от истины фактов, лежащих в началах математики, идет цепь переходов к формальной правильности ее абстрактных аппаратов.

Значение и оправдание математики заключается в ее применении, как и значение и оправдание техники. И как никто всерьез не занимается бесплодными техническими выдумками, так и в математике получают особенное развитие те направления, которые наиболее плодотворны в применениях. Однако техника имеет свою необходимую структуру. В станке важна не только его непосредственно работающая часть, скажем резец: лучший резец ничего не даст без всего станка в целом. Никакое современное производство не возможно без техники, обслуживающей его собственные нужды и обеспечивающей его нормальный ход. Аналогично идеальная техника математики имеет свою структуру, и без областей, обслуживающих ее собственные нужды, не может работать и развиваться сколько-нибудь удовлетворительно. Поэтому забота об одних приложениях подобна тому, как если бы в станке заботились только о резце или в промышленности — только о производстве предметов потребления. При такой заботе само это производство очень скоро пришло бы в упадок. Так же и забота о приложениях без должного внимания к опережающему развитию самой математики вела бы только к упадку развития науки.

Соответственно снятию вопроса об истине в математике решается вопрос о ее основаниях. Основания всякой науки лежат в самой отражаемой ею действительности, но поскольку предметом математики служат идеализированные объекты и обращение к опыту исключается из ее аргументов, то вопрос о ее основаниях или обосновании имеет особый характер и трудности. Теперь мы можем сказать, что вопрос касается общих принципов построения аппаратов математики. Аксиоматический метод является одним из них. Требования непротиворечивости можно понимать как то, что аксиоматически определенный аппарат вообще может работать. Из формального противоречия, как учит математическая логика, следует все что угодно, а для аппарата это бессмысленно. Вместе с тем уже вовсе не представляется необходимым, чтобы аппарат работал по правилам обычной формальной логики. В принципе не видно причин, почему правила его работы — правила вывода — не могли бы быть совсем другими, вроде того как машина может быть не механической а построенной на иных принципах, лишь бы она работала продуктивно. Фактически вместо прежнего логического монизма математики, требовавшего обычной формальной логики, сложился плюрализм с разными логиками: обычной формальной, конструктивной, минимальной, многозначной и др. Точно так же исследуются и принимаются или отклоняются разные уровни абстракции — от абстракции актуальной бесконечности в классическом духе Кантора до ультраинтуиционистского взгляда, допускающего лишь ограниченные множества целых чисел. Теперь представляется совершенно ясным, что, как уже было сказано выше, исследование и развитие математики не имеет конца, как невообразим какой-то конец развития техники, когда все возможные принципы, приемы и возможности ее создания будут установлены и останется разве лишь задача их разнообразного воплощения.

Острота прежних споров разных направлений в математике представляется чрезмерной, если посмотреть на них с более широкой точки зрения. Есть разные уровни абстракции, разные уровни строгости и даже разные логики, есть строгость на уровне инженера, физика, простого или утонченного математика и, наконец, специалиста по математической логике. Но даже эта последняя не является абсолютной. В обычном изложении оснований геометрии для университетов аксиоматика Евклида изображается негодной, а аксиоматика Гильберта идеальной. Однако это неверно, так как в обычном изложении системы Гильберта подразумевается теоретико-множественная позиция, сама нуждающаяся в выяснении ее оснований. Такой же наивной претенциозностью является распространенная манера говорить о совершенной строгости университетского курса анализа, третируя курс для инженеров или анализ времени Эйлера как нестрогие. Конечно, строгость на уровне К. Вейерштрасса — Г. Кантора, принятая в нынешних курсах анализа, выше строгости Л. Эйлера, она выше в «Основаниях геометрии» Д. Гильберта, чем у Евклида. Но все это лишь ступени в развитии строгости математики.

Точно так же разные уровни абстракции и разные подходы к основаниям математики — только ступени в их углубляющемся движении. Когда один подход выхватывается из общей связи развития и выдвигается как единственно правильный, он извращается и ведет к заблуждениям. Конечно, алгоритмическое решение глубже и сильнее чистой теоремы существования, но едва ли надо верить, что теория алгоритмов сама не может быть подвергнута критике и не потребует уточнения ее основ. И едва ли нужно вовсе опорочивать абстракцию актуальной бесконечности, чистые теоремы существования, доказательства с аксиомой выбора, если пользоваться ими с пониманием ограниченности их значения. К тому же мы понимаем, что всякое существование в математике условно, так как оно есть существование идеализированного объекта. Математическая машина безусловно существует, но это уже не идеальная, а материальная техника.

Лет двадцать назад происходила довольно жаркая дискуссия вокруг теоретико-множественной установки, которая выдвигалась как столь адекватное отражение действительности, что бесконечным множествам приписывалось реальное существование, независимое от человека: «Континуум есть некая реальность, и он должен находиться где-то на шкале алефов». Решительные возражения против такого взгляда оказались правильными: возможны разные теории множеств, с разными положениями континуума на шкале мощностей. Не так ли казалось, что евклидова геометрия — единственно возможная и что постулат о параллельных должен быть верным. Однако возможны разные геометрии, и постулат о параллельных не обязан выполняться во всех случаях, и это стало теперь общеизвестным трюизмом. Таким же трюизмом станут современные достижения в основаниях математики, а за ними последуют новые и т. д. Тем более останутся и будут исследоваться глубокие проблемы сущности математики, но они принадлежат уже не ей самой, а науке о познании, гносеологии, которая именно в настоящий период формируется уже не как область философии, а как конкретная наука.

Так математика предстанет перед нами в ее развитии от физики конечных совокупностей до современного ее состояния и дальше в том же непрестанном развитии, идущем в накоплении новых результатов и изобретении новых методов уже определившихся разделов, в создании новых теорий и восхождении к новым абстракциям, в расширении сферы охвата, в совершенствовании скрепляющей ее логики и углублении ее оснований — во всем этом процессе производства все более совершенных и мощных аппаратов для овладения действительностью.

§3. *Некоторые существенные аспекты развития математики*

Мы хотели бы обратить внимание на некоторые моменты в развитии математики, едва лишь намеченные в предыдущем изложении, и рассмотреть их более конкретно, хотя по необходимости суммарно. Начнем с аксиоматического метода.

Утверждение типа «через всякие две точки проходит прямая» выражает в первоначальном смысле закон природы[4]. В развитии геометрии это утверждение вместе с другими было положено в основание ее дедуктивного построения и в таком качестве выступает как аксиома. Таким образом, одно утверждение получает две стороны и как бы раздваивается: одной стороной, как закон природы, оно опирается на опыт, другой — как аксиома — служит опорой теоретического построения. Аналогично основные положения механики являются в исходном своем содержании ее законами, но, с другой стороны, берутся и как ее аксиомы. Цель и идеал аксиоматического метода состоят в том, чтобы построить теорию чисто дедуктивно, опираясь только на утверждения, принятые в качестве аксиом, и вовсе не обращаясь к наглядному представлению. Его задача состоит в том, чтобы отделить аксиоматическую сторону исходных утверждений от их эмпирической стороны, т. е. отрезать одну от другой и оставить нижнюю, эмпирическую, в стороне. Однако, выражаясь тем же наглядным языком, отрезанная верхняя часть будет иметь свой низ и, будучи снятой с эмпирического основания, повиснет в воздухе. Эта картина, как мы сейчас покажем, довольно точно изображает историю аксиоматического метода.

Пока не появились неевклидовы геометрии, отделения аксиом от эмпирии и тем более от наглядного представления по сути и не происходило. Аксиомы и аксиоматический метод понимались содержательно, так же как это имеет место, например, при аксиоматическом построении статики и т. п. За результатом дедуктивного вывода сохранялось достоинство объективной истины. Хотя, например, несоизмеримость отрезков эмпирически непроверяема, но, насколько можно судить, никто не рассматривал ее как одно лишь построение ума, не касающееся реальности. Появление разных геометрий, имевшее источник в исследовании аксиом геометрии именно в качестве аксиом, подорвало это убеждение. Сами аксиомы стали условными. На помощь были привлечены модели, которые придавали выводам разных геометрий то же достоинство истин, хотя и в более расширенном смысле: уже делом выбора стало относить геометрические факты внутри круга к геометрии Евклида или Лобачевского.

Теоретико-множественная установка придала аксиоматическому методу абстрактную форму, отвлекая аксиомы от всякого содержания, кроме того, что они вообще относятся к множеству каких-то объектов. Здесь, казалось, идеал аксиоматического метода был достигнут: эмпирия и связанное с нею содержание были оставлены вовсе. Но тогда, как это подчеркнул Рассел, стало неизвестно, о чем мы говорим, а потому также неизвестно, верно ли то, что мы говорим. Короче, осуществление идеала аксиоматического метода

[4] Иная формулировка — «через каждые две точки можно провести прямую» выражает объективные возможности деятельности человека и, стало быть, также объективный закон.

превратило его в бессмыслицу. Конечно, оставались доказательства непротиворечивости посредством моделей, но если сами эти модели определялись аксиоматически, для них имело место то же положение, они должны были поэтому пониматься содержательно, и в конечном счете основание их обращалось к опыту. Однако применение теоретико-множественной установки вело к выводам, содержательное понимание которых оказалось невозможным, они были нереальны, если не верить в ту «транзиентную реальность» любых бесконечных множеств, которую принимал сам Г. Кантор. Понятия множеств любой мощности, неизмеримых множеств и т. д. уходили слишком далеко. К тому же свободное оперирование с множествами приводило к парадоксам. Идеал аксиоматического метода в его теоретико-множественном осуществлении расшатывался.

Тогда было осознано — и это было подготовлено уже начавшимся развитием математической логики, что само представление, будто теория строится на одних аксиомах, неверно по той простой причине, что строится она посредством рассуждений и что, стало быть, ее построение зависит от их логики. Поэтому для действительно аксиоматического построения теории нужно включить в ее аксиомы применяемые правила образования осмысленных в теории утверждений, правила допустимых определений и правила вывода. В таком виде аксиоматическая теория уже ни к чему не относится — ни к эмпирии, ни к множествам; она сама есть реально определенная и столь же в принципе реально развиваемая последовательность формул, т. е. внешних предметов.

Так аксиоматический метод приобрел новую форму — логико-математическую. В этой форме он, как сказано, действительно отделился от исходной сферы опыта и от всякого содержания. Но это удалось только потому, что он сделал саму теорию предметом материальной деятельности, превратив ее в выведение формул, а рассуждения о них ведутся в том же примерно духе, как мы рассуждаем о формулах в элементарной алгебре или о фигурах в шахматной игре. Сама формализованная теория стала содержанием математических рассуждений, особого рода «внешним предметом». Наконец, «машинная математика» позволяет, хотя бы в принципе, передавать такое развитие теорий машинам, и здесь они переходят в материальную действительность, из устремлений отрыва от которой они сами выросли. Но они переходят в нее уже не в качестве ее отражения, а в качестве самой действительности. Машина есть материальный объект, ее работа есть материальный процесс, он есть, и поэтому нет вопроса о его обосновании и пр. Вопрос идет уже о том, чтобы машина работала, и если работает, то давала бы продукт, которым мы можем разумно воспользоваться.

Таким образом, данный обзор аксиоматического метода раскрывает внутреннее противоречие в самой его цели, заложенное в раздвоении единого утверждения на эмпирическое и аксиоматическое. Мы могли также убедиться, что указанное противоречие служило внутренним основанием развития аксиоматического метода.

Уже давно высказана была мысль, что математика — речь шла о математике 1930-х гг. — слагается из алгебры и топологии. В частности, анализ есть не что иное, как теория отображений локально бикомпактных, связных, коммутативных полей или их декартовых произведений. Не вдаваясь в обсуждения того, насколько и в каком смысле указанная общая точка зрения может быть применена к современной математике, мы во всяком случае должны признать за нею серьезные основания. Обратимся, однако, к истокам. Мы обнаруживаем в материальной действительности две общие и взаимно противоположные формы существования; дискретность и непрерывность, отдельные целые предметы, перестающие быть самими собой, если их делить на части, и такие предметы или среды, которые не разделены на части, но достаточно легко делятся, не переставая быть тем же самым. Эти общие формы возникали в деятельности древних людей в виде, например, топоров и стрел, делить которые значило ломать, и в виде воды или зерна в его массе, которые легко делить. Обращение с дискретными предметами породило счет — арифметику; непрерывность осваивалась главным образом в ее пространственном виде, откуда пошла геометрия. Алгебра является развитием арифметики и имеет дело с такого же рода абстрактными структурами, в ней математика исследует дискретное. Топология же и есть общее математическое учение о непрерывности.

Геометрия начиналась, насколько можно судить, с измерения. Измерение есть не что иное, как применение дискретного к непрерывному. Так, непрерывное расстояние измеряется шагами, которые считают. Целых чисел оказалось недостаточно, и именно из потребности измерения возникли дроби. Так развитие понятия о числе началось с взаимодействия дискретного и непрерывного. Углубление греков в природу непрерывного привело к атомистической концепции: непрерывная величина представлялась состоящей из ничтожно малых частиц, которые в принципе можно считать (это послужило у Демокрита созданию прообраза интегрального исчисления суммированием тонких слоев). Соответственно всякая величина измерялась рациональными числами. Число было рациональным. Открытие несоизмеримых отрезков опрокинуло геометрический атомизм. Непрерывность предстала в своем своеобразии и послужила предметом глубоких философских рассуждений и математических построений; на месте атомизма была создана теория отношений. Но сами отношения не были осознаны греками как числа. Этот громадный интеллектуальный шаг был совершен позже в Индии.

В эпоху формирования анализа атомизм возродился снова у Б. Кавальери и др.; непрерывное мыслилось состоящим из дискретных, хотя и бесконечно малых величин. Но идущая от И. Ньютона точка зрения чистой непрерывности возобладала, актуально бесконечно малые были изгнаны, и, например, у Б. Римана пространство определяется как протяженность; оно не состоит из точек, хотя в нем можно отмечать или выделять точки. Но углубление в понятия «протяженность», «непрерывная переменная x» привело к представлению о них как о множествах точек или чисел. Непрерывное опять было сведено к дискретному, хотя в гораздо более тонком смысле. Это же дало теорию вещественного числа, так что движение понятия числа тоже было связано с взаимосоотношением дискретного и непрерывного. В той же связи осуществлялась «арифметизация» математики.

Однако трудности теории множеств вызвали реакцию, и снова была выдвинута чистая непрерывность, несводимая к множеству отдельных элементов. Континуум — это среда, в которой математика «вылавливает» вычислимые числа. Представляется понятным по самой природе вещей, что непрерывное несводимо к дискретному. В эмпирическом смысле, как указал еще А. Пуанкаре, оно означает переход через равенства к неравенству: $A = A_1, A_1 = A_2, \ldots, A_n = B$, но $A \neq B$. Это при наших математических привычках представляется нелепым. Но посмотрите на стрелку ваших часов: она стоит на месте и все же меняет его. Математика и вырабатывает аппараты для более совершенного овладения природной непрерывностью, бесконечностью, неопределенностью посредством дискретного, конечного, определенного. Греческий атомизм и теория отношений, классическая теория вещественных чисел, теория вычислимых чисел и т. п. — только ступени в движении математики.

Отметим некоторые моменты этого общего движения. Мы уже имели случай упомянуть важные достижения индийской математики. Первое — создание современной системы счисления с нулем. Главным здесь было именно изобретение, состоящее в том, чтобы обозначить особым знаком отсутствующий разряд. Его нет, но само его отсутствие было представлено как наличие «ничего», которое хотя и есть ничто, но получило обозначение. Мы настолько привыкли к написанию 103 и т. п., что не замечаем совершенно особенного, глубочайшего шага мысли, который был здесь совершен. Мы поймем это лучше, если осознаем, что никто из греков, даже гениальный Архимед, не смог сделать подобного шага. Нетривиальность его блестяще выражена в афоризме П. А. М. Дирака, высказанном им в связи с «теорией дырок» (теория позитрона): «Ничто, помещенное во что-нибудь, вполне эквивалентно чему-нибудь, помещенному в ничто».

Второе достижение индийской математики — введение отрицательных чисел. Одним из конкретных его источников было сопоставление наличности и долга. Здесь даже нечто худшее, чем отсутствие величины, было осознано как величина, хотя и совершенно противоположная существующей, но вместе с тем входящая с нею в общую систему и в этом смысле — величина того же рода. Третьим достижением было введение иррациональных чисел. Отсутствие численной меры отношения, когда величины несоизмеримы, было представлено как то, что все же понимается как число, с которым можно производить вычисления. Такие операции, как освобождение от иррациональности в знаменателе и др., начали осуществляться индусами.

Распространенное утверждение, будто античная математика была наукой о постоянных величинах, несомненно ошибочно, хотя бы потому, что греки вычисляли таблицы тригонометрических функций для нужд астрономии. Они изучали движение, но не вообще движение, а данное — движение небесных светил. Так же они изучали функции но не вообще, а заданные конкретными конструкциями, как, скажем, синус. Заслуга И. Ньютона, Г. Лейбница и их предшественников состояла поэтому не в том, что они стали рассматривать переменные и функции, а в том, что они сделали предметом математического исследования любые функции; любые, конечно, в рамках их представлений — в современном смысле их можно понимать как любые аналитические. Это соответствовало тому, что механика сделала своим предметом не одно движение небесных тел, но движение вообще. Для греков это лежало вне математики, кривые, не заданные геометрическим построением, они называли механическими. Превращение нематематических кривых в математические и было главным идейным шагом в создании анализа.

Упоминая в $\S\,1$ о выяснении смысла мнимых чисел, мы уже говорили о превращении их из мнимых, воображаемых в реальные, т. е. ставшие вполне обоснованным понятием и действенным средством не только в самой математике, но и далеко за ее пределами. Достаточно вспомнить, что знаменитая ψ-функция квантовой механики комплекснозначна. Подобное явление в еще более яркой форме видно в создании неевклидовой геометрии. Н. И. Лобачевский восстановил понимание связи геометрии с физикой и на этой основе пришел к убеждению возможности своей «воображаемой» геометрии. Но именно создание этой геометрии повлекло ясное разделение геометрии как части математики и как части физики, исследующей свойства реального пространства. Вместе с тем «воображаемая» геометрия оказалась затем вовсе не воображаемой, а имеющей простой смысл, ничуть не менее реальный, чем евклидова планиметрия. Можно еще вспомнить, что пространство скоростей в теории относительности есть пространство Лобачевского.

Бесконечность по исходному представлению и понятию есть то, что не может быть исчерпано и охвачено как нечто целое и завершенное. Она выпадала поэтому из логики. Гениальность Г. Кантора состояла именно в том, что он имел интеллектуальную смелость допустить мысль о бесконечности как о чем-то данном, целом, завершенном. Стоило только помыслить натуральный ряд в таком виде, как за ним сама собою ставится ω, и разворачивание ординальных трансфинитов не составляет уже ничего особенного. Стоило также принять, как доступное логике, то уже давно известное, но казавшееся противоречием, алогизмом свойство бесконечных множеств, что в них «целое равно части», и найти различие счетного и несчетного, как различение мощностей уже напрашивается как бы само собою. Кстати, само по себе доказательство несчетности континуума проще простого. Сущность теории Кантора в подчинении бесконечного логике конечного. Однако бесконечное все же бесконечно в смысле неисчерпаемости, в смысле невозможности исключить из всей его сферы всякое противоречие. Простейшая бесконечность — натуральный ряд не охватывается никакой формальной теорией. Здесь так же, как в случае непрерывности, движению математики не видно конца: она все глубже исчерпывает в своих теориях бесконечность, но процесс этот бесконечен, ибо бесконечное и есть то, что неисчерпаемо.

§4. *Диалектика и математика*

В рассмотренных только что моментах развития математики бросается в глаза общая их черта: установление «тождества противоположностей». «Ничто» противоположно «чему-то», но в форме отсутствия данного разряда оно изображается как «нечто» — нуль; оно есть «определенное ничто» и именно поэтому есть также нечто определенное. Отношение, невыразимое никаким числом, определяется как число. Нематематические функции превращаются в математические. Невозможная геометрия осознается как возможная. Бесконечность, не мыслимая как завершенная, мыслится как завершенная. Это и есть диалектика, есть переход в противоположность, изменение понятия вплоть до отождествления противоположностей, осознание полного отрицания как в некотором смысле «того же самого», как отрицательное число есть тоже число.

Другие кардинальные моменты истории математики, если бы мы имели место рассматривать их, демонстрируют то же самое. Они были кардинальными именно потому, что то, что казалось в принципе недопустимым в математике, иррациональным, мнимым, невозможным, невыразимым в точных понятиях, неподвластным логике, превращалось в рациональное, действительное, возможное, выразимое в точных понятиях и подвластное логике; и оно включалось в систему математики не как нечто инородное, чуждое, влекущее противоречия, а как жизнеспособная и действенная часть, неразрывно связанная с ранее сложившимися.

Когда говорят: «Диалектика в математике не нужна — я доказываю теоремы без диалектики», то во второй части фиксируют несомненный факт, ибо доказательство следует достаточно формальному пути и иначе не есть математическое доказательство. Но так же шофер, ведущий машину, не пользуется теорией тепловых двигателей, ни какой бы то ни было частью теории автомобиля. Он также может гордо заявить, что ему все эти теории не нужны, он и без них обходится прекрасно. Но он упускает из виду, что для того, чтобы он мог «без них обходиться», именно эти теории и нужны — без них автомобиль был бы по меньшей мере плох. Так же и те, кто из ненадобности диалектики в доказательствах заключают о ее ненадобности вообще, упускают из виду простой факт: они могут доказывать свои теоремы только потому, что область понятий, к которой их теоремы относятся, была когда-то определена и что этот процесс определения новой области науки, формирования принципиально новых понятий вовсе не формальный, но имеет свою, хотя и более трудную и глубокую, логику. Эта логика — логика изменения понятий в соответствии с задачами познания — и есть диалектика. Поэтому утверждения о ненужности диалектики, философии и прочее есть не более как та же самодовольная некультурность, какую проявляет иной неразвитый «деляга», чванящийся тем, что «все эти теории ему не нужны». Следует подчеркнуть тот исторический факт, что почти все действительно великие математики были философами-мыслителями [5)].

Теперь, обратившись к § 2, мы вспоминаем сказанное о взаимодействии абстракций дискретного и непрерывного, о роли этого взаимодействия в развитии понятия числа и фундаментальных теорий математики. Это была борьба противоположностей, составлявшая внутренний импульс развития математики. Она начиналась с применения дискретного к непрерывному в измерении. Далее непрерывное было сведено к дискретному в атомизме, но именно через неограниченное мысленное продолжение измерения выявились несоизмеримые величины. Измерение пришло к собственному отрицанию. Не прослеживая здесь снова дальнейшего процесса, отметим только, как теоретико-множественная точка зрения сама в своем развитии вызвала свое собственное отрицание.

Аналогичное обнаруживается в развитии аксиоматического метода. Раздвоение единого утверждения на эмпирическое и аксиоматическое, закон и аксиому, стремление отделить эту последнюю от ее основания было внутренним противоречием в самой идее аксиоматического метода, которое, как мы видели, подтолкнуло его развитие во взаимодействии с влияниями, шедшими из других сфер математики. В этом движении аксиоматического метода мы видим переходы в противоположность. От исходного содержательного понимания происходит переход к теоретико-множественному с отрывом от содержания и тем самым от опыта. Но так аксиоматический метод теряет смысл и основание, и потому необходимо возвращение к содержательному пониманию, к материальной действительности, но уже совершенно иным образом. Сама формальная теория становится содержанием математического рассмотрения, и она же в виде переданной на машину оказывается объективной действительностью, материальным процессом, хотя и не природным,

---

[5)] Начало греческой математики связано особенно с именами Фалеса, Пифагора, Демокрита; создание анализа обязано Р. Декарту, Г. Лейбницу, И. Ньютону (которого лишь по незнанию его сочинений не оценивают как философа-мыслителя); далее можно назвать Н. И. Лобачевского, Б. Римана, Г. Кантора, А. Пуанкаре, Л. Э. Я. Брауэра, Д. Гильберта, Н. Винера и др.

а созданным человеком. Происходит отрицание отрицания, как оно происходило в переходах от атомизма к чистой непрерывности, от нее к атомизму бесконечно малых, от него опять к чистой непрерывности и т. д. Тот же процесс мы могли констатировать в отношении формальной установки Гильберта: его собственная теория доказательства побудила ту работу К. Гёделя, которая доказала невозможность реализации гильбертовской программы.

Наконец, противоречие содержится в самой сущности математики, определяемой абсолютизацией ее абстракций. Возникнув из практики, как физика, она превратилась в чистую математику, имеющую своим предметом идеальные объекты и исключающую аргумент опыта. Однако отображение в понятии даже малейшего элемента действительности никогда не бывает полным, абстракция выхватывает некоторый, пусть существенный и общий, но все же только некоторый аспект. Поэтому абсолютизированная абстракция неизбежно содержит в себе элементы, каких нет в действительности, и вместе с ними момент заблуждения, тем более что она абсолютизируется. Достаточно подумать об абсолютизации ньютоновской механики, как нам представится страшная картина полного вырождения физики. Поэтому математика не может существовать сама по себе, она иначе могла бы превратиться если не целиком, то хотя бы в заметных частях в игру ума. Поэтому чистая математика находит источники своего содержания и значения только в переходах ее в прикладную и обратно. Иначе говоря, она отрицает себя как чистую и только через такое постоянное отрицание и отрицание этого отрицания оказывается жизненной, оказывается мощным орудием человека. Там, где она опережала физику, она давала последней свой готовый аппарат, результаты применения которого возвращались к ней обратно сильнейшими импульсами развития.

Абсолютизация абстракций естественно превращает их в основание для восхождения к новым абстракциям и т. д. Такое свободное движение математики порождает внутри нее новые понятия, но оно так же таит в себе трудности и даже опасности, как представляло трудность понимание комплексных чисел и привело к опасностям развитие теории множеств. Именно в этих пунктах трудностей и противоречий возникали при их разрешении дальнейшие импульсы к развитию, как мы могли это, хотя бы очень бегло, проследить в § 1 на примере загадок математики начала XIX в. Та же абсолютизация абстракций с ее отрывом от опыта ставит особым образом комплекс вопросов, касающихся оснований математики.

Словом, как мы уже имели случай сказать, «нет ничего абсолютно абсолютного», и поэтому математика в своем существе содержит противоречие, содержит свое собственное отрицание как науки, которое постоянно разрешается и преодолевается в процессе ее внутреннего развития, в ее взаимодействии с другими науками и практикой. Если мы понимаем ее теперь как «идеальную технику», то, можно сказать, она и развивается как техника в ее применении к производству продуктов потребления и машин, обслуживающих другие области, в своих внутренних потребностях совершенствования. Она есть могущественное и универсальное орудие познания и решения задач всюду, где выявляются достаточно четко определенные структуры. Но само выделение таких структур, так же как формирование новых принципов математики, выходит за пределы ее собственных методов, подобно тому как существенные, революционизирующие преобразования техники имеют источники вне ее. Если математика абсолютизирует свои абстракции, то, прежде чем быть закрепленными, они должны быть образованы, а именно это и есть самое трудное и важное в развитии теоретического познания.

Таким образом, саму математику обусловливает более первоначальный, фундаментальный и более универсальный метод теоретического познания — диалектика, логика образования новых понятий, логика, в частности, формирования и общего исследования аппаратов — понятий, формальных теорий математики. «Всесторонняя, универсальная гибкость понятий, гибкость, доходящая до тождества противоположностей, — вот в чем суть. Эта гибкость, примененная субъективно, = эклектике и софистике. Гибкость, примененная *объективно*, т. е. отражающая всесторонность материального процесса и единство его, есть диалектика, есть правильное отражение вечного развития мира» [2, с. 99].

Но: «Мы не можем представить, выразить, смерить, изобразить движения, не прервав непрерывного, не упростив, угрубив, не разделив, не омертвив живого. Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление, — и не только мыслью, но и ощущением, и не только движения, но и **всякого** понятия.

И в этом *суть* диалектики. *Э т у - т о с у т ъ* и выражает формула: единство, тождество противоположностей» [2, с. 233].

В тем большей степени происходит упрощение, огрубление, разделение, когда абстрактное понятие закрепляется, абсолютизируется, и потому тем больше необходимость его уточнения, изменения, усовершенствования, развития — необходимость отрицания его как закрепленного и восхождения через объективную гибкость мысли к новым, более совершенным понятиям. Вместе с тем: «Мышление, восходя от конкретного к абстрактному, не отходит — если оно *правильное* (NB) ... — *о т* истины, а подходит к ней. Абстракция *материи, закона* природы, абстракция *стоимости* и т. д., одним словом *все* научные (правильные, серьезные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, *п о л н е е*» [2, с. 152]. «Познание есть отражение человеком природы. Но это не простое, не непосредственное, не цельное отражение, а процесс ряда абстракций, формирования, образования понятий, законов etc., каковые понятия, законы etc. (мышление, наука = „логическая идея“) и *охватывают* условно, приблизительно универсальную закономерность вечно движущейся и развивающейся природы... Человек не может охватить = отразить = отобразить природы *всей*, полностью ее „непосредственной цельности“, он может лишь *вечно* приближаться к этому, создавая абстракции, понятия, законы, научную картину мира и т. д. и т. п.» [2, с. 163–164].

Так математика в нескончаемом процессе формирования ее абстракций и создания ее аппаратов позволяет охватывать природу познанием все глубже, вернее и полнее. Понимание диалектики ее движения практически важно, в частности, для того, чтобы не делать фетишей из отдельных его моментов и направлений, а видеть их условность, ограниченность, необходимую взаимосвязь и переходы в общей связи и развитии математики. Об этом мы уже говорили в конце § 2. Все споры чистых математиков и прикладников о том, кто важнее, споры сторонников актуальной бесконечности и ее противников, канторианцев и ультраинтуиционистов и т. д. — все это только непосредственно жизненное проявление борьбы противоположностей в развитии математики. Если стороны владеют диалектикой, их спор оказывается более продуктивным, ведет к взаимному обогащению и общему развитию, иначе они расталкиваются и только закрепляются во внешнем противоречии. В таком виде всякий оттенок понимания математики легко обращается в заблуждение, в метафизику, в идеализм. Примером может служить интуиционизм, который в его толковании математики оказался субъективным идеализмом. Однако более рациональное понимание оснований и устремлений интуиционизма привело к интерпретации интуиционистской логики как логики задач и потом к конструктивной установке с ее конкретными математическими результатами без всякого идеализма.

«Философский идеализм есть *только* чепуха с точки зрения материализма грубого, простого, метафизичного. Наоборот, с точки зрения *диалектического* материализма философский идеализм есть *одностороннее*, преувеличенное... развитие (раздувание, распухание) одной из черточек, сторон, граней познания в абсолют, *оторванный* от материи, от природы, обожествленный» [2, с. 322]. Конвенционализм А. Пуанкаре, интуиционизм Л. Э. Я. Брауэра и др. — это лишь преувеличенное, одностороннее развитие отдельных сторон математики, как условность ее аксиом, абсолютизированная А. Пуанкаре, или также превращенная в абсолют Л. Э. Я. Брауэром интуитивная ясность построения натурального ряда прибавлением единиц в отличие от интуитивной неясности актуальной бесконечности.

Возвращаясь к определению В. И. Лениным сути диалектики, приведем следующие его примечательные слова, которыми начинается его краткая, но, как обычно, богатая мыслями заметка «К вопросу о диалектике». В. И. Ленин писал: «Раздвоение единого и познание противоречивых частей его... есть *с у т ь* (одна из „сущностей“, одна из основных, если не основная, особенностей или черт) диалектики. Так именно ставит вопрос и Гегель...

Правильность этой стороны содержания диалектики должна быть проверена историей науки. На эту сторону диалектики обычно (например, у Плеханова) обращают недостаточно внимания: тождество противоположностей берется как сумма *примеров* [„например, зерно“; „например, первобытный коммунизм“. Тоже у Энгельса. Но это „для популярности“ …], а не как *закон познания* (*и* закон объективного мира)» [2, с. 316].

Данная работа представляет собой некоторое выполнение сказанного В. И. Лениным: доказать правильность сути диалектики историей науки, в данном случае математики, и показать, что тождество и борьба противоположностей в математике есть закон ее движения и, стало быть, закон познания. Мы также старались показать, что общие понятия диалектики представляют хорошее средство общего описания и выявления закономерностей развития математики. Понятно, мы не могли все это сделать с достаточной полнотой. Но, думается, нам все же удалось показать, насколько глубоко видел В. И. Ленин задачи теории познания, насколько он был прав и здесь.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмогоров А.Н.* Математика // БСЭ. М.: Сов. энцикл., 1938. 1-е изд. Т. 38.
2. *Ленин В.И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1963. 5-е изд. Т. 29.

О геометрии в школе [1)]

Математика в школе. 1980. № 3. С. 56–62

Наше среднее образование страдает перегрузкой. Но даже постановления, обязывающие преодолеть эту болезнь, не ведут к радикальным результатам: каждый специалист настаивает на том, что без «его» предмета, без таких-то и таких-то разделов обойтись никак невозможно. Но если спросят: почему? — то последует ответ: это невозможно никак, потому что никак невозможно ибо образование и состоит в наполнении человека знаниями. Однако, по более глубокому пониманию, цель среднего образования состоит в том, чтобы дать человеку основные практически нужные знания и развить его личность, развить духовно — в умственном и нравственном отношении (последнее и есть самое главное). Поэтому вопрос о нужности любого школьного предмета, о необходимости того или иного его раздела сводится к практической надобности и значению в развитии личности. При этом выясняется, что кое-что, а то и довольно многое можно исключить из программ без сожаления, а кое-что следовало бы и добавить. Только решить этот вопрос для каждого предмета не очень просто; поэтому его решение заменяют уверениями в надобности «своего» предмета.

Понимание того, что практически нужно в данном предмете и что в нем может служить развитию личности, должно определить и содержание предмета, и постановку его преподавания. В конечном счете это понимание должно служить основой для решения всех вопросов преподавания.

Мы рассмотрим в этом плане курс геометрии, особенно стереометрии, прежде всего с точки зрения его роли в развитии личности. Одним из результатов нашего рассмотрения будет вывод, что из программы стереометрии полезно исключить целых два раздела.

[1)] В 1980 г. статья опубликована в журнале «Математика в школе» под названием «О геометрии». Название «О геометрии в школе» дано автором при переиздании статьи в книге: *Александров А. Д.* Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 75–91. — *Прим. ред.*

1. *Противоречивая сущность геометрии*

Особенность геометрии, выделяющая ее не только среди остальных частей математики, но и среди других наук вообще, состоит в том, что в ней строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга.

Воображение дает непосредственное видение геометрического факта и подсказывает логике его выражение и доказательство, а логика придает точность воображению и направляет его к созданию картин, обнаруживающих нужные логические связи.

Это, несомненно, так для трехмерной евклидовой геометрии. Но в содержательном основании неевклидовой и многомерной геометрии тоже лежат наглядные представления, хотя бы обобщенные; без них любой раздел геометрии, естественно, перестает быть геометрией. Но здесь мы будем говорить не о всей геометрии, а о той ее части, которая изучается в школе, и при этом специально о стереометрии.

Именно в стереометрии указанная особенность геометрии выступает наиболее ярко. Во-первых, потому что в ней требуется пространственное воображение. Факты изображаются на доске и на бумаге в их подлинном виде (не считая того, что нельзя нарисовать бесконечную прямую без всякой толщины и т. п.). Но факты стереометрии изображаются условно и потому не могут быть верно восприняты без дополнительного пространственного представления, а оно составляет известную трудность, нередко значительную. Во-вторых, стереометрия изучается в последних классах школы, когда учащиеся должны быть достаточно развиты для того, чтобы воспринять логику дедуктивного изложения. Поэтому курс стереометрии можно и следует строить с большей логической последовательностью и доказательностью, чем курс планиметрии.

Таким образом, мы с большим правом можем повторить о курсе стереометрии то, что было сказано о геометрии вообще. Стереометрия и должна быть преподана в соединении наглядности и логики, как живое пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой.

Живое воображение скорее ближе искусству, строгая логика — привилегия науки. Они, можно сказать, совершенные противоположности («лед и пламень не столь различны меж собой»). Однако геометрия их все же соединяет, и задача преподавания — соединить их в одном учебном предмете.

Это есть реальное взаимопроникновение, единство противоположностей, противоречие в самой сущности предмета, которое не может быть устранено иначе, как уничтожением самого предмета, т. е. ликвидацией курса геометрии и заменой его чем-то другим. Это противоречие составляет особую трудность, но вместе с тем и особую прелесть геометрии. Трудно сочетать столь противоположные свойства, как живость воображения и строгость мысли, но зато, когда их единство осуществляется, достигается большая ясность понимания и радость непосредственного «ви́дения» истины.

В курсе геометрии соединяются еще две противоположности: абстрактная математическая геометрия и «реальная геометрия» — пространственные отношения и свойства материальных тел. Это противоречие выступает уже в тот момент, когда на доске «проводят прямую» и говорят: «Проведем прямую через точки A и B». Но на доске нет точек и невозможно провести прямую: геометрические точки и прямые — это идеальные объекты, они не существуют иначе, как в абстрактном мышлении, их, в строгом смысле, нельзя даже представить, а можно только мыслить.

Утверждения геометрии высказываются и доказываются для идеальных геометрических объектов, но воспринимаются как утверждения об объектах наглядно представимых и применяются к реальным вещам, в которых идеальные объекты геометрии реализуются нередко очень условно. Стереометрия начинается с того, что «через три точки проходит плоскость». Но показать это реально можно лишь с чрезвычайной условностью. Плоскость в реальности — это либо плоский предмет, либо плоская поверхность предмета, т. е. не геометрическая плоскость как таковая, тем более бесконечная.

При всей своей абстрактности геометрия возникла из практики и применяется в практике. Поэтому преподавание геометрии обязательно должно связывать ее с реальными вещами, с другими дисциплинами, особенно с физикой (и через приложения, и в иллюстрациях геометрических понятий и утверждений, и в определениях основных понятий).

Например, в действующем курсе геометрии перемещение определяют как отображение всего пространства или (в планиметрии) всей плоскости. Но это нелепо. На самом деле перемещают предметы. Соответственно в курсе геометрии нужно начинать с понятия о перемещении фигур как образе реальных перемещений предметов с одного места на другое [2)], что отвечает наглядному представлению и удобно в геометрии (например, если нужно одновременно переместить две фигуры так, чтобы они покрыли данную точку). При всем этом связь геометрии с реальностью заключает противоречие — несоответствие реальных вещей геометрическим абстракциям.

Таким образом, преподавание геометрии должно включать три тесно связанных, но вместе с тем и противоположных элемента: логику, наглядное представление, применение к реальным вещам. Этот «треугольник» составляет, можно сказать, душу преподавания геометрии; воображение ближе к реальности. Задача преподавания геометрии — развить у учащихся соответствующие три качества: пространственное воображение, практическое понимание и логическое мышление.

[2)] Перемещение материальной точки с одного места на другое — из геометрической точки A в точку B и осуществляет отображение A на B.

Разумеется, одна из задач курса геометрии — дать учащимся основные понятия и умения в области геометрии. Однако все же главные, глубинные задачи преподавания геометрии заключены в трех указанных элементах, во-первых, ввиду их значения для общего развития, во-вторых, потому что они уже включают основное из тех знаний, которые должен давать курс геометрии. Поэтому остановимся сначала на этих элементах.

2. Воображение и реальность

Воображение — это прекрасная и могущественная способность человека. Что являет собой в подавляющей части искусство и техника, как не воплощенное воображение! Научные идеи и теории также оказываются в большей мере его порождениями. Пространственное воображение, развитию которого служит геометрия, составляет важный компонент в общей способности человека к воображению и имеет существенное значение в ряде отношений. Оно, разумеется, вообще необходимо человеку для ориентировки в окружающем мире и в развитой форме существенно для многих видов деятельности. Оно нужно квалифицированному рабочему, инженеру, архитектору, авиатору, скульптору и т. д. Вместе с тем развитие пространственного воображения расширяет видение мира, делает его более пространственно выпуклым и содержательным подобно тому, что делает стереоскоп с плоскими снимками. Развитое воображение обогащает внутренний мир человека, давая ему возможность создавать в себе и созерцать разнообразные картины.

Словом, развитое пространственное воображение — это важный элемент общей культуры. Геометрия, требуя воображать геометрические образы в их идеальной точности и логической определенности, дает этим пространственному воображению утонченность и точность.

Великий архитектор нашего века Ш. Э. Ж. Ле Корбюзье писал:

«Геометрия есть средство, с помощью которого мы воспринимаем среду и выражаем себя.

Геометрия — это основа.

Кроме того, она является материальным воплощением символов, выражающих все совершенное, возвышенное.

Она доставляет нам высокое удовлетворение своей математической точностью.

Машина идет от геометрии. Следовательно, человек нашей эпохи своими художественными впечатлениями обязан в первую очередь геометрии. После столетия анализа современное искусство и современная мысль рвутся за пределы случайного, и геометрия приводит их к математическому порядку и гармонии. Эта тенденция усиливается с каждым днем» [1, с. 25].

Во вдохновенных словах Корбюзье геометрия воспета в ее воплощении в реальных вещах, в единстве геометрического образа и его материального осуществления. «Машина идет от геометрии», вся техника пронизана геометрией и начинается с геометрии, ибо всюду, где нужна малейшая точность размеров и формы, где нужна структурность взаимного расположения частей, вступает в силу геометрия.

Конструктор, рабочий-изобретатель, инженер представляют себе сначала примерный вид создаваемой детали или конструкции, чертят, уточняют, делают модели; наконец, складывается точное представление, делаются рабочие чертежи, и по ним воссоздают пространственный вид предмета, изготовляют его. Так происходит взаимодействие пространственного воображения, изображения на чертеже и реального воплощения в модели или в готовом предмете.

В механике и в физике геометрические представления также играют фундаментальную роль уже потому, что движение, процессы происходят в пространстве. Вспомним хотя бы кинематику и геометрическую оптику. Вспомним еще строение кристаллов, пространственные модели сложных молекул, симметрию живых организмов и др.

О значении пространственных представлений в изобразительном искусстве и архитектуре говорить не приходится — оно очевидно. Отметим, между прочим, что посвященная искусству книга одного из самых выдающихся советских художников К. С. Петрова-Водкина называется «Пространство Евклида».

Ученику нужно показать эти реальные связи и воплощения геометрии в жизни, в природе, в искусстве, в технике и науке, чтобы геометрия предстала перед ним не как сухой предмет, подлежащий зубрежке и сдаче на экзамене, а как полное содержания, значения и красоты явление культуры, как наука в ее связях с реальными вещами.

Пространственные представления, геометрическая интуиция играют существеннейшую роль вне геометрии и в самой математике. Математический анализ немыслим без геометрических образов, начиная с числовой прямой, графиков функций и т. д. Эта роль геометрии сказалась в нашем веке в создании функционального анализа, занявшего с его основным понятием пространства функций центральное место в современной математике. Чтобы не возбудить подозрений в стремлении автора-геометра расхвалить свою науку, сошлюсь на суждение одного нашего выдающегося математика другой специальности: «Пространства функций в большинстве случаев бесконечномерны, но возможность направленно воспитать и затем применить к ним первоначально развитую конечномерную (даже трехмерную) интуицию оказалось исключительно плодотворным открытием» [2, с. 10].

Этот пример — формирование громадной области науки по указаниям геометрической интуиции — с большой силой показывает нам ту направляющую роль, какую играет геометрическое воображение в его союзе с логикой. Точно так же должно быть и в школьном преподавании.

Изложение любого элемента курса — будь то аксиома, определение, теорема, задача — должно начинаться с наглядной картины, которую учащиеся и должны усвоить в первую очередь. Надо, чтобы ученик представлял себе, допустим, что такое пирамида, мог описать ее, мог решить касающуюся ее простую задачу. А если при этом он не может безошибочно произнести точного ее определения, в этом еще нет большой беды.

Существенно наглядно-оперативное знание предмета, содержащее наглядные представления и умения правильно ими оперировать. Все представляют себе, что такое стул, и умеют им пользоваться, но, наверное, многие затруднятся дать сразу, как на экзамене, определение: «стулом называется...». У математиков XVII–XVIII вв. не было точных определений ни функции, ни предела, ни самого переменного x, но они действовали с замечательным успехом (вспомним хотя бы Л. Эйлера).

Педантичное стремление дать каждому понятию словесное определение может вести к тому, что вместо пояснения и уточнения представлений, которые уже есть у учащихся, вместо формирования у них новых ясных понятий им дается нечто трудно представимое или вовсе невообразимое, а лишь выраженное в словесной оболочке, порой такой, что они не могут ни понять сказанное, ни применить. Например, в действующих учебниках дается определение: «направлением называется множество всех сонаправленных лучей». И так как ученикам уже внушали, что множество — это собрание элементов и оно состоит из своих элементов, то выходит, что направление состоит из всех сонаправленных лучей. Интуитивное понятие направления, свойственное каждому человеку, заменяется чем-то невообразимым и к тому же совершенно бесполезным, поскольку таким понятием направления никто, собственно, не пользуется. Сходное положение обнаруживается с определениями понятий вектора, многогранника и др.

Вряд ли есть что-либо более вредное для духовного — умственного и морального — развития, чем приучать человека произносить слова, смысл которых он толком не понимает и при необходимости руководствуется другими понятиями.

Однако мы свернули на критику существующих учебников, которая сейчас не входит в нашу задачу. О них стоило упомянуть лишь затем, чтобы ярче оттенить важность наглядности и не дать подумать, что, всячески подчеркивая ее значение, мы ломимся в открытые двери. Вовсе нет! Есть все основания четко выдвинуть и подчеркнуть как первый основной принцип преподавания геометрии: каждый элемент курса геометрии должен опираться на возможно более простое и ясное наглядное представление, с такого представления надо начинать и им руководствоваться в изложении. Соответственно этому изложение следует начинать с наглядной картины — с рисунка на доске, описания, показа модели, примеров.

В стереометрии существенно именно рисовать, чтобы вызвать пространственное представление, пользуясь, например, штриховкой, оттеняющей грани многогранника, и т. п. (в этой связи заметим в скобках, что на физико-математических и естественных факультетах педагогических институтов полезно было бы ввести занятия по специальному рисованию).

Вместе с рисунком должно идти разъяснение его пространственного содержания, возбуждающее верное пространственное представление. Одновременно нужно разъяснить также точный геометрический смысл изображаемого — пронизать и организовать наглядное представление точной логикой. Тут же необходимо, если это не сделано ранее, дать реальные примеры из жизни, из техники и т. п. Логически организованное представление дает нужную формулировку определения, теоремы или задачи. За этим вступают в действие логические доказательства.

Геометрический метод и состоит в том, что само логическое доказательство или решение задачи направляется наглядным представлением; лучше всего, когда доказательство или решение, можно сказать, видно из наглядной картины. В старинных индийских сочинениях бывало так, что доказательство сводилось к чертежу, подписанному одним словом «Смотри!». При прочих равных условиях следует предпочесть наглядный вывод вычислительному и ради наглядности можно жертвовать логической точностью и обоснованностью. Так, полезно привлекать наглядные соображения непрерывности, наглядно представляемые движения точек и фигур и другие образы, заимствованные даже из механики и физики (сам Архимед пользовался механическими соображениями в своих геометрических выводах, хотя, конечно, окончательное оформление их совершал со всей строгостью).

К тому же подходу должен быть приучен и ученик — начинать с рисунка, с наброска, наглядного описания — отвечает ли он у доски, учит ли что-нибудь дома, решает ли задачу; рисунку должны сопутствовать пространственное представление, точное понимание и т. д.

Насколько важно сочетание ясного наглядного представления и точного понимания и насколько опасно пренебречь им, можно видеть на примере определения многогранника, данного в учебнике для 9–10-х классов. Это определение так усложнено и запутано, что его рекомендуют и не спрашивать у учеников. И не мудрено: авторы учебника сами запутались в своем определении и оно оказалось неверным! На рисунке учебника по геометрии для 6–8-х классов изображены пять многогранников, два из них не подпадают под определение, данное в учебнике для 9–10-х классов. А произошло это потому, что авторы не смогли соединить должным образом наглядное представление о многограннике с логической точностью формулировок.

Итак, изложение всякого раздела курса начинается с картины, с наглядного представления, обращается к логике формулировок и выводов, а затем полученное знание применяется и закрепляется при рассмотрении примеров и решении задач. Этот общий порядок изложения можно характеризовать кратко словами В. И. Ленина о пути познания вообще: «От живого созерцания к абстрактному мышлению *и от него к практике* — таков диалектический путь познания *истины*, познания объективной реальности» [3, с. 152–153].

Таким путем, скажем мы, и должно идти познание учащимися геометрии.

3. Логика и мировоззрение

Пока мы больше говорили об исходном пункте — о «живом созерцании»; обратимся ко второму — к «абстрактному мышлению», к тому элементу «треугольника», изображающего сущность геометрии, который был обозначен как логика.

С давних пор общепризнано, что курс геометрии должен учить логическому мышлению, и было бы лишним распространяться здесь на эту тему, но все же представляется необходимым обратить внимание на некоторые моменты.

По-видимому, есть серьезная опасность, что многие учащиеся не столько понимают логику формулировок и доказательств, сколько заучивают их. Едва сбившись с заученной формулировки, с заученного хода рассуждений, такой ученик теряется; он следует, собственно, не смыслу формулировки, не рассуждению, а их внешней словесной оболочке.

Одно из первых средств преодоления опасности: уменьшить число формулировок и особенно доказательств, которые ученик должен запомнить. Лучше, чтобы ученик знал доказательства немногих теорем, но знал с действительным пониманием, чем старался вызубрить доказательства десятков утверждений, которые содержатся в курсе геометрии за один класс.

Если мы хотим учить логическому мышлению, то и надо учить ему, а не запоминанию готовых рассуждений. Поэтому излагаемые формулировки и доказательства должны рассматриваться скорее как упражнения в логическом мышлении, чем как то, что надо заучивать.

Отсюда вытекает и следующий вывод: нужно давать возможно больше упражнений в логическом мышлении, как вообще нужно много упражняться, чтобы научиться какому-либо виду деятельности, будь то работа напильником, ходьба на лыжах или логические рассуждения. Поэтому полезно, во-первых, чтобы учащиеся разбирали (с пониманием) много доказательств, но не заучивали их. Во-вторых, следует решать возможно больше задач на доказательство: гораздо полезнее и приятнее сообразить, найти самому хотя бы маленький вывод, чем заучивать чужие рассуждения (кроме тех, которые особенно поучительны, остроумны и красивы).

Логика геометрии заключена не только в отдельных формулировках и доказательствах, но во всей их системе в целом. Смысл каждого определения, каждой теоремы, каждого доказательства определяется в конечном счете только этой системой, которая и делает геометрию целостной теорией, а не собранием отдельных определений и утверждений. Это заключенное в геометрии понятие о точной науке с ее строго разворачивающейся системой выводов так же существенно, как и точность в каждом выводе.

Геометрия так и должна быть преподана — с возможно большей строгостью всей системы. При этом надо понимать, что абсолютной строгости вообще не существует, и поэтому задача преподавания состоит в том, чтобы, приняв некоторый уровень строгости и определенную систему предпосылок, разворачивать на ее основе последующее изложение. Все существенное в курсе следует доказывать на принятом уровне строгости и не допускать логических перерывов, по крайней мере в основных линиях курса.

Именно так — в полной логической связности — построено изложение в «Началах» Евклида. Так же, в общем, оно построено и в знаменитом учебнике А. П. Киселёва. Он удачно популяризировал Евклида, и его завидный успех обусловлен в значительной мере именно тем, что на нем лежал отсвет гения Евклида, подобно тому как на переложениях для детей «Гулливера» и «Робинзона Крузо» остается след руки их великих создателей.

Требование изложить основные линии курса без логических пропусков вовсе не означает, что ученики должны учить все эти доказательства: такая нагрузка была бы чрезмерной.

Доказательства могут быть разделены на три части: те, которые следует изучить и знать, те, которые надо понять, и, наконец, те, которые можно в ходе обучения пропустить, имея в виду, что они могут быть предъявлены и разобраны по желанию всем классом или отдельными учениками в зависимости от их уровня (они должны быть изложены в учебнике в качестве дополнений).

В изложении геометрии можно исходить из разных основных посылок, из разных систем аксиом, лишь бы в них не было ни противоречий, ни пропусков. Иначе говоря, принятая аксиоматика должна быть непротиворечивой и полной, в остальном ее выбор должен определяться педагогическими соображениями, прежде всего наглядностью и простотой вывода из них основных следствий, за которыми пойдет развертывание собственного содержания курса. Безусловное значение имеет сама стереометрия как система положений, связанных логическими переходами, а система аксиом играет роль отправного пункта, от которого начинается прохождение этой системы.

В последнее время представилось необходимым перейти в школьной геометрии на более глубокий уровень строгости, чем тот, который был у Евклида. Эта большая строгость состоит прежде всего в явном указании и формулировке основных понятий и аксиом, которые в прежних изложениях только подразумевались.

Но, излагая более точно исходные посылки, формулируя принятые аксиомы, необходимо дальше держаться заложенного в них уровня строгости, не оставляя ни одного существенного пункта без доказательства, соответствующего принятому уровню. Иначе в курсе будет нарушена система, будет смазана логика его изложения и может оказаться, что в нем будет представлена не целостная наука геометрия, а ее фрагменты, чтобы не сказать куски и обрывки, один — на одном уровне логики, другой — на другом, а то и вовсе без логики.

Если принят теоретико-множественный уровень, то нужно его держаться. Например, сформулировав аксиому «прямая есть непустое множество точек», нельзя после этого принять без доказательства, что на каждой прямой есть по крайней мере две точки (как это сделано в пособии по геометрии для 9–10-х классов). Иначе уточнение исходных посылок остается без должного употребления и поэтому лишается смысла. Выходит, сначала произносятся «ученые слова», а потом действуют «по очевидности». Такое преподавание учит тому, что слова могут расходиться с делом.

Нельзя также оставлять без доказательства существенные теоремы курса, говоря «примем без доказательства...». Так почти все в курсе оказывается принятым без доказательства или основанным на принятом без доказательства, и курс приобретает сходство с набором сведений по геометрии, тогда как он, по крайней мере стереометрия, должен дать ученикам не просто сведения по геометрии, а систему в точности деталей и всей структуры. Скрытая здесь глубокая задача курса геометрии состоит в усвоении научного мировоззрения, в формировании его основы. Ее образуют безусловное уважение к установленной истине, требование доказывать то, что выдвигается в качестве истины, отказ от подмены доказательства верой или ссылкой на авторитет. Стремление к истине, поиск доказательства (или опровержения) — это активная, а потому и ведущая сторона в основе научного мировоззрения. Свойственное ему убеждение в фундаментальном значении и могуществе научной истины ярко выражено в знаменитых словах В. И. Ленина: «Учение Маркса всесильно, потому что оно верно» [4, с. 43]. Курс геометрии воспитывает требование доказывать то, что утверждается, если, конечно, это не заменяется в курсе псевдодоказательствами или заявлениями: «примем без доказательства...». Без доказательства можно принять многое, и основанием будет служить ссылка на авторитет: верно потому, что сказано в учебнике (или учителем), а не потому, что доказано.

В уважении к истине, в требовании доказательства заключается чрезвычайно важный нравственный момент. В простейшей, но очень важной форме он состоит в том, чтобы не судить без доказательств, не поддаваться впечатлениям, настроениям и наветам там, где нужно разобраться в фактах. Научная преданность истине и состоит в стремлении основывать свои убеждения в любом вопросе на наблюдениях и выводах настолько объективных, настолько не поддающихся посторонним влияниям и порывам темперамента, насколько это только доступно человеку. Впрочем, у нас нет здесь места развить эту саму по себе чрезвычайно важную тему нравственного содержания в основе научного мировоззрения. Мы только обращаем внимание на то, что курс геометрии в правильной его постановке и ориентации, воспитывая должное отношение к истине, тем самым вносит свой вклад в формирование научного мировоззрения и вместе с этим в нравственное воспитание учащихся.

Конечно, если преподавание полностью замыкается в самой геометрии, то даваемое им развитие логического мышления и элементов научного мировоззрения не выйдет за ее специальные рамки. Поэтому педагог должен привлечь внимание учащихся к общему значению требований доказательности и точности в установлении истины вообще — не в одной лишь геометрии. Но, чтобы к тому была возможность, курс не должен быть перегружен специальным материалом. Тогда учащиеся смогут усвоить то, что действительно необходимо, и в меру сил продумать общие выводы.

Мировоззрение не выучивают, оно формируется человеком на основе его жизненного опыта, культуры и учения.

4. Знания и умения

Рассмотрев глубинные задачи преподавания геометрии, обратимся теперь к его явному содержанию — к тем знаниям и умениям, которые оно должно давать и вырабатывать у учащихся.

Можно сразу заметить, что выработка умения решать геометрические задачи и проводить доказательства уже заключена в сочетании геометрического воображения с логическим мышлением. Оно состоит в умении наглядно представить себе задачу, увидеть пути решения и логично провести его. Если же задача касается реальных вещей, то первое, что нужно уметь, — это представить ее как задачу математическую, как задачу геометрии (если это не сделано явно в ее постановке) и затем решать ее, опираясь на наглядное представление и логику. Геометрический метод и есть не что иное, как живое воображение, в котором находят указания для логически проводимого решения.

Вместе с чисто геометрическим методом применяются элементарная и векторная алгебра, тригонометрические функции и анализ. В школьной геометрии приложения алгебры, не считая отдельных задач, связаны с методом координат. Однако метод координат в пространстве как отдельную тему необходимо исключить из школьного курса: его включение создало без особой к тому надобности крайнюю перегрузку и уводит от основного содержания курса. Тема эта принадлежит аналитической геометрии пространства и должна быть оставлена для вузовского курса; в школе на ее настоящую проработку просто нет времени. Полезно дать только наглядное понятие о координатах в пространстве, наглядное, а не формальное, основанное на векторной алгебре, какое дано в действующем курсе. Некоторые же применения координат можно включить в задачи — не больше.

Не следует также загружать учащихся искусственно усложненными задачами. Это касается не только геометрии. Задачи, предлагаемые, скажем, на выпускных экзаменах, бывают часто совершенно надуманными и содержат такие выкрутасы, какие не встречаются ни в практике, ни в самой изысканной науке. Истина, подобно подлинной красоте, проста, как стихи «Тиха украинская ночь...». Выверты придумывают, когда не умеют найти подлинное. Проще задать хитросплетенную задачу, чем вскрыть у ученика степень ясности и точности его наглядного представления и понимания (то же относится к задачам на вступительных экзаменах в вуз). Сила и острота сообразительности упражняется и обнаруживается на решении естественных по постановке, трудных и глубоких задач.

Векторная алгебра, включая скалярное произведение, нужна в физике и уже потому не должна быть исключена из курса геометрии. К тому же она имеет простое наглядное основание (как исчисление «направленных отрезков») и богатые приложения в самой геометрии. Нужно лишь позаботиться о том, чтобы строить ее действительно на возможно более простых наглядных основаниях и в тесной связи с задачами физики. А то получается такое нелепое положение, когда физики рассказывают о векторах для своих нужд по-своему, а математики — по-своему.

Тригонометрические функции — это испытанный аппарат геометрии, и их тоже нужно излагать, отправляясь от простых наглядных задач, как они практически и возникли — из решения треугольников.

Применение анализа в вычислении объемов может быть отнесено к самому анализу в качестве его приложения, как это сделано для площадей криволинейных трапеций и др. Собственно геометрии принадлежат *понятия* площади, объема, площади поверхности и геометрические приемы, связанные с нахождением этих величин для простейших фигур.

В результате данного краткого обзора можно видеть, что в подавляющей своей части те знания и умения, какие должен приобрести учащийся в курсе геометрии, охватываются сочетанием наглядного представления с логикой, о котором мы говорили выше.

Следует откровенно признать, что значительная часть знаний, требуемых от школьника, выучивается и забывается, так как нужна не столько сама по себе в будущем для практической надобности или общего развития, сколько для «успеваемости». Формальные знания в самом деле могут быть забыты. Важнее сохранить в памяти наглядные представления, общие понятия и методы, чем загружать память деталями, которые при надобности выводятся из общих сведений или находятся в учебниках и справочниках. Можно забыть, например, формулу объема шара, как и другие формулы, которые имеются в справочниках.

Следует исключить из программы как особую тему изучение многогранных и специально трехгранных углов, оставив ее только в качестве материала для задач. Тема эта стоит в курсе особняком, и в ней нет надобности.

Зато полезно ввести некоторые наглядные вещи, касающиеся выпуклых тел, многогранников, перемещений, симметрии, ввести затем, чтобы дать дополнительную пищу развитию воображения и расширению кругозора. Рассмотрение симметрии (фактически групп симметрии) правильных многогранников — прекрасное упражнение для развития наглядных представлений (вместе с тем понятие симметрии играет фундаментальную роль в новейших теориях физики).

Понятия, идущие из наглядной геометрии, вообще имеют в современной науке чрезвычайно большое значение, так что не надо думать, будто наглядное — это низшая, а не высшая математика.

Материал курса геометрии, как уже было сказано о доказательствах теорем, полезно разбить на три части: обязательный минимум, который надо знать, потом то, с чем ученики должны быть ознакомлены, и, наконец, дополнения, с которыми учащиеся могут быть ознакомлены. Курс должен заключать в себе возможность выбора в зависимости от тех или иных конкретных условий, таких, например, как уровень класса, склонности учителя и др.

Привести курс геометрии в достаточное соответствие со всеми изложенными в этой статье принципами представляется нелегким, тем более что существующий курс слишком нарушил эти принципы. Но всякая перестройка образования, как бы ни была она радикальна, не должна совершаться в порядке переворота. Переворот, лет десять назад совершенный в преподавании геометрии, немало навредил ей. Нужны не перевороты, а усовершенствования, совершаемые настоятельно, но постепенно (не считая хирургических операций отсечения тех отделов курса, которые признаны ненужными). Конкретно преломить и осуществить глубокие задачи курса с его мировоззренческим значением в гармонии наглядного и логического, добиваясь при этом максимально возможной простоты и ясности, — все это достаточно трудно.

В заключение отметим, что изложенные принципы могут быть полностью отнесены к курсу геометрии ПТУ. В нем должна господствовать та же линия на развитие пространственных представлений и логического мышления в связи с реальными вещами. Разница может быть лишь в том, что наглядный материал больше увязывается с производством и техникой, а некоторый менее нужный материал и некоторые логические тонкости могут быть опущены.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ле Корбюзье Ш. Э. Ж.* Градостроительство // В кн. *Ле Корбюзье.* Архитектура XX века. М.: Прогресс, 1977.
2. *Манин Ю. И.* Математика и физика. М.: Знание, 1979.
3. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1963. 5-е изд. Т. 29.
4. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1961. 5-е изд. Т. 23.

О состоянии школьной математики [1)]

При возрастающей роли математики в условиях научно-технического прогресса, при общем росте культуры и образовательного уровня советского общества реформа преподавания математики в средней школе стала лет 15–20 назад совершенно необходимой, требования к содержанию и характеру школьного курса математики существенно возросли. Соответственно в него были включены новые разделы и исключены некоторые устаревшие; особенно настоятельным было включение начал математического анализа, а также и векторной алгебры, составляющих важнейший элемент математического аппарата механики, физики и техники. Были также предприняты шаги к повышению общего уровня курса математики в смысле его логической строгости и введения некторых общих математических понятий, как, например, понятие множества, пронизывающее, можно сказать, всю современную математику.

Однако в проведении реформы школьного математического образования были допущены серьезные, в некоторых отношениях вопиющие, недостатки. Намеченные изменения были произведены поспешно без достаточной подготовки и к тому же в чрезмерном объеме, с чрезмерными претензиями на более глубокое и строгое изложение. В результате программы оказались

[1)]Этот доклад был прочитан А. Д. Александровым на заседании Ученого совета Института математики Сибирского отделения АН СССР (ныне — Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН) 25 декабря 1980 г. Несколько десятков машинописных экземпляров было разослано по ведущим математическим учреждениям СССР вместе с резолюцией Ученого совета Института математики СО АН СССР, выражавшей несогласие с основными положениями статьи *Л. С. Понтрягина* «О математике и качестве ее преподавания» (Коммунист. 1980. № 14. С. 99–112) и редакционного комментария журнала «Коммунист» к ней. Попытки публикации в печати не увенчались успехом. Подробнее см. с. 134 в книге «Академик Александр Данилович Александров. Воспоминания. Публикации. Материалы» (Ред. *Г. М. Идлис, О. А. Ладыженская.* М.: Наука, 2002) и статью *С. С. Кутателадзе* «Sic transit» в книге *А. М. Абрамова* «О положении с математическим образованием в средней школе (1978–2003)» (М.: Фазис, 2003. С. 63–72). — *Прим. ред.*

перегруженными, а стремления к общности, глубине и строгости в известной части не только не были реализованы в учебниках, но в некоторых случаях привели фактически к обратному результату: к серьезным ошибкам и к потере доказательности, к увлечению фразеологией, к отрыву от приложений.

Особенно это проявилось в курсе геометрии, который оказался приведенным в совершенно неудовлетворительное состояние, «был уничтожен», по выражению одного старого ленинградского учителя. Наиболее нетерпимо то, что в учебниках сообщаются по некоторым основным вопросам заведомо ложные сведения, и это из издания в издание в учебнике для IX–X классов до 6-го издания включительно!

Безответственность авторов дошла до того, что даже узнав о своих ошибках, они не потрудились их исправить!

Вообще новые учебники были введены без должной объективной проверки их содержания и результатов их применения в преподавании; при проверке в эксперименте желаемое порой принималось за действительное. Учебники не были достаточно широко прорецензированы; мнения и критические замечания ученых, работников педвузов и самих учителей не были должным образом приняты во внимание. Например, учебники по геометрии не были даны на рецензию ведущим геометрам, а критика со стороны преподавателей школ и педвузов не принималась во внимание — отбрасывалась.

Уже более двух лет назад на неудовлетворительное положение со школьными программами и учебниками по математике обратило внимание бюро Отделения математики АН СССР. То что положение неудовлетворительно было широко осознано; последовали, в частности, выступления в журнале «Математика в школе» ряда академиков.

В своей статье «О геометрии» [1] я изложил те принципы, на которых должно быть построено преподавание геометрии, те цели, которые оно должно преследовать, включая воспитание научного мировоззрения. Вместе с подробным изложением и разъяснением этих общих проблем на конкретном материале я предложил исключить из школьной программы по геометрии два раздела, без которых можно обойтись, и сделал целый ряд конкретных указаний на недостатки и ошибки действующих учебников.

Общая критика уже не нужна. Нужен конкретный анализ содержания начального курса математики, а главное, нужны реальные меры по исправлению существующего положения. Требуется именно направление — не голое отрицание сделанного и не новый переворот, не возврат к старому, а постепенное преобразование с сохранением положительного, с некоторой разгрузкой программ с проверкой реальных рзультатов.

Главной решающей мерой должно быть создание новых учебников свободных от недостатков — хотя бы только крайних недостатков — действующих учебников.

Однако попытки, сделанные в этом направлении, оказались не все удачными. Например, пробный учебник для VI класса «Геометрия 6» Л. С. Анатасяна, Э. Г. Позняка, допущенный Министерством Просвещения РСФСР, оказался хуже действующего учебника и в педагогическом отношении, и в смысле содержащихся в нем ошибок и нелепостей.

Этот пример должен насторожить и возбудить понимание того, что исправление положения с преподаванием математики в средней школе дело очень серьезное и нелегкое и что оно требует от тех, кто за него берется, полного сознания ответственности, прежде всего за то, чтобы в учебниках не было заведомо ложных сведений, нелепостей и серьезных ошибок. Только с безусловным устранением подобных вещей можно преодолевать другие недостатки.

Замечания к статье Л. С. Понтрягина

Обратясь теперь к самой статье Л. С. Понтрягина, можно из сказанного заключить, что в том, что он обращает внимание на довольно печальное состояние школьного математического образования, на недоброкачественность, а порой и неграмотность учебников, «на чрезмерно абстрактный характер», приданный преподаванию (хотя бы в некоторой его части), в этом нет уже ничего нового. Так же как нет нового в его требовании, «конкретности принимаемых мер» (с. 109). В той или иной степени, — с более резкими, или более мягкими оценками, — это признают теперь, можно сказать, все, включая добросовестных авторов действующих учебников.

Критка имела бы смысл, если бы она была более конкретной, а в общем виде она не нужна. (В статье есть два коротких конкретных замечания: об определениях вектора и функции, но замечание о векторе совсем не ново, а о функции, как мы покажем, ошибочно.)

Поэтому подлинный смысл и оригинальное содержание статьи Л. С. Понтрягина состоит в выражении в ней взгляда на «корень зла» и притом не только в школьном преподавании, но и в развитии самой математики. Этот корень зла представляет «высокоабстрактная теоретико-множественная концепция» (с. 105).

Л. С. Понтрягин пишет: «... в основу изложения авторы ныне действующих учебников положили теоретико-множественный подход, отличающийся повышенной степенью абстрактности и предполагающий определенную математическую культуру, которой школьники не обладают и не могут обладать».

«На определенном этапе развития математики высокоабстрактная теоретико-множественная концепция ввиду ее новизны стала модной, а увлечение ею — превалировать над конкретными исследованиями. Но теоретико-множественный подход — лишь удобный для математиков-профессионалов язык научных исследований. Действительная же тенденция развития математики заключается в ее движении к конкретным задачам, к практике».

Разберем эти высказывания Л. С. Понтрягина с должным вниманием.

Он утверждает, что «теоретико-множественный подход — лишь удобный для математиков-профессионалов язык научных исследований». Это не совсем точно. На самом деле теоретико-множественный подход, если трактовать его как язык, — это прежде всего *язык определения подавляющего большинства понятий современной математики.* (Откройте классическую книгу Л. С. Понтрягина «Непрерывные группы»: она начинается определениями группы и топологического пространства как некоторых множеств; откройте книгу А. В. Погорелова о выпуклых поверхностях: она начинается с определения выпуклого тела, как множества точек такого, что... и т. д. и т. п.)

Однако Л. С. Понтрягин пишет (в первой цитированной фразе), что школьникам теоретико-множественный подход недоступен, так как предполагает «математическую культуру, которой школьники не обладают и не могут обладать».

Конечно, ни школьник, ни какой другой человек не обладает сам по себе ни математической, ни какой бы то ни было культурой, но он может, в той или иной степени ею овладеть; на то и направлено общее образование. Поэтому заявление, что школьники «и не могут обладать» известной математической культурой, выдвинутое без серьезного основания, противоречит самим целям образования, тем более, что речь идет не о каких-то сугубо специальных вещах, а о фундаментальном, и можно даже сказать, самом фундаментальном понятии современной математики.

Цель общего образования в отношении «теоретико-множественного подхода» должна состоять в том, чтобы приобщить к нему учащихся в соответствии с содержанием школьного курса, без тех излишеств и перегибов, которые допущены в действующих программах и учебниках.

Л. С. Понтрягин не возражает против употребления слова «множество». «Но — пишет он тут же, — в модернизированных учебниках и программах оно возведено в ранг научного термина, и это повлекло за собой уже серьезные последствия. Сразу же появились и такие понятия как „пересечения множеств“... и др.» (там же, с. 105).

Однако слово «множество» возведено в ранг научного термина не в новых школьных учебниках, а в математике (и при том уже 100 лет назад). Его можно заменить другими словами, но суть от этого не изменится. В геометрии невозможно не говорить о пересечениях фигур — например, плоскости с плоскостью, плоскости с шаром и т. п. Будем ли мы называть это пересечением множеств точек, как понимают фигуры в современной математике, или нет, суть от этого не изменится.

Но этого мало. Приведя слова Л. С. Понтрягина, что «теоретико-множественный подход — лишь удобный ... язык», мы заметили, что «это не совсем точно», но разобрали пока не главную «неточность». Главная же неточность, а вернее ошибка Л. С. Понтрягина состоит здесь в том, что теоретико-множественный подход не есть только язык, как форма выражения, но представляет определенное содержание — общую установку математики.

Тремя страницами раньше Л. С. Понтрягин пишет, что «математика — в представлении горе-философов — вырождается в лингвистику» (с. 102), а тут сам же превращает фундаментальную содержательную установку и теорию математики в не более как «удобный язык».

С точки зрения содержания, теоретико-множественный подход, например, в геометрии в его исходной форме состоит в том, что геометрические фигуры рассматриваются как состоящие из точек, называют ли их множествами или совокупностями точек. В учебнике А. В. Погорелова, который прокламирует Л. С. Понтрягин, на первой странице говорится: «Всякую геометрическую фигуру мы представляем себе составленной из точек». Это и есть теоретико-множественная точка зрения, лишь прикрытая другим словоупотреблением. Если взять учебник А. П. Киселёва, то там фигура определяется совершенно иначе, в том духе, как она определялась до появления теоретико-множественного подхода (как состоящая из точек, линий, поверхностей и тел).

Таким образом, «зло» для школьных программ и учебников по математике никак не в самом теоретико-множественном подходе, а в тех крайностях, какие были допущены и все еще сохраняются в учебниках. Теоретико-множественный подход, взятый в его простой сути, без крайностей, вполне доступен для школьников и он должен быть преподан в школе, так как составляет фундаментальную концепцию современной математики.

Отстранение школьников от основ науки, коль скоро они могут быть им преподаны, противоречит основным принципам общего образования у нас в стране.

Получилось, что Л. С. Понтрягин, справедливо возмутившись недоделками и недостатками в преподавании математики, хватил через край и выступил уже не против недостатков, а против самих принципов общего образования.

Но этим он не ограничился, заодно он написал и на самое математику. В цитированном выше отрывке из его статьи он утверждает, что «на определенном этапе развития математики высоко абстрактная теоретико-множественная концепция стала модной... Действительная же тенденция развития математики заключается в ее движении к конкретным задачам, к практике».

Однако движение к практике — это только одна сторона развития математики, неразрывно связанная с другой — с восхождением к высоко-абстрактным концепциям. «Мышление, восходя от конкретного к абстракному, не отходит — если оно правильное — от истины, а подходит к ней... Все научные (правильные, серьезные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, полнее... От живого содержания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь построения истины, познания объективной реальности».

Эта характеристика пути познания, данная В. И. Лениным, полностью относится и к математике. Высоко абстрактная теоретико-множественная концепция дала основу для создания важнейших теорий современной математики, послуживших, в частности, математическим аппаратом для физики. Без этих теорий невозможна ни общая точная формулировка квантовой механики, ни ряда законов классической физики (сошлемся, например, на общее выражение потенциала системы зарядов как интеграла по функции множества).

Итак, мы видим, что Л. С. Понтрягин в двух фразах расправляется с важнейшими достижениями математики с их применениями в естествознании, третируя их как «модные», а заодно и с ленинским пониманием пути познания, оставив для математики движение к практике без восхождения к абстрактному.

После этого Л. С. Понтрягин обращается к критике термина «конгруэнтность» и определения вектора как «параллельного сдвига». При этом он приписывает их появление той же теоретико-множественной концепции, хотя на самом деле они появились в учебниках из-за желания навести строгость в понятиях и терминологии. (Правда, ничего хорошего из этого желания не вышло. Определение вектора вышло не только неудобоваримым и педагогически абсурдным, как его верно характеризует Л. С. Понтрягин, но и со строго научной точки зрения неудовлетворительным, так как сам по себе параллельный сдвиг — это не вектор (замечание для специалистов: коммутативная группа сдвигов не есть еще векторное пространство). Это очень характерный пример того, что делается в ныне действующих учебниках, когда из-за стремления к большей строгости усложняют изложение, теряют в ясности не достигая и строгости.)

После критики определения вектора Л. С. Понтрягин переходит к критике понятия функции и пишет, что в школе надо сказать так: «функция есть величина „игрек“, числовое значение которой можно найти, зная числовое значение независимой переменной „икс“,... и дать ряд примеров при помощи формул...». Трудность, однако, состоит в том, что согласно общему мнению, по крайней мере, материалистов — функция есть величина «игрек», значение которой может «соответствовать» значениям величины «икс» и независимо от того, можно найти эти значения или нет. Температура в данном месте является функцией времени и была таковой так же, скажем, в мезозое при динозаврах, совершенно независимо от того, можно найти ее значение или нет. Поэтому определение функции как «соответствия» (или отображения), восходящее к Н. И. Лобачевскому, отвечает исходным позициям науки (равно — материализма), и замазывать это в школе популярным разговором о нахождении числовых значений не следует. Нужно излагать материалистическое понимание функции, и в смысле соответствия, и в смысле вычислимости, и в смысле задания формулами, только нужно делать это как можно проще, опираясь на реальные разнообразные примеры, которым нет числа, а не так, как это делается в нынешних учебниках и не так, как предлагает Л. С. Понтрягин.

Своим суждением Л. С. Понтрягин предпосылает своего рода философское обоснование, «предварительные замечания о самой математике» (с. 100). Он начинает их с пересказа известных суждений о математике, высказанных Ф. Энгельсом в «Анти Дюринге». Ф. Энгельс писал, что математика имеет своим предметом пространственные формы и количественные отношения действительного мира... Но для того, чтобы исследовать эти формы и отношения в чистом виде, нужно отвлечь их совершенно от их содержания... Таким образом Ф. Энгельс указывал, что чистая математика начинается с абстракции — с отвлечения реальных форм и отношений от их содержания; источник особой природы математики в этом и состоит. Однако Л. С. Понтрягин, пересказав Ф. Энгельса, утверждает через две страницы, вопреки Ф. Энгельсу, что «абстрактность математики — производное, следствие ее специфической природы».

Какая же эта «специфическая природа»? Что представляют собой те чистые формы и отношения, какими занимается математика? Л. С. Понтрягин тут же дает на это ответ: «„форма как таковая“ есть определенная содержательная предметная деятельность, состоящая в воспроизведении стороны предметов, явлений, процессов объективного мира» (с. 102). Так что, например, шарообразная форма Земли как таковая есть определенная содержательная предметная деятельность. Надо ли говорить, что «чистая форма», «форма как таковая» это не деятельность, а абстракция, выработанная на почве практической деятельности, в которой люди сравнивали вещи по их форме и придавали предметам определенную форму. Но Л. С. Понтрягин — против абстракции.

Общая суть и пафос его статьи и состоит в выступлении против теоретико-множественной концепции, а заодно и вообще против абстракции как исходного и основного момента в математике. Поэтому упредив свои суждения пересказом Ф. Энгельса, он, вопреки Энгельсу, объявляет абстрактность математики «следствием ее специфической природы», о которой, однако, он ничего сказать не может (кроме бессмыслицы о форме как таковой). Затем, вопреки бесспорной истине и известному фундаментальному суждению В. И. Ленина о пути познания, Л. С. Понтрягин исключает восхождение к абстрактному из действительной тенденции развития математики. В этих философских рамках он третирует теоретико-множественную концепцию как «модную», как «лишь удобный язык» профессионалов, вопреки ее основной роли в современной математике, с ее важнейшими приложениями в точном естествознании с этих же позиций Л. С. Понтрягин критикует преподавание математики в школе за теоретико-множественный подход вообще, так что его критика оказалась односторонней и в существенной части неверной.

Впрочем, Л. С. Понтрягин не ограничился критикой, а предложил свое изложение части школьного курса, выпустив книжку «Математический анализ для школьников». На ее первой странице допущена грубейшая ошибка (функция, имеющая постоянное значение, не считается функцией), а вся книжка в целом не лишена формализма, хотя и без теоретико-множественного подхода.

Такой же формализм можно видеть в другой книжке Л. С. Понтрягина, посвященной математическому анализу, из его «серии небольших популярных книг» — «Знакомство с высшей математикой» [2, с. 4]. Зато в предисловии выражена надежда, что книжка может послужить ... противоядием при «отравлении» теорией множеств; уверяет, что теоретико-множественная идеология (или концепция) «не имеет ничего общего с научно-техническим прогрессом», а только «приводит, например, к таким уродствам, как замена термина „равенство“ геометрических фигур термином „конгруэнтность“...» [2, с. 6] [2].

Это производимое Л. С. Понтрягиным сопоставление научно-технического прогресса с заменой терминов могло бы вызвать только ироническую усмешку или веселый смех, если бы за ним не стояли слишком важные вещи. Как уже было подчеркнуто, теоретико-множественная идеология служит понятным фундаментом и каркасом большей части современной математики, включая математическую физику, теорию функций и функциональный анализ, теорию вероятности, современную алгебру и геометрию, она входит и в теоретические вопросы вычислительной математики. Поэтому сказать, что теория множеств как общая идеология математики «не имеет ничего общего с научно-техническим прогрессом», значит сказать, что с ним не имеет ничего общего вся математика (кроме некоторых оторванных от нее частей). А это, понятно, совершенный вздор, чепуха. С таким же примерно успехом можно говорить, что каркас здания и фундамент машинного цеха не имеют ничего общего с производством.

Так раскрывается объективная суть выступления Л. С. Понтрягина в его статье: отталкиваясь от недостатков школьного преподавания, при всех его оговорках, он выступает против понятий основы математики и тем самым против самой математики и как науки, и как предмета преподавания с его основаниями.

В послесловии говорится: «Некритическое усвоение зарубежных достижений на относительно новых ветвях математики, гипертрофирование общена-

[2] Заметим, что Л. С. Понтрягин употребляет термин «константа» вместо «постоянная».

учного значения этих достижений стали приводить к неверной оценке значения многих результатов математических исследований, в ряде случаев к идеалистической трактовке сущности предмета данной науки, к абсолютизированию абстрактных построений, умалению гносеологической роли практики. Излишнее увлечение абстракциями теоретико-множественного подхода стало неверно ориентировать творческие интересы студенческой и научной молодежи».

Однако это общее суждение об отрицательных явлениях в развитии советской математики не следует из того, что написал Л. С. Понтрягин, и не подкреплено никакими конкретными фактами, хотя здесь, в частности, говорится о «неверной оценке *многих* результатов», о неверной ориентации студентов и научной молодежи вообще. Такое общее заявление, не подкрепленное фактами, как раз являет пример «абсолютизированных абстрактных построений», однако в вопросе совсем не абстрактном. Это заявление создает впечатление некоторого общего неблагополучия в советской математике. Но едва ли следует создавать подобные впечатления относительно какой бы то ни было области нашей действительности, не предъявив ни одного доказательства. Можно и нужно вскрывать любые и всяческие недостатки, где бы они ни обнаружились, но это надо делать конкретно и доказательно.

Рассмотрим, например, важнейший вопрос — о научной ориентации молодежи. Говорится о ее «излишнем увлечении абстракциями». Но, что излишество вредно, — это ходячая житейская мудрость. Серьезный же вопрос — в том, что считать в данном случае излишеством, и вопрос этот требует серьезного конкретного рассмотрения. Опыт показывает, что молодые люди чаще начинают свой путь в математике с более абстрактных, чисто математических проблем. Обострив и развив на их решении свои способности они вместе с расширением кругозора и научной зрелостью обращаются также к приложениям. Таков творческий путь таких наших математиков, как М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, А. Н. Колмогоров, Л. С. Понтрягин, Б. Н. Делоне, Л. В. Канторович, А. В. Погорелов и т. д. Почему же нельзя брать с них пример?

В пределах, доступных нашему наблюдению, — в частности, в Институте математики СО АН, в Новосибирском и других университетах Сибири, никакого излишнего увлечения абстракциями теоретико-множественного подхода, неверно ориентирующего творческие интересы научной молодежи и студенчества, не наблюдается. Направления интересов разнообразны и если говорить о недостатках, о менее перспективных направлениях, то они совершенно необязательно связаны именно с абстракциями теоретико-множественного подхода.

Обратимся еще к вопросу о предмете математики; говорится о его «идеалистической трактовке». Но вопрос не так прост и требует конкретного рассмотрения хотя бы одного примера. Такой пример мы уже видели —

это определение функции по Л. С. Понтрягину: «функция есть величина „игрек“, числовое значение которой можно найти, зная числовое значение независимой переменной „икс“. . . ». Мы уже указали на то, что тут исключено объективное понимание функции как соответствия, существующего независимо от наших возможностей что-то найти или вычислить. Коротко говоря, по Л. С. Понтрягину, «функция — это то, что вычисляется». Поэтому «величина — это то, что измеряется», ибо нужно выразить «икс» числом. Но чтобы измерить надо наблюдать, поэтому «физическое явление — это то, что наблюдается, воспринимается»... и мы «приехали» к берклианству. Что, как говорится, и требовалось доказать: определение функции, выдвигаемое Л. С. Понтрягиным, если взять его не как момент в общем понятии функции, оказывается идеалистическим в духе берклианства.

Как не вспомнить здесь глубочайшее замечание В. И. Ленина о гносеологических корнях идеализма: одностороннее, преувеличенное развитие одной стороны, одной черточки познания... Так и тут — преувеличив «сторону» вычисляемости в понятии функции, «скатываемся» к идеализму.

Мы не имеем в виду заниматься здесь такой глупостью, чтобы «пришивать» Л. С. Понтрягину идеализм. Но мы хотим на данном простом примере обратить самое серьезное внимание на то, что судить о материализме и идеализме в вопросах, касающихся предмета математики и сущности ее понятий, не так-то просто. Поэтому тем более неуместны общие заявления о совершаемой кем-то «идеалистической трактовке сущности предмета данной науки». Нужен конкретный анализ конкретных фактов. Ведь сколько было случаев когда ложно «разоблачали» «идеализм» в теории относительности, в квантовой механике, в космологии, в кибернетике, в теории резонанса...

Разумеется, не следует абсолютизировать абстрактные построения, как не следует ничего абсолютизировать. Но для математики характерно восхождение ко все более высоким абстракциям. При этом высоко абстрактные построения, охватывающие обширные области знания, проливающие свет на фундаментальные проблемы, оказываются несравненно более содержательными и значительными, чем иные конкретные, но узкие исследования.

Геометрия Лобачевского представлялась большинству современных ему математиков абстрактным вывертом, и за всю долгую историю не получила заметных практических приложений. Но она преобразовала общий взгляд на геометрию и тем самым оказала глубочайшее влияние на развитие науки вплоть до теории относительности. Такова возможная роль абстрактных построений, когда они касаются фундаментальных проблем науки.

Нападки на высокоабстрактные фундаментальные концепции математики, если бы они возымели действие, могли бы исказить и затормозить ее развитие. В ближайшее время это могло бы и не сказаться вне самих математических теорий, но со временем наверняка отразилось бы и на практических результатах. Но математика имеет слишком большое значение, чтобы можно было допустить подобный ход событий, не опасаясь самых серьезных последствий, не опасаясь нанести стратегический урок движению нашего общества.

Как во всяком серьезном деле нужна ответственность, так она необходима в обсуждении вопросов науки, в развитии науки, в постановке ее преподавания нужно внутреннее сознание полной ответственности за истину, за науку. Но именно этой полной ответственности и не хватает, ни в обсуждении вопросов науки, ни в постановке ее преподавания. Особенно высокой ответственности требуют учебники, потому что они призваны приобщить десятки миллионов молодежи к началам науки, к истине, десятки миллионов, которые должны принять учебник как высший, непререкаемый авторитет.

Между тем в учебнике по геометрии для 9–10 классов враки, нелепости и путаницы сохраняются до 6-го издания, 1980 г. включительно, хотя авторы знают о части своих заблуждений и при малейшем желании могли бы знать их все[3]. Но им нет до этого дела! Редактор и один из авторов учебника З. А. Скопец преподает в Ярославском педвузе; время от времени он, наверное, ставит студентам двойки и их снимают со стипендии. А что он получает за свои враки в учебнике?

Академик А. Н. Тихонов сообщил в журнале «Коммунист», как о совершенном под его руководством «положительном шаге», о появлении учебника «Геометрия 6» Атанасяна и Позняка, учебника, полного ошибок и нелепостей.

Речь идет не о теоретико-множественном подходе, не о каких-то особых абстракциях и премудростях, а о самых простых вещах, как грубые ошибки в русском языке в «Геометрии 6» или нелепое определение многогранника в учебнике для 9–10 классов. Не абстракции в математике, а абстрагирование от ответственности, абстрагирование от добросовестности — вот, в конечном счете, корень ошибок и нелепостей как в школьном преподавании, так и в публичных суждениях о математике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* О геометрии // Математика в школе. 1980. № 3. С. 56–62[4].
2. *Понтрягин Л. С.* Знакомство с высшей математикой. Анализ бесконечно малых. М.: Наука, 1980.

[3] Я писал З. А. Скопецу летом 1979 г.

[4] Эта статья доступна также на с. 296–308 данного тома. — *Прим. ред.*

Пространство и время в современной физике [1)]

Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 92–119

Научные представления о структуре мира, в том числе о пространстве и времени, служат предметом философского обсуждения как среди физиков, так и среди философов. Мы рассмотрим здесь в общих чертах представления о пространстве и времени в современной физике, чтобы показать, как сам ход развития науки порождает диалектическую трактовку философского содержания теории относительности.

Пространство в математике

Геометрия возникла из практики и лишь в результате достаточно длительного развития была приведена в ту дедуктивную систему, какой она представлена в «Началах» Евклида. Из практической деятельности она стала математической теорией. Физика восприняла ее уже в готовом виде. Пространство мыслилось как пустое вместилище тел и явлений, как бы само собой обладающее свойствами, зафиксированными евклидовой геометрией. Однако по своему первоначальному характеру геометрия была, собственно, первой главой физики, и лишь полное отвлечение пространственных форм и отношений от материального содержания превратило ее в часть чистой математики. Стоит еще напомнить, что у Евклида геометрия излагается без координат. Координаты, или, говоря языком теории относительности, пространственные системы отсчета, появились в геометрии лишь примерно через двадцать веков после Евклида.

[1)] Настоящая статья является переработанным вариантом доклада на Всесоюзном совещании по философским вопросам естествознания (Москва, 1970 г.), опубликована под названием «Пространство и время в современной физике в свете философских идей Ленина» в сборнике «Ленин и современное естествознание» (М.: Мысль, 1969. С. 202–229) и в «Вопросах философии» (1971. № 3. С. 49–52). Сходный сокращенный вариант под названием «О философском содержании теории относительности» был включен в сборник «Эйнштейн и философские проблемы физики XX века» (М.: Наука, 1979. С. 117–137).

Время, точная мера которого была выработана из наблюдения светил, вошло в общие законы механики, сформулированные Г. Галилеем и И. Ньютоном. Кстати, понятие об абсолютной одновременности вполне отвечает механике Ньютона. Согласно ей, нет никаких принципиальных ограничений для скорости, которую можно придать телу, — стоит лишь на малое тело подействовать достаточно большой силой. Поэтому «сигнал» вроде выстрела может быть подан от одного места к другому с любой скоростью. Соответственно неточность в сравнении времени в этих разных местах может быть сколь угодно малой. Но величина, меньшая любой заданной, равна нулю. А это означает, что неопределенность в сравнении времени в разных местах равна нулю, т. е. одновременность пространственно разделенных событий абсолютна.

Абсолютное евклидово пространство и абсолютное всюду одинаково текущее время укоренились в понятиях. Вместе с наглядным представлением о пространстве и времени это привело к тому, что И. Кант объявил пространство и время априорными формами созерцания.

Однако уже вскоре после И. Канта Н. И. Лобачевский выдвинул мысль, что не только геометрия относится к материальной действительности, но что вовсе нельзя утверждать заранее, будто свойства реального пространства не могут быть отличными от тех, какие описываются евклидовой геометрией [1, с. 200]. Позже Б. Риман сформулировал ту же мысль и явно поставил вопрос о происхождении, основании метрических свойств пространства. В своей знаменитой работе «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1851 г.) он писал: «...или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное. Решение этих вопросов можно надеяться найти лишь в том случае, если, исходя из ныне существующей и проверенной опытом концепции, основа которой положена Ньютоном, станем постепенно ее совершенствовать, руководясь фактами, которые ею объяснены быть не могут; такие же исследования, как произведенное в настоящей работе... служат лишь для того, чтобы движению вперед и успехам в познании связи вещей не препятствовали ограниченность понятий и укоренившиеся предрассудки» [2, с. 324]. Так и кажется, что Б. Риман провидит то, что было сделано А. Эйнштейном, который, совершенствуя теорию Ньютона, как раз воспользовался римановой геометрией, а его теория относительности и привела к выяснению поставленного Б. Риманом вопроса об основаниях метрических соотношений в пространстве.

Вскоре после Б. Римана Г. Гельмгольц (1868 г.) [3] дал вывод метрических свойств пространства из свойств движения твердых тел и тем самым придал ясную форму физическим основаниям геометрии, на которых она фактически в значительной мере и возникла. То, что разумеется под свойствами движения твердых тел, — свойства группы этих движений. Однородность пространства означает возможность свободного движения твердого тела. В теории Римана это было, однако, лишь частным случаем, реализующимся в римановых пространствах постоянной кривизны.

Развитие наряду с евклидовой разных систем геометрии — аффинной, проективной и других — позволило выявить их общее основание, состоящее в том, что каждая из них определяется соответствующей группой преобразований. Та или иная геометрия с этой точки зрения, развитой Клейном, определяется как учение о тех свойствах фигур, которые инвариантны относительно преобразований данной группы. Эквивалентными считаются фигуры, переводимые друг в друга такими преобразованиями. Так, например, в аффинной геометрии все эллипсы эквивалентны. Свойства фигур можно описывать, пользуясь произвольными координатами; в разных координатах допустимые преобразования представляются по-разному, но это лишь разные представления одной и той же группы, которая и определяет данную геометрию.

Как и теория Римана, эти идеи применялись в математике к пространствам любого числа измерений. Однако, как уже сказано, теория Римана, допуская неоднородные пространства, не укладывалась в групповое определение геометрии. Синтез обоих подходов был дан позже, уже после создания общей теории относительности, французским геометром Э. Картаном. Но в очерченном комплексе идей математика подготовила тот аппарат, который смог послужить для формулирования теории относительности. Математика исследовала разные возможные пространства как общие формы многообразий однотипных явлений или состояний (конфигурационное пространство механической системы, пространство цветов и т. п.). Для нее обычно понимаемое пространство стало лишь одной из таких форм. Исследование его особых свойств было уже делом не математики, а физики. Понятие пространства приобрело, таким образом, два разных смысла — математический и физический.

Основания теории относительности

Диалектический материализм дал общее определение пространства и времени в их физическом смысле как форм существования материи. Это воззрение и отстаивал В. И. Ленин против кантианства и различных систем субъективного идеализма. Форма предмета не есть нечто внешнее по отношению к нему, она принадлежит ему и определяется им самим. Поэтому формы существования материального мира — это общая его структура, определяемая его коренными свойствами, а не что-то такое, во что мир как бы вложен. Соответственно рациональная теория пространства и времени необходимо выводит их свойства именно как свойства общей структуры из самих свойств материи. Таков и был источник геометрии — она отражала прежде всего общее свойство отношений твердых тел, определяемых в первую очередь возможностью их движения. Представления о пространстве и времени в ньютоновской физике также были неразрывно связаны с законами движения тел, установленными классической механикой. В частности, как было указано, понятие об абсолютной одновременности имело опору в представлении о возможности бросить тело с любой скоростью. Однако, как это обычно бывает в науке, такие связи не были достаточно осознаны, поскольку к тому не побуждали конкретные задачи физики. Пространство и время мыслились как данные, как бы независимые от материи формы. То, что открывала физика, отлично в них укладывалось.

Но так было до поры до времени. Законы электромагнетизма, сформулированные в уравнениях Максвелла, вступили в своеобразное противоречие с законами механики. В этой последней основное свойство пространства и времени — их однородность выражалось в принципе относительности Галилея, включая и геометрический принцип относительности евклидовой геометрии. Последний можно определить как эквивалентность всех прямоугольных координат, а принцип относительности Галилея — как расширение этого геометрического принципа относительности, состоящее в том, что системы прямоугольных координат остаются эквивалентными также при их произвольном равномерном и прямолинейном движении друг относительно друга. Несколько неопределенное понятие эквивалентности может быть точно выражено на языке групп преобразований. Общие законы механики инвариантны относительно преобразований, переводящих одну систему прямоугольных координат в любую другую, движущуюся относительно первой прямолинейно и равномерно. Что же касается времени, то оно всегда остается неизменным, не считая изменения начала его отсчета и единицы измерения, т. е. допустимыми для времени преобразованиями были лишь преобразования $t_1 = at + b$, а при неизменности единиц измерения и начала отсчета $t_1 = t$. Все такие преобразования прямоугольных координат и времени образуют группу Галилея, причем важно, конечно, не то, что преобразуются именно прямоугольные координаты — координаты могут быть любыми, важна сама группа, а выбор тех или иных координат определяет лишь то или иное представление этой группы.

Поскольку в физике господствовал взгляд, согласно которому всякое явление имело в конечном счете механическую природу, постольку принцип относительности Галилея должен был представляться всеобщим, относящимся к любым законам, а не только к законам механики.

Однако законы электромагнетизма, выраженные в уравнениях Максвелла, не были инвариантны относительно группы Галилея. Это установил еще в 1887 г. В. Фохт, но его работа осталась незамеченной, и в 1904 г. преобразования, сохраняющие уравнения Максвелла, были найдены Г. А. Лоренцем. Оказалось, как известно, что при этих преобразованиях время нельзя считать неизменным, если переходить от одной системы к другой, движущейся относительно первой.

Встал вопрос: либо механика Ньютона с ее принципом относительности Галилея и абсолютным временем, либо электродинамика Максвелла, и тогда рушится либо принцип относительности, либо абсолютное время. Ясное осознание этого вопроса и было, конечно, исходным пунктом для А. Эйнштейна.

Фактически до него вопрос так не ставился. Были лишь, как известно, разные попытки дать такую формулировку законов электродинамики движущихся тел, которая согласовывалась бы с данными опыта и классической механикой, но все эти попытки не вели к удовлетворительным результатам. В частности, знаменитый опыт Майкельсона, направленный на то, чтобы обнаружить движение Земли относительно эфира, не дал результата. Он показал тем самым, что и для электромагнитных явлений верен принцип относительности, что определить абсолютное равномерное прямолинейное движение здесь невозможно так же, как в рамках обычной механики. Итак, фактически задача состояла в должной формулировке законов электродинамики. Соответственно А. Эйнштейн и озаглавил свою работу, давшую основы теории относительности, «К электродинамике движущихся тел». В сформулированной выше дилемме: либо механика, либо электродинамика и тогда либо относительность, либо абсолютное время, он пожертвовал механикой и абсолютным временем.

Но если мы допускаем отказ от абсолютной одновременности, то нужно все же дать какое-то определение одновременности. Откуда его взять — ясно: если мы принимаем за основу электромагнитную картину мира, то определение должно опираться на электромагнитные процессы. Кроме того, мы можем вспомнить о практике и принять соответственно следующий теоретико-познавательный принцип: определение имеет физический смысл, если оно связывается с возможным экспериментом. Такой принципиально возможный мысленный эксперимент представляет обмен сигналами. А. Эйнштейн положил его в основу своего знаменитого определения одновременности. Это и было краеугольным камнем его построений.

Указанный теоретико-познавательный принцип, примененный А. Эйнштейном, был использован им и при обосновании общей теории относительности [4], а метод мысленных экспериментов приобрел позже большое значение в анализе основ квантовой механики.

Однако этот принцип толковался рядом физиков скорее в духе позитивизма, чем материализма. Определение физического понятия представлялось как условное соглашение о выборе конкретных измерительных операций. Один автор утверждал даже, что нужно просто условиться, какие события считать одновременными. Понятно, что в буквальном смысле это утверждение нелепо, так как, следуя ему, можно «просто условиться» считать одновременными любые события. Суть в том, что определение физического понятия имеет реальный смысл лишь тогда, когда оно отражает нечто существенное в природе. А само существование «чего-то существенного» — это вовсе не вопрос условия. Задача гения состоит в том, чтобы увидеть и выразить в определении это существование. Одновременность в определении Эйнштейна не есть что-то условное, а очень общее, реальное отношение событий, объективно определенное их взаимодействием через излучение. «Сигналы» исходят от событий независимо от соглашений и экспериментов и определяют объективную материальную связь явлений. Отвлеченная форма этой связи и выражается понятием одновременности и соответственно последовательности во времени. А. Эйнштейн подчеркивал в своей работе ту мысль, что данное им определение может быть проведено без противоречий в развиваемой им теории. А это означает, что оно отражает существенные, общие черты реальной действительности.

Определение одновременности приводит к уточнению понятий о времени t и, стало быть, о системе пространственных и временной координат x, y, z, t, связанной с каким-либо телом — базисом системы, принимаемым за покоящееся.

Дальнейшие соображения, как писал А. Эйнштейн, опираются на принцип относительности и принцип постоянства скорости света. Первый — это принцип Галилея, распространяемый не только на механические, но и на любые физические явления. Собственно новым оказывается второй принцип, в соответствии с которым за основу берутся электромагнитные явления. Из этих двух принципов выводятся преобразования Лоренца и далее следствия из них для кинематики, электродинамики и механики.

Построенная таким образом теория относительности установила, как известно, относительность чуть ли не всех величин, какие считались в классической физике безотносительными. От абсолютного времени и абсолютного пространства осталось одно воспоминание. Время и пространство имеют определенный смысл и допускают определенную меру лишь в отношении той или иной системы отсчета.

Абсолютное пространство—время и релятивизм

Мы представляем себе, что мир существует и имеет определенные свойства независимо от того, к какой системе отсчета эти свойства отнесены или по отношению к какой системе они проявляются. Так, в обычной геометрии проекции данного тела на разные плоскости различны, но само тело имеет определенную форму, которая лишь в ее отношении к разным плоскостям дает разные проекции. Можно еще вспомнить, что геометрия у Евклида излагалась без всяких координат, т. е. без систем отсчета. Так не возможна ли и теория пространства и времени без систем отсчета? И не являются ли сами пространство и время, как и все величины, относительность которых установила теория Эйнштейна, лишь проявлениями в разных системах отсчета чего-то безотносительного, абсолютного?

Теория относительности открыла связь между пространством и временем. Такая связь содержится уже в самом постоянстве скорости света. Эта скорость есть отношение пути ко времени, и, стало быть, ее постоянство, равенство во всех системах означает универсальную связь между пространственными и временными величинами. Абсолютное должно заключаться не в пространстве и времени самих по себе, а в их соединении. Это осознал Г. Минковский и выразил в словах, которыми он начал свою знаменитую лекцию «Пространство и время»: «Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность» [5, с. 181].

Как геометр, Г. Минковский рассматривал теорию относительности с точки зрения принципов, уже развитых в геометрии, когда та или иная геометрия определяется как учение об инвариантах соответствующей группы преобразований. В теории относительности это преобразования Лоренца. Поэтому речь идет о геометрии, определенной этой группой. Она действует в четырехмерном «пространстве», так как речь идет о четырех координатах: x, y, z, t. Совокупность всех «мест» (x, y, z) во все времена t образует единое многообразие — пространство—время. Оно-то и представляет абсолютную форму существования материи.

По поводу названия «постулат относительности», применяемого к требованию инвариантности относительно группы Лоренца, Г. Минковский сказал: «Так как смысл постулата сводится к тому, что в явлениях нам дается только четырехмерный в пространстве и времени мир, но что проекции этого мира на пространство и на время могут быть взяты с некоторым произволом, мне хотелось бы этому утверждению скорее дать название: постулат *абсолютного мира* (или коротко: мировой постулат)» [5, с. 192].

Пространственно-временные отношения и свойства тел и процессов не зависят от системы отсчета, но лишь различно проявляются в разных системах. Вообще физические величины, зависящие от системы отсчета и в этом смысле относительные, являются своего рода проекциями более общих величин, которые от системы отсчета уже не зависят. Соответственно Г. Минковский дал четырехмерную формулировку законов релятивистской механики и электродинамики. Таким образом, он не только развил глубокое понимание теории относительности, но и внес большую ясность в ее математический аппарат.

Тем не менее взгляд Г. Минковского на теорию относительности не был воспринят физиками во всей его глубине. Точка зрения относительности, берущая всякое явление в отношении к той или иной системе отсчета, была более привычной, во-первых, потому, что такова реальная позиция экспериментатора, наблюдателя, а во-вторых, потому, что и теоретик рассматривает явления, пользуясь той или иной системой координат. Но был еще третий момент — позитивистская позиция, принципиально придающая значение реальности лишь тому, что дано в непосредственном наблюдении; все же остальное, что содержится в теориях физики, трактуется не как изображение действительности, а как построение, только увязывающее данные наблюдений. С этой точки зрения четырехмерный мир Минковского есть не более как схема, не отражающая никакой реальности сверх той, которая уже выражена в исходном положении теории относительности. Поэтому возражение Г. Минковского против самого термина «постулат (теория) *относительности*» и его предложение заменить его термином «постулат *абсолютного* мира» представляются с этой позиции малообоснованными.

Таким образом, здесь определились два разных подхода к теории относительности. Первый подход Минковского, в основе которого лежит представление о пространстве—времени как реальной абсолютной форме существования материального мира. Второй подход чисто релятивистский, главное в нем — та или иная система отсчета. Понятно, что первый подход отвечает естественной логике предмета: его форма определяет ее относительные проявления. Второй же подход, когда он доводится до отказа придать значение реальности четырехмерному миру и четырехмерным величинам, оказывается позитивистским, отрицающим, что относительное есть лишь грань, проявление абсолютного.

Конечно, релятивистская точка зрения математически эквивалентна точке зрения «абсолютного мира», подобно тому как, скажем, формулировка законов механики Ньютона в координатах эквивалентна их векторной формулировке. Г. Минковский не создал новой теории, он дал лишь более глубокую трактовку теории Эйнштейна. Однако от понимания того, что является главным и основным, зависит направление мысли не только в решении задач самой теории, но и в поисках и понимании ее возможных применений и обобщений. Различие двух точек зрения существенно сказалось при переходе к общей теории относительности и привело к дискуссии, которая не закончилась до сих пор. Ошибки в понимании теории, доходящие порой до потери из виду совершенно очевидных и бесспорных вещей, происходили главным образом от неумения видеть реальную диалектику относительного и абсолютного. Мы сейчас убедимся в этом, обратившись к общей теории относительности и разным точкам зрения на нее.

Общая теория относительности

При всех успехах теории относительности гравитация не поддавалась включению в эту теорию, несмотря на то что еще А. Пуанкаре в его первой работе, в которой он параллельно с А. Эйнштейном развил теорию относительности, предпринял такую попытку, которую затем повторили Г. Минковский и др. Понадобилось десять лет, пока проблема не была решена А. Эйнштейном путем обобщения теории относительности, которая стала называться специальной (частной) в отличие от новой — общей. Общая теория относительности есть теория пространства—времени, объясняющая гравитацию через зависимость его структуры от распределения и движения масс материи.

В специальной теории относительности пространтво—время «плоское», оно однородно и изотропно. Все пространственно-временные отношения и свойства, а по принципу относительности и вообще все законы физики инвариантны относительно преобразований Лоренца. Но в общей теории относительности это остается верным лишь приближенно и в малых областях; в целом же пространство—время не однородно и не изотропно, и принцип относительности не выполняется. Отличие структуры пространства—времени от плоского пространства—времени специальной теории определяется распределением и движением масс материи. А эта структура в свою очередь определяет движение масс как бы под влиянием сил тяготения.

Поле тяготения не есть, собственно, некое силовое поле, а представляет собой не что иное, как отличие структуры пространства—времени от плоской метрики — поле тензора кривизны. Так как структура пространства—времени явно зависит от распределения масс материи, можно сказать, что сама эта структура не является абсолютной, а в этом смысле и само пространство—время не совсем абсолютно. Разделение же пространства и времени делается еще более относительным и в больших масштабах может оказываться даже невозможным в точном и однозначном смысле. Абсолютным является лишь материальный мир в целом, а все его формы, явления и прочее так или иначе относительны.

При построении теории тяготения существенной трудностью, какую пришлось преодолеть, явился вопрос о выборе систем отсчета, систем пространственно-временных координат. В специальной теории относительности имелись преимущественные системы — инерциальные; в них законы природы представляются наиболее просто: в их формулировки не входят величины, специально характеризующие эти системы. Инерциальные системы естественно связаны с самой структурой плоского пространства—времени, подобно тому как естественно связаны со свойствами евклидовой плоскости обычные прямоугольные координаты.

Отказ от плоского пространства—времени влечет то неприятное следствие, что само понятие инерциальной системы теряет смысл, сохраняя его лишь для малых областей в первом приближении. Вообще поскольку структура пространства—времени не представляется заранее фиксированной, заранее нельзя указать основания, по которым надо было бы предпочесть одни координаты другим. Следовательно, нужно было просто исходить из любых координат, не приписывая никакого преимущества одним из них перед другими. Иначе говоря, все вообще системы координат надо было признать априори равноправными и выражать пространственно-временные соотношения и вообще законы физики в любых координатах. Так как общая форма уравнений, в которой они годятся для любых координат, называется ковариантной, то высказанное требование называется принципом ковариантности. Только апостериори, когда та или иная структура пространства—времени фиксирована в достаточной степени, делается осмысленным выбор системы координат, соответствующей этой структуре возможно лучшим образом.

Такая ситуация встретилась впервые еще в классической механике, когда Лагранж сформулировал законы механики системы материальных точек не в прямоугольных координатах этих точек, а в «обобщенных координатах», выбираемых так, чтобы заранее учесть наложенные на систему связи. В геометрии произвольные координаты появились в работе Гаусса, в которой он развил учение о геометрии на любой кривой поверхности, вводя на такой поверхности произвольные координаты. При этом все уравнения записывались в виде, годном для любых координат, т. е. в ковариантной форме. Преимущественные же координаты могут определяться в зависимости от свойств поверхности и характера рассматриваемой фигуры.

Таким образом, в выборе произвольных координат и требовании ковариантности в принципе нет ничего нового и нет никакого физического содержания. Координаты в любом пространстве можно в принципе выбирать любым образом. Преимущества одних координат перед другими выясняются лишь в связи с конкретной ситуацией, к описанию которой они применяются.

Однако при построении общей теории относительности переход к произвольным координатам показался столь революционным, что ему был придан ранг особого принципа, названного общим принципом относительности. Принцип этот формулировался как принцип равноправности всех систем отсчета независимо от движения тел, с какими эти системы связаны. В частности, утверждалась равноправность систем Птолемея и Коперника. Более того, стали даже утверждать порой, что первоочередная задача, которую решала общая теория относительности, состояла не в том, чтобы дать теорию тяготения, согласованную с теорией относительности, как это было на самом деле, а в том, чтобы формулировать законы физики в виде, годном для произвольной системы координат, т. е. в ковариантной форме, см. например [6, с. 191–192].

Но вскоре после появления основной работы Эйнштейна по общей теории относительности Э. Кречман обратил внимание на то, что общий принцип относительности вовсе не является физическим принципом или законом, а представляет собой лишь требования писать уравнения в ковариантной форме, в чем, как уже было сказано, не было ничего нового. После того как

Г. Минковский дал четырехмерную формулировку законов релятивистской кинематики, механики и электродинамики, задача написания уравнений, выражающих эти законы в любых координатах, свелась к простым формальным преобразованиям. Любые координаты применимы во всякой теории, будь то классическая механика, специальная теория относительности или любая другая, и вопрос о написании уравнений в ковариантной форме есть вопрос чисто математический.

А. Эйнштейн согласился с замечанием Кречмана. Но тем не менее убеждение в особом значении общего принципа относительности осталось. Казалось бы, для дискуссии не было и нет никаких оснований, но дискуссия все же шла. Шел, в частности, спор о том, равноправны системы Птолемея и Коперника или нет, хотя, вроде бы, спор уже давно решен опытом. Понятно — и это понимал еще Птолемей! — что можно описывать движение светил в разных системах координат. Мы всегда описываем движение относительно самих себя, говоря о восходе Солнца или о том, что Луна высоко стоит, и т. п. Словом, это абсолютно тривиально.

Вместе с тем опыт показывает, что законы физики различны в отношении геоцентрической и гелиоцентрической систем отсчета; при применении первой системы в физические законы входит скорость вращения Земли. Соответственно этому явления одного и того же рода протекают в отношении первой системы иначе, что обнаруживается на Земле в размывании правых берегов рек в Северном полушарии, во вращении маятника Фуко и других эффектах. Стало быть, обе системы применимы, но не равноправны в том смысле, в каком равноправны инерциальные системы (в пределах точности классической механики или специальной теории относительности). В инерциальных системах законы физики не содержат величин, различающих сами эти системы, а в геоцентрической системе такая величина (угловая скорость) появляется, и соответственно в отношении этой системы явления протекают иначе. Если внутри самолета нельзя обнаружить влияние его равномерного полета, то на самой Земле внутри запертой комнаты можно обнаружить влияние вращения Земли.

Сопоставим в общем виде принцип ковариантности и принцип относительности. Первый состоит в требовании выражать законы уравнениями в форме, годной для любых координат. Это достигается тем, что в уравнения явно входят величины, характеризующие ту или иную систему координат. Например, если мы пользуемся косоугольными координатами на плоскости, то в формулы входит угол между координатными осями. Когда какое-либо уравнение написано в каких-нибудь координатах, то получить его ковариантную форму просто. Достаточно вместо данных координат ввести произвольные функции любых других координат и соответственно преобразовать другие величины, входящие в уравнение, если эти величины вообще зависят от системы координат (как, скажем, соответствующие векторы). Речь идет, следовательно, о чисто математической операции. Понятно, что, так как полученные уравнения содержат произвольные функции, они не являются конкретно определенными. Выбор этих функций и определяет выбор той или иной координатной системы и соответственно конкретный вид уравнения. Так как конкретный вид уравнения изменяется соответственно преобразованию координат, общая форма уравнения, годная для любых координат, и называется ковариантной — сопреобразующейся.

Если координатные системы реализуются физически, то зависимость конкретного уравнения от координатной системы означает, что закон протекания явления в отношении этой системы зависит от нее. Так, в уравнения, отнесенные к вращающейся системе, входит ее угловая скорость, и явления зависят от этой скорости. Принцип же относительности физически состоит в том, что явления в отношении тех или иных систем протекают по одинаковым законам, математические выражения этих законов не содержат величин, различающих системы. При переходе от одной системы к другой уравнения не изменяются вовсе, т. е. они *инвариантны*, а не просто *ковариантны* относительно преобразований координат от одной из рассматриваемых систем к другой. Принцип относительности теории Эйнштейна и выражается математически в требовании инвариантности относительно преобразований Лоренца. Таким образом, принцип ковариантности и принцип относительности — совершенно разные вещи. Первый из них касается чисто математического требования, второй отражает закон природы, заключающийся в свойстве однородности, благодаря которому в разных системах явления протекают одинаково.

В общей теории относительности принцип относительности, или Лоренц-инвариантности, верен лишь приближенно и локально, и из-за неоднородности пространства—времени, вообще говоря, нет таких преобразований, при которых уравнения физики оставались бы инвариантными. В них всегда входят величины, характеризующие структуру пространства—времени и одновременно систему координат (составляющие метрического тензора g_{ik}). Трудность, между прочим, в том и состоит, что эти величины одновременно выражают две разные вещи: структуру пространства—времени, т. е. нечто абсолютное, не зависящее от системы координат, и свойства самой системы координат, т. е. нечто относительное. Разделить это в рамках обычно применяемого в теории Эйнштейна математического аппарата невозможно.

Но так как сама структура пространства—времени оказывается переменной, ее можно считать своего рода физическим полем. В отвлечении от нее пространство—время остается лишь четырехмерным пространством, не наделенным никакой метрикой, никакими свойствами, помимо непрерывности (и дифференцируемости: оно оказывается дифференцируемым четырехмерным многообразием). *При такой точке зрения любые координатные системы оказываются равноправными просто потому, что заранее исключается* *всякое возможное основание для их различия.* Общий принцип относительности выполняется, но по тривиальной причине отвлечения от всяких специальных свойств пространства—времени. Вместе с этим теряет смысл и понятие об ускоренном или неускоренном движении, потому что для определения ускорения нужна какая-то мера, а ее в пространстве без метрики просто нет. Поэтому говорить здесь о равноправности различно движущихся систем отсчета бессмысленно, так как непонятно, что значит само понятие о их движении. Ведь когда нет никакой структуры, то нет никакого понятия о том, что такое время. Движение точки изображается просто некоторой линией в четырехмерном многообразии, а одна линия ничем не хуже другой, раз нет никаких оснований различить их свойства.

Таким образом, всякая физика исчезает; от нее остается лишь одно: пространство—время есть вообще четырехмерное многообразие. Но это верно и в специальной теории относительности, и в классической механике, так же как в общей теории относительности — «общий принцип относительности» верен во всех этих теориях. Он не выражает ничего большего, как то же требование ковариантности, так как оно и состоит в том, чтобы уравнения писались в виде, годном для любых координат.

Специфика общей теории относительности выявляется только тогда, когда в рассмотрение вводится структура: метрика пространства—времени. Неоднородность, «переменность» этой структуры и есть особая черта теории. Словом, суть ее не в «общем принципе относительности», не в произволе выбора систем координат, а в особых предположениях о структуре пространства—времени. Короче, суть не в относительности, а в абсолютном — в свойствах пространства—времени независимо от систем отсчета и координат.

Еще об общей теории относительности

Несмотря на то что все сказанное выше касается твердо установленных фактов или чисто математических выводов, спор об общем принципе относительности тянется вот уже более пятидесяти лет и только теперь приближается, по-видимому, к благополучному завершению [2)]. Этот спор отражает противоположность тех двух точек зрения на сущность теории относительности, которые были изложены выше. Одна — релятивистская, берущая всякое явление, и в частности пространственно-временные отношения и свойства, лишь в отношении к той или иной системе отсчета, так что для нее лю-

[2)] Р. Фейнман пишет: «Многие указывают на то, что на самом деле Земля вращается относительно галактик, и говорят, что если бы мы поворачивали галактики вместе с Землей, то законы не изменились бы (в сравнении с теми, какие имеют место в инерциальных системах. — *А. Д. Александров*). Ну, я лично не знаю, что произошло бы, если бы мы могли поворачивать всю Вселенную... Нельзя утверждать, что движение относительно. Не в этом содержание принципа относительности» [7, с. 100–101].

бое движение только относительно. Вторая — это точка зрения, исходящая от Г. Минковского и принимающая за основание само пространство—время, сами процессы в их собственной пространственно-временной, четырехмерной форме, так что для нее отнесение явлений к той или иной системе отсчета есть нечто вторичное. Движение же тела понимается как способ его существования — его четырехмерная, пространственно-временная траектория — и потому тоже является абсолютным. Только «проекции» его в разных системах отсчета относительны. Так, движение по инерции, свободное падение в поле тяжести, представляется геодезической линией в четырехмерном пространстве—времени, т. е. линией, кривизна которой равна нулю. Движение же с ускорением изображается линией с отличной от нуля кривизной. Кривизна есть величина безотносительная, она характеризует саму эту линию независимо от каких бы то ни было систем координат. Поэтому нет ничего удивительного в том, что в системах, движущихся с ускорением, процессы протекают иначе, и связанные с такими системами координаты неравноправны с теми, какие связаны с телами, движущимися по инерции. Движение не только относительно, оно также и абсолютно. Оно есть, можно сказать, отношение данного тела не только к отдельно выделенным другим телам, но и ко всей структуре пространства—времени. Попросту говоря, утверждение об относительности всякого движения не более осмысленно, чем утверждение об относительности линий на плоскости: что дуга окружности, что отрезок прямой — все равно (но, конечно, абсолютное различие дуги и отрезка само определяется их отношением к структуре плоскости, само различие между релятивным и абсолютным относительно).

Релятивистская точка зрения, как известно, восходит своими истоками к Дж. Беркли, который писал, например, следующее: «... всякое место относительно, так же как и всякое движение... никакое движение нельзя постигнуть без некоторой определенности или направленности, что в свою очередь не может быть понято без того, чтобы представить одновременно существующими движущееся тело или наше тело, или же какое-нибудь еще другое... представим существование двух шаров и ничего телесного еще, кроме них... и... круговое движение двух шаров вокруг общего центра не может быть постигнуто воображением. Теперь предположим, что сотворено небо с неподвижными звездами; и сразу же, через представление приближения шаров к разным частям этого неба, движение станет постижимым» [8, с. 381–382].

Суждение Беркли представляет собой своего рода бессмыслицу. В самом деле, если кроме двух шаров действительно не существует «ничего телесного», то не существует никакой связи между этими шарами, не существует даже пространства вне этих шаров. Ибо что такое пространство, которое абсолютно пусто и в котором невозможно различить разные места? Поэтому говорить о каком-то движении воображаемых здесь шаров в абсолютной пустоте бессмысленно. Когда же «созданы» звезды, то определение движения возможно не просто потому, что есть звезды, а потому, что есть свет, который только и позволяет нам установить связь между двумя данными шарами и звездами [3)].

Пространство (пространство—время) не пусто, оно заполнено излучением и другими полями, и только поэтому возможно суждение о движении. Когда говорят о пустом пространстве, то мысленно представляют, что в нем есть разные места, что оно состоит из точек. Но что значит: данная точка A и другая точка B, если эти точки ничем, буквально ничем не различаются? Следовательно, само «пустое пространство» есть не более как абстрактный образ «заполненного пространства», в представлении о котором удерживается лишь то, что точки в нем как-то различаются. Это различение и есть след материи, а если и он исчез, то точки перестают различаться, понятие о точках A и B пропадает, а вместе с ним исчезает и само пространство. В математике пространство определяется как множество элементов, называемых точками, а не как некая абсолютная пустота.

Но если мы учитываем, что пространство (пространство—время) заполнено материей, что оно, собственно, и есть, не что иное, как форма существования материи, общая структура связей ее элементов, то и движение тела в пространстве есть его место в этой структуре, есть траектория в четырехмерном многообразии и так же абсолютно, как абсолютна линия на плоскости. Тот факт, что есть равные линии, которые можно совмещать, или что данная линия изображается в разных координатах разными уравнениями, не меняет того, что линия все же существует как не зависящий от координат объект. Столь же определенным является и движение отдельного тела в пространстве—времени, которое существует, как существует и само тело. Ведь нет «мгновенных» тел, как объяснил еще до теории относительности Г. Уэллс в своей «Машине времени». Тело протяженно и в пространстве, и во времени, оно есть пространственно-временной объект. Его временная протяженность и есть, можно сказать, его движение. В разных отношениях в разных системах это движение может выглядеть различно: то ли как равномерное относительно данной системы, то ли как ускоренное относительно другой системы, подобно тому как в прямоугольных координатах окружность представляется квадратичным уравнением, а в полярных с центром в центре окружности — линейным.

[3)] Аналогичную ошибку допустил сам А. Эйнштейн, когда обсуждал относительное вращение двух тел вокруг оси, проходящей через их центр [4, с. 232–235]. Он упустил из виду, что само суждение о вращении одного тела относительно другого возможно лишь тогда, когда между телами есть материальная связь. Наблюдатель на одном теле видит другое тело потому, что есть свет. Таким образом, предполагается наличие излучения. А тогда вращение тела определяется и относительно этого поля. Поэтому для различия, какое из двух тел вращается «на самом деле», а не только относительно другого, не нужно обращаться к тем же звездам Беркли и удаленным массам Маха. Если же мы исключаем поле излучения, то исключаем и понятие вращения одного тела относительно другого.

Из специалистов по теории относительности особенно настойчиво и последовательно выступал против релятивизма В. А. Фок [4]. В качестве свидетельства резкого расхождения в понимании общей теории относительности физиками приведем вполне справедливые слова Дж. Синга, сказанные им в предисловии к обширному трактату по общей теории относительности, написанному в 1960 г.: «... геометрический способ рассмотрения пространства—времени восходит непосредственно к Г. Минковскому. Он протестовал против употребления слова „относительность" в применении к теории, основанной на „абсолютном" (пространство—время), и я уверен, что если бы он дожил до создания общей теории относительности, то повторил бы свой протест даже в более сильных выражениях. Однако нам незачем беспокоиться по поводу названия, ибо слово „относительность" означает теперь прежде всего теорию Эйнштейна и лишь во вторую очередь ту туманную философию, которая, может быть, первоначально применила это слово. Именно затем, чтобы поддержать взгляды Минковского на принцип относительности, я, как видно, становлюсь на трудный путь миссионера. Когда во время дискуссий о релятивизме я пытаюсь сделать вещи более ясными с помощью пространственно-временной схемы, другие участники дискуссии смотрят на это с вежливой отрешенностью и после паузы смущения, словно они были свидетелями детской бестактности, возобновляют спор, опираясь на свои собственные понятия. Возможно, они имеют в виду принцип эквивалентности. Если так, то наступает моя очередь вежливо не понимать, о чем идет речь, ибо я никогда не был в состоянии понять этот принцип... Может быть, он значит, что эффекты гравитационного поля неотличимы от эффектов ускорения наблюдателя? Если так, то это неверно. В теории Эйнштейна в зависимости от того, отличен от нуля тензор Римана или равен нулю, гравитационное поле присутствует или отсутствует. Это свойство абсолютно; оно никак не связано с мировой линией какого-то наблюдателя. Пространство—время либо плоско, либо искривлено... Принцип эквивалентности выполнил важные обязанности повивальной бабки при рождении общей теории относительности, но, как заметил А. Эйнштейн, младенец никогда не вырос бы из пеленок, если бы не идея Г. Минковского. Я предлагаю похоронить повивальную бабку с соответствующими почестями и посмотреть прямо в лицо фактам абсолютного пространства—времени» [11, с. 8–9] [5].

По поводу принципа эквивалентности дадим следующее пояснение. Исчезновение сил тяготения в свободно падающей системе было одним из отправных пунктов теории Эйнштейна. Но когда уже предположено, что пространство—время плоское в бесконечно малом, то принцип эквивалент-

[4] О роли В. А. Фока в развитии теории пространства, времени и тяготения см. с. 465–470 данного тома. — *Прим. ред.*

[5] Другое свидетельство полемики и неспособности выдающихся физиков оторваться от релятивизма можно найти в воспоминаниях Л. Инфельда [12] и в моем ответе ему [13].

ности как возможность исключения сил тяготения оказывается просто физическим выражением давно известной теоремы римановой геометрии. Поэтому в самой теории Эйнштейна это представляет собой некий «принцип», не более чем любая другая теорема геометрии. Итак, релятивизм оказывается связанным с недостаточным пониманием даже простых математических фактов, причем такие ошибки встречаются даже у выдающихся авторов.

Уточним еще понятие о принципе относительности. Физический закон определяет связь некоторых характеристик каких-либо явлений или одного явления. Простоты ради будем представлять себе, что речь идет о двух характеристиках или системах характеристик, которые мы обозначаем x и y. Тогда закон представляется в виде звисимости $F(x, y) = 0$. Однако это не совсем точно, потому что нужно учесть условия, в которых зависимость обнаруживается. Поэтому, обозначая комплекс таких условий через А, мы должны написать символическое уравнение, выражающее данный закон, в следующем виде:

$$F(x, y, A) = 0. \tag{1}$$

Далее мы анализируем сами условия. Во-первых, в них можно выделить «фон» — неизменные условия, которые обычно лишь подразумеваются. Обозначим их через B. Это может быть вообще пространство—время или, например, в данном месте Земли ее поле тяготения и т. п. Во-вторых, в условиях выделена та система S, относительно которой фиксируются явления и определяются сами характеристики x, y. Явления могут пониматься как происходящие в системе S. С ней связывается система пространственно-временных координат, и она выступает как система отсчета. В-третьих, есть еще условия C в самой системе, которые определяются по отношению к ней и могут изменяться, определяя конкретное течение явления. Таким образом, весь комплекс условий представляется как $A = (B, S, C)$ и соответственно уравнение (1) записывается в виде

$$F(x, y, B, S, C) = 0. \tag{2}$$

Если для некоторого класса систем S выражаемая здесь зависимость одинакова во всех таких системах, то S в (2) не входит, и закон имеет вид

$$F(x, y, B, C) = 0. \tag{3}$$

В данном случае закон от системы не зависит и уравнение инвариантно относительно перехода от одной системы к другой. Если это имеет место для некоторого класса явлений P и систем S, то говорится, что для этих явлений и систем выполняется принцип относительности. Так, классический принцип Галилея относится к механическим явлениям и инерциальным системам.

Однако само различие фона B, системы S и условий C относительно и до некоторой степени условно. Можно вообще всегда включать систему в условия C: явление протекает на фоне B в условиях C, включая и то, что оно протекает в системе S. При такой точке зрения общее уравнение (2) приобретает вид (1), так как S включено в C и получается, что тут выполняется принцип относительности. Но это так лишь по той тривиальной причине, что сами системы включаются в переменные условия C.

Если мы ограничиваемся специальной теорией относительности, то метрика пространства—времени фиксирована. Ее незачем включать в переменные условия C: она является постоянным фоном и ее, естественно, туда и включают. Совершенно то же верно в классической теории; разница лишь в том, что фон, согласно этой теории, другой — не пространство—время Минковского, а евклидово пространство в соединении с абсолютным временем.

Но в общей теории относительности метрика не является уже неизменной, она зависит от физических условий. Поэтому включать ее в фон при общих построениях теории невозможно. С другой стороны, когда условия фиксированы, то метрика фиксирована. В этом случае ее естественно включать в данный фон. Например, вблизи Земли можно считать фоном ее поле тяготения и ввести координаты, связанные с Землей; при рассмотрении Солнечной системы естественными будут координаты, связанные с Солнцем; при рассмотрении модели Вселенной с равномерным распределением масс преимущественными оказываются совсем другие координаты. Словом, в зависимости от условий и соответственно от определяемой ими конкретной структуры пространства—времени оказываются предпочтительными те или иные координаты. Насколько такие специальные координаты могут быть произвольными и, следовательно, насколько, хотя бы с некоторым приближением, выполняется для них принцип относительности, опять-таки зависит от условий и от того, что при наших рассмотрениях мы учитываем и чем пренебрегаем.

Относительность относительна — в этом, коротко говоря, суть дела. Все в мире в той или иной мере относительно. Но само относительное есть сторона, грань абсолютного и содержит в себе абсолютное, как, скажем, принцип относительности выражает некоторое безотносительное свойство мира — однородность его структуры, хотя бы в малых областях и приближенно.

Что такое пространство—время?

Вопрос, поставленный в заглавии, может показаться праздным, потому что ответ на него уже был сформулирован: пространство—время есть форма существования материи. Однако вопрос, который мы, собственно, имеем в виду, состоит в том, как точно определить эту форму существования материи. Ответ нужен не на общефилософском уровне, а на таком, какой давал бы почву для построения теории пространства—времени. Ответ должен, понятно, заключаться в теории относительности, так как она и является теорией пространства—времени, но ответ этот нужно еще из нее извлечь. Форма предмета есть, собственно, не что иное, как совокупность отношений его частей. Поэтому речь идет о тех материальных связях элементов мира, которые в своей совокупности и определяют пространство—время.

Простейший элемент мира — то, что называется событием, это «точечное» явление вроде мгновенной вспышки точечной лампы или, пользуясь наглядными понятиями о пространстве и времени, явление, протяжением которого в пространстве и во времени можно пренебречь. Словом, событие аналогично точке в геометрии и, подражая определению точки, данному Евклидом, можно сказать, что событие — это явление, часть которого есть ничто, оно есть «атомарное» явление. Всякий процесс представляется как некоторая связная совокупность событий. С этой точки зрения весь мир рассматривается как множество событий.

Отвлекаясь от всех свойств события, кроме того, что оно существует, мы представляем его как точку, мировую точку. Пространство—время и есть множество всех мировых точек. Однако в таком понятии пространство—время не обладает еще никакой структурой — оно просто совокупность событий, в которых удерживается лишь один факт их существования как разных событий в отвлечении от всех прочих свойств и без всяких пока отношений между ними. Можно ввести понятие о непрерывности ряда событий, заимствуя его из наглядного представления или давая ему какое-либо подходящее определение. Тогда пространство—время окажется просто четырехмерным многообразием в смысле топологии. Пространство—время, т. е. множество событий без всяких конкретных свойств, без всякой структуры, кроме той, какая определяется отношениями непрерывности, и есть тот фон, который фигурирует в общей теории относительности. Но мы не останавливаемся на этом и определяем структуру и саму непрерывность пространства—времени, исходя из самого общего и основного отношения событий, какое имеется в мире. Мы имеем в виду движение материи.

Каждое событие так или иначе воздействует на некоторые другие события и само подвержено воздействиям других событий. Вообще воздействие и есть движение, связывающее одно событие с другим через ряд промежуточных событий. Физическая природа воздействия может быть весьма разнообразной; мы можем представлять его как распространение света, вылет частицы или обмен частицами и т. п. Понятно, что оно не обязано быть непосредственным, а может идти через ряд агентов. Само движение малого тела представляет ряд событий, в котором предыдущие события воздействуют на последующие. В понятиях физики воздействие можно определить как передачу импульса и энергии. Эти понятия представляются тогда первоначальными, что отвечает существу дела, так как импульс-энергия есть основная физическая характеристика движения и воздействия. Но, отвлекаясь в самих событиях от их конкретных свойств, мы отвлекаемся и в понятии воздействия от его конкретных свойств, кроме того, что оно есть отношение между событиями, обладающее свойствами общего отношения предшествования (антисимметричностью и транзитивностью). Если мыслить аксиоматическое построение теории пространства—времени, то понятие события—мировой точки и понятие воздействия—предшествования берутся как исходные и не подлежащие определению. Те события, которые подвергаются воздействию данного события A, образуют область воздействия события A. Такие области определяют в множестве всех событий некоторую структуру. Она равносильна, конечно, той структуре, которая определяется самими отношениями воздействия. Эта структура и есть пространственно-временная структура мира. Иначе говоря, само пространство—время можно определить следующим образом: *пространство—время есть множество всех событий в мире, отвлеченное от всех его свойств, кроме тех, которые определяются отношениями воздействия одних событий на другие.*

Воздействие одного события на другое есть элементарная форма причинной связи, как бы ее «атом» или «квант», точно так же само событие — «атомарное» явление. Поэтому только что сказанное можно выразить хотя и менее точно, но более выразительно в следующих словах: *пространственно-временная структура мира есть не что иное, как его причинно-следственная структура,взятая лишь в соответствующей абстракции.* Эта абстракция состоит в отвлечении от всех свойств явлений и их причинных связей, кроме того, что явления слагаются из событий, а их взаимные влияния — из воздействий одних событий на другие.

То, что высказанное определение пространства—времени действительно возможно в рамках теории относительности, доказывается чисто математически [9, 10]. Отношения воздействия без привлечения каких-либо свойств (даже непрерывности) действительно определяют в специальной теории относительности четырехмерное пространство Минковского. Пространство—время общей теории относительности требует для своего определения еще некоторого дополнения, которое можно сформулировать как локальную фиксацию некоторых масштабов (пар бесконечно близких событий, которым приписывается определенная величина интервала между ними).

Данное определение пространства—времени представляет собой не что иное, как соответствующее современной физике конкретное и точное выражение того, что пространство—время есть форма существования материи. Сама материя в ее движении и тем самым во взаимодействии ее элементов и определяет свою пространственно-временную форму. Такое определение невозможно в рамках представлений классической физики. Там считалось, что воздействия могут передаваться с произвольной скоростью. Поэтому область возможного воздействия события простирается, принципиально говоря, на все события, следующие за ним во времени. В результате отношение воздействия не определяет ничего, кроме простой последовательности во времени. Этому и отвечают классические понятия об абсолютной последовательности во времени и абсолютной одновременности. Что же касается количественного определения времени t и геометрии пространства, то они должны определяться чем-то другим. Более того, вообще неизвестно никакое определение времени и пространства, которое отвечало бы представлениям классической физики и было бы столь же кратко и точно, как данное нами определение пространства—времени. Уже сам факт возможности такого определения представляет громадное преимущество теории относительности и показывает, насколько глубоко она проникла в понимание фундаментальных форм мира.

Система отношений воздействия, определяя пространство—время, определяет тем самым все возможные относительные времена и все возможные относительные пространства с их геометрией. Естественно, что определение дается первоначально именно для пространства—времени, т. е. для абсолютной формы мира, а не отдельно для пространства и для времени, которые суть лишь относительные аспекты этой формы. Коротко и не вдаваясь в детальные пояснения, можно сказать, что пространство есть множество параллельных рядов событий, связанных воздействием. Точка пространства не есть ведь нечто элементарное — она определяется рядом событий, протекающих в данном месте; точнее, само «данное место» и фиксируется этим рядом событий. Отношение между разными точками пространства — его геометрия, естественно, определяется структурой пространства—времени, т. е. отношениями воздействия. В свою очередь время в данном месте можно определить как ряд событий, фиксирующих это место, с условием, что мы отвлекаемся от всех свойств событий, кроме тех, какие определяются все теми же отношениями воздействия, но, конечно, не только внутри данного ряда событий, а всей совокупностью отношений воздействия, каким эти события подвергаются и какие они сами оказывают. Согласование же разных местных времен и тем самым какое-либо относительное время, распространенное на весь мир, определяется далее опять-таки отношениями воздействия. Кстати, можно заметить, что тут выясняется общее основание эйнштейновского определения одновременности. Доказывается, что всякое определение одновременности, подчиненное естественным требованиям симметричности и транзитивности и опирающееся только на отношения воздействия в их общей структуре, необходимо оказывается эквивалентным эйнштейновскому. Это, конечно, относится лишь к пространству—времени специальной теории относительности, так как в общей теории эйнштейновское определение неприменимо.

Данное нами определение пространства—времени может быть положено в основу построения теории относительности. Для этого необходимо, конечно, наложить на структуру отношений воздействия, или, что равносильно, на структуру областей воздействия, соответствующие требования. Но мы не будем здесь на этом останавливаться.

Возвращаясь к тому, что говорилось в начале статьи, мы можем заметить, что в данном определении пространства—времени и указанном затем определении пространства с его геометрией содержится ответ на вопрос Б. Римана о тех причинах, которые порождают метрические отношения в пространстве. Они заключаются в самом существовании причинной связи явлений. Отношения воздействия, определяя структуру пространства—времени, определяют вместе с нею и геометрию — метрику пространства.

Так теория относительности ответила на глубочайшие вопросы, какие ставили ее предшественники о природе пространства и времени, об основании метрических свойств пространства, о связи свойств пространства и времени со свойствами самой материи, о природе всемирного тяготения и др.

Необходимый в связи с созданием квантовой механики пересмотр классических представлений о причинно-следственных отношениях природных явлений, а также естественные попытки создания единой геометризованной теории всевозможных физических взаимодействий, включая гравитационные, электромагнитные, слабые и сильные, вынуждают обращаться к дальнейшим обобщениям пространственно-временного многообразия. Но четырехмерное пространство—время специальной теории относительности остается основой последующих его обобщений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лобачевский Н. И.* Новые начала геометрии с полной теорией параллельных // Полн. собр. соч. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. Т. 2. С. 147–454.
2. *Риман Б.* О гипотезах, лежащих в основании геометрии // В кн.: Об основаниях геометрии. М.: Гостехиздат, 1956. С. 309–341.
3. *Гельмгольц Г.* О фактах, лежащих в основании геометрии // Там же. С. 366–382.
4. *Эйнштейн А.* Основы общей теории относительности // В кн.: Принцип относительности. М.: ОНТИ, 1935.
5. *Минковский Г.* Пространство и время // Там же.
6. *Эйнштейн А., Инфельд Л.* Эволюция физики. 4-е изд. М.: Гостехиздат, 1966.
7. *Фейнман Р.* Характер физических законов. М.: Мир, 1968.
8. *Беркли Дж.* О движении // Соч. М.: Мысль, 1978.
9. *Александров А. Д., Овчинникова В. В.* Замечания к основам теории относительности // Вестн. ЛГУ. 1953. № 11. Сер. математики, физики и химии. Вып. 4. С. 95–110 [6)].
10. *Alexandrov A. D.* A contribution to chronogeometry // Canad. J. Math. 1967. Vol. 19, No. 6. P. 1119–1128.
11. *Синг Дж. Л.* Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963.
12. *Инфельд Л.* Страницы автобиографии физика // Новый мир. 1965. № 9. С. 191–192.
13. *Александров А. Д.* Истина и заблуждение // Вопр. философии. 1967. № 4. С. 66–76 [7)].

[6)] Эта статья доступна также на с. 288–306 т. 1 настоящего издания. — *Прим. ред.*

[7)] Эта статья доступна также на с. 450–470 данного тома. — *Прим. ред.*

Теория относительности как теория абсолютного пространства—времени

Философские вопросы современной физики. М.: АН СССР, 1959. С. 269–323

Введение

Теория относительности является в своей основе теорией пространства—времени; структура же (геометрия) пространства—времени определяется общими законами движения материи и потому теория пространства—времени, хотя и абстрагируется необходимо от конкретных особенностей отдельных вещей и процессов, поскольку она выделяет общие законы пространственно-временных отношений, должна тем не менее выводить свойства пространства—времени из законов движения материи. Выражая это несколько иными словами, можно сказать, что пространственные и временные свойства и отношения предметов и явлений не определены и не существуют сами по себе, но определяются движением, взаимодействием предметов и явлений, а потому теория должна выводить их общие законы из законов материального взаимодействия. Мы не противопоставляем движение взаимодействию, имея в виду хотя бы замечание Ф. Энгельса: «*Взаимодействие* — вот первое, что выступает перед нами, когда мы рассматриваем движущуюся материю в целом ... » [1, с. 546].

Теория относительности была построена, по существу, на указанном основании, поскольку А. Эйнштейн положил в ее основу закон распространения света или вообще электромагнитных колебаний, которые есть форма движения материи и вместе с тем, можно сказать, универсальная форма воздействия одних тел и процессов на другие.

Однако в построении теории Эйнштейна главную роль играет точка зрения относительности, согласно которой всякое явление берется прежде всего в отношении к некоторой системе отсчета. Основной особенностью теории считается при этом установление относительного характера одновременности и, далее, продолжительности промежутка времени, т. е. относительности времени вообще. Поэтому теория Эйнштейна, естественно, получила название теории относительности.

Выдвинутый Г. Минковским взгляд, что основным в теории относительности является в действительности объединение пространства и времени в единое четырехмерное многообразие, привел к пониманию того, что теория относительности есть, собственно, теория этого абсолютного многообразия пространства—времени. Однако приоритет относительности в распространенном понимании теории не был преодолен, что связано, как нам кажется, не только с некоторой абстрактностью понятия о четырехмерном пространстве—времени.

Построение теории, берущее за основу точку зрения относительности, отвечает обычной практике эксперимента, который проводится в рамках определенной системы отсчета так же, как он отвечает аппарату теоретической физики, уравнения которой пишутся в тех или иных координатах. Поэтому такой подход к теории представляется более близким и естественным. Но вместе с тем именно по этой же причине он не доходит до более глубоких основ теории. Отвечая логике наблюдателя, он берет за основу явление, а не сущность. Поэтому обычный подход к теории относительности привел к затруднениям и ошибкам в понимании ряда ее основных понятий и положений и дал почву для позитивистских толкований, поскольку логика наблюдателя как раз импонирует позитивизму.

Многие крупнейшие физики на Западе либо считают позитивизм наиболее подходящей для физики философией, либо если и спорят против позитивизма, то по крайней мере подчеркивают, что точка зрения позитивизма «толкала физиков на то, чтобы занять критическую позицию по отношению к традиционным взглядам, и помогла им в создании теории относительности и квантовой механики» [2, p. 49]. Известно, что А. Эйнштейн сам ссылался на то влияние, которое оказали на него взгляды Маха.

Однако при ближайшем рассмотрении оказывается, что позитивизм более всего ответствен за прямые ошибки не только в понимании философского смысла, но — что нужно особенно подчеркнуть — и самого физического содержания теории относительности. Он вызвал путаницу в таких вопросах, которые решаются не философской, а математической аргументацией и ссылками на известные и общепризнанные факты. А. Эйнштейн дал свои гениальные выводы, фактически следуя, вопреки позитивизму, материалистическому пониманию объективной обусловленности законов пространства и времени законами движения материи. А взгляды Маха толкнули его на ошибки в понимании физического содержания своей теории, особенно общей теории относительности. Таким образом, роль позитивизма оказывается на деле реакционной: позитивизм не помогает, а мешает развитию теоретической физики.

Мы вовсе не хотим сказать, что данное А. Эйнштейном построение теории является ошибочным, позитивистским, идеалистическим. Мы категорически возражаем против высказывавшихся рядом авторов суждений о теории Эйнштейна как «махистской теории относительности» и пр., а также против подмены теории относительности «теорией быстрых движений» и т. п. Теория относительности есть, во-первых, теория пространства—времени, а во-вторых, как всякая подлинно научная теория, не может быть ни реакционной, ни идеалистической. Но мы также возражаем против того, что нет надобности углублять понимание ее основ и освобождать его от некоторых ошибок, позитивистских и идеалистических толкований, распространенных в литературе [1)].

Эйнштейновский подход к специальной теории относительности с некоторыми разъясняющими коррективами является вполне правомерным и легко излагается материалистически, что, собственно, и сделал сам А. Эйнштейн в своей первой классической работе, если не читать ее нарочито позитивистски. Однако это не значит, что понимание основ теории относительности не нуждается в углублении и что иной подход не дает нам более ясного понимания ее сущности.

Кроме того, как уже сказано, эйнштейновский подход дал почву для позитивистских толкований, для физических и даже математических ошибок, полное преодоление которых остается актуальной задачей. Решение же этой задачи лучше всего может быть достигнуто не только философскими разъяснениями, но таким построением теории, которое по самому своему существу не давало бы почвы для подобного рода толкований и ошибок.

В соответствии с этим в первой части настоящей статьи мы подвергнем критическому рассмотрению ряд распространенных ошибок в понимании теории относительности. Большинство этих критических соображений не ново, но нам казалось полезным развить и дополнить их, чтобы выявить то обстоятельство, что они связаны с самой логикой построения теории, данной А. Эйнштейном.

Дальше, во второй части мы изложим в общих чертах с упором на философскую сторону вопроса такое понимание основ теории относительности, которое в известном смысле прямо противоположно эйнштейновскому. Мы исходим не из понятия относительности, не из понятия системы отсчета, а из абсолютных законов движения материи, абсолютных материальных отношений, определяющих структуру пространства—времени.

Выдвигаемая точка зрения состоит, коротко говоря, в том, что глубокая сущность теории относительности не только в установлении единства пространства и времени в абсолютной форме существования материи — пространстве—времени, но и в установлении единства пространственно-временной и причинно-следственной структуры мира.

[1)] В качестве фундаментальной работы, полностью преодолевающей подобные ошибки и толкования, следует указать монографию В. А. Фока [3]. Вместе с тем мы затруднились бы называть более раннюю сводную работу, свободную от распространенных ошибок, не считая книги Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [4].

В движении материи обнаруживаются две системы фундаментальных, универсальных отношений: причинная связь, воздействие одних явлений на другие, с одной стороны, и пространственно-временные отношения, с другой стороны. Оказывается, между этими двумя сторонами имеется не только тесная связь (это само по себе достаточно очевидно), но между ними есть и полное единство: общая структура пространственно-временных отношений, т. е. структура пространства—времени, полностью определяется системой материальных воздействий одних явлений на другие. Этому положению можно придать форму точного определения пространства—времени: *пространство—время есть множество всех событий в мире, отвлеченное от всех его свойств, кроме тех, которые определяются общей структурой отношений воздействия одних событий на другие.* Или, иными словами, если в движущейся материи отвлечься от всех ее свойств, кроме самой структуры причинно-следственных отношений ее элементов, когда эти отношения приводят к воздействию одних элементарных событий на другие, то мы и получаем пространство—время.

Это отвечающее нашим современным знаниям, точное выражение того положения, что пространство—время есть форма существования материи. То, что возможность указанного определения пространства—времени заключена в теории относительности, есть математически строго доказываемая теорема. Сама связь геометрии пространства—времени с причинно-следственной структурой мира, установленная теорией относительности, известна достаточно давно, но ей не придавалось должного значения. Указанное определение пространства—времени не было даже сформулировано. А между тем сама возможность такого четкого определения представляется замечательным завоеванием теории с точки зрения как физики, так и философии.

Именно данное определение пространства—времени мы кладем в основу теории относительности [2]. Тогда она представляется уже не как теория «относительности», а как теория абсолютного пространства—времени, определенного самой материей, — теория, в которой относительность совершенно явно и необходимо занимает положение подчиненного, вторичного аспекта. Если эйнштейновский подход к построению его теории отвечает логике наблюдения, берет за основу скорее явление, а не сущность, то предлагаемый подход к построению той же теории отвечает самой логике предмета, берет за основу самую сущность пространства—времени как формы существования материи.

После того как в 1954 г. я изложил эти взгляды в семинаре физического факультета Ленинградского университета, Л. Э. Гуревич обратил мое внимание на то, что подобный подход к теории относительности, хотя и в ином

[2] Краткая формулировка математических положений такого подхода была дана в моем докладе на конференции по теории относительности, происходившей в Берне летом 1955 г., см. [5, р. 44–45].

оформлении, был выдвинут ирландским физиком А. Роббом, книга которого «Абсолютные отношения времени и пространства» [6] появилась еще в 1921 г. Идеи Робба были оставлены физиками без должного внимания и не получили развития, как мне кажется, не только из-за громоздкости его системы, содержащей двадцать один постулат, но, думается, в не меньшей степени из-за отмеченного уже влияния позитивистских взглядов, которым более импонирует точка зрения относительности. Мы, однако, согласны с А. Роббом в том его утверждении, что подлинное понимание основ теории Эйнштейна не может обойтись без подхода, данного А. Роббом, или подхода по существу эквивалентного [6, Предисловие].

Вместе с тем мы не можем согласиться с А. Роббом, что эйнштейновская относительность одновременности «превращает Вселенную в своего рода кошмар» [6, Предисловие]. В факте относительности времени, как и в относительности вообще, нет ничего кошмарного. Можно считать достаточно выясненным, что физическая относительность реальна и что понятие об относительности времени и прочее есть вполне реальная категория, отражающая объективные законы действительности. Стало быть, речь не может идти о том, чтобы «опровергать» эйнштейновское построение теории, считать его недопустимым, «кошмарным» или «идеалистическим».

Соответствующие разъяснения, материалистическое и в ряде пунктов более глубокое понимание теории Эйнштейна и самого понятия физической относительности было дано разными авторами, особенно в статьях, появившихся в 1953–1955 гг. в связи с философской дискуссией по теории относительности (например, статьи Г. И. Наана [7], В. А. Фока [8–10] и др. [3)]). В том же духе была написана моя статья «О сущности теории относительности» [13], см. также [14]. Однако там не была раскрыта та более глубокая и фундаментальная черта теории, которую мы теперь выдвигаем как ее основу. Поэтому хотя я и не считаю, например, ту свою статью и развитые в ней взгляды ошибочными, тем не менее я нахожу их сравнительно поверхностными, так как они не дошли еще до настоящей сущности теории относительности.

В недавнее время некоторые авторы предлагали отказаться от теории Эйнштейна, видвигая тезис, что «*материалистическое* ... истолкование закономерностей быстрых движений есть в действительности *отказ от тео-*

[3)] В своей статье [11] я критиковал, в частности, взгляды, выраженные Я. П. Терлецким в его статье [12]. Не отказываясь от своей критики, я считал бы нужным все же отметить, что Я. П. Терлецкий, как и некоторые другие авторы, хотел оттолкнуться от засилия относительности. В этом смысле он правильно выдвигал необходимость рассматривать теорию относительности как «четырехмерную теорию» в духе Г. Минковского, хотя и не дал этой установке удовлетворительной реализации. Думается, что предлагаемое мною понимание теории относительности отвечает таким запросам «свергнуть засилие относительности» и позволит прекратить полемику.

рии относительности Эйнштейна» [15, с. 72], см. также [16]. Попытку отказаться от этой теории предпринял, например, Л. Яноши [17]. Он старается, как хотелось бы и другим упомянутым авторам, объяснить отдельные релятивистские эффекты некоторыми специальными механизмами и закономерностями взаимодействия частиц и поля. Самый вопрос об общих законах пространства—времени даже не ставится, как будто этого вопроса и его решения, даваемого теорией относительности, не существует. Отказываясь от необходимой для исследования общих законов пространства—времени степени абстракции, фактически сохраняют старые, еще более абстрактные представления о пространстве и времени. Единство пространства—времени и материи по существу разрывается, и пространство и время остаются пустым вместилищем, в котором только благодаря хитрым механизмам взаимодействия осуществляются релятивистские эффекты. Такая точка зрения философски неудовлетворительна, а для физики не дает ничего нового и ничего фактически не объясняет. Она отворачивается от глубоких завоеваний теории относительности и фактически пытается отказаться от самой постановки вопроса об общих законах пространства—времени.

Предлагаемый нами подход к теории относительности прямо противоположен. Во-первых, мы не считаем теорию относительности неверной; во-вторых, мы рассматриваем ее прежде всего именно как общую теорию пространства—времени; в-третьих, мы не ищем специальных механизмов взаимодействия, объясняющих отдельные релятивистские эффекты, а, исходя из универсального факта воздействия одних событий на другие и самых общих законов таких воздействий, обосновываем на этом теорию пространства—времени. Частные законы и механизмы рассматриваются тогда в их естественном отношении к общим законам причинно-следственной и соответственно пространственно-временной структуры мира.

В настоящей статье мы не будем заниматься более обстоятельной критикой рассмотренных авторов [4)]. Мы хотим прежде всего оттолкнуться от точки зрения относительности и выдвинуть взгляд на теорию Эйнштейна, суть которой резюмируется в приведенном выше определении пространства—времени. Мы имеем в виду главным образом специальную теорию относительности; обоснование теории пространства—времени так называемой общей теорией относительности требует дополнительных соображений. Данное выше определение пространства—врмени в общей теории относительности сохраняется, но структура его оказывается неоднородной. Это легко пояснить наглядно. Представим себе воздействия как передачу энергии фотонами. С энергией связана масса, подверженная тяготению, так что пути фотонов искривляются. Но эти пути и определяют структуру пространства—

[4)] Такая критика уже была [18], хотя ее стоило бы еще развить и дополнить. Критика взглядов, подобных взглядам Л. Яноши, хотя и выражавшихся в общих словах, давалась неоднократно.

времени. Оно, стало быть, «искривляется». Всемирное тяготение и «кривизна» пространства—времени — это, можно сказать, одно и то же: они взаимно проявляются друг в друге.

I. К критике основных ошибок в понимании теории относительности (логика обычного построения теории относительности и некоторые связанные с ней ошибки)

В основу специальной теории относительности А. Эйнштейн положил два фундаментальных закона природы: принцип относительности и принцип постоянства скорости света. Первый, коротко говоря, утверждает, что по отношению ко всем инерциальным системам отсчета законы физических явлений одинаковы. Второй состоит в том, что свет распространяется в вакууме с одинаковой скоростью по отношению ко всем инерциальным системам отсчета.

Уже отсюда видно, во-первых, что основным понятием теории оказывается понятие инерциальной системы отсчета или связанной с нею системы пространственных и временной координат: x, y, z, t. Кстати сказать, первый параграф основополагающей работы А. Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел» начинается словами: «Пусть имеется система координат ... », так же как почти каждое систематическое изложение теории относительности начинается с понятия системы отсчета, или системы координат. Без определения этих понятий сами основные принципы теории не могут быть сформулированы.

Во-вторых, уже из формулировок основных принципов видно, что основной, отправной точкой в построении теории оказывается точка зрения относительности, когда вопрос ставится прежде всего не о явлениях самих по себе, а об их отношениях к тем или иным системам отсчета. Эта точка зрения обычно господствует в дальнейшем развитии теории, когда рассматривают относительное время, сокращение Лоренца, относительную массу и т. д. Исходным служит здесь проявление того или иного тела или процесса по отношению к той или иной системе отсчета.

Как известно, возможны варианты изложения теории относительности, когда вместо закона постоянства скорости света берется за основу какой-либо иной закон [5)]. Но во всех случаях так или иначе *основным оказывает-*

[5)] Доказано, что при весьма общих предположениях о характере преобразований от данной инерциальной системы к другой есть только две возможности: либо преобразования Галилея, либо преобразования типа Лоренца (в которые входит константа c, определить которую могут, конечно, только дополнительные данные). Поэтому всякий закон, отличающий релятивистскую физику от нерелятивистской, может служить в качестве замены закона постоянства скорости света. Можно взять закон относительности массы, т. е. зависимости ее от скорости относительно системы отсчета; можно взять закон пропорциональности массы и энергии и т. п. См. [19, 20].

ся понятие инерциальной системы отсчета (координат) и исходной оказывается точка зрения относительности, не реальность «сама по себе», а реальность в ее относительном проявлении. Безотносительное же, т. е. то, что присуще явлению вне его отношения к какой-либо данной системе отсчета, определяется через относительное как инвариант преобразования координат. Иначе говоря, свойства предмета восстанавливаются по их проявлениям в разных отношениях.

Такой подход можно сравнить с восстановлением формы предмета по его различным проекциям. Излишне будет напоминать, что этот подход является вполне правомерным, так как он фактически дал верную теорию. Сам по себе он не ведет к «растворению предметов в отношениях», и исходные его пункты — системы отсчета и проявления тел и процессов в их отношениях к системам отсчета — ничуть не менее реальны, чем сами тела и процессы, как реальна тень, отбрасываемая предметом и реализующая тем самым его проекцию.

Тем не менее этот подход содержит свои трудности и недостатки. Рассмотрим такие трудности и связанные с ними распространенные ошибки.

Во-первых, указанный подход не отвечает должным образом объективной логике предмета, потому что в согласии с этой логикой первичным должен быть предмет с его свойствами, тогда как его относительные проявления выступают как нечто вторичное. Основным должно быть абсолютное, тогда как относительное оказывается лишь стороной, гранью, аспектом абсолютного. Когда же за исходное берется относительное, то предмет ставится «с ног на голову».

Повторяем, что идти от относительного к абсолютному вполне возможно, как показал самый факт построения теории относительности. Но это не значит, однако, что обратный путь, исходящий из абсолютного, не будет соответствовать более сути дела и не может привести поэтому к лучшему пониманию. Конечно, в относительном есть абсолютное; проявление предмета в отношении к данной системе отсчета есть вместе с тем свойство пары: предмет плюс система отсчета, и, стало быть, в этом смысле так же безотносительно. Однако нужно признать бесспорным, что по крайней мере, скажем, относительное время есть лишь аспект абсолютного многообразия пространства—времени, а потому гораздо ближе к существу дела было бы сначала определять это абсолютное многообразие, а потом раскрывать его относительные аспекты и относительное время, в частности «кошмарность» относительной одновременности. Трудность эта, конечно, легко разъясняется указанием, которое можно найти в известной книге В. Паули: лоренцево сокращение «есть не свойство одного масштаба, а соотношение между двумя масштабами», как вообще релятивистские эффекты выражают не свойство одного предмета, а соотношение между предметом и совокупностью предметов и процессов, служащих базой системы отсчета. Но тем не менее самый факт необходимости таких разъяснений показывает, что тут хотя бы для некоторых авторов появилось известное, хотя и легко преодолимое, затруднение.

Так, ставится, например, вопрос об атомном механизме лоренцева сокращения. В таком духе делает замечание и В. Паули. Но этот вопрос имеет тот же смысл, как, скажем, вопрос об атомном механизме геометрических соотношений, вроде того, что перпендикуляр короче наклонной. Конечно, у отвесной и наклонной нитей есть атомное строение, обусловливающее их длины, но геометрический закон имеет более общее основание. Аналогично природа лоренцева сокращения не объясняется особенностями строения конкретных стержней, так же как она не состоит в исчезновении у стержня присущей ему «собственной» длины.

Во-вторых, построение теории, идущее от относительного, хотя и не отвечает логике предмета, зато отвечает логике наблюдения, измерения, изучения объекта. Наблюдатель воспринимает, обнаруживает или измеряет прежде всего ту сторону предмета, которой последний проявляется по отношению к средствам наблюдения и измерения. Поэтому подход к теории, отправляющийся от того, что измеряет или наблюдает физик в его системе отсчета, оказывается в известном смысле более простым и близким для физика.

Однако этот подход таит в себе большую опасность, именно за него ухватился позитивизм. На такой почве легко возникает представление, будто относительное связано с наблюдением или измерением, что оно зависит от точки зрения наблюдателя, что, наконец, оно не объективно, а субъективно. Отсюда пошли не только постоянные разговоры о точке зрения наблюдателя, которые, конечно, могут служить для популярных объяснений, но и прямое сведение объективной относительности к чему-то зависящему от точки зрения наблюдателя и потому субъективному.

Идеалистические толкования теории относительности имеют главной своей чертой именно подмену объективно относительного субъективным. Корень лежит в конечном итоге в перевернутой логике построения теории. Одностороннее развитие этой черты теории и служит здесь гносеологическим источником идеализма в понимании теории относительности.

То же смешение объективно относительного с субъективным допускали некоторые наши авторы, желавшие отстаивать материализм. Но они приписывали идеализм даже выводам теории относительности и поносили всю теорию как «махистскую», как «реакционное эйнштейнианство», представляя борьбу против научной теории как якобы борьбу за материализм в физике. Но, считая теорию относительности идеалистической, они фактически отдавали ее в распоряжение идеализма и тем самым служили не материализму, а идеализму.

В-третьих, возможность выбора разных систем отсчета привела к ошибочному взгляду о зависимости объективно относительного от такого выбора, т. е. опять-таки от чего-то субъективного. Принцип относительности порой формулируют не как физический закон, а как принцип независимости законов природы от произвольного выбора системы отсчета. Между тем ничто объективное не может зависеть от субъективного выбора. От того, что покупатель выбирает себе шляпу в магазине, она не теряет своей объективности. Принцип относительности выражает тот объективный факт, что в одинаковых условиях, объективно осуществляющихся в разных инерциальных системах, явления одного и того же типа протекают одинаково. А подмена этого факта утверждением о независимости законов природы от выбора способа описания просто лишает принцип относительности характера физического закона, потому что это утверждение хотя и безусловно верно, но не выражает никакого специального физического содержания.

Когда систему отсчета понимают как «точку зрения наблюдателя» или «способ описания» явлений, то снова подменяют объективное субъективным.

Система отсчета — нечто объективное. Она есть по существу объективная координация явлений по отношению материальных тел и процессов, служащих базой системы отсчета, координация, определенная в конечном счете материальными взаимодействиями. И тот факт, что мы можем выбирать разные системы координат для описания явлений, служит лишь абстрактным выражением объективной связи явлений с разными базами систем отсчета. Без этого объективного факта, отражаемого в методе описания явлений, само описание не могло бы иметь объективного значения.

Точку зрения на систему отсчета как на произвольную и фиктивную сетку, налагаемую наблюдателем на внешний мир, чрезвычайно последовательно выразил А. С. Эддингтон. Первую главу своего известного трактата он начинает словами: «Наблюдатели, движущиеся различным образом, вводят различные системы отсчета пространства и времени». И далее: «Различные наблюдатели изучают одни и те же внешние события, не обращая внимания на различные пространственно-временные системы отсчета, которые они берут за основу. Таким образом, пространственно-временная система отсчета есть нечто налагаемое наблюдателем на внешний мир; сетки, представляющие отсчеты времени и пространства, являются воображаемыми поверхностями, которые мы чертим в мире, аналогично тому, как мы наносим линии широты и долготы на Земле. Они не более соответствуют естественным линиям строения мира, чем широты и долготы линиям геологического строения Земли. Такая сетка в высшей степени удобна при описании явлений, и мы будем ею пользоваться, но следует помнить, что по существу она произвольна и фиктивна» [21, с. 21–22].

Все это, однако, неверно. Если линии широт и долгот мало соответствуют линиям геологического строения Земли, то они вполне соответствуют линиям, объективно определенным вращением Земли. То обстоятельство, что Ленинград, Осло и южная оконечность Гренландии — мыс Фаруэлл лежат на одной широте, имеет объективный смысл, потому что факты равенства высот Полярной звезды над горизонтом во всех этих пунктах или одинаковости вращения маятника Фуко вовсе не зависят от наблюдателя и ничуть не произвольны и не фиктивны. Удобство географической сетки для описания явлений определяется поэтому не произволом наблюдателя и потребностями «экономии мышления», а соответствием этой сетки существенным объективным фактам.

Совершенно так же никто не будет утверждать, что в мире начерчены координатные сетки, но и нельзя утверждать, что они совершенно фиктивны. Системы отсчета астрономии, механики и теории относительности соответствуют строению мира, хотя бы уже в том смысле, что инерциальные системы отсчета характеризуются объективными свойствами, вовсе не зависящими от произвола наблюдателя. Без этого не было бы никакой экспериментальной возможности фиксировать системы отсчета и теория превращалась бы в фиктивную схему, не опирающуюся на опыт. Самый произвол в выборе той или иной сетки возможен без такой потери физического смысла теории только потому, что объективно существуют разные системы отсчета.

Следует подчеркнуть, что в приведенной цитате А. С. Эддингтон дает определение основного понятия теории — системы отсчета, так что речь идет не о философском толковании теории, но о самой физике. Точно так же формулировка принципа относительности как принципа независимости законов природы от способов их описания не есть философский комментарий к теории, но формулировка ее основного закона. Однако эта формулировка, как было указано, ошибочна. Таким образом, в обоих случаях речь идет о самой физике, и мы видим, как философские ошибки ведут к существеннейшим ошибкам в трактовке физических понятий и законов. Это лишний раз подчеркивает неизбежную связь философских установок того или иного автора с пониманием им самой науки. Подмена объективного и необходимого субъективным и произвольным вырастает в данном случае в результате одностороннего преувеличения тех черт построения теории, которые выдвигают на первый план понятия системы отсчета и относительности вообще.

Другой вариант ошибочного взгляда на координаты x, y, z, t в инерциальной системе состоит в представлении, что они определяются условно принятыми измерительными операциями. Здесь координаты снова лишаются своего объективного значения, определенного законами природы. Всякое определение понятия лишь постольку имеет научное значение, поскольку оно отражает нечто объективное, и если бы о выборе координат x, y, z, t можно было действительно «просто условиться», как писалось, например, в «Курсе физики» [22, с. 539], то было бы истинным чудом, что в условно принятых координатах законы природы выражаются столь замечательным образом, как это имеет место на самом деле. Стало быть, координаты соответствуют чему-то фундаментальному в самой природе вещей.

Обычный подход к теории относительности не выявляет этого в должной мере. Координаты считаются уже определенными посредством твердых масштабов, часов и эйнштейновского приема сравнения времен в разных местах в инерциальной системе. Но тогда встает вопрос: откуда мы знаем, что этот масштаб твердый или что эти часы идут верно? Вопрос, конечно, имеет основание, так что тут есть реальная трудность. В поисках выхода из нее Л. И. Мандельштам и выдвинул мысль, что координаты определяются предписанием измерительных операций [19, с. 177–180].

Однако в действительности пространственные координаты и время в инерциальных системах определены объективными отношениями и измерительные операции дают рациональные результаты только тогда, когда они согласуются с законами природы. Когда же ставят измерительные операции перед объективными законами и тем более когда считают их условными, то они приобретают характер чего-то субъективного, так что объективное опять подменяется субъективным. И это не случайно, на это толкает перевернутая логика построения теории, когда за исходное берут самое систему координат, так что вопрос об ее объективном основании смазывается. Конечно, не так уже трудно установить соответствующее объективное значение координат x, y, z, t[6]. Но, как уже сказано, традиционный подход к теории относительности не выявляет этого и порождает тем самым трудность, поиски выхода из которой и толкнули на ошибочные заключения.

В итоге мы видим, что обычное построение теории относительности, хотя и может быть понято вполне материалистически, дает легкую почву для позитивистских заблуждений в самых основных ее вопросах, именно вследствие логики построения, отправляющейся от относительного, вопреки логике предмета.

Преувеличение А. Эйнштейном роли относительности, связанное с логикой построения теории, привело к существенным ошибкам в понимании ее физического содержания. Видя главную сущность специальной теории относительности не в открытии свойств абсолютного многообразия пространства—времени, а в принципе относительности, сам А. Эйнштейн начал поиски обобщения этого принципа на любые движения, на любые системы отсчета.

Утверждают нередко, что специальная теория относительности имеет дело только с инерциальными системами, что в ней, например, координаты, связанные с вращающимся телом, «недопустимы», см. например [24, с. 205], и что только общая теория относительности допускает любые системы координат. Но это неверно уже потому, что в специальной теории относительности фактически пользуются неинерциальными системами, как можно убедиться, просматривая известные работы (например, «Теорию относи-

---

[6] Это сделано, например, в книге В. А. Фока [3], другой вариант см. в [24].

тельности» В. Паули). Фундаментальное же различие между специальной и общей теорией относительности состоит не в общности допустимых систем координат, а в разных представлениях о свойствах пространства—времени.

Неверный взгляд, будто различие обеих теорий состоит в общности «допустимых» координатных систем, вызван, очевидно, тем, что на первый план выдвигают системы отсчета, а не безотносительные свойства пространства—времени, не абсолютное, как следовало бы по логике предмета, а относительное. Обобщение принципа относительности на любые движения было якобы дано А. Эйнштейном в общей теории относительности. Вот как, например, излагается соответствующая постановка вопроса в книге А. Эйнштейна и Л. Инфельда «Эволюция физики» [24]. Мы приведем достаточно длинную цитату, чтобы не было никаких сомнений в том, как трактовали эти авторы подход к общей теории относительности еще и 30 лет спустя после ее создания. Они писали: «Можем ли мы сформулировать физические законы таким образом, чтобы они были справедливы для всех систем координат, не только для систем, движущихся прямолинейно и равномерно, но и для систем, движущихся совершенно произвольно относительно друг друга? Если это можно сделать, то наши трудности будут разрешены. Тогда мы будем в состоянии применять законы природы в любой системе координат. Борьба между воззрениями Птолемея и Коперника, столь жестокая в ранние дни науки, стала бы тогда совершенно бессмысленной. Любая система координат могла бы применяться с одинаковым основанием. Два предложения «Солнце покоится, а Земля движется» и «Солнце движется, а Земля покоится» означали бы просто два различных соглашения о двух различных системах координат. Могли ли бы мы построить реальную релятивистскую физику, справедливую для всех систем координат, в которой имело бы место не абсолютное, а лишь относительное движение? Это в самом деле оказывается возможным!.. Проблема формулирования физических законов для всякой системы координат была разрешена так называемой общей теорией относительности» [24, с. 191–192].

В том же духе писал В. Паули: « ... мы должны обобщить принцип относительности следующим образом: общие законы природы должны быть выражены в такой форме, чтобы они имели одинаковый вид в любой системе координат, т. е. были бы ковариантны относительно любых преобразований координат» [20, с. 211].

Мы должны, однако, со всей определенностью указать, что все это неверно не столько даже в философском, сколько в прямом физическом и математическом смысле.

Во-первых, очевидно, что обе системы отсчета, связанные с Землей или с Солнцем, могут применяться для описания движения светил и выбор одной из них есть, конечно, вопрос условного соглашения. Но это было известно давно, и спорить об этом в XX столетии нет никаких оснований.

Борьба же между воззрениями Птолемея и Коперника касалась не условных соглашений, а объективного устройства Вселенной. На языке систем отсчета вопрос стоит так: равноправны ли, подобно инерциальным системам, системы отсчета, связанные с Землей или Солнцем, или система, связанная с Солнцем, объективно отличается от системы, связанной с Землей, так, что ее следует считать привилегированной, конечно, не в том вульгарном смысле, что Солнце больше Земли и т. п., а в том смысле, что в ней законы природы выражаются иначе? Другими словами: имеет ли утверждение о вращении Земли вокруг Солнца *только* относительное значение, или оно имеет также абсолютный характер?

Известно, что системы отсчета, о которых идет речь, не равноправны, так как законы формулируются в них различным образом, и что вращение Земли вокруг Солнца имеет не только относительный, но и абсолютный характер. Тут нет почвы для спора, ибо вопрос решается с математической точностью в рамках само́й общей теории относительности [7)]. Между тем спор продолжается, что вызвано все тем же преувеличением значения относительности и роли системы отсчета.

Во-вторых, уже из сказанного следует, что задача, сформулированная А. Эйнштейном: «построить реальную релятивистскую физику, в которой имело бы место не абсолютное, а лишь относительное движение», не была решена общей теорией относительности. Движение Земли вокруг Солнца не является *только* относительным. Более того, легко видеть, что в общей теории относительности, если не рассматривать ее предельных случаев, не отвечающих достаточно действительности, всякое движение оказывается абсолютным. В самом деле, согласно этой теории, пространство—время, вообще говоря, неоднородно, а потому и разные направления движения неравноправны [8)]. Поэтому общая теория относительности скорее ликвидирует относительность всякого движения, нежели обобщает ее с инерциальных движений на любые ускоренные.

В-третьих, общий принцип относительности, утверждающий равноправность любых систем координат в том же смысле, в каком частный принцип утверждает равноправность инерциальных систем, вообще невозможен. Это

[7)] См. книгу В. А. Фока [3]. Сто́ит отметить, что работы В. А. Фока были опубликованы до появления книги А. Эйнштейна и Л. Инфельда [24] и что, с общей точки зрения, вопрос должен был быть ясным без теории относительности. Представим системы отсчета, связанные с каруселью и с Землей. Относительно первой карусель неподвижна, но центростремительные силы все равно относят людей в стороны.

[8)] Если кривизна в данной точке неодинакова во всех двумерных направлениях, то тем самым в самой структуре пространства—времени направления неравноправны. Если же, как это естественно считать, метрика пространства—времени аналитична, то оно либо всюду однородно, что невозможно при наличии неравномерностей в распределении материи, либо оно в каждой точке неоднородно, хотя бы в величинах некоторого высшего порядка.

математически строго доказанная и достаточно давно известная теорема: ни в каком четырехмерном многообразии с любой метрикой или линейным элементом $g_{ik}dx^i dx^k$ не может быть большей равноправности систем координат, чем та, какая имеется в специальной теории относительности. Или иными словами: никакое многообразие не допускает более обширной группы преобразований, чем группа Лоренца[9]. Речь идет именно о математической теореме, и потому утверждение о том, что в основе теории лежит некий общий принцип относительности, равносильно примерно тому, как если бы кто-нибудь утверждал, будто «в основе теории Эйнштейна лежит общий закон, что $2 \cdot 2 = 5$».

Наконец, что же представляют А. Эйнштейн и В. Паули в вышеприведенных цитатах как обобщение принципа относительности? Они говорят о применимости любых систем координат и о возможности выразить законы природы в такой форме, чтобы они имели одинаковый вид в любой системе. Это, однако, вовсе не есть обобщение принципа относительности, а математическая задача, из которой нельзя извлечь никакой физической теории. Ведь метод писать уравнения математической физики в любых координатах был разработан еще сто лет назад. Когда Г. Минковский дал инвариантную форму уравнений релятивистской механики и электродинамики, написание их в любых координатах стало тривиальной математической задачей. Вопрос идет не о физике, а о формальных преобразованиях координат, и потому от введения общих координат специальная теория относительности обобщается ничуть не больше, чем планиметрия обобщается от перехода от прямоугольных координат к полярным или любым другим.

При написании уравнений в форме, годной для любых координат, как говорят «в общековариантной форме», в уравнения вводятся величины, характеризующие саму систему координат: коэффициенты g_{ik} метрической формы, выраженной в этих координатах. Поэтому тут нет инвариантности в том же смысле, в каком уравнения специальной теории относительности инвариантны относительно преобразований Лоренца: ведь в эти уравнения в их обычной форме никакие величины, характеризующие ту или иную систему координат x, y, z, t, вовсе не входят! Это и означает, что системы вполне равноправны и что уравнения *инвариантны* при переходе от одной из них к другой. При преобразовании же к другим координатам появляются новые

[9] Речь идет о многообразии с неопределенной метрикой, приводимой в каждой точке к виду $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2$. К обычным преобразованиям Лоренца нужно еще прибавить преобразование подобия. Теорема эта обобщается на любое число измерений и на любую метрику. Доказательство можно найти, напр., в [25]. В связи с этим отметим, что в книге В. Паули [20] в вопросе о группах преобразований допущена ошибка. Там говорится о группе преобразований, сохраняющих общую квадратичную форму $g_{ik}dx^i dx^k$. Однако известно, что для общей формы такая группа сводится к одному тождественному преобразованию. Это будет не так лишь для форм частного вида, и во всех случаях группа преобразований не будет обширнее группы Лоренца.

величины g_{ik}, так что инвариантность теряется. Стало быть, чисто математически ясно, что общая ковариантность уравнений вовсе не есть обобщение их инвариантности и соответственно никакого обобщения равноправия инерциальных систем, т. е. принципа относительности, тут не получается.

Все рассмотренные ошибки происходят в конечном счете от пренебрежения тем фактом, что истинная суть теории Эйнштейна состоит не в принципе относительности, а в установлении абсолютного многообразия пространства—времени. Именно с этой точки зрения нужно подходить и к общей теории относительности.

Коротко говоря, специальная теория относительности, установив взаимосвязь пространства и времени в едином многообразии пространства—времени, принимает гипотезу о его однородности, что и выражается равноправностью инерциальных систем отсчета, или соответствующих систем координат. Общая теория относительности снимает эту гипотезу; ее основное положение состоит в признании того, что пространство—время, вообще говоря, неоднородно и что его структура (метрика) определяется распределением и движением материальных масс. Эта структура определяет поле тяготения и тем самым определяет самое движение тел «под влиянием тяготения». Короче, обе стороны: метрика пространства—времени и движение масс, находятся в неразрывном единстве и взаимно определяют друг друга. Поэтому общая теория относительности есть по существу теория тяготения. Что же касается «общей относительности», то она, как было указано, вообще невозможна. А. Эйнштейн в построении своей теории фактически руководствовался тем, что материя определяет свойства пространства—времени, т. е. тем, что оно есть форма существования материи, но, не видя ясно этого философского принципа, шел также путем поисков несуществующей «общей относительности», как известно, не без прямого влияния Э. Маха. И именно потому, что А. Эйнштейн фактически руководствовался верным принципом, он построил свою замечательную теорию, а «общая относительность» осталась посторонним наслоением, затмевающим сущность этой теории. Как тут не вспомнить слова В. И. Ленина [26, с. 332] о том, что современная физика идет к диалектическому материализму, не видя ясно своей конечной цели, приближаясь к ней ощупью, иногда даже задом!

Переход от однородного пространства—времени специальной теории относительности к пространству—времени эйнштейновой теории тяготения аналогичен переходу от геометрии на плоскости к геометрии на искривленной поверхности. Эта аналогия, кстати, идет достаточно далеко, и математический аппарат теории тяготения как раз вырос из обобщения геометрии на поверхности. Плоскость среди всех поверхностей характеризуется максимальной однородностью: законы (теоремы) геометрии на плоскости инвариантны относительно движений, отражений и подобных преобразований. На плоскости есть привилегированные системы координат — прямоугольные декартовы координаты, переход от одной системы к другой осуществляется движением с возможным добавлением отражения (изменения направления одной из осей) и подобного преобразования (одинакового изменения масштабов по осям). Все законы геометрии на плоскости выражаются одинаково во всех этих системах координат. Закон равноправия систем прямоугольных координат есть не что иное, как своего рода принцип относительности геометрии на плоскости, в полной аналогии с частным принципом относительности теории Эйнштейна.

Вместе с тем на плоскости можно вводить и другие координаты и в них тоже можно выражать законы геометрии. Но выражения эти будут уже другие; они будут содержать также величины, характеризующие ту или иную координатную систему [10)]. Поэтому при переходе от одной системы координат к другой нет инвариантности в том же смысле, как при переходе от одних прямоугольных координат к другим, когда выражения законов геометрии не изменяются вовсе.

В геометрии на неравномерно искривленной поверхности уже нет такой равноправности систем координат, как на плоскости. Даже на сфере хотя и возможны движения, но невозможны подобные преобразования. Если же мы имеем дело с неравномерно искривленной поверхностью, то на ней однородность утрачивается, так как на ней свободное движение фигур невозможно, и поэтому на такой поверхности, вообще говоря, не будет систем координат, равноправных в том смысле, что во всех них законы геометрии поверхности выражаются совершенно одинаково. Конечно, эти законы можно выразить в любой системе координат, но каждое такое выражение уже необходимо содержит величины, зависящие от системы координат, так же как в случае введения любых координат на плоскости. Ковариантность этих выражений получается именно за счет явного введения таких величин [11)].

Стало быть, различие между геометрией на плоскости и на искривленной поверхности состоит не в общности применяемых координат и не в «принципе общей ковариантности», т. е. в возможности выражать законы геометрии в общей форме, годной для любых систем координат, если в выражения явно входят величины, зависящие от системы координат. Это различие состоит в различии самой структуры, самих свойств плоскости и искривленной по-

[10)] Например, в выражении длины отрезка в косоугольных координатах появляется косинус угла между координатными осями. В общих же координатах x_1, x_2 появляются величины g_{11}, g_{12}, g_{22}, связанные с этими координатами. Линейный элемент плоскости выражается общей формулой $ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2$.

[11)] Линейный элемент всякой поверхности выражается в общих координатах так же, как на плоскости. Разница в том, что на плоскости можно ввести координаты так, чтобы линейный элемент всюду выражался простейшей формулой $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$ — это и будут прямоугольные координаты. Ни на какой другой поверхности, вернее, ни на какой поверхности, которую нельзя развернуть на плоскость, подобное невозможно. Это можно сделать, но не на всей поверхности, а только «в каждой фиксированной точке».

верхности. На неравномерно изогнутых поверхностях существуют преимущественные системы координат, определяемые самой структурой поверхности [12]. В общем случае такая система координат определяется строением поверхности однозначно, так что никакого равноправия, никакого принципа относительности, подобного равноправию прямоугольных координат, тут нет и быть не может.

Совершенно так же различие между специальной и общей теорией относительности состоит в разных предположениях о структуре пространства—времени. В первой теории оно считается максимально однородным, что и выражается принципом относительности, или требованием инвариантности законов этой теории относительно преобразований Лоренца. Во второй теории требование однородности снимается и в связи с этим исчезает принцип относительности и инвариантность по отношению к каким-либо преобразованиям, но локально появляются преимущественные системы координат, как например гелиоцентрические координаты в Солнечной системе. Что же касается возможности применения разных систем координат и возможности писать уравнения физики в общековариантной, т. е. применимой для любой системы координат, форме, то эта возможность есть в обеих теориях. Такая форма написания уравнений связана, однако, с введением величин, зависящих от системы координат (коэффициентов метрического тензора g_{ik}), тогда как в лоренц-инвариантной форме уравнений специальной теории относительности таких величин не появляется.

Поиски «общего принципа относительности» и смешение его с требованием «общей ковариантности» означают чисто математическую ошибку, которая произошла от преувеличения роли принципа относительности, затмившего истинную суть теории Эйнштейна как теории абсолютного многообразия пространства—времени. Кстати сказать, принцип относительности ведь и не был изобретен А. Эйнштейном, так как был известен и в ньютоновской механике. А. Эйнштейн перенес его с механических явлений на электромагнитные и связал с законом постоянства скорости света. Поэтому тем более ясно, что главное своеобразие теории Эйнштейна никак не могло состоять в самом по себе принципе относительности.

II. Теория относительности как теория структуры абсолютного пространства—времени

§ 1. Общие принципы подхода к теории

Пространственные и временны́е отношения не существуют в действительности сами по себе в чистом виде, а определяются материальными связями предметов и явлений. Если представить себе явление, абсолютно не связан-

[12] В качестве такой системы координат может служить система, определяемая линиями уровня гауссовой кривизны и линиями уровня абсолютной величины ее градиента. См., напр., [27, с. 383].

ное с другими явлениями, то вопрос о его месте и времени лишается всякого смысла, так как, исключив всякие связи, мы тем самым исключаем всякое основание для ответа.

Соответственно этому то, что называют геометрией, законами или структурой пространства и времени, также не определено само по себе, а представляет собой некоторые общие законы материальных отношений предметов и явлений, пространственно-временную структуру материального мира. А так как форма в общем смысле есть строение содержания, то сказанное означает, что пространство—время есть форма существования материи. Это положение диалектического материализма обосновано всей историей познания свойств пространства и времени, начиная с первых, возникших на заре сознания понятий о пространственных и временных отношениях и кончая теорией относительности. Из сказанного явствует, что рациональная теория пространства—времени должна исходить из материальных связей явлений, выводить из обнаруживающихся в них общих законов понятия и законы пространственно-временных отношений. Теория должна исходить при этом из достаточно общих, универсальных связей между явлениями, поскольку само пространство—время имеет универсальный характер.

Так фактически и поступил А. Эйнштейн, ибо он положил в основу своей теории законы электродинамики, прежде всего закон распространения электромагнитных возмущений, которые как раз и являются чрезвычайно общей, можно сказать универсальной, формой связи между предметами и явлениями, по крайней мере в области макроскопической.

Далее, теория должна отвлекаться от конкретного характера и в известной степени от самого материального содержания связей между явлениями, фиксируя внимание лишь на структуре этих связей. Иначе, само собой рзумеется, она не была бы теорией именно *формы* существования материи. Поэтому теории пространства—времени присуща необходимая степень абстракции [13].

Наконец, поскольку речь идет об универсальной форме существования материи, т. е. о некоторых общих законах универсальной структуры мира, постольку рациональная теория пространства—времени должна исходить из совокупности отношений между явлениями, взятой в целом, чтобы раскрыть, таким образом, именно саму пространственно-временную структуру мира, определить само абсолютное пространственно-временное многообразие, а не те или иные его относительные аспекты. Короче, теория должна установить прежде всего абсолютное и от него уже идти к относительному, как к стороне, грани, аспекту абсолютного.

[13] Это ясно видно уже в элементарной геометрии, где изучают простейшие геометрические фигуры в отвлечении от их конкретной материальной реализации. Непонимание этого некоторыми авторами привело их к совершенно извращенным взглядам на теорию относительности и даже на обычную геометрию.

Это последнее требование, однако, прямо противоположно тому пути, которым шел А. Эйнштейн и которому следуют, можно сказать, во всех традиционных изложениях теории относительности. Обычное понимание теории, как уже было многократно подчеркнуто в первой части нашей статьи, берет за исходный пункт относительное и исследует как законы пространства—времени, так и другие законы физики сквозь призму их проявления в той или иной системе отсчета. Абсолютное же, отодвигаемое на второй план, в некоторых случаях, как мы видели, ускользает из сферы такого понимания теории. Мы лишний раз можем подчеркнуть, что это привело к совершенно ошибочному понятию об общей теории относительности как якобы основанной на не существующем и невозможном общем принципе относительности, в то время как она является теорией структуры пространства—времени, связанной с тяготением.

Вместе с тем выдвигаемое нами требование, чтобы теория исходила из абсолютного, формулируя безотносительные законы пространственно-временной структуры мира, представляется вполне естественным и даже необходимым с философской точки зрения, поскольку оно отвечает самой логике предмета. Оно в этом смысле противоположно эйнштейновскому подходу, отвечающему логике наблюдения или измерения, которые всегда производятся в рамках или на основе той или иной системы отсчета.

Таким образом, хотя речь идет о той же теории Эйнштейна, тем не менее все ее построение, так же как понимание ее сущности, должно быть в известном смысле противоположно эйнштейновскому. С этой точки зрения речь никак не идет о теории относительности, а о теории абсолютного пространственно-временного многообразия как формы существования материи.

Известно, что абсолютный характер пространства—времени, так же как соответствующая трактовка принципа относительности как «постулата абсолютного мира», были явно сформулированы еще Г. Минковским. Однако мы пойдем существенно дальше Г. Минковского. Мы покажем, что соответствующее намеченной программе понимание теории пространства—времени вполне возможно, и укажем в общих чертах, как может быть реализовано отвечающее этой программе построение теории. Мы будем иметь в виду прежде всего специальную теорию относительности, т. е. теорию однородного пространства—времени.

§ 2. *Наглядное «электромагнитное» представление структуры пространства—времени*

Начнем с наглядного подхода. Опыт и элементарные соображения теории показывают, что от всякого тела в каждый момент распространяются электромагнитные возмущения. Малейшая пертурбация влечет перемещение зарядов и соответствующее излучение. Поэтому электромагнитные сигналы передаются постоянно от каждого тела, и они так или иначе проникают повсюду, устанавливая между телами и их частицами всеобщую материальную связь. Лучи, идущие от Солнца, пронизывают пространство, и сквозь них движутся планеты. Но они движутся и сквозь лучи, идущие от всех прочих тел. Поэтому мы можем представить себе мир пронизанным излучением, которое не только устанавливает материальную связь между всеми телами, но образует электромагнитный фон и определяет своего рода структуру в многообразии явлений.

Авторы, пытающиеся опровергать или «громить» теорию относительности, настаивают на том, что каждое тело движется в определенной среде, так же как на том, что Вселенная есть совокупность целостных качественно своеобразных систем. Они упустили, однако, из виду тот фундаментальный факт, что электромагнитное излучение представляет своего рода универсальную среду, в которой движутся тела, так же как они упустили из виду, что сама Вселенная есть целостная система и что ее «целостность» конкретно осуществляется, в частности, взаимосвязью тел через электромагнитное излучение.

Уже в этом наглядном представлении об электромагнитной среде и взаимосвязи тел и, следовательно, определяемой ею известной структуре мира заключается основа для более верного понимания теории пространства—времени. В частности, оно легко приводит к выяснению некоторых ошибок, связанных с пресловутой «общей относительностью».

А. Эйнштейн в своей классической работе 1916 г. об общей теории относительности рассматривал для обоснования необходимости общего принципа относительности следующий пример. Представим себе, что в пространстве имеются два одинаковых по составу тела, удаленных друг от друга и от всех других тел. Пусть эти тела вращаются относительно друг друга вокруг линии, соединяющей их центры. Наблюдатель, находящийся на одном теле, видит вращение другого тела и может считать тело, на котором находится, неподвижным, и наоборот. Однако, когда наблюдатели производят каждый обмер своего тела, они обнаруживают, что одно тело — шар, а другое — эллипсоид. Равноправность их систем отсчета оказывается нарушенной.

Объяснение, которое дает этому различию классическая теория, состоит в том, что одно тело на самом деле покоится относительно галилеева пространства, а другое вращается. Данное объяснение, указывает А. Эйнштейн, страдает тем теоретико-познавательным недостатком, что в нем ссылаются на ненаблюдаемую причину — пространство. Тела должны различаться относительно чего-то наблюдаемого. Это, говорит А. Эйнштейн, следуя Э. Маху, должны быть удаленные тела Вселенной, и он приходит к необходимости обобщения принципа относительности.

Безусловно верно, что тела должны различаться относительно чего-то наблюдаемого, или, как мы предпочли бы сказать, материального. И тем не менее рассуждение А. Эйнштейна содержит элементарную ошибку. В самом деле, если один наблюдатель с одного тела видит другое, то это значит, что от одного тела к другому передается свет. Это и есть тот третий, наблюдаемый агент, относительно которого тела различны! А если бы его (или иного агента, связывающего тела) не было, то наблюдатель с одного тела ничего не мог бы наблюдать на другом теле и вся постановка вопроса лишалась бы смысла даже с точки зрения Маха.

Электромагнитные волны, идущие от рассматриваемых тел, представляют собой не только наблюдаемое явление, но они определяют материальную структуру, в отношении которой оба тела оказываются объективно различными. «Вращение относительно пространства» оказывается только абстрактным выражением соответствующего материального отношения одного из тел к электромагнитному излучению. Это, как известно, проверяется и опытом, так как законы распространения света относительно неподвижного и вращающегося тела различны. Если же, повторяем, отвлечься от распространения света или каких-либо других воздействий, то потеряется и всякое основание для суждения об относительном вращении тел.

Таким образом, аргументация Эйнштейна падает и не дает, стало быть, никаких оснований для общего принципа относительности. Электромагнитные волны, заполняя все пространство, образуют тот универсальный фон, относительно которого материально определяется абсолютное вращение. Его можно считать абсолютным именно вследствие универсальности этого фона, совершенно так же, как в классической теории могли считать абсолютным равномерное движение по отношению к мировому эфиру.

С этой же точки зрения полезно подойти к вопросу об отношении системы Птолемея и Коперника. Планеты движутся в поле излучения Солнца, и, поскольку можно пренебречь влиянием на него тяготения, т. е. по крайней мере достаточно далеко от Солнца, это поле излучения вместе с излучением других светил образует тот общий фон, в котором и вращаются планеты. Вращение имеет, стало быть, абсолютный характер, и «спор» между Птолемеем и Н. Коперником решается в пользу последнего. Фон электромагнитного излучения вдали от Солнца определяет структуру пространства—времени, как ее трактует специальная теория относительности. Говоря математическим языком, система отсчета, связанная с Солнцем, оказывается лоренцевой на бесконечности, в то время как системы, связанные с планетами, таким свойством (по крайней мере с той же степенью точности) не обладают. Поэтому система, связанная с Солнцем, оказывается объективно преимущественной, независимо от того, какие способы описания движений кто-либо выбирает.

Совершенно так же наглядное представление о взаимосвязи тел и фона, создаваемого электромагнитным излучением, позволяет разобраться в некоторых ошибках, касающихся трактовки принципа относительности и понятия системы отсчета.

Очень часто говорят, что принцип относительности касается физических процессов в замкнутых системах. Это, однако, лишь относительно верно. На самом деле значение принципа относительности раскрывается при переходе от одной системы отсчета к другой, что математически выражается преобразованиями Лоренца. Но для того чтобы такой переход имел физическое основание, между системами должна быть материальная связь, иначе и в самом деле преобразования сведутся к формальному переходу от одного способа описания к другому. В действительности между системами отсчета есть материальная связь, осуществляемая электромагнитным излучением. Полезно также вспомнить, что опыт Майкельсона — для более полного обоснования сделанных из него выводов — повторен так, что источником света служила звезда. Здесь ни о какой изолированной системе, связанной с Землей, уже не могло быть речи. В такой постановке опыт Майкельсона показывал не просто то, что равномерное движение системы не влияет на процессы, происходящие внутри нее, но гораздо больше, — что такое движение не сказывается также на отношении системы к электромагнитному излучению, к его фону.

Уже этот опыт явно показывает, что электромагнитный фон совершенно не похож на классический эфир. Поэтому, когда мы говорим о среде или фоне излучения, не нужно думать, будто мы пытаемся «протащить» под этим старый эфир. Эфир — это только среда, которая может двигаться, но которую можно мыслить и неподвижной. Волны распространяются в эфире. Излучение же есть движущаяся среда, оно и есть сами волны; неподвижное электромагнитное возмущение — бессмыслица.

Представление об эфире отвечало классическим понятиям о самостоятельности пространства и времени: эфир находится в пространстве, и волны его распространяются со временем. Фон излучения, включая нераздельность его распространения в пространстве и времени, устанавливает общую связь пространства и времени. Конечно, во всяком движении осуществляется своя конкретная связь и взаимозависимость пространственного перемещения со временем. Но универсальный характер фона излучения показывает, что между пространством и временем должна быть универсальная связь, что как в излучении неразрывно распространение в пространстве со временем, так и вообще пространство и время должны быть неразрывны.

Это качественное заключение находит точное основание в фундаментальном законе постоянства скорости света. Не только скорость света в пустоте одинакова независимо от движения источника по отношению к любой инерциальной системе, но скорость фронта электромагнитного возмущения, или, если угодно, сигнала, одинакова во всякой среде [14].

[14] Этот закон представляется чрезвычайно существенным. Доказательство его, данное Леонтовичем, можно найти у Л. И. Мандельштама [19, с. 329–336].

Именно скорость фронта имеет значение для установления связи во времени, так как с нею связаны начальные моменты испускания и приема сигнала. Итак, скорость распространения излучения имеет универсальное значение. Скорость выражается отношением пути ко времени, а потому существование универсальной скорости означает существование универсальной связи между пространственными расстояниями и промежутками времени.

Считая, в согласии с опытом, геометрию пространства евклидовой, можно выразить закон постоянства скорости света формулой

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=c(t-t_0),$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты источника; t_0 — момент испускания сигнала. Уже чисто математически доказываемой теоремой оказывается тот факт, что из требования неизменности этой формулы при преобразовании координат и времени следуют преобразования Лоренца [23] [15].

Таким образом, закон постоянства скорости света вместе с предположением об евклидовости пространства необходимо влечет преобразования Лоренца, а вслед за ними и всю кинематику теории относительности: относительность одновременности, лоренцево сокращение, закон сложения скоростей и т. д.

Этот вывод берет за основу избранные (инерциальные, или «лоренцевы») системы координат x, y, z, t и в этом смысле остается пока на почве обычного понимания теории относительности. Мы сослались на него, чтобы подкрепить развиваемые нами пока наглядные соображения.

Фон излучения, «обмен сигналами» между телами определяет их взаимную координацию в пространстве и во времени. Радиолокация как раз представляет собой основанный на этом экспериментальный метод определения расстояний. Значение этого простого, но важного обстоятельства для понимания теории относительности было указано В. А. Фоком. Точно так же известное определение одновременности пространственно удаленных событий, данное А. Эйнштейном, основано на посылке, отражении и обратном приеме электромагнитных сигналов. Все эти процессы происходят постоянно естественным путем, так как малейшая пертурбация в данном теле вызывает хотя бы слабое электромагнитное излучение, которое рассеивается встречаемыми телами и хотя бы в ничтожной степени возвращается обратно. Иными словами, процессы, отвечающие радиолокации и сверке часов по А. Эйнштейну, идут непрерывно естественным путем. Они устанавливают взаимную координацию тел и происходящих в них явлений в пространстве

[15] Строго говоря, к преобразованиям Лоренца должны быть добавлены в качестве допустимых преобразований пропорциональные изменения масштабов одновременно для x, y, z, t.

и во времени, и это происходит без всяких наблюдателей. Поэтому координация тел и процессов по отношению к данному телу есть объективный факт и, стало быть, система отсчета, связанная с этим телом, вполне реальна; она материально реализуется постоянным «обменом сигналами»; она реализуется полем излучения.

Отсюда ясно, в частности, что взгляд на систему отсчета как на нечто совершенно фиктивное или как лишь на способ описания является совершенно ошибочным. Вопреки приведенному в первой части утверждению Эддингтона, системы отсчета соответствуют реальному строению мира: они соответствуют структуре поля излучения.

Более того, можно дать точное определение не только одновременности — что было сделано А. Эйнштейном — но и самих координат x, y, z и времени t, пользуясь только обменом электромагнитными сигналами и совпадением событий ни в одном месте в одно время (мы не имеем места воспроизвести здесь такое определение). Таким образом, твердые масштабы и часы оказываются для этого определения ненужными. Определение координат и времени в инерциальной системе оказывается как бы другой стороной закона постоянства, или, лучше сказать, предельного характера, скорости света. Именно в силу такого характера скорости света указанное определение оказывается возможным. Между законом и определением есть диалектическое единство, и противопоставлять их, нарушая это единство, нет никаких оснований.

Итак, поле излучения осуществляет материальные связи тел и явлений и образует фон, своего рода структуру в их многообразии. Эти связи определяют пространственную и временную координацию тел и явлений, и структура фона излучения определяет общую структуру пространственно-временных отношений, т. е. структуру, геометрию пространства—времени. Она определяется материей, и остается лишь отвлечь ее от конкретного материального содержания, как мы получим представление о пространстве—времени в его чистом, абстрактном виде.

Конечно, не следует преувеличивать универсальное значение данной наглядной картины; она может встретить, например, то возражение, что в ней все сведено к излучению, тогда как в соответствии с универсальностью пространства—времени нужно было бы рассматривать любые процессы вообще. Это и будет сделано дальше. Но данный наглядный подход очень полезен. Он дает верную ориентировку в ряде вопросов, в толковании которых допускаются ошибки, и тем более потому, что он содержит в себе главное: ясное понимание того, что пространственно-временные отношения, так же как структура, геометрия пространства—времени в целом, определяется материальным взаимодействием. Короче, здесь мы имеем наглядную, отвечающую современной физике картину, реализующую то общее положение, что пространство—время есть форма существования материи.

§ 3. *Единство причинно-следственной и пространственно-временной структуры мира*

Теперь перейдем от наглядных соображений к более отвлеченному и общему рассмотрению проблемы.

Теория относительности включает общий закон ограниченности скоростей распространения всяких воздействий, будь то излучение или что-либо другое. В конечном счете мы придем к тому, чтобы сделать из этого закона необходимые выводы. Впрочем, те же выводы получаются из закона постоянства скорости света.

Под событием мы будем понимать, как это принято, «точечное» явление вроде мгновенной вспышки точечной лампы, т. е. явление, протяжением которого в пространстве и во времени можно пренебречь. Все явления можно представить состоящими из событий, и с этой точки зрения мир во всем его протяжении в пространстве и во времени представляется как множество, точнее, многообразие событий. Каждое событие так или иначе воздействует на другие события. Физическая природа этого воздействия может быть весьма разнообразной: распространение света или звука, вылет частицы и т. д. Воздействие вообще есть движение, связывающее два события. Движение малого тела можно рассматривать как ряд событий, в которых предыдущие события воздействуют на последующие. Воздействие не обязано быть сколько-нибудь непосредственным, но может идти через ряд агентов. Можно было бы сказать, что воздействие состоит в передаче какой-то энергии. Но мы отвлекаемся и от конкретного характера воздействий, и от их общей энергетической или иной характеристики, сохраняя в поле зрения лишь самый факт воздействия одного события на другие.

Так как воздействия распространяются с ограниченной скоростью, не все события, следующие за данным во времени (в какой-либо системе отсчета), могут подвергаться его воздействию. Те же события, которые подвергаются и, принципиально говоря, могут подвергаться воздействию данного события A, образуют некоторую «область воздействия события A».

Полезно воспользоваться известным геометрическим представлением, изображая множество событий в виде четырехмерного пространства, где введены прямоугольные координаты x, y, z, t соответственно трем пространственным координатам и времени. События изображаются точками этого пространства. Для простоты можно наглядно представить себе трехмерное пространство с двумя пространственными координатами x, y и одной временной t.

В таком представлении область воздействия события A изображается, как известно, прямым круговым конусом с вершиной в точке A, с осью, параллельной оси t, и с углом раствора (т. е. углом между осью и любой образующей), тангенс которого равен как раз предельной скорости c распространения воздействий.

Поверхность конуса образуют события, достигаемые воздействием, идущим от события A с предельной скоростью [16]. Поскольку эта скорость совпадает со скоростью света, речь идет о событиях, достижимых светом, идущим прямо без рассеяния от события A. Поэтому рассматриваемый конус или, вернее, его поверхность называют световым конусом. В более общем смысле, имея в виду всю область воздействия, мы можем говорить о конусе воздействия события A.

Таким образом, с каждым событием A связан его конус воздействия K_A. При этом нет надобности мыслить этот конус геометрически; геометрическое представление есть только полезный прием, соответствующий, конечно, существу вопроса, но вовсе необязательный. Речь идет о множестве событий, подверженных в принципе воздействию события A. Мы только изображаем его конусом в данной геометрической интерпретации.

Конусы воздействия, связанные с событиями, определяют в многообразии событий, т. е. в мире, известную систему отношений, или структуру (наглядно можно представить себе конусы с вершинами в разных точках пространства A, B, C ...). Так, события, подверженные воздействиям данных событий A, B, C, ... , оказываются в общей части конусов K_A, K_B, K_C, ... , связанных с этими событиями.

Эта система отношений есть не что иное, как система отношений воздействия одних событий на другие, взятая в целом. Поскольку предельная скорость и есть скорость света, постольку та же по существу система отношений определяется световыми конусами, так что рассматриваемая здесь система отношений, или структура, совпадает с той, о которой в более наглядном виде шла речь в предыдущем параграфе. Теперь при более общем рассмотрении вопроса специальный характер воздействий, распространяющихся с предельной скоростью, не имеет для нее никакого значения.

Оказывается, что система отношений воздействий одних событий на другие полностью определяет геометрию, или, если угодно, структуру, пространства—времени!

Именно строго математически доказывается следующая теорема.

Пусть в четырехмерном пространстве каждая точка является вершиной прямого кругового конуса, причем все конусы имеют параллельные оси и одинаковые углы раствора. Пусть в этом пространстве введены прямоугольные координаты x, y, z, t, причем ось t направлена параллельно осям

[16] Мы считаем, согласно теории относительности, предельную скорость достижимой. Это, однако, необязательно при абстрактном построении теории; можно предполагать, что она, напротив, недостижима. Тогда конус будет открытым, т. е. поверхность из него исключается. Можно было бы также предполагать, что скорость света не совпадает с предельной, а несколько меньше ее. Все это не окажет влияния на выводы, касающиеся самой структуры пространства—времени; для нее решающее значение имеет лишь общая ограниченность скорости передачи всякого воздействия.

конусов. Тогда всякое преобразование пространства, переводящее эти конусы друг в друга, т. е. сохраняющие всю структуру, определенную этими конусами, представляется в данных координатах как преобразование Лоренца[17).]

Если мы пользуемся геометрическим представлением многообразия событий и конусов воздействия, то мы как раз оказываемся в условиях данной теоремы. Она поэтому означает, что преобразования, сохраняющие структуру отношений воздействия, и есть преобразования Лоренца. А так как именно требование инвариантности по отношению к этим преобразованиям определяет геометрию пространства—времени, или, говоря иначе, кинематику специальной теории относительности, то тем самым оказывается, что структура отношений воздействия определяет геометрию пространства—времени.

Общие законы пространственно-временной структуры мира представляют собою не что иное, как проявление его общей структуры, определенной воздействиями одних событий на другие.

Так как воздействие есть простейший вид причинной связи, то можно более выразительно, хотя и менее точно, данный вывод сформулировать так: *общая пространственно-временная структура мира есть проявление его общей причинно-следственной структуры.*

Замена понятия воздействия понятием причины представляется неточной, потому что понятие причины более сложно и к тому же не покрывает понятия воздействия. Из того, что одно явление воздействует на другое, вовсе еще не следует, что оно служит его причиной. А когда мы судим о причинах сложных явлений, скажем, общественных или психических, то сводить дело к элементарным воздействиям почти всегда просто бессмысленно. Поэтому несомненно точнее говорить о воздействиях или даже элементарных воздействиях одних событий на другие.

Полученные выводы позволяют дать определение пространства—времени, представляющее собою конкретное и точно формулируемое, отвечающее современной физике, выражение того положения, что пространство—время есть форма существования материи.

Мир, как уже сказано, мы можем трактовать как многообразие событий. В этом многообразии имеется система отношений воздействия одних событий на другие, которая, как было установлено, и определяет его пространственно-временную структуру. Но при определении формы необходимо соответственно отвлекаться от содержания. При таком подходе от материального события остается лишь понятие об элементе, т. е. точке многообразия.

[17)] Теорема эта в таком общем виде доказана в [23]. При дополнительных предположениях дифференцируемости и тем более линейности преобразований она давно известна. Как и раньше, к преобразованиям Лоренца могут добавляться пропорциональные изменения масштабов.

В соответствии с этим можно дать следующее определение пространства—времени: *пространство—время есть множество всех событий в мире, отвлеченное от всех его свойств, кроме тех, которые определяются системой отношений воздействия одних событий на другие.*

При этом, конечно, и самые воздействия, так же как события, должны рассматриваться в отвлечении от их материального содержания. Вернее, речь идет именно о системе отношений воздействия как форме, а не о самих воздействиях.

Сказанное можно выразить несколько иначе, как это уже было сделано во Введении. В движении материи имеются две системы фундаментальных, универсальных отношений: причинная связь — воздействие одних явлений на другие, с одной стороны, и пространственно-временные отношения — с другой. Между этими двумя сторонами движения материи имеется не просто тесная связь, но полное единство, в силу которого, как уже сказано, общая структура пространственно-временных отношений, т. е. геометрия пространства—времени, полностью определяется системой воздействия одних событий на другие. Поэтому *если в движущейся материи отвлечься от всех ее свойств, кроме структуры самих причинно-следственных отношений ее элементов, когда эти отношения приводятся к воздействию одних элементарных событий на другие, то мы и получаем пространство—время.* Материя движется в пространстве—времени не потому, что она там находится, а потому, что само пространство—время определяется ее движением. Если фиксировать внимание на поле излучения, этой достаточно универсальной форме движения и соответственно взаимодействия, то мы придем к более частному и наглядному представлению, изложенному в предыдущем параграфе.

Кстати, из сказанного следует, что понятие абсолютной пустоты противоречит самому понятию о пространственно-временном многообразии, потому что сами точки этого многообразия суть материальные события, хотя и взятые в абстрактном виде. Пустота относительна. Но там, где абсолютно ничего нет материального, нет и формы материи, т. е. нет ни пространства, ни времени.

Изложенное определение пространства—времени есть не что иное, как отвечающее современной физике, конкретное и точное выражение того, что пространство—время есть форма существования материи. Кроме того, существенно подчеркнуть, что, с одной стороны, возможность такого определения есть математически строго доказываемое следствие теории относительности и что, с другой стороны, оно может быть положено в основу математически строгого построения этой теории, как будет показано в следующем параграфе. Можно сказать, что общефилософское понятие о пространстве—времени как форме существования материи конкретизируется и уточняется здесь так, что оно может служить отправным пунктом точного построения теории.

Такое определение было невозможно в рамках представлений классической физики. Там считалось, что воздействия могут передаваться со скольугодно большими скоростями, стоит лишь, принципиально говоря, приложить к достаточно малому телу достаточно большую силу, чтобы «выстрелить» им и послать, таким образом, «сигнал» с наперед заданной скоростью. Поэтому область возможного воздействия данного события простирается на все события, следующие за ним во времени, так что отношения воздействия не определяют ничего, кроме простой последовательности во времени. Этому и отвечает абсолютная последовательность во времени. Что же касается количественно определенного времени t и геометрии пространства, то они должны определяться чем-то другим. Более того, нам вообще неизвестно никакое определение времени и пространства, которое отвечало бы представлениям классической физики и было бы столь же точным и кратким, как данное выше определение пространства—времени. Уже самый факт возможности дать такое краткое и точное определение представляет громадное преимущество теории относительности и показывает, насколько глубже она проникла в суть универсальной формы существования материи.

Важно подчеркнуть, что определение дается сразу для пространства—времени, а не пространства отдельно и времени отдельно. Их определения как относительных аспектов этого абсолютного многообразия уже выводятся отсюда, как будет сделано дальше.

В диалектическом материализме принято положение, что пространство и время суть формы существования материи. Когда оно устанавливалось, не было и намека на теорию относительности и открытое ею единство пространства и времени. Теперь же, когда твердо установлено, что пространство само по себе и время само по себе являются лишь относительными аспектами единого пространства—времени, представляется более правильным говорить прежде всего именно о пространстве—времени как о единой и универсальной форме существования материи.

Пространство и время не потеряли, конечно, своего значения форм существования материи, но они во всяком случае оказались аспектами единой формы, которую и следует иметь в виду прежде всего.

§ 4. *Основы теории пространства—времени*

Теперь мы наметим в общих чертах построение теории пространства—времени, специальной теории относительности, по изложенной в § 1 программе, берущее за основу данное в § 3 определение пространства—времени.

Задача исключить систему отсчета из основных понятий теории и представить ее как теорию абсолютных пространственно-временных отношений не представляет особого труда.

Геометрия, которая по своему первоначальному смыслу есть теория реального пространства, была построена в своих основах и приведена в стройную систему без малого за две тысячи лет до того, как Декарт ввел в нее понятие о системе координат. Это имело свое основание в том, что геометрический опыт давал и дает непосредственно пространственные отношения и свойства предметов без связи с какими-то телами отсчета.

В теории пространства и времени, проще говоря в кинематике, дело обстоит иначе. Здесь опыт обнаруживает прежде всего движение одних тел по отношению к другим, и систематическое описание движений диктует необходимость принимать некоторое тело за тело отсчета. Стремление сохранить абсолютное посредством понятий абсолютного пространства и времени ничего не могло дать по той простой причине, что абсолютное равномерное движение оказалось фикцией.

Теория относительности унаследовала понятие системы отсчета и принцип относительности у классической механики. Но это смазало ее истинную сущность как теории единого пространства—времени. Когда такая сущность была раскрыта, стало возможным строить теорию пространства—времени в том же духе, как древние построили геометрию, т. е. формулировать основные законы пространства—времени — в математическом смысле аксиомы геометрии Минковского — без всяких систем координат. Такое построение фактически заключалось в геометрических теориях, развитых к тому времени, и не представляет труда выполнить разные его варианты в духе обычной геометрической аксиоматики. Такое построение представляет теорию как учение об абсолютных пространственно-временных отношениях.

Задача состоит, однако, не в том, чтобы писать вариации известных геометрических теорий на релятивистскую тему, потому что хорошо разработанные математические приемы построения разных геометрий без понятия об избранных системах координат примыкают в основном к евклидовой геометрии и не отвечают в должной мере физическому содержанию теории относительности. Простые в математическом смысле основания теории выглядели бы в смысле физики достаточно сложными и, главное, искусственными.

Задача состоит поэтому в том, чтобы найти такие формулировки основных положений теории, которые, обходясь без понятия об избранных системах координат, т. е. в физическом смысле без понятия относительности, выражали бы в достаточно ясной форме физические основы теории. Замечательное по замыслу построение, данное Роббом, включает двадцать один постулат, среди которых есть достаточно сложные, так что система оказалась громоздкой.

Сформулированная задача имеет, конечно, много возможных решений, и вопрос состоит в том, чтобы в их поисках и сравнениях найти возможно лучшее. Мы наметим здесь одно решение. Если в предыдущем изложении мы считали теорию относительности известной и вели ее анализ, то теперь, когда речь идет о самом построении теории, мы будем ссылаться на ее известные положения лишь в целях пояснения, но не для выводов.

Итак, речь идет о построении теории пространства—времени.

Мы исходим из понятий о событии и воздействии одного события на другое, как они были определены в предыдущем параграфе. Мир есть многообразие событий, и между событиями существует всеобщая связь, состоящая в том, что одни события воздействуют на другие.

В отвлечении от физического содержания событие превращается в точку многообразия, а отношение воздействия — в отношение предшествования. Под этим понимается вообще антисимметричное транзитивное отношение. Антисимметричность значит, что если A предшествует B, то B не предшествует A; транзитивность означает, что если A предшествует B и B предшествует C, то A предшествует C. Эти свойства, очевидно, выполнены, так как, в частности, если событие A действует на B, а B действует на C, то тем самым A действует на C хотя бы через B.

Такое понимание предшествования принято в математике и вовсе не связывается заранее с предшествованием во времени. Так, например, в ряду целых чисел число 2 предшествует числу 3.

Первое основное положение теории состоит просто в определении пространства—времени, по существу как оно было дано выше.

1. *Пространство—время есть многообразие (множество) событий, взятое лишь с точки зрения его структуры, которая определяется системой отношений воздействия в отвлечении от всех иных свойств.*

В качестве второго основного положения мы принимаем следующее твердо установленное обстоятельство.

2. *Пространство—время есть четырехмерное многообразие.*

Согласно первому положению, структура пространства—времени, а стало быть, и его свойства непрерывности, или, как говорят математики, топология, определяются, следовательно, отношением воздействия событий; иными словами, окрестности в множестве событий должны определяться через это отношение и притом так, чтобы в силу этого множество событий оказывалось четырехмерным многообразием. Соответственно второе положение можно понимать следующим образом: *для каждого события A существуют подвергающиеся его воздействию события X и воздействующие на него события Y, такие, что если определить окрестность события A как множество событий, воздействующих на какое-либо X и вместе с тем подверженных воздействию какого-либо Y, то в силу этого определения окрестностей множество всех событий оказывается четырехмерным многообразием.*

Если иметь в виду четырехмерное представление пространства—времени по Г. Минковскому, то видно, что указанные здесь события X и Y берутся так, чтобы событие A лежало одновременно внутри конуса событий, предшествующих и воздействующих на X, и внутри конуса событий, следующих за Y (мы не можем взять, например, любое событие X, следующее за A, так как A может оказаться на границе соответствующего конуса; это повлечет к определению окрестностей, в силу которого множество событий уже не будет многообразием).

Существенно заметить, что в возможности определить топологию пространства—времени указанным способом уже заключен факт ограниченности скоростей распространения всевозможных воздействий. При неограниченности скоростей определенная указанным способом окрестность события A всегда представляла бы бесконечный слой и множество событий с такой топологией вовсе не было бы многообразием. Это показывает глубокую связь фундаментального вывода теории относительности об ограниченности скоростей с тем основным свойством пространства—времени, что оно есть четырехмерное многообразие. Такая взаимосвязь основных положений теории представляется весьма замечательной ее особенностью.

Хотя понятие скорости связано с понятием системы отсчета, тем не менее принцип ограниченности скоростей легко заменить положением, в котором вовсе отсутствует понятие о скорости и о системе отсчета. Его можно свести к тому, что существуют такие области, в которых события из разных областей не воздействуют одно на другое. Можно, однако, не привлекать это утверждение в качестве аксиомы, так как его можно будет вывести.

Вслед за утверждением о том, что пространство—время есть четырехмерное многообразие, в качестве третьего основного положения можно принять утверждения, выражающие в известном смысле принцип относительности, однородности. Несколько неопределенно это можно формулировать так.

3. *Пространство—время максимально однородно, т. е. группа его преобразований, сохраняющих отношение воздействия, максимально возможная.*

Более четко это можно выразить следующим образом.

Любые два события A и B находятся в одном из пяти отношений:

а) A лежит внутри области событий, подвергающихся воздействию события B (наглядно говоря, внутри конуса воздействия события B);

б) A лежит на границе этой области;

в, г) то же, что и а) и б) с заменой A на B;

д) остальные возможности.

Утверждение состоит в том, что, какие бы две пары событий: A, B и A^1, B^1, находящихся в одинаковых отношениях, ни взять, существует взаимно однозначное и непрерывное отображение множества событий на себя, сохраняющее отношение воздействия и переводящее события A и B в A^1 и B^1.

Связь высказанного утверждения с принципом относительности представляется достаточно очевидной, так как данный принцип говорит о возможности воспроизвести любое явление одинаково в любой инерциальной системе, что как раз означает известную однородность пространства—времени. При нашем подходе это можно выразить словами: любое явление может быть воспроизведено так, что любые два события A и B в нем будут отвечать любым двум другим событиям A^1 и B^1, находящимся в том же отношении, имея в виду указанные пять отношений.

Мы не можем еще доказать, что сформулированные положения определяют пространство—время специальной теории относительности, для этого мы вынуждены привлечь, например, вспомогательное предположение математического характера. Коротко оно состоит в следующем.

4. Как само многообразие, которое представляет пространство—время, так и преобразования, указанные в положении 3, являются дифференцируемыми.

Для физиков, привыкших не очень заботиться о таких вещах, как дифференцируемость или недифференцируемость рассматриваемых функций, явная формулировка такого положения едва ли представляет интерес; она имеет значение скорее для математика, который стремится к максимальной строгости своих выводов [18].

Можно доказать, что сформулированные положения определяют пространство—время специальной теории относительности, т. е. оказывается, что преобразования, сохраняющие отношения воздействия, суть преобразования Лоренца (с включением подобного преобразования), и можно ввести такие координаты, в которых они представляются обычными линейными формами. Эти координаты, их называют лоренцевыми, можно вводить разнообразно; преобразование от одних из них к другим задается, конечно, теми же преобразованиями Лоренца. Это и есть те самые координаты x, y, z, t, которые в обычном изложении вводятся с самого начала в инерциальной системе отсчета. Они определены пока довольно формально, но можно выяснить и более глубокий их смысл, оставаясь полностью на почве основного понятия воздействия событий. Это будет сделано в § 5.

Итак, если коротко суммировать изложенные основы теории пространства—времени, то можно сказать следующее: *пространство—время есть множество всех событий в мире, взятое в отвлечении от всех его свойств, кроме тех, которые определяются структурой системы отношений воздействия одних событий на другие, причем пространство—время является четырехмерным многообразием, максимально однородным, насколько позволяет вообще система указанных отношений.* Избранные — инерциальные, или, как мы предложили бы здесь сказать, лоренцевы, системы координат выделяются как избранные самой этой структурой.

[18] Например, известные выводы закона Максвелла или пропорциональности энтропии логарифму вероятности используют дифференцируемость вводимых функций без всяких оговорок, тогда как устранение предположения дифференцируемости представляет на самом деле довольно трудную математическую задачу.

§ 5. *Дальнейшее построение теории*

Рассмотрим определение одновременности, или, что равносильно, определение множества M одновременных событий, служащего в лоренцевых координатах поверхностью $t = \mathrm{const}$.

Такое множество M можно определить, например, двумя требованиями. Во-первых, оно должно разбивать многообразие всех событий на две части соответственно прошедшему и будущему, а во-вторых, оно должно быть однородным. Последнее означает, что какие бы две пары событий A, B и A^1, B^1 из множества M ни взять, должно существовать взаимно однозначное отображение всего многообразия событий на себя, сохраняющее отношение воздействия, переводящее M само в себя и переводящее вместе с тем события A и B в A^1 и B^1. Эти требования, как можно доказать, действительно определяют любую из плоскостей $t = \mathrm{const}$.

Основание для требования однородности можно видеть в том, что одновременность должна определяться некоторым законом, который одинаково примени́м к любым па́рам событий. Это как раз и выражается существованием указанного преобразования для любых пар событий из множества M.

Таким образом, можно сказать, что всякое определение одновременности, опирающееся на какой-либо общий закон, должно быть равносильно классическому определению Эйнштейна. Этим вскрывается глубокое основание понятия одновременности, введенного А. Эйнштейном. Кроме того, поскольку никакое иное понятие одновременности уже не удовлетворяет поставленным общим требованиям, постольку оказывается, что никакое общее рациональное понятие одновременности в неинерциальных системах вообще невозможно. Его можно попытаться вводить, но такое понятие было бы уже довольно искусственным. Это и показала история теории относительности, так как она не привела ни к какому рациональному определению одновременности в неинерциальных системах.

Далее стоит подчеркнуть, что поскольку система отношений воздействия определяет структуру пространства—времени в целом и совокупности относительно одновременных событий, т. е. пространства, постольку она определяет и геометрию пространства. Геометрия эта оказывается, конечно, евклидовой (в силу принятых положений). Понять основание этого довольно просто. Распространение воздействий из любой точки с максимальной скоростью определяет в пространстве систему шаров (например, сферические фронты световых волн), что, как известно, в математике уже определяет евклидову геометрию пространства.

Точно так же общая система отношений воздействия одних событий на другие определяет и относительные времена t, и всевозможные прямоугольные пространственные координаты x, y, z. Эти пространственно-временные координаты x, y, z, t, стало быть, вовсе не условны и не фиктивны, а определены строением мира, материальными воздействиями событий в нем. При этом здесь же заключено основание для экспериментального их определения (по крайней мере принципиально), если воспользоваться посылкой сигналов с предельной скоростью, как это было сделано А. Эйнштейном при определении одновременности.

После того как получены преобразования Лоренца и определены избранные системы координат, вывод всей релятивистской кинематики с относительностью промежутков времени и длины, законом сложения скоростей и т. п. идет уже обычным путем. Но теперь еще более ясно выступает истинный характер релятивистских эффектов.

Так как отправным пунктом является абсолютная структура пространства—времени, то, например, каждое тело мы должны рассматривать прежде всего в его пространственно-временной протяженности. В этом смысле тело имеет присущие ему безотносительные характеристики. Его же чисто пространственные размеры, естественно, оказываются относительными; они выражают отношение тела к какой-либо выделенной совокупности M одновременных событий. И так как всевозможные такие совокупности определены всей системой отношений воздействия, то тем же в конце концов определяются и релятивистские эффекты. Искать какие-то специальные вызывающие их «действующие причины», как это предлагают некоторые авторы, совершенно неосновательно. С таким же успехом можно было бы искать особые причины того, что какой-либо данный перпендикуляр короче наклонной. «Причины» эти лежат в общих законах геометрии, которые в свою очередь имеют «причиной» общую структуру мира, определенную отношениями воздействия между событиями.

Говоря философским языком, сама материя во взаимодействии ее элементов определяет свою форму существования — абсолютное пространство—время. В этом абсолютном многообразии та же общая структура взаимодействий выделяет множество относительно одновременных событий, выделяет относительные пространства и времена, определяет геометрию пространства и метрику (отношения промежутков) времени t, определяет избранные координаты, а также относительные длины, промежутки времени и пр. Не относительное и уже тем более не условные определения, не особые «действующие причины», а абсолютное строение мира составляет настоящее основание и содержание теории.

Особенность данного нами определения пространства—времени и основанного на нем построения теории состоит, между прочим, в том, что оно исходит из несимметричного отношения воздействия, так что в самых основах теории заключается несимметричность прошедшего и будущего. Эта фундаментальная черта времени, его направленность, обычно оказывается замаскированной, так как не выступает явно в дифференциальных уравнениях механики и электродинамики. Однако в действительности, например, шаровые волны распространяются от источников, а обратный процесс в природе, собственно, не происходит. Учет несимметричности, заключенный в основах теории, представляет существенную ее черту, но из него пока не следуют никакие специальные результаты. Анализ этого вопроса заслуживает внимания, и не исключено, что в дальнейшем развитии теории направленность времени выступит более отчетливо и конкретно.

После построения основ теории пространства—времени, т. е. соответственно обычному подходу — кинематики теории относительности, нужно переходить к собственно физике, прежде всего к механике и электродинамике. При этом нужно, конечно, положить в основу требование лоренц-инвариантности для законов этих теорий. Необходимость такого требования при данном построении теории очевидна.

Действительно, сами свойства пространства—времени выводятся из свойств системы отношений воздействия, которое может осуществляться и электромагнитными волнами, и механическим движением, и другими путями.

Поэтому общие законы этих процессов уже тем самым согласованы со свойствами пространства—времени, как содержание с формой. Теперь, когда от общей структуры отношений воздействия мы логически переходим к конкретным видам взаимодействий, необходимо одно согласовать с другим. Общее свойство однородности пространства—времени и дает, если его формулировать математически, пользуясь избранными координатами x, y, z, t, требование лоренц-инвариантности.

Движение по инерции определяют обычно как движение тела, не подверженного внешним воздействиям. Такое определение страдает тем недостатком, что при полном отвлечении от всяких воздействий теряется основание для определения движения, потому что само пространство—время определяется воздействиями. Поэтому лучше предложить следующее определение: движение по инерции — это такое движение, при котором никакое воздействие или никакие воздействия не могут быть выделены как преимущественные. Иными словами, это движение — максимально симметричное относительно всей системы воздействий одних событий на другие. Такое движение изображается в четырехмерной картине максимально симметричной линией, а такая линия есть прямая, т. е. указанное определение движения по инерции само влечет закон инерции.

Формулировки законов механики и электродинамики приводят, между прочим, к тому, что несколько отвлеченно определенные нами системы координат x, y, z, t оказываются как раз теми, в которых эти законы имеют обычный вид. Иными словами, выясняется, что речь идет об инерциальных системах. Конкретная фиксация таких систем путем измерительных операций происходит не в силу условных соглашений, а в соответствии с законами природы. При этом пользуются и механическими, и электромагнитными средствами — и твердыми масштабами, и распространением света и др.

До сих пор речь шла о пространстве—времени в пределах представлений, отвечающих специальной теории относительности. Общая теория относительности, точнее, теория тяготения отличается от специальной теории прежде всего тем, что снимает требование однородности пространства—времени. Общее определение пространства—времени и то требование, что оно есть четырехмерное многообразие, сохраняют силу, но на место требования однородности пространства—времени в целом выдвигается требование его однородности только «в бесконечно малых частях». Это аналогично тому, как риманово пространство является евклидовым лишь в бесконечно малом. Формально это выражается введением общей метрической формы $g_{ik}dx^i dx^k$.

Таким образом, теория тяготения отличается от специальной теории относительности не общностью применяемых систем координат, а большей общностью предположений о структуре пространства—времени. Она вовсе не есть общая теория «относительности». При нашем построении теории это особенно очевидно. Ведь среди наших основных положений явно было сформулировано требование максимальной однородности пространства—времени, которое и выражало принцип относительности.

Поэтому совершенно ясно, что никакой большей однородности пространства—времени, а стало быть, и более общей относительности вообще не может быть.

Необходимость отказа от гипотезы однородности пространства—времени была обоснована А. Эйнштейном, исходя из эквивалентности инерциальной и гравитационной массы. Излучение обладает энергией, а стало быть массой, согласно закону $E = mc^2$. Но тогда оно должно подвергаться воздействию тяготения. Следовательно, фон излучения, о котором шла речь в § 2, должен искажаться под влиянием тяготения. Но если этот фон определяет структуру пространства—времени, то вместе с его искажением должна искажаться и геометрия пространства—времени, т. е. пространство—время не может быть однородным. Нарушения однородности будут наибольшими вблизи больших масс; они выражают собою поле тяготения. Таким образом, основание эйнштейновской теории тяготения и соответственно теории неоднородного пространства—времени было дано А. Эйнштейном в сочетании двух законов «эквивалентности»: массы и энергии, инерциальной и тяготеющей массы, а не в обобщении принципа относительности.

Теория пространства—времени не может остаться неизменной, но должна развиваться вместе с открытием новых общих законов взаимодействия. Трудности релятивистской электродинамики внушают мысль, что теория действительно требует изменений. Попытки в этом направлении предпринимались уже давно, но пока не привели к желаемым результатам. Заслуживает внимания, в частности, идея ввести некоторую неопределенность светового конуса. Можно также, как предлагают некоторые авторы, пытаться получить новые результаты, отказавшись от того положения, что скорость света совпадает с предельной. Это, конечно, влечет за собой непостоянство скорости света и неинвариантность уравнений электродинамики.

При анализе отношения теории относительности к квантовой физике предложенное понимание ее может оказаться полезным именно потому, что в основу кладется общее понятие о взаимодействии. В связи с этим может быть небезынтересным следующее замечание.

Поскольку структура пространства—времени определена воздействиями, постольку и локализация события в пространстве—времени, наличие у него определенных координат x, y, z, t обусловлены тем, что оно подвержено воздействиям. Короче, событие, на которое ничто не действовало бы, лишилось бы определенной локализации.

Это отвлеченное заключение находит выражение в том известном выводе квантовой механики, что частица, не подверженная никаким воздействиям, не имеет определенного местоположения. Частица, движущаяся по инерции, имеет волновую функцию, равномерно «размазанную» по всему пространству.

Не следует ли из высказанного выше общего соображения, что это связано с общим объективным материальным основанием понятия и, стало быть, самого факта локализации?

На этом вопросе, в котором наше понимание теории пространства—времени перекликается с основами квантовой механики, мы и закончим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1961. 2-е изд. Т. 20.
2. *Born M.* Physics in my generation. London; New York: Pergamon Press, 1956. (Русский перевод: *Борн М.* Физика в жизни моего поколения. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.)
3. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматлит, 1961. 2-е изд.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.; Л.: ГИТТЛ, 1941.
5. *Alexandrov A. D.* The space-time of the theory of relativity // Fünfzig Jahre Relativitätstheorie. Basel, 1956.
6. *Robb A.* The absolute relations of time and space. Cambridge: Univ. Press, 1921.
7. *Наан Г. И.* О бесконечности Вселенной // Вопр. философии. 1961. № 6. С. 93–105.
8. *Фок В. А.* О так называемых ансамблях в квантовой механике // Там же. 1952. № 4. С. 170–174.
9. *Его же.* Против невежественной критики современных физических теорий // Там же. 1953. № 1. С. 168–174.
10. *Его же.* Понятия однородности, ковариантности и относительности в теории пространства и времени // Там же. 1955. № 4. С. 131–135.
11. *Александров А. Д.* По поводу некоторых взглядов на теорию относительности // Там же. 1953. № 5. С. 225–245.
12. *Терлецкий Я. П.* О содержании современной физической теории пространства и времени // Там же. 1952. № 3. С. 191–197.
13. *Александров А. Д.* О сущности теории относительности // Вестн. ЛГУ. 1953. № 8. Сер. математики, физики и химии. Вып. 3. С. 103–128.

14. *Его же.* Относительности теория (теоретико-познавательное значение) // БСЭ. 2-е изд. М.: Гос. науч. изд-во БСЭ, 1955. Т. 31. С. 411–413.
15. *Кузнецов И. В.* Советская физика и диалектический материализм // В кн.: Философские вопросы современной физики. М.: АН СССР, 1952. С. 31–87.
16. *Штейнман Р. Я.* За материалистическую теорию быстрых движений // Там же.
17. *Яноши Л.* Дальнейшие соображения о физической интерпретации преобразований Лоренца // Успехи физ. наук. 1957. Т. 62, вып. 1. С. 149–181.
18. *Тамм И. Е.* О статье Л. Яноши «Дальнейшие соображения о физической интерпретации преобразований Лоренца» // Там же. С. 183–185.
19. *Мандельштам Л. И.* Полн. собр. трудов. М.: АН СССР, 1950. Т. 5.
20. *Паули В.* Теория относительности. 2-е изд. М.: Наука, 1983.
21. *Эддингтон А.* Теория относительности. М.; Л.: Гостехиздат, 1934.
22. *Рытов С. М., Левшин В. Л., Фейнберг Е. Л., Грошев Л. В.* Курс физики / Под ред. Н. Д. Папалекси. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. Т. 2.
23. *Александров А. Д., Овчинникова В. В.* Замечания к основам теории относительности // Вестн. ЛГУ. 1953. № 11. Сер. математики, физики и химии. Вып. 4. С. 95–110 [19].
24. *Эйнштейн А., Инфельд Л.* Эволюция физики. 4-е изд. М.: Гостехиздат, 1966.
25. *Эйзенхарт Л.* Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948.
26. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1961. 5-е изд. Т. 18.
27. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. 4-е изд. М.: ГИТТЛ, 1956.

[19] Эта статья доступна также на с. 288–306 т. 1 настоящего издания. — *Прим. ред.*

Об определении понятий в физике [1)]

Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 169–224

Введение

В «Математических началах натуральной философии» И. Ньютон, говоря о времени, пространстве и движении, четко разграничил «истинные» и «кажущиеся» понятия. Так, он разделяет, в частности, «истинное время» и «кажущееся, или обыденное, время», которое, как он пишет, есть «постигаемая чувствами ... при посредстве какого-либо движения мера продолжительности» [1, с. 30, 31]. Разъясняя необходимость таких разграничений, И. Ньютон пишет дальше, что «засоряют математику и физику и те, кто смешивает истинные количества с их отношениями и обыденными мерами» [1, с. 36].

Оставив в стороне вопрос об абсолютном пространстве и времени, будем говорить о «количествах», т. е., выражаясь современным языком, о физических величинах. Нужно различать «истинные», присущие природе величины и те, которые определяются измерением; истинная величина представляется точной, результат измерения всегда не совсем точен; истинная величина существует независимо от измерения, измерение только обнаруживает ее значение с некоторой точностью. Сказанное вовсе не претендует на точную передачу того, что имел или мог иметь в виду сам И. Ньютон, и может рассматриваться как изложение точки зрения, близкой взглядам И. Ньютона. Эта точка зрения является достаточно обычной, и, хотя мы понимаем теперь, что едва ли в природе существуют какие бы то ни было абсолютно точные величины, тем не менее разграничение истинных и обнаруживаемых

[1)] Написано в 1973 г. для публикации в «Успехах физических наук» по соглашению с одним членом редколлегии. Однако он отказался принять статью большого объема. Тогда я был занят уже другими мыслями и не стал сокращать ее. Теперь, когда вышел сборник произведений А. Пуанкаре «О науке» с послесловием М. И. Попова, А. А. Тяпкина и А. С. Шибанова [15], публикация статьи представляется актуальной и своевременной. Я сократил ее и внес небольшие изменения, в конце добавил краткое замечание по поводу упомянутого послесловия [15].

при измерении значений физических величин остается. Точные величины фигурируют в теории, измерение — это дело эксперимента.

Однако встает вопрос. Показания эксперимента — вещь понятная, они просто воспринимаются, но истинные величины не даны нам непосредственно; так что же они такое? Может быть, они не существуют независимо от измерений, а мы сами вводим понятие о них, чтобы иметь возможность строить наши теории? Что такое время t, длина l, и почему мы считаем, что имеются сами по себе определенные отношения длин, вследствие которых пространство обладает определенной геометрией?

Такого рода вопросы обсуждал А. Пуанкаре и пришел к выводу, что перечисленные понятия, как и многие другие вводятся нами условно, по соглашению — по конвенции, от чего его точка зрения получила название конвенционализма. Он писал, в частности: « ... утверждение, что два промежутка времени равны, само по себе не имеет смысла и можно принять его только *условно*», и « ... наша евклидова геометрия есть лишь род условного языка» [2, с. 63]. Обсуждая вопрос об определении понятия массы, он приходит к выводу, что «массы суть коэффициенты, которые удобно ввести в вычисления» [2, с. 71].

В общем взгляд, который развивал А. Пуанкаре, сводится к следующему. Опыт побуждает нас вырабатывать известные понятия, но не навязывает их с необходимостью однозначно, поэтому определение того или иного понятия есть вопрос соглашения, и выбор между разными возможными определениями диктуется только удобством, только простотой получающейся на основе этих понятий теории.

Исходя из этих соображений, А. Пуанкаре предсказывал, что ввиду простоты евклидовой геометрии физики никогда от нее не откажутся; еще он утверждал о принципах механики, что опыт «никогда не будет в состоянии стать с ними в противоречие» [2, с. 72]. Оба эти суждения оказались, как известно, ошибочными, но общие взгляды Пуанкаре не были оставлены. Напротив, их развивало и продолжает развивать — в тех или иных вариантах и конкретных случаях — немалое число физиков и философов, особенно в связи с теорией относительности.

Несомненно, понятия физики должны иметь экспериментальный смысл, но это положение толкуют различно. С одной точки зрения, которую можно считать обычной, понятие не связывается с какой-либо специальной экспериментальной процедурой и представляется как отражающее нечто существующее в природе независимо от выбора экспериментальных процедур и каких-либо соглашений и только выступающее в тех или иных экспериментах. С другой точки зрения, известной как операционализм, понятия должны определяться указанием конкретных экспериментальных операций, как для физической величины — способ ее измерения. Поскольку выбор такого определения представляется условным, операционализм связывается с конвенционализмом. В частности, считают условным данное А. Эйнштейном определение одновременности, и в одном учебнике физики было даже написано, что надо просто условиться, какие пространственно разделенные события мы будем считать одновременными. Но конвенционализм идет дальше и полагает, что независимо от выбора определений в основе толкования всякого опыта лежат некоторые соглашения, как например утверждается, что при откладывании данного масштаба делается соглашение о сохранении масштабом его длины.

В последнее время конвенционалистские взгляды развиваются, в частности, в недавно изданных у нас книгах двух зарубежных философов — Р. Карнапа [3] и А. Грюнбаума [4], а также в статьях некоторых наших авторов. А. Грюнбаум как раз начинает с вопроса о сохранении длины масштаба, или, как он выражается, о его «самоконгруэнтности», и далее развивает взгляд на конвенциональный характер определения расстояний, одновременности по А. Эйнштейну и т. д. Р. Карнап пишет, что вообще «соглашения играют очень важную роль при введении количественных понятий» и что «количественные понятия не даются природой» [3, с. 107, 158], и также развивает конвенционалистские взгляды на геометрию физического пространства и др.

Наша цель состоит в том, чтобы рассмотреть вопрос об определении физических понятий и выяснить ошибки конвенционализма в этом вопросе. В § 1 рассматриваются определения физических величин, в § 2 — понятие одновременности в теории относительности, в § 3 даются общие выводы и критика конвенционализма, которая продолжается еще в § 4. Мы ограничиваемся элементарным уровнем анализа, поскольку он достаточен для наших целей, хотя в выяснении основания понятий длины, времени и одновременности можно пойти существенно глубже. Но это потребовало бы изложения основ теории относительности, отличного от такого, какое было дано самим А. Эйнштейном [2)].

§ *1. Физические величины*

Понятие о длине, как о всякой величине, возникает из сравнения. Дикарь мог сравнивать палки, прикладывая их друг к другу, и замечать их равенство или неравенство, даже не выражая это какими-либо словами. Далее, он мог брать одну палку и, укладывая ее на другой, видеть, что она укладывается, допустим, два раза. Два раза — это факт, такой же, как тот, что у человека две руки, два глаза, две ноги. Вообще если какой-то стержень укладывается на другом n раз, то я могу выразить это отношение стержней, сказав: один стержень в n раз длиннее другого или длина второго стержня в данном масштабе равна n, но независимо от моих целей измерения

[2)] Такое изложение намечено в общих чертах в [5, 6] (см. особенно [6, § 3]). Оно устраняет почву конвенционализма в толковании геометрии и теории относительности.

речь идет о факте: n — это то число раз, какое один стержень укладывается на другом.

Если какой-то стержень L_1 не укладывается на другом стержне L целое число раз, то я беру стержень L_2, скажем, в три раза меньший L_1, т. е. укладывающийся на L_1 три раза. Тогда я могу, допустим, установить, что стержень L_2 укладывается на L десять раз, и сказать: длина стержня L в масштабе L_1 равна $10/3$ или примерно равна, если стержень L_2 укладывается на L не совсем точно 10 раз. Все это будет выражать фактическое отношение между стержнями, и только привычка к измерению может создавать впечатление, будто $10/3$ есть число, относимое стержню L в качестве его длины в масштабе L_1 по соглашению о выборе процедуры измерения. Мало ли о чем можно согласиться, но отношение стержней, устанавливаемое их соответствующим сравнением, есть реальный, от наших целей и соглашений не зависящий факт, и соглашение может касаться только его обозначения теми или иными словами.

Сказанное может казаться тривиальным, но именно здесь и начинается конвенционализм: он смешивает факты с соглашениями. Конечно, можно выбирать разные процедуры измерения или согласиться относить стержню L, в n раз более длинному, чем L_1, «длину» $n^2 \log n$ и т. д. [3] Но не нужно смешивать это с тем фактом, что стержень L_1 укладывается на L n раз, и говорить: мы условились считать n длиной стержня L в масштабе L_1, тогда как мы ни о чем не уславливались, а только констатировали факт, говоря, что длина L в масштабе L_1 равна n. Но оставим конвенционализм и пойдем дальше в рассмотрении вопроса о длине.

Случай, когда протяженность двух тел можно сравнить, прикладывая их друг к другу, представляет исключение. В более общем случае берется подходящее третье тело, которое можно перемещать, прикладывая к данным телам. Это тело назовем масштабом.

Итак, пусть мы имеем два протяженных тела A и B. Берем какой-нибудь масштаб P и, откладывая его, а если нужно, и его дробные доли, на телах A и B, получаем их длины $l(A,P)$, $l(B,P)$ в масштабе P и находим их отношение $R = l(A,P)/l(B,P)$. Если брать любые другие масштабы, будь то твердые стержни или волны света, отношение R будет получаться тем же самым [4].

---

[3] Возьмем произвольную возрастающую функцию $f(x)$ и определим «длину» l' так: если обычная длина в каком-то масштабе равна l, то $l' = f(l)$. Введем в уравнения физики «длину» l'. Это значит, что если $g(x)$ — функция, обратная $f(x)$, то всюду вместо длины l пишется $g(l')$. Дело сводится, стало быть, к перемене обозначений: l на $g(l')$. Названия и обозначения условны, но безусловное — то реальное отношение, которое обозначается длиной l, все равно остается в основе новых обозначений.

[4] Сами тела, как и масштабы, не обязаны быть твердыми, нужно лишь, чтобы и те и другие оставались сравнительно неизменными в процессе измерения, что проверяется обычным путем сравнения масштабов и повторных измерений и обеспечивается неизменностью условий.

Следовательно, оно характеризует отношение самих тел A, B независимо от выбора масштаба P, так что можно написать

$$\frac{l(A,P)}{l(B,P)} = R(A,B). \tag{1}$$

Если представлять тела A, B в идеализированном виде как прямолинейные отрезки, то $R(A,B)$ будет не чем иным, как отношением отрезков. Именно это понятие, а не длина фигурирует в «Началах» Евклида. Выбор единицы длины произволен, но отношение отрезков от этого не зависит. Точно так же в физике, говоря о длине или расстоянии как физических величинах, имеют в виду длину и расстояние с точностью до выбора масштаба, как это выражается в формулировках: «пропорционально длине», «обратно пропорционально квадрату расстояния» и т. п. Но без соотношения (1) это не имело бы смысла и нельзя было бы писать формулы с длиной l без указания того, каким именно масштабом производится измерение.

Теперь длины и расстояния измеряют множеством косвенных способов, когда откладывание твердых масштабов невозможно практически и даже в принципе, как например при измерении расстояний, между центрами атомов в кристаллической решетке. Тем не менее понятие расстояния считается тем же самым как в этом случае, так и в случае расстояния до звезд. Соотношение (1) остается, но уже в обобщенном смысле: для измерения длин $l(A,P)$, $l(B,P)$ или расстояний применяются не только масштабы, но и разные процедуры, опирающиеся на законы геометрии и тем самым на исходный смысл той же формулы.

Таким образом, понятие длины, как оно фигурирует в физике, не сводится к результатам измерения посредством какого-либо данного масштаба, а опирается на сравнение разных тел и, в частности, на соотношение (1), благодаря которому имеет смысл понятие длины с точностью до выбора масштаба. Более того, при измерении длины данным масштабом его делят на равные части, что требует сравнения их друг с другом с помощью других тел, так что понятие длины уже подразумевается. Отсюда видно, что это понятие не определяется измерением, а, напротив, способы измерения опираются на понятие о длине, основанное на сравнении разных тел; измерение определяет только численное значение длины в данном масштабе. Выбор стандартного масштаба определяется соображениями его устойчивости и составляет задачу метрологии, а не собственно физики. Теперь в качестве такого масштаба принята волна определенной спектральной линии, но от этого понятие длины не изменилось, хотя конкретные операции измерения твердыми стержнями или волнами света существенно различны.

Вообще физическая величина представляет собой характеристику тех или иных объектов (вещей, явлений) через их отношение друг к другу, прямые или опосредованные другими объектами и процессами. Она относится не к отдельным объектам, а к некоторому классу объектов и для отдельного объекта не имеет смысла. В случае таких величин, как длина или масса, отдельному объекту сопоставляется численное значение величины, когда выбран масштаб, т. е. некоторый объект данного класса (иначе говоря, фиксация такого объекта определяет отображение класса объектов в множество чисел). В уточнение нужно добавить, что между объектами имеется отношение, определяющее их «равенство по данной величине», так что равным объектам относятся равные численные значения. В формуле (1) мы пренебрегаем неизбежной неточностью измерений и неустойчивостью как масштабов, так и самих тел A, B; эмпирическая формула должна писаться с оценкой возможной ошибки. Особенно важна устойчивость масштаба, так как иначе нельзя сказать, что измерение длин $l(A, P)$, $l(B, P)$ производится одним и тем же масштабом P. Для этого по возможности устраняют все то, что могло бы влиять на масштаб; выбор в качестве масштаба волны света диктуется именно ее устойчивостью. Но в теории отвлекаются от всего этого, и как соотношение (1), так соответственно и понятие длины принимаются как точные. Так делается всегда: выведенные из опыта понятия и законы принимаются в теории как точные. Понятие длины тела заведомо неточно не только вследствие теплового движения молекул, но и потому, что молекулы не имеют вполне определенных размеров. Однако от этого длина не становится условным понятием в тех пределах, в каких она имеет достаточно точный смысл.

К чему может приводить понимание длины как результата измерения данным масштабом, показывает следующий пример. В своей книге «Философские основания физики» Р. Карнап дважды рассматривает такой «простейший способ измерения длины», когда за масштаб принимается какой-либо стержень независимо от его температуры и действия каких-либо сил. Но, как пишет Р. Карнап, за простоту такого способа определения длины «следует расплачиваться дорогой ценой. Он приводит к странной, неправдоподобно сложной картине мира. Действительно, в этом случае придется говорить, например, что всякий раз, когда пламя подносится к стержню, все другие предметы в космосе, включая наиболее удаленные галактики, немедленно сжимаются. Ни один физик не захочет принять такие странные следствия» [3, с. 224]; см. также [3, с. 147].

Однако стоит вспомнить о длине с точностью до выбора масштаба, т. е. о формуле (1), как становится ясным, что отношения размеров всех предметов в космосе не изменяются от того, нагревается принятый за масштаб стержень или нет; эти отношения не зависят от масштаба P. Поэтому едва ли хоть у одного из физиков появится странная картина мира со сжимающимися галактиками.

Если же допустить нагревание стержня в процессе измерения, то вообще никаких устойчивых отношений не получится, а потому не получится и никакой определенной картины мира; галактики не будут ни сжиматься, ни расширяться, потому что им вообще нельзя будет приписать достаточно определенных размеров. Что действительно представляется странным, так это рассуждения Карнапа, тем более что он основывает на них вывод об условности общей теории относительности и всей связанной с нею системы физики.

По поводу определения длины иногда выдвигается замечание, что те отношения, на которые оно опирается, устанавливаем мы, откладывая стержни и пр., но объективно, в самой природе таких отношений, может быть, и нет: они, а с ними и длины, определяются нашей деятельностью. На это можно заметить, во-первых, что сама наша деятельность есть часть природы и ее возможности определяются природой. Во-вторых, одни тела откладываются на других или составляются из других и без нашей деятельности; мы только воспроизводим такого рода отношения и таким путем приходим к выражению их в достаточно точных понятиях.

Далее выдвигается следующее соображение по поводу устойчивости масштабов. Мы измеряем длину твердым масштабом. Но что такое твердый масштаб? Можно сослаться на наглядное представление о твердом, жестком теле, но это недостаточно для точного понятия. Дается известное определение: твердым называется тело, расстояние между точками которого неизменно (не обязательно понимать это как определение абсолютно твердого тела, речь идет о реальных телах в пределах точности опыта). Однако сами расстояния измеряются твердыми масштабами. Поэтому получается круг в определении. Выход из него состоит в том, что мы берем данный стержень и принимаем его за масштаб или, другими словами, объявляем его твердым. И получается, что конвенционализм прав: понятие длины основано на соглашении о фиксации данного масштаба.

Это рассуждение при кажущемся глубокомыслии ошибочно. Ошибка основана на том, что свойство твердости приписывают масштабу — стержню самому по себе, будь то наглядно или по соглашению, но так или иначе независимо от его отношений к другим телам. На самом деле понятие твердости уточняется из рассмотрения *отношений* между телами.

Пусть мы имеем два стержня L_1 и L_2. Прикладываем их друг к другу, и пусть именно стержень L_1 уложится на стержень L_2. Тогда отмечаем на L_2 положения его концов; если же концы обоих стержней совпали, то отметками служат сами концы стержня L_2. Теперь уносим стержни, а потом опять прикладываем их друг к другу. Окажется, что стержень L_1 можно будет уложить на L_2 ровно между прежними отметками. Повторяем подобную операцию, укладывая стержень L_1 на L_2 иначе, так что отметки будут в других местах. Результат будет тот же. Это мы можем выразить, сказав: стержни L_1 и L_2 взаимно твердые.

Производя такие же операции с разными стержнями, мы выделим таким образом класс взаимно твердых стержней. Опыт показывает в пределах известной точности, что такой весьма обширный класс существует, и притом единственный. Дальше мы можем, уточняя опыты и применяя другие способы сравнения, уточнять и само понятие твердого стержня, но, так или иначе, оно основывается на отношении стержней.

Можно вообразить природу, в которой оказалось бы два класса взаимно твердых тел, так что размеры одних, допустим, периодически менялись бы по отношению к другим. Соответственно получалось бы два понятия длины — в одном и другом классе взаимно твердых тел. Логика определения от этого не изменилась бы. Но свойством, законом реальной природы является то, что класс взаимно твердых тел в пределах точности обычного опыта один; это дало основание ввести понятие длины с точностью до выбора масштаба единственным образом и называть стержни просто твердыми, опустив слово «взаимно».

Обратимся теперь к вопросу о времени. Понятие о равномерно текущем времени, о величине промежутков времени основано на повторяемости процессов. Одни и те же процессы могут повторяться естественным путем, как например обороты Земли, или могут воспроизводиться нами. Кроме того, считается непосредственно данным понятие о совпадении событий во времени, как, скажем, совпадение начал двух процессов (иначе можно сказать, что рассматриваются процессы, протекающие «в одном месте» или столь близко, что запаздыванием сигналов можно пренебречь). Основываясь на этом, мы можем говорить, что некоторый повторяющийся процесс P «укладывается» на каком-либо процессе A некоторое число раз, вообще говоря, с точностью до какой-то части процесса P. Это дает понятие о продолжительности $t(A,P)$ любого процесса A в данном масштабе P, хотя бы с некоторой неточностью. Поскольку можно выбрать разные повторяющиеся процессы, определение длительности оказывается условным.

Однако именно потому, что можно выбирать разные повторяющиеся процессы, мы можем сравнивать их друг с другом, причем обнаруживается известное постоянство их отношений. Если данный процесс A воспроизводится и на нем укладывается все тот же процесс P, то длительность $t(A,P)$ каждый раз оказывается той же самой. Если мы имеем два воспроизводимых процесса A, B и укладываем на них разные повторяющиеся процессы P, то отношение их длительностей

$$R = \frac{t(A,P)}{t(B,P)} \tag{2}$$

оказывается одним и тем же независимо от процесса P в пределах ошибки, связанной с тем, что каждый раз берется целый процесс P. Беря более скоротечные процессы, отношение можно уточнить и прийти к отношению длительностей процессов A и B с очень малой неточностью, в пределах которой оно характеризует отношение самих процессов A, B, так что можно написать

$$\frac{t(A,P)}{t(B,P)} = R(A,B). \tag{3}$$

Такое сравнение процессов можно производить, пользуясь самыми разнообразными масштабами P. Чтобы не ссылаться на обычные повторяющиеся процессы, называемые периодическими, как качание маятника и т. п., можно взять в качестве повторяющегося процесса P, например, падение одинаковых шариков на одну и ту же высоту. Едва один шарик упал, отпускается другой и т. д., и так при малой высоте падения можно сравнивать процессы с точностью, достаточной во многих случаях.

Конечно, в понятии о повторении того же самого процесса есть некоторая неопределенность, так как никакие процессы не воспроизводятся с абсолютной точностью; иначе, собственно говоря, их нельзя было бы и различать как разные повторения одного и того же процесса. Тем не менее процессы все же повторяются и мы их воспроизводим. При этом в тех случаях, когда обнаруживаются расхождения в отношениях их длительностей, выходящие за пределы ошибок наблюдения, всегда удается найти их причину и соответственно уточнить отношение длительностей.

Таким образом, в понятии об отношении длительностей процессов, выраженном формулой (2), отражается общая закономерность природы — повторяемость процессов и устойчивость их отношений. Мы, пожалуй, слишком привыкли к этому, чтобы по достоинству оценить тот, например, факт, что число качаний данного маятника за сутки всегда оказывается одним и тем же. Отношение длительностей $R(A,B)$ и есть отношение промежутков времени течения процессов A и B. Тем самым равномерно текущее время оказывается определенным с точностью до преобразования, сохраняющего отношения его промежутков $t_2 - t_1$, т. е. с точностью до преобразования $t' = at + b$.

В результате можно дать следующее определение: равномерно текущее время t есть такой параметр, что совпадающим событиям соответствуют одни и те же его значения и одинаковым или, другими словами, тем же самым процессам относятся равные промежутки $t_2 - t_1$ [5)]. Выбор начала отсчета и масштабного процесса дает численное значение времени с точностью до продолжительности самого этого процесса, не считая точности его повторения как «того же самого» и точности фиксации начала отсчета. В теории производится экстраполяция ко вполне точным отношениям и время считается точно определенным вплоть до преобразования $t' = at + b$. В этом

[5)] Отсюда уже следует аддитивность времени, так как если процесс, состоящий из n одинаковых процессов P с промежутками времени Δt, начался во время t_0, то он кончается во время $t_0 + n\Delta t$, так что его промежуток времени равен $n\Delta t$, а это и означает аддитивность времени.

есть, конечно, своя условность, свойственная всякой абстракции, выходящей за пределы опыта и придающей величинам математическую точность. В остальном в понятии времени нет ни условности, ни соглашений, а только констатация фактов, касающихся процессов.

Обратимся теперь к двум следующим основным понятиям физики — массы и силы и покажем, что они необходимо возникают из отношений, обнаруживаемых в опытах, какими можно установить второй закон Ньютона [6)]. Располагая понятиями расстояния и времени, мы можем определить скорость и ускорение (по крайней мере в тех пределах, в каких можно считать время одинаково определенным в разных местах, например, поскольку скорость света можно считать бесконечной).

Представим себе следующий простой опыт. Имеется легкая тележка, к которой прикреплена пружина с веревкой, перекинутой через блок; на конце веревки — чашка, на которую можно класть разные грузы. Мы кладем на тележку какое-либо тело, а на чашку — груз. Пружина растягивается, и тележка получает некоторое ускорение $a(A, P)$. Здесь A — тело, включая тележку, а P — растяжение пружины. Будем сравнивать ускорения при разных телах A, B и т. п. и разных растяжениях пружины P, Q и т. д. При этом не нужно измерять растяжения пружины, а только замечать одинаковые и разные растяжения. Обнаружатся следующие две закономерности.

1. Отношение ускорений для двух тел A, B при любых одинаковых растяжениях пружины P оказывается одним и тем же — не зависящим от P, так что можно написать

$$\frac{a(A,P)}{a(B,P)} = R(A,B). \tag{4}$$

Следовательно, это отношение характеризует некоторое отношение между самими телами A и B. Мы можем назвать его «инерционным», «отношением по массе» или еще как-нибудь. Но фактом является наличие такого отношения, и мы выражаем его, говоря: «масса тела B в R раз больше массы тела A». Тем самым мы уже получаем понятие массы с точностью до выбора единицы измерения, и стоит лишь приписать какому-то телу массу 1, как получим величину массы в данном масштабе. Мы убеждаемся, таким образом, что в понятии о величине массы нет ничего, зависящего от соглашений, кроме названия и выбора единицы массы: объективное, обнаруживаемое в опыте отношение между телами навязывает нам понятие о массе.

Сказанное тем более верно, что вместо грузов и пружин можно брать любые источники ускорения. При этом мы вовсе не измеряем силы, а

[6)] Я пользуюсь здесь соображениями Ю. И. Кулакова; см., в частности, [7].

только фиксируем тождество их источников, как например одинаковость растяжения одной и той же пружины. Обозначая разные источники ускорения через P, мы будем иметь ту же формулу (4). То есть мы констатируем то же отношение для тел A, B; оно, стало быть, не зависит от источника силы и потому тем более характеризует именно отношение самих тел A, B в смысле их ускоряемости одними и теми же воздействиями.

Приписав какому-либо телу A_0 массу 1, мы можем написать формулу (4) для любого тела A и любого источника силы P в виде

$$\frac{a(A,P)}{a(A_0,P)} = \frac{1}{m(A)}, \tag{5}$$

и далее мы можем сказать: $m(4)$ есть масса тела A в масштабе A_0.

2. Совершенно аналогично можно сравнивать источники ускорения P, Q, прилагая их к разным телам A. Тогда окажется, что отношение ускорений

$$R = \frac{a(A,P)}{a(A,Q)}$$

не зависит от тела A и, следовательно, характеризует отношение самих P, Q, так что можно написать

$$\frac{a(A,P)}{a(A,Q)} = R(P,Q). \tag{6}$$

Мы выражаем это, говоря, что сила P в R раз больше силы Q. Приписав теперь некоторому P_0 силу 1, мы можем написать формулу (6) для любого тела A и любого источника силы P в виде

$$\frac{a(A,P)}{a(A,P_0)} = f(P). \tag{7}$$

Из формул (5), (7) следует

$$\frac{a(A,P)}{a(A_0,P_0)} = \frac{a(A,P)}{a(A_0,P)}\frac{a(A_0,P)}{a(A_0,P_0)} = \frac{f(P)}{m(A)},$$

или, полагая $a(A_0,P_0) = k$,

$$a(A,P) = k\frac{f(P)}{m(A)}. \tag{8}$$

Это второй закон Ньютона в его обычной форме: ускорение пропорционально силе и обратно пропорционально массе.

Мы видим, во-первых, что ничего условного, кроме названий, никаких соглашений в приведенном выводе нет. Во-вторых, мы видим, что закон Ньютона, как его можно вывести из опыта, заключен в формулах (4) и (6), в которых ни масса, ни сила не фигурируют. Но эти формулы показывают существование определенного отношения между телами самими по себе, как и между источниками ускорения самими по себе, откуда и выводятся понятия о величине массы с точностью до выбора масштабов. Короче говоря, определения массы и силы уже заключены в законе Ньютона, взятом в его прямом экспериментальном смысле [7].

Исторически понятие о массе сложилось не совсем так, как было изложено, но это касается истории физики, а не фактов природы, которые показывают постоянство отношений ускорения, вызываемых разными источниками силы. Для физики важно не то, как возникло какое-то понятие — оно могло возникнуть и по догадке, а то, что оно фактически отражает.

Можно было бы продолжить определение физических величин, но не будем этого делать. Сравнивая формулы (1)–(4), (6), на которых основываются понятия длины, величины промежутка времени и т. д., мы видим их полное тождество — в них выражается постоянство соответствующих отношений, и это уже дает основание для достаточно общих выводов.

Понятия о физических величинах отражают общие отношения — постоянства некоторых отношений, имеющие место в действительности и обнаруживаемые опытом. Существование какого-либо общего отношения или постоянства отношений — это свойство природы, другими словами, закон природы. Поэтому в понятиях о физических величинах выражаются законы природы, так что в этих понятиях нет ничего условного и зависящего от соглашений, кроме разве того, что в физических теориях им придается совершенно точное значение, которое не показывает опыт и которого они могут и не иметь в действительности.

§ 2. *Одновременность*

При построении теории относительности Эйнштейн исходил из следующих понятий:

1)инерциальная система отсчета (называемая дальше просто системой отсчета);

2)твердые масштабы, служащие для определения расстояний и пространственных координат;

3)часы, определяющие время t в любом месте (фиксированном по отношению к данной системе отсчета).

---

[7] В формулировке самого И. Ньютона закон заключает больше, так как массе дается независимое, хотя и не полное, определение, частично выражающее ее аддитивность. Поэтому можно добавить закон аддитивности массы.

Эти понятия заимствуются из классической физики и считаются известными; расстояние и время мы рассмотрели в § 1. Остается понятие о времени, распространенном на все события, а не только в каждом месте по отдельности. При этом время, одно для всех событий, определяется в каждой данной системе отсчета, и так как время в отдельных местах считается известным, то дело сводится к определению одновременности пространственно разделенных событий.

Данное А. Эйнштейном определение одновременности состоит, как известно, в следующем. Пусть в месте A, фиксированном в некоторой системе отсчета S, в момент времени t_1 по часам в месте A происходит событие P_1, причем испускается свет, который доходит до некоторого места B, когда в нем происходит какое-то событие Q. Свет рассеивается и частично возвращается в A — происходит событие P_2 в некоторый момент t_2 по часам в A. Принимается, что событие Q одновременно с тем событием в A, которому по часам в A соответствует время

$$t = \frac{1}{2}(t_2 + t_1) = t_1 + \frac{1}{2}(t_2 - t_1). \tag{9}$$

Таким путем определяется одновременность по отношению к данному месту A: одновременны те события, к которым, согласно указанной процедуре, относится одно и то же время по часам в A. Это позволяет синхронизировать часы в разных местах, фиксированных в данной системе отсчета, и сверить их ход с часами в A (так что можно заранее не предполагать, что часы в разных местах идут одинаково). Таким образом, в системе S вводится единое время t по отношению к данному месту A.

Тем же путем можно определить одновременность по отношению к любому другому месту. Но из данного определения никак не следует, что события, одновременные относительно одного места, окажутся одновременными относительно любого другого. Однако это будет заведомо так, если свет, по отношению к данной системе отсчета, распространяется из всех мест во всех направлениях с одинаковой скоростью. А так как А. Эйнштейн заранее принял закон постоянства скорости света, то получается, что одновременность событий не зависит от места, по отношению к которому она определяется. Часы, синхронизированные с часами в данном месте, оказываются синхронизированными друг с другом, и мы получаем единое время в данной системе отсчета, безотносительно к какому-либо месту.

Однако ссылка на постоянство скорости света встречает возражение: само понятие скорости уже предполагает единое время для разных мест, а мы его как раз и определяем, т. е. попадаем в порочный круг. Поэтому оставим ссылку на постоянство скорости света и прямо примем гипотезу, что одновременность событий не зависит от места, по отношению к которому она определяется. Это равносильно тому, что *в данной системе отсчета* *имеется определенное по А. Эйнштейну отношение одновременности событий, которое рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Действительно, по самому определению одновременности относительно данного места A одновременным событиям приписывается одно и то же время t по часам в A. Тем самым одновременность относительно A обладает свойствами равенства чисел t — рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью. А так как, по гипотезе, одновременность не зависит от места, по отношению к которому она определяется, то мы и получаем высказанную выше другую форму этой гипотезы. Для краткости мы назовем ее гипотезой единой одновременности.

Гипотеза единой одновременности в принципе доступна прямой экспериментальной проверке. Достаточно синхронизировать часы в местах B и C с часами в данном месте A и проверить, окажутся ли тем самым часы в B и C синхронизированными относительно места C. При современных возможностях эксперимента такая прямая проверка гипотезы не представляется невозможной. Но и независимо от этого можно сослаться на то, что данное А. Эйнштейном определение одновременности относительно системы отсчета привело к последовательной теории, согласной с опытом. Поэтому есть основание говорить не о гипотезе, а о законе симметричности и транзитивности эйнштейновой одновременности или о законе единой одновременности в каждой системе отсчета.

Однако распространено мнение, что данное А. Эйнштейном определение условно или, как выражаются более «философски», конвенционально. Поэтому рассмотрим вопрос об одновременности глубже.

Согласно классической механике, телу можно придать любую скорость. Не пользуясь понятием скорости, можно сказать, что, бросив тело из места A в место B и тут же обратно из B в A, можно добиться того, чтобы измеренный в A промежуток времени между бросанием и возвращением тела был меньше любого наперед заданного ε. Тем самым синхронизация часов в A и B может быть установлена с любой точностью, и так как величина, меньшая любого данного ε, равна нулю, то тем самым оказывается определенной абсолютная одновременность, кстати, без передачи сигналов с бесконечной скоростью.

А. Эйнштейн пользуется тем же, по существу, способом синхронизации, только не путем перебрасывания тела, а посылкой и отражением света, или, можно сказать, перебрасыванием фотонов. Однако промежуток времени между испусканием света из данного места A и его возвращением в A из некоторого места B будет $t_2 - t_1 \neq 0$. Поэтому заранее не ясно, почему моменту отражения света в месте B сопоставляется время $t = (t_1 + t_2)/2$, а не любое другое в промежутке между t_1 и t_2. Это и вызывает представление, что определение одновременности условно, не считая того, что сам выбор световых сигналов в качестве средства установления одновременности можно было бы тоже считать условным.

Однако подобные соображения вызваны непониманием того, о чем, собственно, идет речь, т. е. как на самом деле стои́т вопрос об одновременности. А стои́т он следующим образом.

Если абсолютная одновременность отпадает, то спрашивается, можно ли сохранить понятие одновременности хотя бы относительно каждой данной системы отсчета? Иначе говоря: *существует ли в природе такое отношение между событиями в их связи с любой данной системой отсчета, которое подобно абсолютной одновременности устанавливает единое время в данной системе отсчета и определяется одинаково для всех событий*, т. е. как оно устанавливается для одной пары событий, так и тем же способом оно устанавливается для любой другой их пары.

Назовем это искомое отношение танкордностью [8)], чтобы не навязывать заранее никаких ассоциаций и отстраниться от бессмысленных дискуссий, которые порой ведутся по поводу того, как можно употребить термин «одновременность».

Уточним те свойства, какими танкордность «подобна», как мы сказали, абсолютной одновременности; при этом имеется в виду танкордность в какой-либо данной системе отсчета.

I. Танкордность рефлексивна, симметрична и транзитивна, или, что равносильно, все события разбиваются на множества танкордных событий.

II. Для каждого события P и каждого места A существует событие, происходящее в месте A и танкордное P.

III. Если события P_1, P_2 в месте A танкордны событиям Q_1, Q_2 в месте B, то промежутки времени между P_1, P_2 и Q_1, Q_2, измеряемые соответственно в местах A и B, равны. Отсюда следует, что каждому данному процессу соотносятся равные промежутки времени по отношению к любому месту. Действительно, если R_1, R_2 — события, представляющие начало и конец процесса, а P_1, P_2 и Q_1, Q_2 — события в местах A и B, танкордные R_1, R_2, то по условию I P_1, P_2 и Q_1, Q_2 соответственно танкордны и по условию III промежутки времени между ними равны, но эти промежутки и сопоставляются из мест A и B процессу между событиями R_1 и R_2. В частности, одному событию (вообще одновременным событиям) в одном месте отвечают в любом другом месте одновременные события.

Заметим, что сформулированные требования допускают чрезвычайно произвольные определения танкордности. Действительно, фиксируем произвольно в каждом месте по одному событию и объявим их танкордными.

[8)] Термин «танкордность» получен как сокращение изобретенного мною слова «танконкордность» — от французского temp и concorde, так что слово «танкордность» может быть переведено «времясогласованность». Что касается дискуссий об употреблении слова «одновременность», то можно обратиться, например, к книге А. Грюнбаума [4, с. 436–465], где такая дискуссия составляет едва ли не главное в проводимом там обсуждении вопроса об одновременности.

После этого, в согласии с условием III, считаем танкордными события, отстающие от выбранных на равные промежутки времени. Мы получаем разбиение всех событий на множества танкордных событий, т. е. условие I выполнено, и выполнены также условия II, III. Этот произвол ограничивается тем, что танкордность определяется некоторым универсальным способом, т. е. на нее налагается следующее требование.

IV. Танкордность определяется одинаково для всех событий, т. е. как определяются события, танкордные какому-либо событию P, происходящему в некотором месте A, так тем же способом определяются события, танкордные любому другому событию, происходящему в любом месте X.

V. Танкордность сохраняется при преобразованиях, относительно которых инвариантны физические законы в каждой данной системе отсчета. Это, можно сказать, означает, что танкордность представляет собой отношение между событиями, определяемое законами природы.

Требование V включает требование IV, так как это последнее означает, собственно, не что иное, как инвариантность танкордности относительно переноса начала отсчета от события P в месте A к любому другому событию в любом другом месте. Но мы формулировали требование IV отдельно, так как оно проще, и мы воспользуемся им дальше независимо от общего требования V. Остальное, что заключается в требовании V, сводится к инвариантности танкордности относительно вращений, или, другими словами, к ее изотропности в меру изотропности пространства.

Сто́ит отметить, что в поставленных требованиях ничего не говорится о причинности. Требование II обеспечивает то, что данное множество танкордных событий разбивает все события на две части, но они представляют прошедшее и будущее только в каждом месте, тогда как вовсе не исключено, что событие, происходящее в некоторое время t, воздействует на событие, происходящее в другом месте во время $t' < t$. Это окажется исключенным вследствие требования IV. Здесь обнаруживается глубокая связь между причинностью и симметрией, поскольку в требовании IV выражена симметрия танкордности относительно событий и мест. Это подобно известной связи однородности времени и пространства с законами сохранения энергии и импульса.

Обратим внимание на то, что мы ничего не определили, не ввели никаких соглашений, кроме как о термине «танкордность»; мы только спрашиваем природу: существует ли в ней такое отношение, которое обладает указанными свойствами? Совершенно так же, прочтя описание какого-нибудь животного, мы можем спросить: существует оно в природе или нет? Вопрос ставится о факте; разница только в том, что положительный ответ на вопрос о животном можно получить, просто увидев его, тогда как положительный ответ на вопрос о танкордности не так прост. Даже прямое экспериментальное исследование не оказывается затруднительным, и приходится прибегать к косвенному методу: мы принимаем гипотезу о существовании искомого отношения и проверяем ее следствия. Так же устанавливалось, например, существование молекул: проверкой следствий молекулярной гипотезы. Но как в вопросе о существовании молекул не было ничего конвенционального, так нет его и в вопросе о танкордности [9)].

Отношение танкордности, если оно существует, определяется физическими, иначе говоря материальными, связями событий, и притом универсальными, поскольку имеется в виду универсальное отношение, как это выражено в требованиях IV и V. Можно сказать еще так: физические связи, определяющие танкордность, должны быть такими, чтобы их можно было устанавливать экспериментально в достаточно произвольных условиях.

Известной нам универсальной формой связи явлений, во всяком случае в области макроскопической, служит связь через излучение. Поэтому естественно искать танкордность, объективно обусловленную именно этой связью, что, собственно, и сделал А. Эйнштейн, введя свое определение одновременности.

По гипотезе или закону «единой одновременности» определенная А. Эйнштейном одновременность рефлексивна, симметрична и транзитивна, т. е. удовлетворяет первому требованию, налагаемому на танкордность. Выполнение остальных требований очевидно. Эту танкордность мы назовем эйнштейновой.

Однако можно поставить вопрос: не может ли существовать другая «световая» танкордность, тоже определяемая обменом световыми сигналами, но отличная от эйнштейновой?

Допустим, в некоторой системе отсчета определена какая-то световая танкордность. Докажем, что она совпадает с эйнштейновой.

Пусть, как и выше, P_1 и P_2 — события в месте A, состоящие в испускании света и его возвращении после отражения в месте B; t_1 и t_2 — времена этих событий по часам в месте A; Q — событие, состоящее в отражении света в месте B. Согласно требованию IV, время по часам в A, относимое событию Q, должно определяться способом, не зависимым ни от мест A и B, ни от начала отсчета времени в A. Поэтому событию Q должно быть соотнесено некоторое значение времени t так, чтобы $t - t_1$ зависело только от $t_2 - t_1$:

$$t - t_1 = f(t_2 - t_1). \tag{10}$$

Если t_{AB} — время, за которое свет проходит от A до B, то $t = t_1 + t_{AB}$, и

[9)] Можно, конечно, сказать, что принятие гипотезы представляет собой соглашение. Но не о таких соглашениях говорит конвенционализм; он утверждает, что вопрос об одновременности есть дело соглашения, а не факта, что, как мы видим, неверно, если вопрос поставлен так, как вообще подобные вопросы ставятся в науке.

потому (10) равносильно тому, что

$$t_{AB} = f(t_1 - t_2). \tag{11}$$

Обратно — от B к A — свет проходит за время

$$t_{BA} = (t_2 - t_1) - t_{AB} = (t_2 - t_1) - f(t_2 - t_1). \tag{12}$$

Применим теперь, следуя требованию IV, то же определение танкордности по отношению к месту B. Для этого достаточно в предыдущем поменять местами A и B и отметить времена, относящиеся к B, например, штрихами. Тогда из (11) получаем

$$t'_{BA} = f(t'_2 - t'_1). \tag{13}$$

Согласно требованию III, точнее, указанному там же его следствию процессам прохождения света от B к A и от A к B должны быть отнесены по часам в места B такие же промежутки времени, как по часам в A, так что [10)]

$$t'_{BA} = t_{BA}, \qquad t'_{AB} = t_{AB}. \tag{14}$$

Отсюда следует, что время прохождения света от B к A и обратно будет $t'_2 - t'_1 = t'_{BA} + t'_{AB} = t_{BA} + t_{AB} = t_2 - t_1$.

Подставляя это значение $t'_2 - t'_1$ в (13), получаем, что $t'_{BA} = f(t_2 - t_1)$. А так как $t'_{BA} = t_{BA}$, то из (12) следует, что $f(t_2 - t_1) = (t_2 - t_1) - f(t_2 - t_1)$. Отсюда $f(t_2 - t_1) = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$, и, подставляя в (10), получаем то же значение t, какое определялось по формуле (9) [11)].

Таким образом, оказывается, что не существует, помимо эйнштейновой, никакой другой световой танкордности которая устанавливалась бы однократным обменом световых сигналов между двумя местами.

Этот обмен сигналами происходит в природе сам собой без того, чтобы мы посылали и принимали сигналы, так как всякое, по крайней мере

[10)] Здесь мы, собственно, предполагаем, что распространение света от одного данного места к другому можно считать «одним и тем же» процессом независимо от момента испускания света; проще говоря, считаем, что свет распространяется из данного места в данном направлении всегда с одной скоростью. Это в принципе легко проверяется. Вместе с тем мы не предполагаем, что $t_{AB} = t_{BA}$, т. е. допускаем, что во взаимно противоположных направлениях свет распространяется с разными скоростями.

[11)] Мы не требовали даже, чтобы время t, соотносимое моменту отражения света, заключалось между временем t_1 и t_2 — его испускания и возвращения. Это требование совершенно естественно и даже необходимо с точки зрения связи времени с отношением причина—следствие. Однако мы видим, что оно оказывается лишним и удовлетворяется само собой вследствие наших требований, наложенных на танкордность. Заметим еще, что можно предположить f в (2) зависящей также от расстояния r между A и B, так что $t - t_1 = f(t_2 - t_1, r)$. Вывод не изменяется.

макроскопическое, событие вызывает, хотя бы и очень малое, излучение, которое, рассеиваясь, возвращается частично к прежнему месту.

Таким образом, мы видим, что определение одновременности, данное А. Эйнштейном, вовсе не конвенционально, а отражает общие отношения событий независимо от каких бы то ни было соглашений. На соглашении основано только название, и мы специально подчеркнули это, введя термин «световая танкордность». Существует ли в природе в каждой системе отсчета это универсальное отношение — световая танкордность, т. е. эйнштейнова одновременность, является вопросом факта, а не соглашения.

Существование его доказывается подтверждениями выводов теории относительности. Но в принципе, как уже было сказано, оно доступно прямой экспериментальной проверке путем синхронизации часов [12]. При этом процедура синхронизации и, стало быть, подтверждение или опровержение существования эйнштейновой одновременности совершенно не зависит от скорости передачи сигналов. Оказывается вместе с тем, что существование эйнштейновой одновременности обеспечивает постоянство скорости света. Можно сказать так: *если в каждой системе отсчета эйнштейнова одновременность симметрична и транзитивна и свет распространяется в каждом данном направлении с постоянной скоростью, то он распространяется с одной и той же скоростью во всех направлениях во всех системах отсчета* [13] (скорость определена, так как симметричность и транзитивность эйнштейновой одновременности обеспечивает единое время в системе отсчета).

Одно из оснований постоянства скорости света в данном направлении можно видеть в наблюдении двойных звезд, так как колебания в скорости идущего от них к Земле света обнаруживались бы в наблюдаемых нерегулярностях их движений. Что же касается симметричности и транзитивности одновременности, определенной по А. Эйнштейну, то она, как сказано, доступна в принципе прямой экспериментальной проверке. Тем самым оказывается доступным проверке и постоянство скорости света, в частности равенство скоростей его распространения во взаимно противоположных направлениях. Возможность такой проверки имеет, собственно, теоретический интерес как доказательство того, что и в постоянстве скорости света нет условности. Конечно, такая проверка была бы косвенной, но требовать обязательно прямой проверки было бы наивно: с таким требованием пришлось

[12] Проверке подлежат симметричность и транзитивность танкордности. Симметричность означает, что если часы в B синхронизированы с часами в A посылкой сигналов из A, то будет также обратное: часы в A будут синхронизированы с часами в B посылкой сигналов из B. Транзитивность означает, что если часы в A синхронизированы с часами в B, а те — с часами в C, то часы в A будут синхронизированы с часами в C посылкой сигналов из C.

[13] Доказательство см. в [8, p. 1124]. Заметим, что если указанные условия выполняются в одной системе отсчета, то в ней свет распространяется с равными скоростями в противоположных направлениях.

бы отказаться от слишком многих результатов физики. Впрочем, независимо от этого равенство скоростей света в разных направлениях проверяется экспериментально [14].

Мы доказали выше, что не существует, помимо эйнштейновой, никакой другой танкордности, определяемой однократным обменом световыми сигналами. Можно, однако спросить: не существует ли все же какой-либо другой танкордности, определяемой каким-либо другим способом? Ответ на поставленный вопрос оказывается отрицательным. Можно доказать, что всякая танкордность совпадает с эйнштейновой в том смысле, что события, танкордные по какому-либо определению, удовлетворяющему нашим требованиям I–V, будут танкордными по А. Эйнштейну, и обратно.

Естественно исходить из понятия танкордности, связывая ее с причинно-следственными отношениями явлений, т. е. в элементарной форме — с отношениями воздействия одних событий на другие, разумея под воздействием передачу импульса-энергии. Именно потребуем: *танкордность определяется одинаково для любых пар событий и зависит только от общей структуры отношений воздействия одних событий на другие.* В полном виде условия, определяющие танкордность, можно выразить так. Первое условие (А) заменит прежние условия I, II (оно им равносильно); второе (Б) выражает в более точной форме только что сказанное о связи с отношениями воздействия.

А. В каждой системе отсчета все события разделяются на совокупности танкордных событий, причем каждая такая совокупность разбивает все остальные события на два класса (соответственно прошедшему и будущему).

Б. Для каждых двух пар танкордных событий существует взаимно однозначное соответствие событий (точек пространства—времени), переводящее одну пару в другую и сохраняющее как танкордность, так и отношения воздействия событий.

Оказывается, что танкордность с условиями А, Б совпадает с эйнштейновой. Доказательство основано на одной не совсем простой теореме, и мы не будем его приводить.

Вообще структура, или, другими словами, геометрия, пространства—времени теории относительности определяется воздействиями одних собы-

---

[14] При измерениях скорости света, когда свет после отражения возвращается к исходному пункту, фактически измеряется среднее значение скорости в двух взаимно противоположных направлениях. Так как такие измерения можно проводить, посылая свет в любом направлении, то проверяется, что указанное среднее одинаково для всех направлений; поэтому нужно лишь установить равенство скоростей во взаимно противоположных направлениях. Скорость света в одном направлении была определена еще О. К. Рёмером и определяется другими способами. Пока все эти способы не столь точны, как связанные с «возвращением» света, но это, понятно, не имеет принципиального значения. Точность измерений постепенно возрастает. Постоянство скорости света независимо от направления доказывается постоянством произведения длины волны на частоту.

тий на другие, так что пространственно-временная структура мира представляет собой не что иное, как структуру, создаваемую воздействиями одних событий на другие. Можно сказать, что пространственно-временная структура мира — это его причинно-следственная структура, только отвлеченная от всякого физического содержания, когда воздействие берется отвлеченно как транзитивное отношение событий [15)].

Вместе с общей пространственно-временной структурой определяются и инерциальные системы отсчета, и пространство с его геометрией, и время в каждой такой системе, а тем самым и совокупности танкордных — одновременных по А. Эйнштейну — событий. Но рассмотрение этого выходит за те пределы, какие мы приняли с самого начала, полагая известными понятия инерциальной системы и времени в каждом данном ее месте. Для нашей задачи было достаточно выяснить объективные основания понятия одновременности по А. Эйнштейну и ее независимости от каких бы то ни было соглашений. Возможность определения одновременности только что сформулированными общими требованиями А, Б только подчеркивает этот вывод.

Главный итог наших выводов состоит в том, что речь шла вовсе не об определении, а о законе природы: в каждой системе отсчета существует, и притом единственное, отношение событий, обладающее свойствами I–V, или А, Б, причем оно объективно определяется, в частности, испусканием света, его рассеянием и возвращением к прежнему месту. Тот факт, что А. Эйнштейн сформулировал определение, не имеет значения, так как он явно указал на то, что рассчитывает провести определение через всю теорию. А это и означало расчет на то, что определение отражает нечто объективное в природе. Существует ли в природе отношение, подпадающее под введенное определение, — это уже вопрос о свойствах природы: речь идет о законе природы, а не о соглашениях по поводу определений. Верен закон или нет, т. е. является ли отношение событий, указанное А. Эйнштейном, транзитивным и существует ли соответственно в каждой системе отсчета определенное этим отношением единое время, составляет вопрос факта, а не соглашения. На долю соглашений остается: 1) возможность называть одновременностью другие отношения и соответственно временем — другие величины; 2) выбрать время по А. Эйнштейну в качестве одной из пространственно-временных координат или вводить какие-либо другие координаты. Подобные возможности есть всегда и совершенно тривиальны.

§ 3 Общие выводы. Ошибки конвенционализма

Предыдущее изложение позволяет сделать тот общий вывод, что количественные понятия физики отражают законы природы, как законы постоян-

[15)]Это понимание было развито мной и изложено, в частности, в [6].

ства некоторых отношений в случае величин, рассмотренных в § 1, или закон существования отношения одновременности. Можно еще сослаться, например, на понятия энергии и энтропии, определения которых в термодинамике основаны на первом и втором началах.

Вместе с тем введенные на основе законов понятия позволяют дать этим законам новые формулировки. Так, закон постоянства отношений между ускорениями, давая основание понятиям массы и силы, получает в результате их введения обычную форму: $f = ma$. Понятие энтропии, введенное на основе второго начала термодинамики, позволяет выразить его как закон возрастания энтропии. Понятие о величине промежутка времени, выведенное из повторяемости процессов, позволяет характеризовать повторяющиеся процессы равенством времен их протекания.

Далее, мы пришли к выводу, что количественные понятия отражают отношения, существующие в классах объектов (тел, процессов и др.); для отдельного объекта они не имеют смысла. Можно сказать, например, что тело имеет свойство протяженности или свойство «сопротивления» силе, но насколько тело протяженно или насколько оно сопротивляется силе, определяется только его соответствующими отношениями к другим телам. Наличие у данного тела определенной длины, массы или другой физической величины не представляет свойства тела самого по себе, а означает его принадлежность классу тел, сравнимых с ним по этой величине. Напомним сказанное в § 1, что твердость тела в смысле неизменности размеров определяется сравнением: твердые тела — это тела взаимно твердые.

Измерение величины состоит в том, что определяющее ее отношение фиксируется между измеряемым объектом и тем, который принят за масштаб [16]. Но измерение не определяет понятия о величине, так как это понятие основано на отношениях объектов друг к другу, а не только к одному из них, принятому за масштаб. Произвол в выборе масштаба обеспечивается именно тем, что величина определяется отношениями в классе объектов. Иначе численные значения, получаемые при измерениях разными масштабами, нельзя было бы понимать как относящиеся к той же самой величине: разные процедуры измерения определяли бы разные величины.

Нужно отметить также, что опыт никогда не обнаруживает совершенно точных отношений, если речь не идет о счете или порядке строго дискретных объектов. Поэтому опыт не дает полного основания представлять

[16] В более общем случае измерение состоит в том, что каждому классу равных объектов сопоставляется определенный, принадлежащий этому классу объект, как при определении времени событий им сопоставляются показания часов. Когда говорят об измерении положения частицы, то это значит, что каждое возможное положение как-то обозначено и измерение состоит в фиксации того места, где обнаруживается частица.

физические величины как математически точные. Более того, физические величины неточны по самой природе вещей, особенно если они имеют статистический характер, как плотность, давление, температура, сила тока и т. п.; но и всякая величина для любого тела подвержена всяческим флуктуациям вследствие теплового движения, излучения и поглощения света и т. п. Наконец, есть неточности, обусловленные соотношениями неопределенностей [17].

Однако в физических теориях количественные понятия фигурируют в идеализированном виде как математически точные. Иного выхода нет: если хотеть делать точные выводы, то нужны точные понятия; на такой идеализации выросла математика, а потому без соответствующей идеализации невозможно и ее применение. Понятие вещественного числа было создано и применяется, но не только измерение не может дать абсолютно точного значения какой угодно величины, а в самой природе нет такого значения, поскольку величины не являются определенными с математической точностью.

Теория, включив выведенные из опыта понятия в идеализированном виде, приводит к выводам, которые не только проверяются на опыте, но позволяют уточнить опыты и их интерпретацию, учесть то, чем в первоначальных опытах могли пренебрегать. В результате сами эмпирические основания понятий уточняются. Кроме того, понятия экстраполируются далеко за те пределы, в которых они были первоначально установлены, и понимаются поэтому не в смысле первоначального определения, а как то, что известным образом фигурирует в теории с эмпирической интерпретацией ее выводов. Словом, происходит движение понятий — от первоначального опыта к теории, к экстраполяции понятий и уточнению их эмпирической основы, а потом показания опыта и теоретические соображения заставляют исправлять и изменять понятия и теорию. Движение понятия есть не что иное, как уточнение, расширение и изменение значения смысла термина, причем в них всегда имеется некоторая неточность или неопределенность.

Движение понятий, так же как неполное соответствие теории с опытом и обусловленная самой природой неточность понятий, представляет собой то, что называется диалектикой. В строго формальном смысле нет, например, одного понятия времени, потому что показания данных реальных часов и непрерывный параметр t — это не одно и то же, так же как понятие времени различно в классической и релятивистской теориях. И мы не знаем точно,

[17] Например, если устранить колебания массы, вызванные флуктуациями, то, казалось бы, можно говорить о массе тела в данный момент времени. Но если этот момент определен с неточностью Δt, то масса определена с неточностью $\Delta m \geqslant \hbar/c^2\Delta t$, так как $c^2\Delta m = \Delta E$ и $\Delta E\Delta t \geqslant \hbar$. Кроме парных соотношений неопределенности, есть, по-видимому, индивидуальные — для отдельно взятых координат, импульсов и т. д. Флуктуации вакуума тоже вносят вклад в неопределенность величин. Можно думать, что и «мировые постоянные», как, скажем, скорость света, не являются абсолютно определенными.

что такое время, а знаем только, что есть некоторый общий порядок в процессах природы, который отражается в восходящей последовательности понятий, причем в природе, даже в одном месте в данной системе отсчета, и нет, по-видимому, совершенно точного времени как непрерывного параметра t, определенного с точностью до преобразования $t' = at + b$, тем более что само математическое понятие вещественной переменной изменяется и ему дают разные определения.

Можно попытаться выйти из положения, каждый раз беря понятие (термин) либо в смысле некоторой данной теории с экспериментальной интерпретацией ее результатов, либо в строго эмпирическом смысле. Первый подход является общепринятым, о нем мы говорили в самом начале, ссылаясь на И. Ньютона. Но в большинстве случаев известно, что в природе нет точного прообраза принятого в теории понятия, а когда это не известно, то представление о таком прообразе является гипотезой, и притом, весьма вероятно, неточной. Второй подход, когда понятие берется в строго эмпирическом смысле, требует введения поправок, связанных с неточностью эксперимента, и исключает экстраполяцию; так как, например, никто не откладывал твердых масштабов от Земли до Марса, расстояние между ними определяется другой экспериментальной процедурой и потому представляет собой в строго эмпирическом смысле другое понятие. Связь разных экспериментальных процедур устанавливается на основе теории; так, определяя размеры удаленных предметов, мы пользуемся законами геометрии.

В том, что не вполне точные отношения принимаются в теории за точные, есть, конечно, известный элемент условности: иначе мы не умеем или нам неудобно строить наши теории. Точно так же в экстраполяции понятий есть своя условность, присущая всякой гипотезе, поскольку принятие гипотезы является известным соглашением. Однако конвенционализм имеет в виду не эти элементы условности. Он утверждает, что независимо от неизбежной неточности опыта первоначальные, связанные с опытом определения физических понятий основываются не только на опыте, но и на соглашениях. Между тем, как мы могли убедиться, основные понятия физики отражают факты, а если вводятся отчасти гипотетически, как одновременность по А. Эйнштейну, то они доступны сопоставлению с фактами, и соответствуют они фактам или нет, зависит не от соглашений, а от природы. Поэтому конвенционализм ошибается, и вопрос может состоять только в том, чтобы выяснить корни его ошибок и правильно представить то, что он толкует неверно или неточно.

Рассуждая о массе, А. Пуанкаре перечисляет определения вроде того, что масса есть отношение силы к ускорению или произведение плотности на объем, и спрашивает: а что такое тогда сила или плотность? В конце концов он приходит к выводу, что «массы суть коэффициенты, которые удобно ввести в вычисления» [2, с. 71]. Однако, как мы видели, «отношение тел по массе» в формулах (4), (5) констатируется опытом и выражается в понятии массы с точностью до выбора единицы измерения, как масса и фигурирует в уравнениях физики, так что никакие удобства тут ни при чем, не считая удобства теорий вообще. Дело просто в том, что А. Пуанкаре, так же как, по-видимому, никто другой в его время, не догадался вывести понятие массы из констатируемого в опыте постоянства отношения ускорений, как это сделано в § 1 [18]. Иначе А. Пуанкаре, пожалуй, сказал бы, что массы суть коэффициенты, которые вводятся на основании обнаруживаемого в опыте отношения ускорений.

Таков первый, самый простой источник ошибок конвенционализма: *не умея найти заключенное в фактах основание однозначного определения того или иного понятия, объявляют его продуктом соглашения или стремления к удобству вычислений.*

Другой источник ошибок конвенционализма заключается в следующем соображении. Для того чтобы закон имел смысл, нужно сначала определить входящие в него величины, и, так как такое определение должно предшествовать формулировке закона, оно неизбежно основывается не на законе, а на соглашении. Однако мы убедились, что в действительности дело обстоит иначе: в самих определениях величин уже выражаются некоторые законы природы, так что эти определения вовсе не основаны на соглашениях. Понятно, что если я напишу, например, закон Ньютона в виде $f = ma$, то нужно определить, что такое f, m, a, так как иначе написанное не имеет никакого смысла, кроме формального. Возникающие затруднения с независимыми определениями массы (m) и силы (f) преодолевают ссылкой на неизбежность соглашения об определениях. Однако мы убедились, что, беря закон Ньютона в том виде, в каком он может быть установлен опытом и без каких бы то ни было m и f, мы придем к их однозначному определению.

Противопоставление определений и законов ошибочно; они неотделимы друг от друга: закон дает основание определению, последнее же позволяет дать закону новое выражение [19]. Это не значит, что нельзя или логически неверно вводить конвенциональные определения; мы только обращаем внимание на то, что на самом деле понятия физики определяются иначе — не конвенционально. Когда же они вводились отчасти условно, то потом выяснялось их безусловное основание, как это было, например, в случае температуры, величина которой определялась поначалу достаточно условно, но

[18] Это можно сделать и другими способами, один из них приведен в [9, § 34–44].

[19] Обращают еще внимание на то, что если какая-то величина входит в два закона, то определять ее можно на основании любого из них по соглашению. Но дело в том, что независимо от наших соглашений эти определения оказываются эквивалентными, поскольку оба закона верны. Если же обнаруживается неэквивалентность, то, значит, имеем две разные, хотя и близкие, величины. Примером может служить вопрос об эквивалентности инертной и гравитационной массы.

потом получила основание и уточнение в понятии абсолютной температуры. Поэтому аргументы конвенционализма касаются не столько физики, как выдвигаемых им схем, которые смешиваются с реальной физикой.

Согласно распространенной точке зрения, физическая величина — это то, что измеряется, причем по наивному взгляду как будто уже известно, что нужно измерить, и вопрос состоит только в том, чтобы указать способ измерения. Против этого взгляда выдвигается точка зрения, что само понятие о данной физической величине определяется указанием способа измерения. А так как этот способ даем мы, то тем самым понятие о физической величине основано на соглашениях, касающихся ее измерения. Этот взгляд и является основным для конвенционализма.

Между тем дело обстоит иначе. Конечно, верно, что величина — это то, что измеряется, но она — не только это; она характеризует определенные отношения в некотором классе объектов, и измерение состоит в фиксации этого отношения между тем объектом, который принят за масштаб, и тем, который измеряется. Понятие о данной физической величине не определяется способом измерения, а, наоборот, возможные способы измерения определяются понятием о данной физической величине. Мы можем, в частности, сослаться на выводы § 1. Для того чтобы получить понятие о длине, нужно было откладывать одни предметы на других и обнаружить общие имеющиеся здесь отношения, которые только и позволяют измерять длину разными масштабами, и, кстати, в геометрии первичным понятием является не длина, а отношение отрезков. Точно так же сначала было исследовано взаимодействие заряженных тел, и отсюда появилось количественное понятие электрического заряда и способы его измерения. Аналогичное можно сказать о массе и других величинах. Конвенционализм, следовательно, искажает действительную связь понятий, когда измерение физической величины представляет как ее определение.

Здесь обнаруживается еще один источник ошибок конвенционализма — недостаточное внимание к действительным фактам или неверное их толкование. В конечном счете это и составляет главное основание конвенционализма. Может быть, наиболее ясно оно выражено у Р. Карнапа. Говоря вообще о количественных понятиях, он противопоставляет их качественным понятиям в том смысле, что качественные понятия даются самой природой, мы находим их в природе, как например цвета, а количественные понятия не являются частью природы — «именно мы вводим их» [3, с. 158]. Понятно, что это уже дает основание к тому, чтобы считать количественные понятия условными.

Однако мы несомненно находим в природе простейшие количественные отношения, как «равно», «больше» и «меньше». Более того, как слово «красный» обозначает свойство вещей, похожих по цвету на кровь, так и числа — два, пять и т. п. — обозначают свойство совокупностей предметов, общее у совокупностей, предметы которых можно сопоставить по одному, и различное у тех, для которых это сделать нельзя. В процессе счета предметов люди открывали, фиксировали определенные отношения и обозначали их словами; например: «у меня столько стрел, сколько пальцев на руке»; и появляется число «пять» под названием «рука». Аналогично, скажем, понятие о цвете появилось из сравнения предметов, например «черный» обозначается в некоторых примитивных языках: «такой, как ворон». Понятие о дробях появилось из деления на части, например, порций зерна и их измерения.

Словом, простейшие количественные понятия были даны природой человеку в его практической деятельности совершенно подобно таким качественным понятиям, как твердый, гибкий и т. п. Как для того, чтобы найти в природе числа, нужно было сравнивать совокупности вещей, так и для того, чтобы найти свойство гибкости, нужно было изгибать, скажем, ветки. Совершенно также дальнейшие количественные понятия, как длина, масса и т. д., даются природой, а если вводятся отчасти гипотетически или условно, то укрепляются в науке только те, которые соответствуют природе. В общем утверждение Карнапа просто противоречит бесспорным фактам, так что, исходя из такого рода утверждений, можно прийти не только к конвенционализму, но и к чему угодно. Конечно, природа не дает нам ни сколь угодно больших чисел, ни дробей со сколь угодно большими знаменателями, ни тем более иррациональных чисел, но все это и не нужно для выражения количественных понятий в их эмпирическом смысле.

Когда не учитывают, как фактически появились те или иные понятия, их могут рассматривать так, будто они вводятся нами и как бы заранее известны и только прилагаются к описанию опыта, тогда как в действительности они возникли как его отражение. Теперь, когда мы уже имеем понятие о числах, дело может представляться так, что числа даны заранее, а при измерении мы относим числа отдельным результатам измерения согласно принятому соглашению, так что величины «не даются природой», но «именно мы вводим их». Между тем само понятие числа вырабатывалось в сравнении предметов и в последующей практике измерений, так же как и дальше обнаруживаемые в опыте, ни от каких соглашений не зависящие отношения давали основание понятиям о тех или иных физических величинах.

С теоретико-познавательной точки зрения основание конвенционализма заключается в том, что познание как отражение действительности смешивается с описанием или истолкованием. Познание включает сам процесс образования понятий, тогда как описание и истолкование подразумевают, что понятия уже имеются и только применяются в качестве средства описания и истолкования. А. Пуанкаре писал, что понятие о геометрических телах «извлечено нами из недр нашего духа, и опыт представляет только повод, побуждающий нас его использовать. Предмет геометрии составляет изучение лишь частной „группы“ перемещений, но общее понятие группы существует раньше в нашем уме, по крайней мере в возможности. Оно присуще нам... как форма нашей способности суждений» [2, с. 53]. Естественно думать, что понятия, присущие нам как форма нашего разума, могут прилагаться к описанию и истолкованию опыта по соглашению, но насколько они присущи нашему разуму — это как раз и сомнительно.

Конечно, в науке понятия нередко вводятся для описания опыта или для познания, но укрепляются в ней те, которые отражают нечто общее в природе; понятие как бы примеривается к ней, и подойдет ли оно, зависит от природы, а не от наших соглашений. Конвенционализм же уподобляется портному, который думает, что годится костюм или нет — это дело соглашения. Когда понятие вводится гипотетически, вопрос фактически ставится так: существует ли в природе то, что соответствует этому понятию? Понятно, что ответ, который дает природа, не зависит ни от каких соглашений. Об этом мы говорили в § 2 в связи с определением одновременности и только повторяем в общем виде то, что было там сказано.

§ 4. *Конвенциональные и объективные определения*

Рассмотрим вопрос об определении понятий в представлении конвенционализма более подробно, чем это было сделано в предыдущем параграфе.

Каждая физическая величина относится к некоторому классу объектов и представляет собой их характеристику через некоторые их отношения друг к другу, как например длина относится к протяженным телам и определяется их отношениями, устанавливаемыми прежде всего прикладыванием одних тел к другим. Существование физической величины означает известное постоянство в отношениях объектов, как в случае массы и силы — постоянство отношений ускорений, а в случае длины — независимость отношения длин от применяемых масштабов. Такое постоянство отношений представляет собой закон природы, который и находит выражение в понятии о данной величине.

Соответственно мы представляем себе некоторые объекты A с их отношениями R, что образует «область (A, R)» — то, что называют областью явлений, хотя о телах с их отношениями, определяющими длину, так не говорят. Открывая постоянство в отношениях R, мы выражаем его в понятии о соответствующей величине. Тем самым определение этого понятия касается самой области (A, R) и основано на обнаруживаемом в ней законе постоянства отношений, а поэтому такое определенно можно назвать объективным.

Теперь мы определим понятие, указав некоторую процедуру, как например измерение данным масштабом. Это означает, что берется некоторый объект M и устанавливается некоторое отношение S к нему объектов A, которое и выражается в понятии или, другими словами, обозначается соответствующими терминами, как мы обозначаем числами показания прибора, служащего объектом M. Полученное таким путем понятие будет относиться не к самой области (A, R), а к другой — к области (A, S, M), образуемой объектами A в их отношении S к объекту M. Поскольку такое понятие определяется данной процедурой или операцией, его можно назвать операциональным [20], а поскольку имеется наш выбор объекта M и отношения S, его можно назвать также конвенциональным (конечно, такое определение тоже объективно, поскольку объект M и отношение S объективно существуют, так что нашим терминам не следует придавать лишнего значения).

Сопоставление двух указанных способов определения понятий делает очевидным их существенное различие; главное, что они относятся к разным областям: (A, R) и (A, S, M), так что конвенциональное понятие может еще очень мало говорить о самой области (A, R) независимо от выбора объекта M и отношения S. Только беря разные M и S (или только разные M, когда отношение S определено в самой области (A, R), как например при откладывании данного масштаба M), можно выявить отношения, существующие в области (A, R), как инварианты относительно выбора M и S. Тогда в полученном результате не будет ничего зависящего от нашего выбора и соглашений. Если же оставаться с данными M и S, то нельзя отличить, что в получаемых результатах обусловлено ими, а что свойствами и отношениями самих объектов A, даже если посредством данных M и S можно установить все отношения R. Проще говоря, пользуясь данным прибором, нельзя отличить, что принадлежит наблюдаемому объекту, а что обусловлено прибором.

Выясненное логическое различие конвенциональных и объективных определений неразрывно связано с их громадной практической разницей. Если выбранный объект M — масштаб, прибор и т. п. — утрачен или им невозможно воспользоваться в данных условиях, то мы будем не в состоянии применить связанное с ним понятие и опирающиеся на него законы к пониманию наблюдаемых явлений. Напротив, имея объективные понятия и общие процедуры установления отношений, на которых эти понятия основаны, мы сможем применить их в любом случае. Как наука направлена на открытие общего, не зависящего от выбора масштабов, приборов и систем отсчета, так практика нуждается в знании этого общего, чтобы имелась возможность воспользоваться им в любых условиях.

Уже два указанных взаимосвязанных обстоятельства — невозможность по конвенциональному понятию достаточно судить о самой исследуемой области явлений и практическое неудобство, если не сказать негодность, такого понятия — обусловливают то, что на самом деле эти понятия не применяются, а если и вводятся, то не укрепляются в науке. Но к тому есть еще другие веские причины.

Пытаясь дать операциональное определение физической величины путем указания конкретной измерительной процедуры, хотят избавиться от того,

[20] Операциональное определение было очень четко охарактеризовано Л. И. Мандельштамом в его лекциях: предъявляем определенный предмет, указываем определенный процесс и этим предметом и процессом определяем понятие [10, с. 177–180].

чтобы говорить об отношениях в классе объектов, и от той «неприятной» диалектики, о которой говорилось выше, в § 3. Данная измерительная операция представляется чем-то ясным и определенным: длина — это число раз, какое укладывается данный стержень, или, как было сказано о времени в одном учебнике физики, «время — это число качаний определенного маятника».

Однако ясность и простота таких определений только кажущаяся. Это становится очевидным, едва мы спросим, например: что такое время в одну пятую качания маятника? Если мы делим целое качание на части произвольно, например по отклонению маятника от вертикали, то это приведет к тому, что совершенно одинаковым процессам будут приписываться разные промежутки «времени» в зависимости от того, в каком положении находится маятник в начале процесса. Такое определение «времени», конечно, не содержит никакого логического противоречия; мы так его определили, но оно нелепо, так как вносит в понятие времени нечто явно не относящееся к делу: зависимость продолжительности процесса от положения маятника в его начальный момент. Если же мы будем делить целое качание на части, равные по времени, то для определения этих частей придется воспользоваться другими процессами и сравнивать их с качанием нашего маятника, т. е. придется обратиться к тому самому сравнению процессов, на котором в действительности основывается понятие времени. Таким образом, определение времени посредством данного маятника встречается с дилеммой: либо оно должно быть нелепым, либо само по себе не может служить определением времени в дробных долях целого качания.

Но этого еще мало. Очень малые промежутки времени вообще невозможно отметить посредством данного маятника, как ни градуировать одно его колебание, так что в смысле такого определения времени непонятно, что значит, например, частота электромагнитных колебаний 10^{16} периодов за одно качание маятника. Казалось бы, это значит, что столько колебаний происходит за одно качание. Но если взять колебания более высокой частоты и прерывать их, то их может за одно качание произойти столько же. Вопрос состоит в том, что значит равенство промежутков времени отдельных колебаний. Исходя из определения по качаниям маятника, ответить на это невозможно. Со временами течения ядерных реакций дело будет обстоять еще хуже.

В общем рассмотренное определение не годится, и его можно было бы считать просто шуткой, если бы оно не было высказано известным физиком в учебнике, изданном в свое время под редакцией еще более известного физика. Студент должен верить авторитетному учебнику, и он может в самом деле повторить, что вопрос о времени решается очень просто в словах: «это число качаний определенного маятника».

Вращение Земли является, конечно, более подходящим средством определения времени, так как угловое деление полного оборота с очень большой точностью позволяет приписать одинаковым процессам равные промежутки времени по вращению Земли. Однако и здесь возникает трудность с определением понятия о чрезвычайно малых промежутках времени, когда соответствующий поворот Земли оказывается за пределами возможности фактически отметить его.

Аналогичные трудности возникают, если определять длину как то число раз, какое укладывается данный стержень. Если делить стержень, нанося произвольную шкалу, то «длина» короткого предмета будет зависеть от того места, от которого на нем откладывается наш стержень. Этого можно избежать, требуя, чтобы стержень всегда прикладывался определенным своим концом к концу предмета. Но и при этом условии придется еще указать закон сложения «длин», дающий «длину» тела, составленного из двух, «длины» которых известны. Для этого придется откладывать на нашем стержне разные короткие стержни и отмечать получающиеся результаты, т. е. придется заняться тем сравнением стержней, которое ведет к обычному понятию длины; оно и выразится в законе сложения [21]. То же придется сделать, если нанести на данном стержне равномерную шкалу, чтобы закон сложения длин вошел в ее определение.

Метр представлен стержнем, хранящимся в Парижской палате мер и весов; на него можно указать пальцем. Но спросим: что такое сантиметр, покажите мне сантиметр? Придется показать предмет, укладывающийся на метровом стержне 100 раз, т. е. прибегнуть к процедуре, определяющей понятие длины независимо от выбора масштаба. А так как определить абсолютно точно одну сотую невозможно, то при более точных сравнениях сантиметр может получиться несколько другим и вы будете показывать другой предмет.

Следовательно, определение сантиметра по метру, состоящее в предъявлении конкретного предмета, невозможно. Тем более посредством данного стержня нельзя определить, что значит очень малая длина, так как фактически шкала, наносимая на стержень, не может быть очень густой: штрихи будут сливаться. Кроме того, откладывать данный стержень можно далеко не везде, либо потому, что он не влезет, либо по другим причинам, как нельзя откладывать стержень на орбите Земли и тем более на галактической орбите Солнца. Поэтому очень малые и очень большие (в сравнении

[21] Пусть x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ — длина отрезка стержня от одного из его концов и $y = f(x)$ — соответствующее число нанесенной на нем шкалы; $x = g(y)$ — обратная функция. Пусть L_1, L_2 — два других стержня с «длинами» $n_1 + y_1, n_2 + y_2$, где n_1, n_2 — целые числа. Длина составного стержня $L_1 + L_2$ будет $l = n_1 + n_2 + g(y_1) + g(y_2) = n_1 + n_2 + m + x$, где m — целая, а x — дробная части $g(y_1) + g(y_2)$. «Длина» стержня $L_1 + L_2$ будет $l' = n_1 + n_2 + m + f(x)$, так что если $m = 0$, то $l' = n_1 + n_2 = f(g(y_1) + g(y_2))$, а если $m = 1$, то $l' = n_1 + n_2 + 1 + f(g(y_1) + g(y_2) - 1)$. Это и есть закон сложения длин. Он выглядит сложно, и это тем более выявляет, что в основе понятия длины лежит закон, а не соглашение.

с данным стержнем) длины придется определять другими процедурами и связывать их с определением длины посредством данного стержня.

В объективном определении, не привязанном ни к какому специально выбранному процессу, время или, точнее, промежуток времени есть величина, имеющая равные значения для одинаковых или «тех же самых» процессов. Время, измеряемое целыми качаниями маятника, вполне подходит под это определение, а деление целого качания определится более скоротечными процессами. Понятие частоты сколь угодно быстрых колебаний также будет определено, поскольку мы имеем основание считать одно колебание таким же процессом, как и другие. Конечно, понятие «одинаковых» или «тех же самых» процессов несколько неопределенно, так как никакие процессы не бывают совершенно одинаковыми хотя бы потому, что абсолютно все условия не воспроизводятся абсолютно точно: иначе вообще процессы невозможно различить. Но та же неопределенность содержится в понятиях «качание определенного маятника» или «данный стержень», так как при всех условиях и качания и стержень все же подвержены внешним влияниям и флуктуациям, не говоря уже о квантовых соотношениях неопределенности; словом, избежать неприятной диалектики и прийти к полной формальной точности определений невозможно.

В общем, если вдуматься, то становится очевидным, что простота и ясность операциональных определений только кажущаяся, что они не только ничем не проще тех, которые мы назвали объективными, но, собственно, и не могут обойтись без них, как только дело заходит об измерении величин, малых в сравнении с данным масштабом. Точно так же операциональные определения не избавляют от экстраполяции и известной неопределенности, а только отодвигают их. Но обойтись без экстраполяции в физике невозможно, а некоторая неопределенность в конечном счете лежит в самой природе вещей. Все это вместе с указанными выше обстоятельствами и приводит к тому, что операциональными определениями в чистом виде не пользуются вовсе[22)]. Поэтому, выдвигая такие определения, подменяют физику воображаемой схемой, разваливающейся как только от рассуждений об определениях обращаются к реальным вопросам физики.

Тем не менее произвольные определения, вообще гооря, позволяют в их терминах описывать происходящие явления. Для описания исторических событий и эпох можно пользоваться произвольной шкалой времени, как например в истории Египта периоды определяют по династиям. Но в отличие от описательной истории или зоологии физика занимается не описанием явлений, а открытием в них того общего, что позволяет отличать возможное от невозможного и предсказывать. Развитая наука трактует не

[22)] В астрономии время определяют по вращению Земли, но, конечно, всякий современный астроном понимает, что это определение нельзя считать окончательным, так как даже обороты Земли вокруг Солнца не являются абсолютно одинаковыми процессами.

данное, а возможное. Для этого нужно знание законов и соответственно нужны понятия, основанные не на соглашениях, а на объективных законах.

§ 5. *Заблуждения, связанные с конвенциональными определениями*

Когда понятие определяется посредством данных M и S, его относят к самим объектам A, так что величина, измеренная в определенном масштабе, понимается как свойство объекта. Такой ход мысли представляется естественным, раз масштаб (вообще объект M и отношение S) фиксирован. Люди, видя движения небесных тел, относят их к самим телам, не думая о том, что это — движения по отношению к Земле, которая играет здесь роль объекта M.

Такое смешение отношений со свойствами тоже находим среди ошибок конвенционализма. Мы уже приводили рассуждение Карнапа по поводу определения длины как результата измерения посредством данного стержня независимо от его нагревания и воздействия каких-либо сил. При этом Р. Карнап говорит, что появится странная картина мира, в которой галактики будут сжиматься, как только пламя подносится к стержню, хотя это замечание явно несерьезно, поскольку с самими галактиками ничего не происходит, кроме изменения их отношения к нагретому стержню.

Но со смешением свойств и отношений связано, можно сказать, самое существенное и тонкое соображение конвенционализма в вопросе определения физических величин. Утверждается, что всякие их определения, не исключая тех, которые мы назвали объективными, содержат соглашения. Так, измеряя длину любым данным масштабом, скажем, стержнем, мы считаем, что масштаб сохраняет свою длину или, другими словами, остается равным самому себе; или, как говорят, масштаб считается «самоконгруэнтным». А раз мы что-то считаем, то значит имеет место конвенция и потому определение длины неизбежно содержит конвенциональный элемент: конвенционально принятую «самоконгруэнтность» масштаба.

Однако это соображение при кажущейся убедительности неверно. Если понятие длины определяется конвенционально — указанием измерительной процедуры, посредством данного масштаба, то соглашение, заключающееся в выборе масштаба, уже имеет место: масштабу приписана длина 1, и слова о сохранении масштабом его длины или о его «самоконгруэнтности» только иначе выражают принятое соглашение. В случае же объективного определения длины, не связанного ни с каким выбором масштаба, никаких таких соглашений нет, именно потому, что масштаб может быть любым. Откладывать данный масштаб и отсчитывать число раз, какое он укладывается на другом предмете, может и автомат, так что какие бы то ни было соглашения несомненно отсутствуют. Сравниваемые результаты, получающиеся при откладывании разных масштабов на разных предметах (формула (1)), тоже не содержат никаких соглашений.

Говоря о «самоконгруэнтности», или сохранении самим по себе масштабом его длины, понимают длину как свойство масштаба, присущее ему или приписанное по конвенции — безразлично. Но длина определяется отношениями предметов, так же как равенство их является отношением одного предмета к другому, равенство же стержня самому себе, или его «самоконгруэнтность», не имеет для него самого никакого смысла (кроме того, что всякое тело, взятое в каждый данный момент, называется конгруэнтным самому себе). Первобытные люди сначала откладывали одни предметы на других, а потом у них появилось первое понятие о длине, и они могли начать говорить, что при переносе палки она не меняет свою длину. Но, говоря о неизменности длины палки, выражают сохранение соответствующего ее отношения к множеству других предметов и, в частности, к своему собственному телу.

Мы тоже можем говорить о данном стержне, что ему приписана постоянная длина 1 метр, так же как можно говорить и об аршинном стержне. Но за этим стоит постоянство отношений длин, измеряемых теми или иными стержнями. Сравнивать же данный стержень в одном положении с тем же стержнем в другом положении невозможно, так как на прежнем месте его уже нет. Поэтому понятие о «самоконгруэнтности» масштаба бессодержательно и не может иметь никакого другого смысла иначе, как служить вычурным выражением того, что откладывается тот же самый масштаб.

Конечно, в понятии «того же самого», или «данного», масштаба есть известная неопределенность и условность, так как масштаб не остается абсолютно тем же самым уже хотя бы потому, что сначала он уложен в одном месте, потом — в другом. Но это не изменяет вывода о бессмысленности «самоконгруэнтности». Насколько масштаб можно считать тем же самым, судят, сравнивая его с другими масштабами, как судят о тепловом расширении, упругих деформациях и пр. Для того чтобы стержень возможно более точно оставался тем же самым, стараются устранить всякие влияния на него нагревания, действия сил и пр., так же как заботятся о том, чтобы в стержне не происходили внутренние изменения, например химические реакции и т. п.

Давно замечено и сказано, что если бы все размеры в мире изменились в одно и то же число раз, то ничего бы не изменилось, так что разговор о таком изменении лишен всякого реального смысла. Это замечание делает тем более ясным бессмысленность понятия «самоконгруэнтности»: при изменении всех размеров масштабы тоже изменятся и не будут «самоконгруэнтными» [23].

[23] В евклидовой геометрии отношения отрезков инвариантны относительно подобных преобразований, так что при таком преобразовании всех фигур (тел) все отношения сохраняются. В неевклидовой геометрии нет подобных преобразований.

Рассуждая о понятии силы, А. Пуанкаре говорит, что ее определение «должно научить нас измерению силы» [2, с. 68], для чего нужно прежде всего определить равенство сил. Но об определении равенства сил по равенству ускорений, вызываемых силами, приложенными к одной и той же массе, А. Пуанкаре пишет, что оно «совершенно призрачно», и обосновывает это следующим соображением: «Силу, приложенную к данному телу, нельзя отцепить от него и прицепить к другому телу вроде того, как отцепляют локомотив, чтобы сцепить его с другим поездом. Поэтому и нельзя знать, какое ускорение данная сила, приложенная к данному телу, сообщила бы другому телу, если бы была к нему приложена» [2].

Однако это остроумное замечание не доказывает призрачности определения равенства сил. На самом деле мы прицепляем к телам не силы, а грузы, пружины и другие источники ускорений и из наблюдаемых результатов получаем количественное понятие силы и, в частности, понятие о равенстве сил. Действие производят не силы, а тела и поля, а сила — относительная мера этого действия. Совершенно так же на предметы налагаются не цвета, а краски, цвет же — это характеристика красок. Мы сравниваем краски и говорим, что они одного цвета (или разных цветов), так же как, сравнивая результаты действий, мы говорим о равенстве сил. Точно так же, определяя равенство длин, мы сравниваем тела, а не длины; длину нельзя перенести, как нельзя отцепить силу: переносится не длина, а масштаб. Но когда считают, что в теле как бы сидит сила или длина, которую мы переносим вместе с телом, то и возникает соображение, что постоянная длина приписывается самому по себе масштабу по конвенции помимо сравнения его с другими масштабами.

Того же характера ошибка заключается в приведенном во Введении утверждении Пуанкаре, что понятие о равенстве промежутков времени само по себе не имеет смысла и приобретает его только условно. Дело в том, что сравниваются не промежутки времени, а процессы. Уже понятие промежутка времени само по себе не имеет смысла, так как промежутки времени различаются не сами собою, а происходящими процессами. Понятие о течении времени выражает течения процессов; субъективное ощущение времени также основано на этом. Без повторяемости процессов существовало бы только топологическое время, понятие же о величине промежутков времени, или, что равносильно, о равномерно текущем времени, основано на повторяемости процессов и констатируемом в опыте постоянстве их отношений — сколько раз одни процессы «укладываются» на других. Если бы, воспроизводя со всей возможной точностью два процесса, мы получали изменяющиеся их отношения, то выбор любого из них давал бы разные меры времени, оказывающиеся тем самым условными. Однако фактом является то, что устойчивые отношения существуют. Конечно, они констатируются лишь с некоторой точностью, и процессы, считавшиеся одинаковыми, оказываются все же несколько различными, как, скажем, обороты Земли вокруг оси. Но ведь и промежутки времени фиксируются лишь с некоторой точностью, так как начало и конец промежутка должны быть отмечены какими-то событиями, а абсолютно мгновенных событий не бывает. С той же в общем точностью устанавливается сравнение процессов и тем самым промежутков времени. Поэтому понятие о самих промежутках времени столь же условно или столь же безусловно, как и понятие о их равенстве.

Сначала принимают введенные из опыта абстракции, как промежутки времени, длины, массы, силы, а потом хотят их сравнивать, и так как сравнивать в опыте можно не абстракции, а вещи и процессы, то говорят, что мы условно сравниваем абстракции по вещам и процессам. Это обращение порядка, когда принятая абстракция считается как бы данной до опыта или независимо от него, очень характерно для конвенционализма и совершенно естественно ведет к выводу об условности понятий, раз они уже приняты и мы только относим их к фактам опыта. То же происходит, когда говорят о конвенции сохранения масштабом длины, или его «самоконгруэнтности», как будто длина и конгруэнтность имеют смысл помимо сравнения тел.

В доказательство того, что соглашение о постоянстве длины масштаба все же имеет место, приводится следующее соображение. Введем в пространстве координаты x_i $(i = 1, 2, 3)$ и с их помощью определим каким-либо способом расстояния между любыми двумя точками (x_i) и (x'_i), например как $\sum\limits_{i=1}^{3} |x_i - x'_i|$; соответственно определятся и «длины» [24]. Тогда перемещаемый твердый масштаб будет, вообще говоря, изменять свою «длину».

Однако это соображение ничего не доказывает, так как сначала определяют длину, а потом говорят о масштабах, тогда как в обычном определении длины само понятие о ней выводится из откладывания масштабов. Условные определения длины основываются на введении координат, фиксации направлений и т. п. Это значит, что задается некоторый объект M и некоторое отношение S, как, в частности, база системы координат и то отношение к ней материальных точек, которое определяет их координаты, т. е. дается конвенциональное определение длины. Такие определения были рассмотрены выше в общем виде. Это определение относится не к области (A, R), образуемой самими телами с их отношениями друг к другу, а к области (A, S, M). Ясно, что, выбирая разные M и S, можно определять разные условные «длины» и мало ли еще какие понятия, но длина в обычном смысле относится к самой области (A, R) и определяется без всяких конвенций имеющимися в ней и соответственно устанавливаемыми в опыте отношениями.

---

[24] Обычно говорят о задании метрики линейным элементом ds: $ds^2 = \sum g_{ik} dx_i dx_k$. Но это вовсе не обязательно; можно вообще положить $ds = f(x_i, dx_i)$ с условиями, что: 1) $f(x_i, dx_i) \geqslant 0$; 2) $f(x_i, dx_i) = 0$, тогда и только тогда, когда все $dx_i = 0$; 3) при всяком a верно $f(x_i, a dx_i) = |a| f(x_i, dx_i)$. Длина кривой определяется как взятый вдоль нее интеграл от ds.

Кроме того, можно заметить, что условная длина определяется по отношению к данной системе координат, так что и здесь равенство длин, или конгруэнтность, обозначает отношение тела не к самому себе, а к некоторому объекту M, откуда еще раз становится ясной бессодержательность термина «самоконгруэнтность» [25)].

Философ А. Грюнбаум открывает свою книгу о философских проблемах пространства и времени вопросом: «Какова гарантия, что твердые тела остаются твердыми, или самоконгруэнтными, при перемещении в пространстве, свободном от неоднородных, тепловых, упругих, электромагнитных и других „деформирующих“ и „искажающих“ воздействий?», и дает ответ: «самоконгруэнтность... устанавливается конвенцией» [4, с. 13, 21]. Вопрос и ответ бессмысленны, ибо конгруэнтность — не свойство, а отношение, и термин «самоконгруэнтно» не имеет никакого смысла (кроме того, что тело в каждый момент называется конгруэнтным самому себе). Если же сравнивается тело в одном и в другом положении, то прежнее положение должно быть чем-то фиксировано, для чего нужны другие тела. Правомерно спросить: остаются ли конгруэнтные тела конгруэнтными при перемещении их в пространстве? Для решения же такого вопроса не нужно ни гарантий, ни конвенций, ни философии, а нужен эксперимент, коль скоро отношение конгруэнтности определено в эмпирическом смысле, так что конвенция может касаться только того, какое отношение мы называем конгруэнтностью. Обсуждение плохо поставленных и бессмысленных вопросов — характерное занятие многих философов.

Вся книга Грюнбаума основана на плохой постановке обсуждаемых им проблем. Каждый человек имеет наглядное представление о количественных пространственных отношениях, иначе говоря, о метрике, основанное на наблюдаемых отношениях материальных предметов. Это представление было развито и уточнено в практике измерений и оформилось в стройную систему евклидовой геометрии. В ней пространство «наделено метрикой» — определено отношение отрезков. Но можно отвлечься от метрики и удержать в понятии о пространстве, скажем, одну его топологию. Тогда в таком пространстве нет метрики и ее можно вводить по соглашению. Именно на такого рода мыслительной терминологической операции А. Грюнбаум основывает свое утверждение о конвенциональном характере метрики физического пространства и вообще весь свой конвенционализм. Однако он упускает из вида тот факт, что пространство наделено метрикой в том смысле, что имеются определенные, не зависящие

[25)] Можно еще «измерять длины» произвольным масштабом вроде стержня Карнапа или, еще лучше, произвольно растягиваемой резинкой, но тогда, независимо от того, назовем мы такой масштаб «самоконгруэнтным» или нет, не получится вообще никаких устойчивых отношений, никаких «длин», а только числа, случайно относимые предметам, смотря по тому, что происходило с нашим масштабом, когда мы его откладывали.

от соглашений отношения между телами, а отвлекаемся мы от них или нет — действительно дело соглашения, но от этого отношения между телами не перестают существовать. Так, отвлекаясь в понятии о предмете от какого-либо его свойства, можно потом объявить, что признание этого свойства у предмета есть дело соглашения, так как в нашем понятии свойство было исключено. Отвлечемся, допустим, от умственных способностей человека, а потом объявим, что их можно приписать ему по соглашению.

В том же духе А. Грюнбаум обсуждает понятие одновременности. Вводятся термины: топологическая и метрическая одновременность, причем первый «означает отношение не быть связанным физической причинной (сигнальной) цепью» [4, с. 44]; второй — отношение, позволяющее синхронизировать часы в разных местах с условием, что метрически одновременные события должны быть топологически одновременными. Если принять, согласно теории относительности, что скорости сигналов не могут быть больше скорости света, то множество событий, топологически одновременных данному событию x, изобразится в четырехмерной картине областью, внешней для светового конуса K_x и обратного ему конуса. Ясно, что тут нет разбиения всех событий на множества событий, топологически одновременных друг другу; топологическая одновременность не транзитивна. Метрическая же одновременность должна определять такое разбиение: в каждом месте должно быть одно и только одно событие, одновременное данному. Ввести метрическую одновременность можно, очевидно, бесконечным числом разных способов и без связи с какой-либо системой отсчета. Отсюда ясно, что метрическая одновременность не определяется топологической. Столь очевидный вывод А. Грюнбаум обсуждает на многих страницах, чтобы доказать, будто из него следует конвенциональный характер определения метрической одновременности по А. Эйнштейну [4, с. 44–46, 436–465]. Это можно сравнить с тем, как если бы из того, что принадлежность человека к категории детей, юношей или взрослых не определяет его возраста, мы заключили бы, что определение возраста конвенционально. Отвлеклись от того, чем определяется возраст, и сделали его определение делом соглашения.

Вопрос о метрической одновременности, решенный определением А. Эйнштейна, состоит, как было сказано в § 2, в следующем: существует ли в природе такое отношение между событиями в их связи с любой данной системой отсчета, которое обладало бы свойствами абсолютной одновременности, т. е. удовлетворяло бы сформулированным в § 2 требованиям? Вопрос стоит о фактах природы, а не о соглашениях. На это может последовать возражение, что наши требования к одновременности введены по соглашению. Однако данное возражение подобно тому, как если бы на описание льва и поиски такого зверя возразили: «это по соглашению, потому что можно описать еще много других зверей и назвать их львами». Так и А. Грюнбаум долго объясняет, что можно называть одновременностью разные отношения, в частности, без требования их транзитивности [4, с. 446, 452]. Но как охотник ищет зверя, подпадающего под описание именно льва, а не осла, так и А. Эйнштейн искал одновременность, подпадающую под характеристику абсолютной одновременности. Мы доказали в § 2, что другого отношения, дающего синхронизацию часов и определяемого однократным обменом световыми сигналами одинаковым способом для всех мест и событий, не существует. Лев был найден, и можно даже доказать, что он есть единственный львообразный зверь (доказав единственность танкордности). Если вы не интересуетесь львами, то это ваше дело, но не говорите, что львы определены конвенционально, обосновывая такое суждение тем, что понятие зверя не определяет льва (как топологическая одновременность не определяет метрической). И остается только повторить слова, сказанные самим А. Грюнбаумом по поводу других философов, что их деятельность привела «некоторых ученых к прискорбному выводу, что от философов-профессионалов не приходится ждать внесения ясности в понятийный аппарат науки» [4, с. 446].

В дополнение заметим по поводу топологической одновременности, что она определяет группу Лоренца. Именно, как было доказано еще тридцать лет назад, всякое взаимное однозначное отображение четырехмерного пространства на себя, сохраняющее световые конусы или, что равносильно, внешние им области, оказывается преобразованием Лоренца с возможным добавлением подобных преобразований (гомотетий). На топологической одновременности в известном смысле основываются все понятия теории относительности и, стало быть, одновременность по А. Эйнштейну в частности [26]. Но А. Грюнбаум не осведомлен об этом, как, впрочем, и о многом другом, важном для его темы.

Книга Грюнбаума получила положительную рецензию И. А. Акчурина, который не только решительно солидаризуется с конвенционализмом, но даже выдвигает программу его внедрения в диалектический материализм. Однако обсуждение общефилософских вопросов не входит в нашу тему, и мы отметим только два примера конвенций, которые И. А. Акчурин считает «абсолютно необходимой предпосылкой рационального описания всех ... данных опыта ... Никакие механические эксперименты никогда не докажут, например, что твердый эталон длины остается неизменным (самоконгруэнтным) при любых перемещениях в пространстве, наоборот, любые мыслимые опыты всегда основываются как раз на такого рода предположениях» [12, с. 154]. Однако, как было показано выше, понятие «самоконгруэнтности» бессмысленно, а кроме того, можно заметить, что на предположениях основывается не опыт как таковой, а его описание, истолкование или объяснение, причем бессмысленные толкования довольно распространены, но они не относятся к науке.

[26] Упомянутая теорема о конусах доказана в [11]. Эта теорема и указанные ее общие следствия кратко излагались мной в ряде статей, напр., в [6].

Далее И. А. Акчурин пишет: «Самые совершенные физические приборы наших дней никогда не докажут вам, что свет распространяется из одной точки в другую с одинаковой скоростью как в одном, так и в противоположном направлении; более того, любой мыслимый современный физический эксперимент существенно основывается именно на этом предположении» [12]. Между тем равенство скоростей света во всех направлениях доказано (в пределах доступной точности) многими способами, хотя и не прямыми измерениями скоростей, например измерением длин волн монохроматических излучений; произведение длины волны на частоту дает скорость; причем равенство частот колебаний, испускаемых источником и доходящих до тех или иных точек, можно проверять по резонансу. В первом измерении скорости света, осуществленном О. К. Рёмером, она измерялась в одном направлении; она может быть измерена также другими способами.

Таким образом, приведенные суждения И. А. Акчурина несостоятельны, и так как другие его суждения выдержаны в том же духе, то его рецензия очень выпукло раскрывает неосновательность конвенционализма.

Конвенционалистские взгляды в связи с теорией относительности развернуто и настоятельно развиваются в пространной статье А. А. Тяпкина [13], главное место в ней занимает доказательство того, что можно изложить теорию в так называемых галилеевых координатах. Но как уже отметили его критики [14], это тривиально, так как любые явления можно описывать в любых пространственно-временных координатах и уравнения всякой теории можно написать в общековариантной форме, годной для любых координат. Поэтому рассмотрение А. А. Тяпкиным преобразований координат $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$ сводится к элементарному математическому упражнению и ничего, касающегося физики, доказать не может. Доказательство же наличия в физике соглашений сводится к той тривиальности, что координаты выбираются по соглашению. Таким образом, статья лишена смысла, не считая того, что ясно демонстрирует несостоятельность конвенционализма. Она демонстрирует вместе с тем чрезвычайные претензии, выраженные, в частности, в виде сожаления по поводу общего, несогласованного с конвенционализмом уровня понимания теории относительности [27]. При этом отдельным авторам приписываются ошибки, ошибочные суждения, которых (независимо от того, являются они ошибочными или не являются) у этих авторов просто нет, так что приписывание их производится, можно сказать, конвенционально. Но такой «конвенционализм» выходит за пределы физики и философии и носит другие названия.

[27] «Не только публикация в физической литературе 50-х годов ... попыток решения конкретного физического вопроса об измерении скорости света на основе философских соображений, но и факт отсутствия в последующей научной литературе опровержения критики правильных высказываний о конвенциональности одновременности весьма красноречиво характеризуют современный уровень понимания центрального момента построения теории относительности» [13, с. 624].

Замечание о послесловии к книге Пуанкаре «О науке»

Это послесловие чрезвычайно интересно и поучительно тем, как его авторы восхваляют конвенционализм Пуанкаре и с абсолютной убежденностью выражают соответствующие ошибочные мнения. Обратим внимание только на два-три пункта.

Авторы пишут: «Принципиально невозможно измерить скорость распространения света в одном каком-нибудь направлении. Измерению подлежит лишь усредненная скорость прохождения светом некоторой протяженности в двух противоположных направлениях. Потому предположение о равенстве двух противоположных по направлению скоростей света является только условным соглашением. Это обстоятельство и сейчас еще нередко упускают из вида при обсуждении возможной экспериментальной проверки отдельных положений теории относительности» [15, с. 546]. Соответственно авторами утверждается «условность одновременности, связанная с невозможностью измерений скорости света в одном направлении» [15, с. 556].

Однако мы доказали в § 2, что в разумно определенной одновременности нет ничего условного. И если авторы послесловия могли этого не сообразить, то в вопросе о скорости света ничего соображать не нужно, а достаточно обратить внимание на такие хорошо известные факты, как измерение скорости света в одном направлении астрономическим способом, примененным еще в XVII в. О. К. Рёмером, или по Допплер-эффекту и др.

Рассмотрим в общем виде способ измерения скорости света, аналогичный способу Рёмера.

Представим себе некоторый периодический процесс — часы A и другие часы B, расположенные в месте P, из которого мы можем видеть часы A. Сопоставим ход часов A, как он виден из P, с ходом часов B; ради простоты можно считать, что «полному обороту» часов A соответствует «полный оборот» часов B. Длительным наблюдением мы отмечаем постоянное соответствие: как на часах A видно «12 часов», так и на B «12 часов».

Перенесем часы B в другое место, так что расстояние их от часов A увеличится на некоторое r. Сопоставляя теперь часы B с часами A, заметим, что часы B «ушли вперед» на некоторое время t (12 часов по часам A наблюдается, когда на часах B уже $12 + t$). Следуя Рёмеру, мы истолковываем это расхождение тем, что теперь свету, чтобы дойти от A до B, нужно время на t большее; свет тратит это время на прохождение расстояния r. Отсюда скорость его распространения равна r/t.

Для проверки можно переносить часы B разными путями на другие расстояния, в частности не дальше, а ближе к A; можно переносить часы A, можно брать другие часы и т. д.

Во всех этих наблюдениях играет роль распространение света только в одном направлении: от часов A к часам B. Распространение его в противоположном направлении тут никак не участвует (свет от A может полностью поглощаться на месте часов B, и от них может не идти никакого света дальше смотрящего на них наблюдателя).

Таким образом, утверждение, будто «принципиально невозможно измерить скорость распространения света в одном каком-нибудь направлении», неверно.

Выдвигать такое утверждение тем более странно, что описанная процедура представляет собой только видоизменение того способа, который был применен О. К. Рёмером. Часами A было вращение спутника Юпитера, часами B — вращение Земли.

Возражение, которое могут выдвинуть, будет состоять в том, что в описанной процедуре часы переносятся с одного места на другое.

Но если принять это возражение, то утверждение о «принципиальной невозможности» сведется к тому, что «принципиально невозможно» измерить скорость света в одном направлении процедурой Физо или ее равносильным вариантом, т. е. так, когда свет посылается из данного фиксированного места до другого и, отраженный, возвращается обратно, причем ничего, кроме наблюдения в данном месте, не допускается. В таком виде утверждение верно, потому что совершенно тривиально: невозможно что-либо измерить, исключив возможность измерения или исследования.

С тем же глубокомыслием конвенционалисты могут утверждать, например, что принципиально невозможно измерить расстояние между центрами атомов в кристалле… потому что расстояния измеряются твердыми масштабами, а они сами состоят из кристаллов.

Вернемся к вопросу об одновременности. В § 2 мы определили «световую» танкордность как отношение событий в системе отсчета, подобное абсолютной одновременности (свойства I–III) и определяемое обменом световыми сигналами повсюду одинаковым образом (свойство IV). То, что сигналы световые, конечно, несущественно; поэтому можно говорить вообще о «сигнальной» танкордности. Существование ее — это вопрос факта, а не соглашения. Было доказано, что сигнальная танкордность, если она существует, совпадает с эйнштейновой одновременностью ($t = \frac{1}{2}(t_1+t_2)$, где t — время отражения сигнала, посланного в момент t_1 и вернувшегося после отражения в момент t_2). При этом мы воспользовались только тем, что сигналы распространяются одинаково от одного данного места к другому (т. е. в одну сторону, с одинаковой скоростью, что для света можно считать твердо установленным). Таким образом, если вообще одновременность, определенная обменом сигналами, существует, то только эйнштейнова. Существование же ее, как было сказано, в принципе может быть установлено экспериментально (проверке подлежит симметричность и транзитивность) .

Ничего условного в этом нет вовсе, и в самом понятии одновременности скорость сигналов в противоположных направлениях не играет никакой роли. Но так как одновременность эйнштейнова, то само собой выходит, что сигналы распространяются туда и обратно за одно время и, значит, с одинаковой скоростью от A к B и от B к A, $t_{AB} = t_{BA} = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$.

Как авторы послесловия пишут об условности одновременности, так они, повторяя А. Пуанкаре, пишут и об условности геометрии: «геометрия реального пространства в принципе не допускает экспериментальной проверки... Проверке подлежит только совокупность „геометрия плюс физика“ в целом» [8, с. 534]. Однако эти утверждения представляют собой чистейшее недоразумение, вызванное недостаточным пониманием, о чем, собственно, идет речь.

Прежде всего надо спросить себя, что понимается под «геометрией реального пространства». Кажется, еще Г. Лейбниц сказал, что пространство есть порядок сосуществующих вещей. Геометрия реального пространства — структура некоторых общих отношений между сосуществующими вещами (основным из этих отношений можно считать расстояние). Проверке подлежат законы этой структуры: они принадлежат физике; само же по себе «реальное пространство» есть абстракция. Еще И. Ньютон в предисловии к своим «Началам» писал, что геометрия основана на механике, поскольку использует механические инструменты — линейки и циркули.

Словом, имеет смысл говорить о проверке «геометрии реального пространства» как части физики, а не «совокупности геометрия плюс физика». Что бы то ни было, доступное экспериментальной проверке принадлежит физике в общем смысле греческого $\varphi\acute{\upsilon}\sigma\iota\zeta$ — природа.

В небольших земных пределах расстояния определяются откладыванием твердых масштабов. Расстояния здесь — то же, что длины отрезков, и поэтому к ним приложимы наши выводы, полученные в § 1. В них нет условного, а значит, нет его и в соответствующих законах геометрии. Например, постройте на листе бумаги равнобедренный треугольник с боковыми сторонами в 5 см и основанием в 6 см. Проведите медиану, длина ее будет 4 см. Этот факт представляет частный случай теоремы Пифагора ($5^2 = 4^2 + 3^2$; $3 = 6 : 2$). Он означает, что геометрия, определяемая откладыванием твердых масштабов, евклидова.

Конечно, откладывание твердых масштабов не определяет пространственных отношений в их универсальности. Универсальной является связь вещей через излучение; она — так же как вообще воздействие одних событий на другие — определяет структуру пространства—времени и в ее рамках «геометрию реального пространства». Геометрия твердых масштабов с нею согласуется в своих пределах. Если бы это оказалось не так, то могла бы появиться возможность условного выбора.

Развивать понимание геометрии, основанное на связи через излучение, мы не будем; это вывело бы нас за пределы «Замечания».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии // Собрание трудов академика А. Н. Крылова. М.; Л.: АН СССР, 1936. Т. 7.
2. *Пуанкаре А.* Наука и гипотеза // В кн.: *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1983.
3. *Карнап Р.* Философские основания физики. М.: Прогресс, 1971.
4. *Грюнбаум А.* Философские проблемы пространства и времени. М.: Прогресс, 1969.
5. *Александров А. Д.* Пространство и время в современной физике // *Александров А. Д.* Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 92–119[28].
6. *Александров А. Д.* Теория относительности как теория абсолютного пространства—времени // Философские вопросы современной физики. М.: АН СССР, 1959. С. 269–323[29].
7. *Кулаков Ю. И.* Ньютоновская механика с точки зрения физических структур // Teoria a metoda. 1972. Sv. 4, No. 3. P. 59–78.
8. *Alexandrov A. D.* A contribution to chronogeometry // Canad. J. Math. 1967. Vol. 19, No. 6. P. 1119–1128.
9. Элементарный учебник физики. М.: Наука, 1985. Т. 1.
10. *Мандельштам Л. И.* Полн. собр. трудов. М.: АН СССР, 1950. Т. 5.
11. *Александров А. Д., Овчинникова В. В.* Замечания к основам теории относительности // Вестн. ЛГУ. 1953. № 11. Сер. математики, физики и химии. Вып. 4. С. 95–110[30].
12. *Акчурин И. А.* А. Грюнбаум. Философские проблемы пространства и времени // Вопр. философии. 1971. № 6. С. 154–156.
13. *Тяпкин А. А.* Выражение общих свойств физических процессов в пространственно-временной метрике теории относительности // Успехи физ. наук. 1972. Т. 106, вып. 4. С. 617–659.
14. *Кадомцев Б. Б., Келдыш Л. В., Кобзарев Ю. И., Сагдеев Р. З.* По поводу статьи А. А. Тяпкина // Успехи физ. наук. 1972. Т. 106, вып. 4. С. 660–662.
15. *Попов М. И., Тяпкин А. А., Шибанов А. С.* Послесловие // В кн.: *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1983. С. 673–723.

[28] Эта статья доступна также на с. 320–341 данного тома. — *Прим. ред.*

[29] Эта статья доступна также на с. 342–381 данного тома. — *Прим. ред.*

[30] Эта статья доступна также на с. 288–306 т. 1 настоящего издания. — *Прим. ред.*

Связь и причинность в квантовой области [1)]

Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 225–254

§ *1. Квантовая связь*

В известных опытах с интерференцией свет, частично отражаясь и частично проходя через полупрозрачную зеркальную пластинку P, отражается от двух зеркал M_1, M_2 и затем два его пучка встречаются, давая на экране S соответствующую интерференционную картину. Однако эта картина слагается из попаданий на экран отдельных фотонов: свет каждый раз концентрируется в одном месте, размеры которого крайне малы в сравнении с размерами всей интерференционной картины. При этом отдельный фотон не попадает туда, где в интерференционной картине имеется темная полоса. Положение ее определяется расположением пластинки P, экрана S и зеркал M_1, M_2. Следовательно, отдельный фотон несомненно испытывает на себе влияние зеркал. Он в этом смысле взаимодействует с ними. Если же вместо зеркал M_1, M_2 поставить приемники света R_1, R_2, например фотоэлектрические счетчики фотонов, то будет наблюдаться попадание отдельных фотонов в каждый из приемников по отдельности.

Происходящее при дифракции электронов имеет такой же характер. Отдельный электрон не попадает в то место фотопластинки, где в целой дифракционной картине нет следов электронов (там интенсивность «электронной волны» равна нулю). Но дифракционная картина определяется если не всей кристаллической или искусственной дифракционной решеткой, то заведомо большим ее участком, содержащим много атомов или штрихов решетки, т. е. отдельный электрон испытывает влияние такого значительного участка решетки, причем прямыми опытами установлено, что это верно именно для отдельного электрона и что взаимодействие электронов друг с другом можно считать исключительным.

[1)] Опубликовано в сборнике [1]. Я еще не был знаком с работой Белла [2], открывшей путь к экспериментальному подтверждению невозможности скрытых параметров. Но правильное понимание парадокса Эйнштейна было дано мною еще в 1952 г. в [3].

Эти хорошо известные факты — независимо от их интерпретации и возможных представлений о фотонах и электронах как частицах, волнах, полях (словом, как угодно) — показывают, что существует особого рода взаимодействие квантовых объектов с другими объектами. Взаимодействие здесь не состоит в передаче энергии и импульса. Фиксация отражения фотона от того или другого зеркала, т. е. фиксация его удара (передачи импульса) в одно из зеркал, превращает зеркало в счетчик фотонов и вовсе изменяет интерференционную картину. То же при дифракции электронов: фиксация удара электрона о дифракционную решетку нарушает дифракционную картину.

Далее, указанное взаимодействие и весь рассматриваемый процесс такого рода, что его по меньшей мере затруднительно представить в виде явления, разыгрывающегося в пространстве и во времени, не считая, конечно, явно фиксируемых попаданий фотонов на экран S или в приемники R_1, R_2. Если мыслить нечто — части фотона, «волны-пилоты», поля и т. п., распространяющиеся от пластинки P к зеркалам, то при замене их приемниками R_1, R_2 окажется, что это нечто почти мгновенно исчезает там, куда не попал фотон. Представляя такое исчезновение как результат передачи в пространство воздействия от места, где находится один приемник, к другому, мы придем к противоречию с тем твердо установленным законом, что никакой «сигнал», никакая «субстанция», никакая масса и энергия, никакой импульс или импульсэнергетическое воздействие не передается со скоростью, большей скорости света. Приемники-зеркала могут быть далеко друг от друга, в принципе сколько угодно далеко, так что данный вывод выступает особенно резко. Поэтому с такой же резкостью выступает заключение об особом характере взаимодействия или влияния зеркал на фотоны или решетки на электроны [2)].

Известное указание Бора, что при трактовке квантовых процессов должна учитываться вся экспериментальная установка в целом, выражает именно особую связь квантового объекта с другими объектами, играющими роль условий, определяющих его «поведение». Необходимость рассматривать квантовый объект не сам по себе, а всегда в связи с условиями, без чего само понятие о том или ином его состоянии становится бессмысленным, — это подчеркивалось и разъяснялось неоднократно [4, с. 194]. Такая связь должна быть признана как физический факт и, стало быть, как реальная

[2)] Попытка толковать квантовые процессы как результат воздействия, например, на электрон некоторого им самим создаваемого поля, соответствующего ψ-функции, не сделала «локализацию волнового пакета» — мгновенную перестройку этого поля при попадании электрона на экран — менее «таинственной». Кроме того, — и это в конце концов решающее обстоятельство — такие представления приводят к выводам, противоречащим известным фактам. Если электрон всегда имеет определенное положение в пространстве, в частности и тогда, когда он находится в атоме водорода, то такой атом должен быть диполем, что никак не обнаруживается и, стало быть, несомненно неверно. Электрон в атоме «размазан».

физическая связь, сколь бы она ни отличалась от классических взаимодействий.

Особая форма взаимосвязи имеется и между самими квантовыми объектами; она обнаруживается, конечно, не непосредственно, но указания многочисленных опытов и выводов теории на эту взаимосвязь достаточно достоверны. Наиболее резко она выступает в системах из одинаковых частиц, например электронов. В многоэлектронных атомах обнаруживается тождественность электронов. Атом гелия нельзя мыслить состоящим из ядра и двух отдельных, хотя и связанных электромагнитным взаимодействием, электронов. Они входят в состояние атома совершенно симметричным образом (волновая функция только меняет знак при перестановке относящихся к ним переменных). Поэтому, например, вопрос о том, который из электронов вылетает из атома при ионизации, оказывается бессмысленным. Так, мы можем налить в чайник два стакана воды и потом вылить один стакан, но какой именно из влитых стаканов при этом выливается — есть вопрос, относящийся к детским шуткам, как предложение одного мальчика другому съесть сначала «свою половину» тарелки супа, которую он обозначил, проведя по супу ложкой. В атоме гелия нет двух электронов, а есть — не знаю, кто первый употреблял это удачное выражение, — «двуэлектрон», который составляется из двух электронов и из которого один или два электрона могут быть выделены, но который не состоит из двух электронов.

Объяснение свойств атомов, молекул и других систем, содержащих много электронов, основано на такой их связи, что они сливаются в некое единство, в котором нет отдельных электронов. Обычно говорят о «тождественности» электронов, о том, что они «неразличимы». Но это неточно. Электроны, находящиеся в разных состояниях, различимы: электрон, фигурирующий в данном опыте, — электрон в этом опыте, а не в любом другом. Суть «неразличимости» в том, что в многоэлектронной системе электроны не имеют отдельных состояний, а входят в общее состояние системы, и при этом совершенно симметрично. Они просто не существуют как индивидуальные, хотя бы и тесно взаимодействующие объекты. Поэтому и нельзя различить в системе «тот» или «этот» электрон. Если же попытаться проследить за отдельным электроном, то это требует вмешательства, нарушающего систему.

В целом вся совокупность фактов, касающихся квантовых систем, навязывает вывод о наличии особых связей между их компонентами, в ряде ситуаций настолько существенных, что компоненты теряют всякую самостоятельность.

Квантовые объекты — объекты особого рода, так что применение к ним «квазиклассических» представлений имеет очень ограниченное значение. Это тем более выясняется на уровне квантовой теории поля, которая идет глубже, в частности, в выяснении особых взаимосвязей квантовых объектов.

Но мы ограничимся первоначальным уровнем квантовой механики, чтобы проще проследить те выводы, которые представляются логически неизбежными и изменять которые в их общем виде современное развитие теории не дает оснований.

Следующий пример — парадокс Эйнштейна — покажет, как конкретно применяется понятие о квантовых связях для выяснения вопроса, служившего предметом дискуссии между А. Эйнштейном и Н. Бором, не считая многих других физиков.

§ 2. *Парадокс Эйнштейна*

В свое время А. Эйнштейн в совместной с Н. Розеном и Б. Подольским статье выступил с попыткой доказать неполноту квантовой механики в том смысле, что она не описывает некоторых явлений, несомненно входящих в ее компетенцию [5] [3]. Рассуждение А. Эйнштейна опиралось на следующий пример. Согласно квантовой механике, две частицы P_1 и P_2 могут находиться в состоянии, в котором определена сумма их импульсов $p = p_1 + p_2$ и разность координат $x = x_1 - x_2$ (так как соответствующие операторы коммутируют). Частицы могли провзаимодействовать с какими-либо объектами и между собой, в результате чего у них и появилось такое общее состояние, а потом они не взаимодействуют, или, говоря наглядно, «разошлись». Можно измерить импульс p_1 частицы P_1, а тогда, так как сумма импульсов p фиксирована, другая частица P_2 необходимо имеет импульс $p_2 = p - p_1$, что мы определяем, вовсе на нее не воздействуя. Но точно так же можно было измерить координату x_1 частицы P_1 и тем самым определить и координату частицы P_2: $x_2 = x_1 - x$. Получается, что без воздействия на частицу P_2 мы по произволу можем определить или ее импульс, или координату. Поэтому нужно признать, что сама по себе частица P_2 имеет определенный импульс и определенную координату. Конечно, мы их заранее не знаем, но тем не менее они у нее есть, раз могут обнаруживаться без того, чтобы воздействием на частицу нарушить ее состояние. Квантовая механика, однако, не рассматривает состояние частиц с определенными импульсами и координатами. Следовательно, она неполна, что и требовалось доказать.

Рассуждение содержит порочный круг. В самом деле, оно основано на предположении, что частицы «разошлись», больше не взаимодействуют. Но откуда мы это знаем и что это значит? Квантовая механика приписывает определенное состояние (ψ-функцию) только обеим частицам вместе, но не каждой в отдельности. Она тем самым вовсе не утверждает, что они «разошлись»; напротив, в том, что частицы не имеют отдельных ψ-функций, она фиксирует связь между ними. Мы можем не представлять

[3] Ответ Н. Бора дан в [6]. Перевод этих статей и комментарии В. А. Фока см. в [7]. См. также [8].

себе этой связи наглядно, она может оказаться необычной и пр., но мы должны признать наличие связи, если только принимаем квантовую механику всерьез и считаем, что ψ-функция есть представитель состояния (по терминологии Дирака).

Измерение над частицей P_1 нарушает эту связь, нарушает систему частиц P_1, P_2, и потому нет ничего удивительного в том, что в одном случае состояние частицы P_2 оказывается одним, в другом случае — другим.

Предположение, что частицы больше никоим образом не взаимодействуют, уже само по себе исключает их квантовую связь, выраженную в наличии у них только общей ψ-функции, и, стало быть, уже подразумевает неполноту квантовой механики, ибо, фиксируя общее состояние системы из двух частиц, она не указывает ψ-функций для каждой из них в отдельности. Таким образом, аргументация Эйнштейна исходит из того самого тезиса, какой имеется в виду доказать, т. е. содержит порочный круг и по этой простой причине ничего не доказывает.

Н. Бор в своем ответе А. Эйнштейну не заметил этого обстоятельства. Он также принял, что частицы «разошлись», и его рассуждение состояло в анализе тех возможных экспериментов, в которых можно было бы осуществить ситуацию и измерения, теоретически указанные А. Эйнштейном. Анализ был, как мы видим, ненужным, чтобы ответить А. Эйнштейну. Однако он помог углубить и уточнить некоторые моменты в понимании квантовой механики. Он показал лишний раз, что возможные результаты эксперимента зависят от применяемых средств и что поэтому вывод, будто частица P_2 сама по себе имеет и определенный импульс, и определенную координату, не имеет экспериментального смысла. С точки зрения квантово-механической связи это представляется совершенно понятным, так как частицы оказываются в связи с самими экспериментальными средствами, хотя последние являются классическими. Поэтому представляется ясным, что возможные результаты эксперимента существенно зависят от применяемых средств и что рассматривать эти средства в духе классической физики — как нечто воздействующее на объект лишь пренебрежимо мало — не имеет оснований. Таким образом, в нашем толковании, ответ Бора сводится к тому же итогу. Но прямой ответ состоит в указании порочного круга в аргументах Эйнштейна. Этот логический круг не был замечен, потому что трудно отвлечься в достаточной степени от квазиклассических представлений, подставляемых наглядным воображением под непосредственные показания квантовой механики. Не так ли представляли за уравнениями Максвелла эфир? Но это оказалось невозможным, от эфира отказались, а теория Максвелла осталась.

Совершенно так же нет оснований примысливать за уравнениями и ψ-функциями квантовой механики квазиклассические картины. Эти уравнения и ψ-функции следует принять так, как они есть, без посторонних прибавлений. Тогда не возникает никакого сомнения в том, что общее, характеризуемое неразложимой ψ-функцией, состояние двух частиц отражает тот факт, что частицы не являются отдельными, а связаны в единую систему. Отсюда, как уже было сказано, представляется совершенно естественным, что воздействие при измерении чего-либо относящегося к одной частице есть нарушение этой связи, ибо одна отдельная частица — уже не то, что есть в системе. Нарушение связи столь же естественно влияет и на другую частицу, ибо она выделяется теперь из системы как отдельная частица. Поэтому не нуждается в особых пояснениях то обстоятельство, что одного рода вторжение в систему — измерение одной величины у одной из частиц — дает для другой один результат, а другое вторжение — другой, несовместимый с первым, как импульс и координата в примере Эйнштейна.

§ 3. *Критика данного толкования парадокса Эйнштейна*

Изложенные только что простые соображения были выдвинуты мною давно, вместе с общим понятием о «несиловой», «квантовой» связи [3] [4]. Я позволил себе повторить эти соображения, даже, может быть, с чрезмерной подробностью, в частности, потому что, возможно, как раз из-за крайней простоты замечания о порочном круге в аргументации Эйнштейна оно не было понятно или даже просто не было замечено И. М. Лифшицем и Л. М. Пятигорским, выступившими с критикой моих выводов. Они писали: «Попытка разъяснения парадокса А. Эйнштейна, предпринятая А. Д. Александровым, была связана с истолкованием наличия общей волновой функции у двух частиц как некоторой специфической «квантовой» взаимосвязи между ними. В силу этой взаимосвязи воздействие, оказываемое на вторую частицу при ее измерении, якобы реально изменяет состояние первой частицы. Однако, как было показано, подобное предположение противоречит аппарату квантовой механики» [10, с. 83]. Посмотрим, как они устанавливают это «противоречие». «Допустим, — начинают они свое рассуждение, — что в некоторый момент мы имеем две квантовые системы... Обе системы в течение некоторого времени взаимодействовали, а затем разошлись и перестали взаимодействовать» [10, с. 80]. Но именно это и есть то самое предположение, которое обусловливает логический круг в выводах Эйнштейна. Тем не менее авторы принимают его. Они имеют в виду энергетическое взаимодействие. Однако в анализе, который дал парадоксу Эйнштейна Н. Бор, между самими системами-частицами вовсе нет энергетического взаимодействия, а есть только взаимодействие с прибором, определяющим состояние пары частиц. Причем анализ Бора несомненно верен в этом пункте. Поэтому рассуждения Лифшица и Пятигорского не относятся, собственно говоря,

[4] Понятием «несилового» взаимодействия пользовались потом другие авторы. Например, М. Э. Омельяновский повторяет в общих чертах данное объяснение парадокса Эйнштейна в статье [9, с. 89].

к парадоксу Эйнштейна, т. е. к тому вопросу, по поводу предложенного решения которого они разворачивают свою критику.

Дальше И. М. Лифшиц и Л. М. Пятигорский приводят некоторые выводы в математическом аппарате квантовой механики, содержащие, между прочим, ошибку [5)], и приходят к заключению: «... внешнее воздействие, оказываемое на вторую систему, не влияет на свойства первой системы, а это значит физически, что никакой реальной взаимосвязи между ними нет» [10, с. 81].

Это заключение основывается на следующих соображениях, которые мы изложим, говоря не о системах вообще, а — для конкретности — о частицах в примере Эйнштейна. Допустим, что речь идет о качественно различных частицах, чтобы устранить эффекты, связанные с тождественностью частиц.

Можно считать состояние частицы определенным не только тогда, когда оно характеризуется ψ-функцией, но вообще тогда, когда определены средние значения всех могущих относиться к ней физических величин [6)]. В этом смысле каждая из двух частиц с общей ψ-функцией имеет свое определенное состояние. Если при этом можно пренебречь энергией их взаимодействия, то, как действительно следует из аппарата квантовой механики, воздействие на одну частицу не влияет на состояние другой: средние значения относящихся к ней физических величин остаются теми же самыми, и если они изменяются со временем, то закон их изменения остается тем же самым. Таким образом, выходит, что утверждение о связи между частицами «противоречит аппарату квантовой механики».

[5)] Они пишут: «Если системы разошлись достаточно далеко, то энергия взаимодействия между ними исчезает. Это означает, что гамильтониан такой сложной системы (состоящий из двух систем. — *А. Д. Александров*) является суммой гамильтонианов каждой системы в отдельности: $\widehat{H} = \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2$» [10, с. 80]. Однако сказанное здесь, во-первых, не имеет отношения к частицам в примере Эйнштейна, ибо разность их координат фиксирована, и поэтому частицы не могут разойтись «достаточно далеко». Во-вторых, энергия взаимодействия даже весьма удаленных объектов, если она вообще есть, не исчезает, а лишь становится малой. Ею можно, допустим, пренебречь, но если взаимодействие в принципе есть, то соответствующий ему член в гамильтониане остается. Энергия взаимодействия «исчезает» не от «исчезновения» этого члена в гамильтониане, а из-за пренебрежимой малости соответствующего интеграла. С таким же успехом можно говорить об «исчезновении» тяготения между отдельными звездами. Но только его учет позволяет судить о движении галактик и др. Это показывает, что одно дело — разумное приближение в решении конкретной задачи, другое — обсуждение самих принципов теории. Конечно, можно поставить задачу так, что член взаимодействия $\widehat{H}_{12}$ в гамильтониане $\widehat{H}_1+\widehat{H}_2+\widehat{H}_{12}$ зависит от времени и с некоторого момента обращается в нуль. Но и эта искусственная постановка вопроса не спасает положения, потому что, как было указано, в примере Эйнштейна энергетическое взаимодействие частиц вообще не имеет значения.

[6)] Между прочим, задание всех этих средних значений равносильно заданию вероятностей отдельных значений; обратное очевидно.

Однако это заключение несколько поспешно. Существенно понимать, что сам по себе математический аппарат любой теории принадлежит математике и получает физическое содержание лишь в результате соответствующего сопоставления с экспериментом, хотя бы «мыслимым», т. е. в принципе возможным. Поэтому необходимо еще рассмотреть, что сделанный вывод означает экспериментально.

Определение состояния частицы средними значениями физических величин означает, что мы проверяем вывод теории о состоянии частицы следующим образом. Воспроизводя для такого же рода частиц одни и те же условия, мы многократно измеряем разные величины и находим их средние значения. Если имеются две частицы, как в примере Эйнштейна, то измерения можно производить для каждой из них в отдельности и выводить соответствующие средние. Тогда оказывается, что средние величины для одной частицы не зависят от того, производятся тут же измерения над второй частицей или нет.

Однако можно вести эксперимент иначе. Измеряя какую-либо величину у одной частицы, будем каждый раз немедленно измерять соответствующую величину у другой частицы, так что результат каждого отдельного эксперимента будет состоять не из одного значения величины для одной частицы, а из пары значений для двух частиц. Тогда, если только аппарат квантовой механики не ошибается, мы обнаружим совершенно новое обстоятельство — строгое соответствие значения некоторых величин. В примере Эйнштейна если импульс частицы P_1 оказался равным p_1, то импульс частицы P_2 будет $p-p_1$ и если координата частицы P_1 оказывается равной x_1, то у P_2 координата будет $x_1 - x$. И тогда возникает вопрос: как толковать эти результаты? Данный вопрос, собственно, и был поставлен А. Эйнштейном. Если же рассматривать только предыдущую экспериментальную процедуру, то вопрос, понятно, отпадает. Но такой уход от вопроса едва ли можно считать его решением.

Поясним разницу между двумя приведенными типами экспериментов на следующем примере.

Пусть в некоторый сосуд мы впускаем по протону и электрону и некоторое время спустя измеряем координаты одного или другого. Оказывается, что любые положения их в сосуде равновероятны — обнаруживаются с одинаковой частотой. Другая процедура будет состоять в одновременном измерении координат и протона и электрона. Тогда может обнаружиться совершенно новый эффект: разность их координат окажется порядка одного ангстрема. Отсюда мы заключаем, что имеем дело с атомом водорода, а не с отдельным протоном и электроном.

Понятно, в примере Эйнштейна ситуация иная. Но, думается, данный пример достаточно ясно показывает возможную разницу между типами экспериментов с двумя частицами.

Отказ от рассмотрения результатов одновременных измерений для частиц в примере Эйнштейна означал бы признание, хотя бы неявное, неполноты квантовой механики, поскольку толкование этих результатов должно входить в ее компетенцию. Поэтому обратимся к такому толкованию с точки зрения аппарата квантовой механики в его отношении к эксперименту.

§ *4. Разъяснения*

Прежде всего обратим внимание на следующий важный момент, касающийся понятия о состоянии частицы или квантовой системы. Определенность средних значений величин, относящихся к частице или системе, не является максимально возможной определенностью ее состояния. Состояние является максимально определенным, когда оно может быть представлено ψ-функцией (иначе — вектором в гильбертовом пространстве). Поэтому частицы P_1, P_2 с общей ψ-функцией, но не имеющие каждая своей ψ-функции, не имеют максимально определенных состояний. Это, с нашей точки зрения, должно пониматься в том смысле, что между ними есть связь, объединяющая их в единую систему. Впрочем, можно и не говорить таких слов, а просто фиксировать тот факт, что, согласно квантовой механике, состояния частиц не являются определенными в той наибольшей степени, в какой это возможно для отдельной частицы.

Теперь о самом эксперименте в примере Эйнштейна. Допустим, частицы в энергетическом смысле не взаимодействуют. Пусть мы производим измерение координаты x_1 первой частицы. Априори имеются две возможности: 1) измерение не связано со сколько-нибудь существенным воздействием на частицу, но лишь фиксирует ее координату; 2) измерение координаты не сводится к такой фиксации и потому, собственно, не является только измерением в обычном смысле, а состоит прежде всего в таком воздействии на частицу, которое «локализует» ее в каком-либо определенном месте, как например удар жесткого фотона.

Первая возможность относится к классической частице. Предполагая такую возможность для квантовой частицы, мы тем самым предполагаем, что на самом деле частица имеет координату, и уже признаем квантовую механику неполной. Кроме того, это предположение означает отказ от реальности соотношения неопределенностей и совершенно не вяжется с массой точно установленных фактов. Поэтому оставим первую возможность, к тому же едва ли принимаемую И. М. Лифшицем и Л. М. Пятигорским. Примем вторую возможность. Пусть воздействие на первую частицу, ведущее к ее локализации, дает значение ее координаты $x_1 = a$. Тогда, если мы принимаем аппарат квантовой механики, мы должны признать, что во всех случаях, когда $x_1 = a$, измерение координаты второй частицы дает значение $x_2 = x_1 - x = a - x$. Не вообще какое-то значение, а именно данное $a - x$, т. е. вторая частица оказывается локализованной в определенном месте, получает в результате измерения над первой частицей вполне определенное положение [7].

Получается, что воздействие на первую частицу сказывается на второй. Не признавать этого можно, лишь считая, что вторая частица локализована сама по себе. Но это означает априорное признание неполноты квантовой механики. Если же воздействие на одну частицу сказывается на второй, то между ними есть связь.

Есть еще логическая возможность предполагать, что средства измерения над одной частицей всегда неизбежно влияют на другую. Но это также, очевидно, означает, что между частицами есть связь. Можно полагать, что влияние сказывается на возможности предсказания результатов последующих измерений, как говорил Н. Бор. Но сами эти возможности являются выражением свойств объекта, так что влияние сказывается на объекте, хотя бы и не «самом по себе», а в его связи с соответствующими условиями. Отказаться от такого понимания можно, по-видимому, лишь вместе с отказом от объективной обусловленности возможности измерения. Если мы не делаем такого крайнего философского шага, то остается принять сделанный вывод, что влияние так или иначе сказывается и на второй частице.

Таким образом, аппарат квантовой механики как физической теории с логической неизбежностью приводит к альтернативе: либо квантовая механика неполна и частицы сами по себе имеют координаты и импульсы (ибо тот же вывод применим к импульсам), либо воздействие, оказываемое на одну частицу, влияет на другую, а это значит физически, что между ними есть реальная связь. В аппарате квантовой механики она выражается тем, что частицы не имеют максимально определенных, представляемых ψ-функциями состояний.

В обычной механике мы можем рассматривать систему из двух частиц, испытывающих упругое столкновение. Тогда сумма их импульсов сохраняется после удара, и, измеряя импульс одной из них, мы можем определить импульс другой, вовсе ее не касаясь. Внешне все происходит как будто так же, как в парадоксе Эйнштейна. Однако система из классических частиц имеет определенное состояние тогда и только тогда, когда каждая частица находится в определенном состоянии (в каждый момент определены координаты и импульсы всех частиц). В отличие от этого квантовая система может иметь определенную ψ-функцию — находиться в максимально определенном состоянии без того, чтобы то же имело место для ее составляющих, именно это и есть в примере Эйнштейна.

Классические частицы сами по себе находятся в определенных состояниях; есть реальная возможность следить за их движением и судить, разо-

---

[7] Можно встать на чисто феноменологическую точку зрения и говорить не о локализации частиц, а о местах почернения фотопластинки и т. п. Но это, как легко видеть, делает вывод еще более ясным: пятна на пластинке не независимы.

шлись они или нет, и знать, что каждая из них имеет определенный импульс. Для квантовых же частиц такой возможности нет, они не могут рассматриваться сами по себе, если только не выходить за пределы квантовой механики, примысливая, что частицы «на самом деле» ведут себя подобно бильярдным шарам, хотя бы сопровождаемым какими-либо волнами и пр. Квантовая частица не имеет определенного состояния сама по себе, но лишь в зависимости от условий, что и означает ту ее особую связь с этими условиями, частные случаи которой обнаруживаются в опытах с интерференцией и дифракцией, с напоминания о которых мы начали статью. Кстати, эти опыты наглядно демонстрируют невозможность говорить о том, разошлись частицы или нет, когда эксперимент или соответственно аппарат квантовой механики не показывает этого. Что означало бы утверждение, что два фотона разошлись к разным зеркалам, когда каждый из них равно испытывает влияние обоих?

Словом, аналогия с двумя провзаимодействовавшими и разошедшимися классическими частицами не проходит [8)].

В общем итоге, если только принять квантовую механику всерьез и не делать априорных предположений о ее неполноте, о том, что «частицы разошлись», когда аппарат квантовой механики не указывает этого, не видно иного логического выхода, как признать, что специфическая «квантовая» связь продолжает существовать и разъясняет, в частности, парадокс Эйнштейна.

§ 5. *Проблемы причинности в квантовой области*

Известно, что в опытах с дифракцией электронов дифракционная картина с высокой степенью точности детерминирована условиями опыта. Известно также, что детерминировано не только это массовое явление в целом, но и некоторые черты «поведения» отдельных электронов: в частности, отдельный электрон заведомо не попадает туда, где интенсивность «электронной волны» равна нулю. Вместе с тем также известно, что попадание отдельного электрона именно в данное место не детерминировано условиями, описываемыми на основе классической физики.

[8)] Между состояниями разошедшихся после столкновения классических частиц есть корреляция, которая тоже, конечно, является формой связи. При толковании квантовой механики как «теории ансамблей» говорят о корреляции в примере Эйнштейна. Но это корреляция между результатами измерения, а не квантовыми состояниями частиц. В объяснении, а не констатации этой корреляции и состоит вопрос. Ссылаются на особенности квантовых ансамблей в отличие от классических. Но тогда нужно говорить и об отличной от классической, «особой корреляции». И так как она есть форма связи, то мы опять приходим к выводу, что особая связь имеет место. А назовем ли мы ее квантовой связью, квантовой корреляцией или еще как-нибудь — это не так существенно.

Таковы экспериментальные факты. Они полностью охватываются квантовой механикой, как и во всех других случаях; причем даже там, где еще нет достаточно полной теории, как, скажем, в сфере элементарных частиц, тот же статистический характер экспериментальных данных и соответствующая их вероятностная трактовка в духе общих принципов квантовой механики сохраняются полностью. Отсюда несомненно, что эти принципы охватывают чрезвычайно общие и фундаментальные черты реальной действительности и что требовать лучшего согласия теории с экспериментом едва ли вообще возможно. Поэтому, в частности, недетерминированность известных деталей, а порой и существенных черт квантовых эффектов является общим фактом, который и следует воспринять как таковой.

Тем не менее если «данный» электрон в опытах с дифракцией попал именно в данное место, то естественно возникает вопрос: почему? Каковы те детали условий эксперимента, которые послужили причиной именно данного эффекта? Однако ни опыт, ни теория на современном уровне развития не дают на этот вопрос никакого ответа. Длящиеся много лет попытки целого ряда физиков построить теорию, которая хотя бы в принципе могла дать ответ, не привели к положительным результатам. Поэтому, придавая данным современных опыта и теории объективное значение, приходится признать, что искомой причины не существует по меньшей мере на квантовом уровне. Хотя, не допуская того, чтобы абсолютизировать какие бы то ни было выводы науки, нельзя считать абсолютно исключенным, что на некоем «суб-» или «гиперквантовом» уровне соответствующие причины, может быть, в каком-то особом смысле были бы все же открыты. Однако в свете всех имеющихся данных это представляется маловероятным.

Тривиальным является рассуждение, что условия вообще никогда не бывают совершенно одинаковыми, и всегда можно ссылаться на то, что есть в них нечто, чего мы не учли, но что определяет именно тот, а не иной результат — попадание электрона туда, а не сюда. Однако подобные утверждения не имеют физического смысла, пока не связываются с экспериментом. Называют в качестве причины «неконтролируемое взаимодействие» со средствами измерения. Но такое понятие пусто, ибо «неконтролируемое» — значит лежащее вне возможностей эксперимента. Попытка учесть причины данного эффекта путем квантово-механического рассмотрения суммарной системы, включающей также прибор, приводит к тому, что состояние системы опять описывается ψ-функцией, задающей лишь вероятности тех или иных результатов. Как уже давно указал В. К. Гейзенберг, включая прибор в систему, мы в конце концов можем включить в нее весь мир. Но тогда физика исчезает и остается одно всеобщее уравнение Шрёдингера.

Выявление тех элементов условий, которые оказываются различными при попадании электронов в разные места и могут соответственно пониматься как причина последнего, требует того, чтобы такие элементы фиксировались. Для этого необходимо включить подходящие средства. Но в отличие от классической физики, где влиянием таких средств можно пренебречь, в квантовой области это невозможно. Точнее, сами введенные средства входят в условия течения процесса. Поэтому мы будем фиксировать попадание электронов туда или сюда не в прежних, а в измененных условиях, и вопрос о причинах того или иного эффекта в прежних условиях не будет решен. Так, желая проследить движение фотона в опыте с интерференцией, мы вводим счетчик фотонов, но этим интерференционная картина вовсе искажается.

Это выражает не границы наших возможных знаний, но возможности эксперимента, обусловленные особенностями квантовых процессов. В силу существенной квантовой связи частицы с условиями она не выделяется из них как вполне самостоятельный объект. Сама регистрация квантовых процессов служит вмешательством в их течение, разрывом имеющихся связей. Неудивительно, что при таком разрыве эффект оказывается не вполне детерминированным. В этом смысле можно считать, что частичная недетерминированность квантовых эффектов в классическом смысле имеет основание в особом, существенном характере квантовых связей.

Можно сделать также обратное заключение, что полный детерминизм означал бы отсутствие таких особых связей. Действительно, допустим, что мы имеем точное предсказание всех результатов, какие частица в фиксированных условиях может дать, встречаясь со средствами измерения. Тогда в обычном духе науки мы можем толковать эти результаты как проявление свойств частицы в данном ее состоянии. В этом смысле она окажется выделенной как определенный самостоятельный объект, подобно классической частице (хотя бы характеризующие ее величины и были другими). А это и значило бы, что особых связей, в которых частица в большей или меньшей степени теряет характер самостоятельного объекта, не существует.

Квантовая связь допускает выделение частицы или системы частиц лишь отчасти; соответственно и эффекты, производимые частицей или системой, детерминированы лишь частично. Они оказываются детерминированными именно в той степени, в какой выделение частицы как данного объекта оказывается возможным в каких-либо условиях. При максимально возможном выделении квантового объекта его состояние представляется ψ-функцией, определяющей, вообще говоря, только вероятности тех или иных эффектов («вообще говоря» потому, что всегда имеются так же достоверно предсказуемые эффекты, как, скажем, в состоянии с определенной энергией и т. п.). Можно сказать, что и при максимальном выделении объекта причинные связи как бы частично поглощаются более сильной квантовой связью.

§ 6. *Общие замечания о причинности в классическом смысле*

Частичная недетерминированность квантовых эффектов вызвала обширную философскую дискуссию. Заговорили о «крушении» причинности и детерминизма. Но это грубое преувеличение, так как классический детерминизм сохраняется в квантовой механике для состояния системы, представляемого ψ-функцией, а детали квантовых эффектов недетерминированы лишь отчасти, причины же массовых явлений указываются достаточно точно, как например причины данной диффракционной картины и т. п.

В противоположность тем, кто говорил о крушении причинности, другие стремились сохранить ее так, как она фигурирует в классической физике. Квантовая механика представлялась несовершенной теорией, которая вскоре уступит место другой, восстанавливающей, хотя бы в новых формах, прочные классические принципы. Выражалось убеждение, что мы только не знаем причины попадания электрона в данное место фотопластинки, но это не значит, что таких причин нет. Однако то же можно сказать о чем угодно, чего не констатирует наука: а может быть, оно все-таки есть.

Причинность демонстрируется громадным опытом практики и науки. Но тот же опыт показывал, что многие представления, которым ранее придавался всеобщий характер, — абсолютная одновременность, принципиальная возможность сколь угодно больших скоростей и т. д., в дальнейшем оказались несостоятельными, и от них пришлось отказаться, сохраняя их в лучшем случае как ограниченное по своему значению приближение к действительности. Аналогично обстоит дело с классическим представлением о причинности: гигантская область ее действия сохраняется и даже значительно расширяется перед нашим взором, но вместе с этим выступает и ее ограничение. Убеждение, что причинность ни в коем случае не может нарушаться, есть в конечном счете априорное предписывание природе, что может быть и чего не может быть. Научная же философия состоит в том, чтобы стремиться понять мир так, как он есть, как он раскрывается в практике, без всякой предвзятости и посторонних прибавлений.

Понятия причинности и детерминированности хотя и тесно связаны, но ни одно не покрывает другое. Причинность подразумевает возможность выделить одно явление (или одну сторону явления) как следствие, а другое — как причину. Детерминированность относится скорее к системе или комплексу явлений в данных условиях, частным случаем которых служит изолированность системы (так, движение изолированной механической системы детерминировано ее начальным состоянием, но никто, кажется, не говорит, что это состояние служит причиной движения). Кроме того, оба понятия — причинности и детерминизма — подразумевают повторяемость явлений; основательное суждение о причинах даже уникального явления основывается на его сопоставлении с другими подобными явлениями. Если же мыслить абсолютно уникальное явление, то оно столько же абсолютно детерминировано, сколько и абсолютно случайно.

Однако совершенно точное воспроизведение, как и совершенно точное выделение, данного явления, данной системы, данных условий возможно в абстрактных моделях, но едва ли в реальной действительности. Поэтому конкретные представления о причинности и детерминизме всегда ограничены. Когда же имеют место сильные или сложно переплетающиеся связи, то указанное выделение может оказаться вовсе неточным и условным, а вместе с этим становится неточным упрощенное понимание причинности и детерминизма.

Знаменитые слова Лапласа, трактуемые как формулировка лапласовского детерминизма, представляли лишь художественное выражение идеальной детерминированности движения механической системы — механической модели реальности. Но обычно лапласовский детерминизм понимают как возможность безграничного уточнения описания любого материального процесса как бы в ряду последующих приближений к полному описанию [9]. Соответственно сказанному вопрос о детерминизме часто ставится в форме дилеммы: либо имеет место сколь угодно точный детерминизм и он и есть лапласовский; либо нет сколько угодно точного детерминизма, а это значит, что детерминизм нарушается. Поэтому совершенно нелогично говорить о лапласовском детерминизме как о чем-то дурном и вместе с тем видеть дурное в нарушении детерминизма и причинности.

Говорят о «вероятностной причинности» или «вероятностном детерминизме», обозначая так детерминированность массовых явлений. Существование такой формы детерминизма доказывается громадной совокупностью данных от статистики рождаемости до дифракции электронов. Однако сама по себе эта форма детерминизма логически не предполагает детерминированности каждого отдельного явления из общей массы. В макроскопических массовых явлениях детерминированность отдельного явления прослеживается, хотя бы в принципе, с хорошей точностью. Представлялось, что вообще за вероятностным детерминизмом всегда стоит детерминизм лапласовский. Квантовые процессы поставили это убеждение под серьезное сомнение. Для них имеет место вероятностный детерминизм, но, насколько дает судить физика, за ним не стоит точная детерминированность отдельных явлений. Иначе говоря, квантовый вероятностный детерминизм включает элементы неопределенности. Употребление терминов «вероятностный детерминизм» и «вероятностная причинность» без раскрытия указанных обстоятельств только прикрывает существенное различие классических и квантовых процессов.

[9] Пусть, скажем, имеется процесс P и условия C его протекания — начальные, внешние, внутренние. Детерминированность процесса можно выразить формулой $P = f(C)$. Но это неточно, так как «данные» условия не включают всех условий и само понятие «данного» процесса не является абсолютно точным. Поэтому формула требует уточнения. Но в нем опять не все будет учтено, нужно следующее уточнение и т. д. Кстати, последовательными приближениями доказывается существование и единственность решений уравнений механики и находятся сами эти решения, так что указанный процесс приближений совершенно точно изображает лапласовский детерминизм.

Квантовая физика открыла, что неограниченные уточнения детерминизма не проходят по крайней мере на ее уровне. Детерминизм оказывается существенно неточным, соединенным с элементом индетерминизма. Анализ понятий причинности и детерминизма показывает их зависимость от возможности выделить объекты и процессы как «данные». Но существенный характер связей в квантовой области ограничивает такую возможность.

Все это подтверждает и углубляет давно сформулированные общие положения о существенном характере всеобщей связи явлений, в которой причинность является лишь ее «частичкой» [10].

§ 7. *Классическая и квантовая структуры*

Классическая физика — понимая классическое как противоположность квантовому — получила законченную форму в вытекающем из теории относительности понимании пространства и времени.

Мир можно представить как множество событий, связанных воздействиями и образующих потому соответствующую структуру [11]. Это не значит, что каждые два события связаны воздействием одного на другое, но имеются другие события, которые на них воздействуют или на которые они воздействуют. Эта структура, лишь взятая в соответствующей степени абстракция, и есть не что иное, как пространство—время. Иначе говоря, пространство—время есть множество всех возможных событий, отвлеченное от всех его свойств, кроме тех, которые определяются отношениями воздействия, причем сами воздействия берутся также в отвлечении от всяких свойств, кроме формального свойства транзитивности.

Как событие есть «элементарное явление», так воздействие можно понимать как элементарную причинно-следтвенную связь. В этом смысле можно сказать, что пространственно-временная структура мира есть не что иное, как его причинно-следственная структура, взятая лишь в соответствующей абстракции. Через эту общую структуру уже определяются пространство и время — относительные пространства и времена.

---

[10] «Каузальность, обычно нами понимаемая, есть лишь малая частичка всемирной связи, но (материалистическое добавление) частичка не субъективной, а объективно реальной связи» [11, с. 144].

[11] Более подробное изложение см., напр., в [12, с. 225–229]. В дополнение данным там разъяснениям по поводу понятий «событие» и «воздействие» необходимо некоторое уточнение, касающееся «события» как «элементарного явления». Если событие определяется как то, «часть чего есть ничто» или вроде «атомарного факта» Витгенштейна, то элементами пространственно-временной структуры являются, собственно, не сами такие события, а «совпадающие» события. Например, данная частица в данном мгновенном состоянии движения может иметь определенный импульс и определенный момент, что надо считать двумя событиями (если событие мыслится неразложимым), но эти два события совпадают. Понятие совпадения нужно понимать как элементарное, не подлежащее определению иначе как в наглядных терминах.

Воздействие есть движение, передача движения. Конкретнее можно сказать: оно состоит в передаче импульса и энергии. Простейший случай — движение частицы, в котором и происходит «передача» импульса энергии от одного ее состояния (события) к следующему.

Данное выше определение пространства—времени выражает полное единство пространственно-временной и причинно-следственной (импульс-энергетической) структур. Эту единую общую структуру мы и называем классической структурой.

Из того же определения пространства—времени следует: само утверждение о нахождении тела или события в пространстве и во времени означает, что тело или событие входит в указанную структуру. А так как сама структура определена воздействиями, то и факт нахождения тела или события в данном месте в данное время означает, что на него воздействуют другие события и оно само воздействует на некоторые события. То, на что ничего не действует и что само ни на что не действует, не существует в пространстве—времени, ибо выпадает из указанной структуры. Но поскольку воздействие есть передача импульса и энергии, постольку без такой передачи нет и пространственно-временной локализации. В рамках классической физики воздействие в принципе может быть сколь угодно малым, и тогда оно фиксирует локализацию без того, чтобы импульс-энергетическая характеристика данного тела или события потеряла определенность.

И тут мы подходим к границам классической физики. Открытие квантовых эффектов и их теоретический анализ показали, что убеждение во всеобщей непрерывности передачи воздействия подлежит сомнению в отношении таких явлений, как испускание и поглощение света и др., так же как подлежит сомнению универсальная возможность сколь угодно малых воздействий.

Если частица не испытывает и не оказывает никаких импульс-энергетических воздействий, то, как уже указано, она выпадает из определенной такими воздействиями структуры. Она не находится в сколько-нибудь определенном месте. И если говорить о ее существовании, то она существует вне указанной структуры, т. е. вне пространства и времени. Конечно, это лишь абстракция, подобная движению по инерции, ибо, как ни будь частица изолирована, она все же взаимодействует со средой. Но данная абстракция ясно показывает, что без воздействия пространственно-временные характеристики частицы логически не имеют смысла или имеют его разве лишь как их возможность. Степень локализации частицы в пространственно-временной структуре оказывается зависящей от степени воздействия, которая определяется обменом импульсом и энергией, что делает эти величины соответственно не вполне определенными для частицы самой по себе. Таким образом, степень локализации, или, что равносильно, степень ее неопределенности, оказывается связанной со степенью неопределенности импульса-энергии. Это и выражается в соотношении неопределенностей Гейзенберга.

Тело или явление определяются как классические, если они допускают совместные достаточно точные пространственно-временные и импульс-энергетические характеристики. Иначе говоря, это такое тело или явление, которые входят в пространственно-временную структуру, сохраняя в ней достаточную свою самостоятельность и непрерывность изменения состояний, чтобы их импульс-энергетические характеристики и само понятие о том, что это есть именно данное тело или явление, имели смысл.

В области квантовых процессов все это нарушается. Они выпадают из классической структуры с ее точной определенностью и единством причинно-следственных и пространственно-временных отношений. Поэтому мы неизбежно переходим от классической структуры к другой, более глубокой квантовой структуре, где имеются особого рода отношения, связи объектов, определяющие эту структуру в ее особенностях. Расщепление единства пространственно-временных и причинно-следственных (импульс-энергетических) характеристик объекта в квантовой области нашло выражение в принципе дополнительности Бора. Но особенности квантовой структуры еще глубже, так как в ней сами понятия о состоянии объекта, даже о данном или том же самом объекте, теряют в известных случаях свою определенность. Здесь в наибольшей степени проявляется особый, существенный характер связей в квантовой структуре.

Понятно, во-первых, что, хотя классическая структура теряет свою универсальность и абсолютную определенность, она реально существует и является определенной с очень высокой степенью точности в сфере макроскопических тел и явлений. Во-вторых, классическая и квантовая структуры существуют не раздельно, но взаимно проникают. Мы сами с нашей чувственной деятельностью принадлежим классической структуре. Поэтому мы неизбежно овладеваем квантовой структурой через посредство ее проекции в структуру классическую [12)].

Квантовая механика и есть теория квантовых процессов — вообще квантовой структуры — в их отношении к структуре классической. В парадоксальной форме: «квантовая механика состоит в применении классических понятий там, где они неприменимы» (этот афоризм я слышал в давнее время от К. В. Никольского). Точнее, степень применимости или неприменимости классических понятий зависит от особенностей квантовой структуры, отличающих ее от классической. Особенности эти, как во всякой структуре, состоят в специфике отношений, связей ее элементов между собой и с элементами классической структуры, так как и свойства элементов проявляются в тех же связях и отношениях.

[12)] Это соображение, диктуемое «Тезисами о Фейербахе» К. Маркса, было впервые выдвинуто в других терминах М. А. Марковым [13, с. 141–142]. Но дискуссия вокруг нее приняла грубый характер, что помешало выяснению истины и остановило развитие важных положений, выдвинутых М. А. Марковым.

§ 8. *Формы квантовых связей*

Помимо отношений в самой классической структуре можно выделить следующие виды связей.

1. Влияние классических объектов на квантовые, когда первые выступают как условия, определяющие состояние квантового объекта и само его выделение как данного объекта в данном состоянии. Классический объект в этом качестве называют, имея в виду эксперимент, частью прибора, приготовляющей квантовый объект. В математическом аппарате теории этому соответствуют члены в уравнении Шрёдингера, задающего внешнее поле, и др.

2. Воздействие квантового объекта на классический, когда в этом последнем обнаруживается эффект, входящий с достаточной точностью в классическую структуру. Тогда классический объект называют регистрирующей частью прибора, а сам процесс — измерением, производимым над квантовым объектом, хотя измеряется, собственно, эффект в классической структуре. В аппарате теории это выражается прежде всего в выведении из ψ-функции вероятностей тех или иных эффектов, результатов измерения.

3. Взаимные связи самих квантовых объектов, каковые бывают двух видов: а) их импульс-энергетическое взаимодействие, однако не классическое, а квантовое, выражаемое в аппарате теории членами взаимодействия в уравнении Шрёдингера; б) совершенно специфическая связь, выражаемая в аппарате теории свойствами ψ-функции системы как неразложимость на ψ-функции, относящиеся к частям системы, симметричность и др. Особенно резко эта связь выражается в принципе Паули, в антисимметричности ψ-функции системы из частиц со спином $1/2$. В первоначальной форме этот принцип утверждает невозможность для двух электронов находиться в одном и том же состоянии. Один электрон как бы выталкивает другие из занятого им места в системе. Это наглядное описание делает особенно ясным, что здесь имеется именно взаимодействие электронов, но совсем особого рода, так как «выталкивание» вовсе не состоит в применении силы — в импульс-энергетическом воздействии.

Объект выделяется из квантовой структуры как данный, в данном состоянии лишь при известных условиях и с некоторой неточностью. Чтобы он мог быть выделен, нужно, чтобы сами условия могли рассматриваться как данные, определенные сами по себе, т. е. они должны выделяться из квантовой структуры, из квантовых связей и принадлежать тем самым структуре классической. Но сам объект, поскольку он квантовый, находится в связи с условиями, и при трактовке его «поведения» они должны быть приняты во внимание в целом.

Квантовая структура представляется гораздо более связной, чем структура классическая. Объект, можно сказать, «вычерпывается» из нее и оформляется как объект в данном состоянии, подобно тому как вода вычерпывается из водоема и оформляется вычерпывающим ее сосудом. И подобно тому как сам сосуд должен иметь определенную форму, быть не жидким, а твердым, так выделяющие объект и оформляющие его состояние условия также должны быть достаточно оформленными сами по себе, т. е. классическими [13]. Нельзя априорно утверждать, что невозможно «оформление» объекта иными, скажем «субквантовыми», условиями. Но поскольку практика человека принадлежит классической структуре, постольку нет для нас иного способа выделять и оформлять квантовые объекты, как посредством классических условий, так же как фиксировать квантовые эффекты по их проявлениям в классической структуре. С одной стороны, классическая механика является предельным случаем квантовой и даже выполняется для средних значений физических величин, а с другой стороны, сама квантовая механика подразумевает классическую как условие, без которого ее математический аппарат не получает физического смысла.

Когда говорится об условиях, определяющих состояние объекта, имеется в виду комплекс условий, выделенный из всей их совокупности, а такое выделение можно производить по-разному. Например, имея в виду большую массу ядра атома в сравнении с массой электрона, можно считать ядро классической частицей и определить условия для электрона как электрическое поле такой частицы. Но можно само ядро включить в квантовую систему — ядро плюс электрон, и тогда речь идет уже о состоянии не электрона в центральном поле, а всего атома. Поэтому характеристика состояния объекта зависит, вообще говоря, от того, что мы относим к квантовой структуре, а что к классической.

Такая условность может показаться придающей квантовой теории субъективные черты, грубо говоря, зависящие от нашего желания. Однако вообще все границы в природе до некоторой степени условны, и тем более невозможно точно разграничивать, где кончается структура классическая и начинается квантовая. Поэтому разграничение в каждом конкретном случае неизбежно более или менее условно. Вместе с тем имеется предел максимально возможного выделения квантового объекта, когда его состояние определено настолько, что задается ψ-функцией, и вовсе не субъективно условной, а вполне объективной и безусловной является та степень точности, с какой объект может быть выделен таким образом. Отделить в атоме электрон от ядра, как отнесенного к классической структуре, можно с хорошей степенью

[13] Можно, конечно, упрощая суть дела, продемонстрировать на примере воды и соотношение неопределенностей. Пусть мы имеем данное количество воды на подносе, стоящем на столе. Вода растекается, и ее координаты на столе оказываются неопределенными. Им можно придать любую точность, вливая воду в тонкую трубку, вертикально стоящую на столе. Но тогда теряется определенность положения воды над столом. Произведение соответствующих неопределенностей оценивается объемом воды. Прямо как у В. К. Гейзенберга.

точности, но отделить в многоэлектронном атоме один электрон от других и отнести их к «классическим условиям» невозможно (так, в приближенном, квазиклассическом описании атома все равно учитывается принцип Паули).

§ 9. *Реальность квантовых состояний*

Введенные выше общие понятия квантовых связей и квантовой структуры служат, как нам представляется, развитию того понимания квантовой механики, которое характеризуют как признание реальности квантовых состояний. Оно сводится к тому, что ψ-функция отражает определенное соответствующими условиями реальное состояние квантового объекта; ψ-функция характеризует это состояние тем, что определяет реальные возможности (вероятности) результатов взаимодействия объекта с другими, классическими (результаты измерения). Многократное осуществление таких воздействий приводит к соответствующим частотам появления тех или иных результатов. Состояние объекта как бы по-разному проектируется в классическую структуру (что, можно сказать, изображается в аппарате теории проектированием вектора гильбертова пространства, представляющем состояние, на собственные векторы оператора, соответствующего данной физической величине).

Можно возразить, что понятие возможности или ее количественной меры — вероятности, отнесенное к единичному объекту, не физично и вообще ничего не обозначает для данного объекта, так как вероятность обнаруживается реально только в массе явлений и, стало быть, должна относиться лишь к большим совокупностям отдельных объектов — ансамблям. В отношении же к единичному объекту возможность не является чем-то реальным [14). Однако всякое свойство любого объекта остается «нереальным», пока не обнаруживается в своих проявлениях. Вне связей и взаимодействия ничто не существует и потому не имеет никаких свойств. Энергию определяли в термодинамике как способность производить работу; а что есть «способность», как не реальная возможность? Так же можно сказать, что квантовое состояние частицы есть ее способность давать те или иные эффекты. То, что эти эффекты, вообще говоря, не определяются только самим состоянием, ничего не меняет с точки зрения логики употребления понятий или слов. Поэтому указанное возражение против понятий возможности несостоятельно.

При регистрации квантового эффекта — проектировании квантового процесса в классическую структуру — осуществляется одна из возможностей, возможность именно данного эффекта «превращаться» в его наличие. Но, как поняли еще средневековые мыслители, между возможностью и действительностью нет логического перехода, по крайней мере в формальной логике. Поэтому в аппарате теории здесь имеется разрыв: представление состо-

---

[14) В. К. Гейзенберг писал, что состояние системы, описываемое ψ-функцией, «объективно, но не реально» [14, с. 42].

яния объектов ψ-функцией прекращается; как говорит В. А. Фок, прежняя ψ-функция зачеркивается и пишется новая, если имеются соответствующие условия.

Точка зрения реальности квантовых состояний является развитием «копенгагенской интерпретации» в сторону освобождения ее от черт субъективизма, когда, например, ψ-функция или даже само состояние квантового объекта определялось как «запись сведений о состоянии» [15]. «Копенгагенская интерпретация» исходит, как известно, от Нильса Бора, а ее указанное развитие было дано В. А. Фоком и др. В одной работе я тоже выступал с этой точкой зрения [15, с. 291–294]. Мои суждения подверглись критике со стороны В. К. Гейзенберга [14, с. 34–37]. И хотя критика довольно давняя, мы остановимся на ней, так как это позволит уточнить некоторые моменты, тем более что пока у меня не было случая на нее ответить. Критика была обращена на мои утверждения, что физическая величина есть объективная характеристика явления, а не результат наблюдения и что ψ-функция характеризует объективное состояние электрона. Эта критика приводит к подчеркиванию того, что для физического истолкования ψ-функции «регистрация, т. е. переход от возможного к действительному ... совершенно необходима и ее нельзя исключить из интерпретации квантовой теории» [14, с. 36]. Но в моей статье после выбранных В. К. Гейзенбергом для критики утверждений говорится, что ψ-функция «характеризует свойства, присущие электрону в данном состоянии, через реальные возможности результатов взаимодействия электрона с другими объектами» и что «при взаимодействии эти возможности претворяются в действительность» [15, с. 293]. Таким образом, критика приводит к указанию автору на то, что он сам утверждает. Что действительно было пропущено мною, так это указание на возможный произвол в проведении границы между объектом и «прибором».

В. К. Гейзенберг объединяет под одной рубрикой взгляды Д. И. Блохинцева и мои, хотя Д. И. Блохинцев отстаивает понимание квантовой механики как «теории ансамблей», а я возражал против этого взгляда в той самой статье, которую критикует В. К. Гейзенберг. Такое объединение противоположных взглядов вызвано, как это явно и говорит В. К. Гейзенберг, философской стороной вопроса. Он даже утверждает, будто мы только этой стороной и ограничиваемся, а в области физики безоговорочно придерживаемся «копенгагенской интерпретации», как если бы для нее было, в частности, безразличным относить ψ-функцию к единичному объекту или только к ансамблю. Впрочем, редактор русского издания сборника, где помещена статья В. К. Гейзенберга, Я. А. Смородинский предупредил в своем предисловии, что «Гейзенберг не всегда точно излагает взгляды физиков, с ко-

[15] Однако, насколько нам известно, Н. Бор не говорил этого, как утверждают, напр., И. М. Лифшиц и Л. М. Пятигорский в [10, с. 83].

торыми он полемизирует» [16, с. 6]. Как пишет В. К. Гейзенберг, «дело не только в науке, но и в мировоззрении», он видит нашу цель в том, чтобы «спасти материалистическую онтологию» [14, с. 35]. Его же собственная цель выясняется, когда он защищает идеализм, например, усматривая источник взглядов А. Эйнштейна и М. Лауэ в «недопонимании доктрины идеалистической философии», и в заключение пишет: «Онтология материализма основана на иллюзии, что можно экстраполировать в атомную область непосредственную „действительность“ окружающего нас мира» [14, с. 39, 41].

Такое толкование онтологии материализма, конечно, неверно, если не иметь в виду материализма метафизического. Но В. К. Гейзенберг выписал из статьи Блохинцева известные слова В. И. Ленина: «Как ни диковинно с точки зрения „здравого смысла“ превращение невесомого эфира в весомую материю и обратно, как ни „странно“ отсутствие у электрона всякой иной массы, кроме электромагнитной, как ни необычно ограничение механических законов движения одной только областью явлений природы и подчинение их более глубоким законам электромагнитных явлений и т. д., — все это только лишнее *подтверждение* диалектического материализма» [17, с. 276]. В этих словах нужно обратить внимание на содержащееся в них «и т. д.», которое позволяет поставить здесь законы теории относительности, квантовой электродинамики, элементарных частиц. Какова объективная реальность — на это и отвечает наука в своем развитии. В принятии ее выводов как отражения этой реальности и состоит онтология материализма. В. К. Гейзенберг пишет, что при проникновении «в детали атомных явлений контуры „объективно реального“ мира растворяются ... в прозрачной ясности математики» [14, с. 43]. По материализму же, эти «контуры» *отражаются* в прозрачной ясности математики.

Приведя слова В. И. Ленина из статьи Д. И. Блохинцева, В. К. Гейзенберг заключает, что «источник гипотез Блохинцева и Александрова лежит, таким образом, вне физики» [14, с. 35]. Но, кажется, еще никто не приписывал Д. Гильберту гипотез, лежащих вне науки, когда он поставил эпиграфом к своим «Основаниям геометрии» слова И. Канта. И. Канта цитировали и Г. Вейль, и М. Лауэ, и др. А. Эйнштейн же, например, начинал некоторые из своих лекций по теории относительности изложением махистского понимания реальности. Поэтому понятно, что В. К. Гейзенберг имеет в виду не цитирование философских суждений вообще, а цитирование именно Ленина как то, что якобы ставит гипотезы ссылающихся на этого мыслителя вне науки. Вопрос, стало быть, в его идеологии.

В. К. Гейзенберг пишет и подчеркивает, что «знание „действительного“ с точки зрения квантовой теории по своей природе всегда является неполным знанием» [14, с. 43]. Но если это понимается в смысле неполноты всякого знания вообще, то такое суждение тривиально, если же в смысле принципиальной границы знания, то это выражает существование чего-то (вроде скрытых параметров), что играет роль в квантовых процессах, но что мы знать никак не можем. Такое суждение бессодержательно, так как принципиально не верифицируемо, поскольку речь идет о том, что знать невозможно. Нам представляется, что толкование физики должно освобождаться от такого рода суждений. Этим мы и старались руководствоваться, например, исключая из толкования парадокса Эйнштейна непроверяемые, физически бессодержательные утверждения о том, что частицы «на самом деле разошлись», и т. п. Понять квантовую механику, в частности открываемые ею формы связи, лучше всего, принимая показания эксперимента и теории без того, чтобы примысливать за ними что-либо лишнее. Так, если в парадоксе Эйнштейна у частиц есть только общая ψ-функция, но нет отдельных ψ-функций, значит, частицы как-то связаны. Квантовые явления не «растворяются», а отражаются в математическом аппарате теории; его и нужно воспринять как их отражение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Современный детерминизм. М.: Мысль, 1973. С. 335–364.
2. *Bell J. S.* On the Einstein Podolsky—Rosen paradox // Physics. 1965. Vol. 1. P. 195–200.
3. *Александров А. Д.* О парадоксе Эйнштейна в квантовой механике // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84, № 2. С. 253–256.
4. *Фок В. А.* Квантовая физика и философские проблемы // В кн.: Ленин и современное естествознание. М.: Мысль, 1969.
5. *Einstein A., Podolsky B., Rosen N.* Quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? // Phys. rev. Ser. II. 1935. Vol. 47, No. 10. P. 777–780.
6. *Bohr N.* Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? // Ibid. 1935. Vol. 48, No. 8. P. 696–702.
7. *Фок В. А., Эйнштейн А., Подольский Б. и Розен Н., Бор Н.* Можно ли считать, что квантово-механическое описание физической реальности является полным? // Успехи физических наук. 1936. Т. 16, вып. 4. С. 436–457.
8. *Бор Н.* Дискуссии с А. Эйнштейном о теоретико-познавательных проблемах в атомной физике // Философские проблемы современной физики. М.: АН СССР, 1959.
9. *Омельяновский М. Э.* Особенности взаимодействия микрообъектов с измерительными приборами // Вопр. философии. 1971. № 4. С. 84–92.
10. *Лифшиц И. М., Пятигорский Л. М.* О динамических и статистических закономерностях квантовой механики // Философские проблемы современной физики. Киев, 1956.
11. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1963. 5-е изд. Т. 29.
12. *Александров А. Д.* Пространство и время в современной физике в свете философских идей Ленина // В кн.: Ленин и современное естествознание. М.: Мысль, 1969[16]. С. 202–229.
13. *Марков М. А.* О природе физического знания // Вопр. философии. 1947. № 2. С. 140–176.
14. *Гейзенберг В.* Развитие интерпретации квантовой теории // В кн.: Нильс Бор и развитие физики. М.: ИЛ, 1958. С. 23–45.
15. *Александров А. Д.* О смысле волновой функции // Докл. АН СССР. 1952. Т. 85, № 2. С. 291–294.
16. *Смородинский Я. А.* Предисловие // В кн.: Нильс Бор и развитие физики. М.: ИЛ, 1958.
17. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1961. 5-е изд. Т. 18.

[16] Эта статья доступна также на с. 320–341 данного тома. — *Прим. ред.*

Истина и заблуждение [1)]

Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 255–280

Теория относительности, созданная А. Эйнштейном в 1905 г., несмотря на блестящий успех, столкнулась с существенной трудностью: закон всемирного тяготения не поддавался включению в ее общую схему. Лишь после ряда попыток и поисков не только самого А. Эйнштейна, но и других ученых ему удалось в 1915–1916 гг. найти решение этой проблемы. Оно потребовало создания новой теории, явившейся глубоким развитием теории относительности и названной «общая теория относительности». Название выражало основную мысль А. Эйнштейна о том, что в этой теории верен общий принцип относительности, согласно которому из любых тел, движущихся друг относительно друга, совершенно безразлично, какое считать покоящимся, а какое движущимся. В частности, все равно, Земля ли вращается или, напротив, Солнце, так что борьба между воззрениями Птолемея и Н. Коперника представляется «совершенно бессмысленной», и Г. Галилей «был так же неправ или, вернее, так же прав, как и представители церкви, обвинявшие его в ереси» [1, с. 99].

Но эта точка зрения встретила решительные возражения; некоторые ученые утверждали, что общий принцип относительности неверен или по крайней мере не имеет того смысла, какой ему приписывают, и что общая теория относительности имеет в действительности другой смысл и основание. А. Эйнштейн соглашался с такого рода возражениями, но затем опять возвращался к своим прежним взглядам.

Так старая, полная драматизма борьба воззрений на строение Вселенной, которая привела когда-то к суду над Г. Галилеем, возродилась снова. И хотя сейчас никому из оппонентов не грозит никакой суд, сложившаяся ситуация по-своему драматична, потому что поднят такой острый в былое время и, казалось, уже давно решенный вопрос и потому что дискуссия идет

[1)] Опубликовано в «Вопросах философии» 1967. № 4. С. 66–76. Я только уточнил изложение принципа относительности и добавил кое-что в примечаниях. См. также дополнения в конце статьи.

об основах и смысле теории, являющейся, по общему признанию, великим завоеванием науки, причем утверждается, что сам ее гениальный создатель понимал свою собственную теорию не совсем правильно. И хотя в 1965 г. отмечалось пятидесятилетие этой теории, дискуссия все еще продолжается. Споры вышли далеко за пределы специальных журналов и достигли даже страниц «Нового мира», где были напечатаны воспоминания польского физика Л. Инфельда [2]. По ходу рассказа он касается вопроса о системе Коперника и весьма решительно высказывается против В. А. Фока, который в связи со своими важными работами по общей теории относительности последовательно и настойчиво развивал и отстаивал ее понимание, отличное от указанного выше. В силу того что дискуссия оказалась вынесенной в широкую печать, мы считаем нелишним повторить соответствующие разъяснения, тем более что воспоминания Л. Инфельда отличаются известной небрежностью по отношению к истине.

Например, отмечая, что в свое время в Польше и в Советском Союзе А. Эйнштейна считали идеалистом, Л. Инфельд спрашивает: «Почему?», — и тут же разъясняет: «Кажется, в нашей книге „Эволюция физики“ мы утверждали, будто все понятия являются свободным продуктом человеческого разума. Что это в сущности означает? Только то, что наше представление о мире изменяется с течением времени, что, скажем, пятьдесят лет тому назад мы ничего не знали о протонах, мезонах, нейтронах, что наши взгляды на материальный, объективный физический мир различны в различные периоды» [2, с. 191].

Это рассуждение вызывает возражение. Понятия науки отражают действительность и, стало быть, вовсе не являются свободными продуктами разума. Тот факт, что они изменяются по мере того, как нам открываются новые стороны действительности, означает то, что мы вынуждены приспосабливать их к природе. Ведь именно упомянутое Л. Инфельдом открытие протонов, нейтронов и мезонов вместе с другими открытиями, а не свободное творчество заставило физиков изменить взгляды на атомное ядро. Поэтому разъяснение Л. Инфельда сводится к тому, что он просто подставляет это верное положение на место идеалистического утверждения о свободном продуцировании понятий, стараясь убедить читателя, что здесь нет никакой существенной разницы. Но в этом не только разница, а и прямая противоположность взглядов на природу понятий и, стало быть, на науку вообще, а в таком вопросе нужно быть точным.

Л. Инфельд, конечно, прав, стараясь отвести от А. Эйнштейна обвинение в идеализме, ибо А. Эйнштейн и не был идеалистом. Но то, что он не всегда был последователен в своих материалистических взглядах и суждениях, — это факт. О влиянии философии Э. Маха и Д. Юма он сам писал в «Творческой автобиографии». И хотя Л. Инфельд начинает разъяснение по поводу свободы образования понятий словами: «Кажется, в нашей книге

„Эволюция физики“ мы утверждали ... », но утверждение о свободе понятий там есть [3, с. 262].

Другой «упрек», от которого защищает А. Эйнштейна Л. Инфельд, касается толкования системы Коперника. «Эйнштейн, — говорит Л. Инфельд, — кажется, писал, что с точки зрения теории относительности безразлично, движется ли Земля вокруг Солнца, или Солнце движется вокруг Земли. А это значит, что Н. Коперник был неправ, что нет разницы между теорией Птолемея и Коперника». Но после некоторых пояснений он заключает, что «теория Эйнштейна не изменяет взглядов Н. Коперника на движение Земли вокруг Солнца, она только иначе их формулирует» [2, с. 191, 192]. Тут опять непоследовательность: ведь либо «теория Эйнштейна не изменяет взглядов Коперника», либо она приводит к выводу, что «Коперник был неправ». Правда, если понятия и в самом деле суть «свободные продукты разума», то почему же не считать свободным выбор между Птолемеем и Н. Коперником?

Посмотрим, однако, что на самом деле писал А. Эйнштейн и как нужно рассматривать систему Коперника в свете общей теории относительности. Суждение о системе Коперника мы находим в книге А. Эйнштейна и Л. Инфельда «Эволюция физики». Поэтому, кстати, фраза Л. Инфельда: «Эйнштейн, кажется, писал», — совершенно непонятна; ведь он писал эту книгу вместе с А. Эйнштейном! А написано в этой книге следующее: «Можем ли мы сформулировать физические законы таким образом, чтобы они были справедливыми для всех систем координат, не только для систем, движущихся прямолинейно и равномерно, но и для систем, движущихся совершенно произвольно по отношению друг к другу? Если это можно сделать, то наши трудности будут разрешены [2]. Тогда мы будем в состоянии применять законы природы в любой системе координат. Борьба между воззрениями Птолемея и Н. Коперника, столь жестокая в ранние дни науки, стала бы тогда совершенно бессмысленной. Любая система координат могла бы применяться с одинаковым основанием. Два предложения: „Солнце покоится, а Земля движется“ и „Солнце движется, а Земля покоится“, означали бы просто два различных соглашения о двух различных системах координат. Могли бы мы построить реальную релятивистскую физику, справедливую во всех системах координат, физику, в которой имело бы место не абсолютное, а лишь относительное движение? Это в самом деле оказывается возможным ... Проблема формулирования физических законов для всякой системы координат была разрешена так называемой общей теорией относительности» [3, с. 191, 192]. А если это так, то из сказанного следует, что с точки зрения этой теории борьба между воззрениями Птолемея и Н. Коперника выглядит

[2] Речь идет о трудностях, связанных с понятием абсолютного движения. — *А. Д. Александров.*

«совершенно бессмысленной». И как же можно тогда уверять, что «теория Эйнштейна не изменяет взглядов Коперника на движение Земли вокруг Солнца»?

Мы вынуждены, однако, разъяснить, что весь приведенный выше отрывок ошибочен от начала до конца, что изложенное в нем понимание как основной проблемы общей теории относительности, так и вопроса о системе Коперника неверно.

Во-первых, возможность описывать движение тел, пользуясь разными системами координат, осознана давно и поэтому вовсе не является заслугой теории относительности. Еще Птолемей указывал, что суточное движение небесных светил можно объяснить как вращением Земли, так и вращением «всего мира», подчеркивая, что обе точки зрения геометрически эквивалентны. Но для решения практических задач, что он считал своей основной целью, ему представлялось более правильным исходить из предположения о неподвижности Земли. Для него было бы вполне приемлемо утверждение А. Эйнштейна и Л. Инфельда, что «два предложения: „Солнце покоится, а Земля движется“ и „Солнце движется, а Земля покоится“, означали бы просто два различных соглашения о двух различных системах координат». Инквизиторы, судившие Г. Галилея, тоже признавали возможность описывать движение светил, считая либо Солнце, либо Землю неподвижной. Но спор шел не о выборе системы координат, не о способах описания движения небесных тел, а о строении мира: является ли Земля его неподвижным центром, как ее, согласно учению религии, установил бог, или это неверно, как утверждал, следуя Н. Копернику, еретик Г. Галилей.

Движение — мы говорим о механическом движении — есть изменение положения тела. Положение же тела определяется относительно других тел, так что то же самое верно и для движения. Абсолютное значение имеет взаимное расположение и взаимное движение тел, но движение одного тела относительно. Описание движения тел, когда то или иное из них принимается за неподвижное, не представляет собой ничего особенного. Все мы говорим о движении Солнца, Луны и звезд по небесному своду, считая тем самым Землю неподвижной. В описании отплывающего корабля можно встретить следующие слова: «Набережная стала удаляться, и вот уже поплыли мимо дома». Математическим выражением этого обычного описания и является возможность выбора системы координат, связанной в одном случае с Землей, в другом — с пароходом и т. п. Более того, если мы можем описать движение в одной системе координат, то простой пересчет позволяет сделать это в любой другой (когда даны выражения одних координат через другие). Это верно для описания не только движения тел, но и любых явлений; если закон протекания явления математически выражен в одних координатах, то путем такого пересчета его можно выразить в любых других.

После того как в 1907 г. Г. Минковский пришел к более глубокому пониманию специальной теории относительности, правила, по которым законы физики, согласованные с требованиями этой теории, можно выписывать в любых координатах, стали совершенно ясными, т. е. «проблема формулирования физических законов для всякой системы координат», о чем писали А. Эйнштейн и Л. Инфельд, — законов, согласованных с теорией относительности, была решена, и никакой общей теории относительности тут не требовалось. Поэтому сама постановка вопроса о том, какую проблему решала эта теория, оказывается ошибочной: общая теория относительности решала совсем другую проблему. Проблему эту мы уже упоминали: она состояла в том, чтобы дать релятивистскую, т. е. согласованную с теорией относительности, теорию всемирного тяготения. Поэтому общая теория относительности, собственно, и есть такая теория тяготения.

Так же как постановка проблемы, якобы решавшейся общей теорией относительности, является ошибочной и оценка борьбы между воззрениями Птолемея и Н. Коперника. С точки зрения современной науки она вовсе не выглядит бессмысленной, хотя развитие астрономии и показало, что Н. Коперник был неправ, считая Солнце неподвижным центром Вселенной.

Первое преимущество системы Коперника состоит в том, что она гораздо проще: в ней движение планет представляется очень ясно, тогда как в системе Птолемея оно выглядит запутанным. Эта простота не случайна. Солнце является не только удобным для описания движения планет центром Солнечной системы, но и ее физическим центром. Более того, вращение Земли происходит относительно всех звезд. Конечно, можно описывать его, считая Землю неподвижной, а Вселенную вращающейся. Но представлять Землю физическим центром мироздания нелепо. Астрономия показала, что движение более легких небесных тел вокруг массивного тела представляет собой общее явление. Луна вращается вокруг Земли, большинство планет тоже имеет свои спутники, и когда Г. Галилей, открыв спутники Юпитера, увидел как бы Солнечную систему в миниатюре, он убедился в правоте Н. Коперника. Теперь установлено, что многие звезды, подобно Солнцу, имеют свои планеты. Все это показывает, что система Коперника не просто более удобна для описания движения планет, но она явилась общим принципом. Глубокое его основание было вскрыто еще И. Ньютоном в сформулированных им законах механики и законе всемирного тяготения.

Но этим преимущества системы Коперника не исчерпываются. Движение тела, хотя и определяется относительно других тел, но влияет на процессы, происходящие в самом теле. Испытывая качку корабля или болтанку самолета, вы явно чувствуете на себе влияние этого движения. Г. Галилей открыл, что равномерное прямолинейное движение никакого влияния, по крайней мере на механические явления, не оказывает. Этот закон природы, открытый Г. Галилеем и подтвержденный затем точнейшими наблюдениями, получил название принципа относительности. А. Эйнштейн при построении своей специальной теории относительности принял его за основу и обобщил, считая его верным для любых явлений, независимо от их особой природы. В таком виде принцип относительности утверждает, что равномерное и прямолинейное движение материальной системы как целого не влияет на ход процессов, происходящих внутри системы.

Движение системы, о котором идет речь в принципе относительности, определяется по отношению к инерциальным системам — таким, в которых известный закон инерции проявляется в обычной форме: тело движется по инерции равномерно и прямолинейно. В системе, движущейся относительно инерциальной равномерно и прямолинейно, движение по инерции будет выглядеть так же, т. е. такая система сама является инерциальной (но в других системах движение по инерции может не выглядеть равномерно, например при ускорении самолета на взлете стоящие на месте предметы кажутся «убегающими» все скорее и скорее). Принцип относительности можно выразить еще в такой форме: как закон инерции, так и все законы протекания явлений одинаковы в отношении ко всем инерциальным системам; все такие системы одинаковы в смысле проявления в них законов природы; одинаковые явления в них протекают одинаково. Например, завтрак, поданный вам в равномерно летящем самолете, вы съедаете так, как сделали бы это дома или в ресторане, т. е., когда для приема пищи созданы одинаковые условия в самолете, на пароходе или в ресторане, само это явление протекает одинаково: вы спокойно едите, независимо от того, что самолет, в котором вы сидите, летит (относительно Земли) со скоростью 900 км/ч. Принцип относительности служит лишь обобщением и точным выражением этого известного каждому летавшему в самолетах факта.

Но это касается только инерциальных систем. Когда же самолет набирает скорость для взлета, вас прижимает к спинке кресла — вы чувствуете ускорение движения; при болтанке прием пищи будет протекать не так, как на Земле, и вы можете даже вовсе потерять аппетит; на развертевшемся «чертовом колесе» вы испытываете центробежную силу, которая стаскивает вас с колеса. Совершенно так же вращение Земли обнаруживается не только в видимом движении небесных тел, но и в процессах, протекающих на самой Земле. Всем известно из школы, что именно вращением Земли объясняется тот факт, что реки больше размывают (в северном полушарии) правый берег. Все слышали также о маятнике Фуко; плоскость качания маятника, помещенного на вращающемся теле, поворачивается относительно этого тела. Вращение сказывается и на оптических явлениях, как было обнаружено соответствующими опытами. Короче говоря, для вращающихся систем принцип относительности уже не является справедливым: в них явления протекают неодинаково в зависимости от угловой скорости вращения; эти системы не равноправны. То же самое верно вообще для систем, движущихся неравномерно или непрямолинейно. Наши простые примеры показывают, что это факт, установленный не только особыми опытами; он может быть проверен каждым непосредственно.

Отсюда следует, что система Коперника имеет перед системой Птолемея еще одно и притом очень существенное преимущество. В системе Птолемея законы природы проявляются по-другому, чем в системе Коперника, потому что в системе, связанной с Землей, сказывается ее вращение. И так как это заключение основано на несомненных фактах, то никакая теория не может его изменить и сделать борьбу между воззрениями Птолемея и Н. Коперника бессмысленной.

Таково более глубокое понимание этой борьбы, к которому пришла наука. Во-первых, два предложения: «Солнце покоится, а Земля движется» и «Солнце движется, а Земля покоится», означают два разных соглашения о выборе системы отсчета, или системы координат. Движение всякого тела относительно и может описываться в разных системах. Но это известно без всякой теории относительности, что (хотя и отчасти) понимал еще Птолемей. Во-вторых, система Коперника гораздо проще. В-третьих, Солнце является физическим центром Солнечной системы, и система Коперника отражает это, а система Птолемея — нет; система Коперника открывает на примере Солнечной системы общий закон движения более легких тел вокруг более массивных. Если вертятся два тела — две планеты, два волчка — вокруг какого вертится мир? Далее можно отметить, что вращение Земли будет видно из всякой внешней системы, инерциальной хотя бы с некоторой точностью. Можно сказать: «как ни посмотри, а она вертится», в этом смысле вращение Земли имеет абсолютный характер. И наконец, в гелиоцентрической системе законы природы проявляются в более простой форме, тогда как в системе Птолемея их проявление несколько иное в силу вращения Земли (система, связанная с Солнцем, инерциальная с большой степенью точности, а связанная с Землей — нет). Это позволяет сказать, что различие между системой Коперника и Птолемея не только относительное, но и абсолютное. Ведь, например, факт размывания берега реки существует независимо от того, к какой системе координат относится движение Земли. В этом смысле этот факт абсолютный. Соответственно само вращение Земли абсолютно.

Такое заключение как будто бы противоречит тому, что «движение по самому понятию относительно». Но это не так. Относительное не только относительно, но содержит в себе и абсолютное. Вращение происходит в физическом поле, в потоках излучения, пронизывающих все пространство. Это поле представляет собой универсальную среду, и потому вращение относительно него имеет абсолютный характер. Когда предполагали, что универсальной средой является мировой эфир, считалось возможным определять абсолютное движение в эфире. Это представление было отброшено в соответствии с принципом относительности. Никакой абсолютной скорости равномерного прямолинейного движения относительно «неподвижного эфира» не существует, не существует ее и относительно универсального поля излучения, но вращение относительно этого поля существует: оно обнаруживается в соответствующих опытах (таких как оптические опыты Ж. Саньяка, А. Майкельсона и Г. Гаэля и др.), см., например, [4]. Это есть бесспорный факт, и потому современная наука доказывает объективное преимущество системы Коперника по сравнению с системой Птолемея. Поэтому же построить физику, в которой имело бы место лишь относительное движение, как это говорится в приведенном выше отрывке из книги А. Эйнштейна и Л. Инфельда, невозможно [3)].

Все сказанное мы могли установить, используя только аргументы опыта, излагая суть вопроса нарочито популярно, чтобы лишний раз подчеркнуть, что разрешить спор можно без особых теорий. Что же нового вносит сюда общая теория относительности? Считают, что в ее основе лежит «общий принцип относительности»: говоря словами А. Эйнштейна, все тела отсчета эквивалентны в отношении описания природы, каким бы ни было их состояние движения, а отсюда заключают, что системы Коперника и Птолемея равноправны. Но, как мы убедились на простых примерах, явления во вращающейся и невращающейся системах протекают различно.

Очевидно, тут явное недоразумение. И это действительно так. «Общий принцип относительности» не означает физической равноправности всех тел отсчета независимо от их движения в том смысле, что в них явления протекают одинаково. Этот принцип означает лишь то, что законы физики могут быть выражены в общей форме, которая годится для любых систем координат. Но тогда в такое выражение входят величины, зависящие от этой системы; например, в случае вращающейся системы — ее угловая скорость. А это как раз и означает, что течение явления, согласно такому закону, зависит от скорости вращения!

Возможность выразить уравнения физики в общем виде, применимом в любой системе координат, существует в любой теории, будь то механика Ньютона или специальная теория относительности А. Эйнштейна. Все дело сводится к преобразованиям координат, о чем мы уже говорили, ссылаясь, в частности, на Г. Минковского. Поэтому «общий принцип относительности» не имеет физического содержания, а сводится к чисто математическому требованию выражать законы в общей форме для любых координат. Такую форму называют ковариантной (по-русски сопреобразующейся), чем выражают тот факт, что уравнения соответственно преобразуются при преобразовании координат; само же указанное требование называют принципом кова-

[3)] Например, кривизна «мировой линии» материальной точки не зависит от системы координат и является поэтому абсолютным выражением неравномерности движения точки.

рианчности. Таким образом, можно сказать, что «общая относительность» не означает ничего иного, как математический принцип ковариантности [4].

На это обратили внимание вскоре после появления основных работ А. Эйнштейна по общей теории относительности, см., например, [5, с. 211], и он вполне согласился с замечанием. Однако он все же возвращался к мысли о том, что «общий принцип относительности» служит отправным пунктом его теории. Как мы видели, именно так поставлен вопрос в его книге, написанной вместе с Л. Инфельдом, причем первое ее издание появилось без малого через сорок лет после высказанных замечаний, с которыми он согласился.

Насколько укоренилось представление об «общей относительности», показывает опыт, проведенный академиком Б. П. Константиновым: он задавал физикам простой вопрос, касающийся одного явления, связанного с вращением, и только один из двадцати пяти опрошенных ответил сразу правильно, а многие даже настаивали на своем ошибочном выводе. Повторив опыт, я тоже получил неверные ответы. Вопрос состоял в следующем. Известно, что вокруг вращающегося заряженного шара возникает магнитное поле. Спрашивается: обнаружит ли его наблюдатель, находящийся на шаре и вращающийся вместе с ним? Верный ответ гласит: да, обнаружит. Неверный ответ: нет, не обнаружит. Он основывается, очевидно, на том соображении, что шар покоится относительно находящегося на нем наблюдателя, и «поэтому для такого наблюдателя все должно происходить так же, как если бы шар не вращался». Но если бы речь шла о шаре, движущемся равномерно и прямолинейно, это соображение было бы верным, что следует из принципа относительности, так как равномерное и прямолинейное движение системы (в данном случае системы шар—наблюдатель) не обнаруживается внутри этой системы. Но для вращения принцип относительности не выполняется, и наблюдатель, находящийся на вращающемся теле, замечает влияние вращения. Так, неправомерное расширение принципа относительности приводит даже ученых-специалистов к элементарным заблуждениям.

Действительное содержание теории Эйнштейна состоит не в идее «общей относительности», а в новых представлениях о пространстве и времени и объяснении на их основе всемирного тяготения. Специальная теория относительности, как показал Г. Минковский, объединяет пространство и время в единую абсолютную форму существования материи — пространство—время, пространство же само по себе и время само по себе не имеют абсолютного характера. Принцип относительности, лежащий в основе специальной теории относительности, выражается в однородности пространства—времени. Основное положение общей теории относительности состоит в том,

[4] В отличие от этого принцип относительности выражается не ковариантностью, а инвариантностью — неизменяемостью уравнений при соответствующих преобразованиях (преобразования Лоренца в случае теории относительности).

что пространство—время обладает такими свойствами, что и в специальной, только приближенно, на достаточно малых участках. Вообще же оно неоднородно; отличия в его структуре определяются распределением и движением масс материи и в свою очередь определяют взаимодействие и движение этих масс, т. е. явления всемирного тяготения. Зависимость структуры (метрики) пространства—времени от материи выражается данными А. Эйнштейном уравнениями.

Позже было показано, что из этих уравнений уже чисто математически следует, что тела должны двигаться так, как если бы между ними действовали силы тяготения, в первом приближении совпадающие с теми, какие определяются законом тяготения Ньютона (первоначально А. Эйнштейн вводил закон движения тел особо). Соответственно то новое, что дала теория Эйнштейна в отношении системы Коперника, состояло вовсе не в доказательстве мнимой эквивалентности ее системе Птолемея, а в новом выведении законов движения планет и в поправках, которые она внесла в эти законы по сравнению с выводами теории Ньютона. Иначе говоря, задача теории Эйнштейна в отношении системы Коперника была в принципе совершенно такой же, какой была задача теории Ньютона. Как И. Ньютон вывел из установленных им законов механики и тяготения законы движения планет, так и А. Эйнштейн из сформулированных им уравнений вывел те же законы в уточненном виде. При этом, конечно, как и И. Ньютон, А. Эйнштейн делает предположение, что влиянием тел за пределами Солнечной системы можно пренебречь. В теории Эйнштейна это нашло выражение, в частности, в том, что на больших расстояниях («в бесконечности») пространство считается евклидовым.

Основанием общей теории относительности является, как уже говорилось, идея о зависимости структуры пространства—времени от распределения и движения материи. Поэтому эта структура в отличие от той структуры, которая постулировалась в специальной теории относительности и в теории Ньютона, считается неоднородной и переменной — она выступает как физическое поле. Поэтому нельзя заранее указать системы отсчета, в которых она представлялась бы наиболее просто (как это можно в специальной теории относительности), а приходится пользоваться произвольными координатами и соответственно писать уравнения в общековариантной форме. При этом любые системы координат, конечно, эквивалентны, раз они определяются в отрыве от всякой структуры пространства—времени (не считая топологии), но именно в силу такого отвлечения их эквивалентность не означает ничего иного, как возможность пользоваться любыми координатами, т. е. сводится к принципу ковариантности. Идея же «общей относительности» является как бы смешением общей ковариантности с физической идеей неоднородности и переменности структуры пространства—времени.

Обобщение принципа относительности, которое на самом деле сыграло большую роль при построении А. Эйнштейном его теории, — это принцип эквивалентности, согласно которому влияние ускоренного движения системы на протекающие в ней явления равносильно влиянию тяготения. Например, при разбеге самолета вас прижимает к спинке кресла как бы под действием дополнительной силы тяжести. С этой точки зрения ускоряющаяся система эквивалентна неподвижной, в которой действуют соответствующие силы тяготения. Но, как известно (и, кажется, тут уже никто не спорит), эта эквивалентность приближенна и ограниченна, так что из нее эквивалентность любых систем отсчета никак не вытекает. В самой же общей теории относительности принцип эквивалентности теряет значение особого принципа, сводясь к пропорциональности инерциальной и гравитационной массы и к чисто математической теореме (риманово пространство в малом изометрично евклидову с точностью второго порядка). Утверждение же об эквивалентности поля тяготения и поля ускорения теряет в общей теории относительности смысл. Первое описывается полем римановой кривизны и, стало быть, абсолютно; второе же, очевидно, относительно и зависит от системы отсчета. Непонимание этого и служит одним из источников заблуждений и бесконечных споров.

* * *

Не удивительно ли, что сам А. Эйнштейн, гениальный создатель теории, поражающей своей смелостью, глубиной и стройностью, допускал неточности и даже ошибки в понимании ее основ! Однако в истории физики известно немало случаев, когда основатель той или иной теории понимал ее в некоторых отношениях неправильно. Так, С. Карно в 1824 г. опубликовал работу «Размышление о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу», в которой изложил теорию тепловых машин. Основные его выводы верны и сохраняют свое значение, хотя он исходил из неверного представления о теплороде. Правильное понимание пришло позже, когда стало понятно, что тепло есть форма энергии, и были открыты закон сохранения энергии и закон энтропии.

Дж. К. Максвелл дал математически точную теорию электромагнетизма, исходя из представлений об эфире как о механическом носителе электрических и магнитных явлений. Только позднее Х. А. Лоренц высказал мысль о том, что электромагнитное поле должно рассматриваться само по себе как особый вид материи. Уравнения Максвелла остались, а представления об эфире в их прежних формах отброшены.

Тот же Х. А. Лоренц вывел преобразования координат и времени, не изменяющие уравнений Максвелла, но не понял их подлинного смысла. Через год А. Эйнштейн правильно истолковал смысл преобразований Лоренца, что и составило, собственно, содержание его теории относительности. Его углубил затем Г. Минковский. Преобразования так и носят имя Х. А. Лоренца, а теория — А. Эйнштейна.

Э. Шрёдингер, получив основное уравнение квантовой механики (названное его именем), истолковывал это уравнение неправильно. Верная трактовка была дана вскоре другими физиками. Уравнение Шрёдингера осталось, а его первоначальное физическое понимание отброшено.

Перечисление таких исторических примеров можно было бы продолжить. Во всех них есть общее; оно состоит в том, что истина открывалась не сразу в своем подлинном содержании, а сначала более формально и в неразрывной связи с прежними представлениями.

Так же обстоит дело и с общей теорией относительности Эйнштейна. В ее построении А. Эйнштейн исходил из идеи относительности, сыгравшей решающую роль в создании специальной теории относительности. Поэтому он и искал обобщения самого принципа относительности и видел в этом главную отправную точку всего построения. Но на самом деле суть его выводов состояла в обобщении представлений о пространстве и времени, развивающих идеи Г. Минковского. И хотя А. Эйнштейн понимал это, он оказался не в силах оторваться от своих первоначальных взглядов. Сказалось еще влияние Э. Маха, которое помогало А. Эйнштейну, как он сам отмечал, в критике прежних понятий, но потом повело по неправильному пути в обосновании общего принципа относительности.

Однако все это не умаляет значения его теории совершенно так же, как давно оставленные наукой представления Максвелла об эфире не умаляют значения его теории. Так и А. Эйнштейн создал не общую теорию относительности, а теорию неоднородного пространства—времени, объясняющую тяготение. Кстати, Г. Минковский настаивал на том, что специальная теория относительности есть теория абсолютного пространства—времени и что само слово «относительность» не выражает ее подлинной сущности.

Идеи Минковского не были восприняты в полной мере, и соответствующее им (кратко изложенное выше) понимание общей теории относительности встречало недоумение и возражения. Примером тому служат воспоминания Л. Инфельда, где он пишет о научных взглядах В. А. Фока, который наиболее последовательно развивал и пропагандировал такое понимание теории Эйнштейна. Отметим, что, как установлено в нашей литературе по философским проблемам физики, одним из источников приверженности к теории «общей относительности» и недооценке идей Минковского служит позитивизм [5]. В. А. Фок же опирается на диалектический материализм [6].

---

[5] См., напр., глубокий анализ философских взглядов А. Эйнштейна в [6]. См. также [7, 8]. Обратим внимание на то, что в книге [9, с. 222–225] американский физик Р. Дикке, цитируя Дж. Беркли и Э. Маха, показывает ясную связь их взглядов с соответствующими взглядами на теорию «общей относительности».

[6] Введение к книге «Теория пространства, времени и тяготения» он заканчивает следующими словами: «Общефилософская сторона наших взглядов на теорию пространства, времени и тяготения сложилась под влиянием философии диалектического материализ-

Но мы не будем касаться философии, обсуждая проблему в плане только фактов.

Л. Инфельд утверждает, будто В. А. Фок «выступил со своим вариантом теории Эйнштейна», и называет это «экспериментами Фока», пытаясь создать впечатление, что взгляды В. А. Фока никем не поддерживались. Однако это неверно. Оставляя в стороне пренебрежительный термин «эксперименты», нужно разъяснить, что В. А. Фок предлагает не «свой вариант теории Эйнштейна», а свое понимание ее, что он вовсе не был в этом одинок и в настоящее время число сторонников тех же взглядов заметно увеличилось. Например, при обсуждении доклада В. А. Фока в Париже в 1965 г. с ним согласились такие крупные специалисты, как Г. Бонди, А. Лихнерович, К. Каттанео и др. В частности, Г. Бонди — председатель Международного комитета по гравитации согласился с В. А. Фоком в том, что общий принцип относительности бессодержателен. Можно сослаться и на нобелевскую речь известного физика Ю. Вигнера и на другие примеры. Особенно стоит обратить внимание на фундаментальную монографию Дж. Синга [11], где эта теория последовательно излагается именно как теория пространства—времени, причем в предисловии автор, подчеркивая значения идей Минковского, с иронией говорит об их недостаточном понимании, о «туманной философии», связанной со словом «относительность», о бессодержательности общего принципа относительности и т. д.

Далее Л. Инфельд говорит о выводе законов движения из уравнений Эйнштейна в результате совместной работы А. Эйнштейна, Л. Инфельда, Б. Гоффмана [12] и независимо от них В. А. Фоком, работа которого появилась годом позже [13]. Между этими работами есть существенные различия, в частности В. А. Фок использовал специальные, так называемые гармонические координаты. Описывая дискуссию по этому поводу, проходившую в Москве, Л. Инфельд утверждает: «все физики, чьи имена хоть что-то значат в мире», уверяли, что «дополнительные уравнения Фока для координатной системы ничего существенного не добавляют. Но В. А. Фок стоял на своем» [2, с. 194].

Дискуссия проходила в 1955 г., а в 1963 г. появилась работа польского физика Г. Воеводы, где было математически доказано, что В. А. Фок прав, что уравнения движения в том виде, в каком они получаются методом Эйнштейна и его соавторов или методом Фока, могут быть выведены только в гармонических координатах и что, стало быть, сами А. Эйнштейн, Л. Инфельд и

ма, в особенности же под влиянием книги Ленина „Материализм и эмпириокритицизм“. Учение диалектического материализма помогло нам критически подойти к точке зрения А. Эйнштейна на созданную им теорию и заново ее осмыслить. Оно помогло нам также правильно понять и истолковать полученные нами новые результаты. Мы хотели бы здесь это констатировать, хотя в явной форме философские вопросы в этой книге и не затрагиваются» [10, с. 18].

Б. Гоффман пользовались неявно теми же координатами, по крайней мере в том приложении, в каком они решали задачу! Не удивительно ли такое смешение истины и заблуждения: авторы фундаментальной работы, сделавшие вывод чрезвычайного теоретического значения, причем среди них был и А. Эйнштейн, сами не совсем поняли ее истинное содержание, а другие физики, «чьи имена хоть что-то значат в мире», поддержали их, утверждая вместе с Л. Инфельдом, что условия гармоничности координат «ничего существенного не добавляют». Но теперь, после работы Воеводы, спор решен с помощью математики.

Л. Инфельд не только необоснованно пишет о «заблуждениях» В. А. Фока и его одиночестве, но низко оценивает и саму его работу как «упрощенную»; он доходит до обвинения В. А. Фока в недобросовестности, считая, что тот приписал себе приоритет в выводе законов движения. Но это обвинение должно быть отброшено, ибо В. А. Фок, хотя и получил свои результаты совершенно независимо, всегда ссылался на работу А. Эйнштейна, Б. Гоффмана и Л. Инфельда. Более того, приоритет в открытии связи уравнений движения с уравнениями поля принадлежит А. Эйнштейну и Ф. Громмеру [14], статья которых появилась за одиннадцать лет до указанной работы. Но почему-то Л. Инфельд не считает нужным упомянуть об этом. Что же касается данной Л. Инфельдом низкой оценки работы В. А. Фока, то она неосновательна. Правда, В. А. Фок не получил второго приближения, поручив это аспирантке, но зато ввел координаты, о которых шла речь, и рассматривал протяженные тела, а не особые точки поля, как А. Эйнштейн и его соавторы.

Л. Инфельд пишет еще о некоторых явлениях периода культа личности Сталина, о нападках на А. Эйнштейна, упоминает тут же о Т. Д. Лысенко, но не говорит ни слова о той полемике, которая велась у нас вокруг теории относительности и в которой целый ряд физиков и философов выступали как раз в защиту этой теории, против того, чтобы объявить ее, как делали другие, «реакционным эйнштейнианством» и т. д. В этой полемике значительную роль сыграла статья В. А. Фока [15]. Поскольку Л. Инфельд умалчивает об этом, создается впечатление, будто вся критика А. Эйнштейна, т. е. и со стороны защитников его теории, в частности В. А. Фока, шла чуть ли не по тому же руслу, что и «критика» генетики со стороны Т. Д. Лысенко. Но это совершенно неверно. И если, как пишет в заключение Л. Инфельд, нападки на А. Эйнштейна прекратились, то одной из причин были усилия тех, кто открыто отстаивал в дискуссии настоящую науку.

Об «упреках» А. Эйнштейну, касающихся свободы выбора понятий и взглядов на систему Коперника, Л. Инфельд пишет, что «необоснованность этих упреков связана с проблемой научной изоляции в годы культа личности Сталина» [2, с. 192]. Но это тоже неверно: ни «культ», ни «изоляция» тут ни при чем. Проанализировав эти упреки на основе подлинного текста книги

А. Эйнштейна и Л. Инфельда, мы убедились, что они справедливы. Научная же изоляция есть плод фантазии Л. Инфельда: уж научную-то литературу мы тогда читали! Действительно, для тех лет была характерна резкость оценок, нередкое «разоблачение» идеализма без серьезного анализа вопросов по существу, критика с позиций вульгарного, а не диалектического материализма. Но, как уже говорилось, были физики и философы, которые открыто выступали против этого. Главная борьба в связи с теорией А. Эйнштейна велась в двух направлениях: как против отрицания относительности, так и против ее неправомерного преувеличения. Верное понимание достигается только при условии диалектической гибкости понятий, раскрывающей в каждом данном вопросе конкретное соотношение противоположностей относительного и абсолютного. Укоренившееся преувеличение роли понятия относительности до сих пор вызывает споры и необходимость разъяснений по поводу вещей, которые, казалось бы, должны стать наконец очевидными. Но так или иначе истина все же утверждается.

1976 г.

* * *

Понимание общей теории относительности как теории тяготения, которое наряду с некоторыми другими авторами особенно последовательно и настоятельно развивал и отстаивал В. А. Фок, постепенно распространялось и утверждалось среди физиков. По поводу мнимой равноправности систем Птолемея и Коперника. Известный физик Р. Фейнман иронизировал над представлением, будто все равно, что вертится — Земля или Вселенная, так что закручивая волчок, не закручиваем ли мы весь мир. «Нельзя утверждать, — писал он, — что движение относительно. Не в этом содержание принципа относительности» [16, с. 101]. В общем понимание, которое описывал В. А. Фок, утверждалось, и в этом свете выпады Л. Инфельда выглядят тем более недостойными. Еще более недостойным выступает их опубликование в таком журнале, как «Новый мир», в несколько сокращенных воспоминаниях Л. Инфельда. Тот, кто предложил редакции опубликовать их, мог бы сократить, в частности, и оскорбительные выпады против В. А. Фока (как пренебрежительное слово «эксперименты», сопоставление с Т. Д. Лысенко и др.). Это не было сделано. Так научная и философская полемика по поводу теории относительности выплеснулась на страницы популярного журнала в недопустимой форме.

Друзья и ученики В. А. Фока были возмущены и просили меня ответить (поскольку я хотя и был в свое время учеником В. А. Фока, но имел совершенно независимое положение). Однако редакция «Нового мира» отказалась напечатать мою статью, даже несмотря на поддержку П. Л. Капицы, ссылаясь на то, что не может брать на себя «роль судьи» (как будто они уже не «осудили» В. А. Фока!). Поэтому статья появилась в «Вопросах философии».

В. А. Фок подвергался и другим нападкам, отстаивая истину против большинства наших влиятельных физиков. Мне эта атмосфера известна и по собственному опыту, так как в том же 1955 г. я выступал как соратник В. А. Фока, а также отстаивал понимание структуры пространства—времени теории относительности как проявления причинно-следственной структуры мира, которое тоже стало общепринятым.

Вспоминая нападки, каким подвергался В. А. Фок, как он защищал истину против большинства, мы должны тем более отдать должное его научному проникновению и мужеству. Для более полного разъяснения его вклада привожу изложение моего совместного с Г. М. Идлисом доклада.

1987 г.

Вклад В. А. Фока в релятивистскую теорию пространства, времени и тяготения [7)]

В XX столетии необычайный прогресс в области физики ознаменован прежде всего созданием и развитием двух фундаментальных физических теорий — теории относительности и квантовой механики, которые привели к радикальному пересмотру всех основных физических понятий.

Только немногие физики смогли эффективно участвовать в разработке обеих этих теорий, резко отличающихся друг от друга по своей сущности и по используемому математическому аппарату. Одним из таких физиков был Владимир Александрович Фок, вообще отличавшийся поразительной способностью проникать всюду в самую суть дела и фактически никогда не испытывавший никаких математических затруднений при доведении своих специальных исследований до надлежащего результата.

Его работы по теории тяготения (общей теории относительности), связанные с необходимым пересмотром некоторых принципиальных исходных положений релятивистской концепции А. Эйнштейна и с получением общих законов движения гравитирующей материи непосредственно из уравнений гравитационного поля, резюмированы в его монографии «Теория пространства, времени и тяготения», первое издание которой вышло в 1955 г., а второе (дополненное) — в 1961 г. [10].

Релятивистские уравнения поля тяготения, связывающие это поле с искривленностью мирового пространства—времени, порождаемой движущейся материей, являются обобщением ньютоновского закона всемирного тяготения, или эквивалентного ему уравнения Пуассона с характерным для них принципом эквивалентности гравитационных и инертных масс, или принципом локальной эквивалентности поля тяготения в инерциальной системе отсчета и поля сил инерции в неинерциальной системе отсчета.

---

7) Сокращенное изложение доклада на собрании Академии наук СССР в Ленинграде, посвященном памяти В. А. Фока (1979 г.).

А. Эйнштейн полагал, что свойство полученных им уравнений сохранять свой вид при любых преобразованиях координат (т. е. удовлетворять естественному математическому требованию общей ковариантности) соответствует физической равноправности всевозможных систем координат и принципиальной невозможности выделить какие-либо из них в качестве привилегированных (подобных декартовым инерциальным системам координат в неискривленном пространстве—времени специальной теории относительности).

В. А. Фок обратил внимание на то, что локальная эквивалентность поля тяготения в инерциальной системе отсчета и поля сил инерции в неинерциальной системе отсчета вовсе не означает физической эквивалентности этих полей в целом (для всего пространства—времени), т. е. не означает физической равноправности всевозможных систем координат. Используя естественные предельные условия неискривленности (или «галилеевости») мирового пространства—времени на бесконечном удалении от рассматриваемой произвольной конечной системы материальных тел, он нашел физически привилегированные — гармонические — системы координат, которые оказываются связанными между собой линейными преобразованиями Лоренца (т. е. движутся относительно друг друга без ускорения) и переходят на бесконечности в обычные декартовы инерциальные системы координат.

Следовательно, вопреки мнению А. Эйнштейна и всех его ортодоксальных последователей ускорение в отличие от скорости сохраняет свой абсолютный характер в теории относительности, даже при переходе от так называемой специальной теории относительности к так называемой общей теории относительности: всякое тело, движущееся без ускорения относительно одной из физически выделенных гармонических систем координат, движется без ускорения и относительно любой другой. Это подтверждает физическую преимущественность гелиоцентрической системы Коперника по сравнению с геоцентрической системой Птолемея, поставленную под сомнение А. Эйнштейном и Л. Инфельдом в книге «Эволюция физики». Применительно к Солнечной системе, в которой основная масса сосредоточена именно в Солнце, гелиоцентрическая система Коперника оказывается более близкой к требуемой гармонической системе координат и соответственно более инерциальной, чем геоцентрическая система Птолемея.

Непосредственное использование гармонических систем координат существенно упростило В. А. Фоку решение проблемы общих законов движения произвольной конечной системы материальных тел.

А. Эйнштейн и Ф. Громмер еще в 1927 г. выяснили, что из-за нелинейности уравнений гравитационного поля, порождаемого движущимися телами, нельзя задавать законы движения независимо от законов поля, причем движение материальных точек с бесконечно малыми массами по геодезическим линиям гравитационно искривленного (риманова) мирового пространства—времени, первоначально постулировавшееся в общей теории относительности дополнительно к уравнениям гравитационного поля и независимо от них, оказалось непосредственно выводимым из этих уравнений в надлежащем приближении при определенных предположениях о характере рассматриваемых особенностей поля.

В 1938 г. А. Эйнштейн, Л. Инфельд и Б. Гоффман с помощью разработанного ими метода последовательных приближений получили из релятивистских уравнений гравитационного поля надлежащие законы движения в ньютоновском приближении для точечных особенностей поля, эквивалентных сферически симметричным телам бесконечно малых размеров. Но соответствующие вычисления оказались чрезвычайно громоздкими и обремененными большим количеством технических деталей, из-за чего в опубликованной статье, несмотря на ее значительный объем, авторы ограничились изложением общих идей работы и приведением окончательных результатов, сообщив, что все проведенные вычисления хранятся в Принстонском институте высших исследований.

Совершенно независимо от этой работы А. Эйнштейна, Л. Инфельда и Б. Гоффмана и практически одновременно с ними В. А. Фок решил аналогичную проблему для более реального случая сферически симметричных невращающихся тел конечных размеров, детально изложив в компактной статье весь процесс получения общих законов движения таких тел в ньютоновском приближении при использовании гармонических систем координат. Причем ученики В. А. Фока продолжили его исследование, рассмотрев в постньютоновском приближении данный случай и в ньютоновском приближении более общий случай вращающихся тел. Разработанный В. А. Фоком метод последовательных приближений для решения задачи многих тел в релятивистской теории тяготения позволил учесть влияние внутренней структуры рассматриваемых конечных тел на их поступательное и вращательное движение в обусловленном ими гравитационном поле.

Физическая привилегированность (инерциальность) гармонических систем координат, однозначно определяемых с точностью до линейных преобразований Лоренца надлежащими предельными условиями на бесконечном удалении от рассматриваемой произвольной конечной системы материальных тел, — принципиально важный факт. Именно в гармонических системах координат выявляется абсолютный характер поля тяготения, определяющего кривизну мирового пространства—времени.

Потребовалось определенное время для фактического пересмотра первоначальной интерпретации общей теории относительности Эйнштейна в духе концепции Фока.

Дж. Синг в предисловии к своей монографии, впервые опубликованной в 1960 г. и через три года переведенной на русский язык, писал: «Я многим обязан хорошо известным книгам Паули, Эддингтона, Толмана, Бергмана, Мёллера и Лихнеровича, однако геометрический способ рассмотрения пространства—времени восходит непосредственно к Минковскому. Он протестовал против употребления слова „относительность“ в применении к теории, основанной на „абсолютном“ (пространство—время), и я уверен, что если бы он дожил до создания общей теории относительности, то повторил бы свой протест даже в более сильных выражениях. Однако нам незачем беспокоиться по поводу названия, ибо слово „относительность“ означает теперь прежде всего теорию Эйнштейна и лишь во вторую очередь ту туманную философию, которая, может быть, первоначально применила это слово. Именно затем, чтобы поддержать взгляды Минковского на принцип относительности, я, как видно, становлюсь на трудный путь миссионера. Когда во время дискуссий о релятивизме я пытаюсь сделать вещи более ясными с помощью пространственно-временно́й схемы, другие участники дискуссии смотрят на это с вежливой отрешенностью и после паузы смущения, словно они были свидетелями детской бестактности, возобновляют спор, опираясь на свои собственные понятия. Возможно, они имеют в виду Принцип эквивалентности. Если так, то наступает моя очередь вежливо не понимать, о чем идет речь, ибо я никогда не был в состоянии понять этот Принцип. Означает ли он, что сигнатура пространственно-временно́й метрики равна $+2$ (или -2, если предпочесть другое определение)? Если так, то это важно, но вряд ли можно назвать Принципом. Может быть, он означает, что эффекты гравитационного поля неотличимы от эффектов ускорения наблюдателя? Если так, то это неверно. В теории Эйнштейна в зависимости от того, отличен от нуля тензор Римана или равен нулю, гравитационное поле присутствует или отсутствует. Это свойство абсолютно: оно никак не связано с мировой линией какого-то наблюдателя. Пространство—время либо плоско, либо искривлено, и в нескольких местах этой книги я затратил немало усилий, чтобы отделить истинные гравитационные эффекты, обязанные искривлению пространства—времени, от эффектов, обусловленных искривлением мировой линии наблюдателя (в простейших случаях последние преобладают). Принцип эквивалентности выполнил важные обязанности повивальной бабки при рождении общей теории относительности, но, как заметил А. Эйнштейн, младенец никогда не вырос бы из пеленок, если бы не идея Минковского. Я предлагаю похоронить повивальную бабку с соответствующими почестями и посмотреть прямо в лицо фактам абсолютного пространства—времени» [11, с. 8–9].

Теория относительности действительно может и должна рассматриваться как теория абсолютного пространства—времени, которое, вообще говоря, является неоднородным (искривленным) и лишь в пределе — при полном отвлечении от всякой гравитирующей материи — становится максимально однородным (плоским), причем пространственно-временная структура мира определяется его причинно-следственной структурой, т. е. системой отношений воздействия одних явлений (или событий) на другие.

В свое время необходимо было определенное научное мужество, чтобы выступить против общепринятых поверхностных взглядов на теорию относительности и обратиться к ее абсолютным основам. В. А. Фок, говоривший, что «трусость не влияет на вероятность отсидки», таким мужеством обладал. И в итоге восторжествовала именно его точка зрения.

В 1961 г. в предисловии ко второму изданию своей монографии В. А. Фок написал: «За шесть лет, протекших со времени первого русского издания, эта книга была издана на английском языке в издательстве „Пергамон" в Лондоне и на немецком языке в Академическом издательстве в Берлине. В связи с этим текст книги продумывался автором неоднократно. Второе русское издание отличается от первого уточнением ряда формулировок в вопросах, имеющих принципиальный характер, включением результатов некоторых новых работ автора и усовершенствованием математических доказательств... За последние годы наша точка зрения на теорию относительности и теорию тяготения начала встречать признание со стороны ученых всего мира. Мы надеемся, что уточнения, внесенные в настоящее издание, устранят последние недоразумения, препятствовавшие ее принятию» [10, с. 8].

К сожалению, после утверждения этой точки зрения, в конце концов принятой просто за нечто само собой разумеющееся, уже мало кто связывал правильное понимание сущности теории относительности и теории тяготения Эйнштейна именно с В. А. Фоком. Однако это не умаляет его величия. Как заметил С. Вивекананда, самыми великими были не Христос и Будда, а те неизвестные, усилиями которых утвердилась в сознании людей истина.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Френкель Я. И.* Теория относительности. Пг.: Мысль, 1923.
2. *Инфельд Л.* Страницы автобиографии физика // Новый мир. 1965. № 9. С. 169–195.
3. *Эйнштейн А., Инфельд Л.* Эволюция физики. 4-е изд. М.: Молодая гвардия, 1966.
4. *Вавилов С. И.* Экспериментальные основания теории относительности. М.; Л.: Гос. изд-во, 1928.
5. *Паули В.* Теория относительности. М.: Наука, 1983.
6. *Суворов С. Г.* Эволюция физики в представлении Эйнштейна // В кн.: *Эйнштейн А., Инфельд Л.* Эволюция физики. М.: Молодая гвардия, 1966.
7. *Александров А. Д.* Теория относительности как теория абсолютного пространства—времени // Философские вопросы современной физики. М.: АН СССР, 1959. С. 269–323 [8)].
8. *Фок В. А.* Современная теория пространства и времени // Природа. 1953. № 12. С. 13–26.
9. *Дикке Р.* Гравитация и относительность. М.: Мир, 1965.
10. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. 2-е изд. М.: Физматлит, 1961.
11. *Синг Дж.* Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963.

[8)] Эта статья доступна также на с. 342–381 этого тома. — *Прим. ред.*

12. *Einstein A., Infeld L., Hoffmann B.* The gravitational equation and the problem of motion // Ann. Math. 1938. Vol. 39, No. 1. P. 65–100.
13. *Фок В. А.* О движении конечных масс в общей теории относительности // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1939. Т. 9, вып. 4. С. 375–410.
14. *Einstein A., Grommer F.* Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz // Sitzber. Press. Akad. Wiss. 1927. No. 1. S. 235–245.
15. *Фок В. А.* Против невежественной критики физических теорий // Вопр. философии. 1953. № 1. С. 168–174.
16. *Фейнман Р.* Характер физических законов. М.: Мир, 1968.

Диалектика и наука [1)]

Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 280–304

В отличие от всякой иной марксистская идеология является идеологией последовательно научной, базирующейся на объективном научном познании природы, общества и мышления. Поэтому развитие нашей идеологии, борьба с ее противниками не могут идти иначе, как только на основе философского обобщения данных науки и общественной практики. Всестороннее развитие научных основ марксистской идеологии является потому важнейшей задачей наших ученых.

---

1) Впервые опубликовано в «Вестнике Академии наук СССР» 1957. № 6. С. 3–17. Настоящая статья была написана мной с целью привлечь внимание к безусловной необходимости в ходе любых дискуссий по общим философским проблемам естествознания считаться в первую очередь с данными науки, осмысленными с вдумчивой диалектической позиции. И хотя статья отражает события и дух того времени, мне думается, она отчасти сохраняет свое значение. Некоторые устаревшие примеры, как нападки на теорию относительности, могли бы быть заменены на более свежие.

Примером могут служить недавно прогремевшие проклятия в адрес математических абстракций — теории множеств и формализации выводов [1], отразившие, в частности, полную неспособность понять диалектику отношения таких абстракций к практике. Только строго формализуя математический вывод до полного отвлечения от содержания, можно передавать его на вычислительные машины. Крайняя формализация оказывается практически важной: абстрактно рафинированный вывод (алгоритм) превращается в основу работы ЭВМ, а абстрактные языки и логики — основы развития информатики. Таково здесь тождество противоположностей! А воинственный метафизик повторяет как заученный урок: абстракция, формализация отрывает форму от содержания, идею от материи, науку от практики... и потому формализацию надо осудить. Так метафизик, сам того не желая, приходит к осуждению ЭВМ.

Другой пример нам дает достаточное шумное обсуждение соотношения биологической и социальной наследственности человека. См. мое выступление на сессии Общего собрания Академии наук СССР [2] и обзор откликов на статью Н. П. Дубинина [3]. В этом обзоре редакция приводит слова К. У. Черненко на июньском 1983 г. Пленуме ЦК: «Вряд ли можно признать научными концепции, которые объясняют такие, например, качества, как честность, смелость, порядочность, наличием „положительных“ генов и фактически отрицают, что эти качества формируются социальной средой» [4, с. 104]. Затем редак-

Однако в течение ряда лет разработка марксистской философии и, в частности, философских проблем естествознания шла у нас недостаточно глубоко и в ней было немало догматизма и ошибок. В некоторых случаях фактически проводилась точка зрения, будто новые данные науки ничего не дают для развития диалектического материализма и их философское осмысление может сводиться только к применению уже готовых положений. Критика идеализма нередко велась поверхностно, без достаточно глубокой научной аргументации, хотя нетрудно понять, что когда с «опровержением» материализма выступает такой крупный ученый, как, скажем, В. Гейзенберг, отвечать ему следует во всеоружии научного анализа тех проблем, на рассмотрении которых он пытается строить свои выводы.

В. И. Ленин указывал, что «философский идеализм есть *только* чепуха с точки зрения материализма грубого, простого, метафизического. Наоборот, с точки зрения *диалектического* материализма философский идеализм есть *одностороннее,* преувеличенное... развитие... одной из черточек, сторон, граней познания в абсолют, *оторванный* от материи, от природы, обожествленный» [5, с. 322]. Поэтому и опровержение тех или иных идеалистических построений должно исходить в конечном счете из верного объяснения тех сторон познания, тех явлений науки, которые идеализм толкует извращенно. Этим будут подорваны гносеологические корни такого идеалистического построения, и критика его не сведется к простому указанию на идеализм.

В связи с известными недостатками в разработке философских проблем естествознания стало довольно обычным упрекать наших философов в начетничестве, поверхностном понимании тех вопросов естествознания, о которых они судили, и даже в «невежестве». Однако за резкостью высказываемых по этому поводу суждений не всегда видно достаточно объективное и глубокое понимание существа дела. Получается, что в некоторых случаях естествоиспытатели «громят» философов за догматизм и «невежество» примерно на том уровне, который еще недавно был характерен для философов, «громивших» естествоиспытателей за философские «извращения». Подобный обмен «любезностями», естественно, никак не помогает положительному решению действительных задач науки.

Конечно, в некоторых статьях по философским вопросам физики и математики можно было встретить своего рода перлы. Например, Н. В. Марков

ция осуждает любые биологические исследования наследственных черт человека, кроме случаев болезни, и, в частности, резко осуждает мое выступление, а по поводу его опубликования в «Вестнике Академии наук СССР» приводит слова одного из откликов, что «подобный „объективизм" не в традициях советской печати» [4, с. 111]. Но я повторяю, что противоположности социальной преемственности и биологической наследственности неразрывны. Реальная проблема состоит в их изучении, в конкретном исследовании их соотношения еще и потому, что истина конкретна. Именно этому, как раньше говорили, учит диалектика, и она никогда не требует, как бы ни хотели отдельные люди, прекращения научных исследований в том или ином направлении.

обнаружил элементарное непонимание самых основных положений геометрии Лобачевского и договорился до того, что стал приравнивать основание натуральных логарифмов ($e = 2.718\ldots$) единице! [6, с. 210]. Подобные факты, а их перечень, к сожалению, можно было бы продолжить, просматривая и некоторые другие статьи, относятся к области печальных анекдотов, за которые приходится краснеть, ибо такие статьи появились в свое время в изданиях Академии наук СССР.

Но если не говорить о таких крайних нелепостях, то объективность должна заставить признать, что ошибаются и проявляют недостаточную осведомленность в вопросах физики или математики не только философы. В доказательство приведем несколько примеров. Так, профессор Я. П. Терлецкий, специалист по теоретической физике, опубликовал статью по основам теории относительности, где в противовес распространенному выводу преобразования Лоренца на основе закона постоянства скорости света выдвинул, преследуя философские цели, вывод, основанный на факте зависимости массы от скорости [7]. Между тем уже сорок лет известно, что при принятых автором общих предположениях о характере преобразований есть только две возможности: либо преобразования Галилея, либо преобразования Лоренца, и потому любое дополнительное условие, отличающее релятивистскую физику от классической, с необходимостью приведет именно к преобразованиям Лоренца. Но автор, по-видимому, просто не знал этого обстоятельства. В результате оказалось, что данный им вывод не содержит в себе ничего принципиально нового, а философский анализ оказывается достаточно поверхностным.

Другим примером может служить грубая ошибка в вопросе о группах преобразований, допущенная знаменитым физиком В. Паули в его классической книге о теории относительности [8] (сказанное на с. 45 в пункте Д ошибочно). Можно указать еще на книгу А. Эйнштейна и Л. Инфельда «Эволюция физики», где говорится, что борьба между воззрениями Птолемея и Коперника якобы бессмысленна, и формулируется задача построить «релятивистскую физику, справедливую для всех систем координат, в которой имело бы место не абсолютное, но лишь относительное движение» [9, с. 191–192]. Эти утверждения, однако, покоятся на недоразумениях. Кстати сказать, в основе распространенного представления об общем принципе относительности всех движений как об обобщении принципа относительности равномерных движений лежит, не считая прочего, математическая ошибка. Уже давно доказано, что никакой более общей относительности, чем эта «частная», не может быть и дело состоит в том, чтобы просто понять физическое значение этой теоремы.

Однако едва ли кто-нибудь возьмет на себя смелость говорить о «невежестве» А. Эйнштейна или В. Паули. Если уж и такие физики будут обвинены в этом грехе, то кто же тогда не невежда?

Само собой разумеется, мы вовсе не хотим сказать, что раз А. Эйнштейн ошибался, то и нам можно и что для философских суждений не нужна осведомленность в специальных вопросах. Однако, как нам кажется, приведенные примеры указывают на то, что главный корень недостатков в разработке философских проблем естествознания (физики, в частности) лежит, пожалуй, не в невежестве в отношении физики. Корень этот в действительности философский.

Некоторые авторы, писавшие и пишущие по философским проблемам естествознания, не проявили должного уважения к науке, пренебрегали доказательностью ее объективных данных, фактически подменяли объективный критерий эксперимента и практики субъективным критерием соответствия своим собственным мнениям. Ничем иным, кроме неуважения к науке, нельзя объяснить, что в ряде статей о теории относительности она подвергалась поруганию как «махистская», как «реакционная». Можно спорить о сущности теории, нужно бороться против идеалистических ее толкований, но ругать саму теорию как «махистскую» — значит отбрасывать величайшие завоевания науки.

Когда «разоблачали» как «идеалистический» вывод об относительности одновременности или известные данные о материальных структурах половой клетки, определяющих наследственность, то этим тоже проявляли элементарное пренебрежение к данным науки. Когда некоторые авторы писали, что при философском анализе проблемы вида в биологии нужно исходить из высказываний классиков, а *также* данных опыта или что теория относительности идеалистична, *хотя* и подтверждается опытом, они тем самым ставили авторитет мнения выше авторитета практики, т. е. отступали назад не только от марксизма, но и от Ф. Бэкона, который еще на заре современной науки боролся против средневекового раболепия перед авторитетами, за критерий опыта и практики. Философская сущность подобных взглядов состоит в отходе от критерия практики в теории познания, в признании примата субъективного над объективным, т. е. в отходе от материализма.

Одинаково вредно как высокомерное пренебрежение некоторых философов к частным наукам, так и подобное же пренебрежение некоторых физиков и математиков к философии, которую хотят представить как «бесполезные общие разговоры». Уместно вспомнить, что великие преобразователи науки, такие как Н. И. Лобачевский, Л. Больцман, Ч. Дарвин и многие другие, всегда восходили от частных наук к обобщениям общефилософского значения.

Если пренебрежение конкретными данными частных наук и практики грозит философским догматизмом и схоластикой, то противоположная крайность — пренебрежение философским обобщением, философским анализом проблем науки — смыкается с прагматизмом и позитивизмом, понимающими науку как систематический каталог полезных сведений и рецептов.

Эти крайности в более или менее выраженном виде еще встречаются у нас, и против них нужна последовательная борьба на два фронта.

В противопоставлении частных наук и философии сказывается, между прочим, непонимание диалектики частного и общего. Тут мы подходим к главной причине недостатков и ошибок в разработке философских проблем естествознания, да и в развитии нашей философии вообще. Причина эта заключается в недостаточном понимании марксистской диалектики, в неумении творчески применить и развить ее на основе новых данных науки. Еще В. И. Ленин говорил, что «физика свихнулась в идеализм, главным образом, именно потому, что физики не знали диалектики» [10, с. 276–277]. Точно так же многие наши авторы «свихнулись» в метафизику и запутались в тех или иных вопросах главным образом потому, что не смогли творчески овладеть диалектикой.

Конечно, диалектика не есть некая априорная система, которой можно овладеть самой по себе, в отвлечении от иных наук и общественной практики. Напротив, она развилась, развивается и должна развиваться только на основе научного познания и преобразования природы, общества и мышления. Поэтому творческое развитие диалектики, умение применять ее подразумевает серьезное знание выводов науки. Но это знание остается внешним, не доходит до глубины обобщения, если оно не сочетается с диалектическим анализом и синтезом. Короче, общая диалектика и конкретные науки — это две необходимые стороны диалектического единства, которое только и ведет к истинному обобщающему знанию. Поэтому и разработка общих проблем всякой науки подразумевает сочетание философского диалектического мышления с владением конкретным материалом.

Говоря, однако, о перегибах и ошибках в философской работе прошедшего периода, нельзя забывать о ее большом положительном итоге. Если, скажем, в дискуссии по теории относительности и были допущены явные нелепости, то в целом она заострила вопросы и заставила яснее понять, насколько глубоко проникли в понимание теории некоторые навязанные идеализмом представления. Основы диалектического материализма стали не только общим достоянием, но появились работы, и среди них фундаментальные, где диалектический материализм действительно служит руководством для понимания проблем науки. Ограничиваясь только точными науками, вспомним статью А. Н. Колмогорова «Математика» еще в первом издании Большой советской энциклопедии [11], где впервые было дано развернутое освещение математики с точки зрения диалектического материализма, или книгу В. А. Фока о теории пространства, времени и тяготения [12], где дается, наконец, последовательно материалистическое изложение теории относительности. Из работ наших философов напомним, например, прекрасную книжку И. В. Кузнецова [13], недавнюю книгу Б. М. Кедрова о понятии элемента в химии [14] или книгу В. И. Свидерского о философском значении пространственно-временных представлений в физике [15].

Диалектический материализм распространяется и оказывает влияние среди ученых за пределами Советского Союза не только в странах социализма. Характерно также, что такие физики, как М. Лауэ или М. Борн, решительно выступают против субъективного идеализма, который в тех или иных наукообразных одеждах проникает в физику. Так, выступая в Берне на конгрессе, посвященном 50-летию теории относительности, М. Борн прямо характеризовал позитивистские взгляды как абсурдные.

Широкое распространение основ диалектического материализма в свое время опиралось у нас на популярное изложение И. В. Сталиным в «Кратком курсе истории ВКП(б)» некоторых черт диалектического и исторического материализма. Догматизация сталинской схемы, недостаточное внимание к философскому наследию классиков марксизма-ленинизма привело, как известно, к печальным результатам.

Серьезным упущением было и недостаточное внимание к тому наследию, которое оставил нам в области диалектики В. И. Ленин [2)]. Его гениальные идеи, определяющие пути развития диалектики, не были восприняты должным образом. В этом смысле достаточно характерной была дискуссия о логике, в которой ряд участников явно отрицал возможность существования диалектической логики, стараясь вовсе отойти от задачи развития диалектики именно как логики, оставляя эту проблему в полном ведении логики формальной, хотя бы и несколько подправленной и дополненной. Между тем как раз эта логическая сторона или функция диалектики, субъективная диалектика, как отражение диалектики объективной, имеет решающее методологическое значение.

В. И. Ленин писал: «Всесторонняя, универсальная гибкость понятий, гибкость, доходящая до тождества противоположностей, — вот в чем суть. Эта гибкость, примененная субъективно, = эклектике и софистике. Гибкость, примененная *объективно,* т. е. отражающая всесторонность материального процесса и единство его, есть диалектика, есть правильное отражение вечного развития мира» [5, с. 99].

«*Диалектика* есть учение о том, как могут быть и как бывают (как становятся) *тождественными противоположности,* — при каких условиях они бывают тождественны, превращаясь друг в друга, — почему ум человека не должен брать эти противоположности за мертвые, застывшие, а за живые, условные, подвижные, превращающиеся одна в другую» [5, с. 98].

«Мы не можем представить, выразить, смерить, изобразить движения, не прервав непрерывного, не упростив, угрубив, не разделив, не омертвив

[2)] Было бы полезно выделить, собрать, систематизировать и опубликовать в таком виде хотя бы основные высказывания В. И. Ленина о диалектике. Это не только облегчило бы усвоение его мыслей для широких масс читателей, но заставило бы и философов лишний раз продумать великое ленинское наследие.

живого. Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление, — и не только мыслью, но и ощущением, и не только движения, но и всякого понятия.

И в этом *суть* диалектики. *Э т у - т о с у т ь* и выражает формула: единство, тождество противоположностей» [5, с. 233].

«Вкратце диалектику можно определить, как учение о единстве противоположностей. Этим будет схвачено ядро диалектики, но это требует пояснений и развития» [5, с. 203].

«Раздвоение единого и познание противоречивых частей его... есть *с у т ь*... диалектики» [5, с. 316].

Всесторонняя гибкость мысли, вскрывающая глубоким, конкретным анализом противоположные стороны и тенденции единого предмета и восходящая в синтезе к пониманию единства, взаимопереходов, тождества противоположностей — такова суть диалектики как всеобщего метода познания. Можно сказать, что во всякой большой проблеме философии, науки, политики неизбежно встает перед нами это единство противоположностей. Материя и сознание в философии, конечное и бесконечное в математике, абсолютное в теории относительности, возможность и действительность в квантовой механике, внутренние закономерности организма и внешняя среда в биологии, непрерывное и прерывное, качественные и количественные превращения в теории эволюции, содержание и форма, свобода творчества и партийность в искусстве, общность путей построения социализма и их своеобразие в каждой стране, государственный план и инициатива на местах и т. д. — так понимание глубин каждой научной теории, каждой проблемы нашей жизни и политики приводит к диалектике противоположностей.

Метафизика, видя эти противоположности, разрывает их, противопоставляет друг другу и либо впадает в одну из крайностей, либо пытается эклектически соединить их без внутренней связи. В противоположность метафизике диалектика конкретно анализирует необходимую взаимосвязь противоположностей, их взаимообусловленность и переходы, находит ведущую сторону противоречия и таким путем приходит к целостному пониманию предмета в его противоречивом единстве. Эта диалектическая гибкость мысли, охватывающая все стороны предмета, как раз и ведет к ясности вывода и твердости решения без всяких колебаний и субъективистских крайностей и эклектики.

Проблемы философии как отношение материи и сознания, как проблемы самой диалектики не могут быть глубоко рассмотрены иначе, как диалектически. Например, в недавно опубликованной статье М. П. Лебедева автор бьется вокруг диалектики этих противоположностей и, не будучи в состоянии с ней справиться, фактически отрывает сознание от материи, субъективное от объективного. Он говорит, что именно «вульгарные материалисты... объявляют субъективное объективным» [16, с. 73], и решительно отрицает объективное существование психического. Однако если автор сомневается в существовании психики у своих оппонентов, то мы во всяком случае не сомневаемся в существовании его психики вне и независимо от нашего сознания, т. е. объективно. Противоположности становятся здесь тождественными: субъективное есть вместе с тем объективное; в частности, субъективное Ивана объективно для Петра, субъективные взгляды философа оказываются моментом объективного общественного процесса, сознание есть свойство материи, идеальное есть сторона материального процесса и т. д. Отрицание же объективности психического влечет за собой отбрасывание объективных методов психологии, отказ от объективного научного познания психики. Монизм диалектического материализма есть монизм диалектический, и к проблеме отношения материи и сознания следует подходить не иначе, как диалектически [3].

Точно так же, например, положение диалектики о всеобщей связи предметов и явлений подразумевает существование этих отдельных предметов и явлений, так же как положение о том, что все движется, подразумевает сохранение движущегося предмета, так что и сама диалектика может рассматриваться только диалектически.

Недостаточное понимание диалектики приводило к заблуждениям в некоторых кардинальных вопросах философии естествознания. Широкое распространение получило, например, обвинение Ч. Дарвина в «плоском эволюционизме», якобы отрицающем качественные различия в живой природе, качественные границы между видами. Философским основанием для этого послужило представление, что качественные изменения всегда наступают внезапно, быстро, и поэтому виды должны порождаться именно таким образом [4].

Однако нельзя допустить, будто Ч. Дарвин был настолько наивен, что не видел качественной разницы между протистами и человеком, хотя и считал, что человек есть продукт постепенной эволюции. В мире качественные изменения происходят в разных случаях различно, в форме ли переворота, подготовленного предшествующим процессом количественных изменений, или в форме постепенного накопления элементов нового качества. Когда обязательно требуют выделения момента качественного скачка, то тем самым отделяют процесс качественного изменения от процесса количественного изменения, т. е. делают шаг в сторону метафизического противопоставления этих противоположностей. Однако противоположности бывают тождественными. В определенных условиях количественные изменения оказываются

[3] Вопрос о материи и сознании, психическом и физическом (физиологическом) — вопрос серьезный. И плохо то, что опасная путаница и резкие попытки «решить» этот вопрос повторяются опять с уклоном в запрещение тех или иных научных направлений.

[4] Здесь идет речь о концепции видообразования Т. Д. Лысенко. Поучительную дискуссию по этому вопросу, где имеется и мое выступление, см. в [17].

вместе с тем качественными. Категории качества и количества относительны; то, что в одном отношении выступает как качественное изменение, может быть в другом отношении количественным изменением. Изменение признаков внутри данного вида может быть вместе с тем развитием признаков и тем самым порождением нового вида. Единый материальный процесс имеет эти две стороны — противоположные, но нераздельные.

Концепция эволюции Дарвина оказывается диалектической, ибо фактически рассматривает количественные изменения как качественные, не уничтожая их, но органически соединяя одно с другим. Поэтому нет никаких философских оснований порочить указанную концепцию с этой точки зрения. Вопрос же о том, как в действительности возникали и могут возникать новые виды, — это вопрос не общих философских суждений, а конкретного научного исследования, направляемого диалектическим методом, который как раз и учит, что истина конкретна. Короче говоря, причина шумных споров и философских претензий, связанных с разными подходами к проблеме видообразования, заключается, по нашему мнению, в забвении ленинского понимания диалектики.

Достаточно острый, хотя и менее шумный, спор развернулся вокруг основ квантовой механики, когда была выдвинута идея, что квантовая механика относится не к индивидуальным объектам, а только к их совокупностям — ансамблям. Сторонники этого взгляда обвинили инакомыслящих в идеализме, как будто разница между материализмом и идеализмом состоит не в различном понимании отношения материи и сознания, а в том, к чему следует относить волновую функцию. Ссылка на идеализм применялась здесь скорее не как философский аргумент, а как кулак, долженствующий нокаутировать противника. По этому поводу стоит, пожалуй, отметить, что философская квалификация тех или иных взглядов, будь то в теории гена или квантовой механике, требует глубокого обоснования и не может подменяться бранью.

Однако нас интересует сейчас не эта сторона спора. Вопрос в действительности достаточно глубокий. Д. И. Блохинцев, развивая точку зрения ансамблей, в своем курсе квантовой механики относит волновую функцию к ансамблю частиц, а сам ансамбль определяет как совокупность «частиц... которые независимо друг от друга находятся в том же состоянии». Далее он говорит, что «состояние частицы... следует понимать как принадлежность частицы... к определенному... ансамблю» [18, с. 54–55] [5].

В этих определениях бросается в глаза порочный круг, поскольку ансамбль определяется через состояние частиц, а состояние частицы — через принадлежность ее к ансамблю. Но за этим порочным кругом скрывается,

[5] Здесь процитировано 2-е издание 1949 г. В 6-м издании 1983 г. [19] текст несколько изменен.

однако, диалектическое противоречие, которое при недостаточной глубине анализа оказалось выраженным в форме круга в определении.

Позднее Д. И. Блохинцев, исправляя данное им определение, отметил то признанное в квантовой механике положение, что ансамбль частиц и соответственно состояние частицы (волновая функция) определяется типом частицы и условиями, в которых она находится [20, с. 378]. См. также [19, с. 61]. Но тип частицы (электрон, протон, атом водорода и т. п.) и условия относятся к одной частице, а потому и определяемое ими состояние (волновая функция) должно относиться к одной частице. С другой стороны, общепризнанное статистическое толкование волновой функции необходимо связывает ее, так или иначе, с совокупностью частиц. Получается противоречие. Это противоречие отражает, однако, саму природу атомных процессов, и его открытие составляет одну из самых глубоких и основных черт квантовой механики.

Волновая функция в отношении к одной частице характеризует ее состояние тем, что фиксирует реальные возможности поведения частицы в тех или иных условиях (попадание в данное место фотопластинки и т. п.), а эти возможности превращаются в действительность в различных совокупностях опытов, которые уже нельзя осуществить над одной частицей. Таким образом, оказывается невозможным в толковании квантовой механики полностью отделить описание одной частицы от рассмотрения совокупности частиц, и наоборот. Нельзя отделить теорию индивидуального объекта от статистики и статистику от теории, трактующей поведение индивидуального объекта, одно раскрывается через другое. Поэтому, в частности, совершенно неверно утверждение, будто квантовая механика относится только к ансамблям. Но она также не является теорией движения индивидуального объекта в том же смысле, как классическая механика.

По-видимому, признанным среди советских физиков является убеждение, что эта кардинальная особенность квантовой механики имеет свое основание в особых формах взаимосвязи объектов в атомной области, взаимосвязи, которая не позволяет изолировать объект в той же степени, в какой это возможно в сфере макроскопической.

Таким образом, анализ основ квантовой механики приводит к анализу противоположностей отдельного объекта и его неразрывной связи с внешними условиями, поведения индивидуального объекта и статистики, случайности и необходимости, возможности и действительности. Эти противоположности рассматривались в диалектическом материализме, но квантовая механика дает здесь существенно новое. Поэтому более глубокое понимание ее сущности, т. е. сущности атомных процессов, требует и более глубокого, не только физического, но и логико-философского анализа этих категорий на основе нового конкретного материала.

Возникновению квантовой механики предшествовало другое великое завоевание теоретической физики нашего столетия — создание А. Эйнштейном теории относительности. Являясь теорией пространства, времени и тяготения, эта теория столь глубоко преобразовала прежние представления в данной области и так повлияла на всю физику, что можно говорить о релятивистской физике в противоположность физике дорелятивистской. Однако в отличие от квантовой механики теория относительности явилась в то же время завершением классической физики и представляет поэтому меньше трудностей для понимания. И все же, даже несмотря на более чем полувековой возраст этой теории, толкование ее основ еще никак не является единодушным.

На понимание теории относительности довольно существенное влияние оказали некоторые ошибочные и идеалистические взгляды ряда крупных физиков. Влияние это коснулось не только философского толкования теории, но и понимания ее физического содержания, содержания ее основных понятий и предпосылок, что и послужило, как нам кажется, главной причиной трудностей в трактовке теории относительности. В попытках преодолеть влияния идеализма рядом авторов допускались порой грубейшие ошибки. В обоих случаях, как в идеалистических, так и вульгарно-материалистических (или просто ненаучных) заблуждениях, глубокой причиной их возникновения было и остается прежде всего непонимание диалектики.

В дискуссии 1952 г. по теории относительности выступили такие авторы, как И. В. Кузнецов[6)], А. А. Максимов, Р. Я. Штейнман, А. В. Шугайлин, которые, смешав физическое содержание теории с его идеалистическими толкованиями, отбрасывали само это физическое содержание и поносили теорию как «махистскую», как «реакционное эйнштейнианство» и т. п. Этих авторов объединяло не только отрицание теории относительности, но и общая философская установка, сводящаяся к подмене диалектического материализма материализмом вульгарным, метафизическим. Чем громче ратовали они за диалектику, тем больше фактически от нее отходили. Эти заблуждения уже подвергались критике, и их можно было бы отдать прошлому, если бы некоторые из названных авторов не пытались и дальше проводить свою линию, хотя и в менее грубой форме.

Так, например, в достаточно обширной статье «Пространство» в Большой советской энциклопедии Р. Я. Штейнман не мог, конечно, обругать теорию относительности, но зато он уделил ей только одну фразу: «В теории относительности... было установлено, что пространственные величины связаны с временными и изменяются с изменением скорости и что структура

[6)] Предваряя критику некоторых работ И. В. Кузнецова на страницах этой статьи, я хочу отметить, что для него выступление против теории относительности было временным эпизодом в научной биографии. О нем следует сказать особо от прочих «критиков», так как его большой положительный вклад в философию физики несомненен.

пространства и времени, или метрика пространства—времени, меняется в зависимости от распределения и движения масс» [21, с. 106]. Подобное освещение теории относительности в Большой советской энциклопедии по меньшей мере несолидно. Единство пространства и времени в общей абсолютной форме существования материи — пространства—времени, относительность пространства и пр. — все фундаментальное, что дала уже специальная теория относительности для понимания проблемы пространства, заменено одной неясной полуфразой о связи пространственных и временны́х величин и о их зависимости от скорости. Всякий, кто читал статью того же автора в упоминавшемся уже сборнике [22], ясно увидит, что именно стоит за указанной статьей в Большой советской энциклопедии и, в частности, за приведенной цитатой: это в действительности отрицание теории относительности и попытка заменить ее путаными представлениями о взаимодействии частиц и поля, попятное движение от теории относительности к дорелятивистским представлениям.

В свою очередь И. В. Кузнецов, выступая уже сравнительно недавно по вопросам теории относительности [23], потратил много усилий на критику других авторов [7)], но ни словом не обмолвился о своих собственных взглядах, выраженных в статье сборника 1952 г. А та статья чрезвычайно характерна философским априоризмом, непониманием как теории относительности, так и диалектики и к тому же еще недостатком скромности.

Здесь, конечно, не место разбирать сколько-нибудь обстоятельно это уже устаревшее сочинение. Говоря об априоризме, достаточно, пожалуй, сослаться на то, как И. В. Кузнецов пытался подойти к основным чертам диалектики и материализма, исходя из априорных требований монизма теории всякого явления, постановки отвлеченных вопросов о том, «каков мир в целом» и пр. По этому поводу полезно вспомнить критику Ф. Энгельсом априоризма Дюринга с его заявлениями в том духе, что мир один, а потому един.

Что же касается отношения к теории относительности, то в сборнике 1952 г. И. В. Кузнецов писал: «... материалистическое... истолкование закономерностей быстрых движений есть в действительности отказ от теории относительности Эйнштейна» и буржуазные ученые поднимают А. Эйнштейна на щит как якобы «создателя» нового «физического учения о простран-

[7)] В [23] И. В. Кузнецов указывает, в частности, на «ошибочность» утверждения об универсальном характере скорости света (в рамках классической электродинамики). Но если бы он прочел весь пятый том трудов Л. И. Мандельштама, откуда берет критикуемые им философские суждения этого ученого, он нашел бы там страницы, где доказано, что скорость фронта волны всегда одна и та же в любой среде. А ведь именно дохождение фронта волны имеет значение в установлении связи явлений во времени и пр. Из этого замечания следует и тот вывод, что нужно не только критиковать крупных ученых, но и читать их и учиться у них. Это тоже диалектика. В. И. Ленин указывал, что диалектика содержит отрицание как существенный элемент, но не зряшнее, не скептическое отрицание, а отрицание с удержанием положительного [5, с. 207].

стве и времени» [24, с. 72, 50], при этом характерны иронические кавычки, в которые И. В. Кузнецов заключает слова «создатель» и «физическое учение о пространстве и времени». Но что создание А. Эйнштейном нового физического учения о пространстве и времени есть объективный факт, а не выдумка буржуазных ученых, слишком общеизвестно, чтобы имело смысл еще спорить по этому поводу с И. В. Кузнецовым и другими названными выше авторами.

Если оставить в стороне подобные крайности и попытаться выявить корень такого рода ошибок, то, как уже было сказано, мы увидим, что он лежит в непонимании диалектики, в частности диалектики конкретного и абстрактного, абсолютного и относительного.

Наиболее отчетливо вульгарная установка проявилась у А. А. Максимова [25, с. 205] в его известных поисках абсолютной траектории, когда в качестве примера он назвал дыру, пробитую метеоритом в земле. Дыру предлагалось залить каким-либо веществом и, вынув этот слиток, предъявить его, чтобы абсолютная траектория явилась, так сказать, «весомо, грубо, зримо». Здесь отказ от научной абстракции, отказ от относительности доведен был действительно до грубо зримого предела. Совершенно аналогично в «опровержение» принципа относительности и равноправности инерциальных систем отсчета И. В. Кузнецов ссылался в своей цитированной выше статье на неравноправность систем, связанных с мезоном и Землей. Между тем никто никогда не утверждал, что мезон и Земля вполне равноправны, ибо каждому ясна их разница. Теория относительности утверждает равноправие систем отсчета только в пределах определенной абстракции. С философской точки зрения в этом нет ничего нового, так как и евклидова геометрия утверждает равноправие всех прямоугольных систем координат, но, конечно, только в пределах свойственной геометрии степени абстракции. Почему бы тогда не громить заодно и геометрию?

Нечто подобное и было сделано Н. В. Марковым в упомянутой статье о геометрии Лобачевского. Он действительно пытался опорочить геометрию как часть математики, замахиваясь тем самым на тысячелетние достижения науки. Н. В. Марков говорил, в частности, что «геометрические свойства тел нельзя рассматривать изолированно от негеометрических свойств тел (от физико-химических свойств тел)» [6, с. 363]. Тем самым он, очевидно, рекомендовал рассматривать в школе не треугольники вообще, но обязательно деревянные или железные. Мы можем сослаться на Ф. Энгельса, который, определяя сущность математики, писал: «... чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения [8)] в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне

[8)] Т. е. реальные пространственные формы и количественные отношения действительности. — *А. Д. Александров.*

как нечто безразличное…» [26, с. 37]. Так диалектика учит необходимости абстракции, необходимости отделять в математике геометрические формы от их содержания, а Н. В. Марков утверждает, что этого делать нельзя. Это и есть метафизика, путающаяся в противоположностях абстрактного и конкретного.

Единство этих противоположностей не состоит в уничтожении одной из них. В. И. Ленин указывал, что научные абстракции отражают природу глубже, вернее, полнее и что только бесконечная сумма абстрактных понятий дает конкретное в его полноте. Отказаться от абстракции — значит отказаться от науки, потому что научное познание конкретного идет через абстракцию, т. е. через отрицание конкретного и возврат к нему на более высокой ступени. Замена же абстракции траектории дырой, а абстракции фигуры деревянным треугольником не имеет никакого отношения не только к диалектике, но и к азбучным элементам науки.

Боязнь абстракции обусловлена, по-видимому, боязнью идеализма. В самом деле, согласно В. И. Ленину, уже в элементарной абстракции заложена возможность идеализма. Но ведь это только еще возможность, а не действительность идеализма. Нет нужды держаться за осязаемую материю в опасении, как бы из-за абстракции не впасть в идеализм. Это ведь совершенно не обязательно, стоит только руководствоваться марксистской диалектикой, а не метафизикой.

Ошибки, связанные с недостаточным пониманием того же отношения конкретного и абстрактного, содержатся в трактовке понятия физической величины в духе так называемого операционализма. С этой точки зрения определение физической величины заключается в том, что предъявляют определенный предмет — эталон, задают определенный процесс измерения и этим предметом и процессом определяют само понятие о данной величине [27, с. 177–180]. Так, например, промежуток времени определяют просто как число качаний определенного маятника [28, с. 539]. Однако при этом, помимо прочего, не учитывают должным образом, что любое научное понятие требует известной абстракции, некоторой теории, без которой всякое предъявление конкретных предметов или счет качаний маятника останутся только внешними действиями, не имеющими научного содержания. Конкретное измерение осмысливается только через абстракцию, через теорию, и определение физической величины требует соединения того и другого. Крайнее противопоставление этих противоположностей ошибочно.

С той же концепцией связано представление об условности научных определений, противопоставлений их, как якобы совершенно условных, законам физики. Однако между определениями и законами науки существует диалектическое единство. Как формулировка закона требует определения входящих в него понятий, так и определение требует своего оправдания соответствием определяемого понятия достаточно общим чертам действительности.

Поэтому научное определение, в частности физической величины, как бы уже включает в себя закон, утверждающий, что такая величина существует для достаточно широкой группы явлений. Противоположности определения и закона оказываются, стало быть, не только едиными, но в известной степени тождественными. Особенно ясно это можно видеть на примере геометрии, аксиомы которой являются и ее законами, и определением ее предмета при современном абстрактном их понимании.

В теории относительности сам А. Эйнштейн преувеличил значение относительности, на что указывает, кстати, и самое название теории. Известно, что Г. Минковский выдвинул как главную черту теории представление об абсолютном пространстве—времени и прямо указал на то, что термин «постулат относительности» не соответствует глубокому содержанию этого принципа и что суть его скорее можно выразить названием «постулат абсолютного мира» [29, с. 192].

Более глубокое понимание сущности теории не было, однако, воспринято должным образом. Преувеличение черт относительности повело к ошибочным утверждениям об относительности всех движений, о равноправности всевозможных систем отсчета и т. п. Это дало, например, почву некоторым физикам дойти до нелепого утверждения, что Г. Галилей напрасно отстаивал свои взгляды перед инквизицией и «был так же неправ — или, вернее, так же прав — как и представители церкви, обвинявшие его в ереси» [30, с. 99]. Подобные замечания основаны на прямом непонимании теории относительности (не говоря в данном случае о прямом неуважении к памяти великого мученика науки). Неверное понимание относительного повело к смешению его с субъективным, с зависимостью от точки зрения наблюдателя, короче, дало почву для идеалистического толкования основ теории, которое можно найти, например, в известном трактате Эддингтона [31].

Отталкиваясь от этих идеалистических взглядов, некоторые наши авторы дошли до крайности. Вовсе отрицая объективную относительность, они объявляли вывод об относительности одновременности идеалистическим, утверждали, будто относительность массы, длины и т. п. означает, что, согласно теории относительности, физические объекты не имеют никаких определенных свойств и т. п. Не приходится говорить уже о допущенной этими авторами путанице между понятиями абсолютной и относительной истины, с одной стороны, абсолютного и относительного движения, длины и т. п. — с другой, как будто в познании именно относительности некоторых величин не было как раз важного приобретения новой частицы абсолютной истины. Пошли поиски абсолютной траектории, инерциальнейшей системы отсчета, абсолютного движения тела в связи со всеми телами Вселенной и т. д. Все это было, однако, вызвано неумением применить марксистско-ленинскую диалектику.

Диалектика вовсе не отрицает объективности относительного, но она требует рассмотрения его как момента, как грани абсолютного, и вместе с тем она учит также, что абсолютное содержит в себе относительное, существует и раскрывается в разных относительных аспектах. Противоположности эти едины, и главной стороной противоречия является именно абсолютное. Неправомерно как преувеличение черт относительности и забвение абсолютного, так и отрицание всякой объективной относительности.

Тот, кто поражается существованию у одного тела многих относительных масс или длин, может с таким же основанием поражаться наличию у одного тела многих проекций, хотя как проекция тела на ту или иную плоскость вполне реальна, так ничуть не менее реальна и относительная масса тела. В обоих случаях речь идет о проявлении свойств тела, т. е. чего-то ему присущего и безотносительного в отношении к другим реальным вещам, в одном случае к плоскости проекции, в другом — к системе отсчета. Теория относительности, конечно, признает наличие у тел безотносительных свойств. Она установила, однако, что многое из того, что считалось раньше безотносительными свойствами тел (например, длина или масса), оказывается в действительности только относительными аспектами, проявлениями других свойств.

Простое противопоставление свойств и отношений ошибочно, между данными категориями есть диалектическое единство. Эти противоположности могут быть тождественными. Например, теорема о том, что сумма двух сторон треугольника больше третьей, выражает одновременно и свойство треугольника, и отношение между его сторонами. Тот факт, что голова находится на плечах, касается и отношения головы к туловищу, и строения, т. е. свойства человеческого тела. То утверждение, что тело имеет в данной системе отсчета такую-то скорость, длину или массу, выражает не только отношение тела к системе отсчета, но и свойство суммарной системы, состоящей из этого тела и тел, служащих базой системы отсчета. Словом, отношение частей целого есть вместе с тем свойство этого целого, так же как свойства целого зависят от отношения его частей.

Близок к этому вопрос об относительном и абсолютном движении. Для того чтобы найти абсолютное движение — мы говорим о простом перемещении — нет нужды обращаться ко всем телам Вселенной, искать наиинерциальнейшую систему отсчета и пр. Нужно только взять самое обычное, миллиарды раз встречающееся явление и в нем, следуя указанию В. И. Ленина [5, с. 317], вскрыть диалектику абсолютного и относительного.

Движение отдельного тела не существует, оно всегда происходит в отношении других тел. Поэтому простейший возможный случай — это движение двух тел друг относительно друга. Если два тела A и B, скажем, сближаются, то мы имеем движение A относительно B и, обратно, движение B относительно A. Вместе с тем тот факт, что тела сближаются, имеет абсолютный характер. Это совместное движение пары тел друг относительно друга абсолютно и не зависит уже ни от какой системы отсчета[9]. Противоположности оказываются тождественными: движение тел A и B друг относительно друга есть вместе с тем их безотносительное сближение, т. е. абсолютное движение. Никакие мировые системы тут не нужны. Всякое относительное движение есть вместе с тем движение абсолютное, и наоборот.

В этой связи стоит отметить, что диалектика вовсе не состоит в запутывании простых вещей, в отказе от детального анализа, доходящего до элементов явления. Она, напротив, требует ясности и детальности анализа, но также требует соответствующего синтеза. И тут есть единство противоположностей. Об этой черте диалектики приходится напоминать потому, что серьезный анализ иногда подменялся общими разговорами не только в обсуждении теории относительности. В рассмотрении проблем биологии некоторые авторы, выступающие якобы как диалектики, еще в большей степени подменяли конкретный детальный анализ механизма явлений общими рассуждениями о взаимодействии организма и среды, о взаимной ассимиляции половых клеток и т. п. Вместо кропотливых, многократно контролируемых экспериментальных исследований, идущих к элементарным явлениям, порой проводились поверхностно поставленные наблюдения с последующими поспешными выводами. Это явление, к сожалению, еще окончательно не преодолено, и поэтому о нем пока нельзя забывать. Диалектика учит, что познание целого возможно только через тончайший его анализ. Примером тому может служить «Капитал» Маркса, где анализ, доведенный до простейшего явления буржуазного (товарного) общества — обмена товаров, как раз и дает основание для полного понимания закономерностей развития этого общества в целом.

Суждение о философской сущности любой научной теории также требует соответствующего анализа. В частности, нужно уметь различать объективное содержание от его субъективных толкований. Объективные данные науки, содержание научных теорий всегда воспринимаются людьми в идеологических формах, определяемых историческими общественными условиями. Здесь мы опять имеем единство и борьбу противоположностей. Сущность философского кризиса современного естествознания состоит именно в противоречии между новыми данными науки и классовой ограниченностью буржуазной идеологии. С другой стороны, противоположность объективных данных науки и их философского осмысливания приводится к тождеству в диалектическом материализме именно потому, что он является последовательно научной философией, развивающейся в соответствии с развитием науки. Но это совпадение объективных данных и их философского понимания достигается не само собою. Противоречие здесь не уничтожается, но теряет

[9] Разница между теорией относительности и обычной кинематикой состоит здесь только в формуле, дающей выражение скорости сближения через скорости тел A и B в отношении какой-либо системы отсчета.

антагонистический характер, свойственный противоречию науки и идеализма; оно постоянно появляется при всяком новом кардинальном открытии и разрешается путем верного толкования этого открытия и соответствующего развития самой философии.

Дискуссия вокруг теории относительности как раз представляет пример этой борьбы противоположностей. Ошибка таких авторов, как И. В. Кузнецов или Р. Я. Штейнман, состоит, в частности, в том, что они не смогли ни отделить идеалистические толкования теории от ее содержания, ни найти адекватного этому содержанию подхода в диалектическом материализме. Именно поэтому они поносят саму теорию относительности как «реакционное эйнштейнианство». Философское осмысливание теории не сводится только к толкованию уже отчетливо сформулированных ее положений, но может идти дальше, требуя углубления самих основ теории. В подтверждение того, что это возможно для теории относительности, я могу сослаться на свою статью [32]. Хотя я не вижу в ней ошибок, однако считаю теперь, что данный там анализ не доходит до нужной глубины. В статье не была еще раскрыта наиболее фундаментальная черта теории относительности: открытие единства причинно-следственной и пространственно-временной структуры мира. Подробнее см. [33–35]. Думается, что именно эта черта теории будет широко воспринята как ее наиболее глубокое основание и именно в этом направлении предстоит дальнейший анализ основ теории, тем более что здесь он соприкасается, по-видимому, с проблемами, идущими от квантовой физики.

В данной статье я пытался лишний раз показать фундаментальное значение диалектики для решения самых основных и глубоких вопросов науки. Особенно хотел подчеркнуть значение логической стороны диалектики, ее основной черты — учения о единстве и борьбе противоположностей, а также исключительное значение идей В. И. Ленина в области диалектики. Хотел подчеркнуть, насколько верной является мысль Ленина, что именно здесь заключается ядро, суть диалектики. Я хотел также лишний раз обратить внимание на неразрывность конкретного научного знания и общего диалектического метода. Вывод едва ли нуждается в формулировке. Творческое развитие диалектики в направлениях, указанных В. И. Лениным, в направлениях, определяемых новыми данными науки, на основе обобщения всех этих данных, а также фактов политики и общественной практики, глубокое применение диалектики в решении научных проблем — такова задача, стоящая перед советскими учеными всех областей знания.

Систематическая разработка диалектики представляется важнейшей задачей наших философов.

Марксистская философия имеет всеобъемлющее значение, но среди всех ее сторон диалектический метод занимает особое положение. Диалектика есть душа марксизма, в частности потому, что и проблемы самой философии должны рассматриваться диалектически. Принимая за основу закон развития всего сущего, диалектика тем самым полагает в себе свое собственное развитие. Останавливаясь, она перестает быть диалектикой. Но это развитие идет не спонтанно, а во взаимодействии предмета и метода, конкретного знания и самой диалектики. Одно немыслимо без другого; наш философский метод, наше идеологическое оружие оттачивается на гранитном основании объективных данных науки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С.* О математике и качестве ее преподавания // Коммунист. 1980. № 14. С. 99–112.
2. *Александров А. Д.* О роли биологических факторов в формировании и развитии человека // Вестн. АН СССР. 1981. № 6. С. 42–46 [10].
3. *Дубинин Н. П.* Наследование биологическое и социальное // Коммунист. 1980. № 11. С. 62–74.
4. Обзор откликов на статью Н. П. Дубинина «Наследование биологическое и социальное» // Там же. 1983. № 14. С. 104–111.
5. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1963. 5-е изд. Т. 29.
6. *Марков Н. В.* Значение геометрии Н. И. Лобачевского для развития физики // В кн.: Философские вопросы современной физики. М.: АН СССР, 1952. С. 186–215.
7. *Терлецкий Я. П.* Об изложении основ теории относительности // Вопр. философии. 1953. № 4. С. 207–212.
8. *Паули В.* Теория относительности. М.: Наука, 1983.
9. *Эйнштейн А., Инфельд Л.* Эволюция физики. 4-е изд. М.: Молодая гвардия, 1966.
10. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1961. 5-е изд. Т. 18.
11. *Колмогоров А. Н.* Математика // БСЭ. 1-е изд.
12. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1961.
13. *Кузнецов И. В.* Принцип соответствия в современной физике и его философское значение. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948.
14. *Кедров Б. М.* Эволюция понятия элемента в химии. М.: Изд. Акад. пед. наук РСФСР, 1956.
15. *Свидерский В. И.* Философское значение пространственно-временных представлений в физике. Л.: ЛГУ, 1956.
16. *Лебедев М. П.* Материя и сознание // Вопр. философии. 1956. № 5. С. 70–84.
17. *Александров А. Д.* [Выступление на дискуссии «Проблема вида и видообразование» на философском семинаре биолого-почвенного фак-та ЛГУ, 24 марта 1954 г.] // Вестн. ЛГУ. 1954. № 10. Сер. биологии, географии и геологии. Вып. 4. С. 81–84.
18. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. 2-е изд. М.; Л.: Гос. изд-во технико-теор. лит., 1949.
19. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. 6-е изд. М.: Наука, 1983.
20. *Блохинцев Д. И.* Критика философских воззрений «копенгагенской школы» в физике // В кн.: Философские вопросы современной физики. М.: АН СССР, 1952. С. 358–395.
21. *Штейнман Р. Я.* Пространство // БСЭ. 2-е изд. М.: Сов. энцикл., 1955. Т. 35. С. 106.
22. *Штейнман Р. Я.* За материалистическую теорию быстрых движений // Философские вопросы современной физики. М.: АН СССР, 1952. С. 234–298.

[10] Эта статья доступна также на с. 491–495 этого тома. — *Прим. ред.*

23. *Кузнецов И. В.* Об основных вопросах теории относительности // В кн.: Философские вопросы современной физики. Киев: Наук. думка, 1956.
24. *Кузнецов И. В.* Советская физика и диалектический материализм // Философские вопросы современной физики. М.: АН СССР, 1952. С. 31–86.
25. *Максимов А. А.* Борьба Ленина с «физическим» идеализмом // В кн.: Великая сила идей ленинизма. М.: Гос. изд. политич. лит-ры, 1950. С. 187–222.
26. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1961. 2-е изд. Т. 20.
27. *Мандельштам Л. И.* Полн. собр. трудов. М.: АН СССР, 1950. Т. 5.
28. *Рытов С. М., Левшин В. Л., Фейнберг Е. Л., Трошев Л. В.* Курс физики / Под ред. Н. Д. Папалекси. М.; Л.: ОГИЗ — Гос. изд-во технико-теор. лит., 1948. Т. 2.
29. *Минковский Г.* Пространство и время // В кн.: Принцип относительности. Л.: ОНТИ, 1935. С. 181–203.
30. *Френкель Я. И.* Теория относительности. Пг.: Мысль, 1923.
31. *Эддингтон А. С.* Теория относительности. М.; Л.: Гостехиздат, 1934.
32. *Александров А. Д.* О сущности теории относительности // Вестн. ЛГУ. 1953. № 8. Сер. математики, физики и химии. Вып. 3. С. 103–128.
33. *Alexandrov A. D.* The space-time of the theory of relativity // Fünfzig Jahre Relativitätstheorie. Basel, 1956. S. 44–45.
34. *Александров А. Д.* Пространство и время в современной физике // В кн.: *Александров А. Д.* Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 92–119 [11)].
35. *Александров А. Д.* Теория относительности как теория абсолютного пространства—времени // Философские вопросы современной физики. М.: АН СССР, 1959. С. 269–323 [12)].

[11)] Эта статья доступна также на с. 320–341 этого тома. — *Прим. ред.*
[12)] Эта статья доступна также на с. 342–381 этого тома. — *Прим. ред.*

О роли биологических факторов в формировании и развитии человека

Вестн. АН СССР. 1981. № 6. С. 42–46 [1)]

Важнейшая особенность всякой науки о человеке, будь то психология или генетика человека, состоит в том, что она касается, в принципе, каждого, а значит и нас с вами, и самого́ исследователя. Поэтому в науках о человеке научная позиция особенно тесно связана с позицией моральной.

К. Маркс писал, что человека, стремящегося подчинить науку внешним для нее целям (как бы наука ни ошибалась), такого человека я, говорил К. Маркс, называю низким. Поэтому не в том дело будто наука должна подчинить свою объективность моральным целям. Но надо ясно понимать человеческий смысл того, что говорится и делается в науке по поводу человека. Между тем чего только не приходится читать по этому поводу. Например, в «Вопросах философии» один автор писал, что «эмпирический индивид в классовом обществе не обладает всеми атрибутами человека», т. е. не является вполне человеком. Но себя-то уж тот автор, конечно, считал человеком. Это мы, выходцы из классового общества, для него не совсем люди.

В «Литературной газете» была опубликована статья известного американского генетика Дж. Ледерберга, где он писал, что не следует ли стерилизовать или даже убивать бедных по их генетической неполноценности. А автор ответной статьи не дал на это достойной отповеди. Между тем, обращая евгенические идеи на самих евгеников, можно спросить: не следует ли именно их элиминировать или стерилизовать ввиду их склонности к подобным идеям?

[1)] Текст печатается по рукописи доклада А. Д. Александрова на сессии Общего собрания Академии наук СССР 21 ноября 1980 г., переданной А. Д. Александровым на хранение С. С. Кутателадзе. На рукописи есть пометка рукой А. Д. Александрова: «Первый вариант. Фактически речь была местами несколько иной. А. Д.». В «Вестнике АН СССР» была опубликована лишь часть доклада. — *Прим. ред.*

Внутри каждого, кто говорит о человеке и тем более выступает в широкой печати, должен гореть предупреждающий сигнал:

Осторожно — люди!
Будь максимально объективным!

Но вот мы можем прочесть статью академика Н. П. Дубинина «Наследование биологическое и социальное» [1], где он, включив третью скорость и полный газ субъективности, несется по проблемам наследования без всякой осторожности. Появление этого выдающегося произведения антинаучной литературы — событие чрезвычайное в ряде отношений.

Академик Н. П. Дубинин как-будто хочет и пытается развивать исходящую от К. Маркса мысль о социальной сущности человека и подвергнуть критике генетиков, преувеличивающих роль биологического в человеке за счет социального. Однако он впадает в противоположную крайность.

Его собственная идея состоит в том, что невозможно, нелепо искать объяснения психических явлений в каких бы то ни было биологических функциях. Он решительно отрицает всякое влияние биологической, генной наследственности на нормальную психику.

Однако общеизвестно, что пол генетически обусловлен и что психика у нормальных мужчин и женщин различна хотя бы в том, что мужчина тянется к женщине, а женщина — к мужчине. Таким образом, главная, громогласно заявленная идея академика Н. П. Дубинина представляет собой не более, как явную нелепость.

Действительная проблема состоит в исследовании того, какие черты психики, каким образом, в какой степени зависят от наследственности, а какие от условий жизни. Но академик Н. П. Дубинин закрывает эту проблему в отношении нормальных людей, оставляя ее медицинской генетике в отношении людей ненормальных.

Полезно, однако, заметить, что сами понятия нормального генотипа, нормального мозга, нормальной психики, которыми уверенно оперирует академик Н. П. Дубинин, не являются абсолютно определенными и требуют уточнения, выявления разных аспектов нормальности и ненормальности, зависящих от той же генетической наследственности. Поэтому попытка академика Н. П. Дубинина ограничиться нормальными людьми совершенно несостоятельна.

Объявляя нелепым искать объяснение психических явлений в каких бы то ни было биологических функциях, академик Н. П. Дубинин решительно отрицает прямую зависимость психики от функций нейронов мозга. Однако общеизвестно, что алкоголь влияет на психику, воздействуя, очевидно, на функции нейронов мозга. Так что и тут идея Дубинина оказывается простым вздором.

Действительная проблема состоит в исследовании физиологических, биохимических, физических структур и «механизмов», обусловливающих психические явления. Но академик Н. П. Дубинин «закрывает» и эту проблему.

Так обстоит дело с научной стороной рассматриваемой статьи: она не только антинаучна, но даже вздорна.

Соответствующей оказывается и моральная сторона выступления и намерения академика Н. П. Дубинина, потому что громогласно говорить о людях вздор, выдавая это за науку, за марксизм — уже само по себе аморально. Тем более потому, что вопросы, о которых говорит Н. П. Дубинин, непосредственно касаются конкретных живых людей. Общественные и личные проблемы, связанные с ролью биологической наследственности с одной стороны, и условий жизни, с другой, остро возникают в жизни, создают порой трудные ситуации.

Начисто отрицая здесь взаимодействие наследственности и среды, академик Н. П. Дубинин тем самым выступает против того, чтобы вникать в эти вопросы, выступает, стало быть, антигуманно.

Проблемы, касающиеся людей, требуют величайшей объективности в суждениях, величайшей осторожности в выводах, величайшего внимания в исследовании, а Н. П. Дубинин как дубиной бьет с плеча по живому, по живым человеческим проблемам.

Только один пример. Как-то в одной из центральных газет был опубликован рассказ о том, как люди взяли девочку из родильного дома на воспитание и как со временем у нее обнаружили склонности к воровству. В конце концов обратились к врачам. Те сказали — наследственность. Но академик Н. П. Дубинин говорит: «Нет, это вредный вздор, идеализм, антимарксизм; наследственность не при чем, это вы ее так воспитали». Вот так — дубиной по голове добрым людям: это вы ее так воспитали. И сколько таких ударов может обрушиться на головы людей, если последовать идеям академика Н. П. Дубинина?

Жизненно важный для отдельного человека и для всего общества вопрос — о склонностях, о способностях. Он имеет для нас фундаментальное значение потому, что в основе социалистического общества лежит принцип «от каждого по способностям», что мы можем ожидать, что мы можем потребовать от человека.

Академик Н. П. Дубинин решает его очень просто: «одаренность, — пишет он, — это эффективное развитие человеческих сущностных качеств при сочетании нормального генотипа с благоприятными условиями его развития». То есть при нормальном генотипе благоприятные условия могут сделать любого ребенка М. В. Ломоносовым, И. Ньютоном, К. Марксом, Л. Бетховеном, С. Рафаэлем — кем угодно. И если из массы детей крайне редко выходят менее одаренные люди, то это вина родителей, которые не создали им условий, какие были у М. В. Ломоносова. Так, вместо всестороннего исследования факторов, от которых зависит одаренность человека, априорно отбрасывается целая группа их, связанная с генотипом. Но заметим, между прочим, что одаренность без работоспособности не проявляется, не существует как социальный феномен. А то, что работоспособность определяется физиологическими факторами, очевидно.

В общем и в вопросе об одаренности академик Н. П. Дубинин говорит очевидный вздор. К тому же вредный, по крайней мере, в двух отношениях. Во-первых, ложно ориентируя молодежь и старшее поколение, он может создавать серьезные психологические трудности, рождая напрасные сожаления о якобы утраченных возможностях. Человек пытается тянуться в той области, где на самом деле у него нет способностей. Во-вторых, исходя из своих взглядов, академик Н. П. Дубинин отбрасывает глубинное исследование одаренности хотя бы посредством тестов, когда стараются выявить потенциальные возможности человека. Эта позиция академика Н. П. Дубинина кажется ему очень демократичной. Однако заметим, что на обычном экзамене выявляется то, что человек смог усвоить, и потому молодые люди, выросшие в более культурной среде, имеют заведомое преимущество, тогда как разумная система тестов могла бы дать возможность получить адекватные оценки пригодности экзаменующегося. Отказ от работы в этом направлении принес бы чрезвычайный вред развитию нашего общества.

Впрочем и без того очевидно, что антинаучная концепция неизбежно оказывается вредной и тем более вредной, чем более важных вещей она касается.

Академик Н. П. Дубинин громко заявляет, что выступает с позиций марксизма и тем дает себе основание с первых страниц объявить инакомыслящих ревизионистами, пытающимися упразднить марксистское учение о сущности человека. Однако можно заметить, что он начинает с неточного цитирования К. Маркса по этому поводу. Но главное то, что его статья в действительности представляет собой нечто совершенно противоположное марксизму.

Дух марксизма — в последовательной научности, в глубоком проникновении во всю сумму доступных фактов, в конкретном анализе конкретной ситуации (как говорил В. И. Ленин). Но Н. П. Дубинин отбрасывает необходимость учитывать все факты, касающиеся наследственности, отбрасывает необходимость конкретно анализировать конкретные случаи. Вместо этого произносятся общие декларации.

Дух марксизма — в диалектике и, стало быть, в учете всех связей, опосредований и взаимных переходов вплоть до единства противоположностей. Но Н. П. Дубинин отбрасывает самую мысль о взаимодействии биологического и социального в области психики нормального человека. Он совершенно не понимает того, что в психике соединяются ее характер и ее содержание. Последнее социально обусловлено, но характер психики зависит от наследственности. Совершенно отделить одно от другого можно только в абстракции, разрывающей живую ткань психики человека. Что Н. П. Дубинин и делает.

Дух марксизма — еще в безусловном конкретном гуманизме. А концепции академика Н. П. Дубинина, как мы видели, антигуманны.

Вот я сказал то, что хотел сказать и тяжелое сомнение овладевает мною: может быть не надо было говорить все это, да к тому же так резко. Ведь попытки академика Н. П. Дубинина не подействуют на серьезных ученых и врачей и поэтому едва ли вообще окажут влияние на нашу биологию и медицину.

Однако такое убеждение не совсем точно. Академик Н. П. Дубинин воспользовался высокой трибуной и вовсе не исключено, например, что в каком-нибудь медицинском институте доцента, читающего генетику человека, будут привлекать к ответственности «за попытки, выражаясь словами Н. П. Дубинина, ревизовать и упразднить марксистское учение о единой социальной сущности человека».

Но кроме того, есть еще вопрос чести нашей науки, о нашей личной чести. Неужели мы примиримся с возрождением того погромного стиля, той борьбы против науки, которая бытовала 30 лет назад [2)]? Речь идет именно о принципах науки, об объективности научного исследования, о научной добросовестности. Нельзя допустить, чтобы эти принципы попирались так громогласно и беззастенчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубинин Н. П.* Наследование биологическое и социальное // Коммунист. 1980. № 11. С. 62–74.
2. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1963. 2-е изд. Т. 26. Ч. 2.

[2)] Здесь дана рукописная вставка, повторяющая пассаж из начала статьи: «Каждый может ошибиться и даже наговорить вздор. Дело в конце концов не в отдельных ошибках, а в самих принципах науки. К. Маркс говорил, что „человека, стремящегося *приспособить* науку к такой точке зрения, которая почерпнута не из самой науки (как бы последняя ни ошибалась), а *извне*, к такой точке зрения, которая продиктована *чуждыми* науке, внешними для нее интересами, — такого человека я называю *«низким»*“ [2, с. 125].» — *Прим. ред.*

Беседы по истории науки (очерки I–III) [1)]

Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 305–361

Очерк первый. *Наука от зарождения к современности*

Говоря о науке, я имею в виду весь комплекс таких наук, как например физика, биология, филология, математика, и отчасти науки прикладные, как медицина или агрономия.

Как ни различны эти отдельные науки, как ни считают порой наукой только науки точные, как ни изменялись науки на протяжении их долгой истории, во всех них есть общие, главные черты, которые и дают основание объединить их одним термином «наука» и отличить их от житейских знаний или таких «наук», как богословие или астрология. Каждая наука есть система знаний и опирающихся на них представлений о той или иной области или стороне действительности, причем эти знания и представления основываются на фактах, проверяются, и люди передают их друг другу с достаточной ясностью.

Поэтому вдаваться в более обстоятельное определение того, что такое наука, прежде чем рассмотрены и более или менее поняты основные касающиеся ее факты, было бы противно сущности науки. Философы могут думать об этом иначе, но мы согласимся с К. Марксом и Ф. Энгельсом, которые сказали: «Впрочем, при таком понимании вещей, когда они берутся такими, каковы они в действительности и как они возникли, всякая глубокомысленная философская проблема... сводится попросту к некоторому эмпирическому факту» [1, с. 43]. Поэтому обратимся к фактической истории науки. Наш очерк неизбежно будет очень беглым и далеко не полным. Но и в том есть свое преимущество: беглый общий взгляд позволит лучше ухватить целое, не потеряв за деревьями леса.

[1)] Публикуемые три очерка написаны в 1971 г. в связи с подготовкой курса лекций по истории науки в Новосибирском государственном университете.

Зачатки науки. Наука зарождалась вместе с развитием земледелия и государственности в тех центрах, где это развитие происходило: в Египте, Вавилонии, Китае, Индии. Практические задачи усложнялись и требовали более систематических и более сильных средств их решения. Если примитивному охотнику достаточно было считать, скажем, до десяти, то, чтобы считать войско или собираемую дань и подати, нужно было доходить до тысячи и дальше. Деление сыпучих тел требовало введения дробей. Измерение земельных участков — элементов геометрии. Определение сроков сева — создания календаря и, стало быть, начатков астрономических знаний и той же арифметики. Так из практики зарождались и вырастали первые зачатки науки — арифметики, геометрии, астрономии. Медицина, по-видимому, очень долго не отделялась от знахарства.

Началом науки можно считать достаточно систематическую и достоверную сводку фактов или приемов решения каких-либо задач. В первом случае мы имеем начала описательной науки, во втором — науки технической. Математика и возникла в качестве такой науки — нечто в духе инженерного сопромата. Как в сопромате даются правила расчета балок, мостов и других конструкций, так в математике давались правила решения задач на вычисление площадей, объемов, количества воинов в армии, составленной из отрядов, и т. д. Об этом мы можем судить по дошедшим до нас текстам, как например руководство для царских писцов (чиновников), написанное в Египте в XVII в. до н. э.

О происхождении геометрии греческий ученый Евдем Родосский в IV в. до н. э. писал: «Геометрия, по свидетельству весьма многих, была открыта египтянами и возникла при измерении земли. Это измерение было им необходимо вследствие разлития реки Нила, постоянно смывавшего границы. Нет ничего удивительного в том, что эта наука, как и другие, возникла из потребностей человека. Всякое возникающее знание из несовершенного состояния переходит в совершенное. Зарождаясь путем чувственного восприятия, оно постепенно становится предметом нашего рассмотрения и, наконец, делается достоянием разума» [2)].

Зачатки точной науки представляют первые формулировки законов. Такие простейшие законы были установлены еще в Египте в очень отдаленные времена, возможно, тысяч за пять лет до нашего времени. Например, площадь прямоугольника пропорциональна его сторонам. Площадь измеряла необходимое для посева количество зерна и ожидаемый урожай. Связь между этими величинами и длинами сторон участка теперь кажется вовсе тривиальной. Но стоит вдуматься: зерно и число шагов по краям участка — вещи совершенно разные. Открытие точной связи между ними требовало усилия мысли того же порядка, как потом открытие И. Ньютоном закона

[2)] Перевод С. Я. Лурье.

всемирного тяготения, когда он сопоставил столь различные явления, как падение тела на землю и движение луны.

Какие земледельцы или, может быть, жрецы седой древности были первыми ньютонами науки, мы не знаем. Но с тех пор как вообще появились люди, среди них появлялись Эдисоны, изобретавшие все более совершенные орудия, Ван-Гоги, рисовавшие на стенах пещер, Пушкины и Бетховены, слагавшие первые песни, а позже Ньютоны, открывавшие законы природы. С точки зрения нынешнего величия науки и искусства все это может казаться примитивным. Но так же через тысячу лет смогут показаться примитивными нынешние великие достижения науки и техники. Дело не в достигнутом, а в движении — в размере совершаемого людьми шага, причем этот шаг нужно оценивать не с точки зрения последующих эпох, а мерами той эпохи, когда те шаги совершались. В этом и состоит, между прочим, научное, историческое, а не обывательское понимание истории: понимать эпоху, время, народ, достижения в их подлинности.

Египтяне дошли в геометрии до определения объемов усеченной пирамиды и шара; вавилоняне достигли в арифметике и алгебре решения квадратных и даже некоторых кубических уравнений, суммирования арифметической прогрессии и составления различных таблиц, как таблицы степеней чисел и др. Они знали теорему Пифагора задолго до времени Пифагора. В астрономии они также пользовались таблицами и в VII—VI вв. до н. э. открыли закономерность повторения солнечных затмений, дойдя тем самым до возможности предсказывать их. Первые же известные нам записи астрономических наблюдений восходят ко времени около 3000 лет до н. э. Кроме того, по дошедшим до нас отрывкам текстов можно судить, что вавилоняне занимались уже не только практическими задачами, но также задачами, имевшими чисто теоретический интерес.

Таким образом, точные науки с их характерными чертами: формулировкой точных закономерностей, предсказанием явлений и собственными задачами, существовали в начальной форме уже за шесть веков до нашей эры так же как, надо думать, существовали профессиональные ученые, хотя они могли соединять науку со жречеством или астрологией.

Можно с уверенностью сказать, что достижения науки Египта и Вавилонии были даже более значительными, потому что мы судим о них только по случайным отрывкам текстов. Вообразите, если бы наши далекие потомки судили бы о современной науке по обрывкам школьных учебников, таблиц логарифмов и двух-трех научных журналов. О значении египетской науки говорит, например, тот факт, что еще Демокрит (V в. до н. э.) ездил в Египет изучать геометрию. А он был одним из первоклассных математиков Греции.

Греция. Греция вышла на арену развития науки начиная с VI в. до н. э. и уже в V в. до н. э. вместе с общим расцветом греческой культуры происходит удивительный подъем науки. То был век Софокла и Демокрита — достаточно назвать только два имени, гений которых поражает нас до сих пор.

Произошедший в Греции взлет развития науки, как и других сторон культуры, создает впечатление чуда. Хотя, конечно, это чудо объясняется совокупностью особых условий именно Греции среди других рабовладельческих обществ (несколько сходные условия были лишь у финикийцев). Может быть, главным из этих условий была политическая раздробленность и территориальная разбросанность греческого мира по берегам Средиземного и Черного морей при экономической и культурной общности. Это обеспечивало многообразие в единстве и снимало возможность деспотического подавления. Если где-то ученого, философа или политика преследовали, он мог искать прибежище в другом месте, оставаясь в то же время в той же культурной среде. Греки были мореплавателями, как их герои Ясон и Одиссей. Мореплаватель — неизбежно искатель, исследователь, ум его расширяется, и он достаточно свободен. В плаваниях он добирается до других стран и вместе с товарами или добычей черпает и элементы чужой культуры. Так греки усвоили достижения науки Египта и Вавилонии. На этой основе в их своеобразных условиях они двинули развитие науки со скоростью, которая была превзойдена потом только начиная с конца XVII в.

Математика обогатилась в Греции множеством результатов. Но главное греки выработали методы математического доказательства, превратив математику в строго дедуктивную абстрактную науку, чем она с тех пор и выделяется среди всех других наук. Аргумент опыта не считается математическим. Математика требует доказательства ее утверждений, исходя из основных понятий. Уровень строгости математических доказательств и построения математической теории, достигнутый греками, был превзойден только во второй половине XIX в. «Начала» Евклида служили образцом и остаются прототипом строгого изложения математической теории. Математики, перефразируя слова о Н. В. Гоголе, приписываемые Ф. М. Достоевскому, могут сказать: «Все мы вышли из евклидовых „Начал“».

Из конкретных достижений греческих математиков достаточно назвать три. Во-первых, они создали методы нахождения площадей и объемов, которые послужили прообразом интегрального исчисления. Главными действующими лицами здесь были Демокрит, Евдокс и Архимед. Во-вторых, греки развили теорию конических сечений — эллипса, гиперболы, параболы, дойдя до формулировки их уравнений в геометрических терминах, данной Аполлонием (III в. до н. э.). В-третьих, греки развили тригонометрию и начала геометрии на сфере, вычислили таблицы хорд (равносильно таблице синусов) и приложили эти математические результаты к астрономии (Гиппарх, II в. до н. э., Менелай, I в. н. э.).

Таким образом, греки вплотную подошли к аналитической геометрии и анализу, которые возникли потом в Западной Европе в XVII столетии. Но было бы заблуждением думать, что греки создали бы эти теории, не будь падения Греции. Для перехода от греческой математики к математике XVII в. нужно было развитие алгебры. Даже если вообразить, что падения Греции не произошло, а греческий научный гений сверкал бы и дальше, как во времена Архимеда, то все равно понадобился бы длительный период для создания и развития алгебры, притом настолько, чтобы ее соединение с геометрией могло привести к аналитической геометрии и анализу. Переход к алгебре произошел уже в самой Греции, в трудах Диофанта, но историческую задачу развития алгебры решали индийцы и их продолжатели в Средней Азии, Персии и арабских странах. Развитие это было доведено в Европе в XVI—XVII вв. до такой стадии, когда смогла появиться аналитическая геометрия, а за нею анализ. Р. Декарт окончательно придал алгебре ее современную форму буквенного исчисления и одновременно положил начало ее применению в геометрии — аналитической геометрии.

Этот пример развития одной лишь математики ясно показывает внутренние закономерности развития науки и то, как это развитие переходит от одних народов к другим, как Европа в Новое время продолжала дело своих предшественников.

Помимо математики греки развивали астрономию, доведя ее до большого совершенства. Тот же Евдокс в IV в. до н. э. создает математическую теорию видимых движений планет. В III в. до н. э. Эратосфен производит определение размеров земного шара, а Аристарх Самосский делает первые попытки определения расстояний от Земли до Солнца и Луны и выдвигает идею, что центром мира служит не Земля, а Солнце. Так что гелиоцентрическая система зародилась в Греции за 1700 лет до Н. Коперника!

Итогом достижений греческой астрономии была появившаяся во II в. знаменитая книга К. Птолемея, известная под арабским названием «Альмагест», содержавшая систему Птолемея с ее очень точным описанием движения Солнца, Луны и планет относительно Земли, а также указания положений на небесном своде 1022 звезд[3]. Сходные результаты были получены в основном еще раньше Гиппархом, величайшим астрономом Греции, который, кроме того, из сравнения своих определений положения звезд с прежними открыл такое тонкое явление, как прецессия — упреждение равноденствия (менее чем на $1'$ в год).

Хотя К. Птолемей поместил Землю в центре, но он ясно сказал, что с формальной, геометрической точки зрения безразлично, полагать ли Землю неподвижной или, напротив, звезды, а Землю — вращающейся. До сих пор многие физики усматривают в этом соображении заслугу А. Эйнштейна и

[3] Эта статья была написана давно, и работы Р. Ньютона об «Альмагесте» К. Птолемея (см., напр., [2]) мне не были известны. Скорее всего, Р. Ньютон прав, что К. Птолемей обманывал в обосновании своих выводов, но менять текст я не стал. Дело не лично в К. Птолемее, а в уровне греческой науки того времени.

даже основу его общей теории относительности. Но, как мы видим, ни А. Эйнштейн, ни его теория тут ни при чем. Относительность вращения понимал еще К. Птолемей почти за две тысячи лет до А. Эйнштейна! То же, что вращение не только относительно, но имеет как физическое явление также абсолютный, независимый от точки зрения наблюдателя характер, — этого К. Птолемей не мог знать, но того же не понимают и теперь еще многие физики, уверяя, будто спор между К. Птолемеем и Н. Коперником не имел смысла, хотя правота Н. Коперника — не с формальной, а физической точки зрения — доказана, собственно, еще И. Ньютоном. Так что нет оснований превозносить современную науку так, будто «до нас с Эйнштейном» или хотя бы с И. Ньютоном точной науки вовсе не было.

Наряду с развитием древних наук — математики и астрономии греки положили начало физике. Кроме Архимеда, давшего первые основы статики твердого тела и гидростатики, упомянем приписываемые Евклиду труды «Оптика» и «Катоптрика», содержавшие элементы геометрической оптики. Важные открытия были сделаны и другими учеными. Исходя из выдвинутого Демокритом представления об атомах, Герон Александрийский в I в. объяснил сжимаемость газов, дав этим зачатки молекулярной теории.

Архимед и Герон были не только теоретиками, но выдающимися инженерами и изобретателями. Герон построил паровую турбину или, если угодно, модель паровой турбины. Что же касается Архимеда, то если даже половина рассказов о построенных им метательных машинах, зажигательных стеклах и др., использованных в защите Сиракуз от римлян, относится к области преувеличений, все равно нужно признать не только его инженерный талант, но и то, что все это не могло быть сделано без предварительных экспериментов и соображений, связанных с законами рычага и др. Так же невозможно представить, чтобы закон отражения света был открыт греками без всяких экспериметов.

Таким образом, у греков уже были элементы настоящей физики с формулировками точных законов (законы рычага, закон Архимеда, закон отражения света), с экспериментом и математической теорией (теория рычага у Архимеда), с теоретическими представлениями, как объяснение сжимаемости газов их атомным строением. Понятно, то были только начатки, но начатки физики именно такой, как понимают ее и теперь.

Греки положили начало биологии не как простому описанию разных животных и растений, но как науке с ее систематическим и целенаправленным исследованием. Главная заслуга принадлежала здесь Аристотелю, который, вскрывая десятки различных животных, открывал общность их анатомии. Его ученик Теофраст описал до 500 видов растений и дал их классификацию.

Еще раньше Гиппократ положил начало научной медицины, перейдя от философских рассуждений и бытового опыта к систематическому изучению больного. Он был предтечей даже такой области знания, как медицинская география. С греков начинается описательная минералогия. В географии они поднялись до картографии и уже упомянутого определения размеров Земли.

Столь же значительна роль греков в развитии гуманитарных наук, хотя мы не знаем, насколько они имели здесь предшественников. Но так или иначе они положили начало истории с первыми попытками исторической критики и филологии с критическим изучением текстов, создали научную грамматику и, наконец, — как не вспомнить, — саму логику. Они довели ее до такого совершенства, что к ней мало было прибавлено существенно нового вплоть до середины XIX в.

Мы видим, таким образом, что почти все науки либо были существенно развиты, либо получили начало в Греции. Рим немного прибавил к этому, кроме юриспруденции. Оно понятно. Деспотическое централизованное государство не способствует свободе мысли и исследования. Но для своего утверждения оно как раз нуждается в юриспруденции.

Азия. Наши сведения о науке Древнего Китая и Индии далеко не полны. Астрономия в Китае начала развиваться уже в конце II тысячелетия до н. э. Во II в. до н. э. была изобретена бумага, к тому же времени относятся первые дошедшие до нас китайские сочинения по математике. В них содержатся поразительные достижения и высшее из них — алгоритм для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными, совпадающий по существу с методом Гаусса, отличаясь от него только тем, что все операции производятся на счетной доске. Теперь пользуются вычислительными машинами, и в этом смысле мы как бы возвращаемся к китайским методам, хотя и по-новому.

Из достижений ранней индийской науки упомянем только одно — создание научно разработанной грамматики санскрита вместе с замечательным по своей точности описанием его звукового состава. Таким образом, главными основоположниками лингвистики следует, видимо, считать индусов. Их сводный труд по санскриту относится ко времени более чем двухтысячелетней давности. Но он имел, конечно, предысторию, еще недостаточно изученную. Так что научная лингвистика насчитывает, надо полагать, до двух с половиной тысяч лет.

После падения Греции главным центром научного развития стали Индия, Китай, за ними Средняя Азия, Персия и арабские страны.

Именно индийцы изобрели принятую теперь повсеместно десятичную систему счисления с нулем на месте отсутствующего разряда, как в записи 103. Это дало громадное упрощение записи и вычислений. До того, чтобы отмечать особым знаком отсутствующий разряд, не додумались даже такие гении, как Архимед. Это был особый шаг мысли. Чисел данного разряда нет, как десятков в 103, а тем не менее это обозначается знаком «0». Можно сказать, отсутствие числа обозначается как присутствие нуля. Само слово «цифра» происходит от арабского названия нуля —

«сифр», что буквально означало «пустое место». Однако индусы имели здесь предшественников в лице вавилонян, которые также пользовались позиционной, но не десятичной, а шестидесятеричной системой записи чисел и знаком для нуля.

Далее, китайские и индийские ученые ввели отрицательные числа. Отрицательная величина — вовсе не величина, а все же ученые Азии догадались ввести такое понятие, связывая его с понятием о недостатке или долге. Наконец, индийские ученые ввели также иррациональные числа, понятия о которых у греков не было. Для греков число было отношением целых чисел. Отношение несоизмеримых величин они не понимали как число, оно не было для них числом. Индийцы же представили его как число. И они стали производить вычисления с иррациональными числами. В результате было положено начало общему понятию о числе, как его позже определил, например, Омар Хайям — великий поэт, математик и мыслитель (XI–XII вв.). По О. Хайяму, число — отношение любых однородных величин вообще. Практически это же определение давал потом И. Ньютон.

В перечисленных достижениях математики можно заметить важную общую черту: гибкость понятий, доходящую до тождества противоположностей. Отсутствие разряда обозначается присутствием нуля. Отрицательная величина определяется все же как величина, хотя и отрицательная. Отношение, не выражаемое числом, как оно понималось до того, определяется как число. Все это — реальная диалектика в развитии математики. Греки, создав чрезвычайную строгость математических выводов, как бы заковывали себя в ее латы и стесняли свободу движения мысли. Индийцы же, свободные от этих лат строгости, смогли сделать то, чего не могли сделать греки. Позже развитие математики в Европе было обязано прежде всего той же гибкости мысли. Математический анализ — главное достижение европейской математики — строился начиная с XVII в. без строгого обоснования и, возможно, показался бы Архимеду даже не математикой. Только теперь основы анализа приобрели точность, которая соответствовала бы понятиям Архимеда. Но зато какое мощное орудие представил анализ для естествознания и техники!

Именно гибкость понятий, а не их формальная жесткость, является главным средством движения науки и дает ей достижения, которые только потом приобретают формальную строгость. Говорят порой, что «философы Востока», не построив такой же строгой математики, как греки, не смогли пойти дальше их. Но мы видим, что дело обстояло как раз наоборот. Математики Востока, так же как потом ученые Европы, смогли пойти дальше греков в большой степени именно потому, что не заковывали свою мысль греческой строгостью!

Развитие начал алгебры в Индии распространилось в Среднюю Азию и дальше в арабские страны. Большую роль сыграл хорезмийский ученый

IX в. Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми. Само слово «алгебра» является не чем иным, как латинизированным «аль-джебр» из заглавия его труда — «Китаб аль-джебр валь-мукабала» [4]. Прозвание этого ученого — аль-Хорезми, будучи латинизированным, стало термином «алгоритм». Омар Хайям изучал кубические уравнения, дал способы извлечения корней любой (целой) степени и др. Самаркандский ученый Джемшид ибн Масуд аль-Каши, работавший в начале XV в., ввел десятичные дроби, открыл «бином Ньютона», вычислил число π с семнадцатью десятичными знаками — все это примерно за сто пятьдесят лет до того, как те же результаты были получены в Европе.

Но всех превзошли математики Индии, которые в XV–XVI вв. дошли до бесконечных рядов, дав степенные ряды для синуса, косинуса и арктангенса, которые были найдены И. Ньютоном и другими математиками Европы более ста лет спустя!

Развитие Индии, и в частности индийской науки, было заторможено иноземным завоеванием, установившем деспотию Великих Моголов, сменившихся потом английскими колонизаторами. Страшное воздействие чужого ига слишком хорошо известно России по татаро-монгольскому игу. Но Россия претерпевала его 240 лет, тогда как Индия — почти девять веков.

О развитии других наук в Азии мы не будем говорить. Упомянем только хорезмийского ученого Абу-Рейхана Бируни (X–XI вв.), который, в частности, определил длину окружности Земли и настойчиво выражал мнение о возможности движения Земли. Идея Аристарха Самосского возрождалась снова за пятьсот лет до Н. Коперника.

Европа XVI–XVIII вв. В Европе существенное развитие науки начинается с середины XVI в., когда появился знаменитый труд Н. Коперника, а итальянские математики нашли общие решения уравнений третьей и четвертой степени и дали первое понятие о мнимых числах. В этот момент европейцы, усваивая через арабов и Византию достижения своих предшественников, смогли пойти дальше. В XVII в. Архимед был наиболее цитируемым автором. Было бы, однако, неверно представлять европейское средневековье как эпоху полного застоя в науке. Кое-что в науке тогда делалось, а схоласты в своих рассуждениях оттачивали логику. Развитие средневековой техники подготавливало данные и методы для экспериментальной науки. Алхимики развили искусство химических опытов. Они только толковали их, смешивая реальное с мистикой. Но именно они подготовили почву для научной химии.

Европейская наука лишь постепенно стала принципиально превосходить уровень науки греческой и азиатской. Н. Коперник и И. Кеплер оставались, собственно, на уровне греков, занимаясь той же проблемой точного описания движения планет. Н. Коперник воспроизвел идею Аристарха.

---

[4] «Книга о восстановлении и противопоставлении». «Восстановление» и «противопоставление» — алгебраические операции переноса членов уравнения из одной части в другую.

Принципиальный шаг был совершен Г. Галилеем в его открытиях закона падения, закона инерции и принципа относительности (согласно которому в системах, движущихся равномерно друг относительно друга, явления протекают одинаково). То были первые общие законы движения, а принцип относительности утвердился позже как общий закон физики вообще. Греки же, а затем Н. Коперник и И. Кеплер занимались конкретными движениями — движениями небесных светил. В математике Европа так же превзошла своих предшественников в XVII в. с созданием аналитической геометрии Декартом и позже с созданием анализа И. Ньютоном и Г. Лейбницем.

Но еще раньше, в 1619 г. английский врач У. Гарвей открыл кровообращение и тем заложил, по словам И. П. Павлова, фундамент нового отдела точного человеческого знания — физиологии. Он же, можно сказать, создает начала эмбриологии и формулирует принцип: всякое животное — из яйца. В 1600 г. выходит книга английского ученого У. Гильберта, положившая начало науке о магнетизме и электричестве (им введен сам термин «электричество»).

Движение европейской науки шло в тяжелой борьбе против религии за право человека исследовать и понимать окружающий мир без подчинения религиозным учениям и утвердившимся авторитетам. М. Сервет, испанский ученый, и Джордано Бруно были сожжены. Галилео Галилея судили, грозя пытками. И еще в середине XVIII в. французский ученый Ж. Бюффон был принужден церковниками к отречению. А теперь находятся люди, которые изображают эту борьбу как установление некоего «этикета науки» наподобие придворного или судят Г. Галилея за его отречение, благо им не грозит за это ни костер, ни даже порицание начальства. Какая пошлость и низость суждения! Их — этих людей — только и не хватало инквизиторам, чтобы плюнуть в Г. Галилея.

Но Г. Галилей не предал науку, а узником инквизиции, слепнущим стариком написал главный свой труд и опубликовал его за границей.

Однако как ни велики Г. Галилей, Р. Декарт или И. Кеплер, но над всей картиной науки того времени возвышается, как Эльбрус над Кавказским хребтом, гигантская фигура И. Ньютона. И. Ньютон собрал, как в фокусе, назревшие проблемы точной науки и, преломив их в призме своего гения, бросил яркий свет, осветивший не только настоящие, но и будущие пути точного естествознания. То, что было у греков в зачатках и к чему двигались его ближайшие предшественники, И. Ньютон превратил в грандиозное здание точной теории, как это сделали греки в геометрии. От него берет начало то, что называется классической физикой с ее общими идеями, как они господствовали безраздельно в течение 200 лет.

Конкретно И. Ньютону принадлежат четыре главных достижения: построение системы механики с тремя «законами Ньютона» в основании, открытие закона тяготения, изобретение дифференциального и интегрального исчисления, исследования по оптике, и прежде всего открытие разложения белого света в спектр. Ньютоновская механика с законом тяготения дала теорию астрономии и образец физической теории на будущее. Закон тяготения явился первым в науке, который был открыт не из прямых наблюдений, как законы Галилея, и не просто давал систематическую картину движений, как законы Кеплера, но был выведен из сопоставления далеких друг от друга явлений и раскрывал их основание. Дифференциальное и интегральное исчисление стало главным разделом математики и мощным орудием точного естествознания; И. Ньютон, можно сказать, был вынужден изобрести его, чтобы точно формулировать законы механики и решать ее задачи: ведь уже скорость находится дифференцированием пути по времени. Оптика Ньютона вместе с исследованиями его современников дала образец экспериментальной физики.

Из этих источников потек, убыстряясь и расширяясь, мощный поток точной науки. Однако так было пока только в физике, математике и астрономии. Химия только стала складываться как наука. Но точной наукой она стала лишь после того, как М. В. Ломоносов в 1756 г., а позже и независимо А. Лавуазье открыли закон сохранения вещества и тот же А. Лавуазье верно понял наиболее важную и распространенную реакцию — горение и вообще окисление как соединение с кислородом.

Если говорить о геологии, то у греков были лишь ее зачатки; в средние века она развивалась в Азии и Европе в прямой связи с практикой горного дела и в XVIII в. только формировалась как наука.

Что же касается биологии, то даже классификация животных и растений, данная К. Линнеем в середине XVIII в., при всем ее значении, целиком находилась на уровне греков, так как представляла собой применение принципов аристотелевской логики к обширному наблюдательному материалу. Вспомним к тому же, что еще в III в. до н. э. классификацию растений дал Теофраст. Биология принципиально превзошла греческий уровень лишь с появлением эволюционного учения, начавшего зарождаться во второй половине XVIII в. и превращенного в стройную, широко обоснованную теорию, когда в 1859 г. появился труд Ч. Дарвина «Происхождение видов». Точно так же и медицина получила принципиально новые по сравнению с Древней Грецией научные основания только с развитием физиологии и совершенным Пастером всего немногим более ста лет назад открытием, что болезни возбуждаются микробами. Однако до XX в. сохранялись в биологии в форме витализма представления об особой жизненной силе — энтелехии, о которой писал когда-то Аристотель. Еще один из основоположников генетики Т. Х. Морган сражался на страницах своих «Структурных основ наследственности» против витализма. Кстати, стоит просмотреть этот замечательный труд Моргана, чтобы увидеть в этом «трижды презренном идеалистическом вейсманисте-морганисте», как клеймили его ложно назвавшие себя «мичуринцами», воинствующего материалиста и диалектика. В этой книге есть, между прочим, глава о внехромосомной наследственности, «мичуринцы» же только раздули идею о ней, извратили ее и обрушили на самого же Т. Х. Моргана.

К современной науке. С начала XIX в. начинается подготовленный предшествующим развитием переход науки на новую ступень. В 1800–1804 гг. швейцарские ученые Ж. Сенебье и Н. Т. Соссюр, опираясь на исследования, шедшие более ста лет, открывают дыхание растений и их питание углеродом из углекислоты воздуха. В 1802 г. Г. Ф. Гротефенд расшифровывает древнеперсидскую клинопись. В 1803 г. Дж. Дальтон открывает закон кратных отношений в химии и вводит в нее представление об атомах. В 1809 г. Ж. Ламарк выступает со своей теорией органической эволюции. В 1822 г. Ж. Ф. Шампольон расшифровывает египетские иероглифы, полагая этим вслед за Г. Ф. Гротефендом начало громадной области древней истории и лингвистики. Кстати, мы ничего не знали бы о догреческой науке, если бы не Ж. Ф. Шампольон и те, кто продолжил его дело. В 1826 г. Н. И. Лобачевский впервые выступает со своей геометрией, созданием которой начинался совершенно новый этап развития геометрии, а вместе с другими новыми течениями — новый этап в развитии всей математики. В 1831 г. М. Фарадей открывает явление электромагнитной индукции, подводя этим мину под ньютоновскую физику и одновременно закладывает основание развитию в последующее время электротехники, хотя, конечно, он и не подозревал ни о том, ни о другом. В 1830–1833 гг. Ч. Лайель публикует трехтомные «Основы геологии», дающие впервые общий верный взгляд на смену геологических эпох. В 1835–1840 гг. несколько астрономов независимо впервые определяют расстояние до звезд. В 1838 г. М. Я. Шлейден и Т. Шванн выдвигают клеточную теорию строения растений и животных. В 1840 г. Ю. Либих открывает минеральное питание растений и этим дает основание новому развитию земледелия. В 1841 г. Ю. Р. Майер открывает закон сохранения энергии. В 1845 г. К. Маркс и Ф. Энгельс формулируют свою теорию истории и социологию — исторический материализм. К этому перечню можно было бы добавить создание рефлекторной теории нервной системы и экспериментальное доказательство роли больших полушарий мозга в возникновении ощущений и сознательных движений; первый синтез органического вещества; развитие сравнительно-исторического метода в языкознании; научно поставленные раскопки Помпеи, давшие представление о жизни римлян, казавшееся ранее недостижимым; начало археологии Египта и Вавилонии…

Все это проложило пути к перевороту в науке, который оформился во второй половине XIX в. и привел ее в принципиально новое состояние как в смысле ее объема и внутреннего содержания, так и в смысле ее значения в материальной и духовной жизни общества. Произошел переход к современной науке. И на этом мы кончаем наш очерк. О современной науке, об особенностях, отличающих ее от науки предшествовавших эпох, мы поговорим в следующем очерке.

Понимание истории науки. История науки чрезвычайно интересна и поучительна. Она богата волнующими событиями такими, как суд над Г. Галилеем; как опыты Пастера с прививками против бешенства и другие полные драматизма и мужества моменты борьбы ученых с болезнями и смертью, вдохновенно описанные Полем де Крайфом (де Крюи) в «Охотниках за микробами» и «Борцах со смертью»; как идейный разброд среди математиков по поводу оснований и смысла их науки, когда в начале нашего столетия, казалось, само стройное и величественное здание математики может рухнуть в значительной части; как борьба против учения Дарвина — от выпадов церковников до «обезьяньего процесса» в США, когда в двадцатых годах нашего столетия судили учителя за изложение учения о происхождении человека; как наступление лысенковщины на науку и борьба ученых за генетику.

История науки раскрывает общность человечества, так как все народы, поднимавшиеся над первобытным уровнем, создавали начала науки с общим, при всех вариациях, содержанием; так же как эстафета науки передавалась от одних народов к другим; так же как теперь почти все народы включились в общечеловеческое творчество науки.

История науки раскрывает далее взаимосвязи материальной и духовной культуры, взаимодействие материальных условий жизни общества и познания. Она открывает нам пути человеческого гения в общеисторическом его явлении и в личностях выдающихся ученых.

История науки раскрывает, наконец, замечательный человеческий феномен — познание. Раскрывает в его живом развитии, в единстве конкретного и общего, в частных его путях и общих закономерностях. Она раскрывает диалектику не в виде схематики законов и категорий, а в ее подлинной жизни.

В. И. Ленин писал: «Раздвоение единого и познание противоречивых частей его... есть *с у т ь* (одна из «сущностей»... или черт) диалектики... Правильность этой стороны содержания диалектики должна быть проверена историей науки» [3, с. 316].

Можно только пожалеть, что понимание истории науки не стало элементом общей культуры научных работников, что если курсы истории соответствующих наук и читаются по факультетам (далеко не повсеместно), то по большей части на уровне фактологии, а не философии. Курсы философии не включают обобщенного изложения истории науки вопреки суждению В. И. Ленина, что правильность диалектики проверяется, доказывается историей науки.

Подлинная культура человека начинается тогда, когда он не только специалист и не только слушает симфонии и ходит в Эрмитаж, но когда он понимает свою деятельность в общей связи, а стало быть, в ее философии, в ее исторической связи с предшествующим ее состоянием, с другими областями науки, культуры, техники и общественной жизни. Когда нет этого, то и появляются математики, видящие науку только в алгоритмах, физики, видящие ее только в своих уравнениях или экспериментах, или историки и филологи, не имеющие никакого понятия о точных науках и бегущие от них, как черт от ладана, в нелепом опасении, что математизация погубит их гуманитарность. Как будто точное исследование пищеварения И. П. Павловым могло испортить ему аппетит.

Главным в общем образовании и, стало быть, особенно в школьном преподавании должно быть, мне думается, образование историческое. Оно должно давать изложение развития жизни народов, их материальной и духовной культуры, науки в частности, содержать яркие описания драматических событий, которые служили бы культурно-просветительными уроками для молодежи, и выдающихся личностей. История — это великая драма, которую играют и творят люди. Это тысячи сочиненных и разыгранных ими драм Шекспира и романов Толстого. Она потрясает, вдохновляет и дает нам глубокие поучения.

Восходит в будущее лестница истории. События и люди, исторические или обыкновенные личности — это ее ступени, кирпичи или камешки в ней. Быть ее ступенью, даже камешком — почетно. Вынул камешек — и ослабла лестница. Выньте ступень — и лестница рухнет. Поэтому, понимая каждое событие, каждого человека как ступень в движении истории, мы одновременно понимаем их взаимную зависимость и неустранимое значение. Так и мы стоим на плечах тех, кто был до нас, а те, кто придет за нами, будут стоять на наших плечах, и чем выше поднимемся мы сами, тем выше будут стоять те, кто будет опираться на нас. Нас нельзя устранить из истории. Мы, хотя бы маленькими своими делами, тоже входим в нее.

Так история учит пониманием прошлого лучше понимать настоящее, дает нам понимание нашей связи с другими людьми, со всем человечеством в его трудном и драматическом поступательном движении, воспитывает в нас сознательную ненависть к злу, дает понимание нашего собственного значения и ответственности.

Как приложение привожу поучительный отрывок из «Пневматики» Герона Александрийского (I в.). Он показывает, насколько уже в древности эксперимент был научным доводом.

«Пневматика Герона» [5)]

Наука пневматики издавна пользовалась высоким вниманием философов и инженеров[6)], первые логически выводили ее принципы, вторые доказывали их путем экспериментов. В своей книге мы имеем в виду дать систематическое изложение установленных принципов этой науки и прибавить наши собственные открытия. Мы надеемся таким путем оказать пользу будущим исследователям предмета.

Однако, прежде чем обратиться к самому изложению, мы обсудим одну общую проблему, а именно природу вакуума. Некоторые авторы определенно отрицают его существование. Другие говорят, что при естественных условиях не существует непрерывного вакуума, но что небольшие пустоты имеются в рассеянном состоянии в воздухе, воде, огне и других телах. Этой точки зрения мы и будем придерживаться. И обратимся к тому, чтобы показать посредством опытов, что она верно представляет реальное положение вещей.

То, что небольшие пустоты рассеяны в воздухе, воде и других телах, нужно понимать в том смысле, что частицы, касаясь друг друга, не прилегают друг к другу полностью. Они оставляют в промежутках пустоты, как частицы песка. Песчинки можно сравнить с частицами воздуха, а воздух между песчинками — с пустотами между частицами воздуха.

Вследствие такого строения воздуха оказывается, что воздух может сжиматься под действием внешней силы и его частицы сжимаются друг с другом противно природе. А при устранении давления воздух принимает прежнее состояние вследствие упругости его частиц. Аналогично если приложенная сила вызывает разъединение частиц и создает между ними больше пустого пространства, чем при обычных условиях, они стремятся соединиться снова. Причина состоит в том, что движение частиц сквозь пустоту становится быстрым и, если их ничто не ускоряет и не тормозит, они снова вступают в соприкосновение друг с другом.

Те, кто абсолютно отрицает существование пустоты, могут, конечно, найти много аргументов в ответ на то, что было сказано, и при отсутствии экспериментального доказательства их рассуждения могут как будто одержать легкую победу. Поэтому мы покажем им посредством наблюдаемых явлений два факта: 1) что существует такой феномен, как непрерывный вакуум, но что он существует только против природы; 2) что в соответствии с природой пустота существует, но только в небольших рассеянных количествах. Мы дальше покажем им, что под давлением тела заполняют рассеянные пустоты. Эти доказательства не оставят им никакой лазейки для их словесных упражнений.

[5)] Сокращенный перевод сделан мною по книге Б. Фаррингтона [4].

[6)] Мы бы сказали теперь: «теоретиков и экспериментаторов». — *А. Д. Александров.*

Для нашего доказательства нам будет нужен металлический шарообразный сосуд объемом примерно в два литра, сделанный из металлического листа такой толщины, чтобы противостоять всякому смятию. Он должен не пропускать воздуха. В сосуд должна быть вставлена медная трубка с узким отверстием таким образом, чтобы она не касалась места, диаметрально противоположного тому, где она вставлена, и оставляла место для прохода воды. Трубка должна выступать из сосуда примерно на три дюйма. Сосуд вокруг того места, где вставлена трубка, нужно упрочнить оловянным припоем так, чтобы трубка и сосуд представляли сплошную поверхность. Нужно чтобы воздух, вдуваемый в сосуд, не мог выйти через какую-либо щель.

Теперь рассмотрим подробно обстоятельства эксперимента. В сосуде с самого начала содержится воздух, как во всех сосудах, обычно называемых пустыми, и воздух наполняет все заключенное в сосуде пространство и непрерывно давит на стенки. Согласно думающим, что вовсе нет незанятого пространства, нельзя ввести воду или больше воздуха, если часть воздуха, уже содержащегося в сосуде, не выйдет. Далее, если попытаться ввести внутрь воздух или воду, сосуд, уже будучи полным, должен разорваться (прежде чем впустить их). Хорошо. А что происходит на самом деле? Взявший в рот трубку, может вдуть в сосуд большое количество воздуха без того, чтобы вышла какая-либо доля уже содержащегося там воздуха. Это происходит всякий раз, как опыт повторяется, и это представляет ясное доказательство того, что частицы воздуха в сосуде вжимаются в пустоты между частицами. Сжатие противно природе, будучи следствием насильственного внедрения воздуха. Если после вдувания быстро закрыть трубку пальцем, воздух все время останется сжатым в сосуде, но едва палец убран, внедренный воздух вырывается наружу, выталкиваемый расширением воздуха внутри сосуда вследствие его упругости.

Если произвести противоположный эксперимент, можно высосать большое количество воздуха из сосуда без того, чтобы другой воздух занял его место. Этот опыт окончательно доказывает, что в сосуде образуется непрерывная пустота.

Можно предложить много других опытов о природе пустоты, но этих может быть достаточно, потому что они основаны на показаниях наблюдаемых явлений. Суммируя, мы можем сказать, что всякое тело состоит из маленьких частиц его материала, между которыми имеются пустоты. Только изза неточности языка можно придерживаться мнения, что при отсутствии силы нет абсолютно никакой пустоты, а все наполнено воздухом, или водой, или каким-нибудь другим веществом, и что только тогда, когда одно из этих веществ удаляется, другое может проникнуть, чтобы занять пустое пространство.

Очерк второй. Формирование современной науки

В предыдущем очерке «Наука от зарождения к современности» мы проследили в общих чертах историю науки от ее первых шагов до нарастающего потока открытий первой половины прошлого столетия. Из перечисленных там научных событий от 1800 до 1850 г. напомню несколько: появление эволюционной теории Ж. Ламарка (1809 г.), начало археологии Египта и Вавилона, расшифровка египетских иероглифов (1822 г.), создание неевклидовой геометрии (1826 г.), открытие электромагнитной индукции (1831 г.), первое измерение расстояний до звезд (1835–1840 гг.), открытие закона сохранения энергии (1841 г.), создание исторического материализма (1845 г.). Наука подходила к существенно новому этапу своего развития, назревал переворот, который и совершился в результате следующих выдающихся событий революционного значения.

В 1859 г. появляется «Происхождение видов» Ч. Дарвина, а в 1871 г. его «Происхождение человека и половой отбор». Теория Дарвина быстро завоевала признание и стала основной теорией биологии. В 1865 г. И. Г. Мендель впервые сообщает об открытых им законах наследственности, хотя они остались незамеченными и заняли подобающее место в науке лишь в XX в. В 1862 г. Л. Пастер экспериментально опровергает распространенный до того взгляд о «самопроизвольном» зарождении живых организмов и позже доказывает роль бактерий как причины болезней. В 1867 г. выходит из печати 1-й том «Капитала» К. Маркса. В 1869 г. Д. И. Менделеев открывает периодическую систему элементов. В 70-х гг. Г. Кантор закладывает основы теории множеств в математике, а Дж. К. Максвелл и Л. Больцман создают принципиально новые теории в физике.

Все эти события вместе с рядом других обозначили преобразование науки в целом, которое мы рассмотрим, начав с математики, как самой древней из наук.

Переворот в математике. Греки превратили математику в дедуктивную науку, требующую доказательства ее утверждений из основных понятий и исключающую ссылку на опыт в качестве аргумента в доказательстве. Однако и после этого на протяжении веков содержание математики хотя и расширялось, но оставалось в принципе тем же, каким оно было при ее зарождении, — это количественные и пространственные формы и отношения действительности.

Чистая математика исследует эти формы и отношения в отвлечении от материального содержания, так что ее непосредственным предметом оказываются, скажем, не те или иные тела шарообразной формы, а идеальный шар, не те или иные совокупности предметов и даже не отдельные числа, а целые числа вообще, не те или иные зависимости между конкретными величинами, а зависимости между величинами, числами вообще, т. е. функции.

Математик пишет $y = ax^2$. Но он не интересуется тем, выражает ли эта формула закон падения, когда x — время, y — путь и a — половина ускорения силы тяжести, или эта формула дает энергию движущегося тела, когда y — энергия, x — скорость и a — половина массы тела. Для математика x и y — переменные, т. е. числа, могущие принимать разные значения, и a — постоянный коэффициент, не более.

Однако при всей абстрактности никто из математиков, по-видимому, не сомневался в том, что все их понятия, теоремы и формулы выражают реальные количественные и пространственные отношения. Математическая геометрия была теорией реального пространства, как позже механика явилась теорией движения. Можно сказать, что геометрия, возникнув на почве практического опыта, оставалась по существу физической теорией, получившей лишь строго дедуктивную форму. Физика полностью приняла ее, и никто в ней не сомневался. Никакое другое пространство, кроме трехмерного евклидова, не мыслилось и в самой математике.

Так было до тех пор, пока не возникла геометрия Лобачевского, которую он сам назвал «воображаемой»; появилось воображаемое пространство Лобачевского. Потом появилось n-мерное пространство, и, наконец, Б. Риман ввел общее понятие математического пространства в лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», прочитанной в 1854 г., но опубликованной лишь двенадцать лет спустя, уже после его смерти.

Б. Риман, как сказано, дал общее определение пространства в математическом смысле, включая бесконечномерные «функциональные пространства», «точками» которых являются функции. Б. Риман также заложил основы теории пространств, получивших потом название римановых и представивших впоследствии математический аппарат общей теории относительности, причем Б. Риман указал даже возможное направление развития теории реального пространства, как это развитие, можно сказать, и было осуществлено в общей теории относительности.

Последовало уже подготовленное предшествующим развитием геометрии формирование различных геометрических теорий. Геометрия из науки о формах и отношениях в реальном пространстве превратилась в совокупность теорий разнообразных «воображаемых», логически мыслимых пространств и фигур в этих пространствах. Евклидова геометрия стала только частным случаем среди массы геометрий: римановой, аффинной, проективной, n-мерной евклидовой или неевклидовой и т. д.

В алгебре еще в XVI столетии появились мнимые числа, само название которых в противовес действительным, или вещественным, числам указывает на то, что они были только мыслимыми, воображаемыми. И Ф. Энгельс назвал их свободными творениями разума [5, с. 37]. Однако мнимые числа полностью укрепились в математике лишь к началу XIX в., когда была дана их геометрическая интерпретация. Потом в алгебре стали изучаться разные системы — группы, поля, кольца, между элементами которых имеются отношения, формально сходные с отношениями между числами, как отношение суммы и слагаемых, произведения и сомножителей. Если алгебраист пишет $ab = c$, то a, b, c могут быть вовсе не числами, а, скажем, преобразованиями: производим преобразование a, потом преобразование b, в результате получаем преобразование c.

Таким образом, алгебра из науки о решении численных уравнений превратилась в теорию разнообразнейших алгебраических систем.

Претерпел существенные изменения и анализ бесконечно малых, перейдя, в частности, к исследованию гораздо более общих функций, чем те, какие были в сфере его исследования еще в начале XIX в.

Все эти изменения математики не только необозримо расширили ее содержание, но и изменили его принципиально. Математика из науки о количественных отношениях и пространственных формах действительности превратилась в науку о любых логически мыслимых отношениях и формах. В предмет математики входит любая структура, которую можно мыслить без противоречий и исследовать путем логического рассуждения с достаточной строгостью и богатством выводов. Найдет ли эта мыслимая структура применение и прообраз в действительности — это уже не вопрос математики. Понятно, что фактически развиваются теории тех структур — пространств, алгебраических систем и пр., которые находят существенные применения в самой математике или тем более за ее пределами. Но для самой по себе чистой математики это в принципе безразлично. Опыт развития науки уже показал достаточное число раз, как «воображаемые» теории находили потом чрезвычайно существенные приложения. Г. Кантор выразил эту новую творческую сущность математики в гордых словах: «Сущность математики... в ее свободе» [6, с. 80].

Общее основание или, можно сказать, идеологию новой математики дала теория множеств Кантора. Тот или иной объект математического исследования, будь то пространство, алгебраическая система и др., определяется как множество каких-либо мыслимых элементов, между которыми определяются те или иные отношения, обобщающие отношения между точками или фигурами евклидова пространства, между числами или функциями, преобразованиями и др.

Так сто лет назад произошел переворот в математике, несравненно более существенный, чем вызванный в XVII в. созданием анализа бесконечно малых и едва ли меньший, чем тот, какой произошел, когда математика из эмпирической превратилась у греков в дедуктивную. Математика, и прежде занимавшая особое положение ввиду своего дедуктивного характера, тем более обособилась от всех других наук. В начале предыдущего очерка было сказано: «Каждая наука есть система знаний и опирающихся на них представлений о той или иной области или стороне действительности».

Но математика перестала быть наукой в этом смысле: в своих построениях она выходит за пределы действительности в область логически мыслимого. Конечно, она делала это и прежде, и во всякой науке, поскольку она теоретическая, происходят такие переходы. Но математика пошла здесь так далеко, что «количество перешло в качество».

Это дало основание Б. Расселу сказать в преддверии XX столетия, что математика есть доктрина, в которой неизвестно, о чем мы говорим, и верно ли то, что мы говорим [7, с. 83]. Если верное мы понимаем как проверяемое практикой, наблюдением, эмпирическими фактами, то какая же практика, наблюдение и эмпирические факты имеются в функциональных пространствах или для произвольных бесконечных множеств? Математика — это метод науки, и без применения ее построения и выводы не являются верными или неверными, иначе как только в смысле логической мыслимости на некотором достаточном уровне строгости.

Дальше углубляться в сущность современной математики мы не будем. К ней мы вернемся в следующем очерке. А сейчас обратимся к другой древнейшей науке — астрономии.

Переворот в астрономии. В 1845–1850 гг. были впервые измерены расстояния до звезд. То были ближайшие к нам звезды, но оказалось, что расстояния до них в сотни тысяч раз больше расстояния от Земли до Солнца!

Так произошел взрыв в науке о Вселенной. Астрономия с древнейших времен изучала Солнечную систему, и звезды были для нее где-то на «сфере неподвижных звезд». Примерно верное представление о строении и размерах Солнечной системы возникло еще у греков и было потом уточнено в XVI–XVII вв. Но теперь, в середине XIX столетия, мир внезапно раздвинулся перед человеком и Солнечная система предстала, уже не в догадках ученых и философов, но на основе точного измерения, только ничтожной частичкой в протяжениях межзвездного пространства, громадность которого не может охватить воображение. Воображение не может, но мысль, вооруженная астрономическими инструментами и математическими методами, смогла! И она пошла еще дальше.

В 1859–1860 гг. применение спектрального анализа позволило впервые сделать заключение о веществах, образующих поверхность Солнца. Возникла новая область знания — астрофизика. Последовало определение температуры поверхности Солнца, потом — определение масс, состава, температур и размеров звезд; в 1920-х гг. было установлено, что спиральные туманности — это звездные системы, состоящие из десятков и сотен миллиардов звезд, удаленные от нас в сотни тысяч и миллионы раз дальше, чем ближайшие звезды нашей Галактики, и последняя лишь одна из таких звездных систем.

Переворот в физике. В 1850–1851 гг. Р. Клаузиус и У. Томсон, впоследствии лорд Кельвин, положили основы новой области физики — термодинамики с ее двумя «началами»: первым — ранее открытым законом сохранения энергии и вторым — законом возрастания энтропии. Одновременно последовало глубокое развитие кинетической теории газов и теплоты с введением в эту теорию понятия вероятности (закон распределения скоростей молекул газа, установленный Дж. К. Максвеллом в 1860 г.). На этой основе Л. Больцман в 1871 г. дал статистическое, или, другими словами, вероятностное, объяснение закона энтропии. Возрастание энтропии означает переход от данного состояния к более вероятному.

В целом сложилась новая область физики — термодинамика в соединении со статистической физикой.

Однако идеи Больцмана вызвали возражения, критику и даже нападки. Возможно, не без их влияния он в состоянии душевной депрессии покончил с собой. Между прочим, теория множеств Г. Кантора тоже вызвала нападки, и опять-таки, возможно, не без их влияния Г. Кантор тоже претерпел депрессию. Жизнь он кончил в доме для умалишенных.

Понятие вероятности было совершенно чуждо ньютоновской физике с ее строгим детерминизмом. Поэтому, естественно, возникли попытки исключить вероятность и свести дело к детерминизму механических законов. Однако эти попытки не имели успеха. Фундаментальный принцип детерминизма классической физики и всего механического миропонимания оказался ограниченным по своему значению и должен был частично уступить место принципу вероятностному. Давление газа, его расширение, диффузия, нагревание, испарение жидкости — все это вероятностные процессы. Хотя, скажем, расширение газа при увеличении доступного ему объема имеет вероятность, чрезвычайно близкую к достоверности, но все же не является абсолютно невозможным, чтобы в результате особого сочетания движения молекул оно не произошло в нарушение закона Бойля — Мариотта. В очень малых объемах и были обнаружены колебания — флуктуации плотности газа, находящегося в целом в равновесии.

В 1864 г. появилась работа Дж. К. Максвелла «Динамическая теория электромагнитного поля», а в 1873 г. — его двухтомный «Трактат об электричестве и магнетизме». Опираясь на открытия М. Фарадея, Дж. К. Максвелл построил общую, математически оформленную теорию электромагнетизма и на ее основании электромагнитную теорию света. Теория Максвелла заключалась, собственно, в уравнениях, которые носят теперь его имя. О них Л. Больцман, цитируя строки из «Фауста» [8, S. 39], сказал: «Не бог ли эти знаки начертал, ... »[7]. Позже другой крупный физик М. Лауэ писал: «Понимание того, как сложнейшие разнообразные явления матема-

[7] Не бог ли эти знаки начертал,
Что мне души волнение смиряют,
Спокойной радостию сердце наполняют
И как таинственно-волшебный дар
Мне силы скрытые природы открывают?

тически сводятся к таким простым и гармонически прекрасным уравнениям Максвелла, является одним из сильнейших переживаний, которые доступны человеку» [9, с. 12]. Как сказал, по преданию, Будда: «Нет наслаждения большего, чем созерцание истины».

Хотя сам Дж. К. Максвелл пытался истолковать свою теорию с помощью представлений о механике эфира, но это истолкование пришлось оставить: постепенно выяснилась особая, не механическая природа электромагнитных явлений и, в частности, света. Складывается представление о поле как о самостоятельной физической реальности, не имеющей носителя в виде какого-либо эфира. Материя стала представляться как состоящая из вещества и поля.

Вместе с этим была утрачена наглядность прежних физических теорий с их механическими моделями. Теория Максвелла явилась первой теорией физики, которая заключалась в самих ее уравнениях с экспериментальным истолкованием входящих в них величин без механических моделей. Механическая картина мира ньютоновской физики стала разрушаться.

Наконец, в 1905 г. на основе электродинамики возникла теория относительности: первая работа А. Эйнштейна, излагавшая основы этой теории, называлась «К электродинамике движущихся тел». Как известно, теория относительности перевернула самые основные понятия физики. Достаточно привести слова Г. Минковского, которыми он начал свой доклад с изложением более глубокого понимания теории Эйнштейна: «Милостивые государи! Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в тени и лишь некоторое их соединение должно еще сохранить самостоятельность» [10, с. 181].

Если теория настолько радикальна, что превращает сами по себе время и пространство в тени, то надо ли удивляться другим ее выводам. Это произошло, правда, тридцать пять лет спустя после появления теории Максвелла, но именно она дала почву теории относительности. В свою очередь теория Максвелла опиралась на открытия Фарадея, о которых мы и сказали в предыдущем очерке, что этими открытиями М. Фарадей, сам того не подозревая, подвел мину под ньютоновскую физику. Мина была замедленного действия, но она взорвалась.

И. Ньютон создал механику как общую теорию движения любых тел. Скрытыми механическими процессами объясняли все известные физические явления. Природа представлялась в виде механической системы со строгим детерминизмом. Но теории Максвелла и Больцмана подорвали это воззрение. Физика стала другой. Так что, пожалуй, «Математические начала философии природы» И. Ньютона были ближе Архимеду, чем последствия теорий Максвелла и Больцмана — И. Ньютону.

Претерпела существенные преобразования и химия с открытием периодической системы, созданием теории строения химических соединений и физической химии, основанной на термодинамике и молекулярной теории.

Переворот в биологии. Биология при всем ее развитии в XVII–XVIII вв. недалеко ушла в своих принципах от того, как она складывалась еще в исследованиях ученых Греции. Она развивалась в форме описания и классификации фактов с попытками их натурфилософских объяснений от особой «жизненной силы» до чисто механического взгляда на живые организмы как машины.

Теория Дарвина преобразовала биологию прежде всего тем, что явилась общей ее теорией, основанной на громадном фактическом материале и положившей в основу понимания органической эволюции необходимый и закономерный процесс — естественный отбор. Теория Дарвина преобразовала биологию также тем, что дала общее объяснение разнообразию и структуре животного и растительного мира, отраженных в его классификации, созданной в XVIII в. К. Линнеем. Классификация Линнея (потом усовершенствованная) была лишь констатацией фактов, теперь она предстала в своем подлинном значении итога предшествовавшей эволюции. Понятно, теория Дарвина не объяснила и не могла объяснить все. Причины и основания эволюции, заключающиеся в наследственности и изменчивости организмов, не были ею раскрыты. Но она выяснила их значение и более четко поставила вопрос о их природе.

В тот же период в биологии были открыты точные закономерности, как законы Г. Менделя. Систематически развился бывший прежде лишь в зачатке экспериментальный метод с очень точной постановкой опытов в самых разных областях биологии — от исследования микроорганизмов до физиологии высших животных. На ту же почву точного эксперимента было поставлено древнее искусство селекции и медицина. Физиология стала проникать в тончайшие процессы жизни, в их химизм и энергетику.

В целом из науки почти только наблюдательной биология стала наукой также экспериментальной и теоретической.

Переворот в науках о человеке и обществе. В 1813 г. А. Сен-Симон писал, что до сих пор наука о человеке была «лишь гадательной наукой» и необходимо возвести ее «на степень наук, основанных на наблюдении» [11, с. 167]. Это пожелание выдающегося мыслителя осуществилось в полной мере и даже больше, чем он мог думать.

Доказательство происхождения человека в результате эволюции животного мира, находка еще в 1856 г. черепной крышки неандертальца — ближайшего предка современного человека, выяснение того, что люди каменного века были современниками таких «допотопных» животных, как мамонт, — все это дало принципиально новый взгляд на место человека в природе, положило прочное основание антропологии и исследованию доисторического развития человека.

Научный метод проник в сферу человеческого духа. Во второй половине XIX в. сложилась экспериментальная психология. Она сомкнулась при этом с физиологией и физикой в исследовании ощущений, выражения эмоций и др. Такие исследования представлены, например, в труде Ч. Дарвина «Выражение эмоций у человека и животных» (1872 г.). Появившиеся в 1863 г. «Рефлексы головного мозга» И. М. Сеченова перебрасывали поставленный на опоры экспериментального исследования мост между физиологией высшей нервной деятельности и психологией.

Громадный материал, накопленный в языкознании и охвативший уже почти все разнообразие живых языков мира и ряд языков прошлого, получил первую общую классификацию и теории, идущие существенно дальше прежних, имевших гораздо более ограниченное основание и методы.

Также расширилось, углубилось и приняло характер научного исследования познание жизни разных народов. Возникла новая наука — этнография. Описания прежних путешественников сменялись более объективными, систематическими и вдумчивыми. Именно тогда, в 1871–1872 гг., Н. Н. Миклухо-Маклай в первое свое путешествие на Новую Гвинею прожил среди папуасов 15 месяцев.

В 1865 г. появляются «Исследования первобытной истории человечества» Э. Тайлора, а в 1877 г. — замечательный труд Л. Моргана «Древнее общество», в котором были положены прочные начала научной истории первобытного общества, соединившей глубокое конкретное исследование с общим теоретическим взглядом, в частности с делением на основные периоды — дикости, варварства и цивилизации.

В то же время возникла социология — наука о закономерностях структуры, функционирования и развития общества и отдельных его институтов, форм и сторон общественной жизни. Так что, например, сама мораль стала предметом научного исследования в социологии и этнографии. Начало социологии было положено О. Контом в последних томах его шеститомного «Курса позитивной философии» (1830–1842 гг.), а в 1876 г. появляется первый том «Оснований социологии» Г. Спенсера, опирающихся уже на обширный этнографический материал (всего три тома, 1876–1896 гг.). Еще раньше сложилась как наука политическая экономия с трудовой теорией стоимости, заложенной еще Адамом Смитом (1776 г.) и развитой в начале XIX в. Д. Рикардо.

Решительные сдвиги произошли в исторической науке. Древняя история получила мощные методы исследования и охватила новые области с развитием научно поставленных археологических изысканий и расшифровкой письменности Египта и Вавилона (Ж.-Ф. Шампольон, 1822 г., Г. Роулинсон, 1850 г.). До того, можно сказать, баснословная древнейшая история стала наукой.

В истории более позднего времени появилась выработанная в основном французскими историками после 1815 г. первая научная теория исторического процесса, указавшая его основное содержание в борьбе классов.

Над всем этим развитием общественных наук XIX в. возвышается, однако, гигантская фигура К. Маркса с его теорией истории, социологией и политической экономией. «Капитал» явился для всей суммы общественных наук тем же, чем были когда-то для физики «Математические начала философии природы» И. Ньютона и уже во время К. Маркса «Происхождение видов» Ч. Дарвина для биологии. История поднялась не только до выяснения основ исторического процесса и глубокого его анализа на примере развития капитализма, но дошла до научно обоснованного предсказания будущего: капитализм в результате своего развития, в результате классовой борьбы эксплуатируемых против эксплуататоров сменится другим общественным строем — коммунизмом.

И как ни изменился ход истории, какие ни появились факторы, которые К. Маркс не мог предвидеть, а его предсказание оправдывается: примерно треть человечества живет в условиях строящегося социализма — первой фазы коммунизма.

Поистине то было научным чудом. Еще в VII в. до н. э. вавилоняне научились предсказывать затмения. Но долгие века человеческое будущее оставалось темным, служа предметом религиозных пророчеств, астрологических гаданий или чаяний утопистов. И не мудрено, так как нет, пожалуй, ничего более сложного и запутанного, чем человеческая история. Но К. Маркс смог проникнуть в ее пружины настолько, что верно предсказал ее общий ход на будущее. Произошло, может быть, величайшее событие в науке — величайшее и по трудности предмета, и по его значению.

Общие черты современной науки. Преобразование науки, которое мы смогли примерно проследить, придало ей существенно новые общие черты.

Во-первых, наука чрезвычайно расширилась по своему содержанию и так или иначе распространилась на все, что только было доступно познанию человека. В пространстве она достигла звезд, во времени углубилась в прошлое Земли и жизни на сотни миллионов лет, дошла до элементов вещества и его атомов, раскрыла и сформулировала точные законы электромагнитного поля, открыла самый общий закон — сохранения энергии, который потом соединился с законом сохранения вещества (массы) в один закон и так стоит в науке незыблемо до сих пор; наука охватила в общих чертах развитие жизни с возникновением самого человека и его последующей историей, вскрыв ее основные движущие силы и закономерности; она охватила разнообразие образа жизни, нравов и языков современных и ушедших в прошлое народов; она стала проникать в детальные скрытые процессы жизни и в саму душевную жизнь человека; она поднялась до широких обобщений и далеких абстракций, сделав своим предметом в принципе любую мыслимую структуру форм и отношений.

Во-вторых, наука во всех ее старых и новых областях поднялась на новую ступень точных методов и точных теорий. Математика не только обогатилась новыми теориями, но получила общее основание в теории множеств и углубила анализ своих основных понятий. Физика получила принципиально новые теории, выходящие за пределы механики и ее наглядности. Биология встала на твердую почву общей теории и точного эксперимента. Общие теории и точные методы исследования получили также науки о человеке и обществе.

В-третьих, наука при всем ее возросшем объеме и разнообразии — именно вследствие своего расширения — приобрела единство, образовав связное целое, так что, может быть, впервые она стала наукой, а не только комплексом отдельных наук. Астрономия, связанная прежде с физикой через механику, сомкнулась с нею еще теснее через астрофизику. Химия тесно сомкнулась с физикой через физическую химию. Науки о Земле сомкнулись с физикой в возникшей геофизике, с химией — в минералогии, с биологией — в географии животных и растений и палеонтологии, так что геологи и биологи могут спорить между собой, кому из них принадлежит эта наука. Биология сомкнулась с химией и физикой в исследовании строения живого вещества, химических и физических процессов жизни. Науки о человеке сомкнулись с биологией в изучении происхождения и развития вида Homo sapiens, а также в антропологии и психологии. Исчезли прежние разрывы, когда науки о неживой природе были отделены от наук о живом, а обе эти области вовсе отделялись от наук о человеке, когда даже каждая из этих трех обширных сфер разделялась на едва соприкасающиеся части, как физика, химия, минералогия, ботаника, зоология и т. д. Единство науки укреплялось распространением и развитием методов точного наблюдения, эксперимента, абстракции, построения теорий, применением математических методов от старинной их сферы — астрономии до социальной статистики.

Вместе с этими внутренними чертами самой науки появились не менее важные новые черты ее связи с другими областями человеческой деятельности.

В корне изменилось отношение науки к технике, к производству.

Прежде техника, производство опережали науку в своем развитии, и она очень мало помогала им. Паровая машина работала уже сто лет до создания Карно теории теплового двигателя, и пароходы пересекали океан, а поезда неслись по рельсам раньше, чем возникла термодинамика. Люди веками занимались земледелием, выводили новые сорта растений и новые породы животных без всякой биологии, так же как врачевали болезни без научной физиологии, микробиологии и фармакологии.

Но исследование электричества и магнетизма в чисто познавательных интересах создало основание для возникновения совершенно новой области техники — электротехники, о значении которой едва ли нужно распространяться. Если вы читаете эти строки после работы, то, наверное, делаете это при электрическом освещении, а в выходной день, возможно, поедете за город в электричке и, может быть, прочтете в газете о строительстве новой электростанции.

Дж. К. Максвелл, написав свои уравнения, вывел из них волновое уравнение и тем теоретически доказал существование электромагнитных волн. Через пятнадцать лет такие волны, распространяющиеся от электрического разряда, были экспериментально обнаружены Г. Герцем. А потом А. С. Попов воспользовался ими для передачи сигналов или, как теперь стало модным говорить, информации. Так было положено начало радиотехнике. И если вы слушаете радио и смотрите телевизор, то только потому, что когда-то М. Фарадей сделал свои открытия, а Дж. К. Максвелл, обобщив их, придал им математическую форму и вывел волновое уравнение.

Научные исследования минерального питания растений дали основание химизации сельского хозяйства, позволившей поднять урожаи до немыслимых прежде размеров, так же как исследования дарвинистов и генетиков, подведя научную основу под выведение новых сортов растений, открыли для него принципиально новые возможности.

Наука стала производительной силой, и это ее значение непрерывно возрастает. Ничто сколько-нибудь значительное в производстве уже не делается без науки.

Л. Пастер и другие ученые, развивавшие физиологию, микробиологию, химию и другие важные для медицины области науки, вместе с многочисленными врачами-исследователями достигли того, что почти полностью исчезли эпидемии чумы, холеры и других страшных болезней [8)].

Вспышка холеры на юге Советского Союза в 1970 г. была быстро заглушена, тогда как в свое время она привела бы, наверное, к эпидемии с десятками тысяч жертв. Еще в середине прошлого столетия смерть от заражения крови или родильной горячки была обычным явлением, так же как массы детей гибли от дифтерита, скарлатины, туберкулеза. Теперь все это в прошлом. Смерть при родах, как и смерть ребенка, стала, по крайней мере в развитых странах, редким исключением. Все это принесла наука за последние сто лет. В сумме с общим прогрессом развитие науки повело к расширению образования и изменению его содержания. Прежде естественные науки занимали в нем ничтожное место, в школах-гимназиях господствовали мертвые языки, латинский и греческий, закон божий и популярное изложение Библии под названием «священной истории». Но и такая гимназия была доступна толь-

[8)] Оспа даже ликвидирована во всем мире.

ко очень немногим. В университетах естественные науки ютились рядом с гуманитарным образованием, в котором господствовали юриспруденция и богословие, если последнее не было выделено, как например в России, в ведение церковных учебных заведений.

Но в середине XIX в. образование стало распространяться шире, естественные науки и математика заняли существенное место в программах появившихся реальных гимназий и реальных училищ; крепли естественные факультеты университетов, развивалось опирающееся на науку техническое образование. Наука входила в сознание и деятельность все большей части общества.

Там, где не было осуществлено отделение школы от церкви, ее влияние так или иначе уменьшилось. Мой отец учился на естественном отделении физико-математического факультета Петербургского университета и в 1900 г. сдавал экзамен по закону божьему. Ему достался вопрос — опровержение теории Дарвина. Отец, убежденный атеист, ее блестяще опроверг и получил нужную отметку. Принимавший экзамен священник, довольный ответом, спросил: «На каком факультете вы состоите?». — «На естественном», — последовал ответ. Священник понимающе улыбнулся...

Наука, распространяясь на все области, доступные человеку, давала все более прочное основание научному мировоззрению, стремящемуся понимать мир таким, какой он есть, без всяких посторонних прибавлений в виде бога или иных потусторонних сил. Элементы научного мировоззрения возникали и раньше, но оно почти никогда не доходило до того, чтобы исключить из понимания истории и духовной жизни человека последние следы идеи о божьем промысле и божественной душе.

До конца последовательное научное мировоззрение было выработано К. Марксом и Ф. Энгельсом: оно включило вместе с опорой на положительную науку также ее критический и революционный дух, обращенный к действию, как это выразил К. Маркс в заключительном тезисе о Л. Фейербахе: «Философы лишь различным образом *объясняли*[9] мир, но дело заключается в том, чтобы *изменить* его» [1, с. 4].

В 1864 г., в то десятилетие, когда переворот в науке обозначился появлением теории Максвелла, периодической системы Менделеева, «Капитала» Маркса и т. д., было создано «Международное товарищество рабочих» — I Интернационал, в котором оформилось широкое общественное движение, впервые под знаменем научной идеологии.

Научное мировоззрение Маркса и его теория стали распространяться в широких массах. А сам К. Маркс сказал, что теория становится материальной силой, когда она овладевает массами. Так наука стала движущей силой величайшего общественного движения.

[9] В переводе «объясняли», но это не совсем точно: в подлиннике «interpretiert», что ближе к «истолковывали»; «объяснять» — по-немецки «erklären».

Эта преобразующая роль науки в жизни людей от техники до исторических движений была совершенно новой, и это был в конечном счете главный результат того переворота, который произошел в ней в середине прошлого века.

Очерк третий.
Наука наших дней

Общеизвестно, что в наши дни наука получила чрезвычайное развитие и приобрела громадное значение. Число научных открытий, научных работников, публикаций и научных учреждений достигает, можно сказать, астрономических размеров и продолжает увеличиваться. Наука стала двигателем развития техники и вообще производства. Она оказывает воздействие на всю нашу жизнь от повседневного быта до международных проблем.

Однако все это — внешние стороны и плоды нынешнего развития науки. Вопрос же, который будет занимать нас в этой статье, касается тех внутренних особенностей, которые отличают науку наших дней от науки еще недавнего прошлого (см. предыдущий очерк).

Расширение и единство науки. За последние сорок — пятьдесят лет чрезвычайно расширилось поле таких наук, как астрономия, физика и биология. Мир раздвинулся перед человеком, с одной стороны, до звездных систем, удаленных от нас на расстояния в миллиарды раз большие, чем расстояния до ближайших звезд, и с другой стороны, до атомного ядра, элементарных частиц и протяжений пространства в миллиард раз меньших размеров атома. Во времени мир, доступный науке, раздвинулся в прошлое на миллиарды лет и вместе с тем углубился до оценки продолжительности таких процессов, которые более быстротечны в сравнении с мгновением ока, чем оно в сравнении с оцениваемым наукой временем существования Земли.

Возникла новая отрасль науки — космология, исследующая структуру Вселенной, ее развитие и самое ее возникновение, может быть, из некоего «сверхъядра». Уже вскоре после создания в 1916 г. общей теории относительности появились модели Вселенной в целом. В последнее время оптические и радиотелескопы приносят открытия явлений, выходящих за рамки не только прежде известного, но и возможных в настоящий момент теоретических объяснений, не считая, разве что, гадательных.

Открытие ядра атома, а потом в 1932 г. нейтрона привело к представлению, что, может быть, уже найдены «кирпичи мироздания»: ядра состоят из протонов и нейтронов, а атомы — из ядер и электронов, к чему нужно прибавить «частицы» лучистой энергии — фотоны. Однако тогда же были открыты новые элементарные частицы и их превращения: электронов и позитронов в фотоны и обратно. О такой возможности думал еще И. Ньютон, когда писал: «Не превращаются ли большие тела и свет друг в друга?.. Превращение тел в свет и света в тела соответствует ходу природы, которая как бы услаждается превращениями» [12, с. 283–284]. За последние годы число известных элементарных частиц стало измеряться сотнями и их взаимные превращения широко изучены. Теоретическому исследованию подвергается уже структура элементарных частиц, так что в общем от прежних представлений о «кирпичах мироздания» осталось одно воспоминание.

Биология, вооруженная химическими и физическими методами исследования, раскрыла, можно сказать, сущность жизни в молекулярном механизме наследственности и воспроизведения живого вещества с его сложной структурой и функционированием. Она углубляется в самое сложное из известных явлений природы — в мозг человека уже не только на уровне его рефлексов, но детальных физико-химических процессов. Еще не так давно возникшее представление о мозге как подобии автоматической телефонной станции оставлено как слишком грубое.

Наряду с этим по-новому сложилась наука о поведении животных — этология, обратившаяся к его изучению не только в лабораторных, но, главное, в естественных условиях. Были сделаны поразительные открытия, совершенно перевернувшие традиционные представления, как например открытие языка пчел. Это сделал Карл Фриш еще в 1920-х гг., но его результаты получили признание лишь лет через двадцать пять. Его последователи доказали даже, что язык пчел не является полностью врожденным! Не менее поразительны открытия, касающиеся языка волков и других животных.

Сколь ни значительны перечисленные открытия астрономии, физики и биологии, но при внешнем взгляде их можно было бы представлять себе как лишь более далекое проникновение в механизмы природы. Суть, однако, в том, что наряду с этими открытиями были раскрыты такие закономерности, сформировались такие понятия и теории, которые коренным образом порывали с самим представлением о «механизмах». Разрушались столь коренные представления и понятия физики, что без них само ее существование в качестве объективной науки могло бы показаться невозможным. Коренные изменения претерпевает также математика. В основном на ее почве возникла новая область науки — кибернетика. В науку широко вошло общее понятие информации.

Вместе со всеми этими процессами в развитии науки укрепилось ее единство, связи отдельных ее областей. Астрофизика и космология явились частью физики не менее, чем астрономии. Разгадка теоретической физикой старой загадки сил химической связи и валентности связала химию с физикой еще более неразрывно, чем было прежде. Обе эти науки, приняв решающее участие в создании молекулярной биологии, проникли в нее настолько глубоко, что теперь едва ли можно сказать, где кончается физиология и начинается физикохимия живого вещества. Вполне оформились как особые дисциплины биохимия и биофизика, а в науках о Земле — геохимия, биогеохимия и лишь зарождавшаяся в прошлом веке геофизика, проникающая физическими методами от границ атмосферы до глубин Земли.

Кибернетика и понятие информации дали общие подходы к самым разнородным явлениям, как возрастание энтропии, наследственность, взаимодействие организмов в биоценозе, деятельность мозга, управление и передача информации в обществе. Физиология, биохимия и биофизика в союзе с кибернетикой и психологией все глубже проникают в чудо природы — мозг человека; элементы его деятельности моделируют на электронно-вычислительных машинах.

Этология начала сглаживать некоторые границы, которые раньше прилагались как абсолютные между человеком и животными. Например, если мы признаем утверждение Маркса и Энгельса, что «язык *есть*... действительное сознание» [1, с. 29], то не должны ли мы признать наличие сознания у животных, раз у них есть какой-то язык? Зоопсихология, зоосоциология и зоолингвистика существуют и опираются на множество достоверных фактов. Они проливают новый свет не только на жизнь животных, но через сравнение и на нас самих и должны сыграть еще большую роль в самопознании человека.

Физические методы исследования проникли в археологию (определение возраста предметов), историю, лингвистику (акустический анализ звуков речи). Математические методы глубоко вошли в экономические науки и все более проникают в лингвистику, социологию и отчасти даже в литературоведение; на электронно-вычислительных машинах моделируют процессы экономики.

Говорят о стыках наук. Но это понятие устарело: вместо стыков есть переходы; науки переходят одна в другую, а не стыкуются, как отдельные тела. Наука в целом подобна спектру, в котором есть цвета — красный, оранжевый, желтый и т. д., ясно различимые, но не разделенные.

Говорят о специализации в науке, и она на самом деле увеличивается, как увеличивается специализация в развитом производстве. Но как развитие производства вместе со специализацией создает большее его единство в целом, так и развитие науки создает вместе со специализацией тем большее ее единство, которое может теряться из вида только при узости взгляда.

Теперь от этих общих замечаний перейдем к рассмотрению некоторых конкретных наук.

Математика

Вам приходилось, наверное, доказывать геометрические теоремы и решать в школе задачи на построение. В теореме утверждается объективный факт; например: углы при основании равнобедренного треугольника равны. В решении задачи на построение указывается, как можно построить, обычно с помощью циркуля и линейки, ту или иную фигуру, например треугольник с данными сторонами. Углы равнобедренного треугольника равны сами по себе, независимо от наших построений; но в задаче речь идет о возможностях нашей деятельности.

Аналогично закон падения говорит о том, как падают тела независимо от того, бросаем ли их мы, или они падают по другим причинам. Другое дело — вопрос о том, *как* бросить тело, чтобы оно, скажем, попало в цель. В первом случае констатируется нечто независимое от нашей деятельности, во втором речь идет о ее возможностях. Точно так же законы электромагнетизма действуют сами по себе, и их изучает физика. Но вопрос о том, как можно строить электрические машины, — это вопрос не физики, а инженерной науки электротехники.

Из этих сопоставлений видно, что теоремы геометрии являются аналогом законов природы; они и устанавливались первоначально в древности эмпирически. Геометрия с ее теоремами выступает как абстрагированная естественная наука, тогда как в решении задач на построение она выступает как абстрагированная инженерная наука, как наука о возможностях известной деятельности.

Так на примере элементарной геометрии мы видим, что математика имеет два аспекта, два ряда проблем и результатов: одни касаются того, что есть само по себе, другие касаются нашей деятельности. Например, основная теорема алгебры утверждает, что всякое алгебраическое уравнение имеет корни (вообще говоря, комплексные). Но есть вопрос: как их вычислить?

Вопросы второго плана — о вычислениях и построениях — играли в математике подчиненную роль. Но теперь они приобрели существенное, в ряде случаев решающее значение. И дело здесь не только в возрастании практической необходимости вычислений и применении электронно-вычислительных машин; это еще не вело бы к принципиальному изменению математики. Дело в теоретической постановке вопросов о возможностях осуществить не только то или иное вычисление, но и получить тот или иной теоретический результат.

Еще до появления электронно-вычислительных машин возникла теория алгоритмов, т. е. процессов вычисления и вообще математического вывода по тем или иным указанным правилам, когда на каждом шаге оказывается точно определенным, что надлежит делать дальше. Алгоритм может представляться как действие машины; теория алгоритмов и послужила основой для теории и принципов конструирования вычислительных машин.

Раз в теории алгоритмов речь идет о выводах, т. е. о некоторой деятельности, то в этой части математика оказывается хотя и абстрактной, но по существу инженерной наукой.

Математик говорит: «пусть дана функция $y = f(x)$ — игрек равно эф от икс». Но что значит «дана»? Я могу сказать математику: «Как дана? Раз дана — дайте ее мне!». Однако функция не предмет, чтобы дать ее мне в руки. Игрек есть функция от икс, если каждому допустимому значению икса сопоставляется определенное значение игрека. Поэтому задать функцию — значит указать алгоритм, который позволяет каждому значению икса, поскольку оно задано, сопоставлять, т. е. вычислять, соответствующее значение игрека. Задание функций формулами, графиками или таблицами есть в сущности не что иное, как частные случаи задания их алгоритмами, в случае графиков и таблиц — с некоторой ограниченной степенью точности.

Мы видим, таким образом, что фундаментальное понятие функции при реальной постановке вопроса о ее значении оказывается сводящимся к алгоритму.

Более того, если мы говорим: «пусть дано некоторое значение икса» — что это значит? Опять-таки это значит реально, что дан алгоритм для вычисления этого значения икса, не считая того случая, когда это значение написано в виде целого числа или дроби, как например 137 или $22/7$. Значит, само понятие вещественного числа, взятое в реальном смысле, сводится к алгоритму. Но в конце концов сами целые числа строятся посредством алгоритма последовательного прибавления единицы: от n к $n+1$.

Таким образом, алгоритмы и связанное с ними инженерное содержание математики теснейшим и фундаментальным образом касаются самых основных ее понятий.

Понятно, алгоритмы в математике существуют с момента ее возникновения, как правила сложения и умножения целых чисел, геометрические алгоритмы решения задач на построение и т. п. Развитие чистой математики с ее доказательством теорем отодвинуло алгоритмы на второй план. Но так было до тех пор, пока вопросы, решаемые теоремами, представлялись как имеющие объективный смысл, независимо от того, какими средствами и как мы их решаем, т. е. независимо от нашей деятельности. Когда же математика поднялась к абстрактным теориям, не имеющим прямого прообраза в действительности, встал вопрос: в каком смысле верны результаты этих теорий? Если не мыслится какая бы ни было их проверка, то остается одно: эти результаты верны, поскольку они доказаны. Но что значит «доказаны»? Это значит, что они получены из некоторых посылок с помощью логического рассуждения. Но рассуждение — это форма деятельности человека.

Следовательно, *сама верность или неверность теорем ставится в прямую зависимость от возможностей известных форм нашей деятельности, более того — определяется через эти возможности.* Деятельность, о которой идет речь, — логическое рассуждение, и можно было бы думать, что нет вопроса о ее возможностях и средствах. Но этот взгляд оказался ошибочным. Рассуждения, представлявшиеся совершенно строгими, стали приводить в некоторых крайних случаях к противоречиям, к парадоксам теории множеств. Они подрывали бесспорность и строгость математики. Поэтому вопрос об уточнении средств математического вывода стал для математики практическим и даже драматическим: быть или не быть математике, если не в целом, то во всяком случае в ее наиболее абстрактных разделах, опиравшихся на общие идеи теории множеств.

Этот вопрос побудил развитие математической логики, возникшей раньше, но пребывавшей в довольно зачаточном состоянии. Предмет математической логики составили структура математической теории и математическое доказательство. Следовательно, и здесь в общих основаниях математики предметом стало то, что делают люди, ибо это они строят теории и доказывают теоремы. Связь с алгоритмами здесь очевидна: данный способ доказательства можно понимать как алгоритм.

Алгоритмическое толкование основных понятий математики выступает, в частности, под именем конструктивной установки, противостоящей установке теоретико-множественной, которая определяет математические абстрактные объекты как «множества элементов произвольной природы» с теми или иными отношениями, не заботясь о том, чтобы эти множества могли быть как-то построены.

В греческой математике рассматривались только такие фигуры и функции, которые строились и определялись, исходя из элементарных понятий и принципов построения, как проведение отрезков, окружностей и т. п. Греки дали алгоритм для вычисления числа π — отношения окружности к диаметру, вычислили таблицы для синуса, исследовали разнообразные конкретно, конструктивно заданные кривые. Но произвольные кривые они исключали из математики, называя их механическими. Так же не было у них понятий о произвольном вещественном числе и тем более произвольной функции. Математика греков была конструктивной. То, что называют элементарной математикой, если не понимают под этим просто содержание школьного курса, и обозначает по существу математику, основанную на применении простейших построений и алгоритмов.

Таким образом, нынешняя математика с алгоритмической, конструктивной установкой как бы возвращается к принципам греческой математики, но, понятно, на основе всего предшествующего развития. В некоторых отношениях она по своему духу ближе к Евклиду и Архимеду, чем к Г. Кантору. Лет двадцать пять назад, развивая метод приближения общих поверхностей многогранными, составляемыми из многоугольников, я выразил это в виде лозунга: «Назад — к Евклиду!».

Поскольку математика обращается к деятельности человека, к самой его логике и построению теорий, она оказывается в этом смысле наукой гуманитарной. Имеющий до сих пор хождение взгляд, причисляющий математику к естественным наукам, давно перестал быть верным, во всяком случае с тех пор как в ней появились теории, не имеющие естественного прообраза. Теперь же этот взгляд оказывается тем более ошибочным.

Конечно, математика не является и гуманитарной наукой, но занимает особое положение, относясь в своих истоках к наукам естественным и в последних теориях — до некоторой степени к наукам гуманитарным.

Гуманитарная сторона математики развилась также из других источников: в ней возникли теории информации, игр, операций, управления, оптимизации и математических методов экономики. Во всех случаях речь идет о вещах, связанных прежде всего с человеческой деятельностью, как передача информации, игра или военная операция и т. п. Все эти теории связаны с кибернетикой, которую определяют как науку о процессах управления в сложных динамических системах. В понятие управления включают понятия о цели управления, о передаче, приеме и переработке информации, относящиеся в первую очередь к человеческой деятельности.

Определяемая в математике мера «количество информации» представляет собой не что иное, как иначе выраженную меру вероятности или, вернее, невероятности данного сообщения и вообще какого-либо явления среди массы явлений того же общего типа. Введенное Л. Больцманом в 1871 г. определение энтропии как меры вероятности состояния физической системы оказывается «количеством информации», заключенной в этом состоянии, взятым с обратным знаком.

В целом для математики наших дней характерно возрастание удельного веса теории вероятностей. Теория эта зародилась еще в XVII в., но долгое время оставалась как бы на периферии математики. Теперь она встала в ряд с другими основными математическими теориями не только по объему и значению ее собственных задач и приложений, но и по тому влиянию, какое она начинает оказывать на другие области непосредственно или через теорию информации.

Общая черта новых теорий математики заключается еще в том, что их предмет составляют сложные дискретные системы, как алгоритм представляет собой дискретную систему предписаний, математический вывод и математическая теория с точки зрения математической логики — дискретную систему формул, автомат в теории автоматов — дискретную систему взаимосвязанных элементов, действующих дискретными шагами, и т. д. Вместо прежнего подавляющего господства математики непрерывного выросло значение дискретной математики.

Суммируя все сказанное, мы можем коротко отметить следующие особенности математики наших дней.

1. Возрастание роли алгоритмов и алгоритмических решений вплоть до проникновения их в самые основы математики, когда главные ее понятия определяются алгоритмически. Математика становится абстрактной инженерной наукой, конструирующей аппараты для решения задач других наук и практики. В этом качестве она зародилась в Египте и Вавилонии и теперь возвращается к тому же на новом уровне.

2. Включение в сферу математики — в свойственной ей абстрактной форме — исследования человеческой деятельности (в математической логике, теории алгоритмов, информации, игр и др.). Математика, возникшая в качестве эмпирической естественной науки, становится в указанном смысле наукой гуманитарной.

3. Существенное возрастание объема и роли дискретной математики, теорий сложных дискретных систем.

4. Существенное возрастание объема и роли теории вероятностей как непосредственно, так и через теорию информации и кибернетику.

Лет двадцать назад, читая курс истории математики в Ленинградском университете, я говорил о новом этапе развития математики. Теперь этот новый этап обозначился совершенно отчетливо, и есть достаточные основания считать, что его характерные черты будут усиливаться, преобразуя математику во все большей степени.

Физика

Обращаясь к особенностям современной физики, мы вступаем в область еще более трудную и, я бы сказал, гораздо более трудную для понимания, чем современная математика. Я имею в виду квантовую механику, понимание которой представляет существенные трудности и до сих пор служит предметом споров, хотя она существует уже без малого пятьдесят лет. Сам А. Эйнштейн, выдвинувший некоторые идеи, сыгравшие важную роль в формировании квантовой механики, не смог воспринять ее, и Н. Бор в дискуссиях с А. Эйнштейном растолковывал основные ее положения. Впрочем, и теория относительности, гораздо более простая, чем квантовая механика, и на двадцать лет более старая, тоже служила и еще продолжает служить источником непонимания и споров среди физиков, выходящих порой за пределы научной дискуссии [10].

Известно, что теория относительности перевернула многие основные понятия, но тем не менее она явилась завершением классической физики, дав синтез механики, электродинамики, а затем и теории тяготения. Поэтому не она определяет фундаментальные особенности физики наших дней — они заключаются в квантовой теории.

Начало этой теории было положено в 1900 г. М. Планком, когда он выдвинул гипотезу, что испускание и поглощение света, вообще лучистой энергии, происходит не непрерывно, а отдельными порциями — квантами. В 1905 г. А. Эйнштейн ввел представление, что лучистая энергия не только испускается и поглощается, но и распространяется отдельными порциями — квантами, или частицами, получившими название фотонов.

[10] Примером последнего могут служить воспоминания Л. Инфельда [13], бывшего сотрудником А. Эйнштейна.

В 1913 г. Н. Бор ввел в ядерную модель атома, данную Э. Резерфордом, «квантование», согласно которому электроны могут двигаться вокруг ядер лишь по «дискретному», «квантованному» ряду орбит, причем переход с одной орбиты на другую и сопровождается испусканием или поглощением кванта энергии в зависимости от того, происходит ли переход на более близкую к ядру или более далекую орбиту, на более низкий или более высокий энергетический уровень. Правила квантования орбит, по Н. Бору, оставались, однако, формальными, никак не связанными с основными законами механики, которые тут же использовались. По этому поводу профессор физики Ленинградского университета О. Д. Хвольсон писал, что «с легкой руки Н. Бора... ученые квантуют и не понимают, что делают, а результаты получаются превосходные» [14, с. 210].

Но в 1925–1926 гг. появилась последовательная теория — квантовая механика, созданная В. Гейзенбергом, П. А. М. Дираком и Э. Шрёдингером. В первый момент она оставалась формальной; толкование, предложенное Э. Шрёдингером, было неудовлетворительным. Понимание ее было выработано вскоре М. Борном, В. Гейзенбергом и Н. Бором. Последний дал особенно глубокий анализ основ новой теории. В концепции Н. Бора центральную роль занимает выяснение особой роли прибора в квантовой физике.

По обычному представлению всякого человека, полностью принятому в классической физике, не исключая и теории относительности, явления природы протекают сами по себе, и мы можем, по крайней мере в принципе, наблюдать их и исследовать, не нарушая их течения. Отражение человеком природы представлялось в этом смысле пассивным; активное вторжение экспериментатора было только способом поставить явление в фиксированные условия. Каждый был уверен, например, что электроны движутся вполне определенным образом независимо от каких бы то ни было приборов и наблюдений.

Но квантовая физика вынуждена отказаться от этого взгляда. «Сам по себе» электрон не движется каким-либо определенным образом и вообще не находится ни в каком сколько-нибудь определенном состоянии. Он находится в определенном состоянии лишь по отношению к той или иной системе тел и процессов, которые «приготовляют» это его состояние. Совершенно не обязательно, чтобы данная система была прибором, который использует человек-экспериментатор; важно лишь, что сама эта система должна быть «классической», т. е. такой, чтобы ее собственное состояние имело место «само по себе» в пространстве и времени с точностью, хотя и ограниченной соотношением неопределенностей квантовой теории, но так, что неопределенность оказывается несущественной.

Эту особенность квантовых процессов легче понять, если иллюстрировать ее следующей чуть наивной аналогией. Данная масса воды сама по себе не имеет формы, ее форму приготовляет прибор-сосуд, в который вода влита.

При этом прибор-сосуд должен быть «классическим»: его собственная форма должна быть определена с точностью, в которой можно пренебречь деформациями, вызванными хотя бы той же налитой в него водой.

Если я хочу фиксировать положение данной массы воды на столе, то я наливаю ее в узкий сосуд, но тогда становится неопределенным ее положение по высоте над столом. Если я хочу фиксировать ее положение по высоте, я разливаю ее на подносе. Но тогда перестает быть фиксированным ее положение в данном месте на столе. Так и электрон — вообще квантовая частица или система: один прибор приготовляет ее состояние одним способом, другой — другим. И если измеряется одна величина, относящаяся к электрону, то другая будет, вообще говоря, не поддающейся измерению; она окажется объективно не определенной. В этом и состоит принцип неопределенности Гейзенберга или принцип дополнительности Бора. Разные приборы дополняют друг друга, но, вообще говоря, не совместимы, как невозможно, чтобы данная масса воды одновременно находилась в данной точке стола и на данной высоте над полом.

Если бы тем дело и ограничивалось, то было бы еще полбеды: отход квантовой физики от классической не был бы столь глубоким. На самом деле он радикальный.

При рассмотрении квантовой частицы можно относить ее к разным «приборам» и соответственно иметь в виду разные ее состояния. Например, когда частицы, пролетая в газе, ионизируют его молекулы, можно относить к «прибору» сами молекулы, либо включать их вместе с частицей в одну квантовую систему, относя к прибору только сосуд и средства наблюдения. Точно так же при попадании электронов на фотографическую пластину можно саму эту пластину включить в квантовую систему. Но тогда роль классического прибора остается за глазами экспериментатора, который фиксирует почернения на пластине.

Как писал В. А. Фок: «Если при изучении акта познания необходимо (как это признается в квантовой физике) выделить в особую категорию средства наблюдения, то в эту категорию попадают как собственно измерительные приборы, так и органы чувств человека» [15, с. 187].

Так в квантовой физике выступает в ином виде та же черта, что в современной математике: необходимо учитывать самого человека и его деятельность. Еще сорок лет назад Н. Бор заключил одну из своих статей словами, что квантовая физика напоминает нам о том, что мы являемся не только зрителями, но и актерами на сцене природы. Физика отражает природу, не саму по себе, а в ее отношении к человеку и не в его роли пассивного наблюдателя, а в качестве действующего ее элемента.

Оказывается далее, что квантовые процессы вообще не могут быть представлены как протекающие в пространстве и что даже само понятие о квантовой частице как некотором, отдельном объекте может терять смысл. В системе со многими электронами нет «того» или «этого» электрона, они образуют одну систему — «многоэлектрон», из которой можно выделить отдельный электрон и которая составляется из отдельных электронов, но *не состоит* из них. Этой особенностью (вместе с другой — принципом Паули) только и объясняются основные свойства сложных атомов и молекул, химическая связь, особенности поведения вещества при низких температурах и т. д.

Квантовая физика была вынуждена отказаться от классического принципа детерминизма. Например, при прохождении электронов через тонкую фольгу на поставленной за нею фотографической пластине получается такая же в общем картина, как при прохождении рентгеновских лучей, причем она с высокой точностью определяется условиями эксперимента. Но эта картина получается в результате «массового явления» — попадания на пластину чрезвычайно большого числа электронов. Попадание же одного электрона туда или сюда не детерминировано, а может быть предсказано только с той или иной вероятностью. Вообще в квантовой области детерминированы только массовые явления, а единичные явления не детерминированы, кроме особых случаев.

Такое положение, естественно, вызвало попытки многих физиков построить теорию, которая возрождала бы детерминизм единичных процессов, но, несмотря на все усилия с участием выдающихся физиков, длившиеся сорок лет, ничего из этих попыток не получилось (в теориях недавнего времени дело становится еще хуже, так как и вероятность не всегда оказывается определенной).

Толкование недетерминированности единичных явлений как результата неконтролируемого взаимодействия с прибором ничего не объясняет, потому что «неконтролируемое» означает непознаваемое. А со ссылкой на непознаваемое можно «объяснить» все, что угодно. Суть таких «объяснений» выражается старым изречением: «Неисповедимы пути господни».

В классической молекулярной теории господствовало убеждение, что каждая отдельная молекула движется по законам механики столь же детерминировано, как детерминировано движение планет. Случайные колебания, скажем, плотности газа относятся за счет сочетаний движений молекул. Иначе говоря считалось, что в единичных процессах господствует строгий детерминизм, а случайность, вероятность относятся только к большему или меньшему числу таких процессов, когда их детали не учитываются. За молекулярной статистикой с понятием вероятности представлялись стоящими строго детерминированные процессы.

В квантовой физике дело повернулось совсем иначе: именно единичные, элементарные явления, кроме особых случаев, не детерминированы, их закономерности имеют вероятностный характер. То же, что выступает в форме детерминизма, есть статистический результат громадной массы элементарных явлений.

Так понятие вероятности, вошедшее в физику немногим более ста лет назад, заняло место среди самых основных ее понятий. Это стоит сопоставить с возросшей ролью теории вероятностей в математике, о чем мы говорили выше.

Необходимо отметить еще одну характерную черту современной физики, касающуюся, правда, уже не ее содержания, а связанной с ним формы ее теорий.

Физика углубилась в далекие от непосредственного наблюдения области, где господствуют законы, очень мало похожие на те, с которыми мы сталкиваемся более непосредственно. Поэтому прежний метод наглядных моделей для объяснения причин наблюдаемых явлений почти вовсе утратил свои возможности и значение. На его место выдвинулся метод абстрактно-математический. Так, Э. Шрёдингер, создавая свой вариант квантовой механики, сначала написал уравнение и сделал из него некоторые выводы, хотя смысл входящей в это уравнение волновой функции был понят лишь потом. Позже П. А. М. Дирак написал свое уравнение и тоже сделал из него некоторые выводы, причем один из них был, казалось, совершенно бессмысленным (отрицательная энергия). Реальный его смысл был понят потом. То же продолжается и теперь, когда формально применяют математическую теорию, чтобы с ее помощью получить физически осмысленные и согласные с опытом результаты.

Так математика стала средством не только решения задач и формулировки законов физики, но также исходным средством построения самих ее теорий. Физическая теория есть математическая теория плюс интерпретация входящих в нее символов в терминах возможного эксперимента. Первой такой теорией оказалась теория электромагнетизма Максвелла, о которой давно уже говорят, что теория Максвелла — это уравнения Максвелла, и о которой уже цитированный нами О. Д. Хвольсон сказал, что она явилась первой не наглядной теорией физики.

Теперь все теории такие и даже более того. В математический аппарат этих теорий входят понятия, не имеющие прямого эмпирического смысла. Силу и ускорение ньютоновской механики или напряжение поля максвелловой электродинамики можно непосредственно измерить. Но ни «волновые» функции, представляющие состояние квантовых частиц, ни операторы, представляющие в квантовой теории физические величины, измерить невозможно; связь их с тем, что измеряется, гораздо более сложная (в прежней физике таким было разве что только понятие о вероятности состояния).

В итоге мы видим, что физика наших дней отличается от физики прежнего времени чрезвычайно существенно — гораздо больше, чем физика Ньютона отличалась от начал физики у Архимеда.

1. Физика проникла в такую область действительности, где господствуют законы, самым существенным образом отличные от тех, с какими ей прихо-

дилось сталкиваться раньше даже в теории относительности. Само коренное понятие об объекте, который находится в определенном состоянии, оказалось ограниченным и в квантовой области часто вовсе неприменимым. Употребительный термин «частица» принял весьма условный характер; какая же частица электрон, если в многоэлектронной системе он просто не существует как нечто сколько-нибудь самостоятельное. Представление о движении частицы в пространстве и времени оказалось также ограниченным и нередко вовсе неприменимым. Изменились понятия о физических величинах, об измерении и т. д.

2. Физика, ограничив представление об объекте «самом по себе», установила, что деятельность человека не может быть исключена из ее основных понятий и выводов так, как это делала физика доквантовая.

3. Физика раскрыла существенный индетерминизм в элементарных процессах и тем самым сделала понятие вероятности не побочным, как было прежде, а основным. На место детерминизма ньютоновской механики появилась совсем иная форма строгих закономерностей, включающих индетерминизм единичных явлений.

4. Физика в современных ее теориях почти сплошь перешла к новым математическим методам и главное — к формально-математическому построению теорий без прежних моделей, причем в математический аппарат этих теорий входят понятия, не имеющие прямого эмпирического смысла.

Последние события в физике и астрофизике, как и длящиеся уже сорок лет усилия построить удовлетворительную квантовую теорию поля, внушают убеждение, что указанные черты современной физики будут усугубляться и что, вероятно, мы подходим ко времени, когда физика обогатится существенно новыми результатами и подвергнется дальнейшему преобразованию, насколько радикальному — об этом я не берусь гадать.

Гносеология

В предыдущем очерке, резюмируя общие черты науки, как она сложилась к концу прошлого столетия, я сказал, что наука «так или иначе распространилась на все, что только было доступно человеческому познанию». Однако это утверждение неточно, даже если принять во внимание смягчающие его категоричность слова — «так или иначе». Оставалась область, на которую наука тогда еще не распространилась — это она сама, или — шире — человеческое познание. Со времени греческих философов гносеология как общая теория познания была разделом философии. Именно эту общую теорию познания В. И. Ленин в «Философских тетрадях» отождествляет с логикой и диалектикой.

Гносеология же как определенная наука, которая научными методами исследует познание и, стало быть, саму науку, еще только складывается.

Ее следует отличать от науковедения: предмет гносеологии — детальное изучение познания, в частности научного, а предмет науковедения — наука как социальный феномен. Разумеется, они связаны, но и различны как внутренняя и внешняя жизнь науки. Как мне кажется, многие современные работы по гносеологии, по эпистемологии или по методологии науки — назвать можно как угодно — уже относятся не к философии, а к конкретной науке, подобной другим наукам, гуманитарным и естественным. Эту науку я и называю гносеологией.

Происходящее возникновение гносеологии как конкретной науки именно в наше время обусловлено в первую очередь развитием прочих научных дисциплин, данные которых необходимы гносеологии. В. И. Ленин в «Философских тетрадях» указывал ряд областей знания, из которых должна сложиться теория познания [3, с. 314]. Теперь этот список вырос бы в несколько раз, настолько развились и разветвились научные дисциплины. Самые разные области могут иметь значение для гносеологии. Исследование жизни и языка народов, у которых еще в XX в. сохранялся первобытно-общинный строй, принесло существенные данные для понимания ранних стадий развития знания и его источников. Этология раскрывает моменты знания и рассудочной деятельности животных, давая этим материал для понимания первичных элементов познания и мыслительной деятельности.

Кроме того, наука в настоящее время достигла необычайного развития, а такие ее формы, как теория и эксперимент, существуют почти во всех областях знания, что дает достаточный фактический материал для обобщающих выводов, гносеологического теоретизирования и проверки теории фактами.

Особой побудительной причиной развития гносеологии служат острые проблемы, вставшие в современной науке, от которых не может отвернуться ни один мыслящий ученый. Если идет спор о сущности математики, о правомерности ее понятий и методов, если физика коренным образом преобразует понятия о пространстве, времени, состоянии, объекте и вводит новые представления об отношении исследователя и объекта, то это требует специального общего осмысления. Подобные споры о принципах и методах существуют и в филологии, и в биологии, и в других науках. И если мы, следуя принципам науки, хотим поставить наши рассуждения на почву фактов, то тогда и происходит переход к детальной научной постановке проблем и тем самым переход от общих концепций познания к гносеологии как самостоятельной науке.

При этом не следует думать, что гносеология есть некая философская наука. Таких наук нет вообще, ибо для всякой науки философия остается той почвой, на которой в конечном счете осмысливаются результаты научного познания. Гносеология будет одной из наук о человеке и обществе, потому что ее предмет — познание представляет собой процесс, совершаемый людьми — общественным человеком.

В основании гносеологии должны лежать данные не только гуманитарных, но и естественных наук. Но все эти науки сами необходимым образом имеют свои гносеологические проблемы, как мы видим это особенно остро на примере физики. Таким образом, между гносеологией и остальными науками есть взаимная обратная связь, или, другими словами, диалектическое отношение.

Гносеология с ее общими исследованиями самой науки и ее методов даст науке дополнительный цемент, еще прочнее связывающий ее в единое целое. Теперь, когда наука включит в себя исследование самого познания, уже ничто в мире, до чего люди вообще смогли добраться, не останется вне ее ведения, вне стремления человека во всем доискаться объективной истины.

Общие особенности нового этапа в развитии науки

Все, что мы смогли, хотя бы бегло и неполно, рассмотреть, дает серьезные основания считать, что наука находится в начале существенно нового этапа ее развития. Он характеризуется прежде всего чрезвычайным расширением поля науки с проникновением в ранее совершенно недоступные протяжения пространства и времени, в неизвестные прежде глубины Природы — в область элементарных частиц и деталей основных процессов жизни и в само познание человека. Не менее существенно новый этап развития науки характеризуется открытием принципиально новых закономерностей, преобразующих самые коренные понятия и представления науки еще недавнего прошлого, так же как он характеризуется созданием принципиально новых теорий математики, физики, химии и биологии.

Наука наших дней отличается возросшим ее единством благодаря большей общности в методах разных ее областей, благодаря возникновению новых общих концепций, как например информация, которые охватывают самые разные области явлений, и благодаря, наконец, новым связям различных областей знания, особенно связям гуманитарных и естественных наук друг с другом и с математикой. Именно возникновение этих связей и глубокое взаимодействие естествознания и наук о человеке и обществе составляет главную особенность нового этапа в развитии науки.

Обычно говорят о распространении математических методов в гуманитарных науках и даже называют его порой вторжением или агрессией, выражая этим ретроградное отношение к новому и собственное невежество. Но будем ли мы называть это вторжением или нет, а появились математическая экономика и математическая лингвистика. Однако эти связи математики с гуманитарными науками вовсе не односторонни, математика сама многое заимствовала у них. По крылатому и уже давнему выражению знаменитого американского физика Д. В. Гиббса «математика — это язык» [16, с. 541]. В ряде случаев математики рассматривают теперь свои формальные теории как языки с собственной грамматикой и семантикой. Грамматика же и семантика как отрасли знания появились в лингвистике. Математика также черпает немало постановок задач из области гуманитарного знания.

В настоящее время наука стала соединять объективность с более глубоким пониманием роли человеческой деятельности, рассматривая свой предмет не только как объект, независимый от человека, но и как объект его деятельности, как это мы смогли видеть в математике и физике. Что же касается общественных наук, то для них понимание любых общественных явлений как результата и самого процесса человеческой деятельности вообще служит исходным пунктом всякой их действительно научной теории. Тем более это ясно для гносеологии, самый предмет которой составляет познавательная деятельность человека. Понимание и исследование взаимосвязи природы с человеком, с его деятельностью, получило, однако, самый мощный импульс от тех новых явлений, которые произошли уже вне науки, но были в значительной степени обусловлены ее развитием.

Бурное развитие производства и растущая эксплуатация природных ресурсов, основанные на применении достижений науки, повели к тому, что как раз с середины нашего века стала появляться и возрастать угроза таких изменений природной среды, которые при своем нарастающем развитии, вызванном нарастающим развитием производства, смогут привести к опасным и даже катастрофическим последствиям. Ученые первыми обратили на это внимание, занялись изучением идущих процессов и забили тревогу. Перед наукой настоятельно встала новая громадная проблема, которая прежде хотя и рассматривалась, но далеко не в таком объеме и не с такой глубиной, как теперь, — проблема отношения человека к природной среде его обитания.

Эту проблему относят к естественным наукам, собственно говоря, к географии с подключением к ней биологии, химии и физики. Однако человек тоже входит в географическую среду, или в широком смысле в экосистему, он играет, однако, в ней совсем особую роль — ее преобразователя.

Именно здесь, как нигде, мы являемся, повторяя слова Н. Бора, не только зрителями, но и актерами драмы природы. Именно здесь вопросы управления процессами встают не в частностях, а глобально. Именно здесь менее всего можно отделить деятельность человека от природы, действующего субъекта — от объекта. Как прав был К. Маркс, когда записал еще в 1845 г. в первом тезисе о Л. Фейербахе: «Главный недостаток всего предшествующего материализма — включая и фейербаховский — заключается в том, что предмет, действительность, чувственность берется только в форме *объекта,* или в форме *созерцания,* а не как *человеческая чувственная деятельность, практика,* не субъективно» [2, с. 1]. Теперь и встала во весь рост задача рассматривать нашу природную среду не только в форме объекта, как наука исследовала ее прежде, но также в форме человеческой практики, не независимо от того, что человек делает и что ему нужно.

Но деятельность человека — это уже не природная, а социальная сфера. Если мы говорим о литосфере, гидросфере, атмосфере и биосфере, то к ним нужно прибавить пятое слагаемое — социосферу.

Проблема в общем ее смысле и объеме состоит в отношении и взаимодействии социосферы с биосферой, гидросферой, атмосферой и т. д. Но социосфера — человек с его деятельностью — составляет предмет общественных наук. Поэтому в данной проблеме самым существенным образом соединяются естественные науки с науками общественными. При этом главная часть проблемы состоит не в изучении процессов, вызванных в природе деятельностью людей, а в том, чтобы направить эту деятельность так, чтобы устранить опасности и не дать возникнуть им впредь. Направление же деятельности людей — уже не только научная проблема, но проблема практического общественного действия людей, руководствующихся гуманистическими целями и научной теорией.

Здесь, стало быть, естественные науки соединяются с науками общественными и в этом своем единении объединяются с нравственностью, чтобы, овладев сознанием людей, побудить их устранить угрозы и не дать им возникнуть в будущем. Но это требует не только и даже не столько технических преобразований, как преобразований общественных, чтобы исключить саму возможность безответственного развития производства и использования достижений науки.

Понимание взаимосвязи объекта с деятельностью человека пробивается во все поры науки, как в математике, физике и гносеологии, но в проблеме отношения человека к природной среде оно бьет нарастающим потоком.

Если не призывы науки, то прямая опасность для жизни заставит в конце концов совершить единение суммы естественных и общественных наук с нравственным сознанием и социальным действием, чтобы обеспечить прогресс и саму жизнь человечества. В идущем формировании такого единения и заключается главная особенность нового этапа в развитии науки, который начался в середине нашего столетия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1955. 2-е изд. Т. 3.
2. *Ньютон Р.* Преступление Клавдия Птолемея. М.: Наука, 1986.
3. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1963. 5-е изд. Т. 29.
4. *Farrington B.* Greek science: its meaning for us. N.-Y.: Penguin Book, 1949. Pt. 2.
5. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1961. 2-е изд. Т. 20.
6. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985.
7. *Рассел Б.* Новейшие работы о началах математики // В кн.: Новые идеи в математике. СПб.: Образование, 1913. Сб. 1. С. 84–105.
8. Goethes Werke. Leipzig: Wien Bibliographisches Institut, 1901–1908. Bd 5.
9. *Лауэ М.* Статьи и речи. М.: Наука, 1969.
10. *Минковский Г.* Пространство и время // В кн: Принцип относительности. Л.: ОНТИ, 1935. С. 181–203.

11. *Сен-Симон А.* Очерк науки о человеке // Избр. соч. М.; Л.: АН СССР, 1948. Т. 1.
12. *Ньютон И.* Оптика. М.: Гостехиздат, 1954.
13. *Инфельд Л.* Страницы автобиографии физика // Новый мир. 1965. № 9. С. 169–195.
14. *Хвольсон О. Д.* Характеристика развития физики за последние 50 лет. Л.: Гос. изд., 1924.
15. *Фок В. А.* Квантовая физика и философские проблемы // В кн.: Ленин и современное естествознание. М.: Мысль, 1969.
16. *Франкфурт У. И.* Джозайя Виллард Гиббс: Биографический очерк // В кн.: *Гиббс Дж. В.* Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982. С. 533–549.

Научный поиск и религиозная вера

М.: Политиздат, 1974

Введение

В эпоху научно-технической революции проблемы науки и нравственности стали предметом общественного внимания и горячих споров. Это, видимо, связано прежде всего с двойственным характером научных открытий, что особенно очевидно проявляется сегодня, в связи с бурным прогрессом научного знания.

В самом деле: с одной стороны, наука стала непосредственной производительной силой. Она дала нам новые виды энергии и новые материалы, ликвидировала эпидемии, которые столетия были постоянной угрозой человечества. Наука создала современные средства коммуникации и массовой информации, сблизив народы и сократив расстояния. Наконец, она предоставила нам совершенную космическую технику и вывела человечество к рубежам новой эры.

С другой стороны, наука создала чудовищные средства разрушения и уничтожения людей — ядерные, химические, бактериологические и т. д., что в определенных условиях может сделать реальной угрозу самоуничтожения человечества.

До недавнего времени наука мало интересовалась прогнозированием своей деятельности в плане возможных нежелательных последствий научных открытий. Однако с развертыванием научно-технической революции стал накапливаться материал, свидетельствующий о необходимости и даже неотложности такого прогнозирования.

Коротко говоря, на повестку дня стал вопрос об охране природной среды, о защите биосферы от загрязнения отходами современного промышленного производства.

Некоторые отрицательные эффекты, связанные с внедрением новейших научных открытий, вызывают к жизни определенный тип сознания, характеризующийся настороженным, недоверчивым отношением к науке ввиду ее «безнравственного» духа. Подобное отношение — крайность. Но очевидно, что научно-техническая революция ставит перед нами реальные и очень важные вопросы о соотношении науки и нравственности, о нравственности ученого, его ответственности перед людьми, перед историей. В этой связи возникает круг вопросов: о нравственном содержании научной истины, о характере исследовательского поиска, о критериях подлинной научности. Пытаясь ответить на эти вопросы, ученый пользуется своим, апробированным десятки раз, аппаратом научного мышления, надеясь, что истина обнаружит себя в результате его искреннего и напряженного стремления к ней.

Добра или зла истина?

Рассуждая об отношении истины и добра, мы замечаем, и это нет надобности доказывать, что истина может служить как добру, так и злу. Как воспользуется человек той или иной истиной, зависит не только от характера самой истины, но и от его субъективных намерений.

Истина сама по себе может представляться неприятной, печальной и даже «злой», как, скажем, та, что каждый из нас рано или поздно умрет. Но как бы ни оценивали люди ту или иную истину, если это действительно истина, она всегда выражает то, что имеет место независимо от наших оценок и желаний. Так, закон сохранения энергии проявляется независимо от того, нравится он нам или нет. Оценки не могут входить в суждение истины как таковой, и любые попытки «лучшить», «поправить» истину «в целях добра» только искажают ее.

Значит ли это, что между истиной и добром есть непроходимая пропасть? Нет, не значит, и наш язык, сформировавшийся в процессе развития человеческой практики и фиксирующий ее многообразие, отражает внутреннюю и необходимую связь между истиной и добром. Ведь слово «правда» имеет два значения: объективная истина и моральная правота, справедливость.

Знание «правды» как объективной истины позволяет правильно ориентироваться в окружающем мире. Если же правда скрыта от человека, он двигается как бы в потемках, ощупью, натыкаясь на неожиданные препятствия, так что вообще может не достичь желаемой цели. Зная правду, обладая истинным знанием о реальности, человек может сознательно осуществлять свой выбор, ясно видеть цель и находить верные средства для ее достижения.

Скрывая от человека правду, его обрекают на заведомо ошибочные действия и в конечном счете — на бездействие. Утаивание правды может быть выражением вражды и недоверия, неуважения, высокомерного отношения к человеку, в лучшем случае — снисхождением к его слабости. Бывает, конечно, что правда слишком тяжела для человека и ему лучше не знать ее. Так, иногда скрывают истину от больного раком. Но, по нашему мнению, даже и в этом трагическом случае будет лучше, чтобы человек знал правду и мог решать, как распорядиться оставшимся ему временем жизни. Впрочем, это вопрос врачебной этики, вторгаться в которую мы не намерены.

Если знание правды вообще является условием сознательной деятельности, достигающей результатов не случайно, то она тем более оказывается условием достижения добра, будь это добро для данного человека, для его близких или для общества. Попросту говоря, чтобы делать выбор, нужно знать, как его делать. Все мое сочувствие человеку может ничего не стоить, если я не знаю способов ему помочь. Медицина служит хорошим примером тому, насколько необходимо знание для осуществления добра. Каждому ясно, что накормить голодного — добро. Но и тут надо знать, что дать голодавшему сразу много пищи не только вредно, но даже опасно для его жизни.

Так, восходя от житейских «мелочей» к проблемам более высокого порядка, мы убеждаемся, насколько важным оказывается знание истины для того, чтобы добрые намерения вели к добрым результатам. Более глубокий вопрос состоит в том, насколько сами цели, сами понятия о добре (а не только возможности их осуществления) зависят от знания.

Например, с религиозной точки зрения добро состоит в «спасении души», в обеспечении загробного блаженства. Материалисты отрицают такое понятие добра, поскольку наука не имеет доказательств существования ни души, ни загробной жизни и поэтому ориентирует человека на преобразование земной жизни в соответствии с земным идеалом добра.

Истина открывает человеку новые возможности и позволяет ставить новые цели. Познавая мир, человек постоянно восходит на новые, более высокие ступени знания. Различные уровни знания предполагают различную степень осмысления «зла».

Однако из самого по себе знания истины еще ничего не следует, пока человек не руководствуется ею. Правда лишь тогда породит добро, когда человек обратит ее к добру. Но нельзя желать «добра вообще». Желание добра должно иметь более или менее конкретное направление и, стало быть, предполагает не только эмоциональную установку, но и четкую ориентацию в действительности, что, в свою очередь, существенно определяется знанием человека о ней. Таким образом, истина, знание истины выступает не просто как средство достижения целей, но и как руководство при определении самих целей, самого конкретного понятия добра и зла. Поиски истины, стремление «до нее докопаться» и руководствоваться ею в своих решениях оказывается важнейшим моментом нравственной позиции.

Но истина, как известно, не лежит на поверхности и может быть обнаружена только путем специального анализа, для осуществления которого ни здравого смысла, ни житейского опыта оказывается не достаточно и приходится обращаться к более совершенным приемам познания. Приемы эти вырабатываются людьми в процессе систематических поисков истины, т. е.

в науке. Поэтому из принципа «нет добра без правды» следует, что «нет добра без науки».

Более ста лет назад К. Маркс поставил решение жизненных проблем общества на почву науки. Для марксиста все рассуждения о добре и идеалах бессмысленны, если они оторваны от науки, от научного понимания общественного развития.

Понимание того, что «нет добра без науки», распространяется у нас все шире и укореняется все глубже, выражаясь в требовании и стремлении решать в соответствии с данными науки не только технические, но и социальные проблемы, такие, как проблемы воспитания, управления и т. д. Отказ от научного подхода, «волевые» решения и субъективизм подвергаются осуждению.

Наряду с этим встречаются люди, которые отрицают связь между наукой и моралью и указывают только на зло, которое наука уже принесла или грозит принести человечеству. Это воззрение основано на убеждении, что истина лежит за пределами морали и что стремление к истине не есть необходимое условие добра.

Как бы мы ни оценивали такие взгляды и умонастроения, сам факт их существования свидетельствует, что вопрос об отношении истины и добра имеет свои трудности. Некоторые из них возникают из-за ошибочных взглядов на науку. Помимо этого, есть и трудности, связанные с диалектикой отношения истины и добра, сложностью процесса искания, познания истины.

Нравственное содержание научного поиска

Слово «наука» употребляется в разных смыслах. Часто, говоря о науке, имеют в виду лишь комплекс естественных наук вместе с «техническими» и «прикладными» науками. Под достижениями или успехами науки обычно понимают технические ее результаты: электронно-вычислительные машины, использование солнечной или ядерной энергии, новые материалы, космические ракеты и т. д.

При таком взгляде на науку упускаются по крайней мере два важных момента. Во-первых, пренебрегают общественными, гуманитарными науками, во-вторых, отождествляют науку в собственном смысле слова с ее приложением, даже с техникой, или, как говорят теперь, науки «фундаментальные» с «прикладными». Конечно, провести здесь абсолютные разграничения невозможно. Но основное различие, по нашему мнению, сводится к тому, что главным результатом научных исследований являются открываемые истины, продукция же исследований технических — это новые вещи, усовершенствования, изобретения и т. п. Иначе говоря, теоретик открывает то, что существует до него и без него, а изобретатель создает то, чего до него не было в природе.

Мы здесь, говоря о науке, будем иметь в виду именно «фундаментальные» науки. Соответственно и научная деятельность берется как процесс искания и установления истины. В этом процессе, в тех методах, которыми он осуществляется, в критериях, которыми он контролируется, состоит, собственно, то, что отличает научные представления и объяснения, научную истину как от случайного набора знаний, так и от псевдонауки. Эту сумму методов и критериев мы и называем научностью.

Исходная позиция науки состоит в том, что объект ее познания — окружающий мир существует независимо от нашего сознания. Соответственно знание понимается как такое отображение объекта, истинность которого (отображения) устанавливается и проверяется практикой, экспериментом. Но истина не лежит на поверхности, поэтому для ее отыскания нужны упорство и усилия, которые, в свою очередь, требуют беззаветной любви к истине, готовности к напряженному поиску. Первое необходимое качество ученого — энтузиазм. Однако при всей страсти к истине ученый лишь тогда остается ученым, когда он подчиняет свою страсть строжайшей научности. К сожалению, в рассуждениях о науке, в частности о ее отношении к нравственности, часто упускается из виду как раз присущий науке дух искания; о ней судят лишь по результатам, по числу научных работников, публикуемых работ и т. п. Конечно, исходное и конечное назначение науки — практическая польза, так же как исходное и конечное назначение любви — продолжение рода. Но вряд ли кому-нибудь придет в голову судить о любви по ее результатам в родильных домах либо рассматривать ее с точки зрения социального института брака.

Наука начинается с желания узнать и понять. Но каким бы страстным ни было это желание, оно должно подчиняться строго определенным требованиям. Первое исходное и основное условие научного поиска — объективность, т. е. стремление рассматривать предмет, отстраняя по возможности все личное, с тем чтобы понять, «каков он есть на самом деле». Как бы ни желал физик, чтобы эксперимент подтвердил его гипотезу, или математик, чтобы доказательство теоремы получилось, ни тот ни другой не могут подправить данные эксперимента или пренебречь малейшим пропуском в доказательстве. Научная объективность подразумевает безусловную честность, которая не позволяет ученому поставить свои симпатии и предпочтения выше аргументов, факта и логики или подчинять научные выводы мнениям авторитетов. Дух науки не терпит приспособленчества, ученый «преклоняется» только перед истиной. Если научный работник ставит своей целью подтвердить авторитетное мнение или написать «труды» на «диссертабельную» тему, не очень заботясь об отыскании истины, он не может называться ученым в подлинном значении этого слова.

Второе фундаментальное требование научности — доказательность и органически с нею связанная критичность. Наука требует не веры, а доказательства, не внушений, а ясных и логически строгих аргументов, не легковерности, а проверки и критического анализа, не приблизительных прикидок, а точности. Конечно, не все в науке доказывается: она включает как гипотезы, так и аксиомы, но требование научности в этом случае состоит в том, чтобы гипотезы не выдавались за нечто доказанное и принимались бы не на веру, а как сознательные допущения, подлежащие последующему обоснованию.

Подлинному ученому свойственно уважение к научной критике и самокритичность. Он всегда принимает основательный аргумент и признает ошибку, как бы это ни было неприятно.

Могут возразить, что все эти черты — научная честность, правдивость, уважение к истине, самокритичность — относятся скорее к сфере нравственности, а вовсе не к науке самой по себе. Однако подлинная наука не может быть оторвана от нравственности. Нравственные качества ученого — непременное условие результативности его поисков. Ученый оценивает отрицательно плагиат, подделку фактов, некритичность потому, что они не способствуют успеху научного поиска. Для науки подделанный факт — не факт, искаженный аргумент — не аргумент, любое сокрытие истины — антинаучное действие. Стало быть, требования правдивости, самокритичности и т. д. принадлежат науке как внутренние условия ее развития.

Уважение ученого к истине не имеет ничего общего с идолопоклонством, фетишизацией истины. Истина для ученого — опора и источник дальнейшего познания, и уважение к ней органично сочетается с готовностью в любой момент пересмотреть свое отношение к добытой ранее истине, уточнить, развить ее, если того требуют факты и логика. Научность настаивает на относительном, приближенном характере всякого знания и требует постоянного его уточнения, углубления, перехода от неполной истины к более полной и т. д.

Этот императив подводит нас к третьей фундаментальной черте научности — к требованию не останавливаться на поверхности явлений, а углубляться в их сущность, не ограничиваться частностями, а восходить к общему. Обобщение начинается со сравнения и основанной на нем систематизации фактов. Поэтому простейшее требование научности — систематичность, последовательность, соблюдение которого позволяет перейти к выявлению более глубоких связей, а их постижение ведет к формулированию законов и созданию теоретических систем, в свою очередь раскрывающих более глубокую сущность, и т. д. Так, биология, начав с описания отдельных фактов, перешла к систематике (К. Линней), от нее — к теории Ч. Дарвина, утвердившей идею эволюции животного мира, и далее к генетике, раскрывающей механизмы наследственности и изменчивости.

Обобщения науки, выражаемые в абстракциях, требуют конкретности в качестве своего необходимого дополнения. Это означает, что в каждом научном утверждении должны быть указаны условия, при которых обобщение верно. Требование конкретности наиболее четко выступает как раз в самой абстрактной из наук — в математике. Теорема считается точно сформулированной лишь тогда, когда определены входящие в нее термины и условия, при которых ее утверждение верно.

Требование необходимой степени обобщенности, доказательности и точности в науке подразумевает выработку определенных процедур оперирования понятиями, постановку эмпирических исследований и интерпретацию их результатов. При этом наука приобретает элемент формальности, а научная деятельность — характер ремесла, в котором человеку, чтобы достичь определенных результатов, необходимо следовать установленным приемам оперирования понятиями. Но абсолютизация этой стороны науки ведет к тому, что в ней начинают видеть лишь замкнутую логическую систему, упуская из виду другую ее существенную сторону — раскрытие связей и отношений вещей.

Но как ни формализованы отдельные научные дисциплины, как ни стандартизованы те или иные ее методы, сами формализация и стандартизация возможны потому и вследствие того, что им предшествовал длительный процесс выработки содержательных понятий, которые затем формализуются и стандартизируются. Если теперь можно доказывать теоремы геометрии Лобачевского, то как раз потому, что такая геометрия создана; если можно решать задачи атомной физики, пользуясь аппаратом квантовой механики, то только потому, что этот аппарат уже существует. Развитие науки (если иметь в виду принципиально новые открытия, выработку новых теорий, новых понятий и методов) вовсе не механический и не стандартный процесс, наука не может быть ремесленническим занятием. Подлинная наука всегда творчество, и в этом отношении наука смыкается с искусством.

Таким образом, фундаментальной характеристикой научности является сочетание точности мысли с ее подвижностью, определенности понятий — с их гибкостью, утверждения истин — с их пересмотром.

Как же происходит в науке сочетание этих противоположных качеств? Сначала некоторые понятия науки, принимаемые за истинные, закрепляются на определенной ступени развития вместе с четкими правилами оперирования этими понятиями. Со временем в сферу исследования попадают новые явления либо в изученных явлениях обнаруживаются новые черты. Этот процесс продолжается до тех пор, пока прежние понятия или вовсе перестают соответствовать действительности, или начинают оцениваться как неполные, лишь весьма приближенно отображающие действительность. Назревает необходимость вырабатывать новые понятия либо дополнять и уточнять старые, перестраивать сложившуюся систему представлений. Перестройка может быть глубокой и революционной, как, например, переход от механики Ньютона к теории относительности и к квантовой механике.

Такие же перестройки имеют место и в математике, как это было при появлении геометрии Лобачевского или при уточнении понятия о математическом доказательстве, совершенном в результате исследования оснований математики и развития математической логики. В результате перестройки понятия науки изменяются до такой степени, что сплошь и рядом это их изменение выступает как переход в свою противоположность. Так, образование понятия отрицательного числа, отрицательной величины состояло во включении в понятие «величина» того, что является, собственно, ее полной противоположностью. При переходе к квантовой механике электрон, представлявшийся в виде маленькой частицы, оказался частицей в совершенно новом смысле, включающей и свойства, противоположные свойствам обычной частицы.

Когда же наука имеет дело с чрезвычайно сложными, многосторонними, подвижными явлениями, которые не удается — по крайней мере в данное время — представить достаточно точной моделью, тогда гибкость понятий приобретает особое значение, поскольку оказывается важнейшим условием понимания такого явления. Здесь гибкость понятий, доходящая до тождества противоположностей, сплошь и рядом оказывается необходимейшим условием научного подхода.

Всякая научная истина относительна, приблизительна. Не является абсолютной и граница между истиной и заблуждением. Истина устанавливается в нескончаемом движении познания. Готовность к критическому пересмотру данного знания, той или иной теории, готовность воспринять самые неожиданные вещи, которые могут открыться в природе, делают подлинную научность революционной. И вместе с тем эта революционность неизменно подчиняется критериям научности, строжайше учитывает факты, логику, уже установленные истины.

Так дух науки соединяет в себе настойчивость поиска со скромностью исследователя, страстность ученого — со строжайшим контролем, уверенность — с критичностью, убежденность — с сомнением, безусловное уважение к истине — с готовностью пересмотреть данное знание и идти вперед в непрестанном и нескончаемом поиске.

Условия нравственного действия

Нравственность отдельного человека включает нравственное сознание и нравственное чувство. Если сознание без чувства холодно и недейственно, то чувство без сознания слепо. Подлинная нравственность личности — это «сознательная нравственность», т. е. способность человека осознать не только непосредственные мотивы своих действий, желаний и стремлений самих по себе, но также их соотнесенность с некоторой системой понятий о добре и зле, должном и недолжном. В противном случае человек, даже действуя как существо сознательное, может тем не менее «не ведать, что творит».

Многие примеры: отвага пиратов, с одними кортиками бравших на абордаж вооруженные корабли, или храбрость белогвардейца, сражавшегося против своего народа, — свидетельствуют о том, что нравственная оценка поведения не может быть абстрактной, без учета того, кто, какими средствами и ради чего совершает то или иное действие.

В соотнесении человеком своих поступков, целей и интересов с целями и интересами других людей состоит вторая определяющая черта нравственности.

Третья важная черта нравственности в том, что она должна реализовываться в поступках человека. Она не может ограничиваться только идеальной сферой сознания и чувства. Критерий нравственной оценки человека по его делам существует издревле. Противоречие между моральностью суждений и реальными делами всегда осуждалось людьми как ханжество.

Четвертую определяющую черту нравственности составляет свобода выбора, при отсутствии которой нельзя говорить о нравственности или безнравственности поступка. Альпинист, сорвавшийся с высоты, может при падении покалечить товарища и, сознавая, что происходит, тем не менее не в состоянии что-то изменить. Сорвавшись, он уже не имеет никакого выбора: он обречен на падение законом тяготения и поэтому не подлежит моральному осуждению.

Наконец, пятая определяющая черта нравственности может быть охарактеризована как «безусловная императивность». Пока человек рассуждает, взвешивает, оценивает свой возможный поступок, эта черта нравственного сознания не выявляется. Но вот наступает момент, когда надо действовать. И тогда нравственно воспитанный человек подчиняется глубокому внутреннему импульсу, требованию, которое представляется ему безусловным и которое противостоит любым рационалистическим доводам. Например, человеку объясняют, что он должен поступать так-то и так-то, что это будет выгодно для него и в то же время не принесет никакого вреда другим, и он как будто соглашается со всеми доводами, но в последний момент говорит: «Не могу я этого сделать, это подло». Очевидно, здесь вступило в действие то, что называют велением совести.

Нравственность возникла и сформировалась как одно из средств укрепления и развития общества, и в соответствии с этим нравственное определяют как полезное для общества. Иначе говоря, добро понимают как общественную пользу и должным считается забота о пользе общества. Но в чем польза общества? Революционер видит ее в изменении и совершенствовании существующего положения вещей, консерватор — в сохранении традиций. Соответственно по-разному могут пониматься и принципы должного поведения. В классовом обществе мораль угнетателей и мораль угнетенных всегда противостоят друг другу.

Однако исторически конкретный характер морали вовсе не означает отсутствия в сфере нравственности объективных критериев оценки и тем самым невозможности говорить о прогрессе в этой сфере. Конкретно-исторический подход к нравственности, напротив, обнаруживает громадный прогресс в ее развитии. Так, обратившись к эпохе Древней Греции и Рима, мы обнаруживаем, что рабство некогда считалось нормой: оно представлялось естественным таким мыслителям, как Платон и Аристотель. Платон, например, мыслил идеальное государство как рабовладельческое. В цирках Древнего Рима люди развлекались зрелищами боя гладиаторов, теперь же осуждается даже грубость на футбольном поле. Немногим более ста лет назад в России существовало крепостное право, а в США — рабство. Не так уж давно в школах были приняты и считались вполне допустимыми телесные наказания, казалось нормальным и даже необходимым сечь детей и бить жену. Поговорка «не бьет, — значит, не любит» отражает своеобразную «философию» подобного уровня нравственного сознания. Теперь понятие о достоинстве человеческой личности распространяется все шире и укореняется все глубже в сознании людей.

Катаклизм Первой мировой войны и последующие громадные исторические перемены всколыхнули и изменили мир. Ужасы Второй мировой войны и угроза атомной катастрофы активизировали самосознание народов; возникли массовые движения за мир, против расизма и неоколониализма. Теперь папа Павел VI в энциклике «Прогресс народов» (*Populorum Progression*, 1967) старается раскрыть язвы современного мира, говорит о вопиющем социальном неравенстве, осуждает капитализм, как «зловредную систему», и призывает всех людей осознать свою долю ответственности за происходящее в мире. Конечно, это только слова. Но они показывают, что рост морального сознания широких масс отражается даже на позиции католической церкви, которая на протяжении всей своей истории была оплотом самой мрачной реакции. Доказательством нравственного прогресса является и возникновение Организации Объединенных Наций с ЮНЕСКО и Всемирной организацией здравоохранения (ВОЗ), решающих гуманистические задачи. Как бы ни была недостаточна их деятельность, они — первые в истории человечества организации такого масштаба, с такой программой.

Что же касается нашей страны, то тут можно говорить об огромном моральном прогрессе даже на протяжении короткого исторического отрезка времени после Октябрьской революции. Старшее поколение еще помнит царскую Россию, в которой все было пропитано хамством в самых диких его формах: вышестоящие попирали нижестоящих, раболепствовавших перед ними; офицеры били солдат, господа давали тумаки извозчикам, крича: «Поезжай скорее!»; чиновники ездили по праздникам расписываться в книге посетителей у своих начальников; мужик целовал барину ручку. Конечно, и теперь в нашем обществе не исчезли полностью все элементы хамства, однако они не привычное явление, а скорее исключение, которое вызывает общее порицание. Такого сознания равенства, понимания общей ответственности за судьбу отдельного человека и ответственности каждого за общее дело, как в нашей стране, еще не знала история.

Неотъемлемое условие нравственности — развитое самосознание личности. И в этом отношении за пятьдесят с небольшим лет существования Советской власти в нашей стране произошли большие прогрессивные изменения. Иногда можно слышать порицания в адрес молодежи, которая обвиняется в забвении заповедей старшего поколения. С этим трудно согласиться. Напротив, следует сказать, что современная молодежь, сохраняя лучшие черты старшего поколения, обладает более развитым критическим сознанием, большим стремлением к независимости поведения и мышления. Это выражает общий прогресс в развитии социалистического типа личности.

Таким образом, хотя нравственные критерии имеют исторический, относительный характер, мы с уверенностью можем констатировать факт нравственного прогресса.

Понятие добра формируется в процессе истории, на каждом ее этапе наполняясь новым содержанием. Не означает ли это, что становление его столь же диалектично и противоречиво в своем движении, как и движение познания к истине? Не является ли каждое конкретное определение добра только моментом на пути восхождения к более общему его пониманию, подобно тому как каждая данная истина науки представляет собой шаг в движении ко все большей истине? Очевидно, что дело обстоит именно так.

Научные критерии нравственных оценок

Всякое человеческое действие так или иначе подлежит нравственной оценке. Естественно, когда математик, решая уравнение, переносит все его члены в одну часть равенства или, напротив, распределяет их между двумя его сторонами, нелепо выискивать в его действиях нравственное содержание. Но стоит только деятельность математика взять не в таких, чисто «технологических», операциональных моментах, а во всей их целостности (где явно выступает отношение этой деятельности к другим людям, к обществу), как она подпадает под нравственное суждение. Понятно, что это касается и деятельности в сфере науки вообще. Отвлечение науки от нравственности может сделать научные исследования делом вредным и даже преступным, каким были, например, медицинские «опыты» над людьми в нацистских лагерях смерти.

В вопросе о связи науки и нравственности важной проблемой является применение достижений науки. Столь же ясно, что отношения людей в науке или по поводу науки порождают свои нравственные проблемы. Некоторые науки (например, социология, история) связаны с проблемой нравственности более тесно, чем, скажем, химия или кристаллография. История — это великая драма человечества, и изучать ее, не занимая никакой моральной позиции, не делая никаких моральных выводов, просто невозможно. Бесстрастная позиция наблюдателя исторических коллизий абсолютного духа привела Г. Гегеля к оправданию прусской монархии в знаменитой формуле «все разумное действительно, все действительное разумно».

Таким образом, нравственность, с одной стороны, дает указания относительно того, как можно и как нельзя использовать результаты науки, как должны вести себя научные работники, какова должна быть позиция ученого, исследующего человеческие проблемы в истории, литературоведении и т. п., а, с другой стороны, сам феномен нравственности исследуется наукой в социологии, истории и т. д. Наука, открывая человеку более широкое и глубокое видение мира и самого себя, тем самым неизбежно влияет на выбор нравственной позиции и цели деятельности, на осознание личной моральной ответственности перед историей.

Вопрос, который нас занимает, касается более глубокой связи науки и нравственности, обусловленной самой их природой. Прежде чем обратиться непосредственно к выяснению этой связи, сделаем несколько замечаний по поводу некоторых предрассудков или предубеждений, стоящих на пути к ее пониманию.

Случается, что науку представляют как формальную систему или даже как подобие какой-то машины, ставящей эксперименты и производящей вычисления. С этой позиции органичная связь науки с нравственностью кажется невозможной. Животрепещущие человеческие проблемы и вычислительная машина, совесть и формулы — такое сочетание кажется несовместимым. Однако подобная точка зрения — следствие непонимания сущности, духа науки.

Бывает, что, раскрывая связь науки с нравственностью, по существу, сводят нравственность к науке, хотя даже на тривиальных примерах можно убедиться, что из знания самого по себе с необходимостью не следуют еще ни определенные решения, ни действия. Так, из констатации такого факта, как пожар, логически не следует повеление «гаси». Но роль научного знания в нравственном поведении не следует и преуменьшать.

В простых случаях для нравственного суждения достаточно иметь элементарный житейский опыт. Но как только жизненная проблема, с которой сталкивается человек, окавывается более сложной, сразу же на повестку дня выдвигается задача осмысления сущностных связей явлений.

Наиболее отчетливо необходимость знания выступает в выборе средств реализации нравственных намерений. Пусть человек имеет самые лучшие намерения и, руководствуясь ими, совершает какие-либо действия. Происходит материальный процесс, в котором человек неизбежно воздействует на окружающую среду, на других людей. Процесс этот имеет свои объективные, от воли и желаний человека не зависящие, закономерности. Поэтому незнание объективной связи явлений и результатов действий сводит на нет любые добрые намерения, а порой приводит и к совершенно нежелательным результатам. Если мы признаем, что нравственность без добрых дел пуста, то мы должны также признать, что она пуста и без знания, поскольку без знания немыслимы добрые дела.

Решением нравственной задачи сохранения жизни и здоровья человека занимается медицина. От врача требуются в первую очередь знания, без которых он не может выполнить свой долг. Правда, иногда говорят, что «милый старенький доктор» со своими нехитрыми методами лучше бездушной диагностической машины. Однако можно быть уверенным: всякий, кто так говорит, попав в тяжелое положение, постарается найти специалиста, вооруженного большими знаниями и опытом, оставляя в стороне вопрос о его «душевности» или «симпатичности». Что же касается диагностических машин, то люди уже давно пользуются такими, например, машинами, как электрокардиографы, и доверяют им не меньше, чем традиционному выслушиванию через стетоскоп. Машина только орудие человека. Она расширяет «пределы возможного» в деятельности человека, в данном случае врача.

Отворачиваясь от науки, нравственность переходит во что-то другое: в глупость, снобизм, фанатизм и даже в безнравственность. Нельзя назвать нравственным религиозного фанатика, который отказывается от помощи врача-«безбожника», обрекая на бессмысленную смерть больного ребенка.

Врач обязан быть знающим, но в не меньшей степени знающим должен быть и педагог, посвятивший себя воспитанию. Педагог должен любить детей и свою работу — это очевидно. Но чтобы эта любовь была действенной и полезной, воспитатель должен быть вооружен известной суммой самых различных знаний, в том числе из области психологии и физиологии. По мере развития педагогики требования к профессиональным знаниям воспитателей будут возрастать. Со временем консультации со специалистом по вопросам воспитания станут столь же естественными, как теперь — обращение к врачу или юристу.

Выше мы уже говорили о наиболее характерной черте нравственности — ее «безусловной императивности», повелительности, которая обнаруживает себя в неодолимых велениях совести. Мы говорили о том, что совесть сама по себе еще мало что значит, пока не определено, что считается совместимым с ней, а что — нет. Это содержание совести также зависит от знания. Если человек не знает о неизбежности отрицательных последствий какого-либо поступка, он может считать его совместимым со своей совестью. Или наоборот, не зная смысла, мотивов чьей-то деятельности, человек может неосновательно считать ее бессовестной. Безусловность морального требования оправдана только тогда, когда она отвечает реальным возможностям тех людей, на которых обращена. Геракл, требующий от других таких же подвигов, какие совершал сам, требовал бы невозможного, и потому его требование было бы безнравственным.

Вопрос об отношении науки и нравственности для каждого отдельного человека имеет и такой аспект: принимает ли он для себя как нечто безусловное необходимость во всяком вопросе искать истину и считаться с ней? Если да, то тем самым он включает в свою нравственность дух науки, и тогда наука для него неотделима от нравственности. Если нет, то наука и нравственность могут выступать как нечто не связанное друг с другом. В этом случае поведение человека как бы раздваивается. Например, ученый, добиваясь истины и безусловно считаясь с ней в своей области, может не проявлять того же отношения к истине в других жизненных ситуациях. «Дух науки» для него оказывается урезанным, ограниченным только специальной сферой, превращается лишь в правила научного ремесла и теряет свое нравственное значение. Такой ученый-ремесленник, преданный истине лишь в рамках своего научного цеха, может легко изменить истине за его пределами и предать свою научную истину перед лицом обстоятельств, лежащих вне науки.

Дух науки имеет нравственное значение лишь в своей универсальности, когда побуждаемое и контролируемое им искание истины и уважение к ней распространяется на все проблемы, с которыми сталкивается человек.

Такое включение в нравственность «духа науки» вместе с основными требованиями научности мы определяем как научную установку нравственности.

Принципы научности как принципы морали

Мы определили научную установку нравственности как включение в нее «духа науки» — настойчивого, страстного, бескомпромиссного и вместе с тем строжайше контролируемого требованиями научности, искания истины и уважения к ней, готовности отстаивать ее и безусловно считаться с ней в своих решениях и действиях. Таким образом, мы сосредоточили наше внимание на требованиях научности, взятых уже не в их специально научном аспекте. Поэтому можно сказать, что они представляют собой не что иное, как нормы познавательной деятельности или познавательного «научного» поведения. В этом смысле мы считаем, что они вполне аналогичны нормам морали и их можно было бы назвать нормами познавательной или научной этики.

Самоуверенность, субъективизм, трудность поиска истины, страх перед неприятной правдой нередко отвращают людей от признания того, что научный подход к жизненным проблемам должен быть принят как существенный элемент нравственности. Люди склонны верить в безусловную, априорную истинность своих моральных убеждений и оценок, в нравственность своих решений и действий и не всегда соотносят их с действительностью. Не так уж редко встречаются родители, которые не сомневаются в том, что «заранее знают», что лучше для их детей, самодовольные моралисты, «заранее знающие», кому и как должно поступать. Моральная самоуверенность и предвзятость вместе с безразличием к истине могут служить психологической подоплекой отрицания нравственного значения научной позиции.

Истина выражает то, что объективно имеет место, хотим мы того или нет. Субъективное сознание может не придавать ей значения, предпочитая свое понятие добра, но тогда оно препятствует осуществлению даже своих собственных намерений. Здесь воля, как писал Г. Гегель, «сама преграждает себе путь к достижению своей цели» тем, что «отделяет себя от познания и что внешняя действительность не получает для нее формы истинно-сущего; идея добра может поэтому найти свое дополнение единственно только в идее истины» [1; с. 293]. В этом утверждении Гегеля очень точно, на наш взгляд, выражена суть рассматриваемого нами вопроса об отношении научных и моральных принципов.

Истина как отражение «истинно-сущего» — действительности, независимой от сознания и воли человека, является для него, тем самым, непререкаемой. В этом смысле нет ничего выше истины. Ученый испытывает к ней не только интерес, но и преклонение — «благоговение перед тайной природы».

Можно нередко встретить и другое истолкование научного поиска, в котором преобладает ориентация на непосредственный практический эффект, — это позиция так называемого узкопрагматистского подхода к науке. Подобный подход искажает смысл науки, ее подлинный дух и цели. Он может выступать одной из причин неправильного истолкования отношения науки и нравственности.

Критерий истины — практика. В признании этого состоит другой исходный принцип научной позиции. Но практика оказывается и фундаментальным критерием нравственности, ибо нравственность приобретает подлинную реальность только в практических делах.

Обратимся теперь к основным требованиям научности и выясним их общенравственное значение. Первое из этих требований — объективность. Содержащееся в нем стремление отстранить все личное, всякую предвзятость и субъективизм вместе с безусловным уважением к истине уже создает существенный элемент в нравственном облике человека. Объективность научной позиции, отстраняя субъективное, обеспечивает общечеловеческую значимость выводов науки.

Взятая как элементарная норма морали, объективность означает стремление разобраться в том, о чем человек судит, с чем сталкивается, чтобы найти возможно более объективные основания своих суждений и действий.

Объективность — первое условие справедливости. Так, для судьи и следователя она первая норма их профессиональной деятельности, поскольку их задача — насколько возможно полно разобраться в обстоятельствах дела, отстраняя для этого личные симпатии и антипатии, предубеждения, поверхностные впечатления и т. п. Только после такого объективного исследования можно вынести объективное суждение. Здесь уже можно будет говорить о тождестве научного и этического критериев.

Но в вопросах нравственности мы все выступаем в качестве судей, поскольку что-то осуждаем, что-то оправдываем, судим как о действиях других людей, так и о своих собственных. Объективность поэтому оказывается условием справедливости суждения и обусловленного им действия для каждого человека.

Конечно, человек не может быть совершенно объективным уже просто потому, что он субъект, личность со своими привычками, навыками, потребностями. В науке люди тоже не абсолютно объективны. Поэтому требование объективности на практике означает только то, что человек должен стремиться быть возможно более объективным, учитывая свою субъективность, стараться ее преодолеть. Стало быть, объективность подхода должна быть обращена человеком не только вовне, но и на самого себя; он становится объектом своего собственного рассмотрения. В науке это означает самокритичность ученого по отношению к своим методам, взглядам и выводам.

Научная объективность может представляться как холодное, рассудочное отношение, лишенное всякой заинтересованности и поэтому несовместимое с живыми чувствами. Это заблуждение основано на ложном представлении о научной позиции как о лишенной заинтересованности. Ученый не занимался бы своим предметом, если бы не был в нем заинтересован. Достаточно познакомиться с трудами крупных ученых, чтобы увидеть в них глубочайшую заинтересованность и симпатию к предмету своих занятий. Эта заинтересованность может выглядеть более или менее отвлеченной, но она от этого не исчезает вовсе.

Таким образом, объективность как нравственное требование никак не противоречит нравственным чувствам, а, напротив, подразумевает их.

Следующей за объективностью чертой научности мы назвали доказательность, которая может быть сведена к следующим требованиям: доказывать, а не только утверждать; требовать доказательств, но, что доказано, принимать; быть критичным, ибо без этого качества теряется способность отличать доказательства от псевдодоказательств и даже прямого обмана. Научная истина не утверждается ни внушением, ни запугиванием, ни иными методами психического или физического воздействия, а только обращением к разуму человека. Необходимо также, чтобы то, что принимается без доказательств как гипотеза или аксиома, не выдавалось за доказанное и принималось не на веру, а как сознательное допущение или условие, подлежащее обоснованию.

В качестве элементарных норм морали это означает прежде всего отказ от необоснованных утверждений, от расчета на легковерие людей, на их «темноту», а также требование самому не быть легковерным и не давать затемнять свое сознание — одним словом, не попирать в других и отстаивать для себя право на понимание, на доказательность. В юриспруденции, например, принцип доказательности зафиксирован в понятии презумпции невиновности; суд исходит из предположения о невиновности подсудимого, и вся судебная процедура строится в форме опровержения либо подтверждения этого тезиса. Другими словами, виновность подсудимого надо доказать, а пока вина не доказана, он считается невиновным.

Критический научный поиск противостоит вере — как в собственно религиозном, так и в «светском» ее вариантах. Девиз науки — «все подвергай сомнению», тому активному сомнению, которое побуждает пытливый ум к поискам истины, к отысканию новых аргументов «за» и «против». С большой силой призыв к научному пониманию прозвучал в выступлении В. И. Ленина на III съезде комсомола, где он говорил о том, что коммунистические идеи превратятся в лицемерие, если не будут воплощены в практической работе, что они станут пустой вывеской, если не будут опираться на знания. Нужно учиться коммунизму, говорил В. И. Ленин, «чтобы коммунизм не был бы у вас чем-то таким, что заучено, а был бы тем, что вами самими продумано, был бы теми выводами, которые являются неизбежными с точки зрения современного образования» [5; с. 306]. «Если коммунист вздумал бы хвастаться коммунизмом на основании полученных им готовых выводов, не производя серьезнейшей, труднейшей, большой работы, не разобравшись в фактах, к которым он обязан критически отнестись, такой коммунист был бы очень печален. И такое верхоглядство было бы решительным образом губительно» [5; с. 305].

Требования научности, взятые как основы морали, имеют принципиальный смысл. Всякий по опыту знает, как важно бывает понять суть жизненной ситуации, с которой приходится сталкиваться, и как опасно верхоглядство. С другой стороны, абстрактный подход к нравственным проблемам легко ведет к тому, что вместо живых людей в конкретных условиях рассматриваются схемы. Столь же очевидно и нравственное содержание требования всесторонности и гибкости рассмотрения, потому что односторонний, прямолинейный подход к сложным проблемам чреват большими бедами. Кто не убеждался на собственном опыте, что стоит иногда посмотреть на данные события или человека «с другой стороны», как многое приобретает иной смысл, начинает выглядеть в «ином свете»! Или что готовые конструкты теряют смысл в новой ситуации, так что становится необходимым более тонкое их понимание или даже отказ от них, выработка новых понятий и норм.

Наконец, принцип научности, заключающийся в требовании рассматривать явления в их развитии, составляет важную норму морали прежде всего по той причине, что сама нравственность развивается, что совершенствуются сами понятия добра и должного.

Наука принесла людям огромные блага, но она же может стать источником зла и смертельных угроз. Ее открытия все еще используются для создания средств истребления людей — ядерных, химических, бактериологических. Расходы на научные исследования, связанные с войной, огромны. В моральном отношении человечество оказалось мало подготовленным к некоторым последствиям научно-технической революции. Основанный на науке технический прогресс и рост производства ведут к загрязнению природной среды, создают угрозу существованию биосферы. В этой связи роль моральных факторов науки возрастает, как никогда ранее. В то же время, как никогда ранее, усиливается органическая связь науки с политикой, партийность науки. В ближайшем будущем в связи с бурным развитием биологии специалисты считают вполне реальным воздействие на генетический код человека, управление наследственностью и психикой людей. Очевидно, что в руках эксплуататорских классов это может стать средством подавления малейшего недовольства со стороны эксплуатируемых.

Мысль об угрозах, связанных с наукой, побуждает многих буржуазных идеологов проклинать ее, противопоставлять науку нравственности. Однако подобное противопоставление лишь укрепляет опасные заблуждения. Мало эмоционально желать устранения вредных последствий научно-технического прогресса, нужно вооружать свои нравственные силы знанием и научным мышлением. Для устранения исходящих от техники угроз природной среде необходимо научное знание прежде всего о самих этих угрозах. Точно так же для борьбы против угроз «человеческой среде» необходимо научное знание об общественной деятельности, т. е. овладение марксистско-ленинским учением о человеке и обществе. Те, кто отделяют нравственность от науки, проповедуют на деле безнаучную нравственность либо безнравственную, бессердечную и, стало быть, бесчеловечную науку. Проблема же состоит именно в том, чтобы связать науку и нравственность как можно теснее, чтобы нравственность становилась возможно более научной, а наука — нравственной.

В современном мире нельзя быть сознательным и нравственно ответственным человеком без научной установки. И лишь на основе науки, разума можно найти ответ на все возникающие вопросы. Иной путь был бы отказом от разумного понимания и осмысления действительности и тем самым от сознательной нравственной позиции.

Ответственность и гуманизм

Предыдущее изложение было сосредоточено на выяснении значения и содержания научной установки в сфере нравственности. Здесь мы обсудим проблемы ответственности и гуманизма.

Объективная основа ответственности состоит в том, что один предмет или явление служит причиной или одной из причин другого предмета или явления (говорят, например: «Эти примеси ответственны за непрочность данного материала»). Но человек отличается от прочих природных объектов тем, что он не только пассивно включен в причинно-следственную связь явлений, но, сознавая свои действия, способен планировать их и направлять по своему выбору. На этом основывается субъективная ответственность человека. Когда возможности выбора нет, то нет и субъективной ответственности (в юриспруденции, например, в соответствии с этим различают «причинную» и «виновную» связь).

Ответственность понимается, стало быть, как зависящее от сознательного выбора субъекта его участие в формировании какого-то явления. В морали сознание ответственности выступает психологически как акт собственной совести, на суд которой человек себя ставит.

Однако суд совести, как утверждают психологи, есть не что иное, как «интериоризованный», т. е. усвоенный и преобразованный в качестве личного, суд общества. Может быть, несколько упрощая, можно сказать: человек, нарушивший общественную мораль, ставит себя вне общества — хотя бы внутренне. А это — серьезное наказание, так как человек не может жить вне общества.

Степень ответственности человека обусловлена не только возможностью выбора, но и мерой творчества: он может не только осуществить одну из наличных возможностей, но и создать и осуществить новую. Она обусловлена также характером связи человека с обществом и объективными возможностями его деятельности. Если работник видит недостатки, но молчит о них, он в какой-то мере ответствен за них, ибо молчание объективно есть «знак согласия», есть условие, благоприятствующее живучести отрицательных явлений. Если кто-то жалуется на условия работы, а сам работает плохо, то он такой своей работой сопричастен тем самым условиям, на которые жалуется, и в этом смысле отвечает за них. В конечном счете через всеобщую связь общественных явлений каждый оказывается так или иначе, в большей или меньшей степени причастным ко всему, что происходит в мире, и если он может хоть как-то повлиять на те или иные события, то отвечает за них.

Люди часто склонны преуменьшать свои возможности и тем самым свою ответственность. Они отстраняют ее от себя, говоря: «Я человек маленький, что я могу сделать?», «Это не мое дело». Такая позиция подразумевает либо нежелание, либо неумение активно действовать, отсутствие уверенности в себе из-за незнания ситуации и способов ее изменения.

Обращаясь к гуманизму, можно сказать, что он начинается с того, чтобы признавать каждого человека личностью и не допускать, чтобы личность попиралась. Но в разные эпохи личность не только оценивалась поразному, но даже не всякий человек считался собственно человеком. Само название ряда племен обозначало просто «люди», и в этом объективно отражалось убеждение, что иноплеменные — не такие же люди и на них нравственный закон не распространяется. Например, рабовладелец считал раба не человеком, а «говорящим орудием». Слово «благородство» означает в первоначальном смысле «благое рождение»; в условиях крепостничества мужик, в отличие от барина, не мог быть «благородным», а был «подлым», потому что принадлежал к «подлому» сословию. То же деление на «настоящих» и «ненастоящих» людей лежит в основе расизма. Подобные представления всегда были выгодны тем, кто стремился унижать и попирать других людей, жить за их счет.

Этим воззрениям противостоит гуманизм, утверждающий исходное равенство всех людей. Идея гуманизма была выработана человечеством на протяжении его долгой истории и своими корнями уходит в глубь веков. Его черты можно найти в буддизме, который восходил от «благоговейного отношения ко всему живому» вообще. Идеи гуманизма провозглашались и в христианстве.

В условиях деспотии Рима, когда все делились на римских граждан и «варваров», евангельские слова: «Нет ни эллина, ни иудея», «В каждом есть искра божия» — объективно служили прогрессу. Другое дело, что идеология христианства выразила вместе с этим бессилие угнетенных, что она звала не к борьбе, а к смирению, к достижению не реального блага, а мифического «царства божия». Это и приводило к тому, что гуманизм религии при всем субъективном благородстве ее глашатаев объективно оказывался орудием угнетения и подавления в руках господствующих классов.

Частичному и абстрактному религиозному гуманизму противостоит гуманизм научный. Первый его принцип состоит в признании исходного равенства всех людей как существ, объединенных в обществе, обладающих самосознанием и творческой способностью. Это подразумевает, во-первых, безусловное признание насущных материальных нужд человека (ибо голодного нужно сначала накормить, чтобы он мог проявить и развить себя как человек), а во-вторых, необходимость для человека общения и свободы. Соответственно идеал этого гуманизма представляется как человеческая «ассоциация, в которой свободное развитие каждого является условием свободного развития всех». Так К. Маркс и Ф. Энгельс определили этот идеал в «Манифесте Коммунистической партии».

Гуманизм означает признание за каждым человеком права быть судимым по законам человечности. Нацистских главарей, как ни были ужасны и подлы их дела, судили как людей человеческим судом, и именно этот — человеческий суд над людьми, лишенными всего человеческого, выражал глубочайший гуманистический протест против фашизма.

Однако в этой общей форме гуманизм остается еще абстрактным, научность же требует конкретности. Поэтому важной чертой научного гуманизма является требование конкретно-исторического подхода и оценок. В условиях классового общества это означает прежде всего требование классового анализа. Например, буржуа, как представитель эксплуатирующего класса, — это враг пролетария, и понимание этого оказывается условием конкретизации гуманистической позиции, без чего эта позиция в условиях антагонистического общества остается абстрактной, а значит, ложной и даже вредной. Принцип классового подхода к проблеме гуманизма неразрывно связан с научным пониманием сущности морали в классовом обществе.

К. Маркс в предисловии к «Капиталу» писал: «Фигуры капиталиста и земельного собственника я рисую далеко не в розовом свете. Но здесь дело идет о лицах лишь постольку, поскольку они являются олицетворением экономических категорий, носителями определенных классовых отношений и интересов. Я смотрю на развитие экономической общественной формации как на естественноисторический процесс; поэтому с моей точки зрения, меньше чем с какой бы то ни было другой, отдельное лицо можно считать ответственным за те условия, продуктом которых в социальном смысле оно остается, как бы ни возвышалось оно над ними субъективно» [8; с. 10].

Из этих слов К. Маркса следует, что классовая борьба, борьба против капитализма ведется против любого данного капиталиста лишь в меру того, насколько он олицетворяет определенные классовые отношения и интересы. Таким образом, именно строго научная точка зрения К. Маркса выражает тот гуманизм, который, призывая к решительной борьбе против негуманного общественного строя, против носителей соответствующих классовых отношений, не допускает ничего похожего на расправу с ними.

Восхождение от принципа, требующего человеческого отношения к человеку вообще, к конкретно-историческому гуманизму, призывающему к борьбе против данного общественного порядка и его защитников, и далее по пути конкретного анализа как условия справедливого отношения к каждому данному человеку в данных конкретных условиях в соответствии с его конкретными делами и возможностями — такова диалектика подлинного, научно понятого гуманизма. Выхватывание из этого процесса любого отдельного момента неизбежно ведет к фактическому отказу от гуманизма вообще и в ряде случаев может привести к прямой бесчеловечности. Только единство всех этих аспектов гуманизма является гарантией подлинной гуманности того или иного человеческого деяния.

Вспомним двух великих гуманистов — Л. Н. Толстого и А. П. Чехова. Особенность Чехова состояла в том, что он смотрел на жизнь и людей не просто как писатель, но и как ученый, как врач. Подобно ученому, он отстраняет все личное, не выдвигает своих оценок, но констатирует наблюдаемые факты жизни со всей доступной ему объективностью. Он смотрит на своих героев с вдумчивостью ученого, с бесконечным терпением и доброжелательностью врача. Вскрывая язвы жизни, А. П. Чехов не осуждает и не поучает, а сожалеет и размышляет. Но в этой человечной объективности больше нравственного содержания, чем бывает в иных осуждениях, поучениях, призывах.

Может показаться невозможным говорить о связи гуманизма Льва Толстого с наукой ввиду его религиозной веры и нападок на науку. Но не будем торопиться с выводами. Л. Н. Толстой выразил свое писательское кредо в следующих замечательных словах, заключающих один из его «Севастопольских рассказов»: «Вот я и сказал, что хотел сказать на этот раз. Но тяжелое раздумье одолевает меня. Может, не надо было говорить этого. Может быть, то, что я сказал, принадлежит к одной из тех злых истин, которые, бессознательно таясь в душе каждого, не должны быть высказываемы, чтобы не сделаться вредными, как осадок вина, который не надо взбалтывать, чтобы не испортить его.

Где выражение зла, которого должно избегать? Где выражение добра, которому должно подражать в этой повести? Кто злодей, кто герой ее? Все хороши и все дурны ...

Герой же моей повести, которого я люблю всеми силами души, которого старался воспроизвести во всей красоте его и который всегда был, есть и будет прекрасен, — правда» [9; с. 59].

Правда несет в себе красоту и нравственную силу. Пусть она принадлежит даже к одной из «злых» истин. Не надо бояться. Сумей только воспринять ее в подлинном значении. Но для Л. Н. Толстого правда — это не только правда в ее художественном восприятии и изображении. В «Войне и мире» правдиво раскрывает он внутренний мир человека, описывает исторические события и восходит до теоретического обобщения, выдвигая свое понимание роли народных масс и личности в истории (перечитайте, например, его рассуждения о «дифференциале» и «интеграле» истории). Здесь взгляд художника органически соединен со взглядом ученого — психолога и историка.

Л. Н. Толстой отвергал не всякую науку, иначе он был бы просто обскурантом и оставалось бы совершенно непонятным, почему он так много сил отдавал просвещению. Он осуждал ту науку, которая, вместо поиска ответов на жизненно важные для людей вопросы, занимается оторванными от жизни построениями. Конечно, он «перехватывал» со свойственной ему яркостью темперамента. Но он ставил науке и реальные, серьезные вопросы: «Так, например, в модном теперь вопросе социологии или политической экономии, казалось бы, есть только один вопрос: зачем и почему одни люди ничего не делают, а другие на них работают?.. В исторических значениях существенный вопрос один: как жил рабочий народ, т. е. 999/1000 всего человечества» [10; с. 180–182]. Гуманизм Л. Н. Толстого вовсе не оторван от науки, а только требует того, чтобы наука была гуманистической, чтобы она искала ответы человеку на его человеческие вопросы. Вместе с призывом к любви Толстой страстно призывал к разуму. Он отбрасывает догматы религии, как противоречащие разуму и противные понятиям современного образованного человека. Он исправляет канонический перевод

Евангелия, где греческое «логос» переводится как «слово», и переводит его как «разум». Он ставит как центральный для нравственности вопрос: что нужно людям? — и требует направляемого разумом правдивого ответа, ибо нет подлинного добра без правды. Его понимание отношения добра и истины можно изложить так: человеку в его ограниченности не дано понимание добра в полном и абсолютном значении. Он может лишь восходить от меньшего добра к большему добру. Этот путь он должен освещать своим разумом. Он должен любить людей и добиваться объективного понимания того, что нужно людям, — в этом задача науки. Все люди в существе своем братья, и только дурное понимание добра разделяет и противопоставляет их. Истинное мировоззрение есть такое, согласное с разумом и знаниями человека, установленное им отношение к окружающей его бесконечной жизни, которое связывает его жизнь с этой бесконечностью и руководит его поступками.

Гуманизм начинается с того, что человек выходит за пределы своего индивидуализма и считается с другими людьми не как с внешними предметами, а как с личностями в принципе такими же, как он сам. Это влечет за собой вопрос: что нужно людям? И не только «ближним», но и «дальним», обществу, и не только теперь, но и в будущем. Без поиска объективно обоснованных ответов на такие вопросы гуманизм остается пустым пожеланием и абстракцией. Поиск же ответа на эти вопросы требует научного подхода, без которого всякий ответ останется субъективным.

За вопросом: «Что нужно людям?» — следует вопрос: «Что возможно сделать?» Вопрос же о реальных возможностях опять-таки требует научного подхода. Без него все благие пожелания рискуют рано или поздно обратиться в свою противоположность. Это подводит нас к одной из центральных проблем нравственности — к вопросу о соотношении целей и средств.

Одним из своеобразных и ярких выражений этой проблемы является так называемое учение о ненасилии, сторонники которого считают недопустимым при любых условиях применение насильственных средств во имя каких бы то ни было целей.

Но рассмотрим самый простой житейский пример. Боль есть страдание, она безусловное зло для человека. Допустим, врач должен удалить больному зуб и причинить ему боль. Если он считает, что средства, причиняющие страдания, никогда нельзя применять, он не возьмется рвать зуб, т. е. откажется от своей функции врача. Если же он не считает боль саму по себе злом, то он не позаботится о том, чтобы причинить больному возможно меньшую боль, и таким образом нарушит профессиональное (и обычное человеческое) требование гуманности.

Очевидно, следует признать, что средства могут быть сами по себе злом, но они могут и должны применяться, если ими достигается большее добро. Это значит, что, признавая насилие как таковое злом, мы должны противопоставлять ему ту сумму добра, которая может быть достигнута насильственными мерами, и только тогда оценивать нравственный результат. Мы все совершаем насилие, например, над своими детьми, заставляя их учиться, ложиться вовремя спать или запрещая безобразничать. Но если родители вообще не видят никакого зла в насилии самом по себе, то это чревато злоупотреблением насильственными методами воспитания, что может привести к подавлению личности ребенка. Человек, признающий само по себе насилие злом, призадумается, прежде чем применить его. В то же время принципиальный отказ от насилия легко замещается отказом от воспитания вообще: ребенку позволяют делать все что угодно, тем самым способствуя развитию в нем эгоцентризма и других отрицательных черт характера.

Посмотрим также конкретно на проблему войны. Война сама по себе с ее непосредственной жестокостью есть страшное зло. И это должно быть для человека безусловным, непререкаемым. Марксизм-ленинизм всегда осуждал войну. Этот принцип был непосредственным основанием лозунга «война — войне» и Декрета о мире, он служит основанием нашей сегодняшней мирной политики, беспрестанной борьбы за мир.

В. И. Ленин писал, что мы должны быть осторожны в вопросе о войне, так как она приносит страдания рабочим и крестьянам. Но, понятно, марксисты никогда не были ни пацифистами, ни непротивленцами, понимая необходимость дисциплинированной, хорошо обученной и оснащенной современной техникой армии для защиты завоеваний революции.

Точно так же исторически решается марксистами и вопрос о насилии. Известно, что ленинцы всеми силами стремились к мирному развитию революции, что, однако, оказалось невозможным ввиду наступления контрреволюции.

К. Маркс относительно проблемы цели и средств писал: « … цель, для которой требуются неправые средства, не есть правая цель» [7; с. 65]. Нравственная оценка самой цели зависит от необходимых средств, а не только оценка средств — от цели.

Органическое единство научной и нравственной позиции вообще и в вопросе о целях и средствах в частности — отличительная особенность всей деятельности В. И. Ленина. Его позиция в вопросе о целях и средствах, неразрывно соединенная с научным, объективным пониманием, выразилась с особой остротой и четкостью в тяжелом и трудном вопросе о Брестском мире. В. И. Ленин подчеркивал, что условия Брестского мира унизительны, «неслыханно тяжелы, безмерно угнетательские» [3; с. 376], но что «стратегия и политика предписывают самый что ни на есть гнусный мирный договор» [4; с. 34]. Возражая левым эсерам, В. И. Ленин писал: «Да, этот мир представляет из себя тягчайшее поражение и унижает Советскую власть, но, если вы, из этого исходя, этим ограничиваясь, апеллируете к чувству, возбуждаете негодование, пытаетесь решить величайший исторический вопрос, вы впадаете в … смешное и жалкое положение … » [4; с. 101].

Мы видим, во-первых, что для В. И. Ленина нет вопроса о том, является ли Брестский мир сам по себе злом; он несомненное и великое зло. Но необходимо пойти на него, принять его как средство для важнейшей цели, чтобы не рисковать потерей самой Советской власти. Во-вторых, признавая чувства негодования по поводу позорного мира «трижды законными», В. И. Ленин требует не поддаваться им, а определять выбор объективным пониманием, которое отличает мыслящего революционера от романтика, позволяющего «увлечь себя чувствами и революционной фразой». Такова научная установка нравственности в соотношении чувств и разума, в вопросе оценки и выбора средств.

Существует, однако, мнение, что сообразовываться с обстоятельствами и рассчитывать возможные последствия — «недостаточно возвышенно» или даже «низко». Выдвигают такую дилемму: либо благородство (и тогда отрицается расчет), либо расчет (и тогда нет благородства). Но реальная проблема — не в абстрактном противопоставлении благородства и расчета вообще, а в их конкретной взаимосвязи в каждом отдельном случае. Ничего не рассчитывать и, стало быть, ничего не учитывать и ни с чем не считаться, когда к тому есть малейшая возможность, — просто глупо, безответственно и даже безнравственно. Также неверно думать, будто вообще считаться с обстоятельствами — это конформизм, прагматизм. Все зависит от того, ради чего, с какими обстоятельствами и как считаться. Человек, ведущий других на опасное дело — будь то полет в космос, восхождение в горах, сражение, восстание — и не рассчитывающий, не считающийся с обстоятельствами, может принести много вреда.

Мораль подразумевает требование рассчитывать и считаться с обстоятельствами в объективном духе науки, а также упорный поиск оптимальных путей достижения нравственной цели.

Наука, нравственность и религиозная вера

Высшие цели, жизненные принципы, убеждения человека, которыми он руководствуется в своих поступках и оценках, хотя и зависят от знаний, но к одному лишь знанию не сводятся. Это в ряде случаев служит основанием для того, чтобы противопоставлять науке область этих целей, принципов и утверждать, что они покоятся на вере. Так религиозная вера, в борьбе с которой формировалось научное мышление, пытается удержать позиции в сфере нравственности.

Сложный характер взаимоотношения науки и нравственности, то обстоятельство, что для многих моральных проблем, возникающих в повседневной жизни, не всегда можно найти простое и однозначное решение, приводит некоторых людей к выводу: наука — наукой, но опорой нравственности может быть только вера. Объективное знание — науке, а высшие цели и принципы — вере, религии в том или ином ее виде.

«Философская» аргументация этой ложной точки зрения может быть довольно разнообразной. Например, теологи и религиозные философы говорят, что только на основе веры в бога человек может быть нравственным. Предоставленный самому себе, человек оказывается не в состоянии утвердиться на собственных основаниях. Ф. М. Достоевский, рассуждая о вере и неверии, пришел к выводу, что для атеиста вывод может быть только один: «Если бога нет, то все дозволено». Некоторые философы-идеалисты, отрицая бога как источник морали, утверждают, однако, что таким источником являются некие надмировые идеальные сущности — Истина, Добро, Любовь, Красота, которые также должны быть объектом веры. С другой стороны, представители буржуазного философского течения — позитивизма настаивают, что и наука тоже якобы основана в конечном счете на вере, прежде всего «на вере в догмат существования объективного мира и его закономерностей», так что между наукой и религией будто бы нет в этом смысле разницы: разница лишь в символе веры. Наконец, есть люди, которые полагают, что человек вообще не может жить без веры уже просто потому, что постоянно вынужден действовать при недостаточном знании, а если нет ни знания, ни веры, то он ни на что не может решиться.

Чтобы разобраться во всех этих аргументах, следует прежде всего постараться понять, что подразумевается каждый раз под «верой». Ведь понятие веры многозначно, имеет различные смысловые оттенки и порой обозначает совершенно непохожие друг на друга реалии.

Часто с понятием веры связывается чувство внутренней уверенности, необходимое для достижения успеха в каком-либо действии. Так, для перехода по бревну над речкой нужна уверенность, потеряв которую легко упасть в воду.

Словами «вера», «верно» обозначают иногда доверие («я вам верю»), твердую надежду («я верю в успех»), уверенность или убеждение, основанное на опыте («я верю, что завтра взойдет солнце»).

«Вера» может обозначать также принятие той или иной возможности в качестве гипотезы («примем на веру», «допустим» или «я верю в возможность ... »).

Но верой в собственном смысле обычно называется убеждение, которое полагает свое основание в самом себе и соответственно исключает сомнения и критику и не связывается с необходимостью проверки и обоснования. Такое убеждение имеет психологическую опору в чувстве уверенности, что «это так». Отсюда не следует, что вера не может находить оснований в доказательных аргументах, но это значит прежде всего, что сама по себе она в этих аргументах не нуждается. Именно здесь — кардинальное отличие веры от научного убеждения, по сути своей требующего доказательства и безусловно принимающего аргументы фактов и логики.

В крайней своей форме вера может вовсе отметать соображения разума. Такова религиозная вера, как она выражена в знаменитом изречении Тертуллиана[1] «Верую, ибо нелепо». То, что разумно и доказуемо, не нуждается в вере, в ней нуждается именно недоказуемое, именно то, что невозможно постичь разумом.

Рассмотрим некоторые понимания веры в их связи с нравственностью, целями и деятельностью человека.

Несомненно верно, что люди часто бывают вынуждены принимать решения и действовать без достаточного знания, — ведь знание, как известно, никогда не бывает полным, исчерпывающим. Однако в реальной жизни для решительности действий нет надобности в исчерпывающем знании, так же как и в восполнении недостатка знания верой. Справедливость этого особенно убедительно подтверждается в таком занятии, как альпинизм. Восходить на трудные вершины — дело опасное, требующее большой решимости. Но альпинист не говорит, что «верит», что взойдет на гору, что с ним ничего не случится и пр. Напротив, альпинистам скорее свойствен рациональный скептицизм, который, однако, не мешает ни решительности действий, ни их успеху. Более того, именно беспечная вера в то, что с тобой ничего не случится, может ослабить внимание, уменьшить усилия, прилагаемые для обеспечения безопасности, и привести к несчастью. Подобная «вера» альпиниста была бы преступной глупостью. Ему нужна не вера, а свойственная научной позиции готовность еще и еще раз обдумать маршрут, оценить возможные опасности, готовность группы, свои собственные силы, чтобы в результате действовать с максимальной уверенностью.

Бывает, что твердое знание тоже называют верой, но это — неправильное употребление термина «вера». Конечно, знание связано с психологическим состоянием уверенности в «знаемом», но называть знание верой — значит смешивать проверяемое, доказуемое убеждение (каким является научное знание) с убеждением, не требующим ни проверки, ни обоснования. Ученый почти никогда не употребляет в отношении вопросов науки слова «верю». Для математика нелепо сказать: «Я верю в теорему Пифагора»; он убежден в ее правильности, ибо она доказана. Совершенно так же физик не говорит, что «верит» в сохранение энергии, как биолог не говорит, что «верит» в гены. Физик убежден в справедливости закона сохранения энергии, поскольку он доказан огромной массой теоретически обобщенного экспериментального материала; так же и биолог убежден в существовании генов, поскольку оно экспериментально установлено. И когда находятся люди, которые приписывают ученым «веру» в научные факты и даже в «догматы науки», они явно допускают смешение понятий.

---

[1] Римский христианский писатель, жил около 160–220 г. н. э.

Научной позиции настоящего ученого свойствен здоровый скептицизм, готовность все подвергнуть сомнению, потребовать доказательств и, если нужно, пересмотреть свои убеждения вплоть до самой «незыблемой» истины. История физики с ее революционными преобразованиями таких фундаментальных понятий, как пространство, время, материя (в физическом смысле), частица, объект и т. д., продемонстрировала самым убедительным образом эту прогрессивную, чуждую вере критичность науки.

Некритичное отношение к истине, в сущности, означает не столько веру, сколько самоуверенность. Почему верующий, ссылаясь на бога, так самоуверен, что считает, будто его мнение выражает божественную истину или веление бога? Если же он верит авторитету, то почему именно этому, а не другому? Его выбор между той или иной верой, тем или иным авторитетом остается субъективным и самоуверенным. Полное подчинение авторитету превращает человека в слепое орудие; поэтому-то слепая вера в абсолютную истинность своих ли собственных принципов или в абсолютную непререкаемость чьего-то авторитета не представляется нравственной. Когда же появляются поиски оснований, проверка, то вера уже перестает быть собственно верой, превращаясь в критически осмысливаемое убеждение. Именно с этой точки зрения интерпретировал Ф. М. Достоевский в «Легенде о Великом Инквизиторе» евангельскую притчу об искушении дьяволом Христа. Беседуя с Христом, Великий Инквизитор вспоминает сцену искушения и слова дьявола: «„Если хочешь узнать, сын ли ты божий, то верзись вниз, ибо сказано про того, что ангелы подхватят и понесут его, и не упадет и не расшибется, и узришь тогда, сын ли ты божий, и докажешь тогда, какова вера твоя в отца твоего“, но ты, выслушав, отверг предложение и не поддался и не бросился вниз ... О, ты понял тогда, что, сделав лишь шаг, лишь движение броситься вниз, ты тотчас бы и искусил господа, и веру в него всю потерял, и разбился бы о землю, которую спасать пришел, и возрадовался бы умный дух, искушавший тебя» [2; с. 321].

Абсолютизация веры за счет разума препятствует взаимопониманию людей. Допустим, человек выдвигает какой-нибудь свой моральный принцип, а другой возражает или хотя бы просто спрашивает, почему тот придерживается такого принципа. Что ответит первый: только то, что он верит в этот принцип? Второй может сказать на это, что не верит в данный принцип. Говорить больше нечего, взаимопонимание между этими людьми оказывается невозможным. Остается путь эмоционального, а то и «силового» воздействий в духе «обращения» инакомыслящих либо их избиения. Разумным существам, какими являются люди, следует попытаться понять друг друга. Но для этого нужно не просто верить в свои принципы, но и разумно их обосновывать, быть способным отнестись к ним критически, подкрепить их аргументами, сопоставить с другими принципами и т. д. Такое отношение к своим принципам подобно отношению ученого к исходным посылкам принимаемой им теории.

В вере человек отчуждает от себя свою сущность разумного существа, способного к пониманию. Он утверждает эту свою сущность только в критическом сомнении, в проверке, в сознательной практической деятельности. Нравственное значение поступка неотделимо от понимания его социального значения, вера же затмевает сознание человека, препятствуя такому пониманию. Не случайно церковь рассматривает верующих как «пасомых», как «паству». Не случайно вера всегда была выгодна «наполеонам», угнетателям и демагогам.

Слепая вера фанатична и поэтому легко сочетается с изуверством, на которое идут «во имя веры». Именно под знаменами веры магометане истребляли «неверных», а христиане — «басурман» и «еретиков», доходя в своем фанатизме до чудовищных зверств. Вера в то, что «цветные» — не такие же люди, как «белые», вдохновляет расизм; слепая вера в царя, фюрера, в национальную, религиозную или иную исключительность всегда сопровождалась самыми бесчеловечными действиями.

Научная же установка призывает: не верьте слепо, не позволяйте оглуплять себя верой! Требуйте доказательств! Ищите разумные основания для своих убеждений!

Те, кто в основании нравственности полагают веру в бога, исходят из того, что человеку нужна внешняя острастка, внешний запрет, что сам по себе человек не может быть нравственным. Поэтому утверждение о необходимости веры в бога как основы нравственного поведения неотделимо от неверия в человека, от убеждения, что человек греховен и безответствен по своей природе. Религия, таким образом, унижает человека, считая его ничтожным, способным без страха перед ужасами ада творить лишь глубоко безнравственные дела.

Однако факты свидетельствуют о том, что атеисты в своей основе высоконравственные люди, а среди верующих есть преступники (история папства, как известно, длинная цепь кошмарных злодеяний и убийств). Стало быть, дело в совести, в нравственном сознании и чувстве человека. Они же имеют основание не в вере в бога, а в самом человеке как общественном существе; они имеют не трансцендентный характер, а вырабатываются в социальной практике человека, в его взаимодействии с другими людьми, с обществом и на основе его (человека) собственного осмысления действительности. О последнем иногда забывают, полагая, что нравственность личности пассивно воспринимается ею лишь извне, как нечто раз и навсегда данное. Так или иначе, люди, общество сами творят и поддерживают нравственность.

Не считаясь с разумом, с прогрессивной общественной моралью, человек рано или поздно терпит поражение в своей деятельности, несет расплату за пренебрежение к объективным законам бытия, как, например, несут ее люди за безответственное отношение к природной среде. Так же мстит человеку и социальная среда — не всегда, может быть, сразу и скоро, но мстит, и тем беспощаднее, чем бесцеремоннее нарушают ее законы.

Проблема неотвратимости наказания за совершенные преступления не требует для своего решения ничего, что выходило бы за пределы общества. Преступив крайние пределы, положенные человеческим общежитием, «великие злодеи» человечества тем самым вызывали к жизни причинно-следственную связь, которая в конце концов приводила их к гибели — физической либо нравственной. В человеческих делах нет надобности видеть что-либо сверхъестественное. То, что называется «божьим судом», только мифологизированное представление о суде людей, общества, истории.

Характерные примеры извращения проблемы отношения науки и нравственности дает выступление архиепископа православной церкви в США Иоанна Сан-Францисского по «Голосу Америки» [6] явившееся откликом на дискуссию по проблемам морали, развернувшуюся на страницах «Литературной газеты» несколько лет назад.

«В каком отношении находятся между собой наука и моральные факторы?.. Несомненно одно, — утверждал архиепископ, — принцип науки в мире предполагает со стороны людей нравственное к себе отношение. Иначе сказать, в области научной, как и всякой, конечно, другой, люди должны требовать от себя честности, правдивости, бескорыстия и бесстрашия».

Очевидно, архиепископ не совсем понимает суть проблемы. В науке нужно быть честным и правдивым независимо от нравственности просто потому, что наука иначе невозможна: искажение фактов, подделка выводов и т. п. не дают адекватных результатов. И именно свойственные точным и естественным наукам самим по себе требования объективности, верность фактам, истине имеют существенное значение в нравственности.

«Наука не может быть ни социалистической, ни капиталистической, ни буржуазной, ни пролетарской, — говорит далее Иоанн Сан-Францисский. — Наука может быть только или истинной или ложной. Таблица умножения не допускает, чтобы одни люди ее считали капиталистической, а другие — социалистической. Это относится ко всем аксиомам и теориям науки». Однако то, что верно для таблицы умножения, неверно в отношении всех теорий науки. Существуют, например, принципиально разные социологические теории. Теоретические объяснения явлений зависят от взглядов людей, их принадлежности к классам и социальным группам, от навыков мышления и многих других обстоятельств. Но и этого мало. Саму постановку задач и выбор предмета исследования совершают люди не только в соответствии с объективной природой, но и в зависимости от своих интересов, точек зрения, склонностей и т. п. Так, например, для буржуазной социологии, как писал американский социолог С. М. Липсет, «главная задача — выяснение причин устойчивости общества», а для революционного марксизма главная задача социологии — выяснение путей изменения общества. Наука не может исследовать «все», и поэтому люди неизбежно выбирают предмет исследования. Масса современных исследований связана с военными и престижными целями, в то время как существует множество ничуть не менее интересных и важных научных проблем, на которые не обращают внимания.

Стало быть, научные теории, и тем более наука в ее теориях, проблематике и путях развития не только может быть, но и является в известных отношениях буржуазной или пролетарской.

Архиепископ Иоанн Сан-Францисский выдвигает еще и такое утверждение: « ... ни науку нельзя делать основательницей нравственности, ни нравственность делать ответственной за науку». Но это утверждение не только неверно, но и безнравственно, потому что нравственность связана с выбором научной проблематики, постановкой задач, с подходом к предмету и толкованием результатов, не говоря уже о применениях. Нет разве нравственной ответственности за науку, занимающуюся исследованиями в области химического и бактериологического оружия?

Как уже говорилось, наука, познавая действительность — не только природу, но и общество, человека с его внутренним миром, — позволяет надежнее согласовать нравственные идеалы с действительностью. Она ведет также и к объективному пониманию самого феномена нравственности. Так как общество развивается, то не может не развиваться и сама нравственность, а это, по нашему мнению, возможно лишь на основе глубокого понимания действительности.

Приписывание архиепископом Иоанном Сан-Францисским веры науке, материализму и марксизму, сравнение их с религией — прием неновый и достаточно распространенный. Враги марксизма давно говорят о «коммунистической вере», о том, что «в основе марксизма лежит вера в рабочий класс» и т. п. Между тем учение Маркса обосновано отнюдь не верой, а научным и, стало быть, критическим изучением социальной действительности. Например, спор между марксистами и народниками в России не был спором между двумя «верами»: народников — в крестьянство, марксистов — в рабочий класс; марксисты отстаивали научную теорию и соответственно аргументировали свои взгляды. Что же касается «коммунистической веры», или «веры в коммунизм», то К. Маркс, Ф. Энгельс и В. И. Ленин настаивали на научном понимании и решительно протестовали против превращения коммунизма во что-либо подобное вере. Если мы говорим порой, что В. И. Ленин верил, например, в творческую энергию масс, то это означает его твердое убеждение, основанное на историческом опыте.

Архиепископ Иоанн Сан-Францисский жонглирует словами и тогда, когда говорит, что в наши дни слова «наука утверждает» играют ту же роль, что в средние века слова «церковь утверждает». Но если учесть, что наука утверждает истину и свободный дух ее искания, а церковь на протяжении всей своей истории распространяла заблуждения и раболепное преклонение перед авторитетом (не говоря уже о прямых преследованиях за несогласие с утверждениями церкви), то станет очевидной сама нелепость подобного сопоставления науки и церкви.

Научное знание законов развития общества, законов перехода от капитализма к социализму, научное понимание роли пролетариата — все это явилось мощным фактором, побуждавшим к активному участию в том грандиозном революционном процессе, в котором решается величайшая нравственная задача человечества. Не пассивно воспринятое знание, а знание, становящееся активной преобразующей силой, — вот величайший моральный фактор. Человек, овладевший этим знанием и руководствующийся им, активно борющийся за лучшее будущее, тем самым уже преобразует самого себя, поднимаясь на более высокую ступень нравственности.

Почему же архиепископ был так озабочен дискуссией на страницах «Литературной газеты», что даже подал голос по радио из далекого Сан-Франциско? Потому, надо полагать, что в утверждениях о связи науки и нравственности он увидел угрозу вере и религии. Ибо если нравственность тесно связывается с наукой, то религия в качестве ее основания становится ненужной, а вера заменяется убеждениями, для которых есть строгие основания и которые подвергаются критической проверке. Для теологов ныне вопрос уже не в том, чтобы утверждать господство религии, как это было когда-то. Их цель — сохранить за религией хоть какое-то место, скажем в качестве религиозного познания наряду с познанием научным, эстетическим и этическим.

Глубоко ложный взгляд на веру как на основание нравственности, мы видим, связан прежде всего с разрывом научного воззрения и нравственной позиции. Поэтому анализ исследуемого нами вопроса приводит прежде всего к рассмотрению связи нравственности и науки, идеи добра и объективной истины. Старинная народная мудрость говорит: нет добра без правды. Это изречение можно, вероятно, толковать несколько по-разному. Но, взятое в полном объеме, оно сжато выражает сущность той связи науки и нравственности, которую мы делаем здесь предметом разговора.

Заключение

Философские проблемы, над которыми бились многие умы, находят подлинное решение в исследовании объективных фактов действительности. Вопрос лишь в том, принимает ли человек решение, вытекающее из объективных условий, или он отстраняется от них, предпочитая грезы в виде отвлеченных философских построений, религиозной веры или просто обывательского субъективизма. Проблемы истины, добра и веры не составляют здесь исключения.

Выше уже отмечалось, что понятие нравственности сформировалось в социогенезе и, несмотря на историческую изменчивость и конкретность своих форм, служило единой цели — прогрессу человечества как биологического вида. Известно, что полезное для общества может быть не только бесполезным или неприятным, но даже вредным и опасным для жизни отдельного индивида. А когда речь идет о жизни или о сильных желаниях индивида, нужны и сильные средства воздействия на его сознание и волю, чтобы он осуществлял свою деятельность вопреки осознаваемой им угрозе собственной жизни. Поэтому развитие нравственности было бы невозможно без развития ее эмоциональной основы, обеспечивающей средства для включения особи в общество себе подобных. На этой почве развились чувства совести и чести. Все это подкреплялось разнообразными средствами наказания и поощрения, которые в мистифицированном виде нашли свое отражение в религии в форме идеи загробного вознаграждения или наказания.

Стало быть, мораль возникла как средство укрепления общества и обеспечения его прогресса. Нравственное добро в его объективном значении состоит именно в укреплении и развитии человеческой жизни, причем индивидуальная жизнь выступает как элемент общественной, родовой жизни и подчиняется ей. Это и выражала складывавшаяся в первобытных обществах мораль. Ту же функцию она продолжала выполнять на всем протяжении доисторического и исторического развития человечества, хотя противоречия и борьба между племенами, народами, классами и государствами, подавление одних людей другими всегда рождали и поддерживали такие формы морали, которые, служа укреплению данного племени, класса и т. д., тем самым включали в себя противоречие своей исходной и основной функции — служить укреплению и развитию человеческого рода.

Развитие сознания было постепенным и длительным процессом, об особенностях которого во времена доисторические мы можем только догадываться. Так же постепенно выступал элемент сознательности в стихийно складывающейся и закреплявшейся морали. Поскольку понимание людьми их собственной общественной жизни развивалось постепенно, было ограниченным, нередко оказывалось ложным, принимало мистифицированный вид, — все это не могло не отразиться определенным образом и на развитии нравственности. Кроме того, само развитие и усложнение общественной жизни вызывает трудности для ее познания и понимания. Принятию рациональных, правильных представлений об общей пользе в немалой степени препятствовало и то, что она очень часто оказывалась в противоречии с прямыми интересами отдельных людей и групп. Но при всех этих противоречиях знание и рациональное понимание так или иначе присутствует в морали. Возрастание роли нравственности происходит по мере развития ее форм от норм-предписаний, определявших традиционный образ действий без различия бытовых обычаев и собственно нравственных требований, к более общим нормам, вплоть до морали в форме идеальных целей общества. Если раньше требовали: «делай как положено и не рассуждай», то в дальнейшем выполнение общей нормы может предполагать способность конкретизировать ее в разных ситуациях, а преследование общей цели требует выбора путей и средств их достижения. В развитой форме это означает требование научного подхода к возникающим проблемам.

Люди издревле искали пути ко всеобщему добру, к избавлению от зла и страданий. Однако большинство учений, появлявшихся в результате этих поисков, оказывались лишь моральными проповедями, которые не могли излечить социальные болезни человечества.

Решение «проклятых» вопросов, над которыми веками бились благородные умы, нужно искать на путях науки и революционного преобразования материальных условий жизни людей. Такова была мысль К. Маркса, Ф. Энгельса и В. И. Ленина, и в этом состоит их величайшая роль в разработке диалектико-матерпалистического подхода к пониманию такой формы общественного сознания, как нравственность.

К. Маркс пришел к выводу, что пролетариат в силу своего объективного положения и следуя своим классовым интересам разрушит капиталистический строй, ликвидирует всякую эксплуатацию, обеспечит переход к социализму и дальнейшее развитие всего общества в направлении к тому, чтобы осуществился принцип «от каждого по способностям, каждому по потребностям». Таким образом, классовая борьба пролетариата была понята как объективно направленная на достижение всечеловеческих нравственных целей, восходящих к всеобщей свободе и благоденствию.

Подчеркнем еще раз объективный смысл добра: добро — это жизнь. Человеческое добро — это человеческая жизнь и все то, что служит ее укреплению и развитию, причем жизнь человеческая понимается, конечно, не просто как биологический феномен, а во всем богатстве ее общественного содержания. Такое понимание добра и есть не что иное, как гуманизм.

Если мы понимаем добро как развитие человеческой жизни, то нет и не может быть места ни для какого «высшего, абсолютного, раз и навсегда установленного» добра, а есть только неограниченное, ничем не стесненное его развитие. Этот идеал есть, стало быть, движение, а не состояние. Достижение, реализация «абсолютного добра» означала бы конец истории. Добро, как и истина, может быть понято только в процессе, в восхождении ко все большему добру.

Нравственность объективно возникла как средство развития общественной человеческой жизни, она подчиняет индивидуальное общественному. Но развитие общества обусловлено творчеством индивидов, а потому требование их подчинения общему диалектически сочетается с требованием свободы, самостоятельности и безусловной ценности каждого отдельного члена общества. Именно свободное развитие каждого как условие свободного развития всех может служить нравственным идеалом, в котором диалектически решается данное противоречие.

Современный уровень материального производства содержит реальную возможность устранения развития одних людей за счет ограничения и подавления других. Однако абсолютное удовлетворение всех человеческих потребностей неосуществимо, потому что по мере развития общества у людей возникают все новые потребности. Также невозможна реализация человеком в одинаковой мере всех своих способностей. А поэтому невозможно достижение абсолютного равенства людей в смысле абсолютного равенства всех их сил, способностей и склонностей. Это означает, что коммунизм как предвидимая историческая реальность представляет собой не некое застывшее состояние абсолютной гармонии, а прогрессивный процесс ее расширения.

Развитие человеческой жизни означает увеличение свободы человека. В этом можно видеть смысл истории. Однако мы говорим об объективно понимаемой свободе, отражение которой в сознании человека составляет его субъективную свободу. У разных людей степень свободы различна даже при одинаковых условиях. Человек расширяет свою свободу, преодолевая сопротивление условий, ограничивающих ее. Он «бьется над задачей», «испытывает муки творчества», «ломает голову» над «проклятыми вопросами» — во всех этих привычных оборотах речи выражен не только момент усилия, но и момент страдания. Человек может погибнуть, «расширяя свою свободу», как гибли мореплаватели, открыватели новых земель, как гибли ученые, ставя на себе научные опыты. Творческая деятельность человека всегда есть единство противоположностей — наслаждения и муки, счастья и напряжения борьбы. Поэтому добро, понимаемое как развитие жизни, вовсе не означает спокойного, безоблачного счастья.

Понятие о добре, о счастье человека развивается, так же как развивается всякое иное понятие. Когда-то казались нравственными пытки и телесные наказания, теперь мы осуждаем их с ужасом и отвращением. В наши дни еще признается нравственным казнить особо опасных преступников. Возможно, пройдет совсем немного времени и казнь будет считаться безнравственной. Теперь никому в голову не приходит считать безнравственным приказывать человеку. И как знать, не воскликнут ли наши потомки возмущенно: «Как же можно приказывать человеку — свободной и сознательной личности?!» Пределов развитию гуманизма и нравственности нет, как нет границ развитию общества. Нравственность, остановившаяся в своем развитии, перестала бы быть нравственностью.

Если мы понимаем добро как жизнь в ее восходящем развитии, то отсюда следует, что без объективного познания самой этой жизни невозможно ни более конкретное понимание добра, ни сознательное движение к большему добру.

Человек не только познает мир, но и творит его. В познании человек определяет возможности и оценивает вероятности тех или иных событий, но он же выбирает и действует, выступая уже не в качестве ученого, объективно смотрящего на происходящее, но в качестве субъекта деятельности.

В этом — фундаментальная антиномия, или, другими словами, неустранимое диалектическое противоречие познания и действия, науки и нравственности. Познание не может вовсе снять выбор, совершаемый человеком, и тем поглотить нравственность; но, если сам выбор случаен, нравственность теряет свое качество сознательной человеческой нравственности. Это противоречие постоянно разрешается и вновь восстанавливается на каждом этапе, в каждом шаге познания и сознательной практической деятельности; полное его разрешение невозможно. Движение познания и нравственно-практической деятельности в принципе бесконечно. Оно нескончаемый поиск.

Трусливое сознание пугается при виде открывающейся здесь бесконечности, оно заранее хочет знать ответы на любые вопросы. Оно обращается за этими ответами к вере, авторитетам. Но оно лишь обманывает себя. Научное мировоззрение мужественно: оно исходит из убеждения, что никаких исчерпывающих и окончательных ответов на «вечные вопросы» нет и быть не может.

Научный взгляд на нравственность, добро, гуманизм труден потому, что требует работы, понимания, а не веры. Он труден тем, что требует диалектического соединения универсальности гуманизма с его конкретностью, объективной научной позиции с личным участием в осуществлении гуманистических задач. Научный взгляд сложен потому, что требует осознать бесконечность движения ко все большему познанию и все большему добру. Он труден, наконец, потому, что, стоя на точке зрения действительности, требует своего действительного осуществления. В этом своем осуществлении он есть нескончаемая борьба, труд и творчество человека ради человека. И если мы понимаем все это, нам остается с ясным сознанием трудностей активно включаться в эту борьбу, в общий труд и творчество, освещая свой путь познанием истины.

Современная эпоха полна громадных перемен и чревата опасностями. На заре перехода человечества к подлинно человеческой, свободной от угнетения и постоянной угрозы недоедания жизни, к состоянию, достойному «человека разумного», — этому человеку грозит уничтожение благодаря сотворенным им же самим средствам уничтожения. Смогут ли нравственное сознание человечества и представляющие его материальные силы овладеть ситуацией и предотвратить угрозу? На этот вопрос можно, конечно, ответить непосредственным гневным возгласом протеста и выражения веры, что страшные угрозы нас минуют и человечество придет к светлому будущему. Однако от веры самой по себе ничего реального не происходит, она «без дел мертва». Поэтому человеку нужно дело, нужна борьба за будущее, а она требует знаний и понимания происходящего. Поэтому в наше время тем более важна не вера, а научная установка, руководимый ею упорный поиск возможно лучших реальных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гегель Г.* Соч. Т. 6. 3-е изд. М.: Гос. соц.-экон. изд., 1939.
2. *Достоевский Ф. М.* Собр. соч. в десяти томах. Т. 9. М.: Гос. лит. издат., 1958.
3. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1962. 5-е изд. Т. 35.
4. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1962. 5-е изд. Т. 36.
5. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1963. 5-е изд. Т. 41.
6. Литературная газета. 1 января 1968 г.
7. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1955. 2-е изд. Т. 1.
8. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1960. 2-е изд. Т. 23.
9. *Толстой Л. Н.* Полн. собр. соч. в девяноста томах. Т. 4. М.; Л.: Гос. лит. издат., 1935.
10. *Толстой Л. Н.* Полн. собр. соч. в девяноста томах. Т. 35. М.: Худож. лит., 1950.

Важнейшее средство развития научного творчества

Вестник высшей школы. 1956. № 7. С. 18–25

Кардинальная задача научной работы каждого вуза состоит в том, чтобы объединять творческие усилия коллектива на решении проблем большого теоретического и практического значения, развивать наиболее перспективные направления в науке, воспитывать молодых исследователей в духе научного творчества. В общем виде задача эта ясна, и дело состоит в том, чтобы конкретизировать ее для каждой кафедры, изыскать и применить конкретные средства для ее решения. В этой статье я и имел в виду остановиться на одном из важнейших средств развития на кафедрах творческой атмосферы и коллективности в работе. Речь идет о постоянно действующих научных семинарах.

Такие семинары распространены в высших учебных заведениях всего мира и всегда приносили хорошие результаты как средство объединения интересов и усилий ученых в той или иной области науки. Многие научные семинары служили центрами развития важнейших направлений в науке, как например семинар по теории относительности, который вел Г. Минковский в Цюрихе, когда эта теория едва только возникла, или семинар Н. Н. Лузина в Москве по теории множеств и функций, явившийся центром научной школы мирового значения. Из таких семинаров выходили и крупные ученые, и выдающиеся открытия.

Во многих университетах и исследовательских институтах семинары работают регулярно годами и даже десятилетиями и давно укрепились как центры научной мысли. В Московском университете можно назвать семинар по тензорному анализу и римановой геометрии, организованный профессором В. Ф. Каганом еще в 1927 г., или руководимый членом-корреспондентом АН СССР И. М. Гельфандом [1] семинар по функциональному анализу; в Ленинградском университете — семинар по теоретической физике, работающий

[1] В 1984 г. Израиль Моисеевич Гельфанд (род. 1913) был избран действительным членом Академии наук СССР. — *Прим. ред.*

не менее двадцати пяти лет и руководимый теперь академиком В. А. Фоком, семинар по математической физике академика В. И. Смирнова и др. Участники этих семинаров так к ним привыкли, что с трудом могут представить без них свою научную жизнь. Мне самому, можно сказать выросшему в геометрическом семинаре, который был основан покойным профессором О. К. Житомирским в 1933 г. и которым я руковожу уже много лет, значение семинаров кажется совершенно очевидным.

Между тем такие семинары работают далеко не во всех вузах и не на всех кафедрах, например, Ленинградского университета. Более того, находились научные работники, которые при неоднократных попытках убедить их в пользе семинаров называли эти семинары «формализмом», «еще одним видом заседаний» и т. п. Ясно, что, ставя вопрос о подобных семинарах, нужно прежде всего определить сущность этой формы коллективной работы.

Научный семинар, точнее, специальный научный семинар — объединение научных работников для изучения и развития избранной ими области науки, проводящее свою работу путем регулярных собраний, где делаются доклады на отдельные темы, реферируется литература, обсуждаются научные проблемы и исследования участников семинара. Говоря здесь о научных работниках, мы имеем в виду не их служебное положение, а фактическое отношение к науке: в семинаре могут участвовать не только преподаватели и научные сотрудники, но и аспиранты, лаборанты, студенты — словом, все, кто только хочет всерьез заниматься исследованиями. Семинар может и не совпадать по составу с кафедрой: на кафедре может быть, скажем, два семинара и больше; в свою очередь какой-либо семинар может включать представителей разных кафедр, факультетов и даже научных учреждений. Например, на кафедре геометрии Ленинградского университета работают два семинара; в них участвуют кроме членов кафедры также аспиранты, некоторые студенты и работники нескольких других вузов. Все они объединены не служебными обязанностями, а научными интересами.

Итак, основу семинара составляет коллектив постоянных его участников, объединенных общностью научных интересов и активно работающих в нем. Конечно, этот коллектив не должен замыкаться в себе, и двери семинара должны быть широко открыты для каждого.

Повторяю, что речь идет о специальных семинарах, посвященных определенной области науки, настолько ограниченной, чтобы объединить реальные научные интересы и усилия его участников. Такой семинар не может быть посвящен, например, математике вообще или политической экономии вообще, а должен быть более специализированным. В отдельных случаях он может быть создан для совместного изучения одной отдельной проблемы. Чтобы обеспечить каждому участнику действительную возможность активно участвовать в работе, состав постоянных членов семинара не должен быть слишком большим. Всем этим специальный семинар отличается от собраний научных обществ или общих семинаров, которые расширяют научные связи исследователей, что, конечно, тоже необходимо. Научный семинар не занимается обсуждением планов научной работы, заслушиванием отчетов о состоянии глав диссертаций и рассмотрением иных организационных вопросов исследовательской работы. Семинар посвящен самой науке, на его собраниях занимаются именно наукой, а не тем, что хотя ее близко касается, но не составляет, однако, ее содержания.

Возьмем, к примеру, обсуждение кандидатских диссертаций. Оно может проходить по-разному: в одном случае, как это принято на многих кафедрах юридического, экономического и некоторых других факультетов, на заседании кафедры обсуждают состояние диссертации, заслушивают отзывы рецензентов о той или иной ее главе; в другом случае, как это принято, например, у нас в геометрическом семинаре, аспирант просто докладывает содержание своей работы (часто не на одном, а на двух-трех заседаниях), и она обсуждается именно как научная работа, т. е. прежде всего с точки зрения ее содержания. В центре внимания оказывается именно существо работы, а не степень ее подготовленности, «диссертабельность» и т. п. Не ясно ли, что аспиранту важнее всего рассказать о своей работе не в организационном плане, а о ее сущности; он нуждается прежде всего в подробном, открытом, товарищеском критическом разборе самой работы, а не того, в какой стадии выполнения она находится. Только так он получит настоящую школу и помощь. Когда же содержание работы рассмотрено по существу коллективом семинара, суждение о ее состоянии не составит особого труда и главное будет более обоснованным.

Те же, кто думает, будто семинары это «еще один вид заседаний», те либо не отличают научно-организационных и иных, *касающихся науки* вопросов, от вопросов *самой науки,* либо просто считают научные занятия, деловое обсуждение научных вопросов обременительной обязанностью, подобной участию в ненужных заседаниях. В этом случае, впрочем, говорить уже не о чем, потому что человек, занимающийся наукой только по обязанности или ради диссертации, находится, собственно, вне подлинной науки. А уж если работа, к примеру аспиранта, настолько неинтересна, что на кафедре считают ее обсуждение «еще одним заседанием», то такая работа вообще вряд ли нужна.

Таким образом, главным содержанием работы семинара должно быть живое дело, сама наука. Этому содержанию отвечает и форма семинара. Она характеризуется прежде всего деловой, товарищеской обстановкой, лишенной каких бы то ни было элементов формализма, парадности, «подведения итогов» и пр.

Каждый участник семинара может докладывать не обязательно о законченном исследовании: здесь, как в любом рабочем собрании, можно ставить сообщения о незавершенной работе, даже только о наметках ее, чтобы обсуждение помогло правильной дальнейшей постановке исследования. На занятиях семинара принято перебивать докладчика вопросами или замечаниями, не дожидаясь конца доклада. Правда, такой стиль иногда вызывает удивление и даже возмущение тех, кто еще не привык к деловой обстановке, не стесненной регламентом и протоколом. Но ведь если слушатели не понимают того, что говорит докладчик, или имеют против его аргументов решительные возражения, то не стоит терять времени в ожидании конца доклада, когда все может окончательно запутаться. Кстати сказать, были случаи, когда докладчик останавливался, не закончив выступления, и, признав свою работу ошибочной или не доведенной до нужного результата, садился на место. Словом, настоящая свобода делового, детального обсуждения научных вопросов, лишенная какого-либо стеснения, подавления старшими младших и т. п. — вот что характерно для научного семинара.

Нормально работающий семинар собирается регулярно каждую неделю, редко — раз в две недели; это важно для того, чтобы иметь достаточно времени для обстоятельных занятий и выработать привычку к семинару. Опасность того, что на еженедельные собрания не хватит материала, может быть реальной только там, где нет и намека на серьезную научную работу. Ведь семинар призван охватывать и доклады участников семинара об их собственной работе, и реферирование текущей литературы, и совместное обсуждение специальных вопросов, важных книг или статей. Одним словом, работы хватит — была бы охота. В нашем семинаре, например, накапливается столько материала, что часто занятия проходят два раза в неделю, причем на этом настаивают сами участники.

Конечно, возможные формы совместной научной деятельности разнообразны и специальные семинары должны быть дополнены более широким общением научных работников, чтобы увлечение узкой областью знаний не повело к потере перспективы. Но во всех случаях суть должна быть одна и та же — деловое, свободное обсуждение вопросов, направленное на взаимную помощь и объединение научных усилий.

Каждому участнику работа в семинаре дает очень много. Во-первых, выступая со своей, хотя бы и не законченной, работой, он может получить в ходе коллективного обсуждения и помощь и критические замечания; во-вторых, реферирование текущей литературы каждым участником семинара по очереди позволяет всем быть в курсе нового с меньшей затратой сил; в-третьих, совместное обсуждение вопросов помогает им не только лучше и полнее овладеть предметом и приобрести более широкий кругозор в избранной области, но и выбрать тему для своей работы. Что касается тех, кто делает первые шаги в научной работе, то они в семинаре регулярно общаются не только со своими руководителями, но и друг с другом, помогают друг другу, соревнуются в достижении результатов; молодежь обогащается здесь опытом старших; старшие в свою очередь получают зарядку от научного общения с молодежью.

Ни одна работа участника нашего семинара не выходит в свет без ее обсуждения, и это правило применяется ко всем — и к аспирантам и к профессорам. В деловой и непринужденной обстановке семинара каждый может выступить с любыми соображениями, не боясь ошибиться: в живом и откровенном разговоре по научным вопросам ошибки всегда могут быть, а коллективное обсуждение поможет их исправить. Мне самому случалось выступать с замечаниями, от которых затем приходилось отказываться. Но это, думается, было полезно для моих начинающих товарищей, так как позволяло улавливать научные соображения, так сказать, in statu nascendi (в момент возникновения), а не в уже готовом и отполированном виде. Ведь все мы идем к верным выводам через многие попытки, пробы и испытание разных средств и идей, порой таких, которые оказываются потом грубо ошибочными. Но это и есть творческая работа, и ничто, быть может, так не «подогревает» молодежь, как приоткрытие перед ней дверей этой «творческой кухни».

В свободном обмене мыслями, в побуждении каждого к самостоятельной работе, в постоянной взаимопомощи, короче, в общей творческой атмосфере и состоит значение семинара.

Семинар влияет и на преподавание, так как его участники неизбежно переносят его творческий дух в свою педагогическую работу. Преподаватели — члены семинара — постоянно думают об интересных и сложных задачах для студентов, о новых элементах в лекциях, о новых спецкурсах.

Творческая атмосфера семинара делает его центром воспитания научной молодежи. Конечно, студенту даже четвертого или пятого года обучения вначале бывает трудно подключиться к семинару, но, преодолев первые опасения и непонимание того или иного вопроса, он довольно быстро входит в курс дела. Если у него есть малейшая творческая искра, малейшая склонность не к выучиванию заданного «на отлично», а к самостоятельному размышлению и настоящему труду, он не сможет не втянуться в общую работу. И тогда — долго ли, коротко ли — пойдут небольшие, по все же свои исследования. Руководитель семинара и другие старшие его участники должны позаботиться о том, чтобы снабдить начинающих не слишком трудными и вместе с тем актуальными заданиями.

Чрезвычайно важна работа в семинаре для аспирантов: они становятся участниками научного коллектива и получают помощь своих товарищей, всего коллектива, а не только научного руководителя. Семинар оказывается как бы коллективным руководителем аспиранта. При таком стиле работы аспирант уже не может остаться без руководства: ведь и он и его руководитель регулярно встречаются и вместе работают. Там же, где не привыкли к подобной совместной работе, где аспирант трудится один, оставаясь связанным с руководителем (пусть даже высококвалифицированным) лишь тонкой нитью редких консультаций, он часто не получает настоящего руководства и помощи, а открытое обстоятельное обсуждение содержания его работы заменяется заслушиванием отчетов и писанием индивидуальных рецензий. Такая обстановка не способствует воспитанию у научных работников чувства ответственности, не стимулирует развития критики и широкого обмена идеями, а, наоборот, порождает либерализм, безответственность и ненормальные взаимоотношения, которые, к сожалению, встречаются порой в научных учреждениях. Лишь коллективное детальное обсуждение научного труда есть лучшее средство проверки его качества, и не только для кандидатской диссертации, но и для исследования, намечаемого в качестве докторской диссертации, и вообще для всякой работы — будь ее автор аспирант или академик. В этом отношении семинар оказывается чрезвычайно действенным средством подготовки научных кадров — от студентов и аспирантов до докторов наук.

Коллективная работа в семинаре решает также задачу объединения усилий для решения больших научных проблем. Как-то у нас в университете один профессор юридического факультета в своем выступлении заявил, что в юриспруденции подобное объединение невозможно. Я не юрист, но все же беру на себя смелость сказать: подобные взгляды вызваны только тем, что некоторые ученые еще не приучили себя к постоянному деловому обмену мыслями со своими коллегами, обмену, который и ведет к общности научных интересов. Конечно, если каждый будет работать в одиночку, то никакие планы исследовательской работы, никакое укрупнение тематики, никакие предписания и т. п. не дадут результатов. Для объединения научных усилий нужна совместная работа, и одним из лучших средств здесь является именно регулярное общение ученых в специальном семинаре. Например, наш геометрический семинар объединил всех участников на основе их интереса к проблемам общей теории нерегулярных поверхностей — новой области геометрии, центром развития которой и является семинар.

Семинар может быть также отличной формой творческого содружества преподавателей с работниками других вузов, научных институтов и промышленности. Здесь, в совместном изучении и обсуждении той или иной проблемы, как раз и можно установить взаимопонимание, творческий контакт и прийти к полезным выводам. В одних случаях это будет временное объединение для решения определенной задачи, в других оно сможет перерасти в постоянную работу. Так, например, работал на механико-математическом факультете семинар по проблеме гидравлического удара; семинар возник в связи с задачами, вставшими перед Ленинградским Металлическим заводом в период проектирования и постройки мощных гидротурбин. В работе семинара регулярно принимали участие шесть — восемь инженеров и конструкторов завода; они не только обсуждали доклады сотрудников университета, но и сами выступали с сообщениями. Семинар наметил направление экспериментальных и теоретических исследований, которые и были проведены в университете. В итоге был создан простой метод расчета гидравлического удара в трубах переменного сечения и переменной толщины стенок. Результаты работы были переданы заводу для использования и опубликованы в ряде статей.

Наконец, семинары решают важнейшую задачу развития новых научных направлений. Так, в семинарах, например, на механико-математическом факультете нашего университета сложились направления или, может быть, даже научные школы функционального анализа, топологии, математической логики и др. В топологическом кружке, который организовал лет двадцать пять назад профессор А. А. Марков, в семинаре по функциональному анализу, основанному примерно в то же время профессором Г. М. Фихтенгольцем, в геометрическом семинаре профессора О. К. Житомирского и в других научных объединениях начинали с того, что просто вместе учились, обсуждая книги и журнальные статьи, реферируя текущую литературу. Затем выявились и наиболее интересные для каждого проблемы, появились первые работы участников, а за ними последовали и результаты, такие как, скажем, теория полуупорядоченных пространств Л. В. Канторовича в функциональном анализе, работы самого А. А. Маркова по топологическим группам и немало других достижений, прокладывающих новые пути в науке. Это и есть то, что называют формированием научных школ; а складывались они в научных семинарах.

Около тридцати лет назад на кафедре зоологии беспозвоночных профессором В. А. Догелем был организован научный семинар, который работает до сих пор. Этот семинар сыграл выдающуюся роль в развитии на кафедре атмосферы подлинно научного творчества. Не случайно здесь было подготовлено около сорока докторов наук и двухсот кандидатов наук; не случайно, что сотрудники этой малочисленной кафедры за последние десять лет опубликовали более ста работ, среди которых много учебников и крупных монографий. В семинаре неоднократно ставились целые серии докладов, каждая из которых посвящалась всестороннему обсуждению одной большой проблемы. Например, еще в конце 30-х гг., когда на кафедре под руководством В. А. Догеля формировалось экологическое направление в паразитологии, семинар был посвящен разработке проблем общей паразитологии; весь цикл докладов по этим проблемам был опубликован в отдельном выпуске ученых записок. Аналогичные циклы докладов были проведены и по другим актуальным проблемам («Закономерности размножения простейших», «Мезодерма и проблема происхождения вторичной полости тела» и др.). В работе семинара участвуют также студенты, многие доклады которых впоследствии публикуются.

Все это относится не только к старым, уже сложившимся семинарам. И вновь организуемые семинары начинают играть большую роль в подъеме исследовательской работы кафедр. Так, в 1945 г. по инициативе профессора Б. С. Джелепова был организован семинар на кафедре ядерной физики. Вначале в него входили только члены кафедры и студенты, но затем он перерос кафедральные рамки и фактически стал общегородским семинаром. Он занимается вопросами ядерной β- и γ-спектроскопии, ядерных реакций, нейтронной физики и физики космических лучей, вопросами техники эксперимента в области ядерной физики. В том, что кафедра занимает сейчас одно из ведущих мест в разработке вопросов β- и γ-спектроскопии, немалую роль сыграл научный семинар. Всего четвертый год работает под руководством профессора А. В. Сторонкина семинар на кафедре теории растворов. Но он уже привлек многих сотрудников других кафедр и факультетов. Здесь обсуждаются не только отдельные выполненные на кафедре работы, но и некоторые общие вопросы физической химии. В прошлом учебном году, например, большое внимание было уделено обсуждению таких важнейших понятий физико-химического анализа, как понятие фазы гетерогенной системы, понятия сингулярных точек и кривых ликвидуса физико-химических диаграмм, таких важнейших принципов физико-химического анализа, как принцип непрерывности и соответствия. Обсуждение позволило вскрыть получившие широкое распространение в литературе существенные неточности и ошибки в толковании этих понятий и принципов физико-химического анализа.

Семинар во многом способствовал созданию на кафедре коллектива, сплоченного общностью научных интересов, и помог привлечь студентов старших курсов к исследовательской работе.

Центром развития конструктивных принципов, связанных с проблемами оснований математики и с теорией математических машин, стал организованный несколько лет назад профессором А. А. Марковым семинар по математической логике, которым теперь руководит его ученик доктор физико-математических наук Н. А. Шанин. Недавно участником семинара студентом Г. С. Цейтипым были получены существенные результаты в области конструктивного анализа.

Научные семинары имеют очень большое значение как средство решения тех общих задач развития научной работы, о которых мы говорили в самом начале статьи. Конечно, это не универсальное средство, но оно бесспорно одно из самых действенных.

Для того чтобы семинары получили повсеместное распространение, недостаточно, конечно, распоряжений; нужны обмен опытом, разъяснение их пользы, возможного содержания, форм и методов их работы и организации. У себя в университете мы стремились перенести опыт лучших семинаров на все кафедры, применительно, разумеется, к особенностям каждой области науки. С этой целью был, например, выпущен специальный номер многотиражной газеты со статьями руководителей научных семинаров; вопрос обсуждался на совещании деканов и в советах некоторых факультетов. Результаты налицо: коллективные формы научной работы успешно распространяются и теперь никто их больше не называет «заседаниями» и «формализмом». Но такие дела не делаются вдруг, и нужна дальнейшая работа, чтобы лучший опыт был воспринят всеми кафедрами.

В конце концов, чтобы создать научный семинар, нужно немного: нужна группа хотя бы из четырех — пяти человек, которые выберут какую-нибудь общую тему, образуют семинар и будут активно работать, стараясь привлечь в него новых участников. Начать можно с совместного изучения какой-нибудь книги, реферирования литературы, докладов о своих работах, если такие уже есть. Главное — взяться за дело и поддержать его общими силами.

Лучше всего, когда в семинаре есть руководитель, который благодаря своему научному кругозору и научной фантазии, а не только по служебному положению, может возглавить работу, выдвинуть интересные и вместе с тем доступные участникам семинара темы для изучения и самостоятельного исследования. Впрочем, творческие работники вырастают в творческой обстановке, и если такого руководителя нет сейчас, то он, может быть, вырастет из среды рядовых участников семинара, как это часто бывает. Поэтому там, где старшие не склонны брать на себя организацию семинара, пусть это дело возьмет в руки молодежь. В науке нужны инициатива и упорство — без них любые указания, программы, планы мало помогают.

Сошлюсь на пример из личного опыта. Осенью 1955 г., когда я проводил отпуск в Алма-Ате, мы договорились с заведующим кафедрой геометрии Казахского университета профессором А. З. Закариным и научным сотрудником сектора математики Академии наук Казахской ССР В. В. Стрельцовым и организовали геометрический семинар с целью объединить геометров, работающих в разных вузах города. На первом заседании я «для затравки» сделал доклад о геометрии на многогранниках. В середине декабря В. В. Стрельцов уже писал мне: «Наш геометрический семинар работает регулярно и имеет тенденцию роста. После Вашего отъезда было четыре занятия. Все участники (пять из университета, два из Педагогического института, два из Женского педагогического института и один из Астрономической обсерватории) желают заниматься изучением какой-либо определенной области геометрии. Остановились на теории выпуклых тел .... Пожалуйста, как обещали, пришлите светокопию „Теории выпуклых тел“ Т. Боннезена и В. Фенхеля и задачи для семинара; при этом, если можно, прошу сообщить краткую характеристику каждой из них (степень трудности, решена она или нет и предполагаемый ход решения)».

Светокопия требуемой книги была сделана в Ленинградском университете. Что касается второй просьбы, то участники нашего семинара предложили алма-атинским коллегам целый ряд задач или, точнее, небольших проблем для самостоятельной работы. Весной 1956 г. мы уже получили сообщение о решении некоторых из них.

Я надеюсь, что семинар в Алма-Ате не заглохнет, а станет рано или поздно источником значительных исследований. Нужно только, чтобы небольшая группа, составившая ядро семинара, не прекращала работу. Поддержка со стороны нашего семинара безусловно будет обеспечена [2)].

Думается, что этот конкретный опыт может быть многим полезен; на него стоит обратить внимание и руководителям Министерства высшего и среднего специального образования СССР. Уже давно мы говорим о необходимости наладить связь между вузами. В стране сотни вузов, и далеко не все они обеспечены кадрами, способными возглавить научную работу. Тут как раз и может помочь коллективная работа в семинарах и на этой основе — постоянная связь между вузами; она позволит пригласить, скажем, на семестр ученого из другого города, чтобы, читая лекции и проводя семинары с преподавателями, в личном общении с ними он помог улучшить научную работу.

Все надежды на рост научных кадров обычно возлагаются на аспирантуру и докторантуру; тем самым признается решающим средством индивидуальное руководство. Даже доктора наук должны «выращиваться», согласно этой точке зрения, под соответствующим руководством, что противоречит самому понятию «доктор», т. е. ученый, внесший существенный, самостоятельный, оригинальный вклад в науку.

Опыт показывает, что докторантура не является достаточно эффективным средством подготовки кадров, ибо, как известно, диссертации защищает меньшинство лиц, направленных в докторантуру. Между тем в Ленинградском университете, например, число защищаемых в год докторских диссертаций выросло с четырех в 1952 г. до четырнадцати в 1955 г. отнюдь не за счет докторантуры. Из тридцати двух человек, защитивших докторские диссертации в 1951–1955 гг., в докторантуре были только двое.

Обычно упускают из виду, что главная составная часть обстоятельств, благоприятных для научного роста, — творческая научная атмосфера — создается именно людьми, работающими в науке, и что научный руководитель сам должен быть воспитан в творческом духе. Ведущие ученые не приходят в науку извне — их рождает сама научная среда, и они же преобразуют ее своей деятельностью. Изменение научной обстановки и есть результат деятельности тех, кто работает в науке, а измененная обстановка дальше влияет на их же научную деятельность. Стало быть, совместные творческие усилия — от выдающегося, заслуженного ученого до любого рядового, пока еще начинающего работника — и есть главное условие успешного развития науки и научных кадров.

[2)] Двое участников этого семинара стали впоследствии заведующими кафедр: в университете и военном училище в Алма-Ате; еще четверо — также серьезными научными работниками и умелыми преподавателями высшей школы.

Коллективная работа в специальных семинарах представляет собой проверенную широким опытом форму объединения творческих усилий. Ее нужно всячески поддерживать и насаждать повсеместно, избегая штампа, приспособляя к особенностям вуза, факультета, кафедры, но распространять и развивать обязательно.

Школа творческой мысли

Литературная газета. 4 сентября 1956 г.

Значение высшей школы в развитии нашего общества громадно, оно будет постоянно увеличиваться и потому должно быть достаточно оценено.

Высшая школа готовит не только квалифицированных специалистов для разнообразных областей государственной, хозяйственной, научной и культурной работы; она готовит и творческих работников, которые в будущем обогатят технику, науку и искусство новыми идеями, изобретениями, открытиями. Именно в вузе, на студенческой скамье или в учебной лаборатории закладываются первые навыки самостоятельной работы, возникают первые творческие порывы, которым суждено с годами развиться и плоды которых пожнут академии, институты, заводы и опытные поля. В свете сказанного следует, в частности, оценивать и роль университетов: ведь их выпускники пополняют кадры научных институтов и, что не менее важно, кадры преподавателей, а в будущем профессоров, руководителей кафедр вузов.

Бурное развитие высшей школы в нашей стране, естественно, выдвигает серьезные проблемы, связанные с дальнейшим улучшением ее деятельности. Я хочу коснуться только тех вопросов, которые были подняты в выступлении Б. Бродского [1].

Проблемы, поставленные им, не новы: мысли о самоуправлении, о свободном посещении лекций высказывались не раз на ученых советах и на широких совещаниях, в частности на совещании руководителей вузов, проведенном Минвузом СССР в феврале прошлого года. Насколько я могу судить, подавляющее большинство университетских профессоров имеют в этих вопросах единое мнение.

Задача высшей школы, как и всякой школы, прежде всего воспитательная. Вовсе недостаточно передать студенту определенную сумму знаний, хотя бы на самом современном уровне науки, — нужно воспитать в нем инициативу, творческий интерес к работе, беспокойный дух исканий и критики, высокое сознание коммунистического долга. Это тот беспокойный дух коммунистического отношения к труду, ко всем явлениям жизни, которым полны энтузиасты целинных земель, новостроек, заводов, передовые рабочие, инженеры, ученые, писатели и художники. Едва ли нужно разъяснять, что, говоря о творчестве, я вовсе не имею в виду одних лишь Менделеевых, Павловых или Репиных; речь идет не о редких талантах, а о том отношении к работе, которое требует поисков нового и лучшего, не позволяет довольствоваться установившимися канонами, старой технологией, испытанными старыми средствами.

Развитию инициативы студента мешает, однако, школярство, въедающееся в высшую школу. Студент берется в шоры обязательных занятий, заполняющих львиную долю его сил и времени, он добросовестно посещает все занятия, выучивает по записям (и не более!) все курсы, получает свои отличные и хорошие оценки. Но даже отличник может не знать отлично ни одного предмета, потому что ничем не занимался самостоятельно за пределами необходимого минимума. Не странно ли: ведь мы уже забыли истинный смысл самого слова «отлично», не замечаем разницы между отличными, т. е. выделяющимися, успехами и ответом экзаменующегося «на отлично». Недостаток настоящей высокой требовательности — другая сторона такой системы.

Эта школярская система тормозит развитие самостоятельности и инициативы, снижает чувство ответственности, оставляет внешнюю дисциплину без внутренней самодисциплины, не дает развернуться индивидуальным интересам и способностям студента, мешает ему расширять его научный и культурный кругозор за пределы обязательных занятий. А студенту полезно пойти на лекцию знаменитого профессора, даже если она не стоит в его расписании, студенту непременно нужно заняться каким-то предметом особенно углубленно. Без этого не вырастет творческий работник, умеющий ставить себе определенные задачи, организовывать свой труд и отвечать за него без ссылок на объективные и прочие причины.

На решение этой насущной проблемы направлены постановления правительства об ограничении количества часов обязательных занятий, о разрешении студентам, участвующим в научной работе, иметь индивидуальные планы и о новом порядке назначения стипендий.

Ближайшая задача состоит в том, чтобы в максимальной степени и наилучшим образом использовать возможности, предоставляемые этими замечательными документами. Борьба с перегрузкой студентов вовсе не кончена, она должна проводиться и дальше. На основе сокращения обязательных занятий и расширения числа студентов, пользующихся индивидуальными планами, можно будет реально переходить к свободному посещению лекций. Здесь нужны подготовка и накопление реального опыта. В прошлом году я просил министра В. П. Елютина разрешить в порядке опыта установить свободное посещение занятий на некоторых старших курсах некоторых факультетов. Это разрешение не было дано. Однако, я надеюсь, — и таковы пожелания профессоров нашего университета — этот опыт будет поставлен и позволит перенести вопрос из сферы пожеланий и теоретических дискуссий в область практической проверки и подготовки такой меры там, где она окажется полезной.

Введению свободного посещения лекций мешает, в частности, боязнь отсева. Эта боязнь висит над всей высшей школой и ведет к тому, что, однажды войдя в число студентов или даже аспирантов, молодой человек «протаскивается» сквозь курс порой чуть ли не за уши, перебиваясь с троек на четверки, тогда как лучше было бы признаться в неудаче выбора.

Чрезвычайно остра сейчас проблема приема в высшую школу. При громадном наплыве желающих получить высшее образование система конкурсных экзаменов оказывается неидеальным средством отбора именно тех, кто обладает не только и не столько формальными знаниями, сколько действительными способностями и определенной склонностью к занятиям по избранной специальности. Но, пробившись сквозь конкурс, студент порой уже не ценит добытое им право учиться и тянется до диплома с нашей доброй помощью. Более широкий прием студентов и жесткий, особенно на первом курсе, отсев тех, кто не доказал своей способности и действительного желания учиться, помогли бы, возможно, наилучшим образом комплектовать состав будущих специалистов и тем более творческих работников.

Как в воспитании студентов, так и во всей учебной и научной деятельности каждого вуза мы должны находить правильное сочетание общего плана с учетом конкретных особенностей и возможностей. Простор для развития научных направлений, определяющих своеобразное лицо вуза, факультета или кафедры, разнообразие программ и курсов, простор для индивидуальных, неповторимых особенностей лекций каждого профессора, являющихся результатом его творческой работы над курсом, — без всего этого высшее учебное заведение не будет ни центром научного творчества, ни центром воспитания творческой молодежи.

Наряду с такой свободой научной работы и преподавания должно идти всемерное повышение требовательности к работникам высшей школы, преодоление того либерализма, который позволяет спокойно жить преподавателям, не ведущим научной работы, убивающим в студенте настоящий интерес к предмету, к самостоятельной мысли своими лишенными творческого огня лекциями и семинарами. Преподаватель, пережевывающий, как мочало, замусоленный конспект лекций, никогда не сможет выступить в роли «возбудителя в зрелом юноше научных устремлений» (Д. И. Менделеев).

Чрезмерная регламентация преподавания стесняет, конечно, научную и педагогическую инициативу и тем самым тормозит развитие высшей школы. Задача состоит в сочетании общего плана и обязательных требований, с одной стороны, с максимальным использованием индивидуальных особенностей и возможностей — с другой.

Всеобщее, детальное и принудительное регламентирование преподавания в высшей школе противно самой ее сущности. Примером тому могли служить действовавшие несколько лет и лишь недавно, к счастью, наконец исправленные обязательные программы кандидатских минимумов, содержавшие явные нелепости. Поистине это было бюрократическим уродством: попытаться предписать всем ученым одни и те же требования к их аспирантам без всякого учета того факта, что разнообразие научных направлений и есть одно из важнейших условий расцвета науки, что немалое число научных руководителей — это и есть творцы новых научных теорий, теорий, которые еще и не могли дойти до методического управления министерства.

Из университетов пока лишь Московский и Ленинградский пользуются правом иметь индивидуальные учебные планы. Думается, это право, так же как известную свободу в программах, следует расширять и предоставить и другим университетам — не всем сразу, не в порядке общего циркуляра, а на основе конкретного анализа конкретной обстановки.

Такому развитию научно-преподавательской инициативы должны соответствовать известные изменения и в организационных формах. Руководителем вуза может стать не назначенный директор, а ученый совет — коллективный орган ученых, который и должен решать общие вопросы работы вуза. В таком большом вузе, например, как наш Ленинградский университет, ученый совет должен, мне думается, состоять из представителей факультетов, избираемых учеными советами факультетов и отвечающих перед факультетом за свою деятельность.

Современная система подбора составов ученых советов вовсе не идеальна, и я как ректор с удовольствием бы отказался от этого своего права — подбирать состав совета. Руководитель вуза должен опираться на коллектив и как можно меньше администрировать в научно-учебных вопросах, всячески использовать коллегиальность. И мы это делаем нередко даже там, где существующие правила дают ректору право самому решать тот или иной вопрос. Мне иногда приходилось поступаться своим личным мнением, хотя я имел формальное право его провести, но зато, мне казалось, я выигрывал в большем — в самом поддержании принципа коллегиальности, в уважении к мнению коллективного органа. Точно так же мы установили порядок ежегодного отчета ректората о работе университета перед ученым советом, хотя формально ректор не ответствен перед ним.

В конечном счете ректор, проректоры и деканы должны избираться учеными советами и должны отвечать перед ними. Это не только не стеснит права и возможности начальника, но, напротив, поднимет его авторитет, так как он будет осуществлять свои права как избранник и представитель коллектива ученых, оказывающих ему честь, доверие и поддержку.

Нужно и дальше идти по пути расширения прав ученых советов, ректоров и деканов. Кстати, чрезвычайно важные шаги уже были сделаны введением конкурсной системы и недавним введением твердых штатов с правом ректора распределять преподавательскую нагрузку. Один из давно назревших конкретных вопросов — это предоставление ученым советам права приема в аспирантуру. Совершенно непонятно, почему совет, могущий присудить степень кандидата, не может вместе с тем принять аспиранта, который ведь еще только в будущем получит ученую степень, а стало быть, и соответствующие права, гораздо, кстати, большие, чем право заниматься в аспирантуре. Пора перестать утверждать прием аспирантов в министерстве, хотя бы уже по той простой причине, что там нет физической возможности разобраться в каждом принимаемом иначе, как бегло перелистать его личное дело и просмотреть анкету. Человека за бумагами увидеть нельзя. Здесь, как и в других вопросах, такая централизация только снижает ответственность каждого из административных звеньев, занимающихся аспирантурой.

Бóльшие права, бóльшая демократия, бóльшая инициатива подразумевают и влекут за собой и бóльшую ответственность и требовательность. В конечном счете во всех вопросах, которые обсуждались в этой статье, суть дела состоит в правильном сочетании инициативы и требовательности, свободы и ответственности, твердых принципов и общего плана с использованием и развитием конкретных возможностей и особенностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бродский Б.* Высшая школа и ее питомцы // Лит. газ. 1956. 2 августа.

Вашу руку, коллега!

Комсомольская правда. 22 декабря 1960 г.

Мне часто приходится встречаться с молодыми учеными не только в Ленинграде, но и в других городах нашего Союза. И на вопрос: «У кого Вы учились?», они несколько недоуменно отвечают: «Я окончил такой-то институт ... ».

Очень хорошо, что выпускники наших институтов надолго сохраняют благодарную память о том учебном заведении, которое выпустило их в жизнь. Но должен, обязательно должен быть еще тот человек, пример которого привел студента в науку.

Когда в 1929 г. я поступил на физический факультет Ленинградского университета, лекции по математике на первом курсе читал профессор Борис Николаевич Делоне, блестящий ученый, тогда только что избранный членом-корреспондентом Академии наук СССР. Это были замечательные лекции по содержанию и по форме. В них Борис Николаевич, как правило, не ограничивался обязательным материалом, а всегда с увлечением рассказывал что-нибудь интересное, близкое своим собственным научным интересам, обращенным в то время к геометрии. Живо помню его первую лекцию, в которой он предложил три задачи: одну «для способного человека», другую «для очень способного», а третью — еще нерешенную, над которой довольно долго, но безуспешно думал один академик.

Кое-кому из нас удалось решить первую задачу; третья была решена года через четыре одним студентом-математиком.

Несколько позже в одной из лекций Борис Николаевич рассказал нам известную теорему о том, что из всех замкнутых линий данной длины наибольшую площадь ограничивает окружность. Я пробовал найти другое доказательство и предложил было его Б. Н. Делоне, но он сразу нашел в нем ошибку. После новых размышлений я нашел еще одно доказательство.

Со следующей осени, перейдя на второй курс, я по приглашению Бориса Николаевича стал ходить в его семинар по геометрической кристаллографии.

Почти с самого начала занятий в семинаре я начал биться над тем, как получить новое доказательство одной теоремы, на которую обратил внимание Борис Николаевич. Конечно, я нашел решение не сразу, и моему учителю пришлось несколько раз выслушивать мои попытки.

Вечерами, после семинара я нередко провожал Бориса Николаевича домой, а вскоре стал заходить к нему, и мы просиживали у него в кабинете до позднего часа. «Хотите, познакомлю с одним любопытным явлением?»,— начинал он и, не дожидаясь ответа, с увлечением рассказывал о чем-то новом в математике.

Как был горд я этим общением с большим ученым!

Но была и не одна математика. Борис Николаевич говорил и об искусстве, которое он понимает глубоко и тонко, и о событиях из своей жизни, и о многом другом. Б. Н. Делоне был одним из инициаторов советского альпинизма, а я тогда начинал свою альпинистскую карьеру ...

Мои занятия геометрией продвигались, и постепенно за первым новым доказательством теоремы последовало другое и третье. Но я ведь был студентом-физиком, а не математиком и работал еще в Государственном оптическом институте. На третьем курсе я начал заниматься одной проблемой из квантовой механики под руководством Владимира Александровича Фока, нашего крупнейшего физика-теоретика и замечательного человека, общение с которым тоже было для меня драгоценным. И у него я бывал дома, и разговоры шли не только о теории атома. Я буквально разрывался на части. Нельзя было соединить все сразу. Поэтому однажды я сказал Борису Николаевичу, что больше не могу заниматься геометрией. «Ну что ж, Данилыч, — сказал он с сожалением и шуткой, — жена не будет больше жарить Вам котлеты».

Но геометрию я не смог бросить и через некоторое время опять вернулся к прежнему. Довольно скоро мне удалось получить один новый результат. Я пошел к Борису Николаевичу, чтобы поделиться с ним своим открытием. Мое сообщение он встретил с некоторым недоверием: теорема была новой и казалась сравнительно трудной. «Ну, а как Вы это доказываете?», — спросил он. Я рассказал. «Ах, черт, ведь верно!», — воскликнул Б. Н. Делоне и быстро вышел из комнаты. Через несколько минут он вернулся, хитро посмотрел на меня и сказал: «А жена кому-то котлеты жарит». Так я вернулся в геометрию и к Б. Н. Делоне.

В том, что я рассказал, нет ничего исключительного: это довольно обыкновенная история. У Б. Н. Делоне немало учеников — и ставших уже учеными, и совсем молодых, которых он тоже принимает у себя дома, берет с собой в дальние лыжные прогулки. Много учеников и у В. А. Фока. Помню, с какой теплотой говорил мне о своем любимом ученике ныне покойный профессор нашего университета А. В. Венедиктов, академик, крупнейший советский юрист. А ведь уже тогда ученик в своих работах критиковал некоторые взгляды и выводы своего учителя. Смешно было бы видеть в этом черную неблагодарность. Ученик относился к своему учителю с сыновней почтительной любовью. Но учитель воспитал в нем еще более сильную и глубокую любовь — к науке, воспитал необходимое качество ученого: самостоятельность мысли, не склоняющейся ни перед каким личным авторитетом.

Два высших наслаждения есть в жизни ученого: его творческая научная работа и тесное общение с жадной до знания и работы молодежью. Ее успехи — его успехи и его радость.

И каждая возможность стать ближе к своим ученикам должна восприниматься как благо. У нас же распространилось и такое мнение, что крупный специалист, работая в вузе, в лучшем случае должен читать специальные курсы, руководить дипломантами и аспирантами. Чтение же основных общих курсов лекций рассматривается как дело сравнительно заурядное. Но это величайшее заблуждение! Общий курс лекций должен быть не просто грамотным изложением основ науки; он должен будить мысль студента, раскрывать перед ним пусть пока еще туманные горизонты науки, должен воспитывать в нем глубокий интерес к предмету и потребность к самостоятельной работе.

Я говорю о вещах на первый взгляд ясных и понятных, как простейшая аксиома. Конечно же, любой педагог, вне зависимости от того, находится ли он за строгой университетской кафедрой или за скромным учительским столом, должен не только учить своему предмету, но и воспитывать, увлекать и делом своей жизни, и своими занятиями, наконец, формировать вкус, мировоззрение своих подопечных.

Но мне приходится иногда встречать среди деятелей науки чиновников от профессуры, которые в общении с молодежью не идут дальше своих служебных обязанностей, понимая их в слишком узком смысле.

Разве профессора-лектора должны беспокоить только посещаемость и оценки на экзаменационной сессии? Разве его не должно волновать, сколько студентов изберут его дорогу, продолжат его дело, достаточно ли широки их интересы, умеют ли они правильно распределить свое время?

А ведь случается, что и научный руководитель аспиранта — будущего молодого ученого — понимает свою роль только как консультанта и человека, ответственного за сроки сдачи диссертации.

Я помню, как в споре на одну тему один из моих коллег возражал: «Я работаю по четырнадцать часов в сутки, и у меня не остается, понимаете, не остается времени на общение со студентами. Беседа? Совместная прогулка? Вечер, проведенный вместе? Значит, не прочитана еще одна необходимая книга, отложен еще один опыт».

Сколько может сделать за свою жизнь ученый? И много и мало. Всегда мало, если нет учеников, которые продолжают дело твоей жизни. И как бы ты ни был расточителен, отдавая свое время молодежи, ты всегда будешь самым богатым человеком, потому что у тебя есть последователи.

Основное звено — высшая школа

Правда. 8 февраля 1961 г.

Бесспорно, что основным звеном в подготовке научных кадров является высшая школа, а основным условием успешной их подготовки — соединение образования с наукой.

Многое делается для подъема научной работы в высшей школе. Однако надо признать, что у нас сложилось известное разделение, а иногда даже противопоставление науки и образования.

Деятельность ученого оценивается почти исключительно по его личным научным достижениям, которые отмечаются званиями и премиями. Но ведь роль ученого в науке в не меньшей степени определяется успехами его учеников, значением его научной школы. Это общеизвестная истина, но даже в высшей школе этому не придается должного значения. Так, например, в вузах есть фонд для премирования за научную работу, но нет фонда для премирования за образцовое воспитание научных кадров. У себя в университете мы ввели почетную грамоту, присуждаемую ученым советом за лекторское мастерство и воспитание научной смены, но мы не получили разрешения сопровождать эту грамоту премией.

Явно недооценивается чтение основных общих курсов лекций. Считается, что крупный специалист должен читать специальные курсы, руководить дипломантами и аспирантами, а общие лекции на первом курсе рассматриваются как дело сравнительно заурядное. Но это величайшее заблуждение! Ведь такие лекции должны открывать перед студентами первые научные горизонты, закладывать основу глубокого интереса к науке, к серьезной самостоятельной работе. Д. И. Менделеев, будучи долгие годы профессором Петербургского университета, сам читал общий курс химии. А теперь многие профессора стараются отстраниться от чтения лекций.

Штаты вузов устанавливаются, исходя из числа студентов, без учета объема научной работы и даже подготовки аспирантов. Перегрузка педагогической работой мешает научному росту преподавателей. Научные же сотрудники вузов освобождены от преподавательской работы. У себя в университете мы решили привлечь научных сотрудников к преподавательской работе, и притом без дополнительной почасовой оплаты. И хотя это по штату не положено, научные сотрудники в своей массе охотно откликнулись на призыв, показав коммунистическое отношение к делу. Однако следовало бы официально установить, что научный сотрудник вуза, как правило, обязан вести известную преподавательскую работу. Необходимо также учитывать в штатных и иных расчетах подготовку аспирантов.

Но главная линия раздела образования и науки проходит не внутри системы высшей школы, а между высшей школой и чисто научными учреждениями, особенно институтами Академии наук СССР и других академий. Там сосредоточиваются ведущие ученые, туда направляются большие средства, там создаются лучшие условия для научной работы, там ведутся главные научные исследования. В свое время при создании новых научных институтов основные кадры для них взяты из вузов. Это привело к важным успехам в новых институтах, но повлекло относительное отставание научной работы в вузах, отток из них лучших кадров.

Неравенство вузов и научных институтов особенно ярко обнаружилось при ликвидации совместительства. Многие ученые, порой даже будучи в вузах на основной работе, ушли в научные институты. Из опыта нашего университета можно было бы рассказать историю борьбы за сохранение кадров, почти всегда кончавшуюся нашим поражением. В этом году мы лишились единственных профессоров по алгебре, вычислительной математике, геоботанике и ряду других специальностей. И мудрено ли, если, например, ассигнования на научную работу, приходящиеся на одного сотрудника в Академии наук СССР, в семь-восемь раз больше, чем в университете. А ведь наш университет далеко не последний по обеспечению и уровню научной работы.

Нецелесообразно отвлекать из вузов лучшие силы. Планируя развитие науки, следует особенно заботиться о расширенном воспроизводстве творческих научных кадров, что невозможно без повышения уровня высшего образования.

Профессоров и вообще активно работающих в науке преподавателей в вузах не хватает. Возникает необходимость привлекать ученых для работы по совместительству. Но совместительство имеет отрицательные стороны, и, очевидно, его следует постепенно ликвидировать. Одновременно целесообразно изменить размеры почасовой оплаты, привести их в большее соответствие с тем, что получает за ту же работу штатный преподаватель.

Воспитание научных кадров, особенно высшей квалификации, должно стать в центре внимания всей научной общественности. Это долг каждого ученого, каждого научного учреждения и, конечно, вузов. В стране насчитывается около одиннадцати тысяч докторов наук, сотни членов академий, множество научных учреждений высокого уровня. Это большая сила. Стоит подумать о том, чтобы каждый старший научный сотрудник академического института и особенно члены академий уделяли больше внимания подготовке кадров, чтобы это было первейшей обязанностью, за которую они отвечали бы перед академией.

Необходимо сближение вузов с научными институтами, с Академией наук СССР, с республиканскими академиями. Мировая практика показала плодотворность неразрывной связи высшего образования с научными исследованиями. Не говоря об опыте наших сильнейших вузов, можно сослаться, например, на ведущие исследовательские центры в области ядерной физики при Кэмбриджском, Калифорнийском, Копенгагенском университетах, где работали и работают такие ученые, как Э. Резерфорд, Э. О. Лоуренс, Н. Бор и др. Совершенно правильно указывает М. А. Лаврентьев в своей статье на опыт сближения технического образования с работой в промышленности, на новый тип высшего учебного заведения — завод-втуз. Подобно этому в соединении университетского образования с научными исследованиями полезна прежде всего непосредственная возможность тут же привлекать способных студентов к научной работе под руководством крупных ученых. Такая работа, проводимая на высоком уровне и обеспеченная современными средствами эксперимента, даст хороший эффект.

М. А. Лаврентьев предлагает в виде опыта передать Академии наук СССР некоторые университеты. Эта идея выдвигалась и раньше. Ее можно поддержать, поскольку в ней указывается простое конкретное средство соединения высшего образования с наукой. Однако неправильно было бы выделять только очень немногие университеты. Подготовка творческих кадров и развитие науки должны усиливаться повсеместно. Поэтому задача состоит также в том, чтобы преодолевать концентрацию научных сил и средств только в немногих центрах (особенно в Москве), тогда как в других местах этих сил и средств нет в достаточном количестве, а те, что есть, распылены между разными учреждениями. Соединение вузов и научных институтов поведет к возникновению сильных научно-учебных центров, способных быстрее выдвинуться на передовую линию в масштабах всей страны. Такое слияние не создает, как показывает опыт крупнейших вузов, чего-то слишком громоздкого и в то же время открывает больше возможностей для привлечения молодежи к научной работе. Оно обеспечит бóльшую гибкость в использовании кадров и средств, ликвидирует самую необходимость в совместительствах, ликвидирует «междуусобную борьбу», покончит со взаимной борьбой за кадры, устранит вредный параллелизм в тематике. Словом, мне кажется, что всюду, где есть к тому малейшая возможность, где есть, в частности, институты Академии наук СССР и республиканских академий, стоит, ломая ведомственные рамки, идти на образование научно-учебных центров, соединяющих научные исследования с высшим образованием. Известное осуществление этого можно видеть в тесной связи Новосибирского университета с Сибирским отделением Академии наук СССР. В конечном счете развитие науки и подготовка кадров должны осуществляться в рамках одной системы.

Независимо от решения этих более трудных вопросов следует обеспечить взаимную связь и взаимопомощь между вузами, а также между вузами и научными учреждениями. Год назад между Ленинградским и Дальневосточным университетами был заключен договор о содружестве. В соответствии с этим во Владивостоке побывали семь наших профессоров. Осенью к нам приехало оттуда несколько студентов пятого курса, а в аспирантуру — несколько молодых преподавателей. Министерству высшего и среднего специального образования СССР и Президиуму Академии наук СССР следовало бы, не откладывая, взяться за разработку плана подобных связей не только между вузами, но также между академическими институтами и вузами.

Проблема подготовки научных кадров, на наш взгляд, заслуживает того, чтобы собрать посвященное ей всесоюзное совещание работников высшей школы и научных учреждений. На совещании можно было бы обсудить эту проблему во всех аспектах и вынести рекомендации для ее наилучшего решения во всех звеньях.

Подготовка кадров — дело первостепенной важности

Всесоюзное совещание научных работников в Кремле. М.: ВИНИТИ, 1961. С. 61–65

Среди вопросов координации и планирования научной работы не последнее место занимают подготовка кадров и научная работа в высшей школе. Главную движущую силу развития науки составляют именно научные кадры, их работа, их творческие усилия. Поэтому, думая о будущем науки, мы должны особенно заботиться о подготовке научных кадров, о том, чтобы расширить приток в науку талантливой молодежи, совершенствовать ее научное воспитание, создавать наилучшие условия для ее научного роста.

В частности, говоря о поисковых исследованиях, нужно иметь в виду, что здесь мы прокладываем пути к тому, что пока еще неизвестно. Такие исследования трудно планировать. Поэтому тем более необходимо заботиться о том, чтобы создать условия, обеспечивающие возможно быстрое продвижение в этой области.

Одним из важнейших, можно, пожалуй, сказать, решающим условием является воспитание научной молодежи, которая и будет призвана прокладывать эти неизведанные пути науки будущего.

В своем докладе М. В. Келдыш сказал, что как развитие тяжелой промышленности должно опережать развитие производства средств потребления, так развитие самой тяжелой промышленности должно упреждаться развитием техники, а развитие техники в свою очередь должно упреждаться развитием точных наук. К этому надо добавить, что само развитие науки должно упреждаться количественным и качественным ростом подготовки научных кадров.

Соотношение научной работы и подготовки кадров в известной степени аналогично соотношению производства предметов потребления и средств производства: если специальные научные институты дают научную продукцию сегодняшнего дня, то будущее научного производства будет определяться в большой степени теми кадрами, которые мы готовим теперь.

Основным звеном в подготовке научных кадров не только рядовых, но и крупных ученых является высшая школа. Поэтому уровень высшего образования составляет одно из решающих условий будущих успехов в науке.

В вузе должна быть самая передовая наука; он должен быть особенно ориентирован в будущее, потому что именно из сегодняшних студентов выйдут те, кто будет развивать науку завтрашнего дня. Если способный молодой человек не получит в вузе знаний современной науки и творческой зарядки, то, попав в академический институт, он еще должен будет приобретать все это, теряя драгоценное для работы время и энергию молодости.

Будущий научный работник должен воспитываться с первого курса вуза. Иначе, в частности, задача иметь более молодых докторов наук не может быть решена. Говоря о развитии высшего образования и науки, хотелось бы подчеркнуть роль университетов, так как их выпускниками пополняются не только научные кадры в разных областях знания, начиная от математики и физики, до лингвистики и истории, но и кадры преподавателей основных теоретических дисциплин во всех вузах страны, таких как математика, физика, общественные науки и др. Таким образом, повышение уровня университетского образования является важнейшим элементом развития высшего образования вообще. Основным условием подготовки научных кадров является неразрывное соединение образования с наукой.

Во-первых, только соединение учебы с работой, в данном случае с научной работой, позволит вырастить специалиста, не только знающего предмет, но, главное, умеющего работать. Этот принцип соединения учебы с работой лежит в основе перестройки высшей школы, и поэтому эта перестройка сыграет решающую роль в улучшении подготовки научных кадров.

Во-вторых, только преподаватель, сам активно работающий в науке, может преподнести ее студенту в ее подлинном виде, возбудить в нем научные интересы, воспитать желание и умение думать и работать самостоятельно.

Чтобы быть центром воспитания творческой молодежи, вуз должен быть центром творческой работы, где преподавание органически сочетается с научными исследованиями, с привлечением студентов к научной работе по актуальным проблемам, на современном оборудовании.

Таким образом, подъем научной работы в высшей школе имеет решающее значение, и нужно сказать, что в этой области сделано и делается очень много. Так, мы у себя в Ленинградском университете ясно ощущаем, как благодаря заботе партии и правительства существенно изменились к лучшему условия научной работы. Однако нужно констатировать, что исторически сложилось и все еще сохраняется известное разделение и даже противопоставление науки и подготовки кадров не в пользу высшей школы. Это проявляется в разных формах. Так, например, работа ученого оценивается исключительно по его личным научным результатам, тогда как не менее важно то, что сделано его учениками, какую научную школу он создал.

В штатной системе вузов имеется полное разделение преподавательских и научных штатов, причем преподавательские штаты рассчитываются только по числу студентов без учета содержания и объема научной и даже учебной работы и подготовки аспирантов. Такая система не способствует развитию научной работы и ведет к перегрузке преподавателей.

В научных поисках, в оценке работы нужна широкая демократия, открывающая путь в науку каждому по его способностям и результатам.

Уход из вузов наиболее сильных ученых вызывает серьезное беспокойство. При ликвидации совместительств большинство ученых, которые только могли уйти из вузов, порой даже будучи там на основной работе, ушли в научные институты. Так, например, с математических факультетов Харьковского и Ленинградского университетов ушла значительная часть профессоров. А уж если университетский ученый достиг таких высот, что его выбирают в академию, так он, почти наверное, переносит туда центр тяжести своей работы, если не уходит вовсе.

Однако, отвлекая из вузов лучшие силы, академии подрывают источник своего собственного питания. Ведь молодые-то кадры они будут брать из вузов. И если там не останется крупных ученых, то и уровень этих молодых кадров будет не тот.

Почему так происходит? А потому, что условия работы в академиях гораздо лучше. Сравните ассигнования на научную работу, приходящиеся на одного сотрудника в академиях и в университетах, и вы увидите, что в академиях они в несколько раз больше. В академиях больше штатных возможностей для привлечения молодых сотрудников, нет там и педагогической нагрузки. Стало быть, недостаточно общих призывов к тому, что развитие науки, сами академии нуждаются в том, чтобы в вузах работали крупные ученые. Нужно если не приравнять условия работы в вузах и академиях, то по крайней мере уменьшить существующее различие, особенно разительное для провинциальных вузов.

Разнообразие вуза, включающего все отрасли данной науки на одном факультете в целый комплекс наук на разных факультетах, чрезвычайно плодотворно для научного общения, для связи разных областей науки. Такой полноты и разнообразия направлений не имеет никакой специальный научный институт.

Особенно ясно это преимущество в университетах: всякий полноценный университет — это целая, хотя бы и небольшая, академия. Особенно хочется отметить сочетание здесь точных и гуманитарных наук. Это сочетание приобретает все большее значение. Оно позволило, например, нам в Ленинградском университете открыть впервые в Союзе подготовку специалистов по математическим методам экономики и по математической лингвистике и образовать научные группы, занятые разработкой этих проблем и их практическим применением [1)].

[1)] Уже из первого потока студентов вышли академики А. И. Анчишкин и С. С. Шаталин, заведующие кафедр ленинградских вузов И. М. Сыроежин и Б. И. Кузин и много других активно работающих экономистов; специальность стала преподаваться во многих вузах.

Огромное преимущество работы в вузе — это общение с молодежью: оно создает для ученого освежающую обстановку, позволяет постоянно привлекать к работе новые силы и открывает неоценимую возможность создать свою научную школу, влияние которой выпускники вуза разнесут по стране. Привлечение к научной работе студентов, аспирантов и преподавателей позволяет развивать в вузах новые направления с меньшим специальным штатом, с меньшими затратами и, при прочих равных условиях, дает поэтому большой эффект. Все эти преимущества нужно лучше использовать.

Академия наук СССР выступает как в большой степени замкнутая в себе организация, тогда как она имела бы тем большее значение, если бы объединяла ученых, работающих в разных местах, осуществляя этим живую координацию и влияние на научную работу.

Не нужно стараться сосредоточивать научные силы и средства в одном ведомстве, разрывая живые связи с практикой, с подготовкой кадров. В частности, выбирая вузовского профессора в академию, было бы правильнее оставить его на прежнем месте, дав ему дополнительные средства и возможности для научной работы.

Точно так же академический институт не должен быть замкнутой организацией. Его ведущие сотрудники должны выезжать из центра для чтения лекций, консультаций, проведения семинаров. Одновременно такие институты должны принимать к себе для временной работы людей из других институтов и вузов, чтобы дать им возможность поработать в обстановке сильного научного центра. Такой живой обмен, живая координация только повысит роль академий и окажет существенное влияние на повсеместный подъем научной работы и подготовку кадров высших квалификаций.

Одной из форм соединения науки с образованием должно быть создание комплексных научно-учебных центров, объединяющих подготовку кадров с большими научными исследованиями. Это особенно важно для так называемой периферии, чтобы уменьшить ее относительное отставание от центра.

Стоит еще отметить, что хотя университеты и политехнические институты находятся в ведении Министерства высшего и среднего специального образования СССР, но по существу они ближе к академическим институтам, чем к средним специальным учебным заведениям.

Такие формы осуществления более тесного соединения науки и подготовки кадров нужно рассматривать конкретно, в каждом отдельном случае, но они необходимы. Государственный комитет по координации научно-исследовательских работ СССР и Академия наук СССР должны со всей полнотой оценить значение подготовки кадров и, стало быть, значение подъема научной работы в высшей школе, значение соединения образования с наукой.

В этом соединении состоит одно из важнейших условий такого расцвета науки, которого требуют задачи построения нового общества.

Пусть больше будет одержимых!

Комсомольская правда. 22 ноября 1961 г.

Год назад в университете мы провели анкету. В ней был такой вопрос: «Читаете ли вы научную литературу по своей специальности сверх программы?». Из двухсот пятидесяти пяти человек положительно ответили меньше половины. К тому же, как выяснилось, большинство читает научную литературу в связи с дипломными или курсовыми работами.

На серьезные раздумья наводит этот, на первый взгляд не очень тревожный, факт. Вспомнились беседы со студентами, заметки во время экзаменов, наблюдения многих лет, и я подумал: нет, не случайно анкета принесла так мало утешительного. Действительно, в лучшем случае только пятая часть студентов всерьез интересуется наукой, занимается самостоятельно.

Я не считаю, что наш университет хуже других; наоборот, это один из сильнейших вузов страны и по составу преподавателей, и по уровню научной работы. За этот год наше студенческое общество подготовило к печати два сборника. На лекциях, которые проходят у нас по циклу «Наука XX века», всегда полно народу. Присутствуя на таких лекциях или читая их, я испытывал величайшую радость, видя живой, жадный интерес сотен студентов. Сотен. А у нас тысячи. Тревожно.

Меня, например, не особенно волнуют юные нигилисты — их мало. К тому же здоровому и крепкому коллективу этот орешек по зубам. Меня и моих коллег страшно тревожит другое: есть у нас серые, безликие студенты.

Они, пожалуй, благополучны. Сдают, переходят с курса на курс и в зачетках имеют зачастую приличные отметки. Но не прочтут они ничего сверх положенного, не просидят ночи над незаданной теоремой, не обрадуются научному открытию незнакомого человека. Смотришь на них и видишь не будущего ученого, первооткрывателя, а просто исполнителя, может быть, и добросовестного.

Не хочу я с этим мириться. Не могу. Мы все не можем.

Мы, работники высшей школы, работаем на будущее. Ведь нынешние первокурсники окончат вуз через пять-шесть лет. Потом они будут набираться опыта и станут полноценными работниками где-нибудь к 1970 г. Если же говорить о времени, когда нынешний первокурсник — будущий научный работник, инженер, преподаватель, врач — достигнет зрелости и сможет, если позволят способности, играть ведущую роль в науке, то это произойдет примерно к 1980 г.

Стало быть, наши успехи и недостатки мы должны мерить полной мерой 1980 г. Каждый из нас, от профессора до первокурсника, от министра до старосты студенческой группы, уже сейчас должен спросить себя, соответствуют ли его работа, его усилия, его сознание такой мере, такому уровню задач.

Главное для нас — коммунистическое воспитание будущего специалиста. Говоря об этом, обычно подчеркивают прежде всего особую роль преподавания общественных наук. Затем прибавляют летние работы в сельском хозяйстве или на стройках да еще упоминают различные мероприятия — лекции о международном положении, концерты художественной самодеятельности и пр. Все это, конечно, важно и полезно, но не в этом главное. Главное — отношение к труду.

А коммунистическое отношение к труду означает, что человек работает не из-за нужды, не для заработка, не для славы и даже не из чувства долга, хотя он и понимает свой долг перед обществом, — это значит, что человек работает из внутреннего побуждения, работает потому, что без работы ему жизнь не в жизнь. Кстати сказать, такое отношение к своей работе всегда было присуще тем, кто достиг значительного в науке, технике или искусстве. Я всегда вспоминаю при этом Льва Толстого. Этот помещик и аристократ, скоро достигший мировой славы, мог бы спокойно почивать на лаврах, но он всю жизнь продолжал упорно работать. Сколько раз переделывал, исправлял свои произведения, прежде чем они появились на свет, сколько читал, сколько думал.

Прочтите книгу Ирвинга Стоуна «Жажда жизни» о Винсенте ван Гоге и вы увидите не легкий полет вдохновения, а упорный, самозабвенный труд. Настоящий талант и есть неразрывное сочетание способностей с напряженной работой.

То же самое можно говорить и о И. П. Павлове, и о тысячах других неустанных тружеников, безгранично преданных своему делу. А такое отношение к работе возможно, очевидно, лишь тогда, когда сама по себе работа глубоко интересует человека, когда она отвечает его склонностям и способностям. И, с другой стороны, настоящий интерес к делу — это не пассивный, а активный интерес, побуждающий человека к деятельности. Отсюда ясно, что воспитание в студенте коммунистического отношения к труду и есть воспитание в нем настоящего, т. е. рабочего, творческого интереса к своей работе, увлеченности своим делом.

Вот почему меня так волнуют «благополучные студенты». Вот почему не выходит из головы та анкета.

Почему? Почему в большинстве своем студенты не горят?

Легко обвинить в лености мысли студента Петрова, Иванова или Сидорова. Но дело не только в них самих.

Что же нужно сделать, чтобы воспитать в каждом студенте активный, рабочий интерес к науке, такой интерес, когда человек сам повышал бы образование, приучался самостоятельно думать и работал с полным напряжением своих способностей, стремясь не только что-то узнать или выучить, но и создать?

Нужно уничтожить в высшей школе школярство. Уничтожить порядок, при котором мы лишь преподаем студентам свои предметы в строго определенном объеме, а студенты их выучивают и сдают. Пусть не подумают мои коллеги, что я выступаю здесь против того, чтобы студенты что-то выучивали и сдавали. Нет. Но я склонен отрицать, что задачей учебного процесса является только одно — дать студентам необходимые знания. Этого, дорогие товарищи, мало. Студент — *не сосуд, который надо наполнить, а светильник, который необходимо зажечь.*

В чем же конкретно проявляется в высшей школе школярство?

Начнем с учебных планов и программ. Здесь видна чрезвычайная забота о том, чтобы не упустить чего-нибудь, что считается нужным для студента, и как бы не дать ему того, что является якобы лишним. В результате, дробя курсы лекций по специализациям, жестко требуют от лектора выполнения программы, а от студентов — точного знания «от сих до сих».

Однако далеко не всегда можно точно определить, что на самом деле нужно, а что не нужно.

Возьмем, к примеру, математику. Кто может сказать, что студенту нужен именно этот интеграл, а не другой, именно этот вид дифференциального уравнения, а не иной. Ведь всех интегралов и частных случаев интегрирования дифференциальных уравнений никто не знает — на то есть справочники. Я вспоминаю разговор с двумя крупными специалистами по математическому анализу, которые как-то сказали мне, что они не знают интегралов Эйлера (хотя эти интегралы числятся в программе второго курса вуза). А между тем это крупные ученые, обогатившие математическую науку.

Ученый не помнит многого из того, что нередко считается необходимым знать студенту. Нужное ему он ищет и находит в научной литературе, как рабочий подбирает необходимый инструмент. Если же нет такого инструмента, рабочий его делает, а ученый изобретает новый метод. Гораздо лучше уметь вывести формулу, чем знать ее на память. Умение выше знания, потому что умение создает новое, а знание ничего не создает, в этом я глубоко убежден. Знание нужно для работы не само по себе, а как основа для умения.

Соответственно и задача лекций не сводится к тому, чтобы сообщить слушателям известные сведения. Лекции должны развивать интерес к предмету. Я бы сказал даже, что хорошо, если в лекции вместе с максимально ясным изложением основного будет сказано что-то такое, что не все поймут сразу, но что даст намек на интересное и важное. Ничто не может быть более отталкивающим для слушателей, как чтение лекций по конспектам столь заплесневелым, что из них, по меткому выражению студентов, можно добывать пенициллин.

Точно так же и семинарские занятия и упражнения не должны сводиться к репетиторству и натаскиванию. Преподавание не может быть ориентировано только на среднего студента. Как лекция должна давать пищу и сильным, и слабым, так и в упражнениях нужно индивидуализировать задания.

По поводу экзаменов есть старый, но верный анекдот. Как-то спросили профессора, сколько нужно ему времени, чтобы выучить язык. «Года три», — подумав, ответил он. Спросили аспиранта, тот ответил: «Год». Спросили студента. «А когда экзамены?», — последовал вопрос. Выходит, что студент — машинка для выучивания и сдачи экзаменов. Не зря ведь слово «сдать» прочно осело в студенческом лексиконе. Вдумайтесь: не взять, а сдать …

Фетишизм экзаменационных отметок противоречит самым коренным задачам высшей школы: воспитывать творческого работника. Возвышая круглых отличников, мы пренебрегаем теми, кто в результате упорных занятий в избранном направлении добился особых успехов и, может быть, сделал уже самостоятельную работу.

Один из профессоров нашего университета как-то, выступая в ученом совете, сравнил круглого отличника с гусем. Гусь все умеет, говорил он: и летать, и бегать, и плавать. Но летает он хуже орла, бегает хуже страуса, плавает хуже пингвина. «Научный гусь» ничего значительного ни в одной области науки не достигнет.

Преувеличение роли отметок сказывается и в стипендиальной системе. С одной стороны, по положению именные стипендии присуждаются только отличникам, не получившим за все время обучения ни одной тройки. Но это совершенно нелепо. Лучший студент — это тот, кто сделал научную, конструкторскую или иную работу, а не тот, кто только хорошо учился. С другой стороны, такая система глубоко антидемократична. Каждому должно быть ясно, что человеку, пришедшему в вуз с производства, человеку, вышедшему из рабочей или колхозной семьи, сразу хорошо учиться при прочих равных условиях много труднее, чем тому, кто вырос, скажем, в профессорской семье. И вот когда такой студент разовьет на старших курсах свои способности и обгонит поначалу более успешных товарищей, его нельзя, оказывается, отметить именной стипендией из-за прошлых, утративших уже всякое значение троек.

Каждый раз при обсуждении представлений на именные стипендии мы сталкиваемся с тем, что на некоторых факультетах не находится «достойных» студентов только потому, что на этих факультетах хороших отметок зря не ставят, а ценят больше самостоятельную, творческую работу студентов. Каждый раз мы пишем в министерство, отстаивая наши представления. Но каждый раз следует отказ.

Неужели непонятно, что установленная система противоречит всем нашим принципам и ее нужно немедленно менять? Именные стипендии должны присуждаться решением ученого совета факультета или вуза. Никакое утверждение министерства здесь не нужно.

Из разговоров с преподавателями других вузов я знаю, что есть еще администраторы, которые не любят, когда преподаватели требовательно ставят отметки, снижая этим «средний балл», или ставят студенту заслуженную двойку, заставляя его либо усвоить необходимый минимум, либо покинуть вуз. В это дело вмешиваются и другие организации, осуждая отсев и низкую успеваемость.

По этому поводу нужно сказать вот что: во-первых, «тройка» означает «удовлетворительно» и, стало быть, должна ставиться и восприниматься согласно смыслу этого русского слова. Во-вторых, студент, не сдавший какого-либо экзамена, вовсе не всегда должен быть лишен стипендии, без которой он просто не сможет дальше учиться. В-третьих, отсев, т. е. уход из вуза тех, кто не способен или не желает как следует заниматься, есть благо. Во что обходится государству человек, пользующийся дипломом, который он получил без достаточного основания? Не приносит ли он больше убытка?

Тот же школярский взгляд на высшее образование, который ставит знание выше умения, ведет к увеличению числа обязательных аудиторных занятий до 40 ч в неделю и выше. А я глубоко уверен, что нормальный человек не может продуктивно слушать лекции и участвовать в семинарах по 8 ч в день. При такой загрузке студенты на самом деле не занимаются: они либо пропускают, либо только отсиживают часть занятий. Зато учебный план «выполняется».

Закостенел и порядок определения предметов, которые надо изучать на том или ином курсе. Так, в расписании занятий математиков четвертого курса среди длинного перечня общих предметов стоит один специальный — математическая физика. Можно понять студентов, когда они говорят, что теперь, после введения большой практики, математика стала у них по существу факультативной.

Неверно думать, будто действенность преподавания общественных наук находится в прямой зависимости от числа часов и объема сведений, требуемых на экзамене. Когда и того и другого слишком много, предмет начинает давить студента, и настоящая действенность теряется. Задача преподавания общественных наук состоит прежде всего в воспитании у студентов научно обоснованных коммунистических убеждений, в выработке марксистского подхода к своей специальности, к явлениям жизни. А это, как известно, не зависит от количества часов.

Против школярской системы — большого числа занятий со строго обязательным посещением — выдвигается предложение ввести свободное посещение занятий. На мой взгляд, такое решение было бы не совсем правильным. Очень просто ставить вопрос: не годится жесткая система, пусть будет полная свобода.

В настоящих конкретных условиях высшей школы свободное посещение занятий привело бы, по крайней мере на младших курсах, к снижению внутренней дисциплины студентов, к ухудшению успеваемости и как следствие либо к большому отсеву, либо к растягиванию сроков обучения. А это явно не годится.

Выход уже давно указан известным постановлением, которое разрешает всем с тудентам, занимающимся научной работой, иметь индивидуальные планы. А так как участие в научной работе можно трактовать достаточно широко, то и возможности предоставления таких индивидуальных планов тоже широки. Ими может в конечном счете воспользоваться любой серьезно работающий студент.

Но среди вузовских администраторов есть люди, считающие индивидуальные планы ненужными, а среди преподавателей — такие, которые считают недопустимым, чтобы студенты не посещали всех лекций.

Гибкость системы, соединяющей разумную дисциплину с максимальным развитием самостоятельности, с требованием для каждого студента работать в полную меру своих способностей, — вот что нам нужно.

Увлечение наукой у студентов воспитывается там, где увлечены ею преподаватели. Но воспитательное влияние преподавателя не может ограничиваться одними лекциями или семинарами. Преподаватель, увлеченный своей наукой и стремящийся привлечь к ней студентов, ведет кружки, встречается со студентами на диспутах и вечерах, разговаривает по душам.

Профессор Г. М. Фихтенгольц, долгие годы руководивший математическим кружком на первом курсе, приглашал члена кружка, подготовившего доклад, к себе домой, чтобы поговорить о докладе. Уже самый факт такой домашней встречи с заслуженным профессором имел для первокурсника большое значение. На праздновании открытия новой лаборатории эмбриолога профессора Б. П. Токина вместе с седыми профессорами за одним столом сидели члены этого научного коллектива и студенты. Таких примеров много.

Часто серьезной научной работе преподавателей и их более близкому общению со студентами мешает чрезвычайная загрузка педагогической работой. Преподаватель выступает в роли некоего Фигаро: читай два-три общих курса, да еще спецкурс, веди семинары или лаборатории, руководи десятью курсовыми работами и пятью дипломными, организуй научный кружок, иди на заседание кафедры или на совещание у декана, выступай сегодня в студенческом общежитии. Надо, на мой взгляд, подумать о том, чтобы как-то высвободить и преподавателя — воспитателя студенческих душ.

Хочу сказать несколько слов о комсомольской организации вуза.

Я не раз замечал, как иногда противопоставляется комсомольская работа учебе и научным занятиям студентов; лучшие студенты отходят от работы комсомольской организации, а руководителей называют «комсомольскими деятелями».

Но ведь если на производстве главная задача комсомольской организации — способствовать подъему производства, воспитывать коммунистическое отношение к труду, то и в вузе ее главная задача — способствовать всеми средствами улучшению подготовки специалистов, воспитывать коммунистическое отношение к труду, стало быть, серьезный, рабочий интерес к науке.

Студенческие организации нередко пекутся о досуге студентов, о телевизорах, о вечерах отдыха больше, чем о развитии научных и серьезных культурных интересов. Понятие о труде связывается с участием в стройках, в сельскохозяйственных работах, а о работе по специальности забывают, считая ее нормативной, а заботу о ней — не своим кровным делом.

Как-то, помню, на одном комсомольском собрании я сказал, что в науке — настоящая романтика. Видели бы вы, какой отпор вызвала эта фраза у тогдашнего секретаря нашего университетского комсомола: мол, юношеству нужно нечто увлекательное, интересное, оно стремится к подвигу — и прочее в таком же духе.

А ведь всякое открытие, всякое изобретение, как всякое проникновение в неизвестное, полно внутренней романтики. Врач или ученый, исследующий опасную болезнь с риском для себя, тоже совершает подвиг личного мужества. В конце концов во всякой самозабвенной работе есть подвиг, может быть, не очень броский, но нередко более трудный, чем подвиг, требующий лишь кратковременного усилия воли. Разговоры же о «романтике вообще» означают лишь, что человек не любит своей специальности, не любит упорной работы, не понимает настоящего содержания жизни.

Точно так же и в общей культуре человека, на мой взгляд, первую роль должна играть его специальность, его работа. Без такого, я бы сказал, рабочего отношения к культурным ценностям они, эти ценности, никогда не будут освоены по-настоящему. Сколько ни слушай лекций по эстетике, как часто ни ходи в театр или кино, а в подлинном смысле культурным не станешь. Будешь только верхоглядом в культуре. Основа настоящего воспитания общей культуры опять-таки лежит в выработке широкого, действенного интереса к своей специальности, в выработке желания и умения думать.

Творческий труд дает человеку величайшее счастье. Развить свои склонности и способности, развить настоящий интерес к своему делу, чтобы обрести в работе счастье, ощутить полноту и смысл жизни — такая цель стоит перед каждым студентом. Помочь ему в этом — главная наша задача.

Алмазы надо гранить [1)]

Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 401–407

Несколько лет назад к нам в Ленинград приезжала делегация из Московского университета. Один из гостей, маститый ученый, знакомясь с Ольгой Александровной Ладыженской, спросил: «А вы на каком курсе?» — «Я профессор», — ответила она, смутившись. О. А. Ладыженская — крупный и довольно известный математик. Она действительно молода, хотя принять ее за студентку трудно. Но этот случай как нельзя лучше иллюстрирует сложившееся в науке и высшей школе положение.

А положение это такое. Средний возраст докторов наук и профессоров, т. е. ученых широкого кругозора и глубоких знаний, призванных руководить исследованиями, ученых, от которых зависит будущее нашей науки, достигает 58 лет. А в некоторых институтах большая часть профессоров пенсионного возраста! Во всем Ленинграде, городе науки и вузов, лишь несколько докторов наук моложе 35 лет.

Конечно, нельзя винить московского академика, принявшего Ладыженскую за студентку: мы так привыкли связывать профессорское звание или докторскую степень с сединами и морщинами, что удивляемся, когда видим профессора молодого, энергичного, в расцвете жизненных сил. А между тем именно такие руководящие научные кадры нам нужны, именно их нам не хватает.

В последние годы в подготовке научных кадров достигнуты определенные успехи. Сейчас в СССР трудится целая армия ученых — свыше четырехсот тысяч. Однако задачи дальнейшего развития науки и техники требуют значительного улучшения подбора и подготовки научных кадров. Темпы подготовки научных работников сейчас недостаточны.

В научно-исследовательских учреждениях и высших учебных заведениях страны все еще ощущается недостаток крупных ученых, способных возглавлять кафедры и направлять большие проблемные исследования. Еще немало таких вузов, где нет ни одного доктора наук, например, в Алма-Атинском

[1)] Впервые опубликовано в газете «Ленинградская правда» 20 мая 1962 г. — *Прим. ред.*

институте иностранных языков всего два кандидата. Ленинградцы должны были бы помочь таким институтам в подготовке кадров. Но и в нашем городе, пожалуй, нет ни одного вуза, где бы проблема докторов и профессоров была решена.

Вуз — это прежде всего профессора. Если выдающийся ученый читает лекцию в сарае, то и тогда он зажжет молодежь, вселит любовь к знаниям, побудит к научной работе. Мы можем построить дворец, наполнить его самым лучшим оборудованием, но если не будет профессоров, которые выдвинут научные идеи и покажут, каких удивительных результатов можно добиться с помощью этого оборудования, никакой науки не будет.

Это ясно всем. Так почему же у нас не хватает именно таких, зовущих вдаль ученых и почему сложившееся положение так медленно исправляется?

Причин немало. И первая из них — война. Большинство нынешних профессоров — это довоенная гвардия. За время войны и в послевоенные годы она получила очень незначительное пополнение. Те молодые талантливые люди, которые тянулись к науке и которые могли стать большими учеными, пошли на фронт защищать Родину. Часть из них погибла, часть была выбита из сферы научных интересов.

Я вспоминаю рабочего С. П. Оловянишникова. Его жизнь складывалась очень трудно, однако он успешно закончил университет, сделал три интересные работы, но опубликовать успел только одну. Началась война, он стал командиром огневого взвода полевой артиллерии. Был ранен и в госпитале написал еще одну работу по математике. После выздоровления поехал на фронт и пропал без вести, погиб. У его жены остались две рукописи, и после войны они были изданы. Одна из них содержит знаменитую теперь теорему Оловянишникова ...

Студент Богомолов тоже воевал. Окончил войну с большими наградами. Но он не рискнул вернуться в университет, хотя и был талантлив. Только самые увлеченные, самые преданные науке могли рисковать, начинать жизнь сначала и наверстывать упущенное.

Вторая причина та, что это обстоятельство не было вовремя должным образом осознано руководителями институтов. На подготовку научных кадров не было обращено того внимания, какого проблема заслуживала.

Это, так сказать, причины исторические. Но есть обстоятельства, которые и сейчас мешают росту научных работников.

У руководителей институтов, а иной раз даже в печати проскальзывает мысль, что «только достойным надо открывать путь в науку». В соответствии с этим тезисом присуждение ученой степени кое-кто рассматривает как право на вход в райский сад, называемый наукой, как право надеть блестящий мундир ученого. Посмотрите, сколько людей пишет специально докторскую работу: они хотят доказать, что они «достойные», они хотят получить «входной билет».

А ведь это в корне неверно! Наивно думать, что путь в науку кто-то кому-то открывает. Он всегда открыт. Путь в науку человек прокладывает своим трудом, своими исследованиями. И нельзя готовить специально докторскую работу. Нужно вести большие исследования, которые бы выдвигали и доказывали новую идею, новое инженерное решение, новый математический результат. И если все это будет, если работа перспективная — значит это докторская работа. Защита диссертации, присуждение ученой степени — лишь фиксация достигнутого уровня в научных исследованиях. И не больше! Наука была и до защиты, а присуждение ученой степени показывает лишь степень научной важности исследования.

Отсюда вытекает, что на рост докторов огромное влияние оказывает общий уровень научной работы в данном институте. Этот вопрос должен быть центральным и в деятельности руководства, и в деятельности общественных организаций вузов. Только из постановки больших проблем вырастают большие результаты. И нужно, чтобы ученые эти проблемы смело ставили перед собой, перед своими сотрудниками и учениками. И планировать научную работу надо с расчетом на окрыленность, ставя большие задачи.

Требовательность к научной работе, к сотруднику — элементарное условие, без которого вряд ли возможен рост кадров. Нельзя допускать, чтобы ученый делал только то, что получается. Никогда нельзя ослаблять, выражаясь языком электротехники, напряжения. В научном коллективе всегда должна быть напряженная работа, нужно, чтобы в полную силу работал каждый. У нас на семинарах университетских математиков можно слышать такой вопрос: «А что вы доказали?». И считается неудобным, если человек ничего не доказал; каждый ученый должен иметь результаты. Мне рассказывали, что кое-кто побаивается ходить на семинары, так как ему нечего ответить на этот вопрос. А один сотрудник поговаривает, что у него не очень получается и ему, наверное, надо уйти из университета. И это не потому, что перед ним был так поставлен вопрос. Он сам сделал этот вывод.

Говоря о требовательности, я, конечно, не имею в виду только тех, кто готовится стать доктором. Это в равной мере относится и к будущим кандидатам наук. Медленный научный рост многих кандидатов означает, что требовательность к ним далеко не всегда удовлетворительна. Необходимо, чтобы настоящую трудовую зарядку они получали раньше. Это надо сказать и о студентах, ведь доктора вырастают из нынешних студентов. И они вырастут тем скорее, чем раньше мы разбудим в молодых людях активный, глубокий научный интерес, чем раньше разовьем самостоятельность и чувство ответственности за дело. В этом смысле будущие доктора наук, если хотите, складываются на первом курсе вуза.

Доказательств такой мысли можно привести множество. Моя диссертация выросла из одного вопроса, с которым ознакомил меня профессор математики на первом курсе. Академик Н. Н. Лузин создал научную школу, потому что он умел ставить перед молодыми людьми задачи и привлекать их к исследованиям. Или взять знаменитую работу студента математического факультета Московского университета В. И. Арнольда. Академик А. Н. Колмогоров заинтересовался этим студентом, поставил перед ним большую задачу, и студент сделал выдающуюся работу. Что можно сказать? Не был бы А. Н. Колмогоров так внимателен к молодежи, наверное, не было бы и В. И. Арнольда.

Недавно закончила ЛГУ Н. Н. Уральцева. О. А. Ладыженская сумела увлечь ее интересной темой. Сейчас они вместе сделали важную работу, о которой специалисты очень высокого мнения [2)]. Н. Н. Уральцева пока не доктор [3)], но она работает в том темпе, на том уровне, который обязателен для настоящего ученого [4)].

Среди заботливых наставников молодежи можно назвать академиков В. А. Фока, В. И. Смирнова и многих других. Именно на их кафедрах и вырастают хорошие кадры.

Когда мы сетуем (а делаем мы это очень часто), что доктора наук очень старые, что поздно защищают диссертации, надо спрашивать себя: все ли мы делаем, чтобы побуждать первокурсника к научной работе? Способную к науке молодежь нужно выискивать так же тщательно, как ищут алмазы. Когда же алмаз найден, надо схватиться за него всеми силами, надо без устали шлифовать, гранить его. И молодой ученый много сделает для науки, станет доктором в должное время, а не тогда, когда ему пора уходить на пенсию.

На проблеме роста кандидатов наук следует остановиться особо. Часто бывает так: человек защитил кандидатскую диссертацию и дальше не идет, завяз в кандидатах. И не всегда виноват он сам. Ему дали узкую бесперспективную тему, он ее освоил, исчерпал, больше в этой области делать нечего, а начинать сначала, с азов в другой области не каждый решается. Подобные случаи у нас не единичны, особенно в общественных науках. Вспомните, сколько у нас было диссертаций, более похожих на

[2)] В 1962 г. О. А. Ладыженская (1922–2004) и Н. Н. Уральцева (род. 1934) за совместные научные работы были удостоены Первой премии Ленинградского государственного университета. — *Прим. ред.*

[3)] Н. Н. Уральцева защитила докторскую диссертацию в 1964 г. — *Прим. ред.*

[4)] Не могу не добавить здесь, что сейчас Владимир Игоревич Арнольд — один из лучших отечественных математиков, член-корреспондент АН СССР (а по сути своей уже давно академик), лауреат Ленинской и международной Крафоордской премий. А Нина Николаевна Уральцева давно уже доктор наук, заведующая кафедрой математической физики матмеха Ленинградского университета и совместно с членом-корреспондентом АН СССР Ольгой Александровной Ладыженской лауреат Государственной премии СССР. (Это примечание написано А. Д. Александровым в 1988 г. В 1990 г. В. И. Арнольд (род. 1937) и О. А. Ладыженская были избраны действительными членами Академии наук СССР. — *Прим. ред.*)

литературные изыскания, чем на научные труды. В докторскую такая работа никогда не перерастет, сколько ни бейся. И кандидаты пасуют. Только самые решительные из них, которые во что бы то ни стало хотят получить докторский мундир, в сорок пять лет начинают придумывать, чем бы заняться, о чем бы еще написать.

В подготовке кандидатов еще много формализма и школярства. Чтобы сдать экзамен, нужно прочесть несколько кубометров книг. Я за общее развитие кандидата, но все хорошо в меру. И уж никак нельзя мириться с тем, что подготовка к экзамену порой мешает человеку заниматься его проблемой, осмысливать материал, творить науку.

До сих пор требуется, чтобы диссертант представлял на ученый совет внушительный рукописный том. Между тем должна защищаться не диссертация, а работа. Так почему же не допускается к защите интересная и важная работа, которая умещается на нескольких страницах, почему считается обязательным писать «историческую часть», «заключение» и прочее, порой никому не нужное?

Есть еще целый ряд вопросов, которые тесно связаны с ростом научных кадров. Возьмем, к примеру, творческие отпуска. Обычно их дают для оформления диссертации, т. е. тогда, когда ядро, определяющее диссертацию, уже есть. А между тем главная трудность позади: суть найдена, основа сделана. Мой университетский опыт показывает, что сдержанное отношение администрации к творческим отпускам неправильно. Почему-то так ставится вопрос: неудобно человеку брать отпуск — он же перекладывает свои обязанности на товарищей, а что еще получится из его исследований, никому неизвестно. Нужно понять, что если человек сделает работу, достойную докторской степени, то это уже не его личное дело, не его личный успех, а это дело и успех всего коллектива.

Конечно, в ранних отпусках, когда диссертация еще только в проекте, есть риск. Но без риска ничто большое не делается. Если мы не будем рисковать в науке, то будем иметь лишь рядовые вещи. При этом, если иметь в виду не формальную сторону, а суть, не диссертацию, а научную проблему, риск может быть сведен к минимуму: не получится диссертации, зато будет добыт научный результат.

Кто-то из больших ученых сказал, что научная работа ценна своим содержанием и опубликовать ее — значит поместить ее в соответствующую тару для доставки потребителю. Мы все понимаем безусловную необходимость тары для отправки ценной продукции завода или фабрики, а вот о «научной таре» не очень заботимся. Ученые испытывают огромные затруднения при опубликовании результатов своих исследований. Научные работы зачастую лежат по два-три года, ожидая очереди. Нелепость такого положения очевидна. Мы расходуем большие средства на оборудование и материалы, просто на зарплату, ученые тратят массу времени и энергии, чтобы добиться результатов, но из-за очередей на опубликование мы теряем темпы работы и роста, теряем, наконец, приоритет.

Очень большое значение для научного роста имеют и командировки ученых в другие вузы или исследовательские учреждения, взаимный обмен специалистами на более или менее длительное время, организация конференций, симпозиумов, семинаров по важнейшим проблемам с широким, может быть всесоюзным, представительством. Надо использовать все эти возможности, надо в ближайшие годы значительно улучшить подготовку кадров, чтобы наука могла с успехом выполнять те задачи, которые поставлены в Программе нашей партии.

Через двадцать лет в нашей стране должно быть восемь миллионов студентов, т. е. в три раза больше, чем теперь. И если принять во внимание, что на большинстве вузовских кафедр профессоров сейчас нет и что они быть должны, то можно сделать вывод, какое количество профессоров нам необходимо подготовить в ближайшее время. Задача большая, но выполнимая. В некоторых учебных заведениях и научных институтах уже есть значительные сдвиги. Если же повсюду к ее решению подойдут с должным вниманием, то вполне реально ожидать, что через десять лет число профессоров удвоится. Это будет означать, что проблему поисков и гранения алмазов мы решили.

Дорогу — увлеченным!

Известия. 28 июня 1962 г.

На очередном совещании деканов обсуждалась подготовка к приему в университет. Математики и физики просили не ставить двоек за сочинения поступающим на естественно-научные факультеты, конечно, кроме тех случаев, когда сочинение окажется явно негодным. Ведь сочинение пишется после того, как выдержано жесткое испытание по профилирующим предметам: физике и математике, и, стало быть, кандидат в студенты уже доказал свою способность заниматься на избранном факультете.

Сидевший рядом со мною профессор, известный ученый, сказал, наклонившись ко мне: «Когда я поступал в университет, я написал сочинение на десяти страницах. Писал с увлечением. Наделал ошибок и получил двойку. Мне разрешили писать заново. Уж тут я постарался: написал поменьше да попроще, зато без ошибок. Приняли!» — «Я был хитрее, — ответил я. — Сразу выбрал самую простую тему и думал только о грамматике. Поэтому все прошло благополучно.»

Два года тому назад, когда шло зачисление в университет, один наш доцент-математик обратил мое внимание на молодого человека Н., который второй раз сдавал на математический факультет и второй раз, сдав математику и физику на пять, «схватил» двойку по сочинению. Парень был у нас известен еще по школьным математическим олимпиадам. Год работал на заводе. Что было делать? К счастью, после провала в университет он подал в Политехнический институт на вечернее отделение, сдал, и мы его тут же взяли к себе, в порядке перевода. Пожалуй, это было нарушением правил. Но нельзя было терять способного математика.

В другой раз провалилась на сочинении Г. — тоже победительница олимпиад. Учителя́ школы, где она училась, пришли проверить, верно ли оно было оценено. Я показал им сочинение. «Действительно слабо, — сказала учительница русского языка. — Непонятно, как она могла такое написать. Всегда была сильной ученицей.» Может быть, девушка волновалась или переутомилась за время экзаменов? Возможно. Но выяснение этих вопросов уже не имело практического значения: двойка была двойкой. И нам тоже пришлось принимать Г. «дополнительными» путями.

По поводу этих случаев я советовался с профессором кафедры русского языка нашего университета М. А. Соколовой. «Вступительные сочинения, — сказала она, — очень мало говорят о настоящих данных молодых людей: стандартные темы, стандартные мысли, стандартные фразы... Вообще можно было бы отменить этот экзамен для поступающих на естественные факультеты.» Таким же оказалось мнение декана филологического факультета профессора Б. А. Ларина.

Тут я задумался. То, что мы, математики и физики, считали бы полезным отменить экзамен по русскому языку, можно было бы расценивать как недооценку значения этого предмета. Но как прикажете относиться к мнению ведущих профессоров-лингвистов, специалистов именно по русскому языку?

Ответ ясен — настоящие ученые заботятся не о внешнем престиже своего предмета, а о развитии науки, равно физики, языкознания или математики. Они понимают, что в науку должны идти молодые люди, способные заниматься именно данной наукой, а дополнительная проверка отметок по другим предметам, записанным в их аттестатах зрелости, никому не нужна.

Так этот вопрос и был поставлен нами весной на заседании ученого совета нашего университета, и ученый совет вынес решение: считать целесообразным отмену экзамена по русскому языку, а вместо него ввести письменный экзамен по специальности. Соответствующее послание университета находится в Министерстве высшего и среднего специального образования СССР. Понятно, что в этом году правила приема изменить уже нельзя. Но к будущей весне они должны быть пересмотрены — времени для серьезного анализа и принятия решения вполне достаточно.

В наших предложениях шла речь не только об экзамене по русскому языку, но и об экзамене по иностранному языку. И не только о некоторых факультетах университетов, но и о технических, сельскохозяйственных и медицинских институтах.

Вот чем руководствовался ученый совет: задача вступительных экзаменов в вуз состоит не в том, чтобы проверить, насколько соответствует истине выданный школой аттестат. Задача состоит в том, чтобы проверить, насколько поступающий способен заниматься той специальностью, которую он выбирает. Экзамены должны быть направлены на выяснение этого и только этого вопроса.

Определить на экзаменах действительные способности человека — дело очень непростое. Тут играет роль возможная разница в подготовке и развитии. Одни условия были у ученика столичной школы, другие — у паренька из сельской школы или провинциальной школы рабочей молодежи. Во всяком экзамене есть элементы случайности. Экзамены требуют большого напряжения — ведь решается судьба на долгие годы, может быть, на всю жизнь. Может случиться, что и способный, знающий человек растеряется и, ответив только на тройку, не пройдет по конкурсу.

Потому нужно пытаться всеми средствами сделать экзамен более обстоятельным, чтобы быть в состоянии как можно лучше разобраться в данных поступающего. Одно из средств для этого — два экзамена по специальности. Если ввести в дополнение к устному письменный экзамен, то он даст не только дополнительные сведения. Надо иметь в виду, что один человек может растеряться при опросе, а над письменной работой ему сосредоточиться легче. У других наоборот — им легче отвечать устно, чем писать. Двойной экзамен устранит влияние этих индивидуальных особенностей. И главное — по письменной работе, требующей изложения какого-либо вопроса из физики, математики, биологии и т. п., как раз и можно судить о грамотности.

Не экзамен по орфографии, а экзамен, проверяющий владение языком в неразрывной связи со специальностью, — вот что нужно. Какая, например, прекрасная тема для поступающего на физический факультет: «Закон сохранения энергии»! Или для поступающих в электротехнический институт: «Принципы работы электромотора». Такое сочинение было бы куда полезнее, чем сочинение на привычную школьную тему.

Наконец, об иностранных языках. Этот экзамен отсутствует при приеме на вечерние отделения. Но это же нелогично, ведь на вечернем отделении изучить язык куда труднее, чем на дневном. Вообще в большинстве школ иностранным языкам пока что учат плохо. Лучшую подготовку получают учащиеся школ больших городов, а еще лучшую — те, кто мог брать частные уроки. Стало быть, экзамен по иностранному языку дает преимущество не тому, кто более способен к избранной им науке, а тому, кто имел лучшие условия для занятий языком.

Более того, молодому человеку, работающему на производстве и одновременно готовящемуся к поступлению в институт, очень трудно заниматься и математикой, и литературой, и иностранным языком. Так создается резкое неравенство между школьниками и рабочей молодежью. А это, наверное, тоже несправедливо.

Нужно дать работающему юноше возможность сосредоточиться на подготовке именно того предмета, которому он собирается посвятить себя, и не отвлекать его другими занятиями. Потом в вузе он нагонит то, что ему будет необходимо.

Принцип коммунизма «от каждого по способностям» должен быть положен в основу всей системы образования и, в частности, в основу приемных экзаменов.

Примеры провалов на экзаменах способных людей доказывают, что все, о чем тут говорится, — не абстрактные общие рассуждения, а конкретное важное дело. Вспомните профессора, который провалился по русскому языку и поступил в университет в том же году только потому, что ему разрешили писать новое сочинение. Ведь такое не полагается! И если бы разрешение не было дано, то по крайней мере год работы мог быть потерян. Надо понимать, что такое год работы талантливого ученого. Речь идет не столько о личной судьбе человека, сколько об успехах нашей науки. Настоящий талант за год может дать науке такие ценности, терять которые — преступление. Постараемся же избежать его.

Воспитатели талантов

Известия. 18 мая 1963 г.

В последнее время много пишется о поисках и выращивании талантов, о такой постановке образования, которая эффективно обеспечивала бы развитие способностей учащихся. Полемика, развернувшаяся на страницах «Известий» вокруг статьи академика М. А. Лаврентьева, опубликованной 18 ноября 1962 г. в этой газете, весьма своевременна и симптоматична, поскольку стране очень нужны математики, и не только такие, каких сейчас готовят университеты и педвузы, а математики нового профиля, определяемого новым этапом в развитии науки. Бесспорно, что их подготовка должна быть поставлена так, чтобы воспитывать людей, способных к самостоятельной творческой работе. А чтобы обеспечить достаточное их число, нужно еще среди школьной молодежи выявлять повсеместно тех, кто имеет математические способности, помогать им развить эти способности и подготовиться к поступлению в вуз.

Вообще, говоря об улучшении подготовки математиков, надо помнить не только о поиске талантов, к которым, кстати, следует относиться осмотрительно и не спешить объявлять талантом подающего надежды юношу. В конечном счете все образование должно строиться в соответствии с коммунистическим принципом: от каждого по способностям. Это означает, что необходимо выявлять и развивать способности каждого молодого человека, чтобы его отдача обществу была как можно больше, в полную меру его способностей. Поэтому неправильно учить всех в школе одинаково всем предметам, наполняя каждого учащегося некоторым общим, средним и довольно значительным багажом знаний, чтобы, резко говоря, учащиеся знали побольше, но ничего в особенности.

Я считаю, что с того момента, когда более или менее определяются склонности учащихся, т. е. как раз при переходе в девятый класс, школа должна делиться по разным направлениям. Нужно очень строго отбирать минимум знаний, необходимых для общего развития молодого человека, освобождая действующие теперь учебные планы и программы от того, что не является абсолютно обязательным для всех (скажем, едва ли тот, кто не знаком с биномом Ньютона, окажется от этого менее культурным или образованным). И вот этот-то отобранный по самому строгому принципу минимум будет обязательным для каждого, а сверх него в разных школах или в разных классах одной школы предметы будут изучаться в несколько отличающемся объеме. Словом, учащиеся будут получать подготовку технико-механическую, физико-математическую, сельскохозяйственно-биологическую и т. д.

Как необходимо варьировать учебные планы и программы, так необходимо варьировать и учебники. Должно быть три-четыре несколько различных, хотя и стабильных, учебника по каждому предмету. И конечно, совершенно правы новосибирские ученые, которые пишут, что создание учебников должно быть делом коллективов, объединяющих педагогов, ученых, психологов.

Специализация школ настоятельно диктуется жизнью. И некоторые шаги в этом направлении уже делаются. Если говорить о Ленинграде, то у нас существуют математические школы, которые связаны с университетом и Математическим институтом АН СССР; все шире практикуются различные формы привлечения школьной молодежи к науке и технике — кружки, клубы (клуб юных геологов при Ленинградском дворце пионеров), научные юношеские школы (например, юношеская математическая школа при Ленинградском университете, где вечерами занимаются интересующиеся математикой школьники), олимпиады по различным наукам.

К сожалению, необходимость этого процесса еще не осознана до конца многими товарищами, возглавляющими органы образования и педагогической науки. Академия педагогических наук РСФСР даже не ставит вопроса о методах изучения способностей молодежи, о такой постановке всего образования, которая лучше выявляла бы их и развивала.

Школа, говорят некоторые деятели образования, должна быть рассчитана на «среднего» человека. И о вузе говорят, что это конвейер по производству рядовых специалистов, что он должен быть рассчитан опять-таки на некоего «среднего» человека, а о выпускниках говорят порой, как о «продукции» школ и вузов. Но ведь совершенно нелепо сравнивать людей с продукцией стандартного производства. Нужно понять, что осуществление формулы коммунизма — от каждого по способностям, создание условий для всестороннего развития каждой личности, согласно ее индивидуальным склонностям, — непосредственная задача всей системы образования — от детского сада до аспирантуры. Средний человек — абстракция, а всякий конкретный человек, хотя бы средний, имеет свои особенности. Коммунистическое равенство, как давно уже объяснил К. Маркс, состоит вовсе не в том, чтобы всех подвести под некоторое среднее, а в том, чтобы дать возможность, равную для всех, для развития своих склонностей, вкусов, интересов, способностей.

Возможности образования у молодежи больших городов и у молодежи сел, конечно, разные, и очень важно заботиться о преодолении такого различия. В этих целях, например, три года назад при Ленинградском университете был организован подготовительный факультет, на который мы принимаем приезжую молодежь. Студенты факультета живут в наших общежитиях, работают, а по вечерам занимаются у нас. И вот результат: из двух выпусков примерно три четверти успешно прошли по конкурсу на основные факультеты университета.

Думается, что расширение и всякое усовершенствование такой формы помощи способным молодым людям из сельских и отдаленных районов чрезвычайно важно, и Министерство высшего и среднего специального образования СССР должно оказать этому делу необходимую поддержку. Я уж не говорю об олимпиадах вне Ленинграда, о приглашении к нам их победителей, об организации в школах-интернатах специальных классов для одаренной сельской молодежи. Все это стоит делать хотя бы в порядке опыта. Только ни в коем случае не следует ставить талантливых молодых людей в привилегированное положение. При этом надо сделать специализированные классы и школы скромными, без претенциозных названий особых ломоносовских, или мичуринских, или менделеевских училищ.

Заботясь о розыске и развитии талантов, надо одновременно всячески избегать лишних вывесок, возглашающих чьи бы то ни было таланты. В науку всегда нужно привлекать наукой, а не привилегиями.

Вопрос об улучшении математической подготовки на уровне средней школы — часть вопроса об улучшении среднего образования. Вопрос о создании новых факультетов прикладной математики, о чем пишут новосибирские ученые, — часть общего вопроса о развитии высшего образования в соответствии с потребностями и задачами развития науки. Новые специализации, новые разделы науки появляются постоянно. Новые математические факультеты или если пока не отдельные факультеты, то отделения имеющихся факультетов нужно создавать.

Кстати, мы можем сами составить и ввести в действие соответствующие учебные планы, так как положение об учебных планах передает их, собственно, в руки ученых советов, за исключением некоторых обязательных предметов. В значительной степени от нас самих зависит повернуть систему образования так, чтобы студент больше работал самостоятельно с литературой, в лаборатории, на семинаре.

Однако обязательные предметы, не входящие в физико-математический цикл, занимают на математических факультетах университетов около половины времени на первых и вторых курсах и около трети — на третьих и четвертых (и это при недельной нагрузке, например, на втором курсе в 40 ч!).

Эти предметы и характер их преподавания регламентированы и не могут быть изменены ученым советом. Сокращение же аудиторных занятий только по специальным предметам повело бы к еще большему снижению их доли в этих занятиях. Следовательно, все разговоры и призывы к сокращению числа пассивных занятий и увеличению активной стороны учебного процесса, так же как пожелания о существенном изменении подготовки по новейшим областям науки, останутся в значительной мере разговорами и пожеланиями, пока вопрос о структуре учебного плана не будет пересмотрен в целом компетентной комиссией, а Министерство высшего и среднего специального образования СССР не прекратит ежегодное введение в учебные планы все новых предметов и не начнет обращать на основную подготовку студентов хотя бы долю того внимания, которое уделяется, скажем, технике безопасности.

Но никакие учебные планы и программы не обеспечат существенного расширения и улучшения подготовки ни математиков любого профиля, ни других специалистов, ни учащихся средней школы, если не будет места, где можно осуществлять эту подготовку, и не будет преподавателей, которые смогут должным образом руководить учащимися. Как писал В. И. Ленин: «...всякие „программы", „уставы" и проч., все это — звук пустой по отношению к составу лекторов» [1, с. 194].

Чтобы дать средней школе лучших учителей-математиков, предлагают готовить их в основном в университетах, а не в педагогических вузах. Но такое предложение совершенно оторвано от реальной жизни. Ведь университеты, кроме, может быть, московского и новосибирского, и так готовят учителей, а сколь-нибудь заметно увеличить подготовку учителей в университетах можно только за счет сокращения подготовки каких-то других специалистов.

Затруднения с подготовкой учителей в университетах состоят и в том, что там, где научная подготовка студентов находится на высоком уровне, они гораздо более склонны идти в исследовательские институты или промышленные лаборатории, чем на педагогическую работу.

Воспитание молодежи считается работой все-таки второго плана. Личные научные результаты оцениваются выше даже создания целой научной школы и во всяком с лучае выше преподавания в вузе. А стать учителем средней школы уж вовсе не считается удачной и достойной судьбой для способного молодого человека. К этому, кстати, приводит и оценка деятельности педагогов. Можно составить длинный перечень фактов, начиная от сравнения стипендий педагогических и технических вузов, которые показывают одно и то же: низкую оценку педагогической работы в средней школе или в вузе в сравнении с другой.

Всемерное и повсеместное улучшение дела образования — от программы учебников для средней школы до аспирантуры — это прежде всего дело самих ученых, и в первую очередь мы сами обязаны придать ему должное значение. В частности, обеспечить хорошее преподавание на математических факультетах можем только мы и никто другой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1964. 5-е изд. Т. 47.

Живые ученые и мертвые схемы

Литературная газета. 8 июня 1963 г.

Жадность к знанию, к восприятию и пониманию разнообразных явлений жизни, науки и искусства — драгоценное свойство, создающее настоящее внутреннее богатство человека. Это богатство к тому же не скудеет, а скорее увеличивается, если человек делится им с другими. Поэтому можно только радоваться стремлению к взаимному обогащению знаниями, которое было высказано в письме студентов Московского физико-технического института и ответе филологов из Московского университета [1)].

Проблема, поставленная в письмах, впрочем, не нова. Года два назад в нашем университете студенты естественных факультетов тоже высказали желание послушать обзорные лекции по гуманитарным наукам. Но, к сожалению, дальше разговоров дело не пошло.

Не стоит долго спорить, у кого «флюс невежества». Если я правильно понял московских студентов, этот злополучный «флюс» — общий. Хорошо, что студенты заговорили о преодолении узости интересов, но было бы еще лучше превратить дискуссионный темперамент в деловой. Обратись студенты ко мне как к ректору с просьбой помочь им, я не стал бы спрашивать, что физики ищут в гуманитарных науках, а филологи — в точных. Я постарался бы решить дело конкретно и быстро.

Кстати, когда два года назад филологи попросили меня прочесть лекцию о теории относительности, я эту лекцию прочел, не мучая слушателей вопросом: «А зачем вам это нужно?».

Полезно, впрочем, вспомнить, что все студенты всех вузов и всех факультетов отчасти получают гуманитарное образование, поскольку они изучают историю партии, политическую экономию и диалектический и исторический материализм. Кроме того, всюду читаются, хотя и необязательно, курсы этики и эстетики и, наконец, существуют университеты культуры.

[1)] Речь идет о публикациях в «Литературной газете» 9 мая 1963 г.

Интерес к общим вопросам искусства мог бы быть в большей степени удовлетворен уже в курсах эстетики, если бы они повсеместно читались как следует, т. е. если бы они читались интересно — так, чтобы общие положения о природе прекрасного не подавались в виде догматических формул. Студенты технических вузов с жадностью шли на лекции по этике и эстетике, но аудитории нередко быстро пустели не из-за отсутствия интереса к предмету, а из-за неудовлетворенности: лектор не отвечал на глубокие запросы слушателей. Поэтому письмо студентов Московского физико-технического института обращено, между прочим, и к преподавателям общественных наук, в частности эстетики, которые должны ответить не рассуждениями о пользе эстетики, а интересными, содержательными лекциями.

Раз студенты-техники изучают гуманитарные науки, то нелепо представлять их вовсе невежественными в этой области. Откровенно скажу, мне не понравился в письме филологов Московского университета тот форменный допрос, который они учинили физикам, попросту, по-товарищески обратившимся к ним. Встав в снисходительную позу мудрецов, которым заранее ясна детскость противников по спору, они пишут: «Но, дорогие техники, дело ведь не в том, что многие из вас недостаточно хорошо знают искусство, а в том, что далеко не все представляют, зачем нужно знать искусство. Для общей эрудиции только? Или только для эстетического удовольствия?».

Мне, представителю точных наук, эта поза поучения неприятна. Неужели студенты-филологи всерьез вообразили, что у физиков отсутствует представление о целях и задачах гуманитарных наук и искусства? Я вижу в этом самодовольство гуманитариев, которые живут с предвзятыми мнениями не только в этом вопросе. Как много написано романов и повестей, где физики или математики изображены в виде маньяков-сухарей или придурковатых старцев, которые даже за тарелкой с супом бормочут свои заумные формулы! Эти развлекающие обывателя анекдоты создаются обывателями от литературы. Лишь у тех писателей, которые действительно знают живых ученых, у Даниила Гранина например, я встречал верные, незамутненные их образы.

В нашем университете не так давно проводилось обследование интересов студентов, так сказать, их «духовной пищи». Выяснилось, что больше всего читают художественную литературу на физическом факультете. Рекорд по количеству взятых и прочитанных в библиотеке книг принадлежит студенту-физику. Неужели вам, дорогие филологи, придет в голову задать этому юноше вопрос: зачем он записан в библиотеке, зачем берет и читает книги, почему прочел так много? Думаю, что он, удивившись, промолчит. Физики не любят отвечать на праздные вопросы.

Однажды я катался на лыжах с тремя студентами того же факультета. Завязался разговор о литературе. Один из них сказал, что его любимое произведение — поэма Лермонтова «Демон» и что он особенно полюбил ее, когда прочел последовательно все варианты поэмы. Это не просто читатель. Этот человек изучает литературу. Его вы тоже спросите, зачем он читал все варианты?

Сотрудница Эрмитажа рассказывала мне, что студенты естественных факультетов серьезнее и самостоятельнее, нежели филологи, судят о живописи. Неужели и здесь вы не удержитесь от вопроса: зачем?

Конечно, есть и среди студентов-физиков люди прагматического склада. Для них пушкинские строчки не звучат, мертвы. Таких физиков подчас искусство не интересует. Горе-физиков, поправлюсь я. Потому что если человек страдает узостью интересов за пределами своей специальности, узостью вообще, то не очень-то широк его кругозор и в собственном деле. Не бывает так, что мироощущение одного человека рассечено на две части: все, что лежит за границами профессии, — суета и прах, а внутри — это другое дело! Тут, мол, я — бог! Если человек отгородился от всего глухими стенами, то не проникнет свет и в его собственный чулан. Только широта общего кругозора рождает полноценного специалиста.

Поэтому, может быть, стоит начать разговор с другого конца — поставить вопрос о кругозоре в своей собственной специальности. Человек должен осознавать свое дело, свою профессию как часть общего прогресса.

При этом можно, конечно, оставаться глухим к некоторым явлениям в искусстве. Вовсе не обязательно знать все, разбрасываться направо и налево и тем более любить и принимать все, что уже признано значительным. А. Эйнштейн любил и читал Ф. М. Достоевского. Ну а я не могу читать произведения этого писателя. Я критически отношусь к творчеству П. Пикассо, например. Я знаком с математиками, которые не только знают музыку, но сами сочиняют ее. Один из них равнодушен к П. И. Чайковскому, другой — к Р. Вагнеру.

Но, разумеется, прежде чем отвергнуть что-то, нужно сначала понять отвергаемое. Не следует жить по рассуждению госпожи Простаковой: «То вздор, чего не знает Митрофанушка».

Конечно, и для того чтобы принять что-то, процесс самостоятельного познания тоже необходим. В некоторых строчках своего письма студенты-филологи сомневаются, стоит ли взаимную информацию, постижение фактов науки и искусства, делать главной целью союза гуманитарного и технического студенчества. Они пишут: «Мы будем ставить себе целью не информацию о „старых и новых поэтах“, а постараемся раскрыть значение литературы как активнейшего средства гражданского воспитания». Бесспорно, литература — активнейшее средство гражданского воспитания, и раскрывать это ее значение — достойная и важная задача! Но если при этом вот так, напрочь отказаться от информации — значит перевести эту важную задачу в область весьма отвлеченную. Можете вы себе вообразить дом без фундамента, без нижних цокольных этажей? А разве можно выстроить прочным и неколебимым огромное здание коммунистической идеологии без скромной информации «о старых и новых поэтах»?

Может быть, студенты неудачно сформулировали свою мысль. Я допускаю это. Но мне все-таки хотелось бы напомнить им замечательные слова В. И. Ленина, сказанные на III съезде комсомола: «Было бы ошибочно думать так, что достаточно усвоить коммунистические лозунги, выводы коммунистической науки, не усвоив себе той суммы знаний, последствием которых является сам коммунизм» [1, с. 303].

У человека должен быть непосредственный интерес к факту — науки, искусства, жизни. Полноценная личность испытывает интерес ко всем явлениям действительности. Именно исходя из этой полноты восприятия, полноценная личность поднимается к обобщающим философским выводам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1963. 5-е изд. Т. 41.

От дважды два до интеграла [1)]

Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 420–425

Быстрое развитие науки, техники, всех сторон общественной жизни ставит перед образованием на любой его ступени все более высокие требования и рождает постоянное стремление увеличивать объем среднего образования. Но не нужно быть ни специалистом, ни академиком педагогических наук, чтобы понять: любой вопрос об усовершенствовании образования нельзя сводить к расширению программ и увеличению сроков.

Сроки уже увеличены, программы уже перегружены, их тяжесть порой мешает полноценному развитию личности. И нет ли противоречия в том, что ради связи школы с жизнью мы удлинили время обучения и тем самым на год отдалили вступление молодого человека в жизнь? Не следует ли основательно подумать над целями и формами всего процесса обучения и найти не количественное, а качественное решение проблемы?

И сказочный великан, и мальчик-с-пальчик со школьной парты, чтобы поспевать за наукой, должны получить волшебные сапоги усовершенствованного обучения, а не безумный совет идти в истоптанных башмаках протоптанными тропами. Иначе они рискуют достичь цели к старости. Думаете, я шучу? Нисколько. За тридцать лет срок обучения в средней школе вырос на два года, а в вузе — на один-два года. И если при ускоряющихся темпах развития так будет продолжаться, то эдак через два-три десятка лет мы можем прийти к тринадцатилетней школе и к семилетнему вузу, который, следовательно, люди будут кончать к тридцати годам, а там еще аспирантура... Словом, защитив диссертацию, не будет ли новоиспеченный кандидат уходить прямо на пенсию? Ясно, так быть не должно и не может. Очевидно, вернувшись к десятилетнему сроку, надо очень тщательно и радикально пересмотреть программы и методы обучения.

Образование должно быть эффективным и экономичным. Какого бы материального благосостояния ни достигло общество, всегда будет необходи-

[1)] Впервые опубликовано в газете «Известия» 24 января 1964 г. — *Прим. ред.*

мость экономии сил и времени человека, чтобы он мог отдать их творческой работе с наибольшей пользой для народа и удовлетворением для себя.

Все сказанное относится, в частности, к математике, потому что ее значение в науке, технике, жизни, а стало быть, и в образовании непрерывно увеличивается. Мы должны прежде всего определить цели ее преподавания и отсюда уж выводить заключение об объеме курса, содержании и методах. Тут есть два теснейшим образом связанных, но все же разных аспекта: первый — практическая польза предмета, те знания и навыки, которые понадобятся человеку в жизни; второй — место предмета в общем образовании (есть еще и третий аспект — подготовка к вузу, но его значение не следует преувеличивать, о чем я скажу ниже).

Практическое значение большинства разделов школьной математики очевидно: каждый, например, должен уметь считать и решать без затруднений хотя бы простые задачи, поэтому школа должна давать не просто знания, но тренировку. Точно так же каждому приходится сталкиваться с элементами геометрии, хотя бы при определении площадей. Встречаться с функциями и графиками: наши планы говорят о росте тех или иных показателей, о темпах роста. Просто удивительно, что в тех главах учебника, где идет речь о функциях и графиках, ничего не сказано об этих очевидных вещах. Какую прекрасную тему могло бы составить соединение математического и политического образования! Не будем перечислять других примеров. Задача тех, кто ведает программами, и состоит в том, чтобы изучать постоянно, что же с большей степенью вероятности может понадобиться человеку.

Общеобразовательное значение курса математики, как и любого другого предмета, состоит прежде всего в тех общих понятиях, которые он дает и которые расширяют кругозор и способы подхода человека к явлениям жизни. С этой точки зрения математика важна, во-первых, своей логикой, последовательностью и точностью выводов. Во-вторых, математика полезна тем, что она трудна. Ее абстрактные строгие рассуждения требуют больших и длительных умственных усилий, требуют не столько памяти, сколько понимания и соображения.

Я учился во время Гражданской войны в школьной колонии под Ленинградом. Было там свое небольшое хозяйство. Как-то учительница математики, проходя мимо конюшни, где мы, ребята, работали, спросила одного из нас: «Скажите, Кригер, что легче — навоз грузить или задачи решать?». — «Конечно, навоз грузить», — последовал немедленный ответ. Да, решать задачи было много труднее, а учительница учила нас не просто арифметике, но еще умению думать, работать головой. И в том, что из бывших беспризорников выросли достойные люди, не последнюю роль сыграла требовательная учительница математики.

Математика воспитывает неопровержимостью своих выводов. Как сказал знаменитый физик М. Лауэ: «Математика дает наиболее чистое и непосредственное переживание истины; на этом покоится ее ценность для общего образования людей» [1, с. 11]. Нигде, как в математике, ясность и точность выводов не позволяет человеку отвертеться от ответа разговорами вокруг вопроса. Кстати, привычка к трудному и доводимому до конца анализу накладывает на работников точных наук отпечаток, сказывающийся в самом стиле их отношения ко многим вещам, лежащим за пределами специальности.

Но эта моя апология математики вовсе не значит, что я собираюсь говорить о необходимости увеличивать математические программы. Напротив, по моему мнению, они содержат немало частного или формального, например бином Ньютона в алгебре или выводы объема и поверхности частей шара в геометрии. Сокращение высвободит время и головы учеников для лучшего усвоения более важных тем, имеющих общее значение. Тут я предвижу возражение — мол, как же можно выкидывать то, что потребуется для поступления в вуз. Но ведь не школьный курс нужно приспосабливать к специальным требованиям вуза, а эти требования согласовывать с объемом общего среднего образования. А он должен определяться, исходя из задач образования, состоящих в подготовке всего юношества (а не только тех, кто пойдет в вузы) к сознательной жизни и производительному труду, т. е. к зрелости. А то, что нужно для курса высшей школы, легко может быть в нем и дано, причем с гораздо меньшей затратой времени. Лишние двадцать минут на тот же бином не обременят институтских программ.

С другой стороны, стоит подумать о том, чтобы ввести в школьный курс некоторые новые элементы, например понятие о вероятности, об интеграле. Последнее позволило бы иметь единую точку зрения хотя бы на определение площадей и объемов, было бы полезно в курсе физики. Кстати, интеграл, если достаточно просто подойти к нему, вовсе не представляет собой нечто «ужасно сложное». Усилия, потраченные на усвоение объединяющих понятий и методов, окупаются тем единообразием, которое они вносят в усвоение последующего.

Руководствуясь теми же соображениями, можно перенести на более ранние годы обучение, скажем, элементам алгебры, чтобы достигнуть большего единообразия и простоты в решении арифметических задач. Ведь развитие науки характеризуется, в частности, и тем, что бывшее раньше недоступным для простых смертных становится им доступным. Когда-то «Начала» Евклида были высшим достижением, понятным лишь немногим ученым, а потом они вошли в школьный курс… Это процесс естественный, и мы должны следовать ему.

Не нужно доказывать, как много зависит от учебников.

Тут дело обстоит неудовлетворительно. Прежде всего пора отказаться от идеи единого, обязательного для всех одного «стабильного» учебника. Во-первых, нет оснований считать всех школьных учителей настолько плохими, что им нельзя доверить выбора в путях преподавания своего предмета (разумеется, в пределах общеобразовательного объема). Во-вторых, и это главное, совершенствование преподавания невозможно без пробы, без эксперимента, без сопоставлений разных подходов. Развитие есть борьба противоположностей, а само это понятие — стабильный учебник — отрицает развитие, отрицает борьбу мнений, методов и т. п.

К тому же имеющиеся стабильные учебники бывают порой такими, что их едва ли можно считать не то что бы стабильными, но и допустимыми. Вот учебник геометрии Н. Н. Никитина. Он по меньшей мере плохо отредактирован. Ограничусь двумя примерами. Параграф об угле написан неудовлетворительно, Никитин запутался в определении этого простого понятия (впрочем, у автора не обходится без путаницы и в введении других понятий). Несколькими страницами дальше утверждается, между прочим, что человек может видеть только предметы в одну угловую минуту. Но это, я приношу извинение за определенность выражения, есть явный вздор, потому что звезды находятся под углом зрения меньше не то что минуты, но одной тысячной минуты, а мы их все же видим! И такая грубая ошибка, будучи «стабилизирована» во всех изданиях, распространяется тиражами, исчисляющимися миллионами [2)].

Каждый автор не свободен от ошибок. Но ведь есть редакторы, рецензенты. Обязательный учебник с грифом «Утверждено. Министерство просвещения РСФСР» должен подвергаться самому придирчивому, многократному редактированию. Чувство величайшей моральной ответственности за каждое слово должно владеть каждым человеком, связанным с этим важнейшим делом.

Я считаю, что требует скорейшего и решительного изменения вся система издания учебников по всем предметам. Нужно, во-первых, издавать не один, а несколько равнорекомендуемых или по крайней мере допускаемых к использованию учебников. Нужен возможно более широкий круг авторов. Каждый такой учебник должен подвергаться самому тщательному просмотру рядом специалистов — от учителей до академиков. Учебник не должен быть рекомендован без визы соответствующего отделения Академии наук СССР. Что касается математики, то созданная при Академии комиссия по математическому образованию под председательством академика А. Н. Колмогорова сможет в сотрудничестве со школьными педагогами навести тут должный порядок [3)].

[2)] Я вынужден добавить, что прошло более двадцати лет с момента появления этой статьи в газете «Известия», а она устарела лишь по части примеров. Последнее время мне приходилось много писать об учебниках, особенно математических.

[3)] Надежды на комиссию по математическому образованию при Академии наук СССР не оправдались, и спустя 20 лет мы продолжаем решать те же проблемы... Только вот интегралы в школе преподают — изменилось содержание программы, а характер преподавания остался тем же. И в учебниках есть ошибки, повторяемые из издания в издание.

При всем значении планов, программ и учебников решающая роль в обучении принадлежит, конечно, учителю. Подготовка учителей-энтузиастов, влюбленных в свое дело, широко эрудированных, культурных, высокоидейных — это в конечном счете главное. Но роль учителя, условия его работы, подготовка — отдельная большая проблема, и я не имею возможности обсуждать ее в рамках этой статьи.

В нашей системе среднего образования утвердились школы с математическим или физико-математическим уклоном. При четырех университетах — Московском, Ленинградском, Новосибирском, Киевском — образованы соответствующие школы-интернаты. Такие учебные заведения следует создавать во всяком городе, где есть университеты или вузы с математиками достаточно высокой квалификации. Об этих школах писали на страницах «Известий» академик М. А. Лаврентьев и другие авторы. Тут нужна, пожалуй, не дальнейшая агитация, а конкретная деятельность.

Сейчас есть насущная необходимость в создании математических техникумов, которые готовили бы до зарезу нужные нам кадры вычислителей и программистов средней квалификации. Для такой работы вовсе не обязательно университетское образование. Хотя бы несколько техникумов нужно открыть уже в этом году при университетах, которые могли бы обеспечить организацию и руководство их работой. В системе подготовки математических кадров следует, на мой взгляд, утвердить такой порядок: техникумы готовят вычислителей и программистов средней квалификации, университеты — научных работников, преподавателей вузов, техникумов и специализированных школ, педагогические институты — учителей обычных школ.

Математика энергично распространяет и увеличивает свое влияние в других науках, в технике, в жизни — от полетов космических кораблей до хозяйственного планирования, от биологии до автоматизации управления технологическими процессами. Словом, она становится все более мощным фактором в создании материально-технической базы коммунизма и вместе с тем фактором общей культуры. Поэтому так волнуют и нематематиков и математиков вопросы математического образования на всех его ступенях — от дошкольного до аспирантуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лауэ М.* Статьи и речи. М.: Наука, 1969.

Поэзия науки

Известия. 9 марта 1964 г.

В публицистическом выступлении одного известного писателя меня поразила такая фраза: «Эйнштейн произвел переворот в математике». Поразила потому, что мне, физику и математику, точно известно, что А. Эйнштейн произвел переворот в физике, а вовсе не в математике. А ведь если бы кто-нибудь из физиков заявил, что П. Пикассо (которому и было посвящено это публицистическое выступление) произвел переворот в музыке, то какая лавина насмешек и поруганий обрушилась бы на него. И справедливо… Если бы нашелся такой физик.

Возникший довольно давно и, пожалуй, успевший уже несколько навязнуть в зубах разговор о «физиках» и «лириках» поднимается время от времени и теперь. Причина его долговечности в том, что он затрагивает большой вопрос о взаимосвязи двух сторон нашего отношения к действительности: разума и чувства, рационального и эмоционального, научного и эстетического, вопрос о соотношении двух элементов культуры — науки и искусства. Их единство составляет одно из важнейших условий гармонии человеческой личности, той полноты восприятия культуры, которое А. А. Блок выразил прекрасными, гордыми словами [1, с. 245]:

> Мы любим всё — и жар холодных числ,
> И дар божественных видений,
> Нам внятно всё — и острый галльский смысл,
> И сумрачный германский гений…

Великий лирик, у которого, как мало у кого другого, был «дар божественных видений», понимал, что холодные числа, внешне сухие формулы математики полны внутренней красоты и жара сконцентрированной в них мысли. Ведь сказал же великий физик Л. Больцман об уравнениях электродинамики, установленных Дж. К. Максвеллом, словами Фауста: «Не бог ли эти знаки начертал?». Другой физик сказал о тех же уравнениях: «Понимание того, как сложнейшие разнообразные явления математически сводятся к таким простым и гармонически прекрасным уравнениям Максвелла, является одним из сильнейших переживаний, которые доступны человеку» [2, с. 12]. Разве не были эти физики настоящими лириками, находя в формулах источник сильных переживаний и эстетического наслаждения?

В науке и технике, в формулах и тонких экспериментах, в теоретических построениях и машинах есть внутренняя красота и поэзия, нужно только ее увидеть и почувствовать, хотя это и требует нередко большой работы. Но ведь и не всякое произведение искусства воспринимается сразу. Фортепьянная или симфоническая музыка тоже бывает нередко отвлеченной и сложной, но, когда проникнешься ею, она дает сильнейшие переживания и высокое наслаждение.

Говоря о науке, постоянно подчеркивают ее практическое значение. И это правильно. Но этого мало. Наука — величайшее завоевание человеческого духа, величайшая духовная ценность. Она открывает нам неведомые дотоле глубины природы, раздвигает горизонты нашего понимания мира и нашей собственной жизни. Например, астрономия, особенно в той ее части, которая касается общих проблем строения и развития Вселенной, не имеет пока непосредственного практического значения. Но именно здесь открываются такие гигантские, недоступные воображению масштабы пространства и времени, такие грандиозные явления и закономерности, что от проникновения в них захватывает дух. Удивительно, что мы, люди, узнаем здесь и температуру, и состав, и строение звезд, от которых даже свет идет к нам миллиарды лет. Астрономия — это не только точная наука, но и прекрасная поэма о величии мира, о величии познающего этот мир человека. Да не одна астрономия! И теория относительности, и квантовая механика, и современная биология, проникающая в потайные механизмы жизни, и археология, изучающая древние народы...

Ученый, работающий на переднем крае науки, движется в область неизвестного. Подобно путешественнику, идущему в неизвестную страну, он еще не знает, что откроется там, за крутыми перевалами, которые ему приходится преодолевать, — необозримые богатства или бесплодная пустыня. Он может только догадываться об этом. В этом риск. Но в этом и романтика научного поиска. За первооткрывателями идет армия мирных завоевателей, которые овладеют богатствами новой страны и обратят их в технику, в практику, в полезные для человека дела.

Романтика и поэзия заключается не только в научном поиске, но в самих фактах, законах, открываемых наукой. И это начинает отражаться в искусстве. Научная фантастика — только самая простая форма влияния науки на искусство. Но есть и другие пути их взаимного влияния. Они только намечаются, но можно быть уверенным, что они разовьются, и тема науки зазвучит в поэзии вместе с другими новыми темами, к художественному овладению которыми прокладывает пути наше искусство.

Поэт Владимир Солоухин в стихотворении «В узел связаны нити» передает нам свое восхищение живой природой, но не просто внешней ее красотой, а чудом ее внутренних творческих сил. Вот что пишет он о цветке [3, с. 92–93]:

> Вы проходите мимо цветка?
> Наклонитесь.
> Поглядите на чудо,
> Которое видеть вы раньше нигде не могли.
> Он умеет такое, что никто на земле не умеет.
> Например... Он берет крупинку мягкой черной земли.
> Затем он берет дождя дождинку,
> И воздуха голубой лоскуток,
> И лучик, солнышком пролитой.
> Все смешает потом (но где?!)
> (Где пробирок, и колб, и спиртовок ряды?),
> И вот из одной и той же черного цвета земли
> Он то красный, то синий, то сиреневый, то золотой!

О чем здесь написано, как не о чуде физиологии растений, о чуде идущего в них фотосинтеза? Ведь сочетание дождя, воздуха и солнечного луча — это и есть фотосинтез, который состоит в том, что, поглощая солнечную энергию, растения из воды и углекислоты воздуха синтезируют углеводы. Поэт сопоставляет эту живую лабораторию с человеческой, с ее колбами и спиртовками. И разве не внушено такое сопоставление тем, что наука раскрыла это чудо фотосинтеза в растении? И не внушает ли все стихотворение не только внешнее удивление чудом природы, но и желание глубже проникнуть в ее тайны? Все это и есть живая поэзия науки.

Тот же строй мыслей мы находим в стихотворении Солоухина «Голова», где поэт восхищается чудом, которое представляет собой даже мозг малой птицы [3, с. 94–95]. Недаром на вечерах, где выступает поэт, многие ждут чтения именно этих двух стихотворений: они привлекают свежестью и глубиной мысли, искренностью чувства, своей современностью, своей созвучностью живому интересу молодежи и к поэзии, и к науке.

Большое новое направление в искусстве определяется новыми идеями, новыми темами, которые художники открывают и делают предметом своего искусства, находя для них адекватное художественное выражение. Одна из таких тем — наука в разных ее проявлениях, другая — тема труда. Такими темами искусство овладевает не вдруг. И те, кто пишет сейчас «производственные» или «научные» романы, рыхлят почву, на которой вырастут, будем надеяться, новые Шекспиры и Толстые. Ведь эти гиганты имели своих предшественников, многие из которых забыты. Поэтому ходячие насмешки над «производственными» романами кажутся мне пошлостью, унаследованной от аристократических взглядов и вкусов.

От этих вкусов и привычек остался у некоторых обычай рассуждать о науке, как о чем-то скучном и мудреном, что недостойно усилий ума поэтического. Отсюда же идет салонная манера рисоваться таким отношением к науке: «Ах, я совсем не понимаю электричества. Такая, знаете, скучная материя». Происходит это от лености мысли, а лень, твердит нам народная мудрость, — мать всех пороков. Так хорошо ли рисоваться своими пороками? Ничуть не лучше, чем рисоваться пренебрежением к И. С. Баху или А. А. Блоку.

В «Комсомольской правде» как-то была опубликована статья, где автор, говоря молодежи о прекрасном, писал, между прочим, и о том, как он вместе с великим физиологом И. П. Павловым был у художника И. И. Бродского. Он рассказывает, что говорили они не о физиологии, «в которой мы с Бродским, конечно, ничего не понимали», а об этюдах И. Е. Репина. Великий ученый понимал в искусстве. А вот автор считает настолько естественным не понимать в науке, что даже решается учить на своем примере молодежь.

Но достижения И. П. Павлова в физиологии представляют собой не какие-то частности, они имеют громадное мировоззренческое, общекультурное значение, потому что Павлов сделал предметом точного экспериментального исследования высшую нервную деятельность, т. е. область духа, вырвав ее окончательно из сферы идеалистических разговоров о душе. В духовной культурной истории человечества это больше, чем живопись Репина, и не много есть в истории явлений, которые имеют такое же эпохальное непреходящее значение. Поэтому понимать хоть немного в павловской физиологии следует каждому, кто хочет быть культурным человеком.

Так же, впрочем, как знать о работах А. Эйнштейна. Ведь он действительно произвел в физике переворот. И не просто в физике, но в общем взгляде на основные формы мироздания. Поэтому В. И. Ленин и причислил А. Эйнштейна к великим преобразователям естествознания. А если говорить о практическом значении того, что сделал А. Эйнштейн, то ведь во всех ядерных процессах важную роль играет его закон эквивалентности массы и энергии. Перефразируя слова А. А. Блока, я бы сказал, что в холодной эйнштейновской формуле $E = mc^2$ скрыт атомный жар. Об этом законе, о других выводах теории относительности, о фотонах (а все это идет от А. Эйнштейна) рассказывают уже в школах, о них кое-что знает, я уверен, любой молодой рабочий, листающий хотя бы популярные журналы.

Не стоило, может быть, особенно подчеркивать значение науки в духовной культуре, считая его очевидным, если бы пренебрежение к нему не демонстрировали в печати некоторые известные литераторы. Кстати, признаюсь, что в суждении об электричестве я пародировал соответствующий пассаж из «Автобиографии» Е. А. Евтушенко, который был процитирован в нашей печати («я не способен понять, что такое электричество и откуда оно берется»). Для поэта было бы очень полезно иначе относиться к науке. И не столько даже к ее фактам, сколько к строю мысли, который вырабатывает занятие наукой.

Занятие наукой не только расширяет кругозор человека, но вырабатывает в нем драгоценные навыки мышления: умение сосредоточенно и глубоко продумывать встающие вопросы, способность к усилиям мысли, к умственной работе, последовательность и доказательность, точность, критичность мысли, враждебную всякому догматизму и поверхностности, объективность и интеллектуальную честность, заставляющую склоняться перед аргументами логики и фактов. Эти навыки мышления сказываются в подходе к фактам жизни и искусства. Поэтому нередко физики судят об искусстве точнее и глубже лириков.

Но восприятие науки тоже не может быть полным без лирики, без острого эмоционального отношения к ней. Восхищаться до́лжно и А. Эйнштейном, и И. П. Павловым, так же как Л. Н. Толстым и Л. Бетховеном.

Настоящее духовное богатство, полнота духовной жизни осуществляется в этом единстве, в единстве труда, разума и красоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блок А.* Собр. соч.: В 6-ти т. Л.: Худ. лит., Ленингр. отделение, 1981. Т. 3.
2. *Лауэ М.* Статьи и речи. М.: Наука, 1969.
3. *Солоухин В.* Собр. соч. М.: Худ. лит., 1983. Т. 1.

Истинный гуманизм и гуманность истины

Литературная газета. 4 ноября 1970 г.

Слово «гуманизм», заимствованное из латинского, можно было бы перевести русским «человечность». Но здесь, если я правильно понимаю смысл этих терминов, есть разные оттенки. Человечность обозначает в большей степени чувство — сочувствие, милосердие. Гуманизм скорее выражает рациональное отношение к человеку. Но как гуманизм без простой человечности остается холодным, рационалистическим, так и человечность может оказаться слепой и бессильной, если она не освещена разумным пониманием. Помня об этой необходимой связи, мы будем говорить о гуманизме.

Гуманизм начинается с того, что в каждом человеке признает личность и не допускает попрания ее. Но в разные эпохи личность не только оценивалась по-разному, но даже не всякий человек считался, собственно, человеком. Само название ряда племен обозначало просто «люди» и тем выражало, что иноплеменные не такие же люди и на них нравственный закон мог не распространяться. Рабовладелец не считал раба личностью, а только «говорящим орудием». Хотя и меньшая, но все же пропасть полагалась между феодалом и крестьянином, барином и мужиком. Само слово «благородство» означает по первоначальному смыслу «благое рождение»: мужик не мог быть благородным, а был подлым, ибо принадлежал к «подлому», «податному» сословию. Иудеи полагали себя богоизбранным народом и смотрели на иноверцев — гоев как на неполноценных людей. То же деление людей на настоящих и ненастоящих свойственно расизму и достигло апогея в немецком фашизме с его идеей «высшей расы господ». Такие убеждения служат основанием к тому, чтобы унижать и попирать других людей без зазрения совести, как скот, и не мучиться совестью по поводу убитых баранов. Сбросить бомбы на Хиросиму и Нагасаки и истреблять людей во Вьетнаме для «среднего» американца, верно, не так уж зазорно: для него «желторожие» не совсем такие же люди, как «мы».

Словом, понятие «человек» не всегда распространяется в равной мере на всех людей без исключения.

Всем таким воззрениям противостоит универсальный гуманизм, предполагающий исходное равенство всех людей, будь то благородный гений или последний дикарь. Этот взгляд был выражен в буддизме, который наряду с другими учениями, развитыми в Индии около VI в. до н. э., восходил до благоговейного отношения ко всему живому вообще. В Средиземноморье универсальный гуманизм был провозглашен христианством, его идея выражена, в частности, в словах апостола Павла: «Нет уже Иудея, ни язычника; нет раба, ни свободного; нет мужеского пола, ни женского: ибо все вы одно во Христе Иисусе» (Гал. 3:28). В условиях деспотии Рима, когда все делились на римских граждан, завоеванных «варваров» и рабов, когда каждый народ противопоставлял себя другому, провозгласить равенство всех людей было революционностью, переворачивающей понятия, которые веками вкоренялись в сознание людей и подкреплялись жестокой силой военно-бюрократической машины римского господства. Но христианство выразило вместе с этим бессилие угнетенных и звало их не к борьбе, а к смирению и достижению не реального блага, а царства божия. Поэтому, в частности, христианство смогло быть обращено в государственную религию, в орудие угнетения.

Всякому частичному гуманизму, как и универсальному религиозному, противостоит научно понимаемый гуманизм. Идеал его есть «ассоциация, в которой свободное развитие каждого является условием свободного развития всех» [1, с. 447]. Так К. Маркс и Ф. Энгельс определили в «Манифесте Коммунистической партии» коммунистическое общество.

Универсальный гуманизм означает, следовательно, признание каждого человека человеком, каким бы он ни был. Пусть он будет даже ужасен, но поступить с ним можно только как с человеком. Нацистских главарей, как ни были они ужасны и подлы, судили как людей — человеческим судом, хотя победители могли бы сделать с ними все что угодно. И именно этот человеческий суд над людьми, казалось бы совершенно потерявшими человеческий облик, был призван выразить глубочайший человеческий протест против того, чтобы человек мог быть столь бесчеловечным.

Однако в таком общем виде гуманизм остается пока абстракцией, научность же требует конкретности истины. Хотя в общей своей сущности люди равны, но они разные. Человеческая личность — не абстракция. Личность — это все богатство связей индивида с другими людьми, его место и роль в жизни людей и общества. Ценность личности есть ценность общественная.

Согласно первой ступени гуманизма, мы признаем, конечно, что А. Гитлер и Г. Геринг — тоже люди и судить их надо как людей — человеческим судом. Но, оставаясь на абстрактной ступени гуманизма и отказываясь тем самым от конкретного рассмотрения данного человека в данных условиях, мы неизбежно допускаем ложь и впадаем в безнравственность, так как хотим одинаково, без всякого измерения ценностей, относиться ко всем, будь то, скажем, А. С. Пушкин или Ж. Дантес, М. Ганди или А. Гитлер.

Мой друг, сражавшийся в Испании [1)], рассказывал мне, как после разгрома республики кучка бойцов интербригады стояла на поле, куда прилетали французские спортивные самолеты, чтобы забрать одного, много — двух человек. Каждую минуту могли нагрянуть франкисты, и тогда каждому — неминуемая гибель. Ждать следующего самолета приходилось подолгу. И когда прилетал самолет, он забирал того из бойцов, кого выбирали товарищи, измерив по возможности ценность своих жизней. И это была высшая нравственность настоящих людей.

Словом, от абстрактного гуманизма мы должны подняться до гуманизма конкретно-исторического. В условиях классовой борьбы этот гуманизм классовый. Коммунисты открыто заявили, что их мораль классовая. И это было не провозглашением их «веры», а честным признанием, продиктованным научным пониманием морали в классовом обществе.

Но от второй ступени гуманизма — его конкретно-исторической формы — мы переходим к третьей его ступени: к конкретному гуманизму в отношении каждого данного человека в каждом данном случае. Здесь общие установления, общие нормы морали, общие взгляды на человека вообще и его общую социальную сущность становятся недостаточными. Приходится, если мы хотим быть добросовестными, разбираться в фактах, стремясь объективно понять их и самого человека, и на основе достигнутого понимания определять свои оценки, решения и действия. Это и есть путь поиска истины — истины о данном конкретном человеке. Без поиска истины, без строжайшего уважения к ней гуманизм в подлинном смысле невозможен.

В самом деле, чего стоит гуманизм, если мы не хотим понять другого человека? А можно ли действительно понять его, не встав на объективную точку зрения, не считаясь с фактами, не стараясь отстранить свои предвзятые мнения и от поверхностного взгляда перейти к сущности? Так чего же стоит гуманизм, если мы не задаем себе вопроса: что нужно людям? Не то, что мне самоуверенно кажется, что им нужно, а то, что им нужно на самом деле. Как это узнать? Для этого есть только один путь: объективный научный подход. Все остальное будет предвзятым мнением, которое может быть и очень хорошим, но может оказаться и ложным.

Я хотел бы вспомнить двух великих гуманистов в литературе — Л. Н. Толстого и А. П. Чехова. Глубокое понимание того, что можно назвать сущностью А. П. Чехова, раскрыл нам недавно Сергей Залыгин [2], и мне остается только повторить в кратких словах его основную мысль.

[1)] Георгий Владимирович Степанов, прекрасный филолог-испанист и прекрасный человек. Мы вместе работали в Ленинградском университете, потом он переехал в Москву, стал академиком и директором Института языкознания АН СССР. Недавно он умер, и не стало еще одного человека, для которого идеалы истины и гуманизма были неразрывны, который защищал их так же, как и республиканские идеалы в Испании.

Особенность А. П. Чехова состояла в том, что он смотрел на жизнь людей не просто как писатель и гуманист, но также как ученый, как врач. Подобно ученому он отстраняет свое личное, не выдвигает даже своих оценок. Он смотрит на своих героев с объективной вдумчивостью ученого, с бесконечным терпением и доброжелательностью настоящего врача. Вскрывая язвы жизни, А. П. Чехов не осуждает, а сожалеет, не поучает, а раскрывает факты, диагностирует болезнь. Но в этой человечной объективности больше нравственного содержания, нежели в осуждениях, поучениях, призывах.

С. П. Залыгин сам человек науки, и потому-то, думается мне, он и смог проникнуть в своеобразную сущность А. П. Чехова — писателя-врача.

Может показаться невозможным говорить о связи гуманиста Л. Н. Толстого с наукой ввиду его религиозной веры и нападок на науку. Но не будем торопиться с выводами. Л. Н. Толстой выразил свое писательское кредо в следующих замечательных словах, заключающих второй из его «Севастопольских рассказов»:

«Вот я и сказал, что хотел сказать на этот раз. Но тяжелое раздумье одолевает меня. Может, не надо было говорить этого. Может быть, то, что я сказал, принадлежит к одной из тех злых истин, которые, бессознательно таясь в душе каждого, не должны быть высказываемы, чтобы не сделаться вредными, как осадок вина, который не надо взбалтывать, чтобы не испортить его.

Где выражение зла, которого должно избегать? Где выражение добра, которому должно подражать в этой повести? Кто злодей, кто герой ее? Все хороши и все дурны...

Герой же моей повести, которого я люблю всеми силами души, которого старался воспроизвести во всей красоте его и который всегда был, есть и будет прекрасен, — правда» [3, с. 144–145].

Правда несет в себе красоту и нравственную силу. Пусть она принадлежит даже к одной из самых злых истин. Не бойся. Сумей только воспринять ее в подлинном значении. Но для Л. Н. Толстого правда — это не только правда в ее художественном восприятии и изображении. В «Войне и мире» с объективной правдивостью раскрывает он человеческие души, живописует исторические события и восходит до теоретического обобщения, выдвигая свое понимание роли народных масс и личности в истории (перечитайте, например, его рассуждения о «дифференциале» и «интеграле» истории). Это взгляд художника, органически соединенный со взглядом ученого — психолога и историка. Не это ли одна из причин того, что во всей мировой литературе трудно, если вообще можно, назвать произведение, равное «Войне и миру»? Если мы признаем, что наука открывает правду, то не должны ли мы относиться к ней так же, как сказал о правде Л. Н. Толстой?

Л. Н. Толстой поносил не всякую науку, иначе он был бы просто обскурантом и невозможно было бы понять, почему он так много сил отдавал просвещению. Он поносил ту науку, которая вместо поиска ответов на жизненно важные для людей вопросы занимается оторванными от жизни построениями. Конечно, он перебарщивал со свойственной ему яростью темперамента. Но он говорил, что в социологии или политической экономии главный вопрос, зачем и почему одни люди ничего не делают, а другие на них работают, а в исторических знаниях вопрос, как жил рабочий народ, т. е. 999/1000 всего человечества. Потому гуманизм Л. Н. Толстого вовсе не оторван от науки, а только требует того, чтобы наука была гуманистической — в том смысле, что наука должна искать ответы человеку на его человеческие вопросы.

Вместе с призывом к любви Л. Н. Толстой страстно призывал к разуму. Он повторял этот призыв беспрестанно. Требуя от человека разумного понимания, он отбрасывает догматы религии о сотворении мира, о троице, о воскресении и душе как противоречащие разуму и противные понятиям современного образованного человека. Он исправляет канонический перевод Евангелия, где греческое «логос» переводится как «слово», и переводит его как «разум» [4, с. 25–26]: «В основу и начало всего стало разумение жизни. Разумение жизни стало вместо Бога... Разумение — это свет истины» [4, с. 817]. Он ставит как центральный для нравственности вопрос «что нужно людям?» и требует руководимого разумом правдивого ответа на него, ибо нет подлинного добра без правды. Если выбросить из воззрений Л. Н. Толстого бога, подобно тому как из философии Г. Гегеля была выброшена абсолютная идея, то перед нами предстанет примерно следующая точка зрения. Человеку в его ограниченности не дано понимание добра в полном и абсолютном его значении. Он может лишь восходить от меньшего добра к большему. Этот путь он должен освещать своим разумом. Он должен добиваться объективного понимания того, что нужно людям, — в этом задача науки — и всемерно осуществлять это. Истинное мировоззрение есть такое согласное с разумом и знаниями человека установленное им отношение к окружающей его бесконечной жизни, которое связывает его жизнь с этой бесконечностью и руководит его поступками [5, с. 161]. Нравственность же и есть это всегдашнее руководство жизнью (предыдущие слова воспроизводят данное Л. Н. Толстым определение религии; мы лишь заменили слово «религия» словом «мировоззрение»).

Религия, однако, как бы ни хотел Л. Н. Толстой, чтобы она была согласной с разумом и знаниями человека, включает веру, молитву и признание бога или духовного начала, высшего добра — словом, того, что стоит вне реального мира, которым овладевает и который познает человек в своей практике. Поэтому последовательное согласие с разумом и знаниями в корне отрицает всякую религию и ставит на место веры объективное исследование и критическое мышление, на место молитвы — вдумчивость и практическую деятельность, на место познания бога — будь то даже бог-истина М. Ганди или бог-любовь Л. Н. Толстого — познание реальной действительности.

Как истина открывается человеку в нескончаемом процессе познания, опирающегося на практику, так и добро создается самим человеком в его практике и сознании. Добро, стало быть, — это не что-то внешнее человеку, не априорная идея. Добро — это жизнь. Не просто биологический феномен жизни, но жизнь в восходящем ее развитии и максимальном проявлении, какое она находит в человеческом творчестве и сознании. Она есть первая и абсолютная человеческая ценность, ибо если она вовсе исчезает, то ничего человеческого не остается. Поэтому нравственным является то, что в наибольшей степени способствует развитию человеческой жизни, и потому же нравственность и есть, собственно, гуманизм.

Но если мы так понимаем добро и гуманизм, то мы понимаем, во-первых, что без объективного познания человеческой жизни невозможно ни реальное понимание добра, ни сознательное движение к добру. Поэтому наука о человеке и, следовательно, о мире как о поле, где живет, действует и развивается человек, оказывается необходимым условием этого понимания и движения. И, стало быть, стремление к истине и безусловное уважение к ней необходимо входят в нравственность. Во-вторых, если мы понимаем, что жизнь свою творят сами люди, каждый из нас, то мы понимаем также свою ответственность за нее, за реализацию добра. И наконец, если мы понимаем жизнь в ее развитии, то и добро должны понимать в развитии, понимать, что то, что сейчас может казаться нам добром, потом, возможно, будет понято как зло, и то, что может казаться злом, окажется все-таки добром.

Сейчас, скажем, почти никому и в голову не приходит считать безнравственным приказывать человеку. Но как же можно приказывать человеку, если он — свободная, сознательная личность? Его можно убеждать, просить, но приказывать — значит подчинить его свободу чужой воле (кроме, конечно, тех случаев, когда — скажем, в опасных экспедициях — люди заранее добровольно соглашаются подчиняться в решительную минуту приказу избранного ими руководителя). В высокоразвитом коммунистическом обществе, где утверждается свободное развитие каждого человека, приказывать не будут. И не будут ли считать не очень нравственными соревнования, где, венчая победителя, унижают этим проигравшего? Во многих странах особо опасных преступников казнят. Однако успехи науки, утверждаю я, позволят лечить преступников, изменяя их преступные личностные свойства.

Где пределы развития гуманизма и нравственности? Их нет. И нам остается с ясным сознанием всей трудности этого бесконечного движения ко все более высокому гуманизму, всей трудности борьбы за человека, за развитие его жизни включаться в это движение и эту борьбу, освещая пути их, цели и средства объективным знанием и пониманием, какие доступны нам лишь в таком же нескончаемом и трудном движении ко все большему пониманию истины.

Вопрос о гуманизме в конечном счете касается каждого из нас уже потому, что люди — это мы. И гуманизм — это о нас с вами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. М.: Гос. изд. политич. лит., 1955. 2-е изд. Т. 4.
2. *Залыгин С.* Мой поэт // Москва. 1969. № 5. С. 88–131.
3. *Толстой Л. Н.* Собр. соч.: В 22-х т. М.: Худ. лит., 1979. Т. 2.
4. *Толстой Л. Н.* Полн. собр. соч. М.: Худ. лит., 1957. Т. 24.
5. *Толстой Л. Н.* Полн. собр. соч. М.: Худ. лит., 1950. Т. 35.

Твой важный шаг [1)]

Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 438–443

Я никогда не уставал объяснять молодым: для того чтобы стать ученым, нужно быть увлеченным человеком, энтузиастом своего дела. Нужно заниматься предметом, который ты выбрал. Занимайся им! Занимайся им в любую минуту. Будь убежден в том, что нет таких условий, в которых ты не можешь заниматься. Вот, извините, я сошлюсь на свой собственный опыт, как я учил английский язык. Я шел, скажем, в университет и старался думать по-английски или про себя читал английские стихи. Или когда я учился на первом курсе, у меня в портфеле все время лежала «Молекулярная физика» А. Ф. Иоффе, и я читал ее в трамвае. В очереди за супом в столовой я читал научную книгу.

Вот говорят: «ученый на работе». Если человек на работе, то он не ученый. Потому что ученый всегда на работе, если он чем-нибудь сильно не отвлечен. Предмет его мечтаний — это может быть теорема, это может быть замысел эксперимента или толкование эксперимента, это может быть фраза текста, которая требует расшифровки, это может быть черепок, найденный при каких-то раскопках, который нужно датировать. Масштаб неважен, важно психологическое состояние заинтересованности, энтузиазма и неспособности не думать об этом, как влюбленный не может не думать о предмете своей любви.

Математики доказывают теоремы где угодно, например в театре. Академик Юрий Владимирович Линник сделал прекрасную работу, когда лежал с дистрофией в Ленинграде в госпитале. Алексей Васильевич Погорелов, один из крупнейших геометров мира, свои лучшие работы сделал, ходя пешком из дома до института и обратно, каждый день 15 км. Лучшая теорема моей докторской диссертации была доказана, когда я лежал на сосновых

[1)] Мой устный рассказ о том, что значит «быть ученым», был записан на магнитофон и издан Г. Вельской в виде двух заметок в «Комсомольской правде» 8 и 22 июля 1972 г. Здесь приводится единый текст, восстановленный по публикации и фрагментам записи.

ветках в палатке в альпинистском лагере (ввиду плохой погоды не было восхождений); и одна работа была мною сделана ночью, при пересадке с одного поезда на другой, когда мы сидели на рюкзаках.

Вот почему хочу повторить: ученый — это прежде всего человек, влюбленный в свой предмет. Взять, например, сочинения академика А. П. Окладникова о первобытном искусстве. Написано с увлеченностью поэта! У математика и физика предмет более абстрактный, чем, скажем, у биолога или археолога, поэтому там труднее увидеть эмоции. Но, поверьте, они есть и у математика тоже.

Второе, о чем надо помнить всегда, — это терпение. Истина обладает тем неприятным свойством, что она скрыта, и ее открыть бывает трудно. М. Фарадей семь лет искал явление электромагнитной индукции. Г. Минковский доказывал одну теорему о многогранниках тоже семь лет. Не помню, кто-то сказал: «Гений — это есть терпение мысли, сосредоточенной на одном вопросе». А. С. Пушкин говорил, что музы не посещают ленивых. П. И. Чайковский садился с утра и писал музыку. И Джек Лондон начинал работать с утра и писал две тысячи слов каждый день.

И если ты садишься, а у тебя не получается — ты все равно работаешь. И ты всегда думаешь. Ты обалдел уже от этих размышлений, и тем не менее ты продолжаешь думать. Не теряйте времени! И придет аппетит, если он вообще может прийти. Если он вообще не может прийти, то, дорогой товарищ, никакого ученого из тебя никогда не выйдет. Попробуй переменить специальность — может быть, получится. Но если у тебя в конце концов не возникает не только привычка, но и внутренняя потребность все время заниматься тем делом, которое ты выбрал, у тебя не появится стремление проникновенно думать, не допускать поверхностных суждений, если у тебя не вырастет настоящий интерес — все, ученый не получился.

Вы можете ходить на работу, заниматься наукой, быть научным работником, может быть, напишете докторскую диссертацию, и, может быть, вас выберут в академики. Но вы так никогда ученым и не станете. Потому что «ученый» и «академик» — понятия из разных сфер. Академик — это звание, а ученый — это совсем другое, это духовное. Это так же, как есть человек, а есть пиджак, мундир. Академик — это мундир, а ученый — душа. Вот, например, крупнейший советский зоолог и один из крупнейших зоологов мира Артемий Васильевич Иванов, профессор Ленинградского университета, он не является даже членом-корреспондентом Академии наук СССР [2)]. Так что карьера научная — это другой вопрос.

Я всегда объяснял молодым людям: наука — дело святое. Ею нужно заниматься бескорыстно, и вы должны стремиться только к истине. Диссертация — дело коммерческое. Не надо этим пренебрегать, но... Человек

[2)] В 1982 г. А. В. Иванова сразу выбрали действительным членом Академии наук СССР.

может искать истину только тогда, когда он ей предан полностью и когда на это не могут повлиять соображения личной выгоды.

Наука в мире крепла и вырастала в жестокой борьбе за право человека открытыми глазами смотреть на мир, за право свободно его исследовать. И если человек внутренне не свободен, ему трудно будет стать ученым. Если он слушает академика, а не истину, если он соглашается не с доводами, а с авторитетом своего научного руководителя, если он подбирает диссертабельную тему не из соображений того, что необходимо исследовать, то он не ученый. Он может быть очень полезен, может быть, он очень хороший человек, но он вне науки.

Далее, ученый должен обладать абсолютной научной правдивостью, т. е. объективностью и научной честностью. Бертран Рассел говорил, что под научной правдивостью он понимает привычку основывать свои убеждения на наблюдениях и выводах столь не личных и настолько свободных от влияния темперамента и местных привязанностей, насколько это доступно только для человеческого существа. Но я добавлю к этому еще: никакой предвзятости не допускает наука! Входите в науку с непокрытой головой, с открытыми глазами.

Физики помнят, как в их науке начался переворот, связанный с открытием радиоактивности, потом теории относительности, квантовой механики. В физике тогда начали открываться явления абсолютно непонятные! Представьте себе, что вам говорят: электрон проходит одновременно через две щели. Этого не может быть! Однако это так, и человек должен это воспринять. Как же было важно отказаться от предвзятости... Это очень трудно, поскольку от человека требуется самоотречение.

Мы видели, как люди, которые были неспособны преодолеть свою предвзятость, были и неспособны воспринять современную физику. Они стали против нее воевать.

Наконец, если вы хотите знать, кто какой ученый, спросите, что человек сделал, а не его звание. Слово «академик», простите, еще ничего не значит. И. Ньютон — не знаю, был академиком или нет, меня это не интересует. Д. И. Менделеев — это система Менделеева, Н. И. Лобачевский — это геометрия Лобачевского, Ч. Дарвин — это теория эволюции. Н. И. Лобачевский был кавалером, кажется, ордена Анны, но какое это имеет значение?

Есть один способ стать ученым — вникать в предмет, стараться заниматься, чтобы интерес в тебе вырос. И не жалеть на это ни времени, ни сил. И. П. Павлов сказал: «Наука требует от человека всей его жизни. И если бы у вас было две жизни, то их бы не хватило вам» [1, с. 20].

Ни М. Фарадей, ни И. Ньютон не творили, что называется на пустом месте. Если бы не было Г. Галилея, не было бы И. Ньютона. Если не было бы Г. Эрстеда, Ш. Кулона, которые занимались электричеством до М. Фарадея, то не было бы Фарадея. И сейчас так происходит. Вот физики ведут исследование... Они только получили результат и срочно печатают так называемый «препринт». Посылают его коллегам в другие лаборатории, те на это отвечают.

Институт Бора в Копенгагене был Меккой теоретической физики. Туда приезжали величайшие ученые, такие как В. Гейзенберг. Они разговаривали, обменивались идеями, в результате — блестящий поток работ. И на всех этих работах лежала печать глубокой мысли Н. Бора. Когда Л. Д. Ландау и Р. Пайерлс писали работу, они часто спорили с В. Гейзенбергом. Приходил Н. Бор, слушал... Сначала он не понимал, потом они ему втолковывали, тогда и он включался в спор, и они начинали видеть то, что сами не понимали...

Вот это и есть коллективное научное творчество. Можно привести литературные примеры: И. А. Ильф и Е. П. Петров, братья Стругацкие — это и есть коллективное творчество. Но если бы Петров диктовал Ильфу или Ильф — Петрову, то, извините, это уже вряд ли можно было назвать творчеством.

Коллективная научная работа — это процесс, в котором творчески работающие люди объединены общими интересами. Здесь идет постоянный обмен идеями. Еще у древних греков ученые обменивались письмами, сообщали друг другу решения задач. Ученый — не отшельник. Ученый — это человек по большей части общительный. Не в том смысле, что он, встречаясь с вами, хватает вас за пуговицу, обязательно начинает что-то рассказывать, а в том, что он всегда стремится сообщить коллегам свои результаты. Ученый не «солит» свои результаты, чтобы они лежали под подушкой. И сам он старается узнать, что в свою очередь получил его коллега. Я повторяю еще раз: наука — это результат коллективного международного творчества.

Наука требует от человека безусловной честности, и прежде всего перед самим собой.

Конечно, иногда люди вынуждены говорить неправду, как, скажем, врач иногда может сказать больному, что он болен не той болезнью, какой он болен на самом деле. Это делается из гуманности. Но это совсем другой вопрос. В науке не может быть того, чтобы человек из каких бы то ни было соображений, я повторяю, сказал не то, в чем он убежден на основании своих наблюдений, эксперимента, логических выводов.

Требование объективности предполагает безусловную критичность мышления ученого. Трудно быть критичным и особенно трудно быть самокритичным. Но дело в том, что для ученого важна самокритика. Вот я доказал теорему, я даже совершенно уверен: блестящая идея, почти гениальная! Потом я сажусь, начинаю проверять. И смотрю, а нет ли где-нибудь «дыры» в доказательстве? Так же поступает и физик. Он поставил эксперимент — у него есть результат, а потом он начинает думать: а нет ли ошибки в эксперименте?

Итак, увлеченность, бескорыстность, самокритичность и честность — качества ученого. И последнее, что необходимо ученому, это мужество, которое позволяет ему отстаивать свои убеждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павлов И. П.* Письмо к молодежи // Избр. произведения. 2-е изд. М.: АН СССР, 1949.

Тупость и гений

Квант. 1982. № 11. С. 12–17. № 12. С. 7–15

Всякий, кто занимался математикой — решая задачи, доказывая теоремы или формируя новые концепции, наверное, имел случай не раз поражаться своей тупости. Думал, думал над задачей — не решил, а узнал решение — подумал: какой дурак! как я не сообразил? А то думал, думал — решил и рад, а все же, бывает, подумаешь: тупица! как я раньше не сообразил?

У ученых-математиков бывает: думаешь, думаешь над теоремой, иногда долго, иной раз и не год, и не два, ищешь доказательство и так, и сяк, и с этого конца, и с другого, ан не выходит, а вышло — удивляешься: дурак! как я раньше не сообразил? ведь по сути это совсем просто. О новых концепциях и говорить не приходится: занимаешься какими-нибудь вопросами, а не приходит в голову посмотреть на них с более общей точки зрения или с другой, так сказать, стороны; не формулируются поэтому общие понятия, проясняющие круг вопросов. А потом, если — такое счастье! — сообразил, то удивляешься: как это раньше тебе в голову не пришло? Ну, а если сообразил кто-то другой, то, как ни радуешься успеху науки, зло берет: как это я, тупица, сам не додумался!

Поиски решения нестандартной задачи, как и доказательства теоремы, состоят обычно в том, что приходит в голову одно решение или доказательство — неверное! потом — другое: «гениальная идея!» — неверно! — третья попытка — неверно! еще бросок на задачу — промах... и если задача или теорема трудная, то так может длиться долго.

Помню, предложил я Иосифу Либерману одну теорему доказать — была у меня хорошая гипотеза. Тогда он был студентом — талантливый парень! — и стал бы крупным геометром, если бы не война: он погиб в августе 1941 г., а в июле в форме морского офицера защитил диссертацию.

Так вот, предложил я ему доказать теорему. Встречаемся через некоторое время, он говорит: «Доказал», — и рассказывает. А я его остановил: «Почему в этом месте Вы так утверждаете?». Обнаружилась ошибка. Иосиф ушел. Опять встречаемся — исправил он ошибку, но дальше опять ошибки. Так я его почти целый год гонял. Но потом он еще подучил топологию и доказал не только мою теорему, но и более сильную, которую уже сам сформулировал.

Таких историй долгих поисков можно рассказать множество. Вот, например, придумал я в 1937 г. одну теорему, очень хорошую теорему, и доказал ее при некоторых дополнительных предположениях. Естественно, встал вопрос доказать ее без этих предположений. Вопрос стоит до сих пор — сорок пять лет. Очень я старался ее доказать, и другие очень старались, да не вышло.

И так во всех науках. Бьется филолог над расшифровкой и толкованием текста — и так, и сяк... А потом, когда сообразил, тоже, наверное, удивляется вроде нас, математиков: какой дурак! как это я раньше не сообразил? оно ведь очень видно!

Словом, тот, кто думал, вдумывался, искал, тот знает, насколько туп и несообразителен бывает человек. Сообразительностью своей любуются обычно люди, которым не приходилось упорно вдумываться и искать, — легко дается удача тому, кто не ставит перед собой трудных задач, серьезных целей.

И вот я хочу рассказать историю о человеческой тупости и о гении, историю, несравненно более значительную, чем те, о которых я только что говорил. Дело идет об одном из величайших завоеваний человеческого духа, в котором участвовали первоклассные таланты и подлинные гении, без преувеличений. Речь — о неевклидовой геометрии, о ее более чем двухтысячелетней истории.

История эта очень интересна и поучительна. С ней связано много такого, что касается не математики самой но себе, а свойств, путей и страстей человеческих. Но прежде чем говорить об истории, надо бы объяснить, что такое геометрия Лобачевского.

Ответ, конечно, всем известен: это геометрия, полученная из геометрии Евклида изменением одной только аксиомы параллельных. У Н. И. Лобачевского принимается за аксиому, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, параллельные данной (т. е. лежащие с ней в одной плоскости и ее не пересекающие). Утверждения, или, другими словами, теоремы, которые выводятся из измененных таким образом оснований геометрии Евклида, и составляют геометрию Лобачевского. Все это, как мы видим, «очень просто» и говорится коротко и ясно. Трудность, однако, в том, что аксиома Лобачевского не соответствует нашему наглядному представлению. Поэтому и выводы из нее — многие теоремы геометрии Лобачевского — оказываются вовсе странными и невообразимыми. Реальный смысл этой геометрии из данного выше ее простого формального определения совершенно не ясен.

Сам Н. И. Лобачевский называл свою геометрию воображаемой. Он смотрел на нее как на теорию, которая могла бы оказаться приложимой к реальному пространству. Но только «могла бы» — реальных же приложений не было. Поэтому и логическая непротиворечивость этой геометрии оставалась неустановленной. Ведь как ни развивал ее Н. И. Лобачевский, а могло бы оказаться, что дальше все-таки обнаружится противоречие.

Реальный смысл и логическая непротиворечивость геометрии Лобачевского вытекают из ее простой модели, придуманной немецким математиком Ф. Клейном. Вот эта модель.

За «плоскость» принимается внутренность какого-либо круга (рис. 1), за «точки» — точки этой внутренности, за «прямые» — хорды, конечно, с исключением концов, поскольку рассматривается только внутренность круга. За «перемещения» принимаются преобразования круга, переводящие его в себя и хорды — в хорды. Соответственно «конгруэнтными» называются фигуры, переводимые друг в друга такими преобразованиями.

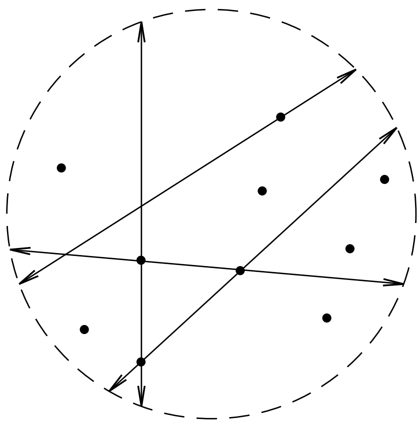


Рис. 1

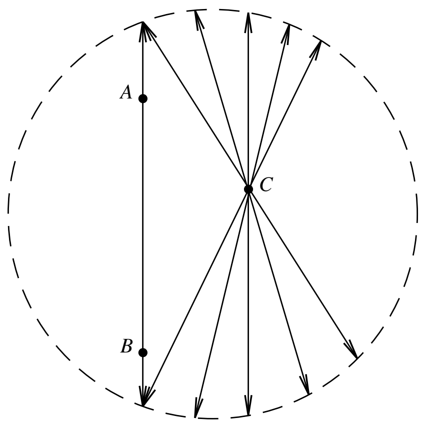


Рис. 2

Всякая теорема планиметрии Лобачевского является в этой модели теоремой геометрии Евклида, и, обратно, всякая теорема геометрии Евклида, говорящая о фигурах внутри данного круга, является теоремой геометрии Лобачевского. Это общее утверждение доказывается проверкой справедливости в модели аксиом геометрии Лобачевского. То, что аксиома параллельных не выполняется в этой модели, видно непосредственно: на рис. 2 через точку C, не лежащую на «прямой» (т. е. на хорде) AB, проходит бесконечно много «прямых» (хорд), не пересекающих AB.

Поэтому если в геометрии Лобачевского имеется противоречие, то это же противоречие (вернее, его перевод на «язык в круге») имеется и в геометрии Евклида.

Далее, всякая теорема геометрии Лобачевского описывает в модели Клейна некоторые факты, имеющие место внутри круга. Именно факты, если мы берем не абстрактный круг, а реальный круг и реальные хорды и понимаем теоремы как утверждения об этих реальных вещах, взятые, конечно, с той точностью, которая доступна для наших построений. Таким образом, геометрия Лобачевского имеет вполне реальный смысл с той точностью, с какой вообще имеет смысл геометрия в применении к реальным телам.

Стало быть, геометрия Лобачевского настолько непротиворечива, насколько непротиворечива геометрия Евклида, и имеет в такой же степени реальный, экспериментально устанавливаемый смысл.

От Евклида до Н. И. Лобачевского

Сам Евклид (III в. до н. э.) принимал в качестве аксиомы параллельных следующее предложение (у Евклида оно было пятым постулатом): *если прямая пересекает две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих двух прямых они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых.* Мы привели эту формулировку Евклида только затем, чтобы можно было убедиться в ее сложности. Другие постулаты гораздо проще и формулируются гораздо короче, начиная с первого: *через всякие две точки можно провести прямую.*

Естественно возникали попытки освободиться от сложного пятого постулата, вывести его из других основных посылок геометрии. Я думаю, что сам Евклид предпринимал такие попытки и во всяком случае в его время уже были такие попытки. Известно упоминание у арабских авторов не дошедшего до нас сочинения Архимеда (III в. до н. э.) «О параллельных линиях», где, надо полагать, пятый постулат выводился из каких-то более простых посылок.

Попытки доказать пятый постулат продолжались с тех пор в течение двух тысяч лет. Их предпринимало множество ученых. Вот неполный перечень: греки Птолемей (II в., автор известной системы Птолемея) и Прокл (V в.), араб ал-Хайсам (X в.), перс (или таджик) Омар Хайям (XI — начало XII в., широко известный как поэт), азербайджанец ат-Туси (XIII в.), немец Х. Клавий (1574 г.; здесь и дальше дата работы), итальянцы П. А. Катальди (1603 г.), И. А. Борелли (1658 г.) и Г. Жордано-Витале (1680 г.), англичанин Дж. Валлис (1693 г.), итальянец Дж. Саккери (1733 г.), немец И. Г. Ламберт (1766 г.), французы Л. Бертран (1778 г.) и А. М. Лежандр (1794, 1823 гг.), русский С. Е. Гурьев (1798 г.). Все их попытки сводились к тому, что пятый постулат выводился из какого-нибудь другого положения. Причем многие не замечали этого, считая, что доказательство им удалось. Другие, более проницательные и критичные, явно формулировали то положение, из которого выводили пятый постулат, как это сделал, например, Омар Хайям.

Напряжение поисков доказательства с бурным развитием математики в XVII–XVIII вв. возрастало.

Значительные усилия сделал итальянский монах, преподаватель математики и грамматики Джироламо Саккери, труд которого с попыткой доказательства пятого постулата появился в 1733 г. — в год его смерти. Он называется «Евклид, очищенный от всех пятен; или же Геометрическая попытка установить первые начала всей геометрии». Отправляясь от работ своих предшественников, Дж. Саккери пытается доказать пятый постулат от противного: приняв предположение, равносильное отрицанию пятого постулата, он выводил из него следствия, стремясь прийти к противоречию. Но так как отрицание пятого постулата есть аксиома Лобачевского, то выводы, которые получал Дж. Саккери, были не более и не менее как теоремами геометрии Лобачевского. Иначе говоря, Дж. Саккери развивал новую геометрию, не понимая, однако, того, что делает. К противоречию он не пришел, но все же заключил, что ему удалось доказать пятый постулат, хотя, по-видимому, он не был в этом вполне уверен. Он как бы убеждал сам себя, когда писал о гипотезе, равносильной отрицанию пятого постулата, что он «вырвал эту зловредную гипотезу с корнем».

Из довольно многочисленных (пятьдесят пять) появившихся в XVIII в. сочинений по теории параллельных особенно выделяется написанная в 1766 г. «Теория параллельных» И. Г. Ламберта, немецкого математика, физика и астронома. Ведя доказательство пятого постулата от противного, И. Г. Ламберт получил из его отрицания много следствий. Он, можно сказать, в значительной мере построил основы геометрии Лобачевского. В его выводах не было противоречия, и он не подумал, что нашел его, как это делали почти все его предшественники. И. Г. Ламберт даже высказал мысль, что он «почти должен сделать вывод»: опровергаемая им гипотеза «имеет место на какой-то мнимой сфере». Но все же он остался уверен, что геометрия, основанная на отрицании пятого постулата, невозможна. Его работа не давала, однако, доказательства этому убеждению. Поэтому, надо думать, он остался ею недоволен и не опубликовал ее. Она была издана только в 1786 г. — через девять лет после его смерти и через двадцать лет после того, как она была написана. В общем И. Г. Ламберт очень близко подошел к открытию новой геометрии, но не сделал его.

Вплотную подошли к пониманию возможности неевклидовой геометрии немецкие математики Ф. К. Швейкарт (1818 г.) и Ф. А. Тауринус (1825 г.), но ясно выраженной мысли, что намечаемая ими теория будет столь логически законной, как и геометрия Евклида, они все же не высказали.

К. Ф. Гаусс, по его собственному свидетельству, занимался теорией параллельных с 1792 г. и, как видно из его переписки, постепенно приходил к убеждению, что доказательство пятого постулата невозможно. Так, в 1817 г. в письме к Г. В. Ольберсу он писал: «Я прихожу все более к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере человеческим рассудком и для человеческого рассудка» [1, с. 103]. Раз он пишет «прихожу все более», то, значит, еще не пришел окончательно. Далее он продолжает: «Может быть, в другой жизни мы придем к другим взглядам на природу пространства, которые нам теперь недоступны. До тех пор геометрию приходится ставить не в один ранг с арифметикой, существующей чисто априори, а скорее с механикой» [1, с. 103]. В то время он далеко развил неевклидову геометрию, но только в 1824 г. в письме к Ф. А. Тауринусу он написал определенно, что неевклидова геометрия, в которой «сумма углов треугольника меньше $180^\circ \ldots$ совершенно последовательна, и я развил ее для себя совершенно удовлетворительно» [1, с. 105]. Однако лишь в 1831 г. он взялся за то, чтобы изложить, хотя бы кратко, свои выводы, но за всю жизнь так ничего и не опубликовал по поводу неевклидовой геометрии. В 1829 г. в письме к Ф. В. Бесселю он писал: «Я опасаюсь крика беотийцев [1)], если выскажу мои воззрения» [1, с. 106]. Он боялся подорвать свой научный авторитет.

Но когда К. Ф. Гаусс писал все это, уже нашелся человек, который не только совершенно удовлетворительно развил геометрию, отрицающую пятый постулат, и не только понял, что она совершенно последовательна, но, не убоявшись ничьего крика, доложил свои выводы научному собранию. Это был Николай Иванович Лобачевский, который пришел к убеждению о возможности неевклидовой геометрии еще в 1824 г. и представил доклад с изложением ее начал физико-математическому факультету Казанского университета 23 (11) февраля 1826 г.; опубликовал он его в расширенном виде в работе «О началах геометрии» в ряде выпусков «Казанского вестника», научного издания Казанского университета, с февраля 1829 г. по август 1830 г.

В 1835–1838 гг. Н. И. Лобачевский публикует более развитое изложение своей теории «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», в предисловии к которому пишет: «Напрасное старание со времен Евклида в продолжение двух тысяч лет заставило меня подозревать, что в самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения» [2, с. 61–62]. Для Н. И. Лобачевского вопрос об истинности той или иной геометрии был, стало быть, вопросом опыта; свою геометрию он рассматривал как возможную теорию свойств реального пространства, т. е. свойств структуры соответствующих отношений материальных тел и явлений.

[1)] Беотийцы, жители области Древней Греции Беотии, считались особо глупыми.

Почти одновременно с Н. И. Лобачевским — в 1825 г. — к той же геометрии пришел молодой венгерский математик Янош Бойаи [2]. Свои выводы Янош Бойаи изложил в 1832 г. в качестве приложения (Аппендикса) к учебнику геометрии своего отца Фаркаша Бойаи. Фаркаш Бойаи послал учебник К. Ф. Гауссу. Тот, одобрительно отозвавшись о результатах Яноша, написал вместе с тем, что все это ему давно известно. Янош Бойаи, понимавший значение своих открытий, решил, что К. Ф. Гаусс просто приписал их себе. Он надолго прекратил свои занятия неевклидовой геометрией. Но Н. И. Лобачевский продолжал разрабатывать свою геометрию и публиковать работы с ее изложением вплоть до самой смерти.

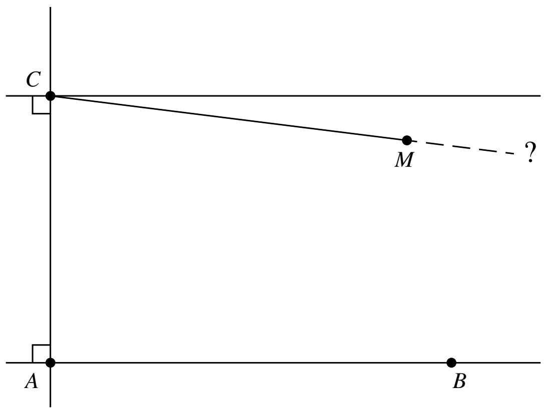


Рис. 3

Нельзя удивляться, что новая геометрия могла казаться невозможной. Посмотрите на рис. 3: ясно, что прямая CM, если ее достаточно далеко продолжить, обязательно пересечет прямую AB. Допущение, будто через одну точку проходят две прямые, параллельные данной, совершенно противоречит наглядному представлению. Такое допущение кажется просто нелепым. Никакой неевклидовой геометрии быть не может! Тем более нужно отдать должное смелости мысли Н. И. Лобачевского и Я. Бойаи, которые решились допустить «нелепость». Нелепость с точки зрения наглядного представления — да, но с точки зрения логики — другое дело. Как ни кажется наглядно нелепым допущение многих параллелей, логически оно допустимо. Нужна была большая смелость мысли, чтобы твердо убедиться в этом, хотя теперь, когда найден простой смысл неевклидовой геометрии, никакой смелости мысли не нужно — достаточно самой небольшой способности к отвлеченному мышлению.

[2] У нас можно встретить также написания Больяй, Бойай, Бояи, но Бойаи ближе венгерскому произношению.

От убеждения к доказательству

Итак, Н. И. Лобачевский и Я. Бойаи публично, а К. Ф. Гаусс в письмах выразили убеждение в правомерности неевклидовой геометрии и далеко развили ее. Однако это убеждение основывалось только на том, что в полученных выводах не было противоречий. Но ведь можно было бы думать, что в дальнейших выводах противоречия все же появятся. Реальный смысл новой геометрии оставался неясным. И пока он не был найден, великое открытие все же висело в воздухе — геометрия Лобачевского оставалась не более чем воображаемой.

В 1839–1840 гг. появились две работы профессора Дерптского (ныне Тартуского) университета Ф. Миндинга, в которых он исследовал некоторые специальные поверхности — поверхности постоянной отрицательной кривизны. В этих работах, по существу, заключался вывод, что геометрия на таких поверхностях есть не что иное, как геометрия Лобачевского. Но этот вывод там не был явно высказан. Интересно, что двумя годами раньше в том же журнале, где были напечатаны работы Миндинга, была опубликована одна из работ Н. И. Лобачевского!

В 1854 г. при вступлении на должность профессора Геттингенского университета Б. Риман, как это полагалось, прочел пробную лекцию. Лекция называлась «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии». Она содержала необычайное богатство плодотворных идей — от общей концепции математического пространства до предвидения того, что стало потом общей теорией относительности. Кроме того, в лекции была намечена общая теория некоторого типа пространств (называемых теперь римановыми), которые включают как простейшие частные случаи пространства Евклида, Лобачевского и так называемые сферические пространства. Риман дал чисто аналитическое определение таких пространств; это, в частности, означало, что геометрия Лобачевского в такой же степени непротиворечива, как и анализ.

Но этого никто не заметил. Лекция Римана осталась непонятой. И только слушавший ее старый, 77-летний К. Ф. Гаусс ушел, как свидетельствуют, после лекции в глубокой задумчивости. Лекция Римана не была сразу опубликована, ее издали только в 1868 г., через два года после его смерти. И тогда она сразу произвела величайшее впечатление, вызвала бурное развитие намеченной в ней теории.

Тогда же, в 1868 г., итальянский математик Е. Бельтрами сделал то, до чего дошел, но чего не сказал Ф. Миндинг, — он показал, что геометрия Лобачевского выполняется на поверхностях постоянной отрицательной кривизны.

Однако выводы Бельтрами были аналитическими, далекими от элементарной геометрии, от Евклида. Лишь в 1871 г. Ф. Клейн заметил ту модель на круге, о которой шла речь в начале статьи. Позднее А. Пуанкаре нашел другую интересную модель, связанную с комплексными числами [3].

Так через сорок лет после опубликования первых работ Н. И. Лобачевского и Я. Бойаи их убеждение было доказано и их геометрия получила всеобщее признание.

Оглянемся теперь на историю пятого постулата Евклида. Н. И. Лобачевский сказал о ней: «Напрасное старание... в продолжение двух тысяч лет». Но какие старания! Множество математиков расточает их, и каких математиков! Среди них знаменитейшие имена: попытки открываются, возможно, Архимедом, проходят через Омара Хайяма и подходят к завершению с К. Ф. Гауссом.

Попытки доказать пятый постулат были, как мы выяснили раньше, совершенно естественными. Но две тысячи лет никто не догадывался, что доказательство невозможно. Никто не мог подумать, что может существовать какая-то геометрия, отличная от привычной евклидовой. Ее неразрывная связь с нашим пространственным опытом и наглядным представлением, ее логическое совершенство и прозрачность, вековые традиции ее изучения и, можно сказать, исповедания — все это делало геометрию Евклида непререкаемой, как бы абсолютно необходимой, присущей и миру, и разуму. Ее происхождение из практики затмевалось совершенством и ясностью ее логики. И дошло, наконец, до того, что в 1781 г. великий философ И. Кант в своей «Критике чистого разума» счел геометрию априорной — независимой от опыта — и основал на этом вывод об априорности самого пространства, которое для него не форма, присущая миру, а только априорная форма внешнего чувственного созерцания.

Гений

Но как раз в это же время из попыток доказать пятый постулат стали пробиваться первые проблески сомнений. Уже в 1766 г. у И. Г. Ламберта брезжит мысль, что отрицание пятого постулата «имеет место на какой-то мнимой сфере», что, может быть, странные выводы, к которым приводит это отрицание, — не бессмыслица. Напряжение нарастает. Кантовское «априори» распространяется в умах, особенно после второго издания «Критики чистого разума» в 1787 г.

Но труд Ламберта выходит в 1786 г. Затем из столь же упорных, как и безуспешных, попыток доказать пятый постулат в первой четверти XIX в. прорастает, наконец, общая мысль о том, что, возможно, мыслима геометрия, отличная от евклидовой. Почти одновременно, хотя и с разной степенью определенности и ясности, эта идея появляется у нескольких человек — у Ф. К. Швейкарта, Ф. А. Тауринуса, К. Ф. Гаусса, Н. И. Лобачевского и Я. Бойаи.

Дойти до мысли, опровергающей привычное, может быть само по себе гениальным. Но это еще не наука, а только идея. Наука же требует претворения идеи в фактическом развитии теории, как инженерия — претворения идеи в предмете, в осуществленном изобретении.

Гений — не только полет мысли, но также ее упорство, труд, приподнятый вдохновением, и вдохновение, подкрепленное трудом. Так, Коперник не только выразил мысль, что не Земля, а Солнце находится в центре (мысль, кстати сказать, не новую; ее высказал еще в III в. до н. э. Аристарх Самосский), но и построил «систему Коперника» — дал точное описание движения планет вокруг Солнца, согласное с наблюдениями. Точно так же Н. И. Лобачевский не только выразил убеждение в возможности неевклидовой геометрии, но и построил эту геометрию. И как от Коперника пошло новое развитие астрономии, дошедшее до современного взгляда на Вселенную с множеством «миров» — планетных систем, галактик и пр., так от Н. И. Лобачевского пошло новое развитие геометрии, приведшее к созданию множества разнообразных «геометрий», самых разных геометрических теорий «воображаемых» пространств — топологических, римановых, финслеровых, расслоенных… — «им же несть числа». Недаром, когда в 60–70-е гг. прошлого века начал во всю силу разворачиваться этот пошедший с Н. И. Лобачевского процесс преобразования геометрии, Н. И. Лобачевский был назван «Коперником геометрии». Нельзя, конечно, забывать, что новую геометрию развил и обнародовал также Я. Бойаи, но преимущество отдается Н. И. Лобачевскому, потому что он сделал это раньше и потом еще существенно продолжил свои исследования.

Н. И. Лобачевский утверждался в мысли о недоказуемости пятого постулата и о возможности неевклидовой геометрии, исходя из философских, теоретико-познавательных убеждений. Это выражено в его словах из предисловия к «Новым началам геометрии»: «истина, которую хотели доказывать», т. е. пятый постулат, не заключается «в самих понятиях», а в применении к реальному пространству и подлежит проверке опытом, как физический закон. Этим отрицается кантовское априори: геометрия не независима от опыта, а подлежит проверке[3)]. В других сочинениях Н. И. Лобачевский явно возражал против кантианства в общей форме, когда писал, например, что «понятия приобретаются чувствами, врожденным не должно верить» [2, с. 28]. Кстати, это стоит заметить научным снобам, полагающим, будто ни

[3)] Собственно говоря, слово «геометрия» должно пониматься двояко: как чисто математическая теория и как теория реальных пространственных отношений. В этом втором качестве она подлежит проверке опытом (современная физика доказала, что наше пространство не является точно евклидовым). Но от чисто математической теории самой по себе требуется логическая стройность и непротиворечивость. В таком виде та или иная геометрия — это совокупность предложений, выводимых из принятых посылок, независимо от ее приложений.

им, ни науке вообще не нужно философское мышление. Все великие ученые от И. Ньютона и Г. Галилея, если говорить лишь о Новом времени, были философами. Без философии наука не развивается: проложение новых ее путей, когда они не оформились, и есть философское движение мысли. Вопрос только в том, какая это философия, связывается ли она с точной логикой и фактами опыта или с пребывающими в безвоздушном пространстве общими фразами априорности и чистого спекулятивного мышления. Г. Галилей, И. Ньютон, Н. И. Лобачевский, Б. Риман не только высказывали философские суждения, но и, отправляясь от общих убеждений, строили здания научных теорий — прочные основания целых обширных областей науки.

Появление неевклидовой геометрии было началом революционного преобразования геометрии. Но так же, что характерно для близящейся революции, с назреванием ее сил росла и реакция. Именно тогда, когда открытие новой геометрии уже приближалось, появилась философия И. Канта с ее учением об априорности геометрии, о пространстве как априорной форме созерцания. Любая другая геометрия казалась немыслимой.

Н. И. Лобачевский явно выступает против этих воззрений. Появление новой геометрии опровергает их и открывает неведомые, немыслимые раньше пути развития науки — революция совершается. Гений — это революция, революция — это гений в действии.

Тупость

Как история пятого постулата и неевклидовой геометрии демонстрирует человеческий гений, так демонстрирует она и неповоротливость ума, если избегать грубого слова «тупость».

Начать с того, что множество попыток доказать пятый постулат было основано на ошибках. Авторам этих доказательств только казалось, что они нашли доказательство. Так было даже в начале XIX в. Только немногие понимали, что опираются на дополнительные предположения, равносильные пятому постулату, и явно их формулировали.

Ошибки были психологически обусловлены тем, что автору очень хотелось пятый постулат доказать, отказ от него был невообразимым, а положение, принятое открыто, на которое автор опирался, — само собою очевидным и ускользало от того, чтобы его явно формулировать.

Очень характерен пример Дж. Саккери: при всей глубине и тонкости его выводов, относящихся к неевклидовой геометрии, он в конце все же заключает, что ему удалось «вырвать с корнем» гипотезу, отрицающую пятый постулат, и очистить Евклида от пятен.

И И. Г. Ламберт, далеко развивший неевклидову геометрию, только «почти» сделал вывод о ее выполнимости, и К. Ф. Гаусс мучительно долго «все более приходил» к убеждению о невозможности доказать пятый постулат.

Когда же неевклидова геометрия была открыта и обнародована и встал вопрос о ее реальном смысле, то тут несообразительность показала себя в полную силу.

К. Ф. Гаусс еще в 1827 г. развил основы общей теории геометрии на поверхностях, в которой роль прямолинейных отрезков играют кратчайшие линии, расположенные на поверхности. У него был получен, в частности, вывод, что на некоторых поверхностях (поверхностях отрицательной кривизны) сумма углов треугольника (стороны которого — кратчайшие линии) меньше 180°. Он знал вместе с тем, что в неевклидовой геометрии верно то же. Но он не сопоставил два вывода, не догадался, что неевклидова геометрия должна осуществляться на некоторых поверхностях. Если бы он додумался до этого, то доказательство не представляло бы для него, при его исключительной силе математика, особого труда. Что на поверхностях постоянной отрицательной кривизны имеет место геометрия Лобачевского, заметил итальянский математик Е. Бельтрами только сорок лет спустя.

Вероятно, мысли К. Ф. Гаусса в неевклидовой геометрии, с одной стороны, и в теории поверхностей — с другой, шли как бы параллельно, не пересекаясь. Явление довольно обычное. Людям сплошь и рядом не приходит в голову сопоставить вещи, которые кажутся совершенно различными, но при ближайшем рассмотрении оказываются тесно связанными или даже совпадающими. Так бывает и у одного человека, когда он знает обе «вещи», но не сопоставляет их. Так же бывает и в группе людей, когда одни знают одно, другие — другое, да не сопоставляют.

Именно так и было дальше с неевклидовой геометрией и геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Ф. Миндинг, найдя формулы тригонометрии на этих поверхностях (а они такие же, как в геометрии Лобачевского), не заметил этого, хотя работа Лобачевского была уже опубликована. Двумя годами раньше в том же журнале! Да и Н. И. Лобачевский, который как геометр-профессионал мог бы прочитать работу Миндинга, не сделал этого сопоставления!

Так путешественники, подошедшие к горному хребту или подплывшие к острову с разных сторон, могут не сообразить, что открыли одно и то же.

Работу Ф. Миндинга развил в 1857 г. Д. Кодацци, но и он не сообразил сопоставить свои выводы с неевклидовой геометрией. Да он, возможно, о ней и не знал, хотя часть работ Лобачевского была опубликована по-французски и по-немецки, а работа Бойаи еще в 1832 г. вышла на латинском языке.

И только в 1868 г. Е. Бельтрами, отправляясь от работ Миндинга и Кодацци, делает наконец нужное сопоставление и подробно доказывает, что на поверхностях постоянной отрицательной кривизны выполняется геометрия Лобачевского.

В промежутке, в 1859 г., А. Кэли создает теорию расстояния, содержащую модель геометрии Лобачевского, но не понимает этого, так как не сопоставляет с ней свою теорию. Хотя позже, в 1861 г., он публикует работу по геометрии Лобачевского!

И только в 1871 г. Ф. Клейн делает такое сопоставление — приходит к той простой модели в круге, о которой мы рассказали вначале. Указанием на эту элементарную модель решается вопрос о недоказуемости пятого постулата. Вот к чему, можно сказать, свелось то, над чем более двух тысяч лет бились лучшие умы математиков!

История неевклидовой геометрии показывает, с каким трудом люди доходят до вещей, которые, когда они наконец ухвачены и поняты, оказываются простыми, и как люди зачастую не понимают, что делают и что лежит у них под руками. Ни К. Ф. Гаусс, ни Н. И. Лобачевский не поняли того, что было у них почти в руках. Даже К. Ф. Гаусс и Н. И. Лобачевский!

В наше время все еще находятся люди, занимающиеся «доказательством» пятого постулата и осаждающие математиков этими своими «трудами». Но так как вопрос о пятом постулате решен и решение это с помощью модели в круге нетрудно понять каждому, названные «доказательства» и «труды» относятся уже не к неповоротливости ума, а к глупости или даже к сфере медицины. Глупость — это совсем не то, что тупость — неповоротливость ума; напротив, у дурака может быть «легкость в мыслях необыкновенная», ум его может поворачиваться с головокружительной быстротой, да бестолку. Это не имеет никакого отношения к той неповоротливости ума, свойственной даже гениям, которую так ярко показывает трудная история пятого постулата и неевклидовой геометрии.

Характер

К. Ф. Гаусс, Я. Бойаи, Н. И. Лобачевский — три математика, открывших неевклидову геометрию. Три человека — три характера.

К. Ф. Гаусс — математик чрезвычайной силы, о котором говорят «великий Гаусс», «princepes mathematicorum» (т. е. король математиков, «старшина математиков»).

Но К. Ф. Гауссу при всей его математической силе была свойственна интеллектуальная осторожность, нерешительность, которая проявилась, в частности, в том, что он более тридцати лет занимался теорией параллельных, прежде чем решился выразить даже самому себе и в частных письмах твердое убеждение в правомерности неевклидовой геометрии. Дальше следовала уже иная осторожность — трусость, которая не дала ему выступить со своими выводами из опасения «крика беотийцев»...

Полной противоположностью К. Ф. Гауссу предстает перед нами Янош Бойаи — самый молодой из трех: когда он додумался до неевклидовой геометрии, ему было всего двадцать три года (соответственно К. Ф. Гауссу — сорок семь, Н. И. Лобачевскому — тридцать один). Н. И. Лобачевский выступает публично в тридцать два года, Я. Бойаи — в тридцать, К. Ф. Гаусс —

никогда. Работа Я. Бойаи по неевклидовой геометрии написана блестяще, разве что уж слишком кратко. Блеск его таланта соответствовал остальным чертам его пылкой натуры. Он был гусарский офицер, один из знаменитых венгерских гусар, дуэлянт. Как-то ему пришлось встретиться в дуэли на шпагах с несколькими противниками; схватки следовали одна за другой, и он оговорил себе право в перерывах играть на скрипке, чтобы восстановить гибкость кисти. Он победил (не убивая их) всех своих противников.

Но гусарское самолюбие погубило Я. Бойаи. Не тем, что его самого убили на дуэли, а тем, что это самолюбие распространялось у него в область математики.

К. Ф. Гаусс прислал его отцу, своему старому знакомому, положительный отзыв о работе Яноша, написав, что очень хвалить его достижения не может, так как этим он хвалил бы сам себя, потому что те же результаты известны ему давно. Янош же решил, что К. Ф. Гаусс попросту присвоил себе его открытия. Позже, когда появился немецкий перевод одной из книг Н. И. Лобачевского, он решил, что под псевдонимом Н. И. Лобачевского скрывается К. Ф. Гаусс, укравший его, Бойаи, результаты. Кроме открытия неевклидовой геометрии Я. Бойаи выполнил еще одну работу по математике, где содержались идеи, опережавшие его время, но не достаточно тщательно оформленные. В последние годы жизни сознание его помрачилось. Он умер в 1860 г., на пятьдесят восьмом году жизни.

Н. И. Лобачевский решительно отличался от К. Ф. Гаусса и от Я. Бойаи, соединяя смелость с упорством и основательностью, силу теоретической мысли с силой воли. Его открытие не встретило признания, и его считали даже немного сумасшедшим, как говорил о нем, например, Н. Г. Чернышевский. Признание, идущее от К. Ф. Гаусса, пришло позднее. Но Н. И. Лобачевский не смущался и продолжал свои «сумасшедшие» исследования по «сумасшедшей» геометрии, публикуя вслед за первой обширной работой 1829–1830 гг. следующие. Ослепнув к старости, свою последнюю книгу «Пангеометрия» он диктовал.

Деятельность Н. И. Лобачевского была не только научной: восемнадцать лет он был ректором Казанского университета, проявив на этом посту выдающуюся энергию, административное умение и понимание задач воспитания юношества. Его энергичная и умелая деятельность в тяжелое время холерной эпидемии 1835 г. может показаться даже странной у человека, который занимался воображаемой геометрией, одной из абстрактнейших областей абстрактнейшей из наук — математики. Но, может быть, этому не следует особенно удивляться. Воля, необходимая для решительных действий в трудных условиях, также необходима для того, чтобы развить и отстаивать научные убеждения и истину вопреки всем «крикам беотийцев».

Талант, гений — это не только специальные способности, но и характер. Как Ф. Магеллану и Ф. Нансену была нужна решимость, чтобы отправиться в неизведанное плавание, так теоретику нужна интеллектуальная решимость, чтобы подумать «невероятное» и развить его вопреки не только устоявшимся взглядам и традициям, но нередко и вопреки собственным сомнениям. Но мало убедиться в своих идеях для самого себя — их нужно передать другим людям. А это тоже может требовать решимости, потому что люди могут не понять, отбросить и даже подвергнуть насмешкам и поруганию новые идеи и выводы. Это могут сделать в первую очередь свои же коллеги — ученые, убежденные в незыблемости своих взглядов, в своей академической непогрешимости, мещане в академических креслах и на профессорских кафедрах, те «беотийцы», которым побоялся противопоставить себя К. Ф. Гаусс.

В недавнее время да, возможно, и по сию пору с легкой руки Бертольда Брехта принято было поносить Г. Галилея за предательство истины — за то, что он отрекся от своих научных убеждений. То, что отрекаться от истины дурно, едва ли нуждается в особых объяснениях. Но в момент суда инквизиции Г. Галилей был 68-летним стариком, через три года он ослеп, а ему грозили пыткой, заточением, перед ним стоял образ сожженного на костре Джордано Бруно. Остановитесь, читатель, и постарайтесь представить себе, что вас жгут на костре или вздергивают на дыбе. После этого мы продолжим разговор о верности истине — о ней так легко рассуждать, когда вам не грозят ни костер, ни пытки, ни заточение.

В действительности Г. Галилей хотя и отрекся словесно, но истины не предал. Ослепший старец, узник инквизиции, он диктует свое главное научное сочинение и издает его за границей — в Голландии. Г. Галилей исполнил свой долг ученого. По-видимому, на самом деле он не сказал инквизиторам знаменитые слова: «А все-таки она вертится!». Но он сказал то же, хотя и менее эффектно, но более весомо своим научным трудом, своей книгой, написанной после суда инквизиции. Поэтому легенда, приписывающая ему те слова, справедлива по существу. Поэтому правильно он остался в памяти народа верным истине, верным своим научным убеждениям.

Но К. Ф. Гауссу ничего не грозило, кроме разве нелестных суждений коллег, а он скрыл свои научные убеждения, скрыл истину. Он поступил мудро с точки зрения мещанства, одинаково — прошлого или современного, подвизающегося в науке или всякого другого.

Охотно морализуя по поводу «отречения» Галилея или тех, кто когда-то «каялся в грехах менделизма-морганизма», мещанин будет делать все, чтобы «не испортить отношения» с кем следует. Он не будет ни отрекаться, ни каяться, потому что ему не от чего отрекаться и не в чем каяться, у него все в порядке, все как полагается.

Этот конформизм, этот подлый дух приспособленчества противен настоящей науке, потому что она требует готовности подвергнуть сомнению и пересмотреть любые научные взгляды, научные положения, как бы ни казались они прочно установленными. Она требует дерзости мысли и дерзости в том, чтобы открыто выступить с дерзкой мыслью, как это было с открытием неевклидовой геометрии.

Но история пятого постулата и неевклидовой геометрии показывает, с каким трудом люди, даже дерзко мыслящие, доходят до истин, которые, когда они уже открыты, оказываются простыми. Эта история показывает, насколько неповоротливой бывает мысль самых выдающихся ученых. Поэтому с дерзостью мысли они соединяют скромность в оценке своих достижений. Так, Ч. Дарвин сказал о себе в автобиографии: «Воистину удивительно, что, обладая такими посредственными способностями, я мог оказать довольно значительное влияние на убеждения людей науки по некоторым важным вопросам» [4, с. 242].

Дерзость в достижениях и скромность в их оценке, глубокое понимание того, что достигнутое — только капля в океане недостигнутого и непознанного, этому, вместе с законами и теориями, тоже можно учиться у великих ученых, у истории науки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гаусс К. Ф.* Отрывки из писем и черновые наброски // В кн.: Об основаниях геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 101–122.
2. *Лобачевский Н. И.* Новые начала геометрии с полной теорией параллельных // В кн.: Об основаниях геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 61–70.
3. *Гиндикин С.* Волшебный мир Анри Пуанкаре // Квант. 1976. № 3. С. 9–17.
4. *Дарвин Ч.* Соч. М.: АН СССР, 1959. Т. 9.

Ищите истину [1)]

Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 462–468

1. Вы спрашиваете, как я отношусь к необходимости восстановить пошатнувшуюся веру в наши идеалы. По моему глубокому убеждению, нам сейчас необходимо говорить не о пошатнувшейся вере, а о марксистском мировоззрении, которое за последние годы было заметно искажено. Научное мировоззрение начинается с того, что человек стремится познать истину. У нас же вместо постижения истины, случалось, приучали людей к тому, как лучше приспособить марксизм к задачам внешним, даже чуждым истине, при этом забывая, что людей, занятых подобным делом, К. Маркс называл просто низкими.

Что же касается соотношения веры (не только религиозной!) и научного мировоззрения, то и в его толковании у нас допускаются серьезные просчеты. У меня, разумеется, нет никаких претензий к самому слову «вера», как выражающему уверенность, доверие к человеку и т. п. Но все-таки хотелось бы обратить внимание на то, что, пользуясь им, нередко смешивают понятия, потому что в собственном смысле, философском или житейском, вера — это убеждение, не допускающее сомнения, не требующее доказательств, а находящее основание в самом себе: «верю… и все тут». Поэтому там, где начинается научное мировоззрение, кончается всякая вера. Слова «вера» в языке ученого просто не существует. Так, скажем, математик не верит в теорему, а убежден в ее правильности, поскольку она доказана. Интеллектуальная добросовестность не позволяет принять что-либо без достаточного основания, разве что в качестве допущения, подлежащего проверке.

Охотно рассуждая о беспримерной вере революционного поколения в неизбежное торжество коммунистических идеалов, мы почему-то забываем, что она означала не что другое, как твердую надежду, основанную на понимании закономерностей общественного развития. Ведь В. И. Ленин

[1)] Опубликовано в «Комсомольской правде» 25 августа 1987 г. в форме ответов на вопросы корреспондента В. Матулявичюса.

призывал молодежь к критическому мышлению, к тому, чтобы коммунизм не был чем-то таким, что заучено, а тем, что самими продумано.

Трудно представить, чтобы К. Маркс говорил: «Я верю». Это была совершенно другая духовная установка. Он исследовал и в результате исследований приходил к определенным убеждениям — он был путешественником, направляющимся в новый мир. На вопрос, какой его любимый девиз, К. Маркс ответил: «Подвергай все сомнению». Но он вовсе не поддерживал пассивное сомнение, которое сейчас свойственно многим людям, а активность мысли, движение к большей истине через критику. Это вовсе не означает отсутствие твердых убеждений. Но их основание лежит не в вере, а в доказательствах, в критическом поиске более прочных оснований.

Чтобы лучше прояснить суть проблемы, скажу больше: проповедь всякой веры, из каких бы благих побуждений она ни велась, по существу безнравственна, потому что она, возбуждая в людях веру, лишает их способности критического мышления и позволяет вести их без рассуждений туда, куда указывают проповедники.

2. Считаю ли я, что нравственные проблемы обострились из-за отхода от подлинно научного мировоззрения? А чем же, как не отходом от научного мировоззрения, можно объяснить, например, тот факт, что у нас были объявлены близкие сроки построения коммунизма? Нравственных последствий этого мы еще до конца не осознали. И удивляемся, что молодежь нас не слушала! Людям просто надоели ложные утверждения, которые им постоянно предлагались под видом научных знаний.

Как-то давно, еще будучи ректором Ленинградского университета, пришел я на лекцию одного профессора по литературе. Разговор шел о Н. С. Гумилёве, о декадентах и пр., и профессор всех их разругал в пух и прах. А студенты потом меня спрашивают: «Так было ли в них что-либо ценное? Как же могло существовать целое направление в литературе, в котором вообще ничего не было?». Потом, выступая перед преподавателями, я сказал, что тот профессор смахнул Н. С. Гумилёва с кафедры, так — мельком. А Н. С. Гумилёв такой поэт, что если студент найдет и прочтет его, то от лекции профессора ничего не останется. О таком поэте лучше молчать, чем говорить несерьезно.

3. Не является ли новой крайностью очень высокая оценка ранее запрещенных писателей? Конечно, это крайность, но, можно сказать, жизнь состоит из крайностей. Вот есть в Ленинграде улица Есенина. А когда-то он был под запретом. Или И. А. Бунин — «проклятый белый эмигрант», а потом — «великий русский писатель»... Это будет продолжаться до тех пор, пока мы не проникнемся пониманием, что в каждом явлении есть разные стороны. А то мы мажем сначала черной краской, а потом белой, или наоборот.

Надо сказать, серьезный взгляд всегда труднее. Некоторые вещи поносят и ругают потому, что они для многих просто непонятны. Вместе с тем в самом деле распространены заблуждения, с которыми решительно бороться просто необходимо. Вот, например, та же религия, о ней надо говорить честно и объективно. Критика религии должна быть направлена прежде всего на ее сущность, а не на то, как ею кто-то пользовался. Постулаты веры затмевают сознание.

Есть в православии понятие «спасение», которое можно объяснить как высшее нравственное очищение. Если воспользоваться этим термином, то принципиально новое, внесенное К. Марксом, можно обозначить следующим образом: спасение человека возможно только через спасение всего общества; осуществлять же это надо не с помощью бога, а науки. Самые благие проповеди бессильны и могут оказаться ложными, если человек не становится на позицию объективного научного исследования путей общественного развития.

Есть и этическая сторона вопроса. Религиозная мораль, как бы она ни была возвышенна, требует от человека следовать ей, потому что это угодно богу: за добро бог наградит, а за зло накажет. Так нравственное поведение оказывается не самоценным, а вынужденным из «страха божия». Философ Кант выдвинул даже такую мысль, что бог необходим для того, чтобы добродетель получала награду — взгляд, можно сказать, несколько коммерческий: не хочется добро творить даром, а лишь за вознаграждение. Так религиозное основание морали лишает ее подлинного нравственного содержания.

Ф. М. Достоевский устами Ивана Карамазова сказал, что если бога нет, то все становится дозволенным. Но почему? Потому, что у человека нет собственной совести, а только страх перед богом? Не низменно ли это! Социалистическая мораль выше, так как зовет следовать ей не за награды, а ради высоких целей. Так и основание социалистической морали лежит в нашей совести, в убеждениях, в которых стремление к добру неразрывно связано с научным мировоззрением, их общим требованием добросовестности и преданности истине. И еще один существенный момент — ленинская характеристика коммунистической нравственности: нравственно то, что служит делу коммунизма. Это означает вовсе не то, что цель оправдывает средства, как иные думают по недомыслию. Средства должны соответствовать цели, и поэтому коммунизм можно строить только коммунистическими средствами. Не все это понимают. Величайшее заблуждение состояло в уверенности, что коммунизм можно насаждать путем жестокостей, репрессий и истребления классовых противников. Таким образом утверждалась не коммунистическая нравственность, а нечто противоположное.

4. Какая же сила должна удерживать человека от безнравственного поступка? По моему глубокому убеждению, нравственная сила покоится только в самом человеке, в осознании собственной чести и целостности своей личности. Если от дурного поступка его удержит лишь страх перед

наказанием, от этого, может, и будет польза обществу, но это уже не будет истинная нравственность. Разве Олег Кошевой, испытывая нечеловеческие страдания, не выдал своих товарищей лишь потому, что боялся наказания? Конечно же, нет! Это была глубочайшая убежденность, что он должен сохраниться внутренне как человек определенных убеждений.

Если же говорить о том, что может благотворно повлиять на формирование нравственных убеждений, то надо иметь в виду не наказание, а значение примера. Мое главное «несчастье» в жизни состояло в том, что я вырос среди порядочных людей. Такими людьми были мои родители, мои учителя, и я был глубоко убежден, что так есть и так должно быть. Как-то давно, уже будучи доктором наук, я предложил своему отцу: «Папа, хочешь, я куплю тебе костюм?». Тогда у нас были трудности с такими товарами. «У спекулянта — никогда!». Позиция понятна? Вот когда растешь с таким человеком, у тебя и принципы соответствующие складываются. Мои родители были учителями, и я не видел, чтобы их что-либо интересовало так, как их работа. И я вырос в сознании того, что работа есть содержание жизни человека. Поэтому я думал, что у интеллигентного человека иначе и быть не может. Только потом убедился, что это далеко не всегда так.

Поэтому я и говорю о значении примера. Уже не помню, кто написал о том, что его в детстве воспитывало: когда он ложился спать, отец, сидел в соседней комнате и работал, и он всегда видел свет под дверью — этот свет его и воспитывал. Вот что самое главное. Поэтому я считаю, что в недостатках молодежи, о которых сейчас много говорят, виновато и старшее поколение. Оно нарушало, порой попирало принципы. В бытность ректором университета на заседаниях в горкоме партии я слушал о высоких принципах, а потом работники горкома звонили в университет и уговаривали без объективных оснований: «Помогите такому-то стать студентом». Чего же вы после этого хотите?

Сейчас в Уставе партии написано про порядочность, и правильно, но В. И. Ленин не мог предложить вписать что-либо подобное, потому что в его сознании это просто подразумевалось.

Нам надо чаще обращаться к истокам Октябрьской революции. Я себя считаю человеком 20-х гг., и это были великие годы! Мы были устремлены в будущее, и перед глазами у нас были высокие цели. Свою нравственную задачу мы видели в построении нового общества, я вырос в этой духовной обстановке. Она была непохожа на ту, которая наступила потом. Для сравнения приведу такой пример. Я занимался альпинизмом, и еще в 30-е гг. в альпинистских лагерях у костров пели те же песни, что исполнялись и по радио. А в 50-е гг. пели уже совсем другое. Произошло расщепление.

Сейчас говорят: наука и ценности, ценности и наука. Что за постановка вопроса?! Наука с того и начинается, что человек высоко ценит истину. Так же и мировоззрение человека начинается с ценностей, нравственной установки.

5. Как я отношусь к роли литературы в воспитании нравственности? Эта роль очень значительна, но она неоднозначна: литература может воспитывать и безнравственность. Несчастье состоит в том, что у нас просто не хватает серьезного понимания нравственных проблем. Это не может не сказываться на творчестве тех же писателей. И не только на творчестве. Например, недавно был восстановлен в членах Союза писателей Борис Пастернак. А кто же его оттуда выгонял? Те же писатели, которые порой так любят учить нас нравственности. Говорите, команда такая дана была? Простите, а почему же мы обязательно должны выполнять подобные команды? Да и были ли команды? В известные времена не выполнить команду было просто страшно — за это можно было лишиться свободы, а то и большего. Но ведь впоследствии подобного уже не было. В худшем случае перестали бы на время печатать. Вот Вера Кетлинская в свое время по другому поводу выступила против мнения большинства писателей, и ее долго не печатали. Ну и что? Зато она сохранилась как личность. Я не принимаю нравственных позиций, выраженных Б. Л. Пастернаком, но тем не менее отдаю себе отчет в том, что он был большим поэтом своего времени, и его изгнание из Союза писателей считаю просто безнравственным поступком. Но мало того! Собрание писателей обратилось к правительству с предложением лишить Б. Л. Пастернака советского гражданства, т. е., если раскрыть смысл такого решения, писатели приговорили Б. Л. Пастернака к изгнанию, к лишению Родины. И сделали это, не выслушав самого Б. Л. Пастернака. Хотя даже преступникам дают в суде последнее слово! Фактически приговор был смертельным: пожилой человек с тонкой нервной организацией должен был умереть от потрясения... Его спасли врачи. Но потрясение не прошло бесследно.

Сейчас много говорится о его романе «Доктор Живаго». Когда-то я читал это произведение на английском языке, и оно произвело на меня неприятное впечатление, потому что я хорошо знаю позицию передовых интеллигентов того времени, она отлична от позиции, выраженной в романе [2)]. Однажды по этому поводу я поспорил с одним американцем. «Мы с Вами никогда не договоримся, потому что я ставлю личность выше общества!», — заявил он. «Но Вы только вдумайтесь в то, что там написано, — ответил я. — Идет страшная, кровавая гражданская война. А что же делает главный герой? Он врач, но он просто прячется! А ведь Вы сами считаете, что Христос ради людей взошел на Голгофу. Так что в романе мораль не то что не наша — она дохристианская». Американец со мной согласился. Но роман надо было издать тогда, когда он был написан, а после этого дать ему в критике такую оценку, какой он заслуживает.

[2)] Позиция романа ясно определена в предисловии академика Д. С. Лихачева [1]. Это позиция самого автора, и она нейтральна.

Я понимаю Чингиза Айтматова, создавшего при совсем недавней нравственной атмосфере образ Авдия — человека, жертвующего собой во имя нравственных целей. Авдий — это вызов безразличию, которое выражается словами: «Что, тебе нужно больше, чем другим?». И в образе Христа Айтматова я прочитал канонический пример того, как человек во имя своих убеждений идет на гибель. Нам не следует тешить себя ненужными иллюзиями — бывает, что тех, кто борется за правду, ждет плаха. На то она и правда.

Искать истину, следовать ей, отстаивать ее бывает трудно, еще труднее осознать свою ответственность, полагаясь на свою совесть, легче опереться на веру в бога или — еще проще — на указания, на руководство, на «дядю»... Но нужно вырабатывать в себе силу духа, добросовестность и верность правде. Нужно искать и отстаивать истину.

6. Что бы я хотел добавить к нашей беседе? Вопрос очень кстати. Есть идея, о которой я думаю на протяжении всей своей жизни: нашему обществу необходимо отменить смертную казнь. В Конституции должно быть записано: «Человеческая жизнь священна. Поэтому Советское государство осуждает войну, осуждает убийство, как самое страшное преступление, и само берет на себя обязательство свято соблюдать этот закон. Смертная казнь отменяется». Это коммунистический нравственный принцип, к которому мы раньше или позже должны вернуться. Ведь большевики были против смертной казни и ввели ее по необходимости — в ответ на белый террор. Затем она была отменена при первой возможности. Но потом восстановлена. Заявление о священности человеческой жизни было сделано в Делийской декларации, и его утверждение в законе имело бы огромное моральное значение для государства, не говоря уже о его значении для утверждения коммунистической нравственности и гуманизма.

Нам действительно надо чаще обращаться к истокам Октябрьской революции и сверять свою жизнь с этими истоками. Только тогда мы поймем, к чему мы пришли и куда нам следует идти дальше.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лихачев Д. С.* Крещение Руси и государство Русь // Новый мир. 1988. № 1. С. 249–258.

Настоящие люди. Иосиф Либерман и Сергей Оловянишников

Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 469–471

Прием на математико-механический факультет Ленинградского университета 1934 г. был так богат способными людьми, что такого второго, кажется, не было в истории факультета за последние двадцать пять лет. Война нанесла выпускникам этого курса страшный удар, и только поэтому мы не стали свидетелями того расцвета, который они принесли бы факультету. Мне хотелось рассказать немного о двух талантах из этой плеяды, об Иосифе Либермане и Сергее Оловянишникове.

В 1934 г. я вел занятия по алгебре, работая на факультете лишь второй год, и на мою долю выпало счастье работать с этим выдающимся курсом. В кружке по геометрии, который я организовал тогда на первом курсе, сложилась небольшая группа молодых геометров, и мы, полные научного энтузиазма, росли вместе, вдохновляя друг друга в постоянном общении. В группе особенно выделялись И. М. Либерман и С. П. Оловянишников.

Это были два настоящих таланта, полные глубокого интереса к науке, чрезвычайной трудоспособности и упорства. Сколько раз опровергал я первые их попытки решить данные им проблемы, и сколько раз они приходили снова и уходили, прежде чем доказательства были получены. Так упорно куется главное в работе — умение сосредоточенно добиваться цели. Ко времени окончания университета оба имели уже печатные работы. Но они вовсе не были только учеными, для обоих были характерны глубокая идейность, безграничная преданность идеалам, большая общественная активность, широкие жизненные интересы. Словом, это были настоящие люди.

Иосиф Меерович Либерман родился в Геническе в 1917 г. Поступил он в университет прямо по окончании школы как отличник и победитель математической олимпиады. Первую свою работу опубликовал в 1938 г., а по окончании университета в 1939 г. остался у меня в аспирантуре и за два года выполнил еще несколько работ. Уже будучи призванным зенитчиком во флот в июле 1941 г., он блестяще защитил кандидатскую работу, относящуюся к теории функций вещественной переменной, хотя главная линия его исследований относилась к геометрии. В конце августа 1941 г. он был направлен в Таллин и не вернулся оттуда... Перед отъездом он писал мне из Кронштадта: «Больше всего я ценил в жизни свободу, право свободно работать; теперь я иду защищать это право».

Сергей Пантелеймонович Оловянишников был много старше: он родился в 1910 г. в Ярославле. По окончании школы в Ленинграде работал несколько лет на химическом заводе. Весной 1934 г. он принял участие в математической олимпиаде и вошел в число ее победителей. Здесь я впервые услышал о нем от профессора Б. Н. Делоне, организатора олимпиад, который с увлечением рассказывал о «рабочем, который решает все самые трудные задачи, которые я ему даю». Но после поступления в университет жизнь С. П. Оловянишникова сложилась непросто. В начале 1935 г. выяснилось, что его отец — бывший офицер царской армии, что оба — и сын и отец — скрывали. Отец покончил с собой, а Сергей был выселен в Уфу, исключен из университета и из комсомола.

Но товарищи не оставили Сергея. Он сохранил связь с факультетом и в Уфе продолжал самостоятельно заниматься математикой, пытаясь, в частности, решить некоторые проблемы теории объемов. Тяжелый удар не сломал ни его убеждений, ни его интереса к науке. Через два года он вернулся в университет. Однако в 1939 г. он был призван в армию и сражался на фронте в войне с Финляндией. Только в 1941 г. он смог закончить университет. К этому времени им были выполнены четыре работы по геометрии, одна из которых представляла собой вообще одно из лучших достижений в вопросах изгибания поверхностей «в целом».

В начале Великой Отечественной войны С. П. Оловянишников был призван в армию командиром огневого взвода полевой артиллерии. Раненый в августе на Ленинградском фронте при защите села Ивановского, он даже в батальоне выздоравливающих продолжал научную роботу. В декабре 1941 г. С. П. Оловянишников погиб на фронте.

Как раз за год-два до войны я начал исследования, которые вылились потом в общую теорию выпуклых поверхностей. Тогда идеи ее только складывались, многое было вовсе еще неясно, и постоянное общение с И. М. Либерманом и С. П. Оловянишниковым много помогало и им, и мне. Помню, как на каком-то концерте в перерыве И. М. Либерман рассказывал мне о своих результатах или как, встретившись с ним на лыжах в Кавголове, я «убил» его своим обобщением теоремы Гаусса. Мы работали как черти, и каждая встреча приносила новый обмен идеями, замечаниями, результатами и, конечно, ошибками. Без ошибок ничто большое не делается, и ведь мы еще ничего толком не знали о внутренней геометрии выпуклых поверхностей, которая тогда только создавалась. Среди результатов этой теории, прочно и навсегда вошедших в геометрию, есть теоремы И. М. Либермана и С. П. Оловянишникова, и всякий геометр, который будет заниматься этой теорией, не пройдет мимо них. Я считаю себя вправе назвать эти теоремы классическими.

Война уничтожила, как и многое другое, эти два блестящих таланта, унесла безвозвратно счастье тех дней, счастье нашей совместной работы. Но ничто не может уничтожить то дело, те идеалы, ради которых трудились, сражались и погибли наши комсомольцы-ученые. В их короткой жизни мы должны черпать пример научного и общественного энтузиазма, творческой активности, трудоспособности, упорства и жизненной стойкости, пример преданности своему делу и своим идеалам.

Борис Николаевич Делоне

(К 90-летию со дня рождения)

Природа. 1980. № 3. С. 25–35

Борис Николаевич Делоне родился 3 (15) марта 1890 г. Таким образом, ему исполняется 90 лет, и этот редкий, к сожалению, из-за краткости нашей жизни юбилей он встречает если не «в расцвете сил и таланта», как принято говорить в юбилейных речах, то несомненно так, что силы его и талант не увяли.

Б. Н. Делоне родился в Петербурге, но потом отец его стал профессором механики в Киеве, и Борис Николаевич учился на физико-математическом факультете Киевского университета с 1908 по 1913 г.; получил Большую золотую медаль за сочинение на тему факультета (по алгебре) и был оставлен при университете «для подготовки к профессорскому званию». Одновременно в 1913–1915 гг. он преподавал в одной из киевских гимназий (вот какие были времена, а теперь кто же, получив Большую золотую медаль — первую премию за студенческую работу, готовясь стать профессором, состоя в аспирантуре, станет преподавать в средней школе). С 1916 по 1922 г. Борис Николаевич преподавал в Киевском, а с 1922 по 1935 г. — в Ленинградском университетах, с 1923 г. — в качестве профессора. В 1929 г. он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР.

В Москву Борис Николаевич переехал в 1935 г., когда туда переводилась Академия наук СССР. «Москва будет центром мира», — сказал он на уговоры остаться в Ленинграде. Вот и живет Борис Николаевич, не считая двух лет эвакуации в Казани (1941–1943 гг.), сорок пять лет — вторую половину прожитого — в Москве, работает в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР, где в 1945–1960 гг. заведовал отделом геометрии. Он также заведовал кафедрой алгебры и теории чисел в Ленинградском университете (1930–1934 гг.), а потом в Московском университете кафедрой геометрии.

Сочетание это своеобразно, потому что алгебра и геометрия образуют в математике как бы два противоположных полюса, совершенно различных по духу.

Тем не менее научное творчество Бориса Николаевича относится ко всем трем предметам: теории чисел, алгебре, геометрии, и образует при этом вполне определенное единство как по своему характеру, так и по содержанию — это геометрия правильных систем фигур в ее связях с проблемами теории чисел и алгебры.

Если не считать самой первой опубликованной работы Бориса Николаевича, то первый большой цикл его исследований относится к теории неопределенных уравнений.

В теории чисел рассматривают неопределенные уравнения

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

где F — многочлен с целыми коэффициентами, и под решением понимается решение в целых числах. Исследование таких уравнений составляет одну из основных задач теории чисел и касается существования решений, степени их произвола, способов нахождения и др. Примером может служить знаменитая теорема Ферма — предположение, до сих пор еще не доказанное во всем объеме, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n \tag{1}$$

ни при каком целом $n \geqslant 3$ не имеет решений (не считая, конечно, тривиального, когда, скажем, $y = 0$).

Неопределенные уравнения исследовались еще древними; так, пифагорейцы нашли общее решение уравнения (1) при $n = 2$. Уравнения с двумя неизвестными изучал великий греческий математик, зачинатель алгебры Диофант (III в.). В его честь неопределенные уравнения называются диофантовыми, хотя Диофант искал их решения в рациональных, а не обязательно в целых числах. Заслуга решения уравнений в целых числах принадлежит, по-видимому, индийским математикам.

Решение в целых числах уравнений 1-й степени $ax + by = c$ приводит уже Ариабхата (V–VI вв.) — тот, именем которого назван первый индийский спутник. Более подробно решение изложено у других индийских математиков — Брахмагупты (VII в.) и Бхаскары (XII в.), которые решили уравнение также 2-й степени: $x^2 + ay^2 = c$.

Важнейшим частным его случаем является уравнение

$$x^2 - ay^2 = 1. \tag{2}$$

Это уравнение при квадратном a (т. е. когда a — квадрат целого числа), очевидно, не имеет решений, не считая тривиального $x = 1$, $y = 0$. Но при неквадратном a оно имеет бесконечно много решений.

Уравнением (2), не зная результатов индийцев, занимались П. Ферма, Л. Эйлер и Ж. Л. Лагранж — такое собрание великих математиков! Метод нахождения полного решения, полученного Ж. Л. Лагранжем в 1769 г., близок к индийскому. Кстати, уравнение (2) известно под названием уравнения Пелля. Так окрестил его Л. Эйлер по имени английского математика Дж. Пелля, который, однако, не имел к этому уравнению особого касательства. Случай не такой уж редкий, когда что-либо называют именем человека, не имевшего к тому отношения.

Названные математики и за ними еще princeps mathematicorum К. Гаусс исследовали также общее уравнение 2-й степени. Но и у них к следующей, 3-й степени не было общего подступа. Его нашел Б. Н. Делоне. В частности, он дал полное решение уравнения, аналогичного (2):

$$x^3 - ay^3 = 1. \tag{3}$$

Было доказано, что это уравнение всегда имеет не более одного решения (тривиальное решение $x = 1$, $y = 0$ не считается), и был дан алгорифм для его нахождения (не «алгоритм», как стали говорить у нас, подражая французам, а «алгорифм», как писал и говорит по-русски сам Б. Н. Делоне в согласии с русским языком).

Б. Н. Делоне исследовал также уравнение 3-й степени общего вида с отрицательным дискриминантом левой части, дал алгорифм для его решения и доказал, что оно, кроме особых случаев, когда число решений может достигать пяти, имеет не более трех решений.

Как бы ни казалась частной задача решения уравнения (3), это решение стало следующей ступенью вслед за тем, что было получено от Ариабхаты до К. Гаусса — от начала VI до начала XIX в. И после П. Ферма, Л. Эйлера, Ж. Л. Лагранжа, К. Гаусса следующий шаг был сделан Б. Н. Делоне; первая его статья об уравнении (3) появилась в 1915 г.

Однако перед этим важный общий результат о неопределенных уравнениях был получен норвежским математиком А. Туэ в 1905–1909 гг. Он доказал фундаментальную теорему о конечности числа решений всякого неопределенного уравнения степени $n \geqslant 3$ с двумя неизвестными вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_ny^n = c, \tag{4}$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — целые числа и левая часть не разлагается на множители с рациональными коэффициентами (например, если уравнение приводится к тому, что $(ax + by)^n = 1$, где a и b не имеют общего делителя, то оно имеет бесконечно много решений — тех самых, какие имеет уравнение $ax + by = 1$).

Б. Н. Делоне работы А. Туэ не были известны, так как они печатались в норвежских журналах, не поступавших в Киев. Но не это важно.

Существенно, что теорема Туэ неэффективна: утверждая конечность числа решений, она не дает никакого способа их находить (даже простым перебором), так же как не указывает и границ решения; так что, как бы далеко ни зайти в поисках решений и сколько бы их ни нашли, останется возможность, что есть еще какие-то решения, до которых еще не дошли. Наконец, английский математик А. Бейкер нашел эффективную границу для решений, но она столь велика, что решение простым перебором недоступно даже для ЭВМ. В отличие от этого результаты Делоне содержат алгорифм для нахождения решения, который (хотя это не доказано), в принципе, всегда ведет к цели.

Сравнительно недавно молодой ленинградский математик Ю. В. Матиясевич [1)] доказал, что общего алгорифма для нахождения решений уравнения (4) не существует. Это, понятно, придает еще больший вес результату Делоне: его алгорифмы не могут быть поглощены общим алгорифмом. А особого продвижения в том, чтобы довести до полного завершения исследование уравнений 3-й степени и найти алгорифмы для уравнений 4-й степени, за прошедшие 60 лет после работ Делоне не было. Трудная это область.

История неопределенных уравнений демонстрирует ту особенность задач теории чисел, что формулируются они просто, а решаются трудно. К решению некоторых из них привлекают мощные средства теории функций, другие решают прямыми методами, по существу элементарными (но тем более требующими высокой изобретательности, как требует искусства сделать что-либо руками и простым инструментом, без особо сложной техники). Именно такая изобретательность и искусство заключались в работе Делоне. Теорией чисел занимаются чаще в молодые годы (как К. Гаусс начинал со своих «Исследований по арифметике»), когда есть больше способности к тонкой изобретательности.

Продолжая свои исследования по неопределенным уравнениям (до 1927 г.), Б. Н. Делоне исследовал ряд других вопросов, касающихся кубических иррациональностей, привлекая на сей раз геометрические методы. В этом направлении (мы говорим о связи теории чисел с геометрией) он продолжал работы Г. Ф. Вороного, знакомство с которыми произвело на него большое впечатление и которыми он не переставал восхищаться [2)]. Первая работа Делоне в указанном направлении как раз была посвящена геометрическому изложению одной работы Вороного (алгорифм Вороного). Борис Николаевич говорил при этом, что, по его совершенному убеждению, сам Г. Ф. Вороной мыслил геометрически и именно так пришел к своим результатам.

[1)] В 1997 г. Юрий Владимирович Матиясевич (род. 1947) избран членом-корреспондентом Российской академии наук, а в 2008 г. — ее действительным членом. — *Прим. ред.*

[2)] Георгий Федосеевич Вороной (1868–1908). Б. Н. Делоне писал, что на трудах Вороного «лежит печать гениальности». Но независимо от того, будем мы употреблять такие высокие слова или нет, Г. Ф. Вороной был несомненно замечательным математиком.

Но в те времена в Академии наук геометрия была не в почете. Из-за этого Г. Ф. Вороной облекал свои геометрические соображения в алгебраическую форму.

Г. Ф. Вороному принадлежали замечательные работы, касающиеся положительных форм и правильного деления пространства [3]; вопросы эти тесно связаны между собой и с геометрической кристаллографией. К кругу взаимосвязанных вопросов — теории положительных квадратичных форм, теории правильных систем и геометрической кристаллографии — и обращается Б. Н. Делоне, начиная с двух его работ 1926 г. в этой области, причем он продолжает в ней работать до настоящего времени.

Правильной системой называется такая бесконечно простирающаяся во все стороны совокупность фигур, что любую ее фигуру можно совместить с любой другой перемещением всей совокупности в целом, совмещающим ее саму с собой. Если эти фигуры — просто точки, то имеем правильную систему точек [4]. Простейший случай представляет параллелепипедальная система, или решетка, т. е. такая совокупность точек, которая совмещается сама с собой параллельными переносами, переводящими любую ее точку в любую другую.

Правильные системы были исследованы знаменитым кристаллографом Е. С. Федоровым. Он доказал фундаментальную теорему, что у всякой правильной системы есть совмещающие ее переносы, поэтому всякая правильная система точек состоит из конечного числа одинаковых решеток, както сдвинутых друг относительно друга. Таким образом, решетки — это не только самые простые, но и самые главные правильные системы. Остальные получаются их объединениями.

Важный частный случай правильных систем представляют правильные разбиения пространства, т. е. правильные системы, образуемые выпуклыми многогранниками, заполняющими все пространство, но не перекрывающимися (не имеющими попарно общих внутренних точек). Кирпичная кладка — простейший наглядный пример. Такие многогранники Федоров назвал стереоэдрами. Если же в системе многогранников любой можно совмещать с любым переносами, то многогранники называются параллелоэдрами. Два простейших — это параллелепипеды и шестигранные призмы (с центром симметрии — кирпичи и соты).

Известно, что кристаллы (с высокой степенью точности) представляют собой правильные системы атомов или вообще их комплексов. Во времена Федорова это было еще гипотезой, которую лишь в 1912 г. посредством рентгеновского анализа доказали М. Лауэ и В. Фридрих.

---

[3] Эти термины будут объяснены ниже.

[4] Имеется в виду, что система эта дискретная, т. е. точки ее удалены друг от друга на расстояния, большие какого-либо $r > 0$.

Всякая параллелепипедальная система точек представляет собой совокупность всех точек с целочисленными координатами в некоторой системе координат. Или, иначе говоря, совокупность точек с целыми координатами относительно системы трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, т. е. если задать три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и откладывать от данной точки O все векторы $\mathbf{r} = \mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z$, где x, y, z — любые целые числа, то концы их образуют решетку, и всякая решетка получается таким образом.

Такая система векторов ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$) называется основным трехвекторником решетки, а построенный на нем параллелепипед — основным ее параллелепипедом. Одна и та же решетка имеет бесконечно много основных параллелепипедов, как это ясно из рис. 1, 2. Все они имеют, однако, одинаковый объем. На рис. 2 показаны для примера два из множества основных параллелепипедов решетки, изображенной на рис. 1.

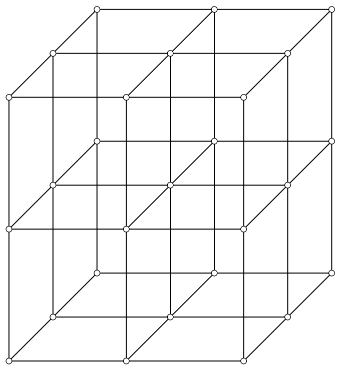


Рис. 1

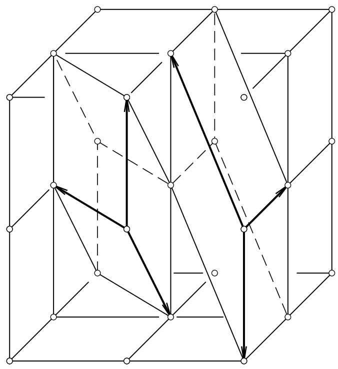


Рис. 2

Аналогично получаются решетки на плоскости, и каждая из них имеет бесконечно много разных основных параллелограммов; все они имеют одну и ту же площадь (рис. 3).

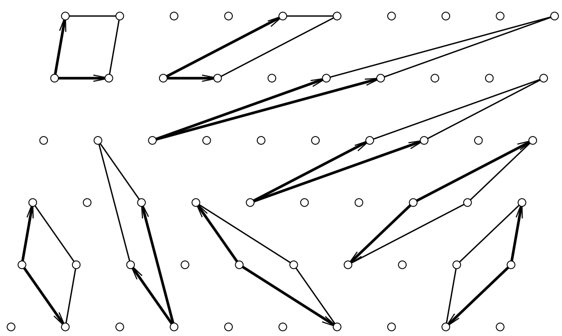


Рис. 3

Переход от одного трехвекторника (или на плоскости двухвекторника) к другому означает преобразование от одних координат x, y, z к другим x^1, y^1, z^1 (одни координаты выражаются через другие посредством линейного преобразования с целыми коэффициентами, при этом определитель равен единице; как говорят, одни координаты получаются из других целочисленной унимодулярной подстановкой).

Важная проблема заключается в том, как указать способ, позволяющий для каждой решетки выбрать из всех основных параллелепипедов один такой, чтобы связь между решеткой и этим избранным параллелепипедом была бы уже взаимно однозначной, т. е. чтобы такой параллелепипед был у разных решеток разным. Решетка — это бесконечная система точек. Наша задача — однозначно связать с ней конечную фигуру; так как у одной решетки есть разные основные параллелепипеды, то разные параллелепипеды могут определять одну и ту же решетку. Вопрос состоит в том, чтобы уметь различать, одну ли решетку задают данные параллелепипеды или разные. Для этого по данному параллелепипеду (трехвекторнику) надо уметь находить «канонический» — однозначно связанный с решеткой. Конечно, «канонические» трехвекторники можно определять по-разному; задача состоит в выборе «разумного» определения, такого, прежде всего, чтобы его было проще находить.

Однако есть другая конечная фигура, однозначно связанная с решеткой, независимая от выбора каких-либо условий. Это «область ближайших точек» (ОБТ) — множество точек, удаленных от данной точки решетки не дальше, чем от всех других. Ясно, что у всех точек решетки эти области одинаковы: как точки решетки переходят одна в другую при переносах, совмещающих решетку саму с собой, так и ОБТ будут совмещаться. Области эти Б. Н. Делоне называл областями Дирихле, потом областями Вороного или Дирихле — Вороного, а физики, кажется, называют их еще как-то иначе. Впрочем, мы уже могли заметить, что эти названия могут быть малообоснованными. Желание связывать ОБТ с именем Г. Ф. Вороного вызвано тем, что им были получены об этих областях глубокие результаты.

Легко доказывается, что для всякой бесконечной дискретной системы точек, вообще без всяких условий правильности, ОБТ являются выпуклыми многогранниками [5)], прилегающими друг к другу целыми гранями (и так заполняющими все пространство). У параллелепипедальных систем они совмещаются переносами и, стало быть, являются параллелоэдрами, а для правильных систем вообще — стереоэдрами (но не всякие параллелоэдры и стереоэдры являются ОБТ правильных систем).

[5)] Если A, B — две точки, то точки, ближайшие к одной и к другой, образуют полупространства, разделенные плоскостью, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину. Поэтому ОБТ для данной точки A ограничена такими плоскостями: она является пересечением соответствующих полупространств.

Вернемся к представлению решетки как совокупности концов векторов $\mathbf{r} = \mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z$. Квадрат расстояния от точки O до других точек решетки будет квадратом вектора $\mathbf{r}$, который, очевидно, представляется в виде квадратичной формы: $\mathbf{r}^2 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fxz$.

Форма эта положительна, т. е. при всех значениях x, y, z (кроме $x = y = z = 0$) имеет положительное значение. Верно также обратное: всякая положительная квадратичная форма целочисленных переменных x, y, z представляет собой расстояние между точками в некоторой решетке. Те же связи есть между решетками на плоскости и формами от двух переменных, а также между решетками в n-мерном пространстве и формами от n переменных.

Переход от одного основного трехвекторника к другому равносилен, как сказано, целочисленной унимодулярной подстановке, и соответственно переход к каноническому трехвекторнику равносилен преобразованию квадратичной формы к соответствующему каноническому виду (форма может и не приводиться к сумме квадратов, так как допускаемые преобразования переменных только целочисленные!). Это есть задача приведения квадратичных форм, которой занимался еще К. Гаусс. Изложенное геометрическое ее понимание было дано Г. Минковским [6)].

Сущность геометрии — в наглядном представлении. Подлинная геометрия и есть в своем существе наглядное представление, пронизанное и укрепленное строгой логикой и еще расширенное путем аналогий на многомерные пространства и т. п. Но так или иначе геометрия исходит из наглядных представлений. В этом ее сила: она позволяет ухватить в одном представлении то, к чему алгебра и анализ приходят последовательными шагами. Там, где удается провести геометрическую точку зрения и геометрический метод, всегда достигается успех настолько существенный, насколько геометрический взгляд соответствует сущности предмета (так что геометрия не решает «все задачи»). В теории квадратичных форм этот взгляд оказался чрезвычайно плодотворным, и он же благодаря Минковскому сыграл решающую роль в понимании и развитии теории относительности.

Сила геометрического воображения, геометрической интуиции — это дар, и Борис Николаевич наделен им в высшей степени. Этот дар естественно сочетается с изобретательностью, отточенной на теории чисел, со стремлением к конкретности, к тому, чтобы поставленные вопросы, применяемые соображения, получаемые результаты были зримыми и ясными. Поэтому понятно, что Борис Николаевич обратился к той очерченной выше области науки, где скрещиваются геометрия, теория чисел и естествознание, — к кристаллографии. Одна из двух его упомянутых работ 1926 г. называлась «К вопросу об однозначности определения основного параллелепипеда кристаллической

[6)] Герман Минковский (1864–1909) — основатель «геометрии чисел» (геометрических методов в теории чисел), теории выпуклых тел и геометрического четырехмерного изложения теории относительности.

структуры по способу Дебая», другая — «О теории параллелоэдров». В этой последней был изложен придуманный Борисом Николаевичем чрезвычайно простой и изящный метод слоевого построения параллелоэдров, примененный им потом к нахождению всех четырехмерных параллелоэдров. В трехмерном же пространстве существует пять типов параллелоэдров; они были найдены еще Е. С. Федоровым, но совсем иным способом.

Работа об определении кристаллической структуры по способу Дебая как раз соединяет в себе геометрию, теорию чисел и кристаллографию. Из рентгенограммы, получаемой по способу Дебая [7)], непосредственно определяются расстояния между плоскостями кристалла, т. е. плоскостями, в которых с достаточной плотностью располагаются элементы кристаллической решетки, геометрические точки решетки. Нужно по этим расстояниям восстановить решетку. Задача, понятно, чисто геометрическая. Вместе с тем она равносильна определению квадратичной формы по тем значениям, которые она принимает (не той, о которой была речь, а «сопряженной» с нею, но это несущественно).

Б. Н. Делоне решил вопрос для плоской решетки и тем, естественно, направил внимание на его общее решение. Оно было получено потом другими авторами для n-мерных решеток (форм с n переменными) совсем иными методами. При этом интересно, что самым трудным оказался как раз практически важный случай трехмерной решетки.

Продолжая свои исследования в направлении геометрической кристаллографии, Б. Н. Делоне дал новую классификацию решеток, более детальную, чем классификация О. Браве 1851 г. Вместе с новым решением некоторых других задач теории решеток это составило содержание его работы «Новое изложение геометрической кристаллографии».

Потом Борис Николаевич внес геометрический метод в алгебраическую теорию уравнений — теорию Галуа, самую алгебраическую теорию, совершенно, казалось бы, чуждую геометрии. Но он связал эту теорию с геометрией и позволил подойти к некоторым ее задачам совершенно по-новому. Особенно его занимало решение так называемой обратной задачи теории Галуа, которое и было затем получено его учениками (для разрешимых групп [8)]).

Уже в 60-х гг. Б. Н. Делоне обращается к общим стереоэдрам; о них до того вообще ничего, собственно, не было известно; и Борис Николаевич (впоследствии вместе с учениками) существенно продвигает их исследование.

[7)] Способ Дебая, или Дебая — Шеррера, заключается в облучении образца, состоящего из множества мелких, беспорядочно расположенных кристаллов, «белыми», т. е. разных длин волн, рентгеновскими лучами.

[8)] Теория Галуа связывает с каждым алгебраическим уравнением с целыми коэффициентами некоторую группу подстановок — «группу Галуа». Обратная задача состоит в том, чтобы выяснить, всякая ли группа может быть группой Галуа. Разрешимая группа — такая, которая связывается с уравнением, разрешимым в радикалах.

Не станем упоминать других его работ; в каждой из них он вносил дух наглядной геометрии в проблемы, порой, казалось бы, вовсе не геометрические. Обратим внимание только на одну работу.

Это «метод пустого шара», впервые изложенный в докладе «О пустом шаре» на математическом конгрессе в Торонто (Канада) в 1924 г. Вместе с Борисом Николаевичем представим себе произвольную дискретную систему точек в пространстве и пустим туда летать шар, как летает мыльный пузырь. Шар «пустой» в том смысле, что в него не должна попадать ни одна точка данной системы. Но пусть шар этот раздувается. Тогда он неизбежно наткнется хотя бы на одну точку системы; но его еще можно будет раздувать. И так до тех пор, пока на его поверхности не окажется столько точек, что дальше раздуваться он не сможет. Это заведомо наступит, если на нем окажутся четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Они являются вершинами тетраэдра, вписанного в этот шар.

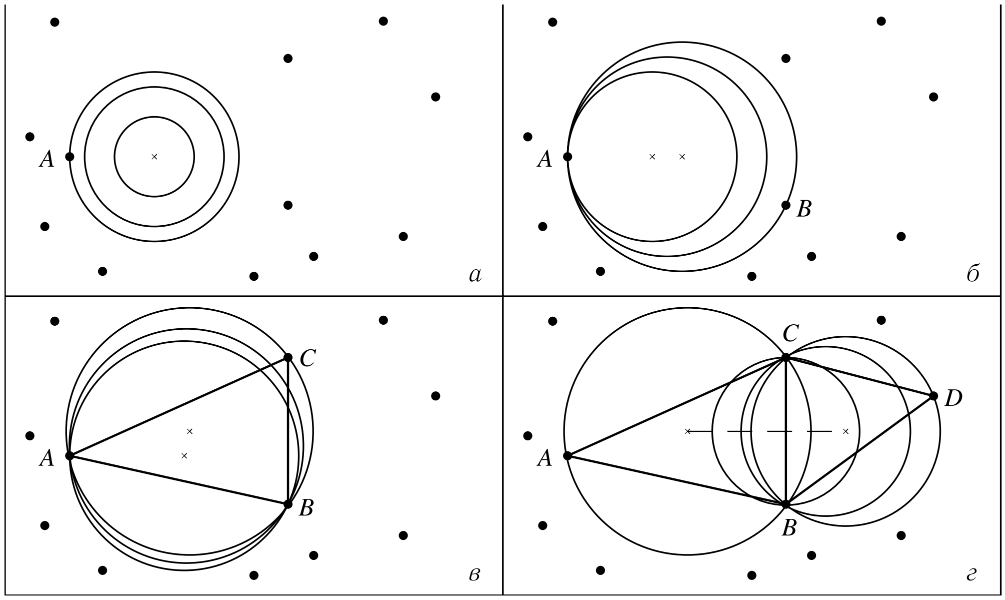


Рис. 4

Если представлять себе эту картину в пространстве затруднительно, посмотрим на ее более простой вариант — на пустой круг среди системы точек на плоскости. Вот мы двигаем и «раздуваем» круг. Вот он уткнулся в одну точку A (рис. 4, *а*), раздуваем от нее дальше, он уткнется еще в одну точку B (см. рис. 4, *б*); потом в третью — C (см. рис. 4, *в*). Если теперь, уменьшая, а затем вновь «раздувая» его, заставлять его как бы «пролезть» сквозь отрезок CB, то он уткнется в какую-то точку D (см. рис. 4, *г*).

Получим два треугольника ABC, CBD, смежных по стороне BC, и т. д. Так получается разбиение всей плоскости на треугольники. В некоторых случаях получаются не треугольники, а четырехугольники и др., когда на край круга попадет сразу больше, чем три, точки.

Вообще для каждого положения пустого шара (круга), когда он уже не может раздуваться, берется выпуклая оболочка точек системы, лежащих на его поверхности. Оказывается, что полученные таким образом многогранники заполняют все пространство, соприкасаясь целыми гранями. Вершины областей ближайших точек оказываются центрами этих пустых шаров (не допускающих раздувания), а точки решетки, лежащие на поверхности такого пустого шара, — центрами ОБТ, сходящихся в общей вершине — в центре шара. Изложенный метод применяется специально к решеткам: шар пускают летать среди точек решетки, а так как решетки связаны с квадратичными формами, то данный метод позволил внести простоту и ясность в теорию положительных квадратичных форм, данную Г. Ф. Вороным. Как пишет Д. К. Фаддеев: «Большая заслуга Б. Н. Делоне заключается в рассмотрении основных задач теории положительных квадратичных форм с единой точки зрения» [1, с. 15]. И это достигнуто посредством пустого шара, летающего между точками решетки. Так геометрия посредством наглядных, порой, казалось бы, детски забавных картинок приводит к глубоким результатам не только в своем собственном царстве, но и в других, лежащих как будто за тридевять земель.

Не напоминает ли это по стилю работу Нильса Бора по теории ядра, где он рисовал чашу с биллиардными шарами?

Вообще шар — фигура совершенная. Изучение заполнения пространства шарами (может быть, перекрывающимися) и некоторых примыкающих сюда задач оказалось интересным не только с точки зрения самой геометрии, но и важным для приближенных вычислений кратных интегралов на ЭВМ. Так, Б. Н. Делоне со своими учениками внес посредством геометрии кое-что и в эту практически важную современную область. Явление довольно обычное, когда «праздные забавы» математиков с их шарами, эллипсами и мнимыми числами оказываются потом важнейшим средством развития естествознания и техники.

Б. Н. Делоне вовсе не чужд технике; напротив, его любовь к конкретному, непосредственно зримому, конструктивному, его изобретательность связывали его с техникой. В восемнадцать-девятнадцать лет он сконструировал и сделал своими руками пять планеров — одни из первых в России, на которых совершил пробные полеты. Однажды упал и чуть не разбился. Потом, совсем в другое время — в 40-е гг. после войны — Борис Николаевич читал в Московском университете курс по вычислительным машинам и приборам.

В полетах на собственных планерах проявился спортивный дух Бориса Николаевича, который вел его к достижениям в математике и который сказался в другом его спортивном увлечении — альпинизме, ставшем его постоянным на всю жизнь занятием.

Но главное в Борисе Николаевиче все же не спортивный дух; главное то, что он художник, служитель и создатель красоты. В молодости он занимался не только математикой, но и живописью и музыкой, писал для фортепьяно и одно время даже колебался в выборе — станет ли математиком или, может быть, живописцем. Вот и к горам Бориса Николаевича влечет не столько спортивный интерес, сколько их красота. Так же как его отношение к самой математике — эстетическое.

Для тех, кто не имеет настоящего понятия о математике, она может представляться очень далекой от искусства, весьма почтенной, полезной и важной, но абстрактной и сухой, как строгая тощая гувернантка. Этому способствует пресловутое мнение, что все люди делятся на «физиков» с их сухой, бесчувственной наукой и «лириков» с их утонченными чувствами. Все это, однако, чепуха, пошлое представление, выставляемое с апломбом теми, кто не знает, не чувствует по-настоящему ни «физики» — науки, ни «лирики» — искусства. Великий лирик А. А. Блок сказал:

> Мы любим всё — и жар холодных числ,
> И дар божественных видений, ...

Хорошая музыка строится со строгой выдержанностью формы. В фугах И. С. Баха, как в алгорифме, как в формуле, заключена строжайшая последовательность. В этой строгости — существенный источник их впечатляющей силы. Так и в строгой последовательности математических построений есть своя внутренняя музыка: своя красота — «жар холодных числ». Но как понимание структуры музыки требует музыкальной культуры, так и переживание красоты математики требует культуры математической.

В работах Делоне по теории чисел, в его алгорифмах для решения уравнений 3-й степени заключается эта красота точного, изящного, как бы музыкального построения. Один шаг строго следует за другим, одна тема вплетается в другую. И так они ведут к результату, который возникает как финал, когда в нарастающем напряжении доминанта разрешается в тонику.

В основе каждой геометрической работы Делоне всегда лежит ясная, наглядная идея. Всегда он стремится к выявлению простой геометрической сущности вывода и результата. Своих учеников он всегда учит тому же, постоянно спрашивая: «А что это значит попросту?». И если ученик еще не дошел до этой простой сути, он обязательно добавит: «А вы подумайте, представьте себе... Очень красивая вещь!». Поэтому он так любит красивые геометрические рисунки, именно рисунки, а не чертежи. В бесчисленных тетрадках, где он записывает свои выводы или конспектирует работы, на доске во время лекций — везде он постоянно рисует. Если, например, многогранник, то грани должны быть оттенены, чтобы многогранник был виден в его пространственности. Высшее для него удовольствие — изобразить какое-нибудь доказательство так, чтобы оно было видно.

Отсюда понятна и любовь к горам. Высокие горы — это прежде всего их величественные разнообразные формы — их геометрия, а также их особые краски и живописность больших планов. В высоких горах, на вершине или на перевале можно полностью, в действительности увидеть, ощутить трехмерность пространства, когда не только в двух измерениях расходятся вокруг горные хребты, но и в третье измерение — вниз — уходят на километр, на два, на три склоны гор, ледники и долины. Горы — это гигантская скульптура, величественная архитектура, воздвигнутая самой природой, чтобы поднять взор и устремления человека к их неприступным вершинам. В них — призыв пребывающего величия и красоты, в них — природа и искусство, живопись красок и геометрия форм. В них есть внутреннее содержание. Искусство долго не могло выразить его, пока, наконец, Н. К. Рерих не сделал этого. У него горы — уже не только внешность, но и смысл.

Так у Б. Н. Делоне геометрия, альпинизм, живопись, теория чисел, музыка, техника — все сплетается и скрещивается в одном — в эстетическом восприятии и выражении. Радость красоты побуждала Бориса Николаевича творить в математике, преодолевая трудности поиска, она побуждала его ходить в горы, преодолевая тяготы восхождений. Ни в науке, ни в искусстве, ни в горах прекрасное не достигается иначе, как трудом. Вдохновение не посещает ленивых. Наука — это громадный труд, долгая упорная работа с неудачами и успехами. Чаще с неудачами. О них только не пишут в научных статьях и мало говорят.

Альпинизм — это тоже тяжелая работа: тащи целый день двадцатикилограммовый рюкзак, поднимаясь по крутым склонам, и потей. Альпинисты называют это «ишачкой». А нередко непогода и опасности заставляют отступать, и цель остается недостигнутой, как в неудавшемся поиске математического доказательства.

Восхищение прекрасным всегда побуждало Бориса Николаевича не только самому наслаждаться им, но и приобщать к этому других. Поэтому он так общителен, всегда готов заразить других и своей математикой, и альпинизмом, и лыжными прогулками. Поэтому он и теперь, в девяносто лет, сохраняет энтузиазм и восторженность. «Нет, Вы только послушайте, что доказал у меня этот...», — и он вовлекает вас в рассказ о последнем достижении своего ученика с такой же энергией, восхищением, какие были пятьдесят лет назад.

Энтузиазм, как объяснил У. Л. Брэгг, один из создателей рентгеновского анализа, — это главное свойство, определяющее ученого; даже не специальные способности, а именно энтузиазм.

Энтузиазм Б. Н. Делоне выразился не только в его личных занятиях, но в его стремлении и умении привлечь к предмету своего энтузиазма также других людей. В этом — талант учителя, пропагандиста прекрасного. Поэтому роль и значение Б. Н. Делоне не только в его личных достижениях, но также в его значительном влиянии, которое он оказал на других.

Он был блестящим пропагандистом альпинизма, инициатором создания первого альпинистского лагеря (1931 г.). Он был одним из инициаторов и организаторов первой математической олимпиады школьников; она проходила в Ленинграде в 1934 г. Олимпиады стали традиционными в Ленинграде, затем в Москве, а потом и в других городах нашей страны, и теперь, кажется, мало кто знает, что они пошли от Б. Н. Делоне.

Б. Н. Делоне оказал существенное влияние на многих математиков, таких как Н. Г. Чеботарев, Д. К. Фаддеев, Б. А. Венков, В. А. Тартаковский и др. Он по праву может считаться прародителем того, что за границей называют «русской геометрией».

Когда в 1929 г. я поступил на физический факультет Ленинградского университета, там лекции по математике на первом курсе читал Б. Н. Делоне. Он произвел на меня громадное впечатление и остается в моем представлении образцом лектора; лектора, который, по определению Менделеева, является возбудителем в зрелом юноше научных устремлений. Читал Борис Николаевич очень четко и ясно, разбивая лекцию на небольшие, точно обозначенные пункты, располагая на доске в строгом порядке четко выписанные формулы и наглядные рисунки. При этом изложение его было живым, образным, вместе с основным материалом в лекциях постоянно появлялись отступления — не анекдоты, а математика, что-нибудь такое, что самому Борису Николаевичу представлялось интересным и о чем он поэтому хотел рассказать, вплоть до нерешенных еще проблем, если они были доступны физикам первого курса.

Снижение уровня преподавания, которое переживают теперь многие вузы, связано, в частности, с отрицанием менделеевского определения лектора. Когда-то, лет двадцать назад в «Комсомольской правде» было сказано, что «ум юноши — это не сосуд, который нужно наполнить, а светильник, который нужно зажечь». Один весьма высокопоставленный в то время деятель в широком собрании решительно выступил против этого, провозглашая, что «надо наполнять, наполнять, наполнять!». Но двигать вперед великое дело могут те, кто горит, а не те, кто лишь наполнен.

На собрании, посвященном его 60-летнему юбилею, Борис Николаевич Делоне сказал: «К моему счастью, меня выбрали в члены-корреспонденты довольно рано, и поэтому уколы самолюбия меня не мучили». Хотя он мог бы претендовать на звание академика. Любовь Бориса Николаевича к науке, его стремление передать ее другим не смешиваются у него ни с какой корыстью — ни в отношении к ученикам, ни в стремлении к более высоким постам и званиям, как это бывает, к сожалению, не так уж редко.

Долголетие определяется в первую очередь генами — тем, что человеку на роду написано, а на этой основе и тем, в каких он вырос условиях, как жил и как использовал данное ему генами, про что раньше говорили «от бога». И в том и в другом Б. Н. Делоне выпала удача, и он хорошо использует то, что было написано ему на роду, не терзаясь ни завистью, ни страстями карьеры, ни волей к власти, обращаясь к людям с добром, любя науку и работая в ней прилежно и преданно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борис Николаевич Делоне : Библиография / Вступит. ст. Д. К. Фаддеева. М.: Наука, 1967.

Владимир Александрович Фок

Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 489–496

Владимир Александрович Фок был самым крупным физиком-теоретиком в нашей стране. Очень немногие ученые во всем мире успешно работали в обеих фундаментальных теориях физики — в квантовой механике и теории относительности, возникших в начале нашего столетия. В. А. Фок внес в обе эти теории чрезвычайно существенный вклад, не говоря о его результатах в проблемах математической физики, получивших большое практическое значение, и др. Но не только выдающиеся научные достижения характеризуют В. А. Фока. Он был человеком особого, удивительного склада, соединяя в себе, как в поведении, так и в научном творчестве, черты не только разнообразные, но, можно сказать, противоположные. Педантизм математической строгости и высокое искусство в решении конкретных прикладных задач сочетались в нем с глубоким проникновением в основы, в философию науки; за внешностью кабинетного ученого, погруженного в отвлеченные проблемы, скрывались блестящее остроумие, бойцовский характер полемиста — страстного защитника истины, несгибаемая принципиальность и мужество.

В 1938 г. были поползновения сделать задачей университета подготовку школьных учителей и превратить его в своего рода педвуз. Это вызвало протесты среди университетских математиков и физиков — преподавателей и студентов. Как всегда, открыто протестующих было мало; хотя с ними были согласны многие, но предпочитали помалкивать. Однажды мы обсуждали эту проблему с В. А. Фоком. Между прочим, он неодобрительно отозвался о профессоре, побоявшемся присоединиться к протесту. В. А. Фок заметил: «Трусость не влияет на вероятность отсидки».

Я хорошо помню эти его слова, тем более значительные, что сам В. А. Фок был арестован в 1937 г. и пробыл некоторое время в заключении. В его словах — мужество преданности принятой позиции и вместе с тем остроумная ирония в слове «отсидка». Таков был В. А. Фок.

Для его характеристики важно вспомнить, что, окончив гимназию в 1916 г. и поступив в университет, он вскоре его оставил, зачислился добровольно в Артиллерийское училище, окончил его ускоренный курс и был отправлен на фронт, откуда вернулся по демобилизации в начале 1918 г. и возобновил занятия в университете.

Осенью 1930 г., когда я был на втором курсе физического факультета, меня прикрепили к В. А. Фоку для подготовки к занятиям теоретической физикой. Когда в 1932 г. я бывал у него дома в связи с дипломной работой, он как раз читал «Материализм и эмпириокритицизм» и делился впечатлениями. Они были потом зафиксированы в предисловии к его фундаментальной монографии «Пространство, время и тяготение», вышедшей в 1955 г. Он прямо указал там, что его взгляды на основы теории тяготения Эйнштейна сложились под влиянием книги В. И. Ленина.

В. А. Фок был убежденным приверженцем философии диалектического материализма. После войны на физическом факультете возник философский семинар — один из первых, если не первый, в стране из философских семинаров, распространившихся со временем по всем научным учреждениям. В. А. Фок был в числе организаторов и постоянным участником этого семинара. Я тоже был его участником и потому знаю его работу. Она была очень интересной, живой, содержательной, острой. Позже в философских семинарах наступил застой, падение живого интереса, переход от философских проблем к «методологическим», появилась «установочная» регламентация (даже в специальных вопросах) со стороны райкома. Но как можно регламентировать мысль В. А. Фока и других ученых — участников семинара?

Время 30–50-х гг. было острое. Мы овладевали диалектическим материализмом, оттачивая свое понимание на проблемах науки. А вокруг них, вокруг физики, вокруг ее фундаментальных теорий — квантовой механики и теории относительности, по проблемам их толкования и философского осмысления шли в стране жаркие дискуссии. С одной стороны стояли физики, держащиеся, можно сказать, стандартных, заимствованных с Запада точек зрения, с другой — философы и некоторые физики, нападавшие на одну или другую из названных теорий, и чаще — на обе, приписывавшие не только тем или иным их толкованиям, но и самим теориям идеализм, реакционность и даже мракобесие.

Так, например, теория относительности подвергалась поношению как «реакционное эйнштейнианство». При этом демонстрировалось не только недостаточное понимание самой теории, но порой дремучее невежество. И все это активно проповедовалось в статьях и устных выступлениях от лица марксистско-ленинской философии.

Ученые, придерживающиеся стандартных взглядов, были менее активны, но в изложении теории они допускали толкования, не только чуждые философии диалектического материализма, но порой ошибочные до нелепости. Что же касается диалектического материализма, то довольно многие считали вообще неуместным связывать его с физикой.

В этой обстановке В. А. Фок вел борьбу на два фронта; я тоже участвовал в ней. С одной стороны, В. А. Фок углублял и уточнял понимание физических теорий на уровне точной науки, с другой — вел острую полемику против их неквалифицированной критики, соединяя в своих статьях серьезные разъяснения с остроумием и сарказмом в адрес невежества.

Важным пунктом разногласий было понимание общей теории относительности. Философы, не понимавшие и третировавшие специальную теорию относительности, тем более не понимали и третировали общую теорию. Что же касается физиков, то они, относясь к ней с величайшим пиететом, трактовали ее, однако, неверно.

Наиболее четко это выступало в ходячем утверждении, что теория Эйнштейна сняла противоречие систем Птолемея и Н. Коперника, что с точки зрения этой теории якобы обе системы — геоцентрическая и гелиоцентрическая — равноправны. Как писал еще в 20-х гг. Я. И. Френкель в своей книге по теории относительности: «Галилей был так же неправ или, вернее, так же прав, как и представители церкви, обвинявшие его в ереси» [1, с. 99]. Эта претензия на остроумие по поводу суда инквизиции и судьбы Г. Галилея выражает, однако, совершенное заблуждение, если не сказать вздор. Земля вращается в том же смысле, в каком вращается карусель или колесо велосипеда, и если считать равноправным вращение колеса или мира вокруг колеса, то неясно, вокруг какого из колес вертится Вселенная. Не вдаваясь здесь в более глубокий анализ, скажу только, что с точки зрения теории Эйнштейна при верном понимании вопроса правы Н. Коперник и Г. Галилей, а не Птолемей и инквизиторы. Между тем в книге А. Эйнштейна и Л. Инфельда «Эволюция физики» утверждается, что системы Птолемея и Н. Коперника равноправны. Книгу писал Леопольд Инфельд, бывший сотрудник А. Эйнштейна, но А. Эйнштейн ее одобрил. Поэтому выступление против этого ошибочного утверждения воспринималось как выступление «против самого Эйнштейна».

В. А. Фок выступил со своими взглядами на проблему не в форме полемики, а с непосредственно научными выводами, с математически точной теорией планетной системы на основе теории Эйнштейна. Дело было никак не в отрицании или исправлении теории, а в верном ее понимании и применении к данной проблеме.

Однако позиция В. А. Фока вызвала резкую реакцию. В 1955 г. отмечалось пятидесятилетие теории относительности (специальной). На конференции в Берлине, где был В. А. Фок (и я тоже), Л. Инфельд выступил с обширным докладом. Он предварил его словами: «Мой доклад не полемика», но весь доклад представлял полемику с В. А. Фоком, хотя и не выраженную явно. Л. Инфельд также написал воспоминания, которые в переводе с некоторыми сокращениями были опубликованы в «Новом мире» [2].

Там работа В. А. Фока была презрительно названа «экспериментами Фока» и В. А. Фок был поставлен в один ряд с Т. Д. Лысенко. Понятно: раз выступает в чем-то против А. Эйнштейна, значит, того же поля ягода. И эта грязь была опубликована в «Новом мире». Дело Л. Инфельда было демонстрировать свое отношение к работам В. А. Фока и свое невежество. Но физик, рекомендовавший его сочинение к публикации в «Новом мире», мог вместе с другими сокращениями убрать выпады против В. А. Фока. Это не было сделано. И, конечно, не по недосмотру, а для того, чтобы бросить грязь в В. А. Фока чужими руками. Ответ Л. Инфельду [3] не был принят редакцией «Нового мира», так что она позаботилась о том, чтобы не снимать с В. А. Фока брошенной в него грязи.

Когда Ленинградский университет выдвинул книгу В. А. Фока «Пространство, время и тяготение» на Ленинскую премию, ее отклонили. Как же можно было дать премию за книгу, где важная проблема трактовалась противно А. Эйнштейну, а в предисловии автор явно заявлял о своей философской позиции (позже В. А. Фок рассказывал мне, как один крупный физик выражал недовольство его книгой, и, когда В. А. Фок предложил ему обсудить ее на уровне науки, то выяснилось, что тому книга не нравится, поскольку в ней нет позитивизма). Но так как не дать В. А. Фоку премию было бы слишком неприлично, то ее присудили ему за работы по квантовой механике.

Еще раньше, после упомянутой Берлинской конференции 1955 г., В. А. Фок выступал в Москве и был принят чуть ли не в штыки. Кстати, о его выступлении и отрицательной реакции на него московских физиков писал Л. Инфельд в своих воспоминаниях.

Между прочим, мои выступления встречали подобную же реакцию. Когда В. А. Фок, вернувшись из Москвы, рассказывал мне о том, что там происходило, у меня возник образ: мы стоим спина к спине, окруженные нападающими. И вспомнились «Сердца трех» Джека Лондона [4, с. 308]:

> Мы — спина к спине — у мачты
> Против тысячи вдвоем!

Так это переживание и сохранилось в памяти после прошедших долгих лет.

Прошло время, и В. А. Фок победил, т. е. победила истина, которую он выражал и отстаивал. Истина обладает этим чудесным свойством — побеждать и утверждаться вопреки всему. Она в ее объективности говорит сама за себя. А человек, отстаивающий ее, являет собой моральный пример стойкости и верности истине.

Борьба вокруг теории относительности, однако, продолжается в другом плане. Против А. Эйнштейна выдвигают А. Пуанкаре, обращая внимание на его несправедливо забытую роль в создании теории относительности. Вместе с тем одновременно проповедуют его ошибочные воззрения — конвенционализм. Печально при этом, что, как было и прежде, с обеих сторон — «за» и «против» А. Эйнштейна — есть еще нота скрытых националистических настроений. В. А. Фоку всякий национализм был отвратителен; он мог бы ответить и адептам конвенционализма. Ибо В. А. Фок был ни за, ни против А. Эйнштейна; ни за, ни против А. Пуанкаре. Он был за истину, против всяких ее извращений. Над поисками истины он настойчиво трудился и упорно сражался, отстаивал истину, вопреки господствующим мнениям, вопреки пренебрежению коллег, вопреки наветам.

В дискуссиях об основах квантовой механики, шедших в 30–50-е гг., так же как по поводу теории относительности, выступал ряд наших философов и физиков с «разоблачениями» идеализма, с «опровержениями», демонстрируя непонимание теории. И против этой невежественной критики выступал В. А. Фок.

Но вместе с тем в понимании квантовой механики заключались и до сих пор не преодолены существенные трудности, так что о ней вели споры крупнейшие физики во всем мире: М. Планк, Н. Бор, А. Эйнштейн, Э. Шрёдингер, В. Гейзенберг и др. У нас свою концепцию ее основ развивал такой крупный ученый, как Л. И. Мандельштам.

В. А. Фок участвовал в этих дискуссиях и проникал в проблемы квантовой механики с особой глубиной. Примкнув вначале (в конце 20-х гг.) к концепции, идущей от Н. Бора и названной поэтому копенгагенской (так как центром ее был Институт Бора в Копенгагене), В. А. Фок с присущим ему упорством, тщательностью анализа и глубиной проникновения критически преодолевал недостатки этой концепции и свои собственные ошибки, перерабатывая концепцию Бора с позиций последовательного диалектического материализма. В. А. Фок обсуждал проблемы с Н. Бором с тем обоюдным стремлением лучше выяснить истину, какое присуще настоящим ученым, причем Н. Бор в большинстве принимал критические соображения Фока. Дискуссии происходили между ними, в частности, во время пребывания В. А. Фока в Копенгагене в феврале—марте 1957 г. [5].

Свои взгляды на основы квантовой механики В. А. Фок развивал в течение долгого времени, можно сказать, с момента ее появления, посвятив этому около тридцати статей. Он излагал свои взгляды также в лекциях, которые читал на физическом факультете Ленинградского университета. Студенты, слушавшие его, говорили: «Нельзя пропустить ни одного слова — такая концентрация содержания».

В. А. Фок соединял в себе глубокого мыслителя в выяснении истины с мужеством борца за ее утверждение. Но человек, даже если он подобен Гераклу, имеет и обычные человеческие черты.

На облик Владимира Александровича наложило, конечно, отпечаток то, что он был почти глухим — без слухового аппарата слышал очень плохо.

Бывало, на заседаниях он выдвигал вперед аппарат, чтобы лучше слышать, но иногда, если выступающий говорил «не то» или, что хуже, говорил вздор, Владимир Александрович мог вынуть слуховое устройство из уха, и оратор это видел. В. А. Фок был строг и особенно не терпел самоуверенной болтовни. Впрочем, у разных людей разные оценки; у В. А. Фока были высокие требования.

Математикой В. А. Фок владел в совершенстве и соображал очень остро и быстро. Как-то в теоретическом отделе Физического института университета мы стояли у доски, глядя на интеграл, выписанный членом-корреспондентом АН СССР Ю. А. Крутковым. Никто не мог ему помочь вычислить этот интеграл. «Вот придет Фок, он решит», — сказал Ю. А. Крутков. Вошел В. А. Фок и, едва взглянув на доску, сказал: «Разлагается по бесселевым функциям», и стал выписывать разложение.

Профессор В. Р. Бурсиан занимался теорией одного метода геофизической разведки и постоянно прибегал к помощи В. А. Фока. Жена В. А. Фока жаловалась: «Владимир Александрович все ему объяснит, покажет, а через две недели Виктор Робертович запутается и опять приходит». Но В. А. Фок, конечно, не жаловался, а помогал.

Не нужно думать, будто В. Р. Бурсиан был подобен слабому студенту. Это серьезный физик-теоретик, настоящий профессор, читал курсы термодинамики и молекулярной физики [1)]. Но вопрос, которым он занимался, был математически труден. И, конечно, он много уступал В. А. Фоку в математической силе. В способности решать конкретные задачи математической физики с В. А. Фоком, я думаю, никто не мог сравниться.

В. И. Смирнов на юбилее В. А. Фока рассказывал, что он как-то давно говорил с Владимиром Александровичем об одной математической задаче, которую считал почти безнадежно трудной. А В. А. Фок ее скоро решил. «Тогда я еще не знал, кто такой Владимир Александрович», — сказал В. И. Смирнов.

При такой мощи в математике, особенно в ее формальных выводах, В. А. Фок имел гуманитарные и поэтические склонности. Как-то заходит к нему врач. В. А. Фок лежит на диване и говорит: «Вот решил отдохнуть — читаю Тацита». Он читал его в подлиннике по-латыни. К юбилею Н. Бора в 1935 г. физики разных стран составили шуточный сборник, для которого В. А. Фок написал стихи — по-немецки, конечно. В другой раз В. А. Фок написал в честь того же Н. Бора шуточную оду. Она кончалась словами [2)]:

Ликуй же, Бор! Ты победил,
Ты физиков всех с толку сбил.

[1)] Все это было примерно в 1934 г. Позже В. Р. Бурсиан в числе других профессоров факультета был арестован и из заключения не вернулся.

[2)] Полный текст приведен в сборнике статей, посвященных 80-летию со дня рождения В. А. Фока [6].

Хвала тебе! Ты слово рек —
И одуревший человек
Уж полон верою в него,
Не понимая ничего.

Как-то мы говорили о том, что электропоезда утратили красоту паровых. «Паровоз — он живой: бежит, кричит и машет шатунами», — сказал В. А. Фок. В другой раз он заметил: «Смех вовсе не обязательно унижает. Дети — ведь они такие смешные». В том, как это было сказано, светилась радость и любовь к детям. И он закончил: «Они такие милые»…

ЛИТЕРАТУРА

1. *Френкель Я. И.* Теория относительности. Пг.: Мысль, 1929.
2. *Инфельд Л.* Страницы автобиографии физика // Новый мир. 1965. № 9. С. 169–195.
3. *Александров А. Д.* Истина и заблуждение // Вопр. философии. 1967. № 4. С. 66–76 [3].
4. *Лондон Дж.* Соч. М.: Правда, 1966. Т. 8.
5. *Фок В. А.* Замечания к статье Бора о его дискуссиях с Эйнштейном // Успехи физ. наук. 1958. Т. 66, вып. 4. С. 599–602.
6. Труды Государственного оптического института им. С. И. Вавилова. 1978. Т. 43, вып. 177. С. 62.

[3] См. с. 450–470 этого тома. — *Прим. ред.*

Владимир Иванович Смирнов

Проблемы науки и позиция ученого. Л.: Наука, 1988. С. 496–506

Прошло четырнадцать лет с того дня, как не стало Владимира Ивановича.

И вот теперь, когда я думаю о нем, передо мной ясно встает его образ, как бы окруженный сиянием исходящего от него душевного света, подлинного добра, которое соединяет в себе отзывчивость с требовательностью, душевную мягкость с твердостью духа и ясностью разума. Этот свет добра ощущал каждый, кого Владимир Иванович встречал с характерной доброжелательностью веселого взгляда. Свет радости и живая заинтересованность в человеке, в научном результате, в философской мысли, радости работы, чтения лекций, в музыке…

Владимир Иванович был ученым-математиком, академиком. Но, кроме того, по своей сущности он был учителем, в том общем смысле, что учитель — тот, кто учит, будь он школьный педагог, профессор или проповедник.

Ученый обращен на объект своего исследования, на проблему, подлежащую решению, от всего остального он в своем качестве ученого отвлечен, его цель — научный результат. Но учитель обращен к людям. Его цель — духовное обогащение, развитие человека. Ученый сообщает научный результат, учитель еще стремится сделать его возможно более понятным. Разумеется, ученый и учитель в той или иной пропорции сочетаются в одном человеке и едва ли возможен хороший учитель, который не бывает хоть иногда ученым. Владимир Иванович был выдающимся ученым и великим учителем.

Даже из официального краткого жизнеописания видно, что Владимир Иванович был учителем всю жизнь, лишь только кончил университетский курс.

Владимир Иванович Смирнов родился 10 июля 1887 г. в Петербурге, там же окончил гимназию в 1905 г. и поступил на физико-математический факультет Петербургского университета. Закончив его в 1910 г., преподавал в гимназии, в 1912 г. был, как тогда говорили, «оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию» (по современному — принят в аспирантуру) под руководством В. А. Стеклова, имя которого носит Математический институт АН СССР. Затем с 1915 г. до конца жизни (с небольшим перерывом в 1918–1920 гг.) Владимир Иванович читал лекции в Петроградском—Ленинградском университете. Он долго преподавал также в «путейском» институте, ныне Ленинградском институте инженеров железнодорожного транспорта (1912–1918 и 1921–1932 гг.), Горном институте (1914–1916 гг.), в университетах Екатеринослава (1918/19 г.) и Симферополя (1919/20 г.), на Бестужевских курсах и в гимназии (1910–1918 гг.).

В Ленинградском университете Владимир Иванович заведовал рядом кафедр. Первую из них — кафедру теории функций комплексного переменного он организовал в 1926 г.

В 1931 г. Владимир Иванович был активным участником создания при математико-механическом факультете университета Научно-исследовательского института математики и механики (НИИММ); в 1937 г. он становится его директором и остается на этом посту двадцать лет, организуя новые лаборатории, выполняя в военные годы оборонные исследования. Он также деятельно участвует в послевоенном развитии математико-механического факультета.

Параллельно с работой в университете Владимир Иванович в 1928–1935 гг. возглавлял теоретический отдел в Сейсмологическом институте АН СССР. В 1932 г. он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР, а в 1943 г. — академиком.

Как принято говорить в официальном случае, Советское правительство высоко оценило научную и общественную деятельность В. И. Смирнова. Он был удостоен Государственной премии (1948 г.), награжден четырьмя орденами Ленина, двумя другими орденами, а также медалями, и в 1967 г. ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда.

Краткая характеристика Владимира Ивановича содержится в отзыве, который академик С. Н. Бернштейн (крупнейший наш математик тех лет) написал в 1943 г., представляя Владимира Ивановича к избранию в академики: «Научная и педагогическая деятельность В. И. Смирнова широко известна. Он является автором четырехтомного курса высшей математики, замечательного не только исключительным богатством содержания, охватывающего все разделы современного анализа, имеющие непосредственное приложение к физике и технике, но и доступностью изложения. Глубокий знаток важнейших областей математики и механики, В. И. Смирнов обладает широким научным кругозором и более всех советских математиков содействует укреплению связи между физикой и математикой. Не случайно среди его многочисленных учеников, которые выдвинулись в различных областях математики, на первом месте можно назвать академиков С. Л. Соболева и Н. Е. Кочина, научная деятельность которых развивалась под сильным и благотворным влиянием В. И. Смирнова. У него имеется ряд важных работ... по теории функций комплексного переменного и линейным дифференциальным уравнениям... не менее замечательные результаты по интегрированию волновых уравнений и теории упругости, дающие решение задач большого практического значения».

Важный этап в жизни Владимира Ивановича начался в 1921 г., когда он возглавил и реорганизовал преподавание математики для физиков. До этого на физико-математическом факультете математика излагалась одинаково для математиков и физиков. Владимир Иванович по нескольку раз прочел студентам-физикам все основные и специальные математические курсы. Естественно, он принял живейшее участие в организации физического факультета, которую осуществлял Д. С. Рождественский [1)].

На созданном в 1929 г. физическом факультете Владимир Иванович работал с самого начала, возглавив кафедру математики, которой он руководил до последних дней своей жизни.

Преподавание математики физикам необходимо привело Владимира Ивановича к тому, что он приступил (вместе с профессором Я. Д. Тамаркиным) к составлению руководства по математике для физиков. Так в 1924 г. появился первый том «Курса математики для физиков и инженеров» Я. Д. Тамаркина и В. И. Смирнова; второй том вышел в 1926 г. Мы все, учившиеся на физическом факультете (я поступил туда в 1929 г.), пользовались этими книгами.

Позже Владимир Иванович существенно переработал оба тома уже без участия Я. Д. Тамаркина (который еще раньше эмигрировал) и приступил к продолжению курса, превращенного им в знаменитый пятитомный «Курс высшей математики», охвативший почти все ее существенные для физики разделы вплоть до теории групп и функционального анализа. Пятый том в первой редакции был закончен в 1947 г., так что создание курса заняло у Владимира Ивановича более двадцати лет.

Ориентируя свой курс на то, что важно именно для физики, творчески перерабатывая целые разделы, включая в курс современные новые методы и результаты, Владимир Иванович достиг того, что книги его получили широчайшее международное признание и были переведены на все языки, на которых читается высшая математика. У нас курс переиздавался неоднократно, в частности второй том — двадцать шесть раз.

В огромной работе над курсом ярко проявились свойственные Владимиру Ивановичу черты подлинного учителя. Это видно, во-первых, из самого факта написания столь полного курса: желание донести до людей то знание,

[1)] Дмитрий Сергеевич Рождественский (1876–1940) — физик, академик с 1929 г., организатор и первый директор Государственного оптического института, к сожалению, не названного его именем. Он привлек к исследовательской работе будущих академиков-физиков А. А. Лебедева, А. Н. Теренина, В. А. Фока, будущих членов-корреспондентов Е. Ф. Гросса, С. Э. Фриша и др.

то духовное богатство, которое представляется ему ценным. Желание передать людям и то новое, что сам узнал не так давно: в пятом томе излагаются новейшие для 40-х гг. результаты. Во-вторых, это проявилось в стремлении сделать свою работу как можно лучше, чтобы изложение было возможно более ясным, строгим, доступным и верно понимаемым. При этом он не останавливался на достигнутом, а насколько мог улучшал свою работу.

Добросовестность Владимира Ивановича тем более заслуживает быть подчеркнутой, что в 70-е и 80-е гг. в учебную литературу проникла торопливость, неряшливость, которую допускают даже крупные ученые. В связи с этим «Курс высшей математики» выступает не только как выдающийся научно-педагогический труд, но и как высокий моральный пример. В конечном счете глубочайшая суть понятия «учитель» нравственная.

Настойчивое стремление распространять знания, побуждать развитие науки, умение четко реагировать на ее новые направления проявлялось во всей деятельности Владимира Ивановича и сопровождалось характерным для подлинного учителя свойством видеть свой успех в успехах тех, кого он привлек, кому помог... Были периоды, когда Владимир Иванович заведовал одновременно несколькими кафедрами. Но никак не для того, чтобы приумножить свою власть, а лишь только для того, чтобы подготовить достойного преемника, которому можно будет доверить кафедру. Так, например, руководя после войны кафедрой гидроаэродинамики, Владимир Иванович немедленно передал ее талантливому молодому ученому С. В. Валландеру, как только к тому явилась возможность.

Привлекая внимание к новым направлениям, в которых сам Владимир Иванович мог и не работать, он создал совместно с Г. М. Фихтенгольцем семинар по теории функций вещественной переменной и функциональному анализу, побудив их развитие в Ленинградском университете. Точно так же, понимая новую роль теории групп в физике (в квантовой механике, в теоретической оптике), он в 1932 г. читал курс этой теории в Оптическом институте.

Значительно влияя на развитие науки, Владимир Иванович никогда не выдвигал свою роль, а скорее затушевывал ее. Это хорошо описывает один из его учеников Г. И. Петрашень (ставший в своей области крупным ученым): «Он многократно оказывался официальным (или неофициальным) руководителем групп научных работников, выполнявших прикладные исследования, многие годы с огромным успехом руководил работой не только математических научных семинаров, но и семинаров, посвященных актуальным проблемам механики (гидроаэродинамики, теории упругости и др.), и, наконец, чрезвычайно много внимания уделял консультациям и обсуждениям статей необозримого числа исследователей, прибегавших к его помощи в научной работе. Каждый из участников упомянутых семинаров мог бы засвидетельствовать, в какой огромной степени В. И. Смирнов умел стимулировать научные исследования... что же касается консультаций и обсуждений текстов работ, приносимых В. И. Смирнову с просьбой направить их в центральный журнал, то здесь он всегда поражал собеседника способностью почти мгновенного проникновения в самую суть чужого для него исследования... Очень скоро он начинал ориентироваться в обсуждаемых вопросах не хуже (а иногда даже лучше) самого автора, что делало его замечания и критику чрезвычайно ценными. В некоторых же случаях его советы приводили к полной переработке обсуждаемой статьи, соавтором которой (всегда негласным) фактически становился В. И. Смирнов. И во всей этой деятельности проявилась одна из характеристических его черт как человека и ученого, а именно: желание оставаться в тени даже тогда, когда его вмешательство в исследование имело решающее значение для выяснений сути рассматриваемой проблемы. Больше всего его радовал факт получения нового красивого или практически полезного результата. Вопрос же об авторстве он всегда решал в пользу лица, обратившегося к нему за помощью» [1, с. 16].

Влияние на развитие науки через других людей с тем большей силой выступает в учениках, которые превосходят учителя по тем или иным конкретным научным достижениям. Такими учениками Владимира Ивановича явились упомянутые в отзыве С. Н. Бернштейна академики С. Л. Соболев, Н. Е. Кочин, а также И. А. Лаппо-Данилевский. Даже с точки зрения внешней оценки их достижений они превзошли Владимира Ивановича. Первые двое стали академиками в 1939 г., тогда как В. И. Смирнов лишь в 1943 г. И. А. Лаппо-Данилевский избран членом-корреспондентом в 1931 г., а В. И. Смирнов — в 1932 г.; И. А. Лаппо-Данилевский умер в том же 1931 г. в возрасте всего 34 лет. Его выдающиеся труды, оставшиеся в рукописи, были выправлены, отредактированы и изданы В. И. Смирновым при участии Н. Е. Кочина в трех томах.

К наиболее выдающимся воспитанникам кафедры и семинара В. И. Смирнова относится также академик Л. Д. Фаддеев, который руководит теперь кафедрой физического факультета, созданной Владимиром Ивановичем, и является директором Ленинградского отделения Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, а также член-корреспондент О. А. Ладыженская [2)], которую Владимир Иванович привлек к работе еще в период написания последних томов своего курса.

В связи с упоминанием об издании трудов И. А. Лаппо-Данилевского напомню, что Владимир Иванович всю жизнь вел большую работу по истории математики и изданию трудов классиков науки (Л. Эйлера, М. В. Остроградского, А. М. Ляпунова, А. Н. Крылова).

[2)] В 1990 г. О. А. Ладыженская (1922–2004) была избрана действительным членом Академии наук СССР. — *Прим. ред.*

Конечно, Владимир Иванович оказывал влияние на развитие науки и как выдающийся директор НИИММ при математико-механическом факультете, но не будем останавливаться на этой стороне его деятельности, а обратимся к самой прямой его роли как учителя — к его лекциям.

Владимир Иванович был превосходным лектором, одним из лучших, если не самым лучшим среди наших лекторов-математиков этого века. Он не украшал лекции словесными узорами, но его лекции неизменно увлекали аудиторию. Он читал с удовольствием, с любовью к предмету, с уважением к слушателям, радуясь тому, что рассказывал. Взгляните на его фотографию, помещенную в «Вестнике ЛГУ» (1975. № 1. С. 3): какое искреннее веселье на лице, и как фон — доска с математическими формулами. «Послушайте меня», — говорил Владимир Иванович, чтобы перестали записывать (позже, когда слушатели привыкали, он с той же целью менял тональность голоса), и сообщал для желающих еще много интереснейшего дополнительного материала. На экзамене же клал на стол лист бумаги с написанными на нем основными формулами из курса, по которому шел экзамен. Он был чужд формализма и предъявлял требования к пониманию, к соображению, а не к памяти, хотя сам обладал прекрасной памятью.

Чтение лекций — это искусство, соединяющее творчество мыслителя с творчеством актера. Разумеется, оно, как всякое искусство, требует таланта и известных природных данных, а они были у Владимира Ивановича: внешность, красивый баритон. Но подлинное содержание этой форме искусства давали любовь к предмету, к слушателям, к самому процессу чтения лекций — сообщения и разъяснения истины. Тут проявлялся радостный, живой интерес Владимира Ивановича к преподаванию, как он проявлялся у него во множестве других направлений. Не в таком ли живом интересе к людям, к науке, к явлениям жизни и искусства заключается подлинная культура человека?

Предмет особой любви Владимира Ивановича составляла музыка. Он был постоянным посетителем концертов в филармонии, особенно симфонических. В молодости любил Р. Вагнера, но со временем стал предпочитать других композиторов, в частности А. Брукнера и Г. Малера. Дома играл на рояле, часто в четыре руки с Д. К. Фаддеевым. Это бывало регулярно на даче. После концерта был ужин, в летнюю пору на веранде. После войны каждому академику дали дачу, ленинградским академикам — в поселке Комарово. Владимир Иванович постоянно жил там; жил открыто, по-русски гостеприимно и хлебосольно.

Отец Владимира Ивановича был разносторонне образованным человеком. Он был священником, преподавателем закона божьего в Лицее, где когда-то учился Пушкин. Владимир Иванович был десятым ребенком в семье. Из семьи он унаследовал обычаи и прочную православную веру.

По русскому обычаю в его доме бывали, например, блины на масленицу. Подавалась и водка, особенно хороша была морошковая настойка. В домашней обстановке Владимир Иванович носил косоворотку — уже, кажется, вовсе забытую русскую рубашку, беленькую в голубую полоску. В этом не было ни тени национализма. И чистый русский язык, и блины, и косоворотка — все было просто и естественно, так же как его православная вера, которую он, однако, не демонстрировал, а хранил в себе. Всю жизнь Владимир Иванович оставался верующим, и когда я как-то спросил его о вере, он спокойно и искренне ответил: «Я, знаете, верю попросту...». И можно думать, что в его характере, в его деятельности, во всем его облике проявлялась позиция глубокого христианина, вся жизнь которого оказывается преданным служением людям, нужному им делу, с доброжелательностью и высокой требовательностью, без «всепрощения» (особенно он осуждал приспособленцев), с радостью жить без уныния и аскетизма, с мужеством, когда оно необходимо в противостоянии злу, несчастью или страданию.

Мне не пришлось студентом слушать его лекции и участвовать в его семинарах. Наши научные интересы расходились: я был предан геометрии, а Владимир Иванович не был к ней склонен, как откровенно говорил. Но как-то получилось, что в последние годы, особенно когда я уже работал в Новосибирске и бывал в Ленинграде хотя и много, но наездами, у нас с Владимиром Ивановичем сложились близкие отношения, несмотря на наши фундаментальные различия: мою резкость реакций и отрицание всякой веры. Но, значит, была между нами и глубокая общность, несмотря на эти расхождения и разницу в возрасте — двадцать пять лет.

Владимира Ивановича не стало, и нет замены общению с ним, погружению в создаваемую им атмосферу. Но счастливы те, кто мог когда-то к ней приобщиться. Образ его светит нам. Он был из числа тех людей, которых в Индии называют словом «Махатма».

Вспоминаю урок, который он нам как-то преподал. Возрождалось Ленинградское математическое общество. Естественно, его председателем должен был быть Владимир Иванович, и мы в собрании организационного комитета обратились к нему. Он решительно отказывался. Мы настаивали, уговаривая, что он будет освобожден от работы помощниками. Но он сказал: «Всю жизнь я старался исполнять то, что брал на себя, не перекладывая на других. Теперь я стар, не смогу исполнять дело сам, а перекладывать на других не могу».

Мы устыдились и прекратили наши уговоры.

Как это не похоже на распространенный стиль, когда важный ученый, занимая одновременно несколько постов, не затрудняет себя действительным исполнением как будто принятых на себя обязанностей.

Присущее Владимиру Ивановичу сознание долга должно служить высоким примером, как и его добросовестность в исполнении каждого дела, за которое он брался, и чистота его научных критериев.

На фоне этих нравственных высот особо неприглядны случаи, когда научные критерии подменяются интересом к славе и власти, выдвижением «своих людей», когда даже на академических выборах могут сказать: «Голосуйте за В. — его поддерживает Г.».

Известный шекспировский персонаж изрек, что «совесть — только слово», а еще более известный исторический персонаж обещал освободить своих последователей от «призрака совести». Но освобождение от совести начинается в человеке уже тогда, когда в нем вырабатывается сознание, ощущение собственной значительности и непогрешимости, которые внушает ему подобострастие нижестоящих, отсутствие возражений и критики. Так академик или партийный начальник становится «непогрешимым». Тогда теряется добросовестность, ибо все сделанное представляется лежащим вне критики, вне сомнений.

Ничего подобного не случалось и не могло случиться с Владимиром Ивановичем, ибо в нем была глубокая внутренняя скромность (быть может, связанная с присущим настоящему христианину сознанием необходимости смирения).

Скромность Владимира Ивановича выступала и во внешнем его поведении. Раз я был у здания факультета. У тротуара остановилась машина. Из нее вышел Владимир Иванович, в руке он держал папку. Чтобы поздороваться, он хотел снять шапку и подать мне руку. Но одна рука была занята, и он немного замешкался с тем, чтобы и шапка и бумаги оказались в одной руке, освобождая другую для рукопожатия. Приветливая его улыбка соединилась с легким выражением смущения из-за неловкости. Это было давно, но я помню — как будто она была вчера — эту сцену, полную человеческого очарования.

О себе Владимир Иванович как-то сказал: «Моя роль была очень скромна и заключалась в том, чтобы все то, что я получил от своих незабываемых учителей, я постарался передать своим ученикам, о том же, насколько успешно я это сделал, судить не мне» [2, с. 188]. Но как раз благодаря скромности его подлинная роль учителя поколений математиков и физиков оказалась такой громадной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петрашень Г. И.* В. И. Смирнов — основатель ленинградской школы по распространению и дифракции волн // Вестн. ЛГУ. 1975. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 16–21.
2. *Радовский М. И.* Владимир Иванович Смирнов (к 75-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, вып. 6. С. 185–188.

Вступление к воспоминаниям Вадима Делоне «Портреты в колючей раме»

Аврора. 1991. № 5. С. 68–71

Вадим Делоне был осужден на два с половиной года заключения за участие в сидячей демонстрации на Красной площади небольшой группы молодых людей, выразивших этим протест против оккупации Чехословакии в августе 1968 года. Участники демонстрации отделались ссылкой, но Вадим получил «срок», потому что уже был осужден условно по другому процессу. Он попал в каторжную тюрьму на окраине Тюмени (ИТУ-2, Тюмень-14, п/я 34/2 И). Пребыванию в этом «учреждении» и посвящено предлагаемое, как говорится, вниманию читателей произведение[1]. Оно едва ли нуждается в комментариях. Это не плод писательского вымысла, а, можно сказать, документ, где с талантом обрисованы подлинные характеры, нравы и отношения лагерной жизни, сама ее обстановка и психологическая атмосфера.

Мне хочется только привлечь внимание к последним страницам книги, где описано, как Вадим ожидает выхода из тюрьмы своего товарища. В кратком, точном и выпуклом описании представлено мужское товарищество — это простая, а потому тем более фундаментальная ценность. Жаль, не мог выразить Вадиму свое восхищение. Я пишу так, потому что между нами были дружеские отношения, насколько это возможно при разности возрастов (он годился мне в сыновья), различии характеров, взглядов и положения. Поэтому вместо комментария к его описанию лагерной жизни и к его стихам, — а он был поэтом и его стихи, хотя и немногочисленные, еще ждут у нас своего издания — я кратко опишу его жизнь, как я ее вижу, в ее течении и некотором итоге.

Вадим Николаевич Делоне родился 23 декабря 1947 года в доме своего деда, выдающегося математика, члена-корреспондента Академии наук СССР

---

[1] Повесть В. Н. Делоне о лагере — «Портреты в колючей раме» впервые вышла в 1979 г. в парижском журнале «Эхо» № 1–4. Затем были отдельное, уже посмертное, издание в Лондоне в 1984 г., журнальное издание в «Авроре» № 5–6 за 1991 г. и отдельное издание в Омске в 1993 г. — *Прим. ред.*

Бориса Николаевича Делоне. В начале 30-х годов я был в Ленинградском университете его учеником и был принят у него без малого как член семьи — «старший сын»; и когда Борис Николаевич переехал в Москву, я, бывая в Москве, останавливался в их доме (до 50-х годов, но тесные отношения сохранились — отсюда истоки моей связи с Вадимом).

Борис Николаевич Делоне был человеком высокой культуры, разносторонних дарований, ценитель красоты в математике, в природе, в искусстве. Домом руководила с твердыми принципами его жена. Судьба, казалось бы, сулила Вадиму благополучную жизнь. Но эти обещания судьбы были нарушены на пороге юности. Вадим был травмирован потрясением устоев семейства, вызванным внезапным разводом его родителей. Дальше последовали более острые удары.

Вадим был комсомольцем, учился в Педагогическом институте, состоял нештатным сотрудником «Литературной газеты», писал стихи, и поэзия, как он говорил, стала для него делом жизни. Осенью 1965 г. он пытался вместе с другими создать объединение молодых писателей, поэтов; это нашло поначалу поддержку горкома комсомола, которая потом внезапно прекратилась. Попытки найти поддержку в других местах ни к чему не привели ...

В конце концов Вадим был отчислен из института и исключен из комсомола. Так вслед за семейными устоями рухнули для Вадима надежды общественной жизни. При характере Вадима и условиях, в которых он жил, внешне сложился рассеянный образ жизни, а внутри — и это нашло выход в творчестве — политический протест.

Он писал стихи и читал их в разных компаниях. В декабре 1965 г. в связи с публичным чтением стихов он был отправлен на несколько недель в психиатрическую больницу.

Его внутренний политический протест стал активным, по-видимому, под влиянием его друга В.К. Буковского — человека совсем иного, очень твердого характера и твердых убеждений. С Вадимом они были приятелями, и Вадим называл его «Букой». Вадим говорил, что цели В. К. Буковского — установление в СССР капитализма. Но от Вадима я никогда не слыхал, чтобы он держался того же взгляда.

В. К. Буковский был политическим деятелем, Вадим — поэтом.

Тем временем упрочения советской власти ради была рождена политическая статья 190′, по которой и за анекдот могли дать год тюрьмы.

Молодые люди устроили демонстрацию против антиконституционной статьи. Но едва они, встав у памятника А. С. Пушкину, развернули свои плакаты протеста, как их тут же схватили.

Вадим оказался в мрачно известной Лефортовской тюрьме, в камере для двух человек, где находился под следствием целых десять месяцев. Сожители по камере менялись: Вадим был убежден, и надо думать, с основанием, что их ему подсаживали ... Следователи, видимо, хотели выявить что-нибудь зловещее — антисоветскую организацию, связь с заграницей ...

Эти десять месяцев тюрьмы и следствия травмировали, истерзали и без того травмированного Вадима. У него не было сил противопоставить иезуитству суда твердый вызов. Возможно, он отчасти покаялся, «признал ошибки» ... В результате он был осужден условно. В. К. Буковский же был приговорен к трем годам заключения.

Это оставило в Вадиме тяжелое чувство вины.

После освобождения Вадима в Педагогическом институте его, конечно, не восстановили.

В то время — это был 1967 год — мы с женой Марианной Леонидовной, десятилетним сыном и школьной подругой дочери жили в Новосибирске, в Академгородке, в коттедже на краю леса. Мне удалось устроить Вадима в Новосибирский университет, и он поселился у нас как член семьи. Однако в университете он толком не занимался. Наши попытки повлиять на него были довольно безуспешными. Несмотря на это, мы жили мирно; многое обсуждали: проект поэмы о Г. Галилее (против пошедшего тогда от Б. Брехта его умаления), брошюру [2)], которую я писал на темы морали, мою статью [3)] в «Новом мире», заголовок которой — «Раз уж заговорили о науке» — он предложил, и другое. Вадим был добрым, озлобления в нем не было, но в душе его лежала тяжесть. Как-то жена провожала его утром, чтобы он шел вовремя в университет, а он едва двигался. На ее замечание он ответил, что его товарищ В. К. Буковский в заключении, а он на свободе.

То было золотое время Академгородка — время богатой и раскованной духовной жизни: действовали интеллектуальный клуб «Под интегралом», где проходили дискуссии, клуб песни, клуб поэзии, кино-клуб; в картинной галерее Дома ученых проходили выставки Р. Р. Фалька, П. Н. Филонова и других художников (сто́ит вспомнить, что я как председатель временного правления устраивал выставку П. Н. Филонова вместе с секретарем райкома Р. Г. Яновским, ныне членом-корреспондентом АН СССР; председатель Сибирского отделения глава городка академик М. А. Лаврентьев благоволил клубам. Я вспоминаю об этом, чтобы лучше очертить обстановку в городке).

В период, когда Вадим жил у нас, клуб песни в городке организовал большой фестиваль, в котором участвовали приехавшие А. А. Галич, Ю. Ч. Ким и другие «барды». Жена отдала Вадиму свой пригласительный билет на банкет для участников фестиваля. Вадим читал свои стихи в честь А. А. Галича. Жене потом выговаривал за это один из академических устроителей,

---

[2)] *А. Д. Александров.* Наука и нравственность // В кн.: Общество и молодежь. М.: Молодая гвардия, 1968. С. 191–218. — *Прим. ред.*

[3)] *А. Д. Александров.* Раз уж заговорили о науке // Новый мир. 1970. № 10. С. 205–220. — *Прим. ред.*

надо думать, потому, что последовала реакция со стороны партийных органов.

Все кончилось тем, что клуб песни закрыли.

Глубоко задел Вадима, да и взбудоражил городок проходивший в то время в Москве процесс над А. И. Гинзбургом и Ю. Т. Галансковым. Пресса по их поводу была непристойной, цитировалось, например, суждение А. М. Горького: «Предатель хуже вши», значит, можно раздавить ногтем …

Все это теснило Вадима. Он не стал сдавать в университете весеннюю сессию и уехал в Москву.

21 августа 1968 г. сообщили: советские танки вошли в Прагу. 25 августа Вадим с группой друзей вышел на Красную площадь с протестом против оккупации Чехословакии и был арестован. На суде он держался с достоинством и был приговорен к каторжной тюрьме — к двум с половиной годам уголовных лагерей.

Там я навещал Вадима дважды. Первый раз вместе с его младшим братом Мишей зимой 1969 г. Хотя я не приходился Вадиму родственником и формально не имел права на свидание, тюремные власти разрешили его сразу. Второй раз я летел из Новосибирска на сессию Академии наук специально через Тюмень, чтобы встретиться с Вадимом. То было 8 ноября, а в праздничные дни свидания не разрешались, но когда я показал билет в Москву, разрешение было дано. Эта встреча была краткой.

Первое же свидание было длительным — больше суток, при лагере был барак с комнатами для свиданий. Там мы и провели время вместе — втроем без всяких нянек. Надо ли говорить, как мы были рады встрече — Вадим был бодр, здоров, не жаловался и не ругался. Он вспоминается мне как крепкий мужчина.

Выйдя из лагеря, Вадим обосновался в Москве; перебивался на разных работах; женился. Мы встречались как позволяли обстоятельства, так как я жил в Новосибирске.

Он познакомил меня с некоторыми из своих друзей, в частности с П. И. Якиром, сыном известного казненного командарма. П. И. Якир и его товарищ В. А. Красин были под судом и, кажется, «покаялись». Их осуждал А. И. Солженицын, вызвав этим у Вадима резкий протест. П. И. Якир с детских лет, когда казнили отца, пробыл в лагерях и ссылке. Не в характере Вадима было осуждать.

КГБ не выпускал Вадима из поля зрения, не оставлял без внимания. Была арестована его жена. После ее освобождения перед Вадимом была как бы поставлена альтернатива: либо на восток, либо на запад, т. е. либо опять в лагерь, либо — в эмиграцию. Я помню, как остро он не хотел уезжать, но его вынудили уехать.

Сначала Вадим оказался в Вене. Он прислал деду фотографию, на которой был снят в обществе Президента Австрии Бруно Крайского вместе с писателем Виктором Некрасовым. Позже Вадим поселился в Париже, но в эмиграции он не привился совершенно, его глодала тоска. 14 июня 1983 г. он не проснулся ...

В Вадиме соединялись верность, честность и настоящая доброта, душевная мягкость и нежность, но при мягком характере он мог быть решительным, каким явился в демонстрации на Красной площади, на суде и затем в лагере.

Оккупация Чехословакии была преступлением не только против народа Чехословакии, но и против нас самих, преступлением перед идеями социализма, они, можно сказать, были убиты. В ту осень, выступая с философской лекцией перед обширной аудиторией студентов в Ленинградском университете, я сказал, между прочим: «Ленин вышел из вагона перед людьми и говорил; у него не было даже ружей — за ним пошли, а теперь нет иных средств, кроме танков».

Однако, по-видимому, большинство у нас в стране одобряло оккупацию как меру против возможного разрушения Варшавского пакта, с таким соображением: «Мы их освободили от немцев, а они ... ».

Но если уж не теперь, то со временем истинная суть подавления народа, стремящегося к большей справедливости, будет понятна, и тем ярче выступит поступок тех, кто вышел на Красную площадь с протестом. Останется в истории память о них, о Вадиме, о лозунге, который он держал в руках: «За вашу и нашу свободу» ...

В заключение своего последнего слова на суде Вадим сказал: «Я понимаю, что за пять минут свободы на Красной площади я могу расплатиться годами лишения свободы».

Был особый душевный подъем, трепет обретения свободы с пониманием опасности. «Бессмертья, может быть, залог» ... И в самом деле, протест на Красной площади останется в памяти истории.

Александров и современность

С. С. Кутателадзе

Вклад Александрова в математику отмечен девизом «Назад — к Евклиду». Он говорил, что «пафос современной математики в том, что происходит возврат к грекам».

Математика древних была геометрией — другой математики вовсе не было. Доказательства и аксиомы были до Евклида. Александров видел гуманитарную заслугу Евклида в том, что Евклид разглядел в аксиоматическом методе универсальный механизм защиты знаний от субъективизма. Синтезируя геометрию с прочими разделами математики, Александров не только восходил к античному идеалу единой науки, но и ставил научность в центр своих этических воззрений.

Минковский революционизировал теорию чисел с помощью синтетической геометрии выпуклых тел. Идеи и аппарат геометрии чисел стали основой функционального анализа, рожденного Банахом. Пионерские работы Александрова продолжили дело Минковского, обогатив геометрию методами теории меры и функционального анализа.

Александров осуществил поворот к синтетической геометрии древних гораздо в более тонком и глубоком смысле, чем это обычно теперь понимают. Геометрия в целом не сводится к преодолению локальных ограничений дифференциальной геометрии поверхностей, основанной на инфинитезимальных методах и идеях Ньютона, Лейбница и Гаусса. В работах Александрова получила развитие теория смешанных объемов выпуклых тел. Он доказал фундаментальные теоремы о выпуклых многогранниках, стоящие в одном ряду с теоремами Эйлера и Коши.

В связи с найденным решением проблемы Вейля Александров предложил новый синтетический метод доказательства теорем существования. Результаты этого цикла работ поставили имя Александрова в один ряд с именами Евклида и Коши.

Важный вклад Александрова в науку — создание внутренней геометрии нерегулярных поверхностей. Он разработал удивительный по силе и наглядности метод разрезывания и склеивания. Этот метод позволил Александрову решить многие экстремальные задачи теории многообразий ограниченной кривизны.

Александров построил теорию метрических пространств с односторонними ограничениями на кривизну. Возник единственный известный класс метрических пространств, обобщающих римановы пространства в том плане, что в них осмыслено центральное для римановой геометрии понятие кривизны. В работах Александрова по теории многообразий ограниченной кривизны дано развитие геометрической концепции пространства в продолжение традиции, идущей от Гаусса, Лобачевского, Римана, Пуанкаре и Картана.

Александров расширил методы дифференциальной геометрии аппаратом функционального анализа и теории меры, стремясь привести математику к ее универсальному состоянию времен Евклида. Поворот к синтетическим методам единой математики был неизбежен, что в области геометрии иллюстрируют прекрасные результаты таких учеников и продолжателей идей Александрова, как Громов, Перельман, Погорелов и Решетняк.

Александров определял науку как систему знаний и основанных на них представлений о той или иной сфере действительности. Цели науки — объяснение прошлого, нахождение решений проблем настоящего и предвидение будущего. Не только наука преследует эти цели. Лженаука, религия, здравый смысл предлагают свои методы достижения целей и задач науки.

Здравый смысл — особый дар homo sapiens. Обоняние, осязание, зрение, слух и отчасти самосознание и даже речь присущи животным, а здравый смысл — нет. По-английски здравый смысл — это common sense, т. е. общий смысл или понимание, объединяющее людей. Здравый смысл действует мгновенно, предлагая немедленное решение. Здравый смысл шире науки, так как отличает добро от зла. Наука глубже здравого смысла, так как обосновывает свои решения пониманием.

Наличие аргументов, превосходящих по силе факты и логику, характеризует веру. Размышления о нравственности Александрова связаны с противопоставлением религиозной веры и научного поиска. Не идеальная абстракция, а реальный человек с его земными заботами стоит в центре его воззрений. Человек ищущий истину, творец обстоятельств жизни, ее источник и цель. Для Александрова важны как открытость науки, так и ее принципиальный отказ от любых форм догматизма и субъективизма, присущих вере.

Лженаука обслуживает властные интересы и активно противостоит науке. Ненависть Александрова вызывали любые проходимцы, попы и инквизиторы от «марксизма», использующие науку в низких корыстных целях. Между наукой и властью лежит пропасть отчуждения. Власть противостоит свободе, составляющей сущность математики. В науке Александров видел инструмент, который освобождает человека материально и раскрепощает его интеллектуально.

Человечность, ответственность и научность — таковы составляющие полноты нравственности по Александрову. Человек — источник и цель всего. Таково содержание универсального гуманизма. Человек — в ответе за все. Таков смысл ответственности. Научность, как человеческое суждение, отвлеченное от субъективизма, лежит в основе нравственности.

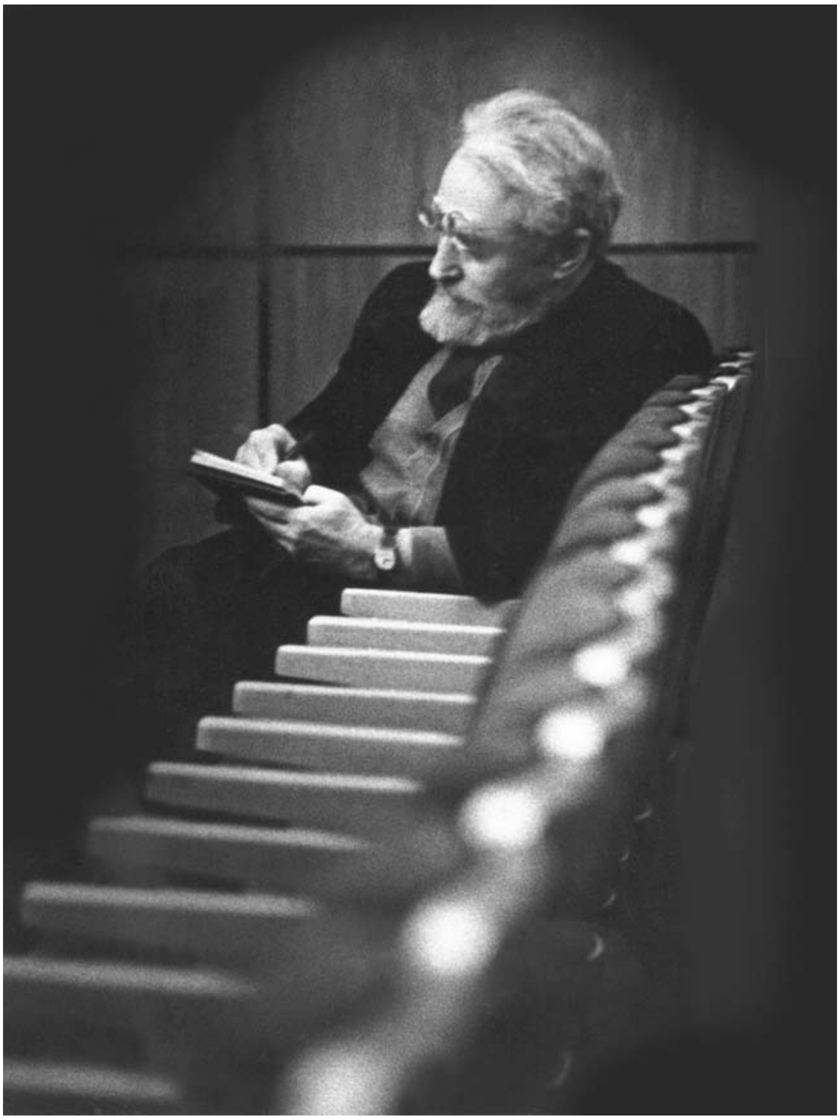
Александров подчеркивал критичность науки и ее безграничную преданность истине. Наука объясняет «как оно есть на самом деле» с величием и скромностью, основываясь на опыте, фактах и логике. Наука чужда всякой предвзятости и доктринерства, открыта критике, но не легкомысленна, не руководствуется симпатиями, модой или веяниями времени. Наука требовательна, несварлива и незлоблива. Наука надежна и солидна, сохраняет здравый консерватизм, но восприимчива ко всему новому и легко отказывается от заблуждений. Наука ни для кого не закрыта, не творит кумиров и не поклоняется авторитетам. Наука следует фактам и логике. Наука может мечтать, фантазировать и творить чудеса, но чужда мистике и вере в сверхъестественное. Истина, логика, опыт и факты — фетиши и инструменты науки.

Разумеется, наука может быть стерильной и неинтересной. Признаки стерильности и неинтересности куда как субъективнее нежели критерии истинности. Именно поэтому ученые по убеждениям воздерживаются от крайних обвинений в бесплодности не только в погромном стиле лысенкоистов, но и в многочисленных благопристойных по форме и оскорбительных по существу противопоставлениях теоретических и прикладных исследований в науке.

Бывают гениальные теоремы, а злодейских теорем не бывает. Между тем гениальные теории и эксперименты соседствуют в истории человечества с человеконенавистническими теориями и вивисекцией. Наука злодейству чужда. Зло — клеймо лженауки. Совсем немало людей, заметно обогативших науку, учеными по убеждениям не являются. Ученый по убеждениям внутренне свободен и потому не может быть источником негодного, причинять зло. Вклад в науку внесли и отъявленные негодяи. Это обстоятельство никак не опровергает классический тезис о несовместности гения и злодейства, а только доказывает, что свойство быть ученым — это разрывная функция времени. Учеными по убеждениям даже лучшие представители науки бывают далеко не всегда. К счастью, раз найденная истина не зависит от личных качеств обнаружившего ее человека. Наука делает любую истину вечным достоянием человечества.

Жизнь Александрова включила в свои временные рамки возникновение и распад Советского Союза. Сложная, если не парадоксальная идеология коммунизма рассматривает индивидуальную свободу как необходимость, осознанную в коллективе. Коллективизм склонен превращаться в гегемонию стандартизации и тоталитаризма ровно так же как индивидуализм порождает тиранию абсолютизма и глобализации. Диктатура, простейшая форма универсального подчинения, становится неизбежным инструментом как индивидуализма, так и коллективизма. В моральной сфере коллективизм выступает как альтруизм. В сфере мышления — рождает мистицизм. Кредо индивидуализма — эгоизм и рациональность. Идеи Александрова противостоят рациональному эгоизму, абстрактному объективизму и мистическому догматизму. Гуманизация науки как вектор ее развития — важнейший компонент воззрений Александрова на будущее науки и общества.

Современность нуждается в универсальной человечности Александрова.



Александр Данилович Александров. 1980 г.
Фото В. Новикова.

Указатель произведений А. Д. Александрова, включенных в тома 1–3 Избранных трудов

Том 1

(*А. Д. Александров.* Геометрия и приложения [статьи].
Новосибирск: Наука, 2006. lii + 748 с. ISBN 5–02–032428–0.)

Содержание

Том 2

(*А. Д. Александров.* Выпуклые многогранники [монография]. Новосибирск: Наука, 2007. iv + 492 с. ISBN 978–5–02–023184–9.)

Оглавление

Том 3

(*А. Д. Александров.* Статьи разных лет.
Новосибирск: Наука, 2008. iv + 734 с. ISBN 978–5–02–035566–8.)

Содержание

Index of A. D. Alexandrov's Publications in Volumes 1–3 of Selected Works

Volume 1

(*A. D. Alexandrov.* Geometry and Applications.
Novosibirsk: Nauka, 2006. lii + 748 p. ISBN 5–02–032428–0.)

Contents

Volume 2

(*A. D. Alexandrov.* Convex Polyhedra.
Novosibirsk: Nauka, 2007. iv + 492 p. ISBN 978–5–02–023184–9.)

Contents

Volume 3

(*A. D. Alexandrov.* Articles of Various Years.
Novosibirsk: Nauka, 2008. iv + 734 p. ISBN 978–5–02–035566–8.)

Contents

Содержание

Contents

Научное издание

Александр Данилович

Серия «Избранные труды»

3

Редактор *Ю. В. Барышева*
Художник *Н. А. Горбунова*
Художественный редактор *Е. П. Волокитин*
Технические редакторы *И. И. Кожанова, Н. М. Остроумова*
Корректоры *Л. А. Анкушева, А. А. Егоров, Л. И. Кононенко, И. Л. Малышева*
Компьютерный набор *Т. В. Беляева*

Изд. лиц. № 020297 от 23.06.1997.
Сдано в набор 18.03.2008. Подписано в печать 21.12.2008.
Бумага ВХИ. Формат $70 \times 100\,{}^{1}/_{16}$. Офсетная печать.
Усл. печ. л. $64{,}5 + 0{,}1$ вкл. на мел. бум. Уч.-изд. л. 45,1. Тираж 1000 экз. Заказ № 594.

Сибирская издательская фирма «Наука» РАН. 630200, Новосибирск, ул. Восход, 15.
СП «Наука» РАН. 630077, Новосибирск, ул. Станиславского, 25.