

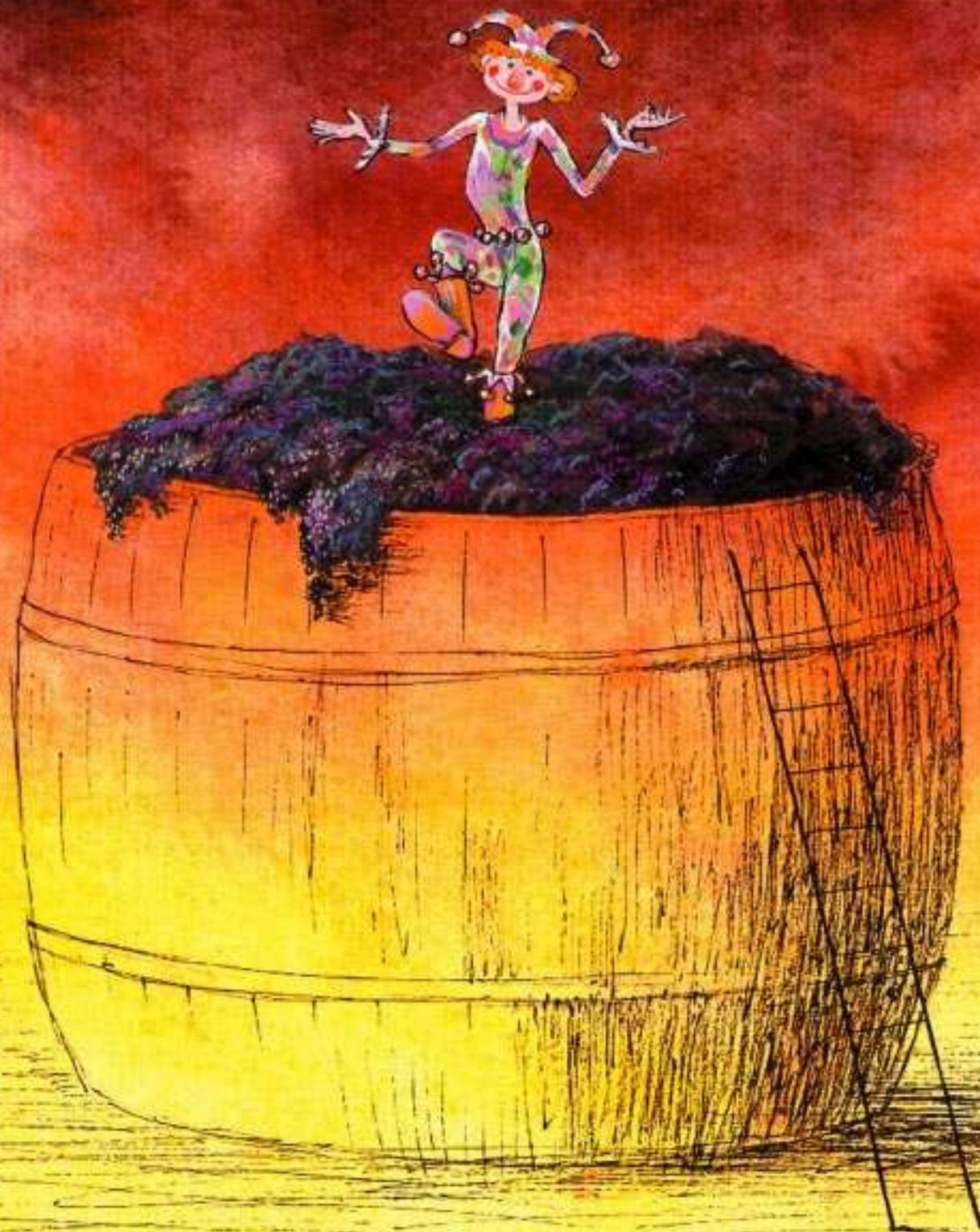
ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ

ISSN 0130-2221

2005 - №1

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



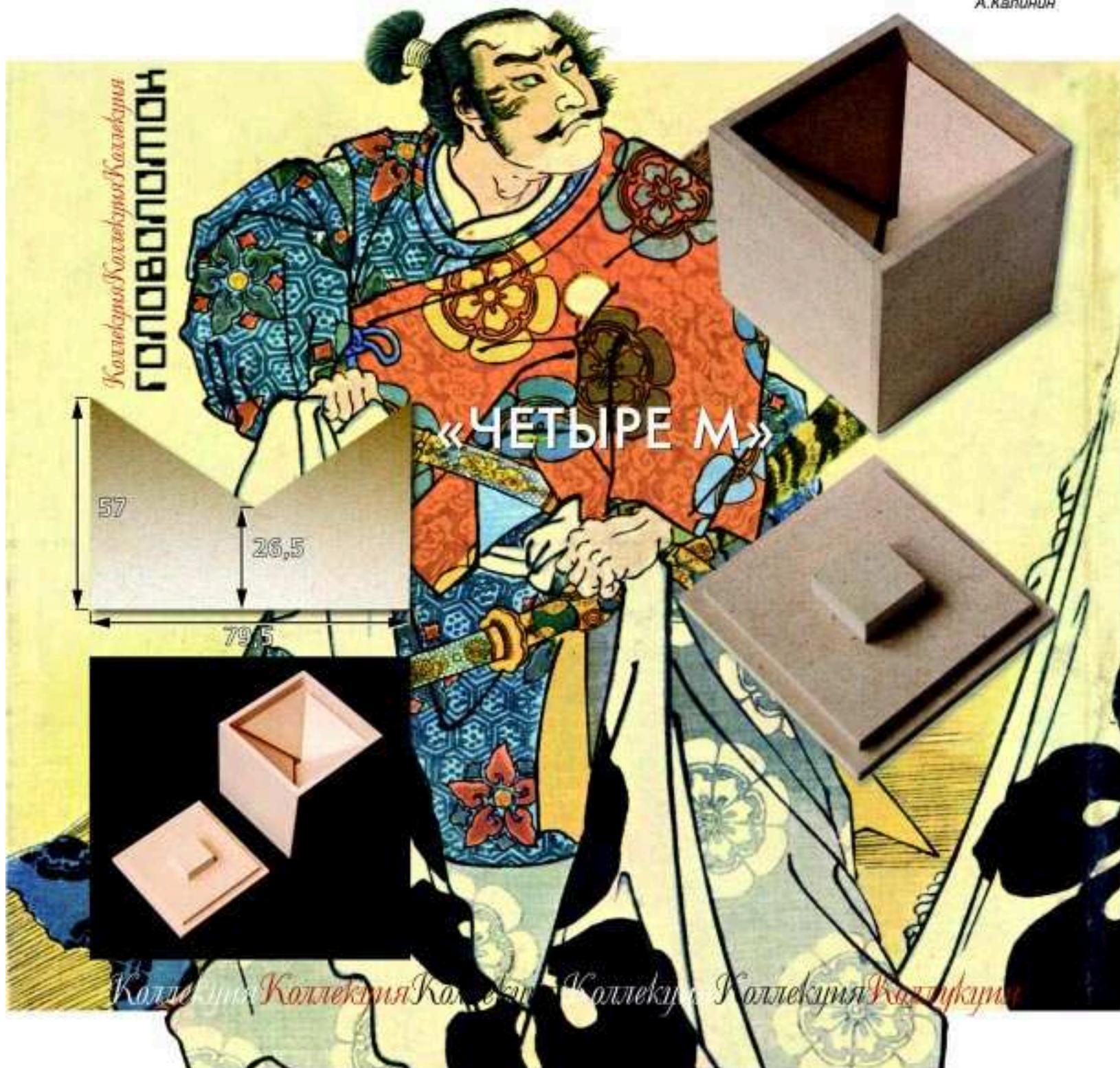
На ежегодном съезде любителей головоломок, который в августе 2004 года проходил в Токио, изобретатели разных стран показали десятки новых разработок. Большинство игрушек рассчитано на изготовление в условиях современного промышленного производства с использованием высокоточных технологий. Среди сложных конструкций как бы терялись головоломки, которые выглядели скромно, состояли из деталей простой конфигурации, да и самих деталей было немного. Но эти-то игрушки и вызвали наибольший интерес!

Знатокам особенно понравилась головоломка японца Хирокацу Ивасава под названием «Четыре М». Она состоит из коробочки с крышкой и четырех одинаковых пластинок, по форме напоминающих букву М. Легко догадаться, что задача заключается в укладке пластинок в коробочку. Но сделать это непросто.

Если вы захотите изготовить эту игрушку, то помните, что необходимым условием успеха будет точность в изготовлении всех ее частей. Тщательно проверяйте все размеры в процессе работы. Это касается и толщины материала, и величины пластин и коробочки. Толщина всех деталей должна быть одинаковой и равной 4 мм. Лучше всего использовать оргстекло, но можно взять и тонкий плотный картон, склеить листы, а затем высушить их под прессом.

Четыре пластины в форме букв М вырежьте по размерам, указанным на рисунке. Коробочку склейте из пяти деталей: четырех стенок размером 68 x 64 x 4 мм и доньшка размером 60 x 60 x 4 мм. После склеивания проверьте размеры ее внутреннего пространства: 64 x 60 x 60 мм. Необходимая часть игрушки – крышка. С ее помощью вы узнаете, правильно ли решена головоломка – нужно не просто сложить четыре буквы М в коробку, но и плотно закрыть ее. Крышку склейте из трех частей размерами 68 x 68 x 4, 59,5 x 59,5 x 4 и 20 x 20 x 9 мм, которые наложите друг на друга по центру деталей.

А.Калинин



# КВАНТ ЯНВАРЬ 2005 № 1 ФЕВРАЛЬ 2005

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,  
А.Н.Виленкин, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин,  
В.Н.Дубровский, А.А.Егоров,  
А.Р.Зильберман, В.В.Козлов,  
С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,  
В.В.Можяев, В.В.Произолов, Н.Х.Розов,  
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров

(заместитель главного редактора),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,

А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,  
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,  
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,  
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,  
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,  
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

© 2005, Президиум РАН,  
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Разговоры физиков за бокалом вина. *А.Ригамонти, А.Варламов, А.Буздин*  
8 Эюд о прямой Симсона. *В.Рыжик, Б.Сотниченко*

## ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 15 Университеты Австрии. *А.Васильев*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 17 Задачи М1936–М1945, Ф1943–Ф1952  
19 Решения задач М1916–М1920, Ф1928–Ф1937

## ИНФОРМАЦИЯ

- 25 Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

## К М Ш

- 26 Задачи  
27 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
27 Почему нет решений? *А.Зайчик*

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 29 Булава. *С.Варламов*  
31 Угол падения равен... *А.Стасенко*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Токи и магниты

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 35 Как построить парадоксальный пример. *П.Самовол, М.Аппельбаум, А.Жуков*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 37 Сложение скоростей. *В.Чивилёв*

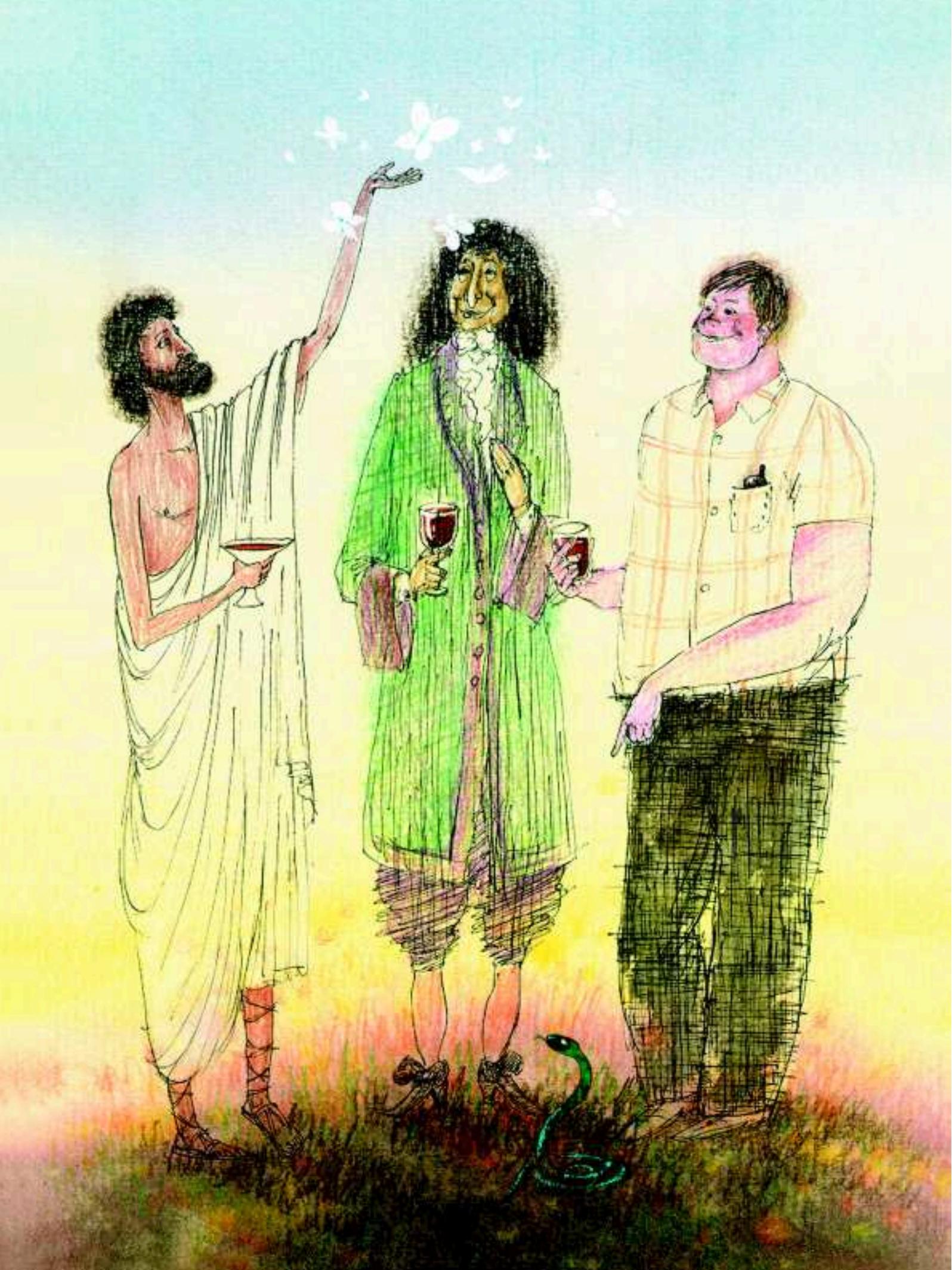
## ВАРИАНТЫ

- 40 Материалы вступительных экзаменов 2004 года  
49 Ответы, указания, решения

Поправки и замечания (18, 64)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Разговоры физиков за бокалом вина»*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Университеты мира на монетах и банкнотах*



# Разговоры физиков за бокалом вина

*А.РИГАМОНТИ, А.ВАРЛАМОВ, А.БУЗДИН*

*О, возлюбленный отрок,  
Вознеси драгоценный кубок,  
Ведь сын Зевса и Семеллы  
Дал людям вино,  
Чтобы они забыли о своих горестях.*

Алкей

*Вино является одним из важнейших признаков цивилизации в мире.*

Э.Хемингуэй. Смерть после полудня

## **О происхождении вина и методах его изготовления**

Что нового можно рассказать о вине после того, что уже было сказано за тысячи лет поэтами, писателями, журналистами и энологами (специалистами по виноделию)? В эпитафиях к статье приведены строки, написанные с интервалом в две с половиной тысячи лет: первые принадлежат одному из древнейших поэтов нашей цивилизации, вторые – одному из популярнейших писателей современной западной литературы. Как легко видеть, оба восхваляющих вино комментария являются своего рода манифестами любви к земле, точнее – к одному из ее наиболее значимых плодов, который труд и талант человека превращают в волшебный напиток, испокон веку играющий особую роль в его жизни.

Происхождение вина теряется в доисторических пещерах, где археологи и сегодня находят следы его производства и потребления. Согласно Ветхому завету, первым виноградарем можно считать Ноя, который не забыл погрузить на свой ковчег и виноградную лозу. А еще за тысячелетия до рождения Иисуса Христа человеку были известны плоды виноградной лозы, чьей родиной, вероятно, является Индия. По одной из легенд, достоверность которой трудно проверить, открытие вина произошло при дворе одного из правителей Персии. Придворная дама, впав в депрессию, решила отравиться и не нашла лучшего способа, чем выпить накопившуюся на дне вазы с виноградом странную жидкость. Результат оказался неожиданным: ее депрессию как рукой сняло, а мрачные мысли сменились буйным весельем. Этот опыт указал на веселящее свойство напитка, и опробовавший его на себе правитель ввел вино в регулярное употребление. С этого момента началось восхождение вина вплоть до роли священного напитка. Как известно, вино является обязательным атрибутом таинства причастия в христи-

анстве, а церемониальное благословение в еврейском обряде Kiddush совершается на вине и на хлебе. Согласно арабским легендам, еще Адам знал виноградную лозу, и именно виноград, а не яблоко, стал «запретным плодом».

Исторически представляется достаточно достоверным, что первые методы получения вина брожением виноградного сока были разработаны в Месопотамии и Египте. Переселение около 2500 года до нашей эры арийцев из Индии на запад привело к распространению этой практики по древнему миру. Так, с уверенностью можно говорить о производстве уже около 2000 года до нашей эры вина на Сицилии (возможно, благодаря ее колонизации греками или египтянами), несколько позже его стали производить сабиняне (вспомните картину «Похищение сабинянок») и этруски (три тысячи лет назад заселявшие современную Тоскану). Известно, что древние признавали благотворные свойства вина как лекарства, а также использовали его как антисептик – для дезинфекции ран. В некоторых египетских папирусах найдены основанные на вине медицинские рецепты – так, Гиппократ предписывал вино как противовоспалительное средство. Обращаясь к древнеримским поэтам, вспомним, что Гораций и Вергилий возносят хвалу вину во многих своих произведениях. А в 42 году до нашей эры появляется первое прекрасное руководство по виноделию.

В первом столетии новой эры виноделие в Римской империи получает широчайшее распространение. Достаточно напомнить, что, борясь с перепроизводством вина, император Домициан запретил увеличение площадей виноградников на территории Империи и сократил наполовину виноградники в провинциях. К 200 году начинается кризис сельского хозяйства, который усугубляется варварскими вторжениями, что приводит к упадку виноделия и завершается полным его уничтожением с появлением на исторической арене мусуль-

ман (для которых потребление алкоголя запрещено Кораном). В средневековье виноделием занимаются спорадически в тех или иных замках или монастырях. И только с приходом Ренессанса (т.е. начиная с XVI столетия) Европа вновь обращается к массовому производству вина. Прогресс в виноделии, наряду с расцветом искусств и культуры (в соответствии с «определением» Хемингуэйя), говорит о развитии цивилизации и освобождении от варварства.

Интересно, что заслуга изобретения бочек для хранения и перевозки вина принадлежит галлам. В античной Греции и Риме вино содержали в амфорах. Любопытно, что хорошее вино и тогда было недешево – раба в полном расцвете сил вполне могли обменять всего лишь на одну амфору вина. Замена амфор на бочки вскоре позволила также понять, что дерево, из которого были сделаны бочки, способно улучшить вино, придавая ему новый аромат и вкус. Теперь процедура созревания вина в бочках в течение примерно полутора-двух лет является неотъемлемым этапом в производстве высококачественного напитка.

Современная энология – наука о виноделии – возникла к началу XX столетия, причем в связи с трагическими для виноделия событиями: массовые перемещения народов привели к появлению в местах традиционного виноделия непривычных паразитов и гибели под их воздействием виноградных лоз. С некоторыми из этих паразитов – такими, как мучнистая роса или пероноспора, – удалось справиться с помощью препаратов, созданных на основе серы и меди, однако печально знаменитая филлоксера оказалась невосприимчивой к пестицидам. Для победы над ней энологам пришлось впервые использовать генетические методы. Дело в том, что перевезенная в давние времена переселенцами из Европы в Америку виноградная лоза, ввиду изменения внешних условий, постепенно переродилась. В частности, ее корни покрылись пробковым слоем, сделавшим такую лозу неуязвимой для филлоксеры. Поэтому для спасения лучших сортов европейских лоз энологи стали прививать к ним лозы закаленных американских родственников. Их потомки и являются основой европейского виноградарства в настоящее время. Старинные, чисто европейские лозы выжили лишь в нескольких небольших областях Европы: в Хересе и в Коларесе, где песчаная почва предотвратила развитие филлоксеры, а также в регионе Мозеля, где аналогичную роль выполнили сланцевые почвы.

Сегодня борьба с болезнями виноградной лозы является далеко не первостепенной задачей энологии. В некоторых случаях такие паразиты оказываются даже полезными. Например, в области Сотерна во Франции частые осенние туманы способствуют возникновению на виноградных кистях так называемой благородной плесени. В наиболее пораженных ягодах такая плесень вбирает в себя до 20% влаги, повышая тем самым содержание в виноградном соке сахара и придавая получаемому впоследствии вину «Сотерн» неповторимый вкус, позволяющий его прекрасно сочетать с такими деликатесами, как сыр «Рокфор» или паштет «Фуа гра».

Согласно легенде, вино «Сотерн» было открыто в один из годов с очень ранней весной и жарким летом. Виноград созрел раньше обычного, но тут начались дожди, и это заставило отложить начало уборки винограда. Уже через несколько дней виноград покрылся той самой благородной плесенью. Преодолев вполне понятные сомнения, виноделы все же решились попробовать сделать вино из такого винограда. Результат превзошел все ожидания – ароматы получившегося вина оказались удивительными. Теперь это вино очень ценится во всем мире. Интересно, что во многом слава одного из лучших вин области Сотерн – «Шато Икем» обязана великому российскому князю Константину. Он был согласен платить за бочку «Шато Икем» колоссальную по тем временам сумму в 20000 франков. Без «рекламы» князя Константина это вино может быть и не заняло бы прочного первого места в списке сотерновских вин. А это приносит немало владельцам «Шато Икем» – цена бутылки такого вина сегодня не падает ниже тысячи евро.

После сбора и отжима винограда в виноградном соке начинается процесс брожения. Дело в том, что виноградные ягоды обладают чудесным свойством: достаточно повредить их кожицу и оставить ее даже на некоторое время в виноградном соке, как в нем начинается естественный процесс преобразования сахара в спирт (брожение, ферментация). Этот процесс происходит благодаря содержащимся в виноградной кожице дрожжам. (В некоторых случаях виноделы добавляют в виноградный сок дрожжи; такая ферментация называется принудительной.) В процессе брожения сахар преобразуется в этиловый спирт, углекислый газ, глицерин, уксусную и молочную кислоты и многие другие вещества. Мы упоминаем лишь существенные для дальнейшего повествования элементы. Описывать подробности создания хорошего вина так же нелепо, как пытаться описывать детали рождения художником картины или давать инструкции по высечению из глыбы мрамора скульптуры. Ограничимся лишь описанием того, как некоторые физические явления проявляют себя в виноделии или используются для создания вина.

Виноградная кожица содержит в себе дрожжи, преобразующие сок как в вино, так и в уксус, причем последний, если его действие не подавить, безвозвратно губит напиток. Один энолог сказал, что господь Бог не предполагал превращения виноградного сока в вино: естественным его конечным состоянием должен был бы стать уксус. Остановить этот нежелательный исход и направить процесс ферментации в нужное русло является прерогативой человека.

Современные методы ферментации, основанные на понимании происходящих при ее течении химических процессов и на высоких технологиях, дают несравненно лучшие результаты, чем кустарно изготовленное домашнее вино. Так, например, сегодня для получения высококачественных вин энологи переходят к ... низкоурожайным сортам винограда – для того чтобы количество минеральных веществ с квадратного метра земли распределялось на меньшую массу ягод. Ранее

отдавалось предпочтение сортам достаточно высоких лоз – чтобы было удобнее собирать виноград, в настоящее же время для создания высококачественных вин используют низкие лозы – при этом ягоды получают дополнительное тепло от прогретой солнцем земли. Иногда с лоз даже обрывают гроздья винограда, оставляя лишь небольшое их количество. Раньше действие нежелательных вкусовых дрожжей подавлялось добавлением определенных химических компонентов. Сегодня все больше используются альтернативные методы, основанные на использовании тонких фильтров и глубокого охлаждения.

Брожение является экзотермическим процессом, т.е. протекает с выделением тепла. В результате при кустарном, неконтролируемом изготовлении вина температура суслу может достигать 40–42 °С. При этом летучие благородные ароматы плодов и цветов, придающие неповторимую окраску вину, теряются, и вино становится маловыразительным. Раньше для уменьшения температуры суслу баки с ним накрывали мокрыми тряпками. Процесс испарения воды позволял несколько понизить температуру суслу, но, конечно, такой метод был слабо эффективным. В современном производстве брожение проводится в стальных баках с двойными стенками – наподобие термоса. Между стенками постоянно циркулирует хладагент, что позволяет поддерживать температуру суслу достаточно низкой – не более 18 °С – и сохранять таким образом неповторимый аромат вина. Платой за это оказывается значительное удлинение процесса брожения: вместо 7–8 дней в естественных условиях он при низкой температуре длится до трех недель.

С помощью тонкой фильтрации и охлаждения оказывается возможным также очистить вино от части сульфитов, добавленных ранее для подавления кислотности. В этом процессе используются два фактора. Дело в том, что температура замерзания вина понижается относительно нуля градусов Цельсия на 0,5 градуса с каждым дополнительным процентом содержания алкоголя, так что вино, содержащее 12% спирта, замерзает при температуре около –6 °С. В то же время сульфиты образуют органические комплексы с содержащимися в вине пептидами. В свою очередь, эти комплексы еще до замерзания вина образуют мелкие кристаллы, которые могут быть отфильтрованы.

Холод приходит виноделам на помощь и для повышения относительного содержания сахара. Для этого, прежде чем давить виноград, его подмораживают. Часть воды остается в состоянии льда, а в оставшемся соке содержание сахара повышается (так называемое *ice-wine* – Австрия, Германия). Противоположным способом повышения сахаристости является подвяливание винограда для изготовления ликерных (так называемые *passito* – Италия), мускатных (Крым) и других вин.

Описанные вкратце методы объясняют, почему современный винный завод все более становится похожим на исследовательскую лабораторию.

Перейдем теперь к описанию нескольких, с нашей точки зрения интересных, физических явлений, свя-

занных с алкогольными напитками и их потреблением.

**Винные слезы.** Покружив вино в бокале, часто можно наблюдать любопытное явление – так называемые «винные слезы». Покрывая при вращении внутреннюю стенку бокала тонкой пленкой, вино затем медленно стекает вниз в форме отдельных потоков. Бытует мнение, что наличие таких «слез» указывает на



высокое качество вина. Их любят показывать и обсуждать за столом как начинающие любители, так и маститые знатоки вина, произнося при этом слова «глицерин» и «корпулентность» (крепость).

Проанализируем физическую природу этого явления. Начнем с того, что для наблюдения явления «винных слез» в достаточно концентрированном водно-спиртовом растворе (более 20%) нет нужды даже раскачивать или вращать бокал: необычный эффект конвекции массы в таком растворе вверх по стенке в форме пленки и противопотока вниз в виде «слез» наблюдается даже в неподвижном бокале. В гидродинамике это явление называется эффектом Марангони и заключается в движении границы жидкого раствора против направления действия силы тяжести, благодаря изменению по высоте пленки коэффициента поверхностного натяжения. Дело в том, что спирт испаряется из пленки охотнее, чем вода. Вода, в свою очередь, имеет коэффициент поверхностного натяжения гораздо больший, чем спирт. В результате неравномерное испарение спирта в пленке неоднородной толщины (вдоль границы винной поверхности в бокале) приводит к возникновению градиента его концентрации и, следовательно, к появлению градиента коэффициента поверхностного натяжения. А эта неоднородность приводит к появлению силы, которая тянет пленку вверх по стенке бокала.

Свойства движения границы такой пленки при различных концентрациях спирта были изучены совсем недавно, в 1992 году, французскими учеными Фурнье и Казаба. Они обнаружили удивительную зависимость величины перемещения пленки  $L$  от времени  $t$ :

$$L(t) \sim \sqrt{Dt}.$$

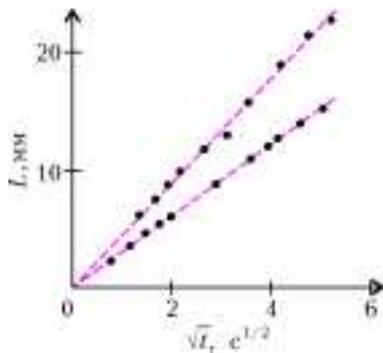


Рис. 1

Соответствующая зависимость в координатах  $L$  и  $\sqrt{t}$  показана на рисунке 1. Это соотношение хорошо известно в физике: впервые оно было теоретически выведено Эйнштейном и (независимо) Смолуховским в 1906 году при установлении связи между эффективным перемещением частицы в процессе ее диффузии в среде и временем этой диффузии. Коэффициент  $D$  называется коэффициентом диффузии и в формуле Эйнштейна–Смолуховского выражается через скорость частицы и длину ее свободного пробега.

В своих экспериментах французские ученые обнаружили интереснейшую зависимость коэффициента диффузии  $D$  от степени содержания в растворе спирта  $\varphi$  (рис. 2). Как уже отмечалось, при концентрациях спирта меньше 20% ( $\varphi < 0,2$ ) спонтанного движения жидкости вверх по стенке бокала не наблюдалось (разве

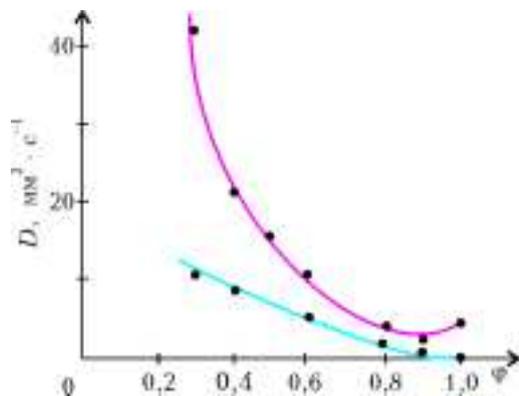


Рис. 2

что если его поверхность была предварительно смочена). Поразительно, но, вопреки интуитивному ожиданию, наибольшие значения коэффициента  $D$  были получены для относительно слабых растворов спирта, хотя испарение в них и идет медленнее. Из экспериментального графика видно, что коэффициент  $D$  достигает минимума при  $\varphi = 0,9$  и, как ни странно, не исчезает при достижении 100%, т.е. даже чистый спирт «карабкается» вверх по стенке бокала. Авторы исследования приписали это явление поглощению спиртом водяных паров из атмосферы, что приводит к появлению небольшого градиента коэффициента поверхностного натяжения. Свою правоту они тут же и продемонстрировали, повторив измерения для спирта в сухой атмосфере, где коэффициент  $D$  оказался меньшим по величине и монотонно убывающим с ростом  $\varphi$ , обращаясь в ноль при  $\varphi = 1$ .

Теперь, когда мы объяснили причину упрямого карабкающегося достаточно крепкого алкогольного напитка вверх по стенке бокала, перейдем к обсуждению образования «винных слез». Первой, очевидной, его причи-

ной служит сила тяжести, которая противостоит силам поверхностного натяжения и стремится вернуть убежавшую жидкость вниз. Однако за то, что это возвращение происходит не однородно, а в форме отдельных потоков, ответственна так называемая релеевская неустойчивость. Объясним сущность этого непростого явления на примере. Когда по озеру проходит катер, он порождает возмущение поверхности – волны. Однако со временем эти волны затухают, и поверхность возвращается в свое первоначальное состояние. Можно показать, что если «озеро перевернуть», т.е. если силу тяжести направить не в глубину жидкости, а от ее поверхности вверх (предполагая, что при этом жидкость в сосуде удерживается какими-то силами, например давлением), то малейшее отклонение поверхности от горизонтальной не затухает со временем, а разрастается в шквал, разрушая ее (подумайте, почему реет флаг на ветру). Именно эта неустойчивость и ответственна за образование «винных слез»: граница пленки, карабкающейся вверх согласно эффекту Марангони, оказывается неустойчивой по отношению к малым возмущениям – благодаря случайным неоднородностям на ней образуются капли, которые, вовлекая в свое движение жидкость из прилегающих областей, скатываются вниз, оставляя на стекле красивые следы.

Как обнаружили Фурнье и Казаба, чем больше в растворе спирта, тем слабее оказывается эффект Марангони, тем меньше сдерживающее образование слез поверхностное натяжение, тем сильнее вино «плачет» и тем меньшим должно наблюдаться расстояние между потоками. Однако на опыте эта зависимость оказывается весьма слабой и не позволяет использовать «винные слезы» для сколь-нибудь достоверного определения крепости вина «вслепую», не глядя на этикетку.

Что касается глицерина, то содержание этого сладкого спирта в вине обычно очень невелико (порядка 1–2%) и практически не сказывается на его крепости (хотя несомненно влияет на вкус вина). Определяющим эту характеристику вина остается обычный этиловый спирт, содержание которого и пишется на этикетке в качестве крепости. Отметим, что вина с низким содержанием этилового спирта менее вязки, так что, по-видимому, глицерин не определяет даже и вязкости вина. Поэтому наблюдение самих «винных слез» или даже процесса их течения не позволяет всерьез судить о содержании в нем глицерина.

**Осветление вина и электростатика.** Перед тем как разлить вино в бутылки, его надо осветлить, т.е. удалить взвесь мельчайших частиц, которые остались после процесса брожения вина. Интересно, что издавна для этой цели использовали белки яиц – пена, получающаяся при взбитии белков, добавлялась в молодое вино. Протеины белка в вине приобретают положительный заряд, в результате к ним притягиваются отрицательно заряженные частицы, они образуют сгустки, которые затем и оседают на дно емкости с вином. Используется для осветления вина и глина – частицы ее взвеси имеют отрицательный заряд и притягивают положительно заряженные примеси.

Можно воспользоваться и более «грубым» методом – центрифугированием. В этом случае частицы с плотностью, большей плотности вина, будут отброшены при вращении на стенки. В свою очередь, более легкие частицы примесей соберутся в центре.

### Шампанское и его пузырьки

В области Шампань, которая находится во Франции вблизи города Реймса, издавна производили белое вино. Ничем, правда, особенно интересным это вино с весьма слабой окраской не славилось. Напротив, виноделы очень быстро обнаружили, что шампанские вина очень плохо сохранялись и созревали в бочках, поэтому возникла идея сразу же разливать его по бутылкам. Но в бутылках брожение не останавливалось, и в результате этого, под действием высокого давления газов брожения, некоторые бутылки взрывались. В то время в погреба, где хранились бутылки шампанского, заходили, лишь надев на голову специальную железную маску – иначе можно было получить серьезные увечья от летящих осколков стекла. Потом, правда, эта проблема была решена путем использования специальных толстостенных бутылок, способных выдерживать большие давления.

Отцом современного шампанского справедливо считается бенедиктинский монах Дом Периньон (Dom Perignon). Именно он в период с 1668 по 1715 год отвечал за винный погреб аббатства и разработал метод создания этого игристого напитка.

Любопытно, что шампанское сорта брют было впервые изготовлено в 1876 году по заказу англичан, которые, в отличие от французов, в то время предпочитали сухие вина.

Строго говоря, шампанским имеет право называться лишь игристое вино, производимое по определенной технологии именно во французской провинции Шампань. Все остальное является просто игристым вином того или иного типа.

Игристое вино создается в результате специального процесса брожения и в принципе может быть изготовлено из любого типа винограда, однако обычно используется виноград только трех сортов: Пино Нуар, Пино Меньер и Шардонэ, причем белым виноградом является лишь последний. Если на этикетке написано «Blanc de Blanc» (белое из белого), то это означает, что игристое вино изготовлено из чистого Шардонэ. Надпись «Blanc de Noir» (белое из черного) означает, что Шардонэ при изготовлении этого напитка не использовалось. Существует также и розовое шампанское. Его можно изготовить двумя способами: либо «подправить» белое шампанское сухим красным вином, либо подержать некоторое время сок красного винограда в контакте с его кожицей, лишь затем его отфильтровать и начать процесс изготовления шампанского.

**Метод «Шампануаз» (Champenoise).** Если на этикетке имеется это слово, то знайте, что соответствующее игристое вино было изготовлено следующим способом.

В провинции Шампань сбор винограда проводится вручную, чтобы не повредить при сборе ягоды красного

винограда и содержащиеся в их кожице дрожжи не попали в сок. Ягоды давят дважды. В первую давку извлекают 80% сока, и полученное из него впоследствии шампанское называется «Cuvee». Шампанское, полученное из оставшихся 20%, называют «Taille» (лучшие дома шампанских вин не производят его вообще, а ограничиваются лишь производством «Cuvee»).

Есть несколько способов насытить вино углекислым газом. Метод «Шампануаз» начинается с обычной ферментации белого вина, как это было описано выше. Затем виноделы смешивают в той или иной комбинации это вино с винами предыдущих урожаев и разливают по бутылкам (смесь нового и старого вина называется dosage). В каждую из бутылок затем добавляют немного сахара и дрожжей и закрывают временной, похожей на пивную, пробкой. В зависимости от количества добавленного сахара шампанское будет суше или слаже. Различают сорта брют (brut), очень сухое (extra dry), сухое (sec), полусухое (demi-sec), а также полусладкое и сладкое. Теперь в бутылке начинается процесс вторичной ферментации. Будущее шампанское в таком состоянии выдерживают несколько лет: обычно до трех, но в особых случаях и до шести. По закону шампанское должно провести в бутылке не менее одного года.

Следующий шаг заключается в очистке напитка от дрожжей. Для этого бутылки помещают в специальные ячейки, где их каждый день проворачивают на четверть оборота, а также понемногу (на 15° в день) наклоняют так, чтобы в конце концов мертвые дрожжи осели на пробке.

Последней операцией является избавление от остатков дрожжей и замене пробки на постоянную. Так как шампанское к этому моменту уже оказывается пересыщенным углекислым газом, то этот процесс непросто. В оригинальном методе «Шампануаз» его производит истинный виртуоз, умеющий не сотрясая открыть бутылку и заменить временную пробку с лежащими на ней дрожжами на постоянную. Сегодня применение криогенной техники существенно упростило производство: горлышко бутылки с дрожжами просто замораживают, вычищают и закрывают новой пробкой.

Каждый знает, что игристое вино продается в специальных, выдерживающих достаточно высокое давление бутылках. Это связано с большим количеством углекислого газа, находящегося в таком вине в метастабильном состоянии и готовом высвободиться при изменении внешних условий. Бутылку шампанского можно открыть по-разному, в зависимости от целей, умения и темперамента открывающего: либо, слегка выпустив газ из горлышка, медленно дать пробке выйти из бутылки и разлить напиток без потерь по бокалам; либо, например в честь Нового Года, выпустить пробку в потолок и разлить полбутылки в виде пены. Именно так Шумахер, победив в очередном заезде «Формулы-1», ухитряется разлить в виде пены почти все содержимое огромной бутылки.

*(Продолжение следует)*

# Этюд о прямой Симсона

В.РЫЖИК, Б.СОТНИЧЕНКО

ОДНА ИЗ САМЫХ ИЗВЕСТНЫХ ПРЯМЫХ, СВЯЗАННЫХ с треугольником и окружностью одновременно, это прямая Симсона. (Роберт Симсон – шотландский математик, 1687–1768.) Она получается так.

Нарисуем треугольник. Опишем около него окружность. Возьмем на этой окружности любую точку (в общем случае – не в вершине данного треугольника). Спроектируем эту точку на каждую из прямых, содержащих стороны треугольника. Оказывается, эти проекции лежат на одной прямой. Эта прямая и называется прямой Симсона (рис.1).

Прямая эта давно прописана в многочисленных геометрических задачниках. Известны различные доказательства ее существования. Она не просто интересна сама по себе, но используется для решения некоторых задач (например, в книге В.В.Прасолова «Задачи по планиметрии» есть даже параграф, так и названный

«Прямая Симсона»). Мы приведем кинематическое доказательство ее существования (в духе нашей предыдущей статьи – см. «Квант» №5 за 2002 г.; см. также книгу: Ю.И.Любич, Л.А.Шор, «Кинематический метод в геометрических задачах»). Используя кинематический метод, мы решим и другие задачи, связанные с прямой Симсона.

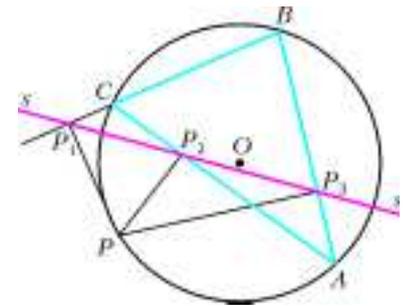
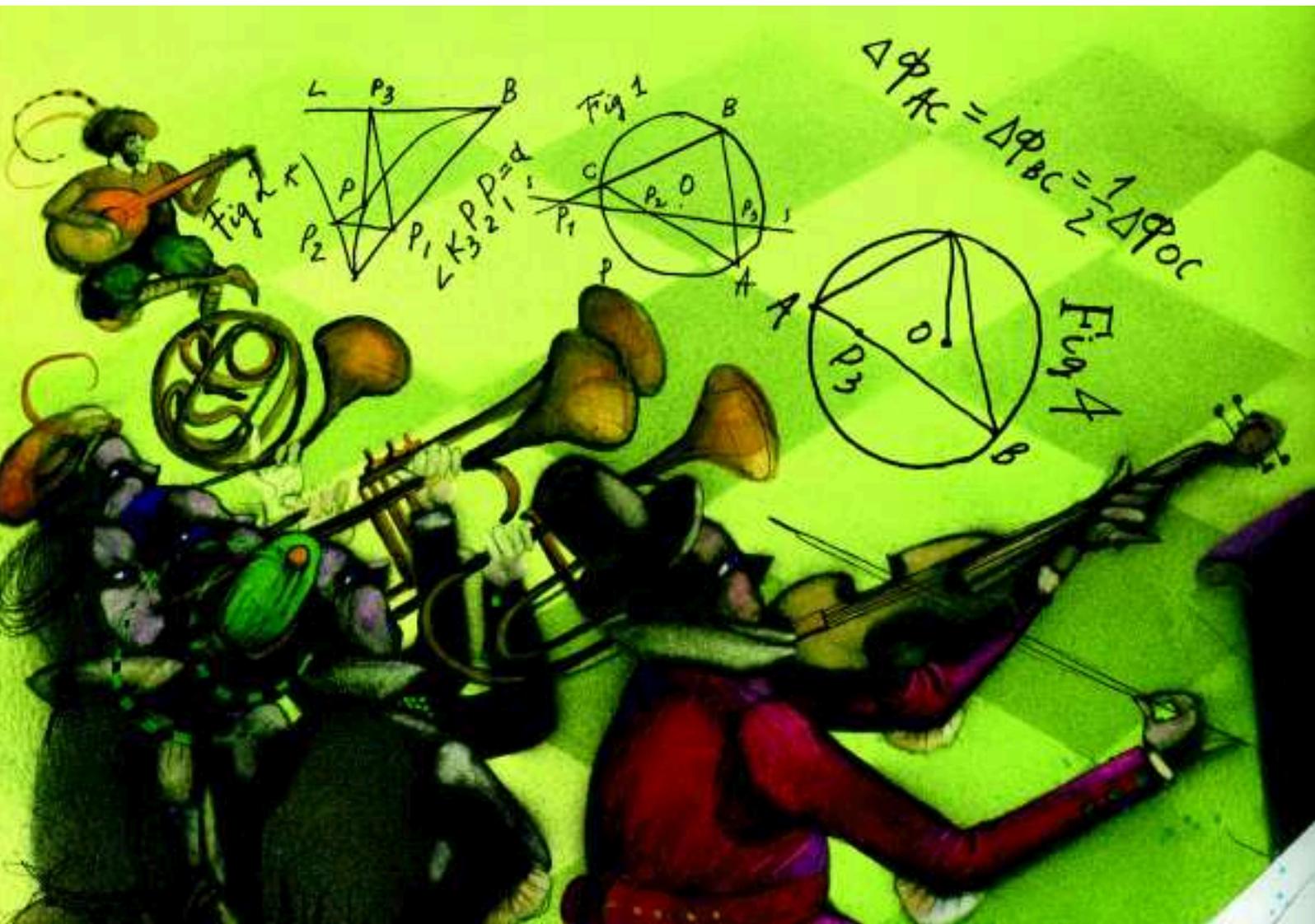


Рис. 1

Приведем немного простых теоретических сведений из кинематики. Нам потребуется понятие угловой скорости движущейся прямой, т.е. прямой, меняющей



свое положение на плоскости со временем. Введем его таким же путем, как вводится обычное понятие скорости. Сначала определим угловое положение движущейся прямой: под угловым положением прямой будем понимать угол между прямой и некоторой осью. Угол этот всегда отсчитывается от оси. В зависимости от того, как отсчитывается угол (против или по часовой стрелке), он может быть как положительным, так и отрицательным. Затем вводится угловое перемещение прямой в течение заданного промежутка времени как приращение угла между движущейся прямой и осью; потом – средняя угловая скорость прямой в течение заданного промежутка времени; наконец – мгновенная угловая скорость прямой, или просто ее угловая скорость.

После этого мы будем трактовать угол между прямыми как разность углов, которые эти прямые образуют с заданной осью. Ясно, что угол между прямыми может быть как положительным, так и отрицательным.

Переходим к определениям. Пусть движущаяся прямая  $l$  в момент времени  $t_1$  занимает положение  $l_1$ , а в момент времени  $t_2$  – положение  $l_2$  (рис.2). На этих

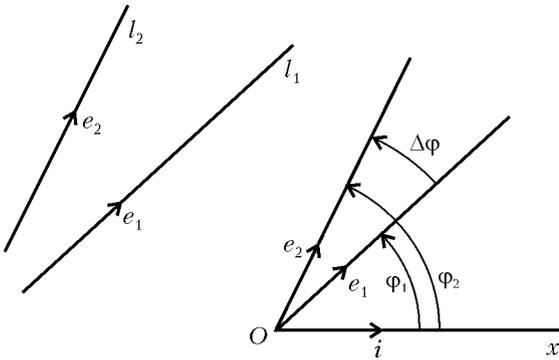


Рис. 2

прямых выберем направляющие единичные векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  соответственно. Выберем на плоскости ось  $x$  с направляющим единичным вектором  $\vec{i}$  на этой оси. Отложим векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  от точки  $O$  на оси  $x$ . Угол  $\phi_1 = \angle(\vec{i}, \vec{e}_1)$  определяет угловое положение прямой  $l$  в момент  $t_1$ , а угол  $\phi_2 = \angle(\vec{i}, \vec{e}_2)$  определяет угловое положение прямой  $l$  в момент  $t_2$ . При этом, как мы уже договорились, угол  $\phi = \angle(\vec{i}, \vec{e})$  будем считать положительным, если поворот от вектора  $\vec{i}$  до вектора  $\vec{e}$  идет против часовой стрелки, и отрицательным, если этот поворот идет по часовой стрелке.

Приращение  $\Delta\phi$  угла  $\phi$  в течение промежутка времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  есть разность  $\phi_2 - \phi_1$ . Отношение  $\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$  назовем средней угловой скоростью за этот промежуток времени. Мгновенная угловая скорость прямой есть предел этого отношения при  $\Delta t \rightarrow 0$ , т.е. производная  $\phi'(t)$ . Мы будем обозначать ее  $\dot{\phi}$ , как принято в механике.

Пусть теперь на рисунке 2 через  $l_1$  и  $l_2$  обозначена не движущаяся прямая  $l$  в разные моменты времени, а две разные прямые в один и тот же момент времени. Тогда углы  $\phi_1$  и  $\phi_2$  есть углы этих прямых с осью  $x$ ,

а их разность и будет ориентированным углом между прямыми. При этом угол от первой до второй прямой обозначим как  $\phi_{21}$ , а угол от второй прямой до первой обозначим как  $\phi_{12}$ . Тогда  $\phi_{21} = \phi_2 - \phi_1$ , а  $\phi_{12} = \phi_1 - \phi_2$ . Очевидно, что  $\phi_{21} = -\phi_{12}$ .

Продифференцировав равенство  $\phi_{21} = \phi_2 - \phi_1$  по времени, получим скорость изменения угла между прямыми:  $\dot{\phi}_{21} = \dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1$ . Отсюда имеем: если угловые скорости данных прямых одинаковы, то  $\dot{\phi}_{21} = 0$ . Но тогда угол между прямыми постоянный, не меняется со временем. Верно и обратное утверждение: если угол между прямыми со временем не меняется, то угловые скорости этих прямых равны.

Аналогичным соотношением  $\Delta\phi_{21} = \Delta\phi_2 - \Delta\phi_1$  связаны между собой угловые перемещения прямых  $\Delta\phi_2, \Delta\phi_1$  и приращение угла между ними  $\Delta\phi_{21}$  за некоторый промежуток времени. Убедитесь в этом самостоятельно. В дальнейшем мы позволим себе записывать любое из равенств  $\phi_{21} = \phi_2 - \phi_1, \Delta\phi_{21} = \Delta\phi_2 - \Delta\phi_1$ , коль скоро выполняется одно из них. Подробнее: если  $\phi_{21} = \phi_2 - \phi_1$ , то  $\Delta\phi_{21} = \Delta\phi_2 - \Delta\phi_1$ , и обратно.

Еще одно. Пусть в плоскости движется многоугольник, причем ни длины его сторон, ни углы между сторонами не меняются. Тогда из только что сказанного следует, что угловые скорости его сторон одинаковы. И эти угловые скорости можно назвать угловой скоростью многоугольника.

Перейдем теперь к частному случаю, когда две прямые вращаются с одинаковыми угловыми скоростями, причем центры вращения неподвижны и лежат на этих прямых. Точнее: прямая  $l_1$  вращается вокруг неподвижной точки  $A$ , лежащей на прямой  $l_1$ ; прямая  $l_2$  вращается вокруг неподвижной точки  $B$ , лежащей на прямой  $l_2$  (рис.3).

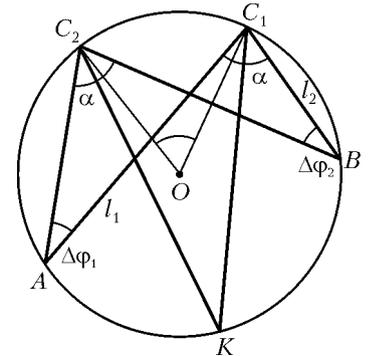


Рис. 3

Пусть они в момент  $t_1$  пересекались в точке  $C_1$ , а в момент  $t_2$  пересекаются в точке  $C_2$ . Ясно, что при этом  $\Delta\phi_2 = \Delta\phi_1$ . Так как прямые  $l_1$  и  $l_2$  вращаются с одинаковыми скоростями, то угол  $\phi_{21}$  (на рисунке 3 это углы  $\angle AC_1B$  и  $\angle AC_2B$ , равные  $\alpha$ ) остается постоянным. Из планиметрии известно, что тогда точка  $C$  пересечения данных прямых находится на дуге окружности, проходящей через точки  $A$  и  $B$ . Пусть точка  $O$  – центр этой окружности. Радиус  $OC$  этой окружности в процессе вращения перешел из положения  $OC_1$  в положение  $OC_2$ . Обозначим угол  $\angle C_2OC_1$  как  $\Delta\phi_{OC}$ :  $\angle C_2OC_1 = \Delta\phi_{OC}$ . Очевидно выполнение равенства  $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = \frac{1}{2}\Delta\phi_{OC}$  (достаточно посмотреть на рисунок 3 и увидеть, что углы  $\Delta\phi_1, \Delta\phi_2$  вписанные, а третий угол  $\Delta\phi_{OC}$  центральный, и все они опираются на одну и ту же дугу  $C_1C_2$ ). Запишем это равенство чуть иначе:

$$\Delta\phi_{AC} = \Delta\phi_{BC} = \frac{1}{2}\Delta\phi_{OC}. \quad (1)$$

Но тогда

$$\dot{\phi}_{AC} = \dot{\phi}_{BC} = \frac{1}{2} \dot{\phi}_{OC}. \quad (2)$$

Эти два равенства будут справедливы не только для хорд  $AC$  и  $BC$ , но и для любой хорды, проведенной из произвольной неподвижной точки  $K$  данной окружности в движущуюся по этой окружности точку  $C$ :

$$\Delta\phi_{KC} = \frac{1}{2} \Delta\phi_{OC} \quad (3)$$

и

$$\dot{\phi}_{KC} = \frac{1}{2} \dot{\phi}_{OC}. \quad (4)$$

Иначе говоря, угловая скорость хорды в два раза меньше угловой скорости радиуса при условии, что хорда и радиус «упираются» в одну и ту же точку, движущуюся по данной окружности, а другой конец хорды неподвижен.

В дальнейшем нам понадобится некая чисто техническая договоренность. Чтобы избежать рассмотрения различных случаев, не отличающихся принципиально, мы будем считать одинаковыми углы между прямыми, которые отличаются на  $n\pi$ , где  $n$  – целое число. Кроме того, мы будем считать одинаковыми углы  $\alpha$  и  $\pi - \alpha$ . (Обе эти договоренности фиксируют то обстоятельство, что взаимное положение двух прямых при этом одно и то же.)

Перейдем теперь к задачам (некоторые из них взяты у вышеупомянутых авторов).

**Задача 1** (основная). Пусть точка  $P$  лежит на окружности с центром  $O$ , описанной около треугольника  $ABC$ , и  $P_1, P_2, P_3$  – проекции точки  $P$  на прямые  $BC, CA, AB$  (рис.4). Докажите, что точки  $P_1, P_2, P_3$  лежат на одной прямой (иначе говоря, нужно доказать существование прямой Симсона, соответствующей точке  $P$  и треугольнику  $ABC$ ).

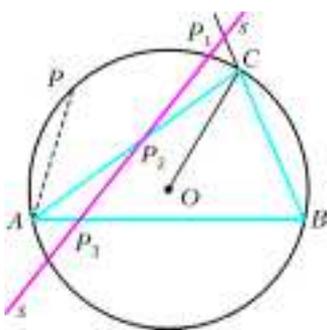


Рис. 4

Доказательство. Пусть точки  $A, B, P$  неподвижны, а точка  $C$  движется по окружности. Обозначим угловую скорость радиуса  $OC$  как  $\dot{\phi}_{OC}$ , угловую скорость хорды  $AC$  как  $\dot{\phi}_{AC}$ , угловую скорость хорды  $BC$  как  $\dot{\phi}_{BC}$ . Тогда  $\dot{\phi}_{AC} = \dot{\phi}_{BC} = \frac{1}{2} \dot{\phi}_{OC}$ .

Далее, так как углы  $AP_3P$  и  $AP_2P$  прямые, то точки  $A, P_3, P_2, P$  лежат на окружности с диаметром  $AP$ . Из неподвижности точек  $A, B, P$  и движения точки  $C$  следует, что точка  $P_3$  неподвижна на окружности с диаметром  $AP$ , а точка  $P_2$  движется по той же окружности. Тогда угловые скорости прямых  $AP_2, PP_2, P_3P_2$  равны. Прямая  $AP_2$  и прямая  $AC$  – одна и та же прямая. И так как  $\dot{\phi}_{AC} = \frac{1}{2} \dot{\phi}_{OC}$ , то  $\dot{\phi}_{P_3P_2} = \dot{\phi}_{AP_2} = \dot{\phi}_{AC} = \frac{1}{2} \dot{\phi}_{OC}$ .

Аналогично доказывается, что точки  $B, P_1, P, P_3$  расположены на окружности с диаметром  $PB$ , причем точка  $P_1$  движется по этой окружности. При этом выполняется равенство  $\dot{\phi}_{P_3P_1} = \dot{\phi}_{BC} = \frac{1}{2} \dot{\phi}_{OC}$ .

Оказывается, что при движении точки  $C$  по исходной окружности отрезки  $P_3P_2$  и  $P_3P_1$  вращаются с одинаковыми угловыми скоростями, а тогда, как мы уже сказали выше, угол между ними не меняется.

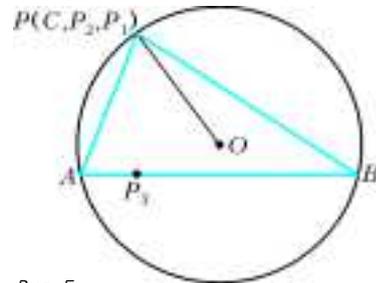


Рис. 5

Теперь – последний шаг доказательства. Пусть в какой-то момент времени точка  $C$  попала в точку  $P$ . Проследив за соответствующими перемещениями точек  $P_2$  и  $P_1$ , мы увидим, что в этот же момент и они попадут в точку  $P$  (рис.5). Но тогда в этот момент угол между прямыми  $P_3P_2$  и  $P_3P_1$  окажется равен нулю. А так как угол между этими прямыми не меняется, то он всегда (в любой момент времени) равен нулю. Отсюда, учитывая, что эти прямые имеют общую точку  $P_3$ , следует, что точки  $P_1, P_2, P_3$  лежат на одной прямой.

Попутно получен результат, который понадобится нам позже: угловая скорость прямой Симсона для треугольника  $ABC$ , вписанного в окружность с центром  $O$ , равна половине угловой скорости  $\dot{\phi}_{OC}$  радиуса  $OC$ , проведенного в движущуюся по этой окружности точку  $C$ . Обозначим прямую Симсона как  $s$  и запишем это соотношение так:  $\dot{\phi}_s = \frac{1}{2} \dot{\phi}_{OC}$ . Учитывая равенство (2), мы можем написать

$$\dot{\phi}_s = \dot{\phi}_{AC} = \dot{\phi}_{BC} = \frac{1}{2} \dot{\phi}_{OC}, \quad (5)$$

и, соответственно,

$$\Delta\phi_s = \Delta\phi_{AC} = \Delta\phi_{BC} = \frac{1}{2} \Delta\phi_{OC}. \quad (6)$$

Осмыслим полученный нами результат. У нас была дана окружность, вписанный в нее треугольник  $ABC$ , некоторая точка  $P$  на окружности, отличная от вершины этого треугольника. Для этой конфигурации было доказано существование прямой Симсона. Метод, который привел к этому результату, состоял в том, что мы начали перемещать по окружности одну из вершин данного треугольника (вершину  $C$ ), оставив неподвижными две другие его вершины и выбранную точку  $P$  на окружности. Разумеется, так как вершины треугольника совершенно равноправны, то аналогичный результат мы получим, оставив неподвижными точку  $P$  и вершины  $A, C$ , но перемещая по этой же окружности вершину  $B$ :  $\dot{\phi}_s = \frac{1}{2} \dot{\phi}_{OB}$ ,  $\Delta\phi_s = \frac{1}{2} \Delta\phi_{OB}$ . И, аналогично,  $\dot{\phi}_s = \frac{1}{2} \dot{\phi}_{OA}$ ,  $\Delta\phi_s = \frac{1}{2} \Delta\phi_{OA}$ .

Если теперь последовательно перемещать вершины  $A, B, C$  треугольника  $ABC$  по окружности, оставляя точку  $P$  и другие две вершины неподвижными, то

угловое перемещение прямой Симсона будет в итоге равно сумме последовательных перемещений:

$$\Delta\varphi_s = (\Delta\varphi_s)_A + (\Delta\varphi_s)_B + (\Delta\varphi_s)_C = \frac{1}{2}(\Delta\varphi_{OA} + \Delta\varphi_{OB} + \Delta\varphi_{OC}), \quad (7)$$

и, соответственно,

$$\dot{\varphi}_s = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}_{OA} + \dot{\varphi}_{OB} + \dot{\varphi}_{OC}). \quad (8)$$

Теперь можно рассмотреть несколько вариантов.

1) Пусть точка  $P$  неподвижна.

а) Пусть при неподвижной точке  $P$  точка  $C$  неподвижна ( $\Delta\varphi_{OC} = 0$ ) и сторона  $AB$ , не меняя своей длины, скользит своими концами  $A$  и  $B$  по окружности. Тогда угловые перемещения радиусов  $OA$  и  $OB$  одинаковы и равны угловому перемещению стороны  $AB$ , а также треугольника  $OAB$ :  $\Delta\varphi_{OA} = \Delta\varphi_{OB} = \Delta\varphi_{AB}$ . Из формулы (7) получаем, что  $\Delta\varphi_s = \Delta\varphi_{OA} = \Delta\varphi_{OB} = \Delta\varphi_{AB}$ . Поэтому  $\dot{\varphi}_s = \dot{\varphi}_{OA} = \dot{\varphi}_{OB} = \dot{\varphi}_{AB}$ .

б) Пусть при неподвижной точке  $P$  весь треугольник  $ABC$  (обозначим его как  $T$ ) вращается вокруг центра описанной окружности. Тогда его угловое перемещение такое же, как и угловое перемещение радиусов данной окружности, проведенных в его вершины, а потому выполняется равенство  $\Delta\varphi_T = \Delta\varphi_{OA} = \Delta\varphi_{OB} = \Delta\varphi_{OC}$ . Из равенств (7) и (8) приходим к следующим соотношениям:

$$\Delta\varphi_s = \frac{3}{2}\Delta\varphi_T, \quad \dot{\varphi}_s = \frac{3}{2}\dot{\varphi}_T.$$

2) Пусть треугольник  $ABC$ , назовем его треугольником  $T$ , неподвижен, а точка  $P$  перемещается по окружности. Как будет при этом вести себя прямая Симсона для этого треугольника? Для ответа на этот вопрос поступим следующим образом.

Оставляя неподвижной точку  $P$ , повернем треугольник  $T$  на угол  $\Delta\varphi_T$ . Тогда его прямая Симсона повернется, как мы только что показали, на угол  $(\Delta\varphi_s)_1 = \frac{3}{2}\Delta\varphi_T$ . После этого повернем на угол  $-\Delta\varphi_T$  все: и радиус  $OP$ , и треугольник  $T$ . Тогда треугольник  $T$  вернется в прежнее положение, радиус  $OP$  повернется на угол  $-\Delta\varphi_T$ , и получаем равенство  $\Delta\varphi_{OP} = -\Delta\varphi_T$ , откуда  $\Delta\varphi_T = -\Delta\varphi_{OP}$ . А что произойдет с прямой Симсона? В результате второго перемещения она повернется на угол  $(\Delta\varphi_s)_2 = (-\Delta\varphi_T)$ . В итоге двух последовательных перемещений  $(\Delta\varphi_s)_1$  и  $(\Delta\varphi_s)_2$  исходная прямая Симсона повернется на угол  $\Delta\varphi_s = (\Delta\varphi_s)_1 + (\Delta\varphi_s)_2 = \frac{3}{2}\Delta\varphi_T + (-\Delta\varphi_T) = \frac{1}{2}\Delta\varphi_T$ . И получаем такое равенство:  $\Delta\varphi_s = -\frac{1}{2}\Delta\varphi_{OP}$ .

Итак, при перемещении точки  $P$  по окружности таким, что радиус  $OP$  поворачивается на угол  $\Delta\varphi_{OP}$ , приходим к равенствам

$$\Delta\varphi_s = -\frac{1}{2}\Delta\varphi_{OP}, \quad (9)$$

и, соответственно,

$$\dot{\varphi}_s = -\frac{1}{2}\dot{\varphi}_{OP}. \quad (10)$$

Таким образом, мы нашли в данном случае угловую скорость прямой Симсона, когда известна угловая скорость радиуса  $OP$ .

Рассмотрим теперь следующую задачу.

**Задача 2.** Углы треугольника  $ABC$ , вписанного в окружность с центром  $O$ , равны  $\alpha, \beta, \gamma$ . Положение точки  $P$  на окружности задано углом  $AOP = \delta$  (рис.6). Какие углы образует прямая Симсона этого треугольника с его сторонами?

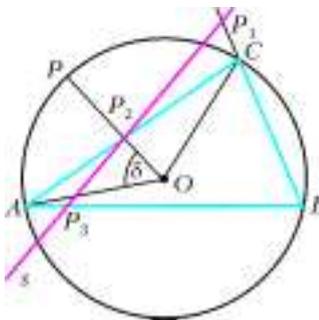


Рис. 6

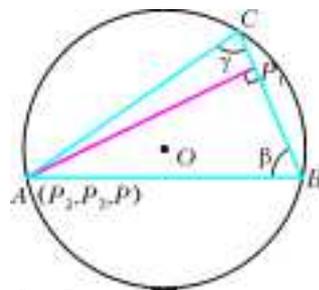


Рис. 7

**Решение.** Переместим точку  $P$  в вершину  $A$  и примем это положение как начальное. В этом положении треугольника  $ABC$  и точки  $P$  точки  $B, C$  остаются на своих местах, заданных условием (рис.7), а в точке  $A$  окажутся также точки  $P_3$  и  $P_2$ . Прямой Симсона  $s$  будет прямая  $AP_1$ . Углы, которые она образует в этом начальном положении со сторонами треугольника (мы снабдим их дополнительным нулевым индексом), равны  $(\varphi_{s,AB})_0 = 90^\circ - \beta$ ,  $(\varphi_{s,BC})_0 = 90^\circ$ ,  $(\varphi_{s,CA})_0 = -(90^\circ - \gamma)$ .

Вернем теперь точку  $P$  в заданное положение. Для этого повернем радиус  $OP$  на угол  $\Delta\varphi_{OP} = -\delta$ . Тогда прямая Симсона повернется на угол  $\Delta\varphi_s = -\frac{1}{2}\Delta\varphi_{OP} = \frac{1}{2}\delta$ . Поэтому углы, которые она образует в заданном условии задачи положении, равны  $(\varphi_{s,AB}) = \frac{\delta}{2} + 90^\circ - \beta$ ,  $(\varphi_{s,BC}) = \frac{\delta}{2} + 90^\circ$ ,  $(\varphi_{s,CA}) = \frac{\delta}{2} - (90^\circ - \gamma)$ . Так как  $90^\circ = (\alpha + \beta + \gamma)/2$ , можно этому результату придать более симпатичную форму:

$$(\varphi_{s,AB}) = \frac{\delta + \alpha - \beta + \gamma}{2}, \quad (\varphi_{s,BC}) = \frac{\delta + \alpha + \beta + \gamma}{2},$$

$$(\varphi_{s,CA}) = \frac{\delta - \alpha - \beta + \gamma}{2}.$$

**Задача 3.** Треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  вписаны в окружность с центром  $O$ . На этой окружности расположены точки  $P_1$  и  $P_2$ . Известны углы, которые образуют с некоторой фиксированной осью радиусы данной окружности, проведенные в вершины обоих треугольников и в указанные точки. Требуется найти угол между прямыми

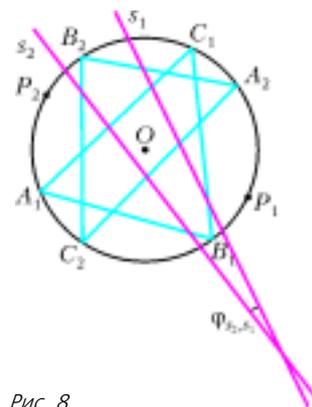


Рис. 8

Симсона двух конфигураций:  $(P_1, A_1B_1C_1)$  и  $(P_2, A_2B_2C_2)$  (рис.8).

**Решение.** Пусть  $\alpha_1$  – угол между  $OA_1$  и осью,  $\alpha_2$  – угол между  $OA_2$  и осью,  $\beta_1$  – угол между  $OB_1$  и осью,  $\beta_2$  – угол между  $OB_2$  и осью,  $\gamma_1$  – угол между  $OC_1$  и осью,  $\gamma_2$  – угол между  $OC_2$  и осью,  $\delta_1$  – угол между  $OP_1$  и осью,  $\delta_2$  – угол между  $OP_2$  и осью.

Переместим точки  $A_1, B_1, C_1$  в точки  $A_2, B_2, C_2$  соответственно и точку  $P_1$  в точку  $P_2$ . Тогда радиусы, проведенные в эти точки, повернутся соответственно на углы  $\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 - \beta_1, \gamma_2 - \gamma_1, \delta_2 - \delta_1$ . При каждом из таких перемещений прямая Симсона, согласно (7) и (9), повернется на углы  $0,5(\alpha_2 - \alpha_1), 0,5(\beta_2 - \beta_1), 0,5(\gamma_2 - \gamma_1), 0,5(\delta_2 - \delta_1)$ . Вследствие таких перемещений прямая Симсона первой конфигурации ( $s_1$ ) совместится с прямой Симсона второй конфигурации ( $s_2$ ). Согласно формулам (7) и (9), угол между прямыми  $s_1$  и  $s_2$  находится по формуле

$$\varphi_{s_1, s_2} = 0,5((\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) - ((\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + (\delta_1 - \delta_2))) \quad (10)$$

*Замечание.* Полученный угол может оказаться больше  $180^\circ$  или меньше  $0^\circ$ . В таком случае, согласно нашей договоренности, мы можем прибавлять или вычитать по  $180^\circ$  из полученного результата, пока не придем к углу в промежутке от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ .

**Задача 4.** Хорда  $PQ$  описанной окружности треугольника  $ABC$  перпендикулярна стороне  $BC$  (рис.9). Докажите, что прямая Симсона  $s$  конфигурации  $(P, ABC)$  параллельна прямой  $AQ$ .

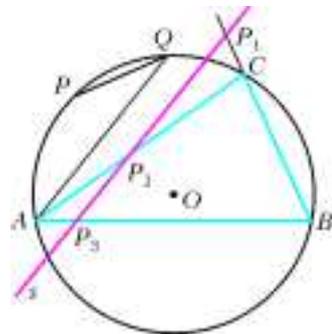


Рис. 9

**Доказательство.** Переместим вершину  $A$  в точку  $P$  и примем это положение как начальное. В этом положении треугольника  $ABC$  его вершина  $A$  совпадает с точкой  $P$ , а точки  $B, C, P_1, Q$  остаются на своих местах, заданных условием (рис.10). В этом случае в точке  $P$  окажутся

также точки  $P_3$  и  $P_2$ . Следовательно, прямая  $s$  совпадет с прямой  $AQ$ , иначе говоря, эти прямые образуют угол  $0^\circ$ . Будем теперь перемещать точку  $A$  по окружности; пусть угловая скорость радиуса  $OA$  равна  $\dot{\varphi}_{OA}$ .

Тогда  $\dot{\varphi}_s = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{OA}$ . Но угловая скорость хорды  $QA$ , как

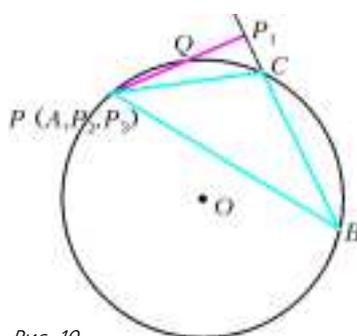


Рис. 10

было сказано раньше, также равна половине угловой скорости радиуса  $OA$ :  $\dot{\varphi}_{QA} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{OA}$ .

Поэтому прямая  $s$  и прямая  $AQ$  будут образовывать угол  $0^\circ$  при любом положении точки  $A$ , т.е. будут параллельны.

**Задача 5.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. На три его стороны  $AB, AD, BC$  из точки  $P$  этой окружности опущены перпендикуляры  $PP_1, PP_2, PP_3$  соответственно. Найдите угол  $P_2P_1P_3$ .

**Решение.** Рассмотрим два случая: 1) точка  $P$  находится на одной из дуг  $AD, DC, CB$ ; 2) точка  $P$  находится на дуге  $AB$  (каждый раз дуги не содержат вершин четырехугольника).

*Случай 1* (рис.11). Отрезок  $P_1P_2$  – это отрезок прямой Симсона треугольника  $ABD$ , а отрезок  $P_1P_3$  – отрезок прямой Симсона

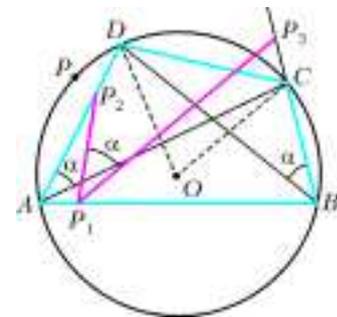


Рис. 11

треугольника  $ABC$ . Первый треугольник получается из второго перемещением точки  $C$  по окружности до совпадения ее с точкой  $D$ , т.е. поворотом радиуса  $OC$  на угол  $\Delta\varphi_{OC} = \angle DOC$ . При таком повороте стороны второго треугольника  $AC$  и  $BC$  поворачиваются на одинаковые углы:  $\angle DAC = \angle DBC = \alpha$ . На такой же угол (согласно (6)) повернется и прямая Симсона. Следовательно, искомый угол  $P_2P_1P_3$  также равен  $\alpha$ .

Такой же результат получится, когда точка  $P$  лежит на дуге  $BC$  или на дуге  $CD$ .

*Случай 2* (рис.12). В этом случае угол  $P_2P_1P_3$  образован отрезками прямых Симсона треугольника  $ABD$  (отрезок  $P_1P_2$ ) и треугольника  $BCD$  (отрезок  $P_1P_3$ ). При перемещении точки  $C$  в точку  $D$  отрезок  $P_1P_3$  (так же, как и в случае 1)

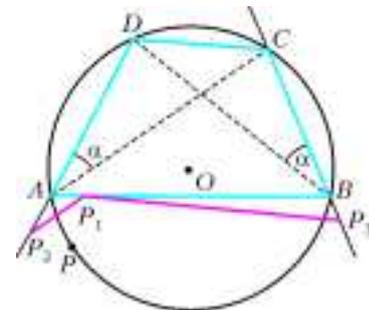


Рис. 12

поворачивается на угол  $\alpha$ . При этом угол  $P_2P_1P_3$  превращается в развернутый, и прямые Симсона опять же совпадают.

Искомый угол равен теперь разности развернутого угла и вписанного угла  $\alpha$ , опирающегося на дугу  $CD$ . Как мы договорились, такой угол мы считаем одинаковым с углом  $\alpha$ .

Эту задачу можно сформулировать в несколько другом виде. Пусть длины сторон  $BC, CD, DA, AB$  вписанного четырехугольника  $ABCD$  равны  $a_1, a_2, a_3, a_4$  соответственно.

Пусть, далее, точка  $P$  лежит на дуге, которую стягивает одна из сторон четырехугольника, скажем сторона  $DA$ . На стороны данного четырехугольника спроектируем точку  $P$ , и пусть  $P_1$  – ее проекция на сторону  $DA$ ,  $P_2$  – на сторону  $AB$ ,  $P_3$  – на сторону  $BC$ ,  $P_4$  – на сторону

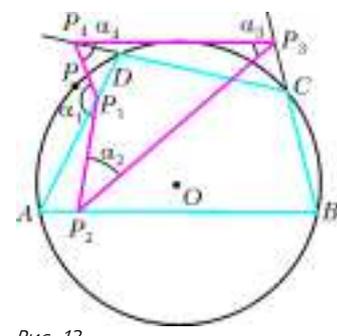


Рис. 13

CD (рис. 13). Обозначим углы при вершинах четырехугольника  $P_1P_2P_3P_4$  как  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  соответственно. При этом угол  $\alpha_1$  дополняет угол  $P_1$  этого четырехугольника до  $360^\circ$ , а другие углы  $\alpha_i$  принадлежат ему. Тогда верна своеобразная «теорема синусов», а именно:

$$a_1/\sin \alpha_1 = a_2/\sin \alpha_2 = a_3/\sin \alpha_3 = a_4/\sin \alpha_4 = 2R,$$

где  $R$  – радиус данной окружности.

**Задача 6.** Из точки  $P$  описанной около треугольника  $ABC$  окружности проведены наклонные  $PP_1, PP_2, PP_3$  на его стороны под равными и одинаково ориентированными углами  $\alpha$  (рис. 14). Докажите, что точки  $P_1, P_2, P_3$  лежат на одной прямой. Это обобщенная прямая Симсона. Назовем ее альфа-прямой Симсона и будем обозначать как  $s_\alpha$ .

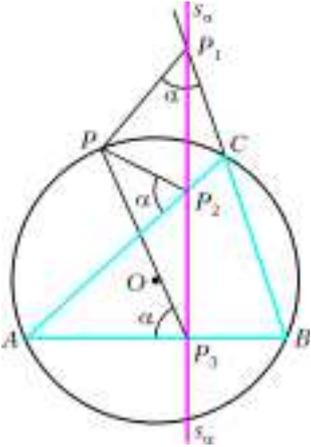


Рис. 14

**Доказательство.** При решении этой задачи будем действовать так же, как при решении задачи 1.

Точки  $A, P, P_3, P_2$  лежат на одной окружности, поскольку углы  $AP_2P, AP_3P$  одинаковы. При перемещении точки  $C$  по данной окружности первые три точки неподвижны, а точка  $P_2$  перемещается. Тогда, согласно формуле (2), при этом перемещении выполняется равенство  $\dot{\phi}_{P_3P_2} = \dot{\phi}_{AP_2}$ . Но прямая  $AP_2$  та же самая, что и прямая  $AC$ . Поэтому можно записать так:  $\dot{\phi}_{P_3P_2} = \dot{\phi}_{AP_2} = \dot{\phi}_{AC}$ .

Точно так же точки  $B, P, P_3, P_1$  лежат на одной окружности, и при перемещении точки  $C$  выполняются равенства  $\dot{\phi}_{P_3P_1} = \dot{\phi}_{BC} = \dot{\phi}_{AC}$ .

Из последних двух равенств следует, что угловые скорости отрезков  $P_3P_2$  и  $P_3P_1$  равны. В момент, когда точка  $C$  совпадает с точкой  $P$ , эти отрезки совпадают, более общо – лежат на одной прямой. Поэтому они лежат на одной прямой и при любом положении точки  $C$ .

Заметим, что прямая  $P_3P_2$ , как и прямая  $P_3P_1$ , – это и есть прямая  $s_\alpha$ , поэтому мы можем написать такое равенство:  $\dot{\phi}_{s_\alpha} = \dot{\phi}_{AC} = \dot{\phi}_{BC}$ . Отсюда следует, что при перемещении вершины  $C$  треугольника  $ABC$  по окружности угловая скорость прямой  $s_\alpha$  не зависит от  $\alpha$ .

**Задача 7.** Для точки  $P$  и треугольника  $ABC$  построены две прямые Симсона: альфа-прямая  $s_\alpha$  и бета-прямая  $s_\beta$  ( $\alpha > \beta$ ). Докажите, что угол между этими прямыми равен  $\alpha - \beta$ .

**Доказательство.** В предыдущей задаче было получено равенство  $\dot{\phi}_{s_\alpha} = \dot{\phi}_{AC}$ . Так как угловая скорость прямой Симсона не зависит от величины угла наклона, то можно написать и такое равенство:  $\dot{\phi}_{s_\beta} = \dot{\phi}_{AC}$ . Значит,  $\dot{\phi}_{s_\alpha} = \dot{\phi}_{s_\beta}$ . Так как угловые скорости прямых  $s_\alpha$  и  $s_\beta$  равны, то угол между этими прямыми остается постоянным. Для его нахождения рассмотрим положение, при котором точка  $C$  совпадает с точкой  $P$  (рис. 15).

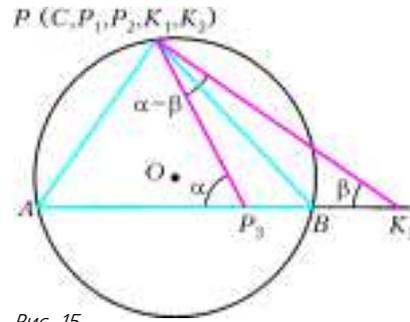


Рис. 15

В этой же точке окажутся также точки  $P_2$  и  $P_1$  – основания  $\alpha$ -наклонных, проведенных из точки  $P$  на стороны  $AC, BC$  треугольника, и точки  $K_2$  и  $K_1$  – основания  $\beta$ -наклонных, проведенных из точки  $P$  на эти же стороны. Прямые  $s_\alpha$  ( $PP_3$ ) и  $s_\beta$  ( $PK_3$ ) пересекаются в точке  $P$ . Из треугольника  $PK_3P_3$  видно, что угол  $P_3PK_3$  между прямыми  $s_\alpha$  и  $s_\beta$  равен  $\alpha - \beta$ .

**Задача 8.** Пусть точки  $P$  и  $Q$  лежат на окружности, описанной вокруг треугольника  $ABC$ . Докажите, что при перемещении точки  $C$  по данной окружности точка пересечения соответствующих прямых Симсона  $s_P$  и  $s_Q$  описывает окружность.

**Доказательство.** Пусть точки  $P_3$  и  $Q_3$  – проекции точек  $P$  и  $Q$  на сторону  $AB$  соответственно,  $s_P$  и  $s_Q$  – прямые Симсона, соответствующие точкам  $P$  и  $Q$  (разумеется, эти прямые проходят через точки  $P_3$  и  $Q_3$  соответственно; рис. 16).

Пусть, далее, угловая скорость радиуса  $OC$  равна  $\dot{\phi}_{OC}$ . Тогда угловые скорости прямых  $s_P$  и  $s_Q$  равны  $\frac{1}{2}\dot{\phi}_{OC}$ , поэтому угол  $\alpha$  между ними не меняется. Поскольку точки  $P_3$  и  $Q_3$  прямых Симсона неподвижны при данном перемещении точки  $C$ , а угол  $\alpha$  между ними не меняется, то точка пересечения прямых  $s_P$  и  $s_Q$  будет перемещаться по окружности, проходящей через точки  $P_3$  и  $Q_3$ .

**Задача 9.** Пусть в условии предыдущей задачи дополнительно сказано, что точки  $P$  и  $Q$  диаметрально противоположны. Докажите, что отрезок  $P_3Q_3$  – диаметр окружности, по которой перемещается точка пересечения прямых Симсона  $s_P$  и  $s_Q$ .

Решите эту задачу самостоятельно.

**Задача 10.** Пусть задана конфигурация  $(P, ABC)$  и пусть  $P_1, P_2, P_3$  – проекции точки  $P$  на прямые  $BC, AC, AB$  соответственно. Из точки  $P$  проведены также перпендикуляры  $PK_1, PK_2, PK_3$  на касательные к данной окружности, проведенные соответственно через вершины  $A, B, C$  данного треугольника (на рисунке 17 эти перпендикуляры и перпендикуля-

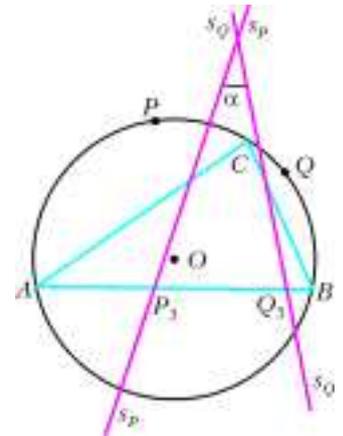


Рис. 16

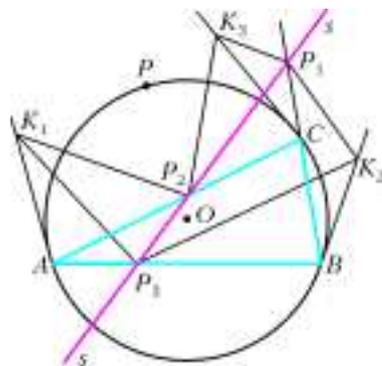


Рис. 17

мы, точка  $B_1$  и точка  $C$  – одна и та же). Тогда треугольник  $ABC$  вырождается в «треугольник»  $AB_1C$ , у которого две стороны  $AC$  и  $AB_1$  совпадают, а «третья сторона»  $B_1C$  имеет нулевую длину (рис.18). Кроме того, прямая  $BC$  в предельном положении направлена по касательной  $CC_1$ .

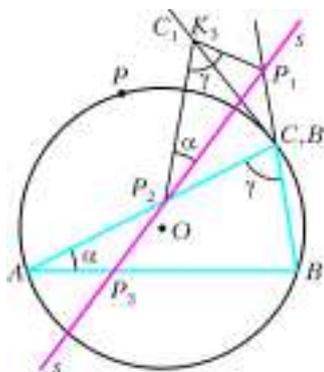


Рис. 18

Отрезок  $P_2K_3$  лежит на прямой Симсона «треугольника»  $AB_1C$ . Угол  $SAV$  равен углу между касательной  $CK_3$  и прямой  $BC$  (и равен  $\alpha$ ). Поэтому можно считать, что «треугольник»  $AB_1C$  получился из треугольника  $ABC$  поворотом сторон  $AB$  и  $CB$  на угол  $\alpha$ . Но тогда и угол между прямыми Симсона  $P_2P_1$  и  $P_2K_3$  для треугольника  $ABC$  и «треугольника»  $AB_1C$  соответственно равен  $\alpha$ :  $\angle K_3P_2P_1 = \alpha$ .

Теперь переместим точку  $A$  в точку  $B$ . Тогда «треугольник»  $SAB_1$  обратится в «треугольник»  $SBB_1$ . При этом стороны  $SA$  и  $B_1A$  повернутся на угол  $\gamma$ . На этот же угол повернется и прямая Симсона  $P_2K_3$  «треугольника»  $SAB_1$ , т.е.  $\angle P_1K_3P_2 = \gamma$ .

Но тогда треугольники  $ABC$  и  $P_2P_3P_1$  подобны по двум углам  $\alpha$  и  $\gamma$ .

Аналогично доказывается подобие треугольников  $K_1P_3P_2$  и  $K_2P_1P_3$  треугольнику  $ABC$ .

ры  $PP_1, PP_2, PP_3$  не показаны). Докажите подобие треугольников  $ABC, K_1P_3P_2, K_2P_1P_3, K_3P_2P_1$ .

**Доказательство.** Докажем, к примеру, подобие треугольников  $ABC$  и  $K_3P_2P_1$  (см. рис.17). Переместим точку  $B$  в точку  $C$ , обозначив ее новое положение (для удобства) как  $B_1$  (тем самым, точка  $B_1$  и точка  $C$  – одна и та же). Тогда треугольник  $ABC$  вырождается в «треугольник»  $AB_1C$ , у которого две стороны  $AC$  и  $AB_1$  совпадают, а «третья сторона»  $B_1C$  имеет нулевую длину (рис.18). Кроме того, прямая  $BC$  в предельном положении направлена по касательной  $CC_1$ .

Отрезок  $P_2K_3$  лежит на прямой Симсона «треугольника»  $AB_1C$ . Угол  $SAV$  равен углу между касательной  $CK_3$  и прямой  $BC$  (и равен  $\alpha$ ). Поэтому можно считать, что «треугольник»  $AB_1C$  получился из треугольника  $ABC$  поворотом сторон  $AB$  и  $CB$  на угол  $\alpha$ . Но тогда и угол между прямыми Симсона  $P_2P_1$  и  $P_2K_3$  для треугольника  $ABC$  и «треугольника»  $AB_1C$  соответственно равен  $\alpha$ :  $\angle K_3P_2P_1 = \alpha$ .

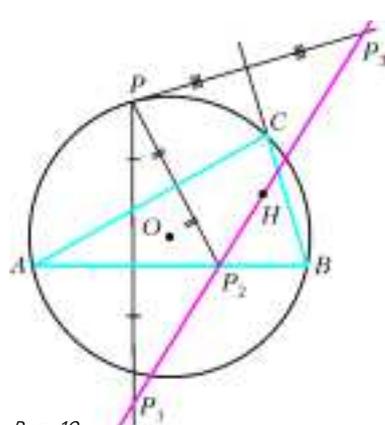


Рис. 19

Для самостоятельного решения мы предлагаем вам такие задачи.

**Упражнения**

1. Пусть точка  $P$  лежит на окружности, описанной вокруг треугольника  $ABC$ , и  $P_1, P_2, P_3$  – точки, симметричные точке  $P$  относительно сторон  $AB, AC, BC$  треугольника  $ABC$  соответственно. Докажите, что точки  $P_1, P_2,$

$P_3$  лежат на одной прямой, проходящей через ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$  (рис.19).

2. У треугольников  $AB_1C_1$  и  $AB_2C_2$ , вписанных в данную окружность, стороны  $B_1C_1$  и  $B_2C_2$  параллельны. Для точки  $P$  на этой окружности построены прямые Симсона этих треугольников. Докажите, что они параллельны.

3. В данную окружность вписаны два треугольника:  $A_1BC$  и  $A_2BC$ . На этой же окружности взяты точки  $P_1$  и  $P_2$ . При этом дуги  $A_1P_1$  и  $A_2P_2$  равны. Докажите, что прямые Симсона двух конфигураций  $(P_1, A_1BC)$  и  $(P_2, A_2BC)$  параллельны.

4. Где должна быть расположена точка  $P$ , лежащая на окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , чтобы прямая Симсона конфигурации  $(P, ABC)$  содержала сторону  $AB$ ?

5. Четырехугольник  $A_1A_2A_3A_4$  вписан в окружность с центром  $O$  и построены четыре прямые Симсона  $s_1, s_2, s_3, s_4$  (прямая  $s_1$  это прямая Симсона для конфигурации  $(A_1, A_2A_3A_4)$ ; аналогично задаются прямые  $s_2, s_3, s_4$ ). Докажите, что угол между двумя любыми прямыми из этих четырех равен углу между радиусами, проведенными в соответствующие вершины, т.е.  $\varphi_{s_i, s_j} = \varphi_{OA_j, OA_i}$ .

6. Пятиугольная звезда  $A_1A_2A_3A_4A_5$  вписана в окружность. Точки  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  – проекции точки  $P$  этой окружности на стороны звезды  $A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1, A_1A_2, A_2A_3$  соответственно. Найдите углы при вершинах пятиугольника  $P_1P_2P_3P_4P_5$ .

Любопытно заметить, что авторы наблюдали за поведением прямой Симсона на компьютере с помощью программного пакета Geometer Sketchpad. Мы смогли воочию убедиться в некоторых результатах, полученных на бумаге. Например:

1) когда по окружности движется точка  $P$ , то прямая Симсона вращается в сторону, противоположную вращению радиуса  $OP$ ;

2) в случае, когда вращается весь треугольник, прямая Симсона вращается в ту же сторону, обгоняя его.

Но мы увидели и то, что нам не приходило в голову при «бумажной» работе. Один из таких примеров – при вращении одной из сторон треугольника (и при неподвижных третьей вершине треугольника и точке  $P$ ) прямая Симсона может выходить за пределы данной окружности и находиться там довольно долго. Поэтому возникла такая задача.

**Упражнение 7.** а) При каком условии прямая Симсона является касательной к данной окружности? (Авторы знают ответ только в частных случаях.) б) Сколько раз за один поворот стороны прямая Симсона окажется касательной к данной окружности? в) Какое положение по отношению к данной окружности (пересекается, не имеет общих точек) имеет прямая Симсона в промежутке между двумя последовательными моментами касания?

Мы предлагаем вам задуматься и над таким парадоксом. При движении точки  $P$  по окружности с центром  $O$  и неподвижном треугольнике  $ABC$ , вписанном в эту окружность, угловая скорость прямой Симсона вдвое меньше угловой скорости радиуса  $OP$ . Если же точка  $P$  неподвижна, а вращается вокруг центра  $O$  треугольник  $ABC$  (с той же угловой скоростью, с которой перед этим вращался радиус  $OP$ ), то угловая скорость прямой Симсона в полтора раза больше угловой скорости треугольника. Ведь интуитивно кажется, что нет разницы в том, что вращается: радиус или треугольник.

# Университеты Австрии

А. ВАСИЛЬЕВ

ИЗ ВОСЬМИ ГОСУДАРСТВЕННЫХ УНИВЕРСИТЕТОВ Австрии – четыре старейших. Это университеты Вены (1365 г.), Инсбрука (1569 г.), Граца (1585 г.) и Зальцбурга (1622 г.). Все они сыграли выдающуюся роль в развитии своих провинций и страны в целом. Их исторические пути во многом схожи, хотя между ними всегда имелись и существенные различия.

Университет Инсбрука прослеживает свою историю от Иезуитской школы, хотя права университета он получил от императора Леопольда I лишь в 1570 году. Дважды затем этот университет распускался и собирался вновь, пока император Франц I окончательно не закрепил его статус. В настоящее время *Королевский Императорский Леопольда Франца университет Инсбрука* носит имена обоих императоров.

Университет Граца обязан своему преобразованию из Иезуитского колледжа великому герцогу провинции Штейермарк Карлу, а также благосклонности папы Сикста V и императора Рудольфа II. За свою более чем четырехвековую историю *Карла Франца университет Граца* не раз испытывал трудные времена и даже преобразовывался в лицей, пока в 1827 году окончательно не обрел университетского статуса указом императора Франца I.

*Университет Зальцбурга* вновь открыл свои двери лишь в 1962 году, но носит имя своего основателя – принца-архиепископа Париса Лодрона. В 1622 году состоялось торжественное открытие этого университета, причем он пользовался тогда теми же имперскими привилегиями, что и университеты Германии, Франции и Италии. Временная аннексия Зальцбурга Баварией во времена наполеоновских войн привела к приостановке, а затем и закрытию этого университета.

Безусловным лидером среди австрийских университетов в области культуры, науки и образования является *Венский университет*.

Развитие Вены как политического, экономического и культурного центра будущей Австрийской империи занимало центральное место в амбициозных планах герцога Рудольфа IV, и 12 марта 1365 года он санкционировал основание Венского университета как центра подготовки специалистов докторского уровня по всем «дозволенным» дисциплинам. Этот проект был ратифицирован папой Урбаном V 18 июня 1365 года, который, однако, не позволил открыть теологический факультет. (Причиной отказа, возможно, стало вмешательство императора Карла IV, не желавшего конкуренции недавно созданному Пражскому университету.) Только в 1384 году герцогу Альбрехту III удалось расширить университет до четырех факультетов – теологии, юриспруденции, медицины («высшие фа-

культеты») и изящных искусств (впоследствии факультет философии), по образу и подобию Парижского университета.

В соответствии с географическим принципом, студенты Венского университета подразделялись на четыре «академические нации». Австрийская нация включала студентов с территорий, контролируемых Габсбургами, а также из Италии и Швейцарии. Рейнская нация представляла студентов из Баварии, Швабии, Франконии, Нижнего Рейна и Западной Европы. Венгерская нация включала не только венгров, но и студентов из Богемии, Моравии, Польши и других славянских земель. Наконец, Саксонская нация была представлена студентами из Северной Германии, Скандинавии и Британских островов. Такое подразделение, введенное в 1384 году, сохранялось до 1838 года.

Старейший среди германоязычных университетов, Венский университет развивался очень стремительно. Уже в XV веке он набирал наибольшее число студентов во всей Священной Римской империи. Студенты того времени были существенно моложе нынешних. На факультет изящных искусств они поступали в возрасте 14–16 лет при условии знания латыни, на которой и велось преподавание. Использование латыни в профессиональной деятельности того времени, в частности в медицине и юриспруденции, имело глубокие корни. Еще египетские жрецы древности использовали особый язык и тайную систему знаков для защиты своих знаний от непосвященных. Накопление фундаментальных знаний на факультете изящных искусств было необходимым для допуска к обучению на одном из «высших факультетов». Лишь малая часть студентов получала такой допуск, и уж совсем немногие достигали академических степеней. Большинство выпускников удовлетворялись степенью бакалавра, имея которую можно было претендовать и на степень магистра в изящных искусствах. Магистры имели право и были обязаны в течение двух лет преподавать на своем факультете. В это же время они могли обучаться на одном из «высших факультетов», где также можно было достичь степеней бакалавра, лиценциата и доктора.

Структура Венского университета, типичная для средневековых университетов Европы, держалась на строгой иерархии, хотя и предусматривала выборность руководящих органов. На вершине этой пирамиды находился ректор, а внизу, как и положено, были студенты. Студенты Венского университета, принадлежавшие к одной из «академических наций», выбирали своего прокуратора. Прокураторы, в свою очередь, избирали ректора. Доктора и магистры составляли корпус каждого факультета и каждый семестр выбира-

ли из своего состава деканов. Деканы факультетов, наряду с прокураторами «академических наций», входили в состав Ученого совета, который возглавлял ректор. Для решения стратегически важных вопросов университетской жизни собиралась Ассамблея – собрание всех преподавателей университета.

Венский университет, как и любой европейский университет того времени, пользовался всеми академическими свободами и правами. Автономия университета предусматривала, прежде всего, независимость от государства и церкви. Сотрудники университета были освобождены от налогов и военной службы. Они подчинялись собственной юрисдикции, которую осуществлял ректор. Запись в университетском матрикуле была свидетельством принадлежности к «Республике школяров».

В период абсолютизма Венский университет использовался для укрепления единства и объединения империи. Профессора, ранее свободные преподаватели, стали получать кафедры и вспомоществование от государства. В 1623–1773 годах преподавание в Венском университете контролировалось орденом Иезуитов, и вспомогательная роль философского факультета была доведена до крайней черты. Открытия естественных наук того времени практически не находили места в учебных программах, а преподавание было оторвано от научных исследований. Тогда же, однако, расцвело барочное великолепие университета. Ему были предоставлены новые роскошные здания в столице империи, докторские диссертации спонсировались императором, спектакли студенческого театра пользовались успехом у просвещенной публики.

Вплоть до наступления эпохи просвещения доступ в университет был возможен лишь для католиков. В годы правления Марии Терезии и Йозефа II были предприняты решительные шаги по ослаблению влияния церкви в университете. С 1778 года протестантам были разрешены докторские степени, а в 1782 году император Йозеф II разрешил докторантуру по юриспруденции и медицине евреям. Тем не менее, вплоть до начала XX века Венский университет оставался оплотом католицизма.

Венская революция 1848 года, в которой студенты и выпускники университета сыграли главную роль, принесла долгожданные реформы в образовании и научных исследованиях. Их уровень во всех дисциплинах необычайно возрос. Особенно больших успехов профессора и воспитанники Венского университета достигли в медицине, экономике, славистике, теории искусств, химии, физике и математике.

Венская школа физики представлена многими выдающимися учеными. Физический факультет Венского университета был основан Кристианом Доплером (1803–1853). Физикам хорошо известен эффект, названный его именем. Он заключается в том, что частота колебаний, воспринимаемых каким-либо приемником, зависит от скорости, с которой относительно него движется излучатель. Йозефа Лошмидта (1821–1895) сделала знаменитой его публикация «О размерах молекул воздуха». «Число Лошмидта» – число молекул в  $1 \text{ см}^3$

идеального газа при нормальных условиях – играет фундаментальную роль в молекулярной теории газов. Людвиг Больцман (1844–1906) разработал кинетическую теорию газов, обосновал «закон Стефана–Больцмана» для излучающих тел и внес определяющий вклад в теорию электромагнитных явлений. Теодор Опольцер (1841–1886) считается крупнейшим теоретиком астрономии после Кеплера. Его перу принадлежат фундаментальные труды «Руководство по определению кометных орбит» и «Канон затмений». Физик и философ Эрнст Мах (1838–1916) известен в точных науках «числом Маха» – отношением скорости течения к скорости звука в той же точке потока. Фридрих Газенорль (1874–1915) был одним из пионеров физики низких температур, а среди его многочисленных учеников – нобелевский лауреат Эрвин Шрёдингер (Нобелевская премия по физике 1933 года).

Наряду со Шрёдингером в список нобелевских лауреатов, выпускников и преподавателей Венского университета, входят Роберт Барани (Нобелевская премия по медицине 1914 года), Юлиус Вагнер-Яурегг (Нобелевская премия по медицине 1927 года), Ханс Фишер (Нобелевская премия по химии 1930 года), Карл Ландштейнер (Нобелевская премия по медицине 1930 года), Виктор Гесс (Нобелевская премия по физике 1936 года), Отто Леви (Нобелевская премия по медицине 1936 года), Конрад Лоренц (Нобелевская премия по медицине 1973 года), Фридрих фон Хайек (Нобелевская премия по экономике 1974 года).

Одним из знаменитейших выпускников Венского университета стал Зигмунд Фрейд (1856–1939). Он изучал медицину в Венском университете и получил здесь ученую степень по нейропатологии, главным направлением его исследований стало изучение психических расстройств. Теория Фрейда о развитии неврозов знаменовала радикально новый подход к пониманию функционирования мозга. Его метод психоанализа раскрыл многие побудительные мотивы человеческой деятельности. В 1934 году Фрейда лишили лицензии на преподавание, а после аннексии Австрии фашистской Германией он был изгнан из страны.

В 1965 году Венский университет широко отпраздновал свое 600-летие. В 1975 году в Венском университете прошли демократические реформы. В настоящее время не только профессора и администраторы, но даже и студенты участвуют в решении ключевых проблем функционирования университета. Сейчас Венский университет состоит из восьми факультетов – католической теологии, протестантской теологии, социологии и экономики, юриспруденции, медицины, фундаментальных и интегрированных исследований, гуманитарных наук, формальных и естественных наук. Быстрое развитие всех направлений исследований сопровождается резким увеличением числа студентов.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 апреля 2005 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2005» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M1936» или «Ф1943». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

## Задачи M1936–M1945, Ф1943–Ф1952

**M1936.** Какую наименьшую ширину должна иметь бесконечная полоса бумаги, чтобы из нее можно было вырезать любой треугольник площади 1?

*Д. Семёнов (ученик 11 кл.)*

**M1937.** Окружности  $S_1, S_2, S_3$  попарно касаются друг друга внешним образом (рис. 1). Пусть  $A, B, C$  – точки касания  $S_1$  и  $S_2$ ,  $S_1$  и  $S_3$ ,  $S_2$  и  $S_3$  соответственно. Прямая  $AB$  повторно пересекает  $S_2$  и  $S_3$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Прямая  $DC$  повторно пересекает  $S_3$  в точке  $F$ . Докажите, что  $\triangle DEF$  прямоугольный.

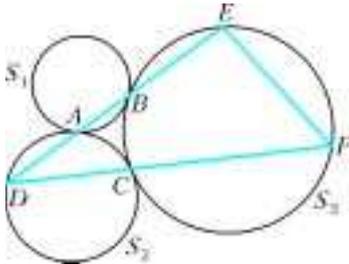


Рис. 1

*И. Рудаков*

**M1938.** Для любых чисел  $x_1, \dots, x_n$  докажите неравенство

$$\max \{x_1, \dots, x_n, -x_1 - \dots - x_n\} \geq \frac{|x_1| + \dots + |x_n|}{2n - 1}.$$

*Н. Осипов*

**M1939.** Вершины 50 прямоугольников разделили окружность на 200 равных дуг. Докажите, что среди прямоугольников найдутся два равных.

*В. Произволов*

**M1940.** Пусть  $a$  – натуральное число. Докажите, что уравнение  $x(x + a) = y^2$

а) при  $a = 1, 2, 4$  не имеет решений в натуральных числах;

б) при любом другом натуральном  $a$  имеет их.

*В. Сендеров*

**M1941.** На плоскости жили 44 веселых чижа, точечных и непрозрачных. После посещения плоскости Мурзиком чижи разлетелись и расселись на плоскости так, что каждый из них видит ровно 10 других. Докажите, что посещение Мурзиком плоскости уменьшило количество проживающих на ней веселых чижей.

*Г. Гальперин, В. Сендеров*

**M1942.** Внутри острого угла с вершиной  $O$  даны точки  $A$  и  $B$ . Бильярдный шар может попасть из  $A$  в  $B$ , отразившись либо от одной стороны угла в точке  $M$ , либо от другой в точке  $N$ . Докажите, что если  $OA = OB$ , то точки  $O, A, B, M, N$  лежат на одной окружности.

*А. Заславский*

**M1943.** По кругу расставлено несколько корзин (не меньше трех). Первоначально в одной из них лежит одно яблоко, а остальные корзины пусты. Далее неоднократно проделывают следующее: из какой-либо корзины вынимают яблоко, а взамен кладут по одному яблоку в каждую из двух соседних с ней корзин. При каком количестве корзин можно добиться того, чтобы во всех корзинах яблок стало поровну?

*И. Акулич*

**M1944.** Квадратный стол площади 5 можно покрыть в четыре слоя пятью квадратными салфетками, площадь каждой из которых равна 4. Как это сделать? Салфетки разрешается перегибать.

*В. Произволов*

**M1945.** Всякий ли остроугольный треугольник можно расположить в пространстве так, что его вершины окажутся

а) на ребрах какого-нибудь куба, выходящих из одной его вершины;

б) на диагоналях граней какого-нибудь куба, выходящих из одной его вершины?

*С.Дворянинов, В.Сендеров*

**Ф1943.** По горизонтальному столу скользит плоский лист фанеры, на котором нарисована система координат  $xy$ . В данный момент скорость точки  $A$  с координатами  $(1; 3)$  направлена вдоль оси  $x$  и равна  $1$  м/с. Скорость точки  $B$  с координатами  $(2; 1)$  составляет в тот же момент угол  $45^\circ$  с осью  $x$ . Где находятся точки листа, скорости которых по величине не превосходят  $1$  см/с?

*А.Центров*

**Ф1944.** В системе на рисунке 2 все блоки одинаковы, их массы практически сосредоточены в тонких осях.

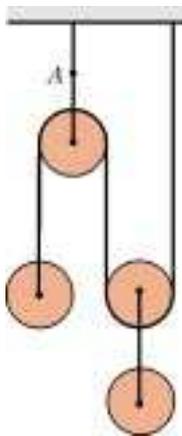


Рис. 2

Найдите ускорения блоков после того, как мы перережем нить в точке  $A$ . Нити считать нерастяжимыми и очень легкими. Свободные куски нитей вертикальны.

*А.Зильберман*

**Ф1945.** На горизонтальном гладком столе покоится клин массой  $M$  с углом  $\alpha$  при основании. На него наезжает со скоростью  $v_0$  маленькое тело массой  $m$  и начинает подниматься вверх по клину (удара при этом не происходит – у основания клина сделан плавный «въезд»). При какой высоте клина  $H$  маленькое тело поднимется по нему на самый верх?

С какой скоростью будет двигаться клин после того, как маленькое тело его покинет?

*А.Повторов*

**Ф1946.** В сосуде под поршнем находится моль гелия. Медленно нагреваем газ, при этом его объем увеличивается, однако частота ударов частиц о неподвижное дно сосуда остается неизменной. Найдите теплоемкость газа в таком процессе.

*З.Рафаилов*

**Ф1947.** В легком тонкостенном сосуде мы нагреваем при помощи кипятильника 1 литр воды. Температура достигает  $60^\circ\text{C}$  и никак дальше не растет. Нам надоело, и мы выключаем нагреватель. За первые 20 секунд вода остывает на 2 градуса. На упаковке кипятильника было написано: «500 ватт, сделано в Китае». Сколько ватт содержит «китайский ватт»?

*О.Простов*

**Ф1948.** Три тонкие пластины в виде кругов диаметром  $D$  расположены параллельно друг другу, расстояние между соседними пластинами  $d$  ( $d \ll D$ ). Средняя пластина равномерно заряжена по поверхности зарядом  $2Q$ , крайние – тоже равномерно, но зарядами противоположного знака по  $-Q$  каждая. Найдите потенциалы центров пластин. Других тел рядом нет.

*А.Повторов*

**Ф1949.** Мостик из четырех резисторов подключен к батарее. К диагонали мостика подключили последо-

вательно соединенные другую батарейку – ее напряжение известно и составляет  $12$  В – и амперметр. Показания прибора при этом составили  $5$  мА. После того, как мы поменяли местами выводы батарейки напряжением  $12$  В, ток через амперметр поменял направление и стал равен  $35$  мА. Потом поменяли местами батарейки – ток амперметра упал до нуля. Что покажет прибор, если одну из батареек теперь включить «наоборот» (поменять местами выводы)?

*Р.Александров*

**Ф1950.** Из куска тонкого провода, имеющего сопротивление  $r = 100$  Ом, сделали квадратный контур и охватили им длинный соленоид, по которому пропускают изменяющийся со временем по линейному закону ток. Ток в контуре составил при этом  $I = 5$  мА. Какое напряжение покажет вольтметр, включенный вместо одной из сторон квадрата? Что будет показывать этот вольтметр в другом случае – если сторону квадратного контура не убирать, а просто подключить вольтметр короткими проводами к концам этой стороны? Сопротивление вольтметра  $R = 1000$  Ом.

*А.Старов*

**Ф1951.** Одинаковые конденсаторы емкостью  $C$  каждый соединяют последовательно, а крайние выводы получившейся цепочки подключают к зажимам последовательно соединенных батареек напряжением  $U$  слева и  $2U$  справа (рис.3). Немного подождав, между точками  $A$  и  $B$  включают катушку индуктивностью  $L$ . Найдите максимальное значение силы тока через катушку. Найдите также максимальные заряды конденсаторов. Сопротивление проводов считать малым (но не нулевым!). Батарейки, конденсаторы и катушку считать идеальными.

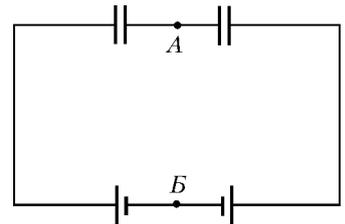


Рис. 3

*З.Рафаилов*

**Ф1952.** В фокусе большого параболического отражателя находится точечный источник радиоволн частотой  $f = 1000$  МГц, диаметр параболического отражателя  $D = 6$  м. Из-за дифракции система излучает расходящийся пучок волн. На сколько нужно отодвинуть источник вдоль оси параболоида, чтобы расходимость пучка увеличилась примерно в три раза?

*З.Волнов*

### Поправка и замечание

Новая формулировка задачи **M1935**: «Все грани тетраэдра – подобные треугольники. Верно ли, что они равны?»

При решении задачи **M1934** разрешается считать, что числа взаимно просты в совокупности.

**Решения задач М1916–М1920,  
Ф1928–Ф1937**

**М1916.** *Равносторонний треугольник разрезан на 25 равносторонних треугольничков, лишь один из которых имеет отличную от 1 площадь. Какую?*

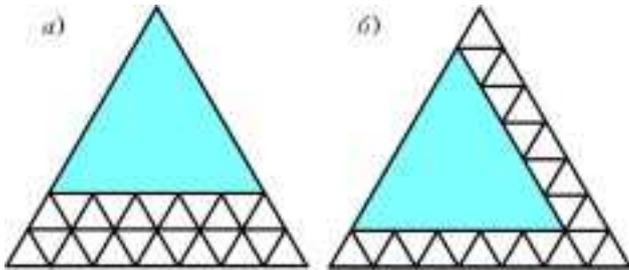
**Ответ:** 25.

Поменяем формулировку задачи на эквивалентную, но более удобную для изложения решения:

Исходный равносторонний треугольник  $\Delta$  разрезан на 25 равносторонних треугольничков, только у одного из которых – обозначим его  $\Delta_1$  – длина стороны  $k \neq 1$ . Требуется найти  $k$ .

Если длина стороны какого-либо равностороннего треугольничка есть целое число  $a$ , то этот треугольничок можно разрезать на  $a^2$  равносторонних треугольничков, у каждого из которых длина стороны 1.

Хотя бы к одной стороне треугольничка  $\Delta$  не примыкает треугольничок  $\Delta_1$ , а значит, примыкают только треугольнички со сторонами 1, т.е. длина стороны  $\Delta$  – целое



число  $n$ . Точно так же можно рассудить, что длина стороны треугольничка  $\Delta_1$  – целое число  $k$ . После чего можно записать равенство  $n^2 - k^2 = 24$ . Это целочисленное уравнение, с учетом того, что  $k \neq 1$ , имеет только одно удовлетворяющее нас решение:  $n = 7, k = 5$ . У этого решения возможны два воплощения (см. рисунок). На вопрос «какую?» отвечаем: 25.

*В.Произволов*

**М1917.** *О натуральных числах  $a, p, q$  известно, что  $ap + 1$  делится на  $q, aq + 1$  делится на  $p$ . Докажите, что  $a > \frac{pq}{2(p+q)}$ .*

Очевидно,  $p$  и  $q$  взаимно просты (если  $d$  – их общий делитель, то он является также делителем числа  $ap + 1$ , а следовательно, и числа  $ap + 1 - ap = 1$ ). Поэтому число  $ap + aq + 1$ , которое делится и на  $p$ , и на  $q$ , делится на их произведение  $pq$ . Значит,  $a(p+q) \geq pq - 1$ , откуда  $2a(p+q) > pq$  (левая часть увеличилась на  $a(p+q) > 1$ ), и  $a > \frac{pq}{2(p+q)}$ . Вот и все.

*А.Голованов*

**М1918.** *К двум окружностям проведены общие внешние касательные, одна из которых касается окружностей в точках  $A$  и  $B$ . Бильярдный шар, выпущенный из точки  $A$ , отразился от второй касательной и попал в точку  $B$ . Докажите, что хорды, отсекаемые его траекторией на окружностях, равны.*

Для равных окружностей утверждение очевидно, поэтому будем считать, что касательные пересекаются в точке  $C$ . Пусть  $A', B'$  – точки, симметричные  $A, B$  относительно второй касательной;  $I_a, r_a$  – центр и радиус окружности, проходящей через  $A$ ;  $I_b, r_b$  – центр и радиус окружности, проходящей через  $B'$ . Утверждение задачи эквивалентно равенству касательных, проведенных из точек  $A$  к окружности с центром  $I_b$  и радиусом  $r_b$  и из точки  $B'$  к окружности с центром  $I_a$  и радиусом  $r_a$ . Квадрат первой касательной равен

$$AI_b^2 - r_b^2 = AC^2 + CI_b^2 - r_b^2 - 2AC \cdot CI_b \cos \angle 3C/2 =$$

$$= AC^2 + B'C^2 - \frac{2AC \cdot B'C \cos \angle 3C/2}{\cos \angle C/2}.$$

Очевидно, то же выражение получится и для квадрата второй касательной.

*А.Заславский*

**М1919.** *Докажите, что число*

- a)  $2004^x + 1$ ,
- б)  $2004^x - 1$

*не является второй или более высокой целой степенью натурального числа ни при каком натуральном  $x$ .*

a) Предположим, что  $2004^x + 1 = y^p$ .

Пусть  $p = 2$ . Тогда  $(y - 1)(y + 1) = 2004^x, a \geq 167^x, b \leq 12^x, 2 = |a - b| \geq 167^x - 12^x \geq 155$ .

Пусть  $p \geq 3$ . Тогда  $1 + \dots + y^{p-1}$  не делится на 2,  $y - 1 \geq 4^x, y^n > 2048^x \geq 2004^x + 1$  при  $n > 5$ , следовательно,  $p \leq 5$ . Если  $y - 1:167$ , то  $1 + \dots + y^{p-1} \equiv p \pmod{167}$ , следовательно,  $y - 1 \geq 167^x, y^p > y^2 > 10000^x \geq 2004^x + 1$ , следовательно,  $y - 1 = 4^x \cdot 3^\alpha$ . Далее, поскольку  $y - 1:3$ , из  $(y - 1)^2 - (y^2 + y + 1) = -3y$  следует, что  $y^2 + y + 1$  делится на 3 и не делится на 9.

Пусть  $p = 3$ . Тогда  $y - 1 = 4^x \cdot 3^{x-1}, y^2 + y + 1 = 3 \cdot 167^x; 3(y - 1) = 12^x, 9(y - 1)^2 > y^2 + y + 1, \text{ т.е. } 144^x > 3 \cdot 167^x$ . (Вот еще одно доказательство – основанное не на оценках с помощью неравенств, а на сравнениях по модулю. При  $x \geq 4$  левая часть равенства

$$(4^x \cdot 3^{x-1} + 1)^2 + 4^x \cdot 3^{x-1} + 2 = 3 \cdot 167^x$$

имеет вид  $27m + 3$ . Но  $167^x = (9k - 4)^x = 9l \pm 4$  либо  $9l \pm 2$  (так как  $x$  не делится на 3), следовательно,  $3 \cdot 167^x \neq 27m + 3$ .)

Пусть  $p > 3$ . Тогда  $y - 1 = 12^x, y > 12^x, y^p > (10^5)^x \geq 2004^x + 1$ .

б)  $p \neq 2$ , поскольку  $y^2 + 1$  не делится ни на 3, ни на 4. Далее – подобно a).

Заметим еще, что ни число вида  $y^2 + y + 1$ , ни число вида  $y^4 + \dots + 1$ , где  $y \in \mathbf{Z}$ , не может делиться на 167. Всякий простой делитель числа  $y^2 + y + 1$ , отличный от 3, имеет вид  $6n + 1$ , а всякий простой делитель числа  $y^4 + \dots + 1$ , отличный от 5, – вид  $10n + 1$ , где  $n \in \mathbf{N}$ . Это

доказано в статье В.Сендерова и А.Спивака «Малая теорема Ферма» («Квант» №3 за 2000 г.).

*А.Васильев, В.Сендеров*

**M1920.** Существуют ли такие действительные  $x$ , что числа  $\operatorname{ctg} x$  и  $\operatorname{ctg} 2004x$  оба целые?

Докажем, что таких  $x$  не существует.

**Лемма 1.** Пусть  $\operatorname{ctg} x$  рационален,  $n$  – натуральное число. Тогда либо  $nx = \pi k$ , где  $k$  – целое число, либо  $\operatorname{ctg} nx$  рационален.

**Доказательство.** При  $x = \frac{\pi}{2}l$ , где  $l$  – целое, утверждение очевидно. Пусть  $x \neq \frac{\pi}{2}l$ . Заметим, что в этом случае  $\operatorname{ctg} 2x$  определен, и, кроме того, для любого натурального  $n$  определено хотя бы одно из чисел  $\operatorname{ctg} nx$  и  $\operatorname{ctg}(n+1)x$ . В самом деле, в противном случае число  $x = (n+1)x - nx$  было бы кратно  $\pi$ , и  $\operatorname{ctg} x$  не был бы определен. Далее, обозначив  $a = \operatorname{ctg} x$ , видим, что число  $\operatorname{ctg} 2x = \frac{a^2 - 1}{2a}$  рационально.

Докажем теперь лемму по индукции. База:  $n = 1, 2$ . Индукционный переход. Пусть  $n \geq 3$  и для всех  $k < n$  утверждение справедливо. Значит, либо  $\operatorname{ctg}(n-2)x$ , либо  $\operatorname{ctg}(n-1)x$  – рациональное число. Если  $\operatorname{ctg} nx$  определен, то в первом случае подставим в равенство

$$\operatorname{ctg}(y+z) = \frac{\operatorname{ctg} y \operatorname{ctg} z - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z}$$

числа  $y = (n-2)x$ ,  $z = 2x$ , во втором случае – числа  $y = (n-1)x$ ,  $z = x$ . В обоих случаях получим справа рациональное число. Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $\operatorname{ctg} x$  – рациональное число,  $\operatorname{ctg} 2x$  – целое. Тогда  $\operatorname{ctg} 2x = 0$ .

**Доказательство.** Обозначив  $r = \operatorname{ctg} x$ ,  $c = \operatorname{ctg} 2x$ , получим  $c = \frac{r^2 - 1}{2r}$ , или  $r = c \pm \sqrt{c^2 + 1}$ . Отсюда легко получить, что  $c^2 + 1 = d^2$ , где  $d$  – целое, а значит,  $c = 0$ .

Теперь решим задачу. Поскольку  $\operatorname{ctg} 2004x$  определен, то определены и числа  $\operatorname{ctg} 1002x$  и  $\operatorname{ctg} 501x$ . Вследствие леммы 1,  $\operatorname{ctg} 1002x$  и  $\operatorname{ctg} 501x$  рациональны. Из рациональности  $\operatorname{ctg} 1002x$  по лемме 2 следует,

что  $\operatorname{ctg} 2004x = 0$ , т.е.  $2004x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k$  – целое.

Значит,  $\operatorname{ctg} 1002x = \pm 1$ . Вследствие леммы 2 это противоречит рациональности  $\operatorname{ctg} 501x$ .

### Замечания

**1.** С помощью формулы Муавра легко доказать следующие равенства:

$$\frac{\cos n\varphi}{\sin^n \varphi} = \operatorname{ctg}^n \varphi - C_n^2 \operatorname{ctg}^{n-2} \varphi + C_n^4 \operatorname{ctg}^{n-4} \varphi - \dots + A,$$

где

$$A = (-1)^{\frac{n}{2}} \text{ при } n \text{ четном,}$$

$$A = (-1)^{\frac{n+3}{2}} n \operatorname{ctg} \varphi \text{ при } n \text{ нечетном,}$$

$$\frac{\sin n\varphi}{\sin^n \varphi} = C_n^1 \operatorname{ctg}^{n-1} \varphi - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3} \varphi + C_n^5 \operatorname{ctg}^{n-5} \varphi - \dots + B,$$

где

$$B = (-1)^{\frac{n+2}{2}} n \operatorname{ctg} \varphi \text{ при } n \text{ четном,}$$

$$B = (-1)^{\frac{n+3}{2}} \text{ при } n \text{ нечетном.}$$

Отсюда при  $x \neq \frac{\pi k}{n}$ , где  $k \in \mathbf{Z}$ , легко выразить  $\operatorname{ctg} nx$  через  $\operatorname{ctg} x$ .

**2.** Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $\operatorname{ctg} x \in \mathbf{Z}$ ,  $\operatorname{ctg} nx \in \mathbf{Z}$ , где  $n > 1$ . Тогда  $\operatorname{ctg} x \in \{-1, 0, 1\}$ .

Решение задачи является, по существу, доказательством этой теоремы для случая  $n = 4k$  ( $k \in \mathbf{N}$ ). Похожими рассуждениями нетрудно доказать ее и для случая произвольного четного  $n$ , опираясь при этом на следующее важное утверждение.

**Предложение.** Пусть  $\cos x$  – рациональное число, отличное от  $0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ . Тогда  $x \neq \frac{k}{l}\pi$  при  $k, l \in \mathbf{Z}$ .

Это предложение допускает различные доказательства, в том числе опирающееся лишь на индукцию.

Вследствие равенства  $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$  из этого предложения сразу следует, что при  $x = \frac{l}{m}\pi$  ( $l, m \in \mathbf{Z}$ ),

$x \neq \frac{\pi k}{6}, \frac{\pi k}{4}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) число  $\operatorname{ctg}^2 x$  (а значит, и число  $\operatorname{ctg} x$ ) иррационально.

Для случая нечетного  $n$  полученное авторами доказательство теоремы неэлементарно по средствам и довольно сложно.

**3.** Утверждение теоремы остается справедливым при замене в ее формулировке котангенсов тангенсами. Это можно доказать аналогично. Кроме того, в самом сложном случае (нечетного  $n$ ) наши утверждения о тангенсах и котангенсах получаются друг из друга с помощью замены  $y = \frac{\pi}{2} - x$ .

*И.Богданов, В.Сендеров*

**Ф1928.** Проволока изогнута в форме окружности и зафиксирована (рис.1). Вдоль нее может двигаться маленькая бусинка, на которую действуют силы только со стороны проволоки. Вдоль прямой проволоки бусинка движется равномерно, а при движении по криволинейному участку возникает сила трения скольжения с коэффициентом  $\mu = 0,05$ . В начальный момент бусинка находилась в точке  $A$  и имела скорость  $v_0 = 1$  м/с. Найдите, какой будет скорость бусинки, когда она в первый раз снова окажется в исходной точке  $A$ .

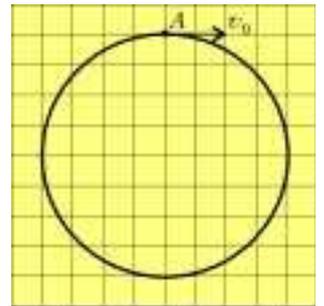


Рис. 1

Пусть теперь проволока имеет форму плоской замк-

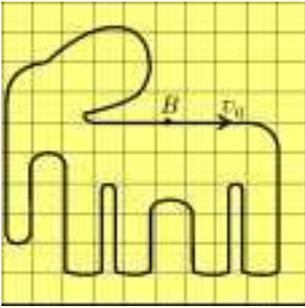


Рис. 2

нутой кривой (рис. 2). Найдите в этом случае скорость бусинки, когда она в первый раз снова окажется в исходной точке В.

Запишем второй закон Ньютона для торможения бусинки на малом участке проволоки с радиусом кривизны  $R$ :

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu m \frac{v^2}{R}.$$

Пусть  $\varphi$  – угловой путь бусинки, тогда его малое приращение составляет

$$d\varphi = |\omega| dt = \frac{v}{R} dt,$$

где  $\omega$  – угловая скорость бусинки. Отметим, что знак модуля соответствует определению углового пути (а не перемещения). Исключая  $R$  из приведенных уравнений, получим

$$\frac{dv}{v} = -\mu d\varphi,$$

откуда

$$v = v_0 e^{-\mu\varphi}.$$

При вычислении углового пути  $\varphi$  следует складывать все угловые отклонения вектора скорости бусинки без учета направления отклонения. По заданным рисункам находим, что вектор скорости бусинки пройдет, соответственно, угловые пути  $\varphi_1 = 2\pi$  и  $\varphi_2 = 13\pi$ , прежде чем бусинка снова окажется в исходной точке. Отсюда находим

$$v_1 = v_0 e^{-\mu\varphi_1} = 0,73 \text{ м/с}, \quad v_2 = v_0 e^{-\mu\varphi_2} = 0,13 \text{ м/с}.$$

А. Чудновский

**Ф1929.** На горизонтально расположенный отрезок практически нерастяжимой нити длиной  $L$  нанизаны  $N$  одинаковых бусинок, которые могут скользить по нему без трения, упруго ударяясь друг о друга и о места закрепления концов нити. Полная кинетическая энергия бусинок равна  $E$ . Найдите силу натяжения нити. Концы нити прикреплены к двум упругим массивным телам, взаимодействия этих тел друг с другом и с другими телами пренебрежимо мало. Сила тяжести отсутствует.

При лобовом ударе одинаковых упругих шаров они обмениваются скоростями. Поэтому можно считать, что бусинки просто «проскакивают» друг сквозь друга, как будто каждая бусинка летает от одного конца нити до другого, не меняя скорости, а других бусинок нет вовсе. Если бусинка имеет скорость  $v$ , она при ударе о массивное тело передает ему импульс  $2mv$ . За большой интервал времени  $T$  выбранная бусинка пролетит расстояние  $vT$ , произведя  $vT/(2L)$  ударов об одно массивное тело. Таким образом, массивное тело за время  $T$  получит от одной бусинки импульс

$$2mv \frac{vT}{2L} = mv^2 \frac{T}{L}.$$

Суммируя импульсы, передаваемые всеми бусинками, и разделив на длительность интервала времени, найдем силу, действующую на массивное тело:

$$F = \frac{\sum m_i v_i^2 \cdot T/L}{T} = \frac{2E}{L}.$$

С такой по величине силой и будет натянута нить. В ответ не попала масса бусинки и число бусинок – важна только их полная кинетическая энергия.

З. Рафаилов

**Ф1930.** Вырезанный из листа фанеры прямоугольный треугольник с меньшим острым углом  $\alpha$  расположен на горизонтальной поверхности (рис. 1). Чтобы повернуть треугольник относительно закрепленной вертикальной оси, проходящей через вершину А, к треугольнику необходимо приложить минимальную горизонтальную силу

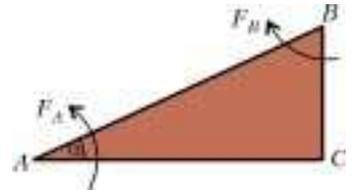


Рис. 1

$F_A$ , а чтобы повернуть его относительно закрепленной вертикальной оси, проходящей через вершину В, потребуются минимальная горизонтальная сила  $F_B$ . Какую минимальную горизонтальную силу необходимо приложить к треугольнику, чтобы повернуть его относительно закрепленной вертикальной оси, проходящей через вершину прямого угла С? Считайте, что треугольник прижимается к горизонтальной поверхности равномерно по всей площади.

Очевидно, что между треугольником и поверхностью есть трение, поскольку в противном случае для поворота треугольника требовалась бы бесконечно малая горизонтальная сила. Треугольник можно повернуть вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину А, если момент поворачивающей силы будет больше, чем момент силы трения относительно этой оси. При этом поворачивающая сила будет минимальной, если она имеет максимальное плечо, т.е. приложена к вершине другого острого угла и направлена перпендикулярно гипотенузе (рис. 2).

Поэтому для минимальной горизонтальной силы, которая может повернуть треугольник вокруг вершины А, справедливо соотношение

$$F_A l = M_{\text{тр}A},$$

Рис. 2

где  $l$  – длина гипотенузы,  $M_{\text{тр}A}$  – действующий на треугольник  $ABC$  момент силы трения относительно оси, проходящей через вершину А. Аналогичные соотношения можно написать для силы  $F_B$ :

$$F_B l = M_{\text{тр}B}$$

и для искомой силы  $F_C$ :

$$F_C l \cos \alpha = M_{\text{тр}C}$$

(в последнем равенстве использовано то обстоятельство, что плечо силы  $F_C$  должно равняться длине катета  $AC$ ). Так как силы  $F_A$  и  $F_B$  даны в условии, то моменты  $M_{трA}$  и  $M_{трB}$  нам известны, и, следовательно, для нахождения силы  $F_C$  необходимо связать момент силы трения относительно вершины  $C$  с моментами сил трения относительно вершин  $A$  и  $B$ .

Эту связь в принципе можно установить «честно», вычисляя моменты сил трения. Для этого необходимо разбить треугольник на малые элементы и просуммировать моменты сил трения, которые действуют на каждый элемент. При этом, поскольку сила трения, действующая на каждый элемент массой  $\Delta m$  и равная  $\mu \Delta m g$ , направлена по касательной к окружности, по которой этот элемент поворачивается, то силы трения, действующие на разные элементы треугольника, имеют разные направления, и суммарный момент сил трения не сводится к произведению  $\mu m g l_{цт}$ , где  $l_{цт}$  – расстояние от оси вращения до центра тяжести. Таким образом, вычисление моментов сил трения представляет собой достаточно сложную математическую задачу. Попробуем связать моменты сил трения относительно разных осей, используя соображения подобия. Так как момент силы трения пропорционален силе трения и ее плечу, а сила трения пропорциональна массе (и, следовательно, площади) треугольника, то момент силы трения пропорционален кубу линейного размера треугольника, например – кубу длины гипотенузы:

$$M = Kl^3,$$

где коэффициент пропорциональности  $K$  зависит от коэффициента трения, толщины и плотности материала треугольника, а также от угла при той вершине, относительно которой вычисляется момент. Используя две первые формулы, можно записать

$$K(\alpha) = \frac{F_A}{l^2}, \quad K\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{F_B}{l^2},$$

где  $K(\alpha)$  и  $K(\pi/2 - \alpha)$  – коэффициенты пропорциональности для моментов сил трения относительно осей, проходящих через вершины  $A$  и  $B$ .

Найдем теперь момент силы трения относительно вершины  $C$ . Для этого опустим перпендикуляр  $CD$  из вершины  $C$  на гипотенузу (рис.3). Этот перпендикуляр делит треугольник  $ABC$  на два прямоугольных треугольника  $ADC$  и  $BDC$ . Поэтому действующий на треугольник  $ABC$  момент силы трения относительно вершины прямого угла складывается из моментов сил трения, действующих на треугольники  $ADC$  и  $BDC$ , относительно вершины  $C$ :

$$M_C = M_{1C} + M_{2C}.$$

Так как треугольник  $ADC$  подобен треугольнику  $ABC$  и  $\angle ACD = \pi/2 - \alpha$ , то действующий на треугольник  $ADC$  момент силы трения относительно вершины  $C$

можно записать в виде

$$M_{1C} = K(\pi/2 - \alpha) \cdot AC^3 = K(\pi/2 - \alpha) l^3 \cos^3 \alpha.$$

Аналогично найдем действующий на треугольник  $BDC$  момент силы трения относительно вершины  $C$ :

$$M_{2C} = K(\alpha) \cdot BC^3 = K(\alpha) l^3 \sin^3 \alpha.$$

Таким образом, момент силы трения относительно вершины  $C$  равен

$$M_C = F_A l \sin^3 \alpha + F_B l \cos^3 \alpha.$$

Теперь можно найти силу  $F_C$ :

$$F_C l \cos \alpha = F_A l \sin^3 \alpha + F_B l \cos^3 \alpha,$$

или

$$F_C = F_A \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha + F_B \cos^2 \alpha.$$

С.Муравьев

**Ф1931.** Атомы сорта  $A$  летят вдоль оси  $CC$  цилиндрического канала радиусом  $R$  и сталкиваются с практически неподвижными атомами сорта  $B$ . Кинетическая энергия атомов  $A$  равна пороговой, так что при центральном ударе образуется молекула  $AB$ , которая далее движется со скоростью  $v$ . При нецентральной ударе реакция не идет, т.е. атомы сталкиваются упруго. За какое минимальное время после столкновения атомы сорта  $B$  смогут от оси цилиндра попасть на стенку канала?

Рассмотрим нецентральный удар атомов (см. рисунок). Проведем через центры атомов  $A$  и  $B$  ось  $Oy$ , а перпендикулярно ей через точку касания атомов – ось  $Ox$ . Пусть  $\alpha$  – угол между осями  $CC$  и  $Ox$ . В системе координат  $Oxy$  проекция импульса атома  $A$  на ось  $Ox$  после столкновения не изменится, поэтому достаточно рассмотреть центральный удар атома  $A$ , движущегося вдоль оси  $Oy$ , с неподвижным атомом  $B$ .

Центр масс сталкивающихся атомов движется вдоль оси  $Oy$  со скоростью  $v_y = v \sin \alpha$ . В системе центра масс атом  $B$  до столкновения перемещается против оси  $Oy$  со скоростью  $-v \sin \alpha$ , а после столкновения движется со скоростью  $v \sin \alpha$ . Вернемся в систему отсчета  $Oxy$ . В ней атом  $B$  имеет скорость  $v_{By} = 2v \sin \alpha$ . Проекция этой скорости на радиальное направление  $Or$  равна

$$v_{Br} = v_{By} \cos \alpha = 2v \sin \alpha \cos \alpha = v \sin 2\alpha.$$

Понятно, что максимальное значение этой проекции равно  $v$ . Следовательно, искомое время составляет

$$t = \frac{R}{v}.$$

В.Слободянин

**Ф1932.** Термодинамический цикл, состоящий из двух изобар и двух изохор, проводят с порцией гелия.

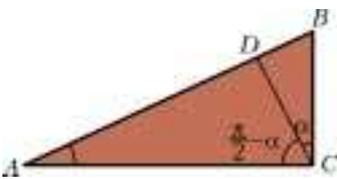
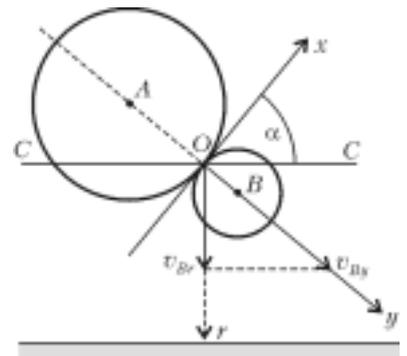
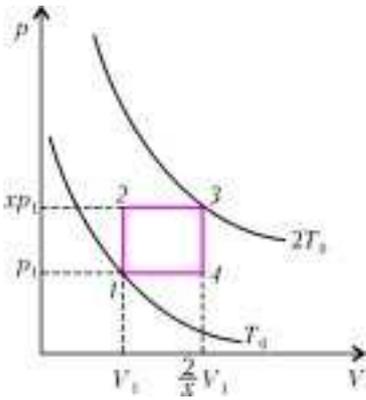


Рис. 3





Каким может быть максимальное значение КПД этого цикла, если максимальная температура в цикле составляет  $2T_0$ , а минимальная равна  $T_0$ ?

Выберем произвольную точку на изотерме  $T_0$  и обозначим давление и объем газа в этой точке  $p_1$  и  $V_1$  соответственно (см. рисунок).

Пусть максимальное значение давления в цикле составит  $xp_1$ . (Ясно, что  $1 \leq x \leq 2$ .) Тогда максимальный объем будет равен  $\frac{2}{x}V_1$ . Рассчитаем работу газа в этом цикле:

$$A = (xp_1 - p_1) \left( \frac{2}{x}V_1 - V_1 \right)$$

и получаемое количество теплоты (гелий – одноатомный газ):

$$Q = A_{13} + \Delta U_{13} = xp_1 \left( \frac{2}{x}V_1 - V_1 \right) + \frac{3}{2} \nu R (2T_0 - T_0).$$

Учтем еще, что

$$p_1 V_1 = \nu R T_0.$$

Тогда КПД цикла будет равен

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{(x-1) \left( \frac{2}{x} - 1 \right)}{x \left( \frac{2}{x} - 1 \right) + \frac{3}{2}}.$$

Мы видим, что значение КПД не зависит от выбора начальной точки цикла, а зависит только от отношения  $x = \frac{p_{\max}}{p_{\min}}$ . Поэтому нам достаточно исследовать функцию  $\eta(x)$  на максимум.

Возьмем производную от этой функции по  $x$  и приравняем ее нулю. После простых преобразований получим уравнение

$$x^2 + 8x - 14 = 0.$$

Подходящее решение этого уравнения:  $x = \sqrt{30} - 4$ . Понятно, что при  $x \approx 1$  и при  $x \approx 2$  КПД будет очень мал. Значит, мы нашли именно максимум. При указанном значении  $x$  КПД примерно равен  $\frac{1}{12}$ .

Разумеется, при анализе функции  $\eta(x)$  на максимум можно обойтись и без производной. Попробуйте сделать это самостоятельно.

А.Циклов

**Ф1933.** Дирижабль завис над гористой местностью. Из-за естественной ионизации у воздуха имеется некоторая проводимость. В результате электрический заряд дирижабля уменьшается в два раза за

каждые  $\tau = 10$  мин. Найдите удельное сопротивление воздуха.

Заряд дирижабля зависит от времени следующим образом:

$$q = q_0 \cdot 2^{-t/\tau},$$

где  $q_0$  – начальный заряд. Дирижабль разряжается током

$$I = -\frac{dq}{dt} = \frac{\ln 2}{\tau} q.$$

Можно показать, что в произвольной точке проводящей среды справедлива следующая связь между плотностью тока  $j$ , напряженностью электрического поля  $E$  и удельным сопротивлением среды  $\rho$ :

$$j = \frac{E}{\rho}.$$

Действительно, возьмем маленький цилиндр длиной  $L$  и площадью основания  $S$ , расположенный вдоль силовой линии поля. Напряжение между торцами цилиндра  $U = EL$ , его сопротивление  $R = \rho L/S$ . Поэтому

$$j = \frac{I}{S} = \frac{U}{RS} = \frac{EL}{(\rho L/S)S} = \frac{E}{\rho}.$$

Окружим мысленно дирижабль замкнутой поверхностью, расположенной вблизи дирижабля. Через малый элемент  $\Delta S_k$  этой поверхности идет ток

$$\Delta I_k = j_k \Delta S_k = \frac{E_k}{\rho} \Delta S_k,$$

где  $E_k$  – напряженность электрического поля, перпендикулярная этому элементу. Суммирование по всем элементам дает

$$\sum \Delta I_k = \frac{1}{\rho} \sum E_k \Delta S_k.$$

Поскольку  $\sum \Delta I_k = I$ , а по теореме Гаусса  $\sum E \Delta S_k = \frac{q}{\epsilon_0}$ , то

$$I = \frac{q}{\epsilon_0 \rho}.$$

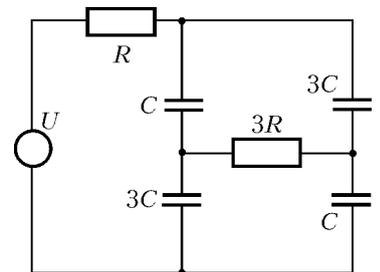
Сравнив это выражение с полученным ранее выражением для  $I$ , найдем искомое удельное сопротивление:

$$\rho = \frac{\tau}{\epsilon_0 \ln 2} \approx 10^{14} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

А.Чудновский

**Ф1934.** В схеме на рисунке емкости конденсаторов равны  $C = 10$  мкФ и  $3C$ , сопротивления резисторов равны  $R = 1$  кОм и  $3R$ .

Напряжение источника  $U$  равномерно увеличивается от нуля до  $U_0 = 100$  В за время  $\tau = 1$  ч. Найдите количество теплоты, выделившееся за это время в каждом из резисторов.



Напряжение источника возрастает очень медленно – настолько медленно, что токи через резисторы получаются очень малыми; малыми будут и напряжения между выводами каждого из резисторов. Иными словами, напряжения конденсаторов успевают выравниваться (характерное время перераспределения зарядов в цепи, состоящей из резистора сопротивлением  $R$  и конденсатора емкостью  $C$ , составляет приблизительно несколько раз по произведению  $RC = 10^3 \cdot 10^{-5} \text{ с} = 0,01 \text{ с}$ ), а ток через резистор сопротивлением  $R$  получается таким же, как если бы оба резистора оказались замкнутыми (т.е. их сопротивления для расчетов токов в цепи можно считать нулевыми). Заряды конденсаторов увеличиваются со временем по линейному закону; значит, токи получаются постоянными. Ток через источник, а значит, и через резистор сопротивлением  $R$ , можно определить так:

$$I = \frac{2CU_0}{\tau} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 100}{3600} \text{ А} = \frac{5}{9} \text{ мкА}.$$

Легко видеть, что при перераспределении зарядов конденсаторов емкостями  $C$  и  $3C$  ток через резистор сопротивлением  $3R$  равен половине тока  $I$  (ток источника разветвляется между этими конденсаторами в отношении 1:3 – конденсаторы соединены параллельно, так как резисторы мы заменили перемычками и ток через «нижний» конденсатор емкостью  $C$  такой же, как и через «верхний» аналогичный конденсатор). Теперь можно найти количество теплоты, выделившееся в резисторе сопротивлением  $R$ :

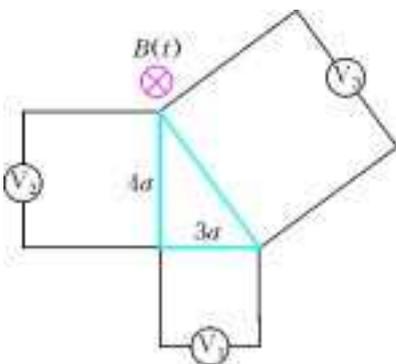
$$Q_1 = I^2 R \tau = \frac{10}{9} \text{ мкДж}.$$

Мощность в резисторе сопротивлением  $3R$  составляет 0,75 от мощности в резисторе сопротивлением  $R$ , поэтому в нем выделится количество теплоты

$$Q_2 = (0,5I)^2 \cdot 3R\tau = \frac{3}{4} I^2 R \tau = \frac{5}{6} \text{ мкДж}.$$

*Р.Александров*

**Ф1935.** Из одного куска нихромовой проволоки спаяли прямоугольный треугольник с катетами  $3a$  и  $4a$ . К трем сторонам этого треугольника подсоединили небольшие по размерам вольтметры так, что соединительные провода и стороны треугольника образуют квадраты (см. рисунок). Вся конструкция находится в одной плоскости, перпендикулярно которой направлено однородное магнитное поле. Индукция поля изменятся со скоростью  $\Delta B/\Delta t = k > 0$ .



Сопротивления вольтметров намного больше сопротивлений сторон треугольника. Найдите показания вольтметров.

ЭДС индукции в проволочном треугольном контуре «направлена» против часовой стрелки и равна  $\mathcal{E} = 6ka^2$ . Пусть со-

противления сторон треугольника равны  $3R$ ,  $4R$  и  $5R$ . Тогда ток в треугольнике равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{3R + 4R + 5R} = \frac{ka^2}{2R}$$

и направлен против часовой стрелки. Токи через вольтметры намного меньше  $I$ . ЭДС индукции в контуре в виде квадрата со стороной  $3a$  равна  $\mathcal{E}_1 = 9ka^2$  и «направлена» против часовой стрелки. По второму правилу Кирхгофа для этого контура,

$$\mathcal{E}_1 = U_1 - 3RI.$$

С учетом выражений для  $\mathcal{E}_1$  и  $I$  находим показания вольтметра  $V_1$ :

$$U_1 = \mathcal{E}_1 + 3RI = \frac{21}{2} ka^2.$$

Аналогично находим показания вольтметров  $V_2$  и  $V_3$ :

$$U_2 = 18ka^2, \quad U_3 = \frac{55}{2} ka^2.$$

*В.Чивилёв*

**Ф1936.** В цепи на рисунке 1 катушки индуктивности одинаковы, и их можно считать идеальными. Сопротивления вольтметров одинаковы, и их можно считать чисто активными («омическими»). Амплитуда гармонического напряжения источника составляет  $U_0$ , а частоту этого напряжения можно менять в широких пределах. Какими могут быть максимальные показания каждого из вольтметров? Что при этом будет показывать другой вольтметр?

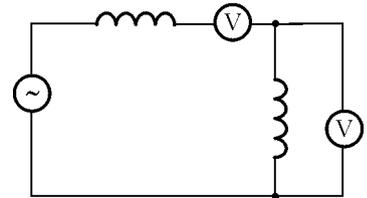


Рис. 1

Построим векторную диаграмму, начиная с вектора, изображающего напряжение  $U_1$  правого вольтметра (рис.2). Ток через последовательную цепочку, содержащую этот вольтметр и правую катушку индуктивности, равен

$$I_{\text{общ}} = \sqrt{\left(\frac{U_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{U_1}{X_L}\right)^2}.$$

Обозначив  $\alpha$  угол между векторами, изображающими напряжения  $U_1$  и  $U_2$  соответствующих вольтметров, найдем сумму трех векторов:

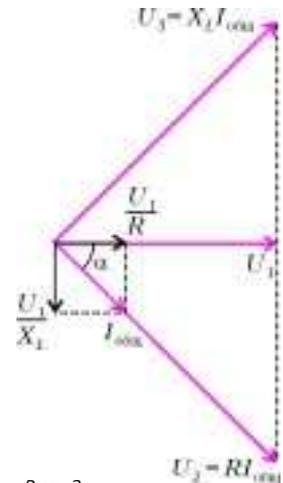


Рис. 2

$$U_0^2 = U_{\text{общ}}^2 = (3U_1)^2 + (U_2 \sin \alpha - U_3 \cos \alpha)^2.$$

Отсюда

$$U_1 = \frac{U_0}{\sqrt{9 + \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha}\right)^2}}.$$

Максимальное значение  $U_1$  получится в случае, когда минимален знаменатель. Это будет, когда выражение в скобках обратится в ноль:

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \alpha = 45^\circ, \quad U_{1\max} = \frac{U_0}{3}.$$

В этом случае верхний вольтметр покажет

$$U_2 = U_1 \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} U_0.$$

Максимальное показание верхнего вольтметра получается на очень низких частотах и составляет  $U_0$ . Показание нижнего вольтметра при этом близко к нулю.

*А. Зильберман*

**Ф1937.** *Оптическая система, состоящая из двух тонких двояковыпуклых линз с одинаковыми радиусами кривизны поверхностей, изменяет диаметр падающего на систему пучка параллельных лучей в  $\gamma$  раз, оставляя пучок параллельным после прохождения системы. Если переместить линзы из воздуха в глицерин, то обе линзы останутся собирающими, но их фокусные расстояния увеличатся в  $\alpha$  и  $\beta$  раз. Каждая из линз составлена из двух одинаковых плосковыпуклых линз. Их разняли и половинки разных линз соединили вместе (см. рисунок).*



*Во сколько раз увеличится фокусное расстояние такой композитной линзы, если ее переместить из воздуха в глицерин?*

Пусть  $D_1$  и  $D_2$  – оптические силы двух исходных линз,  $D$  – оптическая сила композитной линзы. Фокусные расстояния линз связаны с их оптическими силами

обратно пропорциональной зависимостью:

$$F_1 = \frac{1}{D_1}, \quad F_2 = \frac{1}{D_2}, \quad F = \frac{1}{D}.$$

Из условий  $F'_1 = \alpha F_1$  и  $F'_2 = \beta F_1$  выразим оптические силы линз в жидкости:

$$D'_1 = \frac{D_1}{\alpha}, \quad D'_2 = \frac{D_2}{\beta}.$$

Диаметр проходящего через оптическую систему из двух линз пучка параллельных лучей изменится в  $\gamma$  раз, если линзы имеют общую точку фокуса (телескопическая система) и их оптические силы отличаются в  $\gamma$  раз. Поэтому запишем

$$\frac{D_1}{D_2} = \gamma \quad \text{или} \quad \frac{D_2}{D_1} = \gamma.$$

У линзы с меньшей оптической силой при помещении в оптически более плотную среду оптическая сила изменяется в большее число раз, поэтому из условия  $\beta > \alpha$  следует  $D_2 < D_1$ , т.е.

$$\frac{D_1}{D_2} = \gamma > 1.$$

Если линзы приложены одна к другой, то их оптические силы складываются. В качестве линз можно рассматривать половинки исходных линз, следовательно,

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2}, \quad D' = \frac{D'_1 + D'_2}{2}.$$

Подставляя выражения для  $D'_1$  и  $D'_2$  и используя соотношение между  $D_1$  и  $D_2$ , находим

$$\frac{F'}{F} = \frac{D}{D'} = \frac{D_1 + D_2}{D'_1 + D'_2} = \frac{\alpha\beta(\gamma + 1)}{\alpha + \beta\gamma}.$$

*А. Чудновский*

### Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Более 25 лет при механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова работает Малый механико-математический факультет (МММФ). За годы своего существования заочное отделение Малого мехмата выпустило свыше 10000 учащихся, многие из которых стали студентами мехмата и других факультетов МГУ.

Основные задачи Малого мехмата – приобщение школьников к математике, углубление их знаний в рамках школьной программы и расширение математического кругозора.

В 2005 году заочное отделение Малого мехмата объявляет прием учащихся в 8 и 9 классы на 2005/06 учебный год. На заочное отделение принимаются учащиеся из России (в том числе и проживающие в Москве), стран СНГ и Прибалтики.

Существует возможность обучения нескольких учеников из одной школы по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством преподавателя и может включать в себя не более 15 учащихся. Как правило, материалы методических разработок изучаются такими группами во время факультативных (кружковых) занятий. Группа «Коллективный ученик» обучается как один учащийся, т.е. оформляет по каждому заданию одну работу и оплачивает обучение всей группы как обучение одного учащегося.

Зачисление в 8 и 9 классы (как для индивидуальных, так и для коллективных учеников) производится на конкурсной основе по результатам выполнения приведенной ниже вступительной работы.

Обучение на заочном отделении платное. Информация об условиях оплаты будет выслана учащимся, зачисленным на заочное отделение, осенью 2005 года, после проверки вступительных работ. Сейчас стоимость проверки одного задания составляет (в зависимости от класса) 100–120 руб., однако в 2005/06 учебном году она может быть немного повышена (за год учащийся выполняет 6–8 заданий). Школьники, успешно закончившие обучение на заочном отделении, получают свидетельство об окончании Малого мехмата.

Желающие поступить на заочное отделение Малого мехмата (как в 8, так и в 9 класс) должны не позднее 30 мая 2005 года (для групп «Коллективный ученик – не позднее 20 сентября 2005 года) выслать в наш адрес простым письмом решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Вступительную работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. Записывать решения в тетрадь следует в том порядке, в котором задачи идут во вступительной работе. На обложку тетради наклейте лист бумаги со следующими данными:

*(Продолжение см. на с. 34)*

# Задачи

1. У продавца есть 3 сорта зеленого чая. Петя купил по несколько граммов каждого сорта. Продавец заметил, что если бы он поменял местами любые два ценника, а Петя купил такой же товар, то Пете пришлось бы заплатить больше денег. Может ли такое случиться?

*Д. Калинин*



2. а) Можно ли, используя каждую из 10 цифр по одному разу, записать натуральное число и его квадрат?

*С. Токарев*



б) А можно ли при тех же условиях записать квадрат и куб одного и того же натурального числа?

*И. Акулич*

3. Петя: Успешно ли ты выступил на соревнованиях?

Вася: А ты реши сам. Меня обошла  $\frac{1}{n}$ -я часть спортсменов, зато я оставил позади  $\frac{1}{n-1}$ -ю часть.

Петя: А что такое  $n$ ?

Вася: Это некоторое натуральное число, большее 2.

Петя: О, поздравляю! Тебе удалось занять призовое третье место!

Не ошибся ли Петя?

*А. Жуков*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.



4. Бильярдный стол имеет форму прямоугольного треугольника. Из точки на гипотенузе перпендикулярно ей выпустили шар, который ударился о два борта и вернулся на гипотенузу. Докажите, что длина такого пути не зависит от точки старта. (Шар отражается от бортов по закону: «Угол падения равен углу отражения».)

*Д. Калинин*



5. Многим известна компьютерная игра «Сапер». Предположим, в некоторых клетках квадрата  $9 \times 9$  стоят невидимые мины. Кроме того, в каждой клетке (даже в той, где есть мина) записано общее количество мин в соседних с ней клетках. Соседними назовем клетки, имеющие общую сторону или вершину. Можно ли по этим числам определить расположение всех мин?

*Л. Иванов, А. Канель-Белов*



# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

16. Найдите все такие натуральные числа  $u$  и ненулевые цифры  $x$ , что

$$\overline{xx\dots xx} = y^2.$$

*В.Сендеров*

17. У плоской замкнутой десятизвенной ломаной  $ABCDEFGHIKLA$  совпадают середины пар звеньев  $AB$  и  $FG$ ,  $BC$  и  $GH$ ,  $CD$  и  $HK$ ,  $DE$  и  $KL$ . Докажите, что середины звеньев  $EF$  и  $LA$  также совпадают.

*И.Акулич*

18. Пусть  $\text{НОД}(a, b)$  и  $\text{НОК}(a, b)$  – соответственно наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное натуральных чисел  $a$  и  $b$ . Докажите, что если выполняется равенство

$$\frac{\text{НОК}(a, b)}{\text{НОД}(a, b)} = a - b,$$

то

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОД}^2(a, b).$$

*А.Жуков*

19. Какое наибольшее число клеток шахматной доски можно отметить, чтобы не нашлось ни одного тупоугольного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток?

*И.Акулич*

20. Плоскость разделена вертикальными и горизонтальными прямыми на бесконечное число одинаковых квадратов. В каждом квадрате записано натуральное число, причем каждое число  $n$  записано ровно в  $n$  клетках (т.е. всего на доске одна единица, две двойки, три тройки и т.д.). Для каждой пары соседних клеток подсчитывается разность (по абсолютной величине) между числами в этих клетках (соседними будем считать клетки, имеющие общую сторону). Какое наименьшее значение может принимать наибольшая из этих разностей?

*И.Акулич*

## Почему нет решений?

(Уголок пятиклассника)

**А.ЗАЙЧИК**

РАССМОТРИМ НЕСКОЛЬКО ПРИЕМОВ РАССУЖДЕНИЙ, позволяющих ответить на вопрос, почему тот или иной цифровой ребус не имеет решений.<sup>1</sup>

Напомним, что в цифровых ребусах одинаковые буквы заменяются одинаковыми цифрами, разные буквы – разными цифрами. Первую букву нельзя заменять нулем.

<sup>1</sup> Ребусы взяты из книги А.И.Зайчика «Числовая мозаика» (М., 2003).

**Исследуем последнюю цифру**

Ребус

$$\text{ПЛЮС} + \text{МИНУС} = 52743$$

не имеет решений, поскольку каждое из чисел ПЛЮС и МИНУС оканчивается на одну и ту же цифру  $C$ , а значит, их сумма должна быть четной, но число 52743 – нечетное.



**Упражнение 1.** Почему не имеет решений ребус  
 ВИРАЖ + ГАРАЖ + МИРАЖ + СТРАЖ + ТИРАЖ =  
 = 384752 ?

### Исследуем первую цифру

В ребусе

$$ОРТ + ТОР + РОТ = 471$$

первые цифры О, Т, Р трехзначных чисел различны и не равны нулю, поэтому  $O + T + P \geq 1 + 2 + 3 = 6$ , а это больше, чем цифра в разряде сотен числа 471.

**Упражнение 2.** Разделится ли нацело (без остатка) число АЛГЕБРА на число АПОФЕМА?

### Исследуем первую и последнюю цифры

В ребусе

$$СЕВ \cdot 6 = ВЕС$$

цифра С является последней цифрой *четного* числа ВЕС. Поскольку она, к тому же, отлична от нуля (С – первая цифра числа СЕВ), то  $C \geq 2$ . Но тогда число  $СЕВ \cdot 6$  должно быть четырехзначным, и ребус решений не имеет.

### Упражнение 3

Долго тянется урок,  
 Я на 8 множу ДРОК.  
 Заключительный аккорд –  
 У меня в ответе КОРД.  
 Эта правда или нет?  
 Поскорее дай ответ.

### Исследуем делимость

В левой части ребуса

$$ОРТ + ТОР + РОТ = 974$$

стоит число, кратное 3. Действительно,

$$\begin{aligned} ОРТ + ТОР + РОТ &= О \cdot 100 + Р \cdot 10 + Т + Т \cdot 100 + \\ &+ О \cdot 10 + Р + Р \cdot 100 + О \cdot 10 + Т = \\ &= 120 \cdot О + 111 \cdot Р + 102 \cdot Т. \end{aligned}$$

Каждое из слагаемых в последней сумме делится на 3. Число же 974 на 3 не делится, поэтому рассматриваемый ребус не имеет решений.

### Упражнение 4.

$$ВОДА + КОДА + МОДА + СОДА = 18014?$$

### Оцениваем величины

В левой части ребуса

$$ИСК + КСИ + ИКС = 3102$$

стоит сумма трех чисел, каждое из которых не больше 1000. Значит, их сумма не больше 3000, поэтому ребус не имеет решений.

**Упражнение 5.** Почему два следующих ребуса не имеют решений:

- КИТ + ТИК = 202;
- ЛОДКА + КОЛОДКА > 9990000 ?

### Преобразовываем и оцениваем

Прежде чем ответить на вопрос, почему ребус

$$КОТ + ТОК = 858$$

не имеет решений, запишем его в равносильном виде:

$$КОТ + ТОК = 101 \cdot (К + Т) + 20 \cdot О = 808 + 50,$$

или

$$101 \cdot (К + Т - 8) = 10 \cdot (5 - 2 \cdot О).$$

Правая часть последнего равенства не равна нулю и на 101 не делится. Поэтому исходный ребус решений не имеет.

### Упражнения

**6.** Почему не имеют решений следующие два ребуса:

- ДОК + ДОЛ + ДОМ = 1200;
- ОДА + ВОДА = 2000?
- 7.** а) Разделится ли на 1000 сумма БАР + АМБАР?  
 б) Разделится ли на 101 разность КАТАР – КАРАТ?
- 8.** а) Найдутся ли два таких числа ГУМ и МГУ, что  $ГУМ + 99 \cdot 9 = МГУ$  ?  
 б) Найдутся ли два таких числа ГАМ и МАГ, что  $ГАМ + 99 \cdot 8 = МАГ$  ?

# Булава

С.ВАРЛАМОВ

КАК ИЗВЕСТНО, ГИПЕРБОЛА – ЭТО НЕ ТОЛЬКО ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КРИВАЯ, ЗАДАВАЕМАЯ ОПРЕДЕЛЕННЫМ СООТНОШЕНИЕМ МЕЖДУ КООРДИНАТАМИ, НО И ЛИТЕРАТУРНЫЙ ПРИЕМ, ПОЗВОЛЯЮЩИЙ ЯРКО И ОБРАЗНО ПЕРЕДАТЬ ЭМОЦИОНАЛЬНОЕ ОТНОШЕНИЕ ГОВОРЯЩЕГО (ПИШУЩЕГО) К ТОМУ, О ЧЕМ ОН РАССКАЗЫВАЕТ. ОТ ПРИМЕНЕНИЯ ЭТОГО ПРИЕМА, ПРАВДА, ЧАСТО СТРАДАЕТ ЗДРАВЫЙ СМЫСЛ. КАК ЗДОРОВО, СОГЛАСИТЕСЬ, В РАЗГОВОРЕ ЗВУЧИТ ФРАЗА: «СТО ЛЕТ НЕ ВИДЕЛИСЬ!» А ВОТ НЕКОЛЬКО КЛАССИЧЕСКИХ ПРИМЕРОВ ГИПЕРБОЛ. У ГОГОЛЯ «...редкая птица долетит до середины Днепра». Один из литературных героев О'Генри, пребывая в плохом настроении, так пнул ногой поросенка, что тот полетел, опережая звук собственного визга. А в одной из сказок могучий богатырь бросил вверх булаву, которая вернулась на место... только через 40 дней!

Последняя гипербола легла в основу задачи, предлагавшейся на одном из Турниров юных физиков. В этой задаче нужно было оценить параметры знаменитого броска и подобрать материал для изготовления подходящей булавы.

Сорок дней – это больше, чем лунный месяц, следовательно, сказочная булава вылетела за пределы земной атмосферы со скоростью, чуть меньшей второй космической, и за время полета удалялась от Земли на расстояние, большее чем расстояние от Луны до Земли. Космическая фаза полета булавы – самая простая часть задачи, но не самая интересная. А вот разгон булавы от нулевой до нужной скорости и ее полет в атмосфере представляют интерес и достойны детального рассмотрения.

Современные ракеты в начальной фазе полета в плотной атмосфере движутся медленно, постепенно увеличивая скорость, и приобретают максимальную скорость уже вне атмосферы. В отличие от ракет, булава не имела реактивного двигателя. Разгон булавы от нулевой скорости происходил

на отрезке пути, длина которого сравнима с ростом богатыря, поэтому максимальную скорость булава имела в тот момент, когда богатырь выпускал ее из рук, т.е. не очень высоко над поверхностью земли. В дальнейшем ее скорость на пути вверх только уменьшалась, но сохранила величину порядка 11 км/с на высоте 100 км (на этой высоте уже можно пренебречь сопротивлением атмосферы). Из какого же материала была изготовлена булава и каковы были ее размеры, если она преодолела сопротивление толщи земной атмосферы только за счет начальной кинетической энергии?

Если бы не было сопротивления при движении в воздухе, то подъем на высоту 100 км соответствовал бы уменьшению скорости, которое легко оценить, считая, что на этом пути булава двигалась с постоянным ускорением. Согласно закону сохранения механической энергии,

$$MgH + \frac{1}{2}Mv_H^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2.$$

Из этого соотношения следует, что начальная скорость булавы  $v_0$  должна была быть всего на 1% больше, чем скорость  $v_H$  на высоте  $H = 100$  км. Иными словами, влиянием гравитации на пути булавы через атмосферу можно смело пренебречь. Наблюдательные читатели, конечно же, не раз видели, как в ночном небе сквозь атмосферу пролетают и сгорают метеориты. Скорости относительно воздуха у метеоритов – пришельцев из космоса – составляют десятки километров в секунду. Заранее предупредим читателей, что наши оценки скорости булавы тоже приведут к величине порядка 10 км/с. Такой скорости движения частиц воздуха (атомов и ионов кислорода и азота) при хаотическом движении соответствует температура около  $10^5$  градусов. Даже если принять температуру на порядок меньшей, т.е.  $10^4$  градусов, то все равно получается отнюдь не мало. Так что начальной тепловой энергией воздуха, очевидно, можно пренебречь.

Рассмотрим упрощенную механическую модель движения плотного предмета в воздушной среде. Предположим, что булава имеет форму шара радиусом  $R$  и массой  $M$ . Пусть булава не разрушается при пролете через атмосферу. Оценим потери кинетической энергии булавы и изменение импульса булавы, связанные с ее движением в воздухе.

Если за малое время  $\Delta t$  булава в воздухе прошла путь  $b = v\Delta t$ , то в движение пришел воздух, который до пролета булавы находился в объеме, примерно равном  $\pi R^2 b$ . Этот воздух не только приобрел кинетическую энергию, но и получил импульс, направленный в сторону движения булавы. Представим движение воздуха в виде кольцевой струи, срывающейся с булавы-шара. Такая струя характеризуется скоростью и углом, который скорость образует с направлением движения булавы. При дальнейшем движении эта струя создает звуковые волны в воздухе, и в конце концов вся полученная воздухом механическая и тепловая энергия переходит в энергию хаотического движения молекул воздуха (в тепловую энергию).

На рисунке показана эта самая кольцевая струя, срывающаяся с шара, но ее размеры, конечно, непропорционально велики. Движение воздуха можно описывать такой струей

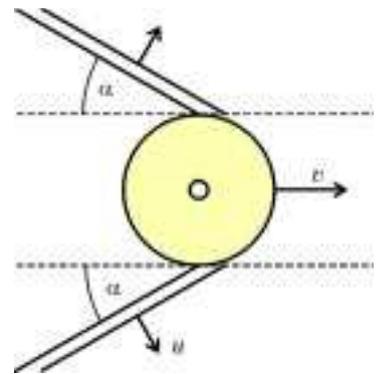


Рисунок В.Бабаева

только в непосредственной близости от шара. Вдали от шара формируется звуковая волна, имеющая форму конуса Маха с углом  $\beta \sim \arcsin \frac{v_{\text{звука}}}{v}$ . Сжатие воздуха при набегании его на шар происходит по так называемой «ударной адиабате». Если рассматривать движение в системе отсчета, связанной с булавой, то давление сжатого воздуха вблизи поверхности булавы в середине набегающего на булаву потока равно динамическому давлению потока воздуха  $\rho v^2/2$  (здесь  $\rho$  – плотность воздуха до пролета булавы). В кольцевой струе воздух (или то, во что он превратился после сжатия) имеет плотность, большую плотности воздуха, из которого была сформирована эта струя. Характер движения воздуха вблизи шара таков, что скорости его частиц имеют составляющие вдоль направления движения шара, сравнимые со скоростью шара. Исследование струи представляет собой отдельную интересную задачу, однако нам нужно оценить торможение булавы.

Итак, масса воздуха  $\Delta m = \rho \pi R^2 v \Delta t$  пришла в движение со скоростью  $u$ , направление которой составляет с направлением скорости булавы угол  $90^\circ - \alpha$ . Запишем закон сохранения импульса:

$$Mv_1 = Mv_2 + \rho \pi R^2 v \Delta t u \sin \alpha$$

и закон сохранения энергии:

$$M \frac{v_1^2}{2} = M \frac{v_2^2}{2} + \rho \pi R^2 v \Delta t \frac{u^2}{2} + Q,$$

где  $Q$  – это тепловая энергия, приобретенная сжатой и разогретой порцией воздуха, а также энергия излучения разогретого воздуха. При температурах порядка  $10^4 - 10^5$  К излучение составляет малую долю, и им можно пренебречь. Скорости хаотического движения частиц в кольцевой струе вблизи шара имеют тот же порядок величины, что и скорость направленного движения частиц  $u$ . С учетом этого запишем

$$Q \sim \frac{5}{2} \rho \pi R^2 v \Delta t \frac{u^2}{2}.$$

Отсюда следует

$$M \frac{v_1^2}{2} = M \frac{v_2^2}{2} + \frac{7}{4} \rho \pi R^2 v \Delta t u^2.$$

Одновременное выполнение обоих законов сохранения обуславливает определенную связь между  $v$ ,  $u$  и  $\sin \alpha$ :

$$u = \frac{4}{7} v \sin \alpha.$$

К сожалению, не так просто установить величину угла  $\alpha$ . Нас интересует передача импульса воздуху. Охарактеризуем ее «усредненным» углом  $\alpha$ , который, очевидно, меньше  $90^\circ$ , но сравним с  $30 - 45^\circ$ . Для оценки потери импульса шаром достаточно выбрать какую-нибудь конкретную величину угла  $\alpha$ , например  $30^\circ$ . Тогда получаем

$$u = \frac{2}{7} v.$$

Воспользуемся законом сохранения импульса для этого соотношения между скоростями  $v$  и  $u$  и получим, что начальная  $v_1$  и конечная  $v_2$  скорости булавы связаны друг с другом так:

$$Mv_1 = Mv_2 + \frac{1}{7} \rho \pi R^2 v \Delta t v.$$

Иными словами, изменение скорости булавы описывается соотношением

$$v_2 - v_1 \approx -v \frac{\Delta m}{7M}.$$

Таким образом, скорость булавы при прохождении атмосферы меняется в соответствии с уравнением

$$dv = -v \frac{\Delta m}{7M}, \text{ или } v = v_0 e^{-\frac{m}{7M}}.$$

Конечная скорость на выходе из атмосферы зависит от полной массы воздуха  $m$ , приведенной в движение. (Заметим, что мы получили зависимость скорости булавы от двух масс, которая очень напоминает решение уравнения Мещерского для ракеты. Только там фигурируют начальная и конечная массы ракеты, а здесь – масса булавы и масса воздуха.) Эту полную массу можно легко оценить:

$$m \approx \pi R^2 \frac{\rho_{\text{атм}}}{g},$$

тогда

$$v_{2\text{косм}} = v_0 e^{-\frac{\pi R^2 \rho_{\text{атм}}}{7Mg}}, \text{ или } v_0 = v_{2\text{косм}} e^{\frac{\pi R^2 \rho_{\text{атм}}}{7Mg}}.$$

Полученная формула позволяет оценить начальную скорость булавы в зависимости от ее радиуса и массы. Предположим, что булава сделана из обедненного урана и покрыта прочной термостойкой оболочкой. Уран обладает весьма высокой плотностью:  $\rho = 19040$  кг/м<sup>3</sup>. Выразим массу булавы через плотность и для начальной скорости получим

$$v_0 = v_{2\text{косм}} e^{\frac{3\rho_{\text{атм}}}{28\rho Rg}}.$$

Из этой формулы видно, что чем больше радиус булавы, тем меньше может быть ее начальная скорость. (С другой стороны, булава – это оружие, и для богатыря масса булавы не должна быть маленькой.) Пусть радиус урановой булавы равен 5 см. Тогда эта булава будет иметь массу порядка 10 кг и приобретет начальную скорость около 34 км/с, что примерно в три раза больше второй космической скорости. Это многовато даже для чемпионов мира по толканию ядра или метанию молота на дальность.

Оценим теперь силу  $F$ , с которой богатырь разгонял булаву, и давление, которое оказывалось на материал булавы. Пусть рост богатыря 2 метра. Это значит, что разгонный путь булавы  $L$  не превышает 3 метров. Поскольку

$$FL = M \frac{v_0^2}{2},$$

получим

$$F \approx 2 \cdot 10^9 \text{ Н}.$$

Если распределить такую силу по площади поперечного сечения шара, то получится среднее давление

$$p \approx 2,5 \cdot 10^{11} \text{ Па}.$$

Это давление значительно больше предела прочности урана  $\sigma \approx 3 \cdot 10^8$  Па. Так что, скорее всего, урановая булава во время броска просто просочилась бы между пальцами богатыря.

Вот так: начали мы с предположения, что булава пролетела через атмосферу и приобрела на выходе в космос примерно вторую космическую скорость, а выяснили, что разогнать ее до нужной скорости невозможно по причине недостаточной прочности. Зато получили оценки величин для скорости: примерно 30 км/с и массы: порядка 10 кг. Тела такой массы и с такими скоростями действительно попадают в атмосферу Земли, но только не с ее поверхности, а из космоса, – это крупные железные метеориты. При вертикальном падении через атмосферу такой метеорит у поверхности Земли будет иметь скорость около 5 км/с. Что будет после удара такого «молотка» по Земле – это уже другая история!

# Угол падения равен...

**А. СТАСЕНКО**

... Стоит лишь вынести нам под открытое  
звездное небо  
Полный водою сосуд, как сейчас же в нем отразятся  
Звезды небес и лучи засверкают на глади  
зеркальной.  
Лукреций. О природе вещей

**Н** У КТО ЖЕ НЕ ЗНАЕТ, ЧЕМУ РАВЕН УГОЛ ПАДЕНИЯ, – конечно, углу отражения. А еще кое-что известно и о преломлении света. Вспомним построение лучей, которое предложил Христиан Гюйгенс – голландский физик, механик, математик и астроном.

Пусть на плоскую границу двух сред, например воздуха, падают параллельные лучи света под углом  $\alpha$  (рис.1) и луч  $a$  достигает границы в момент времени  $t = 0$  в точке  $A$ . Участок фронта падающей волны (плоскость, перпендикулярная лучам) обозначим  $AC$ . Чтобы достигнуть поверхности раздела в точке  $B$ , луч  $b$  должен пройти путь  $CB$  за время

$t = \frac{CB}{v_1}$ , где  $v_1$  – скорость света в первой среде...

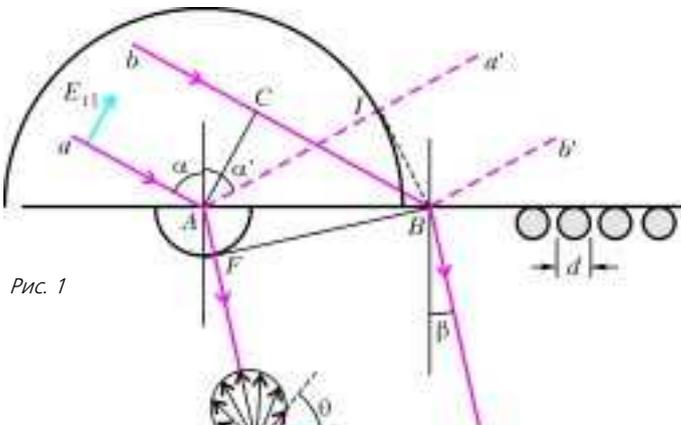
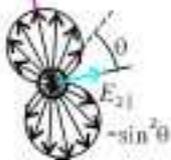


Рис. 1

Рис. 2



И тут Гюйгенс ввел очень плодотворное понятие. Он предложил каждую точку поверхности раздела, до которой дошел падающий луч, т.е. первичная волна, считать источником сферической *вторичной волны*. Значит, пока луч  $b$  добирался до поверхности, точка  $A$  излучала вторичные волны – конечно, и в первую, и во вторую среду. Но скорости этой вторичной волны в двух средах различны – пусть, например,  $v_1 > v_2$ , как это имеет место в случае пары воздух–вода. А именно, за время  $t$  вторичная волна пройдет расстояние  $AI = v_1 t$  в первой среде и  $AF = v_2 t$  – во второй. Поэтому на рисунке 1 мы провели окружности разных диаметров, а через  $I$  и  $F$  обозначили точки касания фронтов отраженной и преломленной волн, которые (фронты) тоже

перпендикулярны соответствующим лучам. Из равенства сторон треугольников  $ABC$  и  $ABI$  легко понять, что угол отражения  $\alpha'$  равен углу падения  $\alpha$ . А для определения угла преломления  $\beta$  напишем (учитывая, что  $CB = AI$ )

$$t = \frac{AI}{v_1} = \frac{AF}{v_2} = \frac{CB}{v_1} = \frac{AB \sin \alpha}{v_1} = \frac{AB \sin \beta}{v_2},$$

откуда следует известный закон преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Учитывая, что, по определению, коэффициент преломления среды обратно пропорционален скорости распространения света в этой среде, предыдущее соотношение можно записать в виде

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n,$$

где  $n$  – коэффициент преломления второй среды по отношению к первой.

Казалось бы, все ясно. Но задумаемся в смысле приведенных выше слов. Прежде всего – что это за *точка A*, которая умеет излучать вторичные волны? В физике точек не существует. Есть электроны, ядра, атомы, молекулы... Все эти частицы имеют конечные размеры. Например, диаметр молекулы воды  $d$  составляет несколько ангстрем ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ ). Правда, средняя длина волны видимого нами света в тысячу раз больше:  $\lambda \sim 0,5 \text{ мкм} = 5000 \text{ \AA}$ . Поэтому в пределах одной молекулы электрическое и магнитное поля падающей (первичной) волны можно считать однородными, хотя, конечно, изменяющимися во времени с колоссальной частотой

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \sim \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 6 \cdot 10^{14} \text{ Гц}.$$

С этой частотой электрическое поле вынуждает колебаться электронные облака молекул относительно ядер. Таким образом, каждая молекула превращается в элементарную антенну, которая и обязана излучать (вторичную) волну той же частоты, что и падающая. Но, как известно, линейно колеблющийся диполь ничего не излучает вдоль линии своих колебаний, так же, как и прямолинейная антенна не излучает вдоль своей осевой линии. По секрету скажем даже больше: плотность потока электромагнитной энергии от диполя или линейной антенны (диаграмма направленности) пропорциональна  $\sin^2 \theta$ , где  $\theta$  – угол между направлением колебаний заряда (или тока) и линией наблюдения.

На рисунке 2 изображена отдельная молекула-диполь и качественно показана диаграмма направленности ее излучения. (Подробнее об этом можно прочитать, например, в недавней статье А.Стасенко «Небо синее, Солнце красное» в «Кванте» №1 за 2003 г. – *Прим. ред.*)

Теперь представим, что падающий свет линейно поляризован, а именно – его электрический вектор  $\vec{E}_{1\parallel}$  лежит в плоскости падения. Значит, в этой же плоскости будут лежать и вектор  $\vec{E}_{2\parallel}$  преломленной волны. И вот тут возникает интересный вопрос. Давайте подберем угол падения таким, чтобы направление отраженного луча было перпендикулярным преломленному лучу:  $\pi - \alpha' - \beta = \frac{\pi}{2}$ .

Значит, при этом  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . Подставив это значение угла преломления в закон преломления, получим

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = \text{tg } \alpha = n.$$

(Продолжение см. на с. 34)

*...не обуславливает ли электрический флюид... возникновение и поддержание магнитных свойств?*

Джамбаттиста Беккариа

*Существует величайшее сходство между железом и железными телами, с одной стороны, и телами, электрическими по своей природе, с другой...*

Франц Эпинус

*...магнитная стрелка отклоняется от своего положения равновесия под действием voltaического аппарата и... этот эффект проявляется, когда контур замкнут...*

Ханс Эрстед

*В зависимости от направления, в котором пропускают ток через спираль, она действительно с силой притягивается или отталкивается полюсом магнита...*

Андре Ампер

*Вспомним, например, электродинамическое взаимодействие между магнитом и проводником с током. Наблюдаемое явление зависит здесь только от относительного движения проводника и магнита...*

Альберт Эйнштейн

## А так ли хорошо знакомы вам ТОКИ И МАГНИТЫ?

Что общего между прилипанием легких предметов к натертому янтарию и притяжением железных опилок к магниту? Явления, знакомые с глубокой древности, хотя и различались по названиям, долгое время представлялись «сородичами». Однако переход от простых наблюдений к научным экспериментам выявил и немалые различия между электричеством и магнетизмом. Споры сторонников глубокого их единства и ученых, призывавших не смешивать их друг с другом, были разрешены с появлением в начале XIX века надежных источников постоянного тока. С их помощью удалось поставить целую серию блестящих опытов, приведших, наконец, к открытию глубокой взаимосвязи явлений, отражаемой в понятии «электромагнетизм».

Оказалось, что электрические токи могут порождать магнитные эффекты, а магниты, в свою очередь, способны вызывать силы, действующие на токи. И это привело к тому, что не замедлили явиться на свет электромагнитные двигатели и генераторы, электроизмерительные приборы и мощные электромагниты – и «эпоха пара» начала уступать «эпохе электричества», воистину изменившей мир и определившей лицо современной цивилизации.

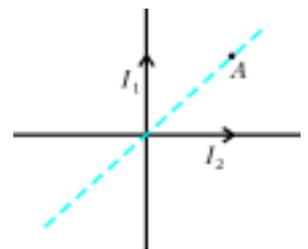
Но фундаментальные открытия в электромагнетизме оказались не исчерпаны позапрошлым столетием. Развитие идеи единства сил природы вызвало пересмотр многих укоренившихся понятий и породило новую физическую картину мира, с которой мы вошли в XXI век.

Что ж, попробуем чуть-чуть продвинуться в понимании этой картины, начав с выяснения «родственных отношений» между токами и магнитами.

### Вопросы и задачи

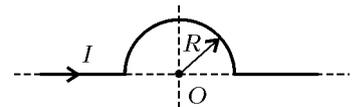
1. Куда направлен вектор магнитной индукции в точке  $A$ , лежащей на биссектрисе угла, образованного токами  $I_1$  и  $I_2$ , изображенными на рисунке?
2. К противоположным вершинам  $A$  и  $C$  ромба  $AKCD$  из однородной проволоки подведены провода от источ-

ника тока. Какова магнитная индукция в центре ромба? Как будет направлен вектор магнитной индукции в этой точке, если ветвь ромба  $AKC$  сделать из медной проволоки, а ветвь  $ADC$  – из алюминиевой того же сечения?



3. К наиболее удаленным друг от друга вершинам кубического каркаса, изготовленного из однородной проволоки, подводится постоянное напряжение. Чему равна индукция магнитного поля в центре куба при протекании по его ребрам токов?

4. По двум одинаковым проволочным круговым проводникам, имеющим общий центр и расположенным в перпендикулярных плоскостях, текут одинаковые токи. Модуль вектора магнитной индукции в общем центре равен  $B$ . Какой будет магнитная индукция в той же точке, если прежний ток пойдет только по одному проводнику?

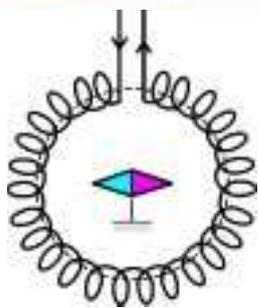


5. Ток  $I$ , текущий по проводу, согнутому в окружность радиусом  $R$ , создает в ее центре магнитное поле, абсолютная величина индукции которого равна  $B$ . Какой станет индукция поля в центре полуокружности  $O$ , если провод будет иметь вид, показанный на рисунке?

6. На плоской гладкой поверхности лежит проводник из мягкого провода. Какую форму примет провод, если пропустить по нему достаточно сильный ток?

7. Как будут взаимодействовать между собой витки соленоида, если по ним потечет: а) постоянный ток; б) переменный ток?

8. По двум жестким незакрепленным прямолинейным проводам, скрещивающимся под прямым углом, пропускают токи  $I_1$  и  $I_2$ . Как будет меняться взаимное расположение проводов сразу после включения токов?

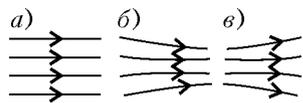


9. Как расположится небольшая магнитная стрелка, помещенная в центре плотно намотанной катушки, подключенной к источнику тока?

10. Для чего в катушках сопротивления используют бифилярную намотку – наматывают на стержень провод, сложенный вдвое так, что оба его конца оказываются рядом?

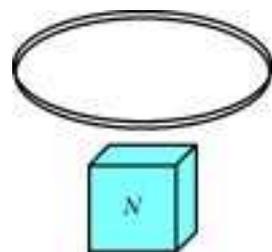
10. Громоотвод был соединен с землей при помощи тонкостенной металлической трубки. Почему после удара молнии трубка мгновенно превратилась в круглый стержень?

12. Что будет происходить с рамкой с током, помещенной в магнитные поля, изображенные на рисунке?



13. Проволочное кольцо с током свободно подвешено на мягких подводящих проводах и охватывает посередине горизонтальный цилиндрический постоянный магнит. Что произойдет с кольцом, если изменить направление тока в нем на противоположное?

14. Сверхпроводящее кольцо с током «парит» в магнитном поле так, как показано на рисунке. В какую сторону течет ток по ближайшей к читателю стороне кольца?



15. Как изготовить электромагнит, подъемную силу которого можно было бы регулировать?

16. Можно ли построить сильный электромагнит, если поставлено условие, чтобы ток в нем был сравнительно малый?

### Микроопыт

Понаблюдайте за воздушными проводами, питающими двигатель вагона троллейбуса, или за рельсами детской электрической железной дороги. Как взаимодействуют между собой провода или рельсы, когда по ним протекают токи?

### Любопытно, что...

...впервые магнитные действия электрического тока наблюдали в середине XVIII века американец Франклин и итальянец Беккариа при изучении разрядов молнии или лейденской банки (прообраз современного конденсатора). Позже француз Араго описал случай, когда ударившая в дом молния сильно намагнитила в нем стальные ножи, вилки и другие предметы.

...в 1759 году профессор физики Петербургской академии наук Эпинус разработал первую математическую теорию электрических и магнитных явлений, положив в ее основу представление об особых «жид-

костях», избыток или недостаток которых вызывает электризацию или намагничивание тел.

...знаменитый опыт Эрстеда по воздействию электрического тока на магнитную стрелку, приведший к возникновению новой области физики – электромагнетизма, отражал характерную для ученого идею взаимосвязи различных природных процессов. Так, еще в 1821 году им была высказана мысль, что свет представляет собой электромагнитное явление.

...уже через три месяца после выхода брошюры Эрстеда с описанием его открытия французские физики Био и Савар экспериментально установили закон действия тока на магнитный полюс. Их соотечественник Лаплас придал закону математическую форму, в которой тот до сих пор фигурирует в учебниках физики.

...Ампер, проведший огромное количество опытов по электромагнетизму, обнаружил, в том числе, влияние поля Земли на проводники с током и открыл магнитный эффект катушки с током – соленоида, что позволило ему считать такую катушку эквивалентом постоянного магнита.

...пытаясь найти закон, описывающий взаимодействие токов, Ампер опирался на третий закон Ньютона, не подозревая, что открыл новый тип сил, отличный от уже известных центральных. Polemika по этому поводу поставила проблему выполнения закона сохранения импульса в электродинамике.

...список источников магнитного поля, в который со времен Ампера входили постоянные магниты и электрические токи, был дополнен физикой XX века: она включила в него элементарные частицы, обладающие собственным магнитным моментом.

...действие магнитного поля на электролит, через который пропускают ток, вызывает, так же, как и в металлических проводах, появление амперовых сил. Это используют в магнитогидродинамических сепараторах при разделении материалов по их свойствам и в электромагнитных насосах для перекачки, в частности, жидкого натрия, служащего теплоносителем в атомных реакторах.

...элементарное рассмотрение взаимодействия магнита с витком тока приводит к неприемлемости понятия «эфир» – некоей гипотетической всепроникающей среды, заполняющей пространство. Именно с этого рассмотрения начиналась самая первая работа по теории относительности Эйнштейна, решительно отказавшегося от представлений об эфире.

### Что читать в «Кванте» о токах и магнитах

(публикации последних лет)

1. «Осторожно: магнитное поле» – 1999, №3, с.41;
2. «Еще раз о магнитной силе» – 2000, №3, с.38;
3. «Калейдоскоп «Кванта» – 2000, №5, с.32;
4. «Магнитные явления» – 2001, №4, с.45;
5. «Кто-то приближается?» – 2001, №5, с.37;
6. «Новая галактика и все ее поля» – 2004, №1, с.27;
7. «Легко ли быть квадратной рамкой?» – 2004, №3, с.39;
8. «Магнитное поле» – 2004, №4, с.47.

Материал подготовил  
А.Леонович



(Начало см. на с. 31)

Этот особенный угол падения называется углом Брюстера.

Что же получается – если все молекулы второй среды, попавшие в область преломленного луча, колеблются в направлении  $\alpha' = \alpha$ , то никакого излучения в направлении отраженного луча быть не может? Вот вам и «угол падения равен углу отражения»! Вся энергия ушла во вторую среду.

Но как же в таком случае мы в действительности наблюдаем отраженные лучи? Дело в том, что падающий свет не обязательно поляризован в плоскости падения. Обычно в нем присутствуют и колебания вектора  $\vec{E}_{\perp}$  в перпендикулярной плоскости (так называемый хаотически, или естественно поляризованный свет). А эту составляющую молекулы второй среды переизлучают в направлении отраженного луча даже в случае угла Брюстера. Кроме того, отражающие поверхности не обязательно все расположены под углом Брюстера по отношению к падающему свету (в случае рассеянного света это невозможно даже для одной плоскости).

Угол Брюстера очень интересен для экспериментатора. Действительно, если поляризованный в плоскости падения луч направить на плоскость диэлектрика и измерить угол падения, при котором исчезнет отраженный луч, то можно по формуле  $\operatorname{tg} \alpha = n$  сразу определить коэффициент преломления среды. И сделать это можно, даже если диэлектрик непрозрачен и в нем невозможно наблюдать преломленный луч.

А как сделать этот падающий луч плоскополяризованным? Теперь ясно, как: нужно хаотически поляризованный луч предварительно отразить под углом Брюстера от пластинки из диэлектрика – при этом в отраженном луче останется только одно направление колебаний вектора  $\vec{E}_{\perp}$ .

Итак, кто же отражает и преломляет лучи света? Во всяком случае ясно, что *не плоскость АВ* (см. рис.1). И не один

только поверхностный слой молекул. Для того чтобы «понять», что пора преломиться, падающий луч должен «ощупать» вещество на глубину, по крайней мере, сравнимую с его длиной волны, т.е. охватить тысячи слоев молекул. (Понятно, что имеется в виду длина волны во второй среде. Если последняя имеет коэффициент преломления  $n > 1$ , то  $\lambda_2 = \lambda_1/n < \lambda_1$ , но по порядку величины обе длины волны сравнимы.)

Теперь можно уточнить и определение «зеркальной» поверхности, упомянутой в эпитафье Лукреция: ее шероховатости должны быть много меньше длины волны  $\lambda_1$  падающего излучения. (Отметим, что здесь идет речь о диэлектриках; в случае проводников, в которых имеются свободные электроны, процессы преломления и отражения имеют свои особенности.)

Наконец, что такое вообще параллельные падающие «лучи  $a$  и  $b$ »? Чтобы эти лучи были параллельны, должен падать достаточно широкий пучок света. Мы уже знаем, какой: его ширина должна быть много больше длины волны.

В результате всех рассуждений мы приходим к цепочке неравенств

$$AC \gg \lambda_1 \gg d.$$

На практике диаметр пучка в один миллиметр вполне удовлетворит этим неравенствам.

Однако, как далеко мы ушли от геометрической картинке рисунка 1: оказывается, не существует ни «плоскости» отражения, ни «лучей». Но не надо расстраиваться – геометрическая оптика все равно практически полезна, когда мы имеем дело с макроскопическими телами (окулярами, объективами, телескопами...), размеры которых много больше длины волны. А физическую оптику можно изучить, поступив в соответствующий институт или университет. Чего вам и желаем.

(Начало см. на с. 25)

1) Фамилия, имя учащегося (для коллективных учеников – Ф.И.О. руководителя и алфавитный список учащихся – не более 15 человек)

2) Класс (в 2005/06 учебном году)

3) Полный домашний адрес с указанием индекса почтового отделения

4) Фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность (только для индивидуальных учеников)

5) Электронный адрес (если он есть), по которому с Вами можно связаться

6) Откуда Вы узнали о наборе на заочное отделение

Наш адрес: 119992 ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, мехмат, МММФ.

Вечернее отделение Малого мехмата приглашает на занятия по субботам всех желающих школьников 6 – 11 классов из Москвы и ближнего Подмосковья.

Справки по телефону 939-39-43.

Более подробную информацию о Малом мехмате можно найти в Интернете по адресу: <http://mfm.math.msu.su>

### Вступительная работа

1. Поезд, движущийся с постоянной скоростью, проходит мимо столба за 22 с, а через мост длиной 180 м – за 32 с (время прохождения через мост – это время от момента, когда поезд начинает въезжать на мост, до момента, когда последний вагон покидает мост). Найдите длину поезда и его скорость.

2. Найдите все значения  $x$ , удовлетворяющие неравенству

$$\frac{x^2}{x-1} \geq 0.$$

3. Тридцать футбольных команд проводят первенство по круговой системе в один круг (это значит, что каждая команда должна сыграть с каждой по одному разу). Докажите, что в любой момент времени найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

4. В квадрате отмечено пять точек. Обязательно ли среди этих точек найдутся две, расстояние между которыми не превышает половины диагонали квадрата?

5. В треугольнике совпадают центры вписанной и описанной окружностей. Докажите, что этот треугольник равносторонний.

6. Верно ли, что любое пятизначное число больше произведения его цифр?

7. Три товарища купили лодку. Первый заплатил треть от суммы, уплаченной двумя другими товарищами, второй – четверть от суммы, уплаченной двумя его товарищами, а третий заплатил 1320 руб. Сколько стоила лодка?

8. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы углов  $A$  и  $C$ . Обозначим основания перпендикуляров, опущенных на эти биссектрисы из точки  $B$ , через  $P$  и  $Q$  соответственно. Докажите, что отрезок  $PQ$  параллелен стороне  $AC$ .

9. На доске было написано 5 чисел. Сложив каждое из этих чисел с каждым, получили 10 сумм: 0, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Какие числа были написаны на доске?

10. Некоторое количество монет разложено в три кучки. Мальчик Леша, обладающий неограниченным запасом монет, может за один ход либо взять из каждой кучки по одной монете (при условии, что во всех трех кучках есть хотя бы по одной монете), либо добавить из своих запасов к любой кучке столько монет, сколько в ней уже есть. Докажите, что за несколько ходов Леша может добиться того, что все три кучки исчезнут.

# Как построить парадоксальный пример

**П. САМОВОЛ, М. АППЕЛЬБАУМ,  
А. ЖУКОВ**

**Н**А МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ ИНОГДА ВСТРЕЧАЮТСЯ задачи с парадоксальной формулировкой. Так, на одной из заочных олимпиад была предложена такая задача.

**Задача 1.** *Один человек каждый месяц записывал свой доход и расход. Возможно ли, чтобы за любые пять идущих подряд месяцев его общий расход превышал доход, а в целом за год его доход превысил расход?* [1]

С первого взгляда кажется, что такого не может быть. Однако после некоторого обдумывания удастся построить пример, удовлетворяющий условию задачи.

Пусть ежемесячное сальдо – разность дохода и расхода – принимает только два значения:  $x > 0$  и  $y < 0$ . Построим числовую последовательность, располагая в строку числа  $x$  и  $y$  таким образом, чтобы на любом отрезке длины 5 встречалось только одно значение  $y$ , например

$$x, x, x, x, y, x, x, x, x, y, x, x.$$

Далее потребуем, чтобы сумма чисел на отрезке длины 5 была отрицательной:  $y + 4x < 0$ , а сумма всех 12 членов последовательности – положительной:  $2y + 10x > 0$ . Отсюда получаем

$$-5x < y < -4x.$$

Достаточно взять, скажем,  $x = 2$ ,  $y = -9$ .

В разобранной задаче речь шла о промежутке времени в 1 год. А сколько вообще времени может длиться описанная ситуация? В связи с этим рассмотрим такую задачу.

**Задача 2** (по мотивам одной из задач XIX Международной математической олимпиады [2]). *В некоторой последовательности действительных чисел сумма любых семи идущих подряд членов отрицательна, а сумма любых одиннадцати идущих подряд членов положительна.*

а) *Какое наибольшее количество членов может быть в такой последовательности?*

б) *Постройте последовательность из 16 чисел с указанным свойством.*

Решать пункт б) этой задачи также можно методом подбора, хотя здесь уже надо проявить некоторую долю изобретательности. Но можно подойти к его решению и совершенно стандартно.

Например, давайте найдем последовательность чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{16}$ , подчиняющихся условиям:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_7 = -b,$$

$$x_2 + x_3 + \dots + x_8 = -b,$$

...

...

$$x_{10} + x_{11} + \dots + x_{16} = -b,$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{11} = a,$$

$$x_2 + x_3 + \dots + x_{12} = a,$$

...

$$x_6 + x_7 + \dots + x_{16} = a,$$

где параметры  $a$  и  $b$  – некоторые положительные числа.

**Упражнение 1.** Решите систему этих уравнений.

Тот, кто повозится с этой системой, сможет оценить трудоемкость данного способа. Ниже мы покажем другой способ, позволяющий существенно упростить поиск примера к задаче 2, б). Но прежде давайте разберемся в решении пункта а) – оно нам подскажет направление поиска.

Рассмотрим более общую постановку вопроса. Пусть в строку выписано  $m$  чисел. Назовем сумму  $q$  идущих подряд чисел этой строки  $q$ -суммой. Последовательность, любая  $n$ -сумма которой имеет один знак, а любая  $k$ -сумма – другой знак, назовем  $\{n, k\}$ -последовательностью.

**Задача 3.** *Докажите, что число  $m$  выписанных членов  $\{n, k\}$ -последовательности не превышает величины  $n + k - d - 1$ , где  $d$  – наибольший общий делитель чисел  $n$  и  $k$ .*

Прежде всего заметим, что числа  $n$  и  $k$  не могут быть кратны друг другу (убедитесь в этом). Сначала мы докажем, что не существует  $\{n, k\}$ -последовательности из  $m$  чисел, если  $m > n + k - d - 1$ .

Предположим, нашлась нужная строка из  $n + k - d$  чисел. Выберем из чисел  $n$  и  $k$  меньшее – пусть это будет, например,  $k$ . Вычеркнем первые  $k$  чисел. Тогда в строке из оставшихся  $n - d$  чисел все  $k$ -суммы по-прежнему имеют один знак, а все  $(n - k)$ -суммы имеют другой знак (обдумайте последнее утверждение, рассуждая методом от противного). Поскольку

$$n - d = (n - k) + k - d,$$

то мы от  $\{n, k\}$ -последовательности перешли к  $\{n - k, k\}$ -последовательности. Повторяя этот спуск дальше, мы будем получать уменьшающиеся по длине последовательности в соответствии с цепочкой  $\{n, k\} \rightarrow \{n_1, k_1\} \rightarrow \{n_2, k_2\} \rightarrow \dots \rightarrow \{n_i, k_i\}$ , где одно из чисел  $n_i$  или  $k_i$  в конце концов окажется равным  $d$ , а другое – кратным ему. Но это невозможно – противоречие.

Ясно, что если не существует строки из  $n + k - d$  чисел, удовлетворяющей условию, то нельзя выписать и более длинную такую строку.

Пример с количеством  $n + k - d - 1$  членов последовательности возможен. Мы будем искать его среди таких последовательностей, члены которых могут принимать только два значения  $x$  и  $y$ , величины которых мы подберем позже. «Путеводной звездой» нам будет служить цепочка пар чисел  $(n, k) \rightarrow (n_1, k_1) \rightarrow (n_2, k_2) \rightarrow \dots \rightarrow (n_i, k_i)$  из предыдущих рассуждений. Учитывая ее важность для дальнейшего, назовем эту цепочку *определяющей*. Эта цепочка реализует знаменитый алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя  $d$  чисел  $n$  и  $k$ . В самом деле,  $d = |n_i - k_i|$ . Сейчас, однако, мы используем эту цепочку в иных целях – для конструирования нужной нам последовательности, причем, создавая эту последовательность, мы будем двигаться от конца определяющей цепочки к ее началу.

Сначала, располагая парой чисел  $(n_i, k_i)$ , построим последовательность

$$x, x, \dots, x, y, x, \dots, x, x. \quad (*)$$

Количество чисел  $x$  слева от величины  $y$  такое же, как и справа, и равно 
$$\begin{cases} n_l - 1, & \text{если } k_l > n_l \\ k_l - 1, & \text{если } n_l > k_l \end{cases}$$

По аналогии с предыдущим, будем называть конечную последовательность выписанных в строку чисел  $[p, q]$ -последовательностью, если любая ее часть, составленная из  $p$  подряд идущих членов, содержит одно и то же количество букв  $y$ , а любая ее часть, составленная из  $q$  подряд идущих членов, также содержит одно и то же количество букв  $y$  (эти количества могут отличаться). Очевидно, последовательность  $(*)$  является  $[n_l, k_l]$ -последовательностью: любая ее часть, составленная из  $n_l$  и  $k_l$  идущих подряд членов, содержит ровно одну букву  $y$ . Данное определение в некотором смысле характеризует *однородность* распределения букв  $y$  в последовательности.

Отправляясь от базовой последовательности  $(*)$ , далее будем наращивать количество членов последовательности, руководствуясь следующим правилом. Предположим, уже построена  $[n_i, k_i]$ -последовательность символов  $x$  и  $y$ , соответствующая паре чисел  $(n_i, k_i)$  из определяющей цепочки. Заметим, что пара чисел  $(n_i, k_i)$  могла быть получена из предыдущей пары  $(n_{i-1}, k_{i-1})$  двояко: либо  $n_i = n_{i-1} - k_{i-1}$ , либо  $k_i = k_{i-1} - n_{i-1}$ .

Разберем первый случай (второй рассматривается аналогично). Для наращивания строки символов зафиксируем ее первые  $k_{i-1}$  символов и допишем их (продублировав) к строке слева. Докажем, что в результате получится  $[n_{i-1}, k_{i-1}]$ -последовательность.

Любая часть вновь полученной последовательности, составленная из  $k_{i-1} = k_i$  подряд идущих членов, как и в предыдущей последовательности, содержит одно и то же количество букв  $y$ . Любую часть новой последовательности, составленную из  $n_{i-1} = n_i + k_{i-1}$  подряд идущих членов, можно представить состоящей из двух частей: правой подстроки из  $n_i$  символов и левой подстроки из  $k_{i-1}$  символов. Каждая из этих подстрок имеет фиксированное количество букв  $y$ , поэтому и вся часть имеет фиксированное количество букв  $y$ , где бы мы ее ни взяли.

Решим теперь задачу 2,б).

Поскольку  $(7, 11) \rightarrow (7, 4) \rightarrow (3, 4)$ , то на первом шаге алгоритма строим последовательность

$$x, x, y, x, x.$$

На втором шаге получаем последовательность

$$x, x, y, x, x, x, y, x, x,$$

а на третьем –

$$x, x, y, x, x, x, y, x, x, y, x, x, y, x, x.$$

Поскольку сумма любых семи идущих подряд членов должна быть отрицательной, а сумма любых одиннадцати – положительной, то должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} 2y + 5x < 0, \\ 3y + 8x > 0, \end{cases} \text{ откуда } -\frac{5}{2}x > y > -\frac{8}{3}x.$$

Можно взять, например,  $x = 5, y = -13$ .

Для обоснования корректности приведенного выше алгоритма осталось убедиться в том, что система неравенств, накладываемых в общем случае на значения величин  $x$  и  $y$ , всегда совместна. Предлагаем читателям сделать это самостоятельно, выполнив следующее упражнение.

**Упражнение 2.** Пусть в результате изложенного выше алгоритма построена последовательность из символов  $x$  и  $y$ . Обозначим через  $a$  количество букв  $x$  в любой ее части, составленной из  $n$  идущих подряд членов, через  $b$  – количество букв  $y$  в любой ее части, составленной из  $k$  идущих подряд членов. Докажите,

что система неравенств

$$\begin{cases} ay + (n - a)x > 0, \\ by + (k - b)x < 0, \end{cases}$$

так же, как и система неравенств

$$\begin{cases} ay + (n - a)x < 0, \\ by + (k - b)x > 0, \end{cases}$$

совместна.

**Упражнение 3.** Про некоторую последовательность из 23 действительных чисел известно, что в ней сумма любых 10 записанных подряд чисел отрицательна, а сумма любых  $k$  записанных подряд чисел положительна. Чему равно  $k$ , если количество членов в этой последовательности максимально возможно? Приведите пример.

**Упражнение 4.** Для последовательности действительных чисел, записанных в строчку, выполняются следующие условия: сумма любых  $n$  идущих подряд членов отрицательна, а сумма любых  $k$  идущих подряд членов положительна. Известно, что максимальное число членов последовательности равно 30. Найдите максимум возможной разности  $|k - n|$ . Приведите пример, удовлетворяющий условию задачи.

**Задача 4.** Про интегрируемую функцию  $f(x)$  на отрезке  $[0; c]$  известно, что любой определенный интеграл по отрезку длины  $n$  положителен, а по отрезку длины  $m$  отрицателен,  $c > m > n > 0$ . Пусть  $\frac{m}{n} = \frac{q}{p}$  – несократимая дробь, т.е.  $p, q$  – взаимно простые натуральные числа. Докажите, что  $c < m + n - \frac{m}{q}$ .

Обозначим  $d = \frac{m}{q} = \frac{n}{p}$ , так что  $n = pd, m = qd$ . Предположим, что  $c \geq m + n - \frac{m}{q} = (p + q - 1)d$ . Для любого натурального  $k$  такого, что  $kd \leq c$ , обозначим  $S_k = \int_{(k-1)d}^{kd} f(x) dx$  и рассмотрим числовую последовательность, состоящую из  $p + q - 1$  членов:  $S_1, S_2, \dots, S_{p+q-1}$ . Несложно проверить, что в соответствии с условием задачи эта последовательность обладает следующими свойствами:

- 1) сумма любых подряд идущих  $p$  ее членов положительна;
- 2) сумма любых подряд идущих  $q$  ее членов отрицательна.

В соответствии с результатом задачи 3, такая последовательность не может содержать больше чем  $p + q - 2$  членов. Полученное противоречие завершает доказательство.

**Упражнение 5.** Про заданную на отрезке  $[0; 23]$  функцию  $f(x)$  известно, что любой определенный интеграл от нее по отрезку длины 10 положителен, а по отрезку длины 16 отрицателен. Может ли такое быть? Как изменится ответ, если  $x \in [0; 24]$ ?

*Подсказка.* Воспользуйтесь результатом упражнения 3. Функцию  $f(x)$  можно определить как ступенчатую, принимающую только два значения 7 и  $-29$ .

**Упражнение 6.** Существует ли непрерывная функция  $y = f(x)$  такая, что любой определенный интеграл от функции по отрезку  $n = 3$  отрицателен, а по отрезку  $n = 5$  положителен?

### Литература

1. Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Раббот, А.Л.Том. Заочные математические олимпиады. – М.: Наука, 1987, с.105, 108–109.
2. Международные математические олимпиады. Составители А.А.Фомин, Г.М.Кузнецова. – М.: Дрофа, 2000, с.5, 34–35.
3. В.Произволов, А.Спивак. Усреднение по окружности. – Журнал «Квант», 1998, №1, с.29–31.

# Сложение скоростей

В. ЧИВИЛЁВ

**В** ЭТОЙ СТАТЬЕ НА ПРИМЕРАХ РЕШЕНИЯ КОНКРЕТНЫХ задач рассматривается правило сложения скоростей. Это правило устанавливает связь между скоростями одной и той же материальной точки в разных системах отсчета.

Напомним, что каждая система отсчета жестко связана с некоторым телом отсчета и что движение материальной точки выглядит по-разному в различных системах отсчета.

Пусть есть две системы отсчета  $S$  и  $S'$ , движущиеся друг относительно друга. Поскольку движение и покой относительны, договоримся называть систему  $S$  неподвижной, а систему  $S'$  – движущейся. Движение материальной точки  $M$  относительно системы  $S$  называют абсолютным движением, а относительно системы  $S'$  – относительным движением. Скорость точки  $M$  относительно системы  $S$  называют, соответственно, абсолютной скоростью, а относительно системы  $S'$  – относительной скоростью. Для более образного представления можно принять, например, за систему  $S$  комнату, за систему  $S'$  – воздушный шарик, летящий с вращением, а за точку  $M$  – муравья, ползущего по шарика.

Введем еще понятие переносной скорости. Это скорость той точки системы  $S'$  относительно системы  $S$ , через которую проходит в данный момент точка  $M$ . В нашем примере это скорость относительно комнаты той точки воздушного шарика, через которую проползает муравей в данный момент.

В любой момент времени абсолютная  $\vec{v}_{\text{абс}}$ , относительная  $\vec{v}_{\text{отн}}$  и переносная  $\vec{v}_{\text{пер}}$  скорости связаны соотношением

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Это и есть правило сложения скоростей.

Сделаем два полезных замечания.

1) Переносная скорость в общем случае не есть скорость системы  $S'$  относительно  $S$ ! Действительно, при движении воздушного шарика с вращением скорости всех точек шарика относительно комнаты различны, и говорить о скорости шарика (системы  $S'$ ) относительно комнаты (системы  $S$ ) бессмысленно. Только при поступательном (без вращения) движении  $S'$  скорость всех точек системы  $S'$  относительно  $S$  (переносная скорость) одна та же – ее и называют скоростью системы  $S'$  относительно системы  $S$ .

2) Соотношение между тремя скоростями – чисто кинематическое соотношение, никак не связанное с инерциальностью или неинерциальностью систем  $S$  и  $S'$ , т.е.  $S$  и  $S'$  могут быть обе неинерциальными.

Теперь – конкретные задачи.

**Задача 1.** По палубе теплохода, движущегося относительно берега со скоростью  $u = 15$  км/ч, идет пассажир со скоростью  $v_0 = u/3$  относи-

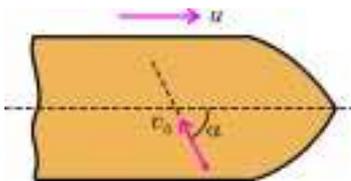


Рис. 1

тельно палубы в направлении, составляющем угол  $\alpha = 60^\circ$  с продольной осью теплохода (рис.1). Найдите скорость пассажира относительно берега.

Возьмем за неподвижную систему отсчета – теплоход. Тогда  $\vec{v}_0$  – относительная скорость,  $\vec{u}$  – переносная скорость. Скорость  $\vec{v}$  пассажира относительно берега будет абсолютной скоростью.

По правилу сложения скоростей (рис.2),

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}.$$

Используя теоремы косинусов и синусов, находим модуль скорости  $v$  пассажира относительно берега и угол  $\beta$  между этой скоростью и осью теплохода:

$$v = \sqrt{u^2 + v_0^2 - 2v_0u \cos \alpha} = \frac{u\sqrt{7}}{3} \approx 13 \text{ км/ч},$$

$$\sin \beta = \frac{v_0}{v} \sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0,33, \quad \beta \approx 19^\circ.$$

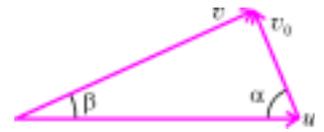


Рис. 2

**Задача 2.** В комнате вращается диск с угловой скоростью  $\omega$  вокруг неподвижной оси  $O$ , проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости. По диску вдоль его радиуса ползет жук со скоростью  $v_0$  относительно диска (рис.3). Найдите модуль скорости жука относительно комнаты в момент, когда жук находится в точке  $A$  диска на расстоянии  $R$  от оси  $O$ .

За неподвижную систему отсчета естественно взять комнату, а за движущуюся – диск. Тогда  $\vec{v}_0$  – относительная скорость. Переносной скоростью  $\vec{v}_{\text{пер}}$  будет скорость точки  $A$  диска относительно комнаты. Эта скорость направлена перпендикулярно радиальному направлению  $OA$  и равна

$$v_{\text{пер}} = \omega R.$$

Скорость  $\vec{v}$  жука относительно комнаты есть абсолютная скорость.

По правилу сложения скоростей (рис.4),

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Итак, модуль скорости жука относительно комнаты равен

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_{\text{пер}}^2} = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 R^2}.$$

**Задача 3.** Радиус вращающейся планеты  $r = 2000$  км. Скорость точек экватора планеты  $v_1 = 0,6$  км/с. В плоскости экватора по орбите радиусом  $R = 3000$  км движется спутник в сторону вращения планеты со скоростью  $v_2 = 2$  км/с. Найдите скорость спутника относительно планеты.

За неподвижную систему отсчета примем систему, в которой заданы скорости  $v_1$  и  $v_2$ . В качестве движущейся системы отсчета возьмем планету. Абсолютная скорость спутника задана и равна  $v_2$ . Нам надо найти скорость спутника относительно планеты, т.е. относительную скорость  $\vec{v}_{\text{отн}}$ .

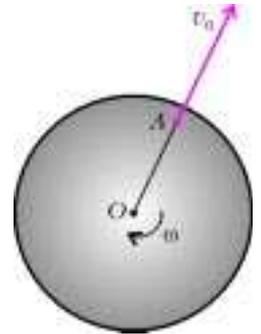


Рис. 3

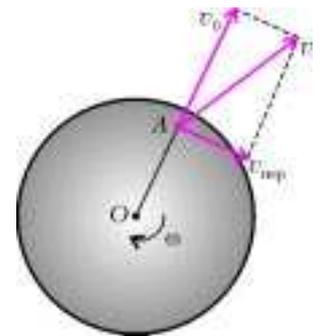


Рис. 4

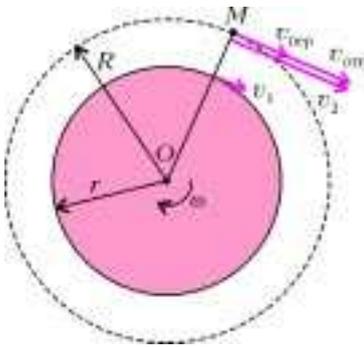


Рис. 5

Пусть в некоторый момент времени спутник проходит через точку  $M$ , жестко связанную с планетой мысленным стержнем  $OM$  (рис.5). Скорость точки  $M$  в неподвижной системе отсчета и есть переносная скорость  $\vec{v}_{пер}$ . Найдём ее. Угловая скорость вращения планеты равна

$$\omega = \frac{v_1}{r},$$

переносная скорость –

$$v_{пер} = \omega R = v_1 \frac{R}{r}.$$

По правилу сложения скоростей (см. рис.5),

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}.$$

Видим, что относительная скорость спутника сонаправлена с абсолютной скоростью  $\vec{v}_2$  и равна (по модулю)

$$v_{отн} = v_2 - v_{пер} = v_2 - v_1 \frac{R}{r} = 1,1 \text{ км/с}.$$

Заметим, что ответ  $v_{отн} = v_2 - v_1 = 1,4 \text{ км/с}$  (который нередко дают абитуриенты) неверен, так как из-за вращения планеты переносная скорость не равна  $v_1$ .

**Задача 4.** По двум кольцевым дорогам радиусом  $R$ , лежащим в одной плоскости, движутся автомобили  $A_1$  и  $A_2$  со скоростями  $v_1 = v = 20 \text{ км/ч}$  и  $v_2 = 2v$  (рис.6).

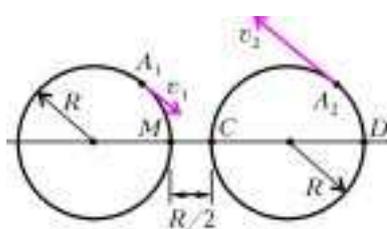


Рис. 6

Размеры автомобилей малы по сравнению с  $R$ . В некоторый момент автомобили находились в точках  $M$  и  $C$  на расстоянии  $R/2$  друг от друга. 1) Найдите скорость автомобиля  $A_2$  в системе отсчета, связанной с автомобилем  $A_1$  в этот момент. 2) Найдите скорость автомобиля  $A_2$  в системе отсчета, связанной с автомобилем  $A_1$ , когда  $A_2$  окажется в точке  $D$ .

За неподвижную систему отсчета возьмем дорогу. Скорость автомобиля  $A_2$  в этой системе отсчета есть абсолютная скорость. Обозначим через  $\vec{v}_{Cабс}$  и  $\vec{v}_{Dабс}$  абсолютные скорости автомобиля  $A_2$  при прохождении им точек  $C$  и  $D$  (рис.7). Согласно условию задачи,

$$v_{Cабс} = v_{Dабс} = v_2 = 2v.$$

Движущуюся систему отсчета жестко свяжем с автомобилем  $A_1$ . Ясно, что эта система вращается вокруг оси  $O$  с угловой

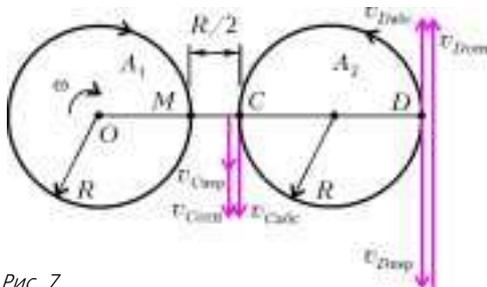


Рис. 7

скоростью

$$\omega = \frac{v}{R}.$$

Переносные скорости при прохождении автомобилем  $A_2$  точек  $C$  и  $D$  обозначим  $\vec{v}_{Cпер}$  и  $\vec{v}_{Dпер}$ . Модули этих скоростей равны

$$v_{Cпер} = \omega \cdot OC = \frac{v}{R} \left( R + \frac{R}{2} \right) = \frac{3}{2}v,$$

$$v_{Dпер} = \omega \cdot OD = \frac{v}{R} \left( R + \frac{R}{2} + 2R \right) = \frac{7}{2}v.$$

Нам надо найти относительные скорости  $\vec{v}_{Cотн}$  и  $\vec{v}_{Dотн}$  автомобиля  $A_2$  в движущейся системе отсчета при прохождении им точек  $C$  и  $D$ .

По правилу сложения скоростей (см. рис.7),

$$\vec{v}_{Cабс} = \vec{v}_{Cотн} + \vec{v}_{Cпер}, \quad \vec{v}_{Dабс} = \vec{v}_{Dотн} + \vec{v}_{Dпер}.$$

Скорости автомобиля  $A_2$  относительно автомобиля  $A_1$  при прохождении точек  $C$  и  $D$  сонаправлены со скоростями (относительно дороги) автомобиля  $A_2$  в этих точках и равны

$$v_{Cотн} = v_{Cабс} - v_{Cпер} = 2v - \frac{3}{2}v = 0,5v = 10 \text{ км/ч},$$

$$v_{Dотн} = v_{Dабс} - v_{Dпер} = 2v + \frac{7}{2}v = 5,5v = 110 \text{ км/ч}.$$

**Задача 5.** Во время града автомобиль едет со скоростью  $u = 25 \text{ км/ч}$  по горизонтальной дороге. Одна из градин ударяется о переднее

(ветровое) стекло автомобиля, наклоненное под углом  $\alpha = 30^\circ$  к вертикали, и отскакивает горизонтально в направлении движения автомобиля (рис.8). Считая, что удар градины о стекло абсолютно упругий и что скорость градины непосредственно перед ударом вертикальна, найдите скорость градины: 1) до удара; 2) после удара.

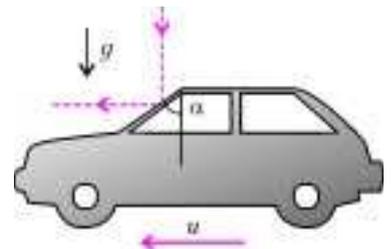


Рис. 8

За неподвижную систему отсчета возьмем дорогу, а за движущуюся систему отсчета – автомобиль. Надо найти скорости  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  градины относительно дороги до и после удара, т.е. абсолютные скорости градины. По условию задачи скорость  $\vec{v}_1$  направлена вертикально вниз, а скорость  $\vec{v}_2$  – горизонтально (рис.9).

Сразу после удара абсолютная скорость градины  $\vec{v}_2$ , ее относительная скорость  $\vec{v}_{2отн}$  и переносная скорость (скорость автомобиля)  $\vec{u}$  связаны равенством

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2отн} + \vec{u}.$$

Поскольку скорости  $\vec{v}_2$  и  $\vec{u}$  горизонтальны, то скорость  $\vec{v}_{2отн}$  тоже горизонтальна, причем

$$v_2 = v_{2отн} + u.$$

Относительная скорость  $\vec{v}_{2отн}$  составляет с нормалью  $AB$  к поверхности стекла некоторый угол  $\beta$  – угол отражения. Из динамики известно, что при упругом ударе о поверхность

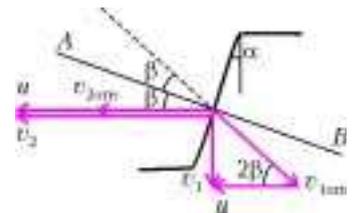


Рис. 9

неподвижного массивного тела угол падения равен углу отражения, а модули скоростей падения и отражения равны. Поэтому скорость градины относительно автомобиля непосредственно перед ударом  $\vec{v}_{1\text{отн}}$  составляет тоже угол  $\beta$  с нормалью к поверхности стекла и равна по модулю скорости после удара:

$$v_{1\text{отн}} = v_{2\text{отн}}.$$

Установим связь между скоростями перед ударом. Абсолютная скорость  $\vec{v}_1$ , относительная скорость  $\vec{v}_{1\text{отн}}$  и переносная скорость  $\vec{u}$  связаны равенством

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1\text{отн}} + \vec{u}.$$

Из геометрии рисунка 9 легко показать, что  $\beta = \alpha$  и что скорость  $\vec{v}_{1\text{отн}}$  составляет с горизонтом угол  $2\beta$ .

Используя рисунок 9, находим скорости градины до и после удара:

$$v_1 = u \operatorname{tg} 2\beta = u \operatorname{tg} 2\alpha = u\sqrt{3} \approx 43 \text{ км/ч},$$

$$v_2 = v_{2\text{отн}} + u = v_{1\text{отн}} + u = \frac{u}{\cos 2\beta} + u = u \left( \frac{1}{\cos 2\alpha} + 1 \right) = 3u = 75 \text{ км/ч}.$$

**Задача 6.** Лента почтового транспортера движется с постоянной скоростью  $v$ , находясь в одной плоскости с горизонтальной поверхностью стола. На ленту попадает небольшая коробка, двигавшаяся по столу со скоростью  $v/2$ , направленной под углом  $\alpha$  ( $\cos \alpha = 1/9$ ) к краю ленты (рис. 10). Коэффициент трения скольжения между коробкой и лентой  $\mu$ .

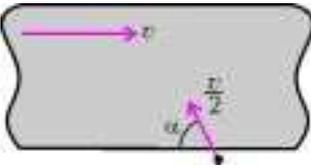


Рис. 10

1) Чему равна скорость коробки (по модулю) относительно ленты в начале движения по ленте? 2) При какой минимальной ширине ленты коробка не преодолет ленту?

Удобно за неподвижную систему отсчета взять стол, а за движущуюся систему отсчета – ленту. Тогда скорость ленты это переносная скорость  $\vec{v}_{\text{пер}}$ , причем

$$v_{\text{пер}} = v.$$

В начале движения по ленте скорость коробки относительно стола есть абсолютная скорость  $\vec{v}_{\text{абс}}$ , равная скорости коробки относительно стола до въезда на ленту, поэтому

$$v_{\text{абс}} = \frac{v}{2}.$$

Скорость коробки относительно ленты в начале движения по ленте есть относительная скорость  $\vec{v}_{\text{отн}}$ .

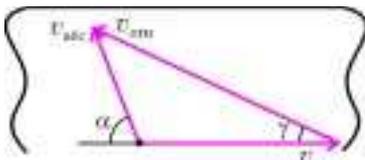


Рис. 11

По правилу сложения скоростей (рис. 11),

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Используя теорему косинусов для треугольника из векторов скоростей, получаем

$$v_{\text{отн}}^2 = v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{абс}}^2 - 2v_{\text{пер}}v_{\text{абс}} \cos(180^\circ - \alpha).$$

С учетом выражений для  $v_{\text{пер}}$  и  $v_{\text{абс}}$  через  $v$  после упрощений находим скорость коробки относительно ленты в начале движения по ленте:

$$v_{\text{отн}} = \frac{7}{6}v.$$

Для ответа на второй вопрос удобно перейти в инерциальную систему отсчета, связанную с лентой. Относительно ленты коробка имеет начальную скорость  $\vec{v}_{\text{отн}}$ , направленную под некоторым углом  $\gamma$  к краю ленты, и движется прямолинейно и равнозамедленно с ускорением  $\mu g$ . При требовании минимальности ширины  $d$  ленты коробка остановится на ленте у противоположного края ленты, пройдя по ленте путь

$$s = \frac{d}{\sin \gamma}.$$

Для равнозамедленного движения по ленте можно записать

$$v_{\text{отн}}^2 = 2\mu g s.$$

Из последних двух равенств, с учетом полученного ранее выражения для  $v_{\text{отн}}$  через  $v$ , находим

$$d = \frac{49 v^2 \sin \gamma}{72 \mu g}.$$

По теореме синусов для треугольника из векторов скоростей,

$$\frac{\sin \gamma}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{v_{\text{абс}}}{v_{\text{отн}}},$$

где

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

Отсюда, с учетом выражений для  $v_{\text{абс}}$  и  $v_{\text{отн}}$  через  $v$ , получаем

$$\sin \gamma = \frac{4\sqrt{5}}{21}.$$

Подставив значение  $\sin \gamma$  в выражение для  $d$ , находим минимальную ширину ленты:

$$d = \frac{7\sqrt{5} v^2}{54 \mu g}.$$

**Упражнения**

1. По прямолинейному участку  $CD$  движется тепловоз со скоростью  $v$  (рис. 12). Автомобиль движется со скоростью  $v/4$  по дороге в виде дуги окружности радиусом  $R$ . Расстояние от центра окружности до железной дороги  $OK = 2R$ . В некоторый момент времени тепловоз оказался в точке  $K$ , а автомобиль – в точке  $A$ . Найдите в этот момент скорость тепловоза относительно автомобиля (системы отсчета, связанной с автомобилем). Размеры тепловоза и автомобиля малы по сравнению с  $R$ .

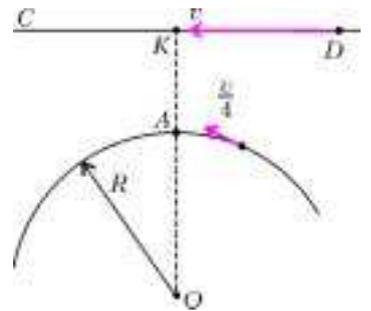


Рис. 12

2. Идет град, и автомобиль едет со скоростью  $u = 29 \text{ км/ч}$  по горизонтальной дороге. Одна из градин ударяется о стекло заднего окна автомобиля, наклоненное под углом  $\beta = 30^\circ$  к горизонту, и отскакивает горизонтально в направлении, противоположном движению автомобиля. Считая, что удар градины о стекло абсолютно упругий и что ее скорость непосредственно перед ударом вертикальна, найдите скорость градины: 1) до удара; 2) после удара.

3. Лента горизонтального тротуара шириной  $d$  движется с постоянной скоростью  $v$ . На ленту попадает шайба, двигавшаяся с горизонтальной скоростью  $3v$ , направленной под углом  $\alpha$  ( $\cos \alpha = 2/3$ ) к краю ленты. 1) Чему равна скорость шайбы (по модулю) относительно тротуара в начале движения по тротуару? 2) При каком максимальном коэффициенте трения скольжения между шайбой и тротуаром шайба преодолет тротуар?

# Материалы вступительных экзаменов 2004 года

Московский государственный университет  
им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, олимпиада  
«Абитуриент-2004», март)

1. Найдите сумму тангенсов всех  $x \in (-\pi; \pi)$  таких, что

$$\sin 2x + 5 \cos 2x = 3.$$

2. Решите неравенство

$$3^{\log_x(3x^2+2x-1)} \leq (x^2+x)^{\log_x 9}.$$

3. Найдите все возможные значения суммы убывающей арифметической прогрессии

$$a_1 = \frac{6m - m^2 - 9}{6m - m^2}, a_2 = \frac{6m - m^2 - 12}{6m - m^2}, \dots, a_n = \frac{(-10)}{6m - m^2},$$

где  $m$  – некоторое целое число.

4. В выпуклом четырехугольнике  $KLMN$  диагонали  $KM$  и  $LN$  перпендикулярны сторонам  $MN$  и  $KL$  соответственно, а длина стороны  $KN$  равна  $4\sqrt{3}$ . На стороне  $KN$  расположена точка  $A$  так, что  $\angle LAK = \angle MAN$ . Известно, что  $\angle MKN - \angle KNL = 15^\circ$ . Найдите длину ломаной  $LAM$  и площадь четырехугольника  $KLMN$ , если  $LA : AM = 1 : \sqrt{3}$ .

5. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\arctg((3a-1)\sin^2 x - (3a^3 - a^2 + 3a - 1)\sin x + \operatorname{tg}(ax - a\pi)) - ax + a\pi = 0$$

имеет ровно три решения.

6. Дана сфера радиуса 1 с центром в точке  $O$ . Из точки  $A$ , лежащей вне сферы, проведены четыре луча. Первый луч пересекает поверхность сферы последовательно в точках  $B_1$  и  $C_1$ , второй – в точках  $B_2$  и  $C_2$ , третий – в точках  $B_3$  и  $C_3$ , четвертый – в точках  $B_4$  и  $C_4$ . Прямые  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  пересекаются в точке  $E$ , прямые  $B_3B_4$  и  $C_3C_4$  – в точке  $F$ . Найдите объем пирамиды  $OAEF$ , если  $AO = 2$ ,  $EO = FO = 3$ , а угол между гранями  $AOE$  и  $AOF$  равен  $30^\circ$ .

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\log_4(2-x) - \log_6(2-x)}{\log_6 x - \log_9 x} \leq \log_4 9.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{(x^2+x+1)^2 - 2|x^3+x^2+x| - 3x^2}{10x^2 - 17x - 6} \geq 0.$$

3. Выпуклый многогранник  $ABCDFE$  имеет пять граней:  $CDF$ ,  $ABE$ ,  $BCFE$ ,  $ADFE$  и  $ABCD$ . Ребро  $AB$  параллельно ребру  $CD$ . Точки  $K$  и  $L$  расположены соответственно на ребрах  $AD$  и  $BC$  так, что отрезок  $KL$  делит площадь грани  $ABCD$  пополам. Точка  $M$  является серединой ребра  $EF$  и вершиной пирамиды  $MABCD$ , объем которой равен 6. Найдите объем пирамиды  $EKLF$ , если известно, что объем многогранника  $ABCDFE$  равен 19.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{-3 \sin 2x} = -2 \sin 2x - \sin x + \cos x - 1.$$

5. Дорога проходит последовательно через пункты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Расстояние от  $A$  до  $B$  равно 24 км. Из  $A$  в  $D$  выехал с постоянной скоростью автомобиль. Одновременно с ним из  $B$  в  $D$  отправились с постоянными скоростями велосипедист и мотоциклист. Когда автомобиль догнал велосипедиста, мотоциклист обогнал их на 6 км. В пункте  $C$  автомобиль догнал мотоциклиста и, доехав до  $D$ , сразу поехал обратно в  $A$ , встретившись с велосипедистом во второй раз в  $C$ . Найдите расстояние между  $B$  и  $C$ , если известно, что время от начала движения до момента повторной встречи автомобиля и велосипедиста в два раза больше, чем время от начала движения до того момента, когда автомобиль впервые догнал мотоциклиста.

6. В остроугольном треугольнике  $ABC$  высоты пересекаются в точке  $H$ , а медианы в точке  $O$ . Биссектриса угла  $A$  проходит через середину отрезка  $OH$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 2$ , а разность углов  $B$  и  $C$  равна  $30^\circ$ .

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики,  
олимпиада «Абитуриент-2004», апрель)

1. Четыре числа  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  и  $a_4$  образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если к ним прибавить 6, 7, 6 и 1 соответственно, то получатся числа, образующие в том же порядке арифметическую прогрессию. Найдите числа  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  и  $a_4$ .

2. Решите неравенства

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 7} \leq 5x - x^2 - 5.$$

3. Найдите все целые  $n$ , при которых справедливо равенство

$$\frac{5n^2 + 4n + 13}{n + 1} = 11 - 8\sqrt{1 - 8n}.$$

4. Решите неравенство

$$9 \log_2^2 x + 36 \leq \leq 4 \left( -8 \cos^2 \frac{\pi(47-8x)}{45} + 8 \cos \frac{\pi(47-8x)}{45} + 7 \right) \log_2 x.$$

5. В параллелограмме  $ABCD$  угол между диагоналями  $AC$  и  $BD$  равен  $30^\circ$ . Известно отношение  $AC : BD = 2 : \sqrt{3}$ . Точка  $B_1$  симметрична вершине  $B$  относительно прямой  $AC$ ,

а точка  $C_1$  симметрична вершине  $C$  относительно прямой  $BD$ . Найдите отношение площадей треугольника  $AB_1C_1$  и параллелограмма  $ABCD$ .

6. При всех значениях параметра  $a$  решите уравнение

$$|x - 3| - (1 - 2a)x^2 + (3 - 4a)x + 6a - 4 = \\ = \sin(|x - 3| + 6a - 4) - \sin((1 - 2a)x^2 - (3 - 4a)x).$$

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - 3 \cos(\arctg(2\sqrt{2})) + \frac{2}{\sqrt{3} + 1}\right)x = 2^{\log_{\sqrt{2}} 3} - 9. \text{FF}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 4}{\sqrt{15 + 2x - x^2}} \geq |x| - 2.$$

3. Решите уравнение

$$2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) - \sin\left(3x - \frac{5\pi}{16}\right) = -1.$$

4. Окружность с центром в точке  $M$  касается сторон угла  $AOB$  в точках  $A$  и  $B$ . Вторая окружность с центром в точке  $N$  касается отрезка  $OA$ , луча  $BA$  и продолжения стороны угла  $OB$  за точку  $O$ . Известно, что  $ON : OM = 12 : 13$ . Найдите отношение радиусов окружностей.

5. Для каждого значения параметра  $a$  найдите число решений уравнений

$$\frac{2}{16^x} - \frac{1}{8^x} - \frac{a + 8}{4^x} + \frac{4 - 2a}{2^x} - a^2 + 4a + 5 = 0.$$

6. В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит равнобокая трапеция  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ). Через точку  $B_1$  проведена плоскость  $P$ , пересекающая ребро  $AD$  в точке  $K$ , а ребро  $CD$  — в точке  $N$ . Прямые  $AA_1$  и  $CC_1$  эта плоскость пересекает в точках  $L$  и  $M$  соответственно. Известно, что  $DN : DC = 3 : 4$ ,  $BC = DK$  и  $KN > DN$ . Объем многогранника  $ABCNKL B_1 M$  относится к объему призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  как  $49 : 144$ . Найдите отношение длины отрезка  $DK$  к длине отрезка  $AD$ .

Вариант 5

(физический факультет, олимпиада «Абитуриент-2004», март)

1. Решите уравнение

$$6 \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \cos \frac{3\pi}{8} - 3 \cos x - 1 = 0.$$

2. Решите систему неравенств

$$-2 < \frac{2}{x^2 - x - 2} < -1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{32}(x^2 + 3x + 2)^5 + \log_2(x^2 - 3x + 2) < 2.$$

4. Окружность с центром  $O$  вписана в  $\triangle ABC$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = 5$ ,  $AC = 6$ . Прямые  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$  пересекают стороны  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  в точках  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно. Найдите отношение площади  $\triangle BMK$  к площади  $\triangle CKL$ .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |2^x - 2^y| + 2^x + 3 \cdot 2^y = 12\sqrt{2}, \\ |2^x + 2^{-y}| + 2^x - 33 \cdot 2^{-y} = 0. \end{cases}$$

6. В треугольнике  $ABC$  даны стороны  $AB = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $AC = 7$ . Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Найдите радиус наибольшей окружности.

7. Для каждого значения параметра  $a$  решите уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{x - 3a}{x}\right) + 4(\log_4(x - 3a))\log_2 x - 8\log_4^2 x = 0.$$

8. В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ )  $AA_1 : AB = 4 : 3$ . На боковых ребрах  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  взяты точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно так, что  $AK : KA_1 = 3 : 1$ ,  $BL = LB_1$ ,  $CM : MC_1 = 1 : 3$ . Найдите двугранный угол между плоскостями  $KLM$  и  $ABC$ .

Вариант 6

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin x \sin 4x + \sin 5x \sin 2x - \cos 3x = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{|x - 1|}{6} < -1 - \frac{1}{|x - 1|}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2((2 - 2x - x^2)(x + 2)) - \\ - \log_8((4 + 4x + x^2)(8x + 16)) + 1 > 0.$$

4. В окружности с радиусом 4 через точку  $D$  диаметра  $BC$  ( $BD : DC = 5 : 3$ ) проведена хорда  $EF$ , перпендикулярная к этому диаметру. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков  $BD$ ,  $DF$  и дуги  $BF$ .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{x-2y} - \sqrt{2x - 2y} = 24 - x, \\ 2^{x-2y} + 2\sqrt{2x - 2y} = 2x + 8. \end{cases}$$

6. В трапеции  $BCDE$  ( $CD \parallel BE$ )  $BC \perp BE$ ,  $CD = 10$ ,  $BE = 14$ ,  $LN$  — средняя линия (точка  $L$  — на стороне  $BC$ ). Прямая, проходящая через точку  $B$  и перпендикулярная к стороне  $DE$ , пересекает отрезок  $LN$  в точке  $M$ ,  $LM : MN = 2 : 1$ . Найдите площадь трапеции  $BCDE$ .

7. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$(1 + \sin(3ax))\sqrt{5\pi x - x^2} = 0$$

имеет ровно 5 различных корней?

8. В правильной треугольной пирамиде  $SLMN$ , с вершиной  $S$ , проведена медиана  $MP$  треугольника  $SMN$  и даны  $LM = 2$ ,  $SL = 6$ . Через середину  $K$  ребра  $SM$  проведена прямая  $KE$ , параллельная ребру  $LN$ . Через точку  $L$  проведена прямая, пересекающая прямые  $MP$  и  $KE$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Найдите длину отрезка  $AB$ .

Вариант 7

(вступительный экзамен для победителей III и IV этапов Всероссийской олимпиады; факультеты — химический, наук о материалах, биологический, фундаментальной медицины, биоинженерии и биоинформатики, почвоведения, географический)<sup>1</sup>

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x - 2} = x - 2.$$

<sup>1</sup> На каждом факультете предлагались какие-то 6 из 7 задач.

2. Решите уравнение

$$\cos 4x + 2 \cos^2 x = 1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4.$$

4. При каждом значении параметра  $a$  решите систему

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8a^2, \\ xy = 2a^2. \end{cases}$$

5. Точка  $D$  лежит на окружности, описанной около правильного треугольника  $ABC$ . Длина отрезка  $BD$  равна 1, а длина отрезка  $AD$  равна 3. Найдите длину отрезка  $DC$ .

6. Найдите все пары натуральных чисел  $k$  и  $l$ , удовлетворяющих условиям:

- 1)  $k$  и  $l$  имеют общий целый делитель, больший 4;
- 2)  $53 < k < l$ ;
- 3)  $k + l \leq 119$ .

7. На боковых ребрах  $SA$ ,  $SB$  и  $SC$  четырехугольной пирамиды  $SABCD$ , основание  $ABCD$  которой есть квадрат, взяты соответственно точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  так, что  $SA_1 : SA = 3 : 7$ ,  $SB_1 : SB = 2 : 7$  и  $SC_1 : SC = 4 : 9$ . Плоскость, проходящая через точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , пересекает ребро  $SD$  в точке  $D_1$ . Найдите отношение  $SD_1 : SD$  и отношение объема пирамиды  $SA_1B_1C_1D_1$  к объему пирамиды  $SABCD$ .

#### Вариант 8

(химический факультет и факультет наук о материалах)

1. Решите неравенство

$$\frac{10 + 3x - x^2}{x^2 - 3x + 2} \leq 1.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \sin x} = 1 - 2 \sin x.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_5 x + 3} - \sqrt{\log_5 x - 2} < \sqrt{\log_5 x - 1}.$$

4. Известно, что трапеция  $ABCD$  равнобедренная,  $BC \parallel AD$  и  $BC > AD$ . Трапеция  $ECDA$  также равнобедренная, причем  $AE \parallel DC$  и  $AE > DC$ . Найдите  $BE$ , если известно, что косинус суммы углов  $CDE$  и  $BDA$  равен  $1/3$ , а  $DE = 7$ .

5. Дан куб  $EFGHE_1F_1G_1H_1$  с длиной ребра, равной 2. На ребрах  $EH$  и  $HH_1$  взяты точки  $A$  и  $B$  такие, что  $EA/AH = 2$ ,  $HB/BH_1 = 1/2$ . Через точки  $A$ ,  $B$ ,  $G_1$  проведена плоскость. Найдите расстояние от точки  $E$  до этой плоскости.

6. Найдите все значения параметров  $a$  и  $b$ , при которых среди корней уравнения

$$\cos^{1/2} x + (a^2 - ab + b^2 - 3)^2 - (4a^2 - 4 - b^2 + 2ab)(x+1) \cdot 2x = 0$$

есть два различных корня с равными абсолютными величинами.

#### Вариант 9

(биологический факультет, факультет фундаментальной медицины, факультет биоинженерии и биоинформатики)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2} = |x-1|.$$

2. Решите уравнение

$$\sin x \sin 3x = \cos 2x \cos 4x.$$

3. В равнобокой трапеции с основаниями 1 и 4 расположены две окружности, каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований. Найдите площадь трапеции.

4. Решите неравенство

$$\log_{(2^x-2)^2} (4^{x+1} - 5 \cdot 2^{x+2} + 24) - \log_{(2^x-2)^2} \left( 2^{2x-2} - 7 \cdot 2^{x-2} + \frac{5}{2} \right) \geq \frac{3}{2}.$$

5. В шар радиуса 4 вписана правильная шестиугольная пирамида с высотой 6, а в нее вписан второй шар. Найдите радиус второго шара.

#### Вариант 10

(факультет почвоведения)

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = 2x^2 - 3x$  при  $x \in [-1; 3]$ .

2. Решите уравнение

$$|5x + 1| + 7x + 2 = 0.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + 5x + 4} - \sqrt{x^2 - x - 6} = -\sqrt{2x^2 + 4x - 2}.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{0,5} (2^{x+1} - 3) \geq x - 1.$$

5. Найдите все значения  $x$ , удовлетворяющие неравенству  $0 \leq x \leq \pi$  и являющиеся решениями уравнения

$$\sqrt{\operatorname{tg} 3x} = \sqrt{-\operatorname{tg} x}.$$

6. В окружность радиуса 5 вписан квадрат. На окружности отмечена точка, расстояние от которой до одной из вершин квадрата равно 6. Найдите расстояния от этой точки до трех других вершин квадрата.

7. Докажите, что график функции

$$y = 4x + \log_2 \left( \frac{x^2 + 5x}{x^2 + 3x - 4} \right)$$

имеет центр симметрии, и найдите координаты  $(x, y)$  этого центра симметрии.

#### Вариант 11

(географический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^6 - 64}}{x - 3} \geq 0.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x + \sin 2x} = 0.$$

3. Пункты  $A$  и  $B$  соединены двумя дорогами. Первая дорога разделена паромной переправой с одним паромом. На второй дороге препятствий нет. Переправа на пароме занимает  $\frac{1}{2}$  часа. Паром работает без перерывов. Из пункта  $A$  по первой дороге выезжает автомобиль, скорость движения которого по дороге равна 60 км/ч. Одновременно с ним из

пункта  $B$  по той же дороге выезжает трактор со скоростью  $20 \text{ км/ч}$ . Автомобиль без задержки переправляется паромом и встречает трактор, ожидающий паром. После прибытия в пункт  $B$  автомобиль без остановки возвращается по второй дороге и прибывает в пункт  $A$  на 15 минут раньше трактора, затратив на обратный путь на  $\frac{1}{2}$  часа больше, чем на путь из  $A$  в  $B$ . Найдите:

а) разность между длинами второй и первой дорог, не учитывая длину переправы;

б) длину второй дороги, если известно, что, поехав обратно по первой дороге, автомобиль прибыл бы в пункт  $A$  одновременно с трактором.

4. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  точки  $K, L, M, N$  – середины сторон  $AB, BC, CD, DA$  соответственно. Отрезки  $KM$  и  $LN$  пересекаются в точке  $E$ . Площади четырехугольников  $AKEN, BKEL$  и  $DNEM$  равны 6, 6 и 12 соответственно. Найдите:

а) площадь четырехугольника  $CMEL$ ;

б) отрезок  $CD$ , если  $AB = \frac{1}{2}$ .

5. При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} |x - a| + |y - a| + |a + 1 - x| + |a + 1 - y| = 2, \\ |y + 2|x - 5| = 6 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. Сколько цифр содержится в десятичной записи 99991-го члена последовательности  $a_n$ , если  $a_1 = 0$ ,  $a_{n+1} = 2a_n + 1024$ ,  $\lg 2 = 0,301029 \dots$ ?

#### Вариант 12

(геологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x - 2}{|x - 2|} \leq 4 - x^2.$$

2. Какие значения может принимать  $\sin x$ , если

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}?$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{441 - x^2} \leq x + 21.$$

4. В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  прямой, точка  $M$  лежит на стороне  $AC$ , причем  $AM : MC = 1 : 3\sqrt{3}$ . Величина угла  $ABM$  равна  $\pi/6$ ,  $BM = 6$ . Найдите величину угла  $BAC$  и расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников  $BSC$  и  $BAM$ .

5. Решите неравенство

$$\log_{3-x}(x^2 - 10x + 25) - 2 \log_{3-x}(4x - x^2 + 5) + 2 \leq 0.$$

6. Две группы геологов исследуют маршрут, проходящий от пункта  $A$  через пункт  $B$  до пункта  $C$ . Первая группа проходит весь маршрут за 2 дня, а вторая – за 3. Расстояние между  $A$  и  $B$  вдвое меньше расстояния между  $B$  и  $C$ . Скорости движения групп на участках  $AB$  и  $BC$  постоянны, но на участке  $AB$  скорости обеих групп в  $m$  раз меньше, чем их скорости на участке  $BC$ . Группы выходят одновременно из  $A$  и  $C$  навстречу друг другу. Если первая группа выходит из  $A$ , а вторая из  $C$ , то они встречаются в  $B$ . Если же первая выходит из  $C$ , а вторая из  $A$ , то они встречаются в пункте  $D$ . Какую часть от длины всего маршрута составляет расстояние между  $B$  и  $D$ ? Чему равно значение  $m$ ?

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\cos(x+y)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{\cos y}{\cos(x+y)} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

8. У пирамиды  $SABC$  основанием является правильный треугольник  $ABC$  со стороной  $2\sqrt{2}$ . Ребра  $SB$  и  $SC$  равны, шар касается сторон основания, плоскости грани  $SBC$ , а также ребра  $SA$ . Чему равен радиус шара, если  $SA = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ?

#### Вариант 13

(филологический факультет)

1. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$x^2 + x + \frac{2a - 1}{a + 5} = 0$$

не имеет решений?

2. Решите уравнение

$$4 \cos^2 3x - 4 \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0.$$

3. Решите уравнение

$$(x + 4)(x^2 + 4) = 5 - 2^{x+4} - 16(\sqrt{2})^x.$$

4. Из точки  $M$  на плоскость  $\alpha$  опущен перпендикуляр  $MH$  длины  $\sqrt{3}$  и проведены две наклонные, составляющие с перпендикуляром углы по  $60^\circ$ . Угол между наклонными равен  $120^\circ$ .

а) Найдите расстояние между основаниями  $A$  и  $B$  наклонных.

б) На отрезке  $AB$  как на катете в плоскости  $\alpha$  построен прямоугольный треугольник  $ABC$  (угол  $A$  прямой). Найдите объем пирамиды  $MAVC$ , зная, что  $\cos \angle BMC = -\frac{1}{3}$ .

5. Криптографическая лаборатория получила задание расшифровать три текста одинакового объема. Капитан Иванов на расшифровку первого и второго текстов в сумме затратил 40,5 минут, а на расшифровку второго и третьего – 37,5 минут. Оказалось также, что второй текст он расшифровывал с такой же скоростью, как в среднем первый и третий. За какое время капитан Иванов выполнил задание?

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} y = a|x - 3a|, \\ |x| = b - |y|. \end{cases}$$

а) При каких значениях параметров  $a$  и  $b$  эта система относительно неизвестных  $x$  и  $y$  имеет бесконечно много решений?

б) На плоскости  $Oxy$  изобразите множество точек, координаты которых таковы, что система относительно неизвестных  $a$  и  $b$  имеет ровно три решения.

#### Вариант 14

(экономический факультет, отделение экономики)

1. Вычислите произведение всех отрицательных корней уравнения

$$\frac{3x^3}{2 \sin \frac{14\pi}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}x} = 2\sqrt{3}x \operatorname{tg} \frac{13\pi}{4}.$$

2. Решите неравенство

$$1 + 2 \sin^2 4\pi x \cdot \log_{\frac{1}{3}}(11x - 4x^2 - 7) \leq \cos 8\pi x.$$

3. Окружность, пересекающая боковые стороны  $AC$  и  $CB$  равнобедренного треугольника  $ACB$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно, является описанной около треугольника  $ABQ$ . Отрезки  $AQ$  и  $BP$  пересекаются в точке  $D$  так, что  $AQ : AD = 4 : 3$ . Найдите площадь треугольника  $DQB$ , если площадь треугольника  $PQC$  равна 3.

4. Решите неравенство

$$\log_{x+3}(2x+5) \log_{4x^2+20x+25}(x^2+2x+1) + \log_{\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{3x+9}\right)}(x^2-x-2) \geq 0.$$

5. Паром грузоподъемностью 109 тонн перевозит джипы и грузовики. Количество перевозимых на пароме грузовиков не менее чем на 20% превосходит количество перевозимых джибов. Вес и стоимость перевозки одного джиба составляют 3 тонны и 600 рублей, грузовика – 5 тонн и 700 рублей соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость перевозки всех джибов и грузовиков при данных условиях.

6. Найдите наибольшее значение параметра  $w$ , при котором имеет решение система

$$\begin{cases} 4 \sin^2 y - w = 16 \sin^2 \frac{2x}{7} + 9 \operatorname{ctg}^2 \frac{2x}{7}, \\ \left( \pi^2 \cos^2 3x - 2\pi^2 - 72 \right) y^2 = \\ = 2\pi^2 (1 + y^2) \sin 3x. \end{cases}$$

7. В правильную треугольную пирамиду с высотой  $h = \frac{5}{4}$  и стороной основания  $a = \sqrt{15}$  вложены пять шаров одинакового радиуса. Один из шаров касается основания пирамиды в его центре. Каждый из трех других шаров касается своей боковой грани пирамиды, причем точка касания лежит на апофеме и делит ее в отношении 1 : 2, считая от вершины. Пятый шар касается всех четырех шаров. Найдите радиус шаров.

Вариант 15

(Высшая школа бизнеса)

1. Решите неравенство

$$\frac{x+1}{|x-1|} \geq 1.$$

2. Решите уравнение

$$\log_3(3 \sin x) + \log_{\frac{1}{3}}(\cos x) = 1.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{y-2} = 1, \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$$

4. Найдите периметр треугольника  $ABC$ , если известны координаты его вершин  $A(-3; 5)$ ,  $B(3; -3)$  и точки  $M(6; 1)$ , являющейся серединой стороны  $BC$ .

5. Сколько времени в течение суток на электронном табло вокзальных часов, которые показывают время в диапазоне от 00:00 до 23:59, присутствует хотя бы одна цифра 3?

6. Найдите все пары целых неотрицательных чисел  $(k; m)$ , являющихся решениями уравнения

$$2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36.$$

7. Найдите наибольшее значение выражения  $3x - 2y$  на множестве переменных  $x, y$ , удовлетворяющих условию

$$4x^2 + y^2 = 16.$$

8. Найдите все значения параметра  $p \in [-4; 4]$ , при которых неравенство

$$(p-2)((x+1)(p-3)+2x) > 0$$

выполняется при любых  $x \geq 0$ .

Вариант 16

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$4^x - 12 \cdot 2^x - 1 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x-2}{2x-10}}\left(\frac{x+2}{4}\right) \leq 1.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{15} \cos x \operatorname{ctg} x + \sqrt{5} \cos x + \sqrt{5} \operatorname{ctg} x = 0$$

и найдите сумму его различных корней, принадлежащих отрезку  $[-\pi; \pi]$ .

4. Окружность радиуса 3 проходит через вершины  $A$  и  $B$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с катетом  $AB = 5$ . Прямая  $CD$  касается этой окружности в точке  $D$ . Найдите величину угла  $ABD$  и длину второго катета  $AC$ , если луч  $DA$  делит угол  $CDB$  пополам.

5. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - 5|x|| = a(x + 4)$$

имеет ровно три различных корня.

Вариант 17

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите неравенство

$$(x+3)\sqrt{x^2-25} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$\sin^3 x - \cos^4 x = -1.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xyz, \\ y^2 + z^2 = xyz, \\ z^2 + x^2 = xyz. \end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$\left(2 \log_4(2^{2x} + 1) - x\right) \left(\log_2(2^x + 2^{-x}) - 2\right) = 8.$$

5. Две окружности радиусов  $\sqrt{2}$  и 2 пересекаются друг с другом, расстояние между их центрами равно  $\sqrt{3} + 1$ . Найдите отношение площади круга, вписанного в общую часть кругов, ограниченных этими окружностями, к площади общей части.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения  $\frac{y^2}{25} + \frac{w^2}{144}$ , если величины  $x, y, z, w$  удовлетворяют

системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0, \\ z^2 + w^2 - 2w - 143 = 0, \\ xw + yz - x + w + 2z - 61 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 18

(социологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 7x + 14} \leq 0.$$

2. Решите уравнение

$$4 \sin^2 3x - 2 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{2} \right) - 4 \cos^2 (x - \pi) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}.$$

3. Популярность продукта *A* за 2002 год выросла на 20%, в следующем году снизилась на 10%, а в конце 2004 года сравнялась с популярностью продукта *B*. Популярность продукта *B* в 2002 году снизилась на 20%, затем на протяжении одного года не изменялась, а за 2004 год выросла на 40%. Как изменилась популярность продукта *A* за 2004 год, если в начале 2002 года она составляла  $\frac{2}{3}$  от популярности продукта *B*?

4. В треугольнике *ABC* угол при вершине *B* равен  $\frac{\pi}{3}$ , а длины отрезков, соединяющих центр *O* вписанной окружности с вершинами *A* и *C*, равны 4 и 6 соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

5. Три числа, являющиеся длинами ребер прямоугольного параллелепипеда с диагональю 6, образуют арифметическую прогрессию. Кубы этих чисел тоже образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

6. Для каждого положительного значения параметра *c* изобразите множество тех пар  $(b, a)$ , для каждой из которых уравнение

$$bx^2 + ax - \frac{b}{4} + c = 0$$

имеет два различных отрицательных корня, и укажите все значения параметра *a*, при каждом из которых множество соответствующих значений состоит из двух непересекающихся интервалов.

Вариант 19

(факультет государственного управления)

1. Тест, который должен пройти испытуемый, состоит из 26 вопросов. За каждый неверный ответ у испытуемого вычитается пять очков, а за каждый правильный – начисляется восемь очков. Испытуемый дал ответы на все вопросы. На сколько вопросов он ответил правильно, если в итоге сумма полученных им очков оказалась равной нулю?

2. Решите уравнение

$$\sin 2x - 2 \cos 4x + \sin 6x = 2.$$

3. Длины трех сторон четырехугольника, вписанного в окружность радиуса  $2\sqrt{2}$ , одинаковы и равны 2. Найдите длину четвертой стороны.

4. Компания предложила 350 своим служащим выполнить сверхурочную работу, причем каждому мужчине предлагалось в виде вознаграждения 20 долларов, а каждой женщине – 16 долларов 30 центов. Все женщины согласились с этим предложением, а часть мужчин отказалась. Общая сумма выплаченного вознаграждения составила 5705 долларов.

Какова сумма вознаграждения, выплаченного всем женщинам?

5. Найдите все значения *x*, удовлетворяющие неравенству

$$\min \left( \log_3 (3x + 5), \sqrt{x^2 - x - 2} \right) < 2.$$

6. Каково минимальное число гирь, необходимых для того, чтобы взвесить любой груз массой от 1 до 39 килограммов на рычажных (чашечных) весах, если известно, что этот груз может весить только целое число килограммов?

7. На плоскости *Oxy* найдите наибольшее расстояние между такими двумя точками с координатами  $(x, y)$ , что *x* и *y* являются целыми числами и удовлетворяют уравнению

$$4 \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{15}{xy}.$$

ФИЗИКА

Физический факультет

Задачи устного экзамена

1. По горизонтальной плоскости скользит квадратная пластина *ABCD*. В некоторый момент скорости вершин *A* и *B* оказались перпендикулярными друг другу, а скорость вершины *C* была равна *v* и составила с вектором  $\overline{CD}$  угол, тангенс которого равен 0,5. Найдите скорость точки *M*, являющейся серединой отрезка *AB*, в этот момент времени.

2. Автомобиль массой *m* со всеми ведущими колесами, стоящий на прямолинейном горизонтальном участке дороги, начинает движение. При этом двигатель развивает постоянную мощность *N*. Коэффициент трения колес о дорогу  $\mu$ . Пренебрегая силой сопротивления движению автомобиля, найдите зависимость его скорости *v* от времени.

3. На гладкой плоскости, образующей с горизонтом угол  $\alpha$ , лежит длинная доска массой *M*, упирающаяся нижним торцом в легкую пружину, второй конец которой закреплен

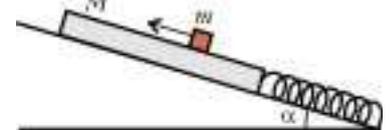


Рис. 1

На доске находится кубик массой *m*, который с помощью параллельной доске нити медленно и равномерно перемещают вверх. Оси пружины и доски, нить и центр масс кубика на-

ходятся в одной вертикальной плоскости. При каком коэффициенте трения  $\mu$  кубика о доску он будет совершать гармонические колебания после внезапного обрыва нити?

4. Через кран, смонтированный в дно цилиндра, ось которого горизонтальна, закачали некоторое количество гелия. При этом поршень в цилиндре перемещался, преодолевая действие внешнего атмосферного давления  $p_0$  и силу сухого трения о стенки цилиндра. Затем кран закрыли, а температуру газа изменили так, что его объем установился равным  $V_0$ . Какое количество теплоты *Q* нужно сообщить газу, чтобы расстояние между дном цилиндра и поршнем увеличилось на  $\Delta L$ , если площадь сечения поршня *S*, а величина силы сухого трения скольжения  $F_{\text{тр}}$ ?

5. Между дном цилиндра и гладким поршнем при температуре  $T_1 = 111 \text{ K}$  содержится смесь гелия и криптона с относительной влажностью  $\phi = 0,5$ . Плотность гелия в  $n = 2$  раза меньше плотности криптона. Ось цилиндра горизонтальна. Вне цилиндра давление равно нормальному атмосферному. Температура кипения криптона при нормальном атмосферном давлении равна  $T_{\text{к}} \approx 121 \text{ K}$ . Молярные массы гелия и криптона равны  $M_{\text{г}} = 4 \text{ г/моль}$  и  $M_{\text{к}} = 84 \text{ г/моль}$ .

На сколько нужно понизить температуру смеси, чтобы на стенках цилиндра выпала роса? Считать, что давление насыщенных паров криптона линейно зависит от его абсолютной температуры.

6. На расстоянии  $2R$  от центра закрепленного изолированного проводящего шара радиусом  $R$  удерживают положительный точечный заряд  $2Q$ . Заряд самого шара равен  $Q$ . Какую скорость  $v$  может приобрести электрон, начинающий свое движение из бесконечно удаленной от шара точки, к моменту попадания на шар?

7. Тонкое проводящее кольцо радиусом  $r$  находится в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией  $B$ , перпендикулярной плоскости кольца (рис.2). Тонкий подвижный проводник  $OA$ , имеющий массу  $m$  и сопротивление  $R$ , одним концом шарнирно закреплен в центре кольца (точка  $O$ ), а другим (точка  $A$ ) скользит по кольцу. Найдите закон, по которому должна изменяться со временем ЭДС источника напряжения, подключенного к точке  $O$  и кольцу, чтобы проводник вращался с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

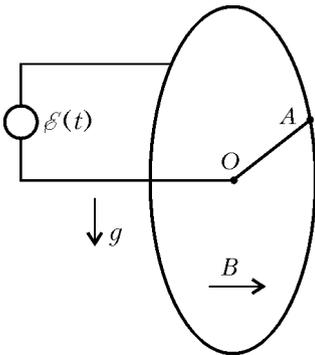


Рис. 2

Соппротивлением кольца и контактов, индуктивностью контура, по которому протекает ток, и трением пренебречь. Направление вектора ускорения свободного падения  $\vec{g}$  указано на рисунке.

8. Кольцо радиусом  $a$  из тонкой медной проволоки, имеющее сопротивление  $R$ , удерживают в однородном магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны плоскости кольца. Проекция  $B$  вектора индукции на ось кольца изменяется со временем с периодом  $T$  по закону, изображенному на рисунке 3. Пренебрегая индуктивностью кольца, найдите среднюю тепловую мощность, выделяющуюся в кольце.

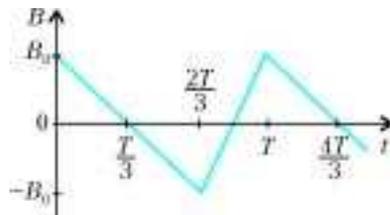


Рис. 3

9. Точечный источник света расположен на главной оптической оси на расстоянии  $d = 30$  см от тонкой собирающей линзы, оптическая сила которой  $D = 5$  дптр. Диаметр линзы  $b = 1$  см. На какое расстояние  $\Delta x$  сместится изображение источника, если между ним и линзой перпендикулярно ее главной оптической оси поместить стеклянную пластинку толщиной  $h = 15$  см с показателем преломления  $n = 1,57$ ?

10. На горизонтальную поверхность стекла налит тонкий слой прозрачной жидкости с показателем преломления  $n$ . На жидкость сверху под углом  $\alpha$  к вертикали падает параллельный пучок света с длиной волны  $\lambda$ . Жидкость медленно испаряется. В некоторый момент интенсивность отраженного света становится максимальной, а затем убывает и вновь становится максимальной через промежуток времени  $\tau$ . Найдите скорость  $v$ , с которой уменьшается толщина слоя жидкости из-за испарения.

1. Узнав о готовящемся нападении неприятеля, решетку ворот замка начали опускать с постоянной скоростью  $u = 0,2$  м/с. Мальчик, игравший на расстоянии  $l = 20$  м от ворот, в тот же момент бросился бежать к воротам. Сначала он двигался равноускоренно, а затем, набрав максимальную скорость  $v_0 = 2,5$  м/с, — равномерно. С каким минимальным ускорением  $a_{\min}$  мог разогнаться мальчик, чтобы успеть пробежать под решеткой ворот в полный рост, если в начальный момент нижний край решетки находился на расстоянии  $H = 3$  м от поверхности земли? Рост мальчика  $h = 1$  м.

2. При поливе садового участка наконечник водопроводного шланга расположили на высоте  $h = 0,8$  м над поверхностью земли, направив струю воды вверх под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Найдите массу  $m$  воды, содержащейся в отрезке струи от наконечника шланга до поверхности земли. Скорость воды, бьющей из шланга,  $v_0 = 6$  м/с, внутреннее сечение наконечника шланга  $S = 3$  см<sup>2</sup>, плотность воды  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

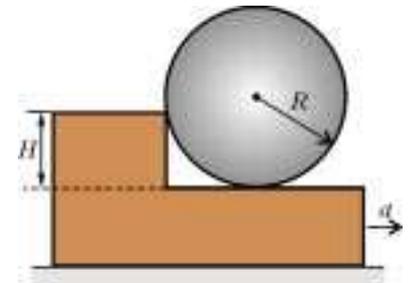


Рис. 4

3. На горизонтальной доске, имеющей прямоугольный уступ высотой  $H = 10$  см, располагается вплотную к уступу однородный цилиндр радиусом  $R = 25$  см (рис. 4). Доску начинают двигать с некоторым ускорением  $a$ , направленным вправо. Каково максимальное возможное значение ускорения  $a_{\max}$ , при котором цилиндр не будет подниматься на уступ? Все поверхности гладкие. Ускорение свободного падения  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

4. Однородный стержень может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец (рис. 5). К другому концу стержня приложена сила  $(F)$ , направленная горизонтально и перпендикулярная оси вращения стержня. Под действием этой силы стержень отклонен от вертикали на угол  $\alpha = 45^\circ$ . Какой угол  $\beta$  составляет с вертикалью сила  $(R)$ , действующая на стержень со стороны оси?

Рис. 5

5. Горизонтальная трубка сечением  $S$ , открытая с двух концов, закреплена неподвижно (рис. 6). В ней находятся два поршня, один из которых соединен пружиной жесткостью  $k$  с неподвижной стенкой. В исходном состоянии давление воздуха между поршнями равно атмосферному давлению  $p_0$ , пружина не деформирована и расстояние между поршнями равно  $l$ . Правый поршень медленно переместили вправо

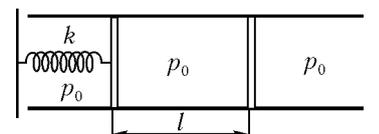


Рис. 6

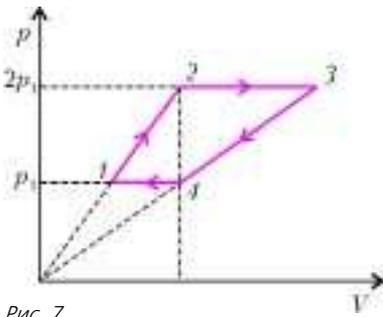


Рис. 7

Найдем работу  $A$ , совершаемую газом в этом процессе, если на участке  $2-3$  газ получает количество теплоты  $Q_{23} = 200$  Дж. Объем газа в точках 2 и 4 один и тот же, давление газа в точке 2 в два раза больше давления газа в точке 1.

7. На рисунке 8 изображены  $pV$ -диаграммы двух процессов, проводимых над одним и тем же идеальным одноатомным газом. Масса газа, участвующего в процессе  $1-2$ , в  $k = 2$  раза больше, чем масса газа, с которым проводится процесс  $3-4$ . Температура в точке 1 равна температуре в точке 3, а температура в точке 2 равна температуре в точке 4. Найдите отношение  $n$  количеств теплоты, получаемых газом в процессах  $1-2$  и  $3-4$ .

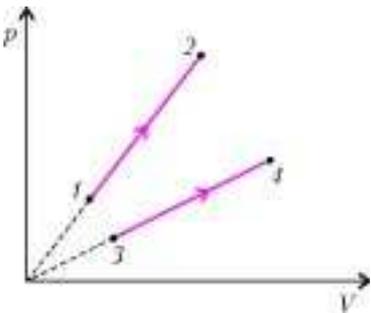


Рис. 8

8. В теплоизолированном цилиндрическом сосуде под поршнем массой  $m$  находится идеальный одноатомный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда  $x$ . На какое расстояние  $\Delta x$  опустится поршень, если сверху положить на него груз массой  $\Delta m$ ? Считать, что  $\Delta m \ll m$ , начальное и конечное положения поршня являются положениями равновесия, трение поршня о стенки сосуда пренебрежимо мало. Атмосферное давление не учитывать.

9. Непроводящая трубка, открытая с обоих концов, расположена горизонтально. В трубке находятся два металлических поршня площадью  $S$  каждый, способные перемещаться без трения. Пространство между поршнями заполнено воздухом при атмосферном давлении, причем расстояние между поршнями мало по сравнению с их диаметром. Во сколько раз  $n$  уменьшится расстояние между поршнями, если зарядить их разноименными зарядами  $q$  и  $-q$ ? Температура воздуха постоянна. Атмосферное давление  $p_0$ . Электрическое поле между поршнями считать однородным. Электрическая постоянная равна  $\epsilon_0$ .

10. На горизонтальной непроводящей шероховатой поверхности закреплен маленький шарик, имеющий заряд  $q$ . Маленький брусок массой  $m$ , несущий такой же по знаку и величине заряд, помещают на эту поверхность на расстоянии  $l_0$  от закрепленного заряженного шарика. Какой путь  $l$  пройдет брусок до остановки, если его отпустить без начальной скорости? Коэффициент трения между бруском и поверхностью  $\mu$ , электрическая постоянная  $\epsilon_0$ , ускорение свободного падения  $g$ .

11. Генератор постоянного тока соединен с потребителем (полезной нагрузкой) линией электропередачи, имеющей сопротивление  $R = 10$  Ом. ЭДС генератора  $\mathcal{E} = 500$  В, его мощность  $P = 10$  кВт. Определите отношение  $\eta$  мощности, выделяемой в полезной нагрузке, к мощности генератора. Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

на расстояние  $l$ . Какое давление воздуха  $p_1$  установилось при этом между поршнями? Температуру воздуха считать постоянной, трением пренебречь.

6. Над идеальным одноатомным газом проводят процесс, изображенный на рисунке 7.

6. Над идеальным одноатомным газом проводят процесс, изображенный на рисунке 7. Найдите работу  $A$ , совершаемую газом в этом процессе, если на участке  $2-3$  газ получает количество теплоты  $Q_{23} = 200$  Дж. Объем газа в точках 2 и 4 один и тот же, давление газа в точке 2 в два раза больше давления газа в точке 1.

8. В теплоизолированном цилиндрическом сосуде под поршнем массой  $m$  находится идеальный одноатомный газ.

8. В теплоизолированном цилиндрическом сосуде под поршнем массой  $m$  находится идеальный одноатомный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда  $x$ . На какое расстояние  $\Delta x$  опустится поршень, если сверху положить на него груз массой  $\Delta m$ ?

9. Непроводящая трубка, открытая с обоих концов, расположена горизонтально. В трубке находятся два металлических поршня площадью  $S$  каждый, способные перемещаться без трения. Пространство между поршнями заполнено воздухом при атмосферном давлении, причем расстояние между поршнями мало по сравнению с их диаметром. Во сколько раз  $n$  уменьшится расстояние между поршнями, если зарядить их разноименными зарядами  $q$  и  $-q$ ?

10. На горизонтальной непроводящей шероховатой поверхности закреплен маленький шарик, имеющий заряд  $q$ . Маленький брусок массой  $m$ , несущий такой же по знаку и величине заряд, помещают на эту поверхность на расстоянии  $l_0$  от закрепленного заряженного шарика. Какой путь  $l$  пройдет брусок до остановки, если его отпустить без начальной скорости?

11. Генератор постоянного тока соединен с потребителем (полезной нагрузкой) линией электропередачи, имеющей сопротивление  $R = 10$  Ом. ЭДС генератора  $\mathcal{E} = 500$  В, его мощность  $P = 10$  кВт. Определите отношение  $\eta$  мощности, выделяемой в полезной нагрузке, к мощности генератора.

12. Маленький шарик массой  $m$ , несущей положительный заряд  $q$ , подвешен на нити длиной  $l$  и помещен в однородное магнитное поле с индукцией  $B$ , направленной горизонтально от нас (рис. 9). Сообщив шарикую некоторую скорость, направление которой показано на рисунке, его приводят в движение по окружности в вертикальной плоскости, перпендикулярной магнитному полю и совпадающей с плоскостью рисунка. При какой минимальной скорости  $v_{\min}$  шарика в нижней точке он сможет совершить полный оборот?

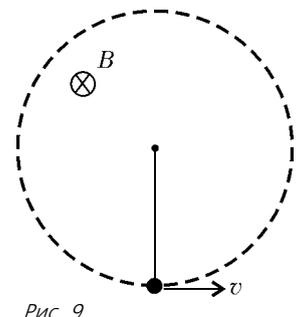


Рис. 9

13. На поверхность зеркального шара падают два параллельных луча света, лежащие в плоскости, проходящей через центр шара (рис. 10).

13. На поверхность зеркального шара падают два параллельных луча света, лежащие в плоскости, проходящей через центр шара (рис. 10). Расстояние между лучами  $a = 1$  см. Известно, что при отражении от поверхности шара один из лучей отклоняется от первоначального направления на угол  $\alpha = 90^\circ$ , а другой – на угол  $\beta = 60^\circ$ . Найдите радиус шара  $R$ .

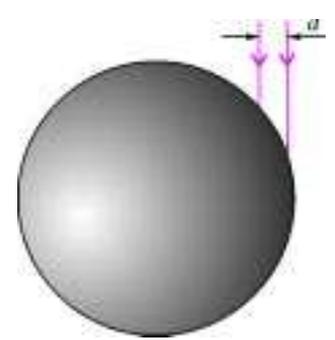


Рис. 10

14. В толще стекла с показателем преломления  $n = 1,5$  имеется сферическая полость, заполненная воздухом (рис. 11). Луч света, распространяющийся в стекле, падает на полость на малом расстоянии  $a$  от оси  $OO'$ , проходящей через центр полости параллельно лучу. На каком расстоянии  $b$  от этой оси находится точка выхода луча из полости? Углы падения и преломления считать малыми.

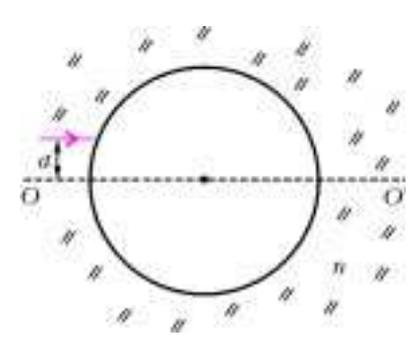


Рис. 11

15. Плоскопараллельная пластинка толщиной  $d = 1$  мм изготовлена из прозрачной пластмассы с показателем преломления  $n = 1,5$ . Изгибая пластинку, ей придают форму, изображенную на рисунке 12, где показано поперечное сечение пластинки. Перпендикулярно торцу пластинки на него падает в плоскости рисунка параллельный пучок света. Определите минимально допустимый радиус кривизны  $R_{\min}$  изгиба пластинки, при котором свет не будет выходить из пластинки через ее боковую поверхность. Радиус кривизны определяется по внешней (по отношению к направлению изгиба) поверхности пластинки.

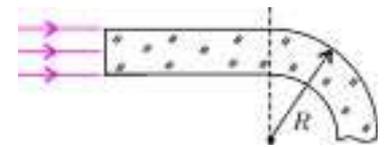


Рис. 12

16. Две параллельные друг другу металлические пластины, расстояние между которыми  $d = 1$  см много меньше их размеров, подключены к источнику с напряжением  $U = 12,5$  В (рис. 13). Сначала положительно заряженную пластину облучают светом частотой  $\nu_1 = 7 \cdot 10^{14}$  Гц, а затем – светом частотой  $\nu_2 = 4 \cdot 10^{14}$  Гц. На какую величину  $\Delta l$

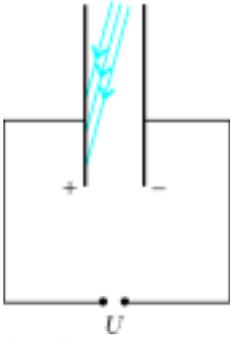


Рис. 13

изменяется минимальное расстояние, на которое фотоэлектроны могут приблизиться к поверхности отрицательно заряженной пластины, при изменении частоты света от  $\nu_1$  до  $\nu_2$ ? Частота света, соответствующая красной границе фотоэффекта, меньше частоты  $\nu_2$ . Элементарный заряд  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, постоянная Планка  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.

## Химический факультет

## Письменный экзамен

## Вариант 1

1. Сформулируйте закон электролиза Фарадея.
2. Что такое «инерциальная система отсчета»?

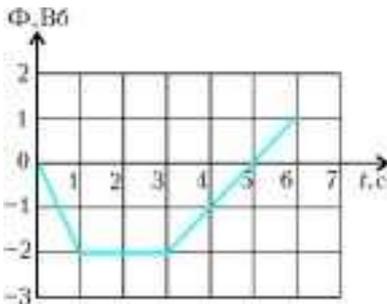


Рис. 14

3. Магнитный поток, пронизывающий проводящий контур, изменяется со временем так, как показано на рисунке 14. В каком промежутке времени сила тока в контуре максимальна?

4. Постройте изображение светящейся точки S в тонкой рассеивающей линзе (рис. 15).

5. Во сколько раз изменилось бы (увеличилось или уменьшилось) давление идеального газа в данном объеме, если бы скорость каждой молекулы газа увеличилась в 2 раза?

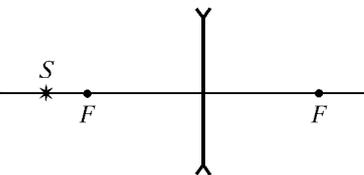


Рис. 15

6. Брусок массой  $m = 2$  кг скользит по горизонтальной

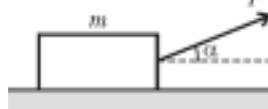


Рис. 16

поверхности под действием силы  $F = 10$  Н, направленной под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту (рис. 16). Найдите ускорение бруска. Коэффициент трения  $\mu = 0,2$ . Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

7. Найдите период обращения электронов в атоме гелия, считая, что два электрона движутся равномерно по окружности вокруг неподвижного ядра, находясь при этом на противоположных концах одного диаметра. Радиус окружности принять равным  $R$ . Заряд электрона  $e$ , его масса  $m$ .

8. Деревянный куб с ребром  $a = 0,1$  м плавает так, что на две трети своего объема погружен в воду. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы полностью погрузить куб в воду? Плотность воды  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

9. В процессе расширения объем идеального газа увеличивается от  $V_1 = 2$  л до  $V_2 = 3$  л, а давление линейно убывает от  $p_1 = 600$  кПа до  $p_2 = 400$  кПа. При этом газ получает от нагревателя количество теплоты  $Q = 1$  кДж. Найдите изменение внутренней энергии газа.

10. Конденсатор емкости  $C = 3$  мкФ подсоединен к источнику постоянного тока с ЭДС  $\mathcal{E} = 100$  В. Затем переключатель  $\Pi$  переводится с контакта 1 на контакт 2 (рис. 17). Найдите количество теплоты, выделившееся в резисторе сопротивлением  $R_1 = 200$  Ом в процессе полной разрядки конденсатора. Сопротивление  $R_2 = 100$  Ом. Сопротивлением проводов пренебречь.

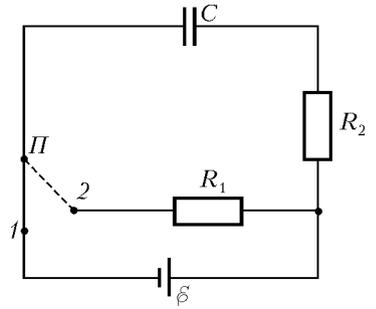


Рис. 17

## Вариант 2

1. Сформулируйте третий закон Ньютона.
2. Дайте определение понятия «магнитный поток».
3. Сила тока, протекающего через резистор, имеющий сопротивление  $R = 10$  Ом, меняется по гармоническому закону, представленному на рисунке 18. Какое количество теплоты выделяется в резисторе за один период изменений тока в этом случае?

4. Плоский конденсатор подключен к полюсам батареи с постоянной ЭДС. Во сколько раз изменится (увеличится или уменьшится) энергия

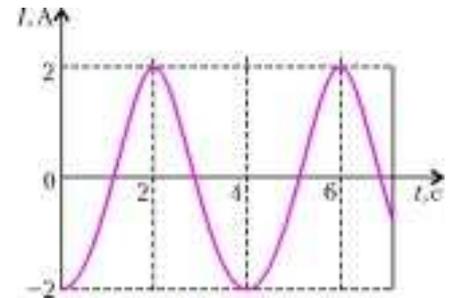


Рис. 18

электрического поля внутри конденсатора, если расстояние между обкладками конденсатора увеличить в 2 раза?

5. Состояние некоторого количества идеального газа изменилось в соответствии с VT-диаграммой, представленной на рисунке 19. Изобразите этот же процесс на pV-диаграмме.

6. Катод фотоэлемента облучается монохроматическим желтым светом с длиной волны  $\lambda = 600$  нм. За некоторое время фотоэлемент поглотил энергию  $W = 10^{-5}$  Дж. Найдите число поглощенных при этом фотонов. Постоянная Планка  $h \approx 6,6 \times 10^{-34}$  Дж·с. Скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

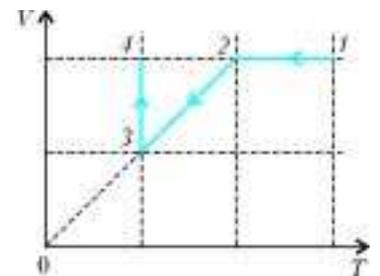


Рис. 19

7. Шарик падает с высоты  $H = 10$  м без начальной скорости. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите среднюю скорость тела на второй половине пути. Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

8. Какое максимальное количество воды, взятой при температуре  $t_1 = 35^\circ\text{C}$ , может быть охлаждено до температуры  $t = 10^\circ\text{C}$ , если охлаждение производить погружением  $m = 20$  г льда, охлажденного до  $t_2 = -20^\circ\text{C}$ ? Потери тепла не учитывать. Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$  Дж/кг, удельная теплоемкость воды  $c_1 = 4200$  Дж/(кг·К), удельная теплоемкость льда  $c_2 = 2100$  Дж/(кг·К).

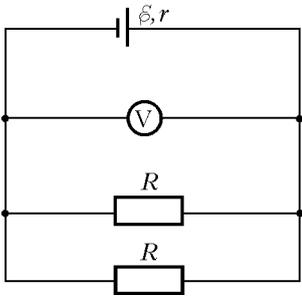


Рис. 20

9. Предмет помещен перед рассеивающей линзой перпендикулярно главной оптической оси линзы на расстоянии, равном двойному фокусному расстоянию. Определите увеличение, даваемое линзой.

10. Два одинаковых резистора сопротивлением  $R = 8$  Ом каждый соединены параллельно и подключены к аккумуляторной батарее (рис.20). При

этом вольтметр, подключенный к полюсам источника, показывает напряжение  $U_1 = 12$  В. Если один из резисторов отключить, то вольтметр покажет  $U_2 = 16$  В. Определите внутреннее сопротивление батареи. Вольтметр считать идеальным.

Публикацию подготовили В.Бенинг, П.Бородин, В.Воронин, Е.Григорьев, Д.Денисов, А.Зотеев, И.Ионовенков, Н.Лёвшин, И.Ломов, Г.Медведев, А.Павлюков, В.Панферов, В.Погожев, М.Потапов, А.Разгулин, И.Сергеев, А.Склянкин, В.Ушаков, М.Федотов, Е.Хайлов, С.Чесноков, О.Шалыгина, Б.Щедрин

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2004 г.)

1. Пронумеруем монеты от начала ряда к концу. Разделим их на 5 кучек следующим образом:



Первым взвешиванием сравним вес второй и четвертой кучек (монет 4 и 8).

1. Если весы оказались в равновесии, то взвешиваемые монеты – настоящие, и фальшивые монеты находятся всей тройкой в какой-то из оставшихся кучек. Поэтому вторым взвешиванием сравним вес первой и третьей кучек.

а) Если вес первой и третьей кучек одинаков, то фальшивые монеты – в пятой кучке (9, 10 и 11).

б) Если вес первой и третьей кучек не одинаков, то фальшивые монеты – в более тяжелой кучке.

2. Если весы при первом взвешивании не оказались в равновесии, то более тяжелая монета (единственная в кучке) – фальшивая. Рассмотрим случай, когда это монета 4 (случай, когда фальшивая монета 8, рассматривается аналогично). Тогда про монеты с номером 1 и с номерами с 7 по 11 можно утверждать, что они настоящие. Поэтому вторым взвешиванием сравним вес монет 2 и 6.

а) Если их вес одинаков, то они настоящие, и фальшивые монеты 3, 4 и 5.

б) Если монета 2 оказалась тяжелее, то фальшивые монеты 2, 3 и 4.

в) Если монета 2 оказалась легче, то фальшивые монеты 4, 5 и 6.

Таким образом, двух взвешиваний достаточно, чтобы найти все фальшивые монеты, а одного, очевидно, недостаточно.

2. Исследуем остатки и недостатки, которые получаются при делении чисел вида  $2^k$  на 9, где  $k$  – произвольное натуральное число.

Числа  $2^1$  и  $2^2$  имеют, соответственно, остатки 2 и 4, а число  $2^3$  имеет недостаток (-1), поскольку  $2^3 = 9 - 1$ . Из последнего факта следует, что для произвольного натурального  $n$

$$2^{3n} = (2^3)^n = (9 - 1)^n = 9A + (-1)^n,$$

где  $A$  – некоторое целое число.

Отсюда также следуют равенства

$$2^{3n+1} = 2 \cdot 9A + 2 \cdot (-1)^n, \quad 2^{3n+2} = 4 \cdot 9A + 4 \cdot (-1)^n.$$

Видно, что число  $2^k$  имеет недостаток (-1) при делении на 9

только в том случае, если  $k = 3n$ , где  $n$  нечетное. Но среди чисел такого вида только одно простое:  $k = 3$ .

Итак, число  $2^p + 1$  делится на 9 только при простом  $p = 3$ .

3. Проведя прямую, отмечаем на ней с помощью циркуля точки  $A$  и  $B$  (рис.1). В середине отрезка  $AB$  (точке  $O$ ) восстанавливаем перпендикуляр  $MN$ , при этом мы пользуемся циркулем с постоянным раствором, так что  $AM = MB = AB$ .

На продолжении перпендикуляра берем точку  $C$ , соединяем ее с точками  $A$  и  $B$  и проводим биссектрису угла  $CAB$ .

Точка  $D$  пересечения этой биссектрисы с прямой  $BC$ , а также точки  $A$  и  $B$  являются вершинами искомого треугольника. Действительно, поскольку  $\triangle CAB$  равнобедренный, то  $\angle CAB = \angle CBA$ . По свойству биссектрисы,  $\angle DAB = \frac{1}{2} \angle CAB = \frac{1}{2} \angle CBA$ .

Поскольку  $90^\circ > \angle CBO > \angle MBO = 60^\circ$ , то в  $\triangle ADB$  углы  $A$  и  $B$  острые. Острым является также и угол  $D$ :

$$\angle D = 180^\circ - (\angle A + \angle B) < 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ.$$

4. Воспользуемся тождеством

$$(u^2 + v^2)(x^2 + y^2) = (ux - vy)^2 + (vx + uy)^2.$$

С учетом условия задачи отсюда получаем

$$(u^2 + v^2)(x^2 + y^2) = 8. \quad (*)$$

Возможны лишь следующие варианты:

а) один из множителей в левой части (\*) 1, а другой 8;

б) один из множителей в левой части (\*) 2, а другой 4.

Несложно убедиться, что в каждом из этих вариантов одна из переменных  $x, y, u, v$  равна нулю.

Рассмотрим случай  $u = 0$ . Тогда из (\*) следует

$$\begin{cases} v^2 = 4, \\ x^2 = y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} v^2 = 1, \\ x^2 = y^2 = 4, \end{cases}$$

а исходные уравнения задачи запишутся так:

$$\begin{cases} vy = -2, \\ vx = 2. \end{cases}$$

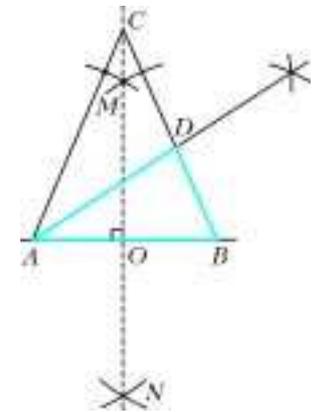


Рис. 1

Отсюда получаем возможные решения  $(x, y, u, v)$ :

$$(1, -1, 0, 2), (-1, 1, 0, -2), (2, -2, 0, 1), (-2, 2, 0, -1).$$

Для случая  $v = 0$  аналогично получаем

$$(1, 1, 2, 0), (-1, -1, -2, 0), (2, 2, 1, 0), (-2, -2, -1, 0).$$

Еще 8 решений найдем заметив, что исходные уравнения не изменятся, если поменять местами переменные  $u$  и  $x$ , а также переменные  $v$  и  $y$ . Соответственно получаем

$$(0, 2, 1, -1), (0, -2, -1, 1), (0, 1, 2, -2), (0, -1, -2, 2),$$

$$(2, 0, 1, 1), (-2, 0, -1, -1), (1, 0, 2, 2), (-1, 0, -2, -2).$$

Итак, задача имеет 16 решений.

5. а) *Ответ:*  $3n + \lfloor n/2 \rfloor$ .

Докажем сначала, что меньшего числа ходов точно будет недостаточно. Очевидно, что в какой-то момент перекладки первый стержень будет пуст. То же верно и для второго стержня. Пусть для определенности вначале опустошается первый. К этому моменту красные кольца сделали не менее  $n$  ходов. Но ни одно из этих колец в этот момент не находится на том месте, после которого оно уже не будет менять свое положение, ведь третий стержень в конце должен оказаться пустым, а из второго еще не ушло самое нижнее кольцо. Следовательно, красные сделают еще не менее  $n$  ходов.

Посмотрим, сколько ходов наверняка сделают синие кольца. Во-первых, для опустошения второго стержня они сходят не менее  $n$  раз, во-вторых, так как  $\lfloor n/2 \rfloor$  из них должны вернуться на этот стержень, то синие кольца сходят еще  $\lfloor n/2 \rfloor$  раз.

Итак, в процессе перекладки будет сделано не менее  $n + n + \lfloor n/2 \rfloor = 3n + \lfloor n/2 \rfloor$  ходов.

Покажем теперь, как уложиться в это число ходов. Обозначим через  $\langle x \rangle$  наименьшее целое число, большее или равное  $x$ . Перекладывание одного кольца с  $i$ -го стержня на  $j$ -й обозначим через  $(i, j)$ , тогда  $k(i, j)$  будет означать, что операция  $(i, j)$  повторяется  $k$  раз.

Пару операций  $(1, 3)$   $(2, 3)$  повторяем  $\lfloor n/2 \rfloor$  раз. В случае нечетного  $n$  делаем еще один раз перекладку  $(1, 3)$ . Пока красные кольца сходили  $\langle n/2 \rangle$  раз, а синие  $\lfloor n/2 \rfloor$  раз. На первом стержне находятся  $\lfloor n/2 \rfloor$  красных колец, на втором  $\langle n/2 \rangle$  синих, на третьем располагаются  $n$  колец. Их цвета чередуются, причем чередование начинается с красного (считая снизу). Всего сделано  $n$  ходов.

Далее случаи четного и нечетного  $n$  немного отличаются. Разберем их отдельно.

Пусть  $n$  четно. Перекладываем все кольца со второго стержня на третий. Это  $n/2$  ходов. Теперь будем брать кольца поочередно то с первого стержня, то с третьего и класть их на второй до тех пор, пока на нем не станет  $n$  колец. Это займет еще  $n$  ходов. После этого первый стержень пуст, второй заполнен нужным нам образом, а на третьем кольца чередуются, причем чередование начинается с красного и заканчивается синим кольцом. Делаем  $(3, 1)$   $n$  раз – вот и все. Общее количество ходов:  $n + n/2 + n + n = 3n + \lfloor n/2 \rfloor$ .

Пусть  $n$  нечетно. Перекладываем все кольца с первого стержня на третий. Это  $\lfloor n/2 \rfloor$  ходов. Теперь будем брать кольца поочередно то со второго стержня, то с третьего и класть их на первый до тех пор, пока на нем не станет  $n$  колец. Это еще  $n$  ходов. После этого первый стержень заполнен нужным нам образом, второй пуст, а на третьем кольца чередуются, причем чередование начинается и заканчивается красным кольцом. Делаем  $(3, 2)$   $n$  раз – готово! Сделано как раз  $3n + \lfloor n/2 \rfloor$  ходов.

б) *Ответ:* для любого  $n$ .

Предъявим такой алгоритм перекладки, при котором на любом стержне в любой момент будет располагаться не более  $n$

колец. Вот этот алгоритм:

$$\begin{array}{ccc} n(2,3) & n(1,2) & n(3,1) \\ (n-1)(2,3) & (n-1)(1,2) & (n-1)(3,1) \\ & \dots & \\ 2(2,3) & 2(1,2) & 2(3,1) \\ (2,3) & (1,2) & (3,1) \end{array}$$

Этот метод позволяет достичь результата за  $3n(n+1)/2$  ходов.

Известен, однако, способ прийти к цели за  $4n + \lfloor n/2 \rfloor$  ходов.

Он проиллюстрирован на рисунке 2 для  $n = 4$ . Эксперимент

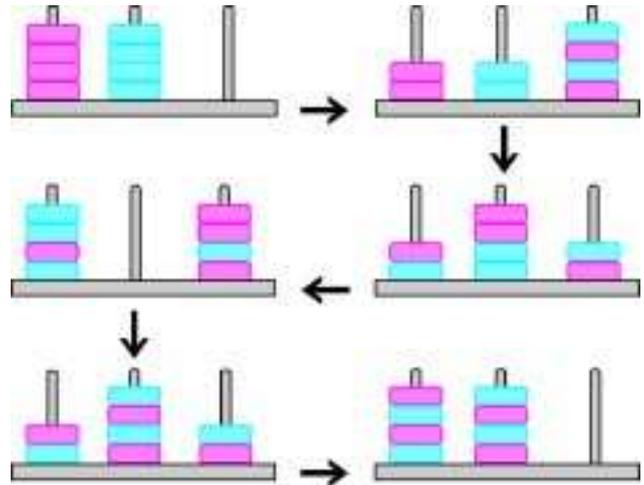


Рис. 2

показывает, что и это не самый кратчайший путь. Какое наименьшее число ходов требуется осуществить в общем случае – неизвестно.

## ПОЧЕМУ НЕТ РЕШЕНИЙ?

- 1. Указание.** Последняя цифра суммы чисел, стоящих в левой части равенства, должна делиться на 5.
- 2.** Если делимое и делитель состоят из одинакового количества цифр, причем в старшем разряде у них стоят одинаковые цифры, то целочисленным частным может быть только 1. Но числа АЛГЕБРА и АПОФЕМА не равны друг другу.
- 3. Указание.** Цифра Д в слове КОРД равна ненулевой последней цифре числа 8 · К. Но тогда число ДРОК · 8 должно быть пятизначным.
- 4. Указание.** Сумму чисел в левой части ребуса запишите в виде  $100 \cdot (ВО + КО + МО + СО) + 4 \cdot ДА$ , из которого следует, что она делится на 4. Число же 18014 на 4 не делится.
- 5. а) Указание.** Поскольку  $КИТ \geq 102$ ,  $ТИК \geq 102$ , то  $КИТ + ТИК \geq 204$ .
- б) Указание.** Поскольку  $КОЛОДКА \leq 9878695$ ,  $ЛОДКА \leq 98765$ , то  $КОЛОДКА + ЛОДКА \leq 9977460$ .
- 6. а)** Запишем исходное равенство в виде  $30 \cdot ДО + (К + Л + М) = 30 \cdot 40$ , откуда  $К + Л + М = 30 \cdot (40 - ДО)$ . Последнее невозможно.
- б)** Цифра В может быть равной только 1, но равенство  $ОДА \cdot 2 = 1000$  невозможно.
- 7. а)** Нет.
- б) Указание.**  
 $КАТАР - КАРАТ = ТАР - РАТ =$   
 $= 100 \cdot Т + 10 \cdot А + Р - (100 \cdot Р + 10 \cdot А + Т) = 99 \cdot (Т - Р).$
- 8. а)** Нет.
- б) Указание.** Проверьте, может ли быть  $М < 9$ , а  $Г > 1$ .

**КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»**

*Вопросы и задачи*

1. Если токи равны, то вектор магнитной индукции равен нулю; если  $I_1 > I_2$ , то вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости рисунка и направлен от читателя; если  $I_1 < I_2$ , то его направление – противоположное.
2. В первом случае, в силу симметрии, магнитная индукция равна нулю; во втором случае вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости рисунка и направлен к читателю.
3. Для любого ребра куба можно найти в соответствующей диагональной плоскости другое параллельное ему ребро, в котором течет такой же по направлению и силе ток. Эти токи создают в центре куба равные и противоположно направленные магнитные поля, поэтому результирующая индукция магнитного поля будет равна нулю.
4. Поскольку в общем центре проводников векторы магнитной индукции, создаваемые токами по отдельности, равны по модулю и взаимно перпендикулярны, то величина каждого из них равна  $B/\sqrt{2}$ .
5. Ток в бесконечном прямом проводе не вносит вклада в магнитное поле в точке  $O$ , лежащей на оси провода. Ток, текущий по полуокружности, создает поле в два раза меньшей величины, чем круговой ток, т.е.  $B/2$ .
6. Провод примет форму окружности.
7. В обоих случаях витки соленоида будут притягиваться друг к другу.
8. Провода будут разворачиваться так, чтобы токи были направлены в одну сторону, и притягиваться друг к другу.
9. Тороидальная катушка создает в своем центре такое же по виду поле, как и один виток с током. Поэтому магнитная стрелка развернется перпендикулярно плоскости тороида.
10. Получаются расположенные рядом две обмотки, токи в которых противоположны, и магнитные поля этих токов взаимно уничтожаются.
11. Токи, текущие по трубке, параллельны и притягиваются друг к другу.
12. В случае а) рамка развернется перпендикулярно плоскости рисунка; в случаях б) и в) рамка развернется таким же образом и при этом втянется в область более сильного поля.
13. Кольцо соскочит с магнита, развернется на  $180^\circ$  и снова наденется на него другой стороной.
14. Чтобы амперовы силы могли удерживать кольцо, ток по его ближайшей к читателю стороне должен течь справа налево (или по часовой стрелке, если смотреть сверху).
15. Последовательно с магнитом можно включить реостат или сделать выдвигной сердечник.
16. Да, можно. Для этого нужно сделать большое число витков из тонкой проволоки.

**Микроопыт**

В обоих случаях по параллельным друг другу проводам или рельсам текут постоянные и противоположно направленные токи, поэтому они отталкиваются.

**КАК ПОСТРОИТЬ ПАРАДОКСАЛЬНЫЙ ПРИМЕР**

1.  $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = x_8 =$   
 $x_9 = x_{11} = x_{12} = x_{13} = x_{15} = x_{16} = 2a + 3b,$   
 $x_3 = x_7 = x_{10} = x_{14} = -5a - 8b.$
2. Рассмотрим первую систему (вторая рассматривается аналогично). Если  $\alpha \neq \beta$ , где  $\alpha = 1 - \frac{n}{a}$ ,  $\beta = 1 - \frac{k}{b}$ , то она эквивалентна двойному неравенству  $\beta x > y > \alpha x$ . Если  $\beta > \alpha$ , то это условие выполняется при всех положительных  $x$  и неко-

торых  $y$ ; если же  $\beta < \alpha$ , то оно выполняется при всех отрицательных  $x$  и некоторых  $y$ . Покажем, что случай  $\alpha = \beta$  невозможен. Предположим противное, тогда  $\frac{n}{k} = \frac{a}{b}$ . В случае взаимно простых  $n$  и  $k$ ,  $a < n$ ,  $b < k$  последнее равенство невозможно. Рассмотрим случай, когда числа  $n$  и  $k$  не взаимно просты. Пусть  $n = a + a_1$ ,  $k = b + b_1$ . Тогда  $\frac{n}{k} = \frac{a + a_1}{b + b_1} = \frac{a}{b}$ , откуда  $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{n}{k}$ . Поскольку число  $n$  делится на  $a$ , то  $n \geq 2a$ , или  $a + a_1 \geq 2a$ , откуда  $a_1 \geq a$ . Поскольку число  $n$  делится на  $a_1$ , то  $n \geq 2a_1$ , или  $a + a_1 \geq 2a_1$ , откуда  $a \geq a_1$ . Значит,  $a = a_1$ . Аналогично доказывается, что  $b = b_1$ . Тогда исходная система неравенств запишется так:

$$\begin{cases} y + x > 0, \\ y + x < 0, \end{cases}$$

что невозможно.

3. Числа  $n$  и  $k$  не могут быть взаимно простыми, в противном случае выполнялось бы равенство (см. задачу 3 в тексте статьи)  $23 = 10 + k - 2$ , откуда  $k = 15$ , но тогда числа  $n$  и  $k$  не взаимно просты. Пусть  $d > 1$  – наибольший общий делитель (НОД) чисел  $n$  и  $k$ . Тогда  $23 = 10 + k - d - 1$ ,  $k - d = 14$ . Имеем:  $d =$   
 $= \text{НОД}(10, k - d) = \text{НОД}(10, 14) = 2$ . Значит,  $23 = 10 + k - 2 - 1$ ,  $k = 16$ .

С помощью изложенного в статье алгоритма строим последовательность

$$x, x, x, y, x, x, x, x, y, x, x, x, y, x, x, x, x, y, x, x, x.$$

Составим соответствующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 13x + 3y > 0, \\ 2y + 8x < 0. \end{cases}$$

Для построения последовательности можно взять, например,  $x = 7$  и  $y = -29$ .

4. Поскольку  $n + k - d - 1 = 30$ , то  $n + k = 31 + d$ . Наибольший общий делитель  $d$  не может быть больше 1, в противном случае 31 должно делиться на  $d$ , и тогда  $d = 31$ ,  $n = k$ , чего не может быть. Если  $d = 1$ , то  $n + k = 32$ . Тогда с помощью перебора получим:  $\max |k - n| = 29 - 3 = 26$ .
5. Такое может быть только в том случае, если функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[0; 23]$ .
6. Такие функции существуют. Например,

$$f(x) = \begin{cases} -6, & 0 \leq x < 1, \\ 180x - 186, & 1 \leq x < 1,1, \\ 12, & 1,1 \leq x < 1,9, \\ -180x + 354, & 1,9 \leq x < 2, \\ -6, & 2 \leq x < 3, \\ -6, & 3 \leq x < 4, \\ 180x - 726, & 4 \leq x < 4,1, \\ 12, & 4,1 \leq x < 4,9, \\ -180x + 894, & 4,9 \leq x < 5, \\ -6, & 5 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

**СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ**

1. Относительная скорость равна  $v/2$  и сонаправлена со скоростью тепловоза.
2. 1)  $v_1 \approx 50$  км/ч; 2)  $v_2 = 29$  км/ч.
3. 1)  $v_{\text{ш}} = v\sqrt{14}$ ; 2)  $\mu_{\text{max}} = \frac{\sqrt{70} v^2}{2 gd}$ .

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ.М.В.ЛОМОНОСОВА**

Математика

Вариант 1

1.  $\frac{1}{2}$ .
2.  $[\sqrt{2} - 1; 1) \cup (1; +\infty)$ .
3.  $-\frac{21}{5}$ ;  $-\frac{11}{4}$ . *Указание.* Чтобы числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  образовывали убывающую арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы ее разность  $d = a_2 - a_1$  и натуральное  $n$  удовлетворяли системе  $d < 0$ ,  $a_n - a_1 = (n - 1)d$ , т.е.  $m^2 - 6m < 0, \dots, 6m - m^2 = 3n - 4$ . Откуда либо  $(m - 3)^2 = 1, n = 4$ , либо  $(m - 3)^2 = 4, n = 3$ .

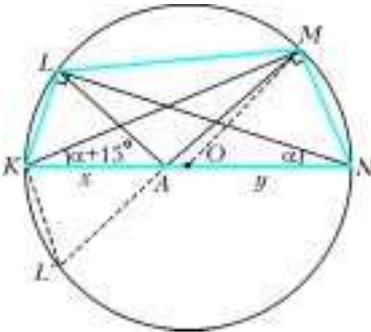


Рис. 3

4.  $\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1), 3(3 + \sqrt{3})$ . *Указание.* Точки  $L$  и  $M$  лежат на окружности с диаметром  $KN$  (рис.3). Пусть  $L'$  – точка, симметричная точке  $L$  относительно  $KN$ ,  $\angle KNL = \alpha$ . Тогда  $\angle MKN = \alpha + 15^\circ$ ,  $\angle LKN = \angle L'KN = 90^\circ - \alpha$ ,  $\angle L'KM = 105^\circ$ . По теореме синусов,  $L'M = L'A + AM = KN \cdot \sin \angle L'KM = \sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)$ , причем  $L'A = LA = \sqrt{6}$ ,  $AM = 3\sqrt{2}$ . Пусть  $KA = x$ ,  $AN = y$ . Имеем  $x + y = 4\sqrt{3}$ ,  $xy = L'A \cdot AM = 6\sqrt{3}$ . Из этой системы находим, что  $x = 3\sqrt{3} - 3$ ,  $y = 3 + \sqrt{3}$ ,  $AO = 3 - \sqrt{3}$ . Из треугольника  $AOM$  по теореме косинусов находим, что  $\cos \angle MAO = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\angle MAO = 45^\circ$ , откуда  $\angle LAM = 90^\circ$ . Осталось заметить, что  $S_{KLMN} = S_{AKL} + S_{MAN} + S_{LAM}$ .

5.  $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$ . *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (3a - 1)\sin^2 x - (3a - 1)(a^2 + 1)\sin x = 0, \\ |ax - a\pi| < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Если  $a = 0$  или  $a = \frac{1}{3}$ , система имеет бесконечно много решений. При  $a \neq 0, a \neq \frac{1}{3}$  получаем систему

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ |x - \pi| < \frac{\pi}{2|a|}, \end{cases}$$

имеющую ровно три решения тогда и только тогда, когда  $1 < \frac{1}{2|a|} \leq 2$ .

6.  $\frac{35}{24}$ . *Указание.* Рассмотрим сечение сферы плоскостью  $B_1B_2C_1C_2$  (рис.4). Пусть  $M$  – вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников  $AB_1B_2$  и  $EC_2B_2$ . Из цепочки

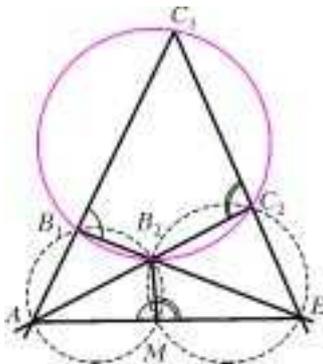


Рис. 4

равенств

$$\begin{aligned} \angle AMB_2 &= 180^\circ - \angle AB_1B_2 = \\ &= \angle C_1B_1B_2 = 180^\circ - \angle C_1C_2B_2 = \angle EC_2B_2 = 180^\circ - \angle EMB_2 \end{aligned}$$

следует, что точка  $M$  лежит на отрезке  $AE$ . По теореме о равенстве произведений отрезков секущих,

$$\begin{aligned} AM \cdot AE &= AB_2 \cdot AC_2 = (AO - r)(AO + r) = AO^2 - r^2 = 3 \\ &= EO^2 - r^2 = 8. \end{aligned}$$

Отсюда  $AE^2 = AE(AM + EM) = 11$ . Аналогично получаем  $AF^2 = 11$ .

Грани  $AOE$  и  $AOF$  равны по трем сторонам и имеют площадь  $S = \frac{\sqrt{140}}{4}$ . Осталось найти высоту грани  $OEA$ , а затем высоту пирамиды и ее объем.

**Вариант 2**

1.  $(0; 1) \cup (1; 2)$ .
2.  $(-\infty; -2 - \sqrt{3}] \cup (-0, 3; -2 + \sqrt{3}) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$ .
3. 13. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что высота пирамиды  $MABCD$  равна среднему арифметическому высот пирамид  $EABLK$  и  $FCDKL$ .
4.  $\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$ . *Указание.*

Заменой  $y = \sin x - \cos x$  приведите уравнение к виду

$$\sqrt{3(y^2 - 1)} = 2(y^2 - 1) - (y + 1).$$

5. 16 км. Изобразим графики движения автомобилиста  $AEFGH$  (рис.5), велосипедиста  $BEJH$  и мотоциклиста  $BIF$ . Так как  $\triangle ABF \sim \triangle EIF, \triangle BEI \sim \triangle BIF$  и  $\triangle FHJ \sim \triangle CHB$ , то, обозначив  $KL = x$ , соответственно получаем

$$AL = x \cdot \frac{24}{6} = 4x = LM, FJ = 6 \cdot \frac{4x}{3x} = 8 \text{ и } BC = 8 \cdot \frac{8x}{4x} = 16.$$

6.  $\frac{2\sqrt{3} + 1}{\sqrt{15}}$ . Медианы  $AM$  и  $BL$  делятся точкой  $O$  в отно-

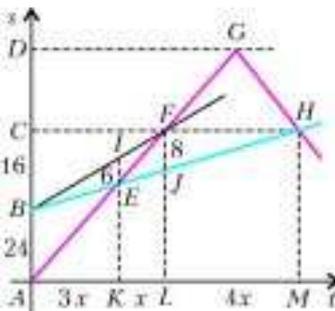


Рис. 5

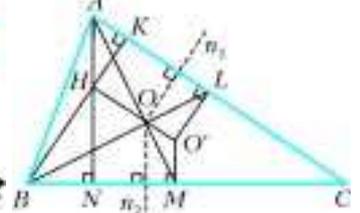


Рис. 6

шении 2:1, поэтому проекции этих медиан – отрезки  $KL$  и  $NM$  (рис.6) – делятся проекциями точки  $O$  в таком же отношении. Другими словами,  $O$  – точка пересечения прямых  $n_1$  и  $n_2$ , перпендикулярных отрезкам  $KL$  и  $NM$  соответственно и делящих эти отрезки в отношении 2:1, считая от точек  $K$  и  $N$  соответственно. Но таким же свойством обладает точка, лежащая на отрезке  $HO'$  (где  $O'$  – центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ) и делящая его в отношении 2:1, считая от точки  $H$ . Следовательно, точка  $O$  лежит на отрезке  $HO'$  и  $HO : OO' = 2 : 1$ .

Биссектриса угла  $A$  пересека-

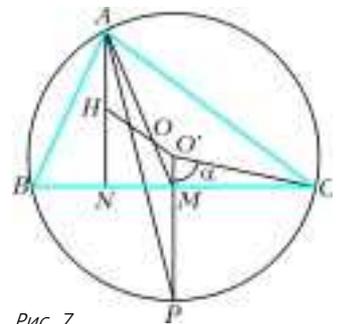


Рис. 7

ет описанную окружность в такой точке  $P$ , что дуги  $BP$  и  $PC$  равны (по теореме о вписанном угле, см. рис.7), т.е. радиус  $O'P$  проходит через середину  $M$  стороны  $BC$ . Из подобия треугольников получаем  $O'P : AH = 2 : 1$ ,  $AH : O'M = 2 : 1 \Rightarrow O'P : O'M = 4$ . Треугольник  $ABC$  остроугольный по условию, поэтому точка  $O'$  лежит внутри треугольника, а точка  $M$  – на радиусе  $O'P = R$ . Положим  $\angle MO'C = \angle BAC = \alpha$ , тогда

$$O'M = O'C \cdot \cos \alpha = R \cos \alpha,$$

откуда

$$4 = \frac{O'P}{O'M} = \frac{R}{R \cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4}.$$

Если  $\beta$  и  $\beta + 30^\circ$  – углы  $B$  и  $C$  треугольника, то

$$\frac{1}{4} = \cos \alpha = \cos(150^\circ - 2\beta).$$

Окончательно получаем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot \left( \frac{BC}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta \right) \cdot \sin(\beta + 30^\circ) = \frac{2\sqrt{3} + 1}{\sqrt{15}}.$$

Вариант 3

1. 2, 4, 8, 16.

2.  $\{2; 3\}$ . *Указание.* Замена:  $t = x^2 - 5x + 7 > 0$ .

3.  $-15$ . *Указание.* Поскольку квадратный корень из натурального числа может быть либо целым числом, либо иррациональным, то при целых  $n$  число  $11 - 8\sqrt{1 - 8n}$  является или целым, или иррациональным, а число  $\frac{5n^2 + 4n + 13}{n + 1}$  рациональное, т.е. должно быть целым. Поскольку

$$\frac{5n^2 + 4n + 13}{n + 1} = 5n - 1 + \frac{14}{n + 1},$$

число  $n + 1$  – делитель числа 14, причем  $1 - 8n \geq 0$ , откуда  $n \leq 0$ .

Таким образом, число  $n + 1$  может принимать одно из следующих значений:  $\pm 1; -2; -7; -14$ . Остается непосредственной проверкой убедиться, что только  $n = -15$  удовлетворяет уравнению.

4.  $\left\{4; \frac{1}{4}\right\}$ . *Указание.* После замены  $y = \log_2 x$ ,  $t =$

$$= \cos \frac{\pi(47 - 8x)}{45}, |t| \leq 1, \text{ исходное неравенство принимает вид}$$

$$9y^2 + 4(8t^2 - 8t - 7)y + 36 \leq 0,$$

причем дискриминант  $D$  этого квадратного относительно  $y$  трехчлена

$$\frac{D}{4} = 64(t + 1)(t - 2)(2t - 1)^2 \leq 0$$

при  $|t| \leq 1$ .

Итак, решения данного неравенства получаются из системы

$$\begin{cases} D = 0, \\ y = -\frac{2}{9}(8t^2 - 8t - 7). \end{cases}$$

5.  $\frac{1}{4}$  или  $\frac{5}{4}$  (существуют два различных треугольника  $AB_1C_1$ ).

Пусть  $O$  – точка пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$ . Так как по условию задачи  $AC : BD = 2 : \sqrt{3}$ , а диагонали параллелограмма точкой  $O$  делятся пополам, положим  $AO = CO = 2a$  и  $BO = DO = \sqrt{3}a$ . Тогда площадь параллелограмма  $ABCD$  равна

$$S_{ABCD} = 2\sqrt{3}a^2.$$

Возможны два случая.

1 случай (рис.8). Угол  $AOB$  равен  $30^\circ$ . По теореме косинусов из треугольника  $AOB$ ,  $AB = a$ . Поскольку справедливо равенство

$AO^2 = AB^2 + BO^2$ , угол  $ABO$  прямой, угол  $OAB$  равен  $60^\circ$ . Так как точка  $B_1$  симметрична точке  $B$  относительно прямой  $AC$ , то  $AB_1 = a$  и  $\angle CAB_1 = 60^\circ$ .

Из равенства треугольников  $ABO$  и  $CDO$  следует, что угол  $CDO$  прямой и точка  $C_1$  лежит на прямой  $CD$ , а точка  $D$  является серединой отрезка  $CC_1$ .

В треугольнике  $ACC_1$  отрезок  $OD$  является средней линией. Значит,  $AC_1 = 2 \cdot OD = 2\sqrt{3}a$ , и  $\angle CAC_1 = \angle COD = 30^\circ$ . Угол  $B_1AC_1$  равен разности углов  $CAB_1$  и  $CAC_1$ , т.е. равен  $30^\circ$ .

Итак, площадь треугольника  $AB_1C_1$  равна  $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$ , а отношение площадей треугольника

$AB_1C_1$  и параллелограмма

$$ABCD \text{ равно } \frac{1}{4}.$$

2 случай (рис.9). Угол  $AOB$  равен  $150^\circ$ .

Рассуждая, как в первом случае, получите, что площадь  $\triangle AB_1C_1$  равна  $\frac{5\sqrt{3}a^2}{2}$ ,

а отношение площадей треугольника  $AB_1C_1$  и параллелограмма  $ABCD$  равно  $\frac{5}{4}$ .

6. При  $a \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$  решений нет;

при  $a \in \left(0; \frac{3 - \sqrt{3}}{4}\right)$  два решения:  $x = 1 \pm 2\sqrt{\frac{a}{1 - 2a}}$ ;

при  $a = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$  три решения:  $x = 2 + \sqrt{3}$  и  $x = 1 \pm \sqrt[4]{12}$ ;

при  $a \in \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{4}; \frac{1}{3}\right)$  четыре решения:

$$x = \frac{2(a - 1) \pm \sqrt{-8a^2 + 12a - 3}}{2a - 1}, x = 1 \pm 2\sqrt{\frac{a}{1 - 2a}}; \text{ при } a = \frac{1}{3}$$

три решения:  $x = -1, x = 3, x = 5$ ; при  $a \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$  два реше-

$$\text{ния: } x = 1 - 2\sqrt{\frac{a}{1 - 2a}}, x = \frac{2(a - 1) - \sqrt{-8a^2 + 12a - 3}}{2a - 1}.$$

*Указание.* Перепишем данное уравнение в виде  $f(u) = f(v)$ , где  $f(t) = t - \sin t$ :

$$u = |x - 3| + 6a - 4, v = (1 - 2a)x^2 - (3 - 4a)x.$$

Функция  $f(t)$  строго возрастает. В самом деле, для  $t_1 < t_2$  имеем

$$f(t_2) - f(t_1) = t_2 - t_1 - (\sin t_2 - \sin t_1) > 0,$$

так как

$$\sin t_2 - \sin t_1 = 2 \sin \frac{t_2 - t_1}{2} \cos \frac{t_2 + t_1}{2} \leq$$

$$\leq 2 \left| \sin \frac{t_2 - t_1}{2} \cos \frac{t_2 + t_1}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{t_2 - t_1}{2} \right| < 2 \left| \frac{t_2 - t_1}{2} \right| = t_2 - t_1$$

в силу неравенства  $|\sin \alpha| < |\alpha|$  при  $\alpha \neq 0$ .

Отсюда получаем

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v,$$

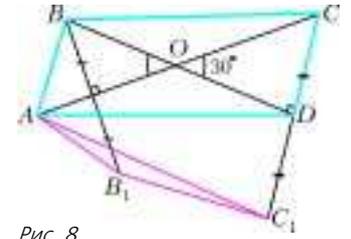


Рис. 8

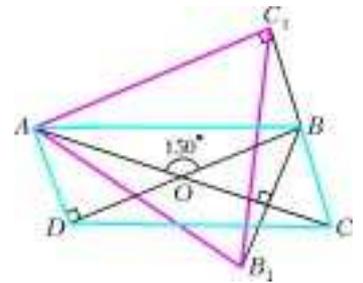


Рис. 9

т.е.

$$(2a - 1)x^2 - (4a - 3)x + |x - 3| + 6a - 4 = 0.$$

Итак, задача свелась к решению для всех значений параметра  $a$  этого уравнения.

Вариант 4

1.  $R$ . 2.  $(-3; -2] \cup \left[ \frac{3 - \sqrt{31}}{2}; \frac{\sqrt{23} - 1}{2} \right] \cup [2; 5)$ .

3.  $\frac{15\pi}{16} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ . Указание. Уравнение преобразуется к виду

$$\sin\left(3x - \frac{5\pi}{16}\right) - \sin 8x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(3x - \frac{5\pi}{16}\right) = 1, \\ \sin 8x = -1. \end{cases}$$

4. 65:144. Указание. Пусть  $E$  – точка, в которой окружность с центром  $N$  касается прямой  $BO$ ,  $D$  – точка пересечения

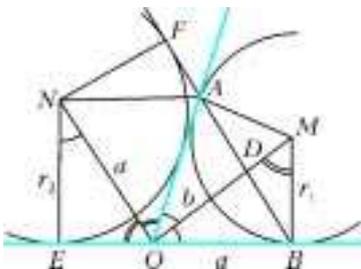


Рис. 10

прямых  $OM$  и  $AB$  (рис.10). Докажите, что треугольники  $OEN$  и  $BDO$  равны.

Тогда, если  $MB = r_1, NE = r_2, ON = a, OM = b$ , то в треугольнике  $OBD$  имеем  $OB = a, OD = r_2$ .

Из прямоугольного треугольника  $OBM$  получаем  $r_1 = \sqrt{b^2 - a^2}$ , а из подобия

треугольников  $OBD$  и  $OMB$  следует равенство

$$\frac{OB}{OM} = \frac{OD}{OB}, \text{ т.е. } \frac{a}{b} = \frac{r_2}{a}.$$

Отсюда искомое отношение равно

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}.$$

5. При  $a \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$  одно решение; при  $a = -\frac{5}{4}$  два решения; при  $a \in \left(-\frac{5}{4}; -1\right)$  три решения; при  $a \in [-1; 1 - \sqrt{2})$  два решения; при  $a = 1 - \sqrt{2}$  одно решение; при  $a \in (1 - \sqrt{2}; 5)$  два решения; при  $a \in [5; +\infty)$  одно решение.

Указание. Выполнив замену  $t = 2^{-x}, t > 0$ , получим

$$2t^4 - t^3 - (a + 8)t^2 + (4 - 2a)t - a^2 + 4a + 5 = 0.$$

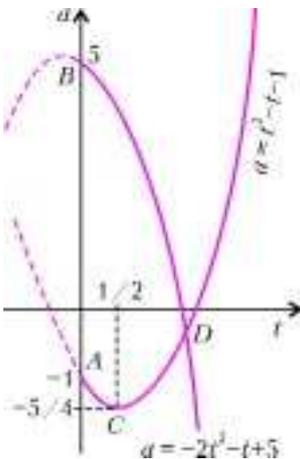


Рис. 11

Рассмотрим уравнение как квадратное относительно переменной  $a$ :

$$a^2 + (t^2 + 2t - 4)a - 2t^4 + t^3 + 8t^2 - 4t - 5 = 0.$$

Его дискриминант представляет собою полный квадрат:

$$D = 9(t^2 - 2)^2,$$

поэтому либо  $a = t^2 - t - 1$ , либо  $a = -2t^2 - t + 5$ . Для того чтобы получить ответ, достаточно изучить взаимное расположение графиков полученных квадратных трехчленов на плоскости  $(t; a)$  в области  $t > 0$  (рис.11). При этом нам ин-

тересны точки пересечения графиков с осью ординат

$A(0; -1), B(0; 5)$ , вершина первой параболы  $C\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$ , а

также общая точка парабол  $D(\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$ .

Поскольку зависимость между переменными  $x$  и  $t$ , задаваемая равенством  $t = 2^{-x}$ , взаимно однозначная, исходная задача при каждом значении  $a$  имеет столько решений, сколько общих точек с параболами в области  $t > 0$  имеет соответствующая прямая, параллельная оси абсцисс.

6. 1 : 2. Указание. Плоскость  $P$  пересекает плоскость основания  $ABCD$  по прямой  $KN$  (рис.12). Пусть  $BC = DK = a, AK = b$ . Так как  $AD > BC$ , прямая  $KN$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $E$ , лежащей на продолжении отрезка  $BC$  за точку  $C$ . Следовательно, точка  $M$  лежит между точками  $C$  и  $C_1$  (рис.13). Так как  $KN > DN$ ,

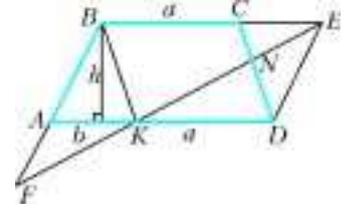


Рис. 12

то  $\angle NDK > \angle NKD$ . В равнобокой трапеции  $\angle BAD = \angle ADC$ , поэтому  $\angle BAK + \angle AKN > \pi$ . Следовательно, прямая  $KN$  пересекает прямую  $AB$  в некоторой точке  $F$ , лежащей на продолжении отрезка  $AB$  за точку  $A$ . Поэтому точка  $L$  лежит между точками  $A$  и  $A_1$ . Таким образом, плоскость  $P$  отсекает от призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  шестигранник  $ABCNKLB_1M$ , гранями которого являются два пятиугольника  $ABCNK$  и  $LB_1MNC$  с общим ребром  $KN$ , два прямоугольных треугольника  $ALK$  и  $CMN$ , две прямоугольные трапеции  $ABB_1L$  и  $CBB_1M$ .

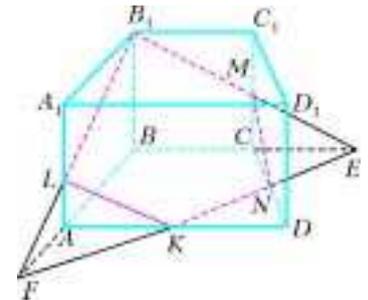


Рис. 13

Пусть высота трапеции  $ABCD$  равна  $h$ , а длина бокового ребра прямой призмы (т.е. ее высота) равна  $l$ . Выразите через  $a, b, h$  и  $l$  объемы призмы и многогранника  $ABCNKLB_1M$ , заметив, что этот многогранник получается из треугольной пирамиды  $B_1BEF$  «отрезанием» треугольных пирамид  $LAKF$  и  $MСEN$ . Затем запишите отношение объемов и получите после упрощений, что

$$35a^2 + ab - 36b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)(35a + 36b) = 0,$$

откуда  $a = b$ .

Вариант 5

1.  $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$ . 2.  $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(1; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ .

3.  $(-\sqrt{5}; -2) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; \sqrt{5})$ . 4. 6 : 11.

5.  $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right), \left(\frac{7}{2} - \log_2 3; \frac{1}{2} + \log_2 3\right)$ .

6. 35/2. Указание. Докажите, что большая окружность проходит через точки  $A$  и  $C$  (рис.14), причем  $\angle ABC = \frac{\alpha + \beta}{2}$ , где  $\alpha = \angle O_2O_1O_3$ ,

$\beta = \angle O_1O_2O_3$ , так что

$$O_3A = \frac{AC}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{7}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

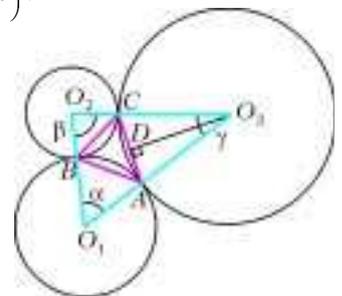


Рис. 14

7.  $x > 0$  при  $a = 0$ ,  $x = \frac{3a + \sqrt{9a^2 + 4}}{2}$  при  $a \neq 0$ . Указание. Уравнение равносильно такому:

$$\log_2^2(x - 3a) - \log_2^2 x = 0.$$

8.  $\arccos \frac{3}{\sqrt{13}} = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$ . Указание. Пусть искомым двугранный угол равен  $\varphi$ , тогда  $S_{\Delta KLM} \cos \varphi = S_{\Delta ABC}$ . Положив  $BC = 3a$ , вычислите площадь равнобедренного треугольника  $KLM$  ( $KL = LM$ ).

Вариант 6

1.  $\frac{\pi}{12}(2n+1)$ ,  $\frac{\pi}{2}(2n+1)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . 2.  $(-5; -1) \cup (3; 7)$ .  
 3.  $(-2; -1 + \sqrt{2})$ . 4.  $-3 + \sqrt{24}$ . 5.  $\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; \frac{-5 + \sqrt{13}}{4}\right)$ .

6. 96. Указание. Пусть  $DH$  – высота трапеции,  $A$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $B$  на  $DE$  (рис. 15).

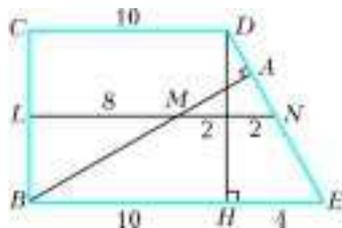


Рис. 15

Пользуясь подобием треугольников  $MAN$  и  $BAE$ , покажите, что

$$AN = \frac{2}{7}AE, \quad AE = \frac{7}{10}DE.$$

Из подобия треугольников  $DHE$  и  $BAE$  следует, что

$$AE = \frac{56}{DE}.$$

Отсюда находим, что  $DE = \sqrt{80}$ . Наконец,  $DH = \sqrt{DE^2 - HE^2} = 8$ . Дальнейшее ясно.

7.  $\left[-\frac{13}{30}; -\frac{3}{10}\right] \cup \left(\frac{11}{30}; \frac{1}{2}\right]$ . Указание. Поскольку  $x = 0$  и  $x = 5\pi$  – корни данного уравнения, необходимо выяснить, при каких  $a$  уравнение  $\sin 3ax + 1 = 0$  имеет ровно 3 корня на интервале  $(0; 5\pi)$ . Рассмотрите отдельно случаи  $a > 0$  и  $a < 0$ .

8.  $\frac{\sqrt{14}}{3}$ . Искомой прямой, проходящей через точку  $L$  и пересекающей прямые  $MP$  и  $KE$ , является линия пересечения

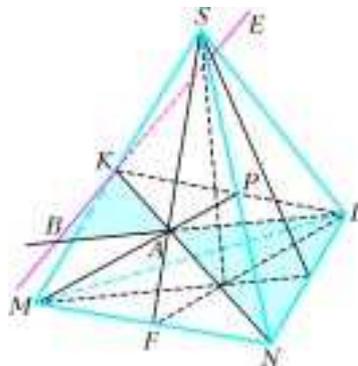


Рис. 16

плоскостей  $LMP$  и  $LKE$ . По условию  $LN \parallel KE$ , поэтому прямая  $LN$  также принадлежит плоскости  $LKE$  (рис. 16).

Плоскость  $LNKE$  пересекает пирамиду  $SLMN$  по  $\Delta NKL$ , в котором  $NK$  – медиана  $\Delta SMN$  (точка  $K$  – середина ребра  $SM$ ).

Плоскость  $LMP$  пересекает грань  $SMN$  по другой медиане  $MP$ . Пусть  $A$  – точка пересечения медиан  $\Delta SMN$  ( $A$  принадлежит

и третьей медиане – апофеме  $SF$ )  $\Rightarrow LA$  – искомая прямая, пересекающая прямую  $KE$  в точке  $B$ .

Далее:  $\Delta KAB \sim \Delta NAL$ ,  $\frac{KA}{AN} = \frac{1}{2}$  (по свойству медианы  $NK$ )  $\Rightarrow \frac{AB}{LA} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = \frac{1}{2}LA$ . По условию  $LM = 2$ ,  $SL = 6$ ,

тогда  $LA$  находим в известном  $\Delta SFL$ :  $AF = \frac{1}{3}SF = \frac{1}{3}\sqrt{SN^2 - FN^2} = \frac{1}{3}\sqrt{35}$  ( $SF$  – медиана  $\Delta SMN$ ),  $LF = \sqrt{3}$ ,  $\cos \angle SFL = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{35}}$  (по теореме косинусов в  $\Delta SFL$ )  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow LA = \frac{2\sqrt{14}}{3} \text{ (по теореме косинусов в } \Delta AFL) \Rightarrow AB = \sqrt{14}/3.$$

Вариант 7

1. 2; 3. 2.  $\frac{\pi}{6}(2n+1)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . 3. (1; 3). 4.  $(2a, a)$ ,  $(-2a, -a)$ .  
 5. 2 или 4. Указание. Рассмотрите три возможных случая расположения точки  $D$  на окружности (между  $A$  и  $B$ , между  $B$  и  $C$  и между  $C$  и  $A$ ).  
 6. (54; 60), (54; 63), (55; 60), (56; 63). Указание. Поскольку  $l - k \geq 5$  и  $k + l \leq 119$ , получим, что  $k \leq 57$ . Осталось рассмотреть случаи  $k = 54$ ,  $k = 55$ ,  $k = 56$ ,  $k = 57$ .

7. 12; 13, 220 : 1911. Пусть  $\frac{SD_1}{SD} = x$ , а  $V_{SABCD} = 1$ . Тогда

$$V_{SABC} = V_{SBCD} = V_{SCDA} = V_{SDAB} = \frac{1}{2},$$

$$V_{SA_1B_1C_1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{9} V_{SABC} = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2},$$

$$V_{SB_1C_1D_1} = \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{9} \cdot x \cdot V_{SBCD} = \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{9} \cdot x \cdot \frac{1}{2},$$

$$V_{SC_1D_1A_1} = \frac{4}{9} \cdot x \cdot \frac{3}{7} V_{SCDA} = \frac{4}{9} \cdot x \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2},$$

$$V_{SD_1A_1B_1} = x \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} V_{SDAB} = x \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2}.$$

Имеем

$$V_{SA_1B_1C_1} + V_{SB_1C_1D_1} + V_{SC_1D_1A_1} + V_{SD_1A_1B_1} = V_{SABCD} = 1,$$

откуда

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} \left(\frac{2}{7} + x\right) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{2}{7} \left(\frac{4}{9} + \frac{3}{7}\right),$$

$$\text{т.е. } x = \frac{12}{13}, \quad V_{SA_1B_1C_1D_1} = \frac{220}{1911}.$$

Вариант 8

1.  $(-\infty; -1] \cup (1; 2) \cup [4; +\infty)$ . 2.  $\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .  
 3.  $\left(5\sqrt[3]{3}; +\infty\right)$ . 4.  $14/3$ .

5.  $2\sqrt{\frac{2}{11}}$ . Указание. Пусть  $D$  – точка пересечения секущей плоскости с прямой  $E_1E$ . Найдите объем пирамиды  $ADEF$ , площадь треугольника  $ADF$ , а затем высоту пирамиды  $ADF$ , опущенную из вершины  $E$ .

6. (1; 2),  $(-1; -2)$ ,  $\left(\pm \frac{7}{\sqrt{31}}; \mp \frac{4}{\sqrt{31}}\right)$ .

Указание. Перепишем уравнение так:  $f(x) + A^2 = Bg(x)$ , где  $f(x) = \sqrt{\cos x}$ ,  $A = a^2 - ab + b^2 - 3$ ,  $B = 4a^2 - 4 - b^2 + 2ab$ ,  $g(x) = (x+1) \cdot 2^x$ .

Функция  $\sqrt{\cos x}$  четная, а  $g(x)$  такова, что  $g(x) \neq g(-x)$  при любом  $x > 0$ . Существование решений, удовлетворяющих условию, означает, что имеет решение система

$$\begin{cases} f(x) + A^2 = Bg(x), \\ f(-x) + A^2 = Bg(-x). \end{cases}$$

Но тогда  $B(g(x) - g(-x)) = 0$ , т.е.  $B = 0$ , а значит, и  $A = 0$ . Осталось решить полученную систему относительно  $a$  и  $b$ .

Вариант 9

1.  $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ . 2.  $\frac{\pi}{2}(2n+1)$ ,  $\frac{\pi}{10}(2n+1)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .  
 3.  $\frac{15}{2}\sqrt{2}$ . 4.  $(-\infty; 0) \cup \left[\log_2 \frac{9 + \sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$ .

5.  $\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)$ . *Указание.* Пусть  $x$  – боковое ребро,  $\alpha$  – угол наклона его к плоскости основания пирамиды,  $R$  – радиус вписанного шара. Проведя сечение пирамиды через боковое ребро и высоту, найдите из теоремы синусов для полученного в сечении треугольника, что  $x = 2\sqrt{3}$ . Радиус вписанного шара равен радиусу окружности, вписанной в треугольник, являющийся сечением пирамиды плоскостью, проходящей через ее апофему и высоту.

## Вариант 10

1.  $y_{\max} = 9$ ,  $y_{\min} = -\frac{9}{8}$ . 2.  $-\frac{1}{2}$ . 3.  $-4$ .

4.  $\left(\log_2 \frac{3}{2}; 1\right]$ . 5.  $0, 3\pi/4$ . 6.  $8, \sqrt{2}, 7\sqrt{2}$ .

7.  $(-2; -8)$ . *Указание.* Абсцисса  $x_0$  центра симметрии графика функции должна быть центром симметрии ее области определения. Таким образом, центром симметрии может быть только точка  $(x_0, y(x_0))$ , что необходимо проверить.

## Вариант 11

1.  $\{-2\} \cup \{2\} \cup (3; +\infty)$ . 2.  $\frac{\pi}{3}(6n \pm 1)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

3. а) 60 км; б)  $195/2$  км. *Указание.* Пусть  $l_1$  – длина первой дороги,  $l_2$  – длина второй дороги,  $s$  – расстояние от  $A$  до переправы. Тогда

$$\begin{cases} \frac{s}{60} + \frac{1}{2} \geq \frac{l_1 - s}{20}, \\ \frac{l_1 - s}{60} + \frac{l_2}{60} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{s}{20}, \\ \frac{l_2}{60} = \frac{l_1}{60} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

а) Из последнего уравнения сразу следует, что  $l_2 - l_1 = 60$  км.  
б) Складывая неравенство со вторым уравнением, получим

$$\frac{l_2}{60} + \frac{1}{4} \geq \frac{l_1}{30},$$

а с учетом третьего уравнения имеем  $l_1 \leq 75$ .

Дополнительное условие дает еще одно уравнение:

$$\frac{1}{2} + \frac{s}{20} = t + \frac{1}{2} + \frac{s}{60},$$

т.е.  $t = \frac{s}{30}$ , где  $t$  – время, затраченное автомобилем на путь от переправы до пункта  $B$  и обратно, плюс время ожидания им паром. Поскольку автомобиль отправился в  $B$  от переправы одновременно с отплытием паром, а паром появляется на берегу через каждый час, то  $t$  – натуральное число, не меньшее чем  $2 \frac{l_1 - s}{60} = \frac{l_1 - s}{30} < \frac{l_1}{30} \leq \frac{75}{30} = \frac{5}{2}$  и ближайшее к этому числу, т.е.  $t \leq 3$ . Убедитесь, что  $t \neq 3$ ,  $t \neq 2$ . Остается единственная возможность  $t = 1$ , но тогда  $s = 30$ . Осталось найти  $l_2$ , пользуясь вторым уравнением системы и результатом пункта а).

4. а) 12; б)  $\frac{5}{2}$ . *Указание.* Докажите, что  $KLMN$  – параллелограмм, а  $AB \parallel NL \parallel CD$ , так что  $ABCD$  – трапеция с основаниями  $AB$  и  $CD$  и средней линией  $LN$ .

5. 2,  $16/3$ . *Указание.* Заметим, что  $|t - a| + |a + 1 - t| \geq 1$  при любом  $t$ , причем равенство возможно лишь при  $a \leq t \leq a + 1$ . Поэтому данная система равносильна такой:

$$\begin{cases} |x - a| + |a + 1 - x| = 1, \\ |y - a| + |a + 1 - y| = 1, \\ |y + 2|x - 5| = 6. \end{cases}$$

Последняя система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда имеет единственное решение система

$$\begin{cases} a \leq x \leq a + 1, \\ \left| \frac{5 - a}{2} \leq |x - 5| \leq \frac{6 - a}{2} \right|. \end{cases}$$

Рассмотрите случаи  $5 \leq a \leq 6$  и  $a < 5$ .

6. 30103. *Указание.* Докажите, что  $a_n = 2^{10}(2^{n-1} - 1)$ , так что  $a_{99991} = 2^{100000} - 2^{10}$ .

Число цифр в десятичной записи натурального числа  $n$  совпадает с числом  $[\lg n] + 1$ . Оцените  $[\lg a_{99991}]$ .

## Вариант 12

1.  $[-\sqrt{5}; 2)$ . 2.  $-1; 1/2$ . 3.  $\{-21\} \cup [0; 21]$ . 4.  $\arctg 3; 10$ .

5.  $[1; 2)$ . 6.  $\frac{1}{9}$ ,  $m = 3$ .

7.  $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi m; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$ ,  $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi m; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$ ,  $k, m \in \mathbf{Z}$ .

*Указание.* Из системы следует, что  $\sin x = -\cos y$ , т.е. либо

$x + y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ , что невозможно, либо  $x - y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ . Те-

перь из второго уравнения получаем  $\sqrt{2} \cos y = \sin 2y$ .

8. 1. *Указание.* Плоскость  $ABC$  пересекает сферу по окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ .

Пусть  $D$  – середина ребра  $BC$ , а  $K$  – точка касания ребра  $AC$  со сферой.

Поскольку  $SAD$  – плоскость симметрии данной пирамиды, центр шара  $O$  принадлежит этой плоскости. Таким образом, искомым радиусом шара является радиус  $R$  окружности, проходящей через точки  $D$ ,  $K$  и  $E$  (рис. 17).

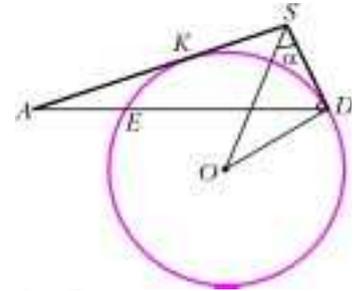


Рис. 17

Далее воспользуйтесь тем, что  $AK^2 = AE \cdot AD$ , и найдите  $SD = KS$ , угол  $\alpha$  и  $OD$ .

## Вариант 13

1.  $(-\infty; -5] \cup \left[\frac{9}{7}; +\infty\right)$ . 2.  $(-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

3.  $-4$ . *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$(x + 4)(x^2 + 4) = -\left(\frac{x+4}{2^{\frac{x+4}{2}}} + 5\right)\left(\frac{x+4}{2^{\frac{x+4}{2}}} - 1\right).$$

При  $x = -4$  равенство справедливо, а при  $x \neq -4$  левая и правая части имеют разные знаки.

4. а) 6; б)  $3\sqrt{5}$ . *Указание.* Докажите, что точки  $A$ ,  $B$  и  $H$  лежат на одной прямой.

5. 58,5 мин.

6. а)  $(\pm 1; 3)$ ; б)  $0 < y < \frac{x^2}{12}$  при  $x > 0$  и  $-\frac{x^2}{12} < y < 0$  при  $x < 0$ .

## Вариант 14

1.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . 2.  $\left\{\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right\}$ . *Указание.* Исходное неравенство преобразуется к следующему виду:

$$\sin^2 4\pi x \cdot (1 - \log_3(11x - 4x^2 - 7)) \leq 0.$$

3.  $9/2$ . По свойству отрезков секущих (рис. 18),  $AC \cdot PC = BC \cdot QC$ , откуда  $PC = QC$ . Следовательно,  $PQ \parallel AB$ , по-

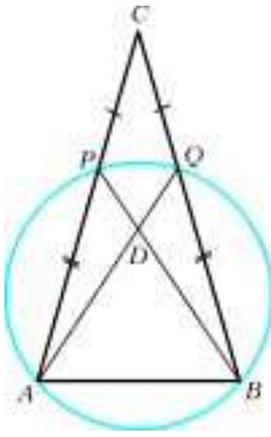


Рис. 18

этому  $APQB$  – равнобокая трапеция. Из подобий  $\triangle CPQ \sim \triangle CAB$  и  $\triangle PQD \sim \triangle BAD$  следует равенство

$$\frac{CQ}{CB} = \frac{PQ}{AB} = \frac{QD}{AD} = \frac{AQ - AD}{AD} = \frac{1}{3}.$$

Отношение площадей треугольников  $PBQ$  и  $PCQ$  равно

$$\frac{S_{PBQ}}{S_{PCQ}} = \frac{BQ}{CQ} = \frac{BC}{CQ} - 1 = 2,$$

так что  $S_{PBQ} = 2 \cdot S_{PCQ} = 6$ .

Аналогично,

$$\frac{S_{QDB}}{S_{POB}} = \frac{3}{4},$$

поэтому  $S_{QBD} = \frac{3}{4} \cdot S_{POB} = \frac{9}{2}$ .

4.  $\left(-\frac{5}{2}; -2\right) \cup (2; 3]$ .

5. 17100 рублей. Пусть  $x$  – количество перевозимых джипов,  $y$  – количество грузовиков. Тогда

$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 109, \\ y \geq \frac{6x}{5}, \end{cases}$$

где  $x, y \in \mathbf{N}$ . Требуется найти максимум функции  $s = 6x + 7y$ .

Поскольку  $x = \frac{s - 7y}{6}$ , преобразуем исходную систему:

$$\begin{cases} 3 \frac{s - 7y}{6} + 5y \leq 109, \\ y \geq \frac{6s - 7y}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{s}{12} \leq y \leq \frac{218 - s}{3}.$$

Отсюда  $s \leq 174,4$ , т.е.  $s \leq 174$ .

При  $s = 174$  из неравенства получим  $14\frac{1}{2} \leq y \leq 14\frac{2}{3}$ , т.е. целых решений нет. Тот же результат дает проверка для  $s = 173$ ,  $s = 172$ . Наконец, для  $s = 171$  аналогичные рассуждения приводят к целым числам  $y = 15$  и  $x = \frac{171 - 105}{6} = 11$ .

6. -14. Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим получаем

$$\begin{aligned} 16 \sin^2 \frac{2x}{7} + 9 \operatorname{ctg}^2 \frac{2x}{7} &= \\ &= 16 \sin^2 \frac{2x}{7} + \frac{9}{\sin^2 \frac{2x}{7}} - 9 \geq 2 \sqrt{16 \sin^2 \frac{2x}{7} \cdot \frac{9}{\sin^2 \frac{2x}{7}}} - 9 = 15. \end{aligned}$$

Равенство здесь достигается при условии

$$16 \sin^2 \frac{2x}{7} = \frac{9}{\sin^2 \frac{2x}{7}} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{2x}{7} = \frac{3}{4}. \quad (*)$$

Таким образом,

$$\omega = 4 \sin^2 y - 16 \sin^2 \frac{2x}{7} - 9 \operatorname{ctg}^2 \frac{2x}{7} \leq 4 \sin^2 y - 15.$$

Рассмотрим второе уравнение системы при  $y \neq 0$ . После деления на  $\pi^2 y^2$  и замены  $t = \sin 3x$ ,  $|t| \leq 1$ , имеем

$$g(t) \equiv t^2 + 2 \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) t + \frac{72 + \pi^2}{\pi^2} = 0.$$

Поскольку вершина параболы – графика  $g(t)$  – имеет абсциссу  $t_0 = -\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) < -1$ , условие существования корня

$g(t)$  на отрезке  $[-1; 1]$  (единственного на этом множестве) записывается в виде

$$\begin{cases} g(-1) \leq 0, \\ g(1) \geq 0 \end{cases}$$

и приводит к ограничению  $|y| \leq \frac{\pi}{6}$ .

Тогда  $4 \sin^2 y \leq 1$ , причем равенство достигается при  $|y| = \frac{\pi}{6}$ , и полученная выше оценка для  $\omega$  дает  $\max \omega \leq -14$ .

Покажем, что этот максимум равен -14. При  $y = \pm \frac{\pi}{6}$  квадратный трехчлен

$$g(t) = (t+1)^2 + \frac{72}{\pi^2}(t+1)$$

имеет корень  $t = -1$ . Отсюда

$$\sin 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Осталось заметить, что среди найденных значений  $x$  есть такие, при которых выполняется равенство (\*). Например,

если  $k = 2$ , то  $x_* = \frac{7\pi}{6}$ .

7.  $1/6$ . Центр  $O$  пятого шара равноудален от центров шаров, касающихся боковых граней пирамиды  $SABC$  с вершиной  $S$  и, следовательно, лежит на высоте  $SH$  этой пирамиды. Пусть  $D$  – середина  $BC$ ,  $E$  – точка касания шара и боковой грани  $SBC$ . В точке  $H$  пересекаются медианы равносоставленного треугольника  $ABC$  – основания пирамиды (рис. 19), поэтому

$$HD = \frac{1}{3} AD = \frac{1}{3} a \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Рис. 19

Рассмотрим сечение  $SAD$  (рис. 20). Обозначим через  $O_1$  и  $O_2$  центры шаров, касающихся основания и боковой грани соответственно. Из прямоугольного треугольника  $SHD$

$$SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = \frac{3\sqrt{5}}{4}.$$

Согласно условию задачи,

$$ED = \frac{2}{3} SD = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ откуда}$$

$HD = ED$ . Поэтому пря-

моугольные треугольники

$O_1HD$  и  $O_2ED$  равны. Следовательно,  $\angle O_1DH = \angle O_2DE$ ,  $O_1D = O_2D$  и равны треугольники  $OO_1D$  и  $OO_2D$ . Значит,  $\angle O_1DO = \angle O_2DO$ . Но тогда  $\angle HDO = \angle EDO$ , и мы получаем равенство треугольников  $OHD$  и  $OED$  (по двум сторонам и углу). Отсюда следует  $OE \perp SD$ , так что точки  $O$ ,  $O_2$  и  $E$  лежат на одной прямой.

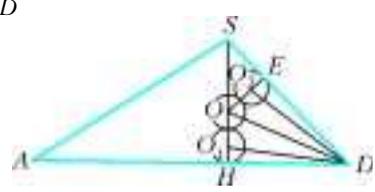
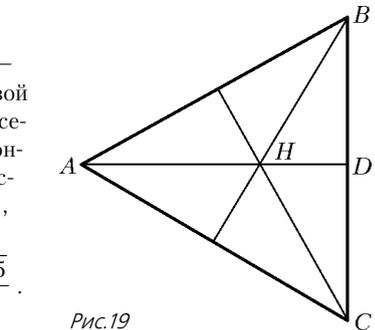
Теперь по свойству биссектрисы  $OD$  в треугольнике  $SHD$  имеем

$$\frac{SO}{OH} = \frac{SD}{HD} = \frac{3}{2}, \text{ откуда } OH = \frac{2}{5} SH = \frac{1}{2}.$$

С другой стороны,  $OH = 3r$ . Поэтому  $r = 1/6$ .

Вариант 15

- $[0; 1) \cup (1; +\infty)$ .
- $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ .
- $(26; -6); (-9; 29)$ . Указание. После замены  $u = \sqrt[3]{x+1}$ ,



$v = \sqrt[3]{y-2}$  переходим к системе

$$\begin{cases} u+v=1, \\ u^3+v^3=19. \end{cases}$$

4. 32.

5. 8 ч 15 мин. Занумеруем четыре позиции табло слева направо. В первой позиции цифра 3 не появляется никогда. Во второй позиции цифра 4 присутствует в течение трех полных часов, начинающихся с 03:00, 13:00 и 23:00. Остается 21 час, в течение каждого из которых цифра 3 по одному разу занимает третью позицию табло в течение 10 минут, а в течение остальных 50 минут каждого часа 5 раз ровно по 1 минуте занимает последнюю, четвертую, позицию табло. В результате общее время присутствия цифры 3 на табло равно  $3 \text{ ч} + 21 \times 10 \text{ мин} + 21 \times 5 \times 1 \text{ мин} = 8 \text{ ч} 15 \text{ мин}$ .

6. (9; 9). *Указание.* Уравнение равносильно такому:

$$m = k + 2 - \frac{42}{2k+3}.$$

Следовательно, число  $2k+3$  — делитель 42. Так что знаменатель может принимать только три значения: 3, 7, 21.

7. 10. Пусть  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t$ . Тогда выражение  $u = 3x - 2y$  приводится к виду

$$u = 6 \cos t - 8 \sin t = 10 \left( \frac{3}{5} \cos t - \frac{4}{5} \sin t \right) = 10 \sin(\varphi - t),$$

где  $\varphi = \arcsin \frac{3}{5}$ .

Максимальное значение  $u$  равно 10, оно достигается, например, при  $t = \varphi - \frac{\pi}{2}$ .

8.  $[-4; 1] \cup (3; 4]$ . Если  $p > 2$ , то из исходного неравенства получается линейное неравенство

$$(p-1)x + p - 3 > 0.$$

По условию оно должно выполняться при любых  $x \geq 0$ , в частности при  $x = 0$ . Отсюда  $p > 3$ . С другой стороны, ясно, что при  $p > 3$  неравенство действительно справедливо для всех  $x \geq 0$ . Таким образом,  $3 < p \leq 4$ .

Очевидно, при  $p = 2$  исходное неравенство не выполнено ни для каких значений  $x$ .

При  $p < 2$  неравенство принимает вид  $(p-1)x + p - 3 < 0$ .

Если  $p > 1$ , линейная функция  $f(x) = (p-1)x + p - 3$  возрастает, поэтому для всех  $x \geq 0$  неравенство  $f(x) < 0$  выполняться не может. Если  $p = 1$ , то  $f(x) = p - 3 = -2 < 0$  для всех  $x$ , в том числе и для  $x \geq 0$ .

Наконец, для  $p < 1$  линейная функция  $f(x) = (p-1)x + p - 3$  убывает и при  $x = 0$  принимает значение  $f(0) = p - 3 < 0$ .

Значит, при  $x \geq 0$  неравенство тем более выполняется.

#### Вариант 16

1.  $\log_2(6 + \sqrt{37})$ .    2.  $[-1; 2) \cup (5; 6] \cup (8; +\infty)$ .

3.  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  $\frac{5\pi}{6}$ .

4.  $\arcsin \frac{5}{6}$ ;  $\frac{225}{16\sqrt{11}}$ .    5. 0; 1.

#### Вариант 17

1.  $(-\infty; -5)$ .    2.  $\pi n$ ,  $-\frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $n, k \in \mathbf{Z}$ .

3. (0; 0; 0); (2; 2; 2); (2; -2; -2); (-2; 2; -2); (-2; -2; 2).

*Указание.* Вычитая первое уравнение системы из второго, а затем из третьего, переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xyz, \\ z^2 - x^2 = 0, \\ z^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$

4.  $\log_2(8 \pm \sqrt{63})$ . *Указание.* После преобразований введите новую переменную  $t = \log_2(2^{2x} + 1) - x$ .

5.  $\frac{3\pi(3 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6})}{7\pi - 6(\sqrt{3} + 1)}$ .

6.  $\frac{4201}{3600} \pm \frac{\sqrt{601}}{30}$ . *Указание.* Данная система преобразуется к виду

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+2)^2 = 25, \\ z^2 + (w-1)^2 = 144, \\ (x+1)(w-1) + z(y+2) \geq 60. \end{cases}$$

Существуют такие углы  $\varphi$  и  $\psi$ , что  $x+1 = 5 \cos \varphi$ ,

$y+2 = 5 \sin \varphi$ ,  $z = 12 \cos \psi$ ,  $w-1 = 12 \sin \psi$ .

После замены переменных в неравенстве системы получим

$\sin(\varphi + \psi) \geq 1$ , т.е.  $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ . Сумма, которую требуется оценить, записывается так:

$$A = \frac{y^2}{25} + \frac{w^2}{144} = \frac{4201}{3600} + \frac{1}{6} \cos \varphi - \frac{4}{5} \sin \varphi.$$

Но тогда

$$\frac{1}{6} \cos \varphi - \frac{4}{5} \sin \varphi = \frac{\sqrt{601}}{30} \cos(\varphi + \alpha), \text{ где } \alpha = \arccos \frac{1}{6}.$$

#### Вариант 18

1.  $[-5; -3]$ .    2.  $\pm \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

3. Выросла на  $\frac{500}{9}\%$ .

4.  $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$ . *Указание.* Найдите угол  $\angle AOC$ . Искомый радиус — высота треугольника  $AOC$ .

5.  $2\sqrt{3}$ ,  $2\sqrt{3}$ ,  $2\sqrt{3}$ .

6. См. рис.21;  $(0; 2c]$ .

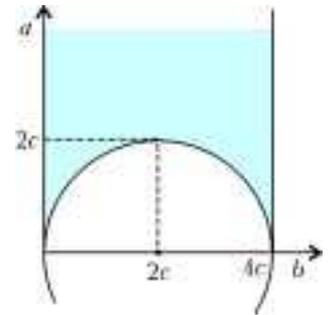


Рис.21

#### Вариант 19

1. 10.    2.  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .    3. 5.

4. 2445 долларов. *Указание.* Пусть  $m$  — число мужчин, согласившихся с предложением компании,  $n$  — число мужчин, отказавшихся от предложения компании,  $w$  — число женщин. Из условия получаем систему

$$\begin{cases} m+n+w=350, \\ 20m+16,3w=5705, \\ m, n, w \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

откуда  $37m = 163n$ . Единственно возможными являются значения  $m = 163$ ,  $n = 37$ .

5.  $\left(-\frac{5}{3}; -1\right] \cup [2; 3)$ . *Указание.*

$$\min(\log_3(3x+5), \sqrt{x^2-x-2}) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-x-2} < 2, \\ 3x+5 > 0, \\ x^2-x-2 \geq 0, \\ \log_3(3x+5) < 2. \end{cases}$$

6. Четыре. Например, это гири массой 1, 3, 9, 27 кг. Легко проверить, что с помощью четырех гирь, имеющих массу 1, 3, 9, 27 кг, можно взвесить любой груз весом от 1 до 39 кг, если гири класть не только на свободную чашку весов, но и на чашку с грузом.

Докажем, что нельзя обойтись тремя гири, масса которых соответственно  $A, B$  и  $C$ , где  $A \leq B \leq C$ . Действительно, с помощью трех таких гирь можно взвесить не более 14 различных грузов массой:  $A, B, C, A + B, A + C, B + C, B - A, C - A, C - B, A + B + C, C + B - A, C + A - B, A + B - C, C - B - A$ .

7.  $2\sqrt{65}$ . Заметим, что  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$  и если пара  $(x_0, y_0)$  является решением данного уравнения, то и пары  $(-x_0, y_0)$ ,  $(-x_0, -y_0)$ ,  $(x_0, -y_0)$  также являются его решениями. Поскольку по условию  $x$  и  $y$  — целые числа, из равенства

$$4x^2 - y^2 = 15 \Leftrightarrow (2x + y)(2x - y) = 15$$

следует, что оба множителя в левой части последнего уравнения являются делителями числа 15.

В силу сделанного выше замечания достаточно рассмотреть  $x, y \in \mathbf{N}$ . Для таких чисел  $2x + y > 2x - y > 0$ , поэтому приходим к двум системам:

$$\begin{cases} 2x + y = 15, \\ 2x - y = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y = 5, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = 7 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Всего же исходное уравнение имеет восемь целочисленных решений, они задаются парами  $(\pm 4, \pm 7)$ ,  $(\pm 2, \pm 1)$  со всевозможными сочетаниями знаков. Среди соответствующих точек на координатной плоскости  $Oxy$  наиболее удалены друг от друга точки  $(4, 7)$  и  $(-4, -7)$  либо  $(-4, 7)$  и  $(4, -7)$ .

Физика

Физический факультет

1. Будем, как это обычно и делается при решении подобных задач, считать пластину твердым телом. По условию задачи тангенс угла  $\alpha$  между вектором скорости  $\vec{v}$  вершины  $C$  и стороной квадрата  $CD$  (рис.22, 23) равен 0,5, а пластина движется по плоскости. Следовательно, скорости всех точек пла-

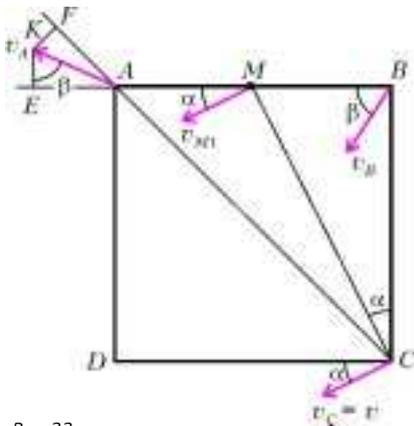


Рис.22

стины параллельны плоскости, угол  $BCM$  равен  $\alpha$  и скорость вершины  $C$  перпендикулярна прямой  $MC$ . Кроме того, так как длина прямой  $MC$  должна быть неизменной, то исконая скорость  $\vec{v}_M$  перпендикулярна прямой  $MC$  и образует со стороной  $AB$  угол  $\alpha$ .

Пусть вектор скорости  $\vec{v}_B$  вершины  $B$  образует со стороной  $AB$  угол  $\beta$ . Поскольку  $BC = \text{const}$ , вектор  $\vec{v}_B$  может быть направлен только так, как показано на рисунках 22 и 23, причем в обоих случаях  $v \sin \alpha = v_B \sin \beta$  и  $0 < \beta < \pi/2$ .

По условию задачи скорости вершин  $A$  и  $B$  взаимно перпендикулярны, поэтому угол  $AKE$  между прямой  $AK$  и перпенди-

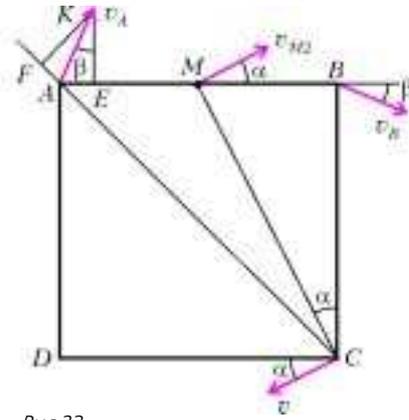


Рис.23

куляром  $KE$ , опущенным из конца вектора скорости вершины  $A$  на сторону  $AB$ , равен  $\beta$ . Поскольку  $AM = MB = \text{const}$ , то  $v_A \sin \beta = v_B \cos \beta = v_M \cos \alpha$ .

Учитывая, что проекции скоростей вершин  $A$  и  $C$  на соединяющую их прямую  $AC$  должны быть одинаковыми ( $AC = \text{const}$ ), а угол  $FAK$  в первом случае  $\beta - \pi/4$ , а во втором случае  $\beta + \pi/4$ , получаем

$$v_A \cos(\beta \mp \pi/4) = v_C \cos(\alpha + \pi/4).$$

Поскольку  $\sin \alpha = 1/\sqrt{5}$ , а  $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$ , из предыдущих соотношений следует, что

$$v_A = v_B \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = v \frac{\cos \beta}{\sqrt{5} \sin^2 \beta} = v \frac{1}{\sqrt{5}(\cos \beta \pm \sin \beta)},$$

а потому

$$\cos^2 \beta \pm \cos \beta \sin \beta = \sin^2 \beta, \text{ или } \text{tg}^2 \beta \mp \text{tg} \beta - 1 = 0.$$

Решая последнее уравнение, получаем

$$\text{tg} \beta = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}, \text{ и } v_M = \frac{v}{2 \text{tg} \beta} = \frac{\sqrt{5} \mp 1}{4} v.$$

Решение этой задачи можно существенно упростить, если воспользоваться понятием мгновенной оси вращения.

По условию задачи скорости разных точек пластины компланарны, но не параллельны друг другу, следовательно, движение пластины можно представить как сумму вращательного движения вокруг некоторой оси, перпендикулярной горизонтальной плоскости, по которой движется пластина, и движения этой оси с некоторой скоростью, параллельной указанной плоскости. Поэтому если в качестве оси вращения выбрать так называемую мгновенную ось вращения (ось, скорость которой в данный момент времени равна нулю), то величина линейной скорости произвольной точки пластины будет равна произведению угловой скорости на радиус вращения данной точки и направлена перпендикулярно этому радиусу. Из сказанного следует, что мгновенная ось вращения должна проходить через точку пересечения перпендикуляров к векторам скоростей точек пластины, лежащих в одной горизонтальной плоскости. Поскольку скорости вершин  $A$  и  $B$  взаимно перпендикулярны, то и перпендикуляры к этим скоростям должны пересекаться под прямым углом, следовательно, точка пересечения этих перпендикуляров должна совпадать с одной из точек окружности, диаметром которой является сторона  $AB$ . На рисунке 24 пунктирной линией показан перпендикуляр к вектору скорости точки  $C$ . Видно, что этот перпендикуляр пересекает построенную окружность в двух точках. Таким образом, мгновенная ось вращения проходит либо через точку  $O_1$ , либо через точку  $O_2$ , а угловая скорость вращения квадрата равна либо  $\omega_1 = v/O_1C$ , либо  $\omega_2 = v/O_2C$ .

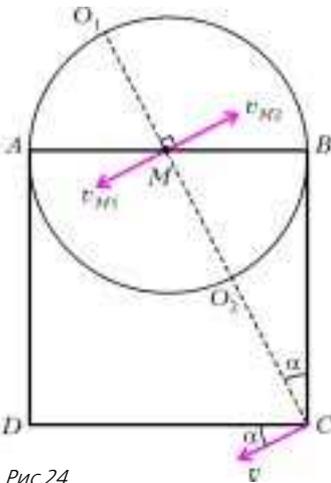


Рис.24

Пусть длина стороны квадрата равна  $2a$ . По условию задачи, вектор  $\vec{v}$  скорости вершины  $C$  образует с вектором  $\vec{CD}$  такой угол  $\alpha$ , что  $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$ , поэтому перпендикуляр к  $\vec{v}$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $M$  (эта точка совпадает с серединой стороны  $AB$ ). Тогда  $MC = 2a/\cos \alpha = \sqrt{5}a$ ,  $O_1C = MC + a$  и  $O_2C = MC - a$ . Следовательно, линейная скорость точки  $M$  направлена перпендикулярно отрезку  $MC$ , а ее величина равна

$$v_{M_1} = \frac{v}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}v \quad \text{либо} \quad v_{M_2} = \frac{v}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}v,$$

что совпадает с полученным ранее результатом.

2. Как обычно, будем считать систему отсчета, неподвижную относительно дороги, инерциальной. Поскольку автомобиль движется по горизонтальному участку дороги и все его колеса являются ведущими, то вне зависимости от положения центра тяжести автомобиля его сила тяги и тангенциальная составляющая силы реакции дороги, называемая обычно силой сухого трения, должны быть связаны соотношением  $F_t \leq \mu mg$ , где  $g$  – ускорение свободного падения.

Так как автомобиль движется прямолинейно, его ускорение равно  $a(t) = F_t(t)/m$ . Считая, что мощность двигателя полностью передается на колеса, можно утверждать, что после включения двигателя колеса некоторое время  $\tau$  будут скользить по дороге, а потому величина силы тяги будет равна  $F_t(t \leq \tau) = \mu mg$ , т.е. в течение промежуточного времени  $0 \leq t \leq \tau$  ускорение автомобиля будет равно  $\mu g$ , а его скорость будет изменяться по закону  $v(t) = \mu g t$ . Начиная с момента времени

$$t = \tau = \frac{N}{F_t \mu g} = \frac{N}{m \mu^2 g^2},$$

скольжение колес прекратится, а потому величина силы тяги будет удовлетворять условию  $F_t(t \geq \tau) \leq \mu mg$ . Следовательно, приращение кинетической энергии автомобиля должно быть равно работе двигателя, т.е. при  $t > \tau$  должно выполняться соотношение

$$(t - \tau)N = \frac{mv^2(t)}{2} - \frac{mv^2(\tau)}{2}.$$

Подставляя в это выражение значения  $\tau$  и  $v(\tau)$ , получаем

$$v(t) = \begin{cases} \mu g t & \text{пр, } 0 \leq t \leq \tau = \frac{N}{m \mu^2 g^2}, \\ \sqrt{\frac{N}{m} \left( 2t - \frac{N}{m \mu^2 g^2} \right)} & \text{пр, } \tau \leq t \end{cases}$$

3. Будем считать наклонную плоскость неподвижной относительно некоторой инерциальной системы отсчета, а кубик и доску – твердыми телами. Положим, что сила сухого трения скольжения не зависит от относительной скорости движения взаимодействующих тел и равна максимальному значению силы сухого трения покоя между ними. Учитывая, что ось пружины и доски, нить и центр масс кубика лежат в одной вертикальной плоскости, а кубик движется равномерно, можно считать, что доска до обрыва нити покоилась, кубик двигался поступательно, сила натяжения нити была направлена

вверх параллельно наклонной плоскости и равна

$$T = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha),$$

где  $g$  – ускорение свободного падения. После обрыва нити кубик будет скользить вверх по доске до тех пор, пока за счет работы силы тяжести и силы трения со стороны доски его скорость не станет равной нулю. Вплоть до этого момента времени ( $t = 0$ ) деформация пружины должна оставаться неизменной, а доска – покоящейся (действующая со стороны кубика на доску сила сухого трения скольжения не изменяется). После остановки кубика не только величина, но и направление силы трения будут изменяться, а потому доска не сможет оставаться неподвижной.

По условию задачи кубик после обрыва нити должен совершать гармонические колебания. Следовательно, механическая энергия кубика, доски и пружины после возникновения колебаний должна оставаться неизменной. Так может быть только в том случае, если кубик остается неподвижным относительно доски. Поэтому уравнения движения кубика и доски в проекции на ось  $x$ , направленную вниз параллельно наклонной плоскости, для моментов времени  $t > 0$  имеют вид

$$m x'' = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}(t), \quad M x'' = -kx + Mg \sin \alpha + F_{\text{тр}}(t),$$

где  $x''$  – проекция ускорения кубика и доски на ось  $x$ , начало которой соответствует положению некоторой фиксированной точки доски при недеформированной пружине. Складывая почленно последние два уравнения, получаем

$$(M + m)x'' = (M + m)g \sin \alpha - kx,$$

или

$$(M + m)x_1'' = -kx_1, \quad \text{где } x_1 = x - \frac{M + m}{k}g \sin \alpha.$$

Решение этого уравнения имеет вид  $x_1(t) = -A \cos \omega t$ , где амплитуда колебаний  $A$  равна модулю разности величин деформаций пружины до обрыва нити и в те моменты, когда после ее обрыва ускорение кубика становится равным нулю:

$$A = \frac{M + m}{k}g \sin \alpha - \frac{M \sin \alpha - \mu m \cos \alpha}{k}g = \frac{T}{k},$$

а угловая частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m}}.$$

Из полученных выражений получаем, что ускорение кубика при гармонических колебаниях будет изменяться по закону

$$x'' = x_1'' = A\omega^2 \cos \omega t,$$

а потому величина действующей на кубик силы трения со стороны доски будет равна

$$|F_{\text{тр}}(t)| = m|x'' + g \sin \alpha| = m|A\omega^2 \cos \omega t + g \sin \alpha|.$$

Следовательно, кубик будет совершать гармонические колебания после обрыва нити, если величина силы трения покоя будет не меньше чем  $g \sin \alpha + A\omega^2$ . Учитывая, что максимальная величина силы сухого трения покоя равна  $\mu mg \cos \alpha$ , после простых алгебраических преобразований получим, что искомое значение коэффициента трения кубика о доску должно удовлетворять неравенству

$$\mu \geq \left( 1 + \frac{2m}{M} \right) \operatorname{tg} \alpha.$$

4. Предположим, что цилиндр покоится относительно лабораторной системы отсчета, и эту систему будем считать инерциальной. Кроме того, будем считать, что изменение температуры гелия происходит так, что поршень перемещается очень

медленно и давление во всех точках внутри цилиндра изменяется одинаковым образом. Если гелий после закачки охладился (первый случай), то его объем мог только уменьшаться, а поршень двигался к дну цилиндра, преодолевая силу сухого трения. Следовательно, в этом случае давление гелия в цилиндре перед нагреванием не могло быть меньше

$p_1 = p_0 - F_{\text{тр}}/S$ . Если же газ предварительно нагревали (второй случай), то направление силы сухого трения, действующей на поршень, совпадало с направлением силы атмосферного давления, а потому давление в цилиндре все время оставалось равным  $p_2 = p_0 + F_{\text{тр}}/S$ . Из сказанного ясно, что в первом случае объем гелия при нагревании не будет изменяться, пока его давление не станет равным  $p_2$ . Во втором же случае объем гелия должен начать увеличиваться, как только его стали нагревать, причем давление гелия будет оставаться неизменным и равным  $p_2$ .

Пусть абсолютная температура гелия при давлении  $p_1$  и объеме  $V_0$  равна  $T_1$ , при давлении  $p_2$  и объеме  $V_0$  равна  $T_2$ , а при увеличении объема гелия на величину  $S\Delta L$  стала равной  $T_3$ . Полагая, что количество молей гелия  $\nu$  в цилиндре неизменно и в интересующем диапазоне температур и давлений гелий подчиняется уравнению Клапейрона–Менделеева, можно записать

$$p_1 V_0 = \nu R T_1, \quad p_2 V_0 = \nu R T_2 \quad \text{и} \quad p_2 (V_0 + S\Delta L) = \nu R T_3,$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Как известно, гелий является одноатомным газом, поэтому его внутренняя энергия при температуре  $T$  равна  $1,5\nu R T$ . Поскольку в первом случае гелий надо нагревать от температуры не меньшей  $T_1$  до температуры  $T_2$  изохорически, подводимое к нему количество теплоты будет увеличивать только его внутреннюю энергию:

$$Q_1 = 1,5\nu R (T_2 - T_1).$$

Нагревание же гелия от температуры  $T_2$  до температуры  $T_3$  будет происходить изобарически. Следовательно, будет не только увеличиваться внутренняя энергия гелия, но он еще будет совершать работу по расширению. Поэтому

$$Q_2 = 1,5\nu R (T_3 - T_2) + \nu R (T_3 - T_2) = 2,5\nu R (T_3 - T_2).$$

Решая совместно приведенные уравнения, получим

$$Q_1 = 3V_0 F_{\text{тр}}/S, \quad Q_2 = 2,5(p_0 S + F_{\text{тр}})\Delta L.$$

Итак, искомое количество теплоты  $Q$ , в зависимости от того каким образом объем гелия после закачки его в цилиндр установился равным  $V_0$ , должно удовлетворять неравенству

$$2,5(p_0 S + F_{\text{тр}})\Delta L \leq Q \leq 2,5(p_0 S + F_{\text{тр}})\Delta L + 3V_0 F_{\text{тр}}/S.$$

**5.** При решении задачи будем, как обычно, считать, что поведение гелия и криптона вплоть до точки насыщения подчиняется уравнению Клапейрона–Менделеева, а охлаждение смеси происходит столь медленно, что содержимое цилиндра все время находится в состоянии термодинамического равновесия. Кроме того, будем считать, что в цилиндре существуют такие условия, при которых криптон начинает конденсироваться, как только его парциальное давление становится равным давлению  $p_{\text{нк}}$  его насыщенных паров. Отметим, что, поскольку криптон в газообразном состоянии в цилиндре находится при температуре явно ниже критической

( $T_{\text{крк}} \approx 210 \text{ К}$ ), его следует называть паром, в то время как гелий ( $T_{\text{крг}} \approx 5 \text{ К}$ ) следует называть газом. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, плотность  $\rho_i$  составляющей смеси, находящейся в газообразном состоянии, ее молярная масса  $M_i$ , абсолютная температура  $T_i$  и парци-

альное давление  $p_i$  должны удовлетворять уравнению

$$p_i M_i = \rho_i R T_i,$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная. Следовательно,

$$n = \frac{\rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{г}}} = \frac{p_{\text{к}} M_{\text{к}}}{p_{\text{г}} M_{\text{г}}}.$$

Сумма парциальных давлений гелия и криптона при любой температуре равна внешнему атмосферному давлению  $p$ , а потому парциальное давление криптона равно

$$p_{\text{к}}(T_i) = \frac{n p M_{\text{г}}}{n M_{\text{г}} + M_{\text{к}}} \varphi,$$

если  $T_i \geq T_2$ , где  $T_2$  – абсолютная температура, при которой пары криптона становятся насыщенными.

Так как относительная влажность газопаровой смеси при температуре  $T_1$  равна  $\varphi$  и криптон при нормальном атмосферном давлении кипит при температуре  $T_{\text{к}}$ , должны выполняться соотношения

$$p_{\text{к}}(T_1) = \varphi p_{\text{кн}}(T_1), \quad p_{\text{кн}}(T_{\text{к}}) = p \quad \text{и} \quad p_{\text{к}}(T_2) = p_{\text{кн}}(T_2),$$

причем

$$p_{\text{кн}}(T_i) = a + b T_i.$$

Решая совместно приведенные уравнения, получаем

$$\frac{T_1 - T_2}{T_{\text{к}} - T_1} = \frac{n M_{\text{г}} (1 - \varphi)}{\varphi M_{\text{к}} - n M_{\text{г}} (1 - \varphi)}.$$

Следовательно, на стенках цилиндра должна появиться роса, если температуру смеси понизить на

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{(T_{\text{к}} - T_1)(1 - \varphi) n M_{\text{г}}}{\varphi M_{\text{к}} - n M_{\text{г}} (1 - \varphi)} \approx 1 \text{ К}.$$

**6.** Предположим, что шар покоится относительно некоторой инерциальной системы отсчета, а электрон движется в вакууме, и пренебрежем потерями энергии электрона на излучение (т.е. будем считать, что ускорение электрона достаточно мало). При приближении электрона к шару, в силу явления электростатической индукции, должно происходить перераспределение заряда на шаре. Пусть величина заряда, находящегося на достаточно малом участке поверхности шара, равна  $\Delta q_i$ . По условию задачи шар изолирован, а его заряд равен  $Q$ , поэтому в любой момент времени  $\sum \Delta q_i$  по всем участкам поверхности шара равна  $Q$ .

Будем, как обычно, считать, что потенциал электростатического поля, создаваемого покоящимся точечным зарядом  $q$  в бесконечно удаленной от него точке, равен нулю. Тогда потенциал электростатического поля на расстоянии  $r$  от точечного заряда будет равен

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная. Согласно принципу суперпозиции, потенциал, создаваемый системой точечных зарядов в данной точке, равен сумме потенциалов, создаваемых каждым из этих зарядов порознь в этой точке. Следовательно, потенциал центра шара, обусловленный его избыточным зарядом и точечным зарядом  $2Q$ , находящимся от центра шара на расстоянии  $2R$ , равен

$$\varphi = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2R} + \sum \frac{\Delta q_i}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Таким же будет потенциал в любой точке поверхности шара. Как известно, кулоновское стационарное поле является кон-

сервативным. Следовательно, работа сил такого поля над перемещающимся в нем электроном не зависит от вида траектории, а определяется лишь положением начальной и конечной точек. Поскольку заряд электрона отрицателен, электростатическое поле шара и точечного заряда при подлете электрона к шару совершит над электроном положительную работу  $A = e\varphi$ , где  $e$  – модуль заряда электрона. Отсюда на основании закона изменения кинетической энергии следует, что искомая скорость электрона массой  $m$  при его подлете к поверхности шара должна удовлетворять неравенству

$$v \leq \sqrt{\frac{eQ}{\pi\epsilon_0 Rm}}.$$

7. Поскольку проводник  $OA$  тонкий и вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси кольца, скорость упорядоченного движения свободных носителей заряда в этом проводнике относительно лабораторной системы отсчета (считаем ее инерциальной) можно представить в виде суммы двух векторов, один из которых перпендикулярен оси проводника, а второй направлен вдоль этой оси. Ясно, что оба эти вектора лежат в вертикальной плоскости, в которой расположено кольцо. Величина перпендикулярной составляющей указанной скорости равна скорости движения той точки проводника, в которой в данный момент находится свободный носитель заряда, т.е.  $v_{\perp i} = \omega r_i$ , где  $r_i$  – радиус вращения интересующей точки проводника  $OA$ . Из-за наличия этой составляющей свободные носители заряда испытывают действие силы Лоренца, равной  $F_{Лi} = qv_{\perp i} B$ , эквивалентное действию стороннего электрического поля, величина напряженности которого равна

$$E_i(r_i) = \frac{F_{Лi}}{q} = \omega r_i B.$$

Отсюда видно, что величина напряженности стороннего электрического поля прямо пропорциональна удалению рассматриваемой точки проводника от оси вращения и не зависит от времени (угловая скорость вращения и индукция магнитного поля постоянны). Влияние этого стороннего поля на силу тока в цепи, как обычно, учтем, определив энергетическую

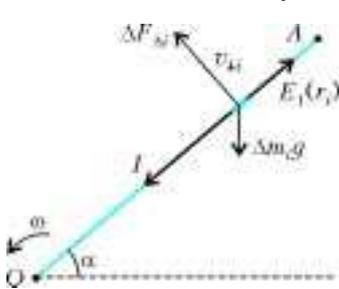


Рис.25

характеристику этого поля – его ЭДС. По определению, величина ЭДС равна модулю отношения работы сил стороннего поля над пробным зарядом при его перемещении вдоль рассматриваемого участка цепи к величине этого заряда. Учитывая, что напряженность сторонних сил направлена вдоль оси провод-

ника, получим, что величина ЭДС на достаточно малом участке проводника длиной  $\Delta r$  равна

$$\Delta \mathcal{E}_{i1} = \frac{F_{Лi} \Delta r}{q} = \omega B r_i \Delta r = \omega B (\Delta r)^2 i.$$

Поскольку длина проводника  $OA$  равна  $r$ , он состоит из  $N = r/\Delta r$  таких участков, а потому величина интересующей нас ЭДС равна

$$\mathcal{E}_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{i1} = \omega B \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r^2}{N^2} \sum_{i=1}^N i = \omega B r^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1+N}{2N^2} N = \frac{\omega B r^2}{2}.$$

Наличие продольной составляющей скорости упорядоченного движения носителей заряда, т.е. протекание тока по проводнику, находящемуся в магнитном поле, обуславливает появление сил Ампера. По условию задачи проводник  $OA$  вращается с постоянной угловой скоростью относительно инерци-

альной системы отсчета. Следовательно, суммы действующих на него сил (силы тяжести, реакции оси и силы Ампера) и их моментов относительно любой оси должны быть равны нулю. Чтобы упростить решение задачи, будем рассчитывать действующие на проводник моменты сил относительно оси вращения. В тот момент времени  $t$ , когда проводник образует с горизонтальным диаметром кольца угол  $\alpha = \omega t$  (рис.25), момент силы тяжести, действующей на малый отрезок проводника длиной  $\Delta r$ , находящийся от оси вращения на расстоянии  $r_i$ , равен

$$\Delta M_i = r_i g \Delta m_i \cos \alpha = r_i \frac{g m \cos \alpha}{r} \Delta r = \frac{g m \cos \alpha}{r} i (\Delta r)^2,$$

так как масса такого отрезка равна  $\Delta m_i = m \Delta r / r$ . Следовательно, общий момент сил тяжести равен

$$M_{\tau} = \sum \Delta M_i = \frac{g m \cos \alpha}{r} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r^2}{N^2} \sum_{i=1}^N i = \frac{g m r \cos \alpha}{2}.$$

Учитывая, что проводник  $OA$  движется в вертикальной плоскости, перпендикулярной линиям индукции магнитного поля, на основании закона Ампера можно утверждать, что на  $i$ -й участок проводника длиной  $\Delta r$  действует сила

$$\Delta F_{Ai}(t) = I(t) \Delta r B,$$

где  $I(t)$  – сила тока, текущего по рассматриваемому участку проводника в момент времени  $t$ .

Повторяя почти дословно рассуждения, приведшие к вычислению момента сил тяжести, и учитывая, что сила Ампера направлена перпендикулярно оси проводника и индукции магнитного поля, можно показать, что величина момента сил Ампера, действующих на проводник  $OA$  относительно оси вращения, равна

$$M_A = 0,5 B r^2 I(t).$$

Поскольку сумма моментов сил Ампера и сил тяжести относительно оси вращения должна быть равна нулю, сила тока, текущего по проводнику, должна изменяться по закону

$$I(t) = \frac{mg}{Br} \cos \omega t,$$

причем ток этот направлен так, как указано на рисунке.

Согласно закону Ома, искомая ЭДС источника напряжения должна быть равна

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_1 + RI(t) = \frac{B\omega r^2}{2} + \frac{Rmg}{Br} \cos \omega t.$$

8. Согласно приведенному в условии графику, в течение промежутков времени  $0 \leq t \leq 2T/3$  и  $2T/3 \leq t \leq T$  проекция вектора индукции однородного внешнего магнитного поля на ось кольца равномерно изменяется на величину  $2B_0$ . На основании закона электромагнитной индукции можно утверждать, что в течение времени  $\tau_1 = 2T/3$  в кольце действуют сторонние электрические силы, величина ЭДС которых равна

$$\mathcal{E}_1 = \pi a^2 \frac{2B_0}{\tau_1} = \frac{3\pi a^2 B_0}{T},$$

а в оставшуюся часть периода  $\tau_2 = T/3$  величина ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E}_2 = \pi a^2 \frac{2B_0}{\tau_2} = \frac{6\pi a^2 B_0}{T}.$$

В соответствии с законом Ома, в течение первой и второй частей периода сила тока в кольце равна, соответственно,

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R} \text{ и } I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R},$$

а потому, согласно закону Джоуля–Ленца, в кольце за пери-

од должно выделяться количество теплоты

$$Q = (I_1^2 \tau_1 + I_2^2 \tau_2) R.$$

Поскольку средняя за период тепловая мощность равна отношению количества теплоты, выделившегося за период, к длительности периода, получаем, что искомая средняя тепловая мощность равна

$$P = \frac{Q}{T} = \frac{18\pi^2 a^4 B_0^2}{RT^2}.$$

9. По условию задачи отношение диаметра  $b$  линзы к расстоянию  $d$ , на котором находится от нее точечный источник  $S$ , существенно меньше единицы, поэтому можно считать, что все лучи от этого источника, проходящие через линзу, образуют с ее главной оптической осью малые углы, т.е. выполняется так называемое параксиальное приближение. Следовательно, все прошедшие сквозь линзу лучи должны пересекаться в одной точке, создавая действительное точечное изображение источника, находящееся, согласно формуле тонкой линзы, на расстоянии

$$f = \frac{d}{dD - 1}$$

от ее главной плоскости (мы учли, что источник находится перед линзой на расстоянии  $d = 30$  см, большем ее фокусного расстояния  $F = D^{-1} = 20$  см).

После установки пластинки все падающие на линзу лучи, за исключением луча, идущего вдоль главной оптической оси

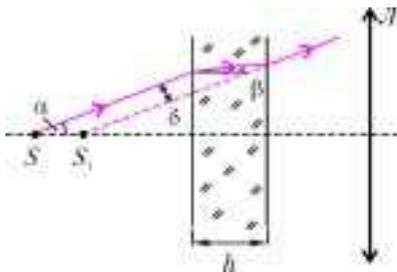


Рис.26

линзы, будут испытывать преломление в пластинке. На рисунке 26 показан ход одного из лучей, образующих с главной оптической осью линзы  $L$  угол  $\alpha$ . После преломления на передней грани пластинки этот луч будет распространяться в пластинке

под углом  $\beta$  к перпендикуляру, восстановленному в точке падения к поверхности пластинки. Учитывая, что пластинка является плоско параллельной и по обе стороны от нее находится одна и та же среда, на основании закона преломления получим, что после прохождения пластинки направление распространения луча не изменится, но он сместится на расстояние  $\delta$ . Из рисунка видно, что

$$\delta = \frac{h}{\cos \beta} \sin(\alpha - \beta),$$

при этом точка  $S_1$  пересечения продолжения выходящего из пластинки луча с главной оптической осью линзы сместится к линзе относительно источника  $S$  на расстояние

$$SS_1 = \frac{\delta}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cos \beta} h = (1 - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta) h.$$

Из этого выражения видно, что продолжения лучей, выходящих из источника под разными углами, будут пересекать главную оптическую ось линзы, вообще говоря, в разных точках, а потому изображение источника, формируемого линзой, при наличии перед ней плоскопараллельной пластинки будет представлять собой не точку, а некоторый отрезок прямой. Однако учитывая, что для малых углов  $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$  и  $\sin \beta \approx \operatorname{tg} \beta \approx \alpha/n$ , в рассматриваемом случае получим

$$SS_1 = (1 - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta) h \approx (1 - \beta/\alpha) h \approx (1 - n^{-1}) h,$$

т.е. продолжения всех лучей, выходящих из пластинки и падающих на линзу, пересекаются в одной точке  $S_1$ , находящейся перед линзой на расстоянии

$$d_1 = d - SS_1 = d - (1 - n^{-1}) h.$$

Изображение этой точки, согласно формуле тонкой линзы, должно находиться от линзы на расстоянии

$$f_1 = \frac{d_1}{d_1 D - 1}.$$

Таким образом, изображение источника удалится от главной плоскости линзы на расстояние

$$\Delta x = f_1 - f = \frac{(n-1)h}{((dD-1)n - (n-1)hD)(dD-1)} = 40 \text{ см}.$$

10. Из условия задачи следует, что участок верхней границы жидкости, освещаемый светом, нужно считать горизонтальным, а изменение интенсивности света обусловлено интерференцией световых пучков, отраженных от границ жидкости.

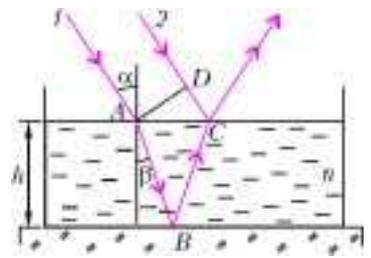


Рис.27

На рисунке 27 показан ход двух лучей падающего пучка. Часть луча  $1$ , испытав преломление на верхней границе жидкости в точке  $A$  под углом  $\beta$ , падает на границу жидкость-стекло в точке  $B$  и после частичного отражения от стекла, испытав преломление на верхней границе, выходит из жидкости в точке  $C$ . Луч  $2$ , падающий на верхнюю границу жидкости в точке  $C$ , испытывает частичное отражение от этой границы. Основываясь на законах отражения и преломления света, можно показать, что выходящая из жидкости часть первого луча и отраженная от верхней границы часть второго луча будут распространяться в одном и том же направлении (под углом  $\alpha$  к вертикали) и могут интерферировать.

Поскольку налитый слой жидкости тонкий, следует считать, что разность фаз налагающихся лучей не зависит от времени, т.е. эти лучи когерентные. Поэтому в те моменты времени, когда наблюдается максимум интенсивности отраженного света, оптическая разность хода налагающихся лучей должна быть кратна целому числу длин волн  $\lambda$  падающего на поверхность жидкости света. При вычислении разности хода учтем, что при отражении света от оптически более плотной среды происходит «потеря половины длины волны». Если же отражение происходит от оптически менее плотной среды, то указанное явление отсутствует. Следовательно, если показатель  $n_1$  преломления стекла больше  $n$ , то разность хода этих лучей равна

$$\delta_1 = AB + BC - CD = \frac{2hn}{\cos \beta} - 2h \operatorname{tg} \beta \sin \alpha = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha},$$

так как  $\sin \alpha = n \sin \beta$ . При  $n_1 < n$  разность хода составляет

$$\delta_2 = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}.$$

При максимальной интенсивности  $\delta = k\lambda$ , где  $k$  – порядок интерференционного максимума. Поскольку за время  $\tau$  толщина слоя уменьшается на  $\Delta h = v\tau$ , а порядок интерференции уменьшается на единицу, то

$$2v\tau\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \lambda.$$

Таким образом, средняя скорость уменьшения толщины слоя жидкости вне зависимости от соотношения между показателя-

ми преломления жидкости и стекла равна

$$v = \frac{\lambda}{2\tau\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1.  $a_{\min} = \frac{v_0}{2\left(\frac{H-h}{u} - \frac{l}{v_0}\right)} = 0,625 \text{ м/с}^2.$
2.  $m = \frac{\rho S v_0}{g} \left(v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}\right) = 1,44 \text{ кг}.$
3.  $a_{\max} = g \sqrt{\frac{H(2R-H)}{R-H}} \approx 13,1 \text{ м/с}^2.$
4.  $\beta = \arctg\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha\right) = \arctg \frac{1}{2} \approx 26^\circ 34'.$
5.  $p_1 = \frac{p_0}{2} - \frac{kl}{S} + \sqrt{\frac{p_0^2}{4} + \left(\frac{kl}{S}\right)^2}.$
6.  $A = \frac{3}{20} Q_{23} = 30 \text{ Дж}.$
7.  $n = k = 2.$
8.  $\Delta x = \frac{3}{5} \frac{\Delta m}{m} x.$
9.  $n = 1 + \frac{q^2}{2\varepsilon_0 p_0 S^2}.$
10.  $l = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0 \mu mg} - l_0$  при  $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2} > \mu mg, l = 0$  при  $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2} \leq \mu mg.$
11.  $\eta = 1 - \frac{PR}{\varepsilon^2} = 0,6.$
12.  $v_{\min} = \sqrt{5gl + \frac{q^2 B^2 l^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 g}{q^2 B^2 l}}\right)}.$
13.  $R = \frac{a}{\sin \frac{\pi-\beta}{2} - \sin \frac{\pi-\alpha}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \approx 6,3 \text{ см}.$
14.  $b \approx a(2n-1) = 2a.$
15.  $R_{\min} = \frac{nd}{n-1} = 3 \text{ мм}.$
16.  $\Delta l = l_1 - l_2 = \frac{dh(v_1 - v_2)}{eU} \approx 1 \text{ мм}.$

Химический факультет

Вариант 1

3. В интервале  $0 \leq t \leq 1 \text{ с}.$
4. См. рис.28.
5. Увеличилось бы в 4 раза.
6.  $a = \frac{F}{m} (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu g \approx 2,2 \text{ м/с}^2.$

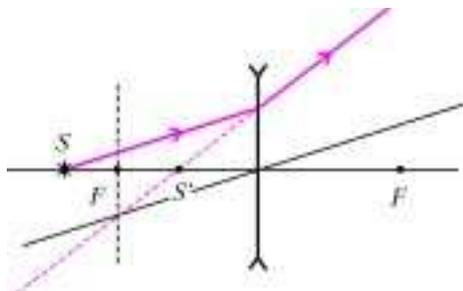


Рис. 28

7.  $T = \frac{8\pi R}{e} \sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 R m}{7}}.$
8.  $A = \frac{\rho g a^4}{18} \approx 0,06 \text{ Дж}.$
9.  $\Delta U = Q - \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} = 500 \text{ Дж}.$
10.  $Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{C\varepsilon^2}{2} = 10^{-2} \text{ Дж}.$

Вариант 2

3.  $Q = \frac{I_m^2 RT}{2} = 80 \text{ Дж}.$
4. Уменьшится в 2 раза.
5. См. рис.29.
6.  $N = \frac{W\lambda}{hc} \approx 3 \cdot 10^{13}.$
7.  $v_{\text{ср}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \sqrt{Hg} \approx$   
 $\approx 12,1 \text{ м/с}.$
8.  $m_b = \frac{m(c_1 t - c_2 t_2 + \lambda)}{c_1(t_1 - t)} \approx 80 \text{ г}.$
9.  $\Gamma = \frac{1}{3}.$
10.  $r = R \frac{U_2 - U_1}{2U_1 - U_2} = 4 \text{ Ом}.$

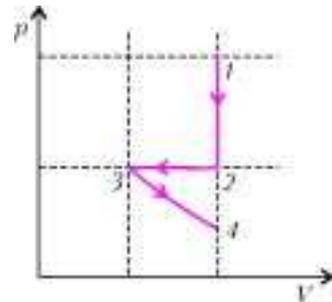


Рис. 29

### Поправка

В материале «Новый прием в школы-интернаты при университетах» («Квант» №6 за 2004 год) в условии задачи 3 по математике для поступающих в 11 класс вкралась ошибка. Следует читать: «...Точка  $D$  на стороне  $BC$  такова, что  $BD = \frac{1}{2} AB$ ...»

# КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, С.П.Коновалов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Акатьева, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,  
Е.А.Силина, П.И.Чернуский**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева**

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»;  
тел.: 930-56-48;  
e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,  
phys@kvant.info**

Заказ №

Отпечатано на ГУ РПП, г. Ржев, ул. Урицкого, 91

При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера»,  
тел.: (095) 234-01-10

## СОВЕТСКИЙ ВУНДЕРКИНД

Десятый чемпион мира Борис Спасский – второй вундеркинд среди шахматных королей и вместе с тем первый советский шахматный вундеркинд.

Среди великих игроков Спасский был первым, кто с самого начала и вплоть до завоевания короны находился под опекой замечательных тренеров. С шахматами Борис познакомился в 5 лет в детском доме в Кировской области, где он оказался с группой детей, вывезенных из блокадного Ленинграда. Игра сразу увлекла мальчика, причем ему особенно нравилась ладья. Именно ее движение в будущем символически отражало стиль чемпиона – прямой и ясный. Наверное, проявить себя за шахматной доской маленький Боря мог бы еще раньше, но помешала война: шел 1942 год, и было не до развлечений.

Спустя два года, после возвращения из эвакуации, интерес Бориса к шахматам не угас. И в 1946 Спасский впервые переступил порог Ленинградского Дворца пионеров. Девятилетний мальчуган сразу попал в центр всеобщего внимания. Маленький, худенький, необыкновенно застенчивый и скромный, он никогда не снимал своей зеленой курточки, позднее не раз обыгранной журналистами, – его единственном наряде тех дней.

Первым наставником Спасского стал Владимир Зак. Как шахматист-практик, он не преодолел мастерский рубеж, но беззаветно любил шахматы, понимал их, обладал высокой эрудицией и в области педагогики безусловно был мастером.

Спасский уже тогда был предан шахматам, и Зак подметил, что мальчик мог часами не отвлекаться от доски, причем внимание его не рассеивалось. Именно эта особенность, совсем не характерная для детей, подсказала педагогу, что он имеет дело с незаурядным явлением. Правда, опасаясь, что чрезмерное увлечение шахматами отразится на физическом развитии мальчика, Зак дозировал занятия, отправлял мальчика на каток, сам учил его плавать. Интерес к спорту, который он привил Борису, сохранился у него на всю жизнь и безусловно сыграл важную роль в его шахматной карьере.

Борис делал успехи буквально на глазах: в 12 он уже кандидат в мастера, в 16 – международный мастер, а в 18 – чемпион мира среди юношей, международный гроссмейстер и претендент на шахматную корону.

Но мы забежали вперед, вернемся в послевоенные годы. В 1947 Спасский – участник полуфинала юношеского первенства России, в 1949 – чемпион Ленинграда среди школьников. В этом турнире Спасский сыграл партию, с которой начинаются все сборники его произведений.

### Спасский – Автономов

Ленинград, 1949

#### Принятый ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. c4 dc 3. ♖f3 ♗f6 4. e3 c5 5. ♗:c4 e6 6. 0-0 a6 7. ♜e2 b5 8. ♜b3 ♗c6 9. ♗c3 cd? Черные отстали в развитии, и, прежде чем создать противнику изолированную пешку, им следовало отбросить коня: 9...b4 10. ♗a4 cd 11. ♗d1 ♜e7 12. ed 0-0. 10. ♗d1 ♜b7. Заслуживало внимания 10... ♜e7.

11. ed ♗b4. Конем лучше было пойти на a5, чтобы побыстрее избавиться от белопольного слона. Теперь Спасский проводит классический прорыв в центре.



12. d5! ♗b:d5. И на 12... ♜:d5 очень сильно 13. ♗g5, а 12... ♗f:d5 сразу проигрывает ввиду 13. a3. 13. ♗g5! ♜e7 14. ♗:f6 gf 15. ♗:d5 ♜:d5 16. ♗:d5 ed 17. ♗d4. Черные беспомощны: грозит 18. ♗f5, а на 17... ♜d7 следует 18. ♗e1 ♗a7 19. ♗ac1 0-0 20. ♗c6. 17... ♗f8 18. ♗f5 b5 19. ♗:d5! ♜:d5 20. ♜:e7+ ♗g8 21. ♜:f6. Черные сдались. Ценный пример, иллюстрирующий активную игру при наличии изолированной пешки «d». Партией мог бы гордиться и опытный шахматист, а ведь Спасскому еще не исполнилось 13.

В целом игра Спасского в начале 50-х была несколько суховата, он старался действовать строго и осмотрительно, отказывался от малейшего риска, часто предлагал ничью. «Я слишком верил в неизбежность позиционных законов, – позднее говорил Спасский, – играл в «правильные шахматы»: методично, но сухо и скучно, в моих партиях почти не было тактики».

В 1952 году, почувствовав, что занятия с Заком больше не приносят ему пользы, Спасский вступил в новый

творческий союз – с опытным тренером Александром Толушем.

Толуш обладал удивительной тактической зоркостью, изобретательно атаковал, любил преподносить соперникам сюрпризы, резко меняющие ход борьбы, придумывал коварные ловушки, ловко расставлял невидимые сети. И после нескольких месяцев работы в похожем стиле заиграл и 15-летний Спасский.

Первым совместным крещением Спасского и Толуша стал крупный турнир в Бухаресте, на который они отправились в 1953 году. Ленинградский дуэт выступил блестяще. Толуш вышел победителем и завоевал звание международного гроссмейстера, а Спасский разделил 4–6-е места и стал международным мастером.

Осенью 1954 в Ленинграде состоялся полуфинал очередного чемпионата СССР, в который Спасского пустили без отбора, по совокупности успехов. И, как говорится, он полностью оправдал доверие: занял третье место и вышел в финал. За бортом остались такие сильные игроки, как Бондаревский, Болеславский и Полугаевский. Вот один из разгромов, учиненных Спасским в этом турнире.

### Спасский – Зурахов

Ленинград, 1954

#### Спилианская защита

1. e4 c5 2. ♗f3 d6 3. d4 cd 4. ♗:d4 ♗f6 5. ♗c3 a6 6. ♗g5 e6 7. ♜f3 b6 8. ♜b4 ♜e7. В финале надежнее играл против Спасского Петросян: 8... ♗bd7 9. 0-0-0 ♗e5! 10. ♜e2 g5! 11. ♗g3 ♜d7, и партия закончилась ничью. 9. 0-0-0 ♜c7 10. ♜e2 ♗c6. Точнее предварительное 10... ♜d7. 11. ♗:c6 bc 12. e5! Временная жертва пешки, создающая противнику дискомфорт. 12...de 13. ♗be1 0-0 14. ♜d3 ♗b8 15. ♗g3 ♜d6 16. ♜e2 ♗d7 17. ♜c4! ♗b6 18. ♗:d6! ♜:d6 19. ♜:e5 ♜c5 20. ♜g4! f6 21. ♜:e6+ ♜:e6 22. ♜:e6+ ♗h8 23. ♜:b8 ♗:b8 24. ♗e4 ♜b5 25. ♗d1 ♗d5 26. b3 ♗b4. У белых лишняя пешка в эндшпиле, но при 12... ♜e2 финал не был бы столь стремителен. 27. ♜d6 ♗:a2+ 28. ♗b2 ♗b4. 29. ♗:f6! ♜b6. Или 29... gf 30. ♜:f6+ ♗g8 31. ♗d7. 30. ♗d7. Черные сдались.

Это было последнее выступление Бориса перед его совершеннолетием, и финалу чемпионата страны он уже преодолел этот рубеж.

Е. Гук

Индексы:  
70465 - по каталогу "Роспечать"  
26040 - по каталогу "Пресса России"

## Университеты мира на монетах и банкнотах

К юбилейным датам старейших австрийских университетов банк Австрии выпустил специальные серебряные монеты: к 600-летию университета Вены (50 австрийских шиллингов, 1965 г.), к 400-летию университета Инсбрука (50 шиллингов, 1970 г.), к 350-летию университета Зальцбурга (50 шиллингов, 1972 г.) и к 400-летию университета Граца (500 шиллингов, 1985 г.). Портрет Зигмунда Фрейда представлен на банкноте достоинством в 50 австрийских шиллингов, а изображение главного корпуса Венского университета украшает банкноту достоинством в 1000 шиллингов.

