УТВЕРЖДЕНО
протокол № м-22/9 от 22.09.2022 г.
заседания Академического совета
образовательной программы
«Математика» (магистратура)

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет Математики

ПРОГРАММА

подготовки к экзамену для поступающих на образовательную программу магистратуры

«МАТЕМАТИКА»

по дисциплине «Математика»

Академический руководитель программы

проф. ф-та математики А. Л. Городенцев

Москва, 2022 год

СОДЕРЖАНИЕ

Информация о программе **3**
Профили обучения 3
Языки обучения 3
Общий конкурс и единый экзамен 3

Требования к поступающим **5**
Общая часть 5
Рекомендуемые учебники 6
Специальная часть «Математика» 7
Рекомендуемые учебники 7
Специальная часть «Математическая физика» 8
Рекомендуемые учебники 8

Демо-версия экзамена **9**
Решения задач 11

Дополнительные задачи **17**

Информация о программе

Профили обучения

На образовательной программе магистратуры «Математика» факультета математики НИУ ВШЭ имеется четыре профиля обучения:

- Алгебра, логика и теория чисел
- Анализ, динамические системы и теория вероятностей
- Математическая физика
- Топология, комбинаторика и теория представлений.

Вскоре после зачисления на программу все студенты должны выбрать себе профиль обучения в зависимости от своих научных интересов. Выбор профиля *никак не ограничен* результатами, полученными на вступительном экзамене, и языком, на котором предпочтительнее учиться. Каждый из профилей курируется своим мастером-наставником, который среди прочего помогает студентам в составлении индивидуального учебного плана и выборе научного руководителя для написания выпускной квалификационной работы, а также в целом освоиться с жизнью на факультете. Определиться с выбором профиля помогут специальные семинары наставников, которые проводятся с начала сентября. Выбор профиля накладывает обязательство посещать один из годовых студенческих научных семинаров и один из спецкурсов, рекомендованных данным профилем. Все остальные элементы индивидуального учебного плана (ИУП) каждый студент выбирает сам из общефакультетского пула курсов и курсов, предлагаемых партнёрами факультета. Индивидуальный учебный план должен быть одобрен научным руководителем и мастером-наставником.

Языки обучения

Обучение на программе «Математика» возможно на русском или на английском языках по выбору студента. Общефакультетский пул курсов позволяет составить ИУП и полностью освоить программу любого профиля обучения, беря курсы только на русском, или только на английском, или и те, и другие в произвольном сочетании. Выбор языка курсов никак не ограничен выбранным профилем обучения и результатами вступительного экзамена. По окончании программы у студентов, получивших не менее 85% кредитов за сдачу англоязычных курсов, а также написавших и защитивших курсовую и выпускную квалификационную работы на английском языке, в дипломе будет указано, что они обучались на англоязычной программе «Mathematics» — в некоторых случаях такая запись может заменить языковый сертификат.

Общий конкурс и единый экзамен

Зачисление на магистерскую программу «Математика» происходит по единому конкурсу, который проводится по результатам одного вступительного экзамена по математике, общего для всех абитуриентов вне зависимости от того, какой профиль они себе дальше выберут и на каком языке или языках будут учиться. Участники конкурса упорядочиваются по убыванию полученных на экзамене оценок, и все абитуриенты, чья оценка оказывается в пределах официально установленных проходных баллов для обучения на бюджетных или платных местах, считаются успешно прошедшими единый конкурс.

Вступительный экзамен заключается в письменном решении задач, условно разбитых на три группы: базовая математическая часть и две специальные части, одна из которых посвящена более специальным разделам математики, а другая — началам математической физики. Это сделано для того, чтобы абитуриенты с более «физическим» образованием имели те же возможности, что и абитуриенты с более «математическим». Итоговая оценка за экзамен вычисляется как $\min(100, S)$, где S — сумма баллов, полученных за решение ровно четырёх задач, за которые были выставлены наибольшие баллы. Количество баллов, даваемое за полное решение каждой задачи, указывается в её условии. Максимальная оценка за экзамен равна 100 и её заведомо можно получить, не решая задач одной из специальных частей экзамена.

В случае успешного прохождения конкурса ни результат экзамена, ни тематика зачтённых задач не накладывают никаких ограничений на дальнейший выбор профиля или языка обучения.

Точный регламент проведения экзамена представлен в отдельном документе.

Требования к поступающим

Экзамен может содержать (и обычно содержит) задачи, относящиеся к следующим разделам математики и элементарной физики[1].

Общая часть

- Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки, мультиномиальные коэффициенты, производящие функции, линейные рекурренты) и основы теории вероятностей (независимость событий и случайных величин, условные вероятности, математическое ожидание, дисперсия).
- Элементарная алгебра: поле комплексных чисел, формальные степенные ряды и многочлены, выражение симметрических функций от корней многочлена через его коэффициенты, а коэффициентов — через корни, полиномиальная интерполяция, кратные корни, алгоритм Евклида для многочленов, разложение рациональной функции на простейшие дроби и в степенной ряд, экспонента и логарифм, симметрическая группа, знак и цикловой тип перестановки.
- Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, двойственное пространство, решение систем линейных уравнений, определитель, ранг, характеристический и минимальный многочлены матриц и операторов, тождество Гамильтона – Кэли, собственные числа и собственные векторы, жорданова нормальная форма комплексной матрицы, вычисление аналитических функций от матриц и операторов, билинейные и квадратичные формы, ортогонализация, сигнатура вещественной квадратичной формы.
- Евклидова геометрия пространства $\mathbb{R}^n$: расстояние от точки до подпространства, углы между прямыми и гиперплоскостями, евклидов объём параллелепипеда и симплекса, кривые второго порядка на евклидовой плоскости.
- Одномерный и многомерный вещественный анализ: мощность множества, счетные и несчетные множества, пределы последовательностей и функций, числовые и функциональные ряды, ряд Тейлора, непрерывность и дифференцируемость функций и отображений $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, производные сложных и неявных функций, отыскание условных и безусловных экстремумов, первообразная и интеграл, сведение многомерных интегралов к повторным одномерным, несобственные интегралы, вычисление длины кривой и площади поверхности с помощью интегрирования. Открытые, замкнутые и компактные множества в $\mathbb{R}^n$. Гладкие подмногообразия в $\mathbb{R}^n$, их касательные пространства.
- Основы комплексного анализа: основная теорема алгебры, комплексная производная функции $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, голоморфные и мероморфные функции, интеграл Коши, ряды Лорана и радиус сходимости, теорема о вычетах, вычисление интегралов (включая неопределённые и несобственные) при помощи вычетов, многозначные функции, аналитическое продолжение вдоль пути.

[1] Приведённый выше порядок оценки экзамена позволяет получить максимальный балл, не владея всеми разделами программы и, в частности, не зная тематики одной из специальных частей. Опыт прошлых лет показывает, что для набора проходного балла достаточно освоить большинство тем общей части.

- Обыкновенные дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности решения, элементарные приёмы интегрирования (разделение переменных, однородные уравнения, линейные уравнения первого порядка, уравнения в дифференциалах, интегрирующий множитель), системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, определитель Вронского, уравнения с частными производными первого порядка, метод характеристик.

Рекомендуемые учебники

В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Ижевск: РХД, 2000.

В. И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными*, М: Фазис, 1999.

Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М: Факториал 1999.

И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, М: Наука 1971.

А. Л. Городенцев, *Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Части I, II*,
http://vyshka.math.ru/pspdf/textbooks/gorodentsev/algebra-1.pdf,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.

А. Л. Городенцев, *Геометрия*,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_total.pdf.

В. А. Зорич, *Математический анализ*, М: МЦНМО, 2007

А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М: Наука, 1976.

М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, М: Наука, 1973.

В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, *Геометрия*, М: МЦНМО, 1997.

В. В. Степанов, *Курс дифференциальных уравнений*, Едиториал УРСС, 2004.

В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и её приложения, Том 1*, М.: Мир, 1967

Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Лань, 2004.

Также см. список литературы и задач к программе итогового экзамена бакалавриата Факультета математики: https://www.hse.ru/ba/math/final_exam

Специальная часть «Математика»

- Элементы коммутативной алгебры: коммутативные кольца и их гомоморфизмы, идеалы и фактор кольца, кольца вычетов и китайская теорема об остатках, факториальность кольца многочленов от многих переменных, классификация конечно порождённых абелевых групп, поля и гомоморфизмы полей, характеристика, описание и примеры конечных полей.

- Элементы геометрии: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, взаимное расположение проективных и аффинных подпространств, выпуклые фигуры в $\mathbb{R}^n$, выпуклая оболочка, аффинные и проективные кривые и поверхности второго порядка (квадрики и коники).

- Элементы некоммутативной алгебры: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, фактор группы, прямое и полупрямое произведение групп, группы симметрий геометрических фигур, ассоциативные кольца и алгебры, матричные группы Ли GL_n, SL_n, SO_n, SU_n, понятие представления группы.

- Элементы топологии: метрические и топологические пространства, всюду плотные и нигде не плотные множества, компактность, связность, внутренность, замыкание, непрерывные отображения и гомеоморфизмы, гомотопии, фундаментальная группа (в том числе для S^n и $\mathbb{RP}^2$).

- Элементы функционального анализа: равномерная непрерывность и равномерная сходимость непрерывных функций, мера Лебега, гильбертовы пространства (включая пространства суммируемых с квадратом функций).

Рекомендуемые учебники

Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М: Факториал 1999.

О. Я. Виро, О. А. Иванов, В. М. Харламов, Н. Ю. Нецветаев, *Элементарная топология*, СПГУ, 2007.

А. Л. Городенцев, *Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Части I, II*,
http://vyshka.math.ru/pspdf/textbooks/gorodentsev/algebra-1.pdf,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.

А. Л. Городенцев, *Геометрия*,
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_total.pdf.

А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М: Наука, 1976.

В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, *Геометрия*, М: МЦНМО, 1997.

Дополнительная литература: https://math.hse.ru/books

Специальная часть «Математическая физика»

- Основы классической механики: законы Ньютона, потенциальные силы, работа силы вдоль траектории, законы сохранения, лагранжиан и уравнения движения (уравнения Эйлера–Лагранжа) для механической системы в поле потенциальных сил.
- Классическая электродинамика в вакууме: закон Кулона, поле и потенциал, поля и энергия взаимодействия простейших конфигураций зарядов (сферы, плоскости, точечные заряды). Движение заряженной частицы в однородном магнитном и электрическом поле, сила Лоренца.

Рекомендуемые учебники

В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, М: Наука, 1979.

Г. Голдстейн, *Классическая механика*, М., Наука, 1974.

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, М: Физматлит, 2004.

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, М: Физматлит, 2004.

Демонстрационный вариант экзаменационного задания

На экзамене разрешается иметь при себе питьевую воду и шоколад (или их аналоги). На выполнение задания отводится 180 минут. Во время экзамена можно пользоваться только ручкой и чистой бумагой. Использование иных носителей информации, в том числе любых электронных устройств или шпаргалок, строго запрещено, равно как и всякое общение с кем-либо кроме экзаменаторов. Нарушение этих правил является поводом для отстранения от вступительных испытаний. Количество баллов, даваемое за полное решение каждой задачи, указано в её условии. Один ответ, приведённый без обоснования, оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Можно сдать решения любого числа задач из любых частей задания в любой последовательности. Однако, **на итоговую оценку влияет только сумма баллов S, полученных за решение *ровно четырёх задач* — тех, за которые выставлены наибольшие баллы** (задача, разбитая на пункты, учитывается как одна). Итоговая оценка равна $\min(100, S)$.

Общая часть

Задача 1 (21 балл). Пусть числа $p, q \in \mathbb{C}$ таковы, что многочлен $f = x^3 + px + q$ имеет три различных корня. Существует ли многочлен второй степени, значение которого в каждом из корней многочлена f равно произведению двух других корней многочлена f? Если да, явно вычислите его коэффициенты. Если нет, объясните почему.

Задача 2. Существует ли такая комплексная 3×3 матрица X, что матрица e^X равна

а) [14 баллов] $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ б) [7 баллов] $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & 5 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$?

Если да, предъявите такую матрицу явно. Если нет, объясните почему.

Задача 3 (21 балл). Игральный кубик бросают до тех пор, пока одно и то же число очков не выпадет два раза подряд. Найдите математическое ожидание количества сделанных бросков.

Задача 4 (21 балл). На координатной плоскости вправо по оси абсцисс с единичной скоростью бежит суслик, а по узкой реке в форме графика функции $y = 1/(x+1)$ плывёт акула, всё время держащаяся в самой близкой к суслику точке реки. Какова абсолютная величина скорости акулы в тот момент, когда она пересекает ось ординат?

Специальная часть «Математика»

Задача 5. Являются ли двумерная сфера с тремя различными выколотыми точками и двумерный тор с одной выколотой точкой

а) [14 баллов] гомеоморфными?

б) [14 баллов] гомотопически эквивалентными?

Задача 6. Допускает ли симметрическая группа S_4

а) [14 баллов] нетривиальный гомоморфизм в группу нечётного порядка?

б) [14 баллов] вложение в группу $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$?

Если да, постройте явный пример. Если нет, объясните почему.

ЗАДАЧА 7. Точечная частица массы m скользит по поверхности, заданной в декартовых прямоугольных координатах x, y, z евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ уравнением

$$z = e^{-(x^2+y^2)/2} .$$

Частица соединена с началом координат невесомой пружиной, потенциальная энергия деформации которой описывается формулой $U(\ell) = k\ell^2/2$, где ℓ — длина пружины, а k — коэффициент её упругости.

А) [14 баллов] Введя подходящие обобщённые координаты, составьте лагранжиан этой механической системы и выпишите уравнения Эйлера – Лагранжа.

Б) [8 баллов] Приведите явные формулы для всех интегралов движения (законов сохранения).

В) [6 баллов] Докажите, что уравнения движения допускают стационарные решения, отвечающие постоянному значению z и найдите ограничение на параметры движения, обеспечивающее существование стационарного решения.

ЗАДАЧА 8 (28 БАЛЛОВ). На поверхности жёсткой непроводящей полусферы массы M и радиуса R, способной свободно перемещаться в пространстве, равномерно распределён заряд Q. В центре большого круга, служащего основанием полусферы, расположен точечный заряд $-Q$ массы m. Какова минимальная скорость, которую надо сообщить ему вдоль оси симметрии полусферы в противоположном от её вершины направлении, чтобы заряд смог удалиться от центра на расстояние R? Всеми силами, кроме электростатических можно пренебречь.

Решения задач демонстрационного варианта

Решение задачи 1

Ответ: такой многочлен заведомо существует. Чтобы написать его, обозначим корни данного многочлена $x^3 + px + q$ через α_1, α_2, α_3. По формулам Виета,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{1}$$
$$\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 = p \tag{2}$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -q\,. \tag{3}$$

Согласно интерполяционной формуле Лагранжа, квадратный трёхчлен, принимающий заданные значения $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2$ при $x = \alpha_1$, α_2, α_3, равен

$$\alpha_2\alpha_3\frac{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)} + \alpha_1\alpha_3\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)} + \alpha_1\alpha_2\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\,.$$

Приводя все дроби к общему знаменателю $\Delta = (\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)$ и пользуясь тем, что в силу соотношения (1) при всех $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$

$$(x-\alpha_i)(x-\alpha_j) = x^2 + \alpha_k x + \alpha_i\alpha_j\,,$$

перепишем три слагаемых предыдущей суммы как

$$\begin{aligned}
&+\frac{\alpha_2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)}{\Delta}(x^2+\alpha_1 x+\alpha_2\alpha_3)\\
&-\frac{\alpha_1\alpha_3(\alpha_3-\alpha_1)}{\Delta}(x^2+\alpha_2 x+\alpha_1\alpha_3)\\
&+\frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}{\Delta}(x^2+\alpha_3 x+\alpha_1\alpha_2)\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, коэффициент при x^2 у искомого квадратного трёхчлена равен

$$\frac{\alpha_2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)-\alpha_1\alpha_3(\alpha_3-\alpha_1)+\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)} = 1$$

(числитель, будучи кососимметричным[1] многочленом от α_1, α_2, α_3, делится на произведение их разностей, частное имеет степень нуль, т. е. является константой, и равно 1, так как лексикографически старшие мономы числителя и знаменателя оба равны $-\alpha_1^2\alpha_2$). Коэффициент при x, с учётом соотношения (3), равен

$$-\frac{q}{\Delta}\big((\alpha_2-\alpha_1)-(\alpha_3-\alpha_1)+(\alpha_2-\alpha_1)\big) = 0\,.$$

Наконец, свободный член равен

$$\frac{\alpha_2^2\alpha_3^2(\alpha_3-\alpha_2)-\alpha_1^2\alpha_3^2(\alpha_3-\alpha_1)+\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)} = p$$

(частное — однородный симметрический многочлен степени 2 со старшим мономом $\alpha_1\alpha_2$ — это левая часть (2)). Итак, искомый многочлен равен $x^2 + p$.

[1] То есть зануляющимся и при $\alpha_3 = \alpha_2$, и при $\alpha_3 = \alpha_1$, и при $\alpha_2 = \alpha_1$.

В принципе, до этого ответа вполне возможно догадаться путём некоторого количества удачно сложившихся проб ☺, после чего проверить его явным вычислением. Другой способ — решить систему из трёх линейных уравнений

$$a\alpha_i^2 + b\alpha_i + c = \alpha_j\alpha_k$$

на коэффициенты a, b, c искомого квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, исключая неизвестные из системы при помощи соотношений (1)–(3).

Решение задачи 2

Ответы: в (а) — да, в (б) — нет. Объяснение к (б): поскольку $e^X e^{-X} = E$, все матрицы вида e^X обратимы, а матрица в (б) имеет нулевой определитель.

Напротив, матрица в (а) имеет характеристический многочлен

$$t^3 + t^2 - t - 1 = (t+1)^2(t-1)$$

с двукратным корнем $t = -1$ и простым корнем $t = 1$. Комплексная аналитическая функция $\ln t$ имеет ветвь, определённую в окрестностях обеих точек $t = \pm 1$ и принимающую в этих точках значения $\ln 1 = 0$ и $\ln(-1) = \pi i$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$. Поэтому определён

$$\ln\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ -5 & 6 & 4\end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ -5 & 6 & 4\end{pmatrix}^2 + b\cdot\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ -5 & 6 & 4\end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

где константы a, b, c таковы, что квадратный трёхчлен $p(t) = at^2 + bt + c$ имеет в точках $t = 1$ и $t = -1$ те же разложения Тейлора вплоть до, соответственно, нулевого и первого порядков включительно, что и выбранная нами ветвь логарифма, т. е.

$$p(1) = \ln(1) = 0\,, \quad p(-1) = \ln(-1) = \pi i\,, \quad p'(-1) = \ln'(-1) = -1\,.$$

Это приводит к системе линейных уравнений на коэффициенты a, b, c:

$$a + b + c = 0\,, \quad a - b + c = \pi i\,, \quad -2a + b = -1\,,$$

решая которую[1], получаем $a = (2 - \pi i)/4$, $b = -\pi i/2$, $c = (-2 + 3\pi i)/4$ и

$$X = \ln\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ -5 & 6 & 4\end{pmatrix} = \frac{2-\pi i}{4}\begin{pmatrix}3 & -4 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -4 & -1\end{pmatrix} - \frac{2\pi i}{4}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ -5 & 6 & 4\end{pmatrix} + \frac{-2+3\pi i}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1+\pi i & -2 & -1\\ -\pi i & 2\pi i & \pi i\\ 1+2\pi i & -2-2\pi i & -1-\pi i\end{pmatrix}.$$

[1] Например, по правилу Крамера.

Решение задачи 3

Ответ: 7. Обозначим через F_n событие, состоящее в том, что при n-м броске впервые выпадает то же число очков, что и при предыдущем броске, через p — вероятность выпадания при очередном броске именно того числа очков, что выпало при предыдущем броске, а через $q = 1 - p$ — вероятность противоположного события. Тогда

$$p = 1/6\,, \quad q = 5/6\,, \quad \mathbb{P}(F_n) = q^{n-2}p$$

(на 2-м, 3-м, … , $(n-1)$-м бросках выпадает не то, что на предыдущем броске, а на n-м броске — то же, что и на $(n-1)$-м). Искомое математическое ожидание равно

$$\sum_{n\geqslant 2} n\cdot\mathbb{P}(F_n) = \sum_{n\geqslant 2} nq^{n-2}p = \frac{p}{q}\sum_{n\geqslant 2} nq^{n-1} = \frac{p}{q}\Big(-1+\frac{d}{dq}(1-q)^{-1}\Big) =$$
$$= \frac{p}{q}\left(-1+(1-q)^{-2}\right) = \frac{p}{1-p}\left(p^{-2}-1\right) = p^{-1}+1 = 7\,.$$

В третьем равенстве мы воспользовались тем, что функция $(1-z)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} z^n$ аналитична в круге $|z| < 1$, и её производная $(1-z)^{-2} = \frac{d}{dz}(1-z)^{-1} = \sum_{n\geqslant 1} nz^{n-1}$.

Решение задачи 4

Ответ: $\sqrt{2}/4$. Пусть в момент времени t суслик находится в точке $s = s(t) = (t, 0)$, а акула — в точке $a = a(t) = (x(t), y(t))$, где $y = (1+x)^{-1}$. Вектор скорости акулы равен

$$v(t) = \left(x'_t, y'_t\right) = \left(x'_t, y'_x\cdot x'_t\right) = \left(1, -(1+x)^{-2}\right)\cdot x'_t\,. \tag{4}$$

Поскольку a является ближайшей к s точкой графика, вектор

$$\overrightarrow{sa} = \left(x-t, (1+x)^{-1}\right)$$

перпендикулярен вектору $\left(1, -(1+x)^{-2}\right)$, направленному вдоль проходящей через точку a касательной к графику функции $y = (1+x)^{-1}$. Поэтому скалярное произведение этих векторов $x - t - (1+x)^{-3} = 0$, откуда $t = x - (1+x)^{-3}$. По формуле для производной обратной функции $x'_t = 1/t'_x = \left(1+3(1+x)^{-4}\right)^{-1}$. Подставляя это в (4) и полагая $x = 0$, получаем $v(t)\,\big|_{x=0} = (1,-1)/4$.

Решение задачи 5

Ответы: в (а) — нет, в (б) — да. По теореме Жордана, петля $C \subset \mathbb{R}^2$, являющаяся образом непрерывного вложения $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ окружности в плоскость, всегда разбивает плоскость на компоненты в том смысле, что пространство $\mathbb{R}^2 \smallsetminus C$ не является линейно связным. Очевидно, что теорема Жордана остаётся верной и после удаления из $\mathbb{R}^2$ любого конечного множества точек. Поскольку сфера без точки гомеоморфна[1] $\mathbb{R}^2$, теорема Жордана остаётся верной при замене $\mathbb{R}^2$ на сферу с тремя выколотыми точками. Если бы последняя была гомеоморфна тору с выколотой точкой, то теорема Жордана была бы верна и для тора. Но это не так: на торе есть петли[2],

[1]Например, при помощи стереографической проекции из выколотой точки.
[2]Например, экватор или меридиан.

при удалении которых получается пространство, гомеоморфное цилиндру, а он линейно связен. Это доказывает (а).

Что касается (б), то оба пространства гомотопически эквивалентны букету из двух окружностей. В самом деле, тор с выколотой точкой получается из квадрата с выколотой внутренней точкой отождествлением каждой из двух пар противоположных сторон в один отрезок с сохранением ориентации. Квадрат с выколотой внутренней точкой стягивается на свой внешний контур $\square$ так, что все точки контура остаются на месте в процессе гомотопии. В результате последующей склейки противоположных рёбер этого контура получится пара окружностей с одной общей точкой, в которую перейдут все четыре вершины квадрата. Сфера с тремя выколотыми точками стягивается на диск с двумя выколотыми внутренними точками, который в свою очередь стягивается на граф θ, а этот граф — на букет двух окружностей (стягиванием горизонтальной перемычки в точку).

Решение задачи 6

Ответ в обоих случаях — нет. Так как $|S_4| = 24 = 8 \cdot 3$, нетривиальный гомоморфизм из S_4 в группу нечётного порядка должен иметь ядром нормальную подгруппу порядка 8, но нетривиальные нормальные подгруппы в S_4 исчерпываются[1] знакопеременной подгруппой порядка 12 и подгруппой Клейна, имеющей порядок 4.

Гомоморфизм $S_4 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ задаёт двумерное линейное представление группы S_4. Такое представление либо неприводимо, либо является прямой суммой двух одномерных. Но двумерное неприводимое представление S_4 пропускается через эпиморфизм $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ и имеет ядром группу Клейна, а оба одномерных представления содержат в ядре знакопеременную подгруппу $A_4 \subset S_4$. Таким образом, любое двумерное линейное представление S_4 имеет нетривиальное ядро и тем самым не является вложением.

Решение задачи 7

Учитывая осевую симметрию поверхности, задачу удобно решать в цилиндрических координатах (ϱ, φ, z) пространства $\mathbb{R}^3$, связанных с декартовыми формулами $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$ и принимающих значения $z \in (-\infty, +\infty)$, $\varrho \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. В этих координатах уравнение поверхности имеет вид $z = e^{-\varrho^2/2}$. Лагранжиан системы $L = T - U$ равен разности кинетической и потенциальной энергии частицы на поверхности. Кинетическая энергия

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2(1 + \rho^2 e^{-\rho^2}) + \rho^2\dot{\varphi}^2\right),$$

где точка означает дифференцирование по времени, а z-компонента скорости $\dot{z} = e^{-\varrho^2/2}\varrho\dot{\varrho}$ выражена через ϱ и $\dot{\varrho}$ из уравнения поверхности. Длина пружины выражается через координаты точки на поверхности по теореме Пифагора $\ell^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 + e^{-\varrho^2}$ Таким образом, Лагранжиан системы равен

$$L(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2(1 + \rho^2 e^{-\rho^2}) + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{k}{2}(\rho^2 + e^{-\rho^2})$$

[1] Один из (многих) способов в этом убедиться таков: каждая нормальная подгруппа является объединением классов сопряжённости, коих в S_4 имеется пять: тождественная перестановка, 3 пары независимых транспозиций, 8 циклов длины 3 и по 6 циклов длины 4 и длины 2, так что число элементов в нормальной подгруппе может быть равно только $1 + 3\varepsilon_1 + 8\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 + 6\varepsilon_4$, где каждый ε_i равен 0 или 1, и вдобавок должно делить 24.

Так как у системы две степени свободы, имеются два независимых уравнения Эйлера – Лагранжа. Первое имеет вид $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$, откуда $\frac{d}{dt}(m\varrho^2\dot\varphi) = 0$. Поскольку Лагранжиан не зависит от угловой координаты φ, это уравнение определяет один из интегралов движения — z-проекцию вектора углового момента частицы: $J_z = m\varrho^2\dot\varphi = \mathrm{const}$. Из второго уравнения Эйлера-Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varrho} = \frac{\partial L}{\partial \varrho}$ вытекает, что

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot\varrho(1+\varrho^2e^{-\varrho^2})\right) = m\varrho\dot\varphi^2 - k\varrho(1-e^{-\varrho^2}) + \frac{m\dot\varrho^2}{2}\frac{d}{d\varrho}(\varrho^2e^{-\varrho^2})\,.$$

Поскольку Лагранжиан не зависит явно от времени: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, у системы есть второй интеграл движения — полная механическая энергия $E = T + U = \mathrm{const}$. Это решает пункты (а) и (б).

Теперь рассмотрим вопрос о движении на некотором постоянном уровне $0 < z_0 \leqslant 1$. В силу уравнения поверхности значению $z = z_0$ отвечает постоянное значение $\varrho = \varrho_0$ радиальной координаты. Так как производная константы по времени нулевая, второе уравнение Эйлера – Лагранжа превращается в связь

$$\varrho_0\dot\varphi^2 = \frac{k}{m}\varrho_0(1-e^{-\varrho_0^2})\,,$$

которая оставляет две возможности: либо состояние покоя в точке равновесия $z_0 = 1$ (соответственно $\varrho_0 = 0$), либо равномерное вращение вокруг оси z с постоянной угловой скоростью

$$\dot\varphi_0^2 = \frac{k}{m}(1-e^{-\varrho_0^2}) = \mathrm{const}\,.$$

Два отличающихся знаком значения постоянной угловой скорости $\dot\varphi_0$ отвечают вращениям по и против часовой стрелки.

Решение задачи 8

Проще всего задача решается применением законов сохранения энергии и импульса. Чтобы вычислить энергию взаимодействия заряда и полусферы, найдём потенциал электростатического поля $\Phi(r)$ на расстоянии r от центра полусферы в направлении движения точечного заряда. Если обозначить плотность заряда на поверхности через $\sigma = Q/(2\pi R^2)$, то

$$\Phi(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{k\sigma R^2 \sin\theta}{\sqrt{R^2+r^2+2rR\cos\theta}}\, d\theta = \frac{kQ}{R\,r}\left(R + r - \sqrt{R^2+r^2}\right),$$

где коэффициент k зависит от выбранной системы единиц измерения физических величин. Обозначим буквой v величину искомой начальной скорости заряда в исходной неподвижной системе отсчёта. Удаление заряда от полусферы будет максимальным в тот момент, когда его скорость *относительно полусферы* станет равной нулю. В этот момент и полусфера и заряд будут двигаться относительно исходной системы отсчёта с некоторой скоростью u, которая находится из закона сохранения полного импульса системы заряд – полусфера:

$$mv = Mu + mu\,, \quad u = \frac{m}{M+m}\,v\,.$$

Согласно условию задачи, заряд в этот момент должен находиться на удалении R от центра полусферы. Записывая закон сохранения энергии для начального момента и момента максимального удаления, находим уравнение для определения скорости v:

$$\frac{mv^2}{2} - Q\Phi(0) = \frac{(M+m)u^2}{2} - Q\Phi(R).$$

Учитывая значения потенциала $\Phi(0) = kQ/R$ и $\Phi(R) = (2-\sqrt{2})kQ/R$, получаем ответ:

$$v^2 = 2(\sqrt{2}-1)\frac{(M+m)}{Mm}\frac{kQ^2}{R}.$$

Дополнительные задачи для самостоятельного решения

Приводимые ниже задачи разнятся по своему уровню, и некоторые из них значительно труднее тех, что в среднем предлагаются на вступительном экзамене на магистерские программы «Математика» и «Математика и математическая физика». Решение этих задач позволит вам, с одной стороны, уверенно и даже с некоторым запасом подготовиться к вступительным испытаниям на факультет, а с другой стороны, даст возможность почувствовать дух того, что ждёт на реальном экзамене — предложенные там задачи будут, скорее всего, немного попроще, но не менее интересны и столь же нестандартны по своим формулировкам.

Задачи итогового экзамена бакалавриата Факультета математики имеют примерно тот же уровень сложности, что и данные вступительный экзамен и охватывают (среди прочего) все его темы: https://www.hse.ru/ba/math/final_exam

Задача 1. Найдите количество девятизначных чисел с нечётной суммой цифр.

Задача 2. Найдите максимальное возможное число точек пересечения диагоналей у выпуклого n-угольника.

Задача 3. При первом броске по кольцу баскетболист Косоруков всегда попадает, при втором — промахивается, а при каждом последующем броске вероятность его попадания равна процентной доле числа попаданий во всех предыдущих бросках серии. Какова вероятность того, что в серии из ста бросков будет ровно 50 попаданий?

Задача 4. Может ли группа быть объединением двух своих подгрупп, отличных от единицы и всей группы?

Задача 5. Сколько перестановок в симметрической группе S_n являются произведениями двух различных транспозиций?

Задача 6. Для перестановки $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{smallmatrix}\right) \in S_6$ вычислите σ^{2018}.

Задача 7. Сколько автоморфизмов у абелевой группы $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$?

Задача 8. Найдите порядки групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ над q-элементным полем $\mathbb{F}_q$.

Задача 9. Можно ли вложить поле из девяти элементов в поле из двадцати семи элементов?

Задача 10. Найдите все обратимые элементы в кольце целых гауссовых чисел

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Задача 11. Максимален ли идеал, порождённый элементом x в кольце
а) $\mathbb{C}[x]$ б) $\mathbb{C}[[x]]$ в) $\mathbb{Z}[[x]]$?

Задача 12. Приводим ли над полем $\mathbb{Q}$ многочлен а) $x^3 + 27x^2 + 5x + 97$ б) $x^4 + 4$?

Задача 13. Сколько решений имеет уравнение $xyz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ в натуральных числах?

Задача 14. Найдите кубический многочлен с целыми коэффициентами, корнями которого являются квадраты корней многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Задача 15. Чему равно произведение попарных разностей всех комплексных корней степени n из единицы?

Задача 16. Конечно ли множество различных вложений поля $\mathbb{R}$ в поле $\mathbb{C}$?

Задача 17. Докажите, что для любой четвёрки коллинеарных точек p_1, p_2, p_3, p_4 в $\mathbb{R}^2$ и многочленов второй степени $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{R}[x,y]$ определитель 4×4 матрицы $\det(f_i(p_j)) = 0$.

Задача 18. Существует ли матрица с характеристическим многочленом $\chi(t)$ и минимальным многочленом $\mu(t)$ для а) $\chi(t) = (t-1)^2(t-2)^3$, $\mu(t) = (t-1)(t-2)$
б) $\chi(t) = (t^6 - 1)$, $\mu(t) = (t^3 - 1)$ в) $\chi(t) = (t-1)^5(t-2)^5$, $\mu(t) = (t-1)^2(t-2)^3$?
Если да, то приведите явный пример такой матрицы.

Задача 19. Найдите минимальный многочлен квадратной $n \times n$ матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Задача 20. Всякое ли открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ представляется в виде объединения счётного семейства замкнутых множеств?

Задача 21. Равносильна ли замкнутость каждого из подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$ замкнутости их произведения $A \times B \subset \mathbb{R}^2$?

Задача 22. Для всякого ли замкнутого подмножества $C \subset \mathbb{R}^n$ найдётся такая последовательность $x : \mathbb{N} \to C$, что каждая точка множества C является её частичным пределом?

Задача 23. Докажите, что каждый непостоянный многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ задаёт собственное[1] отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Задача 24. Существует ли такая непрерывная сюрьекция $f : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow [0,1]$, что прообраз $f^{-1}(x)$ любого $x \in [0,1]$ ограничен? Может ли f быть монотонной[2]?

Задача 25. С точностью до $0,01$ вычислите $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Задача 26. Докажите, что для любой интегрируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ существует такое число $t \in [0,1]$, что $\displaystyle\int_0^t f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx$.

Задача 27. Всякая ли непрерывно дифференцируемая функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ представляется в виде разности двух строго возрастающих непрерывных функций?

Задача 28. Докажите, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \sin(nx) = 1$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Задача 29. Найдите фундаментальную группу топологического пространства, полученного из двумерного тора отождествлением каких-то двух его различных точек в одну.

Задача 30. Есть ли элемент бесконечного порядка в фундаментальной группе пространства $\mathbb{R}^3 \smallsetminus X$, где X является объединением оси z, точки $(3,3,0)$ и единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ в плоскости x, y ?

---

[1] Т. е. при котором прообраз любого компакта компактен.

[2] В том смысле, что полный прообраз любого связного множества связен.

Задача 31. Существуют ли такие гладкие функции f_1, f_2, $f_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, что множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

гомеоморфно вещественной проективной плоскости, причём дифференциалы функций f_1, f_2, f_3 линейно независимы в каждой точке множества X?

Задача 32. Вычислите $\int \max(x_1, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$ по кубу $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ в $\mathbb{R}^n$.

Задача 33. Вычислите интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)}\, dx_1 \dots dx_n$ для положительно определённой квадратичной формы $q(x) = xAx^t$, где $A = A^t$ вещественная симметричная $n \times n$ матрица, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Задача 34. Для произвольно заданных комплексных матриц A, B размера $n \times n$ вычислите значение при $x = y = 0$ смешанной производной $\partial^2 f \,/\, \partial x \partial y$ от матричнозначной функции $f(x, y) = e^{xA+yB}$.

Задача 35. Докажите для голоморфной в единичном диске $|z| \leqslant 1$ функции f равенство

$$\int_{[0,1]} f(x)\, dx = \int_{|z|=1} f(z) \ln(z)\, dz\,,$$

где слева интегрирование ведётся по прямолинейному отрезку $[0, 1] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, а справа — по единичной окружности, обходимой один раз против часовой стрелки, начиная с точки $1 \in \mathbb{C}$, и логарифм действителен на положительной полуоси вещественной прямой $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Задача 36. Известно, что все корни комплексного многочлена имеют положительную мнимую часть. Докажите, что все корни его производной тоже имеют положительную мнимую часть.

Задача 37. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1 + x^2}\, dx$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 38. Могут ли окружность и парабола на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ пересекаться ровно в двух точках так, что в одной из них окружность касается параболы, а в другой — нет?

Задача 39. Составьте обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют все окружности на плоскости[1].

Задача 40. Найдите систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{\varrho} = f(\varrho, \varphi, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}) \\ \ddot{\varphi} = g(\varrho, \varphi, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}) \end{cases}$$

на полярные координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$, решения которой в декартовых координатах (x, y) имеют вид $x = at + b$, $y = ct + d$, где a, b, c, d — произвольные вещественные постоянные.

Задача 41. Найдите производную от решения дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} + \theta x = te^{-t}$$

с начальным условием $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ по параметру θ при $\theta = 0$.

[1] Рассматриваемые локально, вблизи точек с невертикальными касательными, как графики функций от одной переменной