Aus Zeitschriften.

Archiv für Philosophie.

I. Abteilung: Archiv für Geschichte der Philosophie (Stein). Berlin 1912. XXVI. Band. Heft 1: Lanz, Fichte u. der transzendentale Wahrheitsbegriff. Vier Briefe über Beneke. — Worms, Alfred Fouillé. — Eggenschwyler, War Nietzsche Pragmatist? — Thiel, Die Ekstasis als Erkenntnisform bei Plotin. — Fahrion, Die Sprachphilosophie Lockes. — Schuster, Die Wurzeln des Pessimismus bei Schopenhauer. — Joseph, Die Ethik des Naturrechtslehrers Chr. Thomasius mit Berücksichtigung seiner Rechtsphilosophie.

Mind. A Quarterly Review of Psychology and Philosophy (Stout). London 1912. New Series No. 84: Carr, Shadworth Hollway Hodgson. — Lloyd, The Reign of Science in the History of a Race. — Carlile, Perception and Intersubjektive Intercourse. — Lewis, Implication and Algebra of Logic.

Zeitschrift für Ästhetik und Allgemeine Kunstwissenschaft (Dessoir). Stuttgart 1912. Band VII. Heft 4: Meyer, Kritik der Einfühlungstheorie. — Döring, Über Einfühlung. — Mies, ber die Tonmalerei II (Schluß). — Utitz, Außerästhetische Faktoren im Kunstgenuß. — Usw.

Zeitschrift für pädagogische Psychologie und experimentelle Pädagogik (Meumann u. Scheibner). Leipzig 1912. Jahrgang. XIII. Heft 11: Fischer, Über die Faulheit — eine psychologische Analyse. — Hentschel, Die Gedächtnisspanne. — Huther, Bemerkungen zu zwei Arbeiten aus der experimentellen Pädagogik. — Kleine Beiträge und Mitteilungen. — Usw.

Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane (Schumann u. Ewald). I. Abteilung: Zeitschrift für Psychologie (Schumann). Leipzig 1912. Band 63. Heft 1 und 2: Liepmann, Zur Lokalisation der Hirnfunktionen mit besonderer Berücksichtigung der Beteiligung der beiden Hemisphären an den Gedächtnisleistungen. — Vertes, Dar Wortgedächtnis im Schulkindesalter.

Heft 3: Guttmann, Zur Psychophysik des Gesanges. — Klages, Begriff und Tatbestand der Handschrift.

Heft 4 u. 5: Heymans, In Sachen des psychischen Monismus. — v. Liebermann und Révész, Experimentelle Beiträge zur Orthosymphonie und zum Falschhören. — Über eine bosondere Form des Falschhörens in tiefen Lagen. — Usw.

Zeitschrift für Religionspsychologie. Leipzig 1912. Bd. VII. Heft 7 und 8: Zur Psychologie des theistischen Gottesglaubens.

Verantwortlicher Herausgeber Professor Dr. H. Schwarz in Greifswald.
Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig. — Druck von Radelli & Hille in Leipzig

Gegenstandstheoretische Grundlagen der Logik und Logistik

von

Ernst Mally.

18/XII 12 Wg.

Ergänzungsheft zu Band 148 = 4ell n.

der

Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik

vormals Fichte-Ulricische Zeitschrift.

Leipzig,
Verlag von Johann Ambrosius Barth.
1912

GEGENSTANDSTHEORETISCHE GRUNDLAGEN DER LOGIK UND LOGISTIK.

VON

ERNST MALLY.

LEIPZIG.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1912.

K. k. Universitäts-Buchdruckerei „Styria“, Graz.

Vorwort.

Was diese Arbeit bieten will, sind Grundlagen der Logik, nicht die Grundlagen in ihrer Vollständigkeit. Der erste Teil behandelt die grundlegenden Beziehungen und Verknüpfungen der Gegenstände.[1]) Unter ihnen sind zuerst die logischen in kurzer Darstellung entwickelt worden, wobei es in erster Linie darauf ankam, zu zeigen, daß und wie die Logik auf den gegenstandstheoretischen Begriff des Objektivs sich aufbauen läßt, das heißt sich in der Tat darauf aufbaut, indem Aussagen- und Klassenkalkül, durch das Grundgesetz der „Reziprozität“ verbunden, sich auf Gesetze (d. h. Objektive) über Objektive gründen. In dem betrachteten Systeme von Beziehungen und Verknüpfungen bilden die logischen jedoch nur ein Teilgebiet. Die Untersuchung geht insbesondere noch auf die Vergleichungsrelationen und auf die für die Wahrscheinlichkeit maßgebenden Beziehungen näher ein und gelangt zu einer Entwicklung der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitslehre. — In die Darstellung sind gelegentlich Sätze und erläuternde Bemerkungen aus der Theorie des Erfassens eingeschaltet (die in die Zählung der Definitionen und Sätze nicht mit einbezogen sind); von ihnen ist in der Entwicklung der gegenständlichen (zugleich logistischen) Theorie kein Gebrauch gemacht worden.

Im zweiten Teile werden, im Abschnitt V, die gegenstandstheoretischen Grundlagen der Logik, mit besonderer Berücksichtigung der symbolischen Logik, eingehender untersucht, die im ersten nicht wohl ausführlicher dargelegt werden konnten, ohne den Gang der auf die Anwendungen zustrebenden Darstellung aufzuhalten und unübersichtlich zu machen. Für Leser, denen die Beschäftigung mit einem symbolischen Kalkül nicht erwünscht ist, sei bemerkt, daß diese Untersuchungen des zweiten (nichtsymbolischen) Teiles in allen Hauptsachen auch verständlich sind, wenn man vom ersten Teile nur etwa Folgendes berücksichtigt hat: § 1—7, die Definitionen und Sätze 10, 14, 18—21 (wobei oft auch das im Text, mit Worten Ausgeführte genügen wird), § 9, die Definitionen und Sätze 32, 40 (mit „Bemerkung“), 73, 74. — Der VI. Abschnitt bringt einige Nachträge zu den „Anwendungen“.

Der wiederholt vorkommende Hinweis auf die noch ungedruckten „Elemente der Gegenstandstheorie“[2]) soll dem Anteile R. Ameseders an den betreffenden Aufstellungen Rechnung tragen.

Graz, am 11. Oktober 1912.

Ernst Mally.

---

[1]) Er ist, bis auf einige, allerdings nicht unwesentliche Ergänzungen und Verbesserungen, die nachträglich hinzugekommen sind, unter dem angeführten Titel im X. Jahresberichte des II. Staatsgymnasiums in Graz (1912) erschienen.

[2]) Die von Dr. R. Ameseder und mir (1905—1907) in ihren Grundzügen festgelegt aber nicht abgeschlossen worden sind.

Inhalt.

Erster Teil.

I. Allgemeines.

Erster Teil.

I. Allgemeines.

§ 1. Zwei Arten des Erfassens.

Wenn ich urteile „7 ist eine Primzahl“, so habe ich über die Zahl 7 geurteilt oder 7 beurteilt, und ich habe den Sachverhalt, daß 7 eine Primzahl ist, geurteilt.

Der Gegenstand (7), über den geurteilt wird oder der beurteilt wird, heißt gewöhnlich Objekt des Urteils.

Das, was geurteilt wird (der geurteilte „Sachverhalt“) werde als Objektiv des Urteils bezeichnet.[1]

Auch wenn ich, ohne zu urteilen, das heißt zu glauben, zu behaupten, auch nur zu vermuten, bloß denke oder annehme, „*a* sei eine durch 3 teilbare Zahl“, so habe ich über ein Objekt *(a)* ein Objektiv (daß *a* eine durch 3 teilbare Zahl ist) angenommen oder gedacht. Wie das Urteil, so hat auch die Annahme Objekt und Objektiv.

Urteilen und Annehmen pflegt man als Setzungsakte zu bezeichnen. Das, was geurteilt oder angenommen wird, sagt man, ist durch diesen Akt „gesetzt“. Was in diesem Sinne gesetzt werden kann, ist also allemal ein Objektiv. Freilich heißt „setzen“ hier keineswegs etwa herstellen, hervorbringen, sein machen; sondern es bedeutet nur eine Weise des Erfassens. Da aber, was geurteilt oder angenommen wird, immerhin in einer Weise erfaßt ist, die sich vom Erfassen des beurteilten oder des von der Annahme betroffenen Objektes deutlich unterscheidet, sei das Wort „setzen“, da ein besseres nicht zur Verfügung steht, hier beibehalten. Wir unterscheiden also das Setzen der Objektive als eine besondere Erfassungsart vom Erfassen der Objekte, das wir Erfassen im engeren Sinne nennen wollen.[2]

§ 2. Objektiv und Objekt.

Was geurteilt oder angenommen wird, ist in anderer Stellung zum Erfassungsakte als das, worüber geurteilt oder angenommen wird. Mit Rücksicht auf diese Stellung ist es zunächst als Objektiv des betreffenden

[1]) Vgl. Meinong, Über Annahmen, 2. Aufl., Leipzig 1910. (Register.) Untersuchungen zur Gegenstandstheorie und Psychologie, herausgegeben von A. Meinong, Leipzig 1904: II. R. Ameseder, Beiträge zur Grundlegung der Gegenstandstheorie; III. E. Mally, Untersuchungen zur Gegenstandstheorie des Messens.

[2]) Meinong tritt dafür ein, das Wort „setzen“ in der angegebenen Bedeutung überhaupt nicht zu verwenden, da dieser Gebrauch die Tatsache verdunkle, daß es sich doch nur um ein Erfassen handelt. Wir haben aber, wie sich weiterhin zeigen wird, eine Unterscheidung nötig zwischen dem Erfassen, das ein Setzen des Erfaßten ist, und dem, das kein Setzen des Erfaßten ist. Vgl. z. B. „Über Annahmen“, 2. Aufl., S. 342.

Erfassungsaktes bezeichnet worden, zum Unterschiede von dem Objekte oder den Objekten desselben.

Das, was als Objektiv eines Urteils oder einer Annahme auftreten, also „gesetzt“ werden kann, ist aber auch ohne Rücksicht auf diese Stellung zum Erfassen rein gegenständlich gekennzeichnet: es ist ein „Sachverhalt“, nämlich daß etwas ist oder nicht ist, daß etwas so ist oder nicht so ist, also ein Sein (Nichtsein) oder ein Sosein (Nichtsosein). Wenigstens läßt sich jedes Objektiv in eine dieser Formen bringen. Wir verstehen also unter Objektiven eine besondere Art von Gegenständen.

Als Objekt eines Erfassungsaktes kann dagegen jederlei Gegenstand auftreten. Insbesondere kann auch ein Objektiv die Stellung des Urteils- oder Annahmeobjektes einnehmen, zum Beispiel wenn wir denken, „daß a durch 3 teilbar ist (die Teilbarkeit von a durch 3), hat noch nicht seine Teilbarkeit durch 9 zur Folge“. Das Objektiv, das der Subjektsatz ausspricht, wird hier nicht geurteilt, sondern wie ein Objekt beurteilt. Es ist also dem angedeuteten Urteile gegenüber in der Stellung des Objektes, trotzdem aber bleibt es natürlich seiner gegenständlichen Art nach ein Objektiv.

Es gibt aber Gegenstände, die niemals als Objektive, sondern immer nur als Objekte von Urteilen oder Annahmen auftreten, die also nicht gesetzt, sondern nur im engeren Sinne des Wortes erfaßt werden können: solche nennen wir Objekte im engeren Sinne dieses Wortes. Alles, was nicht Objektiv ist, gehört offenbar in diese Kategorie.

§ 3. Grundsatz vom Erfassen.

(Grundsatz *E*.) Wird ein Objektiv a gesetzt, so wird dadurch impliziterweise

1. jede Folge von a gesetzt,
2. jeder Fall von a erfaßt und damit
3. jeder Gegenstand, der a erfüllt, als ein Gegenstand A erfaßt[1]) oder getroffen.

Zu 1. Nehmen wir zum Beispiel an, a sei eine Primzahl, so ist mit diesem „Sachverhalt“, das heißt Objektiv (a) implicite zum Beispiel auch gesetzt, daß a mit einer andern Zahl b, die kein Vielfaches von a ist, keinen Teiler gemein hat (außer 1). Dieses Folgeobjektiv (β) ist durch die Setzung des a implicite gesetzt, heißt: Wer a setzt, verhält sich der Folge β gegenüber, sofern er sich richtig verhält, intellektuell so, als hätte er β gesetzt. Er kann zum Beispiel folgerichtig das β nicht verneinen.

Was von der Folge β eben gesagt worden ist, das gilt natürlich ebenso von jeder andern Folge des gesetzten Objektivs.

Wer nun mittels der durch die Setzung von a begründeten intellektuellen Disposition das Folgeobjektiv β auch aktuell setzt, gewinnt dabei dieselbe (relative) Evidenz für β, als hätte er vorher β selbst gesetzt. Dieses ist im wesentlichen der Vorgang des Schließens oder Folgerns (im Sinne der Deduktion).

---

[1]) Vgl. Meinong, Über Annahmen, 2. Aufl., Leipzig 1910. Die Ausführungen über das „Meinen“, insbesondere S. 238ff. und § 45. — Der Gegenstand *(A)*, der das gesetzte Objektiv a erfüllt, ist in der Stellung des Erfassensobjektes, gleichviel ob er seiner Natur nach Objekt oder Objektiv ist.

Zu 2. Wer annimmt, a sei eine Primzahl, kann nun auch über dieses Objektiv (a) Urteile fällen, er hat es also zugleich erfaßt. Urteilt er nun zum Beispiel, „daß a prim ist (a), hat zur Folge, daß a zu jeder andern Zahl b, die kein Vielfaches von a ist, teilerfremd ist“, so trifft dieses Urteil jeden einzelnen Fall von Primsein einer Zahl a; es ist also auch jeder solche Fall durch das Erfassen von a implicite miterfaßt. Wer a (im weiteren Sinne des Wortes) erfaßt, erfaßt implicite jeden Fall von a, heißt:

Wer ein Objektiv a erfaßt, verhält sich, sofern er sich richtig verhält, jedem Falle von a gegenüber intellektuell so, als hätte er ihn selbst erfaßt. Jeder Gedanke, der das Objektiv a trifft, trifft jeden Fall von a. Hat man zum Beispiel über das Sein (a) überhaupt geurteilt, daß es mit Nichtsein (desselben Gegenstandes) unverträglich ist, so kann man folgerichtig von einem besonderen Falle des Seins nicht das Gegenteil behaupten.[1])

Zu 3. Wer annimmt, a sei eine Primzahl, hat damit implicite den „Begriffsgegenstand“ „a, das eine Primzahl ist,“ oder „Primzahl a“ aufgefaßt. Er ist auf Grund dieses Aktes imstande, zum Beispiel Urteile zu fällen, die jede Primzahl treffen, das heißt jeden Gegenstand, der das gesetzte oder vorausgesetzte Objektiv a erfüllt. Ein Urteil „a, das eine Primzahl ist (A), ist so und so beschaffen“ trifft jedes Objekt von der Art A, in ihm ist jede einzelne Primzahl implicite gemeint.

Wer das Objektiv a erfaßt, verhält sich, sofern er sich richtig verhält, gegen einen Gegenstand, der a erfüllt, das heißt, woran ein Fall von a besteht, so, als hätte er diesen Gegenstand selbst als ein Objekt A erfaßt. Urteilen wir zum Beispiel „eine Zahl, die prim ist, ist u. s. w.“, so werden wir, wenn die Zahl 5 uns als Primzahl entgegengestellt wird, sie folgerichtig nicht in gegensätzlicher Weise beurteilen können.

§ 4. Inhalt und Umfang von Begriffen.[2])

Jeder Gegenstand, an dem ein Fall des vorausgesetzten Objektivs a besteht, oder kurz, „der a erfüllt“, fällt unter den Begriff A, ist ein Gegenstand (der Art) A, ein „Geltungspunkt“[3]) von a.

Die Gesamtheit der (bestehenden) Gegenstände A bildet die Klasse (der) A. Sie ist zugleich der Geltungsbereich, kurz, „Bereich“ des Objektivs a.

---

[1]) Der Gedanke „einiges Sein ist Existenz von Körpern“ trifft nicht (eigentlich) das Objektiv Sein, sondern das Erfassen ist hier von vornherein auf einige Fälle des Objektivs eingeschränkt. Das Sein selbst ist dadurch nur uneigentlich getroffen, und so ist auch ein beliebiger Fall von Sein durch diesen Gedanken nur uneigentlich oder ungenauerweise getroffen: von ihm gilt, daß er möglicherweise ein Existieren eines Körpers ist — möglich zwar, sofern der Fall eben ein (Fall von) Sein ist, das heißt, soweit es auf das Sein (und nicht auf andere, besondere Umstände des Falles) ankommt. Vgl. § 17. — Eine genaue Bestimmung dessen, was unter einem „Fall“ verstanden ist, kann erst später, durch die hier zu entwickelnde Theorie, beigebracht werden. Siehe 73 (Zusatz) und § 30, der Beispiele enthält. Einstweilen mag der Begriff als Grundbegriff hingenommen werden.

[2]) Wesentlich Übereinstimmendes über den Sinn von „Inhalt“ und „Umfang“ bei W. Frankl, Inhalt und Umfang von Begriffen. Archiv für systematische Philosophie, Bd. 17 (1911), S. 435ff.

[3]) Vgl. E. Schröder, Abriß der Algebra der Logik, bearbeitet von E. Müller, II. Teil, Leipzig und Berlin 1910 (§ 81).

Das Objektiv α ist das definierende Objektiv des Begriffes und zugleich der Klasse A. Man nennt es auch den Inhalt dieses Begriffes, während der Bereich A auch Umfang des Begriffes A heißt.

§ 5. Die Beziehungen und Verknüpfungen.

Ein Objektiv kann eine Mehrheit von Gegenständen zum Geltungspunkt haben. Zum Beispiel ist das Objektiv Gleichheit oder Verschiedenheit immer nur durch eine Mehrheit von Gegenständen erfüllt, die untereinander gleich, beziehungsweise verschieden sind; es kann nicht ein Ding gleich oder verschieden sein. So ist auch die Gleichung (das Gleichungsobjektiv) $x + y = 5$ durch Mehrheiten von „Dingen", nämlich durch gewisse Zahlenpaare (x, y) erfüllt. Diese sind Geltungspunkte des Objektivs (nicht einzelne Zahlen); zum Beispiel (0, 5), (1, 4) u. s. w. Der Geltungsbereich des Objektivs aber umfaßt die Gesamtheit dieser Zahlenpaare (wir können diese Klasse von Zahlenpaaren analytisch darstellen durch die Klasse der Punkte einer Geraden und erhalten so eine exakte Abbildung eines Begriffsumfanges, nämlich des, der dem Begriffe „x, y, die zur Summe 5 geben," zugehört).

Ein Objektiv, wovon jeder Geltungspunkt eine Mehrheit von Gegenständen ist, ist eine Beziehung oder Relation zwischen den „Dingen" dieser Mehrheit.[1]

Die durch eine Beziehung zwischen ihren Dingen oder Gliedern bestimmte Mehrheit wird ein Komplex genannt.[1]

Die Gegenstände, zwischen denen eine Beziehung besteht, sind dadurch zu einem Gegenstande, dem Komplexe, verknüpft: die Verknüpfung bestimmt also mehrere Dinge zum Komplexe. Sie unterscheidet sich von der Beziehung wesentlich durch diese ihre Funktion.

II. Die logischen Beziehungen und Verknüpfungen.

§ 6. Die Grundbeziehung der Einschließung.[2])

1. (Definition.) Ein Objektiv α schließt ein Objektiv β (als Folge) ein, wenn die Beziehung besteht:

wenn α gilt (zutrifft, erfüllt ist), so gilt β.

Dann heißt α Grund von β, β Folge[3]) von α, die angegebene Beziehung zwischen ihnen heißt Einschließung von Objektiven oder Folgebeziehung. Sie sei angeschrieben als

$$\alpha \succ \beta \text{ oder } \beta \prec \alpha,$$

zu lesen etwa: α ist Grund von β, α bedingt, impliziert β, beziehungsweise β folgt aus α, ist impliziert in α.

---

[1]) Vgl. Untersuchungen zur Gegenstandstheorie und Psychologie, III, § 9, 11, 12 (auch Register). Dortselbst auch Literaturangaben.

[2]) Zu § 6—10 vergleiche zum Beispiel die kurze Darstellung bei Couturat, L'algèbre de la logique. Scientia № 24, Paris 1905, insbesondere 1—20.

[3]) Daß vom Worte Folge schon vor der Definition, in § 3, Gebrauch gemacht worden ist, bedingt keine Unrichtigkeit dort, macht aber auch nicht diese Definition überflüssig. — Man beachte, daß die Namen „Grund" und „Folge" hier in einem rein gegenständlichen, ohne Reflexion auf das Denken zu erfassenden Sinne gebraucht sind. Vgl. § 34f.

2. (Grundsatz.) Es gilt

$$\alpha \succ \alpha$$

für jedes Objektiv α. (Grundsatz der Einschließung.)

3. (Definition.) Eine Klasse B schließt eine Klasse A ein, wenn die Beziehung besteht:

wenn etwas ein (Ding von) A ist, so ist es auch ein (Ding von) B oder: was immer ein (Ding von) A ist, ist auch ein (Ding von) B.

Dann heißt A in B eingeschlossen, insbesondere eingeordnet, B dem A übergeordnet, auch A eine Art der Gattung B. Die angegebene Beziehung heißt Einschließung von Klassen oder Einordnung. Sie sei angeschrieben als

$$A \leqslant B \text{ oder } B \geqslant A,$$[1])

zu lesen: A (fällt) „unter" B (A ist B, alle A sind B), beziehungsweise B (ist) „über" A (B enthält A).

4. (Definition.) Ein Objektiv β als Vertreter der Klasse seiner Fälle schließt ein Objektiv α als den Vertreter der Klasse der Fälle von α ein, wenn die Beziehung besteht:

wenn etwas ein (Fall von) α ist, so ist es ein (Fall von) β.

Dann ist die Klasse der Fälle von α eingeordnet der Klasse der Fälle von β, diese jener übergeordnet. Die Beziehung zwischen α und β ist eine Einordnungs- oder Subsumtionsbeziehung. Sie sei angeschrieben in den Zeichen

$$\alpha \leqslant \beta \text{ oder } \beta \geqslant \alpha.$$

Zusätze. 1. Will man es unbestimmt lassen, ob es sich um Objektive oder um Objekte im engeren Sinne handle, und betrachtet man Klassen von Gegenständen überhaupt, also von Objekten im weiteren Sinne, so seien diese mit a, b, . . . bezeichnet.

$$a \leqslant b$$

bedeutet also: a ist (als Klasse) eingeordnet (der Klasse) b; es kann aber a als eine Klasse von Objekten im engeren Sinne oder auch als Klasse der Fälle eines Objektivs (a) gedeutet werden.[2])

2. Es bedeutet demnach $\succ$ und $\prec$ die Folgebeziehung, $\leqslant$ und $\geqslant$ die Einordnung oder Subsumtion. Jene kann nur zwischen Objektiven stattfinden; es entspricht ihr psychisch eine Verbindung von Setzungen, der Akt des Folgerns. Die Einordnung aber kann nur zwischen Klassen stattfinden. Auch die Fälle eines Objektivs bilden eine Klasse. Der Einordnungsbeziehung entspricht psychisch eine Art des Erfassens, der Akt des Einordnens oder Subsumierens, dem die Gegenstände, auf die er sich bezieht, nicht als durch ihn gesetzte, sondern in ihm bloß im engeren Wortsinne erfaßte, als Objekte dieses Aktes gegenüberstehen.

---

[1]) Das Einordnungs- oder Subsumtionszeichen $\leqslant$ übernehme ich von Chr. Ladd-Franklin. Es ist dem Zeichen $<$, das auch in gleicher Bedeutung vorkommt, vorzuziehen, weil es keine Verwechslungen zuläßt.

[2]) Vgl. z. B. L. Couturat, L'algèbre de la logique, S. 3ff. Scientia № 24. Paris 1905.

5. (Grundsatz *T*.) Ist

$$\alpha \succcurlyeq \beta \text{ und } \beta \succcurlyeq \gamma,$$

so ist

$$\alpha \succcurlyeq \gamma.$$

T. Ein Grund (α) eines Objektivs (β) ist auch Grund jeder Folge (γ) dieses Objektivs. (Transitivität der Folgebeziehung.)

6. (Definition.) Ist

$$\alpha \succcurlyeq \beta \text{ und } \alpha \preccurlyeq \beta,$$

so heißen α und β äquivalent; man schreibt dafür

$$\alpha \equiv \beta \text{ oder } \beta \equiv \alpha.$$

So sind zum Beispiel Gleichseitigkeit eines Dreieckes und Gleichwinkligkeit eines Dreieckes äquivalente Objektive. Aus dem ersten folgt das zweite und umgekehrt.

Folgesatz. Mit Rücksicht auf den Grundsatz der Einschließung (2) gilt immer

$$\alpha \equiv \alpha.$$

7. (Definition.) Ist

$$a \leqslant b \text{ und } a \geqslant b,$$

so heißen die Klassen a, b identisch (denn sie enthalten dieselben Dinge). Die Begriffe a, b, die identische Klassen zu Umfängen haben, heißen äquivalent.

Die Identität zweier Klassen wird angezeigt durch

$$a \equiv b \text{ oder } b \equiv a.$$

Identisch sind zum Beispiel die Klasse der gleichseitigen und die der gleichwinkligen Dreiecke.

§ 7. Die Reziprozität.

8. (Grundsatz *R*.) Besteht zwischen zwei Objektiven die Folgebeziehung:

wenn α gilt, so gilt β,

so besteht auch:

in jedem Falle, wo α gilt, gilt β

oder:

jeder Fall von α ist ein Fall von β,

daher auch:

jeder Gegenstand (A), der α erfüllt, ist ein Gegenstand (B), der β erfüllt.

Aus $\alpha \succcurlyeq \beta$ folgt also $a \leqslant \beta$ und zugleich $A \leqslant B$ und daher $a \leqslant b$ für beide möglichen Deutungen von a und b.

Verfolgt man die angegebene Umformung im umgekehrten Sinne, so zeigt sich, daß auch die Umkehrung gilt:

Aus $a \leqslant b$ folgt $A \leqslant B$ und $a \leqslant \beta$ und daraus $\alpha \succcurlyeq \beta$.

Es besteht also einerseits

$$(\alpha \succcurlyeq \beta) \succcurlyeq (a \leqslant b)$$

und andererseits

$$(a \leqslant b) \succcurlyeq (\alpha \succcurlyeq \beta),$$

das heißt

$$R \qquad (\alpha \succcurlyeq \beta) \equiv (a \leqslant b).$$

Die Folgebeziehung zwischen zwei Objektiven α, β ist äquivalent der Einordnungsbeziehung zwischen den zugehörigen Klassen (von Fällen der Objektive und von Geltungspunkten der Objektive) b, a. Wir sagen: Der Folgebeziehung ($\succcurlyeq$) zwischen Objektiven entspricht reziprok die Einordnung ($\leqslant$) umgekehrter Richtung zwischen den Klassen, die jenen Objektiven reziprok entsprechen.

9. (Sätze.) Aus *R* folgt unmittelbar:

1. $(\alpha \equiv \beta) \equiv (A \equiv B) \equiv (a \equiv b)$;
2. insbesondere ist immer $a \leqslant a$, daher $a \equiv a$.
3. Ist $a \leqslant b$ und $b \leqslant c$, so ist $a \leqslant c$, das heißt der Grundsatz *T* gilt auch für Klassen.

§ 8. Die logische Addition und Multiplikation.

10. (Definition und Grundsatz.) Ist

$$\sigma \succcurlyeq \alpha,\ \sigma \succcurlyeq \beta,$$

jedoch

$$\sigma \preccurlyeq \xi$$

für jedes Objektiv ξ, für das

$$\xi \succcurlyeq \alpha,\ \xi \succcurlyeq \beta$$

gilt, so heiße das Objektiv σ die logische Summe der Objektive α und β, und wir setzen

$$\sigma \equiv \alpha \mathbin{\not\frown} \beta.$$

Zu zwei Objektiven α, β gibt es immer eine logische Summe $\alpha \mathbin{\not\frown} \beta$. Nach dieser Erklärung ist σ oder $\alpha \mathbin{\not\frown} \beta$, gesprochen „$\alpha$ und β", ein Objektiv, das sowohl α als auch β als Folgen einschließt, und zwar unter allen Objektiven (ξ), die α und β zugleich einschließen, dasjenige, das aus jedem solchen ξ folgt. Man kann $\alpha \mathbin{\not\frown} \beta$ deshalb als den „kleinsten gemeinsamen Grund" von α und β bezeichnen.

11. (Grundsatz der Kommutativität.)

$$\alpha \mathbin{\not\frown} \beta \equiv \beta \mathbin{\not\frown} \alpha.$$

Bemerkung. Diese Tatsache läßt sich nicht etwa aus der Definition von $\alpha \mathbin{\not\frown} \beta$ beweisen, indem man die Voraussetzungen $\sigma \succcurlyeq \alpha$, $\sigma \succcurlyeq \beta$ untereinander vertauscht. Denn diese sind ja schon durch $\not\frown$ verbunden, wenn es auch nicht angeschrieben ist. Man hätte also die Kommutativität der Objektivaddition schon vorausgesetzt, um sie zu beweisen.

Andererseits ist die Definition von $\alpha \not+ \beta$ deshalb, weil sie von der Verknüpfung, die definiert wird, schon Gebrauch macht, nicht zirkelhaft. Denn um diese Verknüpfung (der Voraussetzungen in der Definition) vorzunehmen, muß man noch nicht wissen, worin sie besteht.

12. (Satz.)

$$(\gamma \succ \alpha) \not+ (\gamma \succ \beta) \equiv (\gamma \succ \alpha \not+ \beta).$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Definition von $\alpha \not+ \beta$. Denn ist $\gamma \succ \alpha$ und $\gamma \succ \beta$, so ist γ eines der Objektive ξ der Definition, und dann ist $\gamma \succ \alpha \not+ \beta$. Ist umgekehrt $\gamma \succ \alpha \not+ \beta$, so folgt aus derselben Definition und ***T***, daß $\gamma \succ \alpha$ und daß $\gamma \succ \beta$ ist.

13. (Satz.)

$$(\alpha \prec \beta) \equiv (\alpha \not+ \beta \equiv \beta).$$

„Absorption“: der Summand α, der in β eingeschlossen ist, wird vom Summanden β „absorbiert“. Zum Beispiel: Durch 2 teilbar sein und durch 4 teilbar sein, ist dasselbe, wie durch 4 teilbar sein, da die Teilbarkeit durch 2 in der Teilbarkeit durch 4 impliziert ist.

Beweis. Ist $\alpha \prec \beta$, so folgt, da immer auch $\beta \prec \beta$ ist, nach dem vorhergehenden Satze $\alpha \not+ \beta \prec \beta$. Da auch $\alpha \not+ \beta \succ \beta$ ist, ergibt sich $\alpha \not+ \beta \equiv \beta$.

Umgekehrt: ist $\alpha \not+ \beta \equiv \beta$, also $\alpha \not+ \beta \prec \beta$, so folgt nach dem vorhergehenden Satze: $\alpha \prec \beta$ (neben $\beta \prec \beta$).

14. (Definition und Grundsatz.) Ist

$$\pi \prec \alpha,\ \pi \prec \beta,$$

jedoch

$$\pi \succ \eta$$

für jedes Objektiv η, für das

$$\eta \prec \alpha,\ \eta \prec \beta$$

gilt, so heiße das Objektiv π das logische Produkt der Objektive α und β, und wir setzen

$$\pi \equiv \alpha \times \beta.$$

Zu zwei Objektiven α, β gibt es immer ein logisches Produkt $\alpha \times \beta$.

Nach der Erklärung ist π oder $\alpha \times \beta$, gesprochen „α oder β“[1]), ein Objektiv, das sowohl aus α folgt als auch aus β folgt, also gilt, wenn α zutrifft, und auch gilt, wenn β zutrifft. Und zwar ist es unter allen Objektiven (η), die aus α und auch aus β folgen, dasjenige, das jedes solche η seinerseits (als eine Folge) einschließt, also das Objektiv, das alle gemeinsamen Folgen des α und des β zu Folgen hat und selbst gemeinsame Folge von α und von β ist. Man kann es die „größte gemeinsame Folge“ der Objektive α, β nennen.[2])

15. (Satz.)

$$\alpha \times \beta \equiv \beta \times \alpha.$$

[1]) „Oder“ im Sinne von „oder auch“, also ohne die Implikation gegenseitiger Ausschließung der durch „oder“ verbundenen Objektive.

[2]) Das hier definierte Objektivprodukt ist nicht zu verwechseln mit dem Voigtschen Inhaltsprodukt (vgl. Schröder, Algebra der Logik, 2. Bd., S. 411 ff.). Will man es auch als Inhaltsprodukt auffassen, so ist „Inhalt“ im Sinne des § 4 zu verstehen.

Der Beweis folgt aus der Kommutativität der additiven Objektivverknüpfung, wenn man sie auf die Voraussetzungen $(\pi \prec \alpha) \not+ (\pi \prec \beta)$ u. s. w. anwendet.

16. (Satz.)

$$(\gamma \prec \alpha) \not+ (\gamma \prec \beta) \equiv (\gamma \prec \alpha \times \beta).$$

Der Beweis ergibt sich aus der Definition (14) analog wie der zu 12 aus 10.

17. (Satz.)

$$(\alpha \prec \beta) \equiv (\alpha \times \beta \equiv \alpha).$$

„Absorption“: Der Faktor β, der den andern Faktor α einschließt, wird von ihm „absorbiert“. Zum Beispiel: Durch 2 teilbar sein oder (auch) durch 4 teilbar sein, ist dasselbe, wie durch 2 teilbar sein. Denn ist eine Zahl durch 2 teilbar, so ist sie — von da aus — möglicherweise auch durch 4 teilbar, also durch 2 oder (auch) 4 teilbar, und ist eine Zahl durch 2 oder (auch) durch 4 teilbar, so ist sie jedenfalls durch 2 teilbar.

Der Beweis ergibt sich aus dem vorhergehenden Satze und der Definition von $\alpha \times \beta$ und ist dem Beweise zu 13 analog.

18. (Satz.) Zu zwei Klassen a, b gibt es immer eine Klasse s, so daß

$$s \leqslant a,\ s \leqslant b,$$

jedoch

$$s \geqslant x$$

ist, für jedes x, für das

$$x \leqslant a,\ x \leqslant b$$

(ebenfalls) gilt.

Beweis. Zu a, b gibt es die definierenden Objektive α, β als reziprok entsprechende „Terme“[1]). Dann gibt es nach 10 ein Objektiv σ, das der Definition der logischen Summe $\alpha \not+ \beta$ genügt. Auch gibt es zu σ eine Klasse als reziprok entsprechenden Term (sie kann, unter Umständen, allerdings auch eine „leere Klasse“ sein, vgl. 30). Eben diese Klasse ist aber s. Denn die definierenden Relationen für s (in 18) sind die reziproken Entsprechungen der definierenden Relationen für σ (in 10).

19. (Definition.) Die Klasse s, die zu a und b in den in 18 angegebenen Beziehungen steht, nennen wir das logische Produkt dieser Klassen und setzen

$$s \equiv a \,.\, b \equiv a\,b,$$

weil die Einschließungs-(nämlich Einordnungs-)Beziehungen, in denen s zu a und b steht, mit den Einschließungs-(nämlich Folge-)Beziehungen formal übereinstimmen, in denen das logische Produkt $\alpha \times \beta$ zu α und β steht (vgl. 14). Da aber diese formal übereinstimmenden Beziehungen für s Einordnungs-, für π dagegen Folgebeziehungen sind, werde für das Klassenprodukt $(a\,b)$ doch eine andere Anschreibung gebraucht als für das Objektivprodukt $(\alpha \times \beta)$.

Folgerung. Das Klassenprodukt $a\,b$ ist die Klasse der Dinge, die a und β, also $\alpha \not+ \beta$ erfüllen, daher das größte gemeinsame

[1]) „Term“ sei die allgemeine Benennung, die sowohl auf Objektive als auch auf Klassen angewendet werde. Vgl. Couturat, a. a. O. S. 4.

Teilgebiet von a und b oder die größte gemeinsame Art der Gattungen a, b (analog wie das Objektivprodukt $\alpha \times \beta$ die größte gemeinsame Folge von α und von β ist).

20. (Satz.) Zu zwei Klassen a, b gibt es immer eine Klasse p, so daß

$$p \geqslant a,\ p \geqslant b,$$

jedoch

$$p \leqslant y$$

ist, für jede Klasse y, die

$$y \geqslant a,\ y \geqslant b$$

erfüllt.

Der Beweis ist analog dem zu 18. Faßt man zu a, b die definierenden Objektive α, β auf, so gibt es zu ihnen (nach 14) immer ein logisches Produkt $\pi \equiv \alpha \times \beta$. Dieses π bestimmt als reziprok entsprechenden Term eine Klasse, die alle Beziehungen zu a, b erfüllt, die den Beziehungen von π zu α, β reziprok entsprechen. Diese Beziehungen sind aber eben die, durch welche wir p definiert haben (wie man sich leicht überzeugt, wenn man zu 14 die reziproken Relationen bildet).

21. (Definition.) Die Klasse p, die zu a und b in den in 20 angegebenen Beziehungen steht, nennen wir die logische Summe dieser Klassen und setzen

$$p \equiv a + b,$$

weil die Einschließungs-(nämlich Einordnungs-)Beziehungen, in denen p zu a und b steht, mit den Einschließungs-(nämlich Folge-)Beziehungen formal übereinstimmen, in denen die logische Summe $\alpha \mathbin{\not-} \beta$ zu α und β steht (vgl. 10). Da aber diese formalen Beziehungen für $\alpha \mathbin{\not-} \beta$ Folge-, für $a + b$ dagegen Einordnungsbeziehungen sind, wählen wir doch verschiedene Symbole ($\mathbin{\not-}$ und $+$) dafür.

Folgerung. Die Klassensumme $a + b$ ist die Klasse der Dinge, die π, das ist $\alpha \times \beta$ („α oder β") erfüllen. Sie ist daher die Klasse, die alle Dinge von a und alle Dinge von b, aber nichts darüber, enthält, die Klasse der a und der b oder die kleinste den Arten a und b gemeinsam übergeordnete Gattung.

22. (Sätze.)
1. $(c \leqslant a) \mathbin{\not-} (c \leqslant b) \equiv (c \leqslant ab)$,
2. $(c \geqslant a) \mathbin{\not-} (c \geqslant b) \equiv (c \geqslant a + b)$,
3. $(a \geqslant b) \equiv (ab \equiv b)$,
4. $(a \geqslant b) \equiv (a + b \equiv a)$.

Die Beweise ergeben sich auf Grund von $\boldsymbol{R}$ unmittelbar aus den entsprechenden Sätzen über Objektive (vgl. 12, 16, 13, 17).

Die beiden ersten Sätze können, nach $\boldsymbol{R}$, auch so angeschrieben werden:

1'. $(c \leqslant a) \,.\, (c \leqslant b) \equiv (c \leqslant ab)$,
2'. $(c \geqslant a) \,.\, (c \geqslant b) \equiv (c \geqslant a + b)$.

In den ersten Anschreibungen sind Objektive miteinander durch $\mathbin{\not-}$ verknüpft, zum Beispiel die Subsumtionen $c \leqslant a$ und $c \leqslant b$; in den zweiten ist zum Beispiel unter $(c \leqslant a)$ die Klasse der Fälle verstanden, in denen dieses Subsumtionsobjektiv zutrifft, unter $(c \leqslant a) \,.\, (c \leqslant b)$ die Klasse der Fälle, in denen beide Subsumtionen erfüllt sind.

23. (Satz.)

$$\alpha \times (\beta \mathbin{\not-} \gamma) \succ \alpha \times \beta \mathbin{\not-} \alpha \times \gamma.^{[1]}$$

Beweis. $\alpha \succ \alpha \times \beta$, $\alpha \succ \alpha \times \gamma$ gibt (nach 12)

$$\alpha \succ \alpha \times \beta \mathbin{\not-} \alpha \times \gamma.$$

Daraus und aus $\beta \mathbin{\not-} \gamma \succ \alpha \times \beta$, $\beta \mathbin{\not-} \gamma \succ \alpha \times \gamma$, also (12) $\beta \mathbin{\not-} \gamma \succ \alpha \times \beta \mathbin{\not-} \alpha \times \gamma$, folgt (nach 16) der behauptete Satz.

24. (Grundsatz.)[2]

$$\alpha \times (\beta \mathbin{\not-} \gamma) \prec \alpha \times \beta \mathbin{\not-} \alpha \times \gamma.$$

Aus diesen beiden Sätzen ergibt sich:

25. (Satz der Distributivität.)

$$\alpha \times (\beta \mathbin{\not-} \gamma) \equiv \alpha \times \beta \mathbin{\not-} \alpha \times \gamma.$$

26. (Satz.) Die Distributivität (der Multiplikation) besteht auch für Klassen:

$$a \,.\, (b + c) \equiv ab + ac.$$

Beweis.[3] Nach $\boldsymbol{R}$ folgt aus 25

$$a + bc \equiv (a + b)\,(a + c).$$

Setzt man einstweilen die Distributivität für den Ausdruck rechts voraus, so ergibt er $aa + ab + ac + bc$, welches auf Grund der Absorption (22) gleichbedeutend ist mit $a + bc$. Da dieses die linke Seite der Äquivalenz ist, hat man damit die Distributivität in der Form $(a + b)\,(a + c) \equiv aa + ab + ac + bc$, daher insbesondere auch

$$(a + b)\,c \equiv ac + bc$$

erwiesen, welches unsere Behauptung (in anderer Form) wiedergibt.

Anmerkung. Die Operation $\mathbin{\not-}$ im Gebiete der Objektive stimmt formal überein mit der Operation $+$ im Gebiete der Klassen. Sie unterscheidet sich aber von dieser darin, daß sie eine Setzungsoperation, nämlich eine Verknüpfung von Setzungen in einem Setzungsakte ist. Betrachtet man die Objektive α und β als Klassen ihrer Fälle, so können sie durch die Klassenaddition $+$ verbunden werden. Aber $\alpha + \beta$ bedeutet wesentlich anderes als $\alpha \mathbin{\not-} \beta$. Dieses bedeutet, daß α und (zugleich) β gelte, also z. B. „es bestehe Teilbarkeit (einer Zahl) durch 2 und es bestehe Teilbarkeit durch 3 (zugleich)". $\alpha + \beta$ aber müßte in diesem Falle bedeuten „Teilbarkeit durch 2 und Teilbarkeit durch 3" so aufgefaßt, wie wenn wir über diese beiden zugleich etwas aussagen wollen, etwa „Teilbarkeit durch 2 und Teilbarkeit durch 3 (d. h. alle Fälle des einen und alle des andern, also alle Fälle von Teilbarkeit durch 2 oder durch 3) sind Soseinsobjektive (d. h. Fälle von Sosein)" u. dgl. Das Zeichen $+$ drückt also, wenn wir auf die psychischen Akte achten wollen, eine Verknüpfung von Gegenständen aus, die durch diesen

---

[1] Für den Gebrauch der Klammern sind hier die Regeln vorausgesetzt, die für die entsprechend gebauten arithmetischen Ausdrücke gelten.

[2] Vgl. Couturat, a. a. O. S. 17. Die Unbeweisbarkeit dieses Satzes aus den vorhergehenden hat Schröder dargetan. (Algebra der Logik, 1. Bd., Anhang 4, 5, 6. Vergleiche auch 2. Bd., S. 409 ff.)

[3] Vergleiche auch 39.

Verknüpfungsakt nicht gesetzt werden, sondern ihm nur als erfaßte gegenüberstehen.

Der Objektivverknüpfung durch $\times$ in $\alpha \times \beta$ ist formal analog die Klassenverknüpfung durch . in $a \, . \, b$. Auf Objektive, als Klassen ihrer Fälle aufgefaßt, läßt sich auch die Klassenmultiplikation anwenden. Während wir aber durch $\alpha \times \beta$ setzen, daß α oder β gilt, bezeichnen wir durch $\alpha \, . \, \beta$ oder $\alpha\beta$ die Klasse aller jener Fälle von α, die zugleich Fälle von β sind, also die Klasse der Fälle, wo α und β ($\alpha \not\sim \beta$) gilt. So zum Beispiel, wenn wir die Gesamtheit dieser Fälle erfassen, um über sie zu urteilen. Es ist also wieder die Objektivmultiplikation $\alpha \times \beta$ eine Setzungsverknüpfung, die Klassenmultiplikation $a \, . \, b$ eine Erfassungsverknüpfung.

Der Operation $\alpha \not\sim \beta$ entspricht reziprok, das heißt, ist äquivalent als Operation an Klassen die Verknüpfung $a \, . \, b$. Der Operation $\alpha \times \beta$ entspricht reziprok die Operation $a + b$.

§ 9. Die Grenzterme.

27. (Definition.)

$\tilde{0}$ ist dadurch definiert, daß

$$\tilde{0} \preccurlyeq \xi$$

für jedes beliebige Objektiv ξ gilt.

$\tilde{0}$ ist also ein Objektiv, das in jedem Objektiv als Folge eingeschlossen ist, das also in allen Fällen erfüllt ist.[1])

Folgesatz. Alle $\tilde{0}$-Objektive („Nullobjektive") sind äquivalent. Ist nämlich ein Objektiv $\alpha \preccurlyeq \xi$ für jedes beliebige Objektiv ξ, so ist auch $\alpha \preccurlyeq \tilde{0}$. Da aber, nach der Definition, auch $\tilde{0} \preccurlyeq \alpha$ ist, so ist dann $\alpha \equiv \tilde{0}$. Dasselbe gilt für ein β, sofern $\beta \preccurlyeq \xi$ für alle ξ zutrifft; also $\beta \equiv \tilde{0}$. Daher ist dann auch $\alpha \equiv \beta$.

Anmerkung. Nullobjektive sind zum Beispiel „A-Sein oder Nicht-A-Sein", das heißt, „daß etwas A ist oder nicht A ist", aber auch „daß $1 + 1 = 2$ ist", denn sie sind in allen Fällen oder „unter allen Umständen" erfüllt, also unter Voraussetzung beliebiger Objektive ξ. Ein solches Objektiv ist „Folge" eines ξ nicht in dem Sinne allerdings, daß wir es etwa aus ξ erschlössen, aber doch im Sinne der Definition des Folgens, die hier maßgebend ist: (immer) wenn ξ ist, ist auch jedes der genannten Objektive. (Daß es nur, wenn ξ ist, gelten sollte, verlangt ja die Definition der Folgebeziehung nicht.)

Folgesatz. Da $\tilde{0} \preccurlyeq \alpha$ immer besteht, folgt (nach 13 und 17)

$$\alpha \not\sim \tilde{0} \equiv \alpha,$$
$$\alpha \times \tilde{0} \equiv \tilde{0}.$$

28. (Definition.) $\tilde{1}$ ist dadurch definiert, daß

$$\tilde{1} \succcurlyeq \xi$$

für jedes beliebige Objektiv ξ gilt.

1) Hinsichtlich der nicht ganz beliebig weiten Bedeutung von „jedes" und „alle" sei vorläufig auf Schröder, Algebra der Logik, 1. Bd., S. 245 ff., verwiesen. Vergleiche übrigens § 37 f. dieser Arbeit.

$\tilde{1}$ ist also ein Objektiv, das jedes Objektiv als Folge einschließt, so daß, wenn $\tilde{1}$ gilt, jedes beliebige Objektiv gilt.

Folgesatz. Alle $\tilde{1}$-Objektive sind äquivalent. Ist nämlich ein $\alpha \succcurlyeq \xi$ für jedes beliebige ξ, so ist auch $\alpha \succcurlyeq \tilde{1}$. Da aber nach der Definition $\alpha \preccurlyeq \tilde{1}$ immer gilt, so ist dann $\alpha \equiv \tilde{1}$. Dasselbe gilt für ein β, sofern $\beta \succcurlyeq \xi$ für jedes ξ besteht. Es ist also dann $\alpha \equiv \beta$.

Anmerkung. $\tilde{1}$-Objektive sind alle in sich widersprechenden, zum Beispiel „A sein und (zugleich) nicht A sein", das heißt, „daß etwas A und nicht A sei". Denn da kein Ding, das heißt, nichts A und auch nicht A ist, von nichts aber Beliebiges zugleich ausgesagt werden kann — zum Beispiel „nichts ist B und ist nicht B, ist C und auch nicht C" u. s. w. —, so ist (wäre) in einem Falle, wo $\tilde{1}$ erfüllt ist (wäre), auch jedes beliebige Objektiv erfüllt. (Natürlich ist $\tilde{1}$ nicht von einem bestehenden Gegenstande erfüllt.)

Folgesatz. Mit Rücksicht auf 13 und 17 ergibt sich

$$\alpha \not\sim \tilde{1} \equiv \tilde{1},$$
$$\alpha \times \tilde{1} \equiv \alpha$$

für jedes Objektiv α.

29. (Satz und Definition.) Es besteht eine Klasse $\dot{1}$, so daß

$$\dot{1} \geqslant x$$

für jede beliebige Klasse x gilt.

Beweis. Jedes $\tilde{0}$-Objektiv definiert eine solche Klasse. Und da $\tilde{0}$-Objektive bestehen, besteht auch die Klasse $\dot{1}$ als reziproker Term dazu. (Der Relation $\tilde{0} \preccurlyeq \xi$ entspricht reziprok $\dot{1} \geqslant x$.)

Anmerkung. Die Klasse $\dot{1}$ umfaßt alle Dinge, die in irgendwelchen der betrachteten Klassen x vorkommen.

30. (Satz und Definition.) Es besteht eine Klasse $\dot{0}$, so daß

$$\dot{0} \leqslant x$$

für jede beliebige Klasse x gilt.

Beweis. Jedes $\tilde{1}$-Objektiv definiert eine solche Klasse. Es bestehen zwar keine Dinge, die ein $\tilde{1}$-Objektiv erfüllen, es besteht aber doch der Begriff solcher Gegenstände, und seinen Umfang bezeichnen wir mit $\dot{0}$. Da von der Klasse $\dot{0}$ vorausgesetzt ist, daß sie kein Ding enthält, was jede durch $\tilde{1}$ definierte Klasse erfüllt, so liegt im Begriffe der $\dot{0}$-Klasse kein Widerspruch (sondern nur in dem eines Dinges dieser Klasse).

Anmerkung. Die Klasse $\dot{0}$ umfaßt kein Ding oder nichts. Wir nennen sie die Klasse „Nichts" oder „Null", auch die leere Klasse. (Alle leeren Klassen sind, nach einem Folgesatze von 28, identisch.)

Zusatz. Nach $\boldsymbol{R}$ gilt natürlich

$$a + \dot{0} \equiv a, \quad a + \dot{1} \equiv \dot{1},$$
$$a \, . \, \dot{0} \equiv \dot{0}, \quad a \, . \, \dot{1} \equiv a$$

für jede Klasse a.

31. (Grundsatz.) Es gilt

$$\tilde{0} \mathrel{\overline{\succcurlyeq}} \tilde{1}.$$

(Der wagrechte Strich über dem Zeichen der Einschließung bedeutet die Verneinung dieser Beziehung.) Das heißt: wir betrachten nur solche Objektivgebiete, wo aus den allgemein gültigen Voraussetzungen nicht eine Unmöglichkeit hervorgeht, also Objektive, die nicht lauter unmögliche Dinge, also nicht bloß eine leere Klasse bestimmen.

Diesem Grundsatz entspricht demnach reziprok:

$$\dot{1} \mathrel{\overline{\preccurlyeq}} \dot{0}.$$

Der betrachtete Gesamtbereich ist nicht leer, er umfaßt mindestens eine von $\dot{0}$ verschiedene Klasse.

Zusammenfassung. Eine Reihe von auseinander folgenden Objektiven steht demnach immer zwischen den Grenzen $\tilde{1}$ und $\tilde{0}$, eine Reihe von einander übergeordneten Klassen zwischen $\dot{0}$ und $\dot{1}$. Ist eine solche Objektivreihe

$$\tilde{1} \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq \alpha \succcurlyeq \beta \succcurlyeq \gamma \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq \tilde{0},$$

so ist die reziprok entsprechende Klassenreihe:

$$\dot{0} \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq a \preccurlyeq b \preccurlyeq c \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq \dot{1}.$$

$\tilde{1}$ nimmt in der Folgenreihe formal dieselbe Stellung ein wie $\dot{1}$ in der Einordnungsreihe, $\tilde{0}$ dort dieselbe Stellung wie $\dot{0}$ hier. Aber dem Objektiv $\tilde{1}$ entspricht reziprok die Klasse $\dot{0}$, dem Objektiv $\tilde{0}$ die Klasse $\dot{1}$.

§ 10. Die Negation.

32. (Definition und Grundsatz.) Zu jedem Objektiv α gibt es ein Objektiv $\bar{\alpha}$, so daß

$$\alpha \mathbin{\not-} \bar{\alpha} \equiv \tilde{1}, \qquad N_1$$
$$\alpha \times \bar{\alpha} \equiv \tilde{0} \qquad N_2$$

ist.

$\bar{\alpha}$, gesprochen non-α, heißt die Negation von α, auch das kontradiktorische Objektiv zu α.[1])

Der Grundsatz N_1 — in Worten: gilt α und $\bar{\alpha}$ zugleich, so gilt alles Beliebige, das heißt $\alpha \mathbin{\not-} \bar{\alpha}$ ist unmöglich — führt den Namen Satz des Widerspruches oder der Exklusion.[2])

Der Grundsatz N_2 — in Worten: gilt α oder $\bar{\alpha}$, so folgt daraus nichts, das heißt $\alpha \times \bar{\alpha}$ gilt unbedingt — wird als Satz des ausgeschlossenen Dritten oder der Exhaustion[2]) bezeichnet (weil er angibt, daß die Disjunktion α oder $\bar{\alpha}$ die gesamte Möglichkeit erschöpft).

---

[1]) Zum Erfassen des Grundsatzes 31 ist allerdings ein Akt des Verneinens erforderlich, aber noch kein Begriff der Negation vorausgesetzt. Vergleiche auch die Bemerkung zu 11.

[2]) Letzteres nach Chr. Ladd-Franklin. Vergleiche den Artikel Laws of Thought in Baldwin, Dictionary of Philosophy and Psychology.

Folgesatz. Wegen der Kommutativität der logischen Addition und Multiplikation kann man die Beziehungen N auch so schreiben:

$$\bar{\alpha} \mathbin{\not-} \alpha \equiv \tilde{1},$$
$$\bar{\alpha} \times \alpha \equiv \tilde{0}.$$

Es erfüllt also α die Definition der Negation von $\bar{\alpha}$, die mit $\bar{\bar{\alpha}}$ zu bezeichnen wäre:

$$\alpha \preccurlyeq \bar{\bar{\alpha}},$$

das heißt, α ist (ein Fall der) Negation seiner eigenen Negation.

33. (Satz.) Alle Negationen äquivalenter Objektive (daher auch eines Objektivs) sind äquivalent; oder die Negation ist eindeutig.

Beweis. Erst sei bemerkt, daß

$$(\alpha \equiv \beta) \succcurlyeq (\alpha \times \gamma \equiv \beta \times \gamma)$$

ist. Gilt nämlich $\alpha \preccurlyeq \beta$, so gilt auch $\alpha \times \gamma \preccurlyeq \beta$; und da auch $\alpha \times \gamma \preccurlyeq \gamma$ ist, gilt (nach 16) $\alpha \times \gamma \preccurlyeq \beta \times \gamma$. Ebenso ergibt $\alpha \succcurlyeq \beta$ die Beziehung $\alpha \times \gamma \succcurlyeq \beta \times \gamma$. Auf Grund dieser Tatsachen darf man also beide Seiten einer Einschließung, daher auch einer Äquivalenz, mit einem und demselben Objektiv (γ) „multiplizieren".

Es genüge nun neben $\bar{\alpha}$ auch ein α' der Definition 31. Dann hat man

$$\alpha \times \alpha' \equiv \tilde{0} \equiv \alpha \times \bar{\alpha}, \quad \alpha \mathbin{\not-} \alpha' \equiv \tilde{1} \equiv \alpha \mathbin{\not-} \bar{\alpha}.$$

Aus $\alpha \mathbin{\not-} \alpha' \equiv \alpha \mathbin{\not-} \bar{\alpha}$ erhält man durch Multiplikation beider Seiten mit α' die Beziehung

$$\alpha \times \alpha' \mathbin{\not-} \alpha' \equiv \alpha \times \alpha' \mathbin{\not-} \bar{\alpha} \times \alpha' \text{ oder } \tilde{0} \mathbin{\not-} \alpha' \equiv \tilde{0} \mathbin{\not-} \bar{\alpha} \times \alpha',$$

durch Multiplikation mit $\bar{\alpha}$ die Beziehung

$$\alpha \times \bar{\alpha} \mathbin{\not-} \alpha' \times \bar{\alpha} \equiv \alpha \times \bar{\alpha} \mathbin{\not-} \bar{\alpha} \text{ oder } \tilde{0} \mathbin{\not-} \alpha' \times \bar{\alpha} \equiv \tilde{0} \mathbin{\not-} \bar{\alpha}.$$

Es ist also $\alpha' \equiv \bar{\alpha} \times \alpha'$ und $\alpha' \times \bar{\alpha} \equiv \bar{\alpha}$, daher

$$\alpha' \equiv \bar{\alpha}.$$

Folgesätze. 1. Daraus und aus 32 F. folgt

$$\alpha \equiv \bar{\bar{\alpha}},$$

das heißt: α ist der Negation seiner Negation äquivalent, ist in diesem Sinne die (nicht nur eine) Negation seiner Negation. (Satz von der doppelten Negation.)

2. Insbesondere ist (27, 28)

$$\bar{\tilde{0}} \equiv \tilde{1}, \quad \bar{\tilde{1}} \equiv \tilde{0}.$$

34. (Satz.)

$$(\alpha \preccurlyeq \beta) \equiv (\alpha \times \bar{\beta} \equiv \tilde{0}).$$

Beweis. 1. Ist $\alpha \preccurlyeq \beta$, so hat man (mit Rücksicht auf die Definition 14 des Produktes):

$$\alpha \times \bar{\beta} \preccurlyeq \alpha \preccurlyeq \beta,$$
$$\alpha \times \bar{\beta} \preccurlyeq \bar{\beta},$$

daher (nach 16)

$$\alpha \times \bar{\beta} \preccurlyeq \beta \times \bar{\beta} \preccurlyeq \tilde{0},$$

also (F. 27)

$$\alpha \times \bar{\beta} \equiv \tilde{0}.$$

2. Nach 28 und 25 gilt

$$a \equiv a \times (\beta \backsim \bar{\beta}) \equiv a \times \beta \backsim a \times \bar{\beta}.$$

Ist nun $a \times \bar{\beta} \equiv \tilde{0}$, so ergibt sich

$$a \equiv a \times \beta,$$

daher (17)

$$a \prec \beta.$$

35. (Satz.)

$$(\beta \succ a) \equiv (\bar{a} \backsim \beta \equiv \tilde{1}).$$

Beweis. 1. Ist $\beta \succ a$, so hat man:

$$\bar{a} \backsim \beta \succ \beta \succ a,$$
$$\bar{a} \backsim \beta \succ \bar{a},$$

daher (12, 28)

$$\bar{a} \backsim \beta \succ a \backsim \bar{a} \succ \tilde{1},$$

also (F. 28)

$$\bar{a} \backsim \beta \equiv \tilde{1}.$$

2. Nach 25 ist

$$\beta \equiv (a \backsim \beta) \times (\bar{a} \backsim \beta)$$

(wovon man sich durch „Ausmultiplizieren" und Anwendung der Absorptionsgesetze leicht überzeugt).

Gilt nun $\bar{a} \backsim \beta \equiv \tilde{1}$, so ist

$$\beta \equiv (a \backsim \beta) \times \tilde{1} \equiv a \backsim \beta,$$

also

$$\beta \equiv a \backsim \beta,$$

daher (nach 13)

$$\beta \succ a.$$

Bemerkung. Die Sätze 34 und 35 gestatten, eine Einschließung durch eine ihr gleichwertige Äquivalenz zu ersetzen, sie „auf Null" oder „auf Eins zu reduzieren".

36. (Satz der Kontraposition.)

$$(a \prec \beta) \equiv (\bar{\beta} \prec \bar{a}).$$

Daß a aus β folgt, ist äquivalent damit, daß $\bar{\beta}$ aus $\bar{a}$ folgt; die Negation der Folge ist Grund der Negation des Grundes.

Beweis.

$$(a \prec \beta) \underset{(34)}{\equiv} (a \times \bar{\beta} \equiv \tilde{0}) \underset{(33)}{\equiv} (\bar{\beta} \times \bar{\bar{a}} \equiv \tilde{0}) \underset{(34)}{\equiv} (\bar{\beta} \prec \bar{a}).$$

Der Beweis kann auch mittels 35 geführt werden.

37. (Satz.)

$$\overline{a \backsim \beta} \equiv \bar{a} \times \bar{\beta}.$$

Die Negation einer logischen Summe ist äquivalent dem logischen Produkte der Negationen ihrer Summanden; oder: verneinen, daß a und β zutrifft, heißt behaupten, daß entweder a nicht zutreffe oder β nicht zutreffe.

Beweis. Ersetzt man in den Voraussetzungen der Summendefinition (10) σ, a, β, ξ durch $\bar{\sigma}$, $\bar{a}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\xi}$, so kehren sich alle Einschließungsbeziehungen (nach 36) um, und man erkennt unmittelbar, daß $\bar{\sigma}$, das heißt $\overline{a \backsim \beta}$, die Definition des Produktes $\bar{a} \times \bar{\beta}$ erfüllt.

38. (Satz.)

$$\overline{a \times \beta} \equiv \bar{a} \backsim \bar{\beta}.$$

Die Negation eines logischen Produktes ist äquivalent der logischen Summe der Negationen seiner Faktoren; oder: verneinen, daß a oder β zutrifft, heißt behaupten, daß a nicht zutreffe und β nicht zutreffe.

Der Beweis ist dem zu 37 analog. Man kann übrigens auch 38 aus 37 ableiten oder umgekehrt, oder man kann beide Sätze zugleich mittels der doppelten Negation aus dem Kontrapositionsgesetze gewinnen.

Die Sätze 37 und 38 sind unter dem Namen der Kontrapositionsformeln von De Morgan bekannt.

39. (Satz.) Es bezeichne $\varphi_1(\backsim, \times, \succ)$ eine Einschließungsbeziehung zwischen additiven und multiplikativen Verknüpfungen von Objektiven, $\varphi_2(\backsim, \times, \succ)$ eine Beziehung derselben Art. Besteht nun zwischen beiden eine Beziehung Φ von der unten angegebenen Form, so gibt es dazu, nach ***R***, eine reziproke, F, von der Art der daneben verzeichneten, worin (gegenüber Φ) $\backsim$ durch ., $\times$ durch $+$ und $\succ$ durch $\leqslant$ ersetzt ist.

$$\Phi \ldots \varphi_1(\backsim, \times, \succ) \succ \varphi_2(\backsim, \times, \succ) \qquad F \ldots f_1(\cdot, +, \leqslant) \leqslant f_2(\cdot, +, \leqslant).$$

Wegen der formalen Übereinstimmung der Definitionen für $\backsim$ und $+$, für $\times$ und ., für $\succ$ und $\geqslant$ (vgl. 26, Anm.) gilt aber auch die Beziehung Φ', die man aus F erhält, wenn man in den „primären" Relationen f die Verknüpfungen und Beziehungen durch ihre formalen Gegenstücke ersetzt, während die „sekundäre" Beziehung $\leqslant$, die zwischen den primären f_1 und f_2 besteht (sowie etwa auftretende sekundäre Verknüpfungen, d. h. Verknüpfungen zwischen Einschließungsbeziehungen), eben wegen der genannten formalen Übereinstimmung auch zwischen den formalen Gegenstücken jener Primärrelationen (den φ_1' und φ_2') erhalten bleibt, also durch die ihr äquivalente Beziehung $\succ$ ausgedrückt werden kann. Zu der so gefundenen Beziehung Φ' besteht dann wieder die reziproke, F'. Man hat also

$$\Phi' \ldots \varphi_1'(\times, \backsim, \prec) \succ \varphi_2'(\times, \backsim, \prec) \qquad F' \ldots f_1'(+, \cdot, \geqslant) \leqslant f_2'(+, \cdot, \geqslant).$$

Man nennt die Beziehungen φ und φ' einander dual entsprechend, ebenso f und f'; in einem weiteren Sinne können auch Φ' und F' duale Gegenstücke zu Φ und F heißen. Jeder Satz von der Art Φ (oder F, Φ', F') vertritt demnach eine Vierzahl von Sätzen, Φ, F, Φ', F', — eine Tatsache, die sich eine systematische Darstellung der symbolischen Logik entsprechend zunutze zu machen hätte. Insbesondere sind in 32 bis 38 auch die entsprechenden Definitionen und Sätze für Klassen mitgegeben.

Zusatz. Ist a eine Klasse, so heiße $\bar{a}$ nicht ihre Negation — denn Negationen gibt es nur von Objektiven, und sie selbst sind auch Objektive —, sondern das Negat[1]) von a. Es ist die durch $\bar{a}$, die Negation von a, definierte Klasse. Man nennt a und $\bar{a}$ sowie a und $\bar{a}$ einander kontradiktorisch entgegengesetzt.

[1]) Vgl. Schröder(-Müller), a. a. O. I, § 30.

§ 11. Die Determination.

Bisher sind nur Verknüpfungen von Objektiven untereinander und von Klassen untereinander betrachtet worden. Es bestehen aber auch Verknüpfungen zwischen Objektiv einerseits und Klasse andererseits, und zwar solche, die für unser Erfassen besonders wichtig sind. Das erhellt aus dem Grundsatze *(E)* vom Erfassen.

40. (Definition.) Aus der Klasse a den (gesamten) Teilbereich auffassen, der (zugleich) dem Geltungsbereiche des Objektivs β angehört, heißt a durch β determinieren.[1])

Die Bezeichnungen Determinand, Determinator, Determinat bedürfen keiner besonderen Erklärung.[2])

Die Determination von a durch β (und ihr Ergebnis) werde angeschrieben in den Zeichen

$$a^\beta$$

zu lesen etwa als „a mit der Bestimmung β".

F o l g e s ä t z e. 1. Nach den Definitionen des Determinats und des Produktes (19) ist

$$a^\beta \equiv ab \equiv ba \equiv b^\alpha.$$

Insbesondere gilt

2. $a^\alpha \equiv aa \equiv a,$

3. $a^{\dot{0}} \equiv a \,.\, \dot{1} \equiv a,$

4. $a^{\dot{1}} \equiv a \,.\, \dot{0} \equiv \dot{0},$

5. $\dot{0}^\alpha \equiv \dot{0} \,.\, a \equiv \dot{0},$

6. $\dot{1}^\alpha \equiv \dot{1} \,.\, a \equiv a.$

B e m e r k u n g. $a \equiv \dot{1}^\alpha$, $a \equiv c^\beta$ können als D e f i n i t i o n e n von a aufgefaßt werden. Die zweite bestimmt a durch den Gattungsbegriff c und das artbildende Merkmal β, die erste als Etwas mit der Bestimmung α, die im Falle wirklichen Definierens natürlich eine logische Summe einfacherer Objektive sein wird.

Der Fall, daß ein Objektiv als Determinand auftritt, sei vorläufig von der Betrachtung ausgeschlossen.

Es folgen einige Umformungen früher angegebener Sätze.

41. (Grundsatz *R*.)

$$(\alpha \succ \beta) \equiv (\dot{1}^\alpha < \dot{1}^\beta).$$

42. (18, 19.)

$$\dot{1}^{\alpha \mathrel{\not-} \beta} \equiv \dot{1}^\alpha \,.\, \dot{1}^\beta \equiv ab.$$

---

1) Was determiniert wird, ist nicht eigentlich die Klasse a (diese wird durch die Determination nur „eingeschränkt", das heißt, man geht von ihr zu einer Artklasse über) auch nicht ein Ding von a, das heißt, irgendein spezielles Etwas, das a ist, sondern „das a", das ist der abstrakte Vertreter aller Dinge der Klasse a (z. B. „das Viereck" zum Parallelogramm, nicht irgendein konkretes Viereck, woran es ja nichts zu determinieren, sondern nur zu prädizieren gibt). Auch sagt man, es werde die Gattung zur Art determiniert, wo aber durch diese Namen wieder nicht eigentlich die Klassen bezeichnet sind oder, wenn sie als Klassenbezeichnungen gebraucht sind, nur gemeint ist, daß die Determination des Gattungsabstraktums die Einschränkung (Spezifikation) der Gattungsklasse zur Artklasse mit sich führe. — „Elemente der Gegenstandstheorie." (Siehe oben, Vorwort.)

2) Sie kommen bei W u n d t vor (Logik).

Der B e w e i s läßt sich nun sehr übersichtlich durchführen. Er sei hier angegeben, obwohl der Satz (in 18) schon bewiesen ist.

$\alpha \mathrel{\not-} \beta$ ist definiert[1]) durch:

$$\alpha \mathrel{\not-} \beta \succ \alpha,$$
$$\alpha \mathrel{\not-} \beta \succ \beta,$$
$$\alpha \mathrel{\not-} \beta \prec \xi,$$
$$\xi \succ \alpha,$$
$$\xi \succ \beta.$$

Diesen Beziehungen entsprechen reziprok:

$$\dot{1}^{\alpha \mathrel{\not-} \beta} < \dot{1}^\alpha,$$
$$\dot{1}^{\alpha \mathrel{\not-} \beta} < \dot{1}^\beta,$$
$$\dot{1}^{\alpha \mathrel{\not-} \beta} > \dot{1}^\xi,$$
$$\dot{1}^\xi < \dot{1}^\alpha,$$
$$\dot{1}^\xi < \dot{1}^\beta.$$

Es erfüllt also $\dot{1}^{\alpha \mathrel{\not-} \beta}$ die Definition des logischen Produktes

$$\dot{1}^\alpha \,.\, \dot{1}^\beta.$$

43. (20, 21.)

$$\dot{1}^{\alpha \times \beta} \equiv \dot{1}^\alpha + \dot{1}^\beta \equiv a + b.$$

Der B e w e i s ist dem obigen analog.

44. (Satz über die Determination eines Determinates.)

$$(\dot{1}^\alpha)^\beta \equiv a^\beta \equiv ab \equiv \dot{1}^{\alpha \mathrel{\not-} \beta}.$$

45. (Satz über die Determination einer Summe.)

$$(a + b)^\gamma \equiv (a + b) \,.\, c \equiv ac + bc \equiv a^\gamma + b^\gamma$$

oder auch:

$$(a + b)^\gamma \equiv (\dot{1}^{\alpha \times \beta})^\gamma \equiv \dot{1}^{(\alpha \times \beta) \mathrel{\not-} \gamma} \equiv \dot{1}^{(\alpha \mathrel{\not-} \gamma) \times (\beta \mathrel{\not-} \gamma)} \equiv \dot{1}^{\alpha \mathrel{\not-} \gamma} + \dot{1}^{\beta \mathrel{\not-} \gamma} \equiv$$
$$\equiv ac + bc \equiv a^\gamma + b^\gamma.$$

46. (Satz über die Determination eines Produktes.)

$$(ab)^\gamma \equiv abc \equiv ac \,.\, bc \equiv a^\gamma \,.\, b^\gamma$$

oder auch:

$$(ab)^\gamma \equiv (\dot{1}^{\alpha \mathrel{\not-} \beta})^\gamma \equiv \dot{1}^{\alpha \mathrel{\not-} \beta \mathrel{\not-} \gamma} \equiv \dot{1}^\alpha \,.\, \dot{1}^\beta \,.\, \dot{1}^\gamma \equiv abc.$$ [2])

§ 12. Die Umkehrungen der Determination.

Ist $a \equiv b^\gamma$, so können die Aufsuchung des Determinanden *(b)* zum gegebenen Determinat a und gegebenen Determinator γ und andererseits die Aufsuchung des Determinators *(γ)* zum gegebenen Determinat a und gegebenen Determinanden b als Umkehrungen der Determination gelten.

Die erste vollziehen wir, wenn wir am gegebenen Gegenstande a von einer Bestimmung β abstrahieren und so eine Gattung zur Art a aufsuchen.

---

1) Dabei ist zwischen den nachfolgenden Relationen der Zusammenhang vorausgesetzt, den die Definition 10 annimmt.

2) In dieser Anschreibung ist die Assoziativität der Objektivaddition vorausgesetzt (sie führt die der Klassenmultiplikation mit sich). Vergleiche dazu S c h r ö d e r, Algebra der Logik, 1. Bd., S. 255 ff.

Die zweite wird angewendet, wenn wir das „artbildende“ Merkmal (γ) aufsuchen, das die gegebene Gattung b zur Art a determiniert, also auch beim (analytischen) Definieren von a durch das genus b und die differentia specifica γ. Nur diese zweite Umkehrung soll hier betrachtet werden.

47. (Definition.) Ist

$$b^{\gamma} \equiv a,$$

so setzen wir

$$^{b}def\, a \equiv \gamma$$

und lesen: das definierende oder determinierende Objektiv von a in bezug auf die Gattung b (oder gegenüber der Gattung b) ist γ.

Aus dieser Definition und den Sätzen über die Determination ergeben sich folgende

48. (Sätze.)

1. $^{a}def\, a \equiv \tilde{0}$, wenn $a \not\equiv \dot{0}$, das heißt, a nicht äquivalent $\dot{0}$ ist; $^{a}def\, a$ ist unbestimmt, wenn $a \equiv \dot{0}$ ist.

Die tautologische Definition ist inhaltsleer und unbedingt gültig.

2. $^{\dot{1}}def\, a \equiv a$.

Wir schreiben dafür kürzer

$$def\, a \equiv a$$

und lesen: das definierende Objektiv von a ist a.

3. $^{a}def\, \dot{0} \equiv \bar{1} \equiv def\, \dot{0}$ für $a \not\equiv \dot{0}$.
4. $^{a}def\, (a^{\beta}) \equiv {}^{a}def\, (a\, b) \equiv \beta \equiv def\, b$ für $a \not\equiv \dot{0}$.
5. $def\, (a\, b) \equiv def\, (\dot{1}^{\alpha} . \dot{1}^{\beta}) \equiv def\, (\dot{1}^{\alpha \not\frown \beta}) \equiv a \not\frown \beta \equiv def\, a \not\frown def\, b$.
6. $def\, (a + b) \equiv def\, (\dot{1}^{\alpha} + \dot{1}^{\beta}) \equiv def\, (\dot{1}^{\alpha \times \beta}) \equiv a \times \beta \equiv def\, a \times def\, b$.

§ 13. Abhängigkeit, Verträglichkeit und ihre Negationen.

49. (Definition.) Ist $\alpha \succ \beta$ oder $\alpha \prec \beta$, so heißt β von α, beziehungsweise α von β abhängig[1]); ist keins von beiden der Fall, so heißen α, β voneinander unabhängig.

50. (Definition.) Ist $\alpha \overline{\succ} \bar{\beta}$, so heißen α, β verträglich, sonst unverträglich.

Folgesatz. Die Verträglichkeit ist umkehrbar, das heißt, ist α mit β verträglich, so auch β mit α. Denn $(\alpha \overline{\succ} \bar{\beta}) \equiv (\bar{\alpha} \overline{\prec} \beta) \equiv (\beta \overline{\succ} \bar{\alpha})$ nach 36. Ebenso ist die Unverträglichkeit umkehrbar:

$$(\alpha \succ \bar{\beta}) \equiv (\bar{\alpha} \prec \beta) \equiv (\beta \succ \bar{\alpha}).$$

Bemerkung. Nach den genannten besonderen Fällen werden alle Objektivbeziehungen (von Meinong)[2]) als Verträglichkeitsrelationen,

[1]) und zwar nennt man das Grundobjektiv abhängig vom Folgeobjektiv, weil es ohne dieses nicht sein kann, es zur notwendigen Bedingung hat, und man nennt auch das Folgeobjektiv abhängig vom Grundobjektiv, weil es mit diesem zugleich bestehen muß.

[2]) Hume-Studien, II, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Philos.-hist. Kl., Wien 1882, Bd. CI, 2. Heft, S. 660.

beziehungsweise (von Höfler)[1]) als Abhängigkeitsrelationen bezeichnet.

Die mit den eben besprochenen Objektivbeziehungen gegebenen Klassen- oder Umfangsbeziehungen sind trivial.

§ 14. Die Seinsobjektive.

In § 11 ist der Fall, daß ein Objektiv als Determinand auftrete, ausdrücklich ausgeschlossen worden. Nun soll der Begriff der Determination auch auf diesen Fall angewendet werden.

51. (Definition.)

$$a^{\beta}$$

bedeute das Objektiv a mit der Bestimmung β.

Man kann a^{β} lesen als „a, welches β erfüllt,“ aber auch als Setzung: „a erfülle β“. Außerdem wollen wir a^{β} „von rechts her“ lesen können als „β am a“ oder „β des a“.[2])

Bemerkung. Das so definierte a^{β} ist zu unterscheiden von dem Bereiche jener Fälle von a, die zugleich Fälle von β sind, in dem Sinne, daß darunter die Fälle gemeint sind, wo $a \not\frown \beta$ (durch die Dinge der Klasse $a\,.\,b$) erfüllt ist. Die Fälle, die a^{β} vertritt, sind solche, wo durch das Objektiv selbst (nicht durch die Dinge seines Bereiches) β erfüllt ist. β ist also hier ein Objektiv, das ein Objektiv (a) zum Objekte hat.[3])

52. (Grundsatz *S* vom Sein.) Bedeutet σ Sein, a ein beliebiges Objektiv, so ist

$$a^{\sigma} \equiv a,$$

das heißt, a mit der Bestimmung Sein, a, welches ist, „seiendes a“, ist äquivalent mit a. Oder, von rechts gelesen, Sein eines Objektivs a ist äquivalent mit a selbst. (Besteht oder gilt a, so besteht sein Sein und umgekehrt.)

53. (Definitionen.) 1. Jedes mit a verträgliche Objektiv heißt in Beziehung auf a möglich. Das Möglichsein sei bezeichnet mit μ.

2. Jedes mit a unverträgliche Objektiv heißt in Beziehung auf a unmöglich.

3. Jede Folge eines Objektivs a heißt in Beziehung auf a notwendig. Die Notwendigkeit sei bezeichnet mit ν.

4. Jede Nichtfolge von a heißt in Beziehung auf a nichtnotwendig oder zufällig.

54. (Sätze.)[4])

1. Da a mit a verträglich ist, gilt

$$a^{\sigma} \succ a^{\mu}$$

für jedes beliebige Objektiv a, oder kürzer

$$\sigma \succ \mu$$

(aber nicht umgekehrt): Möglichkeit ist nichtumkehrbare Folge des Seins.

[1]) Gestalt und Beziehung — Gestalt und Anschauung, Zeitschrift für Psychologie, Leipzig 1910, Bd. LX, S. 195, Anm.

[2]) z. B. wenn β Sein bedeutet, „Sein des a“.

[3]) Vgl. § 2, auch § 38.

[4]) Die Beweise sind nicht ganz ausgeführt; sie lassen sich aber leicht aus dem Vorhergehenden ergänzen.

Daraus ergibt sich nach 36

2. $\bar{\mu} \succ \bar{\sigma}$.

Unmöglichkeit ist (in nicht umkehrbarer Weise) Grund des Nichtseins.

3. Ist $\alpha \succ \beta$, so ist das gleichbedeutend damit, daß β notwendig ist in Beziehung auf α. Besteht also β^{ν}, so folgt auch β oder β^{σ} (aber nicht umgekehrt). Es ist also $\beta^{\nu} \succ \beta^{\sigma}$ oder kürzer

$$\nu \succ \sigma$$

(aber nicht umgekehrt): Notwendigkeit ist (in nicht umkehrbarer Weise) Grund des Seins.

4. $\nu \succ \sigma$ ist (nach 36) äquivalent mit

$$\bar{\sigma} \succ \bar{\nu}.$$

Nichtnotwendigkeit oder Zufälligkeit folgt (in nicht umkehrbarer Weise) aus Nichtsein.

5. Daß β unmöglich sei wegen α, ist äquivalent mit $(\alpha \succ \bar{\beta})$ oder mit $(\alpha \succ \beta^{\bar{\sigma}})$, das heißt damit, daß $\beta^{\bar{\sigma}}$ notwendig ist wegen α:

$$\bar{\mu} \equiv \bar{\sigma}^{\nu}.$$

Unmöglichkeit ist Notwendigkeit des Nichtseins.

6. Nichtnotwendigkeit des β in Beziehung auf α ist definiert durch $(\alpha \overline{\succ} \beta) \equiv (\alpha \overline{\succ} \beta^{\bar{\bar{\sigma}}})$. Daher ist (nach den Definitionen der Notwendigkeit und der Möglichkeit)

$$\bar{\nu} \equiv \bar{\sigma}^{\mu}.$$

Nichtnotwendigkeit oder Zufälligkeit ist Nichtseinsmöglichkeit.

§ 15. Die logischen Größenbeziehungen.

55. (Definition.) Ist

$$\alpha \succ \beta, \text{ also } \mathfrak{a} \preccurlyeq \mathfrak{b},$$
$$\alpha \overline{\preccurlyeq} \beta, \text{ also } \mathfrak{a} \overline{\succcurlyeq} \mathfrak{b},$$

so schreiben wir

$$\alpha \succ \beta, \ \mathfrak{a} < \mathfrak{b}$$
$$(\text{oder } \beta \prec \alpha, \ \mathfrak{b} > \mathfrak{a})$$

und sagen: α ist größer (inhaltsreicher) als β, der Bereich $\mathfrak{a}$ ist kleiner als $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ größer (ausgedehnter) als $\mathfrak{a}$.

Ein Term, der einen andern (als Folge, beziehungsweise als Teilbereich) in nicht umkehrbarer Weise einschließt, heißt also größer als dieser, dieser kleiner als jener.

56. (Definition.) Ist

$$\alpha \equiv \beta, \text{ also } \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b},$$

so nennen wir α und β und andererseits $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (größen)gleich:

$$\alpha = \beta, \ \mathfrak{a} = \mathfrak{b}.$$

57. (Satz.) Ist $\alpha \succ \beta$, $\beta \overline{\prec} \gamma$ (das heißt $\beta \succ \gamma$ oder $\beta = \gamma$), so ist $\alpha \succ \gamma$.

Beweis. Dieser Satz ist äquivalent dem Grundsatze T.

58. (Definition.) Objektive gehören einer Folgenreihe an, wenn für jedes beliebig aus ihnen herausgegriffene Paar ungleicher Objektive α, β eine der Beziehungen $\alpha \succ \beta$ oder $\alpha \prec \beta$ besteht.[1])

Die Definition der Klassenreihe ist analog.[2]) Folgenreihe (oder Objektivreihe) und Klassenreihe (oder Einordnungsreihe) sind Größenreihen.

59. (Satz.) Wird ein Objektiv, zum Beispiel β, gesetzt, so ist die Stellung von β als Ausgangs- oder Bezugsobjektiv in einer Folgenreihe angegeben durch σ, die Stellung jeder Folge von β, zum Beispiel γ, relativ zu β, durch ν, die Stellung jedes Grundes von β, zum Beispiel α, relativ zu β, durch μ, das heißt, einem kleineren Objektive (γ) kommt in bezug auf das angenommene (Ausgangs-)Objektiv ν zu, einem größeren μ. Die relativen Seinsobjektive ν, μ haben also die Bedeutung relativer Größenbestimmungen der Objektive in bezug auf ein als seiend angenommenes; ebenso $\bar{\mu}, \equiv \bar{\sigma}^{\nu}$ und $\bar{\nu}, \equiv \bar{\sigma}^{\mu}$ in bezug auf ein als nichtseiend angenommenes.

60. (Satz.) Die Seinsobjektive bilden zwei Größenreihen mit $\sigma \times \bar{\sigma} \equiv \tilde{0}$ als gemeinsamem Nullobjektiv:

Beweis: $\nu \succ \sigma \succ \mu \succ \tilde{0} \prec \bar{\nu} \prec \bar{\sigma} \prec \bar{\mu}$.

Zusatz. $\sigma \times \bar{\sigma}$ ist die (völlige) Unbestimmtheit hinsichtlich des Seins. — Die Objektive ν, μ können als „Seinsbeträge" bezogen auf den (Einheits-)Betrag σ gelten. Man bemerkt, daß einem Objektiv α, das größer als das Bezugsobjektiv β ist, in bezug auf dieses ein kleinerer Seinsbetrag μ zukommt, einem Objektive γ, das kleiner als β ist, dagegen ein Seinsbetrag ν, der größer als der von β ist. Aus $\bar{\mu} \equiv \bar{\sigma}^{\nu}$ und $\bar{\nu} \equiv \bar{\sigma}^{\mu}$ geht hervor, daß $\bar{\mu}$ den Betrag einer Notwendigkeit, $\bar{\nu}$ den einer Möglichkeit (bezogen auf $\bar{\sigma}$) hat, was ihrer Stellung in der oben angeschriebenen Größenreihe entspricht.[3])

§ 16. Beziehungen zwischen Objektiven vermöge ihrer Folgenklassen.

61. (Definition.) Das Zeichen

$$[\alpha]$$

bedeute die Klasse der Folgen von α oder den „Folgeninbegriff" von α.

Zusätze. 1. Folgerichtig wird

$$\overline{[\alpha]}$$

die Klasse der Nichtfolgen von α bedeuten, also aller Objektive ξ, für die gilt $\xi \overline{\preccurlyeq} \alpha$.

2. Mit den Buchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ u. s. w. werden Klassen von Objektiven bezeichnet werden, gleichviel ob die Objektive einer solchen Klasse alle Folgen eines Objektives sind oder nicht.

62. (Satz.)

$$(\alpha \succ \beta) \equiv ([\beta] \prec [\alpha]).$$

---

[1]) Vgl. K. Th. Vahlen, Abstrakte Geometrie, Leipzig 1905, S. 8.

[2]) Vgl. § 9, Zusammenfassung.

[3]) Der Inhalt dieses und des vorigen Paragraphen ist im wesentlichen den Vorarbeiten zu R. Amеseders und meiner Darstellung der „Elemente der Gegenstandstheorie" entnommen. Siehe oben, Vorwort. Vergleiche auch meinen Heidelberger Vortrag „Grundgesetze der Determination", Verhandlungen des III. internationalen Kongresses für Philosophie, Heidelberg 1908.

Beweis. Ist γ eine Folge von β, also $\gamma \leqslant [\beta]$, so ist, wenn $\alpha \succcurlyeq \beta$ gilt, nach T, auch $\gamma \leqslant [\alpha]$. Das heißt, jedes Ding von $[\beta]$ ist, unter der Voraussetzung $\alpha \succcurlyeq \beta$, auch ein Ding von $[\alpha]$. Aus $\alpha \succcurlyeq \beta$ folgt also $[\beta] \leqslant [\alpha]$. Da auch die Umkehrung zutrifft, besteht also die behauptete Äquivalenz.

63. (Satz.)

$$[\alpha \times \beta] \equiv [\alpha]\,[\beta].$$

Beweis. $\alpha \times \beta$ ist das Objektiv, das alle gemeinsamen Folgen von α und β zu Folgen hat und nur sie (denn es ist sowohl in α als auch in β als Folge eingeschlossen). Die Klasse der Folgen von $\alpha \times \beta$ ist also definitionsgemäß die Klasse der Folgeobjektive, die in $[\alpha]$ und in $[\beta]$ zugleich enthalten sind.

Zusatz. Dagegen gilt nicht $[\alpha \not\frown \beta] \equiv [\alpha] + [\beta]$, sondern nur

$$[\alpha \not\frown \beta] \geqslant [\alpha] + [\beta].$$

Es ist nämlich $[\alpha \not\frown \beta] \leqslant [\xi]$ für jede Folgenklasse $[\xi]$, für die $[\xi] \geqslant [\alpha]$, $[\xi] \geqslant [\beta]$ gilt, das heißt für jedes Objektiv ξ, das sowohl α als auch β zur Folge hat. Indessen ist $[\alpha] + [\beta] \leqslant \mathfrak{x}$ für jede sonst beliebig zusammengestellte Klasse $\mathfrak{x}$ von Objektiven, wenn nur $\mathfrak{x} \geqslant [\alpha]$, $\mathfrak{x} \geqslant [\beta]$ ist. Es gibt aber Objektivklassen $\mathfrak{x}$, die nicht alle Folgen eines Objektives ξ enthalten. Bedeutet zum Beispiel $[\alpha]$ den Inbegriff der Bestimmungen, die dem gleichseitigen (ebenen) Viereck zukommen, $[\beta]$ den Bestimmungsinbegriff des rechtwinkligen Viereckes, so sind in $[\alpha] + [\beta]$ alle Objektive enthalten, die von jedem Rhombus gelten, und alle Objektive, die von jedem Rechtecke gelten. Aber das Objektiv, daß alle diese Bestimmungen an einer Figur bestehen, kommt weder in $[\alpha]$ noch in $[\beta]$ vor, es ist also auch in $[\alpha] + [\beta]$ nicht enthalten. Dagegen ist es in dem Bestimmungsinbegriff $[\alpha \not\frown \beta]$ des gleichseitigen und rechtwinkligen Viereckes oder Quadrates eingeschlossen.

64. (Definition.) 1. Ist

$$[\alpha] \geqslant [\gamma],\ [\beta] \geqslant [\gamma],\ [\gamma] > [\tilde{0}]$$

oder ist

$$\overline{[\alpha]} \geqslant \mathfrak{c}',\ \overline{[\beta]} \geqslant \mathfrak{c}',\ \mathfrak{c}' > [\tilde{0}]$$

oder ist beides zugleich der Fall, so heißen die Objektive α, β „folgeverwandt" oder ähnlich, und zwar im ersten (und dritten) Falle folgeverwandt im engeren Sinne, im zweiten folgeverwandt im weiteren Sinne (nämlich bloß durch gemeinsame Nichtfolgen).

2. Ist außerdem

$$[\gamma] \geqslant [\xi] \text{ für jedes } [\xi], \text{ von dem gilt } [\alpha] \geqslant [\xi],\ [\beta] \geqslant [\xi],$$

und ist

$$\mathfrak{c}' \geqslant \mathfrak{y} \text{ für jedes } \mathfrak{y}, \text{ von dem gilt } \overline{[\alpha]} \geqslant \mathfrak{y},\ \overline{[\beta]} \geqslant \mathfrak{y},$$

so heißen α, β „folgeverwandt oder ähnlich vermöge des gemeinsamen Folgeninbegriffes $[\gamma]$", beziehungsweise „vermöge des gemeinsamen Nichtfolgeninbegriffes $\mathfrak{c}'$", beziehungsweise „vermöge beider zugleich".

Man erkennt, daß $[\gamma]$ die Definition des Produktes $[\alpha]\,[\beta]$ erfüllt, $\mathfrak{c}'$ die des Produktes $\overline{[\alpha]} \cdot \overline{[\beta]}$.

$[\gamma] + \mathfrak{c}'$ möge kurz die „Folgegemeinschaft" von α und β heißen und mit $g(\alpha, \beta)$ bezeichnet werden. Es ist also

$$g(\alpha, \beta) \equiv [\alpha]\,[\beta] + \overline{[\alpha]}\,\overline{[\beta]}.$$

65. (Definition.) 1. Ist

$$[\alpha] \geqslant \mathfrak{a}',\ \overline{[\beta]} \geqslant \mathfrak{a}'$$

oder ist

$$\overline{[\alpha]} \geqslant \mathfrak{b}',\ [\beta] \geqslant \mathfrak{b}'$$

oder ist beides zugleich der Fall, so heißen α, β „folgeverschieden" oder kurz verschieden.

2. Ist außerdem

$$\mathfrak{a}' \geqslant \mathfrak{a}'' \text{ für jedes } \mathfrak{a}'', \qquad \text{für das gilt:}$$
$$[\alpha] \geqslant \mathfrak{a}'',\ \overline{[\beta]} \geqslant \mathfrak{a}''$$

(also $\mathfrak{a}'$ die größte der Klassen von Objektiven α'', die aus α folgen, aus β aber nicht folgen)

und ist

$$\mathfrak{b}' \geqslant \mathfrak{b}'' \text{ für jedes } \mathfrak{b}'', \qquad \text{für das gilt:}$$
$$\overline{[\alpha]} \geqslant \mathfrak{b}'',\ [\beta] \geqslant \mathfrak{b}''$$

(also $\mathfrak{b}'$ die größte der Klassen von Objektiven β'', die aus α nicht folgen, aus β aber folgen),

so heißen α, β „folgeverschieden oder verschieden vermöge des Folgenunterschiedes $\mathfrak{a}'$", beziehungsweise „vermöge $\mathfrak{b}'$", beziehungsweise „vermöge beider zugleich", das heißt ihrer Summe $\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'$.

Man erkennt, daß $\mathfrak{a}' \equiv [\alpha]\,\overline{[\beta]}$ und $\mathfrak{b}' \equiv \overline{[\alpha]}\,[\beta]$ ist.

Der gesamte Folgenunterschied von α, β heiße $u(\alpha, \beta)$. Es ist also

$$u(\alpha, \beta) \equiv [\alpha]\,\overline{[\beta]} + \overline{[\alpha]}\,[\beta].$$

66. (Satz.) Der Folgenunterschied zweier Objektive α, β ist das Negat der Folgegemeinschaft derselben Objektive:

$$u(\alpha, \beta) \equiv \bar{g}(\alpha, \beta).$$

Beweis. Nach 37 und 38 ist

$$\bar{g}(\alpha, \beta) \equiv \overline{[\alpha]\,[\beta]} \cdot \overline{\overline{[\alpha]}\,\overline{[\beta]}} \equiv (\overline{[\alpha]} + \overline{[\beta]}) \cdot ([\alpha] + [\beta]) \equiv [\alpha]\,\overline{[\beta]} + \overline{[\alpha]}\,[\beta] \equiv$$
$$\equiv u(\alpha, \beta).$$

67. (Definition.) Ist

$$[\alpha] \leqslant [\beta] \text{ und } [\beta] \leqslant [\alpha],$$

das heißt, jede Folge von α auch Folge von β und umgekehrt, so heißen α, β „folgegleich", auch kurz gleich.

Folgesätze. 1. Die Folgegleichheit $[\alpha] \equiv [\beta]$ ist offenbar äquivalent der Äquivalenz $\alpha \equiv \beta$ (62).

2. Für folgegleiche Objektive gilt:

$$g(\alpha, \beta) \equiv g(\alpha, \alpha) \equiv [\alpha] + \overline{[\alpha]} \equiv [\tilde{1}],$$
$$u(\alpha, \beta) \equiv u(\alpha, \alpha) \equiv [\alpha]\,\overline{[\alpha]} + [\alpha]\,\overline{[\alpha]} \equiv [\tilde{0}].$$

3. Die Folgeverschiedenheit ist die Negation der Folgegleichheit.

68. (Definition.) Ist keine Folge von α auch Folge von β, keine Nichtfolge von α auch Nichtfolge von β, so heißen α und β „folgenfremd".

Folgesätze. 1. Die Folgegemeinschaft folgenfremder Objektive ist $[\tilde{0}]$, ihr Folgenunterschied daher $[\tilde{1}]$.

2. Die Folgenfremdheit ist die Negation der Folgeverwandtschaft.

3. Folgenfremd sind $\tilde{0}$ und $\tilde{1}$. Denn es ist

$$g(\tilde{0}, \tilde{1}) \equiv [\tilde{0}]\,[\tilde{1}] + \overline{[\tilde{0}]}\,\overline{[\tilde{1}]} \equiv [\tilde{0}] + [\tilde{1}]\,[\tilde{0}] \equiv [\tilde{0}] + [\tilde{0}] \equiv [\tilde{0}].$$

4. Folgenfremd sind daher auch zwei kontradiktorische Objektive (32) wie α und $\bar{\alpha}$, sofern eines von ihnen wahr, also äquivalent mit $\tilde{0}$, das andere falsch, also äquivalent mit $\tilde{1}$ ist: $g(\alpha, \bar{\alpha}) \equiv [\tilde{0}]$. Vergleiche übrigens 74, 2.

Zusatz. Ist $[\alpha] \leqslant \overline{[\beta]}$, also nach 36 auch $[\beta] \leqslant \overline{[\alpha]}$, so haben α, β keine gemeinsamen Folgen, können aber doch gemeinsame Nichtfolgen haben. Sie können dann folgenfremd in einem weiteren Sinne des Wortes heißen.

In dieser Weise folgenfremd sind zwei „subkonträre" Objektive wie $ab \not\equiv \dot{0}$ und $a\bar{b} \not\equiv \dot{0}$ („einige a sind b", „einige a sind nicht b", vgl. 73, Anm.), wobei vorausgesetzt ist, daß a und b nicht leere Klassen sind. Für die Folgegemeinschaft der beiden Objektive ergibt sich $[ab \not\equiv \dot{0}]\,[a\bar{b} \not\equiv \dot{0}] + \overline{[ab \not\equiv \dot{0}]}\,\overline{[a\bar{b} \not\equiv \dot{0}]}$, wovon der erste Summand $[\tilde{0}]$ sein muß, da eines der Objektive wahr, also einer seiner Faktoren $[\tilde{0}]$ ist: es bestehen also keine gemeinsamen Folgen. Dagegen ist der zweite Summand nicht äquivalent $[\tilde{0}]$, da die Objektive verträglich sind, also beide wahr sein können (vgl. auch 74).

69. (Satz.) Die Abhängigkeit ist Folgeverwandtschaft durch den Folgeninbegriff des Folge- und den Nichtfolgeninbegriff des Grundobjektives.

Beweis. 1. Ist $\alpha \succ \beta$, so ist $\alpha \times \beta \equiv \beta$ (17), also $[\alpha]\,[\beta] \equiv [\beta]$ und andererseits ist $\overline{[\alpha]} \leqslant \overline{[\beta]}$, also $\overline{[\alpha]}\,\overline{[\beta]} \equiv \overline{[\alpha]}$. Daher ist dann $g(\alpha, \beta) \equiv [\beta] + \overline{[\alpha]}$.

2. Wird nun umgekehrt $g(\alpha, \beta) \equiv [\beta] + \overline{[\alpha]}$ oder, was das gleiche ist (66), $u(\alpha, \beta) \equiv [\alpha]\,\overline{[\beta]} + \overline{[\alpha]}\,[\beta] \equiv [\alpha]\,\overline{[\beta]}$ vorausgesetzt, so folgt, nach 22, $\overline{[\alpha]}\,[\beta] \leqslant [\alpha]\,\overline{[\beta]}$ und daraus, nach 34 (39), $\overline{[\alpha]}\,[\beta] \cdot (\overline{[\alpha]} + [\beta]) \equiv [\tilde{0}]$, also $\overline{[\alpha]}\,[\beta] \equiv [\tilde{0}]$, das heißt $[\beta] \leqslant [\alpha]$ oder $\alpha \succ \beta$.

Zusatz. Ist $\alpha \succ \beta$, so ist $u(\alpha, \beta) \equiv [\alpha]\,\overline{[\beta]}$, und umgekehrt.

70. (Satz.) Unabhängigkeit zwischen α und β ist Folgeverschiedenheit durch α und β selbst (als nichtgemeinsame Folgen der beiden Objektive).

Beweis. 1. In $u(\alpha, \beta) \equiv [\alpha]\,\overline{[\beta]} + \overline{[\alpha]}\,[\beta]$ enthält der erste Summand sicher α, da $\alpha \mathrel{\overline{\preccurlyeq}} \beta$ ist, der zweite sicher β, da $\beta \mathrel{\overline{\preccurlyeq}} \alpha$ ist. (Daraus folgt aber nicht, daß $u(\alpha, \beta)$ auch alle Folgen von α, also $[\alpha]$ und alle Folgen von β, also $[\beta]$ umfaßt.)

2. Umfaßt der Folgenunterschied $u(\alpha, \beta)$ die Objektive α und β, so folgt, daß $\alpha \mathrel{\overline{\preccurlyeq}} \beta$ und $\beta \mathrel{\overline{\preccurlyeq}} \alpha$ ist, das heißt, daß α und β unabhängig voneinander sind.

71. (Satz.) Verträglichkeit von α und β ist Folgeverwandtschaft durch die Negationen der Objektive selbst und alle Gründe dieser Negationen als gemeinsame Nichtfolgen.

Beweis. 1. Sind α und β verträglich, so ist $\bar{\alpha} \mathrel{\overline{\preccurlyeq}} \beta$, daher (nach T) auch $\alpha' \mathrel{\overline{\preccurlyeq}} \beta$, für jedes α', für das die Beziehung $\alpha' \succ \bar{\alpha}$ gilt, das heißt für jeden Grund von $\bar{\alpha}$. Bezeichnet man mit $\{\bar{\alpha}\}$ die Klasse der Objektive α', so ist demnach in unserem Falle $\{\bar{\alpha}\} \leqslant \overline{[\beta]}$, aber selbstverständlich auch $\{\bar{\alpha}\} \leqslant \overline{[\alpha]}$, daher (nach 22) $\{\bar{\alpha}\} \leqslant \overline{[\alpha]}\,\overline{[\beta]}$. Da ebenso $\{\bar{\beta}\} \leqslant \overline{[\alpha]}\,\overline{[\beta]}$ ist, besteht (nach 22) die Beziehung $g(\alpha, \beta) \geqslant \{\bar{\alpha}\} + \{\bar{\beta}\}$.

2. Ist $g(\alpha, \beta) \equiv [\alpha]\,[\beta] + \overline{[\alpha]}\,\overline{[\beta]} \geqslant \{\bar{\alpha}\} + \{\bar{\beta}\}$, so folgt, da $[\alpha] \mathrel{\overline{\geqslant}} \{\bar{\alpha}\}$ und $[\beta] \mathrel{\overline{\geqslant}} \{\bar{\beta}\}$ ist, $\overline{[\alpha]}\,\overline{[\beta]} \geqslant \{\bar{\alpha}\} + \{\bar{\beta}\}$, also (22) $\overline{[\alpha]}\,\overline{[\beta]} \geqslant \{\bar{\alpha}\}$ und $\overline{[\alpha]}\,\overline{[\beta]} \geqslant \{\bar{\beta}\}$. Daher ist dann auch $\overline{[\beta]} \geqslant \{\bar{\alpha}\}$, $\overline{[\alpha]} \geqslant \{\bar{\beta}\}$, also insbesondere $\bar{\alpha} \leqslant \overline{[\beta]}$, $\bar{\beta} \leqslant \overline{[\alpha]}$ oder $\bar{\alpha} \mathrel{\overline{\preccurlyeq}} \beta$ und $\bar{\beta} \mathrel{\overline{\preccurlyeq}} \alpha$, das heißt, α und β sind verträglich.

72. (Satz.) Unverträglichkeit zweier Objektive ist Folgeverschiedenheit durch die Folgenklassen ihrer Negationen.

Beweis. 1. Wegen $\alpha \succ \bar{\beta}$ ist $[\bar{\beta}] \leqslant [\alpha]$, außerdem ist $[\bar{\beta}] \leqslant \overline{[\beta]}$, daher (22) $[\bar{\beta}] \leqslant [\alpha]\,\overline{[\beta]}$. Ebenso ergibt sich $[\bar{\alpha}] \leqslant \overline{[\alpha]}\,[\beta]$. Also ist in $u(\alpha, \beta) \equiv [\alpha]\,\overline{[\beta]} + \overline{[\alpha]}\,[\beta]$ sowohl $[\bar{\beta}]$ als $[\bar{\alpha}]$ enthalten:

$$u(\alpha, \beta) \geqslant [\bar{\beta}] + [\bar{\alpha}].$$

2. Wird diese letzte Beziehung vorausgesetzt, also $[\alpha]\,\overline{[\beta]} + \overline{[\alpha]}\,[\beta] \geqslant [\bar{\beta}] + [\bar{\alpha}]$, so folgt, da $[\bar{\beta}] \mathrel{\overline{\leqslant}} [\beta]$, $[\bar{\alpha}] \mathrel{\overline{\leqslant}} [\alpha]$ ist, $[\alpha] \geqslant [\bar{\beta}]$ und $[\beta] \geqslant [\bar{\alpha}]$, also die Unverträglichkeit: $\alpha \succ \bar{\beta}$, $\beta \succ \bar{\alpha}$.

Folgesatz. Die Unmöglichkeit $(\bar{\mu})$ ist Folgeverschiedenheit mit Seiendem vermöge des Umstandes, daß aus dem unmöglichen die Negation des seienden, aus dem seienden die Negation des unmöglichen Objektivs folgt.

III. Beziehungen und Verknüpfungen zwischen Dingen und Fällen.

§ 17. Partikularität, Individualität und Bestimmtheit.

(Grundsatz M.) Wer ein Objektiv α erfaßt (im weiteren Sinne, vgl. § 1), kann damit auch

1. einen einzigen, individuellen Fall oder einige Fälle von α meinen (in der Weise des Setzens oder in der des Erfassens im engeren Sinne),

2. ein einziges, individuelles Ding J^{α} von α oder einige Dinge von α meinen.[1])

So meinen wir mit der Annahme, x sei eine reelle Zahl, meist „irgendeinen" Fall dieser Art, freilich unbestimmt welchen, mit dem Urteil „es regnet" einen einzigen Fall von Regen (und nur das Urteil vermag einen ganz bestimmten individuellen Fall, nicht nur „irgend-

[1]) Vgl. S. 2, auch die Anmerkung.

einen“, zu erfassen). In jedem partikulären Urteil „einige a sind b“ meinen wir mittels des Subjektsbegriffes a nur gewisse, nicht näher bestimmte Dinge der Art a, schränken also — ohne eine Determination des Begriffes[1] — unser Meinen, das wir an ihn knüpfen, auf einen (unbestimmten) Teilbereich seines Umfanges ein.

73. (Grundsätze J.) 1. Ist unter J^a „ein“ oder „irgendein Ding“ oder „ein Individuum“ mit dem definierenden Objektiv a, also von der Art a gemeint oder sind „einige Dinge“ derselben Art a gemeint, so gilt nicht allgemein $J^a \leqslant J^a$. — (Negativer) Grundsatz der unbestimmten Individualität oder der Partikularität, J_1.

J^a in der angegebenen Bedeutung darf also nicht wie eine Klasse behandelt werden, da es den Grundsatz der Einschließung nicht erfüllt.[2])

2. Es bedeute i ein Ding (Individuum) des eben betrachteten Bereiches, und zwar nicht nur „irgendein Ding“ (wie in J_1) sondern ein ganz bestimmtes, individuell gegebenes (also, soweit es auf das Erfassen ankommt, nicht bloß abstrakt, als „Ding des Bereiches $\dot{1}$“, sondern in seiner Individualität erfaßt); x bedeute eine Klasse. Dann gilt:

$$J_2 \qquad (i \not\equiv \dot{0}) \text{ und } (x \not\equiv \dot{0}) \not\frown (x \leqslant i) \succ (x \equiv i),$$

der (positive) Grundsatz der Individualität.[3])

Folgesatz. Jedes Einzelding (Individuum) ist vollständig (oder in jeder Hinsicht) bestimmt. Das heißt, durch ein Einzelding, also im einzelnen (individuellen) Falle, ist ein beliebiges, auf das Ding bezogenes Objektiv a entweder erfüllt, oder es ist seine Negation $\bar{a}$ erfüllt; das Ding fällt entweder (ganz) in die Klasse a oder es fällt (ganz) unter $\bar{a}$. Denn es ist für eine beliebig, aber bestimmt anzugebende Klasse a, das Objektiv $a\,i \equiv \dot{0}$ entweder Tatsache oder nicht Tatsache, es besteht also (32)

$$(a\,i \equiv \dot{0}) \times (a\,i \not\equiv \dot{0}) \equiv \tilde{0}.$$

Gilt $a\,i \equiv \dot{0}$, so ist $i \leqslant \bar{a}$. Gilt es aber nicht, so ergibt der eben angeführte Grundsatz (J_2) die Beziehung

$$(a\,i \not\equiv \dot{0}) \not\frown (a\,i \leqslant i) \succ (a\,i \equiv i)$$

und daher, nach 22, $i \leqslant a$.

---

1) Die Begründung für diesen Zusatz liegt in den Tatsachen, die in 73, Anm. 1, berührt werden.

2) „Einige a sind b“ dürfte zum Beispiel nicht als Einordnung $J^a \leqslant b$ einer Klasse J^a unter b angesehen werden. Denn sonst müßte, wenn zugleich einige a c sind, aus $J^a \leqslant b$ und $J^a \leqslant c$ nach 22 $J^a \leqslant b\,c$ folgen, was offenbar nicht der Fall ist. Die symbolische Logik drückt, daß einige a b sind, durch $a\,b \not\equiv \dot{0}$ aus, oder man verbindet, wie Chr. Ladd-Franklin tut, a und b durch ein eigenes Zeichen der partikulären Einordnung. Auch in der gewöhnlichen Logik wird die Partikularität bekanntlich in die „Kopula“ verlegt und a, nicht „einige a“, als Subjektsbegriff des partikulären Urteils angesehen. In dem oben angeführten Grundsatze bezeichnen wir aber mit J^a nicht irgendeine Klasse, sondern das Ding, das durch den Gedanken des J^a gemeint ist, beziehungsweise die Dinge, auf die zum Beispiel unser partikuläres Urteil „einige a sind b“ abzielt.

3) Der Grundsatz stimmt mit der Schröderschen Definition des Individuums (vgl. Algebra der Logik, 2. Bd., S. 320ff.) und mit der von Peirce angegebenen (a. a. O. S. 326) wesentlich überein. Vergleiche auch Schröder-Müller, Abriß der Algebra der Logik, II. Teil, S. 141.

Das Individuum i fällt also entweder (ganz) unter die Klasse $\bar{a}$ oder (ganz) unter die Klasse a (was von einer Klasse i selbstverständlich nicht zu behaupten wäre); im zweiten Falle ist das Objektiv a durch i erfüllt, im ersten $\bar{a}$.

Zusatz. Das reziproke Gegenstück des Grundsatzes J_2 kennzeichnet das, was man unter einem Fall versteht. Bedeutet ι einen individuellen Fall oder Einzelfall, ξ ein Objektiv, so gelten die Beziehungen

$$\iota \not\equiv \tilde{1},\ (\xi \not\equiv \tilde{1}) \not\frown (\xi \succ \iota) \succ (\xi \equiv \iota).$$

Daraus folgt, wie schon (in der reziproken Form) gezeigt worden ist, daß ein gegebener Fall ein gegebenes Objektiv a entweder als Folge einschließt, notwendig mit sich führt, oder es ausschließt, dann aber schließt er $\bar{a}$ ein. Der Fall ist also hinsichtlich jedes Objektivs oder vollständig bestimmt, eigentlich bestimmend; denn er läßt es keinem Objektiv gegenüber unbestimmt, ob es „in dem Falle“ erfüllt sei oder nicht. — Ein Ding ist immer durch einen Fall (vollständig) bestimmt.

74. (Definition.) Ist entweder $a \equiv \tilde{0}$ oder $a \equiv \tilde{1}$, das heißt, hat entweder a eine solche Bedeutung, daß es unbedingt gilt, allgemein erfüllt ist, Tatsache oder wahr ist, oder hat es solche Bedeutung, daß es durch nichts erfüllt, unbedingt ungültig oder falsch ist, so heiße das Objektiv a „bestimmt“, sonst „unbestimmt“.

Folgesätze. 1. Ist a ein bestimmtes Objektiv, so gilt außer $[a]\,[\bar{a}] \equiv [\tilde{0}]$ (welches immer erfüllt ist, vgl. 63), auch noch

$$[a] + [\bar{a}] \equiv [\tilde{1}],$$

wobei $\tilde{1}$ ein widersprechendes Objektiv bedeutet, $[\tilde{1}]$ also schlechthin alle Objektive umfaßt.

Denn ist $a \equiv \tilde{0}$, so ist $\bar{a}$ widersprechend, also äquivalent $\tilde{1}$ bei der dargelegten Bedeutung dieses Zeichens, u. s. w.

2. Daher ist für ein bestimmtes Objektiv a die Klasse der Folgen von $\bar{a}$ äquivalent der Klasse der Nichtfolgen von a, $[\bar{a}] \equiv \overline{[a]}$.

Zusätze. 1. Bestimmte Objektive sind zum Beispiel die durch gewisse Urteile gesetzten; sie sind, genau verstanden (vgl. 103), entweder unbedingt gültig, Tatsachen, oder unbedingt falsch. Von der ersten Art ist das Objektiv $a + a = 2a$ bei festgelegter, arithmetischer Bedeutung aller Zeichen, von der zweiten $a + a = 3a$ in demselben Falle.

2. Unbestimmte Objektive können durch Annahmen erfaßt werden, wie zum Beispiel „x sei eine durch 3 teilbare Zahl“ oder „$x + y = 5$“, wo x und y unbestimmt, „veränderlich“ sind, oder auch die Objektive „Rotsein“, „Abhängigkeit“ u. s. w. Für ein solches unbestimmtes a, wie etwa „Teilbarsein durch 3“, ist $[a] + [\bar{a}] \not\equiv [\tilde{1}]$, also ist hier $[\bar{a}] \not\equiv \overline{[a]}$. Denn ist a unbestimmt, so ist jeder Grund von a (im Beispiel etwa „Teilbarkeit durch 6“) ausgenommen a selbst, eine Nichtfolge von a und zugleich auch Nichtfolge von $\bar{a}$ (der Unteilbarkeit durch 3). Wäre nämlich ein Grund von a Folge von $\bar{a}$, so folgte (nach $\boldsymbol{T}$) auch a aus $\bar{a}$, es wäre also $\bar{a}$ widersprechend, daher a unbedingt gültig, also bestimmt. Es gibt demnach Objektive, die weder aus dem (unbestimmten) a, noch aus $\bar{a}$ folgen.

(Grundsatz *U*.) 1. Wer ein Objektiv α ungenau oder in ungenauem Sinne setzt, setzt damit bloß ein gewisses, nicht näher bestimmtes Folgeobjektiv α' von α.

2. Diesem ungenau Setzen von α entspricht (nach *E*) ein ungenau Erfassen von a, einer gewissen, nicht näher bestimmten Gattung a' nach (wovon a eine Art ist).

Bemerkung. Das ungenau Setzen von α kann auch als Setzung „einiger Folgen von α" bezeichnet werden, wobei „einige Folgen von α" wieder nicht als wohldefinierte Klasse angesehen werden darf. Wir haben also auf dem Gebiete des Setzens ein genaues Analogon des partikulär Erfassens „einiger a". Das kommt zum Beispiel vor, wenn wir von einem Papier sagen, „das ist weiß", oder von „dem" Ausdehnungskoeffizienten der Gase, er sei $\frac{1}{273}$ u. s. w. Wir meinen im ersten Falle sicher nicht das Reinweißsein, noch im zweiten genaue Gleichheit mit der angegebenen Zahl. Sagen und denken wir dafür „annähernd weiß", beziehungsweise „ungefähr $\frac{1}{273}$", so ist damit nichts anderes geleistet, als die Ungenauigkeit des Meinens ausdrücklich in unser Denken übernommen. Aber für „annähernd weiß sein" gibt es ebensowenig ein äquivalentes genaues Objektiv, als es zu „einigen a" eine äquivalente wohldefinierte Klasse gibt.

Das erkennt man deutlich an der Umformung unseres Beispieles: „das Papier hat eine der Farben eines gewissen, das Weiß einschließenden Bereiches (in der Farbenmannigfaltigkeit)" — und der analogen: „die gemeinte Zahl liegt in dem durch $\frac{1}{273} \pm k$ angegebenen Bereiche, wenn k eine entsprechend kleine Größe bedeutet", deren zahlenmäßige Angabe über das in „ungefähr $\frac{1}{273}$" Gedachte schon hinausginge. — Zugleich wird an diesen Umformungen klar, wie es ein gewisser Inbegriff von Folgen des α ist, der durch das ungenau Setzen von α gesetzt wird: einem das a einschließenden Bereiche von Dingen angehören, ist ja ein Folgeobjektiv des a-Seins. — Der Sinn und Wert ungenauer Angaben liegt eben darin begründet, daß sie gewissen Folgen nach zutreffen. Das wird man an gewissen physikalischen „Vereinfachungen" deutlichst erkennen, zum Beispiel an der Angabe, die Erde sei (annähernd) eine Kugel, und daraus zu ziehenden, durch die Wirklichkeit bestätigten Schlüssen, oder an der Annahme, die Planetenbahnen seien kreisförmig, und der aus ihr und dem dritten Keplerschen Gesetze zu gewinnenden Ableitung des Gravitationsgesetzes u. s. w.

Setzen wir „Weißsein" ungenau, so können wir damit alles annähernd Weiße erfassen: wir haben keinen Begriff, aber etwas Begriffartiges von dieser „ungenauen Gattung", in die das genau Weiße hineinfällt.

3. Umgekehrt ist durch die Setzung der Folge γ jedes Grundobjektiv α davon impliziterweise in ungenauem Sinne gesetzt, nämlich als möglich gesetzt. Worin das implicite Setzen besteht, ist in *E* erklärt worden.

Wer γ setzt, verhält sich demnach, sofern er sich richtig verhält, einem Grundobjektiv α gegenüber intellektuell annähernd oder in gewissem Sinne so, als hätte er α selbst gesetzt. Das heißt, sein intellektuelles Verhalten gegen α wird in einigen Folgen oder Teilbestimmungen

mit dem des α Setzenden übereinstimmen, zum Beispiel wenn der γ Setzende für dieses γ den Grund α vermutet. Dieses Vermuten von α ist ja ein Urteilen, das mit dem gewissen Urteilen von α in manchen Folgebestimmungen übereinstimmt, und zwar sowohl „subjektiv", das heißt als Erlebnis betrachtet, als auch „objektiv", das heißt seinen gegenständlichen Entsprechungen nach: ihm entspricht nämlich das möglicherweise tatsächlich Sein von α, ein Folgeobjektiv des Tatsächlichseins von α, welches dem gewissen Urteilen von α entspräche.

Folgesatz. Wer α setzt, setzt (nach *E*) impliziterweise jede Folge γ von α; mit γ aber setzt er, nach dem eben Gesagten, impliziterweise jeden Grund davon, zum Beispiel β, in ungenauem Sinne, das heißt, er setzt β als möglich — eventuell als in einem andern Falle möglich. Daraus ergibt sich: Wer α setzt, setzt damit impliziterweise jedes mit α folgeverwandte Objektiv β als möglich. — Erfaßt er nun ein solches β auch aktuellerweise (mittels der durch die α-Setzung begründeten Disposition), so setzt er in der Tat β als möglich. Hierin liegt, dem Wesen nach, der Vorgang des Wahrscheinlichkeitsschlusses.

Wir beobachten zum Beispiel, daß ein gegebener Würfel auf die Fläche f_1 fällt (α), und erfassen darin impliziterweise den Tatbestand (γ), daß der Würfel auf „eine seiner Flächen" fällt. Wir setzen damit impliziterweise als möglich, daß der Würfel auch einmal auf die Fläche f_2 falle (β), und können dieses Objektiv β auf Grund des festgestellten α auch ausdrücklich vermuten. Von α zu β führt ein Analogieschluß, der um so bündiger ist, je größer die Folgeverwandtschaft zwischen den beiden Objektiven. — Man bemerkt leicht, daß in dem hier beschriebenen Schema des Wahrscheinlichkeitsschlusses neben dem Analogieschlusse auch der als Induktion im engeren Sinne dieses Wortes bezeichnete Schluß als besonderer Fall enthalten ist. Vergleiche oben *U* 3.

4. Wer ein („gegebenes") Ding als J^a (also als Ding von a) erfaßt und mit α an J auch (nach dem eben Ausgeführten) das folgeverwandte β erfaßt, kann nun damit ein individuelles Ding J^β (das ihm zum Beispiel auch „gegeben" sein kann) meinen. Er meint dann die zwei Dinge J^a und J^β, durch das ungenau Erfassen eines nicht näher bestimmten, dem α und β gemeinsamen Folgeobjektivs γ, in ungenauer Weise. Dieses ist dem Wesen nach der Vorgang des Erfassens von J^a und J^β in Ähnlichkeitsrelation.[1])

Ich finde zum Beispiel ein Farbenmuster a „ungefähr so" wie b, was soviel heißt wie dem b ähnlich. Hier habe ich offenbar das Sosein α des a ungenau genug erfaßt, um damit zugleich auch das Sosein β in demselben Falle ungenauerweise setzen zu können, nämlich irgendeinem, nicht genau erfaßten, in den beiden Bestimmungen α und β zugleich implizierten Bestimmungsinbegriffe nach. Hätte ich aber ein solches gemeinsames Folgeobjektiv γ genau erfaßt, aus dem α und dem β herausanalysiert, so hätte ich die beiden Muster als „in γ gleich" erfaßt, zum Beispiel als gleich hinsichtlich des Farbentones.

---

[1]) Die unter *U* angeführten Gedanken dürften zum Teil durch einige Bemerkungen Meinongs angeregt worden sein. Vergleiche auch dieses Autors Abhandlung „Abstrahieren und Vergleichen", Zeitschrift für Psychologie, Bd. 24, insbesondere S. 79 ff., und „Über die Erfahrungsgrundlagen unseres Wissens", Sonderhefte der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, Berlin 1906, Heft 6, S. 96.

§ 18. Gleichheit, Ähnlichkeit und Verschiedenheit.

75. (Definierender Grundsatz der Gleichheit.) Individuen mit derselben Bestimmung (oder mit äquivalenten Bestimmungen) α sind „als Dinge mit der Bestimmung α“ oder „hinsichtlich der Eigenschaft α“ einander gleich:

$$J^{\alpha} \equiv J^{\alpha}.$$

Folgesatz. Gegenstände, die wir gleich nennen, sind als Dinge derselben Art oder Klasse a aufgefaßt.

Zusatz. Auch folgegleiche Objektive sind als „Dinge“ derselben Art aufgefaßt, wenn sie gleich genannt werden. Insbesondere sind α an J und α an einem andern Individuum J einander gleich, ebenso wenn $\alpha \equiv \beta$ ist, α an J und β an einem andern Individuum J.

76. (Definierender Grundsatz der Ähnlichkeit.) Sind J^{α}, J^{β} Dinge mit folgeverwandten Bestimmungen α, β, so sind J^{α} und J^{β} ähnlich, und zwar vermöge des Inbegriffes gemeinsamer Folgen und gemeinsamer Nichtfolgen (kurz der „Folgegemeinschaft“) von α und β.

Folgesätze. 1. Gegenstände sind ähnlich als Dinge von Arten einer (beim gewöhnlichen Vergleichen nicht genau erfaßten) Gattung, wenn ihre bestimmenden Objektive folgeverwandt im engeren Sinne sind (denn $\alpha \times \beta \equiv \pi$ definiert eine Klasse $p \equiv a + b$), sie sind ähnlich als Dinge von Arten, die einer und derselben Gattung nicht angehören, wenn ihre bestimmenden Objektive bloß durch gemeinsame Nichtfolgen verwandt sind.

2. Zwischen einem Dinge $J^{\bar{0}}$ und einem $J^{\bar{1}}$, das heißt, zwischen einem beliebigen Dinge und nichts besteht keine Ähnlichkeit, da (nach 68) $g\,(\bar{0}, \bar{1}) \equiv [\bar{0}]$ ist. Dieser Satz ist ein Ausdruck dafür, daß je zwei Dinge (mögliche Gegenstände als Einzeldinge betrachtet) immer eine Ähnlichkeit aufweisen: sie stimmen ja mindestens darin überein, daß sie Dinge sind.

3. Wie $J^{\bar{0}}$ und $J^{\bar{1}}$ oder etwas und nichts verhalten sich auch ein J^{α} und $J^{\bar{\alpha}}$, wenn α ein bestimmtes Objektiv ist: also ein möglicher und ein unmöglicher Gegenstand (vgl. 74).

4. Ist dagegen α ein unbestimmtes Objektiv, so sind α und $\bar{\alpha}$ nur folgenfremd im weiteren Sinne, das heißt, sie haben keine gemeinsamen Folgen, wohl aber gemeinsame Nichtfolgen (vgl. 74, Zusatz); sie verhalten sich also wie zwei subkonträre Objektive (vgl. 68, Zusatz). Zwischen einem Dinge der von $\dot{1}$ und $\dot{0}$ verschiedenen Klasse a und einem Dinge von $\bar{a}$ besteht demnach bloß eine Ähnlichkeit in dem weiteren Sinne, daß beide, als Dinge dieser Arten, gewisse Bestimmungen nicht aufweisen.

Bemerkungen. Ähnlichkeit ist hier nicht als partielle Gleichheit, das heißt als Gleichheit von Teilen der verglichenen Gegenstände, erklärt worden: denn Folgen der definierenden Objektive sind nicht Teile dieser Objektive, sie können höchstens in einem übertragenen Sinne als Teilbestimmungen bezeichnet werden, in keinem Sinne aber als Teile der durch sie bestimmten Dinge.

Wenn einerseits das Erfassen in Ähnlichkeitsrelation als ein Fall ungenauen Erfassens beschrieben worden ist, andererseits aber die Ähnlichkeit durch die Folgegemeinschaft der definierenden Objektive genau definiert worden ist und im folgenden sogar gemessen werden soll, so liegt hierin doch kein Widerspruch. Wie man zunächst ungenau feststellen kann, daß einige Anzahlen zwischen 1 und 100 prim sind, dann aber ihre Menge genau ermitteln und ihre Häufigkeit im ersten Hundert als genaue Entsprechung jenes partikulären Urteils angeben kann: so kann man auch jene genaue Relation angeben, die dem ungenauen als ähnlich Erfassen entspricht und es bis zu einem genau bestimmten (vom so Erfassenden freilich nicht miterfaßten) Grade logisch berechtigt. — Diese Bemerkung gilt auch für die Beziehung zwischen dem ungenauen als möglich Setzen und der genauen Angabe der ihm entsprechenden Möglichkeit durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

77. (Definierender Grundsatz der Verschiedenheit.) Sind J^{α}, J^{β} Dinge mit folgeverschiedenen Bestimmungen α, β, so heißen sie verschieden, und zwar verschieden vermöge des Folgenunterschiedes von α und β.

Bemerkung. Diese Definition ist nicht zirkelhaft, wie sie wegen der Verwendung des Wortes „folgeverschieden“ scheinen könnte. Denn die Folgeverschiedenheit ist (in 65) unabhängig definiert worden, und zwar wesentlich mittels der Negation.

Folgesatz. Verschiedenheit und Gleichheit sind kontradiktorisch (75).

§ 19. Mengen.

78. (Grundsatz der Transponierbarkeit.) Ist a eine Menge, so bestehen „nichtidentische Mengen von derselben Vielheit“, das heißt Mengen mit demselben definierenden Objektiv *def a*, die nicht dieselben Dinge enthalten.[1])

Wir sagen: die Menge ist transponierbar.[2]) Diese Eigenschaft unterscheidet die Menge wesentlich von einer Klasse von Dingen. Eine Klasse ist nicht transponierbar: zur Klasse der Dinge a gibt es keine Klasse desselben definierenden Objektivs, die nicht dieselben Dinge enthält.

Folgesätze. 1. Für Mengen a gilt also nicht allgemein $a \equiv a$, das heißt, die Mengen a sind „Dinge“ derselben Art „Menge a“. Der Grundsatz der Transponierbarkeit sagt also aus, daß für Mengen derselben Vielheit (desselben Vielheitsgrades) der Grundsatz J_1 gilt.

2. Daher besteht $a = a$ und allgemeiner $a = b$, wenn $def\,a = def\,b$ ist. Das heißt, Mengen mit gleichen definierenden Objektiven sind gleich. Über gleiche Objektive vergleiche 75, Zusatz.

79. (Definition.) Sind a, b Mengen, so bedeute

$$a\,(\lessdot)\,b,$$

daß jedes Ding von a ein Ding von b ist. a heißt dann eine Teilmenge von b.[3]) ($a \lessdot b$ hieße: a ist eine Menge von der Art b.)

80. (Definition.) Ist $a\,(\lessdot)\,b$ und $b\,(\lessdot)\,a$, das heißt, enthalten a, b dieselben Dinge, so heißen a und b identisch: $a \equiv b$.

---

[1]) Zur Bedeutung von „bestehen“ vgl. 104, F. 1, und 105, Anm.

[2]) Die Bezeichnung ist in Ausführung eines Gedankens von Chr. v. Ehrenfels (Über Gestaltqualitäten, Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie, 1890, 3. Heft) durch Höfler aus der musikalischen Terminologie übernommen und auf alle „Gestaltqualitäten“ angewendet worden. Vergleiche dieses Verfassers „Psychologie“, Wien und Prag 1897, S. 153.

[3]) Vgl. z. B. K. Th. Vahlen, a. a. O. S. 7, wo dafür G. Cantor zitiert ist.

81. (Definition.) Gilt $a\ (\lessdot)\ b$, $b\ (\overline{\lessdot})\ a$ für zwei individuelle Mengen a, b, so gilt

$$a < b,$$

„a kleiner als b“, für jede Menge, die gleich a, und jede Menge, die gleich b ist.

Die Menge a heißt also kleiner als die Menge b, wenn eine Teilmenge von b, nicht gleich b, besteht, die gleich a ist.

§ 20. Verknüpfungen von Dingen und von Fällen.

82. (Definition.) 1 bedeute ein Ding einer eben betrachteten Art (die dann $\dot{1}$ heißen kann). — Nach J_1 gilt dann nicht allgemein $1 \equiv 1$,[1]) wohl aber gilt $1 = 1$.

83. (Definition.) Ist a eine Menge von Dingen 1, $1'$ ein (individuelles) Ding derselben Art, so ist
$a + 1'\ (\gtrdot)\ a$, $a + 1'\ (\gtrdot)\ 1'$, $a + 1'\ (\lessdot)\ x$ für jede Menge x, für die gilt: $x\ (\gtrdot)\ a$, $x\ (\gtrdot)\ 1'$, und es heißt $a + 1'$ die Summe von a und $1'$.

84. (Grundsatz.) Es gilt $a + 1'\ (\overline{\lessdot})\ a$. Das heißt, ein Ding, das zu einer Menge („arithmetisch“) addiert wird, gehört dieser Menge niemals schon an. Da das für sonst beliebige Individuen 1 der eben aufgefaßten Art gilt, schreiben wir

$$a + 1\ (\overline{\lessdot})\ a \text{ (also } a + 1 > a).$$

B e m e r k u n g. Die Definition der Summe $a + b$ ergibt sich nun von selbst. Offenbar gilt allgemein $a + b > a$, $a + b > b$.

Insbesondere können nun die Anzahlen definiert werden, zum Beispiel 2 oder $1 + 1$ als Menge, die gleich $1' + 1''$ ist, u. s. w. (Die „reine Zahl“ 2 ist der abstrakte Vertreter aller Mengen von dem Vielheitsgrade, der $1' + 1''$ kennzeichnet.)

Auch die Beziehungen

$$1 < 2 < 3 < \ldots$$

sind schon im Vorhergehenden erklärt und begründet.

85. (Definition und Grundsatz.) Bedeutet a_i einen (individuellen) Fall von a, β_i einen Fall von β, so ist $a_i \not+ \beta_i$ durch die gewöhnliche Summendefinition (10) erklärt. Es gilt jedoch der Grundsatz: Werden zwei Objektivfälle addiert, so ist kein Folgefall des einen im andern Summanden (als Fall) schon eingeschlossen. (Durch die Addition von a_i und β_i wird also niemals derselbe individuelle Fall zweimal gesetzt.)

1) Hierin, also in J_1, liegt die Möglichkeit der Geltung des Grundsatzes 84 begründet, das heißt, gilt J_1 nicht, so kann auch 84 nicht gelten, sondern man hat eine Addition, für die das Absorptionsgesetz besteht.

In der Geltung der Absorption findet schon B o o l e den wesentlichen Unterschied der logischen Operationen gegenüber den arithmetischen. G. F. L i p p s (Mythenbildung und Erkenntnis, Leipzig und Berlin 1907, S. 126) sieht ihn in der „Iterierbarkeit“ der „Bestimmungen“, „die der Mathematik zugrunde liegen“. (Auch er geht übrigens bei seiner Entwicklung der Grundlagen der Arithmetik von der Grundbeziehung des Folgens aus.) — W. F r a n k l macht mich darauf aufmerksam, daß schon P l a t o n den in Rede stehenden Unterschied in seiner Weise vermerkt hat. Vgl. F r a n k l, Inhalt und Umfang von Begriffen, Archiv für systematische Philosophie, 17. Bd. (1911), S. 447, Anm.

Es gilt also immer

$$a_i \not+ \beta_i > a_i,\ a_i \not+ \beta_i > \beta_i,$$

daher insbesondere

$$a_i \not+ a_i > a_i.$$

86. (Definition.) Sind a, b Anzahlen und bedeutet $\delta ef\, a$, beziehungsweise $\delta ef\, b$ einen (individuellen) Fall des Anzahlenobjektivs $def\, a$, beziehungsweise $def\, b$, so heißt

$$a^{\delta ef\, b} \equiv a\, b$$

das arithmetische Produkt des Multiplikanden a und des Multiplikators b. Es bedeutet $a^{\delta ef\, b}$ jene Menge von „Dingen“ a (die hier insbesondere Mengen sind), die das definierende Objektiv der Menge b erfüllt: also die Menge von b Mengen a.

B e m e r k u n g. Das „arithmetische Determinat“ $a^{\delta ef\, b}$ unterscheidet sich von dem logischen durch die Geltung des Grundsatzes 85. An Stelle des abstrakten Vertreters der Dinge a, das heißt der Klasse dieser Dinge, tritt hier der Vertreter einer Menge von Dingen a, das Abstraktum „Dinge a“ oder „Menge von Dingen a“ als Determinand (a) auf. Und als Determinator wird in $\delta ef\, b$ ein Fall des Anzahlenobjektivs $def\, b$ gesetzt, wovon auch kein Folgefall in einem $\delta ef\, a$, das ein Ding a erfüllt, schon eingeschlossen ist.

F o l g e s ä t z e. 1. Die Bedeutung von $1^{\delta ef\, a}$ ist $1 . a$ oder a. — 2. Demnach ist $a\, b = a^{\delta ef\, b} = (1^{\delta ef\, a})^{\delta ef\, b} = 1^{\delta ef\, a \not+ \delta ef\, b}$. Hier bedeutet der letzte Ausdruck eine Menge von Dingen 1, die einen Fall des definierenden Objektivs von a erfüllt und zugleich einen individuell völlig davon verschiedenen Fall des Anzahlenobjektivs (der Vielheit) von b (gemäß 85).[1])

87. (Satz.) Für die arithmetische Addition und Multiplikation gelten alle Sätze, die für die entsprechenden logischen Operationen bestehen und mit der Geltung von J für die in ihnen auftretenden Terme verträglich sind, soweit keine Negation darin vorkommt. Vgl. 78, F. 1, 2.

IV. Anwendung auf Messungsprobleme.

§ 21. Zwei Hilfssätze über Folgenklassen.

88. (Satz.) Ist $a > \beta > \gamma$, so ist die Folgegemeinschaft von a und γ gleich dem (logischen) Produkt der Folgegemeinschaften zwischen a und β und zwischen β und γ:

$$g\,(a, \gamma) = g\,(a, \beta) \cdot g\,(\beta, \gamma).$$

1) In $1^{\delta ef\, 3 \not+ \delta ef\, 2}$ ist zum Beispiel durch die Hinzufügung von $\delta ef\, 2$ zu $\delta ef\, 3$ nicht das Objektiv „Zweiheit“ noch einmal aufgefaßt, das zufolge der Setzung der Dreiheit ($def\, 3$) selbstverständlich zutrifft, da ja, wenn die Menge drei Dinge umfaßt, auch zwei Dinge darin vorhanden sind. Vielmehr setzt man in $\delta ef\, 2$ einen ganz neuen Fall von Zweiheit, nämlich die Zweiheit der durch $1^{\delta ef\, 3} = 3$ dargestellten Mengen, erhält also $3 . 2$. Die so aufgefaßte Menge von Dingen 1 erfüllt aber beide Objektivfälle, $\delta ef\, 3$ und $\delta ef\, 2$ zusammen, da sie einerseits einer Menge von 3 Dingen 2 und andererseits einer Menge von 2 Dingen 3 identisch ist.

Beweis. Unter der Voraussetzung $\alpha \succ \beta \succ \gamma$ geht (nach 69)

$$\begin{array}{lcl} g(\alpha, \gamma) \equiv [\alpha]\,[\gamma] + \overline{[\alpha]}\,\overline{[\gamma]} & \text{über in} & [\gamma] + \overline{[\alpha]}, \\ g(\alpha, \beta) \equiv [\alpha]\,[\beta] + \overline{[\alpha]}\,\overline{[\beta]} & \text{in} & [\beta] + \overline{[\alpha]}, \\ g(\beta, \gamma) \equiv [\beta]\,[\gamma] + \overline{[\beta]}\,\overline{[\gamma]} & \text{in} & [\gamma] + \overline{[\beta]}. \end{array}$$

Daher ist $g(\alpha, \beta) \cdot g(\beta, \gamma) = ([\beta] + \overline{[\alpha]}) \cdot ([\gamma] + \overline{[\beta]}) = [\beta]\,[\gamma] + \overline{[\alpha]}\,[\gamma] + [\beta]\,\overline{[\beta]} + \overline{[\alpha]}\,\overline{[\beta]} = [\gamma] + \overline{[\alpha]} = g(\alpha, \gamma)$.

(Es ist nämlich $[\beta]\,[\gamma] \equiv [\gamma]$ wegen $[\beta] > [\gamma]$, $\overline{[\alpha]}\,[\gamma] \equiv [\tilde{0}]$ wegen $[\alpha] > [\gamma]$, $[\beta]\,\overline{[\beta]} \equiv [\tilde{0}]$, $\overline{[\alpha]}\,\overline{[\beta]} \equiv \overline{[\alpha]}$ wegen $[\alpha] > [\beta]$.)

Folgesatz. Ist $\alpha \succ \beta \succ \gamma$, so ist $g(\alpha, \gamma) < g(\alpha, \beta)$ und $g(\alpha, \gamma) < g(\beta, \gamma)$.

89. (Satz.) Ist $\alpha \succ \beta \succ \gamma$, so ist der Folgenunterschied von α und γ gleich der (logischen) Summe der Folgenunterschiede von α und β und von β und γ:

$$u(\alpha, \gamma) = u(\alpha, \beta) + u(\beta, \gamma).$$

Beweis. Unter der Voraussetzung $\alpha \succ \beta \succ \gamma$ geht (nach 69, Zusatz)

$$\begin{array}{lcl} u(\alpha, \gamma) \equiv [\alpha]\,\overline{[\gamma]} + \overline{[\alpha]}\,[\gamma] & \text{über in} & [\alpha]\,\overline{[\gamma]}, \\ u(\alpha, \beta) \equiv [\alpha]\,\overline{[\beta]} + \overline{[\alpha]}\,[\beta] & \text{in} & [\alpha]\,\overline{[\beta]}, \\ u(\beta, \gamma) \equiv [\beta]\,\overline{[\gamma]} + \overline{[\beta]}\,[\gamma] & \text{in} & [\beta]\,\overline{[\gamma]}. \end{array}$$

Daher ist $u(\alpha, \beta) + u(\beta, \gamma) = [\alpha]\,\overline{[\beta]} + [\beta]\,\overline{[\gamma]}$. Nun ist[1] $[\alpha]\,\overline{[\gamma]} \equiv [\alpha]\,\overline{[\gamma]} \cdot [\beta] + [\alpha]\,\overline{[\gamma]} \cdot \overline{[\beta]}$, und das ist wegen $[\alpha] > [\beta]$ und wegen $\overline{[\beta]} < \overline{[\gamma]}$ gleichbedeutend mit $[\beta]\,\overline{[\gamma]} + [\alpha]\,\overline{[\beta]}$, also mit $u(\beta, \gamma) + u(\alpha, \beta)$.

Folgesatz. Ist $\alpha \succ \beta \succ \gamma$, so ist $u(\alpha, \gamma) > u(\alpha, \beta)$ und $u(\alpha, \gamma) > u(\beta, \gamma)$.

Bemerkung. In den Sätzen 88 und 89 kann die Voraussetzung $\alpha \succ \beta \succ \gamma$ auch durch $\alpha \succcurlyeq \beta \succcurlyeq \gamma$ ersetzt werden.

§ 22. Die Größe der Größenverschiedenheit.

90. (Definierender Grundsatz der Messung.) Zwischen der Maßzahl und der Einheit 1 besteht dasselbe (Größen-)Verhältnis wie zwischen der gemessenen Größe und der Maßgröße.

91. (Festsetzung.) Wir setzen die Größe der Verschiedenheit $\varphi(J^{\alpha}, J^{\beta})$, wofür im folgenden der Einfachheit wegen $\varphi(a, b)$ geschrieben werden soll, gleich der Größe des für sie definierenden Folgenunterschiedes $u(\alpha, \beta)$.

Diese Festsetzung hat ihren Grund darin, daß die Verschiedenheit $\varphi(a, b)$ äquivalent ist dem Bestehen des Folgenunterschiedes $u(\alpha, \beta)$. Was also hier festgesetzt wird, ist eigentlich nur der Gebrauch des Namens Verschiedenheit für die Relation $\varphi(a, b)$: wohl nichts anderes als eine Explikation dessen, was man gewöhnlich unter diesem Namen meint.

92. (Satz.) Die Beziehung $u(\alpha, \gamma) = u(\alpha, \beta) + u(\beta, \gamma)$ für $\alpha \succ \beta \succ \gamma$ besteht auch als Größenbeziehung zwischen $u(\alpha, \gamma)$ und der arithmetischen Summe rechts.

---

[1]) Wegen der Beziehung $a \equiv a \,.\, \dot{1} \equiv a(b + \bar{b}) \equiv ab + a\bar{b}$.

Beweis. $u(\alpha, \gamma) \equiv [\alpha]\,\overline{[\gamma]}$ bedeutet die Klasse jener Folgen von α, die nicht auch Folgen von γ sind. Da $[\gamma]$ ganz in $[\alpha]$ eingeschlossen und nicht gleich $[\alpha]$ ist, stellt $[\alpha]\,\overline{[\gamma]}$ das Restgebiet von Folgen des α dar, das nach Abzug des Folgengebietes $[\gamma]$ übrigbleibt, kann also als Gebiet $[\alpha] - [\gamma]$ aufgefaßt werden, wobei die Differenz denselben Sinn hat wie etwa bei der Subtraktion eines Flächeninhaltes von einem andern, der ihn ganz einschließt. Ebenso gilt $u(\alpha, \beta) = [\alpha] - [\beta]$, $u(\beta, \gamma) = [\beta] - [\gamma]$. Die arithmetische Addition der Gebietsgrößen $([\alpha] - [\beta]) + ([\beta] - [\gamma])$ ergibt aber $[\alpha] - [\gamma]$, welches die Gebietsgröße $u(\alpha, \gamma)$ ist.

93. (Satz.) Sind $\varphi(a, b)$, $\varphi(b, c)$, $\varphi(a, c)$ die Größen oder auch die Maßzahlen der ebenso bezeichneten Verschiedenheiten, so gilt, unter der Voraussetzung $\alpha \succ \beta \succ \gamma$, die Beziehung

$$\varphi(a, c) = \varphi(a, b) + \varphi(b, c). \qquad \text{I.}$$

Der Beweis liegt im vorhergehenden Satze.

94. (Satz.) Ist $\alpha \succ \beta$, γ derselben Folgenreihe angehörig, so ist

$$u(\alpha \dotplus \gamma, \beta \dotplus \gamma) = u(\alpha, \beta),$$

wenn $\alpha \dotplus \gamma$, $\beta \dotplus \gamma$ arithmetische Summen im Sinne der Definition (85) — also ohne Absorption — sind.

Beweis. Addiert man γ zu jedem der übrigen Objektive des Gesamtbereiches, so ist γ im ganzen zugehörigen Dingbereiche erfüllt, also $\tilde{0}$, und die Gleichung gilt. Da aber dabei an $u(\alpha \dotplus \gamma, \beta \dotplus \gamma)$ sich nichts geändert hat, gilt sie allgemein.

95. (Satz.) Für Anzahlen a, b, c gilt

$$\varphi(ac, bc) = \varphi(a, b). \qquad \text{II.}$$

Der Beweis ergibt sich aus dem vorhergehenden Satze mit Rücksicht auf die Definition des arithmetischen Produktes (86).

96. (Satz.) Die Größenverschiedenheit zwischen einer reellen, positiven Zahl x und der Zahl 1 ist gemessen durch den Logarithmus der Zahl x:

$$\varphi(x, 1) = \log x$$

oder

$$\varphi(x) = \log x,$$

wenn $\varphi(x) \equiv \varphi(x, 1)$ gesetzt wird.

Beweis.[1]) Aus dem Additionstheorem (I) folgt zunächst

$$\varphi(a^n, 1) = \varphi(a^n, a^{n-1}) + \varphi(a^{n-1}, a^{n-2}) + \cdots + \varphi(a, 1).$$

Nach II ist jeder Posten dieser Summe gleich $\varphi(a, 1)$ oder $\varphi(a)$, daher gilt:

$$\varphi(a^n) = n \cdot \varphi(a). \qquad a$$

Hier bedeuten a und n Anzahlen.

---

[1]) Er ist mit Absicht etwas breit durchgeführt worden, und es wurde die Gelegenheit benutzt, einige für die Kenntnis der Größenverschiedenheit wichtige Beziehungen dabei aufzuzeigen. — Aus den Funktionalgleichungen I und II kann man den behaupteten Satz durch geeignete Differentiationen direkt gewinnen.

Durch Anwendung von I und II ergeben sich die Umformungen:

$$\varphi(a, 1) = \varphi(a, b) + \varphi(b, 1),$$

$$\varphi(a, 1) = \varphi\left(\frac{a}{b}, 1\right) + \varphi(b, 1),$$

$$\varphi(a, 1) - \varphi(b, 1) = \varphi\left(\frac{a}{b}, 1\right)$$

oder

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \varphi\left(\frac{a}{b}\right). \qquad b$$

Hier bedeutet vorläufig auch $\frac{a}{b}$ noch eine Anzahl. — Da $\varphi\left(\frac{a}{b}\right)$ oder $\varphi\left(\frac{a}{b}, 1\right) = \varphi(a, b)$ ist, gilt auch:

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \varphi(a, b) \qquad c$$

daher

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(b, a) = -\varphi(a, b). \qquad d$$

Daher besteht

$$\varphi(a, b) = \varphi(a) - \varphi(b) = (\varphi(a) - \varphi(c)) + (\varphi(c) - \varphi(b)),$$

also

$$\varphi(a, b) = \varphi(a, c) + \varphi(c, b) \qquad e$$

für beliebige Anzahlen a, b, c — eine Erweiterung von (I). Daraus folgt insbesondere

$$\varphi(a, a) = \varphi(a, b) + \varphi(b, a) = \varphi(a, b) - \varphi(a, b) = 0. \qquad f$$

Da $\frac{a}{b}$ als eine Menge von a Dingen $\frac{1}{b}$ aufgefaßt werden kann, wo $\frac{1}{b}$ als ein Ding von solcher Größe definiert ist, daß 1 gleichwertig ist einer Menge von b solchen Dingen, so gilt

$$\varphi(b) = \varphi(b, 1) = \varphi\left(1, \frac{1}{b}\right) = \varphi\left(a, \frac{a}{b}\right)$$

und daher die Gleichung *(b)*,

$$\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \varphi(a) - \varphi(b),$$

für beliebige positive, rationale Zahlen $\frac{a}{b}$.

Daraus ergibt sich:

$$\varphi\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right] = \varphi\left(\frac{a^n}{b^n}\right) = \varphi(a^n) - \varphi(b^n) = n\,\varphi(a) - n\,\varphi(b) = n \cdot \varphi\left(\frac{a}{b}\right).$$

Die Gleichung *(a)* gilt also für beliebige positive, rationale Zahlen a.

Setzt man $x^n = y$, so hat man daraus $n = \frac{\log y}{\log x}$ und aus $\varphi(y) = n\,\varphi(x)$ andererseits $n = \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}$. Daher ist

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} = \frac{\log x}{\log y}, \qquad g$$

wo $\log x$ zum Beispiel den natürlichen Logarithmus von x bedeute.

Die Gleichung *(g)* ist nun für alle positiven rationalen, daher, da $\varphi(x)$ eine stetige Funktion der reellen Veränderlichen x sein muß, auch für alle positiven, reellen Werte x dann und nur dann erfüllt, wenn $\varphi(x) = k \,.\, \log x$ ist, wo k eine Konstante bezeichnet. Diese nimmt den Wert 1 an, wenn man

$$\varphi(e) = 1$$

setzt, das heißt die Verschiedenheit zwischen der Basis e der natürlichen Logarithmen und der Zahl 1 zur Einheit der Verschiedenheitsgröße wählt.

Dann hat man also

$$\varphi(x) = \log x$$

und

$$\varphi(x, y) = \log x - \log y = \log\left(\frac{x}{y}\right) \qquad h$$

als Maßformeln für die Größenverschiedenheit von x gegenüber 1 und von x gegenüber einer andern positiven, reellen Zahl y.[1])

§ 23. Die Größe der Größenähnlichkeit.

97. (Festsetzungen.) 1. Die Größe der Ähnlichkeit zwischen einem Dinge J^a und einem Dinge J^β — sie sei mit $\omega(J^a, J^\beta)$ oder, der Kürze halber, mit $\omega(a, b)$ bezeichnet — setzen wir gleich der Größe der Folgegemeinschaft $g(a, \beta)$ der für a und b definierenden Objektive:

$$\omega(a, b) = g(a, \beta).$$

Der Grund dieser Festsetzung ist ebenso anzugeben wie die Begründung zu 91.

2. Es sei ein endlicher Bereich von Größen x vorausgesetzt, deren größte als Einheit gelte, so daß $0 < x \leqq 1$ ist. (Die Null ist ausgeschlossen.)

3. In diesem Bereiche sei $def\, x \prec def\, y$, wenn $x < y$ ist. Diese Festsetzung bedeutet, daß durch die Setzung der Größe y die Setzung jeder Größe x, die kleiner als y ist, impliziert wird. Demnach ist $def\, 1 \succcurlyeq def\, x$ für jede Größe x des betrachteten Bereiches, also $def\, 1 \equiv \tilde{1}$ zu setzen, womit die Bedeutung des Gesamtobjektivs $\tilde{1}$ festgelegt ist.

Bemerkung. Eine Beschränkung des Gesamtbereiches von Objektiven auf ein endliches Gebiet ist hier notwendig, weil sonst $g(a, \beta)$, welches für $a \preccurlyeq \beta$ in $[a] + \overline{[\beta]}$ übergeht, für jedes endliche $[\beta]$ unendlich werden müßte, während doch die Ähnlichkeit zwischen endlichen Größen a, b endlich ist.

98. (Satz.) Für reelle, positive Zahlen a, b, c gilt

$$\omega(ac, bc) = \omega(a, b).$$

Beweis. Es ist $u(def\, ac, def\, bc) = u(def\, a, def\, b)$ zunächst für Anzahlen (95), dann aber auch für beliebige reelle, positive Zahlen a, b, c

[1]) Vgl. Meinong, Über die Bedeutung des Weberschen Gesetzes. Zeitschrift für Psychologie, 11. Bd., 1896.

Auch meine Arbeit „Das Maß der Verschiedenheit", Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Bd. 131 (1907).

(nach 96). Daher sind auch die Negate der beiden Folgenunterschiede äquivalent (33), das heißt die entsprechenden Folgegemeinschaften gleich (66). — Der Beweis kann natürlich auch ohne Heranziehung von 95 und 96 geführt werden.

Folgesatz. Insbesondere ist

$$\omega\,(a, b) = \omega\left(\frac{a}{b}, 1\right) \text{ oder kürzer: } \omega\,(a, b) = \omega\left(\frac{a}{b}\right),$$

daher auch

$$g\,(def\, a,\, def\, b) = g\,\left(def\,\frac{a}{b},\, def\, 1\right) = \left[def\,\frac{a}{b}\right],$$

wenn $a \leqq b$, also $\frac{a}{b}$ im betrachteten Zahlenbereiche (97) vorhanden ist. (Eine entsprechende Einschränkung ist vorläufig auch im Satze 98 zu machen; sie wird aber in 102 aufgehoben werden.)

99. (Festsetzung.) Da insbesondere

$$\omega\,(b, b) = \omega\left(\frac{b}{b}, 1\right) = \left[def\,\frac{b}{b}\right] = [\bar{1}]$$

ist, setzen wir, entsprechend der Beschränkung des Größenbereiches in 97,

$$\omega\,(b, b) \text{ oder } \omega\,(1) \text{ gleich } 1.$$

100. (Grundsatz.) Die Folgegemeinschaft zweier Folgenklassen — in 64 ist nur die Folgegemeinschaft von Objektiven erklärt — besteht aus der Klasse der in beiden zugleich enthaltenen und der Klasse der in beiden zugleich nicht enthaltenen Objektive:

$$g\,([\alpha], [\beta]) \equiv [\alpha]\,[\beta] + \overline{[\alpha]}\,\overline{[\beta]} \equiv g\,(\alpha, \beta).$$

Folgesatz. Die Folgegemeinschaft zweier Nichtfolgenklassen ist äquivalent der Folgegemeinschaft der zugehörigen Folgenklassen. Denn $g\,(\overline{[\alpha]}\,\overline{[\beta]}) \equiv \overline{[\alpha]}\,\overline{[\beta]} + [\alpha]\,[\beta] \equiv g\,([\alpha], [\beta])$.

101. (Satz.) Sind a und b reelle, positive Zahlen oder Größen und ist $a < b$, so ist

$$\omega\left\{\omega\left(\frac{a}{b}\right), 1\right\} = \omega\left(\frac{a}{b}, 1\right)$$

oder kürzer, wenn $\omega\,(x)$ für $\omega\,(x, 1)$ gesetzt wird:

$$\omega\left\{\omega\left(\frac{a}{b}\right)\right\} = \omega\left(\frac{a}{b}\right).$$

Beweis. Es ist $g\,\{g\,(\alpha, \beta)\; g\,(\beta, \beta)\} = g\left\{\left[def\,\frac{a}{b}\right], \left[def\,\frac{b}{b}\right]\right\} = g\left\{\left[def\,\frac{a}{b}\right], [def\, 1]\right\} = \left[def\,\frac{a}{b}\right] = g\,(\alpha, \beta)$. Der zuerst angeschriebene Ausdruck ist aber gleichwertig mit $\omega\,[\omega\,(a, b), \omega\,(b, b)]$ oder $\omega\left[\omega\left(\frac{a}{b}\right)\right]$, der zuletzt gewonnene mit $\omega\left(\frac{a}{b}\right)$.

102. (Satz.) Die Größenähnlichkeit zwischen zwei reellen, positiven Zahlen oder Größen x, y ist gemessen durch das Verhältnis der kleineren zur größeren:

$$\omega\,(x, y) = \frac{x}{y},\; 0 < x < y.$$

Beweis. Aus $\omega\,(x, y) = \omega\left(\frac{x}{y}\right) = \omega\left\{\omega\left(\frac{x}{y}\right)\right\}$ folgt $\omega\,(x, y) = \frac{x}{y}$.[1]) Dabei muß für Werte x, y, die nicht gleich sind, $\frac{x}{y} < 1$ sein, da nach 97 und 99 der Wert 1 die obere Grenze der Ähnlichkeit, die Gleichheit darstellt.

Folgesätze. 1. Ist $x < 1$, so ist $\omega\,(x, 1) = \omega\,(x) = x$. Für $x > 1$ ergibt sich: $\omega\,(1, x) = \omega\left(\frac{1}{x}, 1\right) = \frac{1}{x}$.

2. Aus $g\,(\alpha, \beta) = \left[def\,\frac{a}{b}\right]$ — für Zahlen $a < b$ — und aus $g\,(\alpha, \beta) = \omega\,(a, b) = \frac{a}{b}$ folgt, daß $\left[def\,\frac{a}{b}\right] = \frac{a}{b}$ ist. Daher besteht die Beziehung 88 auch als Gleichung zwischen den Größen $g\,(\alpha, \beta)$, $g\,(\beta, \gamma)$, wobei die Multiplikation arithmetisch aufgefaßt ist.

§ 24. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitslehre.

103. (Vorbemerkungen.) 1. Jedes Urteilsobjektiv ist — durch das Urteil — auf einen gemeinten Fall oder Fallbereich bezogen, ist also, sofern dieser Fall oder Fallbereich bestimmt ist, ein bestimmtes Objektiv im Sinne von 74. Dagegen müssen Annahmeobjektive nicht auf bestimmte Fälle bezogen sein, sie eignen sich vielmehr, solche Fälle, als ihrem Geltungsbereiche angehörig, erst zu bestimmen. Durch die Annahme, a sei eine Primzahl, können wir zum Beispiel den Gegenstand a erst „bestimmt" haben, das heißt unser Erfassen auf dasjenige, was der Annahme entspricht, die Primzahlen *(a)* oder eine „beliebige" Primzahl *(a)*, erst gerichtet haben.[2])

2. Ist das Objektiv α nicht auf einen bestimmten Bereich von Fällen bezogen, so kann man auch nicht sagen, es sei entweder α (schlechthin) erfüllt oder nicht erfüllt, wahr oder falsch, sondern nur, daß in gewissen Fällen (eventuell in keinem) α, in allen übrigen $\bar{\alpha}$ erfüllt sei. So zum Beispiel, wenn α einfach „das Primzahlsein" (nicht etwa das von 7 oder das von 4) bedeutet. Sofern es Fälle von α (Fälle, wo α erfüllt ist) gibt, sagt man auch, α sei möglicherweise erfüllt, könne erfüllt sein, oder α sei ein „mögliches" Objektiv, was soviel heißt wie bestehendes Objektiv.[3])

3. Aber auch im Urteile kann man einen Fall (oder Fallbereich) ungenau oder unvollständig bestimmt meinen, zum Beispiel indem man ihn nur als „Fall von β" meint, das heißt, sofern er Fall von β ist. In einem solcherweise ungenau gemeinten Falle von β „als Fall von β" ist dann ein Objektiv α nicht schlechthin wahr oder falsch, sondern nur sicher möglich oder unmöglich, wenn aber möglich, so möglicherweise erfüllt, möglicherweise auch nicht erfüllt. So wird zum Beispiel ein gegebener Würfel bei dem nächsten Wurfe, sofern dieser eben nur „nächster Wurf" (d. h. bloß einer der möglichen Fälle des unter diesem Namen vorausgesetzten unvollständigen Objektivkomplexes) ist, möglicherweise auf die Fläche f_1, möglicherweise aber auch nicht auf f_1 fallen.

[1]) Die letzte Funktionalgleichung liefert außer der angegebenen Lösung noch die Lösung $\omega\,(x, y) = k$, wo k eine Konstante bedeutet. Doch kann dieser Fall schon wegen der Definition der Funktion ω nicht in Betracht kommen.

[2]) Vgl. Meinong, Über Annahmen, 2. Aufl., S. 268 ff., 272 ff.

[3]) Vgl. 104, F. 1, 105, Anm.