Российская Академия Наук

Отделение физических наук

Д.И. Трубецков, Е.Г. Трубецкова

Фракталы и время (от Ричардсона и Мандельброта до Поллока). Фрактальная геометрия

Москва 2017

УДК 514.1
ББК 20.15
Т77

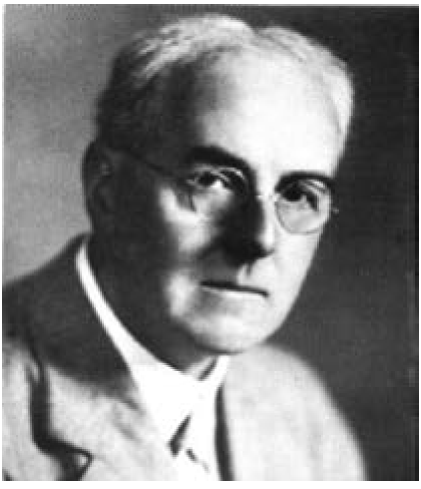
ISBN 978–5–906906–45–8

Фракталы и время (от Ричардсона и Мандельброта до Поллока). Фрактальная геометрия

Д.И. Трубецков[1,2], Е.Г. Трубецкова[1]
[1]Национальный исследовательский Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
[2]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
dtrubetskov@yahoo.com , etrubetskova@gmail.com

Изучение природы фракталов вначале носило эпизодический характер, но вскоре оказалось богатым на имена не только математиков, но и гидрологов, и физиков, и литераторов. Представлен исторический очерк об ученых, внесших наиболее заметный вклад в теорию фрактальной геометрии.

Попробуем ответить на вопрос «Какова протяженность береговой линии Бретании?» Почему именно на этот вопрос? Считается, что именно с ответа на него, важного в связи с ролью наблюдателя и разрешающей способностью приборов для определения размерности, начинается фрактальная геометрия, хотя термин «фрактал» еще не существовал [2, главы 1.1. и 2.1.].



Льюис Фрай Ричардсон (1881-1953).

Появляется первая важная для нашего изложения фигура – выдающийся специалист по гидродинамике Льюис Фрай Ричардсон.

По воспоминаниям современников, Ричардсон был очень интересным и оригинальным человеком, который обо всем имел собственное мнение, почти никогда не совпадающее с общепринятым; часто люди просто не понимали его. Ричардсон окончил Кембриджский университет, получив степень бакалавра по физике, математике, химии, биологии и зоологии, поскольку сомневался в выборе дальнейшего пути. С кембриджской администрацией у него почему-то не сложились отношения, поэтому, когда, спустя много лет после окончания университета, ему понадобилась докторская степень, он отказался получать необходимую для этого степень магистра в Кембридже, что требовало от него лишь заплатить 10 фунтов. Вместо этого он на общих основаниях поступил в Лондонский университет, где преподавал, учился вместе со студентами и получил докторскую степень по математической психологии, когда ему было 47 лет.

Он начинал свою карьеру в Метеорологической службе, которая после Первой мировой войны вошла в состав созданного Министерства ВВС. Ричардсон был квакером и убежденным противником войны, поэтому ему пришлось уйти в отставку.

В 1992 году вышла его монография о численных методах предсказания погоды [1]. «Через тридцать три года книга была переиздана как классическая, однако, в течение первых двадцати лет после выхода в свет она пользовалась весьма сомнительной репутацией. Оказалось, что, аппроксимируя дифференциальные уравнения атмосферы уравнениями в конечных разностях, Ричардсон выбрал для пространственных и временных шагов неподходящие значения. Поскольку о необходимости проявить осторожность при выборе значений таких шагов тогда еще никто не подозревал, этой ошибки едва ли можно было избежать» [7, с. 553-554].

Широкую известность Ричардсону принесло следующее описание физической картины турбулентности:

Big whirls make little whirls
Which feed on their velocity,
Little whirls have smaller ones
And so on into viscosity.

В журнале «Успехи математических наук», посвященном юбилею А.М. Обухова, одного из классиков турбулентности, есть стихотворный вариант перевода:

В поток бурлящий бросив взгляд,
Вихрей увидишь там каскад.
Меньшой у большего энергию берет,
Пока мельчайших вязкость не сотрет.

Со строчками Ричардсона связан один забавный эпизод, который описан М.И. Рабиновичем. «Однажды на зимней Горьковской школе по нелинейным волнам сразу после открытия (с обсуждением программы), во время которого я написал на доске известное выражение Ричардсона о делении вихрей в турбулентном потоке, М.Л. (Михаил Львович Левин) подарил мне стих:

Big whores make little whores
Which feed on their velocity,
Little whores have smaller ones
And so on into viscosity.

Дело в том, что на доске слово ‘whirl’ (вихрь) в первой строчке было написано с ошибкой ‘whorl’. М.Л., конечно, не мог пройти мимо такой подставки. Тем более, что письменные l и е топологически эквивалентны. Вручение мне приведенного текста сопровождалось комментарием: “И в нашем замечательном обществе точно так же”» [3, с. 214-215].

Ричардсон был также изобретательным экспериментатором. Вот пример одного из его экспериментов по турбулентной диффузии. Ему нужно было большое количество буев, которые были бы заметны издалека (т.е. лучше всего белого цвета) и не слишком торчали бы в воде, чтобы их не сдувало ветром. Ричардсон купил большой мешок корнеплодов пастернака и сбросил их с одного из мостов через канал Кэйн-Код, а сам проводил наблюдения с другого моста ниже по течению.

Ричардсон преподавал и занимался административной работой многие годы. Получив наследство, он рано ушел в отставку и полностью посвятил себя любимой теме – изучению психологии вооруженных конфликтов.

Уже после его смерти при разборке архива были обнаружены черновики удивительного исследования, которое было попыткой ответить на поставленный выше вопрос. Ричардсон заменил линию на подробной карте Британии замкнутой ломаной линией, составленной из отрезков, составленных из отрезков некоторой длины δ. Все вершины ломаной располагались на побережье. Он принимал длину L_δ за приближенное значение длины побережья, соответствующее выбранному значению δ. Естественно было думать, что при уменьшении значения δ соответствующие значения длин аппроксимирующих ломаных будут стремиться к конечному пределу. Последний и нужно считать длиной морского побережья. Именно так получилось, когда описанный метод был применен к окружности, нарисованной на той же карте (рис. 1 из книги [7, с. 8]).

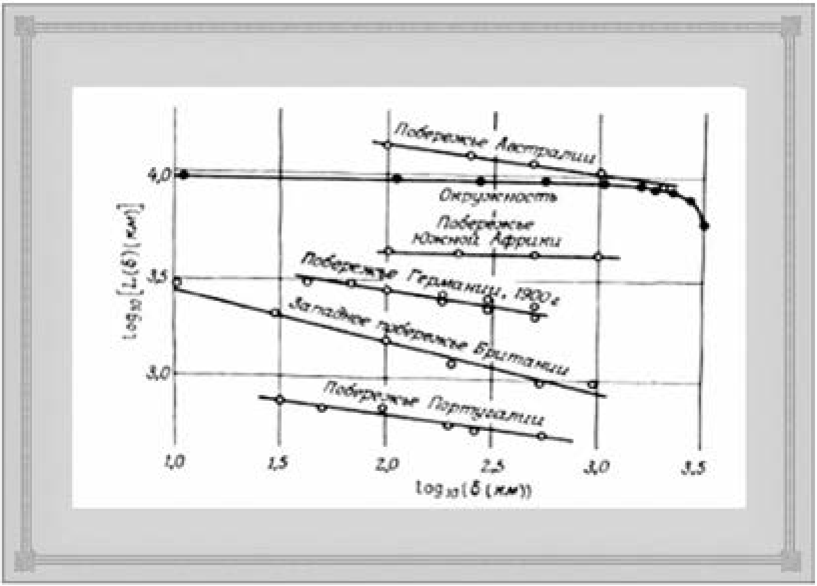


Рис. 1. Длина береговых линий как функция выбранного шага δ (км).

Однако для линии морского побережья величина L_δ с уменьшением δ неограниченно возрастала. Иными словами, линия побережья была настолько изрезанной, вплоть до самых малых масштабов карты, что с уменьшением δ (длины звена аппроксимирующей ломаной) величина L_δ не стремилась к конечному пределу, а, напротив, возрастала. Причем во всем диапазоне изменения δ возрастание подчинялось степенному закону

$$L_\delta = C\delta^{1-D},$$

где $C = \text{const} > 0$, $D = \text{const} > 1$. Для измеренной таким же образом части того же побережья между некоторыми точками получалась формула того же вида с теми же D, но меньшими C. Для побережья Австралии степенной закон сохранился, но C и D были другими. Заметим, что постоянная D безразмерна, а постоянная C имеет необычную размерность длины в дробной степени. Формальный переход к $\delta \to 0$ в приведенной формуле дает странный результат: определяемая изложенным способом длина морского побережья (и любого отрезка длины побережья) бесконечна.

Две разных части побережья, аппроксимированные ломаными с одной и той же длиной звена δ, имеют вид:

$$L_{\delta 1} = C_1\delta^{1-D} \text{ и } L_{\delta 2} = C_2\delta^{1-D}, \text{ и,}$$

следовательно,

$$\frac{L_{\delta 1}}{L_{\delta 2}} = \frac{C_1}{C_2}$$

т.е. зависимость от длины звена δ исчезла. Таким образом, сравнивать отдельные участки побережья можно, но не по их длинам, а по коэффициентам С.

Иными словами, сам подход к определению длины морского побережья по той же методике, как и для гладких кривых, неприменим. Оказывается, что адекватным представлением для линии побережья является кривая, называемая фракталью (или фракталом; от латинского слова fractus – дробный, ломаный). Чтобы ввести это новое понятие, начнем с классического примера сложного множества, которое было предложено Георгом Кантором (канторово множество).

Возьмем отрезок [0,1], имеющий единичную длину, разделим его на три части и выбросим открытый интервал (1/3;2/3). Будем дальше поступать аналогично: отрезки [0; 1/3] и [2/3; 1] делим на три части и выбрасываем середины. На к$^{\text{ом}}$ шаге описываемой процедуры получим $2^{к}$ оставшихся отрезков, не связанных друг с другом. Длина каждого отрезка равна 1/3к. В пределе, когда к→∞, число вырезанных отрезков неограниченно возрастает, а длина их стремится к нулю. Действительно, суммарная длина всех вырезанных отрезков представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем q = 2/3 и первым членом a_1 = 1/3, т.е.

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots = \frac{{}^{1}\!/_{3}}{1-{}^{2}\!/_{3}} = 1$$

Поскольку исходная длина отрезка равна единице, то мера остатка равна нулю. Однако это не значит, что ничего нет, – множество существует, но нужны другие понятия для его количественной характеристики. Какие это понятия? Начнем с понятия топологической размерности. Ее определение основано на понятиях соприкосновения и рассечения. Топологическая размерность множества равна нулю, если его можно представить в виде объединения сколь угодно малых частей, не находящихся между собой попарно в соприкосновении. Примером такого множества может служить совокупность изолированных друг от друга, не соприкасающихся точек. Далее определения можно давать по индукции.

Топологическая размерность $D_т = n$, если:

1. Это множество можно рассечь подмножествами размерности (n – 1) на сколь угодно большое число сколь угодно малых частей, не находящихся между собой попарно в соприкосновении;

2. Указанные в пункте 1. рассечения нельзя произвести подмножествами размерности меньше (n – 1).

Пример: линию всегда можно разбить точками на сколь угодно большое число малых частей.

Топологическая размерность всегда целое число. Для канторова множества она равна нулю, поэтому это не то, что нам нужно. Обратимся теперь к размерности Хаусдорфа-Безиковича, введение которой основано на способе измерения площади путем покрытия ее теми или иными элементами. При этом появляются два осложнения. Набор, например, квадратов или кругов элемента покрытия может не покрывать всю измеряемую площадь, и нужно уменьшать размер элементов. Квадраты или круги могут перекрываться, и площадь покрытия окажется больше покрываемой. И в этом случае следует изменять размер элементов.

Пусть М – некоторое множество в пространстве, на котором определено расстояние между двумя точками (метрическое пространство). Рассмотрим покрытие множества М шарами радиуса $\rho_1, \rho_2, \ldots p_n$, меньшими ρ или кубами с ребрами $\rho_1, \rho_2, \ldots p_n$, меньшими ρ и составим выражение

$$m_d(M) = \lim_{\rho \to 0} \inf \sum_{m=1}^{N(\rho)} \rho_m^d$$

где d – вещественное неотрицательное число; inf означает нижнюю по всем покрытиям грань этих сумм. Тогда $m_d(M)$ называется Хаусдорфовой d-мерой множества М. В зависимости от d $m_d(M)$ может быть равна нулю (d – велико), бесконечности (d –

близко к нулю) или, при единственном значении d=D, она может оказаться отличной от нуля и ограниченной. Число D называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича данного множества, причем D не зависит от формы элементов покрытия – шары это, кубы или еще что.

Пусть в определении $m_d(M)$ все радиусы одинаковы, т.е. , $\rho_{m=}$ ρ, тогда

$$m_d(M) = \lim_{\rho\to 0}\left(N\rho^d\right).$$

Прологарифмируем последнее выражение. Тогда

$$\ln m_d(M) = \lim_{\rho\to 0}\left\{\ln N - d\ln\frac{1}{\rho}\right\}, N = N(\rho),$$

или после простых преобразований

$$\lim_{\rho\to 0}\left\{\frac{\ln m_d(M)}{\ln\frac{1}{\rho}} - \frac{\ln N}{\ln\frac{1}{\rho}} + d\right\} = 0.$$

Но $\lim_{\rho\to 0}\left\{\frac{\ln m_d(M)}{\ln\frac{1}{\rho}}\right\} = 0$ поскольку числитель выражения в квадратных скобках по нашему предположению отличен от нуля и ограничен, а знаменатель стремится к бесконечности. Поэтому для размерности Хаусдорфа-Безиковича находим

$$D = \lim_{\rho\to 0}\left[\frac{\ln N(\rho)}{\ln\frac{1}{\rho}}\right].$$

Главные действующие лица, чьими славными именами названа размерность

Феликс Хаусдорф (1868–1942).

Феликс Хаусдорф был одной из главных фигур в развитии идеи фрактальной размерности. Б. Мандельброт предложил использовать в качестве такой характеристики определение размерности, введенное Ф. Хаусдорфом в 1919 году. Хаусдорф не опубликовал в этом направлении больше ни одной работы. Его идеи были развиты в работах А.С. Безиковича, поэтому размерность носит имя Хаусдорфа-Безиковича.

Хаусдорф до 35 лет большую часть времени посвящал литературе и музыке, писал беллетристические произведения под псевдонимом Paul Mongre. Он был профессором Лейпцигского (1902–1910), Боннского (1910–1913, 1921–1931) и Грейфевальского (1913–1921) университетов. Ему принадлежит получение большого количества важных и глубоких результатов в топологии, теории непрерывных групп, в математическом анализе и других разделах математики. Как пишет Ю.А. Данилов: «Он внес существенный вклад в разрешение кризиса в основаниях математики (Мандельброт датирует кризис периодом 1875–1925 годов), написав замечательную монографию “Основы теории множеств” (1914). Дробная размерность Хаусдорфа – лишь одна из искорок его блестящего таланта»[6, 184].Трактат отличали ясность, точность и доведение каждого результата до полного понимания. Один из американских рецензентов книги, указывая, что способ доказательств в трактате близок к стилю Эвклида и едва ли вызовет активность читателя и даст волю его воображению, тем не менее, отмечал: протест против такого стиля изложения подобен спору с Бетховеном из-за того, что он писал симфонии вместо опер.

В 1935 году Хаусдорф был отстранен нацистами от преподавательской деятельности как «неариец». Он был евреем и покончил с собой вместе с женой и ее сестрой 26 января 1942 года, чтобы избежать депортации в концлагерь.

У входа в Математический институт Боннского университета висит мемориальная доска: «В этом университете с 1921 по 1935 год работал математик Феликс Хаусдорф (8.11.1868–26.01.1942). Он умер по вине национал-социалистов из-за того, что был евреем. В его лице мы чтим память всех жертв тирании. Пусть никогда не повторится диктатура и война!»

Абрам Самойлович Безикович (1891–1970).

Абрам Самойлович Безикович родился 11 января 1891 года, 125 лет назад, в г. Бердянске (Украина). Он происходил из семьи караимских евреев. Безикович был четвертым ребенком в многодетной семье (всего было шесть детей) Самуила и Евы Безиковичей. Его отец владел собственным ювелирным магазином, и сам был ювелиром, но после ограбления стал работать кассиром. Братья и младшая сестра получили высшее образование, будучи очень способными детьми. У Безиковича необычные способности проявились уже в раннем детстве. Причем, способность к математике он унаследовал от матери, а упорство и стремление к совершенству – от отца. После окончания в 1908 году Брянской гимназии А.С. Безикович поступил в Петербургский университет, где в 1912 году окончил полный курс по математическому отделению физико-математического факультета с дипломом первой степени. Одним из его учителей был А.А. Марков. Уже в студенческие годы Безикович написал работу «Новый вывод предельного выражения вероятности для случая независимых испытаний», которая в 1915 году была опубликована в Известиях Академии Наук. После окончания университета А.С. Безикович был оставлен с 1 июня 1912 года на два года на кафедре чистой математики для подготовки к профессорской деятельности без назначения стипендии. Однако с 1 января 1913 года ему назначается стипендия в размере 1200 руб. в год на два года, а затем Департамент народного просвещения принял решение о выплате ежемесячной стипендии по 100 руб. с перерывами по 1 июля 1916 года.

А.С. Безикович вместе с выпускниками университета А.А. Фридманом и Я.Д. Тамаркиным был активным участником организованного ими математического кружка, где изучались не только классические работы, но и новые статьи по математическому анализу, лежащие вне круга интересов старшего поколения петербургских математиков. Он посещал также семинар Пауля Эренфеста. Именно на этом семинаре Абрам Самойлович познакомился со своей будущей женой, физиком по образованию, – Валентиной Витальевной Дойниковой (1888-1974). Для заключения брака он перешел в православие. После того как А.С. Безиковичу был продлен до 1 января 1918 года срок пребывания в Петроградском университете, он сдал экзамены на степень магистра чистой математики, удовлетворительно прочитал пробные лекции и был зачислен приват-доцентом Петроградского университета.

Последним университетом, открытым в России до революции, был Пермский университет, куда Безиковича направили с 1 июля 1917 года для чтения лекций в качестве исполняющего обязанности профессора по кафедре чистой математики.

В 1918 году группой молодых математиков из Петроградского университета, пополнивших Пермский университет, было организовано физико-математическое общество, которое стало издавать свой журнал. А.С. Безикович опубликовал в этом журнале четыре статьи.

Дальнейший послужной список А.С. Безиковича, основанный на его личном деле таков (см. [5]).

17 ноября 1917 года – избрание членом библиотечной комиссии от физико-математического факультета.

30 января 1918 года – избрание заместителем представителей университета в Городской комитет по народному образованию.

23 мая 1918 года – избрание членом комиссии по выработке правил приема студентов в университет.

16 августа 1918 года – избрание членом комиссии для разработки вопроса об учреждении и организации просветительской ассоциации.

1 октября 1919 года – избрание собранием из 6 профессоров и преподавателей под руководством и.о. ректора деканом физико-математического факультета.

28 июня 1919 года в деле появляется следующий документ, связанный с отъездом профессорско-преподавательского состава ПГУ в г. Томск во время наступления Колчаковской армии.

«Уезжая из города Перми с личным составом Пермского университета по распоряжению военных властей, должность ректора сдаю профессору А.С. Безиковичу. Ректор. Подпись.Н.В. Култашев. 28 июня 1919 г., №2435».

В должности ректора А.С. Безикович, которому было 28 лет, пробыл меньше года, но успел проявить себя хорошим организатором. Университет подвергся разрушениям при отступлении Колчака. А.С. Безикович занялся спасением книг и других научных ценностей.

В этом плане интересно письмо, написанное А.А. Фридманом В.А. Стеклову 12 августа 1919 года в Петроград.

«Единственный человек, здраво размышлявший и спасший оставшееся имущество, был А.С. Безикович, по-видимому, ученик Маркова не только специалист в области математики, но и в области решительных, точных и определенных действий».

18 июня 1920 года – командировка на 2 месяца в Москву, Петроград и для научных занятий за границу.

3 июня 1920 года – А.С. Безиковичу выдано удостоверение № 1620 для командировки в г. Петроград. Он везет с собой 100000 руб. казенных денег.

27 августа 1920 года – просьба ректора ПГУ – профессору А.С. Безиковичу, командированному в Петроград, выдать разрешение на проезд в отдельном купе международного вагона, поскольку он везет 25 граммов радия, ценность которого исчислялась в 750000 рублей.

3 сентября 1920 года А.С. Безиковичу выдается удостоверение № 484 за подписью ректора и секретаря совета в том, что находящаяся при нем сумма в 2000000 рублей принадлежит ПГУ.

21 октября выдается еще одно удостоверение № 944, подтверждающее, что А.С. Безикович командирован Советом университета в Петроград и за границу с 1 июля 1920 г. по 1 июля 1921 г. с целью научных занятий и покупки оборудования для университета.

Далее в [5, с. 37] указано следующее: «На этом записи в личном деле А.С. Безиковича заканчиваются, и судить о том, куда были израсходованы деньги в сумме 2000000 рублей и радий в количестве 25 г. на сумму 750000руб., невозможно».

В октябре 1920 года А.С. Безикович выехал из Перми, но доехал только до Петрограда. Там он стал работать в должности профессора в Педагогическом институте и в должности приват-доцента в Петроградском университете.

Его талант высоко оценил П. Эренфест, который отправил работы А.С. Безиковича в Данию Х.Бору, в Англию Дж. Литлвуду и Г. Харди. Прекрасные отзывы привели к получению Рокфеллеровской стипендии для занятий за рубежом, но власти не дали разрешения на поездку.

В 1924 году А.С. Безикович принял решение нелегально покинуть Советскую Россию. Первоначально вместе с ним хотели это сделать А.А. Фридман и Я.Д. Тамаркин. Операция финансировалась отцом Фридмана – богатым нэпманом. В последний момент Фридман отказался от побега, а через несколько месяцев умер от тифа. В план Безиковича и Тамаркина входил переход через латвийскую границу, который включал переправу через замерзшую реку с не слишком твердым льдом. Для уменьшения давления нужно было перебираться ползком, что и сделал успешно Безикович. Однако Тамаркин – человек внушительных размеров – считал, что такой способ недостоин для человека, и пошел пешком. Он успешно перешел реку, но заставил сопровождавших поволноваться.

Из Латвии А.С. Безикович перебрался в Копенгаген, где воспользовался Рокфеллеровской стипендией, чтобы заниматься под руководством Харальда Бора исследованиями в области квазипериодических функций. Из Копенгагена он отправился на несколько месяцев к Г. Харди, который в 1926-1927 годах предоставил ему доцентуру в Ливерпульском университете. В 1927 году он попал в Кембридж, где сначала читал лекции в университете, а с 1930 года стал штатным сотрудником в Тринити-колледже. В течение многих лет в Кембридже он вел в газете еженедельную рубрику «спорных проблем» к удовольствию и для пользы студентов. Их решения он тщательно читал и аннотировал. Объявления типа «отличные решения проблемы 12 поданы M и N» вызывали желание молодых математиков и дальше совершенствовать свои аналитические способности.

Себя он называл знатоком «патологии математики». Если кто-либо выдвигал предположение, казавшееся Безиковичу неверным, он не успокаивался до тех пор, пока не находил контрдоводы. Слабым местом Безиковича был его «русский английский». Студенты в Кембридже стали было подсмеиваться над неправильными оборотами своего лектора (определенные или неопределенные артикли казались ему лишними). Но одной шуткой он навсегда расположил к себе аудиторию, сказав: «Пятьдесят миллионов англичан говорят по-английски, как вы, но пятьсот миллионов русских говорят по-английски, как я».

В 1950 году А.С. Безикович в возрасте 59 лет стал преемником знаменитого Литлвуда на кафедре математики в Кембридже. В день своего тридцатишестилетия он, думая, что его собственные творческие силы иссякли, объявил: «Прошло четыре пятых моей жизни». Когда ему напомнили об этом при его назначении в 1950 году, он отправил открытку с текстом: «Числитель был правильным!» Он занимал кафедру до выхода на пенсию в 1958 году.

А.С. Безикович читал в Кембридже помимо обычного курса математического анализа, теорию квазипериодических функций, топологию, меру Хаусдорфа. После выхода на пенсию он в течение нескольких лет читал лекции как приглашенный профессор в различных университетах США. За свою жизнь он опубликовал около 130 научных работ.

Абрам Самойлович обладал не только необычным математическим талантом, но и был обаятельным и остроумным человеком, которого уважали и любили его коллеги и студенты. Одним из его близких друзей был Петр Леонидович Капица.

Бенуа Мандельброт и гениальные предшественники – Пуанкаре и Жюлиа

Итак, главные действующие лица в грандиозном спектакле под названием «фрактальная геометрия» обозначены. Но автором сценария, режиссером и постановщиком несомненно является Бенуа Мандельброт.

Заметим, что он много раз подчеркивал заслуги обоих предшественников – Хаусдорфа и Безиковича – в создании понятия дробной размерности, важнейшего во всей фрактальной науке.

Родился он в Варшаве. В 1936 году семья Мандельбротов переехала в Париж, где Бенуа в 1947 году окончил Политехническую школу. В 1948 году в Калифорнийском технологическом институте (Калтех) в Пасадене он защитил магистерскую диссер-

Бенуа Мандельброт (1924–2010).

тацию по аэрокосмическим наукам, а высшую ученую степень доктора философии (по математике) он получил в 1952 году в Парижском университете. До 1958 года, когда Мандельброт окончательно переехал в США, он был приглашенным профессором в университетах Принстона, Женевы и Парижа. С 1974 года он стал членом совета по научным исследованиям фирмы IBM, а с 1984 года – профессором математики Гарвардского университета.

Перу Мандельброта принадлежит множество статей и три ставшие сегодня классическими монографии о фракталах и их важной роли в естественных и социальных науках, в математике: «Фрактальные объекты: форма, случайность и размерность» (1955), (1977); «Фрактальная геометрия природы» (1982). На русском языке есть перевод последней из указанных книг [7] и книги «Фракталы, случай и финансы (1959-1997)» [2].

В книге «Фракталы, случай и финансы» глава 1.1. начинается так:

«Почему унаследованная от Евклида геометрия так часто удостаивается определения «холодной» и «сухой»? Отчасти потому, что она неспособна описать форму финансовой хроники, облака, горы, морского берега или дерева. Финансовые хроники – это не периодические колебания, не восходящие или нисходящие прямые, изображающие «тенденции»; облака – не сферы; горы – не конусы; берега островов – не окружности, кора дерева отлична от поверхности цилиндра, а молния ударяет отнюдь не по прямой.

Лишь художники всегда это понимали, а Эжен Делакруа (1798-1863) однажды, говоря об архитектуре, очень удачно заметил: “Человек все идеализирует. Прямая линия – его изобретение, в природе прямых нет”» [7, 49].

Конечно, у Мандельброта были предшественники и до Хаусдорфа, и до Безиковича. Как указано в книге [4, 72], математическая линия развития идеи идет от Пуанкаре и Жюлиа и далее к Мандельброту.

Наследие Пуанкаре – несметные сокровища математики. Для увековечивания своего имени в науке Пуанкаре хватило бы качественной теории дифференциальных уравнений. Ведь именно он обнаружил существование четырех видов особых точек – седел, узлов, фокусов и центров (все названия принадлежат Пуанкаре), изучил их расположение на плоскости, ввел понятие предельного цикла, которое А.А. Андронов навсегда связал с автоколебаниями. Процитируем далее книгу [6, с. 175].

Анри Пуанкаре (1854–1912).

«Обнаружение сложных – хаотических и стохастических – режимов в детерминированной динамической системе также связано с именем Пуанкаре. Занимаясь изучением так называемой ограниченной задачи трех тел, он открыл существование особых фазовых кривых, отвечающим неустойчивым движениям. Именно они являются тем механизмом, который хаотизирует, запутывает траектории в динамической системе. В знаменитых «Новых методах небесной механики» Пуанкаре так описывал гомоклиническую структуру:

“Если попытаться представить себе фигуру, образованную этими двумя кривыми – устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые, проходящие через седловую особую точку, – и их бесконечными пересечениями, каждое из которых соответствует двоякоасимптотическому решению, то эти пересечения образуют нечто вроде решетки, ткани, сети с бесконечно тесными петлями; ни одна из двух кривых не должна пересечь самое себя, но она должна навиваться на самое себя самым сложным образом, чтобы пересечь бесконечно много раз все петли сети.

Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить. Ничто не является более подходящим, чтобы дать нам представление о сложности задачи трех тел и, вообще всех задач динамики, в которых нет однозначного интеграла…”».

Как указано в [4, с. 73], первый рисунок гомоклинического пучка был сделан математиками Георгом Биркгофом и Полом Смитом в 1930-х годах.

Осознание этого открытия пришло много позже, похоронив лапласовский детерминизм[1]. Скорее всего, Пуанкаре понимал это. Он писал: «… совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительное действие, которое мы не можем предусмотреть, и тогда мы говорим, что это явление представляет собой результат случая <…>.

Гастон Морис Жюлиа (1893-1978).

Иногда большая разница в первоначальном состоянии вызывает большое различие в окончательном явлении. Небольшая погрешность в первом вызвала бы огромную ошибку в последнем. Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное» (Цит. по: [6, 175]).

Еще одна линия, ведущая к фрактальной геометрии и теории хаоса, связана с именем Гастона Жюлиа (1895-1978), который после смерти Пуанкаре обнаружил гомоклинический пучок в квадратичном отображении плоскости на самое себя.

[1] 30 лет назад, в 1986 году, всемирно известный английский гидромеханик сэр Дж. Лайтхилл, бывший в то время президентом международного союза теоретической и прикладной механики, заявил: «Тут я должен остановиться и снова выступить от имени широкого всемирного братства тех, кто занимается механикой. Мы все глубоко осознаем сегодня, что энтузиазм наших предшественников по поводу великолепных достижений ньютоновской механики побудил их к обобщениям в этой области предсказуемости, в которые до 1960 года мы все охотно верили, но которые, как мы теперь понимаем, были ложными. Нас не покидает коллективное желание признать свою вину за то, что мы вводили в заблуждение широкие круги образованных людей, распространяя идеи о детерминизме систем, удовлетворяющих законам Ньютона, – идеи, которые, как выяснилось после 1960 года, оказались неправильными». [8, с. 38].

Гастон Морис Жюлиа родился в Сиди-Бель Аббесе во французском Алжире. В Париже в 1914 году окончил Высшую нормальную школу. Он участвовал в Первой мировой войне, получил ранение и носил на лице кожаную повязку. В 1918 году опубликовал очень длинную статью о гомоклиническом пучке, используя анализ квадратичного изображения. Эта статья сделала его известным в математических кругах. В частности, в том же году он получил главную премию Французской академии. Впоследствии во фрактальной геометрии одним из самых известных его результатов стало множество Жюлиа. Он, будучи профессором в Высшей нормальной школе, преподавал в Парижском университете, в Политехнической школе в Париже. Как указано в [4, с. 74]: «Его [Жюлиа] версию сложного множества, как и в случае Пуанкаре, было очень сложно визуализировать… Дело практически не двигалось, пока компьютерная графика не попала в руки Бенуа Мандельброта».

Откуда и как появилось открытие Пуанкаре гомоклинического плетения (рис. 2)?

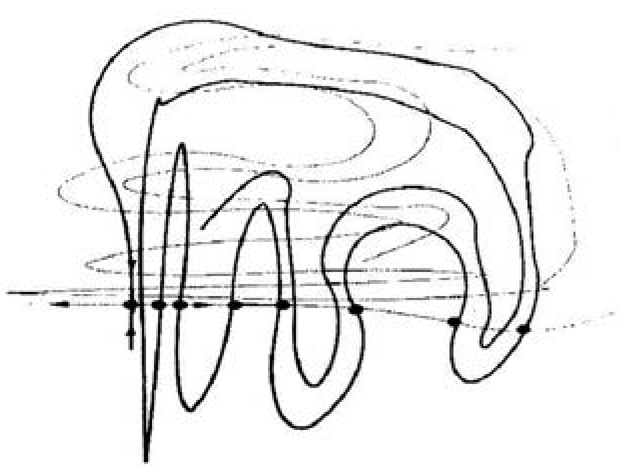


Рис. 2. Гомоклинический пучок Анри Пуанкаре (рис. Й. Уэды) из книги [4, с. 73].

Для ответа обратимся к главе 8 «Орбитальный хаос. Задача трех тел» в книге [9, с. 211-216], следуя ее тексту.

Норвежский математик Геста Миттаг Леффлер в 1889 году убедил короля Норвегии и Швеции Оскара II объявить конкурс на решение задачи о взаимодействии n тел с немалым призом. Конкурс был посвящен шестидесятилетию короля.

Решение должно было представлять некий сходящийся ряд, поскольку точную формулу вряд ли можно было найти. Пуанкаре не решил эту сложную задачу, но подвинулся в решении столь далеко, что приз получил. Он в 1880 году опубликовал результаты исследования для нескольких отдельных случаев, в которых решение в виде ряда можно было получить. Но в одном случае орбита пылинки (модель пылинки, с которой взаимодействуют два массивных тела, а она на их движение не влияет) была чрезвычайно запутанной. Пуанкаре вывел эту запутанность, используя качественную теорию дифференциальных уравнений, из которой выросла вся нелинейная динамика. Именно тогда он ввел то, что сегодня называется сечением Пуанкаре и снижает число переменных в задаче (см. рис. 3).

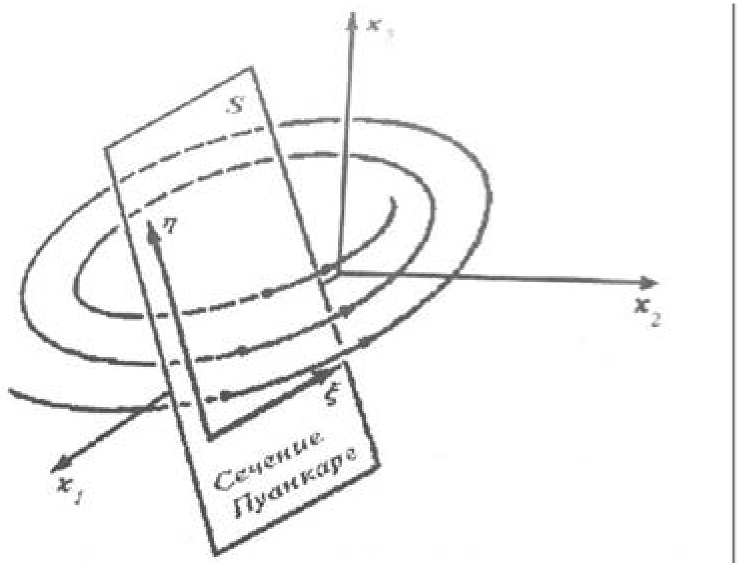


Рис. 3. Сечение Пуанкаре фазового потока в трехмерном пространстве: Σ – секущая поверхность, которой фазовые траектории не касаются. Этот метод, как известно, позволяет эффективно понизить размерность исследуемого фазового пространства с помощью функции последования $S(x_{k-1}) = x_k$, определяющей связь координат x_{k-1} (k-1) пересечения траектории с поверхностью Σ с координатами x_k следующего пересечения.

Процитируем далее Стюарта [9, с. 213-215]:

«Сечение Пуанкаре помогает распознать квазипериодические решения: когда они возвращаются к интересующей нас поверхности, то не попадают в точности в ту же точку, но точка, в которую они попадают раз за разом, крохотными шажочками обходит на поверхности замкнутую кривую <…> проанализировав топологию отображения первого возвращения, Пуанкаре заметил, что все может быть куда сложнее. Две конкретные кривые, связанные динамикой, могут пересечься. Само по себе это не слишком плохо, но если вы пройдете по кривым до того места, где они вновь вернутся на вашу поверхность, то результирующие кривые вновь должны будут пересечься, но в другом месте. Проведите их еще круг, и они снова пересекутся. Мало того, эти новые кривые, полученные передвижением первоначальных кривых, на самом деле не новы. Они представляют собой части первоначальных кривых<…> В результате получается очень сложная картина, напоминающая сеть, сплетенную каким-то безумцем: кривые в ней ходят зигзагами туда-обратно, пересекая друг друга, а зигзаги эти сами, в свою очередь, ходят зигзагами туда-обратно и т.д. до любого уровня сложности. В конце концов Пуанкаре заявил, что зашел в тупик<..>.

Сегодня мы называем его картину гомоклинным («замкнутым на себя») плетением<…>.

Мы уже не можем считать, что простые правила порождают простое поведение. Речь идет о том, что в обиходе часто называют теорией хаоса, и все это восходит непосредственно к Пуанкаре и его работе на приз короля Оскара».

Вот и почти все о гениальном открытии Пуанкаре. Но история – коварная дама. Примерно в 1990 году Джун Бэрроу-Грин обнаружила в Стокгольме в Институте Миттага-Леффлера печатный экземпляр работы Пуанкаре, отличающийся от общеизвестного. Вновь цитата из Стюарта:

«Это оказалась официальная пояснительная записка к заявке Пункаре на приз, и в ней была ошибка. Подавая работу на конкурс, Пуанкаре упустил из виду хаотические решения. Он заметил ошибку прежде, чем работа была опубликована, доработал ее, выведя все, что было необходимо, – а именно хаос, – и заплатил (надо сказать, больше, чем стоил приз) за то, чтобы оригинальная версия была уничтожена, а в печать пошел исправленный вариант. Но по какой-то причине в архиве Института Миттага-Леффлера сохранился экземпляр первоначальной ошибочной версии, хотя сама история забылась, пока Бэрроу-Грин не откопала ее и не опубликовала свое открытие в 1994 году» [9, с. 215].

Об определениях фрактала и ряде примеров

Вычислять D по формуле (1) удается только для масштабно инвариантного множества (имеет место инвариантность относительно параллельного переноса и изменения масштаба), когда каждая часть множества подобна целому, а N(ρ) – однородная функция. Мы уже указывали, что Бенуа Мандельброт придумал неологизм «фрактал» и назвал такие множества самоподобными. Величина D, определяемая (1), называется иногда размерностью подобия или фрактальной размерностью.

Предположим, что мы хотим определить фрактальную размерность для куба. Тогда $N = c\rho^{-n}$, где c = const, и

$$D=\lim_{\rho\to 0}\frac{\ln c - n\ln\rho}{\ln\dfrac{1}{\rho}}=n, \text{ так как } \lim_{\rho\to 0}\frac{\ln c}{\ln\dfrac{1}{\rho}}=0$$

Для таких множеств размерность равна топологической d_T. Вернемся к канторову множеству. Ситуация меняется. Роль радиуса элемента заполнения будет играть длина отрезка, оставшегося на к^{ом} этапе заполнения, оставшегося на к^{ом} этапе построения, т.е. $\frac{1}{3^k}$; число элементов покрытия равно числу отрезков, т.е. $2^к$. Тогда

$$D=\lim_{\rho\to 0}\frac{\ln 2^k}{\ln 3^k}=\frac{\ln 2}{\ln 3}\approx 0{,}6309\,.$$

Размерность получилась дробной!

Мандельброт, публикуя данные Ричардсона, привел свои оценки размерности Хаусдорфа-Безиковича для разных береговых линий. Для гладкого южного побережья Африки получилось почти 1, для западного побережья Британии – 1,3, для изрезанного фьордами побережья Норвегии – 1.52. Опять дробная размерность!

У Ю.А. Данилова в его эссе «Фрактальность» есть раздел «С точки зрения мухи» [6, с. 187-188], который начинается так:

«Вопрос о том, является ли данный предмет гладким или фрактальным, сам по себе лишен смысла! Ответ на подобный вопрос зависит от остроты зрения наблюдателя или от разрешающей способности прибора, которым он пользуется, то есть от того, насколько мелкие детали различает наблюдатель. Гладкая поверхность высочайшего класса обработки при соответствующем увеличении будет выглядеть как горный ландшафт, подвергшийся интенсивной бомбардировке метеоритами».

Далее Ю.А. Данилов, ссылаясь на Мандельброта, приводит пример, демонстрирующий, что само понятие размерности относительно.

«Клубок ниток кажется мухе с большого расстояния точкой (топологическая размерность 0). Подлетев поближе, муха видит большую точку – диск (топологическая размерность 2). С более близкого расстояния муха видит, что перед ней шар (топологическая размерность 3). Во всех случаях все неровности сглаживаются из-за большого расстояния, и размерность Хаусдорфа-Безиковича совпадает с топологической размерностью. Подлетев совсем близко, муха видит перед собой клубок гладких ниток, т.е. хитрым образом сложенную пространственную кривую (топологическая размерность 1). И лишь сев на клубок, муха видит пушинки, обрамляющие нить, т.е. ощущает фрактальность шерстяной нити.

Какова же «истинная» размерность клубка шерсти? Да ее просто не существует: все зависит от точки зрения наблюдателя, разрешающей способности его глаз или прибора» [7, с. 188].

И еще одно замечательное наблюдение Ю.П. Данилова – разрешение загадки, которую он формулировал в виде вопроса: «Почему в большинстве эмпирических формул, в изобилии встречающихся в любом инженерном справочнике, показатели степеней в различных зависимостях такие некрасивые, т.е. выражаются необъяснимо странными с точки зрения традиционной физики дробными числами типа 1,1378… или 2,9315…?» Он аккуратно пишет, что, по-видимому, дело в том, что «при разрешениях, достижимых в технике, в игру вступает фрактальность среды, поверхности и т.д., не принимавшаяся во внимание физиками, но вполне ощутимая на эмпирическом уровне для инженеров» [6, с. 188].

Физика фрактальной среды иногда сильно отличается от физики сплошной среды, в частности, диффузия во фрактальной среде происходит иначе, чем в обычной сплошной среде: из-за узких мест, крутых поворотов и тупиков движение частиц затрудняется и диффузия замедляется. По Ю.А. Данилову, «Лауреат Нобелевской премии де Жен сравнил частицу, блуждающую в фрактальной среде, с муравьем в лабиринте. Трудно придется муравью. Отсюда и дробные показатели в различных зависимостях <…> Возникает новое, интегро-дифференциальное уравнение, содержащее новый необычный объект – производную (по времени) дробного порядка, связанного с фрактальной размерностью среды» [6, с. 189].

Размерность Хаусдорфа-Безиковича (или ее частный случай – фрактальная размерность) есть именно та характеристика, которая позволяет отличать пустое множество, для которого m_d и D равны нулю, от канторова и ему подобных.

Б. Мандельброту принадлежат два следующих определения [7, с. 19]. Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого больше его топологической размерности.

Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.

Первое определение весьма ограничительно, но строго. Второе подчеркивает важный признак фрактала: он выглядит одинаково, в каком бы масштабе его не наблюдать.

Хаотические (странные) аттракторы являются фракталами – объектами, которые при увеличении проявляют все большее число деталей. Хаос сам порождает фракталы.

Для иллюстрации второго определения рассмотрим так называемую триаду Коха. Чтобы построить триаду, возьмем прямолинейный отрезок единичной длины $L_{(1)} = 1$ (n= 0 на рис. 4), разделим его на три равные части и заменим среднюю часть двумя другими сторонами построенного на ее базе равностороннего треугольника. Получится так называемый образующий элемент, которому на рис. 4 соответствует n = 1.

На следующем шаге (n = 2) построения той же элементарной операции подвергается каждый отрезок длиной $\frac{1}{3}$. Иными словами, каждое прямолинейное звено заменятся уменьшенным образующим элементом и получается кривая, состоящая из 16 звеньев, длина которой $L_{\left(\frac{1}{9}\right)} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$. Действуя подобным образом, получаем кривые, показанные на рис. 4 для n =3, n = 4 и n = 5.

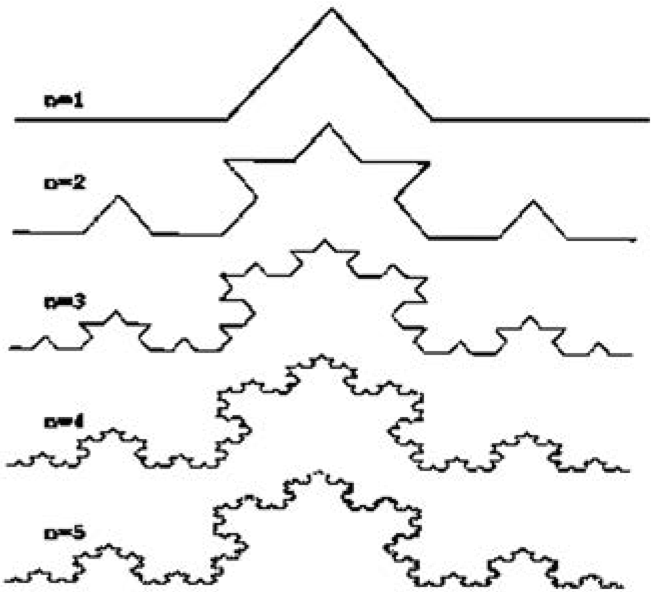


Рис. 4. Последовательность построения триадной кривой Коха.

Кривая на любом конечном шаге преобразования n называется предфракталом и имеет длину, равную $L(\delta)=\left(\frac{4}{3}\right)^{n}$, где $\delta = 3^{-n}$. При $n \to \infty$ длина звена $\delta \to 0$, а длина всей ломаной $L(\delta) \to \infty$. Из соотношения $\delta = 3^{-n}$ следует, что $n=\frac{\ln\left(1/\delta\right)}{\ln 3}$, поэтому

$$L(\delta)=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{\ln\left(1/\delta\right)}{\ln 3}}$$ или

$$L(\delta)=\exp\left\{-\ln\left(\frac{1}{8}\right)\frac{(\ln 4-\ln 3)}{\ln 3}\right\}=\delta^{(\ln 4-\ln 3)/\ln 3}=\delta^{1-D}$$, где

$$D=\frac{\ln 4}{\ln 3}\approx 1{,}2628$$

Последняя формула совпадает с эмпирическим уравнением Ричардсона. Число сегментов $N_{(\delta)} = 4^n = 4^{-\ln(\delta)/\ln 3}$ и может быть записано в виде

$$N(\delta) = \delta^{-D},$$

где D – фрактальная размерность. Вернемся к формуле (1). В нашем случае роль радиуса элемента заполнения будет играть длина отрезка на n-ом этапе построения, т.е. $(\frac{1}{3})^n$, а число элементов – 4^n.

Тогда по формуле (1)

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}2628\,.$$

Очевидно, что на каждом этапе построения предфракталы Коха могут быть растянуты в прямую линию, поэтому топологическая размерность триады Коха $D_T = 1$.

Таким образом, поскольку $D>D_T$, кривая Коха есть фрактальное множество с фрактальной размерностью D = 1,2628.

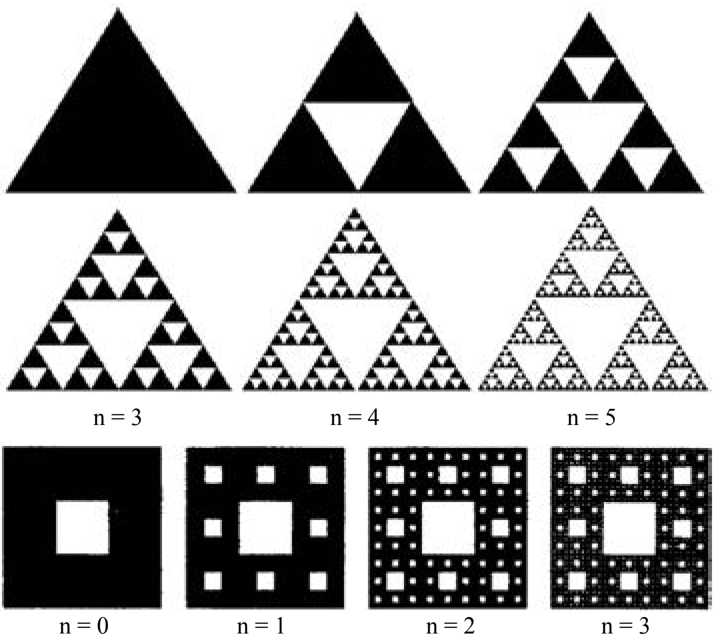


Рис. 5. Построение салфетки и ковра Серпинского.

Вацлав Серпинский (1882–1969).

На рис. 5 представлен процесс построения фракталов, который носит название «салфетка» и «ковер» Серпинского. Поскольку способ построения фракталов ясен из рисунка, мы не останавливаемся на его описании.

Приведенное нами рассмотрение фрактальных кривых, вообще говоря, нетрудно перенести на поверхности, трехмерные тела и объекты любой топологической размерности (см., напр., [13]).

Пространственный аналог квадратного ковра Серпинского (см. рис. 6) был предложен австрийским математиком Менгером и получил название губки Менгера (см., напр., [11, 38-39]).

Каждая грань куба, имеющая единичную длину, делится на 9 равных квадратов так же, как при построении квадратного ковра Серпинского. В результате исходный куб разбивается на 27 одинаковых кубиков с длиной ребра, равной $\frac{1}{3}$. Затем, удаляя сеть кубиков (один центральный и 6 из каждой грани), получаем, что противоположные грани исходного куба соединяются сквозным центральным отверстием квадратной формы. В результате из 27 остается 20 маленьких кубиков.

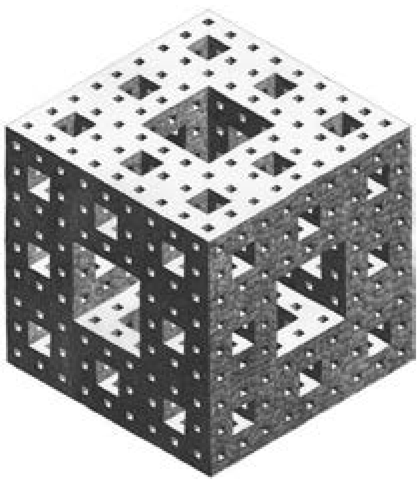


Рис. 6. Губка Менгера

Такая итерационная процедура с вырезанием сквозных отверстий и дальнейшего превращения каждого оставшегося кубика в 20 более мелких кубиков, размером в 3 раза меньше исходного, продолжается до бесконечности. Получается идеально самоподобный объект – губка Менгера.

Фрактальная размерность губки Менгера

$$D = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2{,}7268.$$

Так как $2<D<3$, то губка имеет нулевой объем, но, как фрактальный объект, обладает бесконечной площадью поверхности своих пор.

Существуют ли фракталы, у которых $D = d_{т}$? Ответ: «да».

Один из примеров – кривые итальянского математика Д. Пеано (1858-1932), открытые еще в 1890 году. Вот один из вариантов кривой Пеано.

Пусть начальным элементом будет единичный квадрат, каждая из сторон которого заменятся на следующем шаге образующим элементом, изображенном на рис. 7.

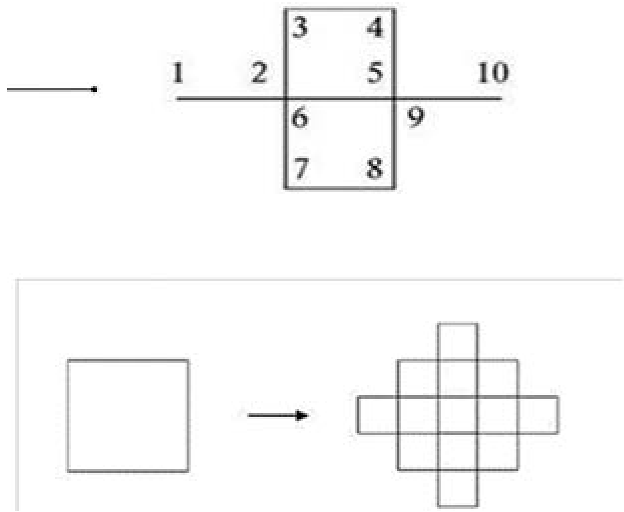


Рис. 7. Последовательность построения кривой Пеано.

Он состоит из 9 отрезков длиной 1/3 каждый, соединенных друг с другом под прямым углом. Цифры показывают путь обхода данной кривой. Очевидно, что в этом случае неизбежны две точки самоконтакта 2-6 и 5-9. В результате исходный квадрат преобразуется так, как показано на рис. 7.

Далее каждый из отрезков образовавшейся фигуры длины 1/3 преобразуется подобным образом, и так до бесконечности. Возникает самоподобная непрерывная кривая, плотно заполняющая квадратную область с площадью, равной 2. Тогда

$$D = -\frac{\ln 9}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} = 2\,.$$

Рассмотрим еще одну иллюстрацию второго определения Мандельброта – масштабно-инвариантную фрактальную кривую, выражаемую функцией К. Вейерштрасса (1815-1897), которая задается как [11, 44]

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right). \quad (2)$$

Вейерштрасс доказал, что эта функция не имеет производной, если $0<a<1$, $ab>1+{}^{3}\!/_{2}\pi$. Английский математик Г.Х. Харди в 1916 году доказал, что такая функция не является дифференцируемой ни в одной точке и при более слабом условии: $a<1$, $b>1$, $ab>1$.

Рисунок, взятый из [11], соответствует a=0,9; b= 1,3. В [11, 44–45] предлагается следующее объяснение недифференцируемости. Согласно построение u(x) начинается с гладкой функции $u_1(x) = a\cos(b^n\pi x)$. Затем на нее накладывается $u_2(x) = a^2\cos(b^2\pi x)$, имеющая меньшую амплитуду и большую частоту, чем $u_1(x)$. Далее добавляется еще более мелкая и густая «рябь» $u_3(x) = a^3\cos(b^3\pi x)$ и так далее. На рис. 8а приведен график для $0\le x\le 0{,}5$, если выделить диапазон изменения переменной $0\le x\le 0{,}1$ и затем увеличить эту область размеров всего графика на рис. 8а, то можно получить почти точно такую же исходную кривую (рис. 8б). Повтор построения показывает, что кривая воспроизводится на любом сколь угодно малом масштабе, т.е. имеется соответствие со вторым определением фрактала, данным Мандельбротом.

Любопытно заметить, что подобные кривые (их называют «монстрами») знаменитый кораблестроитель Алексей Николаевич Крылов (1863-1945) применил при моделировании процесса колебаний корабля [12].

Позволим некоторое историческое отступление. У российских ученых имя Вейерштрасса всегда связывается с именем Софьи Ковалевской, которая познакомилась с ним в 1870 году, когда ей

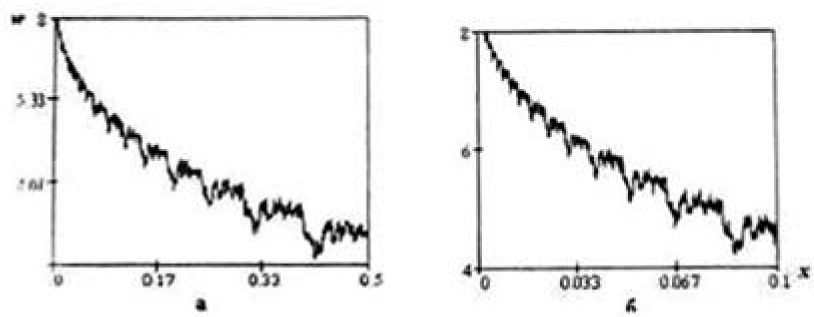


Рис. 8. Кривая Вейерштрасса.

Алексей Николаевич Крылов (1863-1945).

было 20 лет, а Вейерштрассу 55, и он считался величайшим аналитиком своего времени. Вейерштрассу из-за плохого здоровья приходилось читать лекции сидя, а кто-нибудь из способных студентов делал записи на доске. Несмотря на это, на его лекциях аудитория была полна. Ковалевской не разрешили посещать его лекции из-за ограничения прав женщин. Однако Вейерштрасс, узнав об этой решительной и энергичной девушке, устроил для нее частные уроки. Их дружба продолжилась более двадцати лет. Ее оборвала лишь мучительная и преждевременная смерть этой замечательной женщины.

Интересный аспект этой дружбы раскрывают в своей книге «Небесные встречи. Истоки хаоса и устойчивости» Ф. Диаку и Ф. Холмс [13]. Они пишут так: «Несмотря на всю важность вкладов, внесенных Ковалевской в механику, мы вспомнили историю Сони Ковалевской и Карла Вейерштрасса по другой причине. Дружба этих двух неординарных людей вылилась в длительную переписку, в которой можно найти корни многих математических идей.

Софья Ковалевская (1850-1891).

В частности, читая письма Вейерштрасса, начинаешь понимать образ его мышления и работы. Это совсем не похоже на чтение его математических статей. Научные статьи, особенно по математике, представляют собой только научный продукт. Они скрывают само создание, путь к конечному результату, надежды и сомнения, страсть, движение в ложном направлении и ошибки, разочарования. Все это присутствует в письмах. Они изображают человеческий разум, стоящий за абстрактными теоремами. Они показывают неудачные попытки, результаты которых никогда не публиковались. Они позволяют нам проследить не всегда гладкий процесс изобретения» [13, с. 233].

Заметим, что помимо размерности Хаудорфа-Безиковича фракталы характеризуются и другими размерностями, например, размерностью венгерского математика Альфреда Реньи.

Реньи предложил континуальное семейство размерностей, включающее в себя многие известные размерности, в том числе размерность Хаусдорфа-Безиковича.

q-ая размерность Реньи определяется по формуле

$$D_q = \lim_{E\to 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum_{i=1}^{N} p_i^q}{\log E},$$

где p_i – вероятность попадания на i-ю компоненту фрактала, E – радиус сферы покрытия.

При q = 0 Dqпереходит в размерность Хаусдорфа-Безиковича

$$D_0 = \lim_{E\to 0} \frac{1}{-1} \frac{\log \sum_{i=1}^{N} p_i^0}{\log E} = \lim_{E\to 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{N} 1}{-\log E} = \lim_{E\to 0} \frac{\log N(E)}{\log \dfrac{1}{E}}.$$

Альфред Реньи родился 20 марта 1921 года в Будапеште в семье инженера. Его дед со стороны отца был известным литературным критиком и большим знатоком древнегреческой литературы. Отец будущего ученого свободно владел многими европейскими языками. Видимо, от них внук унаследовал литературные способности. Русскому читателю известна его блестящая книга «Трилогия о математике. Диалоги о математике. Письма о вероятности. Дневник. Записки студента по теории информации» [14] Реньи окончил в 1944году университет в Будапеште и защитил первую диссертацию в Сегеде. Затем поступил в докторантуру к академику Ю.В. Линнику (Ленинградское отделение Математического института имени В.И. Стеклова). Он окончил докторантуру за год благодаря своей одаренности и трудолюбию.

Возвратившись после защиты диссертации в Венгерскую Народную Республику, Реньи приступил к научно-педагогической работе в Дебреценском университете.

В 1950 году при активном участии Реньи в Будапеште был создан Институт прикладной математики Венгерской Академии наук (позже он был переименован в Институт математики). Альфред Реньи стал первым и бессменным (на протяжении двадцати лет) директором этого института.

С 1952 года Реньи заведовал кафедрой теории вероятностей Будапештского университета имени Этвеша.

В нашей стране Реньи известен всем интересующимся математической книгой «Трилогия о математике» [14][2].

Форма диалогов позволила автору не только изложить собственные взгляды на предмет, но и противопоставить и иные точки зрения и привести доводы «за» и «против».

Обратимся далее к воспоминаниям академика АН УССР Б.В. Гнеденко из предисловия к «Трилогии о математике».

«Вслед за этой книгой (имеются в виду «Диалоги о математике), принесшей Реньи широкую известность как популяризатору и ученому, занимающемуся философскими проблемами математики, он начал работать над другой популярной книгой – «Письмами о вероятности». Замыслами о ней поделился со мной в ок-

---

[2] Первые две части трилогии издавались отдельными книгами: Реньи А. Диалоги о математике – М.: Мир, 1969; Он же. Письма о вероятности. – М.: Мир, 1970. Обе книги стали библиографической редкостью.

тябре 1966 года, когда я был гостем венгерских математиков в Будапеште. Как-то перед одной из своих лекций по телевидению, посвященной элементам теории вероятностей, он, рассказывая мне о том, что собирается публично выступить с демонстрацией игральных костей различных времен и народов, упомянул о замысле задуманной им книги. Надо полагать, идея написания такой книги и ее форма были навеяны его поездкой во Францию по случаю 300-летия со дня смерти Паскаля, когда он побывал не только в Париже, но и в Клермон-Ферране, неподалеку от которого Паскаль проводил свои опыты» [14].

«Дневник» посвящен выяснению основного понятия теории информации – количества передаваемой информации. Форма, к которой прибегнул автор, своеобразна и удивительно интересна. Преждевременная смерть не позволила Реньи завершить эту книгу. Его не стало 1 февраля 1970 года. Книгу закончили его ученики и друзья.

Альфред Реньи был тонким музыкантом и знатоком литературы. Он высоко ценил в Математике ее эстетическое начало, интересовался историей математики и размышлял над ее философскими проблемами.

Есть любопытная классификация фракталов, носящая лингвистический характер.

«Язык – это очень подходящая метафора для концепции, лежащей в основе фрактальной геометрии», – считают авторы статьи [15]. Далее они уточняют и расширяют этот тезис. «Как известно, индоевропейские языки базируются на алфавите с конечным числом букв (например, английском, включающем 26 букв). Буквы не несут в себе никакого смыслового значения, пока они не соединены в слова. Точно так же Евклидова геометрия состоит лишь из нескольких элементов (прямая, окружность и т.д.), из которых строятся сложные объекты, выражающие некий смысл.

С другой стороны, азиатские языки, например, китайский, состоят из символов, которые уже сами по себе выражают смысловое значение. Количество возможных символов, или элементов этих языков, произвольно велико и может считаться бесконечным. Аналогично можно рассматривать и фрактальную геометрию. Она состоит из бесконечного количества элементов, каждый из которых является завершенным и единственным в своем роде. Геометрические элементы определяются алгоритмами, которые функционируют как единицы «смыслового значения» в рамках фрактального языка» [15].

Авторы статьи [15] выделяют два «диалекта» фрактального языка: линейный и нелинейный. О линейных фракталах уже говорилось выше, они весьма распространены. Линейными их называют потому, что их алгоритмы определяют линии на плоскости. Типичный линейный фрактал – кривая Коха.

В настоящее время специалисты весьма активно работают над созданием фрактальных методов кодирования для самоподобных изображений типа кривой Коха.

Что же представляет собой нелинейный «диалект» фрактального языка, в котором выделяют квадратичный «диалект»?

Теория, лежащая в основе этого «диалекта», была создана и изложена французским математиком Гастоном Жюлиа, когда он лечился в госпитале после ранений, полученных на фронте во время Первой мировой войны, Аналогичными вопросами занимался и другой французский математик – Пьер Фату.

Пьер Жозе Гастон Фату (1878-1929).

Пьер Жозе Гастон Фату также занимался итерационным исследованием квадратичных отображений на комплексной плоскости. Он окончил Высшую нормальную школу в Париже и получил в 1901 году должность астронома в Парижской обсерватории. Во фрактальной геометрии самый известный его результата – нелинейный фрактал – пыль Фату.

Мандельброт в книге [7, с. 257-258] пишет следующее:

«Хронологически изучение итераций можно разделить на три этапа, Первый, связанный с комплексной переменной Z, прошел под знаменами Пьера Фату <…> и Гастона Жюлиа <…>. Их публикации являются шедеврами классического комплексного анализа, ими восхищаются математики, однако, на их фундаменте трудно что-нибудь построить. В своей работе <…> я стараюсь придать большую наглядность их основным открытиям, объединяя анализ с физикой и подробными иллюстрациями, в результате чего обнаруживается великое множество неизвестных ранее фактов.

Последовавшее за этими открытиями возрождение помогло установить тесную связь свойств итерации с теорией фракталов. Из того факта, что находки Фату и Жюлиа оказались недостаточно проработанными для того, чтобы быть основой теории фракталов, мы можем сделать вывод, что даже классический анализ нуждается иногда в наглядности и интуитивной понятийности, причем, компьютерное моделирование может оказать ему в этом смысле серьезную помощь».

Обоих математиков интересовал вопрос, как будет вести себя последовательность точек Z_k на комплексной плоскости, если они порождаются преобразованием $f(Z) = Z^2 + C$. Каждая последующая точка Z_{k+1} получается, если в приведенную формулу подставить предыдущую точку$Z_{k,}$ т.е. фактически речь шла об исследовании отображения $Z_{k+1} = Z^2 + C$. Комплексное число C играет роль управляющего параметра, который можно выбирать произвольно. Несложный итерационный процесс порождал многообразие форм на плоскости ImZ – ReZ. Работы Жюлиа и Фату выполнялись во времена, когда не было вычислительных машин, и поэтому визуализации их результатов не было.

Современников работы Жюлиа и Фату мало волновали. Как уже указывалось, новую жизнь им подарили исследования Мандельброта. С чем же связано упомянутое многообразие форм? Вот как образно отвечают на этот вопрос авторы статьи [15]:

«Когда исходная точка Z_0 подвергается преобразованию, то получающаяся последовательность демонстрирует поведение двух типов. Она либо свободно путешествует по плоскости, уходя в бесконечность, либо оказывается замкнутой в определенной области комплексной плоскости. Первые из них образуют множество «беглецов», те же, что остаются в замкнутом пространстве, принадлежат множеству «пленников». Исходная точка Z_0, выбранная из множества пленников, генерирует последовательность, которая остается в численной неволе, независимо от того, сколько поколений этой последовательности вычисляется. Форма этой тюрьмы зависит от выбранного значения параметра C. Для точки Z_0, лежащей вне замкнутой области, последовательность Z удаляется от центра плоскости и уходит в бесконечность. Множество пленников и беглецов отделены друг от друга бесконечно тонкой границей известной как множество Жюлиа» (рис. 9).

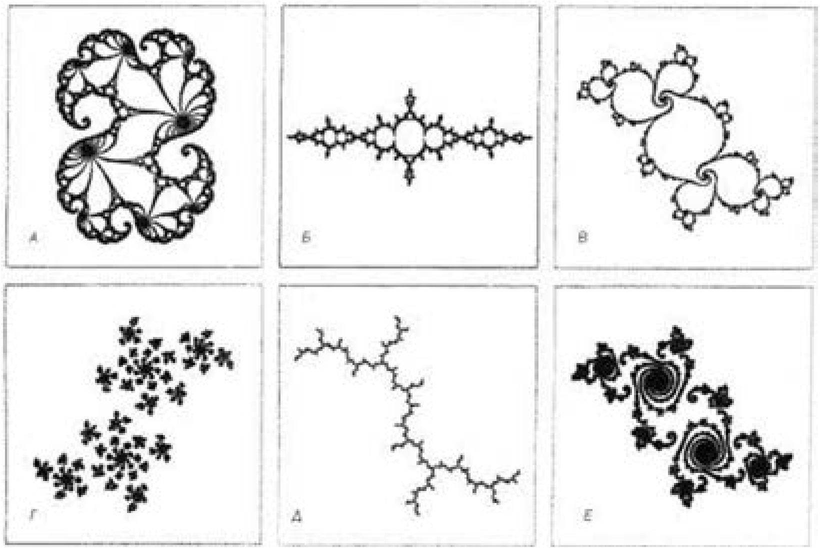


Рис. 9. Примеры множеств Жюлиа для процесса $Z \to Z^2 + C$.

Как видно из рис. 9, фрактальные границы множества Жюлиа принимают разнообразные и удивительные формы, которые зависят только от числа С, При некоторых значениях числа С рождаются множества Жюлиа, имеющие одно связное тело (см. рис. 9 а-в, д,), при других значениях С эти множества распадаются, напоминая пыль (рис. 9 г, е,). если перебирать различные значения С, то на плоскости ImC – ReC мы приходим к множеству Мандельброта (М) (закрашенная черным цветом часть плоскости ImC – ReC на рис. 10).

Понятно, что каждое комплексное значение С либо попадает в черную структуру М, либо нет, что соответствует различным множествам Жюлиа. Когда С лежит внутри М, множества Жюлиа – связные структуры, когда С лежит вне М, они рассыпаются на бесконечное число элементов, что находит отражение даже в их названиях: так, множество Жюлиа на рис. 9 г носит название пыли Фату. Наибольший интерес вызывает граница структуры М, поскольку переход через нее вызывает драматические качественные изменения в множестве Жюлиа. Иногда даже говорят, что граница М соответствует математическому фазовому переходу для множеств Жюлиа отображения $Z_{n+1} = Z^2 + C$. Итак, каждая из

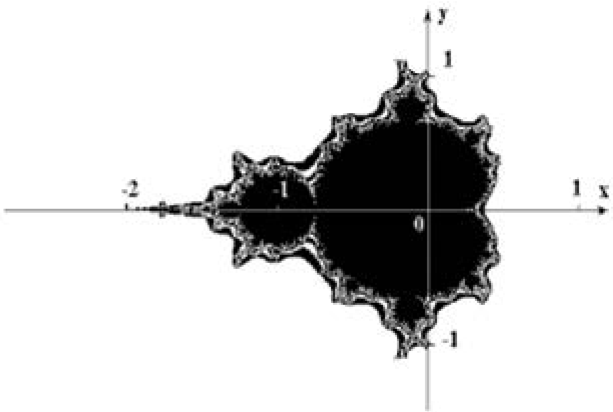


Рис. 10. Множество Мандельброта для отображения $Z_{k+1} = Z^2 + C$ для части комплексной С-плоскости, где -2,25 <ReC< 0,7; -1,5 <ImC< 1,5.

частей множества М характеризует соответствующее семейство множества Жюлиа.

Строго говоря, множество М не является самоподобным, как триада Коха, но оно обладает похожим свойством: увеличение какого-либо фрагмента области демонстрирует бесконечное число крохотных копий множества. Как пишут авторы [15], «наиболее замечательная особенность множества Мандельброта заключается в том, что оно служит бесконечно эффективным хранилищем изображений. Помимо того, что оно классифицирует множества Жюлиа на связные и несвязные, множество Мандельброта выступает также в роли непосредственного графического оглавления множеств Жюлиа» [15].

Рис. 11 иллюстрирует в качестве примера связь между множеством Мандельброта и сценарием перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, когда где -2,25<ReC< 0,75.

Бифуркации соответствуют нарастанию «почек» в множестве М, периодические окна, разрывающие пелену хаоса, соответствуют малым копиям множества М, которые находятся на главной «антенне». Из рис. 11 видно, насколько более полную картину дает множество М по сравнению с обычной бифуркационной диаграммой.

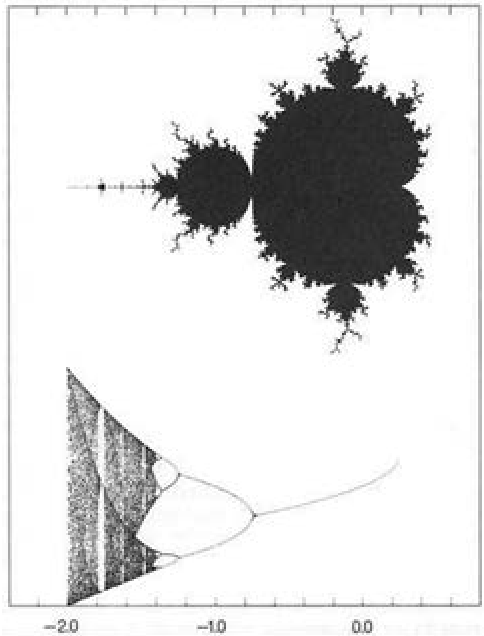


Рис. 11. Связь между множеством Мандельброта и бифуркационной диаграммой перехода к хаосу через бесконечную последовательность удвоения периода.

Как известно, при описании в фазовом пространстве возникновения хаоса посредством простых операций растягивания и образования складок экспоненциально расходящиеся траектории через некоторое время снова проходят друг около друга, так что вытягивание и образование складок происходит вновь и вновь, создаются новые складки внутри складок, и так до бесконечности. Именно поэтому хаотические аттракторы являются фракталами, имеющими самоподобную структуру, и количественно их можно характеризовать фрактальной размерностью.

Благодаря Мандельброту и его последователям стало ясно, что фрактальными свойствами обладают многие природные объекты. Фрактальные структуры возникают при прохождении жидкости через твердые пористые тела, например, при просачивании воды через почву или кофе через кофейную гущу. Такие структуры называются перколяционными кластерами. Фракталы возникают также при росте некоторых кристаллов, при прохождении пузырьков воздуха через нефть, при образовании трещин, когда разрушаются твердые тела, при электрических разрядах, подобных молнии. Из этих перечислений можно заключить, что природа очень любит фрактальные формы.

Для объяснения фрактального роста популярна модель, в основе которой лежит механизм так называемой агрегации, ограниченной диффузией (см., например [16]). Смысл ее в следующем. Пусть существует некоторая поверхность, имеющая в момент времени t_1 форму, представленную на рис. 12а.

Рис. 12. Иллюстрация механизма агрегации, ограниченной диффузией, для трех моментов времени.

Около поверхности случайно движутся (диффундируют) частицы, которые могут оседать на нее (агрегировать) и изменять форму поверхности (рис. 12б). Вероятность столкнуться с бугорком у частицы значительно выше, чем попасть в ямку. Из-за случайного движения частиц на поверхности образуются мелкие бугорки (ветви) и ямки. Возникает неустойчивость роста – появляются все новые и новые ветви, и формируется фрактальная структура (рис. 12в). Ветви растут быстрее ямок, потому что, двигаясь по изломанным траекториям, частица имеет большую вероятность прилипнуть к вершине ветви или около нее. По пути вглубь ямки частица скорее прилипнет к стенке, чем попадет на дно. Появление ветвей делает заполнение ямок все менее вероятным.

Более всего впечатляют фракталы в человеческом организме. Количественный анализ ветвления дыхательных путей показал, что оно подчиняется законам фрактальной геометрии. Как самоподобные выглядят большие и малые детали в строении тонкого кишечника; кровеносные сосуды сердца также имеют фракталоподобное ветвление. Ярким примером фрактальной структуры является нейрон: от тела клетки отходят отростки – дендриты, которые ветвятся на все более и более мелкие волокна. В сердечном ритме здорового человека также наблюдается самоподобие: при регистрации ритма в разных временных интервалах, 3, 30 и

300 минут, быстрые изменения выглядят почти так же, как медленные (см., например, [17]).

И, пожалуй, самое интригующее сегодня во фрактальной геометрии.

В книге Мандельброта есть глава 11, которая начинается так: «Эта глава посвящена первому пересечению фрактальной геометрии природы с основным направлением математической физики» [7, 156]. Речь идет о теории турбулентности и уравнениях Эйлера и Навье-Стокса. Заметим, что задача об исследовании уравнения Навье-Стокса для вязкого потока жидкости отнесена институтом Клэя к величайшим математическим задачам тысячелетия [9]. Задача тысячелетия не просит математиков найти явные решения уравнения Навье-Стокса, поскольку это, по существу, невозможно. Не имеет она отношения и к численным методам решения этих уравнений, несмотря на всю их важность. Вместо этого в задаче требуется найти доказательство фундаментального теоретического свойства: существования решений. При заданном состоянии жидкости в определенный момент времени – при известных характеристиках ее движения – существует ли решение уравнение Навье-Стокса, верное для всего будущего времени, начиная с рассматриваемого момента?» [9, с. 308].

Для нас интересен конец цитируемой статьи из [9], поскольку с ним связаны некоторые предположения Мандельброта:

«…на сайте Института Клэя Чарльз Фефферман написал: “Существует множество интереснейших задач и гипотез о поведении решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса<…>.

Поскольку мы не знаем даже, существуют ли эти решения, наши представления о них находятся на очень примитивном уровне. Стандартные методы (из теории дифференциальных уравнений в частных производных) представляются недостаточными для решения этой задачи. Вместо этого нам, вероятно, требуются новые глубокие идеи”».

Создается впечатление, что именно такие идеи и высказывает Мандельброт. Процитируем его: «Рассматривая <…> сложности, возникающие при описании турбулентности с помощью решений Эйлера и Навье-Стокса, я склонен счесть их следствием того факта, что не существует стандартной особенности, которая объясняла бы воспринимаемые нами на интуитивном уровне характеристические признаки турбулентности.

Исходя из этого, я заявляю, что турбулентные решения фундаментальных уравнений включают в себя особенности или «почти особенности» совершенно иного рода. Эти особенности представляют собой масштабно-инвариантные фрактальные множества, а почти особенности – приближения к ним» [9, с. 157].

Далее сформулированы два конкретных предположения.

Первое: особенности решений уравнений Эйлера представляют собой фрактальные множества.

Второе: особенности решений уравнения Навье-Стокса могут быть только фрактальными.

Наконец в [7] в разделе «Однородная фрактальная турбулентность» Мандельброт пишет: «Глава 11 этого эссе написана исключительно с целью выразить мое основное предположение относительно турбулентности, которое заключается в том, что турбулентность в вещественном пространстве представляет собой феномен на несущем множестве размерности Д~2,5-2,6» [7, с. 595] (см. [18] и [19]). Он также указывает на работу [20], в которой развивается иной подход: удлинение и свертывание вихрей изучается с помощью методов, разработанных для исследования полимеров.

Общее впечатление от фракталов хорошо описано в конце статьи [15].

«Даже сами ученые испытывают почти детский восторг, наблюдая за развитием нового языка – языка фракталов. Вот что пишет сам Мандельброт:

«Ученые с немалым удивлением и восторгом <…> уясняют для себя, что многие и многие формы, которые они до сих пор вынуждены были характеризовать как зернистые, гидроподобные, похожие на морские водоросли, странные, запутанные, ветвистые, ворсистые, морщинистые и т.п., отныне могут изучаться и описываться в строгих количественных терминах. Математики <…> будут удивлены и обрадованы, узнав, что фрактальные множества, считавшиеся до сих пор чем-то исключительным <…>, в некотором смысле должны происходить единственным образом из очень конкретных задач и что изучение природы должно помочь решить старые задачи и поставить немало новых» [15].

Удивительное предвидение Жана Перрена

Жан Батист Перрен (1870-1942) – французский физик и физико-химик, член Парижской Академии наук с 1923 года, а в 1938 ее

Жан Батист Перрен (1870-1942).

Президент. Он родился в Лилле, окончил Нормальную школу (1894), там же работал в 1894–1897 гг. В Парижском университете Перрен работал с 1897 г. (с 1910 г. – профессор). С 1938 года он жил в США.

В 1895 г. Перрен экспериментально доказал, что катодные лучи являются потоком отрицательно заряженных частиц. В 1908–1913 гг. он осуществил цикл экспериментальных исследований броуновского движения. В результате эти исследования подтвердили молекулярно-статистическую теорию Эйнштейна–Смолуховского и стали окончательным доказательством того, что броуновское движение является следствием теплового движения молекул среды. Кроме того, они убедили и в реальности самих молекул.

На основе своих опытов Перрен вычислил число Авагадро – -6,8 х10^{23}.

Его исследования броуновского движения в коллоидных растворах дали возможность вычислить размер атома.

Работы Перрена были посвящены строению мыльных плёнок, исследованию рентгеновских лучей, проводимости газов, флюорестенции, радиоактивности, атомной физике, акустике.

Он боролся против фашизма, был деятелем Народного Фронта Франции, иностранным членом АН СССР.

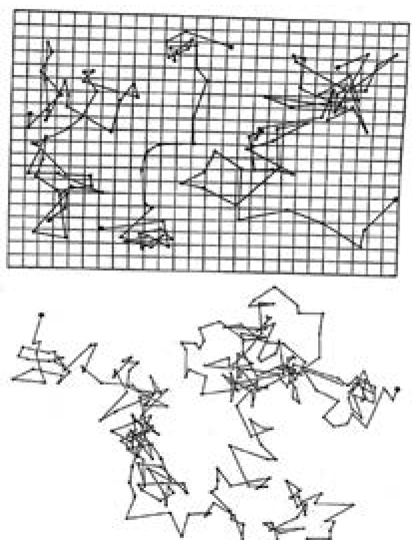


Рис. 13. Следы броуновских частиц.

В главе 2 монографии [7] есть раздел «Из-под пера Жана Перрена», в котором Мандельброт цитирует ранний философский манифест Перрена на основе его работ [21, 21]. Причем, он подчеркивает, что «заметили его, похоже, только тогда, когда я процитировал его в первом (французском) издании моего эссе». Приведем частично часть текста из этой удивительной цитаты:

«Общеизвестно, что хороший учитель, давая ученикам строгое определение непрерывности, покажет прежде, что лежащая в основе этого понятия идея хорошо им знакома. Он построит на доске какую-нибудь вполне непрерывную кривую и, перемещая вдоль нее линейку, скажет: “Как видите, касательная существует во всех точках кривой”. Или, например, для того, чтобы ознакомить учеников с понятием истинной скорости движущегося объекта в некоторой точке его траектории, учитель говорит: “Вы, разумеется, понимаете, что среднее между значениями скорости в двух соседних точках не изменяется сколько-нибудь существенно при приближении этих двух точек друг к другу на бесконечно малое расстояние”. И многие люди, полагая, что для некоторых всем знакомых движений такой взгляд достаточно точно отражает положение вещей, не желают замечать, что все не так просто.

Математики, однако, прекрасно понимают, что попытка показать при помощи построения кривых то, что каждая непрерывная функция имеет производную, по меньшей мере наивна. Хотя дифференцируемые функции и являются самыми простыми, они все же представляют собой исключение.

Говоря языком геометрии, кривые, не имеющие касательных, могут считаться правилом, в то время как правильные, такие, например, как окружность – любопытным, но весьма частным случаем <…>.

Те, кто впервые слышит о кривых без касательных или о функциях без производных, часто склонны полагать, что в Природе не существует ни подобных сложных конструкций, ни даже намека на них.

Это, однако, неверно – математики со своей логикой оказываются ближе к реальности, чем физики с их практическими представлениями <…>.

Не покидая экспериментально подтверждаемой реальности, мы наблюдаем под микроскопом проявление броуновского движения на примере малой частицы, взвешенной в толще жидкости (рис. 13).

Мы видим, что направление прямой, соединяющей точки, соответствующие двум очень близким по времени положениям частицы, изменятся по мере уменьшения временного промежутка между двумя измерениями совершенно беспорядочно. Беспристрастный наблюдатель заключит из этого, что имеет дело с функцией, не имеющей производной, а вовсе не с кривой, к которой в любой точке можно провести касательную <…>.

Позволим себе высказать одно предположение, достаточно произвольное, но непротиворечивое. Наверняка мы скоро столкнемся с такими случаями, для описания которых проще использовать недифференцируемые функции, нежели те, что имеют производную. Когда такое произойдет, практическая ценность математических исследований нерегулярных континуумов станет очевидной всем».

И далее, подчеркивая мысль, с новой строки:

«Однако это лишь мечтания. Пока» [7, с. 20–24].

В книге Перрена [20] приводятся рисунки (рис. 13) четырех индивидуальных траекторий, иллюстрирующие движение коллоидной частицы радиуса 0,53 мк, полученные с помощью микроскопа. На координатной сетке (шаг сетки 3,2 мк) через каждые 30 секунд отмечались последовательные положения частицы, которые затем соединялись прямыми. Очевидно, что эти прямые не имеют физического смысла. Мандельброт вновь цитирует Перрена, но теперь работу [23]. «Может возникнуть искушение определить “среднюю скорость частицы”, как можно точнее последовав за ней по ее извилистому пути. Однако подобная оценка кажется в корне неверной. И величина, и направление видимой средней скорости частицы изменяются самым безумным образом. Рисунок дает лишь слабое представление об изумительной запутанности реальной траектории. Если бы положения частицы регистрировались в 100 раз чаще, то вместо каждого отрезка прямой мы получили бы ломаную, столь же сложную, как исходный рисунок, хотя и меньших размеров – и так далее. Нетрудно убедиться, что на практике понятие касательной в применении к таким кривым является полной бессмыслицей». [7].

Мандельброт далее подчеркивает главное: при последовательном увеличении разрешения микроскопа, длина траектории броуновской частицы возрастает до бесконечности. Причем, топологически след броуновской частицы – кривая (размерность 1), но он способен заполнить всю плоскость, поэтому во фрактальном смысле его размерность равна 2. И Мандельброт заключает: «Расхождение между этими двумя величинами дает броуновскому движению право называться фракталом» [7].

Мир фракталов удивителен и огромен. В какой-то степени его необъятность раскрывает шутливое стихотворение Михаила Львовича Левина, написанное на нижегородской школе «Нелинейные волны – 1987». Оно приводится в воспоминаниях Л.А. Островского «Немного о Левине» в книге [24, с. 219].

Фрактален Канторовский Дуст
И с ним звезда Давида-Коха.
Фрактален Кафка, Джойс и Пруст,
Боюсь, фрактальна и эпоха.
Весь Божий мир, что был так прост,
Теперь запутан и фрактален.
Везде разрывы в полный рост,
И даже стал фрактален Сталин.
Его третирует весь свет,
Как шельму в яром нетерпеньи.
По мере он сошел на нет,
Но чертовы торчат ступени.
С тех пор, как Вечный Судия
Мне дал понятие фрактала,
Фрактальной стала жизнь моя,
И новая пора настала:
От побережий до мозгов,
От Ричардсона до Перрена
Веду фрактальный счет шагов:
Фрактальны губка, сыр и пена…
Фрактальны Библия, Коран,
Собранье пестрых глав в Талмуде,
Ряды (Маклорен и Лоран)
И построенье Каца-Муди.

Список литературы:

1. Richardson L.F. Weather Prediction by Numerical Process. Cambridge University Press, 1922.

2. Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 256 с.

3. Рабинович М.И. Короткий рассказ о встречах с Михаилом Львовичем // Михаил Львович Левин. Жизнь, воспоминания, творчество: изд. 2-е, доп. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1998. С. 36–44.

4. Арт-фрактал. Сб. статей / Пер. с англ., фр. Е.В. Николаевой. СПб.: Страта, 2015. 156 с.

5. Костицын В.Н. Ректоры Пермского университета. 1916-2006. Изд. 2-е, перераб. и доп. Пермь: Пермский ун-т, 2006. С.35–44.

6. Данилов Ю.А. Прекрасный мир науки. Сб. статей памяти Ю.А. Данилова /под ред. В.И. Санюка, Д.И. Трубецкова. – М.: Прогресс-Традиция, 2008. 384 с.

7. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.

8. Lighthill J. The Recently Recognized Failure of Predictability in Newtonian Dynamics // Proceeding of the Royal Society. 1986. P. 35–50.

9. Стюарт И. Величайшие математические задачи. М.: Альпина нонфикшн, 2015. 460 с.

10. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. 254 с.

11. Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 264 с.

12. Тарасенко В.Г. Фрактальная логика. – М.: Прогресс-Традиция, 2002. 155 с.

13. Диаку Ф., Холмс Ф. Небесные встречи. Истоки хаоса и устойчивости. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 304 с.

14. Реньи А. Трилогия о математике. Диалоги о математике. Письма о вероятности. Дневник. Записки студента по теории информации» – М.: Мир, 1980. 376 с.

15. Юргенс Х., Пайтген Х.О., Заупе Д. Язык фракталов // В мире науки. 1990. № 10. С. 36–44.

16. Сандер Л.М. Фрактальный рост // В мире науки. 1987. № 3. С. 62–69.

17. Голдберг Э.Л., Ригни Д.Р., Уэст Б.Дж. Хаос и фракталы в физиологии человека //В мире науки. 1990. № 4. С. 25–32.

18. Chorin A. The Evolution of a Turbulent Vortex // Communication in Mathematical Physics, 1982. Vol. 83. P.517–535.

19. Chorin A. Numerical Estimates of Hausdorff Dimension // Journal of Computational Physics, 1982. Vol. 46. P. 1124–136.

20. Hentschel H.Y.E., Procaccia I. Intermittence Exponent in Fractally Homogeneous in Turbulent Diffusion // Physical Review Letters. 1982. 49. 1158–1161.

21. Perrin J. La discontinuite de la matiere // Revue du Moris. 1906. № 1. P.323-344.

22. Perrin J. Les atomes. Paris: Alcan, 1913.

23. Perrin J. Mouvement brownien et realite moleculaire // Annales da Chemie et de physique. 1909. Vol. VIII. 18. P. 5–114.

24. Михаил Львович Левин. Жизнь, воспоминания, творчество. Изд. 2-е доп. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1998.

Отделение физических наук

Д.И. Трубецков, Е.Г. Трубецкова

Фракталы и время
(от Ричардсона и Мандельброта до Поллока).
Фрактальная геометрия

Формат 60 х 84/16
Гарнитура Таймс
Усл. печ. л. 2,79. Усл. изд. л. 1,8
Тираж 20 экз.

Издатель – Российская академия наук

Подготовлено к печати
Управлением научно-издательской деятельности РАН

Отпечатано на оборудовании Управления делами РАН

Издано в авторской редакции

Издается в соответствии с распоряжением
президиума Российской академии наук
от 24 октября 2017 г. №10106-765,
распространяется бесплатно.