LIBRARY PHOTODUPLICATION ORDER FORM

Date of request: 4-13-73 Requester's Order No. MoKL 19 Supplier's Order No. C

Call

BELL TELEPHONE LABORATORIES
TECHNICAL LIBRARY
ROOM 1F-108
MURRAY HILL, NJ 07974

Author (or Periodical title, vol. and year)

Fold →

Izvestiia Vysshikh Uchebnykh Zavedenii
Elektromekhanika Novocherkassk
#3, 1970

Title (with author and pages for periodical articles) (incl. edition, place and date)

"Enumeration of the Boolean Funitione..."
Zol arev, V.D.
Pag 309-313 Complete article desired. ☐ Any edition

Verified in (or Source of reference)

Math.Rev. 45#83, JAN.1973

Request ☐ microfilm XX photoprint ☐ Other Remarks:

Linda Hall Library
Science and Technology
5109 Cherry Street
Kansas City, Missouri 64110

NOTE: This material is requested in accordance with the A. L. A. recommendations concerning the photocopying of copyrighted materials.

ORDER AUTHORIZED BY:

REPORTS:

NOT SENT BECAUSE:

- ☐ Not owned by Library
- ☐ File is incomplete
- ☐ In use
  - ☐ Hold Placed
  - ☐ Request again
- ☐ Publication not yet received
- ☐ Please verify your reference ← Fold
- ☐ Other:
- ☐ Suggest you request of:

Estimated Cost of Microfilm __________
Photoprint __________
Please pay in advance ☐
Please do not pay in advance ☐

Please send cost estimate for

☐ microfilm ☐ photoprint

Go ahead with the order if it does not exceed: $__________

Special instructions:

Please send invoice.

Then all told there are $3 \times 48 + 16$

$= 160$

1 fns of 3 vars which are

instants

6. Моделирование системы

Моделирование системы производилось на аналоговой вычислительной машине МПТ-9. В качестве привода контура самонастройки использовался двигатель РД-09, в качестве нелинейности—реле типа РП с различной настройкой, а в качестве частотных фильтров использовались инерционные звенья 1-го порядка с постоянными времени $T_1=1,5$ *сек* и $T_2=0,25$ *сек*. При этом $\beta_1=1$; $\beta_2=0,2$.

Переходный процесс в контуре самонастройки длился около 60 *сек*. Длительность переходного процесса можно уменьшить, уменьшив постоянные времени T_i и инерционность привода.

Зависимости $\sigma_\varphi=f(x)$, снятые для нелинейности типа неоднозначной релейной характеристики общего вида при $A=0,25\,в$; $B=0,125$; $a=k=1в$ и $l=1$ *в*, показали хорошее совпадение с расчетными кривыми (рис. 2*г*).

ВЫВОДЫ

1. В случае применения в основном контуре управления звена с существенной нелинейностью и частотных фильтров в контуре самонастройки построение системы, самонастраивающейся на минимум среднеквадратической ошибки, возможно. Расчет такой системы может производиться по предлагаемой методике.

2. При заданных условиях значение среднеквадратической ошибки σ_φ уже при $\frac{\sigma_{\varphi_c}}{A}\geqslant 6$ не зависит от типа нелинейности и приближается к значению среднеквадратической ошибки при идеальной нелинейности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казаков Е. И., Доступов Б. Г., „Статистическая динамика нелинейных систем". Ф.М., М. 1962.
2. Burt E. G., „Self Optimizing Systems", Fachtagung Regelungtechnick 1956, № 86.
3. Костюк В. И., „Самонастраивающиеся следящие системы". Техніка, Киев, 1966.

Рукопись поступила
первоначально 9. XII. 1968 г.,
после доработки 15. VII. 1969 г.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

№ 3 ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА 1970

УДК 517.514

Enumeration of Boolean Functions

ПЕРЕСЧЕТ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕСТАНОВОК ПЕРЕМЕННЫХ

V. D Zolotarev

В. Д. Золотарев

1. Рассмотрим булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которой можно указать хотя бы одну перестановку переменных, не изменяющую функцию. Подсчитаем количество таких функций для случаев двух, трех, четырех переменных.

Всякую перестановку переменных $x_1, \ldots, x_n$ будем записывать в виде подстановки

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}, \quad (k_i = 1, 2, \ldots, n; \; k_i \neq k_j \text{ при } i \neq j),$$ = typical permutation

а сами подстановки станем разлагать в произведение циклов.

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ инвариантна относительно подстановки g. Неоднократные применения подстановки также не изменяют функцию. Следовательно, свойство инвариантности будет проявляться как для подстановки g, так и для степеней g^2, $g^3 \ldots$ Это позволяет рассматривать инвариантность функции относительно циклической группы $G = \{g, g^2, g^3, \ldots\}$, в которой элемент g является образующим. G = cyclic grp

Произвольную булеву функцию будем записывать в форме полинома Жегалкина

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + \ldots + a_mx_1x_2 \ldots x_n$$ = Boolean fn

$$(a_i = 0 \text{ или } 1; \; i = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

и каждой функции присвоим номер N, равный тому двоичному числу, которое получится из коэффициентов полинома, если их выписать подряд один за другим. Таким образом,

$$N = a_0a_1a_2 \ldots a_m.$$ N is $a_0a_1 \ldots a_m$ in binary! (a word not a product)

2. Пусть $n = 2$. Подстановка $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2)$, примененная к функции

$$f(x_1, x_2) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2,$$

преобразуют ее в

$$f(x_2, x_1) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_1 + a_3x_2x_1.$$

Если эта функция инвариантна относительно подстановки (1, 2), то $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$, что приводит к равенству $a_1 = a_2$. Тогда получаем

$$f(x_1, x_2) = a_0 + a_1(x_1 + x_2) + a_3x_1x_2,$$

$$N = a_0a_1a_1a_3.$$

Полагая a_0, a_1, $a_3 = 0$ или 1, получим восемь инвариантных функций от двух переменных.

3. Пусть $n=3$. Возьмем функцию

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \\ + a_4x_1x_2 + a_5x_1x_3 + a_6x_2x_3 + a_7x_1x_2x_3$$

и в симметрической группе S_3 подстановок трех символов выделим все циклические подгруппы, а именно:

Cyclic Subgroups of S_3

$$G_1 = \{(1, 2); e\},\quad G_2 = \{(1, 3); e\},\ G_3 = \{(2, 3); e\},\\ G_4 = \{(1, 2, 3);\ (1, 3, 2); e\},$$

где e—обозначение единицы группы.

Инвариантность функции $f(x_1, x_2, x_3)$ приводит к двум условиям:

$$a_1 = a_2 \text{ и } a_5 = a_6.$$

Тогда в восьмизначном двоичном числе

$$N = a_0a_1a_1a_3a_4a_5a_5a_7$$

остается только шесть цифр, независимых между собой, что дает $2^6=64$ различных номеров функций, инвариантных относительно группы G_1. Для групп G_2 и G_3 получим также по 64 инвариантных функции.

Инвариантность функции относительно группы G_4 приводит к условиям

Inv't under G_4

$$a_1 = a_2 = a_3 \text{ и } a_4 = a_5 = a_6.$$

Теперь номер $N=a_0a_1a_1a_1a_4a_4a_4a_7$ имеет только четыре независимых цифры, т. е. $2^4=16$ функций, инвариантных относительно группы G_4.

Заметим, что каждая из функций, инвариантная относительно группы G_4, будет также инвариантна относительно групп G_1, G_2 и G_3. Следуя терминологии, принятой в работе [1], назовем группой инерции данной функции совокупность всех подстановок, не изменяющих функцию. Тогда можно сказать, что 16 функций, инвариантных относительно группы G_4, имеют группой инерции всю симметрическую группу S_3, т. е. эти 16 функций являются симметрическими.

Исключим симметрические функции из числа тех, что инвариантны относительно групп G_1, G_2, G_3, и мы получим по 48 функций с группами инерции G_1, G_2, G_3.

what does this say? →

Таким образом, всего имеется $48\times3+16=160$ функций трех переменных, обладающих свойством инвариантности.

4. Пусть $n=4$. Возьмем функцию

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_1x_2 + \\ + a_6x_1x_3 + a_7x_1x_4 + a_8x_2x_3 + a_9x_2x_4 + a_{10}x_3x_4 + \\ + a_{11}x_2x_3x_4 + a_{12}x_3x_4x_1 + a_{13}x_4x_1x_2 + a_{14}x_1x_2x_3 + a_{15}x_1x_2x_3x_4.$$

В симметрической группе S_4 подстановок четырех символов выделили все циклические подгруппы.

Cyclic Subgroups of S_4

$$\left.\begin{array}{l} G_1 = \{(1, 2); e\},\quad G_2 = \{(1, 3); e\},\quad G_3 = \{(1,4); e\},\\ G_4 = \{(2, 3); e\},\quad G_5 = \{(2, 4); e\},\ G_6 = \{(3, 4); e\},\end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{array}{l} G_7 = \{(1, 2)(3, 4); e\},\quad G_8 = \{(1, 3)(2, 4); e\},\\ G_9 = \{(1, 4)(2, 3); e\},\end{array}\right\} \quad \text{(II)}$$

$$\left.\begin{array}{l} G_{10} = \{(1, 2, 3); (1, 3, 2); e\},\quad G_{11} = \{(1, 2, 4); (1, 4, 2); e\},\\ G_{12} = \{(1, 3, 4); (1, 4, 3); e\},\quad G_{13} = \{(2, 3, 4); (2, 4, 3); e\},\end{array}\right\} \quad \text{(III)}$$

$$\left.\begin{array}{l} G_{14} = \{(1, 2, 3, 4);\ (1, 3)(2, 4);\ (1, 4, 3, 2); e\},\\ G_{15} = \{(1, 2, 4, 3);\ (1, 4)(2, 3);\ (1, 3, 4, 2); e\},\\ G_{16} = \{(1, 3, 2, 4);\ (1, 2)(3, 4);\ (1, 4, 2, 3); e\},\end{array}\right\} \quad \text{(IV)}$$

где e—обозначение единицы группы.

Приведенные группы естественным образом объединяются в четыре класса, помеченные номерами I, II, III, IV. В каждой из групп от G_1 до G_{16} выбираем один образующий элемент (например, первый, записанный после фигурной скобки) и для него составляем условия инвариантности. В табл. 1 приведены условия инвариантности для групп, взятых по одной из классов I, II, III, IV.

Таблица 1

Группа	Условия инвариантности
G_1	$a_1 = a_2;\ \ a_6 = a_8;\ \ a_7 = a_9;\ \ a_{11} = a_{12}.$
G_7	$a_1 = a_2;\ \ a_3 = a_4;\ \ a_6 = a_9;\ \ a_7 = a_8;\ \ a_{11} = a_{12};\ \ a_{13} = a_{14}.$
G_{10}	$a_1 = a_2 = a_3;\ \ a_5 = a_6 = a_8;\ \ a_7 = a_9 = a_{10};\ \ a_{11} = a_{12} = a_{13}.$
G_{14}	$a_1 = a_2 = a_3 = a_4;\ \ a_5 = a_7 = a_8 = a_{10};\ \ a_6 = a_9;\ \ a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14}$

Номер N функции четырех переменных, равный двоичному числу $a_0a_1a_2 \ldots a_{15}$, можно представить так:

$$N = a_0 \cdot 2^{15} + N_1 \cdot 2^{11} + N_2 \cdot 2^5 + N_3 \cdot 2 + a_{15},$$

где

$$N_1 = a_1a_2a_3a_4,\quad N_2 = a_5a_6 \ldots a_{10},\quad N_3 = a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}$$

суть двоичные числа. При этом a_0, $a_{15}=0$ или 1 независимо от условий инвариантности, а значения N_1, N_2, N_3 связаны с условиями инвариантности. Для каждой группы $G_1, \ldots, G_{16}$ условия инвариантности таковы, что N_1 и N_3 получают одинаковые значения. Поэтому в табл. 2 колонки значений N_1 и N_2 объединены. Однако следует иметь в виду, что каждое значение N_1 комбинируется с каждым значением как N_2, так и N_3. Значит, для подсчета количества чисел вида $(N_1 \cdot 2^{11} + N_2 \cdot 2^5 + N_3 \cdot 2)$ следует определить количество всех различных троек вида (N_1, N_2, N_3). Обозначим через A_i множество таких троек, соответствующих группе G_i. Сведения и количество троек в этих множествах приведены в табл. 2.

Таблица 2

Группа	Значения: N_1, N_3	Значения: N_2	Множество	Количество троек
G_1	0, 1, 2, 3 12, 13, 14 15	0, 1, 10, 11, 20, 21, 30,31 32, 33, 42, 43, 52, 53, 62, 63	A_1	1024
G_2	0, 1, 4, 5, 10, 11, 14, 15	0, 2, 9, 11, 16, 18, 25, 27, 36, 38, 45, 47, 52, 54, 61, 63	A_2	1024
G_3	0, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15	0, 4, 8, 12, 17, 21, 25, 29, 34, 38, 42, 46, 51, 55 59, 63	A_3	1024
G_4	0, 1, 6, 7, 8, 9, 14, 15	0, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 48, 51, 52, 55, 56, 59, 60, 63	A_4	1024
G_5	0, 2, 5, 7, 8, 10, 13, 15	0, 2, 5, 7, 16, 18, 21, 23, 40, 42, 45, 47, 56, 58, 61, 63	A_5	1024
G_6	0, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15	0, 1, 6, 7, 24, 25, 30, 31, 32, 33, 38, 39, 56, 57, 62, 63	A_6	1024

Продолжение таблицы 2

Группа	Значения N_1, N_3	Значения N_2	Множество	Количество троек
G_7	0, 3, 12, 15	0, 1, 12, 13, 18, 19, 30, 31, 32, 33, 44, 45, 50, 51, 62, 63	A_7	256
G_8	0, 5, 10, 15	0, 2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 33, 35, 45, 47, 49, 51, 61, 63	A_8	256
G_9	0, 6, 9, 15	0, 4, 8, 12, 18, 22, 26, 30, 33, 37, 41, 45, 51, 55, 59, 63	A_9	256
G_{10}	0, 1, 14, 15	0, 11, 52, 63	A_{10}	64
G_{11}	0, 2, 13, 15	0, 21, 42,63	A_{11}	64
G_{12}	0, 4, 11, 15	0, 25, 38, 63	A_{12}	64
G_{13}	0, 7, 8, 15	0, 7, 56, 63	A_{13}	64
G_{14}	0, 15	0, 18, 45, 63	A_{14}	16
G_{15}	0, 15	0, 12, 51, 63	A_{15}	16
G_{16}	0, 15	0, 30, 33, 63	A_{16}	16

Табл. 2 содержит все возможные комбинации троек (N_1, N_2, N_3), определяющие номера N инвариантных функций. Но так как некоторые из троек встречаются в различных множествах A_i, то для точного пересчета количества инвариантных функций следует исключить общие элементы из множеств $A_1, \ldots, A_{16}$. Эту задачу выполним в несколько шагов.

Первый шаг. Обозначим через A_{17} множество троек (N_1, N_2, N_3), где N_1, $N_3 = 0$ или 15, а $N_2 = 0$ или 63. По табл. 2 легко заметить, что A_{17} входит во все $A_i (i = 1, 2, \ldots, 16)$. Исключим A_{17} из множеств $A_1, \ldots, A_{16}$ и введем новые множества $B_1, \ldots, B_{16}$, как указано в табл. 3 (в таблице приводятся результаты для множеств, взятых по одному из классов I, II, III, IV).

Таблица 3

Множество	Количество троек
$B_1 = A_1 - A_{17}$	$1024 - 8 = 1016$
$B_7 = A_7 - A_{17}$	$256 - 8 = 248$
$B_{10} = A_{10} - A_{17}$	$64 - 8 = 56$
$B_{14} = A_{14} - A_{17}$	$16 - 8 = 8$
A_{17}	8

Второй шаг. Множество B_{14} исключаем из B_2, B_5, B_7, B_8 и B_9, а B_{10} исключаем из B_1, B_2 и B_4. Аналогичные исключения выполняем со множествами B_{15}, B_{16} и B_{11}, B_{12}, B_{13}. Вводим новые множества $C_1, \ldots, C_9$, как указано в табл. 4.

Таблица 4

Множество	Количество троек
$C_1 = B_1 - B_{10} - B_{11}$	$1016 - 2 \times 56 = 904$
$C_7 = B_7 - B_{14} - B_{15} - B_{16}$	$248 - 3 \times 8 = 224$
B_{10}	56
B_{14}	8
A_{17}	8

Таблица 5

Группа инерции	Множество троек	Количество троек
G_1	$C_1 - D_1$	$904 - 120 = 784$
G_7	$C_7 - D_1$	$224 - 120 = 104$
G_{10}	B_{10}	56
G_{14}	B_{14}	8
S_4	A_{17}	8
H_1	D_1	120

Третий шаг. Множества C_1, C_6, C_7 содержат общие тройки (N_1, N_2, N_3), соответствующие значениям $N_1, N_3 = 0, 3, 12, 15$; $N_2 = 0, 1, 30, 31, 32, 33, 62, 63$, не считая тех комбинаций, что вошли во множество A_{17}. Обозначим через D_1 множество троек общих C_1, C_6, C_7. Очевидно, что D_1 содержит 120 различных троек $(4.4.8-8=120)$. Множество D_1 исключаем из C_1, C_6, C_7. Аналогично находим множество $D_2(D_3)$ и исключаем его из множеств C_2, C_5, C_8 (C_3, C_4, C_9). После этого получим множества, уже не пересекающиеся попарно между собой. Заметим, наконец, что для множества A_{17} группой инерции будет вся симметрическая группа S_4, а для D_1 группа инерции H_1 порождается группами G_1, G_6 и G_7. В табл. 5 содержатся сведения о группах инерции, множествах троек и о количестве троек во множествах.

Общее количество различных троек во всей табл. 5 определяется формулой

$$784.6 + 104.3 + 56.4 + 8{,}3 + 8 + 120.3 = 5632.$$

Так как в номер N инвариантной функции кроме N_1, N_2, N_3 входят также a_0 и a_{15}, то число инвариантных функций равно $5632.4 = 22528$.

Групп инерции насчитывается двадцать: $G_1, \ldots G_{16}$, S_4, H_1, H_2, H_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поваров Г. Н., О групповой инвариантности булевых функций. Сб. „Применение логики в науке и технике". М., Изд-во АН СССР, 1961.
2. Курош А. Г., Теория групп. М., Изд. „Наука", 1967.

Рукопись поступила
первоначально 19. VI. 1968 г.,
после доработки 30. VI. 1969 г.