CJM 4 1952

698
699

# SUR UN PROBLÈME DE CONFIGURATIONS ET SUR LES FRACTIONS CONTINUES

JACQUES TOUCHARD

**Introduction.** Dans un précédent article [6, §4] j'ai essayé de traiter le problème suivant, qui fait l'objet du présent travail: on donne $2n$ abscisses, marquées $1, 2, \ldots, 2n$, de gauche à droite, sur un axe horizontal. On les joint deux à deux par $n$ arcs convexes, tracés au-dessus de l'axe, de manière que chaque abscisse soit l'origine ou l'extrémité d'un seul arc, l'origine étant à gauche et l'extrémité à droite. On obtient ainsi $p_{2n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ configurations et on demande le nombre de celles qui ont $p$ points doubles.

Je crois devoir rappeler les définitions suivantes. Nous dirons que deux arcs $C_1$ et $C_2$ appartiennent à un même système si l'un recouvre l'autre ou si l'un coupe l'autre ou si un troisième arc $C_3$ recouvre $C_1$ et $C_2$ ou les coupe tous les deux, ou encore coupe l'un d'eux et recouvre l'autre. Lorsqu'un système $S_1$ est recouvert par un arc d'un système $S_2$ et qu'aucun arc de $S_1$ n'est coupé par aucun arc de $S_2$, $S_1$ et $S_2$ forment un système $S$, dont $S_1$ est un sous-système. Nous dirons qu'un système est propre, lorsqu'il ne contient pas de sous-système.

Ce problème, je l'avais abordé en partant de la notion des systèmes propres, qui sont en effet les éléments en lesquels se décompose toute configuration. Je suis parvenu ainsi à des formules générales, donnant les nombres de configurations qui ont de zéro à six points doubles, mais la difficulté de former les systèmes propres m'avait empêché d'aller plus loin. A la fin de l'article en question, j'ai indiqué le principe d'une autre méthode. Elle consiste à représenter une figure ayant $p$ points doubles par $x^p$. L'ensemble des configurations de $n$ arcs est ainsi représenté par un polynôme $T_n(x)$, dans lequel le coefficient de $x^p$ est le nombre de celles qui ont $p$ points doubles. De la même manière, les configurations de $n$ arcs, formant un système unique, sont représentées par un polynôme $S_n(x)$ et celles qui forment un système propre par un polynôme $P_n(x)$. C'est la détermination de $S_n(x)$ qui est la plus directe et je l'obtiens aux §§2, 3, 4 en ne faisant, somme toute, que généraliser les propriétés d'un triangle arithmétique, connu sous le nom de triangle de Delannoy et que je rappelle au §1. De même que les nombres de Delannoy peuvent être engendrés par une fraction continue, de même la fonction génératrice des polynômes $S_n(x)$ est une fraction continue $F(x, z)$ que j'étudie aux §§5, 6 et 7. Je détermine ensuite, aux §§8, 9 et 10, les polynômes $T_n(x)$ et $P_n(x)$, ainsi que certaines valeurs numériques. On verra qu'il y a une belle réciprocité entre les polynômes $P_n(x)$ et $S_n(x)$ et on s'explique mal pourquoi la détermination des systèmes propres paraît si difficile, alors que celle des systèmes propres ou impropres est facile. Le §11 contient quelques identités où figurent certaines fonctions d'un usage courant dans la théorie des

$T_n(x)$
$S_n(x)$
$P_n(x)$

Reçu le 22 Novembre, 1950.

fonctions elliptiques. Dans le §12, j'effectue la connexion entre la méthode de mon précédent article [6] et celle employée ici. Cette vérification était nécessaire, car les calculs de mon article [6] reposaient sur la considération de figures assez nombreuses que je n'avais pas reproduites et qui pouvaient prêter à des erreurs. On ne trouvera pas ici l'expression définitive du nombre des configurations ayant un nombre donné de points doubles; on pourrait sans doute y parvenir mais seulement, croyons-nous, au moyen de formules compliquées et peu maniables. La fraction continue $F(x, z)$ est intéressante en elle-même et elle donne, sur le développement de certaines fractions continues, un résultat général qui fait l'objet du §13. Comme la détermination de la valeur de $F(x, z)$ est loin d'être immédiate, j'avais été amené, au cours de divers essais, à former les dérivées partielles d'une fraction continue par rapport à ses éléments. Bien que celles-ci soient très aisées à obtenir, elles ne figurent, à ma connaissance, dans aucun ouvrage. Les formules que je donne au §14 m'ont paru mériter d'être connues. Le §15 contient des tables numériques.

En suivant Perron [3] et pour gagner de la place, j'ai représenté

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \dots}} \qquad \text{par } b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots$$

et

$$b_0 - \cfrac{a_1}{b_1 - \cfrac{a_2}{b_2 - \dots}} \qquad \text{par } b_0 - \frac{a_1|}{|b_1} - \frac{a_2|}{|b_2} - \dots.$$

1. Le triangle $D^q_p$ de Delannoy [1] est celui-ci

| $p \backslash q$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 2 | | | |
| 3 | 1 | 3 | 5 | 5 | | |
| 4 | 1 | 4 | 9 | 14 | 14 | |
| 5 | 1 | 5 | 14 | 28 | 42 | 42 |

Il est défini par

(1) $$D^q_p = D^q_{p-1} + D^{q-1}_p, \quad D^0_p = 1.$$

On a

$$D^n_n = D^{n-1}_n = D^0_{n-1} + D^1_{n-1} + D^2_{n-1} + \dots + D^{n-1}_{n-1},$$

$$D^q_p = \frac{p-q+1}{p+1}\binom{p+q}{q},$$

(2) $$D^n_n = D^0_0 D^{n-1}_{n-1} + \dots + D^i_i D^{n-i-1}_{n-i-1} + \dots + D^{n-1}_{n-1} D^0_0.$$

Dans tout cet article, $\phi(z)$ désignera la fonction

$$(3)\qquad \phi(z) = \frac{1 - (1 - 4z)^{\frac{1}{2}}}{2z},$$

$$(4)\qquad z\phi^2(z) - \phi(z) + 1 = 0,$$

$$(5)\qquad \phi(z) = D_0^0 + D_1^1 z + \ldots + D_n^n z^n + \ldots,$$

$$(6)\qquad [\phi(z)]^{p+1} = D_p^0 + D_{p+1}^1 z + \ldots + D_{p+n}^n z^n + \ldots,$$

et l'on a, sous forme de fraction continue,

$$(7)\qquad \phi(z) = \frac{1|}{|1} - \frac{z|}{|1} - \frac{z|}{|1} - \frac{z|}{|1} - \ldots.$$

**2.** Pour déterminer $S_n(x)$, nous partirons de la remarque suivante. Lorsqu'on a un système de $n$ arcs, $C_1, C_2, \ldots, C_n$, dont les origines respectives, comptées de gauche à droite, sont $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, si l'on supprime le dernier arc $C_n$, la figure restante est encore un système. Car, s'il restait deux systèmes, ou bien $C_n$ n'en couperait qu'un et la figure primitive comprendrait deux systèmes, ou bien $C_n$ les couperait tous les deux et alors $C_n$ ne serait pas le dernier arc. Un arc, au moins aurait son origine à droite de $\gamma_n$. On peut donc, pour former les systèmes de $n$ arcs, partir des systèmes de $n - 1$ arcs, d'origines $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ et ajouter un $n$ème arc d'origine $\gamma_n$.

Quelles sont les origines des arcs dans un système?

On a évidemment $\gamma_1 = 1$. On a $\gamma_2 = 2$, sans quoi $C_1$ formerait à lui seul un système. On a $\gamma_3 = 3$ ou 4, car si l'on avait $\gamma_3 \geqslant 5$, $C_1$ et $C_2$ formeraient à eux deux au moins un système. En général, $\gamma_k = k, k + 1, k + 2, \ldots$, ou $2k - 2$, car si l'on avait $\gamma_k \geqslant 2k - 1$, les arcs $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$ formeraient à eux seuls au moins un système de $k - 1$ arcs et l'ensemble $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$ formerait au moins deux systèmes. On peut donc dresser des tableaux, que j'appellerai tableaux $\Omega_n$, pour les origines des arcs d'un système de $n$ arcs.

$\Omega_1$: 1 .
$\Omega_2$: 1 2 .
$\Omega_3$: 1 2 3 , 1 2 4 .
$\Omega_4$: 1 2 3 4 , 1 2 3 5 , 1 2 3 6 , 1 2 4 5 , 1 2 4 6 .
$\Omega_5$: 1 2 3 4 5 , 1 2 3 4 6 , 1 2 3 4 7 , 1 2 3 4 8 ,
1 2 3 5 6 , 1 2 3 5 7 , 1 2 3 5 8 , 1 2 3 6 7 , 1 2 3 6 8 ,
1 2 4 5 6 , 1 2 4 5 7 , 1 2 4 5 8 , 1 2 4 6 7 , 1 2 4 6 8 .

Pour former le tableau $\Omega_{n+1}$, on prendra chaque combinaison du tableau $\Omega_n$; soit $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n$ l'une d'elles; à droite de $\gamma_n$ on écrira successivement $\gamma_n + 1$, $\gamma_n + 2, \ldots, 2n - 1, 2n$.

On peut d'ailleurs former directement le tableau $\Omega_n$ par le système d'inégalités

$$(8)\qquad \gamma_1 = 1;\ \gamma_2 = 2;\ \ldots;\ k \leqslant \gamma_k \leqslant 2k - 2;\ \ldots;\ n \leqslant \gamma_n \leqslant 2n - 2;$$
$$\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \ldots < \gamma_n.$$

Voici maintenant la manière d'obtenir les fonctions $S_n(x)$ représentant les configurations de $n$ arcs $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ne formant qu'un seul système. Nous l'exposerons en détail pour essayer d'être parfaitement clair. Nous poserons, dans la suite de cette étude, jusqu'au §12 inclusivement,

$$a_p = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}. \tag{9}$$

Pour un seul arc, on a $S_1(x) = 1 = a_1$. Pour deux arcs, $\gamma_2 = 2$; $C_2$ peut ou non couper $C_1$, ce qui donne le terme $1 + x = a_2$ et

$$S_2(x) = a_1 a_2.$$

Pour trois arcs, $\gamma_3 = 3$ ou 4. Si $\gamma_3 = 3$, $C_3$ peut couper 0, 1 ou 2 des arcs $C_1$ et $C_2$, ce qui donne le facteur $1 + x + x^2 = a_3$. Si $\gamma_3 = 4$, $C_3$ peut couper 0 ou 1 arc, ce qui donne le facteur $1 + x = a_2$, de sorte que

$$S_3(x) = a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_2.$$

On voit que $S_3(x)$ est formé de deux monômes; dans le premier, la dernière lettre à droite est $a_3$, ce qui exprime que $\gamma_3 = 3$; dans le second, la dernière lettre à droite est $a_2$, ce qui exprime que $\gamma_3 = 4$.

Formons encore $S_4(x)$. Si $\gamma_4 = 4$, ce qui ne peut arriver que si $\gamma_3 = 3$, $C_4$ peut couper 0, 1, 2 ou 3 des arcs $C_1, C_2, C_3$, ce qui donne le facteur $1 + x + x^2 + x^3 = a_4$, par lequel il faut multiplier le monôme $a_1 a_2 a_3$. Si $\gamma_4 = 5$, ce qui peut arriver si $\gamma_3 = 3$ ou 4, $C_4$ peut couper 0, 1 ou 2 arcs, ce qui donne le facteur $1 + x + x^2 = a_3$, par lequel il faut multiplier les deux monômes $a_1 a_2 a_3$ et $a_1 a_2 a_2$. Enfin, si $\gamma_4 = 6$, ce qui peut arriver si $\gamma_3 = 3$ ou 4, $C_4$ peut couper 0 ou 1 arc, ce qui donne le facteur $1 + x = a_2$, par lequel il faut multiplier les deux monômes $a_1 a_2 a_3$ et $a_1 a_2 a_2$. On a donc

$$S_4(x) = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3 a_3 + a_1 a_2 a_3 a_2 + a_1 a_2 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_2 a_2.$$

Le fait que la dernière lettre à droite d'un monôme est $a_4$ exprime que $\gamma_4 = 4$; si cette dernière lettre est $a_3$, c'est que $\gamma_4 = 5$; si elle est $a_2$, c'est que $\gamma_4 = 6$.

D'une manière générale, $S_n(x)$ se présente sous la forme d'une somme de monômes homogènes en $a_1, a_2, \ldots, a_n$, que nous désignerons par $R_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ou, plus brièvement, par $R_n(a)$ et nous supposerons que l'on a pris soin de laisser à la droite de chaque monôme la lettre qui a été écrite la dernière, quand on a formé $R_n(a)$, à partir de $R_{n-1}(a)$.

Formons $S_{n+1}(x) = R_{n+1}(a)$ et, pour cela, considérons un monôme quelconque de $R_n(a)$. Supposons que la dernière lettre à droite soit $a_n$. Ce fait exprime que $\gamma_n = n$ et alors $\gamma_{n+1} = n + 1, n + 2, \ldots$ ou $2n$. Si $\gamma_{n+1} = n + q$, l'arc $C_{n+1}$ peut couper $0, 1, 2, \ldots$ ou $n - q + 1$ des arcs $C_1, C_2, \ldots, C_n$, d'où le facteur

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-q+1} = a_{n-q+2}.$$

Ainsi, si $\gamma_n = n$, on devra multiplier le monôme successivement par $a_{n+1}, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_3, a_2$. Supposons de même que la dernière lettre à droite soit $a_{n-r}$; ce fait exprime que $\gamma_n = n + r$ et alors $\gamma_{n+1} = n + r + 1, n + r + 2, \ldots$ ou $2n$, ce qui donne les facteurs $a_{n-r+1}, a_{n-r}, \ldots, a_3, a_2$, par lesquels on devra multiplier successivement le monôme. Nous avons donc établi les deux règles suivantes:

*Première Règle.* Pour former $R_{n+1}(a)$ à partir de $R_n(a)$, on considère tous les monômes de $R_n(a)$. Si un monôme se termine à droite par $a_i$, on le multipliera successivement par $a_{i+1}, a_i, a_{i-1}, \ldots, a_3, a_2$ et on additionnera les résultats.

*Deuxième Règle.* Il existe une correspondance one-one entre les combinaisons des origines du tableau $\Omega_n$ et les monômes de $R_n(a)$. Cette correspondance est la suivante: si la combinaison des origines est $1, 2, \gamma_3, \gamma_4, \ldots, \gamma_n$, les indices des lettres $a_i$ dans le monôme correspondant seront, de gauche à droite,

$$1, 2, 6 - \gamma_3, 8 - \gamma_4, 10 - \gamma_5, \ldots, 2n - \gamma_n.$$

Soit $\gamma'_k = 2k - \gamma_k$ ces indices, $k = 1, 2, \ldots, n$, le système d'inégalités (8) se transforme dans le système

$$\begin{aligned} &\gamma'_1 = 1, \gamma'_2 = 2, \ldots, 2 \leqslant \gamma'_k \leqslant k, \ldots, 2 \leqslant \gamma'_n \leqslant n, \\ &\gamma'_3 \leqslant \gamma'_2 + 1, \ldots, \gamma'_k \leqslant \gamma'_{k-1} + 1, \ldots, \gamma'_n \leqslant \gamma'_{n-1} + 1, \end{aligned} \tag{10}$$

qui permet de former tous les monômes de $R_n(a)$ et, par conséquent, la fonction $R_n(a)$ elle-même. En substituant l'expression (9) de $a_p$, on aura $S_n(x)$ par des calculs qui se compliquent rapidement.

3. On peut donner à ces calculs plus de régularité de la manière suivante. D'après ce qui précède, $R_n(a)$ est une fonction linéaire des dernières lettres écrites à la droite de chaque monôme. On peut donc poser, pour $n \geqslant 2$

$$R_n(a) = C(n, n)a_n + C(n, n-1)a_{n-1} + \ldots + C(n, i)a_i + \ldots + C(n, 2)a_2. \tag{11}$$

En appliquant la première règle du §2, on trouve

$$\begin{aligned} C(n+1, n+1) &= C(n, n)a_n, \\ C(n+1, i) &= C(n, n)a_n + C(n, n-1)a_{n-1} + \ldots + C(n, i)a_i \\ &\quad + C(n, i-1)a_{i-1} \end{aligned} \tag{12}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} C(n+1, n+1) &= C(n, n)a_n \\ C(n+1, n) &= C(n+1, n+1) + C(n, n-1)a_{n-1} \\ \ldots &\qquad \ldots \\ C(n+1, i) &= C(n+1, i+1) + C(n, i-1)a_{i-1}, \end{aligned} \tag{13}$$

on peut donc former un triangle

$$\begin{array}{l} C(2, 2) \\ C(3, 3) \; C(3, 2) \\ \ldots \\ C(n, n) \; C(n, n-1) \ldots C(n, i) \ldots C(n, 2), \end{array}$$

dont la loi de formation est donnée par (13). D'après (13), on voit que $C(n, 2) = C(n, 3)$ et, en faisant dans (12), $i = 3$ et comparant à (11) on a

$$C(n, 2) = C(n, 3) = R_{n-1}(a). \tag{14}$$

Lorsqu'on fait $x = 0$, on a $a_p = 1$ et l'on retombe sur le triangle de Delannoy, à condition de poser, pour $x = 0$,

$$C(n, n - k) = D^k_{n-2}.$$

A l'aide de la relation (13), on peut former des triangles numériques pour les coefficients de $x$, $x^2$, $x^3$, ... dans les polynômes $C(n, k)$. On trouve ainsi que les trois termes de plus faible degré, dans $S_n(x)$, sont

$$D^{n-1}_{n-1} + (n-1)D^{n-1}_{n-1}x + [\tbinom{n}{2}D^{n-1}_{n-1} - D^{n-2}_n]x^2,$$

mais la loi de formation de ces triangles se complique très vite et je n'ai pas poursuivi dans cette voie.

**4.** Une expression indépendante des fonctions $C(n+1, r)$ peut s'obtenir de proche, à l'aide de l'équation (13). D'une façon générale, $C(n+1, r)$ s'exprime par une somme multiple d'ordre $n + 1 - r$, que nous n'écrirons pas, mais nous donnerons, à cause de son importance, l'expression de $C(n+1, 3) = R_n(a)$, par une somme d'ordre $n - 2$, savoir

$$R_n(a) = a_1 a_2 \sum_{i_1=2}^{3} \sum_{i_2=2}^{1+i_1} \sum_{i_3=2}^{1+i_2} \cdots \sum_{i_{n-2}=2}^{1+i_{n-3}} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_{n-2}}. \tag{15}$$

C'est précisément l'expression à laquelle conduit le système d'inégalités (10).

**5.** Il s'agit maintenant de trouver l'analogue de la formule bilinéaire (2), relative aux nombres $D^n_n$. Or, c'est très facile si on se reporte au tableau $\Omega_n$ des origine des arcs et à la deuxième règle du §2. D'après les inégalités (8), il est évident que si l'on considère toutes les combinaisons du tableau $\Omega_n$

$$1\ 2\ \gamma_3\gamma_4 \ldots \gamma_q\gamma_{q+1} \ldots \gamma_n$$

et si on les divise en deux tranches, l'une formée par les $q$ premiers chiffres, l'autre par les $n - q$ suivants, la première tranche comprendra toutes les combinaisons relatives aux $q$ arcs $C_1, C_2, \ldots, C_q$ et la deuxième toutes les combinaisons relatives aux $n - q$ arcs $C_{q+1}, C_{q+2}, \ldots, C_n$. On formera donc le tableau $\Omega_n$ en associant:

| | |
|---|---|
| le tableau pour $C_1$ | avec le tableau pour $C_2, C_3 \ldots C_n$, |
| " " $C_1, C_2$ | " " " $C_3, C_4 \ldots C_n$, |
| " " $C_1, C_2, C_3$ | " " " $C_4, C_5 \ldots C_n$ |

et ainsi de suite.

Grâce à la correspondance entre les combinaisons des tableaux $\Omega_n$ et les monômes de $R_n(a)$, ceci se traduit par la propriété suivante, qu'il suffit d'exposer sur un exemple, en indiquant par un tiret la division en deux tranches .

| | |
|---|---|
| 1 – 2 3 4 | $a_1 - a_2\ a_3\ a_4$ |
| 1 – 2 3 5 | $a_1 - a_2\ a_3\ a_3$ |
| 1 2 – 4 5 | $a_1\ a_2 - a_2\ a_3$ |
| 1 2 3 – 6 | $a_1\ a_2\ a_3 - a_2$ |
| 1 2 4 – 6 | $a_1\ a_2\ a_2 - a_2$ |

où l'on voit, dans la deuxième colonne, que les groupes de lettres placées à

$F(1, z) = G(z)$ Notebook Jan '80 p. 78



droite du tiret sont dans leur ensemble les mêmes qu'à gauche du tiret, mais avec des indices augmentés d'une unité. La démonstration est générale et si nous désignons par $R_n(a, 1)$ la fonction $R_n(a)$, dans laquelle tous les indices des $a_i$ ont été augmentés d'une unité, nous aurons

$$(16) \quad R_n(a) = R_1(a)R_{n-1}(a, 1) + R_2(a)R_{n-2}(a, 1) + \ldots + R_{n-1}(a)R_1(a, 1).$$

Posons

$$(17) \quad F(x, z) = R_1(a) + R_2(a)z + \ldots + R_n(a)z^{n-1} + \ldots,$$

et soit $F_1(x, z)$ la fonction $F$, dans laquelle tous les indices ont été augmentés d'une unité, de sorte que

$$F_1(x, z) = R_1(a, 1) + R_2(a, 1)\, z + \ldots + R_n(a, 1)\, z^{n-1} + \ldots,$$

nous aurons, d'après (16),

$$(18) \qquad zF(x, z)F_1(x, z) - F(x, z) + a_1 = 0.$$

Soit alors $F_k(x, z)$ la fonction $F(x, z)$, où l'on a augmenté tous les indices de $k$ unités, on aura de même

$$(19) \qquad zF_kF_{k+1} - F_k + a_{k+1} = 0$$

et, par suite, sous forme de fraction continue

$$(20) \qquad F(x, z) = \frac{a_1|}{|1} - \frac{a_2z|}{|1} - \frac{a_3z|}{|1} - \frac{a_4z|}{|1} - \ldots,$$

où je rappelle que

$$F(x, z) = S_1(x) + S_2(x)z + \ldots + S_n(x)z^{n-1} + \ldots.$$

Lorsque $|x| < 1$, la série (17) et la fraction continue (20) convergent, [**7**, p. 45] et [**3**, p. 258], pour $4|z| < |1 - x|$. Pour $x = 0$, les équations (17), (18), et (20) se réduisent respectivement aux équations (5), (4), et (7), mais on peut aussi généraliser l'équation (6) à l'aide des polynômes $C(p, q)$ du §3. Soit en effet,

$$y_q(z) = C(q, q) + C(q + 1, q)z + \ldots + C(q + n, q)z^n + \ldots.$$

D'après (14), $y_2(z) = F(x, z)$ et l'on trouvera, à l'aide des formules (13) et (19) que $y_q(z) = FF_1F_2 \ldots F_{q-2}$, qui, pour $x = 0$, $q = p + 2$, se réduit au premier membre de l'équation (6).

Voici une autre remarque. D'après la relation (16), $R_n(a, 1)$ s'exprime algébriquement au moyen de $R_2(a), \ldots, R_{n+1}(a)$ et, inversement, $R_n(a)$ s'exprime algébriquement au moyen de $R_1(a, 1), R_2(a, 1) \ldots R_{n-1}(a, 1)$. Or, si l'on forme les fonctions $R_k(a, 1)$, on verra que $R_{n-1}(a, 1)$ représente les configurations de $n$ arcs $C_1, C_2, \ldots C_n$ ne formant qu'un seul système, mais dont les origines, au lieu de satisfaire aux inégalités (8), sont assujetties au système d'inégalités:

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 3, \ldots, k \leqslant \gamma_k \leqslant 2k - 3, \ldots, n \leqslant \gamma_n \leqslant 2n - 3,$$

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \ldots < \gamma_n.$$

Il y a donc des relations algébriques entre les fonctions représentant ces systèmes particuliers et celles qui représentent les systèmes les plus généraux.

6. Désignons par

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{a_1}{1}, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{a_1}{1 - za_2}, \quad \ldots, \frac{A_n}{B_n}, \ldots$$

les réduites de la fraction continue (20), qui sont des fonctions de $x$ et de $z$. On les obtient à l'aide des formules de récurrence bien connues et le développement en série de Taylor de $A_n/B_n$ coincide avec le développement (17) jusqu'au terme $R_n(a)z^{n-1}$ inclusivement. De plus, lorsque la fraction continue converge, on peut écrire

$$F(x, z) = \frac{A_n}{B_n} + \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} + \frac{A_{n+2}}{B_{n+2}} - \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} + \ldots,$$

ou

$$F(x, z) = \frac{A_n}{B_n} + \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{B_n B_{n+1}} z^n + \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+2}}{B_{n+1} B_{n+2}} z^{n+1} + \ldots. \tag{21}$$

Or, on trouve facilement que

$$\frac{1}{B_n B_{n+1}} = 1 + (2a_2 + 2a_3 + \ldots + 2a_n + a_{n+1})z + z^2 \epsilon(z),$$

$\epsilon(z)$ désignant une série entière qui ne s'évanouit pas avec $z$. En substituant dans (21), on verra que, dans le développement de $A_n/B_n$, le coefficient de $z^n$ est $R_{n+1}(a) - a_1 a_2 \ldots a_{n+1}$ et que le coefficient de $z^{n+1}$ est

$$R_{n+2}(a) - a_1 a_2 \ldots a_{n+2} - a_1 a_2 \ldots a_{n+1}(2a_2 + 2a_3 + \ldots + 2a_n + a_{n+1}).$$

Supposons maintenant que $x$ soit une racine primitive, $x = \rho_k$, de $a_k = 0$, c'est-à-dire de $x^k - 1 = 0$. On a alors

$$F(\rho_k, z) = A_{k-1}(\rho_k, z)/B_{k-1}(\rho_k, z);$$

$F(\rho_k, z)$ est donc une fraction rationnelle en $z$ qu'il est aisé de former pour $k = 2, 3, 4$. On obtient ainsi des relations qui sont précieuses pour vérifier l'exactitude des coefficients qui figurent dans les polynômes $S_n(x)$. On a $F(-1, z) = 1$, donc $S_n(-1) = 0$, $n \geqslant 2$. Puis, $j$ étant une racine cubique complexe de l'unité, on a

$$F(j, z) = \frac{1 - j^2 z + jz^2}{1 + z^3},$$

donc

$$S_n(j) = (-1)^{n-1} j^{2n-2}, \qquad n \geqslant 1.$$

Enfin, pour $i^2 = -1$,

$$F(i, z) = \frac{1 - iz}{1 - (1 + 2i)z},$$

donc, en développant,

$$S_n(i) = (1+i)(1+2i)^{n-2}, \qquad n \geqq 2.$$

7. Reste maintenant à trouver la valeur de la fraction continue (20). On obtient une première indication, lorsque, dans (20), on fait $x = 1$ et qu'on remplace $z$ par $-z$. On a alors formellement

$$F(1, -z) = \frac{1|}{|1} + \frac{2z|}{|1} + \frac{3z|}{|1} + \frac{4z|}{|1} + \cdots.$$

C'est là un cas particulier de la fraction continue de Gauss. On trouve en effet que

$$(22) \qquad 1 + zF(1, -z) = 1/(1 - z + 1\cdot 3z^2 - 1\cdot 3\cdot 5z^3 + 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7z^4 - \ldots),$$

formule qui nous servira plus loin. La divergence de la série au dénominateur est ici sans inconvénient; on peut la remplacer par un nombre limité de termes, suivis d'un reste. Si l'on veut,

$$\boxed{\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{1 + zF(1, -z)} = \int_0^\infty \frac{e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du}{1 + 2zu}}$$

et l'intégrale peut être développée avec un reste. Cela étant, on sait que Heine [2, p. 284] a généralisé la série de Gauss. Il était donc naturel de chercher à utiliser les fractions continues de Heine, mais tout ce que j'ai pu obtenir dans cette voie, c'est une identité intéressante que voici. Soit

reste = remainder, residue

$$X(x, z) = 1 + a_1 z + a_1 a_3 z^2 + a_1 a_3 a_5 z^3 + \ldots$$

$a_p$ ayant sa signification habituelle (9); on a

$$\frac{1}{X(x, z)} = 1 - \frac{a_1 z|}{|1} - \frac{x a_2 z|}{|1} - \frac{x^2 a_3 z|}{|1} - \frac{x^3 a_4 z|}{|1} - \cdots$$

où, sauf un terme constant et un facteur $z$, on reconnaît la fraction continue (20), dans laquelle on aurait remplacé, pour toute valeur de l'indice $i$, $a_i$ par $x^{i-1}a_i$. Si on désigne, d'une façon abrégée, par $R_n(x^{i-1}a_i)$ ce que devient alors le polynôme $R_n(a)$, on aura

$$\frac{1}{X(x, z)} = 1 - R_1(x^{i-1}a_i)z - \ldots - R_n(x^{i-1}a_i)z^n - \ldots$$

d'où l'identité annoncée

$$R_n(x^{i-1}a_i) + a_1 R_{n-1}(x^{i-1}a_i) + a_1 a_3 R_{n-2}(x^{i-1}a_i) + \ldots$$
$$+ a_1 a_3 a_5 \ldots a_{2n-3} R_1(a_i) = a_1 a_3 a_5 \ldots a_{2n-1}.$$

Mais, de cette identité, il ne parait pas facile de déduire l'expression de la fraction continue (20). J'ai donc cherché à déterminer directement des fonctions $Q_n(x, z)$ par le système d'équations aux différences

$$(23) \qquad Q_{n-1} = Q_n + (1 - x^n)zQ_{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Il en résultera, d'après un théorème connu [3, p. 291]

$$\frac{Q_0}{Q_1} = 1 + \frac{(1-x)z|}{|\ 1} + \frac{(1-x^2)z}{|\ 1} + \frac{(1-x^3)z|}{|\ 1} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{Q_0}{Q_1} = 1 + (1-x)zF[x, -(1-x)z]. \tag{24}$$

Je me donne arbitrairement $Q_0 = 1$ et je pose

$$Q_n = f_0(n) + f_1(n)z + \ldots + f_p(n)z^p + \ldots \tag{25}$$

avec $f_0(n) = 1$.

D'après (23), les fonctions $f_p(n)$ doivent satisfaire aux équations

$$f_p(n) - f_p(n-1) = (x^n - 1)f_{p-1}(n+1). \tag{26}$$

Soit

$$\Phi_n^p(x) = x^{\frac{1}{2}p(p+1)}\frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})\ldots(1-x^{n-p+1})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^p)}$$

avec $\Phi_n^0(x) = 1$; et soit encore

$$E(m, q) = \frac{(m-2q)(m-1)(m-2)\ldots(m-q+1)}{q!}, \qquad m > 2q$$

et $E(m, q) = 0$, pour $m \leqslant 2q$ avec $E(m, 0) = 1$. Les nombres $E(m, q)$ satisfont aux relations

$$E(m, 1) = 1 + E(m-1, 1)$$

$$E(m, q) = E(m-1, q-1) + E(m-1, q)$$

et d'autre part, on vérifiera que

$$\Phi_{n+p-1}^p - \Phi_{n+p-2}^{p-1} - \Phi_{n+p-2}^p = (x^n - 1)\Phi_{n+p-1}^{p-1}, \qquad p \geqslant 1. \tag{27}$$

Cela étant, je dis que la fonction

$$f_p(n) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1}E(n+2p, i-1)\Phi_{n+p-i}^{p-i+1} \tag{28}$$

satisfait aux équations (26). Pour le voir, il suffira, dans (28), de remplacer $E(n+2p, i-1)$ par $E(n-1+2p, i-2) + E(n-1+2p, i-1)$ puis, après substitution dans le premier membre de (26), de grouper les termes qui ont le même coefficient numérique $E(k, q)$ et de se servir de la formule (27). La fonction (28) est donc une solution de l'équation aux différences (26) et c'est la seule qui convienne, car toute autre solution ne pourrait en différer que par une fonction $\psi_p(n)$, de période 1, par rapport à la variable $n$, et comme nous avons posé $Q_0 = 1$, il faut, d'après (25) que, sauf pour $p = 0$, nous ayons $f_p(0) = 0$, d'où $\psi_p(n) = \psi_p(0) = 0$.

Faisons maintenant $n = 1$, dans (28), et observons que les nombres $E(m, q)$ ne sont autres que les nombres de Delannoy, dans un autre ordre que dans le triangle du §1, $E(m, i) = D_{m-i-1}^i$, et nous aurons

$$f_0(1) = D_0^0,$$

$$f_1(1) = D_2^0 x - D_1^1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_p(1) = D_{2p}^0 x^{\frac{1}{2}p(p+1)} - D_{2p-1}^1 x^{\frac{1}{2}p(p-1)} + D_{2p-2}^2 x^{\frac{1}{2}(p-1)(p-2)} - \ldots + (-1)^p D_p^p.$$

Substituons ces valeurs dans la formule (25), en y faisant $n = 1$, ordonnons la série obtenue par rapport aux puissances de $x$ et ayons recours à la formule (6), nous aurons

$$(29) \qquad Q_1 = \phi(-z) + xz\phi^3(-z) + \ldots + x^{\frac{1}{2}p(p+1)} z^p \phi^{2p+1}(-z) + \ldots$$

ou, en posant

$$(30) \qquad A(q, u) = 1 + qu + q^3u^2 + \ldots + q^{\frac{1}{2}p(p+1)}u^p + \ldots$$

$$Q_1 = \phi(-z)A[x, z\phi^2(-z)].$$

On a donc finalement, d'après (24), où $Q_0 = 1$,

$$(31) \qquad 1 + (1-x)zF[x, -(1-x)z] = \frac{1}{\phi(-z)} \frac{1}{A[x, z\phi^2(-z)]}$$

ou bien

$$(32) \qquad 1 - (1-x)zF[x, (1-x)z] = \frac{1 - z\phi(z)}{A[x, 1 - \phi(z)]}.$$

On voit que la fonction $A(q, u)$ se rattache aux fonctions $\theta$ de Jacobi, mais ce qui distingue la fraction continue (20) de diverses fractions continues, obtenues autrefois par Heine, Eisenstein [3, p. 315] et Ramanujan [4, p. 215], c'est que dans (30), on a substitué à la variable $u$ une fonction algébrique.

Pour obtenir les fonctions $S_n(x)$, on a, d'après (24) et (25),

$$1 - \sum_1^\infty (-1)^n (1-x)^n S_n(x) = 1 / \sum_0^\infty f_n(1) x^n;$$

on calculera donc les polynômes $f_n(1)$, puis les polynômes

$$g_n(x) = (-1) f_n(1)(1-x)^{-n}$$

et on aura $S_1(x) = g_1(x)$ et, pour $n \geqslant 2$,

$$S_n(x) = g_n(x) - g_{n-1}S_1 - g_{n-2}S_2 - \ldots - g_1 S_{n-1}.$$

Un autre procédé consiste à poser

$$B(q, u) = \{A(q, u)\}^{-1} = 1 + \beta_1(q)u + \ldots + \beta_n(q)u^n + \ldots$$

et il résulte alors de la formule (31), après quelques calculs, que

$$(33) \qquad (1-x)^n S_n(x) = D_{n-1}^{n-1}(1-x) - D_n^{n-2}\beta_2(x) + D_{n+1}^{n-3}\beta_3(x)$$
$$- D_{n+2}^{n-4}\beta_4(x) + \ldots + (-1)^{n-1} D_{2n-2}^0 \beta_n(x).$$

Les polynômes $\beta_n(x)$ sont faciles à calculer. Comme vérification, on doit avoir, pour $n \geqslant 2$, $\beta_n(1) = 0$, $\beta_n(-1) = 2$. Si on les considère comme connus, la formule (33), après multiplication par $(1 - x)^{-n}$, donnera explicitement $S_n(x)$. On trouvera plus loin des tables pour $g_n(x)$, $\beta_n(x)$, $S_n(x)$, et $P_n(x)$.

**8.** Connaissant $S_n(x)$, nous avons maintenant à déterminer les polynômes $T_n(x)$ qui représentent les configurations totales de $n$ arcs et les polynômes $P_n(x)$, qui représentent les configurations formant un système propre. Pour la brièveté, soit $g(y) = g_0 + g_1 y + \ldots + g_n y^n + \ldots$ une série de Taylor quelconque; nous désignerons par $K(y^n, g)$ le coefficient de $y^n$ dans le développement de $g$, c'est-à-dire $g_n$, et nous emploierons aussi un langage abrégé en confondant les configurations avec les fonctions qui les représentent. Cela posé, $T_n(x)$ comprend:

1°, les configurations ne formant qu'un seul système, c'est-à-dire $S_n(x)$; c'est le coefficient $K(z^n, zF)$ de $z^n$ dans $zF(x, z)$.

2°, les configurations formant deux systèmes; c'est $\sum S_p S_q$, $p + q = n$; c'est donc $K(z^n, z^2F^2)$.

3°, les configurations formant trois systèmes; c'est $\sum S_p S_q S_r$, $p + q + r = n$; c'est donc $K(z^n, z^3F^3)$ . . . et ainsi de suite. Donc

$$T_n(x) = K(z^n, zF + z^2F^2 + \ldots + z^nF^n)$$

et on peut prolonger la série indéfiniment, puisque $z^{n+1}F^{n+1}$, $z^{n+2}F^{n+2}$, . . . ne contiennent pas de terme en $z^n$. La somme de cette série est

$$\frac{zF}{1 - zF} = -1 + \frac{1}{1 - zF}$$

donc, en se reportant à la formule (20), $T_n(x)$ est le coefficient de $z^n$ dans le développement de la fraction continue

$$-1 + \frac{1|}{|1} - \frac{a_1 z|}{|1} - \frac{a_2 z|}{|1} - \frac{a_3 z|}{|1} - \ldots.$$

On voit que si, dans la fonction $R_{n+1}(a)$ du §2, on remplace $a_1$ par 1, $a_2$ par $a_1$, $a_i$ par $a_{i-1}$, on obtient $T_n(x)$, donc

$$T_n(x) = R_{n+1}(1, a_1, a_2, \ldots, a_n), \qquad n \geqslant 1.$$

et on aurait l'expression générale de $T_n(x)$ en modifiant de la même façon la formule (15).

**9.** Pour avoir $P_n(x)$, nous remarquerons que tout système de $n$ arcs est formé par un système propre, dont un ou plusieurs arcs recouvrent des configurations quelconques, c'est-à-dire des configurations totales; celles-ci prennent place dans les intervalles entre les pieds des arcs du système propre et, s'il s'agit d'un système propre de $\mu$ arcs, il y aura $2\mu - 1$ intervalles entre les pieds des arcs. Posons tout de suite

$$\chi(x, z) = \sum_1^\infty T_n(x) z^n$$

(34) $$\omega(x, z) = \sum_1^\infty P_n(x) z^n.$$

Nous avons, d'après le §8,

(35) $$\chi(x, z) = \frac{zF(x, z)}{1 - zF(x, z)}$$

et, d'après (17),

(36) $$zF(x, z) = \sum_1^\infty S_n(x) z^n.$$

Nous ferons $S_0(x) = T_0(x) = P_0(x) = 0$.

La fonction $S_n(x)$ comprend:

1°, les systèmes propres de $n$ arcs, $P_n(x)$;

2°, les systèmes propres de $n - 1$ arcs, $P_{n-1}(x)$. Il y a $\binom{2n-3}{1}$ intervalles où peut prendre place successivement une figure $T_1(x)$, d'où le terme

$$P_{n-1}(x)\binom{2n-3}{1}T_1(x),$$

que nous écrirons $P_{n-1}\binom{2n-3}{1}K(z, \chi)$;

3°, les systèmes propres de $n - 2$ arcs, $P_{n-2}(x)$. Il y a $2n - 5$ intervalles; on peut placer une configuration $T_2(x)$ dans un seul intervalle, d'où le terme $\binom{2n-5}{1}P_{n-2}T_2$; ou bien on peut placer deux configurations $T_1(x)$ dans une combinaison de deux intervalles, d'où le terme $\binom{2n-5}{2}P_{n-2}T_1^2$. On voit que ce sont les partitions du nombre 2, savoir $2 = 2$ et $2 = 1 + 1$, qui se manifestent. L'ensemble des deux termes s'écrit

$$P_{n-2}\left[\binom{2n-5}{1}K(z^2, \chi) + \binom{2n-5}{2}K(z^2, \chi^2)\right];$$

4°, les systèmes propres de $n - 3$ arcs, $P_{n-3}(x)$. Il y a $2n - 7$ intervalles, donnant en tout 6 places disponibles pour 3 arcs. Si les 3 arcs sont dans un seul intervalle, ce qui correspond à la partition $3 = 3$, on aura le terme $P_{n-3}\binom{2n-7}{1}T_3$. Si les 3 arcs sont dans deux intervalles, ce qui correspond aux deux partitions, $3 = 1 + 2$ et $3 = 2 + 1$, on aura le terme

$$P_{n-3}\binom{2n-7}{2}(T_1T_2 + T_2T_1).$$

Si les trois arcs sont dans 3 intervalles, ce qui correspond à la partition $3 = 1 + 1 + 1$, on aura le terme $P_{n-3}\binom{2n-7}{3}T_1^3$. L'ensemble des trois termes s'écrit

$$P_{n-3}\left[\binom{2n-7}{1}K(z^3, \chi) + \binom{2n-7}{2}K(z^3, \chi^2) + \binom{2n-7}{3}K(z^3, \chi^3)\right];$$

5°, les systèmes formés de $n - 4$ arcs, $P_{n-4}(x)$; la partition $4 = 4$ donne le terme $P_{n-4}\binom{2n-9}{1}T_4$; les partitions $4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1$ donnent le terme

$$P_{n-4}\binom{2n-9}{2}(T_1T_3 + T_2^2 + T_3T_1);$$

les partitions $4 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1$ donnent le terme

$$P_{n-4}\binom{2n-9}{3}3T_1^2T_2;$$

la partition $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ donne le terme

$$P_{n-4}\binom{2n-9}{4}T_1^4.$$

L'ensemble des 4 termes s'écrit

$$P_{n-4}\left[\binom{2n-9}{1}K(z^4, \chi) + \binom{2n-9}{2}K(z^4, \chi^2) + \binom{2n-9}{3}K(z^4, \chi^3) + \binom{2n-9}{4}K(z^4, \chi^4)\right]$$

et ainsi de suite. On a donc

$$\begin{aligned} S_n = P_n &+ P_{n-1}\left[\binom{2n-3}{1}K(z, \chi)\right] \\ &+ P_{n-2}\left[\binom{2n-5}{1}K(z^2, \chi) + \binom{2n-5}{2}K(z^2, \chi^2)\right] + \dots \end{aligned}$$

Dans chaque crochet, on peut prolonger la série, car il est clair, par exemple, que $K(z^2, \chi^3)$, $K(z^2, \chi^4)$ . . . sont nuls. De plus, on peut, dans chaque crochet, introduire un terme de la forme $K(z^p, \chi^0) = K(z^p, 1)$, qui est nul, pourvu que $p \geqslant 1$. On a donc

$$\begin{aligned} S_n = P_n + P_{n-1}K[z, (1 + \chi)^{2n-3}] + \dots + P_{n-i}K[z^i, (1 + \chi)^{2n-2i-1}] \\ + \dots + P_1K[z^{n-1}, 1 + \chi]. \end{aligned}$$

Le dernier terme est encore exact pour $n = 1$, car il devient $P_1(x)K(1, 1 + \chi) = P_1(x)$, ce qui est exact, puisque $S_1(x) = P_1(x)$. Le premier terme $P_n$ peut s'écrire $P_nK[1, (1 + \chi)^{2n-1}]$ car $K[1, (1 + \chi)^{2n-1}] = 1$ et cette expression est valable pour $n = 1$. Ainsi

$$S_n = P_nK[1, (1 + \chi)^{2n-1}] + \dots + P_1K[z^{n-1}, 1 + \chi]$$

et cette formule est valable, même pour $n = 0$, puisque $P_0 = T_0 = S_0 = 0$.

Maintenant, il est clair que, quelle que soit $g(z)$,

$$K[z^p, g(z)] = K[z^{p+q}, z^q g(z)];$$

on peut donc écrire

$$\begin{aligned} S_n = P_nK[z^n, z^n(1 + \chi)^{2n-1}] + P_{n-1}K[z^n, z^{n-1}(1 + \chi)^{2n-3}] \\ + \dots + P_1K[z^n, z(1 + \chi)] \end{aligned}$$

et ceci exprime que $S_n(x)$ est le coefficient de $z^n$ dans le développement de

$$P_1z(1 + \chi) + P_2z^2(1 + \chi)^3 + \dots + P_nz^n(1 + \chi)^{2n-1}.$$

On peut prolonger cette série indéfiniment, car, au-delà de $P_nz^n(1 + \chi)^{2n-1}$, les termes qui viendront ne contiennent plus $z^n$. Nous avons donc, d'après (34),

$$\sum_1^\infty S_n(x)z^n = \frac{1}{1+\chi}\,\omega[x, z(1 + \chi)^2],$$

et, d'après (35) et (36),

$$(37)\qquad [1 - zF(x, z)]\omega\left[x, \frac{z}{[1 - zF(x, z)]^2}\right] = zF(x, z).$$

Telle est l'équation qui relie la fonction génératrice $\omega(x, z)$ des systèmes propres à la fonction génératrice $zF(x, z)$ des systèmes propres ou impropres.

Définissons une variable $u$ par l'équation

$$(38)\qquad z - u[1 - zF(x, z)]^2 = 0,$$

cette équation a une racine $\zeta(x, u)$, que l'on peut développer par la série de Lagrange. D'après les valeurs de $S_n(x)$, données au §15, on a

$$\zeta = u - 2u^2 - (2x - 3)u^3 - (2x^3 + 6x^2 - 6x + 4)u^4 - \dots$$

et il résulte de (37) que

$$(39)\qquad \omega(x, u) = \frac{\zeta F(x, \zeta)}{1 - \zeta F(x, \zeta)}.$$

On vérifiera cette formule en faisant $x = 0$. Le seul système propre qui ait zéro point double est représenté par $P_1(x) = 1$, d'où $P_1(0) = 1$, et on doit avoir $\omega(0, u) = u$. Or $F(0, z) = \phi(z)$ et l'équation (38) donne simplement $\zeta = u/(1 + u)^2$. Alors $\zeta F(0, \zeta) = u/(1 + u)$ et, d'après (39), $\omega(0, u) = u$.

On peut donner une forme remarquable aux équations (38) et (39). Posons

$$(40)\qquad \psi(x, u) = -uF(x, u) = -\sum_1^\infty S_n(x)u^n.$$

Rappelons aussi que

$$(41)\qquad \omega(x, u) = \sum_1^\infty P_n(x)u^n.$$

Alors

$$(42)\qquad \left\{\begin{array}{l} \omega(x, u) = -\dfrac{\psi(x, \zeta)}{1 + \psi(x, \zeta)} \\ \text{où } \zeta \text{ est la racine, s'annulant avec } u, \text{ de l'équation} \\ \zeta - u[1 + \psi(x, \zeta)]^2 = 0 \end{array}\right.$$

et inversement

$$(43)\qquad \left\{\begin{array}{l} \psi(x, u) = -\dfrac{\omega(x, \zeta)}{1 + \omega(x, \zeta)} \\ \text{où } \zeta \text{ est la racine, s'annulant avec } u, \text{ de l'équation} \\ \zeta - u[1 + \omega(x, \zeta)]^2 = 0. \end{array}\right.$$

La fonction $\psi(x, u)$ se déduit de $\omega(x, u)$ par une certaine opération, que définissent les équations (43) et, inversement, d'après (42), si l'on applique la même opération à la fonction $\psi(x, u)$, on retombe sur $\omega(x, u)$. Les fonctions $\psi$ et $\omega$ sont réciproques par rapport à cette opération.

Voici ce qui en résulte pour les polynômes $P_n(x)$ et $S_n(x)$. Considérons une fonction s'annultant avec $z$

$$C(z) = C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_n z^n + \dots$$

la racine, s'annulant avec $u$, de l'équation

$$\zeta - u[1 + C(\zeta)]^2 = 0$$

est, en poussant le calcul jusqu'au terme de degré 5,

$$\zeta = u + 2C_1 u^2 + (5C_1^2 + 2C_2)u^3 + (10C_1^3 + 4C_1^3 + 14C_1C_2 + 2C_3)u^4$$
$$+ (20C_1^6 + 22C_1^4 + 72C_1^2C_2 + 18C_1C_3 + 9C_2^2 + 2C_4)u^5 + \dots$$

et on trouve ensuite

$$\frac{C(\zeta)}{1 + C(\zeta)} = G_1(C_1)u + G_2(C_1, C_2)u^2 + \dots + G_n(C_1, C_2, \dots, C_n)u^n + \dots,$$

$G_n(C_1, C_2, \dots, C_n)$ étant un polynôme en $C_1, C_2, \dots, C_n$.

$$G_1 = C_1$$
$$G_2 = C_1^2 + C_2$$
$$G_3 = 2C_1^3 + 4C_1C_2 + C_3$$
$$G_4 = 10C_1^6 - 5C_1^4 + 15C_1^2C_2 + 6C_1C_3 + 3C_2^2 + C_4$$
$$G_5 = 14C_1^5 + 20C_1^3C_2 + 36C_1^3C_2 + 28C_1^2C_3 + 28C_1C_2^2 + 8C_1C_4 + 8C_2C_3 + C_5.$$

Faisons d'abord $C_n = -S_n(x)$, puis $C_n = P_n(x)$ et reportons-nous aux formules (40) et (41), nous aurons les formules réciproques

$$P_n(x) = -G_n(-S_1, -S_2, \dots, -S_n),$$
$$S_n(x) = G_n(P_1, P_2, \dots, P_n),$$

que j'ai vérifiées jusqu'à $n = 4$. La réciprocité serait encore mieux mise en évidence si l'on posait $-S_n(x) = S'_n(x)$.

**10.** Le nombre des configurations de $n$ arcs qui forment un système unique est $S_n(1)$. On obtient, à l'aide de (22), la récurrence

$$S_n(1) = p_{2n} - p_{2n-2}S_1(1) - p_{2n-4}S_2(1) - p_{2n-6}S_3(1) - \dots - S_{n-1}(1),$$

où $p_{2n} = 1.3.5.\dots.(2n-1)$. Le nombre des configurations qui forment un système propre est $P_n(1)$. Il s'agit donc d'avoir $\omega(1, u)$. Au lieu de la formule (39), on emploiera la formule

$$\omega(x, u) = uF(x, \zeta) - u\zeta F^2(x, \zeta),$$

qui, d'après (38), lui est équivalente. On a

$$F(1, z) = 1 + 2z + 10z^2 + 74z^3 + 706z^4 + 8162z^5 + 109960z^6 + \dots;$$ 698

la racine $\zeta$ de l'équation (38), pour $x = 1$, est

$$\zeta = u - 2u^2 + u^3 - 6u^4 - 34u^5 - 356u^6 + \dots,$$

et on a ensuite

$$\omega(1, u) = u + u^2 + 4u^3 + 27u^4 + 248u^5 + 2830u^6 + 37782u^7 + \ldots$$

On calculera beaucoup plus facilement la valeur de $P_n(-1)$, car $F(-1, z) = 1$ et l'équation (38) se réduit à $\zeta - u(1-\zeta)^2 = 0$; la racine qui s'annule avec $u$ est

$$\zeta = \frac{1 + 2u - (1+4u)^{\frac{1}{2}}}{2u};$$

on a ensuite, d'après (39),

$$\omega(-1, u) = u\phi(-u) = D_0^0 u - D_1^1 u^2 + D_2^2 u^3 - \ldots,$$

donc $P_n(-1) = (-1)^{n-1} D_{n-1}^{n-1}$. Soit $N_p(n)$ et $N_i(n)$ les nombres des systèmes propres de $n$ arcs, qui ont respectivement un nombre pair et un nombre impair de points doubles, on a

$$N_p(n) - N_i(n) = (-1)^{n-1} D_{n-1}^{n-1},$$

et $D_{n-1}^{n-1}$ est le nombre des configurations de $n$ arcs, sans points doubles.

**11.** On obtient de la manière suivante des formules qui paraissent intéressantes. Récrivons l'équation (31) ou (32) sous la forme

$$(44) \qquad 1 - \zeta F(x, \zeta) = \frac{1}{\phi(\frac{\zeta}{1-x})} \, \frac{1}{A[x, 1 - \phi(\frac{\zeta}{1-x})]}.$$

On donnera à $\zeta$ une valeur telle que le second membre de (44) prenne une forme simple. On aura une première identité en développant en série le premier membre par la formule (36). Substituons ensuite cette valeur de $\zeta$ dans l'équation (38); on en déduira la valeur de $u$, puis l'expression de $\omega(x, u)$, par la formule (39) ou par la formule plus simple

$$(45) \qquad \omega(x, u) = \left(\frac{u}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} - 1,$$

qui lui est équivalente et où la détermination du radical est celle qui se réduit à $+1$, pour $u = 0$, puisque $\omega(x, 0) = 0$. D'où une deuxième identité en développant le premier membre de (45) par la formule (34). On devra faire bien attention de prendre, pour la fonction algébrique $\phi(z)$, La détermination (3), holomorphe à l'origine et que, à la fin de ce paragraphe, j'appellerai $\phi_1(z)$, et non pas la détermination conjuguée $\phi_2(z)$, infinie à l'origine, seconde racine de l'équation (4). De sorte que, dans l'équation (44), on ne peut pas donner n'importe quelle valeur à

$$\phi(\frac{\zeta}{1-x}).$$

Soit $\zeta = \frac{1-x}{4}$, d'où $\phi(\frac{\zeta}{1-x}) = 2$. D'après (44),

$$(46) \qquad 1 - \frac{1-x}{4} F\left(x, \frac{1-x}{4}\right) = \frac{1}{2\lambda(x)},$$

où

$$\lambda(x) = 1 - x + x^3 - x^6 + x^{10} - x^{15} + \dots .$$

D'après (38), $u = (1-x)\lambda^2(x)$ et, d'après (45),
$\omega(x, u) = 2\lambda(x) - 1$, d'où les identités

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n(x)\left(\frac{1-x}{4}\right)^n = 1 - \frac{1}{2\lambda(x)}, \tag{47}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)(1-x)^n\lambda^{2n}(x) = 2\lambda(x) - 1. \tag{48}$$

Soit $\zeta = -\dfrac{x}{1-x}$, $\phi\left(\dfrac{\zeta}{1-x}\right) = 1 - x$ et soit

$$\mu(x) = 1 + x^2 + x^5 + x^9 + x^{14} + x^{20} + \dots$$

on aura de même

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n S_n(x)\frac{x^n}{(1-x)^n} = 1 - \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{\mu(x)}, \tag{49}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n P_n(x) x^n (1-x)^n \mu^{2n}(x) = (1-x)\mu(x) - 1. \tag{50}$$

Dans (38), (44) et (45), changeons $x$ en $x^2$ et on verra d'une manière analogue qu'en posant

$$\zeta_2 = -x^2/(1-x^2),\ \zeta_3 = -x(1+x)/(1-x),\ \zeta_4 = x(1-x)/(1+x)$$

on a

$$2x^{1/4} + \frac{2x^{9/4}}{1-x^2}\,\frac{1}{1-\zeta_2 F(x^2, \zeta_2)} = \theta_2(0), \tag{51}$$

$$1 + \frac{2x}{1-x}\,\frac{1}{1-\zeta_3 F(x^2, \zeta_3)} = \theta_3(0), \tag{52}$$

$$1 - \frac{2x}{1+x}\,\frac{1}{1-\zeta_4 F(x^2, \zeta_4)} = \theta_4(0), \tag{53}$$

où

$$\theta_2(0) = 2x^{1/4} + 2x^{9/4} + 2x^{25/4} + \dots,$$

$$\theta_3(0) = 1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \dots,$$

$$\theta_4(0) = 1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \dots,$$

et l'on aura des formules correspondantes pour $\omega(x^2, u)$. Des formules ci-dessus on tire des fractions continues plus ou moins simples, par exemple

$$2\lambda(x) = \frac{1|}{|1} - \frac{1-x|}{|4} - \frac{1-x^2|}{|1} - \frac{1-x^3|}{|4} - \frac{1-x^4|}{|1} - \frac{1-x^5|}{|4} - \dots .$$

Supposons pour simplifier $x$ réel et positif, $0 < x < 1$. La série $F(x, z)$ converge absolument sur tout son cercle de convergence $|z| = \frac{1}{4}(1-x)$. La série $\omega(x, u)$

converge certainement pour $4|u| < 1 - x$, car les systèmes propres ne forment qu'une partie des systèmes propres et impropres et $P_n(x) < S_n(x)$. Je ne suis pas actuellement en mesure d'indiquer quel est le rayon de convergence de $\omega(x, u)$. Sauf pour $x = 0$, ce rayon de convergence est fini, car, à l'aide des formules que j'ai données, dans mon article [6], pour le nombre des systèmes propres de $p$ arcs, ayant $p - 1$ ou $p$ points doubles, on peut démontrer que la série $\omega(x, u)$ est divergente pour $|u| > 4/(27x)$. Il résulte de cela que la série (47) converge pour $0 \leqslant x \leqslant 1$; la série (49) pour $0 \leqslant x \leqslant 3 - 2\sqrt{2} = 0{,}1716$; la série $F(x^2, \zeta_2)$ pour $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} - 1 = 0{,}4142$; la série $F(x^2, \zeta_3)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 3 - 2\sqrt{2}$; la série $F(x^2, \zeta_4)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$. La série (50) et les séries $\omega(x^2, u)$ correspondant aux valeurs $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ convergent pour des valeurs suffisamment petites de $x$, car les expressions correspondantes de $u$ contiennent $x$ ou $x^2$ en facteur. Mais la convergence de la série (48) reste actuellement douteuse, car $\lambda(x)$ est supérieure à $\frac{1}{2}$ et la condition $4(1 - x)\lambda^2(x) \leqslant 1 - x$ n'est pas remplie.

Considérons maintenant, et en supposant toujours $0 < x < 1$, la fonction $F(x, z)$, prise dans toute sa généralité. D'après (44), c'est une fonction à deux branches, l'une $\Phi_1(x, z)$ donnée par la détermination $\phi_1(z)$ de $\phi(z)$; c'est celle que, jusqu'ici, nous avons constamment appelée $F(x, z)$; l'autre, $\Phi_2(x, z)$ donnée par la détermination $\phi_2(z)$ de $\phi(z)$. On peut définir sans ambiguité $\phi_1(z)$ et $\phi_2(z)$ dans tout le plan $z$ et par suite aussi $\Phi_1(x, z)$ et $\Phi_2(x, z)$, par les équations

$$\frac{1}{1 - z\Phi_1(x, z)} = \phi_1\left(\frac{z}{1 - x}\right) A\left[x, 1 - \phi_1\left(\frac{z}{1 - x}\right)\right],$$
$$\frac{1}{1 - z\Phi_2(x, z)} = \phi_2\left(\frac{z}{1 - x}\right) A\left[x, 1 - \phi_2\left(\frac{z}{1 - x}\right)\right].$$

Or,

$$\phi_1(z)\phi_2(z) = 1/z, \quad 1 - \phi_2(z) = 1/[1 - \phi_1(z)]$$

et, d'autre part,

$$(54) \qquad A(x, v) + \frac{1}{v} A\left(x, \frac{1}{v}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{\frac{1}{2}n(n+1)}(v^n + v^{-n-1}) = \rho(x, v),$$

où

$$\rho(x, v) = \left(1 + \frac{1}{v}\right) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)(1 + x^n v)(1 + x^n v^{-1})$$

est une fonction $\theta$ proprement dite. Dans (54), faisons $v = 1 - \phi_1\left(\frac{z}{1 - x}\right)$ et multiplions par $\phi_1\left(\frac{z}{1 - x}\right)$ et nous obtiendrons, après un calcul simple,

$$(55) \qquad \frac{1}{1 - z\Phi_1(x, z)} - \frac{1}{1 - z\Phi_2(x, z)} = \phi_1\left(\frac{z}{1 - x}\right) \rho\left[x, 1 - \phi_1\left(\frac{z}{1 - x}\right)\right].$$

C'est la formule que nous voulions établir. Soit alors $1 - \phi_1\left(\frac{z}{1 - x}\right) = -x^p$, on en tire

$$z = \frac{x^p(1-x)}{(1+x^p)^2}, \qquad p = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{56}$$

et cette expression ne change pas quand on change $p$ en $-p$. Le second membre de (55) s'annule pour toutes ces valeurs de $z$ et s'annule aussi pour $z = \infty$. La fonction générale $F(x, z)$ admet donc non seulement les points doubles $z = \frac{1}{4}(1-x)$ et $z = \infty$, qui sont les points de ramification de $\phi\left(\frac{z}{1-x}\right)$, mais un nombre quelconque fini de points doubles donnés par (56), pour $p = 1, 2, 3, \ldots$ et qui ont $z = 0$ comme point limite, point essentiel de $\Phi_2(x, z)$.

**12.** Le lecteur est maintenant prié de se reporter à mon article [6]. Les symboles et formules appartenant à cet article seront suivis de l'indication [6]. Je me propose de montrer que l'équation [6, (13)]. n'est autre chose que l'équation

$$\omega[x, z[1 + \chi(x, z)]^2] = \chi(x, z) \tag{57}$$

qui se déduit de (37) en éliminant $F(x, z)$, à l'aide de (35).

D'abord $U_{2n}(p)$ est le nombre des configurations de $n$ arcs qui ont $p$ points doubles [6]; c'est donc le coefficient de $u^p$ dans $T_n(u)$, c'est-à-dire le résidu à l'origine, au sens de Cauchy, de $T_n(u)/u^{p+1}$. Il y a exception pour $n = 0$, $p = 0$, car nous avons posé $U_0(0) = 1$, tandis que $T_0(u) = 0$. Donc, d'après [6, (5)], $f_p(x)$ est, pour $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$, le résidu à l'origine de

$$[1 + T_1(u)x^2 + T_2(u)x^4 + \ldots]/u^{p+1}:$$

$$f_p(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1 + \chi(u, x^2)}{u^{p+1}}\,du,$$

$\gamma$ étant un petit cercle qui entoure l'origine.

D'après [6, (9)], et en supposant $|z^2| < |u|$, pour être autorisé à sommer, nous avons ensuite

$$y(x, z) = \frac{xz}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1 + \chi(u, x^2)}{u - z^2}\,du.$$

Mais la fonction $\chi(u, x^2)$ est holomorphe au voisinage de l'origine et, d'autre part, puisque $|z^2| < |u|$, le cercle $\gamma$ contient le point $z^2$. On a donc simplement, d'après l'intégrale de Cauchy,

$$y(x, z) = xz[1 + \chi(z^2, x^2)]. \tag{58}$$

De même, $\sigma_{2n}(p + n - 1)$ est le nombre des systèmes propres de $n$ arcs ayant $p + n - 1$ points doubles [6]; c'est donc le coefficient de $u^{p+n-1}$ dans $P_n(u)$ et, d'après [6, (7)], $g_p(y)$ est le résidu à l'origine de $\omega\left(u, \frac{y^2}{u}\right)/u^p$. Ensuite, d'après [6, (8)], et en supposant $|z^2| < |u|$,

$$G(y, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma u\omega\left(u, \frac{y^2}{u}\right)\frac{du}{u - z^2} \tag{59}$$

Mais il est facile de voir que la fonction $u\omega(u, y^2/u)$ est holomorphe à l'origine. En effet,

$$P_n(u) = \sigma_{2n}(0) + \sigma_{2n}(1)u + \ldots + \sigma_{2n}(p)u^p + \ldots,$$

et il n'existe pas de système propre de $n$ arcs, si $p < n - 1$. Donc le polynôme $P_n(u)$ est divisible par $u^{n-1}$ et

$$u\omega\left(u, \frac{y^2}{u}\right) = P_1(u)y^2 + \ldots + \frac{P_n(u)}{u^{n-1}} y^{2n} + \ldots$$

est régulière pour $u = 0$. La formule (59) se réduit donc à

$$G(y, z) = z^2\omega(z^2, y^2/z^2). \tag{60}$$

En portant les expressions (58) et (60) dans l'équation [6, (13)], que je récris

$$zy = xz^2 + xG(y, z)$$

et en divisant par $xz$ , on obtient

$$\chi(z^2, x^2) = \omega\{z^2, x^2[1 + \chi(z^2, x^2)]^2\},$$

et il suffit de remplacer $z$ par $x^{1/2}$ et $x$ par $z^{1/2}$ pour obtenir l'équation (57).

Resterait à obtenir les équations algébriques auxquelles satisfont les fonctions $g_p(y)$ ce que nous n'avons pas fait [6]. J'ai remarqué à ce sujet que, d'après [6, (14)] et [6, (15)], les équations satisfaites par $g_0(y)$ et $g_1(y)$ sont les équations de deux cubiques unicursales. On vérifiera en effet que, $t$ désignant un paramètre,

$$y = t - t^3,$$
$$g_0(y) = t^2 - t^4,$$
$$g_1(y) = -\frac{t^4(t^2 + 1)}{3t^2 - 1}.$$

**13.** Si l'on se reporte au §5, on voit que la fraction continue qui figure au second membre de (20) résulte de la relation (16) et celle-ci est une conséquence des deux règles du §2, qui nous ont permis de former les polynômes $R_n(a)$. Ce résultat subsiste évidemment quelle que soit la signification qu'on donne aux lettres $a_1, a_2, a_3, \ldots.$ Nous avons donc obtenu, sous forme entièrement explicite et sans avoir recours à la formation de ses réduites, le développement en série

$$\frac{a_1 z|}{|1} + \frac{a_2 z|}{|1} + \frac{a_3 z|}{|1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} R_n(a) z^n$$

d'une fraction continue quelconque du type indiqué. Les polynômes $R_n(a)$ sont donnés par la formule (15). Si on avait à développer la fraction continue

$$G(z) = b_0 + \frac{a_1 z|}{|b_1} + \frac{a_2 z|}{|b_2} + \ldots,$$

on l'écrirait

$$\frac{G(z)}{b_0} = 1 + \frac{a_1 z/b_0 b_1|}{|1} + \frac{a_2 z/b_1 b_2|}{|1} + \frac{a_3 z/b_2 b_3|}{|1} + \ldots,$$

et l'on aurait

$$G(z)/b_0 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} R_n(a, b) z^n,$$

où $R_n(a, b)$ désigne la fonction $R_n(a)$ dans laquelle on a remplacé $a_i$ par $a_i/b_{i-1}b_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ et l'on modifierait en conséquence la formule (15).

14. Soit

$$M = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots$$

une fraction continue quelconque et soit $R_k = A_k/B_k$ la $k$ème réduite ou fraction convergente, $R_0 = b_0$, $R_1 = (b_0 b_1 + a_1)/b_1, \ldots$. Le symbole $R_k$ n'a plus ici aucun rapport avec la fonction (15) des sections précédentes. En se servant de la formule élémentaire qui donne l'expression de $M$ au moyen d'un quotient complet, en y remplaçant $a_k$ par $a_k + x$, $b_k$ par $b_k + y$ et en développant en série, on trouve

$$(-1)^{(m+n)k} \cdot \frac{(a_1 a_2 \ldots a_k)^{m+n}}{(m+n-1)!} \frac{\partial^{m+n} M}{\partial a_k^m \partial b_k^n}$$
$$= (B_{k-2})^{m-1} (B_{k-1})^{n-1} (B_{k-1} M - A_{k-1})^{m+n}$$
$$\cdot [(m+n) B_{k-1} B_{k-2} M - m A_{k-2} B_{k-1} - n A_{k-1} B_{k-2}].$$

En particulier

$$\frac{1}{p!} (R_{k-1} - R_{k-2})^p a_k^p \frac{\partial^p M}{\partial a_k^p} = (M - R_{k-1})^p (M - R_{k-2}), \qquad p \geqslant 1,$$
$$\frac{1}{p!} (R_{k-1} - R_{k-2})^p a_k^p \frac{\partial^p M}{\partial b_k^p} = (B_{k-1})^p (B_{k-2})^{-p} (M - R_{k-1})^{p+1}, \qquad p \geqslant 1.$$

D'autre part, on a aussi

$$M/b_0 = 1 + \frac{a_1/b_0 b_1|}{|1} + \frac{a_2/b_1 b_2|}{|1} + \frac{a_3/b_2 b_3|}{|1} + \ldots$$

et, en considérant $(b_0 b_1)$, $(b_1 b_2)$, $(b_2 b_3), \ldots$ comme des variables indépendantes, on trouvera par un procédé analogue

$$\frac{(-1)^p}{p!} (R_{k-1} - R_{k-2})^p (b_{k-1} b_k)^p \frac{\partial^p M}{\partial (b_{k-1} b_k)^p}$$
$$= (B_{k-2})^p (M - R_{k-1})(M - R_{k-2})^p.$$

En comparant ces diverses formules, on arrive à des équations aux dérivées partielles qui peuvent, à vrai dire, s'obtenir directement et dont nous ne citerons que celles-ci,

$$a_k \left( \frac{\partial M}{\partial a_k} \right)^2 + \frac{\partial M}{\partial b_{k-1}} \frac{\partial M}{\partial b_k} = 0,$$
$$a_k \frac{\partial M}{\partial a_k} \frac{\partial^2 M}{\partial a_k \partial b_k} = \frac{\partial M}{\partial b_k} \left[ \frac{\partial M}{\partial a_k} + a_k \frac{\partial^2 M}{\partial a_k^2} \right].$$

Inversement, certaines relations différentielles, faciles à établir, peuvent conduire, à l'aide des formules ci-dessus, à des identités dont nous citerons la suivante

$$(B_kM - A_k)(B_{k-1}M - A_{k-1}) - a_{k-1}a_k(B_{k-2}M - A_{k-2})(B_{k-3}M - A_{k-3})$$
$$= a_kb_{k-1}(B_{k-2}M - A_{k-2})^2 + b_k(B_{k-1}M - A_{k-1})^2,$$

vérifiée quel que soit $M$ et qui, fort probablement, est déjà connue.

$S_n(x)$

$S_1 = 1$
$S_2 = 1 + x$
$S_3 = 2 + 4x + 3x^2 + x^3$
$S_4 = 5 + 15x + 21x^2 + 18x^3 + 10x^4 + 4x^5 + x^6$
$S_5 = 14 + 56x + 112x^2 + 148x^3 + 143x^4 + 109x^5 + 68x^6 + 35x^7 + 15x^8 + 5x^9 + x^{10}$
$S_6 = 42 + 210x + 540x^2 + 945x^3 + 1255x^4 + 1353x^5 + 1236x^6 + 984x^7 + 696x^8 + 441x^9 + 250x^{10} + 126x^{11} + 56x^{12} + 21x^{13} + 6x^{14} + x^{15}$

$P_n(x)$

$P_1 = 1$
$P_2 = x$
$P_3 = x^3 + 3x^2$
$P_4 = x^6 + 4x^5 + 10x^4 + 12x^3$
$P_5 = x^{10} + 5x^9 + 15x^8 + 35x^7 + 60x^6 + 77x^5 + 55x^4$

$g_n(x)$

$g_1 = 1$
$g_2 = x + 2$
$g_3 = x^3 + 3x^2 + 6x + 5$
$g_4 = x^6 + 4x^5 + 10x^4 + 20x^3 + 28x^2 + 28x + 14$
$g_5 = x^{10} + 5x^9 + 15x^8 + 35x^7 + 70x^6 + 117x^5 + 165x^4 + 195x^3 + 180x^2 + 120x + 42$
$g_6 = x^{15} + 6x^{14} + 21x^{13} + 56x^{12} + 126x^{11} + 252x^{10} + 451x^9 + 726x^8 + 1056x^7 + 1386x^6 + 1617x^5 + 1650x^4 + 1430x^3 + 990x^2 + 495x + 132$

$$\beta_n(q)$$

$$\beta_1 = -q$$
$$\beta_2 = q^2 - q^3$$
$$\beta_3 = -q^3 + 2q^4 - q^6$$
$$\beta_4 = q^4 - 3q^5 + q^6 + 2q^7 - q^{10}$$

$$\beta_5 = -q^5 + 4q^6 - 3q^7 - 3q^8 + 2q^9 + 2q^{11} - q^{15}$$
$$\beta_6 = q^6 - 5q^7 + 6q^8 + 3q^9 - 6q^{10} - 2q^{12} + 2q^{13} + 2q^{16} - q^{21}$$
$$\beta_7 = -q^7 + 6q^8 - 10q^9 - q^{10} + 12q^{11} - 3q^{12} + q^{13} - 6q^{14} + 2q^{16} - 3q^{17} + 2q^{18} + 2q^{22} - q^{28}$$
$$\beta_8 = q^8 - 7q^9 + 15q^{10} - 4q^{11} - 19q^{12} + 12q^{13} + q^{14} + 9q^{15} - 3q^{16} - 6q^{17} + 4q^{18} - 6q^{19} + q^{20} + 2q^{21} - 3q^{23} + 2q^{24} + 2q^{29} - q^{36}.$$

$$S_n(1)$$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_n(1)$ | 1 | 2 | 10 | 74 | 706 | 8162 | ~~109960~~ 110410 |

698

$$P_n(1)$$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_n(1)$ | 1 | 1 | 4 | 27 | 248 | 2830 | 37782 |

699


BIBLIOGRAPHIE

1. A. Errera, *Un problème d'énumération*, Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, tome 11 (Bruxelles, 1931).
2. E. Heine, *Handbuch der Kugelfunktionen*, 2e éd., tome 1 (Berlin, 1878).
3. O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, 2e éd. (Leipzig et Berlin, 1929).
4. S. Ramanujan, *Collected papers* (Cambridge, 1927).
5. J. Touchard, *Sur un problème de configurations*, C. R. de l'Académie des Sciences (Paris), juin 1950.
6. J. Touchard, *Contributions à l'étude du problème des timbres-poste*, Can. J. Math., tome 2 (1950), 385-398.
7. H. S. Wall, *Analytic theory of continued fractions* (New-York, 1948).


*Lausanne, Suisse*