→ 170
2560
– 2568

[SL1]

Please enter
page
2560 21
2561 41
2562 47
2563-8 49

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COIMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC.
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris
Professeur à l'Université de Strasbourg

FASCICULE XVIII

Les Réseaux (ou graphes)

PAR M. A. SAINTE-LAGUË
Professeur au Lycée Carnot.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1926

classe est au moins p, si $n = 2m$ est pair, et au moins $p+1$ si $n = 2m+1$ est impair. Dans un grand nombre de cas, la classe prend bien sa valeur minimum. Il en est ainsi, par exemple, si $n = 2m+1$, cas où $p = 2q$ est pair, et si, en outre, les éléments (a), (b), ... sont des polygones. De même encore, si les plus grands communs diviseurs α, β, ... de a et n, b et n, ... sont premiers entre eux deux à deux et de produit n [90]. Si $n = 2m$, la classe a sa valeur minimum lorsque, par exemple, les divers éléments sont formés de polygones ayant un nombre pair de côtés, même si l'un deux comprend les m diamètres. La classe a encore cette propriété si $n \leqq 14$. Peut-être en est-il de même pour tous les réseaux polygonaux!

29. L'étude du *rang* est des plus difficiles. Nous signalerons simplement quelques propriétés données par Sainte-Laguë [90].

Un réseau polygonal d'ordre impair, supérieur à 5, et formé de deux éléments est tripartie ou tétrapartie.

Un réseau polygonal d'ordre pair et formé de deux éléments est bipartie, tripartie ou tétrapartie.

Et enfin, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau polygonal d'ordre n composé des éléments* (a), (b), ... *soit bipartie est que n soit pair et a, b, ... impairs.*

30. La *puissance* d'un réseau polygonal d'ordre n, de degré p ne peut être inférieure à $2(p-1)$ que si l'on peut séparer p sommets formant un *noyau* (8). Elle est alors égale à p, comme ceci a lieu pour le réseau d'ordre 10 et de degré 5 formé des trois éléments : (2), (4), (5).

Les *dimensions* (8) d'un réseau polygonal sont les mêmes pour tous les sommets. Il existe des réseaux polygonaux *associables* (8) et même *semi-complets*. Le plus simple est le réseau d'ordre 13 composé des trois éléments : (1), (3), (4).

31. **Réseaux polygonaux homéomorphes.** — Traçons un heptagone régulier et les diagonales qui sous-tendent chacune deux septièmes de circonférence (*fig.* 4). Numérotons les sommets de ce réseau en suivant le polygone étoilé intérieur, puis dessinons à côté un réseau homéomorphe dont les sommets seront numérotés dans l'ordre

New Seq

, et au moins $p+1$ si
ombre de cas, la classe
ainsi, par exemple, si
n outre, les éléments (a),
e, si les plus grands com-
. sont premiers entre eux
la classe a sa valeur mini-
ents sont formés de poly-
e si l'un deux comprend
priété si $n \leq 14$. Peut-être
gonaux!

iciles. Nous signalerons
ar Sainte-Laguë [90].

supérieur à 5, *et formé*
rtie.
forn   *e deux éléments*

isante pour qu'un réseau
ents (a), (b), ... *soit*
pairs.

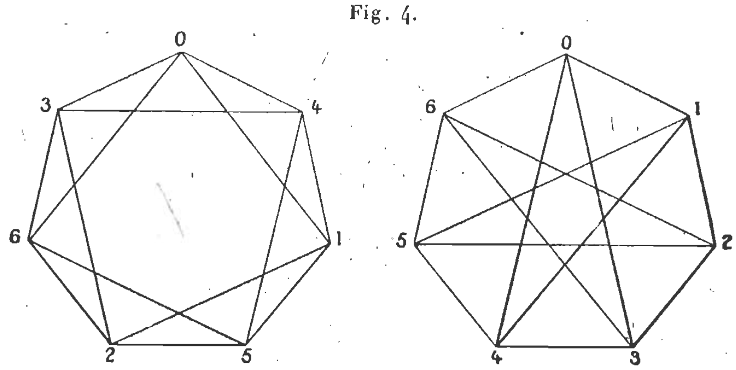
d'ordre n, de degré p ne
peut séparer p sommets
à p, comme ceci a lieu
rmé des trois éléments :

l sont les mêmes pour tous
onaux *associables* (8) et
réseau d'ordre 13 composé

. — Traçons un heptagone
chacune deux septièmes de
mmets de ce réseau en sui-
ssinons à côté un réseau
numérotés dans l'ordre

naturel. On voit que ces deux réseaux polygonaux d'aspects différents sont cependant au fond identiques (4). On dit que l'on a une *correspondance régulière* entre les deux réseaux; mais il existe des *correspondances irrégulières*.

Fig. 4.



Si l'on se propose, comme l'a fait Sainte-Laguë [90], de chercher le nombre des réseaux polygonaux distincts ayant n sommets, il faudra étudier les correspondances régulières et irrégulières. Nous nous bornerons ici au premier cas.

Un problème préliminaire à résoudre est le suivant : *étant donné un cercle partagé en parties égales, quel est le nombre des polygones convexes, distincts, ayant leurs sommets pris parmi ces m points de divisions?* Deux de ces polygones, appelés *polygones* (T), sont distincts si l'on ne peut passer de l'un à l'autre par une rotation de k fois un $m^{\text{ième}}$ de circonférence. Le cas des polygones (T) à un ou deux sommets n'est pas exclu.

32. Une seconde étude, également préliminaire, est celle des *semi-congruences* : on appelle nombres *semi-congrus* par rapport à un module n donné, deux nombres a et b tels que, soit leur somme, soit leur différence, soit congrue à n au sens arithmétique du mot. Ceci se représente par

$$a \equiv b \qquad (\text{mod } n).$$

On dit qu'un nombre r *appartient au semi-exposant* q, si q est le plus petit exposant pour lequel r^q est semi-congru à 1. La valeur minimum de q est m en désignant, avec Gauss, par $2m = \varphi(n)$ le nombre des entiers non supérieurs à n et premiers avec lui. Si $q = m$, r est une *racine semi-primitive* de n.

Voici les résultats essentiels de l'étude des semi-congruences :

La condition nécessaire et suffisante pour que toute solution de l'une des congruences ou semi-congruences $x^2 \equiv 1$ et $x \equiv 1$ soit solution de l'autre est que leur module commun soit semi-premier, c'est-à-dire de la forme a^α ou $2.a^\alpha$, a étant un nombre premier.

Le semi-exposant q auquel appartient r, premier avec n, est un diviseur de m.

Si r appartient au semi-exposant q, il en est de même de r^ρ, si ρ est premier avec q.

Il y a 0 ou $\varphi(m)$ racines semi-primitives de module n.

Toutes les racines semi-primitives de n se déduisent de l'une d'elles r en prenant tous les nombres r^ρ pour lesquels ρ est inférieur à m et premier avec lui.

Si r appartient au semi-exposant q et d'autre part à l'exposant q', on a $q' = q$ ou $q' = 2q$.

Si n est semi-premier, toute racine primitive de n est racine semi-primitive de n.

$n = 3^\alpha$ admet 2 comme racine semi-primitive et $n = 2^\alpha$ admet 3. Si a est premier impair, $n = a^\alpha$ admet 2 comme racine semi-primitive $(\alpha > 1)$, à condition que $2^{\alpha-1} - 1$ ne soit pas divisible par α^2. D'ailleurs jusqu'à 2000, seul $a = 1093$ donne une telle divisibilité [86, 87, 89].

Si r est racine semi-primitive de nn', c'est aussi une racine semi-primitive de n.

$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, avec au moins trois facteurs premiers impairs différents, n'a pas de racine semi-primitive. Il en est de même de $n = 2^\theta \alpha^\alpha b^\beta$, avec $\theta > 1$, ou, si $\theta = 1$, à condition que a et b soient multiples de 4 plus 1.

$n = 4.a^\alpha$ ou $n = 3.a^\alpha$ admet des racines semi-primitives, mais $n = 8.a^\alpha$ n'en admet pas.

n étant impair, si l'un des nombres n, $2n$ a des racines semi-primitives, il en est de même de l'autre.

33. Pour utiliser les résultats qui précèdent, prenons (28) un réseau polygonal (R), d'ordre n, composé de p *éléments* (a), (b), ... Considérons les entiers α, β, ... inférieurs à m [avec $2m = \varphi(n)$],

New seq

définis par
$$r^\alpha \equiv a, \qquad r^\beta \equiv b, \qquad \ldots \qquad (\text{mod } n),$$
et traçons d'autre part un cercle divisé en m parties égales, cercle sur lequel nous prendrons les points numérotés α, β, ... comme sommets d'un polygone (T) (31). Si maintenant on forme un réseau (R') homéomorphe à (R), en numérotant les sommets de w en w, avec $w \equiv r^\omega$, le nouveau polygone (T') aura pour sommets les points $\alpha+\omega$, $\beta+\omega$, ... et se déduira de (T) par une rotation de ω fois le $m^{\text{ième}}$ de la circonférence. Le nombre, que l'on sait évaluer, des polygones (T) est le nombre même des réseaux ne se correspondant pas entre eux à l'aide d'un numérotage de w en w.

La question est immédiatement résolue si n a une racine semi-primitive r, car tout entier w est de la forme r^ω. Elle est plus complexe si n n'a pas de racine semi-primitive, mais il est encore facile de compter le nombre $N = f(n)$ de ces réseaux polygonaux distincts. On a ainsi les résultats qui suivent :

n.....	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
N.....	1	1	4	2	7	5	15	6	37	13	36	32	37	34	73	58

n.....	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
N.....	183	150	262	186	1009	420	707	703	760	1180	4639

2560

X

34. Réseaux primitifs. — Se plaçant à un point de vue entièrement différent, Petersen [34] étudie les *graphes ou réseaux primitifs*.

L'étude des invariants des formes binaires a conduit Hilbert [88], à étudier des produits tels que
$$(x_1 - x_2)^\alpha (x_1 - x_3)^\beta (x_2 - x_3)^\gamma \ldots (x_{n-1} - x_n)^\varepsilon,$$
Le degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant le même pour chaque lettre, et certains des exposants pouvant être nuls. Les solutions primitives des équations diophantines correspondent aux facteurs primitifs de ces produits qui sont définis de façon analogue. C'est ainsi que
$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$
est un facteur primitif. Petersen représente chaque lettre x_p par un point, chaque terme $x_p - x_q$ ou $(x_p - x_q)^\alpha$ par 1 ou α chemins joignant les points x_p et x_q. Le problème de la recherche des facteurs primitifs s'énonce comme suit : *un réseau* (R) *régulier, fini et simple, avec ou sans chemins multiples étant donné, est-il*

New Seq

entourés d'un rond et le cycle de 4 qui donne un polygone à 8 côtés tracé en pointillé.

On vérifiera que A, *son inverse, sa complémentaire et sa réciproque ont les mêmes cycles. Une permutation est auto-réciproque si elle n'admet que des cycles de* 1 *ou* 2 *et réciproquement.*

A un schéma tel que celui de la figure (*fig.* 11), on peut associer un nouveau réseau (ρ), en traçant un cercle divisé en 7 parties égales. Le cycle 1 — 1 donne le sommet 1 avec une boucle ; de même pour 2 — 2 et 7 — 7; le cycle 4 — 3 — 6 — 5 donne le quadrilatère de sommets 4, 3, 6, 5. Ces schémas sont quasi-identiques à ceux que va donner le problème suivant.

62. **Problème des timbres-poste.** — On trouve dans Lucas [142] l'énoncé suivant : *de combien de manières peut-on replier sur un seul une bande de n timbres-poste ?* Malgré sa grande simplicité apparente, cette question est restée insoluble.

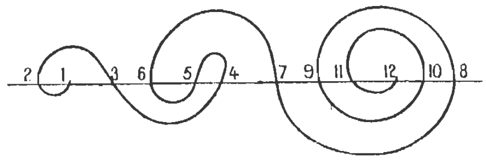
Si, avant de les replier, on numérote les timbres : 1, 2, ..., n, la bande pliée donnera, de dessus en dessous, une certaine permutation. Il faut distinguer les *permutations possibles* des *permutations impossibles*.

Comme le propose Sainte-Laguë [151], représentons par un point d'une droite chaque timbre de la bande, et par un demi-cercle, ou un contour analogue au point de vue de l'*Analysis situs*, la charnière qui rejoint chaque timbre au suivant. Nous associons ainsi à une permutation possible, telle que

$$2 - 1 - 3 - 6 - 5 - 4 - 7 - 9 - 11 - 12 - 10 - 8,$$

un schéma tel que celui de la figure (*fig.* 12). On obtient ainsi une

Fig. 12.



courbe qui, si l'on place alternativement les demi-cercles de part et d'autre, n'a aucun point double. La réciproque est évidente.

Nous nous bornerons à indiquer les propriétés que voici : *si une permutation* A *est possible, toute permutation circulaire de* A *est possible.* Ce théorème est fondamental, car il met en évidence le seul groupe simple que l'on puisse former avec de telles permutations. Il permet de supposer que toute permutation commence par 1. *Si* A *est possible, la permutation inverse et la permutation complémentaire de* A *le sont aussi.* Pour simplifier ce qui suit, convenons maintenant de numéroter les points de la droite (*fig.* 12) dans l'ordre habituel, puis lisons-les dans l'ordre où ils sont rencontrés par la courbe. On a de nouvelles permutations telles que ici :

$$2-1-3-6-5-4-7-12-8-11-9-10,$$

et les énoncés suivants : *le nombre des permutations possibles commençant par* 1, p *est égal à celui des permutations commençant par* 1, $n+2-p$, ce que l'on peut écrire, avec des notations évidentes :

$$K_n^p = K_n^{n+2-p}.$$

Le nombre des permutations possibles commençant par 1, 2 *est égal au nombre total des permutations possibles commençant par* 1 *et ayant un élément de moins*, ou encore :

$$K_n^2 = K_n^n = K_{n-1},$$

en posant

$$K_n = K_n^2 + K_n^3 + \ldots + K_n^n.$$

Si n est pair, il n'y a pas de permutation possible commençant par 1, *et suivie d'un nombre impair*, ce qui s'écrit

$$K_{2p}^{2q+1} = 0.$$

Il est facile d'avoir des familles de permutations toujours possibles, par exemple en prenant de façon quelconque des entiers croissants, puis, arrivé à n, recopiant en décroissant tous les entiers restants. On peut aussi, de bien des façons, déduire une permutation possible d'une autre. Si, par exemple, une permutation se termine par

$$\ldots,\quad n-2q,\quad n-2q+2,\quad \ldots,$$
$$n-2,\quad n,\quad n-1,\quad n-3,\quad \ldots,\quad n-2q+1,$$

on peut remplacer ces termes par

$$\ldots,\quad n-2q,\quad n-2q+1,\quad n-2q+3,\quad \ldots,$$
$$n+3,\quad n-1,\quad n,\quad n-2,\quad n-4,\quad \ldots,\quad n-2q+2.$$

Si, entre p et $p+1$, se trouvent des entiers $r, s, \ldots, u$ tels que la liste

$$\ldots,\ p,\ r,\ s,\ \ldots,\ u,\ p+1,\ q+1,\ \ldots$$

comprenne de r à u tous les entiers de $p+2$ à q, on pourra remplacer cette liste par

$$\ldots,\ p,\ p+1,\ u,\ \ldots,\ s,\ r,\ q+1,\ \ldots.$$

Disons encore que *si une permutation est possible, elle ne peut pas convenir au problème des n reines non en prise sur un échiquier de n^2 cases* (72).

63. On peut donner diverses formules de récurrence. Soit, par exemple, I_n le nombre des permutations impossibles et ω_p le nombre des dispositions de p timbres dans lesquelles l'impossibilité provient uniquement du dernier timbre. On établira les formules suivantes :

$$I_n = 5.6\ldots(n-1)\,\omega_4 + 6.7\ldots(n-1)\,\omega_5 + \ldots + (n-1)\,\omega_{n-2} + \omega_{n-1},$$
$$I_n - n\,I_{n-1} = \omega_n.$$

Les premières valeurs de $N = f(n)$, nombre de permutations possibles de n timbres, sont données par le tableau

n.......	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.......	1	2	6	16	50	144	448	7472	17676	41600

2561

Pour terminer ceci, considérons une des moitiés du schéma (*fig.* 12) en prenant les demi-cercles supérieurs. En refermant sur elle-même la droite qui sert de base, on est ramené à considérer un cercle et des cordes ne se recoupant pas. On retrouve ainsi, à quelques restrictions près, un réseau bicubique (40), mis sous une forme que l'on rencontre assez souvent dans les questions de Géométrie de situation.

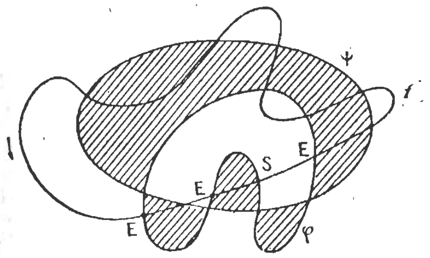
64. **Courbes.** — Aux questions qui précèdent se rattachent divers problèmes de Géométrie de situation. Beaucoup concernent les figures formées par un fil posé sur un plan, sans nœuds, et avec seulement des points doubles apparents [127, 128]. On a, par exemple, l'énoncé suivant [152] : *si une courbe, sans points d'arrêts, n'a que des points doubles, on peut, à chaque croisement, marquer un + et*

un — sur chacun des deux traits qui y passent, de telle façon que, si l'on suit la courbe, on rencontre alternativement un + et un —.

Citons encore ici la théorie des *caractéristiques* due à Kroncker [139] et que nous allons résumer d'après Weber [153].

Sur toute courbe fermée, sans point double, nous appellerons *sens positif* un sens tel que, par exemple, l'intérieur de la courbe soit à main gauche. Prenons deux courbes φ et ψ et désignons par le mot d'*enclos* la portion intérieure à l'une des deux courbes et extérieure à l'autre. Un *point d'entrée* sera un point par lequel, en allant dans le sens positif sur φ, on pénètre à l'intérieur de ψ. On définira de même un *point de sortie*. Ajoutons maintenant une troisième courbe f (*fig.* 13). Associons au sens positif sur f, φ et ψ le cycle

Fig. 13.



$f, \varphi, \psi, f, \varphi, \psi, f, \ldots$, ou en abrégé f, φ, ψ et au sens négatif le cycle inverse f, ψ, φ. Nous appellerons, pour le cycle f, φ, ψ point d'entrée chacun des e points d'entrée E de f dans l'enclos φ, ψ, à condition qu'il soit sur φ et non sur ψ. De même les s points de sortie S seront sur φ et non sur ψ. Il y a, ici, trois points E et un S. La *caractéristique* k du système de courbes f, φ est la moitié de la différence $e - s$. Ici, $k = 1$.

Si l'on désigne par $k(f, \varphi, \psi)$ ce nombre, on établit qu'il n'y a qu'une seule valeur de k pour un cycle f, φ, ψ.

65. **Tresses.** — Considérons n droites $1, 2, \ldots, n$ tracées dans le plan, et telles que deux ne soient jamais parallèles ni trois concourantes [150]. Coupons-les par une *transversale* variable Δ qui se déplace parallèlement à elle-même, donnant ainsi diverses permutations. A chaque passage par un point commun à deux droites, on

vérifiera que le nombre des *inversions* varie de 1, ce qui permet l'étude des propriétés des inversions de permutations [127].

On généraliserait facilement ceci en considérant une *tresse* [150], formée non plus de droites, mais de courbes quelconques, coupées par une transversale ou une courbe analogue du point de vue de l'*Analysis situs*.

braid?

VIII. — ÉCHIQUIER.

66. **Échiquier.** — Les points du plan à coordonnées entières forment un réseau que l'on peut considérer comme un *échiquier* indéfini. Un grand nombre de questions de Géométrie de situation se ramènent immédiatement à l'étude de tels réseaux. Comme elles sont souvent insolubles dans le cas général, on se borne habituellement à des échiquiers de n^2 *cases*, ce qui introduit les bords de l'échiquier.

C'est ainsi que, sous le nom de *carrés ou échiquiers anallagmatiques* [185, 187, 195], Sylvester [197] considère des carrés à cases blanches ou noires, dans lesquels, pour deux lignes ou deux colonnes quelconques, le nombre des *variations* de couleurs est toujours égal au nombre de *permanences*. Leur étude est analogue à celle des formules de décomposition d'un produit de sommes de 4, 8, 16, ... carrés en sommes de 4, 8, 16, ... carrés [178].

67. Un grand nombre de liaisons conventionnelles entre les sommets ou cases d'un échiquier sont précisément représentées par les *pièces* du jeu d'échec, ce qui introduit une terminologie classique.

Le *roi* peut aller d'une case m, n à l'une des 8 cases $m, n \pm 1$; $m \pm 1, n$ ou $m \pm 1$, $n \pm 1$. Il parcourt à chaque *pas* un des chemins d'un réseau régulier de degré 8.

La *tour* va de m, n à m, p ou p, n. Elle utilise les chemins d'un réseau régulier de degré 4.

Le *fou* va de m, n à $m \pm p$, $n \pm p$. Si l'on considère m, n comme *case paire* ou *blanche*, ou bien comme *case impaire* ou *noire*, suivant que m et n sont ou non de même parité, on constate que le fou se déplace sur des cases de même parité. En faisant tourner l'échiquier de 45°, on voit que le déplacement du fou est identique à celui de la tour. On considère parfois le *demi-fou* [196] qui va de m, n à $m \pm p$, $n \pm p$, les doubles signes étant les mêmes, ou étant inverses.

La *reine* admet à la fois les déplacements de la tour et ceux du fou. Elle utilise les chemins d'un réseau de degré 8 Une *demi-reine* admet les déplacements de la tour et ceux du demi-fou [196].

Le *cavalier* va de m, n à $m \pm 1$, $n \pm 2$ ou $m \pm 2$, $n \pm 1$. A chaque *saut* il parcourt l'un des chemins d'un réseau régulier de degré 8. Une *amazone* a les déplacements de la reine et du cavalier [196].

On considère parfois un échiquier indéfini comme résultant de la juxtaposition d'échiquiers à n^2 cases. Toute case de coordonnées $\alpha n + p$, $\beta n + q$ est alors remplacée par p, q, *case congrue* (module n), dans l'un quelconque des échiquiers à n^2 cases, en général dans celui pour lequel p et q vont de 0 à $n - 1$. Avec cette convention, une reine placée sur la case p, q peut atteindre, ou *commande* une quelconque des cases d'abscisse p ou d'ordonnée q et en outre des cases qui, ramenées aux cases congrues de l'échiquier primitif, y occupent, en général, outre les parallèles primitives aux diagonales, des segments de deux autres parallèles. Une *grande reine* est une reine qui commande simultanément toutes ces cases de l'échiquier de n^2 cases [196].

68. D'après Lucas [186], le nombre des sauts distincts que peut faire le cavalier sur un échiquier rectangulaire de pq cases est : $8pq - 12p - 12q + 16$. S'il peut aller de la case m, n à $m \pm r$, $n \pm s$ ou à $m \pm s$, $n \pm r$, ce résultat devient $8pq - 4(p+q)(r+s) + 8rs$, nombre à diviser par 2 si l'un des nombres r, s, $r - s$ est nul.

Les déplacements des autres pièces peuvent se ramener à ceux des cavaliers, ce qui donne pour le nombre des pas du roi :

$$8pq - 6p - 6q + 4.$$

Sur un échiquier de n^2 cases, ce nombre devient $4(2n-1)(n-1)$.

Le nombre des déplacements de la tour est $2n^2(n-1)$; celui des deux fous, pris ensemble, $\frac{1}{3} 2n(n-1)(2n-1)$; celui de la reine, $\frac{1}{3} 2n(n-1)(5n-1)$.

69. **Problèmes de tours.** — Les dispositions de n tours non *en prise* deux à deux sont données par des permutations, question déjà étudiée et sur laquelle nous reviendrons (71). Plus généralement pour un échiquier de pq cases, Lucas [186] établit la formule sui-

placements de la tour et ceux du
éseau de degré 8 Une *demi-reine*
et ceux du demi-fou [196].
$n \pm 2$ ou $m \pm 2$, $n \pm 1$. A chaque
d'un réseau régulier de degré 8.
le la reine et du cavalier [196].
er indéfini comme résultant de la
ises. Toute case de coordonnées
par p, q, *case congrue* (module n),
s à n^2 cases, en général dans celui
-1. Avec cette convention, une
teindre, ou *commande* une quel-
'ordonnée q et en outre des cases
le l'échiquier primitif, y occupent,
imitives aux diagonales, des seg-
Une *grande reine* est une reine
utes ces cases de l'échiquier de

ibre des sauts distincts que peut
rectangulaire de pq cases est :
ller de la case m, n à $m \pm r$, $n \pm s$
nt $8pq - 4(p+q)(r+s) + 8rs$,
ombres r, s, $r-s$ est nul.
es peuvent se ramener à ceux des
nbre des pas du roi :

$-6q+4$.

mbre devient $4(2n-1)(n-1)$.
la tour est $2n^2(n-1)$; celui des
$-1)(2n-1)$; celui de la reine,

dispositions de n tours non *en*
par des permutations, question
iendrons (71). Plus généralement
ucas [186] établit la formule sui-

vante, dans laquelle E_r est le nombre de solutions pour r tours :

$$rE_r = (p-r+1)(q-r+1)E_{r-1},$$

d'où l'on déduit

$$E_r = r!\,C_p^r C_q^r.$$

Partageons maintenant l'échiquier en deux parties et soit T_r^s le nombre de façons de placer r tours non en prise, telles que s soient sur le premier échiquier partiel et $r-s$ sur le second. On a les deux formules :

$$E_r = T_r^0 + T_r^1 + T_r^2 + \ldots + T_r^r$$

et

$$(p-r)(q-r)T_r^{s-1} = (r-s+2)T_{r+1}^{s-1} + sT_{r+1}^s.$$

On en déduit que pour l'échiquier de 64 cases, les nombres f_r de façons de placer r fous de même couleur sont donnés par

r..........	1	2	3	4	5	6	7
f_r.........	32	356	1704	3532	2816	632	16

le nombre F_n des façons suivant lesquelles on peut placer n fous blancs ou noirs, non en prise sur l'échiquier de n^2 cases, est donné par

$$F_n = f_n + f_1 f_{n-1} + f_2 f_{n-2} + \ldots + f_{n-1} f_1 + f_n,$$

ce qui d'après Perott [192], pour $n=8$, donne 22522960 solutions.

70. Lucas [186] cherche le nombre Q_n des dispositions où aucune tour n'est sur une diagonale fixée, ce qui donne le nombre des permutations dont aucun élément n'est à son rang naturel. On a la formule

$$Q_n = (n-1)(Q_{n-1} + Q_{n-2}),$$

d'où l'on déduira

$$Q_n = nQ_{n-1} + (-1)^n,$$

et par suite

$$\frac{Q_n}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

On retrouve ceci à partir de $P_n = n!$, nombre des permutations de n éléments, qui peut s'écrire :

$$P_n = Q_n + C_n^1 Q_{n-1} + C_n^2 Q_{n-2} + \ldots + C_n^p Q_{n-p} + \ldots + Q_0,$$

$Q_n - 1$, $Q_n - 2$, ... correspondant aux permutations avec 1, 2, ...

ours sur la diagonale considérée. Ceci peut s'écrire symbolique-
nent, d'après Neuberg [190],

$$P^{(n)} = (Q + 1)^{(n)}.$$

Ces règles du calcul symbolique s'appliquant aux dérivées, la formule
le Taylor donne

$$(P + x)^{(n)} = (Q + 1 + x)^{(n)},$$

qui est vraie quel que soit x, d'où en particulier pour $x = -1$:

$$Q^{(n)} = (P - 1)^{(n)}.$$

71. Pour les D_n dispositions de n tours symétriques par rap-
port à une diagonale, ce qui correspond aux permutations *auto-
réciproques* (60), on trouve que

$$D_n = D_{n-1} + (n-1) D_{n-2},$$

d'où

$$D_n = 1 - \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.4.6} + \ldots$$

Pour les B_n dispositions symétriques par rapport aux deux diago-
nales, on a

$$B_{2n-1} = B_{2n} \quad \text{et} \quad B_{2n} = 2B_{2n-2} + (2n-2) B_{2n-4},$$

ce qui permettrait le calcul des termes B.

Le nombre T_n des dispositions symétriques par rapport à une dia-
gonale, sans qu'aucune tour soit sur cette diagonale, est donné par

$$T_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad T_{2n} = (2n-1) T_{2n-2} = 1.3.5\ldots(2n-1),$$

ce qui conduit aux formules symboliques :

$$D^{(n)} = (T+1)^{(n)} \quad \text{ou} \quad T^{(n)} = (D-1)^{(n)}.$$

Si S_n est le nombre des dispositions symétriques par rapport au
centre et pour lesquelles aucune tour n'est sur une diagonale, on a

$$S_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad S_{2n} = (2n-1) S_{2n-2} + (2n-2) S_{2n-4},$$

ce qui, en désignant par G_n le nombre des permutations symétriques

par rapport au centre de l'échiquier, donne

$$G_{2n+1} = G_{2n}, \qquad G^{(2n)} = (S^2 + 1)^{(n)}, \qquad G_{2n} = 2^n . n! = 2^n P_n,$$

ou encore

$$S^{(2n)} = (G^2 - 1)^{(n)} = (2P - 1)^{(n)} = 2^n n! - \frac{n}{1!} 2^{n-1} (n-1)! + \ldots + (-1)^n.$$

72. **Problèmes de reines.** — L'un des plus célèbres parmi les problèmes de reines est celui « des huit reines », cas particulier du suivant : *de combien de manières peut-on placer sur un échiquier de n^2 cases n reines qui deux à deux ne soient pas en prise ?* [156, 184, 194].

Toute solution d'un tel problème peut se représenter par une permutation et l'on voit que *si une permutation est possible, il en est de même de la permutation inverse*, ou *complémentaire*, ou *réciproque*, mais non en général des permutations additives ou circulaires. Chaque *solution-type* donne ainsi naissance, à cause des symétries, et, suivant les cas, à 8, 4 ou 2 solutions distinctes.

Des études empiriques ont donné la liste des solutions pour les premières valeurs de n et l'on a ainsi le tableau suivant [156] :

n.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Solutions-type non symétriques				1	1							4
Solutions-type avec une symétrie						1	2	1	4	3	12	18
Solutions-type avec deux symétries					1		4	11	42	89	329	1744
Nombre total de solutions-type	1	0	0	1	2	1	6	12	46	92	341	1766
Nombre total de solutions	1	0	0	2	10	4	40	92	352	724	2680	14032

2562 X
170 /

On a établi que, à partir de $n = 3$, le problème des n reines a toujours au moins une solution [156], qui peut s'écrire pour n multiple de 6 plus 0 ou 4 :

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ n,\ 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ n-1,$$

et pour n multiple de 6 plus 2 :

$$4,\ n-2,\ n-4,\ \ldots,\ 8,\ 6,\ n,\ 2,\ n-1,\ 1,\ n-5,\ n-7,\ \ldots,\ 3,\ n-3.$$

Le cas de n impair s'en déduira facilement.

73. On a cherché à placer n *grandes reines* (67), non en prise,
r un échiquier de n^2 cases [193]. On obtient des dispositions
métriques qui conduisent à des *carrés magiques*. Deux de ces
spositions peuvent donner naissance à une troisième, si l'on en fait
produit. C'est ainsi que les dispositions suivantes sur deux échi-
iers, de 7^2 et 5^2 cases :

$$1-5-2-6-3-7-4 \quad \text{et} \quad 3-1-4-2-5,$$

nnent comme produit pour 35^2 cases :

$$-1-4-2-5-23-21-24-22-25-8-6-9-7-10-28-26$$
$$-29-27-30-13-11-14-12-15-33-31-34-32-35$$
$$-18-16-19-17-20,$$

e qui, si l'on construit les trois schémas, explique suffisamment le
ens du mot *produit*.

Le nombre de façons de placer p reines non en prise deux à deux
ur un échiquier à n^2 cases, est, pour $p=2$ [189] :

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(3n-1)$$

t, pour $p=3$ [181, 191, 199] :

$$\frac{1}{12}(n-1)(n-3)(2n^4-12n^3+25n^2-14n+1).$$

Est-il possible de placer, sur un échiquier de 64 cases, 16 reines de
açon que, sur chaque ligne, colonne ou parallèle à une diagonale,
une reine ne soit en prise qu'avec une autre au plus ? Ceci suppose
qu'il y ait 2 reines par ligne et par colonne et conduit à des permuta-
tions doubles telles que la suivante qui donne une solution du pro-
blème [155] :

5	4	2	1	2	1	3	4
8	6	6	7	3	7	5	8

Le schéma suivant donne le nombre maximum de reines, qui
est 11, telles que chaque reine soit en prise avec 2 autres et seule-
ment avec 2 [155] (la dernière colonne ne contient aucune reine) :

1	3	7	3	1	5	2
8	6			7		4

Disons enfin que, sur un échiquier de 49 cases [156], on peut

placer 49 reines de 7 couleurs différentes, les 7 reines d'une même couleur n'étant pas en prise 2 à 2. Si A, B, C, D, E, F, G sont dans l'ordre les couleurs des 7 reines de la première ligne, celles des suivantes s'en déduiront par la permutation circulaire qu'indiquent les couleurs de la première colonne : A, C, E, G, B, D, F.

74. *Quel est le nombre minimum p de reines qui commandent les n^2 cases d'un échiquier?* [154]. — Il y a, ici, trois hypothèses distinctes : a, les p reines considérées deux à deux peuvent ou non être en prise ; b, chacune des p reines est en prise avec au moins une autre ; c, aucune des p reines n'est en prise avec une autre.

Il y a intérêt, comme pour le problème des n reines (72), à chercher d'abord des *solutions-type* qui à l'aide de symétries donnent toutes les autres. Nous nous bornerons à donner, pour chacun des trois cas a, b, c, le tableau récapitulatif que voici [154] :

	n.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	
	p.............	1	1	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	
a.	Solutions-type..	1	1	1	3	37	1	13	638	?	?	1 (?)	?	2563
	Nombre total...	1	4	1	12	186	4	86	4860	?	?	2 (?)	?	2564
	p.............	0	2	2	2	3	4	4	5	5	?	6 (?)	?	
b.	Solutions-type..	~~0~~	2	5	3	15	140 (?)	5	56	?	?	?	?	2565
	Nombre total...	~~0~~	6	20	42	70	900 (?)	22	352	?	?	?	?	2566
	p.............	1	1	1	3	3	4	4	5	5	5	5	?	
c.	Solutions-type..	1	1	1	2	2	17	1	91	?	?	1 (?)	?	2567
	Nombre total...	1	4	1	16	16	120	8	728	?	?	2 (?)	?	2568

Signalons encore les résultats suivants : avec 7 reines groupées dans un carré central de 5^2 cases, on peut commander les 13^2 cases d'un échiquier ; avec 9 reines groupées dans un carré central de 7^2 cases on peut commander les 17^2 cases d'un échiquier, etc.

75. **Problèmes de cavaliers.** — On s'est posé au sujet des cavaliers des questions analogues à celles qui précèdent et en particulier on s'est demandé combien il fallait placer de cavaliers sur un échiquier pour commander toutes les cases [155].

D'autre part, Désiré André [158] a cherché sur un échiquier de largeur 4 et de longueur n quels sont les nombres de façons P_n, Q_n, R_n, S_n dont un cavalier, qui ne recule jamais, peut atteindre chacune des 4 cases de la $n^{\text{ième}}$ ligne en partant d'une case donnée. En appliquant la méthode des *arrangements complets*, il a montré que,

$$P_n = Q_{n-2} + R_{n-1}, \qquad R_n = P_{n-1} + Q_{n-2} + S_{n-2},$$
$$Q_n = P_{n-2} + R_{n-2} + S_{n-1} \qquad S_n = Q_{n-1} + R_{n-2},$$

d'où, en désignant par N une quelconque des lettres P, Q, R, S,

$$N_n = 2N_{n-2} + 2N_{n-4} + 4N_{n-5} + 2N_{n-6} - N_{n-8},$$

suite récurrente provenant de l'équation génératrice :

$$(x+1)(x^3 - x^2 - x - 1)(x^4 + 2x - 1) = 0.$$

IX. — Marche du cavalier.

76. **Problème d'Euler.** — Un des problèmes de la Géométrie de situation qui, comme le problème des 8 reines, a été étudié par de nombreux auteurs est le *problème d'Euler* [200, 208, 209, 215, 220]. *Comment obtenir tous les déplacements du cavalier qui le font passer une fois et une seule sur chacune des cases de l'échiquier? Quel est le nombre de ces déplacements?* Ce problème a été étendu à l'espace à trois dimensions [201].

Les cases de l'échiquier forment ici un réseau à 168 chemins, et 64 sommets, dont 16, dans le *carré central*, sont de degré 8; 16 de degré 6; 20 de degré 4; 8 de degré 3 et 4 de degré 2. Il faut y tracer des *chaînes complètes*, ou même des *circuits complets* (5) si la case d'arrivée du cavalier coïncide avec celle de départ. Ces chaînes s'appellent ici des *marches du cavalier*, les circuits étant des *marches rentrantes*. Certains amateurs obtiennent de 10 à 12 solutions différentes à l'heure et l'un d'eux, en 1860 [215] en a obtenu de 48 à 50 à l'heure (81).

77. A chaque saut, le cavalier passe d'une case paire, ou blanche, à une case impaire, ou noire (67). On en déduit, comme l'a fait remarquer Euler [208, 209], que, *dans une marche rentrante, la somme des numéros dans chaque ligne ou colonne est paire.* Il en résulte qu'*il n'existe aucune marche du cavalier sur un échiquier de forme quelconque si la différence entre les nombres des cases blanches et celui des cases noires n'est pas 1 ou 0* [215] et aussi qu'*il n'y a pas de marches rentrantes du cavalier sur un échiquier, carré ou non, dont le nombre des cases est impair.*

78. Pour noter une solution, Vandermonde [221]
désigner chaque case de l'échiquier, par une fraction $\frac{x}{y}$
deux coordonnées. On peut aussi désigner une case par
enfin se borner à numéroter les cases dans l'ordre même
lier y passe. Avec cette dernière notation la solutic
d'Euler [208, 209] s'écrit :

58	23	62	15	64	21	54	13
61	16	59	22	55	14	51	20
24	57	10	63	18	49	12	53
9	60	17	56	11	52	19	50
34	25	36	7	40	27	48	5
37	8	33	26	45	6	41	28
32	35	2	39	30	43	4	47
1	38	31	44	3	46	29	42

79. **Méthodes diverses.** — De Moivre [206] met en é
carré central de 16 cases et fait circuler le cavalier dans le
cases, en passant le moins possible dans le carré central, s
Euler [208, 209] trace d'abord une chaîne au has
longue qu'on le peut, et essaie ensuite de la rendre rent
tâche enfin d'y adjoindre l'une après l'autre les cases inutilis
Bertrand [202] complète cette méthode en montrant qu'
sible de déduire de nouvelles solutions d'une solution déjà

80. Laquière [214] étudie les circuits que l'on peut t
les chemins du réseau, ou *marches rentrantes partielles*,
ensuite de les relier deux à deux. Il cherche aussi, à obtenir de
partielles symétriques. A ce sujet, Lucas [215] fait remarqu
marche rentrante ne peut admettre un axe de symétrie ve
horizontal, ni confondu avec une diagonale, mais il peut adr
centre de symétrie. On en conclut qu'en général une mar
trante donne 16 autres marches. Si elle est rentrante, co
peut y prendre l'origine de 64 façons différentes, on en déd
autres marches rentrantes.

81. Ces symétries ont engagé Euler [208, 209] et d'autres
comme Roget [218, 219], à chercher une solution du problè
le *demi-échiquier*, limité à l'horizontale du centre. On do
symétrie et Euler a montré comment on pouvait raccorder c
marches.