

To be entered

MTAC 2 (1947)

RECENT MATHEMATICAL TABLES

→ 2635
301 - 2637 ✓

Please enter 3

θ , with the

$n = [1(1)]$

$\psi_n(\theta) \sin \theta$

.5A_{2,n}, for

A. J.

e of e^{-x} .
ly 1945.

Acad. Sci.,
D].

) to 136
25.7 cm.

(π/m) ,

stique,"
ckholm,

g, 5
Co. K,
as a 3D
 $\frac{31}{14175} u^9$

" + 1."

1C, v. 2,
ave been
lues be-

L.

1 ≡ 0
e Jean
42 p.

00000),
ELFELD
es, this

nstruc-
 $a^2 + b^2$
In fact

those numbers which appear more than once are composite. The representations

$$(1) \quad p = a^2 + b^2 = c^2 + 2d^2$$

lead at once to the four solutions

$$x \equiv \pm d(a \pm b)/ac \pmod{p}.$$

To reduce these values to integers modulo p involves the solution of a single linear congruence for t

$$act \equiv 1 \pmod{p}.$$

This procedure appears to be somewhat shorter than the one earlier described by the author (MTAC, v. 2, p. 71-72).

Under the heading of applications the author gives complete factorizations of nine numbers of the form $x^4 + 1$ (RMT 366). It may be of interest to point out that another application of this table is its use to rediscover the quadratic partitions (1). In fact we may use the tabulated values of x_1, x_2 to construct l and m by:

$$m \equiv \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \pmod{p},$$

$$l \equiv m(x_2 + x_1) \pmod{p}.$$

If we now form the sequence r_1, r_2, \dots by Euclid's algorithm

$$p = q_0l + r_1, l = q_1r_1 + r_2, \dots,$$

the first two r 's less than \sqrt{p} are values of a, b such that $p = a^2 + b^2$. The numbers c, d may be found in like manner from p and m . It is worth noting that the table gives a list of primes of the form $8k + 1$ between 350000 and 500000.

D. H. L.

411[F].—IRVING KAPLANSKY & JOHN RIORDAN, "The problème des ménages," *Scripta Mathematica*, v. 12, 1946, publ. Jan. 1947, p. 113-124.
16.7 × 24.8 cm.

This interesting paper on a problem due to LUCAS,¹ concludes with a small table of "ménages numbers" $u_{n,x}$ for $x = 0(1)n$ and for $n = 2(1)10$. These numbers may be defined as follows. Let

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

be a permutation of $1, 2, \dots, n$. The integer a_k is said to be in a forbidden place if it is in either the k -th or $k+1$ st place in (1). If (1) has precisely x elements in forbidden places it may be said to be of type x . The ménages number $u_{n,x}$ is the number of permutations of $1, 2, \dots, n$ of type x . When $x = 0$ this number is the same as the number of ways that n married couples may be seated at a round table, ladies alternating with gentlemen, in such a way that no one sits next to one's spouse. This fact accounts for the name given the function $u_{n,x}$ in general. The famous function $u_{n,0}$ has been tabulated by Lucas¹ for $n = 4(1)20$.

D. H. L.

¹ EDOUARD LUCAS, *Théorie des Nombres*, Paris, 1891, p. 495.

412[F].—GINO LORIA, "Sulla scomposizione di un intero nella somma di numeri poligonali," Accad. Naz. Lincei, *Atti, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Rendiconti*, s. 8, v. 1, 1946, p. 7-15. 18.1 × 26.8 cm.

This note gives three tables showing all partitions of each integer $n \leq 100$ into not more than (i) four squares, (ii) three triangular numbers and (iii) five pentagonal numbers.¹ The number v of such partitions is also given. Tables of this kind appear never to have been published before this. The number v is perhaps of more interest than the actual partitions themselves. It is surprising to find that the tables are quite unreliable. A complete recalculation shows the following errata.

Lehmer

DHL

(LINR 1, 7-15 1946)

— 7 —

Con la soppressione della R. Accademia d'Italia, la risorta Accademia Nazionale dei Lincei riprende la pubblicazione degli « Atti » con i seguenti volumi:

Rendiconti Classe scienze fisiche, matem. e nat. — Serie VIII — Vol. I.
Rendiconti Classe scienze morali, storiche e fil. — Serie VIII — Vol. I.
Memorie Classe scienze fisiche, matem. e nat. — Serie VII — Vol. I⁽¹⁾.
Memorie Classe scienze morali, storiche e fil. — Serie VIII — Vol. I.
Notizie degli Scavi di antichità — Serie VIII — Vol. I.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica (Teoria dei Numeri). — *Sulla scomposizione di un intero nella somma di numeri poligonali.* Nota⁽²⁾ del Corrisp. GINO LORIA.

I.

Secondo una proposizione intuita da Diofanto, enunciata da Bachet de Méziriac e da Fermat e finalmente dimostrata da Lagrange, *qualunque numero intero si può scomporre nella somma di quattro quadrati*, alcuni dei quali possono essere nulli. Essa suggerisce la questione di *scomporre in quadrati un numero dato ad arbitrio*. A stabilirne l'importanza, basti dire che, risolta che sia, ne risulta *ipso facto* la soluzione di problemi che si trovano nell'*Aritmetica* del citato matematico greco.

Non avendone trovato alcun cenno nella letteratura da me diligentemente esaminata⁽³⁾, ritengo sia il caso di far nota una considerazione da cui si può ricavare una soluzione di carattere ricorrente, tale cioè che, supponendola risolta per tutti i numeri da 1 a un certo limite n , si può ottenere quella relativa a $n+1$. Nell'esporla, per semplicità mi riferirò ad un esempio.

(1) Nel riprendere la pubblicazione delle Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, l'Accademia Nazionale dei Lincei si riferisce alla Serie VI che, all'atto della fusione era stata chiusa, dando inizio alla Serie VII anziché alla Serie VIII come per le altre pubblicazioni.

(2) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1916.

(3) Esse furono eseguite con la scorta dell'*History of the Theory of Numbers* (Washington 1920) di L. E. DICKSON.

Sceglieremo a caso il numero 84. Il quadrato massimo inferiore ad esso è $81 = 9^2$; esso differisce di 3 dal numero dato; perciò ove quella differenza potesse scomporsi in un numero di quadrati inferiori a quattro, condurrebbe insieme a 81 alla soluzione del problema.

Ora, avendo supposto di avere già eseguita la scomposizione di tutti i numeri < 84 , ricorrendo ai risultati si conclude essere $84 = 9^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$. Per vedere se esistano altre soluzioni, si devono porre alla prova gli altri quadrati inferiori a 84. Tale è anzitutto $64 = 8^2$; essendo $84 - 64 = 20$ ed essendo $20 = 4^2 + 2^2$ si ottiene $84 = 8^2 + 4^2 + 2^2$. $84 - 64 = 20$ ed essendo $20 = 4^2 + 2^2$ si ottiene $84 = 8^2 + 4^2 + 2^2$. Proseguendo per la stessa via s'incontra il numero $49 = 7^2$, e si ha $84 - 49 = 35$ e poichè $35 = 5^2 + 3^2 + 1^2$ si conclude $84 = 7^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2$. Continuando ancora si ha $84 = 36 + 48$ e quindi $84 = 6^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2$. Il seguente quadrato $25 + 5^2$ conduce alla differenza $84 - 25 = 59$; e siccome questo numero ammette due scomposizioni trinomie, così nascono due nuove soluzioni del problema cioè $5^2 + 7^2 + 3^2 + 1^2$ e $5^2 + 5^2 + 5^2 + 1^2$ come verifica. Altrettanto dicasi riguardo i seguenti quadrati $4^2, 3^2, 2^2, 1^2$. Si è pertanto autorizzati a concludere che il numero dato ammette le seguenti scomposizioni in quadrati, ed esse soltanto

$$9^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2, \quad 8^2 + 4^2 + 2^2, \quad 7^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2 \\ 6^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2, \quad 5^2 + 5^2 + 5^2 + 1^2.$$

Questo schema di calcolo (che può in certi casi abbreviarsi mediante alcune osservazioni, che taccio per brevità) si applica convenientemente alla costruzione di Tavole di scomposizione ed esso fu applicato per tutti i primi cento numeri e diede per risultato la prima delle Tavole con cui si chiude la presente Nota. La semplice ispezione di essa pone in evidenza che *ogni numero intero è in generale scomponibile in parecchi modi nella somma di quattro quadrati*.

È questo un fatto che fu rilevato soltanto per alcune categorie di numeri da Jacobi e da alcuni suoi discepoli, nei loro studi sulle funzioni ellittiche. Cosicchè ai cultori dell'aritmetica superiore si offrono due importanti questioni; cioè la ricerca di un metodo diretto per risolvere la questione di cui trattiamo e poi di dedurne una dimostrazione del riferito teorema.

II.

È risaputo che Fermat ha notevolmente generalizzato il teorema da noi enunciato esordendo, estendendolo ad una vasta categoria di numeri, asserendo che *qualunque numero si può esprimere come somma di un determinato*

numero per ogni specie di numeri poligonali⁽¹⁾, tre per i triangolari, cinque per i pentagonali, ecc. La verità di questa proposizione fu stabilita da Cauchy; essa suggerisce la questione di effettuare la scomposizione per qualsivoglia numero dato; ora il lettore potrà agevolmente convincersi che essa può risolversi applicando l'identico procedimento di cui ci siamo serviti per i quadrati; a tale scopo devesi tenere presente che i primi numeri triangolari (indicando generalmente in carattere *neretto* i numeri poligonali) valgono

$$1 = 1, \quad 2 = 3, \quad 3 = 6, \quad 4 = 10, \quad 5 = 15$$

mentre i primi pentagonali sono:

$$1 = 1, \quad 2 = 5, \quad 3 = 12, \quad 4 = 22, \quad 5 = 35.$$

Il surriserito procedimento venne da noi applicato per numeri della ora indicata specie a tutti gli interi del primo centinaio; i risultati si trovano nelle nostre Tavole II e III. Esse pongono in evidenza che sussiste anche per i numeri poligonali il fatto generale da noi rilevato per i quadrati (molteplicità delle scomposizioni), onde sussistono questioni analoghe a quelle enunciate alla fine del I §. Richiamare l'attenzione degli specialisti in materia su questo promettente campo d'indagine è lo scopo precipuo della presente Nota.

(1) Ricordiamo che un numero poligonale di specie d , n vertici e l lati è la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica di cui 1 è il primo termine e $l - 2$ la differenza costante; perciò la sua espressione è

$$n \left[\frac{(n-1)(l-2)}{2} + 1 \right];$$

in particolare i triangolari e i pentagonali valgono rispettivamente $\frac{n(n+1)}{2}$ e $\frac{n(3n-1)}{2}$.

TAVOLA I⁽¹⁾.

Tavola di scomposizione di un intero in quattro quadrati.

cont

1	1	1	33	5 + 2 + 2, 4 + 4 + 1, 4 + 3 + 2 + 2	3 ✓
2	1 + 1	1	34	5 + 3, 4 + 3 + 3, 5 - 2 + 2 + 1	X 4
3	1 + 1 + 1	2635	35	5 + 3 + 4, 4 + 3 + 3 + 1	2 ✓
4	2, 1 + 1 + 1 + 1	2	36	6, 5 + 3 + 1 + 1, 4 + 4 + 2, 3 + 3 + 3 + 3	4 ✓
5	2 + 1	1 ✓	37	6 + 1, 5 + 2 + 2 + 2, 4 + 4 + 2 + 1	3 ✓
6	2 + 1 + 1	1 ✓	38	6 + 1 + 1, 5 + 3 + 2, 4 + 3 + 3 + 2	3 ✓
7	2 + 1 + 1 + 1	1 ✓	39	6 + 1 + 1 + 1, 5 + 3 + 2 + 1	2 ✓
8	2 + 2	1 ✓	40	6 + 2, 4 + 4 + 2 + 2	2 ✓
9	3, 2 + 2 + 1	2 ✓	41	6 + 2 + 1, 5 + 4, 4 + 4 + 3	3 ✓
10	3 + 4, 2 + 2 + 1 + 1	2 ✓	42	6 + 2 + 1 + 1, 5 + 4 + 1, 5 + 3 + 2 + 2, 4 + 4 + 3 + 1	4 ✓
11	3 + 1 + 1	1 ✓	43	5 + 4 + 1 + 1, 5 + 3 + 3, 4 + 3 + 3 + 3	3 ✓
12	3 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 2	2 ✓	44	6 + 2 + 2, 5 + 3 + 3 + 1	2 ✓
13	3 + 2, 2 + 2 + 2 + 1	2 ✓	45	6 + 3, 6 + 2 + 2 + 1, 5 + 4 + 2, 4 + 4 + 3 + 2	4 ✓
14	3 + 2 + 1	1 ✓	46	6 + 3 + 1, 5 + 4 + 2 + 1	2 ✓
15	3 + 2 + 1 + 1	1 ✓	47	6 + 3 + 1 + 1, 5 + 3 + 3 + 2	2 ✓
16	4, 2 + 2 + 2 + 2	2 ✓	48	1 + 4 + 4, 6 + 2 + 2 + 2	2 ✓
17	4 + 1, 3 + 2 + 2	2 ✓	49	7, 6 + 3 + 2, 5 + 4 + 2 + 2, 4 + 4 + 4 + 1	+ ✓
18	4 + 1 + 1, 3 + 3, 3 + 2 + 2 + 1	3 ✓	50	7 + 1, 6 + 3 + 2 + 1, 5 + 5, 5 + 4 + 3, 4 + 4 + 3 + 3	5 ✓
19	4 + 1 + 1 + 1, 3 + 3 + 1	2 ✓	51	7 + 1 + 1, 5 + 5 + 1, 5 + 4 + 3 + 1	3 ✓
20	4 + 2, 3 + 3 + 1 + 1	2 ✓	52	7 + 1 + 1 + 1, 6 + 1, 5 + 5 + 1 + 1, 5 + 3 + 3 + 3	A 5
21	4 + 2 + 1, 3 + 2 + 2 + 2	2 ✓	53	7 + 2, 6 + 4 + 1, 6 + 3 + 2 + 2	3 ✓
22	4 + 2 + 1 + 1, 3 + 3 + 2	1 ✓	54	7 + 2 + 1, 6 + 4 + 1 + 1, 6 + 3 + 3	5 ✓
23	3 + 3 + 2 + 1,	1 ✓	55	7 + 2 + 1 + 1, 6 + 3 + 3 + 1, 5 + 5 + 2 + 1	3 ✓
24	4 + 2 + 2	1 ✓	56	6 + 4 + 2	1 ✓
25	5, 4 + 3, 4 + 2 + 2 + 1	3 ✓	57	7 + 2 + 2, 6 + 4 + 2 + 1, 5 + 4 + 4,	4 ✓
26	5 + 1, 4 + 3 + 1, 3 + 3 + 2 + 2	3 ✓	58	4 + 4 + 4 + 3	A 5
27	5 + 1 + 1, 4 + 3 + 1 + 1, 3 + 3 + 3	3 ✓	59	7 + 3 + 1, 5 + 5 + 3, 5 + 4 + 3 + 3	3 ✓
28	4 + 2 + 2 + 2, 3 + 3 + 1 + 1	3 ✓			
29	5 + 2, 4 + 3 + 2	2 ✓			
30	4 + 3 + 2 + 1, 5 + 2 + 1	2 ✓			
31	5 + 2 + 1 + 1, 3 + 3 + 3 + 2	2 ✓			
32	4 + 4	1 ✓			

(1) In questa e nelle seguenti Tabelle, nelle colonne I e IV sono inscritti i numeri da scomporre, nelle colonne II e V si trovano le scomposizioni e nelle colonne III e VI sono registrati i numeri delle scomposizioni ottenute in ogni singolo caso.

cont

Segue : TAVOLA I.

cont

66	$6+4+2+2, 7+3+1+1, 5+5+3+1$	3 ✓	82	$9+1, 8+3+3, 8+4+1+1, 7+5+2+2, 7+4+4+1, 6+6+3+1, 5+5+4+4$	7
67	$7+2+2+2, 6+5, 6+4+3, 5+4+4+2$	4 ✓			
68	$7+3+2, 6+5+1, 6+4+3+1$	3 ✓	83	$9+1+1, 8+4+4+1+1, 8+3+3+1, 7+5+3, 7+4+3+3$	4
69	$7+3+2+1, 6+3+3+3, 6+5+1+1, 5+5+3+2$	4 ✓	84	$9+1+1+1, 8+4+2, 7+5+3+1, 6+4+4+4, 5+5+5+3$	5
70	$8, 4+4+4+4$	2 ✓	85	$9+2, 8+4+2+1, 7+6, 7+4+4+2, 6+6+3+2$	5
71	$8+1, 7+4, 6+5+2, 6+4+3+2$	4 ✓	86	$9+2+1, 8+3+3+2, 7+6+1, 6+5+5, 6+5+4+3$	5
72	$8+1+1, 7+3+2+2, 6+5+2+2, 6+5+2+2$	6 ✓	87	$9+2+1, 7+6+1+1, 7+5+3+2, 6+5+5+1$	4
73	$8+1+1+1, 7+3+3+1, 7+4+4+1, 1+5+5+4+1$	4 ✓	88	$8+4+2+2, 6+6+4$	2
74	$8+2, 7+3+3+1, 6+4+4+4$	✓✓✓	89	$9+2+2+2, 8+5, 8+4+3, 7+6+2$	5
75	$8+2+1, 7+4+2, 6+5+2+2, 6+4+4+1$	4 ✓	90	$9+3, 9+2+2+1, 8+5+1, 8+4+3+1, 7+6+2+1, 7+5+4+1, 7+6+3+3, 6+5+5+2$	9
76	$8+2+3+2, 6+5+3+3+1, 5+4+1+1, 2$	6 ✓	91	$9+3+1, 8+3+3+3, 8+5+1+1, 7+5+4+1, 5+5+5+4$	5
77	$8+2+2, 6+6+2+4, 6+5+4+2$	3 ✓	92	$9+3+1+1, 7+5+3+3, 6+6+4+2$	3
78	$8+3, 8+2+2+1, 7+4+2+2, 6+6+1+1, 5+4+4+4$	5	93	$9+2+2+2, 8+5+2, 8+4+3+2, 7+7+6+2+2, 6+5+4+4$	5
79	$8+3+1, 7+5, 7+4+3, 6+6+1+1, 6+5+3+2$	5	94	$9+3+2, 8+5+2+1, 7+6+3, 7+5+4+2$	4
80	$8+3+1+1, 7+5+1, 7+4+3+1, 5+5+5+3$	5	95	$9+3+2+1, 7+6+3+1, 6+5+5+3$	3
81	$8+2+2+2, 7+5+1+1, 7+3+3+3, 6+2+2, 5+5+5+1$	5	96	$8+4+2$	1
82	$8+3+2, 6+6+2+4, 6+5+4+2$	4	97	$9+4, 8+5+2+2, 8+4+4+1, 7+4+4+4, 6+6+5+3$	6
83	$8+3+2+1, 7+5+2, 7+4+3+2, 6+5+4+1$	4	98	$9+4+1, 9+3+2+2, 8+5+3, 8+4+3+3, 7+7+6+3+2, 6+6+5+1$	7
84	$7+5+2+1, 6+5+3+3, 5+5+5+2$	3	99	$9+3+3+9+4+4+1, 8+5+3+1, 7+7+1, 7+5+5+5, 7+5+4+3$	6
85	$8+4, 6+6+2+2$	2	100	$10, 9+3+3+1, 8+6, 8+4+4+2, 7+7+1+1, 7+5+5+1, 5+5+5$	7
86	$9, 8+4+1, 8+3+2+2, 7+4+4, 6+6+3, 6+5+4+2$	6			

TAVOLA II.

Tavoli di scomposizione di un intero in tre numeri triangolari.

cont
↓

1	1		1	33
2	1+1		1	34
3	2, 1+1+1		2	35
4	2+1		1	36
5	2+1+1		1	37
6	3, 2+2		2	38
7	3+1, 2+2+1		2	39
8	3+1+1		1	40
9	3+2, 2+2+2		2	41
10	4, 3+2+1		2	42
11	4+1		1	43
12	4+1+1, 3+3, 3+2+2		3	44
13	3+3+1, 4+2		2	45
14	4+2+1		1	46
15	5, 3+3+2		2	47
16	5+1, 4+3		3	48
17	5+1+1, 4+3+1		2	49
18	5+2+1, 4+3+1		2	50
19	5+2+1, 4+3+2		2	51
20	4+4		1	52
21	6, 5+3, 4+4+1		4	
22	6+1, 5+3+2		3	53
23	6+1+1, 4+4+3		2	54
24	6+2, 5+3+2		2	55
25	6+2+1, 5+4		2	56
26	5+4+1, 4+4+3		2	57
27	6+3, 6+2+2		3	58
28	7, 6+3+1, 5+4+3		3	59
29	7+1		1	60
30	7+1+1, 6+3+2, 5+5, 4+4+4		4	61
31	7+2, 6+4, 5+5+1, 5+4+3		4	
32	7+2+1, 6+4+1		2	62

63	$9+5+2, 8+6+3, 6+6+6$	3 ✓	83	$10+7, 9+7+4$	2
64	$10+3+2, 8+7, 7+6+5$	3 ✓	84	$12+3, 12+2+2, 11+5+2, 10+7+1,$ $9+8+2, 7+7+7$	6
65	$10+4, 9+4+4, 8+7+1$	3 ✓	85	$12+3+1, 10+5+5, 8+7+6$	3
66	$11, 10+4+1, 9+6, 9+5+3, 8+5+5,$ $5, 7+7+4$	6 ✓	86	$11+4+4, 10+7+2, 10+6+4$	3
67	$11+1, 10+3+3, 9+6+1, 8+7+2,$ $8+6+4$	5 ✓	87	$12+3+2, 11+6, 11+5+3, 9+8+3,$ $9+6+6, 8+8+5$	6
68	$11+4+1, 10+4+2$	2 ✓	88	$12+4, 11+6+1, 9+7+5$	3
69	$11+2, 9+6+2$	2 ✓	89	$12+4+1, 10+7+3$	2
70	$11+2+1, 10+5, 9+5+4, 8+7+3,$ $7+6+6$	5 ✓	90	$12+3+3, 11+6+2, 9+9$	3
71	$10+5+1, 10+4+3, 7+7+5$	3 ✓	91	$13, 12+4+2, 11+5+4, 10+8, 10+$ $6+5, 9+9+1, 9+8+4$	7
72	$11+3, 11+2+2, 9+6+3, 8+8, 8+$ $6+5$	5	92	$13+1, 10+8+1, 8+7+7$	3
73	$11+3+1, 10+5+2, 9+7, 8+8+1$	4	93	$13+1+1, 12+5, 11+6+3, 10+7+$ $4, 9+9+2, 8+8+6$	6
74	$9+7+1, 8+7+4$	2	94	$13+2, 12+5+1, 12+4+3, 11+7, 10$ $+8+2, 9+7+6$	6
75	$11+3+2, 10+4+4, 9+5+5, 8+8+2$	4	95	$13+2+1, 11+7+1$	2
76	$11+4, 10+6, 10+5+3, 9+7+2, 9+$ $6+4$	5	96	$12+5+2, 11+5+5, 9+9+3, 9+8+5$	4
77	$11+4+1, 10+6+1, 7+7+6$	3	97	$13+3, 13+2+2, 11+7+2, 11+6+4,$ $10+8+3, 10+6+6$	6
78	$12, 11+3+3, 8+8+3, 8+6+6$	4	98	$13+3+1, 12+4+4, 10+7+5$	3
79	$12+1, 11+4+2, 10+6+2, 9+7+3,$ $8+7+5$	5	99	$12+6, 12+5+3$	2
80	$12+1+1, 10+5+4$	2	100	$13+3+2, 12+6+1, 11+7+3, 10+9,$ $9+9+4, 8+8+7$	6
81	$12+2, 11+5, 9+8, 9+6+5$	4			
82	$12+2+1, 11+5+1, 11+4+3, 10+6$ $+3, 9+8+1, 8+8+4$	6			

TAVOLA III.

Tavola di scomposizione di un intero in cinque numeri pentagonali.

cont
↓

1	1		1	33	$4+2+2+1$	✓ ₁
2	$1+1$		1	34	$4+3, 4+2+2+1+1, 3+3+2+2$	✓ ₃
3	$1+1+1$		1	35	$5, 4+3+1, 3+3+2+2+1$	✓ ₃
4	$1+1+1+1$		1	36	$5+1, 4+3+1+1, 3+3+3$	✓ ₃
5	$2, 1+1+1+1+1$		2	37	$5+1+1, 4+3+1+1+1, 4+2+2+2, 3+3+3+1$	✓ ₄
6	$2+1$		1	38	$5+1+1+1, 4+2+2+2+1, 3+3+3+1+1$	✓ ₃
7	$2+1+1$		1	39	$5+1+1+1+1, 4+3+2, 3+3+2+2+2$	✓ ₃
8	$2+1+1+1$		1	40	$5+2, 4+3+2+1$	✓ ₂
9	$2+1+1+1+1$		1	41	$5+2+1, 4+3+2+1+1, 3+3+3+2$	✓ ₃
10	$2+2$		1	42	$5+2+1+1, 4+2+2+2+2, 3+3+3+1$	✓ ₃
11	$2+2+1$		2	43	$5+2+1+1+1$	✓ ₄
12	$3, 2+2+1+1$		1	44	$4+4, 4+3+2+2$	✓ ₂
13	$3+1, 2+2+1+1+1$		2	45	$5+2+2, 4+4+1, 4+3+2+2+1$	✓ ₃
14	$3+1+1$		2	46	$5+2+2+1, 4+4+1+1, 4+3+3, 3+3+2+2$	✓ ₄
15	$3+1+1+1, 2+2+2$		2	47	$5+3, 5+2+2+2+1+1, 4+4+1+1+1, 4+3+3+1$	✓ ₄
16	$3+1+1+1+1, 2+2+2+1$		1	48	$5+3+1, 4+3+3+1+1, 3+3+3+3$	✓ ₃
17	$3+2, 2+2+2+1+1$		2	49	$5+3+1+1, 4+4+2, 4+3+2+2+2, 3+3+3+3+1$	✓ ₄
18	$3+2+1$		1	50	$5+3+1+1+1, 5+2+2+2+2, 4+4+1+2+1$	✓ ₃
19	$3+2+1+1$		2	51	$6, 5+2+2+2+1, 4+4+2+1+1, 4+3+3+2+2$	✓ ₄
20	$3+2+1+1+1, 2+2+2+2$		3	52	$6+1, 5+3+2, 4+3+3+2+1$	✓ ₃
21	$2+2+2+2+1$		2	53	$6+1+1, 5+3+2+1, 3+3+3+2$	✓ ₃
22	$4, 3+2+2$		3	54	$6+1+1+1, 5+3+2+1+1, 4+4+1+2+2$	✓ ₃
23	$4+1, 3+2+2+1$		2	55	$6+1+1+1+1, 5+2+2+2+2+2, 4+4+2+2+1$	✓ ₃
24	$4+1+1, 3+3, 2+2+1+1$		2	56	$6+2, 4+4+3, 4+3+3+2+2$	✓ ₃
25	$4+1+1+1, 3+3+1, 2+2+2+2+2$		1	57	$6+2+1, 5+4, 5+3+2+2, 4+4+1+3+1$	✓ ₄
26	$4+1+1+1+1, 3+3+1+1$		2			
27	$4+2, 3+3+1+1+1, 3+2+2+2$					
28	$4+2+1, 3+2+2+1$					
29	$4+2+1+1, 3+3+2$					
30	$4+2+1+1+1, 3+3+2+1$					
31	$3+3+2+1+1$					
32	$4+2+2, 3+2+2+2+2$					

58	$6+2+1+1, 5+4+1, 5+3+2+2+1,$ $4+4+3+1+1, 4+3+3+3$	75	81	$7+2+2+1, 6+3+3+2+1, 5+5+$ $2+2+1, 5+4+4+1+1, 5+4+$ $3+3$	5
59	$6+2+1+1+1, 5+4+1+1, 5+3+$ $3, 4+4+2+2+2, 4+3+3+3+1$	75	82	$7+3, 7+2+2+1+1, 5+5+3, 5+4+$ $3+3+1$	4
60	$5+4+1+1+1, 5+3+3+1, 3+3+$ $3+3+3$	83	$7+3+1, 6+4+2+2+2, 5+5+3+1, 5+$ $3+3+3+3, 4+4+4+3+2$	5	
61	$6+2+2, 5+3+3+1+1, 4+4+3+2$	83	$7+3+1+1, 6+4+2+2+1, 5+5+$ $3+1+1, 5+4+4+2$	4	
62	$6+2+2+1, 5+4+2, 5+2+2+2+2,$ $4+4+3+2+1$	84	$7+3+1+1, 6+4+2+2+2, 6+4+3,$ $6+3+3+2+2, 5+5+2+2+2, 5$ $+4+4+2+1$	6	
63	$6+3, 6+2+2+1+1, 5+4+2+1,$ $4+3+3+3+2$	85	$7+2+2+2+1, 6+4+3+1, 5+4+$ $3+3+2, 6+5$	4	
64	$6+3+1, 5+4+2+1+1, 5+3+3+2$	86	$7+3+2+2+1, 6+4+3+1, 5+4+$ $+3+3+2, 6+5$	5	
65	$6+3+1+1, 5+3+3+2+1$	87	$7+3+2, 6+5+1+1, 6+4+3+1+1, 6$ $+3+3+3, 5+5+3+2$	6	
66	$6+3+1+1+1, 6+2+2+2, 4+4+4,$ $4+4+3+2+2$	88	$7+3+2+1, 6+5+1+1, 6+4+2+$ $2+2, 6+3+3+3+1, 5+5+3+$ $2+1, 4+4+4+4$	7	
67	$6+2+2+2+1, 5+4+2+2, 4+4+$ $4+1$	89	$7+3+2+1+1, 6+5+1+1+1, 5+$ $4+4+2+2, 4+4+4+4+1$	8	
68	$6+3+2, 5+4+2+2+1, 4+4+4+4+$ $1+1, 4+4+3+3$	90	$7+2+2+2+2, 6+4+3+2, 4+4+$ $4+4+4+4+4$	9	
69	$6+3+2+1, 5+4+3, 5+3+3+2+$ $2, 4+4+3+3+1$	91	$6+5+2, 5+4+4+3, 6+4+3+2+1$	10	
70	$7, 6+3+2+1+1, 5+5, 5+4+3+1,$ $4+3+3+3+3$	92	$8, 7+4, 7+3+2+2, 6+5+2+1, 5+$ $5+4, 5+5+3+2+2, 5+4+4+$ $3+1$	11	
71	$7+1, 6+2+2+2+2, 5+5+1, 5+$ $4+3+1+1, 5+3+3+3+3, 4+4+$ $4+2$	93	$8+1, 7+4+1, 7+3+2+2+1, 6+5+$ $2+1+1, 5+5+4+1, 5+4+3+$ $3+3, 4+4+4+4+2$	12	
72	$7+1+1, 5+5+1+1, 5+4+2+2+2,$ $5+3+3+3+1, 4+4+4+2+1$	94	$8+1+1, 7+4+1+1, 7+3+3, 5+5$ $+4+1+1, 5+5+3+3$	13	
73	$7+1+1+1, 6+4, 6+3+2+2, 5+5$ $1+1+1, 4+4+3+3+2$	95	$8+1+1+1, 7+4+1+1+1, 7+3+3$ $+1, 6+4+4, 5+5+3+3+1$	14	
74	$7+1+1+1+1, 6+4+1, 6+3+2+$ $2+1, 5+4+3+2$	96	$8+1+1+1+1+1, 7+3+3+3+1, 6+5+$ $2+2, 6+4+4+1, 5+4+4+3+2$	15	
75	$7+2, 6+4+1+1, 6+3+3, 5+5+2,$ $5+4+3+2+1$	97	$8+2, 7+4+2, 7+3+2+2+2, 6+$ $5+2+2+1, 6+4+4+1+1, 5+$ $4+4+3+2$	16	
76	$7+2+1, 6+4+1+1+1, 6+3+3+1,$ $5+5+2+1, 5+3+3+3+2, 4+$ $4+4+2+2$	98	$8+2+1, 7+4+2+1, 6+5+3, 6+4+$ $3+3+1, 5+5+4+2+1$	17	
77	$7+2+1+1, 6+3+3+1+1, 5+5+$ $2+1+1$	99	$8+2+1+1, 7+4+2+1+1, 7+3+$ $3+2, 6+5+3+1, 6+3+3+3+$ $3, 5+5+3+3+2$	18	
78	$7+2+1+1+1, 6+4+2, 6+3+2+2$ $2, 4+4+4+3$	100	$8+2+1+1+1, 7+3+3+2+1, 6+$ $5+3+1+1, 6+4+4+2, 4+4+$ $4+4+3$	19	
79	$6+4+2+1, 5+4+4, 5+4+3+2+$ $2, 4+4+4+3+1$	6			
80	$7+2+2, 6+4+2+1+1, 6+3+3+2,$ $5+5+2+2, 5+4+4+1$	6			