ist, erreicht. Man kann bei einiger Uebung thatsächlich an dem Aussehen des Entladungsrohres, die grössere oder geringere Entfernung vom kritischen Zustand, bei dem es die meisten X-Strahlen aussendet, erkennen. Dieser Zustand ändert sich leider durch die Entladung von selbst. Diese Röhren werden, wenn sie hochevacuirt sind, unter dem Einflusse der Entladung namentlich grösserer Inductorien leerer und rasch so leer, dass die Funken den Raum nicht mehr durchsetzen können, während vorher die Entladung unter intensiver Ausstrahlung von X-Strahlen vor sich ging.

Das von Blaserna gefundene Resultat*), dass die Wirksamkeit mancher Röhren mit dem Gebrauch steigt, ist also dahin zu corrigiren, dass sie nicht wirksamer, sondern leerer, und wenn sie den Grad höchster Wirksamkeit überschreiten, schlechter werden.

Wie mir mein oben genannter Mitarbeiter Herr Max Gundelach mittheilt, soll übrigens dieses Leererwerden bei einfachen Kathodenröhren nicht eintreten.

Demnach dürfte ein Abfangen der von der Kathode abgeschleuderten Gas- und Elektrodentheilchen, welche vom Platin beziehungsweise den von mir untersuchten Stoffen von der Anode unter Absorption aufgefangen werden, die Ursache sein.

Mit dieser Auffassung scheint die Thatsache in Einklang zu stehen, dass ausser dem Platin namentlich poröse Substanzen dieses Leererwerden begünstigen. Ist das Inductorium gross genug, so kann thatsächlich ein von der Pumpe ganz abgeschlossenes Rohr, wenn dasselbe vorher etwa auf 0,1 Millimeter, also nicht besonders stark evacuirt wurde, bloss durch den Einfluss der Entladungen weiter bis zum Ausbleiben derselben evacuirt werden.

Als Gas, welches bis zuletzt die Entladung vermittelt, zeigt das Spectroskop Wasserstoff an, welcher offenbar aus der Kathode stammend vom Platin absorbirt wird. Auch die Absorption der festen Elektrodentheilchen hat insofern Einfluss, als mit der Verminderung der Zahl derselben die Zahl der Anstösse auf die Gasmoleküle und damit die Summe der lebendigen Kräfte des letzteren vermindert wird. —

Dieses Leererwerden der Entladungsröhren namentlich derer, in denen Platin verwendet wird, scheint zur Zeit der grösste Fehler aller Evacuationsgefässe zu sein. Ein Erwärmen derselben macht zwar wieder von der Glaswand okkludirte Gase vorübergehend locker und stellt die Brauchbarkeit des Rohres wieder her, jedoch nicht in vollem Umfang, einerseits weil das Rohr kalt am wirksamsten ist, andererseits, weil das Vacuum durch dieses Erwärmen in Folge des oben angedeuteten Processes selbst wieder steigt.

Die Rubidium- und Thalliumjodidröhren zeigen übrigens dieses Leererwerden nach meinen Beobachtungen nicht, desgleichen Röhren, bei denen als X-Strahlen erzeugende Substanz eine Schmelze von Thalliumjodid mit U_3O_8 verwandt wurde. Diese letzteren vertragen indessen nicht die Anwendung von Hohlspiegelkathoden und damit die Concentration der Kathodenstrahlen auf einen Punkt, weil die Jodite unter dem Einflusse der eintretenden Erwärmung sich verflüchtigen. Zur Erzielung scharfer Bilder ist aber die Concentration der Kathodenstrahlen unerlässlich. In diesem Falle müssen die oben genannten wirksamen Uranverbindungen in Form von Emaillen, welche die Wärme gut leiten, verwendet werden.

*) cfr. Wiedemanns Beiblätter, Bd. 20, Heft V, Referat No. 253.

Ueber das Achtdamenproblem und seine Verallgemeinerung.+)

Von Edmund Landau.

Ueber das Achtdamenproblem, d. h. die Aufgabe, auf einem Schachbrett von 64 Feldern 8 Damen so aufzustellen, dass keine eine andere angreift, ist in den letzten vierzig Jahren viel geschrieben worden. Die Aufgabe ist nicht blosse Spielerei, sondern auch von mathematischem Interesse. Sie lautet, von ihrem unmathematischen Gewande befreit: Es sollen diejenigen Permutationen der Zahlen von 1 bis 8 aufgesucht werden, bei denen die Differenz zweier beliebigen Zahlen nicht gleich der Differenz ihrer Ordnungszahlen ist, wenn man dem ersten, zweiten . . . Element der Permutation die Ordnungszahlen 1, 2 . . . beilegt. Ganz analog lässt sich die Aufgabe für das p^2-feldrige Brett aussprechen; es sind dann die p Zahlen von 1 bis p in der angegebenen Weise zu permutiren. Diese mathematische Interpretation der Aufgabe ist sehr naheliegend und findet sich schon in den ältesten Untersuchungen.

Es sei beiläufig erwähnt, dass die Aufgabe nicht, wie überall irrthümlich angegeben wird, zuerst von Dr. Nauck im Jahre 1850 in der Illustrirten Zeitung veröffentlicht wurde; sie stammt vielmehr aus der Berliner Schachzeitung und findet sich dort im Septemberheft 1848 in folgender Form: „Wie viele Steine mit der Wirksamkeit der Dame können auf das im Uebrigen leere Brett in der Art aufgestellt werden, dass keiner den anderen angreift und deckt, und wie müssen sie aufgestellt werden?“ Im Januarheft 1849 finden sich dann 2 Lösungen mit der Angabe, dass es noch eine ungemein grosse Anzahl von Lösungen gebe, dass aber nie auf einem Eckfeld eine Dame zu stehen käme. Diese letztere Bemerkung ist bekanntlich falsch; denn in 16 der 92 Lösungen, bezw. in 2 der 12 Stammlösungen steht eine Dame auf einem Eckfeld.

Die Aufgabe, nicht durch planloses Probiren, sondern methodisch die Lösungen für ein beliebiges Schachbrett zu finden, ist durch den Aufsatz von Herrn Professor Günther*), sowie durch die von Glaisher**) angegebene Vereinfachung wesentlich gefördert worden, und es ist auch vor einigen Jahren das Aufsuchen der Lösungen von Herrn Dr. Pein***) bis zum 81- und 100-feldrigen Brett fortgeführt worden. Vom mathematischen Standpunkte ist die Auffindung der Lösungen selbst weniger interessant als die Frage nach der Anzahl der Lösungen, und hierüber ist noch fast gar nichts veröffentlicht worden. Die Aufgabe, um die es sich handelt, ist in etwas allgemeinerer Form folgende: Auf wieviel Arten lassen sich n Damen ($n \leq p$) auf einem p^2-feldrigen Brett so aufstellen, dass keine eine andere angreift?

+) Vergl. zu Obigem auch die früheren Artikel über den Gegenstand in der Naturw. Wochenschr. Bd. V No. 30 S. 291 und VII No. 21 S. 203. — Red.

*) „Zur mathematischen Theorie des Schachbretts.“ (Archiv für Mathematik und Physik, Bd. 56, 1874).

**) „On the problem of the eight queens.“ (Philosophical Magazine Dezember 1874.)

***) Beilage zu dem Jahresbericht der städtischen Realschule zu Bochum über das Schuljahr 1888/89.

Für $n = 1$ lautet die Antwort offenbar: auf p^2 Arten.

Für $n = 2$ leitet Lucas*) die Lösung auf folgendem Wege ab: Um die Anzahl der den Bedingungen des Problems entsprechenden Aufstellungen zu finden, hat man von der Anzahl der überhaupt möglichen Stellungen die Anzahl der verbotenen abzuziehen, d. h. der Aufstellungen, bei denen sich beide Damen angreifen. Die Anzahl der möglichen Aufstellungen von zwei Steinen auf einem p^2-feldrigen Brett ist

$$\binom{p^2}{2} = \frac{p^2(p^2-1)}{2};$$

die Anzahl der Aufstellungen, bei denen sich die beiden Damen angreifen, ist nun offenbar gleich der halben Anzahl der Züge, die eine Dame überhaupt auf dem Brett ausführen kann; denn wenn sich zwei Damen angreifen, so kann jede auf das Feld der anderen ziehen, und umgekehrt, wenn zwei Damen so stehen, dass jede auf das Feld der andern ziehen kann, so greifen sie sich eben an. Lucas berechnet die Anzahl der Züge, die eine Dame ausführen kann, indem er die Bewegungsmöglichkeit der Dame aus der des Thurms und der des Läufers zusammensetzt; er findet so als Anzahl der möglichen Züge einer Dame

$$\frac{2}{3}\,p\,(p-1)\,(5p-1).$$

Also ist die Anzahl der verbotenen Aufstellungen

$$\frac{1}{3}\,p\,(p-1)\,(5p-1);$$

die Anzahl der Aufstellungen von zwei Damen, die sich nicht angreifen, ist also

$$\frac{1}{2}\,p^2(p^2-1) - \frac{1}{3}\,p\,(p-1)\,(5p-1)$$
$$= \frac{1}{6}\,p\,(p-1)\,(3p^2+3p-10p+2)$$
$$= \frac{1}{6}\,p\,(p-1)\,(3p^2-7p+2)$$
$$= \frac{1}{6}\,p\,(p-1)\,(p-2)\,(3p-1).$$

Mit Rücksicht auf den Zweck dieses Aufsatzes, die Fortführung der Untersuchung über den Fall $n = 2$ hinaus, soll zunächst dies Resultat auf einem anderen Wege abgeleitet werden. Denken wir uns das Schachbrett in concentrische Ränder eingetheilt; dann stehen, wie man sich leicht überzeugt, der Dame auf allen Feldern eines und desselben Randes gleich viele Züge zur Verfügung. Für gerades p giebt es $\frac{p}{2}$ Ränder; der äusserste Rand hat $4p-4$ Felder; jeder folgende hat 8 Felder weniger als der vorhergehende; der νte Rand enthält also $4p+4-8\nu$ Felder, der innerste, $\frac{p}{2}$te, folglich 4 Felder. Auf dem äussersten Rande greift die Dame $3p-3$ Felder an, nämlich $p-1$ vertical als Thurm, $p-1$ horizontal als Thurm und $p-1$ diagonal als Läufer; auf jedem Rande beherrscht sie 2 Felder mehr als auf dem vorhergehenden, auf dem νten Rande also $3p-5+2\nu$ Felder. Die Anzahl der Züge, die die Dame überhaupt ausführen kann, ist demnach

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{p}{2}} (4p+4-8\nu)\,(3p-5+2\nu)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\frac{p}{2}} \left\{(4p+4)(3p-5) + (-24p+40+8p+8)\nu - 16\nu^2\right\}$$
$$= (12p^2-8p-20)\,\frac{p}{2}$$
$$+ (-16p+48)\,\frac{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}+1\right)}{2} - 16\,\frac{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}+1\right)(p+1)}{6}$$
$$= \frac{2}{3}\,p\,(9p^2-6p-15-3p^2+3p+18-p^2-3p-2)$$
$$= \frac{2}{3}\,p\,(5p^2-6p+1)$$
$$= \frac{2}{3}\,p\,(p-1)\,(5p-1).$$

Für ungerades p giebt es $\frac{p+1}{2}$ Ränder; auch hier hat der äusserste $4n-4$ Felder, und jeder folgende 8 Felder weniger als der vorhergehende, der νte also $4n+4-8\nu$ Felder; dies gilt aber nur für $\nu = 1, 2 \ldots \frac{p-1}{2}$; denn der $\frac{p-1}{2}$te Rand hat 8 Felder, der innerste, $\frac{p+1}{2}$te jedoch 1 Feld, also nur 7 Felder weniger; er ist bei der Summation nicht einzuschliessen, sondern besonders zu berücksichtigen. Für die Zügezahl auf dem νten Rand gilt dasselbe wie bei geradem p; die Anzahl der Züge, die eine Dame auf dem p^2-feldrigen Brett (p ungerade) ausführen kann, ist also, da sie vom Mittelfeld aus $4p-4$ Felder beherrscht,

$$4p-4+\sum_{\nu=1}^{\frac{p-1}{2}} (4p+4-8\nu)\,(3p-5+2\nu)$$
$$= 4p-4+(12p^2-8p-20)\,\frac{p-1}{2}$$
$$+ (-16p+48)\,\frac{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}{2} - 16\,\frac{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}\cdot p}{6}$$
$$= \frac{2}{3}\,(p-1)\,(9p^2-6p-15-3p^2+6p+9-p^2-p+6)$$
$$= \frac{2}{3}\,(p-1)\,(5p^2-p)$$
$$= \frac{2}{3}\,p\,(p-1)\,(5p-1).$$

Also ist in beiden Fällen die Anzahl der verbotenen Stellungen

$$\frac{1}{3}\,p\,(p-1)\,(5p-1).$$

Dies ist das von Lucas auf anderem Wege erhaltene Resultat; das hier eingeschlagene Verfahren ist für $n = 2$ nicht das einfachste, aber es ist das einzige, das nicht auf diesen Fall zugeschnitten, sondern der Verallgemeinerung fähig ist.

Will man die Untersuchung über den Fall $n = 2$ hinaus fortsetzen, so stösst man zunächst auf erhebliche Schwierigkeiten, indem die verbotenen Stellungen nicht mehr unter einem Collectivbegriff zusammengefasst werden können. Es soll im Folgenden die Lösung der Aufgabe

*) Theorie des nombres, I, 1891, S. 98; récréations mathématiques, IV, 1894, S. 132.

gegeben werden, die Anzahl der Aufstellungen von drei sich nicht angreifenden Damen auf dem p^2-feldrigen Brett als explicite Function von p darzustellen.

Drei Damen lassen sich auf dem p^2-feldrigen Brett überhaupt auf

$$\binom{p^2}{3} = \frac{1}{6} p^2 (p^2-1)(p^2-2)$$

Arten aufstellen. Hiervon ist die Anzahl der verbotenen Stellungen zu subtrahiren. Diese zerfallen in drei Klassen:

1. Es greifen sich zwei Damen an, aber keine die die dritte.

2. Eine Dame greift die zwei andern an, diese einander aber nicht.

3. Jede Dame greift die beiden andern an.

Wenn P die Anzahl der Stellungen bezeichnet, in denen keine Dame eine andere angreift, und die erste, zweite, dritte Klasse U_1, U_2, U_3 Stellungen umfasst, ist

$$(1) \qquad P + U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{6} p^2 (p^2-1)(p^2-2).$$

Wenn es gelingt, drei weitere unabhängige lineare Gleichungen für P, U_1, U_2, U_3 aufzustellen, lässt sich P daraus berechnen.

Zwei sich nicht angreifende Damen lassen sich, wie oben angegeben wurde, auf

$$\frac{1}{6} p(p-1)(p-2)(3p-1)$$

Arten aufstellen. Wenn man auf einem beliebigen der p^2-2 freien Felder eine dritte Dame aufstellt, so sind unter den

$$\frac{1}{6} p(p-1)(p-2)(3p-1)(p^2-2)$$

auf diese Weise entstehenden Stellungen enthalten:

1. Die P Stellungen der gesuchten Art, und zwar jede dreimal, da ja jede Dame als dritte betrachtet werden kann.

2. Die verbotenen Stellungen der ersten Klasse, und zwar jede zweimal, da jede der beiden sich angreifenden Damen als dritte gelten kann.

3. Die verbotenen Stellungen der zweiten Klasse, und zwar einmal.

Also haben wir die Gleichung

$$(2) \qquad \begin{aligned} &3P + 2U_1 + U_2 \\ &= \frac{1}{6} p(p-1)(p-2)(3p-1)(p^2-2). \end{aligned}$$

Eine dritte Gleichung erhalten wir durch Betrachtung der „Doppelzüge“, d. h. der Möglichkeiten, in zwei Zügen von irgend einem Felde des p^2-feldrigen Schachbretts aus auf irgend ein anderes zu gelangen. Wenn man eine Dame einen Doppelzug ausführen lässt, so liegen die drei von ihr eingenommenen Felder so, dass das eine die zwei anderen angreift; diese greifen sich an oder nicht; alle Fälle, in denen sie sich angreifen, sind sechsfach gerechnet, da jedes der drei Felder als erstes betrachtet werden und überdies der Doppelzug von dem Anfangsfelde aus in zweifacher Weise ausgeführt werden kann; alle Fälle, in denen sich das Anfangs- und Endfeld nicht angreifen, sind offenbar doppelt gerechnet. Die halbe Anzahl der Doppelzüge ist also $= U_2 + 3U_3$. Um nun die Anzahl der Doppelzüge auf dem p^2-feldrigen Brett durch p auszudrücken, sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem p gerade oder ungerade ist.

Wenn p gerade ist, theilen wir die Doppelzüge in $\frac{p}{2}$ Arten ein, je nachdem das von der Dame nach dem ersten Zuge eingenommene Feld auf dem ersten, zweiten, ..., $\frac{p}{2}$ten Rande liegt. Wenn es eines der $4p+4-8\nu$ Felder des νten Randes ist, kann der erste Zug von jedem der $3p-5+2\nu$ Felder ausgehen, die das Feld angreift; für den zweiten Zug stehen nur $3p-6+2\nu$ Felder zur Verfügung, da das Feld, auf dem die Dame ursprünglich stand, nicht wieder betreten werden darf; also ist

$$\begin{aligned}
&U_2 + 3U_3 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\frac{p}{2}} (3p-5+2\nu)(3p-6+2\nu)(4p+4-8\nu) \\
&= \sum_{\nu=1}^{\frac{p}{2}} (3p-5+2\nu)(3p-6+2\nu)(2p+2-4\nu) \\
&= \sum_{\nu=1}^{\frac{p}{2}} \Big\{(3p-5)(3p-6)(2p+2) \\
&\quad + \big(2(3p-6)(2p+2) + 2(3p-5)(2p+2) \\
&\qquad\qquad - 4(3p-5)(3p-6)\big)\nu \\
&\quad + \big(-8(3p-5) - 8(3p-6) + 4(2p+2)\big)\nu^2 - 16\nu^3\Big\} \\
&= (3p-5)(3p-6)(2p+2)\cdot\frac{p}{2} \\
&\quad + (-12p^2+112p-164)\frac{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}+1\right)}{2} \\
&\quad + (-40p+96)\frac{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}+1\right)(p+1)}{6} - 16\frac{\frac{p^2}{4}\left(\frac{p}{2}+1\right)^2}{4}
\end{aligned}$$

$$(3^a) \qquad U_2 + 3U_3 = \frac{1}{12} p(67p^3 - 180p^2 + 146p - 36).$$

(2) + (3ª) − 2 · (1) giebt

$$\begin{aligned}
&3P + 2U_1 + U_2 + U_2 + 3U_3 - 2P - 2U_1 - 2U_2 - 2U_3 \\
&= P + U_3 \\
&= \frac{1}{12} p(6p^5 - 20p^4 + 6p^3 + 36p^2 - 36p + 8 + 67p^3 \\
&\qquad - 180p^2 + 146p - 36 - 4p^5 + 12p^3 - 8p) \\
&= \frac{1}{12} p(2p^5 - 20p^4 + 85p^3 - 144p^2 + 102p - 28).
\end{aligned}$$

P ist also durch U_3 ausgedrückt und es ist zur Berechnung von P nur U_3 zu bestimmen.

Ehe wir dazu übergehen, wollen wir die Berechnung der Zahl der Doppelzüge für ungerades p nachtragen. Es ist hier die Summe von $\nu = 1$ bis $\nu = \frac{p-1}{2}$ zu erstrecken und das dem Mittelfeld entsprechende Glied hinzuzufügen. Also

$$\begin{aligned}
&U_2 + 3U_3 \\
&= \sum_{\nu=1}^{\frac{p-1}{2}} (3p-5+2\nu)(3p-6+2\nu)(2p+2-8\nu) \\
&\quad + \frac{1}{2}(4p-4)(4p-5)
\end{aligned}$$

$$= (3p-5)(3p-6)(2p+2)\frac{p-1}{2}$$
$$+ (-12p^2+112p-164)\frac{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}{2}$$
$$+ (-40p+96)\frac{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}\cdot p}{6} - 16\,\frac{\frac{(p-1)^2}{4}\cdot\frac{(p+1)^2}{4}}{4}$$
$$+ (2p-2)(4p-5)$$

$$(3^b)\quad U_2 + 3U_3 = \frac{1}{12}(p-1)(67p^3 - 113p^2 + 33p - 3).$$

$(2) + (3^b) - 2\cdot(1)$ giebt

$$P + U_3$$
$$= \frac{1}{12}(p-1)(6p^5 - 14p^4 - 8p^3 + 28p^2 - 8p + 67p^3 - 113p^2 + 33p - 3 - 4p^5 - 4p^4 + 8p^3 + 8p^2)$$
$$= \frac{1}{12}(p-1)(2p^5 - 18p^4 + 67p^3 - 77p^2 + 25p - 3).$$

U_3 lässt sich nun durch geometrische Erwägungen auf folgende Weise berechnen: U_3 ist die Anzahl der Aufstellungen, bei denen sich je zwei der drei Damen angreifen. Dies tritt in folgenden vier Fällen ein:

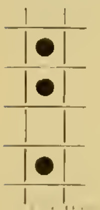
Fig. 1.

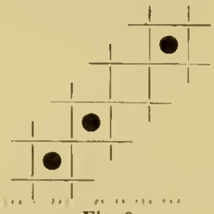
Fig. 2.

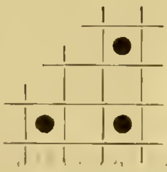
Fig. 3.

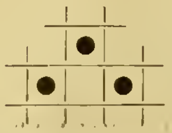
Fig. 4.

1. Die drei von den Damen eingenommenen Felder liegen auf derselben Horizontalen oder Verticalen (Fig. 1).

2. Die drei Felder liegen auf derselben Diagonalen, wobei unter „Diagonale" auch jede Parallele zu einer der beiden Hauptdiagonalen verstanden wird (Fig. 2).

3. Die drei Felder bilden ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck', dessen Hypotenuse auf einer Diagonalen liegt (Fig. 3).

4. Die drei Felder bilden ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck, dessen Hypotenuse auf einer Horizontalen oder Verticalen liegt (Fig. 4).

Es möge V_1, V_2, V_3, V_4 Stellungen der vier Klassen geben; dann ist

$$U_3 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4.$$

1. Da es p Horizontal- und p Verticalreihen giebt, deren jede p Felder hat, und da auf jeder drei Damen sich auf

$$\binom{p}{3} = \frac{1}{6}\,p(p-1)(p-2)$$

Arten aufstellen lassen, ist

$$V_1 = 2p\cdot\frac{1}{6}\,p(p-1)(p-2)$$
$$= \frac{1}{3}\,p^2(p-1)(p-2).$$

2. In der Richtung von links oben nach rechts unten und von links unten nach rechts oben giebt es je $2p-1$ Diagonalen, deren eine p und je zwei $p-1$, $p-2$, . . ., 2, 1 Felder enthalten. Auf einer Diagonale von ν Feldern lassen sich drei Damen auf

$$\binom{\nu}{3} = \frac{1}{6}\,\nu(\nu-1)(\nu-2)$$

Arten aufstellen; also ist

$$V_2 = 2\,\frac{1}{6}\,p(p-1)(p-2) + 4\cdot\frac{1}{6}\sum_{\nu=1}^{p-1}\nu(\nu-1)(\nu-2)$$
$$= \frac{1}{3}\,p(p-1)(p-2) + \frac{2}{3}\sum_{\nu=1}^{p-1}(\nu^3 - 3\nu^2 + 2\nu)$$
$$= \frac{1}{3}\,p(p-1)(p-2)$$
$$+ \frac{2}{3}\left(\frac{(p-1)^2p^2}{4} - 3\,\frac{(p-1)p(2p-1)}{6} + 2\,\frac{(p-1)p}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{6}\,p(p-1)(p^2 - 3p + 2)$$
$$= \frac{1}{6}\,p(p-1)^2(p-2).$$

3. Je zwei auf einer Diagonale liegenden Punkten entsprechen zwei rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke, deren Hypotenuse der Abstand dieser Punkte ist; also

$$V_3 = 4\,\frac{p(p-1)}{2} + 8\sum_{\nu=1}^{p-1}\frac{\nu(\nu-1)}{2}$$
$$= 2p(p-1) + 4\left(\frac{(p-1)p(2p-1)}{6} - \frac{(p-1)p}{2}\right)$$
$$= \frac{2}{3}\,p(p-1)(2p-1).$$

4. Wenn man auf einer Horizontalen oder Verticalen zwei Felder wählt, so entspricht ihnen, wenn ihr Abstand durch eine ungerade Zahl ausgedrückt wird, kein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck, dessen Hypotenuse von ihnen begrenzt wird. Wenn ihr Abstand durch eine gerade Zahl ausgedrückt wird, so entsprechen ihnen ein oder zwei Dreiecke der erwähnten Art, je nachdem ihr halber Abstand grösser oder nicht grösser ist als der Abstand der Reihe von der ihr zunächst liegenden, parallelen Reihe des äusseren Randes.

Es sei zunächst p gerade; dann giebt es je zwei Horizontalen und je zwei Verticalen, die vom Rande beziehungsweise die Abstände 0, 1, 2, . . ., $\frac{p}{2} - 1$ haben. Jede Reihe hat p Felder; es lassen sich also, wie man leicht einsieht, zwei den Abstand 2μ habende Punkte auf jeder Reihe auf $p - 2\mu$ Arten bestimmen. Wenn man nun die Reihe betrachtet, die den Abstand ν vom Rande hat, so entspricht allen $\mu > \nu$ ein Dreieck, allen $\mu \leq \nu$ zwei Dreiecke. Die Anzahl der Fälle, denen zwei Dreiecke entsprechen, ist also

$$4\sum_{\nu=0}^{\frac{p}{2}-1}\sum_{\mu=1}^{\nu}(p - 2\mu) = 4\sum_{\nu=0}^{\frac{p}{2}-1}\bigl(p\nu - \nu(\nu+1)\bigr)$$
$$= 4(p-1)\sum_{\nu=0}^{\frac{p}{2}-1}\nu - 4\sum_{\nu=0}^{\frac{p}{2}-1}\nu^2$$
$$= 4(p-1)\frac{\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{p}{2}}{2} - 4\,\frac{\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{p}{2}(p-1)}{6}$$
$$= \frac{1}{3}\,p(p-1)(p-2).$$

Die Anzahl der Fälle, denen 1 oder 2 Dreiecke entsprechen, zusammen ist gleich der Anzahl der möglichen Stellungen zweier Damen auf derselben Horizontalen oder Verticalen in „geradem" Abstande, also

$$= 2p\sum_{\mu=1}^{\frac{p}{2}-1}(p-2\mu)$$

$$= 2p\left(p\left(\frac{p}{2}-1\right) - 2\,\frac{\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{p}{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}p^2(p-2).$$

V_4 ist also gleich diesem Ausdruck, vermehrt um die Anzahl der Fälle, denen noch ein zweites Dreieck entspricht; also

$$V_4 = \frac{1}{2}p^2(p-2) + \frac{1}{3}p(p-1)(p-2)$$

$$= \frac{1}{6}p\,(p-2)(5p-2).$$

Für ungerades p gestalten sich die Rechnungen etwas anders, da es je vier Horizontalen und Verticalen im Abstand 0, 1, . . ., $\frac{p-3}{2}$, dagegen nur zwei im Abstand $\frac{p-1}{2}$ vom Rande giebt. Die Anzahl der Fälle, denen zwei Dreiecke entsprechen, ist also

$$4\sum_{\nu=1}^{\frac{p-3}{2}}\sum_{\mu=1}^{\nu}(p-2\mu) + 2\sum_{\mu=1}^{\frac{p-1}{2}}(p-2\mu);$$

die Gesammtzahl der Lösungen beider Fälle ist

$$2p\sum_{\mu=1}^{\frac{p-1}{2}}(p-2\mu);$$

also

$$V_4 = 4\sum_{\nu=1}^{\frac{p-3}{2}}\left(p\nu - \nu(\nu+1)\right) + (2p+2)\sum_{\mu=1}^{\frac{p-1}{2}}(p-2\mu)$$

$$= 4(p-1)\,\frac{\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}}{2} - 4\,\frac{\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}(p-2)}{6}$$

$$+ (2p+2)\left(p\,\frac{p-1}{2} - 2\,\frac{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(p-1)(5p^2-7p)$$

$$= \frac{1}{6}p\,(p-1)(5p-7)\;.$$

Für gerades p ist also

$$U_3 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$= \frac{1}{3}p^2(p-1)(p-2) + \frac{1}{6}p\,(p-1)^2(p-2)$$

$$+ \frac{2}{3}p\,(p-1)(2p-1) + \frac{1}{6}p\,(p-2)(5p-2)$$

$$= \frac{1}{2}p\,(p^3+p^2-5p+2).$$

$$P = \frac{1}{12}p\,(2p^5-20p^4+85p^3-144p^2+102p-28) - U_3$$

$$= \frac{1}{12}p\,(2p^5-20p^4+79p^3-150p^2+132p-40)$$

$$P = \frac{1}{12}p\,(p-2)^2(2p^3-12p^2+23p-10).$$

Für ungerades p ist

$$U_3 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$= \frac{1}{3}p^2(p-1)(p-2) + \frac{1}{6}p\,(p-1)^2(p-2)$$

$$+ \frac{2}{3}p\,(p-1)(2p-1) + \frac{1}{6}p\,(p-1)(5p-7)$$

$$= \frac{1}{2}p\,(p-1)(p^2+2p-3)$$

$$= \frac{1}{2}p\,(p-1)^2(p+3).$$

$$P = \frac{1}{12}(p-1)(2p^5-18p^4+67p^3-77p^2+25p-3) - U_3$$

$$= \frac{1}{12}(p-1)(2p^5-18p^4+61p^3-89p^2+43p-3)$$

$$P = \frac{1}{12}(p-1)(p-3)(2p^4-12p^3+25p^2-14p+1).$$

Die Aufgabe, die Anzahl derjenigen Aufstellungen von drei Damen zu berechnen, bei denen keine eine andere angreift, ist hiermit gelöst. Wie schon von vornherein zu erwarten ist, enthält der Ausdruck für gerades p die Linearfactoren p und $p-2$, für ungerades p die Factoren $p-1$ und $p-3$; denn auf dem 0-, 1-, 4-, 9-feldrigen Brett giebt es keine Lösung der Aufgabe.

Die im Vorhergehenden angewandte Methode, die verbotenen Stellungen, je nach der Anzahl der Damen, die sich angreifen, in Klassen einzutheilen und eine hinreichende Anzahl von linearen Gleichungen abzuleiten, lässt sich auf die Fälle $n=4$ u. s. w. ausdehnen; mindestens eine Klassenzahl wird wohl immer direct zu berechnen sein; doch nimmt die Schwierigkeit dieser Berechnung mit wachsendem n nicht wesentlich zu; denn für $n>5$ giebt es gar keine Stellungen mehr, in denen sich je zwei Damen angreifen, ausser wenn alle auf derselben Geraden stehen; dieser Fall ist aber leicht zu erledigen. Es wird immer nur darauf ankommen, ganze Functionen von p und ν nach ν zu summiren; es treten dabei nur ganze Functionen auf; hieraus folgt natürlich unmittelbar, dass die Anzahl der den Bedingungen des Problems entsprechenden Aufstellungen von n Damen (n bezeichnet eine gegebene Zahl) auf dem p^2-feldrigen Brett (p ist veränderlich) eine ganze rationale Function $2n$ten Grades von p ist; denn die Anzahl der möglichen Aufstellungen von n Damen auf dem p^2-feldrigen Brett ist $\binom{p^2}{n}$, also eine ganze Function $2n$ten Grades von p; wäre die Zahl der erlaubten Aufstellungen von höherem Grade, so gäbe es für hinreichend grosses p mehr erlaubte Aufstellungen als mögliche.