

Claude Lenormand 2003

Deux transformations sur les mots.

interesting!

Soit deux procédés de dégradation des mots
(mots finis et infinis, tout particulièrement les mots sur un alphabet de deux lettres).

La transformation numéro 1 remplace chaque bloc (run) par sa longueur (ou degré),
la transformation numéro 2 rabote les blocs en effaçant une lettre de chaque bloc.

Et l'on itère, jusqu'à obtention d'une seule lettre (pour le procédé 1),
ou du mot vide (pour le procédé 2); le mot vide est noté e.

Exemples:

Transformation 1:

$m=000100001110110010100110101111110,$
 $f(m)=31431221112211161, f^2(m)=11111232311,$
 $f^3(m)=511112, f^4(m)=141, f^5(m)=111, f^6(m)=3.$
ce mot m est de résistance 6 pour ce procédé.

erase a letter from each block

raboter :
to plane
scrape
(smooth?)

Transformation 2:

$m=0011100100,$
 $f(0011100100)=f(00.111.00.1.00)=0.11.0.e.0=01100,$
 $f(01100)=10,$
 $f(10)=vide=e.$
ce mot m est de résistance 3 pour ce procédé.

La suite de kolakoski, et celle de Golomb,
1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 2 1 1 2...
1 2 2 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 7 8 8 8 8 9 9 9 9...
sont toutes deux points fixes du procédé 1.

Petits essais avec la transformation numéro 1:

Les lettres de l'alphabet seront assimilées des entiers.
A toute suite, finie ou infinie, non ultimement constante lorsqu'elle est infinie, correspond la suite des degrés des facteurs homogènes, usuellement appelés "blocs", ou "runs" en anglais.

Pour le mot vide e, le nombre des blocs est 0. Soit x et y des lettres de l'alphabet,
Si le mot mx comporte n blocs, le mot mxy comporte n blocs lorsque x=y, et n+1 sinon.

Notons f cette transformation, particulièrement adaptée au cas d'un alphabet de deux lettres, (1 2).
La suite de kolakoski

1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 2 1 1 2...

est point fixe de la transformation, comme la suite de Golomb

1 2 2 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 7 8 8 8 8 9 9 9 9...

Quelques exemples de transformées itérées successives:

Soit la suite s obtenue à partir de 1 par l'itération du morphisme $g(1)=112, g(2)=12,$

$s=1 2 2 1 2 1 2 1 2 2 1 2 1 2 2 1 2 1 2 2 1 2 1 2...$
 $f(s)=1 2 1 1 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 1 2....$
 $f^2(s)=1 1 5 1 3 1 3 1 5 1 3 1 5 1 3 1 5 1 3 1 3...$
 $f^3(s)=2 1...$

Avec le morphisme $g(1)=12, g(2)=112,$

$s=1 2 1 2 2 1 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 1 2 2 \dots$
 $f(s)=1 1 1 2 1 1 1 2 1 2 1 1 1 2 1 1 1 2 1 2 1 \dots$
 $f^2(s)=3 1 3 1 1 1 3 1 3 1 1 1 3 1 1 1 3 1 3 \dots$
 $f^3(s)=1 1 1 3 1 1 1 3 1 3 1 1 1 3 1 1 1 3 1 \dots$

Avec la suite s qui donne le nombre de 1 ("la norme") dans l'écriture base 2 des entiers positifs,

$s=0 1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 4 1 2 2 3 2 3 3 4 2 3 3 4 3 4 4 5 \dots$
 $f(s)=1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 \dots$
 $f^2(s)=1 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 \dots$
 $f^3(s)=2 1 \dots$

Evidemment, pour les suites telles que celle qui donne le nombre des blocs dans l'écriture des entiers en base 2 (la norme des entiers successifs du code de gray)

$s=0 1 2 1 2 3 2 1 2 3 4 3 2 3 2 1 2 3 4 3 4 5 4 3 2 3 \dots,$

comme il n'y a pas deux entiers successifs identiques, dans ce cas nous noterons $f(s)=1^\infty, f^2(s)=\infty.$

Pour la suite de Thue-Morse t (parité de la norme base 2 des entiers)

$t=0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 \dots$
 $f(t)=1 2 1 1 2 2 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2 2 2 1 1 2 2 2 \dots$
 $f^2(t)=1 1 2 3 2 1 2 1 2 3 2 3 2 3 2 1 2 1 2 3 2 1 \dots$
 $f^3(t)=2 1 \dots$

Sur l'alphabet $(0,1)$, la distribution du nombre des mots de degré n dont la première lettre est 0 qui comportent k blocs, c'est évidemment la distribution des binômiaux.

D'où une involution sur les mots dont la première lettre est 0: remplacer toute transition de deux lettres identiques par une transition de deux lettres distinctes, et inversement.

Par exemple, $0 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0$ va sur $0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1.$

Pour la suite de Thue-morse t (parité du nombre de 1 dans l'écriture base 2 des entiers), et sa duale en ce sens, s :

$t=0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 \dots$
 $s=0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 \dots$
 $f(s)=2 4 2 2 4 4 4 2 2 4 2 2 4 2 2 4 4 4 2 2 4 4 4 2 2 4 4 4 \dots$
 $f^2(s)=1 1 2 3 2 1 2 1 2 3 2 3 2 3 2 1 2 1 2 3 2 1 2 1 2 3 2 \dots$
 $f^3(s)=2 1 \dots$

où, ici, $f^2(s)=f^2(t).$

Pour la suite s engendrée par le programme

$s(0):=1, s(1):=s(2):=2, k:=t:=2,$

(pour $i>1: s(i)=2 \Rightarrow k:=k+1, s(i)=0 \Rightarrow s(i):=k, t:=t+s(i), s(t):=s(i)),$

$s=1 2 2 3 2 4 4 3 4 2 5 5 4 5 5 5 4 5 5 3 5 5 5 4 5 2 6 6 6 6 5 6 6 6 6 5 \dots,$
 $f(s)=1 2 1 1 2 1 1 1 3 1 3 1 2 1 3 1 1 1 4 1 4 1 4 1 3 1 4 1 4 1 4 1 3 1 4 1 \dots,$
 $f^2(s)=1 1 2 1 3 1 1 1 1 1 1 1 3 1 \dots,$
 $f^3(s)=2 1 1 1 7 1 3 1 1 1 5 1 1 8 7 1 1 \dots,$
 $f^4(s)=1 3 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 \dots$

Petits essais avec la transformation numéro 2 :

Soit un mot m sur l'alphabet de deux lettres $X=(0,1)$, la factorisation en blocs du mot m , et la transformation f qui ôte un caractère par bloc.
 Itérer la transformation f jusqu'à obtention du mot vide.

Il est intéressant d'appliquer la transformation itérée à quelques suites infinies, et d'observer leur dégradation. La suite de Kolakoski fait rapidement apparaître de longs blocs, tout comme les suites aléatoires, d'ailleurs. La suite de Thue-Morse est terminée en deux coups.

La suite donnant le nombre de 1 des entiers en base 2 est à dégradation rapide, les 10^{12} premiers caractères vont sur 6 en exactement 6 coups, en voici les derniers itérés, symptomatiques:
 3 4 4 5 4 5 5 6 4 5 5 6 5 6 6 7 4 5 5 6 5 6 6 7 5 6 6 7 6 7 7 8 4 5 5 6 5 6 6 7 5 6 6 7 6 7 7 8 5 6 6 7 6
 7 7 8 6 7 7 8 7 8 8 9, 4 5 5 6 5 6 6 7 5 6 6 7 6 7 7 8, 5 6 6 7, 6.
 (avec 10^{2n} caractère, ça finit sur n en n coups).

Avec le morphisme fibonaccien (1 réécrit 12 et 2 réécrit 1), l'on n'obtient tout de suite que des 1.

Pour les suites de pliage dragonsques sur deux caractères, (a,b) , où la suite s est la limite des mots $m(n+1)=m(n)c(n)Mir(Barre(m(n)))$, $m(0)=a$, $c(n)$ lettre de l'alphabet (a,b) , Mir opération miroir, $Barre$ le morphisme involutif qui échange a et b , $m(n)$ se dégrade (en mot vide) en n coups.

La statistique de la résistance des mots de X^n (pris selon l'ordre naturel des entiers) :

0
 1 1
 2 1 1 2
 3 2 1 2 2 1 2 3
 4 3 2 2 2 1 2 3 3 2 1 2 2 2 3 4
 5 4 3 3 3 2 2 3 3 2 1 2 2 2 3 4 4 3 2 2 2 1 2 3 3 2 2 3 3 3 4 5

La demi-somme des résistances des mots de longueur n sur deux lettres donne la suite
 0 1 3 8 19 44 98 216 467 1004 2134....

Et en ligne i et colonne j , la moitié du nombre des mots de longueur i et de résistance j :

1
 1 1
 1 2 1
 1 4 2 1
 1 6 6 2 1
 1 10 11 7 2 1
 1 14 24 14 8 2 1
 1 22 42 35 16 9 2 1
 1 30 81 68 45 18 10 2 1
 1 46 138 149 89 55 20 11 2 1
 1 62 250 282 216 110 66 22 12 2 1
 1 94 419 577 422 285 132 78 24 13 2 1
 1 126 732 1070 945 568 364 156 91 26 14 2 1
 1 190 1214 2101 1826 1345 727 455 182 105 28 15 2 1
 1 254 2073 3836 3889 2666 1816 910 560 210 120 30 16 2 1

Claude Lenormand 2003
intensity!

Petit Problème supplémentaire:

Nous considérons des mots sur l'alphabet des entiers positifs.

Soit le morphisme $f(n)=(n-1).....1$, mot constitué des entiers de $n-1$ à 1 , et $f(1)=e$, mot vide.
 Itérer ce morphisme en partant d'un entier n . A chaque itération, le caractère maximal diminue d'une unité, et nous aboutissons au mot vide en n itérations. Le degré des mots commence par augmenter, puis diminue.

Par exemple, suite des itérés, en partant de $n=8$:

8
 7 6 5 4 3 2 1
 6 5 4 3 2 1 5 4 3 2 1 4 3 2 1 3 2 1 2 1 1
 5 4 3 2 1 4 3 2 1 3 2 1 2 1 1 4 3 2 1 3 2 1 2 1 1 3 2 1 2 1 1 2 1 1 1
 4 3 2 1 3 2 1 2 1 1 3 2 1 2 1 1 2 1 1 1 3 2 1 2 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 1
 3 2 1 2 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1
 2 1 1 1 1 1 1
 1

*roboter :
 1/6 plane
 scrape
 (smooth?)*

*erase a
 letter from
 each block*

et finalement, e.

Les mots obtenus à partir des cet exemple a pour la suite des degrés 1 7 21 35 35 21 7 1,
 et la suite des normes (somme des caractères) est 8 28 56 70 56 28 8 1.
 Nous reconnaissons des coefficient binômiaux.

La somme des longueurs des mots obtenus en partant de n , est 2^{n-1} .

La somme des normes des mots produits en partant de n , est 2^{n-1} .

Si l'on applique itérativement la transformation $g(n)=1 2...(n-2) (n-1)$, sous l'initialisation $g(1)=e$,
 au mot infini de la suite des entiers naturels 1 2 3 4 5 6 7.....:

1 1 2 1 2 3 1 2 3 4 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 6 1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 4 5 6 7 8...
 1 1 1 2 1 1 2 1 2 3 1 1 2 1 2 3 1 2 3 4 1 1 2 1 2 3 1 2 3 4 1 2 3 4 5 ...
 1 1 1 1 2 1 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 2 3 1 1 1 2 1 1 2 1 2 3 1 1 2 1 2 3 1 2 3 4 ...

..... de l'alphabet seront remplacés des entiers.
 \ toute suite, finie ou infinie, non ultimement constante lorsqu'elle est infinie, correspond la suite des degrés des mots obtenus itérativement appelés "blocs", ou "runs" en anglais.

Claude Lenormand. Le 17 novembre 2003.

Pour le mot vide e, le nombre des blocs est 0. Soit x et y des lettres de l'alphabet,
 Si le mot mix comporte n blocs, le mot mixy comporte n blocs lorsque $x=y$, et $n+1$ sinon.

Notons f cette transformation, particulièrement adaptée au cas d'un alphabet de deux lettres, (1 2).
 La suite de kolakoski

1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 1 1 2...

est point fixe de la transformation, comme la suite de Golomb

1 2 2 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 7 8 8 8 8 9 9 9 9 9...

Quelques exemples de transformées itérées successives:

Soit la suite s obtenue à partir de 1 par l'itération du morphisme $g(1)=112$, $g(2)=12$.

$s=1 2 2 1 2 1 2 1 2 2 1 2 1 2 2 1 2 1 2 2 1 2 1 2...$
 $f(s)=1 2 1 1 1 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 1 1 2...$
 $f^2(s)=1 1 5 1 3 1 3 1 5 1 3 1 5 1 3 1 5 1 3 1 3...$
 $f^3(s)=2 1...$