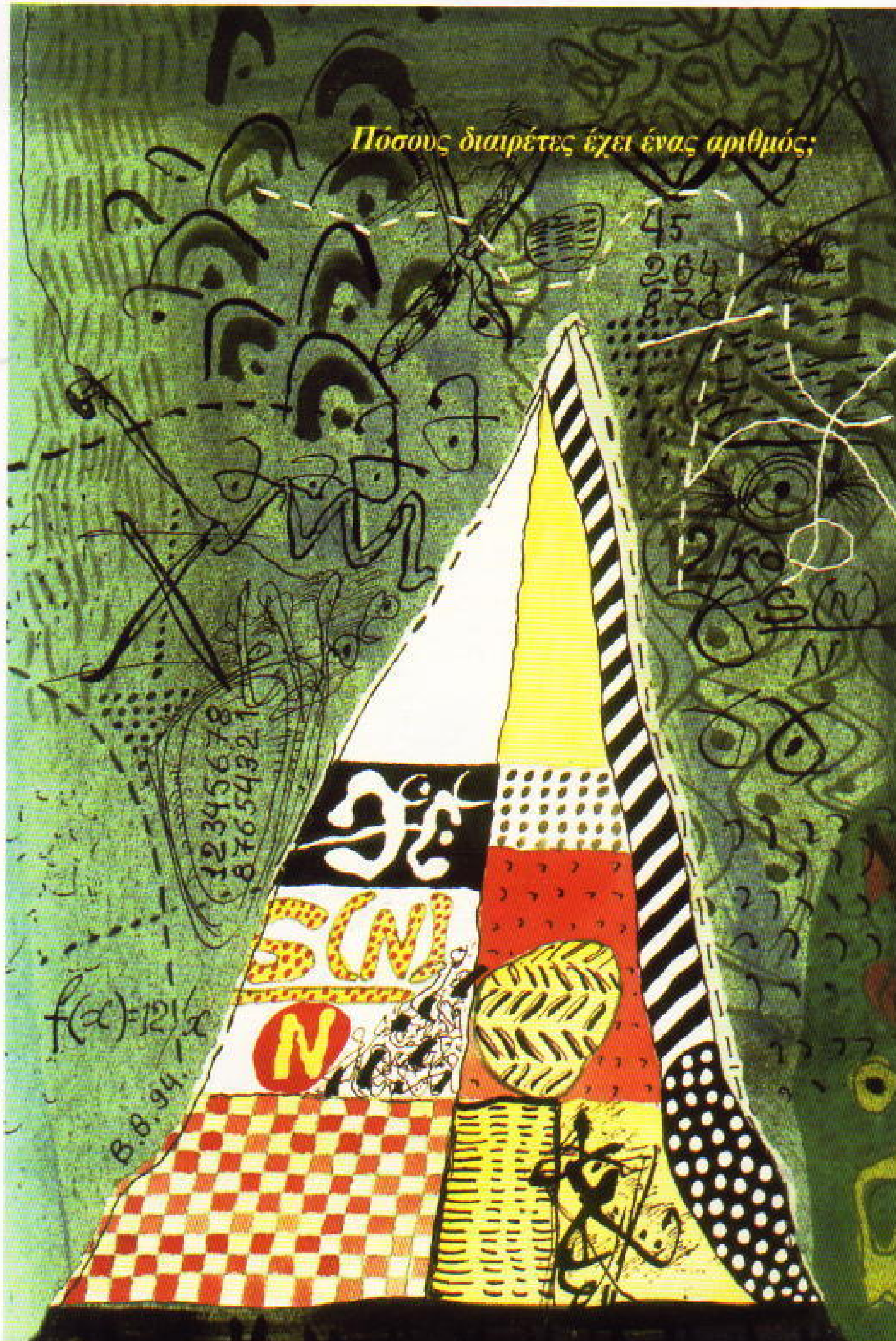
QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΪΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 1996
ΤΟΜΟΣ 3 / ΤΕΥΧΟΣ 3
1.500 ΔΡΧ.



- *Από την άκρη του Σύμπαντος στα Τάρταρα*
- *Η χρυσή τομή στο μπέιζμπολ*
- *Μαθηματικές κατασκευές σε υπολογιστή*
- *Ζωολογικές σταθερές στα θηλαστικά*
- *Το πρόβλημα της στατικής τριβής*
- *Εκπλήξεις από την αντιστροφή θεωρημάτων*
- *Περί της ταχύτητας διαφυγής*
- *Θα κληρονομήσουμε τη Γη;*

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Περιστρεφόμενη μορφή (1985), της Nancy Graves

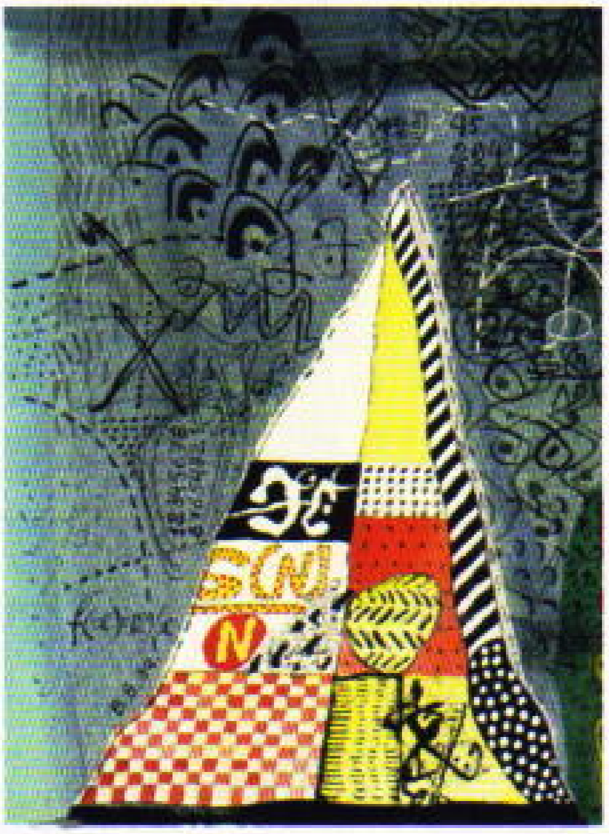
ΑΥΤΟ ΤΟ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΟΝ, ΠΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΙ ΣΥΡΡΑΦΗ ΤΡΟφίμων και εργαλείων, είναι κατά κάποιον τρόπο μια εκδήλωση σεβασμού στη δημιουργικότητα του φυσικού κόσμου, που απ' ό,τι φαίνεται είναι ανεξάντλητη. Είναι επίσης ένας θρίαμβος της φυσικής ωραιότητας. Οι σαρδέλες στα αριστερά είναι διατεταγμένες με τόση ακρίβεια, ώστε μπορούμε να δούμε και την παραμικρή λεπτομέρεια των αναλογιών τους. Το αλάτι πάνω στα κρακεράκια έχει διατηρηθεί σχολαστικά, καλυμμένο με μπρούντζο. Το γλυπτό ως όλον είναι διακοσμημένο με ένα όργιο χρωμάτων. Νιώθουμε μια πρωτόγνωρη, θα λέγαμε «ζωική» ευχαρίστηση που αντιλαμβανόμαστε αυτά τα πράγματα με τα μάτια μας —αντικείμενα που συνήθως τρώμε ή χειριζόμαστε χωρίς να τα παρατηρούμε.

Το γλυπτό ονομάζεται *Περιστρεφόμενη μορφή*, διότι το κεφάλι και ο λαιμός του περιστρέφονται. Θυμίζει τα «κινητά» του Alexander Calder, τα οποία ήταν επίσης αντικείμενα που ισορροπούσαν και κινούνταν. Μπορεί ακόμη να κάνει το θεατή που το παρατηρεί με επιστημονικό πνεύμα να σκεφτεί προβλήματα τα οποία ο γλύπτης αντιμετωπίζει διαισθητικά —τα ζητήματα που σχετίζονται με το κέντρο μάζας και την τριβή. Σ' αυτό το τεύχος του *Quantum* μπορείτε να βρείτε αρκετά άρθρα που είναι αφιερωμένα σε τούτα τα θέματα —διαβάστε τα άρθρα «Λεπτές ισορροπίες», «Ανεβαίνοντας την κατηφοριά» και «Μια συναρπαστική ιστορία».

QUANTUM

ΜΑΪΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 1996

ΤΟΜΟΣ 3 / ΤΕΥΧΟΣ 3



Εικονογράφηση: Vasily Vlasov

Το εντυπωσιακό όρος που υψώνεται με τα ζωηρά του χρώματα μέσα στη γαλάζια σκοτεινιά, κατοικημένο από μια φαντασμαγορία αριθμών και σχημάτων, περιέχει το σπέρμα της ίδιας της ισοπέδωσής του. Το αινιγματικό $S(N)/N$, το πλέγμα που μοιάζει με σκακιέρα, οι κουκκίδες που είναι διατεταγμένες σε εύτακτους στοίχους —όλα αυτά τα χαρακτηριστικά δεν είναι παρά βήματα στο δρόμο προς μια σχέση που υψώνει τις κοιλάδες και χαμηλώνει τις κορυφές μιας συγκεκριμένης ακανόνιστης καμπύλης.

Μπορείτε να δείτε αυτή την καμπύλη και να παρακολουθήσετε το δράμα που προεικονίζεται στο εξώφυλλό μας αν διαβάσετε το άρθρο της σελίδας 21, όπου τίθεται το ερώτημα: «Πόσους διαιρέτες έχει ένας αριθμός;»

ΑΡΘΡΑ

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

Θα κληρονομήσουμε τη Γη;

Ανοιχτή επιστολή προς τους γιους μου

Αγαπητοί Νταγκ και Γκρεγκ,

Κάθε γενιά πιστεύει ότι ο κόσμος πηγαίνει κατά διαβόλου —ρήση σκοτεινή το δίχως άλλο, που ξέρετε όμως πολύ καλά τι σημαίνει: τα πράγματα δεν είναι πια όπως παλιά... Τώρα μάλιστα που πλησιάζουμε μια νέα χιλιετία, από το μυαλό όλων μας περνάει η σκέψη: «Ίσως αυτή τη φορά τα νέα *είναι* πράγματι άσχημα. Ίσως ο κόσμος πηγαίνει όντως κατά διαβόλου».

Μεγαλώσατε ακολουθώντας με σε μεγάλους περιπάτους στην ύπαιθρο συλλέγοντας τριλοβίτες και βραγχιόποδα ηλικίας 380 εκατομμυρίων ετών, αλλά και πλήθος άλλων προ πολλού εξαφανισμένων ιχνών μιας αληθινά πανάρχαιης ζωής. Γνωρίζετε ότι εξαφάνιση και εξέλιξη πηγαίνουν χέρι χέρι. Έχετε δει επίσης το απαράμιλλο σθένος της ζωής. Ξέρετε ότι όσο σκληρά κι αν ήταν τα πλήγματα που δέχτηκαν τα έμβια συστήματα ανά τους αιώνες, η ζωή παραμένει αξιοθαύμαστα ανθεκτική. Πάντοτε αναδύεται εκ νέου γεμάτη σφρίγος —ώς σήμερα τουλάχιστον, και μιλάμε για μια διαδρομή της τάξης των 3,5 δισεκατομμυρίων ετών.

Γνωρίζετε επίσης, έχοντας μάλιστα επιδείξει και προσωπικό ενδιαφέρον, για το ανερχόμενο κύμα εξαφάνισης το οποίο έχει αρχίσει να καταπίνει τα εκατομμύρια των ειδών που ζουν σήμερα. Η ζωή ίσως είναι ανθεκτική· μπορεί μάλιστα να καταφέρει να τα βγάλει πέρα και με αυτή την τελευταία κρίση μαζικής εξαφάνισης ειδών, και να ξεχυθεί σ' ένα νέο εξελικτικό πανδαιμόνιο μορφής και χρώματος. Αυτό, όμως, ελάχιστα μας ικανοποιεί εδώ και τώρα —ιδιαίτερα εσάς, που έχετε ολόκληρη τη ζωή μπροστά σας.

Γνωρίζετε τις στατιστικές σχεδόν τόσο καλά όσο και εγώ. Τα είδη εξαφανίζονται με ρυθμό είκοσι επτά χιλιάδες το χρόνο (τρία την ώρα)! Αν αναλογιστούμε τα τελευταία 540 εκατομμύρια χρόνια, συνειδητοποιούμε ότι όλα τα προηγούμενα επεισόδια μαζικής εξαφάνισης προήλθαν από τη διατάραξη του φυσικού περιβάλλοντος και την κατάρρευση του οικοσυστήματος. Πριν εμφανιστούν στο προσκήνιο οι άνθρωποι, τα επεισόδια μαζικής εξαφάνισης προκαλούνταν από απότομες κλιματολογικές μεταβολές (αλλά και μια μεγάλη έκρηξη η οποία προκλήθηκε από τη σύγκρουση με κάποιον κομήτη, γεγονός που συνέβη τουλάχιστον μία φορά). Σήμερα, είναι εξίσου σαφές ότι ο πραγματικός ένοχος δεν είναι άλλος από το ίδιο μας το είδος, τον *Homo sapiens*.

Κόβουμε, καίμε, εξορύσσουμε και μολύνουμε τον πλανήτη μας με αυξανόμενους ρυθμούς. Μετατρέπουμε χερσαία οικοσυστήματα σε γεωργικές μονοκαλλιέργειες. Δημιουργούμε αχανή περιβάλλοντα από τσιμέντο, ατσάλι, πλαστικό και γυαλί που στερούνται ζωή —αν εξαιρέσουμε τη ζωή των υπόλοιπων συνανθρώπων μας και των λίγων συμβιούντων ειδών που φαίνεται να ευδοκιμούν στην περιφέρεια της ύπαρξής μας.

Εκτρέπουμε ρεύματα, και τα γεωργικά και βιομηχανικά απόβλητά μας δηλητηριάζουν τα ποτάμια, τις λίμνες, και τώρα πια και τους ωκεανούς μας. Γνωρίζετε επίσης τις άμεσες και επικίνδυνες παρενέργειες της βιομηχανικής μας δραστηριότητας στην ατμόσφαιρα: η θερμοκρασία του πλανήτη αυξάνεται από τα «αέρια του θερμοκηπίου», όπως το διοξείδιο του άνθρακα, και δημιουργούνται τρύπες του όζοντος, που προκαλούνται από την αντίδραση μεταξύ του όζοντος και των χλωροφθορανθράκων —όπως είναι το φρέον, από το οποίο σε τόσο μεγάλο βαθμό έχουμε εξαρτήσει την ψύξη των σπιτιών, των γραφείων και των αυτοκινήτων μας κατά τη διάρκεια των ολοένα και θερμότερων καλοκαιρινών μηνών.

Η άμεση καταστροφή του φυσικού περιβάλλοντος εξαιτίας της ανθρώπινης δραστηριότητας είναι το ακριβές ανάλογο της μεταβολής των οικοσυστημάτων εξαιτίας των κλιματολογικών αλλαγών του παρελθόντος —αλλαγών που πυροδότησαν τη σχετικά αναπάντεχη εξαφάνιση πολύ μεγάλου αριθμού ειδών. Έχουμε παγιδευτεί σ' έναν φαύλο κύκλο· απ' ό,τι φαίνεται, μας διακρίνει μια αχαλίνωτη συλλογική ορμή και μια εκ πρώτης όψεως διαρκής ικανότητα να εκμεταλλευόμαστε και να «διευρύνουμε» πόρους με αενάως αυξανόμενη αποδοτικότητα. Κάθε φορά δε που επιτυγχάνουμε μια ρηξικέλευθη ανακάλυψη, ο πληθυσμός μας εκτινάσσεται στα ύψη.

Πρόκειται όντως για φαύλο κύκλο. Και μπορείτε να δείτε ότι η πραγματική αιτία αυτής της ασυγκράτητης καταστροφής του φυσικού κόσμου από τον άνθρωπο δεν είναι άλλη από την ανεξέλεγκτη πληθυσμιακή αύξηση. Πριν από δέκα χιλιάδες χρόνια, στην απαρχή της γεωργίας, δεν υπήρχαν περισσότεροι από ένα εκατομμύριο άνθρωποι πάνω στη Γη. Σήμερα υπάρχουν 5,7 δισεκατομμύρια —και ο αριθμός αυξάνεται κατακόρυφα. Όσο αυξάνεται ο πληθυσμός τόσο περισσότεροι πόροι θα απαιτούνται· η περαιτέρω διεύρυνση τέτοιων πόρων —με μια σπάνια αλλά σημαντική εξαίρεση στην οποία θα αναφερθώ σε λίγο— γεννά όλο και περισσότερους ανθρώπους.

Το πρόβλημα, φυσικά, είναι ότι το ίδιο μας το είδος βρίσκεται σε κίνδυνο. Μολονότι η πληθυσμιακή έκρηξη δεν εξοντώνει τον πολιτισμένο κόσμο —μέσω της πείνας, των πολέμων, ακόμη και των ασθενειών— το είδος μας εξακολουθεί να αντιμετωπίζει την εξαιρετικά σημαντική πιθανότητα να καταποντιστεί μαζί με εκατομμύρια άλλα είδη σε μια μαζική εξαφάνιση αποκλειστικά δικής του έμπνευσης. Και τούτο επειδή είναι λάθος να υποθέτουμε, όπως κάνουν ακόμη πολλοί από μας, ότι δεν αποτελούμε πλέον μέρος του φυσικού κόσμου —και πως οτιδήποτε συμβαίνει σε όλα αυτά τα οικοσυστήματα και είδη «εκεί έξω» δεν έχει συνέπειες σ' εμάς.

Με αυτή την ιδέα εξαπατούμε τους εαυτούς μας τα τελευταία δέκα χιλιάδες χρόνια —από τότε που επινοήθηκε για πρώτη φορά η γεωργία στη Μέση Ανατολή και κατέστη δυνατή η μόνιμη εγκατάσταση πληθυσμών, με βάση την προβλέψιμη παροχή τροφής. Είμαστε τυχεροί που έχουμε την ιουδαιοχριστιανική Βίβλο, ένα από τα λίγα κείμενα που οι ρίζες τους φτάνουν σ' εκείνη την κρίσιμη μεταβατική περίοδο, αφού η επινόηση της γεωργίας ήταν αυτή που άλλαξε μια για πάντα τη στάση του ανθρώπου απέναντι στη φύση. Και οι συγγραφείς του κειμένου που ονομάζουμε «Βίβλο» το γνώριζαν αυτό, και φρόντισαν να το καταγράψουν.

Η Γένεση περιέχει πολλές ιστορίες, στις οποίες συμπεριλαμβάνονται δυόμισι εκδοχές σχετικά με τη Δημιουργία του Κόσμου. Μας λέει ότι δημιουργηθήκαμε κατ' εικόνα και καθ' ομοίωση του Θεού, και ότι προορισμός μας ήταν η «κυριαρχία» μας στη γη και σε όλα τα όντα. Είμαι πεπεισμένος, όμως, ότι εμείς έχουμε δημιουργήσει τον Θεό κατ' εικόνα και καθ' ομοίωσή μας, και ότι δεν συνέβη το αντίστροφο. Περιττό βέβαια να σας υπενθυμίσω την πεποίθησή μου ότι ο πλανήτης Γη έχει μια πολύ μακρά ιστορία —ένα είδος δικής του «εξέλιξης», αντίστοιχης με την ανάπτυξη του ηλιακού συστήματος, του Γαλαξία μας, και του ίδιου του σύμπαντος. Γνωρίζετε επίσης τη βεβαιότητά μου ότι όλα τα είδη —ζώντα και εξαφανισμένα— κατάγονται από έναν κοινό πρόγονο που εμφανίστηκε περισσότερα από 3,5 δισεκατομμύρια χρόνια πριν, μέσω μιας φυσικής διαδικασίας βιολογικής εξέλιξης. Γνωρίζετε επίσης τις σκέψεις μου για τον *Homo sapiens*: εξελιχθήκαμε όπως ακριβώς και τα υπόλοιπα είδη.

Η Γένεση δεν μπορεί να είναι σήμερα αντικείμενο μελέτης προκειμένου να έχουμε μια ακριβή θεώρηση της ιστορίας του Κόσμου και της γήινης ζωής. Πρέπει, όμως, να τη μελετούμε με προσοχή, για να μάθουμε ποια άποψη είχαν για τον άνθρωπο ορισμένοι σοφοί πρόγονοί μας, πριν από τόσες χιλιετίες. Και τούτο επειδή στη Γένεση υπάρχει μια ουσιαστική αλήθεια —η αναγνώριση του ότι οι άνθρωποι είχαν πλέον μεταβάλει τη θέση τους στον φυσικό κόσμο.

Όλα τα είδη, με μοναδική εξαίρεση το δικό μας, είναι χωρισμένα σε σχετικά μικρούς πληθυσμούς· καθένας από αυτούς τους πληθυσμούς είναι ενσωματωμένος σ' ένα τοπικό, δυναμικό οικοσύστημα. Οι σκίουροι στο Σέντραλ Παρκ ανησυχούν περισσότερο για την υγεία των δρυών και για το πού βρίσκονται τα κλαψοπούλια στη γειτονιά τους παρά για την ευζωία των μελών του είδους τους στον ποταμό του Νιου Τζέρσεϋ. Οι πρόγονοί μας δεν διέφεραν καθόλου ως προς αυτό, και υπάρχουν ακόμη και σήμερα άνθρωποι (στο χείλος επικείμενης εξαφάνισης) που ζουν σε τοπικούς πληθυσμούς και διαδραματίζουν αποφασιστικούς ρόλους σε τοπικά οικοσυστήματα. Οι Γιανομάνι —οι οποίοι σήμερα σφαγιάζονται από χρυσωρύχους στην Αμαζονία της Βενεζουέλας και της Βραζιλίας— αποτελούν μια τέτοια περίπτωση.

Το γεγονός είναι ότι η γεωργία άλλαξε όλη αυτή την κατάσταση. Με τη γεωργία κηρύξαμε ουσιαστικά και πρακτικά τον πόλεμο στα τοπικά οικοσυστήματα. Όλα τα φυτά, εκτός από τα ένα-δύο είδη που καλλιεργούσαμε, μεταβλήθηκαν ξαφνικά σε «ζιζάνια». Όλα τα ζώα, εκτός από τα λίγα που εξημερώσαμε και εκείνα που περιστασιακά κυνηγούσαμε, έγιναν «βλαβερά». Κατά τα φαινόμενα, είχαμε απελευθερωθεί από τον φυσικό κόσμο. Δεν εξαρτιόμασταν πλέον από την ετήσια γαλαντομία του. Είχαμε την πολυτέλεια, έτσι αισθανόμασταν τουλάχιστον, να τον περιφρονούμε, να νιώθουμε ότι του έχουμε ξεφύγει, ότι του επιβληθήκαμε. Είχαμε επιτύχει την «κυριαρχία».

Αφότου συνέβη αυτή η μεταβολή, ο πληθυσμός άρχισε να αυξάνεται· από 1 εκατομμύριο ανήλθε σε 5,7 δισεκατομμύρια μέσα σε μόλις δέκα χιλιάδες χρόνια: είναι κάτι το εκπληκτικό! Για ένα μεγάλο διάστημα, πάντως, φαινόταν να τα πηγαίνουμε πολύ καλά με τη νεόκοπη ελευθερία μας. Μπορούσαμε να ρυπαίνουμε το περιβάλλον με φαινομενική ασυδοσία. Μπορούσαμε να εγκαταλείπουμε τους οικισμούς μόλις το έδαφος εξαντλούνταν και να εγκαθιστάμεθα αλλού. Αφήναμε τη φύση να διορθώσει την καταστροφή —επαρκέστατη ένδειξη (θα σκεφτόταν κανείς) του ότι δεν ήμασταν και τόσο ανεξάρτητοι από τη φύση όσο μας άρεσε να πιστεύουμε.

Σήμερα, πάντως, αν δεν έχουμε κατακλύσει κυριολεκτικά τον πλανήτη, προσεγγίζουμε ταχύτατα το σημείο εκείνο όπου οι πλουτοπαραγωγικές πηγές δεν θα επαρκούν για να ικανοποιήσουν τις ανάγκες του συνολικού ανθρώπινου πληθυσμού. Ο Thomas Malthus είχε προβλέψει αυτό τον κίνδυνο ήδη από τα τέλη του 18ου αιώνα. Μερικοί οικονομολόγοι, όπως ο Julian Simon του Πανεπιστημίου της Μαίρυλαντ, επιμένουν να αρνούνται ακόμη και την ύπαρξη του προβλήματος. Σε τελευταία ανάλυση, ισχυρίζονται, ο πλούτος από την εκβιομηχάνιση τείνει να σταθεροποιήσει την πληθυσμιακή αύξηση. Έχει εκλείψει, όμως, κάθε ελπίδα ότι το βιοτικό επίπεδο του Τρίτου Κόσμου θα φτάσει ποτέ το δικό μας. Και όπως έχουν τα πράγματα, εμείς, στα προνομιούχα πλούσια κράτη, καταναλώνουμε κατά κεφαλή περίπου τριάντα φορές περισσότερους πόρους από κάποιον που ζει, ας πούμε, στο Μπανγκλαντές. Στην πραγματικότητα, ο πληθυσμός των Ηνωμένων Πολιτειών πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί τριάντα για να μετρηθεί η αληθινή επίδραση που έχει το μέγεθός του στην παγκόσμια οικονομία.

Όλα αυτά ακούγονται καταθλιπτικά. Φαίνεται σαν να πιστεύω πραγματικά ότι ο κόσμος πηγαίνει κατά διαβόλου. Ωστόσο, δεν το πιστεύω, ή μάλλον, δεν πιστεύω *κατ' ανάγκη* κάτι τέτοιο. Και νά γιατί.

Η γεωργία ήταν απλώς ένα συνταρακτικό βήμα σε μια μακρά αλυσίδα εξελικτικών πολιτισμικών επεισοδίων στην ανθρώπινη προϊστορία. Μετά την έλευση του υλικού πολιτισμού, περίπου 2,5 εκατομμύρια χρόνια πριν, η ανθρώπινη οικολογική ιστορία μπορεί να ερμηνευτεί ως μια μακρά, και συχνά πολύ ευφυής και επιτυχής προσπάθεια να αντεπεξέλθουμε στις φυσικές αντιξοότητες. Η έλευση της φωτιάς, για παράδειγμα, έδωσε τη δυνατότητα στους προγόνους μας του είδους *Homo erectus* να εγκαταλείψουν την Αφρική, μόλις ένα εκατομμύριο χρόνια πριν, και να ταξιδέψουν προς τα βόρεια αψηφώντας τον κίνδυνο των παγετώνων, προκειμένου να κυνηγήσουν τα μεγάλα ζώα της Ευρώπης της Εποχής των Παγετώνων.

Η γεωργία δεν ήταν μια μηχανορραφία κατά της φύσης —ήταν απλώς η συνέχιση μιας πολιτισμικά προσαρμοστικής στρατηγικής για την ασφαλέστερη απόκτηση πόρων. Το θέμα είναι ότι ο μύθος —η ιστορία περί του ποιοι είμαστε και ποια είναι η θέση μας απέναντι στη φύση— που διαβάζουμε στη Γένεση αποτελεί την εξήγηση του *status quo* που μόλις είχε επιτευχθεί. Ο καθένας μας, διαρκώς, χρειάζεται τέτοιες ιστορίες, τέτοιες εξηγήσεις, απλά για να λειτουργήσει.

Ο μύθος της Γένεσης ήταν μια καλή ιστορία για την εποχή της. Εγώ πιστεύω ότι η έννοια του Θεού, όπως μεταδόθηκε ώς εμάς από εκείνες τις μακρινές εποχές, δεν αντανακλά τίποτε άλλο από την ανάγκη μας να επινοήσουμε κάτι παντοδύναμο και πανταχού παρόν προκειμένου να εξωραΐσουμε τη συνειδητή υπέρβαση εκ μέρους μας των ορίων του τοπικού οικοσυστήματος. Οι άνθρωποι που εξακολουθούν να ζουν μέσα σε οικοσυστήματα συνηθίζουν να αναγνωρίζουν την ύπαρξη πνευμάτων στα είδη που τους περιβάλλουν —δεν φαίνεται όμως να έχουν την ανάγκη ενός φιλεύσπλαχνου ή τιμωρού Παντοδύναμου Θεού.

Κατά τα άλλα, όμως, ο μύθος της κυριαρχίας έμοιαζε να συμφωνεί με τα γεγονότα. Φαινόταν πράγματι ότι είχαμε ξεφύγει από τους περιορισμούς της φύσης —σε σημείο ώστε να μπορούμε να αρνούμαστε ότι υπήρξαμε ποτέ τμήμα της.

Η ιστορία, όμως, δεν «πάει» άλλο. Και εδώ βρίσκεται η πραγματική ελπίδα για το μέλλον· πρέπει να την αναπροσαρμόσουμε. Οφείλουμε να αντιληφθούμε ότι στην πραγματικότητα ποτέ δεν ξεφύγαμε από τα όρια της φύσης, αλλά απλώς επανακαθορίσαμε το ρόλο μας μέσα σ' αυτήν. Βλέπουμε ξεκάθαρα ότι δεν μπορούμε πλέον να ρυπαίνουμε ασύδοτα τα τοπικά οικοσυστήματα. Όπως επισήμανε ο τύπος πρόσφατα, η αποξήρανση και η μόλυνση των ελών στερεί από τροφή και δηλητηριάζει τα ψάρια και τα θαλασσινά των ακτών, που τόσο ζωτική σημασία έχουν για την οικονομία και τη διατροφή μας.

Είμαστε το μοναδικό παγκόσμιο είδος που αλληλεπιδρά με το παγκόσμιο περιβάλλον ως σύνολο. Συναλλασσόμαστε μεταξύ μας με ένα τρισεκατομμύριο δολάρια κάθε μέρα σε παγκόσμια βάση. Και αυτό το ένα τρισεκατομμύριο έχει αντίκτυπο στον φυσικό κόσμο.

Εν τω μεταξύ, το παγκόσμιο σύστημα —η ατμόσφαιρα, η υδρόσφαιρα, η λιθόσφαιρα και η βιόσφαιρα— πασχίζει για να διατηρήσει το *status quo* (όχι συνειδητά, βέβαια, αλλά μέσω των κύκλων αλληλεπίδρασης που προκύπτουν από καθαρή φυσική και χημεία). Η υγεία του παγκόσμιου οικοσυστήματος δεν είναι τίποτε περισσότερο —ή λιγότερο— από τη συλλογική υγεία όλων των τοπικών οικοσυστημάτων που το συναποτελούν και συνδέονται όλα μεταξύ τους με έναν πολύπλοκο δίκτυο ροής ενέργειας. Κόψτε τα τροπικά δάση και θα έχετε μεταβάλει την κατανομή των βροχοπτώσεων και τη ροή θρεπτικών ουσιών στη θάλασσα. Δηλητηριάστε την επιφάνεια των ωκεανών και θα έχετε εξαλείψει την κύρια πηγή αναπλήρωσης του ατμοσφαιρικού οξυγόνου. Φαίνεται σχεδόν αστείο το ότι μας πέρασε κάποτε απ' το μυαλό η ιδέα πως ξεφύγαμε από τους περιορισμούς της φύσης. Τώρα, όμως, το βλέπουμε καθαρά: μπορεί να μεταβάλαμε ριζικά τη στάση μας απέναντί της, καθώς και τη θέση μας μέσα σ' αυτήν, αλλά ποτέ δεν καταφέραμε να της ξεφύγουμε. Και τώρα, εμείς οι ίδιοι απειλούμε με εξαφάνιση τους εαυτούς μας και πάμπολλα από τα οικεία μας είδη.

Τι να κάνουμε; Να σταθεροποιήσουμε τον πληθυσμό. Πώς; Αυτό τείνει να το κάνει η οικονομική ανάπτυξη. Είναι όμως πολύ αργά για να σκεφτόμαστε ρεαλιστικά με τέτοιους όρους· δεν υπάρχει πλέον τρόπος να αναβαθμιστούν οι οικονομίες του Τρίτου Κόσμου στο σημερινό οικονομικό επίπεδο των εκβιομηχανισμένων κρατών. Υπάρχουν όμως ενθαρρυντικές ενδείξεις ότι η *εκπαίδευση* μπορεί να έχει το ίδιο αποτέλεσμα. Ιδιαίτερα η εκπαίδευση, η χειραφέτηση και η οικονομική ενδυνάμωση των γυναικών. Αυξάνονται ολοένα τα στοιχεία που δείχνουν ότι οι γυναίκες θα εγκατέλειπαν με ενθουσιασμό τις πολλαπλές γεννήσεις εάν τους παρέχονταν εναλλακτικοί τρόποι διαβίωσης.

Η εκπαίδευση είναι το σημαντικότερο κλειδί. Καταλήξαμε στην παρούσα στενωπό έντιμα —και μάλιστα με μεγάλη δόση ευφυΐας. Είμαστε το μόνο είδος (το πιστεύω ακράδαντα) που έχει νόηση και πραγματικό πολιτισμό. Χρησιμοποιήσαμε τον πολιτισμό, την ευφυΐα και τις δεξιότητές μας, με αποκλειστικό και διαρκές μέλημα τη βελτίωση της οικολογικής μας προσαρμογής —πώς να επιβιώσουμε, πώς να αντιμετωπίσουμε τη σκληρή πραγματικότητα της φυσικής διαβίωσης.

Οι προσπάθειές μας που αποσκοπούν στο να αντεπεξέλθουμε στις δυσκολίες πρέπει να συνεχιστούν. Πρέπει, όμως, να αναθεωρήσουμε και το μύθο μας σχετικά με το ποιοι είμαστε και ποια είναι η θέση μας στον Κόσμο. Πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι αποτελούμε μέρος της φύσης —και ότι καταλαμβάνουμε μια μοναδική θέση ως παγκόσμιο είδος. Πρέπει να σπάσουμε τον φυσικό βιολογικό κύκλο στον οποίο ο πληθυσμός πάντοτε αυξάνεται όσο αυξάνεται η πρόσβαση σε πόρους. Πρέπει να καταστήσουμε όντως έμφρονα —αντάξιο του ονόματός του— τον *Homo sapiens*, τον «έμφρονα άνθρωπο».

Αν αναγνωρίσουμε ότι η Γη δεν μας ανήκει, αν συγκρατήσουμε τους εαυτούς μας, αν αποκαταστήσουμε τα οικοσυστήματα και επιτρέψουμε στα άλλα είδη να ζήσουν, υπάρχουν σοβαρές πιθανότητες να επιβιώσουμε —εμείς και τα υπόλοιπα οικεία μας είδη— για να κληρονομήσουμε τη Γη. Η πρόκληση είναι μεγάλη, αλλά μπορούμε να αντεπεξέλθουμε σ' αυτήν. Υπάρχουν μερικά ελπιδοφόρα σημάδια. Η καταστροφή του όζοντος, π.χ., έχει αρχίσει να αναστρέφεται, επειδή οι άνθρωποι συνήλθαν και ανέλαβαν συντονισμένη και αποφασιστική δράση. Εναπόκειται τώρα στη γενιά σας να ολοκληρώσει τη στροφή σε μια διαφοροποιημένη, περισσότερο ακριβή άποψη για το ποιοι είμαστε και ποια είναι η θέση μας στον φυσικό κόσμο.

Καλή τύχη, παιδιά!

Ο μπαμπάς.

Niles Eldredge

Ο ***Niles Eldredge*** είναι δραστήριος ερευνητής παλαιοντολόγος, μέλος του επιτελείου του Αμερικανικού Μουσείου Φυσικής Ιστορίας, από το 1969. Αφιέρωσε ολόκληρη τη σταδιοδρομία του στο να επιτύχει καλύτερη συμφωνία της εξελικτικής θεωρίας και του αρχείου των απολιθωμάτων. Το 1972, αυτός και ο Stephen Jay Gould ανακοίνωσαν τη θεωρία της εστιγμένης ισορροπίας. Από τότε, ο Eldredge ανέπτυξε τις απόψεις του για την ιεραρχική δομή των έμβιων συστημάτων, και τη φύση της σχέσης μεταξύ οικολογίας και εξέλιξης. Δίνει τακτικά διαλέξεις σε πανεπιστήμια και ερευνητικά κέντρα για θέματα εξελικτικής θεωρίας και βιολογικής ποικιλομορφίας, και για το ταξιδιωτικό πρόγραμμα του Αμερικανικού Μουσείου. Είναι δραστήριος παρατηρητής πουλιών, συλλέκτης, και απολαμβάνει να παίζει κορνέτα και τρομπέτα.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Κβαντ της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.

Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα, τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρσακείου (Πανεπιστημίου 49), 105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.
Ετήσια συνδρομή: 8.000 δρχ. για ιδιώτες, 14.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ.

Από την άκρη του σύμπαντος στα Τάρταρα

«Διδάσκαλος δε πλείστων Ησίοδος· τούτον επίστανται πλείστα ειδέναι...»
—Ηράκλειτος ο Εφέσιος

Albert Stasenko

ΑΥΤΟ ΤΟ ΥΠΕΡΟΧΟ ΕΓΚΩΜΙΟ ΑΠΟ έναν αρχαίο φιλόσοφο για έναν ακόμη αρχαιότερο ποιητή[1] μάς δίνει μια ιδέα: μήπως μπορούμε κι εμείς να μάθουμε κάτι από αυτόν που γνωρίζει τα «πλείστα»; Γιά να δούμε. Ορίστε τι λέει το βιβλίο που χρησιμοποιώ ως πηγή σχετικά με την κοσμογονία αυτού του δασκάλου: «Ο Ησίοδος μέτρησε τις διαστάσεις του σύμπαντος από το χρόνο που χρειάζεται ένα αμόνι να πέσει από τον ουρανό στη Γη (9 ημέρες) και στη συνέχεια από την επιφάνεια της Γης στον πυθμένα των Ταρτάρων (επίσης 9 ημέρες). Πέρα από αυτά εκτείνεται το Χάος, όπου παύει κάθε προς τα κάτω κίνηση».

Προκύπτει λοιπόν ένα ερώτημα: σε ποιες αριθμητικές εκτιμήσεις σχετικά με το μέγεθος του σύμπαντος θα κατέληγε ο αρχαίος ποιητής αν στη μέθοδό του εφάρμοζε τη σύγχρονη φυσική; Όπως και ο Ησίοδος, θα χωρίσουμε τη μελέτη σε δύο στάδια: πρώτον, στην πτώση από τον ουρανό στο έδαφος, που έχει διάρκεια $t_1 = 9$ ημέρες· δεύτερον, στην πτώση από το έδαφος στα Τάρταρα ($t_2 = 9$ ημέρες, επίσης). Φυσικά, θα θεωρήσουμε ότι η ημέρα ισοδυναμεί με 24 ώρες (διότι δεν μπορούμε να περιμένουμε ότι το αμόνι θα διακόπτει την κίνησή του τη νύχτα). Επίσης, πρέπει να έχουμε υπόψη μας τους κύριους πρωταγωνιστές: τις δυνάμεις που ασκούνται στο αμόνι. Ενώ στο κενό κυριαρχεί το βάρος του, καθώς το αμόνι εισχωρεί και κινείται στην ατμόσφαιρα της Γης πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και την αντίσταση του αέρα. Εφόσον κανείς δεν γνωρίζει πού βρίσκονται τα Τάρταρα, ας υποθέσουμε ότι βρίσκονται στο κέντρο της Γης (ούτως ή άλλως, κανείς δεν μπορεί να κατέβει πέρα από αυτό!). Προφανώς, πρέπει να υπάρχει κάποιος τρόπος να φτάσει κανείς στα Τάρταρα —για παράδειγμα, μέσα από μια σήραγγα διανοιγμένη αυστηρά κατά μήκος μιας ακτίνας της Γης.

Και τώρα, ας ξεκινήσουμε.

Στάδιο 1: Από τον ουρανό στο έδαφος

Η βαρυτική δύναμη που δρα σε σώμα μάζας m_a το οποίο βρίσκεται πέρα από τον πλανήτη μας, σε απόσταση r από το κέντρο του, δίνεται από τον τύπο

$$F = -G\frac{M_\oplus m_a}{r^2} = m_a g_\oplus \frac{R_\oplus^2}{r^2},$$

όπου $R_\oplus$ είναι η ακτίνα της Γης και $g_\oplus = GM_\oplus / R_\oplus^2$ η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη. Το απαιτούμενο έργο για τη μετατόπιση ενός σώματος κατά μικρή απόσταση $dr > 0$ είναι

$$dW = \frac{GM_\oplus m_a}{r^2}\,dr.$$

Έτσι, για να ανυψώσουμε ένα σώμα από την επιφάνεια της Γης ($r = R_\oplus$) στα όρια του «σύμπαντος του Ησιόδου» ($r = R_H$), πρέπει να παραγάγουμε έργο ίσο με

$$W = \int_{r=R_\oplus}^{R_H} \frac{GM_\oplus m_a}{r^2}dr = GM_\oplus m_a\left(\frac{1}{R_\oplus} - \frac{1}{R_H}\right).$$

Αν στη συνέχεια αφήσουμε ελεύθερο το σώμα που ανυψώσαμε, θα πέσει στην επιφάνεια της Γης από απόσταση $r = R_H$, και όλη η δυναμική ενέργεια που απέκτησε από την προσπάθειά μας θα μετασχηματιστεί σε κινητική ενέργειά του:

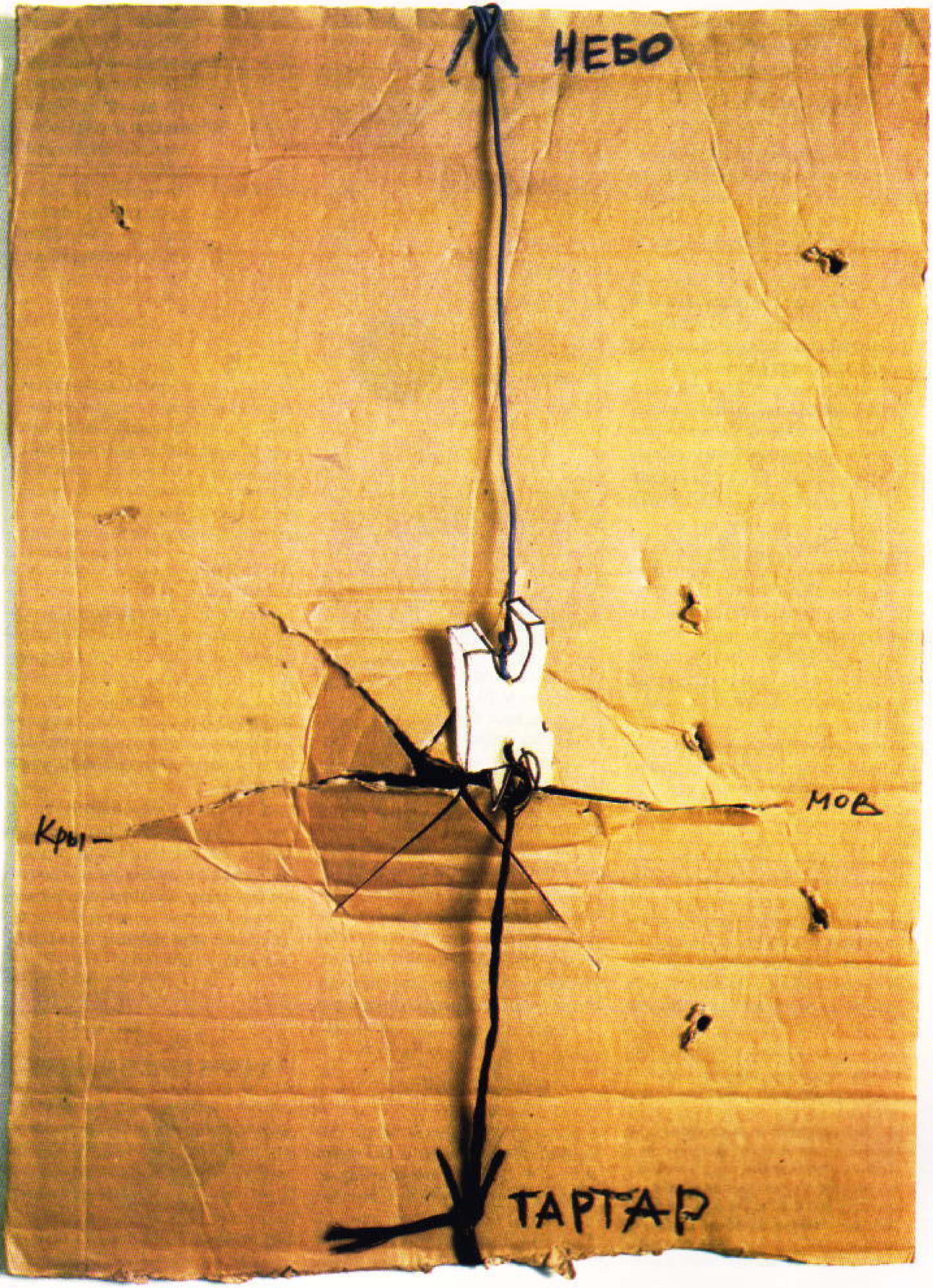
$$\frac{m_a v_\oplus^2}{2} - 0 = GM_\oplus m_a\left(\frac{1}{R_\oplus} - \frac{1}{R_H}\right),$$

όπου $v_\oplus$ είναι η ταχύτητα του σώματος κοντά στην επιφάνεια της Γης, και το μηδέν στο αριστερό μέρος τής εξίσωσης σημαίνει ότι η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι μηδέν.

Παρομοίως, για οποιαδήποτε απόσταση $r < R_H$, ο νόμος διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μπορεί να γρα-

1. Ο Ησίοδος (που έζησε περίπου το 700 π.Χ.) είναι ο πρώτος ποιητής της Δύσης που το όνομά του έφτασε ώς εμάς από την αρχαιότητα.

Εικονογράφηση: Dmitry Krymov



НЕБО
Кры-
мов
ТАРТАР

φτεί ως εξής:

$$\frac{v^2(r)}{2} = GM_{\oplus}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_H}\right)$$

$$= g_{\oplus}R_{\oplus}^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_H}\right).$$

Σ' αυτή την εξίσωση έχουμε απαλείψει τον όρο m_a. Μια άλλη, εξίσου χρήσιμη μορφή αυτής της εξίσωσης είναι η

$$\frac{v^2(r)}{2} + \Phi(r) = 0 + \Phi(R_H),$$

που περιέχει τον όρο του δυναμικού του βαρυτικού πεδίου

$$\Phi(r) = -g_{\oplus}R_{\oplus}^2\frac{1}{r}.$$

Αυτή η μορφή της εξίσωσης απεικονίζει ξεκάθαρα τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, έχοντας γραφτεί ως άθροισμα δυναμικής και κινητικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας.

Οι συναρτήσεις του βαρυτικού δυναμικού $\Phi(r)$ και της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g(r)$ μπορούν να αποδειχτούν τόσο για $r < R_{\oplus}$ όσο και για $r > R_{\oplus}$ (Σχήμα 1). Τις γραφικές τους παραστάσεις θα τις έχετε δει ήδη στα σχολικά σας βιβλία.

Επομένως, το αμόνι, εκτελώντας ελεύθερη πτώση από το «υψόμετρο» της ακτίνας του Ησιόδου R_H, φτάνει σε τυχαίο σημείο πέρα από τη Γη με ταχύτητα

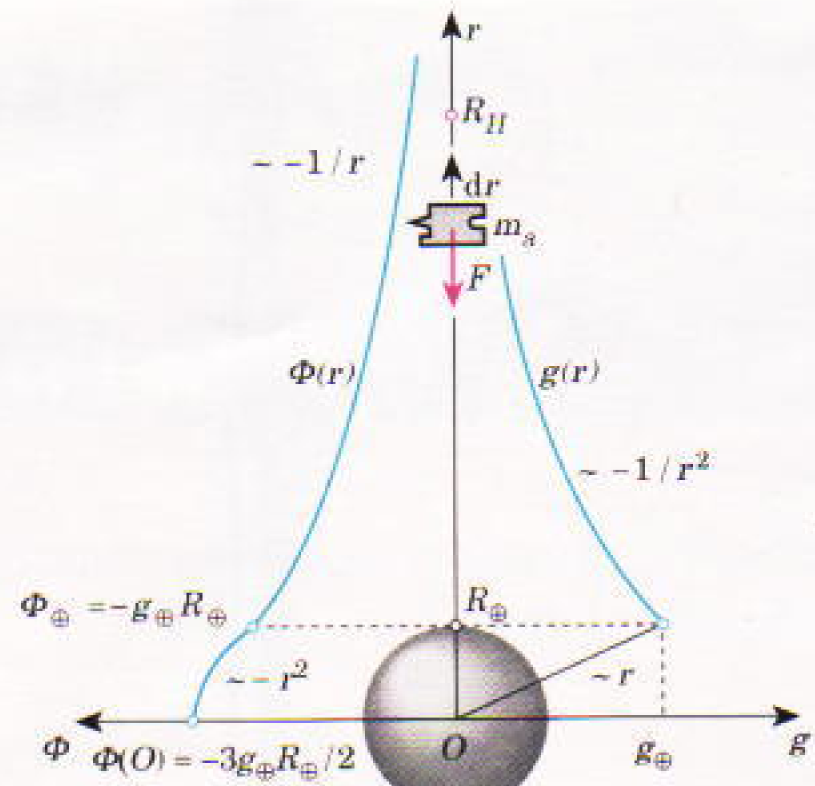
$$v(r) = v_{\delta\iota\alpha\varphi}\sqrt{\left(\frac{1}{r/R_{\oplus}} - \frac{1}{R_H/R_{\oplus}}\right)} = -\frac{dr}{dt}.$$

Εδώ, $v_{\delta\iota\alpha\varphi} = \sqrt{2g_{\oplus}R_{\oplus}} = \sqrt{-2\Phi_{\oplus}}$ είναι η ταχύτητα διαφυγής.[2]

Για να υπολογίσουμε την επιθυμητή απόσταση R_H, πρέπει να ολοκληρώσουμε την παραπάνω εξίσωση:

$$\frac{1}{v_{\delta\iota\alpha\varphi}}\int_{r=R_H}^{R_{\oplus}}\frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{1}{r/R_{\oplus}} - \frac{1}{R_H/R_{\oplus}}\right)}} = -t_1. \quad (1)$$

Παρ' όλα αυτά, είναι λίγο ανιαρό να



Σχήμα 1

υπολογίζουμε ολοκληρώματα —μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποια αποδεκτή προσέγγιση με άλλον τρόπο. Για παράδειγμα, είναι γνωστό πως, καθώς η Σελήνη «πέφτει» προς τη Γη, πραγματοποιεί μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον πλανήτη μας σε 28 ημέρες. (Σ' αυτό το φαινόμενο ο Νεύτων είδε την αναλογία με το μήλο που πέφτει προς τη γη). Έτσι, η Σελήνη μετακινείται από το σημείο P στο σημείο Q (βλ. Σχήμα 2) σε 28/4 = 7 ημέρες. Ίσως δεν είναι τυχαίο που αυτή η τιμή είναι πολύ κοντά στην εκτίμηση των «εννέα ημερών» του Ησιόδου. Αν αυτή η εικασία κάπως ευσταθεί, το σύμπαν του Ησιόδου πρέπει να είχε ως ακτίνα αυτή της τροχιάς της Σελήνης —δηλαδή περίπου 380.000 km ≡ $60R_{\oplus}$.

Μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα (1) σε αδιάστατη μορφή εκφράζοντας όλα τα μήκη σε μονάδες της ακτίνας R_H, την οποία και αναζητούμε:

$$\left(\frac{R_H}{R_{\oplus}}\right)^{3/2}\int_{r=R_{\oplus}}^{R_H}\frac{\sqrt{r/R_H}}{\sqrt{1 - r/R_H}}\,d\left(\frac{r}{R_H}\right) = \frac{v_{\delta\iota\alpha\varphi}t_1}{R_{\oplus}}. \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα με κάποια αδιάστατη σταθερά C, παίρνουμε

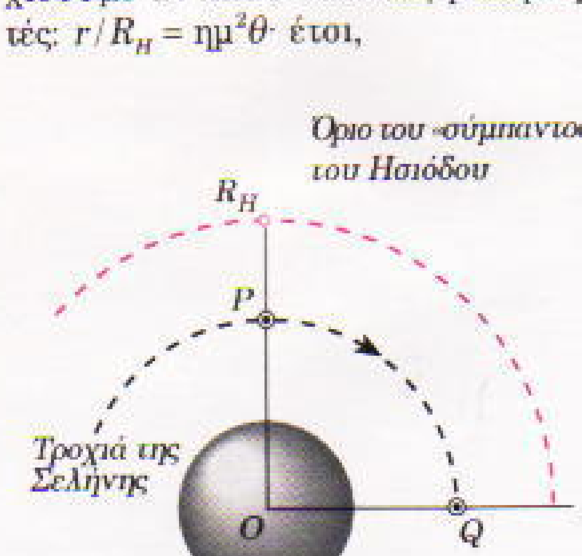
$$\left(\frac{R_H}{R_{\oplus}}\right)^{3/2} = \frac{v_{\delta\iota\alpha\varphi}t_1}{CR_{\oplus}}. \quad (3)$$

Εφόσον η ποσότητα $v_{\delta\iota\alpha\varphi}/CR_{\oplus}$ είναι επίσης σταθερά, αυτή η εξίσωση γραμμένη στη μορφή $R_H^3 \sim t_1^2$, θυμίζει πολύ τον τρίτο νόμο του Kepler, σύμφωνα με τον οποίο ο κύβος του μεγάλου ημιάξονα της ελλειπτικής τροχιάς ενός πλανήτη είναι ανάλογος με το τετράγωνο της περιόδου περιφοράς του γύρω από τον Ήλιο. Φαίνεται σαν να περιφερόμαστε στον ίδιο κύκλο ιδεών. Αντικαθιστώντας τις τιμές $v_{\delta\iota\alpha\varphi} = 11{,}2 \cdot 10^3$ m/s, $t_1 = 9 \cdot 24 \cdot 3.600$ s $= 7{,}8 \cdot 10^5$ s, και $R_{\oplus} = 6{,}4 \cdot 10^6$ m στην εξίσωση (3), παίρνουμε

$$\frac{R_H}{R_{\oplus}} = \frac{123}{C^{2/3}}.$$

Αν υποθέσουμε ότι το αδιάστατο ολοκλήρωμα C (εξίσωση (2)) είναι περίπου ίσο με 1 (συνηθισμένη πρακτική στη διαστασιακή ανάλυση), μπορούμε να πούμε ότι η ακτίνα που αναζητούμε είναι δύο τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από αυτήν της Γης ($R_H = 10^2R_{\oplus}$), και αυτή η τιμή είναι παρόμοια με εκείνη που υπολογίσαμε παραπάνω με τη «σεληνιακή» προσέγγιση.

Αυτοί που εξακολουθούν να θέλουν να υπολογίσουν το μέγεθος του σύμπαντος του Ησιόδου με περισσότερη ακρίβεια πρέπει να ξεπεράσουν τις δυσκολίες υπολογισμού του ολοκληρώματος της εξίσωσης (2). Ας αρχίσουμε αντικαθιστώντας μεταβλητές: $r/R_H = \eta\mu^2\theta$· έτσι,



Σχήμα 1

2. Η ταχύτητα διαφυγής $v_{\delta\iota\alpha\varphi}$ είναι η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να αποκτήσει ένα σώμα στην επιφάνεια της Γης για να διαφύγει το βαρυτικό πεδίο του πλανήτη $\Phi_{\oplus} = -g_{\oplus}R_{\oplus}$ (είναι το δυναμικό αυτού του πεδίου στην επιφάνεια της Γης).

$$\sqrt{1-\frac{r}{R_H}}=\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}=\sigma\upsilon\nu\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{R_H}=2\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$C=\int_{r=R_\oplus}^{R_H}\frac{\sqrt{r/R_H}}{\sqrt{1-r/R_H}}\mathrm{d}\left(\frac{r}{R_H}\right)$$

$$=\int_{\theta=\tau o\xi\eta\mu\sqrt{\frac{R_\oplus}{R_H}}}^{\tau o\xi\eta\mu 1}2\eta\mu^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\theta=\tau o\xi\eta\mu\sqrt{\frac{R_\oplus}{R_H}}}^{\pi/2}(1-\sigma\upsilon\nu2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\left(\theta-\frac{\eta\mu2\theta}{2}\right)\Bigg|_{\tau o\xi\eta\mu\sqrt{\frac{R_\oplus}{R_H}}}^{\pi/2}.$$

Ο παραπάνω υπολογισμός δείχνει ότι η ακτίνα του Ησιόδου είναι μεγαλύτερη από αυτήν της Γης κατά δύο τάξεις μεγέθους —δηλαδή $R_\oplus/R_H \ll 1$. Επομένως, μπορούμε να θέσουμε το κάτω όριο του ολοκληρώματος ίσο με μηδέν: $\tau o\xi\eta\mu(R_\oplus/R_H)\cong 0$. Άρα, $C=\pi/2$. Έτσι,

$$\frac{R_H}{R_\oplus}=\frac{123}{(\pi/2)^{2/3}}\cong 90,$$

που δίνει

$$R_H\cong 6\cdot10^8\ \mathrm{m}.$$

Συνεπώς, το σύμπαν του Ησιόδου συμπεριλαμβάνει ολόκληρη τη σεληνιακή τροχιά και ακόμη περισσότερο —εκτείνεται μιάμιση φορά μακρύτερα.

Φυσικά, αυτή η τιμή απέχει πολύ από σύγχρονους υπολογισμούς του μεγέθους του σύμπαντος· εν τούτοις, δεν είναι αξιοκαταφρόνητη αν θυμηθούμε ότι ο Ησίοδος έζησε πριν από 27 αιώνες και δεν ήταν φυσικός, αλλά ποιητής. Πολύ μεταγενέστεροι μελετητές, μάλιστα, θεωρούσαν ότι η Γη είναι επίπεδη και στηρίζεται στις πλάτες τριών φαλαινών...

Εν τω μεταξύ, το αμόνι συνεχίζει την πτώση του.

Στάδιο 2: Από την επιφάνεια της Γης στα Τάρταρα

Τα πράγματα τώρα είναι πολύ πιο περίπλοκα. Με ποιον τρόπο το αμόνι συνέχισε να πέφτει, σύμφωνα με τη θεώρηση του Ησιόδου; Γνώριζε ο ποιητής για την αντίσταση του αέρα; Ας φανταστούμε τον ίδιο τον Ησίοδο να αναζητεί την απάντηση. Θεωρούμε δύο περιπτώσεις.

1. *Δεν υπάρχει αέρας στη σήραγγα που οδηγεί στα Τάρταρα, και σύμφωνα με την παραδοχή μας, τα Τάρταρα δεν είναι δυνατόν να απέχουν περισσότερο από την επιφάνεια της Γης απ' όσο το κέντρο της.*

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι το αμόνι διαπερνά τη γήινη επιφάνεια τη χρονική στιγμή $t=0$ και εισέρχεται σε μια κατακόρυφη σήραγγα που καταλήγει στο κέντρο του πλανήτη. Για να γράψουμε την εξίσωση κίνησης ενός σώματος υπό την επίδραση της βαρύτητας και μόνο, θυμόμαστε ότι στο εσωτερικό ενός ομογενούς πλανήτη αυτή η δύναμη είναι ανάλογη της απόστασης από το κέντρο του —δηλαδή, $F=-m_\alpha g_\oplus r/R_\oplus$:

$$m_\alpha\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=-m_\alpha g_\oplus\frac{r}{R_\oplus}\ ,$$

ή

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g_\oplus}{R_\oplus}r=0. \qquad (4)$$

Αυτή είναι η εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης με συχνότητα $\omega=\sqrt{g_\oplus/R_\oplus}$, και λύση της είναι η

$$r(t)=A\ \sigma\upsilon\nu\omega t+B\ \eta\mu\omega t.$$

Ας λάβουμε υπόψη μας τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος: για $t=0$ έχουμε

$$r=R_\oplus,$$

$$v(R_\oplus)=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}=-v_H,$$

Έτσι,

$$r(t)=R_\oplus\sigma\upsilon\nu\omega t-\frac{v_H}{\omega}\eta\mu\omega t.$$

Το αμόνι θα φτάσει στο κέντρο της Γης ($r=0$) τη χρονική στιγμή $t=t_2$ (το δεύτερο χρονικό διάστημα της πτώσης του αμονιού). Επομένως, έχουμε

$$0=R_\oplus\sigma\upsilon\nu\omega t_2-\frac{v_H}{\omega}\eta\mu\omega t_2,$$

$$\varepsilon\varphi\omega t_2=\frac{R_\oplus}{v_H}\omega=\frac{1}{\sqrt2},$$

$$t_2=\frac{1}{\omega}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{1}{\sqrt2}=\sqrt{\frac{R_\oplus}{g_\oplus}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{1}{\sqrt2}.$$

Εφόσον, όμως,

$$g_\oplus=G\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2}=G\frac{\frac43\pi R_\oplus^3\langle\rho\rangle}{R_\oplus^2}$$

$$=\frac43\pi GR_\oplus\langle\rho\rangle,$$

όπου $\langle\rho\rangle$ είναι η μέση πυκνότητα της Γης, για το χρόνο t_2 παίρνουμε τον παρακάτω τύπο:

$$t_2=\frac{1}{\sqrt{\langle\rho\rangle}}\sqrt{\frac{3}{4\pi G}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{1}{\sqrt2}.$$

Προσέξτε ότι η διάρκεια της πτώσης από την επιφάνεια στο κέντρο της Γης εξαρτάται μόνο από τη μέση πυκνότητα $\langle\rho\rangle$ του πλανήτη. Σ' αυτό το σημείο, λοιπόν, ο Ησίοδος έκανε λάθος. Είτε θα πρέπει να παραδεχτούμε ότι, σύμφωνα με την τιμή $t_2 = 9$ ημέρες $= 7{,}8\cdot10^5$ s, η πυκνότητα του πλανήτη είναι

$$\langle\rho\rangle=\frac{3}{4\pi G}\left(\frac{\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{1}{\sqrt2}}{t_2}\right)^2$$

$$\cong 2\cdot10^{-3}\ \mathrm{kg/m^3}$$

—δηλαδή, τρεις τάξεις μεγέθους μικρότερη από εκείνη του αέρα (προφανής παραλογισμός)—, είτε ότι το αμόνι φτάνει στο κέντρο της Γης πολύ γρηγορότερα:

$$t_2=\frac{1}{\sqrt{5{,}5\cdot10^3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{4\cdot3{,}14\cdot6{,}67\cdot10^{-11}}}\cdot0{,}616\,\mathrm{s}\cong500\,\mathrm{s}.$$

Βάσει αυτού του υπολογισμού, ο Ησίοδος θα έπρεπε να απορρίψει την παραδοχή πως δεν υπάρχει δύναμη πέδησης. Έτσι, οδηγούμαστε στη δεύτερη περίπτωση.

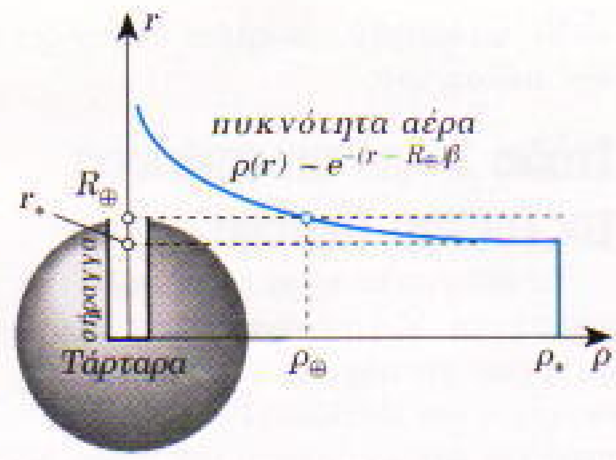
2. *Τελικά, υπάρχει αέρας.*

Τώρα, η εξίσωση κίνησης (4) πρέπει να γραφτεί με μη μηδενικό δεξιό όρο: την αντίσταση του αέρα, διηρημένη με τη μάζα του αμονιού (που είναι ανάλογη της πυκνότητας του αέρα, του τετραγώνου της ταχύτητας του αμονιού, του τετραγώνου της μετωπικής επιφάνειας $S_\perp$ του αμονιού), και την άνωση, η οποία αυξάνει, βεβαίως, εξαιτίας της αναπόφευκτης αύξησης της πυκνότητας ρ του αέρα με το βάθος. Έτσι, έχουμε

$$\frac{dv}{dt}+\frac{g_\oplus}{R_\oplus}r=\frac{\rho(r)v^2(r)S_\perp}{m_a}C_m+\frac{\rho(r)}{\rho^0}\frac{g_\oplus}{R_\oplus}r, \qquad (5)$$

όπου ρ^0 είναι η πυκνότητα του αμονιού: $m_a=\rho^0V_a$ (V_a είναι ο όγκος του). Στην εξίσωση (5) εμφανίζεται ο αδιάστατος συντελεστής αντίστασης C_m, που εξαρτάται από πολλές παραμέτρους, είναι όμως περίπου ίσος με 1. Εντούτοις, ακόμη κι αν αυτός ο συντελεστής θεωρηθεί σταθερός, παραμένει ένα σημαντικό ερώτημα: με ποιον τρόπο η πυκνότητα του αέρα εξαρτάται από το βάθος της σήραγγας, $h=R_\oplus-r$, ή, με άλλα λόγια, από την απόσταση από το κέντρο της Γης;

Είναι γνωστό ότι η εξάρτηση της πυκνότητας του αέρα από το υψόμετρο $h=R_\oplus-r$ πάνω από την επιφάνεια της Γης περιγράφεται από τον βαρομετρικό τύπο του Boltzmann $\rho(h)=\rho_\oplus e^{-mgh/kT}$, όπου T είναι η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας (που δεχόμαστε ότι είναι σταθερή), m είναι η μάζα του μορίου, k είναι η σταθερά του Boltzmann, και $\rho_\oplus \sim 1$ kg/m^3 η τιμή της ρ στην επιφάνεια της Γης (δηλαδή, στο επίπεδο της θάλασσας — Σχήμα 3). Τι εκφράζει ο εκθέτης στην προηγούμενη συνάρτηση; Το λόγο των δύο μορφών ενέργειας: της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας mgh (που είναι μηδέν στην επιφάνεια της θάλασσας) και της μέσης κινητικής ενέργειας kT κάθε μορίου. Ας υποθέσουμε ότι κατασκευάζουμε μια σήραγγα της οποίας τα τοιχώματα βρίσκονται σε σταθερή θερμοκρασία ($T\sim300$ K) και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με $g_\oplus$ για να ακριβολογήσουμε, μειώνεται με το βάθος —Σχήμα 1—, όμως δεν σκοπεύουμε να εμβαθύνουμε τόσο σ' αυτό το σημείο).



Σχήμα 3

Κάτω από αυτές τις συνθήκες, η εξίσωση (5) ισχύει και μας δίνει ένα βάθος $h_* < 0$, όπου ο αέρας είναι τόσο συμπιεσμένος (με πυκνότητα ρ_*), που τα μόριά του αγγίζουν το ένα το άλλο. Το ερώτημα κατά πόσον αυτός ο αέρας μπορεί να θεωρηθεί ρευστός αφορά τη θερμοδυναμική των καταστάσεων της ύλης. Για να έχουμε όμως το κεφάλι μας ήσυχο, θα βάλουμε την έκφραση «ρευστός αέρας» μέσα σε εισαγωγικά. Ας υποθέσουμε ότι η ρ_* είναι της τάξεως της πυκνότητας του νερού ($\sim10^3$ km/m^3). Έτσι, η εξίσωση (5) οδηγεί στην

$$h_*=\frac{kT}{mg_\oplus}\ln\frac{\rho_\oplus}{\rho_*}=\frac{RT}{Mg_\oplus}\ln\frac{\rho_\oplus}{\rho_*}$$

$$=\frac{8{,}31\cdot300}{29\cdot10^{-3}\cdot10}\ln10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$\cong-60\cdot10^3\,\mathrm{m}.$$

Προφανώς, σ' αυτό το βάθος — περίπου 1 % της ακτίνας της Γης — η επιτάχυνση της βαρύτητας δεν έχει μεταβληθεί σημαντικά.

Τι θα συμβεί λοιπόν στο αμόνι; Έχοντας αποκτήσει σχεδόν ταχύτητα διαφυγής κατά την ελεύθερη πτώση του από τα όρια του σύμπαντος του Ησιόδου, θα «χτυπήσει» στην ατμόσφαιρα της Γης και θα αρχίσει να επιβραδύνεται, ενώ θα θερμαίνεται εξαιτίας της τριβής με τον αέρα. Αν κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας δεν λειώσει, καεί και αποσυντεθεί (στο κάτω-κάτω, πρόκειται για τέχνημα του αθάνατου σιδηρουργού Ηφαίστου!), θα εισχωρήσει βαθιά στη σήραγγα, όπου θα συναντά ολοένα πυκνότερο αέρα, και από ύψος h_* (ή $r_*=R_\oplus-h_*$) θα κινείται μέσα σε σχεδόν «ρευστό» αέρα. Είναι φανερό ότι το αμόνι θα διασχίσει στρώμα αέρα χαρακτηριστικού πάχους 10 km σε 1 περίπου δευτερόλεπτο. Για μερικές δεκάδες (ή εκατοντάδες) δευτερόλεπτα θα πέφτει σε ακόμη πυκνότερο αέρα μέσα στη σήραγγα, ώσπου όλη η κινητική ενέργεια του αμονιού να δαπανηθεί σε έργο ενάντια στην αντίσταση του αέρα. Το γεγονός ότι αγνοούμε επιδεικτικά το χρόνο που χρειάζεται το αμόνι για να «συνηθίσει» τις καινούργιες συνθήκες πτώσης του (στην τεχνική ορολογία συχνά ονομάζεται «χρόνος αποκατάστασης») αντανακλά απλώς την ελπίδα μας ότι ο χρόνος αποκατάστασης είναι μικρός σε σύγκριση με τους t_1 και t_2, καθώς επίσης και την απροθυμία μας να διαθέσουμε το χρόνο, την ενέργεια και το χαρτί που απαιτούνται για να το αποδείξουμε (παρεμπιπτόντως, δεν είναι πολύ δύσκολο).

Η περαιτέρω κίνηση του αμονιού μέσα στον «ρευστό αέρα» πυκνότητας ρ_* θα χαρακτηρίζεται από την ισορροπία όλων των ενεχόμενων δυνάμεων: βαρύτητα, άνωση, και αντίσταση του αέρα. Έτσι, η εξίσωση (5) οδηγεί στην

$$\frac{\rho_*v^2(r)S_\perp C_m}{m_a}=\frac{g_\oplus}{R_\oplus}r\left(1-\frac{\rho_*}{\rho^0}\right)$$

από την οποία παίρνουμε

$$v(r)=\sqrt{r}\,\frac{v_{\delta\iota\alpha\varphi}}{R_\oplus\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho^0}{\rho_*}-1}\sqrt{\frac{m_a}{\rho^0S_\perp C_m}}$$

$$=-\frac{dr}{dt}.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^{t_2}\frac{v_{\delta\iota\alpha\varphi}}{R_\oplus\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho^0}{\rho_*}-1}\sqrt{\frac{m_a}{\rho^0S_\perp C_m}}\,dt=$$

$$-\int_{R_\oplus}^{0}\frac{dr}{\sqrt{r}}.$$

Από αυτή την εξίσωση προκύπτει η ζητούμενη τιμή του χρόνου t_2 που χρειάζεται το αμόνι για να φτάσει μέχρι το κέντρο της Γης:

$$t_2=\frac{R_\oplus^{3/2}2\sqrt{2}}{\upsilon_{\delta\iota\alpha\varphi}\sqrt{\frac{\rho^0}{\rho_*}-1}\sqrt{\frac{V_a}{S_\perp C_m}}}.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την τάξη μεγέθους του t_2 αντικαθιστώντας τα αριθμητικά δεδομένα $\rho^0/\rho_- \sim 1-10$, $V_z/S_+ \sim 1$ m, και $C_m \sim 1$. Αυτά μας δίνουν $t_2 \sim 10^6$ s, που είναι πολύ κοντά στην τιμή των «εννέα ημερών» του Ησιόδου. Όσοι αρέσκονται να «παίζουν» με υπολογιστές μπορούν να πάρουν μια πιο ακριβή λύση της εξίσωσης (5). Κάποιοι άλλοι ίσως συλλογιστούν τον τρόπο με τον οποίο αρχαίοι ποιητές μπορούν να μας παρακινήσουν να μελετήσουμε ορισμένα φυσικά φαινόμενα. Η ποίηση και η φυσική απέχουν τελικά τόσο πολύ μεταξύ τους;

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

Το Quantum εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει 13 τεύχη. Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύεστε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους.

Το Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης· φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ QUANTUM

Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα
Τηλ.: 3643272, 3645098. Fax: 3641864

Βιβλιοπωλείο:
Νέα στοά Αρσακείου (Πανεπιστημίου 49), 105 64 Αθήνα
Τηλ.: 3247785

Πρόγραμμα κατασκευών

Κανονικά πολύγωνα, η συνάρτηση Euler και οι αριθμοί Fermat

Alexander Kirillov

Το ΑΡΘΡΟ ΑΥΤΟ ΔΗΜΟΣΙΕΥΕΤΑΙ με αφορμή τη συμπλήρωση διακοσίων ετών από το πρώτο μεγάλο επίτευγμα του Carl Friedrich Gauss: την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ενός κανονικού 17-γώνου. Ο νεαρός Gauss εντυπωσιάστηκε τόσο πολύ από την ανακάλυψη, ώστε αποφάσισε να γίνει μαθηματικός. Έτσι, αυτή η κατασκευή ήταν ένα κρίσιμο γεγονός για την ιστορία των μαθηματικών αλλά και για τη ζωή του. Γνωρίζουμε μάλιστα την ακριβή ημερομηνία —31 Μαρτίου 1795 (ο Gauss άρχισε να γράφει το ημερολόγιό του αυτή την ημέρα). Αργότερα, ανέπτυξε τη μέθοδό του σε μια σπουδαία και όμορφη θεωρία, και απέδειξε την κατασκευασιμότητα των κανονικών n-γώνων, για όλα τα n μιας ειδικής μορφής που περιγράφονται σε συνάρτηση με τους πρώτους αριθμούς του Fermat. Το παρόν άρθρο προσεγγίζει το πρόβλημα από διαφορετική κατεύθυνση: εξηγεί γιατί τα κανονικά πολύγωνα κατασκευάζονται μόνο γι' αυτές τις τιμές του n.

Πρόλογος

Οι γεωμετρικές κατασκευές είναι ένα από τα δημοφιλέστερα είδη προβλημάτων στα σχολικά μαθηματικά —και αυτό δεν είναι καθόλου τυχαίο. Η ιστορία των γεωμετρικών κατασκευών διαρκεί αρκετές χιλιετίες, και ήδη στην αρχαία Ελλάδα αυτή η μαθηματική τέχνη έφτασε σε εξαιρετικά υψηλό επίπεδο. Αρκεί να ανα-

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

φέρουμε το περίφημο πρόβλημα του Απολλώνιου: *κατασκευάστε έναν κύκλο που εφάπτεται σε τρεις δεδομένους κύκλους.*

Πιστεύω ότι πολλοί αναγνώστες έχουν ακούσει για τα τρία περίφημα προβλήματα της αρχαιότητας που τελικά αποδείχτηκαν μη επιλύσιμα: τον τετραγωνισμό του κύκλου, την τριχοτόμηση της γωνίας και το διπλασιασμό του κύβου. Το ωραιότερο όλων είναι ίσως το πρόβλημα της κατασκευής κανονικών πολυγώνων. Στην πραγματικότητα, δεν είναι *ένα* πρόβλημα, αλλά μια ολόκληρη σειρά προβλημάτων: *για κάθε ακέραιο $n \geq 3$, πρέπει να κατασκευάσουμε ένα κανονικό n-γωνο χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη.*

Για μερικές τιμές του n είναι ένα πολύ απλό πρόβλημα (π.χ., για $n = 3$, 4, 6, 8, 12), ενώ για μερικές άλλες είναι κάπως πιο δύσκολο ($n = 5$, 10, 15 —θα εξηγήσω αργότερα τον τρόπο κατασκευής του κανονικού δεκαγώνου και πενταγώνου). Υπάρχουν, όμως, τιμές του n για τις οποίες το πρόβλημα είναι εξαιρετικά δύσκολο ($n = 17$ ή 257), και τιμές του n για τις οποίες το πρόβλημα δεν έχει λύση (π.χ. για $n = 7$, 9, 11).

Ας γράψουμε μερικούς ακεραίους ξεκινώντας από το $n = 3$ και ας τονίσουμε με κόκκινο χρώμα τις τιμές εκείνες για τις οποίες κατασκευάζεται ένα κανονικό n-γωνο με κανόνα και διαβήτη:

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, ...

Υπάρχει κάποιος νόμος που καθορίζει την κατανομή των μαύρων και των κόκκινων αριθμών; Πράγματι υπάρχει, αλλά η ανακάλυψή του είναι αρκετά δύσκολη. Η φύση αυτού του νόμου είναι αριθμητική —για να τον περιγράψουμε, πρέπει να αφήσουμε προσωρινά τη γεωμετρία και να εξετάσουμε μερικές πλευρές της θεωρίας αριθμών, του ανώτερου κλάδου της αριθμητικής.

Η συνάρτηση Euler

Ο Leonhard Euler, ο περίφημος μαθηματικός του 18ου αιώνα, ήταν από τους πρώτους που παρατήρησαν ότι το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι από έναν δεδομένο n και πρώτοι ως προς n μας προσφέρει ένα χρήσιμο και σημαντικό αριθμητικό χαρακτηριστικό του n. Ο Euler εισήγαγε το συμβολισμό $\varphi(n)$ γι' αυτό τον αριθμό, και έκτοτε η συνάρτηση $n \to \varphi(n)$ αναφέρεται ως *συνάρτηση Euler*. Για παράδειγμα, υπάρχουν τέσσερις αριθμοί που είναι μικρότεροι και πρώτοι ως προς τον $n = 10$: οι 1, 3, 7, και 9. Επομένως, $\varphi(n) = 4$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8	12
n	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$\varphi(n)$	10	22	8	20	12	24	12	28	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24	16	40	12

Η συνάρτηση φ έχει πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Ο ίδιος ο Euler ανακάλυψε μία από αυτές: *αν m και n είναι σχετικά πρώτοι αριθμοί, τότε*

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n). \qquad (1)$$

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι *για κάθε πρώτο p*: $\varphi(p) = p - 1$, $\varphi(p^2) = p^2 - p$, *και γενικά*

$$\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1). \qquad (2)$$

Οι παραπάνω ιδιότητες αρκούν για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση Euler. Αυτό είναι αρκετά εύκολο για μικρές τιμές του n —για παράδειγμα,

$$\varphi(10) = \varphi(2)\varphi(5) = 1 \cdot 4 = 4$$
$$\varphi(100) = \varphi(4)\varphi(25) = 2 \cdot 20 = 40.$$

Οι πρώτες 42 τιμές της $\varphi(n)$ παρουσιάζονται στον παραπάνω πίνακα. Συγκρίνετε αυτά τα δεδομένα με την προηγούμενη ακολουθία των κόκκινων και μαύρων αριθμών. Τώρα, η σχέση μεταξύ του «χρώματος» ενός αριθμού n και της τιμής τής $\varphi(n)$ είναι σχεδόν προφανής. Βλέπουμε πως, όταν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί ένα κανονικό n-γωνο με κανόνα και διαβήτη, τότε η $\varphi(n)$ είναι δύναμη του 2. Αυτή η παρατήρηση αποδεικνύεται ότι αποτελεί αναγκαία και ικανή συνθήκη για την κατασκευασιμότητα ενός κανονικού n-γώνου.

Δεν θα δώσω εδώ αυστηρή απόδειξη αυτού του γεγονότος. Θα παρουσιάσω, όμως, απλά και πειστικά επιχειρήματα που το υποστηρίζουν. Παρόμοιοι συλλογισμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σε πολλά άλλα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών —για παράδειγμα, στην τριχοτόμηση της γωνίας.

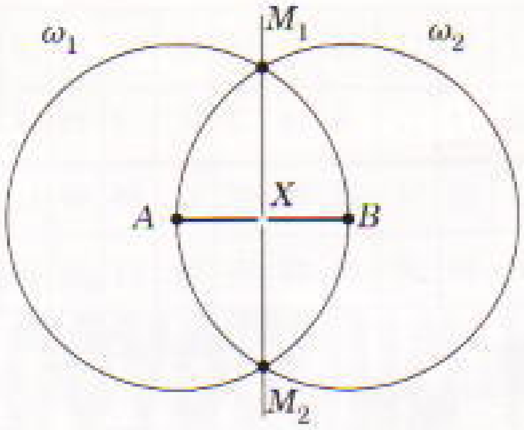
Τι σημαίνει «κατασκευή»;

Πριν αρχίσουμε να μελετούμε το πρόβλημα του τι είναι κατασκευάσιμο, χρειάζεται να εξηγήσουμε τι σημαίνει «κατασκευάσιμο». Δηλαδή, θα ήταν χρήσιμο να δώσουμε μια ακριβή διατύπωση των κανόνων κατασκευής με κανόνα και διαβήτη. Για παράδειγμα, ο κανόνας μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για τη χάραξη ευθειών που διέρχονται από ένα ζεύγος σημείων —έχει απλώς μια ευθεία πλευρά, χωρίς ενδείξεις. Παρόμοια, ο διαβήτης μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για το σχεδιασμό κύκλων με δεδομένη ακτίνα και κέντρο. Αυτά τα στοιχεία, όμως, έχουν επανειλημμένα σχολιαστεί στη βιβλιογραφία, και έτσι εδώ θα περιοριστώ σ' αυτές τις σύντομες υπομνήσεις και θα στηριχτώ στη διαίσθηση του αναγνώστη.

Αυτό που με ενδιαφέρει περισσότερο είναι το γεγονός ότι το καθαρό αποτέλεσμα της επίλυσης ενός προβλήματος κατασκευής είναι (τουλάχιστον θεωρητικά) μια ακολουθία στοιχειωδών πράξεων που θυμίζουν πρόγραμμα υπολογιστή.

Για παράδειγμα, το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB κατασκευάζεται μέσω του εξής «προγράμματος» (Σχήμα 1):

1. Σχεδιάζουμε με το διαβήτη έναν κύκλο ω_1, κέντρου A και ακτίνας AB.
2. Σχεδιάζουμε με το διαβήτη έναν κύκλο ω_2, κέντρου B και ακτίνας BA.
3. Ονομάζουμε M_1 και M_2 τα σημεία τομής των κύκλων ω_1 και ω_2.
4. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα για να φέρουμε την ευθεία γραμμή M_1M_2.
5. Ονομάζουμε X το σημείο τομής των M_1M_2 και AB.

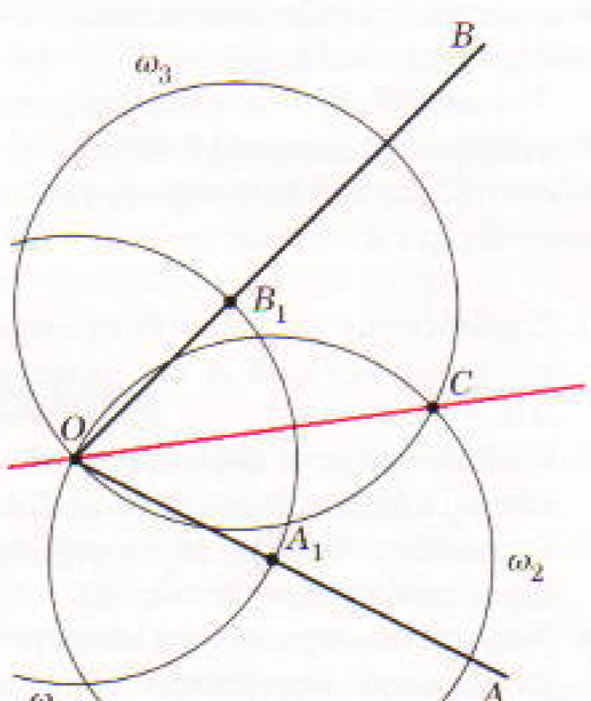


Σχήμα 1

Ιδού ένα άλλο παράδειγμα: η κατασκευή της διχοτόμου μιας δεδομένης γωνίας *AOB* (Σχήμα 2). Το αντίστοιχο σύστημα εντολών παίρνει την εξής μορφή:

1. Χρησιμοποιούμε το διαβήτη για να κατασκευάσουμε έναν κύκλο ω_1, κέντρου *O* και τυχαίας ακτίνας *R*.
2, 3. Ονομάζουμε A_1 και B_1 τα σημεία τομής αυτού του κύκλου με τις ευθείες *OA* και *OB*, αντίστοιχα.
4, 5. Χρησιμοποιούμε το διαβήτη για να κατασκευάσουμε κύκλους ω_2 και ω_3, κέντρων A_1 και B_1 και ακτίνας *R*.
6. Ονομάζουμε *C* το άλλο σημείο τομής των κύκλων ω_2 και ω_3 (δηλαδή, όχι το *O*).
7. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα για να σχεδιάσουμε την ευθεία *OC*.

Σ' αυτή την περίπτωση, όμως, τα βήματα 2 και 3 του προγράμματος δεν είναι διατυπωμένα με ακρίβεια. Το πρόβλημα είναι ότι ο κύκλος ω_1 τέμνει καθεμία από τις ευθείες *OA* και *OB* σε δύο σημεία, και δεν είναι σαφές ποιο πρέπει να ονομάσουμε A_1 και ποιο B_1. Εδώ μπορεί να ισχυριστείτε ότι το πρόγραμμα θα έπρεπε να αναφέρεται στις *ημιευθείες OA* και *OB*, που τέμνουν τον κύκλο σε ένα μόνο σημείο. Η έννοια της «ημιευθείας», όμως, βρίσκεται πέρα από τα όρια κατανόησης του «κατασκευαστικού μηχανήματός» μας, το οποίο μπορεί να αντιληφθεί μόνο την έννοια της «ευθείας».



Σχήμα 2

Ας δούμε τι συμβαίνει όταν με τον όρο «σημείο τομής» εννοούμε «κάθε σημείο τομής». Σ' αυτή την περίπτωση το πρόγραμμά μας θα δημιουργήσει το Σχήμα 3: αντί για τα σημεία A_1 και B_1 έχουμε δύο νέα σημεία για κάθε παλιό: A_1', A_1'' και B_1', B_1''. Και αντί για ένα και μοναδικό σημείο *C*, έχουμε τέσσερα διαφορετικά σημεία C', C'', C''', και C''''. Πάντως, δεν οδηγούμαστε σε τέσσερις, αλλά σε δύο διαφορετικές απαντήσεις: οι ευθείες OC' και OC''' συμπίπτουν, καθώς και οι OC'' και OC''''.

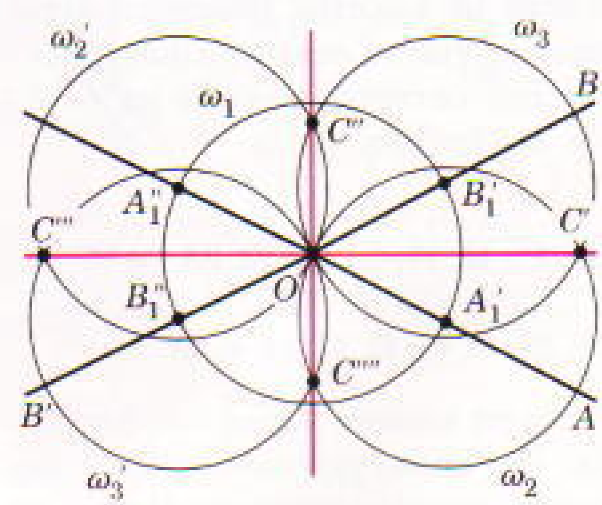
Πόσες διαφορετικές απαντήσεις μπορεί να δώσει, λοιπόν, ένα πρόγραμμα που επιλύει ένα δεδομένο πρόβλημα κατασκευής; Όλα τα προγράμματα αυτού του είδους αποτελούνται από στοιχειώδεις πράξεις. Αυτές είναι μόνο πέντε: η χάραξη μιας ευθείας που διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία, ο σχεδιασμός ενός κύκλου δεδομένου κέντρου και ακτίνας, ο προσδιορισμός των σημείων τομής δύο ευθειών, των σημείων τομής μιας ευθείας και ενός κύκλου, και των σημείων τομής δύο κύκλων. Οι πρώτες τρεις πράξεις δίνουν μία μόνο τιμή· οι τελευταίες δύο περιέχουν μία δίτιμη απροσδιοριστία.[1]

Αν ένα πρόγραμμα αποτελείται μόνο από μονότιμες πράξεις, παίρνουμε μία και μοναδική απάντηση. Αν περιέχει μία δίτιμη πράξη, οδηγούμαστε σε δύο υλοποιήσεις του προγράμματος (όπως στο προηγούμενο παράδειγμα). Και γενικά, αν το πρόγραμμα περιέχει *k* δίτιμες πράξεις, μπορεί να υλοποιηθεί με 2^k τρόπους.

Είδαμε ότι μερικές φορές οι αμφιβολίες «εξαλείφονται» χωρίς να επηρεάζουν την τελική απάντηση. Αποδεικνύεται, όμως, ότι αυτό γίνεται με τέτοιον τρόπο ώστε η προκύπτουσα απροσδιοριστία να είναι πάντα 2^{ℓ}-πλή ($\ell \leq k$). Αυτός ο εναρμονισμός είναι περισσότερο αλγεβρικής παρά γεωμετρικής φύσης (ο αντίστοιχος κλάδος της άλγεβρας ονομάζεται θεωρία Galois) και είναι δυνατόν να αποδειχτεί αυστηρά —αυτό, όμως, δεν περιλαμβάνεται στους στόχους τούτου του άρθρου.

Ας επιστρέψουμε στην κατασκευή της διχοτόμου. Το πρόγραμμά μας εκτός από τη διχοτόμο της γωνίας *AOB* κατασκευάζει και τη διχοτόμο της «εξωτερικής» (δηλαδή, της προσκείμενης) γωνίας (Σχήμα 3). Αυτή δεν πρέπει να θεωρηθεί πλεονάζουσα λύση. Από την άποψη του κανόνα και του διαβήτη που «καταλαβαίνουν» τις γωνίες μόνο ως ζεύγη ευθειών, η εξωτερική γωνία είναι εξίσου καλή με την αρχική γωνία *AOB*. Αν προσπαθήσουμε να ορίσουμε τη διχοτόμο με βάση όρους «κατανοητούς» από τον κανόνα και το διαβήτη, θα διαπιστώσουμε ότι η εξωτερική διχοτόμος ικανοποιεί τον ορισμό εξίσου καλά με την «κανονική», εσωτερική διχοτόμο.

Η φύση αυτού του φαινομένου είναι γενική. Από τη στιγμή που το πρόβλημα διατυπώνεται κατάλληλα, και οι 2^{ℓ} λύσεις που δημιουργεί ένα πρόγραμμα με απροσδιοριστίες δεν είναι πλεονάζουσες αλλά «γνήσιες».



Σχήμα 3

Για παράδειγμα, το πρόβλημα της *«εγγραφής ενός κύκλου σε τρίγωνο»* λύνεται από ένα πρόγραμμα με 16-πλή απροσδιοριστία (κατασκευάζουμε τις διχοτόμους δύο γωνιών), που οδηγεί σε τέσσερις διαφορετικές α-

1. Φυσικά, δύο κύκλοι ή ένας κύκλος και μία ευθεία μπορούν να είναι ξένοι μεταξύ τους ή να εφάπτονται (σε ένα μόνο σημείο). Μπορούμε να συμπεριλάβουμε αυτές τις περιπτώσεις στο γενικό σχήμα, αλλά εδώ είναι προτιμότερο να τις αγνοήσουμε.

παντήσεις (έναν εγγεγραμμένο και τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλους). Όλοι τους είναι εξίσου «νόμιμοι», αν το πρόβλημα διατυπωθεί ως «κατασκευή ενός κύκλου που εφάπτεται σε τρεις δεδομένες ευθείες». Η διαφορά μεταξύ εγγεγραμμένων και παρεγγεγραμμένων κύκλων βασίζεται στην έννοια του «μεταξύ» (ή του «εσωτερικού»), που είναι πέρα από την κατανόηση του «υπολογιστή» μας.

Τα παραδείγματα που εξετάσαμε παραπάνω φανερώνουν πως, όταν ένα πρόβλημα κατασκευής έχει αρκετές λύσεις, το πρόγραμμα κατασκευών τις δημιουργεί όλες. Αυτό αληθεύει και στη γενική περίπτωση.

Ένα διαφωτιστικό παράδειγμα: η γεωμετρική κατασκευή της ρίζας μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης μας δίνει αυτόματα και τη δεύτερη ρίζα.

Καταλήγουμε, επομένως, στην εξής αρχή: *κάθε επιλύσιμο πρόβλημα κατασκευής με κανόνα και διαβήτη έχει 2^{ℓ} λύσεις για κάποιον ακέραιο ℓ.*

Η αυστηρή απόδειξη αυτού του ισχυρισμού δίνεται στη θεωρία Galois και δεν είναι δυνατόν να την παρουσιάσουμε εδώ. Ο ίδιος ο ισχυρισμός, όμως, μοιάζει εξαιρετικά απλός, και θα ήταν τελείως φυσικό να έχει ανακαλυφθεί από τους μαθηματικούς της αρχαιότητας. Έτσι, προκύπτει το ερώτημα γιατί η ανακάλυψη επιτεύχθηκε μόλις τον προηγούμενο αιώνα, παρότι υπήρχαν εδώ και χιλιάδες χρόνια πολλά παραδείγματα που την επιβεβαίωναν. (Για παράδειγμα, το πρόβλημα του Απολλώνιου που αναφέραμε παραπάνω έχει, γενικά, οκτώ λύσεις.)

Μια πιθανή ερμηνεία είναι ότι οι γεωμέτρες του παρελθόντος δεν φαντάστηκαν ποτέ τη σύγχρονη, «μέσω υπολογιστή», αντιμετώπιση του προβλήματος.[2] Μια άλλη αιτία είναι ότι εξέταζαν κάθε μεμονωμένο πρόβλημα ξεχωριστά, και όχι μια ολόκληρη σειρά όμοιων προβλημάτων (όπως την κατασκευή των κανονικών n-γώνων για κάθε n).

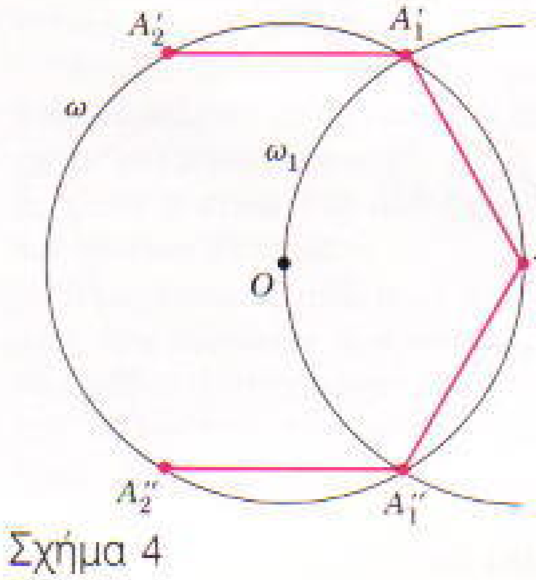
Μπορεί το ερώτημα αυτό να προσελκύσει την προσοχή των ιστορικών των μαθηματικών, οι οποίοι ίσως κατορθώσουν να μας εξηγήσουν πληρέστερα γιατί χάθηκε αυτή η ευκαιρία.

Κανονικά πολύγωνα

Ας επιστρέψουμε στο κύριο πρόβλημά μας. Θέλουμε να μάθουμε πότε είναι δυνατή η κατασκευή ενός κανονικού n-γώνου με κανόνα και διαβήτη. Οι προηγούμενοι συλλογισμοί μάς οδηγούν να ερευνήσουμε το πιθανό πλήθος λύσεων αυτού του προβλήματος. Για να καταλήξουμε σε μια εύλογη απάντηση, πρέπει να βελτιώσουμε τη διατύπωσή του. Ας σταθεροποιήσουμε το *μέγεθος* και τη *θέση* του επιθυμητού n-γώνου (διαφορετικά, θα υπάρχουν σίγουρα άπειρες λύσεις από τη στιγμή που θα υπάρχει τουλάχιστον μία). Για να το επιτύχουμε αυτό θεωρούμε σταθερό τον περιγεγραμμένο κύκλο ω του n-γώνου μας καθώς και τη θέση μιας από τις κορυφές του, έστω της A_0. Τώρα, πρέπει να βρούμε τη θέση των υπόλοιπων $n-1$ κορυφών $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Προφανώς, αρκεί να βρούμε τη θέση της A_1: ορίζοντας διαδοχικά τόξα ίσα με το A_0A_1, θα βρούμε τα σημεία $A_2, A_3, A_4, \ldots$ στον κύκλο.

Η ευκολότερη περίπτωση προκύπτει για $n = 6$. Το μήκος της πλευράς ενός κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ισούται με την ακτίνα του κύκλου. Έτσι, το ζητούμενο «πρόγραμμα» ανάγεται τελικά σε δύο βήματα (Σχήμα 4 —από εδώ και στο εξής το O είναι κέντρο του κύκλου ω):

1. Χρησιμοποιούμε το διαβήτη για να σχεδιάσουμε έναν κύκλο ω_1 με κέντρο A_0 και ακτίνα OA_0.
2. Ονομάζουμε A_1 το σημείο τομής των κύκλων ω και ω_1.



Σχήμα 4

Βλέπουμε ότι με αυτό το πρόγραμμα προκύπτουν δύο σημεία (A_1' και A_1'' στο Σχήμα 4), αλλά τα αντίστοιχα εξάγωνα $A_0A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$ και $A_0A_1''A_2''A_3''A_4''A_5''$ διαφέρουν μόνο ως προς τη σειρά αρίθμησης των κορυφών τους.

Το ίδιο ισχύει για $n = 3$ και $n = 4$. Οι περιπτώσεις $n = 5$ και $n = 10$ έχουν περισσότερο ενδιαφέρον. Ας εξετάσουμε την $n = 10$.

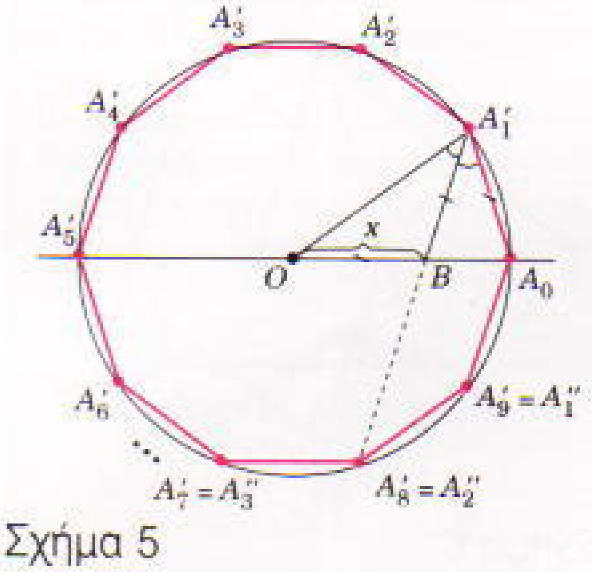
Υποθέτουμε ότι ξεκινάμε με ένα τυχαίο δεκάγωνο $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$, εγγεγραμμένο σε κύκλο. Χαράσσουμε τη διχοτόμο A_1B της γωνίας OA_1A_0 στο τρίγωνο OA_0A_1 (δείτε το Σχήμα 5, όπου η κορυφή A_1 συνοδεύεται από έναν τόνο που θα μας χρησιμεύσει αργότερα). Εύκολα διαπιστώνουμε (για παράδειγμα, με άμεσους υπολογισμούς γωνιών) ότι τα OA_1B και BA_1A_0 είναι ισοσκελή τρίγωνα (επομένως, $OB = BA_1 = A_1A_0$) και ότι τα τρίγωνα OA_1A_0 και A_1A_0B είναι όμοια. Ας θεωρήσουμε την ευθεία OA_0 ως άξονα αριθμών με αρχή το O και με σημείο 1 το A_0. Έστω ότι το σημείο B αντιστοιχεί στον αριθμό x. Τότε, από την ομοιότητα των τριγώνων που αναφέραμε προηγουμένως, έχουμε

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x},$$

ή

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Αν επιλύσουμε αυτή την εξίσωση, βρίσκουμε έναν αριθμό που, όπως αποδεικνύεται, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε. Τότε, μπορούμε να βρούμε το σημείο B, και το ζητούμενο σημείο A_1 κατασκευάζεται ως τομή του δεδομένου κύκλου ω και του



Σχήμα 5

2. Με την ευκαιρία, μπορούμε να αναφέρουμε ότι οι υπολογιστές πραγματεύονται τις κατασκευές μέσω πρόσφατων προγραμμάτων όπως του "Geometer's Sketchpad" και του "Cabri Geometry".

κύκλου κέντρου A_0 και ακτίνας x. Υπάρχουν δύο τέτοια σημεία —δηλαδή, δύο λύσεις A_1' και A_1'' (Σχήμα 5).

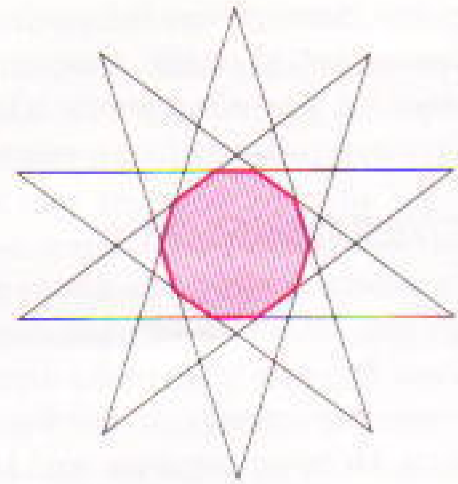
Η εξίσωσή μας, όμως, έχει δύο ρίζες: $x_1 = (-1 + \sqrt{5})/2$ και $x_2 = -(1 + \sqrt{5})/2$. Η δεύτερη ρίζα είναι αρνητική, και γι' αυτό το λόγο φαίνεται ότι πρέπει να την αγνοήσουμε. Πριν βιαστούμε να την απορρίψουμε, όμως, ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε τη γεωμετρική της σημασία.

Ας ξανασχεδιάσουμε το Σχήμα 5, υποθέτοντας ότι το σημείο B δεν βρίσκεται δεξιά αλλά αριστερά του O και σε απόσταση $|x_2|$. Θα πάρουμε το Σχήμα 6, στο οποίο έχουμε δύο νέες δυνατές θέσεις για το σημείο A_1, τις A_1''' και A_1''''.

Συνολικά, ανακαλύψαμε τέσσερις διαφορετικές δυνατότητες για τη θέση του A_1, από τις οποίες προκύπτουν δύο διαφορετικά δεκάγωνα —ένα κυρτό και ένα αστεροειδές. Οι κορυφές τους μπορούν να αριθμηθούν με δύο διαφορετικούς τρόπους (δείτε τα Σχήματα 5 και 6).

Παρατηρήστε ότι από την «οπτική γωνία» της μεθόδου του κανόνα και του διαβήτη, το αστεροειδές δεκάγωνο είναι εξίσου «νόμιμο» με το κυρτό.

Πιθανώς θα υποστηρίξετε ότι οι μη προσκείμενες πλευρές του κυρτού δεκαγώνου δεν έχουν κοινά σημεία, ενώ στο αστεροειδές τέμνονται. Αλλά αυτή η ένσταση καταρρίπτεται αν ως «πλευρά» του πολυγώνου θεωρήσουμε ολόκληρη την ευθεία γραμμή που συνδέει δύο κορυφές και όχι το μεταξύ τους ευθύγραμμο τμήμα (δεν μας απασχολεί το «ενδιάμεσο»!). Τότε, η σωστή σχεδίαση ενός «κυρτού» δεκαγώνου θα διαφέρει από εκείνη του αστεροειδούς μόνο ως προς το μέγεθος (Σχήμα 7).



Σχήμα 7

Μια παρόμοια κατάσταση προκύπτει στην περίπτωση των πενταγώνων. Και εδώ βρίσκουμε τέσσερις λύσεις απ' όπου προκύπτουν δύο διαφορετικά πεντάγωνα (Σχήμα 8), με δύο διαφορετικές αριθμήσεις το καθένα.

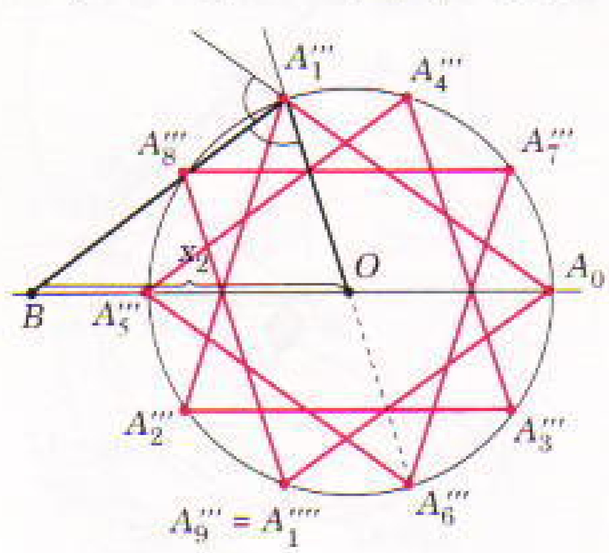
Μπορούμε τώρα, χωρίς να κατασκευάσουμε πραγματικά ένα τυχαίο n-γωνο, να προσπαθήσουμε να βρούμε το πλήθος των λύσεων του προβλήματος για δεδομένο n. (Θυμηθείτε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος και η κορυφή A_0 θεωρούνται σταθερά.) Συμβολίζουμε με x το μήκος του τόξου A_0A_1. Το σημείο A_1 είναι λύση του προβλήματός μας (από την «οπτική γωνία» του διαβήτη) αν, ξεκινώντας από το το A_0 και σημειώνοντας n φορές διαδοχικά τόξα μήκους x, επιστρέφουμε ξανά στο σημείο A_0, ενώ ταυτόχρονα είναι αδύνατον να επιστρέψουμε στο A_0 αν το κάνουμε αυτό λιγότερο από n φορές. (Η τελευταία συνθήκη είναι ουσιώδης —διαφορετικά, στην περίπτωση κατά την οποία, για παράδειγμα, $n = 6$, θα ήμασταν υποχρεωμένοι να θεωρήσουμε «κανονικά εγγεγραμμένα εξάγωνα» αντικείμενα, όπως ένα τρίγωνο που το διατρέχουμε δύο φορές, τη διάμετρο που τη διατρέχουμε τρεις φορές, ακόμη και ένα σημείο A_0 επαναλαμβανόμενο έξι φορές.)

Με αριθμητικούς όρους, και αν υποθέσουμε ότι η περιφέρεια του περιγεγραμμένου κύκλου έχει μοναδιαίο μήκος, η συνθήκη για το x διατυπώνεται ως εξής: *ο nx είναι ακέραιος και οι αριθμοί x, $2x$, $3x$, ..., $(n - 1)x$ δεν είναι ακέραιοι.*

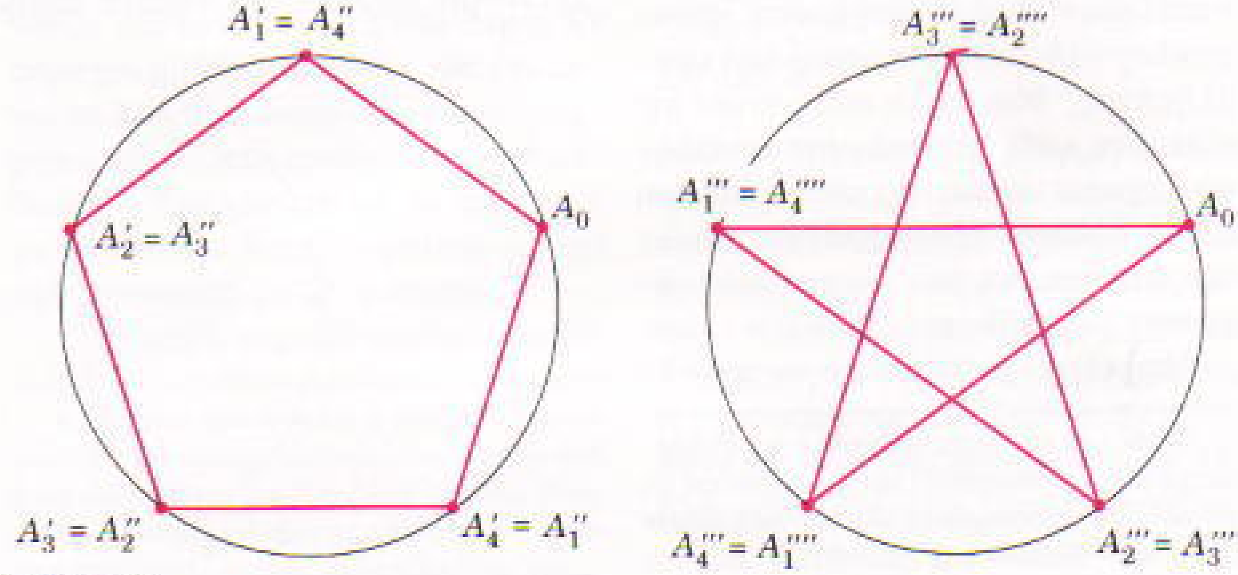
Για παράδειγμα, αν $n = 10$, μπορούμε να θέσουμε $x = 1/10$. Αυτή, όμως, δεν είναι η μοναδική μας επιλογή. Οι τιμές $2/10 = 1/5$, $4/10 = 2/5$, $5/10$, $6/10$, και $8/10$ δεν ικανοποιούν τη συνθήκη μας για το x, αλλά μπορούμε να πάρουμε $x = 3/10$, $7/10$ ή $9/10$. Αυτές οι τιμές αντιστοιχούν στις τέσσερις λύσεις που βρήκαμε προηγουμένως γεωμετρικά. Παρατηρήστε ότι η τιμή $x = 11/10$ (όπως και οι $13/10$, $17/10$, ...) δεν δίνουν νέες γεωμετρικές λύσεις —η θέση πάνω στον κύκλο του σημείου που αντιστοιχεί στο $x = k/n$ εξαρτάται από το υπόλοιπο της διαίρεσης του k με το n και όχι από το ίδιο το k.

Είναι φανερό ότι ο αριθμός mx ($0 < m \leq n$) είναι ακέραιος (δηλαδή, πέφτει πάνω στο αρχικό σημείο μας στον κύκλο) μόνο όταν $m = n$ αν και μόνο αν το x είναι ανάγωγο κλάσμα k/n ($k < n$). Αυτό σημαίνει ότι κάθε αριθμός που είναι μικρότερος και σχετικά πρώτος με το n μάς δίνει μια λύση του προβλήματος του κανονικού n-γώνου. Επομένως, το πλήθος των λύσεων αυτού του προβλήματος δίνεται από τη συνάρτηση Euler $\varphi(n)$!

Συγκεκριμένα, $\varphi(3) = \varphi(4) = \varphi(6) = 2$, $\varphi(5) = \varphi(10) = 4$ —τιμές που συμ-



Σχήμα 6



Σχήμα 8

φωνούν με τα αποτελέσματα που προέκυψαν γεωμετρικά. Αν θυμηθούμε τώρα ότι κάθε επιλυόμενο με κανόνα και διαβήτη πρόβλημα κατασκευής πρέπει να έχει 2^ℓ λύσεις, καταλήγουμε σε μια βολική συνθήκη για την κατασκευασιμότητα ενός κανονικού n-γώνου:

Ένα κανονικό n-γωνο κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη αν και μόνο αν $\varphi(n) = 2^\ell$ για κάποιο ακέραιο ℓ.

(Για παράδειγμα, είναι αδύνατον να κατασκευάσουμε ένα κανονικό επτάγωνο, διότι το $\varphi(7) = 6$ δεν είναι δύναμη του 2.)

Προσπάθησα να εξηγήσω γιατί αυτή η συνθήκη είναι αναγκαία. Το γεγονός ότι είναι και ικανή δεν πρόκειται να μας απασχολήσει εδώ.[3]

Αριθμοί Fermat

Ωστόσο, δεν έχουμε ακόμη εξαντλήσει πλήρως το αρχικό μας πρόβλημα. Το ερώτημα «Ποιοι αριθμοί n ικανοποιούν τη $\varphi(n) = 2^\ell$;» παραμένει αναπάντητο.

Φυσικά, μπορούμε αρκετά γρήγορα να εντάξουμε οποιονδήποτε συγκεκριμένο αριθμό στην «κόκκινη» ή τη «μαύρη» κατηγορία (θυμηθείτε τον προηγούμενο πίνακά μας): το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τη $\varphi(n)$. Αυτό, όμως, δεν μας προσφέρει μια γενική περιγραφή ολόκληρου του συνόλου των «κόκκινων» αριθμών. Αναζητώντας μια τέτοια περιγραφή, θα συναντήσουμε ένα δύσκολο και άλυτο ώς τώρα πρόβλημα της θεωρίας αριθμών. Θα εξηγήσω εν συντομία την ουσία του.

Παραγοντοποιούμε τον αριθμό n:

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k},$$

όπου $p_1, p_2, \dots, p_k$ είναι διαφορετικοί πρώτοι, και υπολογίζουμε τη $\varphi(n)$. Από τις ιδιότητες 1 και 2 της συνάρτησης Euler προκύπτει

$$\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{m_1}\right) \cdot \varphi\left(p_2^{m_2}\right) \cdot \dots \cdot \varphi\left(p_k^{m_k}\right)$$
$$= p_1^{m_1-1} \cdot p_2^{m_2-1} \cdot \dots$$
$$\cdot p_k^{m_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1).$$

Η τελευταία παράσταση είναι δύναμη του 2 αν κάθε περιττός πρώτος παράγοντας p_i εισέρχεται στην παραγοντοποίηση με εκθέτη $m_i = 1$ και είναι της μορφής $p_i = 2^\ell + 1$. Από την άλλη πλευρά, ένας αριθμός της μορφής $2^\ell + 1$ μπορεί να είναι πρώτος μόνο όταν το ℓ είναι δύναμη του 2. (Αν το ℓ διαιρείται με έναν περιττό αριθμό $m > 1$, τότε το $2^\ell + 1$ διαιρείται από το $2^{\ell/m} + 1$, διότι $a^m + 1 = (a+1)(a^{m-1} - a^{m-2} + a^{m-3} - \dots + 1)$ για κάθε a, άρα και για $a = 2^{\ell/m}$.) Έτσι, κάθε περιττός παράγοντας p_i είναι μορφής $2^{2^k} + 1$.

Αριθμοί της μορφής $2^{2^k} + 1$ ονομάζονται *αριθμοί Fermat*. Οι πρώτοι πέντε από αυτούς (για $k = 0, 1, 2, 3, 4$) είναι οι 3, 5, 17, 257 και 65.537. Είναι πραγματικά πρώτοι. Ο Euler ανακάλυψε ότι ο έκτος αριθμός Fermat, ο $2^{2^5} + 1$, διαιρείται από το 641.

Από την εποχή του Euler οι αριθμοί Fermat έχουν προσελκύσει το ενδιαφέρον πολλών μαθηματικών σε ολόκληρο τον κόσμο. Μια από τις συνεδριάσεις της Ακαδημίας των Επιστημών στην Αγία Πετρούπολη το 1878 ήταν αφιερωμένη σε μια αναφορά του I.F. Zolotaryov σχετικά με μια εργασία που είχε υποβάλει ο ιερέας Ioann Pervushin. Σ' αυτή την εργασία αποδεικνυόταν η διαιρετότητα του $2^{2^{23}} + 1$ από το $167.722.161 = 5 \cdot 2^{25} + 1$.

Στις μέρες μας, οι αριθμοί ερευνώνται με υπολογιστές. Πρόσφατα, εξετάστηκαν πολλοί αριθμοί Fermat, αλλά δεν ανακαλύφθηκε κανένας πρώτος ανάμεσά τους, και έτσι παραμένει άγνωστο αν υπάρχουν άλλοι πρώτοι αριθμοί Fermat εκτός από τους πέντε αρχικούς. Επομένως, η μόνη απάντηση που μπορώ να δώσω στο πρόβλημά μας έχει την εξής, όχι τελική ακόμη, μορφή:

Ένα κανονικό n-γωνο μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη αν και μόνο αν $n = 2^s \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$, όπου p_i είναι ανά δύο διαφορετικοί αριθμοί Fermat.

Ίσως κάποιος από τους αναγνώστες του παρόντος άρθρου μπορέσει να συμβάλει στην πλήρη λύση αυτού του εξαιρετικά ενδιαφέροντος και δύσκολου προβλήματος.

3. Το απέδειξε ο Gauss.

Για να περνά η ώρα

Σ61

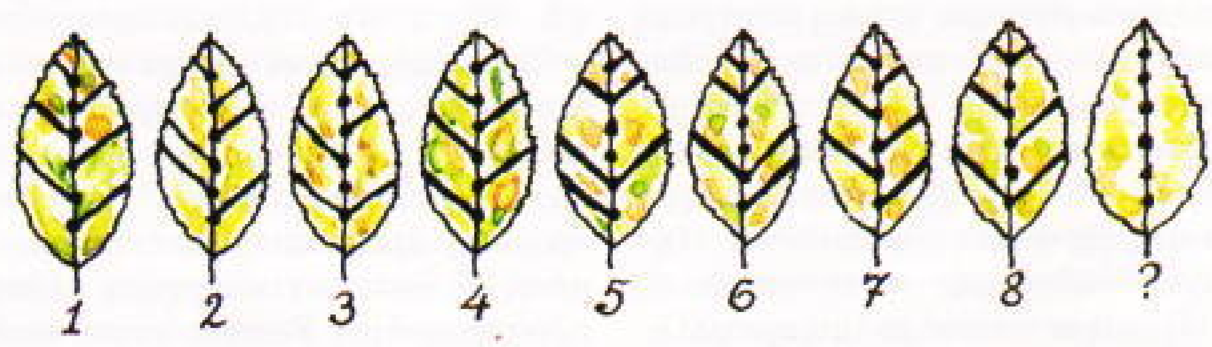
Η προϊστορία του Πινόκιο. Παρήγγειλαν στον μαστρο-Νικόλα να κατασκευάσει ένα ορισμένο πλήθος σκαμνιών. «Αν αρχίσω σήμερα και κατασκευάζω τρία σκαμνιά την ημέρα», σκέφτηκε μεγαλόφωνα ο μαστρο-Νικόλας, «θα τελειώσω την Κυριακή. Αν κατασκευάζω πέντε, θα τελειώσω την Παρασκευή». «Και τι μέρα είναι σήμερα;», ρώτησε ένα περίεργο κομμάτι ξύλου. Πραγματικά, τι μέρα ήταν; (A. Shevkin)

Σ62

Ταξινόμηση κατά τριάδες. Οι επτά τόμοι μιας εγκυκλοπαίδειας βρίσκονται σ' ένα ράφι με τη σειρά 1, 5, 6, 2, 4, 3, 7. Τοποθετήστε τους σε αύξουσα διάταξη εκτελώντας μια σειρά από τις επόμενες κινήσεις: οποιαδήποτε τριάδα γειτονικών τόμων μετακινείται στο αριστερό ή στο δεξιό άκρο του ραφιού ή παρεμβάλλεται μεταξύ δύο άλλων τόμων με την ίδια σειρά. (A. Savin)

Σ63

Χαμένο φορτίο. Όταν ο Πίτζιους ήταν μικρός, γέμισε μια βαρκούλα με μεταλλικά κομμάτια από το παιχνίδι των κατασκευών και την έβαλε στην μπανιέρα του. Ξαφνικά, η βάρκα άρχισε να γέρνει και τα μεταλλικά κομμάτια βυθίστηκαν στην μπανιέρα. Άλλαξε το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του νερού;

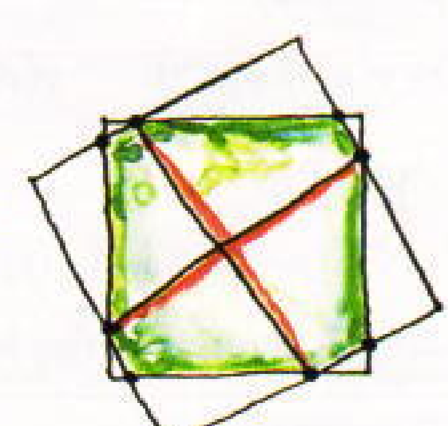


Σ64

Λογική της βοτανικής. Η διευθέτηση των νεύρων στα οκτώ πρώτα φύλλα του παραπάνω σχήματος καθορίζεται από έναν συγκεκριμένο κανόνα. Βρείτε τον κανόνα και σχεδιάστε τις ίνες του ένατου φύλλου. (Z. Chromy [Δημοκρατία της Τσεχίας] —2ο Παγκόσμιο Πρωτάθλημα Σπαζοκεφαλιών)

Σ65

Τεμνόμενα τετράγωνα. Η τομή δύο τετραγώνων (όχι κατ' ανάγκη ίσου μεγέθους) είναι ένα οκτάγωνο —δείτε το σχήμα δεξιά. Το διαιρούμε σε τέσσερα τετράπλευρα φέροντας δύο διαγωνίους (που συνδέουν απέναντι κορυφές). Αποδείξτε ότι αυτές οι διαγώνιοι είναι κάθετες μεταξύ τους. (V. Proizvolov)



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 60

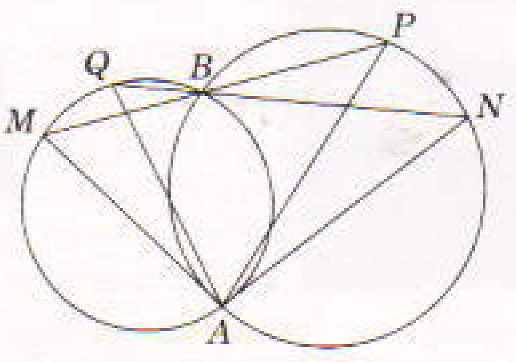
Εικονογράφηση: Pavel Chernusky

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M61

Εφαπτομενικές τομές. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B. Οι εφαπτόμενες των κύκλων στο σημείο A τούς τέμνουν ξανά στα σημεία M



Σχήμα 1

και N. Οι ευθείες BM και BN συναντούν τους κύκλους για δεύτερη φορά στα σημεία P και Q, αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι $MP = NQ$.
(I. Nagel)

M62

Θετική ύψωση. Υπάρχει πολυώνυμο με έναν τουλάχιστον αρνητικό συντελεστή, τέτοιον ώστε, όταν το υψώσουμε σε οποιαδήποτε δύναμη n, με $n > 1$, να έχει μόνο θετικούς συντελεστές;
(O. Kryzhanovsky)

M63

Αριθμητική ενός τριγώνου. Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου x, y, z είναι ακέραιοι, και ένα από τα ύψη του ισούται με το άθροισμα των άλλων δύο. Αποδείξτε ότι το $x^2 + y^2 + z^2$ είναι τέλειο τετράγωνο.
(D. Fomin)

M64

Ναυμαχία. Στο κλασικό παιχνίδι της ναυμαχίας κάθε παίκτης ξεκινά με ένα τετραγωνικό πλέγμα 10×10 (τον «ωκεανό»), όπου πρέπει να κρύψει ένα στόλο δέκα πλοίων: ένα θωρηκτό διαστάσεων 1×4, δύο καταδρομικά διαστάσεων 1×3, τρία αντιτορπιλικά διαστάσεων 1×2 και τέσσερα υποβρύχια διαστάσεων 1×1. Δύο πλοία απαγορεύεται να έχουν κοινά σημεία (και κοινές γωνίες), αλλά μπορούν να γειτονεύουν με τα όρια του ωκεανού. Αποδείξτε ότι (α) αν σχεδιάσουμε τα πλοία με τη σειρά που παρουσιάστηκαν παραπάνω (αρχίζοντας από το θωρηκτό) είναι πάντα δυνατόν να τα τοποθετήσουμε όλα στο πλέγμα, ακόμη και αν σε κάθε βήμα ενδιαφερόμαστε μόνο για το επόμενο πλοίο χωρίς να μας απασχολούν τα υπόλοιπα· (β) αν τοποθετήσουμε τα πλοία με την αντίστροφη σειρά (αρχίζοντας από τα υποβρύχια), τότε μπορεί κάποια στιγμή να μην υπάρχει χώρος για το επόμενο πλοίο (δώστε ένα παράδειγμα).
(K. Ignatyev)

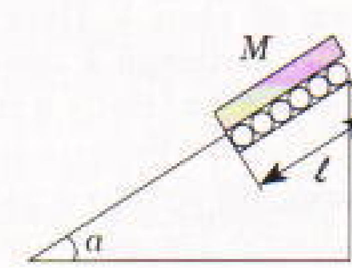
M65

Διδακτορικό στη στρεψολογία. Σ' ένα άρθρο του για το *στρεψολογισμό* ο καθηγητής Tarantoga έδωσε n ορισμούς της στρεψολογίας. Οι μεταπτυχιακοί φοιτητές του απέδειξαν σταδιακά ότι όλοι αυτοί οι ορισμοί ήταν ισοδύναμοι μεταξύ τους. Ο καθένας τους υποστήριξε μια διδακτορική διατριβή στην οποία αποδείκνυε ότι η στρεψολογία με την έννοια του i-οστού ορισμού συνεπάγεται τη στρεψολογία με την έννοια του j-οστού ορισμού. Ποιο είναι το μέγιστο δυνατό πλήθος μεταπτυχιακών φοιτητών του καθηγητή, αν οι διατριβές υποστηρίχτηκαν μία μία και τα κύρια αποτελέσματά τους δεν ήταν δυνατόν να συναχθούν άμεσα από τις διατριβές που είχαν υποστηριχτεί νωρίτερα;
(K. Mishachyov)

Φυσική

Φ61

Φίδι στο σωλήνα. Ένα φίδι σύρθηκε και μπήκε κατά το ήμισυ του μήκους του σ' έναν λεπτό σωλήνα, που βρισκόταν ακίνητος πάνω σ' ένα οριζόντιο επίπεδο. Το υπόλοιπο σώμα του φιδιού μπορούσε να κινείται και να κουλουριάζεται εντελώς τυχαία πάνω στο επίπεδο. Θεωρώντας το φίδι ως λεπτό, ομογενές σκοινί μήκους ℓ, εντοπίστε την περιοχή μέσα στην οποία μπορεί να βρίσκεται το κέντρο μάζας του φιδιού.
(V. Gorbunova)



Σχήμα 2

Φ62

Δοκός με πατίνια. Ομογενής δοκός μάζας M και μήκους ℓ αρχίζει να κατέρχεται κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης α. Το αρχικό τμήμα μήκους ℓ του κεκλιμένου επιπέδου αποτελείται από λεπτούς κυλινδρικούς σωλήνες ακτίνας r ($r << \ell$), οι οποίοι μπορούν να περιστρέφονται με τη βοήθεια ρουλεμάν γύρω από τον άξονά τους χωρίς τριβή (Σχήμα 2). Το υπόλοιπο τμήμα του κεκλιμένου επιπέδου δεν παρουσιάζει τριβές με τη δοκό. Εκφράστε την επιτάχυνση της δοκού ως συνάρτηση της θέσης της.
(A. Stasenko)

Φ63

Απορρόφηση ατμών. Παρότι έχει αντληθεί και αφαιρεθεί ο αέρας από ένα δοχείο όγκου 1 lt —οπότε η πίεση στο εσωτερικό του έχει πέσει πολύ χαμηλά—, παραμένει σ' αυτό 1 g νερού. Προκειμένου να το αφαιρέσουμε, εισάγουμε στο δοχείο μια απορροφητική ουσία, η οποία δεσμεύει όλα τα μόρια νερού με τα οποία έρχεται σε επαφή. Η συνολική επιφάνεια της απορροφητικής ουσίας είναι $S = 100$ m^2, και η επιφάνεια μέσω της οποίας εξατμίζεται το νερό $s = 0{,}001$ m^2. Η θερμοκρασία του δοχείου είναι $T = 5$°C, και η τάση των κορεσμένων ατμών νερού σ' αυτή τη θερμοκρασία $P = 870$ N/m^2. Πόσος χρόνος απαιτείται για να απορροφηθούν οι υδρατμοί; Αν δεν υπήρχε η απορροφητική ουσία, πόσος χρόνος θα απαιτούνταν για να εξατμιστεί όλο το νερό;
(D. Makarov)

Φ64

Πυκνωτής και ελατήριο. Αναρτούμε τη μια πλάκα, εμβαδού S, ενός επίπεδου πυκνωτή σε ένα ελατήριο, ενώ η άλλη παραμένει στερεωμένη σταθερά. Αρχικά η απόσταση των δύο πλακών είναι ℓ_0. Συνδέουμε για λίγο τον πυκνωτή με μια μπαταρία, οπότε φορτίζεται σε τάση V. Ποια τιμή πρέπει να έχει η σταθερά k του ελατηρίου ώστε να αποκλειστεί η επαφή των δύο οπλισμών; Αγνοήστε οποιαδήποτε μετατόπιση της πάνω πλάκας κατά τη διάρκεια της φόρτισης του πυκνωτή.
(Πανενωσιακή Ολυμπιάδα Φυσικής, 1975)

Φ65

Φως σε χαμηλή τροχιά. Ο ατμοσφαιρικός δείκτης διάθλασης ενός πλανήτη X, ακτίνας R, μειώνεται ανάλογα με το ύψος h από την επιφάνεια του πλανήτη, σύμφωνα με τη σχέση $n = n_0 - ah$. Βρείτε το ύψος h_0 στο οποίο βρίσκεται ο οπτικός δίαυλος όπου οι ακτίνες του φωτός κινούνται κυκλικά γύρω από τον πλανήτη, σε σταθερή απόσταση από την επιφάνειά του.
(N. Sedov)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 60

Πόσους διαιρέτες έχει ένας αριθμός;

«Οι σβαρνισμένοι αγροί απλώνονται απέραντοι, τόσο ομοιόμορφοι παντού, σαν να έχουν χαθεί οι κοιλάδες ή τα βουνά να έχουν σβηστεί.»

—Μπορίς Παστερνάκ

Boris Kotlyar

ΑΝΑΡΩΤΗΘΗΚΑΤΕ ΠΟΤΕ ΓΙΑΤΙ συνήθως θεωρούμε ότι ο αριθμός 1 δεν είναι πρώτος; Αυτή η άποψη δεν είναι και τόσο ξεκάθαρη: αφού ο αριθμός αυτός διαιρείται μόνο από τον εαυτό του και το 1, ικανοποιεί τον ορισμό του πρώτου· έτσι δεν είναι;

Υπάρχουν κάποιοι λόγοι για τους οποίους ο αριθμός 1 κατέληξε να μη θεωρείται πρώτος —λόγοι του ίδιου είδους με εκείνους που μας κάνουν να θεωρούμε μια ευθεία παράλληλη με τον εαυτό της.[1] Αν δεν θεωρήσουμε παράλληλες τις ευθείες που συμπίπτουν, είμαστε υποχρεωμένοι να αντιμετωπίζουμε ξεχωριστά την περίπτωση της σύμπτωσης των ευθειών κατά την περιγραφή πολλών γεωμετρικών γεγονότων. Αν όμως συμφωνήσουμε ότι μια ευθεία είναι παράλληλη με τον εαυτό της, μπορούμε να διατυπώσουμε αυτά τα αποτελέσματα χωρίς εξαιρέσεις.

Ο αριθμός 1 συγκαταλεγόταν για πολύ καιρό ανάμεσα στους πρώτους, αλλά στερήθηκε αυτό τον τίτλο για εντελώς πρακτικούς λόγους. Μας βολεύει εξαιρετικά να έχουμε μια *μοναδική* ανάλυση κάθε θετικού ακεραίου σε πρώτους παράγοντες, αλλά όταν συμπεριλαμβάνουμε το 1 στους πρώτους αυτή η πρόταση παύει να ισχύει.

Για παράδειγμα, ας αναλύσουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έναν αριθμό —λόγου χάρη, το 84:

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Είναι δυνατόν να παραγοντοποιηθεί διαφορετικά; Βεβαίως. Μπορούμε να αναδιατάξουμε τους παράγοντες, αλλά αυτές οι παραγοντοποιήσεις, φυσικά, θεωρούνται όμοιες. Το γεγονός ότι δεν μπορούμε να επιτύχουμε κάτι ουσιαστικά διαφορετικό προκύπτει από το λεγόμενο Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής, σύμφωνα με το οποίο *κάθε φυσικός αριθμός (θετικός ακέραιος) μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, και αυτή η παραγοντοποίηση είναι μοναδική (αν δεν υπολογίσουμε τη σειρά των παραγόντων)*. Δηλαδή, ένας φυσικός αριθμός N παριστάται μονοσήμαντα ως

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k},$$

όπου οι $p_1, \dots, p_k$ είναι πρώτοι και οι $a_1, \dots, a_k$ είναι φυσικοί αριθμοί. Αυτή ονομάζεται *κανονική παραγοντοποίηση* του αριθμού N.

Ας επιστρέψουμε στο παράδειγμά μας. Ο αριθμός 2 εισέρχεται στην παραγοντοποίηση του 84 υψωμένος στη δεύτερη δύναμη, ενώ το 3 και το 7 στην πρώτη. Και μπορούμε να ρωτήσουμε: με ποια δύναμη εισέρχεται σ' αυτή την παραγοντοποίηση ο πρώτος παράγοντας 5; Με «καμία» δύναμη, δηλαδή με τη μηδενική.

Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλοι οι πρώτοι αριθμοί εισέρχονται σε κάθε παραγοντοποίηση, αλλά μερικοί υψωμένοι στη μηδενική δύναμη. Και βέβαια, δεν γράφουμε (κατά κανόνα) αυτούς τους «παράγοντες-φαντάσματα».

Καταλαβαίνουμε τώρα γιατί δεν είναι βολικό να θεωρήσουμε πρώτο τον 1: αυτός ο αριθμός μπορεί να περιληφθεί σε κάθε παραγοντοποίηση υψωμένος σε οποιαδήποτε δύναμη:

$$\begin{aligned} 84 &= 1^5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \\ &= 1^{100} \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \end{aligned}$$

και ούτω καθεξής, γεγονός που καταστρατηγεί το μονοσήμαντο.

Υπάρχουν και άλλα επιχειρήματα —άλλα απλά, άλλα περισσότερο σύνθετα— υπέρ της εξαίρεσης του 1 από τους πρώτους. Για παράδειγμα, ας γράψουμε τους αρχικούς φυσικούς αριθμούς και το πλήθος των διαιρετών τους (υπολογίζοντας μόνο τους διαφορετικούς διαιρέτες κάθε αριθμού). Το πλήθος των διαιρετών του αριθμού N συμβολίζεται με $\tau(N)$. Για $N = 1, 2, \dots, 12$, τα πλήθη $\tau(N)$ δίνονται στον επόμενο πίνακα.

Διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός 1 έχει έναν μόνο διαιρέτη, ενώ όλοι οι άλλοι αριθμοί έχουν περισσότερους

1. Αυτή είναι μια πρόταση την οποία πιθανότατα δεν θα βρείτε σε σχολικά εγχειρίδια αλλά σε υψηλότερου επιπέδου βιβλία γεωμετρίας. Κατά κανόνα, η παραλληλία γίνεται κατανοητή με αυτή την ευρύτερη έννοια.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tau(N)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6

(οι πρώτοι έχουν δύο ακριβώς). Είναι λοιπόν λογικό να απομονώσουμε τον 1 σε μια ειδική κατηγορία φυσικών αριθμών —δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.

Διαιρέτες των θετικών ακεραίων

Είναι δυνατόν να εκφράσουμε αναλυτικά τη συνάρτηση $\tau(N)$; Η απάντηση είναι καταφατική, και η παράσταση αρκετά απλή. Ας συναγάγουμε τον τύπο. Έστω η κανονική παραγοντοποίηση ενός αριθμού $N > 1$:

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$$

(οι $p_1, \dots, p_k$ είναι διαφορετικοί πρώτοι, και οι $a_1, \dots, a_k$ είναι οι αντίστοιχοι εκθέτες).

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ είναι η κανονική παραγοντοποίηση ενός αριθμού N, τότε*

$$\tau(N) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1).$$

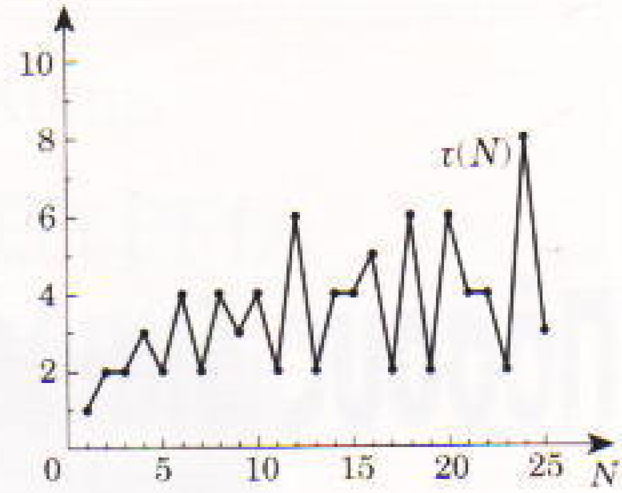
Απόδειξη. Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρεί το N έχει τη μορφή $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, όπου $0 \le \beta_1 \le a_1$, $0 \le \beta_2 \le a_2$, ..., $0 \le \beta_k \le a_k$. Για παράδειγμα, αν $\beta_i = 0$ για κάθε i, ο αντίστοιχος διαιρέτης είναι το 1, και αν $\beta_i = a_i$ για κάθε i, ο αντίστοιχος διαιρέτης είναι το ίδιο το N. Ποιο είναι, λοιπόν, το πλήθος τέτοιων γινομένων που είναι δυνατόν να σχηματιστούν; Ο εκθέτης β_1 παίρνει ακριβώς $a_1 + 1$ τιμές: $0, 1, 2, \dots, a_1$. Ο β_2 παίρνει ακριβώς $a_2 + 1$ τιμές, κ.ο.κ. Επομένως, υπάρχουν $a_1 + 1$ διαιρέτες της μορφής $p_1^{\beta_1}$, $a_2 + 1$ διαιρέτες της μορφής $p_2^{\beta_2}$, και συνεπώς $(a_1 + 1)(a_2 + 1)$ διαιρέτες της μορφής $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Χρησιμοποιώντας αυτό τον τύπο, μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των διαιρετών οποιουδήποτε φυσικού αριθμού, αφού όμως πρώτα τον αναλύσουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, ώστε να βρούμε τους εκθέτες $a_1, a_2, \dots, a_k$. Αυτό, όμως, δεν είναι πάντα εύκολο —όταν ο αριθμός είναι μεγάλος, είναι δύσκολο να καταλάβουμε αν είναι πρώτος ή σύνθετος, πόσο μάλλον να βρούμε την κανονική του παραγοντοποίηση.

Αυτό δεν είναι το μόνο μειονέκτημα του τύπου μας. Η συμπεριφορά της συνάρτησης $\tau(N)$ είναι χαοτική. Από τη μια πλευρά, $\tau(p) = 2$, για κάθε πρώτο p, και αφού υπάρχει άπειρο πλήθος πρώτων αριθμών, θα συναντάμε πάντα στη δεύτερη γραμμή του πίνακά μας το 2, σε οσοδήποτε μεγάλη απόσταση. Από την άλλη πλευρά, το πλήθος των διαιρετών

μπορεί να γίνει όσο μεγάλο θέλουμε —αρκεί να θεωρήσουμε έναν αριθμό n με αρκετά μεγάλους εκθέτες $a_1, a_2, \dots, a_k$ (ακόμη και με έναν μόνο αρκετά μεγάλο εκθέτη). Το γράφημα της $\tau(N)$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 1 (στην πραγματικότητα αποτελείται από μεμονωμένα σημεία, αλλά τα έχουμε ενώσει, ώστε να γίνεται ευκολότερα αντιληπτός ο τυχαίος του χαρακτήρας). Σ' αυτό το γράφημα, μπορούμε πραγματικά να δούμε «βουνά» και «κοιλάδες»!

Επομένως, ο ακριβής τύπος δεν είναι και πολύ χρήσιμος —η συνάρτησή μας είναι εξαιρετικά ακανόνιστη. Μπορούμε να βρούμε έναν περισσότερο περιγραφικό, έστω και προσεγγιστικό, τύπο που θα μας δείχνει άμεσα τι πρέπει να περιμένουμε από την $\tau(N)$;



Σχήμα 1

Ας δούμε ποια είναι η «μέση» συμπεριφορά της $\tau(N)$. Ας θεωρήσουμε τον αριθμητικό μέσο $\bar{\tau}(N)$ του πλήθους των διαιρετών των N αρχικών φυσικών αριθμών:

$$\bar{\tau}(N) = \frac{1}{N}\big(\tau(1) + \tau(2) + \dots + \tau(N)\big).$$

Αυτή η συνάρτηση τυχαίνει να έχει όμορφο τύπο. Δεν είναι απόλυτα ακριβής, αλλά εκφράζει το «μέσο πλήθος διαιρετών» μέσω μιας πολύ γνωστής συνάρτησης:

$$\bar{\tau}(N) \cong \ln N.$$

Γιατί λογάριθμοι;

Εκ πρώτης όψεως, η εμφάνιση ενός λογαρίθμου στην προκειμένη περίπτωση φαίνεται λίγο παράδοξη. Στην πραγματικότητα, όμως, δεν πρέπει να προξενεί έκπληξη. Για παράδειγμα, αν $N = 2^n$, έχουμε

$$\tau(N) = \tau(2^n) = \log_2 N + 1 = \log_2 N + \log_2 2 = \log_2(2N).$$

Το συγκεκριμένο παράδειγμα μπορεί να μην είναι πειστικό. Άλλωστε, οι αριθμοί αυτής της μορφής (δυνάμεις πρώτων) είναι μάλλον σπάνιοι, και, επιπλέον, η βάση του λογαρίθμου στην προκειμένη περίπτωση είναι το 2 και όχι το e. Πάντως, θα καταφέρουμε να αποδείξουμε τον τύπο μας αργότερα. Πρώτα, θα ήθελα να τον βελτιώσω. Τι σημαίνει η κατά προσέγγιση ισότητα σ' αυτή την περίπτωση; Υπάρχει ένας σταθερός αριθμός μ ($\mu \cong 0{,}154$) τέτοιος ώστε

$$\bar{\tau}(N) = \ln N + \mu + a_N,$$

όπου a_N είναι μια μηδενική ακολουθία —δηλαδή, το όριό της είναι το 0 καθώς το N τείνει στο άπειρο. Όταν το N είναι μεγάλο, ο «διορθωτικός όρος» a_N γίνεται αυθαίρετα μικρός, αμελητέος σε σύγκριση με τη σταθερά μ και ακόμη περισσότερο σε σύγκριση με τον αυθαίρετα αυξανόμενο $\ln N$. Αυτή είναι η σημασία της κατά προσέγγιση ισότητας $\bar{\tau}(N) \cong \ln N$.

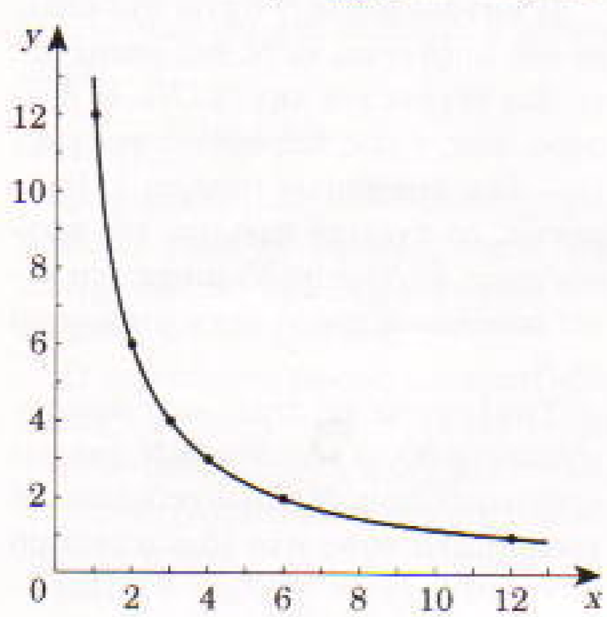
Μέσο πλήθος διαιρετών

Οι διαιρέτες ενός αριθμού μπορούν να απεικονιστούν μέσω συντεταγμένων. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, τον αριθμό 12. Γράφουμε όλους τους διαιρέτες του:

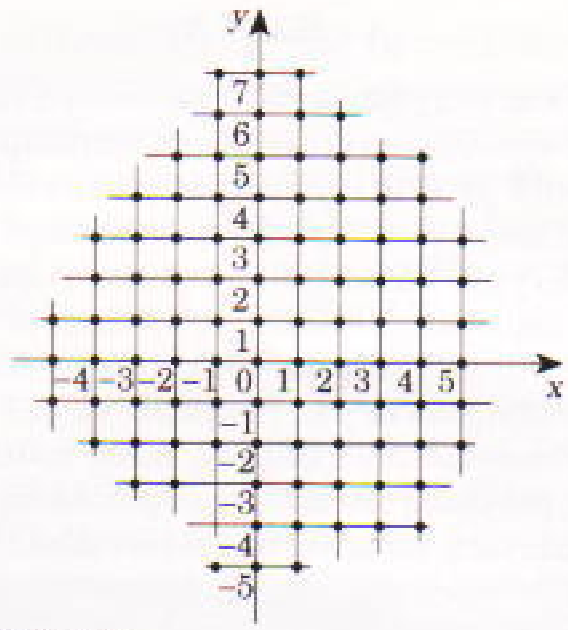
1, 2, 3, 4, 6, 12.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 12/x$. Γνωρίζετε βέβαια ότι το γράφημά της είναι μια υπερβολή. Χρειαζόμαστε έναν μόνο από τους δύο κλάδους της —αυτόν που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Για να σχεδιάσουμε το γράφημα, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές της συνάρτησης για ένα πλήθος τιμών του x: για $x = 1, 2, 3, \ldots$ παίρνουμε $y = 12, 6, 4, \ldots$. Είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το y όταν το x είναι διαιρέτης του 12. Γράφουμε τα σημεία με τις ακέραιες συντεταγμένες (x, y) που προκύπτουν και σχεδιάζουμε την καμπύλη που διέρχεται από αυτά (Σχήμα 2).

Ας μετρήσουμε τώρα τα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες που βρίσκονται κοντά στην αρχή των αξόνων



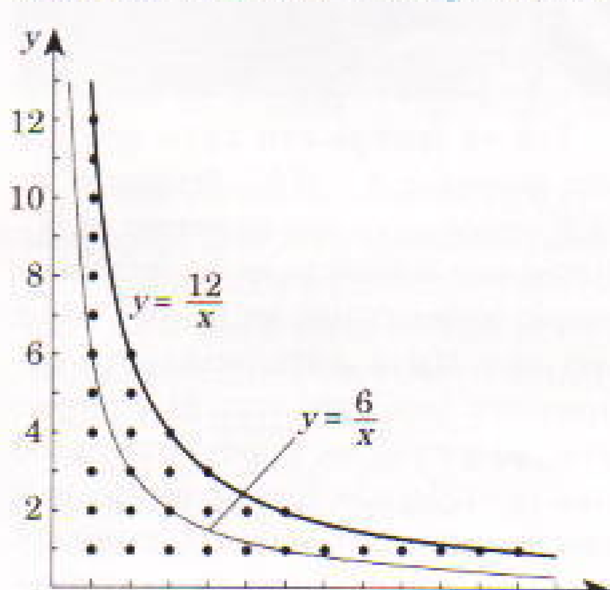
Σχήμα 2



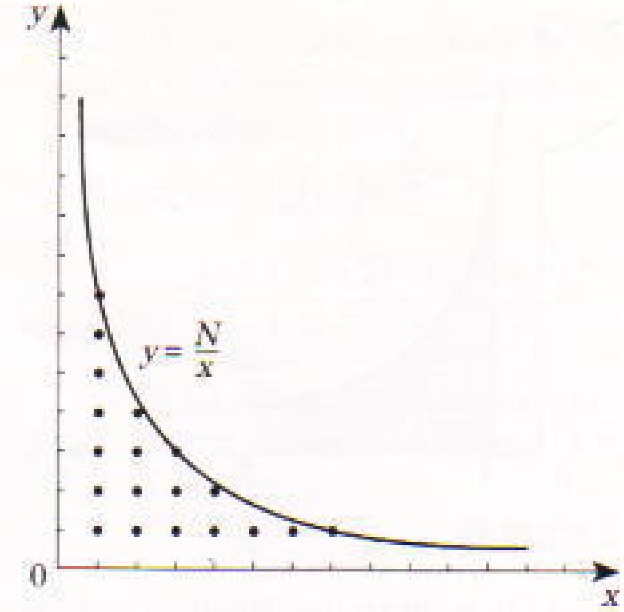
Σχήμα 3

και πάνω στον κλάδο της υπερβολής που έχουμε σχεδιάσει. (Όλα αυτά τα σημεία παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.) Υπάρχουν έξι ακριβώς —όσοι και οι διαιρέτες του 12, επειδή κάθε φυσικός διαιρέτης x συνδυάζεται με έναν φυσικό y τέτοιον ώστε $xy = 12$.

Στο Σχήμα 4, μαζί με έναν κλάδο της υπερβολής $y = 12/x$ παρουσιάζεται και ένας κλάδος της $y = 6/x$, ο οποίος περιέχει τόσα ακέραια σημεία όσοι είναι και οι διαιρέτες του 6. Ωστόσο, κάθε ακέραιο σημείο (x_0, y_0) του πρώτου τεταρτημορίου που βρίσκεται κάτω από την υπερβολή $y = 12/x$ (εκτός από τα σημεία που ανήκουν στους άξονες) ανήκει σε μία ακριβώς υπερβολή $y = n/x$, όπου $n = x_0 y_0 < 12$. Για παράδειγμα, το σημείο (1, 11) ανήκει στην υπερβολή $y = 11/x$ και το (2, 2) ανήκει στο γράφημα της $y = 4/x$. Έπεται ότι το συνολικό πλήθος των διαιρετών όλων των φυσικών αριθμών που δεν υπερβαίνουν το 12 ισούται με το πλήθος $S(12)$ των ακέραιων σημείων του πρώτου τε-



Σχήμα 4



Σχήμα 5

ταρτημορίου που ανήκουν στο γράφημα της υπερβολής $y = 12/x$ ή βρίσκονται κάτω από αυτό (με εξαίρεση τα σημεία που ανήκουν στους άξονες). Αυτό το πλήθος μπορεί να γραφεί ως

$$S(12) = \tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(12).$$

Παρομοίως, για κάθε θετικό ακέραιο N,

$$S(N) = \tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(N)$$

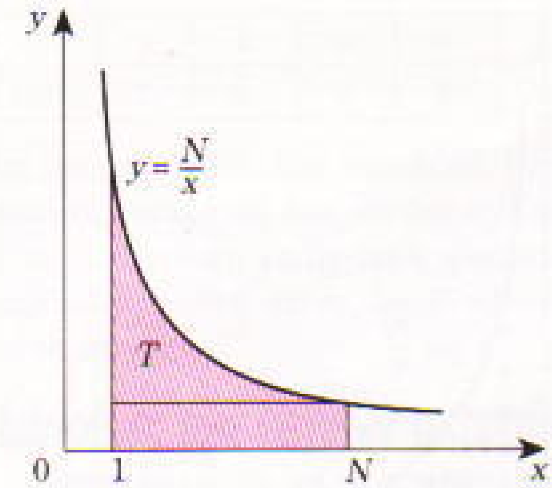
—η προηγούμενη επιχειρηματολογία εξακολουθεί να ισχύει χωρίς αλλαγές. Συνεπώς,

$$\bar{\tau}(N) = \frac{1}{N}\big(\tau(1) + \ldots + \tau(N)\big) = \frac{S(N)}{N}.$$

Έτσι, έχουμε αντικαταστήσει το αριθμητικό πρόβλημα του υπολογισμού του μέσου πλήθους διαιρετών ενός αριθμού με το γεωμετρικό πρόβλημα της μέτρησης των ακέραιων σημείων του πρώτου τεταρτημορίου που βρίσκονται επί της υπερβολής $y = N/x$ είτε κάτω από αυτήν (Σχήμα 5).

Είναι δύσκολο να απαντήσουμε με ακρίβεια σ' αυτό το πρόβλημα, αλλά η προσεγγιστική του επίλυση είναι αρκετά απλή —και θα απαιτήσει λίγο απειροστικό λογισμό.

Ας θεωρήσουμε το καμπυλόγραμμο τραπέζιο T που φράσσεται από τις κάθετες ευθείες $x = 1$ και $x = N$, από τον άξονα x, $y = 0$, και από το γράφημα της $y = N/x$ (Σχήμα 6). Τα σημεία που θέλουμε να μετρήσουμε είναι όλα τα ακέραια σημεία του T εκτός από τα N σημεία (1, 0), (2, 0), ..., (N, 0) του άξονα x. Άρα, στο T υπάρχουν συνολικά $S(N) + N$ ακέραια ση-

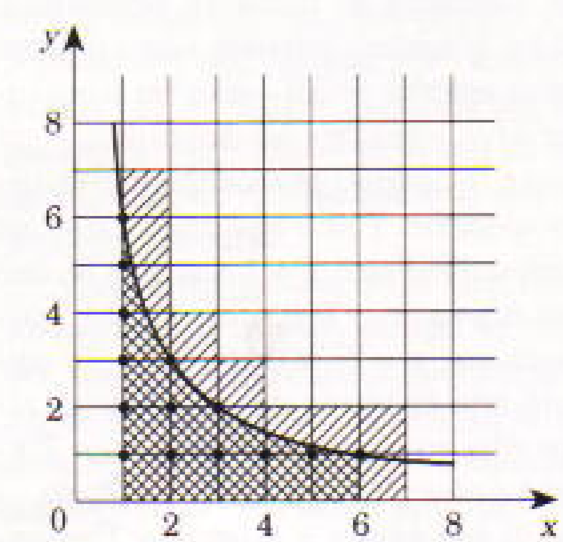


Σχήμα 6

μεία. Το καθένα από αυτά τα σημεία είναι η *κάτω αριστερή* κορυφή ενός μοναδιαίου τετραγώνου με ακέραιες κορυφές —όλα αυτά τα τετράγωνα παρουσιάζονται σκιασμένα στο Σχήμα 7 (για την περίπτωση $N = 6$).

Μπορείτε να δείτε ότι ολόκληρη η σκιασμένη περιοχή προσεγγίζει —καθ' υπέρβαση— το τραπέζιο T. Θα συμβολίσουμε το εμβαδόν του T με A, και θα υπολογίσουμε ένα άνω και ένα κάτω φράγμα της διαφοράς $A - S(N)$.

Για να βρούμε ένα άνω φράγμα, επισημαίνουμε ότι κάθε σημείο (x, y) καλύπτεται από ένα τετράγωνο του ακέραιου πλέγματος του Σχήματος 3. Αν καλύπτεται από διάφορα τέτοια τετράγωνα, επιλέγουμε ένα έτσι ώστε το σημείο να μην ανήκει στην πάνω ή στη δεξιά του πλευρά. Έστω (m, n) η κάτω αριστερά κορυφή αυτού του τετραγώνου. Τότε, $mn \le xy \le N$, και ο κανόνας επιλογής του τετραγώνου μάς εξασφαλίζει ότι το (m, n) ανήκει επίσης στο T, επομένως το (x, y) καλύπτεται από ένα σκιασμένο τετράγωνο. Παρατηρώντας ότι το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων ισούται με το πλήθος τους, παίρνουμε $A \le S(N) + N$, ή

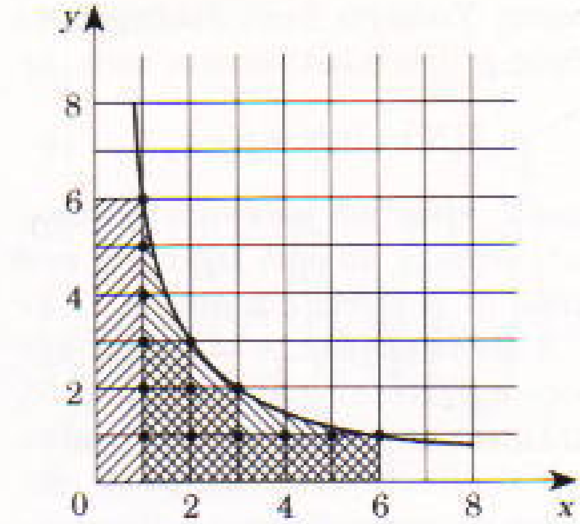


Σχήμα 7

$$A - S(N) \le N.$$

(Από το σχήμα καθίσταται φανερό ότι μπορούμε πάντοτε να καλύπτουμε το T με ένα λίγο μικρότερο σύνολο τετραγώνων —μπορούμε, για παράδειγμα, να απομακρύνουμε χωρίς πρόβλημα τα δύο δεξιότερα σκιασμένα τετράγωνα και ίσως και μερικά ακόμη. Αυτό μας επιτρέπει να βελτιώσουμε την εκτίμηση, αλλά τούτη η βελτίωση δεν είναι πραγματικά σημαντική, όπως θα δούμε σύντομα.)

Για να βρούμε ένα κάτω φράγμα της διαφοράς $A - S(N)$, θεωρούμε τα $S(N)$ τετράγωνα του ακέραιου πλέγματος των οποίων οι *πάνω δεξιές* κορυφές ανήκουν στο τραπέζιο T αλλά όχι στον άξονα x (τα σκιασμένα τετράγωνα του Σχήματος 8). Προφανώς, όλα αυτά τα τετράγωνα (εκτός από τη στήλη των N τετραγώνων που πρόσκεινται στον άξονα y) ανήκουν στο T. (Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $y = N/x$ είναι φθί-



Σχήμα 8

νουσα για $x > 0$.) Έπεται ότι $A \ge S(N) - N$, ή

$$A - S(N) \ge -N.$$

Συνδυάζοντας τις δύο εκτιμήσεις έχουμε:

$$-N \le A - S(N) \le N$$

ή

$$|S(N) - A| \le N.$$

Οι αναγνώστες που είναι εξοικειωμένοι με τον απειροστικό λογισμό μπορούν να υπολογίσουν εύκολα το εμβαδόν A:

$$A = \int_1^N \frac{N}{x}\,dx = N \ln x \Big|_1^N = N \ln N.$$

Όσοι δεν γνωρίζουν ολοκλήρωση θα πρέπει να θεωρήσουν τον τύπο δεδομένο.

Εν πάση περιπτώσει, έχουμε καταλήξει στη σχέση

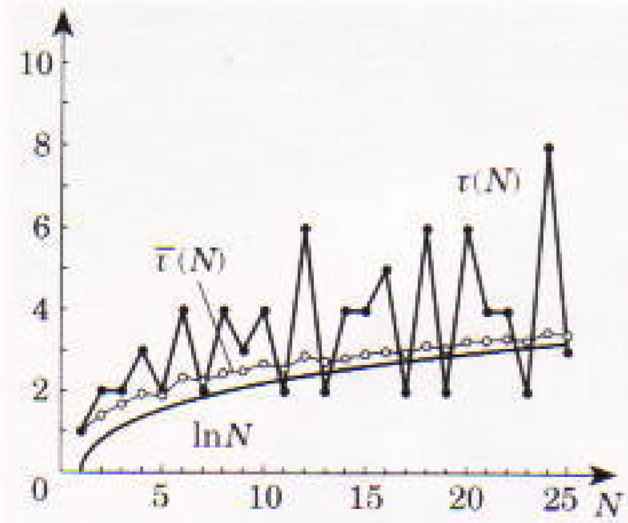
$$|S(N) - N \ln N| \le N,$$

ή, διαιρώντας με N,

$$|\bar{\tau}(N) - \ln N| \le 1.$$

Η συνάρτηση $\ln N$ τείνει στο άπειρο όσο αυξάνεται το N, και επομένως το ίδιο ισχύει για την $\bar{\tau}(N)$. Η διαφορά τους, όμως, παραμένει φραγμένη —δεν υπερβαίνει ποτέ το 1. Επομένως, το σχετικό σφάλμα της προσέγγισης $\bar{\tau}(N) \approx \ln(N)$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό όταν αυξάνεται το N.

Υπολογίστε τις τιμές των συναρτήσεων $\tau(N)$, $\bar{\tau}(N)$ και $\ln N$ για μικρές τιμές του N και σχεδιάστε τα γραφήματά τους στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (Σχήμα 9). Παραφράζοντας τον Παστερνάκ, μπορούμε να πούμε ότι οι συναρτήσεις $\bar{\tau}(N)$



Σχήμα 9

και $\ln N$ επιτρέπουν «να χαθούν οι κοιλάδες και να σβηστούν τα βουνά».

O Dirichlet και το Πρόβλημα του διαιρέτη

Παραπάνω αναφέρθηκα στη βελτίωση της κατά προσέγγιση ισότητάς μας. Αυτή επιτεύχθηκε από τον διακεκριμένο γερμανό μαθηματικό Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), ο οποίος επινόησε τη γεωμετρική προσέγγιση που χρησιμοποιήσαμε. Ο Dirichlet απέδειξε ότι

$$\bar{\tau}(N) = \ln N + (2\gamma - 1) + a_N,$$

όπου γ είναι η λεγόμενη σταθερά του Euler, που ορίζεται ως το όριο

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

(Δεν είναι πολύ δύσκολο να αποδειχτεί ότι το εν λόγω όριο υπάρχει.) Η σταθερά γ είναι περίπου ίση με 0,577, ενώ στην προηγούμενη παράσταση για το $\bar{\tau}(N)$ συμβολίσαμε τον όρο $2\gamma - 1 \cong 0{,}154$ με μ.

Ο Dirichlet απέδειξε ότι η ακολουθία a_N τείνει αρκετά γρήγορα στο μηδέν —υπάρχει μια σταθερά a τέτοια ώστε

$$|a_N| \le a \cdot N^{-1/2}.$$

Στην απόδειξή του ο Dirichlet χρησιμοποιεί έξυπνα τη συμμετρία της υπερβολής ως προς τη διχοτόμο του πρώτου τεταρτημορίου.

Ο σπουδαίος ρώσος μαθηματικός Georgy Fedoseyevich Voronoy (1868-1908) απέδειξε ότι η a_N μειώνεται ακόμη ταχύτερα: για κάθε $\varepsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό,

$$|a_N| \le k \cdot N^{-2/3+\varepsilon}$$

για κάποια σταθερά k. Είναι δυνατόν να αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση του δεξιού μέλους με μια συνάρτηση που μειώνεται ακόμη ταχύτερα; Ποιος είναι ο τελικός εκθέτης; Αυτά τα ερωτήματα αποτελούν ένα διάσημο, ανεπίλυτο ακόμη πρόβλημα: το Πρόβλημα του διαιρέτη. Μέχρι σήμερα, είναι γνωστά θεωρήματα στα οποία ο εκθέτης του N είναι μικρότερος απ' ό,τι στην εκτίμηση του Voronoy, αλλά το τελικό αποτέλεσμα δεν έχει ακόμη επιτευχθεί. Πάντως, η συνάρτηση του δεξιού μέλους δεν μπορεί να μειωθεί πάρα πολύ—ο άγγλος μαθηματικός Godfrey Harold Hardy (1877-1947) απέδειξε ότι η ανισότητα παύει να ισχύει για τον εκθέτη $-3/4$. Υπάρχει μια εικασία —η οποία ούτε έχει αποδειχτεί ούτε έχει απορριφθεί— ότι ακόμη και η ελάχιστη αύξηση του απαγορευτικού εκθέτη του Hardy δίνει μια συνάρτηση που κυριαρχεί στην ακολουθία —δηλαδή,

$$|a_N| \le k \cdot N^{-3/4+\varepsilon}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάποιο σταθερό k.

Το Πρόβλημα του διαιρέτη είναι ένα από τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα της θεωρίας αριθμών. Ας θαυμάσουμε ξανά την υπέροχη διαπλοκή των μαθηματικών εννοιών που αναδύθηκε από την έρευνά μας: το πλήθος των διαιρετών ενός φυσικού αριθμού —που είναι και αυτός φυσικός αριθμός— αποδείχτηκε ότι συνδέεται με τις υπερβολές, τα ακέραια σημεία του επιπέδου, τα εμβαδά, την ολοκλήρωση και τους φυσικούς λογαρίθμους.

Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι το πλήθος των διαιρετών του N είναι περιττό αν και μόνο αν το N είναι τέλειο τετράγωνο.

2. Μια συνάρτηση ορισμένη στους ακέραιους αριθμούς ονομάζεται *πολλαπλασιαστική* αν $f(ab) = f(a)f(b)$ όταν τα a και b είναι πρώτοι μεταξύ τους. Αποδείξτε ότι η $\tau(N)$ είναι πολλαπλασιαστική.

3. Συμβολίζουμε με $\tau_m(N)$ (για $m \ge 1$) το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x_1x_2...x_m = N$, όπου οι αριθμοί $x_1, x_2, ..., x_m$ είναι ακέραιοι. Πιο συγκεκριμένα, $\tau_1(N) = 1$, $\tau_2(N) = \tau(N)$. Προσπαθήστε να αποδείξετε, αρχικά για $m = 3$ και κατόπιν για κάθε m, ότι:

(α) η $\tau_m(N)$ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση·

(β) ισχύει $\tau_m(p^\alpha) =$

$$\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m-1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot (m-1)}.$$

(γ) το πλήθος των θετικών ακεραίων λύσεων της ανισότητας $x_1x_2...x_m \le N$ ισούται με

$$\sum_{m\le N}\tau_m(N).$$

Από το ποντίκι στον ελέφαντα

Κυτταρικό μέγεθος και άλλες ζωολογικές σταθερές

Anatoly Mineyev

Η ΠΑΝΙΔΑ ΤΟΥ ΠΛΑΝΗΤΗ ΜΑΣ ΠΑρουσιάζει εξαιρετικά μεγάλη ποικιλία. Ωστόσο, ανάμεσα στις διαφορετικές παραμέτρους που χαρακτηρίζουν τους ζωντανούς οργανισμούς υπάρχουν κάποιες που μεταβάλλονται πολύ λίγο σε σύγκριση με τα μεγέθη των ζώων, που το φάσμα τους είναι ευρύτατο. Στο εξής θα τις ονομάζουμε «ζωολογικές σταθερές». Στον Πίνακα 1 βλέπουμε έναν μικρό κατάλογο αυτών των σταθερών (από τον ποντικό στον ελέφαντα).

Κατ' αρχάς πρέπει να εξηγήσουμε τι εννοούμε με τον όρο σταθερά στο γενικό πλαίσιο του ζωολογικού κόσμου. Υπάρχουν, φυσικά, πολύ μακρύτερα κύτταρα στα σώματα των ζώων —για παράδειγμα, οι νευρικές ίνες. Ωστόσο, μέσα σε όλα τα άλλα κύτταρα, αυτά είναι σε τέτοιο βαθμό σπάνια, που θεωρούνται αμελητέα. Παρομοίως, η θερμοκρασία των άρρωστων ζώων μπορεί να παρουσιάζει απότομες αυξήσεις, ή η αναλογία της μυϊκής μάζας να διαφέρει σε ζώα που επιδίδονται σε διαφορετικές φυσικές δραστηριότητες. Έτσι, τα δεδομένα του Πίνακα 1 σχετίζονται με τους μέσους και πολυπληθέστερους αντιπροσώπους κάθε είδους ζώων. Με άλλα λόγια, η κατανομή της πιθανότητας να έχει μια ζωολογική παράμετρος κάποια συγκεκριμένη τιμή είναι γενικά μια καμπύλη με ένα σαφές μέγιστο, που αποτελεί τη χαρακτηριστική τιμή της ζωολογικής μεταβλητής. Έτσι, χρησιμοποιούμε τον όρο «ζωολογική σταθερά» με κάπως διαφορετικό τρόπο απ' ό,τι, για παράδειγμα, τον όρο «φυσική σταθερά» (όπως την ταχύτητα του φωτός, τη μάζα του ηλεκτρονίου, κ.ο.κ., που έχουν εντελώς συγκεκριμένες τιμές).

Σ' αυτό το άρθρο θα μελετήσουμε κυρίως τη φύση του μεγέθους των ζωικών κυττάρων. Άλλα θέματα θα εξεταστούν μόνο επιφανειακά, και ανάμεσα σ' αυτά η πιο αινιγματική σταθερά —το καρδιακό απόθεμα (ένα δισεκατομμύριο παλμοί στη διάρκεια της ζωής ενός θηλαστικού).

«Δεν χρειάζεται να ανησυχεί κανείς για χαρτζιλίκι», λέει ο Oscar Bender στο *The Twelve Chairs* (Οι δώδεκα καρέκλες) των Ilf και Petrov. «Πάντα βρίσκεται λίγο, και απλώς παίρνεις όταν χρειάζεσαι.» Θα ακολουθήσουμε αυτή τη συμβουλή και θα προσπαθήσουμε κι εμείς να συλλέξουμε πληροφορίες σχετικά με τα κύτταρα, όποτε χρειαστεί κατά τη σταδιακή πορεία μας προς το στόχο μας.

Και τώρα, ας προσπαθήσουμε να απαντήσουμε σε δύο απλά ερωτήματα:

Γιατί η μέση κυτταρική διάμετρος d_κ ενός θηλαστικού είναι 10–20 μm, και όχι, για παράδειγμα, 1 ή 100 μm;

Γιατί η d_κ είναι περίπου ίδια για όλα τα θηλαστικά, ενώ οι μάζες τους διαφέρουν τρομακτικά; Για παράδειγμα, η μάζα μιας μυγαλής είναι 3 g, ενώ η μάζα ενός ελέφαντα είναι 3 ton —δηλαδή το εύρος της μάζας των θηλαστικών καλύπτει έξι τάξεις μεγέθους.

Θα επιχειρήσουμε αρκετές προσεγγίσεις στην προσπάθειά μας να εκτιμήσουμε το χαρακτηριστικό μέγεθος ενός κυττάρου. Ας αρχίσουμε με κάποια που δεν χρησιμοποιεί καμία πληροφορία σχετικά με τη δομή και τις λειτουργίες του κυττάρου.

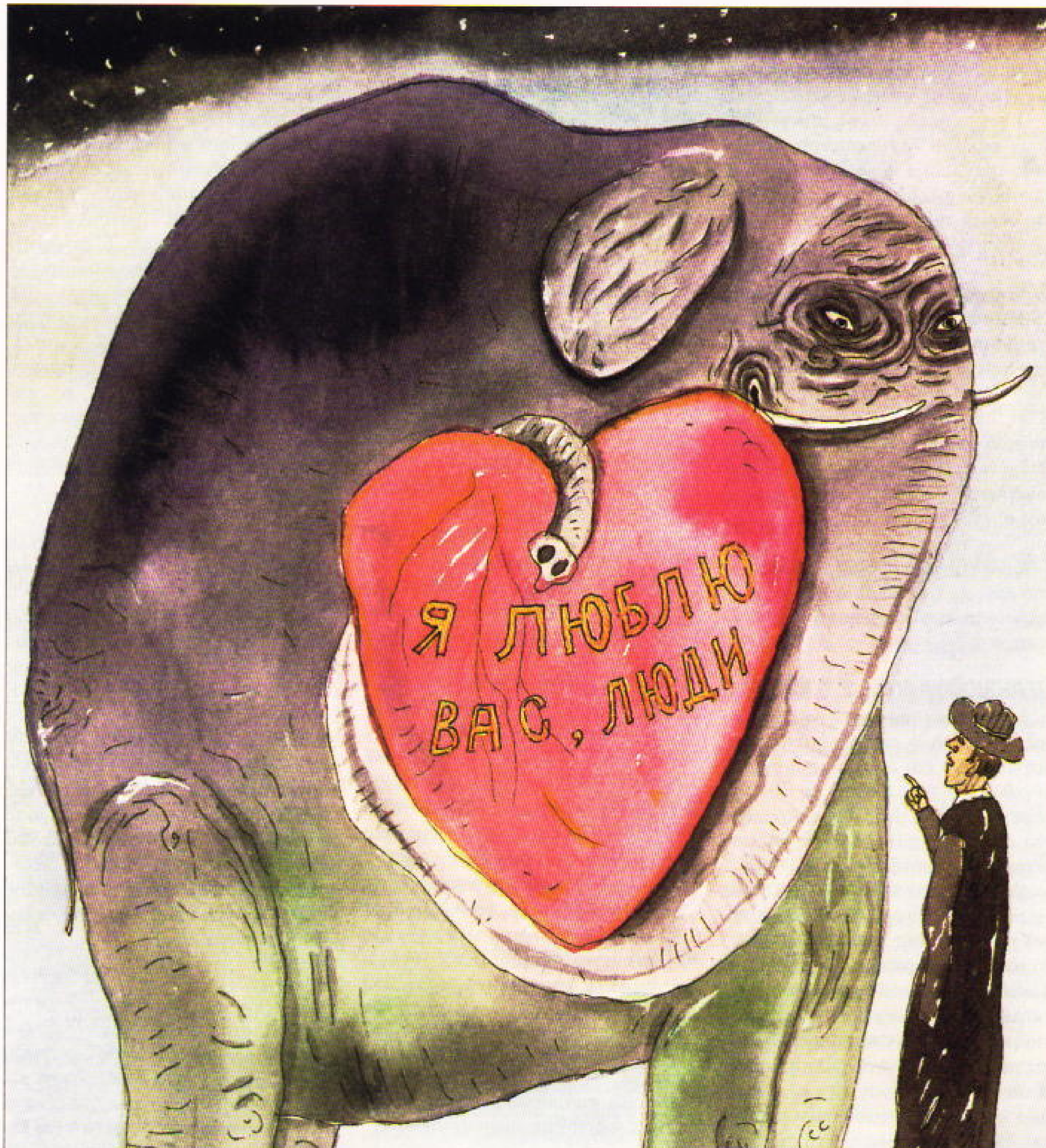
Πίνακας 1

Διάμετρος κυττάρου	$d_\kappa \sim 10\text{-}20$ μm
Λόγος μακροβιότητας προς καρδιακό κύκλο	$t_\mu / t_\kappa \sim 10^9$
Λόγος αναπνευστικού προς καρδιακό κύκλο	$t_\alpha / t_\kappa \cong 4$
Θερμοκρασία σώματος	$T_o \cong 37\text{-}38$°C
Λόγος μάζας οργάνου προς μάζα σώματος (m_σ):	
καρδιάς	$m_\kappa / m_\sigma \cong 0{,}6\%$
πνευμόνων	$m_\pi / m_\sigma \cong 1\%$
αίματος	$m_\alpha / m_\sigma \cong 5\%$
σκελετού	$m_{\sigma\kappa} / m_\sigma \cong 6\%$
μυών	$m_\mu / m_\sigma \cong 40\%$

Επιχειρώντας μια προσέγγιση

Ένα κύτταρο πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερο από ένα άτομο ($\sim 10^{-10}$ m) και πολύ μικρότερο από το «μέγεθος του ανθρώπου» (~ 1 m). Το πρώτο αίτημα μας επιτρέπει να αγνοήσουμε κβαντικά φαινόμενα· το δεύτερο να

Εικονογράφηση: Leonid Tishkov



—Σας αγαπώ, άνθρωποι.

χρησιμοποιούμε τα κύτταρα ως δομικούς λίθους για να κατασκευάσουμε τη σύνθετη δομή ενός ζωντανού οργανισμού με ποικίλες λειτουργίες.

Ο γεωμετρικός μέσος του «ατομικού» και του «ανθρώπινου» μεγέθους ικανοποιεί τις απαιτήσεις των παραπάνω αιτημάτων και καταλήγει στη σωστή τάξη μεγέθους,

$$(10^{-10}\,\text{m} \times 1\,\text{m})^{1/2} = 10^{-5}\,\text{m},$$

δεν αποσαφηνίζει όμως το πρόβλημα. Επιπλέον, αν σ' αυτό τον τύπο χρησιμοποιήσουμε τα χαρακτηριστικά μεγέθη της μυγαλής και του ελέφαντα, παίρνουμε 2 μm και 20 μm. Έτσι, οδηγούμαστε σε ουσιαστική διαφορά στο μέγεθος των κυττάρων. Επομένως, δεν μπορούμε να τα καταφέρουμε χωρίς κάποιες πληροφορίες σχετικά με τη δομή του κυττάρου, όσο στοιχειώδεις κι αν είναι.

Ας αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα από διαφορετική σκοπιά και ας υιοθετήσουμε μια «μαγειρική» προσέγγιση.

Συναρμολογώντας ένα κύτταρο

Ας κατασκευάσουμε ένα κύτταρο θηλαστικού από τα απλούστερα συστατικά του και ας εκτιμήσουμε το μέγεθός του. (Όπως ακριβώς στο μαγείρεμα: για μία μερίδα χρειαζόμαστε ένα αυγό, μία κουταλιά της σούπας ζάχαρη, ένα φλιτζάνι γάλα...)

Λοιπόν, με τι είδους αντικείμενο έχουμε να κάνουμε; Το κύτταρο είναι η θεμελιώδης μονάδα της ζωής. Βασικές πληροφορίες σχετικά με το ίδιο το κύτταρο καθώς και τον οργανισμό ως σύνολο είναι γραμμένες στο μόριο του DNA και αποθηκευμένες μέσα στον πυρήνα του κυττάρου. Η επεξεργασία αυτών των πληροφοριών συντελείται μέσω των μορίων του RNA, με αποτέλεσμα τη σύνθεση των πρωτεϊνών και άλλων απαραίτητων ουσιών. Η ενέργεια γι' αυτή τη σύνθεση παράγεται στα μιτοχόνδρια. Το νερό αποτελεί το φυσικό μέσον στο οποίο πραγματοποιούνται όλες οι κυτταρικές διεργασίες. Μεμβράνες περικλείουν τόσο τα κύτταρα όσο και τα εσωτερικά οργανίδιά τους.

Το DNA θα αποτελέσει το σημείο εκκίνησής μας. Ορισμένες από τις παραμέτρους του δίνονται στον Πίνακα 2. Σύμφωνα με τον πίνακα, το μήκος των μορίων DNA σε διαφορετικά θηλαστικά βρίσκεται στην περιοχή

$$(1 \text{ έως } 5)\cdot 10^{9} \times 3{,}4 \cdot 10^{-10}\,\text{m} \cong 0{,}3 \text{ έως } 2\,\text{m},$$

και η μάζα του είναι περίπου

$$1{,}67\cdot 10^{-27}\,\text{kg} \times 500 \times (1 \text{ έως } 5)\cdot 10^{9} \cong (0{,}8 \text{ έως } 4)\cdot 10^{-15}\,\text{kg}.$$

Πίνακας 2

Διάμετρος διπλής έλικας	$2\cdot 10^{-9}$ m
Απόσταση μεταξύ ζευγών βάσεων	$3{,}4\cdot 10^{-10}$ m
Πλήθος ζευγών νουκλεοτιδίων σ' ένα κύτταρο θηλαστικού	$(1$ έως $5)\cdot 10^{9}$
Μάζα ζευγών νουκλεοτιδίων σε ατομικές μονάδες ($1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg)	~ 500

Τι όγκο μπορεί να καταλαμβάνει ένα τέτοιο μόριο; Αν τυλίγαμε το DNA σε μια πολύ σφιχτή μπάλα με κενό μεταξύ των ξεχωριστών στιβάδων της τάξης της απόστασης μεταξύ των βάσεων (δηλαδή, $4\cdot 10^{-10}$ m), θα προέκυπτε όγκος

$$V \sim 4\cdot 10^{-10}\,\text{m} \times 2\cdot 10^{-9} \times (1 \text{ έως } 5)\cdot 10^{9} \times 3{,}4\cdot 10^{-10}\,\text{m} \cong (0{,}3 \text{ έως } 1{,}4)\cdot 10^{-18}\,\text{m}^3,$$

με χαρακτηριστική διάμετρο

$$d \sim V^{1/3} \cong 0{,}7 - 1{,}1\,\mu\text{m}.$$

Προκύπτει εύκολα ότι η πυκνότητα αυτής της μπάλας DNA είναι ~ $3\cdot 10^{3}$ kg/m^3.

Έπειτα από κάποια σκέψη, αυτές οι τιμές φαίνονται αμφισβητήσιμες:

- Εφόσον η πυκνότητα αυτού του πυρήνα υπερβαίνει κατά πολύ αυτήν του νερού, ο πυρήνας μπορεί να «βουλιάξει στον πάτο» του κυττάρου, αν δεν συγκρατείται με κάποιον τρόπο στο κέντρο του.
- Το DNA δεν έχει επίπεδη δομή — είναι μια έλικα, και έτσι δεν μπορεί να τυλιχτεί τόσο σφιχτά όσο υποθέσαμε παραπάνω.
- Θα ήταν αδύνατον να ξετυλίξουμε γρήγορα μια τέτοια μπάλα.

Αυτές οι θεωρήσεις υποδεικνύουν ότι το DNA πρέπει να είναι πιο χαλαρά τυλιγμένο.

Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η μέση πυκνότητα μιας μπάλας DNA στον όγκο που περικλείεται από τη μεμβράνη του πυρήνα πρέπει να προσεγγίζει αυτήν του νερού —δηλαδή, ο πυρήνας επιπλέει λίγο-πολύ ελεύθερα μέσα στο κύτταρο. Σ' αυτή την περίπτωση, ο όγκος του κυτταρικού πυρήνα ενός θηλαστικού είναι ~$(0{,}8$ έως $4)\cdot 10^{-18}$ m^3, και η διάμετρος της αντίστοιχης σφαίρας ~1,2-2 μm. Η μεμβράνη που περιορίζει τον πυρήνα είναι αρκετά λεπτή (~10^{-8} m), και ελάχιστα συνεισφέρει στον όγκο του.

Ας προσθέσουμε τώρα στο μείγμα τα υπόλοιπα συστατικά. Χρειαζόμαστε αρκετές φορές περισσότερο RNA απ' ό,τι DNA. Και η μάζα των άλλων ουσιών (πρωτεΐνες και άλλα μέρη του κυττάρου που έχουν συντεθεί μέσω DNA και RNA) θα πρέπει να υπερβαίνει κατά πολύ τη μάζα του RNA. Για τις εκτιμήσεις μας θα υποθέσουμε ότι ο λόγος των μαζών του DNA και των πρωτεϊνών είναι 10 : 1. Όλο αυτό το περιεχόμενο που συγκρατείται από τη μεμβράνη πρέπει να επιπλέει στο νερό. Θα υποθέσουμε, λοιπόν, ότι κατ' όγκον το νερό είναι τέσσερις φορές περισσότερο από τα υπόλοιπα («ξηρά») συστατικά του κυττάρου.

Έπειτα απ' όλα αυτά, ο ελάχιστος όγκος των κυττάρων των θηλαστικών πρέπει να είναι

$$(V_\kappa)_{\min} \sim (0{,}3 \text{ έως } 1{,}6)\cdot 10^{-16}\,\text{m}^3,$$

και η αντίστοιχη διάμετρός τους

$$(d_\kappa)_{\min} \sim \left(\frac{6V_\kappa}{\pi}\right)^{1/3} \cong 4 - 7\,\mu\text{m}.$$

Δηλαδή, δεν είναι δυνατόν να υπάρξουν κύτταρα θηλαστικών με διαμέτρους μικρότερες των 4 μm. Αυτό το αποτέλεσμα αποτελεί αποφασιστική βελτίωση σε σχέση με την προηγούμενή μας απόπειρα να εκτιμήσουμε το μέγεθος των κυττάρων στα θηλαστικά.

Επιπλέον, η μαγειρική μας προσέγγιση παρέχει επί μέρους απαντήσεις στα κύρια ερωτήματα που θέσαμε στην αρχή.

- Το εύρος της ελάχιστης κυτταρικής διαμέτρου δεν είναι μεγάλο —προσδιορίζεται περίπου από ένα συντελεστή 2 για όλα τα θηλαστικά (σε αντίθεση με το DNA, του οποίου το μήκος ποικίλλει κατά ένα συντελεστή 5).

- Η διάμετρος του κυττάρου των θηλαστικών δεν είναι 1 μm —είναι πολύ μεγαλύτερη.

Επομένως, η μαγειρική μας προσέγγιση κατέληξε σε μια συνταγή κατασκευής ενός κυττάρου θηλαστικού. Για να πάρουμε 100 μέρη ενός ζωντανού κυττάρου, χρειαζόμαστε (κατά βάρος)

84 μέρη νερό
7 μέρη πρωτεΐνες
4 μέρη λιπίδια
4 μέρη υδατάνθρακες
λίγο RNA (0,7 μέρη)
λίγο DNA (0,3 μέρη).

Ο όγκος κάθε τέτοιου κυττάρου είναι $4 \cdot 10^{-15}$ m^3, η διάμετρός του 20 μm, και η μάζα του $3{,}5 \cdot 10^{-12}$ kg.

Στη συνέχεια, ας στρέψουμε την προσοχή μας σε μια από τις σημαντικότερες λειτουργίες ενός κυττάρου: την ανταλλαγή ουσιών με τον εξωτερικό κόσμο. Για να παραμείνει ζωντανό ένα κύτταρο, χρειάζεται να προσλαμβάνει οξυγόνο και καύσιμα, και να αποβάλλει διοξείδιο του άνθρακα, τα προϊόντα που έχει παρασκευάσει, και άχρηστες ουσίες.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι εκτός από τα κύτταρα των θηλαστικών, που έχουν περίπου το ίδιο χαρακτηριστικό μέγεθος, οι διάμετροι των ερυθροκυττάρων και των τριχοειδών αγγείων έχουν επίσης περίπου ίδιο μέγεθος. Τα ερυθροκύτταρα των θηλαστικών, που λαμβάνουν μέρος στην ανταλλαγή κυτταρικών αερίων, ποικίλλουν σε μέγεθος από 5 μm έως 10 μm. Η διάμετρος των τριχοειδών αγγείων είναι 3-30 μm. Η εγγύτητα αυτών των τιμών έχει βαθιά βάση: σε ένα μήκος περίπου 10 μm, πραγματοποιείται δραστική αλλαγή στο χαρακτήρα της μεταφοράς ουσιών στον οργανισμό. Έτσι, θα ονομάσουμε την τελευταία απόπειρα υπολογισμού του μεγέθους των κυττάρων, γενικά, των ερυθροκυττάρων και των τριχοειδών αγγείων, αρκετά αινιγματικά, «προσέγγιση μεταφοράς και διάχυσης».

Παρατηρώντας το κύτταρο να εργάζεται

Ας προσπαθήσουμε πρώτα να διευκρινίσουμε τι εννοούμε όταν λέμε «μεταφορά» και «διάχυση». Με ποιον τρόπο μπορεί κανείς να εξασφαλίσει τη γρήγορη παροχή ουσιών σ' ένα μεγάλο πλήθος κυττάρων; Ένας τρόπος είναι να οργανώσει την κατευθυνόμενη κίνηση ουσιών σε συνδυασμό με τη ροή του αίματος —δηλαδή, με μεταφορά. Αυτό συμβαίνει κατά την κυκλοφορία του αίματος μέσα στα αιμοφόρα αγγεία των ζώων. Η μεταφορά είναι αρκετά αποτελεσματική όταν η κυκλοφορία του αίματος πραγματοποιείται σε μεγάλα αγγεία. Παρ' όλα αυτά, όταν απομακρύνεται από την καρδιά και πλησιάζει τους «καταναλωτές» (κύτταρα), το δίκτυο των αιμοφόρων αγγείων διακλαδώνεται όλο και πιο πολύ, και η διάμετρος των αγγείων γίνεται όλο και μικρότερη. Καθώς συμβαίνει αυτό, το αίμα πρέπει αναγκαστικά να ρέει πιο αργά. Και τούτο διότι η πίεση ενός παχύρρευστου υγρού μειώνεται καθώς αυτό ρέει σ' ένα αγγείο. Η πτώση στην πίεση είναι ανάλογη προς την ταχύτητα του υγρού και το μήκος του αγγείου, και αντιστρόφως ανάλογη της ενεργού διατομής του.

Για να μην καθίσταται τελικά πολύ μεγάλη η απώλεια πίεσης (οπότε το αίμα δεν θα μπορούσε να κυκλοφορεί καθόλου μέσα σ' έναν τέτοιο αγωγό), η ροή του αίματος πρέπει να μειώνεται ανάλογα με τη διάμετρο των αγγείων. Το ίδιο ισχύει και για το μήκος των αγγείων. Πράγματι, αυτά ισχύουν στο αγγειακό σύστημα των ζώων. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 1 εικονίζεται η εξάρτηση της μέσης ταχύτητας μεταφοράς από την αγγειακή διάμετρο στους ανθρώπους. Η σχέση είναι σχεδόν γραμμική:

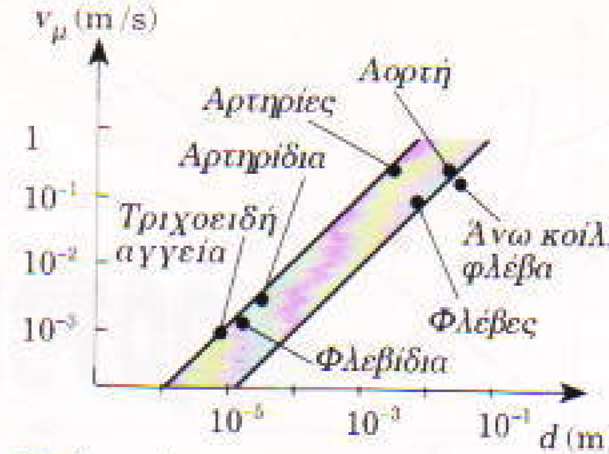
$$v_\mu \sim (20 \text{ έως } 100)d.$$

Έτσι, η ροή του αίματος πράγματι μειώνεται ανάλογα με την αγγειακή διάμετρο. Κατά κάποιον τρόπο, όμως, η μεταφορά χάνει την αποτελεσματικότητά της σε μικρότερα αγγεία.

Τι μπορούμε να πούμε τώρα, λοιπόν, για τη διάχυση; Η διάχυση είναι η μεταφορά ουσιών που οφείλεται στη χαοτική κίνηση των μορίων. Κατ' αυτήν, κάθε μόριο τη μια απομακρύνεται από το σημείο εκκίνησης, και την άλλη πλησιάζει. Έτσι, η μέση απόστασή του από το σημείο εκκίνησης δεν είναι ανάλογη προς το χρόνο t (όπως π.χ. στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση), αλλά προς το $\sqrt{t}$:

$$d = \sqrt{2Dt},$$

όπου D είναι ο συντελεστής διάχυσης.[1]



Σχήμα 1

Εξάρτηση της ταχύτητας μεταφοράς από τη διάμετρο των αιμοφόρων αγγείων στους ανθρώπους.

Παίρνοντας το χρόνο t από αυτή την εξίσωση, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση ταχύτητα διάχυσης για απόσταση d:

$$v_\delta \sim \frac{\delta}{t} \sim \frac{D}{d}.$$

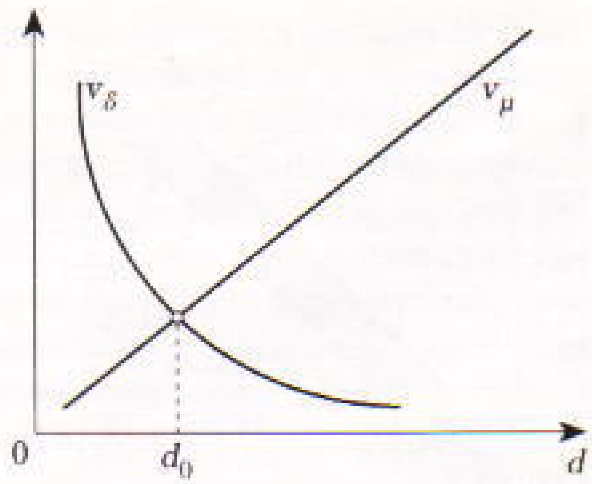
Συνεπώς, σε μεγάλες αποστάσεις, η διάχυση επιβραδύνεται, είναι όμως ιδιαίτερα ουσιαστική σε μικρή κλίμακα. Συγκρίνοντας τους τύπους για τις ταχύτητες μεταφοράς και διάχυσης (v_μ και v_δ αντίστοιχα), εύκολα εντοπίζουμε μια χαρακτηριστική απόσταση d_0 (Σχήμα 2),

$$d_0 \sim \left(\frac{D}{20 \text{ ως } 100}\right)^{1/2},$$

στην οποία και οι δύο ταχύτητες είναι ίσες.

Ο συντελεστής διάχυσης για ουσίες μέσα στο νερό είναι της τάξης $D \sim 10^{-9}$ m^2/s, και έτσι $d_0 \sim$ 3-7 μm. Αυτή είναι πράγματι η κλίμακα μεγέθους των τριχοειδών αγγείων, των

1. Περισσότερες πληροφορίες για τη διάχυση μπορείτε να βρείτε στο άρθρο «Υπερηχητικά και γλυκοκολοκύθες» του Albert Stasenko στο τεύχος Ιουλίου/Αυγούστου 1995 του *Quantum*.



Σχήμα 2
Οι ταχύτητες μεταφοράς (vμ) και διάχυσης (Vδ) σε συνάρτηση με τη χαρακτηριστική απόσταση d.

κυττάρων, γενικά, και των ερυθροκυττάρων. Με άλλα λόγια, στους ζωντανούς οργανισμούς η μετακίνηση με μεταφορά κυριαρχεί μέχρι απόσταση d_0, πέρα από την οποία τον κύριο ρόλο παίζει η διάχυση.

Η νέα μας εκτίμηση είναι συνεπής με τον μαγειρικό υπολογισμό. Αυτό αποτελεί έμμεση απόδειξη ότι το κύτταρο έχει περιορισμένες «επιλογές» όσον αφορά το μέγεθός του. Η διαφορά μεταξύ των 3-7 μm (η δική μας εκτίμηση) και των 10-20 μm (το πραγματικό του μέγεθος) μπορεί να δικαιολογηθεί από τις απλοποιήσεις που εφαρμόσαμε στην προσέγγισή μας. Αυτό είναι το τίμημα της σαφήνειας.

Θα κλείσω με ορισμένες παρατηρήσεις σχετικά με τον Πίνακα 1. Η βαθύτερη φύση ορισμένων από τα στοιχεία του δεν είναι εντελώς ξεκάθαρη προς το παρόν.

1. Το καρδιακό απόθεμα είναι περίπου ένα δισεκατομμύριο παλμοί για τη διάρκεια μιας ζωής. Αυτή η τιμή αντιστοιχεί στον κόσμο των θηλαστικών. Εντούτοις, φαίνεται πολύ μικρή για τους ανθρώπους —ένα δισεκατομμύριο παλμοί, με ρυθμό ενός ανά δευτερόλεπτο (ο ρυθμός της ανθρώπινης καρδιάς), μεταφράζονται σε διάρκεια ζωής μόλις 30 ετών. Στις μέρες μας η διάρκεια ζωής είναι διπλάσια ή τριπλάσια. Στο τέλος του προηγούμενου αιώνα, το προσδόκιμο επιβίωσης ήταν λίγο-πολύ σύμφωνο με τις προδιαγραφές (δηλαδή τον Πίνακα 1). Στα χρόνια που μεσολάβησαν σημειώσαμε μεγάλες προόδους στον περιορισμό ορισμένων ασθενειών, στη μείωση της παιδικής θνησιμότητας και στη βελτίωση των συνθηκών εργασίας και του τρόπου ζωής. Από τα θηλαστικά, μόνο οι άνθρωποι μπόρεσαν να βελτιώσουν τον στατιστικό χρόνο επιβίωσής τους.

Ο καρδιακός ρυθμός μειώνεται με την αύξηση του σωματικού βάρους. Για παράδειγμα, ο ποντικός έχει καρδιακό ρυθμό 600 παλμών ανά λεπτό και διάρκεια ζωής τρία χρόνια. Οι αντίστοιχες τιμές για έναν ελέφαντα είναι 30 παλμοί ανά λεπτό και 60 χρόνια.

2. Το καρδιακό απόθεμα φαίνεται να είναι εξαιρετικά μεγάλο. Πράγματι, από όλους τους κινούμενους μηχανισμούς των άβιων αντικειμένων, μόνο τα ρολόγια μπορούν να το ανταγωνιστούν· ωστόσο, σε αντίθεση με την καρδιά, χρειάζονται κατά περιόδους καθάρισμα και επισκευή.

3. Οι τρεις τελευταίες σειρές στον Πίνακα 1 αντικατοπτρίζουν ορισμένες βέλτιστες σχέσεις που αναπτύχθηκαν κατά τη μακρά πορεία της εξέλιξης.

Στην περίπτωση της θερμοκρασίας, η αύξησή της οδηγεί σε ταχεία αύξηση της δραστηριότητας των ενζύμων που καταλύουν τις μεταβολικές διαδικασίες. Από την άλλη, οι πρωτεΐνες αρχίζουν να διασπώνται σε θερμοκρασίες 40-45°C. Έτσι, η περιοχή θερμοκρασιών 37-38°C είναι η καλύτερη για την πραγματοποίηση ενζυμικών διεργασιών σε θηλαστικά της ξηράς.

Η σχέση ανάμεσα στον αναπνευστικό και τον καρδιακό κύκλο ($t_a/t_\kappa \cong 4$ για όλα τα θηλαστικά) πρέπει να προκύπτει από το γεγονός ότι τα ερυθροκύτταρα μεταφέρουν οξυγόνο από τους πνεύμονες στους ιστούς και διοξείδιο του άνθρακα από τους ιστούς στους πνεύμονες. Έτσι, οι αναπνευστικοί και καρδιακοί ρυθμοί πρέπει να έχουν στενή σχέση. Παρ' όλα αυτά, η εν λόγω σχέση δεν είναι άμεση.

Οι επιστήμονες εξακολουθούν να μη γνωρίζουν γιατί οι σχετικές μάζες της καρδιάς, των πνευμόνων, των μυών και ορισμένων άλλων οργάνων είναι σταθερές. Για ορισμένα από αυτά τα όργανα (τους μυς και τα οστά), θα μπορούσε κατ' αρχήν να εξηγηθεί από την ανάγκη κίνησης για την ανεύρεση τροφής. Παράλληλα, η σχετική μάζα κάποιων άλλων σημαντικών οργάνων (των νεφρών, του ήπατος και του εγκεφάλου, ειδικότερα) αυξάνει καθώς το μέγεθος του σώματος μειώνεται.

Πολλά και σημαντικά ερωτήματα, λοιπόν, παραμένουν ανοιχτά για την επόμενη γενιά ερευνητών.

Μια συναρπαστική ιστορία

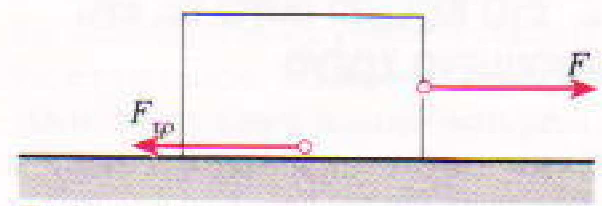
Έξι προβλήματα στατικής τριβής, και πώς να τους ξεγλιστρήσετε

Alexey Chernoutsan

ΜΕ ΠΟΙΟΝ ΤΡΟΠΟ ΛΥΝΟΥΜΕ ΣΥνήθως τα προβλήματα της δυναμικής; Πρώτα σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος, ένα σχήμα δηλαδή όπου σημειώνουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Κατόπιν αναλύουμε τις δυνάμεις και τις επιταχύνσεις στο επιλεγμένο ορθογώνιο σύστημα αξόνων. Στη συνέχεια γράφουμε την εξίσωση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για κάθε άξονα. Για να επιλύσουμε το σύστημα αυτών των εξισώσεων, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους που περιγράφουν ορισμένες από τις δυνάμεις. Για παράδειγμα, γράφουμε το βάρος του σώματος ως mg (m είναι η μάζα του σώματος και g η επιτάχυνση της βαρύτητας), τη δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο στο σώμα ως kx (k είναι η ελαστική σταθερά του ελατηρίου και x η μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του), την τριβή ολίσθησης ως μN (μ είναι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης και N η κάθετη δύναμη). Θα ήθελα να τονίσω πως, όταν σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος, σημειώνουμε προσεκτικά τη διεύθυνση και τη φορά κάθε δύναμης: η δύναμη της βαρύτητας έχει πάντα κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς τα κάτω, η δύναμη της τριβής ολίσθησης έχει φορά αντίθετη της ταχύτητας του σώματος σε σχέση με την επιφάνεια, κ.ο.κ.

Εντούτοις, δεν περιγράφονται όλες οι δυνάμεις από δικούς τους τύπους, και δεν έχουν πάντοτε ορισμένη διεύθυνση και φορά. Μπορούμε να προσδιορίσουμε, φέρ' ειπείν, την κάθετη δύναμη μιας επιφάνειας ή την τάση ενός νήματος μόνο μέσω των περιορισμών που τίθενται στην κίνηση του σώματος. Για παράδειγμα, όταν το σώμα ολισθαίνει σε μια επιφάνεια, η κάθετη δύναμη έχει ακριβώς τέτοια τιμή ώστε η κίνηση του σώματος να γίνεται όντως μόνο πάνω σ' αυτή την επιφάνεια.

Η στατική τριβή έχει τα ίδια χαρακτηριστικά. Μπορούμε να λέμε ότι η δύναμη της στατικής τριβής έχει μέτρο και φορά τέτοια ώστε να διατηρεί το σώμα στο οποίο ασκείται σε ηρεμία, σε σχέση με την επιφάνεια πάνω στην οποία αυτό μπορεί να κινηθεί. Αρκετά συχνά η εν λόγω δύναμη μας προκαλεί πονοκέφαλο. Οι δυσκολίες αρχίζουν από τη στιγμή που προσπαθούμε να την απεικονίσουμε στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος. Γνωρίζουμε μόνο ένα πράγμα σχετικά με το φορέα της: είναι εφαπτόμενος στην επιφάνεια. Προς ποια κατεύθυνση, όμως; Η απάντηση δεν είναι πάντα προφανής. Επίσης, κατά τη λύση των προβλημάτων χρειάζεται να είμαστε βέβαιοι ότι η προκύπτουσα δύναμη στατικής τριβής βρίσκεται μέσα στα όρια της περιοχής $0 \leq F_{\tau\rho} \leq \mu N$ —διαφορετικά το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει. Τέλος, μερικές φορές η στατική τριβή εμφανίζεται με παράξενη μορφή (για παράδειγμα, ως κινητήρια δύναμη ενός τρένου ή ενός αυτοκινήτου), έτσι ώστε να είναι δύσκολο ακόμη και να την αναγνωρίσουμε. Ας δούμε στη συνέχεια ορισμένα παραδείγματα.



Σχήμα 1

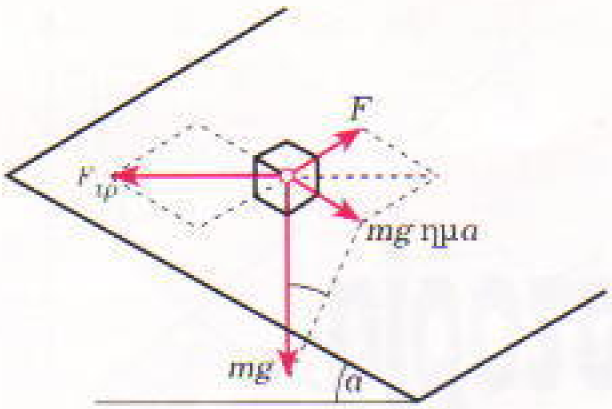
1. Ένα κιβώτιο σε ηρεμία

Ας φανταστούμε ότι αρκετές δυνάμεις ασκούνται στο κιβώτιο που εξετάζουμε, όμως αυτό παραμένει ακίνητο. Τούτο σημαίνει ότι η στατική τριβή έχει μέτρο και φορά τέτοια ώστε η συνισταμένη όλων των δυνάμεων να ισούται με μηδέν. Ποιες είναι, λοιπόν, αυτές οι τιμές;

Στην απλούστερη περίπτωση (Σχήμα 1) η απάντηση είναι προφανής: $\mathbf{F}_{\tau\rho} = -\mathbf{F}$.

Εάν το κιβώτιο ηρεμεί πάνω σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσεως α, η δύναμη της τριβής έχει διεύθυνση παράλληλη στην κεκλιμένη επιφάνεια και φορά προς τα πάνω, και μέτρο $F_{\tau\rho} = mg\,\eta\mu\alpha$ (όπου m είναι η μάζα του κιβωτίου). Το σώμα δεν θα ολισθήσει εάν $F_{\tau\rho} \leq \mu N = \mu mg\,\sigma\upsilon\nu\alpha$ — δηλαδή, εάν $\varepsilon\varphi\alpha \leq \mu$.

Ας εφαρμόσουμε τώρα στο κιβώτιο μια μικρή οριζόντια δύναμη $\mathbf{F}$, παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2· στη συνέχεια αυξάνουμε σταδιακά το μέτρο της F. Σ' αυτή την περίπτωση, η στατική τριβή $\mathbf{F}_{\tau\rho}$ μεταβάλλεται και κατά διεύθυνση και κατά μέτρο:



Σχήμα 2

$$F_{τρ} = \sqrt{(mg\,\text{ημ}α)^2 + F^2}.$$

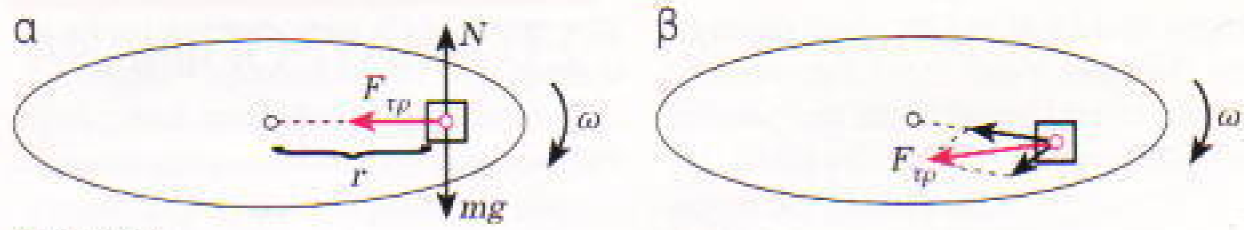
Όταν, μάλιστα, η στατική τριβή αποκτήσει την τιμή $\mu N = \mu mg$ συν$α$, το σώμα θα αρχίσει να ολισθαίνει σε κατεύθυνση αντίθετη κάθε χρονική στιγμή αυτής της $\mathbf{F}_{τρ}$.

2. Ένα κιβώτιο πάνω σε ένα κινούμενο τρένο

Ας υποθέσουμε πως ένα τρένο κινείται οριζόντια με επιτάχυνση $\boldsymbol{\gamma}$ (Σχήμα 3). Για να μπορέσει ένα κιβώτιο μάζας m που βρίσκεται πάνω στο πάτωμα ενός βαγονιού του τρένου να κινείται μαζί του, η δύναμη της στατικής τριβής πρέπει να του προσδίδει επιτάχυνση $\boldsymbol{\gamma}$. Έτσι, η $\mathbf{F}_{τρ}$ έχει διεύθυνση και φορά ίδιες με τη διεύθυνση και τη φορά κίνησης του τρένου και μέτρο $F_{τρ} = m\gamma$. Το κιβώτιο δεν θα ολισθαίνει εφόσον $F_{τρ} \leq \mu N = \mu mg$· αν, όμως, η επιτάχυνση του τρένου γίνει μεγαλύτερη από $\gamma_0 = \mu g$, το κιβώτιο θα ολισθήσει προς τα πίσω σε σχέση με το τρένο. Στο Σχήμα 3 απεικονίζεται και η αντίδραση της στατικής τριβής: η δύναμη $\mathbf{F}'_{τρ}$, που το κιβώτιο ασκεί στο βαγόνι. (Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, $\mathbf{F}'_{τρ} = -\mathbf{F}_{τρ}$).

3. Ένα κιβώτιο πάνω σε μια περιστρεφόμενη πλατφόρμα

Η επιτάχυνση ενός κιβωτίου που ηρεμεί πάνω σε μια ομαλά περιστρεφόμενη πλατφόρμα πρέπει να έχει φορά προς το κέντρο της πλατφόρμας.



Σχήμα 4

Εφόσον η στατική τριβή είναι η μόνη οριζόντια δύναμη που μπορεί να προσδώσει αυτή την επιτάχυνση, θα έχει φορά προς το κέντρο και μέτρο $m\omega^2 r$ (Σχήμα 4α), όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας. Αν η γωνιακή ταχύτητα αρχίσει να αυξάνεται πολύ αργά, τότε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η δύναμη της στατικής τριβής θα αποκτήσει την τιμή $\mu N = \mu mg$, το κιβώτιο θα αρχίσει να ολισθαίνει πάνω στην πλατφόρμα. Αν η γωνιακή επιτάχυνση, όμως, είναι πολύ μεγάλη, τότε πρέπει να λάβουμε υπόψη μας όχι μόνο την κεντρομόλο επιτάχυνση (ονομάζεται επίσης και ακτινική επιτάχυνση), αλλά και την εφαπτομενική επιτάχυνση, που έχει διεύθυνση και φορά ίδια με της ταχύτητας και προκαλεί τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας (η εφαπτομενική επιτάχυνση αγνοήθηκε στην προηγούμενη περίπτωση, όπου η γωνιακή επιτάχυνση ήταν μικρή). Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη της στατικής τριβής που προκαλεί και τις δύο αυτές επιταχύνσεις —ή μάλλον και τις δύο συνιστώσες της επιτάχυνσης— δεν θα κατευθύνεται ακριβώς προς το κέντρο, αλλά θα σχηματίζει κάποια γωνία με την ακτίνα.

4. Μια ρόδα πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο

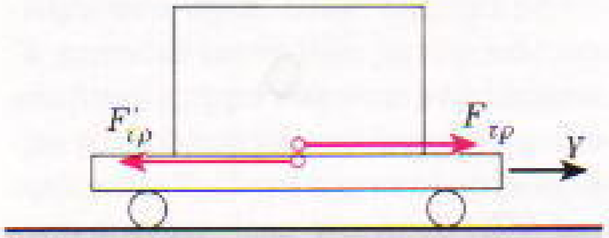
Ας υποθέσουμε ότι μια ρόδα κυλάει προς τα κάτω σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο, χωρίς ολίσθηση του πέλματός της στο επίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία του πέλματος που βρίσκονται σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο έχουν κάθε δεδομένη στιγμή μηδενική ταχύτητα. Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας, η δύναμη της στατικής τριβής ισούται με το γινόμενο της μάζας m της ρόδας επί τη γραμμική επιτάχυνσή της, $\boldsymbol{\gamma}$ (Σχήμα 5)· γιατί; Αν απουσίαζε η εν λόγω δύναμη, θα είχαμε ολίσθηση αντί για κύλιση —η ρόδα θα γλιστρούσε στο κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να περιστρέφεται.

5. Ένα αυτοκίνητο που επιταχύνεται

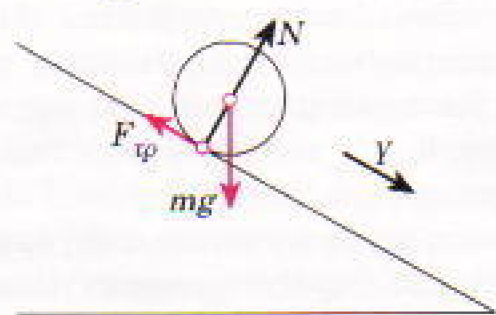
Πρέπει να τονίσουμε ότι η κινητήρια δύναμη που επιταχύνει ένα αυτοκίνητο δεν είναι τίποτε άλλο παρά η δύναμη της στατικής τριβής που ασκείται στους κινητήριους τροχούς του. Ο κινητήρας μεταδίδει την κίνηση στους τροχούς, τείνοντας να τους περιστρέψει δεξιόστροφα (Σχήμα 6). Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, ασκείται στα ελαστικά στατική τριβή με φορά προς τα εμπρός, η οποία θέτει το αυτοκίνητο σε κίνηση.

Τι συμβαίνει, όμως, με τους παθητικούς (μη κινητήριους) τροχούς; Ασκείται σ' αυτούς στατική τριβή; Φυσικά, αλλά πολύ μικρότερου μέτρου, διότι αυτή η δύναμη πρέπει να είναι μόλις επαρκής για να περιστρέψει τους τροχούς —και αυτό είναι όλο.

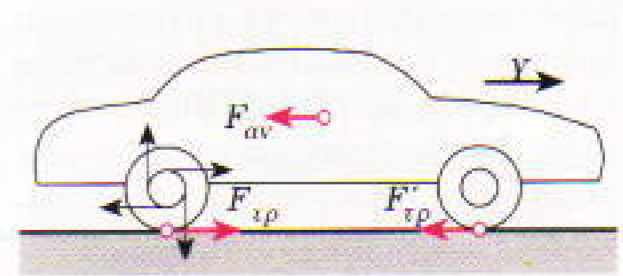
Στην κίνηση του αυτοκινήτου αντιστέκεται μία δύναμη η οποία περιλαμβάνει δύο συνιστώσες: τη δύναμη της τριβής κύλισης (που οφείλεται στην παραμόρφωση των ελαστικών και στην τραχύτητα του οδοστρώματος), και την αντίσταση του αέρα.



Σχήμα 3



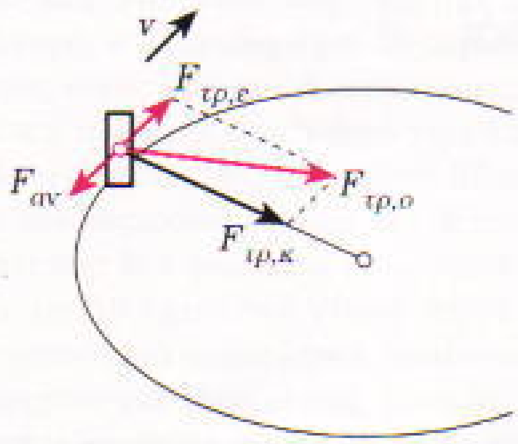
Σχήμα 5



Σχήμα 6

6. Ένα αυτοκίνητο που στρίβει

Ας φανταστούμε τώρα ένα αυτοκίνητο που «παίρνει στροφή» με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Εφόσον η επιτάχυνση του αυτοκινήτου κατευθύνεται προς το κέντρο της στροφής, θα είναι κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας. Η δύναμη της στατικής τριβής, που ασκείται στους τροχούς —οι οποίοι περιστρέφονται χωρίς να ολισθαίνουν—, θα έχει την ίδια κατεύθυνση με την επιτάχυνση . Δυστυχώς, οι μαθητές συχνά θεωρούν εσφαλμένα αυτή τη δύναμη ως δύναμη τριβής ολίσθησης (μα στο κάτω κάτω οι τροχοί του αυτοκινήτου κυλούν, δεν γλιστρούν), με ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά απ' αυτήν της ταχύτητας. Έτσι, όμως, τίθεται το ερώτημα: ποια είναι η δύναμη που προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση;



Σχήμα 7

Είναι ενδιαφέρον ότι στην πράξη, εκτός από τη στατική τριβή, στο αυτοκίνητο δρα η δύναμη της αντίστασης, με την ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά απ' αυτήν της ταχύτητας. Η αντίσταση επηρεάζει τη στατική τριβή; Κατά κανόνα, ναι. Καθώς το αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου, η αντίσταση πρέπει να εξουδετερώνεται από μια ίσου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς δύναμη —δηλαδή, από μια επιπρόσθετη δύναμη στατικής τριβής, με ίδια διεύθυνση και φορά με αυτήν της ταχύτητας. Αυτό σημαίνει πως η συνολική δύναμη στατικής τριβής σχηματίζει κάποια γωνία με την επιβατική ακτίνα (Σχήμα 7): μία από τις συνιστώσες της προσδίδει στο αυτοκίνητο την απαραίτητη κεντρομόλο επιτάχυνση, ενώ η άλλη εξουδετερώνει τη δύναμη της αντίστασης. Σ' έναν άσχημο δρόμο οι αντιστάσεις μπορεί να είναι σημαντικές, οπότε δεν πρέπει να αγνοηθούν. Πράγματι, το ντεραπάρισμα (η ολίσθηση και απώλεια του ελέγχου του αυτοκινήτου) θα συμβεί αν η συνολική δύναμη στατικής τριβής πάρει την τιμή $\mu N = \mu mg$. Είναι αλήθεια ότι σε θεωρητικά προβλήματα συνήθως αγνοούμε τις αντιστάσεις. Μπορούμε, όμως, να κάνουμε το ίδιο και στην πραγματική ζωή; Αναμφισβήτητα όχι!

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΚΠΛΗΞΕΙΣ

Η χρυσή τομή στο μπέιζμπολ

Ο Fibonacci κερδίζει για άλλη μία φορά!

Dave Trautman

Η ΔΙΑΣΗΜΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ FIBONACci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..., που ορίζεται ως εξής: $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, και για $n \geq 0$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, εμφανίζεται σε μια εκτεταμένη ποικιλία κλάδων των θεωρητικών μαθηματικών και σε πολλές περιοχές των φυσικών επιστημών. Όπως αποδεικνύεται, οι λόγοι των διαδοχικών όρων της ακολουθίας Fibonacci τείνουν στον αριθμό που είναι γνωστός ως «λόγος της χρυσής τομής», ο οποίος ισούται κατά προσέγγιση με 1,618:

$$1/1 = 1{,}000,\ 2/1 = 2{,}000,\ 3/2 = 1{,}500,$$

$$5/3 \cong 1{,}667,\ 8/5 = 1{,}600,\ 13/8 = 1{,}625,$$

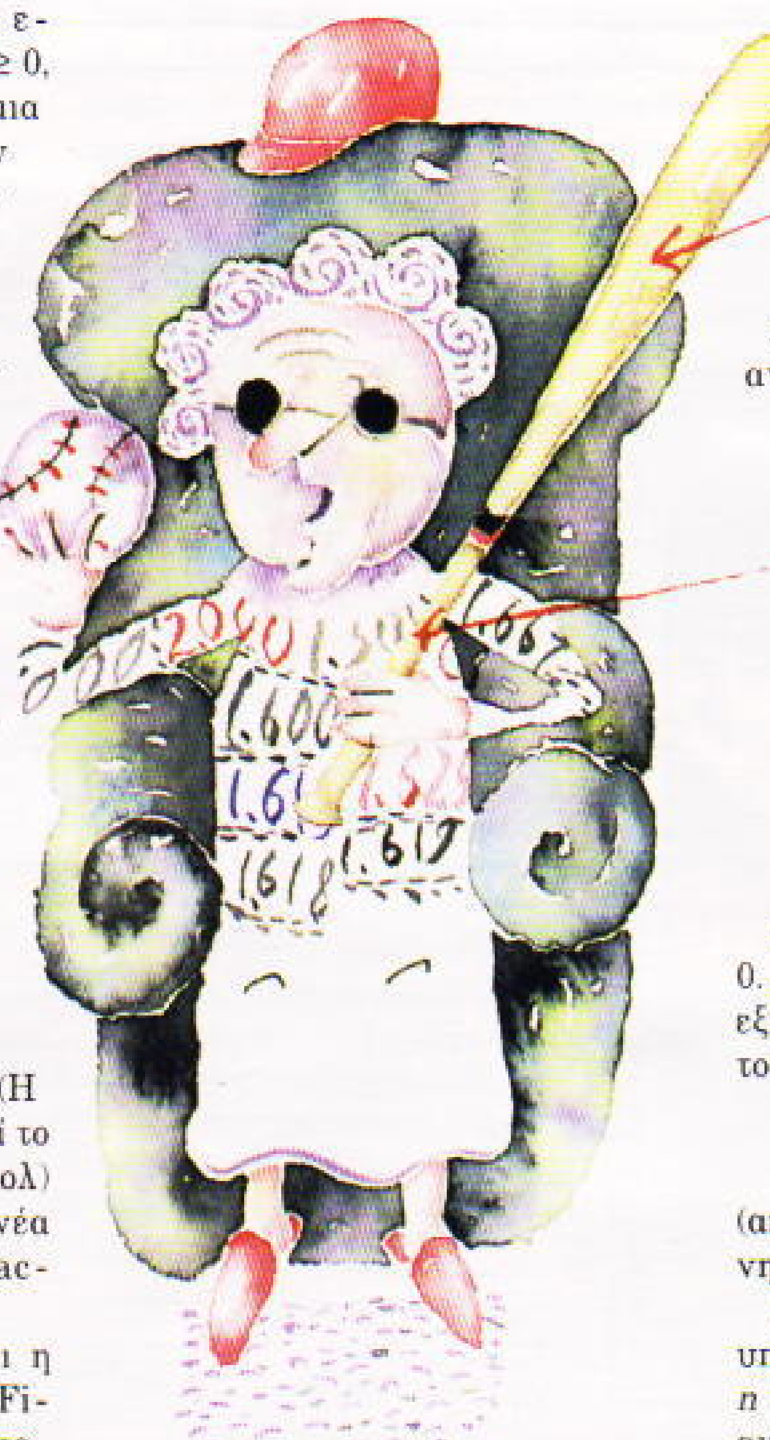
$$21/13 \cong 1{,}615,\ 34/21 \cong 1{,}619,\ \ldots .$$

Από εκεί και μετά, όλοι οι λόγοι στρογγυλοποιούνται στο 1,618.

Πρόσφατα, διαβάζοντας το *The Politics of Glory: How Baseball's Hall of Fame Really Works* (Η πολιτική της δόξας: πώς λειτουργεί το πάνθεον των ηρώων του μπέιζμπολ) του Bill James, συνάντησα μια νέα εμφάνιση της ακολουθίας Fibonacci.

Απ' όσο γνωρίζω, αυτή είναι η πρώτη εμφάνιση της ακολουθίας Fibonacci ή του λόγου της χρυσής τομής στο πεδίο του μπέιζμπολ.

Πριν δούμε πώς προκύπτει, επιτρέψτε μου να παρουσιάσω την παραδοσιακή περιγραφή και την ακριβή τιμή του λόγου της χρυσής τομής. Ο λόγος της χρυσής τομής, λοιπόν, είναι η τιμή του x για την οποία, αν διαιρέσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους x σε δύο μέρη μήκους 1 και $x - 1$, η αναλογία του τμήματος μήκους x προς το τμήμα μήκους 1 ισούται με την αναλογία του τμήματος μήκους 1 προς το τμήμα μήκους $x - 1$:



Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

$\longleftarrow x \longrightarrow$

$\leftarrow x-1 \rightarrow \leftarrow 1 \rightarrow$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Επομένως, $x^2 - x = 1$, ή $x^2 - x - 1 = 0$. Από τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης προκύπτει η ακριβής τιμή του λόγου της χρυσής τομής:

$$x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

(απορρίπτουμε, για την ώρα, την αρνητική ρίζα της εξίσωσης).

Πρόβλημα 1. Υποθέτοντας ότι υπάρχει το όριο της f_{n+1}/f_n καθώς το n τείνει στο άπειρο, αποδείξτε ότι αυτό το όριο πρέπει να είναι ο λόγος της χρυσής τομής.

Επιστροφή τώρα στον κόσμο του

μπέιζμπολ. Ο James στο βιβλίο του συγκρίνει την επίδοση σε νίκες και ήττες στην καριέρα ενός ρίπτη.* Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η σύγκριση ενός παίκτη με αρκετά σύντομη αλλά εντυπωσιακή καριέρα και ενός με πιο μακρόχρονη αλλά λιγότερο εντυπωσιακή. Για παράδειγμα, πώς μπορούμε να συγκρίνουμε τις 165 νίκες και 87 ήττες στην καριέρα του Sandy Koufax με τις 224 νίκες και 184 ήττες του Jim Bunning; Από τη μία πλευρά, ο Bunning έχει 59 περισσότερες νίκες από τον Koufax —σημαντικό πλεονέκτημα. Από την άλλη πλευρά, ο Bunning έχει χάσει 97 παιχνίδια περισσότερα από τον Koufax, κάτι που δεν φαίνεται να ισοσταθμίζει τις 59 επιπλέον νίκες. Αφού τα περισσότερο σημαντικά στατιστικά στοιχεία για τους ρίπτες είναι οι *νίκες*, το *ποσοστό νικών* (οι νίκες διαιρούμενες με το άθροισμα νικών και ηττών), και η *διαφορά μεταξύ νικών-ηττών*, ο James επινόησε έναν τύπο που χρησιμοποιεί και τα τρία στοιχεία.

Αν ένας ρίπτης έχει W νίκες και L ήττες, τότε του δίνουμε $W \cdot W/(W + L) + W - L$ «Fibonacci Βαθμούς Νίκης». Έτσι, ο Koufax έχει $165 \cdot 165/252 + 165 - 87 = 186$ Fibonacci Βαθμούς Νίκης, ενώ ο Bunning έχει $224 \cdot 224/408 + 224 - 184 = 163$ Fibonacci Βαθμούς Νίκης. (Για ευκολία, στρογγυλοποιούμε πάντα τους υπολογισμούς στον πλησιέστερο ακέραιο.) Ο James, λοιπόν, συμπεραίνει ότι ο Koufax ήταν καλύτερος ρίπτης από τον Bunning. Το ίδιο το συμπέρασμα δεν είναι συγκλονιστικό, αφού όλοι σχεδόν οι αναλυτές του μπέιζμπολ θα συμφωνούσαν με τον James. Αυτό που έχει εξαιρετική σημασία, όμως, είναι ότι τώρα διαθέτουμε μια αριθμητική μέθοδο για να συγκρίνουμε την επίδοση.

Γιατί όμως ο James ονομάζει αυτό τον αριθμό Fibonacci Βαθμούς Νίκης; Παρατήρησε ότι ορισμένοι ρίπτες, όπως ο Koufax, έχουν περισσότερους Fibonacci Βαθμούς Νίκης απ' ό,τι νίκες, ενώ άλλοι, όπως ο Bunning, έχουν λιγότερους Fibonacci Βαθμούς Νίκης απ' ό,τι νίκες. Ο διαχωρισμός μεταξύ αυτών των δύο συνόλων παικτών γίνεται στο κρίσιμο σημείο όπου οι νίκες ισούνται με τους Fibonacci Βαθμούς Νίκης. Δηλαδή, όταν

$$W \cdot \frac{W}{W+L} + W - L = W,$$

ή

$$\frac{W^2}{W+L} - L = 0,$$

που μπορούμε να γράψουμε ως

$$W^2 - LW - L^2 = 0.$$

Λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς W (και απορρίπτοντας ξανά την αρνητική ρίζα) παίρνουμε

$$W = \frac{L + \sqrt{L^2 + 4L^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot L.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι εμφανίζεται ο λόγος της χρυσής τομής. Ο James την ορίζει μέσω των λόγων διαδοχικών στοιχείων της ακολουθίας Fibonacci, και γι' αυτό οδηγείται στον όρο Fibonacci Βαθμοί Νίκης.

Τα στατιστικά στοιχεία του μπέιζμπολ δεν δίνουν ποτέ τις νίκες ως πολλαπλάσιο των ηττών, αλλά παραθέτουν το ποσοστό των νικών για κάθε ρίπτη. Έτσι, υπολογίζουμε το ποσοστό νικών που αντιστοιχεί στη σχέση

$$W = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot L:$$

$$\frac{W}{W+L} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+3}$$

$$= \frac{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Μπορούμε να βρούμε εύκολα ότι, με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων, $\left(\sqrt{5}-1\right)/2 = 0{,}618$. Αυτή η τιμή ισούται απλώς με $x - 1$, όπου x είναι ο λόγος της χρυσής τομής. Ισούται επίσης με $1/x$:

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ο James ονομάζει το $1/x$ αριθμό Fibonacci, ενώ ορισμένοι μαθηματικοί θεωρούν αυτό τον αριθμό ως το λόγο της χρυσής τομής.

Ένας ρίπτης είναι δυνατόν να έχει αρνητικό πλήθος Fibonacci Βαθμών Νίκης. Για παράδειγμα, ο Milt Gaston, με 97 νίκες και 164 ήττες, είχε −31 Fibonacci Βαθμούς Νίκης. (Αυτή είναι ίσως η χειρότερη βαθμολογία ρίπτη που συμμετείχε στο πρωτάθλημα της πρώτης κατηγορίας.) Ο James σκέφτηκε ότι το μηδενικό σημείο (το ποσοστό νικών που αντιστοιχεί σε μηδέν Fibonacci Βαθμούς Νίκης) πρέπει να έχει σχέση με τον αριθμό Fibonacci $1/x$. Εμπνεόμενος από τη σχέση $1 - 1/x = (1/x)^2$, υπέθεσε ότι το μηδενικό σημείο είναι αυτή η κοινή τιμή, που με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων ισούται με 0,382. Σύντομα, όμως, ανακάλυψε ότι το μηδενικό σημείο, με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων, είναι 0,414.

Πρόβλημα 2. Βρείτε την ακριβή τιμή του μηδενικού σημείου.

Πρόβλημα 3. Ας υποθέσουμε ότι ένας ρίπτης έχει W νίκες, L ήττες και αντίστοιχο ποσοστό νικών $P = W/(W + L)$. Δείξτε ότι οι Fibonacci Βαθμοί Νίκης αυτού του παίκτη δίνονται από τη σχέση $(P^2 + 2P - 1)(W + L)$.

Παρόλο που αυτός δεν είναι πρακτικός τρόπος υπολογισμού των Fibonacci Βαθμών Νίκης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλούς θεωρητικούς υπολογισμούς. Για παράδειγμα, για να ισούνται οι Fibonacci Βαθμοί Νίκης με το πλήθος των νικών πρέπει

$$(P^2 + 2P - 1)(W + L) = W,$$

ή

$$P^2 + 2P - 1 = P.$$

Από αυτό βλέπουμε ότι $P^2 + P - 1 = 0$, και επομένως

$$P = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$ ◙

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 60

Ο ***Dave Trautman*** είναι μέλος του Τμήματος Μαθηματικών και Επιστήμης των Υπολογιστών στο Citadel του Τσάρλεστον της Νότιας Καρολίνας.

* Το μπέιζμπολ παίζεται από δύο ομάδες των εννέα παικτών. Ένας από αυτούς είναι ο ρίπτης (pitcher), ο οποίος πετάει την μπάλα προς το μέρος του αντιπάλου που προσπαθεί να την αποκρούσει με μια ρακέτα σχήματος ροπάλου. (Σ.τ.μ.)

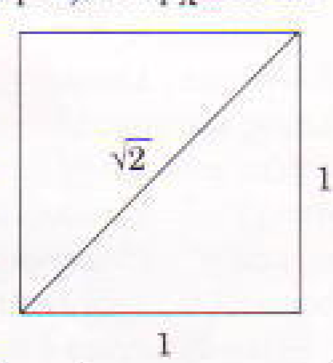
Το μήκος είναι μια από τις πρώτες γεωμετρικές έννοιες που απασχόλησαν την ανθρωπότητα. Οι αρχικοί τρόποι μέτρησης του μήκους ήταν οι πιο φυσικοί, και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο έχουν επιζήσει μέχρι τις μέρες μας. Ακόμη και σήμερα μπορείτε να διαβάσετε σε μια εφημερίδα φράσεις όπως «οι ορειβάτες απείχαν δύο μέρες δρόμο από το πλησιέστερο καταφύγιο» ή «υπήρχε ένα άνοιγμα στο πεζοδρόμιο πλατύ όσο το χέρι μου».

Τα πρωταρχικά μέτρα μήκους, όμως, όπως η πιθαμή (η απόσταση μεταξύ της άκρης του αντίχειρα και του μικρού όταν είναι τεντωμένοι), ο πήχυς (η απόσταση από τα ακροδάχτυλα έως τον αγκώνα) και η οργιά (το μήκος δύο απλωμένων χεριών), παρότι είναι βολικά —τα έχουμε πάντοτε μαζί μας— δεν είναι ακριβή: κάθε άνθρωπος έχει τις δικές του, διαφορετικές μονάδες. Έτσι, τα διάφορα εθνικά κράτη αναγκάστηκαν να εισαγάγουν πρότυπα μήκους —μοντέλα μονάδων μέτρησης. Φυσικά, αυτές οι μονάδες ήταν διαφορετικές σε κάθε χώρα. Για παράδειγμα, τρεις «ρωσικοί πήχεις» ήταν ίσοι με δύο «περσικούς πήχεις», που στη Ρωσία ονομάστηκαν *αρσίν* (*arsh* σημαίνει «αγκώνας» στις τουρκικές γλώσσες).

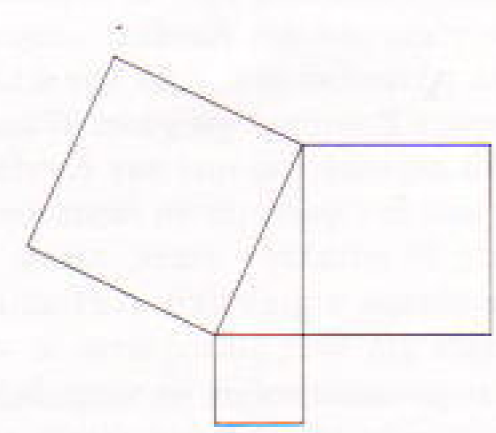
Ακόμη και στην ίδια χώρα, οι σχέσεις μεταξύ των διαφορετικών μονάδων μήκους ήταν μερικές φορές εξαιρετικά περίπλοκες. Για παράδειγμα, ο Μέγας Πέτρος εξέδωσε ένα διάταγμα τον 17ο αιώνα με το οποίο σκόπευε να τακτοποιήσει το ρωσικό σύστημα μέτρησης. Αυτό εισήγαγε αρκετά πολύπλοκες σχέσεις μεταξύ των μονάδων που χρησιμοποιούσαν εκείνη την εποχή: 1 μίλι = 7 βέρστια = 3.500 σάζεν (ρωσικές οργιές) = 10.500 αρσίν = 168.000 βερσόκ (αρχικά, ένα βερσόκ ήταν το πλάτος της παλάμης στη βάση των δαχτύλων) = 294.000 ίντσες = 2.940.000 γραμμές = 29.400.000 σημεία.[1]

Αξίζει να επισημάνουμε ότι στις δύο τελευταίες σχέσεις μπορούμε να διακρίνουμε την ιδέα του μετρικού συστήματος. Είναι όμως τόσο δύσκολο να ξεριζώσουμε τις πατροπαράδοτες μονάδες μέτρησης, ώστε χρειάζεται μια επανάσταση για την αντικατάστασή τους —μερικές φορές κυριολεκτικά. Η γαλλική επανάσταση εισήγαγε το μέτρο, το χιλιόμετρο, το εκατοστόμετρο κ.τ.λ. στη Γαλλία, ενώ τις ίδιες μονάδες καθιέρωσε στη Ρωσία η οκτωβριανή επανάσταση. Οι Ηνωμένες Πολιτείες και η Μεγάλη Βρετανία, από την άλλη πλευρά, επιμένουν στα μεσαιωνικά τους συστήματα μέτρησης παρά τις κάποιες προσπάθειες εισαγωγής του μετρικού συστήματος.

Η μέτρηση του μήκους έπαιξε ρόλο ζωτικής σημασίας στην ιστορία των μαθηματικών. Αλήθεια, τι εννοούμε όταν λέμε «το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος»; Είναι ο αριθμός που μας δείχνει πόσες φορές χωράει στο τμήμα η επιλεγμένη μονάδα μήκους. Αν δεν χωράει ακέραιο πλήθος φορές, είμαστε υποχρεωμένοι να εισαγάγουμε κλασματικό μήκος. Οι αρχαίοι Έλληνες, ήδη, είχαν παρατηρήσει ότι η διαγώνιος και η πλευρά ενός τετραγώνου είναι ασύμμετρες (δηλαδή, η διαγώνιος δεν είναι δυνατόν να εκφραστεί ως ρητό πολλαπλάσιο της πλευράς). Αυτή η παρατήρηση οδήγησε στην ανακάλυψη των άρρητων αριθμών. Έτσι, η έννοια του μήκους αποτέλεσε γέφυρα μεταξύ της γεωμετρίας και της άλγεβρας.



Αυτές οι δύο περιοχές των μαθηματικών συνδέθηκαν ακόμη στενότερα στη θεμελιώδους σημασίας φιλοσοφική πραγματεία *Λόγος περί της μεθόδου για την καλή καθοδήγηση του λογικού μας και την αναζήτηση της αλήθειας στις επιστήμες*, του μεγάλου γάλλου φιλοσόφου και μαθηματικού Καρτέσιου. Σ' αυτό το έργο —ή μάλλον σε ένα από τα τρία παραρτήματά του— ο Καρτέσιος εισήγαγε τις συντεταγμένες, που αργότερα ονομάστηκαν καρτεσιανές, και έθεσε έτσι τη βάση της αναλυτικής γεωμετρίας. Με τον τρόπο αυτό κατέστη δυνατόν να μεταφράσουμε οποιαδήποτε γεωμετρική πρόταση σε αλγεβρική γλώσσα. Για παράδειγμα, το περίφημο πυθαγόρειο θεώρημα —«το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογώνιου τριγώνου



ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του»— μπορεί να ερμηνευτεί ως ο τύπος που δίνει την απόσταση ενός σημείου του επιπέδου των συντεταγμένων από την αρχή: το τετράγωνο της απόστασης ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των συντεταγμένων του σημείου. Αυτό το θεώρημα έχει πολλές προεκτάσεις στη γεωμετρία, την άλγεβρα και τη θεωρία αριθμών (πυθαγόρειες τριάδες, ή το μεγάλο θεώρημα του Fermat).

Η προσπάθεια μέτρησης του μήκους των καμπυλών οδήγησε σε πλήθος ανακαλύψεων. Η περιφέρεια του κύκλου είχε μετρηθεί από την αρχαιότητα (με προσεγγίσεις μέσω πολυγώνων), αν και η φύση του αριθμού π βασάνισε τους μαθηματικούς για εκατοντάδες χρόνια, και το πρόβλημα λύθηκε μόλις τον τελευταίο αιώνα. Για τον ορισμό του μήκους μιας καμπύλης ακολουθήθηκε η ίδια προσέγγιση όπως και με τον κύκλο. Εδώ, όμως, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί, διότι η επιπολαιότητα με τα όρια μπορεί να μας οδηγήσει σε ασυναρτησίες. Σχεδιάστε τη διαγώνιο ενός τετραγώνου και προσεγγίστε τη με «κλιμακωτές» καμπύλες, όπως στο σχήμα δεξιά. Όλες αυτές οι καμπύλες έχουν το ίδιο μήκος —διπλάσιο από το μήκος της πλευράς του τετραγώνου. Από γεωμετρική άποψη, όμως, προσεγγίζουν τη διαγώ-

1. Για να συγκρίνετε αυτές τις μονάδες μέτρησης με τις γνωστές σας, αρχίστε από τις ίντσες, που έχουν παντού το ίδιο μέγεθος.

ΚΑΛΕΙΔ

Μια «μακ

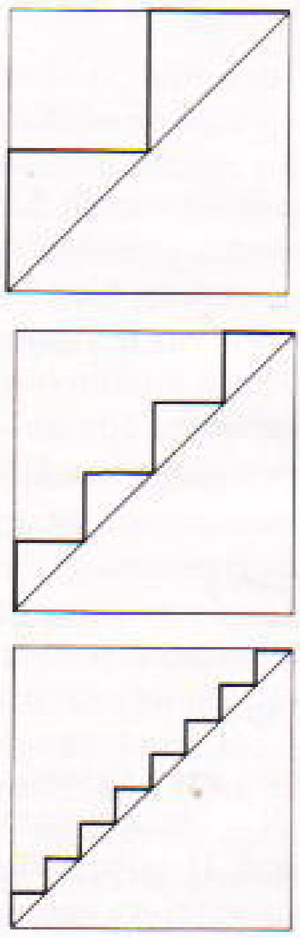
Τι γνωρίζετε πραγ

Anat

ά» ιστορία

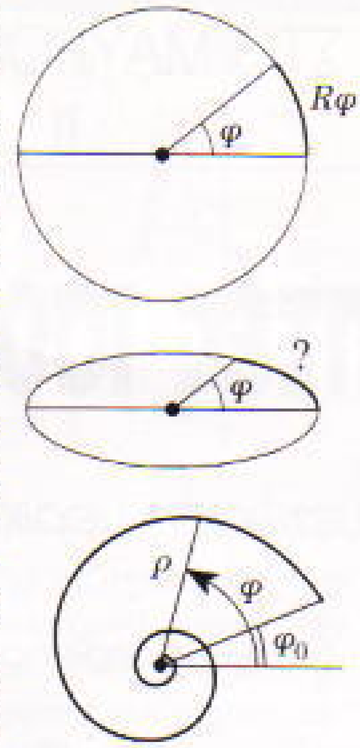
ατικά για το «μήκος»;

y Savin



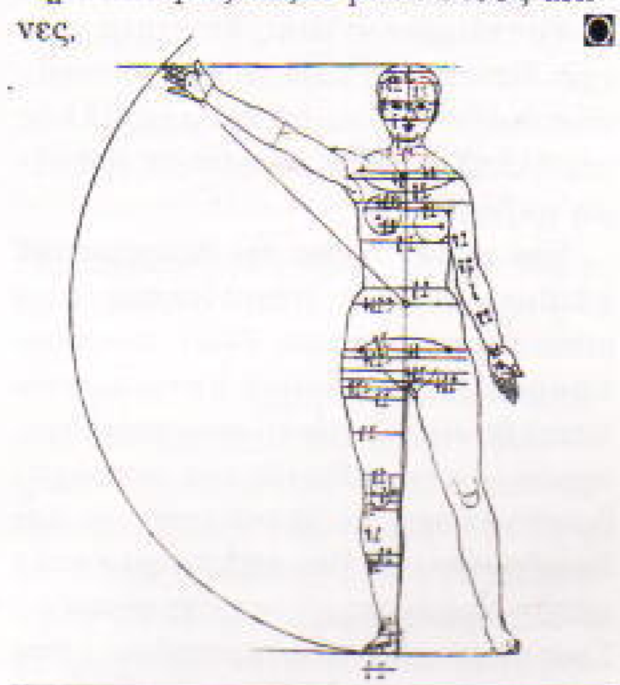
νιο που το μήκος της ισούται με $\sqrt{2}$ φορές το μήκος της πλευράς. Μοιάζει σαν να έχουμε αποδείξει ότι $2 = \sqrt{2}$! Έτσι δεν είναι; Τα προβλήματα μέτρησης του μήκους οδήγησαν στην ανάπτυξη της θεωρίας των ορίων. Είναι περίεργο ότι, ενώ το μήκος ενός κυκλικού τόξου είναι ανάλογο προς την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία φ, το τόξο μιας έλλειψης (ενός «πεπιεσμένου» ή «πεπλατυσμένου» κύκλου) δεν είναι δυνατόν να εκφραστεί βάσει της αντίστοιχης γωνίας, ακόμη και αν χρησιμοποιήσουμε όλο το πεδίο των συναρτήσεων που μελετώνται στο λύκειο (τις «στοιχειώδεις συναρτήσεις»). Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, πρέπει να εισαγάγουμε ειδικές *ελλειπτικές* συναρτήσεις. Αυτές αποδείχτηκαν χρήσιμες και σε πολλά άλλα προβλήματα.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα κατηγορία συναρτήσεων είναι οι σπειροειδείς.[2] Η λεγόμενη υπερβολική σπειροειδής, που δίνεται από την εξίσωση $\rho = a/\varphi$ (δείτε το σχήμα), τυλίγεται άπειρες φορές γύρω από το «κέντρο» της καθώς η γωνία φ μεταβάλλεται στο διάστημα (φ_0, ∞), με $\varphi_0 > 0$. Αυτή η σπειροειδής έχει άπειρο μήκος. Η λογαριθμική σπειροειδής, που δίνεται από την εξίσωση $\rho = e^{-a\varphi}$, τυλίγεται επίσης άπειρες φορές για $\varphi > \varphi_0$, αλλά το συνολικό της μήκος είναι πεπερασμένο! Μια και μιλάμε για το μήκος, είναι αδύνατον να μην αναφέρουμε το απλούστερο και σημαντικότερο όργανο μέτρησής του: τον κανόνα. Πάνω του είναι σημειωμένες ίντσες ή εκατοστόμετρα. Δύο όμοιοι κανόνες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσθέσουμε αριθμούς. Τοποθετούμε τον ένα δίπλα στον άλλο, βάζοντας το σημείο 0 του πρώτου κανόνα απέναντι στο σημείο 8 του δεύτερου. Βρίσκουμε π.χ. την ένδειξη 6 στον πρώτο κανόνα και διαβάζουμε την ένδειξη στο απέναντι σημείο του δεύτερου. Είναι 14, και επομένως $8 + 6 = 14$. Η ίδια ιδέα, τροποποιημένη, χρησιμοποιείται για τον πολλαπλασιασμό των αριθμών: αλλάζουμε απλώς την ομοιόμορφη κλίμακα με τη λογαριθμική. Για πρακτικούς λόγους, ο ένας από τους δύο κανόνες έχει ένα αυλάκι μέσα στο οποίο μπορεί να κυλά ο άλλος. Και τα δύο τμήματα φέρουν πολλές κλίμακες που επιτρέπουν την εκτέλεση διαφόρων πράξεων, ενώ ένας διαφανής δρομέας με σταυρόνημα μας βοηθάει να επιτύχουμε τη σύμπτωση των ενδείξεων των διαφορετικών κλιμάκων. Αυτό το υπολογιστικό εργαλείο ονομάζεται λογαριθμικός κανόνας. Μέχρι πρόσφατα, πριν το εξαφανίσουν οι ηλεκτρονικές αριθμομηχανές, ήταν απαραίτητο εργαλείο κάθε μηχανικού ή φυσικού.



Όταν, αντί για την απόσταση μεταξύ δύο σημείων, μιλάμε για το μήκος της διαδρομής που τα συνδέει, τα χιλιόμετρα μπορεί να μην είναι η καταλληλότερη μονάδα μέτρησης. Για έναν ταξιδιώτη είναι σημαντικότερη η γνώση της διάρκειας του ταξιδιού παρά της απόστασης που πρέπει να διανυθεί, και έτσι μετράμε τις αποστάσεις βάσει των ωρών που απαιτούνται για να καλυφθούν με αεροπλάνο, τρένο ή αυτοκίνητο. Με αυτό τον τρόπο εισάγουμε μια εντελώς διαφορετική «μετρική» για τα σημεία της Γης. Βάσει αυτής της μετρικής, η απόσταση μεταξύ της Μόσχας και του Ούγκλιτς,[3] ας πούμε, μπορεί να αποδειχτεί μεγαλύτερη από την απόσταση μεταξύ της Μόσχας και της Μασσαλίας. Και ένας οδηγός μπορεί να έχει τη δική του μετρική. Τι κοινό έχουν όλες αυτές; Πρώτον, η απόσταση από το σημείο A στο σημείο B είναι ίση με την απόσταση από το σημείο B στο σημείο A· δεύτερον, όλες οι αποστάσεις είναι μη αρνητικές, και τρίτον, το άθροισμα των αποστάσεων από το A στο B και από το B στο C δεν είναι ποτέ μικρότερο από την απόσταση AC (τριγωνική ανισότητα). Υπάρχει άλλη μία κοινή ιδιότητα: η απόσταση μεταξύ δύο σημείων είναι μηδενική, αν και μόνο αν τα δύο σημεία ταυτίζονται.

Έτσι, καταλήγουμε σε μια από τις θεμελιώδεις έννοιες των σύγχρονων μαθηματικών: την έννοια του *μετρικού χώρου*. Αυτή η έννοια, εκτός από τον συνηθισμένο χώρο μας ή το Διάστημα, περιλαμβάνει και ασυνήθιστους «χώρους», όπως το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται σ' ένα ευθύγραμμο τμήμα, στους οποίους το μήκος φαίνεται να έχει χάσει κάθε «γενετική» σχέση με πήχεις, πόδια, δάχτυλα και τα παρόμοια. Και είναι με τη σειρά της ένα είδος μέτρου της διαδρομής που έχουμε διανύσει κατά το μαθηματικό μας ταξίδι μέσα στους αιώνες. ◼



2. Δείτε επίσης το Καλειδοσκόπιο στο τεύχος Μαΐου/Ιουνίου 1995 του *Quantum* που είναι αφιερωμένο σε αυτές τις καμπύλες

3. Μικρή πόλη στις όχθες του Βόλγα, μερικές εκατοντάδες χιλιόμετρα μακριά από τη Μόσχα, που έπαιξε σημαντικό ρόλο στη ιστορία της Ρωσίας πριν από πολλούς αιώνες.

Λεπτές ισορροπίες

Γεωμετρική αντιμετώπιση μερικών προβλημάτων στατικής

Gary Haardeng-Pedersen

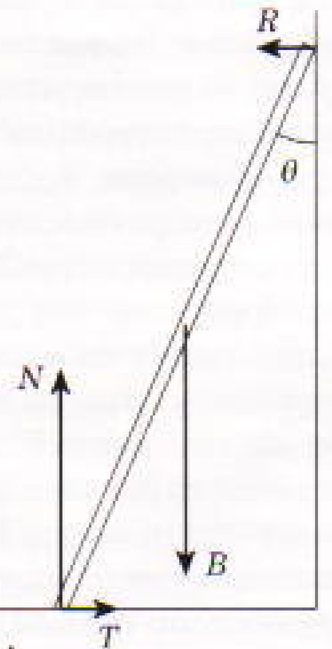
Όταν ενα στερεο σωμα ισορροπεί, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του πρέπει να ισούται με μηδέν, και η συνισταμένη των ροπών τους ως προς οποιοδήποτε σημείο πρέπει επίσης να είναι μηδέν.

Σε πολλές περιπτώσεις, για να δημιουργήσουμε ένα απλό μοντέλο που περιλαμβάνει δυνάμεις επί των αξόνων ενός ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων, αντικαθιστούμε μία δύναμη με τις δύο συνιστώσες της. Για παράδειγμα, η δύναμη την οποία ασκεί μια άρθρωση σ' ένα σώμα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ζευγάρι συνιστωσών, μιας οριζόντιας και μιας κατακόρυφης, που ενεργούν στο ίδιο σημείο. Η δύναμη την οποία ασκεί μια τραχιά επιφάνεια σ' ένα σώμα μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως ζευγάρι συνιστωσών: μιας δύναμης που έχει διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια (κάθετη δύναμη) και μιας άλλης, παράλληλης στην επιφάνεια (δύναμη τριβής).

Στο παρόν άρθρο θα θεωρήσουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις στις οποίες η μελέτη των ίδιων των διανυσμάτων (παρά των συνιστωσών τους) θα απλοποιήσει τους υπολογισμούς —αντικαθιστώντας τις αλγεβρικές λύσεις με γεωμετρικές— και θα οδηγήσει σε μια καλύτερη κατανόηση της εμπεριεχόμενης φυσικής. Στις συγκεκριμένες περιπτώσεις που θα μας απασχολήσουν, υπάρχουν ακριβώς τρεις συντρέχουσες ομοεπίπεδες δυνάμεις που ασκούνται σ' ένα στερεό σώμα.

Ας ξεκινήσουμε με την περίπτωση μιας ομογενούς σκάλας (μάζας M και μήκους L) που στηρίζεται με τη βάση της σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο και την κορυφή της σε λείο κατακόρυφο τοίχο (Σχήμα 1). Ποιος πρέπει να είναι ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής ώστε η σκάλα να παραμένει ακίνητη, αν η γωνία που σχηματίζει με τον κατακόρυφο τοίχο είναι θ;

Μία από τις δυνάμεις που δρουν στη σκάλα είναι το βάρος της $\mathbf{B} = M\mathbf{g}$, με σημείο εφαρμογής το μέσο της σκάλας (αφού η σκάλα είναι ομογενής), διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα κάτω. Μια δεύτερη είναι η κάθετη δύναμη $\mathbf{R}$ την οποία ασκεί ο τοίχος στη σκάλα. Εφόσον ο τοίχος είναι λείος, η $\mathbf{R}$ πρέπει να έχει οριζόντια διεύθυνση. Η δύναμη από το τραχύ δάπεδο συνήθως αναλύεται σε δύο συνιστώσες: την κάθετη δύναμη $\mathbf{N}$ και τη συνιστώσα που είναι



Σχήμα 1

παράλληλη στο δάπεδο (την τριβή $\mathbf{T}$). Αν με $\mathbf{F}$ συμβολίσουμε τη συνολική δύναμη την οποία ασκεί το δάπεδο στη σκάλα, και αν φ είναι η γωνία την οποία σχηματίζει η διεύθυνσή της με την κατακόρυφο, οι δύο συνιστώσες της θα έχουν μέτρα που δίνονται από τις σχέσεις

$$N = F\,\text{συν}\varphi$$

και

$$T = F\,\text{ημ}\varphi.$$

Η συνθήκη ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα δίνει $N = Mg$, και στον οριζόντιο άξονα $T = R$. Η τρίτη αναγκαία συνθήκη προκύπτει αν εφαρμόσουμε το θεώρημα των ροπών ως προς τη βάση της σκάλας:

$$RL\,\text{συν}\theta = Mg\frac{L}{2},$$

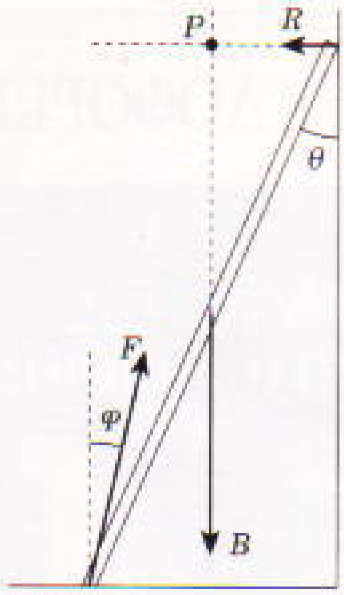
ή

$$R = \frac{1}{2}Mg\,\text{εφ}\theta.$$

Επομένως, ο ελάχιστος αναγκαίος συντελεστής στατικής τριβής είναι

$$\mu = \frac{T}{N} = \frac{R}{Mg} = \frac{1}{2}\text{εφ}\theta.$$

Μια εναλλακτική προσέγγιση συνίσταται στο να αποφύγουμε να αναλύσουμε τη δύναμη του δαπέδου σε δύο συνιστώσες, και να εφαρμόσουμε το θεώρημα των ροπών ως προς κάποιο άλλο σημείο. Ας επιλέξουμε το σημείο P, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2· βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το μέσο της



Σχήμα 2

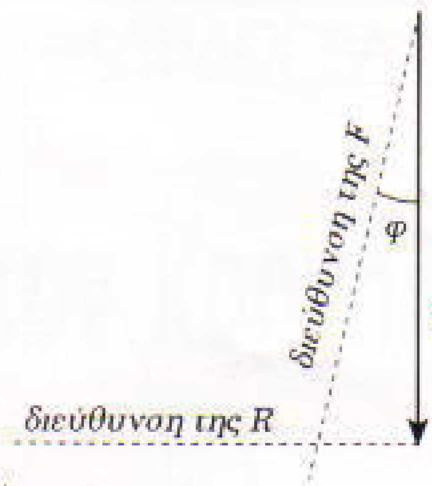
σκάλας, και στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με τα σημεία επαφής μεταξύ της σκάλας,του τοίχου και του δαπέδου. Αν συμβολίσουμε με $\boldsymbol{\tau}_B$, $\boldsymbol{\tau}_R$ και $\boldsymbol{\tau}_F$ τις ροπές των δυνάμεων **B**, **R** και **F**, αντίστοιχα, τότε προφανώς θα ισχύει

$$\boldsymbol{\tau}_B + \boldsymbol{\tau}_R + \boldsymbol{\tau}_F = 0.$$

Εφόσον το σημείο P, ως προς το οποίο επιλέξαμε να υπολογίσουμε τις ροπές, βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το μέσο της σκάλας, θα βρίσκεται πάνω στο φορέα του **B**. Συνεπώς, $\boldsymbol{\tau}_B = 0$. Το ίδιο προφανώς ισχύει και για την $\boldsymbol{\tau}_R$· λόγω της επιλογής της θέσης του P, και αυτή η ροπή είναι μηδέν. Η παραπάνω φαινομενικά περίπλοκη εξίσωση απλοποιείται στην $\boldsymbol{\tau}_F = 0$. Αυτό, όμως, σημαίνει ότι ο φορέας της **F** πρέπει να διέρχεται από το σημείο P. Οπότε,

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\frac{1}{2} L\eta\mu\theta}{L\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\varepsilon\varphi\theta}{2}.$$

Εφόσον τώρα η κατεύθυνση της **F** είναι γνωστή, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σχέδιο υπό κλίμακα για να προσδιορίσουμε το μέτρο κάθε δύναμης. Αντ' αυτού, και δεδομένου ότι το διανυσματικό άθροισμα των τριών δυνάμεων είναι μηδέν, μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα τρίγωνο διανυσμάτων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Το διάνυσμα **B** είναι κατακόρυφο διάνυσμα γνωστού μέτρου —το βάρος της σκάλας. Από την αιχμή αυτού του διανύσματος, μπορεί να σχεδιαστεί οριζόντιο το δεύτερο διάνυσμα **R**· δυστυχώς, όμως, το μέτρο του είναι άγνωστο. Αυτό σημαίνει ότι δεν γνωρίζουμε πού τελειώνει, επομένως δεν ξέρουμε από



Σχήμα 3

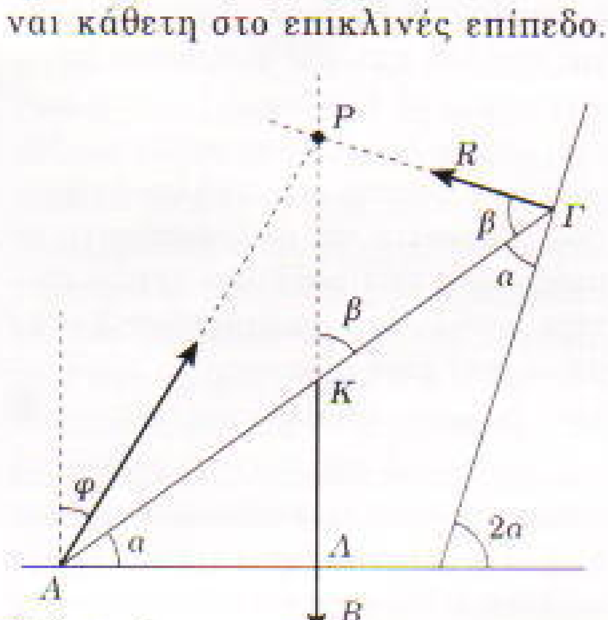
πού να αρχίσουμε να σχεδιάσουμε το διάνυσμα **F**. Γνωρίζουμε, όμως, την κατεύθυνση του **F**, και γνωρίζουμε επίσης ότι τελειώνει στο σημείο απ' όπου ξεκινάει το **B**!

Μια επιπρόσθετη πληροφορία είναι ότι για τη γωνία φ, που σχηματίζεται από τη δύναμη **F** και την κάθετη συνιστώσα της **N**, ισχύει η σχέση

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{T}{N} \leq \mu .$$

Ας θεωρήσουμε μια μικρή παραλλαγή του προβλήματος της σκάλας (Σχήμα 4). Μια ομογενής σκάλα μάζας M και μήκους L στηρίζεται σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο και η κορυφή της ακουμπά σε λείο κεκλιμένο τοίχο. Η σκάλα, στα όρια της ολίσθησης, σχηματίζει γωνία $\alpha = 36{,}9^\circ$ με την οριζόντιο, και ο τοίχος γωνία $2\alpha = 73{,}8^\circ$ επίσης με την οριζόντιο. Ποιος είναι ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της σκάλας και του δαπέδου;

Ας ονομάσουμε τη βάση της σκάλας A, την κορυφή της Γ, και το μέσο της K. Το βάρος **B** έχει σημείο εφαρμογής το K και είναι κατακόρυφο με φορά προς τα κάτω· η κάθετη δύναμη **R** από τον λείο κεκλιμένο τοίχο έχει σημείο εφαρμογής το Γ, και είναι κάθετη στο επικλινές επίπεδο.



Σχήμα 4

Για μία ακόμη φορά, επιλέξτε ένα σημείο P ως προς το οποίο θα υπολογίσουμε τις ροπές· αυτό ας είναι η τομή των φορέων των **B** και **R**. Το επιχείρημα ότι η συνισταμένη των ροπών ως προς το P πρέπει να είναι μηδέν, σε συνδυασμό με τα γεγονότα πως οι $\boldsymbol{\tau}_B$ και $\boldsymbol{\tau}_R$ είναι πάλι μηδέν, μας οδηγούν στο συμπέρασμα πως ο φορέας της δύναμης **F**, που ασκείται στη βάση της σκάλας από το δάπεδο, πρέπει να διέρχεται από το P. Για μία ακόμη φορά, μέσω ενός σχεδίου υπό κλίμακα θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε ότι η γωνία φ, την οποία σχηματίζει η **F** με την κατακόρυφο, είναι περίπου 29°, και να προσδιορίσουμε τα μέτρα των **R** και **F** σχεδιάζοντας ένα τρίγωνο διανυσμάτων.

Εναλλακτικά, γεωμετρικά επιχειρήματα δείχνουν ότι το τρίγωνο $P K \Gamma$ (βλ. Σχήμα 4) είναι ισοσκελές, όπου η γωνία $\beta = \pi/2 - \alpha$ και $PK = P\Gamma$.

Ας ονομάσουμε Λ το σημείο του οριζόντιου επιπέδου ακριβώς κάτω από το μέσο της σκάλας. Τότε

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{A\Lambda}{P\Lambda},$$

όπου

$$A\Lambda = \frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha$$

και

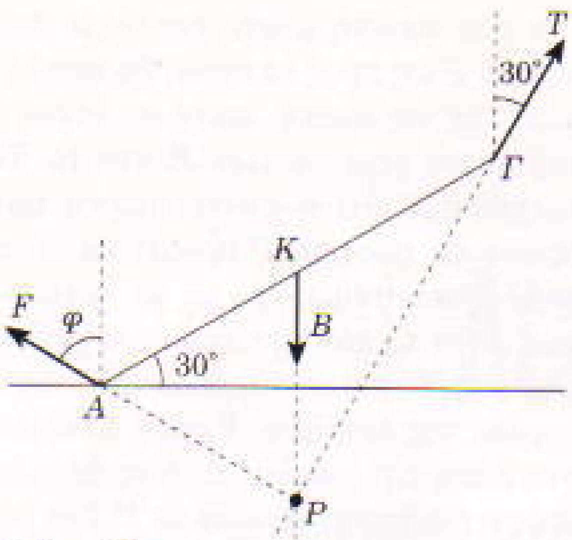
$$P\Lambda = PK + K\Lambda = \frac{L/4}{\sigma\upsilon\nu\beta} + \frac{L}{2}\eta\mu\alpha.$$

Τότε,

$$\mu = \varepsilon\varphi\varphi = \frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha}{\dfrac{1}{\eta\mu\alpha} + 2\eta\mu\alpha} = \frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\alpha}{1 + 2\eta\mu^2\alpha}.$$

Για τη δεδομένη τιμή της γωνίας α, προκύπτει $\mu = 24/43 = 0{,}558$ και $\varphi = 29{,}2^\circ$.

Ένα άλλο παράδειγμα αξιοποίησης του σημείου τομής των φορέων τριών συντρεχουσών και ομοεπίπεδων δυνάμεων εικονίζεται στο Σχήμα 5. Μια ομογενής δοκός μένει ακίνητη, με το αριστερό της άκρο πάνω σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο. Διατηρείται σε γωνία 30° με την οριζόντιο από ένα σκοινί που είναι δεμένο στο δεξιό της άκρο. Αυτό το σκοινί τραβάει προς τα πάνω και δεξιά σχηματίζο-



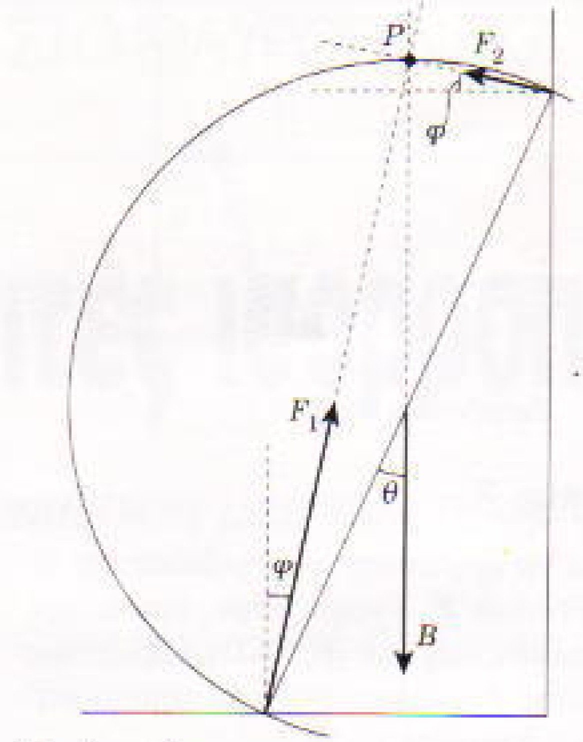
Σχήμα 5

ντας γωνία 30° με την κατακόρυφο. Αν η δοκός βρίσκεται στα όρια της ολίσθησης, υπολογίστε το συντελεστή στατικής τριβής ανάμεσα στη δοκό και το δάπεδο.

Ο φορέας της τάσης **T**, της δύναμης που ασκεί το σκοινί στο πάνω άκρο της δοκού, έχει τη διεύθυνση του σκοινιού· ο φορέας του βάρους **B** είναι κατακόρυφος, και διέρχεται από το μέσο της δοκού. Οι δύο φορείς τέμνονται σε ένα σημείο *P*, που βρίσκεται κάτω από το οριζόντιο δάπεδο. Ο φορέας της δύναμης **F** την οποία ασκεί το δάπεδο στη δοκό πρέπει να διέρχεται από το *P*. Αν ονομάσουμε το μέσο της δοκού *K*, το κάτω άκρο της *A*, και το πάνω άκρο της *Γ*, βλέπουμε ότι το τρίγωνο *PKΓ* είναι ισοσκελές ($\angle \Gamma KP = 120°$ και $\angle K\Gamma P = 30°$), έτσι ώστε $K\Gamma = KP$. Τότε, το τρίγωνο *AKP* είναι ισόπλευρο, και συνεπώς ο φορέας της **F** σχηματίζει γωνία 60° με την κατακόρυφο. Έτσι, $\mu = \text{εφ}60° = \sqrt{3}$.

Τέλος, ας θεωρήσουμε μία ακόμη παραλλαγή του προβλήματος της σκάλας. Η κατάσταση είναι πανομοιότυπη με αυτήν στο πρώτο πρόβλημα (εικονίζεται στο Σχήμα 1), μόνο που ο κατακόρυφος τοίχος είναι τραχύς, και έχει τον ίδιο συντελεστή στατικής τριβής με το πάτωμα. Ποια είναι η τιμή αυτού του συντελεστή στατικής τριβής, αν η σκάλα βρίσκεται στο όριο να ολισθήσει;

Εφόσον ο συντελεστής στατικής τριβής είναι μ και η σκάλα βρίσκεται στο όριο να ολισθήσει, η δύναμη που ασκείται από το δάπεδο στη βάση της σκάλας σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο, και η δύναμη που ασκείται από τον τοίχο στην κορυφή της σκάλας σχηματίζει γωνία φ με



Σχήμα 6

την οριζόντιο, τέτοια ώστε $\varphi = \text{εφ}^{-1}\mu$. Άρα, οι φορείς αυτών των δύο δυνάμεων είναι κάθετοι μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6. Επιλέγοντας πάλι το *P* ως το σημείο τομής των φορέων των τριών δυνάμεων που ασκούνται στη σκάλα, βλέπουμε ότι πρέπει να βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το μέσο της σκάλας, και να κείται επίσης σ' ένα ημικύκλιο που έχει ως διάμετρο τη σκάλα. Συνεπώς, $\varphi = \theta/2$, ή $\mu = \text{εφ}\,\theta/2$.

Για κάποιον που προτιμά να αντιμετωπίζει τα σχετικά προβλήματα μέσω γεωμετρικής παρά αλγεβρικής προσέγγισης, ο εντοπισμός και η αξιοποίηση του σημείου όπου συντρέχουν οι τρεις δυνάμεις μπορεί να αποτελεί μια ισχυρή τεχνική. Φυσικά, η μέθοδος δεν χρησιμεύει αν στο σώμα ασκούνται περισσότερες από τρεις δυνάμεις —για παράδειγμα, μια σκάλα με κάποιον να στέκεται σ' ένα σκαλί της. Αλλά και πάλι, αν αντικαταστήσετε τα διανύσματα βάρους της σκάλας και του ανθρώπου με το συνιστάμενο διάνυσμα βάρους, που έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο βάρους του συστήματος σκάλα-άνθρωπος, μπορείτε να απλοποιήσετε το πρόβλημα σε πρόβλημα τριών συντρεχουσών και ομοεπίπεδων δυνάμεων, και έτσι η παραπάνω προσέγγιση θα είναι αποτελεσματική.

Ο **Gary Haardeng-Pedersen** είναι αναπληρωτής καθηγητής φυσικής στο Κολέγιο Wilfred Grenfell, στο Κόρνερ Μπρουκ του Νιουφάουνλαντ του Καναδά.

Απάντηση στον Κορνήλιο Καστοριάδη

Διονύσιος Α. Αναπολιτάνος

Στο τεύχος Ιανουαρίου/Φεβρουαρίου 1996 του *Quantum* φιλοξενήθηκε μια συνέντευξη του γνωστού φιλοσόφου Κορνήλιου Καστοριάδη, που, σύμφωνα τουλάχιστον με τον τίτλο που χρησιμοποιεί για αυτήν το περιοδικό, έχει ως βασικό της στόχο την εξέταση της σχέσης φιλοσοφίας και επιστήμης. Σε δύο από τις ερωτήσεις που υποβλήθηκαν στον κύριο Καστοριάδη γίνεται χρήση παραθεμάτων από την εργασία μου *Ορθολογικότητα στη φιλοσοφία και στις επιστήμες* (περιοδικό *Θεωρία και Κοινωνία*, τεύχος 5, Ιούνιος 1991, σελ. 111-121). Σύμφωνα με τον κ. Γιώργο Ευαγγελόπουλο, ο οποίος διαμόρφωσε το σχετικό ερωτηματολόγιο της συνέντευξης, είχε την πρωτοβουλία για την επαφή με τον κ. Καστοριάδη και τελικώς έλαβε τη συνέντευξη, ο κ. Καστοριάδης είχε στα χέρια του αρκετό καιρό πριν το πλήρες κείμενο της εργασίας μου μαζί με το ερωτηματολόγιο της συνέντευξης. Σκοπός της παρούσας έγγραφης παρέμβασής μου είναι να σχολιάσω τις θέσεις του κ. Καστοριάδη στο βαθμό που αυτές αναφέρονται σε καταγεγραμμένες απόψεις μου στην προαναφερθείσα εργασία.

Ξεκινώντας από την πρώτη ερώτηση στην οποία εμπλέκεται το όνομά μου θεωρώ ότι είναι απαραίτητο να παραθέσω το μέρος που με αφορά:

«Ο Heidegger διακήρυξε το "τέλος της φιλοσοφίας", υπό την έννοια της "αποσύνθεσής της μέσα στην ανάπτυξη των τεχνικοποιημένων επιστημών". Ακόμη και όσοι δεν συμφωνούν μ' αυτή την άποψη δεν μπορούν παρά να αναγνωρίσουν ότι στο παρελθόν ιδιαίτερα, αλλά και τώρα, περιοχές που παραδοσιακά ανήκαν στη φιλοσοφία εκχωρήθηκαν στις νεογέννητες επιστήμες και δεν διεκδικήθηκαν έκτοτε από αυτήν. Όπως παρατηρεί ο Διονύσης Αναπολιτάνος στο άρθρο του *Ορθολογικότητα στη φιλοσοφία και στις επιστήμες* (περιοδικό *Θεωρία και Κοινωνία*), "κάτι τέτοιο συνέβαινε και εξακολουθεί να συμβαίνει κάθε φορά που ένας κλάδος του επιστητού οροθετείτο μεθοδολογικά και άρχιζε να μελετάται με προεξάρχον το στοιχείο διασύνδεσης θεωρίας και παρατηρησιακών δεδομένων". Ποιο ρόλο επιφυλάσσει σήμερα η φιλοσοφία στον εαυτό της;»

Στην απάντησή του στην ερώτηση αυτή της συνέντευξης ο κ. Καστοριάδης εκλαμβάνει ως άποψή μου μια θέση την οποία χαρακτηρίζει «συμβατική, παραδοσιακή, γνωστή εδώ και 150 χρόνια». Συνεχίζει δε ως εξής: «Είναι η θετικιστική άποψη. Είναι επίσης η άποψη του Ένγκελς, ο οποίος λέει ότι η φιλοσοφία ήταν για τον καιρό εκείνο που δεν υπήρχαν οι επιστήμες και ότι σιγά σιγά, καθώς αναπτύσσονται και ωριμάζουν οι επιστήμες, τελικά από τη φιλοσοφία θα μείνει μόνο η λογική και η διαλεκτική». Παρασύρεται, πιθανόν, ο κ. Καστοριάδης σ' αυτή τη συγκεκριμένη σειρά εκτιμήσεων από το παράθεμα από την προαναφερθείσα εργασία μου που χρησιμοποιεί ο κ. Ευαγγελόπουλος, αν και κάτι τέτοιο δεν θα έπρεπε να έχει συμβεί, δεδομένου ότι ο κ. Καστοριάδης είχε, όπως ήδη ελέχθη, το πλήρες κείμενο τις εργασίας μου αρκετό καιρό πριν δοθεί η δημοσιευθείσα συνέντευξη. Για λόγους ακριβείας, όμως, ας μου επιτραπεί να είμαι, ίσως, κουραστικά συγκεκριμένος.

(α) Σχετικά με ό,τι εκλαμβάνει ο κ. Καστοριάδης ως άποψή μου θα είχα να παρατηρήσω τα εξής. *Δεν πρόκειται για άποψη* αλλά για ιστορική διαπίστωση. Όπως και ο ίδιος επισημαίνει, «από τον Καντ και μετά, υπάρχει αρκετά σαφής διαχωρισμός της επιστήμης από τη φιλοσοφία». Επίσης, ένας τέτοιος διαχωρισμός, όπως σωστά διαπιστώνει, υπάρχει, έστω ασαφώς, και στον Αριστοτέλη. Θα προσέθετα ότι, ως συνέπεια του ασαφούς διαχωρισμού της φιλοσοφίας από τις φυσικές τουλάχιστον επιστήμες και ιδιαίτερα τη φυσική, προέκυψε ο όρος «φυσική φιλοσοφία». Ο κ. Καστοριάδης, οχυρωμένος πίσω από μια αντίληψη για τη φιλοσοφία με έντονη τη σφραγίδα της προσωπικής του συμμετοχής στο φιλοσοφικό γίγνεσθαι του 20ού αιώνα, θεωρώ ότι διαπράττει ένα λάθος με έντονα τα στοιχεία του αναχρονισμού. Με δεδομένη την αντίληψή του για το τι οφείλει να είναι η φιλοσοφία, προχωρεί σε αξιολογική αποτίμηση των νοηματικών μετατοπίσεων του όρου κατά τη διαχρονική πορεία του.

(β) Συνεχίζοντας την κριτική αυτού που εκλαμβάνει ως άποψή μου ο κ. Καστοριάδης προχωρεί και χωρίς δισταγμό αποφαίνεται: «Είναι η θετικιστική άποψη». Ομολογώ ότι μάταια προσπάθησα να καταλάβω τι ακριβώς εννοεί. Χωρίς να είμαι εντελώς σίγουρος, υπέθεσα και εξακολουθώ να υποθέτω ότι θεώρησε πώς είμαι ένας επιστημονίζων φιλόσοφος ή, στην καλύτερη περίπτωση, ένας φιλοσοφιζων (και όχι φιλοσοφών) επιστήμονας, που όντας σίγουρος για τον εαυτό του πιστεύει ότι η φιλοσοφία αποτελεί μια δραστηριότητα επικουρική προς την επιστήμη, μια δραστηριότητα που συρρικνούμενη είναι καταδικασμένη να εξαφανιστεί. Και έμεινα εν απορία, διότι, αφ' ενός, ο κ. Ευαγγελόπουλος επισημαίνει εμμέσως στην ερώτησή του προς τον κ. Καστοριάδη ότι δεν ανήκω σ' αυτούς που πιστεύουν στην, προς όφελος των επιστημών και της τεχνολογίας, μέχρι εξαφανίσεως συρρίκνωση της φιλοσοφίας, και αφ' ετέρου, ο ίδιος ο κ. Καστοριάδης, αν υποθέσουμε ότι, ως όφειλε, είχε διαβάσει την εργασία μου *Ορθολογικότητα στη φιλοσοφία και στις επιστήμες*, θα έπρεπε να είχε διαπιστώσει την ύπαρξη του παρακάτω μακροσκελούς μεν διαφωτιστικού δε εδαφίου (βλ. σελ. 118-119):

«Η φιλοσοφία είναι μια δραστηριότητα που διαφέρει αυτής των επιστημών σε πολλαπλά επίπεδα. Παρά ταύτα υπήρχαν ανέκαθεν και εξακολουθούν να υπάρχουν αλληλοεπικαλύψεις σε αρκετές περιοχές του επιστητού. Στο παρελθόν ιδιαίτερα, αλλά και τώρα, περιοχές που παραδοσιακά ανήκαν στη φιλοσοφία εκχωρήθηκαν στις νεογέννητες επιστήμες και δεν διεκδικήθηκαν έκτοτε πλέον από τη φιλοσοφία. Κάτι τέτοιο συνέβαινε και εξακολουθεί να συμβαίνει κάθε φορά που ένας κλάδος του επιστητού οροθετείτο μεθοδολογικά και άρχιζε να μελετάται με προεξάρχον το στοιχείο της διασύνδεσης θεωρίας και παρατηρησιακών δεδομένων. Η φιλοσοφία σιγά σιγά περιορίστηκε σε εδάφη που δεν μπορούσαν παρά να της ανήκουν. Έγινε κυρίως δραστηριότητα ημιεπιστημονικού χαρακτήρα με την έννοια ότι, εκτός από τον σχολιαστικό μεταεπιστημονικό ή ιστορικά αποτιμητικό ρόλο τον οποίον διεκδικεί με αξιώσεις, διεκδικεί και κατέχει επίσης το αναπαλλοτρίωτο δικαίωμα να ασχολείται με περιοχές που δεν μπορούν να καταστούν αντικείμενα επιστήμης, περιοχές που κυριολεκτώντας θα ονόμαζα *οριακές για τη γνώση*. Τέτοιες περιοχές ανήκουν κυρίως σ' αυτό που ονομάζουμε *οντολογία* ή *μεταφυσική*, σ' αυτό που ονομάζουμε *γνωσιολογία* και στη διασύνδεσή τους. Η φιλοσοφία της γλώσσας, η ηθική, η φιλοσοφία νου-σώματος, η φιλοσοφία του δικαίου κτλ. αποτελούν φιλοσοφικούς κλάδους που ασχολούνται με τον προσδιορισμό του όντος, το πώς και το γιατί της γνώσης του και το γνωσιακά προσπελάσιμο ή μη της γέφυρας διασύνδεσής τους, καθώς αυτά τείνουν να προσδιοριστούν από την ιδιαίτερη προβληματική του συγκεκριμένου κλάδου. Ο ημιεπιστημονικός χαρακτήρας της φιλοσοφίας δεν οφείλεται στο μεθοδολογικά υποδεέστερο οπλοστάσιό της. Κάτι τέτοιο δεν είναι αληθές... Ο ημιεπιστημονικός της χαρακτήρας οφείλεται στο γεγονός ότι, επειδή το αντικείμενό της είναι τα οριακά για τη γνώση προβλήματα, δεν μπορεί να υπάρξει, παρά μόνον έμμεσα, παρατηρησιακή εμπειρική ανατροφοδότηση του θεωρητικού της μέρους.

»Πριν προχωρήσουμε, θα πρέπει να σχολιάσουμε παρενθετικά μια γενική αντίρρηση σχετική προς το λόγο ύπαρξης της φιλοσοφικής δραστηριότητας. Η αντίρρηση αφορά στο γενικό θέμα που ετέθη από τους λογικοθετικιστές στις αρχές του αιώνα, όταν ξεκίνησαν την προσπάθειά τους για την επιστημονικοποίηση της φιλοσοφίας και τη δημιουργία ενός αποκαθαρμένου σώματος φιλοσοφικών ερωτημάτων, όπου πλέον τα οριακά για τη γνώση ερωτήματα και προβλήματα αποκόπτονταν οριστικά από το κυρίως φιλοσοφικό σώμα και εξοστρακίζονταν ως, αντίστοιχα, ψευδοερωτήματα και ψευδοπροβλήματα. Πώς μπορείς να διερωτηθείς, επί παραδείγματι, για την έλλειψη συνειδέναι, και τι σημαίνει μια απάντηση στο ερώτημα, όταν και το ερώτημα και η απάντηση μπορούν να διατυπωθούν *μόνον* με κατηγορίες συνείδησης;

»Ανήκω σ' αυτούς που θεωρούν ότι η ενασχόληση με τα οριακά για τη γνώση προβλήματα έχει μια αυταξία. Γνωρίζω πολύ καλά ότι η υπαρξιακή αγωνία, η αγωνία θανάτου, δεν εξορκίζεται με την αναγόρευσή της σε ψευδοαγωνία, ούτε εξαφανίζεται η αφόρητη γοητεία που ασκούν τα οριακά για τη γνώση προβλήματα στον υποψιασμένο νου με την αποπομπή τους και την άρνηση διατύπωσής τους στα πλαίσια μιας γλώσσας που δεν έχει φτιαχτεί για να τα φιλοξενεί. Μου αρκεί ότι είναι διατυπώσιμα, έστω κατ' αναλογίαν, και με γοητεύει η δημιουργία εννοιολογικών, εσωτερικά συνεπών θεωρητικά συστημάτων που δίνουν την αίσθηση απάντησης σ' αυτά. Σύμμαχός μου η πίστη ότι ο βαθμός ανάπτυξης μιας κοινωνίας είναι ευθέως ανάλογος προς την ανοχή της σε πολυτελείς μη άμεσα ωφελιμιστικές δραστηριότητες των μελών της...»

(γ) Η κριτική του κ. Καστοριάδη στη θέση την οποία εκλαμβάνει ως άποψή μου συνεχίζεται με τη φράση: «Είναι επίσης η άποψη του Ένγκελς, ο οποίος λέει ότι η φιλοσοφία ήταν για τον καιρό εκείνο που δεν υπήρχαν επιστήμες και ότι σιγά σιγά, καθώς αναπτύσσονται και ωριμάζουν οι επιστήμες, τελικά από τη φιλοσοφία θα μείνει μόνο η λογική και η διαλεκτική». Δυστυχώς ο κ. Καστοριάδης, ενώ φαίνεται να γνωρίζει πολύ καλά την άποψη του Ένγκελς, προβαίνει σε μια σύγκριση που τον οδηγεί στη χωρίς δισταγμό ταύτισή της με αυτό που νομίζει ότι είναι η δική μου άποψη αγνοώντας ή στην καλύτερη περίπτωση παρερμηνεύοντας γραπτό μου που είχε στη διάθεσή του για μελέτη αρκετό καιρό προτού δοθεί η συνέντευξη. Το εκτεταμένο παράθεμα που χρησιμοποιήθηκε μόλις προηγουμένως ισχυρίζομαι ότι αποδεικνύει του λόγου μου το αληθές. Ας μου επιτραπούν όμως δύο επιπρόσθετες παρατηρήσεις, οι οποίες αναφέρονται σε πράγματα που ο κ. Καστοριάδης δεν ήταν δυνατόν να γνωρίζει. Πρώτον, δεν θα ήταν δυνατόν να αποτελεί άποψή μου ότι η φιλοσοφία θα μπορούσε να συρρικνωθεί στη λογική, διότι, ως ειδικός στη λογική, είμαι σε θέση να γνωρίζω ότι, ανεξαρτήτως των φιλοσοφικών προϋποθέσεών τους, οι περισσότεροι κλάδοι της λογικής ανήκουν πλέον στις καθαρές ή αφηρημένες επιστήμες (abstract sciences). Δεύτερον, δεν θα ήταν επίσης δυνατόν να αποτελεί άποψή μου ότι η φιλοσοφία θα μπορούσε να συρρικνωθεί στη διαλεκτική, εξαιτίας τής από φιλοσοφικής και επιστημονικής απόψεως ανυποληψίας με την οποία περιβάλλεται ο σχετικός όρος στο εννοιολογικό μου οικοσύστημα, όπως άλλωστε το παρακάτω εδάφιο πιστοποιεί (Δ.Α. Αναπολιτάνος, *Ιστορία και ιστορικισμός*, Τα Ιστορικά Τόμ. 8, Τεύχη 14, 15, Ιούνιος/Δεκέμβριος 1991, σελ. 9).

«Από την στιγμή που δεν λειτουργεί η διαδικασία της πειραματικής επαλήθευσης λόγω των αδυναμιών... σε σχέση με το ιστορικό πείραμα, δεν είναι δυνατόν να λειτουργήσει επαρκώς και η εξηγητική πλευρά του διπόλου θεωρία-πράξη στο επίπεδο της επιστήμης του ιστορικού γίγνεσθαι. Αν κανείς, μάλιστα, επικαλεσθεί το παράδειγμα του μαρξισμού, θα μπορούσε να προβάλει τις κατά του ιστορικισμού θέσεις του, ως προς το θέμα της επιστημονικής εξήγησης, με αρκετή ενάργεια και σαφήνεια. Τι άλλο παρά παραχάραξη των διαδικασιών αμφίδρομου ελέγχου θεωρίας-πράξης μπορεί να είναι η υιοθέτηση από τον Marx του εγελιανού διαλεκτικού σχήματος ως εξηγητικού υπερνόμου του ιστορικού γίγνεσθαι; Ένα σχήμα άδειο πληροφοριακού περιεχομένου, με την έννοια ότι μέσα σ' αυτό χωρά κάθε έννοια μεταβολής, χρησιμοποιήθηκε και εξακολουθεί να χρησιμοποιείται για να εξηγεί ό,τι έχει ήδη συμβεί, χωρίς ποτέ να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο πρόβλεψης. Κάθε μεταβολή επαληθεύει το σχήμα με τον ίδιο τρόπο που το τυχόν αντικείμενο ή συμβάν ανήκει στο πεδίο δράσης της έννοιας του *οτιδήποτε*.»

(δ) Παρά την αρχική δήλωσή μου ότι σκοπός της παρούσας έγγραφης παρέμβασής μου είναι να σχολιάσω τις θέσεις του κ. Καστοριάδη στο βαθμό που αυτές αναφέρονται σε καταγεγραμμένες απόψεις μου, θα παρακαλούσα να μου επιτραπεί να υποκύψω στον πειρασμό να κάνω ορισμένες παρατηρήσεις σε μια θέση του σχετικά με το καντιανό φιλοσοφικό σύστημα. Στην πράγματι χειμαρρώδη συνέντευξή του συναντά κανείς, στη σελίδα 30, την εξής παράγραφο:

«Αυτά τα δύο, το υποκείμενο και το αντικείμενο, είναι αδιαχώριστα μέσα στη διαδικασία της γνώσης. Ο Καντ π.χ. ρωτούσε πώς πρέπει να είναι το υποκείμενο για να υπάρχει η γνώση. Το ρωτούσε αυτό πολύ σωστά, αλλά ξέχασε να ρωτήσει το άλλο ήμισυ. Πώς πρέπει να είναι το αντικείμενο για να μπορεί να υπάρξει γνώση; Ο Καντ λέει ότι κάθε γνώση στηρίζεται στις *a priori* μορφές του υποκειμένου, το οποίο π.χ. επιβάλλει την κατηγορία της αιτιότητας στα φαινόμενα. Και αμέσως τίθεται το ερώτημα: θα μπορούσε το υποκείμενο, το υπερβασιακό υποκείμενο, να επιβάλει την κατηγορία της αιτιότητας σε *οποιαδήποτε* φαινόμενα; Εάν ο κόσμος ήταν λόγου χάρη ένα απόλυτο χάος, με την κοινή έννοια του όρου, τι κατηγορίες θα μπορούσαμε να επιβάλουμε στα φαινόμενα; Πρέπει, λοιπόν, για να υπάρχει φυσική επιστήμη, να υπάρχει και ένας φυσικός κόσμος, δηλαδή κάτι το οποίο να εμπεριέχει ένα ελάχιστο τάξης. Και διερωτάται κανείς αμέσως πώς πρέπει να είναι και ώς πού πρέπει και μπορεί να πηγαίνει αυτή η τάξη. Αυτό είναι κατ' ανάγκη κάτι που μας οδηγεί στην οντολογία. Διότι μιλάμε πλέον για το πώς πρέπει να είναι το φυσικό ον, δεδομένου ότι έχουμε κάποια γνώση του, έστω και αν η γνώση αυτή είναι ελαττωματική, ανεπαρκής, ανολοκλήρωτη κλπ. Το ότι έχουμε κάποια γνώση προϋποθέτει μεν ότι έχουμε ορισμένες ικανότητες να γνωρίζουμε, ορισμένες υποκειμενικές μορφές, λογικές διαδικασίες κλπ, προπάντων όμως προϋποθέτει ότι το αντικείμενο είναι *γνωρίσιμο*, και αυτό με κανέναν τρόπο δεν εξαρτάται από το υποκείμενο».

Θεωρώντας ότι η άποψη πως το υποκείμενο και το αντικείμενο είναι αδιαχώριστα μέσα στη διαδικασία της γνώσης είναι σωστή, αδυνατώ να κατανοήσω πώς κάτι τέτοιο, σύμφωνα με τον κ. Καστοριάδη, δεν αποτελεί βασική προϋπόθεση του καντιανού φιλοσοφικού συστήματος. Σύμφωνα με τον κ. Καστοριάδη, ο Καντ ρωτώντας πώς πρέπει να είναι το υποκείμενο για να είναι δυνατή η γνώση ξέχασε να ρωτήσει πώς πρέπει να είναι το αντικείμενο για να μπορεί να υπάρξει η γνώση. Φοβάμαι ότι πρόκειται για θεμελιώδη σύγχυση. Αν ο κ. Καστοριάδης με τον όρο «αντικείμενο» είχε την πρόθεση να αναφερθεί στο πράγμα καθ' εαυτό, τότε δεν έχει νόημα η χρήση του ρήματος «ξέχασε» για τον Καντ, δεδομένου ότι η φιλοσοφική θεσμοθέτηση της αδυναμίας γνωσιακής προσέλασής του υπήρξε συνειδητή επιλογή του φιλοσόφου. Το κυριολεκτικώς άρρητο καντιανό πράγμα καθ' εαυτό υπάρχει για τον Καντ όχι ως χωροχρονικά προσδιορίσιμο αλλά ως οντολογικά πρότερο του αντικειμένου, όπως αυτό ορίζεται στα πλαίσια του κόσμου των φαινομένων. Αν ο κ. Καστοριάδης, από την άλλη μεριά, με τον όρο «αντικείμενο» είχε την πρόθεση να αναφερθεί στο αντικείμενο όπως αυτό ορίζεται στα γνωσιακά πλαίσια που καθορίζονται από τις *a priori* μορφές του υποκειμένου, τότε το ρήμα «ξέχασε» ηχεί άστοχο. Το υπερβασιακό υποκείμενο (για να χρησιμοποιήσουμε την ορολογία του κ. Καστοριάδη) επιβάλλει π.χ. την κατηγορία της αιτιότητας με τρόπο αναπόδραστο. Η έννοια μιας τέτοιας επιβολής δεν έχει υποκειμενικό χαρακτήρα. Ισχυρίζομαι κάτι τέτοιο με την έννοια ότι το υποκείμενο, ως είναι, δεν θα μπορούσε να έχει άλλη γνωσιακή πρόσβαση στον κόσμο των φαινομένων, τα οποία έχουν ως έχουν από την ίδια τη φύση των *a priori* μορφών του υποκειμένου. Έτσι ο κόσμος, παρότι αρχιτεκτονικά καθορίζεται από το υποκείμενο εξαιτίας της μοναδικότητας της αρχιτεκτονικής του δομής, είναι μοναδικός και επομένως αντικειμενικά δεδομένος. Υπ' αυτή την έννοια, η ερώτηση του κ. Καστοριάδη «θα μπορούσε το υποκείμενο να επιβάλει την κατηγορία της αιτιότητας σε *οποιαδήποτε* φαινόμενα;» ηχεί αφόρητα ρητορική και άστοχη. Τα φαινόμενα δεν είναι *οποιαδήποτε* και κατά μίαν έννοια *δεν υπάρχουν* ως τέτοια, παρεκτός ως καθοριζόμενα από τις δεδομένες και επομένως αντικειμενικές *a priori* μορφές του υποκειμένου. Τι νόημα έχει η ερώτηση: «εάν ο κόσμος ήταν λόγου χάρη ένα απόλυτο χάος, με την κοινή έννοια του όρου, τι κατηγορίες θα μπορούσαμε να επιβάλουμε στα φαινόμενα;» Για ποιον κόσμο ομιλεί στην προκειμένη περίπτωση ο κ. Καστοριάδης; Δεν αντιλαμβάνεται ότι έτσι προϋποθέτει τη δυνατότητα ύπαρξης ενός κόσμου πέραν του με συγκεκριμένο τρόπο χωροχρονικά προσδιορισμένου κόσμου των φαινομένων; Τέτοιος κόσμος δεν υπάρχει στο φιλοσοφικό σύστημα του Καντ, και επομένως μια τέτοια ερώτηση στερείται παντελώς νοήματος. Αν από την άλλη μεριά με τον χαοτικό αυτό κόσμο εννοεί τα καντιανά πράγματα καθ' εαυτά, το ερώτημα είναι ανεπίτρεπτο, δεδομένου ότι, κατά Καντ, πέραν της ύπαρξής τους ουδέν άλλο επιτρέπεται να λεχθεί γι' αυτά.

Η δεύτερη ερώτηση της συνέντευξης του κ. Καστοριάδη στην οποία εμπλέκεται το όνομα μου αρχίζει ως εξής: «Θά 'θελα να σας παρακαλέσω να συζητήσουμε κάπως διεξοδικά την πολύπλοκη και ενδιαφέρουσα σχέση μαθηματικών και φιλοσοφίας. Σύμφωνα με τον Διονύση Αναπολιτάνο, υπάρχει μια ομοιότητα στον τρόπο που λειτουργεί η ορθολογικότητα στους χώρους των μαθηματικών και της φιλοσοφίας η οποία συνιστά μια κοινή τους διαφορά από το μοντέλο των φυσικών επιστημών». Η ερώτηση συνεχίζεται αναφερόμενη σε λεπτομέρειες που υπάρχουν στην εργασία μου *Ορθολογικότητα στη φιλοσοφία και στις επιστήμες*, και οι οποίες αναφέρονται στην υποστήριξη της παραπάνω διατυπωμένης στην ερώτηση του κ. Ευαγγελόπουλου βασικής θέσης μου. Ο κ. Καστοριάδης δηλώνει στην αρχή της απάντησής του με τρόπο απόλυτο την ασυμφωνία του με όσα υποτίθεται ότι υποστηρίζω στην εργασία μου. Και συνεχίζει, προς μεγάλη μου έκπληξη, παραθέτοντας τις απόψεις του για τη φύση από τη μία μεριά της μαθηματικής και από την άλλη της φιλοσοφικής δραστηριότητας, χωρίς άμεση κριτική της βασικής μου άποψης με την οποία υποτίθεται ότι διαφωνεί, και σύμφωνα με την οποία και τα μαθηματικά και η φιλοσοφία είναι δραστηριότητες επιχειρηματολογικές που δεν έχουν ανάγκη τουλάχιστον άμεσης εμπειρικής πρόσβασης και στήριξης. Αντ' αυτού αναλίσκεται στην επισήμανση των διαφορών μεταξύ μαθηματικών και φιλοσοφίας δίδοντας ιδιαίτερη έμφαση στο αναμφισβήτητο γεγονός της σημαντικής καθαρότητας του αντικειμένου των μαθηματικών καθώς αυτό αντιδιαστέλλεται προς το μη διαυγές, μαγματικό (όπως το ονομάζει) αντικείμενο της φιλοσοφίας. Η ένστασή μου, λοιπόν, ως προς αυτή την απάντηση στη δεύτερη ερώτηση της συνέντευξης Καστοριάδη έχει να κάνει κατά κύριο λόγο με την εντύπωσή μου ότι πρόκειται για μια απάντηση που δόθηκε ερήμην της ερώτησης. Παρότι δεν επιθυμούσα να τελειώσω γκρινιάζοντας, νομίζω ότι πρέπει να παραθέσω δύο παρατηρήσεις τεχνικής φύσεως αναφερόμενες στην απάντηση του κ. Καστοριάδη.

(α) Τα μαθηματικά στη δουλειά τους δεν είναι μόνον συνολοταυτιστικά έστω και με αυτή την τετριμμένη έννοια που αποδίδει στον όρο ο κ. Καστοριάδης. Ολόκληρες περιοχές μαθηματικής δραστηριότητας —βλ. ιντουισιονιστικά μαθηματικά, περατοκρατικά μαθηματικά, συγκεχυμένα (fuzzy) σύνολα κτλ.— οικοδομούνται είτε σε λογικές αρχές *πολύ ολιγότερες* των ισοδυνάμων της αρχής της ταυτότητας ή της αρχής της μη αντίφασης, είτε σε έννοιες που *δεν* έχουν ως βάση τους την καντοριανή έννοια του συνόλου στην κατά Zermelo-Fraenkel έστω εκλεπτυσμένη της μορφή.

(β) Η επάρκεια ενός συνόλου αξιωμάτων χρησιμοποιείται στην απάντηση του κ. Καστοριάδη χωρίς σαφώς προσδιορισμένο εννοιολογικό περιεχόμενο. Αν με αυτήν εννοεί την επάρκεια μιας γλώσσας ως προς το χρησιμοποιούμενο απ' αυτήν σύνολο συνδέσμων, τότε η χρήση της φράσης «επάρκεια ενός συνόλου αξιωμάτων» είναι αδόκιμη. Αν με αυτήν εννοεί τη δυνατότητα ενός συνόλου αξιωμάτων να αναφέρεται κατά τρόπο μοναδικό και να παγιδεύει, τρόπον τινά, ένα και μοναδικό μαθηματικό αντικείμενο όπως π.χ. το σύνολο των φυσικών αριθμών ή την πραγματική ευθεία, τότε ο καταλληλότερος όρος είναι η *κατηγορικότητα* του συνόλου των αξιωμάτων. Όμως μια τέτοια ιδιότητα όχι μόνον δεν είναι απαραίτητη για ένα σύνολο αξιωμάτων, αλλά και ελλείπει σε κάθε ενδιαφέρον τέτοιο σύνολο, δηλαδή σε κάθε τέτοιο σύνολο που περιέχει τουλάχιστον ένα σημαντικό κομμάτι των αξιωμάτων της κατά Peano αριθμητικής.

Ο ***Διονύσιος Αναπολιτάνος*** είναι Καθηγητής Φιλοσοφίας και Λογικής στο Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Εσείς τι προτείνετε;

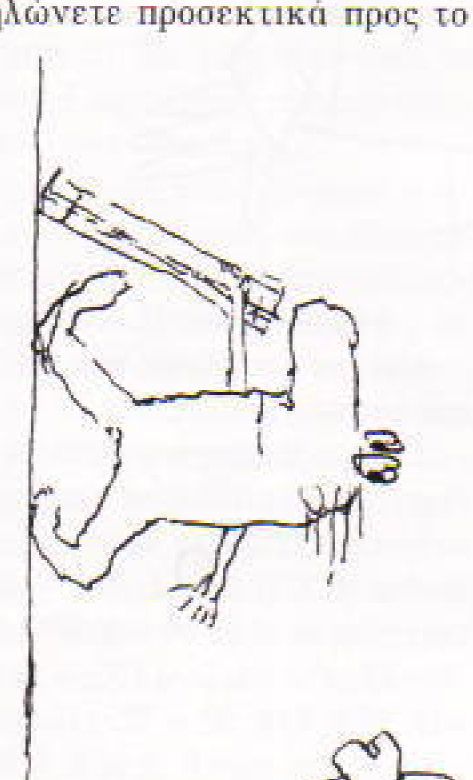
«Μεταξύ των είκοσι πανύψηλων κτιρίων, το μόνο κινούμενο αντικείμενο ήταν το βαρόμετρο που έπεφτε κατακόρυφα.»
—Steven Wallace, στο «Οκτώ τρόποι να κοιτάτε το μαυροπίνακα»

M. Tulchinsky

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΑΡΘΡΟ ΣΑΣ ΠΑΡΟΥσιάζω οκτώ μεθόδους λύσης ενός προβλήματος μεγάλου θεωρητικού και πρακτικού ενδιαφέροντος: *πώς μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος ενός πολυόροφου κτιρίου έχοντας στη διάθεσή μας μόνο ένα υδραργυρικό βαρόμετρο ενός μέτρου και σκοινί επαρκούς μήκους;*

Μερικές από αυτές τις μεθόδους εφαρμόζονται σε ευρύ φάσμα ανάλογων προβλημάτων (τη μέτρηση του ύψους του Πύργου του Αιφελ, του Empire State Building, του όρους Έβερεστ, κ.λπ.)

Μέθοδος 1 (η τετριμμένη). Ανεβαίνετε στη στέγη του κτιρίου, δένετε στην άκρη του σκοινιού το βαρόμετρο, και, ελευθερώνοντας σκοινί, το χαμηλώνετε προσεκτικά προς το έδαφος. Κατόπιν, μαζεύετε το σκοινί, και μετράτε το μήκος του με τη βοήθεια του βαρομέτρου.



Εικονογράφηση: Pavel Chernusky

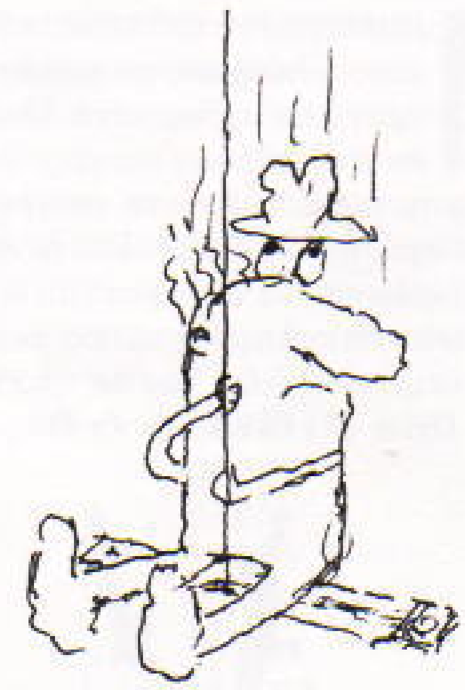
Μέθοδος 2 (η ευθεία). Χρησιμοποιείτε το βαρόμετρο σαν μετροταινία. Ανεβαίνετε τα σκαλιά του κλιμακοστασίου και, κρατώντας κατακόρυφο το βαρόμετρο, σημειώνετε διαδοχικά πάνω στον τοίχο με μικρές γραμμές το μήκος του. Στη συνέχεια, απλώς μετράτε το πλήθος των γραμμών.

Μέθοδος 3 (η αεροστατική). Μετράτε την ατμοσφαιρική πίεση στο επίπεδο του εδάφους και στο επίπεδο της στέγης. Υπολογίζετε το ύψος του κτιρίου από τη διαφορά των ενδείξεων (τη μεταβολή της στάθμης του υδραργύρου).

Μέθοδος 4 (η γεωμετρική). Ένα ηλιόλουστο πρωινό, στηρίζετε στο έδαφος κατακόρυφο το βαρόμετρο, και μετράτε το μήκος της σκιάς του. Παρομοίως, μετράτε το μήκος της σκιάς του κτιρίου. Μέσω της ομοιότητας των δύο ορθογωνίων τριγώνων, υπολογίζετε το άγνωστο ύψος.

Μέθοδος 5 (η κοινωνιολογική). Ζητάτε για αρκετή ώρα από τους περαστικούς να εκτιμήσουν το ύψος του κτιρίου. Έπειτα, βρίσκετε τον αριθμητικό μέσο των εκτιμήσεων. Φροντίστε να ενημερώνετε τους περαστικούς ότι στο τέλος της διαδικασίας θα τους προσφέρετε μέσω κλήρωσης το βαρόμετρο ως δώρο.

Μέθοδος 6 (η κινηματική). Μετράτε το πλήθος των σφυγμών σας ανά λεπτό. Στη συνέχεια αφήνετε από τη στέγη του κτιρίου ελεύθερο το βαρόμετρο (προσανατολισμένο κατακόρυφα) να πέσει, και μετράτε το πλήθος των χτύπων της καρδιάς σας μέχρι να φτάσει στο έδαφος. Υπολογίζετε το ύψος με τον τύπο $h = gt^2/2$.



Μέθοδος 7 (η γραφειοκρατική). Επικοινωνείτε με τον υπεύθυνο συντήρησης του κτιρίου. Του ζητάτε ευγενικά να συμβουλευτεί τα αρχιτεκτονικά σχέδια και να σας πληροφορήσει για το ύψος του κτιρίου. (Θυμηθείτε, το βαρόμετρο έσπασε στην «κινηματική» προσπάθειά σας.)

Μέθοδος 8 (η παιδαγωγική). Δημοσιεύετε το πρόβλημα στο *Quantum*, και περιμένετε τις μεθόδους που θα σας προτείνουν οι αναγνώστες του. Και... γιατί να μην τους προσφέρετε μέσω κλήρωσης το σκοινί ως δώρο;

Αριθμητικές επιδείξεις

Γνωρίστε μερικά αριθμητικά τεχνάσματα

Ivan Depman και Naum Vilenkin

ΜΠΟΡΕΙΤΕ ΝΑ ΕΝΤΥΠΩΣΙΑΣΕΤΕ τους φίλους σας με αριθμητικά «μαγικά» τεχνάσματα. Ιδού ένα από αυτά.

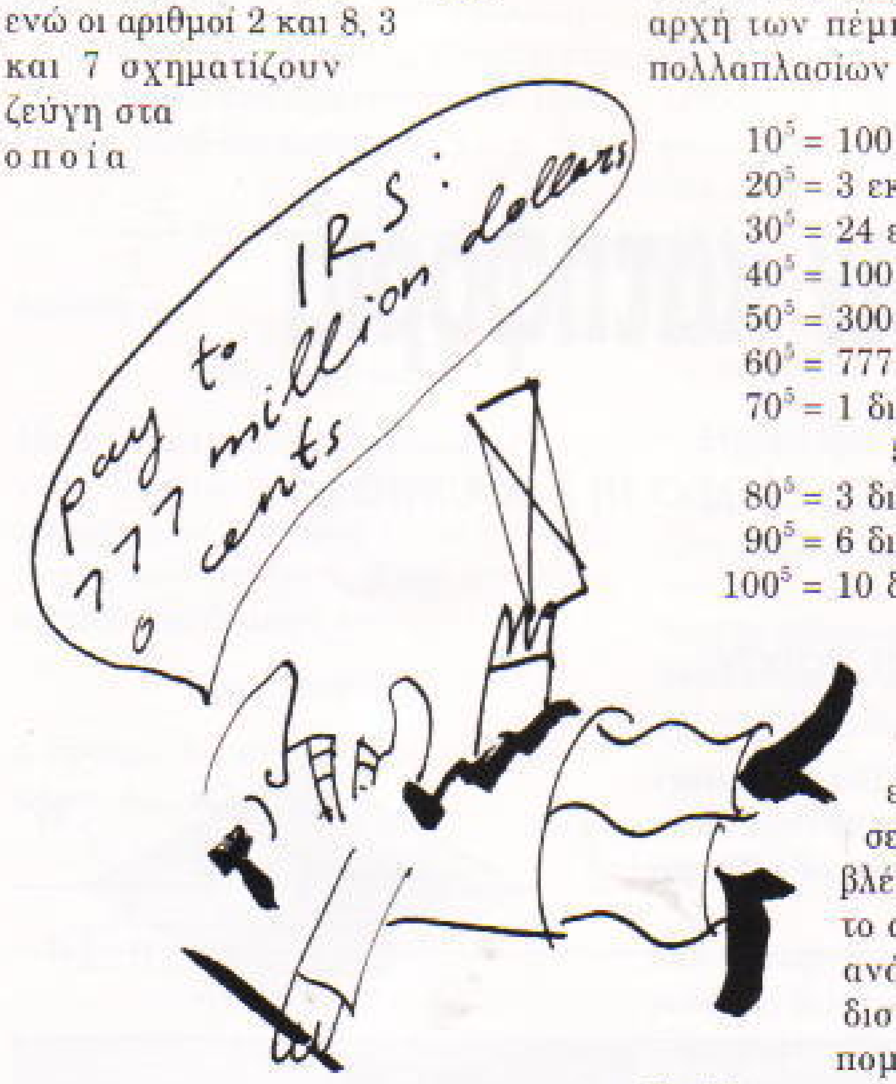
Ζητήστε από κάποιον να γράψει έναν τριψήφιο αριθμό. Βάλτε έναν άλλο φίλο σας να συνεχίσει αυτό τον αριθμό επαναλαμβάνοντας με την ίδια σειρά στα δεξιά του τα τρία ψηφία. Πείτε σ' έναν τρίτο να διαιρέσει τον εξαψήφιο αριθμό που έχει προκύψει με το επτά και ζητήστε από έναν τέταρτο να διαιρέσει το πηλίκο με το έντεκα. Τέλος, βάλτε τον πέμπτο φίλο σας να διαιρέσει το αποτέλεσμα με το δεκατρία και να δώσει το αποτέλεσμα στον πρώτο σας φίλο, που θα διαπιστώσει ότι έχει μπροστά του τον αριθμό από τον οποίο ξεκίνησε η όλη ιστορία.

Το μυστικό εδώ βρίσκεται στην ισότητα $1.001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Το να γράψουμε δίπλα σ' έναν τριψήφιο αριθμό το αντίγραφό του ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό του επί το 1.001 (για παράδειγμα, $289.289 = 289 \cdot 1.001$), ενώ οι διαδοχικές διαιρέσεις με 7, 11, και 13 ισοδυναμούν με τη διαίρεσή του με 1.001· έτσι, καταλήγουμε στον αρχικό αριθμό.

Μπορείτε να επιτύχετε ένα παρόμοιο τέχνασμα με διψήφιους αριθμούς. Οι αριθμοί πρέπει να επαναληφθούν τρεις φορές (και όχι δύο, όπως προηγουμένως)· το αποτέλεσμα διαιρείται διαδοχικά με 3, 7, 13, και 37. Εδώ βασιζόμαστε στην ισότητα $10.101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$. Οι τετραψήφιοι αριθμοί πρέπει να επαναληφθούν δύο φορές και να διαιρεθούν με το 73 και το 137. Η «μυστική» σχέση είναι η $10.001 = 73 \cdot 137$.

Ζητήστε από κάποιον να σκεφτεί έναν διψήφιο αριθμό, να τον υψώσει στον κύβο και να σας πει το αποτέλεσμα. Μπορείτε τότε να του πείτε αμέσως τον αριθμό που σκέφτηκε.

Για να επιτύχετε αυτό το τέχνασμα, πρέπει απλώς να απομνημονεύσετε τους κύβους των μονοψήφιων αριθμών 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Αυτοί είναι οι εξής: $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$. Παρατηρήστε ότι οι κύβοι των 0, 1, 4, 5, 6 και 9 καταλήγουν στο ψηφίο που υψώνεται στον κύβο ($4^3 = 64$, $9^3 = 729$), ενώ οι αριθμοί 2 και 8, 3 και 7 σχηματίζουν ζεύγη στα οποία κάθε αριθμός είναι το τελευταίο ψηφίο του κύβου του άλλου.



Ας υποθέσουμε ότι ο φίλος σας υψώνει στον κύβο τον αριθμό 67. Θα πάρετε την απάντηση 300.763. Παρατηρήστε ότι το 300 είναι μεταξύ του 216 και του 343 —δηλαδή, ανάμεσα στο 6^3 και στο 7^3. Άρα, το πρώτο ψηφίο (των δεκάδων) είναι το 6. Το τελευταίο ψηφίο του κύβου, το 3, εμφανίζεται στο τέλος του 7^3. Επομένως, το δεύτερο ψηφίο του μυστικού αριθμού είναι το 7. Έτσι μαντεύουμε τον αριθμό που σκέφτηκε ο φίλος μας: 67. Με λίγη εξάσκηση θα μπορείτε να επιτύχετε τη «μαντεία» σας σε ελάχιστο διάστημα.

Η ανακάλυψη ενός διψήφιου αριθμού από την πέμπτη του δύναμη αποτελεί ένα ακόμη εντυπωσιακότερο κατόρθωμα. Απλώς σκεφτείτε το: το «θύμα» σας πρέπει να εκτελέσει τέσσερις πολλαπλασιασμούς και μπορεί τελικά να καταλήξει σ' έναν δεκαψήφιο αριθμό! Το κόλπο στηρίζεται στο γεγονός ότι οι πέμπτες δυνάμεις των ψηφίων 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 τελειώνουν στο ψηφίο που υψώνεται στη δύναμη. (Για παράδειγμα, $1^5 = 1$, $2^5 = 32$, $3^5 = 243$, $4^5 = 1.024$, $5^5 = 3.125$). Ο μάντης πρέπει επιπλέον να απομνημονεύσει τον επόμενο πίνακα που παρουσιάζει την αρχή των πέμπτων δυνάμεων των πολλαπλασίων του δέκα:

10^5 = 100 χιλιάδες
20^5 = 3 εκατομμύρια
30^5 = 24 εκατομμύρια
40^5 = 100 εκατομμύρια
50^5 = 300 εκατομμύρια
60^5 = 777 εκατομμύρια
70^5 = 1 δισεκατομμύριο 500 εκατομμύρια
80^5 = 3 δισεκατομμύρια
90^5 = 6 δισεκατομμύρια
100^5 = 10 δισεκατομμύρια.

Όταν σας πουν ότι η πέμπτη δύναμη κάποιου αριθμού είναι, ας πούμε, 8 δισεκατομμύρια και κάτι, βλέπετε αμέσως ότι αυτό το αποτέλεσμα βρίσκεται ανάμεσα στα 6 και τα 10 δισεκατομμύρια, και επομένως το ψηφίο των δεκάδων του άγνωστου αριθμού είναι το 9. Και όταν σας πει ο φίλος σας ότι το τελευταίο ψηφίο της δύναμης είναι το 7, βρίσκετε αμέσως την απάντηση: 97 (πραγματικά, 97^5 = 8.587.340.257).

Ένας πενταψήφιος αριθμός είναι γραμμένος στο μαυροπίνακα. Δύο μαθητές πλησιάζουν και ο πρώτος γράφει έναν τυχαίο πενταψήφιο· ο δεύτερος απαντά γράφοντας έναν δικό του. Στη συνέχεια γράφουν εναλλάξ πενταψήφιους αριθμούς για δύο επιπλέον φορές. Στο τέλος, ο δεύτερος μαθητής γράφει αμέσως το άθροισμα και των επτά αριθμών που έχουν γραφτεί στο μαυροπίνακα. Πώς τα κατάφερε;

Το μυστικό αυτού του τεχνάσματος είναι ότι ο δεύτερος μαθητής γράφει κάθε φορά έναν αριθμό τέτοιον ώστε τα ψηφία του και τα ψηφία του αριθμού που γράφει ο πρώτος μαθητής να δίνουν σε κάθε δεκαδική θέση άθροισμα εννέα. (Αν ο πρώτος αριθμός είναι το 40.817, η απάντηση θα είναι 59.182.) Το άθροισμα δύο τέτοιων αριθμών είναι πάντοτε 99.999. Όταν γραφτούν τα τρία ζεύγη αριθμών, το άθροισμά τους θα είναι 3 · 99.999 = 300.000 − 3.

Για να βρείτε, λοιπόν, το άθροισμα των επτά αριθμών, πρέπει να γράψετε το ψηφίο 3 μπροστά από τον πρώτο αριθμό του μαυροπίνακα και να αφαιρέσετε το 3 από τον αριθμό που προκύπτει.

Για να είναι λιγότερο φανερό το τέχνασμα, ο δεύτερος μαθητής μπορεί να μειώσει το πρώτο ψηφίο σε μια από τις ενδιάμεσες απαντήσεις του κατά αρκετές μονάδες και να μειώσει εξίσου το αντίστοιχο ψηφίο του τελικού αθροίσματος. Για παράδειγμα, οι αριθμοί που έχουν γραφτεί στο μαυροπίνακα μπορεί να είναι οι

76.281
14.391
65.608
24.380
75.619
95.073
4.926,

που μας δίνουν άθροισμα 356.278. Εδώ, το πρώτο ψηφίο του τρίτου προσθετέου είναι μειωμένο κατά 2, και το ίδιο συμβαίνει με το αντίστοιχο (το δεύτερο) ψηφίο του αθροίσματος. ◘

Ανεβαίνοντας την κατηφοριά

Μια διπλή σβούρα δείχνει να αψηφά τη βαρύτητα

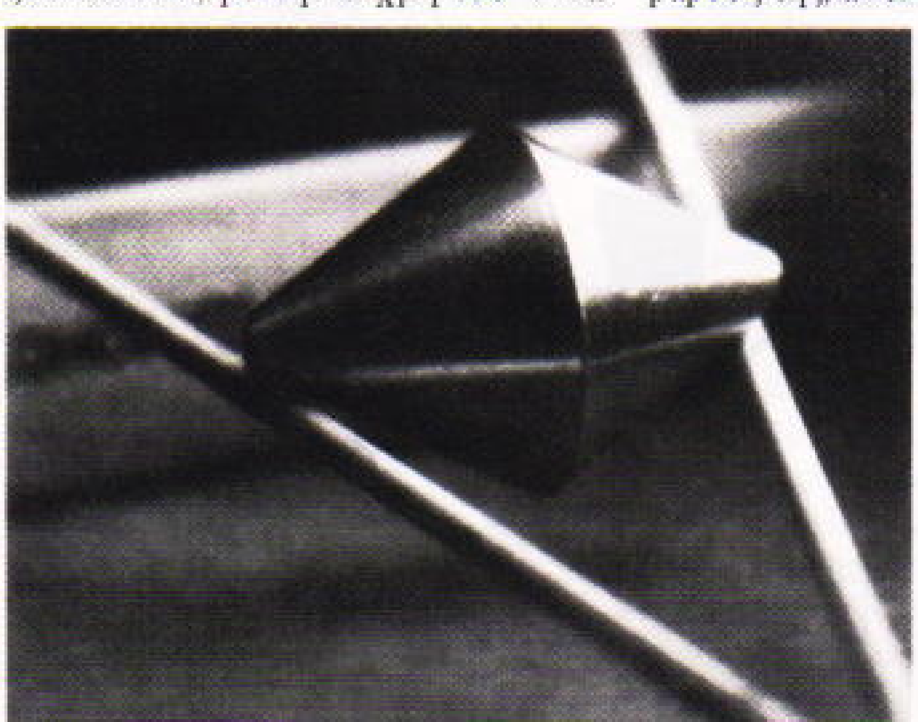
Alexander Mitrofanov

ΑΣ ΚΑΝΟΥΜΕ ΕΝΑ ΠΟΛΥ ΠΑΛΙΟ πείραμα που μοιάζει με ταχυδακτυλουργικό τρικ. Πάρτε δύο πανομοιότυπους κώνους από ξύλο, πλαστικό, ή μέταλλο —το υλικό δεν έχει καμία σημασία. Οι κώνοι μπορούν να είναι είτε συμπαγείς είτε κούφιοι, δεν πρέπει όμως να είναι πολύ ελαφροί. Ενώστε σταθερά τις βάσεις τους (χρησιμοποιήστε κόλλα αν χρειαστεί), και βεβαιωθείτε ότι στη «διπλή σβούρα» που προκύπτει οι άξονες των κώνων είναι ευθυγραμμισμένοι. Για να εκτελέσετε το πείραμα, χρειάζεστε επίσης ένα χοντρό βιβλίο, καθώς και δύο όμοιες και αρκετά μακριές ράβδους (ίσως ένα ζευγάρι κινέζικα ξυλαράκια φαγητού).

Τοποθετήστε το βιβλίο πάνω στο τραπέζι και στηρίξτε τις ράβδους στη μία ακμή του έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα V, με την αιχμή του V να ακουμπά στο τραπέζι. Βασικά, κατασκευάσατε ένα κεκλιμένο επίπεδο με σχήμα ισοσκελούς τριγώνου (Σχήμα 1).

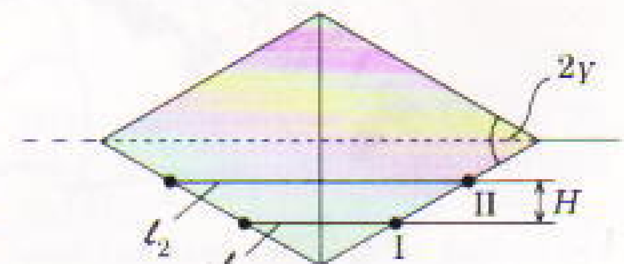
Πάρτε τώρα τη διπλή σβούρα και τοποθετήστε την πάνω στις ράβδους έτσι ώστε ο άξονάς της να είναι οριζόντιος. Καθώς το κάνετε αυτό, θα δείτε ότι η σβούρα θα κινηθεί, από μόνη της και χωρίς καμία ώθηση, κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου —όχι όμως προς τα κάτω, όπως ίσως θα περιμένατε! Κινείται προς τα πάνω, αντίθετα προς την καθημερινή μας εμπειρία και την κοινή λογική.

Ποιο είναι το μυστικό αυτού του τρικ; Φυσικά, δεν έχει να κάνει με μαγεία. Αποδεικνύεται ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες, καθώς η σβούρα κινείται προς το βιβλίο, το κέντρο βάρους της, αντί να ανυψώνεται, χαμηλώνει. Η αιτία της κίνησης είναι η δύναμη της βαρύτητας, και κατ' αρχάς αυτό φαίνεται αρκετά αλλόκοτο.



Σχήμα 1

Ποιες είναι οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται σ' αυτό το πείραμα; Ας εξετάσουμε το πρόβλημα λεπτομερέστερα. Ας ονομάσουμε α τη γωνία που σχηματίζει το επίπεδο με το οριζόντιο επίπεδο, 2β τη γωνία που σχηματίζουν οι δύο ράβδοι μεταξύ τους, και 2γ τη γωνία στην κορυφή του κάθε κώνου (Σχήμα 2). Αφήστε τη σβούρα να κινηθεί προς τα πάνω κατά μήκος των ράβδων-οδηγών, από τη θέση I στη θέση II, και έστω ℓ_1 και ℓ_2 οι αντίστοιχες αποστάσεις μεταξύ των σημείων επαφής της σβούρας και των αξόνων.



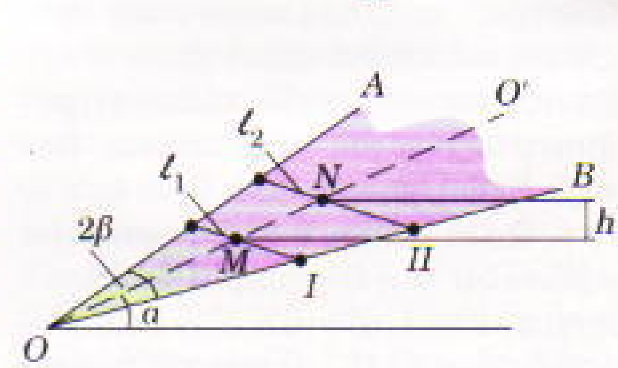
Σχήμα 2

Στο Σχήμα 2 βλέπουμε ότι, ως προς τα σημεία επαφής, το κέντρο βάρους της σβούρας χαμηλώνει κατά ποσό

$$H = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}\,\text{εφ}\gamma.$$

Φυσικά, αυτά τα σημεία επαφής ανυψώνονται στη διάρκεια της κίνησης (Σχήμα 3) κατά

$$h = |MN|\,\text{ημ}\alpha = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}\,\text{σφ}\beta\,\text{ημ}\alpha.$$



Σχήμα 3

Τώρα έχουμε στη διάθεσή μας ό,τι χρειαζόμαστε για να διατυπώσουμε τη συνθήκη της ανοδικής κίνησης της σβούρας στο κεκλιμένο επίπεδο. Προφανώς, αυτό συμβαίνει αν $H > h$, ή

$$\frac{\ell_1 - \ell_2}{2}\,\text{εφ}\gamma > \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}\,\text{σφ}\beta\,\text{ημ}\alpha,$$

δηλαδή αν

$$\text{ημ}\alpha < \text{εφ}\beta\,\text{εφ}\gamma.$$

Μόνο σ' αυτή την περίπτωση το κέντρο βάρους χαμηλώνει καθώς η σβούρα κινείται προς τα πάνω κατά μήκος των ράβδων. Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν

$$\text{ημ}\alpha > \text{εφ}\beta\,\text{εφ}\gamma,$$

η σβούρα θα κινείται μόνο προς τα κάτω. Αν, τέλος,

$$\text{ημ}\alpha = \text{εφ}\beta\,\text{εφ}\gamma,$$

η σβούρα θα ηρεμεί πάνω στις ράβδους σε μια κατάσταση αδιάφορης ισορροπίας (όπως ακριβώς ένας κύλινδρος σ' ένα οριζόντιο επίπεδο). Στη φωτογραφία (Σχήμα 1) βλέπουμε αυτήν ακριβώς την περίπτωση.

Για να κλείσουμε το θέμα, θα σας θέσω ορισμένα πειραματικά προβλήματα που συνδέονται με το παραπάνω πείραμα.

Προβλήματα

1. Ελέγξτε πειραματικά τον τύπο $\text{ημ}\alpha = \text{εφ}\beta\,\text{εφ}\gamma$, ο οποίος περιγράφει τη συνθήκη αδιάφορης ισορροπίας μιας *διπλής* σβούρας πάνω σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο. Με πόση ακρίβεια μπορεί να ελεγχθεί αυτή η συνθήκη;

2. Κάντε τους υπολογισμούς και αποδείξτε πειραματικά πως η συνθήκη για αδιάφορη ισορροπία θα εξακολουθήσει να ισχύει αν μετακινήσετε την αιχμή του V των ράβδων προς το βιβλίο, ενώ ταυτόχρονα διατηρείτε τα σημεία επαφής των ράβδων με την ακμή του βιβλίου ίδια.

3. Από θεωρητική άποψη, μπορεί κανείς να επιλέξει τις γωνίες γ και β με τέτοιον τρόπο ώστε η συνθήκη ανόδου της σβούρας να ικανοποιείται ακόμη και για $\alpha = 90^\circ$ ($\text{ημ}\alpha = 1$) —δηλαδή, όταν το κεκλιμένο επίπεδο είναι κατακόρυφο. Ποια πειραματικά αποτελέσματα θα προκύψουν με μια τέτοια διάταξη;

4. Έστω ότι το κεκλιμένο επίπεδο σχηματίζεται από ράβδους που ενώνονται στο πάνω μέρος και όχι στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Τι σχήμα θα πρέπει να έχει ένα αντικείμενο ώστε να κυλά προς τα πάνω στις ράβδους-οδηγούς;

Οι εκπλήξεις των αντιστρόφων

Αναποδογυρίζοντας τα θεωρήματα

I. Kushnir

Αν ενάλλαξετε την υπόθεση με το συμπέρασμα ενός θεωρήματος, καταλήγετε σε μια άλλη πρόταση, που είναι αντίστροφη αυτής που έχει δοθεί. Για παράδειγμα, η πρόταση «όταν το τετράγωνο μιας πλευράς ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πρώτη πλευρά είναι ορθή», είναι η αντίστροφη του πυθαγόρειου θεωρήματος. Σ' αυτή την περίπτωση, από την ευθεία πρόταση μπορούμε να συναγάγουμε το αντίστροφο θεώρημα. Πραγματικά, αν έχουμε ένα τρίγωνο που ικανοποιεί την πυθαγόρεια σχέση (το οποίο, όμως, δεν γνωρίζουμε αν είναι ορθογώνιο), τότε το ορθογώνιο τρίγωνο που οι κάθετες πλευρές του ισούνται με τις μικρότερες πλευρές του δεδομένου τριγώνου πρέπει να είναι ίσο με αυτό. Επομένως, είχαμε να κάνουμε από την αρχή με ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

Συχνά, όμως, το αντίστροφο απαιτεί μια ανεξάρτητη απόδειξη, και μερικές φορές το αντίστροφο ενός αληθούς θεωρήματος είναι ψευδές. Γενικά, πρέπει να καταστεί απολύτως σαφές ότι δύο τέτοια θεωρήματα είναι διαφορετικές προτάσεις που καθεμία τους απαιτεί ξεχωριστή απόδειξη. Η στοιχειώδης γεωμετρία προσφέρει πλήθος παραδειγμάτων που επιδεικνύουν αυτή την απλή αλήθεια. Ακολουθούν ορισμένα γεωμετρικά γεγονότα που θα σας φανούν σχεδόν προφανή. Η απόδειξή τους οπωσδήποτε δεν παρουσιάζει δυσκολίες, ο σκοπός σας όμως θα είναι διαφορετικός: *διατυπώστε και αποδείξτε τις αντίστροφες προτάσεις*. Θα διαπιστώσετε ότι είναι πολύ δυσκολότερο να αποδείξουμε τα αντίστροφα θεωρήματα απ' ό,τι τις ευθείες προτάσεις.

Ευθέα θεωρήματα

1. Το τμήμα που συνδέει τα μέσα των βάσεων ενός τραπεζίου χωρίζει το τραπέζιο σε δύο σχήματα ίσου εμβαδού.

2. Το άθροισμα των αποστάσεων μεταξύ των μέσων των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου ισούται με την ημιπερίμετρό του.

3. Αν H είναι το ορθόκεντρο (το σημείο τομής των υψών) ενός οξυγωνίου τριγώνου ABC, τότε $\angle HBA = \angle HCA$ και $\angle HAB = \angle HCB$.

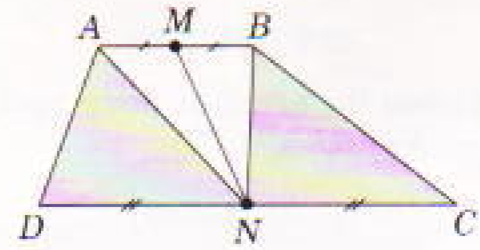
4. Αν O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, τότε $\angle OAB - \angle OBA = \angle OBC - \angle OCB = \angle OCA - \angle OAC$.

5. Αν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, τότε το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου ανήκει στην ευθεία Euler του τριγώνου. (Η ευθεία Euler ενός τριγώνου διέρχεται από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου και τα σημεία τομής των υψών και των διαμέσων. Αποδεικνύεται ότι αυτά τα σημεία είναι πάντα συγγραμμικά.)

6. Οι διχοτόμοι των προσκείμενων στη βάση γωνιών ενός ισοσκελούς τριγώνου έχουν το ίδιο μήκος.

Υποδείξεις για τα αντίστροφα θεωρήματα

1. Εδώ το αντίστροφο θεώρημα δηλώνει πως, όταν η ευθεία που συνδέει τα μέσα M και N των πλευρών



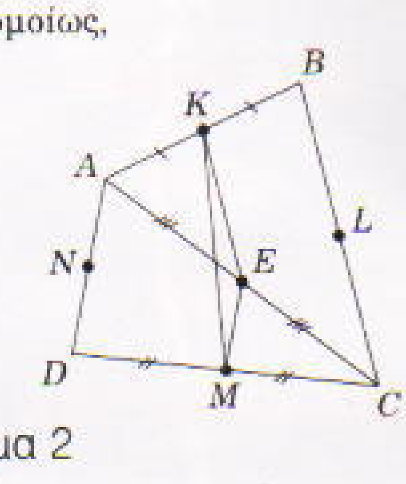
Σχήμα 1

AB και CD ενός τετραπλεύρου $ABCD$ διχοτομεί το εμβαδόν του, τότε οι δύο πλευρές είναι παράλληλες.[1] Για να το αποδείξετε, δείξτε ότι τα τρίγωνα AND και BNC (Σχήμα 1) έχουν ίσα εμβαδά. Αφού $ND = NC$, έπεται ότι $AB \parallel CD$.

2. Έστω K, L, M, N τα μέσα των πλευρών AB, BC, CD, DA ενός τετραπλεύρου $ABCD$ (Σχήμα 2). Με δεδομένο ότι $KM + LN = (AB + BC + CD + DA)/2$, πρέπει να αποδείξουμε ότι το $ABCD$ είναι παραλληλόγραμμο. Ονομάζουμε E το μέσον της AC. Αφού τα KE και EM ενώνουν μέσα πλευρών στα τρίγωνα ABC και CDA, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

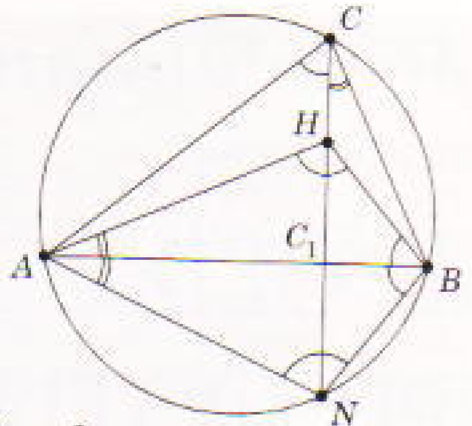
$$KM \leq KE + EM = \frac{BC + AD}{2}.$$

Παρομοίως,



Σχήμα 2

1. Επομένως, δεν είναι το ακριβώς αντίστροφο της αρχικής πρότασης: θα πρέπει μαζί με το τραπέζιο να συμπεριλάβουμε την περίπτωση του παραλληλογράμμου.



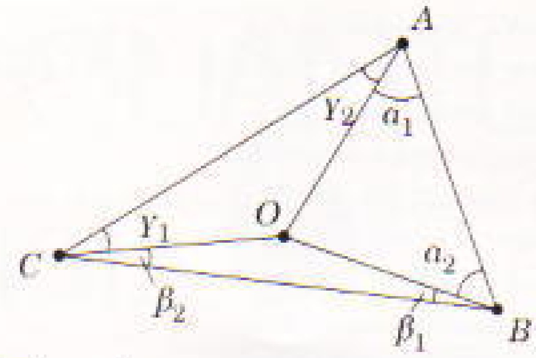
Σχήμα 3

$$LN \le LE + EN = \frac{AB + CD}{2}.$$

Προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες και συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με τη δεδομένη εξίσωση, βρίσκουμε ότι $KM = KE + EM$, κάτι που είναι δυνατόν μόνο όταν το E ανήκει στο τμήμα KM. Σ' αυτή την περίπτωση, όμως, από τις σχέσεις $BC \parallel KE$ και $AD \parallel EM$, συμπεραίνουμε ότι $BC \parallel AD$. Οι δύο άλλες πλευρές είναι παράλληλες για τους ίδιους λόγους.

3. Πρέπει να αποδείξουμε πως, όταν για ένα συγκεκριμένο σημείο H του οξυγώνιου τριγώνου ισχύουν για τις γωνίες οι ισότητες του ευθέος θεωρήματος, τότε το σημείο αυτό είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου. Σχεδιάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου και συμβολίζουμε με C_1 και N, αντίστοιχα, τα σημεία τομής της ευθείας CH με την AB και τον περιγεγραμμένο κύκλο (Σχήμα 3). Από την πρώτη ισότητα και από το θεώρημα των εγγεγραμμένων γωνιών έχουμε $\angle HBA = \angle HCA = \angle NBA$. Ομοίως, $\angle HAB = \angle NAB$. Έπεται ότι τα H και N είναι συμμετρικά ως προς την AB και, συνεπώς, το CC_1 είναι ύψος, και $\angle AHB = \angle ANB = 180^\circ - \angle ACB$. Ωστόσο, υπάρχει μόνο ένα σημείο του ύψους CC_1 που βλέπει το τμήμα AB υπό μια ορισμένη γωνία. Για τη συγκεκριμένη γωνία, $180^\circ - \angle ACB$, αυτό συμβαίνει μόνο με το ορθόκεντρο, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

4. Ονομάζουμε τις γωνίες της πρότασης α_i, β_i, γ_i ($i = 1, 2$) με τον τρόπο που βλέπετε στο Σχήμα 4. Από τις ισότητες $\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 = \gamma_1 - \gamma_2$ πρέπει να συναγάγουμε την $OA = OB = O\Gamma$. Έστω $OA \neq OB$. Ας υποθέσουμε —χωρίς απώλεια της γενικότητας— ότι $OA < OB$. Τότε $\alpha_1 > \alpha_2$, και επομένως $\beta_1 > \beta_2$ και $OB < OC$. Ομοίως, $OC < OA$. Τότε, όμως, $OA < OB < OC$

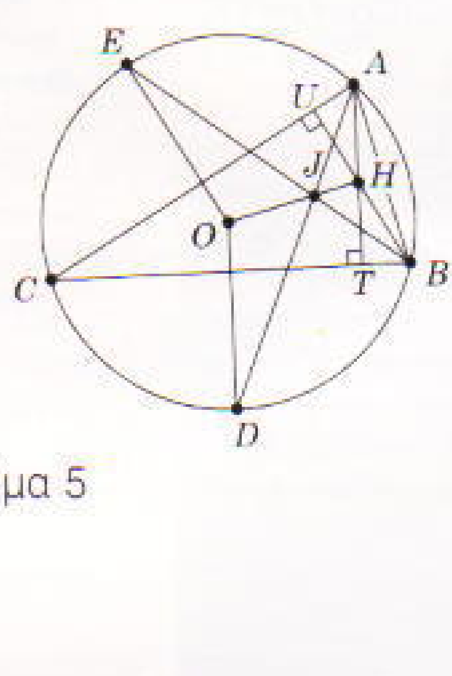


Σχήμα 4

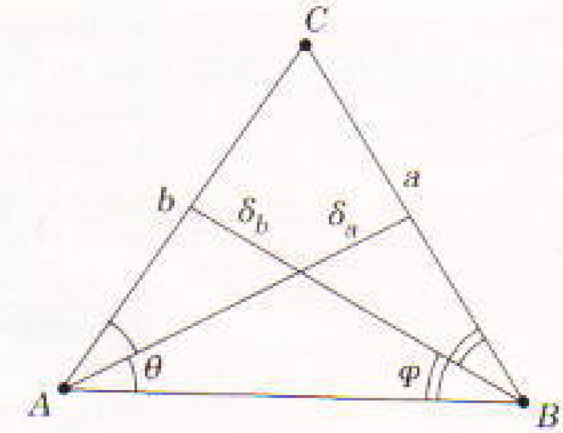
$< OA$, που είναι άτοπο. Επομένως, $OA = OB$ και, για τον ίδιο λόγο, $OB = OC$. Στο ευθύ θεώρημα όλες οι διαφορές είναι στην πραγματικότητα μηδέν. Παρατηρήστε ότι για το αντίστροφο θεώρημα αρκεί να υποθέσουμε ότι όλες οι διαφορές $\alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_1 - \beta_2$, $\gamma_1 - \gamma_2$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

5. Έστω O, H, I το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου, το ορθόκεντρο και το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου, αντίστοιχα (Σχήμα 5). Οι δύο τουλάχιστον από τις διχοτόμους του τριγώνου —ας πούμε των γωνιών A και B— δεν συμπίπτουν με την ευθεία Euler. Αν τις προεκτείνουμε ώστε να τμήσουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία D και E, βρίσκουμε ότι τα D και E είναι τα μέσα των τόξων BC και CA, και επομένως οι OD και OE είναι κάθετες στις πλευρές BC και CA. Άρα, $OD \parallel HA$ και $OE \parallel HB$, οπότε έπεται ότι τα τρίγωνα OID και OIE είναι όμοια με τα HIA και HIB, αντίστοιχα. Ο λόγος ομοιότητας και για τα δύο ζεύγη τριγώνων είναι ο ίδιος: HI/IO. Αφού $OD = OE$ (είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου), γνωρίζουμε ότι $HA = HB$. Τότε, $\angle HAB = \angle HBA$. Εξετάζοντας τώρα τα τρίγωνα ABT, ABU βλέπουμε ότι $\angle CAB = \angle CBA$, και έτσι το αρχικό τρίγωνο είναι ισοσκελές.

6. Έστω $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Τότε, το αντίστροφο θεώρημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «Αν δύο δι-



Σχήμα 5



Σχήμα 6

χοτόμοι, δ_a, δ_b, (Σχήμα 6) ενός τριγώνου έχουν το ίδιο μήκος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές ($a = b$)». Σε αντίθεση με τις ανάλογες προτάσεις για τις διαμέσους και τα ύψη, αυτό είναι ένα πραγματικά δύσκολο θεώρημα. Έχει προκαλέσει το έντονο ενδιαφέρον πολλών γεωμετρών, που έχουν προσφέρει πολλές διαφορετικές αποδείξεις του. Αυτή που προτείνουμε στη συνέχεια —όπως και πολλές από τις υπόλοιπες— βασίζεται στην εις άτοπον απαγωγή.

Ας υποθέσουμε ότι $a > b$. Τότε, $\theta > \varphi$. Τα μήκη των διχοτόμων μας δίνονται από τις σχέσεις

$$\delta_a = \frac{2bc}{b+c}\,\text{συν}\,\frac{\theta}{2},\ \delta_b = \frac{2ac}{a+c}\,\text{συν}\,\frac{\varphi}{2}.$$

Για να βρούμε λόγου χάρη τον πρώτο από αυτούς τους τύπους, εκφράζουμε τα εμβαδά του τριγώνου και των περιοχών στις οποίες διαιρείται από την δ_a συναρτήσει των b, c, δ_a και θ. Έπειτα εξισώνουμε το συνολικό εμβαδόν με το άθροισμα των μερών του:

$$\frac{1}{2}bc\,\text{ημ}\,\theta = \frac{1}{2}b\delta_a\,\text{ημ}\,\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}c\delta_a\,\text{ημ}\,\frac{\theta}{2}.$$

Κατόπιν απαλείφουμε τον όρο ($\frac{1}{2}$ b ημθ)/2 χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ημθ = 2ημ(θ/2) συν(θ/2). Αφού $0 < \varphi < \theta < \pi$, συν$\varphi$/2 > συν$\theta$/2. Επιπλέον, $b/(b+c) < a/(a+c)$, επειδή

$$\frac{a}{a+c} - \frac{b}{b+c} = \frac{c(a-b)}{(a+c)(b+c)} > 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\delta_a < \delta_b$, που είναι άτοπο.

Αν σας άρεσε το «παιχνίδι αντιστροφών», μπορείτε να το παίξετε μόνοι σας με τα αγαπημένα σας γεωμετρικά θεωρήματα. ◼

Η τροχιά των τριγώνων

Αφιερωμένο στη μνήμη του Leroy F. Meyers (1927-1995)

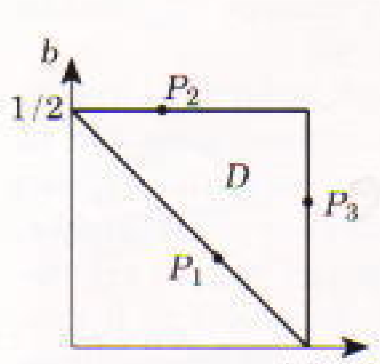
George Berzsenyi

ΤΟΝ ΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΜΑΪΟ Ο ΠΡΩΗΝ συνεργάτης μου Brad Brock, που εκείνη την εποχή βρισκόταν στο Κέντρο Ερευνών για τις Επικοινωνίες του Πανεπιστημίου του Πρίνστον, μου επέστησε την προσοχή σε μια ενδιαφέρουσα ανακοίνωση του Kevin Brown που εμφανίστηκε στο Internet. Στη συνέχεια επικοινώνησα με τον Kevin, μαθηματικό που εργάζεται στη βιομηχανία, και συγκεκριμένα στην Boeing (στο Σηάττλ). Μου μίλησε για μια σχετική του ανακοίνωση και μου επέτρεψε να αναφέρω στους αναγνώστες μου τις ιδέες του. Και αυτό είναι το θέμα του σημερινού μας άρθρου. Παρακάτω θα περιγράψω εν συντομία την προκαταρκτική έρευνα του Kevin πάνω στο θέμα, και την ανάπτυξή της από τον φίλο μου Zachary Franco, που αυτό τον καιρό ανήκει στο διδακτικό προσωπικό του γειτονικού Πανεπιστημίου του Μπάτλερ. Την περίοδο 1978-1981 (ενώ ήταν μαθητής στο Λύκειο Stuyvesant της Νέας Υόρκης) ο Zac έστελνε θαυμάσιες απαντήσεις στα προβλήματα που παρουσίαζα στη στήλη "Competition Corner" του περιοδικού *Mathematics Student* (το οποίο δεν εκδίδεται πλέον).

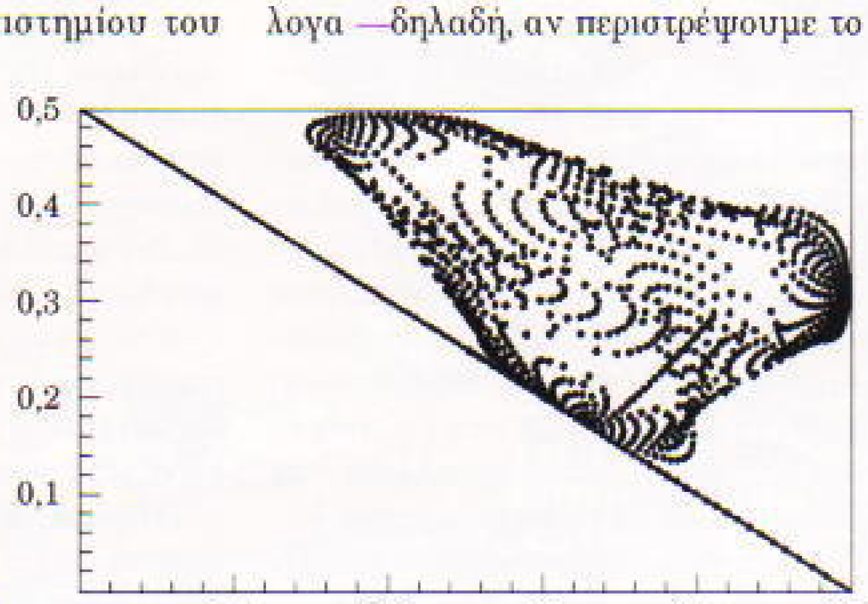
Για να βρούμε την «τροχιά των τριγώνων», αρχίζουμε με ένα τυχαίο τρίγωνο ABC με πλευρές a, b, c, τέτοιες ώστε $a + b + c = 1$. Τοποθετούμε το τρίγωνο στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου των συντεταγμένων έτσι ώστε η πλευρά a να είναι το τμήμα που ενώνει τα $(0, 0)$ και $(a, 0)$. Έστω A' το σημείο που καταλαμβάνει η κορυφή A. Περιστρέφουμε το τρίγωνο έτσι ώστε να έρθει το C στην αρχή των αξόνων και η b πάνω στον άξονα x. Έστω B' το σημείο που καταλαμβάνει η κορυφή B. Αντίστοιχα, έστω C' το σημείο που ορίζεται ανάλογα —δηλαδή, αν περιστρέψουμε το τρίγωνο έτσι ώστε το A να βρεθεί στην αρχή, η πλευρά c πάνω στον άξονα x, και αν ονομάσουμε C' το σημείο που καταλαμβάνει η κορυφή C. Τώρα, «κανονικοποιούμε» το τρίγωνο $A'B'C'$ για να πάρουμε ένα ομοιόθετο τρίγωνο με περίμετρο 1. Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία με το νέο τρίγωνο, κατόπιν με το επόμενο, κ.ο.κ.

Στην ανάλυσή του ο Zac περιόρισε το ενδιαφέρον του στην τριγωνική περιοχή D του επιπέδου ab (Σχήμα 1), στην οποία όλα τα σημεία (a, b) αντιπροσωπεύουν ένα τρίγωνο με πλευρές a, b, και $1 - a - b$. Σύμφωνα με τις ανακαλύψεις του Kevin Brown, φαίνεται ότι όλα τα σημεία της D, με εξαίρεση το $(1/3, 1/3)$, τείνουν σε έναν από τους «ελκυστές» που έχουμε ονομάσει P_1, P_2, P_3 στο Σχήμα 1, και οι οποίοι έχουν, αντίστοιχα, συντεταγμένες (p, q), (q, r), (r, p), όπου $p = ημ18^\circ = (\sqrt{5} - 1)/4$, $q = 1/2 - ημ18^\circ = (3 - \sqrt{5})/4$, και $r = 1/2$.

Η πρώτη πρόκληση για τους αναγνώστες μου είναι να *αποδείξουν ότι όλα τα σημεία του συνόρου της D τείνουν σε έναν από τους ελκυστές*. Η δεύτερη πρόκληση είναι να *αναπαραγάγουν την «πεταλούδα» του Σχήματος 2*, που αναπαριστά τις πρώτες επαναλήψεις των σημείων της D, όπως υπολογίστηκαν από τον Zac με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica, χρησιμοποιώντας 1.250 ισαπέχοντα σημεία της περιοχής. Η



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Η συνέχεια στη σελ. 59 ⇨

ΣΤΑ ΠΕΔΙΑ
ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Η άνοδος και η πτώση

«Το αν ο φορέας της βαρύτητας είναι υλικός ή άυλος το αφήνω να το εξετάσουν οι αναγνώστες μου.»
—Ισαάκ Νεύτων

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

ΟΛΟΙ ΣΑΣ ΘΑ ΕΧΕΤΕ ΑΚΟΥΣΕΙ ΠΩΣ «ό,τι ανεβαίνει, κατεβαίνει». Πολλά παιδιά ίσως αμφισβητούν την ορθότητα αυτής της πρόβλεψης προβάλλοντας ως επιχείρημα τα γεμάτα ήλιο μπαλόνια. Μερικοί νέοι, πολλοί από τους οποίους διαβάζουν το *Quantum* αυτή τη στιγμή, μπορεί να έχουν αναρωτηθεί τι θα συνέβαινε αν ένα αντικείμενο εκτοξευόταν προς τα πάνω με πολύ μεγάλη ταχύτητα. Θα κατέβαινε κι αυτό;

Το πρώτο βήμα για έναν φυσικό είναι να αναλύσει τι συμβαίνει αν το αντικείμενο εκτοξεύεται προς τα πάνω με μικρή ταχύτητα. Το αντικείμενο ανεβαίνει, φτάνει στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του και έπειτα κατεβαίνει. Αν αυξήσουμε την ταχύτητα εκτόξευσης, το αντικείμενο θα πάει ψηλότερα, θα κινηθεί για περισσότερο χρόνο, και κατόπιν θα επιστρέψει στο έδαφος.

Τώρα, όμως, πρέπει να επεξεργαστούμε περισσότερο αυτή την περιγραφή. Ένας τρόπος για να το κάνουμε είναι να την ποσοτικοποιήσουμε. Την ικανότητά μας να γράψουμε τις συγκεκριμένες εξισώσεις κίνησης την οφείλουμε στον Γαλιλαίο. Ο Γαλιλαίος ήταν ο πρώτος που πραγματοποίησε και κατέγραψε μετρήσεις της κίνησης ενός αντικειμένου. Ήταν επίσης ο πρώτος που περιέγραψε την άνοδο και την κάθοδο ενός αντικειμένου με γλώσσα μαθηματική. Αυτό που διαπίστωσε ο Γαλιλαίος, και μπορείτε να το ανακαλύψετε και εσείς, είναι ότι κατά την ελεύθερη πτώση του σώματος το μέτρο της ταχύτητάς του αλλάζει: το σώμα κινείται ολοένα ταχύτερα. Αυτό το γνωρίζουν πλέον οι πάντες.

Κάτι που δεν είναι γνωστό σε όλους, όμως, είναι το εξής: αν παρατηρώ το αντικείμενο κατά την ελεύθερη πτώση του κάθε 2 μέτρα, θα διαπιστώνω ότι το μέτρο της ταχύτητάς του θα έχει αλλάξει κατά το ίδιο ποσό; Πιο συγκεκριμένα, αν η ταχύτητά του έχει αυξηθεί σε 6 m/s στα πρώτα 2 μέτρα, θα αυξηθεί σε 12 m/s στα επόμενα 2 μέτρα; Η απάντηση είναι όχι. Σκεφτείτε τώρα και τούτο: αν παρατηρώ το αντικείμενο κάθε 2 δευτερόλεπτα, το μέτρο της ταχύτητάς του θα αλλάζει κατά το ίδιο ποσό; Η απάντηση είναι ναι. Ο Γαλιλαίος όρισε αυτή την αλλαγή του μέτρου της ταχύτητας ανά μονάδα χρόνου ως επιτάχυνση του αντικειμένου. Ένα αυτοκίνητο επιταχύνεται όταν αυξάνει την ταχύτητά του. Μία δρομέας εκατό μέτρων κάνει το ίδιο κατά την εκκίνησή της. Όταν το μολύβι πέφτει από το γραφείο, επιταχύνεται. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ενός αντικειμένου που πέφτει έγκειται στο ότι η επιτάχυνσή του είναι σταθερή. Πολύ κοντά στη Γη, το μέτρο της ταχύτητάς του αλλάζει με ρυθμό 9,8 m/s ανά δευτερόλεπτο. Είναι δύσκολο ένα αυτοκίνητο να έχει σταθερή επιτάχυνση. Είναι σχεδόν αδύνατον ένας άνθρωπος να έχει σταθερή επιτάχυνση. Αλλά κάθε αντικείμενο που πέφτει ελεύθερα σε μικρή απόσταση από τη γη έχει *σταθερή* επιτάχυνση 9,8 m/s^2 —αρκεί ο αέρας να μην επηρεάζει σημαντικά την κίνησή του.

Η επιτάχυνση των 9,8 m/s^2 ενεργεί τόσο κατά την άνοδο όσο και κατά την πτώση του σώματος. Αν πετάξετε μια μπάλα προς τα πάνω με ταχύτητα 50 m/s, η ταχύτητά της θα είναι μόλις 40 m/s μετά το πρώτο δευτερόλεπτο (για την ακρίβεια, θα είναι 40,2 m/s). Στο τέλος του δεύτερου δευτερόλεπτου, η ταχύτητά της θα είναι μόλις 30 m/s· στο τέλος του τρίτου δευτερόλεπτου, 20 m/s· στο τέλος του τέταρτου δευτερόλεπτου, 10 m/s· και στο τέλος του πέμπτου δευτερόλεπτου η ταχύτητα της μπάλας θα είναι 0 m/s. Μηδέν μέτρα ανά δευτερόλεπτο σημαίνει ακινησία. Όντως η μπάλα παραμένει στιγμιαία ακίνητη. Στο έκτο δευτερόλεπτο, η ταχύτητά της συνεχίζει να μειώνεται κατά 10 m/s, δηλαδή στο τέλος του θα είναι −10 m/s. Το αρνητικό πρόσημο είναι ο μαθηματικός τρόπος με τον οποίο δηλώνουμε ότι η μπάλα ήδη κατεβαίνει.

Από αυτή την απλή ανάλυση θα έπρεπε να συμπεράνουμε ότι όλα τα αντικείμενα που ανεβαίνουν, στη συνέχεια κατεβαίνουν. Η μπάλα, ανεξάρτητα από την αρχική της ταχύτητα, τελικά θα φτάσει τα 0 m/s, και θα αρχίσει να πέφτει ελεύθερα προς το έδαφος. Σκεφτείτε, όμως, ότι κάτι τέτοιο συμβαίνει μόνο αν έχει

Εικονογράφηση: Tomas Bunk


G
MARS
M
B
A
Y
Tom Bunk

σταθερή επιτάχυνση 9,8 m/s^2. Ο Γαλιλαίος διαπίστωσε ότι αυτό ισχύει *κοντά* στην επιφάνεια της Γης. Παύει να ισχύει καθώς απομακρυνόμαστε από τον πλανήτη μας. Καθώς ένα αντικείμενο απομακρύνεται ολοένα περισσότερο από τη Γη, η «επιτάχυνση της βαρύτητας» γίνεται ολοένα μικρότερη. Στο υψόμετρο όπου βρίσκεται η Σελήνη η αντίστοιχη επιτάχυνση είναι μόνο 0,0027 m/s^2. Και αυτή ακριβώς είναι η επιτάχυνση που απαιτείται για να παραμένει η Σελήνη σε σταθερή τροχιά γύρω από τη Γη. Σ' αυτή την περίπτωση, η αλλαγή κατά 0,0027 m/s ανά δευτερόλεπτο δεν είναι αλλαγή στο μέτρο της ταχύτητας, αλλά στην κατεύθυνση της ταχύτητας. Αν δεν υπήρχε αυτή η αλλαγή της κατεύθυνσης, η Σελήνη θα συνέχιζε να κινείται σε ευθεία διαδρομή, και θα απομακρυνόταν συνεχώς από τη Γη. Η αλλαγή του διανύσματος της ταχύτητας διατηρεί τη Σελήνη σε τροχιά γύρω από τη Γη. Ανατρέξτε σ' ένα καλό εγχειρίδιο φυσικής, για να βρείτε μια πληρέστερη (και περισσότερο μαθηματική) ανάλυση αυτού του ζητήματος.

Αν η επιτάχυνση μειώνεται καθώς αυξάνεται η απόσταση από τη Γη, τότε υπάρχει η δυνατότητα να φτάσουμε σε μία κατάσταση όπου η ταχύτητα του αντικειμένου να μην ελαττώνεται κάτω από το μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι το αντικείμενο δεν θα επιστρέψει ποτέ στη Γη. Το αντικείμενο διαφεύγει! Την ελάχιστη ταχύτητα που απαιτείται ώστε ένα αντικείμενο να διαφύγει από τη Γη (την οποία ονομάζουμε ταχύτητα διαφυγής), μπορούμε να τη συναγάγουμε χρησιμοποιώντας το νόμο διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

Η πηγή των μάλλον απαιτητικών προβλημάτων που ακολουθούν είναι η Διεθνής Ολυμπιάδα Φυσικής του 1985, που διεξήχθη στη Γιουγκοσλαβία. Για να απλουστεύσουμε τα προβλήματα, δεχόμαστε ότι όλοι οι πλανήτες διαγράφουν κυκλικές τροχιές γύρω από τον Ήλιο. Αγνοούμε την αντίσταση του αέρα και την περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της. Στα ερωτήματα Β-Δ αγνοούμε την ενέργεια που χρησιμοποιήθηκε για τη διαφυγή από το βαρυτικό πεδίο της Γης. Δεχόμαστε ότι η τροχιακή ταχύτητα της Γης είναι 30 km/s και ότι ο λόγος των αποστάσεων της Γης και του Άρη από τον Ήλιο είναι 2/3.

Α. Όσοι δεν είναι προχωρημένοι στη φυσική να παραγάγουν τον τύπο της ταχύτητας διαφυγής ενός διαστημοπλοίου από τη Γη.

Β. Όσοι θέλουν να ασχοληθούν με κάτι δυσκολότερο να παραγάγουν την εξίσωση και να υπολογίσουν την τιμή της ελάχιστης ταχύτητας με την οποία πρέπει να εκτοξευτεί ένα διαστημόπλοιο από τη Γη για να εγκαταλείψει το ηλιακό σύστημα.

Γ. Για πιο προχωρημένους: Υποθέστε ότι το διαστημόπλοιο έχει εκτοξευτεί με ταχύτητα μικρότερη από την παραπάνω ταχύτητα διαφυγής. Υπολογίστε την ταχύτητα που θα έχει το διαστημόπλοιο τη στιγμή που τέμνει την τροχιά του Άρη. Υποθέστε ότι ο Άρης δεν βρίσκεται κοντά στο σημείο τομής.

Δ. Τέλος, ας υποθέσουμε ότι το διαστημόπλοιο εισέρχεται στο βαρυτικό πεδίο του Άρη. Βρείτε την ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευτεί το διαστημόπλοιο από τη Γη για να εγκαταλείψει το ηλιακό σύστημα χρησιμοποιώντας το βαρυτικό πεδίο του Άρη. (Συχνά περιγράφουμε αυτό το φαινόμενο λέγοντας ότι ο Άρης χρησιμοποιείται από το διαστημόπλοιο ως «εφαλτήριο».

Φωτόνια και φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

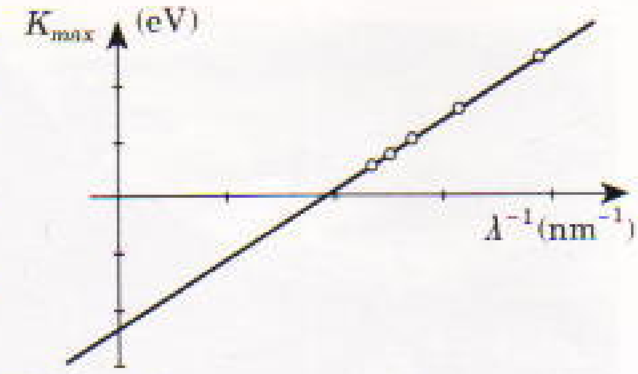
Α. Η εξίσωση που συνδέει τη μέγιστη κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων κατά την έξοδό τους από το μέταλλο και τη συχνότητα του μονοχρωματικού φωτός είναι

$$K_{max} = h\nu - \phi.$$

Επειδή $\nu = c/\lambda$, όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό και λ το μήκος κύματός του, η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - \phi.$$

Η γραφική παράσταση της K_{max} ως προς $1/\lambda$ είναι ευθεία γραμμή, και μπορούμε να τη σχεδιάσουμε με βάση τα δεδομένα του πίνακα (Σχήμα 1)· τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο



Σχήμα 1

σημείο ϕ, και η κλίση της, $\Delta K_{max}/\Delta(1/\lambda)$, ισούται με hc. Από το Σχήμα 1, λοιπόν, υπολογίζουμε ότι $hc = 1{,}242 \cdot 10^3$ eV · nm και $\phi = 2{,}32$ eV. Επειδή $c = 3 \cdot 10^8$ m/s $= 3 \cdot 10^{17}$ nm/s, προκύπτει ότι η σταθερά του Planck ισούται με $h = 4{,}14 \cdot 10^{-15}$ eV · s.

Β. Προκειμένου να αποδείξουμε το ζητούμενο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο μπορεί να απορροφήσει πλήρως ένα φωτόνιο, να εφαρμόσουμε το νόμο διατήρησης της ορμής και της ενέργειας, και να οδηγηθούμε σε άτοπο. Έτσι, από το νόμο διατήρησης της ορμής έχουμε

$$\frac{h\nu}{c} = m\upsilon,$$

και από το νόμο διατήρησης της ενέργειας

$$h\nu = \frac{1}{2} m\upsilon^2.$$

Διαιρώντας τις δύο εξισώσεις κατά μέλη προκύπτει $\upsilon = 2c$, που προφανώς είναι αδύνατο.

Γ. (α) Η ενέργεια κάθε φωτονίου θα είναι $hc/\lambda = 3{,}97 \cdot 10^{-19}$ J. Άρα η λυχνία φωτός ισχύος 50 W θα εκπέμπει κατά μέσο όρο $1{,}26 \cdot 10^{20}$ φωτόνια/s. Αυτά τα φωτόνια εκπέμπονται από τη λυχνία ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις. Το εμβαδόν της ίριδας είναι $\pi(d/2)^2 = 0{,}0625\pi$ cm^2.

Έτσι, ο λόγος του εμβαδού της ίριδας προς το εμβαδόν της σφαίρας που έχει ακτίνα R τη ζητούμενη απόσταση (λυχνίας-ίριδας) θα ισούται με το πλήθος των φωτονίων που εισέρχονται στην ίριδα προς το συνολικό πλήθος των εκπεμπόμενων φωτονίων:

$$\frac{0{,}0625\pi\ \text{cm}^2}{4\pi R^2} = \frac{1\ \text{φωτ/s}}{1{,}26 \cdot 10^{20}\ \text{φωτ/s}}.$$

Επομένως, R = 14.000 km!

(β) Ας υποθέσουμε ότι η πηγή μας περιβάλλεται από έναν σφαιρικό φλοιό που έχει ακτίνα R τη ζητούμενη απόσταση και πάχος 1 cm. Μπορούμε, λοιπόν, να φανταζόμαστε ότι αυτός ο σφαιρικός φλοιός συνίσταται από μικρούς κύβους όγκου 1 cm^3. Η πυκνότητα του προβλήματος υπαγορεύει να υπάρχει κάθε στιγμή 1 φωτόνιο μέσα σε κάθε τέτοιο μικρό κύβο. Επειδή κάθε φωτόνιο κινείται με ταχύτητα $3 \cdot 10^{10}$ cm/s, ο χρόνος που χρειάζεται για να διασχίσει τον μικρό κύβο είναι $0{,}333 \cdot 10^{-10}$ s. Επομένως, σε 1 s θα διασχίζουν κάθε μικρό κύβο $3 \cdot 10^{10}$ φωτόνια.

Εφαρμόζοντας την ίδια συλλογιστική που ακολουθήσαμε στο μέρος (α), μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{1{,}26 \cdot 10^{20}\,\text{φωτ/s}}{4\pi R^2} = \frac{3 \cdot 10^{10}\,\text{φωτ/s}}{1\,\text{cm}^2}.$$

Άρα, $R = 183$ m.

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 55*

τρίτη μου πρόκληση είναι *να εξερευνήσετε περισσότερες επαναλήψεις των σημείων της D, πιθανώς ξεκινώντας από πυκνότερα τοποθετημένα σημεία*. Τέλος, μπορεί να θέλετε *να εξερευνήσετε τις «ευθείες σημείων» που προσεγγίζουν τους ελκυστές του Σχήματος 2* και *να ερευνήσετε τη συμπεριφορά των σημείων κοντά στο (1/3, 1/3)*. Σε επόμενη στήλη θα παρουσιάσω τις ανακαλύψεις σας.

Ανάδραση

Οι στήλες μου για τις κατασκευές τριγώνων —όπως είχα αναφέρει κατά τη δημοσίευσή τους, στα τεύχη Σεπτεμβρίου/Οκτωβρίου 1994 και Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου 1994 του *Quantum*— είχαν εν μέρει στηριχτεί στις ανακαλύψεις του φίλου μου Roy Meyers, που ήταν εξαιρετικός γεωμέτρης. Η αφιέρωσή μου βασίζεται στην πίστη μου ότι θα είχε απολαύσει και τη σημερινή στήλη. Το τελευταίο ηλεκτρονικό ταχυδρομείο που έλαβα από αυτόν είχε ημερομηνία λίγων ημερών πριν από το θάνατό του. Σ' αυτό με ενημέρωνε για μερικές νέες ανακαλύψεις του σχετικά με την κατασκευή τριγώνων. Θα τις παρουσιάσω στην επόμενη στήλη μου.

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 72*

με τον ίδιο σχεδόν τρόπο. Πρέπει απλώς να αντικαταστήσουμε τις δυνάμεις του 2 στην αναδιπλούμενη δυαδική αναπαράσταση του n με τις ίδιες δυνάμεις του μιγαδικού αριθμού $1 + i$, και τους εναλλασσόμενους συντελεστές 1 και −1 με... Όμως, όχι. Δεν θα αποκαλύψω όλα τα μυστικά ταυτόχρονα. Αυτό θα ήταν υπερβολικό για ένα μόνο άρθρο. Επιπλέον, είμαι βέβαιος ότι θα διασκεδάσετε πολύ περισσότερο αν εργαστείτε μόνοι σας —πράγμα που δεν είναι πλέον δύσκολο.

Έπειτα από αυτό θα μπορέσετε, ίσως, να αποδείξετε την πιο αξιοσημείωτη ιδιότητα του κύριου δρακόντειου σχεδίου (δείτε το πρόβλημα 11γ στις «Δρακόντειες καμπύλες»): αν επεκταθεί έως το άπειρο, αυτή η πολυγωνική διαδρομή —μαζί με τα τρία αντίγραφά της που προκύπτουν αν την περιστρέψουμε κατά 90°, 180° και 270° γύρω από την αρχή— καλύπτει πλήρως, χωρίς κενά και επικαλύψεις, ολόκληρο το πλέγμα των μοναδιαίων τετραγώνων.

Ξεκίνησα το πρώτο μέρος αυτού του άρθρου συγκρίνοντας τις σπαζοκεφαλιές εγκιβωτισμού με τη δημοφιλή ρώσικη κούκλα, τη *ματριόσκα* (που περιέχει μια σειρά από όμοιες κούκλες στο εσωτερικό της). Θα τελειώσω με ένα πρόβλημα στο οποίο η ίδια η *ματριόσκα* χρησιμοποιείται ως σπαζοκεφαλιά εγκιβωτισμού.

Πρόβλημα 5. Μια *ματριόσκα* αποτελείται από k εγκιβωτισμένες κούκλες. Μπορείτε να ανοίξετε είτε τη μεγαλύτερη είτε την επόμενη μεγαλύτερη κούκλα που αποκαλύπτεται, να αφαιρέσετε την αμέσως μικρότερη κούκλα από το εσωτερικό της ή να βάλετε μέσα την αμέσως μικρότερη, και να την κλείσετε. Αρχικά, όλες οι κούκλες είναι κρυμμένες μέσα στη μεγαλύτερη. Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος κινήσεων που απαιτούνται (α) για να βγάλετε τη μικρότερη κούκλα, (β) να αποσυναρμολογήσετε τελείως το παιχνίδι;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 60

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M61

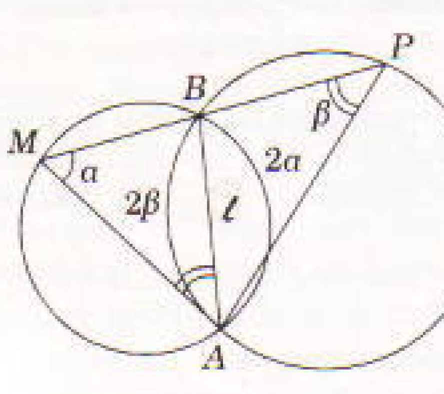
Συμβολίζουμε τα γωνιακά μέτρα των «εσωτερικών» τόξων AB στους δεδομένους κύκλους με 2α και 2β (στους κύκλους ABM και ABP αντίστοιχα —δείτε το Σχήμα 1). Ας εκφράσουμε το MP συναρτήσει των α, β, και $\ell = AB$. Η γωνία AMB βαίνει στο τόξο 2α, ενώ η γωνία APB είτε βαίνει στο τόξο 2β (Σχήμα 1) είτε είναι εφεξής της γωνίας που βαίνει στο συζυγές («εξωτερικό») τόξο μέτρου $360^\circ - 2\beta$ (Σχήμα 2). Σε κάθε περίπτωση, από το θεώρημα περί ισότητας των εγγεγραμμένων γωνιών έχουμε $\angle AMB = \angle AMP = \alpha$, $\angle APM = \beta$. Επίσης, η γωνία MAB, ως γωνία της εφαπτομένης AM και της χορδής AB, ισούται με το ήμισυ του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει: $\angle MAB = \beta$. Τώρα, εφαρμόζοντας το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα ABM και AMP παίρνουμε:

$$AM = \frac{AB\,\text{ημ}\angle ABM}{\text{ημ}\angle AMB} = \frac{\ell\,\text{ημ}(\alpha+\beta)}{\text{ημ}\alpha},$$

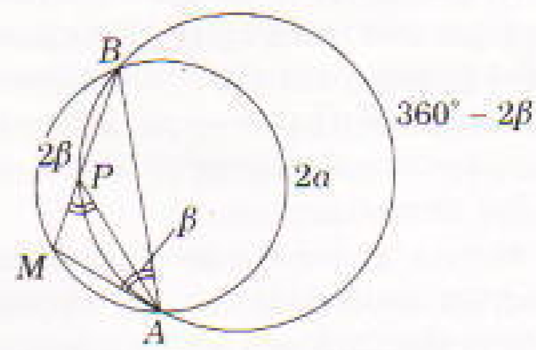
$$MP = \frac{AM\,\text{ημ}\angle MAP}{\text{ημ}\angle APM}$$

$$= \frac{AM\,\text{ημ}(\alpha+\beta)}{\text{ημ}\beta} = \frac{\ell\,\text{ημ}^2(\alpha+\beta)}{\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta}$$

($\angle ABM = \angle MAP = 180^\circ - \alpha - \beta$).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε το μήκος NQ, με μόνη διαφορά ότι εναλλάσσουμε τα σύμβολα α και β. Αυτή η εναλλαγή, όμως, δεν μετατρέπει το αποτέλεσμα. Έτσι, $NQ = MP$.

Το επιχείρημά μας δείχνει ότι κάθε τρίγωνο AMP, όπου τα M και P είναι τα σημεία στα οποία τέμνει τους δύο δεδομένους κύκλους μια τυχαία ευθεία που διέρχεται από το B, έχει γωνίες α, β, και $180^\circ - \alpha - \beta$. Έτσι, όλα αυτά τα τρίγωνα, και επομένως και τα AMP και AQN του προβλήματος, είναι όμοια. Αυτή η παρατήρηση υποδεικνύει μια άλλη λύση: αρκεί να αποδείξουμε ότι, για παράδειγμα, $AM = AQ$. Αυτό επιτυγχάνεται αν δείξουμε ότι σ' αυτές τις χορδές βαίνουν ίσες ή συμπληρωματικές εγγεγραμμένες γωνίες. Αυτή τη λύση την αφήνουμε για τον αναγνώστη. (V. Dubrovsky)

M62

Η απάντηση είναι ναι. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα παράδειγμα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μικρών διαταραχών (δείτε το «Κάνοντας μικρά βήματα προς την απόδειξη» στο τεύχος Μαΐου/Ιουνίου 1995 του *Quantum*).

Κάθε δύναμη $P^n(x)$ ενός πολυωνύμου $P(x)$ μπορεί να προκύψει ως γινόμενο διαφόρων τετραγώνων και κύβων του $P(x)$: $P^{2k}(x) = [P^2(x)]^k$, $P^{2k+1}(x) = P^3(x)\cdot[P^2(x)]^{k-1}$. Αρκεί, επομένως, να εξασφαλίσουμε ότι τα $P^2(x)$ και $P^3(x)$ έχουν θετικούς συντελεστές. Αν αυτό αληθεύει για κάποιο πολυώνυμο $P(x)$, τότε οποιαδήποτε αρκετά μικρή αλλαγή στους συντελεστές του P θα μεταβάλει ελάχιστα τους συντελεστές του P^2 και του P^3, και επομένως θα παραμείνουν θετικοί. Αλλά αν, επιπλέον, το P έχει έναν τουλάχιστον *μηδενικό* συντελεστή, μπορούμε να επιλέξουμε τη μικρή διαταραχή έτσι ώστε να γίνει *αρνητικός*, και ο σκοπός μας θα επιτευχθεί.

Είναι πιο φυσικό να αναζητήσουμε κάποιο πολυώνυμο με έναν μόνο μηδενικό συντελεστή, ενώ όλοι οι υπόλοιποι θα ισούνται με τη μονάδα. Ένας άμεσος έλεγχος μας δείχνει ότι τα τετράγωνα όλων αυτών των πολυωνύμων, που είναι βαθμού το πολύ τρία, έχουν μηδενικό συντελεστή. Το χαμηλότερου βαθμού πολυώνυμο που ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας είναι το

$$P(x) = x^4 + x^3 + x + 1.$$

Οι συντελεστές των P^2 και P^3 είναι θετικοί ακέραιοι. Αν τους γράψουμε στη σειρά συμπίπτουν με τα ψηφία των $11.011^2 = 121.242.121$ και $11.011^3 = 1.334.996.994.331$. (Ο αλγόριθμος πολλαπλασιασμού των πολυωνύμων είναι ο ίδιος ακριβώς με τον αλγόριθμο πολλαπλασιασμού των ακεραίων, με τη διαφορά ότι στα πολυώνυμα δεν έχουμε κρατούμενα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, πάντως, το 11.011 υψώνεται στο τετράγωνο και στον κύβο χωρίς να έχουμε κρατούμενα ούτως ή άλλως.)

Επομένως, το ζητούμενο πολυώνυμο μπορεί να γραφεί ως

$$P_\varepsilon(x) = x^4 + x^3 - \varepsilon x^2 + x + 1,$$

όπου ε είναι θετικός και αρκετά μικρός ώστε να εξασφαλίζουμε ότι οι συντελεστές των P_r^2 και P_r^3 διαφέρουν από τους συντελεστές των P^2 και P^3 ($P(x) = P_0(x)$) λιγότερο από ένα, και έτσι παραμένουν θετικοί.

M63

Έστω z το μικρότερο από τα δεδομένα μήκη πλευρών και A το εμβαδόν του τριγώνου. Τότε, η σχέση μεταξύ των υψών του παίρνει τη μορφή

$$\frac{2A}{z}=\frac{2A}{x}+\frac{2A}{y},$$

ή $xy - yz - zx = 0$. Τότε, όμως,

$$x^2+y^2+z^2=(x+y-z)^2,$$

που είναι το τετράγωνο ενός ακεραίου.

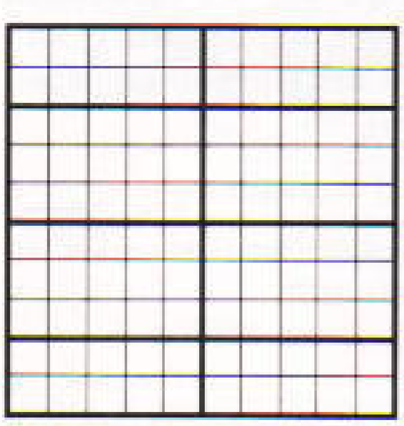
M64

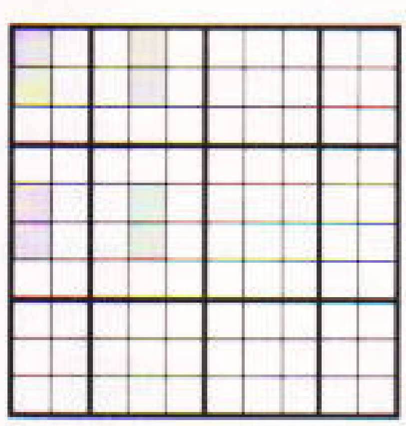
(α) Είναι φανερό ότι οποιαδήποτε θέση του θωρηκτού αφήνει ελεύθερο χώρο για το πρώτο καταδρομικό. Για να αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε το δεύτερο καταδρομικό μετά τα δύο πρώτα πλοία, χωρίζουμε τον «ωκεανό» σε οκτώ ορθογώνιες περιοχές, όπως στο Σχήμα 3. Όλες τους παρέχουν αρκετό χώρο ώστε να τοποθετηθεί ένα καταδρομικό που δεν συνορεύει με γειτονικές περιοχές. Από την άλλη πλευρά, ένα πλοίο μπορεί να έχει κοινά τετράγωνα με δύο το πολύ περιοχές. Έτσι, όταν σχεδιάσουμε τα δύο πρώτα πλοία, θα απομένουν τουλάχιστον $8 - 2 \cdot 2 = 4$ περιοχές ελεύθερες για το δεύτερο καταδρομικό.

Στο Σχήμα 4 βλέπουμε μια παρόμοια διαμέριση (σε 12 περιοχές) για τα αντιτορπιλικά. Το θωρηκτό, τα δύο καταδρομικά, και τα δύο το πολύ αντιτορπιλικά θα καταλαμβάνουν έως και $5 \cdot 2 = 10$ περιοχές, και θα αφήνουν πάντοτε τουλάχιστον $12 - 10 = 2$ περιοχές για το επόμενο αντιτορπιλικό. Φυσικά, η καθεμία από αυτές τις περιοχές μπορεί να περιλάβει ένα αντιτορπιλικό και την πλάτους ενός τετραγώνου γειτονιά του (δείτε το Σχήμα 4).

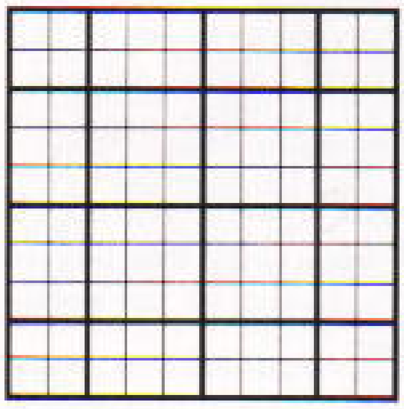
Τέλος, η διαμέριση 16 περιοχών του Σχήματος 5 αποδεικνύει ότι μπορούμε πάντοτε να βρούμε χώρο και για τα υποβρύχια. Καθεμία από αυτές τις περιοχές είναι η πλάτους ενός τετραγώνου γειτονιά ενός πλοίου που καταλαμβάνει ένα τετράγωνο (ακρωτηριασμένη ίσως από τα σύνορα του ωκεανού). Το θωρηκτό, τα δύο καταδρομικά, τα τρία αντιτορπιλικά και τα τρία (ή λιγότερα) υποβρύχια θα επικαλύπτονται με $2 \cdot (1 + 2 + 3) + 3 = 15$ το πολύ περιοχές, αφήνοντας μία τουλάχιστον ελεύθερη για το επόμενο υποβρύχιο.

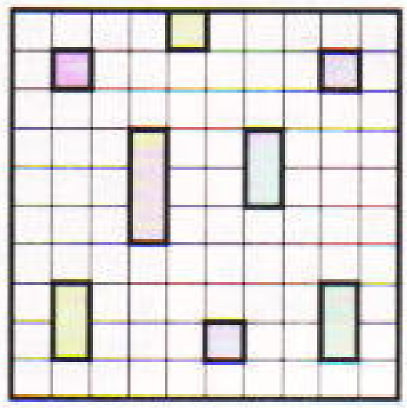
Η ιδιαιτερότητα αυτού του προβλήματος είναι ότι η προσέγγιση που θα σκεφτούμε φυσιολογικά —να μετρήσουμε το συνολικό εμβαδόν των γειτονιών των πλοίων που έχουμε ήδη σχεδιάσει και να εξασφαλίσουμε ότι έχει μείνει ελεύθερος χώρος— δεν οδηγεί στη λύση, τουλάχιστον άμεσα.


Σχήμα 3


Σχήμα 4

(β) Είναι εύκολο να βρεθεί μια διευθέτηση που δεν αφήνει ελεύθερο χώρο για το θωρηκτό. Δεν είναι καν απαραίτητο να χρησιμοποιήσετε και τα εννέα μικρότερα πλοία —δείτε το Σχήμα 6.


Σχήμα 5


Σχήμα 6

M65

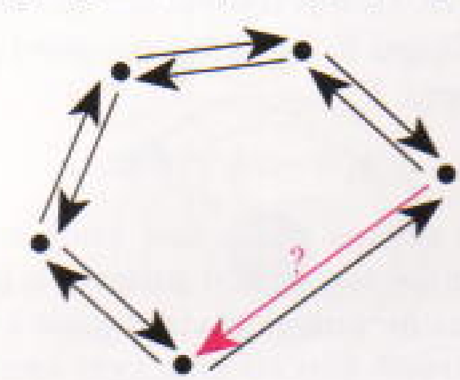
Η απάντηση είναι $N = n(n + 1)/2 - 1$.

Συμβολίζουμε τους ορισμούς του Tarantoga ως $S_1, S_2, ..., S_n$. Ας

Σχήμα 7

φανταστούμε ότι ο καθηγητής τους παριστά με n σημεία του επιπέδου και ότι απεικονίζει τη διατριβή που αποδεικνύει ότι στρεψολογία με την έννοια του i ορισμού είναι στρεψολογία με την έννοια του j ορισμού (που τη συμβολίζουμε με $S_i \to S_j$) σχεδιάζοντας ένα βέλος από το σημείο S_i στο S_j, και κατασκευάζοντας έτσι ένα προσανατολισμένο γράφημα με n κορυφές. Η τελευταία συνθήκη του προβλήματος έχει το νόημα ότι το βέλος $S_i \to S_j$ δεν μπορεί ποτέ να «βραχυκυκλώσει» ένα ήδη σχεδιασμένο μονοπάτι από το S_i στο S_j (δείτε το Σχήμα 7). Μερικά από τα σημεία μπορεί να συνδέονται με ένα ζεύγος αντίθετων βελών. Ας δούμε πόσα μπορεί να είναι αυτά. Θεωρούμε όλα αυτά τα διπλά βέλη. Παρατηρούμε ότι δεν είναι δυνατόν να σχηματίζουν κύκλο, διότι το τελευταίο βέλος που θα σχεδιάζαμε σ' έναν τέτοιο κύκλο θα δημιουργούσε «βραχυκύκλωμα» (Σχήμα 8). Επομένως, αν διαγράψουμε τα *μονά* βέλη από το γράφημα του Tarantoga και αντικαταστήσουμε κάθε διπλό βέλος με μια μοναδική (όχι προσανατολισμένη) ακμή, θα καταλήξουμε σ' ένα γράφημα n κορυφών χωρίς κύκλους. Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι ένα τέτοιο γράφημα έχει το πολύ $n - 1$ ακμές.

Πράγματι, ας διαγράψουμε μια



Σχήμα 8

ντας k ακμές, θα πάρουμε $k+1$ κομμάτια. Το πλήθος όμως των κομματιών δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από n, το πλήθος δηλαδή των κορυφών.

Έτσι, στο αρχικό μας (προσανατολισμένο) γράφημα υπάρχουν το πολύ $n-1$ διπλά βέλη. Αφού λοιπόν τα n σημεία του Tarantoga σχηματίζουν $n(n-1)/2$ ζεύγη, το συνολικό πλήθος των βελών (των διατριβών που έχουν υποστηριχτεί) δεν υπερβαίνει το

$$2(n-1)+\left[\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)\right]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}-1=N.$$

Ας εξηγήσουμε τώρα πώς μπορεί να οργανωθεί η παραγωγή ενός τέτοιου συνόλου διδακτορικών.

Στην αρχή, $n-1$ μεταπτυχιακοί φοιτητές υποστηρίζουν τις διατριβές $S_1 \to S_n$, $S_2 \to S_n$, ..., $S_{n-1} \to S_n$. Έπειτα, $n-2$ φοιτητές υποστηρίζουν τις διατριβές $S_1 \to S_{n-1}$, $S_2 \to S_{n-1}$, ..., $S_{n-2} \to S_{n-1}$, κ.ο.κ., ώσπου ένας φοιτητής να υποστηρίξει την $S_1 \to S_2$. Μετά, άλλοι $n-1$ φοιτητές υποστηρίζουν τις διατριβές $S_n \to S_{n-1}$, $S_{n-1} \to S_{n-2}$, ..., $S_2 \to S_1$. Έτσι, έχουμε τελικά $n(n-1)/2+n-1=n(n+1)/2-1$ διατριβές, από τις οποίες καμία δεν προκύπτει από αυτές που έχουν υποστηριχτεί προηγουμένως. Από την άλλη πλευρά, και οι n ορισμοί αποδεικνύονται ισοδύναμοι: αυτό έπεται από τις $S_1 \to S_n$, $S_n \to S_{n-1}$, $S_{n-1} \to S_{n-2}$, ..., $S_2 \to S_1$.

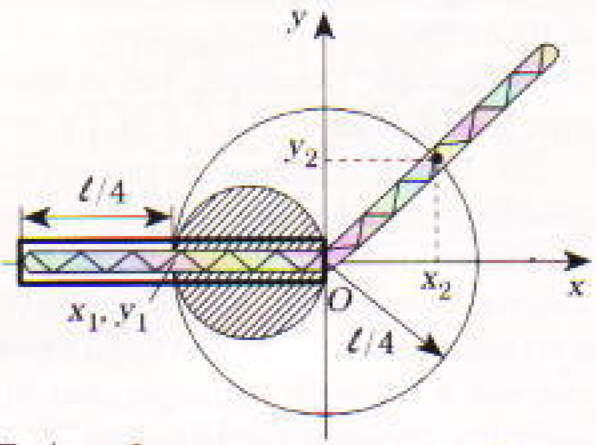
Φυσική

Φ61

Το κέντρο μάζας του τμήματος του φιδιού που βρίσκεται μέσα στο σωλήνα απέχει $\ell/4$ από την άκρη του σωλήνα. Οι συντεταγμένες του είναι (βλ. Σχήμα 9, που μας προσφέρει μια κάτοψη),

$$x_1=-\ell/4,\ y_1=0.$$

Το κέντρο μάζας του υπόλοιπου τμήματος του φιδιού μπορεί να βρίσκεται σε οποιοδήποτε σημείο ενός κυκλικού δίσκου που έχει ακτίνα $\ell/4$ και κέντρο την αρχή των αξόνων·



Σχήμα 9

για τις συντεταγμένες του (x_2, y_2) ισχύει η ανισότητα

$$x_2^2+y_2^2 \le \left(\frac{\ell}{4}\right)^2. \qquad (1)$$

Επειδή οι μάζες των δύο τμημάτων του φιδιού είναι ίσες, το κέντρο μάζας ολόκληρου του φιδιού θα βρίσκεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα κέντρα μάζας των δύο τμημάτων του φιδιού· οι συντεταγμένες του είναι

$$x_{\kappa\mu}=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_2}{2}-\frac{\ell}{8},$$

$$y_{\kappa\mu}=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{y_2}{2}.$$

Από αυτές τις δύο εξισώσεις μπορούμε να εκφράσουμε τα x_2 και y_2 σε συνάρτηση με τα $x_{\kappa\mu}$ και $y_{\kappa\mu}$:

$$x_2=2x_{\kappa\mu}+\ell/4,\ y_2=2y_{\kappa\mu}.$$

Έτσι, η (1) παίρνει τη μορφή

$$\left(2x_{\kappa\mu}+\frac{\ell}{4}\right)^2+4y_{\kappa\mu}^2 \le \left(\frac{\ell}{4}\right)^2,$$

ή

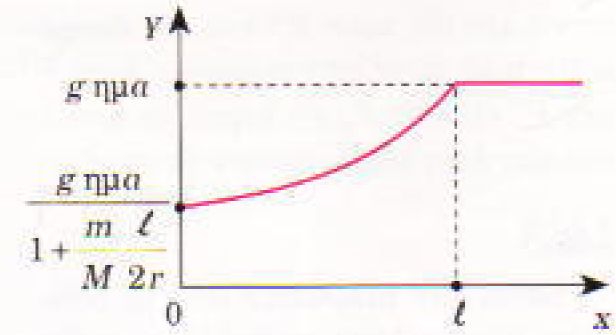
$$\left(x_{\kappa\mu}+\frac{\ell}{8}\right)^2+y_{\kappa\mu}^2 \le \left(\frac{\ell}{8}\right)^2.$$

Αυτό σημαίνει ότι το κέντρο μάζας ολόκληρου του φιδιού μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο ενός κυκλικού δίσκου που έχει ακτίνα $\ell/8$ και κέντρο $(-\ell/8, 0)$ —ο γραμμοσκιασμένος κύκλος στο Σχήμα 9.

Φ62

Για τη θέση x της δοκού πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο (με $x<\ell$), μπορούμε να γράψουμε

$$M\gamma_x = Mg\eta\mu\alpha - Fn\left(1-\frac{x}{\ell}\right), \qquad (1)$$



Σχήμα 10

όπου $n=\ell/2r$ είναι το συνολικό πλήθος των σωλήνων του κεκλιμένου επιπέδου, $n(1-x/\ell)$ είναι το πλήθος των σωλήνων που βρίσκονται σε επαφή με τη δοκό σ' εκείνη τη θέση της, και F είναι η δύναμη της τριβής που ασκείται στη δοκό από κάθε σωλήνα. Αν υποθέσουμε ότι η δοκός δεν ολισθαίνει στους σωλήνες, η F αναπτύσσει μια εφαπτομενική επιτάχυνση $|\gamma_x|$ σε κάθε σωλήνα που βρίσκεται σε επαφή με τη δοκό. Επομένως,

$$Fr=\frac{mr^2\gamma_x}{r},$$

ή

$$F=m\gamma_x. \qquad (2)$$

Εισάγοντας την εξίσωση (2) στην (1), βρίσκουμε τη ζητούμενη σχέση:

$$\gamma_x=\frac{g\,\eta\mu\alpha}{1+\dfrac{m}{M}\dfrac{\ell}{2r}\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)}.$$

Για $x>\ell$, η δοκός δεν έχει επαφή με τους σωλήνες, και ολισθαίνει κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου με επιτάχυνση

$$\gamma=g\,\eta\mu\alpha.$$

Η γενική μορφή της $\gamma(x)$ φαίνεται στο Σχήμα 10.

Φ63

Το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν απαιτεί ακριβή αναλυτική λύση αλλά μάλλον μια εκτίμηση, επειδή οι συνθήκες που περιγράφονται στην εκφώνηση δείχνουν καθαρά ότι μπορούμε να παραλείψουμε μερικούς σημαντικούς παράγοντες. Ας υπολογίσουμε πρώτα την ποσότητα των κορεσμένων υδρατμών στο δοχείο και ας τη συγκρίνουμε με την ποσότητα του νερού:

$$n_{\kappa.\alpha.}=\frac{PV}{RT}\cong 4\cdot 10^{-4}\ \text{mole}.$$

Προφανώς, οι υδρατμοί αποτελούν ένα πολύ μικρό μέρος του νερού ($n_{\text{ολ}} = 5 \cdot 10^{-2}$ mole). Επομένως, είναι εύκολο να απαντήσουμε στο δεύτερο ερώτημα: το νερό ουδέποτε θα εξαερωθεί χωρίς τη βοήθεια της απορροφητικής ουσίας.

Για να υπολογίσουμε το χρόνο που απαιτείται προκειμένου η απορροφητική ουσία να δεσμεύσει τους υδρατμούς, υποθέτουμε ότι το δοχείο είναι συνεχώς κορεσμένο υδρατμών. Έτσι, το πλήθος των μορίων τους ανά μονάδα όγκου είναι

$$\frac{N}{V} = \frac{P}{kT}.$$

Ας επιλέξουμε τον άξονα x του συστήματος συντεταγμένων κάθετο στην επιφάνεια S της απορροφητικής ουσίας· τότε, το πλήθος των «μορίων υδρατμού» που πέφτουν πάνω στην S σε χρόνο Δt είναι

$$N_{\text{συγκ}} = \frac{1}{2}\frac{N}{V} S v_x \Delta t.$$

Μέσω του αντίστοιχου τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το χρονικό διάστημα τ στο οποίο απορροφάται το σύνολο των μορίων νερού:

$$N_{\text{ολ}} = \frac{1}{2}\frac{N}{V} S v_x \tau = \frac{1}{2}\frac{P}{kT} S \sqrt{\frac{kT}{m_0}}\,\tau.$$

Εύκολα οδηγούμαστε στην απάντηση

$$\tau = \frac{2N_{\text{ολ}}}{N_A}\frac{\sqrt{\mu RT}}{PS}$$

$$= 2\frac{\sqrt{18 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}3 \cdot 278}}{18 \cdot 870 \cdot 100}\ \text{s}$$

$$\cong 10^{-5}\ \text{s},$$

όπου μ είναι η γραμμομοριακή μάζα του νερού.

Τούτο το αποτέλεσμα είναι παραδόξως μικρό. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι στις συνθήκες του προβλήματος η απορροφητική ουσία δεσμεύει τους υδρατμούς ακαριαία. Στην πραγματικότητα, όμως, η διαδικασία διαρκεί πολύ περισσότερο· όταν το δοχείο δεν είναι κορεσμένο ατμών, η απορρόφηση γίνεται πιο αργά: όσο λιγότερα «μόρια υδρατμού» υπάρχουν στο δοχείο, τόσο περισσότερο διαρκεί η απορρόφηση.

Φ64

Κατά τη φόρτιση του πυκνωτή οι οπλισμοί του απέκτησαν φορτίο

$$|q| = CV = \frac{\varepsilon_0 SV}{\ell_0}.$$

Έτσι, η πάνω πλάκα έλκεται από την κάτω με δύναμη $F = qE$, όπου E είναι το ηλεκτρικό πεδίο που παράγει η κάτω πλάκα. Επειδή οι γραμμικές διαστάσεις ενός τέτοιου πυκνωτή είναι φυσιολογικά πολύ μεγαλύτερες από την απόσταση μεταξύ των οπλισμών του, μπορούμε να θεωρήσουμε προσεγγιστικά ότι το παραπάνω πεδίο είναι ίδιο με αυτό ενός απείρως μεγάλου ομοιόμορφα φορτισμένου επίπεδου αγωγού:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{V}{2\ell_0}.$$

Διαπιστώνουμε ότι η ηλεκτρική δύναμη που δέχεται η πάνω πλάκα δεν εξαρτάται από τη θέση της· το ίδιο, βεβαίως, ισχύει και για το βάρος της. Η δύναμη επαναφοράς, όμως, του ελατηρίου είναι ανάλογη της μετατόπισης της πλάκας από τη θέση ισορροπίας της (βλ. Σχήμα 11), όπου ισχύει

$$F_{\varepsilon\lambda} = mg + F. \qquad (1)$$

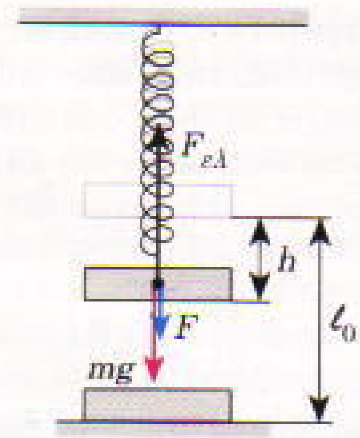
Επομένως, η πάνω πλάκα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με την απόσταση h μεταξύ της αρχικής θέσης και της θέσης ισορροπίας της πλάκας. Προφανώς οι δύο οπλισμοί του πυκνωτή αποκλείεται να έλθουν σε επαφή αν η απόσταση h είναι μικρότερη από το μισό της αρχικής απόστασης μεταξύ των οπλισμών — δηλαδή, αν $h < \ell_0/2$.

Ας υποθέσουμε ότι η επιμήκυνση του ελατηρίου μέχρι την αρχική θέση της πλάκας είναι Δx_0. Τότε, $mg = k\Delta x_0$. Στη θέση ισορροπίας της, η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $\Delta x + h$, οπότε $F_{\varepsilon\lambda} = k(\Delta x_0 + h)$. Έτσι η (1) γίνεται:

$$F + k\Delta x_0 = k(\Delta x_0 + h),$$

ή $h = F/k$. Επομένως, οι οπλισμοί δεν έρχονται σε επαφή αν

$$\frac{F}{k} < \frac{\ell_0}{2},$$



Σχήμα 11

ή

$$k > \frac{2F}{\ell_0} = \frac{2qE}{\ell_0} = \frac{\varepsilon_0 SV^2}{\ell_0^3}.$$

Φ65

Οι φωτεινές ακτίνες δεν διαδίδονται ευθύγραμμα μέσα στην ατμόσφαιρα, όπου ο δείκτης διάθλασης του ατμοσφαιρικού αέρα μεταβάλλεται με το υψόμετρο· κάμπτονται, εξαιτίας του γεγονότος ότι, όσο μικρότερος είναι ο δείκτης διάθλασης του οπτικού μέσου, τόσο ταχύτερα διαδίδεται σ' αυτό το φως ($v = c/n$).

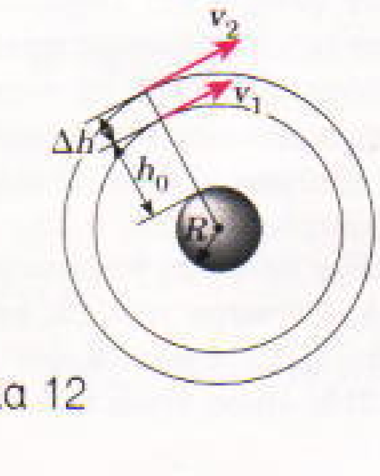
Ας ονομάσουμε με Δh το εύρος του οπτικού διαύλου στον οποίο οι φωτεινές ακτίνες διαδίδονται γύρω από τον πλανήτη σε σταθερό υψόμετρο h_0. Ας θεωρήσουμε επιπλέον δύο ακτίνες, μία στην εσωτερική και μία στην εξωτερική επιφάνεια του διαύλου (Σχήμα 12). Η πρώτη ακτίνα θα διαγράψει κύκλο γύρω από τον πλανήτη σε χρόνο

$$t_1 = \frac{2\pi(R + h_0)}{v_1} = \frac{2\pi(R + h_0)(n_0 - ah_0)}{c}$$

και η δεύτερη σε χρόνο

$$t_2 = \frac{2\pi(R + h_0 + \Delta h)}{v_2}$$

$$= \frac{2\pi(R + h_0 + \Delta h)(n_0 - a(h_0 + \Delta h))}{c}.$$



Σχήμα 12

Αλλά πρέπει ο t_1 να ισούται με τον t_2 (διαφορετικά, το μέτωπο κύματος που διατρέχει το δίαυλο δεν θα ήταν κάθετο στις δύο φωτεινές ακτίνες). Επομένως (και δεδομένου ότι $\Delta h << h_0$),

$$h_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{n_0}{a} - R\right).$$

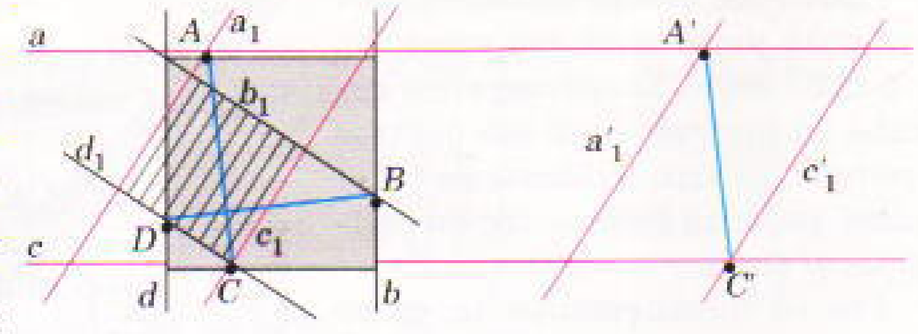
Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται κυκλική διάθλαση, και υπάρχει η ένδειξη ότι μπορεί να συμβαίνει στην ατμόσφαιρα της Αφροδίτης.

Σπαζοκεφαλιές

Σ61

Όταν ο μαστρο-Νικόλας δουλεύει με τον βραδύτερο ρυθμό, τελειώνει 6 σκαμνιά μεταξύ Παρασκευής και Κυριακής, ενώ το συνολικό πλήθος των σκαμνιών που κατασκευάζει είναι πολλαπλάσιο του 5 και του 3, άρα και του 15 —και μάλιστα το ίδιο το 15 μας ικανοποιεί, αν ο μαστρο-Νικόλας αρχίσει να δουλεύει την Τετάρτη. Δεν είναι δυνατή καμία άλλη λύση: αν αρχίσει να δουλεύει n ημέρες πριν από την Παρασκευή, τότε $5n = 3(n + 2)$, οπότε $n = 2$.

Μπορούμε, όμως, να αντιμετωπίσουμε διαφορετικά το πρόβλημα. Ο μαστρο-Νικόλας είναι δυνατόν, δουλεύοντας με τον ταχύ ρυθμό, να τελειώσει την παραγγελία την Παρασκευή, ενώ δουλεύοντας με τον αργό ρυθμό να τελειώσει κάποια Κυριακή περισσότερο από μία εβδομάδα αργότερα. Τότε, αν άρχισε να δουλεύει n ημέρες πριν από την Παρασκευή και αν m είναι το πλήθος των εβδομάδων μεταξύ Παρασκευής και Κυριακής, τότε ο μαστρο-Νικόλας δουλεύει $n + 1$ ημέρες με τον ταχύ ρυθμό και $7m + (n + 1) + 2$ ημέρες με τον αργό ρυθμό· επομένως, $5(n + 1) = 3(7m + n + 3)$ ή $21m = 2n - 4$. Αναζητούμε ακέραιες λύσεις αυτής της εξίσωσης. Υπάρχουν γενικοί και καθιερωμένοι τρόποι να το καταφέρουμε αυτό, και ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί σχετικά οποιοδήποτε βιβλίο θεωρίας αριθμών. Εν τω μεταξύ, θα επισημάνουμε ότι, αφού ο $2n - 4$ είναι άρτιος, ο m πρέπει να είναι επίσης άρτιος. Αν θέσουμε $m = 2k$, έχουμε $42k = 2n - 4$, ή $21k = n - 2$, ή $n = 21k + 2$. Το $21k$, όμως, είναι πολλαπλάσιο του 7 και αντιπροσωπεύει ακέραιο πλήθος εβδομάδων, οπότε n ημέρες πριν από την Παρασκευή είναι Τετάρτη —ανεξάρτητα από το πλήθος των εβδομάδων που μεσολαβούν.



Σχήμα 14

Σ62

Μπορούμε να επιτύχουμε τη ζητούμενη αναδιάταξη με τα τρία επόμενα βήματα:

$$15(624)37 \to 16(245)37 \to 12(456)37 \to 1234567.$$

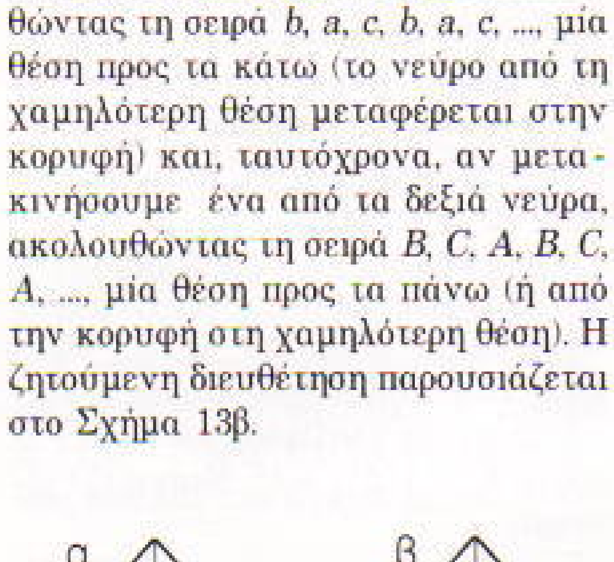
Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσετε ότι αυτή είναι η συντομότερη λύση. Αφήνουμε τον αναγνώστη να αποδείξει ότι μπορούμε να επιτύχουμε με παρόμοιο τρόπο οποιαδήποτε μετάθεση.

Σ63

Το επίπεδο του νερού κατέβηκε. Πώς το δικαιολογείτε;

Σ64

Ονομάζουμε τα νεύρα του αριστερού μέρους του αρχικού φύλλου a, b, c, και τα νεύρα του δεξιού μέρους A, B, C, όπως στο Σχήμα 13α. Παρατηρούμε τώρα ότι κάθε επόμενη διάταξη νεύρων προκύπτει από την προηγούμενη αν μετακινήσουμε ένα από τα αριστερά νεύρα, ακολουθώντας τη σειρά b, a, c, b, a, c, ..., μία θέση προς τα κάτω (το νεύρο από τη χαμηλότερη θέση μεταφέρεται στην κορυφή) και, ταυτόχρονα, αν μετακινήσουμε ένα από τα δεξιά νεύρα, ακολουθώντας τη σειρά B, C, A, B, C, A, ..., μία θέση προς τα πάνω (ή από την κορυφή στη χαμηλότερη θέση). Η ζητούμενη διευθέτηση παρουσιάζεται στο Σχήμα 13β.

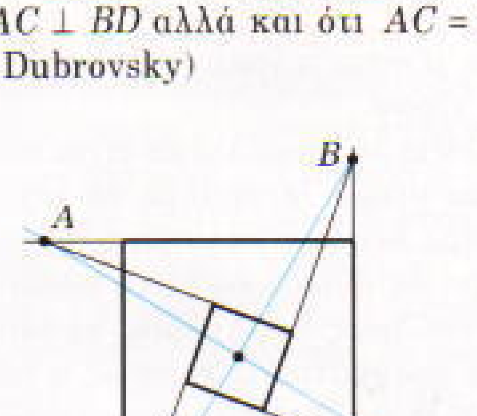


Σχήμα 13

Σ65

Συμβολίζουμε, κινούμενοι δεξιόστροφα, με a, b, c, d τις πλευρές του ενός τετραγώνου και τις ευθείες που τις περιέχουν, και με a_1, b_1, c_1, d_1 τις πλευρές (και τις ευθείες που τις περιέχουν) του άλλου τετραγώνου. Πρέπει τώρα να αποδείξουμε ότι οι ευθείες AC και BD είναι κάθετες, όπου A είναι η τομή των a και a_1, B η τομή των b και b_1, κ.ο.κ. Θα δούμε ότι αυτό αληθεύει για κάθε ζεύγος τετραγώνων, είτε σχηματίζουν οκτάγωνο είτε όχι (Σχήμα 14). Είναι φανερό ότι, αν μετατοπίσουμε τη λωρίδα που ορίζουν οι a_1 και c_1 παράλληλα με τον εαυτό της, τότε το καινούργιο ευθύγραμμο τμήμα $A'C'$ θα είναι παράλληλο (και ίσο) με το AC (Σχήμα 14). Το ίδιο ισχύει και για τη λωρίδα b_1d_1.

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε την πρότασή μας για μια βολική θέση του δεύτερου τετραγώνου, που θα προκύπτει από την αρχική μέσω παράλληλης μετατόπισης —π.χ., για την περίπτωση κατά την οποία τα κέντρα των τετραγώνων συμπίπτουν (Σχήμα 15). Τότε, όμως, η BD προκύπτει από την AC απλώς μέσω μιας δεξιόστροφης περιστροφής κατά 90° γύρω από το κοινό κέντρο των τετραγώνων. Έτσι, δεν αποδείξαμε μόνο ότι $AC \perp BD$ αλλά και ότι $AC = BD$. (V. Dubrovsky)



Σχήμα 15

Παιχνιδότοπος

1. Οι αναδρομικές εξισώσεις για τα r_k και u_k παραμένουν οι ίδιες, αλλά πρέπει να αλλάξουν οι «αρχικές τιμές»: τώρα έχουμε $r_2 = 2$, $u_1 = u_2 = 1$. Από τον αντίστοιχα τροποποιημένο υπολογισμό προκύπτει $r_k = 3 \cdot 2^{k-2} - 1$ ($k \geq 2$), $u_k = 2^{k-1}$ για περιττό $k \geq 1$, και $u_k = 2^{k-1} - 1$ για άρτιο k.

2. Για κάθε 0 – 1 σειρά, $A = a_1 ... a_k$, συμβολίζουμε με $N(A)$ την αρίθμησή της στον πίνακά μας —δηλαδή, την «απόστασή» της σε κινήσεις από τη μηδενική σειρά. Με $r(A)$ συμβολίζουμε το αντίστοιχο «σκιασμένο ψηφίο» —δηλαδή, το άθροισμα $a_1 + ... + a_k$ (mod 2), ενώ με $\overline{A} = \overline{a_1 \ldots a_k}$, συμβολίζουμε τη σειρά που προκύπτει αν υπεργραμμίσουμε κάθε δεύτερο 1 στη σειρά A (για παράδειγμα, $\overline{(110101)} = 1\bar{1}010\bar{1}$). Έχουμε να αποδείξουμε ότι

$$N(A) = \left(\overline{a_1 \ldots a_k r}\right)_2,$$

όπου $r = r(A)$. Παρατηρήστε ότι η σειρά $a_1 ... a_k r$ έχει πάντα άρτιο πλήθος μονάδων, και επομένως

$$\left(\overline{a_1 \ldots a_k r}\right)_2 = \left(\overline{a_1 \ldots a_k 0}\right)_2 - r,$$

ανεξάρτητα από το αν $r = 0$ ή $r = 1$.

Έστω n το πλήθος των μονάδων σε μια σειρά. Για να αποδείξουμε τη σχέση, θα χρησιμοποιήσουμε τέλεια επαγωγή ως προς n. Έστω $n = 1$. Μπορούμε να αγνοήσουμε όλα τα 0 που εμφανίζονται αριστερά του μοναδικού άσου της σειράς μας. Τότε, η σειρά είναι η $A = 10...0$, και $N(A) = 2^k - 1$, όπου k είναι το πλήθος των ψηφίων της σειράς A. Από την άλλη πλευρά, εδώ $r(A) = 1$. Έτσι

$$\left(\overline{Ar(A)}\right)_2 = \left(10\ldots0\bar{1}\right)_2 = 2^k - 1$$

$$= N(A),$$

που συμφωνεί με τον τύπο μας. Υποθέτουμε τώρα ότι ο τύπος ισχύει για όλες τις σειρές που περιέχουν λιγότερες από n μονάδες, και θεωρούμε μια τυχαία σειρά A με n μονάδες. Και πάλι, μπορούμε να αγνοήσουμε τα αρχικά ψηφία που είναι 0 και να γράψουμε τη σειρά ως $A = 1a_1 ... a_k$. Αυτή η σειρά εμφανίζεται στον πίνακα πριν από το 10...0 (με k μηδενικά). Η απόσταση μεταξύ αυτών των σειρών ισούται με την απόσταση μεταξύ της k-ψήφιας σειράς 0...0 και της $A' = a_1 ... a_k$, που λόγω της επαγωγικής υπόθεσης είναι ίση με $N(A') = \left(\overline{a_1 \ldots q_k r'}\right)_2$, όπου $r' = r(A')$. Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι $r = r(A) = 1 - r'$, παίρνουμε

$$N(1a_1 \ldots a_k) = N(10\ldots0) - N(a_1 \ldots a_k)$$

$$= 2^{k+1} - 1 - \left(\overline{a_1 \ldots a_k r'}\right)_2$$

$$= 2^{k+1} - \left(\overline{a_1 \ldots a_k 0}\right)_2 - (1 - r')$$

$$= \left(\overline{1a_1 \ldots a_k 0}\right)_2 - r$$

$$= \left(\overline{1a_1 \ldots a_k r}\right)_2,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

3. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι αναδιπλούμενες δυαδικές αναπαραστάσεις του $-n$ προκύπτουν από αυτές του n «αν εναλλάξουμε τις υπεργραμμίσεις». Για παράδειγμα, το 5 γράφεται ως $(1\bar{1}01)_2$ ή ως $(1\bar{1}1\bar{1})_2$, ενώ το -5 ως $(\bar{1}10\bar{1})_2$ ή ως $(\bar{1}1\bar{1}1)_2$. Επομένως, αρκεί να θεωρήσουμε μόνο θετικούς ακεραίους. Θα ονομάζουμε άρτια ή περιττή μια αναδιπλούμενη δυαδική αναπαράσταση όταν έχουμε, αντίστοιχα, άρτιο ή περιττό πλήθος όρων στο εναλλασσόμενο άθροισμα. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι και τα δύο είδη αναπαράστασης ενός άρτιου αριθμού $n = 2k$ προκύπτουν αν επισυνάψουμε το 0 στα δεξιά της αντίστοιχης αναπαράστασης του k. Η περιττή αναπαράσταση ενός περιττού αριθμού $n = 2k + 1$ πρέπει να λήγει στο ψηφίο 1 και προκύπτει αν επισυνάψουμε αυτό το ψηφίο στην άρτια αναπαράσταση του k. Τέλος, η άρτια αναπαράσταση του $n = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1$ λήγει σε $\bar{1}$ και προκύπτει αν επισυνάψουμε το $\bar{1}$ στην περιττή αναπαράσταση του $k + 1$. Ο αριθμός 1 έχει δύο αναπαραστάσεις: 1 και $1\bar{1}$. Τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξη με τέλεια επαγωγή.

4. Συμβολίζουμε με N_k την ακολουθία των αριθμών των δακτυλίων (ή ασπίδων) που μετακινούνται κατά τα πρώτα $2^k - 1$ βήματα της βέλτιστης λύσης της αντίστοιχης σπαζοκεφαλιάς. Το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στο άρθρο για να συναγάγουμε την εξίσωση για το r_k μάς δείχνει ότι $N_k = N_{k-1}kN_{k-1}$, οπότε $N_1 = 1$, $N_2 = 121$, $N_3 = 1213121$, κ.ο.κ. Η ανάλογη όμως ακολουθία για τον πύργο του Ανόι ικανοποιεί την ίδια εξίσωση, άρα οι δύο ακολουθίες συμπίπτουν.

5. Αριθμούμε τις κούκλες 0, 1, ..., $k - 1$ κατά σειρά μεγέθους, αρχίζοντας από τη μεγαλύτερη. Παριστούμε κάθε δυνατή διευθέτησή τους με μια σειρά από 0 και 1, έτσι ώστε το i-οστό ψηφίο της (από τα δεξιά) να είναι 0 αν η i-οστή κούκλα είναι κρυμμένη μέσα στην επόμενη, και 1 σε διαφορετική περίπτωση. Το μηδενικό ψηφίο, που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη κούκλα, θα είναι πάντα 1, και μπορούμε επομένως να το διαγράψουμε. Λόγω των κανόνων του παιχνιδιού μας, η υπόλοιπη $(k - 1)$-ψήφια σειρά θα μεταβάλλεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως το δυαδικό μας μοντέλο. Πρέπει να μετασχηματίσουμε τη μηδενική σειρά (α) στη σειρά 110...0 (η πρώτη φορά που το πιο αριστερό ψηφίο γίνεται 1), (β) στη σειρά 11...1. Έπεται ότι η απάντηση είναι (α) 2^{k-1}, (β) u_{k-1} (όπως υπολογίσαμε στο άρθρο).

Μπέιζμπολ

1. Αν η f_{n+1}/f_n έχει όριο y, τότε η

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n}$$

έχει όριο $1 + 1/y$. Αφού μια ακολουθία μπορεί να έχει ένα μόνο όριο, βλέπουμε ότι $y = 1 + 1/y$, ή $y^2 - y - 1 = 0$, και επομένως

$$y = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

2. Αυτό απαιτεί

$$\frac{W^2}{W + L} + W - L = 0,$$

επομένως $W^2 = L^2 - W^2$, απ' όπου $L = \sqrt{2}\, W$. Τότε, το ποσοστό νικών ισούται με

$$\frac{W}{W + L} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

3. Αν $P = W/(W + L)$, τότε $L = W(1 - P)/P$. Επομένως,

$$W \cdot \frac{W}{W + L} + W - L = WP + W - \frac{1 - P}{P} W$$

$$= WP + W - \frac{1}{P} W + W$$

$$= W\left(P + 2 - \frac{1}{P}\right)$$

$$= W\frac{W+L}{W}P\left(P + 2 - \frac{1}{P}\right)$$

$$= (W+L)(P^2 + 2P - 1).$$

Η μαγεία του 3 × 3

(Δείτε το τεύχος Μαρτίου/Απριλίου 1996 του *Quantum*.)

1. Δείτε το Σχήμα 16.

2. Δείτε το Σχήμα 17. Αυτό προκύπτει από το *1ο σου* αν αφαιρέσουμε το 1 από όλους τους αριθμούς.

3. Υπάρχουν δύο λύσεις. Μεταφέρουμε ολόκληρη την κάτω σειρά των τραπουλόχαρτων στην κορυφή του τετραγώνου ή ολόκληρη την αριστερή στήλη στη δεξιά πλευρά του.

219	224	223
226	222	218
221	220	225

Σχήμα 16

1	8	3
6	4	2
5	0	7

Σχήμα 17

Τα τελευταία μαγικά νέα

Υπάρχουν μερικές νεώτερες πληροφορίες σχετικά με την προσφορά των 100$ που είχα δημοσιεύσει στο «Η μαγεία του 3 × 3» (δείτε το τεύχος Μαρτίου/Απριλίου 1996) και με την οποία ζητούσα ένα μαγικό τετράγωνο τάξης 3 × 3 αποτελούμενο από εννέα διαφορετικά τέλεια τετράγωνα. Ο Lee Sallows, που είχα αναφέρει και στο άρθρο, έγραψε ένα πρόγραμμα που βρήκε πολλά «σχεδόν μαγικά» τετράγωνα, στα οποία μόνο η διαγώνιος δεν είχε το μαγικό άθροισμα. Στο Σχήμα 1 βλέπετε αυτό με τη μικρότερη σταθερά.

Όπως έχει δείξει ο John Robertson από το Μπέργουιν της Πεννσυλβανίας, τέτοια ημιμαγικά τετράγωνα υπάρχουν αν και μόνο αν αποτελούνται από τρεις τριάδες αριθμών σε αριθμητική πρόοδο, όλες με την ίδια διαφορά ανάμεσα στους διαδοχικούς όρους. Οι αντίστοιχοι όροι των τριάδων δεν είναι απαραίτητο να βρίσκονται σε αριθμητική πρόοοδο —όπως θα χρειαζόταν για να είναι το τετράγωνο πλήρως μαγικό. Ο Robertson απέδειξε επίσης ότι η ανακάλυψη όλων αυτών των τετραγώνων ισοδυναμεί με την ανακάλυψη όλων των ρητών σημείων συγκεκριμένων ελλειπτικών καμπυλών.

Στις περισσότερες από τις περιπτώσεις που ανακάλυψε ο Sallows, η σταθερά είναι επίσης τετράγωνο, όπως στο παράδειγμα που παρουσιάσαμε (Σχήμα 8). Αυτό, όμως, δεν αληθεύει για όλα τα μερικώς μαγικά τετράγωνα, όπως μπορείτε να δείτε στο αντιπαράδειγμα του Σχήματος 9 που ανακάλυψε ο Michael Schweitzer, ένας μαθηματικός από το Γκαίττινγκεν.

Η σταθερά για τις γραμμές, τις στήλες και τη μία διαγώνιο είναι το 20.966.014, που δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Στο άρθρο μου ανέφερα ότι είναι δυνατά μαγικά τετράγωνα τάξης 3 × 3 αποτελούμενα από τέλεια τετράγωνα που περιέχουν το 0 σε ένα τους κελί. Πρέπει να προσθέσω ότι τετράγωνα αυτού του τύπου είναι μαγικά μόνο στις γραμμές και τις στήλες.

Ο Robertson μού έστειλε ένα πλήθος μαγικών τετραγώνων 4 × 4 που αποτελούνται από διαφορετικά τέλεια τετράγωνα και μου επέστησε την προσοχή στη *Διοφαντική ανάλυση* του R.D. Carmichael. Μαγικά τετράγωνα τάξης 3 × 3 για δυνάμεις του n είναι δυνατόν να υπάρξουν μόνο όταν τρεις δυνάμεις μπορούν να βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο. Για να ισχύει αυτό, πρέπει να έχει λύσεις η εξίσωση $a^n + b^n = 2c^n$ για διαφορετικούς ακέραιους a, b, και c. Ο Leonhard Euler απέδειξε ότι για $n = 3$ δεν υπάρχουν λύσεις. Έτσι, αποκλείονται μαγικά τετράγωνα τάξης 3 × 3 αποτελούμενα από κύβους ή πολλαπλάσια κύβων. Ο Carmichael αποδεικνύει επίσης το αδύνατο για n

127^2	46^2	58^2
2^2	113^2	94^2
74^2	82^2	97^2

σταθερά = 147^2

Σχήμα 18

= 4 και για τα πολλαπλάσια των τέταρτων δυνάμεων. Ο Noam Elkies με ενημέρωσε πως αν η απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat από τον Andrew Wiles είναι σωστή —όπως πιστεύουν σήμερα οι περισσότεροι αριθμοθεωρητικοί—, τότε μπορεί να αποδειχτεί ότι η $a^n + b^n = 2c^n$ δεν έχει λύση για n μεγαλύτερο του 2.

35^2	3495^2	2958^2
3642^2	2125^2	1785^2
2775^2	2058^2	3005^2

σταθερά = 20966014

Σχήμα 19

Παρότι τρία τέλεια τετράγωνα μπορούν να βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο, μπορεί να είναι αδύνατον να κατασκευάσουμε ένα πλήρως μαγικό τετράγωνο 3 × 3. Ο Schweitzer έχει δείξει ότι, αν υπάρχει ένα τέτοιο τετράγωνο, ο κεντρικός όρος πρέπει να έχει τουλάχιστον εννέα ψηφία και, αν οι αριθμοί του δεν έχουν κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο της μονάδας, πρέπει να είναι όλοι περιττοί.

—Martin Gardner

Καλειδοσκόπιου συνέχεια

(Δείτε το τεύχος Μαρτίου/Απριλίου 1996 του *Quantum*)

Είμαι φυσικός, διευθυντής του Ινστιτούτου Καθηγητών στο Exploratorium του Σαν Φρανσίσκο, και μου αρέσει να παίζω μουσική περιστρέφοντας αυλακωτούς σωλήνες. Έχω λοιπόν να κάνω ένα σχόλιο για την απάντηση που δόθηκε στην Ερώτηση 7 του άρθρου «Υγρά και αέρια σε κίνηση», στο τεύχος Μαρτίου/Απριλίου 1996.

Ο Frank Crawford ερεύνησε τους

περιστρεφόμενους αυλακωτούς σωλήνες και παρουσίασε τα αποτελέσματά του στο *American Journal of Physics* (1974, τόμ. 42, σελ. 278). Η ανάλυσή του συμφωνεί με τα απλά πειράματά μου. Η ροή του αέρα στο εσωτερικό του σωλήνα προκαλείται τόσο από τη διαφορά πίεσης μεταξύ των άκρων του σωλήνα όσο και από τις δυνάμεις που ασκούνται στον αέρα στο μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς του περιστρεφόμενου σωλήνα.

Ένα εύκολο πείραμα θα επιτρέψει να διαχωρίσουμε αυτά τα δύο φαινόμενα και να βρούμε τη σχετική σημασία του καθενός. Εν ολίγοις, η διαφορά πίεσης στα άκρα του σωλήνα δεν παράγει αρκετή ροή αέρα ώστε ο σωλήνας να «τραγουδήσει». Εντούτοις, η περιστροφή του σωλήνα τον αναγκάζει να «τραγουδά».

Δεν έχετε παρά να φυσήξετε πάνω από το άκρο του σωλήνα με το στόμα σας, ή με όποιον άλλο «φυσητήρα» θέλετε (για παράδειγμα, μπορείτε να τοποθετήσετε το άκρο έξω από το παράθυρο του αυτοκινήτου). Όταν ο εξωτερικός αέρας ρέει κάθετα στο άκρο του σωλήνα, αυτός δεν «τραγουδά». Η μείωση της πίεσης που προκύπτει καθώς ο εξωτερικός αέρας περνάει με ολοένα μεγαλύτερη ταχύτητα κάθετα στο άκρο του σωλήνα δεν αρκεί για να παραχθεί σφύριγμα. Τώρα, φυσήξτε κατευθείαν μέσα στο σωλήνα. Θα «τραγουδήσει», ακόμη κι αν φυσάτε απλώς με το στόμα σας. (Το στόμα σας πρέπει να απέχει περίπου τρία εκατοστά από το σωλήνα τη στιγμή που φυσάτε.)

Για να πάρετε μια ιδέα του πώς η περιστροφή του σωλήνα αυξάνει τη ροή του αέρα διαμέσου του, φανταστείτε ότι ο σωλήνας είναι γεμάτος από μπίλιες· αν τον περιστρέψουμε, γύρω από το ένα άκρο του οι μπίλιες θα κινηθούν διαμέσου του σωλήνα και θα πεταχτούν έξω από το άλλο άκρο του.

Ο Frank Crawford, στο εξαίρετο άρθρο του, κάνει τον υπολογισμό και δείχνει πώς οι δυνάμεις αδράνειας στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς προκαλούν ουσιαστικά την κίνηση του αέρα μέσα στο σωλήνα.

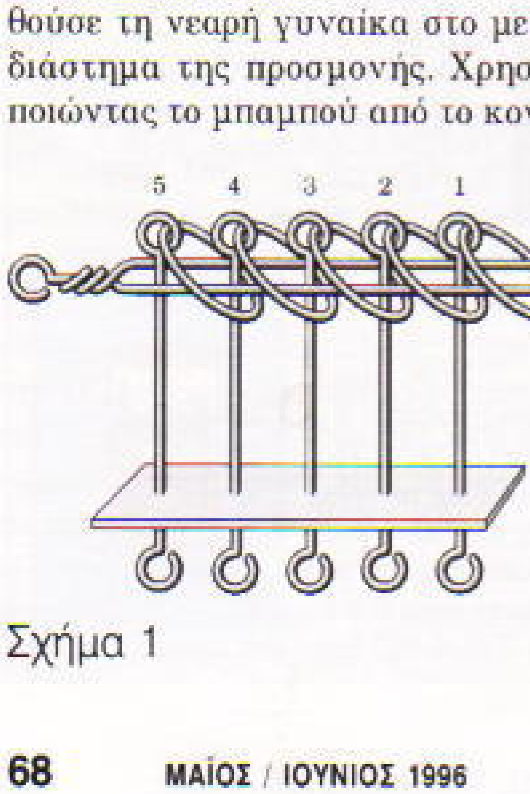
—*Paul Doherty*, Ph.D.

Σπαζοκεφαλιές εγκιβωτισμού

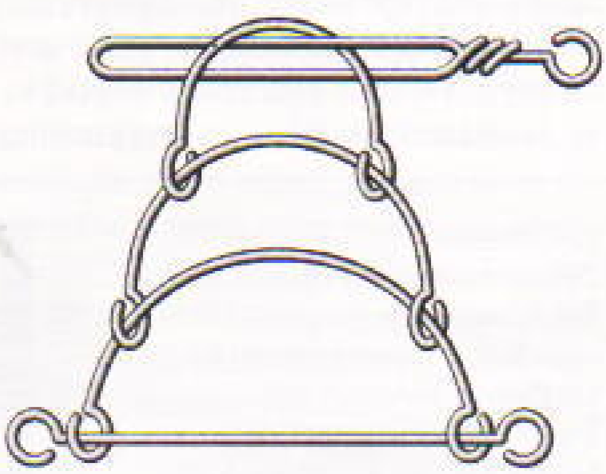
Μέρος II: Ένα κινέζικο τέρας από κινέζικα δαχτυλίδια

Vladimir Dubrovsky

ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΕΝΑΝ ΠΟΛΥ ΠΑΛΙΟ θρύλο (τουλάχιστον μερικά βιβλία λένε ότι είναι πολύ παλιός), αυτή η σπαζοκεφαλιά επινοήθηκε από έναν στρατιωτικό στην αρχαία Κίνα. Λόγω του σκληρού επαγγέλματός του, συχνά υποχρεωνόταν να αφήνει το σπίτι του για μακρινές εκστρατείες και να εγκαταλείπει την οικογένειά του για πολλές εβδομάδες και μήνες. Η νεαρή γυναίκα του τον νοσταλγούσε πολύ, και κάθε φορά που επέστρεφε από τον πόλεμο την έβρισκε αναστατωμένη και στενοχωρημένη, με τα όμορφα μάτια της όλο και πιο θλιμμένα κάθε φορά. Ο πολεμιστής τής χάριζε όμορφα άνθη αγριοδαμασκηνιάς, και έφτιαχνε αστείες φιγούρες από βλαστούς ρυζιού, που απέδιωχναν πρόσκαιρα τη μελαγχολία της, αλλά οι μεγάλες, σκοτεινές νύχτες γέμιζαν ξανά με λύπη την καρδιά της. Κάποια μέρα, έπειτα από μια σκληρή μάχη όπου ο γενναίος μας πολεμιστής πληγώθηκε βαριά, του ήρθε η ιδέα για ένα καινούργιο διασκεδαστικό παιχνίδι, που θα βοηθούσε τη νεαρή γυναίκα στο μεγάλο διάστημα της προσμονής. Χρησιμοποιώντας το μπαμπού από το κοντάρι



Σχήμα 1

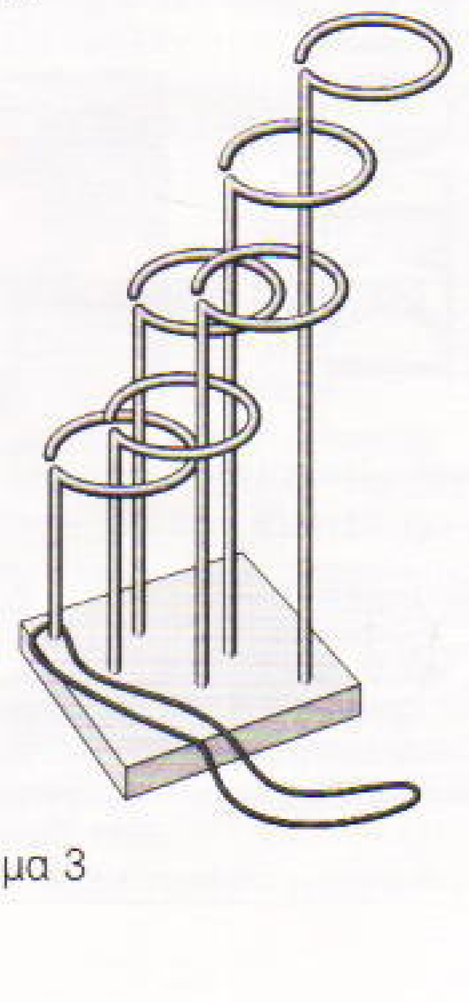


Σχήμα 2

του και μεταξένιες κλωστές που ξετύλιξε από τον επίδεσμό του, κατασκεύασε ένα παιχνίδι που μπορούσε να διαρκέσει για μέρες. Το δώρησε στη γυναίκα του, και εκείνη σύντομα έγινε ξανά ομορφότερη από κάθε άλλη, με τα μάτια της να λάμπουν περισσότερο από ποτέ.

Ανεξάρτητα από το τι πιστεύετε για την αλήθεια του θρύλου, η σπαζοκεφαλιά, που συνήθως κατασκευάζεται από σύρμα όπως στο Σχήμα 1, είναι πράγματι πολύ παλιά. Αρκεί να αναφέρουμε ότι το ρωσικό της όνομα, *meleda*, προέρχεται από ένα ρήμα που έχει πάψει να χρησιμοποιείται εδώ και πολύ καιρό στη ρωσική γλώσσα. (Το ρήμα σημαίνει «είμαι αργόσχολος ή χασομερώ». Παρεμπιπτόντως, η γαλλική ονομασία του παιχνιδιού, *baguenodier*, έχει παραπλήσια σημασία, ενώ στη σύγχρονη Κίνα ονομάζεται «ο τρόμος των ξένων», επειδή μπορεί να διαρκέσει *επ' άπειρον*.

Γνωρίζουμε σίγουρα ότι οι αρχαίοι Σκανδιναβοί χρησιμοποιούσαν αυτό το μηχανισμό ως κλειδαριά στα μπαούλα τους. Πιθανότατα ήταν οι πρώτοι που έφεραν τη σπαζοκεφαλιά στην Ευρώπη. Οι Ευρωπαίοι τής έδωσαν το πιο συνηθισμένο και παγκοσμίως διαδεδομένο όνομα: «κινέζικοι δακτύλιοι». Η σπαζοκεφαλιά αυτή κέντρισε το ενδιαφέρον σπουδαίων μαθηματικών όπως του Cardano (το 1550) και του Wallis (το 1693), οι οποίοι μάλιστα δεν κατάφεραν να βρουν την πλήρη λύση της! Απ' όσο γνωρίζουμε, μια πλήρη λύση δημοσίευσε για πρώτη φορά το 1893 ο γάλλος μαθηματικός L. Gros. Ωστόσο, από καιρό σε καιρό το παιχνίδι «ανακαλύπτεται» εκ νέου. Η τελευταία φορά που κατοχυρώθηκε η ευρεσιτεχνία του στην Ευρώπη ήταν το 1931 (στην Ουγγαρία), και στις ΗΠΑ το 1977. Η ίδια ή μια παρόμοια ιδέα έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλές άλλες σπαζοκεφαλιές (δείτε τα Σχήματα 2 και 3).



Σχήμα 3

Πώς δουλεύει

Η σύγχρονη εκδοχή της «σπαζοκεφαλιάς του στρατιωτικού» (Σχήμα 1) αποτελείται από έναν μακρύ και στενό συρμάτινο βρόχο, μια σειρά λεπτών μεταλλικών ράβδων με δακτυλίους αγκιστρωμένους στο πάνω άκρο και μικρές σφαίρες ή άγκιστρα στο κάτω άκρο τους, και μια μεταλλική βάση με τρύπες μέσα από τις οποίες είναι περασμένες οι ράβδοι. Όλοι οι δακτύλιοι εκτός από έναν (τον τελευταίο δεξιά όπως κοιτάμε το Σχήμα 1) είναι περασμένοι γύρω από τη ράβδο που βρίσκεται δεξιά τους. Ο βρόχος περνάει από όλους τους δακτυλίους και περικλείει όλες τις ράβδους. Όλα αυτά τα κομμάτια μπορούν να κινούνται ελεύθερα ως προς τα υπόλοιπα, αλλά ενώ οι ράβδοι και η βάση αποτελούν ένα κομμάτι που κινείται χωρίς να αποσυναρμολογείται, ο βρόχος μπορεί να χωριστεί από τους δακτυλίους. Και τούτο ακριβώς πρέπει να επιτύχετε σ' αυτή τη σπαζοκεφαλιά.

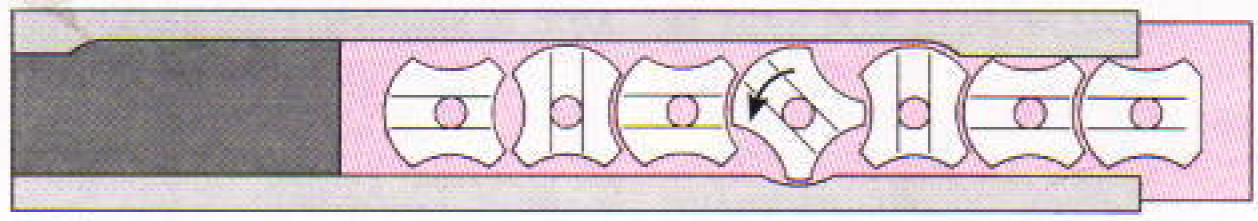
Για να τη λύσετε, πρέπει πρώτα να καταλάβετε τι είναι δυνατόν να γίνει με αυτή την έξυπνη κατασκευή. Αυτό απαιτεί μεγάλη φαντασία, αν δεν έχετε το πραγματικό παιχνίδι, αλλά ακόμη και τότε είναι αρκετά δύσκολο —το παιχνίδι μοιάζει σαν κάτι το ζωντανό στα χέρια σας και είναι δύσκολο να εντοπίσετε οποιοδήποτε σύστημα στη συμπεριφορά του. Είμαι βέβαιος, όμως, ότι οι αναγνώστες του *Quantum* θα αντιμετώπιζαν επιτυχώς τη σπαζοκεφαλιά και με τους δύο τρόπους —και με το μυαλό και με τα χέρια τους. Δυστυχώς, δεν μπορώ να σταματήσω το άρθρο και να περιμένω τα αποτελέσματά σας, και έτσι πρέπει να αποκαλύψω την απάντηση για να συνεχίσω.

Τον πρώτο δακτύλιο (σύμφωνα με την αρίθμηση του Σχήματος 1) μπορούμε ελεύθερα να τον περνάμε στον ή να τον βγάζουμε από το βρόχο οποιαδήποτε στιγμή. Για τον k-οστό δακτύλιο ($k > 1$) αυτό είναι δυνατόν μόνο όταν ο δακτύλιος $k - 1$ είναι περασμένος στο βρόχο ενώ όλοι οι προηγούμενοι (με μικρότερους αριθμούς) έχουν βγει. (Στην πραγματικότητα, η κατασκευή επιτρέπει να περνάμε ή να βγάζουμε τους δακτυλίους 1 και 2 ταυτόχρονα, σε μία κίνηση, αλλά για την ώρα είναι βολικό να αγνοήσουμε αυτή τη δυνατότητα.)

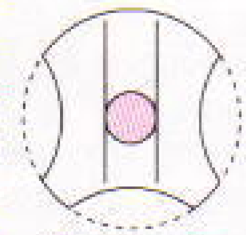
Μπορούμε τώρα να δημιουργήσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο για τους κινέζικους δακτυλίους, και να ολοκληρώσουμε τη λύση με χαρτί και μολύβι. Αυτό ακριβώς θα κάνουμε, αφού γνωρίσουμε πρώτα μια νεότερη σπαζοκεφαλιά, συγγενική της προηγούμενης.

Η σπαζοκεφαλιά των κλειδωμένων δίσκων

Αυτή τη σπαζοκεφαλιά την επινόησε, όχι πριν από πολύ καιρό, ο William Keister από τη Νέα Υόρκη. Είναι ένα μάλλον αινιγματικό αντικείμενο (Σχήμα 4) που θυμίζει λογαριθμικό κανόνα.[1] Όπως βλέπετε στο σχήμα, αποτελείται από μια γκρίζα «θήκη» μέσα στην οποία μπορεί να κινείται παλινδρομικά μια κόκκινη «λεπίδα». Αυτή φέρει μια σειρά άσπρα περιστρεφόμενα εξαρτήματα που «κλειδώνουν» μεταξύ τους και το σχήμα τους μοιάζει με ασπίδα μεσαιωνικού στρατιώτη (Σχήμα 5). (Συγγνώμη, δεν μπορώ να αποφύγω όλες αυτές τις «ιπποτικές» παρομοιώσεις!) Στην αρχή όλες οι ασπίδες είναι στραμμένες προς τα πάνω (Σχήμα 6α). Σκοπός σας είναι να βγάλετε τη λεπίδα από τη θήκη της. Αυτό μπορεί να γίνει μόνο από το δεξιό άκρο της θήκης (όπως τη βλέπουμε στα σχήματα) —το αριστερό άκρο είναι πιο στενό. Και κάτι ακόμη σημαντικότερο· αυτό είναι δυνατόν μόνο όταν όλες οι ασπίδες έχουν προσανατολιστεί οριζόντια (Σχήμα 6β) —ακριβέστερα, πρέπει να στρέφονται προς τα αριστερά (όχι προς τα δεξιά· προσέξτε τη δεξιότερη ασπίδα). Θεωρητικά, η κατασκευή σάς επιτρέπει να στρέψετε μερικές ασπίδες προς τα δεξιά, αλλά έτσι θα προσθέσετε απλώς επιπλέον κινήσεις στη λύση σας (βρείτε γιατί ή δεχτείτε το λόγο μου). Έτσι, μπορούμε χωρίς δισταγμό να περιοριστούμε σε δύο θέσεις των ασπίδων —προς τα πάνω και προς τα αριστερά.



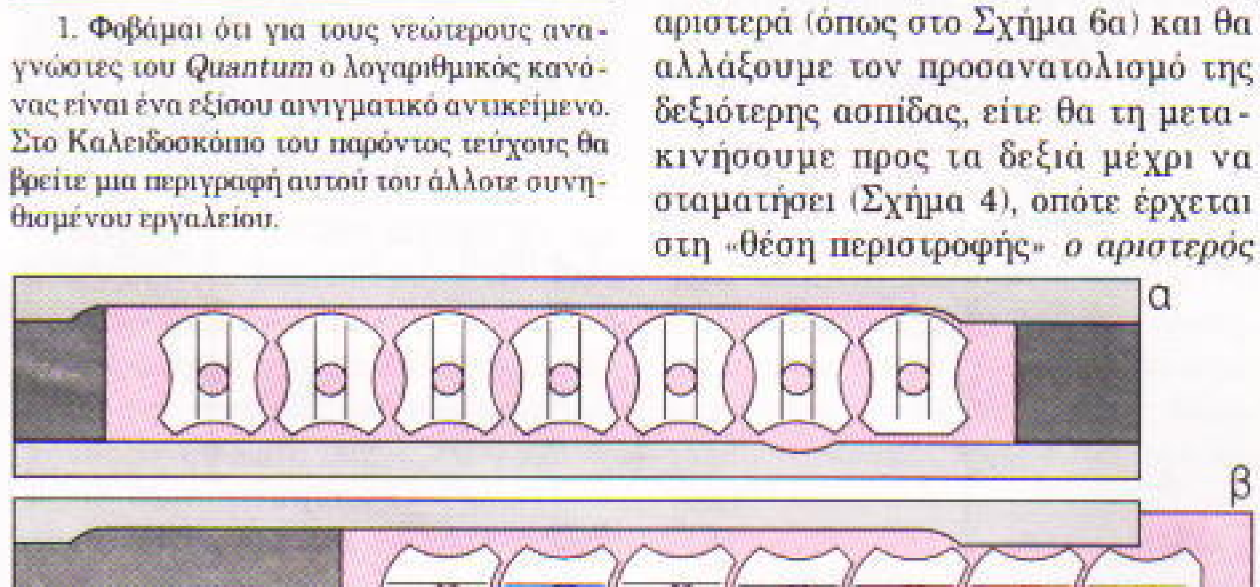
Σχήμα 4



Σχήμα 5

Από τη στιγμή που θα συμφωνήσουμε ως προς αυτό, είναι εξαιρετικά εύκολο να περιγράψουμε όλους τους δυνατούς «στοιχειώδεις» μετασχηματισμούς της σπαζοκεφαλιάς. Στα σχήματα βλέπουμε ότι η ακμή του ανοίγματος της θήκης είναι χαραγμένη με τέτοιον τρόπο ώστε να υπάρχει ένα μόνο μέρος όπου μπορούμε να στρίψουμε μια ασπίδα. Είτε θα μετακινήσουμε τη λεπίδα τελείως αριστερά (όπως στο Σχήμα 6α) και θα αλλάξουμε τον προσανατολισμό της δεξιότερης ασπίδας, είτε θα τη μετακινήσουμε προς τα δεξιά μέχρι να σταματήσει (Σχήμα 4), οπότε έρχεται στη «θέση περιστροφής» *ο αριστερός*

1. Φοβάμαι ότι για τους νεώτερους αναγνώστες του *Quantum* ο λογαριθμικός κανόνας είναι ένα εξίσου αινιγματικό αντικείμενο. Στο Καλειδοσκόπιο του παρόντος τεύχους θα βρείτε μια περιγραφή αυτού του άλλοτε συνηθισμένου εργαλείου.



Σχήμα 6

γείτονας της πρώτης κάθετης ασπίδας που συναντάμε από τα δεξιά. Με άλλα λόγια, μπορούμε να στρέψουμε είτε την ασπίδα 1 είτε την ασπίδα k ($k > 1$) όταν οι ασπίδες 1, 2, ..., $k - 2$ είναι οριζόντιες και η ασπίδα $k - 1$ κάθετη.

Τώρα η ομοιότητα της σπαζοκεφαλιάς των κλειδωμένων δίσκων με τη σπαζοκεφαλιά των κινέζικων δακτυλίων γίνεται φανερή. Βασιζόμενοι σ' αυτή την ομοιότητα θα εισαγάγουμε ένα κοινό μαθηματικό μοντέλο και για τις δύο.

Μετασχηματισμοί μηδενικών και μονάδων

Υποθέτουμε ότι κάθε σπαζοκεφαλιά μας έχει m βασικά στοιχεία —δακτυλίους στη μια περίπτωση και ασπίδες στην άλλη. Και στις δύο σπαζοκεφαλιές, καθένα από αυτά τα στοιχεία μπορεί να παίρνει δύο διαφορετικές θέσεις. Αυτές μπορούν να ονομαστούν 0 και 1. Τότε, η συνολική κατάσταση μιας σπαζοκεφαλιάς θα περιγράφεται από μια m-ψήφια σειρά από 0 και 1. Πιο συγκεκριμένα, θα βάζουμε 1 στην k-οστή θέση της σειράς αν ο k-οστός «κινέζικος δακτύλιος» είναι περασμένος στο βρόχο· διαφορετικά, θα βάζουμε 0. Στη δεύτερη σπαζοκεφαλιά το 1 συμβολίζει τις κάθετες ασπίδες, το 0 τις οριζόντιες. Τώρα, οι κανόνες μετασχηματισμού και για τις δύο σπαζοκεφαλιές αντιστοιχούν στον ίδιο κανόνα μετασχηματισμού 0-1 σειρών:

Με δεδομένη μια σειρά από μηδενικά και άσους, μπορούμε είτε να μετατρέψουμε το τελευταίο (το δεξιότερο) ψηφίο —από 0 σε 1 ή από 1 σε 0— είτε τον αριστερό γείτονα του πρώτου 1 που συναντάμε από τα δεξιά.

Για παράδειγμα, το 101100 μπορεί να μετατραπεί σε 101101 ή 100100. Η πρώτη από τις δύο πράξεις μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε 0-1 σειρά, ενώ η δεύτερη σε όλες τις σειρές εκτός από τις 00...0 και 10...0 (δεν έχουν «ψηφία αριστερά του 1»). Χρησιμοποιώντας αυτή την ορολογία, σκοπός μας είναι να μετατρέψουμε τη *μοναδιαία* σειρά 11...1 στη *μηδενική* σειρά 00...0 εφαρμόζοντας μόνο αυτές τις πράξεις. Θα είναι όμως πιο βολικό αν αρχίσουμε με το αντίστροφο πρόβλημα —τη μετατροπή του 00...0 σε 11...1.

Πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι το μοντέλο μας αφαιρεί από τις σπαζοκεφαλιές μερικά από τα ειδικά τους χαρακτηριστικά (για παράδειγμα, αγνοεί τον τρίτο δυνατό προσανατολισμό των ασπίδων —προς τα δεξιά). Αυτά τα χαρακτηριστικά κάνουν τις πραγματικές σπαζοκεφαλιές δυσκολότερες από τον «μαθηματικό σκελετό» τους, αλλά δεν επηρεάζουν τις βέλτιστες λύσεις τους.

Έτσι, ας πάρουμε τη μηδενική σειρά 00...00 και ας αρχίσουμε να τη μετασχηματίζουμε. Η πρώτη κίνηση είναι μονοσήμαντα καθορισμένη: 00...00 → 00...01. Η δεύτερη είναι επίσης μοναδική: 00...01 → 00...11 (διότι οπωσδήποτε δεν θέλουμε να επιστρέψουμε στην αρχική σειρά αντιστρέφοντας την πρώτη κίνηση). Στην πραγματικότητα, σε κάθε θέση που φτάνουμε υπάρχουν δύο δυνατές επόμενες κινήσεις —η μία όμως από αυτές μας επαναφέρει στη θέση απ' όπου ξεκινήσαμε. Αν, λοιπόν, θέλουμε να προχωρήσουμε στη σπαζοκεφαλιά —και υποθέτοντας ότι μπορεί να λυθεί— θα βρούμε μια μοναδική διαδοχή θέσεων που τη λύνουν. Ειδικότερα, η ακολουθία των θέσεων δεν μπορεί να περιέχει «βρόχους» (όπως αυτούς που βλέπουμε στα Σχήματα 7α και 7β). Αυτούς μπορούμε να τους διευθετήσουμε σε μια ευθεία διαδρομή που συνδέει τη 00...00 με τη 10...00 (Σχήμα 7γ). Ας αποδείξουμε ότι αυτή η διαδρομή περιλαμβάνει όλες τις δυνατές σειρές 0 και 1 που έχουν το ίδιο μήκος.

Συμβολίζουμε με r_k το μικρότερο πλήθος κινήσεων που απαιτούνται για να μετασχηματίσουμε την k ψηφίων μηδενική σειρά στην 100...0. Με βάση τους κανόνες του παιχνιδιού μας, η πρώτη κίνηση που αντικαθιστά το k-οστό (το τελευταίο αριστερά) μηδέν στην αρχική σειρά με το ψηφίο 1 είναι η 010...0 → 110...0. Επομένως, ο συνολικός μετασχηματισμός χωρίζεται σε τρία στάδια. Το πρώτο μετατρέπει την 00...00 στη 0100...00. Αυτό, αφού ουσιαστικά μετατρέπει την $k - 1$ ψηφίων σειρά 00...00 στην $k - 1$ ψηφίων σειρά 10...00, αποτελείται από r_{k-1} κινήσεις. Το δεύτερο στάδιο αποτελείται από τη μοναδική κίνηση 010...00 → 1100...00. Το τρίτο στάδιο μετατρέπει την 110...00 στην 1100...00, και είναι στην πραγματικότητα το αντίστροφο του πρώτου σταδίου. Επομένως, αποτελείται και αυτό από r_{k-1} κινήσεις. Καταλήγουμε, λοιπόν, στην εξίσωση

$$r_k = r_{k-1} + 1 + r_{k-1} = 2r_{k-1} + 1,$$

όπου $r_1 = 1$ (0 → 1). Σας θυμίζει κάτι; Την έχουμε ήδη λύσει στο πρώτο μέρος του άρθρου (στο προηγούμενο τεύχος). Ο τύπος για το r_k είναι

$$r_k = 2^k - 1.$$

Έτσι, η διαδρομή από το 00...0 έως το 10...0 έχει 2^k «σταθμούς» (συμπεριλαμβανομένων των ακραίων σημείων) —με άλλα λόγια, όλες τις 2^k δυνατές k-ψήφιες σειρές από 0 και 1. Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει την περίπτωση των πενταψήφιων σειρών.

Μπορούμε τώρα να βρούμε το μικρότερο πλήθος κινήσεων που μετατρέπουν τη σειρά 00...00 στην 11...11. Για μια αρχική σειρά με k μηδενικά συμβολίζουμε αυτό το πλήθος με u_k. Χρησιμοποιώντας ξανά το ίδιο επιχείρημα βρίσκουμε ότι αυτή η ακολουθία κινήσεων αποτελείται από

Σχήμα 7

n	5	4	3	2	1	0	$d(n)$
0	0	0	0	0	0	0	-
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	0	0	1	1	0	1
3	0	0	0	1	0	1	−1
4	0	0	1	1	0	0	1
5	0	0	1	1	1	1	1
6	0	0	1	0	1	0	−1
7	0	0	1	0	0	1	−1
8	0	1	1	0	0	0	1
9	0	1	1	0	1	1	1
10	0	1	1	1	1	0	1
11	0	1	1	1	0	1	−1
12	0	1	0	1	0	0	−1
13	0	1	0	1	1	1	1
14	0	1	0	0	1	0	−1
15	0	1	0	0	0	1	−1
16	1	1	0	0	0	0	1
17	1	1	0	0	1	1	1
18	1	1	0	1	1	0	1
19	1	1	0	1	0	1	−1
20	1	1	1	1	0	0	1
21	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	0	1	0	−1
23	1	1	1	0	0	1	−1
24	1	0	1	0	0	0	−1
25	1	0	1	0	1	1	1
26	1	0	1	1	1	0	1
27	1	0	1	1	0	1	−1
28	1	0	0	1	0	0	−1
29	1	0	0	1	1	1	1
30	1	0	0	0	1	0	−1
31	1	0	0	0	0	1	−1

δύο μέρη: 000...0 → 110...0 (όπως είδαμε, απαιτεί $r_{k-1} + 1 = 2^{k-1}$ κινήσεις) και 110...0 → 111...1, που συμπίπτει με το

$$\underbrace{0...0}_{k-2} \rightarrow \underbrace{1...1}_{k-2},$$

και επομένως χρειάζεται u_{k-2} κινήσεις. Συνεπώς, έχουμε

$$u_k = 2^{k-1} + u_{k-2},$$

με $u_1 = r_1 = 1$ και $u_2 = 2$. Αν παρατηρήσουμε προσεκτικά τις πρώτες τρεις γραμμές του πίνακα (και τις στήλες 1 και 2) θα διαπιστώσουμε ότι $u_1 = 1$ και $u_2 = 2$. Αυτή η πληροφορία μάς δίνει το u_k αναδρομικά, αλλά ο τελικός κλειστός τύπος εξαρτάται από το αν το k είναι άρτιος ή περιττός αντίστοιχα. Όταν το k είναι περιττός, έχουμε

$$u_k = 2^{k-1} + 2^{k-3} + ... + 2^2 + 1$$

$$\frac{2^{k+1} - 1}{3},$$

ενώ για k άρτιο

$$u_k = 2^{k-1} + 2^{k-3} + ... + 2 = \frac{2^{k+1} - 2}{3}.$$

Αυτό είναι το πλήθος των κινήσεων που απαιτούνται για να λύσουμε τη σπαζοκεφαλιά των κλειδωμένων δίσκων με k ασπίδες. Όπως αναφέραμε παραπάνω, στους κινέζικους δακτυλίους οι δύο πρώτοι δακτύλιοι μπορούν να περάσουν ή να βγουν από το βρόχο σε μία κίνηση.

Πρόβλημα 1. Υπολογίστε τα r_k και u_k για τους κινέζικους δακτυλίους με δεδομένη την προηγούμενη συνθήκη.

Τώρα, λοιπόν, γνωρίζουμε το μήκος της συντομότερης λύσης. Προσέξτε, όμως, ότι δεν γνωρίζουμε ακόμη πώς να την κατασκευάσουμε. Ωστόσο, αυτό δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο. Όταν μετασχηματίσαμε τη μηδενική σειρά στη μοναδιαία, το μόνο που έπρεπε να προσέξουμε ήταν να μην αντιστρέψουμε δύο φορές διαδοχικά το ίδιο ψηφίο —αυτή η συνθήκη προσδιόρισε μονοσήμαντα όλες τις κινήσεις. Αν, όμως, θέλουμε να ξεκινήσουμε από την 11...1, όπως και συμβαίνει στις πραγματικές σπαζοκεφαλιές, πρέπει να επιλέξουμε μεταξύ δύο δυνατών αρχικών κινήσεων. Βέβαια, θα λύσουμε τη σπαζοκεφαλιά ακόμη και αν κάνουμε τη λανθασμένη επιλογή: θα κινηθούμε προς τα κάτω στον πίνακα, θα φτάσουμε στη σειρά 10...0, θα αντιστρέψουμε την πορεία μας και θα ανεβούμε ξανά στον πίνακα μέχρι να φτάσουμε στη μηδενική σειρά. Ωστόσο, είναι καλύτερα να κατευθυνθούμε από την αρχή «προς τα πάνω». Η σκιασμένη στήλη του πίνακα θα μας βοηθήσει να ξεκινήσουμε προς τη σωστή κατεύθυνση.

Παρατηρήστε ότι κάθε κίνηση αλλάζει την ισοτιμία του πλήθους των μονάδων σε κάθε σειρά. Τα 0 και τα 1 στη σκιασμένη στήλη δηλώνουν, αντίστοιχα, τις σειρές στις οποίες αυτό το πλήθος είναι άρτιο ή περιττό. Από την άλλη πλευρά, οι κινήσεις που μετατρέπουν το δεξιότερο ψηφίο εναλλάσσονται πάντα με κινήσεις που μετατρέπουν ένα από τα υπόλοιπα ψηφία. Από αυτές τις παρατηρήσεις καταλήγουμε στον επόμενο απλό «κανόνα ισοτιμίας»: *αν ξεκινήσουμε με μια σειρά που αποτελείται από k μονάδες (και κάποιο πλήθος μηδενικών) και θέλουμε να μετακινηθούμε προς τα πάνω στον πίνακα ώστε να καταλήξουμε στη μηδενική σειρά, πρέπει να αρχίσουμε αντιστρέφοντας το δεξιότερο ψηφίο αν το k είναι περιττό. Αν το k είναι άρτιο, στην αρχή θα αντιστρέψουμε τον αριστερό γείτονα της πρώτης μονάδας που συναντάμε από τα δεξιά.* (Φυσικά, αυτός ο κανόνας αντιστρέφεται όταν θέλουμε να μετακινηθούμε προς τα κάτω, στο 10...0.)

Επομένως, η συντομότερη λύση για τη σπαζοκεφαλιά των κλειδωμένων δίσκων με k ασπίδες αρχίζει με τη στροφή της πρώτης ασπίδας όταν το k είναι περιττό και της δεύτερης όταν είναι άρτιο.

Με αυτό τον κανόνα συμπληρώνεται η λύση αλλά όχι και η εξερεύνηση των σπαζοκεφαλιών μας.

Αναδιπλούμενο δυαδικό σύστημα

Ας υποθέσουμε ότι μας δίνονται δύο τυχαίες θέσεις μιας από τις σπαζοκεφαλιές μας. Έχουμε τη δυνατότητα να καθορίσουμε τη μεταξύ τους «απόσταση» (σε κινήσεις) και τον συντομότερο μετασχηματισμό της μιας στην άλλη (δηλαδή, την πρώτη κίνηση αυτού του μετασχηματισμού); Αυτό θα ήταν εύκολο αν ο πίνακάς μας ήταν αρκετά μεγάλος ώστε να περιλαμβάνει και τις δύο θέσεις. Τότε, η απόστασή τους θα ήταν ίση με τη διαφορά της αρίθμησής τους (που τη βρίσκουμε στην πρώτη στήλη του πίνακα), και η πρώτη κίνηση θα προσδιοριζόταν από την τάξη τους (και τον κανόνα ισοτιμίας). Επομένως, το μόνο που χρειαζόμαστε για να απαντήσουμε και στα δύο ερωτήματα είναι να μάθουμε πώς θα υπολογίζουμε την αρίθμηση μιας θέσης χωρίς να γράφουμε τον ίδιο τον πίνακα.

Ο κανόνας γι' αυτό τον υπολογισμό είναι πραγματικά εκπληκτικός. Παίρνουμε τον «δυαδικό κωδικό» της δεδομένης θέσης (έστω, για παράδειγμα, 10111), προσαρτούμε το αντίστοιχο «σκιασμένο ψηφίο» —το άθροισμα modulo 2 των ψηφίων του— στο δεξιό του άκρο (στο παράδειγμά μας, παίρνουμε 101110), γράφουμε μια γραμμή πάνω από κάθε δεύτερο ψηφίο 1 $(10\bar{1}1\bar{1}0)$, και διαβάζουμε τη σειρά των ψηφίων που προκύπτει σαν να ήταν η συνηθισμένη δυαδική αναπαράσταση ενός αριθμού στον οποίο τα πρόσημα των δυνάμεων του 2 που αντιστοιχούν στις υπεργραμμισμένες μονάδες έχουν αντιστραφεί $(2^5 - 2^3 + 2^2 - 2^1)$. Η τιμή αυτού του εναλλασσόμενου αθροίσματος δυνάμεων του 2 (στο παράδειγμά μας, $32 - 8 + 4 - 2 = 26$) μας δίνει την αρίθμηση της δεδομένης θέσης στον πίνακά μας —δηλαδή, το μικρότερο πλήθος κινήσεων που απαιτούνται για να καταλήξουμε σ' αυτή τη θέση από το 00...0, και αντίστροφα.

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι αυτός ο κανόνας ισχύει για όλες τις σειρές από 0 και 1. (Υπόδειξη: μια σειρά από 0 και 1 —ας πούμε η 10111, την οποία θεωρήσαμε παραπάνω— μπορεί να προκύψει από τη μηδενική με μια ακολουθία βημάτων κατά τα οποία τα 1 εμφανίζονται στη σειρά, ένα κάθε φορά, από τα αριστερά προς τα δεξιά: 00000 → 10000, 10000 → 10100, 10100 → 10110, 10110 → 10111. Παρακολουθήστε αυτά τα βήματα χρησιμοποιώντας τον πίνακα των μετασχηματισμών.)

Η αναπαράσταση ενός ακεραίου ως εναλλασσόμενου αθροίσματος φθινουσών δυνάμεων του 2 ονομάζεται *αναδιπλούμενη δυαδική αναπαράσταση* και συμβολίζεται με μια σειρά 0 και 1 στην οποία κάθε δεύτερο 1 είναι υπεργραμμισμένο. Για παράδειγμα, γράφουμε $26 = (10\bar{1}1\bar{1}0)_2$. Παρατηρούμε, όμως, ότι αυτός ο αριθμός έχει και άλλη μία αναδιπλούμενη δυαδική αναπαράσταση: $26 = (1\bar{1}1010)_2$.

Πρόβλημα 3. Αποδείξτε ότι κάθε μη μηδενικός ακέραιος (θετικός ή αρνητικός) έχει δύο ακριβώς αναδιπλούμενες δυαδικές αναπαραστάσεις, με άρτιο πλήθος μονάδων στη μια και περιττό πλήθος μονάδων στην άλλη.

Για να εξασκηθείτε, μπορείτε να επαληθεύσετε τους επόμενους τύπους για σειρές $k + 1$ ψηφίων:

$$(10...0\bar{1})_2 = r_k = 2^k - 1,$$

$$(1\bar{1}1\bar{1}...1\bar{1}) = u_k \text{ (για περιττό } k),$$

$$(1\bar{1}1\bar{1}...1\bar{1}0) = u_k \text{ (για άρτιο } k),$$

όπου το u_k ορίζεται όπως παραπάνω.

Η επιστροφή των δρακόντειων καμπυλών

Κοιτάξτε άλλη μία φορά τον πίνακά μας. Ας κινηθούμε από πάνω προς τα κάτω γράφοντας τον αριθμό του ψηφίου που αλλάζει καθώς περνάμε από μια γραμμή στην επόμενη (τον αριθμό αυτό τον βρίσκουμε στην κορυφαία γραμμή):

1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2,
1, 3, 1, 2, 1, 5, ...

Αναγνωρίσατε αυτή την ακολουθία; Ναι, την έχετε δει στο πρώτο μέρος αυτού του άρθρου: είναι η ακολουθία των δίσκων που κινούνται διαδοχικά κατά την επίλυση της σπαζοκεφαλιάς του πύργου του Ανόι!

Πρόβλημα 4. Αποδείξτε ότι οι ακολουθίες που περιγράφουν τις βέλτιστες λύσεις των δύο σπαζοκεφαλιών συμπίπτουν ανεξάρτητα από το μέγεθός τους.

Επομένως ο πύργος του Ανόι είναι, από μια συγκεκριμένη άποψη, ισομορφικός με τους κινέζικους δακτυλίους (και με τις συγγενικές του σπαζοκεφαλιές, τον «λογαριθμικό κανόνα» και την «ψηφιακή μορφή»).

Θα είχε ενδιαφέρον να αναπτύξουμε αυτή την παρατήρηση και να βρούμε την αντιστοιχία μεταξύ των συνηθισμένων δυαδικών κωδικών των καταστάσεων του πύργου του Ανόι και των αναδιπλούμενων δυαδικών κωδικών που μελετήσαμε παραπάνω. Ο πίνακάς μας, όμως, αποκαλύπτει μια πολύ πιο ενδιαφέρουσα σχέση.

Κάθε κίνηση στον πίνακα μετατρέπει ένα ψηφίο της τρέχουσας σειράς «από 0 σε 1 ή από 1 σε 0» και έτσι μεταβάλλει το άθροισμα όλων των ψηφίων κατά 1 ή −1. Αυτές οι αλλαγές (που συμβολίζονται με $d(n)$, όπου n είναι ο αριθμός της κίνησης) είναι γραμμένες στην τελευταία στήλη. Φανταστείτε έναν ψύλλο που κινείται στο επίπεδο των συντεταγμένων: ξεκινά από την αρχή και ακολουθεί ένα μοναδιαίο τμήμα που τη συνδέει με το σημείο (1, 0)· στρέφεται κατά $d(1) \cdot 90° = +90°$ (κατά τη θετική διεύθυνση, αριστερόστροφα)· κινείται κατά ένα ακόμη μοναδιαίο τμήμα καταλήγοντας στο (1, 1), και έπειτα στρέφεται κατά $d(2) \cdot 90° = 90°$ ξανά· προχωρεί έως το (0, 1), κάνει μια στροφή $d(3) \cdot 90° = -90°$ (δεξιόστροφα), μετακινείται προς το (0, 2), και συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο, διαβάζοντας την ακολουθία $d(n)$ και κάνοντας την αντίστοιχη στροφή στο τέλος κάθε μοναδιαίου τμήματος που έχει καλύψει. Σχεδιάστε τη διαδρομή του ψύλλου. Πρέπει να την έχετε δει στο *Quantum*: είναι το λεγόμενο *κύριο δρακόντειο σχέδιο* (δείτε το άρθρο «Δρακόντειες καμπύλες» στο τεύχος Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου 1995). Η απόδειξη αυτού του εκπληκτικού γεγονότος δεν είναι δύσκολη, αλλά βρίσκεται έξω από τους στόχους αυτού του άρθρου. Στηρίζεται σε έναν από τους ορισμούς των δρακόντειων σχεδίων και στην επόμενη εξίσωση για την ακολουθία $d(n)$:

$$D_{k+1} = D_k 1 \overline{D}_k,$$

όπου το D_k συμβολίζει το τμήμα $\{d(1), d(2), ..., d(2^k - 1)\}$ της ακολουθίας (που αντιστοιχεί στο μετασχηματισμό της k-ψήφιας μηδενικής σειράς στην 10...0), ενώ το $\overline{D}_k$ προκύπτει από το D_k με την αντιστροφή της σειράς και του προσήμου των όρων του. Η εξίσωση αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως η εξίσωση για το r_k που βρήκαμε παραπάνω.

Αυτή η σύνδεση ανάμεσα στη «δυαδική» μας σπαζοκεφαλιά και στη δρακόντεια καμπύλη μπορεί να μοιάζει κάπως τεχνητή. Προχωρεί, όμως, πολύ περισσότερο από την τυπική αναλογία μεταξύ των αναδρομικών σχέσεων που ορίζουν τις ακολουθίες των κινήσεων στη σπαζοκεφαλιά και τις στροφές της δρακόντειας διαδρομής. Όπως είδαμε, αν μας δοθεί μια 0-1 σειρά μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό, n, της γραμμής του πίνακα στην οποία εμφανίζεται. Αποδεικνύεται ότι η θέση της n-οστής στροφής του κύριου δρακόντειου σχεδίου μπορεί να υπολογιστεί από αυτή τη δυαδική σειρά

Η συνέχεια στη σελ. 59 ⇨