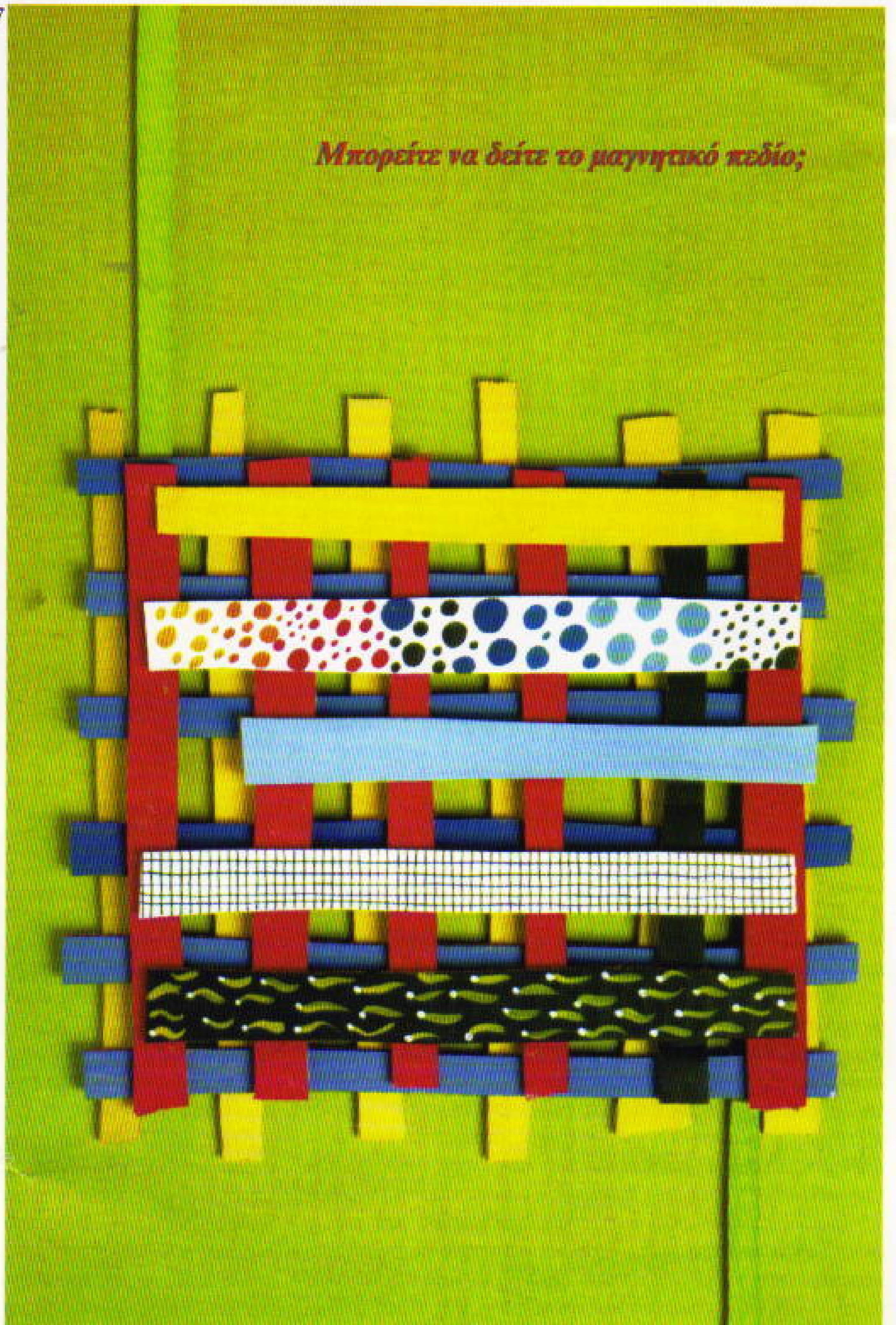
QUANTUM

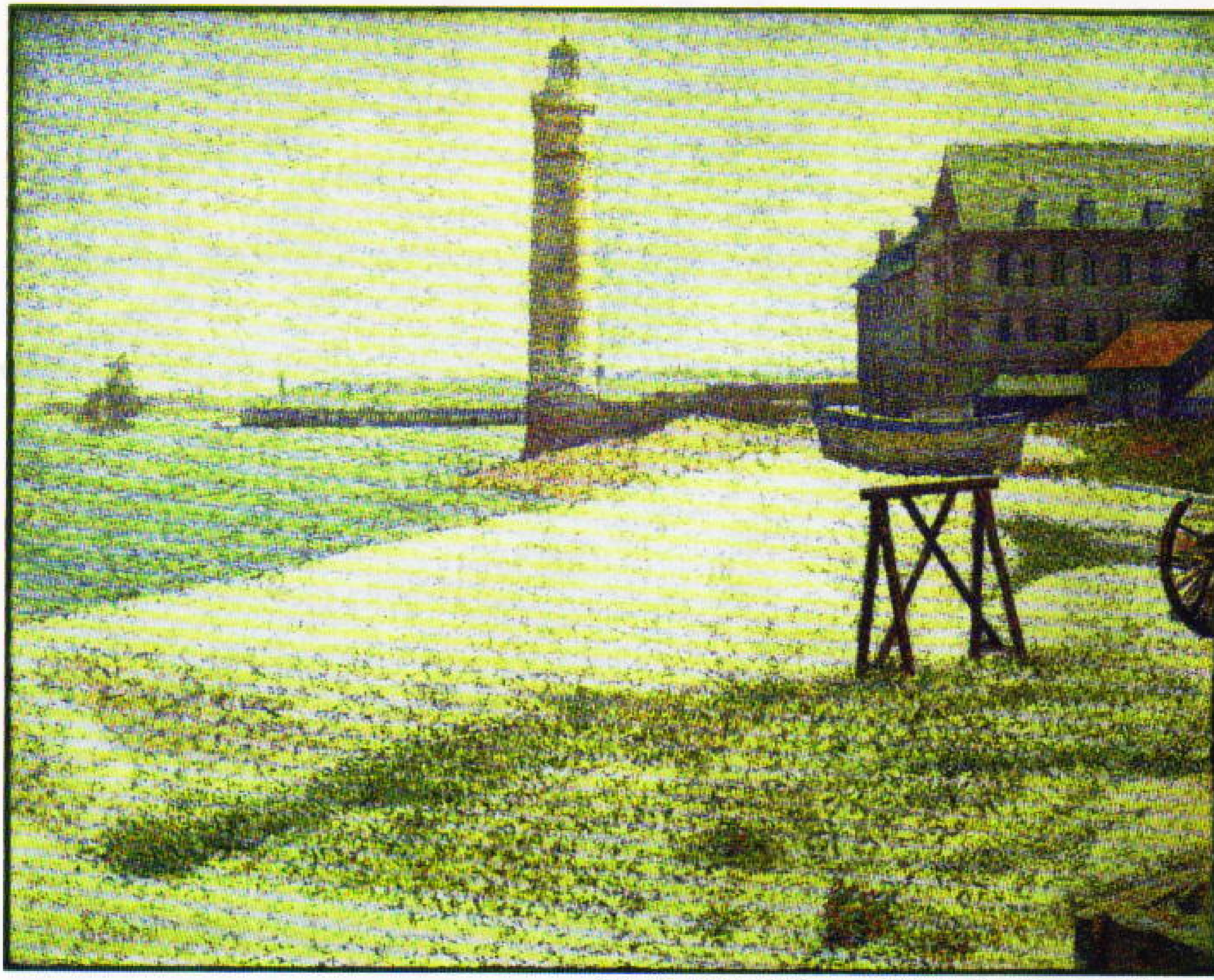
ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1997
ΤΟΜΟΣ 4 / ΤΕΥΧΟΣ 5
1.700 ΔΡΧ.



- *Μαθηματικά μοντέλα και ζώυφια*
- *Αλγόριθμοι ταξινόμησης*
- *Εσωτερική ενέργεια και θερμότητα*
- *Το πλήρες τετράπλευρο*
- *Ένας σωκρατικός διάλογος*
- *Στρόβιλοι στο διάδρομο απογείωσης*
- *Ζωγραφική και πυθαγόρειο θεώρημα*
- *Κατασκευές μόνο με διαβήτη*
- *Ένα πορτρέτο του Poisson*

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ



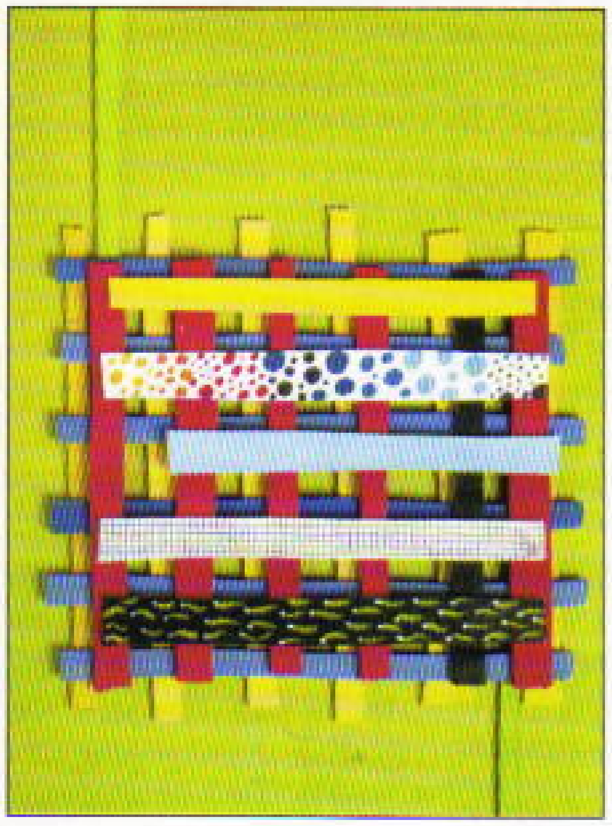
Ο φάρος στο Ονφλέρ (1886), του Ζωρζ Σερά

ΟΠΩΣ ΟΛΟΙ ΟΙ ΙΜΠΡΕΣΙΟΝΙΣΤΕΣ ΓΕΝΙΚΑ, ΕΤΣΙ ΚΑΙ Ο ΖΩΡΖ Σερά (1859-1891) απολάμβανε να παρατηρεί το φως και τις επιδράσεις του. Απ' ό,τι φαίνεται, όμως, το ενδιαφέρον του Σερά για το συγκεκριμένο ζήτημα έφτανε σε μεγαλύτερα «τεχνικά» βάθη απ' ό,τι εκείνο των υπολοίπων. Από πολύ νωρίς στη σύντομη σταδιοδρομία του εξοικειώθηκε με το έργο αρκετών ελβετών ειδικών της αισθητικής, ένας από τους οποίους μελέτησε τη σχέση μεταξύ γραμμών και μορφών, ενώ κάποιος άλλος συνδύασε τα μαθηματικά με τη μουσικολογία. Αργότερα γνώρισε τον χημικό Michel-Eugène Chevreul, ο οποίος εκείνη την εποχή ήταν 100 ετών, και ερεύνησε τις θεωρίες του για το φως. Συγκεκριμένα, ο Σερά πειραματίστηκε με τα αποτελέσματα που μπορεί να προκύψουν με τα τρία κύρια χρώματα —κίτρινο, κόκκινο και γαλάζιο— και τα συμπληρωματικά τους. Τελικά ανέπτυξε την τεχνική (τον λεγόμενο πουαντιγισμό) της παράθεσης μικρών στιγμάτων από καθαρά χρώματα. Με αυτό τον τρόπο, το θέμα δεν είναι δυνατόν να διακριθεί από μια φυσιολογική απόσταση παρατήρησης, πλην όμως ο πίνακας ως όλον αποκτά παλμό και φαίνεται σαν να λαμπυρίζει.

Το γεγονός ότι το ανθρώπινο μάτι συνδυάζει τα μικρά στίγματα χρώματος σε ένα εντελώς διαφορετικό χρώμα —όταν τα βλέπει από την κατάλληλη απόσταση— έχει αξιοποιηθεί σ' ένα «έργο τέχνης» που μπορούμε να βρούμε σχεδόν σε κάθε σπίτι: στην έγχρωμη τηλεόραση. Το άρθρο με τίτλο «Μπορείτε να δείτε το μαγνητικό πεδίο;» εξερευνά το συγκεκριμένο φαινόμενο, αναλύει τις εσώτερες λειτουργίες της έγχρωμης τηλεόρασης και θέτει ορισμένα ενδιαφέροντα ερωτήματα. Γυρίστε στη σελ. 26.

QUANTUM

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1997 ΤΟΜΟΣ 4 / ΤΕΥΧΟΣ 5



Εικονογράφηση: Vasily Vlasov

Το πολύχρωμο πλέγμα του εξωφύλλου μας είναι μια ευφάνταστη αναπαράσταση ενός αντικειμένου που μάλλον δεν λείπει από κανένα σπίτι. Πρόκειται για τη μάσκα σκιάς της οθόνης μιας έγχρωμης τηλεόρασης. Και, ίσως για να υποδηλωθεί η παροδικότητα της τηλεοπτικής εικόνας, το «ίδιο» πλέγμα αναπαράγεται στη σελ. 27. Η εντύπωση είναι αρκετά διαφορετική, και, βέβαια, γι' αυτόν ακριβώς το λόγο η τηλεόραση μπορεί να δείχνει «κινούμενες» εικόνες. Στην πραγματικότητα, δείχνει σταθερές εικόνες που εμφανίζονται ταχύτατα η μια μετά την άλλη (σχεδόν όπως στον κινηματογράφο).

Λέγεται ότι η τηλεόραση είναι ένα παράθυρο από το οποίο μπορούμε να δούμε όλο τον κόσμο. Ξέρετε όμως ότι μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να δούμε και το μαγνητικό πεδίο; Για να μάθετε πώς γίνεται αυτό, διαβάστε το άρθρο της σελ. 26.

ΑΡΘΡΑ

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

O ΚΟΣΜΟΣ ΤΩΝ ΚΒΑΝΤΩΝ

Μια άλλη ματιά

«Παραμένω εν πλήρει συγχύσει αθώος.»
—Μιχάλης Κατσαρός

Nicholas Humphrey

«ΠΟΣΕΣ ΦΟΡΕΣ ΣΟΥ ΕΧΩ ΠΕΙ», παρατήρησε ο Σέρλοκ Χολμς στο δόκτορα Γουότσον, «πως όταν έχεις εξαλείψει το αδύνατο, οτιδήποτε μένει, όσο απίθανο κι αν φαίνεται, πρέπει να είναι η αλήθεια;». Και πόσο συχνά πρέπει να υπενθυμίζουμε ότι αυτό είναι ένα αξίωμα που το αγνοούν εν γένει τα ανθρώπινα όντα;

Ιδού ένα παράδειγμα για του λόγου το αληθές. Στο Σχήμα 1 φαίνεται η φωτογραφία ενός παράξενου αντικειμένου, που δημιουργήθηκε πριν από λίγα χρόνια στο εργαστήριο του γνωστού βρετανού νευροψυχολόγου καθηγητή Richard Gregory. Τι αντιλαμβάνεστε ότι απεικονίζει; Ποια εξήγηση οικοδομεί η νόησή σας με βάση τα δεδομένα που φτάνουν στα μάτια σας;

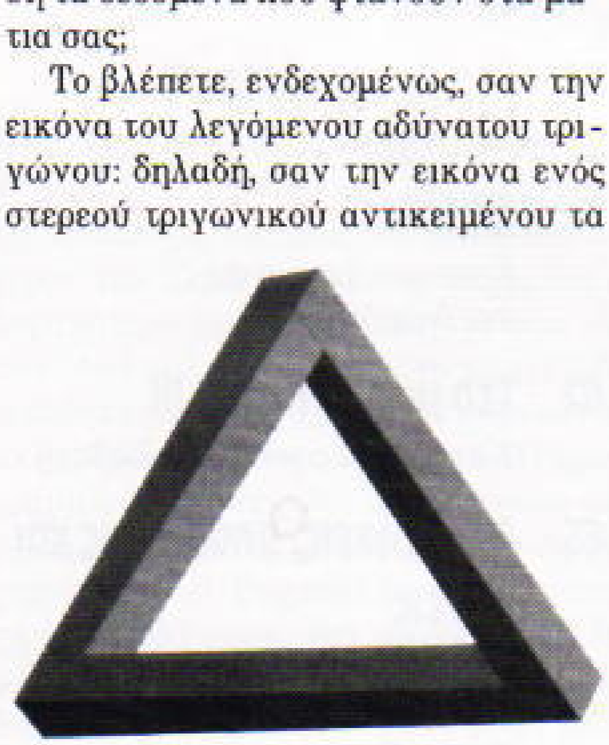
Το βλέπετε, ενδεχομένως, σαν την εικόνα του λεγόμενου αδύνατου τριγώνου: δηλαδή, σαν την εικόνα ενός στερεού τριγωνικού αντικειμένου τα μέρη του οποίου δεν παρουσιάζουν κανένα πρόβλημα όντας απομονωμένα το ένα από το άλλο, πλην όμως το σύνολό τους αρνείται πεισματικά να αποκτήσει νόημα —με άλλα λόγια, ένα αντικείμενο που θα ήταν αδύνατον να υπάρξει στο συνήθη τρισδιάστατο χώρο.

Γεγονός ωστόσο παραμένει ότι το εν λόγω αντικείμενο όντως υπάρχει στο συνήθη χώρο. Η εικόνα δεν είναι παρά η φωτογραφία ενός υπαρκτού αντικειμένου, η οποία δεν έχει ρετουσαριστεί· έχει τραβηχτεί σε πραγματικές συνθήκες και δεν συνδέεται με κανενός είδους οπτική παραπλάνηση. Πράγματι, αν μπορούσατε να βρίσκεστε στη θέση της φωτογραφικής μηχανής τη στιγμή που κλείνει ο φωτοφράκτης, θα βλέπατε το αντικείμενο όπως ακριβώς φαίνεται πάνω στη σελίδα.

Πώς πρέπει να αντιμετωπίσει κανείς αυτό το φαινομενικό παράδοξο; Πρέπει ίσως (με ευρύνοια και εμπιστοσύνη στην προσωπική σας εμπειρία) να πιστέψετε αυτό που το δίχως άλλο βλέπετε, να αποδεχτείτε ότι όντως υπάρχει αυτό που ανέκαθεν πιστεύατε πως δεν μπορούσε να υπάρξει, και να εγκαταλείψετε τις προ πολλού υφιστάμενες υποθέσεις σας σχετικά με τη δομή του «φυσιολογικού» κόσμου; Ή μήπως, αντίθετα, λαμβάνοντας σοβαρά υπόψη τη ρήση του Σέρλοκ Χολμς, θα ήταν προτιμότερο να προβάλετε από θέσεις αρχής στιβαρή αντίσταση έναντι του αδυνάτου και να αναζητήσετε το απίθανο;

Η απάντηση, φυσικά, είναι ότι πρέπει να κάνετε το δεύτερο. Και τούτο επειδή είναι γεγονός ότι ο Gregory δεν δημιούργησε ένα «παραφυσιολογικό» αντικείμενο που αψηφεί τους κανόνες του τρισδιάστατου χώρου, αλλά απλώς ένα εντελώς φυσιολογικό αντικείμενο που αψηφεί τους κανόνες της ανθρώπινης προσδοκίας. Το αληθινό σχήμα του «απίθανου τριγώνου» του Gregory αποκαλύπτεται από μιαν άλλη θέση της φωτογραφικής μηχανής, στο Σχήμα 2.

Όπως αποδεικνύεται, είναι ένα εξαιρετικά ασύνηθες αντικείμενο. Για να προκύψει το Σχήμα 1, το αντικείμενο φωτογραφήθηκε από εξαιρετικά ασυνήθη θέση (χρειάστηκε να τοποθετηθεί η φωτογραφική μηχανή στη μία και μοναδική θέση από την οποία το αντικείμενο φαίνεται έτσι). Νά το όμως. Και τώρα που γνωρίσατε την αληθινή λύση, δύσκολα θα σας ξαναπιάσουν κορόιδο!



Σχήμα 1

Σχήμα 2

Μακάρι νά 'ταν έτσι! Κοιτάξτε το Σχήμα 2. Ξανακοιτάξτε τώρα το Σχήμα 1. Τι βλέπετε; Σχεδόν με απόλυτη βεβαιότητα, ό,τι ακριβώς και πριν: την αδυνατότητα μάλλον παρά την απιθανότητα! Παρά την καθοδήγησή σας προς την ορθή κατεύθυνση, εσείς αμέριμνα, σχεδόν απερίσκεπτα, εξακολουθείτε να «δίνετε νόημα» στα δεδομένα κατά τρόπο ανόητο. Όπως φαίνεται, η νόησή σας αδυνατεί να αποφύγει την ελκυστικά απλή —αν και παράλογη— ερμηνεία και να επιλέξει την απωθητικά περίπλοκη —αν και λογική— ερμηνεία. Η λογική και ο κοινός νους προορίζονται να παίζουν δευτερεύοντα ρόλο στο αντιληπτικό ιδεώδες της ολότητας και της συμπλήρωσης.

Υπάρχουν πάμπολλα παραδείγματα στον ευρύτερο χώρο της ανθρώπινης πολιτικής και του πολιτισμού όπου συμβαίνει κάτι παρόμοιο, όπου, δηλαδή, ο κοινός νους υφίσταται δεινή ήττα από κάποιο είδος γοητευτικά απλής εξηγητικής αρχής —ηθικής, πολιτικής, θρησκευτικής, ή ακόμη και επιστημονικής. Διότι, αν υπάρχει κάτι στο οποίο τα ανθρώπινα όντα είναι επιρρεπή (ίσως θα μπορούσαμε να πούμε ικανά), αυτό είναι το να μιμούνται το χειριστή της φωτογραφικής μηχανής που τράβηξε τη φωτογραφία του Σχήματος 1, και να ελίσσονται ώστε να λάβουν τη μία και μόνη ιδεολογική θέση από την οποία μια αδύνατη, ακόμη και άτοπη εξήγηση των «στοιχείων της ζωής» συμβαίνει να φαίνεται γοητευτικά απλή και στιβαρή.

Αυτή η ειδική θέση μπορεί να ονομάζεται, για παράδειγμα, χριστιανισμός ή μαρξισμός ή εθνικισμός ή ψυχανάλυση —ακόμη και κάποια μορφή επιστήμης, ή επιστημονισμός. Μπορεί να είναι μια ιδεολογική θέση που ελκύει μέρος του ανθρώπινου πληθυσμού για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα ή κάποια που ελκύει το σύνολο του πληθυσμού εις το διηνεκές. Οποια κι αν είναι, όμως, σ' εκείνους τους ανθρώπους που, αναφορικά με ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, ασπάζονται αυτή τη θέση, θα κυριαρχεί η εντύπωση ότι πρόκειται για τον μόνο λογικό χώρο όπου μπορεί κανείς να βρεθεί. «Παραμένω εδώ», είχε πει ο

Η συνέχεια στη σελ. 53 ⇨

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ
και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών,
με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT)
και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

Το *Quantum* εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.

Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα, τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρσακείου (Πανεπιστημίου 49), 105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.700 δρχ.
Ετήσια συνδρομή 9.000 δρχ. για ιδιώτες, 16.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.700 δρχ.

Ψυχρότερο σημαίνει βραδύτερο

Το πόσο θα μας το αποκαλύψει η κομψή και ευρύτατα εφαρμόσιμη εξίσωση του Arrhenius

Henry Schreiber

ΕΝΩ ΑΠΟΛΑΜΒΑΝΕΤΕ ΤΗ ΓΑΛΗνη μιας δροσερής καλοκαιρινής νύχτας στην εξοχή, παρατηρείτε ότι οι γρύλοι δεν θορυβούν και οι πυγολαμπίδες δεν λαμπυρίζουν τόσο έντονα όσο την προηγούμενη νύχτα. Η μόνη εμφανής διαφορά είναι ότι τη χθεσινή νύχτα η ζέστη ήταν μεγαλύτερη. Όσο το σκέφτεστε, πείθεστε ότι τελικά ίσως να μην είναι και τόσο αναπάντεχη η παρατήρησή σας —η κοινή λογική σάς υποβάλλει το συμπέρασμα ότι τα πράγματα τείνουν να επιβραδύνονται όταν ψύχονται. Για να αποτρέψετε την αλλοίωση των τροφίμων, τα αποθηκεύετε στο ψυγείο, και γνωρίζετε ότι οι αρκούδες γίνονται τόσο νωθρές το χειμώνα ώστε περιπίπτουν συνήθως σε μακρά χειμερία νάρκη. Ίσως λοιπόν είναι λογικό το ότι οι τριγμοί των γρύλων είναι λιγότεροι και οι πυγολαμπίδες λαμπυρίζουν σπανιότερα όταν η θερμοκρασία πέφτει. Ωστόσο, αρχίζετε να αναρωτιέστε μήπως είναι δυνατόν να ποσοτικοποιήσετε τις παρατηρήσεις σας. Υπάρχει άραγε κάποιος πολλαπλασιαστικός παράγοντας κατά τον οποίο μειώνονται με την πτώση της θερμοκρασίας οι δραστηριότητες των συγκεκριμένων πλασμάτων; Μπορείτε να κατασκευάσετε κάποιο μοντέλο για την εν λόγω εξάρτηση από τη θερμοκρασία περιγράφοντάς τη με κάποια μαθηματική εξίσωση; Θα μας βοηθούσε άραγε ένα τέτοιο μοντέλο να κατανοήσουμε πώς παράγουν οι

Εικονογράφηση: Sergey Ivanov

γρύλοι τον χαρακτηριστικό ήχο τους και πώς λαμπυρίζουν οι πυγολαμπίδες; Τα παραπάνω ερωτήματα, αλλά και πολλά ακόμη, τριβελίζουν τη σκέψη σας. Και αναζητώντας απαντήσεις, αντιλαμβάνεστε τη σπουδαιότητα των μαθηματικών για την ερμηνεία όσων συμβαίνουν τόσο στον φυσικό κόσμο όσο και στον κόσμο της φυσικής.

Μαθηματικά μοντέλα

Η εκτέλεση παρατηρήσεων και η συλλογή δεδομένων για να υποστηριχτεί ή να αναιρεθεί ορισμένη υπόθεση, όπως λόγου χάρη ότι ο τριγμός των γρύλων εξασθενεί συστηματικά με την πτώση της θερμοκρασίας, αποτελούν κεντρικό στοιχείο της επιστημονικής μεθόδου. Ωστόσο, αντιλαμβάνεστε ότι θα χρειαζόταν πολύς χρόνος και προσπάθεια για να μετρήσουμε την ποσότητα των τριγμών των γρύλων για κάθε βαθμό θερμοκρασίας στην περιοχή, ας πούμε από 10°C ώς 25°C. Ίσως μια καλύτερη προσέγγιση θα ήταν να εκτελέσουμε μετρήσεις για μερικές θερμοκρασίες και, εν συνεχεία, να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο για τα αποτελέσματά μας με τη μορφή μιας μαθηματικής εξίσωσης που να περιγράφει πώς εξαρτάται η συγκεκριμένη συμπεριφορά από τη θερμοκρασία. Σε τελευταία ανάλυση, πολλές σύγχρονες επιστημονικές θεωρίες εξηγούν παρατηρούμενες συμπεριφορές ή ιδιότητες στο γενικό πλαίσιο κάποιας εξίσωσης.

Στο Σχήμα 1 παρουσιάζονται ορισμένα δεδομένα για τις συχνότητες των τριγμών των γρύλων και των λαμπυρισμάτων των πυγολαμπίδων, σε μονάδες τριγμών ανά λεπτό και λαμπυρισμάτων ανά λεπτό, αντίστοιχα. Και οι δύο σχέσεις δείχνουν παρόμοια εξάρτηση από τη θερμοκρασία. Έτσι, μπορείτε να ελπίζετε ότι θα κατορθώσουμε να περιγράψουμε αυτά τα δεδομένα με τη βοήθεια μαθηματικών εξισώσεων.

Πολυωνυμικές, ημιτονοειδείς, εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις, βρίσκονται όλες στη διάθεσή μας για να περιγράψουμε μαθηματικά τις συμπεριφορές πραγμάτων πάσης φύσεως, από ηλεκτρόνια ώς και γρύλους. Κατ' αρχάς ρωτάμε «ποια συνάρτηση συνιστά το καλύτερο μοντέλο για τα δεδομένα του Σχήματος 1;», και κατόπιν «γιατί προσφέρεται αυτή η συνάρτηση;». Συχνά, απλές μαθηματικές θεωρήσεις των νόμων της φύσης επιτρέπουν στους επιστήμονες να κατανοήσουν παράδοξες εκ πρώτης όψεως καταστάσεις. Η συμφωνία με ορισμένο μαθηματικό μοντέλο παρέχει έναν πιθανό κοινό υποκείμενο λόγο για την παρατηρούμενη συμπεριφορά. Με άλλα λόγια, μεγάλο μέρος της φύσης ακολουθεί προκαθορισμένους κανόνες, οι οποίοι με τη σειρά τους είναι δυνατόν να εκφραστούν με συγκεκριμένες μαθηματικές εξισώσεις.

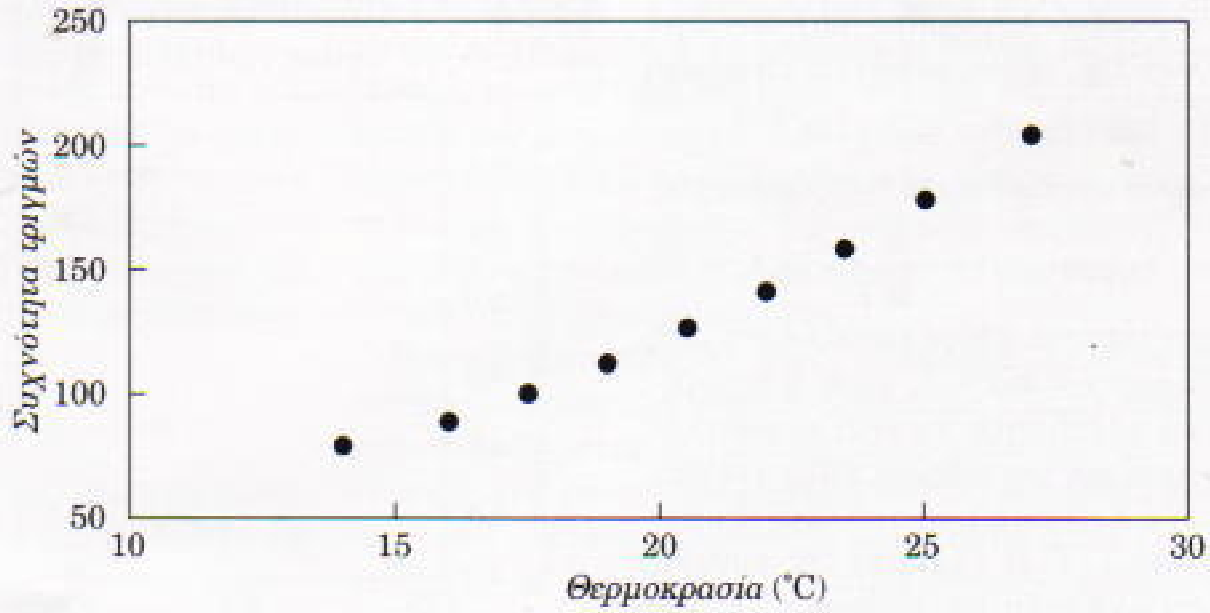
Η εξίσωση του Arrhenius

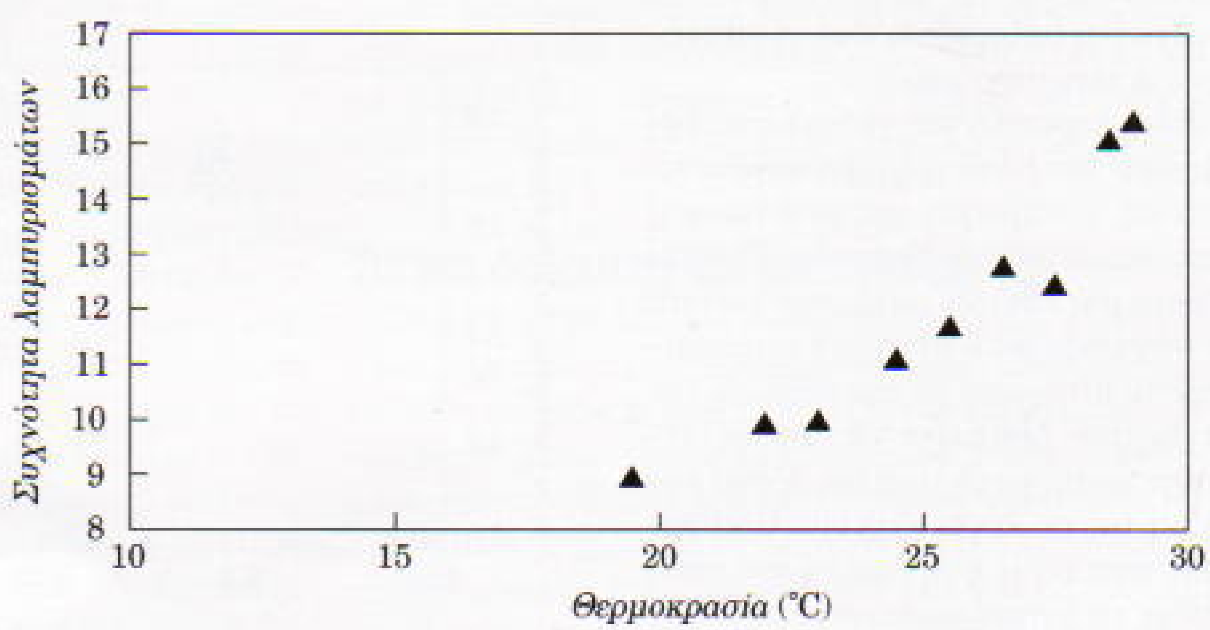
Μπορούμε να ανατρέξουμε σε διάφορες βιβλιογραφικές αναφορές ώστε να δούμε πώς οι άλλοι κατασκευάζουν μοντέλα για να εξηγήσουν την επίδραση της θερμοκρασίας στο πόσο γρήγορα συμβαίνουν τα πράγματα. Πολύ συχνά συναντάμε τη θεωρία του Arrhenius να αιτιολογεί τα θερμικά φαινόμενα μέσω μιας απατηλά απλής εξίσωσης:

$$\textit{ρυθμός} = A\,e^{-E/RT},$$

όπου A και E είναι δύο σταθερές που χαρακτηρίζουν το συγκεκριμένο σύστημα, R η παγκόσμια σταθερά των αερίων, ίση με $8{,}314\ \mathrm{J \cdot mole^{-1} \cdot K^{-1}}$, και T η απόλυτη θερμοκρασία (σε βαθμούς Kelvin: °C συν 273). Αρκετοί επιστήμονες πριν από έναν αιώνα και πλέον ανέπτυξαν την εν λόγω εξίσωση με τη μέθοδο δοκιμής και λάθους, πρώτος όμως ο σουηδός χημικός Svante Arrhenius τη στήριξε σε θεωρητική βάση με τη βοήθεια της θερμοδυναμικής. Ως εκ τούτου, αυτή η θεμελιώδης εξίσωση φέρει τώρα το όνομά του.

Η εξίσωση του Arrhenius γεφυρώνει το χάσμα ανάμεσα στον κόσμο των γρύλων και των πυγολαμπίδων και τον κόσμο των μορίων με τις μαθηματικές αναπαραστάσεις των ρυθμών των *μοριακών αντιδράσεων*. Ο Arrhenius υποστήριξε ότι, για να αντιδράσουν μεταξύ τους τα μόρια,





Σχήμα 1
Εξάρτηση από τη θερμοκρασία των τριγμών των γρύλων και των λαμπυρισμάτων των πυγολαμπίδων.

πρέπει να πληρούνται δύο συνθήκες. Πρώτον, πρέπει να συγκρούονται· δεύτερον, πρέπει να διαθέτουν επαρκή ενέργεια. Επομένως, ο ρυθμός της αντίδρασης εξαρτάται άμεσα από τη συχνότητα A των συγκρούσεων, και από την απόδοσή τους $e^{-E/RT}$. Οι μοριακές συγκρούσεις καθίστανται αποδοτικότερες όταν τα ενεργειακά φράγματα E για την αντίδραση είναι χαμηλά και οι θερμοκρασίες T υψηλές. Η συγκεκριμένη εκθετική συνάρτηση απόδοσης είναι πάντοτε ένα γνήσιο κλάσμα που κυμαίνεται από τιμές που προσεγγίζουν το μηδέν σε χαμηλές θερμοκρασίες έως τιμές που προσεγγίζουν τη μονάδα σε αρκετά υψηλές θερμοκρασίες. Η ακριβής τιμή της παριστά τον «αμοιβαίο ανταγωνισμό» των σχετικών μεγεθών της E (της απαιτούμενης ενέργειας προτού τα μόρια καταφέρουν να αντιδράσουν) και της T (του μέτρου της ενέργειας που διαθέτουν τα μόρια).

Είναι δυνατόν να μετασχηματίσετε την εξίσωση του Arrhenius παίρνοντας τον φυσικό λογάριθμο και των δύο μελών της, οπότε λαμβάνει τη μορφή

$$\ln(\rho\upsilon\theta\mu o\acute{\upsilon}) = \ln A + \ln e^{-E/RT}$$

ή, αφού αναδιατάξετε τους όρους της,

$$\ln(\rho\upsilon\theta\mu o\acute{\upsilon}) = -\frac{E}{R}\frac{1}{T} + \ln A.$$

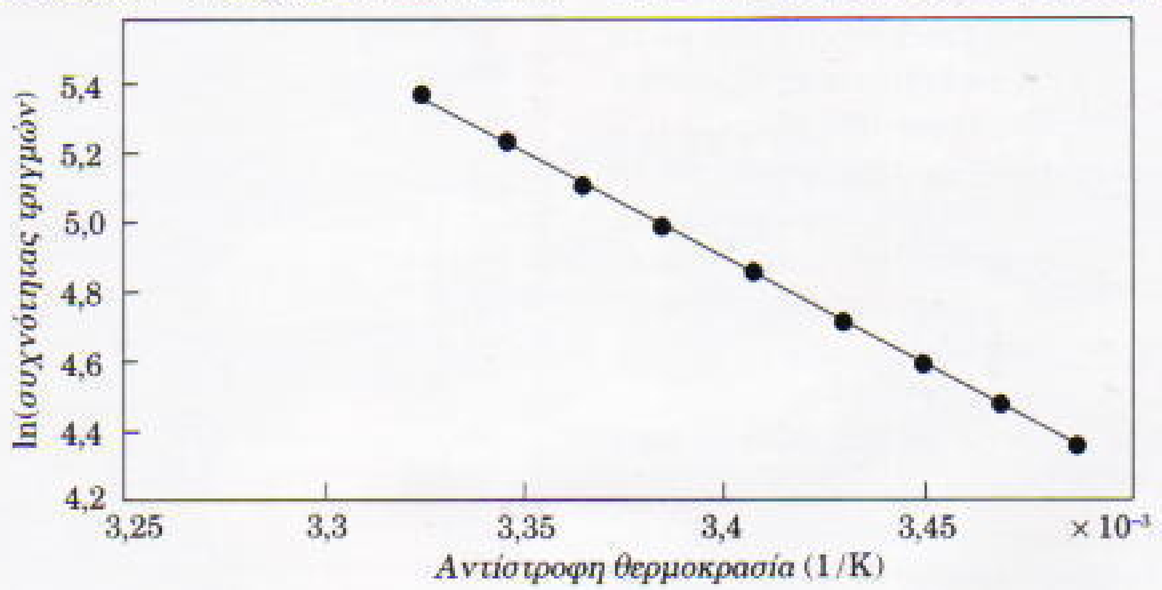
Αυτή παριστά πλέον την εξίσωση μιας ευθείας: $y = mx + b$, όπου η εξαρτημένη μεταβλητή y είναι ο φυσικός λογάριθμος του ρυθμού, και η ανεξάρτητη x η αντίστροφη απόλυτη θερμοκρασία $1/T$. Η κλίση m της ευθείας είναι ανάλογη της ενέργειας E που απαιτείται για την αντίδραση, ενώ η τεταγμένη b εξαρτάται από τη συχνότητα A των συγκρούσεων.

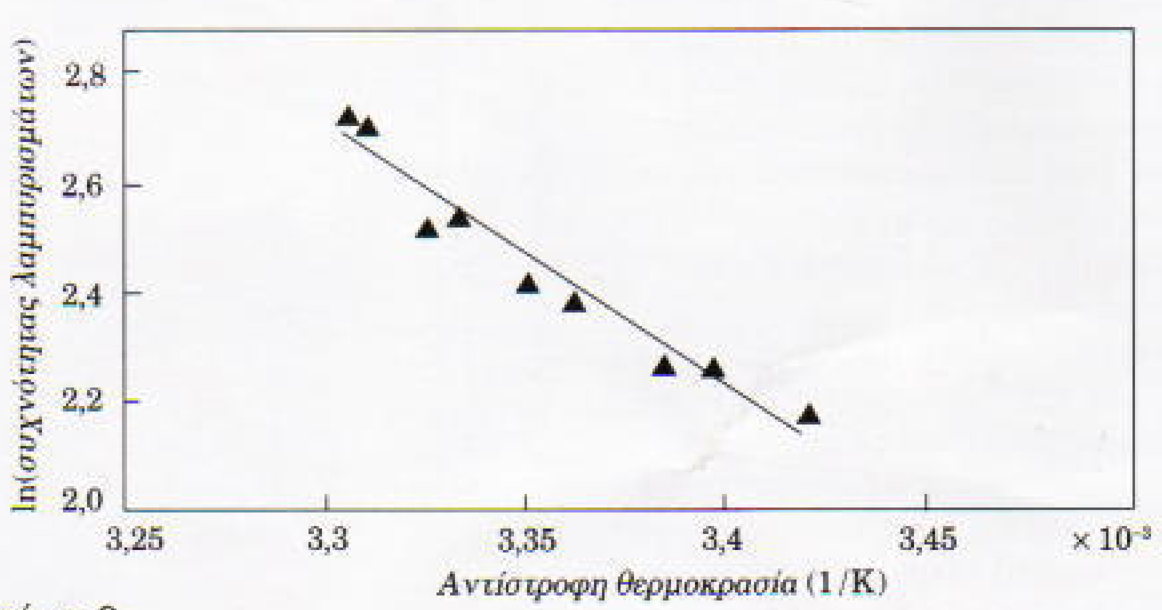
Εάν, παριστώντας γραφικά το λογάριθμο του πόσο γρήγορα συμβαίνει κάτι ως συνάρτηση της αντίστροφης θερμοκρασίας (σε βαθμούς Kelvin) πάρετε μια ευθεία, αυτό σημαίνει ότι το συγκεκριμένο σύστημα συμπεριφέρεται σύμφωνα με την εξίσωση του Arrhenius. Μπορείτε να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή τής E από την κλίση της εν λόγω ευθείας. Όσο μεγαλύτερη είναι η μεταβολή του ρυθμού με τη θερμοκρασία, τόσο μεγαλύτερη η τιμή τής E και τόσο περισσότερη ενέργεια πρέπει να προσφερθεί ώστε να αντιδράσουν τα μόρια. Για να δείτε πώς συλλέγονται δεδομένα για τους ρυθμούς εν σχέσει με τη θερμοκρασία και πώς συσχετίζονται ακολούθως με την εξίσωση του Arrhenius, σας παραπέμπουμε στο εντός πλαισίου ένθετο, όπου περιγράφουμε ένα πείραμα το οποίο μπορεί να πραγματοποιηθεί στο εργαστήριο ή στο σπίτι. Όταν η συμπεριφορά κάποιου συστήματος ακολουθεί την εξίσωση του Arrhenius, αυτό σημαίνει ότι οι ρυθμοί καθορίζονται από τις μοριακές συγκρούσεις σύμφωνα με τα δύο παραπάνω κριτήρια —δηλαδή ότι τα μόρια όντως συγκρούονται, αλλά και ότι χρειάζονται επαρκή ενέργεια προτού αντιδράσουν.

Τριγμοί, λαμπυρίσματα και συγκρούσεις

Στο Σχήμα 2 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις του φυσικού λογαρίθμου της συχνότητας των τριγμών ή των λαμπυρισμάτων ως συναρτήσεων της αντίστροφης θερμοκρασίας για τα δεδομένα του Σχήματος 1 —δηλαδή ελέγχουμε κατά πόσον ακολουθούν όντως την εξίσωση του Arrhenius. Είναι πολύ ευκολότερο να διακρίνετε τη γραμμική εξάρτηση του $\ln(\rho\upsilon\theta\mu o\acute{\upsilon})$ από την $1/T$ στο Σχήμα 2 απ' ό,τι την εκθετική εξάρτηση του ρυθμού από την ίδια μεταβλητή στο Σχήμα 1. Από το Σχήμα 2 καθίσταται προφανές ότι οι τριγμοί των γρύλων και τα λαμπυρίσματα των πυγολαμπίδων διέπονται από τη σχέση του Arrhenius. Μπορείτε επίσης να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών E και A από την κλίση και την τεταγμένη της ευθείας. Η απαιτούμενη ενέργεια για την έναρξη των τριγμών ή των λαμπυρισμάτων ισούται με 50 kJ/mole, όπως προκύπτει από τις κλίσεις των ευθειών του Σχήματος 2. Η συγκεκριμένη τιμή συμφωνεί με τις τιμές της απαιτούμενης ενέργειας που προσδιορίζονται και για άλλες αντιδράσεις, όπως η λεύκανση της κόκκινης χρωστικής τροφίμων.

Επειδή οι ρυθμοί των τριγμών των γρύλων και των λαμπυρισμάτων των πυγολαμπίδων ακολουθούν την εξίσωση Arrhenius, συμπεραίνουμε ότι τα συγκεκριμένα φαινόμενα «ελέγχονται» από μοριακές αντιδράσεις. Οι





Σχήμα 2

Γράφημα κατά Arrhenius για τις συχνότητες των τριγμών των γρύλων και των λαμπυρισμάτων των πυγολαμπίδων.

Μετρώντας πώς επιδρά η θερμοκρασία στην ταχύτητα αντίδρασης

Αυτό το απλό πείραμα επιδεικνύει τη συλλογή και την επεξεργασία δεδομένων για να ελέγξετε την εξίσωση του Arrhenius. Είναι ευκολότερο από την προσπάθεια να πείσετε τους γρύλους και τις πυγολαμπίδες να συνεργαστούν μαζί σας και, επιπλέον, μπορεί να διεξαχθεί μέσα στα στενά όρια ενός εργαστηρίου ή και της κουζίνας σας ακόμη. Όποτε εκτελείτε παρόμοια πειράματα, να φοράτε πάντοτε προστατευτικά γυαλιά για τα μάτια και να λαμβάνετε μέτρα ασφαλείας, όπως η επίβλεψη από ενηλίκους.

Εάν αναμείξετε διαλύματα λευκαντικού και κόκκινης χρωστικής ουσίας τροφίμων, η κόκκινη χρωστική θα ξεθωριάσει τελικά, και θα πάρετε ένα άχρωμο διάλυμα. Το λευκαντικό οξειδώνει την κόκκινη χρωστική σε ένα άχρωμο προϊόν, όπως περίπου συμβαίνει όταν προσθέσετε λευκαντικό στην πλύση σας για να γίνουν λευκότερα τα ρούχα. Η ταχύτητα με την οποία εξελίσσεται η συγκεκριμένη αντίδραση εξαρτάται τόσο από τις συγκεντρώσεις του λευκαντικού και της χρωστικής τροφίμων όσο και από τη θερμοκρασία. Ωστόσο, εσείς επικεντρώνετε την προσοχή σας αποκλειστικά στην επίδραση της θερμοκρασίας διατηρώντας σταθερές τις ποσότητες των αντιδρώντων.

Στο παρόν πείραμα μετράτε το χρόνο που απαιτείται ώστε να προχωρήσει η αντίδραση ώς ένα ορισμένο σημείο —δηλαδή ώσπου να λευκανθεί ορισμένη ποσότητα κόκκινης χρωστικής. Είναι ανάλογο με τη χρονομέτρηση ενός δρομέα σε αγώνα 100 μέτρων —τότε είναι δυνατόν να υπολογιστεί η (μέση) ταχύτητα του δρομέα από το χρόνο που χρειάστηκε για να καλύψει τη συγκεκριμένη απόσταση. Όσο βραχύτερος είναι ο χρόνος τόσο ταχύτερος ο δρομέας. Η ταχύτητα μιας αντίδρασης ισούται επίσης με την απόσταση που διανύει η αντίδραση ανά μονάδα χρόνου.

Διαλύματα αναφοράς

Παρασκευάστε απόθεμα διαλύματος της κόκκινης χρωστικής τροφίμων αναμειγνύοντας 4 σταγόνες από τη συγκεκριμένη χρωστική με 100 ml νερό. Ομοίως, παρασκευάστε απόθεμα διαλύματος λευκαντικού αναμειγνύοντας 25 σταγόνες από οποιοδήποτε είδος λευκαντικού οικιακής χρήσης με 100 ml νερό. Χρησιμοποιήστε ποτήρια ή πλαστικά κύπελλα για τα διαλύματα.

Εξασφαλίστε δύο δοκιμαστικούς σωλήνες 13×100 mm (ή, εναλλακτικά, πλαστικά κύπελλα των 100 cm^3). Γράψτε σε μια ετικέτα το γράμμα Α και κολλήστε τη σε έναν από τους δοκιμαστικούς σωλήνες· χαράξτε μια γραμμή στα 3 mm και μιαν άλλη στα 6 mm πάνω από τον πυθμένα του. Γεμίστε τον με το διάλυμα της κόκκινης χρωστικής ώς τη γραμμή στα 3 mm, προσθέστε εν συνεχεία νερό ώς τη γραμμή στα 6 mm και αναταράξτε καλά. Κολλήστε μια ετικέτα που γράφει Τ στον δεύτερο δοκιμαστικό σωλήνα· χαράξτε γραμμές σε ύψος 0,75 mm και 6 mm από τον πυθμένα του. Γεμίστε τον πάλι με διάλυμα της κόκκινης χρωστικής ώς την πρώτη γραμμή, αραιώστε με νερό ώς τη γραμμή στα 6 mm και αναμείξτε. Ο δοκιμαστικός σωλήνας Α (αρχικός) θα παριστά το χρώμα των μειγμάτων πριν από την αντίδραση, ενώ ο δοκιμαστικός σωλήνας Τ (τελικός) θα παριστά το χρώμα, ένα πολύ ανοιχτότερο κόκκινο, αφού η αντίδραση έχει διανύσει αυθαίρετη απόσταση. Όπως αποδεικνύεται, η συγκεκριμένη απόσταση είναι να έχει απομείνει το 25% (τα 0,75 mm είναι το 25% των 3 mm) της κόκκινης χρωστικής ή, με άλλα λόγια, η αντίδραση να έχει προχωρήσει ώς το 75% της ολοκλήρωσής της. Στο πείραμα αυτό θα χρονομετρήσετε (με ρολόι, με ακρίβεια δευτερολέπτου) το διάστημα που απαιτείται για να μεταβεί ένα μείγμα από την αρχική κατάσταση χρώματος Α στην τελική κατάσταση χρώματος Τ σε διάφορες θερμοκρασίες.

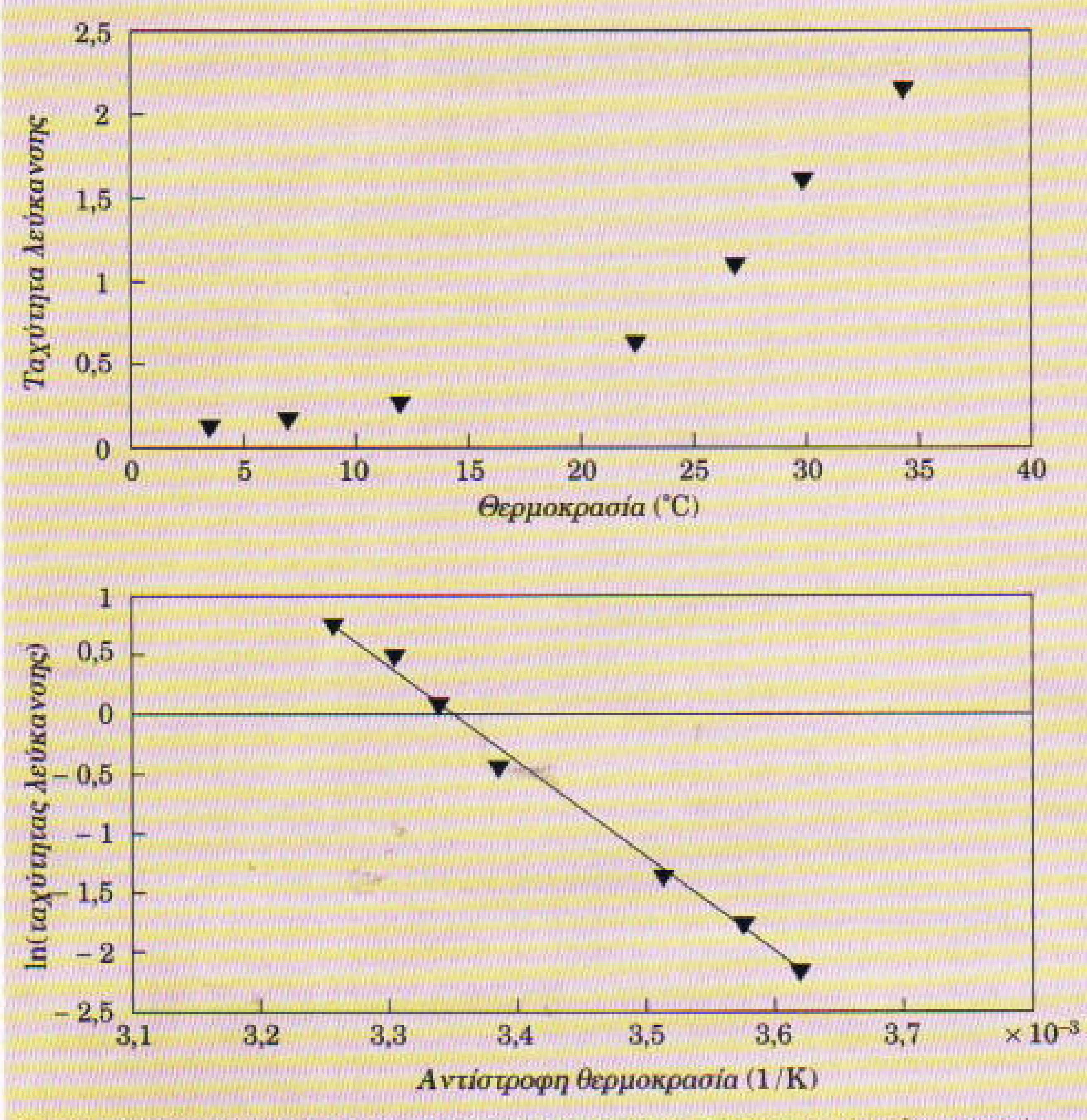
Η αντίδραση

Βρείτε δύο ακόμη δοκιμαστικούς σωλήνες των 13×100 mm (ή πλαστικά κύπελλα των 100 cm^3). Σημαδέψτε τον καθέναν σε ύψος 3 mm από τον πυθμένα του. Μεταγγίστε στον έναν δοκιμαστικό σωλήνα μέρος από το απόθεμα του διαλύματος της κόκκινης χρωστικής ώς το σημάδι των 3 mm. Στον άλλο κάντε το ίδιο, αλλά από το απόθεμα του διαλύματος του λευκαντικού. Αδειάστε το λευκαντικό στην κόκκινη χρωστική τροφίμων και χρονομετρήστε ενόσω αναταράζετε. Καταγράψτε το χρόνο που απαιτήθηκε ώστε το χρώμα που αρχικά ήταν ισοδύναμο με το χρώμα του σωλήνα Α να ξεθωριάσει ώσπου να γίνει ισοδύναμο με το χρώμα του σωλήνα Τ. Μετρήστε τη θερμοκρασία του μείγματος με θερμόμετρο —θα πρέπει να έχει θερμοκρασία δωματίου. Εν συνεχεία, μπορείτε να χύσετε το μείγμα που προέκυψε από την αντίδραση στην αποχέτευση και να ξεπλύνετε με νερό τους δύο σωλήνες ώστε να τους ξαναχρησιμοποιήσετε.

Επαναλάβατε αρκετές φορές το πείραμα, αλλά σε υψηλότερες και χαμηλότερες θερμοκρασίες. Για παράδειγμα, αφήστε επί αρκετά λεπτά τους δύο δοκιμαστικούς σωλήνες που περιέχουν 3 mm από τα αντίστοιχα αποθέματα διαλυμάτων κόκκινης χρωστικής και λευκαντικού στο ψυγείο, στον καταψύκτη, σε λουτρό θερμού νερού, κ.ο.κ., πριν από την ανάμειξη, τη χρονομέτρηση και την καταγραφή της θερμοκρασίας. Χρονομετρήστε τη μετάβαση από την αρχική κατάσταση χρώματος Α στην τελική κατάσταση χρώματος Τ, συγκρίνοντας το χρώμα του μείγματος κατά την εξέλιξη της αντίδρασης με εκείνο του διαλύματος αναφοράς Τ.

Τυπικά δεδομένα και αποτελέσματα

Τελικά θα συλλέξετε δεδομένα ανάλογα με αυτά που αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα. Οι ακριβείς χρόνοι που μετρήσατε μπορεί να εξαρτώνται από την «ισχύ» των διαλυμάτων (λόγω των διαφορών ανάλογα με τη συγκεκριμένη «μάρκα» λευκαντικού και χρωστικής τροφίμων οικιακής χρήσης). Μολαταύτα, τα δεδομένα πρέπει να επιβεβαιώσουν την υπόθεσή σας ότι, για να διανύσει η αντίδραση ορισμένη απόσταση, απαιτείται λιγότερος χρόνος σε υψηλότερες θερμοκρασίες και, αντίθετα, περισσότερος σε χαμηλότερες θερμοκρασίες. Επειδή η αντίδραση,



Ταχύτητα λεύκανσης για την κόκκινη χρωστική τροφίμων: εξάρτηση από τη θερμοκρασία.

ταχυτήτων ως συνάρτηση της αντίστροφης θερμοκρασίας (σε βαθμούς Kelvin). Όπως φαίνεται στο σχήμα, τα πειραματικά σημεία ορίζουν μιαν ευθεία. Κατά συνέπεια, η εξίσωση του Arrhenius παρέχει μιαν εύλογη εξήγηση για τα δεδομένα. Υπολογίζετε την απαιτούμενη ενέργεια E για τη συγκεκριμένη αντίδραση πολλαπλασιάζοντας την κλίση της ευθείας επί την αριθμητική τιμή τής R και αλλάζοντας το πρόσημο —επειδή η κλίση της ευθείας ισούται με $-E/R$. Σ' αυτή την περίπτωση, η E ισούται με 70 kJ/mole. Για να λάβει χώρα η αντίδραση ανάμεσα στο λευκαντικό και την κόκκινη χρωστική τροφίμων, πρέπει πρώτα να συγκρουστούν τα μόρια των δύο αντιδρώντων· αλλά και πάλι μόνο ορισμένο πλήθος συγκρούσεων θα είναι αποτελεσματικές —μόνο εκείνες που τα συγκρουόμενα μόριά τους διαθέτουν ενέργεια τουλάχιστον 70 kJ/mole. Ο λόγος που η αντίδραση εξελίσσεται βραδύτερα σε χαμηλότερες θερμοκρασίες είναι ότι μικρότερο ποσοστό μορίων διαθέτει ενέργεια που υπερβαίνει την κρίσιμη τιμή των 70 kJ/mole.

στους χρόνους που μετρήθηκαν, προχωρεί ώς το 75%, υπολογίζετε τις σχετικές ταχύτητες διαιρώντας το 75% με τους αντίστοιχους χρόνους. Έτσι, βρίσκετε τη μέση ταχύτητα ως ποσοστό προόδου ανά δευτερόλεπτο. Με άλλα λόγια, η αντίδραση εξελίσσεται ταχέως σε υψηλές θερμοκρασίες και βραδέως σε χαμηλές θερμοκρασίες. Εάν παραστήσετε γραφικά τις συγκεκριμένες ταχύτητες (σε μονάδες ποσοστού επί τοις % ανά δευτερόλεπτο) ως συνάρτηση της θερμοκρασίας, θα πάρετε μια καμπύλη (όπως αυτή στο παραπάνω σχήμα) με την ίδια μορφή όπως εκείνη που περιγράφει τον τριγμό των γρύλων και τα λαμπυρίσματα των πυγολαμπίδων στο Σχήμα 1.

Για να ελέγξετε την εξίσωση του Arrhenius, σχεδιάζετε τη γραφική παράσταση του φυσικού λογαρίθμου των

θ (°C)	t (s)	1/T (K⁻¹)	ταχύτητα (%/s)	ln(ταχύτητας)
3,5	690	0,00362	0,11	−2,22
7,0	474	0,00357	0,16	−1,84
12,0	292	0,00351	0,26	−1,36
22,5	121	0,00338	0,62	−0,48
27,0	69	0,00333	1,09	+0,08
30,0	47	0,00330	1,60	+0,47
34,5	35	0,00325	2,14	+0,76

Πειραματικά αποτελέσματα για την αντίδραση της κόκκινης χρωστικής τροφίμων με το λευκαντικό.

τριγμοί των γρύλων και τα λαμπυρίσματα των πυγολαμπίδων αποτελούν αντανακλάσεις όσων λαμβάνουν χώρα στον κόσμο των μορίων. Κατά συνέπεια, οι υποκείμενοι μηχανισμοί εμπλέκουν κατ' αρχάς τις συγκρούσεις μορίων, και εν συνεχεία τις αναδιατάξεις των μορίων αυτών κατά τις αντιδράσεις που έχουν αποτέλεσμα τους τριγμούς ή τα λαμπυρίσματα. Η εξίσωση του Arrhenius, αν και οι ρίζες της απλώνονται στον κόσμο των μορίων, εκδηλώνεται περιγράφοντας το πόσο γρήγορα συμβαίνουν διάφορα γεγονότα στον μακρόκοσμο. Τα μαθηματικά συμβάλλουν σε μια τέτοια περιγραφή. Θα ήταν δύσκολο να συλλάβουμε άμεσα την εξάρτηση της συχνότητας των τριγμών των γρύλων από τη θερμοκρασία, εκτός κι αν υιοθετούσαμε ως μέτρο για τους μεν τριγμούς το λογάριθμο του πλήθους τους, για δε τη θερμοκρασία την αντίστροφη θερμοκρασία.

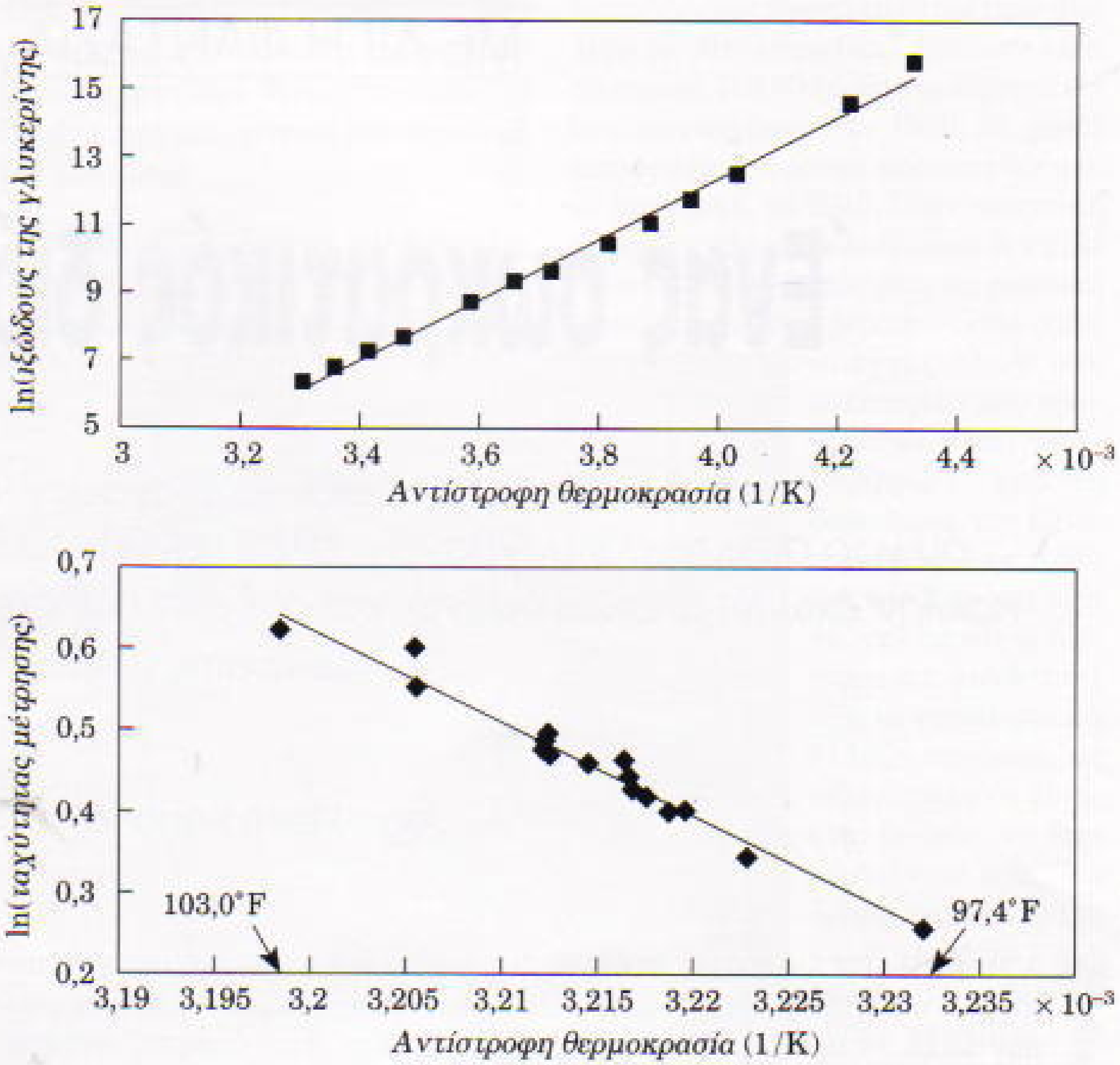
Ο καθορισμός της μαθηματικής εξίσωσης που «μοντελοποιεί» μια δραστηριότητα μας προσφέρει το εξής πρόσθετο πλεονέκτημα: μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συγκεκριμένη εξίσωση για να παρεκτείνουμε τα πειραματικά μας αποτελέσματα. Υποθέστε, για παράδειγμα, ότι θέλετε να μάθετε την αναμενόμενη συχνότητα των τριγμών των γρύλων στους 30°C, θερμοκρασία η οποία κείται κάπως έξω από την περιοχή που εξετάσατε πειραματικά. Η εξίσωση της ευθείας του Σχήματος 3 είναι

$$\ln(\textit{συχνότητας τριγμών}) = -\frac{6.420}{T} + 26{,}72.$$

Εάν τώρα αντικαταστήσετε τη θερμοκρασία των 303 K (273 + 30°C) στην παραπάνω εξίσωση, βρίσκετε αμέσως ένα ρυθμό 253 τριγμών ανά λεπτό. Άλλοι επιστήμονες μπορούν να ελέγξουν τέτοιου είδους μαθηματικά μοντέλα —άρα και την υποκείμενη υπόθεσή μας για την προέλευση των τριγμών των γρύλων— συγκρίνοντας τις προβλέψεις μας με τα αποτελέσματα άμεσων μετρήσεων.

Ροή, απαρίθμηση και περισσότερες συγκρούσεις

Εξακριβώσατε ότι οι ρυθμοί των τριγμών των γρύλων και των λαμπυρισμάτων των πυγολαμπίδων, όπως και η ταχύτητα λεύκανσης της κόκκινης χρωστικής τροφίμων, είναι δυνατόν να εξηγηθούν από την εξίσωση του Arrhenius, και συνεπώς τη βάση τους την αποτελούν οι συγκρούσεις και οι αναδιατάξεις των μορίων. Ποιες άλλες δραστηριότητες ακολουθούν την εξίσωση του Arrhenius; Η εξάρτηση των ταχυτήτων των περισσότερων χημικών αντιδράσεων από τη θερμοκρασία —για παράδειγμα, η διάσπαση του υδροϊωδίου (HI) σε υδρογόνο (H_2) και ιώδιο (I_2)— διέπεται ομοίως από την εν λόγω εξίσωση. Σε τελευταία ανάλυση, για να αρχίσει η αντίδραση, πρέπει πρώτα να συγκρουστούν δύο μόρια υδροϊωδίου, αλλά πρέπει να διαθέτουν ορισμένη ποσότητα ενέργειας ώστε να ενεργοποιηθούν στη μεταβατική κατάσταση προτού αναδιαταχθούν τα άτομά τους. Η εξίσωση του Arrhenius διέπει ευρύ φάσμα δραστηριοτήτων, από τα πιο διαφορετικά επιστημονικά πεδία: η διάχυση της ύλης μέσα σε υγρό, οι παλμοί της καρδιάς μιας χελώνας, η σκλήρυνση της τσιμεντοκονίας, η συχνότητα των εγκεφαλικών κυμάτων α του ανθρώπου, ο ρυθμός κίνησης των μυρμηγκιών —και ο κατάλογος συνεχίζεται. Η εξίσωση του Arrhenius περιγράφει την επίδραση της θερμοκρασίας σε όλα αυτά τα φαινόμενα.



Σχήμα 3
Γράφημα κατά Arrhenius για το ιξώδες της γλυκερίνης και την ταχύτητα με την οποία μετρά ένας άνθρωπος.

Το Σχήμα 3 δείχνει ότι η εξίσωση του Arrhenius ισχύει επιπλέον τόσο για το ιξώδες ενός υγρού όσο και για το ρυθμό με τον οποίο μετρά ένας άνθρωπος. Στην πρώτη περίπτωση, θα μπορούσατε να υποστηρίξετε ότι το γράφημα κατά Arrhenius εμφανίζεται αντεστραμμένο. Αναλογιστείτε, όμως, ότι το ιξώδες αποτελεί μέτρο της αντίστασης που προβάλλει το υγρό στη ροή. Η ρευστότητα του υγρού, που συνιστά μέτρο του ρυθμού της ροής, είναι το αντίστροφο του ιξώδους, γεγονός που απαλείφει αυτή τη φαινομενική ανακολουθία. Ακόμη και η επίδραση της θερμοκρασίας καθενός μας στην ταχύτητα με την οποία μετράμε από το ένα ώς το δέκα, και συνεπώς στην αντίληψή μας για το χρόνο, ακολουθεί την εξίσωση του Arrhenius. Το εν λόγω μαθηματικό μοντέλο έχει όντως ευρύτατο πεδίο εφαρμογής! Γιατί άραγε; Επειδή εμπλέκεται παντού το κοινό χαρακτηριστικό των συγκρούσεων των μορίων, αλλά και της ρήξης δεσμών και της σύναψης νέων στο εσωτερικό τους ώστε να εκκινήσει η δραστηριότητα.

Είναι δυνατόν να επινοήσετε και άλλα πειράματα με τα οποία να ελέγξετε την εξίσωση του Arrhenius. Για παράδειγμα, μπορείτε να μετρήσετε εύκολα το ρυθμό σήψης των φρούτων ως συνάρτηση της επικρατούσας θερμοκρασίας. Πάρτε ένα τσαμπί μπανάνες. Χωρίστε τες, υποθέτοντας ότι βρίσκονται στο ίδιο αρχικό επίπεδο ωρίμασης. Κρατήστε μία σε θερμοκρασία δωματίου, μιαν άλλη στο ψυγείο, και την τρίτη κοντά στο καλοριφέρ. Μετρήστε τώρα το χρόνο που θα χρειαστεί ώστε να φτάσουν στο ίδιο επίπεδο σήψης —συγκεκριμένα, να μαυρίσουν τα τρία τέταρτα της επιφάνειας κάθε μπανάνας— ως συνάρτηση της θερμοκρασίας. Θα αναμένατε η εν λόγω διαδικασία να διέπεται από την εξίσωση του Arrhenius; Γιατί; Ιδού η ευκαιρία να συμμετάσχετε στην επιστημονική πρακτική της διατύπωσης ερωτημάτων, της πρότασης ορισμένης υπόθεσης ή μοντέλου και, εν συνεχεία, του ελέγχου τους.

Είναι ενδιαφέρον ότι η μορφή των

Η συνέχεια στη σελ. 68 ⇨

Ένας σωκρατικός διάλογος

*«εν δε τούτο θαυμάσιον έχω αγαθόν, ο με σώζει·
ου γαρ αισχύνομαι μανθάνων, αλλά πυνθάνομαι καί ερωτώ και χάριν
πολλήν έχω τω αποκρινομένω, και ουδένα πώποτε απεστέρησα χάριτος.»*
—Σωκράτης (*Πλάτωνος*, Ιππίας Ελάσσων, 372c.)

Jean-Pierre Kahane

Τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΔΙΝΟΥΝ ΑΦΟΡμή για συζήτηση. Έκρινα λοιπόν καλό να προτείνω στον μεγάλο μας δάσκαλο-συζητητή να οργανώσει μια συζήτηση στρογγυλής τραπέζης πάνω στο θέμα, μαζί με κάποιους παλιούς του φίλους, τον Ιππία, τον Τίμαιο και τον Θεαίτητο.[1] Ο Σωκράτης συμφώνησε προθυμότατα με το σχέδιο. Μου φαίνεται ότι αυτός και οι σύντροφοί του έχουν κάτι καλό να μας πουν για το τι συμβαίνει στον κόσμο σήμερα. Τους παραχωρώ το λόγο.

Το γιατί

1. Τρεις απαντήσεις

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Νά 'μαστε λοιπόν, όλοι μαζί, εδώ, στο στέκι μας της οδού Μονμάρτ,[2] εσύ Τίμαιε, που μού 'μαθες κάποτε τα πολύεδρα με τα οποία ο Δημιουργός οργάνωσε τον κόσμο και τα τέσσερα στοιχεία,[3] εσύ Θεαίτητε, το παιδί-θαύμα που ξεπέρασες τους δασκάλους σου, και μπόρεσες να αποδείξεις με γενικό τρόπο και όχι για μεμονωμένες περιπτώσεις ότι οι τετραγωνικές ρίζες είναι άρρητοι,[4] και εσύ σοφέ Ιππία, πραγματικά τόσο σοφέ, ώστε —το θυμάσαι;— με βεβαίωσες ότι μπορείς να υπολογίσεις χωρίς δυσκολία ή λάθος πόσο κάνει τρεις φορές το 700.[5] Και οι τρεις είστε στραμμένοι προς τη μαθηματική σκέψη.[6] Ας μου πει ο καθένας σας, γρήγορα και χωρίς περιστροφές, το λόγο για τον οποίο πρέπει να διδάσκουμε μαθηματικά στα παιδιά, συμπεριλαμβανομένων των κοριτσιών.[7] Εν συνεχεία θα θέσω τις απαντήσεις σας υπό συζήτηση. Απαντήστε με τη σειρά —πρώτος εσύ Ιππία, έπειτα εσύ Τίμαιε, και τέλος εσύ Θεαίτητε.

ΙΠΠΙΑΣ. Μα, διότι η υπεροχή στη μαθηματική επιστήμη (χώρος στον οποίο έχω διακριθεί, όπως ξέρεις) είναι η αναντίρρητη απόδειξη της υπεροχής του πνεύματος.

ΤΙΜΑΙΟΣ. Διότι η μαθηματική σκέψη είναι αιώνια, καθολική, διότι είναι η πρώτη και η βασίλισσα των επιστημών.

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Μα, επειδή τα μαθηματικά είναι όμορφα.

2. Μια άσκηση του πνεύματος

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Ιππία, όταν ήσουν νέος, έμαθες να τρέχεις στο στάδιο;

ΙΠΠΙΑΣ. Βεβαίως, Σωκράτη, όπως και όλοι οι νεαροί Αθηναίοι.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Πιστεύεις λοιπόν ότι η υπεροχή στον αγώνα δρόμου είναι η αναντίρρητη απόδειξη της ευκινησίας στα πόδια;

ΙΠΠΙΑΣ. Σίγουρα, ο νικητής στο ολυμπιακό άθλημα[8] είναι εκείνος που υπερέχει απ' όλους τους ανθρώπους σε ό,τι αφορά την ευκινησία των ποδιών.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Και ο νικητής στο ακόντιο δεν είναι εκείνος που υπερέχει στην τέχνη της ρίψης ακοντίου;

---

*Ο **Jean-Pierre Kahane** είναι κορυφαίος μαθηματικός, με κύριο ερευνητικό ενδιαφέρον την αρμονική ανάλυση. Γεννήθηκε το 1926 στο Παρίσι, διετέλεσε πρόεδρος της Γαλλικής Μαθηματικής Εταιρείας, πρύτανης του Πανεπιστημίου των Παρισίων στο Orsai, πρόεδρος της Διεθνούς Επιτροπής Διδασκαλίας των Μαθηματικών, και μέλος της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών. Πριν από μερικά χρόνια συνταξιοδοτήθηκε, αλλά συνεχίζει να είναι δραστήριος ερευνητικά.*

Ο Kahane έχει συνδεθεί με την Ελλάδα. Υπήρξε μέλος της διεθνούς επιτροπής που απένειμε το βραβείο Salem στον έλληνα μαθηματικό Στέλιο Πηχωρίδη. Συμμετείχε σε απονομή διδακτορικού στο Πανεπιστήμιο Κρήτης, όπου και δίδαξε για διάστημα δύο μηνών. Έχει επηρεάσει την έρευνα ελλήνων μαθηματικών, και συμμετέχει στα μεταπτυχιακά προγράμματα των Μαθηματικών Τμημάτων των Πανεπιστημίων Αθηνών και Κρήτης.

Ο Kahane, εκτός από τα καθαρά ερευνητικά του ενδιαφέροντα, έχει ασχοληθεί με την πολιτική, τη φιλοσοφία, τη διδακτική και την ιστορία των μαθηματικών.

ΙΠΠΙΑΣ. Έτσι νομίζω.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Άρα, λοιπόν, οι νικητές στους ολυμπιακούς αγώνες των μαθηματικών[9] δεν είναι οι ικανότεροι στο να λύνουν γρήγορα τα μαθηματικά προβλήματα;

ΙΠΠΙΑΣ. Ακριβώς έτσι το εννοώ, Σωκράτη.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Όμως ο λόγος για τον οποίο γίνεται ο αγώνας δρόμου είναι πράγματι ο ολυμπιακός συναγωνισμός; Ή μήπως είναι το γεγονός ότι ο Αθηναίος που δεν ξέρει να τρέχει θεωρείται αδύναμος, όπως επίσης αυτός που δεν ξέρει να ρίχνει το ακόντιο;

ΙΠΠΙΑΣ. Πού θέλεις να καταλήξεις, Σωκράτη;

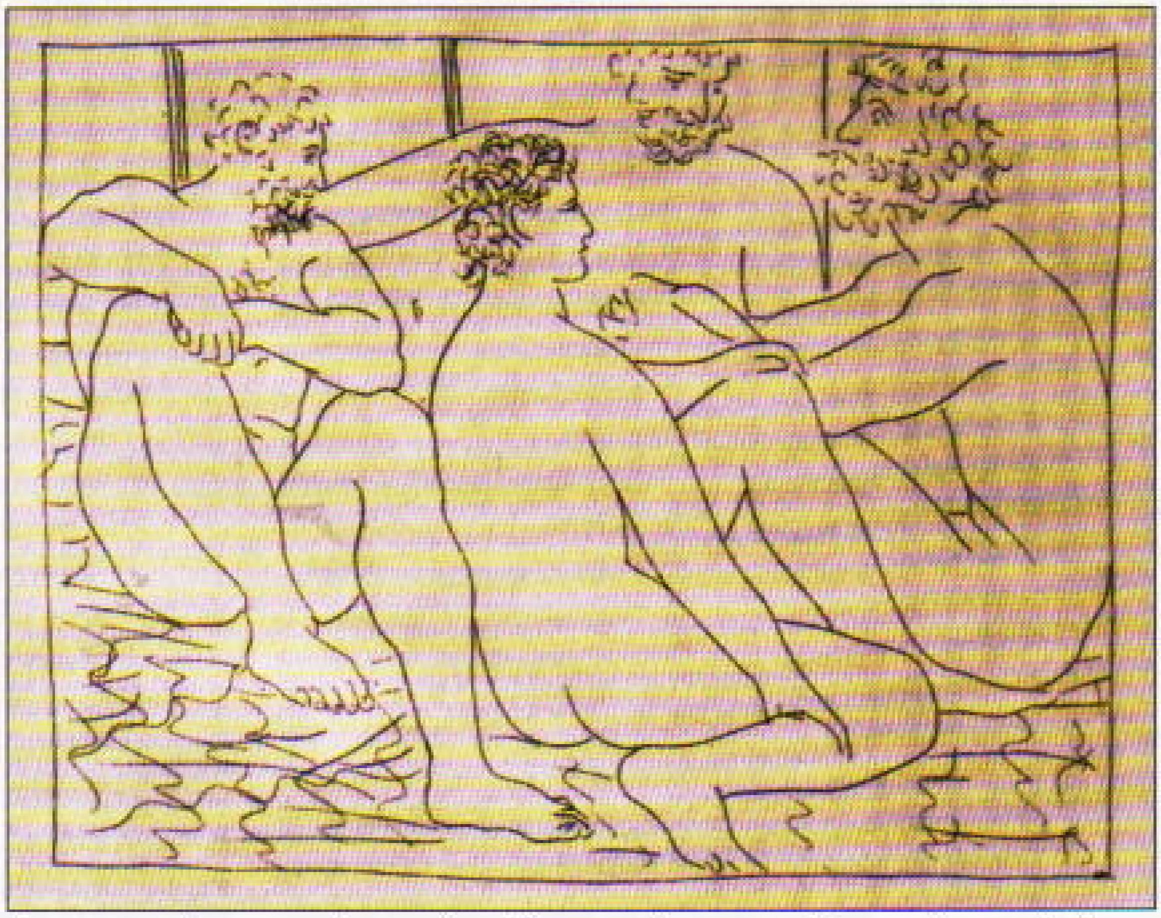
ΤΙΜΑΙΟΣ. Μου φαίνεται πως ο Σωκράτης υπαινίσσεται ότι ο λόγος ύπαρξης της μαθηματικής επιστήμης δεν είναι να παράγει πρωταθλητές σε διαγωνισμούς, είτε πρόκειται για τις διεθνείς ολυμπιάδες είτε για το διαγωνισμό εισαγωγής στην École Polytechnique[10] είτε για το διαγωνισμό «Καγκουρό»,[11] στον οποίο, όπως είναι της μόδας, συρρέει απίστευτο πλήθος νεαρών Γάλλων. Το να ασχολείσαι με τα μαθηματικά είναι μια καλή άσκηση του πνεύματος, χρήσιμη για όλους τους νέους, κορίτσια και αγόρια.

3. Η καθολικότητα

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Καλά το έθεσες, Τίμαιε. Μπορείς να μας εξηγήσεις γιατί, κατά τη γνώμη σου, τα μαθηματικά είναι καθολικά και αιώνια;

ΤΙΜΑΙΟΣ. Θυμήσου λίγο, Σωκράτη, αυτό που σου είπα κάποτε για τον άνθρωπο, τα ζώα, τη ζωή και τη φύση. Όλα είναι ψεύτικα· η επιστήμη τα κατήργησε όλα αυτά, και καταργεί και τον εαυτό της κάθε μέρα. Το μόνο που μένει σταθερό σαν βράχος είναι τα τρίγωνα, οι κύκλοι, οι σφαίρες, τα πολύεδρα. Κοίταξε τον τύπο που γράφω: $2 + 2 = 4$. Το σημαντικό δεν είναι αν αυτό (καθ' εαυτό) είναι αλήθεια ή ψέμα· το σημαντικό είναι ότι και στην Αθήνα και στο Σαν Φρανσίσκο και στο Πεκίνο, παντού, γίνεται αντιληπτό με τον ίδιο τρόπο.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Ε, λοιπόν, το ξέρεις, Τίμαιε, ότι για μένα το $2 + 2 = 4$ είναι κάτι το καινούργιο; Παλιά δεν μετρούσαμε έτσι. Και αυτό που μας δυσκόλευε κάποτε με τον δικό μας τρόπο γραφής φαίνεται πανεύκολο στα σημερινά παιδιά. Δεν έχουν ανάγκη τον Ιππία για να λογαριάσουν το 3×700. Χτυπούν την αριθμομηχανή και —ορίστε!— σου παρουσιάζουν αμέσως 2.100, ή $2{,}1 \times 10^3$. Χειρίζονται αριθμούς εκπληκτικά μεγάλους ή εκπληκτικά μικρούς σαν να είναι παιχνιδάκι. Μέσα στο διάστημα μερικών δυνάμεων του 10, μπορούν να εξετάσουν οτιδήποτε συμβαίνει, από τα στοιχειώδη σωματίδια μέχρι τα νέφη των γαλαξιών. Και ισχυρίζεσαι ότι τίποτε δεν αλλάζει στα μαθηματικά;



4. Η αιωνιότητα και η κίνηση

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Μου επιτρέπεις να πω δυο λόγια, Σωκράτη;

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Εμπρός, παιδί μου. Και μην ξεχάσεις να μας πεις αν τα μαθηματικά είναι το ίδιο όμορφα τώρα όπως ήταν παλαιότερα, την εποχή του Ευκλείδη και των Bourbaki.[12]

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Λες, Σωκράτη, ότι τα μαθηματικά αλλάζουν. Δεν αλλάζουν· εκρήγνυνται! Ξεφυλλίζοντας πριν από λίγο το *Mathematical Reviews* είδα πάνω από 100.000 άρθρα μαθηματικών που συντάχθηκαν το 1990, 35 φορές περισσότερα αφότου πρωτοεκδόθηκε το περιοδικό, το 1940. Στην ιαπωνική μαθηματική εγκυκλοπαίδεια δεν είδα ούτε την αστρονομία ούτε τη μουσική —και είναι κρίμα, βέβαια—, είδα όμως το ίχνος όλων των πολιτισμών που προηγήθηκαν και ακολούθησαν, από τη Βαβυλώνα, την Κίνα, τις Ινδίες, την Αραβία, την Ευρώπη· είδα να γεννιέται η άλγεβρα και η ανάλυση, είδα τη γεωμετρία να αλλάζει πρόσωπο, τις πιθανότητες να γίνονται θεωρία, να διερευνώνται στα ίδια άρθρα τα αυτόματα και οι γλώσσες, και η παλιά καλή ανάλυση ενός αριθμού σε πρώτους παράγοντες έχει γίνει ζήτημα στρατηγικής σημασίας, απ' ό,τι φαίνεται. Μίλησες για τους υπολογιστές, που είναι σοφά εργαλεία. Κι όμως, υπάρχουν εργαλεία ακόμη πιο απίστευτα, ικανά να απομνημονεύουν και να επεξεργάζονται τεράστια πλήθη στοιχείων, για να μιμούνται και να μαντεύουν ό,τι πιο μυστηριώδες υπάρχει στο σύμπαν, βασιζόμενα στη λεγόμενη μαθηματική κατασκευή μοντέλων. Υπάρχουν τόσα καινούργια και εκπληκτικού ενδιαφέροντος πράγματα, ώστε θά 'πρεπε να τα χωρίσει κανείς σε μικρά κομμάτια για να τα κάνει κατανοητά. Ο Ευκλείδης και οι Bourbaki πέρασαν, και το έργο τους είναι αθάνατο. Αλλά σήμερα, αυτό που κυρίως χρειάζεται να καταλάβουν οι άνθρωποι, με παραδείγματα που να τους ενδιαφέρουν, είναι το πώς κινούνται τα πράγματα στα μαθηματικά.

5. Η ομορφιά

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Νά, λοιπόν, που με τη φλόγα της νιότης σου μας κάνεις ολόκληρη διάλεξη, ενώ ήθελες απλώς να πεις δυο λόγια. Και δεν είπες ακόμη πού έγκειται η ομορφιά των μαθηματικών. Πείτε μου, φίλοι μου, αν τα μαθηματικά είναι όμορφα όπως ένας έφηβος, ή όμορφα όπως ο Παρθενώνας, ή όμορφα όπως η Υπερταχεία.[13]

(όλοι μαζί) ΙΠΠΙΑΣ. Όμορφα όπως ένας έφηβος.

ΤΙΜΑΙΟΣ. Όμορφα όπως ο Παρθενώνας.

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Όμορφα όπως η Υπερταχεία.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Φυσικά. Θεωρούμε όμορφο αυτό που αγαπάμε. Θεαίτητε, μας είπες λίγο πριν ότι πρέπει να διδάσκουμε τα μαθηματικά διότι είναι όμορφα. Πρέπει λοιπόν να τα διδάσκουμε μόνο στους μαθητές που τα βρίσκουν όμορφα και τα αγαπούν;

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Δεν είχα αυτό ακριβώς στο νου μου, Σωκράτη.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Έτσι, λοιπόν, θέλεις να διδάξεις τα μαθηματικά σε μαθητές που δεν τα αγαπούν.

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Ναι, χωρίς αμφιβολία, αλλά με τρόπο ώστε να τους κάνω να τα αγαπήσουν και να ανακαλύψουν τις ομορφιές τους.

6. Συμπέρασμα του Σωκράτη

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Νά 'μαστε στη δεύτερη ερώτηση: πώς πρέπει να διδάσκουμε τα μαθηματικά; Ας καταλήξουμε όμως σε ένα συμπέρασμα με την πρώτη. Όπως είπε ο Τίμαιος, τα μαθηματικά είναι παγκόσμια γλώσσα· όλα τα παιδιά πρέπει να μάθουν να τη διαβάζουν και να τη γράφουν, διότι θα τη συναντήσουν να χρησιμοποιείται παντού, και θα ήταν κάτι σαν κωφάλαλα αν αρνούνταν να την ακούσουν. Όπως είπε ο Ιππίας, ή μας ώθησε να το πούμε, τα μαθηματικά είναι μια άσκηση του πνεύματος, άσκηση απαραίτητη για όλους όσοι θέλουν να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά σύμβολα και ωφέλιμη για όλους τους άλλους. Όπως ενθουσιωδώς διακήρυξε ο Θεαίτητος, είναι επίσης μια ζωντανή επιστήμη, πάντα σε εξέλιξη, και ο πολίτης τού σήμερα, που τη βλέπει να εφαρμόζεται σε όλες τις εργασίες της ειρήνης και του πολέμου, πρέπει να παραμένει ενημερωμένος, αν όχι σε λεπτομέρειες, τουλάχιστον στις γενικές γραμμές της ανάπτυξής της. Αυτά σας φαίνονται σωστά;

ΙΠΠΙΑΣ-ΤΙΜΑΙΟΣ-ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ (μαζί). Πιο σωστά δεν γίνεται, Σωκράτη.

Η σχέση με τις άλλες επιστήμες

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Και όμως, κάτι με μπερδεύει. Δεν είπες, Τίμαιε, ότι τα μαθηματικά είναι η πρώτη και η βασίλισσα των επιστημών; Θά 'θελες να μας το εξηγήσεις;

1. Η πλατωνική πραγματικότητα[14]

ΤΙΜΑΙΟΣ. Η πρώτη μέσα στο χρόνο, Σωκράτη, είναι ξεκάθαρο· το εξήγησα ήδη. Γιατί η βασίλισσα; Μα διότι τα στοιχεία των μαθηματικών ξεφεύγουν από το τυχαίο και το απατηλό, που είναι η μοίρα όλων των άλλων επιστημών. Τα στοιχεία των μαθηματικών είναι ακριβώς αυτά που παρουσιάζονται έξω από το σπήλαιο όπου περνούμε τη ζωή μας, και που ο φιλόσοφος, ο οποίος είναι αρχικά έκπληκτος, έχει το χρέος να τα περισυλλέξει και να τα φέρει μέσα στο σπήλαιο.

ΙΠΠΙΑΣ. Ναι, ναι, αυτό μας το δίδαξε ήδη ο Πλάτων καλύτερα από σένα, και γνωρίζουμε τώρα από τον Dieudonné και τον Connes[15] ότι οι ομάδες και οι πρώτοι αριθμοί αποτελούν μια πραγματικότητα έξω από τον άνθρωπο, μια πραγματικότητα περισσότερο «πραγματική» από εκείνη του φυσικού κόσμου.

2. Η κριτική του Σωκράτη

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Έτσι, κατά τη γνώμη σου, οι ομάδες υπήρχαν ανέκαθεν, και οι μαθηματικοί αρκούνταν να τις ατενίζουν τόσο καιρό, ενώ ήταν τόσο απλό να τις ορίσουν (μέσα σε τρεις το πολύ γραμμές, έτσι δεν είναι Θεαίτητε;) και ενώ τις βρίσκουμε παντού;

ΙΠΠΙΑΣ. Ακριβώς, Σωκράτη.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Αφού λοιπόν είναι τόσο εύκολο να ορίσει κανείς τις ομάδες, και αφού είναι τα πρωτεύοντα στοιχεία, πρέπει να τα διδάσκουμε στους μαθητές ήδη από το νηπιαγωγείο.[16]

ΙΠΠΙΑΣ. Γιατί όχι, Σωκράτη;

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Ξέρεις όμως ότι το προσπαθήσαμε, και οδήγησε σε οικτρή αποτυχία. Τι λες γι' αυτό, Θεαίτητε; Γιατί ο ορισμός μιας ομάδας —τόσο ξεκάθαρος, τόσο σύντομος— να είναι τόσο δυσνόητος;

3. Η φύση των ορισμών

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Να μου επιτρέψεις να σου παρουσιάσω μια ιδέα του José-Luis Massera,[17] ότι δηλαδή η διαλεκτική στα μαθηματικά «φωλιάζει» στους ορισμούς. Πριν από τη διατύπωση του ορισμού, δηλαδή πριν από τη διαμόρφωση της έννοιας, προηγείται μια ολόκληρη συσσωρευμένη εμπειρία και μια εκτενής ιστορία. Υπάρχουν αποτελέσματα που τα ονομάζουμε θεωρήματα, εργαλεία που τα λέμε λήμματα, μέθοδοι που τις ονομάζουμε θεωρίες, αναλογίες και απλοποιήσεις, γενικεύσεις και συνθέσεις, λήμματα που γίνονται θεωρήματα, θεωρήματα που γίνονται θεωρίες, μια ολόκληρη επεξεργασία πολύ μακρόχρονη, που γεννά μια σαφή έννοια και έναν καλό ορισμό τού τι είναι ομάδα, μέτρο, πιθανότητα. Από τη στιγμή που διαμορφώνεται η έννοια και διατυπώνεται ο ορισμός, θεωρούνται αφορμή για νέες θεωρίες, που αφομοιώνουν τις παλιές. Είναι αυτό που ονομάζουμε διδακτική μετάθεση στη γαλλική σχολή της διδακτικής των μαθηματικών: παίρνουμε δηλαδή ως σημείο εκκίνησης της σύγχρονης παρουσίασης ενός θέματος εκείνο που υπήρξε σημείο κατάληξης μιας μακράς ιστορίας. Γι' αυτό, το πιο δυσνόητο πράγμα στα μαθηματικά είναι το σημείο εκκίνησης μιας θεωρίας.

4. Το ίδιον των μαθηματικών: η αφαίρεση ή η γενικότητα;

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Πιστεύεις πραγματικά ότι αυτό είναι ίδιον των μαθηματικών; Σκέψου το σύστημα του Κοπέρνικου, που του πήρε τόσο χρόνο για να το ανακαλύψει· είναι τόσο απλό να το περιγράψει κανείς, και τόσο δύσκολο να το καταλάβει, θέλω να πω σε σύγκριση με τις κινήσεις των άστρων που παρατηρούμε τη νύχτα. Εσύ που κατέχεις τόσο καλά όλες τις επιστήμες, Τίμαιε, πες μας τη γνώμη σου.

ΤΙΜΑΙΟΣ. Αυτό που ο Θεαίτητος, μαζί με τον Brousseau και τον Chevallard,[18] ονομάζει διδακτική μετάθεση υπάρχει βέβαια σε όλες τις επιστήμες. Αλλά κάθε επιστήμη έχει στο σπήλαιό μας το δικό της ιδιαίτερο αντικείμενο. Το ίδιον των μαθηματικών είναι ότι το αντικείμενό τους βρίσκεται έξω από το σπήλαιο και αποτελείται από καθαρές αφαιρέσεις, αιωνίως ζώσες: τέτοιες είναι τα τρίγωνα, οι κύκλοι, οι ομάδες.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Πιστεύεις πραγματικά ότι ένα τρίγωνο είναι πιο αφηρημένο από ένα κουάρκ ή από τη θεωρία της εξέλιξης; Δεν είναι αλήθεια ότι κάθε επιστήμη επεξεργάζεται τις δικές της αφαιρέσεις;

ΤΙΜΑΙΟΣ. Σωκράτη, καταθέτω τα όπλα μου. Συνέχισε λοιπόν με τον Θεαίτητο, αν αυτός είναι σε θέση να εξηγήσει ότι δεν είναι η αφαίρεση εκείνη που διακρίνει τα αντικείμενα των μαθηματικών.

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Θα έλεγα, Τίμαιε, ότι είναι περισσότερο η γενικότητα. Η έννοια της ομάδας είναι κοινή στη γεωμετρία, την άλγεβρα και τη φυσική. Η θεωρία πληροφοριών προέρχεται από τις τηλεπικοινωνίες, και ενσωματώθηκε στη μοριακή βιολογία. Τα δυναμικά συστήματα είναι ένα σταυροδρόμι της βιολογίας των πληθυσμών, της φυσικής των κρίσιμων φαινομένων και όλων των κλάδων των μαθηματικών. Θα μπορούσα να βρω, νομίζω, πολλά παραδείγματα μαθηματικών θεωριών που να προέρχονται από μια επιστήμη και να εφαρμόζονται εντελώς απροσδόκητα σε κάποια άλλη. Γι' αυτό, χρειάζονται πολλοί μαθηματικοί, για να εργαστούν με αντικείμενο τα δεδομένα που προέρχονται από τις άλλες επιστήμες και να «εκχυλίσουν» αυτό που έχει γενική σημασία. Μου φαίνεται ότι από αυτό ακριβώς απορρέει η μονιμότητα και η αποτελεσματικότητα των μαθηματικών εννοιών. Εκεί δεν έγκειται, Τίμαιε, το νόημα που θά 'πρεπε να δώσουμε στη δική σου θεωρία για την αιωνιότητα και την καθολικότητα των μαθηματικών; Όσο για τη γενική ομολογία ότι είναι η πρώτη και η βασίλισσα των επιστημών, δεν είναι από πολλές πλευρές η θεραπαινίδα τους;

5. Συμπέρασμα του Σωκράτη

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Ας μείνουμε εκεί. Μόλις μας έδωσες έναν ακόμη λόγο, και όχι τον λιγότερο σημαντικό, για τον οποίο πρέπει να διδάσκουμε ευρέως τα μαθηματικά. Αυτό που διακρίνει τα μαθηματικά από ένα καθαρά πνευματικό παιχνίδι, φαίνεται πως είναι ο ενοποιητικός χαρακτήρας τους. Ένας μαθηματικός συλλογισμός δημιουργείται με βάση μια πλούσια επιστημονική εμπειρία, της οποίας συγκεντρώνει τα κύρια στοιχεία. Αλλά η δύναμή τους ξεπερνά αυτό το σημείο, και προχωρεί σε άλλα πεδία της γνώσης. Αν δεν αφομοιώσουμε αυτή τη δύναμη, αν δεν γίνουμε κάτοχοί της, θα χαθεί. Αυτό πρέπει να είναι το κριτήριο που θα χρησιμοποιήσουμε στη δύσκολη εκλογή των θεμάτων που διδάσκουμε. Τι να διδάξουμε; Πώς να το διδάξουμε; Εσύ που είσαι επαγγελματίας, Ιππία, πες μας τι σκέφτεσαι.

Το τι και το πώς

1. Ο Ιππίας προς τον Σωκράτη

ΙΠΠΙΑΣ. Το επάγγελμά μου, Σωκράτη, ήταν να διδάσκω το άνθος της αθηναϊκής αριστοκρατίας και όχι τον όχλο που παραμένει στάσιμος, στο βούρκο. Τι να διδάξεις στους μαθητές του λυκείου Louis le Grand;[19] Ό,τι τους χρειάζεται για να τους κάνει να διακριθούν και να επιτύχουν στους διαγωνισμούς. Πώς να το διδάξεις; Με ικανότητα και κύρος, όπως το έκανα πάντα.

ΤΙΜΑΙΟΣ. Ξέρεις, Ιππία, ότι ο Πλάτων ήδη διαμαρτυρόταν για το ότι, όσον αφορά τους αριθμούς και τα σχήματα, τα παιδιά της Αθήνας ήξεραν λιγότερα και από το τελευταίο παιδί των Αιγυπτίων. Το σύστημά σου ξεπεράστηκε, και δεν δίνει λύση στις ανάγκες που μας θύμισε ο Σωκράτης. Εσύ ο ίδιος, Σωκράτη, δεν είχες διδάξει ένα θεώρημα γεωμετρίας στο δούλο του Μένωνα;[20]

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Να έχω διδάξει; όχι. Να τον έχω οδηγήσει να ανακαλύψει; ναι. Ήθελα να είμαι μόνο ο οδηγός, ο «μαιευτήρας». Καθένας μπορεί να ασχοληθεί με τα μαθηματικά. Αυτή ήταν και είναι πάντα η γνώμη μου. Και οι μικρές σύγχρονες αριθμομηχανές[21] μού φαίνεται ότι δίνουν στους μαθητές νέα μέσα για να κάνουν μόνοι τους ενδιαφέροντα πράγματα. Για παράδειγμα, μπορούν να θέσουν ένα πρόβλημα, να δώσουν εντολές στη μηχανή, να ελέγξουν τα αποτελέσματα, και επίσης να συναγωνιστούν τη μηχανή, μέσω του δικού τους διανοητικού υπολογισμού και του υπολογισμού της τάξης μεγέθους των αποτελεσμάτων.

2. Τίμαιος και Θεαίτητος

ΤΙΜΑΙΟΣ. Πόσο συμφωνώ με αυτό που μόλις μας είπες, Σωκράτη! Εγώ προσωπικά —και ξέρεις τη συμπάθειά μου για τις φυσικές επιστήμες, ακόμη κι αν ασχολούνται μόνο με το εσωτερικό του σπηλαίου—, θά 'θελα να δω τα μαθηματικά να διδάσκονται σε συμφωνία με τις άλλες σύγχρονες επιστήμες, που μας παρέχουν τόσα κίνητρα και προβληματισμούς. Στο πανεπιστημιακό επίπεδο, που το γνωρίζω καλά, αυτό βοηθάει να επιλέξουμε την ύλη που θα διδάξουμε. Υπάρχουν πολλοί τρόποι να μπεις στη μαθηματική επιστήμη,[22] και δεν είναι οι ίδιοι για τους μέλλοντες βιολόγους, για τους μέλλοντες μηχανικούς ή για τους μέλλοντες οικονομολόγους.

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Αφού θα υπάρχουν πάντα όμορφα μαθηματικά που θα μπορούμε να τα διδάσκουμε στις τάξεις, θά 'θελα πολύ να συμμετάσχω σε μια λέσχη συναντήσεων ανάμεσα σε ερευνητές και σε μαθητές λυκείων, όπως αυτές που οργανώνει το *Math. en Jeans*.[23] Φυσικά, συμμετείχα τον Ιούλιο, ως προσκεκλημένος στο μαθηματικό συνέδριο για παιδιά,[24] και, μά την πίστη μου, είναι μια πολύ συμπαθητική παγκόσμια πρεμιέρα. Γενικά, μου φαίνεται ότι γίνονται καλά πράγματα σήμερα στη Γαλλία, και πρέπει να τα καταστήσουμε περισσότερο γνωστά και να τα πολλαπλασιάσουμε.

3. Απολογία του Σωκράτους

ΙΠΠΙΑΣ. Σωκράτη, θα μπορούσα να αποχωρήσω;

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Παρακαλώ. Κράτησες πολύ καλά το ρόλο σου. Τίμαιε, μην ξεχάσεις το ραντεβού σου με την Ένωση Γάλλων Φυσικών. Κι εσύ, Θεαίτητε, δίδαξε κυρίως στα παιδιά σου να μη χάνονται ανόητα στον πόλεμο, όπως έκανες εσύ όταν ήσουν είκοσι ετών.[25] Νά, έρχεται η χαριτωμένη οικοδέσποινά μας, η Françoise Zisman, που μου λέει ότι ήδη ξεπεράσαμε το χρόνο μας. Συγνώμη Françoise, ξέρεις ότι είμαι φλύαρος, και είχε περάσει καιρός που δεν είχα συναντηθεί με τους φίλους μου!

Σημειώσεις

1. Κεντρικά πρόσωπα των ομώνυμων πλατωνικών διαλόγων. Ο Ιππίας ήταν από τους σπουδαιότερους σοφιστές, διάσημος για την ευρύτατη και πολύπλευρη μόρφωσή του. Ο Τίμαιος ενδιαφερόταν κυρίως για την αστρονομία και για τη φύση του σύμπαντος. Ο Θεαίτητος ήταν μαθητής του μεγάλου μαθηματικού Θεοδώρου, νέος εξαιρετικής ευγένειας και θαυμαστής ευφυΐας. Τραυματίστηκε θανάσιμα το 394 π.Χ. σε μάχη κοντά στην Κόρινθο, όπου οι Σπαρτιάτες νίκησαν τους Αθηναίους.

2. Οδός Μονμάρτ. Μικρός δρόμος στο Παρίσι, όπου βρίσκονταν τα γραφεία του περιοδικού *Révolution*, για το οποίο προοριζόταν αρχικά ο παρών διάλογος.

3. Τα πολύεδρα και τα τέσσερα στοιχεία: τετράεδρο-φωτιά, οκτάεδρο-αέρας, εικοσάεδρο-νερό, κύβος-γη. Ο Τίμαιος εκθέτει ένα είδος χημείας στηριγμένο σ' αυτή την παράσταση.

Τίμαιος 31(b)-32(b), 56(d)-57(d)

4. Ο Θεόδωρος είχε διδάξει στον Θεαίτητο ότι οι $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... μέχρι $\sqrt{17}$ είναι άρρητοι. Είχε σταματήσει εκεί, και το γεγονός αυτό έγινε αντικείμενο πολλών υποθέσεων και μελετών του 20ού αιώνα. Η απόδειξη του Ευκλείδη για το ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος είναι εύκολο να εκτεθεί· σίγουρα δεν ήταν αυτή του Θεοδώρου. Το κείμενο του Θεαίτητου υποδηλώνει ότι η απόδειξη του Ευκλείδη και το γενικό συμπέρασμα ότι ο $\sqrt{n}$ είναι άρρητος όταν το n δεν είναι τετράγωνο οφείλονται στον Θεαίτητο.

Θεαίτητος 147(d)-148(b)

5. Ο ένας από τους τρόπους αρίθμησης των Ελλήνων της αρχαιότητας επέτρεπε να γράφονται με αρκετή ευκολία οι αριθμοί μέχρι το χίλια, αλλά όχι από κει και πάνω. Η ερώτηση παρ' όλ' αυτά είναι ιδιαιτέρως ειρωνική.

Ιππίας 366(c), (e)

6. Η διδασκαλία των μαθηματικών ενθουσίαζε ανέκαθεν τον Πλάτωνα. Ένα μέρος του VII βιβλίου της *Πολιτείας* είναι αφιερωμένο σ' αυτήν. Ο ίδιος ο Πλάτων έχει γράψει ένα εξαιρετικό μάθημα μαθηματικών στον *Μένωνα*. Το θέμα επιστρέφει σε πολλούς διαλόγους και στους *Νόμους*, σε σύνδεση με τα παιχνίδια των παιδιών, την εκπαίδευση στην Αίγυπτο, την αστρονομία κ.λπ.

Πολιτεία VII 522(c)-531(c)
Μένων 82(b)-85(c)
Νόμοι 809(c), (d), 817(e)-818(a), 819(a)-(c), 820(c)
Λύσις 206(e)
Φαίδρος 274(c), (d)
Πολιτικός 299(e)
Ερασταί 32(a), (b)
Πρωταγόρας 318(d), (e)

7. Απ' ό,τι ξέρω, ο Πλάτων δεν ενδιαφέρθηκε για τη διδασκαλία των μαθηματικών στα κορίτσια. Οι γυναίκες καταλαμβάνουν μικρή θέση τα έργα του. Παρ' όλα αυτά, στους *Νόμους* αναπτύσσει την ιδέα μιας δημόσιας διδασκαλίας απευθυνόμενης σε παιδιά και των δύο φύλων, δικαιολογημένης από την προετοιμασία για τη μάχη. Το ίδιο και στην *Πολιτεία*.

Νόμοι 813(e), *Πολιτεία* 451(c)-452(b)

8. Ολυμπιάδες. Αναφερόμαστε κατ' αρχήν στους μεγάλους αθλητικούς αγώνες της αρχαιότητας και στους αντίστοιχους σύγχρονους αθλητικούς αγώνες που είναι εμπνευσμένοι από εκείνους. Η αρχαιότητα, όμως, είχε γνωρίσει επίσης και δύο πνευματικές ολυμπιάδες (βλ. την αρχή του *Ιππία Ελάσσονα*).

Ιππίας Ελάσσων 363(c)

9. Οι διεθνείς μαθηματικές ολυμπιάδες είναι σύγχρονη δημιουργία. Προέρχονται από μια ρουμανική πρωτοβουλία, η οποία εξαπλώθηκε αρχικά στις χώρες της ανατολικής Ευρώπης και στην πρώην Σοβιετική Ένωση, και στη συνέχεια σ' όλο τον κόσμο.

10. Ο διαγωνισμός εισαγωγής στην École Polytechnique δίνει ιδιαίτερη έμφαση στα μαθηματικά, από το 1793.

11. Το «Καγκουρό» είναι η γαλλική απομίμηση του αυστραλέζικου μαθηματικού διαγωνισμού που δημιουργήθηκε το 1978 και συγκεντρώνει κάθε χρόνο 500.000 υποψηφίους. Το «Καγκουρό» είχε αξιόλογη επιτυχία στη Γαλλία (αν και σχετικά μικρότερη από εκείνη του αυστραλέζικου διαγωνισμού).

12. Ο Ευκλείδης και οι Bourbaki. Το βιβλίο των Bourbaki έχει τίτλο *Éléments de mathématique* (Στοιχεία των Μαθηματικών). Πρόκειται για φανερή αφιέρωση στον Ευκλείδη.

13. Πρόκειται για το τρένο μεγάλης ταχύτητας που εγκαινιάστηκε στη Γαλλία το 1982. Είναι ένας από τους λόγους για τους οποίους οι Γάλλοι αισθάνονται υπερήφανοι στον τομέα της βιομηχανικής ανάπτυξης.

14. Η πλατωνική πραγματικότητα. Ο μύθος του σπηλαίου εκτίθεται στην αρχή του VII βιβλίου της *Πολιτείας*.

Πολιτεία VII, 514(a)-517(a).

15. Jean Alexandre Dieudonné, Alain Connes: σύγχρονοι γάλλοι μαθηματικοί.

16. Υπαινιγμός για τη μεταρρύθμιση των «σύγχρονων μαθηματικών» στα τέλη της δεκαετίας του 1960.

17. José-Luis Massera: μαθηματικός από την Ουρουγουάη. Φυλακίστηκε την εποχή της δικτατορίας των συνταγματαρχών. Ήρθα σε επαφή με τις ιδέες του επικοινωνώντας μαζί του δι' αλληλογραφίας.

18. Guy Brousseau, J.-P. Chevallard: γάλλοι καθηγητές της διδακτικής των μαθηματικών.

19. Λύκειο Louis le Grand. Λύκειο της ελίτ για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο Παρίσι. Τα «φροντιστήρια» του συγκεκριμένου λυκείου (οι προπαρασκευαστικές τάξεις για τους διαγωνισμούς) έχουν σημαντικές επιτυχίες στο διαγωνισμό εισαγωγής στην École Polytechnique και στην École Normale Supérieure.

20. Πρόκειται για την κατασκευή τετραγώνου με εμβαδόν διπλάσιο από δεδομένο τετράγωνο, θέμα ιδιαιτέρως αγαπητό στον Πλάτωνα.

Μένων 82(b)-85(c).

21. Μικρές αριθμομηχανές και μαθηματική διδασκαλία. Είναι το θέμα μιας εισήγησης στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών του Μπέρκλεϋ το 1986. *Proceedings of the ICM*, Μπέρκλεϋ, 1986, τόμ. II, σελ. 1682-1696.

22. Η ιδέα αναπτύσσεται στο πλαίσιο μιας μελέτης του ICMI (International Communion on Mathematical Instruction). *Mathematics as a science subject*, ICMI Study Series, Cambridge Univ. Press, 1988.

23. Math. en jeans. Ομάδες μαθητών που δουλεύουν σ' ένα θέμα με τη βοήθεια ενός ερευνητή κατά τη διάρκεια πολλών ετών. Το ετήσιο συνέδριο είναι η ευκαιρία για διά ζώσης επικοινωνία.

24. Μαθηματικό συνέδριο για παιδιά. Οργανώθηκε κατ' εικόνα του Congrès Européen de mathématiques στο Παρίσι, το 1992.

25. Δεν είναι γνωστό αν ο Θεαίτητος σκοτώθηκε στα 20 ή στα 40 του. Οι ιστορικοί κλίνουν γενικά προς τη δεύτερη άποψη, κρίνοντας από τη φήμη του και τη σημασία του μαθηματικού του έργου. Αλλά η απουσία γραπτού έργου και —αντίθετα— τα αστραπιαία ίχνη που άφησε στο πνεύμα των συγχρόνων του με κάνουν να θεωρώ περισσότερο εύλογο ότι πέθανε πολύ νέος.

---

* Το κυρίως κείμενο μετέφρασε από τα γαλλικά η κ. Μαρίνα Δετοράκη, και τις υποσημειώσεις η κ. Δροσίς Σπηλιωτοπούλου· την επιμέλεια της μετάφρασης έκανε ο κ. Γιώργος Κυριακόπουλος.

Ευχαριστούμε τον κ. Βασίλειο Νεστορίδη, αναπληρωτή καθηγητή στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών, ο οποίος πρότεινε στο ελληνικό *Quantum* τη δημοσίευση του κειμένου.

Το χαρακτικό της σελ. 11 είναι από το βιβλίο *Μεταμορφώσεις* του Οβιδίου που εικονογράφησε ο Πάμπλο Πικάσσο (Λωζάννη, 1931).

Για να περνά η ώρα

Σ101

Απαιτητική κάθετος. Δίδεται μια ευθεία γραμμή και ένα σημείο A εκτός αυτής. Μπορείτε να φέρετε την κάθετο από το A προς την ευθεία, χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη, έτσι ώστε το συνολικό πλήθος των ευθειών και των κύκλων που θα σχεδιάσετε κατά την κατασκευή σας να μην υπερβαίνει το τρία; (Η τρίτη ευθεία πρέπει να είναι η ίδια η κάθετος.)

Σ102

Ηλιόλουστα παράθυρα. Ένα χωριό απλώνεται στην ανατολική πλαγιά κάποιου βουνού. Το πρωί ένας περιηγητής που πέρασε το βράδυ του στους πρόποδες του βουνού παρατηρεί την αντανάκλαση των ακτίνων του ήλιου στα παράθυρα των σπιτιών του χωριού και προσέχει ότι, καθώς περνά η ώρα, τα φωτισμένα παράθυρα μετατοπίζονται: σε μερικά το φως «σβήνει» και σε άλλα «ανάβει». Προς ποια κατεύθυνση μετατοπίζονται τα φωτισμένα παράθυρα: προς τα πάνω ή προς τα κάτω; Προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά; Ερμηνεύστε το φαινόμενο.

Σ103

Ο πεζός τραπεζίτης. Ο κ. R.A. Scall, πρόεδρος της Pyramid Bank, ζει σ' ένα προάστιο, αρκετά μακριά από το γραφείο του. Κάθε μέρα φεύγει από την τράπεζα ένα αυτοκίνητο που έρχεται και τον παίρνει την ίδια πάντα ώρα από το σπίτι. Έτσι, φτάνει πάντοτε στη δουλειά του τη στιγμή ακριβώς που ανοίγει η τράπεζα. Ένα πρωί, ο οδηγός τού τηλεφωνεί και ανακοινώνει ότι λόγω βλάβης είναι πιθανό να αργήσει. Έτσι, ο κ. Scall έφυγε από το σπίτι του μία ώρα νωρίτερα και άρχισε να κατευθύνεται πεζός προς το γραφείο του. Όμως ο οδηγός διόρθωσε γρήγορα τη βλάβη και κατάφερε να φύγει από την τράπεζα στην ώρα του. Συνάντησε τον τραπεζίτη στο δρόμο και τον πήγε στη δουλειά του, όπου έφτασαν 20 λεπτά νωρίτερα από το συνηθισμένο. Πόση ώρα περπάτησε ο κ. Scall; (Η ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι σταθερή, και ο χρόνος που χρειάζεται για να στρίψει μηδενικός.) (I. Sharygin)

Σ104

Χρωματίστε τον κύβο. Χρωματίστε τις οκτώ κορυφές ενός κύβου με δύο χρώματα (κόκκινο και μπλε) έτσι ώστε κάθε επίπεδο που περιέχει τρία σημεία του ενός χρώματος να περιέχει και ένα σημείο του άλλου χρώματος.
(N. Vasilyev)

Σ105

Παράξενη αριθμομηχανή. Ας υποθέσουμε ότι έχετε μια αριθμομηχανή που μπορεί να εκτελέσει δύο μόνο πράξεις: για κάθε δεδομένο ακέραιο a, μπορεί να υπολογίσει το $2a + 1$ ή το $(a - 1)/3$. (Η δεύτερη πράξη είναι δυνατή μόνο όταν το a διαιρείται με το 3.) Μπορείτε να καταλήξετε με αυτή την αριθμομηχανή στο 8 ξεκινώντας από το 1;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

Εικονογράφηση: V. Ivanyuk, P. Chernusky


4
2
7
1
29
9
16
15
12

Βάζοντας τα πράγματα σε σειρά

Μερικές φορές είναι μια δύσκολη δουλειά, ακόμη και για υπολογιστές!

P. Blekher και M. Kelbert

ΣΤΟ ΠΑΡΟΝ ΑΡΘΡΟ ΘΑ ΕΞΕΤΑΣΟΥ-με έναν από τους κλάδους μιας σχετικά νέας επιστήμης: της θεωρίας αναγνώρισης μορφών. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε μεθόδους ταξινόμησης. *Ταξινόμηση* είναι ο διαχωρισμός ενός συγκεκριμένου συνόλου αντικειμένων σε ομάδες αντικειμένων που, σύμφωνα με κάποιο κριτήριο, βρίσκονται κοντά το ένα στο άλλο.

Για παράδειγμα, μπορεί να θέλετε να ταξινομήσετε τα εργοστάσια ενός δεδομένου βιομηχανικού κλάδου, τους σεισμούς που παρατηρούνται σε μια περιοχή, τον καιρό του Σεπτεμβρίου για μεγάλο πλήθος ετών, τα είδη των δεινοσαύρων σε συγκεκριμένη γεωλογική περίοδο, κ.ο.κ. Αυτό που έχει σημασία εδώ είναι να υπάρχει η δυνατότητα να χαρακτηρίσουμε τα προς ταξινόμηση αντικείμενα με συγκεκριμένο σύνολο αριθμών και ιδιοτήτων. Χάριν απλότητας, θα θεωρήσουμε την περίπτωση όπου κάθε αντικείμενο περιγράφεται με συγκεκριμένο σύνολο αριθμών.

Ταξινόμηση μαθητών

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να ταξινομήσουμε όλους τους μαθητές της τελευταίας τάξης ενός λυκείου ανάλογα με το πώς χρησιμοποιούν τον ελεύθερο χρόνο τους μετά το σχολείο. Θα ρωτήσουμε κάθε μαθητή και θα καταγράψουμε πόσο χρόνο αφιερώνει στο διάβασμα και πόσο στην ψυχαγωγία. Ο χρόνος που διαθέτει για άλλες δραστηριότητες (φαγητό, ύπνο, μετακινήσεις, κ.ά.) δεν μας ενδιαφέρει σ' αυτό το σημείο. Επομένως, κάθε μαθητής θα χαρακτηριστεί με δύο αριθμούς: το χρόνο που διαβάζει και το χρόνο που ψυχαγωγείται. Κάθε μαθητής μπορεί λοιπόν να παρασταθεί ως σημείο ενός επιπέδου συντεταγμένων, και έτσι καταλήγουμε σ' ένα καθαρά μαθηματικό πρόβλημα: πώς μπορούμε να χωρίσουμε ένα δεδομένο σύνολο σημείων του επιπέδου σε ομάδες «γειτονικών» σημείων;

Το ίδιο ερώτημα προκύπτει σε πολλά σοβαρά προβλήματα εφαρμογών, με τη διαφορά ότι εκεί το πλήθος των συντεταγμένων είναι πολύ μεγαλύτερο (συνήθως αρκετές δεκάδες).

Για παράδειγμα, στον κλάδο της κλωστοϋφαντουργίας δραστηριοποιούνται πολλές εταιρείες. Μερικές είναι εξειδικευμένες και παράγουν ένα μάλλον περιορισμένο φάσμα προϊόντων· άλλες μια τεράστια ποικιλία. Υπάρχουν τεράστια συγκροτήματα, μεσαίου μεγέθους βιομηχανίες και άλλες, μικρές, τοπικού χαρακτήρα. Για να συγκρίνουμε το έργο τους και να σχεδιάσουμε τη λειτουργία τους, πρέπει να τις ταξινομήσουμε —δηλαδή, να τις χωρίσουμε σε ομάδες που θα περιέχουν κάθε τύπο επιχείρησης. Οι επιχειρήσεις διαφέρουν ως προς τους οικονομικούς τους δείκτες. Ας επιλέξουμε τους σημαντικότερούς τους (ας πούμε, ακαθάριστο προϊόν, κόστος παραγωγής, μισθούς) και ας στηρίξουμε σ' αυτούς την ταξινόμησή μας. Συμβολίζουμε το πλήθος αυτών των δεικτών με n.

Θα αντιστοιχίσουμε ένα σύνολο αριθμών $(x_1, ..., x_n)$ σε κάθε επιχείρηση, όπου x_1 είναι η τιμή του πρώτου δείκτη, x_2 η τιμή του δεύτερου, κ.ο.κ.

Ένα ζεύγος αριθμών (x_1, x_2) ορίζει ένα σημείο του επιπέδου, και μια n-άδα σημείων $(x_1, x_2, ..., x_n)$ θεωρείται, εξ ορισμού, σημείο του n-διάστατου χώρου.

Επομένως, το πρόβλημά μας καταλήγει στην ταξινόμηση σημείων του n-διάστατου χώρου.

Είναι δύσκολο χωρίς υπολογιστές

Για να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα ταξινόμησης, έχουν αναπτυχθεί διάφοροι αλγόριθμοι επεξεργασίας μέσω υπολογιστή. Η ανάγκη χρήσης υπολογιστή προκύπτει για δύο λόγους. Αφ' ενός, το πλήθος των αντικειμένων που πρέπει να ταξινομηθούν είναι συνήθως πολύ μεγάλο, επομένως είναι αδύνατον να επεξεργαστούμε «με το χέρι» όλα τα δεδομένα. Αφ' ετέρου, τα αντικείμενα είναι συνήθως πολυδιάστατα.

Όταν έχουμε μόνο δύο συντεταγμένες, όπως στο παράδειγμα με τους μαθητές, και το πλήθος των αντικειμένων δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλο, ο άνθρωπος μπορεί να συναγωνιστεί τον υπολογιστή στην επίλυση ενός προβλήματος ταξινόμησης. Η «ανθρώπινη» προσέγγιση είναι οπτική: μπορούμε απλώς να κοιτάξουμε την εικόνα με τα σημεία που παριστάνουν τα αντικείμενά μας και να απομονώσουμε τις περιοχές όπου τα σημεία είναι πυκνότερα. Πειράματα έχουν αποδείξει ότι τα αποτελέσματα μιας τέτοιας διαμέρισης είναι περίπου ίδια για

Εικονογράφηση: Dmitry Krymov

όλους τους ανθρώπους. Ο λόγος είναι ότι οι άνθρωποι τοποθετούν ασυνείδητα σε μια ομάδα τα γειτονικά σημεία, ενώ θεωρούν ξεχωριστές ομάδες όσες είναι αρκετά απομακρυσμένες μεταξύ τους. Όταν όμως έχουμε τρεις ή περισσότερες παραμέτρους, η εικονική αναπαράσταση είναι πρακτικά άχρηστη, και το πρόβλημα της ταξινόμησης γίνεται δύσκολο για τον άνθρωπο.

Κάποιοι ψυχολόγοι εκτέλεσαν το επόμενο πείραμα. Έδωσαν στα υποκείμενα του πειράματος κάρτες με τριάδες αριθμών που αντιπροσώπευαν τις συντεταγμένες σημείων του χώρου και τους ζήτησαν να χωρίσουν με φυσικό τρόπο τα σημεία σε δύο ομάδες. Στην πραγματικότητα υπήρχε ένα κεκλιμένο ως προς τους άξονες συντεταγμένων επίπεδο που χώριζε τα σημεία σε δύο ομάδες, έτσι ώστε η απόσταση κάθε σημείου από το επίπεδο αυτό να είναι μεγαλύτερη από την απόσταση του σημείου από τα υπόλοιπα της ομάδας. Οι περισσότεροι χώρισαν τα σημεία σύμφωνα με την τιμή μίας συντεταγμένης, και έτσι οδηγήθηκαν σε αφύσικες διευθετήσεις. Ελάχιστοι κατάφεραν να κατασκευάσουν τη σωστή διαμέριση.

Αναπτύχθηκαν, λοιπόν, ειδικοί αλγόριθμοι για την ταξινόμηση σημείων του πολυδιάστατου χώρου. Ένα από τα κριτήρια σωστής λειτουργίας αυτών των αλγορίθμων είναι η απαίτηση να παράγουν μια «φυσική» διαμέριση κατά την ταξινόμηση των σημείων ενός επιπέδου —δηλαδή, μια διαμέριση του ίδιου είδους με αυτήν που κάνουν οι άνθρωποι.

Το δέντρο ελάχιστου μήκους

Πριν περιγράψουμε έναν από αυτούς τους αλγορίθμους ταξινόμησης, θα εξετάσουμε έναν αλγόριθμο κατασκευής ενός συνεκτικού συστήματος τμημάτων που συνδέουν ένα σύνολο δεδομένων σημείων και έχουν ελάχιστο συνολικό μήκος. (Ένα σύστημα τμημάτων ονομάζεται συνεκτικό αν, ξεκινώντας από οποιοδήποτε άκρο τους και κινούμενοι κατά μήκος των τμημάτων του συστήματος, μπορούμε να φτάσουμε σε οποιοδήποτε από τα άλλα άκρα.)

Για να αντιληφθούμε ευκολότερα την κατάσταση, ας εξετάσουμε μια κατασκευή στο επίπεδο. Ο αλγόριθμος είναι ο ίδιος και στην περίπτωση του πολυδιάστατου χώρου, εκεί όμως δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε το σύστημα.

Έστω ότι δίνονται N σημεία του επιπέδου, $A_1, ..., A_N$. Ας υποθέσουμε, χάριν απλότητας, ότι όλες οι αποστάσεις μεταξύ αυτών των σημείων είναι διαφορετικές. Καταγράφουμε όλα τα ζεύγη (A_1, A_2), (A_1, A_3), ..., (A_{N-1}, A_N) και τα διατάσσουμε σε αύξουσα σειρά, ανάλογα με την απόσταση μεταξύ των σημείων τους. Ενώνουμε το πρώτο ζεύγος, έπειτα το δεύτερο, κ.ο.κ. Αν ένα δεδομένο τμήμα ολοκληρώνει έναν *κύκλο* (δηλαδή, αν είναι δυνατόν να απομονώσουμε μεταξύ των τμημάτων που έχουμε ήδη σχεδιάσει κάποια που σχηματίζουν μια κλειστή πολυγωνική γραμμή), το σβήνουμε και περνούμε στο επόμενο. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο έως το τελευταίο τμήμα. Το σύστημα τμημάτων που προκύπτει κατ' αυτό τον τρόπο δεν περιέχει κύκλους. (Ένα συνεκτικό σύστημα τμημάτων που δεν περιέχει κύκλους ονομάζεται *δέντρο*.)

Πρόβλημα 1. Αποδείξτε ότι το σύστημα τμημάτων που κατασκευάσαμε προηγουμένως έχει το μικρότερο συνολικό μήκος από όλα τα συνεκτικά συστήματα τμημάτων που συνδέουν τα δεδομένα σημεία.

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι το ίδιο σύστημα τμημάτων προκύπτει μέσω της επόμενης *δυϊκής κατασκευής*: σχεδιάζουμε όλα τα τμήματα και τα διατάσσουμε σε φθίνουσα σειρά ανάλογα με το μήκος τους. Σβήνουμε το μεγαλύτερο τμήμα, κατόπιν το δεύτερο μεγαλύτερο, κ.ο.κ. Αν η διαγραφή ενός τμήματος καταστρέφει τη συνεκτικότητα του συστήματος, το αφήνουμε στη θέση του και συνεχίζουμε με το επόμενο. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να φτάσουμε στο μικρότερο τμήμα.

Πρόβλημα 3. Ας υποθέσουμε ότι μερικές από τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων $A_1, ..., A_N$ είναι ίσες. Διευθετούμε σε τυχαία σειρά κάθε ομάδα τμημάτων του ιδίου μήκους και εφαρμόζουμε την κατασκευή που περιγράψαμε στο Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι το σύστημα τμημάτων που προκύπτει έχει ελάχιστο συνολικό μήκος ανεξάρτητα από τη σειρά των ίσων τμημάτων. (Στην περίπτωση αυτή, το ελάχιστο σύστημα τμημάτων δεν είναι μοναδικό.)

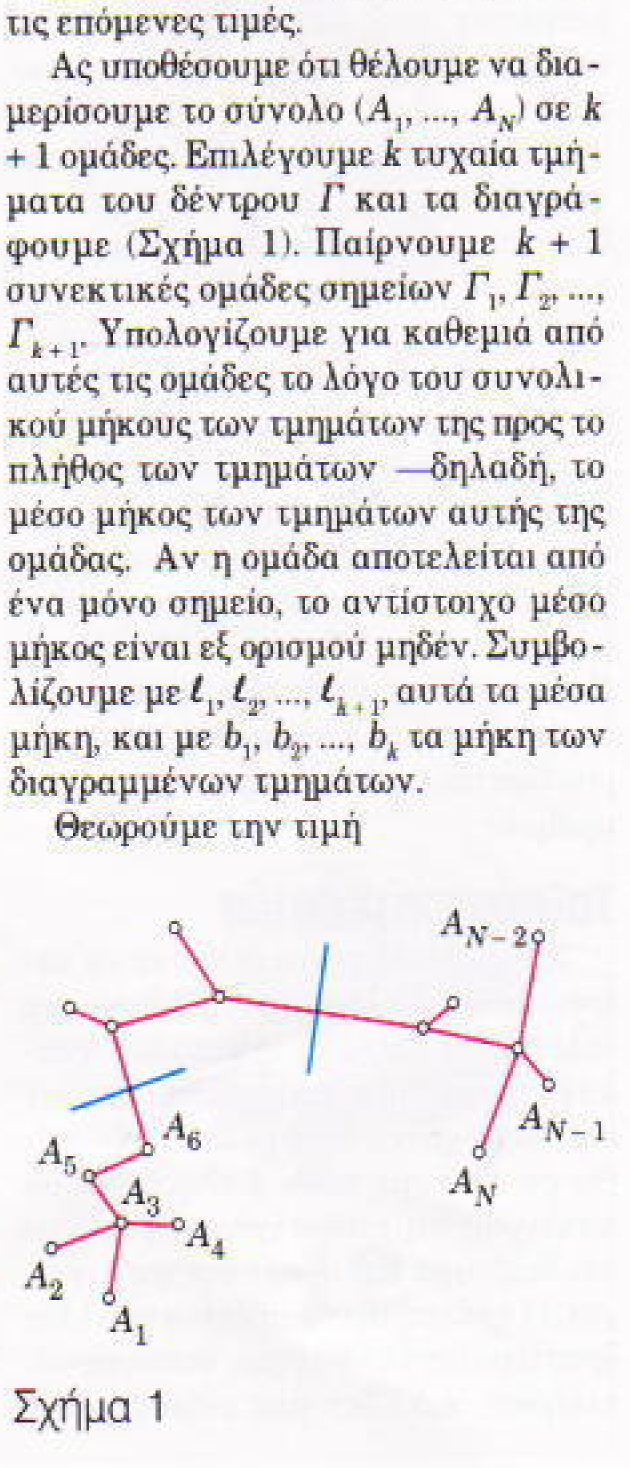
Ο αλγόριθμος κατασκευής του δέντρου ελάχιστου μήκους που περιγράψαμε είναι σχετικά απλός, αλλά απαιτεί εκτεταμένη έρευνα και, συνεπώς, μεγάλο χρόνο στον υπολογιστή. Υπάρχουν ταχύτεροι αλγόριθμοι, είναι όμως περισσότερο πολύπλοκοι.

Διαμέριση σε ομάδες

Τώρα που γνωρίζουμε τον τρόπο κατασκευής του δέντρου ελάχιστου μήκους, θα τον χρησιμοποιήσουμε για να περιγράψουμε έναν αλγόριθμο διαμέρισης. Στην ουσία, μετά την κατασκευή του δέντρου ελάχιστου μήκους, Γ, όταν διαγράψουμε μερικά τμήματα του δέντρου, το σύνολο $A_1, ..., A_N$ διαμερίζεται σε ομάδες. Είναι φυσικό να διαγράψουμε τα μεγαλύτερα τμήματα, με τέτοιο τρόπο όμως ώστε τα σημεία των ομάδων που προκύπτουν να είναι όσο το δυνατόν πυκνότερα. Μπορούμε να εκφράσουμε τυπικά αυτή τη διαισθητική ιδέα εισάγοντας τις επόμενες τιμές.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να διαμερίσουμε το σύνολο $(A_1, ..., A_N)$ σε $k + 1$ ομάδες. Επιλέγουμε k τυχαία τμήματα του δέντρου Γ και τα διαγράφουμε (Σχήμα 1). Παίρνουμε $k + 1$ συνεκτικές ομάδες σημείων $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_{k+1}$. Υπολογίζουμε για καθεμιά από αυτές τις ομάδες το λόγο του συνολικού μήκους των τμημάτων της προς το πλήθος των τμημάτων —δηλαδή, το μέσο μήκος των τμημάτων αυτής της ομάδας. Αν η ομάδα αποτελείται από ένα μόνο σημείο, το αντίστοιχο μέσο μήκος είναι εξ ορισμού μηδέν. Συμβολίζουμε με $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_{k+1}$ αυτά τα μέσα μήκη, και με $b_1, b_2, ..., b_k$ τα μήκη των διαγραμμένων τμημάτων.

Θεωρούμε την τιμή



Σχήμα 1

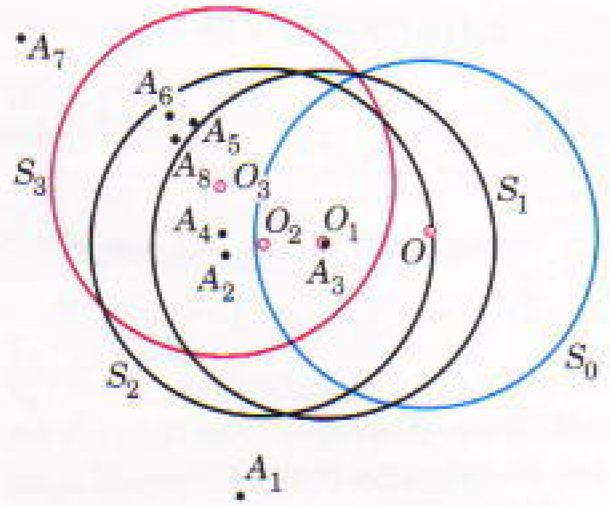
$$F = \ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_{k+1} - b_1 - b_2 - \ldots - b_k.$$

Προφανώς, όσο πυκνότερα είναι τα σημεία σε κάθε ομάδα και όσο περισσότερο απομακρυσμένες είναι οι ομάδες μεταξύ τους, τόσο μικρότερο είναι το F. Επομένως, ένας αλγόριθμος που θα επιτυγχάνει την ταξινόμησή μας είναι ο εξής: θεωρούμε το δέντρο ελάχιστου μήκους, διαγράφουμε με κάθε δυνατό τρόπο k τμήματα από αυτό, υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές F, και επιλέγουμε τη διαμέριση με το μικρότερο F. Αν υπάρχουν αρκετές «ελάχιστες» διαμερίσεις, επιλέγουμε μία από αυτές.

Οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται στην πραγματικότητα, ορίζουν συνήθως την τιμή F με πιο περίπλοκο τρόπο.

Η εμπειρία μάς έχει δείξει ότι αλγόριθμοι τέτοιου είδους παράγουν αρκετά εύλογες διαμερίσεις. Το μεγάλο μειονέκτημά τους είναι ότι απαιτούν υπερβολικό χρόνο αναζήτησης. Όταν αυξάνει το πλήθος των σημείων, το πρόβλημα γίνεται αξεπέραστο, ακόμη και για τους σύγχρονους υπολογιστές.

Για να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την επόμενη ιδέα. Θα προσπαθήσουμε να περιλάβουμε σε μία ομάδα όσα σημεία απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από μια συγκεκριμένη τιμή a. Η κατασκευή γίνεται σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα χωρίζουμε το σύνολο $A_1, \ldots, A_N$ σε μικρότερες ομάδες $G_1, \ldots, G_m$, έτσι ώστε κάθε ομάδα G_i να περιέχεται σε έναν κύκλο S_i ακτίνας $R = a/2$, και τα σημεία των άλλων ομάδων να βρίσκονται εκτός του S_i. (Θα εξηγήσουμε αργότερα τον τρόπο με τον οποίο θα το πετύχουμε αυτό.) Στο δεύτερο βήμα θεωρούμε μόνο τα κέντρα $O_1, \ldots, O_m$ των κύκλων $S_1, \ldots, S_m$. Κατασκευάζουμε το δέντρο ελάχιστου μήκους για το σύνολο $O_1, \ldots, O_m$. Αφού ελαχιστοποιήσουμε την τιμή F που αντιστοιχεί σ' αυτό το δέντρο, χωρίζουμε το σύνολο $O_1, \ldots, O_m$ σε ομάδες όπως περιγράψαμε στον πρώτο αλγόριθμο. Με τον τρόπο αυτό παράγεται μια διαμέριση του συνόλου $A_1, \ldots, A_N$: δύο σημεία A_i και A_j θα τοποθετούνται στην ίδια ομάδα αν ανήκουν στην ίδια μικρή ομάδα G_l ή αν τα κέντρα των κύκλων που περιέχουν τις αντίστοιχές τους μικρές ομάδες



Σχήμα 2

ανήκουν στην ίδια ομάδα της διαμέρισης των κέντρων $O_1, \ldots, O_m$. Αυτή η δισταδιακή διαδικασία μειώνει το πλήθος των σημείων στα οποία εφαρμόζουμε τον πρώτο μας αλγόριθμο: το m είναι συνήθως πολύ μικρότερο από το N, και ο υπολογιστής μπορεί πλέον να εκτελέσει τον αλγόριθμο.

Το πρόβλημα του κινούμενου κύκλου

Απομένει να εξετάσουμε πώς μπορεί να χωριστεί το σύνολο $A_1, \ldots, A_N$ στις μικρότερες ομάδες $G_1, \ldots, G_m$. Ένας αλγόριθμος επίλυσης αυτού του προβλήματος ονομάζεται «πέστροφα» (λέγεται ότι θυμίζει έναν τρόπο ψαρέματος της πέστροφας). Και πάλι, θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο στο επίπεδο, παρότι είναι εξίσου αποτελεσματικός και στον πολυδιάστατο χώρο.

Έστω ότι δίνονται τα N σημεία του επιπέδου $A_1, \ldots, A_N$. Τοποθετούμε μικρές σφαίρες μοναδιαίας μάζας σε καθένα από αυτά τα σημεία και σχεδιάζουμε έναν τυχαίο κύκλο S_0 ακτίνας R που περιέχει μία τουλάχιστον σφαίρα. Έστω O_1 το κέντρο μάζας[1] των σφαιρών που ανήκουν στον S_0, και έστω S_1 ένας κύκλος με κέντρο O_1 και ακτίνα R. Στη συνέχεια, συμβολίζουμε με O_2 το κέντρο μάζας των σφαιρών που ανήκουν στον S_1, με S_2 τον κύκλο με κέντρο O_2 και ακτίνα R, κ.ο.κ.

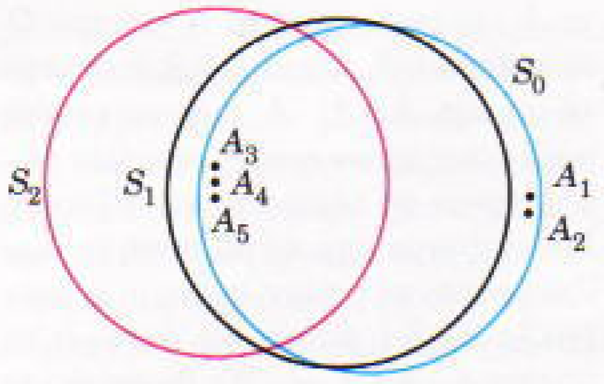
Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2 βλέπετε οκτώ σημεία $A_1, \ldots, A_8$. Ο αρχικός κύκλος S_0 καλύπτει ένα μόνο σημείο, το A_3, το οποίο γίνεται το κέντρο O_1 του κύκλου S_1. Ο κύκλος S_1 καλύπτει τα σημεία A_2, A_3, A_4, και το κέντρο μάζας των τριών αυτών σημείων συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου S_2. Συνεχίζουμε την κατασκευή με τον ίδιο τρόπο, και, όταν φτάσουμε στον κύκλο S_3, βρίσκουμε ότι περιέχει τα σημεία A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_8 και ότι το κέντρο του συμπίπτει με το κέντρο μάζας τους, οπότε όλοι οι επόμενοι κύκλοι συμπίπτουν με αυτόν. Αργότερα θα αποδείξουμε ότι αυτό ισχύει γενικά —δηλαδή, για κάθε σύνολο σημείων $A_1, \ldots, A_N$ και για κάθε αρχικό κύκλο S_0 που περιέχει ένα τουλάχιστον από αυτά, από ένα ορισμένο βήμα και μετά όλοι οι κύκλοι θα συμπίπτουν. Με άλλα λόγια, η μετακίνηση του κύκλου κατά μήκος της διαδρομής $S_0 \to S_1 \to S_2 \to \ldots$ δεν διαρκεί επ' άπειρον. Τα σημεία που καλύπτονται από τον τελευταίο κύκλο θα ανήκουν στην πρώτη ομάδα. Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία στα υπόλοιπα σημεία —δηλαδή, «δρομολογούμε» έναν νέο κύκλο, η τελική θέση του οποίου καθορίζει τη δεύτερη ομάδα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου όλα τα σημεία βρεθούν σε μία από τις ομάδες.

Γιατί σταματά ο κύκλος;

Στο υπόλοιπο άρθρο θα αποδείξουμε ότι ο κύκλος μας πραγματικά «σταματά». Αν παρατηρήσουμε το Σχήμα 2, θα προσέξουμε ότι οι κύκλοι S_0, S_1, S_2, ... καλύπτουν ένα συνεχώς αυξανόμενο πλήθος σημείων και ότι η τελική τους θέση αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη συσσώρευση σημείων. Θα ήταν φυσικό να υποθέσουμε ότι, για κάθε σύνολο σημείων $A_1, \ldots, A_N$ και για κάθε αρχικό κύκλο S_0, το σύνολο των σημείων που καλύπτουν οι S_0, S_1, S_2, ... τουλάχιστον δεν μειώνεται. Ωστόσο, στο Σχήμα 3 βλέπουμε ότι αυτό δεν αληθεύει. Όμως, κατά μια έννοια, η πυκνότητα των σημείων στους κύκλους πράγματι αυξάνει —αντί να θεωρήσουμε το πλήθος των σημείων που ανήκουν στον κύκλο, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας πόσο κοντά βρίσκονται στο κέντρο του κύκλου.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, έστω τα σημεία $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ που ανήκουν στον κύκλο S με κέντρο O. Ορίζουμε την τιμή

1. Σε κάθε σύστημα συντεταγμένων, το κέντρο μάζας ενός συνόλου μοναδιαίων μαζών που είναι τοποθετημένες στα σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) είναι, εξ ορισμού, μια μάζα n μονάδων τοποθετημένη στο σημείο $([x_1 + x_2 + \ldots + x_n]/n, [y_1 + y_2 + \ldots + y_n]/n)$.



Σχήμα 3

$$F(S) = \left[R^2 - (OA_{i_1})^2\right] + \cdots + \left[R^2 - (OA_{i_k})^2\right].$$

Όσο πλησιέστερα στο κέντρο βρίσκεται ένα σημείο τόσο μεγαλύτερη είναι η συμβολή του στην τιμή $F(S)$. Θα αποδείξουμε πως, όταν κατασκευάζουμε τους κύκλους S_1, S_2, S_3, ..., η ακολουθία των τιμών $F(S_0)$, $F(S_1)$, $F(S_2)$, ..., έως ότου πάψουν να εμφανίζονται νέοι κύκλοι, είναι αύξουσα. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε την έννοια της ροπής αδρανείας και το θεώρημα Steiner, το οποίο είναι χρήσιμο σε πολλά προβλήματα γεωμετρίας και μηχανικής.

Η ροπή αδρανείας των σημειακών μαζών $A_1, ..., A_m$, ως προς το σημείο[2] A ορίζεται από τον τύπο

$$I(A) = (AA_1)^2 + ... + (AA_m)^2.$$

Το θεώρημα Steiner μάς επιτρέπει να υπολογίσουμε την $I(A)$ όταν είναι γνωστή η ροπή αδρανείας $I(C)$ αυτού του συστήματος σημείων ως προς το κέντρο μάζας τους C. Το θεώρημα δηλώνει ότι

$$I(A) = I(C) + m(CA)^2.$$

Ας το αποδείξουμε. Τοποθετούμε την αρχή του συστήματος των συντεταγμένων στο κέντρο μάζας των σημείων $A_1, ..., A_m$ —δηλαδή στο σημείο C. Τότε, $I(C) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2 + y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$. Έστω (x_i, y_i) οι συντεταγμένες των σημείων A_i. Τότε, οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας τους, C, είναι $((x_1 + ... + x_m)/m, (y_1 + ... + y_m)/m)$). Συνεπώς, λόγω του τρόπου επιλογής της αρχής των αξόνων, έχουμε $x_1 + ... + x_m = y_1 + ... + y_m = 0$. Συμβολίζουμε με (x, y) τις συντεταγμένες του σημείου A. Τότε

$$\begin{aligned} I(A) &= [(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2] \\ &+ ... + [(x_m - x)^2 + (y_m - y)^2] \\ &= (x_1^2 + y_1^2) + ... + (x_m^2 + y_m^2) \\ &+ m(x^2 + y^2) - 2x(x_1 + ... + x_m) \\ &- 2y(y_1 + ... + y_m) = I(C) + m(CA)^2, \end{aligned}$$

διότι $2x(x_1 + ... + x_m) = 2y(y_1 + ... + y_m) = 0$. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος Steiner.

Ας αποδείξουμε τώρα ότι, αν δεν συμπίπτει ο κύκλος S_1 με τον S_0, τότε $F(S_1) > F(S_0)$. Αλλάζουμε την αρίθμηση των σημείων $A_1, ..., A_m$, έτσι ώστε τα σημεία που καλύπτονται από τον S_0 αλλά όχι τον S_1 να πάρουν αριθμούς από το 1 έως το p, τα σημεία που καλύπτονται από τον S_0 και τον S_1 να πάρουν αριθμούς από το $p + 1$ έως το q, ενώ τα σημεία που ανήκουν στον S_1 αλλά όχι στον S_0 παίρνουν αριθμούς από το $q + 1$ έως το r. Τώρα, ο κύκλος S_0 περιέχει τα σημεία $A_1, ..., A_q$, ενώ ο κύκλος S_1 περιέχει τα $A_{p+1}, ..., A_r$. Είναι φανερό ότι η $F(S_0)$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της ροπής αδρανείας $I(O)$ των σημείων $A_1, ..., A_q$ ως προς το κέντρο O του κύκλου S_0:

$$\begin{aligned} F(S_0) &= [R^2 - (OA_1)^2] + ... \\ &+ [R^2 - (OA_q)^2] \\ &= qR^2 - I(O). \end{aligned}$$

Το κέντρο O_1 του κύκλου S_1 είναι το κέντρο μάζας των σημείων $A_1, ..., A_q$, επομένως από το θεώρημα Steiner έχουμε

$$I(O) = I(O_1) + q(OO_1)^2$$

—δηλαδή,

$$\begin{aligned} F(S_0) &= qR^2 - I(O_1) - q(OO_1)^2 \\ &= [R^2 - (O_1A_1)^2] + ... \\ &+ [R^2 - (O_1A_q)^2] - q(OO_1)^2. \end{aligned}$$

Συγκρίνουμε τον τελευταίο τύπο με τον

$$F(S_1) = [R^2 - (O_1A_{p+1})^2] + ... + [R^2 - (O_1A_r)^2].$$

Το δεξιό μέλος της τελευταίας εξίσωσης δεν περιέχει τους όρους

$$[R^2 - (O_1A_1)^2], ..., [R^2 - (O_1A_p)^2], \quad (1)$$

αλλά περιέχει τους όρους

$$[R^2 - (O_1A_{q+1})^2], ..., [R^2 - (O_1A_r)^2] \quad (2)$$

οι οποίοι δεν υπεισέρχονται στην παράσταση του $F(S_0)$. Παρατηρούμε τώρα ότι τα σημεία $A_1, ..., A_p$ βρίσκονται εκτός του κύκλου S_1, και επομένως όλες οι τιμές στην παράσταση (1) είναι αρνητικές. Από την άλλη πλευρά, τα σημεία $A_{q+1}, ..., A_r$ ανήκουν στον κύκλο S_1, οπότε οι τιμές στην παράσταση (2) είναι μη αρνητικές. Έπεται ότι, αν απομακρύνουμε τους όρους της πρώτης ομάδας από την παράσταση του $F(S_0)$ και προσθέσουμε αυτούς της δεύτερης, το αποτέλεσμα θα αυξηθεί —δηλαδή, $F(S_0) \leq F(S_1) - q(OO_1)^2$, ή

$$F(S_1) > F(S_0)$$

αν τα σημεία O_1 και O δεν συμπίπτουν.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, αν δεν συμπίπτουν τα σημεία O_{k+1} και O_k, τότε $F(S_{k+1}) > F(S_k)$. Τώρα πλέον είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι οι κύκλοι S_n, S_{n+1}, ... συμπίπτουν έπειτα από κάποιο συγκεκριμένο n. Πράγματι, από την κατασκευή μας έπεται ότι κάθε σημείο O_m είναι το κέντρο μάζας των σημείων που καλύπτει ο κύκλος S_m. Ας θεωρήσουμε όλα τα υποσύνολα του συνόλου $A_1, ..., A_N$ και τα κέντρα μάζας τους. Το σημείο O_{m+1} είναι ένα από αυτά τα κέντρα. Το πλήθος αυτών των κέντρων είναι πεπερασμένο, και επομένως μερικά από τα κέντρα της ακολουθίας $O, O_1, O_2, ...$ —ας πούμε τα O_i και O_j— πρέπει να συμπίπτουν. Αποδείξαμε όμως ότι

$$F(S_i) \leq F(S_{i+1}) \leq ... \leq F(S_j),$$

και αφού $S_i = S_j$, τότε $F(S_i) = F(S_j)$. Συνεπώς,

$$F(S_i) = F(S_{i+1}) = ... = F(S_j).$$

Η ισότητα $F(S_i) = F(S_{i+1})$, όμως, είναι δυνατή μόνο όταν $S_i = S_{i+1}$. Αλλά αν συμπίπτουν δύο διαδοχικοί κύκλοι, τότε θα συμπίπτουν με αυτούς και όλοι οι επόμενοι. Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση $S_0 \to S_1 \to S_2 \to ...$ του κύκλου μας δεν μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον —ή, όπως λένε οι μαθηματικοί, ο αλγόριθμος «της πέστροφας» συγκλίνει.

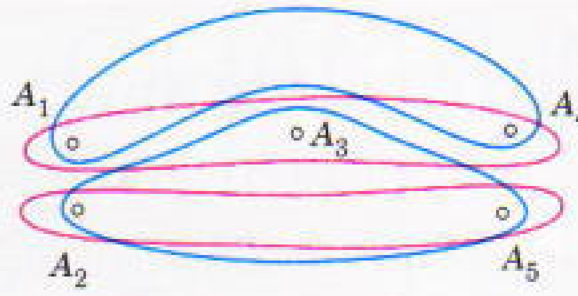
Δύο νέα προβλήματα

Θα ολοκληρώσουμε θέτοντας δύο νέα προβλήματα. Οι διαδικασίες που εμφανίζονται σ' αυτά χρησιμοποιούνται επίσης για την ταξινόμηση σημείων του πολυδιάστατου χώρου. Όπως και πριν, θα περιοριστούμε στην

2. Στην πραγματικότητα, η ροπή αδρανείας στη μηχανική ορίζεται ως προς άξονα και όχι ως προς σημείο.

περίπτωση του επιπέδου.

Πρόβλημα 4. Ας υποθέσουμε ότι χωρίζουμε τα σημεία $A_1, ..., A_N$, σε ℓ (μη κενές) ομάδες $G_1, ..., G_\ell$. Έστω $O_1, ..., O_\ell$ τα κέντρα μάζας αυτών των ομάδων. Κατασκευάζουμε μια νέα διαμέριση του συνόλου $A_1, ..., A_N$ βάσει του εξής κανόνα: αν O_i είναι το πλησιέστερο από τα κέντρα $O_1, ..., O_\ell$ στο σημείο A_k ($1 \le k \le N$), τοποθετούμε αυτό το σημείο στην ℓ-οστή ομάδα. Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα κέντρα σε ελάχιστη απόσταση από το A_k, τότε επιλέγουμε εκείνο με τον μικρότερο δείκτη. Αφού αφαιρέσουμε τις κενές ομάδες (δώστε ένα παράδειγμα όπου προκύπτουν κενές ομάδες!), αριθμούμε ξανά τις, ας πούμε p, ομάδες που απομένουν ($p \le \ell$). Παίρνουμε έτσι μια νέα διαμέριση $G_1^1, ..., G_p^1$. Βρίσκουμε τα κέντρα μάζας αυτών των ομάδων και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με τα νέα κέντρα, για να δημιουργήσουμε τη διαμέριση $G_1^2, ..., G_q^2$, ($q \le p$), και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Αποδείξτε



Σχήμα 4

ότι έπειτα από ένα συγκεκριμένο βήμα οι διαμερίσεις συμπίπτουν.

Στο επόμενο πρόβλημα θα χρησιμοποιήσουμε τους εξής συμβολισμούς: για τυχαίο υποσύνολο G του συνόλου $A_1, ..., A_N$, και για το σημείο A, θέτουμε $I(A, G) = (AA_i)^2 + ... + (AA_j)^2$, όπου η άθροιση γίνεται για όλα τα σημεία του G.

Πρόβλημα 5. Έστω ότι δίνεται μια αρχική διαμέριση $G_1, ..., G_\ell$ σε μη κενές ομάδες των σημείων $A_1, ..., A_N$, όπως στο προηγούμενο πρόβλημα. Η νέα διαμέριση $G_1^1, ..., G_p^1$ θα διαφέρει από την αρχική ως προς τη «θέση» ενός μόνο σημείου, το οποίο θα μεταφέρουμε σε άλλη ομάδα —συγκεκριμένα, θα μεταφέρουμε το σημείο A_1 σε εκείνη την ομάδα G_i για την οποία η τιμή $I(A_1, G_i)$ είναι ελάχιστη (αν υπάρχουν περισσότερες τέτοιες ομάδες, επιλέγουμε εκείνη με τον μικρότερο δείκτη). Αν η ομάδα του A_1 περιέχει μόνο αυτό το σημείο —και επομένως ύστερα από τη μετακίνησή του απομείνει κενή—, τότε την αφαιρούμε και δίνουμε μια νέα τυχαία αρίθμηση στις υπόλοιπες. Το πλήθος p των νέων ομάδων είναι ή ℓ ή $\ell - 1$. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για τα σημεία $A_2, ..., A_N$, διαδοχικά. Και έπειτα ξανά για το A_1, για το A_2, κ.ο.κ. Αποδείξτε ότι έπειτα από ένα συγκεκριμένο βήμα, όλες οι διαμερίσεις συμπίπτουν.

Το πλεονέκτημα των αλγορίθμων αυτών των δύο προβλημάτων σε σύγκριση με τον αλγόριθμο της πέστροφας είναι ότι συγκλίνουν γρήγορα, και συνεπώς απαιτούν λιγότερο υπολογιστικό χρόνο. Ωστόσο, μια ατυχής επιλογή της αρχικής διαμέρισης είναι δυνατόν να οδηγήσει σε αφύσικη τελική διαμέριση, όπως αυτή του Σχήματος 4.

ΠΩΣ ΛΥΝΕΤΑΙ;

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M101

Ακέραιες ρίζες. Βρείτε όλους τους ακεραίους a για τους οποίους και οι δύο επόμενες εξισώσεις έχουν δύο ακέραιες ρίζες:

$$x^2 + ax + 1.996 = 0$$

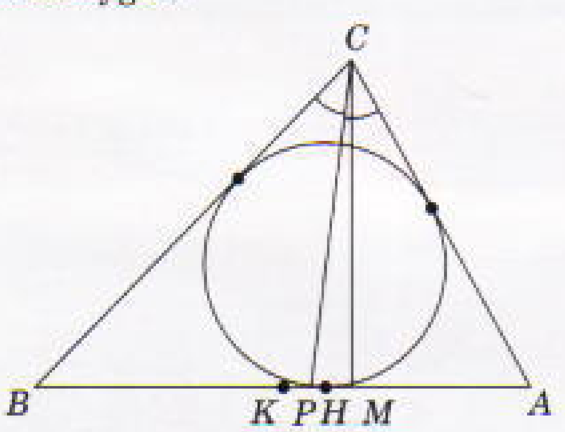
και

$$x^2 + 1.996x + a = 0.$$

(V. Protasov)

M102

Ιδιαίτερα σημεία. Θεωρούμε τα τέσσερα σημεία K, P, H και M στην ίδια πλευρά ενός τριγώνου. Είναι, αντίστοιχα, το μέσο της, η τομή της με τη διχοτόμο τής απέναντι γωνίας, το σημείο επαφής με τον εγγεγραμμένο κύκλο και το ίχνος του ύψους που άγεται σ' αυτήν. Αποδείξτε ότι, αν $KP = a$ και $KM = b$, τότε $KH = \sqrt{ab}$.
(I. Sharygin)



Σχήμα 1

M103

Όσο δυνατόν μικρότερη. Βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης

$$y = \frac{x^2}{8} + x\text{συν}x + \text{συν}2x.$$

(D. Averiyanov)

M104

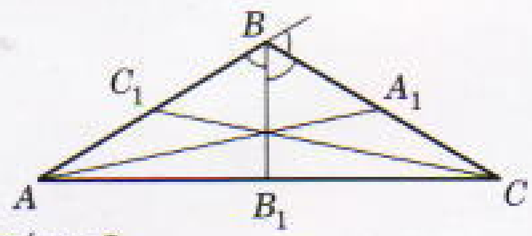
Παλιομοδίτικη προσέγγιση. Με τη βοήθεια μιας αριθμομηχανής μπορείτε να ανακαλύψετε ότι η εξίσωση $x^3 - x - 3 = 0$ έχει μία μοναδική πραγματική ρίζα και ότι αυτή η ρίζα είναι μεγαλύτερη του $\sqrt[5]{13}$. Μπορείτε όμως να αποδείξετε ότι αυτή η εικασία είναι αληθής; (V. Panfyorov)

V(lt)	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
P(kN/m^2)	100	35,4	19,2	12,58	9	7,8	6,95	6,3	5,75	5,3

Σχήμα 3

M105

Διαφορά τριάντα μοιρών. Φέρουμε σ' ένα τρίγωνο ABC τις διχοτόμους AA_1, BB_1 και CC_1 των εσωτερικών γωνιών (Σχήμα 2). Αποδείξτε ότι, αν $\angle ABC = 120°$, τότε $\angle A_1B_1C_1 = 90°$. (A. Yegorov)



Σχήμα 2

Φυσική

Φ101

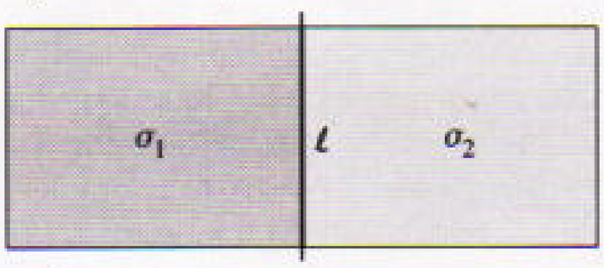
Δοχείο με ελατήριο. Μάζα m ταλαντώνεται στερεωμένη στο άκρο ελατηρίου που κρέμεται από την οροφή δοχείου μάζας M τοποθετημένου σε τραπέζι. Για ποιο πλάτος ταλάντωσης θα αναπηδήσει το δοχείο από το τραπέζι; Η σταθερά του ελατηρίου είναι k.
(L. Bakanina)

Φ102

Εκτόνωση αερίου. Ένα γραμμομόριο ιδανικού μονοατομικού αερίου εκτονώνεται από αρχικό όγκο 20 lt σε τελικό όγκο 200 lt. Κατά τη διαδικασία αυτή, η πίεση στον κύλινδρο που περιέχει το αέριο μεταβάλλεται σύμφωνα με τον πίνακα του Σχήματος 3. Απορροφά ή εκλύει θερμότητα το συγκεκριμένο αέριο όταν εκτονώνεται από τα 40 lt στα 80 lt; Ανέρχεται ή κατέρχεται η θερμοκρασία του όταν εκτονώνεται από τα 140 lt στα 180 lt; Προσδιορίστε το λόγο των ειδικών θερμοτήτων για τις περιοχές αυτές.
(A. Zilberman)

Φ103

Δύο υγρά υμένια. Στο οριζόντιο συρμάτινο πλαίσιο του Σχήματος 4 σχηματίζονται δύο υγρά υμένια και διαχωρίζονται από κινητή ράβδο μήκους ℓ (Σχήμα 4). Οι συντελεστές επιφανειακής τάσης των υμενίων είναι σ_1 και σ_2. Τι δύναμη πρέπει να ασκηθεί στη ράβδο ώστε να παραμείνει ακίνητη; (A. Buzdin, S. Krotov)



Σχήμα 4

Φ104

Σφαιρικός πυκνωτής. Μονωμένος πυκνωτής που αποτελείται από ομόκεντρες σφαίρες φέρει φορτίο Q. Οι ακτίνες της εσωτερικής και της εξωτερικής σφαίρας είναι αντίστοιχα R_1 και R_2. Προσδιορίστε την πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο ανάμεσα στις σφαίρες, αν $R_2 - R_1 << R_1$. (V. Mozhayev)

Φ105

Πού βρίσκεται το άστρο; Εκτιμήστε το σφάλμα κατά τη μέτρηση της γωνιακής συντεταγμένης άστρου που είναι ορατό από τη Γη σε γωνία $\beta = 45°$ πάνω από τον ορίζοντα. Ο δείκτης διάθλασης του αέρα στην επιφάνεια της Γης είναι $n = 1{,}0003$.
(S. Gordyunin, P. Gorkov)

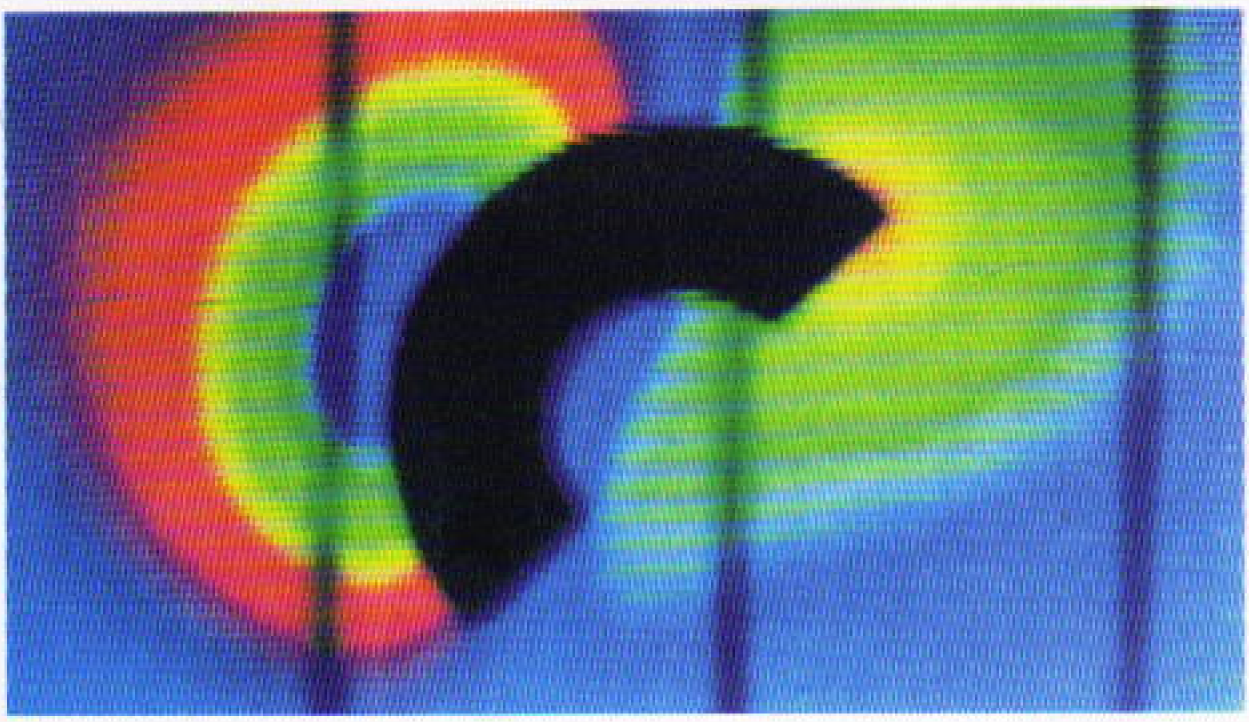
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 65

Μπορείτε να δείτε το μαγνητικό πεδίο;

Πώς να χρησιμοποιήσετε την τηλεόρασή σας με έναν νέο και διαφωτιστικό τρόπο

Alexander Mitrofanov

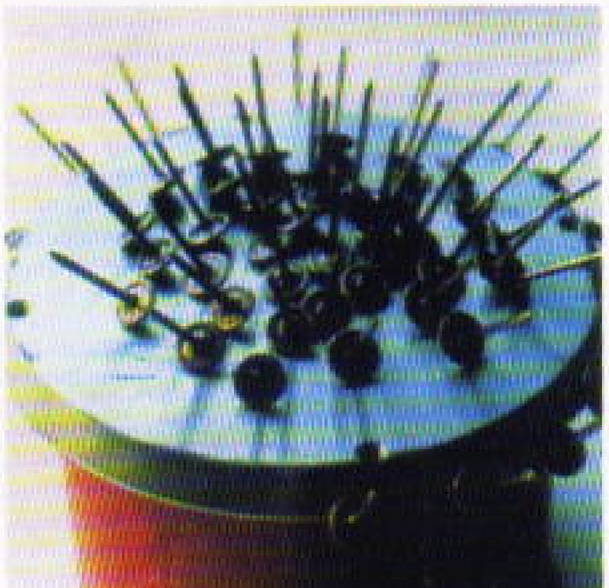
ΑΣ ΕΚΤΕΛΕΣΟΥΜΕ ΕΝΑ ΠΕΙΡΑΜΑ που και διασκεδαστικό είναι και ιδιαίτερα πολύχρωμο. Όλα όσα θα χρειαστούμε είναι ένας μικρός μόνιμος μαγνήτης —μπορούμε να τον αποσπάσουμε από κάποιο παλιό παιχνίδι ή συσκευή μέτρησης— και μια έγχρωμη τηλεόραση. Ανοίξτε την τηλεόραση, συντονίστε τη σ' ένα κανάλι και πλησιάστε το μαγνήτη ώς την οθόνη. Θα προκαλέσετε θεαματικές χρωματικές αλλαγές κοντά στο μαγνήτη, οι οποίες θα είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακές αν στην αρχική εικόνα της οθόνης υπάρχει κάποια μεγάλη μονόχρωμη περιοχή (Σχήμα 1).



Σχήμα 1
Φωτογραφία της οθόνης μιας έγχρωμης τηλεόρασης με έναν μικρό μόνιμο μαγνήτη μπροστά της.

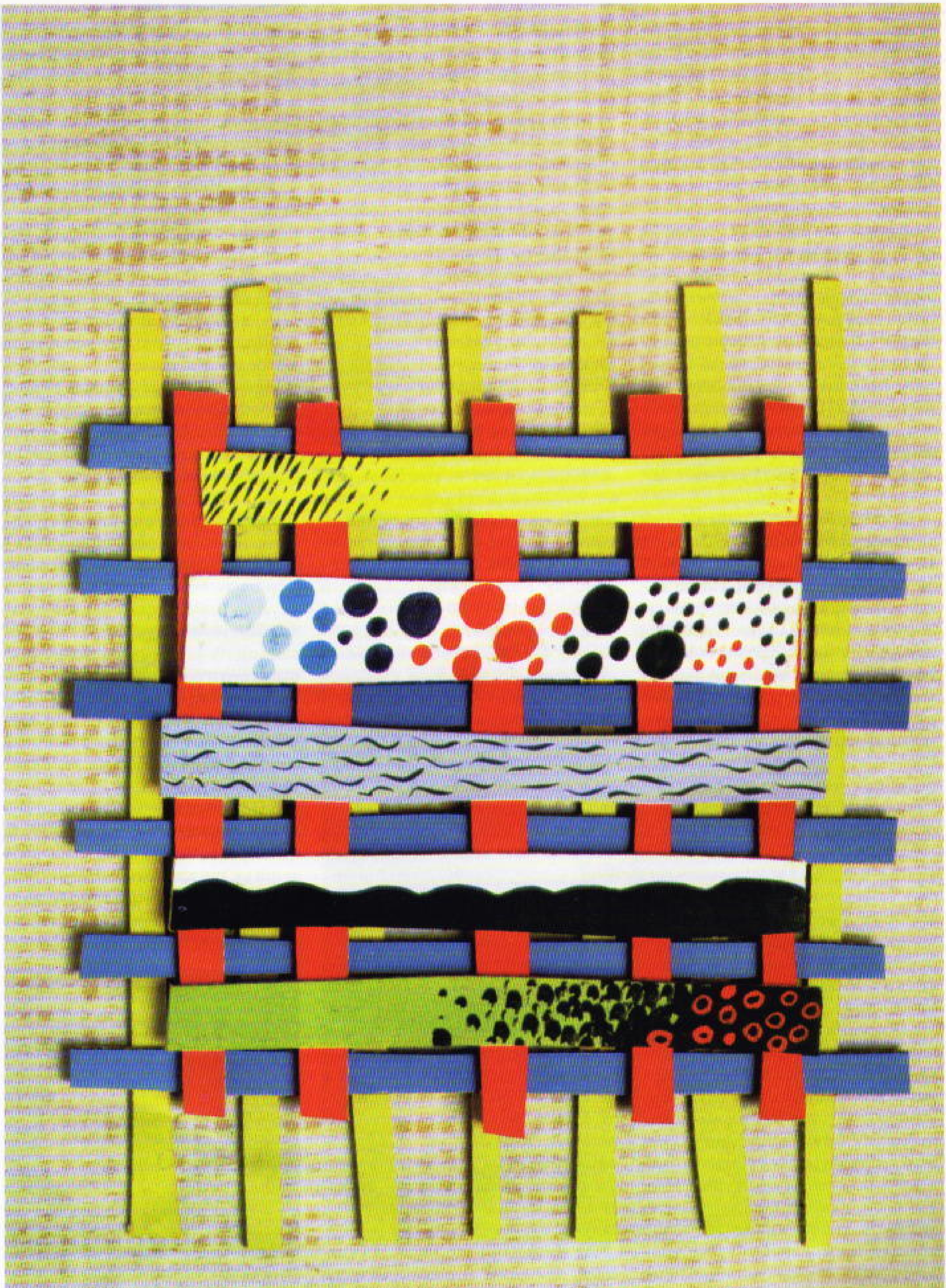
Όσο είναι παρών ο μαγνήτης, η οθόνη της τηλεόρασης παρουσιάζει εντυπωσιακή εικόνα, η οποία μοιάζει πολύ με τα χρώματα που βλέπουμε σε κηλίδες πετρελαίου ή λαδιών πάνω στη βρεγμένη άσφαλτο ή στο Βόρειο Σέλας. Οι έγχρωμες ταινίες συγκλίνουν κοντά στο περίγραμμα του μαγνήτη, καθιστώντας έτσι «ορατό» το μαγνητικό πεδίο. Προσπαθήστε να χειριστείτε κατάλληλα το μαγνήτη, για να εξετάσετε τι συμβαίνει. Πλησιάστε τον διαδοχικά στην οθόνη και απομακρύντε τον, ή περιστρέψτε τον, και παρακολουθήστε τις μεταλλαγές των χρωμάτων. Στο συγκεκριμένο πείραμα, η «εικόνα» του μαγνητικού πεδίου είναι εντυπωσιακότερη από το μόρφωμα που δημιουργείται από ρινίσματα σιδήρου, βελόνες ή μικρά καρφιά (Σχήμα 2), ή σχηματίζεται πάνω σε «μαγνητικό χαρτί» (λεπτό στρώμα ελαίου όπου αιωρούνται σιδηρομαγνητικά σωματίδια, απλωμένο σε χάρτινη πλάτη και καλυμμένο με διαφανές πλαστικό). Επιπλέον, η οθόνη της τηλεόρασης «αισθάνεται» και ασθενή πεδία —ασθενέστερα από όσα είναι δυνατόν να ανιχνεύσουμε χρησιμοποιώντας ρινίσματα σιδήρου ή μαγνητικό χαρτί.

Δεν είναι δύσκολο να φωτογραφίσετε την οθόνη που τα χρώματά της έχουν διαταραχτεί από το μαγνήτη. Δεν χρειάζεστε καν τρίποδο. Η φωτοβολία μιας συνηθισμένης οθόνης τηλεόρασης είναι αρκετά μεγάλη ώστε, εάν χρησιμοποιήσετε φιλμ 100-200 ASA και ανοίξετε εντελώς το διάφραγμα, αρκεί χρόνος έκθεσης 1/15 s ή και 1/30 s. Μικρότεροι χρόνοι έκθεσης δεν προσφέρονται (μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;), ενώ για μεγαλύτερους απαιτείται τρίποδο.



Σχήμα 2
Καρφιά διατεταγμένα πάνω σε μαγνήτη.

Εικονογράφηση: Vasily Vlasov



Τι συμβαίνει στο πείραμά μας; Αναμφίβολα, πολλοί αναγνώστες μας γνωρίζουν την απάντηση. Η εξήγηση είναι πράγματι αρκετά απλή. Όταν πλησιάζουμε το μαγνήτη στην οθόνη, το μαγνητικό πεδίο του τη διαπερνά και εισέχεται στον καθοδικό σωλήνα. Η δύναμη Lorentz που επάγει ο μαγνήτης προκαλεί επιπρόσθετη απόκλιση των δεσμών ηλεκτρονίων, η οποία με τη σειρά της οδηγεί σε μετατοπίσεις των χρωμάτων σε όσες περιοχές της οθόνης η απόκλιση είναι αρκούντως μεγάλη. Η απόκλιση μιας δέσμης ηλεκτρονίων μέσα σε μαγνητικό πεδίο είναι πολύ γνωστό φαινόμενο, αλλά ποια σχέση μπορεί να έχει με τις αλλαγές των χρωμάτων; Το συγκεκριμένο ερώτημα απαιτεί ξεχωριστή εξήγηση (αν και δεν θα υπεισέλθουμε καθόλου σε τεχνικές λεπτομέρειες).

Συνήθως δεν αποδίδουμε ιδιαίτερη προσοχή στις υπέροχες ιδιότητες των ματιών μας, που μας επιτρέπουν να διακρίνουμε τα χρώματα σε όλη τους τη θαυμάσια ποικιλία, να αντιλαμβανόμαστε τις λαμπρές, πλούσιες αποχρώσεις του περιβάλλοντός μας, να αισθανόμαστε τις πιο ανεπαίσθητες διαβαθμίσεις της χροιάς και των τόνων. Ο υπέροχος κόσμος των οπτικών αισθημάτων αποτελεί κοινό φαινόμενο στη ζωή των περισσότερων ανθρώπων. Θα έπρεπε να ευγνωμονούμε τη φύση που μας προίκισε με αυτόν ακριβώς τον τύπο όρασης!

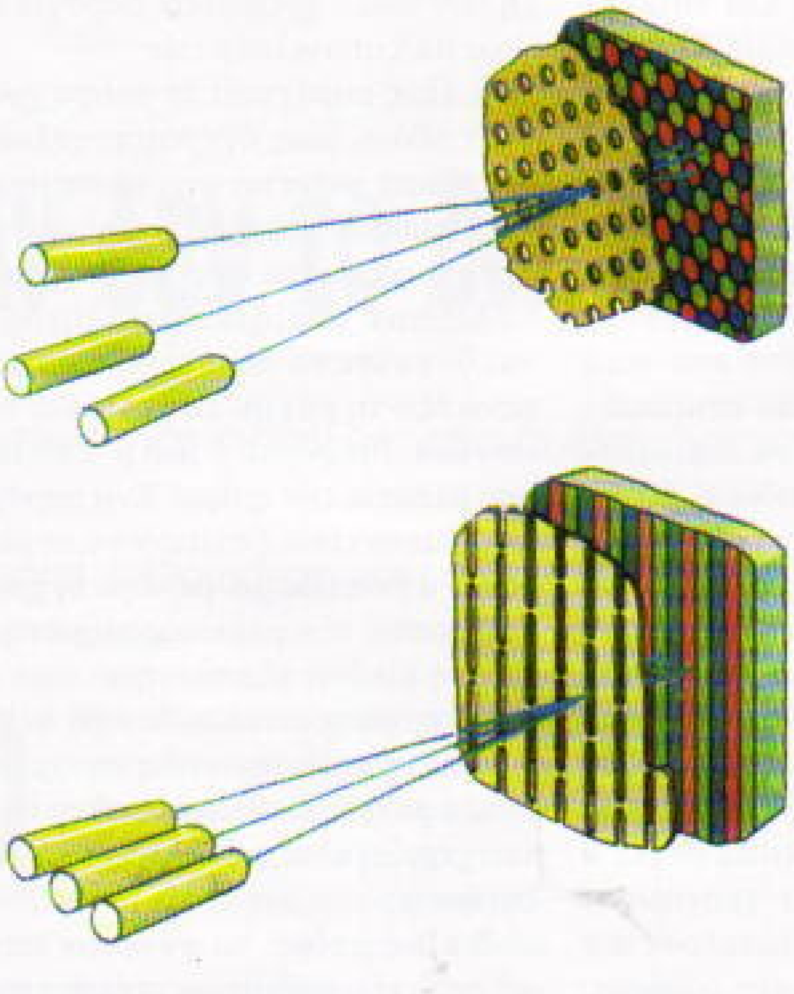
Ωστόσο, τι ακριβώς εννοούμε λέγοντας «χρώμα» και «έγχρωμη όραση»; Το φως που ακτινοβολούν πολλές πηγές —όπως ο Ήλιος, ένας λαμπτήρας πυρακτώσεως, ένα φωτιζόμενο φύλλο λευκού χαρτιού ή ένα κομμάτι του ημερήσιου ουρανού— αποτελείται από συνεχές φάσμα ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων διαφόρων μηκών κύματος. Εξ ορισμού, το ορατό φως συντίθεται από τα μήκη κύματος που είναι δυνατόν να τα ανιχνεύσουν τα μάτια των περισσότερων ανθρώπων (εάν αγνοήσουμε το φαινόμενο της αχρωματοψίας). Αυτό το φως κείται στην περιοχή από 380 ώς 760 nm περίπου, τιμές που αντιστοιχούν στα χρώματα ιώδες και βαθύ κόκκινο. Χρησιμοποιώντας ένα γυάλινο πρίσμα, ένα φράγμα περίθλασης ή ένα σύνολο έγχρωμων φίλτρων, είναι δυνατόν να αναλύσουμε ένα λιγότερο ή περισσότερο ομογενές μείγμα ακτινοβολιών από οποιαδήποτε φωτεινή πηγή στις στενές ταινίες που αντιστοιχούν σε διαφορετικά μήκη κύματος και για τις οποίες λέμε ότι έχουν «διαφορετικά χρώματα», τα οποία τα μάτια μας τα διακρίνουν ως κόκκινο, πορτοκαλί, κίτρινο, πράσινο, γαλάζιο, λουλακί και ιώδες —όπως επίσης και αναρίθμητα σύνθετα χρώματα βασισμένα στα παραπάνω απλά χρώματα. Το αποτέλεσμα της ανάλυσης της φωτεινής δέσμης στις συνιστώσες της από διάφορα μήκη κύματος και συχνότητες ονομάζεται *φάσμα*. Η έγχρωμη όραση καθίσταται δυνατή επειδή ο αμφιβληστροειδής χιτώνας του ματιού μας διαθέτει ανιχνευτές φωτός που ονομάζονται κωνία, τα οποία απορροφούν το φως διαφορετικά, ανάλογα με το μήκος κύματός του. Οι χρωστικές των τριών τύπων κωνίων διαθέτουν ευρείες ζώνες απορρόφησης του φωτός, αλλά τα μέγιστα της απορρόφησης εντοπίζονται σε διαφορετικές περιοχές του φάσματος και αντιστοιχούν στα μήκη κύματος των 430, 530 και 560 nm. Τα κωνία δεν είναι οι μοναδικοί υποδοχείς φωτός στο μάτι. Όταν το φως είναι ασθενές —σ' ένα σκοτεινό δωμάτιο, λόγου χάρη, ή το σούρουπο—, τα κωνία δεν αντιδρούν στο ορατό φως, οπότε τίθεται σε λειτουργία ένας άλλος μηχανισμός, ο οποίος στηρίζεται στα κύτταρα που ονομάζονται ραβδία. Τα ραβδία περιέχουν τη χρωστική ροδοψίνη, που είναι εξαιρετικά ευαίσθητη στο φως. Στα ραβδία οφείλεται η όραση στο αμυδρό φως, οπότε μπορούμε μεν να δούμε, αλλά όχι και να διακρίνουμε τα χρώματα.

Εάν χρησιμοποιήσουμε οπτικά όργανα, όχι μόνον είναι δυνατόν να αναλύσουμε το φως και να πάρουμε το φάσμα της φωτεινής πηγής, αλλά μπορούμε να επιτελέσουμε και την αντίστροφη διαδικασία: να συνθέσουμε ακτινοβολίες διαφορετικού χρώματος. Η ανάμειξη διαφορετικών χρωμάτων μπορεί να οδηγήσει σε μερικά εντυπωσιακά αποτελέσματα, καθόλου προφανή εκ των προτέρων και ολωσδιόλου απρόβλεπτα.

Ας εξετάσουμε μια δημοφιλή επίδειξη, που έλκει την καταγωγή της από τα πειράματα τα οποία διεξήγαγαν ο Νεύτων και ο Maxwell σχετικά με την ανάμειξη των χρωμάτων. Χρησιμοποιώντας τρεις προβολείς, φωτίζουμε μια οθόνη με τρεις εν μέρει επικαλυπτόμενες δέσμες φωτός που διέρχονται από διαφορετικά έγχρωμα φίλτρα: κόκκινο, πράσινο και γαλάζιο. Μεταβάλλοντας τη σχετική ένταση των δεσμών, είναι δυνατόν να πάρουμε στην οθόνη λευκό φως, στο μέρος όπου επικαλύπτονται και οι τρεις δέσμες (Σχήμα 3). Μια άλλη περιοχή επικάλυψης δείχνει ότι η ανάμειξη κόκκινου και πράσινου φωτός παράγει κίτρινο, και εάν κάνουμε το ίδιο με γαλάζιο και πράσινο, παίρνουμε κυανό (της τετραχρωμίας). Επίσης, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, εάν φωτιστεί μια λευκή οθόνη με δέσμες χρώματος κυανού και κόκκινου, θα παραχθεί λευκό φως.

Φανταστείτε τώρα ότι προσεγγίζουμε μεταξύ τους σε μια οθόνη κηλίδες κόκκινου, πράσινου και γαλάζιου φωτός. Δεν επικαλύπτονται, αλλά, λόγω των πολύ μικρών γωνιακών μεγεθών τους, το μάτι δεν τις αντιλαμβάνεται ως ξεχωριστές. Ένα τέτοιο σύνθετο μόρφωμα θα μοιάζει στην οθόνη σαν λευκή κηλίδα. Αυτό οφείλεται στην περίθλαση: το είδωλο καθεμιάς κηλίδας του τρίχρωμου μορφώματος στον αμφιβληστροειδή δεν είναι σημειακό· μοιάζει με μια αρκετά ασαφή κηλίδα. Κατά συνέπεια, τα μεμονωμένα κωνία επηρεάζονται από το φως και των τριών χρωμάτων, και ο εγκέφαλος θεωρεί το τρίχρωμο μόρφωμα ως μία και μοναδική λευκή κηλίδα. Μεταβάλλοντας τους λόγους των εντάσεων των έγχρωμων δεσμών, και πιθανώς αλλάζοντας το φόντο,

Σχήμα 3
Ανάμειξη χρωμάτων.

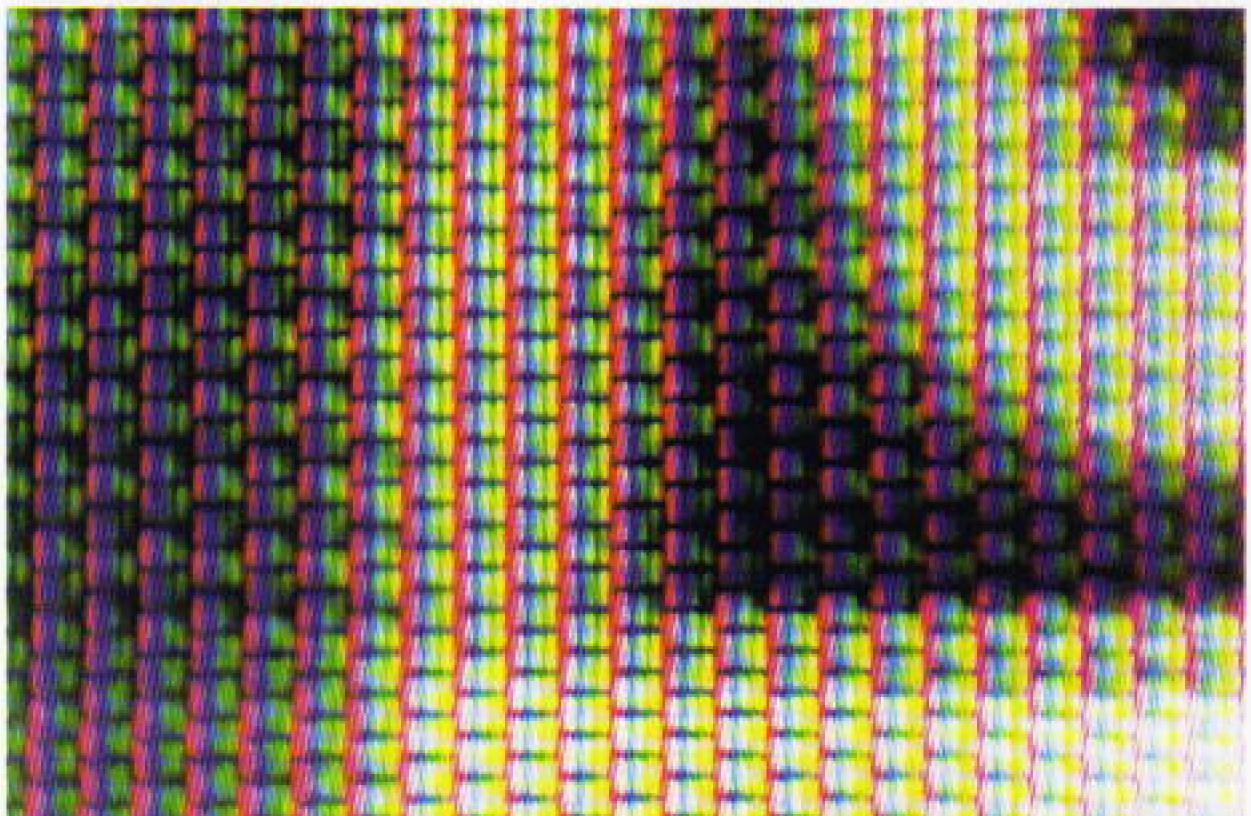


Σχήμα 4
Οθόνη καθοδικού σωλήνα τηλεόρασης με φωσφορίζοντα στοιχεία σε διάταξη ψηφιδωτού και σε μορφή σχάρας.

είναι δυνατόν να παρατηρήσουμε μια έγχρωμη κηλίδα οποιουδήποτε χρώματος και τόνου. Οι «πουαντιγιστές» ζωγράφοι (για παράδειγμα, ο Ζωρζ Σερά και ο Πωλ Σινιάκ) χρησιμοποιούσαν μια παρεμφερή τεχνική, παραθέτοντας μικρά στίγματα καθαρού χρώματος, τα οποία συνδυαζόμενα οπτικά δημιουργούσαν την αίσθηση διαφόρων χρωμάτων και αποχρώσεων όταν κοίταζε κανείς τον καμβά από κάποια απόσταση.

Σ' αυτά τα χαρακτηριστικά της έγχρωμης όρασης στηρίζεται η λειτουργία του καθοδικού σωλήνα της έγχρωμης τηλεόρασης. Η οθόνη αποτελείται από πολλά μικρά, πανομοιότυπα από γεωμετρική άποψη φωσφορίζοντα στοιχεία (κοκκία) με σχήμα κυκλικού δίσκου ή λωρίδας, και συγκεντρωμένα σε ομάδες ανά τρία (Σχήμα 4). Τα εν λόγω κοκκία έχουν διαφορετικές χημικές συνθέσεις, με βάση τον ψευδάργυρο, το θείο, το σελήνιο, το φωσφόρο και άλλα χημικά στοιχεία, ώστε, όταν προσπίπτει πάνω τους μια δέσμη ηλεκτρονίων, να εκπέμπουν κόκκινο, πράσινο και γαλάζιο φως. Τρεις δέσμες ηλεκτρονίων ελεγχόμενης έντασης εστιάζονται στα αντίστοιχα γειτνιάζοντα κοκκία ώστε να παραχθούν τα συγκεκριμένα τρία χρώματα σε ορισμένες αναλογίες· έτσι καθίσταται δυνατή η αναπαραγωγή ευρέος φάσματος χρωμάτων και αποχρώσεων. Η προκύπτουσα εικόνα είναι πολύ ευκρινής, επειδή οι φωσφορίζοντες τρίχρωμοι σχηματισμοί κοκκίων είναι πολύ μικροί. Ωστόσο, μπορείτε να τους δείτε είτε διά γυμνού οφθαλμού, εάν πλησιάσετε στην οθόνη, είτε με μεγεθυντικό φακό. Είναι δυνατόν επίσης να τους διακρίνετε σε μια φωτογραφία σε μεγέθυνση (Σχήμα 5).

Ας ξανακοιτάξουμε το Σχήμα 4. Εκτός από τα φωσφορίζοντα κύτταρα των οθονών με δομή ψηφιδωτού ή σχάρας, το σχήμα δείχνει την αντίστοιχη μάσκα σκιάς (ή σχισμών). Αυτή αποτελείται από λεπτά μεταλλικά φύλλα με μεγάλο πλήθος κανονικά διατεταγμένων ανοιγμάτων. Η μάσκα σκιάς στερεώνεται πίσω από την οθόνη, σε απόσταση 1 cm περίπου από αυτήν. Κάθε καθοδικός σωλήνας περιέχει τρία ηλεκτρονικά τηλεβόλα (Σχήμα 4). Κατά την τηλεοπτική μετάδοση, και οι τρεις δέσμες ηλεκτρονίων εστιάζονται από ένα κοινό ζεύγος πηνίων μαγνητικής απόκλισης σε ορισμένη φωσφορίζουσα τριάδα στην οθόνη, αλλά η ένταση της κάθε δέσμης ελέγχεται ξεχωριστά σύμφωνα με την αρχική εικόνα, όπως αναλύεται σε κόκκινες, γαλάζιες και πράσινες φωτεινές στιγμές. Η αμοιβαία διαρρύθμιση των ηλεκτρονικών τηλεβόλων, των φωσφοριζόντων κοκκίων και των ανοιγμάτων της μάσκας σκιάς επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε ένα κοκκίο συγκεκριμένου χρώματος να εκτίθεται μόνο στο «δικό του» ηλεκτρονικό τηλεβόλο, το οποίο διαμορφώνεται από το τηλεοπτικό σήμα που ελέγχει το αντίστοιχο χρώμα στην προκύπτουσα εικόνα. Τα δύο άλλα ηλεκτρονικά τηλεβόλα βομβαρδίζουν τα δικά τους φωσφορίζοντα κοκκία. Βασικά, αυτός είναι ο τρόπος λειτουργίας ενός καθοδικού σωλήνα που χρησιμοποιεί μάσκα σκιάς για το διαχωρισμό των χρωμάτων.



Σχήμα 5
Φωτογραφία σε μεγέθυνση ενός τμήματος καθοδικού σωλήνα έγχρωμης τηλεόρασης.

Ακόμη και η παραπάνω σύντομη περιγραφή ενός έγχρωμου καθοδικού σωλήνα παρέχει επαρκείς πληροφορίες για να κατανοήσετε γιατί το μαγνητικό πεδίο ενός μικρού μόνιμου μαγνήτη παραμορφώνει τα χρώματα της οθόνης, χωρίς ωστόσο να επηρεάζει το σχήμα των εικονιζόμενων αντικειμένων.

Πράγματι, όταν η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης Lorentz —η οποία ασκείται στις δέσμες ηλεκτρονίων λόγω του εξωτερικού μαγνήτη που έχετε τοποθετήσει πλησίον της οθόνης— προκαλεί απόκλιση των δεσμών κατά αποστάσεις συγκρίσιμες με την οριζόντια «περίοδο» των ανοιγμάτων της μάσκας ή με το διάκενο ανάμεσα στις φωσφορίζουσες λωρίδες, δεν προκαλεί ορατή παραμόρφωση του σχήματος του αντικειμένου, αλλά διαταράσσει ριζικά την ισορροπία της ανάμειξης των χρωμάτων. Εντός του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, τα ηλεκτρόνια αποπροσανατολίζονται και εισέρχονται σε λάθος ανοίγματα της μάσκας σκιάς, οπότε βομβαρδίζουν φωσφορίζοντα κοκκία «λάθος» χρώματος. Όταν απομακρυνθεί ο μαγνήτης, αποκαθίσταται ο σωστός χρωματισμός της εικόνας.

Οι προσεκτικοί αναγνώστες, και κυρίως όσοι έχουν δει μάσκα σκιάς καθοδικού σωλήνα έγχρωμης τηλεόρασης, θα μπορούσαν να εμπλουτίσουν την εξήγησή μας με έναν ακόμη δυνατό τρόπο δράσης του εξωτερικού μαγνήτη. Ο μαγνήτης έλκει τη μάσκα, η οποία είναι κατασκευασμένη από μαλακό σίδηρο, και η παραμορφωμένη μάσκα αρχίζει πλέον να επιτρέπει τη διέλευση «ξένων» ηλεκτρονίων.

Για ασφάλεια, λοιπόν, όταν πειραματίζεστε με την οθόνη της τηλεόρασης, πρέπει να χρησιμοποιείτε μικρούς μαγνήτες (1-2 cm^3). Μεγαλύτεροι μαγνήτες είναι δυνατόν να σπάσουν την οθόνη ή να προκαλέσουν μόνιμη παραμόρφωση της μάσκας, οπότε τα ηλεκτρονικά τηλεβόλα και τα άλλα εξαρτήματα της τηλεόρασης θα αποσυντονιστούν.

Κλείνοντας το άρθρο θα σας αναφέρω μια διασκεδαστική ιστορία που συνήθιζε να διηγείται στους φοιτητές του ο μεγάλος ρώσος φυσικός P.L. Kapitsa. Κάποιος πλοίαρχος, κυβερνήτης θωρηκτού, έφτασε στη Μόσχα από την Άπω Ανατολή και επισκέφθηκε τη Ρωσική Ακαδημία Επιστημών. Ισχυριζόταν ότι είχε εφεύρει έναν νέο τύπο μαγνήτη. Σύμφωνα με τα λεγόμενά του, ο μαγνήτης είχε μόνον έναν πόλο —τον βόρειο! Ο πλοίαρχος ήταν εφοδιασμένος με μια επιστολή από τον προϊστάμενό του, έναν ναύαρχο, η οποία ζητούσε από τους επιστήμονες να εξετάσουν επισταμένως την εφεύρεση και να διατυπώσουν τη γνώμη τους ως ειδικοί. Επρόκειτο για σημαντική ανακάλυψη ή όχι;

Ο μαγνήτης φαινόταν απολύτως συνηθισμένος: απλώς μια ράβδος από μέταλλο, 1 kg περίπου, βαμμένη κόκκινη. Και ω του θαύματος, και τα δύο άκρα της ήταν όντως βόρειοι πόλοι! Ο Kapitsa, στον οποίο παραπέμφθηκε ο πλοίαρχος, αντιλήφθηκε γρήγορα τι συνέβαινε: ο μαγνήτης αποτελούνταν από δύο όμοιες μαγνητικές ράβδους, οι νότιοι πόλοι των οποίων είχαν κολληθεί μεταξύ τους επιδέξια. Η βαφή έκρυβε την ένωση! Ο Kapitsa ρώτησε απορημένος τον πλοίαρχο για ποιο λόγο προέβη σε μια τέτοια απάτη. Αποδείχτηκε ότι ο πλοίαρχος δεν είχε πάει ποτέ στην πρωτεύουσα, τη Μόσχα, μολονότι το ονειρευόταν σ' ολόκληρη τη ζωή του. Ο προϊστάμενός του αρνιόταν επίμονα να του παραχωρήσει άδεια να απουσιάσει —ήταν ο μοναδικός τρόπος που μπόρεσε να σκεφτεί για να εκπληρώσει το μεγάλο όνειρό του!

Τι θα συνέβαινε αν ο ναύαρχος διέθετε έγχρωμη τηλεόραση και ένα αντίτυπο του παρόντος τεύχους του *Quantum*; Θα είχε στείλει άραγε τον πλοίαρχό του στη Μόσχα ή μήπως σε πιο απομακρυσμένο τόπο; Μαντέψτε πώς μια τηλεόραση θα βοηθούσε να εξιχνιαστεί ο γρίφος του μαγνήτη του πλοιάρχου. Πέρα όμως από το πρόβλημα αυτό, προσπαθήστε να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

1. Ένα ουράνιο τόξο περιέχει ολόκληρο το φάσμα του ορατού φωτός. Γιατί τότε απουσιάζει το καφέ χρώμα;

2. Εάν αναμείξουμε κίτρινη και γαλάζια μπογιά, παίρνουμε πράσινη. Εάν αναμείξουμε σε μια λευκή οθόνη μια γαλάζια και μια κίτρινη δέσμη από προβολείς εφοδιασμένους με σχετικά φίλτρα, η περιοχή όπου υπάρχει επικάλυψη είναι λευκή. Γιατί η ανάμειξη των ίδιων χρωμάτων παράγει διαφορετικά αποτελέσματα;

3. Πώς παράγεται το μαύρο χρώμα στην οθόνη μιας έγχρωμης τηλεόρασης; Γιατί φαίνεται συχνά σκοτεινότερη η οθόνη της τηλεόρασης όταν είναι ανοιχτή παρά όταν είναι σβηστή;

4. Όταν υπάρχει πανσέληνος, είναι δυνατόν να δείτε πολλά αντικείμενα έξω τη νύχτα. Τα χρώματά τους, ωστόσο, διαφέρουν πολύ από αυτά που βλέπετε την ημέρα. Ένα παρόμοιο φαινόμενο είναι δυνατόν να παρατηρηθεί στο πείραμα με την έγχρωμη τηλεόραση: εάν μια ισορροπημένη έγχρωμη εικόνα εξασθενήσει από ένα σκούρο, φασματικά ουδέτερο φίλτρο, οι κόκκινες και πράσινες αποχρώσεις θα εξαφανιστούν, και η εικόνα θα γίνει γκριζογάλαζη. Μπορείτε να το εξηγήσετε;

5. Πώς μπορεί να γνωρίζει κανείς αν ένας εξωτερικός μαγνήτης εκτρέπει όντως τη δέσμη ηλεκτρονίων ή απλώς έλκει και παραμορφώνει τη μάσκα σκιάς του καθοδικού σωλήνα μιας έγχρωμης τηλεόρασης;

6. Προς το δεξιό ή προς το αριστερό μέρος της τηλεόρασης αποκλίνουν τα ηλεκτρόνια εξαιτίας του γεωμαγνητικού πεδίου; Υποθέστε ότι η τηλεόραση βρίσκεται (α) στη Νέα Υόρκη, (β) στο Δελχί, (γ) στον Ισημερινό και (δ) στη νότια Αυστραλία.

7. Εκτιμήστε κατά πόσο μετατοπίζεται μια δέσμη ηλεκτρονίων σ' έναν καθοδικό σωλήνα τηλεόρασης λόγω της επίδρασης του γεωμαγνητικού πεδίου. Η ενέργεια της δέσμης ισούται με 25 keV και ο σωλήνας έχει μήκος 0,2 m.

8. Υπό την επίδραση ενός μεταβαλλόμενου εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, η εικόνα των αντικειμένων στην οθόνη μιας έγχρωμης τηλεόρασης αλλάζει χρώμα αμέσως, αλλά τα σχήματά τους παραμένουν απρόσβλητα από τις μαγνητικές διαταραχές. Γιατί;

9. Είναι δυνατόν να ανακαλύψετε μαγνητικά αντικείμενα μέσα σε αδιαφανές πακέτο χρησιμοποιώντας μια έγχρωμη συσκευή τηλεόρασης ως ανιχνευτή;

10. Πώς μπορεί κανείς να προσδιορίσει το λόγο του φορτίου προς τη μάζα του ηλεκτρονίου χρησιμοποιώντας μια συσκευή τηλεόρασης; ◙

Αν δεν το δω, δεν το πιστεύω

Οπτικές αποδείξεις του πυθαγόρειου θεωρήματος

Daniel J. Davidson και Louis H. Kauffman

ΟΙ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΟΥ γυμνασίου γνωρίζουν καλά το πυθαγόρειο θεώρημα: αν a και b είναι οι κάθετες πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου και c η υποτείνουσά του, τότε $a^2 + b^2 = c^2$. Ο Elisha Scott Loomis, στο βιβλίο του *The Pythagorean Proposition* (Ουάσινγκτον, NCTM, 1968) παραθέτει, ούτε λίγο ούτε πολύ, 367 αποδείξεις. Από αυτές, οι 109 είναι αλγεβρικές και οι 255 χρησιμοποιούν γεωμετρική κατασκευή. Αρχικά, θα εξετάσουμε λεπτομερώς την απόδειξη αρ. 9 από το βιβλίο του Loomis. Ο συγγραφέας αναφέρει ότι τη δημοσίευσε στο περιοδικό *Messenger of Mathematics* (1873, τόμ. 2, σελ. 104) ο Henry Perigal.

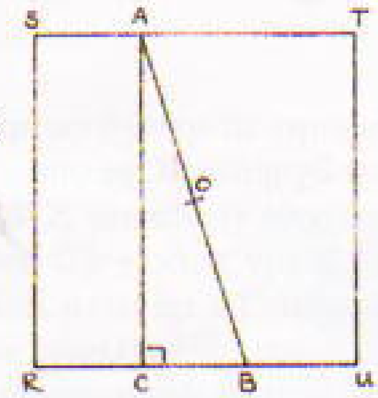
Η απόδειξη του Perigal

Αρχίζουμε με ένα τετράγωνο που το διαμερίζουμε με δύο τομές, από ευθείες κάθετες μεταξύ τους οι οποίες διέρχονται από το κέντρο του. Καθεμιά από αυτές μπορεί να θεωρηθεί υποτείνουσα του ορθογώνιου τριγώνου που προκύπτει όταν φέρουμε την κάθετη από το ένα άκρο τους, A, προς την πλευρά του τετραγώνου που διέρχεται από το B (βλ. Σχήμα 1α).

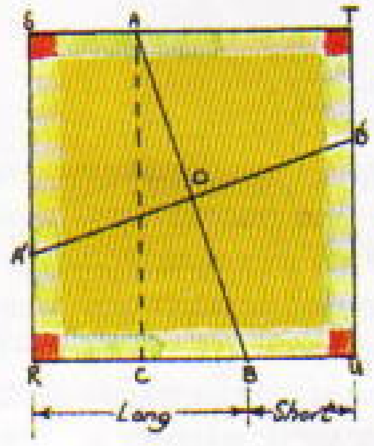
Πρόβλημα 1. Αποδείξτε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τυχαίο ορθογώνιο τρίγωνο επιλέγοντας ένα κατάλληλο τετράγωνο, μια κατάλληλη ευθεία AB, και φέροντας την κάθετο AC.

Λύση. Αν περιστρέψουμε την AB γύρω από το σημείο O, η γωνία ABC θα πάρει τιμές μεταξύ 45° και 90° (η κατάσταση εκφυλίζεται στις 90°). Αυτό μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο ABC όμοιο προς κάθε ορθογώνιο τρίγωνο που μας δίδεται. Αν επιλέξουμε ένα τετράγωνο με κατάλληλο μέγεθος, θα μπορέσουμε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο ABC ίσο προς οποιοδήποτε ορθογώνιο τρίγωνο μας δοθεί.

α



β



Σχήμα 1

Το αρχικό τετράγωνο $STUR$ μπορεί να θεωρηθεί ως το τετράγωνο της μεγαλύτερης κάθετης πλευράς του τριγώνου ABC, της AC. Ο διαμερισμός με τις δύο τομές διαιρεί κάθε πλευρά του τετραγώνου στα τμήματα $RB = \ell$ (το μεγαλύτερο) και $BU = s$ (το μικρότερο).

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι τα τέσσερα τμήματα στα οποία χωρίζουν το τετράγωνο οι AB και $A'B'$ είναι ίσα.

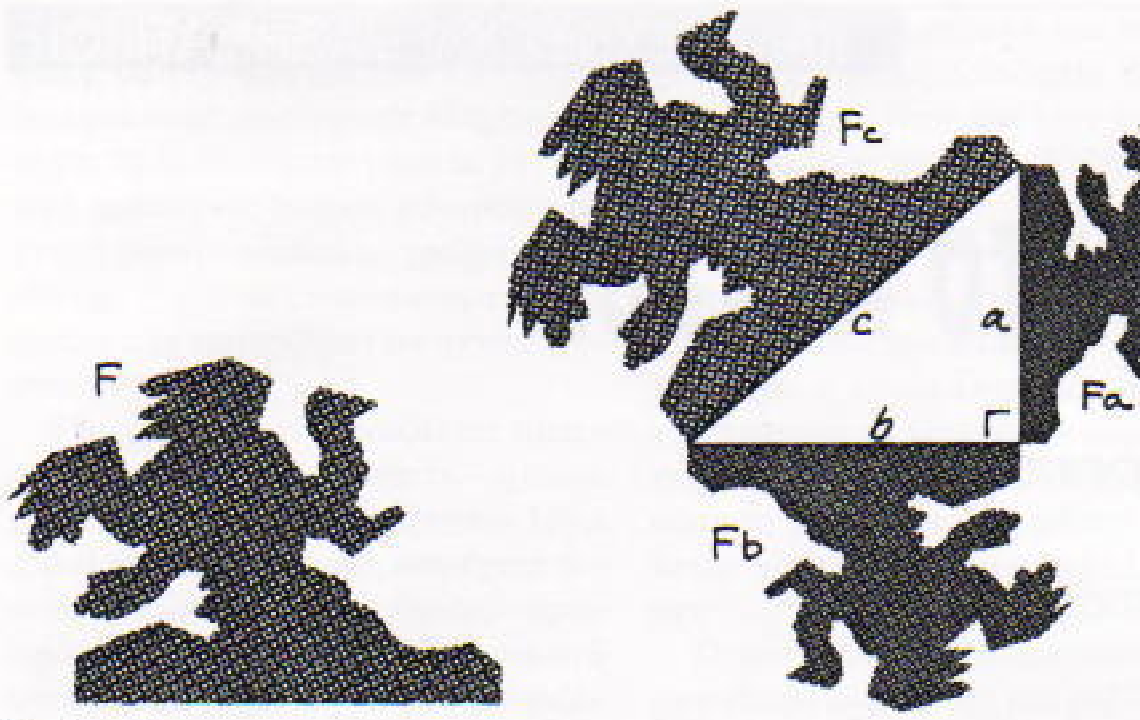
Στο διαμερισμένο τετράγωνό μας, έχουμε $\ell = RB = UB' = TA = SA'$ και $s = BU = B'T = AS = A'R$. Εφόσον η βάση του τριγώνου μας έχει μήκος BC, και αφού $AS = RC = s$, έχουμε $BC = \ell - s$. Επομένως, το μήκος της πλευράς BC του ορθογώνιου τριγώνου ισούται με τη διαφορά των τμημάτων στα οποία χωρίζεται η πλευρά του τετραγώνου.

Παρατηρώντας το Σχήμα 2, βλέπουμε ότι μπορούμε να αναδιατάξουμε τα τέσσερα τμήματα του αρχικού τετραγώνου και να δημιουργήσουμε ένα νέο, μεγαλύτερο τετράγωνο με ένα μικρό, «εγκλωβισμένο» τετράγωνο στο κέντρο του. Η πλευρά του μικρού τετραγώνου ισούται με $\ell - s = BC$, επομένως είναι το τετράγωνο της μικρότερης κάθετης πλευράς του τριγώνου. Το νέο μεγάλο τετράγωνο (μαζί με την τρύπα που περιέχει) ισούται με το τετράγωνο της υποτείνουσας του τριγώνου μας, ενώ η κίτρινη περιοχή ισούται με το τετράγωνο της μεγαλύτερης κάθετης πλευράς. Άρα το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Perigal.

Σχήμα 2

Γενίκευση

Ας υποθέσουμε ότι αντί για τετράγωνα επιλέγουμε σε κάθε πλευρά του



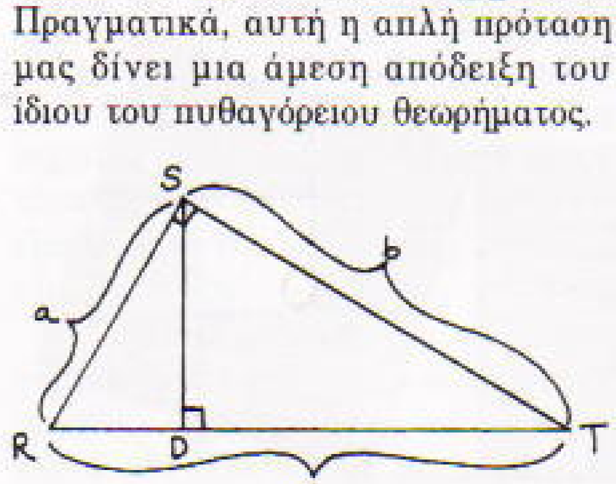
Σχήμα 3

ορθογώνιου τριγώνου ένα ακανόνιστο σχήμα που περιέχει τουλάχιστον μία ευθεία πλευρά (για παράδειγμα, το F που σημειώνεται στα αριστερά του Σχήματος 3). Θεωρούμε τώρα τρία υπό κλίμακα αντίγραφα του F (τα F_a, F_b και F_c) τέτοια ώστε οι ευθείες πλευρές τους να είναι ίσες με τις πλευρές a, b, και c του ορθογώνιου τριγώνου μας.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Εμβαδόν*(F_c) = *Εμβαδόν*(F_a) + *Εμβαδόν*(F_b).

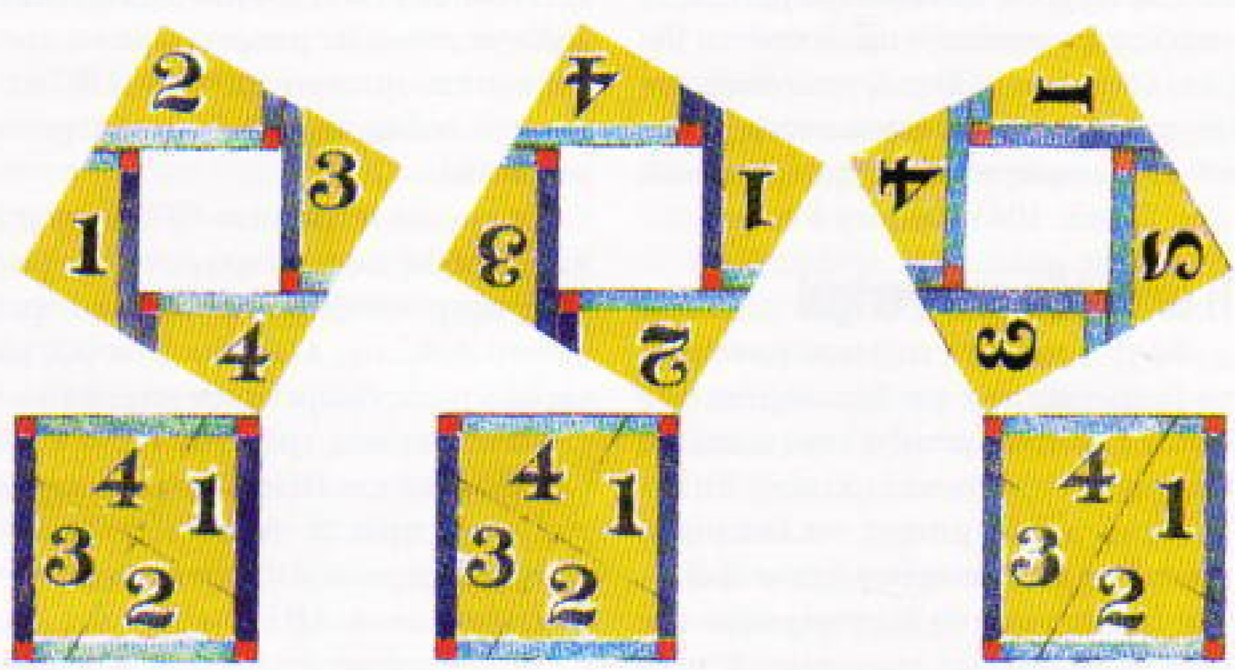
Απόδειξη: Θα στηριχτούμε στο γεγονός ότι τα εμβαδά όμοιων σχημάτων είναι ανάλογα προς το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας (το γεγονός αυτό εξετάζεται σε κάθε εγχειρίδιο γεωμετρίας). Συνεπώς, αν ο λόγος του εμβαδού τού F_a προς το a^2 είναι k (οπότε Εμβαδόν$(F_a) = ka^2$), τότε Εμβαδόν$(F_b) = kb^2$ και Εμβαδόν$(F_c) = kc^2$. Τότε, αφού $a^2 + b^2 = c^2$, έπεται ότι $ka^2 + kb^2 = kc^2$, που είναι το ζητούμενο.

Είναι εντυπωσιακό το ότι μια τέτοια ευρύτατη γενίκευση του πυθαγόρειου θεωρήματος προκύπτει τόσο εύκολα από ένα απλό γεγονός σχετικά με τα εμβαδά όμοιων σχημάτων. Πραγματικά, αυτή η απλή πρόταση μας δίνει μια άμεση απόδειξη του ίδιου του πυθαγόρειου θεωρήματος.



Σχήμα 4

Ας θεωρήσουμε το ορθογώνιο τρίγωνο RST του Σχήματος 4, με υποτείνουσα RT και ορθή γωνία στο S. Φέρουμε από το S την κάθετη SD προς την υποτείνουσα. Τα τρίγωνα RSD, STD και RST είναι όμοια. Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη, ας υποθέσουμε ότι ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου RSD προς το a^2 είναι k (όπου a είναι το μήκος της πλευράς RS), και



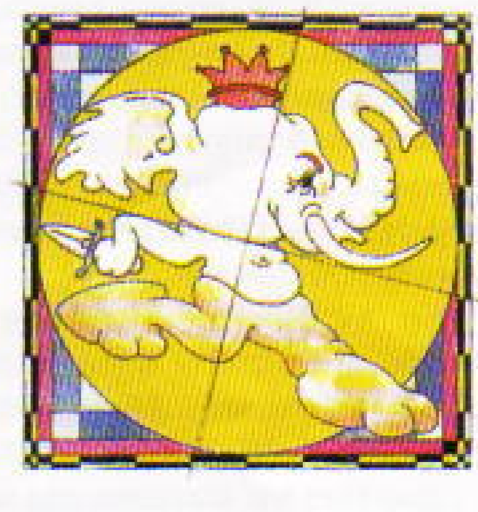
Σχήμα 5

επομένως Εμβαδόν$(RSD) = ka^2$. Τότε, Εμβαδόν$(STD) = kb^2$ και Εμβαδόν$(RST) = kc^2$. Όμως από το διάγραμμα είναι προφανές ότι Εμβαδόν(RSD) + Εμβαδόν(STD) = Εμβαδόν(RST), επομένως $ka^2 + kb^2 = kc^2$, ή $a^2 + b^2 = c^2$.

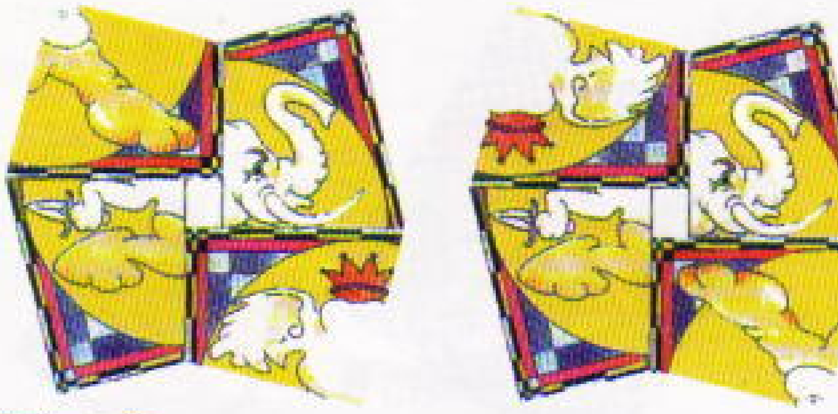
Συμμετρίες και κίνηση

Σε σύγκριση με τις άλλες αποδείξεις διαμέρισης, η απόδειξη του Perigal είναι και απλή και μοναδική. Είναι απλή επειδή απαιτεί δύο μόνο ευθείες διαμέρισης. Είναι μοναδική διότι, από όλες τις αποδείξεις διαμέρισης που καταγράφει ο Loomis, μόνον αυτή δεν διαμερίζει και τα δύο τετράγωνα των κάθετων πλευρών του τριγώνου. Τα τετράγωνα της μικρότερης κάθετης και της υποτείνουσας δημιουργούνται μέσω της «αναδιάταξης» των τεσσάρων ίσων τμημάτων του τετραγώνου της μεγαλύτερης καθέτου (τα 1, 2, 3 και 4 στο Σχήμα 5). Αποδεικνύεται ότι αυτή η αναδιάταξη μπορεί να γίνει με τρεις διαφορετικούς τρόπους: μέσω παράλληλης μετατόπισης των τμημάτων διά του κέντρου του τετραγώνου· μέσω περιστροφής κάθε τμήματος γύρω από τη γωνία του· ή στρέφοντας κάθε τμήμα ως προς την άλλη του πλευρά και μετατοπίζοντάς το στην απέναντι γωνία. Το Σχήμα 5 παρουσιάζει αυτούς τους τρεις τύπους συμμετρικού μετασχηματισμού στην απόδειξη του Perigal.

Για να τονίσουμε τις διαφορές, ξανασχεδιάσαμε το Σχήμα 5 με τη μορφή του Σχήματος 6, που παρουσιάζει τον Γκανέσα, τον ελεφαντόμορφο θεό των Ινδουιστών. Έτσι, το κάθε τμήμα του



Σχήμα 6



Σχήμα 7

τετραγώνου έχει την ιδιαίτερή του μορφή, και μπορούμε να διακρίνουμε τι κάνει κάθε μετασχηματισμός.

Στο Σχήμα 7 παρουσιάζονται δύο τρόποι διευθέτησης των τμημάτων του τετραγώνου.

Πρόβλημα 3. Προσδιορίστε το μετασχηματισμό που έχει υποστεί κάθε τμήμα.

Πρόβλημα 4. Αποδείξτε ότι ο «εγκλωβισμένος» χώρος (η λευκή περιοχή στο κέντρο) είναι ορθογώνιο, και βρείτε τις διαστάσεις του συναρτήσει των ℓ και s.

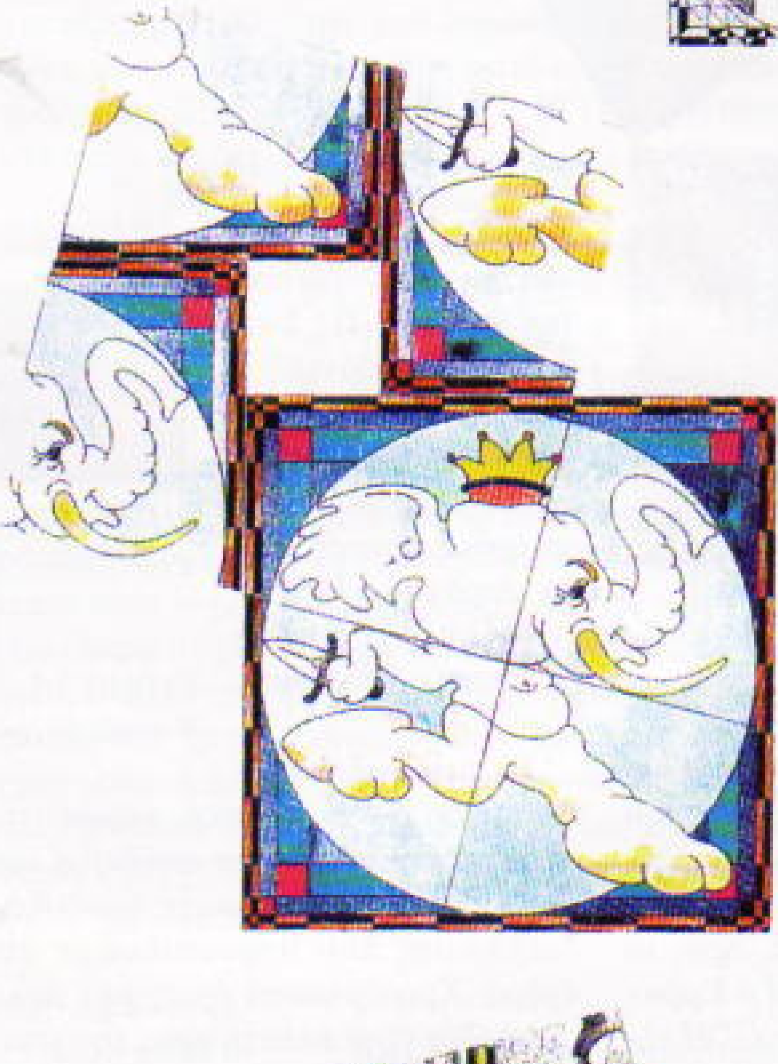
Η κλασική και μερικές ακόμη αποδείξεις

Τα Σχήματα 8 έως 14 παρουσιάζουν αποδείξεις του πυθαγόρειου θεωρήματος που χρησιμοποιούν διαμέριση. Αφήνουμε τον αναγνώστη να ερμηνεύσει τις κατασκευές τους και το πώς μας δίνουν απόδειξη του πυθαγόρειου θεωρήματος. Για την περίπτωση που χρειαστείτε κάποια υπόδειξη, σας παραπέμπουμε στο βιβλίο του Loomis.

Και τέλος, ας εξετάσουμε τη διάσημη απόδειξη του Ευκλείδη στο Α' βιβλίο των *Στοιχείων*, Πρόταση 47. Αρχίζει με μια λαμπρή και απλή ιδέα: φέρουμε την κάθετη από την κορυφή της ορθής γωνίας του τριγώνου προς την υποτείνουσα και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να χωρίσει το τετράγωνο της υποτείνουσας σε δύο ορθογώνια (L' και R' —βλ. Σχήμα 15). Στη συνέχεια, ο Ευκλείδης αποδεικνύει το εντελώς απρόοπτο γεγονός ότι καθένα από τα δύο αυτά ορθογώνια έχει το ίδιο εμβαδόν με το αντίστοιχο τετράγωνο των καθέτων του ορθογώνιου τριγώνου.

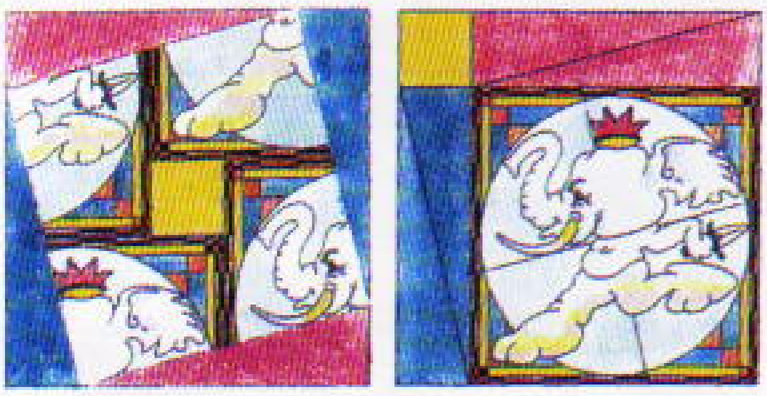
Είναι τόσο απλό ώστε καθένας μπορεί να θυμηθεί την απόδειξη έως αυτό το σημείο. Όμως, για να αποδειχτεί η σύμπτωση των εμβαδών, απαιτείται μια έξυπνη κατασκευή βοηθητικών τριγώνων (Σχήμα 16).

Σχήμα 8
Η απόδειξη αρ. 8 του Loomis.

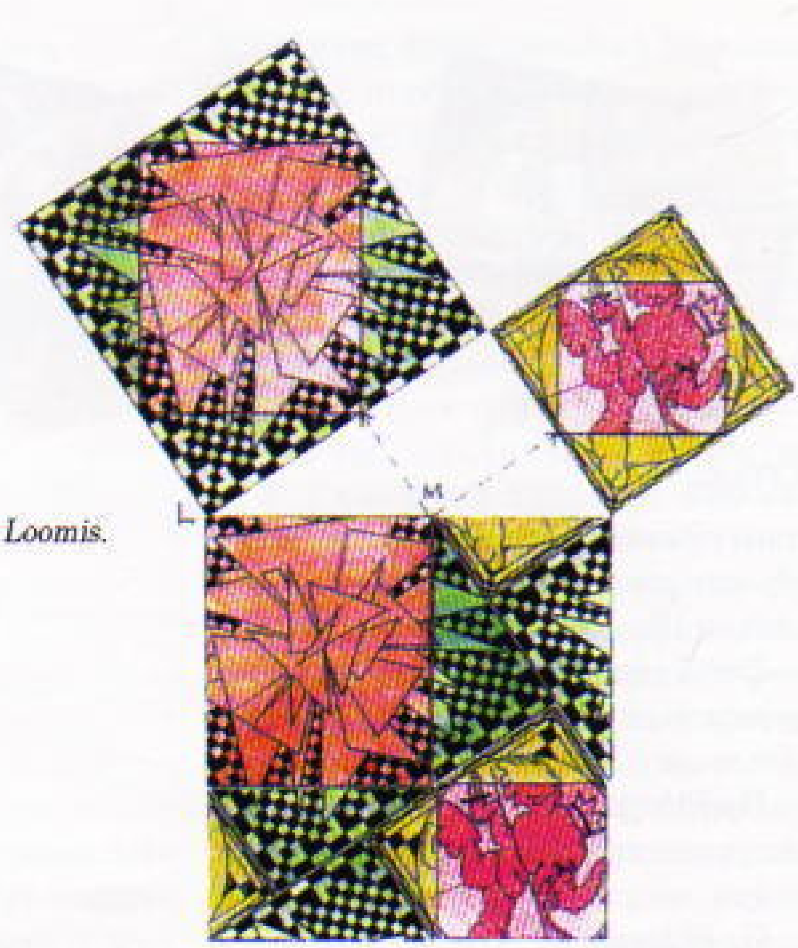


Σχήμα 9
Η απόδειξη αρ. 205 του Loomis (αποδίδεται επίσης στον Henry Perigal).

Σχήμα 10
Η κινέζικη απόδειξη και η απόδειξη του Perigal τοποθετημένες η μια δίπλα στην άλλη. Μοιάζουν απλές, αλλά ποιος θα μπορούσε να μαντέψει ότι αποδεικνύουν το ίδιο θεώρημα;

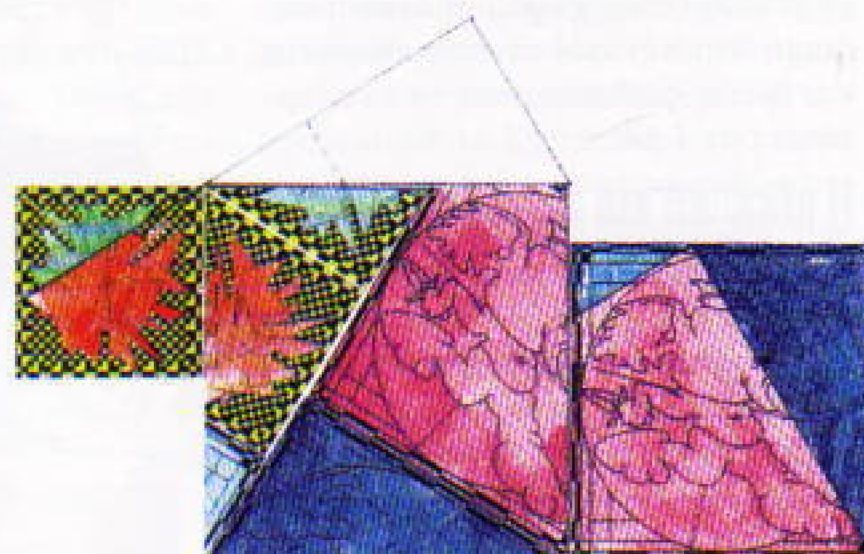


Σχήμα 11
Η απόδειξη αρ. 91 του Loomis (αποδίδεται σε κινέζους, πέρσες και ινδούς συγγραφείς).



Σχήμα 12
Η απόδειξη αρ. 27 του Loomis.

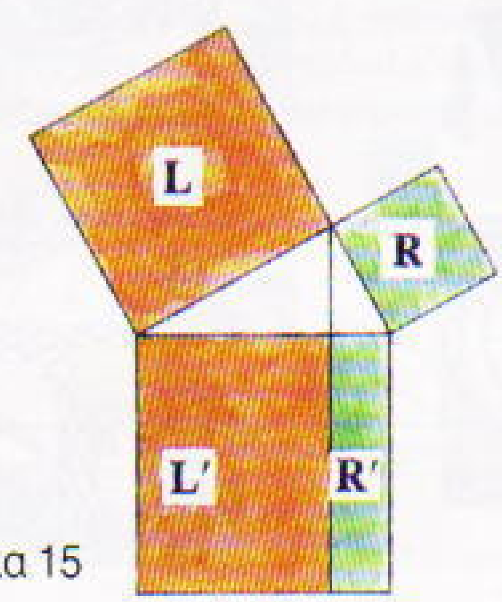
Σχήμα 13
Η απόδειξη αρ. 19 του Loomis.



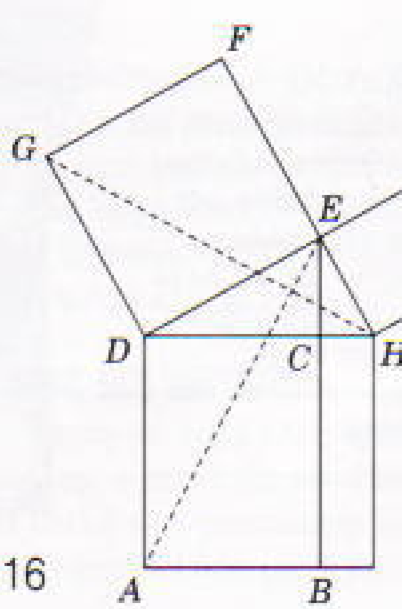
Σχήμα 14
Η απόδειξη αρ. 202 του Loomis.

Το τρίγωνο ADE έχει βάση AD και ύψος AB. Επομένως, το εμβαδόν του τριγώνου $ADE = (AB)(AD)/2 =$ Εμβαδόν$(L')/2$. Όμως το τρίγωνο GDH έχει βάση GD και ύψος DE. Άρα, το εμβαδόν του τριγώνου $GDH =$ Εμβαδόν $(L)/2$. Όμως το τρίγωνο GDH είναι ίσο με το τρίγωνο EDA! (Μπορείτε να το επιβεβαιώσετε περιστρέφοντας οποιοδήποτε από τα δύο τρίγωνα γύρω από την κορυφή D.) Συνεπώς, Εμβαδόν(L') = Εμβαδόν(L). Μπορούμε να εφαρμόσουμε το ίδιο επιχείρημα για το ορθογώνιο R' και το τετράγωνο R. Καταλήξαμε επομένως στο ευκλείδειο «όπερ έδει δείξαι».

Η απόδειξη του Ευκλείδη είναι, τεχνικά, περισσότερο περίπλοκη από την απόδειξη του Perigal και τις υπόλοιπες αποδείξεις διαμέρισης που παρουσιάσαμε στο άρθρο. Χρησιμοποιεί όμως μια πολύ απλή ιδέα (την κάθετη προς την υποτείνουσα) καθώς και μια κομψή μέθοδο (την ισότητα δύο τριγώνων, που μπορούμε να τη δούμε και μέσω περιστροφής).



Σχήμα 15



Σχήμα 16

Πρόβλημα 5. Το ύψος επί την υποτείνουσα ενός ορθογώνιου τριγώνου τη διαιρεί σε δύο τμήματα. Υπάρχει ένα γεωμετρικό θεώρημα που μας λέει ότι η καθεμιά κάθετη πλευρά ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι ο μέσος ανάλογος της υποτείνουσας και του τμήματος εκείνου της υποτείνουσας που πρόσκειται σ' αυτή την κάθετη. Με ποιον τρόπο η απόδειξη του Ευκλείδη καταδεικνύει και αυτό το θεώρημα; ◙

Ο **Daniel J. Davidson** *είναι καλλιτέχνης και ζει στο Σικάγο. Ο* **Louis H. Kauffman** *είναι καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Ιλλινόις, στο Σικάγο.*

Η ανάκριση

Αγαπητοί συνάδελφοι

Έχω να προτείνω μια καλύτερη λύση στο πρόβλημα M90 των μαθηματικών προκλήσεων του τεύχους Μαρτίου/Απριλίου 1997.

Υπενθυμίζω ότι το πρόβλημα έλεγε πως ένας ντετέκτιβ έχει να κάνει 91 «ναι-όχι» ερωτήσεις σ' έναν μάρτυρα. Γνωρίζει όμως ότι υπάρχει πιθανότητα ο μάρτυρας να απαντήσει ψέματα σε μία (το πολύ μία) ερώτηση. Ζητούσε να αποδείξουμε ότι τελικά θα χρειαστεί 105 «ναι-όχι» ερωτήσεις.

Ο δικός μου ντετέκτιβ μπορεί να τα καταφέρει με 100 το πολύ ερωτήσεις, ενώ στη γενική περίπτωση των N αρχικών ερωτήσεων θα χρειαστεί $N+k+2$ ερωτήσεις, όπου k είναι ο μοναδικός φυσικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $2^{k-1} < N \leq 2^k$.

Ο ντετέκτιβ μου ακολουθεί την εξής μέθοδο: κάνει πρώτα τις N αρχικές ερωτήσεις. Έπειτα χωρίζει τις ερωτήσεις σε δύο ομάδες που περιέχουν $[N/2]$ και $N-[N/2]$ ερωτήσεις αντίστοιχα. Υποβάλλει την ερώτηση ελέγχου για την πρώτη ομάδα: «Μου δώσατε ψεύτικη απάντηση σε κάποια απ' αυτές τις ερωτήσεις;» Αν ο μάρτυρας απαντήσει «όχι», τότε σίγουρα λέει αλήθεια (γιατί διαφορετικά θα είχε πει δύο φορές ψέματα), οπότε του κάνει την ερώτηση ελέγχου για τη δεύτερη ομάδα. Αν η απάντηση είναι και πάλι «όχι», τότε όλες οι απαντήσεις είναι σωστές, και η ανάκριση έχει τελειώσει. Αντίθετα, αν μία από τις απαντήσεις είναι «ναι», τότε έχει εντοπίσει μία «ύποπτη» ομάδα ερωτήσεων χρησιμοποιώντας το πολύ δύο ερωτήσεις ελέγχου (λέω «ύποπτη» επειδή δεν ξέρουμε ακόμη αν το ψέμα ειπώθηκε σε μία από αυτές τις ερωτήσεις ή στην ερώτηση ελέγχου). Φυσικά, αν η πρώτη απάντηση είναι «ναι», δεν χρειάζεται να υποβάλει τη δεύτερη.

Το πλήθος των ερωτήσεων της «ύποπτης» ομάδας είναι το πολύ 2^{k-1}. Ο ντετέκτιβ χωρίζει την ομάδα αυτή σε δύο μικρότερες, καθεμία από τις οποίες αποτελείται από 2^{k-2} το πολύ ερωτήσεις, και επαναλαμβάνει τη διαδικασία των ερωτήσεων ελέγχου γι' αυτές τις ομάδες. Προσέξτε ότι ο μάρτυρας πρέπει τώρα να απαντήσει με ειλικρίνεια, επειδή έχει ήδη χρησιμοποιήσει το ψέμα. Αν λάβει την απάντηση «όχι» και για τις δύο ομάδες, συμπεραίνει ότι οι απαντήσεις στις αρχικές ερωτήσεις είναι σωστές και ότι το ψέμα ειπώθηκε στη μία από τις δύο πρώτες ερωτήσεις ελέγχου. Αν όμως μία απάντηση είναι «ναι», τότε η αντίστοιχη ομάδα περιέχει το ψέμα.

Ο ντετέκτιβ επαναλαμβάνει τη διαδικασία της «διχοτόμησης» γι' αυτή την ομάδα. Τώρα, όμως, αρκεί να υποβάλει μία μόνο ερώτηση ελέγχου για την πρώτη υποομάδα. Αν η απάντηση είναι «ναι», τότε η πρώτη υποομάδα περιέχει το ψέμα, ενώ αν είναι «όχι», το ψέμα περιέχεται στη δεύτερη.

Συνεχίζοντας μ' αυτό τον τρόπο, ύστερα από m διχοτομήσεις θα έχει εντοπίσει μια ομάδα, το πολύ 2^{k-m} ερωτήσεων, που περιέχει το ψέμα. Έτσι, έπειτα από k διχοτομήσεις βρίσκει την ψεύτικη απάντηση.

Πόσες ερωτήσεις έχει κάνει; Σε καθένα από τα k βήματα υπέβαλε μία ερώτηση ελέγχου, εκτός από τα δύο πρώτα, όπου έκανε δύο. Έκανε, δηλαδή, $k+2$ ερωτήσεις ελέγχου, ή, συνολικά, $N+k+2$ ερωτήσεις.

Για $N = 91$, η μέθοδος δίνει $91 + 7 + 2 = 100$ ερωτήσεις (αφού $2^6 = 64 < 91 < 128 = 2^7$).

Είναι γενικά καλύτερη η παραπάνω μέθοδος απ' αυτήν που δημοσιεύεται στο *Quantum*; Ικανή συνθήκη για να ισχύει αυτό είναι $(k+2)(k+1)/2 \leq 2^{k-1}$ ή ισοδύναμα: $(k+2)(k+1) \leq 2^k$. (1) Γιατί τότε $(k+2)(k+1)/2 < q(q-1)/2$, απ' όπου προκύπτει $k+2 < q$. (Το q είναι η λύση που δίνεται στο προαναφερόμενο τεύχος.)

Η σχέση (1) ισχύει για $k \geq 6$. Πράγματι, για $k = 6$ έχουμε: $(6+2)(6+1) = 56 < 64 = 2^6$. Αν υποθέσουμε ότι η (1) ισχύει για $k = a \geq 6$, τότε έχουμε $2(a+2) < (a+1)(a+2) \leq 2^a$, και για $k = a+1$, $(k+2)(k+1) = (a+3)(a+2) = (a+1)(a+2) + 2(a+2) < 2^a + 2^a = 2^{a+1} = 2^k$.

Άρα η μέθοδος αυτή είναι καλύτερη για $N > 32$. Για $N \leq 32$, όμως, η (1) δεν ισχύει· π.χ., αν $N = 32$, τότε $k = 5$ και $(5+2)(5+1) = 42 > 32 = 2^5$.

Δοκίμασα όλες τις τιμές του N από το 1 έως το 32 και βρήκα ότι στις τιμές 3, 5, 6, 9 και 10 καλύτερη είναι η μέθοδος που δημοσιεύεται, ενώ στις υπόλοιπες, είτε είναι καλύτερη η δική μου είτε οι δύο μέθοδοι είναι ισοδύναμες.

Τελειώνοντας θα ήθελα να εκφράσω τις θερμότερες ευχές για τη συνέχιση της έκδοσης του μοναδικού για την Ελλάδα περιοδικού *Quantum*.

Δημήτρης Βίτκος,
μαθηματικός

Απάντηση του Quantum

Ευχαριστούμε τον κ. Βίτκο για τη μέθοδο που προτείνει —πρόκειται για τη «διαδική αναζήτηση» (binary search)— η οποία είναι πράγματι καλύτερη (ειδικά για μεγάλα N) από την πρώτη μέθοδο που δημοσίευσε το *Quantum*.

Η περιγραφή του αναγνώστη μας, ωστόσο, επιδέχεται μια βελτίωση. Δεν χρειάζονται οι διπλές ερωτήσεις ελέγχου. Σε κάθε βήμα μοιράζουμε τις ερωτήσεις σε δύο ομάδες (που περιέχουν από το πολύ 2^{k-m} ερωτήσεις η καθεμιά στο m-οστό βήμα) και ρωτάμε αν δόθηκε ψευδής απάντηση σε κάποια ερώτηση της πρώτης ομάδας. Σε περίπτωση απάντησης «ναι», ασχολούμαστε στη συνέχεια μόνο με αυτή την ομάδα (διότι μόνον αυτή η ομάδα μπορεί να περιέχει «ύποπτη» ερώτηση!). Σε περίπτωση απάντησης «όχι»

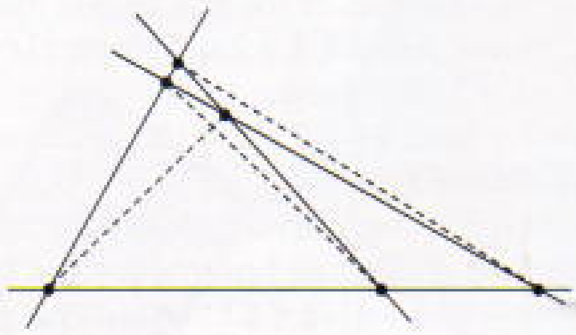
Η συνέχεια στη σελ. 53 ⇨

Το πλήρες τ

Ένα σχήμα γεμ

I. F. S

ΠΛΗΡΕΣ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ σχήμα που ορίζουν τέσσερις ευθείες του επιπέδου καμία από τις οποίες δεν είναι παράλληλη προς κάποια από τις άλλες, ενώ ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο (βλ. Σχήμα 1). Τα σημεία τομής αυτών των ευ-

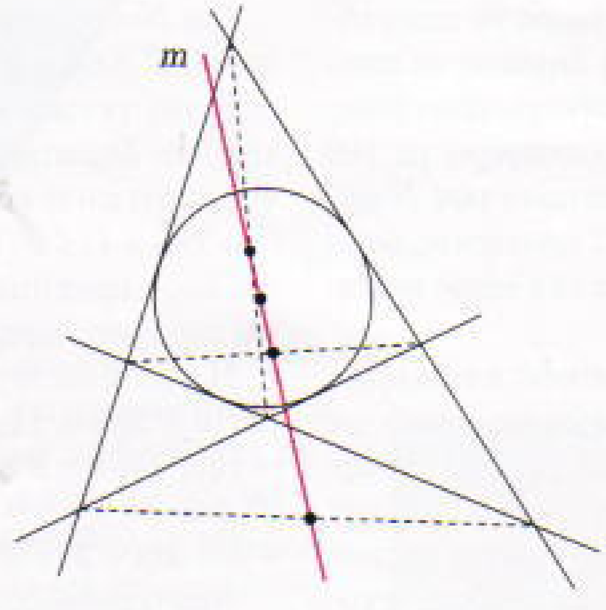


Σχήμα 1

θειών ονομάζονται κορυφές του πλήρους τετραπλεύρου. Έτσι, κάθε πλήρες τετράπλευρο έχει έξι κορυφές. Τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν δύο κορυφές ενός πλήρους τετραπλεύρου και δεν ανήκουν σε κάποια από τις δεδομένες ευθείες, ονομάζονται διαγώνιοι του τετραπλεύρου. Επομένως, το πλήρες τετράπλευρο έχει τρεις διαγωνίους.

Τα πλήρη τετράπλευρα έχουν ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες. Ιδού μερικές από αυτές:

1. Τα μέσα των διαγωνίων ενός πλήρους τετραπλεύρου ανήκουν σε μία ευθεία m (Σχήμα 2). Στη Γερμανία και τη Ρωσία (και στην Ελλάδα) αυτή η ευθεία ονομάζεται *ευθεία του Gauss*, ενώ στην Αγγλία *ευθεία του Νεύτωνα*. (Κατά πάσα πιθανότητα αυτή η ονομασία έχει δοθεί για να τιμηθούν οι δύο επιστήμονες και όχι λόγω της ενασχόλησής τους με τη συγκεκριμένη ευθεία. Πολλές φορές η λάμψη των μεγάλων άστρων σβήνει τα μικρότερα.)

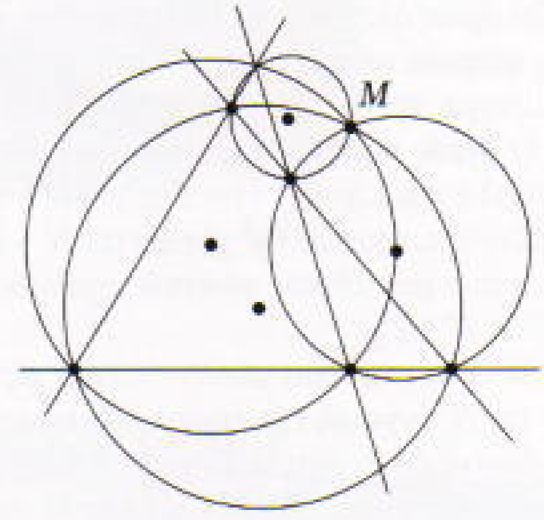


Σχήμα 3

2. Αν όλες οι ευθείες που σχηματίζουν το τετράπλευρο εφάπτονται σε έναν κύκλο, τότε η ευθεία του Gauss (ή του Νεύτωνα) περιέχει το κέντρο αυτού του κύκλου (Σχήμα 3).

Τα παλιά βιβλία γεωμετρίας συμφωνούν περισσότερο σε τούτο το ζήτημα, και ονομάζουν αυτή την πρόταση *θεώρημα του Νεύτωνα*.

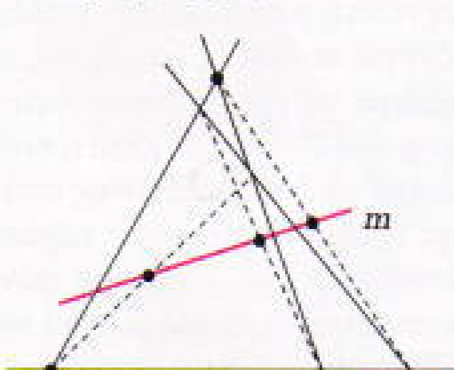
3. Τρεις ευθείες ενός πλήρους τετραπλεύρου σχηματίζουν ένα τρίγωνο. Υπάρχουν τέσσερα τέτοια τρίγωνα. Πολλές από τις ιδιότητες των πλήρων



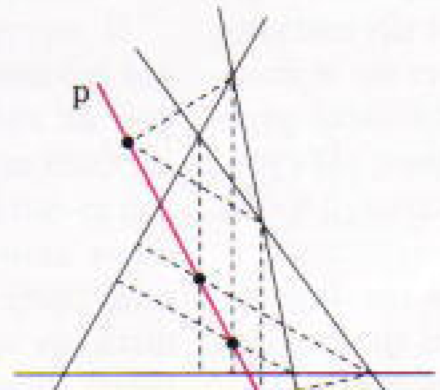
Σχήμα 5

τετραπλεύρων συνδέονται με αξιοσημείωτα σημεία αυτών των τριγώνων. Για παράδειγμα, αποδεικνύεται ότι τα ορθόκεντρά τους ανήκουν σε μία ευθεία p και ότι αυτή η ευθεία είναι κάθετη στην ευθεία του Gauss! (Αυτό επιδεικνύεται στο Σχήμα 4, όπου παρουσιάζονται δύο από τα τρία ύψη κάθε τριγώνου.) Στη διεθνή μαθηματική βιβλιογραφία, η εν λόγω ευθεία αναφέρεται ορισμένες φορές ως *ευθεία του Van Oebel*.

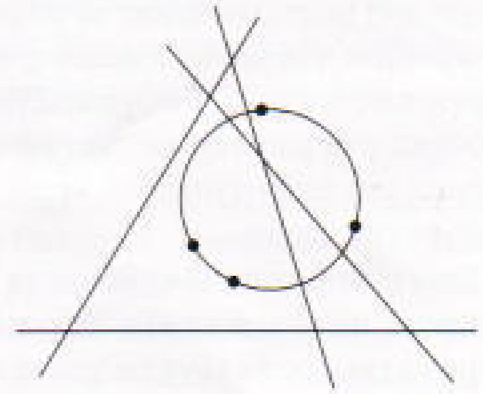
4. Οι τέσσερις περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων που συνθέτουν το πλήρες τετράπλευρο (δείτε την προηγούμενη παράγραφο) τέμνονται στο ση-



Σχήμα 2



Σχήμα 4

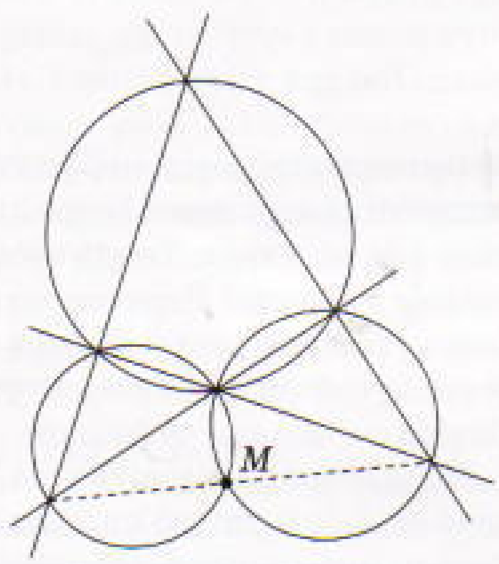


Σχήμα 6

ετράπλευρο

το ιδιότητες!

arygin

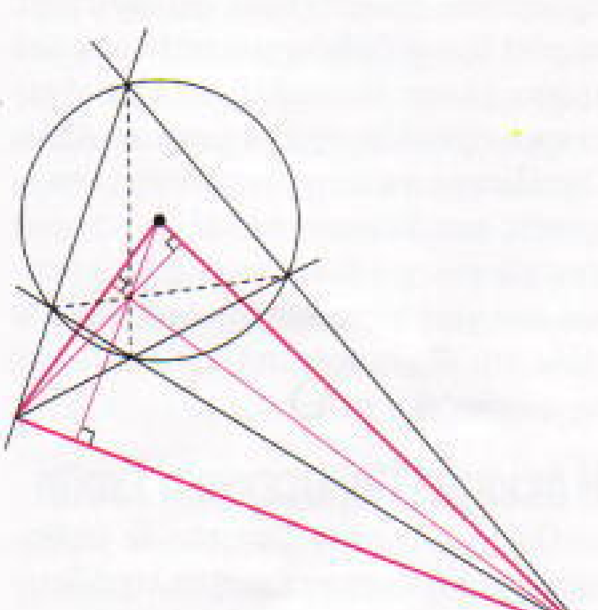


Σχήμα 7

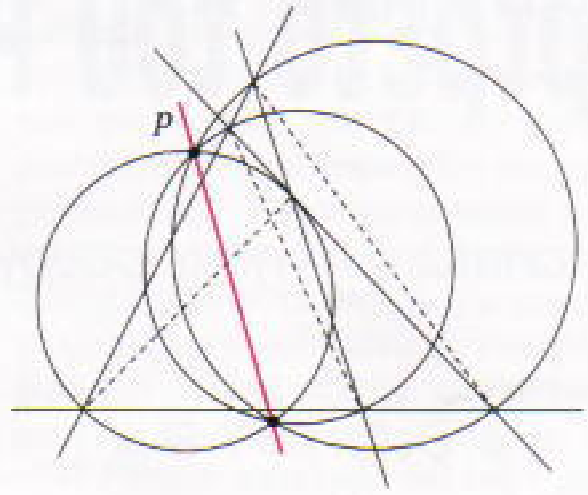
μείο *M*, το οποίο ονομάζεται *σημείο του Miquel* (Σχήμα 5).

5. Τα κέντρα των τεσσάρων κύκλων που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο ανήκουν σε έναν άλλο κύκλο (Σχήμα 6).

6. Αν τέσσερις κορυφές ενός πλήρους τετραπλεύρου ανήκουν σε κύκλο, τότε το σημείο του Miquel ανήκει στη διαγώνιο που συνδέει τις άλλες δύο κορυφές (Σχήμα 7).



Σχήμα 8

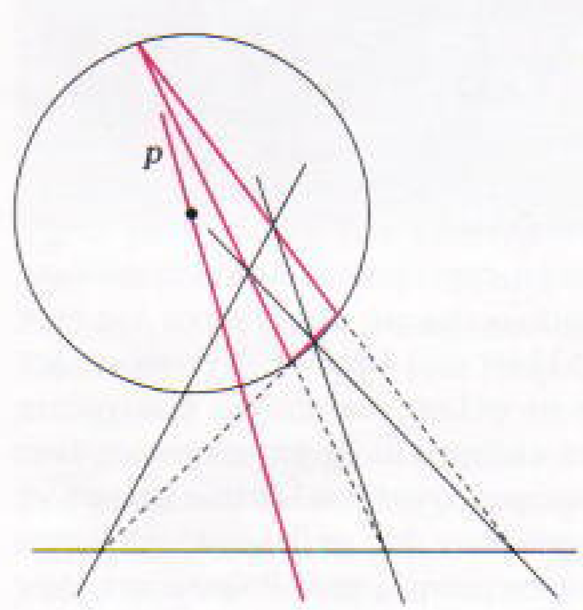


Σχήμα 9

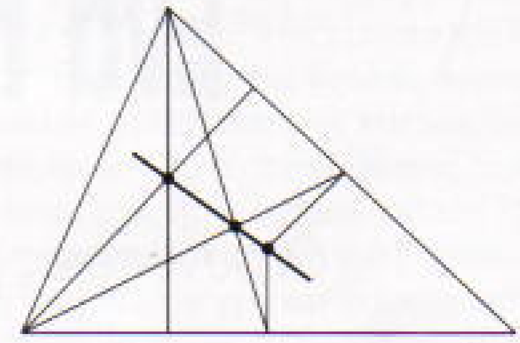
7. Αν τέσσερις κορυφές ενός πλήρους τετραπλεύρου ανήκουν σε κύκλο, τότε το κέντρο αυτού του κύκλου και οι δύο άλλες κορυφές του τετραπλεύρου σχηματίζουν τρίγωνο με την εξής ιδιότητα: Το ορθόκεντρό του συμπίπτει με το σημείο τομής των διαγωνίων οι οποίες συνδέουν τις τέσσερις κορυφές που ανήκουν σε κύκλο (Σχήμα 8). Επισημαίνουμε ότι, για να βρούμε το σημείο τομής των διαγωνίων, μπορεί να χρειαστεί να τις προεκτείνουμε πέρα από τις κορυφές του τετραπλεύρου.

8. Οι τρεις κύκλοι με διαμέτρους τις διαγωνίους του πλήρους τετραπλεύρου τέμνονται σε δύο σημεία που ανήκουν στην ευθεία *p* (δείτε την ιδιότητα 3) (Σχήμα 9).

9. Ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες που περιέχουν τις διαγωνίους ενός πλήρους τετραπλεύρου σχηματίζουν ένα τρίγωνο. Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου αυτού του τριγώνου ανήκει στην ευθεία *p* (Σχήμα 10).



Σχήμα 10

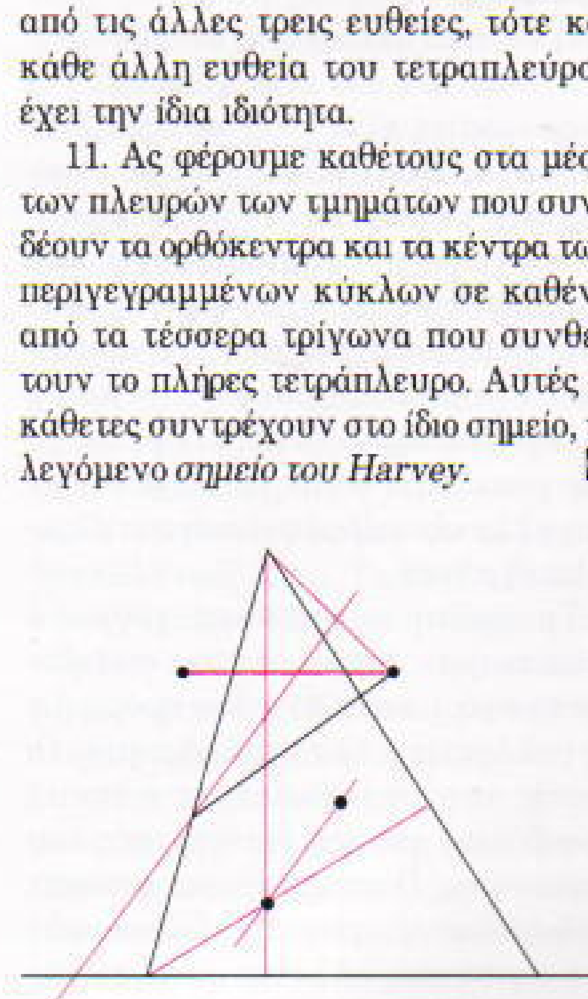


Σχήμα 11

Πριν διατυπώσουμε την επόμενη ιδιότητα των πλήρων τετραπλεύρων, ας θυμηθούμε μια κλασική πρόταση για τα τρίγωνα. Σ' ένα τυχαίο τρίγωνο, τρία σημεία —το ορθόκεντρο, το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου και το σημείο τομής των διαμέσων— ανήκουν στην ίδια ευθεία, τη λεγόμενη *ευθεία του Euler* (Σχήμα 11). Η επόμενη ιδιότητα του πλήρους τετραπλεύρου σχετίζεται με αυτή την ευθεία.

10. Αν μία από τις τέσσερις ευθείες που σχηματίζουν ένα πλήρες τετράπλευρο είναι παράλληλη με την ευθεία Euler του τριγώνου που σχηματίζεται από τις άλλες τρεις ευθείες, τότε και κάθε άλλη ευθεία του τετραπλεύρου έχει την ίδια ιδιότητα.

11. Ας φέρουμε καθέτους στα μέσα των πλευρών των τμημάτων που συνδέουν τα ορθόκεντρα και τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων σε καθένα από τα τέσσερα τρίγωνα που συνθέτουν το πλήρες τετράπλευρο. Αυτές οι κάθετες συντρέχουν στο ίδιο σημείο, το λεγόμενο *σημείο του Harvey*.



Σχήμα 12

Ένα πορτρέτο του Poisson

Οι συνέπειες μιας αποτυχημένης χειρουργικής επέμβασης

B. Geller και Y. Bruk

Ο SIMEON DENIS POISSON, Ο ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΕΝΟΣ γάλλος επιστήμονας, είναι ένας από τους θεμελιωτές της σύγχρονης μαθηματικής φυσικής. Στην ιστορία της επιστήμης καταλαμβάνει ισότιμη θέση δίπλα στους σπουδαίους συγχρόνους του Lagrange, Laplace, Fourier και Cauchy. Το όνομά του αναφέρεται συχνά στα εγχειρίδια του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, της θεωρίας πιθανοτήτων, του ηλεκτρομαγνητισμού, της ακουστικής, της ελαστικότητας και της κβαντικής μηχανικής.

Ο Poisson γεννήθηκε στις 21 Ιουνίου του 1781. Για τους γονείς του οι πληροφορίες είναι λιγοστές. Είναι γνωστό ότι ο πατέρας του επέλεξε αρχικά τη στρατιωτική σταδιοδρομία και κατατάχθηκε στο στρατό του Αννόβερου· αντιδρώντας όμως στην αυστηρή πειθαρχία τον εγκατέλειψε, και τελικά εγκαταστάθηκε σε μια μικρή γαλλική πόλη, το Πιτιβιέ. Την εποχή που γεννήθηκε ο γιος του είχε τη σεμνή αλλά αξιοσέβαστη θέση του συμβολαιογράφου.

Τα πρώτα του παιδικά χρόνια ο Poisson ήταν ένα απολύτως συνηθισμένο αγόρι, και τίποτε δεν προμήνυε τη μελλοντική του σταδιοδρομία. Οι γονείς του μάλιστα είχαν κάποιες αμφιβολίες για τις διανοητικές του ικανότητες. Ο πατέρας του, φυσικά, επιθυμούσε να γίνει συμβολαιογράφος ο γιος του, αλλά το «οικογενειακό συμβούλιο» αποφάσισε πως ήταν ακατάλληλος γι' αυτή τη δουλειά: έπρεπε να γίνει γιατρός. Η απόφαση της οικογένειας είχε ισχύ νόμου, και έτσι έστειλαν τον Poisson να μείνει με τον θείο του στο Φονταινεμπλώ, για να σπουδάσει την αξιοπρεπή και, κατά τη γνώμη τους, εύκολη τέχνη του χειρουργού. Εντούτοις, η μαθητεία σ' αυτό το επάγγελμα αποδείχτηκε εξαιρετικά δύσκολη. Για παράδειγμα, για να μάθουν να κάνουν φλεβοτομία (αφαίμαξη), που ήταν βασική μέθοδος θεραπείας εκείνη την

εποχή, έπρεπε να ασκούνται επί ώρες τρυπώντας με μια βελόνα τις ίνες φύλλων από λάχανα. Ο Poisson έλεγε σε φίλους του έπειτα από χρόνια ότι ακόμη και οι μεγαλύτερες ίνες κατάφερναν την τελευταία στιγμή να ξεφεύγουν από τη βελόνα του. Αυτές οι τόσο μισητές στον Poisson ασκήσεις διήρκεσαν έναν ολόκληρο χρόνο· ωστόσο, η πρώτη του προσπάθεια να αντιμετωπίσει χωρίς επίβλεψη ένα περιστατικό είχε αποτέλεσμα το θάνατο του ασθενούς. Το γεγονός συντάραξε τον νεαρό Poisson τόσο πολύ ώστε εγκατέλειψε χωρίς δεύτερη κουβέντα την ιατρική και επέστρεψε στο Πιτιβιέ.

Πολλά πράγματα είχαν αλλάξει κατά το διάστημα της απουσίας του Poisson από τη μικρή γενέτειρά του. Ο πατέρας του είχε γίνει δημόσιο πρόσωπο —ήταν δήμαρχος του Πιτιβιέ. Είχε αγοράσει ένα καινούργιο σπίτι, κατάλληλο για τη νέα κοινωνική του θέση, στο οποίο δεχόταν πλήθος προσκεκλημένους. Επίσης, είχε γίνει συνδρομητής σε διάφορα περιοδικά, ένα από τα οποία ήταν το *Περιοδικό της Πολυτεχνικής Σχολής* (της γνωστής École Polytechnique). Ο Simeon απολάμβανε το διάβασμά του και ειδικά την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων που περιείχε. Εντελώς απρόσμενα, αποδείχτηκε ότι το αγόρι, παρότι δεν είχε διδαχτεί ποτέ του τον τρόπο, έλυνε τα προβλήματα με εξαιρετική ευκολία, το ένα μετά το άλλο. Οφείλουμε να αναγνωρίσουμε ότι οι γονείς του Poisson άλλαξαν αμέσως γνώμη για τις διανοητικές ικανότητες του γιου τους, και τον έστειλαν και πάλι στο Φονταινεμπλώ, αλλά αυτή τη φορά στο σχολείο.

Η διάσημη Πολυτεχνική Σχολή

Ο Poisson ήταν θαυμάσιος μαθητής. Το ταλέντο του και η σκληρή δουλειά τού επέτρεψαν να ξεπεράσει τους συμμαθητές του. Δύο χρόνια αργότερα, σε ηλικία δεκαεπτά ετών, ο Simeon έγινε δεκτός στην Πολυτεχνική Σχολή στο Παρίσι.

Η σχολή αυτή, ένα από τα παλαιότερα και πιό ασυνήθιστα ιδρύματα ανώτερης εκπαίδευσης της Γαλλίας, ιδρύθηκε στις 11 Μαρτίου του 1794 κατά τη διάρκεια της Γαλλικής Επανάστασης με διάταγμα της εθνοσυνέλευσης. Αρχικά ονομάστηκε Κεντρική Σχολή Δημοσίων Έργων, και ένα χρόνο αργότερα μετονομάστηκε σε Πολυτεχνική Σχολή. Σκοπός της ήταν η προαγωγή της επιστημονικής γνώσης και η εκπαίδευση μηχανικών του στρατού. Η Πολυτεχνική Σχολή έχει παραμείνει, ώς τις μέρες μας, η σχολή των στρατιωτικών και πολιτικών μηχανικών στη Γαλλία, ενώ συχνά οι απόφοιτοί της καταλαμβάνουν ανώτατες κυβερνητικές θέσεις. Οι σπουδές στην Πολυτεχνική Σχολή ήταν σχετικά σύντομες (δύο μόνο χρόνια) αλλά εντατικές. Η εξαιρετική συμβολή της στην ανάπτυξη της φυσικής και μαθηματικής εκπαίδευσης οφείλεται στο καταπληκτικό διδακτικό προσωπικό που διέθετε τα πρώτα χρόνια —σπουδαίους επιστήμονες όπως οι Monge, Laplace, Legendre, Fourier και Carnot. Οι καθηγητές της Πολυτεχνικής Σχολής δημιούργησαν πολλά προγράμματα σπουδών και εγχειρίδια για τον διαφορικό και τον ολοκληρωτικό λογισμό, τη γεωμετρία και την αναλυτική μηχανική τα οποία διαμόρφωσαν την ανάπτυξη της μαθηματικής εκπαίδευσης —και όχι μόνο στη Γαλλία. Ακόμη και σήμερα, η Πολυτεχνική Σχολή παραμένει ένα από τα πρωτοπόρα γαλλικά ιδρύματα ανώτατης εκπαίδευσης.

Ο Poisson έκανε θαυμάσιες σπουδές στην Πολυτεχνική Σχολή. Οι μαθηματικοί Laplace και Lagrange πρόσεξαν το εξαιρετικό του ταλέντο και αφιέρωσαν πολύ χρόνο στην εκπαίδευσή του. Ο Poisson γνώρισε επίσης το έργο της προηγούμενης γενιάς μαθηματικών και μελέτησε λεπτομερώς τις εργασίες των Euler και d'Alembert. Αργότερα, ο φίλος και βιογράφος του Poisson, ο σπουδαίος γάλλος φυσικός François Arago (επίσης απόφοιτος της Πολυτεχνικής Σχολής) θα γράψει: «Ο Poisson δεν χρειάστηκε ποτέ να ξοδέψει χρόνο και προσπάθειες αναζητώντας πράγματα που είχαν ήδη ανακαλυφθεί». Δεν ήταν τυχαίο λοιπόν ότι τα πρώτα του μαθηματικά άρθρα, που τα έγραψε λίγο καιρό αφότου έκλεισε τα είκοσι, ήταν τόσο ώριμα ώστε να του χαρίσουν αμέσως μεγάλη φήμη. Θα ήταν όμως λάθος να υποθέσουμε ότι τα ενδιαφέροντα του Poisson, κατά τη διάρκεια των φοιτητικών του χρόνων ή στη μετέπειτα ζωή του, περιορίζονταν στα μαθηματικά. Ήταν κοινωνικός και απολάμβανε οτιδήποτε όμορφο στη ζωή. Αγαπούσε το θέατρο και παρακολουθούσε παραστάσεις συχνά —ήξερε από μνήμης τα έργα του Μολιέρου, του Κορνέιγ και του Ρακίνα.

Ο Poisson κατέλαβε πολλές τιμητικές θέσεις στη γαλλική επιστημονική ιεραρχία —μεταξύ των άλλων, ήταν μέλος της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών—, αλλά η ζωή του συνδέθηκε κυρίως με την Πολυτεχνική Σχολή. Έγινε επίκουρος καθηγητής στη σχολή το 1802 και τακτικός καθηγητής το 1806, σε ηλικία 25 ετών, καταλαμβάνοντας τη θέση που άφησε κενή ο μεγάλος Fourier. Ένα από τα σημαντικά του καθήκοντα ήταν η διεύθυνση των εξετάσεων των μαθητών που ήθελαν να εισαχθούν στη σχολή, και των φοιτητών που ήλπιζαν να αποφοιτήσουν. Η θέση του εξεταστή ήταν κατά κάποιον τρόπο ανώτερη από εκείνη του καθηγητή —με τις εξετάσεις ελέγχονταν τόσο οι γνώσεις του σπουδαστή όσο και η διδασκαλία του καθηγητή.

Όλες οι γαλλικές κυβερνήσεις, οι οποίες άλλαζαν συχνά εκείνα τα ταραγμένα χρόνια, τίμησαν γενναιόδωρα τις υπηρεσίες που προσέφερε ο Poisson στην πατρίδα του. Έλαβε τον τίτλο του βαρόνου, το παράσημο της Λεγεώνας της Τιμής (η ανώτατη διάκριση στη Γαλλία) και τον τίτλο του ευπατρίδη. Τα επιτεύγματά του αναγνωρίστηκαν και στο εξωτερικό —υπήρξε μέλος όλων των επιστημονικών εταιρειών στην Ευρώπη και την Αμερική, και επίτιμο μέλος της Ακαδημίας Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης (από το 1826).

Ο François Arago αναφέρει στη βιογραφία του ένα άλλο χαρακτηριστικό του Poisson, που δεν το συναντάμε συχνά, ακόμη και σε ανθρώπους που δεν έχουν τόσο υψηλή θέση στην ακαδημαϊκή ζωή: εκπλήρωνε ευσυνείδητα τις υποχρεώσεις του. Για παράδειγμα, κάθε χρόνο, επί τέσσερις εβδομάδες και επί εννέα ώρες κάθε ημέρα, έπρεπε να διευθύνει τις εξετάσεις της Πολυτεχνικής Σχολής. Μόνο μία φορά αρνήθηκε να συμμετάσχει: όταν έλαβε μέρος στις εξετάσεις ο γιος του. Οι φοιτητές της σχολής, όμως, έστειλαν αντιπροσωπεία και του ζήτησαν να διευθύνει τις εξετάσεις, δηλώνοντας πως ήταν βέβαιοι για την αμεροληψία του. Η αγάπη του Poisson για τη διδασκαλία γίνεται φανερή από τα ίδια του τα λόγια: «Η ζωή γίνεται όμορφη από δύο πράγματα: τη μελέτη των μαθηματικών και τη διδασκαλία τους». Οι διαλέξεις του διακρίνονταν για τη διαύγεια και το βάθος τους.

Ο Poisson αφιέρωσε τα τελευταία χρόνια της ζωής του (πέθανε στο Παρίσι το 1840) στη συγγραφή μιας θεμελιώδους πραγματείας για τη μαθηματική φυσική. Δυστυχώς, δεν πρόλαβε να ολοκληρώσει αυτό το έργο.

Από το λογισμό στο ποινικό δίκαιο

Το σύνολο του επιστημονικού έργου του Poisson, που αποτελείται από 350 άρθρα, ασχολείται με προβλήματα της μαθηματικής φυσικής, και έτσι δεν θα μπορέσουμε να σχολιάσουμε λεπτομερώς ούτε καν τα βασικά του πορίσματα. Μπορούμε μόνο να αναφέρουμε τα σημαντικότερα και πιο φημισμένα άρθρα του και να εξετάσουμε λίγα προβλήματα που είναι δυνατόν να γίνουν κατανοητά σε λυκειακό επίπεδο γνώσεων μαθηματικών και φυσικής.

Η έννοια του ηλεκτρικού δυναμικού είναι από τις σημαντικότερες της φυσικής. Το δυναμικό εξαρτάται πάντοτε από το μέγεθος των ηλεκτρικών φορτίων και τη θέση τους στο χώρο, και ο υπολογισμός του είναι γενικά δύσκολο πρόβλημα. Το 1811 ο Poisson συνήγαγε μια διαφορική εξίσωση που συνδέει το δυναμικό με την κατανομή των φορτίων. Βεβαίως, τα απλούστερα προβλήματα ηλεκτρισμού είναι δυνατόν να λυθούν χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση του Poisson. Όταν όμως αντιμετωπίζουμε περιπλοκότερα προβλήματα, με πολλά φορτία κατανεμημένα τυχαία, ο υπολογισμός της εξάρτησης του δυναμικού από τις συντεταγμένες είναι δυνατός μόνο με τη βοήθεια αυτής της εξίσωσης. Στην πραγματικότητα, η εξίσωση του Poisson, μαζί με τα αποτελέσματα των Euler, Gauss, Laplace, Green και Ostrogradsky, διαμορφώνουν τα θεμέλια της σύγχρονης θεωρίας δυναμικού, ενός σημαντικού κλάδου της μαθηματικής φυσικής.

Το εύρος της εργασίας του Poisson είναι εντυπωσιακό. Η συμβολή του υπήρξε σημαντική στη θεωρητική μηχανική και τη μηχανική των ρευστών, στην ελαστικότητα, στην αγωγή της θερμότητας, στη φυσική των αερίων, στον ατμοσφαιρικό ηλεκτρισμό, στο γεωμαγνητισμό, στην επιφανειακή τάση και στα υδάτινα κύματα σε μεγάλο βάθος. Μελέτησε επίσης πρακτικά προβλήματα, όπως η απόκλιση μιας οβίδας από την επιδιωκόμενη τροχιά. Στην αστρονομία, ασχολήθηκε με τη σταθερότητα του ηλιακού συστήματος —πρόβλημα που ελκύει ακόμη και σήμερα την προσοχή. Στο πεδίο των καθαρών μαθηματικών, πέτυχε σημαντικά αποτελέσματα στον διαφορικό και τον ολοκληρωτικό λογισμό και στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων.

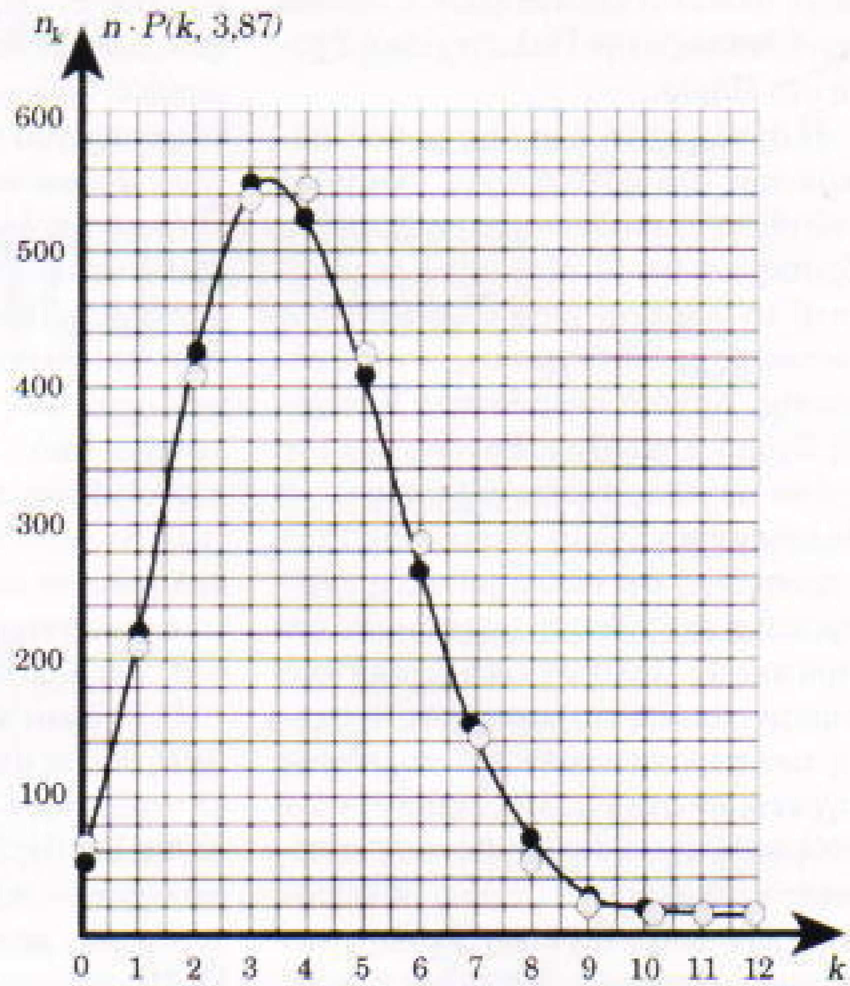
Στα γνωστότερα άρθρα του Poisson συγκαταλέγονται όσα αφορούν τη θεωρία των πιθανοτήτων. Όπως και ο Laplace, ενδιαφέρθηκε ιδιαίτερα για την εφαρμογή της θεωρίας των πιθανοτήτων στη νομική επιστήμη. Μια από τις πραγματείες του έχει τίτλο «Μελέτη των πιθανοτήτων της ετυμηγορίας σε ποινικές και αστικές υποθέσεις». Η προσέγγιση αυτή δεν θεωρείται σήμερα ικανοποιητική από νομική πλευρά, αλλά πρέπει να αναγνωρίσουμε το γεγονός ότι ο Poisson, δουλεύοντας σ' αυτό το πεδίο, έλυσε ορισμένα ενδιαφέροντα μαθηματικά προβλήματα. Επίσης, προχωρώντας πέρα από την κλασική θεωρία των πιθανοτήτων, ανέλυσε ορισμένα παιχνίδια με τραπουλόχαρτα, και από αυτή την άποψη μπορεί να θεωρηθεί ένας από τους προδρόμους της σύγχρονης θεωρίας παιγνίων.

Η κατανομή Poisson

Για να σχηματίσετε μια εικόνα της έρευνας του Poisson και των ιδεών του, θα εξετάσουμε αρκετά συγκεκριμένα προβλήματα από τη θεωρία των πιθανοτήτων και τη μηχανική.

Πρώτα, ας θεωρήσουμε τρία προβλήματα που επιλύονται με τη χρήση ενός τύπου που ονομάζεται κατανομή Poisson, και που τον συναντάμε εξαιρετικά συχνά στη θεωρία των πιθανοτήτων. Δεν θα συναγάγουμε τον τύπο, αλλά θα δείξουμε απλώς τη χρήση του.

Το πρώτο πρόβλημα αφορά τα τυπογραφικά λάθη των βιβλίων. Για να ανακαλύψουμε κάποια αριθμητικά χαρακτηριστικά αυτού του ενοχλητικού φαινομένου, θα θεωρήσουμε ότι το πλήθος των γραμμάτων ανά σελίδα και το πλήθος των σελίδων είναι τόσο μεγάλα, ώστε μπορούμε να υποθέσουμε πως υπάρχει μια σταθερή πιθανότητα σφάλματος του στοιχειοθέτη και ότι αυτή η πιθανότητα ισούται με το λόγο του πλήθους των σφαλμάτων προς το συνολικό πλήθος των γραμμάτων που στοιχειοθετούνται. Θα υποθέσουμε επίσης ότι όλες οι σελίδες του βιβλίου είναι όμοιες, με την έννοια ότι το πλήθος και η θέση των γραμμάτων είναι κατά προσέγγιση ίδια —υποθέτουμε δηλαδή ότι οι συνθήκες εργασίας του στοιχειοθέτη είναι αμετάβλητες και ότι η πιθανότητα λάθους δεν εξαρτάται από την προηγούμενη εργασία του. Υπό αυτές τις συνθήκες, η πιθανότητα εμφάνισης k τυπογραφικών λαθών σε μία σελίδα ισούται κατά προσέγγιση με



Σχήμα 1

k	n_k	$n \cdot P(k, 3{,}87)$
0	57	54, 339
1	203	210,523
2	383	407,361
3	525	525,496
4	532	508,418
5	408	393,515
6	273	253,817
7	139	140,325
8	45	67,882
9	27	29,189
$k \geq 10$	16	17,075
Σύνολο	2.608	2.608,000

$$P(k, \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Ο αριθμός λ σ' αυτό τον τύπο, που ονομάζεται τύπος του Poisson ή κατανομή Poisson, είναι μια παράμετρος που χαρακτηρίζει την εργασία του στοιχειοθέτη —ισούται με το γινόμενο της πιθανότητας εμφάνισης ενός τυπογραφικού σφάλματος και του μέσου πλήθους γραμμάτων ανά σελίδα.

Μπορούμε να ελέγξουμε «πειραματικά» το αποτέλεσμα που προκύπτει από τον τύπο του Poisson. Ο τρόπος είναι ο εξής: πρέπει να διαβάσουμε προσεκτικά τις στοιχειοθετημένες σελίδες —όσο περισσότερες τόσο καλύτερα— και να βρούμε τις σελίδες που περιέχουν k σφάλματα. Έπειτα, πρέπει να διαιρέσουμε το πλήθος των εν λόγω σελίδων με το συνολικό πλήθος των σελίδων που διαβάσαμε, και να συγκρίνουμε αυτό το λόγο με τον αριθμό που προκύπτει από τον τύπο του Poisson για ίδιο k.

Ιδού το δεύτερο πρόβλημα. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μάθουμε την πιθανότητα k κάτοικοι μιας μικρής πόλης με 1.997 κατοίκους να έχουν γεννηθεί την ίδια μέρα με τον Poisson. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί ως εξής: Εφόσον όλες οι μέρες του χρόνου είναι ίδιες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να γεννηθεί κάποιος την ίδια μέρα με τον Poisson ισούται περίπου με 1/365, και επομένως η παράμετρος $\lambda = (1/365) \cdot 1.997 = 5,47$ —δηλαδή, ισούται με το γινόμενο της πιθανότητας να έχει γεννηθεί κάποιος τη συγκεκριμένη ημερομηνία επί το συνολικό πλήθος των κατοίκων της κοινότητας. (Η κατάσταση είναι ανάλογη με του προηγούμενου προβλήματος, όπου αντί για το συνολικό πλήθος των κατοίκων είχαμε το μέσο πλήθος γραμμάτων ανά σελίδα.) Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρησιμοποιώντας την κατανομή του Poisson με $\lambda = 5,47$ και το κατάλληλο k.

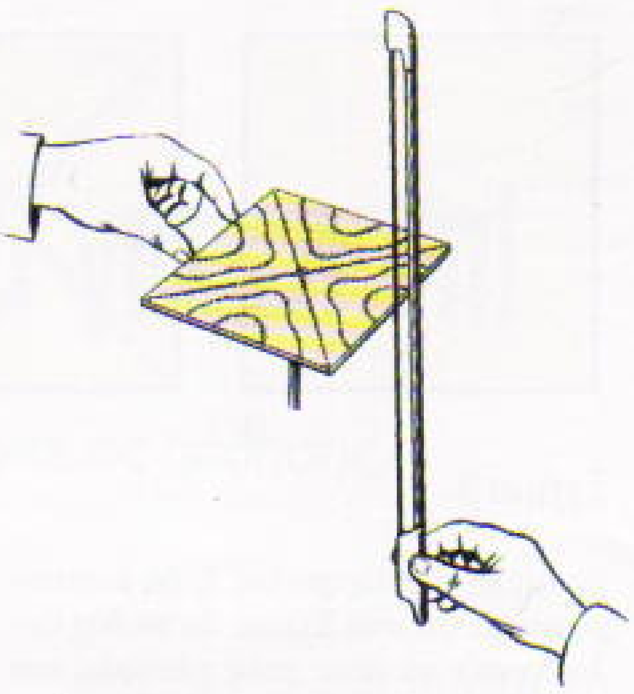
Το τρίτο πρόβλημα έχει σχέση με τη φυσική. Στο κλασικό τους άρθρο για τη ραδιενεργό διάσπαση, οι Rutherford, Chadwick και Ellis βρήκαν ότι η πιθανότητα εκπομπής k σωματιδίων άλφα ανά μονάδα χρόνου από ένα ραδιενεργό υλικό δίνεται από τον τύπο του Poisson. Το πρόβλημα ήταν να υπολογίσουν τη σταθερά λ με βάση τα πειραματικά δεδομένα. Συγκεκριμένα, το άρθρο αναφερόταν στο ράδιο. Σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτυσσόταν στο άρθρο, η ραδιενεργός διάσπαση του ραδίου είναι ο μετασχηματισμός του πυρήνα ραδίου σε πυρήνα ραδονίου (μεταστοιχείωση) με την ταυτόχρονη εκπομπή ενός σωματιδίου άλφα. Η μεταστοιχείωση είναι τυχαία διαδικασία, και υποτίθεται ότι η πιθανότητα διάσπασης ενός ατόμου ραδίου ανά μονάδα χρόνου είναι σταθερή και ανεξάρτητη από την κατάσταση των υπόλοιπων ατόμων.

Ο Rutherford και οι συνεργάτες του μέτρησαν το πλήθος των σωματιδίων άλφα που εξέπεμψε μια ποσότητα ραδίου στη διάρκεια $n = 2.608$ χρονικών διαστημάτων (κάθε διάστημα ήταν ίσο με 7,5 s). Στη συνέχεια, βρήκαν το πλήθος n_k των διαστημάτων στη διάρκεια των οποίων είχαν ανιχνευτεί k ακριβώς σωματίδια. Το συνολικό πλήθος σωματιδίων που ανιχνεύτηκαν κατά το πείραμα ήταν ίσο με $\sum kn_k = 10.094$. Αν διαιρέσουμε αυτό τον αριθμό με το πλήθος n των χρονικών διαστημάτων, βρίσκουμε το μέσο πλήθος των σωματιδίων άλφα που εκπέμπονται σε κάθε χρονικό διάστημα (ή το μέσο πλήθος των σωματιδίων άλφα που εκπέμπονται σε 7,5 s), το οποίο ισούται με $\sum kn_k/n = 3,87$. Μπορούμε τώρα να συγκρίνουμε τις τιμές των λόγων n_k/n που βρέθηκαν στο πείραμα με τις τιμές $P(k, \lambda)$ που προκύπτουν από τον τύπο του Poisson όταν $\lambda = 3,87$. Οι τιμές αυτές δίνονται στον πίνακα της σελ. 40 (τις αντιγράψαμε από το άρθρο των Rutherford και Ellis), και παρουσιάζονται γραφικά στο Σχήμα 1, όπου τα μαύρα σημεία αντιστοιχούν στους αριθμούς $n \cdot P(k, 3,87)$ και τα γκρίζα στους αριθμούς n_k. Παρατηρούμε ότι και τα δύο σύνολα σημείων συμπίπτουν με την πλήρη καμπύλη που παριστάνει την κατανομή Poisson.

Η συμμετρία των ταλαντώσεων...

Η φυσική των ταλαντώσεων είχε συναρπάσει τον Poisson από τα πρώτα παιδικά του χρόνια —και μάλιστα κυριολεκτικά! Φαίνεται ότι η παραμάνα του δεν ήταν και τόσο ευσυνείδητη, και, αντί να αφιερώνεται στον μικρό Simeon, προτιμούσε να τον δένει με μια μεγάλη πετσέτα γύρω από τη μέση και να τον κρεμάει από ένα οριζόντιο δοκάρι. Έτσι, το μικρό αγόρι περνούσε πολλές ώρες αιωρούμενο μπρος-πίσω σαν εκκρεμές. Χρόνια αργότερα ο Poisson έλεγε αστειευόμενος ότι την εντολή να μελετήσει τη θεωρία των ταλαντώσεων του την έδωσε ο ίδιος ο Θεός.

Τα αποτελέσματα του Poisson στο συγκεκριμένο πεδίο είναι και πολυπληθή και σημαντικά. Εδώ θα αναφέρουμε μόνο ένα, το οποίο προέκυψε από τον υπολογισμό των συχνοτήτων ταλάντωσης μικρών γυάλινων ή μεταλλικών δίσκων. Ο γερμανός φυσικός Chladni (1756-1827) ήταν ο πρώτος που επεξεργάστηκε, ήδη από το 1787, μια πειραματική μέθοδο μελέτης της φυσικής των ταλαντούμενων δίσκων. Το 1809 παρουσίασε τους ταλαντούμενους δίσκους του στο ακροατήριο της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών, που έμεινε εντυπωσιασμένο.

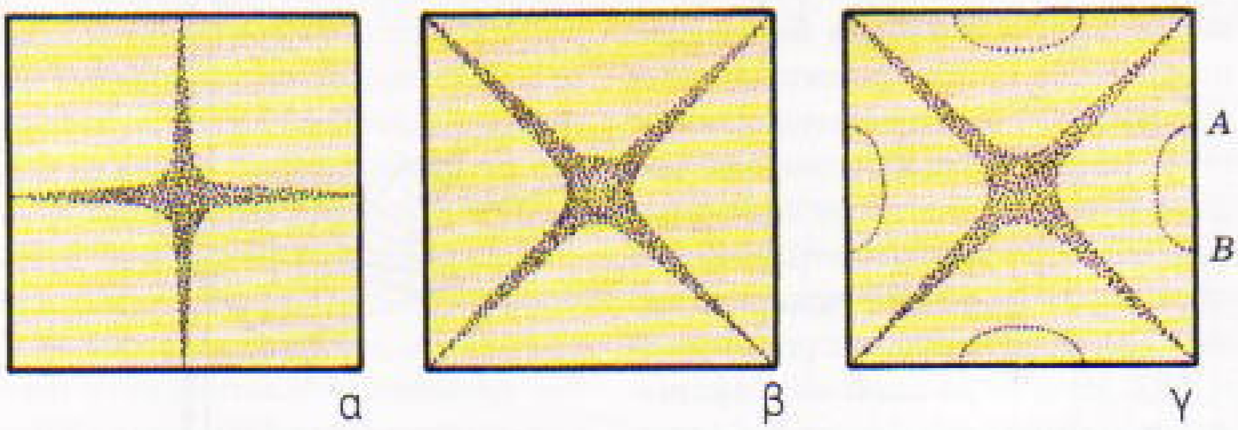


Σχήμα 2

Στα πειράματα του Chladni αναγκάζουμε σε ταλαντώσεις ένα δίσκο ο οποίος στηρίζεται στο κέντρο του και έχει «πασπαλιστεί» με λεπτή άμμο, σύροντας στα χείλη του ένα δοξάρι βιολιού. Ταυτόχρονα, ακουμπάμε το δάχτυλό μας σε κάποιο άλλο σημείο στα χείλη του δίσκου (Σχήμα 2). Η άμμος συγκεντρώνεται κατά μήκος γραμμών στις οποίες δεν εκτελούνται ταλαντώσεις, και ονομάζονται δεσμικές (Σχήμα 3). Αξίζει να επισημάνουμε ότι οι δεσμικές γραμμές διέρχονται από το σημείο που ακουμπά το δάχτυλο στο δίσκο. Τα αλλόκοτα αλλά πάντοτε συμμετρικά σχήματα που δημιουργούνται από τους κόκκους της άμμου ονομάζονται σχήματα Chladni. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τετράγωνους, ορθογώνιους ή κυκλικούς δίσκους και να πειραματιστείτε μαζί τους. Στο Σχήμα 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των πειραματισμών του ίδιου του Chladni με κυκλικούς δίσκους.

Το επίτευγμα του Poisson κατά τη μελέτη των σχημάτων Chladni ήταν ότι ανακάλυψε τη σχέση μεταξύ της συχνότητας ταλάντωσης και του πλήθους των δεσμικών γραμμών. Για την ειδική περίπτωση του τετράγωνου δίσκου και των τετράγωνων σχημάτων Chladni (όπως στο Σχήμα 3α), το τετράγωνο της συχνότητας ταλάντωσης είναι ανάλογο του $(m + 1)^2 + (n + 1)^2$, όπου τα m και n εκφράζουν το πλήθος των κάθετων δεσμικών γραμμών που διαμερίζουν την επιφάνεια του δίσκου.

Αν προσέξουμε τις απλές δεσμικές



Σχήμα 3

γραμμές του Σχήματος 3, θα συμπεράνουμε ότι στο Σχήμα 3α το δάχτυλο άγγιζε το μέσο μιας πλευράς του τετραγώνου· στο Σχήμα 3β, μια κορυφή του· ενώ στο Σχήμα 3γ, δύο δάχτυλα άγγιζαν το δίσκο στα σημεία A και B. Το ύψος του παραγόμενου ήχου είναι μεγαλύτερο στη δεύτερη περίπτωση απ' όσο στην πρώτη, και μεγαλύτερο στην τρίτη απ' όσο στη δεύτερη.

...και λίγα περί φελλών

Και τέλος, ένα ακόμη πρόβλημα που έλυσε ο Poisson: το πρόβλημα του υπολογισμού της σχέσης μεταξύ διαμήκους και εγκάρσιας παραμόρφωσης ενός σώματος που υπόκειται σε μηχανική τάση. Εδώ το ουσιαστικό ζήτημα είναι ότι, όταν ασκείται δύναμη σ' ένα σώμα, η διαμήκης παραμόρφωσή του —δηλαδή, στη διεύθυνση που είναι παράλληλη προς το φορέα της δύναμης— είναι διαφορετική από την εγκάρσια. (Παρατηρήστε, για παράδειγμα, τι συμβαίνει όταν τεντώνετε ένα λάστιχο.) Ο Poisson βρήκε έναν συντελεστή, που πήρε το όνομά του, και ο οποίος μας δίνει μια ποσοτική περιγραφή του φαινομένου.

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Θεωρούμε μια κυλινδρική ράβδο μήκους ℓ και ακτίνας r. Κατά μήκος του άξονα της ράβδου ασκείται δύναμη που δημιουργεί τάση σ_ℓ και ανηγμένη μήκυνση $\varepsilon_\ell = \Delta\ell/\ell > 0$. Οι εγκάρσιες διαστάσεις της ράβδου αλλάζουν επίσης, και έτσι η ακτίνα της μειώνεται κάτα Δr. Η ακτινική ανηγμένη μήκυνση $\varepsilon_r = \Delta r/r$ έχει αντίθετο πρόσημο από την ε_ℓ. Ο συντελεστής Poisson ορίζεται από τον τύπο

$$k = \left|\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_\ell}\right|.$$

Ας εξετάσουμε τα όρια ανάμεσα στα οποία κυμαίνεται ο συντελεστής Poisson. Υποθέτουμε ότι ο όγκος του σώματος που υπόκειται σε παραμόρφωση παραμένει σταθερός. Συνεπώς, ισχύει η σχέση

$$\pi(r + \Delta r)^2(\ell + \Delta\ell) = \pi r^2\ell.$$

Μετά τις πράξεις, και αν αγνοήσουμε το γινόμενο των μικρών ποσοτήτων Δr και $\Delta\ell$, παίρνουμε

$$r\Delta\ell + 2\ell\Delta r = 0,$$

ή, διαφορετικά,

$$\varepsilon_\ell = \Delta\ell/\ell =$$
$$-2(\Delta r/r) = -2\varepsilon_r.$$

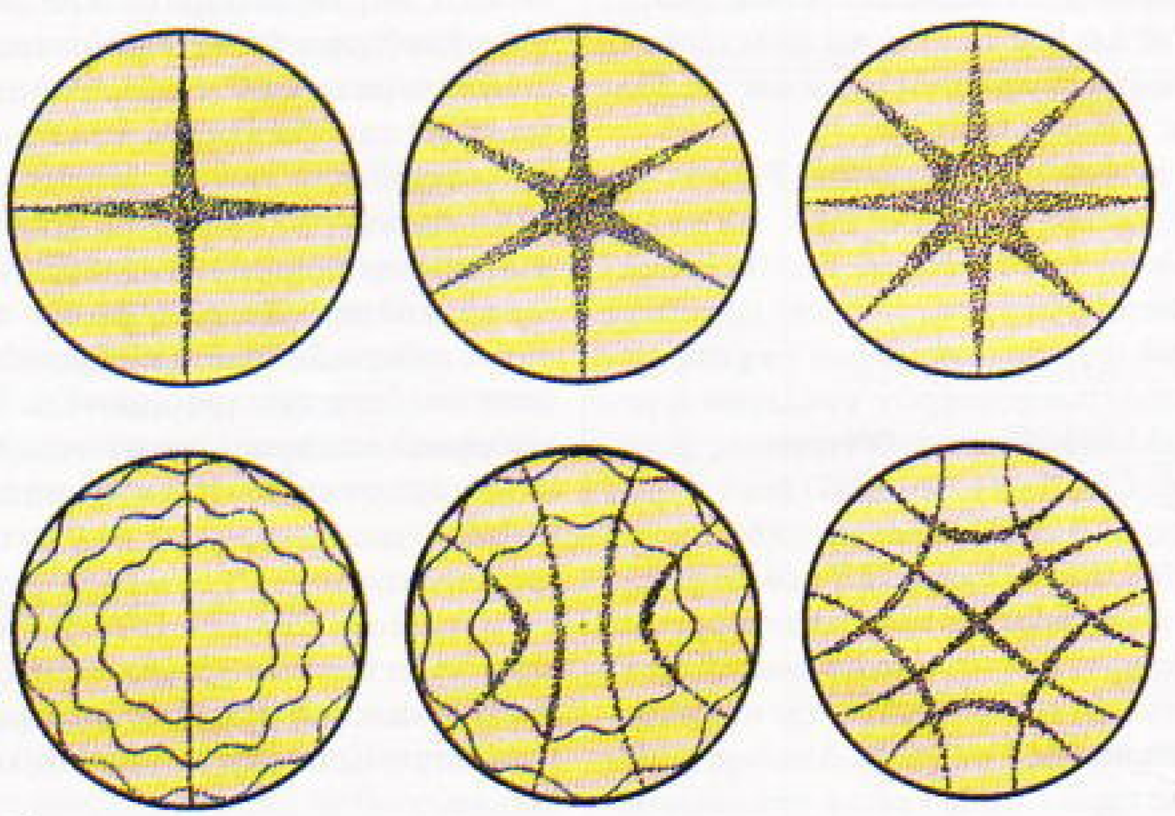
Συνεπώς, ο συντελεστής Poisson ισούται σ' αυτή την περίπτωση με 1/2. Στην πραγματικότητα, όμως, ο όγκος ενός σώματος αλλάζει όταν υπόκειται σε τάση, και επομένως ισχύει η ανισότητα

$$(r + \Delta r)^2(\ell + \Delta\ell) > r^2\ell,$$

από την οποία συνάγουμε ότι $k < 1/2$. (Η ίδια ανισότητα ισχύει και για μη κυλινδρικά σώματα.) Από την άλλη πλευρά, είναι φανερό ότι ο συντελεστής Poisson είναι εξ ορισμού μη αρνητικός, οπότε $0 < k \leq 1/2$.

Οι τιμές του συντελεστή Poisson μπορεί να ποικίλλουν εξαιρετικά (μέσα στα όρια που αναφέραμε προηγουμένως) για διαφορετικά υλικά. Ο συντελεστής Poisson του φελλού, για παράδειγμα, βρίσκεται πολύ κοντά στο μηδέν —δηλαδή, οι εγκάρσιες διαστάσεις ενός κομματιού φελλού μεταβάλλονται ελάχιστα όταν το τεντώνουμε (ή το συμπιέζουμε)— εφόσον η παραμόρφωση *δεν είναι* υπερβολική! Για τούτο πωματίζουμε τα μπουκάλια με φελλούς —ένα πώμα από ελαστικό δεν θα ήταν εξίσου καλό. Ο συντελεστής Poisson του ελαστικού πλησιάζει το 1/2, και, όταν το υποβάλλουμε σε τάση, το εγκάρσιο μήκος του αλλάζει σημαντικά —το πώμα αντιστέκεται όταν προσπαθήσουμε να το βάλουμε στο λαιμό του μπουκαλιού. Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, δίνουμε κωνικό σχήμα στα ελαστικά πώματα.

Τελειώνουμε επισημαίνοντας το ενδιαφέρον γεγονός ότι τα συνηθέστερα οικοδομικά υλικά —σίδερο, πέτρα, τσιμέντο— έχουν συντελεστή Poisson που κυμαίνεται μεταξύ του 1/4 και του 1/3.



Σχήμα 4

Δεν υπάρχουν αερόφρενα για τη Γη!

Μήπως όμως υπάρχει κάποιος άλλος μηχανισμός πέδησης;

David P. Stern

ΤΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ AGRAWAL και Menon («Ένα πλανητικό αερόφρενο», *Quantum* Μαΐου /Ιουνίου 1997) πάσχουν από την εσφαλμένη παραδοχή ότι κάποια εξωτερική δύναμη εμποδίζει την ανώτερη ατμόσφαιρα να περιστρέφεται μαζί με τη Γη. Υποστηρίζουν ότι αυτό συμβαίνει σε υψόμετρο $h = 10^5$ m = 100 km, υποθέτουν ένα συντελεστή εσωτερικής τριβής η και μια σταθερή βαθμίδα ταχύτητας, και εν συνεχεία προχωρούν στον υπολογισμό της προκύπτουσας αντίστασης στην περιστροφή της Γης.

Ωστόσο, δεν φαίνεται να υπάρχει τέτοια δύναμη, και κατά τα φαινόμενα σε ύψος 100 km η ατμόσφαιρα περιστρέφεται μαζί με τη Γη. Πύραυλοι μεγάλων υψομέτρων έχουν απελευθερώσει νέφη ατμών νατρίου και βαρίου στα συγκεκριμένα ύψη, και διαπιστώσαμε ότι τα νέφη αυτά δεν παραμένουν ακίνητα καθώς η Γη περιστρέφεται από κάτω τους.

Σ' ένα αέριο στο οποίο οι κρούσεις των σωματιδίων αποτελούν τον κυρίαρχο μηχανισμό αλληλεπίδρασης, ο συντελεστής εσωτερικής τριβής είναι πρακτικά ανεξάρτητος από την πυκνότητα. Καθώς, ωστόσο, υπερβαίνει κανείς τα 100 km, σύντομα εισέρχεται σε μια περιοχή όπου τα περισσότερα άτομα και μόρια κινούνται σε βαλλιστικές τροχιές χωρίς να υφίστανται σχεδόν καθόλου κρούσεις· έτσι, ο ενεργός συντελεστής εσωτερικής τριβής της ατμόσφαιρας καθίσταται αμελητέος, δεδομένου ότι το απόλυτο κενό έχει μηδενικό συντελεστή εσωτερικής τριβής. Επομένως, δεν αναμένεται οποιαδήποτε «αεροπέδηση», πολύ περισσότερο μάλιστα που δεν υπάρχει αντικείμενο έξω από την ατμόσφαιρα στο οποίο θα μπορούσε να μεταφερθεί η στροφορμή.

Είναι δυνατόν, ωστόσο, να υπάρχει ένα ηλεκτρομαγνητικό φρένο, που να εμπλέκει τα ιόντα της ιονόσφαιρας —η οποία αρχίζει από υψόμετρο 100 km περίπου και εκτείνεται προς τα πάνω. Τα συγκεκριμένα ιόντα συγκρούονται με τα άτομα και τα μόρια της ουδέτερης ατμόσφαιρας, η οποία μοιράζεται την περιστροφή της Γης· και αν αυτός είναι ο μοναδικός παράγοντας που υπεισέρχεται στη διαδικασία, θα καταλήξουν επίσης να ακολουθούν την περιστροφή της Γης.

Η διαφορά εδώ έγκειται στο ότι, επειδή το πλάσμα της ιονόσφαιρας διαθέτει υψηλή ηλεκτρική αγωγιμότητα, η κίνηση των ιόντων πλησίον της Γης μεταδίδεται ηλεκτρικά σε όλο το μήκος της γραμμής του μαγνητικού πεδίου (ή της «δυναμικής γραμμής»). Ως αποτέλεσμα, τα ηλεκτρόνια που είναι παρατεταγμένα κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής τείνουν να κινούνται έτσι ώστε να «μοιράζονται» την ίδια δυναμική γραμμή και σε μεταγενέστερο χρόνο. Εάν τα ιόντα στο χαμηλό άκρο της δυναμικής γραμμής περιστρέφονται ακολουθώντας τη Γη, και όσα βρίσκονται παραπέρα θα τείνουν να συμπεριστραφούν, ακόμη και εν απουσία συγκρούσεων.

Συμβαίνει όντως κάτι τέτοιο; Σύμφωνα με διαστημικές παρατηρήσεις, το πλάσμα της ιονόσφαιρας που βρίσκεται σε δυναμικές γραμμές οι οποίες κλείνουν σε απόσταση που δεν υπερβαίνει τις 5 περίπου γήινες ακτίνες (32.000 km) μοιράζεται την περιστροφή της Γης· σχηματίζει μια «πλασμόσφαιρα» η οποία περιστρέφεται μαζί με τη Γη από κάτω της. Σε δυναμικές γραμμές που κλείνουν σε μεγαλύτερες αποστάσεις —δηλαδή στις γραμμές των πολικών περιοχών και της ζώνης του σέλαος— η διαδικασία είναι πολυπλοκότερη. Τα άκρα των εν λόγω δυναμικών γραμμών στην ιονόσφαιρα θα τείνουν να ακολουθήσουν την περιστροφή της Γης, μολονότι πρέπει να συνειδητοποιήσει κανείς ότι η ταχύτητα περιστροφής τόσο κοντά στους πόλους είναι μάλλον μικρή. Ωστόσο, τα απομακρυσμένα άκρα των γραμμών αυτών μπορεί να παραμένουν «πακτωμένα» σε κάποιο απόμακρο μέσο που δεν τους επιτρέπει να συμπεριστραφούν.

Σε αραιό πλάσμα, οι δυναμικές γραμμές του πεδίου τείνουν να μεταφέρουν ηλεκτρικό ρεύμα, σαν οι γραμμές αυτές να ήταν χάλκινα σύρματα. Εάν το «επίγειο» άκρο κάθε δυναμικής γραμμής περιστρέφεται με τη Γη ενώ το απόμακρο άκρο δεν επιτρέπεται να περιστραφεί, τότε δημιουργείται ένα «ρευστομαγνητικό δυναμό» ανάμεσα στην απόμακρη περιοχή και την ιονόσφαιρα. Αυτό το δυναμό (βλ. http://www-spof.gsfc.nasa.gov/Education/wcurrent.html στον Παγκόσμιο Ιστό) άγει ηλεκτρικό ρεύμα i στο κύκλωμα το οποίο περιλαμβάνει τα τμήματα των δύο περιοχών και τις μαγνητικές γραμμές που τα συνδέουν, οπότε η μαγνητική δύναμη $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ που ασκείται στο ρεύμα διαμέσου της ιονόσφαιρας από το γεωμαγνητικό πεδίο ενεργεί ως φρένο (το ρεύμα διαταράσσει επίσης τις δυναμικές γραμμές). Πράγματι, ένα τέτοιο δυναμό υπάρχει ανάμεσα στην ιονόσφαιρα

Η συνέχεια στη σελ. 47 ⇨

ΣΤΑ ΠΕΔΙΑ
ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Το σουφλέ της φυσικής

«Αυτά τα ξεύρουν όλοι πλέον, ευτυχώς· κι όμως πολλοί στερούνται και νηστεύουν!
Θα ελαφρύνουν τάχα για ν' ανέβουν αυτού που θε να πάμε;...
—Βάλτε να πιούμε! —Βάλτε να φάμε!»

—Γεώργιος Βιζυηνός

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

ΑΥΤΟ ΠΟΥ ΔΙΑΚΡΙΝΕΙ ΤΟΥΣ ΜΕγάλους σεφ όλου του κόσμου από τα εκατομμύρια των καλών μαγείρων είναι η κατανόηση των γενικών ιδεών της μαγειρικής. Εμείς οι δάσκαλοι μοχθούμε για να μεταδώσουμε μια αντίστοιχη αντίληψη για τη φυσική στους μαθητές μας. Τα περισσότερα προβλήματα που περιλαμβάνονται στα βιβλία φυσικής δεν απαιτούν από το μαθητή βαθιά κατανόηση για να μπορέσει να καταλήξει στην απάντηση που παρατίθεται στο τέλος των βιβλίων. Αν στο πρόβλημα δίνεται η μάζα m και η επιτάχυνση γ ενός σώματος και ζητείται η συνισταμένη δύναμη που δρα πάνω του, δεν είναι δα και δύσκολο να βρει το αποτέλεσμα μέσω του τύπου που συνδέει τα m, γ και F. Για να γίνει δυσκολότερο ένα τέτοιο πρόβλημα και για να ξεφεύγει η λύση του από τη «συνταγή», πρέπει να προσφέρουμε περιττές πληροφορίες, όπως η ταχύτητα v του σώματος ή το χρώμα του λ. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές δεν θα καταλήξουν στην απάντηση ακολουθώντας απλώς τον «τυφλοσούρτη», μια και δεν θα βρίσκουν κατάλληλο τύπο ή τύπους που θα συνδέουν τα m, γ, v, λ και F. Θα χρειαστεί να κατανοήσουν επαρκώς τις έννοιες και το φαινόμενο, για να αντιληφθούν πως η ταχύτητα και το χρώμα του σώματος αποτελούν περιττά δεδομένα. Μόνο ο ικανός σεφ μπορεί να εξασφαλίσει πως το σουφλέ θα φουσκώσει.

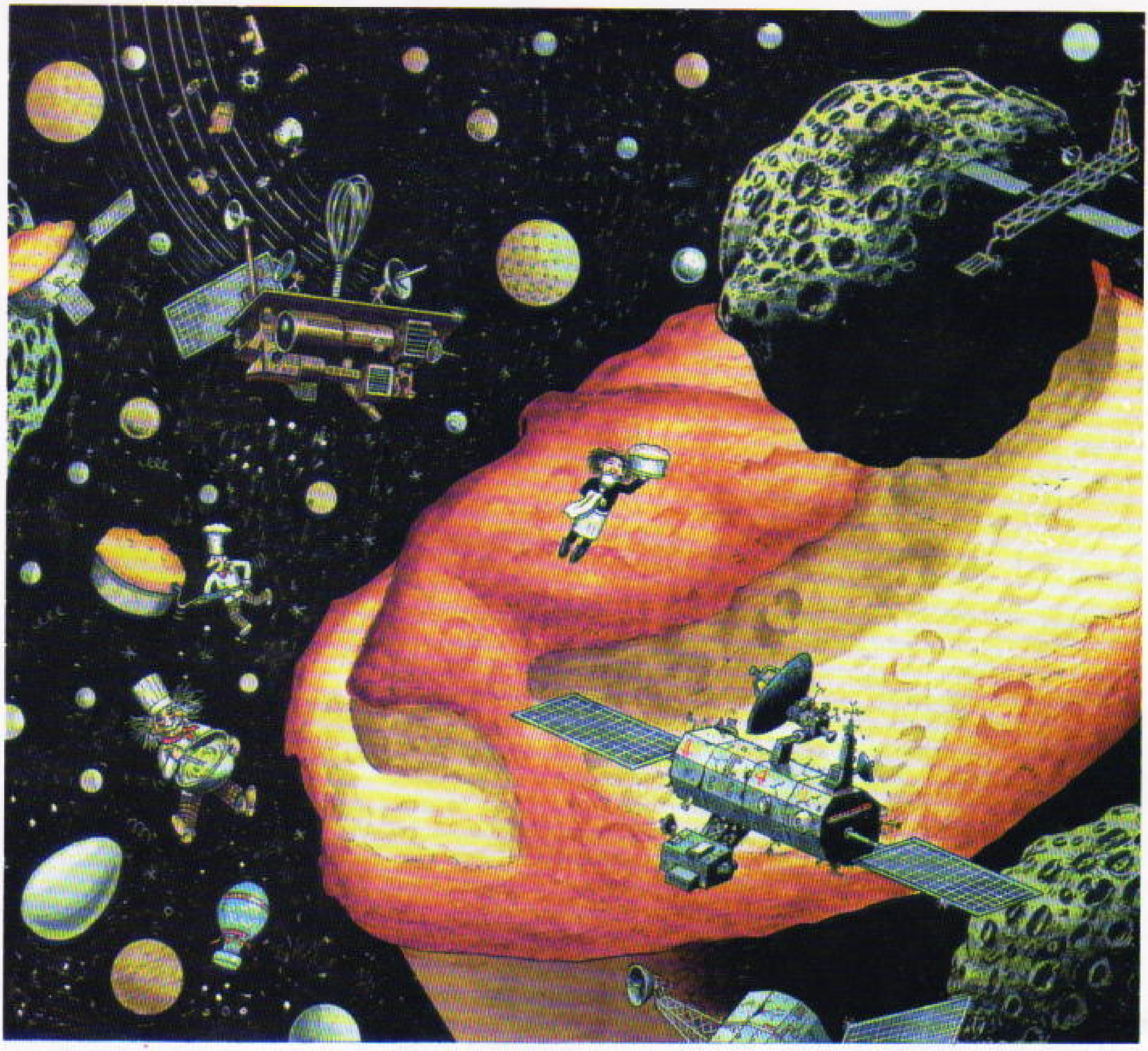
Ως παράδειγμα προβλήματος στο οποίο δίνονται περιττές πληροφορίες, ας αναφέρουμε το εξής: «Ένας δορυφόρος διαγράφει κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη, μήκους 42.000 km. Η μάζα του δορυφόρου είναι 4.500 kg, η ακτίνα της Γης 3.760 km και η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης 9,8 m/s^2. Πόσο έργο παράγει το βάρος του δορυφόρου σε μια πλήρη περιφορά του γύρω από τη Γη;» Όσοι μαθητές έχουν αντιληφθεί ότι η διεύθυνση του βάρους του δορυφόρου είναι συνεχώς κάθετη στη μετατόπισή του, δεν χρειάζονται κανένα από τα παραπάνω δεδομένα: απαντούν ότι το ζητούμενο έργο είναι μηδέν!

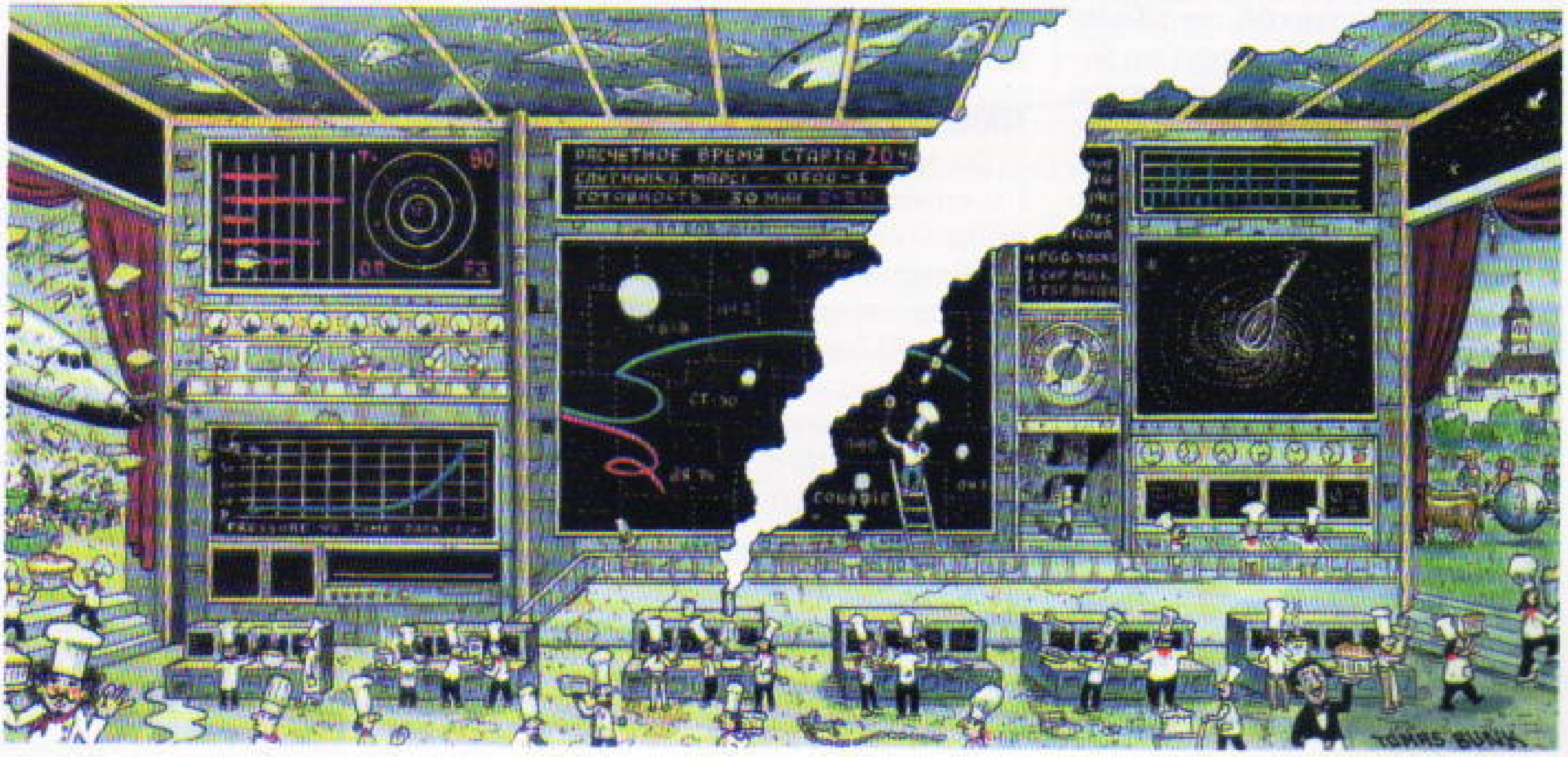
Το παραπάνω αποτελεί πρόβλημα ή είναι απλώς μια παγίδα; Σκεφτείτε, ωστόσο, ότι η ικανότητα να αναγνωρίζουμε το χρήσιμο δεδομένο και να διακρίνουμε την παρείσακτη πληροφορία είναι εξαιρετικά σημαντική τόσο στη ζωή όσο και στη φυσική. Αρκετές φορές θα έτυχε να αντιμετωπίσετε τη δυσφορία μαθητών για περιττά δεδομένα σε εκφωνήσεις προβλημάτων. Σε μια προσπάθεια ενός από εμάς (του L.D.K.) να προκαλέσει συζήτηση, δόθηκε σε μαθητές ένα πρόβλημα στο οποίο σκόπιμα είχαν παρεισφρήσει περιττές πληροφορίες. Η καταληκτική ερώτηση ήταν: «Ποια από τα δεδομένα σάς είναι απαραίτητα για να λύσετε το πρόβλημα;» Συχνά στην πραγματική ζωή, οι φυσικοί και οι μηχανικοί αντιμετωπίζουν τη λύση προβλημάτων μέσα από ένα τέτοιο πρίσμα.

Μερικές φορές, οι φυσικοί εργάζονται στις θεωρητικές προεκτάσεις ενός προβλήματος μόνο και μόνο για να ανακαλύψουν πως ένας αριθμός δεν χρειάζεται ή για να διαπιστώσουν κατά πόσο μια βαθμονόμηση είναι απαραίτητη. Και αυτό ακριβώς μας δίνει αφορμή για το πρόβλημα του παρόντος τεύχους. Βασίζεται σ' ένα από τα προβλήματα που τέθηκαν στη δεύτερη φάση εξετάσεων επιλογής της Ολυμπιακής Ομάδας των ΗΠΑ για το 1997, η οποία συμετέσχε στη Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής που διεξήχθη στο Οντάριο του Καναδά τον περασμένο Ιούλιο. Το πρόβλημα έχει πρωτοδημοσιευτεί στο *Kvant* αρκετά χρόνια πριν.

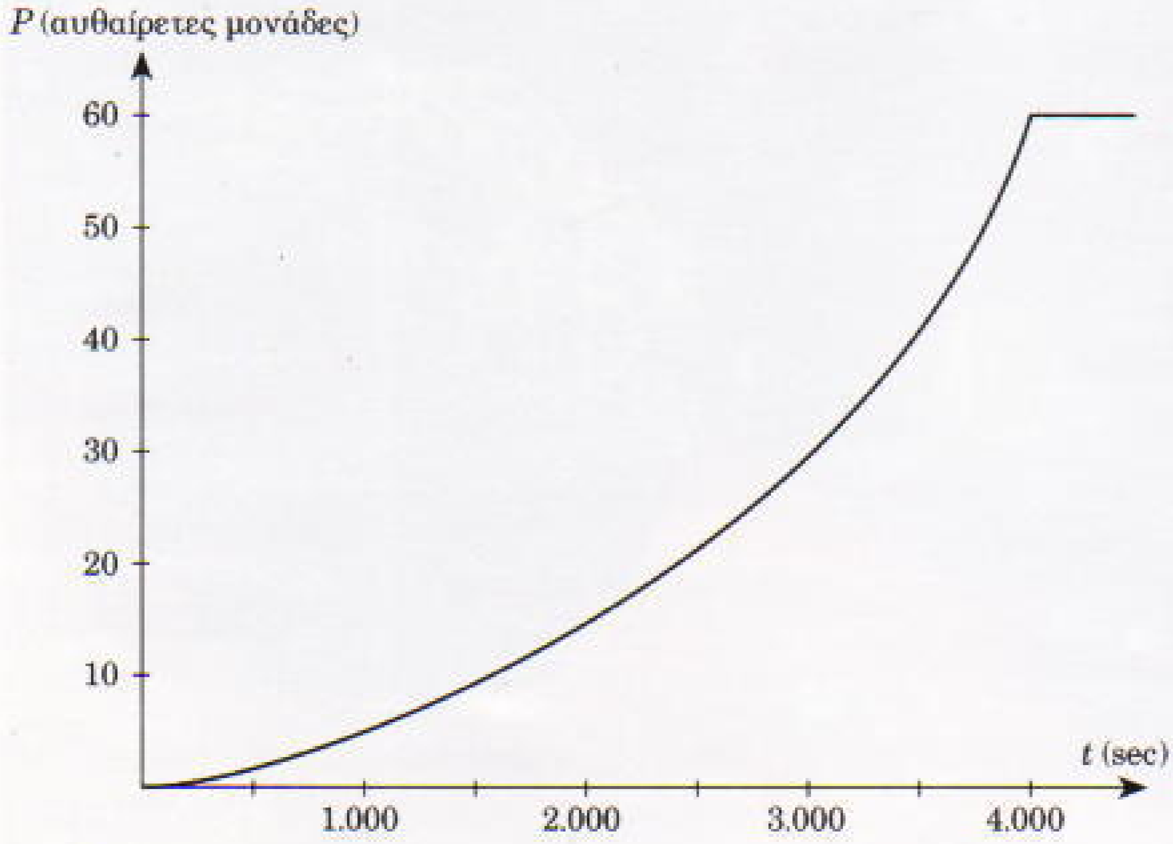
Κατά την είσοδό της στην ατμόσφαιρα ενός πλανήτη, μια ερευνητική συσκευή κατέρχεται κινούμενη κατευθείαν προς την επιφάνειά του. Κα-

Εικονογράφηση: Tomas Bunk





РАСЧЕТНОЕ ВРЕМЯ СТАРТА 20
TOMAS BUNK



Σχήμα 1

τά τη διάρκεια καθόδου της, καταγράφει την ατμοσφαιρική πίεση του πλανήτη ως συνάρτηση του χρόνου· τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 1. Δυστυχώς, η βαθμονόμηση του βαρομέτρου χάθηκε, οπότε είναι άγνωστες οι μονάδες μέτρησης στον άξονα της πίεσης. Δικό σας καθήκον είναι να «οδηγήσετε σε επιτυχία την αποστολή» εξουδετερώνοντας το μειονέκτημα της έλλειψης μονάδων.

Η ατμόσφαιρα του πλανήτη αποτελείται σχεδόν μόνο από διοξείδιο του άνθρακα, ο οποίος έχει γραμμομοριακή μάζα 44 g/mole, και κατά προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί ιδανικό αέριο. Η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας στην επιφάνεια του πλανήτη είναι 400 K, η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη 9,9 m/s^2, και η ακτίνα του πλανήτη 5.000 km.

Α. Εφαρμόστε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε μια λεπτή φέτα της ατμόσφαιρας, η οποία στην κατακόρυφη διεύθυνση έχει πάχος Δy, για να δείξετε ότι η διαφορά πίεσης ανάμεσα στην πάνω και την κάτω επιφάνεια της λεπτής φέτας δίνεται από τον τύπο

$$\Delta P = \rho g \Delta y,$$

όπου ρ και g είναι η πυκνότητα του ατμοσφαιρικού αέρα και η επιτάχυνση της βαρύτητας, αντίστοιχα, στην περιοχή της φέτας.

Β. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο για τη μεταβολή της ατμοσφαιρικής πίεσης με το υψόμετρο, καθώς και το γράφημα του Σχήματος 1, εκτιμήστε πόση ταχύτητα v_0 θα έχει η συσκευή τη στιγμή που θα ακουμπά την επιφάνεια του πλανήτη.

Γ. Με βάση την απλουστευτική υπόθεση ότι η ταχύτητα της συσκευής παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της διέλευσής της από τη χαμηλότερη ατμόσφαιρα, εκτιμήστε τη θερμοκρασία της ατμόσφαιρας σε ύψος 15 km από την επιφάνεια του πλανήτη.

Δ. Εκτιμήστε την αβεβαιότητα στον προηγούμενο υπολογισμό σας. Πόσο βέβαιος είστε ότι η εκτίμησή σας για τη θερμοκρασία έχει νόημα;

Με ιδιαίτερη χαρά, όπως πάντα, περιμένουμε τις λύσεις σας στη διεύθυνση του ελληνικού *Quantum*.

Υπόσχεστε να μην το πείτε;

Στο μέρος Α του προβλήματος, οι δύο κεραίες εκπέμπουν σε συμφωνία φάσης. Ο ένας φίλος ζει στην πόλη Α και δέχεται μέγιστο σήμα, ενώ ο δεύτερος ζει στην πόλη Β και δεν δέχεται σήμα. Η διαφορά των δρόμων μεταξύ καθεμιάς κεραίας (S_1 και S_2) και της πόλης Α πρέπει να ισούται με άρτιο αριθμό ημιμηκών κύματος. Από το Σχήμα 2 καταλήγουμε εύκολα στη γνωστή εξίσωση

$$n_1\lambda = d\,\text{ημ}\,\theta_1,$$

όπου θ_1 είναι η γωνία την οποία σχηματίζει η κατεύθυνση προς την πόλη Α και η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τις δύο κεραίες.

Η διαφορά των δρόμων μεταξύ καθεμιάς κεραίας και της πόλης Β πρέπει να ισούται με περιττό αριθμό ημιμηκών κύματος. Αυτό μας οδηγεί στην εξίσωση

$$\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda = d\,\text{ημ}\,\theta_2,$$

όπου η θ_2 ορίζεται ανάλογα με τη θ_1.

Αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις κατά μέλη και λύνοντας ως προς d, παίρνουμε

$$d = \frac{\left[n_1 - (n_2 + 1/2)\right]\lambda}{\text{ημ}\,\theta_1 - \text{ημ}\,\theta_2}.$$

Βλέπουμε πως, για να έχουμε κοιλία στην πόλη Α και δεσμό στη Β, υπάρχει άπειρο πλήθος επιλογών όσον αφορά την απόσταση των κεραιών και τον προσανατολισμό τους. Αν δεχτούμε την απλούστερη περίπτωση, κατά την οποία η Α κείται επί της μεσοκαθέτου στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τις δύο κεραίες ($\theta_1 = 0$), τότε μπορούμε να ορίσουμε την απόσταση d των κεραιών μέσω του προσανατολισμού της γωνίας θ_2:

$$d = \frac{(n_2 + 1/2)\lambda}{\text{ημ}\,\theta_2}.$$

Στο μέρος Β ζητούνται οι παράμετροι της διάταξης (συμπεριλαμβανομένης της διαφοράς φάσης δ μεταξύ των σημάτων) έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ των κεραιών να είναι ελάχιστη.

Για δεδομένη γωνία θ ανάμεσα στην κατεύθυνση του σημείου που μας ενδιαφέρει και της μεσοκαθέτου στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τις κεραίες, η συνολική διαφορά των δρόμων ισούται τώρα με

$$d\,\text{ημ}\,\theta + \frac{\delta\lambda}{2\pi}.$$

Οι εξισώσεις για την ενισχυτική και την αναιρετική συμβολή, αντίστοιχα, θα είναι

$$n_1\lambda = d\,\text{ημ}\,\theta_1 + \frac{\delta\lambda}{2\pi},$$

$$\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda = d\,\text{ημ}\,\theta_2 + \frac{\delta\lambda}{2\pi}.$$

Αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις κατά μέλη και λύνοντας ως προς d, παίρνουμε

$$d = \frac{[n_1 - (n_2 + 1/2)]\lambda}{\text{ημ}\theta_1 - \text{ημ}\theta_2}.$$

Μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε το d θεωρώντας ότι γίνεται ελάχιστος ο αριθμητής και μέγιστος ο παρανομαστής. Ο αριθμητής θα μπορούσε να είναι ελάχιστος αν

$$n_1 = n_2 + \frac{1}{2}.$$

Αυτό όμως είναι αδύνατον, δεδομένου ότι οι n_1 και n_2 είναι ακέραιοι. Έτσι, ο αριθμητής γίνεται ελάχιστος αν $n_1 = n_2$.

Μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μέγιστη τιμή του παρανομαστή παίρνοντας την παράγωγό του και θέτοντάς την ίση με μηδέν. Έστω λοιπόν ότι ορίζουμε την f ως

$$f = \text{ημ}\theta_1 - \text{ημ}\theta_2.$$

Επειδή οι θ_1 και θ_2 εξαρτώνται από τον προσανατολισμό των κεραιών, ας αντικαταστήσουμε τη θ_2 με $\theta_1 - \varphi$, όπου φ είναι η γωνία μεταξύ των κατευθύνσεων προς τις δύο πόλεις. Παραγωγίζοντας την f ως προς θ_1 και εξισώνοντας με 0, παίρνουμε:

$$f' = \text{συν}\theta_1 - \text{συν}(\theta_1 - \varphi) = 0,$$

ή

$$\text{συν}\theta_1 = \text{συν}(\theta_1 - \varphi).$$

Για να είναι ίσα τα δύο συνημίτονα (και $\angle\varphi \neq 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$), πρέπει

$$\theta_1 = -(\theta_1 - \varphi),$$

ή

$$\theta_1 = \frac{\varphi}{2}.$$

Αυτό φαίνεται εύλογο, διότι ήδη βρήκαμε ότι $n_1 = n_2$, επομένως αναμένουμε ότι η μεσοκάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις κεραίες θα πρέπει να διχοτομεί τη γωνία φ.

Έτσι, η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των κεραιών θα ισούται με

$$d = \frac{\lambda}{4\text{ημ}\dfrac{\varphi}{2}}.$$

Εν συνεχεία, η διαφορά φάσης μεταξύ των σημάτων υπολογίζεται εύκολα:

$$n_1\lambda = d\,\eta\mu\theta_1 + \frac{\delta\lambda}{2\pi},$$

$$\delta = \frac{-\pi}{2} - 2\pi n_1 = \frac{3\pi}{2} - 2\pi n_1.$$

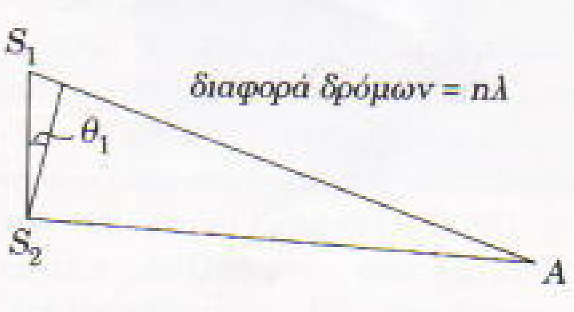
Στο μέρος Γ, το πρόβλημα ζητούσε μια αριθμητική λύση αν η συχνότητα εκπομπής ήταν 27 MHz και οι γωνίες μεταξύ της κατεύθυνσης του βορρά και αυτών των πόλεων Α και Β ήταν 72° και 157°, αντίστοιχα. Θα ισχύει

$$\lambda = c/v = 11{,}1 \text{ m},$$

και

$$d = \frac{11{,}1 \text{ m}}{4\text{ημ}42{,}5^\circ} = 4{,}1 \text{ m}.$$

Ο προσανατολισμός των κεραιών θα είναι τέτοιος ώστε η μεσοκάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τις κεραίες να σχηματίζει γωνία 72° + 42,5° με την κατεύθυνση του βορρά.



Σχήμα 2

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 43*

του Δία και στην Ιώ, το δορυφόρο του πλανήτη, η τροχιακή κίνηση της οποίας υστερεί σε σχέση με την περιστροφή του ιονοσφαιρικού πλάσματος (βλ. http://www-spof.gsfc.nasa.gov/Education/wio.html).

Αρχής γενομένης με το διαστημόπλοιο «Triad» το 1973 (http://www-spof.gsfc.nasa.gov/Education/wtriad.html), πραγματοποιήθηκαν παρατηρήσεις από δορυφόρους με τις οποίες χαρτογραφήθηκαν ρεύματα ανάμεσα στην ιονόσφαιρα και το απόμακρο Διάστημα, τα οποία δημιουργούνται από τη σχετική κίνηση των δύο μέσων (της ιονόσφαιρας και του Διαστήματος). Τα ρεύματα αποδεικνύονται ιδιαίτερα ισχυρά —της τάξεως του 10^6 ampere.

Η μορφή των εν λόγω ρευμάτων, ωστόσο, υποβάλλει την ιδέα ότι η σχετική κίνηση στην οποία αποκρίνονται δεν έχει σχέση με την περιστροφή της Γης. Μάλλον αναπαριστά την κίνηση του απόμακρου διαστημικού πλάσματος, στο οποίο πιθανώς είναι συνδεδεμένες οι γραμμές αυτές, ιδιαίτερα την ταχεία ροή (≅ 400 km/s) του «ηλιακού ανέμου» που απλώνεται ακτινικά από τον Ήλιο.

Η επίδραση της περιστροφής της Γης φαίνεται αμελητέα. Συνεπώς, η Γη όχι μόνο δεν έχει «αερόφρενο», αλλά, απ' ό,τι φαίνεται, μάλλον δεν διαθέτει ούτε μαγνητικό φρένο.

Ο **David P. Stern** *είναι φυσικός στο Κέντρο Διαστημικών Πτήσεων Goddard, στο Γκρήνμπελτ του Μαίρυλαντ των ΗΠΑ. Η διεύθυνση του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου του είναι u5dps@lepvax.gsfc.nasa.gov.*

Στρόβιλοι στο διάδρομο απογείωσης

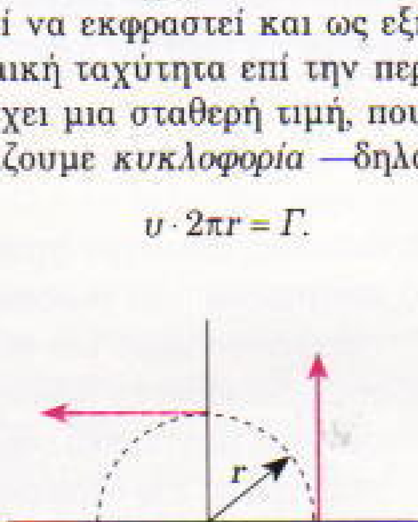
«...ώσπερ εις τινα δίνην εμπεσόντες κυκώνται»
Πλάτωνος, Κρατύλος

Albert Stasenko

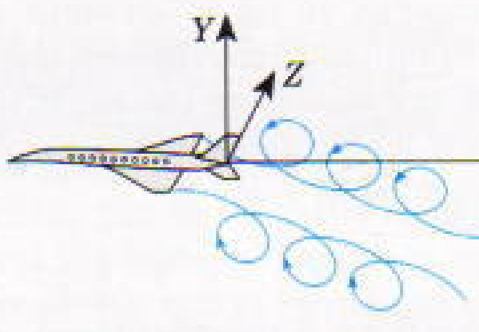
Η ΑΠΟΓΕΙΩΣΗ ΜΕ ΑΕΡΟΠΛΑΝΟ είναι πάντοτε συναρπαστική, αν όμως βρίσκεστε σε μικρό αεροσκάφος, καλά θα κάνατε να αφήνατε αρκετό χώρο ανάμεσα σ' εσάς και στο τζάμπο που απογειώνεται μπροστά σας. Έχετε δει ποτέ περιστέρι να προσγειώνεται σε έδαφος που καλύπτεται από κονιορτό; Μπορείτε να παρατηρήσετε τους στροβίλους που δημιουργούνται, επειδή τα σωματίδια της σκόνης αναταράσσονται από το φτεροκόπημα. Παρόμοιοι στρόβιλοι δημιουργούνται κατά την απογείωση ενός τζάμπο. Το αεροπλάνο δημιουργεί ισχυρά καθοδικά ρεύματα αέρα, και αλίμονο στο ελαφρό αεροπλάνο που θα προσπαθήσει να ακολουθήσει το μεγαθήριο αυτή την κρίσιμη στιγμή. Τα φτερά του μικρού αεροπλάνου μπορεί να εισέλθουν σε κατακόρυφα ρεύματα αέρα με αντίθετες ταχύτητες, που απλώς θα το αναποδογυρίσουν. Επειδή το αεροπλάνο βρίσκεται ακόμη κοντά στο έδαφος, ο πιλότος δεν έχει την παραμικρή ελπίδα σωτηρίας. Δυστυχώς, στα χρονικά της αεροπορίας υπάρχουν αναρίθμητες αναφορές για συντριβές εξαιτίας του συγκεκριμένου φαινομένου. Φαίνεται εύλογο να υποθέσουμε ότι οι στρόβιλοι στους διαδρόμους απογείωσης αποτελούν ζήτημα ζωηρού ενδιαφέροντος για τους πιλότους, τους ελεγκτές εναέριας κυκλοφορίας και τους αεροναυπηγούς. Μολονότι συνιστά αποθαρρυντικά πολύπλοκο θέμα —γνωστό στην επιστημονική βιβλιογραφία ως «κινηματική των στροβίλων»—, μπορούμε εντούτοις να αποκομίσουμε κάποιο όφελος εξετάζοντάς το σε απλουστευμένη μορφή.

Τι είναι στρόβιλος; Μπορείτε να τον παρατηρήσετε όταν το νερό χύνεται στο άνοιγμα της αποχέτευσης ενός νιπτήρα ή μιας μπανιέρας. Εάν το νερό περιέχει φύλλα τσαγιού ή άλλα μικρά σωματίδια, μπορείτε να διαπιστώσετε αμέσως ότι όσο πλησιέστερα βρίσκεται το σωματίδιο στον άξονα περιστροφής τόσο μεγαλύτερη είναι η γραμμική (εφαπτομενική) ταχύτητά του. Στην υδροδυναμική υπάρχει μια σημαντική έννοια, η απλή δίνη, στην οποία η γραμμική ταχύτητα είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης από τον άξονα περιστροφής: $\upsilon \sim 1/r$ (Σχήμα 1). Η ίδια έννοια μπορεί να εκφραστεί και ως εξής: Η γραμμική ταχύτητα επί την περιφέρεια έχει μια σταθερή τιμή, που την ονομάζουμε *κυκλοφορία* —δηλαδή

$$\upsilon \cdot 2\pi r = \Gamma. \qquad (1)$$



Σχήμα 1



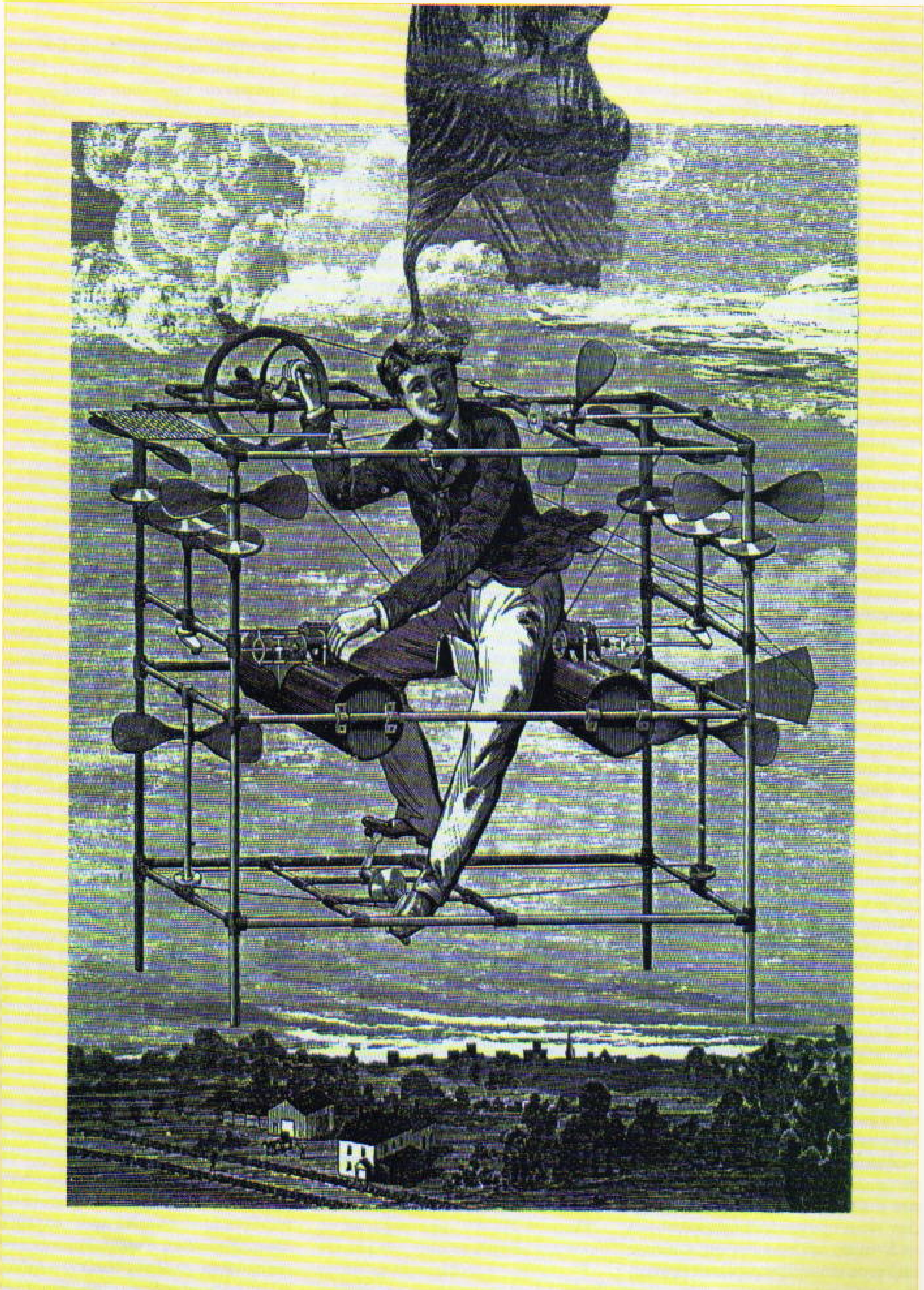
Σχήμα 2

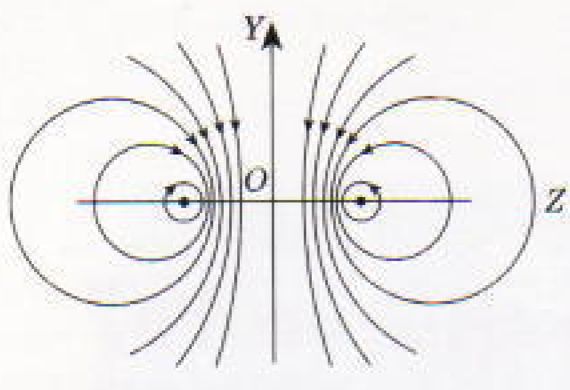
(Παρεμπιπτόντως, ο ίδιος τύπος περιγράφει ένα μαγνητικό πεδίο **B**, εάν αντικαταστήσουμε το υ με B και το Γ με I, την ένταση του ρεύματος.)

Δεν είναι δύσκολο να φανταστούμε ότι ένα αεροπλάνο συνοδεύεται γενικά κατά την πτήση του από δύο στροβίλους που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Πράγματι, για να αντισταθμίσουν τη δύναμη της βαρύτητας, οι πτέρυγες του αεροπλάνου πρέπει να ωθούν προς τα κάτω μεγάλη ποσότητα αέρα. Εν συνεχεία, τα σωματίδια του αέρα κινούνται πλαγίως, και κατόπιν προς τα πάνω. Λόγω της πρόσθιας κίνησης του αεροπλάνου, τα σωματίδια αυτά διαγράφουν ελικοειδή τροχιά (Σχήμα 2).

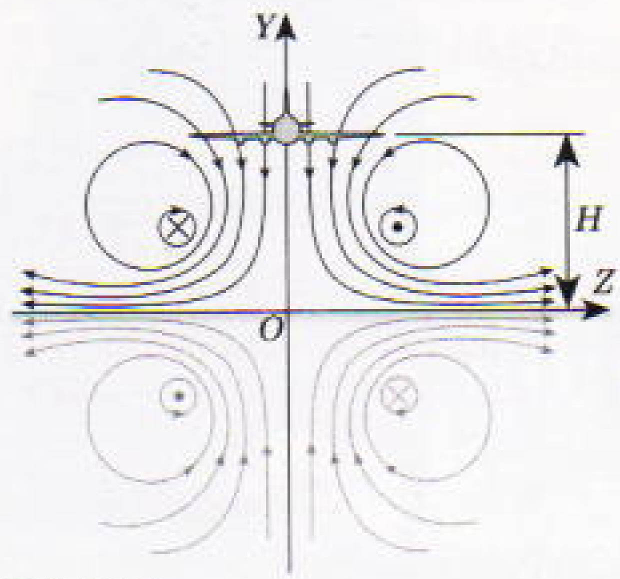
Οι εν λόγω δύο στρόβιλοι είναι δυνατόν να θεωρηθούν κατοπτρικά είδωλα ο ένας του άλλου ως προς το κατακόρυφο επίπεδο συμμετρίας του αεροσκάφους: στο Σχήμα 3 την εγκάρσια τομή του την παριστά ο άξονας OY. Τα ρεύματα αέρος που παράγονται από τους δεξιούς και αριστερούς στροβίλους κινούνται καθοδικά κατά μήκος του άξονα OY.

Εικονογράφηση: Vera Khlebnikova





Σχήμα 3

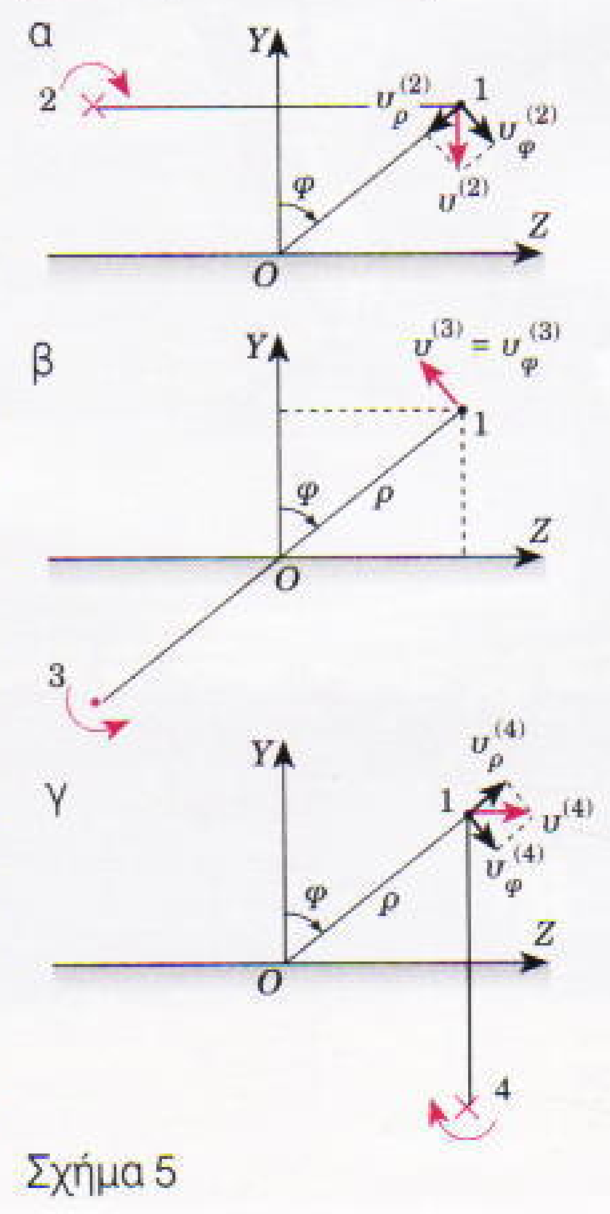


Σχήμα 4

Έτσι, αυτό το κατακόρυφο επίπεδο συμμετρίας παίζει το ρόλο μιας μη διαπερατής (από τους στροβίλους) διαχωριστικής επιφάνειας. Ας φανταστούμε ένα αεροπλάνο που πετάει σε χαμηλό ύψος H πάνω από έναν αεροδιάδρομο. Το έδαφος είναι βεβαίως μη διαπερατό για την κίνηση του αέρα, οπότε τα ρεύματα του αέρα που παράγονται από τους δύο πραγματικούς στροβίλους θα διέρχονται παράλληλα και προς το έδαφος (Σχήμα 4). Η μορφή των στροβίλων θα μοιάζει σαν να υπήρχε ένα ακόμη ζεύγος «υπόγειων» στροβίλων που αποτελούν κατοπτρικά είδωλα των δύο πραγματικών στροβίλων ως προς το οριζόντιο επίπεδο.

Οι φυσικοί λατρεύουν τις αναλογίες: σκεφτείτε ότι αυτή η μορφή είναι πανομοιότυπη με τη μορφή του μαγνητικού πεδίου που παράγουν τέσσερα παράλληλα σύρματα τα οποία διαρρέονται από ηλεκτρικό ρεύμα ίδιας έντασης. Στο Σχήμα 4 η κατεύθυνση των εν λόγω φανταστικών ρευμάτων σημειώνεται με τελεία (αν το ρεύμα ρέει προς τον αναγνώστη) ή με σταυρό (αν ρέει στην αντίθετη κατεύθυνση). Σημειώστε ότι το μαγνητικό πεδίο ενός μοναδικού σύρματος εκτείνεται στο άπειρο, αλλά η εικόνα του συνιστάμενου μαγνητικού πεδίου που παράγεται από τα τέσσερα σύρματα (Σχήμα 4) δημιουργεί την εντύπωση ότι υπάρχουν μη διαπερατές διαχωριστικές επιφάνειες ανάμεσα στα πεδία κάθε σύρματος! Αυτό είναι το κρίσιμο σημείο: Αντί για δύο πραγματικούς, περίπλοκους στροβίλους που αλληλεπιδρούν με το οριζόντιο επίπεδο, μπορούμε να εργαστούμε με τέσσερις απλές δίνες χωρίς καμιά επίπεδη συνοριακή επιφάνεια. Δεν είναι πραγματικά όμορφο;

Σ' αυτή την προσέγγιση, καθένας από τους τέσσερις στροβίλους βρίσκεται εντός του συνολικού πεδίου που παράγουν οι τρεις υπόλοιποι. Ας εξετάσουμε την κίνηση ενός από τους στροβίλους —ας πούμε του υπ' αριθμόν 1 (Σχήμα 5). Είναι βολικό να περιγράψουμε τη θέση του άξονά του με τη βοήθεια κυλινδρικών συντεταγμένων. Ένα σημείο στο σύστημα αυτό περιγράφεται από το μήκος ρ του διανύσματος που άγεται από την αρχή προς το δεδομένο σημείο, και από την αζιμουθιακή γωνία φ που σχηματίζουν η ακτίνα ρ και κάποια ευθεία αναφοράς —θα επιλέξουμε γι' αυτό το σκοπό την OY. Στο εν λόγω σύστημα το διάνυσμα της ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon}$ έχει μια ακτινική συνιστώσα υ_ρ και μια αζιμουθιακή συνιστώσα υ_φ που είναι



Σχήμα 5

κάθετη στο διάνυσμα θέσης. Στη συνέχεια βρίσκουμε τις ταχύτητες που παράγονται από τους υπόλοιπους τρεις στροβίλους (τους υπ' αριθμόν 2, 3 και 4) στον άξονα του πρώτου στροβίλου. Σύμφωνα με την εξίσωση (1), ο αριστερός πραγματικός στρόβιλος (υπ' αριθμόν 2) δημιουργεί ταχύτητα με κατακόρυφη προς τα κάτω κατεύθυνση και μέτρο

$$\upsilon^{(2)} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2z} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho\,\eta\mu\,\varphi}.$$

(Εδώ λάβαμε υπόψη ότι $z = \rho\,\eta\mu\,\varphi$.) Η ακτινική και η αζιμουθιακή συνιστώσα του $\upsilon^{(2)}$ (Σχήμα 5α) είναι

$$\upsilon_\rho^{(2)} = -\upsilon^{(2)}\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi = -\frac{\Gamma\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi}{2\pi \cdot 2\rho\,\eta\mu\,\varphi},$$

$$\upsilon_\varphi^{(2)} = \upsilon^{(2)}\,\eta\mu\,\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho}.$$

(Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η ακτινική συνιστώσα του διανύσματος $\boldsymbol{\upsilon}^{(2)}$ έχει κατεύθυνση αντίθετη από το διάνυσμα θέσης.) Η ταχύτητα $\upsilon^{(3)}$ που παράγεται από τον αριστερό φανταστικό στρόβιλο (τον υπ' αριθμόν 3) έχει μόνο αζιμουθιακή συνιστώσα:

$$\upsilon_\varphi^{(3)} = -\frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho}.$$

Τέλος, η ταχύτητα $\upsilon^{(4)}$ που παράγεται από τον δεξιό φανταστικό στρόβιλο (τον υπ' αριθμόν 4) έχει τις εξής συνιστώσες:

$$\upsilon_\rho^{(4)} = \frac{\Gamma\,\eta\mu\,\varphi}{2\pi \cdot 2\rho\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi},$$

$$\upsilon_\varphi^{(4)} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho}.$$

Τόσο η ακτινική όσο και η αζιμουθιακή ταχύτητα είναι δυνατόν να εκφραστούν με τη βοήθεια των αντίστοιχων παραγώγων των πολικών συντεταγμένων ως προς το χρόνο:

$$\upsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\Delta t},$$

$$\upsilon_\varphi = \rho\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Αυτές είναι οι συνιστώσες των αθροισμάτων των ταχυτήτων που παράγονται από τους τρεις στροβίλους. (*Σημείωση*: αντίθετα με τον περίφημο βαρόνο Μυνχάουζεν, ο στρόβιλος 1 δεν μπορεί να επιδράσει στον εαυτό του.) Επομένως, πρέπει να ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t}=\frac{\Gamma}{2\pi\cdot 2\rho}\left(-\frac{\text{συν}\,\varphi}{\text{ημ}\,\varphi}+\frac{\text{ημ}\,\varphi}{\text{συν}\,\varphi}\right),$$

$$\rho\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{\Gamma}{2\pi\cdot 2\rho}. \qquad (2)$$

Έτσι, εξαγάγαμε ένα ζεύγος κινηματικών εξισώσεων —δηλαδή τις μαθηματικές σχέσεις ανάμεσα στις μεταβλητές του χώρου και του χρόνου. Τώρα θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε το συγκεκριμένο σύστημα —τίποτε δεν είναι αδύνατον για τους ατρόμητους αναγνώστες του *Quantum*! Ας διαιρέσουμε κατ' αρχάς τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, για να απαλείψουμε το χρόνο. Μ' αυτό τον τρόπο, επιτυγχάνουμε να εξαγάγουμε μια σχέση ανάμεσα στην ακτινική και την αζιμουθιακή συντεταγμένη του άξονα του στροβίλου:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi}=\frac{\text{ημ}^2\varphi-\text{συν}^2\varphi}{\text{ημ}\varphi\text{συν}\varphi}=-\frac{\text{συν}\,2\varphi}{\frac{1}{2}\text{ημ}\,2\varphi}.$$

Εδώ τρέψαμε σε ομώνυμα τα κλάσματα του δεξιού μέλους και εφαρμόσαμε τους τριγωνομετρικούς τύπους για το ημίτονο και το συνημίτονο της διπλάσιας γωνίας. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής με $\Delta\varphi$, χωρίζουμε τις μεταβλητές, σύμφωνα με τη μαθηματική ορολογία: το αριστερό μέλος εξαρτάται μόνο από το ρ, ενώ το δεξιό μέλος εξαρτάται μόνο από το φ. Έτσι,

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=-\frac{\text{συν}\,2\varphi\,\Delta(2\varphi)}{\text{ημ}\,2\varphi}=-\frac{\Delta(\text{ημ}\,2\varphi)}{\text{ημ}\,2\varphi}.$$

(Θυμηθείτε ότι η παράγωγος του ημιτόνου είναι το συνημίτονο.) Τελικά, μια απλή ολοκλήρωση (μπορείτε να ανατρέξετε σε πίνακες ολοκληρωμάτων) οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\ln\frac{\rho}{\rho_*}=\ln\frac{\text{ημ}\,2\varphi_*}{\text{ημ}\,2\varphi},$$

ή

$$\frac{\rho}{\rho_*}=\frac{\text{ημ}\,2\varphi_*}{\text{ημ}\,2\varphi},$$

όπου ρ_* είναι η τιμή της ακτίνας που αντιστοιχεί σε ορισμένη γωνία φ_*. Προφανώς, η ακτίνα λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της ρ_{min} όταν $\text{ημ}2\varphi = 1$ —δηλαδή όταν $\varphi = \pi/4$. Έτσι, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\frac{\rho}{\rho_{min}}=\frac{1}{\text{ημ}\,2\varphi}. \qquad (3)$$

Τι θαυμάσια σχέση!

Γνωρίζουμε τώρα πώς συμπεριφέρεται η τροχιά της τομής του άξονα του στροβίλου με το εγκάρσιο επίπεδο. Πρώτον, είναι συμμετρική ως προς τη διχοτόμο της ορθής γωνίας *YOZ*. Δεύτερον, όταν $\varphi \to 0$ ή $\varphi \to \pi/2$, το μέτρο του διανύσματος θέσης τείνει στο άπειρο. Θεωρήστε, για παράδειγμα, την περίπτωση όπου $\varphi \to 0$, $\rho \to \infty$ (δηλαδή όταν το αεροπλάνο βρίσκεται ψηλά στον ουρανό). Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος (2) δείχνει ότι η αζιμουθιακή συνιστώσα της ταχύτητας τείνει να μηδενιστεί (οπότε η ταχύτητα του στροβίλου είναι κατακόρυφη), ενώ η πρώτη εξίσωση του ίδιου συστήματος μας δίνει την τιμή της κατακόρυφης ταχύτητας με την οποία κατέρχονται και οι δύο στρόβιλοι προς το έδαφος:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t}=-\frac{\Gamma\text{συν}\,2\varphi}{2\pi\cdot 2\rho\,\text{ημ}\varphi\text{συν}\varphi},$$

ή

$$-\frac{\Gamma}{2\pi\ell}=\upsilon_{y\infty},$$

επειδή $\rho\,\text{ημ}\varphi = \ell$, όπου ℓ είναι η απόσταση μεταξύ των πραγματικών στροβίλων.

Εισάγοντας την εξίσωση (3) στη δεύτερη εξίσωση του συστήματος (2), βρίσκουμε

$$\frac{\Delta(2\varphi)}{\text{ημ}^2 2\varphi}=\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\Delta t}{\rho_{min}^2}.$$

Καταλήξαμε και πάλι σε μια εξίσωση με χωρισμένες μεταβλητές: το αζιμούθιο του άξονα του στροβίλου βρίσκεται στο αριστερό μέλος, ενώ ο χρόνος στο δεξιό. Ολοκληρώνοντας τη συγκεκριμένη εξίσωση (μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και πάλι κάποιον πίνακα ολοκληρωμάτων), παίρνουμε

$$\frac{\Gamma}{2\pi\rho_{min}^2}t=\frac{1}{\text{εφ}2\varphi_0}-\frac{1}{\text{εφ}2\varphi}, \qquad (4)$$

όπου η γωνία φ_0 αντιστοιχεί στην αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ (όταν σχηματίστηκαν οι στρόβιλοι πίσω από το αεροπλάνο). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5α, ισχύει $\text{εφ}\varphi_0 = \ell/2H$, όπου H είναι το ύψος από το έδαφος στο οποίο πετάει το αεροπλάνο.

Έτσι, διαπιστώνουμε ότι οι εξισώσεις (3) και (4) ορίζουν πλήρως τη θέση των αξόνων των στροβίλων για κάθε χρονική στιγμή. Για παράδειγμα, για $t \to \infty$ έχουμε $\text{εφ}2\varphi \to 0$, οπότε $\varphi \to \pi/2$ και $\rho \to \infty$. Επομένως, οι άξονες των στροβίλων απομακρύνονται και απλώνονται παράλληλα προς το έδαφος. Ενόσω εκτελούν τη συγκεκριμένη κίνηση, η ακτινική ταχύτητα $\Delta\rho/\Delta t$ γίνεται η οριζόντια ταχύτητα του άξονα του στροβίλου

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t}\to\frac{\Gamma}{2\pi\rho_{min}}=\upsilon_{z\infty},$$

για $\varphi \to \pi/2$.

Ας εκτιμήσουμε την εν λόγω ταχύτητα. Σύμφωνα με το θεώρημα που διατύπωσε ο Nikolay Zhukovsky, η δυναμική άνωση (που ισούται με το βάρος B του αεροσκάφους στην περίπτωση της οριζόντιας πτήσης) καθορίζεται από τον εξής απλό τύπο:

$$B=\Gamma d_a u\ell,$$

όπου d_a είναι η πυκνότητα της ατμόσφαιρας και u η ταχύτητα του αεροπλάνου. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε πτήση σε ύψος ίσο με τη μισή απόσταση ανάμεσα στους στροβίλους: $H = \ell/2$. Σ' αυτή την περίπτωση, $\varphi_0 = \pi/4$ και $\rho_0 = \rho_{min} = \sqrt{H^2+H^2} = H\sqrt{2} = \ell/\sqrt{2}$, απ' όπου καταλήγουμε στη σχέση

$$\upsilon_{z\infty}=\frac{B\sqrt{2}}{2\pi d_a u\ell^2}.$$

Για να εκτιμήσουμε τη συγκεκριμένη τιμή, ας υποθέσουμε τις ακόλουθες παραμέτρους για ένα τζάμπο που απογειώνεται: $m = 300$ tn, $B = mg = 3\cdot 10^6$ N, $\ell = 50$ m, $u = 100$ m/s, $d_a = 1$ kg/m^3. Οι στρόβιλοι θα κινούνται προς τα δεξιά και προς τα αριστερά με ταχύτητα

$$\upsilon_{z\infty}\cong 2{,}6 \text{ m/s}.$$

Όλη η συλλογιστική μας είναι έγκυρη όταν ο αέρας ηρεμεί. Φανταστείτε τώρα ότι πνέει εγκάρσιος άνεμος από τα δεξιά με την ίδια ταχύτητα, 2,6 m/s. Σ' αυτή την περίπτωση, ο δεξιός στρόβιλος του βαρέος αεροπλάνου θα παραμείνει πάνω από το διάδρομο και, ώσπου να διασκορπιστεί, θα δυσχεραίνει την απογείωση του επόμενου αεροπλάνου.

Και τώρα, καλό ταξίδι —είθε να μη συναντήσετε στροβίλους σε καμιά πτήση σας.

MΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΕΙΣ

Απαρίθμηση σε πεπερασμένες ομάδες

Και η στήλη αυτή αποδεικνύεται τελικά πεπερασμένη ...

George Berzsenyi

ΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ ΚΑΛΥΤΕΡΑ ΠΡΟγράμματα που υποστήριξε κατά την περασμένη δεκαετία το Εθνικό Ίδρυμα Επιστημών (NSF) των ΗΠΑ ήταν το πρόγραμμα «ερευνητικής εμπειρίας για προπτυχιακούς φοιτητές». Στο πλαίσιό του, περίπου είκοσι μαθηματικοί επιχορηγούνταν κάθε χρόνο για να εργαστούν μαζί με 6-12 φοιτητές σε ποικίλα μαθηματικά θέματα κατά τη διάρκεια μιας θερινής περιόδου 6-9 εβδομάδων. Οι φοιτητές εργάζονταν σε ομάδες μαζί με τον επιβλέποντα και τους βοηθούς του σε κάποιο κατάλληλο ερευνητικό πρόβλημα για το οποίο είχαν το απαραίτητο υπόβαθρο γνώσεων, με την ελπίδα να βρουν τουλάχιστον μία μερική λύση.

Γενικώς, η εργασία τους ήταν εξαιρετικά επικεντρωμένη και έντονη. Στην ιδανική περίπτωση, εκτός από την απόδειξη κάποιων θεωρημάτων, τη διατύπωση εικασιών για κάποια άλλα και την επίλυση σχετικών προβλημάτων, πέτυχαν και να εξοικειωθούν με πλήθος πλευρές του ερευνητικού περιβάλλοντος. Διάβασαν πάμπολλα άρθρα για σχετικά αποτελέσματα, έμαθαν σωστές τεχνικές για την εξακρίβωση της πρωτοτυπίας των αποτελεσμάτων τους, εξοικειώθηκαν με το κατάλληλο λογισμικό και έμαθαν να διατυπώνουν γραπτά και προφορικά τα αποτελέσματά τους.

Από τα πολλά θαυμάσια προγράμματα «ερευνητικής εμπειρίας» που διεξήχθησαν σε όλες τις ΗΠΑ, το καλύτερο, κατά την άποψή μου, ήταν η «υπολογιστική θεωρία ομάδων» του Gary Sherman. Το διηύθυνε μόνος του επί οκτώ χρόνια (στο Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman από το 1989 έως το 1996), δουλεύοντας με 6 φοιτητές επί 7 εβδομάδες κάθε χρόνο. Οι 48 φοιτητές του (14 γυναίκες και 34 άνδρες) προέρχονταν από πολλά διαφορετικά σχολεία, και οι περισσότεροι εξακολούθησαν τις σπουδές τους σε περιώνυμα προγράμματα για απόκτηση διδακτορικού. Κατά τη διάρκεια της παραμονής τους στο Rose-Hulman, παρήγαγαν 37 διατριβές, που οδήγησαν (μέχρι στιγμής) σε 16 δημοσιεύσεις σε ερευνητικά περιοδικά με κριτή (ενώ άλλες 4 βρίσκονται στο στάδιο της προετοιμασίας). Επιπλέον, πολλοί έκαναν εισηγήσεις που έτυχαν πολύ καλής υποδοχής σε διάφορες εθνικές και περιφερειακές συνεδριάσεις της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Αν και ήμουν ιδιαίτερα αποσχολημένος σε άλλες δραστηριότητες (στη διεύθυνση του Τμήματος και στο υποστηριζόμενο από το Εθνικό Ίδρυμα Επιστημών θερινό πρόγραμμα «νέων υποτρόφων»), απόλαυσα εξαιρετικά τις λίγες μου συναντήσεις με τους φοιτητές του Gary, και θαύμασα το «προπονητικό» του στυλ με τα καταπληκτικά αποτελέσματά του. Οι φοιτητές εργάζονταν συνήθως σε ομάδες δύο έως τεσσάρων ατόμων, ενώ ο καθένας τους συμμετείχε σε αρκετές από αυτές. Έτσι, η αλληλεπίδρασή τους ήταν συνεχής και εποφελής. Τα πειραματικά αποτελέσματα της έρευνάς τους επιτεύχθηκαν με τη βοήθεια του ισχυρού συστήματος άλγεβρας για υπολογιστές Magma (μια αναβαθμισμένη έκδοση του Cayley). Κατά κύριο λόγο, ασχολήθηκαν με μια ποικιλία προβλημάτων απαρίθμησης στη θεωρία πεπερασμένων ομάδων τα οποία προέκυψαν από το ερώτημα:

Ποια είναι η πιθανότητα να αντιμετατίθενται δύο στοιχεία μιας ομάδας;

(Το ερώτημα αυτό το εξέτασε για πρώτη φορά ο θρυλικός Paul Erdös και οι βοηθοί του.)

Συγκεκριμένα, οι φοιτητές του Gary κατάφεραν να δείξουν ότι

ένα ζεύγος στοιχείων μιας πεπερασμένης ομάδας παράγει μια κυκλική υποομάδα με πιθανότητα ή 1 ή το πολύ 5/8.

Επιπλέον,

μια πεπερασμένη ομάδα έχει ένα μοναδικό κέντρο ή έχει τέσσερις τουλάχιστον κεντροποιούσες· επίσης, έχει τέσσερις κεντροποιούσες αν και μόνο αν η ομάδα πηλίκο ως προς το κέντρο της είναι η ομάδα τάξης 4 του Klein.*

Ένας από τους φοιτητές (ο Jordan Ellenberg, νικητής πολλές φορές στη Μαθηματική Ολυμπιάδα των ΗΠΑ καθώς και στο διαγωνισμό Putnam) κα-

* Κέντρο μιας ομάδας G είναι το σύνολο $\{a \in G \,/\, ab = ba$, για κάθε $b \in G\}$. Κεντροποιούσα ενός υποσυνόλου $A \subseteq G$ είναι το σύνολο $\{a \in G \,/\, ab = ba$, για κάθε $b \in A\}$. (Σ. επιστ. συμβ.)

τάφερε να αποδείξει ότι

ένα τριπλό γινόμενο είναι επανεγγράψιμο (δηλαδή, $xyz \in \{xzy, yxz, zxy, yzx, zyx\}$) με πιθανότητα είτε 1 είτε το πολύ 17/18.

Πλήρη κατάλογο των διατριβών και των άρθρων που βασίζονται σ' αυτές μπορείτε να βρείτε στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://www.rose-hulman.edu/Class/ma/HTML/REU/NFS-REU.html. Για να πάρετε από εκεί αντίγραφα, επικοινωνήστε με τη γραμματεία του Μαθηματικού μας Τμήματος. Πληρέστερη περιγραφή του προγράμματος του δρ. Sherman μπορείτε να βρείτε σ' ένα άρθρο που δημοσιεύτηκε στο τεύχος Δεκεμβρίου 1992 του περιοδικού *PRIMUS* (τόμ. II, αρ. 4, σελ. 289-308). Στη σελίδα του Εθνικού Ιδρύματος Επιστημών στο Internet (http://www.nsf.gov/mps/dms/reulist.htm) μπορείτε να βρείτε έναν πλήρη κατάλογο των προγραμμάτων «ερευνητικής εμπειρίας» για το 1997 που αφορούν τα μαθηματικά. Συνιστώ θερμά στους αναγνώστες μου να εξερευνήσουν τα προβλήματα που απασχολούν τα διάφορα προγράμματα· θα αποδειχτούν υπέροχη πηγή για τις μαθηματικές τους εξερευνήσεις.

Μια άλλη θαυμάσια πηγή μαθηματικών εξερευνήσεων είναι η τακτική στήλη «Unsolved Problems» στο περιοδικό *The American Mathematical Monthly*. Αν και τα προβλήματα αυτά είναι γενικώς περισσότερο απαιτητικά, τα πιο πολλά βρίσκονται μέσα στις δυνατότητες των αναγνωστών του *Quantum*. Επίσης, συνιστώ στους αναγνώστες μου τη στήλη «Student Research Projects» του περιοδικού *The College Mathematics Journal*.

Ο λόγος που προτείνω εναλλακτικές πηγές προβλημάτων είναι ότι με το παρόν άρθρο σταματά η στήλη των «Μαθηματικών αναζητήσεων». Απόλαυσα πραγματικά το γράψιμο αυτών των άρθρων και την επακόλουθη επικοινωνία με τους αναγνώστες μου, όμως όλα τα όμορφα πράγματα κάποτε τελειώνουν.

Εκτιμώ βαθύτατα την ευκαιρία που μου προσέφεραν η NSTA και η NCTM (δύο από τις επιστημονικές εταιρείες που εκδίδουν το *Quantum*) να βοηθήσω σ' αυτή την προσπάθεια, και ευγνωμονώ τον Tim Weber, αρχισυντάκτη του *Quantum*, για την καταπληκτική του υποστήριξη όλα αυτά τα χρόνια.

Θα ήθελα, τέλος, να ευχαριστήσω όλους τους αναγνώστες μου και τους συναδέλφους που όλο αυτό το διάστημα συνέβαλαν στη θεματολογία της στήλης με υποδείξεις, σχόλια και τις δικές τους ανακαλύψεις. ◙

Ο **George Berzsenyi** *είναι καθηγητής του Μαθηματικού Τμήματος στο Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman στην Τερ Οτ της Ιντιάνα. Η ηλεκτρονική διεύθυνσή του είναι george.berzsenyi@rose-hulman.edu.*

Το Quantum ευχαριστεί τον δρ. Berzsenyi για το χρόνο και τις προσπάθειες που αφιέρωσε σ' αυτό το περιοδικό, από την πρώτη στιγμή της έκδοσής του. Ελπίζουμε ότι στο μέλλον θα έχουμε ξανά την ευκαιρία να δούμε το όνομά του στον τίτλο ενός άρθρου μας.

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 35*

(που είναι υποχρεωτικά αληθινή), ασχολούμαστε στη συνέχεια μόνο με τη δεύτερη ομάδα. Ύστερα από k βήματα εντοπίζουμε μία μόνο ύποπτη ερώτηση. Την επαναλαμβάνουμε, για να μάθουμε αν σ' αυτήν δόθηκε αρχικά αληθινή ή ψεύτικη απάντηση. Βλέπουμε λοιπόν ότι αρκούν $N + k + 1$ ερωτήσεις. (Άρα, 99 στο αρχικό πρόβλημα του *Quantum*.)

Για $N = 3$, οι δύο μέθοδοι απαιτούν από 3 ερωτήσεις· για $N = 5, 6$, απαιτούνται 4 ερωτήσεις· για $N = 9, 10$, απαιτούνται 5 ερωτήσεις (και από τις δύο μεθόδους). Για όλα τα υπόλοιπα N, η μέθοδος «δυαδικής αναζήτησης» είναι καλύτερη.

Πραγματικά, εύκολα ελέγχουμε ότι για $k \geq 5$ ισχύει: $k(k+1) \leq 2^k$, και συνεπώς $\dfrac{k(k+1)}{2} \leq 2^{k-1} < N \leq \dfrac{(q-1)q}{2}$. Άρα, $N + k + 1 < N + q$.

Έπεται ότι η δεύτερη μέθοδος είναι καλύτερη για $N \geq 16$. Άμεσος έλεγχος το δείχνει επίσης για $N = 1, 2, 4, 7, 8$, και $11 \leq N \leq 15$. Π.χ., για $7 \leq N \leq 8$ έχουμε $q = 5$ και $k = 3$, ενώ για $11 \leq N \leq 15$ έχουμε $q = 6$ και $k = 4$ (άρα, $N + k + 1 < N + q$).

Κ. Σ.

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 3*

Μάρτιν Λούθερ Κινγκ, «δεν μπορώ να κάνω τίποτε άλλο»· και η απόλυτη ορθότητα αυτής της στάσης φαίνεται πως επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι επιτρέπει τη συγκεκριμένη ευπρόσδεκτη λύση του προβλήματος στην οποία οδηγεί η ίδια.

Το σημάδι που προδίδει τι ακριβώς συμβαίνει θα είναι πάντοτε το γεγονός ότι η λύση ευσταθεί από αυτή και μόνο τη θέση —και ότι αν ο παρατηρητής μπορούσε να αλλάξει ακόμη και ελάχιστα την οπτική του γωνία, θα εμφανίζονταν τα κενά της εξήγησης. Το τέχνασμα, βέβαια —για εκείνους που θέλουν να μείνουν πιστοί και να αποφύγουν τα κενά—, είναι να μην αλλάξουν οπτική γωνία, ή να επιστρέψουν ταχύτατα σ' αυτήν, αν μπουν ποτέ στον πειρασμό να το τολμήσουν.

Το δίδαγμα είναι ότι, όταν υποτιθέμενοι γκουρού μάς προσφέρουν τελικές απαντήσεις σε οποιοδήποτε από τα αινίγματα της ζωής, κάποιον τρόπο συνεκτικής αντιμετώπισης των πραγμάτων, πρέπει να είμαστε εξαιρετικά προσεκτικοί. Θα μπορούμε να πούμε: «Ευχαριστώ, πολύ ωραία η εικόνα σας», και να είμαστε έτοιμοι να ρίξουμε άλλη μία ματιά.

Ο **Nicholas Humphrey** *είναι θεωρητικός ψυχολόγος με διδακτικό και ερευνητικό έργο στα Πανεπιστήμια της Οξφόρδης και του Καίμπριτζ. Τα ενδιαφέροντά του είναι ευρύτατα: μελέτησε τους γορίλες των ορέων με την Dian Fossey στη Ρουάντα· πραγματοποίησε σημαντικές ανακαλύψεις σχετικά με τη λειτουργία των μηχανισμών του εγκεφάλου που αποτελούν τη βάση της όρασης· πρότεινε την πασίγνωστη σήμερα θεωρία για την «κοινωνική λειτουργία της ανθρώπινης διάνοιας», και είναι ο μοναδικός επιμελητής από το χώρο των θετικών επιστημών του λογοτεχνικού περιοδικού* Granta. *Έχει λάβει πλήθος βραβεία και τιμητικές διακρίσεις, συμπεριλαμβανομένου του βραβείου εις μνήμην Μάρτιν Λούθερ Κινγκ, το 1985. Μερικά από τα βιβλία του είναι τα:* Consciousness Regained *(Η ανακτημένη συνείδηση),* The Inner Eye *(Το εσώτερο μάτι) και* A History of the Mind *(Ιστορία της νόησης).*

Αξιοσημείωτα όρια

(Δημιουργημένα με κλασικά μέσα)

M. Crane και A. Nudelman

Εστω δυο θετικοί αριθμοί a και b. Ονομάζουμε *αριθμητικό τους μέσο* τον αριθμό $(a+b)/2$ και *γεωμετρικό τους μέσο* τον αριθμό $\sqrt{ab}$. Οι δύο αυτές τιμές συναντώνται συχνότερα απ' όσο ο *αρμονικός μέσος* $2ab/(a+b)$ των a και b (για παράδειγμα, η μέση ταχύτητα ενός αυτοκινήτου που καλύπτει το πρώτο μισό του ταξιδιού του με ταχύτητα a και το δεύτερο μισό με ταχύτητα b είναι ίση με τον αρμονικό μέσο των a και b). Όλες αυτές οι μέσες τιμές βρίσκονται μεταξύ των a και b (οι αναγνώστες καλούνται να επιβεβαιώσουν μόνοι τους αυτό το γεγονός).

Εύκολα επαληθεύουμε ότι για οποιαδήποτε θετικά a, b με $a \neq b$ ισχύουν οι εξής ανισότητες:

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}. \tag{1}$$

Σε τούτο το άρθρο θα χρησιμοποιήσουμε όρια για έναν πολύ συγκεκριμένο σκοπό. Έστω ότι δίνονται δύο θετικοί αριθμοί a και b με $a < b$. Αν υπολογίσουμε δύο από τις μέσες τιμές τους, προκύπτουν οι αριθμοί a_1 και b_1. Στη συνέχεια, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ίδιες μέσες τιμές για τους a_1 και b_1, και να πάρουμε τους αριθμούς a_2 και b_2. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με αυτούς τους αριθμούς, και ούτω καθεξής. Το αποτέλεσμα είναι δύο ακολουθίες αριθμών: (a_n) και (b_n).

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τον γεωμετρικό και τον αριθμητικό μέσο των αριθμών 1 και 3, παίρνουμε

$$\begin{array}{ll} a_1 = \sqrt{3} \cong 1{,}732050808, & b_1 = 2, \\ a_2 \cong 1{,}861209718, & b_2 \cong 1{,}86025404, \\ a_3 \cong 1{,}863616006, & b_3 \cong 1{,}863617561, \\ a_4 \cong 1{,}863616784, & b_4 \cong 1{,}863616784, \end{array}$$

κ.λπ.

Διαπιστώνουμε ότι οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) συγκλίνουν πολύ γρήγορα στον ίδιο αριθμό. Θα ισχύει πάντοτε το ίδιο; Αποδεικνύεται ότι ακολουθίες τέτοιου είδους έχουν πάντοτε κοινό όριο. Η απόδειξη αυτής της πρότασης είναι εύκολη. Πώς βρίσκουμε όμως την οριακή τιμή;

Αριθμητικός-αρμονικός μέσος

Θα ξεκινήσουμε από την περίπτωση που το επιλεγμένο ζεύγος μέσων τιμών είναι ο *αρμονικός* και ο *αριθμητικός* μέσος αντίστοιχα. Τότε, οι όροι των ακολουθιών (a_n) και (b_n) ορίζονται από τους τύπους

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \tag{2}$$

$(a_0 = a,\ b_0 = b,\ n = 1, 2, \ldots)$.

Από την ανισότητα (1) έπεται ότι

$$a < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < b$$

—δηλαδή, η ακολουθία (a_n) αυξάνει ώστε να «συναντήσει» τη φθίνουσα ακολουθία (b_n).

Επομένως, και οι δύο ακολουθίες είναι μονότονες και φραγμένες. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Weierstrass, τείνουν σε όρια $p = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ και $q = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Αν πάρουμε το όριο σε μία από τις ισότητες (2) —για παράδειγμα στη δεύτερη—, βρίσκουμε

$$q = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\right) = \frac{1}{2}(p+q),$$

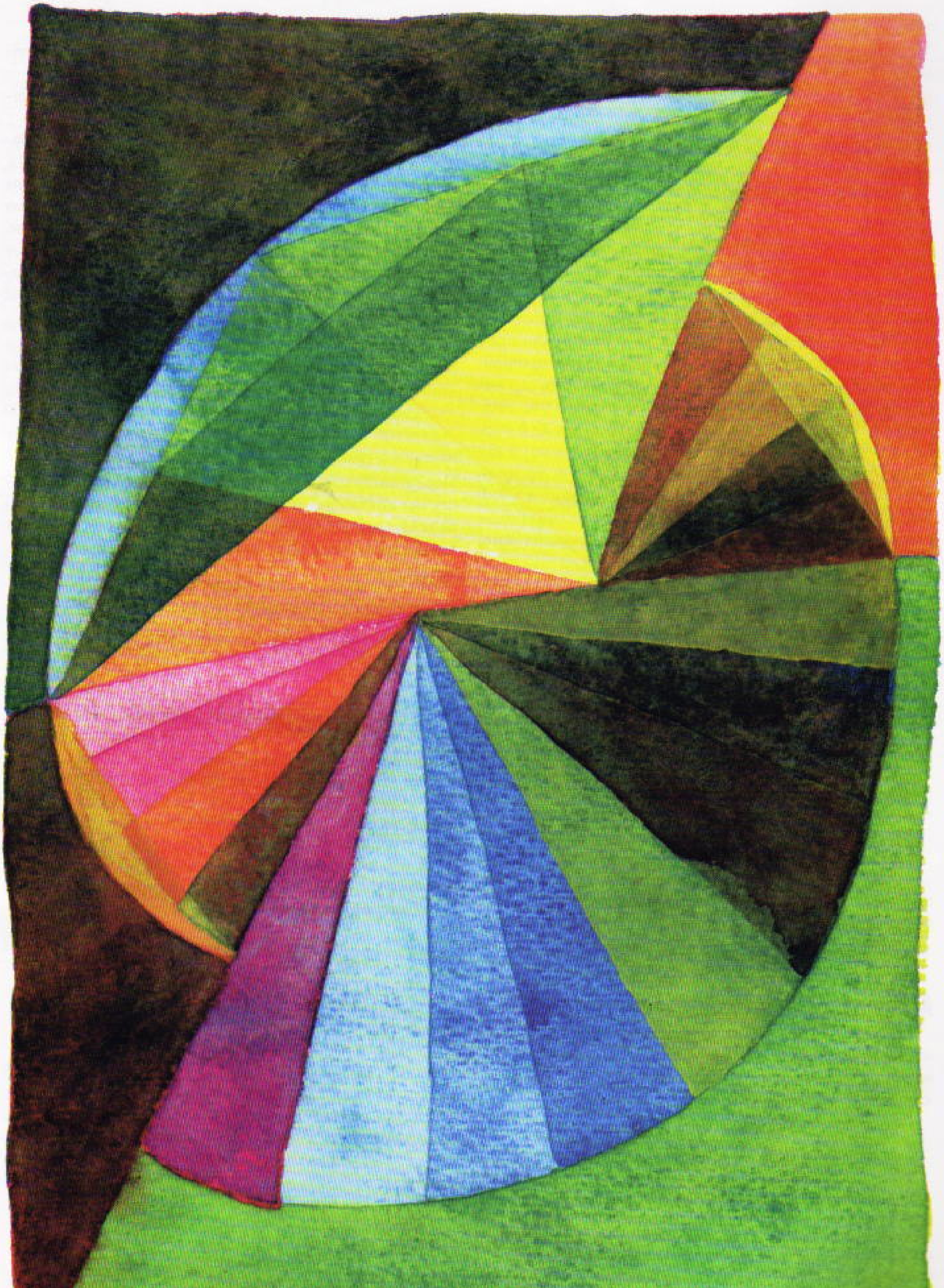
και συνεπώς $p = q$ —δηλαδή οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) έχουν κοινό όριο. Το όριο αυτό ονομάζεται *αριθμητικός-αρμονικός* μέσος των αριθμών a και b. Ας τον υπολογίσουμε αλγεβρικά. Από τις ισότητες (2) έπεται ότι

$$a_{n+1} \cdot b_{n+1} = a_n \cdot b_n = \ldots = a_1 b_1 = ab,$$

και επομένως

$$p^2 = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

Εικονογράφηση: Vera Khlebnikova



$$= \lim_{n\to\infty}(a_n \times b_n) = ab.$$

Άρα

$$p = \sqrt{ab} = q$$

(ο αριθμητικός-αρμονικός μέσος συμπίπτει με τον γεωμετρικό μέσο).

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι

$$b_n - a_n < \frac{b-a}{2^n}.$$

Διαπιστώνουμε ότι οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) συγκλίνουν αρκετά γρήγορα στο $\sqrt{ab}$. Επομένως, μπορεί να αποδειχτούν χρήσιμες όταν θέλουμε να βρούμε μια προσεγγιστική τιμή της τετραγωνικής ρίζας κάποιου αριθμού. Αν ζητάμε να υπολογίσουμε τη $\sqrt{c}$, οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) πρέπει να αρχίζουν με αριθμούς a και b για τους οποίους θα ισχύει $c = ab$ (για παράδειγμα, $a = 1$, $b = c$), ενώ όσο μικρότερη είναι η διαφορά μεταξύ των a και b τόσο ταχύτερα συγκλίνει η διαδικασία. Έτσι, για να υπολογίσουμε τη $\sqrt{56}$, είναι προτιμότερο να πάρουμε $a = 7$, $b = 8$, και όχι $a = 1$, $b = 56$. Μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε ότι οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) ικανοποιούν τους τύπους*

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{c}{b_n}\right),\ a_{n+1} = \frac{c}{b_n}.$$

Για να δώσουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτής της ιδέας, ας υπολογίσουμε τη $\sqrt{12}$, θέτοντας $b = 4$. Έχουμε

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{12}{4}\right) = 3{,}5,$$
$$b_2 \equiv 3{,}464285715,$$
$$b_3 \equiv 3{,}464101620,$$
$$b_4 \equiv 3{,}464101615\cdot$$

από το σημείο αυτό και μετά, όλοι οι αριθμοί έχουν τα ίδια εννέα πρώτα δεκαδικά ψηφία:

$$\sqrt{12} \cong 3{,}464101615.$$

Αριθμητικός-γεωμετρικός μέσος

Ο Carl Friedrich Gauss σε ηλικία δεκατεσσάρων ετών ανακάλυψε, βάσει αριθμητικών παραδειγμάτων, πως όταν ορίσουμε τις ακολουθίες (a_n) και (b_n) μέσω των *αριθμητικών* και *γεωμετρικών μέσων*

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad (3)$$

* Η μέθοδος αυτή υπολογισμού τετραγωνικών ριζών υπάρχει σε αρχαία βαβυλωνιακά κείμενα· οι Βαβυλώνιοι ασφαλώς γνώριζαν την ορθότητά του εμπειρικά. Στην αρχαία ελληνική γραμματεία εμφανίζεται για πρώτη φορά στο Α' βιβλίο των *Μετρικών* του Ήρωνα, αν και εικάζεται ότι ήταν πολύ νωρίτερα γνωστός στον Αρχιμήδη. Επανεμφάνιση του τύπου υπάρχει στους βυζαντινούς λογίους του 14ου αιώνα Νικόλαο Ραβδά και Βαρλαάμ. (Σ. επιστ. συμβ.)

($a_0 = a$, $b_0 = b$, $n = 0, 1, 2, ...$,), αυτές συγκλίνουν πολύ γρήγορα.

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι οι ακολουθίες (3) έχουν κοινό όριο.

Το κοινό αυτό όριο ονομάζεται αριθμητικός-γεωμετρικός μέσος των αριθμών a και b, και συμβολίζεται ως $\mu(a, b)$. Είναι εξαιρετικά δύσκολο να βρούμε έναν τύπο σε κλειστή μορφή που να εκφράζει το $\mu(a, b)$ ως συνάρτηση των a και b. Πρώτος ο ίδιος ο Gauss βρήκε έναν τέτοιο τύπο. Το κατάφερε μέσω εξαιρετικά πολύπλοκων και ευφυών συλλογισμών χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των *ελλειπτικών ολοκληρωμάτων*. Θα δώσουμε τον τύπο χωρίς απόδειξη:

$$\mu(a,b) = \frac{\pi}{2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2 \eta\mu^2 x + b^2 \sigma\upsilon\nu^2 x}}}$$

Παρεμπιπτόντως, αν «αντιστρέψουμε» αυτή την παράσταση, προκύπτει μια μέθοδος γρήγορου υπολογισμού του ολοκληρώματος στον παρονομαστή: ισούται με $\pi/\mu(a, b)$, και μπορούμε να βρούμε αρκετά γρήγορα μια προσεγγιστική τιμή για το $\mu(a, b)$ μέσω των ακολουθιών (a_n) και (b_n).

Γεωμετρικός-αρμονικός μέσος

Αν κατασκευάσουμε τις ακολουθίες (a_n) και (b_n) μέσω των *αρμονικών* και *γεωμετρικών* μέσων

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n},\quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad (4)$$

($a_0 = a$, $b_0 = b$, $n = 0, 1, 2, ...$), μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι έχουν κοινό όριο. Ας ονομάσουμε αυτό το όριο *γεωμετρικό-αρμονικό μέσο* των αριθμών a και b και ας το συμβολίσουμε με $\nu(a, b)$. Πάντως, αν συγκρίνουμε αυτή την περίπτωση με τις ακολουθίες (3), βλέπουμε ότι δεν υπάρχει τίποτε το καινούργιο, διότι από τον τύπο (4) προκύπτει άμεσα ότι

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}{2},\quad \frac{1}{b_{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{b_n}}.$$

Επομένως,

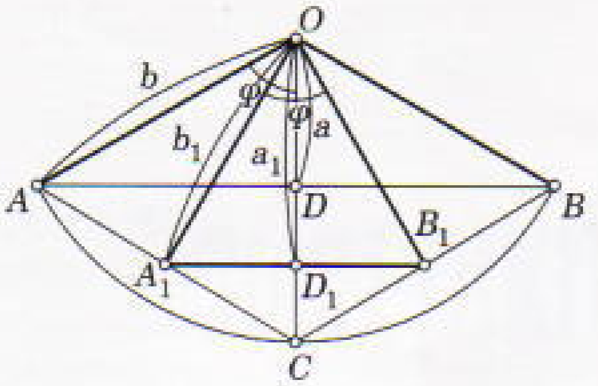
$$\frac{1}{\nu(a,b)} = \mu\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$$

ή, με βάση τον τύπο του Gauss,

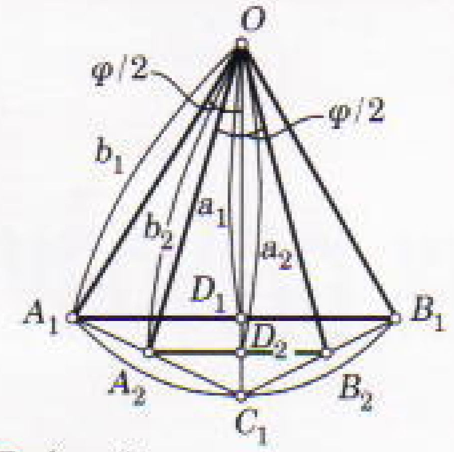
$$\nu(a,b) = \frac{2ab}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2\sigma\upsilon\nu^2 x + b^2 \eta\mu^2 x}}$$

Μέσος Schwab-Schenberg

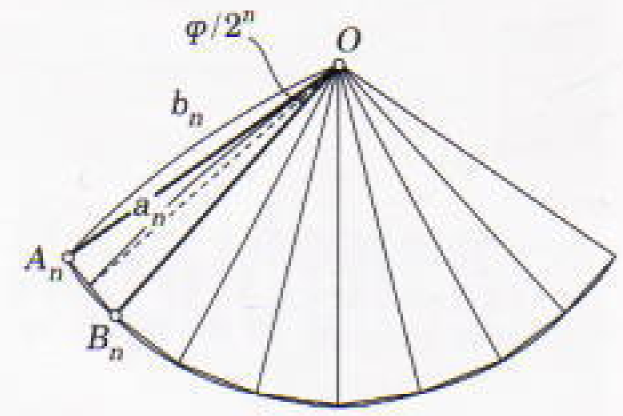
Έτσι, από τους τρεις μέσους —αριθμητικό-αρμονικό,



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

αριθμητικό-γεωμετρικό, γεωμετρικό-αρμονικό— μόνον ο πρώτος εκφράζεται με στοιχειώδη τρόπο ως συνάρτηση των a και b. Ακόμη εντυπωσιακότερο είναι το γεγονός ότι μια μικρή αλλαγή στις ακολουθίες (3) παράγει ακολουθίες το κοινό όριο των οποίων μπορεί να γραφεί ως στοιχειώδης συνάρτηση των a και b (παρότι η λέξη «στοιχειώδης» δεν σημαίνει ότι είναι εύκολο να βρούμε αυτό το όριο!). Έστω

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} \cdot b_n} \tag{5}$$

$(a_0 = a,\ b_0 = b,\ n = 0, 1, 2, \dots)$.

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι υπάρχει κοινό όριο των ακολουθιών (5).

Ας υπολογίσουμε αυτό το όριο, που ονομάζεται μέσος Schwab-Schenberg. Παραδόξως, μπορούμε να το συναγάγουμε μέσω στοιχειωδών γεωμετρικών συλλογισμών.

Στο Σχήμα 1 βλέπουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο AOB με πλευρές $OA = OB = b$ και ύψος $OD = a$ (συμβολίζουμε τη γωνία στην κορυφή O ως 2φ) και το τόξο ACB του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα b ($OC \perp AB$). Έστω A_1B_1 η ευθεία που ενώνει τα μέσα των πλευρών AC και BC του τριγώνου ABC. Τότε

$$OD_1 = OD + DD_1 = OD + \frac{DC}{2}$$

$$= a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} = a_1.$$

Εφόσον το τρίγωνο OA_1C είναι ορθογώνιο,

$$OA_1^2 = OD_1 \cdot OC = a_1 b,$$

$$OA_1 = \sqrt{a_1 b} = b_1.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι αριθμοί a_1 και b_1 προκύπτουν από τους a και b μέσω μιας απλής γεωμετρικής κατασκευής, και ότι το τμήμα μήκους a_1 είναι και πάλι το ύψος που άγεται από την κορυφή ενός ισοσκελούς τριγώνου με μήκος πλευράς b_1. Επισημαίνουμε επιπλέον ότι

$$\angle A_1OB_1 = \varphi,\ A_1B_1 = \frac{1}{2}(AB).$$

Αν εκτελέσουμε την παρόμοια κατασκευή στο τρίγωνο A_1OB_1, προκύπτει το ισοσκελές τρίγωνο A_2OB_2 (Σχήμα 2), στο οποίο

$$OD_2 = a_2,$$

$$OA_2 = OB_2 = b_2,$$

$$\angle A_2OB_2 = \varphi/2,$$

$$A_2B_2 = \frac{1}{2}(A_1B_1) = \frac{1}{2^2}(AB).$$

Αν επαναλάβουμε n φορές αυτή την κατασκευή, προκύπτει το τρίγωνο A_nOB_n με ύψος $OD_n = a_n$ στο οποίο

$$OA_n = OB_n = b_n,$$

$$\angle A_nOB_n = \frac{\varphi}{2^{n-1}},$$

$$A_nB_n = \frac{1}{2^n}(AB).$$

Ας σχεδιάσουμε τώρα το τόξο του κύκλου ακτίνας b_n που αντιστοιχεί στην επίκεντρη γωνία 2φ και ας το διαιρέσουμε σε 2^n ίσα τόξα. Αν ενώσουμε διαδοχικά με χορδές τα σημεία που διαιρούν το τόξο, προκύπτει μια τεθλασμένη γραμμή αποτελούμενη από 2^n τμήματα, εγγεγραμμένη σ' αυτό το τόξο. Το μήκος της ισούται με $2^n(A_nB_n) = AB$. Η εν λόγω τεθλασμένη γραμμή είναι περιγεγραμμένη στο τόξο που αντιστοιχεί στην επίκεντρη γωνία 2φ ενός κύκλου με ίδιο κέντρο και ακτίνα a_n (Σχήμα 3). Εφόσον η περίμετρος της τεθλασμένης γραμμής βρίσκεται μεταξύ των τόξων, έχουμε

$$2\varphi a_n < AB < 2\varphi b_n,$$

και επομένως

$$2\varphi \lim_{n\to\infty} a_n \le AB \le 2\varphi \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Εφόσον $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, το κοινό όριο p δίνεται από τον τύπο

$$p = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\text{τοξσυν}\dfrac{a}{b}}.$$

Τέλος, επισημαίνουμε ότι, αν $a = 1/2$ και $b = 1/\sqrt{2}$, έχουμε $p = 2/\pi$. Επομένως, οι ακολουθίες (5) μάς επιτρέπουν τον υπολογισμό του αριθμού π με οποιονδήποτε βαθμό ακριβείας.

Εσωτερική ενέργεια και θερμότητα

Γιατί στους πίνακες αναφοράς εμφανίζεται η «Q» και όχι η «ΔU»;

Alexey Chernoutsan

Η ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΔΙΑΤΗρησης της ενέργειας για τις θερμικές διαδικασίες οδήγησε στην ανάπτυξη δύο νέων εννοιών. Πρώτον, η ίδια η έννοια της ενέργειας διευρύνθηκε κατά τέτοιο τρόπο ώστε, εκτός από την ευρέως γνωστή μηχανική ενέργεια $E_{μηχ}$, να περιλαμβάνει πλέον και την εσωτερική ενέργεια U. Δεύτερον, οι επιστήμονες συνειδητοποίησαν ότι δεν ήταν ανάγκη να παραγάγει κανείς έργο για να μεταβάλει την ενέργεια κάποιου συστήματος: κατά την ανταλλαγή θερμότητας, μεταβιβάζεται ενέργεια από ένα θερμό σώμα σ' ένα ψυχρό στο μοριακό επίπεδο, χωρίς να παρατηρηθεί οποιαδήποτε μακροσκοπική κίνηση. Η ποσότητα της ενέργειας που μεταβιβάζεται μέσω αυτού του μηχανισμού ονομάζεται θερμότητα Q. Και οι δύο αυτές έννοιες παρουσιάζονται στη νέα μορφή του νόμου διατήρησης της ενέργειας:

$$Q = \Delta U + W,$$

όπου W είναι το έργο που παρήγαγε το υπό εξέταση σύστημα επί του εξωτερικού περιβάλλοντος. Μπορούμε να γράψουμε τον εν λόγω νόμο με γενικότερη μορφή, στην οποία συνυπολογίζεται μια πιθανή μεταβολή της μηχανικής ενέργειας:

$$Q = \Delta(U + E_{μηχ}) + W.$$

Αυτή η «πλήρης» μορφή του νόμου εμφανίζεται στα εγχειρίδια μόνο όταν αναλύονται διαδικασίες οι οποίες αφορούν ιδανικά αέρια —δεδομένου ότι ο όγκος τους είναι δυνατόν να μεταβληθεί σημαντικά, οπότε μια τέτοια μεταβολή συνοδεύεται από παραγωγή μηχανικού έργου. Προφανώς, σε τέτοιες περιπτώσεις, και οι τρεις όροι του νόμου διατήρησης της ενέργειας διαδραματίζουν εξίσου σημαντικό ρόλο. Για παράδειγμα, στις ισοβαρείς διαδικασίες μεταβάλλονται τόσο η θερμοκρασία όσο και ο όγκος κάποιου αερίου, οπότε απαιτείται να λάβουμε υπόψη τόσο τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειάς του όσο και το έργο που παράγει.

Εντούτοις, σε προβλήματα όπου οι «συμμετέχοντες» είναι υγρά και στερεά σώματα, συνήθως χρησιμοποιούμε ως τύπους για τη μεταβίβαση θερμότητας εκείνους οι οποίοι περιγράφουν την ποσότητα της θερμότητας που μεταφέρεται κατά τις διαδικασίες της θέρμανσης και της ψύξης:

$$Q = cm(T_2 - T_1)\cdot$$

της τήξης και της πήξης:

$$Q = \pm m\lambda\cdot$$

της εξαέρωσης και της υγροποίησης:

$$Q = \pm mL.$$

Εδώ c είναι η ειδική θερμότητα του σώματος, m η μάζα του, T η θερμοκρασία του, λ η λανθάνουσα θερμότητα τήξης και L η λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης. Οι συγκεκριμένοι τύποι χρησιμοποιούνται με τον φυσικότερο και λογικότερο τρόπο για να καταστρώσουμε την εξίσωση του θερμικού ισοζυγίου, η οποία περιγράφει την ανταλλαγή θερμότητας ανάμεσα στα σώματα ενός κλειστού (δηλαδή θερμικά μονωμένου) συστήματος. Κατά τη διαδικασία αποκατάστασης της θερμικής ισορροπίας ανάμεσά τους, τα σώματα ανταλλάσσουν θερμότητα, οπότε οι τύποι για τη μεταβίβαση θερμότητας παρουσιάζονται εντελώς αβίαστα (αν και, όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω, υπάρχουν ορισμένες αμφιβολίες ακόμη και σ' αυτές τις περιπτώσεις).

Ωστόσο, η κατάσταση δεν είναι εξίσου σαφής σε προβλήματα που εμπλέκουν μετατροπές μηχανικής ενέργειας σε θερμική. Θεωρήστε ένα απλό παράδειγμα: την πλαστική κεντρική κρούση δύο όμοιων σφαιρών που κινούνται η μια προς την άλλη με ίσες ταχύτητες. Για να προσδιορίσουμε πόσο θα αυξηθεί η θερμοκρασία των σφαιρών, συνήθως λέμε ότι όλη η μηχανική τους ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα, και εν συνεχεία εφαρμόζουμε τον τύπο της μεταφοράς θερμότητας για τη θέρμανση των σωμάτων. Η εξίσωση που προκύπτει,

$$2\frac{mv^2}{2} = 2cm\Delta T,$$

παρέχει τη λύση του προβλήματος. Μολαταύτα, ανακύπτει ένα εύλογο ερώτημα: γιατί άραγε εφαρμόζουμε στη συγκεκριμένη περίπτωση τον τύπο της μεταφοράς θερμότητας, αφού ουδεμία μεταβίβαση θερμότητας συντελείται; Η απάντηση είναι ότι όντως η φράση «η ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα» δεν αναφέρεται στη μεταφορά θερμότητας αλλά στη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας, η οποία περιγράφεται από το νόμο διατήρησης της ενέργειας: $\Delta U + \Delta E_{μηχ} = 0$. Επομένως, θα έπρεπε μάλλον να εφαρμόζουμε τύπους που περιγρά-

Εικονογράφηση: Pavel Chernusky

φουν τις μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας παρά τύπους που περιγράφουν σχέσεις θερμικών ανταλλαγών. Ποιοι είναι όμως αυτοί οι τύποι;

Ας αφήσουμε για λίγο την τήξη και την εξαέρωση, προκειμένου να εξετάσουμε πώς εξαρτάται η εσωτερική ενέργεια ενός σώματος από τη θερμοκρασία. Αλλά γιατί μόνο από τη θερμοκρασία; Το ερώτημα θα έπρεπε να τεθεί ως εξής: πώς εξαρτάται η εσωτερική ενέργεια από την πίεση και τη θερμοκρασία; Πράγματι, η κατάσταση ενός συστήματος καθορίζεται από δύο παραμέτρους, άρα η εσωτερική ενέργεια πρέπει να εξαρτάται και από τις δύο. Κατ' εξαίρεση, η εσωτερική ενέργεια ενός ιδανικού αερίου εξαρτάται από μία μόνο παράμετρο (τη θερμοκρασία), αλλά δεν ισχύει το ίδιο για τα υγρά και τα στερεά σώματα. Ωστόσο, η πίεση μπορεί να θεωρηθεί σταθερή στα περισσότερα προβλήματα (ίση, ας πούμε, με την ατμοσφαιρική πίεση). Επομένως, σε τέτοια προβλήματα αρκεί να καθορίσουμε την εξάρτηση της εσωτερικής ενέργειας από τη θερμοκρασία υπό σταθερή πίεση. Σημειώστε ότι, για να είμαστε ακριβείς, οι προαναφερθέντες τύποι για τη μεταβίβαση θερμότητας αφορούν ισοβαρείς διαδικασίες. Ως εκ τούτου, τα βιβλία αναφοράς δεν δίνουν μια αυθαίρετη τιμή για την ειδική θερμότητα c, αλλά την ειδική θερμότητα c_p που αντιστοιχεί σε σταθερή (ατμοσφαιρική) πίεση.

Εάν σε κάποια περίπτωση μεταβάλλεται τόσο η πίεση όσο και η θερμοκρασία, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε ότι μεταβολές της εξωτερικής πίεσης κατά μερικές ατμόσφαιρες επιφέρουν μάλλον μικρές μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας. Για παράδειγμα, αύξηση κατά 1 atm της πίεσης που ασκείται σε νερό θερμοκρασίας 300 K επιφέρει μείωση της εσωτερικής ενέργειάς του κατά 10 J/kg περίπου. Από την άλλη, αν θερμάνουμε ένα σώμα κατά 1 K, αυξάνουμε την εσωτερική του ενέργεια κατά 4.200 J/kg.

Ας επιστρέψουμε στο θέμα που μας απασχολεί. Υποθέστε ότι θερμαίνουμε κάποιο σώμα κατά ΔT υπό σταθερή πίεση και ότι γράφουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας για τη συγκεκριμένη διαδικασία. Η ποσότητα της θερμότητας που πρέπει να απορροφήσει το σώμα για τη θέρμανσή του είναι $Q = cm\Delta T$. Το έργο που παράγει επί του εξωτερικού περιβάλλοντος είναι $W = P\Delta V$, όπου ΔV η αύξηση του όγκου του λόγω της θερμικής διαστολής: $\Delta V = V\gamma\Delta T = (m/\rho)\gamma\Delta T$ (όπου ρ η πυκνότητα του σώματος και γ ο συντελεστής κυβικής διαστολής). Ο νόμος διατήρησης της ενέργειας $Q = \Delta U + W$ οδηγεί σ' έναν τύπο που περιγράφει τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας,

$$\Delta U = \left(c - P\frac{\gamma}{\rho}\right)m\Delta T,$$

ο οποίος διαφέρει κατά αμελητέα ποσότητα από τον αντίστοιχο τύπο μεταφοράς θερμότητας για τη θέρμανση του σώματος (η διόρθωση για τη θερμοχωρητικότητα εκδηλώνεται μόνο στο ένατο δεκαδικό ψηφίο). Επομένως, για να υπολογίσουμε τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας, μπορούμε να εφαρμόσουμε, με ήσυχη τη συνείδησή μας, έναν τύπο όπως αυτός για τη μεταφορά θερμότητας —δηλαδή $\Delta U = cm\Delta T$. Ωστόσο, πρέπει να θυμόμαστε ότι υπάρχει μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στους δύο τύπους: αυτός που περιγράφει τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ισχύει όχι μόνο για τη διαδικασία της ανταλλαγής θερμότητας αλλά και για οποιονδήποτε άλλο τρόπο μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας (μέσω κρούσεων, για παράδειγμα).

Ας προχωρήσουμε παραπέρα. Οι μεταβολές του όγκου ενός σώματος είναι συχνά πολύ εντονότερες σε διαδικασίες τήξης και κρυστάλλωσης παρά θέρμανσής του. Για παράδειγμα, κατά την πήξη του νερού, ο όγκος του αυξάνεται κατά 10% περίπου, κάτι που αντιστοιχεί σε παραγωγή μηχανικού έργου 10 J/kg υπό ατμοσφαιρική πίεση. Πρόκειται για αμελητέα ποσότητα εν συγκρίσει με τη λανθάνουσα θερμότητα τήξης $\lambda = 3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg, με αποτέλεσμα η διόρθωση σ' αυτή τη μεγάλη τιμή λόγω του μηχανικού έργου να εμφανίζεται μόνο στο πέμπτο δεκαδικό ψηφίο. Διαπιστώνουμε πάλι ότι, για να υπολογίσουμε μια μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας, μπορούμε να εφαρμόζουμε τους τύπους για τη μεταβίβαση θερμότητας. Και πάλι είναι δυνατόν να χρησιμοποιούμε τους εν λόγω τύπους για την εσωτερική ενέργεια ανεξάρτητα από τον συγκεκριμένο τρόπο της μεταβολής της.

Η τελευταία διαδικασία που θα εξετάσουμε είναι η εξαέρωση ενός υγρού. Θα θεωρήσουμε ότι η εξαέρωση λαμβάνει χώρα στο εσωτερικό ενός κυλινδρικού δοχείου το οποίο κλείνεται από ευκίνητο έμβολο, ώστε αυτό το κλειστό σύστημα να διατηρείται υπό σταθερή (ατμοσφαιρική) πίεση ίση με την τάση των κορεσμένων ατμών. Για δεδομένη πίεση, η εξαέρωση συντελείται σε συγκεκριμένη θερμοκρασία (για το νερό υπό ατμοσφαιρική πίεση, στους 373 K). Ας υπολογίσουμε το μηχανικό έργο που παράγουν οι ατμοί, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο όγκος τους είναι πολύ μεγαλύτερος από τον όγκο του εξαερωθέντος υγρού:

$$W = P(V_{ατ} - V_{υγ}) \cong PV_{ατ} = (m/M)RT,$$

όπου με M συμβολίζουμε τη γραμμομοριακή μάζα του νερού. Η αντίστοιχη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειάς του είναι

$$\Delta U = \left(L - \frac{RT}{M}\right)m,$$

οπότε η σχετική διόρθωση στη λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης είναι $RT/ML \cong 0{,}076$, ή σχεδόν 8%. Προφανώς, σ' αυτή την περίπτωση η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας διαφέρει σημαντικά από τη θερμότητα εξαέρωσης.

Αφού λοιπόν διεξήλθαμε τόσα επιχειρήματα «υπέρ» της εσωτερικής ενέργειας, φαίνεται εύλογο να απορούμε ακόμη γιατί θεωρούνται θεμελιώδεις οι τύποι για την Q και όχι οι αντίστοιχοι για τη ΔU. Γιατί άραγε όλα τα βιβλία αναφοράς παραθέτουν τιμές για τις λανθάνουσες θερμότητες και όχι για τις μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας; Για να απαντήσουμε στο συγκεκριμένο ερώτημα, ας εξετάσουμε την εξίσωση του θερμικού ισοζυγίου, μια από τις σημαντικότερες πρακτικές εφαρμογές των τύπων της θερμοδυναμικής.

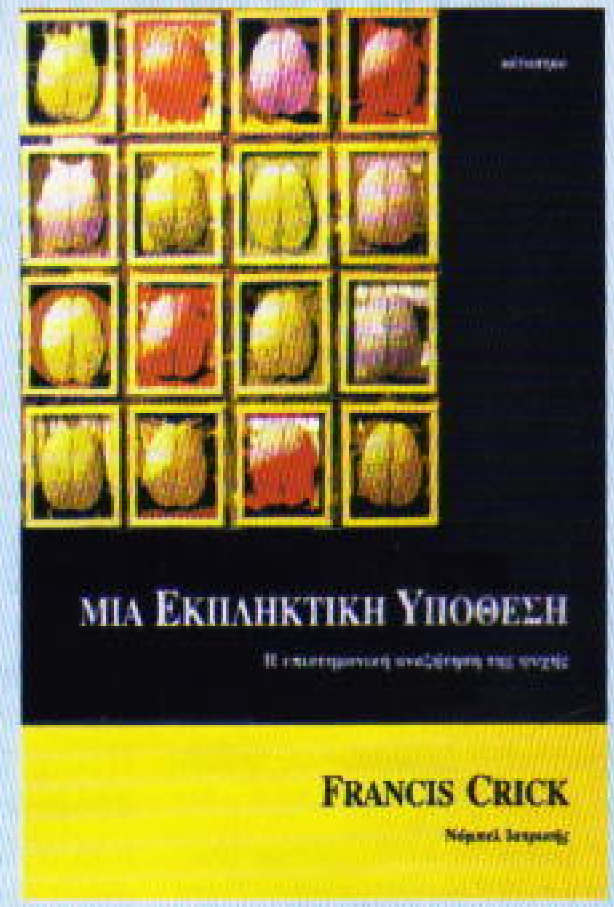
Ποια είναι η ορθή μορφή του νόμου διατήρησης της ενέργειας για την περιγραφή θερμικών ανταλλαγών σε ένα θερμικά μονωμένο σύστημα; Εκ

Η συνέχεια στη σελ. 68 ⇨

Francis Crick

ΜΙΑ ΕΚΠΛΗΚΤΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ

Η επιστημονική αναζήτηση της ψυχής



Σελ.: 441, Μέγ.: 14 × 21 εκ., 7.000 δρχ.

Πριν σαράντα χρόνια οι Francis Crick και James Watson έγραψαν ιστορία ανακαλύπτοντας τη δομή του DNA· το επίτευγμά τους έμελλε να αλλάξει για πάντα την αντίληψή μας για τη ζωή. Τώρα ο Crick έχει στρέψει το ενδιαφέρον του στο μυστήριο της ανθρώπινης συνείδησης, και βρίσκεται για άλλη μία φορά στην πρώτη γραμμή της επιστημονικής έρευνας.

Έχει αφοσιωθεί στην προσπάθεια να αποκρυπτογραφήσει την πολυπλοκότητα του εγκεφάλου και, κυρίως, να «χαρτογραφήσει» τη νευροβιολογία της όρασης. Ο καρπός των εργασιών του —το παρόν βιβλίο— είναι μια σαφής, εμπεριστατωμένη, οξυδερκής και λεπτομερής ανάλυση του τρόπου με τον οποίο «βλέπει» ο εγκέφαλος, και, ταυτόχρονα, μια τολμηρή εξερεύνηση των θεμελιωδέστερων ζητημάτων της ανθρώπινης ύπαρξης: Έχουμε ελεύθερη βούληση; Τι ακριβώς είναι αυτό που μας καθιστά νοήμονα όντα και μας διαφοροποιεί από τα άλλα ζώα; Υπάρχει ψυχή; Ή μήπως δεν είμαστε τίποτε άλλο παρά μια ασύλληπτα πολύπλοκη συλλογή νευρώνων;

ΕΚΔΟΤΙΚΟ ΓΕΓΟΝΟΣ, ΚΑΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

ΣΕΙΡΑ: Εγκέφαλος και Νόηση

«Περισσότερο ίσως από οποιονδήποτε άλλο, ο Crick είναι αυτός που μας προσέφερε τη σύγχρονη κατανόηση της μοριακής βάσης της ζωής. Τώρα μας προσφέρει *μια εκπληκτική υπόθεση* στη σύγχρονη επιστήμη του εγκεφάλου· απολαύστε τον.»
—CARL SAGAN, αστροφυσικός

«Διάβασα το βιβλίο με θαυμασμό. Ο Crick συνθέτει σε ένα συνεκτικό οικοδόμημα πληροφορίες, παρατηρήσεις και δεδομένα από ευρύτατο φάσμα διαφορετικών επιστημονικών τομέων. Οπωσδήποτε θα ενθουσιάσει και θα γοητεύσει ένα εξίσου ευρύ φάσμα αναγνωστών.»
—OLIVER SACKS, νευροβιολόγος

«Είναι αξιοθαύμαστη η ικανότητά του να διεισδύει στον πυρήνα των επιστημονικών προβλημάτων, χωρίς να χάνει την επαφή του με τον μη ειδικό αναγνώστη. Κατορθώνει να μας οδηγήσει στα βαθύτερα ζητήματα της επιστήμης του εγκεφάλου και της νόησης. Το βιβλίο του είναι απαραίτητο σε κάθε ανήσυχο αναγνώστη.»
—PATRICIA CHURCHLAND, φιλόσοφος

«Ο Crick εγκύπτει στο πιο μυστηριώδες πρόβλημα του σύμπαντος: τη φύση της συνείδησης. Αναλύει με εντυπωσιακή δεξιοτεχνία τα πιο σύγχρονα δεδομένα της έρευνας, χωρίς να απαιτεί από τον αναγνώστη του ειδικές γνώσεις, παρά μόνο αληθινό ενδιαφέρον.»
—STUART SUTHERLAND, Daily Telegraph

«Ο νομπελίστας Crick διατηρεί την πολυπόθητη εκείνη περιέργεια που οδηγεί τους ανθρώπους προς την επιστήμη. Δεν θα δει τον 21ο αιώνα να εκτυλίσσεται, όμως, το πιθανότερο, χάρη σ' αυτόν θα είναι πολύ πιο ενδιαφέρων...»
—The Times Higher Educational Supplement

Το βιβλίο αυτό θα το βρείτε στο βιβλιοπωλείο των Εκδόσεων Κάτοπτρο, στη Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5), τηλ.: 3247785, καθώς επίσης και σε όλα τα καλά βιβλιοπωλεία. Αν θέλετε μπορούμε να σας το ταχυδρομήσουμε· τα έξοδα αποστολής θα επιβαρύνουν εμάς. Γράψτε μας ή τηλεφωνήστε μας:

Εκδόσεις Κάτοπτρο, Ισαύρων 10, 114 71 Αθήνα.
Τηλ.: 3643272, 3645098
Fax: 3641864

Κατασκευές μόνο με διαβήτη

Ουδείς αναντικατάστατος

Dmitry Fuchs

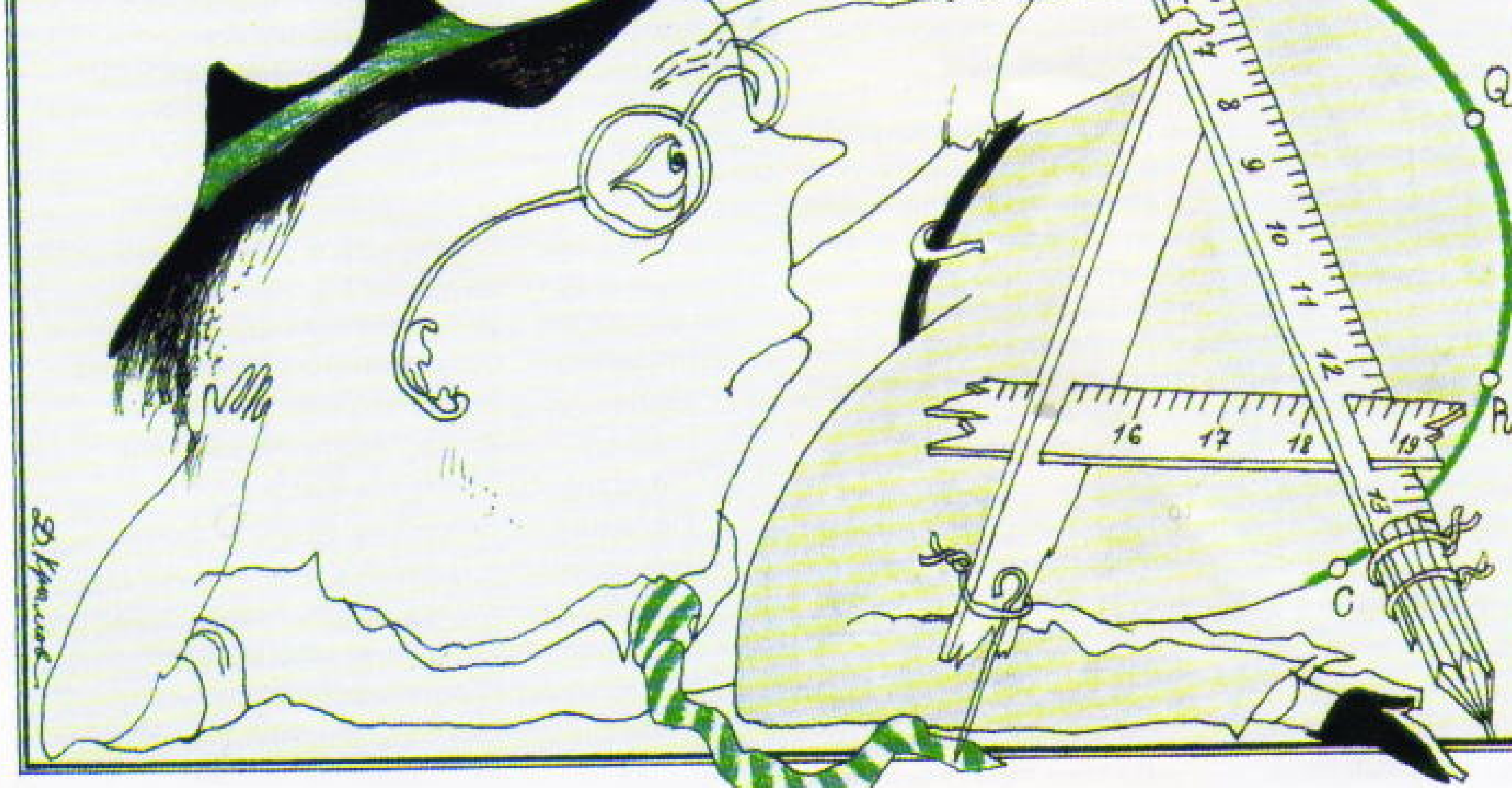
ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΑ ΑΝΑΡΙΘΜΗΤΑ ΠΡΟβλήματα γεωμετρικών κατασκευών συναντάμε συχνά κάποια που ζητούν την κατασκευή ενός σχήματος «μόνο με κανόνα» ή «μόνο με διαβήτη». Είναι όμως γνωστό εδώ και αιώνες ότι η έλλειψη του κανόνα δεν μειώνει καθόλου το σύνολο των δυνατών κατασκευών. *Οτιδήποτε μπορούμε να κατασκευάσουμε χρησιμοποιώντας κανόνα και διαβήτη, μπορούμε να το κατασκευάσουμε και μόνο με διαβήτη.*

Η ιδέα της κατασκευής μόνο με διαβήτη προτάθηκε πολύ καιρό πριν, από τον ιταλό επιστήμονα Giovanni Batista Benedetti (1530-1590). Το 1672 δημοσιεύτηκε το βιβλίο *Euclidius Danicus* του δανού γεωμέτρη Georg Mohr (1640-1697). Σ' αυτό αποδεικνυόταν ότι κάθε πρόβλημα που ανάγεται σε δευτεροβάθμια εξίσωση μπορεί να επιλυθεί γεωμετρικά μόνο με διαβήτη. Περισσότερο από έναν αιώνα αργότερα, ο ιταλός Lorenzo Mascheroni (1750-1800) επαναδιατύπωσε το πρόβλημα και το έλυσε. Έκτοτε η πρόταση αυτή ονομάζεται θεώρημα των Mohr-Mascheroni. Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια μια απόδειξη αυτού του θεωρήματος.

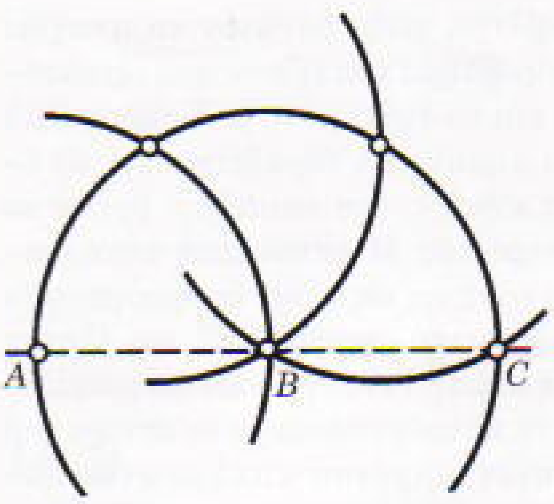
Σε όλα τα προβλήματα κατασκευής που ακολουθούν, περιγράφω μόνο την κατασκευή. Αφήνω τους αναγνώστες να αποδείξουν ότι σε κάθε περίπτωση η κατασκευή οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Διατύπωση του προβλήματος

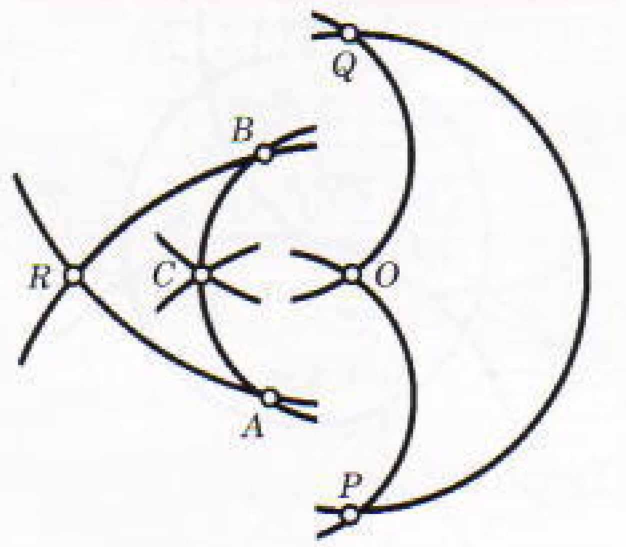
Είναι μάλλον απίθανο να πιστεύει κανείς ότι θα κατασκευάσουμε ευθεία γραμμή με ένα διαβήτη, και επομένως,



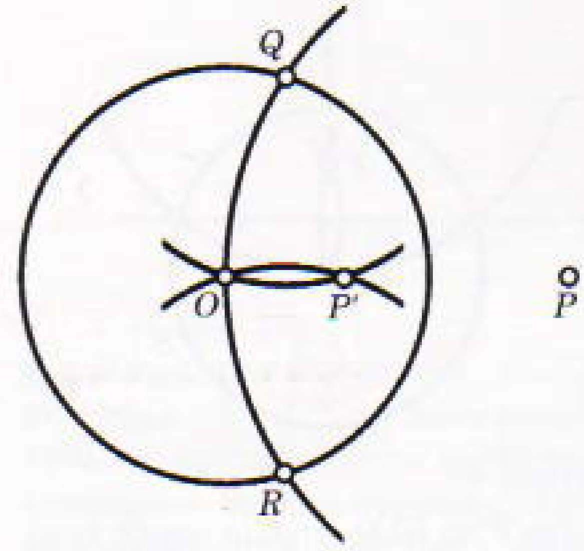
Εικονογράφηση: Dmitry Krymov



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

αυτό που θα μας αποσχολήσει είναι η κατασκευή σημείων (στο επίπεδο) χωρίς χρήση του κανόνα:

ΘΕΩΡΗΜΑ. Ας υποθέσουμε ότι το σημείο M κατασκευάζεται από τα σημεία $A_1, ..., A_N$ με κανόνα και διαβήτη. Τότε, το σημείο M κατασκευάζεται από τα σημεία $A_1, ..., A_N$ μόνο με διαβήτη.

Για να αποδείξουμε αυτό το θεώρημα, πρέπει να γνωρίζουμε ποιες ακριβώς κατασκευές είναι δυνατόν να γίνουν με κανόνα —δηλαδή με χάρακα. Με το χάρακα μπορούμε να φέρουμε μια ευθεία που διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία και να βρούμε τα σημεία τομής της με ευθείες και κύκλους που έχουμε κατασκευάσει προηγουμένως. Αφού όμως αρχικά μας δίνονται μόνο κάποια σημεία, κάθε ευθεία μας πρέπει να διέρχεται από δύο σημεία που έχουν κατασκευαστεί ακόμη πιο πριν. Παρομοίως, οι κύκλοι μας διέρχονται από σημεία που έχουν κατασκευαστεί προηγουμένως, και πρέπει να έχουν κέντρο ένα σημείο που επίσης κατασκευάστηκε νωρίτερα. Επομένως, κατά τη διάρκεια της κατασκευής μας, ο χάρακας πρέπει να χρησιμοποιηθεί μόνο για να επιλυθεί κάποιο από τα εξής στοιχειώδη προβλήματα:

Πρόβλημα 1. Με δεδομένα τα σημεία A, B, C, D, κατασκευάστε το σημείο τομής των ευθειών AB και CD.

Πρόβλημα 2. Δίνονται ένας κύκλος S, το κέντρο του O και τα σημεία A και B. Κατασκευάστε τα σημεία τομής του κύκλου S και της ευθείας AB.

Βοηθητικές κατασκευές

Στο εξής, ως κατασκευή θα εννοούμε κατασκευή μόνο με διαβήτη. Θα ξεκινήσουμε λύνοντας τέσσερα βοηθητικά προβλήματα.

Πρόβλημα 3. Δίνονται δύο διαφορετικά σημεία A και B. Κατασκευάστε το σημείο C της ημιευθείας AB, έτσι ώστε $AC = 2AB$.

Κατασκευή (Σχήμα 1). Σχεδιάζουμε έναν κύκλο που διέρχεται από το σημείο A με κέντρο B και, αρχίζοντας από το A, σημειώνουμε στον κύκλο τρία διαδοχικά τόξα χορδής AB. Το άκρο του τελευταίου τόξου είναι το ζητούμενο σημείο C.

Πρόβλημα 4. Δίνονται ένας κύκλος με κέντρο O και ένα τόξο AB. Κατασκευάστε το σημείο C που διαιρεί το τόξο AB σε δύο ίσα μέρη.

Κατασκευή (Σχήμα 2). Σχεδιάζουμε δύο κύκλους με κέντρα A και B οι οποίοι διέρχονται από το σημείο O, και έπειτα κατασκευάζουμε έναν κύκλο με κέντρο O και ακτίνα AB. Έστω P και Q τα σημεία τομής αυτού του κύκλου και των κύκλων που κατασκευάσαμε προηγουμένως. Τα τόξα OP και OQ είναι ίσα με το τόξο AB. Σχεδιάζουμε τώρα κύκλους με κέντρα P και Q οι οποίοι διέρχονται από τα B και A, αντίστοιχα, και θεωρούμε το σημείο τομής τους, R. Τέλος, σχεδιάζουμε τον κύκλο με ακτίνα OR και κέντρο P (ή Q, δεν έχει διαφορά). Το σημείο τομής του τελευταίου κύκλου με το τόξο AB είναι το ζητούμενο σημείο C.

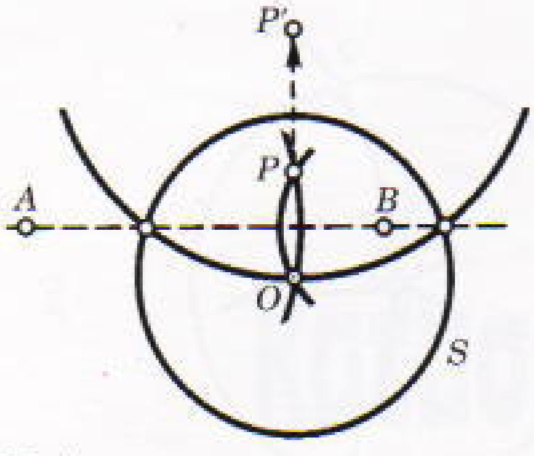
Πρόβλημα 5. Δίνονται ένας κύκλος S κέντρου O και ένα σημείο P. Κατασκευάστε το σημείο P' στην ημιευθεία OP τέτοιο ώστε $OP \cdot OP' = r^2$, όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου S. (Ένα τέτοιο σημείο P' ονομάζεται «αντίστροφο του P ως προς τον κύκλο S».)

Κατασκευή. Περίπτωση 1: Το σημείο P βρίσκεται έξω από τον κύκλο S (Σχήμα 3). Σχεδιάζουμε έναν κύκλο με κέντρο P που διέρχεται από το σημείο O. Έστω Q και R τα σημεία τομής του με τον κύκλο S. Σχεδιάζουμε τώρα κύκλους με κέντρα Q και R που διέρχονται από το σημείο O. Το δεύτερο σημείο τομής αυτών των κύκλων είναι το ζητούμενο σημείο P'. (Η κατασκευή αυτή ισχύει ακόμη και όταν το σημείο P βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου S αλλά η απόστασή του από το σημείο O είναι μεγαλύτερη του $r/2$.)

Περίπτωση 2: Το σημείο P βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου S. Αν χρησιμοποιήσουμε την κατασκευή του Προβλήματος 3, μπορούμε να βρούμε διαδοχικά σημεία P_2, P_3, ... στην ημιευθεία OP τέτοια ώστε $OP_2 = 2OP$, $OP_3 = 3OP$, ..., έως ότου φτάσουμε στο σημείο P_n εκτός του κύκλου. Τότε, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη κατασκευή, βρίσκουμε το σημείο P'_1, αντίστροφο του P_n ως προς τον κύκλο S. Τέλος, κατασκευάζουμε τα σημεία P'_2, P'_3, ... στην ημιευθεία OP'_1, τέτοια ώστε $OP'_2 = 2OP'_1$, $OP'_3 = 3OP'_1$, ... Τότε, το P'_n είναι το επιθυμητό σημείο.

Πρόβλημα 6. Δίνονται ένας κύκλος S με κέντρο O και δύο διαφορετικά σημεία A και B. Κατασκευάζουμε τον κύκλο που διέρχεται από το σημείο O και τα σημεία τομής της ευθείας AB με τον κύκλο S. (Υποθέτουμε ότι η ευθεία AB δεν διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου S και ότι τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.) Αποδείξτε ότι ο κύκλος που κατασκευάσαμε συμπίπτει ακριβώς με το σύνολο των σημείων που είναι αντίστροφα της ευθείας AB ως προς τον κύκλο S.

Κατασκευή (Σχήμα 4). Σχεδιάζουμε κύκλους με κέντρα A και B που διέρχονται από το σημείο O. Ονομά-

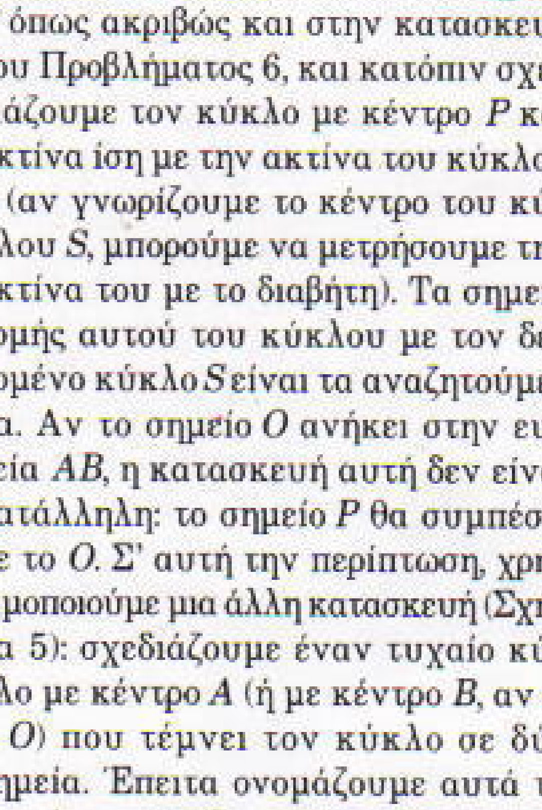


Σχήμα 4

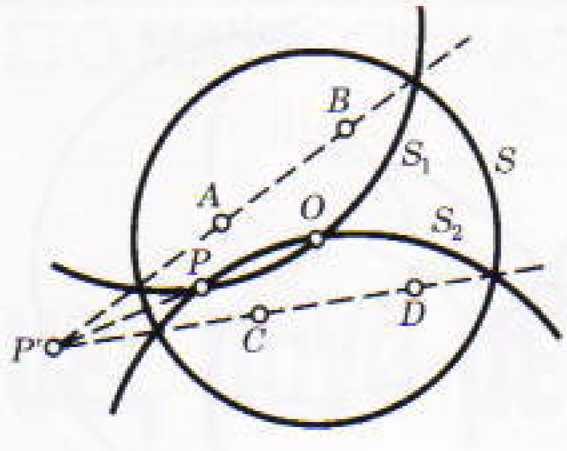
ζουμε P το άλλο σημείο τομής τους. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το σημείο P', αντίστροφο του P ως προς τον κύκλο S (βλ. Πρόβλημα 5) και σχεδιάζουμε τον κύκλο με κέντρο P' που διέρχεται από το σημείο O.

Βασικές κατασκευές

Κατασκευή για το Πρόβλημα 2. Αν το σημείο O δεν ανήκει στην ευθεία AB, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κατασκευή του Προβλήματος 6, ή ακόμη και την εξής απλουστευμένη παραλλαγή της: βρίσκουμε το σημείο P όπως ακριβώς και στην κατασκευή του Προβλήματος 6, και κατόπιν σχεδιάζουμε τον κύκλο με κέντρο P και ακτίνα ίση με την ακτίνα του κύκλου S (αν γνωρίζουμε το κέντρο του κύκλου S, μπορούμε να μετρήσουμε την ακτίνα του με το διαβήτη). Τα σημεία τομής αυτού του κύκλου με τον δεδομένο κύκλο S είναι τα αναζητούμενα. Αν το σημείο O ανήκει στην ευθεία AB, η κατασκευή αυτή δεν είναι κατάλληλη: το σημείο P θα συμπέσει με το O. Σ' αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιούμε μια άλλη κατασκευή (Σχήμα 5): σχεδιάζουμε έναν τυχαίο κύκλο με κέντρο A (ή με κέντρο B, αν $A = O$) που τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία. Έπειτα ονομάζουμε αυτά τα σημεία τομής C και D, και διαιρούμε σε δύο ίσα μέρη τα τόξα CD και DC (βλ. Πρόβλημα 4). Τα σημεία διαίρεσης είναι τα ζητούμενα.



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Κατασκευή για το Πρόβλημα 1 (Σχήμα 6). Σχεδιάζουμε έναν τυχαίο κύκλο έτσι ώστε όλα τα δεδομένα σημεία να βρίσκονται στο εσωτερικό του, και επιπλέον το κέντρο του, O, να μην ανήκει σε κάποια από τις ευθείες AB και CD. (Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα «με το μάτι», αλλά μια τέτοια πρακτική δεν ταιριάζει με την «αυστηρή» κατασκευή μας.) Μπορούμε να δουλέψουμε ως εξής: θεωρούμε έναν τυχαίο κύκλο και, χρησιμοποιώντας την κατασκευή του Προβλήματος 2, βρίσκουμε τα σημεία τομής του με τις ευθείες AB και CD. Θεωρούμε ως O ένα τυχαίο σημείο του κύκλου (διαφορετικό από αυτά που βρήκαμε προηγουμένως). Στη συνέχεια, ακολουθούμε την κατασκευή του Προβλήματος 6, και βρίσκουμε τον κύκλο S_1 που διέρχεται από το O και από τα σημεία τομής του κύκλου S και της ευθείας AB. Έπειτα, βρίσκουμε τον κύκλο S_2 που διέρχεται από το O και από τα σημεία τομής του κύκλου S και της ευθείας CD. Στη συνέχεια, ονομάζουμε P το σημείο τομής (το διαφορετικό του O) των κύκλων S_1 και S_2, και κατασκευάζουμε το σημείο P', αντίστροφο του P ως προς τον κύκλο S. Αυτό είναι το σημείο μας.

Συμπερασματικές παρατηρήσεις

Αν τα δεδομένα του προβλήματος κατασκευής δεν αποτελούνται μόνο από σημεία, τότε μπορεί να είναι απαραίτητος ο κανόνας για την επίλυσή του. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, το εξής πρόβλημα: με δεδομένα μία καμπύλη c του επιπέδου και δύο σημεία A, B, βρείτε τα σημεία τομής της καμπύλης c και της ευθείας AB. Γενικά, είναι αδύνατον να πετύχουμε αυτή την κατασκευή χωρίς κανόνα. Μερικές φορές, πάντως, ένα τέτοιο πρόβλημα είναι δυνατόν να αναχθεί σε πρόβλημα του είδους που εξετάσαμε, και να λυθεί μόνο με διαβήτη. Ιδού ένα σημαντικό παράδειγμα: έστω ένας κύκλος του επιπέδου· βρείτε το κέντρο του. Η κατασκευή αυτή επιτυγχάνεται ως εξής: θεωρούμε τρία διαφορετικά σημεία A, B, και C στον κύκλο μας. Είναι γνωστό ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου ABC με κανόνα και διαβήτη, και επομένως μπορεί να κατασκευαστεί μόνο με διαβήτη. (Αυτό το πρόβλημα έχει πολύ απλή λύση —μπορείτε να τη βρείτε;) Παρεμπιπτόντως, επισημαίνουμε ότι στα Προβλήματα 2, 4, 5, και 6 ήταν απαραίτητο να έχουν βρεθεί προηγουμένως τα κέντρα των δεδομένων κύκλων.

Δεν είναι δυνατόν να γίνουν μόνο με κανόνα όλες οι κατασκευές που είναι δυνατές με κανόνα και διαβήτη. (Την απόδειξη αυτής της πρότασης μπορείτε να βρείτε, για παράδειγμα, στο *Numbers and Figures* των Rademacher και Toepliz.) Ένα θεώρημα του Steiner, όμως, εξασφαλίζει ότι κάθε κατασκευή που γίνεται με κανόνα και διαβήτη μπορεί να γίνει και μόνο με κανόνα, αρκεί να δίδεται εκ των προτέρων οπουδήποτε στο επίπεδο ένας κύκλος με το κέντρο του.

Επομένως, αν πρόκειται να κάνετε κάποιες κατασκευές με κανόνα και διαβήτη και ανακαλύψετε ότι έχετε χάσει το χάρακά σας, δεν πρέπει να απελπιστείτε. Μπορείτε να κάνετε όλες τις κατασκευές μόνο με το διαβήτη. Τα πράγματα είναι χειρότερα αν έχετε χάσει το διαβήτη σας, όμως όλα τα προβλήματα θα λυθούν αν μπορέσετε να δανειστείτε έναν για μισό μόνο λεπτό: σχεδιάστε έναν κύκλο, σημειώστε το κέντρο του και επιστρέψτε το διαβήτη στον κάτοχό του —μπορείτε πλέον να συνεχίσετε και χωρίς αυτόν.

Η χειρότερη περίπτωση είναι, φυσικά, όταν έχετε καταφέρει να χάσετε και το διαβήτη *και* το χάρακά σας. *Τότε*, η επιστήμη σηκώνει τα χέρια ψηλά.

Ο **Dmitry Fuchs** *είναι ερευνητής στο εργαστήριο μαθηματικών και βιολογίας του μεγάλου σύγχρονου ρώσου μαθηματικού I.M. Gelfand.*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M101

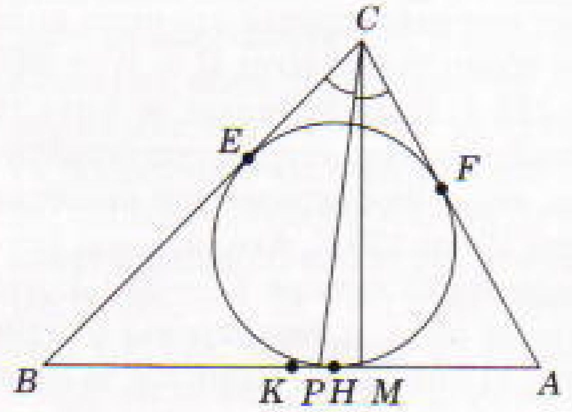
Ας υποθέσουμε ότι καμία από τις εξισώσεις δεν έχει ρίζα με απόλυτη τιμή ίση με το 1. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της πρώτης εξίσωσης, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $|a| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq 2 + 998 = 1.000$. Πράγματι, τα $|x_1|$ και $|x_2|$ είναι ακέραιοι θετικοί αριθμοί διαφορετικοί από το 1, και το γινόμενό τους ισούται με 1.996. Το άθροισμα τέτοιων αριθμών λαμβάνει τη μέγιστη δυνατή τιμή του όταν ένας από τους δύο ισούται με 2. Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να συμπεράνουμε από τη δεύτερη εξίσωση ότι $|a| \geq 2 \cdot 1.994$. Αυτή η αντίφαση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μία τουλάχιστον από τις εξισώσεις έχει μια ρίζα η απόλυτη τιμή της οποίας ισούται με 1. Αν εξετάσουμε τώρα όλες τις δυνατότητες, διαπιστώνουμε ότι $a = -1.997$.

M102

Έστω ότι τα σημεία βρίσκονται στην πλευρά AB τριγώνου ABC, όπου $AB = x$, $BC = y$, και $CA = z$. Για να αποσαφηνιστεί περισσότερο η κατάσταση, ας υποθέσουμε ότι $y > z$. Θα υπολογίσουμε τις αποστάσεις των εν λόγω σημείων από το P, εφαρμόζοντας κάποιες από τις συνηθισμένες τεχνικές που χρησιμοποιούνται με τα ειδικά σημεία ενός τριγώνου.

Προφανώς, $BK = x/2$. Για να υπολογίσουμε την απόσταση BP, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η διχοτόμος ενός τριγώνου διαιρεί την πλευρά που τέμνει σε τμήματα ανάλογα προς τις δύο άλλες πλευρές. Αυτό σημαίνει ότι $BP = ym$ και $AP = zm$, για κάποιο m. Τότε, $ym + zm = x$, και έτσι $m = x/(y + z)$ και $BP = xy/(y + z)$.

Για να υπολογίσουμε την BH, θεωρούμε τα σημεία τομής E και F του εγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές BC και AC, αντίστοιχα (Σχήμα 1). Αν θέσουμε $BH = BE = p$, $AH = AF = q$, $CE = CF = r$, βρίσκουμε ότι $p + q = x$, $q + r = z$ και $r + p = y$. Αν προσθέσουμε, παίρνουμε $p + q + r = (x + y + z)/2$, και $p = p + q + r - (q + r) = (x + y + z)/2 - 2z/2 = (x + y - z)/2$.



Σχήμα 1

Για να βρούμε την BM, θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο BCM, όπου $BM = y\text{συν}B$. Ο νόμος των συνημιτόνων μάς επιτρέπει να εκφράσουμε το συνB συναρτήσει των x, y και z: $\text{συν}B = (x^2 + y^2 - z^2)/2xy$. Έπεται ότι $BM = (x^2 + y^2 - z^2)/2x$.

Έχουμε τώρα ότι

$$KP = BP - BK = \frac{x(y-z)}{2(y+z)},$$

$$KH = BH - BK = \frac{y-z}{2},$$

$$KM = BM - BK = \frac{y^2 - z^2}{2x},$$

και μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι $KH^2 = KP \cdot KM$, ή

$$KH = \sqrt{ab}.$$

M103

Μια μέθοδος εύρεσης ελάχιστων ή μέγιστων τιμών μιας συνάρτησης είναι η αναζήτηση του τετραγώνου μιας αλγεβρικής παράστασης. Το τετράγωνο αυτό δεν μπορεί να είναι αρνητικό όταν η μεταβλητή παίρνει πραγματικές τιμές. Στην παρούσα περίπτωση, μπορούμε να γράψουμε

$$y = \frac{x^2}{8} + x\text{συν}x + 2\text{συν}^2 2x - 1$$

$$= \frac{1}{8}(x + 4\text{συν}x)^2 - 1.$$

Επομένως, το y δεν μπορεί να είναι μικρότερο του -1. Στην πραγματικότητα, αν σχεδιάσουμε τα κατάλληλα γραφήματα, θα διαπιστώσουμε εύκολα ότι υπάρχουν τιμές του x τέτοιες ώστε $x + 4\text{συν}x = 0$. Άρα, η τιμή που αναζητούμε είναι το -1.

M104

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τη μοναδικότητα της πραγματικής ρίζας της εξίσωσης $x^3 - x - 3 = 0$ αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση του αριστερού της μέλους και βρούμε τα τοπικά ακρότατα. Αν υψώσουμε και τους δύο αριθμούς που θέλουμε να συγκρίνουμε στην πέμπτη δύναμη και αφαιρέσουμε τον έναν από τον άλλο, καταλήγουμε στο επόμενο πρόβλημα: ο αριθμός $x^5 - 13$ είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος του 0; (Όπου x είναι η ρίζα.) Αν λάβουμε υπόψη μας ότι το x ικανοποιεί την εξίσωση $x^3 - x - 3 = 0$, βρίσκουμε ότι $x^5 = x^3x^2 = x^2(x + 3) = x^3 + 3x^2 = 3x^2 + x + 3$. Τώρα έχουμε να συγκρίνουμε τον αριθμό $3x^2 + x - 10$ (όπου το x ικανοποιεί την εξίσωση $x^3 - x - 3 = 0$) με το 0. Το δευτεροβάθμιο τριώνυμο $3x^2 + x - 10$, όμως, μηδενίζεται όταν $x = 5/3$, ενώ η μοναδική ρίζα τής $x^3 - x - 3 = 0$ είναι μεγαλύτερη του $5/3$ (το αριστερό μέλος της τελευταίας εξίσωσης είναι αρνητικό όταν $x = 6/3$). Συνεπώς, γι' αυτό το x, $3x^2 + x - 10 > 0$ —δηλαδή, για $x > \sqrt[5]{13}$.

Επομένως, η αριθμομηχανή δεν μας παραπλάνησε.

M105

Στο τρίγωνο ABB_1, η ευθεία BA_1 είναι διχοτόμος της προσκείμενης στην $\angle ABB_1$ γωνίας. (Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι η γωνία ABC ισούται με 120°.) Αφού όμως η AA_1 είναι διχοτόμος της $\angle ABC$, το σημείο τομής αυτών των δύο ευθειών ισαπέχει από τις ευθείες BB_1, AB και AC—δηλαδή, η B_1A_1 είναι η διχοτόμος της $\angle BB_1C$. Παρομοίως, η B_1C_1 είναι διχοτόμος της

$\angle BB_1A$. Τώρα είναι πλέον φανερό ότι $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.

Φυσική

Φ101

Όταν το ελατήριο ηρεμεί, επιμηκύνεται κατά Δx_1 εξαιτίας του βάρους mg (βλ. Σχήμα 2):

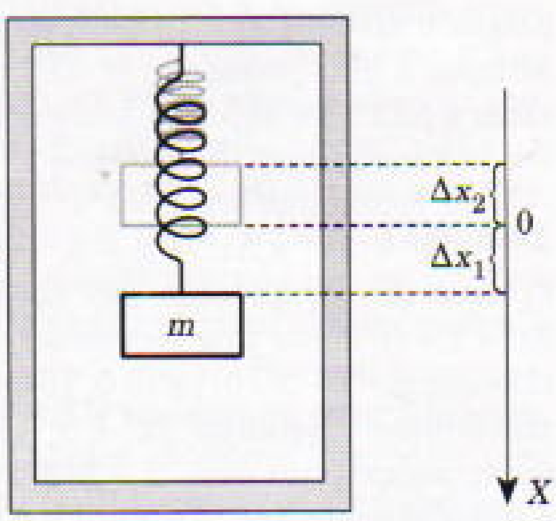
$$\Delta x_1 = \frac{mg}{k}.$$

Στο δοχείο ασκείται το βάρος του Mg και η τάση T του ελατηρίου. Το μέτρο της τάσης είναι $T = kx$. Το δοχείο θα αρχίσει την αναπήδηση όταν η τάση T υπερβεί το βάρος του Mg —δηλαδή όταν $T \geq Mg$. Η κρίσιμη τιμή, $T = Mg$, αντιστοιχεί στην επιμήκυνση

$$\Delta x_2 = \frac{Mg}{k}.$$

Κατά συνέπεια, το δοχείο θα αναπηδήσει όταν το πλάτος των ταλαντώσεων γίνει ίσο με

$$a = \Delta x_1 + \Delta x_2 = (M+m)\frac{g}{k}.$$



Σχήμα 2

Φ102

Ο καλύτερος τρόπος για να λύσετε το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της θερμοδυναμικής διαδικασίας και να υπολογίσετε γραφικά το έργο που παράγεται από το αέριο στα στάδια που μας ενδιαφέρουν.

Για το πρώτο στάδιο (40-80 lt), το εν λόγω έργο είναι περίπου 860 J, ενώ για το δεύτερο στάδιο (140-180 lt) είναι κατά προσέγγιση 250 J. Τα δεδομένα του πίνακα μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τη θερμοκρασία του αερίου σε κάθε σημείο και, κατ' επέκταση, τις μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας. Στο πρώτο στάδιο, η εσωτερική ενέργεια μειώνεται κατά 635 J, αλλά στο δεύτερο αυξάνεται κατά 93 J. Φυσικά, οι συγκεκριμένες τιμές είναι προσεγγιστικές, αφού οι υπολογισμοί μας στηρίζονται σε μια γραφική παράσταση. Εφαρμόζοντας το νόμο διατήρησης της ενέργειας, θα συμπεράνουμε ότι η ποσότητα της θερμότητας που μεταφέρθηκε στο αέριο κατά το πρώτο στάδιο είναι $Q_1 = W_1 + \Delta U_1 = 225$ J. Κατά συνέπεια, σ' αυτό το στάδιο το αέριο *απορρόφησε* θερμότητα, ενώ η θερμοκρασία του μειώθηκε από 171 σε 120 K. Ανάλογα, στο δεύτερο στάδιο έχουμε $Q_2 = 343$ J· στο στάδιο αυτό, η θερμοκρασία ανήλθε από 117 σε 125 K, επομένως το αέριο έγινε *θερμότερο*. Στο πρώτο στάδιο, η ειδική θερμότητα είναι αρνητική (κατά προσέγγιση $-4{,}5\ \text{J}\cdot\text{mole}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$), επειδή το αέριο απορρόφησε θερμότητα αλλά η θερμοκρασία του έπεσε. Στο δεύτερο στάδιο, η ειδική θερμότητα ισούται με $45\ \text{J}\cdot\text{mole}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, οπότε ο ζητούμενος λόγος ισούται με -10.

Φ103

Για να γίνουμε συγκεκριμένοι, υποθέτουμε ότι $\sigma_2 > \sigma_1$. Εν απουσία εξωτερικών δυνάμεων, η ράβδος θα μετακινηθεί ώστε να ελαχιστοποιηθεί η επιφανειακή ενέργεια. Ενόσω θα συντελείται η εν λόγω διαδικασία, το υμένιο με τη μεγαλύτερη επιφανειακή τάση θα συρρικνωθεί, το άλλο υμένιο θα επεκταθεί, και η ράβδος θα μετατοπιστεί. Η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από το υγρό στα δεξιά είναι $F_2 = 2\sigma_2\ell$, και η δύναμη που ασκείται από τα αριστερά είναι $F_1 = 2\sigma_1\ell$. Λάβαμε υπόψη ότι ένα υγρό υμένιο έχει δύο επιφάνειες. Για να διατηρηθεί το σύστημα σε ισορροπία, πρέπει να ασκηθεί στη ράβδο εξωτερική δύναμη ίση με

$$F = F_2 - F_1 = 2(\sigma_2 - \sigma_1)\ell.$$

Φ104

Η ενέργεια που αποθηκεύεται σε πυκνωτή δεν εξαρτάται από τον τρόπο που τον φορτίσαμε. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε την ακόλουθη μέθοδο φόρτισης: αφαιρούμε μικρό τμήμα του φορτίου από το «άπειρο» και το φέρουμε στις σφαίρες. Πρώτα φορτίζουμε την εσωτερική σφαίρα. Ας υποθέσουμε ότι έχει φορτίο q (που το έχουμε ήδη μεταφέρει εκεί), και τώρα της προσθέτουμε επιπλέον φορτίο Δq. Για να το πετύχουμε, παράγουμε έργο

$$\Delta W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\Delta q}{R_1}.$$

Μπορούμε να γράψουμε απευθείας τον συγκεκριμένο τύπο, επειδή γνωρίζουμε τον τύπο για το δυναμικό φορτισμένης σφαίρας $q/(4\pi\varepsilon_0 R_1)$· ή μπορούμε να ξεκινήσουμε από το νόμο του Coulomb, να γράψουμε την έκφραση για το έργο που παράγουμε μετακινώντας το στοιχείο φορτίου κατά μήκος στοιχειώδους τμήματος της διαδρομής, και εν συνεχεία να την ολοκληρώσουμε για όλη τη διαδρομή του στοιχείου φορτίου:

$$\Delta W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{R_1}\frac{q\,\Delta q}{r^2}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\Delta q}{R_1}.$$

Επομένως, το ολικό έργο που απαιτείται ώστε να μεταφερθεί στην εσωτερική σφαίρα φορτίο Q είναι

$$W_1 = \int_0^Q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1}\,dq = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}.$$

Ας φορτίσουμε εν συνεχεία την εξωτερική σφαίρα. Για να γίνουμε συγκεκριμένοι, υποθέτουμε ότι το φορτίο της εσωτερικής σφαίρας είναι θετικό, οπότε η εξωτερική σφαίρα πρέπει να είναι αρνητικά φορτισμένη. Έστω $-q$ το εν λόγω φορτίο σε δεδομένη στιγμή. Κατά τη μεταφορά ενός μικρού φορτίου $-\Delta q$, επιδρούν πάνω του δύο πεδία: εκείνο που δημιουργείται από το φορτίο $+Q$ (της εσωτερικής σφαίρας) και αυτό που οφείλεται στο $-q$ (της εξωτερικής σφαίρας). Έτσι, το στοιχειώδες έργο που παράγεται κατά τη μεταφορά φορτίου $-\Delta q$ από το άπειρο στην εξωτερική σφαίρα είναι

$$\Delta W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,\Delta q}{R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\Delta q}{R_2}.$$

Κατά συνέπεια, το ολικό έργο που απαιτείται για να φορτιστεί η εξωτερική σφαίρα είναι

$$W_2 = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Ο πυκνωτής είναι πλέον φορτισμένος, και η ενέργειά του ισούται με

$$U = W_1 + W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Όλη αυτή η ενέργεια είναι αποθηκευμένη στο χώρο που περικλείεται από τους σφαιρικούς οπλισμούς του πυκνωτή με τη μορφή ενέργειας ηλεκτροστατικού πεδίου. Εφόσον ισχύει $R_2 - R_1 << R_1$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μέτρο του πεδίου δεν μεταβάλλεται, και είναι ίσο με

$$E \cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} \cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}.$$

Ας εκφράσουμε την ολική ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου με τη βοήθεια της έντασής του:

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \cong \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta R}{R_1^2}$$

$$= 2\pi\varepsilon_0 E^2 R_1^2 \Delta R.$$

Για να βρούμε την πυκνότητα ενέργειας, η συγκεκριμένη έκφραση πρέπει να διαιρεθεί με τον όγκο $V = 4\pi R_1^2 \Delta R$ που καταλαμβάνει το πεδίο:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Ως τώρα ασχολούμασταν μ' έναν συνηθισμένο πυκνωτή, και, για να μιλήσουμε αυστηρά, ο παραπάνω τύπος για την πυκνότητα ενέργειας αντιστοιχεί σε ηλεκτρικό πεδίο στο κενό. Ας γενικεύσουμε την εν λόγω έκφραση για μέσο με διηλεκτρική σταθερά $\varepsilon > 1$. Στο μέσο αυτό, το αναγκαίο έργο για τη μεταφορά του ίδιου φορτίου στον σφαιρικό πυκνωτή θα είναι μικρότερο κατά παράγοντα ε. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα μειωθεί κατά τον ίδιο παράγοντα, οπότε ο τύπος για την πυκνότητα φορτίου θα είναι

$$u = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Ο τύπος αυτός δεν σημαίνει ότι θα προκαλέσουμε την αύξηση της πυκνότητας ενέργειας ενός φορτισμένου πυκνωτή εάν τον γεμίσουμε με διηλεκτρικό υλικό (θυμηθείτε ότι το φορτίο παραμένει σταθερό). Στην περίπτωσή μας, μάλιστα, συνέβη ακριβώς το αντίθετο: η ενέργεια του πυκνωτή ελαττώθηκε κατά παράγοντα ε. Ωστόσο, αν είχαμε κρατήσει σταθερή την τάση αντί το φορτίο ενόσω γεμίζαμε τον πυκνωτή με διηλεκτρικό, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου θα ήταν η ίδια, και η ενέργεια του πυκνωτή ε φορές μεγαλύτερη.

Φ105

Η φαινόμενη θέση του άστρου διαφέρει από την πραγματική, εξαιτίας της διάθλασης του φωτός στην ατμόσφαιρα. Το πάχος της ατμόσφαιρας —δηλαδή το ύψος πάνω από το οποίο ο αέρας πρακτικά απουσιάζει και ο δείκτης διάθλασης ισούται με 1— ανέρχεται σε αρκετές δεκάδες χιλιόμετρα. Εντούτοις, είναι πολύ μικρότερο από την ακτίνα της Γης, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ατμόσφαιρα είναι επίπεδη. Ο δείκτης διάθλασής της αυξάνει βαθμιαία από 1, για τα ανώτερα στρώματα, ώς $n > 1$ στην επιφάνεια της Γης. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το φως από ορισμένο άστρο έρχεται με τη μορφή παράλληλων ακτίνων οι οποίες προσπίπτουν στα ανώτερα στρώματα υπό γωνία $\pi/2 - \alpha$, όπου α είναι η αληθής γωνιακή θέση του άστρου πάνω από τον ορίζοντα. Παρατηρούμε το άστρο σε γωνία $\beta > \alpha$ (Σχήμα 3). Σύμφωνα με το νόμο του Snell, θα ισχύει

$$\eta\mu(\pi/2 - \alpha) = n\eta\mu(\pi/2 - \beta)$$

ή

$$\sigma\upsilon\nu(\beta - (\beta - \alpha)) = (1 + (n-1))\,\sigma\upsilon\nu\beta.$$

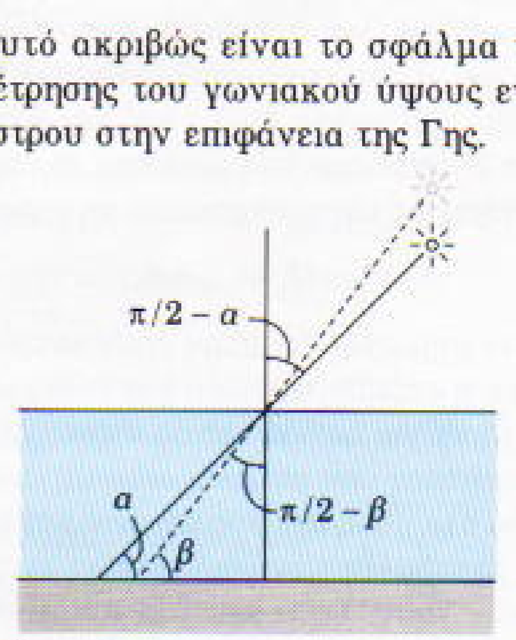
Εφόσον $n - 1 << 1$ και, συνεπώς, $\beta - \alpha << \beta$, έχουμε κατά προσέγγιση

$$\sigma\upsilon\nu\beta + (\beta - \alpha)\,\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu\beta + (n-1)\,\sigma\upsilon\nu\beta.$$

Επομένως,

$$\beta - \alpha = (n-1)\,\sigma\varphi\beta = 3 \cdot 10^{-4}\ \text{rad} = 1'.$$

Αυτό ακριβώς είναι το σφάλμα της μέτρησης του γωνιακού ύψους ενός άστρου στην επιφάνεια της Γης.

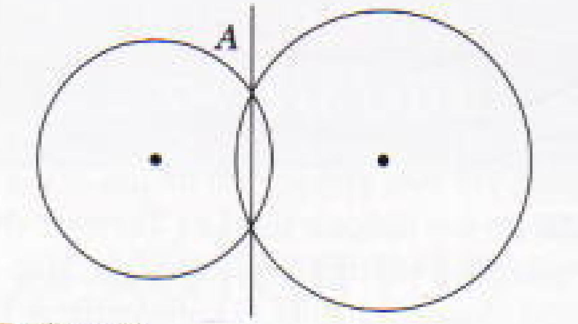


Σχήμα 3

Σπαζοκεφαλιές

Σ101

Σχεδιάζουμε δύο κύκλους που διέρχονται από το A και έχουν το κέντρο τους στη δεδομένη ευθεία (Σχήμα 4). Έστω B το δεύτερο σημείο τομής τους. Η ευθεία AB είναι η κάθετος που αναζητούμε.



Σχήμα 4

Σ102

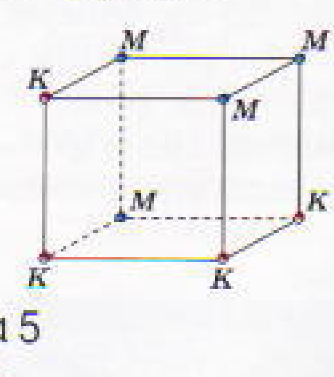
Στην κατάσταση που περιγράφουμε, τα παράθυρα είναι τοποθετημένα κατά προσέγγιση παράλληλα. Επομένως, μπορούμε να τα θεωρήσουμε ως τμήματα ενός μεγάλου ενιαίου κατόπτρου. Όταν ανεβαίνει ο Ήλιος, ανεβαίνει και το είδωλό του. Άρα, τα «φωτισμένα» παράθυρα μετατοπίζονται προς το πάνω μέρος της πλαγιάς. Επισημαίνουμε ότι στο βόρειο ημισφαίριο μετατοπίζονται ελαφρώς και προς το νότο· αν όμως το χωριό βρίσκεται στο νότιο ημισφαίριο, μετατοπίζονται ελαφρώς προς το βορρά. Στον ισημερινό, κατά την εαρινή και τη φθινοπωρινή ισημερία, δεν παρουσιάζεται πλάγια μετατόπιση.

Σ103

Από τη διατύπωση του προβλήματος έπεται ότι το αυτοκίνητο συνάντησε τον τραπεζίτη όταν απείχε 20/2 = 10 min διαδρομής του αυτοκινήτου από το σπίτι του. Επομένως, ο κ. Scall περπάτησε επί 50 λεπτά (σταμάτησε να περπατά 10 λεπτά πριν από τη συνηθισμένη ώρα άφιξης του αυτοκινήτου, και άρχισε μία ώρα πριν από αυτήν).

Σ104

Δείτε το Σχήμα 5.



Σχήμα 5

Σ105

Ιδού ένας τρόπος: 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 42, 85, 171, 343, 114, 229, 76, 25, 8.

Διορθώσεις

Αρκετοί αναγνώστες μάς έγραψαν για να διατυπώσουν τις αντιρρήσεις τους για όσα γράφονται σε μια παράγραφο του άρθρου του Lev Tarasov «Η πράσινη αναλαμπή», στο τεύχος Μαρτίου / Απριλίου 1997. Ο καθηγητής A.T. Young, του Πολιτειακού Πανεπιστημίου του Σαν Ντιέγκο, γράφει:

«Δεν μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι ο Ήλιος βρίσκεται 2° κάτω από τον ορίζοντα [σελ. 63] λόγω του χρόνου που απαιτείται για την άφιξη του φωτός· αν ίσχυε ένα τέτοιο επιχείρημα, μεγαλύτερα αστρικά συστήματα, όπως τα σφαιρωτά σμήνη και οι γαλαξίες, που το φως χρειάζεται πολλά έτη ώστε να τα διασχίσει, θα φαίνονταν απλωμένα κατά μήκος ενός μέγιστου κύκλου του ουρανού, λόγω της περιστροφής της Γης. Εκτός από μια μικρή μετατόπιση εξαιτίας της αποπλάνησης του φωτός, ο Ήλιος και τα άστρα βρίσκονται πράγματι εκεί περίπου όπου φαίνονται, επειδή υπάρχει συνεχής ροή φωτός από αυτές τις ουράνιες πηγές προς τα μάτια μας. Ο χρόνος που απαιτείται για την άφιξη του φωτός ουδεμία επίδραση έχει στη φαινόμενη θέση, εκτός από τις πολύ μικρές μετατοπίσεις των ίδιων των αντικειμένων κατά το χρόνο της διάδοσης του φωτός. Η ημερήσια κίνηση αποτελεί απλώς αντανάκλαση της περιστροφής της Γης, επομένως δεν παράγει φαινόμενα σαν αυτά που περιγράφετε».

Ο καθηγητής Young μάς έδωσε τη διεύθυνση της δικής του σελίδας για την πράσινη αναλαμπή στον Παγκόσμιο Ιστό (www.isc.tamu.edu/~astro/research/sandiego.html) και μας υπέδειξε άλλη μία σχετική σελίδα (www.bishop.hawaii.org/bishop/planet/Greenflash.html).

Στο ίδιο άρθρο παρεισέφρησε ένα ακόμη λάθος: στη σελ. 63, στήλη 1, στη δεύτερη γραμμή της δεύτερης παραγράφου το «όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος κύματος του φωτός...» πρέπει να αντικατασταθεί με το ορθό «όσο μικρότερο είναι το μήκος κύματος του φωτός...».

Επιπλέον:

Στο τεύχος Ιουλίου / Αυγούστου 1997, σελ. 18, στήλη 1: οι τέσσερις πρώτες εξισώσεις διαφέρουν από τις ορθές κατά παράγοντα c. Έτσι, η πρώτη εξίσωση θα έπρεπε να γραφεί ως

$$L_0 = G^{1/2} h^{1/2} c^{-3/2}$$

(και όχι $c^{-1/2}$, όπως τυπώθηκε). Οι δυνάμεις του c στις υπόλοιπες εξισώσεις θα έπρεπε να είναι $c^{-5/2}$, $c^{5/2}$ και $c^{1/2}$.

Σελ. 49, στήλη 1: η τρίτη εξίσωση θα έπρεπε να γράφει $\lambda = n\lambda_{\text{επιστρ.}}$ Το μήκος κύματος στο επίστρωμα φθοριούχου μαγνησίου είναι μικρότερο απ' ό,τι στον αέρα· επομένως, πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε με το δείκτη διάθλασης n μάλλον παρά να το διαιρέσουμε μ' αυτόν.

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 60*

πρώτης όψεως, ίσως νομίζαμε ότι θα έπρεπε να έχει τη μορφή $\Delta U = 0$, όπου U είναι η ολική εσωτερική ενέργεια του συστήματος· αυτή εναλλακτικά μπορεί να γραφεί και ως $\Delta U_1 + \Delta U_2 + \ldots = 0$. Τούτο όμως δεν είναι σωστό. Εάν τα μέλη του συστήματος είναι σώματα που ο όγκος τους μεταβάλλεται σημαντικά (αέρια, ατμοί), το έργο που παράγει το σύστημα επί του εξωτερικού περιβάλλοντος δεν θα είναι μηδενικό, οπότε η ολική εσωτερική ενέργειά του δεν θα παραμένει σταθερή, παρότι ισχύει η σχέση $\Delta U + W = 0$. Ας γράψουμε ξεχωριστά το νόμο διατήρησης για κάθε σώμα του συστήματος ($Q_1 = \Delta U_1 + W_1$, $Q_2 = \Delta U_2 + W_2$, ...) και ας αθροίσουμε κατά μέλη. Εφόσον το ολικό έργο που παράγεται από όλα τα σώματα κατά την αλληλεπίδρασή τους είναι μηδέν (όπως συνάγεται από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα), το άθροισμα $W_1 + W_2 + \ldots$ θα ισούται με το έργο W που παρήχθη από το σύστημα επί του εξωτερικού περιβάλλοντος. Εφόσον $\Delta U_1 + \Delta U_2 + \ldots = \Delta U$, και $\Delta U + W = 0$, μπορούμε να γράψουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας με τη μορφή:

$$Q_1 + Q_2 + \ldots = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι, στην πραγματικότητα, η ακριβής εξίσωση για το θερμικό ισοζύγιο αφορά τις ποσότητες της θερμότητας που ανταλλάσσονται ανάμεσα στα μέλη του συστήματος και όχι τις μεταβολές των εσωτερικών ενεργειών τους. Σε τελευταία ανάλυση, λοιπόν, η πρακτική που ακολουθείται στα βιβλία αναφοράς είναι όντως ορθή. Ωστόσο, ήταν διασκεδαστικό να εγείρουμε αμφιβολίες εις βάρος τους, και ακόμη διασκεδαστικότερο να τις διαλύσουμε.

⇨ *Συνέχεια από τη σελ. 9*

εξισώσεων που περιγράφουν πώς και άλλες ιδιότητες εξαρτώνται από τη θερμοκρασία παρουσιάζει εντυπωσιακή ομοιότητα με την εξίσωση του Arrhenius. Η εξίσωση του Van't Hoff περιγράφει λεπτομερώς πώς εξαρτάται από τη θερμοκρασία η διαλυτότητα s ενός στερεού που διαλύεται σε υγρό:

$$\ln s = -\frac{E_s}{RT} + I_s,$$

όπου E_s είναι η ενέργεια που συνδέεται με τη διαδικασία διάλυσης. Και η εξίσωση Clausius-Clapeyron δίνει την εξάρτηση της πίεσης ατμών p ενός πτητικού υγρού:

$$\ln p = -\frac{E_v}{RT} + I_v,$$

όπου E_v είναι η ενέργεια που απαιτείται για την εξαέρωση του υγρού. Ο λογάριθμος της εν λόγω ιδιότητας ως συνάρτησης της αντίστροφης θερμοκρασίας ορίζει μια ευθεία η κλίση της οποίας εξαρτάται από την ενέργεια που απαιτείται για την εκκίνηση της διαδικασίας. Η ίδια χαρακτηριστική συμπεριφορά εκδηλώνεται πάντοτε, ανεξαρτήτως αν οι συγκεκριμένες διαδικασίες εμπλέκουν δύο μόρια που αντιδρούν, ένα μόριο νερού που προσκρούει σε κάποιο μόριο του στερεού για να το αποσπάσει και να το στείλει στο διάλυμα, ή ένα μόνο μόριο που απελευθερώνεται από τα υπόλοιπα για να διαφύγει στην αέρια φάση. Όλες στηρίζονται στη σύγκρουση των μορίων και στην ύπαρξη κάποιας κρίσιμης ενέργειας που πρέπει να ξεπεραστεί προτού συμβεί οτιδήποτε. Αυτές οι καθολικές μαθηματικές εξισώσεις που μοντελοποιούν τους νόμους της φύσης επιτρέπουν στους επιστήμονες να κατανοήσουν καταστάσεις φαινομενικά πολύ διαφορετικές.

Στην επιστήμη, μια μέθοδος προσέγγισης είναι να εκτελούμε μια παρατήρηση, να κατασκευάζουμε ένα μοντέλο για την παρατηρούμενη συμπεριφορά γράφοντας μια μαθηματική εξίσωση, να εξηγούμε την περίπτωση συγκρίνοντας με παρόμοιες εξισώσεις και, τέλος, να διατυπώνουμε προβλέψεις. Η κατανόησή μας εδράζεται στο μοτίβο ότι ο κόσμος των μορίων ελέγχει τα γεγονότα στον πραγματικό κόσμο. Και χρησιμοποιείτε τα μαθηματικά —ένα αμφίβιο ον, που ζει σε δύο κόσμους— για να εξηγήσετε και τους δύο. ◙

Στα πεδία των αγώνων

Πανιππικός εναντίον ΑΕΤ

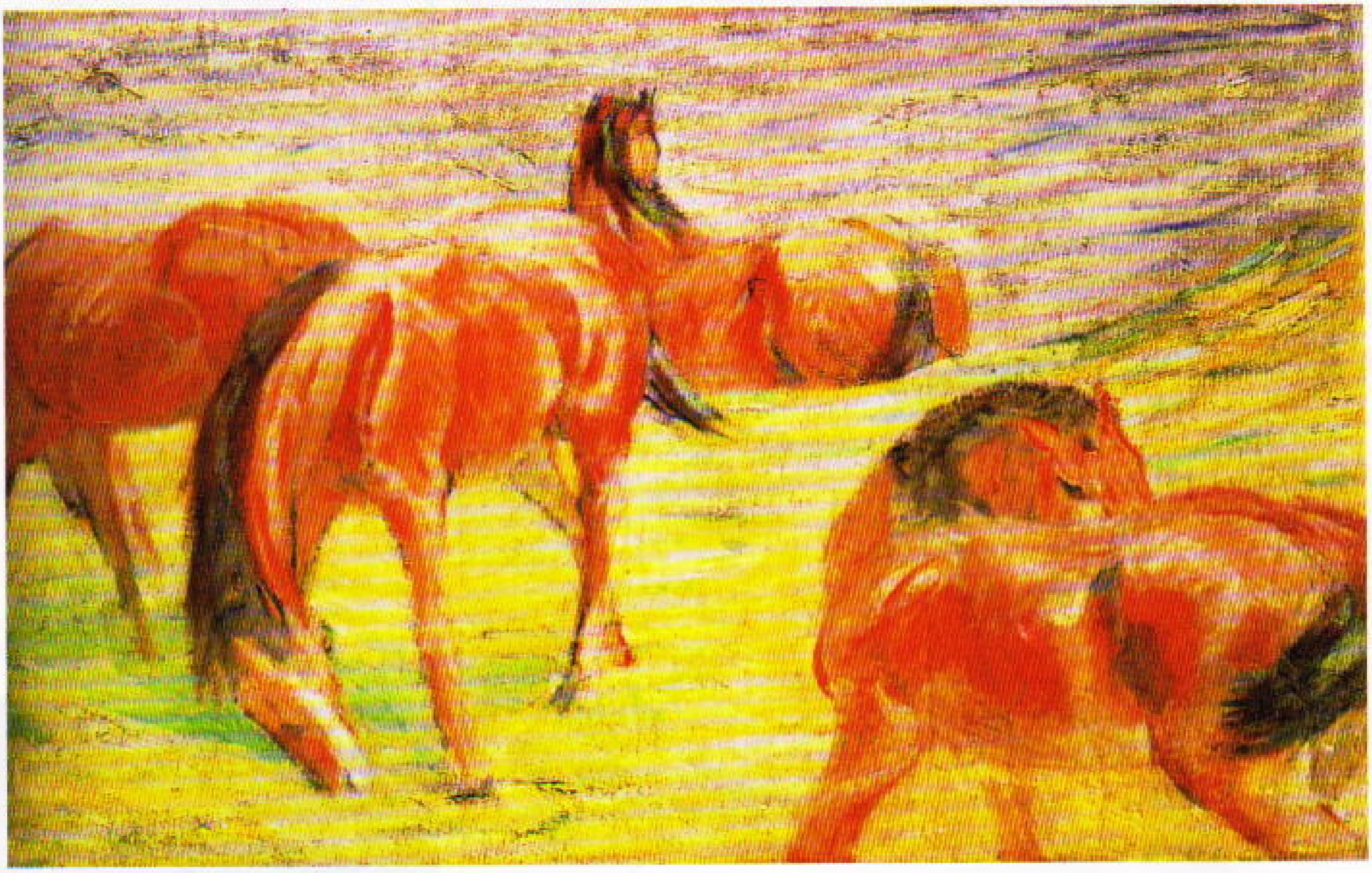
Δρ. Χμ

ΚΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ΙΠΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ, ΤΗ στήλη που είναι αφιερωμένη σε προβλήματα τα οποία επιλύονται κατά τον καλύτερο τρόπο αλογοριθμικά.

Τώρα το καλοκαίρι, ο ελεύθερος χρόνος μας εδώ στη φάρμα του κυρίου Πωλ είναι πολύ περισσότερος. Είναι η εποχή που διοργανώνουμε τους ετήσιους αγώνες ταχύτητας. Και οι δύο ομάδες του κτήματός μας, ο Πανιππικός και η Αθλητική Ένωση Τετραπόδων, έχουν προετοιμαστεί για να διεκδικήσουν το βραβείο των 1.000 δολαρίων που προσφέρει ο κύριος Πωλ στους νικητές (με τη μορφή, βέβαια, ζωοτροφής εξαιρετικής ποιότητας, επώνυμου πεταλώματος, ειδικής κόμμωσης, κ.λπ.). Οι αγώνες διαρκούν σχεδόν ολόκληρο το καλοκαίρι, και νικήτρια ανακηρύσσεται η ομάδα που φτάνει πρώτη τις 50 νίκες.

Μερικές φορές, όμως, ο καιρός χαλάει πολύ απότομα, και είναι αδύνατον να γίνουν αρκετές κούρσες ώστε να υπάρξει ομάδα με 50 νίκες. Το ίδιο συνέβη και φέτος, και ο κύριος Πωλ αποφάσισε να διακόψει τη σειρά των αγώνων τη στιγμή που ο Πανιππικός είχε 35 νίκες και η ΑΕΤ 41. Φυσικά, το πρόβλημά του τώρα είναι πώς να μοιράσει δίκαια το βραβείο στις δύο ομάδες.

Ο Πανιππικός, που έχει παράδοση να βελτιώνει προς το τέλος την απόδοσή του και να ανατρέπει τα αρχικά αρνητικά αποτελέσματα, ήθελε να μοιραστεί στα δύο το βραβείο, υποστηρίζοντας ότι στερήθηκε τη δυνατότητα να διεκδικήσει το βραβείο την περίοδο που θα βελτίωνε την απόδοσή του. Από την άλλη πλευρά, η ΑΕΤ υποστήριξε ότι το βραβείο πρέπει να μοιραστεί ανάλογα με τις νίκες που είχε κάθε ομάδα ώς τη στιγμή που διακόπηκαν οι αγώνες. Με αυτό τον τρόπο, η ΑΕΤ θα έπαιρνε τα 41/76 του



Εικονογράφηση: Franz Marc

ποσού, δηλαδή 539,47 δολάρια. Ωστόσο, ο κύριος Πωλ πιστεύει —η γνωστή ανθρώπινη επιμονή— πως, όταν διακόπτεται μια σειρά αγώνων το χρηματικό βραβείο πρέπει να μοιράζεται ως εξής: ξεκινώντας με δεδομένο τους αγώνες που έχουν ήδη κερδηθεί, ιππολογίζουμε την πιθανότητα να συμπληρώσει πρώτη 50 νίκες μια ομάδα (ας πούμε η ΑΕΤ) αν συνεχιστούν οι αγώνες. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα να νικήσει μια ομάδα στον επόμενο αγώνα βασίζεται στους αγώνες που έχει κερδίσει μέχρι στιγμής. Έτσι, αν το αποτέλεσμα είναι Πανιππικός: 35, ΑΕΤ: 41, τότε η πιθανότητα να νικήσει η ΑΕΤ στον επόμενο αγώνα είναι 41/76. Φυσικά, η πιθανότητα αυτή αλλάζει καθώς εξελίσσεται η εν λόγω εικονική σειρά αγώνων. Από τη στιγμή που γνωρίζετε την πιθανότητα να φτάσει πρώτη μια ομάδα τις 50 νίκες, την πολλαπλασιάζετε επί 1.000, για να βρείτε το δίκαιο μερίδιο του βραβείου γι' αυτή την ομάδα.

Θα χρειαστούν, βέβαια, μερικοί ιππολογισμοί.

ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 5. Γράψτε ένα πρόγραμμα που ιππολογίζει τα κέρδη κάθε ομάδας σύμφωνα με τον κανόνα του κύριου Πωλ. Αναφέρετε τα αποτελέσματά σας για τη σειρά αγώνων που έληξε με 35 νίκες του Πανιππικού και 41 νίκες της ΑΕΤ. Θα υποθέσετε ότι, αν το τρέχον αποτέλεσμα είναι Πανιππικός: H και ΑΕΤ: J, τότε η πιθανότητα να κερδίσει τον επόμενο αγώνα ο Πανιππικός είναι $H/(H+J)$, ενώ η πιθανότητα να τον κερδίσει η ΑΕΤ είναι $J/(H+J)$. Επίσης, αν η πιθανότητα να κερδίσει η ΑΕΤ πρώτη τους 50 αγώνες ισούται με P, τότε πρέπει να πάρει ως μερίδιο τα $P \cdot 1.000$ του βραβείου.

Καιρός να πιάσετε δουλειά. Στείλτε τους ιππολογισμούς σας στη διεύθυνση drmu@cs.uwp.edu. Για να δείτε όλα τα προηγούμενα θέματά μας, κοιτάξτε στη διεύθυνση http://usaco.uwp.edu/cowculations, ή στα τεύχη του *Quantum* από τον Ιανουάριο του 1997.

Λύση του ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ 4

Στο προηγούμενο τεύχος παρουσιάσαμε το εξής, σημαντικό για τη διατροφή μας, πρόβλημα. Τον περασμένο Οκτώβριο, όπως κάθε χρόνο, ο κύριος Πωλ αποθήκευσε σ' ένα μεγάλο σιλό 120.000 κιλά ζωοτροφή, και κατά το τέλος του φθινοπώρου άρχισε να μας μοιράζει σε ημερήσια βάση μια ποσότητα 300 κιλών. Όμως, χωρίς να το αντιληφθούμε, κάποιος διέρρηξε το σιλό και άρχισε να κλέβει μια σταθερή ποσότητα ζωοτροφής. Ο κύριος Πωλ έπαιρνε κάθε μέρα 300 κιλά για την τροφή μας· κάθε βράδυ ο κλέφτης αφαιρούσε ακριβώς το $(1/n)$-οστό της τροφής που υπήρχε στο σιλό. Παραδόξως, αυτή η ποσότητα ήταν πάντα ίση με ακέραιο πλήθος κιλών. Αυτό επανελήφθη επί πέντε ημέρες και νύχτες. Όταν σταμάτησαν οι κλοπές, ο κύριος Πωλ είχε τροφή που μας αρκούσε για 210 ημέρες, αλλά όχι για 211. Για να καθοριστεί σωστά η χρηματική αποζημίωση που θα μας έδινε η ασφαλιστική εταιρεία, ο ειδικός πράκτορας Μαρκ έπρεπε να υπολογίσει την ακριβή ποσότητα τροφής που εκλάπη.

Πριν αρχίσετε να κωδικοποιείτε το πρόβλημα, καλό είναι να κάνετε σ' ένα χαρτί μερικούς πρόχειρους ιππολογισμούς. Για παράδειγμα, σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, ποια είναι η ελάχιστη τιμή του n που αξίζει να εξετάσουμε;

Γνωρίζουμε ότι το σιλό χωράει το πολύ 120.000 κιλά ζωοτροφή. Θα χρησιμοποιήσουμε τη σταθερά `portion` για να περιγράψουμε το ποσοστό της τροφής που αφαιρούσε ο κλέφτης κάθε βράδυ (portion = n). Επί πέντε μέρες και νύχτες αφαιρούμε από την αρχική ποσότητα 300 κιλά και μειώνουμε το υπόλοιπο κατά παράγοντα (portion −1)/portion. Αυτό το επιτυγχάνουμε με τη συνάρτηση `reduce[silage]=(silage-300)(portion-1)/portion`. Αν η τιμή portion είναι πολύ μικρή, τότε έπειτα από πέντε επαναλήψεις αυτής της διαδικασίας η ποσότητα ζωοτροφής που απομένει είναι μικρότερη από την ποσότητα που απαιτείται για 210 ημέρες —δηλαδή, $210 \cdot 300 = 63.000$. Μπορούμε να ενθέσουμε τη συνάρτηση `reduce[silage]` πέντε φορές με την εντολή NestList του Mathematica™.

Ας τη δοκιμάσουμε για portion = 8:

```
reduce[silage_]:=(silage-300)(portion-1)/portion
portion=8;
NestList[reduce,120000,5]//N
```

```
{120000.0, 104737.5, 91382.8, 79697.5, 694.72.8,
60526.2}
```

Η τιμή portion = 8 δεν είναι κατάλληλη, διότι έπειτα από πέντε νύχτες απομένουν μόνο 60.526,6 κιλά, ποσότητα μικρότερη από το όριο των 63.000 κιλών. Αν όμως portion = 9, απομένουν περισσότερα:

```
portion=9;
NestList[reduce,120000,5]//N
```

```
{120000.0, 106400.0, 94311.1, 83565.4, 74013.7,
65523.3}
```

Επομένως, portion = 9 είναι η ελάχιστη τιμή από την οποία μπορούμε να ξεκινήσουμε την έρευνά μας. Μπορούμε να κινηθούμε από πάνω προς τα κάτω ή από κάτω προς τα πάνω.

Από πάνω προς τα κάτω

Δημιουργούμε πρώτα τη συνάρτηση `TopToBottom[silage]` η οποία υπολογίζει την ποσότητα ζωοτροφής που έχει απομείνει έπειτα από πέντε μέρες και νύχτες. Παρατηρήστε ότι, αν η `TopToBottom[silage]` είναι ακέραιη, τότε η ποσότητα ζωοτροφής που απομένει κάθε νύχτα είναι επίσης ακέραιη. Συνεπώς, δεν χρειάζεται να ελέγχετε κάθε βράδυ αν η ζωοτροφή που απομένει είναι ακέραιος αριθμός, αλλά μόνο έπειτα και από τις πέντε νύχτες. Σας αφήνω να σκεφτείτε το θέμα. Ιδού η συνάρτηση `TopToBottom[silage]`:

```
Clear[silage]
portion=9;
TopToBottom[silage_]=Nest[reduce,silage,5]
```

$$\frac{8\left(-300+\frac{8\left(-300+\frac{8\left(-300+\frac{8\left(-300+\frac{8(-300+\text{silage})}{9}\right)}{9}\right)}{9}\right)}{9}\right)}{9}$$

Ξεκινάμε με το σιλό γεμάτο 120.000 κιλά ζωοτροφή. Όσο η συνάρτηση `TopToBottom[silage]` δεν είναι ακέραιη (`!IntegerQ`), αφαιρούμε ένα κιλό (`silage--`) και προσπαθούμε ξανά. Όταν η `TopToBottom[silage]` γίνει ακέραιη, έχουμε μια λύση:

```
silage=120000;
While[!IntegerQ[TopToBottom[silage]],silage-];
Print[«Αρχή»,silage,«Τέλος»,
TopToBottom[silage]];
Print[«Ο κλέφτης πήρε»,silage-
TopToBottom[silage]-1500]
Αρχή 115698,Τέλος 63136
Ο κλέφτης πήρε 51062
```

Από κάτω προς τα πάνω

Θεωρείται κακή μορφή προγραμματισμού η δημιουργία ενός αλγορίθμου που απλώς δοκιμάζει όλες τις δυνατότητες και αναζητεί τη λύση μέσω της «εξαντλητικής απαρίθμησης». Το πρόβλημα της ζωοτροφής μάς δίνει μια τέτοια δυνατότητα. Αν και δεν είναι δυνατόν να εξαλείψουμε τελείως το στοιχείο της «εξαντλητικής απαρίθμησης», μπορούμε να τη μειώσουμε δραστικά, αν αντιμετωπίσουμε διαφορετικά το πρόβλημα —συγκεκριμένα, ανάποδα. Ας ξεκινήσουμε από την αντίθετη κατεύθυνση —από τη στιγμή που, έπειτα από πέντε μέρες και νύχτες, καταλήγουμε με τουλάχιστον 63.000 κιλά ζωοτροφή— και ας κινηθούμε από κάτω προς τα πάνω αναζητώντας παντού ακεραίους. Πρώτα κατασκευάζουμε τη συνάρτηση `increase[silage]` που υπολογίζει την ποσότητα ζωοτροφής την οποία είχαμε πριν φάνε ένα μέρος της τα ζώα και πριν κλέψει ένα μέρος της ο διαρρήκτης:

```
Clear[silage,increase]
portion=9;
increase[silage_]:=silage*portion/(portion-1)
+300
```

Ορίζουμε τη συνάρτηση `BottomToTop[silage]`, που χρησιμοποιεί την εντολή `Nest` για να πάει πίσω πέντε μέρες και να υπολογίσει το ποσόν της αρχικής ζωοτροφής. Αν η `BottomToTop[silage]` είναι ακέραιη, τότε έχουμε μια ακέραιη ποσότητα έπειτα από κάθε νύχτα:

```
BottomToTop[silage_]=Nest[increase,silage,5]
```

$$300 + \frac{9(300 + \frac{9(300 + \frac{9(300 + \frac{9(300 + \frac{9\,silage}{8})}{8})}{8})}{8})}{8}$$

Αρχίζουμε με 63.000 κιλά ζωοτροφής στο σιλό. Όσο η `BottomToTop[silage]` δεν είναι ακέραιη (`!IntegerQ`), προσθέτουμε ένα κιλό (`silage++`) και προσπαθούμε ξανά. Από τη στιγμή που η `BottomToTop[silage]` γίνει ακέραιη, έχουμε μια λύση:

```
silage=63000;
While[!IntegerQ[BottomToTop[silage]],silage++];
Print[«Αρχή»,BottomToTop[silage],«Τέλος»,
silage];
Print[«Ο κλέφτης πήρε»,BottomToTop[silage]-
silage-1500]
Αρχή 115698, Τέλος 63136
Ο κλέφτης πήρε 51062
```

Πηγαίνοντας από κάτω προς τα πάνω, το πρόγραμμα είναι 35 φορές ταχύτερο, και βρίσκει τη λύση ουσιαστικά αμέσως.

Ανάδραση

Μια ομάδα τριών σπουδαστών—οι David Click, Mike Powers και Laura Arthur— και ο καθηγητής τους Thomas O'Neil, από το Shenandoah Valley Covernor's School της Βιρτζίνια, εξέτασαν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας το Mathematica και απέκλεισαν ένα μεγάλο πλήθος τιμών της portion, μεγαλύτερων του 9. Ιδού η λύση τους, ελαφρά τροποποιημένη, ώστε να συμφωνεί με την προηγούμενη συζήτηση. Δοκιμάζει όλες τις τιμές της portion από το 9 έως το 2.560, και ολοκληρώνεται σε λίγα λεπτά. Την πρώτη φορά που θα δοκιμάσετε το πρόγραμμα, μπορείτε να αντικαταστήσετε το 2.560 με το 25, για να πάρετε γρήγορα την απάντηση.

```
increase[silage_]:=silage*portion/(portion-1)+300
For[
   portion=9,portion<=2560,portion++,
   For[
      silage=63000,silage<63300,silage++,
      startSilage=Nest[increase,silage,5];
      If[IntegerQ[startSilage]&&
(startSilage<=120000),
         Print[
         «Αρχική ποσότητα=»,startSilage,
         «Τελική ποσότητα=»,silage,
         «Το n ισούται με»,portion,
         «Ποσότητα που εκλάπη=»,startSilage-
         silage-1500]
         ,continue]
      ]
]
Αρχική ποσότητα = 115698, Τελική ποσότητα = 63136
Το n ισούται με 9, Ποσότητα που εκλάπη = 51062
```

Οι τέσσερις αναγνώστες μου παρατηρούν:

«Από πρακτική άποψη, κανείς αξιοπρεπής διαρρήκτης δεν θα ασχολιόταν κάθε νύχτα με κλοπή ποσότητας μικρότερης του 1/100. Αν συνδυάσουμε αυτή την παρατήρηση με το γεγονός ότι ο Δρ. Χμ αναφέρει πως μια αγελάδα πρόσεξε ένα φορτηγάκι γεμάτο ζωοτροφή, πρέπει να συμπεράνουμε ότι έχουμε βρει τη μοναδική λύση. Από καθαρά μαθηματική άποψη, όμως, χρειαζόμαστε μια απόδειξη ότι δεν υπάρχει λύση για $n > 2.560$. Η ασφαλιστική εταιρεία θα χαιρόταν ιδιαίτερα αν την έβρισκε».

Ένα ακόμη πρόγραμμα που βρίσκει τη σωστή λύση, γραμμένο σε γλώσσα C, έστειλε ο Vincent Béron, 18 ετών, σπουδαστής στο Collège de Bois-de-Boulogne του Μόντρεαλ, στο Κεμπέκ του Καναδά.