

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 1998
ΤΟΜΟΣ 5 / ΤΕΥΧΟΣ 4
1.700 ΔΡΧ.

Πρέπει να τρέχετε ή όχι όταν ξεσπά ξαφνική νεροποντή;



- Συνέντευξη με τον Γρηγόρη Νικόλη
- Μπίνγκο και πιθανότητες
- Θαύματα, οράματα και σύγχρονη φυσική
- Μαθηματικές σκνταλοδρομίες
- Πώς σχηματίζονται οι παλλίροιες;
- Ξεμπλέκοντας μαθηματικούς κόμβους
- Η πίεση του φωτός και οι εφαρμογές της
- Η συμμετρία στην άλγεβρα



Μουσείο Καλών Τεχνών της Βουτιώνης, ΗΠΑ.

Ο ανεμοστρόβιλος: το όραμα του Ιεζεκιήλ με τα χερουβείμ και τους κύκλους πλήρεις οφθαλμών (Ιεζεκιήλ 1, 4-28), Αγγλία (περίπου 1803-1805), του William Blake

Η ΕΙΚΟΝΙΖΟΜΕΝΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΟΡΑΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΙΕΖΕΚΙΗΛ αποτελεί κυριολεκτική απόδοση της περιγραφής του προφήτη. Εντούτοις, έχοντας υπόψη μας τις «ιδιοτροπίες» της οπτικής αντίληψης, θα μπορούσαμε να αναρωτηθούμε αν η περιγραφή του Ιεζεκιήλ είναι περισσότερο αποκάλυψη εκείνου που νόμισε πως είδε παρά η ακριβής αναπαράσταση των πραγματικών ειδώλων που εστίαστηκαν στον αμφιβληστροειδή χιτώνα των ματιών του.

Αυτό που νομίζουμε πως βλέπουμε και εκείνο που κοιτάζουμε είναι συχνά πολύ διαφορετικά πράγματα (ανατρέξτε, για παράδειγμα στο άρθρο «Μια άλλη ματιά» του τεύχους Σεπτεμβρίου / Οκτωβρίου 1997). Έτσι, ο καπετάνιος ενός αλιευτικού, ενώ ήταν σίγουρος πως έβλεπε

ένα κοπάδι ψαριών, απογοητευμένος διαπιστώνει πως πρόκειται για τη σκιά ενός μικρού σύννεφου.

Τα προβλήματα της αντίληψης πολλαπλασιάζονται όταν συναντάμε κάτι απροσδόκητο ή καινούργιο. Ως εκ τούτου, εκείνοι που αναζητούν μια μάλλον φυσική παρά μεταφυσική εξήγηση του οράματος του Ιεζεκιήλ θα μπορούσαν να συμφωνήσουν με τον D.H. Menzel, ο οποίος σκέφτηκε πως ο προφήτης είδε ένα ασυνήθιστο οπτικό φαινόμενο και προσπάθησε να το περιγράψει με όρους οικείων του εικόνων. Για να διαβάσετε περισσότερα σχετικά με το όραμα του Ιεζεκιήλ ή και για άλλα «θαύματα» καθώς και για τα ατμοσφαιρικά φαινόμενα που είναι γνωστά ως άλως, γυρίστε στη σελίδα 28.

QUANTUM

ΙΟΥΛΙΟΣ / ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 1998

ΤΟΜΟΣ 5 / ΤΕΥΧΟΣ 4



Εικονογράφηση: Marguerite Renais

Να τρέχει κανείς ή να μην τρέχει; Ιδού το δίλημμα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε μόλις ξεσπάσει ξαφνική νεροποντή.

Σεις, στη δυσοίωνα προοπτική να μουσκέψετε, το βάζεται πανικόβλητος στα πόδια ορμώντας μπροστά ως δρομέας ταχύτητας ή περπατάτε ήρεμα, πηδώντας από στηθέο σε καμάρα, ευχαριστημένος για την ικανότητά σας να αντιμετωπίζετε ψύχραιμα τη μητέρα φύση;

Για να ανακαλύψετε ποιος υιοθετεί τη σωστή στάση, γυρίστε στη σελίδα 49. Στο σχετικό άρθρο θα βρείτε μια σε βάθος ανάλυση του προβλήματος και την οριστική του απάντηση.

ΑΡΘΡΑ

- 4** Παιχνίδια με πιθανότητες
Είναι δίκαιο το μπίνγκο;
Mark Krosky
- 10** Ωκεάνιες ταλαντώσεις
Περί των παθιρροιών
V.E. Belonuchkin
- 16** Περιπλοκοί υπολογισμοί
Θεωρία κόμβων
O. Viro
- 28** Ατμοσφαιρικές ανωμαλίες
Ερμηνεύοντας τα θαύματα
V. Novoseltzev

ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2** **Ο κόσμος των κβάντων**
Το αίνιγμα των μέσων όρων
- 15** **Πώς λύνεται;**
- 22** **Συνέντευξη**
Ο Γρηγόρης Νίκολης μιλά στο ελληνικό Quantum
- 34** **Στο εργαστήριο**
Διασκεδαστική ηλεκτρολύση
- 36** **Καλειδοσκόπιο**
Περί ιδανικών αερίων
- 38** **Στο μαυροπίνακα I**
Μαθηματικές σκυταλοδρομίες
- 40** **Στα πεδία της φυσικής**
Γνώση «εις βάθος»
- 45** **Gradus ad Parnassum**
Συμμετρίας συνέχεια
- 47** **Αναδρομές**
Η πίεση του φωτός
- 49** **Με λίγη φαντασία**
Πώς να αποφύγετε τη βροχή
- 52** **Στο μαυροπίνακα II**
Ομογενείς εξισώσεις
- 55** **Σπαζοκεφαλιές**
- 56** **Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις**
- 70** **Ιππολογισμοί**
Το καλό σκυλί ξέρει κι άλλο μονοπάτι

Το αίνιγμα των μέσων όρων

*«Τι είναι στη ζωή που να μην είν' αίνιγμα, γρίφος;
Μα κι η ζωή η ίδια δεν είναι γρίφος, αίνιγμα;»*

—Νίκος Εγγονόπουλος

ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΟΥ ΠΛΑΘΟΝΤΑΙ ΜΕ τη στατιστική γίνονται γεγονότα. Οι αριθμοί χωρίς τη στατιστική καταλήγουν ανέκδοτα. Κατά την επιστημονική του εκπαίδευση, ο νέος ερευνητής μαθαίνει ότι μία και μοναδική παρατήρηση δεν μπορεί να αποκαλύψει τις αληθινές προθέσεις και τις λειτουργίες της μητέρας φύσης. Χρειάζονται πολλές παρατηρήσεις· από τα δεδομένα πρέπει να εξαχθεί ο μέσος όρος και να ελεγχθεί η στατιστική σημαντικότητά του. Υπάρχει πάντοτε η πιθανότητα παρουσίας τυχαίων φαινομένων και, καθώς η επιστήμη αποσκοπεί στο να διακρίνει τα τυχαία γεγονότα από τις πραγματικές διαδικασίες, ο επιστήμονας πρέπει συνεχώς να φυλάγεται από τυχαία σφάλματα ή πιθανές συμπτώσεις.

Όταν όμως υπολογίζουμε το μέσο όρο των δεδομένων μας, προσπαθώντας να στηρίξουμε τις παρατηρήσεις μας, αρχίζουν τα «παράξενα». Πουθενά το πρόβλημα δεν εμφανίζει εντονότερο παραλογισμό από τη στατιστική της εργασίας. Οι μελέτες δείχνουν ότι τη χρονιά *X* στην πόλη *A* ζούσαν τόσο άνθρωποι. Αλλά τη χρονιά *Y* άνθισε οικονομικά η πόλη *B*· η πόλη *A* παράκμασε. Εξάγεται, λοιπόν, το λογικό συμπέρασμα ότι το εργατικό δυναμικό μετακινήθηκε από την πόλη *A* στην πόλη *B*. Εάν όμως μελετηθούν χωριστά τα μεμονωμένα γεγονότα και άτομα, αποδεικνύεται ότι είναι πολύ λίγοι αυτοί που πράγματι πήγαν από την πόλη *A* στην *B*. Όντως εγκατέλειψαν την πόλη *A*, αλλά κατέληξαν στις

πόλεις *Γ*, *Δ*, ... Στις κοινωνικές επιστήμες, το να μιλάμε για το «μέσο όρο» είναι εξαιρετικά αποκαρδιωτικό· περιγράφουμε τι σκέφτεται ο μέσος άνθρωπος, αναλύουμε πώς αισθάνεται ο μέσος άνθρωπος, και τα όμοια. Η λογική του μέσου όρου βρίσκεται παντού. Έχετε ποτέ αναρωτηθεί τι σημαίνει ότι η κάθε οικογένεια έχει 3,7 παιδιά; Υποθέτω ότι αυτή η μέτρηση είναι χρήσιμη για τους δημογράφους ή τους πολιτικούς προγραμματιστές, δεν δείχνει όμως τι συμβαίνει στο επίπεδο της προσωπικής ζωής. Το να ζεις στο μέσο όρο είναι τρομαχτικό.

Πρόσφατα, ο George Miller — πρύτανης της αμερικανικής ψυχολογίας— μου ανέφερε μια μελέτη που έκανε πριν από πολλά χρόνια ένας συνεργάτης του, ο Joyce Weil, σχετικά με τη γλωσσική ανάπτυξη των παιδιών. Την εποχή εκείνη υπήρχε η αντίληψη ότι τα παιδιά ακολουθούν καθορισμένα στάδια στη γλωσσική τους ανάπτυξη, έτσι ώστε το παιδί των τεσσάρων ετών κάνει πράγματα που δεν μπορεί να κάνει το παιδί των τριών, κι αυτό πάλι κάνει πράγματα που δεν μπορεί να κάνει το παιδί των δύο ετών, κ.ο.κ. Μελετήθηκαν, λοιπόν, παιδιά αυτών των ηλικιών, προσδιορίστηκαν οι γλωσσικές τους ικανότητες και υπολογίστηκαν οι μέσοι όροι. Όταν αναλύθηκαν αυτοί οι μέσοι όροι, εμφανίστηκε πράγματι ένα σταδιακό πρότυπο, στο οποίο στηρίχθηκαν οι ψυχολόγοι για να υποστηρίξουν τις θεωρίες της κατά στάδια ανάπτυξης της γλώσσας. Ο Weil, εντούτοις, μελέτησε τι α-

κριβώς κάνει το κάθε παιδί ξεχωριστά στη διάρκεια της ανάπτυξής του. Η εν λόγω διαχρονική προσέγγιση αποκάλυψε ότι τα παιδιά δεν ακολουθούν διόλου το σχήμα των μέσων όρων. Τόσο το πρότυπο του μέσου όρου όσο και η θεωρία αναπτύχθηκαν παρά το ότι οι μέσοι όροι των δεδομένων αποτελούσαν μια στατιστική ανωμαλία που δεν αντανάκλασε τίποτε στον πραγματικό κόσμο. Ο Weil δεν κατάφερε να δημοσιεύσει την εργασία του. Η πίστη της επιστημονικής κοινότητας στους μέσους όρους είχε παραγάγει μια ψευδή θεωρία την οποία έπρεπε τώρα να υπεραστεί η ίδια.

Ολ' αυτά τα αναφέρω επειδή οδηγήθηκα κι εγώ σε μια απλή αλήθεια όταν αντιμετώπισα ένα ανάλογο θέμα. Έχει να κάνει με την ανάγκη, όπως πάντα, της αποκάλυψης των κρυμμένων σχέσεων σε ένα σύνολο δεδομένων με πολύ «θόρυβο». Στη συγκεκριμένη περίπτωση, αναζητούσαμε τις περιοχές εκείνες των δύο ημισφαιρίων του εγκεφάλου που μπορεί να εμφανίζουν ασυμμετρία. Πάνω από 100 χρόνια κλινικών παρατηρήσεων βεβαιώνουν ότι το αριστερό ημισφαίριο του ανθρώπινου εγκεφάλου παρουσιάζει μια εξειδίκευση στις γνωστικές λειτουργίες και ειδικότερα στη γλώσσα. Αναζητώντας κι άλλες εξειδικευμένες περιοχές του αριστερού εγκεφάλου, ορισμένοι επιστήμονες ανέφεραν ότι ένα τμήμα του κροταφικού λοβού είναι μεγαλύτερο στην αριστερή πλευρά του απ' ό,τι στη δεξιά. Σήμερα, ωστόσο, γνωρίζουμε ότι αυτή η

διαβόητη ασυμμετρία αντανakλά την πτύχωση μόνο του φλοιού κι όχι την πραγματική επιφάνειά του. Από τότε που έγιναν οι αρχικές ανατομικές παρατηρήσεις, στα μέσα της δεκαετίας του 1960, ως σήμερα έχουν σημειωθεί σημαντικές πρόοδοι στην απεικόνιση του εγκεφάλου μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή. Οι νέες αυτές μέθοδοι μας επιτρέπουν να αποκτήσουμε ακριβή εικόνα του ζώντος εγκεφάλου και να αναλύσουμε με κάθε λεπτομέρεια την τρισδιάστατη δομή του —διαδικασία η οποία διορθώνει τα αναπόφευκτα σφάλματα της δισδιάστατης ανάλυσης. Όταν αναλύεται με τον τρόπο αυτό ο ανθρώπινος εγκέφαλος, η ασυμμετρία των κροταφικών λοβών εξαφανίζεται!

Η ίδια όμως τεχνολογία μας επιτρέπει να χωρίσουμε το κάθε εγκεφαλικό ημισφαίριο σε 27 περίπου περιοχές και να συγκρίνουμε τον αριστερό με τον δεξιό εγκέφαλο, αναζητώντας άλλες πιθανές περιοχές που θα μπορούσαν να εμφανίζουν ασυμμετρίες. Υπολογίζουμε, ασφαλώς, το μέσο όρο των μετρήσεων της επιφάνειας κάθε περιοχής και κατόπιν συγκρίνουμε το αριστερό με το δεξί τμήμα του εγκεφάλου. Έτσι βρήκαμε ότι στον ανθρώπινο εγκέφαλο, κατά μέσο όρο, δεν υπάρχουν ασυμμετρίες. Ωστόσο, το πρόβλημα έγκειται στο ότι ο κάθε ξεχωριστός εγκέφαλος που εξετάσαμε είχε τις δικές του ιδιομορφίες.

Οι μέσοι όροι, σ' αυτή την περίπτωση, δίνουν την εικόνα ενός ιδεατού εγκεφάλου. Στον πραγματικό βιολογικό κόσμο, όμως, οι σχετικές διακυμάνσεις αποδεικνύονται μεγάλες. Όταν όλες αυτές οι διαφορές εκφράζονται με το μέσο όρο τους, καταλήγουμε σε έναν εγκέφαλο που δεν υπάρχει στη φύση. Επομένως, και ο ισχυρισμός για συγκεκριμένες ασύμμετρες περιοχές οι οποίες σχετίζονται με εξειδικευμένες νοητικές λειτουργίες είναι λανθασμένος. Στην πραγματικότητα, λοιπόν, αυτό που φαίνεται να ισχύει είναι πως ο ένας και μοναδικός εγκέφαλος μας ευθύνεται για τη μία και μοναδική νόησή μας.

—Michael Gazzaniga

Ο Michael Gazzaniga είναι διευθυντής του Κέντρου Νευροεπιστημών και καθηγητής νευροψυχολογίας στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας στο Ντράιβις.

QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Kvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης

Gerald F. Wheeler, Διοικητικός διευθυντής, NSTA

Αντεπιστέλλον εκδότης

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Kvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί διευθυντές σύνταξης

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Kvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

William P. Thurston, Μετάλλιο Φιλντς (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη

Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης

Kenneth L. Roberts

Αντεπιστέλλον αρχισυντάκτης

Mike Donaldson

Υπεύθυνος εικονογράφησης

Sergey Ivanov

Σύμβουλοι σύνταξης

Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Irina Oleynik, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Kvant

Συμβουλευτική επιτροπή

Bernard V. Khoury, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT

John A. Thorpe, Διοικητικός διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάνα

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λυκείο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασσαχουσέτη

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λυκείο του Ρίβερντεϊλ, Λουιζιάνα

Ted Vittitoe, Συνταξιούχος καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα

Peter Vunovich, Κέντρο Θετικών Επιστημών και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίτσιγκαν

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής

Αλέκος Μάραλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: Στέλιος Ζαχαρίου -μαθηματικός, Στράτος Μάκρας -μαθηματικός, Μιχάλης Λάμπρου -μαθηματικός, Αθηνά Τσαγκογέωργα -φυσικός, Βαγγέλης Καφετζόπουλος -ψυχίατρος, Θεόδωρος Πιερράτος -φυσικός, Μαργαρίτη Προέδρου -φυσικός, Γιώργος Κατσιλιέρης -φυσικός και Αλέκος Μάραλης -φυσικός

Ειδικός συνεργάτης
Γ. Ευαγγελόπουλος

Τυπογραφικές διορθώσεις
Μ. Τσαούση

Τυποειχνική επιμέλεια
Θ. Ντιούσης

Υπεύθυνη λογιστρίτου
Μ. Μάραλη

Επιστημονικοί σύμβουλοι

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σκανδάλης, Επίκουρος καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός επιστήμων Α' βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας

Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στοιχειοθεσία, σελιδοποίηση
Αβ. Μαχαιρίδης

Φιλμ, μοντάζ
Χρ. Μητσης

Εκτύπωση
Ν. Πουλόπουλος

Βιβλιοδεσία
Θ. Αρχοντουλάκης

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τον Εκδοτικό οίκο Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο
Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάραλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάραλης.
Διαφημίσεις και κεντρική διαθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο,
Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα,
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.
Βιβλιοπωλείο: Νέα στοά Αρσάκειου (Πανεπιστημίου 49),
105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 1.700 δρχ.
Είδημα συνδρομή 9.000 δρχ. για ιδιώτες, 16.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 1.700 δρχ.

Είναι δίκαιο το μπίνγκο;

Όλα εξαρτώνται από τις κάρτες

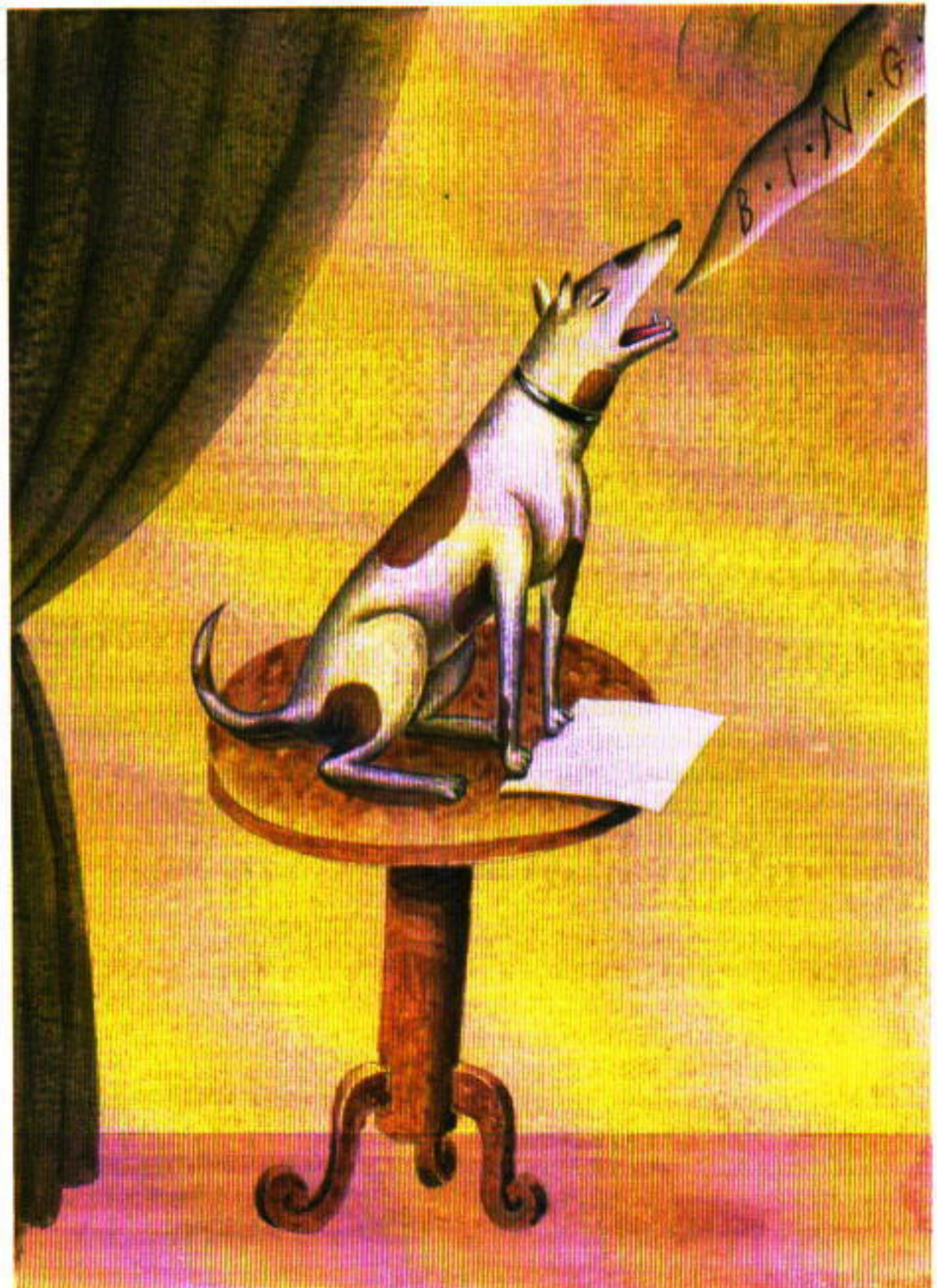
Mark Krosky

ΣΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΤΟΥ ΜΠΙΝΓΚΟ ΚΑΘΕ παίκτης έχει μία ή περισσότερες κάρτες, διαστάσεων 5 × 5. Υπάρχει ένα κουτί με σφαίρες που είναι αριθμημένες από το 1 έως το 75, και κάθε φορά επιλέγεται τυχαία μία σφαίρα χωρίς αντικατάσταση, έως ότου εμφανιστούν όλοι οι αριθμοί μιας γραμμής, στήλης ή κύριας διαγωνίου της κάρτας κάποιου παίκτη. Τότε, ο παίκτης που έχει αυτή την κάρτα φωνάζει «Μπίνγκο!» και κερδίζει.

Σε περίπτωση ισοπαλίας, κερδίζει ο παίκτης που φωνάζει πρώτος «Μπίνγκο!». Στην πρώτη στήλη κάθε κάρτας υπάρχουν μόνο αριθμοί από το 1 έως το 15, στη δεύτερη από το 16 έως το 30, στην τρίτη από το 31 έως το 45, στην τέταρτη από το 46 έως το 60 και στην πέμπτη από το 61 έως το 75. Για ευκολία, μόλις επιλεγεί μια σφαίρα, ανακοινώνεται και ο αριθμός και το γράμμα της στήλης. Το κεντρικό τετράγωνο κάθε κάρτας δίνεται ως «ελεύθερο τετράγωνο». Στο Σχήμα 1 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα κάρτας του μπίνγκο.

B	I	N	G	O
1	17	31	48	74
4	23	33	57	68
11	26	ελεύθερο	46	62
8	19	44	50	71
14	24	41	60	65

Σχήμα 1



Θα μπορούσε κάποιος να υποθέσει ότι η μαθηματική ανάλυση του μπίνγκο είναι αδύνατη, διότι οι παίκτες δεν φαίνεται να χρειάζεται να πάρουν κάποια απόφαση στρατηγικής. Ωστόσο, κάθε παίκτης παίρνει μια απόφαση: επιλέγει την κάρτα του. Βεβαίως, όταν δεν έχουμε πληροφορίες για τις κάρτες των άλλων παικτών, οποιαδήποτε επιλογή κάρτας είναι εξίσου καλή με κάθε άλλη. Όμως στις αίθουσες του μπίνγκο οι παίκτες κρατούν συνήθως μπροστά τους τις κάρτες χωρίς να προσπαθούν να τις κρύψουν, και έτσι είναι λογικό να υποθέσουμε ότι μπορούμε να δούμε τις κάρτες των άλλων παικτών. Αυτοί οι δύο κανόνες κάνουν το μπίνγκο ενδιαφέρον: Οι παίκτες έχουν το δικαίωμα να διαλέξουν τις κάρτες τους και έχουν τη δυνατότητα να δουν τις κάρτες των άλλων παικτών.

Αντί να αναλύσουμε το μπίνγκο διαστάσεων 5×5 , θα μελετήσουμε ένα παιχνίδι μπίνγκο όπου σε κάθε κάρτα αντιστοιχεί ένας μόνο νικητήριος συνδυασμός, αποτελούμενος από δύο αριθμούς. Αυτό το απλοποιημένο μπίνγκο αναλύεται πολύ πιο εύκολα και διαθέτει πολλές από τις βασικές ιδιότητες του συνηθισμένου παιχνιδιού.

2 × 1 μπίνγκο

Στο μπίνγκο διαστάσεων 2×1 κάθε κάρτα έχει δύο διαφορετικούς αριθμούς και κερδίζει όταν επιλεγούν και οι δύο. Θα απλοποιήσουμε ακόμη περισσότερο την κατάσταση καταργώντας τον περιορισμό να εμφανίζονται συγκεκριμένοι αριθμοί σε συγκεκριμένες

1	2
---	---

Σχήμα 2

μόνο στήλες. Ένα παράδειγμα τέτοιας κάρτας παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.

Πρόβλημα 1. Εστω ότι υπάρχουν 10 σφαίρες. Πόσες διαφορετικές κάρτες του 2×1 μπίνγκο υπάρχουν με αριθμούς από το σύνολο $\{1, \dots, 10\}$;

Πρόβλημα 2. Εστω ότι υπάρχουν n σφαίρες. Πόσες διαφορετικές κάρτες του 2×1 μπίνγκο υπάρχουν με αριθμούς από το σύνολο $\{1, \dots, n\}$;

Αφού υπάρχει ένας μόνο νικητήριος συνδυασμός για κάθε κάρτα, τα παιχνίδια του 2×1 μπίνγκο αναλύο-

1	2		
1	3	2	3
1	4	2	4
1	5	2	5
...
1	n	2	n

Σχήμα 3

νται πολύ ευκολότερα από τα συνηθισμένα παιχνίδια μπίνγκο. Για να απλοποιήσουμε περισσότερο την κατάσταση, θα υποθέσουμε ότι όλοι οι παίκτες έχουν την ίδια πιθανότητα να φωνάξουν «Μπίνγκο!» όταν υπάρχει ισοπαλία. Επομένως, οι ισοπαλές κάρτες μοιράζονται το βραβείο εξίσου. Για παράδειγμα, αν δύο κάρτες κάνουν μπίνγκο ταυτόχρονα, θα θεωρήσουμε ότι κερδίζουν από μισή νίκη.

Ας θεωρήσουμε τη συλλογή καρτών του Σχήματος 3. Αποτελείται από όλες τις κάρτες που έχουν πάνω τους ένα 1 ή ένα 2. Υπάρχουν συνολικά n σφαίρες, όπου $n \geq 4$. Στη συνέχεια, το σύμβολο $\{a, b\}$ θα παριστάνει την κάρτα με τους αριθμούς a και b . Επισημαίνουμε ακόμη ότι για την ανάλυσή μας οι κάρτες $\{1, 2\}$ και $\{2, 1\}$ θεωρούνται ίδιες.

Πρόβλημα 3. Πόσες από τις κάρτες αυτής της συλλογής περιέχουν τον αριθμό 3;

Πρόβλημα 4. Πόσες από τις κάρτες αυτής της συλλογής περιέχουν τον αριθμό 1; Πόσες τον αριθμό 2; Πόσες κάποιον άλλο συγκεκριμένο αριθμό;

Πρόβλημα 5. Αποδείξτε ότι συνολικά υπάρχουν $2n - 3$ κάρτες.

Μοιράζουμε, τώρα, τις κάρτες σε ισοάριθμα άτομα και αρχίζουμε να παίζουμε. Είναι το παιχνίδι δίκαιο; Αφού υπάρχουν $2n - 3$ κάρτες, το παιχνίδι θα είναι δίκαιο αν η πιθανότητα νίκης για κάθε παίκτη είναι $1/(2n - 3)$. Οι αριθμοί 1 και 2 στις κάρτες εμφανίζονται συχνότερα από κάθε άλλον αριθμό, επομένως αξίζει να μελετήσουμε την κάρτα $\{1, 2\}$. Ας υπολογίσουμε την πιθανότητα νίκης αυτής της κάρτας.

Ας δούμε τις δύο πρώτες σφαίρες που επιλέγονται. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις: οι πρώτες δύο σφαίρες έχουν το 1 και το 2, μία μόνο από τις

1	2
1	3
1	4
...	...
1	n
3	4

Σχήμα 4

δύο πρώτες σφαίρες έχει το 1 ή το 2 και, τέλος, καμία από τις δύο πρώτες σφαίρες δεν έχει το 1 ή το 2.

- Αν οι δύο πρώτες σφαίρες εμφανίζουν τους αριθμούς 1 και 2 (αδιάφορο με ποια σειρά), τότε η κάρτα $\{1, 2\}$ κερδίζει.

- Αν μόνο μία από τις δύο πρώτες σφαίρες περιέχει 1 ή 2, τότε η κάρτα $\{1, 2\}$ χάνει. Για παράδειγμα, αν οι πρώτες δύο σφαίρες είναι 1 και 3, τότε κερδίζει η κάρτα $\{1, 3\}$ και χάνει η $\{1, 2\}$.

- Αν δεν υπάρχει ούτε το 1 ούτε το 2 στις δύο πρώτες σφαίρες, τότε, μόλις επιλεγεί ένα 1 ή ένα 2, αρκετές κάρτες θα κερδίσουν ταυτόχρονα, και καμία από αυτές δεν θα είναι η $\{1, 2\}$. Για παράδειγμα, αν επιλεγούν διαδοχικά οι σφαίρες 3, 5, 8, 6, 2, τότε κερδίζουν οι τέσσερις κάρτες $\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 6\}$ και $\{2, 8\}$, και καθεμιά τους παίρνει το ένα τέταρτο του βραβείου.

Συνεπώς, η κάρτα $\{1, 2\}$ κερδίζει αν και μόνο αν οι δύο πρώτες σφαίρες είναι οι 1 και 2.

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι η πιθανότητα νίκης της κάρτας $\{1, 2\}$ είναι $2/[n(n - 1)]$. Συγκρίνετέ την με τη «δίκαιη» πιθανότητα νίκης $1/(2n - 3)$.

Είναι φυσικό τώρα να αναζητήσουμε τις πιθανότητες νίκης των άλλων καρτών.

Πρόβλημα 7. Ποια κάρτα έχει μεγαλύτερη πιθανότητα νίκης: η $\{1, 3\}$ ή η $\{1, 4\}$; Τι ισχύει για ένα τυχαίο ζεύγος καρτών διαφορετικών από την $\{1, 2\}$;

Πρόβλημα 8. Υπολογίστε την πιθανότητα νίκης μιας τυχαίας κάρτας διαφορετικής από την $\{1, 2\}$. Συγκρίνετέ την με τη δίκαιη πιθανότητα $1/(2n - 3)$.

Αφού η πιθανότητα νίκης της κάρτας $\{1, 2\}$ είναι πολύ μικρότερη από αυτήν που θα ίσχυε σε ένα δίκαιο παι-

χνίδι, θα την ονομάσουμε κάρτα του «μεγάλου ηττημένου». Παρατηρήστε ότι όσο αυξάνει το πλήθος n των σφαιρών τόσο χειροτερεύει το παιχνίδι για την κάρτα του «μεγάλου ηττημένου».

Στο προηγούμενο παράδειγμα η κάρτα του «μεγάλου ηττημένου» ήταν σε εξαιρετικά μειονεκτική θέση. Θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα κάρτας που έχει εξαιρετικό πλεονέκτημα (Σχήμα 4). Στο διάγραμμα αυτό βλέπουμε όλες τις κάρτες που έχουν τον αριθμό 1 μαζί με την κάρτα {3, 4}.

Πρόβλημα 9. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $n - 1$ κάρτες με τον αριθμό 1.

Πρόβλημα 10. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο κάρτες που περιέχουν τον αριθμό 3. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο κάρτες που περιέχουν τον αριθμό 4. Δείξτε ότι κάθε άλλος αριθμός εκτός των 1, 3 και 4 εμφανίζεται μόνο σε μία κάρτα.

Πρόβλημα 11. Αποδείξτε ότι συνολικά υπάρχουν n κάρτες.

Η σφαίρα με το 1 είναι πολύ σημαντική, διότι ο αριθμός αυτός εμφανίζεται σε όλες τις κάρτες εκτός από μία. Οι άλλες δύο πιο σημαντικές σφαίρες είναι η 3 και η 4.

Πρόβλημα 12. Αποδείξτε ότι μέχρι να επιλεγεί η σφαίρα 1 μόνο η κάρτα {3, 4} μπορεί να κερδίσει.

Πρόβλημα 13. Αποδείξτε ότι μέχρι να επιλεγεί το 1 ή να επιλεγούν και το 3 και το 4, δεν μπορεί να κερδίσει καμία κάρτα. Αποδείξτε ότι, αν έχουν επιλεγεί τουλάχιστον δύο σφαίρες και είτε η μία από αυτές είναι το 1 είτε οι δύο είναι το 3 και το 4, τότε κάποια κάρτα κερδίζει.

Αφού οι σφαίρες 1, 3 και 4 είναι οι μόνες που καθορίζουν τη διάρκεια του παιχνιδιού, περιορίζουμε το ενδιαφέρον μας αποκλειστικά σ' αυτές. Αυτή τη φορά, εν αντιθέσει με το προηγούμενο παράδειγμα, η σειρά επιλογής των σφαιρών έχει σημασία.

Πρόβλημα 14. Αποδείξτε ότι υπάρχουν έξι δυνατοί τρόποι επιλογής τριών σφαιρών, και ότι η πιθανότητα να επιλεγούν οι 3 και 4 πριν από την 1 ισούται με $1/3$.

Έτσι, αν επιλεγούν οι σφαίρες 3 και 4 πριν από την 1, κερδίζει η κάρτα {3, 4}. Από τη στιγμή που θα επιλεγεί η σφαίρα 1, η κάρτα {3, 4} δεν μπορεί πλέον να κερδίσει, διότι κάποιος άλλος έχει τις κάρτες {1, 3} και {1, 4}. Η

κάρτα {3, 4} κερδίζει μόνο όταν επιλεγούν οι σφαίρες 3 και 4 πριν από την 1, γεγονός που συμβαίνει με πιθανότητα $1/3$. Αν ήταν δίκαιο το παιχνίδι, η πιθανότητα νίκης αυτής της κάρτας θα ήταν $1/n$.

Πρόβλημα 15. Ποια από τις κάρτες {1, 2} και {1, 3} έχει μεγαλύτερη πιθανότητα νίκης; Από τις {1, 2} και {1, 5}; Τι ισχύει για τα άλλα ζεύγη καρτών;

Πρόβλημα 16. Υπολογίστε την πιθανότητα νίκης για κάθε κάρτα του παραδείγματος του Σχήματος 4. Συγκρίνετέ την με τη δίκαιη πιθανότητα νίκης $1/n$. Θυμηθείτε ότι οι ισόπαλες κάρτες μοιράζονται εξίσου το βραβείο. Η λύση είναι δύσκολη, διότι υπάρχουν πολλές περιπτώσεις να εξετάσουμε.

Αφού η πιθανότητα νίκης της κάρτας {3, 4} είναι $1/3$, την ονομάζουμε «μεγάλο νικητή». Παρατηρήστε ότι η τιμή $1/3$ είναι ανεξάρτητη από το n . Μπορούμε να κατασκευάσουμε παιχνίδια 2×1 μπίνγκο με οποιοδήποτε πλήθος καρτών στα οποία μια κάρτα θα έχει πιθανότητα νίκης $1/3$.

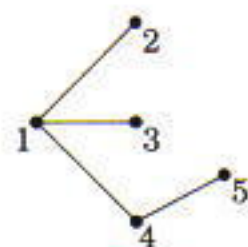
Πρόβλημα 17. Προσθέστε μία κάρτα στο προηγούμενο παράδειγμα έτσι ώστε να υπάρχει και «μεγάλος νικητής» και «μεγάλος ηττημένος».

Γραφήματα του 2×1 μπίνγκο

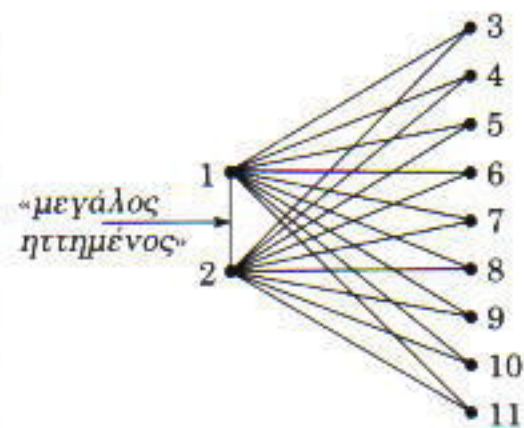
Συχνά είναι χρήσιμη η επαναδιατύπωση ενός προβλήματος με διαφορετική μορφή. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε μια συλλογή καρτών ενός 2×1 μπίνγκο σε γράφημα (σε ένα σύνολο σημείων —των κορυφών— και ευθύγραμμων τμημάτων —των ακμών— που συνδέουν τις κορυφές: οι κορυφές αντιστοιχούν στις σφαίρες και τα ευθύγραμμα τμήματα στις κάρτες). Για παράδειγμα, η συλλογή καρτών {1, 2}, {1, 3}, {1, 4} και {4, 5} έχει το γράφημα του Σχήματος 5.

Το γράφημα του παραδείγματος που δόθηκε στο Σχήμα 3 παρουσιάζεται στο Σχήμα 6 (για $n = 11$).

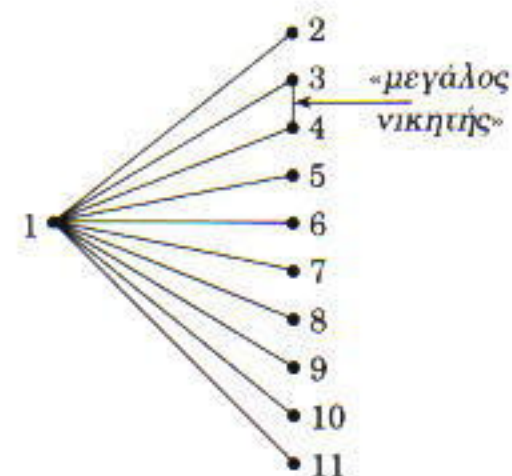
Το γράφημα του παραδείγματος που δόθηκε στο Σχήμα 4 παρουσιάζε-



Σχήμα 5



Σχήμα 6



Σχήμα 7

ται στο Σχήμα 7 (για $n = 11$).

Μια άτυπη ανάλυση αυτών των γραφημάτων θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε τα αντίστοιχα παιχνίδια μπίνγκο. Παρατηρήστε στο Σχήμα 6 ότι υπάρχει έντονος «συνωστισμός» κοντά στην κάρτα του «μεγάλου ηττημένου». Στο Σχήμα 7 παρατηρούμε ότι υπάρχουν σχετικά λίγες ακμές κοντά στην κάρτα του «μεγάλου νικητή». Αυτό μας οδηγεί να υποθέσουμε ότι οι άλλες κάρτες «κλέβουν» πολλές από τις νίκες που θα μπορούσε να κάνει η κάρτα του «μεγάλου ηττημένου», ενώ αντίθετα παίρνουν πολύ λίγες από τις δυνητικές νίκες του «μεγάλου νικητή». Αν παρατηρήσουμε το γράφημα, μπορούμε να δούμε ποιες κάρτες είναι πιθανόν να πλεονεκτούν και ποιες να μειονεκτούν.

Δυστυχώς, δεν αληθεύει πάντα ότι καλύτερη κάρτα είναι εκείνη που βρίσκεται στο λιγότερο συνωστισμένο μέρος του γραφήματος (δηλαδή αυτή με τους αριθμούς που επαναλαμβάνονται λιγότερο συχνά). Ας εξετάσουμε το 2×1 μπίνγκο που αντιπροσωπεύε-



Σχήμα 8

ται από το γράφημα του Σχήματος 8.

Πρόβλημα 18. Ποιας κάρτας οι αριθμοί επαναλαμβάνονται λιγότερο συχνά;

Πρόβλημα 19. Ποια είναι η πιθανότητα νίκης κάθε κάρτας; *Υπόδειξη:* Συνήθως τρεις σφαίρες αρκούν για να προσδιοριστεί ο νικητής.

Συμπεραίνουμε ότι για την επιλογή της βέλτιστης κάρτας δεν αρκεί ο εντοπισμός της κάρτας με τους αριθμούς που επαναλαμβάνονται λιγότερο συχνά.

Η ανάλυση της εικόνας αντί απλώς ενός καταλόγου αριθμών μας βοηθά να καταλάβουμε τι συμβαίνει. Αυτή η ιδέα μας επιτρέπει να συνδέσουμε το μπίνγκο με τη θεωρία γραφημάτων, ένα πεδίο που έχει ήδη μελετηθεί εκτεταμένα.

Χρήση της συμμετρίας

Όταν αντιμετωπίζουμε το 2×1 μπίνγκο ως γράφημα έχουμε ένα επιπλέον όφελος: είναι ευκολότερο να αναγνωρίσουμε τη συμμετρία. Η χρήση της συμμετρίας μας βοηθά να μειώσουμε το έργο που απαιτεί ο υπολογισμός των πιθανοτήτων νίκης μιας κάρτας. Ας θεωρήσουμε τα γραφήματα του Σχήματος 9. Παρατηρούμε ότι είναι ταυτόσημα. (Δύο γραφήματα είναι ταυτόσημα όταν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τις κορυφές τους έτσι ώστε να υπάρχει αντιστοιχία και μεταξύ των ακμών που τις συνδέουν.) Επομένως, αυτά τα δύο γραφήματα μας δείχνουν ότι οι κάρτες $\{1, 2\}$ και $\{1, 3\}$ έχουν τις ίδιες πιθανότητες νίκης στο παιχνίδι που αποτελείται από τις κάρτες $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$ και $\{4, 5\}$.

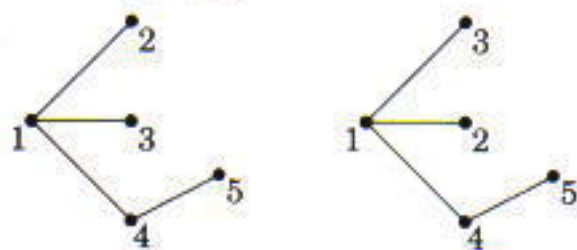
Πρόβλημα 20. Δείξτε ότι, αν αντιστοιχίσουμε τις κορυφές $(1, 2, 3, 4, 5)$ στις $(1, 3, 2, 4, 5)$ προκύπτει ότι τα γραφήματα του Σχήματος 9 είναι ταυτόσημα.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα ταυτόσημα γραφήματα για να δείξουμε ότι δύο κάρτες έχουν τις ίδιες πιθανότητες νίκης. Όταν ξέρουμε ότι δύο γραφήματα είναι ταυτόσημα, τότε γνωρίζουμε πώς να ορίσουμε μια αντιστοιχία μεταξύ των κορυφών τους. Τότε, γνωρίζουμε επίσης και πώς να ορίσουμε μια αντιστοιχία μεταξύ των διαφορετικών τρόπων επιλογής των σφαιρών. Για παράδειγμα, το ταυτόσημο των γραφημάτων που είδαμε προη-

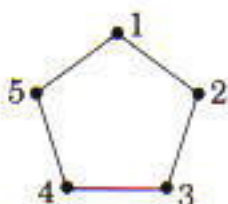
γουμένως μας δείχνει ότι οι κάρτες $\{1, 2\}$ και $\{1, 3\}$ έχουν τις ίδιες πιθανότητες νίκης. Αν επιλεγούν οι σφαίρες με τη σειρά 152, τότε κερδίζει η κάρτα $\{1, 2\}$, ενώ η επιλογή των σφαιρών με την αντίστοιχη σειρά 153 δίνει τη νίκη στην $\{1, 3\}$. Παρομοίως, αν επιλεγούν οι σφαίρες με τη σειρά 421, κερδίζει η κάρτα $\{1, 2\}$ με διπλή ισοπαλία, ενώ, αν με την αντίστοιχη σειρά 431, κερδίζει η κάρτα $\{1, 3\}$ με διπλή ισοπαλία.

Κάθε μετάθεση των σφαιρών που οδηγεί σε νίκη της κάρτας $\{1, 2\}$ αντιστοιχεί σε μια μετάθεση των σφαιρών που οδηγεί σε νίκη της κάρτας $\{1, 3\}$. Κάθε μετάθεση των σφαιρών που οδηγεί σε διπλή ισοπαλία για την κάρτα $\{1, 2\}$ αντιστοιχεί σε μια μετάθεση των σφαιρών που οδηγεί σε διπλή ισοπαλία για την κάρτα $\{1, 3\}$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι αυτές οι δύο κάρτες έχουν τις ίδιες πιθανότητες νίκης.

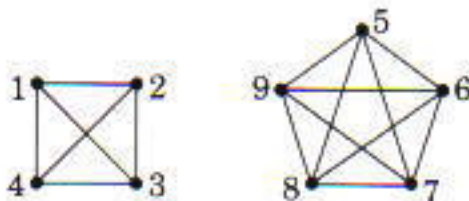
Πρόβλημα 21. Θεωρήστε το γράφημα του Σχήματος 10. Αποδείξτε ότι το 2×1 μπίνγκο που αντιστοιχεί σ' αυτό το γράφημα είναι δίκαιο.



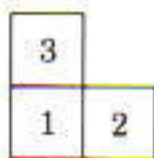
Σχήμα 9



Σχήμα 10



Σχήμα 11



Σχήμα 12

Πρόβλημα 22. Έστω το γράφημα του Σχήματος 11. Υπολογίστε τις πιθανότητες νίκης για κάθε κάρτα στο αντίστοιχο παιχνίδι μπίνγκο 2×1 . Υ-

πόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη συμμετρία και το γεγονός ότι θα επιλεγούν τρεις σφαίρες το πολύ.

Μπίνγκο σχήματος L

Για κάθε κάρτα ενός 2×1 μπίνγκο υπάρχει ένας μόνο νικητήριο συνδυασμός. Στο κανονικό 5×5 μπίνγκο σε κάθε κάρτα αντιστοιχούν περισσότεροι από ένας νικητήριοι συνδυασμοί. Η απλοποίηση του 2×1 παιχνιδιού αγνοεί αυτή την ιδιότητα του μπίνγκο. Μπορούμε να αυξήσουμε την πολυπλοκότητα του μοντέλου μας εισάγοντας μία κάρτα σχήματος L για την οποία υπάρχουν δύο νικητήριοι συνδυασμοί.

Στο Σχήμα 12 παρουσιάζεται μια τέτοια κάρτα. Οι νικητήριοι συνδυασμοί είναι το οριζόντιο ζεύγος $\{1, 2\}$ και το κάθετο ζεύγος $\{1, 3\}$. Το διαγώνιο ζεύγος που αποτελείται από το 2 και το 3 δεν είναι νικητήριοι συνδυασμοί. Πολύ σημαντικό, επειδή χωρίς αυτόν ο αριθμός 1 παίζει διαφορετικό ρόλο από τους άλλους δύο αριθμούς. Αν συμπεριλαμβάναμε στους νικητήριους συνδυασμούς και τον διαγώνιο, θα προσθέταμε συμμετρία στο μπίνγκο σχήματος L.

Πρόβλημα 23. Πόσοι νικητήριοι συνδυασμοί περιέχουν τον αριθμό 1 στην προηγούμενη, σχήματος L, κάρτα; Τον αριθμό 2; Τον αριθμό 3;

Πρόβλημα 24. Πόσοι νικητήριοι συνδυασμοί περιέχουν το κεντρικό τετράγωνο στο κανονικό 5×5 μπίνγκο; Τα υπόλοιπα τετράγωνα της κύριας διαγωνίου; Τα άλλα τετράγωνα;

Πρόβλημα 25. Πόσες κάρτες σχήματος L είναι δυνατές όταν έχουμε πέντε σφαίρες; Όταν έχουμε n σφαίρες;

Πρόβλημα 26. Θεωρήστε τις δύο κάρτες του Σχήματος 13. Ποια έχει πλεονέκτημα;

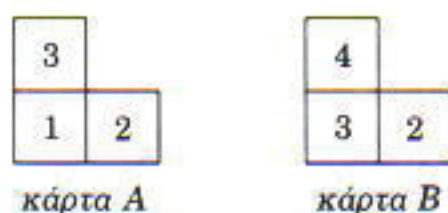
Στο κανονικό 5×5 μπίνγκο, οι παίκτες έχουν μερικές φορές περισσότερες από μία κάρτες. Το μπίνγκο σχήματος L μπορεί να θεωρηθεί ως 2×1 μπίνγκο όπου κάθε παίκτης έχει διαθέξει δύο κάρτες που έχουν έναν κοινό αριθμό.

Πρόβλημα 27. Αποδείξτε ότι το μπίνγκο σχήματος L που δίδεται στο Σχήμα 13 είναι ισοδύναμο με ένα 2×1 μπίνγκο μεταξύ δύο παικτών από τους οποίους ο A έχει πάρει τις κάρτες $\{1, 2\}$ και $\{1, 3\}$ και ο B τις κάρτες $\{2, 3\}$ και $\{2, 4\}$.

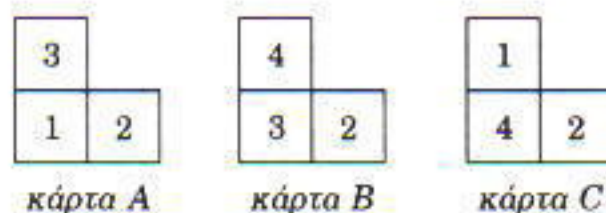
Πρόβλημα 28. (Έχει προταθεί από τον Leon Harkleroad.) Στο Σχήμα 14 έχουμε μια συλλογή από κάρτες μπίνγκο σχήματος L. Δείξτε ότι, αν η κάρτα A αντιμετωπίζει την κάρτα B χωρίς να συμμετέχει στο παιχνίδι η κάρτα C, τότε η κάρτα A έχει πλεονέκτημα. Δείξτε ότι, αν η κάρτα B αντιμετωπίζει την κάρτα C χωρίς να συμμετέχει στο παιχνίδι η κάρτα A, τότε η κάρτα B έχει πλεονέκτημα. Δείξτε ότι, αν η κάρτα C αντιμετωπίζει την κάρτα A χωρίς να συμμετέχει στο παιχνίδι η κάρτα B, τότε η κάρτα C έχει πλεονέκτημα. Δείξτε, τέλος, ότι, αν συμμετέχουν όλες οι κάρτες, τότε το παιχνίδι είναι δίκαιο.

Το Πρόβλημα 28 μας δείχνει ότι στο μπίνγκο σχήματος L η σχέση «έχει πλεονέκτημα» ή «κερδίζει» δεν είναι μεταβατική: η A κερδίζει τη B, η B κερδίζει την C, αλλά η C κερδίζει την A.

Η σημαντική διαφορά μεταξύ του μπίνγκο σχήματος L και του 2×1 μπίνγκο έγκειται στην ύπαρξη περισσότερων του ενός νικητήριων συνδυασμών για κάθε κάρτα. Επομένως, το μπίνγκο σχήματος L είναι πιο περίπλοκο από το 2×1 μπίνγκο. Το μπίνγκο σχήματος L είναι ακριβέστερο ως μοντέλο του κανονικού 5×5 μπίνγκο, διότι περιλαμβάνει την ύπαρξη περισσότερων του ενός νικητήριων συνδυασμών καθώς και τη δυνατότητα των παικτών να έχουν περισσότερες από μία κάρτες.



Σχήμα 13



Σχήμα 14

Κανονικό 5×5 μπίνγκο

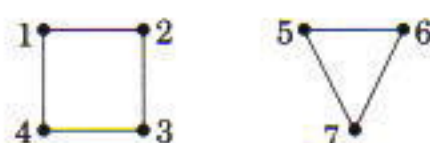
Δυστυχώς, σε μια πραγματική αίθουσα μπίνγκο δεν μπορούμε να κερδίσουμε χρησιμοποιώντας τις ιδέες αυτού του άρθρου. Η ανάλυση του 5

$\times 5$ μπίνγκο είναι εξαιρετικά δύσκολη. Μπορούμε να αναζητήσουμε κανόνες παρόμοιους με αυτούς που βρήκαμε στο απλοποιημένο μπίνγκο, αλλά δεν θα βρούμε όμορφα αποτελέσματα όπως αυτά που ανακαλύψαμε στο 2×1 μπίνγκο. Μερικές από τις ομοιότητες και τις διαφορές περιγράφονται στις επόμενες παραγράφους.

Πρόβλημα 29. Προσπαθήστε να εντοπίσετε όσο το δυνατόν περισσότερες διαφορές μεταξύ του κανονικού 5×5 μπίνγκο και των δύο απλοποιήσεων που εξετάσαμε στο άρθρο — του 2×1 μπίνγκο και του μπίνγκο σχήματος L.

Ασκίσεις και ανοικτά ερωτήματα

Πρόβλημα 30. Ας υποθέσουμε ότι επτά άτομα παίζουν 2×1 μπίνγκο (το παιχνίδι αντιπροσωπεύεται από το γράφημα του Σχήματος 15). Μία ακόμη παίκτρια αποφασίζει να συμμετάσχει στο παιχνίδι. Υπάρχουν δύο κάρτες από τις οποίες μπορεί να επιλέξει, η $\{1, 3\}$ και η $\{1, 5\}$. Ποια πρέπει να είναι η επιλογή της; Ένας υπολογιστής θα μπορούσε να μας βοηθήσει να βρούμε την απάντηση, αλλά είναι δυνατόν να ανακαλύψουμε την καλύτερη κάρτα και χωρίς τη βοήθειά του.



Σχήμα 15

Πρόβλημα 31. Θεωρούμε τη συλλογή καρτών $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ και $\{3, 4\}$ —δηλαδή όλες τις δυνατές κάρτες όταν έχουμε τέσσερις σφαίρες. Τρεις άνθρωποι παίζουν μπίνγκο με αυτές, έχοντας ο καθένας από μία κάρτα. Είναι δίκαιο το παιχνίδι; Τι ισχύει όταν οι παίκτες είναι τέσσερις; Πέντε; Έξι;

Πρόβλημα 32. Τι θα συμβεί εάν δύο άνθρωποι δοκιμάσουν να παίξουν μπίνγκο σχήματος L με τις τρεις κάρτες του Σχήματος 14; (Υποθέτουμε ότι οι παίκτες έχουν το δικαίωμα να αλλάξουν κάρτα για να αυξήσουν τις πιθανότητες νίκης τους.)

Πρόβλημα 33. Ας επιστρέψουμε στο άδικο παιχνίδι 2×1 μπίνγκο του Σχήματος 3. Η κάρτα του «μεγάλου

ηττημένου» είχε πιθανότητα νίκης $2/[n(n-1)]$, και οι υπόλοιπες κάρτες είχαν πιθανότητα νίκης

$$\frac{n+1}{2n(n-1)}$$

Αφού υπάρχουν $2n-3$ παίκτες, το παιχνίδι θα ήταν δίκαιο αν κάθε κάρτα είχε πιθανότητα νίκης $1/(2n-3)$. Είναι, άραγε, αυτό το πιο «άδικο» 2×1 μπίνγκο για $2n-3$ παίκτες; Για να απαντήσουμε στην ερώτηση χρειαζόμαστε έναν τυπικό ορισμό του «βαθμού δικαιοσύνης» ενός παιχνιδιού. Θα λέμε ότι ο «βαθμός δικαιοσύνης» ενός παιχνιδιού είναι το ποσό των χρημάτων που περιμένει να κερδίσει ένας παίκτης όταν στοιχηματίσει 1 δολάριο (ο ορισμός αυτός είναι από το βιβλίο του John Scarne, *Scarne's New Complete Guide to Gambling*, 1986, Εκδόσεις Simon and Schuster). Αναλύστε με τον ίδιο τρόπο το παιχνίδι 2×1 μπίνγκο που δίνεται στο Σχήμα 4. Πρόκειται για ένα ακόμη ακραίο παράδειγμα;

Πρόβλημα 34. Βρείτε όσο το δυνατόν περισσότερες συλλογές καρτών που οδηγούν σε δίκαιο 2×1 μπίνγκο.

Πρόβλημα 35. Βρείτε όσο το δυνατόν περισσότερα παιχνίδια 2×1 μπίνγκο όπου είναι εύκολο να υπολογίσουμε τις πιθανότητες νίκης για όλες τις κάρτες. Μπορείτε να βρείτε έναν ορισμό του βαθμού ευκολίας υπολογισμού στο *Introduction to Algorithms* των Cormen, Leiserson και Rivest (1986, Εκδόσεις MIT Press).

Πρόβλημα 36. Αυτή είναι μια καλή άσκηση για κάθε παραλλαγή του μπίνγκο. Επιλέξτε τυχαία μια συλλογή καρτών μπίνγκο. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι δίκαιο το παιχνίδι; Πόσο διαφέρουν οι πιθανότητες νίκης των καρτών;

Πρόβλημα 37. Πόσο άδικο μπορεί να είναι ένα παιχνίδι 2×1 μπίνγκο αν τυπώσουμε όμοιες κάρτες; Πόσο άδικο μπορεί να είναι ένα παιχνίδι μπίνγκο σχήματος L αν τυπώσουμε κάρτες που δεν είναι όμοιες αλλά έχουν κοινούς νικητήριους συνδυασμούς; Πώς επηρεάζει αυτό την ανάλυση του κανονικού μπίνγκο;

Πρόβλημα 38. Η αντιμετώπιση του 2×1 μπίνγκο με γράφημα ήταν ιδιαίτερα επιτυχής. Αποδίδει αυτή η μέθοδος στο μπίνγκο σχήματος L; Στο κανονικό 5×5 μπίνγκο;

Πρόβλημα 39. Δώστε ένα παράδειγμα με κάρτα «μεγάλου ηττημένου» για το 4×1 μπίνγκο. Ποια θα είναι η κάρτα του «μεγάλου νικητή»; Πόσο άδικο μπορεί να είναι ένα 4×1 μπίνγκο;

Πρόβλημα 40. Βρείτε ένα παράδειγμα «μεγάλου ηττημένου» για το κανονικό 5×5 μπίνγκο. Βρείτε ένα παράδειγμα «μεγάλου νικητή». Χρησιμοποιώντας ως μοντέλο το Σχήμα 13, βρείτε ένα άδικο παιχνίδι 5×5 μπίνγκο που αποτελείται από δύο μόνο κάρτες. Είναι αυτά τα πιο άδικο παράδειγματα που είναι δυνατά;

Πρόβλημα 41. Φανταστείτε ότι είσαστε ο ιδιοκτήτης μιας αίθουσας μπίνγκο. Πώς θα τυπώνετε τις κάρτες ώστε να έχουν όλοι κατά προσέγγιση τις ίδιες πιθανότητες νίκης; Πώς θα τυπώνετε τις κάρτες αν... είχατε αδυναμία στις λαθροχειρίες; Εξετάστε το πρόβλημα για το 2×1 μπίνγκο, για το μπίνγκο σχήματος L και για το κανονικό 5×5 μπίνγκο.

Πρόβλημα 42. Μερικές φορές ο σκοπός σε μια αίθουσα μπίνγκο δεν είναι να καλυφθούν πέντε τετράγωνα στη σειρά. Κάποιες φορές οι παίκτες επιδιώκουν να καλύψουν τα τέσσερα γωνιακά τετράγωνα —παιχνίδι που μπορούμε να θεωρήσουμε ισοδύναμο με το 4×1 μπίνγκο. Άλλες φορές θέλουν να καλύψουν και τα 24 τετράγωνα, παίζουν δηλαδή ένα 24×1 μπίνγκο. Ένας άλλος πιθανός στόχος είναι ο σχηματισμός ενός T ή ενός X. Όλες αυτές οι παραλλαγές έχουν κάτι κοινό. Βρείτε ένα γενικό μοντέλο του μπίνγκο που μπορεί να καλύψει όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

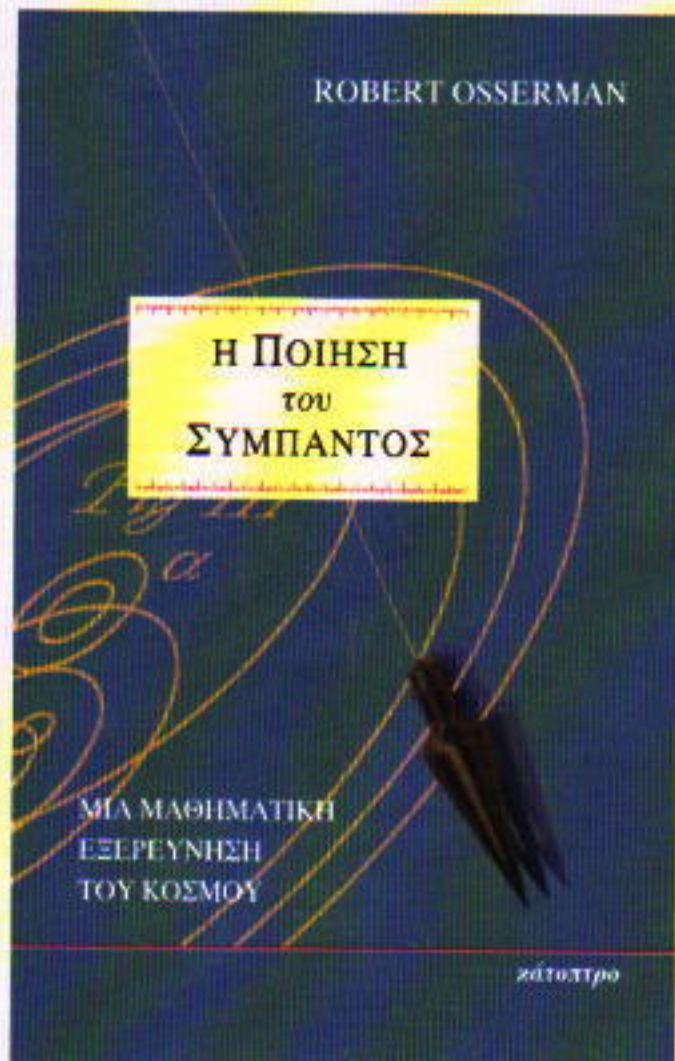
Ανάλυση παιχνιδιών

Είναι πιθανόν ότι μπορούμε να αναλύσουμε πολλά παιχνίδια χρησιμοποιώντας τεχνικές παρόμοιες με τις προηγούμενες. Για παράδειγμα, μπορούμε να χειριστούμε ευκολότερα την πολυπλοκότητα του «μπριτζ» όταν κάθε χρώμα έχει 2 αντί για 13 φύλλα. Θα

είχαμε μόνο 2.520 διαφορετικά μοιράσματα και θα ήταν δυνατόν να εξετάσουμε ζητήματα που συνήθως αντιμετωπίζονται μόνο σε επίπεδο πρωταθλητών. Αν τα μόνα φύλλα είναι ο άσσος, το 2, το 3 και το 4, ο βαθμός δυσκολίας του «μπλακ τζακ» (μιας παραλλαγής του «τριάντα ένα») μπορεί να είναι τέτοιος ώστε να μας επιτρέψει να βρούμε μια ακριβή λύση. Ίσως είναι δυνατόν να ανακαλύψουμε κάποια βέλτιστη στρατηγική για το «μονόπολι» αν κάνουμε την ανάλυσή μας σε ταμπλό με έξι τετράγωνα. Αυτές οι ιδέες επιδεικνύουν την αξία της μελέτης μιας απλής παραλλαγής ενός περίπλοκου προβλήματος. ■

Ο **Mark Krosky** κάνει το διδακτορικό του στα μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο του Μίτσιγκαν.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 56



Σελ.: 224, 14×21 , Α/Μ, 5.500 δρχ.

ΜΟΛΙΣ
ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ

Robert Osserman

Πανεπιστήμιο του Στάνφορντ

Η ΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ

Μια μαθηματική εξερεύνηση του Κόσμου

«Το βιβλίο αποτελεί μια εξαιρετική εισαγωγή στην ομορφιά των μαθηματικών και στη σχέση τους με τον φυσικό κόσμο.»

Roger Penrose,

Καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης

«Απολαυστικό από την αρχή ως το τέλος... Δείχνει πώς τα μαθηματικά εξελίσσονται παράλληλα με την κατανόησή μας για το Σύμπαν. Οι σαφέστατες εξηγήσεις και το πάθος του Osserman καθιστούν το βιβλίο τολμηρό ως προς τις προθέσεις και, συγχρόνως, απολύτως προσωπικό. Το συνιστώ θερμά.»

George Smoot,

Καθηγητής αστροφυσικής στο Πανεπιστήμιο του Μπέρκλεϋ

«Μολονότι το φως της επιστήμης και το φως της τέχνης είναι αδιαχώριστα και ίδια, οι φορείς τους μιλούν διαφορετικές γλώσσες και μόνον οι άριστοι ανάμεσά τους κατανοούν ότι υπηρετούν την ίδια υπόθεση. Το βιβλίο του Osserman πλουτίζει την παράδοση της ενοποίησης των δύο κλάδων μιλώντας τη δική του γλώσσα με εξαιρετική σαφήνεια και προσιτότητα, και διώχνει μακριά τα "σύννεφα".»

Mark Helprin

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **κάλυπτρο**

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5),
105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

Περί των παληροιών

Κατανοώντας την έλξη της Σελήνης

V.E. Belonuchkin

ΟΛΟΙ ΓΝΩΡΙΖΟΥΝ ΟΤΙ Η ΣΕΛΗΝΗ προκαλεί τόσο την άμπωτη όσο και την πλημμυρίδα των παληροιών. Πώς όμως «αισθάνεται» το νερό την παρουσία της Σελήνης στον ουρανό;

Ως βάρος ενός σώματος θεωρούμε την ελκτική δύναμη που του ασκεί η Γη. Εντούτοις, είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι κάθε σώμα, συμπεριλαμβανομένου του νερού, έλκεται όχι μόνο από τη Γη αλλά και από τη Σελήνη.

Ωστόσο, η μάζα της Σελήνης είναι 81 φορές μικρότερη από τη μάζα της Γης και ο λόγος της απόστασης ως τη Σελήνη προς την απόσταση ως το κέντρο της Γης (η ακτίνα της Γης) είναι περίπου 60 προς 1. Επομένως, χρησιμοποιώντας το νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα, $F = Gm_1m_2/r^2$, βρίσκουμε ότι η βαρυτική δύναμη που ασκεί πάνω μας η Σελήνη (και επομένως πάνω στους ωκεανούς) είναι σχεδόν 300.000 φορές μικρότερη από εκείνη που ασκεί η Γη.

Ίσως ο αριθμός αυτός μας δίνει τη δυνατότητα να εκτιμήσουμε προσεγγιστικά το ύψος των παληροιών. Με ποια τιμή όμως θα πρέπει να συγκριθεί αυτό το ύψος; Δύο φυσικές κλίμακες έρχονται στο νου μας. Η πρώτη είναι το βάθος των ωκεανών, το οποίο ανέρχεται κατά μέσο όρο στα 4 km. Εάν διαιρέσουμε αυτό το βάθος με το 300.000, προκύπτει μια τιμή του ύψους ελαφρώς μεγαλύτερη από 1 cm, η οποία είναι πολύ μικρή για να αντιπροσωπεύει το ύψος μιας παληροίας. Η άλλη φυσική κλίμακα είναι η ακτίνα της

Γης (περίπου 6.000 km). Εάν χρησιμοποιήσουμε αυτήν, προκύπτει μια τιμή του ύψους της τάξης των 20 m, η οποία είναι τόσο μεγάλη ώστε αποκλείεται να αφορά το ύψος των παληροιών.

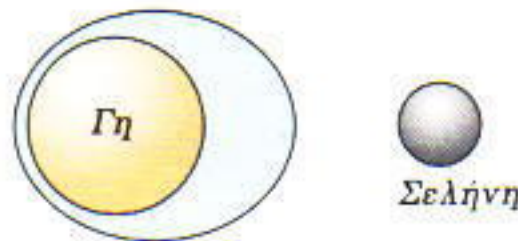
Μήπως η διαστατική ανάλυση η οποία τόσο μας έχει βοηθήσει ως τώρα, δεν αποδίδει τα αναμενόμενα στην περίπτωση αυτή; Ή μήπως υπάρχει κάποιος άλλος παράγοντας, πέραν της βαρύτητας, που τον έχουμε παραβλέψει; Προκειμένου να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, ας μελετήσουμε τις δυνάμεις που προκαλούν τις παληροίες.

Παρεμπιπτόντως, η εκτίμηση των 20 m, στην οποία καταλήξαμε προηγουμένως, δεν στερείται νοήματος: δίνει το ύψος των παληροιών που θα παρατηρούνταν αν η Γη και η Σελήνη έπαυαν να κινούνται. Στην περίπτωση αυτή, ωστόσο, η μορφή της παλη-

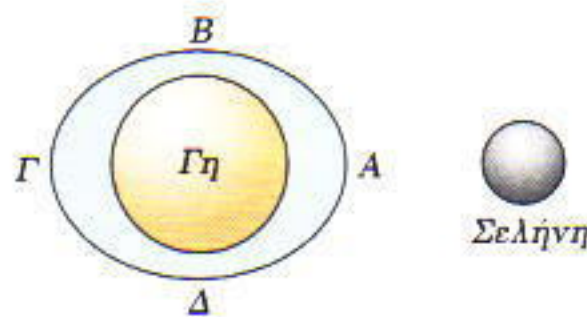
ροίας θα έμοιαζε με εκείνη που απεικονίζεται στο Σχήμα 1, η οποία δεν είναι σωστή: Εμφανίζεται ένα παληροϊκό «εξόγκωμα» στην πλευρά της Γης που είναι στραμμένη προς τη Σελήνη και μια άμπωτη (μια πτώση της στάθμης) στην αντίθετη πλευρά. Στην πραγματικότητα, εμφανίζονται δύο πλημμυρίδες και δύο άμπωτες ταυτόχρονα στη Γη, με αποτέλεσμα η επιφάνεια της θάλασσας να μοιάζει κάπως με το Σχήμα 2 (πλημμυρίδα παρατηρείται στα σημεία Α και Γ και άμπωτη στα σημεία Β και Δ).

Το φαινόμενο της ταυτόχρονης εμφάνισης δύο παληροιών εξηγείται από το γεγονός ότι οι περιοχές της Γης που βρίσκονται πλησιέστερα στη Σελήνη αποκτούν σχετικά μεγαλύτερη «επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας της Σελήνης». Παρομοίως, οι περιοχές των ωκεανών που βρίσκονται μακρύτερα από τη Σελήνη επιταχύνονται από αυτή σε μικρότερο βαθμό. Η διαφορά αυτών των επιταχύνσεων από τη μέση τιμή, δηλαδή την τιμή της επιτάχυνσης στο κέντρο της Γης, προκαλεί την εμφάνιση των δύο παληροϊκών εξογκωμάτων. Ας υπολογίσουμε την εν λόγω διαφορά.

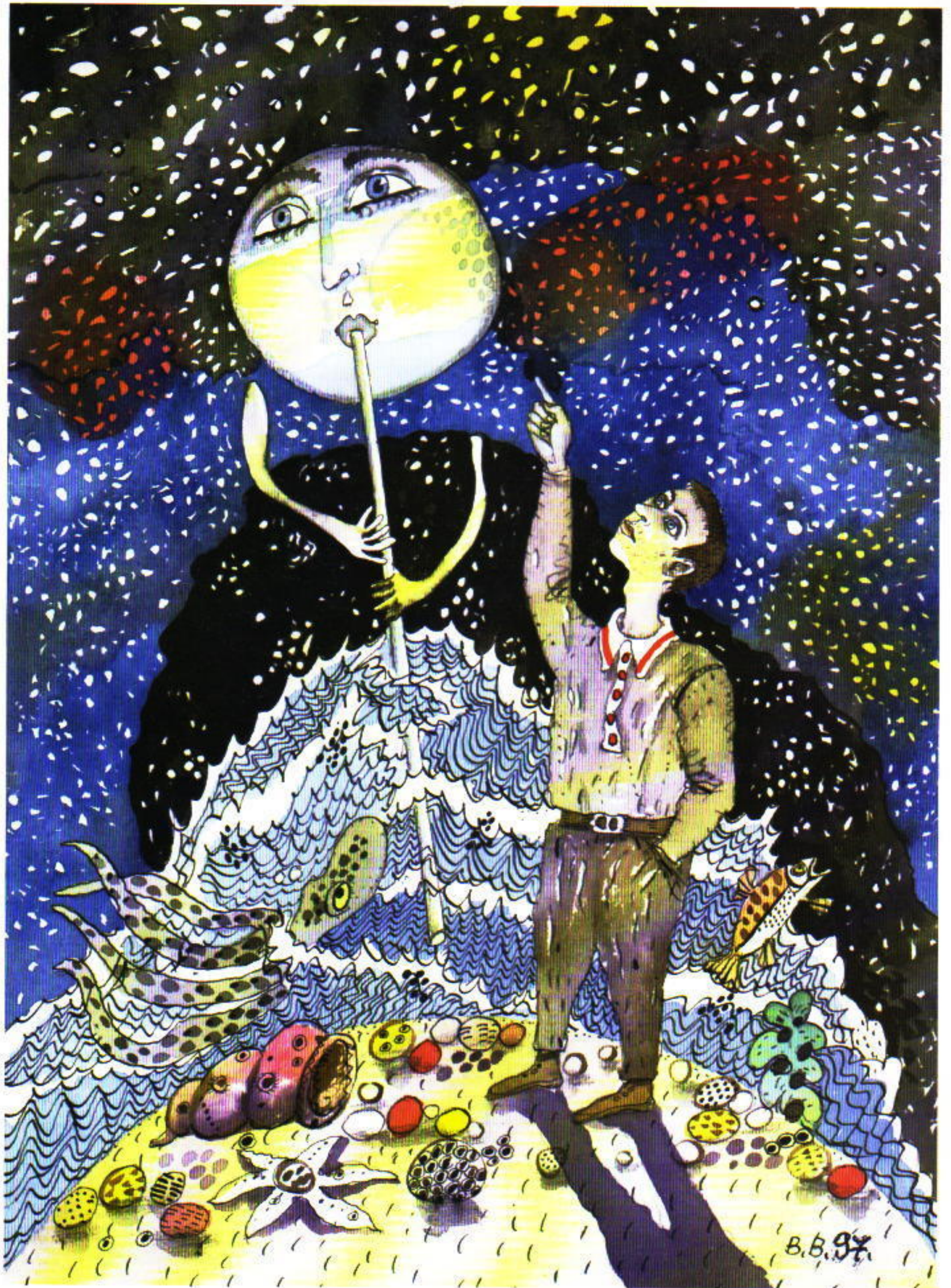
Ας θεωρήσουμε ότι η μάζα της Σελήνης ισούται με m και ότι η απόσταση από το κέντρο της ως το κέντρο της Γης ισούται με R . Τότε η επιτάχυνση που υφίσταται η Γη λόγω της βαρύτητας της Σελήνης ισούται με $\gamma_0 = Gm/R^2$. Ένα μέρος του ωκεανού βρίσκεται πλησιέστερα στη Σελήνη (περίπου) κατά r (η ακτίνα της Γης), ενώ



Σχήμα 1



Σχήμα 2



το αντιδιαμετρικό του μέρος βρίσκεται μακρύτερα κατά την ίδια απόσταση. Η επιτάχυνση του πλησιέστερου μέρους ισούται με $\gamma_1 = Gm/(R-r)^2$. Επομένως, η παλιρροϊκή (διαφορική) επιτάχυνση ισούται με

$$\gamma_n = \gamma_1 - \gamma_0 = \frac{Gmr(2R-r)}{R^2(R-r)^2} \equiv \frac{2Gmr}{R^3}$$

Εάν συμβολίσουμε με g την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης, τη μάζα της οποίας θεωρούμε ίση με M , η τελευταία σχέση γράφεται με τη μορφή

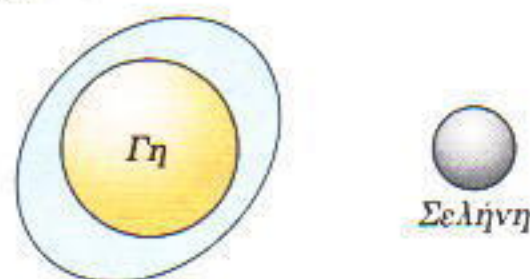
$$\gamma_n = 2g \left(\frac{m}{M} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^3$$

Πρόκειται για τη μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η παλιρροϊκή επιτάχυνση στο μοντέλο μας. Η επιτάχυνση αυτή αναφέρεται στο σημείο A του Σχήματος 2. Την ίδια τιμή έχει το μέτρο της παλιρροϊκής επιτάχυνσης στο σημείο Γ , μόνον που στη συγκεκριμένη περίπτωση η κατεύθυνσή της είναι αντίθετη, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται ένα ακόμη εξόγκωμα. Στα σημεία B και Δ η επιτάχυνση ισούται με τη μέση τιμή γ_0 .

Εάν αντικαταστήσουμε στον τύπο που δίνει την γ_n την αριθμητική τιμή των λόγων των δύο μαζών και των δύο αποστάσεων, διαπιστώνουμε ότι η μέγιστη δυνατή παλιρροϊκή επιτάχυνση (γ_n) δεν είναι μικρότερη από την g κατά 300.000 φορές, αλλά κατά 9 εκατομμύρια φορές! Αν διαιρέσουμε την ακτίνα της Γης με το λόγο g/γ_n , βρίσκουμε το ύψος της παλίρροιας που αναζητούσαμε, το οποίο είναι ελαφρώς μικρότερο από $3/4$ m, δηλαδή συμπί-



Σχήμα 3



Σχήμα 4

πτει κατά προσέγγιση με το παρατηρούμενο ύψος των παλιρροιών στον ανοικτό ωκεανό.

Δεν τελειώσαμε όμως ακόμη. Δεν έχουμε εξηγήσει γιατί θα προκληθεί πλημμυρίδα στο σημείο Γ . Σύμφωνα με ακριβείς υπολογισμούς, το μέτρο της παλιρροϊκής επιτάχυνσης είναι το ίδιο σε ολόκληρη την επιφάνεια της Γης και ισούται με

$$\frac{3}{2} g \left(\frac{m}{M} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^3$$

Ωστόσο, η κατεύθυνσή της μεταβάλλεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Έτσι, η παλιρροϊκή επιτάχυνση δημιουργεί τόσο τις πλημμυρίδες όσο και τις αμπώτες. Το αποτέλεσμα αυτό εξηγεί τη μορφή του ωκεανού που φαίνεται στο Σχήμα 2.

Αλίμονο όμως, το Σχήμα 2 απέχει από την πραγματικότητα σχεδόν τόσο όσο και το Σχήμα 1! Και τούτο επειδή και πάλι δεν έχουν ληφθεί υπόψη οι κινήσεις της Γης και της Σελήνης. Η ορθή στατική αναπαράσταση των παλιρροιών δίνεται στο Σχήμα 4, το οποίο έχει περιστραφεί κατά σχεδόν 90° σε σχέση με το Σχήμα 2!

Όπως κάθε σώμα, ο ωκεανός παρουσιάζει αδράνεια. Κατά συνέπεια, οι παλίρροιας πρέπει να ακολουθούν την κίνηση της Σελήνης με κάποια χρονική υστέρηση. Πράγματι, είναι ποτέ δυνατόν το ύψος της παλίρροιας να λάβει τη μέγιστη τιμή του στο σημείο A ; Όχι, επειδή το ύψος του ωκεανού στο εν λόγω σημείο εξαρτάται από δύο ακόμη παράγοντες και, συγκεκριμένα, την περιστροφή της Γης στην κατεύθυνση του σημείου B , αφενός, και την εξέλιξη της ίδιας της παλίρροιας, αφετέρου. Η σχέση ενός περιοδικού φαινομένου (της περιστροφής της Γης) με ένα άλλο (τις παλίρροιας) περιγράφεται από ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των αρμονικών ταλαντώσεων: τη φάση. Ποια είναι, λοιπόν, η φάση των γήινων παλιρροιών;

Την πλέον ακριβή περιγραφή μάς την παρέχει το δυναμικό μοντέλο των παλιρροιών. Σύμφωνα με το συγκεκριμένο μοντέλο, τα νερά των ωκεανών εκτελούν εξαναγκασμένη ταλάντωση. Η φάση μιας τέτοιας ταλάντωσης προσδιορίζεται από τη σχέση ανάμεσα στη φυσική συχνότητα (ιδιοσυ-

χνότητα) ταλάντωσης των νερών του ωκεανού και τη συχνότητα της εξωτερικής διεγείρουσας δύναμης.

Μπορούμε να σχηματίσουμε μια εικόνα για την επίδραση της συχνότητας της εξωτερικής δύναμης στη φάση παρατηρώντας ένα εκκρεμές. Εκτρέπουμε, λοιπόν, ένα εκκρεμές από τη θέση ισορροπίας του και παρατηρούμε πώς ταλαντώνεται μπρος-πίσω όταν το αφήνουμε ανενόχλητο (δηλαδή όταν εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση). Κατά κανόνα, η φυσική περίοδος του εκκρεμούς κυμαίνεται μεταξύ 1 και 2 δευτερολέπτων. Ας μετατοπίσουμε, τώρα, το εκκρεμές πολύ αργά από την (κατακόρυφη) θέση ισορροπίας. Για παράδειγμα, το μετακινούμε προς τη μια πλευρά σε 5 δευτερόλεπτα, το επαναφέρουμε στη θέση ισορροπίας μέσα στα επόμενα 5 δευτερόλεπτα, επαναλαμβάνουμε την κίνηση προς την άλλη πλευρά, κ.ο.κ. Έτσι δημιουργούμε μια εξαναγκασμένη κίνηση με περίοδο 20 δευτερολέπτων. Προφανώς, όσο περισσότερο εκτρέπεται από την κατακόρυφο το εκκρεμές τόσο μεγαλύτερη δύναμη πρέπει να εφαρμόσουμε, και η δύναμη αυτή έχει κατεύθυνση προς την πλευρά όπου βρίσκεται το εκκρεμές. Αν μετακινούμε πολύ αργά το εκκρεμές σε κάθε σημείο της τροχιάς του, σχεδόν αντισταθμίζουμε τη δύναμη της βαρύτητας. Αυτό ακριβώς συμβαίνει και στο στατικό μοντέλο των παλιρροιών: κάθε απόκλιση από τη φυσική ταλάντωση βρίσκεται σε συμφωνία φάσης (έχει την ίδια κατεύθυνση) με την εξωτερική δύναμη.

Μια εντελώς διαφορετική κίνηση θα προκύψει εάν το εκκρεμές «τραντάζεται» με ταχύ ρυθμό, έτσι ώστε η εξωτερική δύναμη να αλλάζει φορά, για παράδειγμα, 5 φορές το δευτερόλεπτο. Το εκκρεμές αρχίζει να κινείται προς τα αριστερά, ενώ ωθείται προς τα δεξιά. Η κατεύθυνση της κίνησής του δεν μπορεί να αναστραφεί αμέσως: πρέπει πρώτα να σταματήσει να κινείται προς τα αριστερά και μόνο τότε θα αρχίσει να κινείται προς τα δεξιά. Ωστόσο, και πάλι δεν υπάρχει διαθέσιμος χρόνος για να επιταχυνθεί προς τα δεξιά, επειδή ωθείται ήδη προς τα αριστερά. Η σχέση ανάμεσα στη φάση της ταλάντωσης του εκκρεμούς και την εξωτερική αρμονική δύναμη δεν είναι απολύτως σαφής, φαίνεται, όμως, ότι αυτές οι δύο

περιοδικές διαδικασίες βρίσκονται σε αντίθεση φάσης. (Θυμηθείτε ότι η φάση είναι η γωνιακή θέση ενός περιστρεφόμενου διανύσματος το οποίο αναπαριστά την αρμονική ταλάντωση έτσι, «σε αντίθεση φάσης» σημαίνει ότι τα δύο διανύσματα είναι αντίρροπα, δηλαδή οι γωνίες (οι φάσεις) που σχηματίζουν με μια σταθερή κατεύθυνση στο επίπεδο διαφέρουν κατά 180° .)

Μήνυμα μέσα σε ... δοχείο

Ας μελετήσουμε τώρα ένα διαφορετικό μοντέλο. Μολονότι η σχέση του με τις παλιρροϊκές δυνάμεις δεν γίνεται αμέσως αντιληπτή, η συμπεριφορά του μοιάζει με τη συμπεριφορά του ωκεανού. Το μοντέλο αυτό αναπαριστά ξεκάθαρα την αιφνίδια αλλαγή της φάσης όταν η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης αυξάνεται βαθμιαία και υπερβαίνει τη (φυσική) συχνότητα συντονισμού.

Ρίξτε λίγο νερό σε ένα καθαρό δοχείο και σημειώστε το ύψος της στάθμης του στο τοίχωμα. Αναρτήστε το δοχείο (Σχήμα 5) και εκτρέψτε το αργά από τη θέση ισορροπίας του και προς τις δύο κατευθύνσεις, έτσι ώστε να ταλαντωθεί με συχνότητα μικρότερη από τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης ενός τέτοιου εκκρεμούς. Η επιφάνεια του νερού θα παραμένει συνεχώς οριζόντια. Το γεγονός αυτό θα προκαλέσει μια «πλημμυρίδα» στο τοίχωμα που βρίσκεται πλησιέστερα στη θέση ισορροπίας και μια «άμπωτη» στο απέναντι τοίχωμα.

Αφήστε το δοχείο να ταλαντωθεί ελεύθερα. Έπειτα από μερικές ταλαντώσεις, η επιφάνεια του νερού θα ηρεμεί όντας παράλληλη με τον πυθμένα. Δεν θα εμφανίζονται παλιρροϊκές και παλιρροϊκές δυνάμεις επειδή το νερό δεν κινείται ως προς το δοχείο.

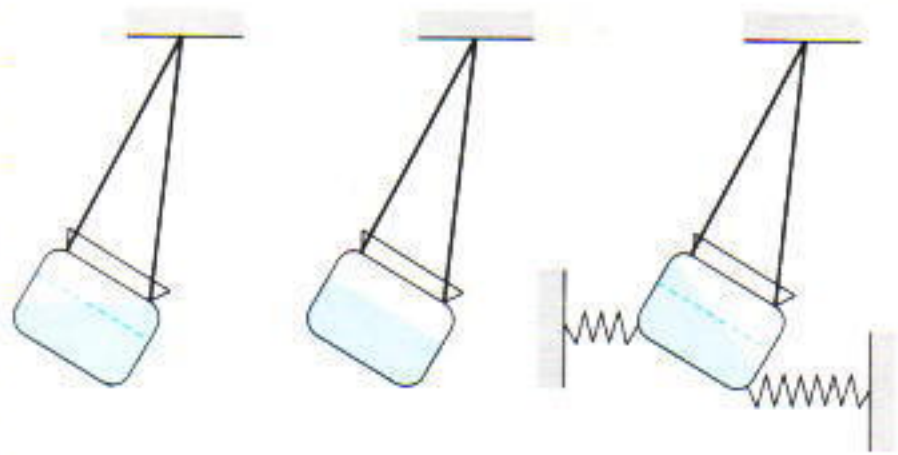
Ας εξαναγκάσουμε τώρα το δοχείο να ταλαντωθεί με μεγαλύτερη συχνότητα απ' ό,τι «του αρέσει». Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε με τη βοήθεια δύο ασθενών ελατηρίων που συνδέουν τα απέναντι τοιχώματα του δοχείου με δύο ακλόνητα στηρίγματα. Τα ελατήρια υποχρεώνουν το δοχείο να ταλαντωθεί με συχνότητα υψηλότερη από τη φυσική συχνότητα του συστήματος. Κατά την περιοδική αυτή διαδικασία, το νερό «προσπαθεί» να ταλαντωθεί με τη φυσική συχνότητα. Υ-

στερα από λίγο, η συνιστώσα της φυσικής ταλάντωσης του νερού θα «αποσβεστεί» και θα επιζήσει μόνον η συνιστώσα με τη συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, η οποία μπορεί να παρατηρηθεί. Τώρα για η επιφάνεια του νερού ταλαντώνεται με διαφορετικό τρόπο: Εμφανίζεται πλημμυρίδα στο απομακρυσμένο (σε σχέση με την κατακόρυφο) τοίχωμα, η οποία συνοδεύεται από άμπωτη στο πλησιέστερο τοίχωμα. Το γεγονός ότι επιβάλαμε στο σύστημα να ταλαντωθεί με συχνότητα μεγαλύτερη από τη φυσική επέφερε αλλαγή 180° στη φάση του νερού.

Ποια θα είναι τα επόμενα βήματά μας; Πρώτον, πρέπει να προσδιορίσουμε τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης του ωκεανού. Δεύτερον, πρέπει να βρούμε πώς συνδέεται η φάση της παλιρροϊας με την παλιρροϊκή δύναμη. Το πείραμά μας με το ταλαντούμενο δοχείο δείχνει ότι η αρμονική ταλάντωση και η εξωτερική δύναμη θα βρίσκονται είτε σε συμφωνία φάσης είτε σε αντίθεση φάσης. Ποιο από αυτά τα δύο ενδεχόμενα συμβαίνει στις παλιρροϊές πάνω στη Γη;

Υπάρχει ένα φυσικό φαινόμενο που θα μας βοηθήσει να βρούμε την απάντηση: το τσουνάμι. Ένας σεισμός εκδηλώνεται κάπου κάτω από τον θαλάσσιο πυθμένα. Ως αποτέλεσμα, μια τεράστια μάζα νερού τίθεται σε κίνηση, ανυψώνεται και δημιουργεί ένα τσουνάμι. Είναι ολωσδιόλου αδιάφορο το γεγονός ότι σ' αυτό το παράδειγμα η εξωτερική διαταραχή δεν οφείλεται στη Σελήνη. Τι συμβαίνει στη συνέχεια; Το τσουνάμι διαδίδεται κατά μήκος του ωκεανού.

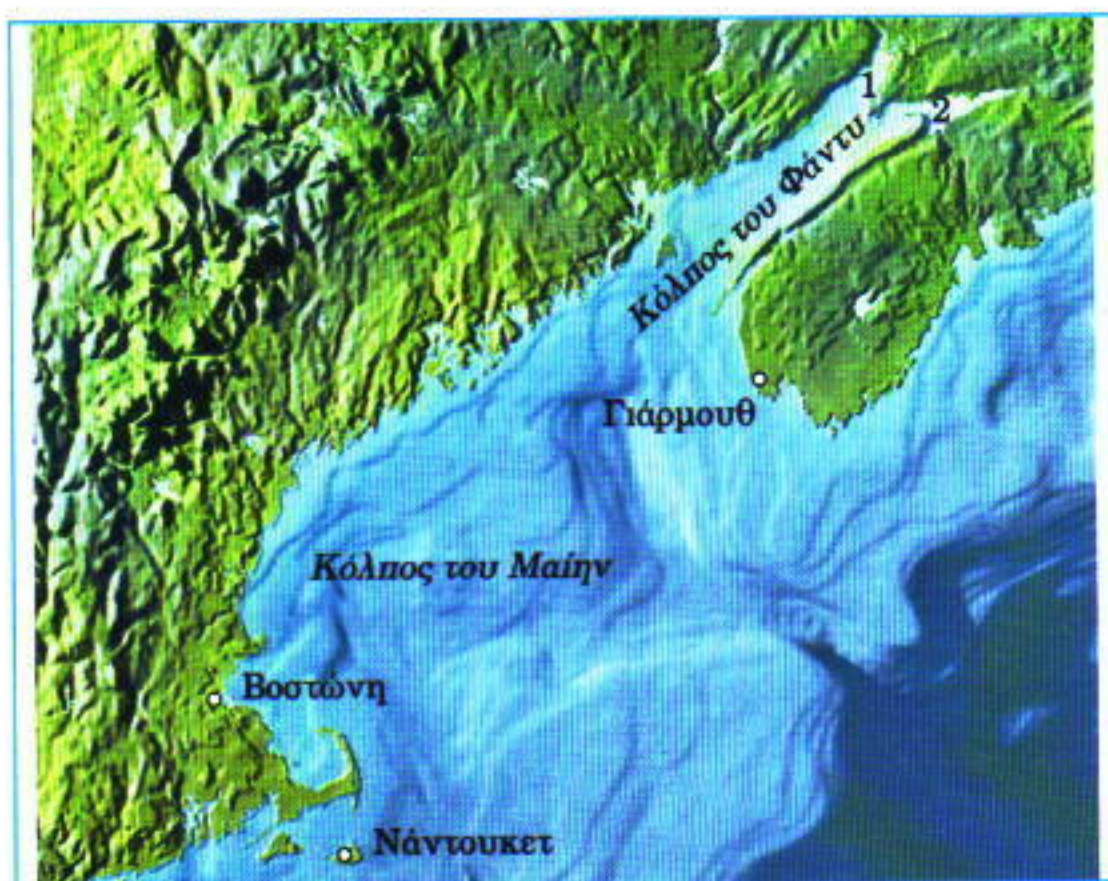
Πόση είναι η ταχύτητα του εν λόγω κύματος; Η δοκιμασμένη μέθοδος της διαστατικής ανάλυσης θα μας φανεί πολύτιμη και πάλι. Φαίνεται ότι η ταχύτητα του κύματος θα πρέπει να συνδέεται με την επιτάχυνση της βαρύτητας g . Εξάλλου, η βαρύτητα υποχρεώνει το ανυψωμένο νερό να επιστρέψει στην αρχική του θέση. Αν μπορούσαμε να επιλέξουμε κάποιο



Σχήμα 5

κατάλληλο φυσικό μήκος για να το πολλαπλασιάσουμε με την g , θα παίρναμε αμέσως το τετράγωνο της ταχύτητας! Το βάθος του ωκεανού αποτελεί τη μοναδική εύλογη επιλογή. Αν θεωρήσουμε ότι το βάθος του ωκεανού είναι $H \cong 4 \text{ km}$, από τη σχέση $v = \sqrt{gH}$ προκύπτει η σωστή τιμή για την ταχύτητα: 200 m/s . Επομένως, αν δεν υπήρχαν οι ήπειροι πάνω στη Γη, ένα τσουνάμι θα έκανε το γύρο του πλανήτη σε 56 ώρες. Αν δύο τσουνάμι, τα οποία βρίσκονται σε αντιδιαμετρικές περιοχές της Γης, κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση, κάθε περιοχή της Γης θα δεχόταν την επίσκεψη ενός από αυτά κάθε 28 ώρες.

Γιατί θεωρούμε δύο κύματα; Επειδή η Σελήνη δημιουργεί ταυτόχρονα δύο πλημμυρίδες σε δύο αντιδιαμετρικές περιοχές της Γης, και τις υποχρεώνει να κάνουν το γύρο του πλανήτη με παρόμοιο τρόπο. Επομένως, η φυσική περίοδος των παλιρροϊών ισούται επίσης με 28 ώρες. Βλέπουμε τη Σελήνη να επανεμφανίζεται στον ουρανό κάθε 24 ώρες και 50 λεπτά. Ίσως μαντέψατε ήδη ότι η συγκεκριμένη περίοδος καθορίζεται από την ημερήσια περιστροφή της Γης και την περιφορά της Σελήνης γύρω από αυτήν. Οι κατευθύνσεις της περιφοράς τη Σελήνης γύρω από τη Γη και της περιστροφής της Γης συμπίπτουν. Ενώ η Γη εκτελεί μία πλήρη περιστροφή σε 24 ώρες, η Σελήνη έχει ήδη μετακινηθεί λίγο από το πρότερο γεωγραφικό της μήκος, οπότε η Γη χρειάζεται 50 επιπλέον λεπτά για να την «προφτάσει» κάθε μέρα. Άρα, η περίοδος της παλιρροϊκής δύναμης είναι 12 ώρες και 25 λεπτά, επειδή τόσος χρόνος παρέρχεται ανάμεσα στις εμφανίσεις της Σελήνης σε γεωγραφικά μήκη που διαφέρουν κατά 180° . Η περίοδος αυτή είναι μικρότερη από τις 28



Σχήμα 6

ώρες που χρειάζεται ένα τσουνάμι για να κάνει το μισό γύρο της Γης.

Σύμφωνα με το μοντέλο του δοχείου, οι παλίρροιες και οι δυνάμεις που τις προκαλούν πρέπει να βρίσκονται σε αντίθεση φάσης, επειδή η περίοδος της δύναμης είναι μικρότερη από τη φυσική περίοδο των παλίρροιών. Εφόσον 360° της παλίρροϊκής αρμονικής ταλάντωσης (έναν πλήρη παλίρροϊκό κύκλο) αντιστοιχούν σε τόξο 180° πάνω στην περιφέρεια της Γης, μια φάση 180° προκαλεί μια μετατόπιση 90° πάνω στη επιφάνεια της Γης. Στην περιοχή της Γης (καθώς και στην αντιδιαμετρική της) που βρίσκεται σχεδόν κάτω από τη Σελήνη θα εμφανίζεται άμπωτη, ενώ πλημμυρίδα θα παρατηρείται σε τοποθεσίες που απέχουν 90° από τις εν λόγω περιοχές. Επομένως, πλημμυρίδα σημειώνεται στις περιοχές όπου η παλίρροϊκή δύναμη ωθεί το νερό προς το κέντρο της Γης αντί να το απωθεί από αυτό! Δεν είναι εκπληκτικό;

Ίσως αναρωτηθείτε γιατί λέμε «σχεδόν κάτω από τη Σελήνη». Οι εξαναγκασμένες ταλάντώσεις ακολουθούν τον κανόνα «σε συμφωνία φάσης ή σε αντίθεση φάσης» μόνο σε ιδανικά συστήματα, όπου δεν αναπτύσσονται τριβές και, συνεπώς, η ενέργεια διατηρείται. Εάν οι τριβές είναι σχεδόν ανύπαρκτες, η εξαναγκασμένη ταλάντωση θα βρίσκεται σχεδόν σε συμφωνία φάσης ή σχεδόν σε αντίθεση

φάσης με τη διεγείρουσα δύναμη.

Υπάρχει ακόμη ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της αρμονικής ταλάντωσης: το πλάτος. Εάν η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης είναι πολύ μικρότερη από τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης, το πλάτος ισούται απλώς με τη μέγιστη στατική απομάκρυνση που προκαλεί η εν λόγω δύναμη. Στο άλλο άκρο, όταν η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης υπερβαίνει κατά πολύ τη φυσική συχνότητα, μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του πλάτους ως εξής.

Η επιτάχυνση ενός ταλαντούμενου σώματος είναι ανάλογη του πλάτους και του τετραγώνου της συχνότητας (αυτό προκύπτει από τη διαστατική ανάλυση). Εάν το πλάτος της εξωτερικής δύναμης δεν εξαρτάται από το χρόνο, το πλάτος της αρμονικής ταλάντωσης είναι αντιστρόφως ανάλογο προς το τετράγωνο της συχνότητας. Συνεπώς, σε υψηλές συχνότητες το πλάτος μειώνεται γρήγορα.

Τα πιο ενδιαφέροντα φαινόμενα, ωστόσο, λαμβάνουν χώρα όχι όταν οι συχνότητες πάρουν κάποια ακραία τιμή, αλλά για συχνότητες που απαντούν συχνά στην καθημερινή ζωή. Όταν η συχνότητα της εξωτερικής διεγείρουσας δύναμης τείνει προς τη φυσική συχνότητα ενός ταλαντούμενου συστήματος, επέρχεται συντονισμός, γεγονός που σημαίνει ότι το πλάτος τείνει στο άπειρο σε συστήματα δίχως

τριβή (στα οποία η ενέργεια διατηρείται). Επομένως, θα πρέπει να λαμβάνουμε σοβαρά υπόψη το συντονισμό όταν σχεδιάζουμε ταλαντούμενα συστήματα.¹

Απές αποδείξεις για τη σημασία του συντονισμού στην περίπτωση πολύ υψηλών παλίρροϊων προσφέρουν οι σταθμοί παραγωγής παλίρροϊκής ενέργειας. Ένα ωκεάνιο παλίρροϊκό ρεύμα, με το τυπικό ύψος του 1 m, εισορμά από το ρήγμα μήκους 400 km μεταξύ του Νάντουκετ στη Μασσαχουσέττη και του Γιάρμουθ στη Νέα Σκωτία (Σχήμα 6). Αφού η ταχύτητά του αυξηθεί και αποκτήσει ύψος 4 m στον στενό Κόλπο του Φάντυ, το παλίρροϊκό ρεύμα εισέρχεται στον μικροσκοπικό Κόλπο Σινέκτο και στο Μάινας Μπέισιν (οι τοποθεσίες που σημειώνονται με τους αριθμούς 1 και 2 στο Σχήμα 6). Στο τελευταίο, το πλάτος της παλίρροιας είναι το μεγαλύτερο σε ολόκληρο τον κόσμο—ύψος 6 m. Η στάθμη του νερού κατά την άμπωτη και την πλημμυρίδα παρουσιάζει διαφορά ύψους 12 m. Δεν θα ήταν ιδανική η τοποθεσία αυτή για να χτιστεί ένας σταθμός παραγωγής παλίρροϊκής ενέργειας;

Σύμφωνα με μια μελέτη, προτάθηκε ο διαχωρισμός του Κόλπου Σέποντι (του οποίου η επιφάνεια αποτελεί το 0,2% της επιφάνειας του Κόλπου του Μαιήν) από τον Κόλπο Σινέκτο με την ανέγερση ενός φράγματος. Μια άλλη μελέτη πρότεινε το διαχωρισμό του Μάινας Μπέισιν, γεγονός που σημαίνει αποκοπή ενός τμήματος μεγαλύτερου από το 0,5% του Κόλπου του Μαιήν.

Ένας σταθμός παραγωγής ενέργειας θα αφαιρεί ενέργεια από τις παλίρροιες, οπότε το ύψος τους προβλέπεται ότι θα μειωθεί στην πρώτη περίπτωση κατά 20-25 cm και στη δεύτερη 30-35 cm.² Τι συνέπειες θα είχε η μείωση αυτή για τον Κόλπο του Φάντυ ή ακόμη και για ολόκληρο τον Κόλπο του Μαιήν; Εάν κατανειμούμε το «έλ-

1. Δείτε το άρθρο A. Stassenko, «Οι οδυνηρές συνέπειες του συντονισμού», Μάιος/Ιούνιος 1998.

2. Δείτε το άρθρο του D.A. Greenberg στο τεύχος Νοεμβρίου 1987 του *Scientific American*, τόμ. 257, 5.

Προκλήσεις στη φυσική και τα μαθηματικά

Μαθηματικά

M126

Ελάχιστη τιμή. Δίνεται ένα σύνολο 1998 διαφορετικών φυσικών αριθμών. Κανείς από αυτούς δεν είναι δυνατόν να γραφεί ως άθροισμα δύο άλλων αριθμών του συνόλου. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του μεγαλύτερου αριθμού του συγκεκριμένου συνόλου; (V.Y. Protasov)

M127

Γωνιακά προβλήματα. Έστω σημείο M στο εσωτερικό του παραλληλογράμμου $ABCD$. Γνωρίζουμε ότι $\angle MBC = 20^\circ$, $\angle MCB = 50^\circ$, $\angle MDA = 70^\circ$ και $\angle MAD = 40^\circ$. Βρείτε τις γωνίες του παραλληλογράμμου.

M128

Κλασματικοί γείτονες. Γράφουμε κατά αύξουσα τιμή όλα τα ανάγωγα κλάσματα με παρονομαστές που δεν υπερβαίνουν το 99. Μεταξύ ποιων κλασμάτων βρίσκεται το $5/8$; (D.I. Averianov)

M129

Στη γλώσσα των ημιτόνων. Σχεδιάστε το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου οι συντεταγμένες των οποίων ικανοποιούν την εξίσωση

$$\eta\mu\kappa\sigma\upsilon\nu^2 y + \eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu^2 x = 0.$$

(S.B. Gashkov)

M130

Εμβαδό προβολής. Βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή του εμβαδού της ορθογώνιας προβολής στο επίπεδο ενός κυλίνδρου με ακτίνα r και ύψος h . (M. Volchkevich)

Φυσική

Φ126

Στριβοντας στη γωνία. Από ένα ο-

μογενές τετράγωνο φύλλο πλευράς d κόβουμε έναν κύκλο με τη μέγιστη δυνατή διάμετρο. Πού βρίσκεται το κέντρο μάζας καθεμιάς από τις κομμένες «γωνιές»; Το κέντρο μάζας ενός ημικυκλίου ακτίνας R βρίσκεται σε απόσταση $a = 4R/(3\pi)$ από τη διάμετρό του. (A. Zilberman)

Φ127

Κυνηγητό οβίδων. Μια οβίδα βάλεται οριζόντια από την κορυφή ενός βουνού, σε υψόμετρο $h = 1$ km με ταχύτητα $v = 500$ m/s. Έπειτα από χρόνο $t_0 = 1$ s, βάλλεται δεύτερη οβίδα, η οποία «κυνηγά» την πρώτη. Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη αρχική ταχύτητα της δεύτερης οβίδας και υπό ποια γωνία πρέπει να βληθεί ώστε να χτυπήσει την πρώτη; (V. Nikiforov)

Φ128

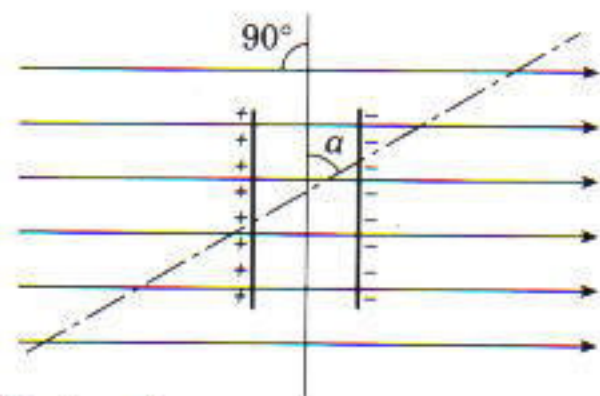
Κρυογονική αεροδυναμική σήραγγα. Για να ψυχράνουμε το ρεύμα αέρος μέσα σε έναν κυλινδρικό αγωγό υπό κανονικές συνθήκες, εγχέουμε πανομοιότυπες σταγόνες υγρού αζώτου σε μερικές διατομές τού σωλήνα. Αυτές οι σταγόνες εξατμίζονται καθώς παρασύρονται από το ρεύμα. Οι ταχύτητες του αερίου και των σταγόνων είναι ίσες παντού (η αρχική τους τιμή είναι $v_0 = 10$ m/s), και τα τοιχώματα της σήραγγας θεωρούνται αδιαβατικά. Προσδιορίστε την ταχύτητα, την πυκνότητα και τη θερμοκρασία του ρεύματος μετά την εξατμισμό όλων των σταγόνων εάν η αρχική παροχή ισούται μ' αυτή του αέρα. Το σημείο βρασμού του αζώτου υπό ατμοσφαιρική πίεση είναι 77 K και η λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσής του $L = 2 \cdot 10^5$ J/kg. Θεωρήστε ότι οι ιδιότητες του αέρα και του αζώτου στην αέρια κατάσταση είναι ταυτόσημες. (A. Stasenko)

Φ129

Πυκνωτής εντός ηλεκτρικού πε-

δίου. Μια ποσότητα έργου W_1 παρήχθη κατά την τοποθέτηση ενός φορτισμένου πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, του οποίου η κατεύθυνση φαίνεται στο Σχήμα 1. Εν συνεχεία, ο πυκνωτής στράφηκε κατά γωνία α , οπότε παρήχθη πρόσθετο έργο W_2 . Χρησιμοποιώντας τη γνωστή τιμή της γωνίας α , υπολογίστε το λόγο W_1/W_2 . Θεωρήστε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ο ίδιος ο πυκνωτής είναι ομογενές και ότι περιορίζεται μόνο στο εσωτερικό του.

(V. Mozhayev)



Σχήμα 1

Φ130

Βλέπετε την εστία της κηλίδας. Ένας επιπεδόκυρτος φακός είναι κατασκευασμένος από γυαλί δείκτη διάθλασης $n = 1,6$. Η ακτίνα της σφαιρικής επιφάνειάς του είναι $R = 10$ cm, και το πάχος του φακού $d = 0,2$ cm. Μια παράλληλη δέσμη φωτός προσπίπτει στην επίπεδη επιφάνεια του φακού παράλληλα προς τον κύριο άξονα. Ολόκληρος ο φακός, εκτός από την κεντρική περιοχή του, καλύπτεται από ένα διάφραγμα, και το φως εστιάζεται σε μια οθόνη. Τότε το διάφραγμα αφαιρείται. Υπολογίστε τη διάμετρο της κηλίδας η οποία σχηματίζεται στην οθόνη.

(A. Zilberman)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 56

Θεωρία κόμβων

Ξεμπλέκοντας τους μαθηματικούς κόμβους

Ο. Viro

ΟΤΑΝ ΠΡΟΣΠΑΘΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ να μελετήσουν ένα φαινόμενο της καθημερινής ζωής συνήθως το αντικαθιστούν με ένα βολικό γι' αυτούς μαθηματικό αντικείμενο. Αυτή ήταν και η μοίρα των συνηθισμένων, κατασκευασμένων από σχοινί, κόμβων: μετατράπηκαν σε μαθηματικούς κόμβους.¹

Ένα από τα ερωτήματα που ώθησε τους μαθηματικούς στη μελέτη των κόμβων ήταν το ποιοι κόμβοι μπορούν να λυθούν χωρίς να κόψουμε το σχοινί και ποιοι όχι.

Το πρότυπο ενός μαθηματικού κόμβου είναι ένα συνεστραμμένο κομμάτι σχοινιού με σταθερά άκρα. Τα άκρα του κόμβου πρέπει να παραμένουν σε σταθερή θέση διότι διαφορετικά θα μπορούσαμε να λύσουμε όλους τους κόμβους περνώντας το ένα από τα άκρα του σχοινιού μέσα από τους βρόχους.

Ένας άλλος, πιο βολικός, τρόπος

να αντιμετωπίσουμε το ζήτημα των άκρων του σχοινιού είναι να τα ενώσουμε. Αυτή η διαδικασία παρουσιάζεται στο Σχήμα 1. Το αποτέλεσμα είναι η μετατροπή του σχοινιού σε έναν συνεστραμμένο δακτύλιο.

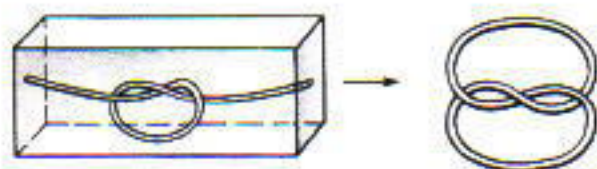
Το επόμενο βήμα προς τον μαθηματικό κόμβο είναι η αντικατάσταση του σχοινιού με μια γραμμή (τον άξονα του κόμβου).

Κάθε κόμβος μπορεί να έχει ως μοντέλο μια γραμμή που ακολουθεί κατά μήκος τον άξονά του. Από την άλλη, δεν είναι δυνατόν να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γραμμή ως άξονα ενός κόμβου που δημιουργείται από σχοινί σταθερού πάχους: οι κόμβοι μπορεί να είναι πιο μικροί από ό,τι επιτρέπει το πάχος του σχοινιού. Για παράδειγμα, μια καμπύλη που περιέχει μια άπειρη ακολουθία από όλο και μικρότερους κόμβους (Σχήμα 2) δεν μπορεί να «διασταλεί» ώστε να γίνει σχοινί πεπερα-

σμένου πάχους. Οι καμπύλες αυτού του είδους (που περιέχουν άπειρους κόμβους) μελετώνται επίσης στα μαθηματικά. Ονομάζονται *ατίθασοι κόμβοι* (wild knots).

Δεν θα μελετήσουμε τους ατίθασους κόμβους. Για να τους εξαιρέσουμε από το πεδίο των ερευνών μας θα υιοθετήσουμε τον επόμενο ορισμό: Ένας *ήμερος κόμβος* (tame knot) είναι μια κλειστή, συνεκτική πολυγωνική γραμμή στο χώρο η οποία δεν τέμνεται με τον εαυτό της και αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος ευθύγραμμων τμημάτων.

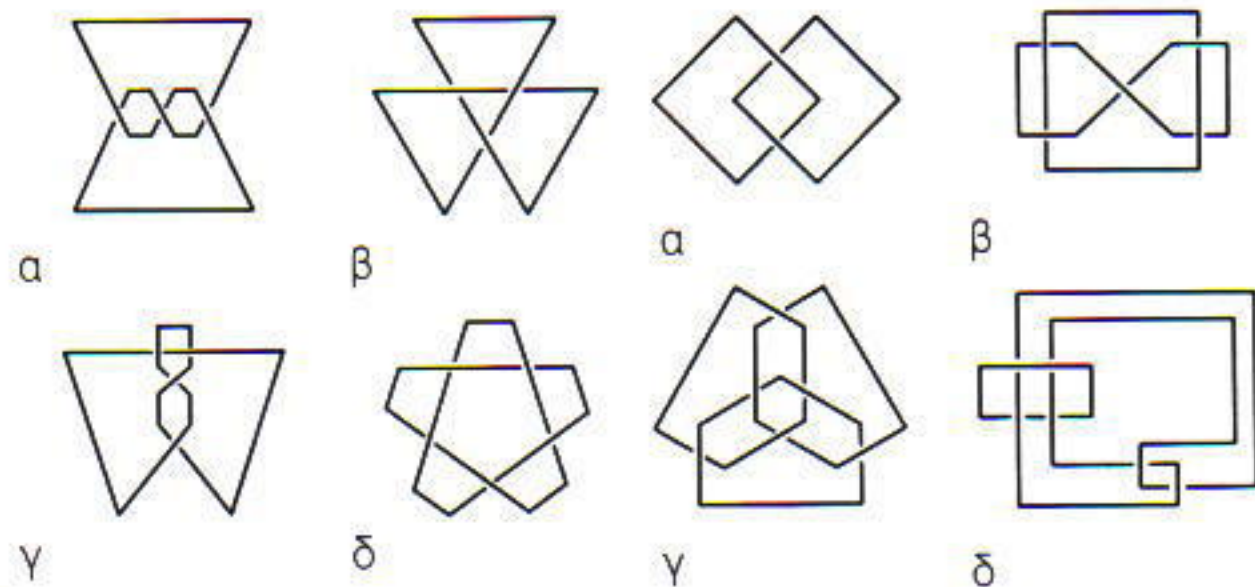
Ο εν λόγω ορισμός βρίσκεται σε πλήρη αρμονία με τη διαισθητική ιδέα που έχουμε για τους κόμβους. Κάθε ήμερος κόμβος μπορεί να διασταλεί ώστε να σχηματίσει έναν δακτύλιο από σχοινί, και κάθε δακτύλιος από σχοινί έχει έναν άξονα που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος τμημάτων.



Σχήμα 1



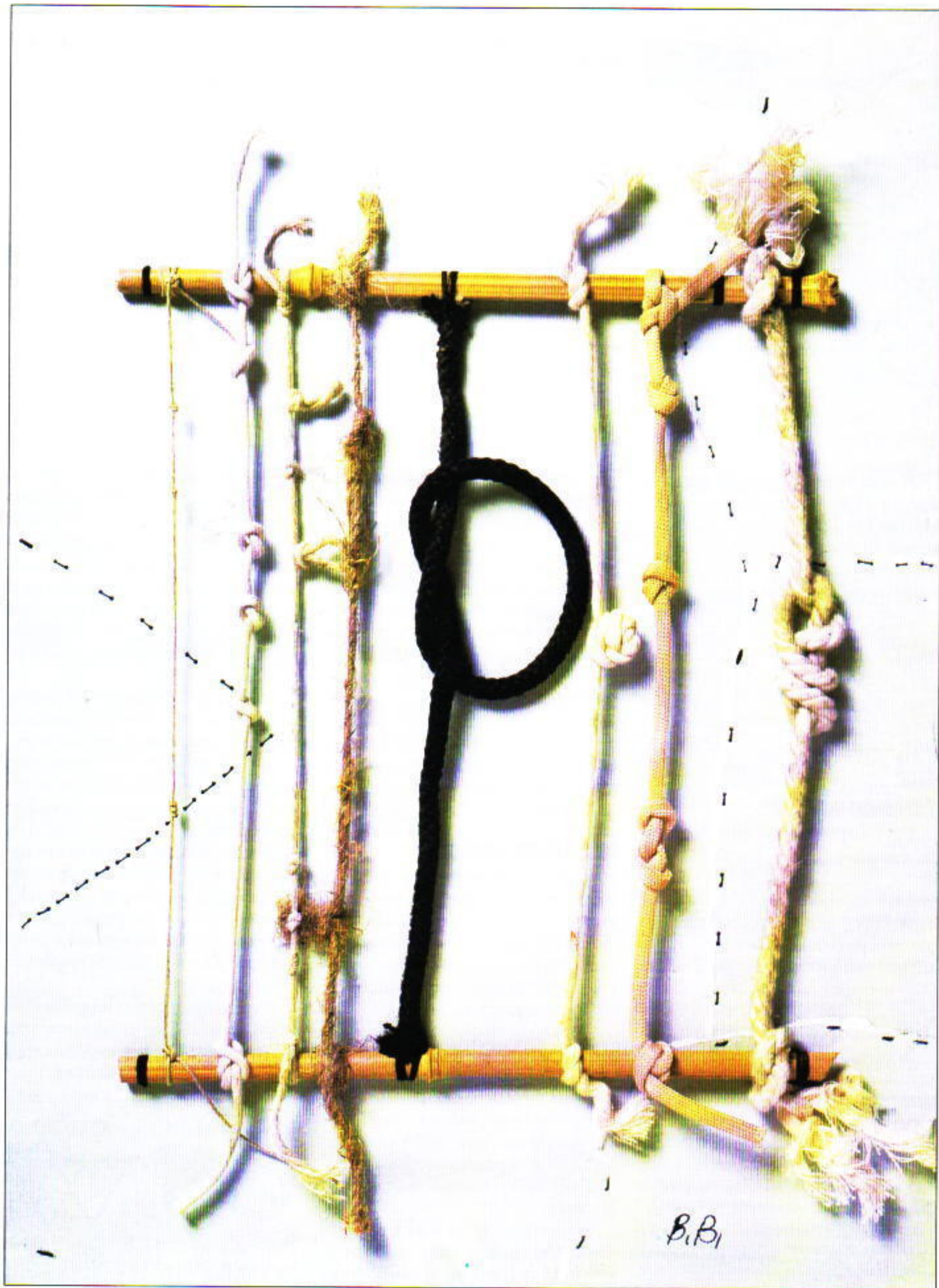
Σχήμα 2



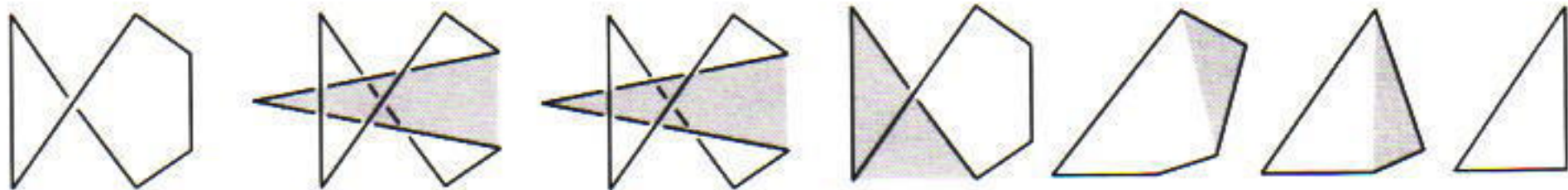
Σχήμα 3

Σχήμα 4

1. Δείτε και το άρθρο «Πλεξίδες και κόμβοι» στο τεύχος Μαρτίου / Απριλίου 1995.

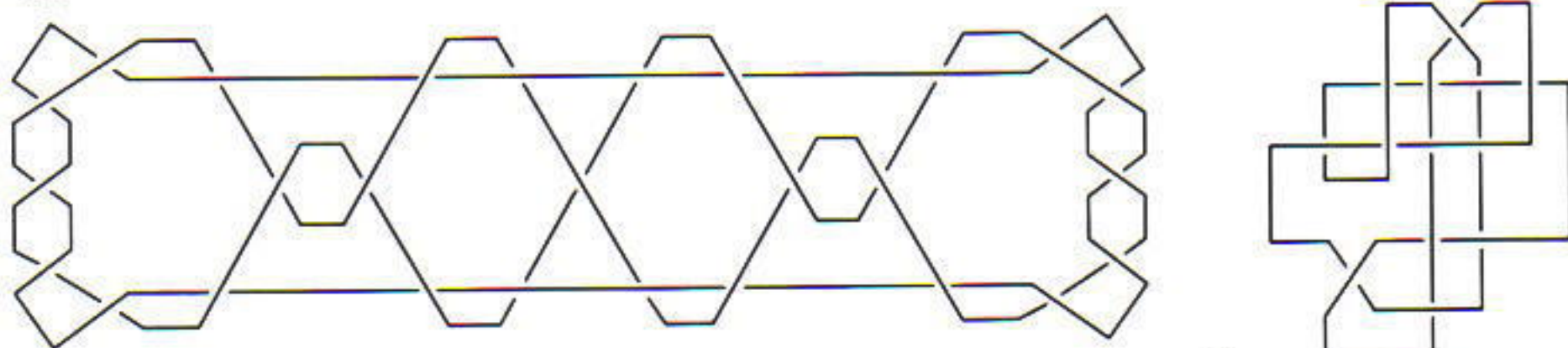


B.B.



Σχήμα 5

Σχήμα 6



α

β

Σχήμα 7

Η λέξη *συνεκτική* στον ορισμό του ήμερου κόμβου σημαίνει ότι η πολυγωνική γραμμή δεν μπορεί να παρασταθεί ως ένωση ξένων ανά δύο κλειστών πολυγωνικών γραμμών. Αν δεν επιμείνουμε στη συνεκτικότητα του κόμβου, καταλήγουμε στον ορισμό του *ήμερου συνδέσμου* (tame link). Στο Σχήμα 3 βλέπετε μερικούς ήμερους κόμβους, ενώ στο Σχήμα 4 μερικούς ήμερους συνδέσμους. (Αφού στο άρθρο εξετάζουμε μόνο ήμερους κόμβους και συνδέσμους, παραλείπουμε στο εξής το επίθετο «ήμερος».)

Σχεδίαση κόμβων

Για να σχεδιάσουμε έναν κόμβο επιλέγουμε πρώτα ένα σημείο παρατήρησης. Το σημείο αυτό πρέπει να ικανοποιεί δύο συνθήκες: Η πρώτη είναι ότι ο κόμβος πρέπει να βρίσκεται από τη μία πλευρά ενός επιπέδου που διέρχεται από το σημείο. Η δεύτερη είναι ότι, όταν κοιτάμε από αυτό, δεν πρέπει να βλέπουμε τρία τμήματα του κόμβου σαν να συντρέχουν στο ίδιο σημείο.

Μπορούμε να ικανοποιήσουμε την πρώτη συνθήκη επιλέγοντας ένα σημείο αρκετά μακριά από τον κόμβο. Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε πάντα να βρούμε ένα επίπεδο τέτοιο ώστε ο κόμβος να ανήκει στη μία πλευρά του. Στη συνέχεια, προβάλλουμε τον κόμβο πάνω σ' αυτό το επίπεδο. Για να ικανοποιήσουμε τη δεύτερη συνθήκη πρέπει να βρούμε ένα σημείο τέτοιο ώστε κάθε ευθεία που διέρχεται από αυτό

να τέμνει το πολύ δύο τμήματα του κόμβου. Μπορούμε να ικανοποιήσουμε αυτή τη συνθήκη αν προβούμε σε κατάλληλα μικρή μετατόπιση του σημείου παρατήρησης.

Στα σημεία που φαίνεται ότι τέμνονται οι εικόνες δύο μη τεμνόμενων τμημάτων πρέπει να απεικονίζουμε ποιο είναι το πλησιέστερο στον παρατηρητή. Γι' αυτό το λόγο σχεδιάζουμε διακεκομμένη την εικόνα του πιο απομακρυσμένου από τα δύο τμήματα (όπως στα Σχήματα 3 και 4). Η εικόνα που έχει κατασκευαστεί σύμφωνα με όλους τους παραπάνω κανόνες ονομάζεται *διάγραμμα* του κόμβου.

Ισοδύναμοι κόμβοι

Είναι φυσικό να θεωρήσουμε ως ισοδύναμους δύο κόμβους αν ο ένας μπορεί να μετατραπεί στον άλλο μέσω συστολής, επιμήκυνσης, συστολής ή οποιασδήποτε άλλης συνεχούς παραμόρφωσης. Αυτή η διαισθητική έννοια της ισοδυναμίας καταλήγει, όταν εξετάζουμε ήμερους κόμβους, στην έννοια των *ισοτόπων*: Δύο κόμβοι (ή, γενικότερα, δύο σύνδεσμοι) ονομάζονται *ισοτοπικοί* αν μπορούμε να μεταβούμε από τον έναν στον άλλο μέσω μια ακολουθίας μετασχηματισμών που ονομάζονται *στοιχειώδη ισότοπα*.

Στοιχειώδες ισότοπο ενός κόμβου είναι είτε

(1) η αντικατάσταση μίας πλευράς του με δύο νέα τμήματα τέτοια ώστε τα τρία αυτά τμήματα να σχηματίζουν έ-

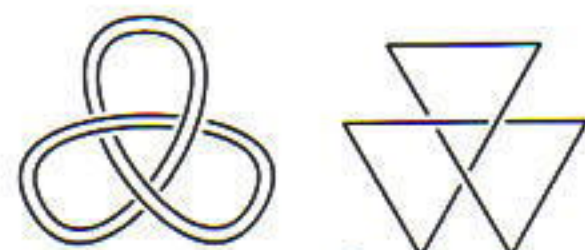
να τρίγωνο η περίμετρος του οποίου τέμνει τον κόμβο μόνο στην αντικαθιστάμενη πλευρά, είτε

(2) η αντίστροφη πράξη: η αντικατάσταση δύο διαδοχικών πλευρών του κόμβου με ένα νέο τμήμα τέτοιο ώστε τα τρία αυτά τμήματα να σχηματίζουν ένα τρίγωνο η περίμετρος του οποίου τέμνει τον κόμβο μόνο στις αντικαθιστάμενες πλευρές.

Στο Σχήμα 5 βλέπουμε ένα ζεύγος κόμβων όπου ο ένας μετασχηματίζεται στον άλλο μέσω ενός στοιχειώδους ισότοπου. Το τρίγωνο που αναφέρεται στον ορισμό του στοιχειώδους ισότοπου ονομάζεται *τροχιά* του μετασχηματισμού.

Ένας κόμβος ισοτοπικός με την περίμετρο ενός τριγώνου ονομάζεται *τετριμμένος*. Οι κόμβοι του Σχήματος 5 είναι τετριμμένοι. Στο Σχήμα 6 βλέπετε μια ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών που τους μετατρέπουν σε τρίγωνο.

Είναι προφανές ότι οι περίμετροι δύο τυχαίων τριγώνων είναι ισοτοπικές και, επομένως, όλοι οι τετριμμένοι κόμβοι είναι ισοτοπικοί. Εντούτοις, μερι-



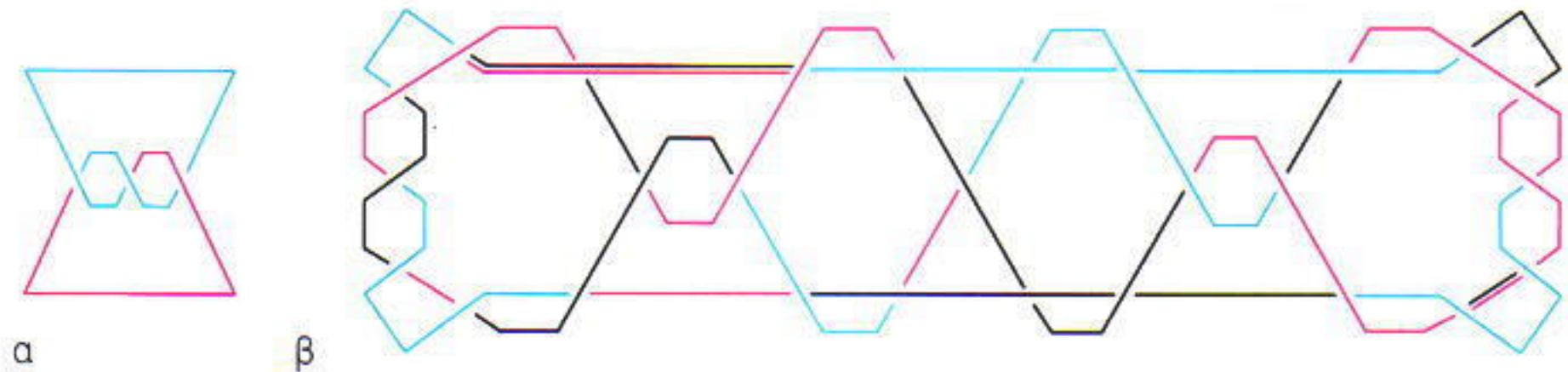
α

β

Σχήμα 8



Σχήμα 9



Σχήμα 10

κοί τετριμμένοι κόμβοι μοιάζουν εξαιρετικά πολύπλοκοι.

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι οι κόμβοι του Σχήματος 7 είναι τετριμμένοι.

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι οι κόμβοι των Σχημάτων 3α και 3β είναι ισοτοπικοί.

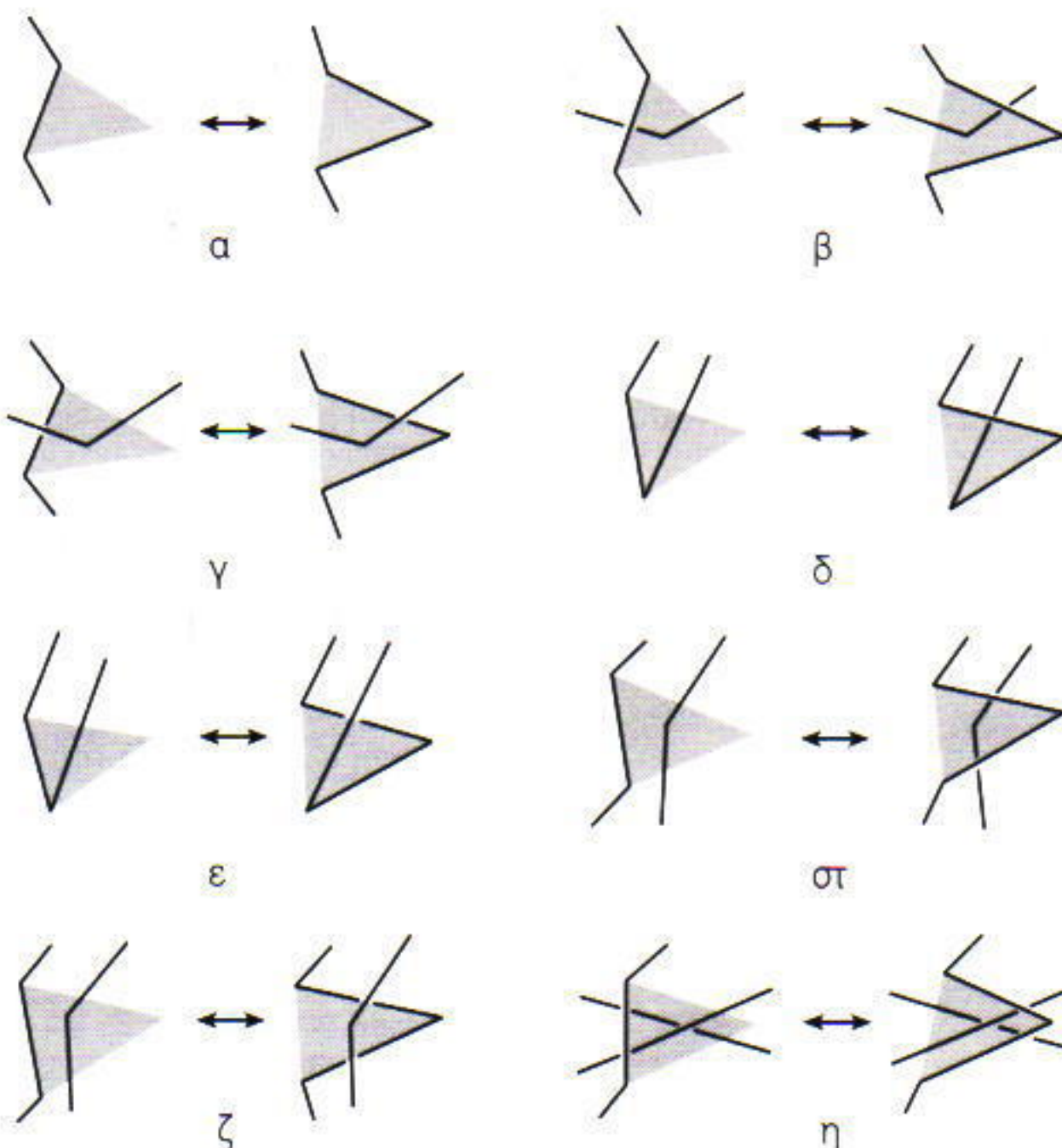
Μη ισοτοπικοί κόμβοι

Ο ορισμός του *ισοτόπου* μας οδηγεί αμέσως στο εξής πρόβλημα: Υπάρχουν κόμβοι που δεν είναι ισοτοπικοί; Αν δεν απαντηθεί αυτό το ερώτημα θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει ότι όλοι οι κόμβοι είναι ίδιοι.

Γνωρίζουμε ότι εξαιρετικά πολύπλοκοι κόμβοι αποδεικνύονται τετριμμένοι. Από την άλλη πλευρά, αν προσπαθήσουμε να λύσουμε τον κόμβο του Σχήματος 8α, τον ονομαζόμενο *τριφύλλι*, θα διαπιστώσουμε σύντομα ότι είναι αδύνατον να το επιτύχουμε. Πώς μπορούμε, όμως, να αποδείξουμε ότι ο κόμβος του Σχήματος 8α δεν είναι τετριμμένος;

Θυμηθείτε ότι ένας κόμβος θεωρείται μη τετριμμένος αν είναι αδύνατον να μετατραπεί σε περίμετρο ενός τριγώνου μέσω στοιχειωδών ισοτόπων. Η πολυπλοκότητα των τετριμμένων κόμβων του Σχήματος 7 αποδεικνύει πόσο δύσκολη είναι η αναγνώριση ενός μη τετριμμένου κόμβου. Ο μοναδικός τρόπος να αποδείξουμε ότι ένας κόμβος είναι μη τετριμμένος έγκειται στην ανακάλυψη μιας ιδιότητας των κόμβων που παραμένει αμετάβλητη από τα στοιχειώδη ισοτόπα, ιδιότητα που έχει ο συγκεκριμένος κόμβος αλλά όχι και η περίμετρος του τριγώνου.

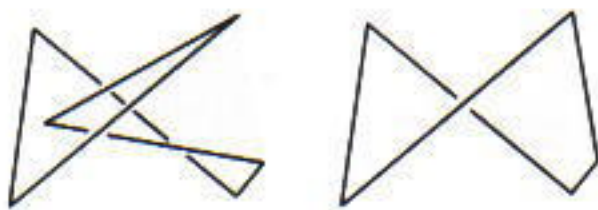
Ονομάζουμε *αναλλοίωτη* κάθε ιδιότητα των κόμβων που παραμένει αμετάβλητη από τα στοιχειώδη ισοτόπα. Οι αναλλοίωτες των κόμβων συνι-



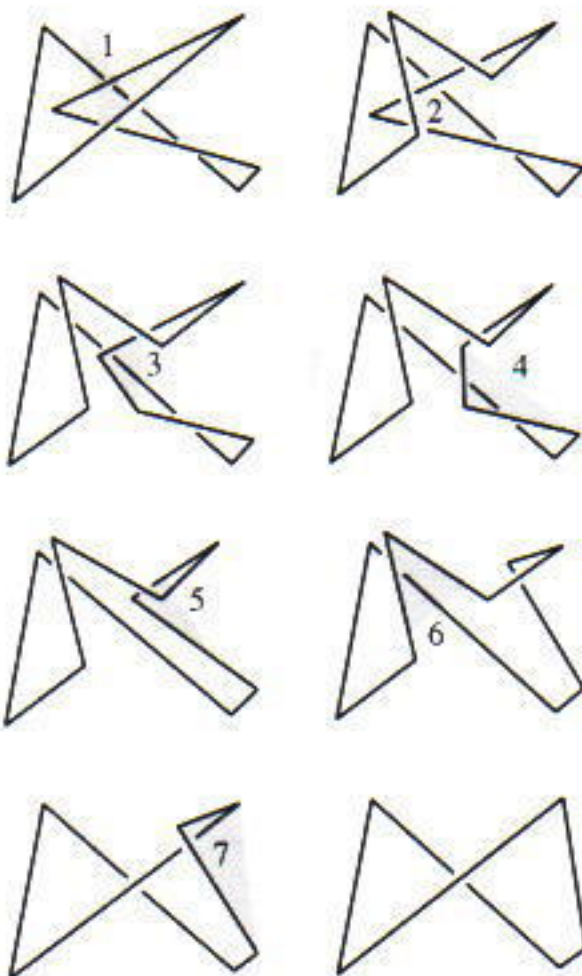
Σχήμα 11

στούν το βασικό ζήτημα της θεωρίας των κόμβων. Παράδειγμα αναλλοιώτης αποτελεί το τετριμμένο ενός κόμβου. Μπορούμε εύκολα να ορίσουμε πολλές ακόμη αναλλοιώτες. Για παράδειγμα, οι ελάχιστες δυνατές πλευρές και οι ελάχιστες δυνατές διασταυρώσεις στα διαγράμματα των κόμβων που είναι ισοτοπικοί με έναν δεδομένο κόμβο συνιστούν αναλλοιώτες του κόμβου. Εντούτοις, η εισαγωγή αυτών καθώς και πολλών άλλων ανάλογων αναλλοιώτων όχι μόνο δεν μας βοηθά να απαντήσουμε τα προηγούμενα ερωτήματα, αλλά δημιουργεί καινούργια. Στην πραγματικότητα, όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε αυτές τις αναλλοιώτες αντιμετωπίζουμε τις ίδιες δυσκολίες που συναντάμε όταν προσπαθούμε να αποδείξουμε το μη τετριμμένο ενός κόμβου.

Μπορούμε να αποδείξουμε το μη τετριμμένο ενός κόμβου μέσω μιας αναλλοιώτης που υπολογίζεται εύκολα και ορίζεται από το διάγραμμα του συ-



Σχήμα 12



Σχήμα 13

γκεκριμένου κόμβου και όχι από μια ολόκληρη κλάση ισοτοπικών κόμβων.

Έγχρωμα διαγράμματα κόμβων

Υπενθυμίζουμε ότι το διάγραμμα ενός κόμβου είναι απλώς μια εικόνα του κόμβου σε ένα επίπεδο με τις εξής ιδιότητες: (α) οι εικόνες οποιασδήποτε τριάδας πλευρών του δεν συντρέχουν στο ίδιο σημείο και, (β) όταν τέμνονται οι εικόνες δύο μη τεμνόμενων πλευρών του, η εικόνα της πιο απομακρυσμένης διακόπεται. Λόγω αυτών των διακοπών, το διάγραμμα ενός κόμβου αποτελείται από διάφορες μη τεμνόμενες πολυγωνικές γραμμές που ονομάζουμε *τμήματα* του διαγράμματος. Το πλήθος των τμημάτων ισούται με το πλήθος των διακοπών (διασταυρώσεων).

Ο χρωματισμός του διαγράμματος ενός κόμβου βάσει συγκεκριμένων κανόνων θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε ότι δύο κόμβοι δεν είναι ισοτοπικοί.² Λέμε ότι ο χρωματισμός ενός διαγράμματος με τρία χρώματα είναι *ορθός* αν κάθε τμήμα του κόμβου έχει ένα χρώμα και αν σε κάθε διασταύρωση όλα τα τεμνόμενα τμήματα έχουν το ίδιο χρώμα ή συναντάμε και τα τρία χρώματα. Στο Σχήμα 9 υπάρχουν διάφορα παραδείγματα ορθών χρωματισμών, ενώ στο Σχήμα 10 έχουμε παραδείγματα λανθασμένων.

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι είναι αδύνατον να χρωματίσουμε τα διαγράμματα των κόμβων στα Σχήματα 6 και 7 χρησιμοποιώντας και τα τρία χρώματα.

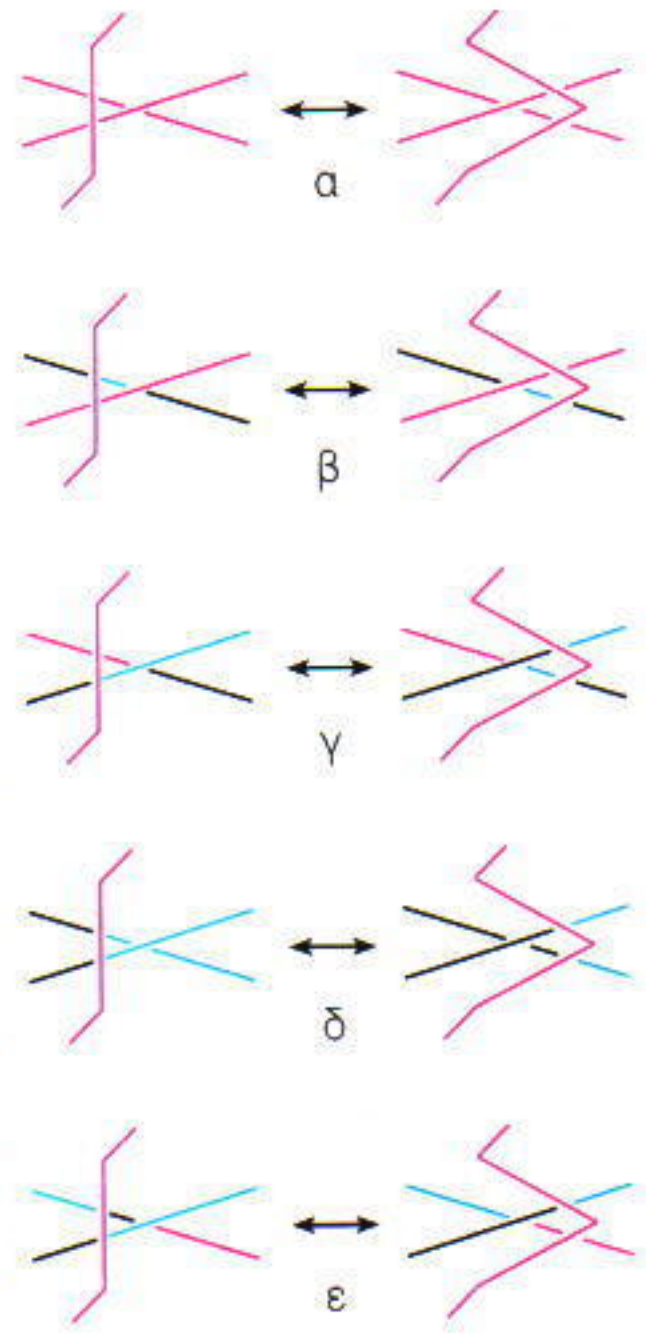
Άσκηση 4. Αποδείξτε ότι υπάρχουν εννέα διαφορετικοί ορθοί χρωματισμοί του κόμβου τριφύλλι (Σχήμα 8β).

Θεώρημα 1. (Αυτό είναι το κύριο θεώρημα). Το πλήθος των ορθών τριχρωμών χρωματισμών ενός διαγράμματος είναι αναλλοιώτη του κόμβου.

Πριν προσπαθήσουμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 1, ας συζητήσουμε μερικές από τις εφαρμογές του. Ιδού το απλούστερο πόρισμά του:

Πόρισμα 1. Αν είναι δυνατός ο ορ-

² Η ιδέα του χρωματισμού των διαγραμμάτων των κόμβων οφείλεται στον αμερικανό μαθηματικό Ralph Fox. Δείτε το άρθρο του «Metacyclic invariance of knots and links» στο *Canadian Journal of Mathematics*, 1980, 2(22), 193-201.



Σχήμα 14

θός χρωματισμός ενός κόμβου με τρία χρώματα, τότε ο κόμβος δεν είναι τετριμμένος.

Το πόρισμα αυτό μας επιτρέπει να επαληθεύσουμε άμεσα την πρόταση που διατυπώσαμε στην Άσκηση 3 (διότι οι κόμβοι που αναφέρονται σε αυτήν είναι τετριμμένοι). Πολύ πιο σημαντικό, όμως, είναι το γεγονός ότι από αυτό προκύπτει άμεσα το μη τετριμμένο του κόμβου τριφύλλι καθώς και πολλών άλλων κόμβων.

Άσκηση 5. Αποδείξτε (με τη βοήθεια του Θεωρήματος 1) ότι το τριφύλλι δεν είναι ισοτοπικό με τους κόμβους των Σχημάτων 3γ και 3δ και ότι ο κόμβος του Σχήματος 9δ δεν είναι ισοτοπικός ούτε με το τριφύλλι ούτε με αυτούς τους δύο κόμβους.

Οι κόμβοι των Σχημάτων 3γ και 3δ δεν είναι τετριμμένοι, αλλά δεν είναι δυνατόν να το αποδείξουμε χρωματίζοντας τους ορθά με τρία χρώματα. Το Θεώρημα 1 δεν μας προσφέρει μια καθολική μέθοδο απόδειξης του μη ισο-

τοπικού δύο κόμβων, αλλά είναι χρήσιμο σε πολλές ειδικές περιπτώσεις.

Άσκηση 6. Βρείτε μια άπειρη ακολουθία κόμβων, καθένα από τους οποίους έχει διαφορετικό πλήθος ορθών τρίχρωμων χρωματισμών. (Σύμφωνα με το Θεώρημα 1, όλοι αυτοί οι κόμβοι είναι, ανά δύο, μη ισοτοπικοί.)

Το Θεώρημα 1 εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε τη λέξη *κόμβος* με τη λέξη *σύνδεσμος*. **Σημείωση.** Αν δεν είναι δυνατός ο ορθός χρωματισμός του διαγράμματος ενός συνδέσμου με περισσότερα από ένα χρώματα, τότε ο σύνδεσμος δεν μπορεί να αποσυνδεθεί (ένας σύνδεσμος αποσυνδέεται όταν είναι ισοτοπικός προς έναν σύνδεσμο που αποτελείται από κόμβους που βρίσκονται σε διαφορετικές πλευρές του ίδιου επιπέδου).

Άσκηση 7. Αποδείξτε ότι οι σύνδεσμοι του Σχήματος 4 δεν αποσυνδέονται.


Απόδειξη του θεωρήματος 1

Το Θεώρημα 1 έπεται από τα επόμενα δύο θεωρήματα, οι αποδείξεις των οποίων είναι μεν επίπονες αλλά όχι ιδιαίτερα δύσκολες.

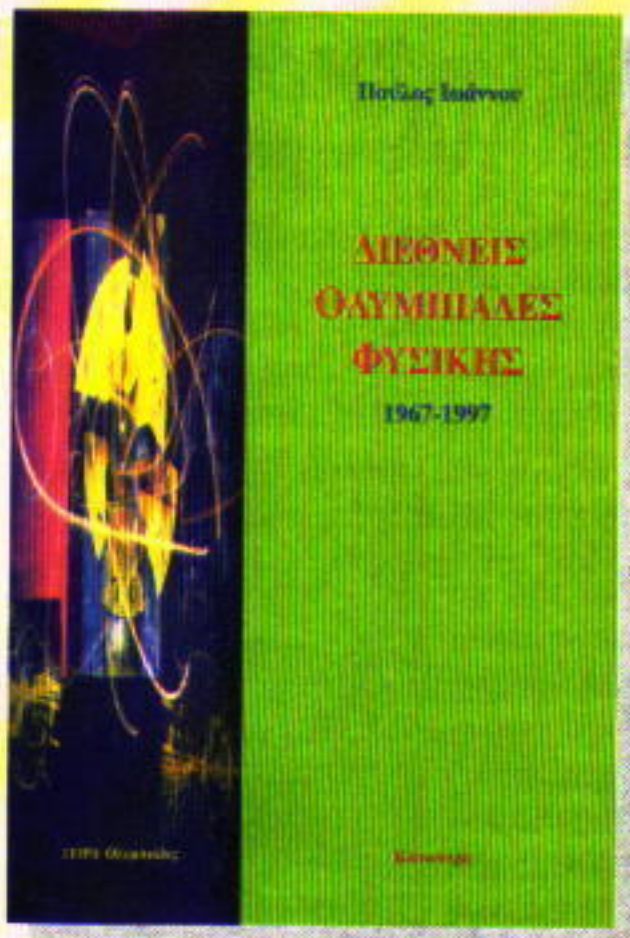
Θεώρημα 2. Κάθε στοιχειώδες ισότοπο ενός συνδέσμου μπορεί να αντικατασταθεί από μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών ισωτόπων καθένα από τα οποία μετατρέπει το διάγραμμα του συνδέσμου με κάποιον από τους τρόπους που παρουσιάζονται στο Σχήμα 11.

Για παράδειγμα, το στοιχειώδες ισότοπο του Σχήματος 12 αντικαθίσταται από την ακολουθία των στοιχειωδών ισωτόπων του Σχήματος 13 (οι αριθμοί στο Σχήμα 13 εξηγούν τη σειρά των πράξεων).

Θεώρημα 3. Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των ορθών τρίχρωμων χρωματισμών δύο διαγραμμάτων, καθένα από τα οποία προκύπτει από το άλλο μέσω των πράξεων του Σχήματος 11. Η αντιστοιχία είναι τέτοια ώστε τα αμετάβλητα τμήματα στους αντίστοιχους χρωματισμούς έχουν το ίδιο χρώμα.

Η πρόταση είναι προφανής για όλους τους μετασχηματισμούς του Σχήματος 11, εκτός του 11η. Στην τελευταία περίπτωση, συνάγουμε την απόδειξη από το Σχήμα 14. 

ΣΕΙΡΑ: Ολυμπιάδες



Παύλος Ιωάννου

Διεθνείς Ολυμπιάδες Φυσικής

1967-1997

Το παρόν σύγγραμμα είναι η πρώτη προσπάθεια παγκόσμια για συνολική παρουσίαση των θεμάτων όλων των Διεθνών Ολυμπιάδων Φυσικής που διοργανώθηκαν μέχρι σήμερα. Τα ζητήματα των είκοσι οκτώ συνολικά διαγωνισμών παρουσιάζονται αναλυτικά και συνοδεύονται από τις λύσεις τους με προτάσεις και υποδείξεις.

Το βιβλίο απευθύνεται αφ' ενός στους μαθητές των τελευταίων τάξεων του λυκείου με ενδιαφέρον για τις θετικές επιστήμες και στους φοιτητές των θετικών επιστημών και των πολυτεχνικών σχολών αφ' ετέρου στους καθηγητές τους, οι οποίοι θα μπορέσουν να αντλήσουν πολλές ιδέες και να αξιοποιήσουν προτάσεις από τα θέματα που περιλαμβάνει.

Σελ.: 363, 17 × 25 εκ., Α/Μ, 6.500 δρχ.

Στη σειρά «Ολυμπιάδες» κυκλοφορούν ήδη τα βιβλία:



Εκδόσεις Κάτοπτρο - Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου
(Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

Εποικοδομητική πολυπλοκότητα

Ο Γρηγόρης Νίκολης μιλά στο ελληνικό Quantum

Τη φετεινή άνοιξη, ο διαπρεπής καθηγητής του Ελεύθερου Πανεπιστημίου των Βρυξελλών Γρηγόρης Νίκολης παραχώρησε στον Γιώργο Ευαγγελόπουλο, ειδικό συνεργάτη του ελληνικού Quantum, μια άκρως ενδιαφέρουσα συνέντευξη. Έχουμε τη χαρά και την τιμή να φιλοξενούμε τη συνέντευξη αυτή στο παρόν τεύχος.

Ερ.: Κύριε Νίκολη, «μη γραμμικότητα», «χάος» και «πολυπλοκότητα» είναι έννοιες που σήμερα έχουν ξεφύγει από την αυστηρή επιστημονική ορολογία. Ανήκουν πια στο καθημερινό μας λεξιλόγιο και παρουσιάζονται στο κοινό των μη ειδικών υπό μορφή εκλαϊκευτικών άρθρων ή σχολίων στον ημερήσιο τύπο.

Μιλήστε μας για το πώς οι έννοιες αυτές συνδέονται με τις τελευταίες εξελίξεις στο χώρο των φυσικών επιστημών.

Απ.: Στην καθημερινή μας εμπειρία έχουμε συχνά την ευκαιρία να παρευρισκόμαστε σε γεγονότα που εξελίσσονται στο χρόνο και το χώρο κατά τρόπο απροσδόκητο, όπου ομαλότητες μεγάλης εμβέλειας διακόπτονται ξαφνικά από φαινομενικά τυχαίες εξελικτικές διαδικασίες. Μέσα από αυτή τη στενή συνύπαρξη τάξης και αταξίας, τη συνύπαρξη δηλαδή πολλών καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί ένα και το αυτό σύστημα, και το στοιχείο έκπληξης που συνοδεύει την αιφνίδια μετάβαση από τη μια κατάσταση στην άλλη, ο παρατηρητής δοκιμάζει μια αίσθηση «πολυπλοκότητας».

Επί καιρό, η κυρίαρχη γνώμη ήταν ότι η εντύπωση της πολυπλοκότητας που οδηγούμαστε να σχηματίσουμε για ένα σύστημα προέρχεται από το ότι έχουμε ελλιπή πληροφορία ως προς το σύστημα αυτό —σε σχέση, π.χ., με την παρουσία ενός μεγάλου αριθμού μεταβλητών και παραμέτρων που επισκιάζουν κάποια θεμελιώδη οργανωτική αρχή.

Με άλλα λόγια, η άποψη ήταν ότι η πολυπλοκότητα δεν αποτελεί μια πρωταρχική ιδιότητα της φύσης, αλλά, μάλλον, ένα προσωρινό κώλυμα στην εκτέλεση του προγράμματος της σύγχρονης επιστήμης. Θα αρκούσε να συγκεντρώσει κανείς μια μεγάλη ποσότητα δεδομένων και να τα

αναλύσει κατάλληλα για να ξαναβρεί την τάξη, την απεριορίστη προβλεψιμότητα και την πρωταρχική απλότητα,



Ο Γρηγόρης Νίκολης γεννήθηκε στην Αθήνα το 1939. Πήρε το δίπλωμα του μηχανολόγου-ηλεκτρολόγου από το Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο, το 1962, και το διδακτορικό δίπλωμα στη θεωρητική φυσική από το Πανεπιστήμιο των Βρυξελλών, το 1965, υπό τη διεύθυνση του Plya Prigogine. Μετά από διαμονή δεκαπέντε μηνών στο Πανεπιστήμιο του Σικάγου, όπου δούλεψε με τον Stuart Rice, επέστρεψε στο Ελεύθερο Πανεπιστήμιο των Βρυξελλών, στο οποίο είναι σήμερα τακτικός καθηγητής και διευθυντής του Κέντρου Μελέτης μη Γραμμικών Φαινομένων και Πολύπλοκων Συστημάτων. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα εντοπίζονται στους κλάδους της στατιστικής μηχανικής και θερμοδυναμικής, της μη γραμμικής επιστήμης και της θεωρίας πολυπλοκότητας.

Ο Γρηγόρης Νίκολης έχει γράψει τρία βιβλία και περί τα διακόσια άρθρα σε ειδικευμένα επιστημονικά περιοδικά.

Απρόσδοκων συμπεριφορών τις οποίες θα χαρακτηρίζαμε χωρίς δισταγμό «πολύπλοκες»: απότομες μεταβολές, πολλές συνυπάρχουσες καταστάσεις, αυτοοργάνωση και συναφή συμπεριφορά ή, αντιθέτως, αταξία στο χώρο ή το χρόνο, στην οποία αναφερόμαστε συχνά ως «χάος». Τα φαινόμενα αυτά επζούν, όποια και να είναι η ακρίβεια των παρατηρήσεών μας. Η ιδέα να τα αποδώσει κανείς σε ελλιπή πληροφορία δεν έχει πια καμία βάση· η πολυπλοκότητα είναι βαθιά ριζωμένη στους θεμελιώδεις νόμους της φύσης.

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι η πειραματική μέτρηση —η διαδικασία μέσω της οποίας επικοινωνούμε με ένα σύστημα— υπόκειται αναγκαστικά σε πεπερασμένη ακρίβεια. Ο θεμελιώδης αυτός περιορισμός μάς ανοίγει «ένα παράθυρο» μέσω του οποίου παρατηρούμε τη φύση. Ένα τέτοιο παράθυρο παίζει συχνά το ρόλο του «κουτιού της Πανδώρας»,

το άνοιγμα του οποίου αποκαλύπτει έναν ανύποπτο πλούτο συμπεριφορών που διαφορετικά θα παρέμενε στο παρασκήνιο.

Η ανακάλυψη ότι απλά συστήματα εμφανίζουν πολύπλοκη συμπεριφορά σήμανε την αρχή μιας γιγαντιαίας προσπάθειας για την ανάπτυξη συστηματικών μεθόδων ποιοτικής και ποσοτικής μελέτης της πολυπλοκότητας, η οποία οδήγησε στη μη γραμμική επιστήμη στη σημερινή της μορφή. Οι μεθοδολογίες αυτές άνοιξαν καινούργιους ορίζοντες, δείχνοντάς μας ότι ο απεριόριστος πλούτος των δομών και των εξελικτικών διαδικασιών που παρατηρούμε στη φύση δεν είναι κατ' ανάγκην το πιστό αντίγραφο ενός συγκρίσιμου πλούτου εγγεγραμμένου στο φυσικό νόμο:

αντιθέτως, η δράση στοιχειωδών νόμων για μεγάλο χρονικό διάστημα μπορεί να οδηγήσει σε μια πολύπλοκη συμπεριφορά, γεννήτρια δομών και εξελίξεων χαρακτηριζόμενων από νέες, συλλογικές ιδιότητες, οι οποίες κατ' ουδένα τρόπο μπορούν να αναχθούν σ' αυτές των επιμέρους στοιχείων. Η επιτευχθείσα πρόοδος μας επιτρέπει σήμερα να ρίξουμε ένα καινούργιο βλέμμα στα πολύπλοκα συστήματα που συναντάμε στη φύση.

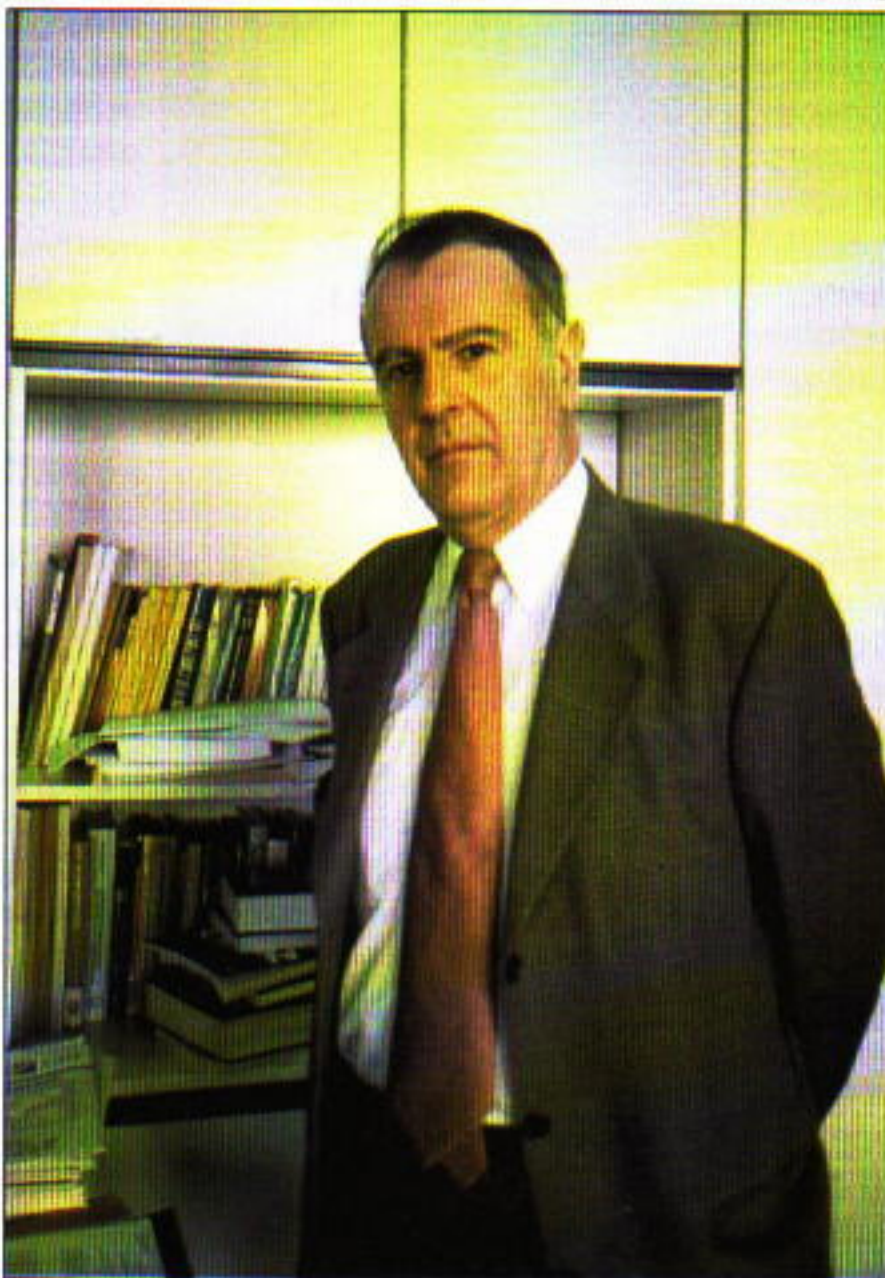
Ερ.: Κύριε Νικόλη, όσον αφορά τη μελέτη των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, υπάρχουν διάφορες σχολές σκέψης. Μιλήστε μας για τη γένεσή τους και για τις διαφορές απόψεις που αυτές υποστηρίζουν.

Απ.: Κατά γενική ομολογία, ο ιδρυτής της θεωρίας των μη γραμμικών συστημάτων είναι ο Henri Poincaré, ο μεγάλος γάλλος μαθηματικός του τέλους του 19ου αιώνα-αρχής του 20ού. Το άμεσο κίνητρο του μεγαλοφυσούς αυτού επιστήμονα ήταν η ουράνια μηχανική, που την εποχή εκείνη εκπροσωπούσε την επιστήμη στην πιο γνήσια μορφή της. Ξέρουμε σήμερα ότι οι μέθοδοι που επινόησε εφαρμόζονται σε τεράστια ποικιλία προβλημάτων, πέρα από το αρχικό πλαίσιο της ουράνιας μηχανικής.

Στον ρώσο μαθηματικό Aleksandr Lyapunov, σύγχρονο του Poincaré, οφείλουμε την ενοποιημένη μελέτη δυναμικών συστημάτων από τη σκοπιά της *ευστάθειας*, που προσδιορίζει, κατά κάποιον τρόπο, ποιες από τις πολλαπλές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί ένα δυναμικό σύστημα είναι φυσικώς πραγματοποιήσιμες.

Η περίοδος 1910-1950 είναι μια μακρά περίοδος στασιμότητας για τη μη γραμμική δυναμική, με εξαίρεση τη σχολή του Aleksandr Andronov στη Σοβιετική Ένωση και τη σχολή του George Birkhoff στις ΗΠΑ, οι οποίες συνέχισαν

και εμπάθυναν το έργο των Poincaré και Lyapunov. Αντίθετα, στη δεκαετία από τα μέσα του 1950 έως τα μέσα του 1960 είμαστε μάρτυρες μιας πραγματικής αναγέννησης με την οποία συνδέονται στενά τα ονόματα των σοβιετικών Andrei Kolmogorov και Vladimir Arnold, και του αμερικανού Stephen Smale. Το καινούργιο στοιχείο που συνεισέφεραν οι ερευνητές αυτοί είναι ότι η μη ολοκληρωσιμότητα —ουσιαστικά, η αδυναμία να προσομοιώσουμε ένα δυναμικό σύστημα με ένα σύνολο ανεξάρτητων ταλαντωτών— είναι ο κανόνας στον κόσμο των δυναμικών συστημάτων και, κατά συνέπεια, στη φύση. Ο δρόμος τώρα πα είναι ανοικτός για απεριόδικες συμπεριφορές, μεταξύ των οποίων το χάος αποτελεί ένα ιδιαίτερα εντυπωσιακό παράδειγμα.



Οι παραπάνω εξελίξεις, παρόλο το πελώριο ενδιαφέρον τους, παρέμειναν, μέχρι τα μέσα του 1960, ουσιαστικά περιορισμένες στο μαθηματικό χώρο. Επιπλέον, στη μεγάλη τους πλειονότητα αφορούσαν *διατηρητικά συστήματα*, τα οποία παραδοσιακά αποτελούσαν το κύριο αντικείμενο ενδιαφέροντος της κλασικής μηχανικής και του ηλεκτρομαγνητισμού. Θα έπρεπε να περιμένουμε μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1960 για να δούμε τα *καταναλωτικά συστήματα** μακριά από τη θερμοδυναμική ισορροπία να εμφανίζονται δειλά στο στερέωμα της μη γραμμικής δυναμικής. Η εξέλιξη αυτή οφείλεται, εν πολλοίς, στους φυσικούς και τους φυσικοχημικούς, διότι κάθε φυσικό σύστημα σε μακροσκοπική κλίμακα είναι καταναλωτικό. Ας προσθέσουμε, επιπλέον, ότι αυτή είναι και η εποχή όπου ο γάλλος μαθηματικός René Thom ανέπτυξε τη

θεωρία των καταστροφών, που αφορά επίσης καταναλωτικά συστήματα και στην οποία θα επανέλθουμε.

Η κύρια συμβολή των φυσικών, φυσικοχημικών και βιοχημικών της περιόδου αυτής, τόσο των θεωρητικών (Ilya Prigogine, Paul Glansdorff, Hermann Haken, ο υποφαινόμενος, κ.ά.) όσο και των πειραματικών (Anatole Zhabotinski, Benno Hess, Dick Noyes), ήταν ότι συνήθη, «απλά» συστήματα δίνουν λαβή σε απροσδόκητες, πολύπλοκες συμπεριφορές, κυρίως υπό μορφή αυτοοργανωτικών διαδικασιών. Ένα μεγάλο μέρος της δεκαετίας του 1970 αφιερώθηκε στην αναλυτική μελέτη των εν λόγω συμπεριφορών, με τη χρήση των μεθόδων της θεωρίας διακλαδώσεων, η οποία, με τη σειρά της, είναι στενά συνδεδεμένη με τη

* Dissipative systems: μερικές φορές στην ελληνική βιβλιογραφία και συστήματα έκλυσης ή διασκορπισμού. (Γ. Ε.)

θεωρία δυναμικών συστημάτων. Η δική μου δραστηριότητα στον συγκεκριμένο τομέα συνέβαλε στην πρώτη μη γραμμική ανάλυση συστημάτων διάχυσης και χημικών αντιδράσεων. Μια παράλληλη δραστηριότητα παρατηρήθηκε στον τομέα της υδροδυναμικής (Lee Segel, Alan Newell).

Η τελευταία πράξη αυτής της μεγαλειώδους ιστορίας αρχίζει στα τέλη της δεκαετίας του 1970. Αφορά το χάος, φαινόμενο του οποίου η γένεση συνοδεύει την εξαφάνιση ασυτηρά ομαλών αυτοοργανωτικών μορφών· Mitchell Feigenbaum, Edward Lorenz, David Ruelle, Floris Takens είναι μερικά αντιπροσωπευτικά ονόματα στον τομέα αυτό, που αποτελεί, ακόμη, αντικείμενο ραγδαίων εξελίξεων.

Οι παραπάνω εξελίξεις μάς διδάξαν κάτι εντελώς απροσδόκητο, την εγκατάλειψη κάθε ελπίδας «παγκοσμιοποίησης» της δυναμικής πολύπλοκων συστημάτων. Στα τέλη της δεκαετίας του 1960, ο Thom είχε αποδείξει την ύπαρξη μιας τέτοιας παγκοσμιοποίησης μέσα στα περιορισμένα πλαίσια της θεωρίας καταστροφών, υπό την έννοια ότι έφθανε κανείς σε μια πλήρη ταξινόμηση όλων των συμπεριφορών που μπορούσαν να πραγματοποιηθούν από ένα δεδομένο δυναμικό σύστημα, όταν οι παράμετροι ελέγχου αλλάζουν. Σήμερα γνωρίζουμε ότι η θεωρία αυτή εφαρμόζεται μόνο σε περιορισμένες κατηγορίες συστημάτων. Για τη μεγάλη πλειονότητα των άλλων συστημάτων, ο δρόμος παραμένει ανοικτός για εκπλήξεις, για εξελικτικές διαδικασίες που ο παρατηρητής δεν είναι σε θέση να προβλέψει εκ των προτέρων.

Ερ.: Ποιος είναι ο ακριβής ρόλος της μη γραμμικότητας στην ανάδειξη κανονικών χωρικών μορφών σ' ένα καταναλωτικό σύστημα μακριά από την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας;

Απ.: Η κατάσταση ενός χωρικός εκτεταμένου συστήματος προσδιορίζεται από τις οριακές συνθήκες. Κατά κανόνα, ένα τέτοιο σύστημα δέχεται μια κατάσταση που μοιράζεται τις συμμετρίες των οριακών συνθηκών, π.χ. πλήρη ομοιογένεια ως προς το χώρο εάν οι οριακές συνθήκες είναι και αυτές ομογενείς. Μεταφραζόμενο σε μαθηματική γλώσσα τούτο σημαίνει ότι οι εξελικτικοί νόμοι που προσδιορίζουν τη χρονική μεταβολή του συστήματος επιδέχονται μια λύση της μορφής αυτής. Σε ένα γραμμικό σύστημα δεν υπάρχει χώρος για άλλη λύση. Κατά συνέπεια, η κατάσταση στην οποία θα βρεθεί θα διατηρήσει για πάντα τη συμμετρία των οριακών συνθηκών. Ο ρόλος της μη γραμμικότητας είναι να επιτρέψει την ύπαρξη πολλαπλών λύσεων των εξελικτικών νόμων, μεταξύ των οποίων θα βρούμε, ενδεχομένως, κανονικές χωρικές μορφές που σπάζουν τη συμμετρία των οριακών συνθηκών. Ας τονίσουμε ότι η μη γραμμικότητα είναι αναγκαία, αλλά όχι ικανή συνθήκη. Το ποια κατάσταση θα επικρατήσει σ' ένα σύστημα θα προκύψει από τις ιδιότητες ευστάθειας των λύσεων, τις αρχικές συνθήκες και τις διακυμάνσεις που θα «σπρώξουν» το σύστημα σε μια «προνομιούχο» κατάσταση ανά-

μεσα στην πολλαπλότητα των υπάρχουσών λύσεων.

Ερ.: Θα μου επιτρέψετε, τώρα, να σας θέσω κάπως πιο ειδικές ερωτήσεις, οι οποίες, όμως, θα βοηθήσουν τους αναγνώστες μας να κατανοήσουν βαθύτερα το έργο σας.

Στην κατάσταση ισορροπίας, η ελεύθερη ενέργεια του Landau και η ύπαρξη της παραμέτρου τάξεως περιγράφουν τις ιδιότητες των συστημάτων που παρουσιάζουν σπασμένη συνεχή συμμετρία. Σε στάσιμα συστήματα εκτός ισορροπίας, η ανάδειξη μορφών με κανονικότητα θυμίζει το σπάσιμο της συνεχούς συμμετρίας στην ισορροπία. Η έρευνα, όμως, για μια αρχή ακροτάτου, όπως αυτή της ελαχιστοποίησης της ελεύθερης ενέργειας στην ισορροπία, δεν φαίνεται να έχει αποδώσει πολλά. Αντι για μια τέτοια αρχή, οι περισσότερες θεωρίες που περιγράφουν συστήματα εκτός ισορροπίας βασίζονται στις ιδιότητες των δυναμικών εξισώσεων.

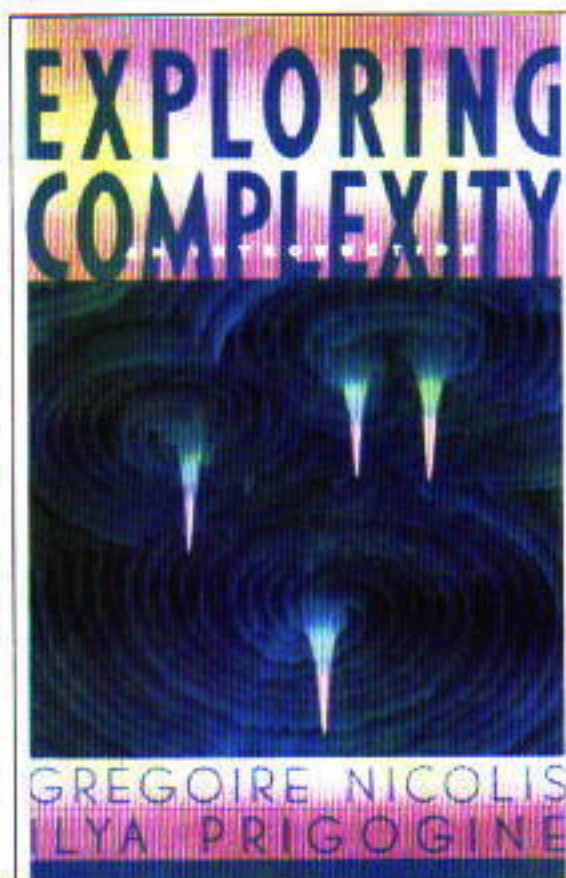
Κύριε Νικόλη, είναι γνωστή η δουλειά σας στον συγκεκριμένο χώρο. Μιλήστε μας γι' αυτήν.

Απ.: Η δυναμική γύρω από την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας παίρνει μια παγκόσμια μορφή, χάρη στις ιδιότητες ακροτάτου που παρουσιάζουν τα θερμοδυναμικά δυναμικά, όπως π.χ. η εντροπία για ένα σύστημα υπό σταθερή ενέργεια και σταθερό όγκο, η ελεύ-

θερη ενέργεια του Helmholtz σ' ένα σύστημα υπό σταθερή θερμοκρασία και σταθερό όγκο, ή η ελεύθερη ενέργεια του Gibbs (που υπεισέρχεται συνήθως στη θεωρία του Landau) σ' ένα σύστημα υπό σταθερή θερμοκρασία και πίεση. Όταν το σύστημα βρίσκεται σε μια μοναδική κατάσταση της ύλης (π.χ. ένα κράμα χαλκού-κασσιτέρου σε υψηλή θερμοκρασία), η παγκόσμια αυτή δυναμική είναι γραμμική. Χαμηλώνοντας τη θερμοκρασία παρατηρούμε την εμφάνιση νέας κρυσταλλικής δομής του ίδιου κράματος (σπάσιμο συμμετρίας). Στην περιοχή της κρίσιμης θερμοκρασίας ανάμεσα στις δύο αυτές μορφές, η δυναμική γίνεται μη γραμμική. Παρόλο που διατηρεί το χαρακτήρα παγκοσμιοποίησης, υπό την έννοια ότι εκφράζεται ακόμη συναρτήσει της ελεύθερης ενέργειας, η ακριβής μορφή της θα εξαρτηθεί από το είδος αλλαγής φάσεως και παραμέτρου τάξεως που έχουμε κάθε φορά.

Η παγκοσμιοποίηση, υπό την παραπάνω έννοια, παύει μόλις αποκλίνει κανείς από την ισορροπία, όπου δεν υπάρχει μια καμιά αρχή ακροτάτου. Εκ πρώτης όψεως, λοιπόν, κάθε σύστημα, κάθε εξελικτική διαδικασία, θα έπρεπε να αποτελούσε και μια καινούργια μερική περίπτωση. Μια τέτοια κατάσταση, όμως, θα ήταν ενοχλητική, διότι θα σήμαινε την εγκατάλειψη κάθε ελπίδας ποιοτικής κατανόησης, ενοποίησης, πρόβλεψης και ελέγχου.

Στην πραγματικότητα, τα πράγματα είναι, ευτυχώς, πιο ευνοϊκά. Είπαμε ήδη παραπάνω ότι η εμφάνιση νέων καταστάσεων σε ένα σύστημα συνοδεύεται από την αστάθεια των προηγούμενων διαθέσιμων λύσεων των εξελικτικών νόμων. Η γένεση των καινούργιων αυτών λύσεων από τις



παλιές είναι αυτό που ήδη αναφέραμε ως *διακλάδωση*. Αποδεικνύεται ότι στην άμεση γειτνίαση ασταθειών ορισμένου τύπου, η δυναμική των διακλαδώσεων αποκτά και πάλι παγκόσμια μορφή. Αυτή τη φορά, όμως, πρόκειται για μια *μερική* παγκοσμιότητα, που θα εξαφανισθεί όταν θα αλλάξει το είδος της αστάθειας και, ιδιαίτερα, μόλις θα αρχίσουν να αλληλεπιδρούν διάφοροι μηχανισμοί αστάθειας.

Η κατάργηση της παγκοσμιότητας ανοίγει το δρόμο στην εξέλιξη και την πολυπλοκότητα. Η απελευθέρωση από τον ασφυκτικό κλοιό της ισορροπίας είναι, τελικά, μια ευεργετική πηγή ποικιλίας και διαφοροποίησης, όπως τις παρατηρούμε στην καθημερινή μας εμπειρία.

Ερ.: *Οι καταναλωτικές δομές είναι στατιστικά συστήματα, υπό την έννοια ότι διαθέτουν τεράστιο αριθμό βαθμών ελευθερίας. Υποστηρίζεται ότι ο βασικός μηχανισμός που καταστρέφει την τάξη σ' αυτές τις δομές είναι το λεγόμενο χωροχρονικό χάος. Τι είναι αυτό και πώς διακρίνεται από το χρονικό χάος, το οποίο εμφανίζεται σε συστήματα με μικρό αριθμό βημάτων ελευθερίας;*

Απ.: Μια κανονική χωρική μορφή μπορεί να περιγραφεί πλήρως από ένα μικρό αριθμό χαρακτηριστικών χωρικών κλιμάκων (π.χ. απόσταση ανάμεσα στα διαδοχικά μέγιστα κάποιου μεγέθους ως προς το χώρο) και, ενδεχομένως, χρονικών περιοδικοτήτων. Το χωροχρονικό χάος είναι μια κατάσταση που παρουσιάζει, αντιθέτως, συνεχές φάσμα χωρικών και χρονικών κλιμάκων. Μια ακραία μορφή χωροχρονικού χάους είναι η *τύρβη*, όπου οι συνυπάρχουσες κλίμακες μπορεί να καλύπτουν και δέκα τάξεις μεγέθους. Για τον παρατηρητή αυτό θα σημειωθεί σαν μια διαληπτικότητα στη χρονική εξέλιξη ή στη χωρική κατανομή των διαφόρων ιδιοτήτων.

Όσο για το καθαρά χρονικό χάος, είναι μια ενδιάμεση κατάσταση όπου το σύστημα διατηρεί χωρική συνάφεια, ενώ παρουσιάζει, παράλληλα, ένα συνεχές φάσμα χρονικών κλιμάκων.

Αναμφισβήτητα, η πιο θεαματική ιδιότητα του χάους είναι η «ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες»: δύο συστήματα των οποίων οι αρχικές καταστάσεις παρουσιάζουν μια μικρή διαφορά, μικρότερη από την ακρίβεια ακόμη και της πιο προχωρημένης μεθόδου πειραματικής μέτρησης —συνεπώς συστήματα τα οποία θα θεωρηθούν από τον παρατηρητή ως ένα και το αυτό—, στη συνέχεια θα αποκλίνουν κατά τέτοιο τρόπο ώστε η μέση απόσταση των στιγμιαίων καταστάσεών τους να αυξάνεται εκθετικά. Από τη στιγμή που η απόσταση αυτή θα υπερβεί την ακρίβεια της πειραματικής μέτρησης, τα συστήματα θα πάψουν για τον παρατηρητή να είναι πανομοιότυπα· κατά συνέπεια, ο παρατηρητής θα συμπεράνει ότι του είναι αδύνατον να προβλέψει τη μελλοντική εξέλιξη καθενός συστήματος πέρα από κάποιον χρονικό ορίζοντα. Μ' άλλα λόγια, η ύπαρξη του χάους θέτει το θεμελιώδες ερώτημα της προβλεψιμότητας των φυσικών φαινομένων, ακόμη κι αν αυτά γεν-

νώνται από καθαρά προσδιοριστικούς νόμους.

Παρ' όλες τις παραπάνω ιδιότητες, αντίθετα απ' ό,τι συχνά λέγεται, το χάος —χρονικό ή χωροχρονικό— δεν συνεπάγεται την εξαφάνιση κάθε κανονικότητας. Υπακούει σε κανονικότητες μιας καινούργιας μορφής, οι οποίες μπορούν να εκφραστούν χάρη στις έννοιες των εκθετών Lyapunov, των μορφοκλασματικών* ελκυστών και των νόμων βάθμισης. Γενικά, για να συλλάβει κανείς τις εν λόγω κανονικότητες πρέπει να περάσει σε μια πιθανοθεωρητική

περιγραφή, η οποία θα συμπληρώσει την παραδοσιακή καθοριστική περιγραφή των φυσικών φαινομένων.

Ας τονίσουμε, τέλος, ότι:

—το χάος δεν είναι το αναπόφευκτο τελικό στάδιο εξέλιξης ενός μη γραμμικού συστήματος που το «σπρώχνουμε» όλο και πιο μακριά από την ισορροπία·

—το χάος γεννάται συνήθως από την αλληλεπίδραση διαφορετικών μηχανισμών αστάθειας·

—υπάρχουν μορφές πολυπλοκότητας ανάμεσα στις κανονικές δομές και το χάος, όπως π.χ. οι παράξενοι μη χαοτικοί ελκυστές, που αντιστοιχούν σε απεριοδική συμπεριφορά, χωρίς να παρουσιάζουν την ιδιότητα της ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες.

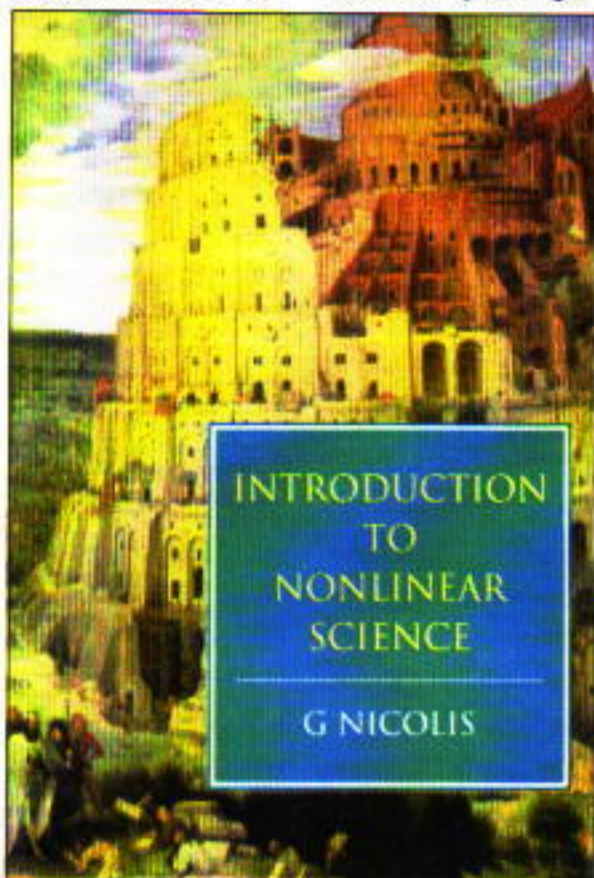
Ερ.: *Το 1980, ο Philip Anderson, σε μια διάλεξη του στην Οξφόρδη, έκανε*

την ακόλουθη δήλωση: «Υπάρχει, άραγε, μια θεωρία περί καταναλωτικών δομών συγκρίσιμη με αυτή των δομών ισορροπίας που να εξηγεί την ύπαρξη νέων, σταθερών ιδιοτήτων και οντοτήτων σε τέτοια συστήματα; Αντίθετα με το τι υποστηρίζεται σ' ένα πλήθος βιβλίων και άρθρων στο χώρο αυτό, πιστεύω ότι δεν υπάρχει τέτοια θεωρία και ότι, ακόμη, μπορεί να μην υπάρχουν ούτε δομές σαν αυτές των οποίων την ύπαρξη υποστηρίζουν ο Prigogine, ο Haken και οι συνεργάτες τους.»

Κύριε Νικολη, δεκαοκτώ χρόνια μετά, πώς σχολιάζετε τη δήλωση του Anderson;

Απ.: Πρόκειται για μια ακραία και, σήμερα πια, μη αντιπροσωπευτική στάση. Περιέργως, ένας επιστήμονας της ολκής του Anderson βάσισε τον ισχυρισμό του αυτό στην ανάλυση μιας περίπτωσης (το λεγόμενο μοντέλο του Suhl), όπου συμβαίνει να μην υπάρχει μια χαρακτηριστική χωρική κλίμακα που, όπως αναφέραμε ήδη, αποτελεί την ειδοποιό διαφορά ανάμεσα στις χωρικές καταναλωτικές δομές και τις άλλες καταστάσεις στις οποίες μπορούν να βρεθούν τα συστήματα μη ισορροπίας.

Έδωσα μια πρώτη απάντηση στους ισχυρισμούς αυτούς ήδη το 1978, στο πλαίσιο μιας διεθνούς επιστημονικής συνάντησης που είχα οργανώσει στις Βρυξέλλες με θέμα «Τάξη και διακυμάνσεις στη στατιστική μηχανική ισορροπίας και μη ισορροπίας», και στην οποία ο Anderson ήταν ένας από τους κύριους ομιλητές. Οι συνάδελφοί μου, Daniel Walgraef, Guy Dewel και Pierre Borckmans ενί-



*Fractal· και φράκταλ στην ελληνική βιβλιογραφία. (Γ. Ε.)

σχυσαν την άποψή μου με ένα άρθρο τους στο περιοδικό *Physical Review*, το 1980. Το κύριο επιχείρημά μας ήταν ότι υπάρχει μια πελώρια κατηγορία φυσικών συστημάτων, όπου φαινόμενα μεταφοράς (διάχυση, κ.λπ.) συνυπάρχουν με χημικά φαινόμενα, τα οποία επιδέχονται μια χαρακτηριστική χωρική κλίμακα. Για τα συστήματα αυτά αποδεικνύεται ότι οι διακυμάνσεις ή ο εξωτερικός θόρυβος δεν καταστρέφουν τη χωρική δομή, παρά μόνο στο μονοδιάστατο ή δισδιάστατο χώρο. Αντίθετα, στο μοντέλο του Suhl, στο οποίο βασίζεται ο Anderson, οι διακυμάνσεις εξακολουθούν να είναι επικίνδυνες, ακόμη και στις τρεις διαστάσεις, στις οποίες λειτουργούν συνήθως τα φυσικά συστήματα.

Η χαριστική βολή στους ισχυρισμούς του Anderson δόθηκε περί το 1990, με την πειραματική ανακάλυψη δομών σπασμένης συμμετρίας με χαρακτηριστική χωρική κλίμακα στη χημεία και την οπτική. Σήμερα, μπορούμε να πούμε ότι η γένεση τέτοιων καταστάσεων είναι μια πραγματική «αλλαγή φάσεως» της ύλης μακριά από τη θερμοδυναμική ισορροπία. Η θεωρία των εν λόγω φαινομένων είχε ήδη αναπτυχθεί στη δεκαετία από τα μέσα του 1970 έως τα μέσα του 1980 από τους συνεργάτες μου και μένα στις Βρυξέλλες και, μεταξύ άλλων, από τους Crispin Gardiner και Don Walls στη Νέα Ζηλανδία.

Η θεωρία αυτή παρουσιάζει πολλές αναλογίες με αυτή του Kenneth Wilson για αλλαγές φάσεως στην ισορροπία, που βασίζεται στην τεχνική της ομάδας επανακανονικοποίησης.

Περί τις αρχές της δεκαετίας του 1980 έγινε μια προσπάθεια εφαρμογής των μεθόδων αυτών στην προσέγγιση της τύρβης ως κρίσιμο φαινόμενο. Οι προσπάθειες απέτυχαν, εν μέρει διότι μία από τις αναγκαίες συνθήκες —η ύπαρξη σταθερού σημείου— δεν φαίνεται να ικανοποιείται στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Ερ.: *Υπάρχουν δύο κατηγορίες βιολογικών προβλημάτων που εμφανίζουν μεγάλη ομοιότητα με την ανάδειξη κανονικών μορφών σε φυσικά ή χημικά συστήματα εκτός ισορροπίας. Το ένα είναι η μορφογένεση, δηλαδή η δημιουργία χωρικά ανομοιογενών δομών σ' ένα αρχικά ομοιογενές μέσο, κατά την ανάπτυξη ενός οργανισμού. Το άλλο είναι οι χρονοεξαρτημένες δομές, όπως εμφανίζονται με τη διάδοση παλμών στο νευρικό σύστημα ή με τις διεγέρσεις του μυοκαρδίου.*

Ποια πρόοδος έχει σημειωθεί στη φυσική ή τη χημεία όσον αφορά τα παραπάνω βιολογικά προβλήματα;

Απ.: Η ιδέα ότι οι κανονικές μορφές που γεννώνται μέσα από μια αστάθεια η οποία σπάζει τις χωρικές συμμετρίες είναι τα φυσικά μοντέλα της βιολογικής μορφογένεσης οφείλεται στον μεγάλο άγγλο μαθηματικό Alan Turing, που είχε διαπισθανθεί τη δυνατότητα αυτή ήδη από το 1952. Περιέργως, μετά από τριάντα περίπου χρόνια έντονης δραστηριότητας οι πρόοδοι στον τομέα αυτό σταμάτησαν από τα τέλη της δεκαετίας του 1980, κυρίως διότι οι βιολόγοι ενδιαφέρονται τώρα περισσότερο για τη διευκρίνιση των μηχανισμών ελέγχου στο γεννητικό επίπεδο. Ένας άλλος λόγος είναι ότι ο ρόλος της διάχυσης —βασικού μηχανισμού για το σχηματισμό κανονικών μορφών σε μη βιολογικά συστήματα— δεν είναι τελείως σαφής στα πλαίσια της βιολογικής μορφογένεσης.

Η κατάσταση είναι διαφορετική στον τομέα των χωρο-χρονικών δομών στο νευρικό σύστημα ή στον καρδιακό μυ, οι οποίες προκαλούν σήμερα τεράστιο ενδιαφέρον. Η ύπαρξη ηλεκτρικών σπειροειδών κυμάτων στον καρδιακό ιστό είναι αναμφισβήτητη και σχετίζεται άμεσα με την εμφάνιση παθολογικών καταστάσεων, κατά τις οποίες η διέγερση του ιστού χάνει τον συγχρονισμό της χαρακτήρα. Οι χημικοί, όπως π.χ. ο Valentin Krinsky, επιτυγχάνουν σήμερα να δημιουργήσουν απολύτως παρόμοιες συμπεριφορές στο εργαστήριο, με σχετικά απλές χημικές αντιδράσεις που είναι εύκολο να μελετηθούν κατά λεπτομερή τρόπο. Ελπίζουμε ότι έτσι θα οδηγηθούμε σε στρατηγικές ελέγχου των κυμάτων αυτών, καθώς και σε νέες διαγνωστικές μεθόδους.

Όσον αφορά το νευρικό σύστημα, μεγάλη έκπληξη αποτέλεσε η ανακάλυψη ότι ατομικά κύτταρα είναι ήδη ικανά να γεννήσουν πολύπλοκους παλμούς με περιοδικές, ή και απεριοδικές, ταλαντώσεις. Ένα ερώτημα που έδωσε ώθηση σε μεγάλες εξελίξεις αφορά το ρόλο του χάους στις νοητικές διαδικασίες. Πολλοί, μεταξύ των οποίων ο Γιάννης Νικολής και ο Walter Freeman, βλέπουν στο χάος έναν μηχανισμό απεριόριστης χωρητικότητας για την αποθήκευση και μετάδοση πληροφορίας και για την αναγνώριση του εξωτερικού περιβάλλοντος. Σημειωτέον ότι στην τελευταία δεκαεπταετία αναπτύχθηκαν τεχνητά συστήματα —τα νευρωνικά δίκτυα— που εκτελούν ορισμένες «διανοητικές» λειτουργίες, όπως η αναγνώριση μορφών. Λεπτομερής μελέτη ορισμένων φαινομένων του παραπάνω τύπου έχει επιτευχθεί χάρη στις μεθόδους της στατιστικής φυσικής.

Ένας τομέας της βιολογίας που προσφέρεται σήμερα ιδιαίτερα για εφαρμογή των μεθόδων της μη γραμμικής φυσικής και της θεωρίας των πολύπλοκων συστημάτων είναι η συλλογική συμπεριφορά απλών οργανισμών (π.χ. των εντόμων) τα οποία ως μονάδες δεν αναγνωρίζουν τίποτε πέρα από το άμεσό τους περιβάλλον, αλλά ως σύνολα λύνουν πολύπλοκα προβλήματα, όπως η υποδιαίρεση της εργασίας, η κατασκευή δομών, η εξερεύνηση του περιβάλλοντος κ.λπ. Η εξήγηση της εκπληκτικής αυτής συμπεριφοράς βρίσκεται στις μη γραμμικές αναδράσεις των μηχανισμών επικοινωνίας μεταξύ των μονάδων (δηλαδή των μεμονωμένων οργανισμών). Οι δυνατότητες εφαρμογών είναι πολυάριθμες, όπως π.χ. σε ό,τι σχετίζεται με τον έλεγχο και την εκμετάλλευση οικολογικών συστημάτων.

Ερ.: *Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η ανάδειξη δομών από το τίποτε στα καταναλωτικά συστήματα αποτελεί ένα πρώτο βήμα για την εξήγηση της εμφάνισης ζωής από την «αρχέγονη σούπα» ή η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι, ακόμη, πολύ πιο πέρα από τα όρια των δυνατοτήτων μας;*

Απ.: Η αυτόματη γένεση, όχι ενός ζώντος οργανισμού, αλλά ακόμη και ενός απλού βιολογικού πολυμερούς, υπό συνθήκες ισορροπίας, είναι, ουσιαστικά, αδύνατη, υπό την έννοια ότι ο χρόνος αναμονής του συμβάντος αυτού είναι ασύλληπτα μεγάλος. Ας πάρουμε, για να συγκεκριμενοποιήσουμε την ιδέα, ένα πολυνουκλεοτίδιο 100 μονάδες μακρύ. Η συνένωση στην τύχη των τεσσάρων βασικών νουκλεοτιδίων μπορεί να γίνει με 4^{100} , δηλαδή $1,6 \cdot 10^{60}$, τρόπους. Από αυτούς μόνον ένας περιορισμένος αριθμός μορφών θα έχει τις κατάλληλες βιολογικές ιδιότητες. Η

πιθανότητα, λοιπόν, να έχουμε αυτή τη συγκεκριμένη μορφή είναι της τάξεως του $1/10^{60}$. Χρησιμοποιώντας την ιδέα των σημειακών μεταλλάξεων και υποθέτοντας πως υπάρχει μία μετάλλαξη κάθε 10^{-8} δευτερόλεπτα (κάτι που είναι υπερβολικά γρήγορο), ο θεωρητικά απαραίτητος χρόνος ώστε να έχουμε την «κατάλληλη» μορφή θα ήταν κάπου 10^{50} δευτερόλεπτα. Αυτός ο αριθμός είναι πολύ πιο μεγάλος από την ηλικία του Σύμπαντος, η οποία υπολογίζεται περίπου σε 10^{17} δευτερόλεπτα. Ο συλλογισμός, λοιπόν, δείχνει ότι ο σχηματισμός μιας βιολογικής δραστηριότητας με το παιχνίδι της τύχης είναι αδύνατος. Τα ίδια, ουσιαστικά, επιχειρήματα αποκλείουν παρόμοιο σχηματισμό υπό συνθήκες θερμοδυναμικής ισορροπίας. Επομένως, μπορούμε να πούμε, χωρίς κανένα δισταγμό, ότι κάθε «καινοτομία» που ευθύνεται για την εμφάνιση μιας μορφής ή μιας λειτουργίας από το τίποτε λαμβάνει χώρα, αναγκαστικά, μακριά από τη θερμοδυναμική ισορροπία.

Από την άλλη μεριά, απ' τη στιγμή που ένα τέτοιο φαινόμενο θα πραγματοποιηθεί, τίποτε δεν αποκλείει — και θα έλεγα, μάλιστα, πως όλα επιβάλλουν — την περαιτέρω σταθεροποίησή του, χάρη στην επέμβαση μηχανισμών ισορροπίας. Αυτό ακριβώς συνέβη στη φύση, όπου η ιστορία της βιολογικής εξέλιξης καταγράφηκε στο DNA, έναν «απεριόριστο κρύσταλλο», όπως λέει και ο Erwin Schrödinger, που συνυπάρχει σε ευσταθή ισορροπία με το περιβάλλον του.

Στην πράξη, δυστυχώς, η σύνθεση βιολογικών δομών από συνήθη μόρια, σε συνθήκες μη ισορροπίας, έδωσε μέχρι τώρα μέτρια αποτελέσματα: μερικά αμινοξέα, τίποτε που να μοιάζει, έστω και από μακριά, με μια πρωτεΐνη ή ένα κομμάτι πολυνουκλεοτιδίου. Μια εναλλακτική λύση συνίσταται στο να αρχίσει κανείς από το στάδιο όπου υπάρχουν ήδη βιολογικά πολυμερή και να εξετάσει εάν αυτά μπορούν να εξελιχθούν περαιτέρω υπό συνθήκες μη ισορροπίας, χάρη σε κατάλληλες αυτοκαταλυτικές διαδικασίες. Απόπειρες προς αυτή την κατεύθυνση γίνονται στο εργαστήριο του Manfred Eigen στο Γκκίτινγκεν, με ενθαρρυντικά αποτελέσματα.

Ερ.: Ένα από τα προβλήματα των θεμελίων της φυσικής είναι και το λεγόμενο «βέλος του χρόνου». Δεδομένου ότι οι φυσικοί νόμοι που περιγράφουν τα μικροσκοπικά συστήματα παρουσιάζουν χρονική αναστρεψιμότητα, γιατί όλα τα μακροσκοπικά φαινόμενα έχουν μια συγκεκριμένη χρονική κατεύθυνση; Ο Πιγια Prigogine έχει προσπαθήσει να αναπτύξει μια θεωρία που να περιέχει τη μη αναστρεψιμότητα σε θεμελιώδες επίπεδο. Από την άλλη, ο Joel Lebowitz, σ' ένα άρθρο του στο Physics Today, το Σεπτέμβριο του 1993, λέει: «Με τα λόγια του Erwin Schrödinger, "οι ιδέες του Boltzmann δίνουν μια εξήγηση" της προέλευσης της μακροσκοπικής συμπεριφοράς. Όλοι οι ισχυρισμοί περί αντιφάσεων τους οποίους γνωρίζω είναι, κατά τη γνώμη μου, λανθασμένοι· δεν βλέπω να υπάρχει ανάγκη για εναλλακτικές εξηγήσεις.»

Κύριε Νικόλη, ποια είναι η θέση σας στη διαμάχη αυτή;

Απ.: Η θεωρία δυναμικών συστημάτων μάς μαθαίνει ότι η κίνηση των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων ενός μακροσκοπικού συστήματος είναι, κατά κανόνα, χαοτική. Μια σειρά πρόσφατων εργασιών δείχνει ότι το εν λόγω μικροσκοπικό χάος συνδέεται με μακροσκοπικά φαινόμενα, π.χ.

διάχυση, μεταφορά θερμότητας κ.λπ., και, μέσω αυτών, με τη μη αναστρεψιμότητα αυτή καθεαυτήν. Πολύπλοκη δυναμική και μεγάλος αριθμός σωματιδίων είναι, λοιπόν, για μένα, οι ουσιώδεις μηχανισμοί πίσω από το βέλος του χρόνου. Δεν βλέπω την ανάγκη ενσωμάτωσης της μη αναστρεψιμότητας στο θεμελιώδες επίπεδο, αλλά ούτε και συμφωνώ με τη γνώμη του Lebowitz ότι οι ιδέες του Boltzmann μάς δίνουν την πλήρη εξήγηση, διότι με τον τρόπο αυτό χάνει κανείς τελείως κάθε επαφή με τις δυναμικές βάσεις του φαινομένου.

Σημειώτεον ότι ο σύνδεσμος χάος-μη αναστρεψιμότητα γίνεται σαφής μόνον χάρη στην πιθανοθεωρητική προσέγγιση του προβλήματος. Η κατάσταση ισορροπίας είναι ένας παγκόσμιος ελκυστής των κατονομών πιθανότητας που ανήκουν σε κάποιον κατάλληλο συναρτησιακό χώρο, ενώ οι επιμέρους τροχιές υπόκεινται πάντοτε στην αντιστρεψιμότητα. Δεδομένου ότι τα μακροσκοπικά μεγέθη είναι μέσες τιμές ως προς κάποια κατανομή πιθανότητας, αυτό κατ' αρχάς φθάνει για να εξηγήσει τη μη αντιστρεψιμότητα των μακροσκοπικών συστημάτων.

Πολλά προβλήματα παραμένουν ανοικτά, ιδίως ως προς τη φύση του χάους στα χαμιλτονιανά συστήματα πολλών σωματιδίων. Κατανοούμε, όμως, καλύτερα συστήματα τύπου «ελαστικών σφαιρών», όπου οι χαοτικές τροχιές καλύπτουν ουσιαστικά όλον το διαθέσιμο χώρο.

Ερ.: Είσαστε ένα από τα μέλη της διεθνούς επιτροπής που θα οργανώσουν τον Ιούλιο του 1998, στο Παρίσι, το 20ό Συνέδριο Στατιστικής Φυσικής της Διεθνούς Ενώσεως Θεωρητικής και Εφαρμοσμένης Φυσικής (IUPAP). Ένα από τα θέματα του συνεδρίου θα είναι: «Εφαρμογές στα οικονομικά και σε άλλους τομείς». Τι νομίζετε πως έχει να προσφέρει η στατιστική φυσική στα οικονομικά;

Απ.: Η στατιστική φυσική και ιδιαίτερα η μη γραμμική δυναμική και η θεωρία πολυπλοκότητας έχουν να προσφέρουν στα οικονομικά και σε άλλους συναφείς τομείς καινούργιες μεθοδολογίες και μερικές ενδιαφέρουσες και απροσδόκητες αναλογίες. Μερικά παραδείγματα:

—Το πρόβλημα της πρόβλεψης, με βάση τα δεδομένα μιας χρονοσειράς, όπου μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει έννοιες δυναμικών συστημάτων (χώρος φάσεων, κ.λπ.) για να κάνει την καλύτερη δυνατή επέκταση των δεδομένων του (μη γραμμική πρόβλεψη).

—Η ύπαρξη αλγεβρικών, μάλλον, παρά εκθετικών νόμων στα οικονομικά (π.χ. ο νόμος του Zipf), η οποία, για μερικούς ερευνητές, είναι ενδεικτικό ιδιοτήτων βάθμισης παρόμοιων με αυτές που χαρακτηρίζουν τις μορφοκλασματικές δομές οι οποίες παρατηρούνται σε πολλά φυσικοχημικά συστήματα.

Σε τελευταία ανάλυση, για την κατανόηση ενός φαινομένου πέρα από το χώρο των φυσικών επιστημών, πρέπει κανείς να λάβει υπόψη του τόσο τις ιδιορρυθμίες του επιμέρους συστήματος όσο και πιο γενικές ιδιότητες που, ενδεχομένως, το κάνουν να ανήκει σε κάποια παγκόσμια τάξη συστημάτων τα οποία «μοιράζονται» τις ίδιες ιδιότητες. Για το λόγο αυτό, η πρόοδος στον εν λόγω τομέα θα επιτευχθεί μόνο με στενή συνεργασία μεταξύ των ειδικών του τομέα αυτού και των μοντελιστών της στατιστικής φυσικής. ■

Ερμηνεύοντας τα θαύματα

Η άλως, οι παρήλιοι και άλλα οπτικά φαινόμενα

V. Novoseltzev

ΣΤΟ ΟΝΟΜΑΣΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΑ, ο μεγάλος γάλλος φυσιογνώστης και αστρονόμος Camille Flammarion (1842-1925) περιέγραψε για πρώτη φορά όλα τα ασυνήθιστα φυσικά φαινόμενα της γήινης ατμόσφαιρας εξηγώντας τα στο ευρύ κοινό. Από τότε οι περιγραφές των αντικατοπτρισμών, των ηλιακών άλων και άλλων οπτικών φαινομένων είναι κάτι συνηθισμένο.

Από την εποχή του Flammarion, η ραγδαία ανάπτυξη της βιομηχανίας και της τεχνολογίας έχει αλλάξει την όψη του πλανήτη μας, ενώ οι εφαρμογές της τεχνολογίας επέφεραν τροποποιήσεις στη μορφή με την οποία εκδηλώνονται διάφορα φυσικά ατμοσφαιρικά φαινόμενα. Δεν είναι σπάνια η περίπτωση να γίνεται τόσο αγνώριστο ένα φαινόμενο ώστε να κατατάσσεται στα «άγνωστης ταυτότητας αντικείμενα».

Η πρώτη παρατήρηση μιας παραλλαγής ατμοσφαιρικού φαινομένου η οποία οφείλεται στην εξέλιξη της τεχνολογίας πραγματοποιήθηκε επίσης από τον Flammarion. Πετώντας με ένα αερόστατο θερμού αέρα, ήταν ο πρώτος που παρατήρησε την έγχρωμη άλω γύρω από τη σκιά που έριχνε το αεροσκάφος του πάνω στα σύννεφα.

Η άλως

Θα περιγράψουμε λεπτομερώς μόνο ένα από τα ατμοσφαιρικά οπτικά φαινόμενα, την άλω. Οι άλως είναι συμμετρικά σχήματα —οι κύκλοι, τα τόξα και οι κηλίδες οι οποίες εμφανίζονται

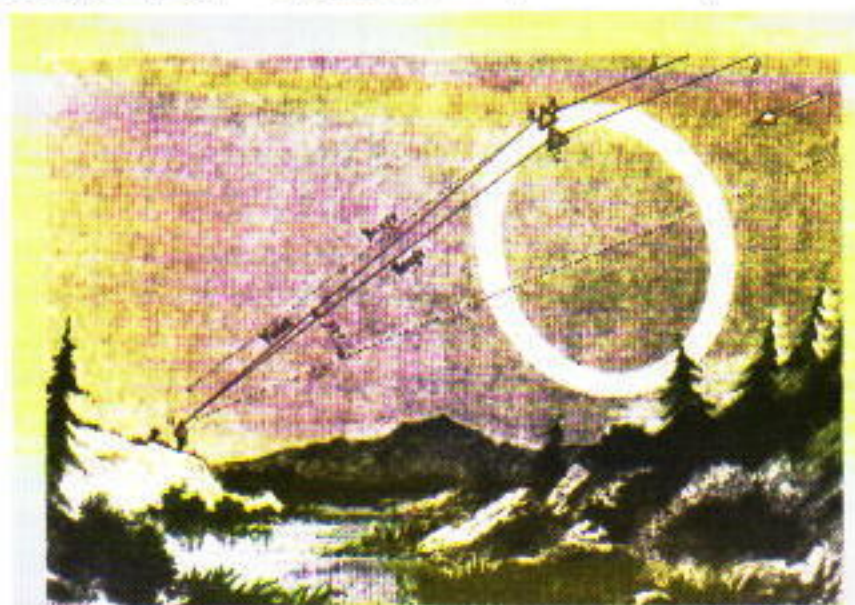
κοντά σε λαμπρές πηγές φωτός (συνήθως κοντά στον Ήλιο ή τη Σελήνη)—και παρατηρούνται όταν ο καιρός είναι αιθριος και ψυχρός.

Οι άλως οφείλονται στη διάθλαση ή την ανάκλαση του φωτός από τους μικρούς παγοκρυστάλλους που αιωρούνται στον αέρα. Όταν, λόγω των αέριων ρευμάτων, οι κρύσταλλοι προσανατολίζονται σε τυχαίες διευθύνσεις, σχηματίζονται κύκλοι κοντά στην πηγή του φωτός, με τον τρόπο που αναπαριστάται στο βιβλίο του Flammarion (Σχήμα 1). Όταν ο αέρας ακινητεί, τότε οι «πλακώδεις», εξαγωνικοί παγοκρυστάλλοι πέφτουν με σχεδόν οριζόντιο προσανατολισμό, κλίνοντας τότε από τη μια πλευρά και πότε από την άλλη. Σ' αυτή την περίπτωση το φως ανακλάται από τις επίπεδες επιφανείες τους, με αποτέλεσμα να δημιουργείται μια κατακόρυφη φωτεινή στήλη κοντά στην πηγή του φωτός (Σχήμα 2). Επιπλέον, μερικές φορές οι οριζόντιες επιφάνειες των κρυστάλλων δημιουργούν οριζόντιες φωτεινές ραβδώσεις, αν και ασθενούς έντασης. Ως εκ τούτου, μπορεί να εμφανιστούν στον ουρανό σχηματισμοί που μοιάζουν με σταυρούς.

Αν υπάρχουν λιγοστοί μόνο παγοκρυστάλλοι στον αέρα, εμ-

φανίζονται εφαπτόμενα ηλιακά τόξα και παρήλιοι δίπλα στον Ήλιο. Εάν υπάρχουν πολλοί κρύσταλλοι στον ουρανό, η ένταση του διαθλώμενου και του ανακλώμενου φωτός θα είναι αρκετά μεγάλη ώστε να σχηματιστούν σταυροί, κύκλοι, ακόμη και πολλαπλές επαναλήψεις των προαναφερθέντων σχηματισμών που τις χωρίζει αρκετή απόσταση τη μια από την άλλη. Διόλου απίθανο, λοιπόν, να προκύψει ένα αρκετά περίπλοκο σχήμα, όπου εμφανίζονται αρκετοί παρήλιοι στο οριζόντιο επίπεδο (Σχήμα 3).

Όσον αφορά τους πολύχρωμους κύκλους που παρατήρησε ο Flammarion από το αερόστατό του, σχηματίζονται λόγω της διάθλασης και της περίθλασης του φωτός από τα αιωρούμενα σταγονίδια νερού. Οι άλως που σχηματίζονται μ' αυτό τον τρόπο είναι



Σχήμα 1

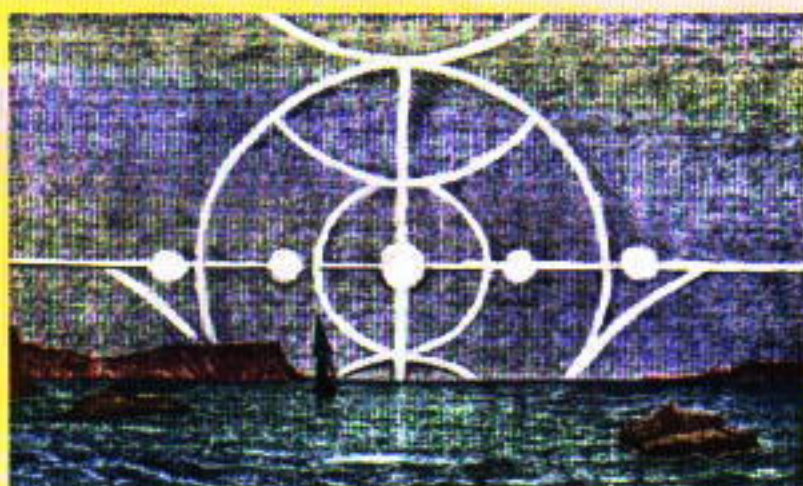
Η μορφή μιας άλω. Η εικόνα προέρχεται από το βιβλίο του C. Flammarion Ατμόσφαιρα.





Σχήμα 2

Κατακόρυφες φωτεινές στήλες οι οποίες προκαλούνται από τη διάθλαση του φωτός των λαμπτήρων που φωτίζουν τους δρόμους πάνω στους μικροσκοπικούς παγοκρυστάλλους που αιωρούνται στον αέρα.



Σχήμα 3

Άλως και παρήλιοι.

πάντοτε κυκλικές, επειδή όλα τα σταγονίδια έχουν απλό σφαιρικό σχήμα.

Επομένως, υπάρχουν πολλά διαφορετικά ατμοσφαιρικά φαινόμενα, και ένας προσεκτικός παρατηρητής μπορεί μερικές φορές να απολαύσει θεσπέσιες εικόνες, ειδικά όταν ο καιρός είναι πολύ κρύος. Ωστόσο, το τι βλέπει ένας παρατηρητής όταν αντικρίζει ένα ατμοσφαιρικό φαινόμενο δεν εξαρτάται μόνο από τον καιρό.

Θέμα αντίληψης

Πώς βλέπουμε; Ειδικότερα, πώς αντιλαμβανόμαστε και πώς αναγνωρίζουμε τα αντικείμενα που μας περιβάλλουν; Όταν ένα αντικείμενο εισέρχεται στο οπτικό μας πεδίο, το είδωλό του προβάλλεται πάνω στον αμφιβληστροειδή χιτώνα, με αποτέλεσμα να διεγείρονται οι νευρικές απολήξεις οι οποίες βρίσκονται εκεί. Ένα περίπλοκο σήμα ηλεκτρικών παλμών αποστέλλεται στον εγκέφαλο για να αναλυθεί.

Εκ κατασκευής, ο ανθρώπινος ε-

γκέφαλος λειτουργεί με τέτοιο τρόπο ώστε προσπαθεί να συσχετίσει κάθε νέο είδωλο με μια κλάση αντικειμένων που ήδη γνωρίζει. Αναζητεί και βρίσκει μια λογική, μη αντιφατική ερμηνεία κάθε λεπτομέρειας. Επιπλέον, η ερμηνεία του ειδώλου πρέπει να είναι συνεπής με το κοσμοείδωλο που έχει ο παρατηρητής για τον κόσμο.

Το ίδιο φαινόμενο, παρατηρούμενο από δύο ανθρώπους διαφορετικών ιστορικών εποχών, ας πούμε από έναν μεσαιωνικό άνθρωπο και από έναν σύγχρονο, θα ερμηνευόταν υπό το πρίσμα εντελώς διαφορετικών αντιλήψεων για τον κόσμο. Πάνω σ' αυτό το πρόβλημα ο Α. S. Gurvich, ειδικός στα οπτικά φαινόμενα, έγραψε: «Οι αντικατοπτρισμοί στον ουρανό

αναγνωρίζονταν συχνά ως αερόπλοια. Τι είδους όμως; Στο μεσαιώνα εκλαμβάνονταν ως ιστιοφόρα με άγκυρες. Μετά την εφεύρεση των πηδαλιούχουμένων αερόστατων, οι αυτόπτες μάρτυρες "παρατηρούσαν" όλο και περισσότερες λεπτομέρειες, όπως φινιστρίνια, προβολείς και σύστημα τροχών προσγείωσης.»

Υπάρχουν διάφορα ονόματα για την υποκείμενη δομή βάσει της οποίας ο εγκέφαλος συναρμολογεί τις επιμέρους λεπτομέρειες για να παραγάγει την τελική εικόνα. Μερικές φορές πρόκειται απλώς για μια «ιδέα» του αντιληπτού κόσμου — το μοντέλο του. Οι περισσότεροι μαθητές διδάσκονται το πλανητικό μοντέλο του ατόμου το οποίο προτάθηκε από τον Rutherford: τα ηλεκτρόνια περιφέρονται σε διάφορες τροχιές γύρω από τον πυρήνα. Και πιθανόν οι μαθητές να αναρωτιούνται: «Και πού βλέπεις το καινούργιο; Η ερμηνεία είναι προφανής.» Αλλά, όταν τα δεδομένα σχετικά με τη δομή και τις

ιδιότητες των ατόμων ήταν ακόμη ασαφή και λιγοστά, απαιτούνταν πράγματι η διάραση μιας μεγαλοφυΐας για να «διακρίνει» ένα τέτοιο μοντέλο.

Υπάρχει ένας ιδιαίτερα εύστοχος όρος στη θεωρία της όρασης για τη διεργασία αυτή: η *υπόθεση του αντικειμένου*. Ο όρος αναφέρεται στις βασικές (a priori) έννοιες της ανθρώπινης νόησης σχετικά με το τι παρατηρούμε, οι οποίες μας προσφέρουν, σε κάθε περίπτωση, τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε γρήγορα και με βεβαιότητα αυτό που βλέπουμε. Όταν υπάρχει στον εγκέφαλό μας μια ολοκληρωμένη υπόθεση του αντικειμένου για ένα φαινόμενο που παρατηρούμε, όλες οι λεπτομέρειες του ειδώλου που αντιλαμβανόμαστε παίρνουν εύκολα τη θέση τους και σχηματίζουν μια ακέραια εικόνα. Αντίθετα, όταν ο εγκέφαλος δεν διαθέτει μια κατάλληλη «πρωτότυπη μορφή», η σύνθεση της εικόνας καθίσταται δυσχερής.

Ιδού ένα διδακτικό παράδειγμα. Σήμερα οι άνθρωποι είναι εξοικειωμένοι με τα φυσικά χαρακτηριστικά του πλανήτη Κρόνου. Παρατηρώντας τον μέσα από το τηλεσκόπιο, ο καθένας βλέπει μια σφαίρα περιβαλλόμενη από ένα δακτύλιο. Ωστόσο, ανάλογα με την τροχιακή θέση του πλανήτη, οι δακτύλιοι σχηματίζουν διάφορες γωνίες ως προς τον παρατηρητή, δημιουργώντας διαφορετικά είδωλα.

Το 17ο αιώνα οι αστρονόμοι αγνοούσαν ότι ο Κρόνος περιβάλλεται από δακτυλίους. Μάλιστα, πολλές φορές δεν έβλεπαν δακτυλίους, ακόμη κι όταν τον εξέταζαν με τα τηλεσκόπια. Ο ίδιος ο Γαλιλαίος, ο οποίος ανακάλυψε το 1610 αυτό που εμείς αποκαλούμε σήμερα δακτυλίους, περιέγραψε τον πλανήτη ως ένα «τριπλό άστρο»: «Το μεσαίο άστρο φαίνεται ότι είναι αρκετά μεγάλο και τα άλλα δύο, τα οποία βρίσκονται το ένα στην ανατολή και το άλλο στη δύση, πιθανόν το ακουμπούν. Φαίνεται σαν δυο υπηρέτες να βοηθούν το γερο-Κρόνο να ακολουθήσει την τροχιά του.» Συνεπώς, ακόμη και για έναν επιστημονικό νου, η απουσία κατάλληλης πρωτότυπης μορφής στον εγκέφαλο απέτρεψε τη σύνθεση μιας αληθινής εικόνας για τον πλανήτη.

Άγνωστο ή μη αναγνωρισθέν;

Το ίδιο πρόβλημα προκύπτει κατά

την παρατήρηση πολλών ανώμαλων ατμοσφαιρικών φαινομένων. Όταν ο εγκέφαλος δεν διαθέτει κάποια κατάλληλη πρωτότυπη μορφή για το παρατηρούμενο φαινόμενο, ο εγκέφαλος αναζητεί υποσυνείδητα τις πλησιέστερες υποθέσεις του αντικειμένου και παρέχει στη συνείδηση μια ερμηνεία η οποία ερείδεται στην καταλληλότερη πρωτότυπη μορφή.

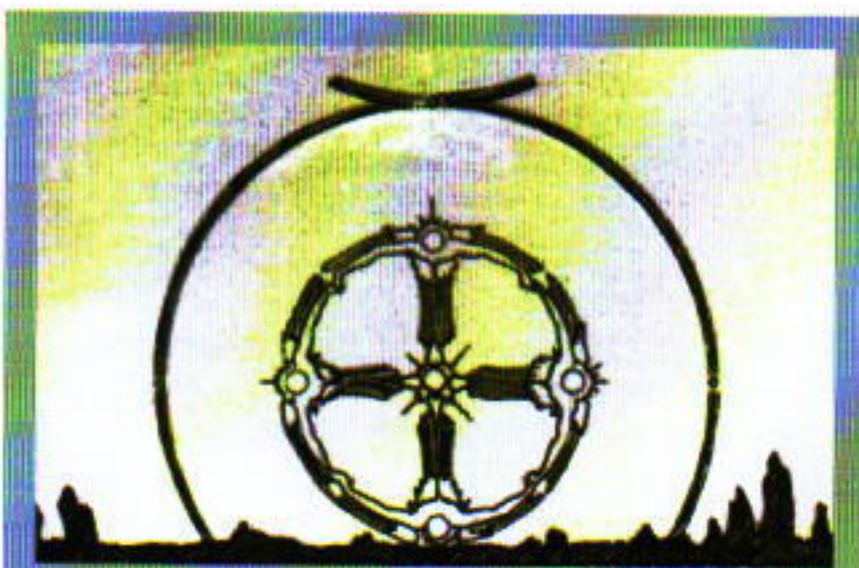
Αναφορές ανώμαλων ατμοσφαιρικών φαινομένων («οράματα») μπορούν να βρεθούν στις αρχαιότερες ιστορικές πηγές —στις σελίδες της Βίβλου, σε αιγυπτιακούς παπύρους, σε κινεζικά και ρωσικά χρονικά. Ακόμη και στην εποχή μας μερικές ιστορίες τέτοιου είδους εμφανίζονται στις εφημερίδες. Η ανάλυση αυτών των θαυμάσιων, γεμάτων χρώματα περιγραφών, παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον.

Δυστυχώς, συχνά αποδεικνύεται αδύνατον να εξετάσει κανείς ή να «αποκαταστήσει» τις λεπτομέρειες ιστορικών, ή ακόμη και πρόσφατων, γεγονότων που είναι απαραίτητες για να αναγνωρισθεί το φαινόμενο. Δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι πολλά «θαύματα» επιδέχονται απλή ερμηνεία, αλλά συμβαίνουν σε «λάθος μέρος» ή σε «λάθος χρόνο».

Το όραμα του προφήτη Ιεζεκιήλ

Μια από τις αρχαιότερες περιγραφές ενός απροσδιόριστου ατμοσφαιρικού φαινομένου καταγράφεται στη Βίβλο. Πρόκειται για τους τροχούς του Ιεζεκιήλ (το πρώτο όραμα του Θεού που είδε ο Ιεζεκιήλ, Ιεζεκιήλ 1:4-1:28):

«4. Και είδον και ίδού, άνεμοστρόβιλος



Σχήμα 4

Η άλως που παρατήρησε και περιέγραψε ο Ιεζεκιήλ, όπως την απεικόνισε ο D.H. Menzel.

ήρχετο από βορρά, νέφος μέγα και πύρ συστρεφόμενον· περίξ δε τούτου λάμψις και έκ μέσου αυτού έφαινετο ως όψις ήλέκτρον, έκ μέσου τού πυρός. 5. Και έκ μέσου αυτού έφαινετο τεσσάρων ζώων όμοίωμα. Και ή θεά αυτών ήτο αυτή· είχον όμοίωμα άνθρώπου. 6. Και έκαστον είχε τέσσαρα πρόσωπα και έκαστον αυτών είχε τέσσαρας πτέρυγας. 7. Και οι πόδες αυτών ήσαν πόδες όρθοί, και τό ίχνος τού ποδός αυτών όμοιον μέ ίχνος ποδός μόσχου· και έσπινθηροβόλουν ως όψις χαλκού στίλβοντος. 8. Και είχον χειρας άνθρώπου ύποκάτωθεν των πτερύγων αυτών, εις τά τέσσαρα αυτών μέρη· και τά τέσσαρα είχον τά πρόσωπα αυτών και τας πτέρυγας αυτών. 9. Αί πτέρυγες αυτών συνείχοντο ή μία μετα της άλλης· δεν έστρέφοντο ένψ έβάδιζον· κατέναντι τού προσώπου αυτών έπορεύοντο έκαστον. ...

«15. Και ως είδον τά ζώα, ίδού, τροχός εις επί την γην, πλησίον των ζώων εις τά τέσσαρα αυτών πρόσωπα. 16. Η θεά των τροχών και ή έργασία αυτών ήσαν ως όψις βηρύλλου· και οι τέσσαρες είχον τό αυτό όμοίωμα· και ή θεά αυτών και ή έργασία αυτών ήσαν ως εάν ήτο τροχος έν μέσω τροχού. 17. Ότε έβάδιζον, εκινούντο κατα τά τέσσαρα αυτών πλάγια· δεν έστρέφοντο ένψ έβάδιζον. 18. Οι δε κύκλοι αυτών ήσαν τόσον ύψηλοί, ώστε έκαμνον φόβον· και οι κύκλοι αυτών πλήρεις όφθαλμών κύκλω των τεσσάρων τούτων. ...

«26. Υπεράνωθεν δε τού στερεώματος τού υπέρ την κεφαλήν αυτών έφαινετο όμοίωμα θρόνου, ως θεά λίθου σαπφείρου· και επί τού όμοιώματος τού θρόνου όμοίωμα ως θεά άνθρώπου καθημένου επ' αυτών άνωθεν. 27. Και είδον ως όψιν ήλέκτρον, ως θεάν πυρός έν αυτώ κύκλω, από της θεάς της όσφύος αυτού και επάνω· και από της θεάς της όσφύος αυτού και κάτω είδον ως θεάν πυρός, και είχε λάμψιν κύκλω. 28. Ως ή θεά τού τόξου, τού γινομένου έν τη νεφέλη έν ήμέρα βροχής, ούτως ήτο ή θεά της λάμψεως κύκλω.»

Πώς εξηγείται αυτό το θαύμα; Η πρώτη επιστημονική ερμηνεία των τροχών του Ιεζεκιήλ δόθηκε από τον αμερικανό αστροφυσικό Donald H. Menzel, ο οποίος έγινε γνωστός όχι μόνο για την επιστημονική του έρευνα αλλά κυρίως για το βιβλίο του σχετικά με τους «ιπτάμενους δίσκους». Σύμφωνα με την ερμηνεία του, το

φαινόμενο που περιέγραψε ο Ιεζεκιήλ πρέπει να ήταν η ηλιακή άλως (ένα σπανιότατο φαινόμενο σε νότια γεωγραφικά πλάτη).

Η περιγραφή του Ιεζεκιήλ ενέπνευσε τον William Blake —διάσημο άγγλο ποιητή και καλλιτέχνη, σύγχρονο των γάλλων Εγκυκλοπαιδιστών— και αποτέλεσε το θέμα μιας ξυλογραφίας του (δείτε το μπροστινό εσώφυλλο του παρόντος τεύχους). Στην κεντρική ανθρώπινη μορφή με τα τέσσαρα πρόσωπα, μπορεί κανείς εύκολα να αντιληφθεί το σταυρό της άλως ενώ το περίγραμμα των φτερών απομιμείται τη μορφή των δακτυλίων. Το Σχήμα 4 δείχνει πώς αναπαρέστησε τους τροχούς του Ιεζεκιήλ ο Menzel.

Οι άλως στα ρωσικά χρονικά

Οι άλως ήταν γνωστές και στους ρώσους βιβλιοφάγους. Στις αρχές του 20ού αιώνα, ο διάσημος ρώσος αστρονόμος D.O. Svjatsky δημοσίευσε μια εικόνα που τη δανείστηκε από μεσαιωνικά χρονικά, η οποία δείχνει το είδος των υποθέσεων αντικειμένου που αποτελούσαν κοινό τόπο αναφοράς για τη νόηση των ρώσων του μεσαιώνα (Σχήμα 5). Ο κόσμος των σταυρών και των στεμμάτων τούς ήταν περισσότερο οικείος απ' ό,τι ο σύγχρονος κόσμος των φυσικών νόμων.

Στα χρονικά του Βολογκόντσαγια του έτους 1171 (το οποίο διήρκεσε από 1 Σεπτεμβρίου 1662 έως 31 Αυγούστου 1663), μπορεί κανείς να διαβάσει: «Στις 29 Νοεμβρίου, μετά τη δύση του Ηλίου, εμφανίστηκε ένα φοβερό και τρομερό σημείο, πάνω από το Μπελοζέρσκι Ουέζντ στην περιφέρεια του Συριλ στο Εριζ. Έμοιαζε με φωτεινό και επίμηκες άστρο, το οποίο ήρθε και, έπειτα, χάθηκε μακριά με την ταχύτητα της αστραπής. Ο ουρανός σχίστηκε στη μέση και το «όραμα» έλαμψε για μισή ώρα, με φως απεριγράπτα εκθαμβωτικό, σαν φωτιά. Μέσα στη φωτιά στέκόταν ένας άντρας με τα χέρια και τα πόδια ανοικτά σε έκταση, και ολόγυρά του φωτιά· ο αέρας ήταν διαυγής και πολύ κρύος.» Τότε, «ένας καταγιγισμός λιθαριών έπεσε από τον ουρανό στη γη με μανία και θόρυβο, και οι πέτρες φλέγονταν και εισχωρούσαν βαθιά στο παγωμένο έδαφος.»

Όπως αποδείχτηκε, η περίπτωση αυτή ήταν πολύ γνωστή στους αστρο-

νόμους —ο D.O. Svjatsky την κατέταξε στα φαινόμενα που προκαλούνται από το θρυμματισμό ενός μεγάλου μετεωρίτη. Η περιγραφή προέρχεται από τη λεπτομερή αναφορά ενός ιερέα που κατοικούσε πλησίον της πόλης Ούσιτσαγκ. Όπως προκύπτει από αυτήν, αλλά και από πολλές άλλες πηγές που την επιβεβαιώνουν, ο μετεωρίτης διήνυσε περισσότερα από 200 χιλιόμετρα διερχόμενος πάνω από την περιφέρεια Βολογκόντοκαγια με κατεύθυνση εκ δυσμών προς ανατολάς. Όσοι παρατήρησαν την πύρινη διαδρομή του μετεωρίτη που πλησίαζε κατά μέτωπο ανέφεραν ότι είδαν ένα σταθερό φλογισμένο σημείο ή δίσκο. Μιας και το σούρουπο είχε πέσει και η ατμόσφαιρα ήταν παγερή και διαυγής, αυτή η πηγή φωτός δημιούργησε μιαν άλω. Παραδόξως, η περιγραφή της —η οπτασία ενός τεράστιου ανθρώπου με τα χέρια του σε έκταση— εμφανίζει πολλά κοινά χαρακτηριστικά με την ξυλογραφία του William Blake (δείτε το μπροστινό εσώφυλλο) και τη ζωγραφιά ενός ρώσου χρονικογράφου.

Η βρετανική σημαία πάνω από τη Μόσχα

Αυτά όσον αφορά τις ιστορίες μετασχηματισμού της άλω σε φαντάσματα και υπέρτατα όντα. Ωστόσο, υπάρχει μία ακόμη αιτία που προκαλεί την εμφάνιση της άλω: η ανθρώπινη τεχνολογία. Μερικές φορές τέτοια φαινόμενα καταχωρούνται ως άγνωστης ταυτότητας. Για παράδειγμα, στο βιβλίο του, ο S. Shulman αφηγείται την ιστορία της εμφάνισης «εξωγήινων πάνω από τη Ρωσία».

Στις 15 Μαΐου 1981 στις 1:15 π.μ. ένα λαμπρό σφαιρικό αντικείμενο εθεάθη πάνω από τη ρωσική πόλη Τούλα, κατευθυνόμενο προς τη Μόσχα. Αφού προσέγγισε το αεροδρόμιο του Βνούκοβο, αιωρήθηκε πάνω από αυτό παρουσία εκατοντάδων αυτοπτών μαρτύρων. Το αντικείμενο έμεινε ακίνητο για περίπου ένα λεπτό, και μετά «μια εκθαμβωτική λευκή αστραπή» ξεχύθηκε από το κέντρο του και το περικύκλωσε σχηματίζοντας κάτι που έμοιαζε με το ηλιακό στέμμα, το οποίο γρήγορα διαλύθηκε μέσα σε έναν κα-

ταρράκτη από σπινθήρες που «έμοιαζε με πυροτεχνήματα.»

Όταν έσβησαν όλοι οι σπινθήρες, στην ίδια θέση εμφανίστηκε ένα μαύρο τετράγωνο και πάνω του σχηματίστηκαν διασταυρούμενες φωτεινές ραβδώσεις. Στο εσωτερικό του τετραγώνου οι ραβδώσεις σχημάτιζαν κάτι που έμοιαζε με έναν τεράστιο σταυρό. Η όλη εικόνα θύμιζε τη βρετανική ση-



Σχήμα 5
Η άλω όπως απεικονίζεται σε ένα από τα τελευταία ρωσικά χρονικά.

μαία... Τότε το αρχικό αντικείμενο αποχώρησε, αλλά το μαύρο τετράγωνο και η «σημαία» διατηρήθηκαν στη θέση τους για λίγο χρόνο ακόμη. Μερικά λεπτά αργότερα, το σχήμα έγινε αμυδρό και διαλύθηκε. Προφανώς το αντικείμενο δεν ήταν υλικό —πρέπει να ήταν κάποιο οπτικό φαινόμενο, επειδή ο κόσμος μπορούσε να δει τα άστρα μέσα από αυτό.

Στο Σχήμα 6 φαίνονται σκίτσα της πύρινης σφαίρας και της «βρετανικής σημαίας» που εμφανίστηκαν πάνω από το Βνούκοβο, τα οποία σκαρίφησε ένας αυτόπτης μάρτυρας. Πώς εξηγείται το εν λόγω φαινόμενο; Φαίνεται ότι το πρώτο μέρος των παρατηρήσεων δεν μπορεί να αμφισβητηθεί: Ο κόσμος είδε έναν πολυώροφο πύραυλο που εκτοξεύτηκε εκατοντάδες χιλιόμετρα μα-

κριά από το Βνούκοβο. Το λαμπρό ακίνητο αντικείμενο είναι η περιγραφή των αερίων του πυραύλου που φωτίζονταν από τον Ήλιο, ο οποίος βρισκόταν κάτω από τον ορίζοντα. Ο πύραυλος κινούνταν στην ακριβώς αντίθετη κατεύθυνση από εκείνη των παρατηρητών. Κατά την ανάφλεξη των μηχανών του επόμενου ορόφου του πυραύλου, «μια εκθαμβωτική λευκή αστραπή ξεχύθηκε» από το κέντρο του κύκλου.

Η αποκόλληση των ορόφων ενός πυραύλου είναι μια περίπλοκη τεχνική διαδικασία η οποία συνοδεύεται από εκρήξεις γομώσεων που ανατινάζουν τις συνδέσεις μεταξύ των ορόφων. Επομένως, το «ηλιακό στέμμα που διασκορπίζεται δημιουργώντας έναν καταρράκτη από σπινθήρες όπως τα πυροτεχνήματα» θα ήταν καλύτερο να αντικατασταθεί από την εικόνα των σπινθήρων από λιωμένο μέταλλο που παράγονται σε μια ηλεκτρική συγκόλληση.

Ωστόσο, το «μαύρο τετράγωνο» πάνω στο οποίο εμφανίζονται διασταυρούμενες φωτεινές ραβδώσεις είναι πράγματι ένα μοναδικό φαινόμενο. Φαίνεται ότι αποτελεί την πρώτη περιγραφή άλω η οποία προκλήθηκε από μια πηγή φωτός ανθρωπίνης κατασκευής. Στο Σχήμα 6β μπορούμε να δούμε συγχρόνως τον χαρακτηριστικό σταυρό και τον κύκλο. Η άλω πα-

ρατηρήθηκε κατά τη διάρκεια των λίγων λεπτών που διήρκεσε η πυροδότηση των μηχανών του δεύτερου ορόφου του πυραύλου. Αντί για το ηλιακό φως, το λαμπρό φως, προερχόμενο από τις μηχανές του πυραύλου, διαθλάστηκε από τους κρυστάλλους που αιωρούνται στον αέρα.

Ένα μόνο ζήτημα μένει να εξηγηθεί: Πώς μπόρεσε να σχηματιστεί το νέφος των παγοκρυστάλλων μια ζεστή νύχτα του Μαΐου. Τα προϊόντα της καύσης των καυσίμων του πυραύλου περιέχουν υδρατμούς. Επιπλέον, οι κρύσταλλοι μπορούν να δημιουργηθούν εξαιτίας της ταχύτατης ψύξης και της κρυστάλλωσης των μεταλλικών οξειδίων (για παράδειγμα του Al_2O_3), τα οποία επίσης υπάρχουν στα προϊόντα της καύσης.

Δεδομένου ότι έλειπε η οικεία υπόθεση του αντικειμένου για τη φύση του παρατηρούμενου φαινομένου, οι μάρτυρες δεν κατόρθωσαν να το αναγνωρίσουν, μολονότι διατυπώθηκαν εικασίες που το συνέδεαν με κάποια ανθρώπινη κατασκευή.

Άλλοι σχηματισμοί πέραν των άλλων

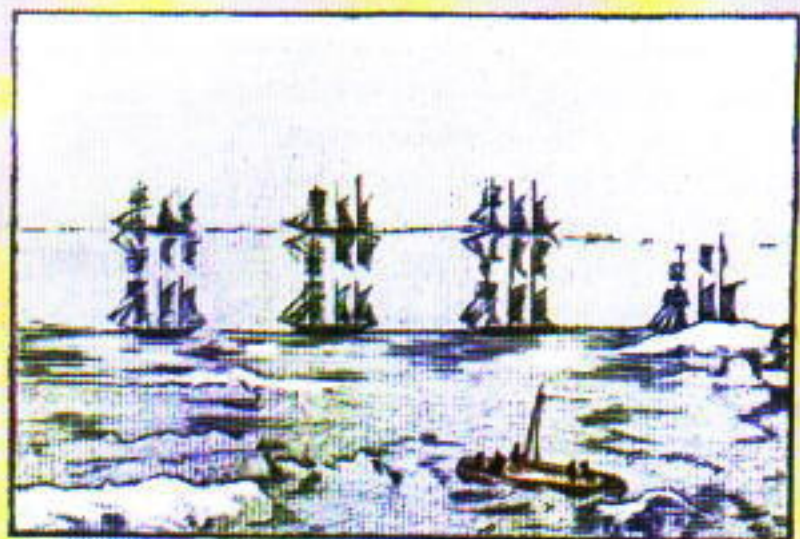
Μελετήσαμε ένα μόνο παράδειγμα μετατροπής ενός κλασικού ατμοσφαιρικού φαινομένου σε αντικείμενο άγνωστης ταυτότητας (την «τεχνητή» άλω πάνω από το Βνούκοβο). Ωστόσο, υπάρχουν πολλά ακόμη παραδείγματα τέτοιων φαινομένων, που δεν αναγνωρίστηκαν και των οποίων η ταυτότητα παραμένει αδιευκρίνιστη.

Η ερμηνεία μερικών τέτοιων θαυμάτων καθίσταται αρκετά προφανής — για παράδειγμα ασυνήθιστης μορφής σύννεφα. Γνωρίζουμε ότι η ουρά ενός κομήτη εκτείνεται ως το άπειρο,

αλλά, συνήθως, γίνεται ορατός μόνον ο πυρήνας του, όπου η πυκνότητα του αερίου είναι μεγαλύτερη και σκεδάζεται περισσότερο ηλιακό φως. Κατά τον ίδιο τρόπο, τα αέρια από τις μηχανές του πυραύλου θα είναι ορατά μόνο όταν έχουν «σχετικά μεγάλη πυκνότητα», δηλαδή κοντά στην πηγή του φωτός. Αν αυτά τα αέρια παρεμβάλλονται μεταξύ του Ήλιου και του παρατηρητή, μπορεί να φαινόνται σαν ένα σκοτεινό σύννεφο. Ωστόσο, τα ακροφύσια των μηχανών των πυραύλων είναι κυκλικά, επομένως το σύννεφο που δημιουργούν θα έχει κανονική μορφή.

Επιπλέον, ένας παρατηρητής (ο οποίος επιβαίνει σε ένα αεροπλάνο, για παράδειγμα) που κινείται κατά μήκος ή κατά πλάτος του «αόρατου» τμήματος των αερίων του πυραύλου θα βλέπει θαυμάσιες εικόνες αναλόγως της σχετικής του θέσης ως προς τον Ήλιο: την ξαφνική εμφάνιση μιας σκοτεινής ή πύρινης σφαίρας ή τη μετατροπή της εν λόγω σφαίρας σε έναν ελλειπτικό δίσκο ο οποίος «εξαφανίζεται χωρίς να αφήσει ίχνη». Όλα αυτά τα φαινόμενα είναι οφθαλμαπάτες που προκαλούνται από την ανθρώπινη τεχνολογία και τα οποία σύντομα αναγνωρίζονται.

Παραμένουν, όμως, μερικά απολύτως αινιγματικά (άγνωστης ταυτότητας) φαινόμενα, τα οποία δεν έχουν παραλλαγές που να οφείλονται στην ανθρώπινη τεχνολογία. Ένα από αυτά είναι οι αντικατοπτρισμοί. Οι συνηθείς αντικατοπτρι-



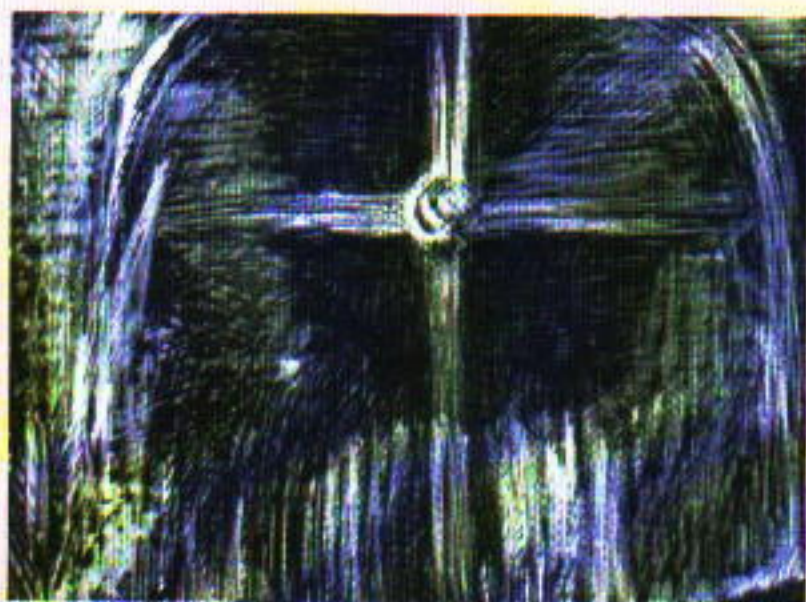
Σχήμα 7

Ο περίφημος οριζόντιος αντικατοπτρισμός που παρατηρήθηκε το 1869 από τον πλοίαρχο Coldway, ο οποίος επισκέφτηκε τις ακτές της Γροιλανδίας με το πλοίο Germany.

σμοί είναι κατακόρυφοι — δηλαδή σχηματίζονται πάνω και κάτω απ' το πραγματικό αντικείμενο. Τέτοιου είδους αντικατοπτρισμοί είναι γνωστοί πολύ καλά και εξηγούνται: οφείλονται στη θερμοκρασιακή διαφορά μεταξύ γειτονικών στρωμάτων αέρα που είναι παράλληλα προς την επιφάνεια της Γης.

Ενδέχεται, όμως, οι θερμοκρασιακές διαφορές να μην αποτελούν τη μοναδική αιτία που προκαλεί τους φυσικούς αντικατοπτρισμούς. Πράγματι, πολλοί προσεκτικοί παρατηρητές έχουν δει περίπλοκης μορφής αντικατοπτρισμούς στην Αρκτική που περιλαμβάνουν όχι μόνο είδωλα στην κατακόρυφη διεύθυνση αλλά και στην οριζόντια.

Το Σχήμα 7 δείχνει ένα μόνο πλοίο κοντά στις ακτές της Γροιλανδίας, το οποίο παράγει δύο σειρές από ανακλάσεις — κατακόρυφες και οριζόντιες. Δύσκολα μπορεί να φανταστεί κανείς ότι υπάρχουν ταυτόχρονα δύο φυσικά στρώματα αέρα τα οποία έχουν διαφορετικές θερμοκρασίες και τέμνονται υπό γωνία 90°. Επομένως, τούτος ο οριζόντιος αντικατοπτρισμός πρέπει να εξηγείται διαφορετικά: πρέπει να αποδοθεί σε κάποια άλλη μη θερμική πηγή οπτικών ατμοσφαιρικών ανομοιογενιών. Δεν αποκλείεται να οφείλεται σε ηλεκτρομαγνητικές ανωμαλίες. Αποτελεί, άραγε, σύμπτωση το γεγονός ότι αυτοί οι οριζόντιοι αντικατοπτρισμοί παρατηρήθηκαν στις πολικές περιοχές όπου παρατηρείται και το σέλας (το οποίο είναι ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο);



α



β

Σχήμα 6

Οι άλως που παρατηρήθηκαν πάνω από το αεροδρόμιο του Βνούκοβο στη Μόσχα.

Διασκεδαστική ηλεκτρόλυση

Ένα ρεύμα στη χημεία

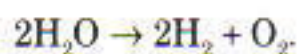
N. Paravyan

ΠΟΛΛΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ Ηλεκτρόλυσης — της διαδικασίας κατά την οποία ηλεκτρικό ρεύμα διέρχεται μέσω ηλεκτρολυτικού διαλύματος και μεταβάλλει τη χημική σύστασή του — είναι ευρέως γνωστά. Για το λόγο αυτό, στο παρόν άρθρο θα μελετήσουμε μερικά από εκείνα τα στοιχεία του φαινομένου που δεν συναντώνται συχνά.

Για τα πειράματά μας χρειαζόμαστε πηγές συνεχούς και εναλλασσόμενου ρεύματος, ηλεκτρεγερτικής δύναμης μέχρι 6 V. Ως πηγή συνεχούς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία απλή μπαταρία φακού (ή ακόμη καλύτερα δύο τέτοιες μπαταρίες συνδεδεμένες σε σειρά) και ως πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος έναν μετασχηματιστή-υποβιβαστή τάσης (από 220 V σε 5-6 V). Επιπλέον, χρειαζόμαστε μονωμένα καλώδια σύνδεσης, τέσσερα σιδερένια πλακίδια διαστάσεων 6 × 3 cm (που μπορούμε να τα κόψουμε από μια τενεκεδένια κονσέρβα), ένα αλουμινένιο πλακίδιο ίδιων διαστάσεων και ένα γυάλινο ποτήρι. Θα χρειαστούμε ακόμη μικρή ποσότητα επιτραπέζιου αλατιού (χλωριούχο νάτριο) και μαγειρική σόδα (δισανθρακικό νάτριο).

Πείραμα 1. Γεμίστε το ποτήρι ως τη μέση με διάλυμα δισανθρακικού νατρίου 3% (κατά βάρος), και βυθίστε μέσα του τα δύο σιδερένια πλακίδια (αυτά παίζουν το ρόλο των ηλεκτροδίων). Τα ηλεκτρόδια πρέπει να είναι κατακόρυφα, παράλληλα μεταξύ τους και σε

απόσταση το ένα από το άλλο. Στη συνέχεια συνδέστε τα ηλεκτρόδια, μέσω των καλωδίων, με την πηγή συνεχούς ρεύματος. Η ηλεκτρόλυση θα ξεκινήσει αμέσως:



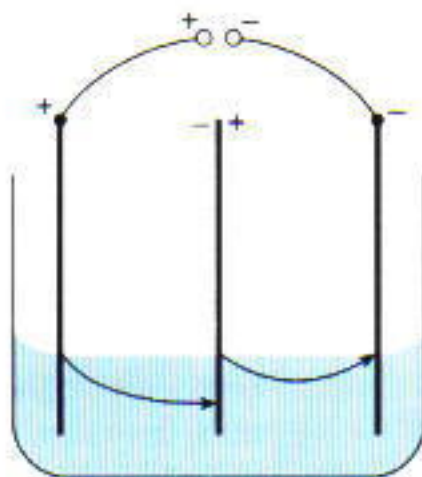
Η αντίδραση δείχνει ότι κατ' αυτή τη διαδικασία παράγεται υδρογόνο σε μεγαλύτερο όγκο απ' ό,τι οξυγόνο· επομένως, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε την πολικότητα της πηγής (η οποία προσδιορίζει την άνοδο και την κάθοδο). Του λόγου το αληθές μπορούμε να το διαπιστώσουμε με ένα αναμμένο σπίρτο: στην κάθοδο το σπίρτο αναφλέγει το υδρογόνο παράγοντας έναν ξερό κρότο, ενώ στην άνοδο η φλόγα είναι ακόμη πιο λαμπρή λόγω της παρουσίας επιπλέον οξυγόνου.

Πείραμα 2. Χωρίς να διακόψετε το ρεύμα, βυθίστε ένα τρίτο σιδερένιο ηλεκτρόδιο στον ηλεκτρολύτη, ανάμε-

σα στην άνοδο και την κάθοδο (δεν πρέπει να έρχεται σε επαφή με καμία από τις δύο). Παραδόξως, θα παραχθούν αέρια και στο μεσαίο ηλεκτρόδιο και, μάλιστα, και στις δύο πλευρές του. Χρησιμοποιώντας και πάλι ένα αναμμένο σπίρτο διαπιστώστε σε ποια πλευρά ελευθερώνεται οξυγόνο και σε ποια υδρογόνο.

Βρίσκετε ότι το οξυγόνο ελευθερώνεται στην πλευρά του μεσαίου ηλεκτροδίου που «κοιτάζει» προς την κάθοδο, και το υδρογόνο ελευθερώνεται στην πλευρά που «κοιτάζει» προς την άνοδο. Πώς μπορούμε να εξηγήσουμε το φαινόμενο; Θυμηθείτε ότι, όπως τα μεταλλικά ηλεκτρόδια, έτσι και ο ηλεκτρολύτης άγει το ηλεκτρικό ρεύμα, μολονότι εμφανίζει σ' αυτό μεγάλη αντίσταση. Ας εξετάσουμε, επομένως, το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει τη συσκευή μας (και η οποία ονομάζεται ηλεκτρολυτικό κελλί) (Σχήμα 1).

Ρεύμα «εισρέει» στο μεσαίο ηλεκτρόδιο από τον ηλεκτρολύτη, οπότε η πλευρά που «αντικρίζει» την άνοδο αποκτά αρνητικό φορτίο και μετατρέπεται σε κάθοδο. Καθώς το ρεύμα «εκρέει» από το μεσαίο ηλεκτρόδιο, η πλευρά που «αντικρίζει» την κάθοδο αποκτά θετικό φορτίο και μετατρέπεται σε άνοδο. Συνεπώς, υδρογόνο ελευθερώνεται στην αρνητικά φορτισμένη πλευρά του μεσαίου ηλεκτροδίου και οξυγόνο αναδύεται στην αντίθετη (θετικά φορτισμένη) πλευρά. Τι πιο απλό!



Σχήμα 1

Παράγεται περισσότερο αέριο (κατ' όγκο) στα τρία ηλεκτρόδια απ' ό,τι στα δύο; Ας εκτελέσουμε ένα πείραμα ακόμη, για να το διαπιστώσουμε.

Πείραμα 3. Βυθίστε το τέταρτο σιδερένιο ηλεκτρόδιο στον ηλεκτρολύτη. (Πάλι δεν θα πρέπει να έρχεται σε επαφή με κανένα από τα άλλα ηλεκτρόδια.) Τι συμβαίνει; Σ' αυτό δεν ελευθερώνεται καθόλου αέριο! Αν μάλιστα συνδέσουμε ένα αμπερόμετρο σε σειρά με την μπαταρία, θα διαπιστώσουμε ότι μόνο ένα εξαιρετικά μικρό ρεύμα διαρρέει το κύκλωμα. Γιατί; Ένα σιδερένιο ηλεκτρόδιο με αντίσταση εκατοντάδες φορές μικρότερη από εκείνη του ηλεκτρολύτη δεν μπορεί να αυξήσει την ολική αντίσταση του κυκλώματος τόσο ώστε να διακόψει το ρεύμα σχεδόν εντελώς!

Βυθίζοντας το τρίτο ηλεκτρόδιο στον ηλεκτρολύτη φτιάξαμε δύο ηλεκτρολυτικά κελιά συνδεδεμένα σε σειρά (βλ. Σχήμα 1). Κατά συνέπεια η τάση στοιχείου —δηλαδή η διαφορά δυναμικού που αναπτύσσεται μεταξύ των ηλεκτροδίων λόγω της επαφής τους με το ηλεκτρολυτικό διάλυμα, και η οποία εκφράζει την ελάχιστη τάση που απαιτείται για να πραγματοποιηθεί ηλεκτρόλυση— σχεδόν διπλασιάζεται. Συμβολίζοντας την ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής με E και την τάση στοιχείου με V , η πτώση τάσης κατά μήκος των δύο ηλεκτροδίων θα είναι $(E - V)$ στο πρώτο πείραμα και $(E - 2V)$ στο πείραμα με τα τρία ηλεκτρόδια. Ως εκ τούτου, ο συνολικός όγκος οξυγόνου και υδρογόνου που ελευθερώθηκε στα δύο ηλεκτρόδια του Πειράματος 1 είναι ίσος με το συνολικό όγκο των αερίων που παράγεται στα τρία ηλεκτρόδια του Πειράματος 2.

Όταν βυθίζουμε το τέταρτο ηλεκτρόδιο, φτιάχνουμε τρία ηλεκτρολυτικά κελιά συνδεδεμένα σε σειρά. Στην περίπτωση αυτή η τάση στοιχείου σχεδόν τριπλασιάζεται, επομένως $E - 3V < 0$. Αυτό σημαίνει ότι το ρεύμα πρακτικά σταματά να ρέει και, επομένως, δεν παράγεται καθόλου αέριο στο τρίτο πείραμα.

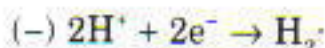
Πείραμα 4. Επαναλάβετε το Πείραμα 2 χρησιμοποιώντας ως μεσαίο ηλεκτρόδιο το αλουμινένιο πλακίδιο αντί για το σιδερένιο. Επιπλέον συνδέστε ένα λαμπάκι σε σειρά με την μπαταρία. Ανοίξτε το ρεύμα και παρατη-

ρήστε ότι το λαμπάκι φωτοβολεί όλο και πιο αμυδρά και, τελικά, σβήνει μετά από 10 με 15 λεπτά. Βγάλτε το αλουμινένιο πλακίδιο από τον ηλεκτρολύτη· το λαμπάκι θα φωτοβολήσει ξανά. Μήπως πρέπει να θεωρήσουμε ότι το αλουμινένιο πλακίδιο, που είναι ένας εξαιρετικός αγωγός, μετατρέπεται σε μονωτή; Ας συνεχίσουμε το πείραμα.

Αντικαταστήστε την μπαταρία με το μετασχηματιστή υποβιβασμού τάσης. Βυθίστε ξανά το αλουμινένιο πλακίδιο στον ηλεκτρολύτη. Εν προκειμένω, το λαμπάκι φωτοβολεί κάπως πιο αμυδρά, αλλά φωτοβολεί. Και όσο και αν περιμένετε δεν θα σβήνει.

Συνδέστε πάλι την μπαταρία στο κύκλωμα στη θέση του μετασχηματιστή και τοποθετήστε το αλουμινένιο πλακίδιο μεταξύ των δύο σιδερένιων ηλεκτροδίων έτσι ώστε η πλευρά που προηγουμένως «έβλεπε» στην κάθοδο τώρα να «βλέπει» στην άνοδο. Κλείστε το κύκλωμα και παρατηρήστε ότι αρχικά το λαμπάκι φωτοβολεί, αλλά, όπως στην πρώτη περίπτωση, σβήνει μετά από 10 με 15 λεπτά. Τροφοδοτήστε κατόπιν το ηλεκτρολυτικό κελί με εναλλασσόμενο ρεύμα· το λαμπάκι δεν θα φωτοβολήσει καθόλου.

Τι συμβαίνει; Ας το σκεφτούμε λιγάκι. Όταν το συνεχές ρεύμα διέρχεται από το αλουμινένιο ηλεκτρόδιο (όπως στο Σχήμα 1) συμβαίνουν στην επιφάνειά του οι παρακάτω αντιδράσεις:




Με άλλα λόγια, ολόκληρη η «θετική» πλευρά του ηλεκτροδίου μετατρέπεται σε διηλεκτρικό, το κύκλωμα «διακόπτεται», και το λαμπάκι σβήνει. Την ίδια στιγμή η «αρνητική» πλευρά του αλουμινένιου ηλεκτροδίου διατηρεί την ηλεκτρική αγωγιμότητά της και άγει το ηλεκτρικό ρεύμα, ωστόσο μόνο προς τη μία κατεύθυνση! Όταν το ηλεκτρολυτικό κελί συνδέεται με το μετασχηματιστή (εναλλασσόμενο ρεύμα), το ρεύμα μπορεί να ρέει μόνο προς τη μια κατεύθυνση. Αυτό σημαίνει ότι το πλακίδιο, που έχει οξειδωθεί μόνο από τη μια πλευρά του, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ανορθωτής ρεύματος (ο οποίος, όπως ίσως γνωρίζετε, μετατρέπει το εναλλασσόμενο ρεύμα σε συνε-

χές —μη σταθερής έντασης). Συνεπώς, όταν το ηλεκτρολυτικό κελί τροφοδοτείται από το μετασχηματιστή, το λαμπάκι φωτοβολεί συνεχώς.

Όταν όμως γυρίσατε το αλουμινένιο ηλεκτρόδιο από την άλλη πλευρά και τροφοδοτήσατε τη συσκευή με συνεχές ρεύμα, το ηλεκτρόδιο οξειδώθηκε και από τις δύο πλευρές του. Καλυμμένο με λεπτή επίστρωση οξειδίου του αλουμινίου, μετατρέπεται σε μονωτή. Το οξειδωμένο ηλεκτρόδιο δεν μπορεί ούτε να ανορθώσει ούτε να άγει το ρεύμα. Και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο δεν φωτοβολεί το λαμπάκι όταν βυθίζουμε στον ηλεκτρολύτη το αλουμινένιο ηλεκτρόδιο που είναι οξειδωμένο και από τις δύο πλευρές.

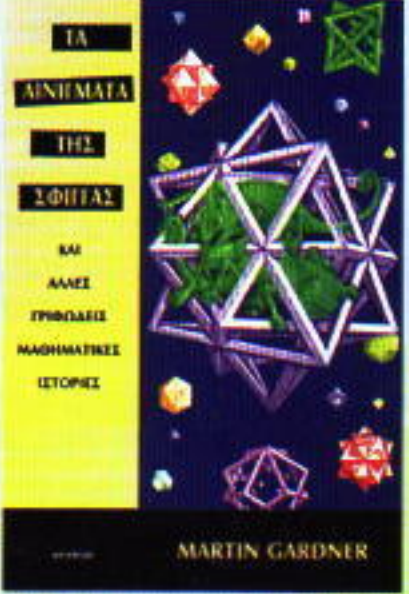
Τι πιστεύετε πως θα συμβεί αν αντικαταστήσουμε το δισανθρακικό νάτριο με χλωριούχο νάτριο; Εκτελώντας τα πειράματα, όταν χρησιμοποιήσετε τα σιδερένια πλακίδια, θα παρατηρήσετε παρόμοια φαινόμενα. Ωστόσο, δεν συμβαίνει το ίδιο και με το αλουμινένιο πλακίδιο, διότι σ' αυτή την περίπτωση θα έχουμε διαφορετικές αντιδράσεις κατά τη διάρκεια της ηλεκτρόλυσης: συνεπώς, δεν σχηματίζεται η «ημιαγώγιμη» επίστρωση του Al_2O_3 . Η ικανότητα του αλουμινίου να δημιουργεί μονωτικές επιστρώσεις στην επιφάνειά του κατά τη διάρκεια της ηλεκτρόλυσης χρησιμοποιείται ευρέως για τη μόνωση αλουμινένιων εργαλείων.

Δείτε ακόμη το άρθρο ...

N. Paganian, «Μερικά αποκαλυπτικά ίχνη», στο τεύχος Νοέμβριου / Δεκεμβρίου 1995. 

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ

ΤΑ
ΑΙΝΙΜΑΤΑ
ΤΗΣ
ΣΦΗΤΑΣ
ΚΑΙ
ΑΛΛΕΣ
ΓΡΗΓΟΡΕΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ
ΙΣΤΟΡΙΕΣ



MARTIN GARDNER

Σελ.: 166, 17 × 25 εκ., Α / Μ, 5.000 δρχ.

Περί ιδαν

ΟΙ ΠΑΡΑΠΛΕΥΡΩ ΡΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣΕΓ-
γίζουν με τον έναν ή τον άλλο τρό-
πο την έννοια του ιδανικού αερίου.
Ανάμεσα στην πρώτη —ενός ολ-
λανδού φυσιογνώστη— και την τε-
λευταία —ενός αυστριακού φυ-
σικού— μεσολαβεί μια μακριά
και επίπονη διαδρομή δύο-
μισι αιώνων.

Το μονοπάτι που χάρα-
ξαν οι παλιοί ατομιστές δεν
έχει ακόμη ολοκληρωθεί. Το δρόμο
αυτόν ακολούθησαν αναρίθμητοι ερευ-
νητές, από πολλές διαφορετικές χώρες
και με διαφορετικά επαγγέλματα. Ε-
κτός από τους «διπλανούς» επιστήμονες,
το έδαφος προετοίμασαν και άλλα λα-
μπρά πνεύματα όπως ο Νεύτων, ο Ho-
oke, ο Huygens, ο Laplace, ο Lavoisier,
ο Boyle, ο Bernoulli, ο Joule, ο Maxwell,
ο Perrin, ο Αϊνστάιν...

Γιατί είναι τόσο ελκυστικό το μοντέ-
λο του ιδανικού αερίου; Πρώτα απ' όλα,
μολονότι βασίζεται σε εξαιρετικά απλές
έννοιες, παρέχει τη δυνατότητα οικοδό-
μησης μιας θεωρίας με ευρύ φάσμα συ-
νεπειών. Το εν λόγω μοντέλο επιδει-
κνύει την τεράστια δύναμη της αφηρη-
μένης σκέψης.

Στη φυσική, η προσέγγιση του ιδα-
νικού αερίου εφαρμόστηκε με επιτυχία
και για να περιγράψει το «αέριο» ηλε-
κτρονίων στα μέταλλα, την ηλεκτρο-
μαγνητική ακτινοβολία ή ακόμη και τις
ακουστικές ταλαντώσεις στους κρυ-
στάλλους. Αυτή η ποικιλία εφαρμογών
αποτελεί ένδειξη του σπάνιου οικουμε-
νικού χαρακτήρα που διαθέτει το μο-
ντέλο του ιδανικού αερίου, το οποίο και
αποτελεί έξοχο παράδειγμα θεμελιώ-
δους θεωρίας στην οποία έχει βασιστεί
η άποψή μας για τον φυσικό κόσμο.

Φανταστείτε, λοιπόν, ότι περιβαλλό-
μαστε από ιδανικά αέρια...

Ερωτήσεις και προβλήματα

1. Η δύναμη της βαρύτητας στη Σε-
λήνη είναι ασθενέστερη απ' ό,τι στη Γη.
Ωστόσο, η σκόνη αιωρείται για πολύ πε-
ρισσότερο χρόνο πάνω από την επιφά-
νεια της Γης παρά πάνω από την επι-
φάνεια της Σελήνης. Γιατί;

2. Υπάρχει διαφορά στη μερική πίε-
ση του αζώτου ανάμεσα στις περιοχές
όπου το χώμα είναι ξηρό και σε εκείνες
όπου είναι υγρό, όταν ο καιρός είναι ζε-
στός και ήπιος;

3. Πόσες θερμοδυναμικές παράμε-
τροι απαιτούνται για τον καθορισμό της

Ονομάζω αυτό
τον ατμό «αέριο» (gaz),
γιατί ελάχιστα διαφέρει από το
αρχαιοελληνικό «χάος» (chaos).
—Jan Baptista van Helmont

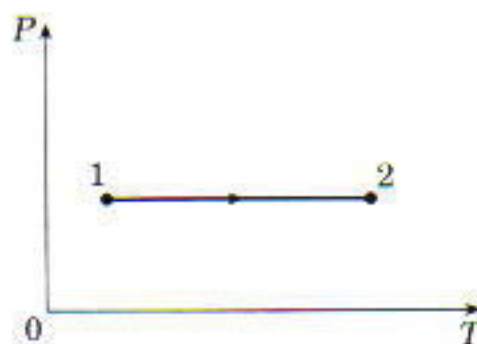
Ως εκ τούτου πρότεινα
έναν νόμο ο οποίος αναφέρει
ότι τα μόρια των διαφόρων
αερίων έχουν την αυτή «ζώσα
δύναμη» (κινητική ενέργεια)
μεταφορικής κίνησης.
—Rudolf Clausius

κατάστασης ενός συγκεκριμένου ιδα-
νικού αερίου ορισμένης μάζας;

4. Ιδανικό αέριο μεταβαίνει από την
κατάσταση 1 στην κατάσταση 2, όπως
φαίνεται στο Σχήμα 1. Πώς μεταβάλλε-
ται η πυκνότητά του σ' αυτή τη διαδι-
κασία;

5. Ένα δοχείο χωρίζεται σε δύο μέρη
με τη βοήθεια ενός ευλίσιστου διαφραγ-
ματος από πορώδες υλικό. Γεμίζουμε το
ένα μέρος με υδρογόνο και το άλλο με
αέρα ίδιας πίεσης. Αρχικά το διάφραγ-
μα λυγίζει προς το μέρος που περιέχει
το υδρογόνο· στη συνέχεια ξαναπαίρνει
την αρχική του θέση. Εξηγήστε το φαι-
νόμενο.

6. Έχουμε γεμίσει δύο κλειστά δο-
χεία ίσου όγκου με διοξείδιο του άνθρα-
κα. Το ύψος του δεύτερου δοχείου εί-
ναι διπλάσιο από το ύψος του πρώτου.
Δύο μανόμετρα τοποθετημένα στην
κορυφή των δύο δοχείων μετρούν α-
κριβώς την ίδια πίεση. Ποιες θα είναι οι
μετρήσεις των μανόμετρων όταν ανα-
ποδογυρίσουμε τα δοχεία;



Σχήμα 1

7. Η ατμοσφαιρική πίεση οφείλεται
στο βάρος του αέρα. Πώς εξακολουθεί
να υπάρχει πίεση μέσα στα διαστημό-
πλοια, όπου επικρατούν συνθήκες έλ-
λειψης βαρύτητας;

8. Ασκεί την ίδια πίεση ο αέρας στο
πάτωμα και το ταβάνι ενός δωματίου;

9. Η πίεση που ασκεί αέριο στα τοι-
χώματα δοχείου εξαρτάται από τα κα-
τασκευαστικά χαρακτηριστικά των
τοιχωμάτων;

10. Μείγμα από άζωτο και νέον το-
ποθετείται σ' ένα δοχείο. Είναι ίσες ή όχι
οι μέσες κινητικές ενέργειες των μο-
ρίων των δύο αερίων;

11. Τα τοιχώματα ενός δοχείου δια-
τηρούνται σε διαφορετικές θερμοκρα-
σίες. Η πίεση που ασκεί κάποιο αέριο σε
ένα από τα τοιχώματα εξαρτάται από τη
θερμοκρασία του τοιχώματος;

12. Ιδανικό αέριο καταλαμβάνει το
μισό μέρος ενός θερμικά μονωμένου
δοχείου· το υπόλοιπο δοχείο είναι κενό.
Πώς θα μεταβληθεί η θερμοκρασία του
συγκεκριμένου αερίου αν αφαιρέσου-
με τη διαχωριστική επιφάνεια;

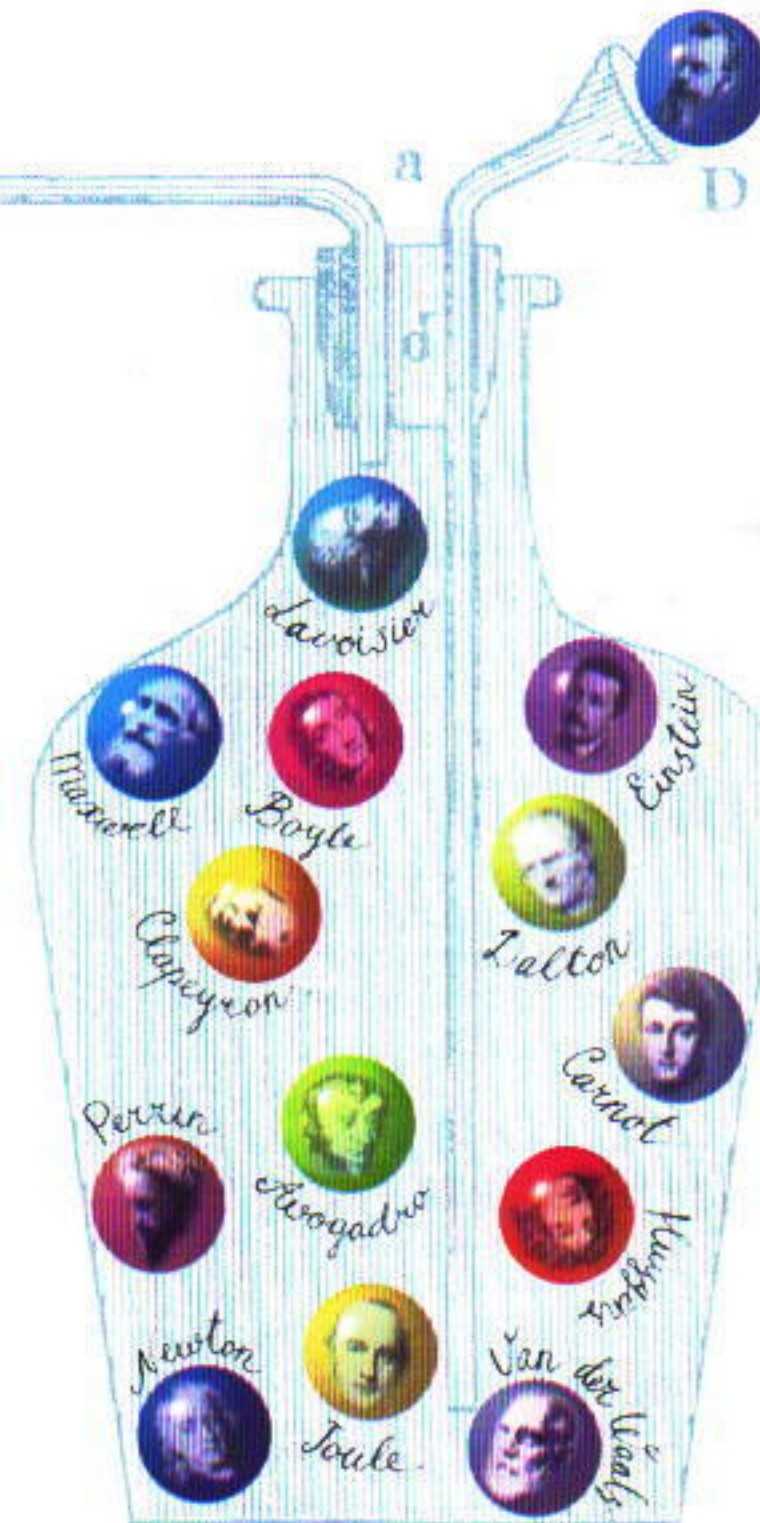
13. Θερμικά μονωμένο κυλινδρικό
δοχείο, γεμάτο με ιδανικό αέριο, αναρ-
τάται με τη βοήθεια νήματος από ακί-
νητο στήριγμα. Το νήμα κόβεται και το
δοχείο πέφτει. Θα μειωθεί η θερμοκρα-
σία του αερίου κατά την πτώση;

14. Κινούμενο δοχείο που περιέχει
κάποιο ιδανικό αέριο σταματά απότο-
μα την κίνησή του. Πώς θα μεταβληθεί
η πίεση του αερίου;

15. Μπορεί ο δυνατός άνεμος να

ών αερίων

Θεωρήστε το απλούστερο προς μελέτη σώμα — δηλαδή ένα αέριο περιορισμένο από στέρεα, απολύτως ελαστικά τοιχώματα και του οποίου τα μόρια είναι σκληρές, απολύτως ελαστικές σφαίρες...
— Ludwig Boltzmann



αυξήσει τη θερμοκρασία του αέρα που μεταφέρει;

Μικροπειρατισμοί

Ανοίξτε την κεντρική θέρμανση του δωματίου σας. Μόλις ζεσταθείτε, σκεφθείτε τι ακριβώς είναι αυτό που νιώθετε — την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του αέρα ή την αύξηση της ενέργειας των μεμονωμένων μορίων; Είναι ταυτόσημες οι δύο αυτές έννοιες;

Είναι ενδιαφέρον ότι...

... η λέξη gas (αέριο) εισήχθη στις αρ-

χές του 17ου αιώνα από τον Helmont, στη συνέχεια έπαψε να χρησιμοποιείται γι' αρκετό καιρό, και επανήλθε από τον Lavoisier στο τέλος του 18ου αιώνα. Η λέξη διαδόθηκε ευρέως την εποχή των αδελφών Joseph και Etienne Montgolfier, οι οποίοι το 1783 πραγματοποίησαν την πρώτη ανύψωση αερόστατου με θερμό αέρα.

... με πρώτη ματιά οι νόμοι του Dalton και του Avogadro μοιάζουν ανεξάρτητοι ο ένας από τον άλλον. Ο πρώτος νόμος, όμως, αποτελεί συνέπεια του δεύτερου, ενώ και οι δύο νόμοι προκύπτουν άμεσα από την κινητική θεωρία των (ιδανικών) αερίων.

... οι εκτιμήσεις για τον αριθμό του Avogadro, οι οποίες βασίστηκαν στην προσέγγιση του ιδανικού αερίου, δεν ήταν τόσο καλές όσο εκείνες που προέρχονται από τις θεωρίες για τα πραγματικά αέρια, όπως για παράδειγμα από το μοντέλο van der Waals.

... η κινητική θεωρία των αερίων ερμηνεύει την πειραματικά επιβεβαιωμένη ισότητα των μοριακών ειδικών θερμοτήτων αερίων του ίδιου τύπου — δηλαδή μονοατομικών, διατομικών κ.λπ.

... πολλές από τις συνέπειες της κινητικής θεωρίας χρειάστηκε να περιμένουν αρκετό καιρό προτού επιβεβαιωθούν πειραματικά. Μόλις το 1911, ο γάλλος φυσικός Louis Dupoyet επέδειξε ότι τα μόρια ενός αερίου συγκρούονται διαρκώς μεταξύ τους και ότι ανάμεσα στις συγκρούσεις κινούνται ευθύγραμμα.

... η πασίγνωστη καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων διατυπώθηκε

από τον Emile Clapeyron στην επιθυμία του να «ξαναζωντανέψει» τις εργασίες του Sadi Carnot, που είχαν αδικώς ξεχαστεί για αρκετές δεκαετίες.

... η θεωρία των ιδανικών αερίων μάς παρέχει τη δυνατότητα να εκτιμήσουμε τις τιμές της πίεσης και της θερμοκρασίας ακόμη και στο εσωτερικό των άστρων. Μολονότι αυτές οι εκτιμήσεις δεν είναι παρά προσεγγιστικές, βρίσκονται αρκετά κοντά σ' εκείνες που προέρχονται από λεπτομερείς υπολογισμούς. Σύμφωνα, λοιπόν, με τις εν λόγω εκτιμήσεις, οι πιέσεις των αερίων στο εσωτερικό των άστρων είναι δισεκατομμύρια φορές μεγαλύτερες από τη συνηθισμένη ατμοσφαιρική πίεση, ενώ οι θερμοκρασίες τους είναι της τάξης των εκατομμυρίων βαθμών.

... το μοντέλο των ιδανικών αερίων αρχίζει να «χωλαίνει» ακόμη και σε θερμοκρασία δωματίου στην περίπτωση που η πυκνότητα του αερίου αυξηθεί έστω και κατά 100 φορές σε σχέση με την αντίστοιχη πυκνότητά του υπό κανονικές συνθήκες.

... στις εργασίες του πάνω στην κινητική θεωρία, ο Maxwell ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε μαθηματικές στατιστικές μεθόδους για να περιγράψει ένα φυσικό φαινόμενο. Χωρίς τη στατιστική, θα ήταν αδύνατη η γενική περιγραφή της συμπεριφοράς ενός αερίου ως τεράστιο σύνολο σωματιδίων.

... το αέριο με μόρια που δεν συγκρούονται μεταξύ τους δεν είναι εντελώς θεωρητικό κατασκεύασμα — υπάρχει και στην πραγματικότητα! Το αέριο Knudsen είναι τόσο αραιό, ώστε τα μόριά του συγκρούονται μόνο με τα τοιχώματα του δοχείου που το περιέχει. Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της ροής ενός τέτοιου αερίου διαμέσου μικρής οπής έχουν εφαρμοστεί στην τεχνική του διαχωρισμού αερίων.

— A. Leonovich

Δείτε ακόμη τα άρθρα...

A. Stasenko, «Αγάπη και μίσος στον μοριακό κόσμο», Ιανουάριος / Φεβρουάριος 1995.

B. Yavelov, «Ο van der Waals και η εξίσωσή του», Ιανουάριος / Φεβρουάριος 1998.

A. Leonovich, «Μοριακή αναμέτρηση», Μάρτιος / Απρίλιος 1998. 

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 56

Μαθηματικές σκυταλοδρομίες

Περιμένετε τη σειρά σας και αρχίστε να λύνετε

Don Barry

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ Αμερικανικής Επικράτειας (American Regions Mathematics League, ARML στη συνέχεια) οργανώνει έναν ετήσιο διαγωνισμό μεταξύ δεκαπενταμελών ομάδων σπουδαστών που αντιπροσωπεύουν περιοχές οι οποίες ποικίλλουν από ολόκληρη πολιτεία έως μία κομητεία και από ολόκληρη πόλη έως ένα μόνο σχολείο. Σε αυτό τον μονοήμερο διαγωνισμό συμμετέχουν περίπου 1.400 σπουδαστές από 35 πολιτείες, ενώ συχνά φιλοξενούνται επισκέπτες από χώρες του εξωτερικού.

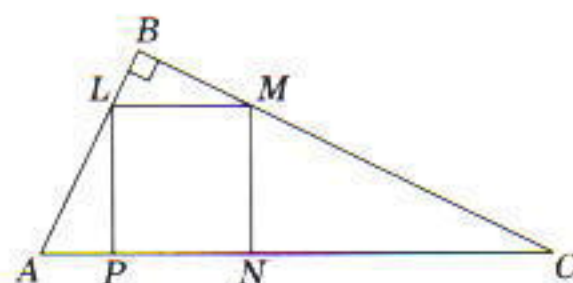
Ο διαγωνισμός περιλαμβάνει τέσσερα μέρη: το Ομαδικό, το Δυναμικό, το Ατομικό και τη Σκυταλοδρομία. Στο Ομαδικό μέρος οι δεκαπέντε σπουδαστές της ομάδας δουλεύουν μαζί για να λύσουν 10 προβλήματα σε 20 λεπτά. Εδώ, βαθμολογείται μόνο η απάντηση. Στο Δυναμικό μέρος η ομάδα έχει στη διάθεσή της 60 λεπτά για να βρει λύσεις ή αποδείξεις σε ερωτήματα που διερευνούν ενδιαφέροντα ζητήματα. Στον Ατομικό γύρο, σε κάθε σπουδαστή δίνονται τέσσερα ζεύγη ερωτημάτων και 10 λεπτά για κάθε ζεύγος.

Ο τελικός γύρος, η Σκυταλοδρομία, απαιτεί εκτενέστερη εξήγηση αφού είναι αρκετά πρωτότυπος. Στη σκυταλοδρομία κάθε ομάδα χωρίζεται σε πέντε τριάδες. Τα πρώτα μέλη κάθε τριάδας παίρνουν το ίδιο πρόβλημα, και το ίδιο συμβαίνει με τα δεύτερα καθώς και τα τρίτα μέλη των τριάδων. Το πρόβλημα

του δεύτερου μέλους απαιτεί την απάντηση του πρώτου και το πρόβλημα του τρίτου την απάντηση του δεύτερου. Οι σπουδαστές δεν επιτρέπεται να μιλήσουν μεταξύ τους και μπορούν απλώς να δώσουν τις απαντήσεις χωρίς κανένα σχόλιο. Κάθε τριάδα παίρνει τέσσερις βαθμούς για μία σωστή απάντηση σε τρία λεπτά και δύο βαθμούς για μία σωστή απάντηση σε έξι λεπτά. Όταν μια ομάδα λύσει σωστά όλες τις τριάδες των προβλημάτων, έχουμε ενθουσιώδεις πανηγυρισμούς, αλλά μια λανθασμένη απάντηση από τον πρώτο ή τον δεύτερο παίκτη προκαλεί σίγουρα ξέφρενη δραστηριότητα και παράξενα μαθηματικά.

Ιδού μια Σκυταλοδρομία από την ARML του 1996. Επισημαίνουμε ότι το ακρωνύμιο ΟΑΠΘΠ σημαίνει «Ο αριθμός που θα πάρετε» και ότι οι απαντήσεις των Σκυταλοδρομιών βρίσκονται στη σελίδα 61.

1. Στο τραπέζιο $ABCD$, $AB \parallel CD$ και οι γωνίες B και D είναι οξείες. Αν $\eta\mu B = \text{συν} D$, υπολογίστε σε μοίρες το $[\text{μέτρο}(A) - \text{μέτρο}(B)]$.



Σχήμα 1

2. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$ και έστω $K = T/15$. Το τετράγωνο $LMNP$ είναι εγγεγραμμένο στο ορθογώνιο τρίγωνο ABC , όπως βλέπετε στο Σχήμα 1. Αν $PN = K$, υπολογίστε το γινόμενο $(AP)(NC)$.

3. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$ και έστω $K = T/6$. Υπάρχουν K θετικοί ακέραιοι σε μια αριθμητική πρόοδο που έχει διαφορά 1. Αν το άθροισμα των όρων είναι 75, υπολογίστε την τιμή του πρώτου όρου.

Η τέχνη της συγγραφής Σκυταλοδρομιών

Μια καλή σκυταλοδρομία πρέπει να περιλαμβάνει ποικιλία τύπων προβλημάτων καθώς και διαφορετικές μορφές μαθηματικής σκέψης. Οι καλύτερες Σκυταλοδρομίες δίνουν τη δυνατότητα στον δεύτερο και στον τρίτο σπουδαστή να κάνουν ένα μεγάλο μέρος της ανάλυσης πριν πάρουν την απάντηση από τον προηγούμενο διαγωνιζόμενο. Η συγγραφή μιας καλής Σκυταλοδρομίας αποτελεί πρόκληση και έχω ανακαλύψει ότι είναι θαυμάσια



Σχήμα 2



Σχήμα 3

δραστηριότητα για μια μαθηματική λέσχη. Ιδού μία από τις αγαπημένες μου Σκυταλοδρομίες που δημιούργησε ένας σπουδαστής μου, ο Creence Lin.

1. Ένα κορίτσι χώρισε τα μακριά μαλλιά της σε τρία μέρη, δένοντας με κόκκινη κορδέλα το αριστερό μέρος, με λευκή το κεντρικό και με μπλε το δεξί. Μετά έφερε το αριστερό μέρος πάνω από το κεντρικό και σχημάτισε μία πλεξίδα (την Νο1) στην οποία οι κορδέλες είχαν τη σειρά (από αριστερά προς τα δεξιά) άσπρη, κόκκινη, μπλε. Έπειτα έφερε το δεξί μέρος πάνω από το κεντρικό, σχηματίζοντας την πλεξίδα Νο2 με τις κορδέλες στην εξής σειρά: άσπρη, μπλε, κόκκινη. Αν συνεχίσει με τον ίδιο τρόπο, ποιος θα είναι ο αύξων αριθμός της πλεξίδας στην οποία οι κορδέλες θα έχουν ξανά την αρχική τους σειρά (κόκκινη, άσπρη, μπλε);

2. Έστω $n = \text{ΟΑΠΘΠ}$. Στο Σχήμα 2 βλέπετε μια λωρίδα χαρτιού πλάτους n που έχει τυλιχτεί σχηματίζοντας έναν κύκλο. Κόβουμε τη λωρίδα κατά μήκος των διακεκομμένων γραμμών (μέρος των οποίων φαίνεται στο Σχήμα 2) και σχηματίζουμε ένα τετράγωνο με τα έξι τμήματα που προκύπτουν (Σχήμα 3). Προσδιορίστε την αρχική περίμετρο της λωρίδας.

3. Έστω $k = \text{ΟΑΠΘΠ}$ και έστω $m = k - 100$. Ένα μπουκάλι με παλιό κρασί είναι πέντε φορές παλαιότερο από την ηλικία που είχε ένα μπουκάλι συνηθισμένο κρασί όταν το παλιό κρασί είχε την ίδια ηλικία με αυτή που έχει το συνηθισμένο τώρα. Το άθροισμα των ηλικιών τους είναι m . Ποια είναι η ηλικία του συνηθισμένου κρασιού;

Υπερσκυταλοδρομία

Στην ARML του 1996 σκεφτήκαμε ότι θα ήταν διασκεδαστικό να δώσουμε στους σπουδαστές να αντιμετωπίσουν μετά το τέλος του διαγωνισμού μια Σκυταλοδρομία 15 ερωτημάτων. Η σκυταλοδρομία αυτή δεν θα αποτελούσε μέρος του διαγωνισμού — θελήσαμε απλώς να προσφέρουμε στους σπουδαστές μια ευχάριστη δραστηριότητα για όσο χρόνο περίμεναν την έναρξη της τελετής απονομής των βραβείων. Τα προβλήματα έπρεπε να είναι ευκολότερα από μιας κανονικής Σκυταλοδρομίας, αλλά αφού δεν θα υπήρχε βαθμολογία χρησιμοποιήσαμε λίγα κόλπα. Οι σπουδαστές πραγματικά εν-

θουσιάστηκαν μ' αυτή την πρόκληση. Ιδού τα προβλήματα της υπερσκυταλοδρομίας.

1. Αν το εμβαδόν ενός τριγώνου με βάση $2N$ και ύψος $N - 2$ ισούται με N , υπολογίστε το N .

2. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$. Υπολογίστε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα $(T, 1)$ και $(1, T^2)$.

3. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$. Αν

$$y = Tx^2 + T^2x + C$$

και η x συντεταγμένη της κορυφής ισούται με C , υπολογίστε την τιμή του C .

4. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$. Αν

$$(2 + Ti)^2 = a + bi,$$

υπολογίστε την τιμή του $a + b$.

5. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$. Βρείτε το ψηφίο των μονάδων στο γινόμενο $199^T \cdot 279^{T-1}$.

6. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$. Αν

$$T^3 - 3T^2 + 3T - 1 = K^3,$$

υπολογίστε την τιμή του K .

7. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$. Αν T είναι το πλήθος των πλευρών ενός κανονικού πολυγώνου, υπολογίστε (σε μοίρες) τη θετική διαφορά μεταξύ του αθροίσματος των εσωτερικών και του αθροίσματος των εξωτερικών γωνιών του.

8. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$. Έστω ότι $K = T/60$. Αν K είναι το ύψος ενός ισόπλευρου τριγώνου και A το εμβαδόν του, υπολογίστε το $A\sqrt{3}/9$.

9. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$. Αν

$$\eta\mu T^\circ \text{ συν } 286^\circ - \text{ συν } T^\circ \eta\mu(-106^\circ) = \eta\mu\theta,$$

για $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, υπολογίστε το $\text{συν}\theta + i\eta\mu\theta$, όπου $i = \sqrt{-1}$.

10. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$. Υπολογίστε το

$$\left(\frac{|T|}{T}\right)^2.$$

11. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$. Υπολογίστε την τιμή του x που ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση:

$$2x - \frac{3x - T}{2} = 7 - \frac{T + x}{5}.$$

12. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$. Αν $\epsilon\phi 9T = \sigma\phi\theta$, για $-90^\circ < \theta < 90^\circ$, υπολογίστε τη γωνία θ .

13. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$. Μια ευθεία με κλίση T διέρχεται από το σημείο

$(-2, 9)$. Υπολογίστε την τετμημένη επί την αρχή, x , της ευθείας.

14. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$. Αν το διατεταγμένο ζεύγος (x, y) είναι λύση του ακόλουθου συστήματος, υπολογίστε το $x - y$:

$$\begin{cases} x + y = T + 7 \\ Tx - 4y = T - 8. \end{cases}$$

15. Έστω $T = \text{ΟΑΠΘΠ}$. Ένα τετράγωνο πάτωμα καλύπτεται από τετράγωνα πλακίδια. Αν το πλήθος των πλακιδίων κατά μήκος των διαγωνίων είναι $2T^2 + 5$, υπολογίστε το πλήθος των πλακιδίων του πατώματος. \blacksquare

Ο Don Barry είναι πρόεδρος της επιτροπής προβλημάτων στην ARML· διδάσκει μαθηματικά στην Ακαδημία Phillips στο Άντοβερ της Μασσαχουσέτης.

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 56**

ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ

Το *Quantum* εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει είκοσι έξι τεύχη του. Αντά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύσετε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους. Το *Quantum* είναι περιοδικό βιβλιοθήκης· φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του. Μπορείτε ακόμη να προμηθευτείτε και τις καλαίσθητες θήκες του, από το βιβλιοπωλείο μας ή με αντικαταβολή, για την αρχειοθέτηση των τευχών σας.

Γνώση «εις βάθος»

«Η προσαρμοστικότητα δεν συνιστά μίμηση. Σημαίνει δύναμη αντίστασης και αφομοίωσης.»

—Mahatma Gandhi

Arthur Eisenkraft και Larry D. Kirkpatrick

ΠΡΟΚΕΙΤΑΙ ΓΙΑ ΕΝΑ ΕΞΑΙΡΕΤΙΚΑ συνηθισμένο θέαμα στη διάρκεια των θερινών μηνών: Ένα αυτοκίνητο με τη σχάρα στον ουρανό του κατάφορτη από κάθε λογής είδη κατασκήνωσης, από κανό ως και πολυθρόνες για την παραλία, αναχωρεί για να μεταφέρει την οικογένεια στον τόπο των διακοπών της. Όποτε αντικρίζουν ένα παρόμοιο θέαμα, οι μηχανικοί που ασχολούνται με την αεροδυναμική του αυτοκινήτου παθαίνουν, κυριολεκτικά, νευρική κρίση.

Εκατομμύρια δολάρια, για τη χρηματοδότηση της έρευνας και του πειραματισμού, επενδύθηκαν σε αεροδυναμικά μοντέλα αυτοκινήτων με σκοπό να ελαχιστοποιήσουν τη δυσμενή επίδραση της αντίστασης του αέρα. Και ιδού, η αμερικανική οικογένεια, που περιφρονεί όλες τις προσπάθειες για τη μείωση της κατανάλωσης καυσίμων ανά χιλιόμετρο, με τα χρειώδη για τη διαμονή στην ύπαιθρο σαν πολύκλαδο θάμνο φορτωμένα στον ουρανό του αυτοκινήτου.

Για να μελετήσετε την αντίσταση του αέρα κατ' οίκον, δεν χρειάζεστε παρά μόνο ένα χρονόμετρο και μερικά φίλτρα του καφέ. Αφήνετε ένα φίλτρο του καφέ να πέσει από ένα ύψος της εκλογής σας και καταγράφετε το χρόνο καθόδου του. Επαναλαμβάνετε το πείραμα με δύο φίλτρα, τοποθετημένα το ένα εντός του άλλου, με τρία φίλτρα, κ.ο.κ. Προσδιορίζουμε, έτσι, τη

σχέση που συνδέει τη μάζα με το χρόνο καθόδου. Εφόσον τα φίλτρα πέφτουν με σταθερή ταχύτητα, αφού «πάνουν» την ορική ταχύτητά τους πολύ γρήγορα, μας δίνεται η ευκαιρία να μετρήσουμε συγχρόνως και την επίδραση της μάζας στην ορική ταχύτητα. (Η απόδειξη του ισχυρισμού ότι τα φίλτρα του καφέ «πάνουν» γρήγορα την ορική ταχύτητά τους θα απαιτούσε μια εκτεταμένη παρέκβαση και, ως εκ τούτου, παραλείπεται.)

Μπορούμε να εκτελέσουμε ένα δεύτερο πείραμα προκειμένου να διαπιστώσουμε πώς επιδρά το εμβαδόν της επιφάνειας στην ορική ταχύτητα. Μπορούμε να κολλήσουμε δύο φίλτρα κατά μήκος μίας κοινής πλευράς τους, έτσι ώστε να μας δώσουν επιφάνεια μεγαλύτερου εμβαδού, και να συγκρίνουμε το χρόνο καθόδου τους με τον αντίστοιχο χρόνο για δύο φίλτρα το ένα μέσα στο άλλο. Κατόπιν, επαναλαμβάνουμε το πείραμα με τρία κολλημένα φίλτρα και τρία φίλτρα το ένα μέσα στο άλλο. Συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο μπορούμε να προσδιορίσουμε τη ζητούμενη σχέση.

Θεωρητικά, είναι εφικτό να μελετήσουμε την επίδραση της αντίστασης του αέρα χρησιμοποιώντας ένα καρτσάκι, που κινείται οριζόντια και στο οποίο έχει στερεωθεί ένα χαρτόνι, έτσι ώστε η δύναμη της αντίστασης να καθίσταται αισθητή. Αν έλειπε το χαρτόνι, το καρτσάκι θα εξακολουθούσε

να κινείται προς τα εμπρός με σταθερή ταχύτητα. Για χαμηλές ταχύτητες, η δύναμη της αντίστασης του αέρα που ασκείται στο χαρτόνι είναι ανάλογη με την ταχύτητα του καρτσιού:

$$\begin{aligned} \sum F &= m\gamma \\ -kv &= m\gamma \\ -kv &= m \frac{dv}{dt} \\ \frac{dv}{v} &= -\frac{k}{m} dt \\ \ln \frac{v}{v_0} &= -\frac{k}{m} t \\ v &= v_0 e^{-\frac{k}{m} t} \end{aligned}$$

Επομένως, η ταχύτητα φθίνει εκθετικά από την αρχική τιμή της. Η σταθερά αναλογίας k καθορίζει το ρυθμό της μείωσης της ταχύτητας. Από την εξίσωση φαίνεται ότι η ταχύτητα του καρτσιού δεν πρόκειται να μηδενιστεί σε πεπερασμένο χρόνο. Φυσικά, εφόσον το t ληφθεί αρκούντως μεγάλο, μπορούμε να έχουμε μια ταχύτητα που είναι κατ' ουσίαν μηδενική.

Η αντίσταση του αέρα μάς κοστίζει. Εάν δεν υπήρχε η αντίσταση του αέρα, η μόνη δύναμη που θα επιβράδυνε το αυτοκίνητό μας στην εθνική οδό θα ήταν η τριβή που αναπτύσσεται ανάμεσα στους τροχούς και το οδόστρωμα. Η ασθενής αυτή δύναμη ελάχιστα θα επιβράδυνε την κίνησή μας. Θα γλιστρούσαμε στη λωρίδα μας με 100 χι-



λιόμετρα την ώρα χωρίς να υπάρχει ανάγκη για πρόσθετη κατανάλωση καυσίμων.

Το μεγαλύτερο μέρος των καυσίμων που καταναλώνουν τα αυτοκίνητά μας ξοδεύεται για να εξουδετερωθούν οι επιδράσεις της αντίστασης του αέρα. Καθώς το αυτοκίνητό σας κινείται με σταθερή και υψηλή ταχύτητα, ανοίξτε το παράθυρο και αισθανθείτε τον άνεμο στην παλάμη σας. Το αυτοκίνητό σας κατευθύνεται προς μια ισχυρότατη ανεμοθύελλα! Εάν λάβετε υπόψη ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη με την ταχύτητα του αυτοκινήτου (ή με το τετράγωνο της ταχύτητας του αυτοκινήτου), εύκολα αντιλαμβάνεστε ότι ενδεχόμενη μικρή μείωση της ταχύτητας περιορίζει αισθητά την κατανάλωση καυσίμων. Τα χαμηλότερα όρια ταχύτητας δεν σώζουν μόνο ζωές, αλλά συντείνουν και στην εξοικονόμηση καυσίμων.

Μια καινοτομία στη σχεδίαση των αυτοκινήτων που θα ελάττωνε την αντίσταση του αέρα, επιτρέποντάς τους να διανύουν ένα επιπλέον χιλιόμετρο ανά γαλόνι βενζίνης, θα σήμαινε απίστευτη οικονομία. Ας κάνουμε έναν γρήγορο υπολογισμό αλά Fermi. Υπάρχουν περίπου εξήντα εκατομμύρια επιβατικά αυτοκίνητα στις ΗΠΑ (ένα ανά τέσσερις κατοίκους). Εάν κάθε αυτοκίνητο διανύει 20.000 μίλια ετησίως και καταναλώνει ένα γαλόνι βενζίνης ανά 20 μίλια, τότε η κατανάλωση βενζίνης ανέρχεται σε χίλια γαλόνια ανά αυτοκίνητο ή, για το σύνολο του στόλου των ΙΧ, σε εξήντα δισεκατομμύρια γαλόνια. Με τιμή 1 δολάριο το γαλόνι, η συγκεκριμένη ποσότητα βενζίνης αντιπροσωπεύει εξήντα δισεκατομμύρια δολάρια. Εάν όλα αυτά τα αυτοκίνητα μπορούσαν να διανύσουν 21 μίλια ανά γαλόνι βενζίνης, θα προέκυπτε οικονομία ίση με το 5% της συνολικής κατανάλωσης, ή με τρία δισεκατομμύρια δολάρια το χρόνο. Πώς πρέπει να αποτιμήσουμε, λοιπόν, μια τέτοια καινοτομία στη σχεδίαση των αυτοκινήτων, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε εξοικονόμηση τόσων χρημάτων ετησίως;

Το εν λόγω φαινόμενο επηρεάζει και τον αθλητισμό. Αν δεν υπήρχε η αντίσταση του αέρα, η μπαλιά του μπέιζμπολ με ταχύτητα 50 m/s (180 km/h) υπό γωνία βολής 45° θα κάλυπτε από-

σταση 255 m. Το μπέιζμπολ θα ήταν ένα εντελώς διαφορετικό παιχνίδι! Το ίδιο ισχύει επίσης και στο τένις και το ποδόσφαιρο, όπως και στην επιτραπέζια αντισφαίριση και στο μπάντμιντον, όπου η αντίσταση του αέρα αποτελεί καθοριστικό παράγοντα. Η συμμετρία της τροχιάς εξαφανίζεται όταν είναι παρούσα η αντίσταση. Μάλιστα, ενδιαφέρον παρουσιάζει το εξής ερώτημα: Εάν εκτοξεύσουμε ένα αντικείμενο κατακόρυφα προς τα πάνω, θα διαρκέσει περισσότερο η άνοδός του ή η κάθοδός του;

Όσον αφορά το θέμα του «διαγωνισμού» μας γι' αυτόν το μήνα, ξεκινάμε, εν είδει προθερμάνσεως, με το πρόβλημα της ελεύθερης πτώσης μιας πέτρας, όπου η αντίσταση του αέρα αγνοείται, για να περάσουμε στη συνέχεια στην πιο ρεαλιστική, και δυσκολότερη, περίπτωση όπου συνυπολογίζεται και η ανασχετική δράση της εν λόγω δύναμης.

1. Μια πέτρα προσκρούει στον πυθμένα ενός πηγαδιού και ακούτε τον ήχο 3 δευτερόλεπτα αφότου την αφήσατε να πέσει. Ποιο είναι το βάθος του πηγαδιού; Υποθέστε ότι δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα και ότι η ταχύτητα του ήχου έχει σταθερή τιμή 340 m/s.

2. Τώρα, θεωρήστε ότι στην πέτρα ασκείται η αντίσταση του αέρα και ότι τούτη η δύναμη είναι ανάλογη με την ταχύτητα της πέτρας.

α) Βρείτε μια έκφραση για την ταχύτητα της πέτρας καθώς πέφτει.

β) Χρησιμοποιώντας τις τιμές 0,01 kg/s για τη σταθερά αναλογίας και 0,05 kg για τη μάζα της πέτρας, προσδιορίστε το βάθος του πηγαδιού εάν ο ήχος που παράγεται καθώς η πέτρα χτυπάει στην επιφάνεια του νερού φτάνει σ' αυτή σας 3 δευτερόλεπτα αφότου την αφήσατε να πέσει.

Τα αυτιά των ελεφάντων

Στο τεύχος Ιανουαρίου / Φεβρουαρίου 1998 θέσαμε τρία προβλήματα ανακλιμάκωσης από τη Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής που διοργανώθηκε το περασμένο καλοκαίρι στον Καναδά.

Α. Το πρώτο ζητούσε να προβλέψετε πώς θα επηρεαζόταν η μέση θερμοκρασία T της Γης εάν η μέση απόστασή της από τον Ήλιο μειωνόταν κατά 1%. Για να απαντήσουμε, πρέπει πρώτα να ισοσκελίσουμε το ισοζύγιο ανά-

μεσα στην ισχύ της ηλιακής ακτινοβολίας που απορροφά η Γη και στην εκπεμπόμενη από αυτή ισχύ, διότι η Γη βρίσκεται σε θερμική ισορροπία. Εάν η ολική ακτινοβολούμενη ισχύς από τον Ήλιο είναι P , η ακτινοβολία που προσπίπτει στη Γη ανά μονάδα επιφάνειας ισούται με $P/4\pi R^2$. Εάν συμβολίσουμε την ακτίνα της Γης με R_T και το συντελεστή ανάκλασής της με A , η ισχύς $P_{αν}$ που απορροφά η Γη ισούται με

$$P_{αν} = (1 - A) \frac{P}{4\pi R^2} 2\pi R_T^2.$$

Σύμφωνα με το νόμο των Stefan-Boltzmann, η εκπεμπόμενη από τη Γη ισχύς δίνεται από την έκφραση

$$P_{εκ} = 4\pi R_T^2 \epsilon \sigma T^4,$$

όπου ϵ είναι ο συντελεστής εκπομπής της Γης και σ η σταθερά των Stefan-Boltzmann. Μολονότι ο συντελεστής εκπομπής εξαρτάται από τη θερμοκρασία, η μεταβολή της θερμοκρασίας αναμένεται να είναι μικρή, οπότε μπορούμε να αγνοήσουμε την εν λόγω εξάρτηση και να θεωρήσουμε το συντελεστή εκπομπής σταθερό. Συνεπώς,

$$T \propto \sqrt[4]{\frac{1}{R}},$$

και η μείωση της R κατά 1% επιφέρει αύξηση της T κατά 0,5%. Για μια μέση θερμοκρασία 287 K, βρίσκουμε αύξηση 1,4 K.

Β. Το δεύτερο πρόβλημα ζητούσε να προσδιοριστεί η μεταβολή της πυκνότητας του ξηρού αέρα λόγω μιας αύξησης της υγρασίας ενώ η θερμοκρασία και η πίεση παραμένουν ίδιες. Θα χρησιμοποιήσουμε τους δείκτες ξ και ν για να δηλώσουμε τον ξηρό και τον υγρό αέρα, αντίστοιχα. Τότε, ο αριθμός N_ξ των μορίων ξηρού αέρα στη μονάδα του όγκου είναι

$$N_\xi \propto \frac{M_\xi}{28,8},$$

όπου M_ξ είναι η μάζα του ξηρού αέρα σε όγκο ίσο με τη μονάδα, και η μέση μοριακή μάζα του ξηρού αέρα ισούται με 28,8 g/mol. Για τον υγρό αέρα, πρέπει να λάβουμε υπόψη τις αναλογίες του ξηρού αέρα και των υδρατμών. Για υγρασία 2%, έχουμε

Η συνέχεια στη σελ. 69 ⇔

Συμμετρίας συνέχεια

Οι πολυωνυμικές εξισώσεις και οι ρίζες τους

Mark Saul και Titu Andreescu

ΣΤΟ ΤΕΛΕΥΤΑΙΟ ΑΡΘΡΟ ΜΑΣ ΕΡΕΥ-
νήσαμε την έννοια της αλγεβρι-
κής συμμετρίας και τη χρησιμο-
ποιήσαμε για να επιλύσουμε μια
πληθώρα προβλημάτων. Στο παρόν
άρθρο θα συνεχίσουμε την εξερεύνη-
σή μας. Αν γνωρίζετε πώς συνδέονται
οι ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης
με τους συντελεστές της, μπορείτε να
προχωρήσετε στο Πρόβλημα 8. Διαφο-
ρετικά ξεκινήστε να διαβάζετε από
την αρχή.

Θα ξεκινήσουμε με απλές δευτερο-
βάθμιες εξισώσεις. Ακόμη και ένα μι-
κρό παιδί ξέρει να λύσει μια δευτερο-
βάθμια εξίσωση με παραγοντοποίηση.
Π.χ. έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + 6 &= 0 \\(x - 3)(x - 2) &= 0 \\x = 3 \text{ ή } x &= 2.\end{aligned}$$

Ετσι, βλέπουμε ότι αν το $(x - 2)$ εί-
ναι παράγοντας του αρχικού πολυω-
νύμου, τότε το 2 είναι ρίζα της πολυω-
νυμικής εξίσωσης. Στην πραγματικό-
τητα, αυτό ισχύει γενικά. Δεν υπάρ-
χει τίποτε το ιδιαίτερο στον αριθμό 2 ή
στον παράγοντα $x - 2$:

(1) Αν το $(x - a)$ είναι παράγοντας
του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου $P(x)$,
τότε $P(a) = 0$.

Αληθεύει το αντίστροφο; Ας δούμε
ένα ακόμη απλούστατο παράδειγμα:

$$\begin{aligned}6x^2 - x - 1 &= 0 \\(2x - 1)(3x + 1) &= 0 \\(2x - 1) = 0 \text{ ή } (3x + 1) &= 0\end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = -\frac{1}{3}.$$

Διαπιστώνουμε ότι το $1/2$ είναι ρί-
ζα της αρχικής εξίσωσης, αλλά το $(x -$
 $\frac{1}{2})$ δεν είναι παράγοντας του πολυ-
ωνύμου. Ή μήπως είναι; Αν προτιμού-
σαμε περισσότερο τα κλάσματα θα μπο-
ρούσαμε να λύσουμε την αρχική εξί-
σωση ως εξής:

$$\begin{aligned}6x^2 - x - 1 &= 0 \\x^2 - \frac{x}{6} - \frac{1}{6} &= 0 \\(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{3}) &= 0 \\x = \frac{1}{2} \text{ ή } x &= -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Γιατί δεν το κάναμε αυτό; Διότι η
παραγοντοποίηση απαιτεί να μαντέ-
ψουμε κάποια πράγματα και είναι ευ-
κολότερο να μαντέψουμε κάτι για α-
κέραιους αριθμούς παρά για ρητούς.
Αυτό όμως είναι δικό μας πρόβλημα
και όχι της εξίσωσης. Αν παρατηρή-
σουμε τη δεύτερη λύση της εξίσωσης,

διαπιστώνουμε ότι, αν $x = \frac{1}{2}$ είναι
ρίζα, τότε το $x - \frac{1}{2}$ είναι παράγοντας.

Πράγματι, το όλο ζήτημα γίνεται πο-
απλό αν θεωρήσουμε μόνο δευτερο-
βάθμιες εξισώσεις στις οποίες ο συντε-
λεστής του μεγιστοβάθμιου όρου ι-
σούται με 1. Αυτό θα κάνουμε στο υ-
πόλοιπο άρθρο, και έτσι πλέον το αντι-

στροφο της πρότασης (1) αληθεύει.
Μπορούμε, λοιπόν, να διατυπώσουμε
το πολύ ενδιαφέρον θεώρημα παρα-
γοντοποίησης για τα δευτεροβάθμια
πολυώνυμα:

Αν ο συντελεστής του μεγιστοβάθ-
μιου όρου ενός δευτεροβάθμιου πο-
λυωνύμου $P(x)$ ισούται με 1, τότε το
 $(x - a)$ διαιρεί το $P(x)$ αν και μόνο αν
 $P(a) = 0$.

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε
ότι η πρόταση αυτή αληθεύει τόσο για
τους άχαρους άρρητους αριθμούς όσο
και για τους κομψούς ακέραιους ή ρη-
τούς.

Πρόβλημα 1. Επαληθεύστε ότι οι
ρίζες της $x^2 - 3x - 5 = 0$ είναι οι

$$\frac{3 + \sqrt{29}}{2}$$

και

$$\frac{3 - \sqrt{29}}{2}.$$

Αποδείξτε στη συνέχεια ότι το πο-
λυώνυμο $x^2 - 3x - 5$ παραγοντοποιεί-
ται ως εξής:

$$\left(x - \frac{3 + \sqrt{29}}{2}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{29}}{2}\right).$$

(Σας υποσχόμαστε ότι είναι η τε-
λευταία φορά που βλέπετε μια τόσο
πολύπλοκη παράσταση σ' αυτό το άρ-
θρο!)

Ας διατυπώσουμε το πρόβλημα δια-
φορετικά. Έστω

$$a = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$$

και

$$b = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}$$

Τότε, και αφού ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο μπορεί να έχει δύο μόνο γραμμικούς παράγοντες, το πρόβλημα ζητά να αποδείξουμε ότι

$$(x - a)(x - b) = x^2 - 3x - 5.$$

Αν εκτελέσουμε τους πολλαπλασιασμούς στο αριστερό μέλος, παίρνουμε

$$x^2 - (a + b)x + ab.$$

Αφού αυτή η παράσταση πρέπει να είναι ίση με $x^2 - 3x - 5$, εύκολα διαπιστώνετε (αν δεν το γνωρίζατε ήδη) ότι $a + b = 3$ και $ab = -5$.

Και πάλι, οι αριθμοί a και b δεν έχουν τίποτε το ιδιαίτερο. Το θεώρημα της παραγοντοποίησης για τα δευτεροβάθμια πολυώνυμα έχει την εξής συνέπεια:

Οι αριθμοί a και b είναι ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης $x^2 - px + q = 0$ αν και μόνο αν $a + b = p$ και $ab = q$.

Πρόβλημα 2. Αν a και b είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 5 = 0$, βρείτε την αριθμητική τιμή του $a^2 + 2ab + b^2$.

Πρόβλημα 3. Αν a και b είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 5 = 0$, βρείτε την αριθμητική τιμή του $a^2 + b^2$.

Πρόβλημα 4. Αν a και b είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - px + q = 0$, βρείτε την αριθμητική τιμή του $a^2 + b^2$.

Πρόβλημα 5. Αν a και b είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - px + q = 0$, βρείτε την αριθμητική τιμή του $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Πρόβλημα 6. Αν a και b είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - px + q = 0$, βρείτε την αριθμητική τιμή του $a^3 + b^3$.

Πρόβλημα 7. Αν a και b είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - px + q = 0$, βρείτε την αριθμητική τιμή του

$$\frac{a + 2b}{a - b} + \frac{2a + b}{b - a}$$

Τι σχέση έχουν όλα τα παραπάνω με τη συμμετρία; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι όλες οι παραστάσεις που πρέπει να υπολογίσουμε στα προηγούμενα προβλήματα είναι συμμετρι-

κές ως προς τα a και b . Αποδεικνύεται ότι όλα τα προηγούμενα προβλήματα είναι παραδείγματα μιας πολύ γενικής πρότασης:

Κάθε ρητή συμμετρική συνάρτηση των a και b μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των $a + b$ και ab .

Ισοδύναμα: Κάθε ρητή συμμετρική συνάρτηση των a και b μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των συντελεστών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης που έχει συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου 1 και ρίζες τα a και b .

(Ρητή συνάρτηση είναι απλώς ένα κλάσμα πολυωνύμων.) Σε αυτή την πρόταση βρίσκεται ο σπόρος μερικών σπουδαιών μαθηματικών αποτελεσμάτων. Ας πάρουμε μια τριτοβάθμια εξίσωση, για παράδειγμα την

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0.$$

Αν γνωρίζαμε τους παράγοντές της, θα μπορούσαμε να λύσουμε την εξίσωση θέτοντας κάθε παράγοντα ίσο με το μηδέν. Ισχύει όμως και το αντίστροφο: αν γνωρίζαμε τις ρίζες θα μπορούσαμε να παραγοντοποιήσουμε την εξίσωση. Στην πραγματικότητα, μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι οι ρίζες της είναι τα 1, -1 και 3 και, επομένως, το πολυώνυμο $x^3 + 3x^2 - x - 3$ παραγοντοποιείται ως $(x + 1)(x - 1)(x - 3)$.

Πρόβλημα 8. Αποδείξτε ότι οι προηγούμενοι ισχυρισμοί είναι αληθείς.

Με λίγα λόγια, το θεώρημα διαιρετότητας για δευτεροβάθμιες εξισώσεις επεκτείνεται σε πολυωνυμικές εξισώσεις μεγαλύτερου βαθμού:

Θεώρημα διαιρετότητας: Το πολυώνυμο $P(x)$ με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1 διαιρείται με το $(x - a)$ αν και μόνο αν $P(a) = 0$.

Και μπορούμε ξανά να μεταφράσουμε αυτή την πρόταση σε μια πρόταση για τις ρίζες και τους συντελεστές μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης. Ας υποθέσουμε ότι αρχίζουμε με ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο $P(x)$ με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1. Τότε το $P(x)$ αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων, $(x - a)(x - b)(x - \gamma)$, αν και μόνο αν τα a, b, γ είναι ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$. Αν $P(x) = x^3 - px^2 + qx - r$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} & x^3 - px^2 + qx - r \\ &= (x - a)(x - b)(x - \gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x^3 - (a + b + \gamma)x^2 \\ &+ (ab + b\gamma + a\gamma)x - ab\gamma. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} a + b + \gamma &= p, \\ ab + b\gamma + a\gamma &= q, \\ ab\gamma &= r. \end{aligned}$$

Προβλήματα 9-13. Αν a, b, γ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, εκφράστε συναρτήσει των p, q, r τις τιμές των:

9. $a^2 + b^2 + \gamma^2$.

10. $a^3 + b^3 + \gamma^3$.

11. $a^4 + b^4 + \gamma^4$.

12. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{\gamma^2}$.

13. $\frac{ab}{\gamma} + \frac{a\gamma}{b} + \frac{b\gamma}{a}$.

Προβλήματα 14-17. Λύστε τα επόμενα συστήματα.

14. $\begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6. \end{cases}$

15. $\begin{cases} a + b = 8 \\ ab = -7. \end{cases}$

16. $\begin{cases} a + b + \gamma = -9 \\ ab + a\gamma + b\gamma = 19 \\ ab\gamma = -11. \end{cases}$

17. $\begin{cases} a + b + \gamma = 5 \\ a^2 + b^2 + \gamma^2 = 29 \\ ab\gamma = -24. \end{cases}$

Πρόβλημα 18. Έστω a, b, c, d και e ακέραιοι τέτοιοι ώστε και το $a + b + c + d + e$ και το $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ να διαιρούνται από έναν περιττό ακέραιο n . Αποδείξτε ότι και το $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 - 5abcde$ διαιρείται από τον n .

Πρόβλημα 19. Έστω r_1 και r_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 2x + 3 = 0$.

Υπολογίστε το

$$\frac{r_1^2 + 4r_1 + 5}{r_1^2 + 5r_1 + 4} + \frac{r_2^2 + 4r_2 + 5}{r_2^2 + 5r_2 + 4}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 56

Η ΠΙΕΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Οι ηλιόλουστες μέρες είναι πιο πιεστικές;

S.V. Gyslov

ΟΤΑΝ ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΣΑΝ ΤΟΥΣ ΚΟΜΗΤΕΣ, ΟΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ του μεσαίωνα προσπαθούσαν να εξηγήσουν γιατί το σχήμα της ουράς τους εξαρτάται από τη σχετική θέση των κομητών ως προς τον Ήλιο. Το 1604, ο Johannes Kepler διατύπωσε την υπόθεση ότι το σχήμα της ουράς ενός κομήτη καθορίζεται από την πίεση του φωτός.

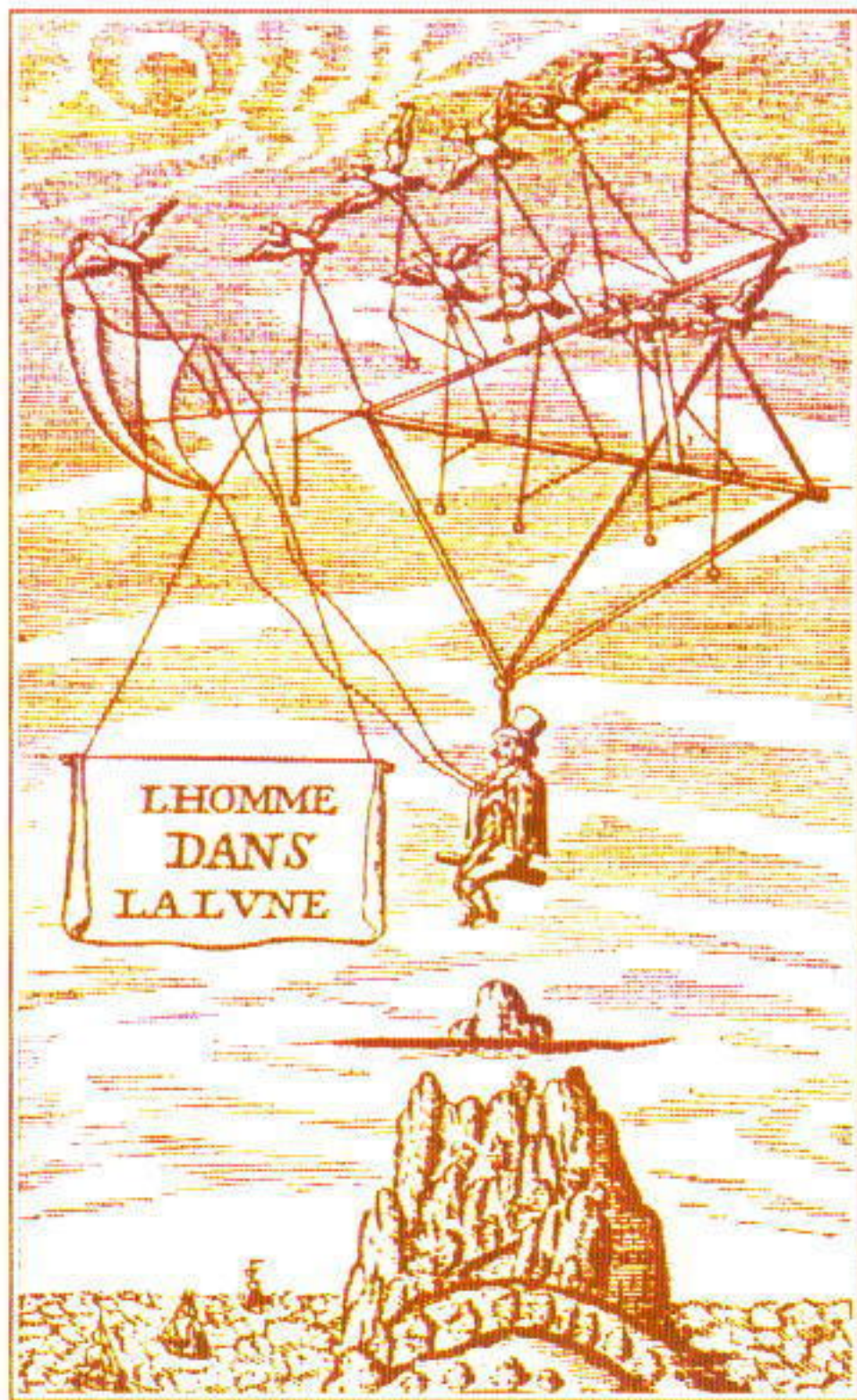
Στους αιώνες που ακολούθησαν, πολλοί επιστήμονες προσπάθησαν να μετρήσουν αυτή την πίεση· ανάμεσά τους συμπεριλαμβάνεται ο Augustin Jean Fresnel, ένας από τους δημιουργούς της κυματικής θεωρίας του φωτός. Εντούτοις κανένα από τα πειράματα που πραγματοποιήθηκαν δεν απέδωσε καρπούς. Για τρεις περίπου αιώνες η πίεση του φωτός παρέμενε απλώς μια μεγαλοφυής υπόθεση.

Το 1865, ο James Clerk Maxwell διατύπωσε την ηλεκτρομαγνητική θεωρία του φωτός.

Σύμφωνα με την εν λόγω θεωρία, τα φωτεινά κύματα είναι ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις, και επομένως το φως μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο. Οι εξισώσεις του Maxwell προέβλεπαν την ύπαρξη της πίεσης του φωτός. Μάλιστα, ο ίδιος ο Maxwell υπολόγισε την πίεση αυτή. Ένα ηλιόλουστο μεσημέρι οι ηλιακές ακτίνες ασκούν σε μια τελείως ανακλαστική επιφάνεια ανεπαίσθητη πίεση η οποία ισούται με $4,7 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$.

Επί μακρόν η ισχύς των εξισώσεων του Maxwell αποτέλεσε αντικείμενο έντονης επιστημονικής διαμάχης. Επιχειρήθηκαν νέα πειράματα προκειμένου να μετρηθεί η πίεση του φωτός, αλλά οι επιστήμονες απέτυχαν και πάλι. Το κύριο πρόβλημα που αντιμετώπιζαν δεν ήταν η εξαιρετικά μικρή τιμή της πίεσης της φωτεινής ακτινοβολίας, αλλά το γεγονός ότι το ίδιο το φως επηρεάζει με ποικίλους, και συχνά απρόβλεπτους, τρόπους τη λειτουργία των πειραματικών συσκευών. Το μέγεθος των φαινομένων αυτών υπερβαίνει κατά πολύ το μέγεθος της πίεσης της φωτεινής ακτινοβολίας.

Το 1899, ο διάσημος ρώσος φυσικός Pyotr Nikolayevich Lebedev πραγματοποίησε το πρώτο επιτυχές πείραμα μέτρησης της πίεσης της φωτεινής ακτινοβολίας. Επιδεικνύοντας αξιοθαύμαστη επιδεξιότητα, κατόρθωσε να



Σχήμα 1

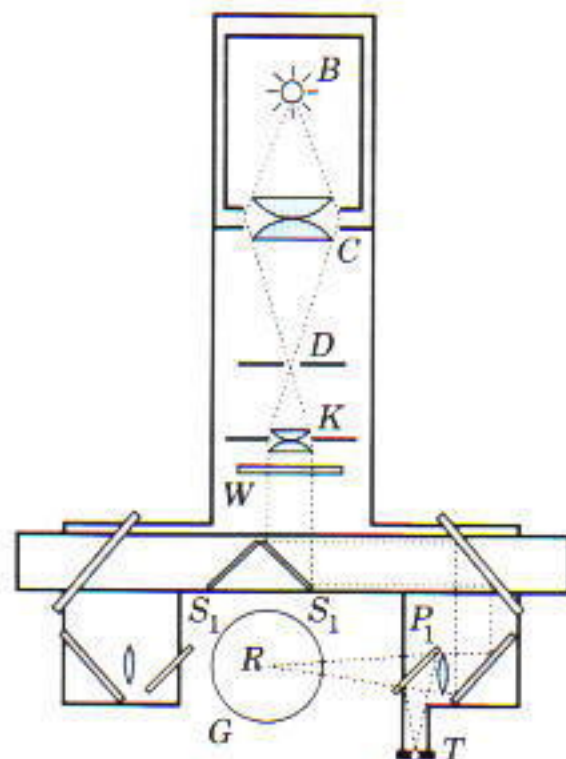
Αυτή η ξυλογραφία είναι η προμετωπίδα από τη γαλλική έκδοση (1648) του βιβλίου Ένας άνθρωπος στο φεγγάρι του Godwin Francis. Ίσως ο καλλιτέχνης θεώρησε ότι στους σεληνιακούς αιθέρες τέτοια ιπτάμενα οχήματα θα μπορούσε να προωθούνται χάρη στην πίεση του ηλιακού φωτός.

υπερβεί τα προβλήματα που αποτελούσαν τον εφιάλτη των πειραματιστών. Το κύριο μέρος της διάταξης του Lebedev ήταν μια συστοιχία από επίπεδα φύλλα πολύ μικρής μάζας, κατασκευασμένα από διάφορα υλικά (κυρίως μέταλλα), τα οποία ήταν στερεωμένα σε μια ελαφριά ράβδο. Το σύστημα των φύλλων αναρτήθηκε με ένα νήμα σε ένα θάλαμο κενού (Σχήμα 1).

Οι επιφάνειες μερικών φύλλων είχαν μαύρο χρώμα, ενώ οι υπόλοιπες ήταν στιλπνές. Ουσιαστικά, οι στιλπνές επιφάνειες ανακλούσαν σχεδόν όλο το προσπίπτον φως, ενώ, αντίθετα, οι μαύρες το απορροφούσαν. Ως εκ τούτου, η πίεση του φωτός πάνω στις στιλπνές επιφάνειες ήταν σχεδόν διπλάσια από εκείνη που ασκούσαν στις μαύρες επιφάνειες. Η διαφορά των ασκούμενων δυνάμεων δημιουργούσε μια ροπή, η οποία προκαλούσε τη στροφή της ράβδου και τη συστρόφη του νήματος εξάρτησης. Η πίεση του φωτός προσδιοριζόταν από τη γωνία στρέψης.

Ποιοι παράγοντες διατάρασσαν αυτές τις μετρήσεις; Το πρώτο πρόβλημα ήταν ότι το προσπίπτον φως θέρμαινε τα φύλλα και τον περιβάλλοντα αέρα. Κατά συνέπεια, τα επαγόμενα ρεύματα μεταφοράς ενεργούσαν πάνω στα φύλλα όπως ο άνεμος. Επομένως, δεν αποσαφηνιζόταν η αιτία στην οποία έπρεπε να αποδοθεί η κίνηση της ράβδου —επρόκειτο για την πίεση του φωτός ή για τα αέρια ρεύματα μεταφοράς;

Ένα ακόμη πρόβλημα εμπόδιζε την ανίχνευση της πίεσης του φωτός: «το φαινόμενο του ακτινομέτρου» που προκαλούνταν από το προσπίπτον φως. Επειδή το φως έπεφτε μόνο στη μία πλευρά των φύλλων, η αντίθετη πλευρά τους δεν θερμαινόταν ομοίотροπα. Επομένως, οι δύο πλευρές του φύλλου μετέφεραν διαφορετικές ποσότητες ενέργειας (κατά μέσο όρο) στα μόρια του περιβάλλοντος αέρα. Όταν τα μόρια προσέκρουαν στη θερμή πλευρά, αποκτούσαν μεγαλύτερη ταχύτητα (και ορμή) απ' ό,τι τα μόρια που προσέκρουαν στην ψυχρή πλευρά. Λόγω της αρχής διατήρησης της ορμής, τα μόρια που συγκρούονταν με τη θερμή πλευρά προσέδιδαν κατά την ανάκρουσή τους περισσότερη ορμή στο φύλλο από ό,τι τα μόρια που συγκρούονταν με την ψυχρή πλευρά.



Σχήμα 2

Η πειραματική διάταξη του Lebedev για τη μέτρηση της πίεσης του φωτός. Η ελαφριά ράβδος R, η οποία φέρει τα μικρής μάζας φύλλα και είναι αναρτημένη με λεπτό νήμα μέσα σε ένα θάλαμο κενού G, αποτελεί έναν εξαιρετικά ευαίσθητο ζυγό στρέψης. Το φως από έναν λαμπτήρα βολταϊκού τόξου εστιάζεται μέσω ενός συστήματος φακών και κατόπτρων πάνω σε ένα από τα φύλλα. Η ροπή που αναπτύσσεται στη ράβδο παρατηρείται με τη βοήθεια μιας διόπτρας και ενός κατόπτρου το οποίο είναι στερεωμένο στη χορδή (δεν φαίνονται στο σχήμα). Μετατοπίζοντας το διπλό κάτοπτρο S₁S₁, είναι δυνατόν να κατευθύνουμε το φως είτε πάνω στην εμπρόσθια πλευρά του φύλλου είτε στην οπίσθια και, επομένως, να αναστρέψουμε την κατεύθυνση της ροπής. Το πλακίδιο P₁ καθιστά δυνατή τη διοχέτευση μέρους του φωτός στο θερμοστοιχείο T, το οποίο μετράει την ποσότητα της προσπίπτουσας φωτεινής ενέργειας. Στα πειράματα χρησιμοποιήθηκαν διάφορα συστήματα για τη στερέωση των φύλλων.

Όπως αποδείχτηκε, οι δυνάμεις που ευθύνονταν για το «φαινόμενο του ακτινομέτρου» ενεργούσαν στην ίδια κατεύθυνση με την πίεση του φωτός, αλλά η τιμή τους ήταν αρκετές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από εκείνη της πίεσης. Το πρώτο μέτρο για την ελαχιστοποίηση της επίδρασης των «ολέθριων» αυτών δυνάμεων ήταν να πραγματοποιηθεί το πείραμα σε κενό. Όσο λιγότερα μόρια αέρα υπήρχαν στο θάλαμο τόσο ευκολότερη θα καθίστατο η ανίχνευση των φαινομένων που συνδέονται με την πίεση της ακτινοβολίας.

Ο Lebedev χρησιμοποίησε λεπτές μεταλλικές πλάκες για φύλλα στη συσκευή του. Κατ' αρχάς αυτές οι επιφάνειες συνιστούσαν καλούς αγωγούς της θερμότητας. Επομένως, η διαφορά

θερμοκρασίας μεταξύ των δύο πλευρών των φύλλων καθίστατο μικρότερη, και, ως αποτέλεσμα, οι δυνάμεις που προκαλούσαν το «φαινόμενο του ακτινομέτρου» εξασθενούσαν επίσης. Επιπλέον, οι μικροσκοπικές μάζες των φύλλων οδηγούσαν σε μικρή τιμή της ροπής αδράνειας του συνολικού συστήματος, γεγονός που βελτιώνει την ακρίβεια του πειράματος στο κενό.

Ο Lebedev επινόησε πολλούς ευφυείς μηχανισμούς και συστήματα και δοκίμασε πολλές παραλλαγές των πειραματικών διαδικασιών και συνθηκών ώσπου να ευοδωθούν οι προσπάθειές του. Τελικά, η τιμή της πίεσης που υπολόγισε απέκλινε μόνο κατά 20% από την πρόβλεψη του Maxwell. Έτσι ο Lebedev απέδειξε πειραματικά ότι το φως μεταφέρει όχι μόνο ενέργεια αλλά και ορμή.

Για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα η πίεση του φωτός είχε μόνο θεωρητική σημασία. Λόγω της εξαιρετικά μικρής ισχύος των φωτεινών δεσμών, δεν ετίθετο ζήτημα πρακτικών εφαρμογών του φαινομένου. Εντούτοις, η εφεύρεση των λέιζερ άνοιξε το δρόμο για να εισέλθει και η ανακάλυψη του Lebedev στο πεδίο των πρακτικών εφαρμογών.

Για παράδειγμα, είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε ακτινοβολία λέιζερ για να μετακινήσουμε μικρά σωματίδια στον αέρα ή για να τα διατηρήσουμε σε αιώρηση, αντισταθμίζοντας τη βαρυτική έλξη με την πίεση του φωτός. Επιπλέον, η πίεση του φωτός προσδίδει διαφορετικές επιταχύνσεις σε σωματίδια διαφορετικής μάζας. Συνεπώς, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε ειδικές «παγίδες» που μας επιτρέπουν να «ξεδιαλέξουμε» σωματίδια διαφορετικών μαζών.

Η πίεση του φωτός μπορεί, επίσης, να χρησιμοποιηθεί για το διαχωρισμό ενός μείγματος δύο αερίων. Για να καταστεί δυνατός ένας τέτοιος διαχωρισμός, η συχνότητα του λέιζερ με το οποίο ακτινοβολείται το μείγμα πρέπει να συμπίπτει με τη συχνότητα που αντιστοιχεί στη μετάβαση των ατόμων του ενός αερίου από τη θεμελιώδη κατάσταση τους σε μια διεγερμένη. Όταν ένα άτομο του εν λόγω αερίου απορροφά ένα φωτόνιο, αποκτά ορμή ίδιας

Η συνέχεια στη σελ. 51 ⇨

Πώς να αποφύγετε τη βροχή

«Και κάποτε χρειαζόμαστε όλον τον ουρανό για να διαβούμε κι ένα μόνο δρόμο...»

—Τάσος Λειβαδίτης

I. F. Akulich

ΦΑΝΤΑΣΤΕΙΤΕ ΠΩΣ ΠΕΡΠΑΤΑΤΕ στο δρόμο μια μέρα με συννεφιά και πως δεν διαθέτετε ούτε ομπρέλα ούτε αδιάβροχο ούτε κάτι άλλο που θα μπορούσε να σας προστατέψει από τη βροχή. Ξαφνικά, πάνει δυνατή νεροποντή, συνοδευόμενη από ισχυρό άνεμο. Τι θα πρέπει να κάνετε;

Η συντριπτική πλειοψηφία (συμπεριλαμβανομένου και του συγγραφέα του άρθρου) θα απαντούσε ως εξής: Πρέπει να κινηθείτε γρήγορα προς το πλησιέστερο «καταφύγιο», και όσο πιο σύντομα φτάσετε εκεί τόσο πιο στεγνοί θα είστε. Φαίνεται πως αυτό αποτελεί μια αδιαμφισβήτητη αλήθεια.

Παρά ταύτα, ορισμένοι θα πουν: «Ασφαλώς και θα κατευθυνθώ προς το πλησιέστερο καταφύγιο. Δεν χρειάζεται όμως να τρέξω, διότι τρέχοντας γρήγορα θα συμβεί το εξής: θα βρίσκομαι με λιγότερη ώρα στη βροχή κι έτσι θα με χτυπήσουν λιγότερες σταγόνες από πάνω, το σώμα μου όμως θα δεχτεί περισσότερες σταγόνες από μπροστά. Συνεπώς, το επάνω μέρος του σώματός μου θα βραχεί λίγο, το μπροστινό όμως θα βραχεί πολύ περισσότερο. Γιατί, λοιπόν, να τρέξω; Δεν υπάρχει κανένας λόγος.» Τα άτομα που ανήκουν σ' αυτή την κατηγορία περπατούν ήρεμα μέσα στη βροχή, παρά τα έκπληκτα βλέμματα των περαστικών.



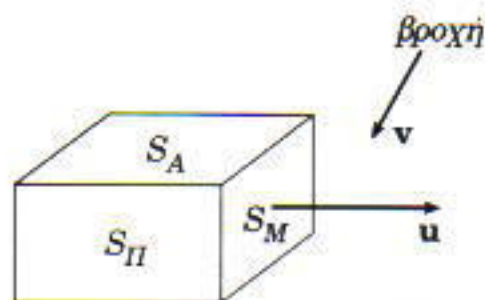
Τι θα πρέπει να σκεφτούμε για τον παραπάνω συλλογισμό; Πως είναι λανθασμένος; Πολύ πιθανόν. Μήπως όμως πρόκειται για μια φυσική αλήθεια —οφειλόμενη στη διαίσθηση αυτών των ατόμων—, οπότε πρέπει να εκτιμήσουμε πως έχουν όντως δίκιο;

Ίδου μια ακόμη σκέψη που στηρίζει την παραπάνω ιδέα. Ας υποθέσουμε ότι ο αέρας φυσά με κατεύθυνση προς το καταφύγιο και είναι τόσο δυνατός, ώστε η βροχή να πέφτει σχεδόν οριζόντια. Τότε, η πιο σωστή λύση είναι να τρέξετε προς το καταφύγιο με ταχύτητα όση και ο άνεμος. Έτσι, όλες οι σταγόνες θα ακολουθούν διαδρομή παράλληλη μ' εσάς και καμία δεν θα σας συναντήσει. Δεν ωφελεί, λοιπόν, να τρέξετε με ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα του ανέμου, αλλά ούτε είναι καλό να τρέξετε με μεγαλύτερη ταχύτητα —η μόνη επιτυχία σας θα είναι να βραχείτε περισσότερο! Ασφαλώς, δεν είναι εύκολο να κινηθεί κανείς με την ταχύτητα ενός ισχυρού ανέμου. Παρ' όλα αυτά, ο συγκεκριμένος συλλογισμός υποδεικνύει ότι θα πρέπει να εξετάσουμε περαιτέρω το ζήτημα.

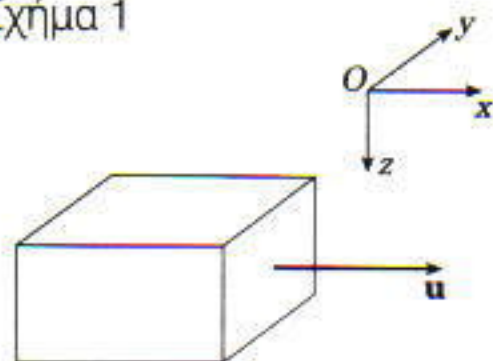
Ορίζοντας το πρόβλημα

Ας ορίσουμε τις συνθήκες του προβλήματος:

Ένας άνθρωπος βρίσκεται στο δρόμο. Ξαφνικά αρχίζει να βρέχει. Ο άνθρωπος κατευθύνεται βιαστικά προς



Σχήμα 1



Σχήμα 2

το πλησιέστερο καταφύγιο, που βρίσκεται σε απόσταση ℓ μέτρων από τον ίδιο. Πόσο γρήγορα θα πρέπει να τρέχει ώστε να παραμείνει όσο το δυνατόν πιο στεγνός;

Έχουμε διατυπώσει το πρόβλημα, ωστόσο αποκλείεται να κατορθώσουμε να το λύσουμε σ' αυτή τη μορφή. Στην πραγματικότητα, το ανθρώπινο σώμα έχει ένα εξαιρετικά περίπλοκο σχήμα και, επειδή καθώς τρέχουμε κινούμε τα πόδια και τα χέρια μας, το σχήμα αυτό διαρκώς μεταβάλλεται. Επομένως, στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι πολύ δύσκολο (στην ουσία είναι αδύνατο) να εκτελέσουμε ακριβείς υπολογισμούς. Δεν έχουμε λοιπόν παρά να μελετήσουμε μια απλούστερη προσεγγιστική μορφή του προβλήματος.

Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με έδρες που έχουν εμβαδά S_{SH} , S_A και S_M (οι δείκτες αντιστοιχούν στις λέξεις: «πλευρική», «άνω» και «μετωπική») κινείται με ταχύτητα \mathbf{u} , κάθετη στην επιφάνεια S_M . Ας υποθέσουμε ότι βρέχει. Κάθε σταγόνα βροχής πέφτει με ταχύτητα \mathbf{v} (Σχήμα 1) (η διεύθυνση του διανύσματος \mathbf{v} δεν είναι απαραίτητα κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω — μια και σκοπεύουμε να μελετήσουμε συγχρόνως και την περίπτωση όπου η βροχή πέφτει υπό κλίση). Ο αριθμός των σταγόνων ανά μονάδα όγκου ισούται με k . Πόσες σταγόνες πέφτουν (συμβολίζουμε το εν λόγω πλήθος με το γράμμα N) πάνω στο παραλληλεπίπεδο, καθώς μετακινείται κατά απόσταση ℓ , και πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα u ώστε ο αριθμός N να γίνει όσο το δυνατόν μικρότερος;

Αρχίζει ο υπολογισμός

Ας εισαγάγουμε το σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ ως εξής: ο άξονας Oz έχει διεύθυνση κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω, ο άξονας Ox έχει την κατεύθυνση του διανύσματος \mathbf{u} , ενώ ο άξονας Oy έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο Oxz και φορά τέτοια ώστε η προβολή του διανύσματος της ταχύτητας \mathbf{v} των σταγόνων πάνω στο συγκεκριμένο άξονα να είναι θετική (βλ. Σχήμα 2).

Εφόσον γνωρίζουμε το διάνυσμα \mathbf{v} , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι και οι συνιστώσες του πάνω στους άξονες των συντεταγμένων μας είναι επίσης γνωστές. Ας τις συμβολίσουμε με v_x , v_y και v_z . Τι γνωρίζουμε με βεβαιότητα για τις εν λόγω συνιστώσες; Προφανώς, $v_z \geq 0$ (διότι έτσι ορίσαμε τον άξονα Oy). Πέραν αυτού, γνωρίζουμε ότι $v_x > 0$ (η βροχή πέφτει προς το έδαφος). Όσον αφορά την τιμή της v_x , αυτή μπορεί να είναι τόσο θετική (όταν η βροχή σάς ακολουθεί) όσο και αρνητική (όταν η βροχή σάς χτυπά στο πρόσωπο), ή ακόμη και μηδέν.

Ας θεωρήσουμε την κατάσταση ως προς το σύστημα αναφοράς που συνδέεται με το παραλληλεπίπεδο — δηλαδή το σύστημα αναφοράς στο οποίο το παραλληλεπίπεδο παραμένει ακίνητο. Τότε, η ταχύτητα των σταγόνων ισούται με $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Οι προβολές της ταχύτητας \mathbf{w} στους άξονες συντεταγμένων είναι: $w_x = v_x - u$, $w_y = v_y$ και $w_z = v_z$ (όπου u είναι το μέτρο του διανύσματος \mathbf{u}). Πρέπει να καθορίσουμε πόσες σταγόνες N πέφτουν πάνω στο παραλληλεπίπεδο μέσα σε χρονικό διάστημα $\tau = \ell/u$, καθώς και για ποια τιμή της u ο αριθμός N λαμβάνει την ελάχιστη δυνατή τιμή του.

Προφανώς, μια σταγόνα θα πέσει πάνω στο παραλληλεπίπεδο στη διάρκεια του χρόνου τ αν και μόνο αν απέχει από τις πλευρές του απόσταση μικρότερη ή ίση από $\tau \cdot |\mathbf{w}|$ — δηλαδή, αν βρίσκεται εντός του χώρου που περικλείεται από τις κόκκινες γραμμές στο Σχήμα 3. Πόσος είναι ο όγκος του συγκεκριμένου χώρου; Είναι πολύ εύκολο να δούμε πως ο εν λόγω χώρος αποτελείται από τρία πρίσματα, τα οποία έχουν ως εμβαδά βάσεων τα S_M , S_{SH} και S_A και ως ύψη τις απόλυτες τιμές των συνιστωσών του διανύσματος $\tau \mathbf{w}$ στους άξονες Ox , Oy και

Oz , αντίστοιχα. Επομένως, ο όγκος του συγκεκριμένου χώρου ισούται με

$$\tau \cdot (|w_x|S_M + |w_y|S_{SH} + |w_z|S_A) = \tau \cdot (|v_x - u|S_M + |v_y|S_{SH} + |v_z|S_A),$$

και ο αριθμός των σταγόνων N ισούται με

$$\tau \cdot k \cdot (|v_x - u|S_M + v_y S_{SH} + v_z S_A).$$

Αν λάβουμε υπόψη μας πως $\tau = \ell/u$, βρίσκουμε την εξάρτηση του N από την u :

$$N = k\ell \frac{|v_x - u|S_M + v_y S_{SH} + v_z S_A}{u}.$$

Τώρα, θα βρούμε τη θετική τιμή της ταχύτητας u , η οποία αντιστοιχεί στο μικρότερο δυνατό N .

Η λύση συνεχίζεται

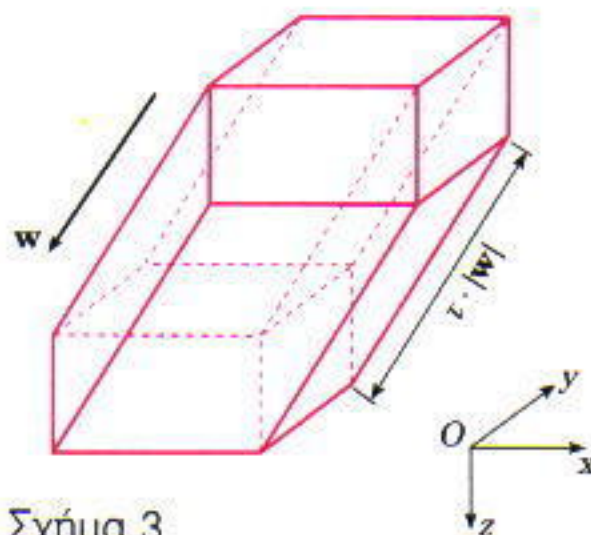
Εφόσον οι ποσότητες k και ℓ είναι σταθερές, θα θεωρήσουμε, για λόγους ευκολίας, τη μεταβλητή

$$\psi = \frac{N}{k\ell} = \frac{|v_x - u|S_M + v_y S_{SH} + v_z S_A}{u}.$$

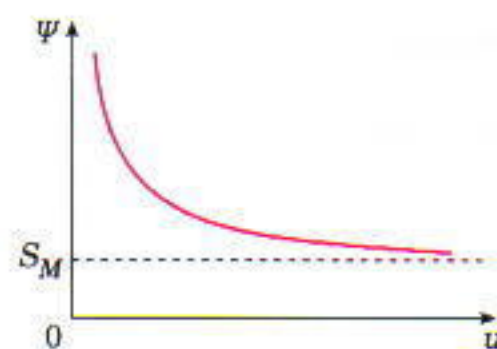
Ας θεωρήσουμε δύο περιπτώσεις:

1. $v_x \leq 0$ (η βροχή σάς χτυπά στο πρόσωπο).

Στην περίπτωση αυτή, $v_x - u < 0$, και έτσι ο τύπος για το ψ μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής:



Σχήμα 3



Σχήμα 4

$$\psi = \frac{(u - v_x)S_M + v_y S_{II} + v_z S_A}{u}$$

$$= S_M + \frac{-v_x S_M + v_y S_{II} + v_z S_A}{u}$$

Εφόσον $v_x \leq 0$, ο αριθμητής του κλάσματος στο δεύτερο μέλος είναι θετικός και, έτσι, η συνάρτηση $\psi(u)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα τιμών $(0, +\infty)$. Το γράφημα της συνάρτησης $\psi = \psi(u)$ φαίνεται στο Σχήμα 4. Παρατηρούμε ότι, παρόλο που το ψ ελαττώνεται όταν η u αυξάνεται, η ανισότητα $\psi > S_M$ εξακολουθεί να ισχύει, και πώς, όταν $u \rightarrow \infty$, το $\psi \rightarrow S_M$. Φαίνεται, λοιπόν, πως δεν έχουν δίκιο οι υποστηρικτές της θεωρίας που συμβουλεύει «να μην βιάζεστε»: όσο πιο γρήγορα τρέχετε τόσο λιγότερο βρέχεστε.

Μολαταύτα, εδώ βρισκόμαστε μπροστά σ' ένα άλλο γεγονός, που εκ πρώτης όψεως μοιάζει αρκετά απρόβλεπτο: Εφόσον $\psi > S_M$ για κάθε u , το $N = kl\psi$ είναι πάντοτε μεγαλύτερο του klS_M . Τούτο σημαίνει πως όσο γρήγορα κι αν τρέξετε (ακόμη κι αν τρέξετε σαν σφαίρα), πάλι θα δεχτείτε την ελάχιστη ποσότητα βροχής: klS_M . Επομένως, υπάρχει κάποια λογική στην άποψη εκείνων που επιλέγουν να μη βιαστούν.

2. $v_x = 0$ (η βροχή σάς ακολουθεί).

Εδώ, θα θεωρήσουμε δύο διαστήματα τιμών της u :

(α) $0 < u \leq v_x$. Τότε, $|v_x - u| = v_x - u$, και

$$\psi = \frac{v_x S_M + v_y S_{II} + v_z S_A}{u} - S_M$$

Η παραπάνω συνάρτηση είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0, v_x]$ και παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν $u = v_x$:

$$\psi|_{u=v_x} = \frac{v_y S_{II} + v_z S_A}{v_x}$$

(β) $u > v_x$. Τότε, $|v_x - u| = u - v_x$, και

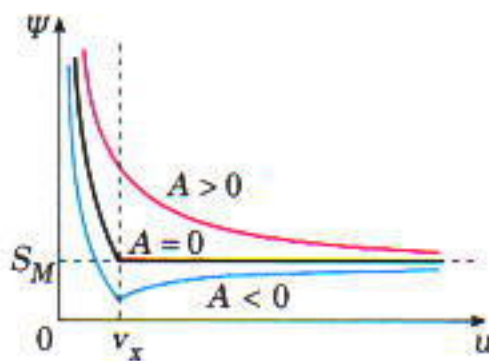
$$\psi = \frac{-v_x S_M + v_y S_{II} + v_z S_A}{u} + S_M$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, δεν μπορούμε να αποφανθούμε αμέσως για το πώς μεταβάλλεται το ψ καθώς αυξάνεται η u . Εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή του κλάσματος στο δεύτερο μέλος:

$$A = -v_x S_M + v_y S_{II} + v_z S_A$$

Αν $A > 0$, τότε η συνάρτηση $\psi(u)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $(v_x, +\infty)$, ενώ, αν $A < 0$, τότε είναι αύξουσα. Τέλος, αν $A = 0$, τότε $\psi = S_M =$ σταθερή.

Στο Σχήμα 5 δίνονται τρία πιθανά γραφήματα της συνάρτησης $\psi = \psi(u)$ για όλες τις τιμές ταχυτήτων $u \in (0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι στο διάστημα από 0 έως v_x οι καμπύλες είναι παραπλήσιες και για τις τρεις περιπτώσεις ($A > 0$, $A = 0$ και $A < 0$), ενώ διαφέ-



Σχήμα 5

ρουν για τιμές μεγαλύτερες της $u = v_x$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, πως, σε ορισμένες περιπτώσεις, όταν ο άνεμος είναι κατάλληλος, τα επιχειρήματα που θέτουν οι υποστηρικτές της θεωρίας τού «να μην βιάζεστε» αποδεικνύονται ξαφνικά ορθά και λογικά.

ΕΡΕΥΝΕΤΕ ΤΟΝ ΑΝΕΜΟ

Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των υπολογισμών μας και παρατηρώντας τα γραφήματα των Σχημάτων 4 και 5, μπορούμε να δώσουμε μια καλά τεκμηριωμένη απάντηση στο ερώτημα αν θα πρέπει απλώς να περπατάτε στη βροχή ή να τρέχετε.

Αν, λοιπόν, η βροχή σάς χτυπά στο πρόσωπο, τότε θα πρέπει να τρέξετε στο πλησιέστερο καταφύγιο όσο πιο γρήγορα μπορείτε. Αν η βροχή σάς ακολουθεί, τότε θα πρέπει πρώτα να εκτιμήσετε την τιμή της ποσότητας

$$A = -v_x S_M + v_y S_{II} + v_z S_A$$

Αν διαπιστώσετε ότι $A > 0$, τότε και σ' αυτή την περίπτωση θα πρέπει να βιαστείτε. Αν βρείτε ότι $A = 0$, τότε δεν έχει καμία σημασία πόσο γρήγορα περπατάτε: θα βραχείτε το ίδιο, ανεξάρτητα από την τιμή της δικής σας ταχύτητας, εφόσον βέβαια είναι μεγαλύτερη από v_x . Αν όμως $A < 0$, τότε θα πρέπει να τρέξετε με ταχύτητα ακριβώς ίση με v_x προκειμένου να βραχείτε όσο το δυνατόν λιγότερο.

Για παράδειγμα, αν $v_y = 0$ (στην περίπτωση που ο άνεμος είναι κατάλληλος), τότε η ανισότητα $A < 0$ είναι ισοδύναμη με την $v_x S_M > v_z S_A$. Για έναν ψηλό και αδύνατο άνθρωπο η επιφάνεια S_M είναι πολύ μεγαλύτερη από την S_A , και έτσι η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται για μικρή οριζόντια ταχύτητα της βροχής, v_x . Αν ένα τέτοιο άτομο, καθώς κατευθύνεται προς το καταφύγιο, αντιλαμβάνεται τη βροχή να πέφτει κατακόρυφα πάνω του, τότε μπορεί να παραμείνει σχεδόν τελείως στεγνό. Ό,τι δηλαδή αποκαλούμε στην κυριολεξία «πέραςμα ανάμεσα από τις σταγόνες».

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 48

κατεύθυνσης με την κατεύθυνση διάδοσης της δέσμης λέιζερ. Κατά την αποδιέγερση του ατόμου, όμως, το διάλυμα της ορμής του εκπεμπόμενου φωτονίου έχει τυχαία κατεύθυνση.

Υστερα από αρκετούς κύκλους απορρόφησης και εκπομπής φωτονίου, οι ορμές των εκπεμφθέντων φωτονίων εξουδετερώνονται αμοιβαία, ενώ οι ορμές που αποκτήθηκαν εξαιτίας της απορρόφησης φωτονίου αθροίζονται. Συνεπώς, όσα άτομα απορροφούν την ακτινοβολία λέιζερ σε συντονισμό αποκτούν μη μηδενική μέση ορμή στην κατεύθυνση της δέσμης λέιζερ. Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν πως, εάν μια δέσμη λέιζερ κατάλληλης συχνότητας διέλθει από δύο διαδοχικούς θαλάμους, ο πρώτος από τους οποίους περιέχει το μείγμα των αερίων, η δέσμη θα μεταφέρει τα άτομα του ενός αερίου στον δεύτερο θάλαμο, διαχωρίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο τα δύο αέρια.

Μπορούμε, επίσης, να χρησιμοποιήσουμε την πίεση του φωτός για να επιταχύνουμε μικρά σωματίδια στο κενό (η αντίσταση του αέρα είναι τόσο μεγάλη ώστε καθιστά απραγματοποιήσιμη μια τέτοια διαδικασία σε κανονικές πιέσεις). Έτσι, ανοίγει ο δρόμος για ορισμένες ενδιαφέρουσες εφαρμογές, όπως, παραδείγματος χάρη, για την προσομοίωση των βλαβερών συνεπειών των μικρομετεωριτών στην επιφάνεια ενός διαστημοπλοίου. Δεν αποκλείεται, εν τέλει, να κατορθώσουμε κάποτε να προσανατολιζούμε και να επιταχύνουμε τα διαστημόπλοια χρησιμοποιώντας την πίεση του ηλιακού φωτός.

Ομογενείς εξισώσεις

L. Ryzhkov και Y. Ionin

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ συναντάμε άφθονα παραδείγματα των εξισώσεων αυτών που οι μαθηματικοί ονομάζουν *ομογενείς*. Για παράδειγμα, το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων ονομάζεται *ομογενές* ως προς x και y :

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0. \end{cases}$$

Επίσης, όταν λύνουμε τριγωνομετρικές εξισώσεις, παραστάσεις όπως τις

$$\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0$$

και

$$\eta\mu^2 x - 5\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$$

μπορούμε να τις ονομάσουμε *ομογενείς* ως προς $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$.

Ποια είναι η κοινή ιδιότητα αυτών των παραδειγμάτων και τι εννοούμε με τον όρο *ομογενής εξίσωση*;

Ορισμός. Μια πολυωνυμική συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(u, v)$ ονομάζεται «ομογενές πολυώνυμο βαθμού n » αν όλα τα μονώνυμά του είναι βαθμού n . Για παράδειγμα, το

$$f(u, v) = 2u^2 - 7uv + 9v^2$$

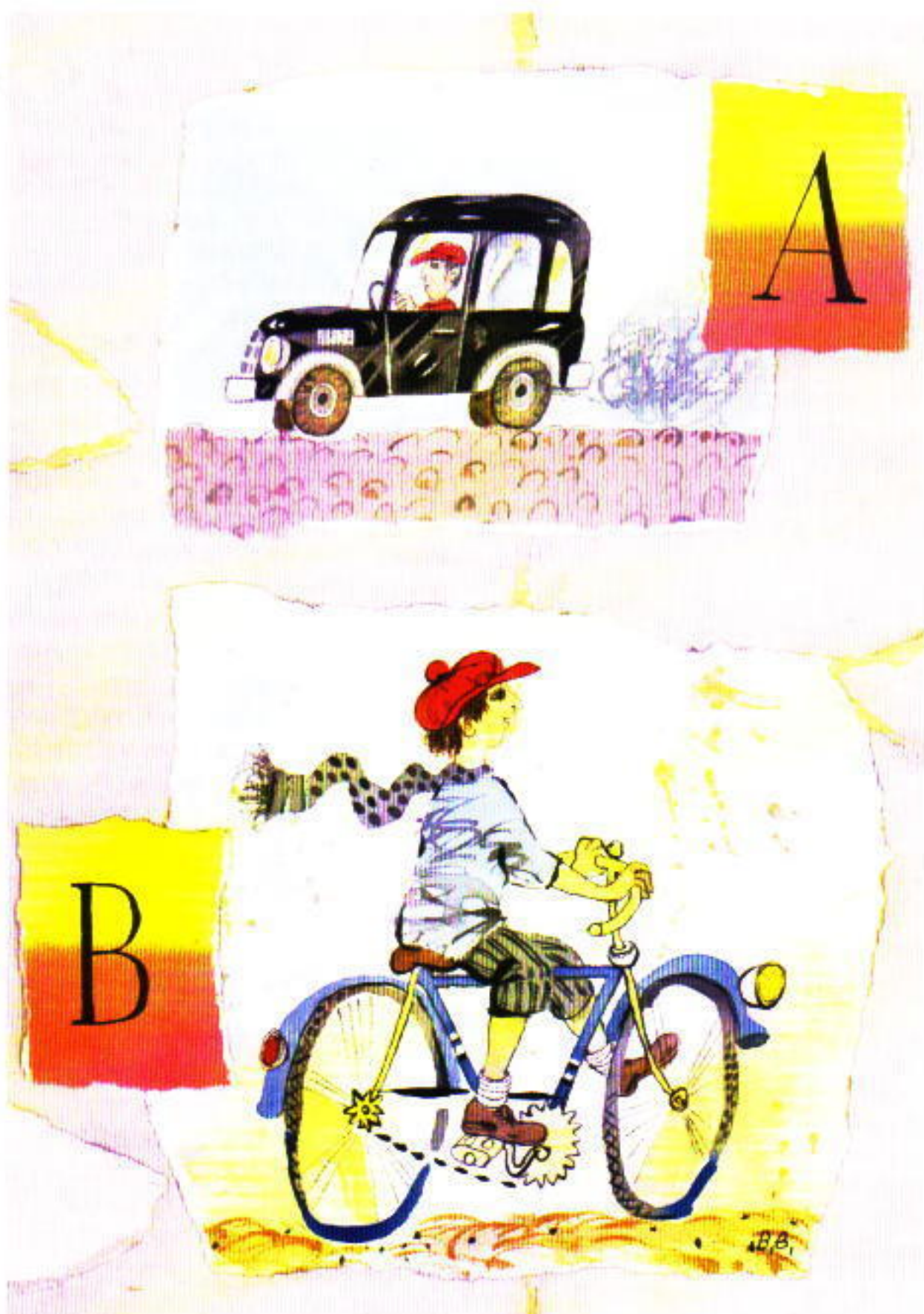
είναι ομογενές πολυώνυμο δεύτερου βαθμού, ενώ το

$$f(u, v) = u^3 - 15u^2v + 5v^3$$

είναι ομογενές πολυώνυμο τρίτου βαθμού.

Ορισμός. Η εξίσωση $f(u, v) = 0$ ονομάζεται «ομογενής εξίσωση βαθμού k » αν το $f(u, v)$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού k .

Επισημαίνουμε ότι η ιδιότητα της



ομογένειας μπορεί να γενικευτεί ώστε να συμπεριλάβει πολυώνυμα με περισσότερες από δύο μεταβλητές. Για παράδειγμα, λέμε ότι η εξίσωση

$$x^3 + 3x^2y + 3xyz + z^3 = 0$$

είναι μια ομογενής εξίσωση τρίτου βαθμού ως προς τις μεταβλητές x, y και z .

Ας θεωρήσουμε μια ομογενή εξίσωση βαθμού n με δύο αγνώστους x και y :

$$f(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_ny^n = 0. \quad (1)$$

Υποθέτουμε ότι $a_0 \neq 0$.

Η περίπτωση $a_0 = 0$ ανάγεται σε μια εξίσωση μικρότερου βαθμού. Πράγματι, αν βγάλουμε κοινό παράγοντα τη μεγαλύτερη δυνατή δύναμη του y , τότε ο άλλος παράγοντας θα είναι ένα ομογενές πολυώνυμο με μη μηδενικό συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου. Για παράδειγμα, η

$$x^4y^2 + 3xy^5 - 7y^6 = 0$$

μετατρέπεται στην

$$y^2(x^4 + 3xy^3 - 7y^4) = 0.$$

Αρκεί τώρα να θεωρήσουμε τις εξισώσεις

$$y^2 = 0$$

και

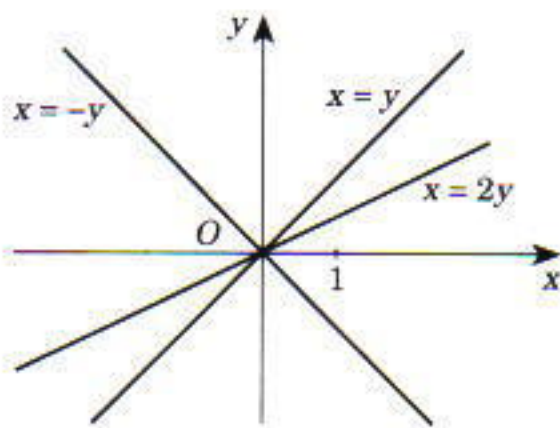
$$x^4 + 3xy^3 - 7y^4 = 0.$$

Επισημαίνουμε ότι το ζεύγος $x = 0, y = 0$ είναι λύση της εξίσωσης (1), ενώ το ζεύγος $x = x_0$ και $y = 0$ δεν είναι (αν $a_0 \neq 0$ και $x_0 \neq 0$). Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (1) με το y^n , καταλήγουμε σε μια εξίσωση βαθμού n ενός αγνώστου, $t = x/y$:

$$a_0t^n + a_1t^{n-1} + a_2t^{n-2} + \dots + a_n = 0. \quad (2)$$

Υπάρχουν συγκεκριμένα προβλήματα που λύνονται με τη βοήθεια αυτής της ιδιότητας των ομογενών εξισώσεων.

Ας βρούμε το σύνολο των σημείων του επιπέδου οι συντεταγμένες των οποίων ικανοποιούν την εξίσωση (1). Πρώτα απ' όλα, το επιζητούμενο σύνολο περιλαμβάνει την αρχή των αξόνων. Επίσης, αν $a_0 = 0$, τότε παίρνουμε τη λύση $y = 0$ που ορίζει τον άξονα x . Οι ρίζες t_1, t_2, \dots, t_k της εξίσωσης (2) ορίζουν τις ευθείες $x = t_1y, x = t_2y, \dots,$



Σχήμα 1

$x = t_k y$ που διέρχονται από την αρχή. (Στο Σχήμα 1 έχουμε πάρει, για παράδειγμα, $t_1 = 1, t_2 = -1, t_3 = 2$.)

Πρόβλημα 1. Ένα αυτοκίνητο ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα από την πόλη A στην πόλη B . Την ίδια στιγμή ένα ποδήλατο ξεκινά από την B για την A . Τρία λεπτά μετά τη συνάντησή τους το αυτοκίνητο εκτελεί απότομη στροφή, ακολουθεί το ποδήλατο και, αφού το φτάσει, πραγματοποιεί ξανά στροφή και κατευθύνεται προς την B . Αν το αυτοκίνητο έστριβε ένα λεπτό μετά τη συνάντησή του με το ποδήλατο και αν την ίδια στιγμή ο ποδηλάτης είχε αυξήσει την ταχύτητά του στα $15/7$ της, το αυτοκίνητο θα έκανε την ίδια ώρα για να φτάσει στην B . Βρείτε το λόγο των ταχυτήτων του αυτοκινήτου και του ποδηλάτου.

Πρόβλημα 2. Λύστε την εξίσωση

$$20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$$

Πρόβλημα 3. Λύστε την εξίσωση $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1)$.

Πρόβλημα 4. Λύστε την εξίσωση $x^2 + 2x + 15 = 2x\sqrt{2x + 15}$. (3)

Πρόβλημα 5. Λύστε την εξίσωση $2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}$.

Πρόβλημα 6. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 0 \\ x^2 + 5y = 6. \end{cases}$$

Πρόβλημα 7. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x^2 - \frac{25}{12}xy + 3y^2 = 50 \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases} \quad (4)$$

Πρόβλημα 8. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

Ας εξετάσουμε τώρα μερικά παραδείγματα τριγωνομετρικών εξισώσεων που ανάγονται σε ομογενείς.

Πρόβλημα 9. Λύστε την εξίσωση

$$2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x = 0.$$

Πρόβλημα 10. Λύστε την εξίσωση

$$\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 0.$$

Η εξίσωση $a\eta\mu x + b\sigma\upsilon\nu x = c$ επιλύεται με πολλούς τρόπους. Για παράδειγμα, μπορεί να αναχθεί σε ομογενή εξίσωση ως προς $\eta\mu(x/2)$ και $\sigma\upsilon\nu(x/2)$ μέσω της αντικατάστασης

$$\begin{aligned} \eta\mu x &= 2\eta\mu \frac{x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}, \\ \sigma\upsilon\nu x &= \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2} - \eta\mu^2 \frac{x}{2}, \\ c &= c \left(\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2} - \eta\mu^2 \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

Πρόβλημα 11. Λύστε την εξίσωση

$$3\eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu x = -3. \quad (5)$$

Οι τεχνικές επίλυσης τριγωνομετρικών εξισώσεων μέσω ομογενών εμπλουτίζονται από τη δυνατότητα που έχουμε να αυξήσουμε κατά 2 το βαθμό μονωνύμων του τύπου $u = \eta\mu x, v = \sigma\upsilon\nu x$ πολλαπλασιάζοντάς τα με $1 = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$.

Πρόβλημα 12. Λύστε την εξίσωση

$$4\eta\mu^3 x = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x.$$

Μερικές φορές μπορούμε να αναγάγουμε μια εκθετική εξίσωση σε ομογενή μέσω μιας κατάλληλης αντικατάστασης.

Πρόβλημα 13. Λύστε την εξίσωση

$$4^x = 2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x.$$

Ασκήσεις

1. Λύστε την εξίσωση

$$6\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$$

2. Λύστε την εξίσωση

$$\begin{aligned} 5^{\log_2(x^2)} - 3^{2\log_4(x^2/2)} \\ = \sqrt{3^{\log_{\sqrt{2}}(2x^2)}} - 5^{\log_2(x^2)-1}. \end{aligned}$$

3. Λύστε την εξίσωση

$$(3 - 2\sqrt{2})^{x^2 - 6x + 9} + (3 + 2\sqrt{2})^{x^2 - 6x + 9} = 6.$$

4. Λύστε την εξίσωση

$$\eta\mu 2x - \epsilon\phi \frac{\pi}{6} \sigma\upsilon\nu 2x = 1.$$

5. Λύστε την εξίσωση

$$2\eta\mu 4x - 3\eta\mu^2 2x = 1.$$

6. Λύστε την εξίσωση

$$3\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x - \eta\mu 2x = 0.$$

7. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 420 \\ y^2 + x\sqrt{xy} = 280. \end{cases}$$

8. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{5}{2} \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

9. Λύστε την εξίσωση

$$7 \cdot 3^{x+1} + 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}.$$

10. Γεμίζουμε μια δεξαμενή με τη βοήθεια δύο αντλιών: η μία παρέχει καθαρό νερό και η δεύτερη ένα διάλυμα οξέος σταθερής συγκέντρωσης. Όταν γεμίσει η δεξαμενή, η συγκέντρωση του οξέος φτάνει το 5%. Αν κλείνουμε την αντλία του νερού τη στιγμή που είχε γεμίσει η μισή δεξαμενή, τότε η τελική συγκέντρωση του οξέος θα έφτανε το 10%. Προσδιορίστε ποια αντλία δουλεύει ταχύτερα και την αναλογία παροχής των δύο αντλιών.

11. Λύστε την εξίσωση

$$\frac{(34-x)\sqrt[3]{x+1} - (x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x} - \sqrt[3]{x+1}}.$$

12. Το σύστημα

$$\begin{cases} a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 = d_1, \\ a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 = d_2 \end{cases}$$

έχει δύο λύσεις:

$$(x_1 = 2, y_1 = 3) \text{ και } (x_2 = -5, y_2 = -7).$$

Υπάρχουν άλλες λύσεις του συστήματος; Αν ναι, ποιες είναι αυτές;

13. Λύστε την εξίσωση

$$2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} = 0.$$

14. Λύστε την εξίσωση

$$\left(\sqrt{\sqrt{x^2 - 8x + 7} + \sqrt{x^2 - 8x - 9}} \right)^x + \left(\sqrt{\sqrt{x^2 - 8x + 7} - \sqrt{x^2 - 8x - 9}} \right)^x = 2^{x+1}.$$

15. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} 2^{x-y} - 3 \cdot 2^x + 2^{x+y+2} = 2 \\ 2^{x-y+1} - 2^x - 5 \cdot 2^{x+y} = 1. \end{cases}$$

16. Λύστε την εξίσωση

$$2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^2 + 1}.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 56

Richard Feynman

Νόμπελ Φυσικής

ΕΞΙ ΕΥΚΟΛΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ

Ανθολόγηση από τις Διαλέξεις Φυσικής

«Αν μπορούσε κάποιο βιβλίο να περιλάβει ό,τι αξίζει να μεταγγίσουμε στη νεότερη γενιά των επιστημόνων, αυτό θα ήταν αναμφίβολα τα "Κομμάτια"

από τις "Διαλέξεις" του Feynman.»

John Gribbin,

στο περιοδικό The New Scientist

«Ο Feynman κατέληξε ένας θρύλος, πρωτίστως χάρη στο μεγάλο ταλέντο του να εξηγεί τα θέματα της επιστήμης... Πρόκειται για σοφά επιλεγμένα κείμενα από τη σειρά των "Διαλέξεών" του τα οποία αποτελούν συναρπαστικό ανάγνωσμα για κάθε άνθρωπο με ανησυχίες, ανεξάρτητα από το επίπεδο της επιστημονικής του κατάρτισης.»

Gordon Kane,

Καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Μίτσιγκαν

«Η ανάγνωση του βιβλίου ισοδυναμεί με ένα αδιάκριτο κοίταγμα πάνω από τους ώμους του Νεύτωνα και του Αϊνστάιν: ο Feynman στις καλύτερες στιγμές του.»

Michio Kaku

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου και Πεσμαζόγλου 5),
105 64 Αθήνα, τηλ.: 3247785

ΕΞΙ ΕΥΚΟΛΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ

Η ατομική δομή
της ύλης

Η διατήρηση
της ενέργειας

Η σχέση της φυσικής
με τις άλλες επιστήμες

Περί βαρύτητας

Η κβαντική συμπεριφορά



RICHARD P. FEYNMAN

Πρόλογος: Paul Davies

Σελ.: 200, 14 x 21, Α/Μ, 5.500 δρχ.

ΜΟΛΙΣ
ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ

Για να περνά η ώρα

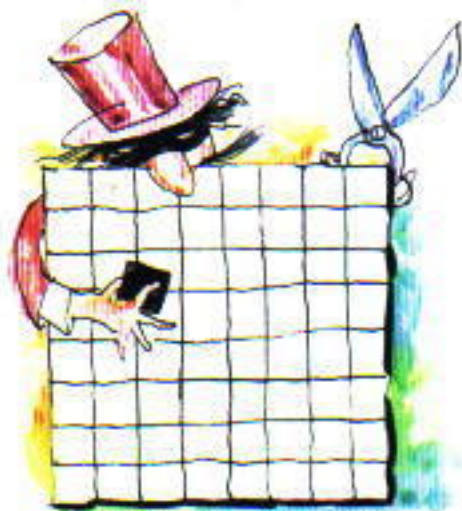


Σ126

Γωνίες στο ρολόι. Ποια γωνία σχηματίζουν οι δείκτες του ρολογιού όταν η ώρα είναι 7:38;

Σ127

Ο χειρότερος πρωταθλητής. Έστω ένα πρωτάθλημα ποδοσφαίρου ενός μόνο γύρου, στο οποίο οι ομάδες που νικούν σε έναν αγώνα κερδίζουν τρεις βαθμούς, οι ομάδες που έρχονται ισόπαλες κερδίζουν έναν βαθμό, ενώ οι ομάδες που χάνουν δεν παίρνουν βαθμούς. Αν ακολουθήσουμε το παλιό σύστημα βαθμολογίας (δύο βαθμοί για τη νίκη, ένας για την ισοπαλία, μηδέν για την ήττα), είναι δυνατόν ο πρωταθλητής να έρθει τελευταίος;



Σ128

Το χαμένο τετράγωνο. Έστω τετραγωνικό πλέγμα διαστάσεων 8×8 από το οποίο λείπει ένα τυχαίο τετράγωνο. Δείξτε ότι είναι δυνατόν να χωρίσουμε το πλέγμα σε τρία τμήματα με τα οποία μπορούμε να σχηματίσουμε ένα άλλο πλέγμα διαστάσεων 8×8 από το οποίο θα λείπει ένα τυχαίο τετράγωνο.

Σ129

Μπαλλώματα. Το σακάκι του κυρ Σοφού έχει μια τρύπα με σχήμα τριγώνου, όλες οι πλευρές του οποίου είναι διαφορετικές. Ο κύριος Σοφός ξετρύπωσε κάπου ένα παλιό ύφασμα και έφτιαξε ένα μπαλλώμα με το κατάλληλο σχήμα. Δυστυχώς, όμως, κατά λάθος το έκοψε ανάποδα. Μπορεί να κόψει το μπαλλώμα σε τρία μέρη με τα οποία να σχηματίσει το σωστό;



Σ130

Πλημμυροπαθής. Το ποτάμι δίπλα στο σπίτι μου είναι ρηχό. Μπορώ να το διασχίσω κάθετα, από τη μια όχθη μέχρι την άλλη, με το νερό να φτάνει μέχρι τη μέση μου. Η κοίτη του ποταμού είναι καλυμμένη με λάσπη που συνήθως φτάνει ως τους αστραγάλους μου. Έπειτα από μια καταιγίδα, η στάθμη του νερού ανέβηκε σημαντικά: έτσι, προσπαθώντας και τούτη τη φορά να το διασχίσω, το νερό έφτανε μέχρι το λαιμό μου. Το παράξενο είναι, όμως, ότι τα πόδια μου δεν βούλιαξαν στη λάσπη. Γιατί;



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Μαθηματικά

M126

Θα αποδείξουμε ότι η απάντηση είναι $2 \cdot 1998 - 2 = 3994$. Πρώτα, δίνουμε ένα σύνολο που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματός μας και στο οποίο το 3994 είναι ο μεγαλύτερος αριθμός:

$1998 - 1 = 1997, 1998, 1999, \dots, 3994$.

(Υπάρχουν 1998 όροι σε αυτή την πρόοδο, ενώ το άθροισμα οποιουδήποτε ζεύγους αυτών των αριθμών υπερβαίνει το 3994.)

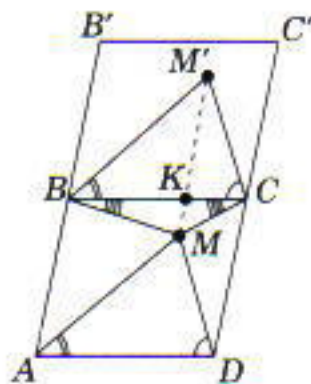
Θα αποδείξουμε τώρα ότι δεν υπάρχει σύνολο που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος και με μεγαλύτερο στοιχείο μικρότερο του 3994. Αν υπάρχει, τότε όλοι οι αριθμοί που ανήκουν σε αυτό θα κυμαίνονται μεταξύ του 1 και του 3993. Έστω $A \leq 3993$ ο μεγαλύτερος από αυτούς. Κατανέμουμε, τώρα, όλους τους αριθμούς από το 1 έως το A στα ζεύγη

$$(1, A-1), (2, A-2), \dots$$

(το άθροισμα των αριθμών σε κάθε ζεύγος ισούται με A). Υπάρχουν το πολύ $A/2 < 3994/2 = 1997$ τέτοια ζεύγη. Όμως, στο σύνολό μας, υπάρχουν 1997 διαφορετικοί αριθμοί μικρότεροι του A . Επομένως, τουλάχιστον δύο από αυτούς ανήκουν στο ίδιο ζεύγος και το άθροισμά τους ισούται με A , γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με τις συνθήκες του προβλήματος.

M127

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $BB'C'C$ το οποίο είναι ίσο με το $ABCD$ (Σχήμα 1). Έστω το σημείο M' στο εσωτερικό αυτού του παραλληλογράμμου, τέτοιο ώστε $M'B = MA$ και $M'C = MD$. Τότε, η MM' είναι παράλληλη προς την AB . Πράγματι, τα τρίγωνα $BM'C$ και AMD είναι ίσα διότι έχουν τρεις ίσες πλευρές, και επομένως το $ABM'M$ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον,



Σχήμα 1

$\angle M'BC = \angle MAD = 40^\circ$ και $\angle M'CB = \angle MDA = 70^\circ$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \angle M'BM &= \angle M'BC + \angle MBC \\ &= 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \angle M'CM &= \angle M'CB + \angle MCB \\ &= 70^\circ + 50^\circ = 120^\circ. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\angle M'BM + \angle M'CM = 180^\circ$, και το τετράπλευρο $M'BMC$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Διαπιστώνουμε, τώρα, ότι οι γωνίες $\angle MBC$ και $\angle MM'C$ είναι ίσες αφού βρίσκουν στο ίδιο τόξο κύκλου. Τέλος, αν K είναι το σημείο τομής των MM' και BC , τότε στο τρίγωνο $KM'C$ γνωρίζουμε δύο γωνίες: $\angle KM'C = 20^\circ$ και $\angle KCM' = 70^\circ$. Επομένως, $\angle M'KC = 180^\circ - 70^\circ - 20^\circ = 90^\circ$. Όμως, η MM' είναι παράλληλη της AB , οπότε $\angle BAD = \angle M'KC$ και όλες οι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ορθές.

M128

Θα λύσουμε το πρόβλημα κατασκευάζοντας ένα γεωμετρικό μοντέλο. Σε αυτό κάθε κλάσμα p/q , ανεξαρτήτως από το αν είναι ανάγωγο, αντιστοιχεί στο σημείο (q, p) του επιπέδου συντεταγμένων. Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει τα εξής:

(1) Ισοδύναμα κλάσματα ανήκουν στην ίδια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αν η τιμή του κλάσματος είναι k , τότε η ευθεία αυτή έχει εξίσωση $y/x = k$. Επομένως, κάθε ρητός αριθμός αντιστοιχεί σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή.

(2) Το ανάγωγο κλάσμα που αντιπροσωπεύει τον ρητό αριθμό k είναι το ακέραιο σημείο της ευθείας $y/x = k$ που βρίσκεται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

(3) Τα κλάσματα που μας ενδιαφέρουν (τα q και p θετικά, $q < 100$ και p/q κοντά στο $5/8$) αντιστοιχούν σε σημεία του τετραγώνου $\{(x, y) \text{ τέτοια ώστε } 0 < x < 100, 0 < y < 100\}$ (δηλαδή, δεν χρειάζεται να ανησυχούμε για αρνητικές τιμές ούτε για κλάσματα μεγαλύτερα του 1).

(4) Τα κλάσματα που η τιμή τους βρίσκεται πλησιέστερα στο $5/8$ είναι αυτά που αντιστοιχούν σε ευθείες που σχηματίζουν τις μικρότερες γωνίες με την ευθεία $y/x = 5/8$ (διότι θέλουμε τις μικρότερες δυνατές διαφορές στην κλίση των ευθειών).

Το σημείο $(5, 8)$ ανήκει στην ευθεία $y/x = 5/8$, ή $8y - 5x = 0$. Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημά μας εξετάζοντας όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες με αυτή — δηλαδή, όλες τις ευθείες με εξισώσεις της μορφής $8y - 5x = r$, όπου r κάποιος αριθμός. Αν μια τέτοια ευθεία περιέχει ένα σημείο με ακέραιες συντεταγμένες (p, q) , τότε το r είναι οπωσδήποτε ακέραιος. Επιπλέον, όσο πλησιέστερα βρίσκεται το r στο 0, τόσο πλησιέστερα είναι η ευθεία $8y - 5x = r$ στην ευθεία $8y - 5x = 0$.

Κάθε σημείο (p, q) συνδέεται τώρα με δύο ευθείες: την ευθεία $8y - 5x = r$, η οποία είναι παράλληλη προς την $y/x = 5/8$ (την παράλληλη από το σημείο) και την ευθεία $y/x = p/q$ που διέρχεται από την αρχή (την «ακτίνα» του). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα σημεία που θέλουμε είναι αυτά που βρίσκονται όσο πιο μακριά είναι δυνατόν πάνω σε μια παράλληλη με το ελάχιστο (κατά απόλυτη τιμή) δυνατό r . Επομένως, θα εξετάσουμε ευθείες με $r = \pm 1$.

Ας εξετάσουμε πρώτα την $r = +1$. Ζητάμε ακέραια σημεία στην ευθεία $8y - 5x = 1$ και διαπιστώνουμε εύκολα ότι οι μικρότερες γωνίες σχηματίζονται

από ακτίνες απομακρυσμένων σημείων αυτής της παραλλήλου. Παρατηρούμε ότι το σημείο (3, 2) ανήκει στην ευθεία μας και, επομένως, θα ανήκουν σ' αυτή και τα σημεία (3 + 8k, 2 + 5k) (αυτή είναι μια συνηθισμένη τεχνική στη θεωρία αριθμών) και ζητάμε το μέγιστο δυνατό k. Αφού $y \leq 99$, βρίσκουμε ότι το σημείο που θέλουμε είναι το (99, 62) και το αντίστοιχο κλάσμα το 62/99.

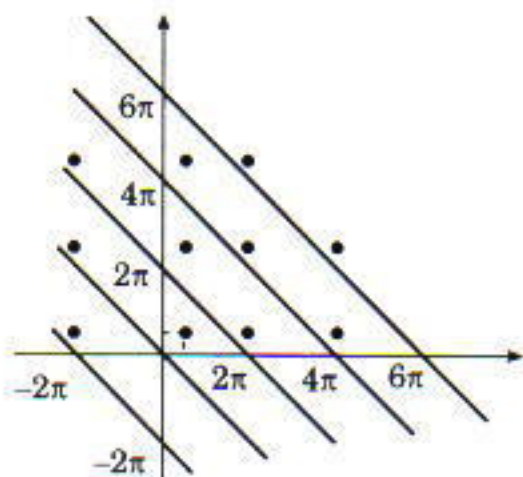
Παρομοίως, αν $r = -1$, το αντίστοιχο κλάσμα είναι 58/93. Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει με τη βοήθεια του γεωμετρικού μας μοντέλου ότι αυτά είναι τα σημεία που ζητά το πρόβλημα.

M129

Ας μετασχηματίσουμε αυτό τον τύπο:

$$\begin{aligned} & \eta\mu\sigma\upsilon\nu^2 y + \eta\mu\sigma\upsilon\nu^2 x \\ &= \eta\mu x(1 - \eta\mu^2 y) + \eta\mu y(1 - \eta\mu^2 x) \\ &= \eta\mu x + \eta\mu y - (\eta\mu x\eta\mu^2 y + \eta\mu y\eta\mu^2 x) \\ &= (\eta\mu x + \eta\mu y)(1 - \eta\mu x\eta\mu y) = 0. \end{aligned}$$

Η πρώτη παρένθεση μας δίνει την εξίσωση $\eta\mu x = -\eta\mu y$, απ' όπου $x = -y + 2\pi k$. Το σύνολο αυτό αποτελείται από

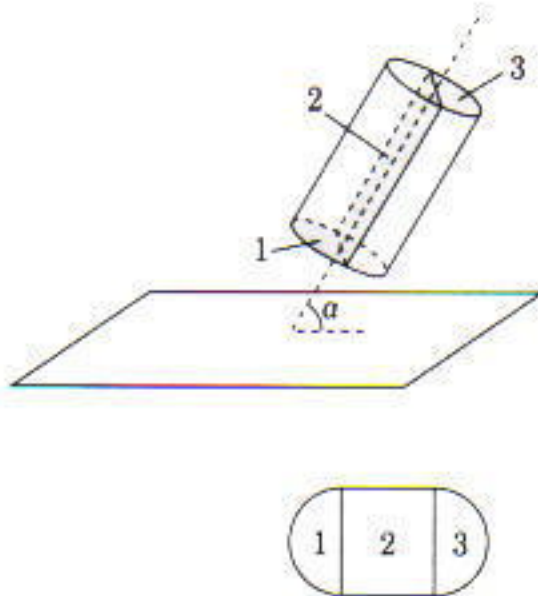


Σχήμα 2

ευθείες (Σχήμα 2). Η δεύτερη παρένθεση σημαίνει ότι $\eta\mu x = \eta\mu y = 1$. Επομένως, $x = \pi/2 + 2\pi m$ και $y = \pi/2 + 2\pi n$. Αυτό είναι το πλέγμα του Σχήματος 2.

M130

Πρώτον, παρατηρούμε ότι το εμβαδόν της προβολής εξαρτάται μόνο από τη γωνία μεταξύ του άξονα του κυλίνδρου και του επιπέδου. Δεύτερον, επισημαίνουμε ότι η προβολή αποτελείται από τρία μέρη: δύο προβολές ημικυκλίων (κορυφή και πυθμένας του κυλίνδρου) και την προβολή του αξονικού του τμήματος (Σχήμα 3). Έστω



Σχήμα 3

ότι η γωνία μεταξύ του άξονα του κυλίνδρου και του επιπέδου είναι a . Τότε η γωνία μεταξύ του επιπέδου προβολής και του αξονικού τμήματος ισούται με a και η γωνία μεταξύ του επιπέδου προβολής και του επιπέδου του πάνω (και του κάτω) κύκλου είναι $90^\circ - a$. Επομένως, το εμβαδόν¹ της προβολής είναι

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{\pi r^2}{2} \right) \sigma\upsilon\nu(90^\circ - a) + h2r\sigma\upsilon\nu a \\ &= \pi r^2 \eta\mu a + 2hr\sigma\upsilon\nu a. \end{aligned}$$

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η μέγιστη τιμή της παράστασης $a\eta\mu x + b\sigma\upsilon\nu x$ είναι $\sqrt{a^2 + b^2}$. Συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι

$$\sqrt{(\pi r^2)^2 + (2hr)^2}.$$

Για να βρούμε τη μέγιστη τιμή της $a\eta\mu x + b\sigma\upsilon\nu x$, παρατηρούμε αρχικά ότι υπάρχει γωνία φ τέτοια ώστε

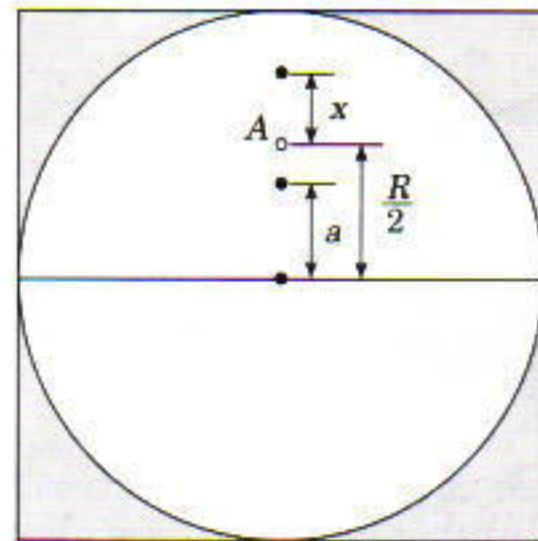
$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

και

$$\eta\mu\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(αφού το άθροισμα των τετραγώνων των εν λόγω παραστάσεων ισούται με

¹ Αν η γωνία μεταξύ δύο επιπέδων είναι a και αν το εμβαδόν ενός σχήματος σε ένα από τα επίπεδα είναι K , τότε το εμβαδόν της ορθογωνιακής προβολής αυτού του σχήματος στο άλλο επίπεδο ισούται με $K\sigma\upsilon\nu a$.



Σχήμα 4

1). Επομένως, μπορούμε να γράψουμε την $a\eta\mu x + b\sigma\upsilon\nu x$ ως

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2 + b^2} (\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu x\eta\mu\varphi) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \eta\mu(x + \varphi). \end{aligned}$$

Έπεται ότι η μέγιστη τιμή αυτής της παράστασης είναι $\sqrt{a^2 + b^2}$. Η συγκεκριμένη τιμή προκύπτει, για παράδειγμα, όταν $x + \varphi = 90^\circ$.

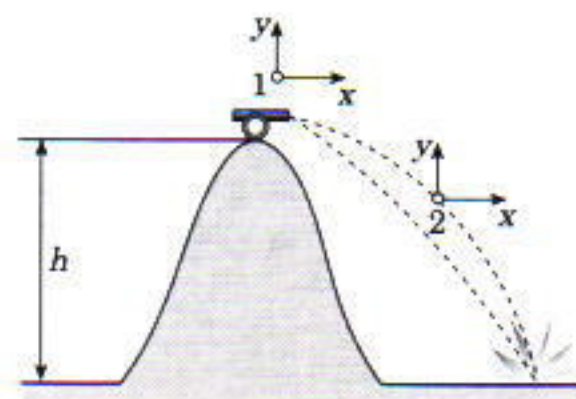
Φυσική

Φ126

Το κέντρο μάζας A του μισού τετραγώνου βρίσκεται σε απόσταση $R/2$ από τη διάμετρο του κύκλου που έχει χαραχτεί στο Σχήμα 4. Ας συμβολίσουμε με x την κατακόρυφη απόσταση από το κέντρο μάζας της γωνίας ως το σημείο A . Ο λόγος των μαζών των μερών κάθε ομογενούς φύλλου ισούται με το λόγο των εμβαδών τους. Εάν εξισώσουμε τις ροπές ως προς το σημείο A (για το τέταρτο του τετραγώνου), καταλήγουμε στη σχέση

$$\left(R^2 - \frac{\pi R^2}{4} \right) x = \frac{\pi R^2}{4} \left(\frac{R}{2} - a \right),$$

από την οποία βρίσκουμε



Σχήμα 5

$$x = \frac{\pi\left(\frac{R}{2} - a\right)}{4 - \pi} = \frac{R\left(\pi - \frac{8}{3}\right)}{2(4 - \pi)} = 0,277R.$$

Η απόσταση από το κέντρο μάζας της κομμένης γωνίας ως την πλησιέστερη γωνία του τετραγώνου ανέρχεται σε $0,316R$ περίπου.

Φ127

Ας υποθέσουμε ότι και οι δύο οβίδες βλήθηκαν από το ίδιο πυροβόλο και ας θεωρήσουμε την κίνησή τους στο σύστημα αναφοράς 1 (του εργαστηρίου), το οποίο είναι «στερεωμένο» στο πυροβόλο (Σχήμα 5). Ως τη στιγμή που ρίχνεται η δεύτερη βολή, η πρώτη οβίδα έχει διανύσει διάστημα $x_0 = v_0 t_0$ οριζόντια και $y_0 = -gt_0^2/2$ κατακόρυφα. Τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, η ταχύτητά της ισούται με

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt_0)^2},$$

και κινείται σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\alpha = \text{τοξεφ}(-gt_0/v_0)$ με τον οριζόντια. Υποθέστε ότι η δεύτερη οβίδα βάλλεται με αρχική ταχύτητα v_1 και υπό γωνία α (η οποία είναι αρνητική). Σ' αυτή την περίπτωση, και οι δύο οβίδες θα κινούνται έχοντας η μία από την άλλη σταθερή απόσταση

$$s_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Τώρα, ας ορίσουμε το σύστημα αναφοράς 2 έτσι ώστε να είναι «στερεωμένο» στη δεύτερη οβίδα κατά την υποθετική κίνησή της, την οποία περιγράψαμε παραπάνω, και ας εξετάσουμε την πραγματική κίνηση της δεύτερης οβίδας ως προς το συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς. Η δεύτερη οβίδα θα προλάβει την πρώτη σ' αυτό το σύστημα αναφοράς αν την πλησιάζει με σχετική ταχύτητα v' κατά μήκος της ευθείας γραμμής που συνδέει τις δύο οβίδες. Ας προσδιορίσουμε, λοιπόν, το μέτρο της και την κατεύθυνσή της.

Η ταχύτητα προσέγγισης δεν μπορεί να είναι πολύ μικρή, επειδή ο χρόνος της κίνησης δεν μπορεί να υπερβαίνει την τιμή

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Έτσι,

$$v' \geq \frac{s_0}{t} = s_0 \sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

Το διάνυσμα της σχετικής ταχύτητας v' θα έπρεπε να σχηματίζει μια γωνία α' με τον οριζόντια τέτοια ώστε

$$\epsilon\phi\alpha' = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{gt_0}{2v_0}.$$

Τώρα επιστρέφουμε στο σύστημα αναφοράς 1, του εργαστηρίου. Σε αυτό, οι συνιστώσες της ταχύτητας θα έπρεπε να είναι ίσες με

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 + v' \sigma\upsilon\nu\alpha' \\ v_y &= -gt + v' \eta\mu\alpha', \end{aligned}$$

όπου

$$v' \geq s_0 \sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

Η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας

$$v' = s_0 \sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

αντιστοιχεί στην περίπτωση κατά την οποία οι δύο οβίδες συναντιούνται κοντά στην επιφάνεια του εδάφους, και η αντίστοιχη γωνία είναι

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \text{τοξεφ}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)\Bigg|_{t=t_0} \\ &= -0,019 \text{ rad} = -(1^\circ 5') \end{aligned}$$

Η γωνία α_0 είναι αρνητική, πράγμα που σημαίνει ότι η δεύτερη οβίδα πρέπει να βληθεί προς τα κάτω. Στην προκειμένη περίπτωση, η αρχική ταχύτητα της δεύτερης οβίδας πρέπει να έχει μέτρο

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\Big|_{t=t_0} = 535,1 \text{ m/s}.$$

Φ128

Εφόσον δεν παρατηρούνται διαφορές ύλης διά των τοιχωμάτων της σήραγγας, η παροχή (δηλαδή η μάζα του αερίου και των σταγόνων που διέρχονται από τη διατομή της σήραγγας, συμπεριλαμβανομένων της εισροής και της εκροής της σήραγγας) είναι

$$(\rho + \rho')uS = (\rho_0 + \rho'_0)u_0S = \text{σταθερή}.$$

Λάβαμε υπόψη μας ότι το αέριο, με πυκνότητα ρ , και οι σταγόνες, με πυ-

κνότητα ρ' , κινούνται με την ίδια ταχύτητα. Από τις συνθήκες του προβλήματος προκύπτει ότι $\rho_0 = \rho'_0$.

Σύμφωνα με την εξίσωση του Bernoulli (ή με το δεύτερο νόμο της κίνησης του Νεύτωνα),

$$(\rho + \rho')uS\Delta u = -\Delta PS.$$

Ας υπολογίσουμε τη μεταβολή της πίεσης κατά μήκος της σήραγγας. Καθώς οι σταγόνες εξαερώνονται, η πυκνότητα του αερίου αυξάνεται, η θερμοκρασία του πέφτει και η ταχύτητά του μειώνεται. (Αυτή η ποιοτική περιγραφή θα επαληθευτεί όταν θα ολοκληρωθεί η λύση.) Συνεπώς, η μέγιστη μεταβολή της ταχύτητας είναι $|\Delta u|_{\max} = u_0$ (αντιστοιχεί στην πλήρη διακοπή της ροής). Από τις προκύπτουσες εξισώσεις καταλήγουμε στη σχέση

$$(\rho_0 + \rho'_0)u_0\Delta u = -\Delta P,$$

από όπου βρίσκουμε

$$|\Delta P|_{\max} = (\rho_0 + \rho'_0)u_0^2 \cong 200 \text{ Pa}.$$

Έτσι, η μέγιστη δυνατή μεταβολή της πίεσης είναι κατά τρεις τάξεις μεγέθους μικρότερη από την ατμοσφαιρική πίεση. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η πίεση διατηρείται σταθερή κατά μήκος της ροής. Εν τω μεταξύ, η θερμοκρασία των εξαερούμενων σταγόνων μπορεί να θεωρηθεί επίσης σταθερή. Πράγματι, η θερμοκρασία βρασμού του νερού υπό ατμοσφαιρική πίεση είναι σταθερή, και το ίδιο ισχύει και για το υγρό άζωτο, του οποίου η θερμοκρασία βρασμού (77 K) είναι πολύ χαμηλότερη από αυτή του νερού. Η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων και η σταθερότητα της πίεσης συνεπάγονται ότι η πυκνότητα και η θερμοκρασία του φέροντος αερίου είναι αντιστρόφως ανάλογες:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T_0}{T}.$$

Κάθε μονάδα μάζας μεταφέρει την κινητική ενέργεια της χαοτικής κίνησης των μορίων και τη δυναμική ενέργεια της αλληλεπίδρασής τους. Υποθέτοντας ότι το φέρον αέριο συμπεριφέρεται ως ιδανικό, μπορούμε να γράψουμε την ειδική του ενέργεια (ενέργεια ανά μονάδα μάζας) ως $c_p T$. Θυμηθείτε ότι σε ιδανικό αέριο η ενέργεια

της αμοιβαίας αλληλεπίδρασης των μορίων μηδενίζεται. Ο δείκτης «P» υποδηλώνει ότι κατά μήκος της σήραγγας επικρατεί σταθερή πίεση. Η ίδια έκφραση, $c_p T'$, δίνει την ενέργεια του αερίου που εξαερώνεται από μια σταγόνα με θερμοκρασία T' . Στη συμπυκνωμένη κατάσταση (δηλαδή στην υγρή σταγόνα) η ενέργεια ισούται με $c_p T' - L$, όπου L είναι η λανθάνουσα θερμότητα εξαέρωσης, στην οποία συμπεριλαμβάνεται η δυναμική ενέργεια των αλληλεπιδρώντων μορίων.

Η ολική ενέργεια της ύλης που διέρχεται διαμέσου κάθε διατομής της σήραγγας ανά μονάδα χρόνου (δηλαδή η ροή της ολικής ενέργειας) δεν μεταβάλλεται:

$$c_p T_0 \rho_0 u_0 S + (c_p T' - L) \rho' u S = \text{σταθερά.}$$

Σ' αυτή την εξίσωση αγνοήσαμε την κινητική ενέργεια της μακροσκοπικής κίνησης του μείγματος ($\rho + \rho'$) $(u^2/2)uS$, επειδή είναι κατά πολύ μικρότερη από τη θερμική ενέργεια:

$$u^2 \ll c_p T,$$

διότι

$$10^2 \ll 10^3 \cdot 300 = 3 \cdot 10^5,$$

όπου

$$c_p \cong 10^3 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}.$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την πυκνότητα των διεσπαρμένων σταγόνων μέσω της ακτίνας της σταγόνας:

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^3.$$

Στη συνέχεια, μπορούμε να γράψουμε όλες τις δυναμικές παραμέτρους του αερίου ως συναρτήσεις του λόγου r/r_0 :

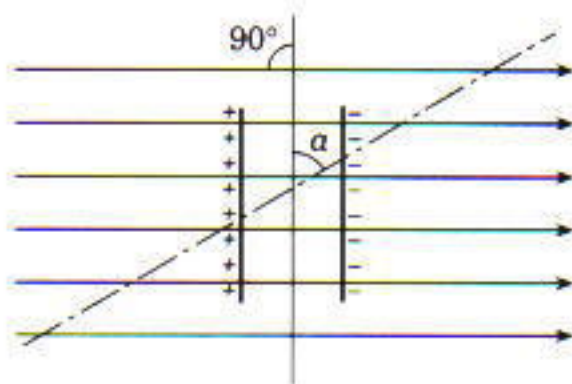
$$\frac{u}{u_0} = \frac{1 - \varepsilon_0 \ell}{1 - \varepsilon_0 \ell (r/r_0)^3},$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T_0}{T} = \frac{1 + \varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0 (r/r_0)^3} \frac{u_0}{u},$$

όπου

$$\ell = \frac{L}{c_p T_0} - \frac{T'_0}{T_0} \text{ και } \varepsilon_0 = \frac{\rho'_0}{\rho_0}.$$

Από τις συνθήκες του προβλήματος προκύπτει $\varepsilon_0 = 1$, $\ell \cong 0,4$. Μετά την



Σχήμα 6

πλήρη εξαέρωση, $r/r_0 = 0$. Τελικά, βρίσκουμε

$$\frac{u}{u_0} = 1 - \ell \cong 0,6.$$

Συνεπώς,

$$u = 6 \text{ m/s}$$

και

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T_0}{T} = \frac{2}{1 - \ell} \cong 3.$$

Από την τελευταία εξίσωση συμπεραίνουμε ότι

$$\rho = 3 \text{ kg/m}^3$$

και

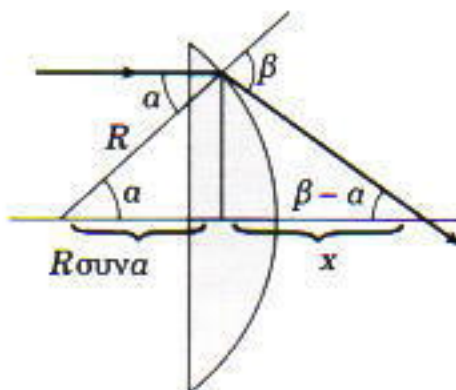
$$T \cong 100 \text{ K}.$$

Φ129

Ας συμβολίσουμε με U_0 την ενέργεια του εξωτερικού ομογενούς πεδίου όταν απουσιάζει ο πυκνωτής, και με

$$U_{\Pi} = \frac{\varepsilon_0 E_{\Pi}^2 V}{2}$$

την ενέργεια του φορτισμένου πυκνωτή (με E_{Π} συμβολίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από τα φορτία στους οπλισμούς του πυκνω-



Σχήμα 7

τή, και με V τον όγκο του πυκνωτή). Προτού τοποθετηθεί ο πυκνωτής εντός του εξωτερικού πεδίου, η ολική ενέργεια του συστήματος ήταν

$$U = U_0 + U_{\Pi}.$$

Μετά την τοποθέτηση του πυκνωτή στη θέση που υποδεικνύεται στο Σχήμα 6, η ενέργεια του συστήματος έγινε

$$U_1 = U_0 - \frac{\varepsilon_0 E_0^2 V}{2} + \frac{\varepsilon_0 (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\Pi})^2 V}{2},$$

όπου E_0 είναι το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Το αντίστοιχο έργο W_1 ισούται με τη μεταβολή της ενέργειας του συστήματος:

$$W_1 = U_1 - U = \varepsilon_0 E_0 E_{\Pi} V.$$

Η στροφή του πυκνωτή κατά γωνία α επιφέρει μια μεταβολή της ενέργειας του συστήματος, η οποία αποκτά τη νέα τιμή

$$\begin{aligned} U_2 &= U_0 - \frac{\varepsilon_0 E_0^2 V}{2} + \frac{\varepsilon_0 |\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\Pi}|^2 V}{2} \\ &= U_0 - \frac{\varepsilon_0 E_0^2 V}{2} + \frac{\varepsilon_0 E_0^2 V}{2} + \frac{\varepsilon_0 E_{\Pi}^2 V}{2} \\ &\quad + \varepsilon_0 E_0 E_{\Pi} V \text{ συνα.} \end{aligned}$$

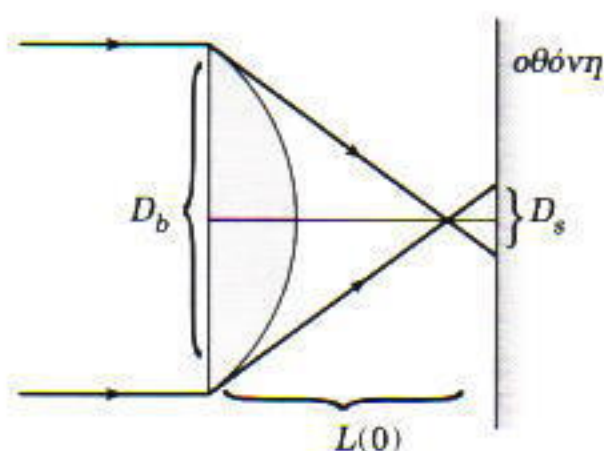
Το έργο W_2 που παράγεται κατά τη στροφή δίνεται από την έκφραση

$$W_2 = U_2 - U_1 = \varepsilon_0 E_0 E_{\Pi} V (\text{συνα} - 1),$$

οπότε ο ζητούμενος λόγος των έργων υπολογίζεται αμέσως

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{\varepsilon_0 E_0 E_{\Pi} V (\text{συνα} - 1)}{\varepsilon_0 E_0 E_{\Pi} V} = \text{συνα} - 1.$$

Η παραπάνω λύση είναι προσεγγιστική επειδή αγνοήσαμε την ανακατανομή των φορτίων στους οπλισμούς



Σχήμα 8

του πυκνωτή που συντελείται καθώς αυτός στρέφεται.

Φ130

Ας κατευθύνουμε μια παράλληλη δέσμη φωτός προς την επίπεδη επιφάνεια του φακού, παράλληλα προς τον κύριο άξονά του. Θα εξετάσουμε πώς διαθλάται μια αυθαίρετη ακτίνα αυτής της δέσμης και θα προσδιορίσουμε την απόσταση από το κέντρο της σφαιρικής επιφάνειας ως το σημείο όπου η ακτίνα τέμνει τον κύριο άξονα μετά τη διάθλαση (Σχήμα 7):

$$x = \frac{R \eta \mu \alpha}{\epsilon \phi(\beta - \alpha)}$$

$$= R \eta \mu \alpha \frac{1 + \epsilon \phi \alpha \epsilon \phi \beta}{\epsilon \phi \beta - \epsilon \phi \alpha},$$

$$\eta \mu \beta = n \eta \mu \alpha,$$

$$L(a) = R \sigma \nu \alpha + x$$

$$= \frac{R}{\sigma \nu \alpha - \sqrt{\frac{1}{n^2} - \eta \mu^2 \alpha}}$$

Η παραπάνω έκφραση δείχνει ότι η $L(a)$ είναι μονότονη συνάρτηση της a : Φθίνει καθώς αυξάνεται η γωνία a . Το διάφραγμα περιορίζει τη γωνία σε πολύ μικρές τιμές —δηλαδή στο μηδέν:

$$L(0) = F = \frac{R}{1 - 1/n} = 26,7 \text{ cm.}$$

Η μέγιστη γωνία a_{\max} αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου η ακτίνα προσπίπτει στο χείλος του φακού. Η γεωμετρία μάς λέει ότι

$$\sigma \nu \alpha_{\max} = 1 - d/R = 0,98,$$

και

$$L(a_{\max}) = 25,8 \text{ cm.}$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων (Σχήμα 8) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} D_s &= D_b \frac{L(0) - L(a_{\max})}{L(a_{\max})} \\ &= \frac{2R \eta \mu \alpha_{\max} [L(0) - L(a_{\max})]}{L(a_{\max})} \\ &= 0,13 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Καλειδοσκόπιο

1. Τα μεγάλα σωματίδια σκόνης κατακαθίζουν γρήγορα πάνω στην επιφάνεια της Γης, όμως τα μικρότερα σωματίδια αιωρούνται στην ατμόσφαιρα εξαιτίας της χαοτικής κίνησης των μορίων του αέρα. Στη Σελήνη δεν υπάρχει ατμόσφαιρα, κι έτσι τόσο τα μεγάλα όσο και τα μικρά σωματίδια σκόνης κατακαθίζουν στην επιφάνειά της σχεδόν ακαριαία.

2. Η μερική πίεση των υδρατμών αυξάνεται κοντά στο υγρό έδαφος. Σύμφωνα με το νόμο του Dalton, οι μερικές πιέσεις του αζώτου (και του οξυγόνου) θα είναι ελαφρώς μικρότερες πάνω από το υγρό έδαφος απ' ό,τι πάνω από το στεγνό.

3. Σύμφωνα με το νόμο των ιδανικών αερίων (καταστατική εξίσωση), η θερμοδυναμική κατάσταση του αερίου καθορίζεται πλήρως από οποιοδήποτε ζεύγος των τριών παραμέτρων (πίεσης, όγκου, θερμοκρασίας).

4. Ελαττώνεται.

5. Τα μόρια του υδρογόνου, όντας πιο ελαφρά (άρα και πιο ευκίνητα), διαπερνούν ευκολότερα το διάφραγμα, αυξάνοντας κατ' αυτό τον τρόπο την πίεση σ' εκείνο το μέρος του δοχείου που περιέχει τον αέρα. Ωστόσο, μόλις ο αέρας διαπεράσει το διάφραγμα, οι πιέσεις των δύο μερών εξισώνονται.

6. Οι ενδείξεις των δύο μανόμετρων θα αυξηθούν ελαφρώς εξαιτίας του πρόσθετου βάρους της αέριας στήλης. Ωστόσο, το πρώτο μανόμετρο θα δείχνει χαμηλότερη πίεση σε σχέση με το δεύτερο, μια και το ύψος της στήλης του πρώτου δοχείου είναι μικρότερο.

7. Η κατάσταση έλλειψης βαρύτητας δεν σταματά την άτακτη κίνηση των μορίων μέσα στο διαστημόπλοιο.

8. Όχι. Τα μόρια που κινούνται προς τα πάνω και χτυπούν το ταβάνι επιβραδύνονται εξαιτίας της δύναμης της βαρύτητας. Επομένως, οι συγκρούσεις των μορίων με το ταβάνι δεν είναι τόσο «ζωηρές» όσο εκείνες με το δάπεδο.

9. Όχι. Η πίεση καθορίζεται από τη μέση κινητική ενέργεια των μορίων, η τιμή της οποίας δεν εξαρτάται από την επιφάνεια του τοιχώματος, υπό τον όρο ότι το αέριο βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με το δοχείο.

10. Είναι διαφορετικές. Εκείνο που έχουν ίδιο και τα δύο αέρια είναι η μέση κινητική ενέργεια των μορίων λό-

γω μεταφορικής κίνησης. Δεδομένου όμως ότι το αζώτο είναι διατομικό αέριο, στην ολική κινητική του ενέργεια περιλαμβάνεται και η ενέργεια λόγω της περιστροφικής κίνησης των μορίων του. Επομένως, η ολική κινητική ενέργεια του αζώτου είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του νέου.

11. Όχι. Η ελάττωση της κινητικής ενέργειας των μορίων που βρίσκονται κοντά στο ψυχρότερο τοίχωμα αντισταθμίζεται από την αύξηση της συγκέντρωσής τους, και αντιστρόφως.

12. Εφόσον το αέριο δεν παράγει έργο, η εσωτερική του ενέργεια δεν μεταβάλλεται και, κατά συνέπεια, η θερμοκρασία του παραμένει αμετάβλητη.

13. Τη στιγμή ακριβώς που το δοχείο αρχίζει την πτώση του, η πυκνότητα του αερίου στον πυθμένα του δοχείου είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι στην κορυφή. Κατά την ελεύθερη πτώση, τα μόρια κατανέμονται ομοιόμορφα στον όγκο του δοχείου. Ωστόσο, η ολική κινητική ενέργεια του αερίου δεν μεταβάλλεται, κι έτσι η θερμοκρασία του παραμένει ίδια.

14. Η ολική κινητική ενέργεια του αερίου και του δοχείου ως συνόλου μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια του αερίου και του δοχείου, γεγονός που σημαίνει ότι η θερμοκρασία του αερίου θα αυξηθεί. Συνεπώς, θα αυξηθεί και η πίεσή του.

15. Όχι. Η θερμοκρασία του αέρα δεν καθορίζεται από την ταχύτητα του ανέμου, αλλά από τη χαοτική κίνηση των μορίων του, η οποία πραγματοποιείται ανεξάρτητα και συγχρόνως με την κίνηση του αέρα ως συνόλου.

Μικροπειραματισμοί

Η θερμική μας αντίληψη δεν επηρεάζεται από την ολική εσωτερική ενέργεια του αέρα (παρεμπιπτόντως, η ολική εσωτερική ενέργεια δεν μεταβάλλεται κατά τη θέρμανση του δωματίου —γιατί;). Ωστόσο, είμαστε πολύ ευαίσθητοι στη θερμοκρασία, η οποία εκφράζει τη μέση κινητική ενέργεια των μεμονωμένων μορίων. Η θερμοκρασία αυξάνεται κατά τη θέρμανση του δωματίου.

Σπαζοκεφαλιές

Σ126

Ο ωροδείκτης περιστρέφεται με τα-

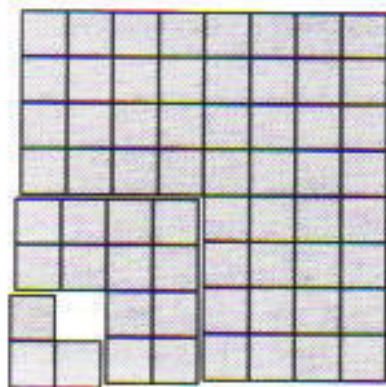
χύτητα $(360^\circ)/(12 \text{ ώρες}) = 30^\circ$ ανά ώρα, ή $0,5^\circ$ το λεπτό. Ο λεπτοδείκτης περιστρέφεται με ταχύτητα $(360^\circ)/(60 \text{ πρώτα λεπτά}) = 6^\circ$ το λεπτό. Έτσι, τη δεδομένη ώρα, η γωνία μεταξύ του ωροδείκτη και της διεύθυνσής του στις 7 η ώρα είναι $38 \cdot 0,5^\circ = 19^\circ$. Η γωνία μεταξύ του λεπτοδείκτη και της ίδιας διεύθυνσης είναι $38 \cdot 6^\circ - 210^\circ = 18^\circ$. Επομένως, η απάντηση είναι 1° .

Σ127

Ναι, είναι δυνατόν. Ας υποθέσουμε ότι στο πρωτάθλημα συμμετέχουν 13 ομάδες. Έστω ότι μια ομάδα κέρδισε πέντε αγώνες και έχασε επτά, ενώ όλοι οι άλλοι αγώνες έληξαν ισόπαλοι. Τότε η ομάδα αυτή θα ήταν πρωταθλήτρια (θα είχε $5 \cdot 3 = 15$ βαθμούς και όλες οι άλλες ομάδες θα είχαν το πολύ $11 \cdot 1 + 3 = 14$ βαθμούς). Με το παλιό σύστημα βαθμολογίας, ο πρωταθλητής θα είχε συγκεντρώσει $2 \cdot 5 = 10$ βαθμούς και οι υπόλοιπες ομάδες τουλάχιστον $11 \cdot 1 = 11$ βαθμούς.

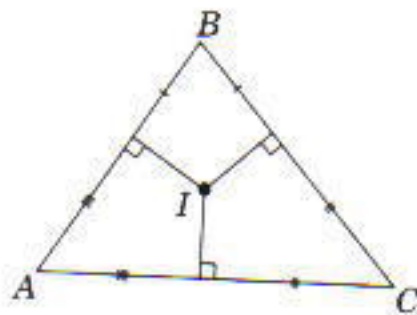
Σ128

Δείτε το Σχήμα 9. Χωρίζουμε το πλέγμα σε τέσσερα τετραγωνικά τμήματα διαστάσεων 4×4 και ξεχωρίζουμε αυτό από το οποίο λείπει το τετράγωνο. Τα υπόλοιπα τρία θα αποτελέσουν το ένα από τα τρία κομμάτια μας. Στη συνέχεια χωρίζουμε τώρα το τέταρτο τμήμα σε τέσσερα τμήματα διαστάσεων 2×2 και ξεχωρίζουμε ξανά εκείνο από το οποίο λείπει το τετράγωνο. Τα υπόλοιπα τρία τμήματα θα αποτελέσουν το δεύτερο από τα κομμάτια μας, ενώ το τρίτο θα είναι το τμήμα διαστάσεων 2×2 με το τετράγωνο που λείπει.

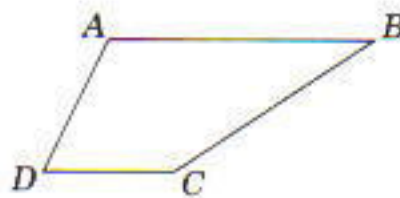


Σχήμα 9

Μ' αυτά τα τρία κομμάτια μπορούμε να σχηματίσουμε ένα πλέγμα διαστάσεων 8×8 και να τοποθετήσουμε το τετράγωνο που λείπει σε οποιαδή-



Σχήμα 10



Σχήμα 11

ποτε από τις 64 πιθανές θέσεις περιστρέφοντας κατάλληλα κάθε κομμάτι.

Σ129

Δείτε το Σχήμα 10. Το σημείο I είναι κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου (αυτή αποτελεί τη μία από τις δυνατές λύσεις).

Σ130

Το βάρος του σώματος ελαττώνεται λόγω της μεγαλύτερης άνωσης.

Στο μαυροπίνακα I

1. Δείτε το Σχήμα 11. Αφού οι γωνίες B και D είναι οξείες και $\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu D$, τότε $[\text{μέτρο}(B) + \text{μέτρο}(D)] = 90^\circ$. Όμως, $\text{μέτρο}(A) = [180^\circ - \text{μέτρο}(D)]$ και, επομένως,

$$[\text{μέτρο}(A) - \text{μέτρο}(B)] = [180^\circ - \text{μέτρο}(D)] - [90^\circ - \text{μέτρο}(D)] = 90^\circ.$$

2. Έχουμε $T = 90$ και $K = 6$. Αφού το τρίγωνο APL είναι όμοιο με το τρίγωνο MNC ,

$$\frac{AP}{PL} = \frac{MN}{NC},$$

απ' όπου έχουμε

$$(AP)(NC) = (PL)(MN) = (PN)^2 = K^2 = 36.$$

Παρατηρήστε ότι το $AP \cdot NC$ είναι αναλλοίωτο.

3. Έχουμε $T = 36$ και $K = 6$. Έστω ότι ο πρώτος όρος είναι το a . Τότε,

$$\frac{(2a + K - 1)K}{2} = 75.$$

Επομένως, τα K και $(2a + K - 1)$ είναι παράγοντες του 150. Υποψήφια ζεύγη για το (K, a) είναι τα $(2, 37)$, $(3,$

Πλεξίδα (No)	Αριστερό	Κεντρικό	Δεξί
0	K	A	M
1	A	K	M
2	A	M	K
3	M	A	K
4	M	K	A
5	K	M	A
6	K	A	M

Σχήμα 12

24), $(5, 13)$, $(6, 10)$ και $(10, 3)$. Έχουμε ότι $K = 6$, οπότε $a = 10$.

Η Σκυταλοδρομία του Creence Lin

1. Από το Σχήμα 12 προκύπτει ότι η απάντηση είναι 6.

2. Το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου είναι $6n$, επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $18n^2$. Αν C είναι η περιφέρεια, τότε $18n^2 = Cn$ και, επομένως,

$$C = 18n = 18 \times 6 = 108.$$

3. Έστω a η τωρινή ηλικία του παλιού κρασιού και r η τωρινή ηλικία του συνηθισμένου κρασιού. Τότε η εποχή στην οποία αναφέρεται το πρόβλημα ήταν πριν από $(a - r)$ χρόνια (ή μήνες ή μέρες) και, επομένως, η ηλικία του συνηθισμένου κρασιού ήταν $r - (a - r) = 2r - a$. Άρα, $a = 5(2r - a)$ και επομένως $a = 5r/3$. Συνεπώς, $r + (5r/3) = 8$, οπότε $r = 3$.

Η Υπερσκυταλοδρομία του 1996

1. $N = (1/2)(2N)(N - 2)$, οπότε $N^2 - 3N = 0$ και, επομένως, $N = 3$.

2. Η κλίση m της ευθείας ισούται με

$$\frac{T^2 - 1}{1 - T} = -(T + 1).$$

Αφού $T = 3$, είναι $m = -4$.

3. Η x συντεταγμένη της κορυφής ισούται με

$$\frac{-T^2}{2T} = \frac{-T}{2}.$$

Συνεπώς, $C = -(-4)/2 = 2$.

4. $(2 + Ti)^2 = (4 - T^2) + 4Ti$. Επομένως, $a + b = 4 + 4T - T^2$ το οποίο, όταν $T = 2$, ισούται με 8.

5. Αν θεωρήσουμε την αριθμητική modulo 10, έχουμε $199^T \cdot 299^{T-1} =$

$9^{2T+1} = 81^T \cdot 9 = 9$. Επομένως, το τελευταίο ψηφίο είναι 9 ανεξάρτητα από την τιμή του T .

6. $(T-1)^3 = K^3$ και, επομένως, $K = T-1 = 9-1 = 8$.

7. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών είναι 360° , ενώ το άθροισμα των εσωτερικών είναι $(T-2)180^\circ$ και συνεπώς

$$(T-2)180^\circ - 360^\circ = 180^\circ(T-4).$$

Όταν $T = 8$, η διαφορά $= 720^\circ$.

8. $K = 720/60 = 12$. $A = K^2/\sqrt{3}$, οπότε $A\sqrt{3}/9 = K^2/9 = 144/9 = 16$.

9. $\eta\mu T \sin 286^\circ - \sin T \eta\mu(-106^\circ) = -\eta\mu T \sin 106^\circ + \sin T \eta\mu 106^\circ = \eta\mu(106^\circ - T)$. Αφού $T = 16$, είναι $\theta = 90^\circ$, και έχουμε $\sin 90^\circ + i \eta\mu 90^\circ = i$.

$$10. \left(\frac{|i|}{i}\right)^2 = \frac{1}{i^2} = -1.$$

Σημείωση. Για κάθε πραγματικό αριθμό διαφορετικό του 0, η απάντηση είναι 1. Για καθαρά φανταστικούς είναι -1 . Δυστυχώς για τους έξυπνους διαγωνιζόμενους της ARML και οι δύο απαντήσεις οδηγούν σε σωστά αποτελέσματα μέχρι το τέλος.

11.

$$10(2x) - 5(3x - T) = 70 - 2(T + x)$$

$$5x + 5T = 70 - 2T - 2x$$

$$7x = 70 - 7T,$$

$$\text{άρα } x = 10 - T.$$

$$\text{Αφού } T = -1, \text{ είναι } x = 11.$$

12.

$$\frac{\eta\mu 9T}{\sin 9T} = \frac{\sin \theta}{\eta\mu \theta}$$

$$\eta\mu \theta \eta\mu 9T = \sin \theta \sin 9T$$

$$\sin(\theta + 9T) = 0$$

$$\theta + 9T = 90 + 180k$$

$$\theta = 9(10 - T).$$

$$\text{Αφού } T = 11, \text{ είναι } \theta = -9.$$

13. Αν $y - 9 = T(x + 2)$, τότε, όταν $y = 0$, το $x = -9/T - 2$. Αφού $T = -9$, το $x = 1 - 2 = -1$.

14. Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση επί T και αφαιρέσουμε τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει

$$(T+4)y = T^2 + 6T + 8 = (T+4)(T+2).$$

Επομένως, $y = T+2$. Άρα $x + T + 2 = T + 7$ και, συνεπώς, $x = 5$. Τότε, $x - y = 3 - T$. Αφού $T = -1$, είναι $x - y = 4$.

15. Έστω n το πλήθος των γραμμών της πλακόστρωσης. Αν το n είναι άρτιο, το πλήθος των τετραγώνων κατά

μήκος των διαγωνίων είναι $2n$, ενώ αν το n είναι περιττό το πλήθος των τετραγώνων είναι $2n - 1$. Αφού το $2T^2 + 5$ είναι περιττό, έχουμε

$$2n - 1 = 2T^2 + 5, \text{ άρα } n = T^2 + 3.$$

Αφού $T = 4$, είναι $n = 19$, και το πλήθος των πλακιδίων ισούται με 361.

Στο μαυροπίνακα II

Πρόβλημα 1. Έστω x η ταχύτητα του αυτοκινήτου και y η ταχύτητα του ποδηλάτη, σε χιλιόμετρα ανά λεπτό. Ο χρόνος που απαιτείται για να πάει το αυτοκίνητο από την A έως το σημείο της πρώτης συνάντησης με τον ποδηλάτη είναι ο ίδιος και στις δύο περιπτώσεις, όπως ίδιος είναι και στις δύο περιπτώσεις ο χρόνος που περνά από αυτή τη συνάντηση έως ότου φτάσει το αυτοκίνητο στην B . Επομένως, τα χρονικά διαστήματα από τη στιγμή της πρώτης συνάντησης μέχρι τη στιγμή που το αυτοκίνητο περνά από το σημείο της πρώτης συνάντησης για τελευταία φορά είναι επίσης ίσα. Θα υπολογίσουμε αυτά τα χρονικά διαστήματα.

I. Έπειτα από την πρώτη συνάντηση το αυτοκίνητο κινείται προς την B επί 3 λεπτά. Επομένως, θα χρειαστεί 3 λεπτά για να επιστρέψει στο σημείο της συνάντησης. Ο ποδηλάτης εκείνη τη στιγμή θα έχει απομακρυνθεί $6y$ χιλιόμετρα από αυτό το σημείο. Το αυτοκίνητο πλησιάζει το ποδήλατο με ταχύτητα $(x - y)$ χιλιόμετρα το λεπτό και συνεπώς θα προλάβει το ποδήλατο έπειτα από $6y/(x - y)$ λεπτά. Για την επιστροφή στο πρώτο σημείο συνάντησης θα χρειαστεί επίσης $6y/(x - y)$ λεπτά και ο συνολικός χρόνος είναι ίσος με

$$3 + 3 + 2\left(\frac{6y}{x - y}\right) = 6 + \frac{12y}{x - y} \text{ λεπτά.}$$

II. Ανάλογα, βρίσκουμε

$$1 + 1 + \frac{2 \cdot \frac{15}{7}y}{x - \frac{15}{7}y} + \frac{2 \cdot \frac{15}{7}y}{x - \frac{15}{7}y} = \left(2 + \frac{60y}{7x - 15y}\right) \text{ λεπτά.}$$

Αν εξισώσουμε τις δύο παραστάσεις, θα πάρουμε

$$6 + \frac{12y}{x - y} = 2 + \frac{60y}{7x - 15y},$$

απ' όπου έχουμε

$$7x^2 - 16xy - 15y^2 = 0.$$

Τούτη είναι μια ομογενής εξίσωση δεύτερου βαθμού με δύο αγνώστους x και y . Αν θέσουμε $t = x/y$ (ο ζητούμενος λόγος), και λύσουμε την εξίσωση $7t^2 - 16t - 15 = 0$, βρίσκουμε $t = 3$ (απορρίπτουμε την αρνητική ρίζα).

Σε αυτό το πρόβλημα είχαμε μία μόνο εξίσωση με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. Αυτό είναι μάλλον σπάνιο. Συνήθως επιβάλλονται και κάποιες επιπλέον συνθήκες στις μεταβλητές ενός προβλήματος.

Πρόβλημα 2. Αν εισαγάγουμε τις νέες άγνωστες ποσότητες

$$u = \frac{x-2}{x+1}, \quad v = \frac{x+2}{x-1},$$

προκύπτει η εξίσωση

$$20u^2 - 5v^2 + 48uv = 0,$$

η οποία είναι ομογενής και δεύτερου βαθμού ως προς τα u και v . Διαιρούμε αυτή την εξίσωση με v^2 (δεν υπάρχουν λύσεις όταν $u = v = 0$) και θέτουμε $t = u/v$. Αν λύσουμε την εξίσωση $20t^2 + 48t - 5 = 0$, βρίσκουμε $t_1 = -5/2$ και $t_2 = 1/10$.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$\frac{u}{v} = -\frac{5}{2},$$

$$\frac{x-2}{x+1} : \frac{x+2}{x-1} = -\frac{5}{2},$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} = -\frac{5}{2}.$$

Αυτή η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Στη δεύτερη περίπτωση

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{10},$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{10},$$

$$3x^2 - 11x + 6 = 0,$$

$$x_1 = 3,$$

$$x_2 = 2/3.$$

Πρόβλημα 3. Έστω $u = x - 1$ και $v = x^2 + x + 1$. Η εξίσωση μετατρέπεται στην $2v^2 - 7u^2 = 13uv$. Διαπι-

στώνουμε ότι δεν υπάρχουν λύσεις αν $u = v = 0$. Επομένως, διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με v^2 . Ας εισαγάγουμε μια νέα μεταβλητή $t = u/v$. Παίρνουμε

$$7t^2 + 13t - 2 = 0.$$

Οι ρίζες αυτής της εξίσωσης είναι $t_1 = 1/7, t_2 = -2$.

Αν $t = t_1$, τότε

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{7},$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0,$$

$$x_1 = 2,$$

$$x_2 = 4.$$

Αν $t = t_2$, τότε

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} = -2,$$

$$2x^2 + 3x + 1 = 0,$$

$$x_3 = -1,$$

$$x_4 = -1/2.$$

Απάντηση: $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = -1, x_4 = -1/2$.

Πρόβλημα 4. Αν εισαγάγουμε τη βοηθητική μεταβλητή $u = \sqrt{2x+15}$, προκύπτει η ομογενής εξίσωση $x^2 + u^2 = 2xu$. Τη συγκεκριμένη εξίσωση μπορούμε να τη λύσουμε είτε με τη μέθοδο του Προβλήματος 3 είτε παρατηρώντας ότι μπορεί να γραφεί με τη μορφή $(x-u)^2 = 0$, απ' όπου παίρνουμε $x = u$. Από την ισότητα $x = \sqrt{2x+15}$ βρίσκουμε $x^2 - 2x - 15 = 0, x_1 = -3, x_2 = 5$. Η τιμή $x = -3$ δεν ικανοποιεί την εξίσωση (3), αλλά η $x = 5$ την ικανοποιεί.

Πρόβλημα 5. Οι αντικαταστάσεις $u = x+1$ και $v = x-1$ μας οδηγούν σε μια εξίσωση που θα μπορούσαμε να ονομάσουμε «ομογενή βαθμού 1/3». Για να αποφύγουμε τις κλασματικές δυνάμεις, θέτουμε

$$(α) u = \sqrt[3]{x+1}, v = \sqrt[3]{x-1}, \text{ αν } x \geq 1.$$

$$(β) u = \sqrt[3]{-x-1}, v = \sqrt[3]{-x+1}, \text{ εάν } x \leq -1.$$

Στην πρώτη περίπτωση καταλήγουμε στην εξίσωση $2u^2 - uv - v^2 = 0$. Αν διαιρέσουμε με v^2 , βρίσκουμε

$$\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} = 1$$

(πρέπει να απορρίψουμε τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης $2t^2 - t - 1 = 0$),

$$\frac{x+1}{x-1} = 1, x+1 = x-1,$$

και, συνεπώς, η αρχική εξίσωση δεν έχει ρίζες στο διάστημα $x \geq 1$.

Στη δεύτερη περίπτωση (όταν $x \leq -1$), καταλήγουμε στην εξίσωση $-2u^2 - uv + v^2 = 0$, απ' όπου βρίσκουμε

$$\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}, x = -\frac{65}{63}.$$

Αφού $-65/63 \leq -1$, αυτή είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

Πρόβλημα 6. Η πρώτη εξίσωση του συστήματος είναι ομογενής δεύτερου βαθμού. Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της με y^2 (αφού $x = y = 0$, δεν είναι λύση του συστήματος) και θέσουμε $t = x/y$, καταλήγουμε στη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$3t^2 - 2t - 1 = 0,$$

απ' όπου παίρνουμε $t_1 = 1, t_2 = -1/3$. Επομένως, έχουμε είτε $y = x$ είτε $y = -3x$. Αν κάνουμε πρώτα την αντικατάσταση $y = x$ και μετά την $y = -3x$ στη δεύτερη εξίσωση, θα βρούμε τις τέσσερις λύσεις:

$$x_1 = y_1 = 1,$$

$$x_2 = y_2 = -6,$$

$$x_{3,4} = \frac{15 \pm \sqrt{249}}{2},$$

$$y_{3,4} = \frac{-45 \mp \sqrt{249}}{2}.$$

Πρόβλημα 7. Το ουσιαστικό σημείο στο εν λόγω σύστημα είναι ότι όλοι οι μη σταθεροί όροι είναι δευτεροβάθμιοι. Για να απαλλαγούμε από το σταθερό όρο, πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση επί 2 και την αφαιρούμε από την πρώτη. Θεωρούμε το σύστημα που αποτελείται από την προκύπτουσα εξίσωση και τη δεύτερη εξίσωση του αρχικού συστήματος:

$$\begin{cases} x^2 - \frac{25}{12}xy + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases} \quad (5)$$

Το σύστημα (5) είναι ισοδύναμο με το σύστημα (4).

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (5) μας δίνει $t_1 = 3/4$ και $t_2 = 4/3$ ($t = x/y$). Αν αντικαταστήσουμε $x = (3/4)y$ και $x = (4/3)y$ στη δεύτερη εξίσωση, βρίσκουμε τέσσερις λύσεις:

$$x_{1,2} = \pm 3, y_{1,2} = \pm 4, x_{3,4} = \pm 4, y_{3,4} = \pm 3.$$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (5) ορίζει τις ευθείες $x = (3/4)y$ και $x = (4/3)y$, ενώ η δεύτερη είναι η εξίσωση ενός κύκλου με κέντρο την αρχή του συστήματος των συντεταγμένων και ακτίνα 5. Οι λύσεις του συστήματος είναι οι συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

Πρόβλημα 8. Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος επί 2 και αφαιρέσουμε τη δεύτερη από το αποτέλεσμα, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

στο οποίο η πρώτη εξίσωση είναι ομογενής. Οι λύσεις της είναι $x = 2y$ και $x = (2/3)y$. Αν τις αντικαταστήσουμε στη δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε δύο λύσεις: $x_{1,2} = \pm 2, y_{1,2} = \pm 1$.

Πρόβλημα 9. Η εξίσωση αυτή είναι ομογενής πρώτου βαθμού ως προς τα $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$. Δεν θα χάσουμε κάποια ρίζα αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της με $\sigma\upsilon\nu x$. Έχουμε

$$2\epsilon\phi x + 3 = 0$$

$$\epsilon\phi x = -3/2,$$

και

$$x = -\text{τοξ}\epsilon\phi(3/2) + \pi k$$

(για κάθε ακέραιο k).

Πρόβλημα 10. Γενικά, η εξίσωση $a\eta\mu^2 x + b\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + c\sigma\upsilon\nu^2 x = 0$ μπορεί να μετασχηματιστεί στην $a\epsilon\phi^2 x + b\epsilon\phi x + c = 0$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν χάνουμε ρίζες αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $\sigma\upsilon\nu^2 x$. Παίρνουμε την εξίσωση

$$\epsilon\phi^2 x + 3\epsilon\phi x + 2 = 0,$$

απ' όπου έχουμε $\epsilon\phi x_1 = 1, x_1 = \pi/4 + \pi k, \epsilon\phi x_2 = 2, x_2 = \text{τοξ}\epsilon\phi 2 + \pi m$ (για κάθε ακέραιο k, m).

Πρόβλημα 11. Αν χρησιμοποιήσουμε την υπόδειξη του κειμένου, παίρνουμε

$$\eta\mu^2\left(\frac{x}{2}\right) - 3\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right) - 4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0,$$

$$\epsilon\phi^2\left(\frac{x}{2}\right) - 3\epsilon\phi\left(\frac{x}{2}\right) - 4 = 0,$$

$$\epsilon\phi\left(\frac{x_1}{2}\right) = 4, x_1 = 2\tau\omicron\xi\epsilon\phi 4 + 2\pi k,$$

$$\epsilon\phi\left(\frac{x_2}{2}\right) = -1, x_2 = -\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi m$$

(για κάθε ακέραιο k, m).

Μπορούμε, επίσης, να λύσουμε την εξίσωση και αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο για το $\eta\mu(A+B)$. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε αν πολλαπλασιάσουμε και διαιρέσουμε με το $\sqrt{34}$:

$$3\eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{34}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\eta\mu x + \frac{5}{\sqrt{34}}\sigma\upsilon\nu x\right)$$

$$= \sqrt{34}\eta\mu\left(x + \tau\omicron\xi\eta\mu\frac{5}{34}\right),$$

$$\eta\mu\left(x + \tau\omicron\xi\eta\mu\frac{5}{34}\right) = -\frac{3}{\sqrt{34}},$$

$$x = (-1)^{m-1}\tau\omicron\xi\eta\mu\frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$- \tau\omicron\xi\eta\mu\frac{5}{\sqrt{34}} + \pi m$$

(για κάθε ακέραιο m).

Πρόβλημα 12. Αν πολλαπλασιάσουμε το δεξί μέλος της εξίσωσης με $1 \equiv \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$ και έπειτα διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $\sigma\upsilon\nu^3 x$, προκύπτει η εξίσωση

$$3\epsilon\phi^3 x - \epsilon\phi^2 x - \epsilon\phi x - 1 = 0.$$

Μπορούμε εύκολα να μαντέψουμε (και να επαληθεύσουμε) ότι $\epsilon\phi x = 1$ είναι ρίζα αυτής της εξίσωσης. Επομένως, αν παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο, ένας από τους παράγοντες θα είναι το $(\epsilon\phi x - 1)$. Άρα, έχουμε

$$(\epsilon\phi x - 1)(3\epsilon\phi^2 x + 2\epsilon\phi x + 1) = 0,$$

απ' όπου παίρνουμε

$$x = \pi/4 + \pi k \text{ (για κάθε ακέραιο } k).$$

Πρόβλημα 13. Αν θέσουμε $2^x = u$ και $7^x = v$, καταλήγουμε σε μια ομο-

γενή εξίσωση δεύτερου βαθμού:

$$u^2 - 2uv - 3v^2 = 0.$$

Αν τη λύσουμε, θα βρούμε (α) $u/v = -1, (2/7)^x = -1$ (δεν υπάρχουν ρίζες στην προκειμένη περίπτωση),

$$(β) u/v = 3, (2/7)^x = 3, x = \log_{2/7} 3.$$

Μπίνγκο

Πρόβλημα 1. Υπάρχουν 10 αριθμοί που μπορούν να μπουκ στην πρώτη θέση. Αφού οι αριθμοί σε κάθε κάρτα πρέπει να είναι διαφορετικοί, απομένουν εννέα δυνατότητες για τη δεύτερη θέση, οπότε έχουμε συνολικά $10 \cdot 9$ δυνατούς συνδυασμούς. Όμως, θεωρούμε ότι κάρτες όπως οι $\{1, 2\}$ και $\{2, 1\}$ είναι ίδιες, διότι όποτε κερδίζει μια κερδίζει και η άλλη. Επομένως, η απάντηση είναι 45.

Πρόβλημα 2. Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική όπως προηγουμένως, βρίσκουμε ότι η απάντηση είναι $[n(n-1)]/2$.

Πρόβλημα 3. Οι μόνες κάρτες που περιέχουν τον αριθμό 3 είναι οι $\{1, 3\}$ και $\{2, 3\}$. Θυμηθείτε ότι η κάρτα $\{3, 1\}$ είναι ίδια με την $\{1, 3\}$.

Πρόβλημα 4. Αφού υπάρχουν n σφαίρες και δεν επιτρέπουμε κάρτες με δύο όμοιους αριθμούς, έχουμε $n-1$ αριθμούς που μπορεί να συνδυαστούν με το 1 ώστε να συμπληρωθεί μια κάρτα. Επομένως η απάντηση είναι $n-1$. Παρομοίως, $n-1$ κάρτες περιέχουν τον αριθμό 2.

Για $3 \leq i \leq n$, υπάρχουν δύο μόνο κάρτες που περιέχουν το i : η $\{1, i\}$ και η $\{2, i\}$.

Πρόβλημα 5. Υπάρχουν $n-1$ κάρτες που περιέχουν τον αριθμό 1. Παρομοίως, υπάρχουν $n-1$ κάρτες που περιέχουν τον αριθμό 2. Κάθε κάρτα περιέχει είτε το 1 είτε το 2, επομένως έχουμε μετρήσει όλες τις κάρτες. Όμως με αυτό τον τρόπο μετρήσαμε δύο φορές την κάρτα $\{1, 2\}$, οπότε οι κάρτες είναι συνολικά $(n-1) + (n-1) - 1 = 2n-3$.

Πρόβλημα 6. Η πρώτη σφαίρα μπορεί να επιλεγεί με n διαφορετικούς τρόπους, ενώ η δεύτερη με $n-1$ διαφορετικούς τρόπους. Επομένως, αφού δεν έχει σημασία η σειρά επιλογής, οι πρώτες δύο σφαίρες επιλέγονται με $[n(n-1)]/2$ διαφορετικούς τρόπους. Ένας μόνο συνδυασμός οδηγεί σε νί-

κη της κάρτας $\{1, 2\}$, οπότε η πιθανότητα νίκης αυτής της κάρτας είναι $2/[n(n-1)]$. Για να τη συγκρίνουμε με την πιθανότητα $1/(2n-3)$, αφαιρούμε:

$$\frac{1}{2n-3} - \frac{2}{n(n-1)}$$

$$= \frac{(n^2 - n) - (4n - 6)}{n(n-1)(2n-3)}$$

$$= \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)(2n-3)},$$

ποσότητα που είναι θετική αν $n \geq 4$. Αυτό μας δείχνει ότι η κατάσταση για την κάρτα $\{1, 2\}$ είναι χειρότερη σε σύγκριση με αυτό που θα ίσχυε σε ένα δίκαιο παιχνίδι. Παρατηρήστε ότι, όταν το n είναι μεγάλο, η διαφορά είναι κατά προσέγγιση ίση με $1/(2n-3)$ πράγμα που σημαίνει ότι οι πιθανότητες νίκης της $\{1, 2\}$ είναι αμελητέες σε σύγκριση με τις αντίστοιχες στο δίκαιο παιχνίδι.

Πρόβλημα 7. Λόγω συμμετρίας, κάθε κάρτα διαφορετική από την $\{1, 2\}$ έχει τις ίδιες πιθανότητες νίκης. Αυτή είναι η κύρια ιδέα της ενότητας «Χρήση της συμμετρίας».

Πρόβλημα 8. Το άθροισμα των πιθανοτήτων νίκης όλων των καρτών πρέπει να ισούται με 1, διότι υπάρχει πάντα νικητής και σε περίπτωση ισοπαλίας το βραβείο μοιράζεται. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $2n-3$ κάρτες, από τις οποίες η $\{1, 2\}$ έχει πιθανότητα νίκης $2/[n(n-1)]$, ενώ οι υπόλοιπες $2n-4$ κάρτες έχουν όλες την ίδια πιθανότητα νίκης, έστω x . Έχουμε επομένως,

$$(2n-4)x + \frac{2}{n(n-1)} = 1.$$

Αν λύσουμε ως προς x παίρνουμε

$$x = \frac{n+1}{2n(n-1)}.$$

Αν αφαιρέσουμε το $1/(2n-3)$ από το αποτέλεσμα μας, διαπιστώνουμε ότι αυτές οι κάρτες έχουν ελαφρώς μεγαλύτερες πιθανότητες νίκης απ' όσες θα είχαν σε ένα δίκαιο παιχνίδι.

Πρόβλημα 9. Υπάρχουν n σφαίρες, οπότε $n-1$ μπορούν να συνδυαστούν με το 1 για να συμπληρωθεί μία κάρτα.

Πρόβλημα 10. Ο αριθμός 3 εμφανίζεται στις κάρτες $\{1, 3\}$ και $\{3, 4\}$. Το

ίδιο ισχύει για τον αριθμό 4. Κάθε άλλος αριθμός $i \neq 1, 3, 4$ εμφανίζεται μόνο στην κάρτα $\{1, i\}$.

Πρόβλημα 11. Με την προσθήκη της κάρτας $\{3, 4\}$ στη συλλογή των $n - 1$ καρτών που περιέχουν το 1, παίρνουμε n κάρτες συνολικά.

Πρόβλημα 12. Κάθε κάρτα διαφορετική από την $\{3, 4\}$ περιέχει τον αριθμό 1.

Πρόβλημα 13. Κάθε κάρτα είτε περιέχει το 1 ή είναι η κάρτα $\{3, 4\}$. Από τη στιγμή που θα επιλεγούν το 1 και κάποιος άλλος αριθμός i , κερδίζει η κάρτα $\{1, i\}$. Αν επιλεγούν και το 3 και το 4, κερδίζει η κάρτα $\{3, 4\}$.

Πρόβλημα 14. Υπάρχουν 6 δυνατοί τρόποι επιλογής, διότι $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Αφού η πιθανότητα να επιλεγεί μία από τις τρεις σφαίρες τελευταία είναι ίδια για όλες, η πιθανότητα να επιλεγεί το 1 τελευταίο είναι $1/3$.

Πρόβλημα 15. Η κάρτα $\{1, 2\}$ έχει μεγαλύτερη πιθανότητα νίκης από την $\{1, 3\}$, διότι η $\{1, 3\}$ έχει έναν αριθμό κοινό με τον «μεγάλο νικητή». Λόγω συμμετρίας, οι $\{1, 2\}$ και $\{1, 5\}$ έχουν τις ίδιες πιθανότητες νίκης, και το ίδιο ισχύει για κάθε άλλο ζεύγος καρτών που δεν περιλαμβάνει τις $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$ και $\{3, 4\}$. Παρομοίως, οι κάρτες $\{1, 3\}$ και $\{1, 4\}$ έχουν την ίδια πιθανότητα νίκης.

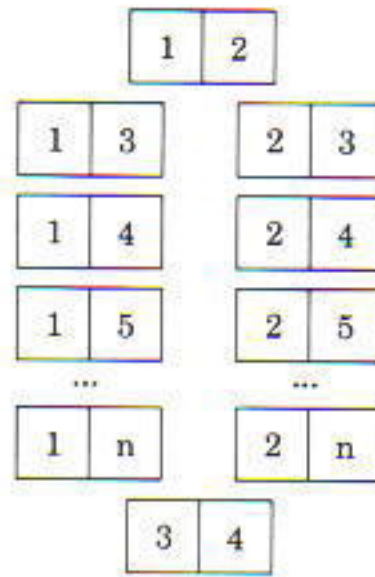
Πρόβλημα 16. Η πιθανότητα νίκης του «μεγάλου νικητή», $\{3, 4\}$, ισούται με $1/3$. Η πιθανότητα νίκης των καρτών $\{1, 3\}$ και $\{1, 4\}$ είναι

$$\frac{1}{n} - \frac{n-3}{2n(n-1)}$$

Η πιθανότητα νίκης των καρτών $\{1, i\}$, για $i = 2, 5, 6, 7, \dots, n$, είναι

$$\frac{1}{n} - \frac{n-4}{3n(n-1)}$$

Για να καταλήξουμε στο παραπάνω αποτέλεσμα, γράφουμε όλους τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να κερδίσει κάθε κάρτα μόνη της, τους τρόπους που μπορεί να έρθει διπλή ισοπαλία, τριπλή ισοπαλία, ..., j -πλή ισοπαλία. Στη συνέχεια προσθέτουμε, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι ισόπαλες κάρτες μοιράζονται το βραβείο. Επίσης, αναγνωρίζουμε την παρουσία τριγωνικών αριθμών στην περίπτωση των $\{1, 3\}$ και $\{1, 4\}$ και πυραμδικών αριθ-



Σχήμα 13

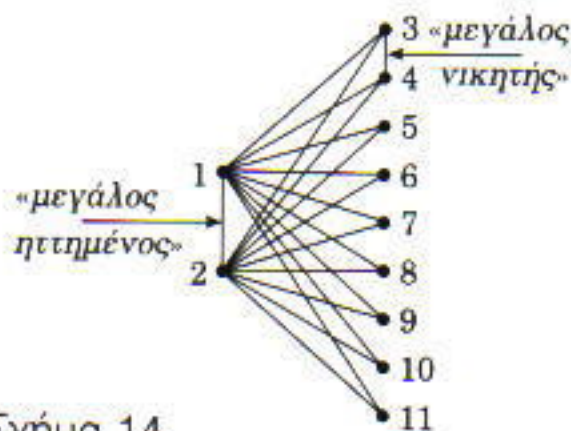
μών στην περίπτωση των $\{1, i\}$, για $i = 2, 5, 6, 7, \dots$. Παρατηρούμε ότι κάθε άλλη κάρτα εκτός του «μεγάλου νικητή» έχει χειρότερες πιθανότητες απ' ό,τι στο δίκαιο παιχνίδι.

Πρόβλημα 17. Στο Σχήμα 13 βλέπουμε τη λύση. Σ' αυτό το παράδειγμα υπάρχουν n σφαίρες και $2n - 2$ παίκτες. Η πιθανότητα νίκης του «μεγάλου ηττημένου», της κάρτας $\{1, 2\}$, είναι $2/[n(n-1)]$ και η πιθανότητα νίκης του «μεγάλου νικητή», της κάρτας $\{3, 4\}$, είναι $1/6$. Ο υπολογισμός των πιθανοτήτων νίκης των υπολοίπων καρτών είναι δύσκολος.

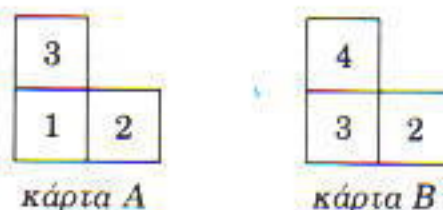
Το επόμενο μέρος του άρθρου εξετάζει τα γραφήματα αυτών των παιχνιδιών. Το γράφημα του προηγούμενου παιχνιδιού μπίνγκο παρουσιάζεται στο Σχήμα 14.

Πρόβλημα 18. Κάθε αριθμός εμφανίζεται σε δύο ακριβώς κάρτες.

Πρόβλημα 19. Καθεμία από τις τέσσερις κάρτες $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$ και



Σχήμα 14



Σχήμα 15

$\{1, 4\}$ έχει πιθανότητα νίκης $16/105$. Καθεμία από τις τρεις κάρτες $\{5, 6\}$, $\{6, 7\}$ και $\{5, 7\}$ έχει πιθανότητα νίκης $16/105$.

Πρόβλημα 20. Επαληθεύστε, απλώς, ότι υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των ακμών. Για παράδειγμα, η ακμή $\{1, 3\}$ του αριστερού γραφήματος αντιστοιχεί στην ακμή $\{1, 2\}$ του γραφήματος δεξιά.

Πρόβλημα 21. Για να αποδείξουμε ότι οι $\{1, 2\}$ και $\{1, 3\}$ έχουν την ίδια πιθανότητα νίκης, θεωρούμε μια απεικόνιση του γραφήματος στον εαυτό του: αυτή που αντιστοιχεί τα $(1, 2, 3, 4, 5)$ στα $(2, 3, 4, 5, 1)$. Παρομοίως, αποδεικνύουμε ότι κάθε άλλο ζεύγος ακμών έχει τις ίδιες πιθανότητες νίκης.

Πρόβλημα 22. Λόγω συμμετρίας, οι έξι κάρτες που περιέχουν αριθμούς από το σύνολο $\{1, 2, 3, 4\}$ έχουν όλες πιθανότητα νίκης $17/252$. Παρομοίως, οι δέκα κάρτες που περιέχουν αριθμούς από το σύνολο $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ έχουν όλες πιθανότητα νίκης $5/84$. Καταλήγουμε σ' αυτό το αποτέλεσμα ως εξής: κάθε κάρτα έχει πιθανότητα $1/36$ να κερδίσει όταν επιλεγούν οι δύο πρώτες σφαίρες. Από την άλλη πλευρά, όταν επιλεγούν τρεις σφαίρες, η πιθανότητα να κερδίσει κάποια κάρτα με αριθμούς από το σύνολο $\{1, 2, 3, 4\}$ είναι

$$\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{5}{21}$$

Λόγω συμμετρίας, η συμβολή κάθε κάρτας σ' αυτή τη συνολική πιθανότητα είναι

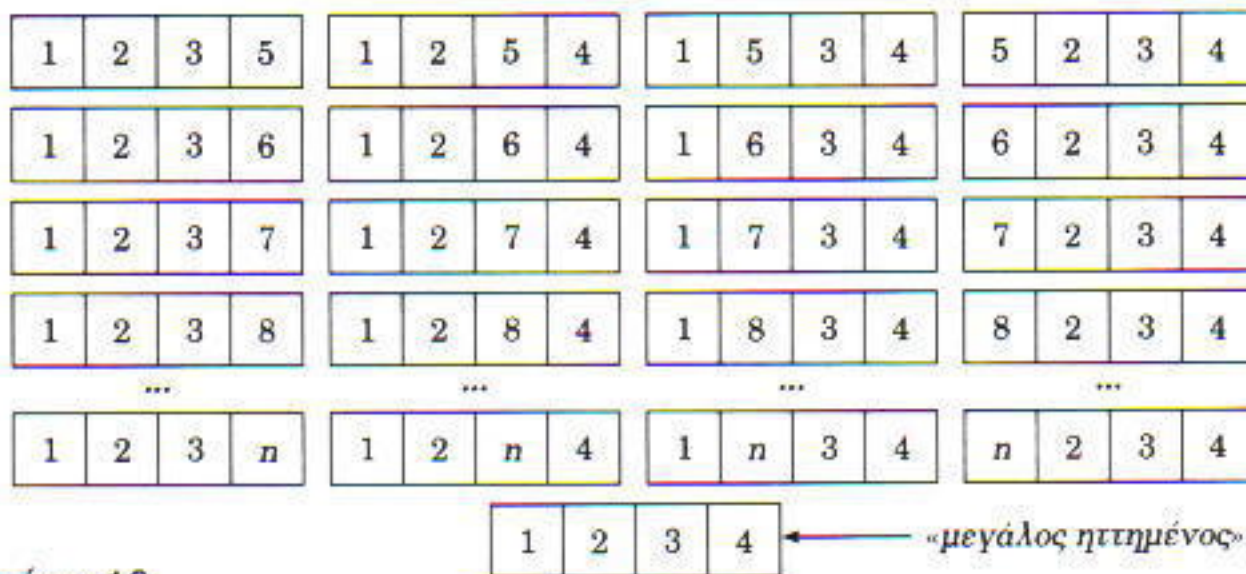
$$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{21} = \frac{5}{126}$$

και, τελικά, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{1}{36} + \frac{5}{126} = \frac{12}{252}$$

Ανάλογα αντιμετωπίζουμε τις δέκα κάρτες με αριθμούς από το σύνολο $\{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Πρόβλημα 23. Ο γωνιακός αριθμός 1 περιέχεται σε δύο νικητήριους συνδυασμούς, ενώ οι ακραίοι αριθμοί 2 και 3 περιέχονται μόνο σε έναν. Το παιχνίδι αυτό δεν είναι τόσο συμμετρικό όσο το 2×1 μπίνγκο, όπου οι αριθμοί κάθε κάρτας περιέχονται σε έναν μόνο νικητήριο συνδυασμό.



Σχήμα 16

Πρόβλημα 24. Το κεντρικό τετράγωνο περιέχεται σε τέσσερις νικητήριους συνδυασμούς, αλλά είναι κενό. Οι οκτώ αριθμοί των κυρίων διαγωνίων περιέχονται σε τρεις νικητήριους συνδυασμούς, έναν οριζόντιο, έναν κάθετο και έναν διαγώνιο. Οι υπόλοιποι 16 αριθμοί περιέχονται σε δύο νικητήριους συνδυασμούς, έναν οριζόντιο και έναν κάθετο.

Πρόβλημα 25. Υπάρχουν πέντε δυνατότητες για τον γωνιακό αριθμό που περιέχεται σε δύο νικητήριους συνδυασμούς. Απομένουν $4 \cdot 3 = 12$ διατεταγμένα ζεύγη για τους γωνιακούς αριθμούς, αλλά, αφού δεν έχει σημασία η σειρά, υπάρχουν μόνο έξι δυνατότητες. Επομένως, η απάντηση είναι $(5 \cdot 4 \cdot 3) / 2 = 30$. Παρομοίως, όταν οι σφαίρες είναι n , έχουμε $[n(n-1)(n-2)] / 2$ δυνατές κάρτες.

Πρόβλημα 26. Αν καταγράψουμε και τους είκοσι τέσσερις δυνατούς τρόπους επιλογής των τεσσάρων σφαιρών, διαπιστώνουμε ότι η κάρτα A κερδίζει 12 φορές, η κάρτα B 10, ενώ έχουμε ισοπαλία 2 φορές. Επομένως, η κάρτα A πλεονεκτεί. Καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα αν λάβουμε υπόψη την ασυμμετρία του μπίγγκο σχήματος L : ο γωνιακός αριθμός της κάρτας A , το 1, δεν εμφανίζεται στην κάρτα B , ενώ ο γωνιακός αριθμός της κάρτας B , το 3, εμφανίζεται στην A .

Πρόβλημα 27. Παρατηρούμε ότι το σύνολο των νικητήριων συνδυασμών για κάθε παίκτη είναι το ίδιο και στα δύο μοντέλα.

Πρόβλημα 28. Το ζεύγος των καρτών A και B είναι το ζεύγος του Σχήματος 15. Αν αλλάξουμε κατάλληλα την αρίθμηση των σφαιρών διαπιστώνουμε ότι και τα άλλα δύο ζεύγη του προβλήματος είναι ισοδύναμα μ' αυτό.

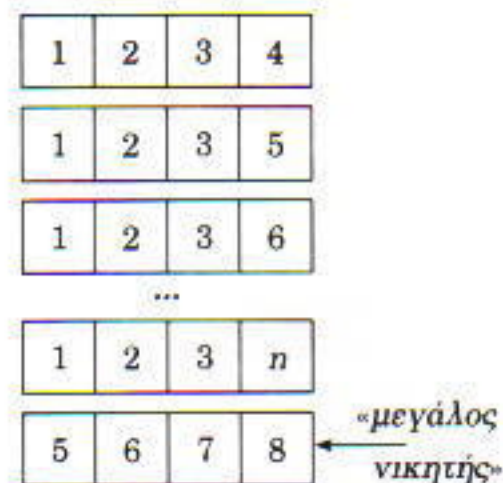
Αν παίξουν όλες οι κάρτες, μπορούμε να δείξουμε ότι, λόγω συμμετρίας, έχουν τις ίδιες πιθανότητες νίκης.

Πρόβλημα 29. Αναφέρουμε ορισμένες από τις διαφορές. Για κάθε κάρτα του κανονικού 5×5 μπίγγκο υπάρχουν 12 νικητήριοι συνδυασμοί—άλλοι με τέσσερις και άλλοι με πέντε αριθμούς. Υπάρχουν περιορισμοί όσον αφορά τους αριθμούς που μπορούν να υπάρχουν σε κάθε στήλη. Υπάρχουν 75 μόνο σφαίρες και όχι ένα τυχαίο πλήθος n σφαιρών. Ο οργανωτής του παιχνιδιού δεν επιστρέφει ως βραβείο όλο το ποσό που πληρώνουν για τη συμμετοχή τους οι παίκτες, γεγονός που μειώνει σημαντικά κάθε πιθανό πλεονέκτημα. Οι υπόλοιποι παίκτες είναι πιθανόν να μη μας επιτρέψουν να εξετάσουμε όλες τις κάρτες για να υπολογίσουμε ποια είναι η βέλτιστη. Σε περίπτωση ισοπαλίας οι παίκτες δεν μοιράζονται το βραβείο αλλά κερδίζει όποιος φωνάξει «Μπίγγκο!» πρώτος.

Πρόβλημα 30. Η κάρτα $\{1, 5\}$ είναι καλύτερη από την $\{1, 3\}$. Από κάποια άποψη, στο $\{1, 3\}$ υπάρχει μεγαλύτερος «συνωστισμός» από ό,τι στο $\{1, 5\}$.

Πρόβλημα 31. Αν σχεδιάσετε τα γραφήματα, θα διαπιστώσετε ότι με τρεις ή πέντε παίκτες το παιχνίδι είναι άδικο, ενώ με τέσσερις ή έξι είναι δίκαιο. Θυμηθείτε ότι ένας παίκτης αλλάζει κάρτες αν αυτό του δίνει τη δυνατότητα να αυξήσει τις πιθανότητες νίκης του. Υπάρχει κάποιος παίκτης που έχει πάντα πλεονέκτημα;

Πρόβλημα 32. Ο παίκτης που μειονεκτεί θα αλλάξει κάρτες και, επομένως, ο αντίπαλός του θα θελήσει να αλλάξει και αυτός. Οδηγούμαστε έτσι σε έναν ατέρμονα κύκλο. Για να μελετήσουμε τι συμβαίνει όταν αλλάζουν κάρτες οι παίκτες απαιτείται α-



Σχήμα 17

κριβέστερη διατύπωση του προβλήματος. Ας υποθέσουμε ότι οι παίκτες ερωτώνται διαδοχικά αν θέλουν να αλλάξουν κάρτα. Επίσης, οι παίκτες, ακολουθούν μια έξυπνη στρατηγική και αλλάζουν κάρτα αναλόγως με τις κάρτες των αντιπάλων τους. Αν δύο κάρτες είναι εξίσου καλές, τότε αποφασίζουν ποια θα κρατήσουν σύμφωνα με έναν σταθερό κανόνα. Τώρα, μπορούμε να μελετήσουμε το εν λόγω πρόβλημα για διάφορες συλλογές καρτών μπίγγκο. Επισημαίνουμε ότι το πρόβλημα είναι ακόμη δυσκολότερο αν επιτρέψουμε στους παίκτες να κάνουν συμμαχίες ή να μπαίνουν και να βγαίνουν από το παιχνίδι.

Πρόβλημα 33. Πιστεύουμε ότι αυτά τα δύο παραδείγματα είναι τα πλέον μεροληπτικά παιχνίδια 2×1 μπίγγκο που υπάρχουν, αλλά δεν έχουμε απόδειξη αυτού του γεγονότος. Ποια είναι τα πιο μεροληπτικά παραδείγματα των άλλων παραλλαγών του μπίγγκο;

Πρόβλημα 34. Δοκιμάστε να χρησιμοποιήσετε τη συμμετρία. Υπάρχουν ασυμμετρικά δίκαια παιχνίδια 2×1 μπίγγκο (δηλαδή παιχνίδια 2×1 μπίγγκο που μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι δίκαια χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τη συμμετρία); Ποιο είναι το νόημα της προηγούμενης ερώτησης;

Πρόβλημα 35. Προσπαθήστε να δουλέψετε με συγκεκριμένα παραδείγματα και μετά γενικεύστε.

Πρόβλημα 36. Θα είναι καλό να πειραματιστείτε με τη βοήθεια υπολογιστή.

Πρόβλημα 37. Διπλές κάρτες ή διπλοί νικητήριοι συνδυασμοί επιτρέπουν να κατασκευάσουμε παιχνίδια με οποιοδήποτε «βαθμό δικαιοσύνης» επιθυμούμε. Γι' αυτό το λόγο, όταν εξετάζουμε αν είναι δίκαιο ένα παιχνίδι

1	16	31	45+i	61
2	15+i	32	47	62
3	18	ελεύθερο	48	60+i
4	19	30+i	49	64
i	20	35	50	65

i	16	31	46	61
2	17	32	45+i	62
3	15+i	ελεύθερο	48	63
4	19	34	49	60+i
5	20	30+i	50	65

1	16	31	46	60+i
2	17	30+i	47	62
i	18	ελεύθερο	48	63
4	19	34	45+i	64
5	15+i	35	50	65

1	16	30+i	46	61
i	17	32	47	62
3	18	ελεύθερο	45+i	63
4	15+i	34	49	64
5	20	35	50	60+i

Σχήμα 18

μπίνγκο, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι δεν υπάρχουν κάρτες με διπλούς νικητήριους συνδυασμούς. Στο μπίνγκο σχήματος L και στο κανονικό 5 × 5 μπίνγκο οι κάρτες μπορεί να μην είναι ακριβώς όμοιες αλλά να έχουν κοινούς έναν ή περισσότερους συνδυασμούς. Στο 5 × 5 Μπίνγκο πρέπει, επίσης, να μας απασχολήσει το γεγονός ότι, εξαιτίας του κενού τετραγώνου, ένας νικητήριος συνδυασμός μιας κάρτας μπορεί να είναι γνήσιο υποσύνολο ενός νικητήριου συνδυασμού άλλης κάρτας.

να είναι ένα παράδειγμα με κάρτα «μεγάλου ηττημένου» και με κάρτα «μεγάλου νικητή»; Ποια τα αντίστοιχα παραδείγματα για το 5 × 1 μπίνγκο;

Πρόβλημα 40. Στο Σχήμα 18 το i κυμαίνεται από το 6 ως το 15 ενώ στο Σχήμα 19 κυμαίνεται από το 5 ως το 15.

Στο Σχήμα 20 χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο γωνιακός αριθμός πε-

γγο, μπορείτε να κατασκευάσετε μια κάρτα «μεγάλου νικητή» και να τη δώσετε σε αυτόν που θέλετε να κερδίσει.

Πρόβλημα 42. Ορίζουμε ως νικητήριο συνδυασμό ένα σύνολο αριθμών και ως κάρτα ένα σύνολο νικητήριων συνδυασμών. Για τους λόγους που αναφέραμε στην απάντηση του Προβλήματος 37, ο νικητήριος συνδυασμός μιας κάρτας δεν μπορεί να ισούται ή να είναι γνήσιο υποσύνολο νικητήριου συνδυασμού άλλης κάρτας.

1	16	31	46	61
2	17	32	47	62
3	18	ελεύθερο	48	63
4	19	34	49	64
5	20	35	50	65

«μεγάλος ηττημένος»

1	16	31	45+i	61
2	15+i	32	46	62
3	17	ελεύθερο	47	60+i
4	18	30+i	48	63
i	19	33	49	64

6	20	35	50	65
7	21	36	51	66
8	22	ελεύθερο	52	67
9	23	37	53	68
10	24	38	54	69

«μεγάλος νικητής»

1	16	31	46	61
2	17	32	47	62
3	18	ελεύθερο	48	63
4	19	33	49	64
5	20	34	50	65

2	16	31	46	61
6	17	35	47	66
3	18	ελεύθερο	48	63
4	21	33	49	64
5	20	34	51	65

κάρτα A

κάρτα B

Σχήμα 19

Σχήμα 20

Πρόβλημα 38. Στο γράφημα ενός παιχνιδιού μπίνγκο σχήματος L, κάθε κάρτα αντιπροσωπεύεται από δύο ακμές. Επισημαίνουμε ότι μπορεί να μας βοηθήσει η χρήση διαφορετικών χρωμάτων για κάθε κάρτα. Στο κανονικό 5 × 5 μπίνγκο τα προβλήματα είναι περισσότερα, διότι κάθε νικητήριος συνδυασμός πρέπει να συνδέει 4 ή 5 αριθμούς.

Πρόβλημα 39. Το Σχήμα 16 παρουσιάζει όλες τις 4 × 1 κάρτες μπίνγκο που περιέχουν τουλάχιστον τρεις από τους αριθμούς 1, 2, 3 ή 4. Το Σχήμα 17 παρουσιάζει όλες τις 4 × 1 κάρτες μπίνγκο που περιέχουν τους 1, 2 και 3, καθώς και την κάρτα {5, 6, 7, 8}.

Τα παραδείγματα αυτά μπορεί να είναι τα πιο άδικο. Ποιο θα μπορούσε

ριέχεται σε τρεις νικητήριους συνδυασμούς ενώ οι ακραίοι αριθμοί σε δύο. Η κατάσταση είναι ανάλογη με το παράδειγμα που δώσαμε στο Σχήμα 15 για το μπίνγκο σχήματος L. Η κύρια ιδέα, εδώ, είναι ότι θεωρούμε μια κάρτα σχήματος L ενσωματωμένη στην πάνω αριστερή γωνία.

Πιθανόν, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε παραδείγματα που είναι ακόμη πιο άδικο.

Πρόβλημα 41. Μια μέθοδος για να εξασφαλίσουμε ένα κατά προσέγγιση δίκαιο παιχνίδι μπίνγκο θα ήταν να καταναείνουμε ομοιόμορφα τους αριθμούς στις κάρτες — και αυτό, όμως, δεν θα αρκούσε για να είναι το παιχνίδι απολύτως δίκαιο. Αν θέλετε να οργανώσετε ένα άδικο παιχνίδι μπίν-

Gradus

Πρόβλημα 2. Έχουμε

$$a^2 + 2ab + \beta^2 = (a + \beta)^2 = 3^2 = 9.$$

Πρόβλημα 3. Μέθοδος I: Έχουμε

$$a^2 + \beta^2 = (a + \beta)^2 - 2ab = (-3)^2 - 2(-5) = 19.$$

Μέθοδος II: Αφού τα a και β είναι ρίζες της δεδομένης εξίσωσης, γνωρίζουμε ότι

$$a^2 - 3a - 5 = 0, \\ \beta^2 - 3\beta - 5 = 0.$$

Αν προσθέσουμε, βρίσκουμε

$$a^2 + \beta^2 - 3(a + \beta) - 10 = 0, \text{ ή} \\ a^2 + \beta^2 - 3(3) - 10 = 0$$

(αφού $a + \beta = 3$), ή

$$a^2 + \beta^2 = 9 + 10 = 19.$$

Πρόβλημα 4. Αν χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο I ή τη μέθοδο II του Προβλήματος 3, θα βρούμε ότι $a^2 + \beta^2 = p^2 - 2q$.

Πρόβλημα 5. Έχουμε

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \frac{a + \beta}{a\beta} = \frac{p}{q}.$$

Πρόβλημα 6. Μέθοδος I: Αναπτύσσουμε το $(a + \beta)^3$ και χρησιμοποιούμε τις τεχνικές της μεθόδου I του Προβλήματος 3.

Μέθοδος II: Γνωρίζουμε, ήδη, την τιμή του $a^2 + \beta^2$ συναρτήσει των p και q : είναι $p^2 - 2q$. Με βάση αυτό το δεδομένο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο II του Προβλήματος 3 για να κάνουμε τον υπολογισμό μας. Γνωρίζουμε ότι για κάθε x τέτοιο ώστε $x^2 - px + q = 0$ ισχύει, επίσης, και $x^3 - px^2 + qx = 0$. Αφού τα a και β ικανοποιούν την αρχική εξίσωση, έχουμε

$$\begin{aligned} a^3 - pa^2 + qa &= 0, \\ \beta^3 - p\beta^2 + q\beta &= 0. \end{aligned}$$

Αν προσθέσουμε, βρίσκουμε ότι $(a^3 + \beta^3) - p(a^2 + \beta^2) + q(a + \beta) = 0$,

$$\begin{aligned} \eta \\ (a^3 + \beta^3) &= p(a^2 + \beta^2) - q(a + \beta) \\ &= p(p^2 - 2q) - pq = p^3 - 3pq. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 7. Αν προσθέσουμε τα δύο κλάσματα, βρίσκουμε ότι η τιμή του αθροίσματός τους είναι -1 (και ανεξάρτητη από τα a και β ή την οποιαδήποτε εξίσωση ικανοποιούν).

Πρόβλημα 9. Αν ακολουθήσουμε τη μέθοδο I του Προβλήματος 3, βρίσκουμε ότι $(a + \beta + \gamma)^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(a\beta + \beta\gamma + \gamma a)$, ή

$$p^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2q.$$

Έπεται ότι

$$a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = p^2 - 2q.$$

Συγκρίνετε αυτή την παράσταση με την αντίστοιχη για το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Πρόβλημα 10. Θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο II του Προβλήματος 3:

$$\begin{aligned} a^3 - pa^2 + qa - r &= 0, \\ \beta^3 - p\beta^2 + q\beta - r &= 0, \\ \gamma^3 - p\gamma^2 + q\gamma - r &= 0. \end{aligned}$$

Αν προσθέσουμε, θα έχουμε

$$\begin{aligned} a^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= p(a^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ &\quad - q(a + \beta + \gamma) + 3r \\ &= p(p^2 - 2q) - pq + 3r \\ &= p^3 - 3pq + 3r. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 11. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε το άθροισμα ανώτερων δυνάμεων των a, β και γ . (Στην πραγματικότητα, σε αυτό προηγήθηκε ο Ισαάκ Νεύτων που ανακάλυψε έναν γενικό τύπο για το άθροισμα των δυνάμεων των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης.)

Ας υποθέσουμε ότι τα a, β, γ είναι ρίζες της

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0.$$

Τότε, είναι και ρίζες της $x^4 - px^3 + qx^2 - rx = 0$, οπότε

$$\begin{aligned} a^4 - pa^3 + qa^2 - ra &= 0, \\ \beta^4 - p\beta^3 + q\beta^2 - r\beta &= 0, \\ \gamma^4 - p\gamma^3 + q\gamma^2 - r\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Αν προσθέσουμε, θα βρούμε

$$\begin{aligned} a^4 + \beta^4 + \gamma^4 - p(a^3 + \beta^3 + \gamma^3) \\ + q(a^2 + \beta^2 + \gamma^2) - r(a + \beta + \gamma) &= 0, \\ \eta \\ a^4 + \beta^4 + \gamma^4 - p(p^3 - 3pq + 3r) \\ + q(p^2 - 2q) - rp &= 0. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε, έτσι, στη ζητούμενη παράσταση:

$$a^4 + \beta^4 + \gamma^4 = p^4 - 4p^2q + 4pr + 2q^2.$$

Πρόβλημα 12. Η δεδομένη παράσταση ισούται με

$$\frac{a^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 + a^2\beta^2}{a^2\beta^2\gamma^2}.$$

Ο παρονομαστής είναι προφανώς ίσος με r^2 . Ο αριθμητής μοιάζει να έχει σχέση με το q^2 . Πράγματι, ισχύει

$$\begin{aligned} q^2 &= (a^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2a^2) \\ &\quad + 2a\beta\gamma(a + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε αυτή την πληροφορία βρίσκουμε γρήγορα ότι η δεδομένη παράσταση ισούται με

$$\frac{q^2 - 2pr}{r^2}.$$

Πρόβλημα 13. Η δεδομένη παράσταση ισούται με

$$\frac{a^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + a^2\gamma^2}{a\beta\gamma}.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τους υπολογισμούς από το Πρόβλημα 12, βρίσκουμε ότι είναι ίση με

$$\frac{q^2 - 2pr}{r}.$$

Πρόβλημα 14. Το σύστημα αυτό λύνεται εύκολα — για παράδειγμα με αντικατάσταση. Εντούτοις, η λύση του μπορεί να γίνει ακόμη πιο εύκολη αν το συνδέσουμε με την προηγούμενη συλλογιστική. Ας σχηματίσουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση που έχει ρίζες τα a και β : είναι η $x^2 - 5x + 6 = 0$. Αυτή λύνεται εύκολα με παραγοντοποίηση, και οι ρίζες της είναι το 2 και το 3. Επομένως, $a = 2$ και $\beta = 3$ ή $a = 3$ και $\beta = 2$. Εμσημαίνουμε ότι η λύση μας βασίστηκε στο γεγονός ότι οι εξισώσεις είναι συμμετρικές ως προς a και β .

Πρόβλημα 15. Μπορούμε να εργαστούμε όπως στο Πρόβλημα 14. Τα a και β ικανοποιούν την εξίσωση $x^2 - 8x - 7 = 0$, η οποία όμως δεν παραγοντοποιείται τόσο εύκολα όπως προηγουμένως. Έτσι, χρησιμοποιούμε τον τύπο του τριωνύμου, και βρίσκουμε ότι $a = 4 + \sqrt{23}$, $\beta = 4 - \sqrt{23}$ (ή αντίστροφα).

Πρόβλημα 16. Έστω ότι οι αριθμοί a, β και γ είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^3 + 9x^2 + 19x + 11 = 0.$$

Παρατηρούμε ότι $x = -1$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης, οπότε το $(x + 1)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου. Έπειτα από τη διαίρεση ανακαλύπτουμε ότι ο άλλος παράγοντας είναι το $x^2 + 8x + 11$. Αν εξισώσουμε αυτόν τον παράγοντα με μηδέν, βρίσκουμε ότι οι άλλες ρίζες είναι $-4 \pm \sqrt{5}$. Ποια είναι, όμως, η τιμή του a ; Από τη συμμετρία των αρχικών εξισώσεων καταλαβαίνουμε ότι το a μπορεί να είναι οποιοσδήποτε από τους αριθμούς $-1, -4 + \sqrt{5}, -4 - \sqrt{5}$, ενώ τα β και γ θα είναι οι άλλοι δύο. Συνολικά υπάρχουν έξι λύσεις.

Πρόβλημα 17. Επιθυμούμε να γράψουμε μια τριτοβάθμια εξίσωση που έχει ρίζες τα a, β, γ . Χρειαζόμαστε όμως την τιμή του $q = a\beta + \beta\gamma + \gamma a$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του Προβλήματος 9. Αν η εξίσωση είναι η

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0,$$

τότε $p = 5$, $r = -28$ και

$$a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = p^2 - 2q = 29.$$

Έπεται ότι $q = -2$.

Τώρα γνωρίζουμε ότι η εξίσωση που αναζητούμε είναι η

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0.$$

Όπως και στο Πρόβλημα 16 μπορούμε να βρούμε μία ρίζα «με το μάτι» και τις υπόλοιπες με διαίρεση. Καταλήγουμε ότι οι τιμές των a, β, γ είναι $-2, 3, 4$ (με οποιαδήποτε σειρά).

Πρόβλημα 18. Έστω

$$P(x) = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$$

το πολυώνυμο που έχει συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου 1 και ρίζες τα a, b, c, d και e . Τότε

$$p = -(a + b + c + d + e)$$

και

$$2q = (a + b + c + d + e)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2),$$

και, επομένως, τα p και q διαιρούνται από τον n . Αν γράψουμε αλγεβρικά ότι τα a, b, c, d, e ικανοποιούν την $P(x) = 0$ και προσθέσουμε τις προκύπτουσες σχέσεις (όπως στη μέθοδο II του Προβλήματος 3), παίρνουμε

$$\begin{aligned} &(a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5) \\ &+ p(a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4) \\ &+ q(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3) \\ &+ r(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \\ &+ s(a + b + c + d + e) + 5t = 0. \end{aligned}$$

Αφού τα $p, q, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ και $a + b + c + d + e$ διαιρούνται με τον n , έπεται ότι και το $(a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5) + 5t$ διαιρείται με τον n . Όμως, $t = -abcde$, και η πρόταση αποδείχτηκε.

Πού χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο n είναι περιττός;

Πρόβλημα 19. Αφού $r_1^2 + 2r_1 + 3 = 0$ και $r_2^2 + 2r_2 + 3 = 0$, η δεδομένη παράσταση ανάγεται στην

$$\begin{aligned} &\frac{2r_1 + 2}{3r_1 + 1} + \frac{2r_2 + 2}{3r_2 + 1} \\ &= \frac{12r_1 r_2 + 8(r_1 + r_2) + 4}{9r_1 r_2 + 3(r_1 + r_2) + 1}. \end{aligned}$$

Αφού $r_1 + r_2 = -2$ και $r_1 r_2 = 3$, η τιμή που αναζητούμε είναι

$$\frac{36 - 16 + 4}{27 - 6 + 1} = \frac{12}{11}.$$

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 14

λειμμα» νερού σ' αυτούς τους εκτεταμένους κόλπους, προκύπτουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις: Η επιφάνεια του νερού στον Κόλπο του Φάντυ θα κατέλθει κατά 0,2 mm στην πρώτη περίπτωση και κατά 1 cm περίπου στη δεύτερη. Στον Κόλπο του Μαϊνχ χρειάζομαστε μικροσκόπιο για να διακρίνουμε τη μεταβολή της στάθμης του νερού. Όμως, οι εκτιμήσεις αυτές δεν λαμβάνουν υπόψη τους όλες τις μεταβολές που θα επέλθουν.

Η σημαντικότερη από αυτές αφορά τη μεταβολή της συχνότητας συντονισμού των ταλαντώσεων του νερού στον Κόλπο του Μαϊνχ. Από τη σημερινή της τιμή των 13 ωρών και 20 λεπτών θα μειωθεί σε 13 ώρες και 10 λεπτά. Η εν λόγω τιμή πλησιάζει επικίνδυνα την περίοδο της παλιρροϊκής δύναμης (12 ώρες και 25 λεπτά), οπότε ολόκληρο το σύστημα γίνεται πιο «εμπρηπές στο συντονισμό». Επιπλέον, αν εφαρμοστεί το δεύτερο σχέδιο, η ταλάντωση θα τροποποιηθεί σημαντικά εξαιτίας της μεταβολής που θα επέλθει στο χαρακτήρα της ροής του νερού στο στενό του Μάινας Μπέισιν, η οποία, με τη σειρά της, θα προκύψει ως αποτέλεσμα της μεταβολής της τριβής.

Ακριβείς υπολογισμοί δείχνουν ότι το φράγμα στον Κόλπο του Σέποντι δεν θα αλλάξει το ύψος της παλίρροιας στον Κόλπο του Φάντυ, θα αυξηθεί, όμως, το ύψος της παλίρροιας στον Κόλπο του Μαϊνχ κατά 3-4 cm, ή κατά περισσότερο από 2% του σημερινού πλάτους. Εάν τεθεί σε εφαρμογή το δεύτερο πρόγραμμα, το ύψος της παλίρροιας σε ολόκληρη την επιφάνεια του νερού από τη Βοστώνη έως το Μάινας Μπέισιν θα αυξηθεί κατά 15-20 cm, δηλαδή κατά περισσότερο από 10%! Αυτό θα απαιτήσει να κατασκευαστούν νέες προβλήτες και, μεταξύ των άλλων σοβαρών συνεπειών, θα διαταράξει τις μεταναστευτικές κινήσεις των ψαριών. Αυτό δείχνει ότι ακόμη και προγράμματα τα οποία από οικολογική άποψη θεωρούνται πολύ ασφαλέστερα σε σύγκριση με την κατασκευή θερμικών ή πυρηνικών σταθμών παραγωγής ενέργειας θα πρέπει να σχεδιάζονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται οι βλαβερές συνέπειές τους στη φύση. ●

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 42

$$N_{vy} \approx 0,02 \frac{M_{vy}}{18} + 0,98 \frac{M_{vy}}{28,8},$$

όπου τη μέση μοριακή μάζα του νερού τη λαμβάνουμε ίση με 18.

Γνωρίζουμε ότι ίσοι όγκοι ιδανικών αερίων υπό ταυτόσημες συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσης περιέχουν τον ίδιο αριθμό μορίων. Συνεπώς,

$$M_\xi = 1,012 M_{vy}$$

Επειδή οι πυκνότητες ίσων όγκων είναι ανάλογες προς τις αντίστοιχες μάζες, έχουμε

$$\rho_{vy}/\rho_\xi = M_{vy}/M_\xi = 0,988,$$

και χρησιμοποιώντας την τιμή $\rho_\xi = 1,25 \text{ kg/m}^3$, καταλήγουμε στην απάντηση

$$\rho_{vy} = 1,235 \text{ kg/m}^3.$$

Γ. Το τελευταίο πρόβλημα ζητούσε να προσδιορίσετε πώς εξαρτάται η ισχύς που απαιτείται για την αιώρηση ενός ελικοπτέρου από το μέγεθός του. Η μηχανική ισχύς P του ελικοπτέρου ισούται με τη στήριξη (ή δυναμική άνωση) T επί την κατακόρυφη προς τα κάτω συνιστώσα της ταχύτητας v του αέρα κάτω από τα πτερύγια του στροφείου. Η στήριξη δίνεται από τη μεταβολή της ορμής του αέρα ανά μονάδα χρόνου

$$T = v \frac{dm}{dt},$$

με

$$dm/dt = \rho S v,$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του αέρα και S το εμβαδόν της επιφάνειας που σαρώνουν τα πτερύγια του στροφείου. Έτσι, καταλήγουμε στην έκφραση

$$T = \rho S v^2.$$

Εφόσον το ελικοπτερο αιωρείται, η στήριξη πρέπει να ισούται με το βάρος B του ελικοπτέρου. Συνεπώς,

$$v^2 = T/\rho S = B/\rho S.$$

Εάν το μέγεθος του ελικοπτέρου χαρακτηρίζεται από μια γραμμική διάσταση L , τότε $B \propto L^3$, $S \propto L^2$, οπότε $v \propto L^{1/2}$. Έτσι,

$$P = T v = B v \propto L^{7/2}.$$

Για ένα ακριβές αντίγραφο του ελικοπτέρου υπό κλίμακα $1/2$, η απαιτούμενη ισχύς ανέρχεται σε $0,5^{7/2} P = 0,0884 P$. ●

Το καλό σκυλί ξέρει κι άλλο μονοπάτι

Κυκλώνοντας το κοπάδι

Δρ. Χμ

ΚΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ ΚΑΙ ΠΑΛΙ ΣΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ, ΤΗ στήλη που είναι αφιερωμένη σε προβλήματα που λύνονται κατά τον καλύτερο τρόπο αλογοριθμικά. Σας μιλάω εγώ, το καλύτερο άλογο στο αγρόκτημά μας. Στο γαλακτοκομείο του κυρίου Πωλ, το άρμεγμα γίνεται δύο φορές την ημέρα: στις 5 το πρωί και στις 5 το απόγευμα. Αυτή η ρουτίνα επαναλαμβάνεται επί 365 (ή 366) ημέρες το χρόνο εδώ και 20 χρόνια, και ο κύριος Πωλ τη γνωρίζει πλέον τόσο καλά ώστε μπορεί να την κάνει ακόμη και κοιμισμένος (πράγμα που πότε πότε συμβαίνει στα αλήθεια).

Κάθε μέλος της οικογένειας έχει το δικό του ρόλο σε αυτήν τη διαδικασία. Η κυρία Πώλα ξυπνά νωρίς για να φτιά-

ξει τον καφέ και το πρωινό και να ετοιμάσει το φαγητό των παιδιών για το σχολείο. Τα παιδιά, ο Μάικ και η Τζιν, ταΐζουν τις αγελάδες και πλένουν τους μαστούς τους, και ο κύριος Πωλ με τη βοήθεια των αμελκτικών μηχανών κάνει το άρμεγμα. Τέλος, ο Μπαντ, το σκυλί της οικογένειας, είναι αυτός που αναλαμβάνει να συγκεντρώσει το κοπάδι και να φέρει τις αγελάδες στο στάβλο.

Ο Μπαντ μένει με την οικογένεια από τότε που εμφανίστηκε στο κτήμα μας αναζητώντας λίγη τροφή. Κάποτε ανήκε σε έναν κάτοικο της πόλης που τον είχε αποκτήσει ως χριστουγεννιάτικο δώρο. Κατά το Μάρτιο όμως βαρέθηκε να τον ταΐζει, οπότε αποφάσισε να του προσφέρει ένα άνευ επιστροφής ταξίδι στην εξοχή. Από τότε, ο Μπαντ κερ-



Εικονογράφηση: Mark Bretneman

δίζει το φωμί του οδηγώντας τις αγελάδες στο στάβλο. Όπως λέει συχνά ο κύριος Πωλ, «εγώ δεν διευθύνω οίκο ευγηρίας· όλοι πρέπει να κερδίζουν το φωμί τους».

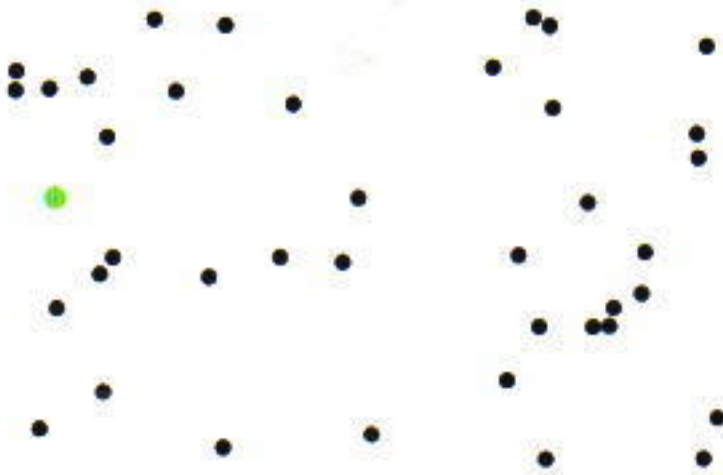
Όταν άρχισε τη δουλειά του, ο Μπαντ ήταν εξαιρετικά ανοργάνωτος. Έτρεχε πάνω-κάτω με σχεδόν τελείως τυχαίο τρόπο, πηγαίνοντας από αγελάδα σε αγελάδα. Ποια ήταν η εικόνα μιας τυπικής διαδρομής του;

Ας χρησιμοποιήσουμε το *Mathematica* για να βάλουμε 40 αγελάδες σε τυχαίες θέσεις στο λιβάδι.

```
cow := {Random[], Random[]}
cows := Table[cow, {40}];
```

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε ένα σημείο για κάθε αγελάδα και το παρουσιάζουμε σε γράφημα. (Έχω ξεχωρίσει τη φίλη μου Μπέσσυ, την οποία θα αντιμετωπίσουμε ιδιαίτερα, και τη χρωμάτισα πράσινη.)

```
bessi = First[cows];
herd = {{PointSize[.02], Point/@ cows},
  {PointSize[.03], RGBColor[0, 1, 0],
  Point[bessi]}};
Show[Graphics[herd]]
```

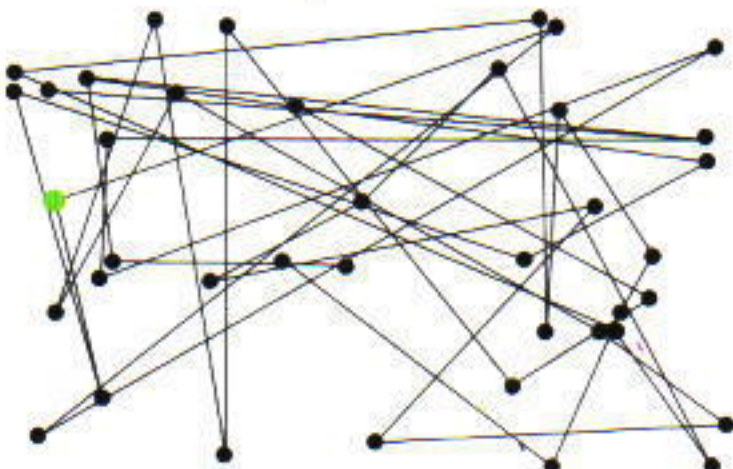


Και τώρα θα σας δείξω πόσο ανοργάνωτη ήταν η δουλειά του Μπαντ στην αρχή καταγράφοντας το μήκος της διαδρομής του μέσω μιας ειδικής συνάρτησης.

```
route = Line[Join[cows, {First[cows]}]];
pathlength[x_] := (Apply[Plus, Map[ $\sqrt{\# \cdot \#}$  &,
  x - RotateRight[x]]])
Print["Μήκος τυχαίας διαδρομής = ",
  pathlength[cows]];
Show[Graphics[{route, herd}]]
```

Το αποτέλεσμα που προέκυψε από το *Mathematica* ήταν:

Μήκος τυχαίας διαδρομής = 22.8515.

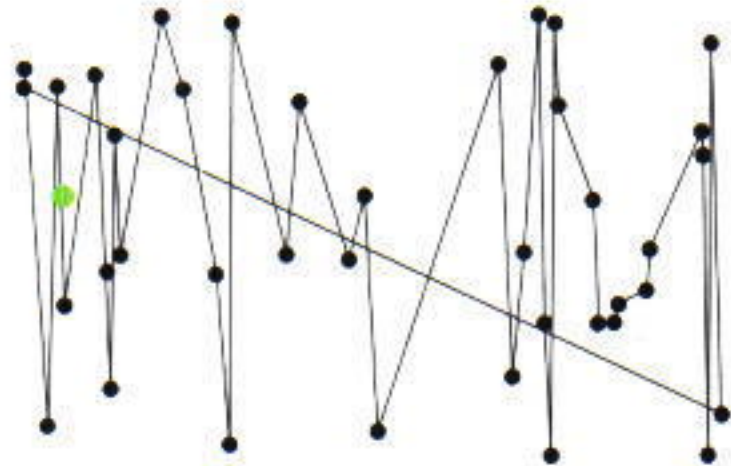


Έπειτα από έναν μήνα περίπου, ο Μπαντ σκέφτηκε ένα διαφορετικό σχέδιο: Αποφάσισε να κινείται από αγελάδα σε αγελάδα πηγαίνοντας από τα δυτικά προς τα ανατολικά και μετά ξανά πίσω στην αρχή. Με τον τρόπο αυτό μείωσε σημαντικά το μήκος της διαδρομής.

```
cows = Sort[cows];
route = Line[Join[cows, {First[cows]}]];
Print["Μήκος διαδρομής από δυτικά προς ανατολικά = ",
  pathlength[cows]];
Show[Graphics[{route, herd}]]
```

Το αποτέλεσμα που προέκυψε από το *Mathematica* ήταν:

Μήκος διαδρομής από δυτικά προς ανατολικά = 16.9239.

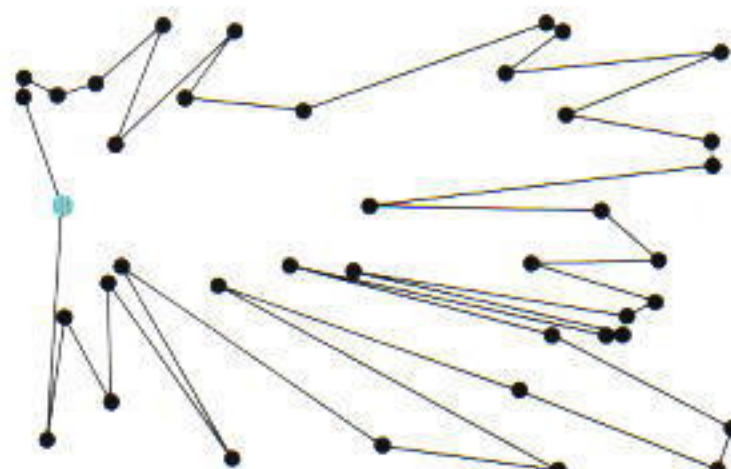


Ο Μπαντ, όμως, δεν ήταν ακόμη ικανοποιημένος. Αποφάσισε να επισκεφτεί τις αγελάδες ανάλογα με τη σειρά που τις έβλεπε καθώς έκανε έναν πλήρη κύκλο κυνηγώντας την ουρά του. Διάλεξε να εκτελέσει αυτή την 360° «σάρωση» από τη θέση της Μπέσσυ. Το αποτέλεσμα ήταν μια απλή κλειστή διαδρομή με ακόμη μικρότερο μήκος.

```
angle[a_, b_] := Apply[ArcTan, (b - a)]
cows = Complement[cows, {bessi}];
cows = Sort[cows, angle[bessi, #1] <=
  angle[bessi, #2]] &;
cows = Join[cows, {bessi}];
route = Line[Join[cows, {First[cows]}]];
Print["Μήκος απλής κλειστής διαδρομής = ",
  pathlength[cows]];
Show[Graphics[{route, herd}]]
```

Το αποτέλεσμα που προέκυψε από το *Mathematica* ήταν:

Μήκος απλής κλειστής διαδρομής = 9.97219.



Στις αρχές του προηγούμενου χρόνου, ο Μπαντ σκέφτηκε κάτι ακόμη εξυπνότερο. Είχε ανακαλύψει τελείως τυχαία ένα αξιοσημείωτο γεγονός σχετικά με τις αγελάδες. Μια μέρα που έκανε τρέχοντας το γύρο του κοπαδιού διαπίστωσε με μεγάλη έκπληξη ότι, από τη στιγμή που θα σηκωθούν οι αγελάδες της περιμέτρου και πάρουν το δρόμο προς το στάβλο, τότε ακολουθούν και όλες οι υπόλοιπες. Συνειδητοποίησε, έτσι, ότι δεν είναι ανάγκη να πηγαίνει σε όλες τις αγελάδες, αλλά αρκεί να ακολουθήσει μια διαδρομή γύρω από το κοπάδι. Αυτό μας οδηγεί σε ένα ιππολογιστικό πρόβλημα που, όπως μαντέψατε, είναι η καινούργια μας πρόκληση.

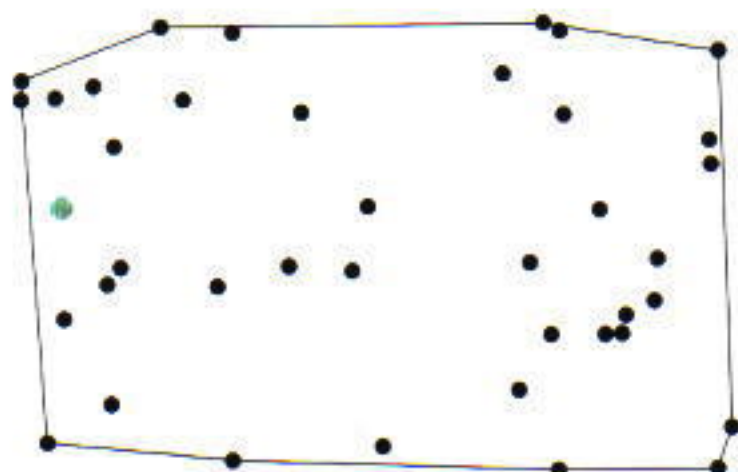
ΙΠΠΟΠΡΟΒΛΗΜΑ 10

Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα βρίσκει τη συντομότερη διαδρομή γύρω από ένα τυχαίο κοπάδι και θα ιππολογίζει το μήκος της.

Η συντομότερη διαδρομή γύρω από το κοπάδι έχει μήκος = 3.4436.

Μήκος διαδρομής

Το *Mathematica* είναι μια κατεξοχήν μαθηματική γλώσσα προγραμματισμού. Στα μαθηματικά τα σύνολα είναι αντικείμενα πάνω στα οποία εκτελούνται πράξεις. Στο *Mathematica* οι λίστες είναι σύνολα αντικειμένων πάνω στα οποία ορίζονται πράξεις. Οι μαθηματικοί αλγόριθμοι, ή δια-



δικασίες, μετασχηματίζονται εύκολα και με φυσικό τρόπο σε παραστάσεις ή συναρτήσεις του *Mathematica*. Ως παράδειγμα αυτού του φυσικού μετασχηματισμού από τα μαθηματικά στο *Mathematica*, ας κατασκευάσουμε τη συνάρτηση του μήκους μιας διαδρομής, την *pathlength*.

Μια διαδρομή στο επίπεδο είναι ένα διατεταγμένο σύνολο διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών.

```
path = {{x1, y1}, {x2, y2}, {x3, y3}, {x4, y4}};
```

Σκοπός μας είναι να γράψουμε μια συνάρτηση που θα δέχεται μια τυχαία διαδρομή και θα επιστρέφει το μήκος της, το οποίο ορίζεται ως το μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων που ενώνουν γειτονικά σημεία (το πρώτο και το τελευταίο σημείο θεωρούνται γειτονικά). Μας ενδιαφέρει το μήκος κλειστών διαδρομών.

Μπορούμε να ζευγαρώσουμε τα διαδοχικά σημεία πολύ εύκολα, «περιστρέφοντας» τη διαδρομή:

```
RotateRight[path]
```

```
{{x2, y2}, {x3, y3}, {x4, y4}, {x1, y1}}.
```

Στη συνέχεια, αφαιρούμε από την αρχική διαδρομή:

```
path - RotateRight[path]
```

```
{{x1 - x2, y1 - y2}, {x2 - x3, y2 - y3},  
{x3 - x4, y3 - y4}, {x4 - x1, y4 - y1}}.
```

Τώρα, για να βρούμε την απόσταση μεταξύ των γειτονικών σημείων, θα πρέπει να υψώσουμε στο τετράγωνο τις συντεταγμένες x, y όλων των ζευγών, να τις προσθέσουμε και να εξαγάγουμε τις τετραγωνικές ρίζες. Αυτό γίνεται μέσω μιας συνάρτησης που κάνει αυτό ακριβώς σε κάθε ζεύγος. Πρώτα, όμως, ας δούμε τι προκύπτει όταν εξαγάγουμε την τετραγωνική ρίζα του εσωτερικού γινομένου των συντεταγμένων ενός σημείου A του επιπέδου:

$$\sqrt{(x_1, y_1) \cdot (x_1, y_1)}$$

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Αυτό ακριβώς θα θέλαμε να εφαρμόσουμε σε καθένα από τα προηγούμενα ζεύγη, και το επιτυγχάνουμε με την εξής απεικόνιση:

```
temp = [Map[√#.# &, path - RotateRight[path]]]
```

$$\sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2}, \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2},$$

$$\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}, \sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2}.$$

Τέλος, προσθέτουμε τις αποστάσεις χρησιμοποιώντας την πράξη *Plus* (πρόσθεση):

```
Apply[Plus, temp]
```

$$\sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

$$+ \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2}.$$

Αυτή η ακολουθία μαθηματικών μετασχηματισμών ενσωματώνεται σε μια νέα συνάρτηση, την *pathlength*, η οποία γράφεται σε μία γραμμή:

```
pathlength[x_] := (Apply[Plus, Map[√#.# &, x - RotateRight[x]]])
```

Αυτό που μόλις περιγράψαμε ήταν ένα παράδειγμα δημιουργίας μιας προσωπικής συνάρτησης στο *Mathematica*. Παρατηρήστε ότι ποτέ δεν ασχοληθήκαμε με μεμονωμένα στοιχεία κάποιας λίστας. Επίσης, δεν υπάρχουν βρόχοι *Do*, *For* ή *While*. Η εκτέλεση πράξεων πάνω σε ολόκληρες λίστες είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα του συναρτησιακού προγραμματισμού. Ξεκινήσαμε από τη λίστα της αρχικής διαδρομής και μέσω θεμελιωδών συναρτήσεων του *Mathematica* τη μετασχηματίσαμε σε μήκος διαδρομής. Οι συναρτησιακοί μετασχηματισμοί είναι η ουσία του προγραμματισμού σε *Mathematica*. Όσοι ενδιαφέρονται περισσότερο για το θέμα μπορούν να ανατρέξουν στο *An Introduction to Programming with Mathematica*, των Gaylord, Kamin και Wellin, Εκδόσεις TELOS (<http://www.telospub.com>). 