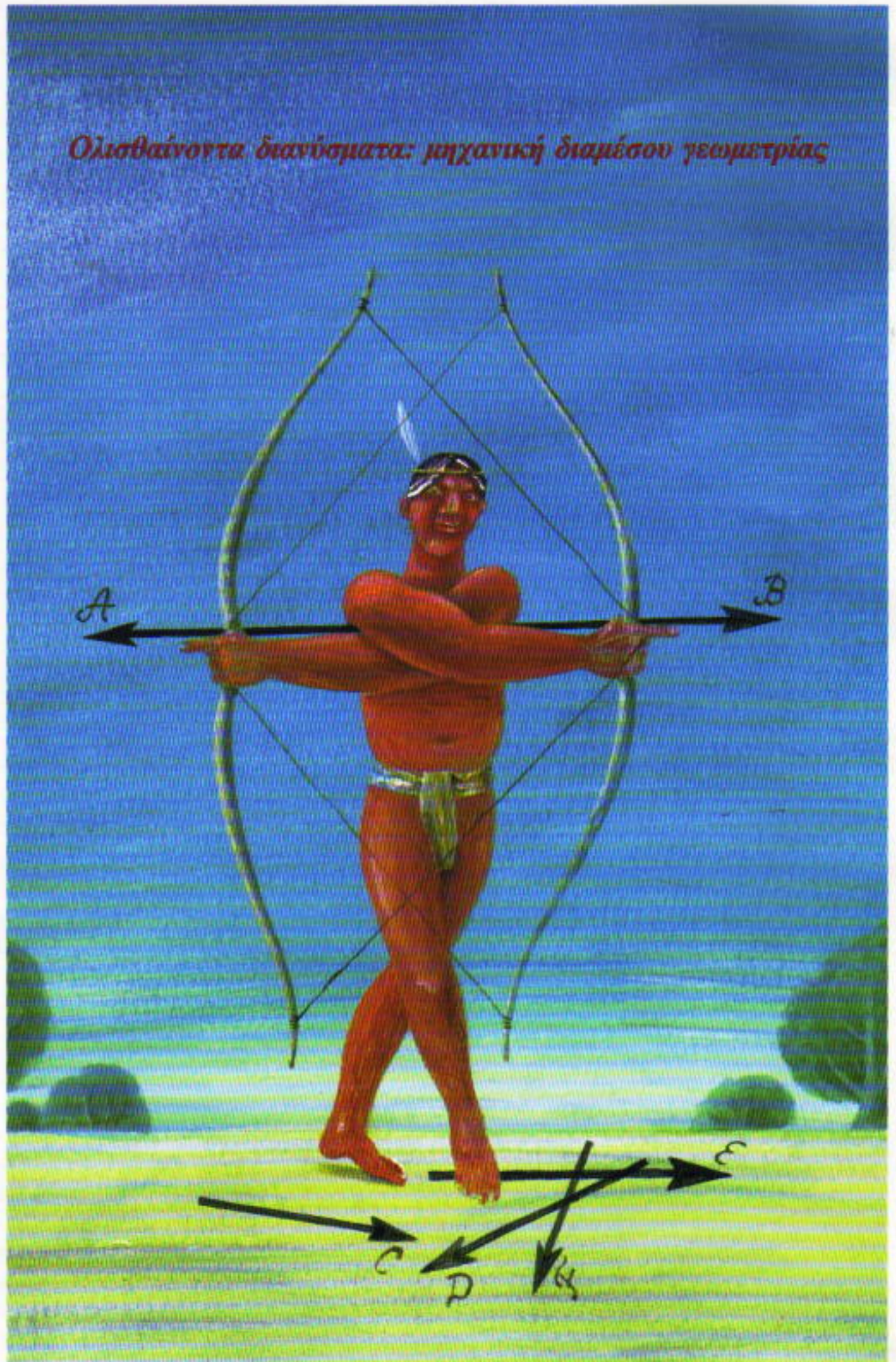


# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΪΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 2000  
ΤΟΜΟΣ 7 / ΤΕΥΧΟΣ 3  
2.300 ΔΡΧ.

*Ολισθαίνοντα διανύσματα: μηχανική διαμέσου γεωμετρίας*



- Πόσο πίθηκοι είμαστε;
- Απλά μαθήματα φυσικής για στρατηγούς
- Αρχές της θεωρίας στροβίλων
- Αναδρομή στην εξέλιξη των μαθηματικών: 1900-1950
- Η γέννηση των άστρων και η βαρύτητα
- Οι ανισότητες γίνονται ισότητες
- Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη
- Γκαζόζες, υπέρθερμα υγρά και θάλαμοι φυσαλίδων
- Ολίγα περί τριγώνου



Ελαιογραφία, 60 x 50 εκ., © 2000 Διοικητικό Συμβούλιο, Εθνική Πινακοθήκη, Ουάσιγκτον

*Σαλπιγκτές της αυτοκρατορικής φρουράς του Ναπολέοντα (1812/1814), του Theodore Gericault*

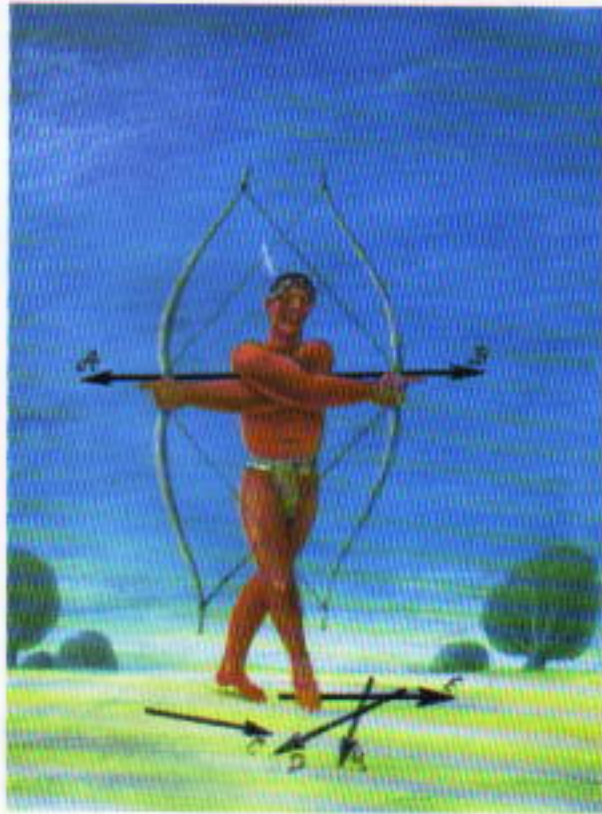
**ΠΑΡΟΤΙ ΜΕ ΤΟ ΝΤΥΣΙΜΟ ΤΟΥΣ ΔΕΙΧΝΟΥΝ ΝΑ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΑΙ** περισσότερο για επιδείξεις απ' ό,τι για μάχες, τα έφιππα μέλη της αυτοκρατορικής φρουράς αποτελούσαν μέσο επικοινωνίας και συνεννόησης κατά τη διάρκεια των ναπολεόντειων πολέμων. Αυτοί ήταν που σάλπιζαν τη διαταγή για έφοδο, διέδιδαν το παράγγελμα για υποχώρηση και εμπύχωναν το στράτευμα —εφόσον φυσικά κατάφερναν να ακουστούν. Έτσι, για να ανακαλύ-

ψετε πώς οι ατμοσφαιρικές ζώνες σιγής μπορεί και να καθόρισαν την τύχη της Ευρώπης στη μάχη του Βατερλώ, γυρίστε στο άρθρο «Απλά μαθήματα φυσικής για στρατηγούς» (σελίδα 60). Σ' αυτό θα βρείτε και μερικές έγκυρες πληροφορίες σχετικά με τις αιτίες και άλλων κυματικών φαινομένων όπως και την αιτιολόγηση γιατί κάποιες περιβαλλοντικές συνθήκες μπορούν να επηρεάσουν την άποψή μας για τον κόσμο.

# QUANTUM

ΜΑΪΟΣ / ΙΟΥΝΙΟΣ 2000

ΤΟΜΟΣ 7 / ΤΕΥΧΟΣ 3



Εικονογράφηση: Jose Garcia

Όταν οι άνθρωποι που «τείνουν χείρα βοήθειας» είναι πολλοί, δεν αποκλείεται να δείτε τις προσπάθειές τους να φέρνουν το αντίθετο αποτέλεσμα από το αναμενόμενο. Βέβαια, αυτή η περίπτωση δεν αναφέρεται στον τοξοβόλο που εικονίζεται στο εξώφυλλό μας: αυτός απλώς μοιάζει να έχει «μπλέξει τα μπράτσα του». Για ένα πιο τυπικό παράδειγμα του ότι «όπου λαλούν πολλοί κοκόροι αργεί να ξημερώσει», γυρίστε στη σελ. 24, στο άρθρο «Γεωμετρία ολισθαινόντων διανυσμάτων», και ανακαλύψτε πώς ένα «θηριοτροφείο» κατάφερε να σταματήσει τους τροχούς «της προόδου».

## ΑΡΘΡΑ

- 8 Ιστορία των μαθηματικών  
**Μαθηματικά: 1900-1950**  
*V. Tikhomirov*
- 17 Αστροφυσική  
**Ένα αστέρι γεννιέται**  
*V. Surdin*
- 24 Αντιπαλότητα  
**Γεωμετρία ολισθαινόντων διανυσμάτων**  
*Υ. Solovgon και A. Sosinskiy*
- 42 Υγρά σε περιδίνηση  
**Οι αρχές της θεωρίας στροβίλων**  
*N. Zhukovsky*

## ΜΟΝΙΜΕΣ ΣΤΗΛΕΣ

- 2 **Ο κόσμος των κβάντων**  
*Οι εντιμότετοι φίλοι μας*
- 7 **Σπαζοκεφαλιές**
- 23 **Πώς ρύνεται;**
- 32 **Στα πεδία της φυσικής**  
*Μαγνητικές αιχμές*
- 36 **Στο μαυροπίνακα I**  
*Ολύμπια προσπάθεια*
- 38 **Scripta manent**
- 40 **Καλειδοσκόπιο**  
*Περί τριγώνου*
- 49 **Βόητες στο Διαδίκτυο**  
*Εργαστήρια φυσικής ανά τον κόσμο*
- 53 **Αναδρομές**  
*Τα πειράματα των Frank και Hertz*
- 57 **Όπερ έδει δείξει**  
*Με κανόνα και διαβήτη (μέρος α')*
- 60 **Με λίγη φαντασία**  
*Απλά μαθήματα φυσικής για στρατηγούς*
- 64 **Στο μαυροπίνακα II**  
*Οι ανισότητες γίνονται ισότητες*
- 69 **Στο εργαστήριο**  
*Σχόλια στο φαινόμενο του βρασμού*
- 72 **Απαντήσεις, Υποδείξεις και Λύσεις**
- 78 **Πληροφορική**  
*Το μυρμήγκι του Langton*

## ΟΙ ΕΝΤΙΜΟΤΑΤΟΙ ΦΙΛΟΙ ΜΑΣ

**Η** ΠΑΛΑΙΟΑΝΘΡΩΠΟΛΟΓΙΑ, ίσως περισσότερο από κάθε άλλη επιστήμη, έχει μια υποτιμημένη εικόνα εξαιτίας της σπουδαιότητας νέων ανακαλύψεων. Είναι κάτι που εξυπηρετεί τα μέσα μαζικής ενημέρωσης, καθώς αρέσκονται στην κατά καιρούς δραματοποιημένη παρουσίαση ενός απολιθώματος το οποίο, όπως αναγγέλλουν, αναιρεί συμπεράσματα ή αιφνιδιάζει τους επιστήμονες. Μα αν όντως οι παλαιοανθρωπολόγοι βρίσκονταν μονίμως εκτός τόπου και χρόνου, τότε οι θεωρίες τους δεν θα μπορούσαν να επιβεβαιώνονται συνεχώς. Κάποτε εκνευρίστηκα τόσο πολύ από τέτοιου

είδους ανακοινώσεις και την ανεπάρκεια που απέδιδαν στις ικανότητες των παλαιοανθρωπολόγων να αναπτύσσουν ισχυρές θεωρίες για την ανθρώπινη εξέλιξη, που σε μια κρίση μαύρου χιούμορ πρότεινα την ανακοίνωση μιας εργασίας στα διεθνή συνέδρια φυσικής ανθρωπολογίας, με τίτλο «Πρωτοφανής νέα ανακάλυψη ανατρέπει όλες τις προηγούμενες θεωρίες για την ανθρώπινη εξέλιξη». Σε μια κρίση ακόμη πιο μαύρου χιούμορ, η κριτική επιτροπή αποδέχτηκε την πρόταση και μου επέβαλε να ετοιμάσω την ανακοίνωση.

Η εξέλιξη, η αναγνώριση πως όλες οι έμβιες μορφές συσχετίζονται μέσω κοινής καταγωγής και ότι οι γενετικές αλλαγές οδηγούν στην ποικιλομορφία της ζωής στη Γη, εί-

«Όντις έπλασε ο Θεός την Οικουμένη, το Ληξούρι και τόσους άλλους τόπους, είπε στο νου του: —Α, τώρα δε μου μένει πάρι να πλάσω, γιε μου, και τ'ς ανθρώπους. Και κει που εκράτειε τον Αδάμ στερνόνε του 'πε: —Συ να 'σαι, Αδάμ, το ζω του ζώνε.

Ήγουν, να 'σαι καλύτερος απ' όλα· να 'χης το γαϊδαρο αποκάτουθέ σου, να θρέφesai μπαρμπούνι και τριόλα, να 'ναι οι λαγγάδες όλες εδικές σου, οι σκύλοι ταπεινοί να σε υπακούνε και για σένανε οι κόπτες να γεννούνε.

Βάνω στην εξουσία σου τα σπανάκια, αν θέλεις ναν τα κάνης τσιγαρίδι· για σένανε φυτεύω ραπανάκια· εσύ να τρως το μήλο και το απίδι· όλα ναν τα 'χης, χωρίς να κοπιάζης· και σ' αγαπάω πολύ, γιατί μου μοιάζεις!»

—Ανδρέας Λασκαράτος

ναι μια από τις επαναστατικές προόδους στον τρόπο που οργανώνουμε τις γνώσεις μας· αποτελεί αδιαμφισβήτητη την επαναστατική πρόοδο στη βιολογία. Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι η εξέλιξη εξηγεί την καταγωγή μας και την ετερογένειά μας, ή ίσως και εξαιτίας αυτού, στις μέρες μας η εξέλιξη αμφισβητείται ευρέως. Περισσότερο δυσάρεστη για κάθε δύσπιστο είναι η υπονοούμενη σχέση μας με τα άλλα ζώα —φαίνεται να υπονομεύει αυτό που γνωρίζουμε όλοι μας: ότι οι άνθρωποι είναι μοναδικοί και ξεχωριστοί. Δυσκολότερη ακόμη είναι η αποδοχή αυτού που μαθαίνουν τα παιδιά στο σχολείο, ότι «ο άνθρωπος κατάγεται από τους πιθήκους». Αλλά όντως αληθεύει αυτό;

Πρόσφατα, παρακολουθώντας μια χολιγουντιανή τηλεοπτική εκδοχή της δίκης του Scopes\*, μου έκανε εξαιρετική εντύπωση η απόδοση της πανηγυρικής ατμόσφαιρας στην πόλη, έξω από το δικαστήριο. Στο φόντο φαινονταν πλακάτ και αφίσες που διακήρυσσαν ότι «ο άνθρωπος δεν εξελίχθηκε από τους πιθήκους». Και το αποκορύφωμα της γελοιοτητας, μια σκηνή του πανηγυριού παρουσίαζε ένα χιμπαντζή να καπνίζει κάτω από ένα πανό που έγραφε: «Ο Δαρβίνος έκανε λάθος, οι πιθήκοι εξελίχθηκαν από τον άνθρωπο!» Σήμερα, κοντά έναν αιώνα μετά τη δίκη, αναρωτιέμαι πόσο γελοίο είναι το μήνυμα του πανό. Όχι η πρώτη φράση του, μα η δεύτερη. Ποια ακριβώς είναι η σχέση μας με τους ανθρωποειδείς πιθήκους\*\*;

\* Ιστορική δίκη που διεξήχθη το 1925 στο Ντέιτον, της Πολιτείας του Τενεσί, και κατεγράφη ως «η δίκη των πιθήκων». Αιτία υπήρξε η παραβίαση της Διάταξης Butler από τον John Scopes. Σύμφωνα με τη διάταξη, απαγορευόταν να διδάσκεται στα δημόσια σχολεία του Τενεσί οποιαδήποτε θεωρία αρνείται τη Θεία Δημιουργία του ανθρώπου όπως περιγράφεται στη Βίβλο. Το διάταγμα δεν απαγόρευε τη διδασκαλία της εξέλιξης των φυτών και των ζώων, αλλά μόνο τη διδασκαλία καταγωγής του ανθρώπου από μια κατώτερη τάξη ζώων. Ο J. Scopes ήταν μαθηματικός και δίδαξε το μάθημα των φυσιολογικών για δύο εβδομάδες αναπληρώνοντας τον αντίστοιχο ασθενούντα καθηγητή. Καταδικάστηκε σε χρηματικό πρόστιμο 200 δολαρίων. (Σ.τ.ε.)

Για να κατανοήσετε πώς είναι να ερευνά ένας εξελικτικός βιολόγος το παρελθόν, και τις απογοητεύσεις βέβαια που δοκιμάζει, φανταστείτε πως τοποθετείτε δύο καθρέφτες τον ένα αντίκρυ στον άλλο. Αν σταθείτε ανάμεσά τους, στη σωστή θέση, βλέπετε στον πρώτο καθρέφτη τον εαυτό σας ακριβώς όπως στέκεται μπροστά του. Θα δείτε ακόμη ένα δεύτερο μικρότερο είδωλο του εαυτού σας να κατοπτρίζεται από τον δεύτερο καθρέφτη στον πρώτο, και ένα ακόμη μικρότερο είδωλο να κατοπτρίζεται από τον πρώτο στον δεύτερο και ξανά πίσω στον πρώτο, κ.ο.κ. Οι καθρέφτες δεν είναι τέλει, και υποθέστε πως το πρώτο και μεγαλύτερο είδωλο είναι λίγο διαφορετικό από σας. Το αμέσως μικρότερό του θα είναι περισσότερο διαφορετικό, και το μικρότερο αυτού ακόμη πιο διαφορετικό! Αλλά όταν οι διαφορές αυτές γίνονται αρκετές ώστε να καθιστούν τα είδωλα ενδιαφέροντα, αυτά πλέον είναι τόσο μικρά που δυσκολεύεστε να τα διακρίνετε. Τούτες οι μη εστιασμένες εικόνες συνιστούν την ένδειξη που διαθέτουμε για το τι άλλαξε —την αφετηρία για την εξελικτική επιστήμη. Από καιρού εις καιρόν εμφανίζεται και κάποια καθαρή εικόνα —μια «νέα ανακάλυψη». Όμως, όσο σημαντικές κι αν είναι οι εικόνες αυτές, δεν μας δείχνουν την εξέλιξη· μας δείχνουν μόνο τις περιοχές που εξηγεί η εξέλιξη. Η πρόοδος στην κατανόηση της ανθρώπινης εξέλιξης δεν θα μπορούσε να απορρέει μόνο από την περιορισμένη, στενή και αποσπασματική θέαση του παρελθόντος. Οι προσδοκίες μας είναι πολύ σημαντικότερες από τις ανακαλύψεις —οι οποίες μπορεί να επιβεβαιώνουν τις προσδοκίες ή να τις αποκλείουν. Δεν είμαι ο πρώτος που επισημαίνει ότι δεν βλέπουμε τα πράγματα όπως είναι, αλλά όπως φαίνονται από τη δική μας σκοπιά.

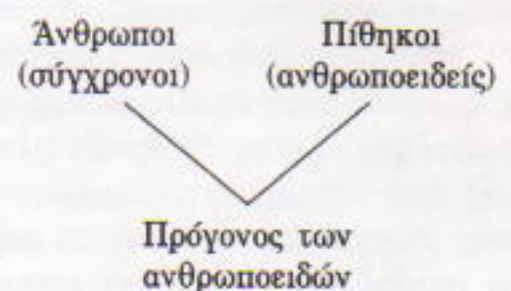
Η αναζήτηση του παρελθόντος μας εγείρει κάποια φιλοσοφικά ζητήματα, διότι εμπεριέχει το θεμελιώδες

\*\* Στη συνέχεια του παρόντος άρθρου, για λόγους οικονομίας και μόνο, θα αναφέρουμε τους *ανθρωποειδείς πιθήκους* (αυτή ως γνωστόν είναι η ορθή απόδοση του όρου *apes*) απλά ως *πιθήκους*. (Σ.τ.ε.)

ερώτημα της θέσης του ανθρώπινου είδους μέσα στη φύση. Επίσης εγείρει το ζήτημα της ταξινόμησης, του τρόπου δηλαδή κατάταξης των οργανισμών σύμφωνα με το πόσο στενή είναι η σχέση τους. Η ταξινόμηση αποσκοπεί στην απεικόνιση της εξελικτικής διαδικασίας —συνήθως υποτίθεται πως τα περισσότερο όμοια σε μορφή είδη έχουν στενότερη συγγένεια. Ωστόσο, τον προηγούμενο αιώνα μάθαμε ότι οι μορφολογικές ομοιότητες μπορεί να είναι ένας παραπλανητικός οδηγός όσον αφορά τη συγγένεια, και πως στην προσπάθειά μας να αντιληφθούμε τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά για την κατάταξη είναι εύκολο να ξεχάσουμε ότι η ταξινόμηση δεν συνιστά κατάταξη των ομοιοτήτων αλλά γενεαλογία των ειδών. Τα ταξινομικά ονόματα και η διευθέτησή τους σε δενδρογράμματα αναπαριστούν ιστορικές σχέσεις και όχι ομοιότητες —όπως οι όροι της ανθρώπινης συγγένειας (πατέρας, εξάδελφος) δείχνουν τη γενεαλογία των ατόμων και όχι το κατά πόσο μοιάζουν. Αλλά όπως με κάθε υποπροϊόν της επιστημονικής σκέψης, η ταξινόμηση πιθανόν απεικονίζει σε σημαντικό βαθμό τις προκαταλήψεις και τις προλήψεις των ταξινομιστών. Κι όταν αντικείμενο της ταξινομικής γίνεται ο άνθρωπος, η ταξινόμηση μετατρέπεται σε εργαλείο εδραίωσης της σημαντικής θέσης μας και της υπεροχής μας, διχάζοντας έτσι την ανθρωπότητα και επιβάλλοντας μια μορφή αντιπαλότητας ανάμεσα «σε μας» και «τους άλλους». Η εκτίμησή μας για τη σπουδαιότητα και τη μοναδικότητα του ανθρώπινου είδους έχει σταθεί εμπόδιο στο να κατανοήσουμε τη θέση μας μέσα στη φύση και να αντιληφθούμε την αληθινή σχέση μας με τα άλλα είδη του πλανήτη.

«Ο άνθρωπος και οι πιθήκοι» είναι μια έκφραση της ταξινομικής σχέσης αλλά και μια ατυχής φράση εξαιρετικά ανθρωποκεντρική. Οι μεγαλόσωμοι πιθήκοι —ο γορίλλας και ο χιμπαντζής της Αφρικής, ο ουραγκοτάγκος και ο γιγαντοπίθηκος της νοτιανατολικής Ασίας (που πρόσφατα εξέλειψε)— για μεγάλο διάστημα θεωρούνταν εξελικτικά ο αντίποδας

των ανθρώπων· όποτε η περιγραφή τους γινόταν με όρους ανθρώπινων χαρακτηριστικών, προβάλλονταν ως σχεδόν αποτυχημένες προσπάθειες να γίνουν άνθρωποι. Ο ισχυρισμός ότι «ο άνθρωπος κατάγεται από τους πιθήκους» υπονοεί την υποτιμητική γνώμη μας για τούτα τα δυστυχή πρωτεύοντα που δεν εξελίχθηκαν ποτέ. Ωστόσο, συνειδητοποιώντας ότι οι άνθρωποι δεν κατάγονται από τους ζώντες σήμερα πιθήκους, αυτή η πρόταση μπορεί απλώς να σημαίνει ότι τούτα τα μεγαλόσωμα πρωτεύοντα έμοιαζαν στον κοινό μας πρόγονο (βλ. Σχήμα 1)· ότι καθώς η εξέλιξη του ανθρώπου συνεχιζόταν έως τα σημερινά της επίπεδα, η εξέλιξη για τους πιθήκους σταμάτησε πριν καν της δοθεί η ευκαιρία να αρχίσει. Είμαστε τα άπτερα δίποδα με τους ανεπτυγμένους εγκεφάλους πάνω στα άτριχα σώματά μας· με τα χέρια μας απελευθερωμένα από τις απαιτήσεις της μετακίνησης ώστε να μεταφέρουμε και να χρησιμοποιούμε εργαλεία για να εκμεταλλευόμαστε το περιβάλλον. Αντιθέτως, εκείνα είναι οι κτηνώδεις, τριχωτοί, με μακριά χέρια ένοικοι των δέντρων, συνεχιστές της φήμης του Ταρζάν, που ποτέ δεν κατάφεραν να «προβιβαστούν». Κι αυτό οι ταξινομιστές το απεικονίζουν στην κατάταξη των ευμεγέθων πρωτευόντων με τη διακλάδωση σε *ανθρωπίδες* και *πονγκίδες* (τις δύο οικογένειες των ανθρωποειδών πρωτευόντων). Οι ανθρωπίδες αποτελούνται από τους ανθρώπους και όλους τους προγόνους μας ως το διαχωρισμό με τους πιθήκους· οι πονγκίδες αποτελούνται από τους πιθήκους και όλους τους προγόνους τους έως το διαχωρισμό με τους ανθρώπους. Έτσι, με αυτή την ξεκάθαρη κατάταξη, διαχωριζόμαστε και



Σχήμα 1

Η κλασική δαρβινική άποψη της καταγωγής του ανθρώπου.

τυπικά απ' αυτούς —και γιατί όχι, αφού αληθώς είμαστε διαφορετικοί;

Όλοι γνωρίζουν ότι υπάρχει χάσμα ανάμεσα στους ανθρώπους και τους πιθήκους, μια σειρά σταθερών διαφορών που βοηθά στη σκιαγράφηση του ανθρώπινου είδους. Μερικές από τις διαφορές αυτές είναι μοναδικές για μας. Για παράδειγμα, είμαστε δίποδοι (όρθια στάση του σώματος, κίνηση με τα κάτω άκρα)· οι εγκέφαλοί μας είναι ανεπτυγμένοι και μας επιτρέπουν σύνθετους τρόπους συμπεριφοράς (κοινωνικές αλληλεπιδράσεις, γλώσσα, καταναμημένοι ρόλοι)· έχουμε αδύναμα και σχετικά άτριχα σώματα, οπότε βασιζόμαστε στη γνώση και την τεχνολογία· διαθέτουμε ικανότητες και παύουργία για να μπορούμε να επιβιώσουμε και να διατηρηθούμε στη ζωή. Άλλες διαφοροποιήσεις ανακύπτουν από τις κοινωνίες των πιθήκων. Περιλαμβάνουν ομοιότητες στο ενδιαίτημα (πολλοί πιθήκοι ζουν σε πυκνό τροπικό δάσος), ομοιότητες στο μέγεθος και τη μορφή (για παράδειγμα, πολύ επιμηκυμένα άνω άκρα σε σχέση με τα κάτω, σπονδυλική στήλη με βραχείς οσφυϊκούς σπονδύλους), παράξενο μείγμα δεινόσαυρων κινήσεων (αναρρίχηση, αιώρηση με τα χέρια, σφιχτή λαβή με τα πόδια, ενεργητική αιώρηση του σώματος με εναλλακτική μετάθεση των χεριών —βραχιόνωση), εδαφία προσαρμογή που φανερώνει πως αυτά τα πρωτεύοντα είναι ικανά για βάδιση και με τα πόδια και με τα τέσσερα άκρα (χρησιμοποιώντας τις αρθρώσεις του ταρσού και τις γροθιές τους παρά τις παλάμες των άνω άκρων).

Καθώς η ταξινομική αντιμετώπιζει αυτά τα γεγονότα με έναν τυπικό, συστηματικό τρόπο, το αποτέλεσμα μοιάζει αδιαμφισβήτητο. Αλλά εδώ αναφέρεται ένα πρόβλημα. Η ταξινομική αντίθεση μεταξύ ανθρωπιδών και πονγκιδιών αφορά στενά συσχετιζόμενα είδη τα οποία ονομάζουμε αδελφές ομάδες. Ο όρος σημαίνει αυτό που υποδηλώνει: ομάδες οι οποίες συγγενικά συνδέονται στενά και μοιράζονται μια κοινή και άμεση καταγωγή. Εσείς και ο αδελφός σας, ας πούμε, αποτελείτε παράδειγμα αδελφής ομάδας που περιλαμβάνει

δύο άτομα. Αλλά, εσείς και ο εξαδελφός σας δεν αποτελείτε αδελφή ομάδα, διότι με τον αδελφό σας μοιράζεστε μια πιο πρόσφατη καταγωγή απ' ό,τι με τον εξαδελφό.

Το γεγονός ότι ο κοινός πρόγονος του ανθρώπου και του πιθήκου δεν ήταν ούτε άνθρωπος ούτε πίθηκος έχει γίνει αντιληπτό από πολύ καιρό (αν και η λαϊκή αντίληψη εξακολουθεί να θεωρεί πως καταγόμαστε από τους πιθήκους). Όμως το πρόβλημα δεν είναι αυτό· το πρόβλημα πηγάζει από την έρευνα της τελευταίας εικοσαετίας η οποία δείχνει ότι οι άνθρωποι δεν είναι αδελφή ομάδα των πιθήκων! Μεγάλο μέρος αυτής της έρευνας ανήκει στην παλαιοντολογία. Συγκεκριμένα, στρέφεται γύρω από την ανάλυση και την ερμηνεία ενός απολιθώματος πρωτεύοντος που ονομάζεται Ραμαπιθήκος και χρονολογείται από 10 ως 14 εκατομμύρια έτη πριν —ένα πρωτεύον που κάποτε υποθέταμε πως ανήκε στους ανθρωπίδες επειδή το θεωρούσαμε μοναδικό πρόγονο των ανθρώπων.

Η σχέση του Ραμαπιθήκου με τη γραμμή που οδήγησε στον άνθρωπο (βλ. Σχήμα 2) προσδιορίστηκε αρχικά από τη μελέτη των χαρακτηριστικών των υπολειμμάτων σιαγόνων και δοντιών που ανακαλύφθηκαν στα όρη Σιβάλικ της ηπειρωτικής Ινδίας, λίγα χρόνια μετά τη δίκη του Scopes! Όταν βρέθηκαν τα πρώτα απολιθωμένα οστά και δόντια του Ραμαπιθήκου, θεωρήθηκαν υπολείμματα του ανθρώπινου προγόνου, διότι ταίριαζαν με τη δαρβινική θεωρία για την προέλευση του ανθρώπου.

Ο Δαρβίνος ενέκυψε σε αυτά που θεωρούσε ως τα τέσσερα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του ανθρώπινου είδους: τη δίποδη στάση, τη χρήση ερ-

γαλείων, τη βράχυνση των κυνοδόντων και την αύξηση του μεγέθους του εγκεφάλου. Υποστήριξε πως οι πρώτοι άνθρωποι υπήρξαν αποτέλεσμα της εδαφικής προσαρμογής και της διαιτητικής αλλαγής (από τη διατροφή με φύλλα και καρπούς στο κυνήγι). Στην αλυσίδα των αιτιολογήσεών του, η χρήση των εργαλείων κατέστη σημαντική για την απόκτηση λείας (τότε σμικρύνθηκαν οι κυνοδόντες)· το βάδιση στα δύο άκρα απελευθέρωσε τα χέρια ώστε να χρησιμοποιούν εργαλεία και όπλα· και οι πολυσύνθετες γνώσεις τις οποίες απαιτούσε η τεχνολογία (και η ανάγκη για κοινωνική εξουσία που δημιούργησε αυτή) οδήγησαν στις αλλαγές του εγκεφάλου.

Τα υπολείμματα λοιπόν του πρώτου Ραμαπιθήκου διέθεταν τους μικρούς κυνοδόντες που απαιτούσε το μοντέλο του Δαρβίνου —κατά το οποίο η λειτουργία της κοπής μέσω των κυνοδόντων αντικαταστάθηκε με την κοπή μέσω εργαλείων— για την περίοδο γέννησης του ανθρώπου. Και καθώς ανακαλύπτονταν όλο και περισσότερα υπολείμματα του Ραμαπιθήκου, γίνονταν προσπάθειες να καταδειχτεί πως και αυτά ταίριαζαν στο μοντέλο του Δαρβίνου —μέχρι σημείου να αρχίσει έρευνα για στοιχεία των πέτρινων εργαλείων που «πρέπει» να κατασκεύαζαν αυτοί οι πρώτοι ανθρωπίδες. Τόση ήταν η υπερίσχυση της θεωρίας έναντι των στοιχείων, ώστε τα ατελή υπολείμματα του Ραμαπιθήκου ήταν «γνωστά» ως αυτά των πρώτων ανθρωπιδών —δεδομένου ότι ταίριαζαν με τη δαρβινική θεωρία για την προέλευση των ανθρωπιδών.

Κάτι άλλο σημαντικό εκείνο τον καιρό σε σχέση με τον Ραμαπιθήκο ήταν η υπόδειξη πως η γραμμή που οδηγεί στον άνθρωπο έφτανε πολύ μακριά στο παρελθόν· πως οι πρόγονοι των ανθρώπων ήταν παρόντες στα μέσα της Μειόκαινης περιόδου, τουλάχιστον 14 εκατομμύρια χρόνια πριν, πολύ νωρίτερα από τη διάσχιση μεταξύ των ζώντων ειδών των πιθήκων. Η περίπτωση του Ραμαπιθήκου έμοιαζε να δείχνει αυτό που και οι συγκριτικοί ανατόμοι θεωρούσαν δεδομένο: ότι οι άνθρωποι είναι



Σχήμα 2

Η συμβατική κατάταξη.

η αδελφή ομάδα όλων των πιθήκων. Τούτη την αντίληψη την άλλαξαν δύο ανακαλύψεις — η μία κάποιων απολιθωμάτων, η άλλη σε ένα εργαστήριο γενετικής— και η θεώρηση πως η ταξινόμηση σκοπό έχει να προβάλλει τη γενεαλογία και όχι απαραίτητως την ομοιότητα.

Το πρόβλημα αναδύθηκε όταν βρέθηκαν σχεδόν πλήρη υπολείμματα του Ραμαπιθήκου. Τα καλύτερα διατηρημένα δείγματα έδειξαν ότι οι προηγούμενες ερμηνείες είναι λανθασμένες και ότι πραγματική συγγένεια αυτού του πανάρχαιου ασιατικού πρωτεύοντος δεν υπάρχει με τους ανθρώπους αλλά με τους ασιατικούς πιθήκους, όπως οι ζώντες σήμερα ουραγκοτάγκοι. Οι ομοιότητες με τους ανθρώπους παρέμεναν ουσιαστικές, αλλά εξεταζόμενες μέσα στο πλαίσιο των πλήρων δειγμάτων κατέστη φανερό ότι τα όμοια χαρακτηριστικά απεικόνιζαν την ανατομία του κοινού προγόνου όλων των πιθήκων και των ανθρώπων· δεν αποτελούσαν χαρακτηριστικά που τα μοιράζονταν ο Ραμαπιθήκος και ο άνθρωπος εξαιτίας μιας ειδικής σχέσης τους. Μπορούμε βέβαια να μελετήσουμε το θέμα από τη σκοπιά του ποιος απέκλινε πρώτος. Η πρότερη σκέψη ήταν πως πρώτοι απέκλιναν οι άνθρωποι, κι έτσι απετέλεσαν την αδελφή ομάδα όλων των ασιατικών και αφρικανικών ειδών πιθήκων. Τα πιο πλήρη απολιθωμένα υπολείμματα του Ραμαπιθήκου δείχνουν ότι πρώτοι απέκλιναν οι ουραγκοτάγκοι (βλ. Σχήμα 3) και ότι αυτοί αποτελούν την αδελφή ομάδα των αφρικανικών πιθήκων (χιμπαντζήδες και γορίλλες) και των ανθρώπων.

Η πρόσθετη ένδειξη για τη σχέση ανάμεσα σε πιθήκους και ανθρώπους βασίζεται σε μια αρκετά διαφορετική πηγή — τις γενετικές συγκρίσεις των ζώντων ειδών. Αρχικά, μερικές δεκαετίες πριν, οι γενετικές σχέσεις εκτιμούνταν έμμεσα από τις μελέτες των γονιδιακών προϊόντων, όπως οι πρωτεΐνες. Αυτή η έρευνα λοιπόν έδειξε πως οι ουραγκοτάγκοι σχετίζονταν εξίσου με τους αφρικανούς πιθήκους και τους ανθρώπους· επομένως, απέκλιναν πρώτοι. Ο συγκεκριμένος διαχωρισμός συνέβη χρονικά

περίπου την εποχή του Ραμαπιθήκου, άρα αυτός δεν μπορεί να ανήκε στους ανθρώπιδες. Επειδή τούτα τα αποτελέσματα έρχονταν σε αντίθεση με την αποδεκτή ερμηνεία ότι οι Ραμαπιθήκοι ήταν ανθρώπιδες, πολλοί παλαιοανθρωπολόγοι επέμειναν σε αυτή, διότι γνώριζαν καλύτερα τις δικές τους πηγές δεδομένων. Οι γενετιστές ανθρωπολόγοι, πάλι, επέμειναν στα συμπεράσματα της γενετικής, την οποία γνώριζαν καλύτερα, και έτσι ξεκίνησε μια μακροχρόνια έχθρα. Στις μέρες μας αποτελεί ρουτίνα η άμεση σύγκριση των δομών του DNA (δηλαδή, η ακριβής ακολουθία των ζευγών βάσεων στο μόριο του DNA) για την εξακρίβωση της σωστής σειράς απόκλισης. Σήμερα, μπορούμε με επαρκή βεβαιότητα να προσδιορίσουμε από μια ομάδα τριών ειδών ποια δύο είδη απέκλιναν περισσότερο πρόσφατα (δηλαδή, ποια δύο είδη είναι αδελφά).

Η μεγάλη έκπληξη, λοιπόν, συνίσταται στο ότι το αδελφό προς τους ανθρώπους είδος δεν είναι ούτε η ομάδα των μεγαλόσωμων πιθήκων (βλ. Σχήμα 1), όπως προτείνει η ταξινομική, ούτε η ομάδα των αφρικανικών πιθήκων (χιμπαντζήδες και γορίλλες), όπως υπέδειξαν τα πρώτα γενετικά δεδομένα· σχεδόν με βεβαιότητα, είναι μόνο ο χιμπαντζής (βλ. Σχήμα 3). Για την αδελφή ομάδα των ανθρώπων και των χιμπαντζήδων, ο στενότερος συγγενής είναι ο γορίλλας. Ο μεγαλόσωμος ασιατικός πίθηκος, ο ουραγκοτάγκος, αποτελεί την αδελφή ομάδα και των τριών αυτών αφρικανικών πρωτευόντων.

Η γενετική και η παλαιοανθρωπολογία έχουν ιστορία αντικρουόμενων ερμηνειών για την εξέλιξη, οι οποίες συχνά οδήγησαν σε ισχυρι-



Σχήμα 3  
Η τρέχουσα κατάταξη.

σμούς του τύπου «οι δικές μου ενδείξεις είναι καλύτερες από τις δικές σου». Ένα όμως είναι βέβαιο: το καλύτερο αποτέλεσμα προκύπτει όταν καθεμιά από τις δύο επιστήμες δρα ως ανεξάρτητος ελεγκτής των υποθέσεων που διατυπώνει η άλλη. Μέσα από αυτή τη θεώρηση οδηγούμαστε σε ξεκάθαρες προβλέψεις ότι οι γενετικές σχέσεις ανάμεσα στα ζώνα είδη ερμηνεύονται από το αρχείο απολιθωμάτων της Αφρικής. Για παράδειγμα, προσδοκούμε η ανατομία του γορίλλα να εμφανίζει κοινά γνωρίσματα με την προγονική κατάσταση των αφρικανικών ειδών. Ακόμη, μπορούμε να εκτιμήσουμε τη χρονική στιγμή διαχωρισμού του ανθρώπου από το χιμπαντζή (το πόσο πρόσφατη είναι)· μια τρέχουσα εκτίμηση μέσω μελέτης του μιτοχονδριακού DNA καταλήγει στα 5-7 εκατομμύρια έτη. Η προσεκτική ανάγνωση του αρχείου των απολιθωμάτων μάς πείθει πως αυτές οι προβλέψεις μπορούν να επιβεβαιωθούν.

Και λοιπόν, τι σημαίνουν όλες αυτές οι λεπτομέρειες για το γενικότερο ερώτημα του πώς (και του γιατί) οι άνθρωποι σχετίζονται με τους πιθήκους; Θα πρέπει να τονίσω ότι, κατά την ταξινόμηση, όλα τα κατατασσόμενα μέλη πρέπει να μοιάζουν με μια οικογένεια που παίρνει θέση για τη χριστουγεννιάτικη φωτογραφία: κανείς δεν πρέπει να μείνει απ' έξω. Οι ταξινομικές ομάδες, είτε αποτελούνται από τα μέλη της οικογένειάς σας είτε από τα είδη ένα εκ των οποίων είναι και το ανθρώπινο, πρέπει να είναι *μονοφυλετικές*· να αποτελούνται από τον πρόγονο και όλους τους απογόνους του. Παραλείποντας κάποια απολωλότα πρόβατα της ομάδας, η εικόνα μπορεί να γίνεται περισσότερο αποδεκτή αλλά ταξινομικά είναι λανθασμένα. Για την ανθρώπινη οικογένεια είναι εύκολη η δημιουργία μιας μονοφυλετικής ομάδας — αρκεί να συμπεριλάβουμε όλους τους εν ζωή ανθρώπους. Εντάξει για μας, αλλά ποιοι άλλοι ανήκουν «στην παρέα μας»; Το γνωρίζουμε: οι πίθηκοι.

Εξετάζοντας όμως αυτό τον όρο υπό το φως των εξελικτικών σχέσεων όπως τις κατανοούμε τώρα, δεν

αναφέρεται πλέον σε μια μονοφυλετική ομάδα. Δεν υπάρχει οικογένεια που να αποτελείται μόνο από πιθήκους, ούτε υφίσταται ισχύων όρος σε κανένα ταξινομητικό σύστημα που να αναφέρεται σ' αυτούς και μόνο. Η απαίτηση ότι κανένας από την οικογένεια δεν πρέπει να παραλειφθεί σημαίνει πως και οι άνθρωποι πρέπει να συμπεριληφθούν! Αλλιώς, θα ήταν σαν να έβγαζες μια φωτογραφία της οικογένειάς σου με τα αδέρφια, τους γονείς, τις γιαγιάδες, τους θείους και τις θείες και όλα τα ξαδέλφια σου, με εσένα απόντα. Συνεπώς, η θέση μας στη φύση και η πραγματική σχέση ανθρώπων και πιθήκων τώρα γίνεται φανερή: Για να αποτελούν οι πίθηκοι μονοφυλετική ομάδα, πρέπει να συμπεριληφθούν σ' αυτήν και οι άνθρωποι. Αν υπάρχει ταξινομητική ομάδα που να συμπεριλαμβάνει πιθήκους και ανθρώπους, σημαίνει πως και εμείς είμαστε πίθηκοι, με κάθε πιθανή σημασία της λέξης.

Από τούτη την ευμετάβλητη προοπτική για το «ποιοι είναι οι εντιμότεροι φίλοι μας» προέρχεται το κέρδος μιας βαθιάς επίγνωσης του εαυτού μας. Βάσει των γενεαλογικών σχέσεων, είμαστε πίθηκοι, αν και αποτελούμε μια πολύ ιδιαίτερη κατηγορία τους. Αυτό που είμαστε δεν μας έκανε η προέλευση του ανθρώπου· ούτε λόγος της μοναδικότητάς μας είναι η γενεαλογία μας. Από το ξεκίνημά μας ακολουθήσαμε ένα μονοπάτι που μας οδήγησε σε μια σπάνια επιτυχία, άγνωστη στον πλανήτη πριν από μας και, απ' όσο γνωρίζουμε, χωρίς ταίρι στο κοντινό σύμπαν μας. Αν υπάρχει κάτι που πρέπει να ανακαλύψουμε για το είδος μας από τη θολή προϊστορία του, είναι τα βήματα που έκανε σε αυτό το μονοπάτι και όχι το σημείο απ' όπου το μονοπάτι ξεκίνησε.

—Milford H. Wolpoff

Ο Milford H. Wolpoff, καθηγητής ανθρωπολογίας στο Πανεπιστήμιο του Μίσιγκαν, είναι πολύ γνωστός για τη δριμύεια κριτική που ασκεί στη θεωρία της «Εύας» —κατά την οποία οι σύγχρονοι άνθρωποι αποτελούν ένα νέο είδος που εμφανίστηκε στην Αφρική μεταξύ 100 και 200 χιλιάδων ετών πριν.

# QUANTUM

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έκδοση της Ένωσης Καθηγητών Θετικών Επιστημών (NSTA) των ΗΠΑ και του Γραφείου Κvant της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, με τη σύμπραξη της Αμερικανικής Ένωσης Καθηγητών Φυσικής (AAPT) και του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ

## ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης

Gerald F. Wheeler, Διοικητικός Διευθυντής, NSTA

Αντεπιστέλλον Εκδότης

Sergey Krotov, Διευθυντής, Γραφείο Κvant, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Ιδρυτικοί Διευθυντές σύνταξης

Yuri Ossipyan, Πρόεδρος, Γραφείο Κvant

Sheldon Lee Glashow, Βραβείο Νόμπελ (Φυσική), Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ

William P. Thurston, Μετάλλιο Φιλντς (Μαθηματικά), Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϊ

Διευθυντές σύνταξης στη Φυσική

Larry D. Kirkpatrick, Καθηγητής Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Μοντάνας

Albert L. Stasenko, Καθηγητής Φυσικής, Ινστιτούτο Φυσικής και Τεχνολογίας της Μόσχας

Διευθυντές σύνταξης στα Μαθηματικά

Mark E. Saul, Σύμβουλος Υπολογιστών, Σχολή του Μπρόνξβιλ, Νέα Υόρκη

Igor F. Sharygin, Καθηγητής Μαθηματικών, Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας

Αρχισυντάκτης

Sergey Ivanov

Αντεπιστέλλουσα Αρχισυντάκτρια

Jennifer M. Wang

Υπεύθυνος ειδικών θεμάτων

Kenneth L. Roberts

Σύμβουλοι σύνταξης

Timothy Weber, Τέως αρχισυντάκτης του Quantum

Yuli Danilov, Ερευνητής Α' Βαθμίδας, Ινστιτούτο Kurchatov

Yevgeniya Morozova, Αρχισυντάκτρια, Γραφείο Κvant

Συμβουλευτική επιτροπή

Bernard V. Khoury, Ανώτερος εκτελεστικός υπάλληλος, AAPT

John A. Thorpe, Διοικητικός Διευθυντής, NCTM

George Berzsenyi, Καθηγητής Μαθηματικών, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Rose-Hulman, Ιντιάννα

Arthur Eisenkraft, Τμήμα Θετικών Επιστημών, Λύκειο Fox Lane, Νέα Υόρκη

Karen Johnston, Καθηγήτρια Φυσικής, Πολιτειακό Πανεπιστήμιο Βόρειας Καρολίνας

Margaret J. Kenney, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Κολέγιο της Βοστώνης, Μασαχουσέτη

Alexander Soifer, Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Κολοράντο, Κολοράντο Σπρινγκς

Barbara I. Stott, Καθηγήτρια Μαθηματικών, Λύκειο του Ρίβερντέιλ, Λουιζιάνα

Ted Vittitoe, Συνταξιούχος Καθηγητής Φυσικής, Πάρρις, Φλόριντα

Peter Vunovich, Κέντρο Θετικών Επιστημών και Μαθηματικών, Λάνσινγκ, Μίτσιγκαν

## ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Εκδότης / Διευθυντής

Αλέκος Μάμαλης

Μετάφραση και Επιστημονική επιμέλεια

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι κ.κ.: Στέλιος Ζαχαρίου-μαθηματικός,

Μιχάλης Λάμπρου-μαθηματικός, Ιωάννα Αποστόλου-βιολόγος, Γιώργος Μαλάμης-βιολόγος,

Γιώργος Κατσιλιέρης-φυσικός και Αλέκος Μάμαλης-φυσικός

Ειδικοί συνεργάτες και Επιστημονικοί σύμβουλοι

Κώστας Βασιλειάδης, Αναπληρωτής Καθηγητής Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο του Οχάιο

Πέτρος Δήσιος, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Γιώργος Θηραίος, Διευθυντής Ινστιτούτου Μοριακής Βιολογίας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας

Μιχάλης Λάμπρου, Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στέφανος Τραχανάς, φυσικός, Ειδικός Επιστήμων Α' Βαθμίδας, Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας

Θεοδόσης Χριστοδουλάκης, Επίκουρος Καθηγητής Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γραμματεία

M. Κουρή

Τυπογραφικές διορθώσεις

N. Ντάικος

Τυποτεχνική επιμέλεια

Ηρ. Ντούσης

Υπεύθυνη λογιστικής

M. Μάμαλη

Στοιχειοθεσία, αελιδοποίηση

Αβ. Μαχαιρίδης

Φιλμ, μοντάζ

Χρ. Μήτσος

Εκτύπωση

N. Πουλόπουλος

Βιβλιοδεσία

Θ. Αρχοντουλάκης

Το Quantum εκδίδεται στις ΗΠΑ από τις Εκδόσεις Springer και στην Ελλάδα από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο Υπεύθυνος για την ελληνική έκδοση σύμφωνα με το νόμο: Αλ. Μάμαλης

Quantum, διμηνιαίο περιοδικό. ISSN: 1106-2681.  
Copyright © για την ελληνική γλώσσα: Αλ. Μάμαλης.  
Διαφημίσεις και κεντρική διάθεση: Εκδόσεις Κάτοπτρο,  
Ισαύρων 10 και Δαφνομήλη, 114 71 Αθήνα,  
τηλ.: (01) 3643272, 3645098, fax: (01) 3641864.  
Βιβλιοπωλείο: Στοά του βιβλίου (Πανεπιστημίου 49),  
105 64 Αθήνα, τηλ.: (01) 3247785.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή μετάδοση με οποιοδήποτε μέσον ή τρόπο όλου ή μέρους του περιοδικού χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.  
Τιμή κάθε τεύχους στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.  
Ετήσια συνδρομή: 12.000 δρχ. για ιδιώτες, 21.000 δρχ. για βιβλιοθήκες, ιδρύματα και οργανισμούς.  
Τιμή παλαιών τευχών στα βιβλιοπωλεία: 2.300 δρχ.



# Για να περνά η ώρα

Σ181

**Κοπιαστική αναζήτηση.** Γράφουμε διαδοχικά όλους τους φυσικούς αριθμούς αρχίζοντας από το 1. Ποιο ψηφίο είναι το 500.000-ό σε αυτή την ακολουθία;

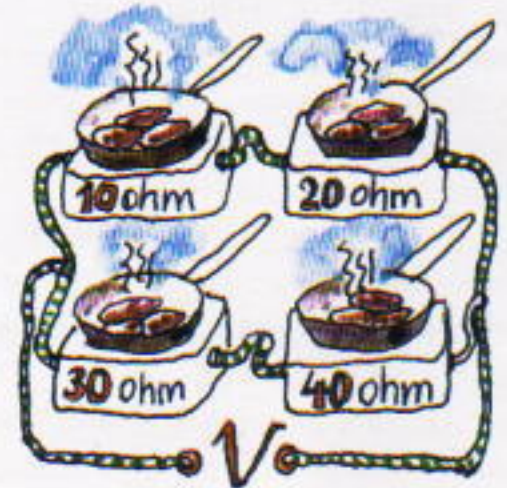


Σ182

**Αγωνιστικά προβλήματα.** Σε μια αθλητική διοργάνωση, 100 μαθητές έλαβαν μέρος σε αγωνίσματα στίβου, 50 συμμετείχαν σε αγώνες κολύμβησης και 48 σε αγώνες σκοποβολής. Το πλήθος των μαθητών που έλαβαν μέρος σε ένα μόνο είδος αγωνισμάτων ήταν διπλάσιο από το πλήθος των μαθητών που έλαβαν μέρος σε δύο είδη αγωνισμάτων και τριπλάσιο από αυτούς που έλαβαν μέρος σε τρία είδη. Ποιο είναι το πλήθος των μαθητών που συμμετείχαν στη διοργάνωση;

Σ183

**Καυτό πρόβλημα.** Χρησιμοποιούμε τέσσερα ηλεκτρικά μάτια ταυτόχρονα για να τηγανίσουμε μπιφτέκια. Οι συνδέσεις των ηλεκτρικών ματιών και οι τιμές των αντιστάσεων τους παρουσιάζονται στην εικόνα. Σε ποιο θα ετοιμαστούν πρώτα τα μπιφτέκια;



Σ184

**Ομαλή άνοδος.** Δύο κυκλικοί πύργοι έχουν το ίδιο ύψος αλλά διαφορετικές διαμέτρους. Κάθε πύργος περιβάλλεται από μια ελικοειδή σκάλα, από τη βάση έως την κορυφή. Οι δύο σκάλες έχουν ίσες και σταθερές κλίσεις. Ποια σκάλα είναι μακρύτερη;

Σ185

**Πανδαισία χρωμάτων.** Διευθετήστε στο επίπεδο 11 μη επικαλυπτόμενα ίσα τετράγωνα έτσι ώστε με όποιον τρόπο και αν τα χρωματίσουμε, χρησιμοποιώντας τρία χρώματα, να υπάρχουν δύο ακριβώς τετράγωνα με ίδιο χρώμα που εφάπτονται κατά μήκος μιας πλευράς.



# Μαθηματικά: 1900-1950

*Μια επισκόπηση του πρώτου μισού του 20ού αιώνα*

V. Tikhomirov

**Τ**Ο ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ 19ΟΥ ΑΙΩΝΑ ΚΑΙ Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ 20ΟΥ σφραγίστηκαν από την πρωτοφανή ανάπτυξη της επιστήμης και της τεχνολογίας. Το 1895, ο Röntgen ανακάλυψε τις ακτίνες X, ο Popov και ο Marconi εφηύραν το ραδιόφωνο. Το 1896, ο Antoine-Henri Becquerel ανακάλυψε τη φυσική ραδιενέργεια των αλάτων του ουρανίου. Το 1900, ο Planck ανέπτυξε τη θεωρία της θερμικής ακτινοβολίας βασιζόμενος στην κβαντική υπόθεση. Την ίδια εποχή εισήχθη ο όρος γονίδιο και δημιουργήθηκε το υπέροχο πεδίο της γενετικής. Το 1903, το πρώτο αεροπλάνο που κατασκεύασαν οι αδελφοί Wright εκτέλεσε μια πτήση 59 δευτερολέπτων. Το 1905, ο Αϊνστάιν ανέπτυξε την ειδική θεωρία της σχετικότητας (παρόμοιες ιδέες είχε αναπτύξει ταυτόχρονα ο Poincaré) και έδωσε νέα ώθηση στην κβαντική θεωρία (εξήγησε θεωρητικά το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο), θεμελίωσε τη θεωρία της κίνησης Brown και δημοσίευσε τον τύπο  $E = mc^2$ .

Εκείνη την εποχή πολλοί άνθρωποι πίστεψαν ότι η πρόοδος επρόκειτο να φέρει την παγκόσμια ευημερία και την επικράτηση της λογικής.

Αλίμονο, αυτές οι προσδοκίες δεν έμελλε να επαληθευθούν. Πολλά τραγικά γεγονότα συνέβησαν κατά τον 20ό αιώνα: πόλεμοι, γενοκτονίες, περιβαλλοντική υποβάθμιση, φρικτά εγκλήματα, κ.ο.κ. Την παρούσα στιγμή, το ανθρώπινο είδος αντιμετωπίζει ιδιαίτερα σοβαρά προβλήματα και, αν δεν καταφέρουμε να ενωθούμε και να ακούσουμε τη φωνή της λογικής, μπορεί να οδηγηθούμε στον αφανισμό. Τον προηγούμενο αιώνα μια τέτοια κατάσταση ήταν αδιανόητη: τα πλούτη της Γης έμοιαζαν ανεξάντλητα και ουδείς αισθανόταν ότι απειλείται η ίδια η ύπαρξη της ζωής.

Η επιστήμη (και ιδιαίτερα τα μαθηματικά) διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο σε όλες τις αλλαγές που συντελέστηκαν τον 20ό αιώνα. Ποιες αλλαγές, λοιπόν, συνέβησαν στα μαθηματικά κατά τη διάρκειά του; Στο παρόν άρθρο θα εξετάσουμε την ιστορία των μαθηματικών κατά το πρώτο ήμισυ του 20ού αιώνα.

Τα επιτεύγματα των μαθηματικών κατά τον 20ό αιώνα ξεπερνούν πιθανότατα οτιδήποτε επιτεύχθη τις προηγούμενες δυόμισι χιλιετίες. Πώς θα έπρεπε να προσεγγίσουμε τα επιτεύγματα αυτής της επιστήμης; Κατ' αρχάς θα σχολιάσουμε τα οφέλη που μπορούν να προσπορίσουν τα μαθηματικά στην ανθρωπότητα.

## Στόχοι των μαθηματικών

Τον 19ο αιώνα υπήρξε μια σημαντική διαφωνία ανάμεσα σε δύο εξέχοντες επιστήμονες: τον γάλλο Jean Fourier και τον γερμανό Karl Jacobi. Ο Fourier υποστήριξε ότι σκοπός των μαθηματικών είναι να υπηρετούν τη μελέτη των νόμων της φύσης. Ο Jacobi ισχυριζόταν ότι ο στόχος τους είναι να εξυψώνουν το ανθρώπινο πνεύμα· υποστήριξε ότι τα μαθηματικά έχουν κάποιο «εσωτερικό» νόημα που, όπως το νόημα της ποίησης ή της τέχνης, δύσκολα μπορεί να εξηγηθεί.

Αλλά πέρα από τη μελέτη της φύσης και την «εξύψωση του ανθρώπινου πνεύματος», το ερέθισμα για νέες μαθηματικές έρευνες στην εποχή μας το έδωσαν προπάντων οι πρακτικές εφαρμογές στη μηχανολογία, στην τεχνολογία, τα οικονομικά και τη βιολογία. Επιπλέον, τα μαθηματικά συνέβαλαν και στη φιλοσοφική κατανόηση του κόσμου μας.

Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε την ιστορική ανάπτυξη των μαθηματικών κατά τον 20ό αιώνα. Ο κόσμος άλλαζε γρήγορα, και το ίδιο συνέβη με τα μαθηματικά.

## Μαθηματικές σχολές

Ός τις αρχές του 20ού αιώνα η ανάπτυξη των μαθηματικών υπήρξε κατά κύριο λόγο υπόθεση ορισμένων μόνο χωρών.

Ο 19ος αιώνας σφραγίστηκε από τον ανταγωνισμό δύο μαθηματικών σχολών: της γαλλικής και της γερμανικής. Ο F. Klein έδωσε μια εντυπωσιακή, αν και μεροληπτική, περιγραφή αυτού του ανταγωνισμού στο εξαιρετικά ενδιαφέρον βιβλίο του *Ανάπτυξη των μαθηματικών κατά*

# Σημειώσεις

January 27	February 27	March 27	April 27
S M T W T F S	S M T W T F S	S M T W T F S	S M T W T F S
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31

Friday 21  
05/2/13 WEEK 8  
1:00

Morning

8:00

*Sphex*

2:00

*Kijf = 4*

9:00

3:00

10:00

$(2 \cdot 5) (20 - 100)$

4:00

11:00

$200 = 20 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 10^4$

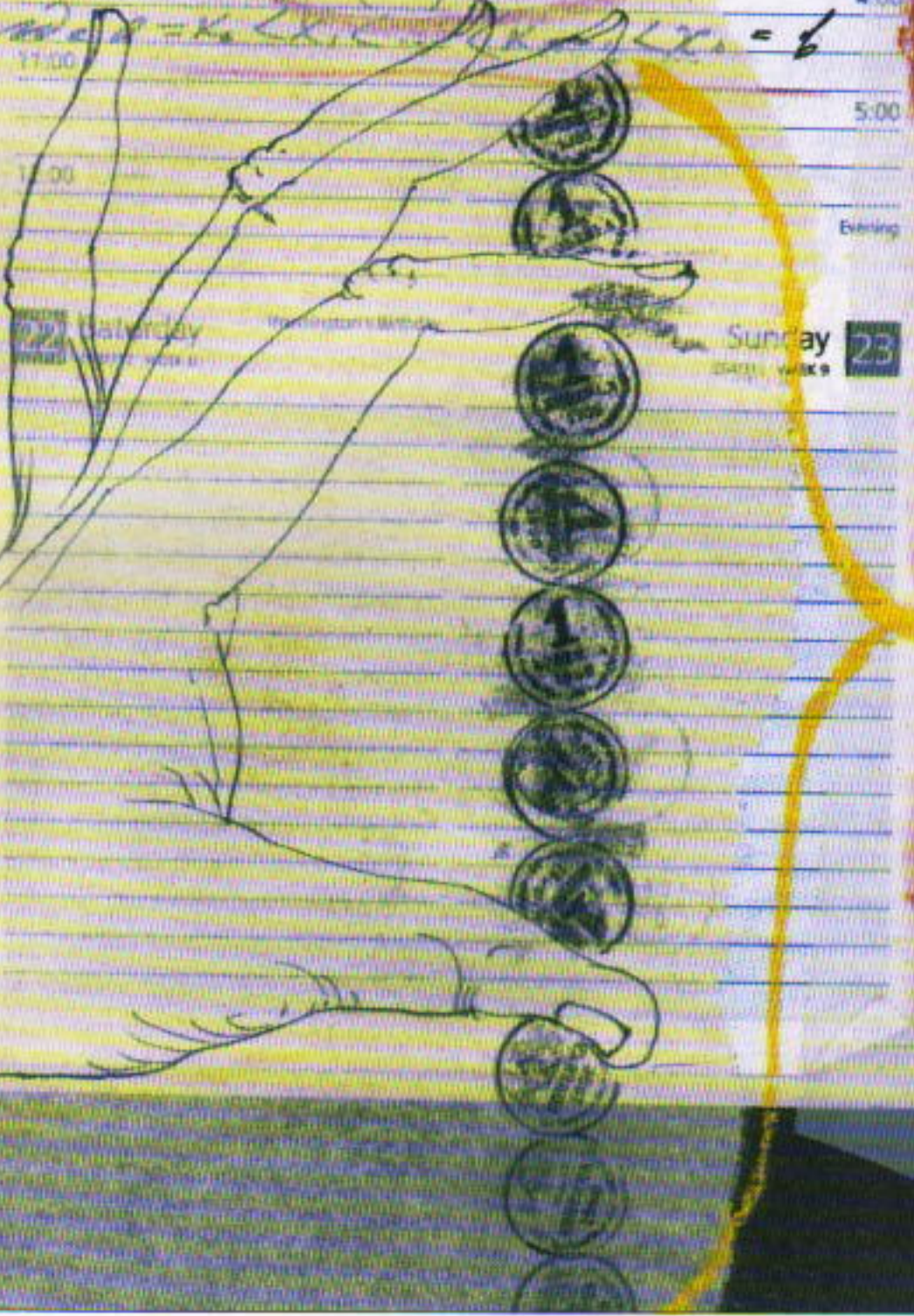
5:00

1:00

Evening

Saturday 22

Sunday 23  
05/3/13 WEEK 9



*[Red scribbles and faint handwriting on the right side of the page]*

τον 19ο αιώνα. Στην αρχή εκείνου του αιώνα πρυτάνευε στα μαθηματικά ο Gauss και στο τέλος του ο Poincaré.

Στο γύρισμα του αιώνα εμφανίστηκαν και άλλες μαθηματικές σχολές, όπως η ιταλική, η ουγγρική, η αυστριακή, η σουηδική κ.ά. Στα μέσα του 19ου αιώνα εμφανίζεται η ρωσική σχολή (κυρίως στην Πετρούπολη)· κατά τη δεύτερη δεκαετία του 20ού αιώνα συμπληρώθηκε από τη σχολή της Μόσχας, που αναδείχθηκε στη σημαντικότερη παγκοσμίως σχολή κατά τη δεκαετία του 1930. Στην αρχή του 20ού αιώνα παρουσιάζονται και οι πρώτοι σημαντικοί μαθηματικοί στην Αμερική. Τέλος, μετά τον Α΄ Παγκόσμιο Πόλεμο εμφανίζεται η πολωνική σχολή.

Αυτή ήταν η κατάσταση στις αρχές του αιώνα. Στις μέρες μας, η κατάσταση αλλάζει άρδην. Τα μαθηματικά μεταμορφώνονται σε μια πραγματικά διεθνή επιστήμη. Το όραμα του Hilbert για έναν κόσμο ενωμένο σε μια μοναδική μαθηματική κοινότητα αρχίζει να πραγματοποιείται. Οι ερευνητικές κατευθύνσεις απέκτησαν μεγαλύτερη ποικιλία και οι προτεραιότητες έχουν αλλάξει.

## Νέες εξελίξεις

Για να σχηματίσουμε μια γενική ιδέα σχετικά με το ποιοι κλάδοι των μαθηματικών εμφανίζονταν ως οι σημαντικότεροι στις αρχές του 20ού αιώνα, αρκεί να δούμε τον κατάλογο των θεμάτων του Δεύτερου Μαθηματικού Συνεδρίου των Παρισίων, που πραγματοποιήθηκε το 1900. Το συνέδριο αυτό άσκησε σημαντικότερη επίδραση στην ιστορία των μαθηματικών, διότι εκεί ο Hilbert διατύπωσε τα περίφημα προβλήματά του. Στο συνέδριο παρουσιάστηκαν τέσσερα κύρια θέματα: αριθμητική και άλγεβρα, απειροστικός λογισμός, γεωμετρία, μηχανική και μαθηματική φυσική. Υπήρχαν δύο πρόσθετα θέματα: ιστορία και βιβλιογραφία, διδασκαλία και μεθοδολογία.

Οι αλλαγές που επιτελέστηκαν στη διάρκεια του 20ού αιώνα καθίστανται πρόδηλες αν δούμε τους καταλόγους των θεμάτων των σύγχρονων μαθηματικών συνεδρίων: μαθηματική λογική και θεμελίωση των μαθηματικών, άλγεβρα, θεωρία αριθμών, γεωμετρία, τοπολογία, αλγεβρική γεωμετρία, μιγαδική ανάλυση, ομάδες Lie και θεωρία αναπαραστάσεων, πραγματική και συναρτησιακή ανάλυση, θεωρία πιθανοτήτων και μαθηματική στατιστική, μερικές διαφορικές εξισώσεις, συνήθειες διαφορικές εξισώσεις, μαθηματική φυσική, αριθμητικές μέθοδοι και θεωρία υπολογισμού, διακριτά μαθηματικά και συνδυαστική, μαθηματικές πτυχές της πληροφορικής, εφαρμογές μαθηματικών σε μη φυσικές επιστήμες, ιστορία των μαθηματικών και διδακτική τους.

Πολλοί από αυτούς τους κλάδους των μαθηματικών ήταν άγνωστοι πριν από τον 20ό αιώνα. Επιπλέον, οι προτεραιότητες έχουν αλλάξει: Πριν από τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο το ενδιαφέρον στα μαθηματικά επικεντρωνόταν στην ανάλυση και τους κλάδους της (εξισώσεις της μαθηματικής φυσικής, θεωρία πιθανοτήτων και θεωρία μιγαδικών μεταβλητών). Μετά τον πόλεμο, τα ενδιαφέροντα πολλών μαθηματικών μετατοπίστηκαν στην

τοπολογία, την πολυδιάστατη μιγαδική ανάλυση, την αλγεβρική γεωμετρία, τις ομάδες Lie και τη θεωρία αναπαραστάσεων. Οι πιο ξακουστές επιτυχίες και τα πλέον τιμητικά βραβεία ανήκουν σε μαθηματικούς που εργάζονται στα προαναφερθέντα πεδία.

Ωστόσο, αυτή η αλλαγή στις προτεραιότητες συνέβη μετά τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο και βρίσκεται έξω από το πλαίσιο του άρθρου. Ποιοι ήταν οι νέοι κλάδοι των μαθηματικών που αναπτύχθηκαν στις αρχές του αιώνα; Πρώτα απ' όλους, η *συναρτησιακή ανάλυση*, η *τοπολογία* και η *θεωρία συναρτήσεων*. Θα ξεκινήσουμε την επισκόπηση των επιτευγμάτων των μαθηματικών κατά το πρώτο ήμισυ του 20ού αιώνα με την εξέταση αυτών των κλάδων.

## Συναρτησιακή ανάλυση

Η εμφάνιση της συναρτησιακής ανάλυσης αποτελεί ένα από τα σπουδαιότερα γεγονότα στην εξέλιξη των μαθηματικών πριν από τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο. Τούτος ο νέος κλάδος των μαθηματικών συνδύασε πολλές έννοιες της κλασικής ανάλυσης, της γραμμικής άλγεβρας και της γεωμετρίας.

Ήδη από το τέλος του 19ου αιώνα είχαν επισημανθεί ορισμένες ομοιότητες μεταξύ της θεωρίας των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με πεπερασμένο πλήθος μεταβλητών και των απειροδιάστατων αναλόγων τους, των γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Το αποφασιστικό βήμα το πραγματοποίησε ο Fredholm το 1900. Αντικατέστησε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t, \tau)x(\tau)d\tau = y(t), \quad (1)$$

όπου  $y(\cdot)$  και  $K(\cdot, \cdot)$  δεδομένες συναρτήσεις και  $x(\cdot)$  η ζητούμενη συνάρτηση, με το εξής σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$x_i - \lambda h \sum_{j=0}^n k_{ij}x_j = y_i. \quad (2)$$

Προς τούτο, αντικατέστησε το ολοκλήρωμα με προσεγγίσεις ολοκληρωτικών αθροισμάτων διαμερίσεων

$$t_i = a + ih, \quad x_i = x(t_i), \quad y_i = y(t_i), \\ k_{ij} = K(t_i, \tau_j), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Οι μέθοδοι για την επίλυση των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων αναπτύχθηκαν κατά τον 18ο αιώνα. Η πρώτη γνωριμία με τις μεθόδους αυτές γίνεται στο λύκειο, και η πλήρης θεωρία μελετάται στο πρώτο έτος του πανεπιστημίου. Με τη βοήθεια αυτών των μεθόδων και παίρνοντας τα όρια των προσεγγίσεων, ο Fredholm ανακάλυψε συνθήκες επιλυσιμότητας και αλγορίθμους για την επίλυση της εξίσωσης (1). Τα αποτελέσματα αυτά έδωσαν το έναυσμα για την ανάπτυξη μιας θεωρίας που συνδυάζει αλγεβρικές και γεωμετρικές μεθόδους και εφαρμόζεται σε αντικείμενα ενός χώρου άπειρων διαστάσεων. Έτσι, γεννήθηκε η *γραμμική συναρτησιακή ανάλυση*.

Ένα άλλο σημαντικό μέρος της συναρτησιακής ανάλυσης ήταν η θεωρία των τετραγωνικών μορφών, που την ανέπτυξε αρχικά ο Hilbert την περίοδο 1904-1906. Κάθε τετραγωνική μορφή

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

μετατρέπεται στη διαγώνιο μορφή  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$  με κατάλληλη στροφή των αξόνων. Ο Hilbert απέδειξε ένα ανάλογο θεώρημα για την τετραγωνική μορφή

$$Q(x(\cdot)) = \int_a^b \int_a^b K(t, \tau)x(t)x(\tau)dt d\tau,$$

όπου  $K(t, \tau) = K(\tau, t)$  για κάθε  $t$  και  $\tau$  του  $[a, b]$ . Εδώ το όρισμα, αντί για ένα διάνυσμα  $x = (x_1, x_2)$ , είναι μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση  $x(\cdot)$ . Μια συνάρτηση καλείται τετραγωνικά ολοκληρώσιμη αν

$$\int_a^b x^2(t)dt < \infty.$$

Το σύνολο αυτών των συναρτήσεων εκλήθη *χώρος Hilbert* και συμβολίζεται συνήθως με  $L_2$ . Η θεωρία των τετραγωνικών μορφών στους χώρους Hilbert απετέλεσε το μαθηματικό θεμέλιο της κβαντικής μηχανικής.

## Ανάπτυξη της τοπολογίας

Στις μέρες μας χρησιμοποιούμε τη λέξη *τοπολογία* για να αναφερθούμε σε δύο διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών. Από της εμφανίσεώς τους, για να διακρίνονται οι δύο κλάδοι, η λέξη *τοπολογία* χρησιμοποιούνταν σε συνδυασμό με δύο προσδιοριστικά επίθετα. Ο πρώτος κλάδος, που τον ανέπτυξε αρχικά ο Poincaré, ονομάστηκε *συνδυαστική τοπολογία*, και ο άλλος, που πρώτος τον εξερεύνησε ο Cantor, ονομάστηκε *γενική, ή συνολοθεωρητική, τοπολογία*.

Η γενική τοπολογία συνδέεται στενά με τη θεωρία συνόλων και βρίσκεται στα θεμέλια των μαθηματικών, σύμφωνα με το σχέδιο που ανέπτυξαν γι' αυτή την επιστήμη οι διάδοχοι του Cantor —ο Hilbert, ο H. Weyl και άλλοι. Η εν λόγω αξιωματική θεωρία έχει ως αντικείμενο τη μελέτη εννοιών όπως το όριο, η σύγκλιση, η συνέχεια, κ.ο.κ. Κατά τον 20ό αιώνα, η θεμελίωση της γενικής τοπολογίας επετεύχθη από τον γερμανό μαθηματικό Hausdorff, τον πολωνό Kuratowski, τον εξέχοντα ρώσο μαθηματικό P. Alexandron της σχολής της Μόσχας, και άλλους.

Η συνδυαστική τοπολογία είναι κλάδος της γεωμετρίας. Μελετά τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από αμφιμονοσήμαντες συνεχείς απεικονίσεις. Ο Cantor κατασκεύασε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ενός ευθύγραμμου τμήματος επί ενός τετραγώνου. Όμως, δεν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνεχής απεικόνιση ενός τμήματος επί ενός τετραγώνου. Αυτό το θεώρημα αποδεικνύεται στη θεωρία των διαστάσεων. Αρκετοί εξέχοντες μαθηματικοί συμμετείχαν στην ανάπτυξη αυτού του κλάδου της τοπολογίας: ο Poincaré (που έθεσε το πρόβλημα και περιέγρα-

ψε μια μέθοδο επίλυσής του), ο ολλανδός μαθηματικός Brouwer, ο Γάλλος Lebesgue, ο Αυστριακός Menger και ένας εκπρόσωπος της σχολής μαθηματικών της Μόσχας, ο Uryson, που βρήκε τραγικό θάνατο σε ηλικία 26 ετών.

Σήμερα, όταν αναφερόμαστε στη γεωμετρική τοπολογία, το επίθετο *συνδυαστική* συνήθως παραλείπεται. Ο όρος *τοπολογία*, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά, αναφέρεται στο έργο του Poincaré.

Η μοίρα των δύο τοπολογιών ήταν διαφορετική. Η γενική τοπολογία, εξυπηρετεί κυρίως την ανύψωση του ανθρώπινου πνεύματος, αλλά δεν εμπλέκεται άμεσα στη μελέτη των νόμων της φύσης και την εφαρμοσμένη έρευνα.

Για μεγάλο διάστημα, και η γεωμετρική τοπολογία εθεωρείτο επίσης αφηρημένη επιστήμη. Πολύ πρόσφατα, όμως, αποδείχθηκε ότι μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τη δομή του σύμπαντος. Επιπλέον, τοπολογικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται σε όλους κυριολεκτικά τους κλάδους των μαθηματικών: την ανάλυση, τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, κ.ο.κ. Η τοπολογία αποτελεί πλέον έναν από τους κεντρικούς κλάδους των μαθηματικών.

## Θεωρία συναρτήσεων

Στην αρχή του αιώνα ο Lebesgue ολοκλήρωσε την κατασκευή της θεωρίας του μέτρου και της ολοκλήρωσης. Κατά τον 19ο αιώνα, ακολουθώντας τον Cauchy και τον Riemann, οι μαθηματικοί όριζαν το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)dx$$

ως το όριο αθροισμάτων Riemann. Δηλαδή, ως προσεγγιστικές τιμές του ολοκληρώματος λαμβάνονται οι επόμενες παραστάσεις:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

όπου  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  είναι μια διαμέριση του διαστήματος ολοκλήρωσης και  $\xi_i$  ένα σημείο του διαστήματος  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Ο Lebesgue εισήγαγε έναν διαφορετικό τρόπο προσέγγισης. Αντί του άξονα  $x$  διαμέρισε τον άξονα  $y$  με σημεία  $\dots y_{i-1} < y_i < \dots$ , υποστηρίζοντας ότι στην περίπτωση των ασυνεχών συναρτήσεων είναι αδύνατο να επιλέξουμε ένα σημείο  $\xi_i$  που θα εκπροσωπεί κατάλληλα τη συνάρτηση στο διάστημα  $[x_{i-1}, x_i]$ . Ωστόσο, τα σύνολα  $E_i$  επί του άξονα  $x$  για τα οποία ισχύει  $y_{i-1} \leq f(x) < y_i$  μπορεί να αποδειχθούν αρκετά αλλόκοτα εφόσον η εξεταζόμενη συνάρτηση είναι αρκούτως περίπλοκη. Επομένως, για να αναπτυχθεί η θεωρία ολοκλήρωσης, έπρεπε πρώτα να αναπτυχθεί η θεωρία του μέτρου. Με άλλα λόγια, έπρεπε να μάθουμε πώς μπορούν να μετρηθούν τέτοια αλλόκοτα σύνολα. Πρόκειται για ένα πρόβλημα που τη λύση του την οφείλουμε στον Borel και τον Lebesgue.

Ο Lebesgue όρισε το μέτρο ενός συνόλου  $E$  (ας πούμε, στο διάστημα  $[0, 1]$ ) ως εξής. Θεώρησε το κατώτερο

φράγμα των αθροισμάτων των μηκών των διαστημάτων που καλύπτουν το  $E$  και το ονόμασε *ανώτερο μέτρο* του  $E$ . Το ανώτερο μέτρο ορίζεται για κάθε σύνολο. Το σύνολο  $E$  καλείται *μετρήσιμο κατά Lebesgue* εάν το άθροισμα του ανώτερου μέτρου του  $E$  και αυτό του συμπληρώματός του (ως προς το διάστημα  $[0, 1]$ ) ισούται με 1. Σε αυτή την περίπτωση, το ανώτερο μέτρο του  $E$  ονομάζεται *μέτρο Lebesgue* του συνόλου  $E$  και συμβολίζεται με  $\text{mes}(E)$ .

Ο Lebesgue αντικατέστησε τα αθροίσματα Riemann που χρησιμοποιούνταν για τον ορισμό του ολοκληρώματος με αθροίσματα της μορφής

$$\sum \eta_i \text{mes}(E_i)$$

όπου  $\eta_i$  είναι ένα σημείο του διαστήματος  $[y_{i-1}, y_i]$ . Περιέγραψε γλαφυρά τα πλεονεκτήματα της μεθόδου του συγκρίνοντας τον τρόπο που χρησιμοποιούν δύο υπάλληλοι για να μετρήσουν ένα χρηματικό ποσό. Ένας άπειρος υπάλληλος μετρά τα νομίσματα με τη σειρά που φτάνουν σ' αυτόν. Ένας πεπειραμένος και μεθοδικός υπάλληλος ενεργεί ως εξής: Έχω  $\text{mes}(E_1)$  νομίσματα της μίας δραχμής, το άθροισμα των οποίων ισούται με  $1 \times \text{mes}(E_1)$ . Έχω  $\text{mes}(E_2)$  νομίσματα των δύο δραχμών, το άθροισμα των οποίων ισούται με  $2 \times \text{mes}(E_2)$ . Έχω  $\text{mes}(E_3)$  νομίσματα των πέντε δραχμών, το άθροισμα των οποίων ισούται με  $5 \times \text{mes}(E_3)$ , κ.ο.κ. Τελικά, έχω  $1 \times \text{mes}(E_1) + 2 \times \text{mes}(E_2) + 5 \times \text{mes}(E_3) + \dots$  δραχμές. Βεβαίως, και οι δύο υπάλληλοι καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα. Όμως, στην περίπτωση ενός άπειρου πλήθους απειροστών ποσοτήτων, η διαφορά των δύο μεθόδων είναι θεμελιώδης. Η νέα θεωρία μέτρου γέννησε μια νέα προσέγγιση στη θεωρία των συναρτήσεων —τη *μετρική θεωρία συναρτήσεων*. Επίσης, μετασχηματίστηκε και η θεωρία συνόλων. Η νέα θεωρία ξεκίνησε από τρεις γάλλους μαθηματικούς —τον Borel, τον Baire και τον Lebesgue. Είναι γνωστή ως περιγραφική θεωρία συνόλων και μελετά τη δομή διαφόρων αλλόκοτων συνόλων.

Στη δεκαετία του 1920, ο ηγετικός ρόλος στη θεωρία των συναρτήσεων πέρασε στη ρωσική μαθηματική σχολή, που την εκπροσωπούσαν ο Nikolai N. Luzin και οι μαθητές του P. Aleksandron, N. Bari, A. Kolmogorov, D. Menshov, M. Suslin, A. Khinchin, κ.ά. Αυτοί οι επιστήμονες ίδρυσαν τη σχολή μαθηματικών της Μόσχας. Αφού έκαναν τα πρώτα τους βήματα στη θεωρία συναρτήσεων, οι μαθητές του Luzin συνέχισαν με τη μελέτη διαφόρων άλλων μαθηματικών πεδίων. Οι Kolmogorov και Khinchin εργάστηκαν στη θεωρία πιθανοτήτων, οι Aleksandron και Uryson στην τοπολογία, οι Lyusternik και Shnirelman στη μη γραμμική ανάλυση, ο Novikov στη μαθηματική λογική, ενώ ο Lavrentev συνέβαλε στη μαθηματική ανάλυση και τη μηχανική. Μόνο οι Menshov και Bari συνέχισαν να μελετούν τη θεωρία συναρτήσεων. Κατά τη δεκαετία του 1930, καμία άλλη μαθηματική σχολή στον κόσμο δεν συγκέντρωνε μια τέτοια ομάδα τόσο λαμπρών μαθηματικών.

Στο επόμενο μέρος του άρθρου θα εξετάσουμε το ρό-

λο των μαθηματικών στη μελέτη των νόμων της φύσης.

## Μαθηματικά και φυσική

Κατά το τέλος του 19ου αιώνα η φυσική δημιουργούσε την εντύπωση ενός ολοκληρωμένου γνωστικού πεδίου. Σύμφωνα με ένα θρύλο, ένας νέος<sup>1</sup> που ήθελε να ασχοληθεί με τη φυσική ζήτησε τη γνώμη ενός φτασμένου φυσικού. Εκείνος του απάντησε ότι δεν έβλεπε προοπτικές σ' αυτό το γνωστικό πεδίο —μόνο δύο προβλήματα παρέμεναν άλυτα: η ερμηνεία του πειράματος των Michelson-Morley και η διαλεύκανση των νόμων της ακτινοβολίας. Η λύση τους δεν θα βράδυνε πολύ, και τότε δεν θα απέμενε πλέον τίποτε άλλο να γίνει στη φυσική.

Έπειτα από μερικά χρόνια, το πρώτο πρόβλημα θα οδηγούσε στην *ειδική θεωρία της σχετικότητας* και το δεύτερο στην *κβαντική μηχανική* —θεωρίες που ανέτρεψαν όλες τις ιδέες μας για τη δομή του κόσμου.

Την ειδική θεωρία της σχετικότητας την ανέπτυξαν το 1904-1906 οι Lorentz, Αϊνστάιν και Poincaré. Η δομή του φυσικού κόσμου, όπως την περιγράφει η εν λόγω θεωρία, ήταν εξαιρετικά παράδοξη. Ερχόταν σε αντίθεση με τη φυσική διαίσθηση που είχε αναπτυχθεί στη διάρκεια των προηγούμενων τριών αιώνων. Τα μαθηματικά θεμέλια της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας τα διατύπωσε ο εξέχων γερμανός μαθηματικός Herman Minkowski, ο οποίος κατόρθωσε να συνδέσει αυτή τη θεωρία με τη γεωμετρία Lobachevsky.

Θα παρουσιάσουμε την ιδέα του με τον εξής τρόπο. Θεωρούμε δύο αεροπλάνα που πετούν το ένα προς το άλλο, το πρώτο με ταχύτητα  $v$  ως προς τη Γη και το δεύτερο με ταχύτητα  $v'$  (επίσης ως προς τη Γη). Σύμφωνα με τη νευτώνεια μηχανική, η ταχύτητα του δεύτερου αεροπλάνου ως προς το πρώτο ισούται με  $v + v'$ . Όμως, η ειδική θεωρία της σχετικότητας μας δίνει έναν διαφορετικό τύπο:

$$\frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}$$

όπου με  $c$  συμβολίζουμε την ταχύτητα του φωτός. Αν θεωρήσουμε ότι τα αεροπλάνα δεν κινούνται στην ίδια ευθεία αλλά μόνο στο ίδιο επίπεδο, τότε ο τύπος για την πρόσθεση των ταχυτήτων συνδέεται με ένα μετασχηματισμό του επιπέδου Lobachevsky. Μπορούμε να τα διατυπώσουμε όλα αυτά εν συντομία ως εξής: *Ο χώρος των ταχυτήτων στην ειδική θεωρία της σχετικότητας πραγματώνεται από το επίπεδο Lobachevsky, όπου ο τύπος της πρόσθεσης των ταχυτήτων ορίζεται μέσω της κίνησης αυτού του επιπέδου.*

Αποδείχθηκε ότι ο χρόνος και ο χώρος δεν επιτρέπεται να θεωρούνται ξεχωριστές οντότητες —ο κόσμος μας είναι τετραδιάστατος. Η διαπίστωση αυτή είχε αποτελέ-

1. Επρόκειτο για τον Max Planck. Ο φημισμένος φυσικός ήταν ο Philipp von Jolly.

σμα να αποκτήσει φυσικό νόημα η πολυδιάστατη γεωμετρία.

Τούτο το γεγονός στάθηκε εξαιρετικά σημαντικό για τους μαθηματικούς, διότι θεωρίες που πολλοί άνθρωποι θεωρούσαν εξαιρετικά αφηρημένες και εντελώς αποκομμένες από την πραγματικότητα αποδείχθηκαν χρήσιμες για την περιγραφή θεμελιωδών χαρακτηριστικών του σύμπαντος.

Δέκα χρόνια αργότερα, ο Αϊνστάιν ανέπτυξε τη γενική θεωρία της σχετικότητας, η οποία κατέρριψε όλες τις καθιερωμένες ιδέες περί «επίπεδου» κόσμου. Η γεωμετρία του κόσμου μας αποδείχθηκε «καμπυλωμένη» και συνδεδεμένη με τη βαρύτητα. Οι ενδείξεις των μετρητικών συσκευών θα διαφέρουν ανάλογα με την τροχιά που ακολουθούν από σημείο σε σημείο. Πρόκειται για ένα φαινόμενο που συνδέεται στενά με μια από τις σημαντικότερες έννοιες της γεωμετρίας —την έννοια της συνοχής, η οποία μας επιτρέπει να ορίσουμε την παράλληλη μετατόπιση σε καμπυλωμένες επιφάνειες. Αυτή η έννοια μελετήθηκε από γεωμέτρες της ιταλικής σχολής στις αρχές του 20ού αιώνα (τον Levi-Civita και άλλους).

Αυτά τα γεγονότα έδωσαν ώθηση στην εντατική ανάπτυξη της γεωμετρίας κατά τις δεκαετίες του 1920 και του 1930 και της τοπολογίας στις μέρες μας.

Τη δεκαετία του 1920 η ανθρωπότητα αντιμετώπισε ένα ακόμα σοκ —τη γέννηση της κβαντικής μηχανικής. Μια από τις σταθερότερες αρχές της επιστήμης ανατράπηκε —η αρχή της προβλεψιμότητας του μέλλοντος με βάση το παρελθόν. Αποδείχθηκε ότι ο μικρόκοσμος είναι κατ' αρχήν απρόβλεπτος. Ας υποθέσουμε ότι ένα ηλεκτρόνιο διέρχεται από ένα άνοιγμα και προσπίπτει σε μια οθόνη. Αποδεικνύεται ότι το μόνο που μπορούμε να προβλέψουμε είναι η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο σε ένα συγκεκριμένο σημείο της οθόνης. Αυτό φαινόταν απίστευτο ακόμη και σε έναν τόσο μεγάλο επιστήμονα όπως ο Αϊνστάιν —και εκ των θεμελιωτών της κβαντικής μηχανικής—, που διακήρυξε επανειλημμένα ότι δεν πίστευε πως ο Θεός «έπαιζε ζάρια» με το σύμπαν.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να εξηγήσουμε το είδος των μαθηματικών που υπόκεινται αυτού του φαινομένου. Στην κλασική μηχανική, η κίνηση ενός σωματιδίου χαρακτηρίζεται από τη συντεταγμένη του  $x$  και την ορμή του  $p$ . Υποτίθεται ότι αυτές οι δύο μεταβλητές επιδέχονται ταυτόχρονη μέτρηση, και ότι η μελλοντική κίνηση του σωματιδίου καθορίζεται μονοσήμαντα από μια διαφορική εξίσωση.

Στην κβαντική μηχανική, η θέση ενός σωματιδίου ορίζεται από μια (μιγαδική) κυματοσυνάρτηση  $X(x)$  στο χώρο Hilbert  $L_2(\mathbf{R})$ . Αυτή η συνάρτηση ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(x)|^2 dx = 1,$$

και ορίζει την πιθανότητα  $\mathcal{P}_x([a, b])$  να βρούμε το σωματίδιο (μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή) στο διάστημα  $[a, b]$  σύμφωνα με τον τύπο

$$\mathcal{P}_x([a, b]) = \int_a^b |X(x)|^2 dx.$$

Η ορμή χαρακτηρίζεται από μια άλλη συνάρτηση, την  $P(p)$  (στη βιβλιογραφία αναφέρεται και ως κυματοσυνάρτηση ορμής). Αυτή η συνάρτηση ορίζεται επίσης στην ευθεία και ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\int_{-\infty}^{\infty} |P(p)|^2 dp = 1.$$

Η πιθανότητα  $\mathcal{P}_p([a, b])$  να βρίσκεται η τιμή της ορμής του σωματιδίου στο διάστημα  $[a, b]$  δίνεται από την εξίσωση

$$\mathcal{P}_p([a, b]) = \int_a^b |P(p)|^2 dp.$$

Την κίνηση του σωματιδίου, ή μάλλον την εξέλιξη της κυματοσυνάρτησής του, την καθορίζει μια μερική διαφορική εξίσωση που ονομάζεται *εξίσωση Schrödinger*.

Ένα από τα σημαντικότερα σημεία της κβαντικής μηχανικής είναι ότι η κυματοσυνάρτηση και η συνάρτηση της ορμής συνδέονται μέσω του μετασχηματισμού *Fourier*

$$P(p) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} X(x) e^{-i\frac{p}{\hbar}x} dx, \quad (3)$$

όπου  $\hbar$  είναι η σταθερά του Planck. Οι μέσες τιμές της συντεταγμένης του σωματιδίου και της ορμής του δίνονται από τους τύπους

$$\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x |X(x)|^2 dx, \quad \eta = \int_{-\infty}^{\infty} p |P(p)|^2 dp.$$

Εφόσον οι ανωτέρω μέσες τιμές ισούνται με το μηδέν, τότε οι διασπορές της συντεταγμένης και της ορμής δίνονται από τους τύπους

$$D_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |X(x)|^2 dx, \quad D_p^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p^2 |P(p)|^2 dp.$$

Από την εξίσωση (3) έπεται η ανισότητα

$$D_x^2 D_p^2 \geq \frac{\hbar^2}{4},$$

η οποία καλείται *αρχή απροσδιοριστίας του Heisenberg* και αντανakλά το γεγονός ότι είναι αδύνατο να μετρήσουμε ταυτόχρονα με ακρίβεια τόσο τη θέση όσο και την ορμή ενός σωματιδίου. Η αρχή απροσδιοριστίας του Heisenberg ανέτρεψε κάθε ελπίδα για αιτιοκρατία και πλήρη γνώση του μικρόκοσμου.

Τα μαθηματικά θεμέλια της κβαντικής μηχανικής τα ανέπτυξαν ο Hilbert και οι μαθητές του λίγο πριν την εμφάνισή της. Μάλιστα, η ισοδυναμία των δύο προσεγγίσεων στην περιγραφή του μικρόκοσμου που πρότειναν ο Schrödinger και ο Heisenberg αποδείχθηκε γρήγορα χάρη στο γεγονός ότι ένας από τους ιδρυτές της νέας επιστήμης, ο Max Born, είχε παρακολουθήσει τις διαλέ-

ξεις του Hilbert για τη συναρτησιακή ανάλυση και τη θεωρία των τετραγωνικών μορφών άπειρων διαστάσεων.

Ιδού μία ακόμη ιστορία. Όταν ο άγγλος βοτανολόγος Brown ανακάλυψε τη χαοτική κίνηση των μικρών σωματιδίων που αιωρούνταν εντός ενός υγρού, ούτε οι μαθηματικοί ούτε οι φυσικοί έδωσαν σημασία στην ανακάλυψή του. Τη θεωρία της κίνησης Brown την ανέπτυξαν πρώτοι ο Αϊνστάϊν (το 1905, την ίδια χρονιά που δημιούργησε τα θεμέλια της θεωρίας της σχετικότητας και της κβαντομηχανικής) και ο πολωνός φυσικός M. Smoluchowski. Ο πρώτος που πρότεινε τη μαθηματική θεωρία της κίνησης Brown ήταν ο Norbert Wiener. Αποδείχθηκε ότι οι τροχιές των σωματιδίων Brown είναι συνεχείς και μη παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Το πρώτο παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης η οποία δεν έχει παράγωγο σε κανένα σημείο το διατύπωσε ο Weierstrass το 1872. Οι μαθηματικοί αντιμετώπισαν με σκεπτικισμό την ανακάλυψη: πολλοί πίστεψαν ότι αυτό το τέρας δεν έχει καμία σχέση με την πραγματικότητα. Ένας από τους γνωστότερους μαθηματικούς του 19ου αιώνα, ο Charles Hermite, ομολόγησε ότι τον άφηναν αποσβολωμένο τέρατα όπως οι συνεχείς συναρτήσεις χωρίς παράγωγους. Για μία ακόμη φορά, η συμβατική ιδέα ότι τα πάντα στον κόσμο είναι «λεία» ανατράπηκε. Αποδείχθηκε ότι ο κόσμος βρίσκεται από «τέρατα».

Την πλήρη μαθηματική θεωρία της κίνησης Brown την ανέπτυξε ο A.N. Kolmogorov. Η συγκεκριμένη θεωρία αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα επιτεύγματα των μαθηματικών κατά το πρώτο μισό του 20ού αιώνα.

## Ανάπτυξη αφηρημένων κλάδων των μαθηματικών

Η επιθυμία εξύψωσης του ανθρώπινου πνεύματος ανεξάρτητα από οποιονδήποτε πρακτικό στόχο απετέλεσε κίνητρο για τις προσπάθειες πολλών μαθηματικών και μερικές φορές τους οδήγησε σε «ζούγκλες» που δεν είχαν καμία σχεδόν σχέση με την πραγματικότητα.

Στο πρώτο μισό του 20ού αιώνα αναδύθηκε η ιδέα της αξιωματικής κατασκευής ολόκληρου του κορμού των μαθηματικών. Όπως αναφέρει ο Kolmogorov, σύμφωνα με την ιδέα αυτή, στα θεμέλια των μαθηματικών βρίσκεται η καθαρή θεωρία συνόλων —η πνευματική κληρονομιά του Cantor. Τούτη η θεωρία άφησε βαθιά σημάδια στην ιστορία των μαθηματικών. Πίστευαν ότι ο Cantor ανακάλυψε έναν «παράδεισο» για τους μαθηματικούς. Όταν ανακαλύφθηκαν αντινομίες στη θεωρία των συνόλων και πολλοί επιστήμονες άρχισαν να αμφιβάλλουν για τη θεμελίωσή της, ο Hilbert δήλωσε: «Ουδείς μπορεί να μας εκδιώξει από τον παράδεισο του Cantor.»

Η ανάπτυξη της αξιωματικής συνδέθηκε με την κριτική ανάλυση των θεμελίων των μαθηματικών.

Η εξαιρετική ανάπτυξη της άλγεβρας κατά τη δεκαετία του 1920 οδήγησε στην αλγεβρικοποίηση όλων των μαθηματικών. Σημαντική συμβολή σε αυτή τη διαδικασία είχε η Emmy Noether και ο μαθητής της B.L. van der Waerden. Η στοιχειώδης γεωμετρία (Hilbert) και η

θεωρία πιθανοτήτων (Kolmogorov) αξιωματικοποιήθηκαν επίσης. Έχουμε αναφέρει νωρίτερα τα πεδία της γενικής τοπολογίας και της θεωρίας μέτρου. Άρχισαν επίσης να αναπτύσσονται και πολλές άλλες αξιωματικές θεωρίες.

Στο τέλος της δεκαετίας του 1930, μια ομάδα γάλλων μαθηματικών αποφάσισε να παρουσιάσει τα μαθηματικά σε αξιωματική βάση. Η ομάδα αυτή παρουσίασε τις εργασίες της υπό το συλλογικό ψευδώνυμο Nicolas Bourbaki —το όνομα ενός γάλλου στρατηγού ελληνικής καταγωγής, του Νικολάου Βούρβαχη. Στη βάση της όλης κατασκευής βρισκόταν η θεωρία συνόλων. Στη συνέχεια κατασκευάστηκε ο πρώτος όροφος: διατεταγμένες δομές, άλγεβρα, γενική τοπολογία και θεωρία μέτρου. Μετά, έπρεπε να κατασκευαστεί ο δεύτερος όροφος, όπου οι αλγεβρικές και γεωμετρικές δομές θα συνδυάζονταν με τοπολογικές και διατεταγμένες δομές, και ούτω καθεξής. Το έργο παραμένει ανολοκλήρωτο. Αυτή καθαυτή η ιδέα μοιάζει ουτοπική, διότι δεν είναι δυνατόν να μιμηθούμε την εξέλιξη της επιστήμης. Οι προσπάθειες των Bourbaki, ωστόσο, δεν απέβησαν μάταιες. Το σπουδαιότερο δε, δημιούργησαν μια γλώσσα που χρησιμεύει ακόμη ως μέσο επικοινωνίας μεταξύ των μαθηματικών.

## Μαθηματικά και το στρατιωτικο-βιομηχανικό σύμπλεγμα

Τα μαθηματικά διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο σε πολλά ιστορικά γεγονότα του αιώνα, μερικά από τα οποία παρ' ολίγον να οδηγήσουν στον παγκόσμιο όλεθρο. Συγκεκριμένα, πολλοί μαθηματικοί «και από τις δύο πλευρές των χαρακωμάτων» έλαβαν μέρος σε διάφορα προγράμματα που είχαν στόχο την ανάπτυξη των σύγχρονων όπλων.

Οι ακτίνες X και η ραδιενέργεια οδήγησαν σταδιακά τους επιστήμονες στην ιδέα της χρήσης της ατομικής ενέργειας. Αρχικά οι φυσικοί δούλεψαν χωρίς τους μαθηματικούς. Ωστόσο, η ανάπτυξη της ατομικής βόμβας, και ιδιαίτερα της βόμβας υδρογόνου, απαιτούσε την ανάπτυξη περίπλοκων μαθηματικών μοντέλων και μεγάλο όγκο υπολογισμών. Πολλοί εξέχοντες μαθηματικοί έλαβαν μέρος στη δημιουργία της ατομικής βόμβας. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να αναθεωρηθούν οι αρχές των υπολογιστικών μαθηματικών και να αναπτυχθούν ισχυροί υπολογιστές. Φαίνεται ότι δεν έχει φτάσει ακόμη η στιγμή (τουλάχιστον στη Ρωσία) για να αποτιμηθεί η συμβολή των μαθηματικών στη δημιουργία των πυρηνικών όπλων. Αναμφίβολα όμως η συμβολή τους υπήρξε σημαντική.

Οι αδελφοί Wright κατασκεύασαν το αεροπλάνο τους χωρίς να χρησιμοποιήσουν μαθηματικά. Όμως η περαιτέρω ανάπτυξη της αεροπορίας οδήγησε στην ανάπτυξη της αεροδυναμικής και της αεροναυτικής. Ανάμεσα στους κλασικούς αυτής της επιστήμης συναντάμε τον N. Zhukovsky και τους μαθητές του Chaplygin, Golubev, κ.ά. Αυτοί εφάρμοσαν τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων (και ταυτόχρονα την ανέπτυξαν) στη θεωρία πτήσης.



Στη δεκαετία του 1940 εμφανίστηκε η υπερηχητική αεροδυναμική.

Η εφεύρεση του ραδιοφώνου οδήγησε στην ανάπτυξη ενός νέου μαθηματικού πεδίου — της θεωρίας των μη γραμμικών ταλαντώσεων. Μεταξύ των δημιουργών της θεωρίας συναντάμε και εξέχοντες ρώσους επιστήμονες: τον Mandelstam και τους μαθητές και συνεργάτες του Paraleksi, Andronov, κ.ά.

Τα προβλήματα ελέγχου των βολών του πυροβολικού οδήγησαν στην ανάπτυξη πολλών κλάδων της θεωρίας πιθανοτήτων (von Neumann, Wiener και Kolmogorov).

Τα προβλήματα κρυπτογράφησης διαβαθμισμένων μηνυμάτων και της αποδοτικής μετάδοσης μέσω των γραμμών επικοινωνίας οδήγησαν στη γέννηση ενός νέου μαθηματικού κλάδου: της θεωρίας πληροφορίας (K. Shannon) και της θεωρίας κωδικοποίησης.

Τα προβλήματα αυτόματου ελέγχου στη βιομηχανία και τις διαστημικές πτήσεις έδωσαν το έναυσμα στην ανάπτυξη της θεωρίας βέλτιστου ελέγχου (Pontryagin και Bellman). Τα ίδια μπορούν να ειπωθούν και για πολλούς άλλους κλάδους των καθαρών και των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Πολλά από αυτά που επιτεύχθηκαν σε μυστικά εργαστήρια κατέληξαν αργότερα να αποτελούν κοινή γνώση. Η αντιπαλότητα μεταξύ των δύο κοινωνικών συστημάτων κατά τη διάρκεια του ψυχρού πολέμου οδήγησε σε μια άνευ προηγουμένου ανάπτυξη των τεχνικών βελτιώσεων και την παρούσα πληροφοριακή έκρηξη που προκάλεσε η καθολική χρήση των υπολογιστών. Οι πρώτοι υπολογιστές εμφανίστηκαν κατά το τέλος της περιόδου που εξετάζουμε, και οι μαθηματικοί έπαιξαν βασικό ρόλο στην ανάπτυξή τους. Ειδικότερα, ο von Neumann είχε τη σημαντικότερη συμβολή στην ανάπτυξη των αρχών του σχεδιασμού υπολογιστών και του προγραμματισμού.

Βεβαίως, τα μαθηματικά είναι ουσιώδη και για τη μηχανολογία, τη βιολογία και άλλα πεδία της ανθρώπινης γνώσης. Μεταξύ των εξεχόντων μηχανολόγων και μηχανικών που είχαν σημαντική συμβολή στα μαθηματικά μπορούμε να αναφέρουμε τους Bubnov, Galerkin, Krylov, Timoshenko, G. Taylor και von Kármán. Ο κατάλογος αυτός μπορεί βεβαίως να εμπλουτιστεί.

## Μαθηματικά και φιλοσοφία

Ο 20ός αιώνας υπήρξε εποχή μεγαλείου — μια εποχή που άλλαξε για πάντα τον τρόπο με τον οποίο κατανοούμε τον κόσμο γύρω μας. Τα μαθηματικά έπαιξαν σημαντικό ρόλο σε αυτή τη διαδικασία.

Στην αρχή του αιώνα φαινόταν ότι η επιστήμη βρισκόταν πολύ κοντά στην κατανόηση της δομής του κόσμου. Οι ορθολογιστές παρέμεναν βέβαιοι ότι είναι δυνατόν να ανακαλυφθούν οι νόμοι της φύσης, ότι το σύμπαν υπήρχε και θα υπάρχει για πάντα, όντας απεριόριστο χωρικά και χρονικά, ότι η Γη δημιουργήθηκε με φυσικό τρόπο, όπως και η ζωή, και ότι όσα αντικρίζουν τα μάτια μας αποτελούν προϊόν της φυσικής εξέλιξης. Ο αιώνας μας όμως έριξε σκιές αμφιβολίας σε όλα αυτά τα γεγονότα.

Η γενική θεωρία της σχετικότητας έδωσε το ερέθισμα για την ανάπτυξη της κοσμολογίας. Αυτό οδήγησε στη θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης, η οποία υποθέτει την ύπαρξη ενός αρχικού σημείου στη ζωή του σύμπαντος. Σύμφωνα με τις σύγχρονες εκτιμήσεις, το σύμπαν υπάρχει το πολύ επί  $10^{14}$  έτη. Ο χώρος που καταλαμβάνει το «γεμάτο» σύμπαν, αν και διαστελλόμενος, αποδείχθηκε φραγμένος. Η θεωρία του «συστελλόμενου σύμπαντος», η οποία προβλέπει ότι το σύμπαν τελικώς θα καταρρεύσει σε ένα σημείο, παραμένει αναπόδεικτη. Ο εξέχων ρώσος επιστήμονας Friedmann είχε σημαντική συμβολή στην ανάπτυξη των κοσμολογικών θεωριών. Πολύ πρόσφατα αναπτύχθηκαν εξωτικές θεωρίες που δέχονται την ύπαρξη πολλαπλών περιοχών του σύμπαντος οι οποίες διαφέρουν ως προς την κατεύθυνση ροής του χρόνου (Sakharov).

Σημαντικά προβλήματα ανέκυψαν στην πλειονότητα των θεωριών που ασχολούνται με την προέλευση του ηλιακού συστήματος. Η προέλευση της Γης και της ζωής, η εξέλιξή τους και η καταγωγή του ανθρώπινου είδους μοιάζουν ακόμη πιο αινιγματικά.

Η σκιά της αμφιβολίας έπεσε και σε πολλές μείζονες φιλοσοφικές έννοιες. Το βασικό αξίωμα της μετανευτώνειας επιστημονικής φιλοσοφίας ήταν ότι ο κόσμος διέπεται από διαφορικές εξισώσεις. Με άλλα λόγια, ότι είναι τελείως προβλέψιμος. Το χάος κυβερνούσε ένα μικρό τμήμα αυτού του τακτοποιημένου κόσμου: μόνο στα τυχερά παιχνίδια φαινόταν ότι μπορεί να εμφανιστεί κάτι απρόβλεπτο. Ο Pascal, ο Fermat, ο J. Bernoulli και ο Laplace υπήρξαν οι πρώτοι που περιέγραψαν τους νόμους της τύχης.

Ωστόσο, η περιοχή που κατελάμβανε το χάος διευρυνόταν σταθερά. Η θεωρία πιθανοτήτων — η επιστήμη του τυχαίου — αναπτυσσόταν συνεχώς. Κατά τον 20ό αιώνα πήρε οργανωμένη μορφή. Πριν από μισό αιώνα φαινόταν ότι τα βασίλεια του χάους και της τάξης έχουν συγκρίσιμα μεγέθη. Μόνο στις μέρες μας άλλαξε αυτή η αντίληψη.

Σε αντίθεση με την άποψη του Νεύτωνα και του Laplace, πολλοί επιστήμονες πιστεύουν πλέον ότι *τα πάντα είναι χάος*, και μπορούν να προβάλουν αρκετούς ισχυρούς λόγους για να στηρίξουν την πεποίθησή τους.

Σε σοβαρή αμφιβολία έχει τεθεί η ιδέα που ήθελε τις ικανότητες της ανθρωπότητας απεριόριστες. Έχουμε ήδη αναφέρει τη θεωρία πληροφορίας — τον νέο κλάδο των μαθηματικών που εμφανίστηκε στη δεκαετία του 1940. Ο Norbert Wiener ενέταξε τη θεωρία πληροφορίας σε ένα ευρύτερο επιστημονικό πεδίο που ονόμασε *κυβερνητική*. Η ανάπτυξη αυτής της επιστήμης συνδέεται με πολλές φιλοσοφικές ιδέες, και ειδικά με την έννοια της συνείδησης. Οι περισσότεροι πίστευαν ότι μόνο οι άνθρωποι είναι προικισμένοι με την ικανότητα να σκέπτονται. Στη δεκαετία του 1940, όμως, ο Turing και ο Wiener έθεσαν το ζήτημα της κατασκευής ενός μοντέλου της ανθρώπινης συνείδησης. Έως πολύ πρόσφατα, η ιδέα ενός υπολογιστή που μπορεί να νικά τον παγκόσμιο πρωταθλητή στο σκάκι φαινόταν τρελή. Τρελό ή όχι, συνέ-

βη! Η συζήτηση σχετικά με τη δυνατότητα κατασκευής τεχνητών όντων προικισμένων με την ικανότητα για σκέψη εμπίπτει στο πεδίο μια νέας φιλοσοφίας που αναδύθηκε στην εποχή μας.

Στις αρχές του αιώνα, πολλοί μαθηματικοί (και ιδιαίτερα ο Hilbert) πίστευαν ότι «κάθε πρόβλημα μπορεί να λυθεί». Φαινόταν ότι ήταν δυνατόν να σχεδιάσουμε έναν αλγόριθμο που θα επέτρεπε σε μια μηχανή να διαβάσει την τυπική περιγραφή μιας αξιωματικής θεωρίας και να αποδείξει όλα τα θεωρήματα αυτής της θεωρίας. Αποδείχθηκε ότι το σχέδιο μπορούσε να υλοποιηθεί (κατ' αρχήν) στην περίπτωση της στοιχειώδους γεωμετρίας, αν και η μηχανή θα έπρεπε να εργαστεί επί εξαιρετικά μεγάλο χρονικό διάστημα για να αποδείξει ένα αξιόλογο μέρος από τα γνωστά θεωρήματα της γεωμετρίας. Το φιλόδοξο αυτό σχέδιο, όμως, είναι αδύνατο να υλοποιηθεί για την πλειονότητα των άλλων θεωριών (και ιδιαίτερα, την αριθμητική). Πρόκειται για ένα σπουδαίο θεώρημα που το απέδειξε ο Gödel το 1931.

Στη συνέχεια, ας πούμε λίγα πράγματα για τα προβλήματα που διατυπώθηκαν ή λύθηκαν στη διάρκεια του αιώνα μας και για το ρόλο που έπαιξαν στην ανάπτυξη της επιστήμης. Το θέμα βέβαια θα απαιτούσε ένα ιδιαίτερο άρθρο. Εδώ θα κάνουμε μια σύντομη επισκόπηση.

## Προβλήματα

Η μελέτη των νόμων της φύσης, η ανάπτυξη των αφηρημένων μαθηματικών, τα επιτεύγματα των εφαρμοσμένων μαθηματικών και ο προβληματισμός για τα φιλοσοφικά θεμέλια του κόσμου οδήγησαν στην ανάδυση νέων μαθηματικών κλάδων και καινούργιων θεμελιακών εννοιών, στην επίτευξη εξαιρετικών αποτελεσμάτων και στην ανάπτυξη νέων θεωριών και αποτελεσματικών μεθόδων.

Στο Διεθνές Μαθηματικό Συνέδριο των Παρισίων, το 1900, στην εισαγωγή της διάλεξής του που ήταν αφιερωμένη στη διατύπωση σημαντικών μαθηματικών προβλημάτων, ο Hilbert ανέφερε: «Είναι αδύνατο να αρνηθούμε τον σημαντικό ρόλο συγκεκριμένων προβλημάτων για τα μαθηματικά στο σύνολό τους και για συγκεκριμένες έρευνες.»

Οι προηγούμενοι αιώνες κληροδότησαν στον 20ό αιώνα πολλά σπουδαία προβλήματα. Το παλαιότερο από αυτά είναι το τελευταίο θεώρημα του Fermat, σύμφωνα με το οποίο, για κάθε ακέραιο  $n > 2$ , η εξίσωση  $x^n + y^n = z^n$  δεν έχει ακέραιες θετικές λύσεις. Το πρόβλημα τέθηκε τον 17ο αιώνα. Δύο περίφημα προβλήματα της θεωρίας αριθμών —η εικασία του Goldbach και η εικασία του Euler— έφτασαν σ' εμάς από τον 18ο αιώνα. Ο Goldbach, σε μια επιστολή του προς τον Euler το 1742, ισχυρίστηκε ότι *κάθε περιττός φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 6 ισούται με το άθροισμα τριών πρώτων*. Ο Euler επισήμανε ότι για να αποδειχθεί αυτό αρκεί να δείξουμε ότι *κάθε άρτιος φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 2 ισούται με το άθροισμα δύο πρώτων*.

Τα διασημότερα μεταξύ των προβλημάτων που τέθηκαν τον 19ο αιώνα είναι το πρόβλημα του Riemann για

τις ρίζες της συνάρτησης ζήτα και η υπόθεση του συνεχούς του Cantor.

Το διασημότερο σύνολο προβλημάτων στον 20ό αιώνα αποτελεί ο κατάλογος των προβλημάτων του Hilbert, τον οποίο έχουμε ήδη αναφέρει. Την πρώτη θέση αυτού του καταλόγου καταλαμβάνει το πρόβλημα του συνεχούς: *Υπάρχει μη αριθμήσιμο σύνολο που μπορεί να απεικονιστεί μονότιμα στο μοναδιαίο διάστημα, αλλά το μοναδιαίο διάστημα να μην μπορεί να απεικονιστεί μονότιμα σε αυτό; Με άλλα λόγια, υπάρχει σύνολο με πληθικότητα μεγαλύτερη από αυτή του αριθμήσιμου συνόλου αλλά μικρότερη από εκείνη του μοναδιαίου διαστήματος;*

Το τελευταίο θεώρημα του Fermat αποδείχθηκε στο τέλος του 20ού αιώνα. Την εικασία του Goldbach «σχεδόν» την απέδειξε ο I.M. Vinogradov το 1937 απέδειξε ότι *κάθε αρκούντως μεγάλος περιττός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί ως άθροισμα τριών πρώτων*. Τα προβλήματα του Euler και του Riemann παραμένουν άλυτα.

Ας εξηγήσουμε με ποιον τρόπο λύθηκαν αρκετά από τα προβλήματα του Hilbert. Ο Hilbert σε μεγάλο βαθμό αποδείχθηκε καλός μάντης, αλλά σε αρκετές περιπτώσεις η διαίσθησή του τον ξεγέλασε. Κατά κανόνα, σε όσες περιπτώσεις «έπεσε έξω», τούτο πρέπει να αποδοθεί στην αισιόδοξη άποψη για τον κόσμο που χαρακτήριζε τον προηγούμενο αιώνα.

Ο Hilbert έθεσε το πρόβλημα του συνεχούς θεωρώντας ότι μπορεί να απαντηθεί με τον έναν ή τον άλλο τρόπο. Όμως, αποδείχθηκε ότι η υπόθεση του συνεχούς δεν μπορεί ούτε να επαληθευθεί ούτε να διαψευσθεί μέσα στο πλαίσιο της συμβατικής αξιωματικής θεωρίας συνόλων και της μαθηματικής λογικής. Το γεγονός ότι δεν μπορεί να διαψευσθεί αποδείχθηκε από τον Gödel το 1936. Το ότι δεν μπορεί να επαληθευθεί αποδείχθηκε από τον Cohen το 1963.

Η εμπιστοσύνη του Hilbert στις απεριόριστες δυνατότητες της ανθρώπινης νόησης εκφράζεται στον αφορισμό του: «Αν θέλουμε να μάθουμε, θα μάθουμε». Λόγω αυτής της εμπιστοσύνης ήταν βέβαιος ότι κάθε μαθηματικό πρόβλημα πρέπει να έχει λύση. Έτσι, ως 10ο πρόβλημα έθεσε το εξής: *Δεδομένου ενός πολυωνύμου  $P$  με  $n$  μεταβλητές και με ακέραιους συντελεστές, βρείτε έναν αλγόριθμο που θα προσδιορίζει αν η εξίσωση  $P = 0$  διαθέτει ή όχι ακέραιες λύσεις*. Η απάντηση και σε αυτό το πρόβλημα είναι αρνητική, όπως απέδειξε ο Matiyasevich το 1970.

Ο Hilbert ήταν τόσο βέβαιος ότι οι συναρτήσεις τριών μεταβλητών έχουν περισσότερο περίπλοκη δομή από τις συναρτήσεις δύο μεταβλητών ώστε έθεσε την επόμενη υπόθεση ως 13ο πρόβλημα: *Υπάρχει μια συνάρτηση τριών μεταβλητών που δεν μπορεί να παρασταθεί ως επαλληλία (υπέρθηση) συνεχών συναρτήσεων δύο μεταβλητών*. Αυτή την υπόθεση την διέψευσαν ριζικά ο Arnold και ο Kolmogorov το 1957. Αποδείχθηκε ότι οποιαδήποτε συνάρτηση  $n$  μεταβλητών μπορεί να παρασταθεί ως επαλληλία της απλούστερης συνάρτησης δύο μεταβλη-

Η συνέχεια στη σελ. 48 ⇔

# Ένα αστέρι γεννιέται

*Η βαρύτητα ως βασικός συντελεστής στη δημιουργία των άστρων*

V. Surdin

**Η** ΙΣΤΟΡΙΑ ΜΑΣ ΞΕΚΙΝΑ ΣΤΗ ΜΕΓΑΛΗ ΒΡΕΤΑΝΙΑ ΣΤΙΣ αρχές του 20ού αιώνα. Ο James Hopwood Jeans (1877-1946), αρκετά χρόνια αφότου ολοκλήρωσε με εξαιρετική επιτυχία τις σπουδές του στο Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ, πραγματοποίησε μια σειρά ιδιαίτερα σημαντικών μελετών σε ποικίλα πεδία της θεωρητικής φυσικής: δημοσίευσε μια μονογραφία με αντικείμενο την κινητική θεωρία των αερίων καθώς και εργασίες στη μοριακή φυσική και τη θεωρία της ακτινοβολίας. Ο Jeans, τελώντας υπό την επιρροή του George Howard Darwin, καθηγητή φυσικής και αστρονομίας στο Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ (πρόκειται για το γιο του διάσημου βιολόγου και διανοητή Κάρολου Δαρβίνου), ολοκλήρωσε αρκετές μελέτες στη θεωρητική αστροφυσική. Μεταξύ αυτών περιλαμβάνονταν και μία θεμελιώδους σημασίας εργασία που έφερε τον τίτλο «Η ευστάθεια ενός σφαιρικού νεφελώματος» και δημοσιεύθηκε το 1902 στα Πρακτικά της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου.

Η εν λόγω εργασία περιέγραφε πώς συμπεριφέρονται οι αεριώδεις συμπυκνώσεις υπό τη δράση της ίδιας τους της βαρύτητας, και απετέλεσε τον ακρογωνιαίο λίθο της σύγχρονης θεωρίας της βαρυτικής αστάθειας, η οποία εξηγεί την προέλευση ουσιαστικά όλων των δομικών στοιχείων του σύμπαντος, από τους γαλαξίες και τα σμήνη γαλαξιών έως τα άστρα, τους πλανήτες και τους δορυφόρους τους. Έχει καθιερωθεί πλέον οι χαρακτηριστικές διαστάσεις ή μάζες των βαρυτικά ασταθών αεριωδών συμπυκνώσεων να αναφέρονται ως διαστάσεις ή μάζες Jeans και στο συμβολισμό τους να εμφανίζεται πάντοτε ο δείκτης  $J$ . Έτσι, η μάζα και η ακτίνα Jeans, για παράδειγμα, συμβολίζονται αντίστοιχα με  $M_J$  και  $R_J$ .

Δεν χωρεί αμφιβολία ότι ο George Howard Darwin είχε κάθε λόγο να αισθάνεται υπερήφανος επειδή κατόρθωσε να εστιάσει την προσοχή του νεαρού και πολλά υποσχόμενου Jeans στην αστρονομία: η συμβολή του μαθητή του στην ανάπτυξη της κοσμολογίας και της δυναμικής των άστρων υπήρξε εντυπωσιακή. Δεν γνωρίζουμε, ωστόσο, κατά πόσον ο Darwin, ο οποίος την

περίοδο 1899-1900 διετέλεσε πρόεδρος της Βασιλικής Αστρονομικής Εταιρείας, προέβλεπε ότι ο σερ James θα κατελάμβανε την ίδια θέση έπειτα από ένα τέταρτο του αιώνα και ότι θα καθιέρωνε τις ετήσιες Διαλέξεις Darwin προς τιμήν του μέντορά του.

Όσο παράδοξα και αν ηχεί κάτι τέτοιο, ο σύνδεσμος μεταξύ των δύο αυτών κορυφαίων αστρονόμων υπήρξε ακόμη βαθύτερος. Ο George Darwin απέκτησε μεγάλη φήμη χάρη στις μελέτες που πραγματοποίησε με αντικείμενο τις παλίρροιες και το σχήμα των περιστρεφόμενων ρευστών σωμάτων. Ο Jeans συνέχισε τις μελέτες του ρόλου που διαδραματίζουν τα παλιρροϊκά φαινόμενα στην κοσμολογία και έφτασε στο σημείο να αναπτύξει την παλιρροϊκή θεωρία για τη δημιουργία του ηλιακού συστήματος, η οποία έχαιρε ευρύτατης αποδοχής κατά το πρώτο ήμισυ του 20ού αιώνα. Σύμφωνα με την εν λόγω θεωρία, η γέννηση ενός πλανητικού συστήματος συνιστά εξαιρετικά σπάνιο γεγονός, που προκαλείται από τη διέλευση κάποιου άστρου σε μικρή απόσταση από έναν ήλιο· το άστρο, τότε, αποσπά ένα μέρος της συμπυκνωμένης πρωτοπλανητικής ύλης από το εξωτερικό κέλυφος του ήλιου. Μολονότι πρόκειται για μια υπόθεση που, όσον αφορά το δικό μας ηλιακό σύστημα, μόνο ιστορικό ενδιαφέρον παρουσιάζει πλέον, ο μηχανισμός της παλιρροϊκής αλληλεπίδρασης αναμφίβολα διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο στον κόσμο των γαλαξιών, των αστρικών σμηνών και, πιθανότατα, στη διαδικασία σχηματισμού των άστρων, δηλαδή στο λεγόμενο στάδιο της πρωτοαστρικής εξέλιξης.

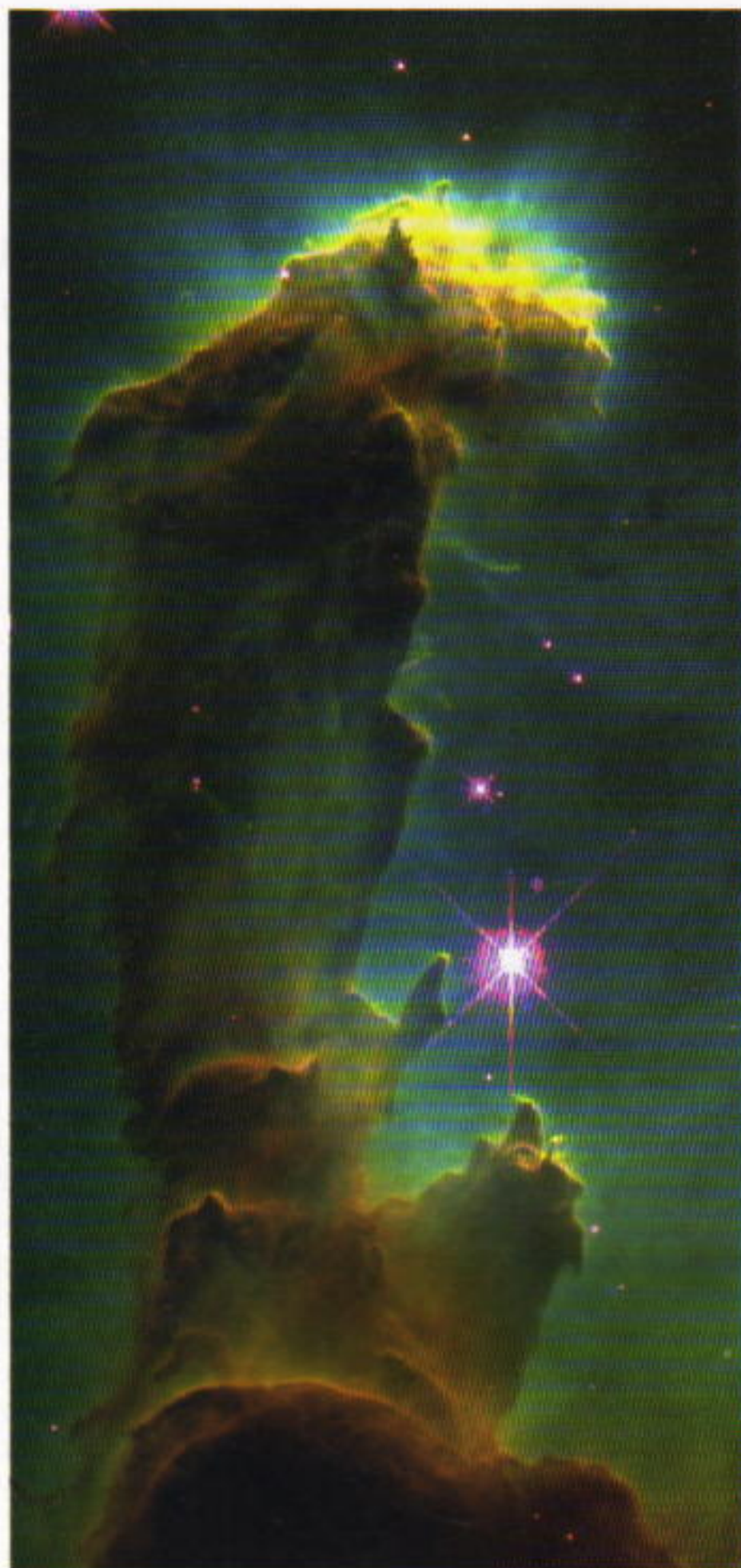
Αλλά ας επιστρέψουμε στο βασικό έργο του Jeans, τη θεωρία της βαρυτικής αστάθειας. Αφότου ο Jeans έθεσε τα θεμέλιά της στις αρχές του 20ού αιώνα, οι αστρονόμοι χρειάστηκαν εβδομήντα ακόμη χρόνια για να ανακαλύψουν τη συνιστώσα του μεσοαστρικού μέσου που εμπλέκεται άμεσα στο σχηματισμό των άστρων, και στην οποία πρέπει να εφαρμοστεί η θεωρία του Jeans ώστε να οδηγήσει σε ορθές προβλέψεις για τις χαρακτηριστικές παραμέτρους των νεογέννητων άστρων. Το διάστημα

που μεσολάβησε ανάμεσα στις θεωρητικές προβλέψεις και τα πειραματικά ευρήματα δεν μπορεί παρά να κρίνεται εντυπωσιακά μακρό προκειμένου για μια σύγχρονη και ταχέως αναπτυσσόμενη επιστήμη.

Οι απαρχές της θεωρίας της βαρυτικής αστάθειας εντοπίζονται στα γραπτά του πατέρα της νεότερης φυσικής σερ Ισαάκ Νεύτωνα (1643-1727). Μία πενταετία αφότου ο Νεύτων δημοσίευσε το νόμο της παγκόσμιας έλξης, ο νεαρός φίλος του και κληρικός Richard Bentley, ο οποίος τότε ήταν διευθυντής του Trinity College στο Καίμπριτζ, σε μια επιστολή του τον ρώτησε σε ποιους λόγους θα μπορούσε να αποδοθεί ο σχηματισμός των άστρων. Ειδικότερα, τον Bentley τον απασχολούσε το ερώτημα κατά πόσον η προσφάτως ανακαλυφθείσα βαρυτική δύναμη θα μπορούσε να αποτελεί την αιτία της δημιουργίας των άστρων. (Η διατύπωση του ερωτήματος αυτού μας επιτρέπει να συμπεριλάβουμε τον Bentley στους πατέρες της ιδέας της βαρυτικής αστάθειας.) Στην πρώτη απαντητική του επιστολή προς τον δρ R. Bentley βρίσκουμε τον σερ Ισαάκ Νεύτωνα να γράφει τα εξής: «Μου φαίνεται ότι εάν η ύλη του Ήλιου και των πλανητών, καθώς και όλη η ύλη του σύμπαντος, εμφανίστηκε αρχικά ισομερώς κατανεμημένη σε όλο τον ουρανό, και αν κάθε σωματίδιο είχε μια συμφυή βαρυτική έλξη προς όλα τα υπόλοιπα σωματίδια, και αν ολόκληρος ο χώρος στον οποίο βρισκόταν κατανεμημένη αυτή η ύλη δεν ήταν παρά πεπερασμένος, τότε η ύλη στις εξωτερικές περιοχές αυτού του χώρου θα έτεινε —λόγω της βαρύτητάς της— προς το σύνολο της ύλης στο εσωτερικό του χώρου· κατά συνέπεια, όλη η ύλη θα κατέρρεε στο κέντρο ολόκληρου του χώρου, όπου και θα δημιουργούσε μια μεγάλη σφαιρική μάζα. Αλλά αν η ύλη ήταν ισομερώς κατανεμημένη σε έναν άπειρο χώρο, δεν θα μπορούσε ποτέ να συρρικνωθεί σε μία μοναδική μάζα· τουναντίον, η ύλη εν μέρει θα συρρικνωνόταν σε μια μάζα εδώ και εν μέρει σε κάποια άλλη εκεί, δημιουργώντας έτσι ένα άπειρο πλήθος μεγάλων μαζών διασκορπισμένων σε μεγάλες αποστάσεις και απλωμένων σε ολόκληρο τον άπειρο χώρο. Και κατ' αυτό τον τρόπο θα ήταν δυνατόν να σχηματίστηκαν ο Ήλιος και οι απλανείς αστέρες, εφόσον επιπροσθέτως υποτεθεί ότι η ύλη είχε φωτεινή φύση.»

Όπως βλέπουμε, ο Νεύτων επεξεργάστηκε την ιδέα της συμπύκνωσης της αρχέγονης ύλης. Θεώρησε την ύλη αυτή απολύτως αδρανή και ψυχρή και, συνεπώς, ανίκανη να προβάλλει την παραμικρή αντίσταση στη συμπίεζουσα βαρύτητα. Επομένως, κατά τον Νεύτωνα, κάθε περιοχή υψηλότερης πυκνότητας δεν μπορεί παρά να συστέλλεται προοδευτικά, και έτσι να γίνεται ολοένα πυκνότερη εξαιτίας της βαρύτητας.

Προς τα τέλη του 19ου αιώνα, οι φυσικοί είχαν πλέον αντιληφθεί σαφώς ότι η ελαστικότητα συνιστά ουσιώδες και αναγκαίο χαρακτηριστικό κάθε μορφής ύλης, του αραιού αερίου συμπεριλαμβανομένου: πρόκειται για την ιδιότητα η οποία αποτελεί την υποκείμενη βάση φαινομένων όπως η ύπαρξη ηχητικών κυμάτων που διαδίδονται στο χώρο. Εκκινώντας από την αφετηρία αυτή, ο



Οι φωτογραφίες του άφθρου αποτελούν ευγενική παραχώρηση της NASA

Οι εικονιζόμενες στήλες ψυχρού μεσοαστρικού αερίου υδρογόνου και σκόνης αποτελούν γιγαντιαία εκκολαπτήρια για τα νέα άστρα. Είναι μέρος του νεφελώματος του Αετού, μιας κοντινής περιοχής σχηματισμού άστρων η οποία βρίσκεται στον αστερισμό του Όφειως, σε απόσταση 7.000 ετών φωτός από τη Γη.

Jeans συμπέρανε ότι η βαρυτική συστολή αρχίζει μόνο όταν η δύναμη της βαρύτητας υπερνικήσει την (εσωτερική) πίεση του αερίου.

Για να προσδιορίσουμε τις συνθήκες που καθιστούν δυνατή μια τέτοια εξέλιξη, θα προβούμε σε μερικές απλές φυσικές εκτιμήσεις. Ας εξετάσουμε ποιες διαδικασίες επάγει η μικρή στοχαστική συμπίεση ενός όγκου αερίου με χαρακτηριστική γραμμική διάσταση  $l$  και πυκνότη-

τα  $\rho$ . Από τη μια, η δύναμη της βαρύτητας συντελεί στην παράταση της συμπίεσης. Αν απουσίαζε εντελώς η πίεση του αερίου, όλη η μάζα της συμπύκνωσης θα κατέρρεε στο κέντρο της σε διάστημα ίσο προς το χρόνο ελεύθερης πτώσης

$$t_n \sim (G\rho)^{-1/2},$$

ο οποίος είναι ανεξάρτητος των διαστάσεων της περιοχής όπου εκδηλώνεται η διαταραχή.

Ο ανωτέρω τύπος μπορεί να εξηγηθεί με τη βοήθεια του τρίτου νόμου του Kepler. Η πτώση οποιουδήποτε σωματιδίου προς το κέντρο του νέφους συντελείται υπό την επίδραση της ελκτικής δύναμης που παράγει η μάζα  $M \sim \rho a^3$ , όπου το  $a$  δηλώνει την αρχική απόσταση του σωματιδίου από το κέντρο του νέφους. Η διάρκεια της πτώσης ισούται με τη μισή περίοδο περιφοράς κατά μήκος μιας πολύ στενής έλλειψης της οποίας η μία εστία συμπίπτει με το κέντρο του νέφους. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Kepler, η περίοδος της κίνησης κατά μήκος μιας έλλειψης με μεγάλο άξονα  $a$  ισούται με την περίοδο περιφοράς σε κυκλική τροχιά ακτίνας  $a/2$  γύρω από τη μάζα  $M$ . (Διευκρινίζουμε ότι το σωματίδιο θα ακολουθήσει την έλλειψη του νόμου του Kepler μόνο εφόσον στην πτώση προς το κέντρο βάρους συμμετέχουν όλα τα σωματίδια που απαρτίζουν το νέφος, και μάλιστα κατά τέτοιον τρόπο ώστε η μάζα που περιέχεται στη συσπασμένη σφαίρα επί της οποίας κείται το κάθε σωματίδιο κατά την πτώση του να παραμένει σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας.) Η περίοδος μιας τέτοιας κυκλικής κίνησης μπορεί εύκολα να υπολογιστεί με τη βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. (Για τον ακριβή τύπο και την αναλυτική εξαγωγή του, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο πρόβλημα Φ167 του τεύχους Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου 1999.)

Από την άλλη, εάν απουσίαζε η βαρύτητα, η πίεση του αερίου θα ανάγκαζε το νέφος να διασταλεί, διαδικασία που θα διαρκούσε επί διάστημα ίσο με τον λεγόμενο «δυναμικό χρόνο», του οποίου μια εκτίμηση μας παρέχει ο τύπος

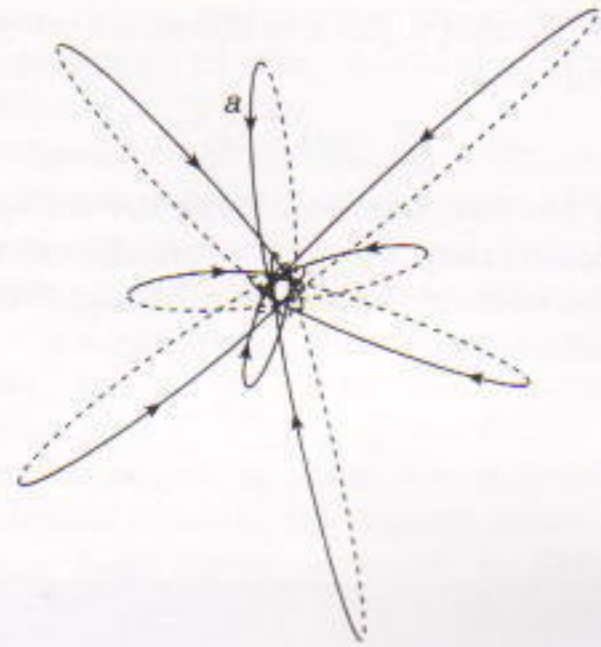
$$t_s \sim \frac{\lambda}{v_{\text{πκ}}},$$

όπου με  $v_{\text{πκ}}$  συμβολίζουμε την ταχύτητα του ήχου στο αέριο, η οποία δεν διαφέρει ως προς την τάξη μεγέθους από την ταχύτητα της μοριακής κίνησης στο ίδιο αέριο:

$$v_{\text{πκ}} \sim \sqrt{\frac{RT}{\mu}}.$$

(Εδώ το  $R$  δηλώνει την παγκόσμια σταθερά των αερίων και το  $\mu$  τη γραμμομοριακή μάζα.)

Προφανώς, αν  $t_s \ll t_n$ , η μοριακή πίεση θα έχει αρκετό χρόνο στη διάθεσή της για να ανακατανεμίσει την ύλη κατά τρόπον ώστε να εμποδίσει την περαιτέρω βαρυτική της συστολή. Αντίθετα, αν  $t_n \ll t_s$ , η συστολή συντελείται ταχύτερα απ' ό,τι η διαστολή του αερίου λόγω της μοριακής κίνησης. Ας προσδιορίσουμε το λόγο των  $t_s$  και  $t_n$ :



Η ελεύθερη συστολή ενός νέφους υπό την επίδραση της ιδιοβαρύτητας του μπορεί να θεωρηθεί ως μια κίνηση όλων των σωματιδίων που το απαρτίζουν κατά μήκος εξαιρετικά επιμηκυσμένων ελλειπτικών τροχιών οι οποίες υπακούουν στους νόμους του Kepler.

$$\frac{t_s}{t_n} \sim \frac{\lambda}{(G\rho)^{-1/2} v_{\text{πκ}}} = \frac{\lambda}{(RT/\rho G\mu)^{1/2}}.$$

Διαπιστώνουμε ότι οι διαταραχές μικρής κλίμακας ( $\lambda \ll (RT/\rho G\mu)^{1/2}$ ) επιδεικνύουν ευστάθεια ως προς τη στοχαστική συμπίεση, σε αντίθεση με τις διαταραχές μεγάλης κλίμακας ( $\lambda \gg (RT/\rho G\mu)^{1/2}$ ) οι οποίες είναι ασταθείς: αφ' ης στιγμής εμφανιστούν, αποκλείεται να αποσβεστούν μέσω της διαστολής του αερίου.

Συνεπώς, η συλλογιστική μας οδηγεί στην ακόλουθη εκτίμηση για την κρίσιμη γραμμική διάσταση  $\lambda_J$ :

$$\lambda_J \sim \left( \frac{RT}{\rho G\mu} \right)^{1/2},$$

η οποία μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε και την κρίσιμη μάζα  $M_J$ :

$$M_J \sim \rho \lambda_J^3 \sim \left( \frac{RT}{G\mu} \right)^{3/2} \rho^{-1/2}.$$

Αν εξαιρέσουμε κάποιους μη ουσιώδεις αριθμητικούς συντελεστές, οι δύο τύποι μας συμπίπτουν με τους περίφημους νόμους του Jeans.

Για να αντιληφθούμε βαθύτερα το νόημα των αποτελεσμάτων αυτών, θα τα εξαγάγουμε εκ νέου από τη συνθήκη ισορροπίας για ένα αεριώδες νέφος που τελεί υπό την επίδραση της μοριακής πίεσης και της βαρύτητας, ισορροπία η οποία, σύμφωνα με τον ορισμό των  $\lambda_J$  και  $M_J$ , αποκαθίσταται ακριβώς όταν έχουμε  $\lambda = \lambda_J$  και  $M = M_J$ . Η τιμή που χαρακτηρίζει την επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης στο νέφος δίνεται (ως προς την τάξη μεγέθους) από την έκφραση

$$g \sim G \frac{M}{\lambda^2} \sim \rho G \lambda.$$

Η πίεση του αερίου πρέπει να εξισορροπεί τη δύναμη της βαρύτητας: προς τούτοις, η πίεση πρέπει να μεταβάλ-

Λεται από την τιμή μηδέν στο εξωτερικό σύνορο του νέφους ως την τιμή

$$P \sim \rho g \lambda - G \rho^2 \lambda^2$$

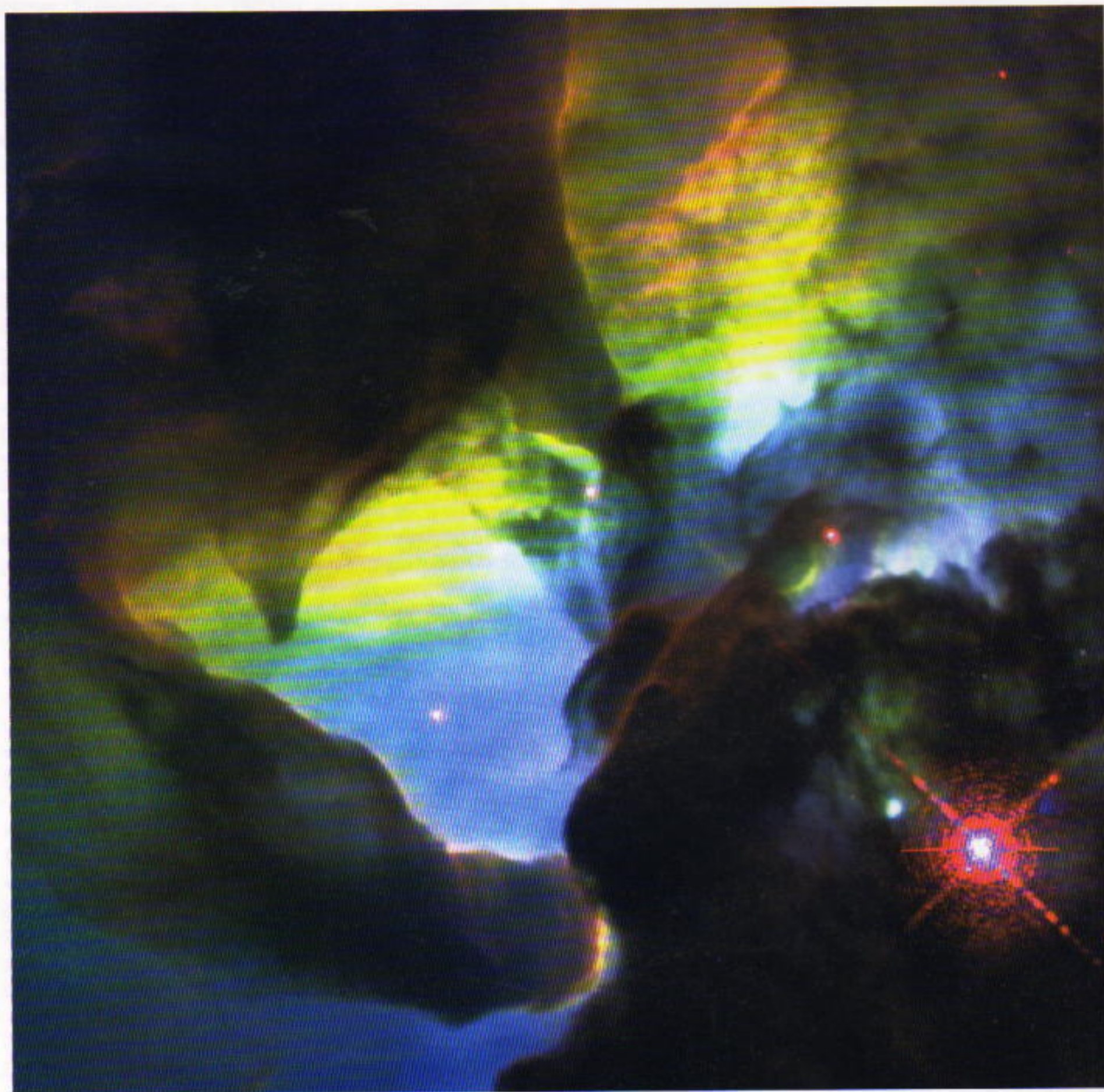
στα βάθη του (σας υπενθυμίζουμε τον πασίγνωστο τύπο της υδροστατικής πίεσης  $P = \rho g h$ ). Εάν αντικαταστήσουμε στον ανωτέρω τύπο την τιμή της  $P$  που δίνει η καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου

$$P = \frac{\rho R T}{\mu},$$

καταλήγουμε στις ίδιες εκτιμήσεις για τη  $\lambda_J$  και τη  $M_J \sim \rho \lambda_J^3$  όπως και προηγουμένως. Αν εφαρμόσει κανείς πιο προωθημένες μαθηματικές τεχνικές, μπορεί να προσδιορίσει τα  $\lambda_J$  και  $M_J$  με μεγαλύτερη ακρίβεια (οι κατωτέρω τύποι δεν πρόκειται να αποδειχθούν εδώ):

$$\lambda_J = \left( \frac{2RT}{\rho G \mu} \right)^{1/2}, \quad M_J = \left( \frac{RT}{2G \mu} \right)^{3/2} \rho^{-1/2}.$$

Τούτοι οι απλοί νόμοι αποτελούν τους ακρογωνιαίους λίθους της θεωρίας της βαρυτικής αστάθειας. Η συγκε-



Μεσοαστρικοί «σίφωνες» στην καρδιά του νεφελώματος της Λιμνοθάλασσας. Η μεγάλη θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα στη θερμή επιφάνεια και το ψυχρό εσωτερικό των νεφών, συνδυαζόμενη με την πίεση του αστρικού φωτός, μπορεί να παραγάγει ισχυρές διατμητικές τάσεις οι οποίες συστρέφουν τα νέφη προσδίδοντάς τους μια μορφή που θυμίζει σίφωνα. Το νεφέλωμα της Λιμνοθάλασσας καθώς και διάφορα νεφελώματα σε άλλους γαλαξίες αποτελούν τόπους όπου γεννιούνται νέα άστρα από νέφη μοριακού αερίου και σκόνης.

κριμένη θεωρία μάς λέει ότι αν σε ένα αεριώδες μέσο δημιουργηθούν για οποιονδήποτε λόγο διαταραχές της πυκνότητας διαφόρων εκτάσεων, τότε, για όσες από αυτές έχουν μάζα η οποία υπερβαίνει την τιμή  $M_J$ , η διαδικασία συστολής τους είναι μη αναστρέψιμη και θα οδηγήσει στη μετατροπή τους σε πυκνή ύλη. Εντούτοις, οι μεγάλης κλίμακας διακυμάνσεις πυκνότητας συνιστούν σπάνια γεγονότα, ενώ συνήθως στο αεριώδες νέφος παρατηρούνται μόνο μικρής κλίμακας διακυμάνσεις πυκνότητας. Συνεπώς, η βαρυτική συστολή αναμένεται με συντριπτική πιθανότητα να εκδηλώνεται σε διαταραχές μάζας  $M \cong M_J$ .

Διακόσια σαράντα χρόνια αφότου ο Νεύτων συνέταξε την επιστολή του προς τον Bentley, ο Jeans έγραψε στο βιβλίο του *The Stars in their Courses* (Τα άστρα στις πορείες τους — 1931): «Υποθέστε ότι στην αρχή του χρόνου ένα αέριο κατελάμβανε όλο το χώρο... Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι ένα τέτοιο αέριο θα ήταν αδύνατο να παραμείνει ομοιογενώς κατανομημένο στο χώρο και ότι θα άρχιζε αμέσως να συμπυκνώνεται σε σφαίρες. Μάλιστα, μπορούμε να υπολογίσουμε πόσο αέριο χρειάζεται για να σχηματιστεί κάθε σφαίρα.»

Δυστυχώς, ο Jeans υπερεκτίμησε ελαφρώς τις δυνατότητές του: αδυνατούσε να παράσχει μια επαρκώς τεκμηριωμένη απόδειξη για την εγκυρότητα του τύπου του, διότι στην εποχή του δεν ήταν γνωστό σχεδόν τίποτε σχετικά με τις φυσικές ιδιότητες και τη σύσταση του μεσοαστρικού αερίου από το οποίο σχηματίζονται τα άστρα. Τώρα, όμως, βρισκόμαστε πλέον σε θέση να αναλάβουμε το εγχείρημα μιας τέτοιας απόδειξης στηριζόμενοι στα σύγχρονα παρατηρησιακά δεδομένα.

Οι αστρονόμοι απέδειξαν ότι τόσο τα άστρα όσο και το μεσοαστρικό αέριο έχουν μια πολύ σταθερή χημική σύνθεση: κάθε 1.000 άτομα υδρογόνου συνοδεύονται από 100 άτομα ηλίου και 2-3 άτομα άλλων (βαρύτερων) στοιχείων. Στα ψυχρά και πυκνά νέφη όπου γεννιούνται τα άστρα, το υδρογόνο υπάρχει υπό τη μορφή του μορίου  $H_2$ , με γραμμομοριακή μάζα  $\mu(H_2) = 2 \text{ g/mol}$ . Αν λάβουμε υπόψη μας και τη μικρή παρουσία άλλων χημικών στοιχείων, η μέση γραμμομοριακή μάζα του μεσοαστρικού αερίου ανέρχεται σε  $\mu_{\text{μέση}} = 2,3 \text{ g/mol}$ .

Στην αστρονομία, η πυκνότητα του μεσοαστρικού αερίου  $\rho = (\mu_{\text{μέση}}/N_A)n$  εκφράζεται συνήθως μέσω της λεγόμενης αριθμητικής πυκνότητας του μοριακού υδρογόνου,  $n(H_2)$ . Αν λάβουμε υπόψη μας τη σύσταση του μεσοαστρικού αερίου, βρίσκουμε  $n = 1,1n(H_2)$ . Αντικαθιστώντας το  $\rho$  και το  $n$  στους τύπους του Jeans, καταλήγουμε στη σύγχρονη μορφή τους:

$$\lambda_J = 3,2 \cdot (10^4 \text{ AU}) \left( \frac{T}{10 \text{ K}} \frac{10^4 \text{ cm}^{-3}}{n(H_2)} \right)^{1/2},$$

$$M_J = 0,3 M_{\odot} \left( \frac{T}{10 \text{ K}} \right)^{3/2} \left( \frac{10^4 \text{ cm}^{-3}}{n(H_2)} \right)^{1/2}.$$

Στον τελευταίο τύπο, με  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  συμβολίζουμε

τη μάζα του Ήλιου, ενώ η αστρονομική μονάδα AU ισούται εξ ορισμού με τη μέση απόσταση της Γης από τον Ήλιο ( $1 \text{ AU} = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ cm}$ ).

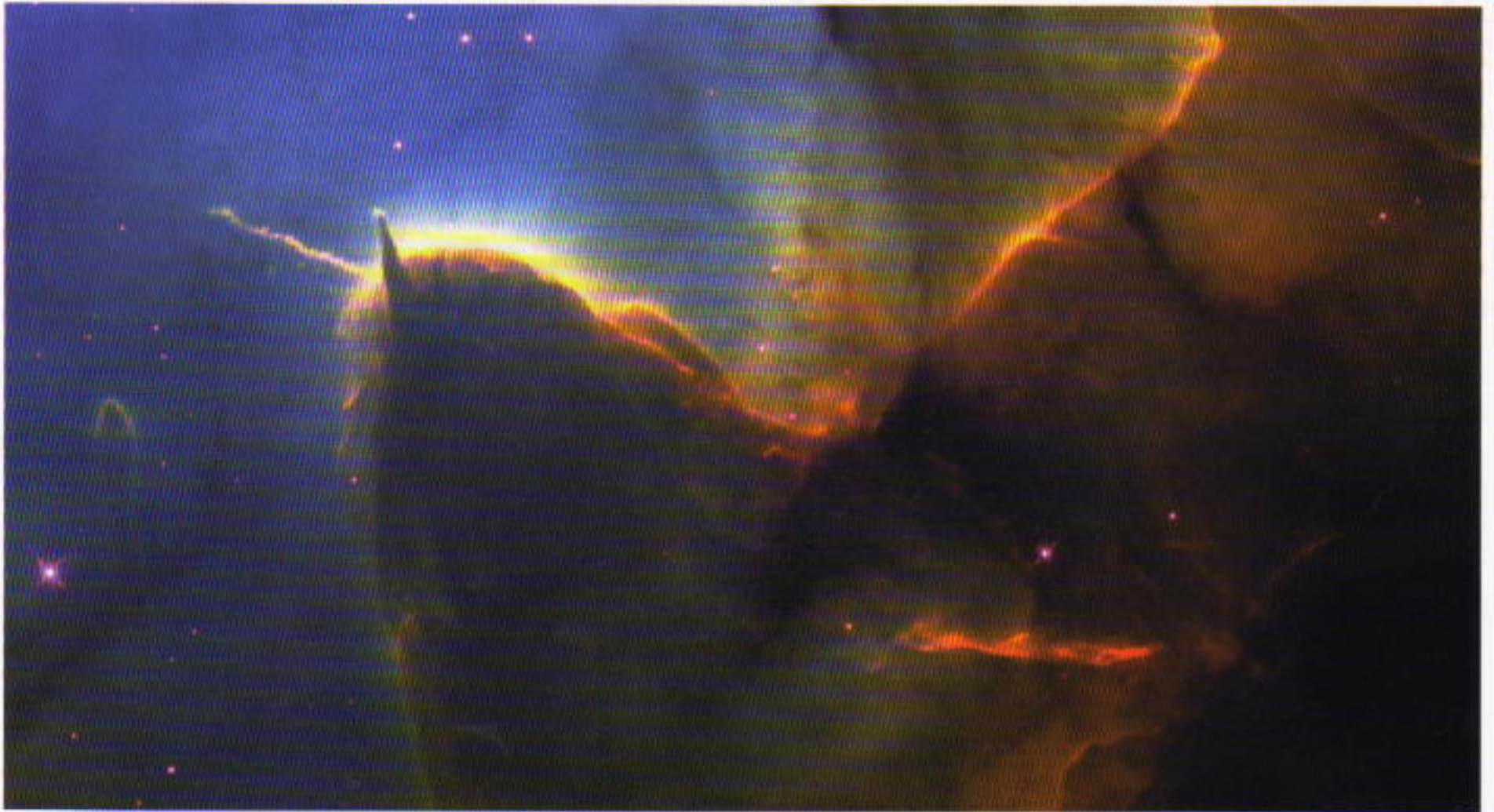
Όπως ανακαλύφθηκε προσφάτως, οι τυπικές περιοχές σχηματισμού των άστρων είναι οι μικρής κλίμακας συμπυκνώσεις στα μεσοαστρικά μοριακά νέφη, όπου επικρατεί θερμοκρασία  $T = 5-20 \text{ K}$  και η αριθμητική πυκνότητα του υδρογόνου,  $n(H_2)$ , κυμαίνεται μεταξύ των τιμών  $10^4 \text{ cm}^{-3}$  και  $10^6 \text{ cm}^{-3}$ . Επομένως, σ' αυτές τις περιοχές έχουμε  $M_J = (0,02-2)M_{\odot}$ . Όπως έδειξαν οι αστρονομικές παρατηρήσεις, οι μάζες των περισσότερων άστρων εμπίπτουν σε τούτη την περιοχή τιμών. Συνεπώς, η θεωρία του Jeans οδηγεί σε σωστές προβλέψεις!

Μια άλλη κρίσιμη πρόβλεψη της εν λόγω θεωρίας που μπορεί να υποβληθεί σε παρατηρησιακό έλεγχο είναι το μέγεθος του «προγονικού» νέφους των άστρων. Στην περίπτωση του Ήλιου, αυτό το μέγεθος εκτιμάται ότι ανέρχεται σε  $10^4 \text{ AU}$ : πρόκειται για μια τιμή που συμπίπτει με την ακτίνα του πυκνού εσωτερικού του νέφους του Oort, το οποίο περιέχει την περισσότερη από τη μάζα των πυρήνων των κομητών. Σε ποια σχέση βρίσκεται η συγκεκριμένη τιμή με τις προβλέψεις της θεωρίας του Jeans;

Η ακτίνα του αεριώδους θραύσματος όταν πρωτοεκδηλώνεται η βαρυτική του αστάθεια λαμβάνεται φυσιολογικά ίση με  $R_J = \lambda_J/4$ . Εφόσον η μάζα του θραύσματος πρέπει να ισούται με εκείνη του Ήλιου, και υποθέτοντας ότι  $T \cong 20 \text{ K}$ , βρίσκουμε  $n(H_2) = 10^4 \text{ cm}^{-3}$  και  $R_J = 10^4 \text{ AU}$ , τιμή η οποία συμπίπτει με την αρχική ακτίνα του νέφους του Oort. Χρειαζόμαστε άραγε επιπρόσθετες αποδείξεις για την εγκυρότητα της θεωρίας του Jeans;

Φυσικά, οι απλοί τύποι του Jeans δεν λαμβάνουν υπόψη πολλές από τις φυσικές διαδικασίες που συντελούνται στο μεσοαστρικό νέφος. Οι συγκεκριμένοι τύποι ισχύουν στην περίπτωση ενός ιδανικού ομογενούς αερίου το οποίο ακινητεί, κάτι που στην πραγματικότητα ουδέποτε απαντά στη φύση. Η αληθινή μεσοαστρική ύλη βρίσκεται σε διαρκή κίνηση, συχνά μάλιστα αναπτύσσοντας ταχύτητες που υπερβαίνουν εκείνη του ήχου. Επιπλέον, πρόκειται για μια κίνηση που λαμβάνει χώρα υπό την ισχυρότατη επίδραση των μαγνητικών πεδίων, της βαρυτικής έλξης των γειτονικών άστρων του Γαλαξία καθώς και της πίεσης της ακτινοβολίας την οποία εκπέμπουν τα λαμπρότερα εξ αυτών. Ως εκ τούτου, δεν προκαλεί απορία το γεγονός ότι μετά τον Jeans πολλοί φυσικοί χρειάστηκε να μοχθήσουν για να αναπτυχθεί η θεωρία της βαρυτικής αστάθειας και να διασαφηνιστούν οι λεπτομέρειές της. Ανάμεσά τους αξίζει να μνημονευθούν οι E.M. Lifshits, S. Chandrasekhar, Y.B. Zeldovich και J. Silk.

Η ανάπτυξη της θεωρίας αυτής έχει φτάσει πλέον σε υψηλό επίπεδο: λαμβάνει υπόψη τη διαστολή και την περιστροφή του αεριώδους μέσου καθώς και την αλληλεπίδρασή του με τα μαγνητικά πεδία και τις εξωτερικές πηγές βαρύτητας. Ωστόσο, η ανάλυση τούτων των πρόσθετων φυσικών φαινομένων δεν οδήγησε σε ριζική α-



Ένας αστρικός πίδακας (το λεπτό θυσανωτό αντικείμενο που «δείχνει» προς την πάνω αριστερή γωνία της φωτογραφίας) στο Τρισχιδές νεφέλωμα προεξέχει από την «κεφαλή» ενός πυκνού νέφους και εκτείνεται σε μήκος τριών τετάρτων του έτους φωτός στο εσωτερικό του νεφελώματος. Η πηγή του πίδακα είναι ένα πολύ νεαρό αστρικό αντικείμενο που βρίσκεται «θαμμένο» μέσα στο νέφος. Οι πίδακες αυτού του τύπου αποτελούν τα καυσάερια της διαδικασίας σχηματισμού των άστρων. Η ακτινοβολία που προέρχεται από το μεγάλης μάζας άστρο στο κέντρο του νεφελώματος κάνει το αέριο του πίδακα να λάμπει, ακριβώς όπως συμβαίνει και με το υπόλοιπο νεφέλωμα.

ναθεώρηση των θεμελιωδών θεωρητικών συμπερασμάτων: στις περισσότερες σύγχρονες μελέτες εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται οι τιμές της μάζας και της ακτίνας Jeans προκειμένου να διατυπωθούν εκτιμήσεις για τα αποτελέσματα που παράγει η βαρυτική αστάθεια. Ένας από τους λόγους στους οποίους οφείλεται αυτή η επιστημονική μακροβιότητα έγκειται στις περιορισμένες δυνατότητες των σύγχρονων αστρονομικών οργάνων: σε σπάνιες μόνο περιπτώσεις καθίσταται δυνατός ο προσδιορισμός κάποιων άλλων παραμέτρων του πρωτοαστρικού μέσου πλην της πυκνότητάς του και της θερμοκρασίας του.

Ο ίδιος ο σερ James ήταν έμπλεος ενθουσιασμού από τα αποτελέσματα των μελετών του, πρωτίστως δε λόγω της απλής και σαφούς φύσεώς τους. Έγραφε σχετικά: «Είναι σαφές γιατί όλα τα άστρα έχουν παραπλήσιες μάζες: όλα τους σχηματίστηκαν μέσω της ίδιας διαδικασίας. Πιθανόν να μοιάζουν με τα προϊόντα που παράγονται από την ίδια μηχανή.»

Επί του παρόντος, γνωρίζουμε ότι οι αστρικές μάζες μπορεί να διαφέρουν έως και κατά έναν παράγοντα 1.000. Οι παράμετροι του μεσοαστρικού μέσου παρουσιάζουν ακόμη μεγαλύτερες διακυμάνσεις. Συνεπώς, ο ενθουσιασμός του Jeans μπορεί να θεωρηθεί πρόωρος. Εντούτοις, ο Jeans είχε σαφή επίγνωση της συγκεκριμένης κατάστασης και αντιλαμβανόταν ότι δεν είχε ξεπεραστεί παρά μόνο το πρώτο από τα εμπόδια στον μακρύ και τραχύ δρόμο προς τα άστρα. Προβλέποντας τα μελλο-

ντικά προβλήματα στη θεωρία που περιγράφει το σχηματισμό των άστρων και των γαλαξιών, απηύθυνε την εξής προειδοποίηση: «Στην παρούσα κατάσταση της γνώσης μας, κάθε προσπάθεια να υπαγορεύσουμε την τελική λύση των κοσμολογικών προβλημάτων δεν θα συνιστούσε τίποτε άλλο παρά καθαρό δογματισμό.»

Από τη διακήρυξη του σερ James παρήλθε σχεδόν ένας αιώνας. Ο αιώνας αυτός απέφερε πλούσια δεδομένα για το σχηματισμό των άστρων και παράλληλα έδειξε ότι η θεωρία της βαρυτικής αστάθειας του Jeans αντεπεξήλθε επιτυχώς στη δυσκολότερη δοκιμασία, τη δοκιμασία του χρόνου. Δεν συμφωνείτε κι εσείς ότι πρόκειται για κάτι πραγματικά υπέροχο στον αιώνα της κβαντικής και της σχετικιστικής φυσικής —οι οποίες έκαναν τις περισσότερες κλασικές θεωρίες να φαντάζουν ανεπανόρθωτα παρωχημένες; ■

#### Δείτε ακόμη τα άρθρα:

- W.A. Hiscock, «Μαύρες τρύπες: είναι αναπόφευκτες!», Μάιος/Ιούνιος 1995.
- A. Sakharov, «Υπάρχει στοιχειώδες μήκος;», Ιούλιος/Αύγουστος 1997.
- S. Silich, «Μεσοαστρικές φυσαλίδες», Ιανουάριος/Φεβρουάριος 1998.
- I. Novikov, «Το θερμοδυναμικό Σύμπαν», Μάιος/Ιούνιος 1998.
- A. Kuzin, «Η ανθρωπική αρχή», Μάρτιος/Απρίλιος 1999.



# Προκλήσεις

## Μαθηματικά

M181

*Τετράπλευρη αναζήτηση.* Ένα τετράπλευρο  $ABCD$  είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Έστω  $M$  το σημείο τομής των διαγωνίων του και  $L$  το μέσο του τόξου  $AD$  (αυτού που δεν περιέχει τις άλλες κορυφές του τετραπλεύρου). Αποδείξτε ότι οι αποστάσεις των κέντρων των εγγεγραμμένων στα τρίγωνα  $ABM$  και  $CDM$  κύκλων από το σημείο  $L$  είναι ίσες.

M182

*Περιπέτεια στο ποτάμι.* Ένας μαθηματικός περπατούσε δίπλα σε ένα μικρό ποτάμι, με κατεύθυνση αντίθετη από αυτή του ρεύματος και με ταχύτητα ίση με μιάμιση φορά την ταχύτητα του ρεύματος· φορούσε καπέλο και κρατούσε ένα ραβδί. Ήθελε να πετάξει το ραβδί στο ποτάμι αλλά κατά λάθος πέταξε το καπέλο του· ωστόσο συνέχισε να περπατά με την ίδια ταχύτητα. Μερικά λεπτά αργότερα κατάλαβε το λάθος του, πέταξε το ραβδί στο νερό και έτρεξε προς τα πίσω με ταχύτητα διπλάσια από αυτή που περπατούσε. Πρόλαβε το καπέλο, το μάζεψε (στιγμιαία) και άρχισε πάλι να περπατά αντίθετα προς το ρεύμα με την αρχική του ταχύτητα. Δέκα λεπτά μετά τη στιγμή που περιμάζεψε το καπέλο του, ο μαθηματικός συνάντησε το ραβδί, το οποίο επέπλεε. Πόση ώρα νωρίτερα θα έφτανε στο σπίτι του αν δεν είχε μπερδέψει το καπέλο με το ραβδί;

M183

*Ανάγωγος τύπος.* Αποδείξτε ότι όλα τα κλάσματα της μορφής

$$\frac{101011 \dots 10101}{110011 \dots 10011}$$

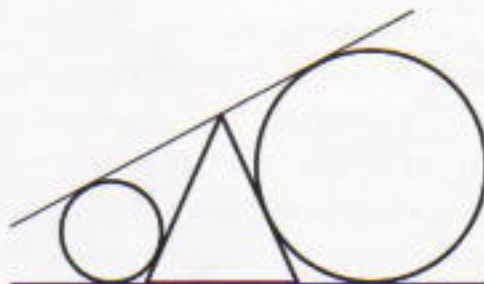
είναι ίσα, με την προϋπόθεση ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής περιέχουν τέσσερα μηδέν και το ίδιο πλήθος μονάδων (οι ενδιάμεσες τελείες αντιπροσωπεύουν μιαν ακολουθία από 1). Βρείτε το ανάγωγο κλάσμα που ισούται με αυτά τα κλάσματα.

M184

*Ελάχιστο τμήμα.* Δίνεται σημείο  $M$  του γραφήματος της συνάρτησης  $y = x^2$ . Φέρουμε κάθετη επί την εφαπτόμενη του γραφήματος που διέρχεται από το σημείο  $M$ . Η κάθετη αποκόπτει ένα χωρίο της παραβολής. Βρείτε την ελάχιστη τιμή του εμβαδού αυτού του χωρίου.

M185

*Σφηνωμένο τρίγωνο.* Δύο κύκλοι και ένα τρίγωνο διευθετούνται όπως στο Σχήμα 1. Βρείτε το ύψος που ά-



Σχήμα 1

γεται προς τη βάση του τριγώνου αν το άθροισμα των διαμέτρων των κύκλων ισούται με 2.

## Φυσική

Φ181

*Σεληνιακές παρέλξεις.* Πώς επηρεάζει η Σελήνη την τροχιά της Γης περί τον Ήλιο;  
(A. Dozogov)

Φ182

*Καταδυτικός κώδων.* Ο καταδυτι-

κός κώδων είναι μια συσκευή που χρησιμεύει στην εκτέλεση υποβρύχιων εργασιών. Πρόκειται για έναν κύλινδρο με λεπτά τοιχώματα και με μία μόνο βάση, ο οποίος καταβιβάζεται από το σκάφος ως το βυθό με τη βάση του προς τα πάνω. Τι πάχος πρέπει να έχουν τα τοιχώματα και η βάση του (δηλαδή η οροφή της συσκευής) προκειμένου ο κύλινδρος να παραμείνει ακίνητος στον πυθμένα μιας λίμνης βάθους  $H = 3$  m; Δίνονται η εσωτερική ακτίνα του καταδυτικού κώδωνα  $r = 1$  m και το ύψος του  $h = 2$  m· θεωρήστε ότι είναι κατασκευασμένος από χάλυβα, ο οποίος έχει πυκνότητα  $\rho_x = 7,8 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

Φ183

*Στο εσωτερικό ενός πυκνωτή.* Μια πλάκα πάχους  $h$ , κατασκευασμένη από υλικό που άγει ασθενώς το ηλεκτρικό ρεύμα και έχει ειδική αντίσταση  $\rho$ , τοποθετείται στο εσωτερικό ενός πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς και παράλληλα προς αυτούς. Ο πυκνωτής φορτίζεται μέχρι τάσης  $V_0$ . Προσδιορίστε τη μέγιστη τιμή του ρεύματος που θα διέλθει από την πλάκα όταν θα βραχυκυκλώσουμε τον πυκνωτή. Δίνεται το εμβαδόν  $S$  των οπλισμών του πυκνωτή. Η απόσταση των οπλισμών είναι  $d$ , και θεωρείται πολύ μικρότερη από τις γραμμικές διαστάσεις των οπλισμών. Το εμβαδόν της πλάκας στο εσωτερικό του πυκνωτή είναι όσο και αυτό των οπλισμών.  
(V. Deryabkin)

Φ184

*Ιπτάμενο πλασμοειδές.* Οι φωτογραφίες των ακτινοβολούντων σφαιρικών πλασμοειδών (πρόκειται για

Η συνέχεια στη σελ. 48 ⇔

# Γεωμετρία ολισθαινόντων διανυσμάτων

Ο Κύκνος κινά για τον ουρανό,  
Η Καραβίδα τραβά προς τα πίσω, η Πέστροφα ανεβαίνει το ρεύμα.

Υ. Solovyon και Α. Sosinskiy

**Ο** ΥΠΟΤΙΤΛΟΣ ΠΡΟΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ένα γνωστό παραμύθι του διάσημου ρώσου συγγραφέα Ι.Α. Krylov. Σε αυτό, ο Κύκνος, η Καραβίδα και η Πέστροφα προσπαθούν να σύρουν μια άμαξα, αλλά δεν μπορούν να τη μετακινήσουν επειδή τραβάνε προς διαφορετικές κατευθύνσεις. Θα μπορούσατε να προσδιορίσετε την κίνηση της άμαξας αν σας δοθούν οι δυνάμεις και οι κατευθύνσεις προς τις οποίες τραβούν ο Κύκνος, η Καραβίδα και η Πέστροφα;

Αυτό το πρόβλημα εμφανίζεται πολύ συχνά: συγκεκριμένες δυνάμεις εφαρμόζονται σε συγκεκριμένα σημεία ενός στερεού σώματος. Πώς θα κινηθεί το σώμα; Όσο περίεργο κι αν φαίνεται, η συνήθης αντιμετώπιση μέσω διανυσμάτων που διδάσκεται στα πλαίσια της φυσικής και των μαθηματικών στο σχολείο είναι τελείως ακατάλληλη για τη λύση ενός τέτοιου προβλήματος.

Αν, εκτός από τη μάζα, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και το μέγεθος του σώματος, αν αντιμετωπίζουμε ένα πραγματικό σώμα και όχι ένα υλικό σημείο, δεν είναι πάντοτε προφανής ο τρόπος πρόσθεσης των δυνάμεων που ασκούνται σε διαφορετικά σημεία του σώματος ούτε το τι μπορούμε να κάνουμε με τα αντίστοιχα διανύσματα. Τι είναι, πράγματι, αυτά τα «αληθινά» διανύσματα; Το παρόν άρθρο απαντά στο πρόβλημα μέσω μιας μικρής μαθηματικής θεω-

ρίας —της θεωρίας των ολισθαινόντων διανυσμάτων.

## Ποια είδη διανυσμάτων υπάρχουν;

Ένα διάνυσμα στο επίπεδο ή στο χώρο απεικονίζεται συνήθως με ένα προσανατολισμένο τμήμα  $AB$ . Αυτό ορίζεται από δύο σημεία: την αρχή του (ή σημείο εφαρμογής)  $A$  και το τέλος του  $B$ . Αν προεκτείνουμε το τμήμα  $AB$  και προς τις δύο κατευθύνσεις, παίρνουμε μια ευθεία η οποία ονομάζεται φορέας (ή διεύθυνση) του διανύσματος  $AB$ .

Πότε δύο διανύσματα θεωρούνται ίσα; Η απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα ορίζει τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τα διανύσματα και εξαρτάται από τα φυσικά μεγέθη που αντιπροσωπεύουν. Μπορούμε να θεωρήσουμε τουλάχιστον τρεις τύπους διανυσμάτων.

**1.** Είναι δυνατόν δύο γεωμετρικώς ίσα διανύσματα να απεικονίζουν το ίδιο φυσικό ή μηχανικό μέγεθος. [Θυμηθείτε ότι στη γεωμετρία δύο διανύσματα (προσανατολισμένα τμήματα) είναι ίσα αν οι φορείς τους είναι παράλληλοι, τα μήκη τους ίσα, και η σειρά των σημείων τους ορίζει την ίδια φορά πάνω στους φορείς τους. Με άλλα λόγια, αν τα διανύσματα είναι ίσα υπό παράλληλη μετατόπιση.] Τέτοια διανύσματα, τα οποία δεν έχουν ούτε καθορισμένο φο-

ρέα ούτε καθορισμένο σημείο εφαρμογής ονομάζονται ελεύθερα. Για παράδειγμα, τα διανύσματα της μαγνητικής επαγωγής ενός σταθερού μαγνητικού πεδίου ή η ταχύτητα ενός αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων ως προς ένα άλλο αδρανειακό σύστημα είναι ελεύθερα διανύσματα. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι εφαρμόζονται σε οποιοδήποτε σημείο. Οι μαθηματικοί, όπως και οι φυσικοί, μελετούν ελεύθερα διανύσματα. Το διάνυσμα που ορίζει μια μετατόπιση αποτελεί το απλούστερο παράδειγμα. Όταν ένα τέτοιο διάνυσμα εφαρμόζεται σε ένα σημείο, το τέλος του υποδεικνύει την εικόνα αυτού του σημείου μέσω της μετατόπισης.

**2.** Από την άλλη, πάλι, συναντάμε συχνά φυσικές ποσότητες που αντιπροσωπεύονται από διανύσματα τα οποία είναι αδύνατο να τα διαχωρίσουμε από το σημείο εφαρμογής τους. Τέτοια διανύσματα ονομάζονται εφαρμοστά. Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινούμενου υλικού σημείου αποτελεί τέτοιο παράδειγμα. Δεν μπορούμε να το θεωρήσουμε ανεξάρτητα από το κινούμενο σημείο (φυσικά, υποθέτουμε ότι τα άλλα σημεία του χώρου δεν κινούνται με την ίδια ταχύτητα).

**3.** Τέλος, μπορεί δύο γεωμετρικώς ίσα διανύσματα να αντιπροσωπεύουν ίσες φυσικές ποσότητες μόνο αν έχουν τον ίδιο φορέα. Παράδειγμα αποτελούν τα διανύσματα που αντι-



προσωπεύουν δυνάμεις οι οποίες ασκούνται σε ένα στερεό σώμα. Τέτοια διανύσματα, τα οποία δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ανεξάρτητα από την ευθεία δράσης τους, ονομάζονται *ολισθαίνοντα*. Τα διανύσματα αυτά, λοιπόν, μπορούν να παριστάνουν δυνάμεις που ασκούνται σε στερεά σώματα με συγκεκριμένο μέγεθος και σχήμα, και όχι σε αφηρημένα και απείρως μικρά υλικά σημεία. Η στερεότητα του σώματος επί του οποίου ασκούνται οι δυνάμεις αποτελεί σημαντικό στοιχείο. Τέτοια σώματα ούτε διαστέλλονται ούτε συστέλλονται, ενώ η δύναμη μεταφέρεται κατά το φορέα της χωρίς μεταβολή του μέτρου της. Συνεπώς, το συγκεκριμένο σημείο εφαρμογής της δύναμης πάνω στο φορέα της είναι αδιάφορο, και η δύναμη μπορεί να «ολισθαίνει» πάνω στο φορέα της.

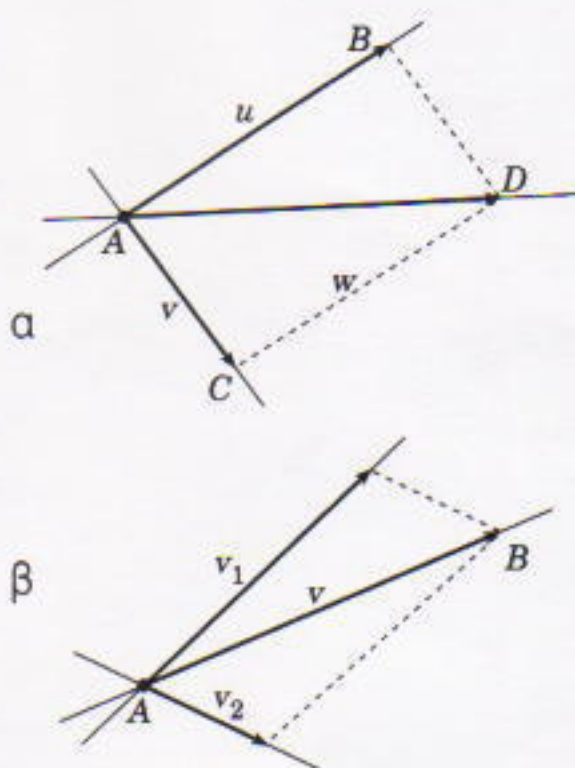
Σε τούτο το άρθρο θα ασχοληθούμε με ολισθαίνοντα διανύσματα. Για τη συνέχεια η λέξη *διάνυσμα* θα σημαίνει ολισθαίνον διάνυσμα, εκτός αν επισημαίνεται κάτι διαφορετικό. Οι περιπτώσεις ελεύθερων ή εφαρμοστών διανυσμάτων θα δηλώνονται σαφώς.

Θα συμβολίζουμε τα (ολισθαίνοντα) διανύσματα με έντονα γράμματα, για παράδειγμα  $\mathbf{v}$ , ή με δύο γράμματα υπεργραμμισμένα, για παράδειγμα  $\overline{AB}$ . Τα ελεύθερα διανύσματα θα συμβολίζονται με γράμματα που φέρουν από πάνω τους ένα βέλος, για παράδειγμα  $\vec{v}$  ή  $\overrightarrow{AB}$ .

## Συστήματα ολισθαίνοντων διανυσμάτων

Έτσι, ένα (ολισθαίνον) διάνυσμα  $\mathbf{v} = \overline{AB}$  ορίζεται από την ευθεία  $l = AB$  —το φορέα του— και το προσανατολισμένο τμήμα  $AB$  πάνω σε αυτή την ευθεία. Δύο διανύσματα  $\mathbf{v} = \overline{AB}$  και  $\mathbf{u} = \overline{CD}$  θεωρούνται ίσα αν ορίζουν το ίδιο ελεύθερο διάνυσμα ( $\overline{AB} = \overline{CD}$ ) και έχουν τον ίδιο φορέα (οι ευθείες  $AB$  και  $CD$  συμπίπτουν).

Στη συνέχεια, αντί για μεμονωμένα διανύσματα θα θεωρήσουμε πεπερασμένα συστήματα διανυσμάτων  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ . Τέτοια συστήματα αντιστοιχούν σε συστήματα δυνάμεων που ασκούνται σε στερεά σώματα. Η



Σχήμα 1

σειρά αρίθμησης των διανυσμάτων δεν έχει σημασία. Όμως, το ίδιο διάνυσμα μπορεί να εμφανίζεται πολλές φορές στο σύστημα, και πρέπει να το λάβουμε υπόψη όλες τις φορές που εμφανίζεται.

Στόχος μας είναι να μάθουμε να μετασχηματίζουμε τέτοια συστήματα διανυσμάτων και να ανάγουμε, αν είναι δυνατόν, ένα τυχαίο σύστημα σε ένα απλούστερο. Για να το επιτύχουμε, θα χρειαστούμε μερικές στοιχειώδεις πράξεις πάνω στα συστήματα διανυσμάτων και μια έννοια ισοδυναμίας.

## Στοιχειώδεις πράξεις και ισοδυναμία συστημάτων

Αν οι φορείς δύο διανυσμάτων  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{u}$  τέμνονται ή συμπίπτουν, μπορούμε να τα προσθέσουμε κατά φυσικό τρόπο: Αν  $\mathbf{u} = \overline{AB}$  και  $\mathbf{v} = \overline{CD}$  (όπου  $A$  είναι το σημείο τομής των φορέων ή οποιοδήποτε σημείο του κοινού φορέα όταν αυτοί συμπίπτουν), τότε το διάνυσμα  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$  ορίζεται ως το διάνυσμα  $\mathbf{w} = \overline{AD}$  ό-

που το σημείο  $D$  προκύπτει από την πρόσθεση των τριών ελεύθερων διανυσμάτων  $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$  με τον κανόνα του παραλληλογράμμου (Σχήμα 1α). Αυτή η πρόσθεση «τεμνόμενων» διανυσμάτων είναι η πρώτη στοιχειώδης πράξη. Ανάγει το σύστημα που αποτελείται από τα δύο διανύσματα  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  στο σύστημα που αποτελείται από ένα μοναδικό διάνυσμα  $(\mathbf{w})$ .

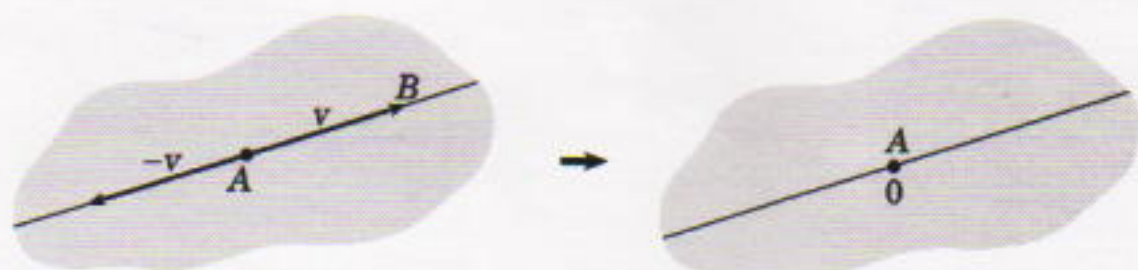
Υπάρχει η αντίστροφη αυτής της πράξης: για κάθε διάνυσμα  $\mathbf{v} = \overline{AB}$  μπορούμε να επιλέξουμε δύο τυχαίες ευθείες που διέρχονται από ένα τυχαίο σημείο της ευθείας δράσης του (ας πούμε, από το σημείο  $A$ ) και να αναλύσουμε το διάνυσμα  $\overline{AB}$  βάσει του κανόνα του παραλληλογράμμου (Σχήμα 1β). Επομένως, από το μοναδικό διάνυσμα  $(\mathbf{v})$  παίρνουμε ένα σύστημα δύο διανυσμάτων  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ .

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να προσθέσουμε μόνο διανύσματα με φορείς που τέμνονται ή συμπίπτουν. Η πρόσθεση των διανυσμάτων με ίδιους φορείς είναι εξαιρετικά απλή. Ειδικά, η πρόσθεση δύο αντίθετων διανυσμάτων  $\mathbf{v} = \overline{AB}$  και  $-\mathbf{v} = \overline{BA}$  δίνει το μηδενικό διάνυσμα:  $\mathbf{0} = \overline{AA}$  (βλ. Σχήμα 2).

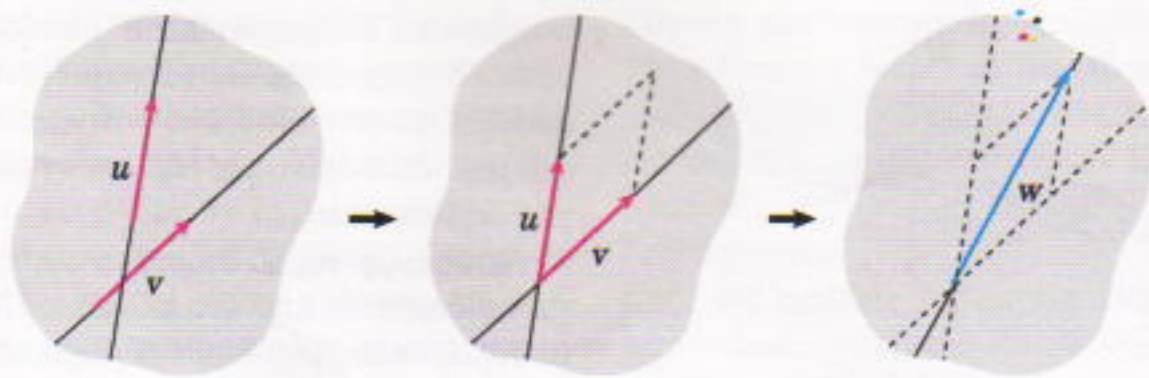
Η δεύτερη στοιχειώδης πράξη συνίσταται στην *απαλοιφή ενός μηδενικού διανύσματος*: δηλαδή, στη μετάβαση από το σύστημα  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}, -\mathbf{v})$  στο σύστημα  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ . Ειδικά, για  $k = 0$  το απλό ζεύγος  $(\mathbf{v}, -\mathbf{v})$  ανάγεται στο κενό, ή μηδενικό, σύστημα, το οποίο συμβολίζεται, όπως και το μηδενικό διάνυσμα, με  $\mathbf{0}$ .

Η δεύτερη στοιχειώδης πράξη έχει επίσης την αντίστροφη της: είναι η *γέννηση του μηδενικού διανύσματος*, δηλαδή η μετάβαση από το σύστημα  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$  στο σύστημα  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}, -\mathbf{v})$ , όπου  $\mathbf{v}$  είναι ένα τυχαίο διάνυσμα.

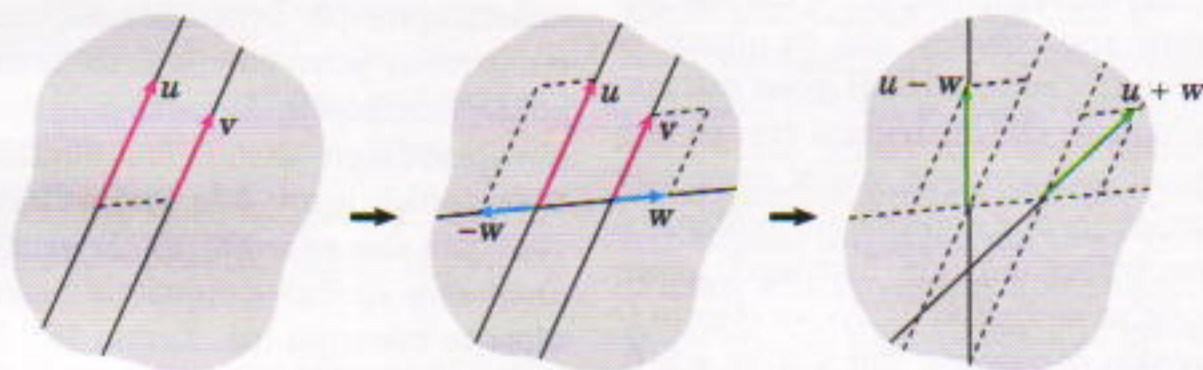
Θα λέμε ότι δύο συστήματα διανυ-



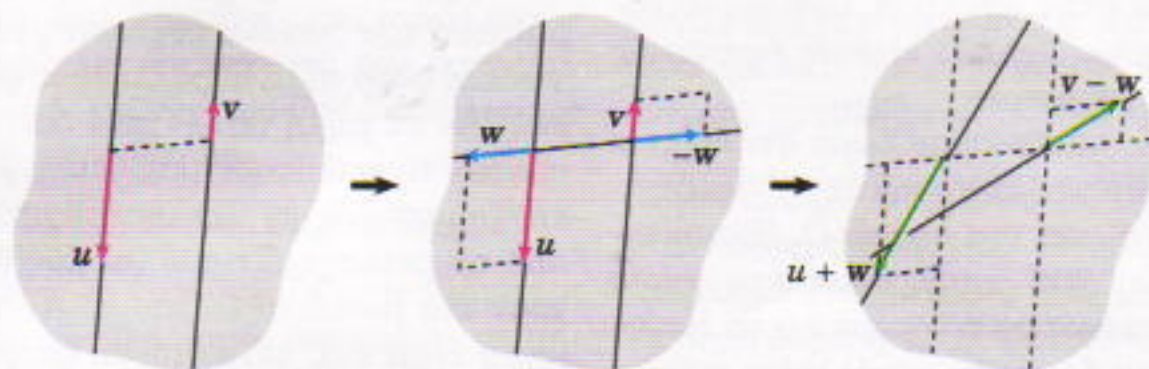
Σχήμα 2



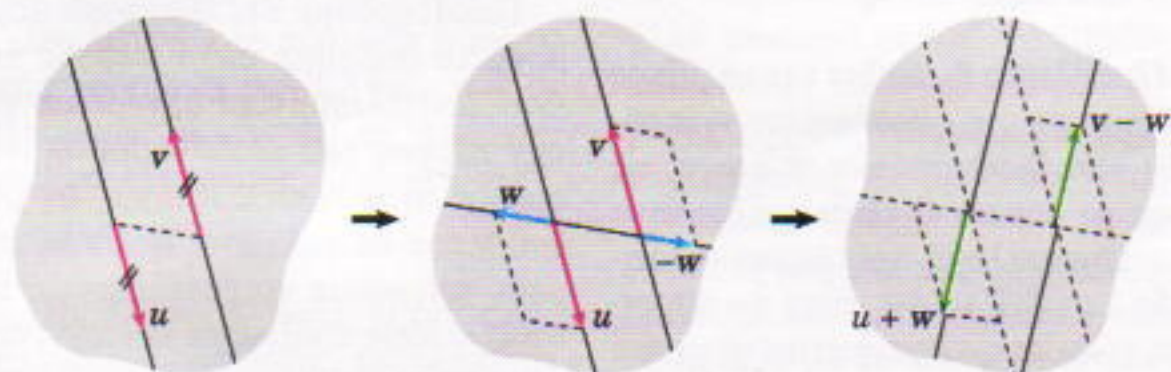
α) δύο τεμνόμενα διανύσματα σε ένα μοναδικό διάνυσμα



β) δύο διανύσματα ίδιας φοράς (ομόρροπα) σε δύο τεμνόμενα διανύσματα



γ) δύο διανύσματα αντίθετης φοράς και διαφορετικού μήκους σε δύο τεμνόμενα διανύσματα



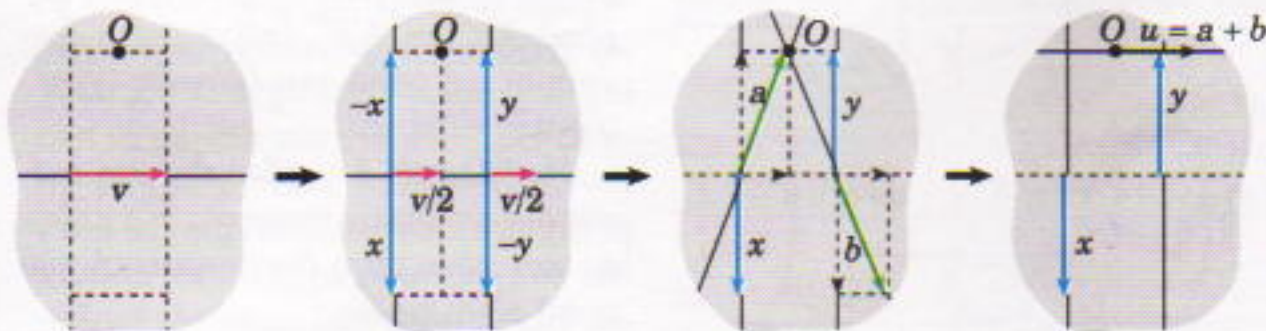
δ) ζεύγος διανυσμάτων σε ένα άλλο ζεύγος διανυσμάτων

### Σχήμα 3

Οι απλούστεροι μετασχηματισμοί επίπεδων συστημάτων διανυσμάτων.

σμάτων  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$  και  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_l)$  είναι **ισοδύναμα** αν το ένα μπορεί να αναχθεί στο άλλο μέσω μιας πεπερασμένης ακολουθίας στοιχειωδών πράξεων.

Από την άποψη της μηχανικής, είναι προφανές γιατί ενδιαφερόμαστε για στοιχειώδεις πράξεις και ισοδύναμα συστήματα. Πράγματι, δύο ισοδύναμα συστήματα δυνάμεων δρουν πανομοιότυπα σε ένα στερεό σώμα. Μπορείτε να επιβεβαιωθείτε γι' αυτό



### Σχήμα 4

Μετασχηματισμός ενός διανύσματος σε ένα διάνυσμα που διέρχεται από δεδομένο σημείο και ένα ζεύγος διανυσμάτων.

όχι μόνο πειραματικά, αλλά και αναλογιζόμενοι απλώς το φυσικό νόημα των στοιχειωδών πράξεων. Με την αναγωγή των περίπλοκων συστημάτων σε απλά, είναι ευκολότερο να κατανοήσουμε τη δράση ενός δεδομένου πολύπλοκου συστήματος επί ενός στερεού σώματος.

**Πρόβλημα 1.** Πώς λειτουργούν αυτές οι στοιχειώδεις πράξεις όταν εφαρμόζονται σε ελεύθερα διανύσματα; Σε εφαρμοστά διανύσματα;

### Ζεύγος διανυσμάτων

Το Σχήμα 3 παρουσιάζει με ποιον τρόπο ανάγονται μέσω στοιχειωδών πράξεων μερικά απλά συστήματα διανυσμάτων του επιπέδου σε άλλα συστήματα. Συνιστούμε στους αναγνώστες να παρακολουθήσουν αυτές τις πράξεις προσεκτικά και να τις εφαρμόσουν σε διάφορες περιπτώσεις.

Το Σχήμα 3δ αξίζει ιδιαίτερης προσοχής. Παρουσιάζει συστήματα δύο αντίθετων διανυσμάτων ίσου μήκους με παράλληλους φορείς. Τέτοια συστήματα ονομάζονται, για συντομία, **ζεύγη**. Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι ένα ζεύγος διανυσμάτων δεν απλοποιείται· μπορεί μόνο να περιστραφεί (να μετασχηματιστεί σε άλλο ζεύγος).

Το Σχήμα 4 παρουσιάζει μια άλλη σειρά στοιχειωδών πράξεων. Εδώ, αντί να απλοποιήσουμε το αρχικό σύστημα του ενός διανύσματος το περιπλέκουμε: από το αρχικό διάνυσμα προκύπτει ένα διάνυσμα με διαφορετικό φορέα και ένα ζεύγος. Όμως, αν διαβάσουμε το σχήμα με την αντίθετη σειρά (κάτι που έχει νόημα, αφού κάθε στοιχειώδης πράξη έχει την αντίστροφη της), προκύπτει μια απλοποίηση: το σύστημα που αποτελείται

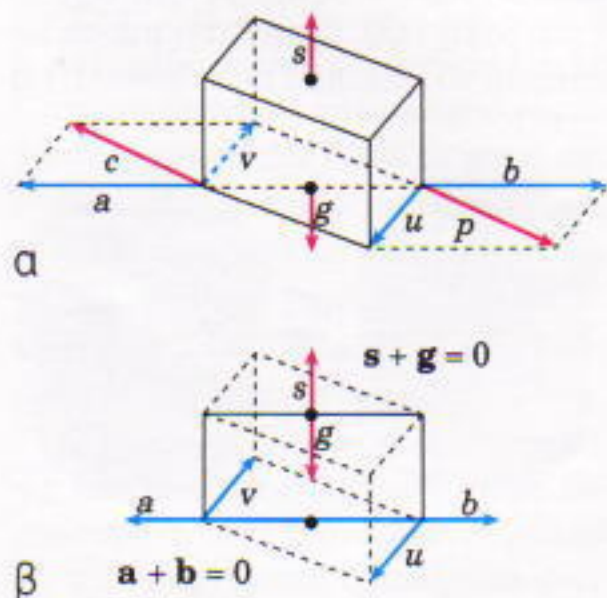
από ένα διάνυσμα και ένα ζεύγος ανάγεται σε ένα μοναδικό διάνυσμα. Ο μετασχηματισμός  $(\mathbf{v}) \rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  είναι ιδιαίτερα σημαντικός. Θα τον χρησιμοποιήσουμε συχνά στα επόμενα θέματα.

Επισημαίνουμε ότι οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στα επίπεδα συστήματα μπορούν να εφαρμοστούν και σε προβλήματα στο χώρο. Χάρην παραδείγματος, στο Σχήμα 5 παρουσιάζουμε ένα μοντέλο των προσπαθειών που καταβάλλουν τα άτυχα πλάσματα του Krylon. Το διάνυσμα  $\mathbf{s}$  εκφράζει τη δύναμη που ασκεί ο Κύκνος, το  $\mathbf{c}$  αντιστοιχεί στη δύναμη της Καραβίδας, το  $\mathbf{p}$  στις Πέστρφας, ενώ το  $\mathbf{g}$  αντιπροσωπεύει το βαρυτικό πεδίο. Όπως και ο Krylon, έχουμε επιλέξει  $\mathbf{s} = -\mathbf{g}$  και  $|\mathbf{c}| = |\mathbf{p}|$ . Τότε, αν θέσουμε  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{b} + \mathbf{u}$  (Σχήμα 5α), όπου  $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ , μπορούμε να αναγάγουμε το σύστημα  $(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}, \mathbf{g})$  στο επίπεδο σύστημα  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ .

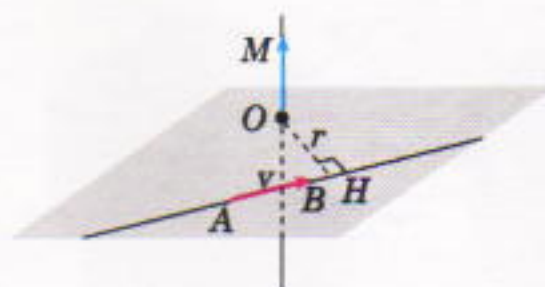
## Ροπή διανύσματος και ροπή ζεύγους

Έχουμε ήδη διαπιστώσει ότι ένα ζεύγος διανυσμάτων δεν μπορεί πάντα να αναχθεί σε ένα μοναδικό ολισθαίνον διάνυσμα. Όμως, το ζεύγος εμφανίζει ένα ενδιαφέρον διανυσματικό χαρακτηριστικό.

Υποθέτουμε ότι δίνεται ένα διάνυσμα  $\mathbf{v} = \overline{AB} \neq 0$  και ένα σημείο  $O$  εκτός του φορέα του. Τότε, η ροπή του διανύσματος  $\mathbf{v}$  ως προς το σημείο  $O$  είναι ένα εφαρμοστό στο σημείο αυτό διάνυσμα  $\overline{OM}$  ως φορέα του θεωρούμε την κάθετη στο επίπεδο  $OAB$



Σχήμα 5



Σχήμα 6

ενώ το μήκος του  $|OM|$  είναι το γινόμενο του μήκους του  $\mathbf{v}$  και του μήκους της καθέτου από το σημείο  $O$  προς την ευθεία  $AB$ . Η φορά του διανύσματος  $\overline{OM}$  επιλέγεται έτσι ώστε η φορά περιστροφής του  $\mathbf{v}$  όπως την παρατηρούμε από το σημείο  $M$  να είναι θετική (δηλαδή, αριστερόστροφη—δείτε το Σχήμα 6). Αν το σημείο  $O$  ανήκει στο φορέα του  $\mathbf{v}$  ή αν  $\mathbf{v} = 0$ , η ροπή ισούται με μηδέν. Η ροπή ενός διανύσματος παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυση των περιστροφών και βρίσκει κομψές εφαρμογές στη γεωμετρία.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι δίνεται ένα ζεύγος διανυσμάτων  $\mathbf{v} = \overline{AB}$ ,  $\mathbf{v}' = \overline{A'B'}$  και ένα σημείο  $O$ . (Θυμηθείτε ότι όταν αναφερόμαστε σε ζεύγος διανυσμάτων εννοούμε ότι τα διανύσματα δρουν σε παράλληλες ευθείες και είναι αντίθετα.) Έστω  $\overline{OM}$  και  $\overline{OM'}$  οι ροπές των  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{v}'$  ως προς το σημείο  $O$ .

**Πρόβλημα 2.** Δείξτε ότι το μήκος και η φορά του αθροίσματος των ροπών των διανυσμάτων  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{v}'$  ως προς το σημείο  $O$  είναι ανεξάρτητα από την επιλογή του σημείου. Δηλαδή, αποδείξτε ότι αυτό το άθροισμα είναι στην πραγματικότητα ένα ελεύθερο διάνυσμα.

Το εν λόγω ελεύθερο διάνυσμα ονομάζεται (διανυσματική) ροπή του ζεύγους  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ .

**Πρόβλημα 3.** Αν  $d$  είναι η απόσταση μεταξύ των παράλληλων φορέων  $AB$  και  $A'B'$ , δείξτε ότι η διανυσματική ροπή του ζεύγους  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  ισούται με  $d \cdot |\mathbf{v}|$ .

**Πρόβλημα 4.** Δείξτε ότι ένα ζεύγος διανυσμάτων ανάγεται στο μηδέν αν και μόνο αν η διανυσματική του ροπή είναι μηδέν.

## Αναγωγή επίπεδων συστημάτων

Θα αποδείξουμε τώρα το εξής αξι-

οσημείωτο θεώρημα: Κάθε πεπερασμένο σύστημα ολισθαίνοντων διανυσμάτων του επιπέδου ανάγεται είτε σε ένα μοναδικό διάνυσμα είτε σε ένα ζεύγος διανυσμάτων.

**Απόδειξη.** Αν το δεδομένο σύστημα αποτελείται από ένα μοναδικό διάνυσμα, το θεώρημα αποδείχθηκε. Αν το σύστημα περιέχει διανύσματα με τεμνόμενους φορείς, τότε μπορεί να απλοποιηθεί (βλ. Σχήμα 3α) έως ότου απομείνουν μόνο διανύσματα με παράλληλους φορείς. Αν υπάρχουν τρία ή περισσότερα τέτοια διανύσματα, τότε τουλάχιστον δύο από αυτά έχουν την ίδια κατεύθυνση. Συνεπώς, μπορούμε να απλοποιήσουμε περαιτέρω το σύστημα (βλ. Σχήμα 3β). Άρα, οι μετασχηματισμοί 3α και 3β μας επιτρέπουν να αναγάγουμε την απόδειξη του θεωρήματος στην περίπτωση των δύο διανυσμάτων με αντίθετη φορά αλλά παράλληλους φορείς. Αν τα μήκη αυτών των διανυσμάτων είναι διαφορετικά, τότε ο μετασχηματισμός 3γ ακολουθούμενος από το μετασχηματισμό 3α μας δίνουν ένα μοναδικό διάνυσμα. Αν τα μήκη είναι ίσα, τότε έχουμε ζεύγος διανυσμάτων. Έτσι, το θεώρημα αποδείχθηκε πλήρως.

Παρατηρούμε ότι δεν αποδείξαμε μόνο το θεώρημα αλλά δώσαμε και έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο για την εύρεση του ισοδύναμου διανύσματος (ή ζεύγους). Επίσης, αν μας δοθεί ένα οποιοδήποτε σταθερό σημείο, μπορούμε να εκτελέσουμε τις στοιχειώδεις πράξεις με τέτοιο τρόπο ώστε να αναγάγουμε το δεδομένο σύστημα σε ένα ζεύγος και ένα διάνυσμα με φορέα που διέρχεται από το δεδομένο σημείο. Πράγματι, αν το σύστημα ανάγεται σε ένα ζεύγος, αυτό προφανώς αληθεύει. Αν το σύστημα ανάγεται σε ένα μοναδικό διάνυσμα, τότε η πράξη που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4 μετασχηματίζει αυτό το διάνυσμα σε ένα ζεύγος και ένα διάνυσμα με φορέα που διέρχεται από το δεδομένο σημείο.

## Υπολογισμοί με συστήματα διανυσμάτων. Βάσεις

Έχουμε μάθει να ανάγουμε συστήματα επίπεδων διανυσμάτων σε

απλούστερα συστήματα. Είναι δυνατόν επίσης να εκφράσουμε ένα σύστημα διανυσμάτων συναρτήσει άλλων συστημάτων. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να εκτελέσουμε υπολογισμούς σε συστήματα ολισθαινόντων συστημάτων οι οποίοι είναι όμοιοι με τους υπολογισμούς που εκτελούμε σε ελεύθερα διανύσματα.

Για να περιγράψουμε τους εν λόγω υπολογισμούς, ως άθροισμα των δύο συστημάτων  $N = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$  και  $M = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_l)$  ορίζουμε τον «ελεύθερο συνδυασμό» τους, δηλαδή το σύστημα

$$L = N + M = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_l).$$

Η ερμηνεία που δίνουμε εδώ στην ισότητα των δύο συστημάτων διανυσμάτων είναι ότι καθένα ανάγεται στο ίδιο σύστημα μέσω στοιχειωδών πράξεων. Το γινόμενο του συστήματος  $N$  επί έναν αριθμό  $\lambda$  ορίζεται ως το νέο σύστημα

$$\lambda N = (\lambda \mathbf{u}_1, \lambda \mathbf{u}_2, \dots, \lambda \mathbf{u}_k),$$

όπου το  $\lambda \mathbf{u}$  συμβολίζει το διάνυσμα με τον ίδιο φορέα όπως το  $\mathbf{u}$ , με μήκος  $\lambda \cdot |\mathbf{u}|$  και φορά την ίδια με του  $\mathbf{u}$ , αν  $\lambda > 0$ , και αντίθετη, αν  $\lambda < 0$ , ενώ συμβολίζει το 0, αν  $\lambda = 0$ .

Θα λέμε ότι το σύστημα  $N$  εκφράζεται γραμμικά συναρτήσει των συστημάτων  $M_1, \dots, M_n$  αν υπάρχουν αριθμοί  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  τέτοιοι ώστε

$$N = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_n M_n.$$

**Πρόβλημα 5.** Έστω  $O$  ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου. Έστω ακόμη  $I = \mathbf{i}$  και  $J = \mathbf{j}$  δύο συστήματα του ενός διανύσματος τέτοια ώστε  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \neq 0$ , τα  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  να μην είναι συγγραμμικά και τα  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  να εφαρμόζονται στο ίδιο σημείο  $O$ . Έστω  $K$  ένα μη μηδενικό ζεύγος διανυσμάτων του επιπέδου των  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ . Αποδείξτε ότι για κάθε σύστημα  $N$  διανυσμάτων του επιπέδου υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  τέτοιοι ώστε

$$N = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}.$$

Οι αναγνώστες που είναι εξοικειωμένοι με την έννοια του διανυσματικού χώρου θα αναγνωρίσουν ότι τούτη η πρόταση βεβαιώνει πως τα  $I, J$  και  $K$  αποτελούν μια βάση για το

σύνολο των συστημάτων ολισθαινόντων διανυσμάτων του επιπέδου και ότι, επομένως, το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμιών ολισθαινόντων διανυσμάτων στο επίπεδο σχηματίζει έναν διανυσματικό χώρο διάστασης 3 ως προς τις πράξεις τις οποίες ορίσαμε παραπάνω.

\* \* \*

Σε αυτό το σημείο οι συγγραφείς είχαν μια διαφωνία σχετικά με το ποιες εφαρμογές των ολισθαινόντων διανυσμάτων θα έπρεπε να περιληφθούν στο παρόν άρθρο. Η θεωρία αυτή χρησιμοποιείται στη στατική, στη δομική μηχανική και στην κινηματική και δυναμική του στερεού σώματος. Οι γενικεύσεις της χρησιμοποιούνται σε μερικούς σύγχρονους κλάδους της γεωμετρίας. Αλλά στο άρθρο θα δώσουμε μόνο ένα παράδειγμα από την κινηματική του στερεού και στο τέλος θα παραθέσουμε διάφορα προβλήματα.

## Περιστροφή στερεού σώματος

Ενδιαφερόμαστε για το επόμενο πρόβλημα κινηματικής: πώς μπορεί να περιγραφεί η κίνηση στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα όταν αυτός, με τη σειρά του, περιστρέφεται γύρω από έναν άλλο σταθερό άξονα; Το πρόβλημα θα λυθεί αν δώσουμε μια μέθοδο εύρεσης της ταχύτητας κάθε σημείου του σώματος ως προς ένα σταθερό σύστημα αναφοράς.

Με τη βοήθεια των ολισθαινόντων διανυσμάτων μπορούμε να διατυπώσουμε κομψά τη λύση. Πριν την παρουσίασσουμε θα σχολιάσουμε τα διάφορα είδη κίνησης ενός στερεού σώματος. Θα αρχίσουμε με απλά παραδείγματα.

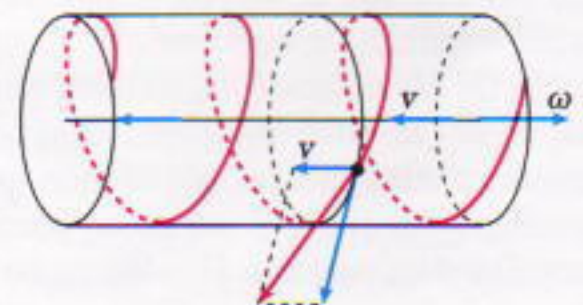
Κατά την *ευθύγραμμη ομαλή κίνηση* ένα στερεό σώμα κινείται προς ορισμένη κατεύθυνση με σταθερή ταχύτητα. Η ταχύτητα είναι ίδια για όλα τα σημεία του και ανεξάρτητη από το χρόνο. Όλα τα σημεία κινούνται σε παράλληλες ευθείες και η κίνηση χαρακτηρίζεται από ένα μοναδικό ελεύθερο διάνυσμα  $\vec{v}$  (την ταχύτητά του).

Κατά την *ομαλή κυκλική κίνηση* ένα στερεό σώμα κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από στα-

θερό άξονα. Η ταχύτητα όλων των σημείων που ανήκουν σε αυτό τον άξονα είναι μηδενική, ενώ η ταχύτητα οποιουδήποτε άλλου σημείου είναι κάθετη στο επίπεδο που διέρχεται από το εν λόγω σημείο και τον άξονα. Το μέτρο της ταχύτητας είναι ανάλογο της απόστασης του σημείου από τον άξονα. Τα σημεία του άξονα δεν κινούνται καθόλου, και όλα τα άλλα σημεία κινούνται πάνω σε κύκλους που έχουν κέντρο επί του άξονα. Αυτός ο τύπος κίνησης χαρακτηρίζεται από ένα μοναδικό ολισθαίνον διάνυσμα  $\omega$  με φορέα ταυτόσημο του άξονα. Το διάνυσμα  $\omega$  ονομάζεται γωνιακή ταχύτητα.

Κατά την *ομαλή ελικοειδή κίνηση* ένα στερεό σώμα περιστρέφεται ομαλά γύρω από έναν άξονα (που ονομάζεται άξονας της έλικας) και ταυτόχρονα κινείται κατά μήκος του με σταθερή ταχύτητα. Η ταχύτητα κάθε σημείου είναι το άθροισμα των διανυσμάτων της γωνιακής και της γραμμικής ταχύτητας (Σχήμα 7). Τα σημεία του σώματος διαγράφουν ελικοειδείς καμπύλες, και μόνο τα σημεία του άξονα κινούνται πάνω σε αυτόν. Αυτός ο τύπος κίνησης χαρακτηρίζεται από ένα ζεύγος διανυσμάτων ( $\vec{v}, \omega$ ): το ελεύθερο διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας  $v$  και το ολισθαίνον διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας  $\omega$  (Σχήμα 7).

Βεβαίως, οι δυνατοί τύποι κίνησης ενός στερεού σώματος δεν εξαντλούνται σε αυτά τα παραδείγματα. Για παράδειγμα, τα διανύσματα  $\vec{v}$  και  $\omega$  μπορεί να εξαρτώνται από το χρόνο. Όμως, ισχύει η επόμενη αξιωματική πρόταση (δείτε το Πρόβλημα 10): Όσο σύνθετη και αν είναι η κίνηση στερεού σώματος, η στιγμιαία κατανομή των ταχυτήτων των σημείων του συμπίπτει με έναν από



Σχήμα 7

τους τρεις τύπους που μόλις περιγράψαμε. Παρεμπιπτόντως, επισημαίνουμε ότι η ευθύγραμμη και η κυκλική κίνηση μπορούν να θεωρηθούν ειδικές περιπτώσεις της ελικοειδούς. Δύο παραδείγματα περιπλοκότερων κινήσεων παρουσιάζονται στα Σχήματα 8 και 9.

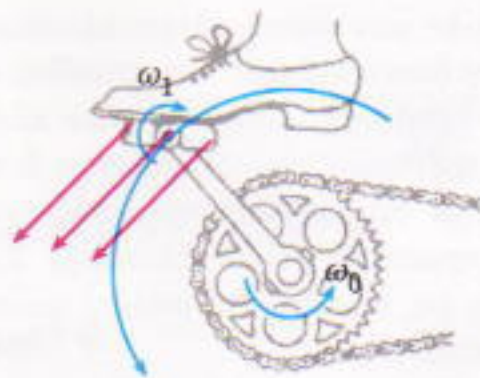
Για να επιστρέψουμε στο πρόβλημά μας, ας υποθέσουμε ότι ο κινούμενος άξονας  $M_t N_t$  στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega_0$  γύρω από τον σταθερό άξονα  $AB$  και ότι το σώμα στρέφεται γύρω από τον άξονα  $M_t N_t$  με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα  $\omega_1$ . Τονίζουμε ότι η δεύτερη γωνιακή ταχύτητα, θεωρούμενη ως ολισθαίνον διάνυσμα, μεταβάλλεται:  $\omega_1 = \omega_1(t)$ , διότι ο φορέας  $M_t N_t$  αλλάζει. Πώς μπορεί να περιγραφεί η προκύπτουσα κίνηση; Αυτό εξαρτάται από τη σχετική διεύθυνση των  $AB$  και  $M_t N_t$ .

1. Οι άξονες συμπίπτουν. Σε αυτή την περίπτωση, το σώμα στρέφεται γύρω από τον σταθερό άξονα  $AB = M_t N_t$  με σταθερή ταχύτητα  $\omega = \omega_0 + \omega_1$ . Παράδειγμα αποτελεί η κίνηση του λεπτοδείκτη ή του ωροδείκτη ενός ρολογιού που βρίσκεται στον Βόρειο Πόλο.

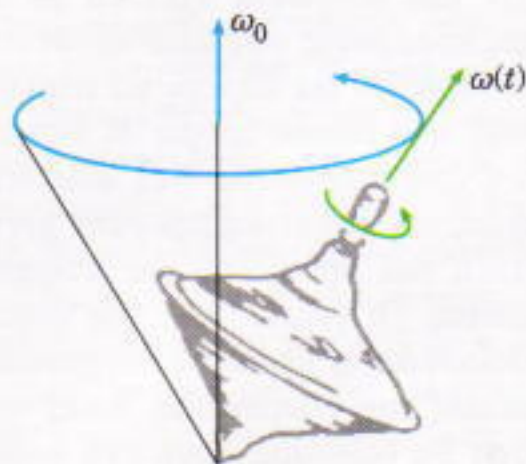
2. Οι άξονες είναι παράλληλοι και  $\omega_0 \neq -\omega_1$ . Σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  οι ταχύτητες όλων των σημείων του σώματος είναι ίδιες με αυτές που θα είχαν αν το σώμα στρεφόταν ομαλά με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  γύρω από την ευθεία  $P_t Q_t$ , την ευθεία δράσης του διανύσματος  $\omega = \omega_0 + \omega_1$  (εδώ το σύμβολο της πρόσθεσης δηλώνει το άθροισμα δύο ολισθαίνοντων διανυσμάτων, όπως στα Σχήματα 3 και 10). Λέμε ότι το σώμα έχει στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  και στιγμιαίο άξονα περιστροφής τον  $P_t Q_t$ . Στην περίπτωση που εξετάζουμε, ο στιγμιαίος άξονας περιστρέφεται γύρω από τον σταθερό άξονα  $AB$ , παραμένοντας παράλληλος προς αυτόν.

3. Οι άξονες είναι παράλληλοι και  $\omega_0 = -\omega_1$ . Σε αυτή την περίπτωση το σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση με σταθερή ταχύτητα  $\vec{v}$  ίση με τη ροπή του ζεύγους  $(\omega_0, \omega_1)$ . Παράδειγμα αποτελεί το κινούμενο τμήμα του πεντάλ ποδηλάτου (Σχήμα 8).

4. Οι άξονες τέμνονται. Αυτή η πε-



Σχήμα 8



Σχήμα 9

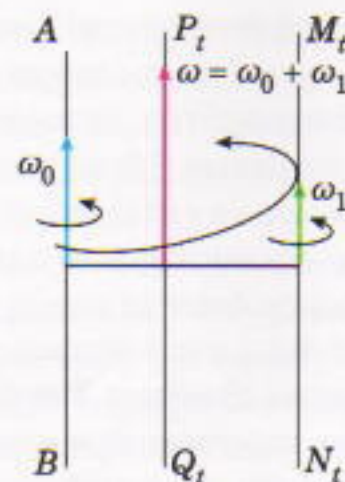
ρίπτωση είναι παρόμοια με την Περίπτωση 2: σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ , το σώμα έχει έναν στιγμιαίο άξονα περιστροφής και στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα  $\omega = \omega_0 + \omega_1$ . Η διαφορά έγκειται στο ότι ο στιγμιαίος άξονας, αντί να διαγράφει κύλινδρο, όπως στην Περίπτωση 2, διαγράφει κώνο με κορυφή το σημείο τομής των αξόνων. Τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η μεταπτωτική κίνηση μιας σβούρας (Σχήμα 9).

5. Οι άξονες είναι ασύμβατοι. Σε αυτή την περίπτωση, το σώμα έχει έναν, τρόπο του λέγειν, «στιγμιαίο ελικοειδή άξονα» (δείτε τα Προβλήματα 6 και 7).

Διαπιστώνουμε ότι η λύση του προβλήματος κινηματικής που θέσαμε διατυπώνεται κομψά μέσω της πρόσθεσης ολισθαίνοντων διανυσμάτων. Αφήνουμε τις απλές αποδείξεις των Προτάσεων 1-4 ως άσκηση για τους αναγνώστες.

### Προβλήματα

1. Υποθέτουμε ότι δίνεται ένα σύστημα ολισθαίνοντων διανυσμάτων  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ . Θεωρούμε τα ελεύθερα διανύσματα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  ίσα, αντίστοιχα, με τα δεδομένα ολισθαίνοντα διανύσματα. Το άθροισμα αυτών των ελεύθερων διανυσμάτων το ονομά-



Σχήμα 10

ζουμε *συνιστάμενο* διάνυσμα του δεδομένου συστήματος. Το άθροισμα των ροπών των διανυσμάτων  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  ως προς ένα σημείο  $O$  το ονομάζουμε *συνισταμένη ροπή* του συστήματος ως προς αυτό το σημείο. Αποδείξτε ότι δύο ισοδύναμα συστήματα έχουν ίδια συνιστάμενα διανύσματα και ίδιες συνιστάμενες ροπές ως προς το αυτό σημείο  $O$ .

2. Αποδείξτε ότι κάθε σύστημα διανυσμάτων ενός επιπέδου είναι ισοδύναμο με τρία διανύσματα που έχουν φορείς τις πλευρές ενός τυχαιού τριγώνου του ίδιου επιπέδου.

3. Αποδείξτε ότι κάθε επίπεδο σύστημα διανυσμάτων τα οποία είναι κάθετα στα μέσα των πλευρών ενός κυρτού  $n$ -γώνου ισοδυναμεί με το διάνυσμα  $0$  αν τα μήκη αυτών των διανυσμάτων είναι ανάλογα με τα μήκη των αντίστοιχων πλευρών και όλα τα διανύσματα κατευθύνονται προς το εσωτερικό του πολυγώνου (ή όλα προς το εξωτερικό του).

4. Διατυπώστε και αποδείξτε μια πρόταση για το τετράεδρο παρόμοια με αυτή του προηγούμενου προβλήματος.

5\*. Αποδείξτε ότι κάθε σύστημα διανυσμάτων του χώρου είναι ισοδύναμο με έξι διανύσματα που έχουν φορείς τις ακμές ενός τυχαιού τετραέδρου.

6\*. Αποδείξτε ότι κάθε σύστημα διανυσμάτων στο χώρο είναι ισοδύναμο με σύστημα που αποτελείται από ένα διάνυσμα (το οποίο διέρχεται από τυχαίο σημείο) και ένα ζεύγος. Από το γεγονός αυτό να συναγάγετε ότι τα συστήματα ολισθαίνοντων δι-



ανυσμάτων στον τρισδιάστατο χώρο (λαμβάνοντας υπόψη και τις κλάσεις ισοδυναμιών τους) σχηματίζουν έναν διανυσματικό χώρο έξι διαστάσεων.

**Υπόδειξη.** Να αναγάγετε πρώτα το δεδομένο σύστημα σε τρία ολισθαίνοντα διανύσματα που διέρχονται από τρία τυχαία σημεία (αναλύοντας κάθε διάνυσμα σε τρεις φορείς) και στη συνέχεια να εφαρμόσετε την ίδια τεχνική για δύο διανύσματα, ένα από τα οποία διέρχεται από το δεδομένο σημείο. Τέλος, να εφαρμόσετε την κατασκευή του Σχήματος 4.

**7\*.** Στερεό σώμα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  γύρω από άξονα που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα  $\vec{v}$ . Αποδείξτε ότι, (α) αν  $\omega \parallel \vec{v}$ , το σώμα εκτελεί ελικοειδή κίνηση· (β) αν  $\vec{v} \perp \omega$ , το σώμα έχει έναν στιγμιαίο άξονα περιστροφής· (γ) αν η  $\vec{v}$  δεν είναι ούτε παράλληλη ούτε κάθετη στην  $\omega$ , το σώμα έχει έναν στιγμιαίο ελικοειδή άξονα (αυτό σημαίνει ότι όλα τα σημεία μιας γραμμής —του ελικοειδή άξονα— έχουν ίδιες ταχύτητες  $\vec{v}$  με φορέα αυτό τον άξονα, και ότι οι ταχύτητες όλων των άλλων σημείων είναι ίσες με το άθροισμα της  $\vec{v}$  και του διανύσματος της στιγμιαίας γωνιακής ταχύτητας ως προς τον ελικοειδή άξονα).

**8\*.** Στο πρόβλημα κινηματικής που παρουσιάσαμε στο άρθρο αποδείξτε ότι στην περίπτωση των ασύμβατων αξόνων  $AB$  και  $M_1N_1$ , το σώμα έχει έναν στιγμιαίο ελικοειδή άξονα παράλληλο προς το διάνυσμα  $\vec{w}_0 + \vec{w}_1$  ο οποίος τέμνει την κοινή κάθετη των αξόνων  $AB$  και  $M_1N_1$ . Περιγράψτε ακριβέστερα τη θέση του στιγμιαίου ελικοειδούς άξονα και την ταχύτητα κατά μήκος του.

**Υπόδειξη.** Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 7.

**9\*.** Περιγράψτε τη συνισταμένη κίνηση ενός σώματος που στιγμιαία εκτελεί ελικοειδή κίνηση ως προς άξονα ο οποίος, με τη σειρά του, εκτελεί ελικοειδή κίνηση ως προς έναν σταθερό άξονα.

**10\*.** Αποδείξτε ότι, όσο περίπλοκη κι αν είναι η κίνηση ενός στερεού σώματος, η κατανομή των ταχυτή-

των των σημείων του κάθε χρονική στιγμή είναι ίδια με αυτή που θα είχαμε αν το σώμα εκτελούσε ομαλή (ευθύγραμμη, περιστροφική ή ελικοειδή) κίνηση.

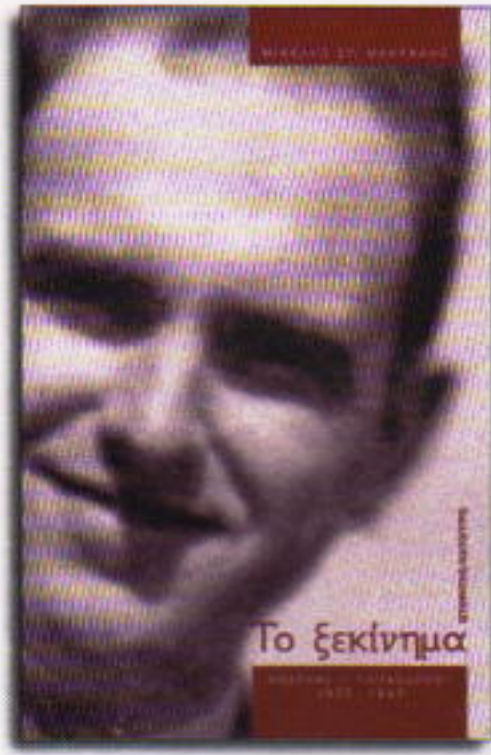
**11.** Η ροπή του διανύσματος  $\vec{AB}$  ως προς το σημείο  $O$  έχει μέτρο όσο το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου  $OAB$ . Χρησιμοποιήστε αυτό το γεγονός για να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων στο εσωτερικό ενός κυρτού πολυγώνου για τα οποία το άθροισμα των αποστάσεων από τις πλευρές του (ακριβέστερα, από τις ευθείες που περιέχουν τις πλευρές) ισούται με δοθείσα σταθερά είναι είτε ένα ευθύγραμμο τμήμα είτε ολόκληρο το πολύγωνο είτε το κενό σύνολο.

### «Όταν ομόνοια δεν υπάρχει, σπάνια η επιτυχία νά 'ρθει...»

Ας επιστρέψουμε στο παραμύθι που αναφέραμε στην αρχή του άρθρου. Υποθέστε ότι μια βαριά ορθογώνια άμαξα βρίσκεται ακίνητη στη μέση του δρόμου. Στην άμαξα ασκείται το βάρος της  $\mathbf{g}$  (μπορούμε να υποθέσουμε ότι ασκείται στο κέντρο βάρους της άμαξας). Η δύναμη αυτή εξισορροπείται από την αντίδραση του εδάφους, οπότε η άμαξα δεν κινείται. Τρεις νέοι παράγοντες —ο Κύκνος, η Καραβίδα και η Πέστροφα— αρχίζουν να έλκουν την άμαξα προς διαφορετικές κατευθύνσεις με δυνάμεις  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{c}$  και  $\mathbf{p}$ , αντίστοιχα, όπως στο Σχήμα 5. Τι θα συμβεί;

Σύμφωνα με τη θεωρία μας, το σύστημα των δυνάμεων ( $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{g}$ ), όπως και κάθε άλλο σύστημα διανυσμάτων, ανάγεται σε ένα ζεύγος διανυσμάτων και ένα διάνυσμα (δείτε το Πρόβλημα 6). Αυτό το έχουμε ήδη κάνει, και βρήκαμε το συνιστάμενο ζεύγος ( $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ) στο οριζόντιο επίπεδο. Είναι προφανές ότι η άμαξα θα περιστραφεί παραμένοντας στη θέση της. Επομένως, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τα λόγια του παραμυθιού: «Είμαι σίγουρος ότι η άμαξα μένει ακόμα εκεί.»

**ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ**



Μιχάλης Μακράκης  
**Το ξεκίνημα**  
Ανδρέας Παπανδρέου, 1933-1943

Το βιβλίο παρουσιάζει μια πρώτη προσπάθεια σύνθεσης ενός τμήματος βιογραφίας του Ανδρέα Γ. Παπανδρέου, που καλύπτει τις γυμνασιακές και πανεπιστημιακές σπουδές του στην Αθήνα και τις μεταπτυχιακές του στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ. Δεν περιορίζεται μόνο στα δεδομένα και τα αρχεία, αλλά προσφέρει και το κλίμα της εποχής, όπως διαμορφώθηκε στα ιδρύματα στα οποία φοίτησε ο μεγάλος πολιτικός.

Ο συγγραφέας ερευνά και στοιχειά πέραν των σπουδών, για να εντοπίσει χαρακτηριστικά που παρέμειναν μονίμως στον γραπτό ιδίως λόγω του Παπανδρέου. Ένα από τα ερωτήματα που θέτει είναι πώς κατά τη ζωή του στις Ηνωμένες Πολιτείες ο Ανδρέας απεμπόλησε τον πρώιμο μαρξισμό του και γιατί επανήλθε, ώριμος πλέον, στο νεομαρξισμό.

Ο Μ. Μακράκης έχει κάνει μεταπτυχιακές σπουδές στην εφαρμοσμένη φυσική στο MIT και το Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ.

Σελ.: 212, 14 × 21 εκ., Α/Μ,  
Χαρτόδετο: 4.500 δρχ., Πανόδετο: 5.500 δρχ.

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΙΣΤΟΡΗΤΗΣ/ΚΑΤΟΠΤΡΟ**

# Μαγνητικές αιχμές

«Το μυστικό του μαγνητισμού, αυτό, γιά εξηγήστε τό μου!  
Δεν υπάρχει μυστικό μεγαλύτερο, παρεκτός της αγάπης και του μίσους.»

—Johann Wolfgang von Goethe

Larry D. Kirkpatrick και Arthur Eisenkraft

**Ε**ΝΑΣ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΒΑΣΙΚΟΥΣ ΣΤΟΧΟΥΣ της σύγχρονης φυσικής είναι να αναγάγει όλες τις δυνάμεις της φύσης σε εκδηλώσεις μίας μοναδικής δύναμης. Μάλιστα, το βραβείο Νόμπελ Φυσικής του 1999 απονεμήθηκε στους ολλανδούς φυσικούς Gerardus t' Hooft και Martinus J.G. Veltman για τη συμβολή τους στην ενοποίηση της ηλεκτρομαγνητικής και της ασθενούς αλληλεπίδρασης. Οι θεωρητικές μέθοδοι τις οποίες εισήγαγαν οι δύο επιστήμονες εφαρμόστηκαν και σε ποικίλες προσπάθειες για την ενοποίηση της ηλεκτρασθενούς και της ισχυρής αλληλεπίδρασης στο πλαίσιο μιας Μεγάλης Ενοποιημένης Θεωρίας. Το μεγαλύτερο από τα εναπομένοντα προβλήματα έγκειται στο πώς θα ενσωματωθεί η βαρυτική αλληλεπίδραση σε μια «Θεωρία των Πάντων».

Κατά τις αρχές του 19ου αιώνα, οι φυσικοί αφιέρωσαν μεγάλο μέρος των προσπαθειών τους στην ανακάλυψη των συναφειών μεταξύ των ηλεκτρικών και των μαγνητικών δυνάμεων. Μολονότι είχε γίνει εκτεταμένη συζήτηση περί των πιθανών συναφειών, η πρώτη σύνδεση διαπιστώθηκε μόλις το 1819, στη διάρκεια μιας ιστορικής πειραματικής επίδειξης μπροστά σε ακροατήριο φοιτη-

τών, όταν ο δανός επιστήμονας Hans Christian Oersted ανακάλυψε ότι ένας ρευματοφόρος αγωγός εκτρέπει μια μαγνητική βελόνα. Επιπλέον, ο Oersted διαπίστωσε ότι η μαγνητική βελόνα προσανατολίζεται κάθετα προς το ρεύμα και ότι κάνει στροφή εκατόν ογδόντα μοιρών όταν αντιστρέφεται η φορά του ρεύματος.

Εντός μίας μόνο εβδομάδας από την ανακοίνωση της ανακάλυψης του Oersted, το 1820, ο γάλλος φυσικός André Ampère διατύπωσε τον κανόνα του δεξιού χεριού: εάν «χουφτώσετε» ένα σύρμα με το δεξιό σας χέρι έτσι ώστε ο αντίχειράς σας να δείχνει στην κατεύθυνση του ρεύματος, η μαγνητική βελόνη θα δείχνει στην κατεύθυνση των υπόλοιπων δακτύλων. Σε σύγχρονη γλώσσα, θα λέγαμε ότι οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές σχηματίζουν κύκλους γύρω από το σύρμα, και πως τα δάκτυλά σας δείχνουν στην κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.

Λίγο αργότερα, ο Ampère ανέπτυξε έναν τύπο για τον υπολογισμό της μαγνητικής δύναμης που ασκείται μεταξύ δύο ρευματοφόρων αγωγών. Προέβαλε επίσης την άποψη ότι τα μαγνητικά πεδία οφείλονται σε ηλεκτρικά ρεύματα, περιλαμβανομένων και εκείνων που εμφανίζονται στο

ατομικό επίπεδο. Σημειώστε ότι όλα αυτά συνέβαιναν τρία τέταρτα του αιώνα προτού ανακαλυφθεί το ηλεκτρόνιο και, βέβαια, πριν από τη δημοσίευση της θεωρίας του Bohr για το άτομο του υδρογόνου, η οποία ακολούθησε έπειτα από μία ακόμη δεκαετία.

Κατά την ίδια περίοδο, οι Jean Baptiste Biot και Felix Savart εξήγαγαν την ποσοτική έκφραση της στοιχειώδους συνεισφοράς  $d\mathbf{B}$  σε σημείο  $P$  μαγνητικού πεδίου η οποία οφείλεται σε ένα στοιχείο ρεύματος  $I ds$ . Η πλήρης έκφραση, η οποία είναι γνωστή ως νόμος των Biot-Savart, έχει ως εξής:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

όπου το  $\hat{\mathbf{r}}$  δηλώνει ένα μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το στοιχείο ρεύματος προς το σημείο  $P$ , ενώ με  $\mu_0$  συμβολίζουμε τη μαγνητική διαπερατότητα του κενού χώρου, η οποία έχει τιμή  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ .

Για να βρούμε το ολικό μαγνητικό πεδίο που παράγεται στο σημείο  $P$  από ρευματοφόρο αγωγό πεπερασμένου μήκους, πρέπει να αθροίσουμε τις συνεισφορές από όλα τα στοιχεία ρεύματος:



$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

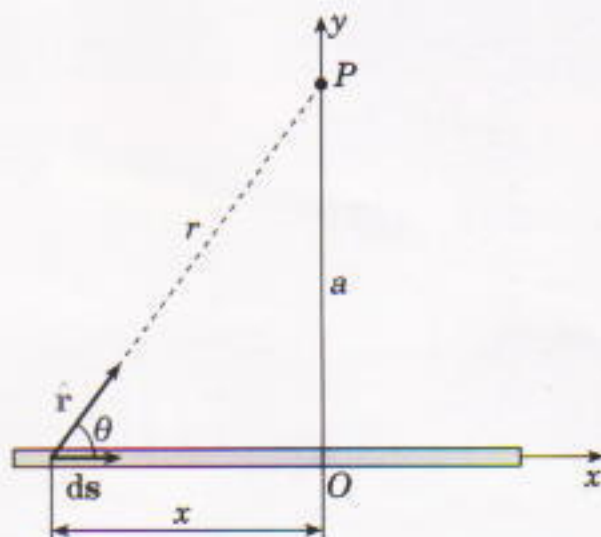
Επιβάλλεται να επισημάνουμε ότι απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή όταν υπολογίζουμε ένα τέτοιο ολοκλήρωμα, διότι η ολοκληρωτέα παράσταση είναι διανυσματική και πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η κατεύθυνσή της.

Παρατηρήστε την ομοιότητα που παρουσιάζει ο νόμος των Biot-Savart με το νόμο του Coulomb. Σύμφωνα με τον πρώτο, ένα στοιχείο ρεύματος παράγει μαγνητικό πεδίο το οποίο μεταβάλλεται ως το αντίστροφο τετράγωνο της απόστασης από το στοιχείο ρεύματος. Κατά το νόμο του Coulomb, από την άλλη, ένα σημειακό φορτίο παράγει ηλεκτρικό πεδίο που μεταβάλλεται ως το αντίστροφο τετράγωνο της απόστασης από το σημειακό φορτίο.

Εντούτοις, όταν στρέψουμε την προσοχή μας στο ζήτημα των κατευθύνσεων, τα δύο πεδία παρουσιάζονται πολύ διαφορετικά. Στο νόμο του Coulomb το ηλεκτρικό πεδίο είναι ακτινικό — είτε δείχνει προς το σημειακό φορτίο είτε στην ακριβώς αντίθετη κατεύθυνση. Στο νόμο των Biot-Savart, αντιθέτως, το μαγνητικό πεδίο έχει κατεύθυνση κάθετη τόσο στο διάνυσμα θέσης του σημείου παρατήρησης όσο και στο στοιχείο ρεύματος — δείχνει κατά την κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν το στοιχείο ρεύματος και το σημείο  $P$ .

Ας εφαρμόσουμε τώρα το νόμο των Biot-Savart για να προσδιορίσουμε το μαγνητικό πεδίο το οποίο παράγεται από έναν λεπτό ευθύγραμμο αγωγό που τον διαρρέει ρεύμα σταθερής έντασης  $I$ . Ας συμβολίσουμε τα γεωμετρικά δεδομένα του προβλήματος και τις διάφορες μεταβλητές που θα χρησιμοποιήσουμε στον υπολογισμό μας όπως υποδεικνύεται στο Σχήμα 1. Ο αγωγός εκτείνεται κατά μήκος του άξονα των  $x$  με το ρεύμα να ρέει κατά τη θετική φορά του. Το σημείο  $P$  κείται επί του θετικού ημιάξονα των  $y$  και σε απόσταση  $a$  από την αρχή  $O$  των συντεταγμένων μας.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του δεξιού χεριού, διαπιστώνουμε ότι κάθε στοιχείο ρεύματος παράγει μια στοι-



Σχήμα 1

χειώδη συνεισφορά στο μαγνητικό πεδίο η οποία είναι κάθετη στη σελίδα και έχει φορά προς τον αναγνώστη. Συνεπώς, το ολικό μαγνητικό πεδίο, όντας άθροισμα παράλληλων και ομόρροπων διανυσμάτων, θα έχει και εκείνο την ίδια κατεύθυνση: έτσι, δεν μας μένει παρά να υπολογίσουμε το μέτρο του. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε το εξωτερικό γινόμενο  $d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}$  με το μέτρο του  $dx \eta \mu \theta$ , όπου  $\theta$  έχουμε ονομάσει τη γωνία που σχηματίζει η κατεύθυνση του στοιχείου ρεύματος με την κατεύθυνση προς το σημείο  $P$ , όπως δείχνει και το Σχήμα 1.

Προτού συνεχίσουμε, παρατηρούμε ότι έχουμε εισαγάγει περισσότερες μεταβλητές απ' όσες χρειαζόμαστε. Αν επιλέξουμε ένα δεδομένο στοιχείο ρεύματος, τότε αυτομάτως προσδιορίζονται οι τιμές και των τριών μεταβλητών  $r$ ,  $x$  και  $\theta$ . Συνεπώς, προτού προχωρήσουμε στην ολοκλήρωση, πρέπει να εκφράσουμε τις δύο από αυτές τις μεταβλητές συναρτήσει της τρίτης. Ας επιλέξουμε να εκφράσουμε τα πάντα συναρτήσει της γωνίας  $\theta$ . Εν τοιαύτη περίπτωση, έχουμε

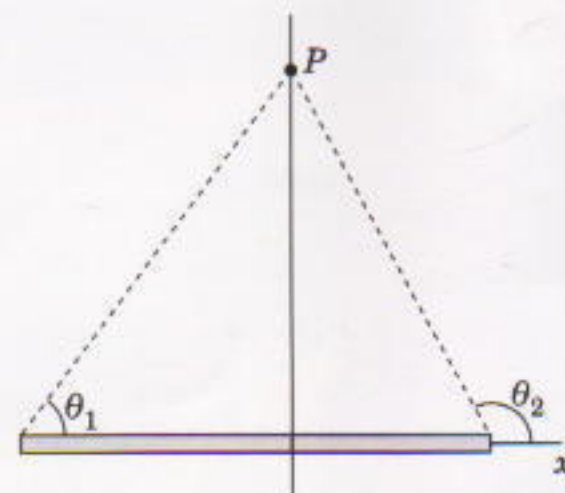
$$r = \frac{a}{\eta \mu \theta}$$

και

$$x = -\frac{a}{\epsilon \phi \theta}.$$

Διαφορίζοντας την τελευταία έκφραση, βρίσκουμε

$$dx = \frac{a d \theta}{\eta \mu^2 \theta}.$$



Σχήμα 2

Αφού εκτελέσουμε τις ανωτέρω αντικαταστάσεις, μας μένει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \eta \mu \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sigma \nu \theta_1 - \sigma \nu \theta_2). \end{aligned}$$

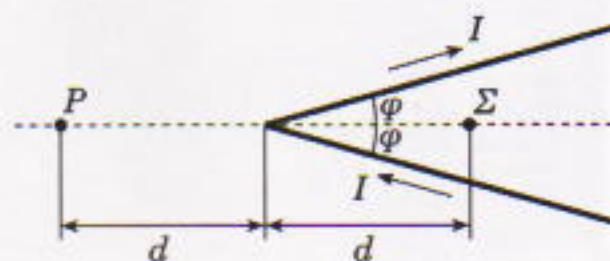
Οι γωνίες  $\theta_1$  και  $\theta_2$  ορίζονται στο Σχήμα 2.

Αν περιοριστούμε στην ειδική περίπτωση ενός ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού άπειρου μήκους, τότε έχουμε  $\theta_1 = 0$  και  $\theta_2 = \pi$ , οπότε το μαγνητικό πεδίο δίνεται από τον τύπο

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$$

Το πρόβλημα που καλείστε να λύσετε στο παρόν τεύχος βασίζεται σε ένα πρόβλημα το οποίο τέθηκε στη Διεθνή Ολυμπιάδα Φυσικής που διοργανώθηκε πέρυσι το καλοκαίρι στην Πάντοβα της Ιταλίας. Ένα πολύ μακρύ σύρμα που το διαρρέει ρεύμα σταθερής έντασης  $I$  κάμπτεται ώστε να σχηματιστεί ένα «V» γωνίας  $2\phi$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.

- A. Ποια κατεύθυνση έχει το μαγνητικό πεδίο στα σημεία  $P$  και  $\Sigma$ ;  
B. Προσδιορίστε το μέτρο του μα-



Σχήμα 3

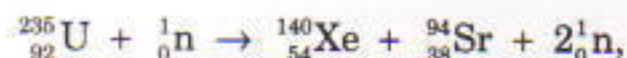
γνητικού πεδίου στο σημείο P.

Γ. Προσδιορίστε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Σ.

## Η διάσπαση είναι δύσκολη υπόθεση

Στο τεύχος Νοεμβρίου/Δεκεμβρίου 1999 είχαμε θέσει ερωτήματα σχετικά με την ενέργεια που απελευθερώνεται στην πορεία μιας αντίδρασης σχάσεως.

Α. Ζητούσαμε να υπολογιστεί το έλλειμμα μάζας για την αντίδραση



όπου το Xe διασπάται ταχέως προς  ${}_{58}^{140}\text{Ce}$  και το Sr προς  ${}_{40}^{94}\text{Zr}$  με παράλληλη εκπομπή ηλεκτρονίων αμειλιτέας μάζας. Δεδομένων των ακόλουθων μαζών:

${}_{92}^{235}\text{U}$	235,004 amu
${}_0^1\text{n}$	1,009 amu
${}_{58}^{140}\text{Ce}$	139,905 amu
${}_{40}^{94}\text{Zr}$	93,906 amu,

βρίσκουμε ότι η αρχική μάζα και η τελική μάζα ισούνται αντίστοιχα με 236,013 amu και 235,829 amu, γεγονός που σημαίνει μεταβολή της μάζας κατά 0,184 amu και αντίστοιχη απελευθέρωση ενέργειας 171 MeV.

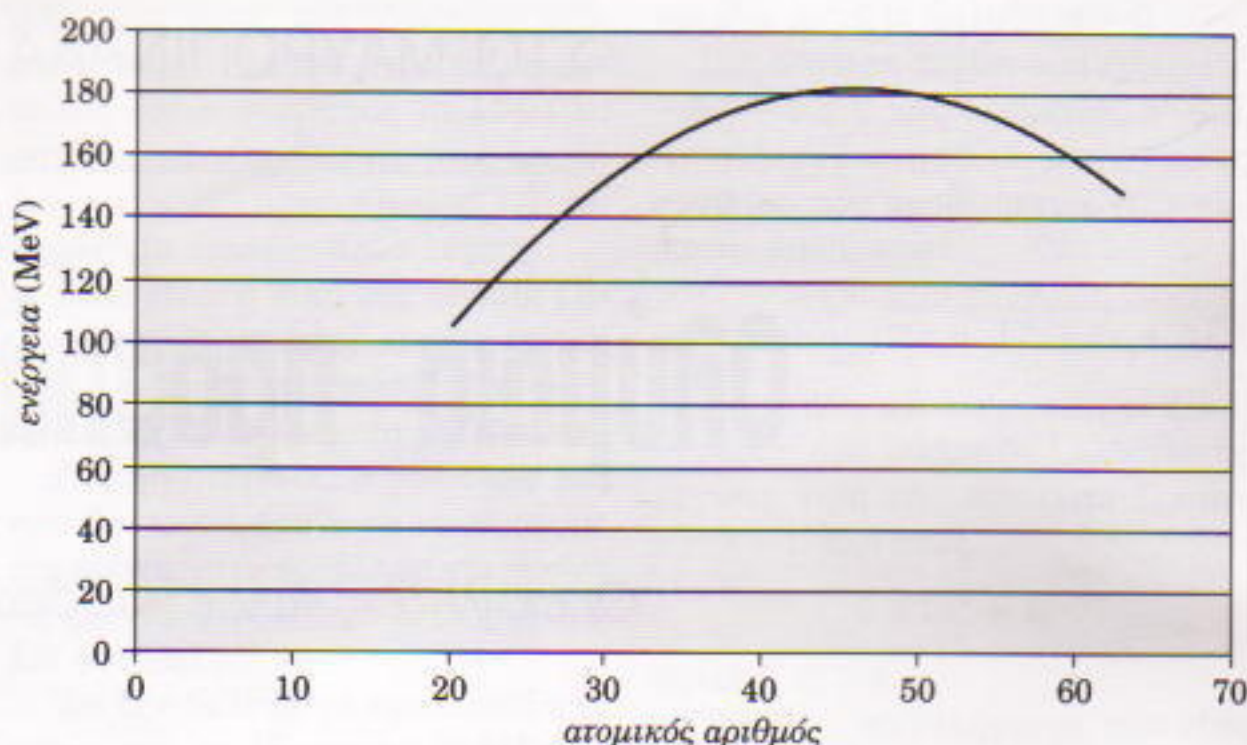
Β. Ζητούσαμε από τους αναγνώστες να ακολουθήσουν μια μέθοδο που την εισήγαγαν στην επιστημονική πρακτική ανεξάρτητα ο Frisch, η Meitner και ο Joliot, σύμφωνα με την οποία την απελευθερούμενη ενέργεια κατά τη σχάση την παρέχει η μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας των προϊόντων της, από τη στιγμή του σχηματισμού τους (όταν τρόπον τινά «εφάπτονται») έως ότου βρεθούν σε άπειρη απόσταση το ένα από το άλλο. Οι ακτίνες των πυρήνων Ce και Zr υπολογίζονται με τη βοήθεια του προσεγγιστικού τύπου

$$R = KA^{1/3},$$

όπου  $K = 1,0 \cdot 10^{-15}$  m. Έτσι, βρίσκουμε τις εξής τιμές:

$$R_{\text{Ce}} = 5,19 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$R_{\text{Zr}} = 4,55 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$



Σχήμα 4

Η απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο θραυσμάτων ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους,  $R_\delta = 9,74 \cdot 10^{-15}$  m.

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια:

$$U = \frac{kq_1q_2}{R_\delta} = \frac{\left(9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}\right) (58)(40)(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{9,74 \cdot 10^{-15} \text{ m}}$$

$$= 5,49 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

$$= 343 \text{ MeV}.$$

Όπως παρατηρούμε, οι τιμές που υπολογίσαμε στα μέρη Α και Β παρουσιάζουν σχετικά μικρή διαφορά.

Γ. Ζητούσαμε να αποδειχτεί ότι η απελευθερούμενη ενέργεια λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στη σπάνια περίπτωση της συμμετρικής σχάσης του ουρανίου. Ο ημιεμπειρικός τύπος του Weizsacker για την ενέργεια σύνδεσης είναι

$$B = \left[ 15,753A - 17,804A^{2/3} - 0,7103 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 94,77 \frac{\left(\frac{1}{2}A - Z\right)^2}{A} \right] \text{ MeV}.$$

Ετοιμάζουμε ένα λογιστικό φύλλο για να υπολογίσουμε τις ενέργειες σύνδεσης για όλα τα δυνατά ζεύγη θυγατρικών πυρήνων. Προς τούτο, πρέπει να αποφασίσουμε πώς θα κατανεύσουμε τα νετρόνια στους θυγατρικούς πυρήνες. Επιλέγουμε να τα μοιράσουμε έτσι ώστε ο λόγος των νετρονίων να ισούται με το λόγο των πρωτονίων. Για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου οι δύο θυγατρικοί πυρήνες έχουν 30 και 62 πρωτόνια, οι αντίστοιχοι μαζικοί αριθμοί (τα πλήθη των νουκλεονίων) λαμβάνονται ίσοι με το  $(30/92)$  και το  $(62/92)$  του 236, αντίστοιχα.

Αφού συμπληρώσουμε το λογιστικό φύλλο, κάνουμε τη γραφική παράσταση της απελευθερούμενης ενέργειας συναρτήσει του ατομικού αριθμού ενός από τους θυγατρικούς πυρήνες (Σχήμα 4). Όπως διαπιστώνουμε, η απελευθερούμενη ενέργεια λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της για τη συμμετρική σχάση, όπου καθένας από τους θυγατρικούς πυρήνες έχει 46 πρωτόνια. ◼

• Γ. ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ •

Το φυσικομαθηματικό βιβλιοπωλείο, τώρα και στα ξενόγλωσσα

Ιπποκράτους 6, 106 79 Αθήνα.  
Τηλ.-Fax: 3628492

# Ολύμπια προσπάθεια

Οι εκπλήξεις των εξετάσεων

V. Tikhomirov

**Κ**ΑΘΕ ΓΕΝΙΑ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΣΤΟ ΜΑθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου της Μόσχας έχει τον ολυμπιακό της ηγέτη<sup>1</sup>. Το ίδιο συνέβη και με τη δική μου.

Τα μέλη της οικογένειάς του διηγούνται ότι πριν ακόμη αρχίσει να αρθρώνει σωστά έλεγε πως ήθελε να ασχοληθεί με την «αλιθμητική». Άρχισε να λαμβάνει μέρος στις μαθηματικές Ολυμπιάδες όταν ήταν στην έκτη δημοτικού, παρόλο που για να συμμετάσχει στο διαγωνισμό έπρεπε να ήσουν τουλάχιστον στην τρίτη γυμνασίου. Ακόμη πιο απίστευτο είναι το γεγονός ότι πάντα έλυne τα προβλήματα και ότι πάντα βρισκόταν ανάμεσα στους νικητές.

Εκείνη την εποχή οι μαθηματικές Ολυμπιάδες οργανώνονταν από τη Μαθηματική Εταιρεία της Μόσχας, το Πανεπιστήμιο της Μόσχας και τη Διεύθυνση Εκπαίδευσης της Μόσχας. Οι νικητές των πρώτων βραβείων έπαιρναν μια μεγάλη στοίβα βιβλίων, οι νικητές των δεύτερων μια μικρότερη στοίβα, των τρίτων βραβείων μια ακόμα μικρότερη ενώ όσοι λάμβαναν «εύφημο μνεία» βραβεύονταν με ένα μοναδικό βιβλίο, που πάντως ήταν όμορφο. Όλα τα βιβλία ήταν υπογεγραμμένα από διάσημους μαθηματικούς και η τελετή βράβευσης δι-

εξαγόταν στο κεντρικό αμφιθέατρο του Μαθηματικού Τμήματος. Σύμφωνα με ένα θρύλο, ο ήρωας της ιστορίας μου κέρδισε κάποτε μια στοίβα βιβλίων ψηλότερη από τον ίδιο. Όπως και να έχει το πράγμα, ήταν πάντα ο νικητής. Πιστεύω ότι τα επιτεύγματά του έχουν μείνει αξεπέραστα.

Αργότερα, ο ήρωάς μου και εγώ βρεθήκαμε στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου της Μόσχας, εργαστήκαμε μαζί και γίναμε φίλοι. Αυτός κατέληξε ένας εξέχων μαθηματικός και μπορούσε να λύνει πάντα οποιοδήποτε πρόβλημα ολυμπιακού τύπου.

Κάποτε, στα μέσα της δεκαετίας του 1970, ένας καθηγητής που έπρεπε να ετοιμάσει τα θέματα των εισαγωγικών εξετάσεων έφυγε για ένα μακρόχρονο επαγγελματικό ταξίδι στο εξωτερικό. Είχε ξεκινήσει την ετοιμασία των θεμάτων αλλά δεν την είχε ολοκληρώσει. Το ζήτημα ήταν επείγον (βρισκόμασταν στον Μάιο και οι εξετάσεις θα γίνονταν τον Ιούλιο) και μου ζητήθηκε να ολοκληρώσω την εργασία. Ο κατάλογος των συναδέλφων που υποτίθεται ότι θα με βοηθούσαν περιελάμβανε και το όνομα του φίλου μου· συμφώνησα λοιπόν να αναλάβω τη δουλειά.

Τα εύκολα προβλήματα είχαν ήδη ετοιμαστεί, αλλά εκκρεμούσαν ακόμη τα δυσκολότερα, και μάλιστα τα λεγόμενα «ασυνήθιστα» προβλήμα-

τα. Κάθε ομάδα προβλημάτων έπρεπε να περιλαμβάνει ένα ασυνήθιστο πρόβλημα.

Ίσως αναρωτιέστε τι είναι ένα ασυνήθιστο πρόβλημα. Όταν και εγώ έκανα την ίδια ερώτηση, έλαβα την απάντηση: Πες ότι υπάρχει ένα παλιό και άλυτο πρόβλημα· είναι δυνατόν μέσω αυτού να διαγνωστεί ένας ταλαντούχος;

Στον αθλητισμό πιστεύουν ότι έχουν λύσει τούτο το ζήτημα. Κάποτε είδα με ποιον τρόπο εξετάζονται τα παιδιά για να διαπιστωθεί αν θα έπρεπε να ασχοληθούν με τη γυμναστική. Ένα κορίτσι ήρθε μπροστά στη γυμνάστρια που ήταν υπεύθυνη για την εξέταση. Η γυμνάστρια άρπαξε τους γλουτούς του φτωχού κοριτσιού και είπε: «Είναι πολύ χοντροί. Δεν κάνει.» Η διαδικασία κράτησε ένα δευτερόλεπτο. Εντυπωσιάστηκα από την απλότητά της. Ωστόσο, δεν γνωρίζουμε κατά πόσον υπάρχει μια απλή διαδικασία εξέτασης του μαθηματικού ταλέντου. Όπως έγραψε ο Α.Ν. Κολμογορον, δεν είναι σίγουρο ότι υπάρχει, αν μάλιστα λάβουμε υπόψη την ιδιαίτερη ατμόσφαιρα των εισαγωγικών εξετάσεων που χρησιμοποιούνται για να εκτιμηθούν οι προοπτικές ενός μαθητή σε έναν συγκεκριμένο κλάδο της επιστήμης.

Τα ασυνήθιστα προβλήματα λοιπόν είχαν ως στόχο, μεταξύ άλλων, να ελέγξουν αν ένας μαθητής είχε ή

1. Αναφερόμαστε, φυσικά, στις μαθηματικές Ολυμπιάδες.

όχι ταλέντο στα μαθηματικά. Τέτοια προβλήματα έπρεπε να περιλαμβάνουν ένα δύσκολο στοιχείο που ήταν αδύνατο να αντιμετωπιστεί με τις συνήθειες μεθόδους. Υποτίθεται ότι μόνο ταλαντούχοι μαθητές θα μπορούσαν να τα λύσουν.

Το ασυνήθιστο πρόβλημα, παραδοσιακά, βρισκόταν πέμπτο στον κατάλογο των θεμάτων. Όλοι γνώριζαν ότι είναι πολύ δύσκολο, και μόνο οι φιλόδοξοι μαθητές προσπαθούσαν να το λύσουν. Απ' όσο γνωρίζω, τα ονόματα όσων είχαν λύσει το ασυνήθιστο πρόβλημα δεν ανακοινώνονταν· έτσι, αγνώω ποιοι από τους πραγματικά ταλαντούχους μαθηματικούς έχουν λύσει ένα τέτοιο πρόβλημα στις εισαγωγικές εξετάσεις τους.

Ανάμεσα σε άλλα, λοιπόν, έπρεπε να βρω ένα ασυνήθιστο πρόβλημα και ζήτησα από τον ήρωα τούτης της ιστορίας να με βοηθήσει. Όπως ήταν φυσικό, με ρώτησε τι είναι ένα ασυνήθιστο πρόβλημα. Αντί να δώσω μακροσκελείς εξηγήσεις, του έδειξα τον κατάλογο με τα θέματα των εξετάσεων του προηγούμενου έτους και του ζήτησα να κατασκευάσει ένα πρόβλημα παρόμοιο με το πέμπτο του καταλόγου (το οποίο, όμως, εγώ ομολογώ πως δεν είχα λύσει). Συμφωνήσαμε να μου τηλεφωνήσει έπειτα από δύο-τρεις μέρες.

Ωστόσο, πέρασε μία ολόκληρη εβδομάδα και δεν μου είχε τηλεφωνήσει. Πιεζόμουν να τελειώσω τη δουλειά, και έτσι του τηλεφώνησα εγώ. Με έναν τόνο δυσαρέσκειας στη φωνή, τον ρώτησα γιατί δεν είχε επικοινωνήσει μαζί μου. Μου απάντησε μελαγχολικά και χαμηλόφωνα ότι δεν είχε καταφέρει να λύσει το πρόβλημα. Ιδού ποιο ήταν:

Βρείτε όλα τα ζεύγη  $(x, y)$  πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν τις συνθήκες

$$4y^2 - 2x^2 = \sqrt{2(x+2y)^2 - (x+2y)^4},$$

$$x^4 + 2 \leq 4y(x^2 - 1).$$

Νομίζω ότι ο περιώνυμος φίλος μου με κορόιδεψε. Δεν πιστεύω ότι υπάρχει πρόβλημα τύπου Ολυμπιάδας που δεν μπορούσε να λύσει. Αργότερα κατάφερα να λύσω το πρόβλημα ο ίδιος· μου πήρε αρκετές ώ-

ρες —όχι, όμως, μία ολόκληρη βδομάδα. Νομίζω λοιπόν ότι ο φίλος μου απλώς δεν προσπάθησε να λύσει το συγκεκριμένο πρόβλημα, ίσως επειδή δεν το έβρισκε αρκετά κομψό —ή πιθανόν για κάποιον άλλο λόγο.

Ποια είναι η δική σας γνώμη; Πιστεύετε ότι αποτελεί πρόβλημα κατάλληλο για να διαγνώσουμε ένα ταλέντο; Προσπαθήστε να το λύσετε.

Παρεμπιπτόντως, ο φίλος μου και εγώ δεν καταφέραμε να συνθέσουμε ένα ασυνήθιστο πρόβλημα για εκείνη τη χρονιά. Τη δουλειά ανέλαβαν άλλοι συνάδελφοι.

Αν δεν θέλετε να προσπαθήσετε μόνοι σας να λύσετε το πρόβλημα, ιδού η δική μου λύση (που πιθανόν δεν είναι η καλύτερη).

Συμβολίζουμε το  $(x+2y)^2$  με  $z$ . Η συνάρτηση  $2z - z^2$  λαμβάνει το μέγιστό της για  $z = 1$ . Συνεπώς, από την πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι

$$4y^2 - 2x^2 = \sqrt{2z - z^2} \leq 1. \quad (1)$$

Η δεύτερη ανισότητα μπορεί να γραφτεί ως

$$x^4 - 4yx^2 + 4y + 2 \leq 0,$$

ή

$$x^4 - 4yx^2 + 4y^2 \leq 4y^2 - 4y - 2,$$

ή

$$(x^2 - 2y)^2 \leq 4y^2 - 4y - 2.$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι

$$x^2 \leq 2y + \sqrt{4y^2 - 4y - 2}. \quad (2)$$

Επομένως,

$$4y^2 \leq 2x^2 + 1 \leq 4y + 2\sqrt{4y^2 - 4y - 2} + 1,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την ανισότητα

$$4y^2 - 4y - 1 - 2\sqrt{4y^2 - 4y - 2} \leq 0.$$

Από την τελευταία σχέση έπεται η ανισότητα

$$\left(\sqrt{4y^2 - 4y - 2} - 1\right)^2 \leq 0.$$

Άρα,  $4y^2 - 4y - 2 = 1$ . Συνεπώς,  $y = -1/2$  ή  $y = 3/2$ . Στην πρώτη περίπτωση, η δεύτερη συνθήκη του προβλήματος (η ανισότητα) μας δί-

νει  $x^4 + 2x^2 \leq 0$ , δηλαδή,  $x = 0$ .

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε  $x^4 - 6x^2 + 8 \leq 0$  και, επομένως,  $x^2 \leq 4$ . Αν αντικαταστήσουμε στην πρώτη συνθήκη του προβλήματος (την εξίσωση) βρίσκουμε

$$9 = 2x^2 + \sqrt{2(x+3)^2 - (x+3)^4}.$$

Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι η συνάρτηση στο υπόρριζο λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της, που είναι 1, όταν  $x+3 = 1$ . Συνεπώς

$$9 \leq 2x^2 + 1,$$

δηλαδή,  $x^2 \geq 4$ .

Τελικώς, καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα: υπάρχουν δύο μόνο ζεύγη αριθμών που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος:  $(0, -1/2)$  και  $(-2, 3/2)$ .

Το άρθρο «Οι ανισότητες γίνονται ισότητες» (σελ. 64) ασχολείται διεξοδικότερα με θέματα του παραπάνω τύπου.

Αν θέλετε να μάθετε τη γνώμη μου για τη διάγνωση του ταλέντου, μου φαίνεται αμφίβολο ότι είναι δυνατόν να ανακαλύψουμε μια σύντομη διαδικασία μέσω της οποίας θα μπορούμε να συμπεράνουμε αν ένας μαθητής μπορεί ή όχι να γίνει επιστήμονας. Ποια είναι η δική σας γνώμη; ■

STEPHEN HAWKING

Το χρονικό του Χρόνου



Τώρα, το Χρονικό του Χρόνου —Εικονογραφημένο κυκλοφορεί σε όλες τις χώρες σε χαρτόδετη έκδοση.

Σελ. 248. 19 x 25 εκ., Έγχρωμο. 8.000 δρχ.

# ΑΝΘΟΛΟΓΙΟ ΛΕΞΕΩΝ ΚΑΙ ΦΡΑΣΕΩΝ

«Λόγος έργου σκινή»

—Δημόκριτος, στο Περί παιδων Αγωγής του Πλουτάρχου

Μιχάλης Λάμπρου

## Μη μου τους κύκλους τάραττε.

Περίφημη φράση του Αρχιμήδη, την οποία, σύμφωνα με την παράδοση, διατύπωσε λίγο πριν τον θανατώσει ένας ρωμαίος στρατιώτης, κατά την κατάληψη των Συρακουσών από τον Μάρκελλο, το 212 π.Χ. Το ενδιαφέρον είναι ότι η ίδια η φράση δεν σώζεται στα ελληνικά αλλά είναι καθιερωμένη μετάφραση της αντίστοιχης λατινικής «Noli turbare circulos meos», αγνώστου προελεύσεως, που έφτασε μέχρι τις μέρες μας. Αντίθετα, σώζονται ελληνικές φράσεις για το ίδιο περιστατικό οι οποίες, στον έναν ή τον άλλο βαθμό, αποτελούν παραλλαγές της παραπάνω φράσης. Παραδείγματος χάριν, ο Δίων Κάσσιος στη *Ρωμαϊκή ιστορία* του αναφέρει ότι «καὶ εἰπὼν (ο Αρχιμήδης) ἄπόστηθι, ἄνθρωπε, ἀπὸ τῆς γραμμῆς» παρώξυνέ τε αὐτὸν (τον ρωμαίο στρατιώτη) καὶ κατεκόπη».

Ο βυζαντινός πολυίστωρ Ιωάννης Τζέτζης στις *Χιλιάδες* του γράφει σε έμμετρη μορφή: «Τὶς δὲ Ρωμαῖος ἐπιστὰς εἶλκε αἰχμαλωτίζων./Ὁ δὲ τοῦ διαγράμματος ὄλος ὑπάρχων τότε,/τὶς ὁ καθέλκων οὐκ εἰδώς, ἔλεγε πρὸς ἑκεῖνον/Ἄπόστηθι, ὦ ἄνθρωπε τοῦ διαγράμματος μου» (= Ἦλθε ἕνας ρωμαῖος στρατιώτης με σκοπὸ νὰ τον αἰχμαλωτίσει. Ὁ δε (Αρχιμήδης) ἦταν



τελείως αφοσιωμένος στο σχήμα και μη γνωρίζοντας ποιος τον τραβά, του εἶπε «Μην ακουμπάς, ἄνθρωπε, το σχήμα μου»».

Ένας σχολιαστής στις *Κατηγορίες* του Αριστοτέλη παραθέτει ἄλλη φράση. Συγκεκριμένα γράφει: «καὶ Ἀρχιμήδης δὲ ποτε βαρβάρων ἐπιστάντων ταῖς Συρακούσαις, οὐκ ἔφυγεν, θεωρημά τι γεωμετρικὸν καταγράφων, ἀλλ' ἔφη, «τὰν κεφαλὰν καὶ μὴ τὰν γραμμὰν»». Παρόμοια με την τελευταία εἶναι και η πληροφορία του Παχυμέρη στο *Σύνταγμα των τεσσάρων μαθημάτων* του, όπου λέει: «Ὁ μαθηματικώτατος Ἀρχιμήδης, «τὰν κεφαλὰν πλήττειν, μὴ τὰν γραμμὰν ἀφανίζειν», ἐπιστάντι τῷ πολεμίῳ ἐντατικῶς προ-

τρεπόμενος· εἰ γὰρ ἐξεργάσθη τότε εἰς τὸ τέλος τὸ θεωρούμενον (= Ὁ μαθηματικώτατος Αρχιμήδης, ὅταν ἐφανίστηκε ὁ ἐχθρὸς τοῦ εἶπε με ἐνταση νὰ χτυπήσει τὸ κεφάλι του και νὰ μὴ σβήσει τὸ σχήμα, γιατί δεν εἶχε φτάσει στο τέλος ἐκείνου που σκεπτόταν).» Ἄλλη παραλλαγή, πιο κοντινὴ στην παραπάνω φράση, σώζεται σε ἄλλη λατινική πηγή. Ὁ Βαλέριος Μάξιμος στο *Factorum et Dictorum memorabilium* γράφει ὅτι ὁ στρατηγὸς Μάρκελλος εἶχε δώσει ἐντολή νὰ σεβαστοῦν οἱ Ρωμαῖοι τὴ ζωὴ του Αρχιμήδη κατὰ τὴ διάρκεια τῆς λεηλασίας που ἀκολούθησε τὴν κατάληψη τῶν Συρακουσῶν. Ένας στρατιώτης, ὅμως, καθὼς εἰσέβαλε

Σκοπὸς τῆς παρούσας στήλης εἶναι νὰ παρουσιάσει τὴν προέλευση και τὴν ἐρμηνεία λέξεων, ἀριθμῶν και φράσεων τῆς ἀρχαίας ἐλληνικῆς, λατινικῆς, βυζαντινῆς και σύγχρονης γραμματείας που ἐγίναν γνωστὲς ἀπὸ τὴν ἱστορία τῶν ἐπιστημῶν.



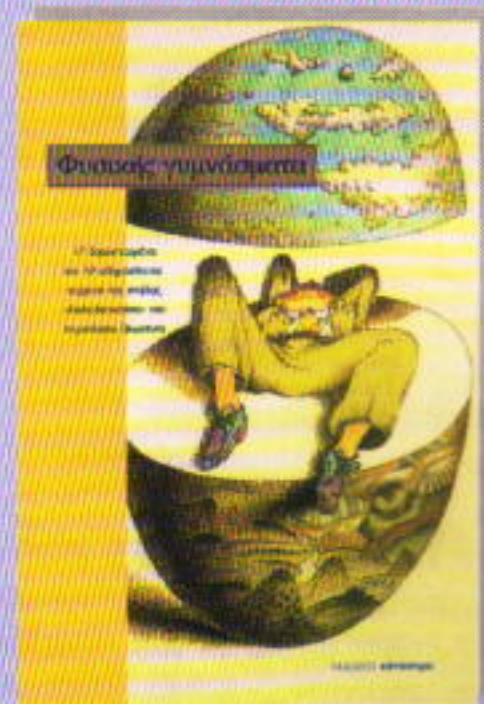
στο σπίτι του Αρχιμήδη τον ρώτησε ποιος είναι. Ο Αρχιμήδης, αφοσιωμένος στη λύση ενός προβλήματος, δεν μπόρεσε να απαντήσει. Το μόνο που έκανε ήταν να σηκώσει το χέρι του και να πει «*noli obsecro istum disturbare* (= παρακαλώ μην μου καταστρέψεις το σχήμα).» Ως αποτέλεσμα, ο στρατιώτης τον μαχαίρωσε.

Για το θάνατο του Αρχιμήδη σώζονται και άλλες εκδοχές πλην της παραπάνω [ο Πλούταρχος στους *Βίους παραλλήλους* (Μάρκελλος) παραθέτει τρεις]. Η παραπάνω είναι αυτή που ενέπνευσε πολλούς ζωγράφους να αποτυπώσουν το θάνατο του μεγάλου μαθηματικού.

**Εύρηκα, εύρηκα.** Περιώνυμη φράση του Αρχιμήδη όταν έλυσε επιτυχώς ένα πρόβλημα που του έθεσε ο τύραννος των Συρακουσών Ιέρων. Ο τύραννος υποπτευόταν ότι ο χρυσοχόος του υπεξαίρεσε μια ποσότητα χρυσού και τον αντικατέστησε με άργυρο κατά την κατασκευή ενός στέμματος. Ζήτησε τότε από τον Αρχιμήδη να ερευνήσει την υπόθεση, αλλά χωρίς να καταστρέψει το στέμμα. Ο Αρχιμήδης, την ώρα που έκανε το λουτρό του στο Βαλανείο, συνέλαβε την αρχή της άνωσης μέσω της οποίας επιβεβαίωσε την απάτη. Τότε ενθουσιασμένος βγήκε από το λουτρό του στους δρόμους γυμνός, φωνάζοντας «εύρηκα, εύρηκα». Η αρχαιότερη πηγή μας είναι στα λατινικά, το έργο *Architectura* του Βιτρούβιου: «*Idque cum eius rei rationem explicationis ostendisset, non est moratus, sed exsiluit gaudio motus de solio et nudus vadens domum versis significabat clara voce invenisse quod quaereret. Nam currens identidem graece clamabat "εύρηκα εύρηκα"* (= Μόλις, μετά από σκέψη για το αίτιο του φαινομένου, βρήκε την ερμηνεία, δεν περίμενε άλλο, αλλά αναπήδησε συγκινημένος από το λουτρό του, και τρέχοντας γυμνός προς το σπίτι του φώναξε δυνατά ότι βρήκε εκείνο που αναζητούσε. Διότι τρέχοντας φώναζε συνέχεια στα ελληνικά "εύρηκα, εύρηκα").» Παρόμοιο είναι το χωρίο του Πλουτάρχου στο *Κατ' Επικούρου*, «*καὶ λουόμενος, ὡς φασιν, ἐκ τῆς ὑπερχύσεως ἐννοήσας τὴν τοῦ στεφάνου μέτρῳ οἶον ἐκ τινος κατοχῆς ἢ ἐπινοίας ἐξήλατο βοῶν "εύρηκα"* (= λουόμενος, όπως λένε, αφού από την υπερχειλίση του νερού αντιλήφθηκε τη μέτρηση του στεφανιού, σαν να τον κατέλαβε οίστρος ή έμπνευση, βγήκε φωνάζοντας "εύρηκα").»

**Οπερ ἔδει δείξαι.** Κατά λέξη, «εκείνο που έπρεπε να αποδειχτεί, αποδείχτηκε». Στερεότυπη φράση η οποία απαντάται σε μαθηματικά κείμενα, συχνά ως αρκτικόλεξο «*δ.έ.δ.*», μετά το πέρας της απόδειξης θεωρημάτων. Σήμερα η χρήση της είναι περιορισμένη, αλλά στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά κείμενα, όπως για παράδειγμα στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, ήταν απαραίτητο δηλωτικό της ολοκλήρωσης της απόδειξης. Η πρώτη χρήση της στα *Στοιχεία* είναι στο α' Βιβλίο, Πρόταση δ', μετά την απόδειξη κριτηρίου ισότητας τριγώνων. Η ίδια φράση αποδίδεται στα λατινικά ως «*quod erat demonstrandum*», ή απλώς «*q.e.d.*». Σε αντιδιαστολή, μετά την ολοκλήρωση γεωμετρικών κατασκευών ετίθετο η φράση «*ὄπερ ἔδει ποιῆσαι*» (για παράδειγμα, βρίσκεται στο τέλος της πρώτης κιάλας πρότασης στα *Στοιχεία*). ●

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ ΕΝΑ ΑΚΟΜΗ ΒΙΒΛΙΟ ΜΕ ΥΛΙΚΟ ΤΟΥ QUANTUM



### Φυσικής γυμνάσματα

17 δημοσιευμένα και 10 αδημοσίευτα κείμενα της στήλης «Καλειδοσκόπιο»

Τα ερωτήματα του βιβλίου, που διακρίνονται για την πρωτοτυπία τους και αποσκοπούν στην καλλιέργεια της κριτικής σκέψης του αναγνώστη, αναφέρονται σε βασικά ζητήματα της λυκειακής φυσικής (από τα κεφάλαια της μηχανικής, του ηλεκτρισμού, της ακουστικής, της θερμότητας, της οπτικής, της μοριακής και ατομικής φυσικής) αλλά και σε θέματα αστρονομίας, σχετικότητας και βιολογίας, και συνοδεύονται από παράξενα παραλειπόμενα της ιστορίας της φυσικής. Οι απαντήσεις στα ερωτήματα παρατίθενται στο δεύτερο μέρος του βιβλίου.

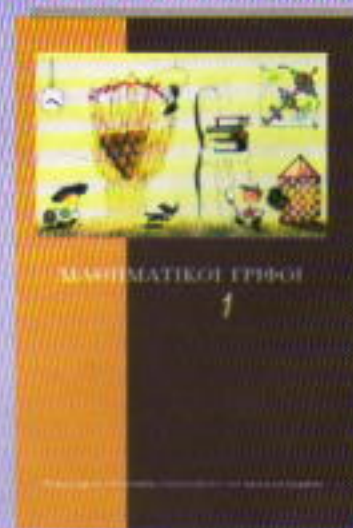
Σελ.: 160, 25 x 17 εκ., Α/Μ, 5.300 δρχ., Πανόδετο

### ΑΚΟΜΗ ΚΥΚΛΟΦΟΡΟΥΝ



Ο λύκος, ο Μυνχάουζεν και ο Νεύτων

Σελ.: 284, 25 x 17 εκ., Α/Μ, 6.400 δρχ., Πανόδετο



Μαθηματικοί γρίφοι —1

Σελ.: 148, 25 x 17 εκ., Τετράχρωμο, 5.200 δρχ., Πανόδετο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ

# Περί τ

Μια έρευνα 4.000 ετών που



**Τ**Ο ΤΡΙΓΩΝΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΑΠΛΟΥΣΤΕ-  
ρο πολύγωνο —έχει τρεις κο-  
ρυφές και τρεις πλευρές. Η  
μελέτη των τριγώνων γέννησε  
έναν κλάδο των μαθηματικών —την  
τριγωνομετρία— στον οποίο οι με-  
τρικές ιδιότητες του τριγώνου εκ-  
φράζονται μέσω συναρτήσεων των  
γωνιών του. Η ανάπτυξη αυτής της  
επιστήμης στηρίχτηκε σε πρακτικές  
ανάγκες. Η τριγωνομετρία χρησιμο-  
ποιήθηκε για τη μέτρηση εδαφικών  
περιοχών, την κατασκευή χαρτών  
και το σχεδιασμό μηχανών.

Οι πρώτες αναφορές στο τρίγωνο  
βρίσκονται σε αιγυπτιακούς παπύ-  
ρους ηλικίας μεγαλύτερης των 4.000



ετών. Για παράδειγ-  
μα, οι Αιγύπτιοι  
γνώριζαν έναν  
προσεγγιστι-  
κό τύπο για  
τον υπολογι-  
σμό του εμβα-  
δού ενός ισο-  
σκελούς τριγώ-  
νου: θεωρούσαν

το εμβαδόν ίσο με το γινόμενο του  
μισού της βάσης επί την πλάγια  
πλευρά. Αυτός ο τύπος δίνει μια ικα-  
νοποιητική προσέγγιση όταν η απέ-  
ναντι στη βάση γωνία είναι μικρή.

Στην αρχαία Ελλάδα, 2.000 χρόνια  
αργότερα, επετεύχθη σημαντική πρό-  
οδος στη μελέτη των ι-  
διοτήτων του τριγώνου.

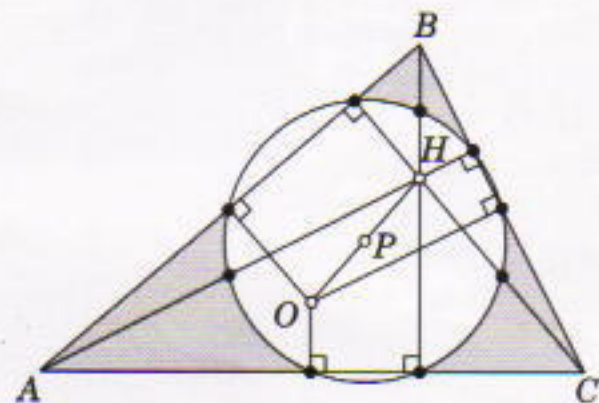
Αρκεί να θυμηθούμε  
το πυθαγόρειο θεώ-  
ρημα και τον τύπο  
του Ήρωνα.

Έπειτα από μια με-  
γάλη περίοδο πολιτισμι-  
κής παρακμής, τον 15ο  
αιώνα άρχισε η Ανα-  
γέννηση. Εμφανίστη-



καν πολυάριθμες μελέτες για το τρί-  
γωνο, ειδικά τον 18ο αιώνα. Αυτές οι  
μελέτες συνιστούν μεγάλο μέρος της  
επίπεδης γεωμετρίας που εκλήθη νέα  
γεωμετρία του τριγώνου.

Ίδου ένα αξιοσημείωτο θεώρημα  
που απέδειξε ο Euler: Τα μέσα των  
πλευρών του τριγώνου, τα ίχνη των  
υψών του και τα μέσα των τμημάτων



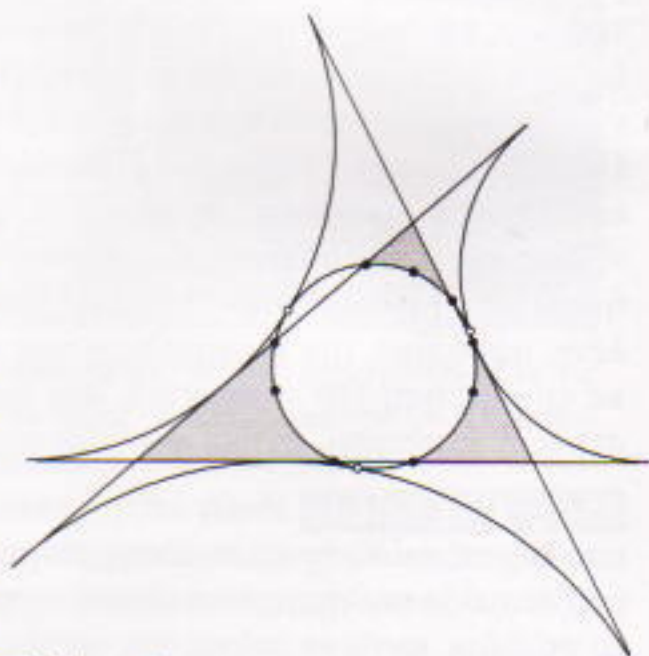
Σχήμα 1

που συνδέουν τις κορυφές του με το  
ορθόκεντρο (το σημείο τομής των υ-  
ψών του τριγώνου) ανήκουν σε έναν  
κύκλο. Αυτός ο κύκλος απεικονίζε-  
ται στο Σχήμα 1. Συχνά καλείται κύ-  
κλος των εννέα σημείων (λόγω των  
εννέα αξιοπρόσεκτων σημείων που  
ανήκουν σ' αυτόν). Ονομάζεται επί-  
σης κύκλος του Euler, ή κύκλος του  
Feuerbach, προς τιμήν του γερμα-  
νού μαθηματικού του 19ου

αιώνα, K. Feuerbach (α-  
δελφού του εξέχοντος φι-  
λοσόφου L. Feuerbach)  
που απέδειξε ότι αυτός ο  
κύκλος εφάπτεται στον  
εγγεγραμμένο κύκλο του  
τριγώνου και σε όλους  
τους παραγεγραμμένους  
κύκλους του (δηλαδή,  
στους κύκλους που εφά-

πτονται σε μία πλευρά  
του τριγώνου και στις  
προεκτάσεις των άλλων  
δύο πλευρών —βλ. Σχή-  
μα 2).

Ας συμβολίσουμε με  $H$  το ορθό-  
κεντρο ενός τριγώνου  $ABC$ . Αποδει-  
κνύεται ότι τα τρίγωνα  $ABC$ ,  $ABH$ ,  
 $BCH$  και  $CAH$  έχουν τον ίδιο κύκλο  
εννέα σημείων. Επομένως, ο κύκλος  
των εννέα σημείων εφάπτεται στους  
δεκαέξι κύκλους που είναι εγγεγραμ-  
μένοι ή παραγεγραμμένοι των τριγώ-  
νων  $ABC$ ,  $ABH$ ,  $BCH$  και  $CAH$ <sup>1</sup>.



Σχήμα 2

Η ακτίνα του κύκλου των εννέα  
σημείων ισούται με το μισό της ακτί-  
νας του περιγεγραμμένου κύκλου,  
και το κέντρο του βρίσκεται στο μέ-  
σο του τμήματος που συνδέει το κέ-

1. Δείτε σχετικά και το άρθρο για τον  
κύκλο του Feuerbach στο τεύχος Ιανουαρί-  
ου/Φεβρουαρίου 2000. (Σ.τ.μ.)

# Τριγώνου

συνεχίζεται μέχρι τις μέρες μας

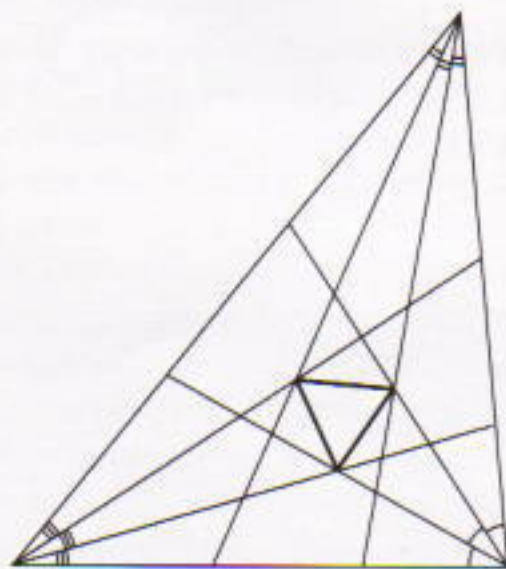


ντρο του περιγεγραμμένου κύκλου με το ορθόκεντρο του τριγώνου. Η ευθεία που περιέχει αυτό το τμήμα ονομάζεται *ευθεία Euler*. Το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου, το βαρύκεντρο, ανήκει επίσης στην εν λόγω ευθεία.

Είναι γνωστό ότι ο Ναπολέων αφιέρωνε μέρος του χρόνου του στα μαθηματικά. Το επόμενο κομψό θεώρημα αποδίδεται σε αυτόν<sup>2</sup>: Τα κέντρα των ισόπλευρων τριγώνων που κατασκευάζονται εξωτερικά των πλευρών ενός τυχαίου τριγώνου σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. Αυτό το ισόπλευρο τρίγωνο ονομάζεται *εξωτερικό ναπολεόντειο τρίγωνο*. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε το *εσωτερικό ναπολεόντειο τρίγωνο*.

Ακόμη και τον 20ό αιώνα απέμεναν να γίνουν μερικές ανακαλύψεις στη γεωμετρία του τριγώνου. Έτσι, το 1904 ο αμερικανός μαθηματικός F. Morley ανακάλυψε ότι αν τριχοτομηθούν οι γωνίες ενός τυχαίου τριγώνου τότε τα σημεία τομής των διαδοχικών τριχοτόμων σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο (βλ. Σχήμα 3). Οι

αρχαίοι έλληνες μαθηματικοί θα ήταν δυνατόν να έχουν αποδείξει αυτό το θεώρημα. Κατά πάσα πιθανότητα, όμως, δεν ανακάλυψαν το εν λόγω αξιοσημείωτο γεγονός επειδή μελετούσαν μόνο τις κατασκευές αυτές που μπορούσαν να γίνουν με κανόνα και διαβήτη. Αλλά οι τριχοτόμοι των γωνιών δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη (αυτό δεν είχε αποδειχτεί μέχρι τον 19ο αιώνα).



Σχήμα 3

Κατά τα μέσα του αιώνα μας επετεύχθη μια γενίκευση του θεωρήματος Morley. Σε κάθε γωνία μπορούμε να θεωρήσουμε τρεις τύπους τριχοτόμων. Το πρώτο είδος εξετάστηκε προηγουμένως. Το δεύτερο περιλαμβάνει τριχοτόμους των εξωτερικών γωνιών που είναι προσκείμενες στη δεδομένη γωνία. Το τρίτο περιλαμβάνει τριχοτόμους των

μη κυρτών γωνιών στις κορυφές του τριγώνου (δηλαδή εκκείνων που προσκείμενες στις αρχικές γωνίες δίνουν άθροισμα 360 μοιρών. Τα σημεία τομής αυτών των δεκαοκτώ τριχοτόμων σχηματίζουν δεκαοκτώ (!) ισόπλευρα τρίγωνα, οι πλευρές των οποίων είναι παράλληλες με τις πλευρές του βασικού τριγώνου Morley. Μια ειδική αναφορά στο θέμα παρουσιάστηκε στο Μαθηματικό Συνέδριο της Μόσχας του 1966. ■



**κάτοπτρο**  
**ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ**

ΣΤΟΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Πανεπιστημίου & Πειραιώς 5,  
105 64 Αθήνα Τηλ.: 3247785  
Web site: [www.katoptro.gr](http://www.katoptro.gr)  
e-mail: [katoptro@otenet.gr](mailto:katoptro@otenet.gr)



2. Δείτε σχετικά και το άρθρο «Το θεώρημα του Ναπολέοντα» στο τεύχος Σεπτεμβρίου/Οκτωβρίου 1995.

# Οι αρχές της θεωρίας στροβίλων

Στην καρδιά της υδροδυναμικής του Helmholtz

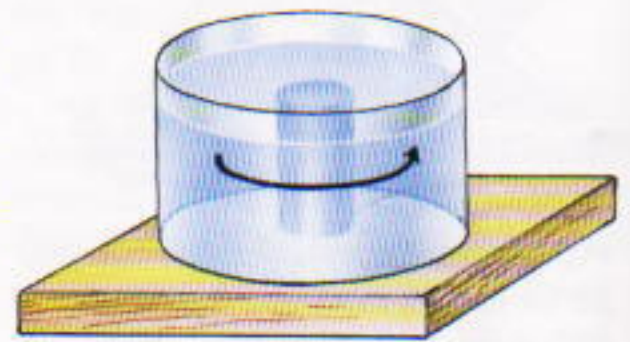
N. Zhukovsky

**Η** ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΥΠΗΡΞΕ ΤΕΚΝΟ ΤΩΝ συνδυασμένων προσπαθειών που κατέβαλαν γεωμέτρεις και αναλύστες. Στην ιστορία της δεν σπανίζουν οι περιπτώσεις όπου οι πολύπλοκοι αναλυτικοί τύποι αποκάλυπταν το βαθύτερο περιεχόμενό τους παίρνοντας σαφή ορατή μορφή με τη βοήθεια εμπνευσμένων γεωμετρικών διαγραμμάτων. Οι ερμηνείες αυτού του είδους παρουσίαζαν το μεγάλο πλεονέκτημα ότι αγκάλιαζαν το πρόβλημα σε όλη τη μεγαλοπρέπειά του και την πληρότητά του και αποσαφήνιζαν πολλές όψεις του τις οποίες παρέβλεπαν οι καθαρά αναλυτικές μελέτες. Μια τέτοια περίπτωση ήταν το πρόβλημα της περιστροφής ενός στερεού σώματος γύρω από το κέντρο βάρους του. Πρώτος το έλυσε ο μέγας Leonard Euler σε αναλυτική μορφή. Ωστόσο, η λύση εξακολουθούσε να μένει θαμμένη κάτω από έναν τεράστιο όγκο σκοτεινών τύπων έως ότου τη διασαφήνισε ο Louis Poinsot με απλές γεωμετρικές ερμηνείες των εμπλεκόμενων μεγεθών. Ένα άλλο συναφές παράδειγμα αποτελεί το έργο του Hermann Helmholtz, ο οποίος έριξε άπλετο φως σε πολλές από τις σκοτεινές γωνίες που έκρυβαν τα προβλήματα των κινούμενων ρευστών.

Όλες σχεδόν οι εργασίες που συνέγραψε ο Helmholtz με αντικείμενο τη μηχανική εστιάζονταν σε υδρομηχανικά προβλήματα. Δεν θα υπερ-

βάλαμε εάν λέγαμε ότι η ανάπτυξη της σύγχρονης υδροδυναμικής οφείλεται ως επί το πλείστον στον Helmholtz. Ωστόσο, η πλέον σημαντική εργασία του μεγάλου αυτού επιστήμονα δεν δημοσιεύθηκε παρά μόνο το 1858, έπειτα από μια μακρά περίοδο σαράντα τριών ετών αφότου ο Cauchy εξήγαγε τους τύπους που έκρυβαν κάπου μέσα στον όγκο τους την αρχή διατήρησης της κυκλοφορίας. Η αρχή αυτή συνεπάγεται ότι σε ένα ιδανικό ρευστό είναι αδύνατο να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί ένας στρόβιλος (ή δίνη, όπως συχνά αναφέρεται στη βιβλιογραφία) παρά μόνο με εξώθεν παρέμβαση. Εντούτοις, ο Cauchy πραγματεύθηκε τα αποτελέσματά του μόνο από τη σκοπιά της ανάλυσης και δεν προέβλεψε τα πολυάριθμα ερωτήματα που θα μπορούσε να απαντηθούν με τη βοήθεια της αντίστοιχης γεωμετρικής ερμηνείας των συμπερασμάτων του.

Θα προσπαθήσω να εξηγήσω με τον απλούστερο δυνατό τρόπο την έννοια του στρόβιλου όπως την επεξεργάστηκε ο Helmholtz. Φανταστείτε ένα κυλινδρικό δοχείο πεπερασμένου ύψους (Σχήμα 1) και μάλλον μεγάλης βάσης, γεμάτο με ρευστό (ένα αέριο ή ένα υγρό). Υποθέστε ότι το εν λόγω ρευστό κινείται με τον εξής τρόπο: μια κεντρική κυλινδρική στήλη ορισμένης διαμέτρου περιστρέφεται περί τον άξονα συμμετρίας της ως στερεό σώμα, ενώ τα υπόλοιπα μέ-



Σχήμα 1

ρη του ρευστού περιδινούνται γύρω από αυτή τη στήλη με ταχύτητα αντιστρόφως ανάλογη της απόστασής τους από τον άξονα του δοχείου. Έτσι, η ταχύτητα του ρευστού αυξάνεται καθώς κινούμαστε προς τον άξονα του κυλίνδρου για να συμπέσει με την ταχύτητα των σωματιδίων της κεντρικής στήλης στη (νοητή) συνοριακή της επιφάνεια.

Μια τέτοια κίνηση στα ρευστά ονομάζεται στρόβιλος, και η χαρακτηριστική στήλη καλείται στροβιλοσωλήνας. Ορίζουμε ως ένταση του στρόβιλου το ήμισυ του γινομένου της ταχύτητας του ρευστού πάνω στην επιφάνεια του στροβιλοσωλήνα επί την περιφέρεια της εγκάρσιας διατομής της. Το διπλάσιο του εν λόγω γινομένου ονομάζεται κυκλοφορία. Στη γενική περίπτωση, η κυκλοφορία κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης εντός ενός κινούμενου ρευστού ισούται με το γινόμενο του μήκους της συγκεκριμένης καμπύλης επί τη μέση εφαπτομενική ταχύτητα του υγρού κατά μήκος της.

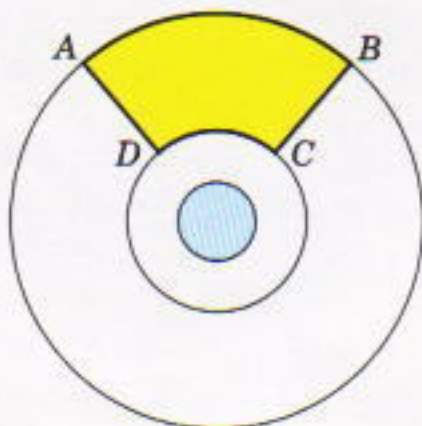


Εφόσον στο κινούμενο υγρό που απεικονίζεται στο Σχήμα 1 οι ταχύτητες έχουν μέτρο αντιστρόφως ανάλογο προς την ακτίνα, οι κυκλοφορίες κατά μήκος όλων των οριζόντιων κύκλων που τα κέντρα τους κείνται επί του άξονα της στήλης (και οι οποίοι την περικλείουν) είναι ταυτόσημες και ίσες με το διπλάσιο της έντασης του στροβιλοσωλήνα.

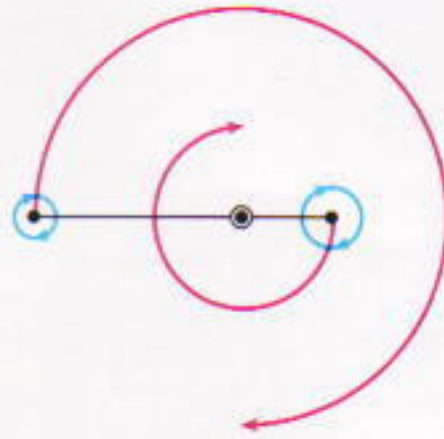
Αντίθετα, η κυκλοφορία κατά μήκος μιας καμπύλης που δεν περικλείει το σωλήνα (η γραμμή ABCD στο Σχήμα 2) και αποτελείται από δύο τόξα ομόκεντρων κύκλων —όπως εκείνοι που περιγράψαμε ανωτέρω— τα οποία συνδέονται μέσω δύο ακτινικών τμημάτων ισούται με μηδέν. Αυτή η ιδιότητα επιδέχεται γενίκευση: όπως μπορεί να αποδείξει κανείς, η κυκλοφορία κατά μήκος οιασδήποτε κλειστής καμπύλης η οποία περικλείει το σωλήνα ισούται με το διπλάσιο της έντασης του στρόβιλου, ενώ η κυκλοφορία κατά μήκος κάθε κλειστής καμπύλης που δεν περικλείει το σωλήνα μηδενίζεται.

Η ιδιότητα που μόλις περιγράψαμε καθιστά δυνατή την ανίχνευση ενός στροβιλοσωλήνα σε ένα κινούμενο ρευστό. Προς τούτο, κανείς πρέπει να σχεδιάσει μια κλειστή καμπύλη και να υπολογίσει την κυκλοφορία κατά μήκος της. Εάν ο υπολογισμός δώσει μη μηδενικό αποτέλεσμα, τότε μέσα από την καμπύλη διέρχεται ένας στροβιλοσωλήνας. Δεν έχουμε πλέον παρά να συστήσουμε βαθμιαία την καμπύλη μας ώσπου να διαπιστώσουμε κάποια μεταβολή της κυκλοφορίας. Με αυτό τον τρόπο κατορθώνουμε να ανιχνεύσουμε την επιφάνεια του σωλήνα.

Εφόσον στο ευρύ δοχείο μας περιέχεται μόνο ένας στρόβιλος ο οποί-



Σχήμα 2



Σχήμα 3

ος παράγεται από έναν ευθύγραμμο στροβιλοσωλήνα, αυτός θα παραμείνει ακίνητος. Εντούτοις, αν στο δοχείο δημιουργηθούν δύο τέτοιοι στρόβιλοι που περιδινούνται γύρω από παράλληλους σωλήνες, οι σωλήνες θα κινούνται. Το Σχήμα 3 δείχνει την κάτοψη δύο στροβιλοσωλήνων διαφορετικών εντάσεων όπου η περιδίνηση γίνεται κατά την ίδια φορά. Εφόσον ο στρόβιλος που παράγεται από τον αριστερό σωλήνα περιστρέφει ολόκληρη τη μάζα του υγρού γύρω από τον άξονα του σωλήνα κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ο δεξιός σωλήνας θα αποκτήσει μια ταχύτητα κάθετη προς την ευθεία που ενώνει τους άξονες των δύο στρόβιλων και με φορά προς τα κάτω. Για τον ίδιο ακριβώς λόγο, ο στρόβιλος που παράγεται από τον δεξιό σωλήνα θα προσδώσει στον αριστερό σωλήνα μια ταχύτητα με κατεύθυνση προς τα πάνω. Ως εκ τούτου, αμφότεροι οι σωλήνες περιστρέφονται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού γύρω από ένα ορισμένο σημείο. Την ακριβή θέση τού εν λόγω σημείου μπορούμε εύκολα να την καθορίσουμε εάν τοποθετήσουμε στα κέντρα των δύο σωλήνων μάζες ανάλογες των εντάσεών τους και βρούμε το κέντρο μάζας του συστήματος που θα προκύψει.

Εάν οι στρόβιλοι περιδινούνται κατ' αντίθετες φορές (βλ. Σχήμα 4), οι στροβιλοσωλήνες περιστρέφονται γύρω από έναν άξονα ο οποίος βρίσκεται στην προέκταση της ευθείας που τους ενώνει και προς το μέρος του σωλήνα με τη μεγαλύτερη ένταση, και η περιστροφή αυτή έχει την ίδια φορά με την περιδίνηση του ισχυρότερου στρόβιλου. Εάν οι δύο στρόβιλοι έχουν ίσες εντάσεις, το κοι-



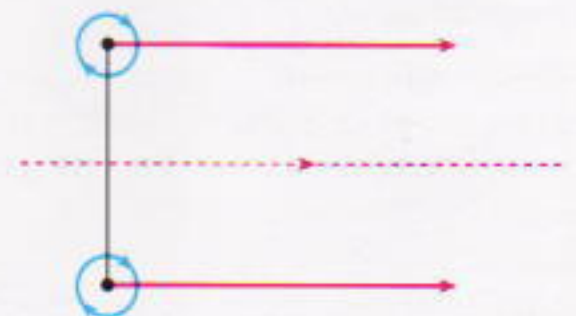
Σχήμα 4

νό κέντρο περιστροφής τους κείται στο άπειρο, οπότε αμφότεροι οι σωλήνες κινούνται παράλληλα κατά την κάθετο προς την ευθεία που ενώνει τα κέντρα τους (Σχήμα 5).

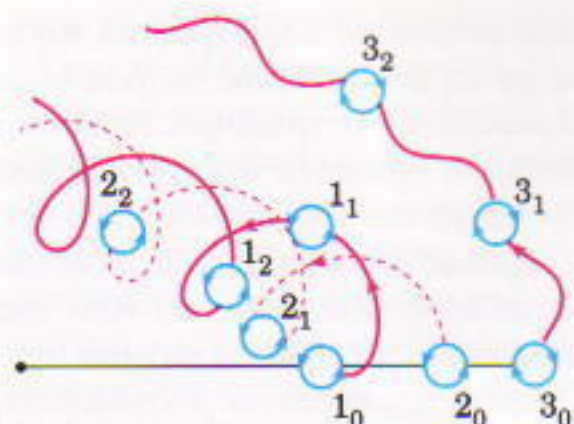
Το Σχήμα 6 δείχνει τις τροχιές που διαγράφουν τρεις στροβιλοσωλήνες οι οποίοι περιδινούνται και κατά τις δύο δυνατές φορές —οι μεν 1 και 2 κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ο δε 3 κατά την αντίθετη. Οι δείκτες που συνοδεύουν τους αριθμούς 1, 2, και 3 στο σχήμα δηλώνουν χρονικές στιγμές: η σύμπτωση των τιμών των δεικτών σημαίνει ότι πρόκειται για τις θέσεις που κατέχουν οι σωλήνες την ίδια χρονική στιγμή.

Η έννοια του ευθύγραμμου στροβιλοσωλήνα που δημιουργείται μέσα σε ένα αρκούντως ευρύ κυλινδρικό δοχείο μπορεί να γενικευθεί και στην περίπτωση στροβιλοσωλήνων οι οποίοι δημιουργούνται σε οποιαδήποτε μάζα ρευστού. Ο εντοπισμός αυτών των σωλήνων επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό της κυκλοφορίας κατά μήκος κλειστών καμπυλών, με την ίδια ακριβώς μεθοδολογία που εφαρμόσαμε και στην περίπτωση του ενός ευθύγραμμου σωλήνα.

Εάν δημιουργηθούν στρόβιλοι σε ένα μη συνεκτικό ρευστό (δηλαδή σε ένα ιδανικό ρευστό, χωρίς εσωτερική τριβή) το οποίο τελεί υπό την επί-



Σχήμα 5



Σχήμα 6

δραση δυνάμεων που δεν παραβιάζουν την αρχή διατήρησης της ενέργειας, τότε ισχύει το ακόλουθο αξιωματικό θεώρημα: σε ένα τέτοιο υγρό, η κυκλοφορία κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής κυκλικής καμπύλης —δηλαδή μιας κλειστής καμπύλης που αποτελείται από τα ίδια πάντα σωματίδια του υγρού— διατηρεί σταθερή την τιμή της καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης.

Το ανωτέρω θεώρημα συνεπάγεται ότι καθώς μετατοπίζεται ένας στρόβιλος, τα σωματίδια του υγρού που σχηματίζουν το σωλήνα του θα συγκροτούν πάντα ένα στροβιλοσωλήνα της αυτής έντασης. Μια άλλη απόρροια του ίδιου θεωρήματος είναι ότι σε ένα τέτοιο υγρό αποκλείεται να εμφανιστούν νέοι στροβιλοσωλήνες. Πράγματι, αν αναζητήσουμε ένα στροβιλοσωλήνα υπολογίζοντας τις τιμές της κυκλοφορίας κατά μήκος συγκεκριμένων κλειστών υλικών καμπυλών, θα βρούμε μηδενικό αποτέλεσμα για όλες τις καμπύλες από τις οποίες δεν διέρχεται ο σωλήνας, και την ίδια σταθερή τιμή για όλες τις καμπύλες που τον περικλείουν. Επιπλέον, οι τιμές αυτές θα παραμένουν αμετάβλητες καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης. Συνεπώς, θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι από τις επιλεγείσες υλικές καμπύλες διέρχεται πάντοτε ένας σωλήνας της ίδιας έντασης.

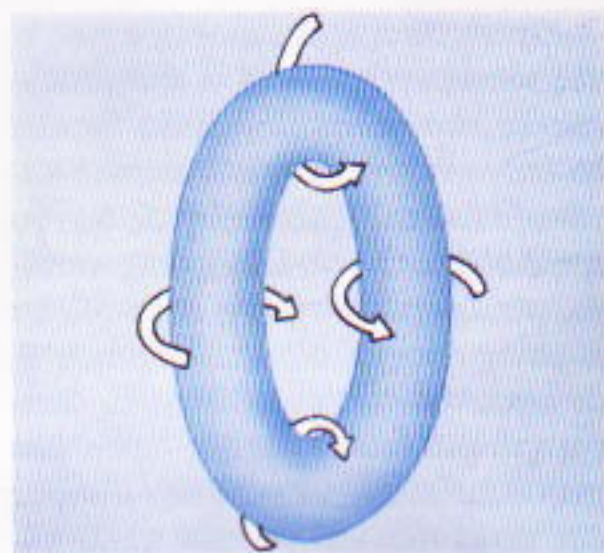
Μια άλλη συνέπεια που απορρέει από το ίδιο θεώρημα είναι ότι καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησής του ο στροβιλοσωλήνας ή θα έχει τα άκρα του στο σύνορο του ρευστού (στα τοιχώματα του δοχείου ή στην ελεύθερη επιφάνεια) ή αλλιώς θα παραμένει κλειστός.

Στην πραγματικότητα, για να α-

ποκολληθεί ο στροβιλοσωλήνας από τα τοιχώματα του δοχείου, η βάση του θα έπρεπε να συρρικνωθεί σε ένα σημείο. Εφόσον η κυκλοφορία κατά μήκος της περιφέρειας της βάσης πρέπει κατ' ανάγκην να παραμένει σταθερή, μια τέτοια συστολή θα απαιτούσε το υγρό να περιδινείται με άπειρη ταχύτητα στη βάση του στρόβιλου, πράγμα προφανώς αδύνατο.

Σε ένα ρευστό η υδροδυναμική πίεση μειώνεται όταν η ταχύτητα αυξάνεται. Έτσι, όταν η βάση του στρόβιλου στο τοίχωμα του δοχείου συστέλλεται, η αύξηση της ταχύτητας θα επιφέρει τη μείωση της πίεσης εκεί, με αποτέλεσμα το παρακείμενο ρευστό να ωθεί τα σωματίδια της βάσης του στρόβιλου προς το τοίχωμα και να εμποδίζει την αποκόλλησή της. Μοιάζει σαν ο στροβιλοσωλήνας να «κολλά» στα τοιχώματα του δοχείου και με τα δύο του άκρα. Αν κάποιο από τα άκρα του βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια, η «κόλληση» καθίσταται ορατή λόγω του «κρατήρα» που σχηματίζεται στην επιφάνεια του ρευστού κοντά στην απόληξη του σωλήνα. Εάν τα άκρα του σωλήνα δεν βρίσκονται στα σύνορα του υγρού, τότε αναγκαστικά πρέπει να συμπίπτουν, πράγμα που σημαίνει ότι ο στροβιλοσωλήνας οφείλει να είναι κλειστός: τα άκρα του «συγκολλούνται» μεταξύ τους.

Η απλούστερη μορφή που μπορεί να λάβει ένας κλειστός στροβιλοσωλήνας είναι ο δακτύλιος (ή σπείρα, ή τόρος), όπως φαίνεται στο Σχήμα 7. Όλα τα σωματίδια του ρευστού που βρίσκονται εκτός του δακτυλίου κινούνται κατά μήκος κλειστών καμπυλών «περασμένων» στο δακτύλιο με τέτοιο τρόπο ώστε οι τιμές της κυκλοφορίας κατά μήκος όλων αυτών των γραμμών ροής να είναι ταυτόσημες και ίσες προς την κυκλοφορία κατά μήκος της περιφέρειας της εγκάρσιας διατομής του δακτυλίου. Εάν «εισχωρήσουμε» στο δακτύλιο, λαμβάνουμε διάφορες τιμές για την κυκλοφορία κατά μήκος των γραμμών ροής επί των οποίων κινούνται στιγμιαία τα σωματίδιά του. Τις μεγαλύτερες ταχύτητες τις έχουν τα σωματίδια στην επιφάνεια του δακτυλίου. Η ταχύτητα μειώνεται κα-



Σχήμα 7

θώς κατευθυνόμαστε από την επιφάνεια προς το εσωτερικό του δακτυλίου, και μηδενίζεται σε κάποια αξονική γραμμή. Η ταχύτητα επίσης μειώνεται καθώς αυξάνεται η απόσταση από το δακτύλιο μέσα στη μάζα του παρακείμενου ρευστού. Για σωματίδια πολύ απομακρυσμένα από το δακτύλιο, η ταχύτητα είναι αντιστρόφως ανάλογη προς τον κύβο της απόστασής τους από αυτόν.

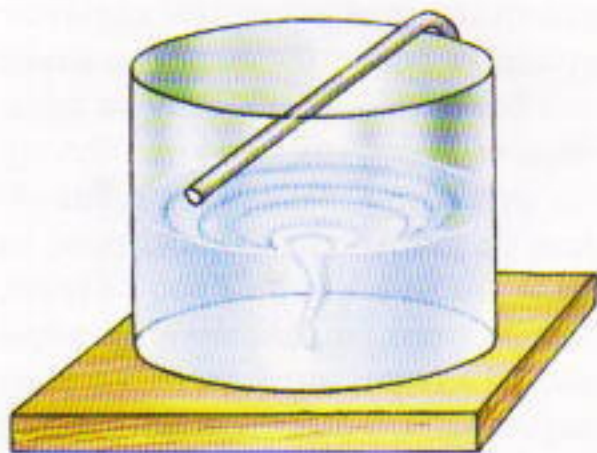
Όπως είδαμε ήδη, δύο παράλληλοι ευθύγραμμοι στροβιλοσωλήνες ίσης έντασης, οι οποίοι περιστρέφονται σε ένα ρευστό με αντίθετες φορές, κινούνται κατά την κάθετο προς το επίπεδο στο οποίο ανήκουν και οι δύο σωλήνες. Για τον ίδιο λόγο, ο δακτυλιοειδής στροβιλοσωλήνας δεν θα παραμείνει ακίνητος, αλλά θα κινηθεί κατά την κάθετο προς το επίπεδο του δακτυλίου και προς την πλευρά εκείνη απ' όπου το ρευστό εξέρχεται από το δακτύλιο.

Το Σχήμα 7 δείχνει ότι τα σωματίδια του ρευστού που κινούνται κατά μήκος των κλειστών γραμμών ροής στο ανώτερο μέρος του δακτυλίου θα ωθήσουν το κάτω άκρο του προς τα δεξιά. Ομοίως, τα σωματίδια που κινούνται κατά μήκος των κλειστών γραμμών ροής στο κατώτερο μέρος του δακτυλίου θα ωθήσουν το πάνω άκρο του προς την ίδια κατεύθυνση. Ως εκ τούτου, ολόκληρος ο δακτύλιος θα μετατοπιστεί ομαλά προς τα δεξιά και θα πάρει μαζί του το μέρος του ρευστού που περιδινείται γύρω του. Η κίνηση αυτή τείνει να γίνει ταχύτερη όσο μειώνεται το μέγεθος του δακτυλίου και αυξάνεται η έντασή του.

Όπως είπαμε παραπάνω, εντός ενός ιδανικού ρευστού οι ήδη υπάρχοντες στροβιλοσωλήνες θα έπρεπε να διατηρούνται για πάντα, ενώ κανένας νέος στροβιλοσωλήνας δεν θα εμφανιζόταν ποτέ. Στη φύση, ωστόσο, μας δίνεται συχνά η ευκαιρία να παρατηρήσουμε τόσο τη γέννηση όσο και το θάνατο στροβίλων. Πρόκειται για μια διαπίστωση η οποία μας υπενθυμίζει ότι το νερό και ο αέρας δεν είναι ιδανικά ρευστά αλλά παρουσιάζουν κάποια συνεκτικότητα (ή ιξώδες), πράγμα που σημαίνει πως η θεωρητική μας συλλογιστική πρέπει να τροποποιηθεί ελαφρώς προκειμένου να περιγράψει τη συμπεριφορά των πραγματικών στροβίλων. Από τη μια, οι στρόβιλοι δημιουργούνται κατά κύριο λόγο στις περιοχές όπου δύο στρώματα του ρευστού κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες ολισθαίνοντας το ένα πάνω στο άλλο· από την άλλη, οι στρόβιλοι που δημιουργούνται δεν έχουν παρά έναν περιορισμένο χρόνο ζωής και βαθμιαία εκφυλίζονται.

Τη δημιουργία σε υγρά ευθύγραμμων στροβίλων την επέδειξε ο Helmholtz σε ένα υπέροχο πείραμα που περιγράφεται στη διάλεξή του για το φαινόμενο του στροβιλώδους σάλου. Εδώ θα επαναλάβουμε την επίδειξη αυτή.

Γεμίζουμε με νερό ένα κυλινδρικό δοχείο που στον πυθμένα του φέρει μια μικρή οπή κλεισμένη με ένα πώμα (Σχήμα 8). Με τη βοήθεια ενός λεπτού σωλήνα κατευθύνουμε μια δέσμη αέρα προς τη μια πλευρά της ελεύθερης επιφάνειας του νερού, έτσι ώστε να το αναγκάσουμε να περιστρέφεται αργά. Αφού ανοίξουμε την οπή στον πυθμένα του δοχείου,

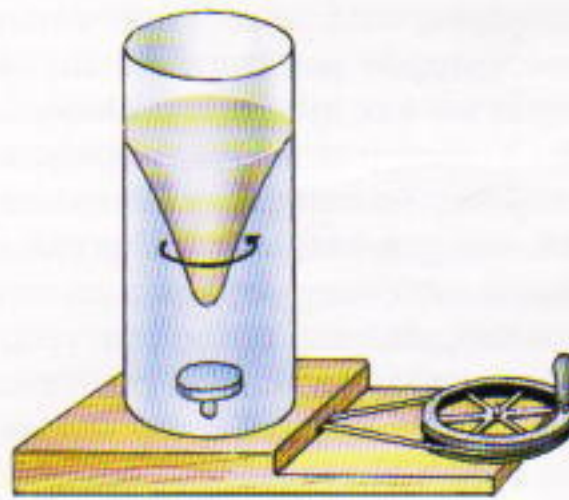


Σχήμα 8

το νερό αρχίζει να εκρέει, κινούμενο από το τοίχωμα του δοχείου προς τον άξονά του. Τα σωματίδια του νερού διαγράφουν ολοένα μικρότερους κύκλους, το κέντρο των οποίων κείται πάνω στον άξονα του κυλίνδρου. Εφόσον η κυκλοφορία κατά μήκος των εν λόγω κύκλων είναι σταθερή, τη μείωση της ακτίνας τη συνοδεύει μια αντίστοιχη αύξηση της ταχύτητας των σωματιδίων. Καθώς πλησιάζουμε τον άξονα του κυλίνδρου, η ταχύτητα της περιστροφής αυξάνεται μέχρις ότου συναντήσουμε έναν ευδιάκριτο στρόβιλο με τον χαρακτηριστικό βαθύ κρατήρα του.

Στρόβιλος μπορεί επίσης να παραχθεί με τη βοήθεια ενός ταχέως περιστρεφόμενου δίσκου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9. Από το κέντρο του πυθμένα ενός γυάλινου κυλίνδρου περνάμε έναν κατακόρυφο αξονίσκο ο οποίος φέρει στο άνω άκρο του έναν μικρό δίσκο. Κατόπιν γεμίζουμε τον κύλινδρο με νερό και από πάνω προσθέτουμε λάδι. Όταν ο δίσκος αρχίσει να περιστρέφεται, βαθμιαία θέτει σε περιστροφική κίνηση το νερό και δημιουργεί ένα στροβιλοσωλήνα. Ο στρόβιλος διακρίνεται καθαρά λόγω του κρατήρα που σχηματίζεται στη διαχωριστική επιφάνεια λαδιού-νερού. Ο κρατήρας γεμίζει με λάδι, το οποίο κατέρχεται προς το δίσκο ωςάν σίφων (σίφουνας) εν πτώσει. Μόλις το λάδι έρθει σε επαφή με το δίσκο, αυτομάτως ολοκληρω η μάζα του διασκορπίζεται μέσα στο νερό.

Ευθύγραμμοι στρόβιλοι στον αέρα είναι δυνατόν να παραχθούν και να καταστούν ορατοί με μια εξαιρετικά ενδιαφέρουσα μέθοδο. Ο αέρας που υπέρκειται ενός ανοιχτού δοχείου με

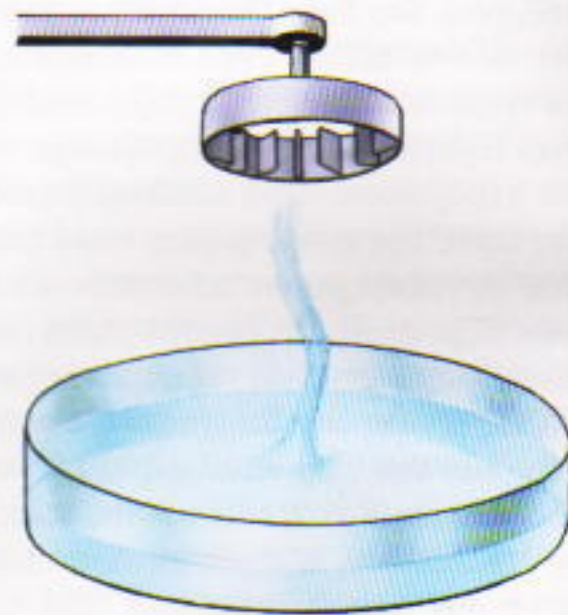


Σχήμα 9

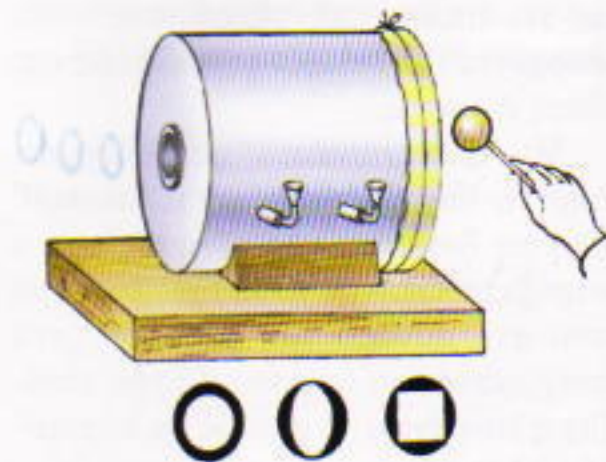
νερό τίθεται σε περιστροφική κίνηση με τη βοήθεια ενός ταχέως περιστρεφόμενου ανεμιστήρα τοποθετημένου σε ορισμένο ύψος πάνω από την επιφάνεια του νερού (Σχήμα 10). Ο αόρατος στρόβιλος του αέρα αρπάζει το νερό μέσα στον αξονικό του σωλήνα και το σηκώνει σαν μια ανυψούμενη και περιδινούμενη υδάτινη στήλη που θυμίζει την προβοσκίδα θαλάσσιου σίφωνα και φτάνει ως τον ανεμιστήρα.

Δακτυλιοειδείς στρόβιλοι στον αέρα είναι δυνατόν να επιδειχθούν με τη βοήθεια της διάταξης Tait. Η διάταξη Tait αποτελείται από ένα κυλινδρικό τύμπανο (Σχήμα 11) που η οπίσθια βάση του έχει αντικατασταθεί με ένα καλά τεντωμένο κομμάτι δέρματος ενώ η πρόσθια φέρει στο κέντρο της στόμιο με οξύ χείλος. Το σχήμα του στομίου μπορεί να γίνει κυκλικό, ελλειπτικό, τετραγωνικό, κ.ο.κ. με τη βοήθεια ειδικών εξαρτημάτων.

Για να καταστούν ορατοί οι δακτυλιοειδείς στροβιλοσωλήνες, μέσα στο κουτί τοποθετούνται δύο δο-



Σχήμα 10



Σχήμα 11



χεία: το ένα περιέχει υδροχλωρικό οξύ και το άλλο υγρή αμμωνία. Οι ατμοί των χημικών αυτών ουσιών παράγουν μια πυκνή ομίχλη από σωματίδια χλωριούχου αμμωνίου. Χτυπώντας με τη γροθιά ή με ένα σφυρί το τετρωμένο δέρμα, ωθούμε γρήγορα μια μάζα αέρα γεμάτη ομίχλη χλωριούχου αμμωνίου έξω από τον κύλινδρο. Αυτή η μάζα περνά μέσα από τον ακίνητο αέρα αναγκάζοντάς τον να περιδινείται. Ο σχηματιζόμενος δακτυλιοειδής στροβιλοσωλήνας διακρίνεται καθαρότητα λόγω της ομίχλης που τον γεμίζει. Προφανώς, ο αέρας κοντά στο δακτύλιο θα περιστρέφεται με τέτοιο τρόπο ώστε ο στροβιλοσωλήνας να απομακρύνεται από το στόμιο της συσκευής.

Είδαμε προηγουμένως (Σχήματα 3-6) πώς αλληλεπιδρούν μερικοί ευθύγραμμοι στρόβιλοι. Παρακολουθώντας τους δακτυλιοειδείς στροβιλοσωλήνες που παράγει η διάταξη Tait, μπορούμε να παρατηρήσουμε και περιπτώσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ αυτών. Όταν οι δακτύλιοι έρχονται σε επαφή πλευρικά, αλληλοαπωθούνται. Επίσης, ο ένας δακτύλιος μπορεί να περάσει μέσα από τον άλλο. Πρόκειται για ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον φαινόμενο που ο Helmholtz το διερεύνησε λεπτομερώς και έδωσε την πλήρη θεωρητική του εξήγηση. Ο Helmholtz απέδειξε ότι ο δακτύλιος που έπεται μικραίνει σε μέγεθος και αποκτά αυξημένη ταχύτητα. Αντίθετα, ο δακτύλιος που προηγείται γίνεται μεγαλύτερος και επιβραδύνεται. Οι αλλαγές αυτές συνεχίζονται ώσπου ο δακτύλιος που έπεται να διέλθει μέσα από τον άλλο. Στη συνέχεια, οι δακτύλιοι ανταλλάσσουν ρόλους: ο δακτύλιος ο οποίος έμεινε πίσω προλαβαίνει εκείνον που προηγείται και περνάει από μέσα του. Δυστυχώς, αυτό το παιχνίδι των δύο δακτυλίων παρατηρείται αρκετά σπάνια· το βλέπουμε μόνο όταν τα μεγέθη και οι εντάσεις τους βρίσκονται στις κατάλληλες σχέσεις.

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο δακτυλιοειδής στροβιλοσωλήνας παρασύρει ταχέως περιστρεφόμενο αέρα κατευθύνοντάς τον προς ένα αναμμένο κερί. Ένα κερί τοποθετημένο σε μεγάλη απόσταση από τη δι-

άταξη Tait σβήνει όποτε η φλόγα του πιαστεί σ' ένα δακτύλιο. Στα νιάτα μου επιχείρησα να ανακαλύψω γιατί η πυροδότηση ενός καψουλιού επικρούσεως από ένα πιστόλι μπορεί να σβήσει ένα αναμμένο κερί που βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση. Τώρα γνωρίζω την απάντηση: το πιστόλι δεν εκτοξεύει μόνο τη σφαίρα, αλλά συνάμα εξαπολύει και έναν δακτυλιοειδή στροβιλοσωλήνα αέρα. Ένας τέτοιος δακτύλιος μπορεί να διανύσει μεγάλη απόσταση χωρίς να εκφυλιστεί.

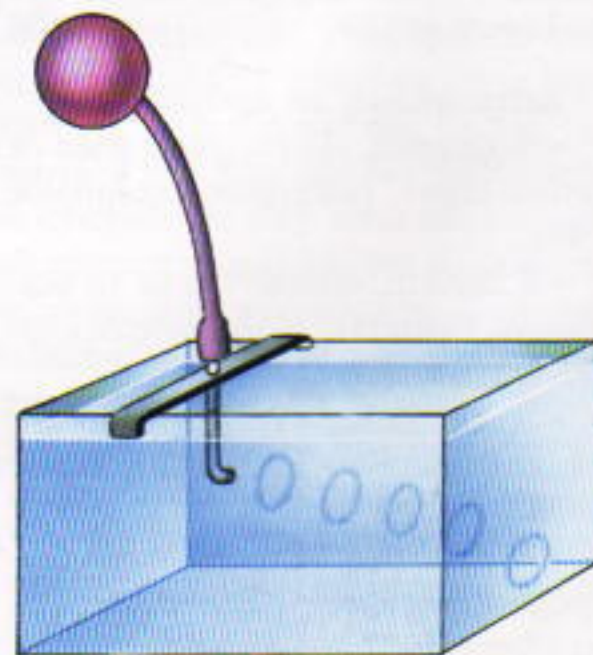
Προηγουμένως βγάλαμε τους δακτυλίους μας από ένα στρογγυλό στόμιο. Μπορούμε κάλλιστα να δώσουμε διαφορετικό σχήμα στους δακτυλίους βγάζοντάς τους από ελλειπτικά ή τετραγωνικά στόμια. Ωστόσο, οι δακτύλιοι αυτού του είδους δεν διατηρούν το σχήμα τους και ταλαντώνονται προσπαθώντας να λάβουν το «σωστό» κυκλικό σχήμα, που αποτελεί τη μοναδική ευσταθή μορφή για έναν κλειστό στροβιλοσωλήνα.

Ας στραφούμε τώρα στην επίδραση των υλικών σωμάτων πάνω στους δακτυλιοειδείς στροβιλοσωλήνες. Τα στερεά σώματα που βρίσκονται στα πλευρά ενός κινούμενου δακτυλίου τον απωθούν. Ωστόσο, όταν ο δακτύλιος συναντά ένα επίπεδο εμπόδιο τοποθετημένο παράλληλα προς το δικό του επίπεδο, διαστέλλεται ολόενα και περισσότερο, σαν να απλωνόταν γύρω από το εμπόδιο. Εάν τοποθετήσουμε ένα μαχαίρι στην πορεία του δακτυλίου κατά τρόπον ώστε το επίπεδο της λεπίδας του να περιέχει τον άξονα του δακτυλίου, εκείνος θα κοπεί σε δύο ημιδακτυλίους, που τα άκρα τους θα ολισθαίνουν πάνω στη λεπίδα. Όταν οι ημιδακτύλιοι θα έχουν περάσει το μαχαίρι, τα άκρα τους θα «συγκολληθούν» ώστε να αποκατασταθεί ο αρχικός δακτύλιος.

Εκτός από τους δακτυλίους καπνού στον αέρα, μπορεί κανείς να παρατηρήσει και δακτυλίους στο νερό, που η παρουσία τους επισημαίνεται από την ύπαρξη φυσαλίδων αέρα. Αυτό το ενδιαφέρον φαινόμενο, που εκ πρώτης όψεως μοιάζει παράδοξο, επιδέχεται απλή εξήγηση. Το βασικό είναι ότι η πίεση στον άξονα του δακτυλιοειδούς στροβιλοσωλήνα μειώ-

νεται πολύ λόγω της φυγοκέντρου δυνάμεως. Εάν εισαγάγουμε στο νερό μερικές φυσαλίδες αέρα τη στιγμή που δημιουργείται ένας δακτυλιοειδής στροβιλοσωλήνας, εκείνες μετακινούνται γρήγορα στο μέρος του υγρού όπου επικρατεί η ελάχιστη πίεση, δηλαδή στον άξονα του δακτυλίου. Οι φυσαλίδες θα διατηρηθούν εκεί επί όσο χρόνο ο δακτυλιοειδής στροβιλοσωλήνας ταξιδεύει στο νερό, παρότι ο αέρας έχει πυκνότητα οκτακόσιες φορές μικρότερη από εκείνη του νερού.

Ιδού μια διάταξη με την οποία μπορούμε να παραγάγουμε δακτυλίους αέρα στο νερό, ορατούς με τη βοήθεια φυσαλίδων αέρα. Η εν λόγω διάταξη αποτελείται από ένα μεγάλο δοχείο (Σχήμα 12) γεμάτο με νερό. Ένας γυάλινος σωλήνας σχετικά μεγάλης διατομής και κεκαμμένος έτσι ώστε να σχηματίζει ορθή γωνία εμβυθίζεται στο δοχείο. Το πάνω άκρο του διατηρείται πάνω από την επιφάνεια του νερού και συνδέεται με μια λαστιχένια σφαιρική φούσκα· πιέζοντας τη φούσκα μπορούμε να ωθήσουμε αέρα μέσα στο σωλήνα, αναγκάζοντας έτσι το νερό να εξέλθει από αυτόν. Πιέζοντας λοιπόν απότομα τη φούσκα, εκδιώκουμε το νερό από το οριζόντιο σκέλος του κεκαμμένου σωλήνα και προωθούμε τον αέρα ως το χείλος του. Κατ' αυτό τον τρόπο όχι μόνο εκβάλλουμε το νερό από το σωλήνα, αλλά και εισάγουμε μια μικρή ποσότητα αέρα στο λουτρό. Αφού εγκαταλείψει το σωλήνα, η ορι-



Σχήμα 12

ζόντια στήλη νερού συστρέφεται σχηματίζοντας έναν δακτυλιοειδή στροβιλοσωλήνα. Μερικές φυσαλίδες αέρα από το σωλήνα θα διασπαστούν σε μικρότερες φυσαλίδες, που παίρνουν τις θέσεις τους στον άξονα του κυλίνδρου. Τούτες οι «λαμπερές χάντρες» αποκαλύπτουν καθαρά τον υδάτινο στρόβιλο που ταξιδεύει στο νερό. Αφού διατρήσουν ολόκληρο το μήκος του δοχείου, οι δακτύλιοι προσκρούουν στο απέναντι τοίχωμα, διαστέλλονται και τελικά αποσυντίθενται.

Με τη βοήθεια της ίδιας διάταξης μπορούμε να επιδείξουμε ξεκάθαρα και την ανάκλαση των δακτυλίων από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Για να το επιτύχουμε, δεν χρειάζεται παρά να στρέψουμε το χαμηλότερο χείλος του σωλήνα ελαφρώς προς τα πάνω. Όταν κάποιος δακτύλιος φτάνει στην επιφάνεια του νερού, υφίσταται ανάκλαση. Σημειώτεον δε ότι οι γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης είναι ίσες.

Εφόσον τα πραγματικά ρευστά είναι συνεκτικά και κατά την κίνησή τους τριβονται πάνω στα τοιχώματα των δοχείων, μέσα σ' αυτά συνεχώς δημιουργούνται πολυάριθμοι στροβιλοσωλήνες. Ο Helmholtz απέδειξε ότι από τη στιγμή που μια μάζα υγρού τίθεται σε οποιαδήποτε κίνηση πρέπει να θεωρούμε ότι μέσα της παράγονται αδιάκοπα στροβιλοσωλήνες. Μάλιστα, ο Helmholtz δεν περιορίστηκε στη διαπίστωση αλλά ανέπτυξε μαθηματικά και φυσικά εργαλεία για τη μελέτη της κίνησης των σωλήνων αυτών. ●

#### Δείτε ακόμη τα άρθρα:

• S. Kuzmin, «Περιστροφή μέσα σε ρεύμα αέρα», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1994.

• J. Raskin, «Πετώντας με το φαινόμενο Coanda», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1994.

• A. Stasenko, «Υπερηχητικά και γλυκοκολοκύθες», Ιούλιος/Αύγουστος 1995.

• A. Stasenko, «Στρόβιλοι στο διάδρομο απογείωσης», Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1997.

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 16

τών [της συνάρτησης πρόσθεσης  $(x, y) \rightarrow x + y$ ] και συνεχών συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

Η ανάδυση της τοπολογίας συνοδεύτηκε από σπουδαία επιτεύγματα. Ίδου ορισμένα παραδείγματα. Ένας κύκλος διαιρεί το επίπεδο σε δύο μέρη, πράγμα που σημαίνει ότι είναι αδύνατο να ενώσουμε μέσω μιας συνεχούς καμπύλης ένα σημείο εκτός του κύκλου με ένα σημείο στο εσωτερικό του χωρίς να τμήσουμε τον κύκλο. Ο γάλλος μαθηματικός του 19ου αιώνα Jordan απέδειξε ότι κάθε ομοιομορφική (δηλαδή, συνεχής αμφιμονοσήμαντη) εικόνα ενός κύκλου διαιρεί επίσης το επίπεδο σε δύο μέρη. Ο ολλανδός μαθηματικός Brouwer γενίκευσε αυτό το αποτέλεσμα για την ομοιομορφική εικόνα μιας πολυδιάστατης σφαίρας. Στην απόδειξή του ανέπτυξε τις ιδέες του Poincaré. Συγκεκριμένα, απέδειξε ένα αξιοσημείωτο θεώρημα που ονομάζεται *θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer*. Στην απλούστερη περίπτωση, το θεώρημα αυτό είναι το εξής: *Κάθε συνεχής απεικόνιση ενός επιπέδου δίσκου στον εαυτό του έχει ένα σταθερό σημείο*. Η πρόοδος της τοπολογίας οδήγησε σε γενικεύσεις αυτών των αποτελεσμάτων, τις οποίες πέτυχαν οι αμερικανοί Alexander και Lefschetz, ο γερμανός Hopf, οι ρώσοι Aleksandrov, Kolmogorov, Pontryagin, κ.ά.

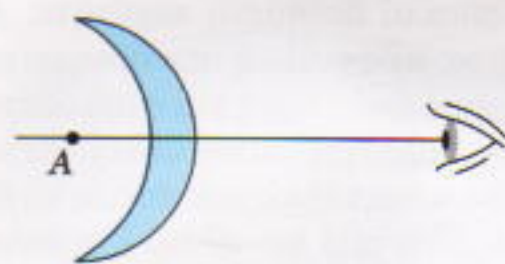
Ο Poincaré έθεσε διάφορα κομψά τοπολογικά προβλήματα. Ένα παράδειγμα αποτελεί το πρόβλημα των τριών κλειστών γεωδαισιακών. Ας υποθέσουμε ότι παίρνουμε μια λεία πέτρα και προσπαθούμε να τυλίξουμε γύρω της ένα λάστιχο. Αν το λάστιχο δεν γλιστρά, έχουμε ανακαλύψει μια κλειστή γεωδαισιακή. Ο Poincaré διατύπωσε την εικασία ότι σε κάθε λείο ωοειδές σώμα υπάρχουν τρεις κλειστές γεωδαισιακές, και ότι αυτό το πλήθος δεν μπορεί να αυξηθεί. Πιο συγκεκριμένα, σε ένα ελλειψοειδές με τρεις διαφορετικούς άξονες το πλήθος αυτό ισούται ακριβώς με τρία. Το εν λόγω πρόβλημα το έλυσαν οι σοβιετικοί μαθηματικοί Lusternik και Shnirelman. ●

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 23

απομονωμένα σύνολα ηλεκτρονίων, ιόντων και ουδέτερων σωματιδίων τα οποία διατηρούν την οντότητά τους επί διάστημα πολλαπλασίως μεγαλύτερο από τον μέσο χρόνο ελεύθερης διαδρομής των σωματιδίων) που εκτελούν ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση μοιάζουν με ταινίες μήκους  $l$ . Το μέγιστο πλάτος των εν λόγω ταινιών ισούται με  $d \ll l$ . Το πλάσμα απέχει απόσταση  $L$  από τον αντικειμενικό φακό μιας φωτογραφικής μηχανής, του οποίου η εστιακή απόσταση ισούται με  $f$ . Έστω  $t$  ο ελάχιστος χρόνος έκθεσης που απαιτείται για να αποτυπωθεί μια εικόνα στο φωτογραφικό φιλμ. Να βρεθεί η επιβράδυνση των πλασμοειδών. Ο αντικειμενικός φακός παραμένει ανοιχτός ώσπου τα πλασμοειδή να ακινητοποιηθούν εντελώς.

#### Φ185

*Σφαιρικός φακός*. Από ένα ημισφαίριο ακτίνας  $R$  κατασκευασμένο από διαφανές γυαλί με δείκτη διάθλασης  $n = 2$  αφαιρείται ένα μονοβασικό τμήμα σφαίρας έτσι ώστε να σχηματιστεί μια συμμετρική κοιλότητα. Το πάχος του γυαλιού κατά μήκος του άξονα που διέρχεται από τα κέντρα και των δύο σφαιρών ισούται με  $R/2$  (Σχήμα 2). Μια σημει-



Σχήμα 2

ακή φωτεινή πηγή βρίσκεται στο κέντρο της εξωτερικής σφαιρικής επιφάνειας (σημείο A). Πού θα βλέπει την πηγή αυτή ένας παρατηρητής ο οποίος στέκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από το φακό και έχει τα μάτια του πάνω στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα των δύο σφαιρών; (A. Zilberman).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ  
ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΕΛ. 72

# Εργαστήρια φυσικής ανά τον κόσμο

Και «παραλογισμοί» στον γαλάζιο πλανήτη

Κώστας Βασιλειάδης

**Π**ΡΟΣ ΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΤΡΕΧΟΝΤΟΣ ΕΤΟΥΣ, ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΗΜΟΠΛΟΙΑ θα έχουν πλησιάσει τον πλανήτη Δία και θα μπορούν να τον παρακολουθούν ταυτόχρονα. Η είδηση μας έρχεται από την Πασαντήνα, ένα απ' τα προάστια της πόλης του Λος Άντζελες. Στην Πασαντήνα βρίσκεται το γνωστό Εργαστήριο Αεριοώθησης (JPL), το οποίο λειτουργεί υπό την εποπτεία του Τεχνολογικού Ινστιτούτου της Καλιφόρνιας (CalTech) για λογαριασμό της NASA και ασχολείται αποκλειστικά με τις διαπλανητικές έρευνες του ηλιακού μας συστήματος. Το JPL έχει μέχρι σήμερα στείλει διαστημόπλοια σε όλους τους πλανήτες εκτός του Πλούτωνα. Προκειμένου μάλιστα να παρακολουθεί τις αποστολές των διαστημοπλοίων του, χρησιμοποιεί τρία συστήματα κεραιών τεράστιων διαστάσεων τα οποία βρίσκονται εγκατεστημένα στην έρημο Μοχάβι της Καλιφόρνιας, στη Μαδρίτη της Ισπανίας και στην Καμπέρα της Αυστραλίας. Παρά τις πρόσφατες ατυχίες και απώλειες που έπληξαν τα διαστημικά προγράμματά του, το JPL συνεχίζει απτόητα τις αποστολές του. Αυτή τη φορά λοιπόν στο στόχαστρο των τηλεσκοπίων του βρίσκεται ο πλανήτης Δίας. Τα δύο διαστημόπλοια τα οποία βρίσκονται καθ' οδόν και τον πλησιάζουν είναι ο Γαλιλαίος και ο Cassini.

Ο Γαλιλαίος, του οποίου η κατασκευή στοίχισε 1,5 δισεκατομμύριο δολάρια, εισήλθε στην τροχιά του Δία το 1995. Σημερινή αποστολή του Γαλιλαίου είναι η μελέτη του Γανυμήδη και των άλλων δορυφόρων του Δία. Το δεύτερο διαστημόπλοιο βρίσκεται σε διαφορετική αποστολή, η οποία το κατευθύνει προς τον πλανήτη Κρόνο —αποστολή που στοιχίζει 3,5 δισεκατομμύρια δολάρια. Προς το τέλος του 2000, λοιπόν, ο Cassini θα πλησιάζει τον Δία και με τη βοήθεια της βαρύτητας του γιγαντιαίου πλανήτη θα «εκοφενδονιστεί» προς τον Κρόνο. Θα είναι η πρώτη φορά στην ιστορία του διαστημικού προγράμματος κατά την οποία δύο διαστημόπλοια θα εξερευνούν ταυτόχρονα έναν τόσο μακρινό πλανήτη. Ο Cassini θα μελετά από απόσταση την επίδραση των ισχυρών

ηλιακών ανέμων επί των μαγνητικών πεδίων που περιβάλλουν τον Δία, εντός των οποίων θα βρίσκεται ήδη και θα εργάζεται ο Γαλιλαίος.

Οι ενδιαφερόμενοι μπορούν να βρουν περισσότερες πληροφορίες για τα προγράμματα εξερεύνησης του Δία και του Κρόνου, αλλά και για τις υπόλοιπες ερευνητικές δραστηριότητες του JPL, με μια επίσκεψή τους στη διεύθυνση

<http://www.jpl.nasa.gov>

Ας επανέλθουμε όμως τώρα στον δικό μας γαλάζιο πλανήτη, την όμορφη Γη. Αν σας απασχολεί κάποιο ερώτημα σχετικά με μια επιστήμη και θέλετε να μάθετε τι λένε οι ειδικοί, τότε η διεύθυνση του Παγκόσμιου Ιστού η οποία ακολουθεί είναι ό,τι πρέπει για σας. Αν επιπλέον θέλετε να διαβάσετε τις ερωτήσεις που έθεσαν κάποιοι άλλοι πριν από εσάς, μαζί με τις απαντήσεις τις οποίες έλαβαν, ε, μην το σκέφτεστε· πληκτρολογήστε

<http://www.sciam.com>

και αρχίστε να περιδιαβάζετε τα αρχεία του περιοδικού *Scientific American*. Ο πλούτος των πληροφοριών που περιλαμβάνει θα σας εντυπωσιάσει. Αρκεί να έχετε δίψα για μάθηση και χρόνο για να διαβάσετε όσα θα βρείτε.

Το *Scientific American* πιστεύω πως δεν χρήζει ειδικής μνείας για τους αναγνώστες μας· είναι παγκοσμίως γνωστό τόσο στο ειδικό επιστημονικό κοινό όσο και στο γενικό. Ας υπενθυμίσουμε μόνο πως πουλάει παγκοσμίως 640 χιλιάδες αντίτυπα το μήνα, εκ των οποίων 530 χιλιάδες στις ΗΠΑ και τον Καναδά. Με τέτοιες αστρονομικές κυκλοφορίες και τόσο πλούσιους προϋπολογισμούς πώς θα μπορούσε να μην είναι εντυπωσιακή η παρουσία του στο Διαδίκτυο; Θα αποφύγω λοιπόν να καταναλώσω το χώρο της στήλης με γενικές εντυπώσεις και θα αναφερθώ μόνο στη διεύθυνση

<http://www.sciam.com/askexpert>

όπου μπορεί κανείς να βρει πληθώρα ερωτήσεων από ε-

πισκέπτες της ιστοσελίδας και τις αντίστοιχες απαντήσεις που έλαβαν. Οι ερωτήσεις είναι οργανωμένες σε τμήματα που καλύπτουν εννέα διαφορετικούς τομείς: αστρονομία, βιολογία, γεωλογία, ιατρική, μαθηματικά, περιβάλλον, υπολογιστές, φυσική και χημεία. Θα βρείτε απάντηση σε ερωτήσεις όπως:

- Είναι δυνατόν να ταξιδέψουμε με ταχύτητες μεγαλύτερες από αυτή του φωτός; Το απαγορεύει ή όχι η θεωρία του Αϊνστάιν;
- Αληθεύει ότι το γυαλί είναι υλικό σε υγρή φάση;
- Ποιοι ακριβώς παράγοντες καθορίζουν το μέγεθος ενός ουράνιου τόξου στο στερέωμα;
- Γιατί παράγει σπινθήρες ένα μεταλλικό αντικείμενο όταν τοποθετείται μέσα στο φούρνο μικροκυμάτων;
- Πότε είναι μεγαλύτερη η ζημιά που υφίσταται ένα αυτοκίνητο, όταν συγκρούεται μετωπικά με άλλο αντίθετα κινούμενο ή όταν πέφτει πάνω σε ένα μεγάλο δέντρο;
- Είναι θεωρητικά δυνατόν να ταξιδέψουμε αντίθετα στο χρόνο;

Σε κάθε τομέα οι επισκέπτες ενθαρρύνονται να υποβάλουν τις δικές τους ερωτήσεις. Εσείς γιατί να δειλιάσετε;

## Ερευνητικά εργαστήρια φυσικής

Κάλλιστα θα μπορούσαμε να καλύψουμε τις σελίδες ολόκληρου βιβλίου με τις διευθύνσεις των ερευνητικών εργαστηρίων που λειτουργούν ανά τον κόσμο. Η επίσκεψή σας σε μία και μόνο διεύθυνση αρκεί για να σας αποκαλύψει πάνω από διακόσια εργαστήρια. Εκ των πραγμάτων, λοιπόν, η παρουσίαση που ακολουθεί δεν προβάλλει αξιώσεις πληρότητας· είναι καθαρά δειγματοληπτική, και έτσι εξηγείται γιατί απουσιάζουν τα ερευνητικά κέντρα πολλών χωρών.

Εκτός του Εργαστηρίου Fermi, το οποίο αναφέραμε ήδη στο προηγούμενο τεύχος, και το οποίο μπορείτε να επισκεφτείτε στη διεύθυνση

<http://www.fnal.gov>

(βρίσκεται στην Πολιτεία του Ιλινόις και ερευνά τις θεμελιώδεις δομές της ύλης και της ενέργειας), υπάρχει σε ολόκληρο τον κόσμο μια μεγάλη σειρά κρατικών και μη εργαστηρίων. Ανάμεσά τους λοιπόν συγκαταλέγονται και τα εξής (την κρατική ή μη υπόσταση του κάθε εργαστηρίου στις ΗΠΑ τη μαρτυρά η ύπαρξη ή η απουσία της κατάληξης **.gov** στην ηλεκτρονική του διεύθυνση).

- Το Εθνικό Εργαστήριο Αργκόουν, το οποίο βρίσκεται στα περίχωρα του Σικάγου:

<http://www.anl.gov>

Το Εργαστήριο Αργκόουν διεξάγει πειραματική και θεωρητική έρευνα στις φυσικές και τις περιβαλλοντικές επιστήμες.

- Το Εθνικό Εργαστήριο Lawrence Livermore, στην Καλιφόρνια, το οποίο λειτουργεί υπό την εποπτεία του Πανεπιστημίου της Καλιφόρνιας για λογαριασμό του Υπουργείου Ενέργειας των ΗΠΑ:

<http://www.llnl.gov>

Το Εργαστήριο Lawrence Livermore διεξάγει έρευνα στον στρατιωτικό τομέα, την ενέργεια, το περιβάλλον και τις βασικές επιστήμες. Για λόγους ασφαλείας, το εργαστήριο πρόσφατα ενέτεινε τα μέτρα προστασίας του, και πολλές υπηρεσίες της ιστοσελίδας του έπαψαν πλέον να είναι προσιτές στο ευρύ κοινό.

- Το Εθνικό Εργαστήριο του Λος Άλαμος, το οποίο επίσης λειτουργεί υπό την εποπτεία του Πανεπιστημίου της Καλιφόρνιας για λογαριασμό του Υπουργείου Ενέργειας των ΗΠΑ:

<http://www.lanl.gov>

Το συγκεκριμένο εργαστήριο ασχολείται με θέματα εθνικής ασφάλειας και με πληθώρα άλλων θεμάτων που εκτείνονται από τις βιολογικές επιστήμες ως τη μελέτη μοντέλων καιρικών συνθηκών και κλίματος σε παγκόσμια κλίμακα.

- Το Εθνικό Εργαστήριο της Σαντιά, που βρίσκεται στην πόλη Άλμπουκερκι της Πολιτείας του Νιου Μέξικο:

<http://www.sandia.gov>

Το Εργαστήριο της Σαντιά ασχολείται με τη σχεδίαση όλων των μη-πυρηνικών εξαρτημάτων των πυρηνικών αμυντικών συστημάτων, καθώς και με την έρευνα για την αντιμετώπιση στρατιωτικών και οικονομικών απειλών. Αξίζει να προσέξετε εδώ την ειδηση ότι έχει συγκροτηθεί και δρα μια ομάδα τριών επιστημόνων που επεξεργάζονται θέματα «παράλογης φυσικής», όπως την αποκαλούν. Οι επιστήμονες αυτοί κατασκεύασαν ηλεκτρονικές πλακέτες από ημιαγωγό κράμα ινδίου-γαλλίου-αρσενιδίου-νιτρίδιου και σκοπεύουν να τις χρησιμοποιήσουν ως πηγές φωτοβολταϊκής ενέργειας σε τηλεπικοινωνιακούς δορυφόρους.

- Στην Ελβετία υπάρχει το Ευρωπαϊκό Κέντρο Πυρηνικών Ερευνών, το γνωστό CERN, το οποίο ιδρύθηκε το 1954 και σήμερα περιλαμβάνει είκοσι μέλη-κράτη. Το CERN διαθέτει επιταχυντές στοιχειωδών σωματιδίων που επιτυγχάνουν ταχύτητες ελαφρώς μικρότερες της ταχύτητας του φωτός και ανιχνευτές ικανούς να καταστήσουν τα στοιχειώδη σωματίδια «ορατά». Το εργαστήριο μπορείτε να το επισκεφτείτε στη διεύθυνση:

<http://www.cern.ch/public>

Εκτός αυτού, το CERN σας παρέχει έναν τεράστιο αλφαριθμητικά οργανωμένο κατάλογο διακοσίων εργαστηρίων φυσικής υψηλών ενεργειών (HEP) ανά τον κόσμο, που μπορείτε να τον βρείτε στη διεύθυνση:

<http://www.cern.ch/physics/HEP.html>

- Το Εθνικό Εργαστήριο του Μπρουκχέιβεν, που βρίσκεται στην Πολιτεία της Νέας Υόρκης και ασχολείται με την τεχνολογία των επιταχυντών σωματιδίων και την πυρηνική φυσική:

<http://www.bnl.gov/bnl.html>

- Τα ερευνητικά κέντρα φυσικής της Ιαπωνίας βρίσκονται στις διευθύνσεις:

<http://is2.kek.jp/hep>

<http://www.kek.jp>

Στο ιαπωνικό Εργαστήριο ΚΕΚ εκτελείται έρευνα στα στοιχειώδη σωματίδια, την πυρηνική φυσική και την τεχνολογία των υλικών, με χρήση επιταχυντών τελευταίας τεχνολογίας.

• Στο Ινστιτούτο Paul Scherrer της Ελβετίας διεξάγεται έρευνα στις φυσικές επιστήμες και την τεχνολογία, και βρίσκεται στη διεύθυνση:

<http://www.psi.ch>

Για να ενημερωθείτε πλήρως για τις δραστηριότητες του ινστιτούτου, επισκεφτείτε τη διεύθυνση:

[http://www.psi.ch/psi\\_www\\_main\\_index.html](http://www.psi.ch/psi_www_main_index.html)

• Το Εργαστήριο DESY ( Deutsches Elektronen-Synchrotron) βρίσκεται στο Αμβούργο της Γερμανίας. Σ' αυτό διεξάγεται έρευνα στις υψηλές ενέργειες και στην παραγωγή και χρήση της ακτινοβολίας σύγχροτρον:

<http://www.desy.de>

• Στο Εργαστήριο Σωματιδιακής Φυσικής (LPP) το οποίο υπάγεται στο Ινστιτούτο Πυρηνικών Ερευνών της Ρωσίας και βρίσκεται στην πόλη Ντούμπνα, βορείως της Μόσχας, διεξάγεται έρευνα στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων:

<http://sunse.jinr.dubna.su>

• Το Εθνικό Ινστιτούτο Πυρηνικής Φυσικής και Φυσικής Υψηλών Ενεργειών της Ολλανδίας συντονίζει και υποστηρίζει όλες τις δραστηριότητες της πειραματικής φυσικής στην υποατομική ύλη στη χώρα αυτή. Το εργαστήριο βρίσκεται στο Άμστερνταμ, και μπορείτε να το επισκεφτείτε στη διεύθυνση:

<http://www.nikhef.nl>

• Το Καναδικό Εθνικό Εργαστήριο Πυρηνικής Φυσικής TRIUMF, στην πόλη Βανκούβερ της Βρετανικής Κολομβίας, στη δυτική πλευρά του Καναδά, μπορείτε να το βρείτε στη διεύθυνση:

<http://www.triumf.ca>

• Το Κέντρο Επιταχυντή της Νοτίου Αφρικής:

<http://www.nac.ac.za>

Το εργαστήριο διεξάγει έρευνες στη ραδιοθεραπεία και τη θεραπεία του καρκίνου, καθώς επίσης και στην παρασκευή ραδιοϊσοτόπων για την πυρηνική ιατρική.

• Το Εθνικό Κέντρο Πυρηνικής Φυσικής της Ιταλίας (INFN) ιδρύθηκε το 1951 και διαθέτει εργαστήρια σε διάφορες ιταλικές πόλεις. Η παρουσία του στο Διαδίκτυο μας έρχεται από την πόλη της Τεργέστης:

<http://www.ts.infn.it>

Το εργαστήριο είναι υπεύθυνο για το συντονισμό και τη χρηματοδότηση της έρευνας στο πυρηνικό και υποπυρηνικό επίπεδο.

Ιδού μερικές ακόμη διευθύνσεις εργαστηρίων:

• Στο Πανεπιστήμιο Columbia, στην πόλη της Νέας Υόρκης:

[www.nevis.columbia.edu](http://www.nevis.columbia.edu)

Στο εργαστήριο αυτό διεξάγεται έρευνα στη φυσική υψηλών ενεργειών και στην πυρηνική φυσική.

• Στο Πανεπιστήμιο Cornell, στην Ίθακα της Πολιτείας της Νέας Υόρκης:

<http://www.physics.cornell.edu/physics/prof.pages.html>

Το εργαστήριο αυτό, εκτός από την έρευνα που διεξάγει στην ατομική φυσική και τη φυσική στερεάς κατάστασης, ασχολείται και με τη μελέτη των χαμηλών θερμοκρασιών και της συμπυκνωμένης ύλης.

• Στο Εθνικό Ινστιτούτο Προτύπων και Τεχνολογίας (NIST), κοντά στην πόλη της Ουάσιγκτον, πραγματοποιούνται ακριβείς μετρήσεις που αφορούν διάφορες ηλεκτρονικές και οπτικές τεχνολογίες καθώς και μετρήσεις συγκεκριμένων ακτινοβολιών. Το εργαστήριο αυτό βρίσκεται στη διεύθυνση:

<http://physics.nist.gov>

• Στο Πανεπιστήμιο του Πρίνστον, στην Πολιτεία του Νιου Τζέρσυ, υπάρχει το Εργαστήριο Πλάσματος:

<http://www.pppl.gov>

Σ' αυτό διεξάγεται έρευνα στην πυρηνική σύντηξη.

• Στο Πολιτειακό Πανεπιστήμιο της Φλόριντα, στην πόλη Ταλλαχάση, υπάρχει παράρτημα του Εθνικού Εργαστηρίου του Λος Άλαμος, με ειδίκευση στα μαγνητικά πεδία υψηλής έντασης:

<http://www.nhmfl.gov>

• Το Εθνικό Κέντρο Επιταχυντή με την επωνυμία Thomas Jefferson βρίσκεται στην πόλη Νιούπορτ Νιους της Πολιτείας της Βιρτζίνια και έχει διεύθυνση:

<http://www.cebaf.gov>

Σ' αυτό ερευνούν τη δομή της πυρηνικής ύλης προσπαθώντας να διευρύνουν την υπάρχουσα γνώση για τα χαρακτηριστικά και τις αλληλεπιδράσεις των κουάρκ.

• Το Κέντρο Αστροφυσικής υπεριώδους ακτινοβολίας πολύ υψηλής συχνότητας, του Πανεπιστημίου της Καλιφόρνιας, στο Μπέρκλεϋ, βρίσκεται στη διεύθυνση:

<http://www.cea.berkeley.edu>

• Το Κέντρο Φυσικής της πόλης του Άσπεν, της Πολιτείας του Κολοράντο, προωθεί την έρευνα της φυσικής του Διαστήματος:

<http://andy.bu.edu/aspen>

• Το Εργαστήριο Πυρηνικών Μελετών Floyd R. Newman είναι ένα από τα ερευνητικά κέντρα του Πανεπιστημίου Cornell με αντικείμενο ερευνών την ατομική φυσική και τη φυσική στερεάς κατάστασης:

<http://w4.lns.cornell.edu>

Τέλος, μια ενδιαφέρουσα συλλογή εργαστηρίων απ' όλο τον κόσμο μπορείτε να βρείτε στη διεύθυνση:

<http://uct2.phy.uct.ac.za/~luca/pirolabs.html>

Από την παραπάνω συλλογή επιλέγουμε:

• Τα τρία εργαστήρια που υποστηρίζονται από το Κεντρικό Βρετανικό Εργαστήριο του Συμβουλίου Επιστημονικής Έρευνας (CLRC). Τα εργαστήρια αυτά είναι το Rutherford Appleton στο Τσίλτον της Αγγλίας, του Ντέαρζμπερυ και του Τσάιλντμπόλτον, με διευθύνσεις:

<http://www.clrc.ac.uk>

<http://sspg1.bnsc.rl.ac.uk/share>

• Το Εργαστήριο Θεωρητικής Φυσικής της Μόσχας βρίσκεται στη διεύθυνση:

<http://www.theor.itep.ru>

• Το Ινστιτούτο Φυσικής Υψηλών Ενεργειών (IHEP) του Πρότβινο, νότια της Μόσχας, βρίσκεται στη διεύθυνση:

<http://www.ihep.su/ihep/eng/ihep2.htm>

• Το Εργαστήριο του Νοβοσιμπίρσκ (IYF) λειτουργεί ως παράρτημα της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών στη Σιβηρία, με δραστηριότητες στην πυρηνική φυσική, τη θεωρία του πλάσματος, τη θερμοπυρηνική σύντηξη και τα λέιζερ ελεύθερων ηλεκτρονίων:

<http://www.inp.nsk.su>

• Το Ινστιτούτο Πυρηνικής Φυσικής (INP) της Αγίας Πετρούπολης, με διεύθυνση:

<http://www.pnpi.spb.ru>

Η σύντομη αναζήτησή μας στο Διαδίκτυο αντίστοιχων εργαστηρίων από τον ελληνικό χώρο απέφερε περισσότερες από εκατό διευθύνσεις ινστιτούτων, κέντρων, πάρκων και μονάδων έρευνας. Επομένως, για να καλύψουμε τις ελληνικές διευθύνσεις, θα χρειαστούμε μελλοντικά ένα ξεχωριστό άρθρο. Προς στιγμήν, ας κάνουμε μόνο μια δειγματολογική αναφορά:

• Το Κέντρο Επιστημονικών Ερευνών «Δημόκριτος», με οκτώ ινστιτούτα: πυρηνικής φυσικής, επιστήμης υλικών, πληροφορικής και τηλεπικοινωνιών, φυσικοχημείας, μικροηλεκτρονικής, κ.λπ., με γενική διεύθυνση:

<http://www.demokritos.gr>

• Το Αστεροσκοπείο Αθηνών με το Ινστιτούτο Διαστημικής Έρευνας, στις διευθύνσεις:

<http://www.gein.noa.gr>

<http://sat1.space.noa.gr>

• Το Κέντρο Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας, με διεύθυνση:

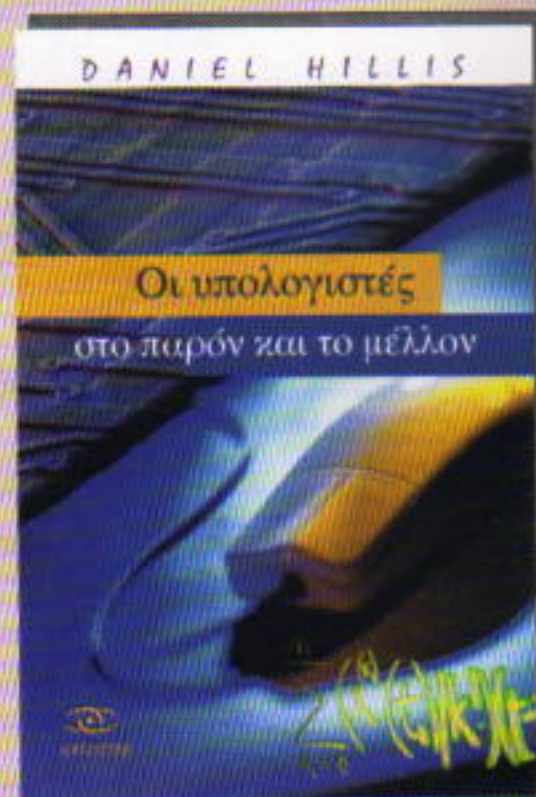
<http://www.cres.gr/kape>

• Το Επιστημονικό και Τεχνολογικό Πάρκο της Κρήτης, με διεύθυνση:

<http://www.stepc.gr>

Στο σημείο αυτό, όμως, θα σταματήσουμε, λόγω έλλειψης χώρου και μόνο. Στο επόμενο τεύχος θα προχωρήσουμε στην παρουσίαση των επιστημονικών βάσεων δεδομένων που υπάρχουν διαθέσιμες στο Διαδίκτυο, και οι οποίες διαδραματίζουν σημαντικότατο ρόλο στο επιστημονικό έργο των ερευνητών. ■

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ



### Οι υπολογιστές στο παρόν και το μέλλον

*Οι θεμελιώδεις αρχές που διέπουν τη δομή και τη λειτουργία τους*

Το πώς λειτουργούν οι υπολογιστές αποτελεί ένα ζήτημα που προκαλεί δέος στους περισσότερους ανθρώπους εκείνο το οποίο δεν γνωρίζουν —γεγονός που καταδεικνύει με εξαιρετική σαφήνεια το παρόν βιβλίο— είναι ότι οι φαινομενικά περίπλοκες λειτουργίες των υπολογιστών στηρίζονται σε απλές ιδέες οι οποίες υπερβαίνουν την τεχνολογία: ίσχυαν στο παρελθόν και θα ισχύουν για πάντα. Ο «μάγος των υπολογιστών» Daniel Hillis παρέχει μια τόσο εύληπτη εξήγηση για το πώς γίνεται η επεξεργασία των δεδομένων, ώστε οι λειτουργίες του υπολογιστή να φαίνονται στον αναγνώστη τόσο απλές όσο και εκείνες του ποδήλατου.

Ξεκινά δίνοντας ένα γενικό περίγραμμα της βασικής λογικής, ώστε να προετοιμάσει το έδαφος για την περιγραφή των γλωσσών προγραμματισμού, των αλγορίθμων και της μνήμης που έπεται. Κατόπιν, οδηγεί τον αναγνώστη με απλά βήματα έως τις πιο συναρπαστικές εξελίξεις στην υπολογιστική τού σήμερα: τους κβαντικούς υπολογιστές, τις μανθάνουσες μηχανές, τα νευρωνικά δίκτυα, τα αυτοοργανούμενα συστήματα.

Το βιβλίο έχει όλες τις αρετές οι οποίες θα το αναδείξουν σε έναν απολύτως αναγκαίο οδηγό για όσους επιθυμούν να κατανοήσουν σε βάθος πώς λειτουργεί η πλέον διαδεδομένη και σημαντική από τις μηχανές που κατασκεύασε ποτέ ο άνθρωπος: ο υπολογιστής.

Σελ.: 222, 21 x 14 εκ., Α/Μ, 6.000 δρχ.

**κάτοπτρο ΕΚΔΟΣΕΙΣ**

# Τα πειράματα των Frank και Hertz

Μια πρώτη πειραματική επιβεβαίωση των αιτημάτων του Bohr

A. Levashov

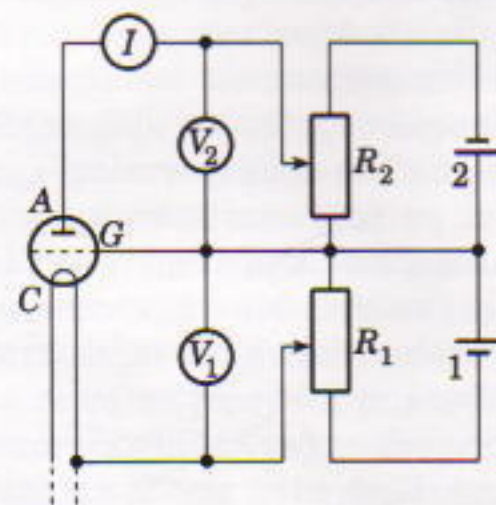
**Ο**Ι ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ 20ΟΥ ΑΙΩΝΑ ΣΤΑ-  
θηκαν μια συγκλονιστική περί-  
οδος για την ιστορία της φυσι-  
κής. Είχε σημάνει η ώρα να α-  
ναθεωρηθούν οι πατροπαράδοτες και  
σεπτές βασικές έννοιες της δομής του  
υλικού κόσμου. Σε ορισμένες περι-  
πτώσεις, μάλιστα, δεν επρόκειτο για  
αναθεώρηση, αλλά για ριζική επανά-  
σταση, η οποία κατέλυσε εκ βάθρων  
τους παλιούς καλούς νόμους της  
κλασικής μηχανικής και της ηλε-  
κτροδυναμικής.

Το 1900 ο Max Planck δημιούρ-  
γησε την κβαντική θεωρία της ηλε-  
κτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Το  
1905 ο Αϊνστάιν διατύπωσε τις θεμε-  
λιώδεις αρχές της ειδικής θεωρίας  
της σχετικότητας. Στη διάρκεια της  
ίδιας περιόδου, η επιστήμη ασχολή-  
θηκε συστηματικά με το πρόβλημα  
της φύσεως και της εσωτερικής δο-  
μής του ατόμου. Το 1911 ο Ernest  
Rutherford δημοσιοποίησε τα αποτε-  
λέσματα των περιφνημων πειραμάτων  
του, τα οποία υπήρξαν οι ακρογων-  
αίοι λίθοι του πυρηνικού μοντέλου  
του ατόμου και έρχονταν σε ευθεία  
αντίθεση με την κλασική φυσική. Το  
1913 ο Niels Bohr διατύπωσε μια σει-  
ρά κβαντικών αιτημάτων τα οποία  
ναί μεν εξηγούσαν το ατομικό μοντέ-  
λο του Rutherford και το χαρακτή-  
ρα των ατομικών φασμάτων, πλην  
όμως έρχονταν επίσης σε αντίθεση  
τόσο με την κλασική μηχανική όσο  
και με την ηλεκτροδυναμική.

Η καθεμία από αυτές τις ανακαλύ-

ψεις άνοιξε νέους ορίζοντες στην  
ανθρώπινη γνώση για τον υλικό κό-  
σμο. Δεν νοείται, όμως, ανάπτυξη νέ-  
ων θεωρητικών ιδεών όταν λείπει  
μια αξιόπιστη πειραματική βάση που  
να τις στηρίζει. Κατά συνέπεια, οι  
πειραματικοί έλεγχοι των νέων υπο-  
θέσεων διαδραματίζουν έναν εξόχως  
σημαντικό ρόλο στην επιστήμη.

Το έργο των γερμανών φυσικών  
James Frank και Gustav Hertz πρα-  
κτικά υπήρξε η πρώτη πειραματική  
επιβεβαίωση των κβαντικών αιτημά-  
των του Bohr. Από ιστορική άποψη,  
τα πειράματά τους απετέλεσαν τη συ-  
νέχεια του έργου του γερμανού φυ-  
σικού Philip Lenard, ο οποίος προ-  
σπάθησε να προσδιορίσει πειραματι-  
κά την ενέργεια ιονισμού των ατό-  
μων πολύ προτού εμφανιστεί το ατο-  
μικό μοντέλο του Rutherford. Το  
1902 ο Lenard πραγματοποίησε ένα  
εξαιρετικά ενδιαφέρον πείραμα. Το  
κύριο μέρος της διάταξης που χρη-  
σιμοποίησε ήταν ένας γυάλινος σω-  
λήνας που έφερε τρία μεταλλικά η-  
λεκτρόδια. Στην πραγματικότητα ε-  
πρόκειτο για προπομπό της τριόδου  
λυχνίας, η οποία απετέλεσε τη βάση  
της ηλεκτρονικής κατά το πρώτο ή-  
μισιο του 20ού αιώνα. Ο σωλήνας  
πληρούνταν με το αέριο του οποίου  
επρόκειτο να μετρηθεί η ενέργεια ι-  
ονισμού. Η πίεση του αερίου εντός  
του σωλήνα ανερχόταν στα 0,01 mm  
Hg περίπου. Η διάταξη απεικονίζε-  
ται σχηματικά στο Σχήμα 1. Η τάση  
 $V_1$  που εφαρμόζεται μεταξύ της κα-



Σχήμα 1

θόδου C και του πλέγματος G από  
την πηγή 1 μπορεί να ρυθμιστεί με  
τη βοήθεια της μεταβλητής αντίστα-  
σης  $R_1$ . Ομοίως, η τάση  $V_2$  που εφαρ-  
μόζεται μεταξύ της ανόδου A και του  
πλέγματος G από την πηγή 2 μπορεί  
επίσης να ρυθμιστεί με τη βοήθεια  
της μεταβλητής αντίστασης  $R_2$ .

Η ιδέα του πειράματος ήταν εξαι-  
ρετικά απλή. Τα ηλεκτρόνια που εκ-  
πέμπονται από την κάθοδο επιταχύ-  
νονται από ένα ηλεκτρικό πεδίο στο  
χώρο C-G και κατευθύνονται με με-  
γάλη ταχύτητα προς το πλέγμα. Ως  
εκ τούτου, η διαφορά δυναμικού  $V_1$   
καλείται «επιταχύνουσα τάση». Περ-  
νώντας μέσα από το πλέγμα, τα η-  
λεκτρόνια εισέρχονται στο χώρο G-  
A. Εδώ το ηλεκτρικό πεδίο έχει την  
αντίθετη κατεύθυνση, και έτσι επι-  
βραδύνει τα ηλεκτρόνια. Λόγω της  
λειτουργίας την οποία επιτελεί, η δι-  
αφορά δυναμικού  $V_2$  ονομάζεται «ε-  
πιβραδύνουσα τάση». Προφανώς, α-

νάλογα με τη σχέση στην οποία βρίσκονται οι  $V_1$  και  $V_2$ , τα ηλεκτρόνια είτε φτάνουν στην άνοδο ( $V_1 > V_2$ ) παράγοντας ηλεκτρικό ρεύμα που το καταγράφει ένα αμπερόμετρο είτε επιβραδύνονται στο χώρο  $G-A$  ( $V_1 < V_2$ ), αντιστρέφουν τη φορά της κίνησής τους και τελικά δεσμεύονται από το πλέγμα για να επιστραφούν στην πηγή 1 στο κύκλωμα του πλέγματος. Στα πειράματα του Lenard η επιβραδύνουσα τάση είχε πάντοτε υψηλότερη τιμή από την επιταχύνουσα, οπότε τα εκπεμπόμενα ηλεκτρόνια δεν κατάφερναν να φτάσουν στην άνοδο.

Ο Lenard αποφάσισε να προβεί στα πειράματά του εκκινώντας από ορισμένες παραδοχές σχετικά με τις αλληλεπιδράσεις των ηλεκτρονίων και των ατόμων, τις οποίες και θα παρουσιάσουμε ευθύς αμέσως. Στο χώρο  $C-G$  τα ηλεκτρόνια συγκρούονται με τα άτομα του αερίου. Οι κρούσεις που λαμβάνουν χώρα εκεί μπορεί να είναι δύο ειδών: ελαστικές και ανελαστικές. Κατά τις ελαστικές κρούσεις, η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων δεν μεταβάλλεται αισθητά. Πράγματι, επειδή τα άτομα έχουν χιλιάδες φορές μεγαλύτερη μάζα από τα ηλεκτρόνια, η ελαστική κρούση επιφέρει τη μεταβολή της κατεύθυνσης της ταχύτητας του ηλεκτρονίου αλλά όχι και του μέτρου της. Έτσι, τα επιταχυνόμενα ηλεκτρόνια κινούνται προς το πλέγμα ακολουθώντας τεθλασμένες τροχιές. Όταν το ηλεκτρόνιο πλησιάζει στο πλέγμα, η ενέργειά του αποκτά τη μέγιστη τιμή της, η οποία καθορίζεται από το νόμο διατήρησης της ενέργειας

$$\frac{mv^2}{2} = eV_1,$$

όπου με  $m$  και  $e$  συμβολίζουμε αντίστοιχα τη μάζα και το φορτίο του ηλεκτρονίου.

Αυξανόμενη της επιταχύνουσας τάσης  $V_1$ , αυξάνεται και η ενέργεια του ηλεκτρονίου. Ο Lenard υπέθεσε ότι όταν η μέγιστη ενέργεια των ηλεκτρονίων κοντά στο πλέγμα θα γινόταν ίση ή θα υπερέβαινε κατά τι την ενέργεια ιονισμού του αερίου, οι

κρούσεις των ηλεκτρονίων με τα άτομα θα μετατρέπονταν σε ανελαστικές. Εν τωιαύτη περιπτώσει, το ηλεκτρόνιο μεταβιβάζει ουσιαστικά όλη την κινητική ενέργειά του στο άτομο, και αυτή η ενέργεια θέτει σε κίνηση την εσωτερική ατομική διαδικασία που οδηγεί στον ιονισμό του ατόμου. Ως αποτέλεσμα του ιονισμού, εμφανίζονται δευτερογενή φορτισμένα σωματίδια: ηλεκτρόνια και θετικά ιόντα (δηλαδή άτομα από τα οποία λείπει ένα τουλάχιστον ηλεκτρόνιο). Όλα τα ηλεκτρόνια του αερίου (τόσο τα δευτερογενή όσο και τα πρωτογενή —δηλαδή όσα εκπέμφθηκαν από την κάθοδο) τελικά διοχετεύονται στο κύκλωμα του πλέγματος. Αντίθετα, τα θετικά ιόντα τα οποία εισχώρησαν στην περιοχή  $G-A$  κατευθύνονται προς την άνοδο υπό την επίδραση ενός ηλεκτρικού πεδίου που τα επιταχύνει. Επομένως, το ρεύμα που εμφανίζεται στο κύκλωμα της ανόδου οφείλεται αποκλειστικά στα θετικά ιόντα.

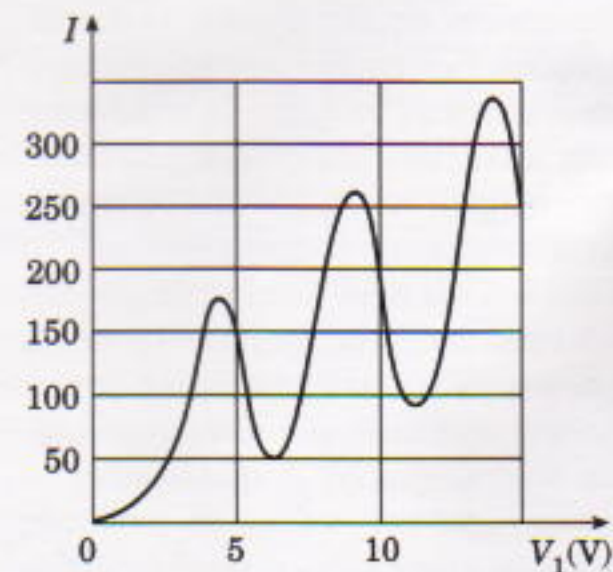
Έτσι, σύμφωνα με την ανάλυση του Lenard, η εμφάνιση ηλεκτρικού ρεύματος στο κύκλωμα της ανόδου θα έπρεπε να φανερώνει την έναρξη του ιονισμού των ατόμων. Η ενέργεια ιονισμού ισούται με  $eV_i$ , όπου με  $V_i$  δηλώνουμε την τιμή της  $V_1$  για την οποία πρωτοεμφανίζεται ανοδικό ρεύμα. Αν και ορισμένες τιμές της επιταχύνουσας τάσης  $V_1$  όντως έδωσαν ανοδικό ρεύμα, ο Lenard δεν κατόρθωσε να συλλέξει αξιόπιστα δεδομένα λόγω των τεχνικών ατελειών που παρουσίαζε η πειραματική του διάταξη.

Είναι σημαντικό να υπογραμμίσουμε ότι ο Lenard είχε ως αφετηρία του εσφαλμένες παραδοχές σχετικά με τις αλληλεπιδράσεις των ατόμων και των ηλεκτρονίων, καθώς δεν μπορούσε να γνωρίζει ότι στα άτομα υπήρχαν διακριτές ενεργειακές στάθμες. Γι' αυτό το λόγο, άλλωστε, και το πείραμά του, μολονότι εξαιρετικά ενδιαφέρον, δεν αποτέλεσε ορόσημο στην ιστορία της φυσικής. Μια βελτιωμένη εκδοχή της μεθόδου του Lenard ακολούθησαν αργότερα οι Frank και Hertz στο κλασικό τους πείραμα.

Ο Frank και ο Hertz άρχισαν τη

συνεργασία τους στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου το 1911. Εκείνη την εποχή μελετούσαν τη δίοδο ηλεκτρικού ρεύματος διά των αερίων και, όπως ήταν φυσικό, τους ενδιέφερε έντονα η τιμή της ενέργειας ιονισμού των ατόμων. Για να την προσδιορίσουν, χρησιμοποίησαν αρχικά τη μέθοδο του Lenard, στην οποία όμως αργότερα επέφεραν σημαντικές βελτιώσεις. Πρώτα απ' όλα, τροποποίησαν το σωλήνα. Συγκεκριμένα, έκαναν την απόσταση μεταξύ καθόδου και πλέγματος πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση μεταξύ πλέγματος και ανόδου, ενώ αύξησαν την πίεση του αερίου (ή του ατμού) σε 1 mm Hg —έτσι τα ηλεκτρόνια που εκπέμπονταν από την κάθοδο υφίσταντο πολλαπλές κρούσεις με τα άτομα του αερίου. Επιπλέον, μείωσαν την επιβραδύνουσα τάση και τη σταθεροποίησαν (στην περιοχή τιμών μεταξύ 0,5 και 2,0 V). Ως εκ τούτου, ρεύμα στο κύκλωμα της ανόδου εμφανιζόταν μόνο όταν η επιταχύνουσα τάση  $V_1$  υπερέβαινε την επιβραδύνουσα τάση  $V_2$ .

Οι Frank και Hertz, ακριβώς όπως και ο Lenard, επεδίωκαν να μετρήσουν την ενέργεια ιονισμού ως πρώτο βήμα για την υλοποίηση των περαιτέρω ερευνητικών τους σχεδίων. Τα αποτελέσματα ενός από τα πειράματα που εκτέλεσαν με ένα σωλήνα πλήρη ατμών υδραργύρου φαίνονται στο Σχήμα 2. Η καμπύλη δείχνει πώς μεταβάλλεται το ανοδικό ρεύμα καθώς αυξάνεται η επιταχύνουσα τάση (το ρεύμα μετριέται σε αυθαίρετες μονάδες). Την προσοχή



Σχήμα 2



μας την τραβά αμέσως η περιέργη μορφή του γραφήματος: το ρεύμα αυξομειώνεται «περιοδικά» δίνοντας τοπικά μέγιστα στα άκρα ισομήκων διαστημάτων της τάσης  $V_1$ . Οι κορυφές του ρεύματος αντιστοιχούν σε τάσεις 4,9 V, 2 · 4,9 V και 3 · 4,9 V.

Οι Frank και Hertz ερμήνευσαν τα δεδομένα τους ως ακολούθως. Όταν αυξάνεται η επιταχύνουσα τάση, το ανοδικό ρεύμα προοδευτικά ενισχύεται (από τη στιγμή βέβαια που η  $V_1$  υπερβεί τη  $V_2$ ). Όταν η  $V_1$  γίνει ίση με 4,9 V ή ελαφρώς μεγαλύτερη, το επιταχυνόμενο ηλεκτρόνιο αποκτά κατά τη διαδρομή του προς το πλέγμα ενέργεια 4,9 eV, οπότε οι κρούσεις στη γειτονιά του πλέγματος καθίστανται ανελαστικές. Ως αποτέλεσμα μιας τέτοιας κρούσης, κάποιο άτομο ιονίζεται, ενώ το ηλεκτρόνιο που απώλεσε την κινητική του ενέργεια παγιδεύεται από το πλέγμα. Συνεπώς, το ανοδικό ρεύμα μειώνεται δραστικά.

Με την περαιτέρω αύξηση της επιταχύνουσας τάσης, τα ηλεκτρόνια αποκτούν την κρίσιμη ενέργεια των 4,9 eV προτού φτάσουν στο πλέγμα, οπότε η περιοχή όπου συντελούνται οι ανελαστικές κρούσεις μετατοπίζεται προς την κάθοδο. Αφού συμμετάσχει σε μια τέτοια κρούση, το ηλεκτρόνιο έχει μεν απολέσει όλη την κινητική του ενέργεια, πλην όμως συνεχίζει την επιταχυνόμενη κίνησή του (ξεκινώντας με μηδενική ταχύτητα) προς το πλέγμα. Εφόσον η επιτάχυνσή του είναι αρκετά μεγάλη ώστε να προλάβει να αποκτήσει ενέργεια μεγαλύτερη από  $eV_2$ , θα υπερνικήσει την αντίσταση της επιβραδύνουσας τάσης  $V_2$  και θα φτάσει στην άνοδο. Τη διαδικασία αυτή την αναπαριστά στο διάγραμμα το ανωφερές τμήμα της καμπύλης του ανοδικού ρεύματος μετά την πρώτη μείωση.

Όταν η  $V_1$  γίνει αρκούντως μεγάλη ώστε ένα ηλεκτρόνιο που απώλεσε ενέργεια 4,9 eV στην πρώτη ανελαστική κρούση του να καταφέρνει να αποκτήσει κατά την περαιτέρω πορεία του προς το πλέγμα την ίδια κρίσιμη ενέργεια των 4,9 eV, τότε το ηλεκτρόνιο αυτό θα συγκρουστεί ανελαστικά με ένα δεύτερο άτομο, με

αποτέλεσμα να μη φτάσει στην άνοδο αλλά να δεσμευτεί από το πλέγμα. Η δεύτερη ανελαστική κρούση λαμβάνει χώρα κοντά στο πλέγμα, το οποίο και παγιδεύει το δίχως κινητική ενέργεια ηλεκτρόνιο. Ως εκ τούτου, το ανοδικό ρεύμα μειώνεται για δεύτερη φορά. Στο διάγραμμα, αυτή τη διαδικασία την αναπαριστά το κατωφερές τμήμα μετά τη δεύτερη κορυφή.

Όπως θα έχει αντιληφθεί ο αναγνώστης, το τρίτο μέγιστο φανερώνει ότι καθ' οδόν προς το πλέγμα το ηλεκτρόνιο υφίσταται τρεις ανελαστικές κρούσεις, κ.ο.κ.

Στη βάση όλων των παραπάνω, οι Frank και Hertz συμπέραναν ότι η ενέργεια ιονισμού του υδραργύρου ανέρχεται στα 4,9 eV, μια τιμή που ισούται με την ενέργεια την οποία αποκτούν τα ηλεκτρόνια στο διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών ανελαστικών κρούσεών τους με τα άτομα του υδραργύρου.

Μολονότι οι Frank και Hertz θεωρούσαν αξιόπιστη για την ενέργεια ιονισμού του υδραργύρου την τιμή των 4,9 eV στην οποία κατέληξαν, αποφάσισαν να ελέγξουν τα αποτελέσματά τους με έναν ανεξάρτητο τρόπο. Γνώριζαν ότι οι ατμοί υδραργύρου απορροφούν έντονα την υπεριώδη ακτινοβολία σε μήκος κύματος  $\lambda = 2.536 \text{ \AA}$ . Σύμφωνα με τη θεωρία του Planck, τα κβάντα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας με αυτό το μήκος κύματος έχουν ενέργεια

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 4,84 \text{ eV.}$$

Η ανωτέρω τιμή προσεγγίζει εξαιρετικά την τιμή της ενέργειας ιονισμού που έδωσε το πείραμα Frank-Hertz. Επρόκειτο άραγε για καθαρή σύμπτωση; Οι Frank και Hertz, λοιπόν, αποφάσισαν να ελέγξουν κατά πόσο στους ατμούς υδραργύρου παράγεται ακτινοβολία με μήκος κύματος  $\lambda = 2.536 \text{ \AA}$  όταν η τάση λάβει την τιμή  $V_1 = 4,9 \text{ V}$ .

Τα αποτελέσματα υπήρξαν θεαματικά. Όσο η τάση  $V$  μεταξύ πλέγματος και καθόδου παρέμενε μικρότερη από 4,9 V, το ρεύμα του πλέγματος αυξανόταν αυξανόμενης τής  $V$ , αλλά

δεν εμφανιζόταν κανένα ίχνος εκπομπής ακτινοβολίας. Ωστόσο, όταν η τάση έφτασε στην τιμή 4,9 V περίπου, το ρεύμα μειώθηκε απότομα και, ταυτόχρονα, ένας φασματογράφος κατέγραψε ακτινοβολία με μήκος κύματος ακριβώς 2.536 Å!

Στη βάση αυτών των δεδομένων, οι Frank και Hertz συμπέραναν ότι ναι μεν στις περισσότερες περιπτώσεις ανελαστικών κρούσεων η ενέργεια των ηλεκτρονίων δαπανάται στον ιονισμό των ατόμων, ενίοτε όμως προκαλεί και την εκπομπή ακτινοβολίας. Τούτα τα δεδομένα εξηγήθηκαν σωστά τέσσερα χρόνια αργότερα, όταν η θεωρία του Niels Bohr άρχισε να κατακτά την αναγνώριση της επιστημονικής κοινότητας. Ουσιαστικά, τα πειράματα των Frank και Hertz απετέλεσαν την πρώτη άμεση επιβεβαίωση της εν λόγω θεωρίας — μολονότι ο ίδιος ο Bohr δεν το αντιλήφθηκε τότε.

Σύμφωνα με το πρώτο αίτημα του Bohr, το άτομο είναι δυνατόν να υπάρχει μόνο σε ορισμένες καταστάσεις όπου η ενέργειά του λαμβάνει διακριτές τιμές. Στα πειράματα των Frank και Hertz αυτό το αίτημα υποστηρίζεται από το γεγονός ότι η απότομη μείωση του ανοδικού ρεύματος εμφανιζόταν σε τιμές τής  $V_1$  που ήταν ακέραια πολλαπλάσια της ίδιας κρίσιμης τιμής 4,9 V. Αυτό σημαίνει ότι στις ανελαστικές του κρούσεις το άτομο του υδραργύρου απορροφά ενέργεια κατά καθορισμένα ποσά: αδυνατεί να «καταπεί» ενέργεια μικρότερη από 4,9 eV. Με άλλα λόγια, τα άτομα μεταβάλλουν την ενέργειά τους με άλματα ή, απλούστερα, κατά κβάντα. Αν το άτομο του υδραργύρου έχει στη θεμελιώδη του κατάσταση — δηλαδή στην κατάσταση όπου η ενέργεια λαμβάνει την ελάχιστη δυνατή τιμή της — ενέργεια  $E_0$ , τότε η ενέργεια της πρώτης διεγερμένης κατάστασής του θα ισούται με  $E_1 = E_0 + 4,9 \text{ eV}$ .

Τα πειράματα του Frank και Hertz προσέφεραν στήριξη και στο δεύτερο από τα αιτήματα του Bohr. Το περιεχόμενο του εν λόγω αιτήματος συνίσταται στο ότι όταν ένα άτομο μεταβαίνει από μια κατάσταση μεγαλύτερης ενέργειας  $E_n$  σε μια

κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας  $E_n$ , εκπέμπεται ένα φωτόνιο του οποίου η ενέργεια  $h\nu$  (όπου  $\nu$  η συχνότητα της ακτινοβολίας) καθορίζεται από την εξίσωση  $h\nu = E_{n+1} - E_n$ , απ' όπου προκύπτει  $\nu = (E_{n+1} - E_n)/h$ . Τώρα πλέον καθίσταται προφανές γιατί το δεύτερο αίτημα του Bohr αναφέρεται και ως «κανόνας των συχνοτήτων».

Τα πειράματα του Frank και του Hertz με ένα σωλήνα από χαλαζία γεμάτο με ατμούς υδραργύρου επαλήθευσαν την εξής υπόθεση: έχοντας απορροφήσει ενέργεια 4,9 eV στη διάρκεια μιας ανελαστικής κρούσης, το άτομο υδραργύρου μεταπηδά από τη θεμελιώδη του κατάσταση  $E_0$  στην πρώτη διεγερμένη του κατάσταση με ενέργεια  $E_0 + 4,9$  eV. Η αντίστροφη μετάβαση προς τη θεμελιώδη κατάσταση συνοδεύεται από την εκπομπή ενός φωτονίου ενέργειας 4,9 eV, το οποίο παρατηρείται ως υπεριώδης ακτινοβολία με μήκος κύματος 2.536 Å.

Συνεπώς, το φαινόμενο που πραγματικά παρατήρησαν οι Frank και Hertz ήταν, όχι ο ιονισμός των ατόμων του υδραργύρου, αλλά η διέγερσή τους. Και ό,τι εξέλαβαν ως ενέργεια ιονισμού δεν ήταν παρά η ενέργεια της πρώτης διεγερμένης κατάστασης.

Η διάταξη των Frank και Hertz δεν προσφερόταν για να μετρηθούν οι ενέργειες και των υψηλότερων διεγερμένων καταστάσεων. Άπαξ και συμμετείχαν σε μία κρούση, τα ηλεκτρόνια αποκλειόταν στη συνέχεια να αποκτήσουν ενέργεια μεγαλύτερη από 4,9 eV, επειδή ο αριθμός των «εμποδίων» (των ατόμων) που συναντούσαν στην πορεία τους ήταν υπερβολικά μεγάλος. Συνεπώς, την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου τη διέκοπταν τα υπερβολικά πολλά άτομα-στόχοι που απορροφούσαν την ενέργεια του ηλεκτρονίου σε αλληπάλληλες ανελαστικές κρούσεις. Για να καταστεί δυνατή η μέτρηση των ενεργειών που χαρακτηρίζουν τις υψηλότερες διεγερμένες καταστάσεις ενός ατόμου, αυτό το εμπόδιο έπρεπε να παραμεριστεί πάση θυσία.

Αργότερα ο Hertz τροποποίησε το πείραμα, διαχωρίζοντας την περιοχή όπου ελάμβαναν χώρα οι κρούσεις με τα άτομα. Με τη συγκεκριμένη τροποποίηση, το ηλεκτρόνιο μπορούσε πλέον να αποκτήσει ενέργεια μεγαλύτερη από 4,9 eV επειδή δεν συναντούσε εμπόδια στην περιοχή όπου επιταχυνόταν. Τα πειράματα έδειξαν ότι όταν η ενέργεια του ηλεκτρονίου έφτανε στα 9,8 eV, η κρούση του με το άτομο του υδραργύρου γινόταν ανελαστική. Απορροφώντας ενέργεια 9,8 eV, τα άτομα του υδραργύρου μεταπηδούν στη δεύτερη διεγερμένη κατάσταση τους. Έτσι, η τροποποιημένη μέθοδος απεκάλυψε και τις υψηλότερες ενεργειακές καταστάσεις των ατόμων.

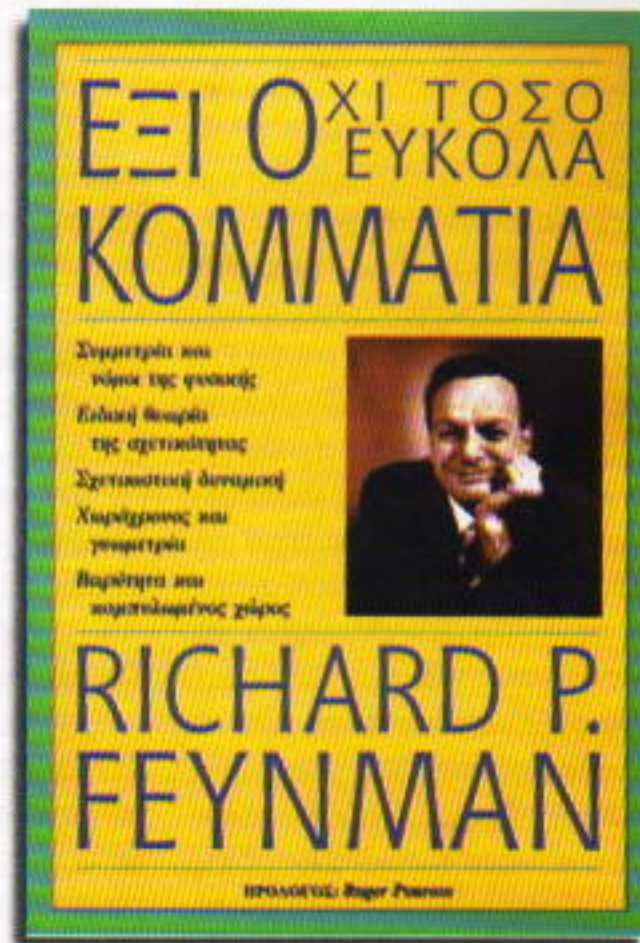
Το 1925 οι James Frank και Gustav Hertz τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ για την ανακάλυψη των νόμων που περιγράφουν τις κρούσεις μεταξύ ηλεκτρονίων και ατόμων. ■

#### Δείτε ακόμη τα άρθρα:

• S.R. Filonovich, «Η δύναμη της ομοιότητας», Μάρτιος/Απρίλιος 1997.

• A. Korzhuyev, «Το κβαντικό άλμα του Bohr», Μάρτιος/Απρίλιος 1999.

## ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ



Richard Feynman

### Έξι όχι τόσο εύκολα κομμάτια

Πρόλογος: Roger Penrose

«Οι διαλέξεις του Feynman μοιάζουν με τις συμφωνίες του Μότσαρτ. Όσο μεγαλώνουν οι απαιτήσεις που προβάλλουν έναντι του αναγνώστη τους, τόσο πιο απολαυστικό αποδεικνύεται το τελικό αποτέλεσμα. Το να αναβαπτίζεται κανείς στο λόγο του Δασκάλου ξαναδιαβάζοντας τούτες τις υπέροχες διαλέξεις αποτελεί μια από τις μεγαλύτερες επιβραβεύσεις των προσπαθειών που πρέπει να καταβάλει για να είναι επιστημονικά καταρτισμένος.»

—DAVID GOODSTEIN, Καθηγητής φυσικής στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Καλιφόρνιας

«Ο Feynman κατέληξε ένας θρύλος, πρωτίστως χάρη στο μεγάλο ταλέντο του να εξηγεί τα θέματα της επιστήμης. Πρόκειται για σοφά επιλεγμένα κείμενα από τη σειρά των Διαλέξεών του τα οποία αποτελούν συναρπαστικό ανάγνωσμα για κάθε άνθρωπο με ανησυχίες, ανεξάρτητα από το επίπεδο της επιστημονικής του κατάρτισης.»

—GORDON KANE, Καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Μίσιγκαν

Μια απaráμιλλη εισαγωγή στον κόσμο της φυσικής από έναν απ' τους διασημότερους φυσικούς και πιο αγαπητούς δασκάλους όλων των εποχών.

Σελ.: 222, 14 x 21 εκ., Α/Μ, Πανόδετο, 6.600 δρχ.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **κάτοπτρο**

# Με κανόνα και διαβήτη (μέρος α')

«Και παντί κέντρῳ και διαστήματι κύκλον γράφεισθαι.»  
—Ευκλείδης Στοιχεία, αίτημα γ'

Μιχάλης Λάμπρου

**Α**ΠΟ ΤΙΣ ΚΑΤΑΒΟΛΕΣ ΤΗΣ, Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΑ Αίγυπτο και Μεσοποταμία είχε ως μία από τις ασχολίες της τη μέτρηση του εμβαδού διαφόρων σχημάτων: Η γεωμετρία, λέει ο Πρόκλος στα *Σχόλια στο α' των Στοιχείων*, «ἐκ τῆς τῶν χωρίων ἀναμετρήσεως λαβοῦσα τὴν γένεσιν». Στις αρχαίες Ινδίες, άλλωστε, στα ιεροτελεστικά κείμενα των *Sulvasutra* της βεδικής περιόδου δίνονται πρακτικοί κανόνες για κατασκευή βωμών με συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες. Ένα από τα προβλήματα, παραδείγματος χάριν, που λύνονται στις *Sulvasutra* είναι η κατασκευή πλακόστρωτου τετράγωνου βωμού ισεμβαδικού με άλλον ορθογώνιου σχήματος ή ισεμβαδικού με το άθροισμα δύο δοθέντων τετράγωνων βωμών.

**Άσκηση 1.** Λύστε τα δύο αυτά προβλήματα με κανόνα και διαβήτη.

(Υπόδειξη: Το πρώτο απαιτεί μήκος  $x$  με  $x^2 = ab$ . Τέτοιο είναι το ύψος επί την υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου, αν το ύψος αυτό τη μερίζει σε τμήματα μήκους  $a$  και  $b$ . Για το δεύτερο πρόβλημα αρκεί να κατασκευάσουμε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές  $a$  και  $b$ , αφού από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει  $\gamma^2 = a^2 + b^2$ , όπου  $\gamma$  η υποτείνουσα).

Όταν οι πρακτικές γεωμετρικές γνώσεις από το λίκνο του πολιτισμού έφτασαν στον αρχαίο ελληνικό χώρο, έγινε μετάβαση της γεωμετρίας «ἀπὸ αἰσθήσεως εἰς λογισμὸν καὶ ἀπὸ τούτου ἐπὶ νοῦν» και «ἐπηξήθησαν τὰ θεωρήματα καὶ προήλθεν (η γεωμετρία) εἰς ἐπιστημονικωτέραν σύστασιν», σύμφωνα με τον Πρόκλο.

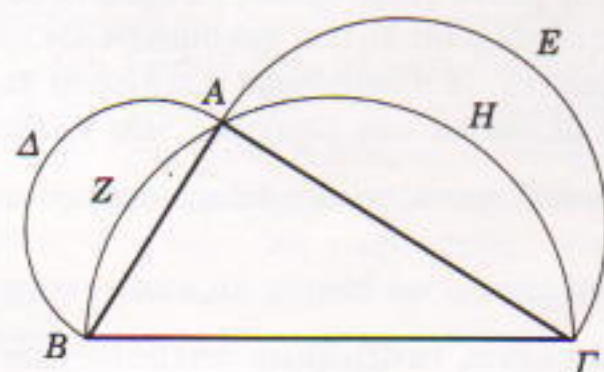
Έτσι είχαμε την εξέλιξη της γεωμετρίας σε αφηρημένη και αξιωματικά θεμελιωμένη επιστήμη, η οποία έφτασε στο αποκορύφωμά της με την έκδοση των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.

Ήταν φυσικό, η συστηματική ενασχόληση της γεωμετρίας να αρχίσει με τη μελέτη απλών σχημάτων, όπως είναι τα ευθύγραμμα ή ο κύκλος. Υπήρχε εξάλλου στους πρώτους έλληνες φιλοσόφους η πεποίθη-

ση ότι η ευθεία και ο κύκλος ήταν τα δύο τελειότερα γεωμετρικά σχήματα. Χαρακτηριστικά, ο Πυθαγόρας ονόμασε τον κύκλο «κάλλιστον σχήμα».

Η προσκόλληση στα δύο κατεξοχήν γεωμετρικά σχήματα ήταν ριζωμένη βαθιά. Ο ίδιος ο Πλάτων είχε προτείνει μόνο την ευθεία και τον κύκλο ως τα κύρια γεωμετρικά σχήματα, ακόμη και για τη μελέτη της αστρονομίας: Για την εξήγηση των κινήσεων των πλανητών, ιδίως μετά την παρατήρηση των ανωμαλιών στην τροχιά του Ερμή και της Αφροδίτης, ο μεγάλος φιλόσοφος πρότεινε ως πρόβλημα το «σώζειν τὰ φαινόμενα» με ερμηνείες που να βασίζονται μόνο σε αυτά τα σχήματα.

Όσο για την εύρεση εμβαδών και όγκων, οι αρχαίοι Έλληνες αναβάθμισαν την πρακτική των προγενέστερων εμπειρικών γεωμετρών να εκφράζουν το αποτέλεσμα με αριθμητική, συχνά προσεγγιστική, τιμή. Η ακρίβεια αξίωνε τη σύγκριση ενός εμβαδού με το εμβαδόν άλλου, αλλά απλούστερου, σχήματος. Παραδείγματος χάριν, ο *τετραγωνισμός μηνίσκων* από τον Ιπποκράτη τον Χίο ήταν η πρώτη επιτυχής σύγκριση εμβαδού καμπυλόγραμμου σχήματος με ευθύγραμμο. Συγκεκριμένα, αν σε ένα ημικύκλιο  $BAG$  γράψουμε εξωτερικά δύο μικρότερα ημικύκλια  $AΔB$ ,  $AΕΓ$ , τότε τα καμπυλόγραμμα χωρία μεταξύ των τόξων  $AΔB$ ,  $AΖB$  και  $AΕΓ$ ,  $AΗΓ$  ονομάζονται μηνίσκοι του Ιπποκράτη. Ο συγκεκριμένος γεωμέτρης έδειξε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο μηνίσκων ισούται με το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου  $ABΓ$ .

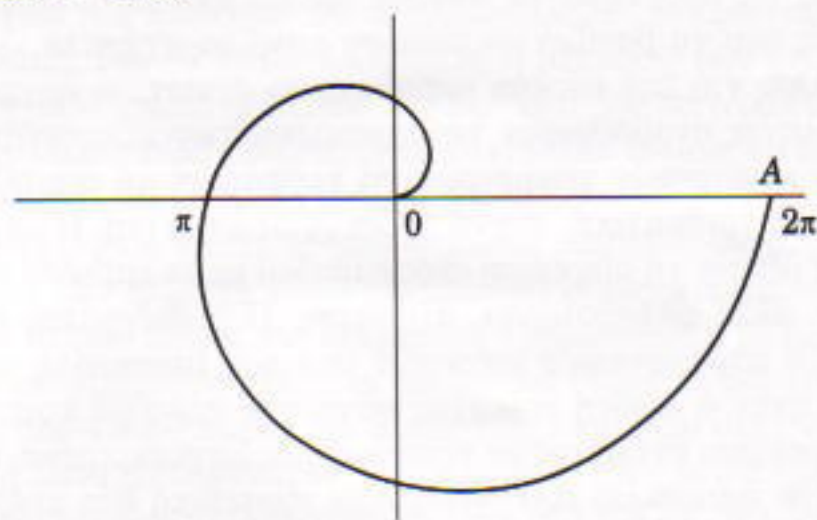


**Άσκηση 2.** Αποδείξτε τον ισχυρισμό του Ιπποκράτη. (Υπόδειξη: Με χρήση του πυθαγόρειου θεωρήματος εύκολα αποδεικνύεται ότι το εμβαδόν του ημικυκλίου  $BA\Gamma$  ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των δύο μικρότερων ημικυκλίων  $A\Delta B$  και  $A\epsilon\Gamma$ . Αφαιρούμε και από τα δύο μέλη αυτής της ισότητας το κοινό τους χωρίο, που είναι τα δύο κυκλικά τμήματα  $AZB$ ,  $A\eta\Gamma$ .)

Υπάρχουν βέβαια πολλά παραδείγματα σύγκρισης εμβαδών με απλούστερα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν διάφορα θεωρήματα του Αρχιμήδη, όπως «Πάσης σφαιρας ή επιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ» (Αρχιμήδους, *Περὶ σφαιροειδῶν και κωνοειδῶν*, Πρόταση 33). Με άλλα λόγια, πρόκειται για τον τύπο  $4\pi a^2$  για το εμβαδόν επιφανείας σφαίρας ακτίνας  $a$ . Ο τύπος αυτός δεν είναι απλό να αποδειχθεί, μιας και απαιτεί μεθόδους του απειροστικού λογισμού. Με την ευκαιρία όμως, για όσους γνωρίζουν απειροστικό λογισμό, προτείνουμε ένα απλούστερο θεώρημα του Αρχιμήδη.

**Άσκηση 3.** (Αρχιμήδους, *Περὶ ἐλίκων*, 24). Δείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου μίας περιφοράς της έλικας του Αρχιμήδη, δηλαδή της καμπύλης  $r = \theta$  σε πολικές συντεταγμένες, για  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , ισούται με το  $1/3$  του εμβαδού του κύκλου ακτίνας  $OA$ : στη δωρική διάλεκτο του ιδίου: «τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τῆς ἔλικος τῆς ἐν τῷ πρώτῳ περιφορᾷ γεγραμμένης καὶ τῆς εὐθείας τῆς πρώτης τῶν ἐν τῷ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ πρώτου.»

(Υπόδειξη: Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με  $(1/2) \int_0^{2\pi} r^2 d\theta$  που είναι  $(4/3)\pi^3$ , δηλαδή όσο το  $1/3$  του κύκλου ακτίνας  $OA = 2\pi$ .)



Ας επανέλθουμε στο θέμα των κατασκευών. Ο συγγραφέας των περίφημων *Στοιχείων*, ο Ευκλείδης, ήταν μαθητής του Πλάτωνα, από τον οποίο επηρεάστηκε βαθύτατα: «τῇ προαιρέσει δὲ Πλατωνικός ἐστὶ (ο Ευκλείδης) καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκειός» (Πρόκλου, *Σχόλια*). Στα *Στοιχεία*, οι μόνες γεωμετρικές κατασκευές που επιτρέπονται ρητά είναι αυτές που χρησιμοποιούν (μόνο) κανόνα και διαβήτη. Η προϋπόθεση αυτή είναι καταγεγραμμένη στα αξιώματα των *Στοιχείων* που προδιαγράφουν:

- Ἡτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν
- Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

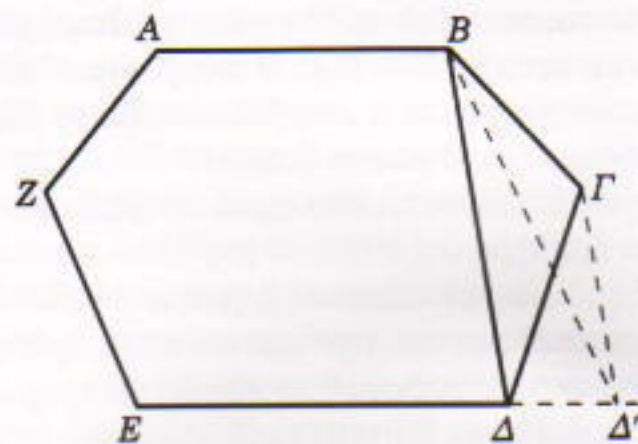
Με άλλα λόγια, τα αξιώματα επιτρέπουν τη χρήση κα-

νόνα και διαβήτη. Από εκεί και πέρα, όμως, οι γεωμετρικές κατασκευές θα χρησιμοποιούν αυτά και μόνο αυτά τα όργανα. Παραδείγματος χάριν, στο β' Βιβλίο, Πρόταση 14, ζητείται να κατασκευαστεί τετράγωνο ισεμβαδικό με δοθέν πολύγωνο: «Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι», ενώ στο στ' Βιβλίο, Πρόταση 25, έχει την περίφημη κατασκευή πολυγώνου ἴσου προς δοθέν και ομοίου προς άλλο: «Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὁμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.»

Το τελευταίο αποδίδεται στον Πυθαγόρα που, κατά τον Πλούταρχο (στο *Συμποσιακῶν προβλημάτων* και στο *Ὅτι οὐδ' ἠδέως ζῆν ἐστὶν κατ' Ἐπίκουρον*, αντίστοιχα) ήταν «γεωμετρικώτατον» και συγκριτικά «γλαφυρώτερον καὶ μουσικώτερον» ακόμη και από το περικλεές θεώρημα της υποτεινουσας. Τόσο ικανοποιήθηκε ο Πυθαγόρας από το επίτευγμά του αυτό ώστε «ἤγετο βουθουσίην», δηλαδή προσέφερε θυσία ένα βόδι.

**Άσκηση 4.** Διεκπεραιώστε τις κατασκευές της Πρότασης 14 του β' Βιβλίου και της Πρότασης 25 του στ' Βιβλίου των *Στοιχείων*.

(Υπόδειξη: Κατασκευάστε πρώτα ένα πολύγωνο ισεμβαδικό με το δοθέν, αλλά με μία πλευρά λιγότερη (βλ. το παρακάτω σχήμα). Επαναλάβετε τη διαδικασία για να καταλήξετε, σταδιακά, σε ισεμβαδικό τρίγωνο. Από το τρίγωνο κατασκευάστε ισεμβαδικό ορθογώνιο και, όπως στην Άσκηση 1, βρείτε το ζητούμενο τετράγωνο. Για το δεύτερο πρόβλημα βρείτε, όπως στο πρώτο, δύο τετράγωνα ισεμβαδικά με τα δοθέντα. Ο λόγος των πλευρών των δύο τετραγώνων δίνει το λόγο ομοιότητας.)



Το πρόβλημα της κατασκευής τετραγώνου διπλάσιου εμβαδού από δοθέν είναι βέβαια ειδική περίπτωση του τελευταίου, αλλά και πολύ πιο απλού και γνωστού προβλήματος. Ο Σωκράτης, λόγου χάριν, στο *Μένωνα*, ή *Περὶ ἀρετῆς ερειστικόν διάλογον*, του Πλάτωνα, όταν αναπτύσσει τα επιχειρήματά του για τη θεωρία της ανάμνησης, εκμαιεύει αυτήν ακριβώς την κατασκευή από τον αμόρφωτο παῖδα (ο οποίος ανακαλύπτει ότι η ζητούμενη πλευρά ισούται με τη διαγώνιο του αρχικού).

Οι αρχαίοι γεωμέτρεις κατέληξαν σε τρία κατεξοχήν προβλήματα κατασκευών, τα οποία επεκράτησε στη βιβλιογραφία να ονομάζονται «τα περίφημα ἄλυτα προβλήματα της αρχαιότητας». Πρόκειται για το *διπλασιασμό του κύβου*, τον *τετραγωνισμό του κύκλου* και την *τριχοτόμηση γωνίας*. Και τα τρία ήταν φυσικές συνέπειες των γεωμετρικών γνώσεων και ερωτημάτων της εποχής. Για

τον τετραγωνισμό του κύκλου, λόγου χάριν, μετά την κατασκευή παραλληλογράμμου ισεμβαδικού με πολύγωνο υπό κάποιες άλλες συνθήκες (Στοιχεία, α', 45) γράφει ο Πρόκλος ότι είναι «ζητήσεως ἄξιον» μήπως «καὶ τὰ εὐθύγραμμα τοῖς περιφερογράμμοις ἴσα δεικνύναι δυνατόν». Ομοίως, η τριχοτόμηση γωνίας είναι το αμέσως επόμενο ζήτημα για μελέτη μετά την επιτυχή διχοτόμηση, ενώ ο διπλασιασμός του κύβου είναι το τρισδιάστατο ανάλογο του διπλασιασμού του τετραγώνου που κατάφερε ακόμη και ο αμόρφωτος παις του σωκρατικού διαλόγου. Στα περίφημα ἄλυτα προβλήματα, οι γεωμέτρους ανά τους αιώνες ενδιέτριψαν με ιδιαίτερη επιμέλεια. Ακόμη και φυλακισμένος ο Αναξαγόρας, κατά τον Πλούταρχο στο *Περί φυγῆς*, προσπαθούσε να λύσει το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, αφού έγραφε «ἀνθρώπου οὐδεὶς ἀφαιρεῖται τόπος εὐδαιμονίαν [...] ἐν τῷ δεσμοτηρίῳ τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμόν». Το όνομα ἄλλωστε του λύτη θα έμενε ανεξίτηλα χαραγμένο στην ιστορία των μαθηματικῶν από εὐνοια της μητέρας των εννέα Μουσῶν, της Μνημοσύνης, και ὄχι της Λήθης, θυγατέρας της Ἐριδος, που προσωποποιούσε την αγνωμοσύνη.

Δυστυχῶς, ὅλες οι προσπάθειες να αντιμετωπιστούν με κανόνα και διαβήτη τα περίφημα ἄλυτα προβλήματα της αρχαιότητας κατέληξαν σε αποτυχία. Η αιτία της κακοδαιμονίας έγινε κατανοητή μόνο με σύγχρονα μαθηματικά, όταν αποδείχθηκε ὅτι τα προβλήματα δεν λύνονται μόνο με τα δύο αυτά ὄργανα. Σε επόμενο ἄρθρο θα ερμηνεύσουμε περισσότερο την αιτία του αδυνάτου· προς το παρόν, ας ανατρέξει ο αναγνώστης μόνος του σε βιβλία τα οποία αναφέρονται στη θεωρία Galois που, σχεδόν ὅλα, περιέχουν την ἀπόδειξη του ανέφικτου.

Αυτό που προκαλεί εντύπωση είναι ὅτι η βαθιά γεωμετρική διαίσθηση των αρχαίων ελλήνων μαθηματικῶν τούς είχε ενσταλάξει την πεποίθηση (ὄχι ὅμως και την ἀπόδειξη) ὅτι τα περίφημα ἄλυτα προβλήματα δεν λύνο-

νται με κανόνα και διαβήτη. Ο Πάππος στη *Συναγωγή* του είναι ἀπερίφραστος σε αυτό το θέμα. «Τρία γένη εἶναι» λέει «τῶν ἐν γεωμετρίας προβλημάτων, καὶ τὰ μὲν αὐτῶν ἐπίπεδα καλεῖσθαι, τὰ δὲ στερεά, τὰ δὲ γραμμικά» και εξηγεί ὅτι τα ἐπίπεδα είναι ἐκεῖνα που «δι' εὐθείας καὶ κύκλου δυνάμενα λύεσθαι». Αντίθετα, ἐκεῖνα που χρειάζονται κωνικές τομές λέγονται *στερεά*, ἐνῶ ἐκεῖνα που χρειάζονται ἀκόμη πιο πολύπλοκες γραμμές, ὅπως είναι η τετραγωνίζουσα, η κονχοειδής ἢ η κισσοειδής (θα τις δούμε σε επόμενα ἄρθρα), ονομάζονται *γραμμικά*. Εξηγεί ἀκόμη ὅτι «οἱ παλαιοὶ γεωμέτρους» ὅταν θέλησαν να λύσουν το πρόβλημα της τριχοτόμησης με κανόνα και διαβήτη «ἠπόρησαν», δηλαδή δεν τα κατάφεραν, διότι δεν κατανόησαν ὅτι το πρόβλημα δεν ἦταν ἐπίπεδο. Ὅσο για το διπλασιασμό του κύβου, ἀναφέρει ειρωνικότερα ὅτι «μέγας τις γεωμέτρης [...] ὄρισεν ἀμαθῶς» ὅταν «ἔφρασκεν εἰδέναι δι' ἐπιπέδου θεωρίας» τη λύση. Συνεχίζει τότε ο Πάππος λέγοντας για τον ἀνώνυμο «προσποιοῦμενο» αυτό γεωμέτρη ὅτι εἶχε το θράσος να αξιώνει να του πει ὁ ἴδιος τη γνώμη του για την κατασκευή! Σε τούτο το σημείο, ο Πάππος παραθέτει ἀρκετές λύσεις με γραμμές, διαφόρων γεωμετρῶν, τόσο για τα δύο αυτά προβλήματα ὅσο και για το τρίτο (*Συναγωγή*, Βιβλία β' και δ').

Αξίζει ἐδῶ να προστεθεῖ μια περικοπή του Ιωάννη του Φιλόπονου, ὁ οποίος θεωρεῖ τόσο δεδομένο ὅτι δεν διπλασιάζεται ὁ κύβος με κανόνα και διαβήτη (ἀλλά απαιτεῖται στερεά καμπύλη) ὥστε χρησιμοποιεῖ αὐτή τη «γνώση» για να στηρίξει ἓνα φιλοσοφικό του ἐπιχείρημα. Ὅπως λέει το σχετικό χωρίο στα *Σχόλια στα ἀναλυτικά ὑπερα του Ἀριστοτέλους*, «οὐδὲ οἱ δύο κύβοι κύβος γεωμετρίας ἔστιν ἀποδείξαι, στερεομετρίας δὲ μᾶλλον. Γεωμετρία μὲν γὰρ περὶ τὰ ἐπίπεδα ἔχει, στερεομετρία δὲ περὶ τὰ στερεά [...] τοῖς δύο κύβους ἓνα ποιῆσαι [...] τὴν πολυθρόλητον ἱστορίαν [...] Δηλίοις λομώξασιν».

Τις αντιμετωπίσεις αυτές θα τις δούμε στο επόμενο τεύχος. ■



Σελ.: 252, 17 x 25, Α/Μ, Πανόδετο,  
Εκδόσεις Κάτοπτρο

Jayant V. Narlikar

## Η ΦΩΤΕΙΝΗ ΠΛΕΥΡΑ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

Κυκλοφόρησε η β' έκδοση, αναθεωρημένη και επηυξημένη

Η βαρύτητα είναι η πιο αινιγματική από τις θεμελιώδεις δυνάμεις της φύσης και διέπει τα πάντα —από την κίνηση των ωκεάνιων παλιρροιών μέχρι τη διαστολή του Σύμπαντος. Πολλά βιβλία, στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν αὐτή την παράξενη δύναμη, χρησιμοποιούν δύσκολα μαθηματικά. Στο βιβλίο αὐτό, ὅμως, η παρουσίαση του θέματος είναι ἀπολύτως σαφής και χωρίς τεχνικές λεπτομέρειες. Οικείες ἀναλογίες, ενδιαφέρουσες ιστορίες και πολλές εικόνες ἀποσαφηνίζουν λεπτά νοήματα και δύσκολα σημεία. Και το περιεχόμενο παραμένει κατανοητό και δεν υστερεῖ σε ἀκρίβεια. Η παρούσα δεύτερη ἐκδοση είναι πλήρως αναθεωρημένη βάσει των πιο πρόσφατων στοιχείων και διευρυμένη ὥστε να περιλαμβάνει την ἀνακάλυψη γιγαντιαίων βαρυτικῶν φακῶν στο Διάστημα, τα ευρήματα του δορυφόρου COBE, τα στοιχεία του προγράμματος MACHO, τις ἐρευνες για το πρώιμο Σύμπαν και ἄλλες νέες ιδέες της κοσμολογίας.

Ένα ευανάγνωστο και ἐλκυστικό βιβλίο που παρουσιάζει τη «φωτεινή» ὄψη της πιο σκοτεινῆς δυνάμεως στο Σύμπαν μας.

# Απλά μαθήματα φυσικής για στρατηγούς

«Στρατηγέ/τι ζητούσες στη Λάρισα/σου/ένας/Υδραίος;»

—Νίκος Εγγονόπουλος, Μπολιβάρ

A. Stasenko

**Α**ΚΟΜΗ ΚΑΙ ΤΟ ΤΕΛΕΥΤΑΙΟ ΨΑΡΙ ΞΕΡΕΙ ΑΡΚΕΤΑ ΓΙΑ ΤΑ κύματα και τις παραλίες. Αλλά το θέμα μας δεν είναι αυτό. Εμείς επιδιώκουμε να ξεκαθαρίσουμε ένα ζήτημα αρχής —γιατί τα κύματα ορμούν προς την παραλία με το μέτωπό τους παράλληλο προς την ακτογραμμή. Με τη σκανδαλώδη αυτή συμπεριφορά τους, τα κύματα δείχνουν να αγνοούν τόσο την κατεύθυνση του ανέμου όσο και την προηγούμενη πορεία τους στην ανοικτή θάλασσα. Με άλλα λόγια, το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στο ερώτημα γιατί οι γραμμές οι κάθετες προς τα μέτωπα των κυμάτων (οι κυματικές ακτίνες) καμπυλώνονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να φτάνουν στην ξηρά κάθετες προς την ακτογραμμή.

Στη φυσική, πολλά πράγματα, τα οποία εκ πρώτης όψεως φαίνονται άσχετα, συνδέονται άμεσα μεταξύ τους. Έτσι, το συγκεκριμένο πρόβλημα συνδέεται άμεσα με το φαινόμενο της διάθλασης των φωτεινών ακτίνων στο σύνορο δύο διαφορετικών οπτικών μέσων —όπως, για παράδειγμα, όταν το φως περνά από τον αέρα στο νερό. Πρόκειται για μια απλούστατη διαδικασία: στον αέρα το φως διαδίδεται με ταχύτητα  $v_1$ , ενώ στο νερό κινείται με ταχύτητα  $v_2$  ( $v_2 < v_1$ ). Ο λόγος των δύο αυτών ταχυτήτων ορίζεται ως ο σχετικός δείκτης διάθλασης του νερού ως προς τον αέρα:

$$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} > 1.$$

Εν προκειμένω, τα  $n_1$  και  $n_2$  δηλώνουν τους απόλυτους δείκτες διάθλασης του αέρα και του νερού, δηλαδή τους δείκτες διάθλασης των εν λόγω μέσων ως προς το κενό.

Σύμφωνα με το νόμο του Snell για τη διάθλαση έχουμε ότι

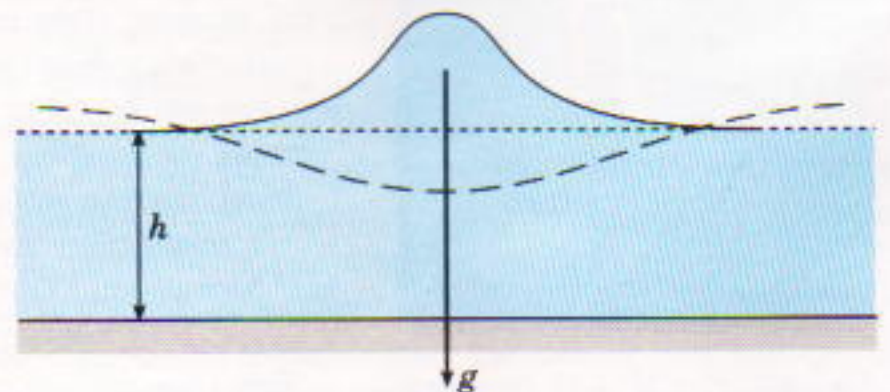
$$n_2 \eta \mu \alpha_2 = n_1 \eta \mu \alpha_1, \quad (1)$$

όπου με  $\alpha_i$  συμβολίζουμε τις γωνίες που σχηματίζουν οι ακτίνες με την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια αέρα-

νερού. Συνεπώς, όταν το φως εισέρχεται σε ένα οπτικά πυκνότερο μέσο ( $n > 1$ ), η διαθλώμενη ακτίνα πλησιάζει προς την κάθετο περισσότερο απ' ό,τι η προσπίπτουσα:  $\alpha_2 < \alpha_1$ . Ο νόμος του Snell για τη διάθλαση έχει καθολική ισχύ: δεν εξαρτάται από τη φύση των κυμάτων.

Πρώτα απ' όλα, ας προσπαθήσουμε να βρούμε την ταχύτητα με την οποία διαδίδονται τα θαλάσσια κύματα κοντά στην παραλία. Από τι μπορεί να εξαρτάται; Αν δημιουργήσουμε ένα «εξόγκωμα» στην επιφάνεια του ακύμαντου νερού —στη θάλασσα, σε μια λίμνη ή σε μια μεγάλη στέρνα βάθους  $h$  (Σχήμα 1)— και κατόπιν αφήσουμε τα πράγματα να εξελιχθούν χωρίς να παρεμβαίνουμε, το εξόγκωμα θα κινηθεί προς τα κάτω υπό την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας (η οποία φυσικά είναι ανάλογη προς την επιτάχυνση της βαρύτητας). Όταν το εξόγκωμα θα φτάσει στην αρχική του (αδιατάρακτη) θέση, λόγω της αδράνειάς του δεν πρόκειται να σταματήσει εκεί. Συνεπώς, στη θέση του εξογκώματος θα εμφανιστεί μια κοιλότητα, προκαλώντας έτσι την ανύψωση της υδάτινης επιφάνειας που την περιβάλλει —οπότε σχηματίζεται ένα κυκλικό υδάτινο «όρος». Συνεπώς, ως αποτέλεσμα τούτης της διαδικασίας δημιουργείται ένα οδεύον υδάτινο κύμα.

Ποιες ποσότητες (και αντίστοιχες διαστάσεις) μπορεί να επηρεάζουν την ταχύτητα των υδάτινων κυμάτων;



Σχήμα 1

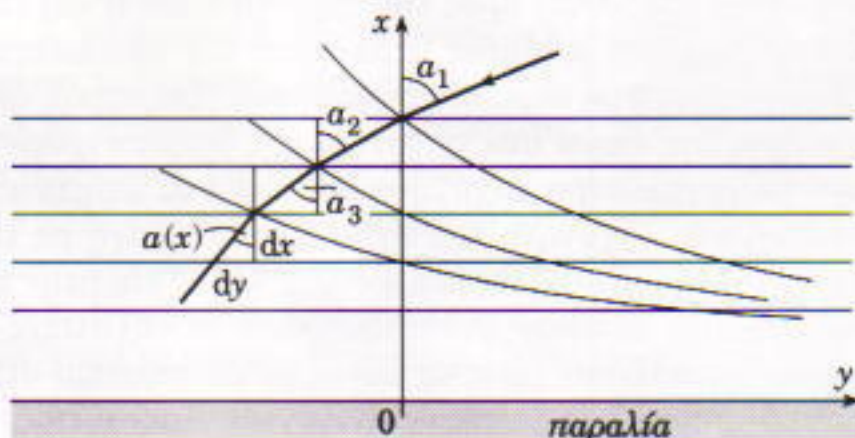
Γνωρίζουμε ότι τα κύματα που σπάζουν στην παραλία δεν είναι μικρές ρυτιδώσεις, οπότε μπορούμε να αγνοήσουμε το συντελεστή επιφανειακής τάσης. Τα θαλάσσια κύματα έχουν ύψος συγκρίσιμο με το βάθος του νερού —τουλάχιστον στην παράκτια ζώνη. Ως εκ τούτου, δεν υπάρχουν παρά μόνο δύο φυσικές παράμετροι που αναμένεται να καθορίζουν κατά κύριο λόγο την ταχύτητα των θαλάσσιων κυμάτων: το βάθος  $h$  (m) και η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$  (m/s<sup>2</sup>). Ούτως εχόντων των πραγμάτων, η διαστατική ανάλυση μας οδηγεί αμέσως στον ακόλουθο τύπο:

$$v \sim \sqrt{gh}. \quad (2)$$

Επομένως, τα κύματα διαδίδονται με μικρότερη ταχύτητα στις ρηχές περιοχές (αυτό αληθεύει για τα μάλλον αβαθή νερά, όπου η ταχύτητα δεν εξαρτάται από το μήκος κύματος). Όταν λοιπόν το κύμα πλησιάζει την ακτή, εισέρχεται σε περιοχές μικρότερου βάθους, με αποτέλεσμα η ταχύτητά του να μειώνεται. Σκεπτόμενοι κατ' αναλογία με την οπτική, μπορούμε να πούμε ότι τα κύματα διαδίδονται σε ένα μέσο που ο δείκτης διάθλασής του ολοένα και αυξάνεται.

Ας αναφέρουμε παρεμπιπτόντως ότι μπορούμε ευκολότερα να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο μιας τέτοιας βαθμιαίας μεταβολής του δείκτη διάθλασης σε ένα ποτήρι νερό, όπου το διαθλαστικό μέσο καθίσταται βαθμιαία οπτικά πυκνότερο όσο αυξάνεται το βάθος. Προς τούτο, παρασκευάζουμε διάλυμα επιτραπέζιου αλατιού πολύ μεγάλης συγκέντρωσης, το μεταγγίζουμε στο ποτήρι, και κατόπιν προσθέτουμε διαλύματα αλατιού όλο και μικρότερης συγκέντρωσης. Σημειωτέον ότι, για να επιτύχει το εγχείρημά μας, η έγχυσή τους στο ποτήρι πρέπει να γίνει κατά στρώματα. Τέλος, ολοκληρώνουμε τη διαδικασία προσθέτοντας καθαρό νερό. Το σύνθετο οπτικό μέσο είναι έτοιμο! Αν είχαμε τοποθέτησε μέσα στο ποτήρι ένα κουταλάκι του γλυκού, τούτο δεν θα φαινόταν σπασμένο αλλά ομαλά καμπυλωμένο.

Ας διαιρέσουμε την επιφάνεια της θάλασσας σε λωρίδες πλάτους  $dx$  παράλληλες προς την ακτογραμμή (Σχήμα 2). Κάθε λωρίδα χαρακτηρίζεται από τις ιδιαίτερες τιμές της για το βάθος  $h$ , την ταχύτητα διάδοσης του κύματος, το δείκτη διάθλασης (ο οποίος είναι αντιστρόφως ανάλογος προς την ταχύτητα αυτή) και τη γωνία που σχηματίζει η κυματική ακτίνα με τον άξονα των  $x$  —ο



Σχήμα 2

ο οποίος λαμβάνεται κάθετος προς την ακτή. Τώρα, μπορούμε να γράψουμε το νόμο του Snell για όλες τις λωρίδες ως εξής:

$$\frac{\eta\mu\alpha_1}{\sqrt{h_1}} = \frac{\eta\mu\alpha_2}{\sqrt{h_2}} = \dots = \frac{\eta\mu\alpha(x)}{\sqrt{h(x)}} = \text{σταθ.} \quad (3)$$

Ακόμη και τούτη η προκαταρκτική εξίσωση δείχνει ότι αν το βάθος τείνει στο μηδέν, τότε και η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα με την κάθετο προς την ακτογραμμή τείνει επίσης να μηδενιστεί. Και μόνο αυτό το χαρακτηριστικό μάς αρκεί προκειμένου να εξηγήσουμε γιατί τα κύματα πλησιάζουν την ακτή κινούμενα κάθετα προς αυτήν. Ωστόσο, μπορούμε να προχωρήσουμε λίγο περισσότερο και να βρούμε την εξίσωση την οποία ικανοποιεί η ίδια η ακτίνα. Από το Σχήμα 2 μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{dy}{dx} = \epsilon\phi\alpha(x) = \frac{\eta\mu\alpha(x)}{\sigma\upsilon\nu\alpha(x)} = \frac{\eta\mu\alpha(x)}{\sqrt{1 - \eta\mu^2\alpha(x)}}.$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης (3) μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σχέση που συνδέει τη γωνία κλίσης  $\alpha$  της ακτίνας ως προς την κάθετο σε οποιαδήποτε απόσταση  $x$  από την ακτή και την τιμή της  $\alpha_1$  σε οποιαδήποτε δεδομένη απόσταση  $x_1$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{h/h_1} \eta\mu\alpha_1}{\sqrt{1 - (h/h_1) \eta\mu^2\alpha_1}}. \quad (4)$$

Μένει πλέον να διαλέξουμε μια συγκεκριμένη κατατομή του θαλάσσιου βυθού, δηλαδή μια μορφή εξάρτησης του βάθους του από την απόσταση ως την ακτή,  $h(x)$ . Τότε, η εξίσωση (4) μπορεί να ολοκληρωθεί αμέσως.

Ας θεωρήσουμε, χάριν παραδείγματος, ότι η κατατομή του βυθού είναι παραβολική:  $h = h_1(x/x_1)^2$ . Με τη συγκεκριμένη επιλογή, έχουμε

$$\int_{y_1}^y dy = y - y_1 = \int_{x_1}^x \frac{(x/x_1) \eta\mu\alpha_1}{\sqrt{1 - (x/x_1)^2 \eta\mu^2\alpha_1}} dx.$$

Σ' αυτό το στάδιο αισθάνεται κανείς έντονα τον πειρασμό να προστρέξει στους μαθηματικούς για να τον συμβουλέψουν πώς να τα βγάλει πέρα με ένα τέτοιο τέρας. Ωστόσο, η τόλμη υπερνικά όλα τα εμπόδια —ας προσπαθήσουμε λοιπόν να αντιμετωπίσουμε το ολοκλήρωμα μόνοι μας. Κατ' αρχάς, προβαίνουμε στην εξής αλλαγή μεταβλητής ολοκλήρωσης:

$$1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^2 \eta\mu^2\alpha_1 = u.$$

Διαφορίζοντας την ανωτέρω εξίσωση, βρίσκουμε

$$2 \frac{dx}{x_1} \frac{x}{x_1} \eta\mu^2\alpha_1 = -du.$$

Κάνοντας τις δύο παραπάνω αντικαταστάσεις στην ολοκληρωτέα παράσταση, παίρνουμε

$$\frac{y - y_1}{x_1/\eta\mu\alpha_1} = -\frac{1}{2} \int_{u_1}^u \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} \Big|_{u_1}^u$$

$$= \sqrt{1 - \eta\mu^2\alpha_1} - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^2 \eta\mu^2\alpha_1}.$$

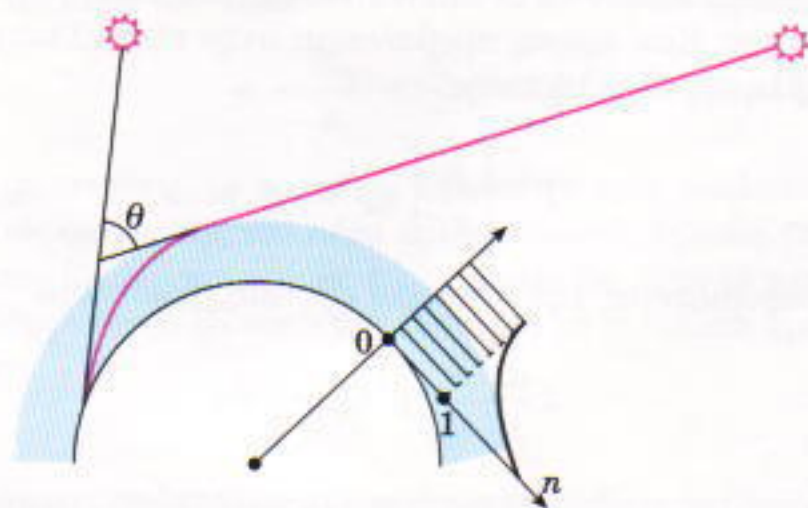
Ο κάπως άκομπος τύπος στον οποίο καταλήξαμε δίνει τη ζητούμενη εξίσωση της ακτίνας  $y(x)$ . Για τι είδους καμπύλη πρόκειται άραγε; Μεταφέρουμε τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους στο αριστερό μέλος και στη συνέχεια τετραγωνίζουμε και τα δύο μέλη. Αφήνοντας στο δεξιό μέλος μόνο τη μονάδα, βρίσκουμε

$$\left(\frac{y - y_1}{x_1/\eta\mu\alpha_1} - \sigma\upsilon\nu\alpha_1\right)^2 + \left(\frac{x}{x_1/\eta\mu\alpha_1}\right)^2 = 1.$$

Δεν σας θυμίζει κάτι αυτός ο τύπος; Πρόκειται βεβαίως για την εξίσωση ενός κύκλου! Φυσικά, αν διαλέγαμε μια άλλη κατατομή για το βυθό, θα καταλήγαμε και σε διαφορετική εξίσωση για την κυματική ακτίνα.

Ας προχωρήσουμε παραπέρα. Ο νόμος του Snell για τη διάθλαση εξηγεί πολλά ακόμη φυσικά φαινόμενα, περιλαμβανομένης και της ατμοσφαιρικής διάθλασης των ηλιακών ακτίνων (Σχήμα 3). Εφόσον η πυκνότητα του ατμοσφαιρικού αέρα αυξάνεται όσο πλησιάζουμε την επιφάνεια της Γης, ο δείκτης διάθλασης του θα μειώνεται όσο ανερχόμαστε σε μεγαλύτερα υψόμετρα. Ως εκ τούτου, οι ηλιακές ακτίνες κάμπτονται κατά τέτοιον τρόπο ώστε ένας παρατηρητής στο έδαφος να βλέπει τον Ήλιο και επί ορισμένο χρόνο μετά τη «γεωμετρική δύση» ή πριν από τη «γεωμετρική ανατολή». Κατά συνέπεια, το φως της ημέρας παρατείνεται κατά μερικά λεπτά —φαινόμενο που μάλλον πρέπει να δυσανεξεί τους εραστές της νύχτας. Αντίθετα, στα πολύ μεγάλα γεωγραφικά πλάτη, όπου η εξαιρετικά μακρά διάρκεια των πολικών νυκτών τείνει να δυσχεραίνει τη ζωή των ανθρώπων, η συντόμευση της νύχτας χάρη στην ατμοσφαιρική διάθλαση γίνεται δεκτή ως ιδιαίτερα ωφέλιμη συνέπεια του νόμου του Snell.

Η ίδια εξίσωση της διάθλασης εξηγεί τους αντικατοπτρισμούς στην έρημο. Η καυτή άμμος θερμαίνει τα γειτονικά στρώματα αέρα, οπότε ο δείκτης διάθλασης στα υψηλότερα στρώματα γίνεται μεγαλύτερος απ' ό,τι στα



Σχήμα 3



Σχήμα 4

κατώτερα. Ως εκ τούτου, οι ακτίνες που προέρχονται, ας πούμε, από το σημείο A (Σχήμα 4) εκτρέπονται προς τα πάνω, ξεγελώντας έτσι τον κατάκοπο ταξιδιώτη που εκλαμβάνει το σημείο A' ως είδωλο του A μέσα σε μια δροσερή λίμνη στα βάθη της ερήμου —η οποία, δυστυχώς, είναι ανύπαρκτη.

Αλλά ας επανέλθουμε στο πώς βλέπει ένα ψάρι τον κόσμο. Το μέσο εντός του οποίου ζει και κινείται (το νερό) έχει δείκτη διάθλασης σημαντικά μεγαλύτερο από τη μονάδα ( $n \cong 4/3$ ). Συνεπώς, για να εστιάζει τις φωτεινές ακτίνες, το μάτι του ψαριού πρέπει να έχει ακόμη μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης. Μήπως λοιπόν η φύση θα έπρεπε να φτιάχνει τα μάτια των ψαριών από μολυβδύαλο ή κορωνύαλο; Πρόκειται για ένα δύσκολο πρόβλημα, και ο τρόπος με τον οποίο το έλυσε η φύση θα έπρεπε να αποτελέσει αντικείμενο ιδιαίτερου άρθρου. Εδώ απλώς θα υπενθυμίσουμε ότι ο εξέχων φυσικός του 19ου αιώνα σερ James Clerk Maxwell επινόησε μια τέτοια διάταξη και την ονόμασε «μάτι του ψαριού». Πρόκειται για ένα απέρατο διαθλαστικό μέσο με δείκτη διάθλασης που εξαρτάται μόνο από την απόσταση  $r$  ως ένα δεδομένο σημείο:

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + (r/R)^2},$$

όπου τα  $n_0$  και  $R$  είναι κάποιες σταθερές. Αποδεικνύεται ότι σε ένα τέτοιο μέσο κάθε φωτεινή ακτίνα διαγράφει κύκλο, ανεξαρτητως του σημείου από το οποίο εκπέμπεται ή της αρχικής της κατεύθυνσης.

Εκ πρώτης όψεως, όλα τούτα υπάγονται στην οπτική. Εντούτοις, τα ίδια φαινόμενα συναντά κανείς και στην ακουστική, επειδή η εξίσωση (1) περιγράφει μια γενική ιδιότητα των ακτίνων για κύματα πάσης φύσεως, οι οποίες κάμπτονται προς την περιοχή όπου η ταχύτητα διάδοσης του κύματος μειώνεται. Τις ηλιόλουστες μέρες η άμμος στις παραλίες θερμαίνεται εξαιρετικά, οπότε ο ήχος διαδίδεται στα γειτονικά της θερμά στρώματα αέρα με μεγαλύτερη ταχύτητα απ' ό,τι στα υψηλότερα στρώματα (η ταχύτητα του ήχου είναι ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα της θερμοκρασίας). Όπως και στην περίπτωση των οπτικών ψευδαισθήσεων, οι «ηχητικές ακτίνες» αποκλίνουν προς τα πάνω, με αποτέλεσμα στην «καυτή» παραλία οι φωνές να πνίγονται. Απεναντίας, το βράδυ το έδαφος ψύχεται πριν από τα υψηλότερα στρώματα του αέρα, και έτσι παρατηρείται το αντίθετο φαι-



νόμενο: οι ηχητικές ακτίνες που εκπέμπονται από κάπου ψηλά κάμπτονται προς τα κάτω —ο ήχος των βραδινών κωδωνοκρουσιών πραγματικά ακούγεται σε μεγάλες αποστάσεις στους αγρούς.


Ωστόσο, ενώ ο ήχος των νυχτερινών ασμάτων φτάνει πάρα πολύ μακριά, μπορεί κάλλιστα να μην ακούγεται κάπου κοντά. Κατά τις ιστορικές μάχες του μακρινού παρελθόντος, όπου περίσσευε η χλαπαταγή και η μάνητα, μερικές φορές επικρατούσαν τέτοιες ατμοσφαιρικές συνθήκες ώστε γύρω από το πεδίο της μάχης δημιουργούνταν «ζώνες σιγής». (Φυσικά, σ' αυτό το φαινόμενο συμβάλλουν και τα παρακείμενα νέφη καθώς και άλλοι παράγοντες οι οποίοι περιγράφονται στα εγχειρίδια ακουστικής.)

Για παράδειγμα, ο θόρυβος της μάχης του Βατερλώ ακουγόταν σε πολύ μεγάλες αποστάσεις, όχι όμως και στη γειτονική θέση όπου περίμενε ο στρατηγός του Μεγάλου Ναπολέοντα μαρκήσιος Ερμανουήλ ντε Γκρουσύ με τα στρατεύματά του. Δυστυχώς, ο στρατηγός δεν έσπευσε να σώσει τον αυτοκράτορά του. Έτσι, ένα ακουστικό φαινόμενο άλλαξε τον ρου της ευρωπαϊκής ιστορίας.

Όποιος μοχθεί για να μάθει φυσική, ποτέ δεν μετανιώνει για τις προσπάθειες και τους κόπους του: αυτή είναι μια γενική αλήθεια που ισχύει ακόμη και για τους στρατηγούς.

**Δείτε ακόμη τα άρθρα:**

- V. Vorobyov, «Τρικυμισμένες θάλασσες», Ιουλ./Αύγ. 1994.
- D. Tarasov, L. Tarasov, «Το παιχνίδι του φωτός», Ιουλ./Αύγ. 1996.
- L. Tarasov, «Η πράσινη αναλαμπή», Μάρ./Απρ. 1997.
- A. Varlamov, A. Malyshevsky, «Ωκεάνια τηλέφωνα», Μάρ./Απρ. 1998.
- V. Novoseltzen, «Ερμηνεύοντας τα θαύματα», Ιουλ./Αύγ. 1998.
- L.A. Ostrovsky, «Θαλάσσια κύματα», Ιαν./Φεβ. 1999.
- A. Eisenkraft, L.D. Kirkpatrick, «Τό 'χουν τα μάτια», Ιουλ./Αύγ. 1999.




**QUANTUM**

Το καλύτερο εκπαιδευτικό/επιστημονικό περιοδικό για τις φυσικές επιστήμες και τα μαθηματικά

ΦΥΣΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **κάτοπτρο**



**ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ**

Το Quantum εκδίδεται στα ελληνικά από τον Μάιο του 1994. Μέχρι σήμερα έχουν κυκλοφορήσει 37 τεύχη του. Αυτά, για όσο χρόνο θα υπάρχουν διαθέσιμα αντίτυπά τους, μπορείτε να τα προμηθεύσετε από τα βιβλιοπωλεία, από τα γραφεία ή το βιβλιοπωλείο του περιοδικού, ή με αντικαταβολή. Η τιμή τους είναι ίδια με αυτή του τρέχοντος τεύχους. Το Quantum είναι περιοδικό βιβλιοθήκης: φροντίστε να μη χάσετε κανένα τεύχος του.



[www.katoptro.gr](http://www.katoptro.gr)

# ΟΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΓΙΝΟΝΤΑΙ ΙΣΟΤΗΤΕΣ

Επίλυση προβλημάτων υπό ακραίες συνθήκες

A. Egorov

**Τ**Ο ΑΡΘΡΟ ΤΟΥ ΤΙΚΗΟΜΙΡΟΝ (ΣΕΛ. 44) ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΙ ΜΙΑ μάλλον διασκεδαστική κατάσταση: ένας πρώτης κατηγορίας μαθηματικός αδυνατεί να επιλύσει γρήγορα ένα πρόβλημα εισαγωγικών εξετάσεων. Αυτό συνέβη το 1973. Ένας άλλος αξιόλογος μαθηματικός μού είπε ότι έμαθε για το ίδιο ακριβώς πρόβλημα κάποια μέρα που θα αναχωρούσε από τη Μόσχα για το Βλαδιβοστόκ. Προσπάθησε να το λύσει κατά τη διάρκεια της οκτάωρης πτήσης του, αλλά δεν τα κατάφερε.

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι οι μαθηματικοί σπανίως ενδιαφέρονται για προβλήματα εξετάσεων. Συνεπώς, το γεγονός ότι ο υπογράφων ενδιαφέρθηκε για το πρόβλημα αντανακλά το ότι υπάρχει σε αυτό κάτι το ιδιαίτερο. Δυστυχώς, τα προβλήματα των εισαγωγικών εξετάσεων σπανίως έχουν ενδιαφέρον, ιδιαίτερα τα τελευταία 15 χρόνια.

Σε τούτο το άρθρο θα συζητήσουμε προβλήματα παρόμοια με το πολύ δύσκολο πρόβλημα που προαναφέραμε. Συνδέονται με διάφορα θέματα, τα οποία θα επισημαίνουμε στην πορεία.

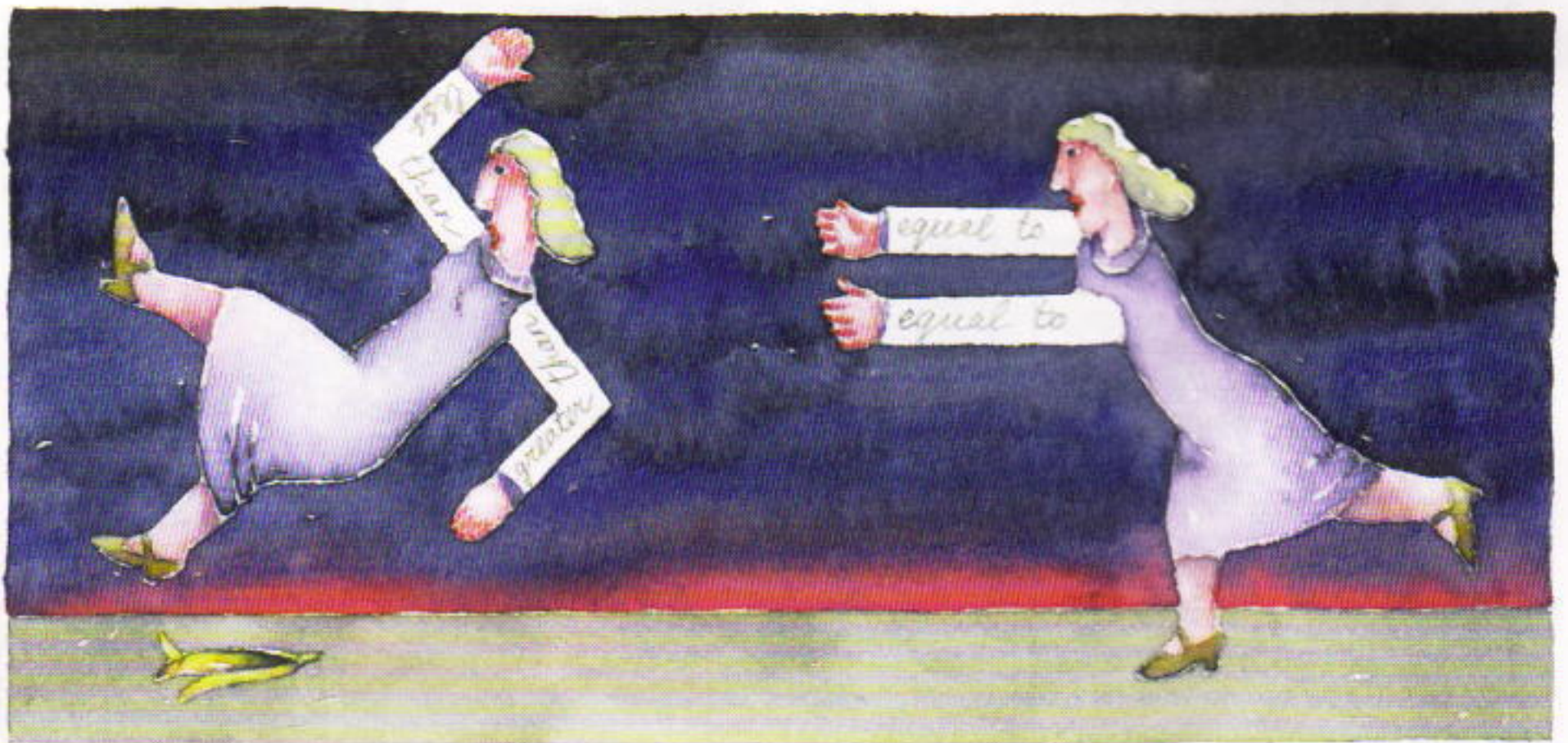
**Πρόβλημα 1.** Λύστε την εξίσωση

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x^2 - 4x + 6.$$

**Λύση.** Αν προσπαθήσουμε να βρούμε τη λύση με συμβατικές μεθόδους, δηλαδή να εξαλείψουμε τα ριζικά υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέλη της εξίσωσης, θα καταλήξουμε σε εξίσωση ογδόου βαθμού η οποία λύνεται εξαιρετικά δύσκολα. Ας προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε το επόμενο απλό γεγονός.

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης, το

$$y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$$



ορίζεται για  $1 \leq x \leq 3$  και έχει γράφημα συμμετρικό ως προς την κατακόρυφη ευθεία  $x = 2$ . Φαίνεται αρκετά πιθανό το σημείο  $x = 2$  να έχει κάποια ιδιαίτερη ιδιότητα. Ποια είναι αυτή; Στην πραγματικότητα, όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια, το αριστερό μέλος της εξίσωσης λαμβάνει το μέγιστό του σε αυτό ακριβώς το σημείο. Ας θεωρήσουμε το τετράγωνο του αριστερού μέλους της εξίσωσης:

$$y^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})^2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)}.$$

Η παράσταση αυτή λαμβάνει μέγιστη τιμή όταν το υπόρριζο πάρει τη μέγιστη τιμή του, δηλαδή για  $x = 2$ . Πράγματι,

$$(x-1)(3-x) = -3 + 4x - x^2 = 1 - (x-2)^2.$$

Επομένως, το αριστερό μέλος είναι μικρότερο ή ίσο του 2, και ισούται με 2 μόνο όταν  $x = 2$ . Όμως, το δεξιό μέλος της εξίσωσης είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2, διότι

$$x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2,$$

και ισούται με το 2 μόνο όταν  $x = 2$ . Άρα, το πρόβλημα λύθηκε.

**Απάντηση.**  $x = 2$ .

Στο προηγούμενο πρόβλημα ασχοληθήκαμε με δύο συναρτήσεις, η μία από τις οποίες έχει μέγιστο στο σημείο  $x = 2$  ενώ η άλλη έχει στο ίδιο σημείο το ελάχιστό της —το μέγιστο της μιας συμπίπτει με το ελάχιστο της άλλης. Σε τούτο το άρθρο θα εξετάσουμε προβλήματα αυτού του τύπου. Ας θεωρήσουμε το επόμενο κλασικό παράδειγμα.

**Πρόβλημα 2.** Να επιλυθεί η εξίσωση

$$\eta\mu^5 x + \sigma\upsilon\nu^3 x = 1.$$

**Λύση.** Όλες οι προσπάθειες λύσης με συμβατικές μεθόδους αποτυγχάνουν. Ας προσπαθήσουμε να γίνουμε μάντιες. Οι λύσεις για τις οποίες είτε  $\eta\mu x = 1$  είτε  $\sigma\upsilon\nu x = 1$  είναι προφανείς:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ και } x = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}, \text{ αντίστοιχα.}$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλες λύσεις. Προς τούτο, είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι για κάθε άλλο  $x$  το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι μικρότερο του 1.

Ας υποθέσουμε ότι  $\eta\mu x \neq 0, 1$  και  $\sigma\upsilon\nu x \neq 0, 1$ . Τότε,  $\eta\mu^5 x < \eta\mu^2 x$  και  $\sigma\upsilon\nu^3 x < \sigma\upsilon\nu^2 x$ . Επομένως,

$$\eta\mu^5 x + \sigma\upsilon\nu^3 x < \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1.$$

Για  $\eta\mu x = 0$  ή  $\sigma\upsilon\nu x = 0$  βρίσκουμε τις λύσεις που έχουμε ήδη μαντέψει.

**Απάντηση.**

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

Το επόμενο πρόβλημα είναι παρόμοιο με το Πρόβλημα 2.

**Πρόβλημα 3.** Να επιλυθεί το σύστημα των εξισώσεων (όπου  $n$  θετικός ακέραιος)

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x^{2n} + y^{2n} = 1. \end{cases}$$

**Λύση.** Από τη δεύτερη εξίσωση έπεται ότι  $|x| \leq 1$  και  $|y| \leq 1$ . Τότε, από την πρώτη εξίσωση έχουμε  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$ . Αν  $0 < x < 1$  και  $0 < y < 1$ , τότε  $x^{2n} + y^{2n} < x + y = 1$ . Επομένως, βρίσκουμε άμεσα τη λύση.

**Απάντηση.**  $(1, 0), (0, 1)$

Ιδού ένα άλλο παράδειγμα.

**Πρόβλημα 4.** Να επιλυθεί η ανισότητα

$$-x - y^2 - \sqrt{x - y^2 - 1} \geq -1.$$

**Λύση.** Αφού το υπόρριζο δεν μπορεί να είναι αρνητικό, διαπιστώνουμε ότι  $x \geq y^2 + 1$ . Δηλαδή,  $x > 1$  για  $y \neq 0$ . Συνεπώς,  $-x < -1$ , απ' όπου συνεπάγεται ότι το αριστερό μέλος της ανισότητας είναι μικρότερο από το δεξιό. Άρα,  $y = 0, x = 1$ .

**Απάντηση.**  $(1, 0)$

Ας εξετάσουμε τώρα ένα σύστημα εξισώσεων.

**Πρόβλημα 5.** Να επιλυθεί το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$$

**Λύση.** Εδώ έχουμε δύο εξισώσεις και τρεις αγνώστους. Ας εκφράσουμε το  $y$  συναρτήσει των  $z$  και  $x$ , και ας αντικαταστήσουμε στη δεύτερη εξίσωση:

$$\begin{aligned} y &= 2 - (x + z), \\ 2(2 - (x + z))x - z^2 &= 4, \\ 4x - 2x^2 - 2xz - z^2 &= 4. \end{aligned}$$

Επομένως,  $(x-2)^2 + (x+z)^2 = 0$ .

Από τη σχέση αυτή έπεται ότι  $x = 2, z = -x = -2$ , και άρα  $y = 2$ .

**Απάντηση.**  $(2, 2, -2)$ .

Άλλο ένα πρόβλημα όπου το πλήθος των αγνώστων υπερβαίνει το πλήθος των εξισώσεων.

**Πρόβλημα 6.** Να επιλυθεί η εξίσωση

$$2(x^4 - 2x^2 + 3)(y^4 - 3y^2 + 4) = 7.$$

**Λύση.** Κάθε παράγοντας στο αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο: το πρώτο ως προς  $x^2$  και το δεύτερο ως προς  $y^2$ . Εύκολα φαίνεται ότι οι παράγοντες παίρνουν την ελάχιστη τιμή τους για  $x^2 = 1$  και  $y^2 = 3/2$ , αντίστοιχα. Αν αντικαταστήσουμε, βλέπουμε ότι και οι δύο αυτές ελάχιστες τιμές είναι θετικές. Τούτο σημαίνει ότι και οι δύο παράγοντες είναι θετικοί για όλα τα  $x$  και  $y$ , και συνεπώς το γινόμενό τους παίρνει την ελάχιστη τιμή του όταν και οι δύο παράγοντες γίνουν ελάχιστοι. Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ότι το ελάχιστο αυτού του γινομένου είναι 7.

**Απάντηση.** Το πρόβλημα έχει τέσσερις λύσεις:

$$(\pm 1, \pm \sqrt{3/2}).$$

**Πρόβλημα 7.** Να επιλυθεί το σύστημα των ανισοτήτων

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 6y \leq 0, \\ y^2 - 2xy + 9 \leq 0. \end{cases}$$

**Λύση.** Αν προσθέσουμε τις ανισότητες, προκύπτει

$$(x - y)^2 - 6(x - y) + 9 \leq 0,$$

ή

$$(x - y - 3)^2 \leq 0.$$

Από την τελευταία ανισότητα έπεται ότι  $x - y = 3$ . Επίσης, όλες οι ανισότητες πρέπει να γίνουν ισότητες (αν οποιαδήποτε ανισότητα του συστήματος είναι γνήσια, τότε το άθροισμά τους θα είναι επίσης γνήσια ανισότητα, πράγμα αδύνατο, διότι ένα τετράγωνο δεν μπορεί να είναι αρνητικό). Συνεπώς,  $y = x - 3$  και  $x^2 - 6x + 6y = 0$ . Άρα

$$x = \pm 3\sqrt{2} \text{ και } y = -3 \pm 3\sqrt{2}.$$

**Απάντηση.**  $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2} - 3), (-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2} - 3)$

**Πρόβλημα 8.** Να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}(x - y)^2 - (x - y)^4} = y^2 - 2x^2, \\ y \geq 4x^4 + 4yx^2 + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

**Λύση.** Ορίζουμε  $t = (x - y)^2$ . Τότε, το αριστερό μέλος της πρώτης εξίσωσης μπορεί να γραφτεί ως

$$f(t) = \sqrt{\frac{1}{2}t - t^2}.$$

Το υπόριζο είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο που λαμβάνει μέγιστο στο  $t = 1/4$ . Επομένως, η μέγιστη τιμή του αριστερού μέλους ισούται με

$$\max f(t) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{16}} = \frac{1}{4}.$$

Αντικαθιστούμε τώρα την πρώτη εξίσωση με την ανισότητα (αυτό είναι το αποφασιστικό βήμα για τη λύση)

$$\frac{1}{4} \geq y^2 - 2x^2.$$

Αν προσθέσουμε αυτή την ανισότητα στη δεύτερη ανισότητα του συστήματος, παίρνουμε

$$y + \frac{1}{4} \geq 4x^4 + 4yx^2 + \frac{1}{2} + y^2 - 2x^2.$$

Αυτή η ανισότητα μπορεί να γραφτεί ως

$$0 \geq (2x^2 + y)^2 - (2x^2 + y) + \frac{1}{4},$$

ή

$$\left(2x^2 + y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0.$$

Από αυτό έπεται, πρώτον, ότι  $2x^2 + y - 1/2 = 0$ , και, δεύτερον, ότι όλες οι παραπάνω ανισότητες είναι στην πραγματικότητα ισότητες. Αν λάβουμε υπόψη ότι  $t = (x - y)^2 = 1/4$ , καταλήγουμε στο επόμενο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} y^2 - 2x^2 = \frac{1}{4}, \\ 2x^2 + y = \frac{1}{2}, \\ (x - y)^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Μπορούμε να λύσουμε αυτό το σύστημα αν, για παράδειγμα, λύσουμε τη δεύτερη εξίσωση ως προς  $y$ , αντικαταστήσουμε στην τρίτη εξίσωση και στη συνέχεια ελέγξουμε αν επαληθεύεται η πρώτη εξίσωση.

**Απάντηση.**  $(0, 1/2), (-1, -3/2)$ .

Ιδού ένα παρόμοιο πρόβλημα με παράμετρο.

**Πρόβλημα 9.** Βρείτε όλες τις τιμές του  $a$  για τις οποίες το επόμενο σύστημα εξισώσεων έχει μοναδική λύση:

$$\begin{cases} x \geq (y - a)^2, \\ y \geq (x - a)^2. \end{cases}$$

**Λύση.** Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι αν  $(x_0, y_0)$  είναι μια λύση του δεδομένου συστήματος, τότε η  $(y_0, x_0)$  είναι επίσης λύση του. Άρα, αν η λύση είναι μοναδική, τότε  $x_0 = y_0$ . Συνεπώς, η ανισότητα

$$x \geq (x - a)^2$$

και η ισοδύναμη ανισότητα

$$x^2 - (2a + 1)x + a^2 \leq 0$$

πρέπει επίσης να έχουν μοναδική λύση. Επομένως, η διακρίνουσα του δευτεροβάθμιου τριωνύμου στο αριστερό μέλος πρέπει να ισούται με μηδέν:

$$(2a + 1)^2 - 4a^2 = 0.$$

Άρα,  $a = -1/4$ .

Απομένει να επαληθεύσουμε ότι για  $a = -1/4$  το δεδομένο σύστημα έχει μοναδική λύση. Αντικαθιστούμε το  $a = -1/4$  στο σύστημα και προσθέτουμε τις ανισότητες. Καταλήγουμε στην ανισότητα

$$x + y \geq y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{16} + x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16},$$

η οποία ανάγεται στην

$$\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \leq 0.$$

Επομένως, η  $x = y = 1/4$  είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

**Απάντηση.**  $a = -1/4$ .

Τα επόμενα δύο προβλήματα μας ζητούν να προσδιορίσουμε το μέγιστο και το ελάχιστο συγκεκριμένων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Θα χρησιμοποιήσουμε επανειλημμένα την επόμενη αλγεβρική ανισότητα:

Αν  $A > 0$ , τότε

$$A + \frac{1}{A} \geq 2, \quad (1)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν  $A = 1$ .

**Απόδειξη.** Έχουμε

$$0 \leq \left( \sqrt{A} - \sqrt{\frac{1}{A}} \right)^2 = A + \frac{1}{A} - 2\sqrt{A \cdot \frac{1}{A}} = A + \frac{1}{A} - 2.$$

Από την τελευταία σχέση έπεται το αποτέλεσμα<sup>1</sup>. Επίσης έχουμε ισότητα όταν

$$A = \frac{1}{A}, \text{ δηλαδή } A^2 = 1, \text{ οπότε (αφού } A > 0) A = 1.$$

**Πρόβλημα 10.** Να επιλυθεί το επόμενο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{cases} \epsilon\varphi^2 x + \sigma\varphi^2 x = 2\eta\mu^2 y, \\ \eta\mu^2 y + \sigma\upsilon\nu^2 z = 1. \end{cases}$$

**Λύση.** Έστω  $\epsilon\varphi^2 x = t$ . Τότε,  $t > 0$ . Το αριστερό μέλος της πρώτης εξίσωσης είναι  $t^2 + 1/t^2$ , και επομένως (από τον τύπο (1)) είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2. Το δεξιό μέλος της εξίσωσης είναι μικρότερο ή ίσο του 2.

Άρα,

$$\epsilon\varphi^2 x = 1, \quad \eta\mu^2 y = 1, \quad \sigma\upsilon\nu^2 z = 0.$$

**Απάντηση.**

$$\left( \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{2}(2l + 1), \frac{\pi}{2}(2m + 1) \right), \quad k, l, m \in \mathbf{Z}.$$

**Πρόβλημα 11.** Να επιλυθεί η εξίσωση

$$\epsilon\varphi^4 x + \epsilon\varphi^4 y + 2\sigma\varphi^2 x \sigma\varphi^2 y = 3 + \eta\mu^2(x + y).$$

**Λύση.** Έστω  $a = \epsilon\varphi^2 x$  και  $b = \epsilon\varphi^2 y$ . Τότε, το αριστερό μέλος της εξίσωσης μπορεί να γραφτεί ως

$$a^2 + b^2 + \frac{2}{ab} = (a - b)^2 + 2ab + \frac{2}{ab} \geq (a - b)^2 + 4.$$

[Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα (1) για  $A = ab$ .] Επομένως, το αριστερό μέλος της ανισότητας ισούται τουλάχιστον με 4, και είναι 4 αν  $a = b$  και  $ab = 1$ . Όμως, το δεξιό μέλος είναι μικρότερο ή ίσο του 4, και ισούται με 4 μόνο αν  $\eta\mu^2(x + y) = 1$ . Συνεπώς, απομένει να λύσουμε το σύστημα

$$\eta\mu^2(x + y) = 1, \quad \epsilon\varphi^2 x = \epsilon\varphi^2 y, \quad \epsilon\varphi^2 x \epsilon\varphi^2 y = 1.$$

**Απάντηση.**

$$\left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2} \right),$$

όπου  $m + n$  είναι άρτιο και  $m, n \in \mathbf{Z}$ .

Σε μερικά προβλήματα απαιτείται ο μετασχηματισμός της παράστασης  $f(x) = a\eta\mu x + b\sigma\upsilon\nu x$  μέσω μιας βοηθητικής γωνίας. Ας θυμηθούμε πώς γίνεται αυτό. Γράφουμε την  $f(x)$  ως

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \eta\mu x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sigma\upsilon\nu x \right).$$

Θεωρούμε ένα σημείο με συντεταγμένες

$$\left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Το σημείο αυτό ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο. Επομένως, υπάρχει μια μοναδική γωνία  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  τέτοια ώστε

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = a/\sqrt{a^2 + b^2} \text{ και } \eta\mu\varphi = b/\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sigma\upsilon\nu\varphi \eta\mu x + \eta\mu\varphi \sigma\upsilon\nu x) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \eta\mu(x + \varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

Έχουμε συνεπώς την εκτίμηση

$$|a\eta\mu x + b\sigma\upsilon\nu x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (3)$$

ενώ η ισότητα ισχύει για κάθε  $x$  τέτοιο ώστε  $\eta\mu(x + \varphi) = 1$  ή  $\eta\mu(x + \varphi) = -1$ , δηλαδή για  $x = -\varphi \pm \pi/2 + 2k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ).

Νά και ένα πρόβλημα που χρησιμοποιεί αυτή τη μέθοδο.

**Πρόβλημα 12.** Να επιλυθεί η εξίσωση

$$\eta\mu 3x - 2\eta\mu 18x \eta\mu x = 3\sqrt{2} - \sigma\upsilon\nu 3x + 2\sigma\upsilon\nu x.$$

**Λύση.** Μετασχηματίζουμε τη δεδομένη εξίσωση ως

$$\eta\mu 3x + \sigma\upsilon\nu 3x - 2(\eta\mu 18x \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 3\sqrt{2}.$$

Λόγω της (3) έχουμε

$$|\eta\mu 3x + \sigma\upsilon\nu 3x| \leq \sqrt{2}$$

(εδώ  $a = 1$ ,  $b = 1$  και  $\varphi = \pi/4$ ).

Ομοίως,

$$2|\eta\mu 18x \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| \leq 2\sqrt{1 + \eta\mu^2 18x} \leq 2\sqrt{2}$$

(εδώ  $a = \eta\mu 18x$  και  $b = 1$ , και έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι  $\eta\mu 18x \leq 1$ ).

Από αυτές τις ανισότητες έπεται ότι το μέτρο του αριστερού μέλους είναι το πολύ  $3\sqrt{2}$ , και ισούται με  $3\sqrt{2}$  μόνο όταν  $\eta\mu^2 18x = 1$ , δηλαδή αν  $\eta\mu 18x = 1$  ή  $\eta\mu 18x = -1$ .

Οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να ισούται το αριστερό μέλος με το δεξιό είναι

1. Η ανισότητα αυτή αποτελεί στην πραγματικότητα ειδική περίπτωση της ανισότητας αριθμητικού/γεωμετρικού μέσου για δύο μεταβλητές.

$$\begin{cases} \eta\mu 3x + \sigma\upsilon\nu 3x = \sqrt{2}, \\ \eta\mu 18x = 1, \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}, \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} \eta\mu 3x + \sigma\upsilon\nu 3x = \sqrt{2}, \\ \eta\mu 18x = -1, \\ -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Ας λύσουμε το πρώτο σύστημα. Η τρίτη εξίσωση είναι η απλούστερη. Γι' αυτό το λόγο ας τη λύσουμε πρώτα και μετά θα ελέγξουμε ποιες από τις λύσεις της ικανοποιούν τις άλλες δύο εξισώσεις.

Για να λύσουμε την τρίτη εξίσωση χρησιμοποιούμε τη (2) και βρίσκουμε ότι

$$\sqrt{2} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Άρα,

$$\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

και, επομένως,

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

Γι' αυτά τα  $x$ ,

$$\eta\mu 3x + \sigma\upsilon\nu 3x = \eta\mu \frac{3\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} = 0.$$

Συνεπώς, το πρώτο σύστημα δεν έχει λύσεις.

Για το δεύτερο σύστημα έχουμε, κατ' αναλογία,

$$\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

και, επομένως,

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

Γι' αυτά τα  $x$ ,

$$\eta\mu 3x + \sigma\upsilon\nu 3x = \eta\mu \frac{9\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu \frac{9\pi}{4} = \sqrt{2}$$

και

$$\eta\mu 18x = \eta\mu \frac{27\pi}{2} = -1.$$

Άρα, τα εν λόγω  $x$  ικανοποιούν τη δεύτερη εξίσωση και, συνεπώς, και την αρχική.

**Απάντηση.**

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Τελειώνουμε εξετάζοντας ένα ακόμη πρόβλημα.

**Πρόβλημα 13.** Να επιλυθεί η εξίσωση

$$\left(\sqrt{3 - \epsilon\phi^2 \frac{3}{2}\pi x}\right) \eta\mu\pi x - \sigma\upsilon\nu\pi x = 2.$$

**Λύση.** Έστω

$$A = \sqrt{3 - \epsilon\phi^2 \frac{3}{2}\pi x}.$$

Εκτιμούμε το αριστερό μέλος της εξίσωσης:

$$|A\eta\mu\pi x - \sigma\upsilon\nu\pi x| \leq \sqrt{A^2 + 1} = \sqrt{4 - \epsilon\phi^2 \frac{3}{2}\pi x}.$$

Διαπιστώνουμε ότι το φράγμα αυτό είναι μικρότερο ή ίσο του 2, και ισούται με το 2 μόνο αν

$$\epsilon\phi^2 \frac{3}{2}\pi x = 0,$$

δηλαδή για

$$x = \frac{2n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (4)$$

Γι' αυτά τα  $x$ , η εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως

$$\sqrt{3}\eta\mu\pi x - \sigma\upsilon\nu\pi x = 2$$

(αντικαθιστούμε επίτηδες το  $x$  σε ορισμένες θέσεις αλλά όχι σε άλλες). Αν λύσουμε την τελευταία εξίσωση, βρίσκουμε

$$\eta\mu\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

ή

$$x = \frac{2}{3} + 2m, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Βάσει της (4) προκύπτει

$$\frac{2n}{3} = \frac{2}{3} + 2m,$$

ή

$$n = 3m + 1.$$

Συνεπώς,  $x = \frac{2}{3}(3m + 1)$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ .

**Απάντηση.**

$$\frac{2}{3} + 2m, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Ολοκληρώνουμε προσφέροντάς σας τις επόμενες ασκήσεις.

**Ασκήσεις**

1. Να επιλυθούν οι εξισώσεις και τα συστήματα που έπονται:

(α)  $\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x} = 3x^2 - 12x + 16,$

(β)  $\eta\mu^{13} 2x + \sigma\upsilon\nu^{12} 2x = 1,$

(γ)  $\eta\mu x + \eta\mu 9x = 2,$

(δ)  $\begin{cases} x + y + z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$

Η συνέχεια στη σελ. 77 ⇔

# Σχόλια στο φαινόμενο του βρασμού

Γκαζόζες, υπέρθερμα υγρά και θάλαμοι φυσαλίδων

A. Boronoi

**Π**ΩΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΕΙ ΕΝΑΣ ΘΑΛΑΜΟΣ ΦΥΣΑΛΙΔΩΝ; ΣΤΙΣ ΑΡΧΕΣ της δεκαετίας του 1950, ο Donald Arthur Glaser, ένας νεαρός επιστήμονας από το Πανεπιστήμιο του Μίσιγκαν, επινόησε μια πρωτότυπη διάταξη για την καταγραφή των στοιχειωδών σωματιδίων. Η διάταξη αυτή έγινε γνωστή ως θάλαμος φυσαλίδων.

Το Σχήμα 1 δείχνει έναν σύγχρονο θάλαμο φυσαλίδων. Πρόκειται για μια μάλλον μεγάλη εγκατάσταση που καταλαμβάνει ένα ολόκληρο κτίριο με αρκετούς ορόφους, εξοπλισμένη με εξαιρετικά εκλεπτυσμένες συσκευές και ελεγχόμενη από πανίσχυρους υπολογιστές. Στην εποχή μας, μάλιστα, πολλοί θάλαμοι φυσαλίδων έχουν και ονόματα, όπως Ludmila, Mirabelle και Gargamelle.

Εντούτοις, τα πρώτα μοντέλα θαλάμου φυσαλίδων που κατασκεύασε ο Glaser σε καμία περίπτωση δεν θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν «εντυπωσιακά» (Σχήμα 2). Το κύριο μέρος τους ήταν ένα φιαλίδιο γεμάτο με αιθέρα, ο όγκος του οποίου ανερχόταν σε μερικά μόλις κυβικά εκατοστά. Το υγρό θερμαινόταν και συμπιεζόταν στις 20 Atm ( $1 \text{ Atm} \cong 10^5 \text{ N/m}^2$ ). Με τη βοήθεια ενός απλού μηχανισμού μπορούσε να επιτευχθεί ταχεία μείωση της πίεσης. Σύμφωνα με τους νόμους της θερμοδυναμικής, μια τέτοια διαδικασία θα έχει ως αποτέλεσμα να οδηγηθεί το υγρό σε κατάσταση βρασμού.

Ωστόσο, ο βρασμός δεν μπορεί να αρχίσει αμέσως: ώς την έναρξη του βρασμού μεσολαβεί κάποιος λανθάνων χρόνος αναμονής. Εάν κάποιο φορτισμένο σωματίδιο συναντήσει στην πορεία του ένα τέτοιο υπερθερμασμένο (σε σχέση με το σημείο βρασμού) υγρό κατά τη διάρκεια του διαστήματος αυτού, θα αφήσει κατά μήκος της διαδρομής του ένα ίχνος από ιόντα, που η παρουσία τους επισημαίνεται από φυσαλίδες ατμού. Μπορούμε τότε να φωτογραφίσουμε το ίχνος του σωματιδίου και να αυξήσουμε την πίεση εκ νέου. Με την αύξηση της πίεσης οι φυσαλίδες συνθλίβονται, και ο θάλαμος είναι έτοιμος για την πραγματοποίηση νέας μέτρησης.

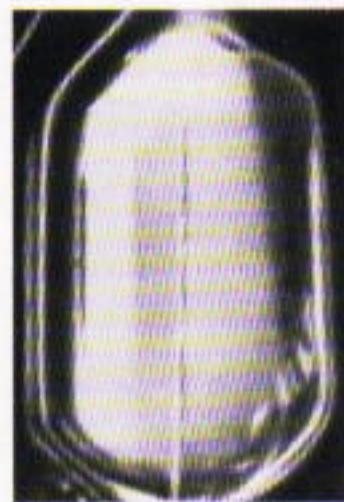
Οι θάλαμοι φυσαλίδων απέβησαν εξαιρετικά χρήσιμοι για τη μελέτη της φυσικής των στοιχειωδών σωματιδίων. Στο Σχήμα 3 βλέπετε μια φωτογραφία η οποία ελήφθη μέσα σε έναν τέτοιο θάλαμο. Εύλογα ανακύπτει το ερώτημα: *Γιατί οι φυσαλίδες εμφανίστηκαν ακριβώς κατά μήκος της τροχιάς του σωματιδίου;*

Οι θάλαμοι φυσαλίδων απέβησαν εξαιρετικά χρήσιμοι για τη μελέτη της φυσικής των στοιχειωδών σωματιδίων. Στο Σχήμα 3 βλέπετε μια φωτογραφία η οποία ελήφθη μέσα σε έναν τέτοιο θάλαμο. Εύλογα ανακύπτει το ερώτημα: *Γιατί οι φυσαλίδες εμφανίστηκαν ακριβώς κατά μήκος της τροχιάς του σωματιδίου;*



Σχήμα 1

Ο θάλαμος φυσαλίδων υγρού υδρογόνου «Mirabelle» αποτελεί βασικό εργαλείο στο Ερευνητικό Ινστιτούτο Φυσικής Υψηλών Ενέργειών.



Σχήμα 2

Τροχιά φορτισμένου στοιχειώδους σωματιδίου που κατεγράφη στο θάλαμο φυσαλίδων του Glaser.



Σχήμα 3

Φωτογραφία μιας διαδικασίας αλληλεπίδρασης και μετατροπής σωματιδίων σε θάλαμο φυσαλίδων υγρού υδρογόνου.

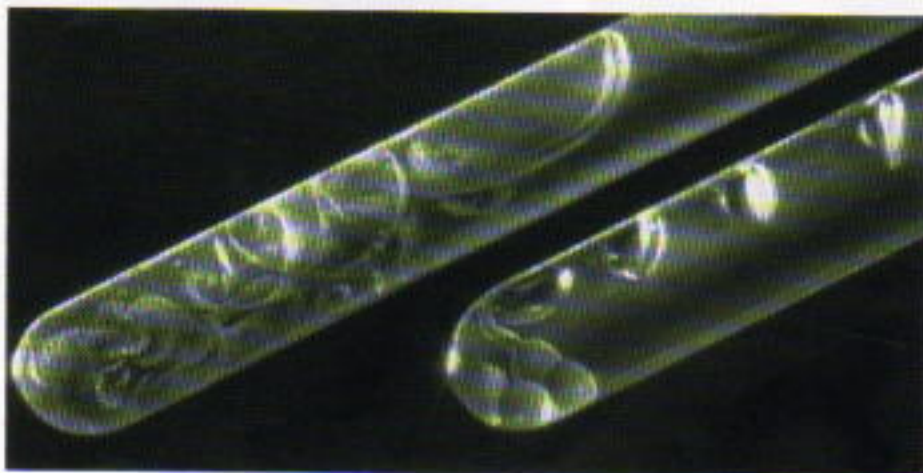
## Ας ξαναθυμηθούμε τη φυσική του βρασμού

Τα εγχειρίδια φυσικής μάς πληροφορούν ότι ο βρασμός είναι η διαδικασία σχηματισμού φυσαλίδων σε ολόκληρο τον όγκο υγρού, οι οποίες μεγαλώνουν και ανέρχονται στην επιφάνεια. Προφανώς, στο εσωτερικό των φυσαλίδων επικρατεί πίεση μεγαλύτερη απ' ό,τι στο υγρό —σε αντίθετη περίπτωση, οι φυσαλίδες θα συνθλιβόνταν. Όπως γνωρίζουν οι πάντες, υπό κανονική ατμοσφαιρική πίεση το νερό βράζει στους 100°C. Σ' αυτήν ακριβώς τη θερμοκρασία η τάση των κορεσμένων υδρατμών γίνεται αρκετά μεγάλη ώστε να παραχθούν φυσαλίδες, και έτσι το νερό αρχίζει να βράζει. Αλλά έχουν όντως έτσι τα πράγματα, και βράζει πάντοτε ένα υγρό υπό τέτοιες συνθήκες;

Ας πάρουμε δύο δοκιμαστικούς σωλήνες. Τον έναν από αυτούς τον ξεπλένουμε πολύ προσεκτικά. Ο συγκεκριμένος δοκιμαστικός σωλήνας δεν πρέπει να φέρει χαράγματα ούτε να περιέχει ίχνη ξένων ουσιών. Τον γεμίζουμε με αποσταγμένο νερό (περίπου 10 cm<sup>3</sup>). Από την άλλη, ο δεύτερος δοκιμαστικός σωλήνας δεν πρέπει να είναι ιδιαίτερα καθαρός. Τον γεμίζουμε με την ίδια ποσότητα νερού από τη βρύση και ρίχνουμε μέσα ένα κομμάτι κιμωλίας. Θερμαίνουμε και τους δύο δοκιμαστικούς σωλήνες υπό ταυτόσημες συνθήκες, αποφεύγοντας να τους φέρουμε σε άμεση επαφή με τη φλόγα. Όπως αποδεικνύεται, στους δύο αυτούς σωλήνες το νερό βράζει με εντελώς διαφορετικό τρόπο (Σχήμα 4).

Στον δοκιμαστικό σωλήνα που περιέχει το νερό της βρύσης ο βρασμός αρχίζει νωρίτερα και είναι μια ήσυχη και συνεχής διαδικασία. Κατά κανόνα, οι φυσαλίδες παράγονται πάνω στην επιφάνεια της κιμωλίας. Στον δοκιμαστικό σωλήνα με το αποσταγμένο νερό, αντίθετα, ο βρασμός αρχίζει αργότερα (σε υψηλότερη θερμοκρασία) και εξελίσσεται κάπως ανώμαλα. Πότε πότε εμφανίζονται μεγάλες φυσαλίδες, που τόσο ο σχηματισμός τους όσο και η διάρρηξή τους συνοδεύονται από δυνατά τριξίματα.

Εάν χρησιμοποιήσουμε νερό διπλής απόσταξης, είναι δυνατόν να επιτύχουμε τέτοια καθαρότητα του νερού και των γυάλινων σκευών (των αποστακτήρων, των φια-



Σχήμα 4

Η διαδικασία του βρασμού πραγματοποιείται τελείως διαφορετικά σε δύο δοκιμαστικούς σωλήνες που ο ένας περιέχει αποσταγμένο νερό και ο άλλος νερό της βρύσης.

λών και των δοκιμαστικών σωλήνων) ώστε ο βρασμός να μην αρχίζει προτού η θερμοκρασία ανέλθει στους 140°C. Το νερό σε τέτοια κατάσταση ονομάζεται υπέρθερμο. Είναι εξαιρετικά επικίνδυνο: ακόμη και ένας κόκκος να πέσει μέσα του, το νερό θα αρχίσει να βράζει ασυγκράτητα. Ο λόγος έγκειται στο ότι οι φυσαλίδες παράγονται με εξαιρετικά υψηλό ρυθμό.

Οι χημικοί γνωρίζουν πολύ καλά αυτή την επικίνδυνη ιδιότητα των υγρών. Για να προστατεύονται από τις λεγόμενες εκτινάξεις και να εξασφαλίζουν μια ήρεμη και ομοιογενή διαδικασία βρασμού, τοποθετούν στο δοχείο όπου βράζει το υγρό τους λεγόμενους πυρήνες βρασμού (κομμάτια γυαλιού και σωλήνες πορσελάνης, ή θραύσματα μαρμάρου).

Τα εντυπωσιακά χαρακτηριστικά του βρασμού που μόλις περιγράψαμε εξηγούνται αν λάβουμε υπόψη την επιφανειακή τάση του υγρού. Μπορούμε να φανταστούμε την επιφάνεια του υγρού σαν ένα τεντωμένο ελαστικό υμένιο. Ένα τέτοιο υμένιο «θέλει» να συσταλεί, οπότε η επιφανειακή τάση προσπαθεί να συνθλίψει κάθε σχηματιζόμενη φυσαλίδα. Όσο μικρότερη είναι η ακτίνα της φυσαλίδας τόσο υψηλότερη γίνεται η υπερπίεση που οφείλεται στην επιφανειακή τάση,<sup>1</sup> η οποία καταστέλλει το βρασμό εν τη γενέσει του. Έτσι εξηγείται γιατί ένα καθαρό ομογενές υγρό μπορεί να υπερθερμανθεί. Ταυτοχρόνως δε, εξηγείται και γιατί η ετερογένεια του ίδιου του υγρού ή η παρουσία ξένων σωμάτων εντός του διευκολύνουν το βρασμό.

Εν προκειμένω, τέτοιες ζώνες ετερογένειας δημιουργούνται κατά μήκος της τροχιάς ενός φορτισμένου σωματιδίου, με αποτέλεσμα το σχηματισμό φυσαλίδων που υποδεικνύουν την πορεία του. Καθίσταται λοιπόν προφανές το γιατί η ομοιογένεια του αιθέρα και η καθαρότητα και η λειότητα του φιαλιδίου αποτελούν τις πλέον σημαντικές συνθήκες για τη λειτουργία του θαλάμου φυσαλίδων του Glaser.

### Μερικές ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις

Τέτοιες παρατηρήσεις είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν με συνηθισμένο αεριούχο νερό, το οποίο ενίοτε παρουσιάζει συμπεριφορά όμοια με εκείνη του υπέρθερμου υγρού. Τούτο το γεγονός εγείρει το ακόλουθο ερώτημα: *Γιατί και υπό ποιές συνθήκες μπορεί το αεριούχο νερό να χρησιμεύσει ως μοντέλο ενός υπέρθερμου υγρού;*

Για τα πειράματά μας θα χρειαστούμε ένα μπουκάλι γκαζόζα, ένα ποτήρι, ένα κουταλάκι του γλυκού, ζάχαρη και ένα κομμάτι σοκολάτα (εν πάση περιπτώσει, ένα πείραμα όπου χρησιμοποιούνται τέτοια υλικά δεν μπορεί παρά να έχει και μερικά ευχάριστα παρεπόμενα). Αρ-

1. Η υπερπίεση που δημιουργεί στο εσωτερικό της φυσαλίδας η επιφανειακή τάση υπολογίζεται από τον τύπο  $P = 2a/r$ , όπου με  $a$  συμβολίζεται ο συντελεστής επιφανειακής τάσης του υγρού και με  $r$  η ακτίνα της φυσαλίδας. Η ίδια πίεση ασκείται και στο υγρό που περιέχεται σε έναν τριχοειδή σωλήνα ακριβώς κάτω από την κυρτή ημισφαιρική ελεύθερη επιφάνειά του (η οποία αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως μηνίσκος).



χίζουμε την έρευνά μας ανοίγοντας γρήγορα το μπουκάλι με το αεριούχο νερό. Ακαριαία, ένα αραιό συννεφάκι καπνού εμφανίζεται πάνω από το λαιμό του μπουκαλιού. Γιατί άραγε να συμβαίνει κάτι τέτοιο;

Ρίχνουμε τώρα το αεριούχο νερό στο ποτήρι και περιμένουμε ώσπου να εξαφανιστεί ο αφρός, οπότε πια θα βλέπουμε μόνο μεμονωμένες φυσαλίδες να ανέρχονται μέσα στο νερό. Βάζουμε ένα εφαρμοστό σκέπασμα πάνω στο ποτήρι και το κλείνουμε όσο το δυνατόν πιο ερμητικά. Έπειτα από λίγο, ο σχηματισμός φυσαλίδων σταματά. Αν ξεσκεπάσουμε το ποτήρι, οι φυσαλίδες κάνουν εκ νέου την εμφάνισή τους. *Γιατί;*

Ρίχνουμε μια πρέζα ζάχαρη στο ποτήρι. Ο «βρασμός» του αεριούχου νερού εντείνεται, και στην επιφάνειά του παρουσιάζεται και πάλι αφρός. Προφανώς, το νερό περιείχε ακόμη αρκετό διοξείδιο του άνθρακα. *Τι εμπόδιζε την απελευθέρωσή του προηγουμένως, και γιατί προκάλεσε αυτή τη διαδικασία η κρυσταλλική ζάχαρη;* Ας προσθέσουμε παρεμπιπτόντως ότι υπάρχουν και άλλοι τρόποι για να προκαλέσουμε το σχηματισμό αφρού —για παράδειγμα, αναδεύοντας το νερό ή μεταγγίζοντάς το από το ένα ποτήρι στο άλλο.

Μπορούμε να εκτελέσουμε μια θεαματική επίδειξη ρίχνοντας ένα μικρό κομμάτι σοκολάτα μέσα σε ένα ποτήρι γεμάτο με αεριούχο νερό. Εφόσον η σοκολάτα έχει μεγαλύτερη πυκνότητα από το νερό, θα βυθιστεί γρήγορα στον πυθμένα του ποτηριού. Εκεί καλύπτεται με ένα παχύ στρώμα φυσαλίδων, οι οποίες, δρώντας ως πλωτήρες, σηκώνουν το βυθισμένο κομμάτι της σοκολάτας. Όταν εκείνο φτάσει πια στην επιφάνεια, οι φυσαλίδες σκάζουν και το αέριο εκλύεται στον αέρα, οπότε η σοκολάτα βυθίζεται εκ νέου. Ενίοτε αυτός ο κύκλος βύθισης-ανάδυσσης επαναλαμβάνεται και δέκα φορές.

## Πώς μπορεί να απαντηθούν τούτα τα ερωτήματα;

Ουσιαστικά, όλα αυτά τα ερωτήματα είναι δυνατόν να αναχθούν στο αρχικό πρόβλημα: Γιατί η συμπεριφορά του αεριούχου νερού παρουσιάζει ομοιότητες με εκείνη ενός υπέρθερμου υγρού;

Πιθανόν να γνωρίζετε πώς μπορεί να παρασκευαστεί στο σπίτι νερό εμπλουτισμένο με διοξείδιο του άνθρακα. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την προσαρμογή ενός μικρού μπαλονιού γεμάτου με διοξείδιο του άνθρακα ( $\text{CO}_2$ ) πάνω στο στόμιο ενός δοκιμαστικού σωλήνα γεμάτου με νερό. Για να επιταχυνθεί η διάλυση του διοξειδίου του άνθρακα, ο σωλήνας πρέπει να αναταράσσεται δυνατά. Το αέριο συνεχίζει να διαλύεται στο νερό ώσπου να αποκατασταθεί η ισορροπία. Αν θεωρήσουμε ότι το συγκεκριμένο αέριο δεν αντιδρά χημικώς με το νερό,<sup>2</sup> στην κατάσταση ισορροπίας η περιεκτικότητα του διαλύματος

2. Στην περίπτωση του διοξειδίου του άνθρακα και του νερού, η όλη διαδικασία περιπλέκεται κάπως, επειδή οι συγκεκριμένες ουσίες όντως αντιδρούν χημικώς μεταξύ τους. Ωστόσο, το παραγόμενο οξύ είναι ασταθές και διασπάται πολύ σύντομα.

(δηλαδή η συγκέντρωσή του εκφρασμένη μέσω του γραμμομοριακού κλάσματος της διαλυμένης ουσίας) θα είναι ανάλογη προς τη (μερική) πίεση του αερίου πάνω από την επιφάνεια του διαλύματος. Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι για την παρασκευή αεριούχου νερού στο σπίτι με τη βοήθεια χυμού λεμονιού ή σόδας, κ.ο.κ.

Εάν ανοίξουμε γρήγορα ένα μπουκάλι αεριούχο νερό, το συμπιεσμένο αέριο που βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια του υγρού εκτονώνεται ταχέως και ψύχεται. Οι υδρατμοί που απελευθερώνονται μαζί με το αέριο θα συμπυκνωθούν και θα σχηματίσουν ένα θολό νέφος. Αφού η πίεση πάνω από το υγρό μειωθεί αισθητά, το διαλελυμένο διοξείδιο του άνθρακα εκλύεται από το νερό με δύο τρόπους: διά της διαχωριστικής επιφάνειας νερού-αερίου, αφ' ενός, και υπό μορφή φυσαλίδων που σχηματίζονται μέσα στον όγκο του νερού, αφ' ετέρου.

Αμέσως μετά το άνοιγμα του μπουκαλιού, όταν έχουμε τη μέγιστη διαταραχή της ισορροπίας και όταν το νερό περιέχει διοξείδιο του άνθρακα σε μεγάλη περίσσεια, οι φυσαλίδες παράγονται εύκολα και σε μεγάλους αριθμούς. Ως εκ τούτου, στην επιφάνεια του υγρού εμφανίζεται αφρός. Βαθμηδόν ο αφρός εξαφανίζεται, μολονότι στο νερό παραμένει κάποια «πλεονάζουσα» ποσότητα αερίου. Ωστόσο, ο σχηματισμός φυσαλίδων ανακόπτεται τώρα επειδή η συγκέντρωση του αερίου έχει μειωθεί σημαντικά, και επομένως η πιθανότητα να συγκεντρωθούν τα μόρια του αερίου και να σχηματίσουν φυσαλίδες είναι εξαιρετικά μικρή. Οι φυσαλίδες εμφανίζονται και μεγαλώνουν πλέον μόνο στις περιοχές ετερογένειας του νερού, και αυτή η διαδικασία μοιάζει πάρα πολύ με το βρασμό του υπέρθερμου νερού. Έπειτα από την ανάλυση που παρουσιάσαμε, ελπίζουμε ότι οι αναγνώστες μας δεν θα δυσκολευτούν να εξηγήσουν όλα τα υπόλοιπα πειράματα.

## Μια αναπάντεχη εφαρμογή του αεριούχου νερού

Το άρθρο μας άρχισε με μια ιστορία σχετικά με το θάλαμο φυσαλίδων. Προτιθέμεθα να το ολοκληρώσουμε με μία ακόμη ιστορία, η οποία αναφέρεται επίσης σε μια εφαρμογή των φυσαλίδων —και πάλι στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων.

Πριν από μερικά χρόνια, οι σοβιετικοί φυσικοί που διερευνούσαν τις ιδιότητες των νετρίνων βρέθηκαν αντιμέτωποι με ένα εξαιρετικά δυσεπίλυτο πρόβλημα. Ήταν ανάγκη να εξαγάγουν μερικά άτομα αερίου το οποίο σχηματιζόταν μέσα σε έναν μεγάλο όγκο υγρού (μερικές εκατοντάδες λίτρα) ως αποτέλεσμα συγκρούσεων με νετρίνα. Το συγκεκριμένο αέριο (νέον-23) είναι ραδιενεργό και ιδιαίτερα ασταθές: τα άτομά του διασπώνται σε λιγότερο από ένα λεπτό. Έτσι, οι σοβιετικοί φυσικοί χρειαζόταν να εντοπίσουν 5-10 άτομα νέου ανάμεσα στα  $10^{28}$  άτομα του υγρού, να τα εξαγάγουν από το υγρό, να τα μεταφέρουν σε έναν απαριθμητή και τελικά να τα με-

Η συνέχεια στη σελ. 77 ⇨

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

## Μαθηματικά

M181

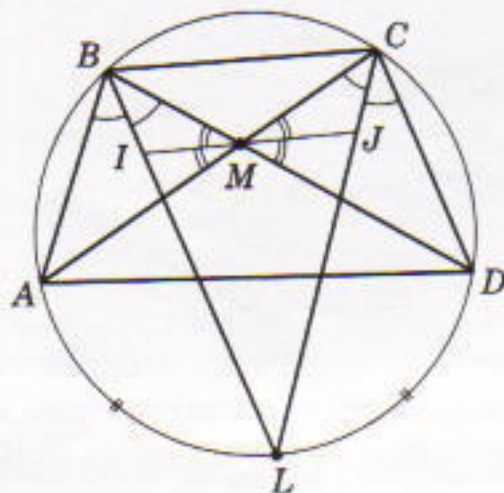
Έστω  $I, J$  τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων  $ABM$  και  $CDM$ , αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 1). Καταρχάς, παρατηρούμε ότι τα σημεία  $I, M$  και  $J$  είναι συγγραμμικά.

Πράγματι,  $I$  είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου  $ABM$ , και επομένως η  $IM$  διχοτομεί τη  $\angle BMA$ , και άρα την κατακορυφήν της  $\angle CMD$ . Συμπίπτει λοιπόν με τη  $MJ$ .

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το τρίγωνο  $IJL$  είναι ισοσκελές. Η  $\angle LIM$  είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου  $IBM$ , και επομένως  $\angle LIM = \angle IMB + \angle IBM$ . Ομοίως (από το τρίγωνο  $CMJ$ ), έχουμε ότι  $\angle LJM = \angle CMJ + \angle MCJ$ . Όμως,  $\angle IMB = \angle DMJ = \angle CMJ$  και  $\angle IBM = \angle MCJ$  (βαίνουν σε ίσα τόξα του κύκλου). Άρα,  $\angle LIJ = \angle LJI$ , και η πρόταση αποδείχθηκε.

M182

Ο χρόνος καθυστέρησης αρχίζει από τη στιγμή που ο μαθηματικός ρίχνει το ραβδί στο νερό. Θα μπορούσαμε να τον υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας άμεσες αλγεβρικές μεθόδους, αλλά ο υπολογισμός θα γίνει



Σχήμα 1

ευκολότερα αν χρησιμοποιήσουμε ένα από τα τεχνάσματα των φυσικών. Ας θεωρήσουμε όλα τα γεγονότα από την πλευρά κάποιου που πλέει ακολουθώντας το ρεύμα του ποταμού. Δηλαδή, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα αναφοράς που κινείται μαζί με το νερό. Για αυτό το σύστημα αναφοράς, το καπέλο και το ραβδί μένουν ακίνητα αλλά ο μαθηματικός (και το σπίτι του!) κινούνται αντίθετα προς το ρεύμα (σαν να βρίσκονταν πάνω σε έναν ιμάντα μεταφοράς).

Μπορούμε να χωρίσουμε τον χαμένο χρόνο σε τρία μέρη: (α) το χρόνο που χάθηκε όσο ο μαθηματικός περπατούσε στην ίδια κατεύθυνση με το ρεύμα, από το ραβδί πίσω προς το καπέλο, (β) το χρόνο που χάθηκε όσο περπατούσε αντίθετα προς το ρεύμα, από το καπέλο μέχρι το ραβδί, και (γ) το χρόνο που χάθηκε επειδή το σπίτι μετακινήθηκε «πάνω στον ιμάντα μεταφοράς» στη διάρκεια όλων αυτών των γεγονότων.

Ας υποθέσουμε ότι η ταχύτητα του ρεύματος είναι  $v$  (μέτρα ανά λεπτό). Τότε, ο μαθηματικός περπατά αντίθετα προς την κατεύθυνση του ρεύματος με ταχύτητα  $1,5v$ . Σε αυτή την ταχύτητα πρέπει να προσθέσουμε την ταχύτητα του ιμάντα μεταφοράς. Επομένως, από τη δική μας άποψη, περπατά αντίθετα προς το ρεύμα με ταχύτητα  $2,5v$ . Όταν επιστρέφει για να βρει το καπέλο του, τρέχει με ταχύτητα  $3v$ , από την οποία πρέπει τώρα να αφαιρέσουμε την ταχύτητα του ρεύματος (τρέχει προς την ίδια κατεύθυνση με το ρεύμα). Άρα, η ταχύτητά του είναι  $2v$ .

Σε ό,τι αφορά το μέρος (β), γνωρίζουμε ότι περπατώντας αντίθετα προς το ρεύμα χρειάστηκε  $10$  λεπτά για να καλύψει την απόσταση μεταξύ του ραβδιού και του καπέλου.

Στο μέρος (α), η απόσταση που διήνυσε είναι ίδια με αυτή στο μέρος

(β) (αφού το καπέλο και το ραβδί παραμένουν στάσιμα). Πόσο χρόνο θα χρειαστεί κινούμενος με ταχύτητα  $2,5v$ ; Έχουμε ότι  $10 \cdot 2,5v = t \cdot 2v$ , και επομένως  $t = 12,5$  λεπτά. Συνεπώς, τα μέρη (α) και (β) μας δίνουν  $22,5$  λεπτά χαμένου χρόνου.

Για το μέρος (γ), παρατηρούμε ότι το σπίτι «διήνυσε»  $22,5v$  μέτρα κατά το διάστημα που διήρκεσαν οι διαδικασίες (α) και (β). Ο μαθηματικός κινείται  $1,5v$  ταχύτερα από το σπίτι, και επομένως καλύπτει αυτή την απόσταση σε  $22,5/1,5 = 15$  λεπτά.

Άρα, ο μαθηματικός έχασε συνολικά  $37,5$  λεπτά.

Μπορεί να σας φανεί διασκεδαστικό να προσπαθήσετε να τα βρείτε όλα αυτά με τη συμβατική άλγεβρα. Η βασική ιδέα που κρύβεται στο τέχνασμα του φυσικού είναι ότι η απόσταση μεταξύ του ραβδιού και του καπέλου, από τη στιγμή που βρίσκονται στο ποτάμι, δεν αλλάζει.

M183

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι και ο αριθμητής και ο παρονομαστής διαιρούνται με το  $111\dots111$ , τον αριθμό που αποτελείται αποκλειστικά από  $1$  και περιέχει τόσες μονάδες όσο είναι το πλήθος των  $1$  στον αριθμητή ή τον παρονομαστή του δεδομένου κλάσματος. Για να απλοποιήσουμε τη λύση θα εξετάσουμε την περίπτωση που ο αριθμητής και ο παρονομαστής περιέχουν από δέκα  $1$ .

Σε αυτή την περίπτωση, ο παρονομαστής είναι  $11001111110011$  και μπορεί να γραφτεί ως (ομαδοποιούμε τα ψηφία για να είναι ευανάγνωστοι οι αριθμοί):

$$\begin{array}{r} 11\ 111\ 111\ 110\ 000 \\ +\ 1\ 111\ 111\ 111 \\ -\ 111\ 111\ 111\ 100. \end{array}$$

(Οι αναγνώστες μπορούν να επαληθεύσουν ότι ισχύει πράγματι αυτή η

σχέση.) Το συγκεκριμένο άθροισμα ισούται με:

$$(1\ 111\ 111\ 111)(10\ 000 + 1 - 100) = (1\ 111\ 111\ 111)(9901).$$

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε ανάλογα τον αριθμητή και να βρούμε ότι ισούται με:

$$\begin{array}{r} 11\ 111\ 111\ 110\ 000 \\ +\ 111\ 111\ 111\ 100 \\ +\ 1\ 111\ 111\ 111 \\ -\ 1\ 111\ 111\ 111\ 100 \\ -\ 11\ 111\ 111\ 110, \end{array}$$

που γράφεται ως

$$(1\ 111\ 111\ 111)(9091).$$

Συνεπώς, το αρχικό κλάσμα ισούται με 9091/9901. Το ίδιο ισχύει και για κάθε άλλο παρόμοιο κλάσμα, όσα και αν είναι τα 1.

### M184

Έστω  $M(t, t^2)$ , όπου  $t > 0$ , ένα σημείο της παραβολής  $y = x^2$  (Σχήμα 2). Η κλίση της εφαπτομένης σε αυτό το σημείο είναι  $2t$ , η κλίση της κάθετης είναι  $-1/(2t)$ , και η εξίσωση της κάθετου είναι

$$y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}.$$

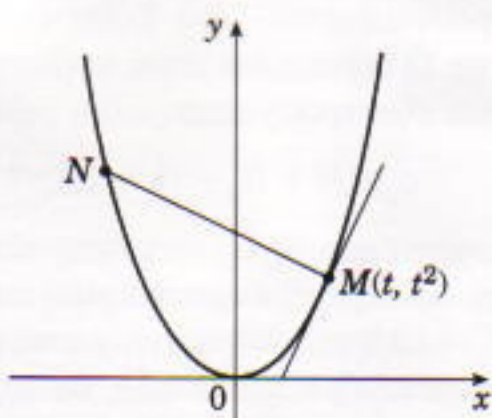
Ας βρούμε το δεύτερο σημείο τομής της κάθετου  $N$  με την παραβολή  $y = x^2$ . Έχουμε την εξίσωση

$$x^2 = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}.$$

Μία ρίζα αυτής της εξίσωσης αντιστοιχεί στο σημείο  $M$ :  $x_1 = t$ . Το άθροισμα των ριζών είναι  $(1/2)t$ , και επομένως η δεύτερη ρίζα ισούται με

$$x_2 = -t - \frac{1}{2t}.$$

Το εμβαδόν του χωρίου είναι



Σχήμα 2

$$\begin{aligned} S &= \int_{-t - \frac{1}{2t}}^t \left( -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2} - x^2 \right) dx \\ &= -\frac{1}{2t} \cdot \frac{x^2}{2} + \left( t^2 + \frac{1}{2} \right) x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-t - \frac{1}{2t}}^t \\ &= \frac{4}{3}t^3 + t + \frac{1}{4t} + \frac{1}{48t^3} = \frac{4}{3} \left( t + \frac{1}{4t} \right)^3. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση αυτή του  $t$  παίρνει την ελάχιστή της τιμή στο σημείο  $t = 1/2$ , και η ίδια η ελάχιστη τιμή είναι  $4/3$ .

### M185

Στο Σχήμα 3,  $AB = BC = a$ ,  $AC = 2b$  και  $h$  είναι το ύψος του τριγώνου. Αν λάβουμε υπόψη ότι οι εφαπτόμενες που φέρουμε από ένα σημείο προς έναν κύκλο είναι ίσες, θα βρούμε ότι  $AL = AQ$ ,  $BQ = BK$  και  $OL = OK$ . Άρα,  $OL + BQ = OK + KB = OB$ . Επομένως,  $(AO - AL) + (AB - AQ) = OB$ . Αφού  $AL = AQ$ , έχουμε

$$AQ = \frac{1}{2}(AO + AB - OB)$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$CM = \frac{1}{2}(BO + CB - OC)$$

Οπότε,

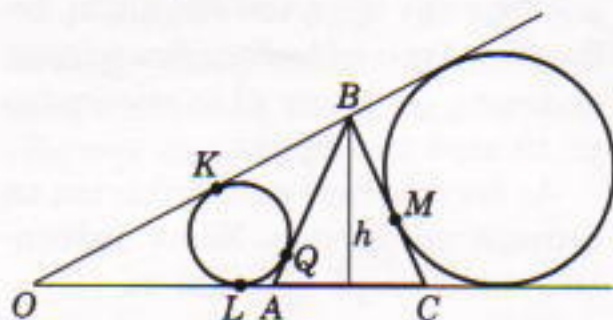
$$\begin{aligned} AQ + CM &= \frac{1}{2}(AO + AB + BC - OC) \\ &= \frac{1}{2}(2AB - AC) = a - b. \end{aligned}$$

Αν  $r$  και  $R$  είναι οι ακτίνες, τότε

$$\frac{r}{AQ} = \frac{R}{CM} = \operatorname{εφ} \frac{1}{2}(180^\circ - \varphi) = \operatorname{εφ} \frac{\varphi}{2},$$

όπου  $\varphi$  είναι η παρά τη βάση γωνία του ισοσκελούς τριγώνου  $ABC$ . Επομένως,

$$\frac{r + R}{AQ + CM} = \operatorname{σφ} \frac{\varphi}{2},$$



Σχήμα 3

ή

$$\frac{r + R}{a - b} = \operatorname{σφ} \frac{\varphi}{2} = \frac{\eta\mu\varphi}{1 - \operatorname{συν}\varphi} = \frac{h/a}{1 - (b/a)} = \frac{h}{a - b},$$

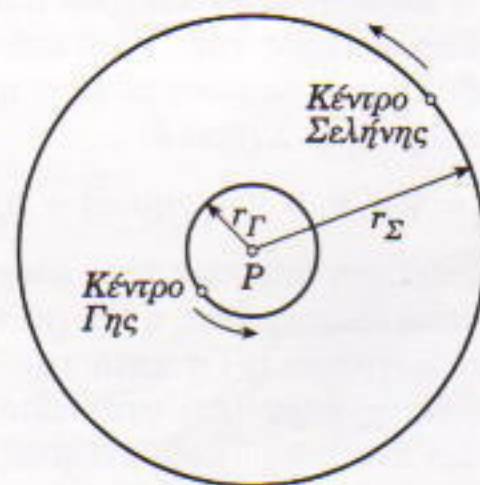
οπότε  $r + R = h$ . Άρα,  $h = 1$ .

## Φυσική

### Φ181

Η αμοιβαία βαρυτική έλξη ανάμεσα στη Γη και τη Σελήνη έχει ως αποτέλεσμα να περιφέρονται αμφότερες γύρω από το σημείο  $P$  (Σχήμα 4), το οποίο είναι και το κέντρο μάζας του ενιαίου συστήματος. Το κέντρο μάζας της Σελήνης διαγράφει κατά την περιφορά του κύκλο ακτίνας  $r_\Sigma \approx 380.000$  km, ενώ η αντίστοιχη τιμή για την τροχιά του κέντρου μάζας της Γης ανέρχεται σε  $r_\Gamma \approx 4.700$  km. Το σύστημα Γης-Σελήνης περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο υπό την επίδραση του ηλιακού βαρυτικού πεδίου. Έτσι, το σημείο  $P$  διαγράφει κυκλική τροχιά με κέντρο τον Ήλιο και ακτίνα  $R_0 \approx 150 \cdot 10^6$  km.

Λόγω της περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη, το κέντρο μάζας του πλανήτη μας αρχικά βρίσκεται από το ένα μέρος του σημείου  $P$  (ανάμεσα στο  $P$  και τον Ήλιο) και αργότερα περνά από το άλλο μέρος του ίδιου σημείου (δηλαδή στην προέκταση της ευθείας που ενώνει τον Ήλιο με το  $P$  και προς το μέρος του  $P$ ). Ως εκ τούτου, η Γη δεν εκτελεί απλή περιφορά γύρω από τον Ήλιο κατά μήκος κυκλικής τροχιάς ακτίνας  $R_0$ , αλλά επιπλέον ταλαντώνεται γύρω από τη συγκεκριμένη τροχιά. Η μέ-



Σχήμα 4

γιστη απόσταση του κέντρου της Γης από το κέντρο του Ήλιου ισούται με  $R_0 + r_\Gamma$  ενώ η ελάχιστη με  $R_0 - r_\Gamma$ .

Η Σελήνη εκτελεί μία πλήρη περιφορά γύρω από τη Γη σε χρόνο  $T_\Sigma = 27$  ημέρες, 7 ώρες, 43 λεπτά και 11 δευτερόλεπτα (27,322 ημέρες). Στον ίδιο χρόνο, το κέντρο της Γης διανύει απόσταση  $s = 2\pi r_\Gamma \cong 29.500$  km. Πρόκειται για κίνηση μάλλον βραδεία: η ταχύτητά της  $v = s/T_\Sigma \cong 12,5$  m/s μόλις ξεπερνά τη μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει ο άνθρωπος ( $\cong 10$  m/s). Απεναντίας, η ταχύτητα της τροχιακής κίνησης του σημείου  $P$  περί τον Ήλιο είναι κατά πολύ μεγαλύτερη:  $V \cong 30$  km/s.

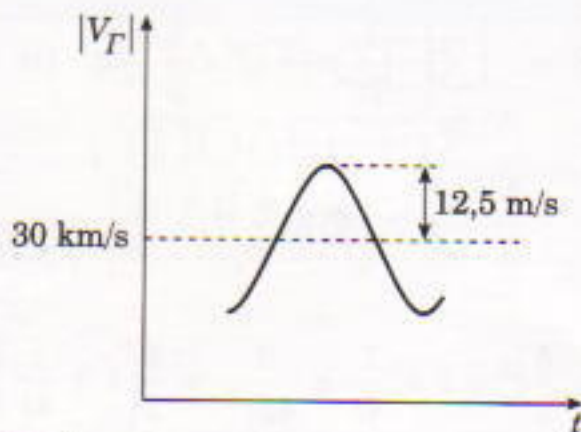
Το τμήμα της τροχιάς που διατρέχει το σημείο  $P$  στη διάρκεια ενός μικρότατου χρονικού διαστήματος μπορεί να προσεγγιστεί με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Πράγματι, η ημερήσια στροφή της επιβατικής ακτίνας του σημείου  $P$  ανέρχεται σε  $a \cong 2\pi/365 \cong 0,99^\circ$ , οπότε το αντίστοιχο τόξο της τροχιάς πρακτικά δεν διαφέρει από ένα ευθύγραμμο τμήμα. Με άλλα λόγια, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κατά τη διάρκεια ενός μικρού χρονικού διαστήματος η ταχύτητα του σημείου  $P$  διατηρεί την κατεύθυνσή της σταθερή. Συνεπώς, στο συγκεκριμένο διάστημα, η προβολή της ταχύτητας  $v$  της Γης περί το  $P$  πάνω στην κατεύθυνση της βασικής τροχιάς μπορεί να γραφεί ως

$$v_0 = v\eta\mu(\omega t + \varphi_0),$$

όπου με  $\omega = v/r_\Gamma$  συμβολίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα της περιφοράς, ενώ η αρχική φάση εξαρτάται μόνο από την επιλογή της αρχής για τη μεταβλητή του χρόνου  $t$ . Στη διάρκεια ενός μικρού χρονικού διαστήματος, η ταχύτητα του κέντρου μάζας της Γης ως προς τον Ήλιο επίσης μεταβάλλεται σύμφωνα με έναν ημιτονοειδή νόμο (Σχήμα 5)

$$|V_\Gamma| = V + v_0 = V + v\eta\mu(\omega t + \varphi_0).$$

Έτσι, στη διάρκεια ενός μικρού χρονικού διαστήματος, η τροχιά την οποία διαγράφει η Γη κατά την περιφορά της γύρω από τον Ήλιο αποτελεί ένα μικρό κομμάτι μιας ημιτονοειδούς καμπύλης. Ολόκληρη η τροχιά της Γης στη διάρκεια μιας



Σχήμα 5

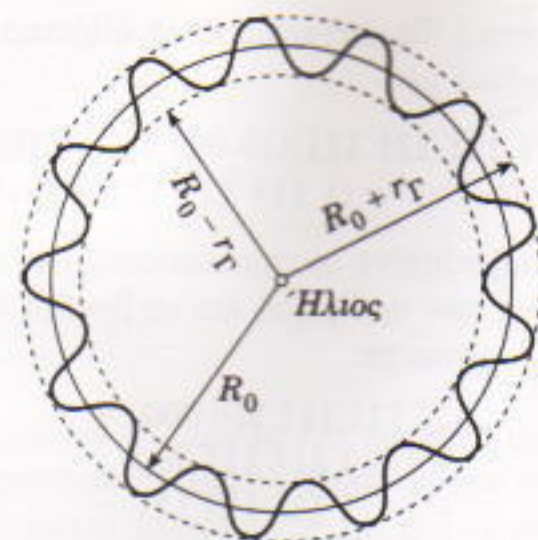
πλήρους περιφοράς μπορεί να αναπαρασταθεί ως διαδοχικά τμήματα μιας ημιτονοειδούς καμπύλης που την «κάμπουμε» ώστε να σχηματίσει κύκλο. Ο αριθμός των «ταλαντώσεων» που εκτελεί η Γη ως προς τη βασική τροχιά ετησίως ισούται με  $(1 \text{ έτος})/T_\Sigma \cong 13,5$ . Συνεπώς, έπειτα από το ετήσιο ταξίδι του στο Διάστημα, το κέντρο μάζας της Γης δεν θα βρεθεί στο ίδιο σημείο απ' όπου ξεκίνησε.

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι η Γη δεν εκτελεί περιοδική κίνηση. Για να ακριβολογούμε, λόγω της φύσεως της κίνησής της γύρω από τον Ήλιο, ο ορισμός κάποιας περιόδου γι' αυτήν καθίσταται αδύνατος. Από μαθηματική άποψη, περιοδική μπορεί να χαρακτηριστεί μόνο η κίνηση του ενιαίου συστήματος Γης-Σελήνης γύρω από τον Ήλιο. Η τροχιά του κέντρου μάζας της Γης απεικονίζεται στο Σχήμα 6.

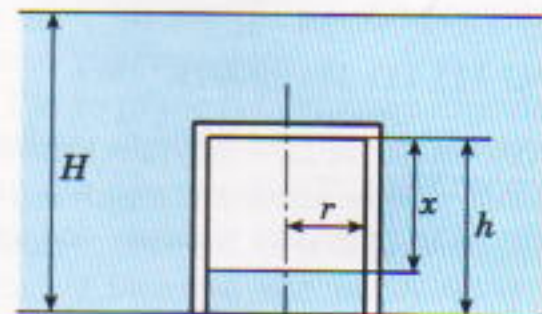
### Φ182

Όταν ο καταδυτικός κώδων μόλις και ακουμπά στον πυθμένα της λίμνης, υπάρχει ένα λεπτότατο υδάτινο στρώμα που τον χωρίζει από τη στερεά επιφάνεια του βυθού (Σχήμα 7). Όσο λεπτό κι αν είναι αυτό το υδάτινο στρώμα, μας προσφέρει δύο κλειδιά για την επίλυση του προβλήματος: πρώτον, καθορίζει αμέσως την πίεση του αέρα μέσα στον κώδωνα· δεύτερον, μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε την αρχή του Αρχιμήδη, δεδομένου ότι ο κύλινδρος δεν έρχεται σε επαφή με τίποτε άλλο παρά μόνο με το νερό της λίμνης.

Ας ξεκινήσουμε ακολουθώντας τη δεύτερη προσέγγιση. Χάριν απλότητας, υποθέτουμε ότι τόσο το τοίχωμα όσο και η οροφή του κώδωνα έχουν το ίδιο πάχος  $\Delta$ , που θεωρείται



Σχήμα 6



Σχήμα 7

πολύ μικρό σε σύγκριση με την ακτίνα και το ύψος του. Το βάρος του νερού που εκτοπίζει ο κώδων καθορίζεται από τον όγκο του στρώματος του αέρα ( $2\pi r^2 x$ ), των τοιχωμάτων ( $2\pi r h \Delta$ ) και της οροφής [ $\pi(r + \Delta)^2 \Delta \cong \pi r^2 \Delta$ ]. Το πάχος  $\Delta$  μπορεί να προσδιοριστεί από τη συνθήκη ότι το βάρος του κώδωνα πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τη δύναμη της άνωσης:

$$\rho_v (\pi r^2 x + 2\pi r h \Delta + \pi r^2 \Delta) g \leq \rho_x (\pi r^2 \Delta + 2\pi r h \Delta) g, \quad (*)$$

όπου  $\rho_v = 10^3$  kg/m<sup>3</sup> η πυκνότητα του νερού και  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Ας υπολογίσουμε τώρα το πάχος  $x$  του στρώματος του αέρα που «στριμώνεται» κάτω από την οροφή τη στιγμή κατά την οποία ο κώδωνας «προσγειώνεται» στο βυθό της λίμνης. Ο αέρας μέσα στον κώδωνα δέχεται εξωτερική πίεση

$$\rho_x g [H + H_0 - (h - x)],$$

όπου ο όρος  $\rho_x g H_0$  αντιπροσωπεύει την εξωτερική ατμοσφαιρική πίεση ( $H_0 = 10,3$  m). Σύμφωνα με το γνωστό μας νόμο του Boyle, θα ισχύει  $\rho_x g H_0 h \pi r^2 = \rho_x g [H_0 + H - (h - x)] x \pi r^2$ , απ' όπου παίρνουμε την εξίσωση

$x^2 + (H_0 + H - h)x - H_0h = 0$ ,  
η οποία δίνει το αποτέλεσμα

$$x \cong 1,6 \text{ m.}$$

Τελικά, η ανισότητα (\*) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη ζητούμενη τιμή του πάχους του τοιχώματος και της οροφής:

$$\Delta = \frac{\rho_v r^2 x}{(\rho_x - \rho_v)(r^2 + 2rh)} \cong 4,6 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

Ένας άλλος τρόπος για να προσδιορίσουμε τη μέγιστη τιμή της δύναμης της άνωσης είναι να εφαρμόσουμε το νόμο του Pascal (εδώ έχουμε ακόμη μία περίπτωση όπου μας βοηθά το λεπτό υδάτινο στρώμα μέσα στον κώδωνα). Ο αέρας που περιέχεται στον κώδωνα ασκεί στην οροφή, η οποία έχει εμβαδόν  $\pi r^2$ , μια δύναμη προς τα πάνω ίση με

$$\rho_v g [H_0 + H - (h - x)] \pi r^2.$$

Η δύναμη που ασκείται προς τα πάνω στην επιφάνεια του χείλους του κώδωνα η οποία «ακουμπά» στον πυθμένα της λίμνης λόγω της πίεσης του λεπτού στρώματος νερού ισούται με  $\rho_v g (H_0 + H) 2\pi r \Delta$ . Τέλος, στην εξωτερική επιφάνεια της οροφής, η οποία έχει εμβαδόν  $\pi(r + \Delta)^2 \cong \pi r^2 + 2\pi r \Delta$ , ασκείται λόγω της πίεσης του περιβάλλοντος νερού μια δύναμη προς τα κάτω ίση με

$$\rho_v g (H_0 + H - h - \Delta) (\pi r^2 + 2\pi r \Delta).$$

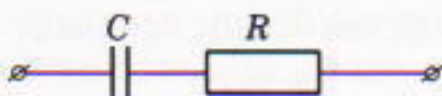
Η άνωση ισούται με τη διαφορά της ολικής δύναμης που ασκείται προς τα πάνω μείον τη δύναμη που ωθεί τον κώδωνα προς τα κάτω:

$$\begin{aligned} & \rho_v g [H_0 + H - (h - x)] \pi r^2 \\ & + \rho_v g (H_0 + H) 2\pi r \Delta \\ & - \rho_v g (H_0 + H - h - \Delta) (\pi r^2 + 2\pi r \Delta) \\ & \cong \rho_v g [\pi r^2 x + (2\pi r h + \pi r^2) \Delta], \end{aligned}$$

έκφραση η οποία συμπίπτει με το αριστερό μέλος της (\*).

### Φ183

Εάν μετατοπίσουμε την αγωγίμη πλάκα στο εσωτερικό του πυκνωτή χωρίς να την περιστρέψουμε (δηλαδή εφόσον η πλάκα συνεχίζει να παραμένει παράλληλη προς τους οπλισμούς), το ηλεκτρικό πεδίο εντός του



Σχήμα 8

πυκνωτή δεν μεταβάλλεται. Ας τη φέρουμε λοιπόν κοντά σε έναν από τους οπλισμούς. Το Σχήμα 8 δείχνει ένα κύκλωμα ισοδύναμο με αυτή τη νέα διάταξη. Σ' αυτό, το εμβαδόν των οπλισμών ισούται με  $S$  και η μεταξύ τους απόσταση με  $d - h$ . Ο πυκνωτής φορτίζεται μέχρι τάσης  $V_0$ . Η αντίσταση που έχει συνδεθεί σε σειρά με τον πυκνωτή έχει τιμή  $R = \rho h / S$ . Το μέγιστο ρεύμα θα περάσει από την αντίσταση αμέσως μόλις κλείσει το κύκλωμα:

$$I = \frac{V_0}{R} = \frac{V_0 S}{\rho h}.$$

### Φ184

Προφανώς, το μέγιστο πλάτος της ταινίας καθορίζεται από τη διάμετρο  $D$  του πλασμοειδούς. Η εγκάρσια μεγέθυνση  $m$  της φωτογραφικής μηχανής δίνεται από τον τύπο

$$m = \left| \frac{f}{f - L} \right|,$$

οπότε  $D = d/m$ . Για να αποτυπωθεί μια εικόνα πάνω στο φιλμ, το πλασμοειδές πρέπει να έχει ταχύτητα  $u$  αρκετά μικρού μέτρου ώστε στη διάρκεια του χρόνου  $\tau$  να διανύσει απόσταση μικρότερη από  $D$ . Αν από τη στιγμή κατά την οποία πρωτοσχηματίζεται το είδωλο ώσπου να ακινητοποιηθεί πλήρως το πλασμοειδές παρέρχεται χρόνος  $t$ , τότε κατά τη στιγμή που πρωτοσχηματίζεται το είδωλο το πλασμοειδές έχει ταχύτητα  $|u| = |v|t$ , η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\frac{D}{|v|t} = \frac{d}{m|v|t} = \tau. \quad (1)$$

Από την άλλη, ώσπου να ακινητοποιηθεί εντελώς, το πλασμοειδές διανύει την απόσταση

$$s = \frac{l}{m} = \frac{|v|t^2}{2}. \quad (2)$$

Οι εξισώσεις (1) και (2) μας επι-

τρέπουν να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του πλασμοειδούς:

$$|v| = \frac{d^2}{2mlt^2} = \frac{d^2}{2lt^2} \left| \frac{f - L}{f} \right|.$$

### Φ185

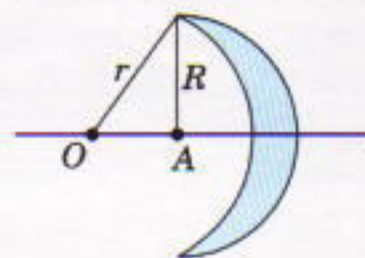
Ως πρώτο βήμα, ας βρούμε την ακτίνα καμπυλότητας της κοιλότητας [ισούται με την ακτίνα της εσωτερικής σφαιρικής επιφάνειας (Σχήμα 9)]. Από το ορθογώνιο τρίγωνο παίρνουμε την εξίσωση

$$r^2 = R^2 + (r - R/2)^2,$$

η οποία μπορεί να λυθεί ως προς  $r$ . Έτσι, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$r = 1,25R.$$

Ας χαράξουμε τώρα μια ακτίνα που εκπέμπεται από τη φωτεινή πηγή (Σχήμα 10). Για να διευκολυνθούμε, σχεδιάζουμε την ακτίνα να προσπίπτει στις σφαιρικές επιφάνειες σε μια σχετικά μεγάλη γωνία (διότι διαφορετικά δεν θα μπορούσαμε να διακρίνουμε τις λεπτομέρειες στο σχήμα). Στην πραγματικότητα, όμως, το είδωλο το δημιουργούν ακτίνες οι οποίες σχηματίζουν πολύ μικρές γωνίες με τον κύριο οπτικό άξονα. Και τούτο για δύο λόγους: πρώτον, επειδή η κόρη του ματιού του παρατηρητή είναι στενή· και δεύτερον, διότι σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, ο παρατηρητής βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από το φακό. Συνεπώς, στο παρόν πρόβλημα θα εφαρμόσουμε τις βολικές προσεγγίσεις της τριγωνομετρίας των μι-



Σχήμα 9



Σχήμα 10

κρών γωνιών: θα θέτουμε τις τιμές των ημιτόνων και των εφαπτομένων ίσες με τις ίδιες τις γωνίες, με την προϋπόθεση ότι οι τελευταίες μετρούνται σε ακτίνια.

Ας θεωρήσουμε τη διαδρομή την οποία ακολουθεί μια ακτίνα που εκπέμπεται υπό γωνία  $\alpha$  ως προς τον κύριο οπτικό άξονα. Η εν λόγω ακτίνα τέμνει την εσωτερική σφαιρική επιφάνεια σε ένα σημείο που απέχει από τον κύριο οπτικό άξονα απόσταση  $0,5Ra$ . Χαράξτε τώρα την κάθετο προς την εσωτερική σφαιρική επιφάνεια στο σημείο της τομής, η οποία συμπίπτει με την ευθεία που άγεται προς το εν λόγω σημείο από το  $O$ . Η ευθεία αυτή σχηματίζει με τον κύριο οπτικό άξονα τη γωνία  $\beta$ , η οποία συνδέεται με τη γωνία  $\alpha$  μέσω της σχέσης

$$0,5Ra = r\beta = 1,25R\beta, \\ \beta = 0,4\alpha.$$

Η προσπίπτουσα ακτίνα σχηματίζει με την κάθετο γωνία  $0,6\alpha$ , οπότε, αφού διαθλαστεί στην επιφάνεια του γυαλιού που έχει δείκτη διάθλασης  $n = 2$ , θα σχηματίζει πλέον με την κάθετο γωνία  $0,3\alpha$ . Ταυτόχρονα, η προέκταση της εν λόγω ακτίνας τέμνει τον κύριο οπτικό άξονα υπό γωνία  $0,3\alpha + 0,4\alpha = 0,7\alpha$ . Η ακτίνα θα συναντήσει την εσωτερική όψη της εξωτερικής επιφάνειας σε απόσταση  $0,5Ra + 0,5R \cdot 0,7\alpha = 0,85Ra$  από τον κύριο οπτικό άξονα. Ας φέρουμε την κάθετο στην εξωτερική σφαιρική επιφάνεια στο εν λόγω σημείο (πρόκειται για την ευθεία που άγεται προς αυτό από το σημείο  $A$ , το κέντρο της επιφάνειας). Η γωνία μεταξύ αυτής της ευθείας και του κύριου οπτικού άξονα είναι  $\gamma = 0,85Ra/R = 0,85\alpha$ , οπότε η γωνία πρόσπτωσης ισούται με  $\gamma - 0,7\alpha = 0,15\alpha$ . Μετά τη διάθλαση, η γωνία διπλασιάζεται και γίνεται  $0,3\alpha$ . Έτσι, μετά την έξοδο της από το γυαλί η ακτίνα σχηματίζει με τον κύριο οπτικό άξονα μια γωνία  $\delta = \gamma - 0,3\alpha = 0,55\alpha$ . Επομένως, η προέκτασή της τέμνει τον κύριο οπτικό άξονα στο σημείο  $B$ , σε απόσταση  $L = 0,85Ra/0,55\alpha = 17R/11 \cong 1,55R$  από το σημείο εξόδου της ακτίνας από το φακό (για τις αξονικές ακτίνες, το σημείο αυτό σχεδόν συμπίπτει με την

τομή της εξωτερικής σφαιρικής επιφάνειας και του κύριου οπτικού άξονα). Εφόσον, αν εξαιρέσουμε τον περιορισμό της μικρής γωνίας πρόσπτωσης, επιλέξαμε εντελώς τυχαία την ακτίνα που οδεύει από την πηγή προς το φακό, η θέση του σημείου  $B$  δεν εξαρτάται από την τιμή της συγκεκριμένης γωνίας (μετά τη διάθλαση φαίνεται να εκπέμπεται από το συγκεκριμένο σημείο μια στενή δέσμη φωτός). Συνεπώς, βρήκαμε τη θέση του ειδώλου που παρατηρεί το μάτι από ένα απομακρυσμένο σημείο του κύριου οπτικού άξονα.

## Σπαζοκεφαλιές

### Σ181

Το 500.000-ό ψηφίο είναι το 5. Πράγματι, για να γράψουμε τους αριθμούς από το 1 έως το 99.999 χρειαζόμαστε  $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 9.000 + 5 \cdot 90.000 = 488.889$  ψηφία. Απομένει να βρούμε το 500.000 - 488.889 = 11.111-ό ψηφίο στην ακολουθία των εξαψήφιων αριθμών. Παρατηρούμε ότι  $11.111 = 6 \cdot 1.851 + 5$ . Επομένως, το ζητούμενο ψηφίο είναι το πέμπτο ψηφίο του αριθμού 101.851. Αν γράφαμε όλους αυτούς τους αριθμούς, με ταχύτητα έναν αριθμό το δευτερόλεπτο, θα χρειαζόμασταν σχεδόν έξι ημέρες!

### Σ182

Συμβολίζουμε το πλήθος των μαθητών που έλαβαν μέρος σε ένα μόνο είδος αγωνισμάτων με  $6x$ . Τότε,  $3x$  μαθητές έλαβαν μέρος σε δύο είδη αγωνισμάτων και  $2x$  έλαβαν μέρος σε τρία είδη αγωνισμάτων. Αν προσθέσουμε τα πλήθη που δίνονται στο πρόβλημα, τότε κάθε μαθητής που συμμετείχε σε ένα μόνο είδος αγωνισματος απαριθμείται μία φορά, αυτοί που συμμετείχαν σε δύο απαριθμούνται δύο φορές, και αυτοί που συμμετείχαν σε τρία απαριθμούνται τρεις φορές. Επομένως, έχουμε την εξίσωση  $100 + 50 + 48 = 6x + 6x + 6x$ , απ' όπου βρίσκουμε  $x = 11$ . Άρα συμμετείχαν συνολικά  $6x + 3x + 2x = 11x = 121$  μαθητές.

### Σ183

Τα μπιφτέκια θα τα τηγανίσει τα-

χύτερα το ηλεκτρικό μάτι με τη μεγαλύτερη ισχύ. Το ρεύμα που διέρχεται από τα δύο πίσω ηλεκτρικά μάτια δίνεται από το νόμο του Ohm:  $I_n = V/R_n$ .

Αφού τα δύο μάτια συνδέονται στη σειρά, θα διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, οπότε η μεγαλύτερη ισχύς αντιστοιχεί στο δεξιό:

$$P_{n\delta} = I_n^2 R_{n\delta} = \frac{V^2}{R_n^2} R_{n\delta} \\ = \frac{V^2}{(30 \Omega)^2} (20 \Omega) = \frac{2V^2}{90 \Omega}.$$

Αν κάνουμε τον αντίστοιχο υπολογισμό για το μπροστινό ζευγάρι ματιών, βρίσκουμε:

$$P_{\mu\delta} = \frac{2V^2}{245 \Omega}.$$

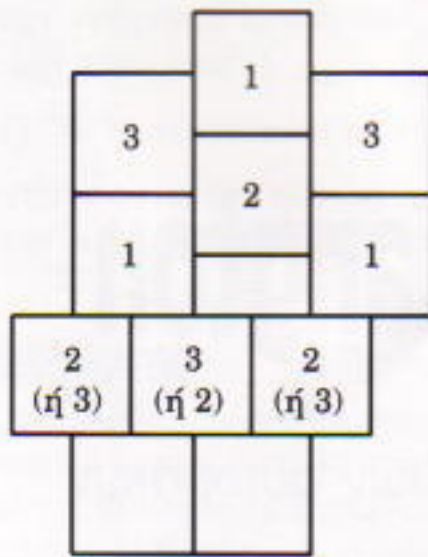
Επομένως, τα μπιφτέκια θα ετοιμαστούν ταχύτερα στο ηλεκτρικό μάτι με αντίσταση  $20 \Omega$ .

### Σ184

Υποθέτουμε ότι σε κάθε σκάλα τα σκαλοπάτια είναι όμοια (μια συνθήκη που επιβάλλει στους μηχανικούς η νομοθεσία, διότι όταν τα σκαλοπάτια είναι ανόμοια οι άνθρωποι συνήθως παραπατούν και πέφτουν). Αφού οι δύο σκάλες έχουν ίδια κλίση, κάθε σκαλοπάτι της μίας σκάλας θα έχει ίδιο μήκος και ύψος με τα σκαλοπάτια της άλλης (ο λόγος του ύψους προς το μήκος ισούται με την κοινή κλίση). Αφού οι δύο πύργοι έχουν ίδιο ύψος, οι δύο σκάλες πρέπει να έχουν το ίδιο πλήθος σκαλοπατιών —συνεπώς πρέπει να έχουν και ίδιο μήκος. Επισημαίνουμε ότι δεν χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι δύο πύργοι είναι κυκλικοί. Η λύση ισχύει για οποιεσδήποτε σκάλες για τις οποίες η λέξη "κλίση" έχει νόημα, και οι οποίες έχουν την ίδια κλίση.

### Σ185

Μια τέτοια διευθέτηση των τετραγώνων παρουσιάζεται στο Σχήμα 11. Ας αποδείξουμε ότι αυτό το σύνολο τετραγώνων ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος. Υποθέτουμε το αντίθετο. Αν χρωματίσουμε τα δύο πάνω ενδιάμεσα τετράγωνα με τα χρώματα 1 και 2 (όπως στο Σχήμα 11),



Σχήμα 11

προκύπτει αυτόματα ο χρωματισμός τεσσάρων ακόμα τετραγώνων (των δύο αριστερά και των δύο δεξιά από τα τετράγωνα που χρωματίσαμε). Διαπιστώνουμε τώρα ότι η επόμενη σειρά τετραγώνων μπορεί να χρωματιστεί μόνο με τα χρώματα 2 και 3. Με όποιον τρόπο και να γίνει αυτό, είναι αδύνατο να χρωματίσουμε τα δύο κάτω τετράγωνα με τον απαιτούμενο τρόπο.

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 71

τρήσουν. Εκ πρώτης όψεως, το πρόβλημα φαινόταν ανεπίδεκτο λύσης.

Παρά ταύτα, το πρόβλημα λύθηκε, και μάλιστα με τη βοήθεια ενός αεριούχου υγρού. Πριν από την ακτινοβολία, στο υγρό διαλύθηκε διοξείδιο του άνθρακα μέχρι κορεσμού. Αμέσως μετά την ακτινοβολία, το δοχείο ανοίχτηκε και το υγρό υπεβλήθη σε έντονη ανάδευση. Με τον τρόπο αυτό προκλήθηκε τυρβώδης βρασμός, ο οποίος είχε ως αποτέλεσμα να αυξηθεί το εμβαδόν της διαχωριστικής επιφάνειας αερίου-νερού κατά δεκάδες χιλιάδες φορές· ως εκ τούτου, επιταχύνθηκε δραστικά και η διαφυγή ατόμων νέου από το υγρό· καθώς εξαερωνόταν το διοξείδιο του άνθρακα, τα παρέσυρε μακριά από το δοχείο με το υγρό που έβραζε. Το μείγμα του διοξειδίου του άνθρακα και του νέου μεταφέρθηκε σε ένα άλλο δοχείο, όπου ένα αλκαλικό διάλυμα απορρόφησε το διοξείδιο του άνθρακα. Εν συνεχεία, τα άτομα του νέου συνελέγησαν σε έναν ειδικό δοκιμαστικό σωλήνα, ο οποίος τοποθετήθηκε γρήγορα μέσα στον απαριθμητή. Η όλη διαδικασία διήρκεσε λιγότερο από 20 δευτερόλεπτα. Όπως βλέπετε, λοιπόν, τα αεριούχα υγρά δεν είναι μόνο ευχάριστα, αλλά και χρήσιμα. ■

#### Διαβάστε ακόμη τα άρθρα...

- A. Eisenkraft και L.D. Kirkpatrick, «Πεδία εστιασμού», Μάρτιος/Απρίλιος 1996.
- H.D. Schreiber, «Παιχνίδια με τα ονόματα των στοιχείων», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1996.
- I. Mazin, «Φυσική στην κουζίνα», Νοέμβριος/Δεκέμβριος 1997.
- S. Krotov και A. Chernoutsan, «Ψυχρός βρασμός», Μάρτιος/Απρίλιος 1999.

⇒ Συνέχεια από τη σελ. 68

$$(ε) (x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) = 6,$$

$$(στ) 2^{ki} - \text{συν}y + \log_{10}(1 + x^2 + |y|) = 0,$$

$$(ε) \left( \eta\mu^2 x + \frac{1}{\eta\mu^2 x} \right)^2 + \left( \sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right)^2 = 12 + \frac{1}{2} \eta\mu y.$$

2. Βρείτε όλα τα  $a$  για τα οποία τα επόμενα συστήματα έχουν μοναδική λύση:

$$(α) \begin{cases} y \geq x^2 + 2a, \\ x \geq y^2 + 2a. \end{cases} \quad (β) \begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 = z. \end{cases}$$

3. Βρείτε όλα τα ζεύγη αριθμών που ικανοποιούν τις επόμενες συνθήκες:

$$(α) \begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2 y^2}, \\ 4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} \geq 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2}, \end{cases}$$

$$(β) \begin{cases} \sqrt{2x^2 y^2 - x^4 y^4} = y^6 + x^2(1 - x), \\ \sqrt{1 + (x + y)^2} + x(2y^3 + x^3) \leq 0. \end{cases}$$

4. Να επιλυθούν οι εξισώσεις

$$(α) 2\sqrt{3}\eta\mu 5x - \sqrt{3}\eta\mu x = \text{συν}24x\text{συν}x + 2\text{συν}5x - 6\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right),$$

$$(β) (\sqrt{1 - \sigma\phi^2 2\pi x})\text{συν}\pi x + \eta\mu\pi x = \sqrt{2}.$$

5. Για όλες τις τιμές του  $b$ , να επιλυθεί η εξίσωση

$$3\text{συν}x\eta\mu b - \eta\mu\text{συν}b - 4\text{συν}b = 3\sqrt{3}. \quad \blacksquare$$

David Cohen

### ΝΟΜΟΣ, ΣΕΞΟΥΑΛΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΑ

Η επιβολή της ηθικής στην κλασική Αθήνα



«Όσοι από εμάς νομίζαμε πως είχαμε προχωρήσει αρκετά στην κατανόηση των προτύπων που δομούν τις πρακτικές της ανδρικής ομοφυλοφιλίας και της μοιχείας στην αρχαία Αθήνα [...] θα πρέπει να αναθεωρήσουμε τη θέση μας.»

—The Times Higher Education Supplement

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ

ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ

ιστορητής/κάτοπτρο

Σελ.: 322, 25 x 17 εκ.,  
7.000 δρχ.

# Το μυρμήγκι του Langton

Ας γνωρίσουμε τη φύση των κυψελωτών αυτομάτων

Don Piele

**Π**ΟΛΛΟΙ ΘΑ ΕΧΕΤΕ ΑΚΟΥΣΕΙ, Ή ΙΣΩΣ ΚΑΙ ΠΑΙΞΕΙ, ΤΟ «παιχνίδι της ζωής» του John Conway. Εμφανίστηκε για πρώτη φορά στη στήλη του Martin Gardner «Ψυχαγωγικά Μαθηματικά» στο *Scientific American* τον Οκτώβριο του 1970. Όταν διάβασα εκείνη τη στήλη εντυπωσιάστηκα από την ποικιλία των έμβιων μορφών που προκύπτουν από ένα τόσο απλό σύνολο κανόνων. Επιπλέον, γνωρίζοντας τους κανόνες και την έμβια μορφή στην πρώτη γενιά, φαινόταν αδύνατο να προβλέψεις ποια εξέλιξη θα εμφανιστεί στη συνέχεια. Τέτοια είναι η φύση του κόσμου των «κυψελωτών αυτομάτων». Σε αυτή τη στήλη θα εξερευνήσουμε μια μικρή γωνιά αυτού του κόσμου μέσα από τα μάτια του μυρμηγκιού του Langton, το οποίο δημιούργησε ο Chris Langton του Ινστιτούτου της Σάντα Φε.

## Οι κανόνες

Φανταστείτε πως είσατε ένα μυρμήγκι (ant) στη μέση μιας μεγάλης τετράγωνης περιοχής με κελιά —όπως μια σκακιέρα. Φανταστείτε ότι όλα τα κελιά είναι χρωματισμένα άσπρα. Κρατάτε στα χέρια σας ένα μαύρο και ένα άσπρο μαγικό μολύβι και κοιτάτε προς το βορρά. Οι οδηγίες που έχετε λάβει είναι οι ακόλουθες:

1. Κινηθείτε ένα κελί μπροστά.
2. Αν το τετράγωνο που βρίσκεστε είναι άσπρο, βάψτε το μαύρο και στρίψτε δεξιά κατά 90°.
3. Αν το τετράγωνο που βρίσκεστε είναι μαύρο, βάψτε το άσπρο και στρίψτε αριστερά κατά 90°.
4. Επαναλάβετε τα βήματα 1-3.

Μπορείτε να προβλέψετε το σχήμα που θα δημιουργήσουν τα μαύρα τετράγωνα; Θα προκύψει ένα αναγνωρίσιμο μόρφωμα ή θα έχουμε απλώς μια τυχαία διαδοχή μαύρων κουκίδων; Για να απαντήσουμε σε αυτές τις ερωτήσεις θα γράψουμε τους απαραίτητους αλγορίθμους και θα κατασκευάσουμε ένα πρόγραμμα στο *Mathematica* για να τους εκτελέσει.

Η μετάφραση ενός συνόλου κανόνων τους οποίους κατανοούμε στον πραγματικό κόσμο σε ένα σύνολο διαδικασιών τις οποίες μπορεί να εκτελέσει ένας υπολογιστής συνιστά την τέχνη του προγραμματισμού. Ο προγραμ-

ματισμός απαιτεί, πρώτον, να γνωρίζετε ποιες δομές δεδομένων σας προσφέρει η γλώσσα προγραμματισμού και, δεύτερον, να μπορείτε να κατασκευάσετε αλγορίθμους που επιλύουν προβλήματα μέσω αυτών των δομών.

Ας αρχίσουμε ονομάζοντας την τετράγωνη περιοχή **antland** και ορίζοντας την ως ένα τετράγωνο πίνακα κελιών με αρχικό χρώμα 0 (δηλαδή, άσπρο).

```
size = 10;
antland = Table[0, {size}, {size}];
MatrixForm[antland]
```

```
(0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)
(0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)
(0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)
(0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)
(0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)
(0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)
(0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)
(0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)
(0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)
(0 0 0 0 0 0 0 0 0 0)
```

Ας τοποθετήσουμε το μυρμήγκι αρχικά στο  $(x, y)$ , κοντά στο κέντρο της περιοχής.

$$x = y = \text{Floor}\left[\frac{\text{size}}{2}\right].$$

Η κατάσταση κάθε θέσης  $x, y$  είναι η τιμή της  $\text{antland}[[x, y]]$ . Φυσικά, στην αρχή έχουμε  $\text{antland}[[x, y]] = 0$  για όλα τα  $x, y$ .

## Αλλαγή κατάστασης

Αν το μυρμήγκι βρεθεί σε λευκό κελί (0), πρέπει να το χρωματίσουμε μαύρο (1), και αντιστρόφως. Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε το  $\{0, 1\}$  και προσθέσουμε 1 σε κάθε θέση, θα προκύψει το  $\{1, 2\}$ . Αν τώρα πάρουμε το αποτέλεσμα  $\text{mod } 2$ , καταλήγουμε στο  $\{1, 0\}$  —δηλαδή, έχουμε αντιστροφή των τιμών. Συνεπώς έχουμε τον πρώτο μας αλγόριθμο που αλλάζει την κατάσταση του τετραγώνου πάνω στο οποίο βρίσκεται το μυρμήγκι: Προ-



σθέτουμε 1 στην τρέχουσα κατάσταση του κελιού και υπολογίζουμε την τιμή mod 2.

```
antland[[x,y]] = Mod[antland[[x,y] + 1, 2].
```

Πληκτρολογήστε αυτή την εντολή αρκετές φορές και παρατηρήστε την κατάσταση να αλλάζει από 0 σε 1, και αντιστρόφως.

## Αλλαγή κατεύθυνσης

Η κατεύθυνση προς την οποία κοιτά το μυρμήγκι καθορίζει το πού θα βρεθεί όταν κινηθεί ένα κελί μπροστά. Αριθμούμε τις τέσσερις κατευθύνσεις ως εξής: Βορράς = 0, Ανατολή = 1, Νότος = 2, Δύση = 3. Αρχικά το μυρμήγκι κοιτά προς το Βορρά —δηλαδή κατεύθυνση = 0. Ας εξετάσουμε πώς αλλάζουν οι κατευθύνσεις έπειτα από μια δεξιά στροφή. Ξεκινάμε με {B, A, N, Δ} = {0, 1, 2, 3} και κάνουμε μια δεξιά στροφή. Προφανώς, B → A, A → N, N → Δ και Δ → B ή {0, 1, 2, 3} → {1, 2, 3, 0}. Αυτό είναι ίδιο ακριβώς με το αποτέλεσμα που θα πάρουμε αν προσθέσουμε το 1 στο {0, 1, 2, 3} (οπότε θα έχουμε {1, 2, 3, 4}) και θεωρήσουμε το αποτέλεσμα mod 4. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η αριστερή στροφή προκύπτει αν αφαιρέσουμε το 1 και θεωρήσουμε το αποτέλεσμα mod 4. Αν υποθέσουμε ότι **dir** είναι ο τρέχων αριθμός κατεύθυνσης, τότε οι επόμενες εντολές, **rightTurn** και **leftTurn**, αλλάζουν με τον σωστό τρόπο την κατεύθυνση.

```
rightTurn := dir = Mod[dir + 1, 4]
leftTurn := dir = Mod[dir - 1, 4]
dir = {0, 1, 2, 3};
rightTurn; dir
{1, 2, 3, 0}
```

## Κίνηση προς τα εμπρός

Τώρα ας επεξεργαστούμε τον αλγόριθμο της κίνησης προς τα εμπρός. Ανάλογα με την κατεύθυνση στην οποία κοιτάμε, η κίνηση από το (x, y) προς τα εμπρός έχει διαφορετικά αποτελέσματα. Ιδού οι μετασχηματισμοί για κάθε κατεύθυνση: Βόρεια (x, y) → (x, y + 1), Ανατολικά (x, y) → (x + 1, y), Νότια (x, y) → (x, y - 1) και Δυτικά (x, y) → (x - 1, y). Στο *Mathematica* θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή **Switch** για να αλλάξουμε τη θέση (x, y) ανάλογα με την κατεύθυνση **dir** προς την οποία κοιτά το μυρμήγκι. Επισημαίνουμε ότι η **x++** αυξάνει το x κατά 1 ενώ η **x--** μειώνει το x κατά 1. Αν **dir** = 0, τότε **y++**, αν **dir** = 1 τότε **x++**, αν **dir** = 2 τότε **y--**, αν **dir** = 3 τότε **x--**. Αυτά τα εκφράζουμε με τη διαταγή

```
Switch[dir, 0, y++, 1, x++, 2, y--, 3, x--];
```

Σημείωση: Ένας πίνακας του *Mathematica* ξεκινά με το (1, 1) στη βορειοδυτική γωνία και όχι στη συνήθη νοτιοδυτική. Για να δούμε όμως το δημιουργούμενο σχήμα θα χρησιμοποιήσουμε μια διαταγή **Graphics** που λαμβάνει υπόψη αυτό το γεγονός. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το σύννηθες σύστημα συντεταγμένων x, y όπου η κίνηση προς το Βορρά αυξάνει το y και η κίνηση προς το Νότο μειώνει το y.

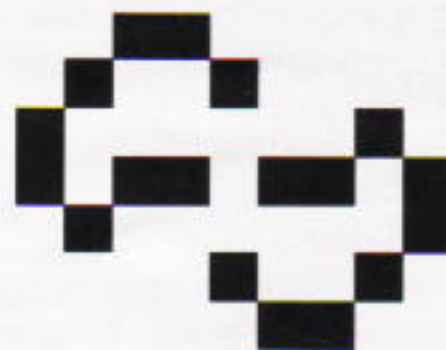
## Σύνδεση των επί μέρους στοιχείων

Έστω **size** η διάσταση των πλευρών της **antland**. Ας συμφωνήσουμε ότι η **dir** ξεκινά πάντα κοιτώντας Βόρεια. Έστω **tourLength** το συνολικό πλήθος βημάτων που θα κάνει το μυρμήγκι και έστω **moves** το τρέχον πλήθος βημάτων που έχουν γίνει. Συνεχίζουμε να εκτελούμε βήματα όσο το μυρμήγκι βρίσκεται στην περιοχή και το πλήθος των βημάτων είναι μικρότερο από την τιμή της **tourLength**. Ιδού το πρόγραμμα *LangtonsAnt* που εμπειριέχει όλους τους αλγορίθμους που περιγράψαμε.

```
<< Graphics `Colors `
LangtonsAnt[tourLength_, size_] :=
Module[{dir = 0, moves = 0, x = y =
Floor[size/2]},
antland = Table[0, {size}, {size}];
rightTurn := dir = Mod[dir + 1, 4];
leftTurn := dir = Mod[dir - 1, 4];
While[moves < tourLength && 1 <= x
<= size && 1 <= y <= size,
antland[[x,y]] =
Mod[antland[[x,y] + 1, 2];
If[antland[[x,y]] == 1, leftTurn,
rightTurn];
Switch[dir, 0, y++, 1, x++, 2, y--,
3, x--];
moves++];
Show[Graphics[RasterArray[antland] /.
{0 -> White, 1 -> Black}], AspectRatio ->
Automatic]]
```

Ιδού η τελική κατάσταση της **antLand** έπειτα από 96 κινήσεις.

```
LangtonsAnt[96, 11]
```



## Μεγάλες κινήσεις

Έπειτα από 10.000 κινήσεις του μυρμηγκιού του **Langton** σε μια περιοχή πλευράς 100, δεν παρατηρούμε τίποτα το ενδιαφέρον.

```
LangtonsAnt[10000, 100]
```



Αν όμως προχωρήσουμε λίγο ακόμα, βλέπουμε κάτι να αναπτύσσεται.

LangtonsAnt[11000, 100]



LangtonsAnt[12000, 100]



Το μυρμήγκι ακολουθεί πλέον ένα σχήμα και κατασκευάζει ένα δρόμο προς το άπειρο. Θα μπορούσατε να το προβλέψετε αυτό; Αυτή είναι η φύση και η ομορφιά των κυψελωτών αυτομάτων.

## Η σειρά σας τώρα

1. Ως πρώτη διερεύνηση, προσπαθήστε να αλλάξετε μια γραμμή του προγράμματος LangtonsAnt για να διαπιστώσετε αν είναι δυνατόν να βλέπετε όλα τα κελιά τα οποία επισκέπτεται το μυρμήγκι. Όπως είναι το πρόγραμμα τώρα, μπορείτε να δείτε μόνο όσα κελιά επισκέπτεται περιττό πλήθος φορών. Χρωματίστε τα κελιά με άρτιο πλήθος επισκέψεων μπλε, αυτά με περιττό πλήθος επισκέψεων μαύρα, και άσπρα τα κελιά που δεν έχει επισκεφτεί. Η εικόνα που θα πάρετε θα μοιάζει με αυτήν που βλέπετε στη διπλανή στήλη.

2. Τροποποιήστε τους κανόνες του Προβλήματος 1 έτσι ώστε όταν το μυρμήγκι επισκέπτεται μπλε τετράγωνο να μην του αλλάζει χρώμα, και στο επόμενο βήμα να μετακινείται προς τα εμπρός αντί να στρίβει. Τα αποτελέσματα είναι τελείως διαφορετικά και απρόσμενα.

3. Πειραματιστείτε με δικούς σας κανόνες. Με ενδιαφέρει κάθε ασυνήθιστο μόρφωμα που θα ανακαλύψετε.

LangtonsAnt[12000, 100]



## Ολυμπιάδες Πληροφορικής στο Διαδίκτυο

Πάνω από 150 σπουδαστές από τριάντα μία χώρες έλαβαν μέρος στον φθινοπωρινό διαγωνισμό της USACO τον Νοέμβριο του 1999. Τα προβλήματα αυτού του διαγωνισμού προγραμματισμού αποστέλλονται μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου σε όσους εγγράφονται στον κατάλογο (listserv) της USACO στη διεύθυνση

[majordomo@delos.com](mailto:majordomo@delos.com).

Οι τέσσερις πρώτοι του διαγωνίσματος ήταν οι Percy Liang από τις ΗΠΑ, Omid Etesami και Siamak Tazari από το Ιράν και Jing Xu από την Κίνα.

Κάθε χρόνο διοργανώνονται τρεις διαγωνισμοί στο Διαδίκτυο, τον Ιανουάριο, τον Μάρτιο και τον Νοέμβριο. Για περισσότερες πληροφορίες δείτε τη διεύθυνση

[www.usaco.org](http://www.usaco.org).

## Και τέλος...

Χάρη στο Διαδίκτυο δεν είναι πλέον απαραίτητο να περιμένετε δύο μήνες για να δείτε τη λύση ενός προβλήματος. Έτσι, όλες οι απαντήσεις στα προβλήματα που προτείνει η στήλη μπορούν να βρεθούν στην ιστοσελίδα μας, στη διεύθυνση

<http://www.uwp.edu/academic/mathematics/usaco/informatics/>.

Μπορείτε να μου στείλετε τις λύσεις σας στη διεύθυνση

[piele@uwp.edu](mailto:piele@uwp.edu).

Για την πλήρη συμμετοχή σας σε αυτή τη στήλη είναι απαραίτητο να έχετε πρόσβαση στο *Mathematica*. Σχετικές πληροφορίες μπορείτε να βρείτε στην ιστοσελίδα της Wolfram στη διεύθυνση

<http://www.wolfram.com/products/student/>. 