DES ILLUSTRATIONS QUI ACCOMPAGNENT LES PROBLEMES A LA CONSTRUCTION DE REPRESENTATIONS SCHEMATIQUES PAR LES ELEVES : QUELS ENJEUX FACE AUX PROBLEMES STANDARDS ET PROBLEMATIQUES ?

Annick **FAGNANT**

Université de Liège, Belgique

afagnant@uliege.be

Résumé

La résolution de problèmes nécessite la mise en œuvre d'un processus complexe de modélisation mathématique (Verschaffel & De Corte, 2008) au sein duquel la construction d'une représentation appropriée de la situation joue un rôle central (Thevenot, Barrouillet, & Camos, 2015). Les illustrations qui accompagnent les problèmes ont pour objectif d'enrichir la représentation (le modèle mental) construite par les élèves ou de soutenir la construction d'une schématisation externe (schéma à compléter ou « modèle » à réinvestir). Les recherches mettent en lumière des enjeux diversifiés et des résultats controversés en fonction du type d'illustrations proposées (Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007) et du caractère standard ou problématique des problèmes analysés (Dewolf, Van Dooren, & Verschaffel, 2017). Par ailleurs, même si les résultats de recherches semblent s'accorder quant à l'importance d'apprendre aux élèves à construire des représentations schématiques externes, le type même de schématisation et la façon de les introduire demeurent sujets à débat (Fagnant & Vlassis, 2013). Au départ d'un panorama de recherches centrées sur les illustrations et sur les schématisations face à des problèmes standards ou problématiques, quelques enjeux, complémentarités et opportunités pour les pratiques de classe sont discutés.

Mots-clés

Construction d'un modèle mental, illustrations, schématisations, problèmes standards, problèmes problématiques

I. INTRODUCTION

A l'heure actuelle, il est généralement admis de considérer la résolution de problèmes comme un processus complexe de modélisation mathématique. La figure 1 illustre ce processus en présentant simultanément ce qui correspondrait à une démarche « experte » de résolution, au sens où elle prendrait adéquatement en compte les différentes étapes-clés du processus, et des démarches « superficielles », au sens où elles court-circuiteraient une ou plusieurs étapes-clés de celui-ci.

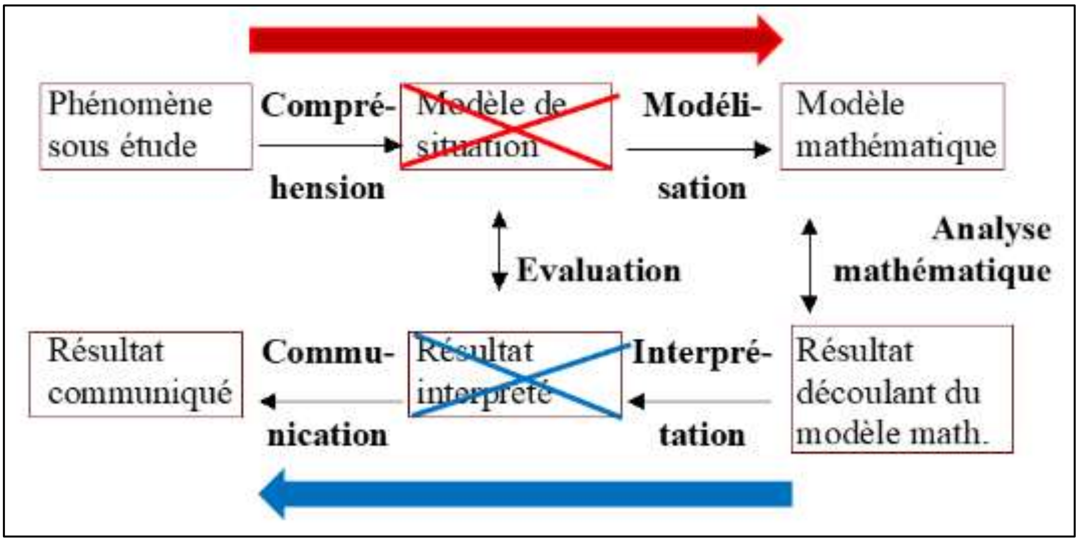


Figure 1 : Le processus complexe de modélisation mathématique et les démarches superficielles (d'après Verschaffel, Greer & De Corte, 2000).

Même si la figure 1 donne l'impression d'une certaine linéarité de la démarche (tout comme l'explication qui suit), celle-ci doit être considérée comme cyclique dans la mesure où des allers-retours entre les différentes étapes sont possibles, voire nécessaires pour résoudre correctement certains problèmes.

Dans la démarche que nous avons qualifiée de « démarche experte », le point de départ est le phénomène sous étude. Il correspond à la description de certains aspects de la réalité, considérés comme potentiellement capables d'être soumis à une analyse mathématique. La première étape implique la compréhension de la situation décrite et la construction d'un modèle de situation. La construction de ce modèle peut nécessiter de faire appel à des connaissances de la vie réelle ; elle peut aussi être médiatisée par des représentations externes, mettant en évidence les variables importantes de la situation, ainsi que les relations temporelles et causales entre ces variables. La deuxième étape (la modélisation) consiste à transformer le modèle de situation en un modèle mathématique, c'est-à-dire à exprimer sous une forme mathématique les relations qui unissent les éléments importants de la situation étudiée. La troisième étape consiste à appliquer une analyse mathématique au modèle mathématique. La disponibilité des ressources joue alors un rôle important, tant pour l'analyse elle-même que pour une anticipation des résultats découlant du modèle. La quatrième étape consiste alors à interpréter la ou les solution(s) en relation avec le modèle de situation. Plusieurs modèles alternatifs peuvent encore être comparés à ce stade. Les résultats interprétés doivent encore être évalués en fonction du modèle de situation : la solution obtenue a-t-elle du sens ? Si ce n'est pas le cas, le modèle de situation peut être soumis à une nouvelle analyse et le processus cyclique peut redémarrer… Une fois la solution trouvée, interprétée, évaluée et acceptée, la dernière étape consiste à la communiquer en fonction des requêtes de la tâche.

Les « démarches superficielles », mentionnées précédemment et représentées par les flèches épaisses sur la figure 1, consistent généralement à négliger une ou plusieurs étape(s) de cette démarche « experte », généralement l'étape de compréhension (ou de construction d'un modèle de situation) et les étapes d'interprétation et/ou d'évaluation. La figure 2 illustre ce type de démarches superficielles face à trois problèmes assez différents les uns des autres.

P1 - Pierre a joué deux parties de billes. Il a **perdu** 8 billes à la première partie et il a **perdu** 3 billes à la seconde partie. Combien de billes a-t-il **perdues** en tout ?

> Démarche superficielle consistant à s'appuyer sur les mots-clés présents dans l'énoncé pour choisir l'opération à effectuer, sans procéder à la construction d'une représentation (un modèle de situation) mettant en évidence les données importantes du problème et les relations qui les unissent : « perdre » évoque une soustraction, l'élève applique alors l'opération erronée « 8-3 = 5 ».

P2 - John court le 100 m en 15 secondes. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir 1 km ?

> Démarche superficielle consistant à ne pas prendre en compte ses connaissances de la vie réelle pour construire un modèle de situation approprié : la situation décrite dans l'énoncé évoque un problème de vitesse, l'élève applique alors un modèle proportionnel sans se poser la question de savoir si celui-ci a du sens dans la situation décrite : 10 x 15 secondes = 150 secondes

P3 - Un bus de l'armée peut contenir 36 soldats. Si 1128 soldats ont besoin de se rendre à leur camp d'entraînement en bus, combien de bus sont nécessaires ?

> Démarche superficielle consistant à ne pas interpréter la solution mathématique obtenue au terme des calculs effectués (« 31,33 bus ») ou à procéder à l'arrondi à l'unité (« 31 bus »). Dans les deux cas, la plausibilité de la réponse n'est pas évaluée en regard du modèle de situation (la solution « 31,33 bus » n'a pas de sens d'un point de vue réaliste et la solution « 31 bus » laisse quelques soldats sur le carreau).

Figure 2 : Exemples de démarches superficielles face à des problèmes standards et problématiques.

En référence à la distinction proposée par l'équipe de Leuven (Verschaffel et al., 2000), le premier problème est un « problème standard », au sens où il peut être résolu par l'application directe d'une opération au départ des données de l'énoncé (P1). Les deux autres sont des « problèmes problématiques » pour lesquels la simple application d'une opération pose question à partir du moment où des connaissances réalistes liées à la situation sont prises en considération (P2) ou qui nécessitent une interprétation réaliste de la solution (P3).

Les problèmes standards et les problèmes problématiques posent évidemment des questions différentes en termes d'enjeux pour l'enseignement. Ainsi, les réponses « étonnantes » produites par les élèves face aux problèmes problématiques peuvent sans doute en partie s'expliquer par une rupture du « contrat didactique » (Brousseau, 1990) dans la mesure où ces problèmes vont à l'encontre des « normes socio-mathématiques » (Yackel & Cobb, 1996) établies dans les classes. Elles questionnent quant aux pratiques de classe qui conduisent justement les élèves à penser que le « contrat » est de faire des calculs pour donner une réponse numérique précise face à tout problème proposé en classe et/ou à ne pas interpréter la solution mathématique obtenue. Parallèlement, les démarches superficielles produites face aux problèmes standards questionnent également quant aux raisons qui poussent les élèves à penser que l'on peut se fier aux mots-clés (ex. perdre = soustraction) ou à d'autres « indices », comme les nombres proposés dans l'énoncé (ex. 75 et 3 = division) ou la dernière opération découverte en classe (ex. hier, on a vu la proportionnalité, c'est donc ce modèle mathématique qu'il convient d'appliquer aujourd'hui). Finalement, qu'il s'agisse de problèmes standards ou problématiques, un enjeu important de l'enseignement est d'amener les élèves à développer des démarches expertes et réflexives de résolution de problèmes, consistant à mettre en œuvre un processus complexe de modélisation mathématique dans lequel la construction d'une représentation appropriée (d'un modèle de situation) joue un rôle central (Thevenot, Barrouillet, & Camos, 2015).

Dans cet article, nous allons nous intéresser à deux « pratiques » assez répandues dans le domaine de la résolution de problèmes : accompagner les énoncés d'illustrations et inviter les élèves à construire des schématisations externalisées sur papier (schémas, dessins…). Nous avons choisi de situer nos propos dans le domaine des « problèmes d'application » face auxquels on attend des élèves qu'ils mobilisent des connaissances mathématiques acquises préalablement pour faire face aux situations qui leur sont proposées. Dans ce type de situations, on peut considérer que les illustrations qui accompagnent les problèmes et les représentations externes produites par les élèves eux-mêmes ont toutes deux pour but d'aider à la construction d'une représentation mentale (un modèle de situation) permettant de résoudre le problème en mobilisant un modèle mathématique approprié. Mais les illustrations aident-elles réellement les élèves (*et qu'en est-il face aux problèmes standards vs problématiques*) et la construction de schématisations par les élèves peut-elle constituer un outil d'enseignement/apprentissage porteur (*et si oui, quel type de schématisation et comment les introduire*) ? Sans prétention d'exhaustivité, la suite du texte apporte quelques éléments de réponse à ces questionnements en cherchant à mettre en évidence les enjeux, les complémentarités et les opportunités de ces « illustrations » et « schématisations » pour les pratiques de classe.

II. LES ILLUSTRATIONS QUI ACCOMPAGNENT LES PROBLEMES

De nombreuses études se sont intéressées à l'impact des illustrations qui accompagnent les énoncés de problèmes standards (Berends & Van Lieshout, 2009 ; Elia, 2009 ; Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007 ; Fagnant & Vlassis, 2013 ; Pantziara, Gagatsis, & Elia, 2009 ; Reuter, Schnotz & Rasch, 2015) ou problématiques (Dewolf, Van Dooren, Ev Cimen, & Verschaffel, 2014 ; Dewolf, Van Dooren, & Verschaffel, 2017 ; Fagnant & Auquière, à paraître). Pour présenter quelques constats et enjeux liés à ces illustrations, il nous est apparu pertinent de nous appuyer sur la typologie proposée par Elia et Philippou (2004) qui distingue quatre types d'illustrations définies comme suit :

> *"Decorative pictures do not give any actual information concerning the solution of the problem. Representational pictures represent the whole or a part of the content of the problem, while organizational pictures provide directions for drawing or written work that support the solution procedure. Finally, informational pictures provide information that is essential for the solution of the problem; in other words, the problem is based on the picture." (p. 328)*

Dans les points qui suivent, nous allons nous intéresser à l'effet de ces différents types d'illustrations lorsqu'elles accompagnent des problèmes standards d'abord, des problèmes problématiques ensuite.

1. Les illustrations qui accompagnent les problèmes standards

Ciblées sur des problèmes standards, correspondant à des structures additives de type « changement » (selon la typologie de Riley, Greeno & Heller, 1983 ; ou de type « Etat-Transformation-Etat », selon l'analyse de Vergnaud, 1990), les recherches menées par Berends et Van Lieshout (2009) auprès de 135 élèves de grade 5 (10-11 ans) aux Pays-Bas et par Elia et al. (2007) auprès de 1447 élèves des grades 1 à 3 (6-7 à 8-9 ans) à Chypre conduisent à des résultats assez convergents. Tout d'abord, les illustrations « décoratives » et les illustrations « représentationnelles » (qualifiées aussi d'évocatrices) ont globalement peu d'effet ; elles semblent être considérées comme inutiles par les élèves et n'affectent pas les taux de réussite observés. Les illustrations « informationnelles », quant à elles, ont un effet contre-productif qui semblerait s'expliquer par une augmentation de la charge mnésique et témoigner des difficultés éprouvées par les élèves pour combiner la prise d'informations dans le texte et dans les illustrations. Enfin, les illustrations « organisationnelles », supposées donner des indications sur la procédure de résolution à mobiliser, présentent des résultats assez disparates selon les études. En effet, dans l'étude de Berends et Van Lieshout précitée, elles impactent négativement les résultats des élèves faibles et elles n'ont pas d'effet auprès des élèves plus compétents. Ces résultats, qui peuvent paraître surprenants, peuvent sans doute en partie s'expliquer par le fait que ces auteurs ont choisi de tester l'impact des illustrations face à un problème très simple pour des élèves de grade 5 (un problème de type changement présentant l'inconnue à l'état final, c'est-à-dire l'un des problèmes les plus élémentaires de la typologie additive). Mais qu'en est-il de l'effet de ce type d'illustrations face à des problèmes plus complexes ?

Dans une étude menée auprès de 194 élèves chypriotes de grade 6 (11-12 ans), Pantziara et al. (2009) ont mis en œuvre un testing en deux étapes impliquant des problèmes que les auteurs qualifient de non-routiniers[1] et qu'ils définissent comme suit, par opposition aux problèmes routiniers :

> *"English (1996) defines non-routine problems as the problems that do not involve routine computations, but the application of a certain strategy, in this case a diagram, is most often required in order to solve a problem. Non-routine problems are considered more complicated and difficult than routine problems in which only the application of routine computations is involved in their solution (Schoenfeld, 1992)." (Pantziara et al., 2009, p. 43)*

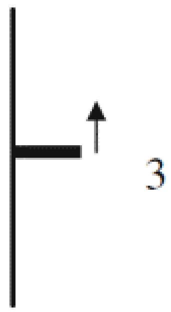
Dans un premier temps, un test comprenant six problèmes non-routiniers a été proposé aux élèves qui étaient invités à les résoudre comme ils le souhaitaient et à développer par écrit leur démarche de résolution. Dans un second temps (une semaine plus tard), les élèves ont reçu un test comprenant six problèmes parallèles à ceux du premier test, mais étant cette fois accompagnés d'une illustration (qualifiée par les auteurs de *diagramme*) que les élèves devaient utiliser pour résoudre le problème. Ces *diagrammes* peuvent être considérés comme des illustrations « organisationnelles » incomplètes devant aider les élèves à se représenter le problème et à dégager une démarche de résolution appropriée.

La figure 3 présente un exemple de problème non-routinier accompagné de l'illustration à compléter ; elle montre aussi une production d'élève indiquant que ce dernier s'est emparé de cette « ébauche » pour compléter la schématisation et résoudre le problème sur cette base.

Globalement, les résultats de l'étude de Pantziara et al. (2009) montrent que la présence des illustrations ne conduit pas à une augmentation des performances moyennes en résolution de problèmes. Face à ces problèmes non-routiniers, accompagner les énoncés d'illustrations (dans le cas présent, sous la forme de schémas prédéfinis à compléter) semble être une aide pour certains élèves alors que cela semble en perturber d'autres.

[1] Ces problèmes non-routiniers n'en demeurent pas moins des problèmes « standards » au sens où il est possible de les résoudre en appliquant une ou plusieurs opération(s) au départ des nombres de l'énoncé. C'est donc par opposition aux problèmes « problématiques » (face auxquels on attend des élèves qu'ils fassent appel à leurs connaissances de la vie réelle pour questionner le modèle mathématique que l'on pourrait appliquer à la situation) qu'on conviendra ici de les considérer comme « standards ».

Mr. Andreas is standing in a rung of a ladder and cleans the building's windows. Then, he stepped up three rungs to clean the rest of the windows. Next, he went down five rungs to clean other windows. Then he climbed up seven rungs to clean the rest of the windows and he was at the ninth rung of the ladder. In which rung did Mr. Andreas stand when he first started cleaning the windows?



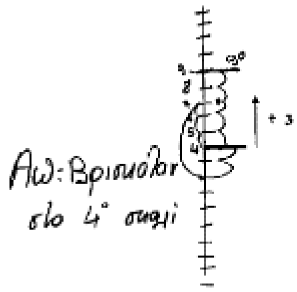
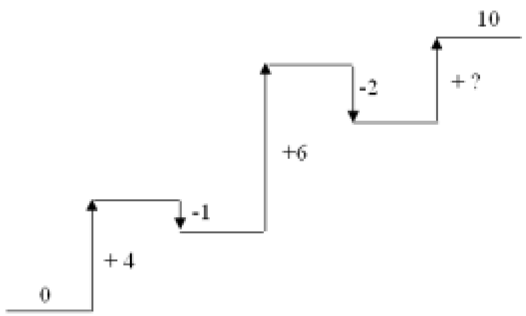


Figure 3 : Problème non-routinier accompagné d'une illustration organisationnelle (Extrait de Pantziara et al., 2007, p. 57) et exemple de production d'élève (Ibid., p. 52).

Dans la lignée de l'étude de Pantziara et al. (2009), une étude comparable a été menée auprès de 146 élèves de grade 4 (élèves de 9-10 ans) au Luxembourg (Fagnant & Vlassis, 2013). Un testing en trois étapes, constituées chacune de 4 problèmes non-routiniers inspirés de ceux proposés dans l'étude précitée, a été mis en place en vue d'analyser l'impact de deux types de schématisations : l'un, proche des *diagrammes* des auteurs chypriotes, mais présentant cette fois toutes les données du problème, l'autre, plus proche de dessins produits spontanément par les enfants face à ce type de problèmes et conservant des éléments de contexte. La figure 4 illustre ces deux types d'illustrations pour un problème parallèle au laveur de vitre (figure 3).

A snail tries to climb a brick wall. First it climbs up the first four bricks, but is then exhausted, stops and falls asleep. While it is asleep it slips down one brick. When it wakes up it climbs up six bricks, then goes to sleep again and slips down two bricks. On its last attempt it reaches the tenth brick. How many bricks did the snail climb on its last attempt?



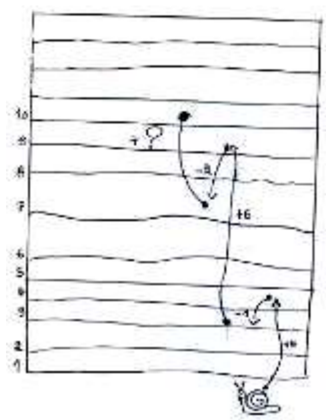


Figure 4 : Problème non-routinier accompagné de deux types d'illustrations organisationnelles (Extrait de Fagnant & Vlassis, 2013, p. 165).

Lors de la première phase de test, les problèmes étaient présentés sans illustration. Lors de la deuxième phase (qui survenait tout de suite après), des problèmes parallèles étaient proposés, accompagnés de l'un ou l'autre type d'illustrations (par ex. le problème du laveur de vitre – figure 3 – était proposé en étape 1 sans illustration et le problème des escargots –figure 4 – était proposé en étape 2 accompagné d'un des deux types d'illustrations). Pour éviter un effet-classe, les deux types d'illustrations étaient répartis au hasard dans chaque classe. Lors de la troisième phase, qui se déroulait une semaine plus tard et sur laquelle nous reviendrons dans la deuxième partie de cet article, les élèves étaient invités à produire eux-mêmes une schématisation, en s'inspirant de celles qu'ils avaient rencontrées à l'étape 2.

Les résultats montrent une augmentation des performances lors de l'étape 2, lorsque les énoncés sont accompagnés d'illustrations organisationnelles de type *diagramme* ou *dessin schématique*. Les progrès observés sont relativement importants, mais ils ne permettent pas de montrer la plus-value d'un des deux types d'illustrations par rapport à l'autre. Par ailleurs, tout comme dans l'étude de Pantziara et al. (2009), les résultats sont assez variables selon les élèves. De plus, les taux de réussite à l'ensemble du test restent relativement bas, montrant assez nettement que plusieurs élèves ne se saississent pas de l'aide (soi-disant) apportée par ces illustrations.

Dans une approche similaire, l'étude de Reuter et al. (2015), réalisée auprès de 199 élèves de grade 4 (9-10 ans) en Allemagne, n'a montré aucun impact significatif de la présence d'illustrations accompagnant des problèmes non-routiniers. Les dessins et les *diagrammes* (ici, de type tableaux à double entrée) accompagnant les énoncés ne semblent pas avoir facilité le processus de résolution de problèmes. Lorsqu'un léger effet se marque, il est généralement en faveur des dessins, mais les effets sont variables en fonction des problèmes et en fonction des compétences initiales des élèves. Au final, on s'accordera avec leur conclusion générale selon laquelle la présence d'illustrations est insuffisante pour soutenir efficacement le processus de résolution de problèmes et qu'il est donc nécessaire de développer « *an early training in diagram literacy* » (p. 1387).

2. Les illustrations qui accompagnent les problèmes problématiques

Le point qui précède soulignait le fait que les illustrations « décoratives » et les illustrations « représentationnelles » (qualifiées aussi d'évocatrices) avaient globalement peu d'effet et semblaient s'avérer somme toute peu utiles à la résolution du problème (Berends & Van Lieshout, 2009 ; Elia et al., 2007). Face aux problèmes standards, la distinction entre ces deux types d'illustrations n'est d'ailleurs pas facile à établir et semble en réalité dépendre de l'interprétation qu'en fait le sujet. Les propos d'Elia (2009) sont éclairants :

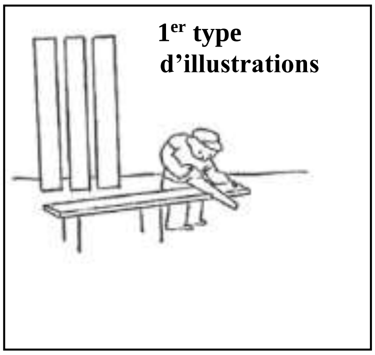
> *« Si on considère la situation concrète globale du problème, l'image est évocatrice. Mais si on considère que seules les données du problème sont importantes — (...) ce qui revient à considérer l'évocation d'une situation concrète comme inutile — l'image est décorative. En fait la distinction entre image décorative et image évocatrice est non pertinente pour les énoncés de problèmes ». (p. 11)*

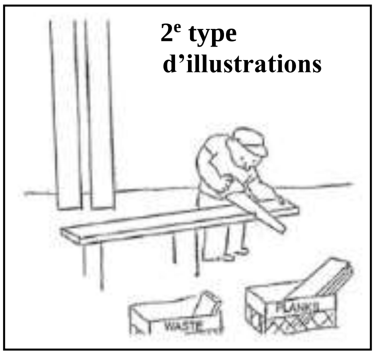
Si l'on peut s'accorder avec cette façon de voir les choses dans le cas de problèmes standards, la distinction entre les deux types d'illustrations garde au contraire tout son sens face aux problèmes problématiques. En effet, face à ces derniers, l'objectif des illustrations « représentationnelles » est justement de conduire les élèves à évoquer la situation concrète à laquelle l'énoncé fait référence, de façon à les inciter à faire appel à leurs connaissances de la vie réelle et à éviter de se précipiter dans l'application d'une opération directement appuyée sur les données de l'énoncé. Autrement dit, lorsqu'elles accompagnent des problèmes problématiques, ces illustrations représentationnelles visent à amener les élèves à construire un « modèle de situation » plus riche et plus réaliste.

Dans une première étude, Dewolf et al. (2014) ont proposé des problèmes problématiques à 402 élèves de grade 5 (10-11 ans) provenant d'écoles situées en Communauté flamande de Belgique. Ils ont comparé plusieurs conditions expérimentales en vue d'évaluer l'effet de la présence d'illustrations « représentationnelles » sur le réalisme des réponses fournies. Contrairement aux hypothèses des chercheurs, la présence de ces illustrations n'a eu aucun effet significatif sur la propension des élèves à produire des réponses réalistes.

Prolongeant ces travaux, Dewolf et al. (2017) ont alors comparé l’effet de trois types d’illustrations en soumettant des problèmes problématiques à 288 élèves de grades 5-6 (10-12 ans). Ce qui distingue les trois modalités comparées, c’est que les premières représentent simplement le contexte dans lequel se situent les problèmes (comme dans l’étude de 2014) alors que les deux autres contiennent un élément supplémentaire, ciblé sur la particularité de la situation d’un point de vue réaliste. Dans la troisième modalité, cet élément est mis en évidence à l’aide d’un marquage de couleur (voir figure 5). Comme dans l’étude de Fagnant et Vlassis (2013), les trois types d’illustrations étaient distribuées aléatoirement au sein de chaque classe. Dans toutes les classes, les élèves recevaient aussi deux avertissements visant à attirer leur attention sur le fait que certains problèmes étaient un peu particuliers et les invitant à regarder attentivement les illustrations.

Steve has bought 4 planks of 2.5 m each to make a bookshelf.
How many planks of 1 m can he get out of these planks?





3e type d’illustrations

La boîte contenant les déchets (*waste* sur la 2e image) est mise en évidence par un marquage orange.

Figure 5 : Les illustrations utilisées dans l’étude de Dewolf et al. (2017, p. 343).

Les résultats qu’ils obtiennent ne permettent toujours pas de mettre à jour des différences significatives selon le type d’illustrations. Les deux nouveaux types d’aide visuelle n’apportent aucune plus-value substantielle alors qu’elles visaient pourtant à mettre en exergue un élément-clé du problème. Parmi les hypothèses évoquées pour expliquer ces résultats, les auteurs estiment que les illustrations ont pu être considérées comme purement décoratives par les élèves, qui les ont alors sans doute ignorées ou analysées très superficiellement.

En vue d’obliger les élèves à prendre en compte les illustrations proposées, Fagnant & Auquière (à paraître) ont transformé le 3e type d’illustrations en illustrations « informationnelles », en présentant les données numériques du problème au sein même de l’illustration (et uniquement dans celle-ci) comme illustré à la figure 5. Dans ce cas, l’élève est obligé de prendre en compte l’illustration pour y retirer les données utiles à la résolution du problème.

Le dispositif mis en place est tout à fait parallèle à celui de l’étude de Dewolf et al. précitée : les problèmes proposés, les consignes et les deux premiers types d’illustrations sont identiques ; seul le troisième type d’illustrations est modifié. Le test a été soumis à un échantillon composé d’environ 500 élèves de grades 5-6 (10-12 ans) provenant d’écoles situées en Belgique francophone.

Steve a acheté des planches de même longueur pour fabriquer une étagère. Combien de petites planches d’étagère peut-il faire avec ces planches ?

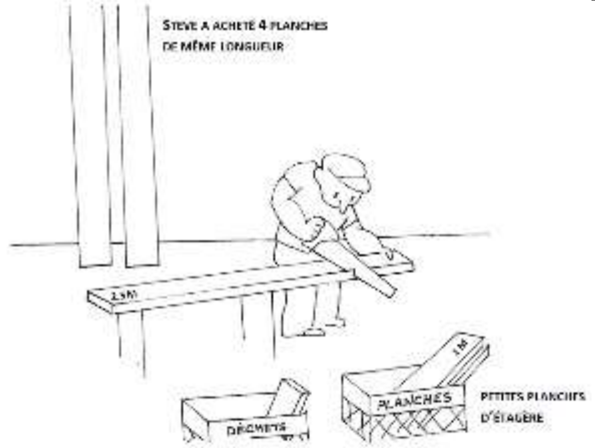


Figure 6 : Exemple d’illustration informationnelle utilisée dans l’étude de Fagnant & Auquière (à paraître).

Les résultats, issus d’un premier codage brut, montrent un léger impact des illustrations « informationnelles » (légère augmentation des réponses réalistes attendues et diminution des réponses non réalistes comparativement aux deux autres types d’illustrations), mais aussi une très grande variabilité selon les problèmes proposés. Un élément interpellant est que les représentations informationnelles semblent aussi avoir engendré davantage de démarches erronées ne correspondant pas aux réponses non réalistes attendues. Ce constat, qu’il conviendra d’éclairer par des analyses ultérieures, pourrait traduire un effet délétère des illustrations informationnelles, comme cela a été constaté face aux problèmes standards. En définitive, le codage en réponses réalistes *vs* non réalistes s’avère plus complexe (et peut-être plus limitatif) que ce que les écrits antérieurs sur la question ne le laissaient entendre (voir Fagnant & Auquière, à paraître, pour une discussion sur la problématique du codage). Quoi qu’il en soit, le premier codage brut contenant (pour chacun des problèmes et pour chacun des trois types d’illustrations) une proportion importante de réponses « autres » (i.e. ne correspondant ni aux réponses réalistes attendues, ni aux réponses non réalistes traduisant les erreurs courantes), des analyses complémentaires sont nécessaires pour affiner les résultats.

Au final, il semble que l’on peut compléter la conclusion formulée au point 1 en indiquant qu’accompagner les problèmes problématiques d’illustrations ne semble pas non plus suffisant pour favoriser la prise en compte de conceptions réalistes par les élèves ou, pour le dire autrement, pour faciliter la résolution de ce type de problèmes.

III. LA CONSTRUCTION DE SCHEMATISATIONS PAR LES ELEVES

Puisque fournir des illustrations aux élèves ne suffit pas, il convient sans doute de les aider à construire eux-mêmes des schématisations efficaces. Mais quel type de schématisations et comment les faire apprendre aux élèves ?

De nombreuses études se sont focalisées sur les schématisations externes pouvant soutenir l’étape de construction de la représentation du problème (d’un modèle de situation). Plusieurs études ont montré qu’il était possible de s’appuyer sur les dessins spontanément construits par les élèves (Csíkos, Szitányi, & Kelemen, 2012 ; Van Essen & Hamaker, 1990) ou de leur apprendre à utiliser des schématisations prédéfinies, spécifiques aux structures classiques de problèmes additifs (Willis & Fuson, 1988) ou multiplicatifs (Levain, Le Borgne, & Simard, 2006). D'autre études ont montré qu'il était possible d'apprendre aux élèves à utiliser des *diagrammes* (cf. étude de Pantziara et al., 2009 citée précédemment) adaptables à des problèmes non-routiniers (Diezmann, 2002) ou encore des schématisations « standardisées » (*schémas « range-tout » ou strip diagrams*) qui s'adaptent aux différentes structures additives ou multiplicatives de problèmes (Beckmann, 2004 ; Polotskaia & Consultant, 2010 ; Savard & Polotskaia, 2014). Quelle que soit finalement leur forme spécifique, les schématisations efficaces sont celles qui aident à construire une représentation mentale permettant de mettre en évidence les données importantes du problème et les relations qui les unissent (Hegarty & Kozhenikov, 1999 ; Uesaka et al., 2007).

Dans le cadre de cet article, nous allons nous centrer sur deux études menées par notre équipe de recherche. La première confronte l'utilisation de dessins libres et de *diagrammes* tels que ceux utilisés dans l'étude de Pantziara et al. (2009 ; voir aussi Diezman, 2002) ; la seconde s'intéresse aux schématisations « range-tout » tels qu'utilisées dans les études canadiennes (Polotskaia & Consultant, 2010 ; Savard & Polotskaia, 2014).

1. Les *diagrammes* et *les dessins schématiques* comme soutien à la résolution de problèmes

Revenons tout d'abord sur l'étude de Fagnant et Vlassis (2013) menée au Luxembourg auprès d'élèves de grade 4 (9-10 ans). Pour rappel, cette étude comportait trois étapes : lors de la première étape, les problèmes étaient présentés sans illustration ; lors de la deuxième étape, des problèmes parallèles accompagnés de dessins schématiques ou de *diagrammes* (voir figure 4) étaient proposés ; lors de la troisième étape (une semaine plus tard), les élèves étaient invités à résoudre une nouvelle série de problèmes parallèles à ceux des étapes précédentes en produisant eux-mêmes une schématisation, inspirée de celles rencontrées à l'étape 2. Nous avions déjà noté que la présence d'illustrations (étape 2) avait conduit à une augmentation des performances comparativement à l'étape 1, sans que l'on puisse conclure à un effet plus marqué des *diagrammes* ou des dessins schématiques (dans les deux cas, les différences se marquaient par une ampleur de l'effet[2] proche de 0.65). Qu'en est-il alors de l'invitation à réinvestir le « modèle » rencontré une seule fois ?

Lors de l'étape 3, l'invitation à réinvestir les schématisations rencontrées à l'étape précédente s'accompagnait d'un rappel ciblé. Pour les élèves qui avaient été confrontés aux *diagrammes*, le rappel mentionnait les exemples rencontrés (diagrammes fléchés, tableaux à double entrée et diagramme de Venn représentant une relation partie-tout), mais aucune indication n'était fournie quant au type de *diagramme* à utiliser face à tel ou tel problème. Pour les élèves qui avaient été confrontés aux dessins schématiques, on précisait qu'il fallait réaliser des dessins qui pouvaient prendre n'importe quelle forme, mais qui devaient contenir certaines informations (les données importantes, l'inconnue et les relations qui les unissent). Les résultats obtenus à l'étape 3 sont certes un peu plus faibles que ceux observés à l'étape 2 (lorsque les schématisations étaient fournies aux élèves), mais ils sont plus élevés qu'à l'étape 1 (la comparaison entre les étapes 1 et 3 de l'épreuve se traduit par une ampleur de l'effet modérée, proche de 0.50).

[2] L'ampleur de l'effet est calculée sur la base des moyennes et des écarts-types (M1 - M2 / √[(12+22) / 2]). Généralement, en référence à Cohen (1992), on considère une ampleur de l'effet de 0.2 comme faible, de 0.5 comme modérée et de 0.8 comme élevée. L'ampleur de l'effet renseigne sur la taille de la différence entre deux moyennes observées, mais n'autorise pas forcément les généralisations.

Après une très brève intervention, consistant simplement à les confronter à un outil possible d'aide à la résolution de problèmes, les élèves peuvent en partie produire des représentations schématiques efficaces et améliorer leurs performances de résolution de problèmes. Les schématisations produites s'inspirent des schématisations rencontrées, mais elles présentent également certaines adaptations au contexte du problème. Enfin, notons aussi que certaines résolutions correctes ne sont pas accompagnées de schématisations ou sont accompagnées de schématisations incomplètes, rappelant par-là que l'enjeu essentiel est bien la représentation mentale que l'élève se construit de la situation-problème. La figure 7 illustre quelques exemples de schématisations produites par les élèves face au problème des « puces » qui correspond au problème de réinvestissement du laveur de vitre (figure 3) et des escargots (figure 4).

Paul est dresseur de puces. Il a appris un tour fabuleux à sa championne Pioupioute. Il aligne des crayons et il fait sauter Pioupioute au-dessus des crayons. Elle fait 6 bonds en avant, 1 bond en arrière, 5 bonds en avant, 2 bonds en arrière… puis elle s'arrête pour saluer les spectateurs. Elle fait encore quelques bonds en avant et elle s'arrête après avoir sauté au-dessus du 14e crayon. Combien de bonds en avant Pioupioute a-t-elle fait après avoir salué les spectateurs ?

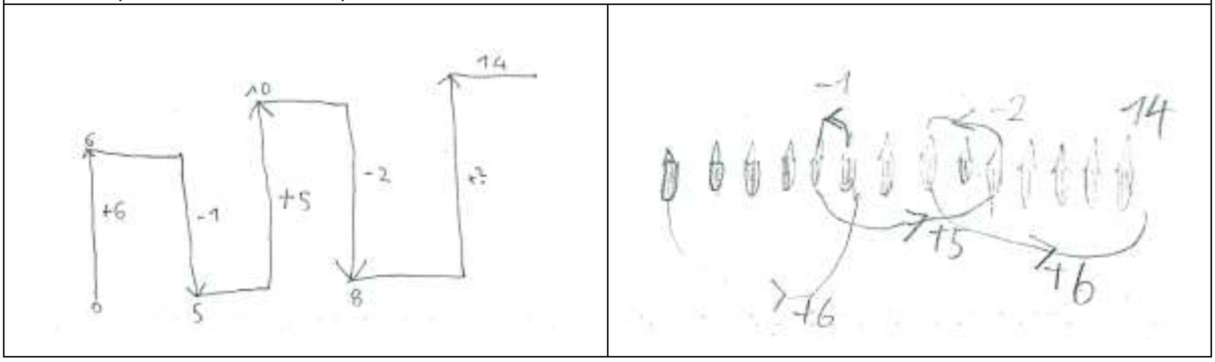


Figure 7 : Exemples de schématisations produites par les élèves face au problème des puces – Extrait de la recherche de Fagnant & Vlassis (2013) – Résultats non publiés.

Si les schématisations externalisées sur papier sont intéressantes, c'est non seulement parce qu'elles peuvent soutenir le processus de construction d'une représentation mentale, mais aussi parce qu'elles constituent un outil potentiel de communication entre l'enseignant et les élèves. Dans l'étude qui vient d'être détaillée, aucune phase d'enseignement/apprentissage proprement dite n'a été organisée. Les progrès observés témoignent du « potentiel » offert par ces représentations schématiques, mais ils montrent aussi qu'une simple présentation de celles-ci n'est pas suffisante pour la majorité des élèves. En effet, une analyse plus détaillée des résultats montre que les progrès moyens traduisent en réalité des divergences importantes entre élèves : si les représentations schématiques semblent avoir aidé certains d'entre eux (39% en moyenne pour l'ensemble des problèmes), elles paraissent aussi en avoir perturbé d'autres (7% en moyenne) et avoir eu très peu d'effet sur plus de la moitié de l'échantillon. Au final, les résultats sont variables selon les problèmes et selon les élèves et il n'est pas possible de dégager clairement la plus-value d'une forme de schématisations en particulier (même si les résultats sont légèrement en faveur des *diagrammes*). Mais qu'en est-il si on procède à une phase d'enseignement/apprentissage plutôt qu'à une simple exposition aux schématisations ?

En prolongement de cette étude, Auquière (2013) a mis en œuvre une étude exploratoire dans laquelle ces deux types de schématisations ont fait l'objet de cinq séances d'enseignement/apprentissage dans des classes de grade 4 (élèves de 9-10 ans). Dans une classe, les dessins libres étaient introduits en suivant l'approche didactique proposée par Demonty, Fagnant et Lejong (2004) dans le manuel « Résoudre des problèmes : pas de problème ». En aucun cas, un « modèle » de représentation n'est proposé ; il s'agit de partir des schématisations produites spontanément par les élèves, de les exploiter en insistant sur les éléments importants d'une représentation efficace et de les inviter à retravailler leurs représentations spontanées de façon à ce qu'elles soient opérationnelles et les aident à résoudre le problème (voir Fagnant, 2008 pour une présentation plus détaillé). Dans l'autre classe, les différents *diagrammes* de l'étude de Pantziara et al. (2009) étaient introduits tour à tour par l'enseignant, puis les élèves étaient invités à les réinvestir face à des problèmes du même type. Les différents types de problèmes étaient ensuite mélangés de façon à amener les élèves à sélectionner, parmi le répertoire de *diagrammes* qu'ils avaient rencontrés, lequel ou lesquels pourrai(en)t s'adapter au problème soumis (voir approche proposée par Diezmann, 2002).

Les cinq séances d'enseignement/apprentissage étaient encadrées par un pré-test et un post-test. De façon à évaluer les capacités de transfert, le test était composé non seulement de problèmes proches de ceux utilisés durant l'intervention, mais aussi de problèmes de structures différentes. Les résultats de l'intervention ont été comparés à ceux obtenus dans des classes contrôles dans lesquelles seuls les tests ont été administrés. Les résultats sont assez positifs dans la mesure où l'on note des progrès notables au post-test (ampleur de l'effet très importante dans les deux classes expérimentales – proche de 1.00 dans une classe et de 1.20 dans l'autre – et léger – proche de 0.20 – dans les classes contrôles). Une analyse plus fine (non présentée ici) montre que la plupart des élèves ont progressé, parfois de façon très importante. Comme on pouvait s'y attendre, les résultats sont toutefois moins marqués sur les problèmes de transfert que sur les problèmes du même type que ceux travaillés en classe. Globalement, l'approche centrée sur les *diagrammes* semble un peu plus efficace que l'approche centrées sur les « dessins libres », mais les différences sont faibles et dépendent des types de problèmes.

Finalement, on pourrait reprendre à notre compte la conclusion de Pantziara et al. (2009) qui plaidaient pour une complémentarité entre les diagrammes et d'autres constructions plus « inventives » : "*teachers could give students opportunities not only to use presented diagrams but also to invent or search for their own solution strategy*" (p. 56) de façon à permettre à chacun des élèves de trouver une approche qui lui convient et qui l'aide à construire une représentation mentale correcte et opérationnelle des différents types de problèmes proposés. Rencontrer des schématisations différentes et inviter les élèves à réfléchir quant au meilleur usage de celles-ci permettrait sans doute aussi d'aider les élèves à faire preuve de « flexibilité représentationnelle » (Nistal, Van Dooren, Calrebout, Elen & Verschaffel, 2009), en s'accordant avec l'idée que le choix d'une représentation appropriée ne dépend pas seulement du type de problème, mais aussi des élèves et sans doute d'une interaction entre ces deux variables. En réalité, certains types de schématisations pourraient s'avérer plus ou moins efficaces selon qu'ils s'accordent ou non avec les démarches spontanées des élèves. C'est notamment cette idée de « (non) congruence » que nous avons explorée dans une autre étude, qui s'appuie cette fois sur les schématisations « range-tout » développées par l'équipe canadienne susmentionnée (Polotskaia & Consultant, 2010 ; Savard & Polotskaia, 2014).

2. Les *schématisations « range-tout »* comme soutien à la résolution de problèmes

Plusieurs études menées par Polotskaia et ses collaborateurs (Ducharme & Polotskaia, 2008, 2009 ; Gervais, Savard & Polaskaïa, 2013 ; Polotskaia, 2009 ; Polotskaia & Consultant, 2010) montrent qu'il est possible d'apprendre aux élèves à utiliser des schématisations qu'ils qualifient de « range-tout », et ceci, dès le début de l'enseignement primaire (Savard &

Polaskaïa, 2014). Ces schématisations auraient l'avantage d'être adaptables à des problèmes de structures différentes et d'aider les élèves à se focaliser sur les relations existant entre les quantités connues et inconnues. La figure 8 illustre ces schématisations pour les trois structures de problèmes issues de la classification de Riley et al. (1983), ainsi que face à une structure de problème combinant plusieurs de ces relations de base.

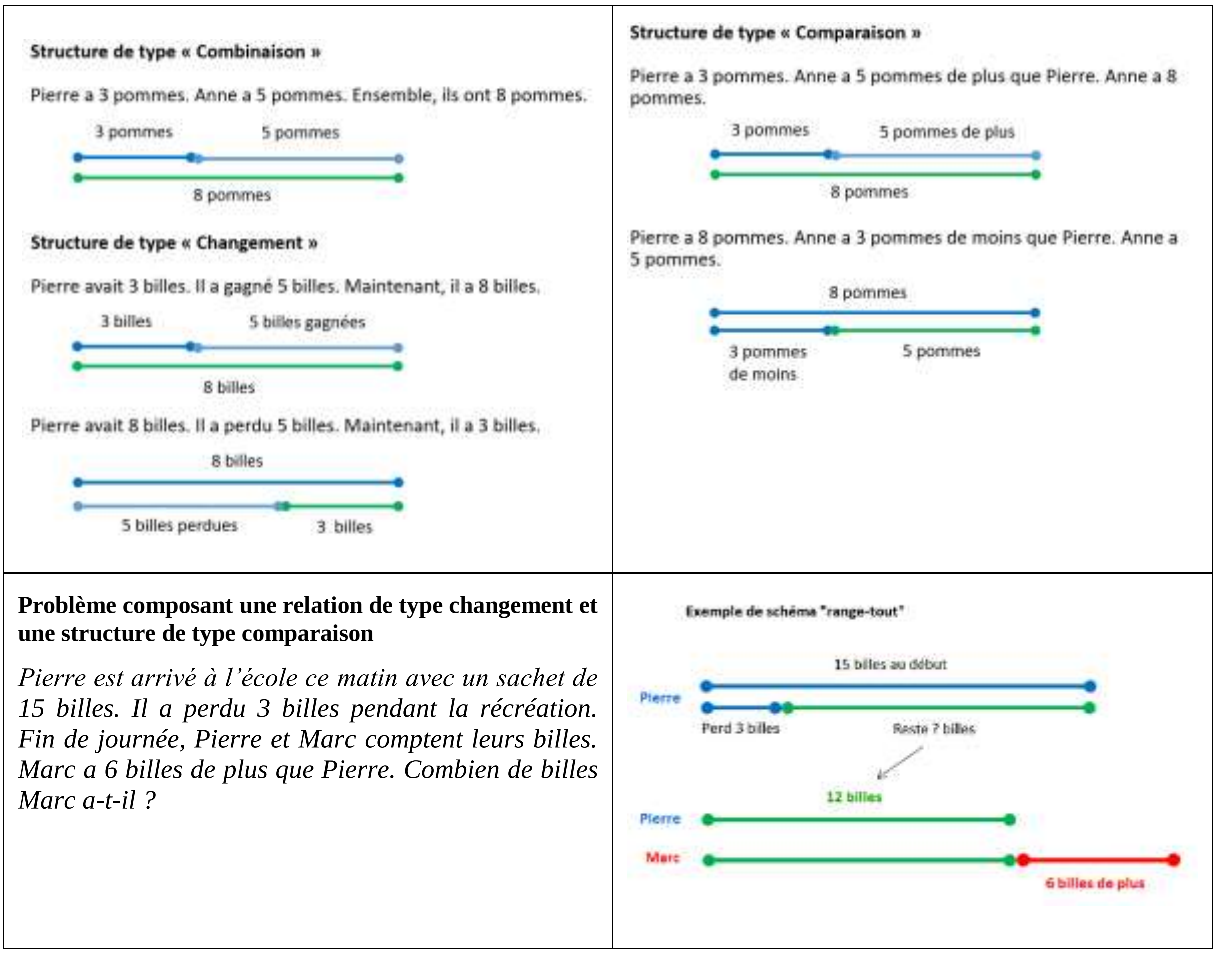


Figure 8 : Schématisations « range-tout » pour des structures de types combinaison, changement et comparaison, ainsi que pour un problème composant deux de ces structures de base – Extrait de Auquière, Demonty & Fagnant (à paraître).

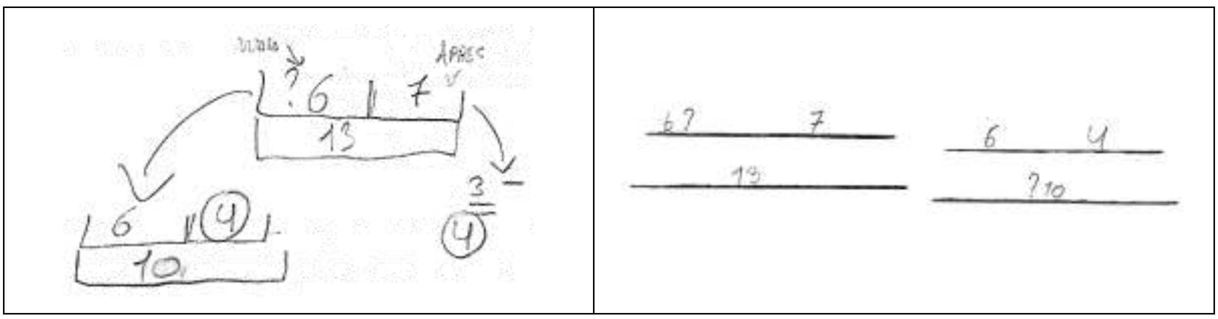
Dans une étude exploratoire menée auprès d'élèves de grade 4 (9-10 ans – Auquière et al., à paraître), ces schématisations ont été brièvement introduites aux élèves lors d'une séance focalisée sur des problèmes de type combinaison ; elles ont ensuite été réinvesties face au problème présenté à la figure 8. Avant l'introduction de ces schématisations, les élèves ont été soumis à un test composé de trois problèmes de structures différentes : un problème de type combinaison et deux problèmes composant plusieurs structures (changement et comparaison, d'une part ; combinaison et comparaison, d'autre part). En nous appuyant sur des études menées préalablement par Gamo et ses collaborateurs (Gamo, Sander & Richard, 2010 ; Gamo, Taabane & Sander, 2011), on s'attendait à ce que les élèves développent une procédure de résolution économique (procédure-comparaison) face au problème de type « changement-comparaison » (voir figure 9) et à ce que cette procédure entre en conflit avec la représentation séquentielle induite par les schématisations « range-tout ». Lors d'un post-test survenant juste après la micro-intervention et étant composé de trois problèmes parallèles à ceux du pré-test, les résultats montrent un effet positif léger pour les problèmes de types « combinaison » et « combinaison-comparaison » (ampleur de l'effet de 0.33 et de 0.17) alors que c’est un effet négatif qui est constaté face au problème de type « changement-comparaison » (ampleur de l’effet de de -0.25).

Les résultats négatifs obtenus au problème de type « changement-comparaison » s’expliquent notamment par une évolution des démarches de résolution développées par les élèves entre le pré-test et le post-test (voir figure 9). L’évolution est notable puisque près d’un quart des démarches correctes s’appuie maintenant sur une « procédure-complément » (non économique), alors que celle-ci était pratiquement inexistante au pré-test. Parallèlement, on note une diminution de la « procédure-comparaison » qui est nettement plus économique et qui, comme attendu, étaient la plus fréquemment utilisée spontanément par les élèves au pré-test. L’augmentation des « procédures hybrides » peut sans doute aussi se comprendre dans cette logique, dans la mesure où elle conduit à mettre à plat l’état initial, même si celui-ci n’est finalement pas utilisé pour comparer les états finaux.

Problème de type « *Changement-comparaison* » proposé au post-test A midi, Farid et Julie terminent la partie de fléchettes commencée à dix heures. Farid avait déjà quelques points après la partie de la matinée. À midi, il gagne 7 points. Il a maintenant un total de 13 points. Julie avait le même nombre points que Farid ce matin. À midi, elle gagne 3 points de moins que lui. Combien de points Julie a-t-elle à la fin de la partie ?		
Nombre de résolutions correctes et proportion de chaque type de procédures observées lors du pré et du post-test	Pré-test (N=76)	Post-test (N=63)
Procédure-complément (6)+7=13, 7-3=(4) et 6+4=(10)	1% (N=1)	24% (N=15)
Procédure hybride (6)+7=13 et 13-3=(10)	10% (N=8)	24% (N=15)
Procédure-comparaison 13-3=(10)	86% (N=65)	52% (N=33)
Non identifiable *Calcul et schématisation absents ou incodables*	2 (3%)	-

Figure 9 : Evolution des démarches de résolution correctes observées entre le pré et le post-test face au problème de type « changement-comparaison » (Extrait de Auquière et al., à paraître).

La figure 10 illustre les trois types de démarches observées : les deux premiers exemples traduisent une « procédure-complément » (toutes les étapes sont représentées dans le premier cas, la deuxième étape est réalisée mentalement dans le second) ; les deux suivants correspondent respectivement à une « procédure-hybride » et à une « procédure-comparaison ».



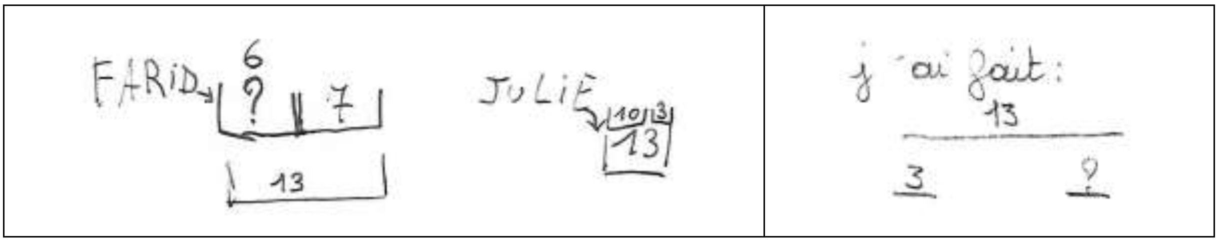


Figure 10 : Exemples de schématisations « range-tout » correspondant au problème de type changement-comparaison (Extrait de Auquière et al., à paraître).

Finalement, les résultats de cette étude exploratoire sont assez mitigés. Les schématisations « range-tout » semblent aider les élèves (ou tout au moins certains d'entre eux) face à certains problèmes, alors que leur utilisation semble plutôt contre-productive face à d'autres problèmes, notamment lorsque cette manière de procéder entre en conflit avec une démarche de résolution plus économique. Rappelons toutefois que l'intervention menée était très courte et que l'efficacité limitée observée ne doit pas faire perdre de vue le potentiel offert par cette approche.

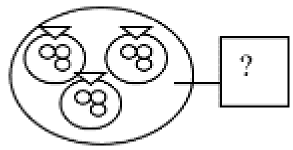
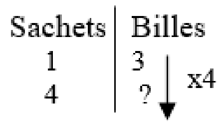
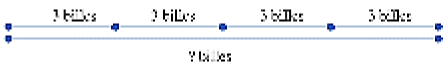
Certes, la démarche non économique (« procédure-complément ») est ici moins efficace à court terme, mais ne témoigne-t-elle pas pour autant d'une bonne compréhension des différentes étapes du problème ? L'aspect séquentiel de la résolution ne serait-il pas à plus long terme une plus-value pour aider à mettre en œuvre un processus de « qualification » consistant à identifier chaque résultat intermédiaire, en relation avec le contexte de l'énoncé (Houdement, 2011, 2014) ? L'appropriation de ce type de schématisations par les élèves semble assez complexe, non seulement parce qu'elles demandent un certain formalisme pour représenter les quantités par des segments, mais aussi un certain degré d'abstraction pour représenter tous les problèmes sous la forme de relations parties-tout. Avec les « range-tout », il s'agit de construire une schématisation en organisant soi-même la mise en relation entre les données et l'inconnue au départ d'un canevas adaptable aux différentes situations rencontrées. Si, à court terme, cette façon de procéder semble plus complexe que de faire appel à un schéma spécifique à un type de problèmes (voir Willis & Fuson, 1988 ; voir aussi Gustein et Romberg, 1995), elle pourrait s'avérer plus efficace à long terme, notamment en évitant le développement de stratégies superficielles consistant à rechercher des mots-clés indicateurs du « bon » schéma (critique couramment posée aux approches précitées). Par ailleurs, les schématisations « range-tout » se caractérisent par une focalisation sur les relations unissant les données, ce qui pourrait favoriser un raisonnement de nature algébrique, porteur pour les apprentissages mathématiques ultérieurs, comme l'expliquent clairement les auteurs canadiens qui défendent l'intérêt de ces schématisations et dont nous reprenons ici quelques propos :

> *« Nous avons remarqué que dans la situation de résolution d'un problème d'addition à énoncé verbal, l'élève peut se concentrer :*
>
> *• soit sur les données (nombres concrets) et les opérations possibles pour calculer la réponse ;*
>
> *• soit sur les relations entre les quantités (le rôle de chaque donnée dans la situation) et les différentes méthodes de solution.*
>
> *Dans le premier cas, le raisonnement de l'élève est de nature arithmétique. Dans le deuxième cas, son raisonnement est purement algébrique. En accord avec l'opinion de Sophian (2007), nous pouvons formuler l'hypothèse que les difficultés dans l'apprentissage de l'algèbre sont grandement liées à l'habitude acquise par les élèves de considérer de préférence les nombres eux-mêmes (raisonnement arithmétique) plutôt que les relations entre les nombres (raisonnement pro-algébrique). Cette habitude, causée par un manque d'entraînement à l'analyse de relations entre les quantités, se développe durant les années passées à l'école primaire. La question est : comment développer chez les jeunes l'habitude d'analyser la situation ou le problème pour identifier les relations mathématiques essentielles ? » (Polotskaïa, & Consultant, 2010, p. 13)*

Enfin, notons encore que ces schématisations « range-tout » sont très proches de celles utilisées dans la « méthode de Singapour© ». Intitulées « *Strip diagrams* » dans la littérature anglo-saxonne, ces schématisations sont aussi présentées comme soutenant un raisonnement pré-algébrique permettant notamment à de jeunes élèves de résoudre des problèmes assez complexes (voir Beckmann, 2004 pour une illustration de cette approche).

Mais ces schématisations s'avèreraient-elles efficaces face à des problèmes non-routiniers tels que ceux utilisés dans l'étude de Pantziara (2009) et ses collègues ? Ne serait-il pas contre-productif de représenter, par exemple, le problème du laveur de vitres, des puces ou de l'escargot avec ce type de schématisations ? Et si de telles schématisations « range-tout » peuvent s'adapter à certaines structures multiplicatives (comme entre autres les problèmes de type « isomorphisme de mesures » de la classification de Vergnaud, 1990), comment les adapter à des problèmes de « produits de mesure » (ou « combinaison multiplicative »), comme on en retrouve dans l'étude de Pantziara et al. (2009), schématisés par des tableaux à double entrée ou des arbres de décomposition ? La figure 11 illustre différentes schématisations adaptables à ces deux types de structures multiplicatives.

<table>
<tr><td colspan="3">Structure de problèmes de type « isomorphisme de mesures » (Vergnaud, 1990)

Il y a 3 billes dans 1 sachet et 4 sachets de billes. Combien y a-t-il de billes en tout ?</td></tr>
<tr><td>Dessin schématique</td><td>Schématisation centrée sur la structure multiplicative (d'après Vernaud, 1990 ; voir aussi Levain et al., 2006)</td><td>Schématisation « range-tout »</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Structure de problèmes de type « produits de mesure » (Vergnaud, 1990) ou « combinaison multiplicative » (Pantziara et al., 2009 ; voir aussi Fagnant & Vlassis, 2013)

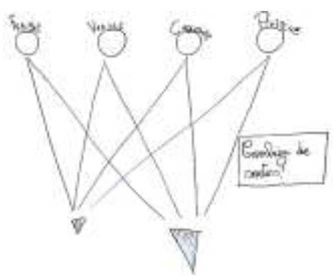
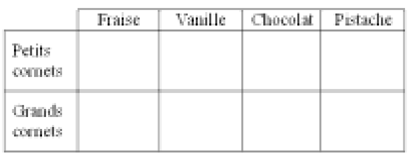
Le marchand de glace de mon quartier vend des boules de glace à la fraise, à la vanille, au chocolat et à la pistache. Il propose deux sortes de cornets : des petits cornets et des grands cornets. Combien de sortes de cornets de glace à une boule ce marchand peut-il faire ?</td></tr>
<tr><td>Dessin schématique</td><td>Schématisation centrée sur la structure multiplicative</td><td>Schématisation « range-tout »</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>?</td></tr>
</table>

Figure 11 : Exemples de schématisations adaptables à différentes structures de problèmes multiplicatifs.

IV. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté plusieurs études qui s'intéressent aux illustrations qui accompagnent les problèmes et/ou aux schématisations construites par les élèves. Dans les deux cas, le point de vue soutenu était que ces deux types d'« outils » avaient pour but d'aider à la construction d'une représentation mentale appropriée des situations proposées. Alors que la construction de représentations schématiques par les élèves semble constituer une aide à la résolution de problèmes, les résultats sont plus controversés en ce qui concerne l'aide apportée par la présence d'illustrations qui accompagnent les problèmes, et ceci tant pour les problèmes « standards » que « problématiques ».

Au niveau des illustrations qui accompagnent les problèmes, la conclusion qui s'impose est d'inviter les enseignants à la plus grande prudence avec leur utilisation. Il est évident qu'il serait incorrect de les considérer comme de simples « décorations » qui auraient pour seule fonction de motiver les élèves en donnant un caractère plus ludique à la résolution de problèmes.

En ce qui concerne la construction de représentations schématiques par les élèves, les résultats sont plutôt encourageants, mais ne permettent néanmoins pas de trancher formellement quant au type de représentations schématiques à privilégier et quant à la meilleure façon de les introduire. S'il paraît essentiel d'apprendre aux élèves à utiliser ce type d'outils, plusieurs approches semblent pouvoir s'avérer efficaces et il n'est pas aisé de statuer sur la plus-value d'une approche comparativement à une autre. Tout dépend sans doute des objectifs que l'on vise, des problèmes que l'on propose et de la façon dont on en discute en classe avec les élèves. On s'accordera dès lors à la conclusion de Thevenot et al. (2015) invitant les enseignants à proposer une variété de problèmes de structures différentes et à insister sur leur analyse et leur interprétation, plutôt que de faire apprendre « mécaniquement » aux élèves des démarches ou des schématisations liées à des types de problèmes particuliers. Dans le domaine de la résolution de problèmes d'application, il paraît en effet essentiel de proposer des problèmes variés, non-routiniers, mais aussi problématiques, pour amener les élèves à considérer la résolution de problèmes comme un véritable processus de modélisation mathématique. Il s'agit de modifier la culture de classe (ou le contrat didactique), non seulement en modifiant les types de problèmes proposés, mais aussi en changeant la façon de les traiter en classe (voir Verschaffel & De Corte, 1997 ; Verschaffel, De Corte, Lasure, Van Vaerenbergh, Bogaerts & Ratinckx, 1999 pour des études ayant montré l'efficacité d'approches de ce type).

Même si les premières études sur les problèmes problématiques datent de la fin des années 90 (voir Verschaffel et al., 2000 pour une synthèse), force est de constater que les pratiques de classe doivent encore évoluer. Ainsi, Depape, De Corte et Verschaffel (2015) ont montré que, même si les problèmes proposés en classe cherchent davantage que par le passé à s'approcher des expériences de vie des élèves, ils n'en demeurent pas moins « stéréotypés » au sens où la plupart requièrent la simple application d'une opération arithmétique au départ des données de l'énoncé. Dans le même ordre d'idées, les enseignants déclarent valoriser l'importance de créer des connexions entre les problèmes proposés en classe et les éléments issus de la vie réelle, mais ils critiquent parallèlement les éléments qui dépeignent des relations trop complexes entre les situations décrites et les modèles mathématiques à mobiliser, ainsi que l'ajout d'éléments factuels qui enrichissent les situations décrites mais ne sont pas nécessaires à la résolution. Finalement, les problèmes sont souvent traités dans une approche

« pragmatique », essentiellement focalisée sur les aspects mathématiques, plutôt que dans une approche « narrative » mettant l'accent sur les aspects réalistes lors de l'entrée dans le problème et de l'interprétation de la solution. Finalement, il ne s'agirait pas seulement de proposer des problèmes variés en classe, mais il serait tout aussi important d'amener les élèves à les reformuler et à en débattre (Mellone, Verschaffel & Van Dooren, 2017) dans des situations de communication où les schématisations prennent sens.

En accord avec la perspective socioculturelle vygotskienne, ne pourrait-on s'accorder avec l'idée selon laquelle « apprendre à résoudre des problèmes », c'est participer à des activités dans lesquelles la communication et les interactions sociales, médiatisées par des signes tels que le langage, l'écriture, les gestes, les schémas, les dessins... sont considérées comme consubstantielles à l'apprentissage et au développement de la pensée (Vlassis, Fagnant & Demonty, 2015) ? En ce sens, ce sont sans doute les débats autour des problèmes et de leur compréhension, supportés par diverses schématisations traduisant cette compréhension, qui pourraient *in fine* conduire à réellement œuvrer au développement d'un processus complexe de modélisation mathématique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AUQUIERE, A. (2013). *Les représentations schématiques comme soutien à la résolution de problèmes arithmétiques en quatrième primaire. Étude comparative de deux approches d'aide à la construction de représentations de problèmes mathématiques.* Mémoire de Master en Sciences de l'éducation. Université de Liège, document non publié.

AUQUIERE, A., DEMONTY, I. & FAGNANT, A. (à paraître). Impact des structures sémantiques et de l'introduction de schématisations sur les performances et les démarches de résolution de problèmes. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, 23.*

BECKMANN, S. (2004). Solving Algebra and Other Story Problems with Simple Diagrams: a Method Demonstrated in Grade 4–6 Texts Used in Singapore. *The Mathematics Educator*, 14(1), 42-46.

BERENDS, I.E. & VAN LIESHOUT, E.C.D.M. (2009). The effect of illustrations in arithmetic problem-solving: Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction, 19,* 345-353.

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : Le milieu. *Recherches en Didactique des mathématiques, 9,* 308-336.

COHEN, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin, 112*(1), 155-159.

CSÍKOS, C., SZITÁNYI, J. & KELEMEN, R. (2012). The effects of using in developing young children's mathemat ical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics, 81*(1), 47-65.

DEPAEPE, F., DE CORTE, E., & VERSCHAFFEL, L. (2015). Students' non-realistic mathematical modeling as a drawback of teachers' beliefs about and approaches to word problem solving. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Eds.) *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education.* Springer: Advance in mathematics education.

DEMONTY, I., FAGNANT, A. & LEJOING, M. (2004). *Résoudre des problèmes : pas de problèmes. Guide méthologique (8-10 ans).* Bruxelles : De Boeck.

DEWOLF, T., VAN DOOREN, W., EV CIMEN, E. & VERSCHAFFEL, L. (2014). The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically. *The Journal of Experimental Education, 82*(1), 103-120.

DEWOLF, T., VAN DOOREN, W. & VERSCHAFFEL, L. (2017). Can visual aids in representational illustrations help pupils to solve mathematical world problems more reastically? *European Journal of Psychology of Education, 32,* 335-351.

DIEZMANN, C. M. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom, 7*(3), 4-8.

DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2008). Développement du raisonnement algébrique par resolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) (Partie 1). *ENVOL, 145,* 21-28.

DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2009). Développement du raisonnement algébrique par resolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) (Partie 2). *ENVOL, 146,* 33-38.

ELIA, I. (2009). L'utilisation d'images en résolution de problèmes additifs : quel type d'images et quel rôle. *Annales de Didactique des Sciences cognitives, 14,* 5-29.

ELIA, I., GAGATSIS, A. & DEMETRIOU, A. (2007). The effects of different modes of representations on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction, 17,* 658-672.

ELIA, I. & PHILIPPOU, G. (2004). The functions of pictures in problem solving. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 327–334). Bergen, Norway: University College.

FAGNANT, A. (2008). Des outils didactiques pour développer la résolution de problèmes dans l'enseignement fondamental. Aperçu des fondements théoriques et entrée au coeur de quelques activités. *Cahiers des Sciences de l'Education (Les),27-28*, 51-94.

FAGNANT, A. & AUQUIERE, A. (à paraître*).* Impact des illustrations accompagnant les problèmes problématiques : focus sur le codage des réponses. *Colloque de l'Espace Mathématique Francophone (EMF 2018),* Paris, octobre 2018.

FAGNANT, A. & VLASSIS, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics*, *84*,149-168.

GAMO, S., SANDER, E. & RICHARD, J-F. (2010). Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning & Instruction, 20,* 400-410.

GAMO, S., TAABANE, L. & SANDER, E. (2011). Rôle de la nature des variables dans la résolution de problèmes additifs complexes. *L'Année psychologique, 111*, 613-640.

GERVAIS, C., SAVARD, A. & POLATSKAIA, E. (2013) La résolution de problèmes de structures additives chez les élèves du premier cycle du primaire : le développement du raisonnement. *Bulletin AMQ, 53,* 58-66.

GUSTEIN, E. & ROMBERG, T.A. (1995). Teaching children to add and subtract. *Journal of mathematical Behavior, 14*, 283-.324.

HEGARTY, M. & KOZHENIKOV, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684-689.

HOUDEMENT, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique des Sciences cognitives*, *16*, 67-96.

HOUDEMENT, C. (2014). Des connaissances fonctionnelles (mais ignorées) en résolution de problèmes arithmétiques. *Cahiers des Sciences de l'Education*, (36), 7-33.

LEVAIN, J.P., LE BORGNE, P. & SIMAR, A. (2006). Apprentissage de schémas et résolution de problèmes en SEGPA. *Revue Française de Pédagogie*, *159*, 95-109.

MELLONE, M., VERSCHAFFEL, L. & VAN DOOREN, W. (2017). The effect of rewording and dyadic interactions on realistic reasoning in solving word problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 46*, 1-12.

NISTAL, A., CLAREBOUT, G., ELEN, J., VAN DOOREN, W. & VERSCHAFFEL, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: A critical review. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 41,* 627-636.

PANTZIARA, M., GAGATSIS, A. & ELIA, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 72,* 39-60.

POLOTSKAIA, E. (2009). *Communication de la structure mathématique du problème par les élèves du primaire. Analyse d'un scénario didactique*. Proceedings of CIEAEM 61, 178-183, University of Palermo, Italy.

POLOTSKAIA, E. & CONSULTANT, P. (2010). Des représentations graphiques dans l'enseignement des mathématiques – Deux jeux pour apprendre. *Bulletin AMQ, L*(1), 12-28.

REUTER, T., SCHNOTZ, W. & RASCH, R. (2015). Drawings and tables as cognitive tools for solving non-routine word problems in primary school. *American Journal of Educational Research, 3(11)*, 1387-1397.

RILEY, M.S., GREENO, J.G. & HELLER, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.) *The development of mathematical thinking*. New York : Academic Press.

SAVARD, A. & POLOTSKAIA, E. (2014). Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire. *Education & Francophonie, XLII*(2), 138-157.

THEVENOT, C., BARROUILLET, P. & FAYOL, M. (2015). De l'émergence du savoir calculer à la résolution des problèmes arithmétiques verbaux. In M. Crahay & M. Dutrevis (Eds). *Psychologie des apprentissages scolaires* (pp. 169-197). Bruxelles: De Boeck.

UESAKA, Y., MANALO, E. & ICHIKAWA, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction, 17,* 322–335.

VAN ESSEN, G. & HAMAKER, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research, 83(6),* 301-312.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des Mathématiques, 10(2.3)*, 133-170.

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (1997). Word problems : A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school ? In T. Nunes & P. Bryant (Eds), *Learning and Teaching Mathematics : An International Perspective* (pp. 69-97). UK : Psychology Press Ltd.

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application: de l'analyse à l'utilisation efficace. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds). (2e

édition). *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques?* (pp.153-176). Bruxelles: De Boeck.
VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, E., LASURE, S., VAN VAERENBERGH, G., BOGAERTS, H. & RATINCKX, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders. *Mathematical Learning and Thinking, 1*, 195-299.
VERSCHAFFEL, L., GREER, B. & DE CORTE, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, Hollande : Swets & Zeitlinger.
VLASSIS, J., FAGNANT, A. & DEMONTY, I. (2015). Symboliser et conceptualiser, une dialectique intrinsèque aux mathématiques et à leur apprentissage. In M., Crahay & M., Dutrévis (Eds.), *Psychologie des apprentissages scolaires (2e édition)* (pp.221-255). Bruxelles: De Boeck.
WILLIS, G.B. & FUSON, K.C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and substraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, *80*(2), 192-201.
YACKEL, E. & COBB, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.