

ОБОЗРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Магнитный порядок и спиновые флуктуации в низкоразмерных системах

А.А. Катанин, В.Ю. Ирхин

Проанализирована современная теоретическая и экспериментальная ситуация в физике непроводящих низкоразмерных систем, для которых характерны низкие значения температуры магнитного перехода T_M и в которых существует развитый ближний порядок в широком интервале температур, превышающих T_M . Показана недостаточность как стандартной, так и самосогласованной спин-волновых теорий для количественного описания экспериментальных данных таких систем. Рассмотрены теоретико-полевые подходы, позволяющие учесть вклад спин-флуктуационных возбуждений, которыми пренебрегается в спин-волновых теориях, в термодинамические свойства ферро- и антиферромагнетиков.

PACS numbers: 75.10.-b, 75.30.Ds, 75.40.Cx

Содержание

1. Введение (639).
2. Квазидвумерные магнетики с анизотропией типа "легкая ось" (641).
2.1. Нелинейные бозонные представления в теории квазидвумерных ферро- и антиферромагнетиков. 2.2. Самосогласованная спин-волновая теория квазидвумерных магнетиков. 2.3. Теоретико-полевое описание квазидвумерных магнетиков с локализованными моментами. 2.4. Описание двумерного температурного режима в рамках ренормгруппового подхода. 2.5. Описание критического режима и вычисление температуры Нееля квантовых квазидвумерных антиферромагнетиков. 2.6. Теоретическое описание экспериментальных данных намагниченности и температур Нееля слоистых систем.
3. Квазидвумерные магнетики с анизотропией типа "легкая плоскость" (654).
4. Квазиодномерные изотропные антиферромагнетики (657).
4.1. Модель и ее бозонизация. 4.2. Приближение межцепочечного среднего поля для бозонизированного гамильтониана. 4.3. Поправки первого порядка по $1/z_{\perp}$ к межцепочечному приближению среднего поля. 4.4. Сравнение с экспериментальными данными.

5. Заключение (660).

Список литературы (661).

1. Введение

Исследование низкоразмерного магнетизма — важная задача современной физики твердого тела. Экспериментальный интерес к этой проблеме связан с необычными магнитными свойствами слоистых перовскитов, в том числе Rb_2MnF_4 , K_2NiF_4 [1, 2], K_2MnF_4 [2, 3] (анизотропия "легкая ось"), K_2CuF_4 , $NiCl_2$, $BaNi_2(PO_4)_2$ [4] (анизотропия "легкая плоскость"), органических соединений [5, 6], ферромагнитных пленок, мультислоев и поверхностей [7, 8]. В последнее время интерес к низкоразмерным соединениям возрос в связи с исследованиями магнитных свойств медь-кислородных плоскостей в высокотемпературных сверхпроводниках, в том числе, на основе соединения La_2CuO_4 [9].

Другой класс низкоразмерных магнитных систем с локальными моментами — квазиодномерные соединения, содержащие цепочки магнитных атомов с малым межцепочечным обменом. К ним могут быть отнесены, в частности, такое хорошо экспериментально исследованное соединение как $KCuF_3$ [10], а также ряд недавно исследованных систем на основе стронция, например Sr_2CuO_3 ($S = 1/2$) [11, 12], и цезия: $CsNiCl_3$ ($S = 1$) [13], $CsVCl_3$ ($S = 3/2$) [14]. Родственный класс соединений представляют собой недавно синтезированные системы со "спиновыми лестницами" — ограниченным числом цепочек магнитных атомов, связанных обменным взаимодействием [15].

Возможность магнитного упорядочения в низкоразмерных системах, в отличие от таковой в трехмерных системах, значительно ограничена из-за сильных флуктуаций магнитного параметра порядка. Как известно, магнитный порядок в чисто одно- и двумерных изотроп-

А.А. Катанин. Институт физики металлов УрО РАН,
620241 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской 18, Российская Федерация
Тел. (343) 378-37-78. Факс (343) 374-52-44
E-mail: katanin@mail.ur.ru,

Max-Planck Institut für Festkörperforschung,
Heisenberg str. 1, 70569 Stuttgart, Germany
Tel. +49 (0711) 689 15 36. Fax +49 (0711) 689 17 02
E-mail: A.Katanin@fkf.mpg.de

В.Ю. Ирхин. Институт физики металлов УрО РАН,
620241 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской 18, Российская Федерация
Тел. (343) 378-37-78. Факс (343) 374-52-44
E-mail: Valentin.Irkhin@imp.uran.ru

Статья поступила 13 декабря 2006 г.

ных системах отсутствует при конечных температурах. Согласно теореме Мермина–Вагнера двумерные изотропные магнетики обладают дальним порядком только в основном состоянии, а точные результаты для одномерных изотропных антиферромагнетиков свидетельствуют об отсутствии дальнего магнитного порядка даже при $T = 0$. Реальные соединения обладают конечной величиной температуры магнитного перехода $T_M \ll |J|$ (где J — величина обменного взаимодействия в цепочках или в плоскости), обусловленной слабым межцепочечным (межплоскостным) обменом и (или) анизотропией. Малость температуры перехода приводит к ряду специфических особенностей этих систем. В частности, при температурах выше точки магнитного перехода ближний магнитный порядок полностью не разрушается (в двумерном случае он сохраняется при температурах вплоть до $T \sim |J|$), так что существует широкая область $T > T_M$ с сильным ближним порядком [3, 9].

Существенный прогресс в понимании свойств основного состояния и термодинамики одно- и двумерных систем был достигнут благодаря применению численных методов (например квантового метода Монте-Карло). В то же время эти методы не заменяют аналитических подходов, позволяющих описать термодинамические свойства слоистых систем в широком интервале температур и являющихся полезными как для теоретического понимания физических свойств этих систем, не очевидных из результатов численных расчетов, так и для практических целей описания реальных соединений.

Простейший метод аналитического исследования низкоразмерных магнетиков основывается на стандартной теории спиновых волн [16–18], применимой лишь при низких температурах $T \ll T_M$. Эта теория пренебрегает взаимодействием спиновых волн, что приводит, в частности, к резкому завышению значений температур фазового перехода низкоразмерных соединений. Проблема взаимодействия спиновых волн в ферромагнетиках впервые детально исследовалась в классических работах Дайсона [17], построившего последовательную теорию термодинамических свойств этих систем при низких температурах. Позднее эти результаты были воспроизведены Малеевым с помощью нелинейного бозонного представления спиновых операторов [18]. Формализм Дайсона–Малеева последовательно учитывает динамическое взаимодействие спиновых волн. Этот подход был применен к описанию трехмерных [19] и двумерных [20] антиферромагнетиков; особое внимание в работах [19, 20] уделялось вычислению спин-волнового затухания, которое оказалось малым в широкой области импульсного пространства при достаточно низких температурах. Неаналитические поправки к спектру спиновых волн и теплоемкости низкоразмерных систем, возникающие вследствие динамического взаимодействия магнонов, были исследованы в работах [21].

При температурах, не малых по сравнению с температурой магнитного перехода, существенную роль начинает играть кинематическое взаимодействие спиновых волн, возникающее вследствие ограничения числа бозонов на узле. Представление, позволяющее в явном виде учесть кинематическое взаимодействие спиновых волн, было предложено Барьяхтаром, Криворучко и Яблонским [22, 23]. Введение вспомогательных фермионов в этом представлении позволяет избежать необходимости

учета дополнительного условия для числа бозонов на узле.

Однако при не слишком низких температурах спин-волновая картина возбуждений становится полностью неадекватной и для правильного описания термодинамики необходим учет неспинволновых возбуждений. В некоторой степени эта ситуация аналогична ситуации, сложившейся в теории зонного магнетизма, где теория Стонера (среднего поля) оказалась неспособной адекватно описать термодинамические свойства, что стимулировало развитие спин-флуктуационных теорий [24]. В то время как вклад неспинволновых возбуждений в термодинамические свойства локализованных магнетиков обсуждался много лет назад в рамках феноменологической теории [25, 26], соответствующий микроскопический подход начал развиваться лишь недавно на основе так называемого $1/N$ -разложения [27], где N — число спиновых компонент ($N = 3$ для модели Гейзенберга). Такой подход оказался удивительно успешным при описании термодинамических свойств двумерных [27] и квазидвумерных [28] магнетиков.

В отличие от двумерных магнетиков, в одномерных антиферромагнетиках картина спектра возбуждений сильно зависит от спина S . Начиная с работ Бете, построившего точную волновую функцию (анзац Бете) для одномерной антиферромагнитной цепочки, известно, что эти системы не обладают дальним магнитным порядком даже в основном состоянии.

Современные теоретические подходы к одномерным системам основаны на идее Халдейна [29, 30], который свел проблему цепочки к нелинейной сигма-модели. Согласно результатам Халдейна случаи целого и полуцелого спина качественно различны. В случае полуцелого спина появляется так называемый топологический член в эффективном действии, приводящий к необычному магнитному поведению таких цепочек.

Для одной цепочки с $S = 1/2$ (та же самая ситуация имеет место при любом полуцелом значении спина) основное состояние обладает "квазидальным порядком", при котором спиновые корреляции на больших расстояниях спадают по степенному, а не экспоненциальному закону. Спектр возбуждений при этом является бесщелевым, хотя намагнитченность равна нулю (что напоминает двумерную классическую xy -модель) при температурах ниже точки Березинского–Костерлица–Таулеса $T_{\text{вкт}}$. В то же время для целых значений спина S спектр возбуждений содержит так называемую халдейновскую щель порядка $\exp(-\pi S)$ и структура спектра возбуждений близка к предсказаниям спин-волновой теории.

Цепочки с полуцелым спином в связи с их "экзотическим" поведением не могут быть исследованы в рамках спин-волновой теории, и для рассмотрения таких цепочек требуются принципиально новые физические подходы. Для предельного квантового случая $S = 1/2$ (который наиболее важен также с практической точки зрения) был развит метод бозонизации, использующий представление Йордана–Вигнера спиновых операторов через фермионные с последующим переходом к бозонным операторам, описывающим коллективные (неспин-волновые) магнитные возбуждения. Этот подход оказался также успешным при исследовании спиновых лестниц [15, 31, 32].

Для исследования квазиодномерных систем были развиты комбинация бозонизации (и/или бете-анзаца) с

методом ренормгруппы [33–35], а также межцепочечное приближение среднего поля [36]. Эти методы предсказывают конечную величину температуры магнитного перехода $T_N \sim |J'|$ при сколь угодно малой величине межцепочечного взаимодействия J' . В то время как метод ренормгруппы не позволяет получить каких-либо количественных оценок величины T_N , межцепочечное приближение среднего поля пренебрегает спиновыми корреляциями на разных цепочках, что приводит к резкому завышению температур Нееля по сравнению с их экспериментальными значениями. Таким образом, теория межцепочечного среднего поля приводит к тем же трудностям при описании квазиодномерных магнетиков, что и спин-волновая теория при описании квазидвумерных магнетиков.

Таким образом, для описания квазидвумерных и квазиодномерных магнетиков требуются существенно новые подходы, рассмотрение которых и является предметом настоящего обзора.

2. Квазидвумерные магнетики с анизотропией типа "легкая ось"

Для рассмотрения квазиодномерных и двумерных магнетиков с локализованными моментами воспользуемся моделью Гейзенберга:

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{i, \delta=(\delta_{\perp}, \delta_{\parallel})} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+\delta} + H_{3D} + H_{\text{anis}}, \quad (2.1)$$

$$H_{3D} = -\frac{J'}{2} \sum_{i, \delta_{\perp}} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+\delta_{\perp}},$$

$$H_{\text{anis}} = -\frac{J\eta}{2} \sum_{i, \delta_{\parallel}} S_i^z S_{i+\delta_{\parallel}}^z - |J|\zeta \sum_i (S_i^z)^2, \quad (2.2)$$

где J — обменный интеграл в плоскости, $J > 0$ для ферромагнетика, $J < 0$ для антиферромагнетика; H_{3D} соответствует гамильтониану межцепочечного (межслоевого) взаимодействия; $J' = 2\alpha J$ является параметром обмена между цепочками (слоями), для определенности в дальнейшем рассматривается случай $\alpha > 0$; δ_{\parallel} и δ_{\perp} обозначают соответственно ближайших соседей в пределах одной цепочки (слоя) и для различных цепочек (слоев); H_{anis} — анизотропная часть взаимодействия, возникающая в результате влияния кристаллического поля окружающих ионов; $\eta, \zeta > 0$ — параметры обменной и одноионной анизотропии соответственно.

2.1. Нелинейные бозонные представления в теории квазидвумерных ферро- и антиферромагнетиков

При достаточно низких температурах $T \ll T_M$ элементарными возбуждениями в магнетиках являются спиновые волны. Для описания этих возбуждений удобно перейти от спиновых операторов к бозонным. Используются различные представления такого вида, в частности представление Дайсона–Малеева [17, 18, 23], которое удобно для описания магнитоупорядоченной фазы:

$$S_i^+ = \sqrt{2S} b_i, \quad S_i^z = S - b_i^{\dagger} b_i, \quad (2.3)$$

$$S_i^- = \sqrt{2S} \left(b_i^{\dagger} - \frac{1}{2S} b_i^{\dagger} b_i^{\dagger} b_i \right),$$

где b_i^{\dagger}, b_i — магнотные бозе-операторы. Бозонные операторы в представлении (2.3) должны удовлетворять

условию на числа заполнения в узле $b_i^{\dagger} b_i < 2S$, что приводит к так называемому кинематическому взаимодействию спиновых волн. Для того чтобы упростить рассмотрение этого взаимодействия, Барьяхтар, Кривошечко и Яблонский ввели следующее представление [22, 23]:

$$S_i^+ = \sqrt{2S} b_i, \quad S_i^z = S - b_i^{\dagger} b_i - (2S + 1) c_i^{\dagger} c_i, \quad (2.4)$$

$$S_i^- = \sqrt{2S} \left(b_i^{\dagger} - \frac{1}{2S} b_i^{\dagger} b_i^{\dagger} b_i \right) - \frac{2(2S + 1)}{\sqrt{2S}} b_i^{\dagger} c_i^{\dagger} c_i,$$

содержащее помимо бозонных операторов вспомогательные псевдофермионные операторы c_i^{\dagger}, c_i , учитывающие кинематическое взаимодействие спиновых волн. В случае антиферромагнетика с двумя подрешетками исходная решетка разбивается на две подрешетки, в каждой из которых используется представление (2.4) и сопряженное ему. При низких температурах соответствующая энергия псевдофермионов имеет порядок $|J|$, так что их вклад в термодинамические величины экспоненциально мал и им можно пренебречь. В то же время кинематическое взаимодействие спиновых волн становится существенным при температурах $T \sim |J|$.

Другое полезное представление спиновых операторов — представление швингеровских бозонов [37–39]:

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} s_{i\sigma}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma}_{\sigma\sigma'} s_{i\sigma'}, \quad (2.5)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули, $\sigma, \sigma' = \uparrow, \downarrow$, так что

$$S_i^z = \frac{1}{2} (s_{i\uparrow}^{\dagger} s_{i\uparrow} - s_{i\downarrow}^{\dagger} s_{i\downarrow}), \quad S_i^+ = s_{i\uparrow}^{\dagger} s_{i\downarrow}, \quad S_i^- = s_{i\downarrow}^{\dagger} s_{i\uparrow}. \quad (2.6)$$

Условие

$$s_{i\uparrow}^{\dagger} s_{i\uparrow} + s_{i\downarrow}^{\dagger} s_{i\downarrow} = 2S \quad (2.7)$$

ограничивает число спиновых состояний и должно выполняться на каждом узле решетки. Так как одновременное изменение фаз $s_{i\uparrow}$ и $s_{i\downarrow}$ бозонов, $s_{i\sigma} \rightarrow s_{i\sigma} \exp(i\phi_i)$, не влияет на физические результаты, представление швингеровских бозонов обладает калибровочной симметрией. Этот факт может быть использован для нахождения связи представления швингеровских бозонов с известным представлением Гольштейна–Примакова [40]. Для этого фиксируем калибровку условием эрмитовости одного из операторов $s_{i\sigma}$, например $s_{i\uparrow}$, тогда из (2.7) имеем

$$s_{i\uparrow} = \sqrt{2S - s_{i\downarrow}^{\dagger} s_{i\downarrow}}. \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в (2.6), получаем представление Гольштейна–Примакова. Таким образом, представления швингеровских бозонов и Гольштейна–Примакова эквивалентны. Эта эквивалентность, однако, может быть нарушена в приближенных подходах. В отличие от представления Гольштейна–Примакова (или Дайсона–Малеева), представление швингеровских бозонов может быть легко распространено на произвольное число сортов бозонов $N \geq 2$, что приводит к модели с $SU(N)/SU(N-1)$ -симметрией и позволяет построить $1/N$ -разложение [38]. В то же время не существует естественного способа введения фермиевских операторов в это представление, для того чтобы учесть кинема-

тическое взаимодействие. Как и в представлении Дайсона–Малеева, для антиферромагнетика необходимо перейти к локальной системе координат с помощью замены [39]

$$s_{i\uparrow} \rightarrow -s_{i\downarrow}, \quad s_{i\downarrow} \rightarrow s_{i\uparrow}$$

в одной из двух подрешеток.

2.2. Самосогласованная спин-волновая теория квазидвумерных магнетиков

Взаимодействие магнонов в наинизшем (борновском) приближении рассматривается в так называемой самосогласованной спин-волновой теории (ССВТ). Впервые эта теория была применена много лет назад к трехмерной модели Гейзенберга [41]; те же самые результаты позднее были получены в рамках вариационного подхода для изотропной [42] и анизотропной [43] моделей Гейзенберга. Близкие идеи использовались недавно при описании двумерных магнетиков в теории "среднего поля" для бозонных операторов [38, 39, 44], основанной на представлении операторов спина через швингеровские бозоны, и в "модифицированной спин-волновой теории" [45], основанной на представлении Дайсона–Малеева. Результаты этих теорий хорошо согласуются с результатами ренормгрупповых вычислений [46, 47] и экспериментальными данными для спектра возбуждений низкоразмерных систем [4]. Самосогласованная спин-волновая теория также применялась к квазидвумерным [48–51], фрустрированным двумерным [52–56] и трехмерным [53] антиферромагнетикам.

Для вывода уравнений ССВТ используем представление Дайсона–Малеева (2.3). После подстановки в гамильтониан представления спиновых операторов через бозонные возникают члены второй и четвертой степени по бозонным операторам. В то время как вклады квадратичных членов описывают распространение свободных спиновых волн, вклады членов четвертой степени отвечают за их взаимодействие. Учитывая взаимодействие спиновых волн в наинизшем приближении, т.е. расщепляя формы четвертой степени бозонных операторов по теореме Вика, получаем квадратичный гамильтониан ССВТ

$$H = \sum_{i,\delta} J_{\delta} \gamma_{\delta} (b_i^{\dagger} b_i - b_{i+\delta}^{\dagger} b_i) - \mu \sum_i b_i^{\dagger} b_i, \quad (2.9)$$

где

$$\gamma_{\delta_{\perp}} = \gamma = \bar{S} + \langle b_i^{\dagger} b_{i+\delta_{\perp}} \rangle, \quad \gamma_{\delta_{\parallel}} = \gamma' = \bar{S} + \langle b_i^{\dagger} b_{i+\delta_{\parallel}} \rangle \quad (2.10)$$

— параметры ближнего порядка, удовлетворяющие уравнениям

$$\gamma = \bar{S} + \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \cos k_x, \quad \gamma' = \bar{S} + \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \cos k_z. \quad (2.11)$$

Для распространения теории на случай разупорядоченной фазы в (2.9) введен химический потенциал бозонов μ , дающий возможность удовлетворить условию ограниченности общего числа бозонов при $T > T_C$ [39, 45] (при $T < T_C$ имеем $\mu = 0$, так что число бозонов не ограничено). Вычисление спиновых корреляционных функций показывает [45], что химический потенциал непосредственно определяет корреляционную длину ξ_{δ} в направ-

лении δ согласно соотношению

$$\xi_{\delta}^{-1} = \sqrt{-\frac{\mu}{|J_{\delta} \gamma_{\delta}|}}. \quad (2.12)$$

Величины γ и γ' определяют спиновые корреляционные функции в соседних узлах,

$$|\langle \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+\delta} \rangle| = \gamma_{\delta}^2. \quad (2.13)$$

Намагниченность ферромагнетика определяется полным числом бозонов:

$$\bar{S} = S - \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}, \quad (2.14)$$

где $N_{\mathbf{k}} = N(E_{\mathbf{k}})$ — функция Бозе, причем спектр спиновых волн имеет вид

$$E_{\mathbf{k}}^{\text{SSWT}} = \Gamma_{\mathbf{k}=0} - \Gamma_{\mathbf{k}} + \Delta - \mu, \quad (2.15)$$

$$\Gamma_{\mathbf{k}} = 2S [\gamma |J| (\cos k_x + \cos k_y) + \gamma' |J'| \cos k_z],$$

$$\Delta = |J| \left[(2S - 1) \zeta + \frac{4\eta S^2}{\gamma} \right] \left(\frac{\bar{S}}{S} \right)^2.$$

Для антиферромагнетика уравнения ССВТ имеют вид [50, 51]

$$\gamma = \bar{S} + \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Gamma_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}} \cos k_x \coth \frac{E_{\mathbf{k}}}{2T}, \quad (2.16)$$

$$\gamma' = \bar{S} + \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Gamma_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}} \cos k_z \coth \frac{E_{\mathbf{k}}}{2T},$$

$$\bar{S} = S + \frac{1}{2} - \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Gamma_{\mathbf{k}=0} + \Delta - \mu}{2E_{\mathbf{k}}} \coth \frac{E_{\mathbf{k}}}{2T},$$

где

$$\gamma = \bar{S} + \langle a_i b_{i+\delta_{\perp}} \rangle, \quad \gamma' = \bar{S} + \langle a_i b_{i+\delta_{\parallel}} \rangle, \quad (2.17)$$

a_i, b_i — операторы представления Дайсона–Малеева в каждой из подрешеток, энергия спиновых волн

$$E_{\mathbf{k}}^{\text{SSWT}} = [(\Gamma_{\mathbf{k}=0} + \Delta - \mu)^2 - \Gamma_{\mathbf{k}}^2]^{1/2}. \quad (2.18)$$

Как и в случае ферромагнетиков, химический потенциал бозонов μ , отличный от нуля при температурах, превышающих температуру магнитного перехода, определяет корреляционную длину согласно соотношению (2.12).

В основном состоянии ферромагнетика $\bar{S}_0 = S$ и $\gamma_0 = \gamma(T=0) = 1$, однако подрешеточная намагниченность и параметр ближнего порядка двумерного антиферромагнетика отличаются от этих значений из-за квантовых нулевых колебаний спинов:

$$\bar{S}_0 = S - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \phi_{\mathbf{k}}^2}} - 1 \right] \approx S - 0,1966, \quad (2.19)$$

$$\gamma_0 = 1 + \frac{1}{2S} \sum_{\mathbf{k}} \left[1 - \sqrt{1 - \phi_{\mathbf{k}}^2} \right] \approx 1 + \frac{0,0790}{S}, \quad (2.20)$$

где $\phi_{\mathbf{k}} = (\cos k_x + \cos k_y)/2$. При этом подрешеточная намагниченность при $S = 1/2$ составляет 40 % от ее

величины в ферромагнитном случае и совпадает с ее значением в спин-волновой теории [16], величина перенормировки параметра обмена в плоскости достигает 15%. Как и в стандартной теории спиновых волн, в отсутствие анизотропии ($\Delta = 0$) спектр спиновых волн в упорядоченной фазе является бесщелевым и при малых волновых векторах \mathbf{k} имеет вид $E_{\mathbf{k}} = Dk^2$ в случае ферромагнетика (ФМ) и $E_{\mathbf{k}} = ck$ в случае антиферромагнетика (АФМ), где D — константа жесткости спиновых волн, c — скорость спиновых волн. В ССВТ эти параметры выражаются через параметры γ и S согласно соотношениям

$$D = JS, \quad c = \sqrt{8}|J|\gamma S. \quad (2.21)$$

Спиновые жесткости ферро- и антиферромагнетика, определенные на основе анализа поперечной восприимчивости, выражаются как

$$\rho_s = \begin{cases} JS^2 (\text{ФМ}), \\ |J|\gamma S \bar{S}_0 (\text{АФМ}). \end{cases} \quad (2.22)$$

Перенормированные (наблюдаемые) параметры межплоскостного обмена и анизотропии, найденные из спектра возбуждений, имеют вид

$$f_t = \frac{\Delta}{\gamma|J|S} = \frac{1}{\gamma S} \left[(2S-1)\zeta + \frac{4\eta S}{\gamma} \right] \left(\frac{\bar{S}}{S} \right)^2, \quad (2.23)$$

$$\alpha_r = \frac{2\gamma'}{\gamma} = \frac{\alpha \bar{S}}{S}. \quad (2.24)$$

Отметим, что в отличие от параметра внутривекторного обмена перенормированные параметры α , η , ζ пропорциональны намагниченности и, следовательно, обладают сильной температурной зависимостью.

При конечных температурах в отсутствие межплоскостного обмена и анизотропии ($J' = 0$, $\Delta = 0$) дальний порядок отсутствует в соответствии с теоремой Мермина–Вагнера, так что $\bar{S} = 0$, $\mu < 0$ (решения с $\bar{S} \neq 0$, $\mu = 0$ не могут быть получены вследствие расходимости при $T > 0$ и $\mu = 0$ интегралов в уравнениях (2.11) и (2.16)). Величина химического потенциала бозонов μ для ферромагнетика определяется уравнением (2.13), для антиферромагнетика — последним из уравнений (2.16) с $\bar{S} = 0$. При низких температурах, $T \ll |J|S^2$, абсолютная величина химического потенциала экспоненциально мала, так что корреляционная длина $\xi = \sqrt{-|J\gamma|/\mu}$ экспоненциально велика (так называемый перенормированный классический режим):

$$\xi = \begin{cases} C_{\xi}^F \sqrt{\frac{J}{T}} \exp\left(\frac{2\pi\rho_s}{T}\right) & (\text{ФМ}), \\ C_{\xi}^{AF} \left(\frac{J}{T}\right) \exp\left(\frac{2\pi\rho_s}{T}\right) & (\text{АФМ}), \end{cases} \quad (2.25)$$

где C_{ξ}^F , C_{ξ}^{AF} — зависящие от спина константы. Результаты (2.25), (2.26) согласуются с результатами однопетлевого ренормгруппового (РГ) подхода [46, 47]. Двухпетлевой РГ-анализ изменяет только предэкспоненциальный множитель, который в АФМ-случае становится температурно-независимой постоянной [46], в то время как в ФМ-случае является пропорциональным $(T/J)^{1/2}$ (см. [47]). При наличии межплоскостного

обмена и не слишком высоких температурах $T < T_M$ (температура магнитного упорядочения T_M будет рассчитана ниже) появляется дальний магнитный порядок, при этом уравнения (2.11) и (2.16) имеют решения с $\bar{S} > 0$. Хотя ССВТ может быть обоснована лишь при температурах $T \ll T_M$ (при которых существует развитый дальний порядок и взаимодействие спиновых волн мало), представляет интерес экстраполяция результатов ССВТ на более высокие температуры, $T \sim T_M$, что позволяет сравнить результаты ССВТ с результатами более сложных теорий, рассматриваемых в разделе 3.

При низких температурах ($T \ll |J'|S$) и произвольном J'/J поправки к намагниченности основного состояния ферромагнетика пропорциональны $T^{3/2}$, в то время как параметры ближнего порядка имеют более слабую $T^{5/2}$ -зависимость, для антиферромагнетика соответствующие зависимости — T^2 и T^4 [51]. При $T > T_M$ снова имеем $\bar{S} = 0$ и $\mu < 0$, как и в двумерном случае при конечных T .

Для численного исследования температурной зависимости намагниченности и параметров ближнего порядка при не слишком малых значениях межслоевого обмена удобно использовать приближение эффективного параметра ближнего порядка, сделав замену [51]

$$\sum_{\delta} J_{i,i+\delta} \gamma_{\delta} (b_i^{\dagger} b_i - b_i^{\dagger} b_{i+\delta}) \rightarrow \gamma_{\text{eff}} \sum_{\delta} J_{i,i+\delta} (b_i^{\dagger} b_i - b_i^{\dagger} b_{i+\delta}). \quad (2.27)$$

Температурные зависимости намагниченности и параметра ближнего порядка ферромагнетика для различных J'/J показаны на рис. 1–3. При малых положительных $T - T_M$ имеем $\mu \propto (T - T_M)^2$ (см. рис. 3 для ферромагнитного случая, та же самая ситуация имеет место в АФМ-случае), так что согласно (2.12) критический индекс для корреляционной длины $\nu = 1$. Так как намагниченность изменяется линейно вблизи T_M , критический индекс намагниченности $\beta = 1$. Влияние поправок более высокого по $1/S$ порядка на значение критических индексов обсуждается в разделах 2.4, 2.5. В классическом пределе $S \rightarrow \infty$ уравнения ССВТ упрощаются и при $T < T_M$ ($\mu = 0$) усредненный (по ближайшим соседям) параметр ближнего порядка

$$\gamma_{\text{eff}}(T) = \frac{4J\gamma + 2J'\gamma'}{J_0} \quad (2.28)$$

(но не намагниченность!) удовлетворяет стандартному уравнению среднего поля

$$\frac{\gamma_{\text{eff}}}{S} = B_{\infty} \left(\frac{J_0 \gamma_{\text{eff}} S}{T} \right), \quad (2.29)$$

где $B_{\infty}(x) = \coth x - 1/x$ — функция Ланжевена (функция Бриллюэна в классическом пределе). Температура T^* , при которой $\gamma_{\text{eff}}(T^*) = 0$, оказывается выше температуры магнитного фазового перехода T_M , так что $\gamma_{\text{eff}}(T_M) > 0$, а поведение γ_{eff} при $T > T_M$ становится более сложным, чем описываемое выражением (2.29).

При малых значениях межплоскостного обмена $J'/J \ll 1$ и анизотропии η , $\zeta \ll 1$ возможно получение аналитических результатов для температурной зависимости намагниченности в широком диапазоне температур [48, 51]. При этом ССВТ приводит к различным

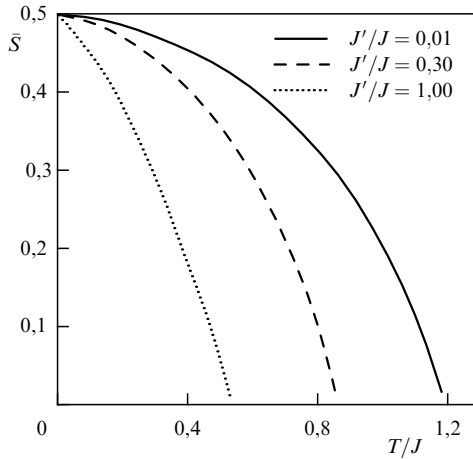


Рис. 1. Температурная зависимость намагниченности квазидвумерных ферромагнетиков при разных значениях отношения обменных интегралов между плоскостями и в плоскости J'/J ($S = 1/2$).

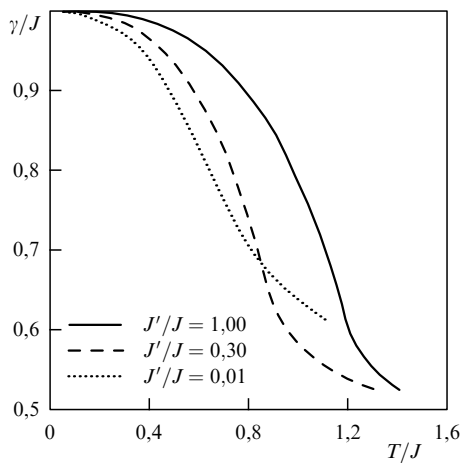


Рис. 2. Зависимость параметра ближнего порядка γ от температуры при тех же значениях параметров, что и на рис. 1.

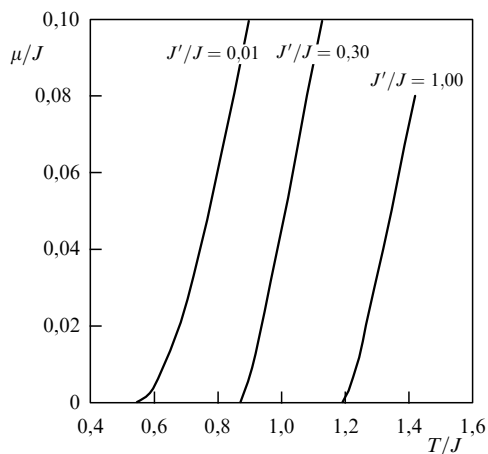


Рис. 3. Зависимость щели в спектре бозонов от температуры при тех же значениях параметров, что и на рис. 1.

результатам для намагниченности в так называемых "квантовом" и "классическом" температурных режимах. Оказывается, что эти режимы не связаны однозначно со случаями квантовых ($S \sim 1$) и классических ($S \gg 1$)

спинов (хотя классический режим реализуется лишь при $S \gg 1$), поскольку реальные критерии содержат также температуру (см. ниже).

В квантовом режиме, который имеет место при не слишком низких температурах,

$$J'S \ll T \ll JS \quad (\Phi\text{М}), \quad (2.30)$$

$$(JJ')^{1/2}S \ll T \ll |J|S \quad (\text{АФМ}),$$

намагниченность (подрешеточная намагниченность)

$$\bar{S} = \begin{cases} S - \frac{T}{4\pi JS} \ln \frac{T}{J'\gamma'S} & (\Phi\text{М}), \\ \bar{S}_0 - \frac{T}{4\pi |J|\gamma S} \ln \frac{T^2}{8JJ'\gamma\gamma'S^2} & (\text{АФМ}). \end{cases} \quad (2.31)$$

Параметры ближнего порядка определяются соотношениями $\gamma \approx \gamma_0$ и

$$\gamma' = \begin{cases} S - \frac{T}{4\pi JS} \left(\ln \frac{T}{J'\gamma'S} - 1 \right) & (\Phi\text{М}), \\ \bar{S}_0 - \frac{T}{4\pi |J|\gamma S} \left(\ln \frac{T^2}{8JJ'\gamma\gamma'S^2} - 1 \right) & (\text{АФМ}), \end{cases} \quad (2.32)$$

так что $\gamma'_0 = \bar{S}_0$. Отметим, что в квантовом режиме (2.30) интегралы по квазиимпульсам в уравнениях ССВТ определяются вкладом квазиимпульсов $q < q_0$, где

$$q_0 = \begin{cases} \left(\frac{T}{JS} \right)^{1/2} & (\Phi\text{М}), \\ \frac{T}{c} & (\text{АФМ}), \end{cases} \quad (2.33)$$

а не всей зоной Бриллюэна. Для критических температур в режиме (2.30) получаем

$$T_C = \frac{4\pi JS^2}{\ln(T/J'\gamma'_c S)}, \quad (2.34)$$

$$T_N = \frac{4\pi |J|\gamma_c \bar{S}_0}{\ln(T^2/8JJ'\gamma_c \gamma'_c S^2)},$$

где $\gamma_c \approx \gamma_0$ и γ'_c — перенормированные обменные параметры для $T_M = T_C$ ($T_M = T_N$); параметр γ'_c , определенный из (2.32), имеет вид

$$\gamma'_c = \frac{T_M}{4\pi} |J|\gamma_c S^2 J'. \quad (2.35)$$

Перенормировка межплоскостного обмена в (2.34) приводит к существенно более низкому значению температуры Кюри (Нееля) по сравнению с ее значением в спиновой теории, поскольку $\gamma_c \gamma'_c / JJ' = T_M / 4\pi JS^2 \ll 1$.

В случае больших S (классический предел) получаем для ферро- и антиферромагнетиков при $T \gg |J|S$

$$\bar{S} = S - \frac{T}{4\pi |J|S} \ln \frac{q_0^2 J}{J'\gamma'}, \quad (2.36)$$

$$\gamma' = S - \frac{T}{4\pi |J|S} \left(\ln \frac{q_0^2 J}{J'\gamma'} - 1 \right). \quad (2.37)$$

В отличие от результатов в квантовом случае, результаты для намагниченности в этом пределе не универ-

сальны, так как зависят от типа решетки через параметр обрезания q_0^2 (для квадратной решетки $q_0^2 = 32$). Соответствующее выражение для критической температуры классического магнетика с $1 \ll \ln(q_0^2 J/J') \ll 2\pi S$ имеет вид:

$$T_M = \frac{4\pi |J| S^2}{\ln(q_0^2 J/J' \gamma_c')}, \quad (2.38)$$

где $\gamma_c' = T_M/4\pi |J| S$, причем критическая температура одинакова для классических ферро- и антиферромагнетиков. В этом случае с логарифмической точностью воспроизводятся результаты спин-волновой теории, в которой $\gamma_c'/S \rightarrow 1$.

Как и в случае малого межплоскостного обмена, выделение логарифмических особенностей при малой анизотропии приводит к результатам:

$$\bar{S} = S - \frac{T}{4\pi JS} \ln \frac{T}{\Delta} \quad (\text{ФМ}), \quad (2.39)$$

$$\bar{S} = \bar{S}_0 - \frac{T}{4\pi |J| \gamma S} \ln \frac{T^2}{8\gamma JS \Delta} \quad (\text{АФМ}).$$

В отличие от квазидвумерного случая здесь возникает нефизический результат $\Delta(T_M) = 0$ вследствие пропорциональности щели магнитного спектра $(\bar{S}/S)^2$ (на самом деле конечная величина щели при $T = T_M$ связана с топологическими возбуждениями — "доменными стенками", которые не учитываются спин-волновой теорией). Таким образом, спин-волновая теория неспособна описать зависимость щели $\Delta(T)$ вблизи T_M . Обозначая формально $\Delta_c = \Delta(T_M)$, для критической температуры при $2\pi S \ll \ln(1/\Delta)$ имеем

$$T_C = \frac{4\pi JS^2}{\ln(T/\Delta_c)}, \quad (2.40)$$

$$T_N = \frac{4\pi |J| S \bar{S}_0 \gamma_c}{\ln(T^2/8J\gamma_c S \Delta_c)}.$$

В пределе больших S как для ферромагнетиков, так и для антиферромагнетиков находим

$$\bar{S} = S - \frac{T}{4\pi |J| S} \ln \frac{|J| S q_0^2}{\Delta}. \quad (2.41)$$

Намагниченность (2.41) исчезает при температуре

$$T_M = \frac{4\pi |J| S^2}{\ln(|J| S q_0^2/\Delta_c)}, \quad (2.42)$$

соответствующей критической температуре для классического магнетика с анизотропией типа "легкая ось" ($1 \ll \ln(|J| q_0^2/\Delta) \ll 2\pi S$).

Результаты (2.34) и (2.38) могут быть сопоставлены с результатом приближения Тябликова для температуры магнитного перехода слоистых соединений [28, 57]

$$T_M \approx \frac{4\pi |J| S^2}{\ln(|J| q_0^2/J')} \quad (2.43)$$

при $q_0^2 = 32$. Результат (2.43) численно меньше значения ССВТ (2.34) и потому лучше описывает экспериментальные данные (см. раздел 2.6). Однако (2.43) совпадает с

результатом для сферической модели (который является адекватным только в классическом пределе $S \rightarrow \infty$ [64]) и с результатом приближения спиновых волн в классическом режиме. Это показывает, что вблизи критической температуры приближение Тябликова не учитывает квантовые флуктуации, которые важны при малых значениях S . Таким образом, приближение Тябликова может оказаться в какой-то мере удовлетворительным с практической, но не с теоретической точки зрения.

Хотя все обсуждавшиеся подходы с логарифмической точностью приводят к одному и тому же значению температуры Нееля, этой точности недостаточно для количественного описания экспериментальных данных. Кроме того, спин-волновыми теориями неправильно описывается критическое поведение. Формально ССВТ соответствует пределу $N \rightarrow \infty$ в $SU(N)/SU(N-1)$ -обобщении модели Гейзенберга [38]. Для того чтобы улучшить описание критической области и вычислить точнее температуру Кюри (Нееля), необходимо рассмотреть флуктуационные поправки к результатам теории спиновых волн более аккуратно, чем в ССВТ. Вычисление поправок первого порядка по $1/N$ в $SU(N)/SU(N-1)$ -модели дает возможность описать область низких и промежуточных температур $T \lesssim T_M$, но не может обеспечить правильного описания критического поведения [58]. Проблемы этого подхода в критической области связаны с тем, что в указанном обобщении модели Гейзенберга возбуждения неспин-волнового характера представляются через связанные состояния спиновых волн [59] и их рассмотрение весьма затруднительно в рамках $1/N$ -разложения. В связи с этим необходимо развитие подходов, позволяющих описать как область промежуточных температур, так и критическую область. Такие подходы рассматриваются в разделах 2.3–2.5.

2.3. Теоретико-полевоое описание квазидвумерных магнетиков с локализованными моментами

Для правильного описания термодинамических свойств в широком интервале температур необходимо провести суммирование ведущих вкладов в термодинамические величины во всех порядках теории возмущений по магнон-магнонному взаимодействию. При этом кинематическое взаимодействие спиновых волн является важным в широкой температурной области только для систем, в которых T_M не мало по сравнению с $|J| S^2$ (например в трехмерных системах). Для слоистых систем кинематическое взаимодействие не так существенно ввиду малости температуры магнитного перехода $T_M \ll |J| S^2$ (фактически это взаимодействие играет роль только в малой критической окрестности T_M).

В то же время принципиально важным является правильный учет динамического магнон-магнонного взаимодействия. Для суммирования диаграмм, описывающих влияние этого взаимодействия за пределами низшего порядка теории возмущений, возможно использование РГ-анализа, который был успешно применен для описания классических и квантовых изотропных магнетиков в пространствах размерностью $d = 2$ [46, 60] и $d = 2 + \varepsilon$ [61, 62]. В указанных случаях картина спектра возбуждений слабо отличается от спин-волновой. Так, при $d = 2 + \varepsilon$ поправки к спектру спиновых волн $\delta E_k \sim |J| \varepsilon \ln k$. При этом для температуры магнитного перехода справедливо соотношение $T_M/(|J| S^2) \sim \varepsilon$ и

может быть применена стандартная техника ε -разложения [61, 62]. Соответствующие результаты РГ-анализа совпадают с результатами $1/N$ -разложения в $SU(N)/SU(N-1)$ -обобщении модели Гейзенберга [58].

В случае квазидвумерных магнетиков со слабым межплоскостным обменом и (или) слабой анизотропией типа "легкая ось" температура магнитного перехода также мала по сравнению с $|J|S^2$, однако спектр возбуждений может существенно отличаться от спин-волнового. В частности, можно выделить три температурных режима [63].

При низких температурах, $T \ll T_M$ (первый режим), применима спин-волновая теория. При промежуточных температурах, $T \sim T_M$ (вне критической области, второй режим), взаимодействие спиновых волн становится существенным, но спиновые флуктуации носят двумерный изотропный характер (в связи с чем этот режим далее именуется "двумерный гейзенберговский режим"); для описания магнитных свойств в этом режиме может быть применен метод РГ. Наконец, в малой критической области вблизи T_M происходит переход от вышеупомянутого двумерного гейзенберговского режима к трехмерному гейзенберговскому *критическому* режиму, в котором существенны флуктуации неспинволнового характера (третий режим). При наличии анизотропии флуктуации в критическом режиме обусловлены топологическими возбуждениями типа доменных стенок, т.е. являются "двумерными изинговскими". В обоих случаях в достаточно малой критической области картина спиновых волн становится полностью неадекватной. Таким образом, эта область должна рассматриваться с учетом наличия значительных неспинволновых возбуждений.

Для рассмотрения этого типа возбуждений удобно воспользоваться вместо исходной модели Гейзенберга так называемой $O(N)/O(N-1)$ -моделью с большим числом компонент спина N , позволяющей ввести в теорию формально малый параметр [27]. При $N = \infty$ указанная модель эквивалентна сферической модели [64], при конечных значениях N она правильно учитывает поправки, связанные со спин-спиновым взаимодействием, поскольку не основана на спин-волновой картине спектра. Это обстоятельство приводит к важным преимуществам при температурах, сравнимых с температурой фазового перехода, но вызывает некоторые трудности при описании в случае низких и промежуточных температур, при которых возбуждения имеют чисто спин-волновой характер. Таким образом, подходы РГ и $1/N$ -разложения в $O(N)/O(N-1)$ -модели имеют преимущества в различных температурных областях и взаимно дополняют друг друга. В то время как первый метод хорошо описывает двумерный режим, реализующийся при промежуточных температурах, $1/N$ -разложение удовлетворительно описывает критическую область.

Применение РГ-подхода и $1/N$ -разложения предполагает переформулировку исходной проблемы вычисления термодинамических свойств модели с гамильтонианом (2.1) в терминах континуального интеграла [65, 66]. В этом формализме модель характеризуется так называемым производящим функционалом $Z[h]$, являющимся статистической суммой системы во внешнем неоднородном магнитном поле h , так что логарифмические производные $Z[h]$ по полю определяют намагниченность и корреляционные функции. Для вывода производящего

функционала используется представление когерентных состояний [65, 66]

$$|\mathbf{n}_i\rangle = \exp(-i\varphi_i S_i^z) \exp(-i\theta_i S_i^y) |0\rangle, \quad (2.44)$$

параметризуемых векторами \mathbf{n}_i с единичной длиной и полярными координатами (θ_i, φ_i) , определенными для каждого узла решетки i , $|0\rangle$ — собственное состояние оператора S_i^z с максимальной проекцией спина: $S_i^z |0\rangle = S |0\rangle$. Преимущество состояний (2.44) состоит в том, что среднее значение операторов спина в них имеет простой вид:

$$\langle \mathbf{n}_i | S_i^m | \mathbf{n}_i \rangle = S n_i^m, \quad (2.45)$$

т.е. когерентные состояния являются "квазиклассическими" спиновыми состояниями. Можно показать, что для когерентных состояний (2.44) производящий функционал может быть записан в виде

$$Z = \int D\mathbf{n} \exp \left\{ \int_0^{1/T} d\tau \left[\sum_i \left(\mathbf{A}(\mathbf{n}_i) \frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial \tau} \right) - \langle \mathbf{n} | H | \mathbf{n} \rangle \right] \right\}, \quad (2.46)$$

где первый член в показателе экспоненты учитывает динамику спинов, связанную с их квантовым характером, а второй член — взаимодействие спинов; интегрирование в (2.46) производится по угловым переменным вектора \mathbf{n}_i в каждом узле и для каждого момента мнимого времени τ ; $\mathbf{A}(\mathbf{n})$ — векторный потенциал единичного магнитного монополя, удовлетворяющий соотношению $\mathbf{n} \text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{n}) = 1$. Вклад в действие с производной по времени соответствует фазе Берри [29].

Среднее по когерентным состояниям гамильтониана (2.1) можно легко вычислить, учитывая соотношение (2.45), что приводит к следующему выражению для производящего функционала модели (2.1):

$$Z[h] = \int D\mathbf{n} D\lambda \exp \left\{ \frac{JS^2}{2} \int_0^{1/T} d\tau \sum_{i,\delta} \left[\frac{2i}{JS} \mathbf{A}(\mathbf{n}_i) \frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial \tau} + \mathbf{n}_i \mathbf{n}_{i+\delta_{\parallel}} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_{i+\delta_{\perp}} + \eta n_i^z n_{i+\delta_{\parallel}}^z + \tilde{\zeta} (n_i^z)^2 + h n_i^z + i \lambda_i (n_i^2 - 1) \right] \right\}, \quad (2.47)$$

где $\tilde{\zeta} = 2\zeta(1 - 1/2S)$. Функционал (2.47) является обобщением хорошо известного производящего функционала двумерной изотропной модели Гейзенберга [66] для случая наличия межплоскостного обмена (член пропорциональный α) и анизотропии (члены пропорциональные η и $\tilde{\zeta}$). Последнее слагаемое под знаком суммы обусловлено ограничением $\mathbf{n}_i^2 = 1$, λ_i — соответствующие множители Лагранжа. Функционал (2.47) содержит два масштаба длины:

$$\xi_J = \frac{a}{\max(\alpha, \tilde{\zeta}, \eta)^{1/2}} \gg a, \quad (2.48)$$

$$L_{\tau} = \begin{cases} a \sqrt{\frac{JS}{T}} & (\text{ФМ}), \\ \frac{c}{T} & (\text{АФМ}), \end{cases} \quad (2.49)$$

где a — постоянная решетки. Эти масштабы имеют различный физический смысл. На масштабе ξ_J характер

флуктуаций изменяется: двумерные флуктуации гейзенберговского типа сменяются трехмерными гейзенберговскими или двумерными изинговскими, в зависимости от того, какой из параметров доминирует в знаменателе (2.48) — анизотропия или межплоскостной обмен. В то же время величина L_τ определяет роль квантовых спиновых флуктуаций: $L_\tau \ll a$ соответствует классическому пределу, при котором динамикой спинов можно пренебречь, $L_\tau > a$ — квантовому.

Производящий функционал (2.47) далее может быть приведен к виду, удобному для конкретных вычислений; при этом результат определяется температурным режимом, для которого производится вычисления. В классическом режиме, $T \gg JS$, имеем $L_\tau \ll a$. Пренебрежение динамикой поля \mathbf{n} (т.е. его зависимостью от мнимого времени) приводит к функционалу

$$Z_{cl}[h] = \int D\mathbf{n} D\lambda \exp \left\{ \frac{\rho_s^0}{2T} \sum_i \left[\mathbf{n}_i \mathbf{n}_{i+\delta_{\parallel}} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_{i+\delta_{\perp}} + \eta n_i^z n_{i+\delta_{\parallel}}^z + \zeta (n_i^z)^2 + h n_i^z + i\lambda_i (n_i^2 - 1) \right] \right\} \quad (2.50)$$

с "затравочной" спиновой жесткостью $\rho_s^0 = |J|S^2$. Чтобы получить (2.50) в антиферромагнитном случае, необходимо сделать замену $\mathbf{n}_i \rightarrow -\mathbf{n}_i$, $\lambda_i \rightarrow -\lambda_i$ для одной из двух подрешеток. При этом в классическом случае результаты для Z идентичны для ферро- и антиферромагнетиков. В континуальном пределе действие (2.50) совпадает с действием для классической нелинейной сигма-модели [66]. Однако в широком интервале температур (не только в критической области) континуальный предел не может быть использован, так как при этом вклад в термодинамические свойства дают не только длинноволновые, но и коротковолновые возбуждения.

В квантовом случае в силу условия $\xi_{J'} \gg L_\tau$ можно перейти к континуальному пределу для каждого слоя. Для ферромагнетика удобно использовать представление [65, 66]

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \frac{\mathbf{z} \times \mathbf{n}}{1 + (\mathbf{z}\mathbf{n})}, \quad (2.51)$$

где \mathbf{z} — единичный вектор вдоль оси z , и ввести двухкомпонентное векторное поле $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{n} - (\mathbf{n}\mathbf{z})\mathbf{z}$, описывающее флуктуации параметра порядка. Для квантового антиферромагнетика необходимо применить процедуру Халдейна [29] (см. также [66]), позволяющую проинтегрировать по "быстрым" компонентам полей \mathbf{n}_i . Для этого вектор \mathbf{n}_i представляется в виде $\mathbf{n}_i = \mathbf{L}_i + (-1)^i \boldsymbol{\sigma}_i$, где \mathbf{L}_i и $\boldsymbol{\sigma}_i$ — однородная ("быстрая") и подрешеточная ("медленная") компоненты вектора, $\mathbf{L}_i \boldsymbol{\sigma}_i = 0$. При этом для разделения "быстрых" и "медленных" компонент при температурах, меньших точки перехода, вместо обычной корреляционной длины, равной бесконечности, используется параметр $\xi_{J'} \gg a$. С помощью указанной процедуры приходим к производящему функционалу квантовой нелинейной сигма-модели:

$$Z_{AF}[h] = \int D\sigma D\lambda \exp \left\{ -\frac{\rho_s^0}{2} \int_0^{1/T} d\tau \times \right. \\ \left. \times \int d^2\mathbf{r} \sum_{i_z} \left[\frac{1}{c_0^2} (\partial_\tau \sigma_{i_z})^2 + (\nabla \sigma_{i_z})^2 + \frac{\alpha}{2} (\sigma_{i_z+1} - \sigma_{i_z})^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - f(\sigma_{i_z}^z)^2 + h \sigma_{i_z}^z + i\lambda (\sigma_{i_z}^2 - 1) \right] \right\}, \quad (2.52)$$

где σ_{i_z} — трехкомпонентное поле единичной длины, i_z — номер слоя, $c_0 = \sqrt{8}JS$ — затравочная скорость спиновых волн. Модель (2.52) является обобщением квантовой нелинейной сигма-модели для случая наличия межплоскостного обмена и анизотропии. Ранее эта модель применялась для описания двумерных изотропных антиферромагнетиков в окрестности квантовых критических точек [46]; ее классический аналог использовался для оценки величины температур Кюри или Нееля изотропных классических магнетиков в пространстве размерностью $d = 2 + \varepsilon$ и для определения соответствующих критических индексов [62]. Несмотря на континуальный характер модели (2.52), как показано в разделах 2.4 и 2.5, в случае квантовых магнетиков величина температуры Кюри (Нееля) может быть выражена через параметры основного состояния, поскольку при этом существенную роль играют лишь возбуждения с волновым вектором $k < (T/J)^{1/2} \ll 1$ (см. раздел 2.2).

В отсутствие анизотропии и внешнего поля модель (2.52) обладает $O(3)/O(2)$ -группой симметрии, соответствующей возможности вращения одного из трех базисных векторов в трехмерном пространстве ($O(2)$ — группа операций вращения в базисной плоскости, не изменяющих выбранный базисный вектор). В отличие от модели (2.47) модель (2.52) может быть распространена на случай N -мерного спинового пространства $O(N)/O(N-1)$ с произвольным N путем введения поля $\sigma_i = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$ и замены $\sigma^z \rightarrow \sigma_N$.

2.4. Описание двумерного температурного режима в рамках ренормгруппового подхода

В двумерном гейзенберговском режиме взаимодействие спиновых волн является существенным, но сами спиновые возбуждения являются хорошо определенными. Наличие такого режима — специфическая особенность квазидвумерных систем с малыми значениями межплоскостного обмена и анизотропии. Как можно видеть уже из результатов спин-волновых подходов (раздел 2.2), в этом режиме имеются логарифмические расходимости в намагниченности (подрешеточной), определяемые параметрами $\ln(\xi_{J'}/L_\tau)$ в квантовом случае и $\ln(\xi_{J'}/a)$ в классическом.

Для того чтобы выйти за рамки теории возмущений и определить эволюцию термодинамических свойств с увеличением температуры, необходимо просуммировать эти расходимости. Наиболее эффективным инструментом здесь является РГ-подход [46, 60–63], вводящий перенормированную модель, которая не содержит логарифмических расходимостей, и рассматривающий эволюцию ее параметров с изменением масштабов длины. Эта модель допускает описание в рамках теории возмущений (в обсуждаемом нами случае — в рамках спин-волновой теории).

Рассмотрим вначале случай квантового антиферромагнетика. Тогда в качестве эффективных параметров следует рассмотреть подрешеточную намагниченность и температуру фазового перехода; эти величины удобно выразить через наблюдаемые параметры основного состояния: намагниченность \bar{S}_0 , спиновую жесткость ρ_s , скорость спиновых волн c , межплоскостной обмен α_τ и анизотропию $f_\tau = (\Delta/\rho_s)\bar{S}_0$, где Δ — щель в энергетическом спектре. На первом шаге РГ-преобразования вводятся параметры квантовой перенорми-

ровки $Z_i = \{Z_{1,2,3}, Z_c, Z\}$ согласно соотношениям

$$\bar{S}_0 = ZS, \quad g_0 = gZ_1, \quad c_0 = cZ_c, \\ f = f_r Z_2, \quad \alpha = \alpha_r Z_3,$$

связывающим наблюдаемые параметры основного состояния g, c, α_r, f_r с параметрами (затравочными) исходной модели g_0, c_0, α, f , где $g = c/\rho_s$ и $g_0 = c_0/\rho_s^0$ — безразмерные перенормированная и затравочная константы связи модели (2.52) соответственно.

Перенормировочные константы Z_i вследствие их неуниверсальности, т.е. зависимости от деталей структуры решетки, могут быть определены лишь из рассмотрения исходной решеточной (неконтинуальной) версии производящего функционала (2.47). Указанные параметры могут быть вычислены в спин-волновой теории, являющейся фактически разложением в ряд по g ($g \sim 1/S$ для больших S). Для антиферромагнетиков с квадратной решеткой результаты раздела 2.2 приводят к соотношениям

$$Z_\sigma = \frac{1}{Z_1} = Z_2 = Z_3^{1/2} = 1 - \frac{0,197}{S}, \quad (2.53) \\ Z_c = 1 + \frac{0,079}{S}$$

с точностью до членов первого порядка по $1/S$ [16, 38–45]. Для учета квантовых перенормировок удобно иметь эквивалент результатов (2.53), определенный в рамках континуальной модели (2.52). В первом порядке по g находим

$$Z_\sigma = 1 - (N-1) \frac{gA}{4\pi} + O(g^2), \\ Z_1 = 1 - (N-2) \frac{gA}{4\pi} + O(g^2), \quad Z_c = 1 + O(g^2), \quad (2.54) \\ Z_2 = 1 + \frac{gA}{2\pi} + O(g^2), \quad Z_3 = 1 + \frac{3gA}{4\pi} + O(g^2),$$

где A — ультрафиолетовый параметр обрезания, необходимый для регуляризации расходимостей, возникающих при вычислении параметров основного состояния. После выполнения квантовой перенормировки (2.54) теория становится полностью универсальной, так что термодинамические свойства не зависят от параметра обрезания A .

Результирующая теория, однако, содержит логарифмические расходимости $\ln(\xi_J/L_\tau)$, являющиеся следствием двумерного характера спиновых флуктуаций в рассматриваемом температурном режиме. Для суммирования указанных расходимостей в рамках РГ-подхода на втором этапе РГ-преобразования вводится формальный инфракрасный параметр обрезания A_R , так что указанные расходимости заменяются выражением $\ln[1/(A_R L_\tau)]$. Далее рассматриваются температурно-зависимые перенормировочные параметры \tilde{Z}_i , введенные согласно теоретико-полевой формулировке РГ [61, 67]:

$$g = g_R \tilde{Z}_1, \quad u_r = u_R \tilde{Z}_u, \\ \pi = \pi_R \tilde{Z}_\sigma, \quad h = h_R \frac{\tilde{Z}_1}{\sqrt{\tilde{Z}_\sigma}}, \\ f_r = f_R \tilde{Z}_2, \quad \alpha_r = \alpha_R \tilde{Z}_3, \quad (2.55)$$

которые являются функциями A_R и определяются из условия отсутствия логарифмических расходимостей в

перенормированной теории; индекс R соответствует квантово- и температурно-перенормированным величинам; $u_r = c/T$. Как и в случае классической нелинейной сигма-модели [61], введение пяти перенормировочных параметров для пяти независимых параметров модели оказывается достаточным для того, чтобы устранить все расходимости (см. также [67]).

Бесконечно малое изменение A_R генерирует преобразование ренормгруппы. Для наших целей необходимо учесть сингулярные вклады в диаграммах, которые содержат две петли, образуемые линиями функций Грина поля π (так называемое "двухпетлевое" приближение). Соответствующий результат для эффективной температуры $t = g/(4\pi u) = T/(4\pi\rho_s)$ и подрешеточной намагниченности в перенормированной модели имеет вид

$$A_R \frac{dt}{dA_R} = -(N-2)t^2 - (N-2)t^3 + O(t^4), \quad (2.56)$$

$$A_R \frac{d \ln Z_\sigma}{dA_R} = \frac{1}{2} (N-1)t + O(t^3). \quad (2.57)$$

В перенормировке параметров межплоскостного обмена и анизотропии достаточно рассмотреть сингулярные вклады диаграмм с одной петлей, что приводит к результату

$$A_R \frac{d \ln Z_2}{dA_R} = -2t + O(t^2), \quad (2.58)$$

$$A_R \frac{d \ln Z_3}{dA_R} = -t + O(t^2). \quad (2.59)$$

Уравнения (2.56)–(2.59) определяют эволюцию параметров модели при РГ-преобразовании с изменением параметра масштаба A_R , причем конечное значение параметра $A_R \sim \max(\alpha, f^{1/2})$ обусловлено отсутствием логарифмических расходимостей в эффективной модели.

Решение уравнений (2.58), (2.59) позволяет получить температурную перенормировку параметров межплоскостного обмена и анизотропии:

$$\frac{f_t}{f_r} = \bar{\sigma}_r^{4/(N-1)} \left[1 + O\left(\frac{t_r}{\bar{\sigma}_r^{1/\beta_2}}\right) \right], \quad (2.60)$$

$$\frac{\alpha_t}{\alpha_r} = \bar{\sigma}_r^{2/(N-1)} \left[1 + O\left(\frac{t_r}{\bar{\sigma}_r^{1/\beta_2}}\right) \right], \quad (2.61)$$

где $\bar{\sigma}_r$ — относительная подрешеточная намагниченность, которая определяется решением уравнений (2.56), (2.57), имеющим вид [63]:

$$\bar{\sigma}_r^{1/\beta_2} = 1 - \frac{t_r}{2} \left[(N-2) \ln \frac{2}{u_r^2 A(f_r, \alpha_r)} + \frac{2}{\beta_2} \ln \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_r} \right) + \right. \\ \left. + 2(1 - \bar{\sigma}_r^{1/\beta_2}) + O\left(\frac{t_r}{\bar{\sigma}_r^{1/\beta_2}}\right) \right], \quad (2.62)$$

где

$$A(f, \alpha) = f + \alpha + \sqrt{f^2 + 2\alpha f} \quad (2.63)$$

— универсальная функция анизотропии и межплоскостного обмена. Величина

$$\beta_2 = \frac{N-1}{2(N-2)} \quad (2.64)$$

является пределом критического индекса намагниченности $\beta_{2+\varepsilon}$ в пространстве размерностью $d = 2 + \varepsilon$ [61] при $\varepsilon \rightarrow 0$; в физически важном случае $N = 3$ имеем $\beta_2 = 1$. Ведущий логарифмический член в квадратных скобках соответствует результату ССВТ (2.31), в то время как другие два члена описывают поправки к этой теории. Результаты (2.60)–(2.62) при $N = 3$ совпадают с результатами ССВТ (2.23) и (2.24).

Как уже указывалось, в РГ-подходе температура Нееля не может быть вычислена непосредственно, поскольку возбуждения неспинволнового типа дают вклад вблизи T_M , что приводит к необходимости учета диаграмм с произвольным числом петель. Однако можно получить общее выражение для температуры Нееля следующим образом. Рассмотрим сначала температуру t_r^* , определяющую переход (кроссовер) к критическому режиму. В рамках РГ-анализа эта температура определяется условием перехода в режим сильной связи рассмотренных уравнений РГ, т.е. условием $t \sim 1$ (что эквивалентно $t_r^* \sim \bar{\sigma}_r^{1/\beta_2}$). При дальнейшем РГ-преобразовании трехмерные гейзенберговские (или двумерные изинговские) флуктуации могут изменить только постоянный (несингулярный) член $O(t_r/\bar{\sigma}_r^{1/\beta_2})$, который заменяется универсальной функцией $\Phi_{AF}(\alpha_r/f_r) \sim 1$. Таким образом, для температуры Нееля находим

$$t_N = 2 \left[(N-2) \ln \frac{2}{u_r^2 \Delta(f_c, \alpha_c)} + 2 \ln \frac{2}{t_N} + \Phi_{AF} \left(\frac{\alpha_r}{f_r} \right) \right]^{-1}, \quad (2.65)$$

где α_c и f_c — соответственно параметры межплоскостного обмена и анизотропии в точке магнитного перехода,

$$f_c = f_r t_N^{2/(N-2)}, \quad \alpha_c = \alpha_r t_N^{1/(N-2)}, \quad (2.66)$$

$t = T/(2\pi\rho_s)$, $u_r = c/T$. Второй член в квадратных скобках в (2.65), представляющий собой поправку к ССВТ, имеет порядок $\ln \ln(2T_N^2/\alpha)$ и приводит к существенному понижению температуры Нееля по сравнению с ее значением в ССВТ. Функция Φ определяется неспинволновыми возбуждениями и не может быть найдена в рамках РГ-подхода. В квазидвумерном изотропном случае Φ может быть вычислена с помощью $1/N$ -разложения (см. раздел 3); более общий случай требует численного анализа, например, с использованием квантового метода Монте-Карло.

Ферромагнитный случай может быть рассмотрен аналогично антиферромагнитному. В этом случае перенормировки, обусловленные квантовыми флуктуациями, отсутствуют, так что достаточно ограничиться температурными перенормировками. Чтобы построить теорию возмущений для производящего функционала (2.47), удобно перейти от вещественных полей π_x, π_y к циклическим компонентам

$$\pi^\pm = \pi_x \pm i\pi_y. \quad (2.67)$$

Затравочные функции Грина полей π^+, π^- имеют вид

$$G^{(0)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{1}{g} [i\omega_n + k^2 + \alpha(1 - \cos k_z) + f + h]^{-1}, \quad (2.68)$$

где $g = 1/S$. Поскольку квантовая перенормировка отсутствует, $Z_i \equiv 1$, индексы r у параметров основного состояния могут быть опущены. Множители \tilde{Z}_i имеют тот же вид, что и в антиферромагнитном случае с $N = 3$. Для относительной намагниченности $\bar{\sigma} \equiv \bar{S}/S$ ($\bar{S} = \langle S^z \rangle$) и температуры Кюри получаем уравнения (2.62) и (2.65) с заменами $u_r^2 \rightarrow u$, $t_r \rightarrow t$ [63].

В классическом случае затравочная функция Грина поля $\pi = \mathbf{n} - (\mathbf{nz})\mathbf{z}$ имеет вид

$$G^{(0)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi t} [2(2 - \cos k_x a - \cos k_y a) + \alpha(1 - \cos k_z a) + f + h]^{-1}, \quad (2.69)$$

где a — постоянная решетки. Перенормировочные константы в этом случае могут быть представлены как

$$Z_i(t, a) = Z_{Li}(t) \tilde{Z}_i(t_L, a), \quad (2.70)$$

где $t_L = tZ_{L1}^{-1}$, Z_{Li} содержат нелогарифмические вклады, которые не изменяются при РГ-преобразованиях и определяются из теории возмущений, индекс L соответствует неуниверсальным перенормировочным параметрам, \tilde{Z}_i содержат все остальные вклады, определяемые структурой конкретной решетки. Уравнение для намагниченности в двухпетлевом РГ-подходе для классического магнетика может быть получено, как и в квантовом случае, при этом в результатах (2.62) и (2.65) для $\bar{\sigma}$ и T_M необходимо сделать замены $u_r^2 \rightarrow 1/64$, $t_r \rightarrow t_L$ [63].

Таким образом, РГ-подход является достаточным для вычисления намагниченности при температурах, не слишком близких к температуре магнитного перехода, при которых спин-волновые возбуждения играют решающую роль, а также позволяет вычислить температуры Кюри (Нееля) с точностью до некоторой постоянной, являющейся универсальной в квантовом случае.

2.5. Описание критического режима и вычисление температуры Нееля квантовых квазидвумерных антиферромагнетиков

Учет неспинволновых возбуждений, необходимых для правильного описания критической области и полного вычисления температуры Нееля, возможен в рамках $1/N$ -разложения. Это разложение, основанное на упрощении исходной модели в пределе $N \rightarrow \infty$, впервые было использовано при вычислении критических индексов в модели ϕ^4 (см., например, [68]). Позднее $1/N$ -разложение успешно применялось для описания свойств квантовой модели Гейзенберга вблизи квантовой критической точки [27].

Для модели Гейзенберга предел $N \rightarrow \infty$ совпадает с так называемой сферической моделью [64], в которой пренебрегается связью различных спиновых компонент. При этом физическое условие $S_i^2 = S(S+1)$ заменяется условием на среднее по узлам значение:

$$\sum_i S_i^2 = NS(S+1), \quad (2.71)$$

Такое приближение приводит к значительному упрощению модели и позволяет решить ее точно. Дальнейшие поправки, вычисляемые путем разложения в окрестности седловой точки, дают последовательное улучшение приближения (2.71) по параметру $1/N$.

Рассмотрим применение $1/N$ -разложения к вычислению температур Кюри (Нееля) для квазидвумерных магнетиков [28]. В квантовом случае используется обобщение модели Гейзенберга для модели с $O(N)/O(N-1)$ -симметрией (2.52). Рассмотрим вначале изотропный случай. В связи с наличием дальнего порядка при $T < T_M$ произведем сдвиг поля $\sigma = \bar{\sigma} + \tilde{\sigma}$, где $\bar{\sigma}$ — относительная подрешеточная намагниченность \bar{S}/S . Диагональные элементы (которые только и отличны от нуля) функций Грина поля $\tilde{\sigma}$

$$G^{mn}(\mathbf{k}, k_z, \omega_n) = \rho_s^0 \int d\tau \langle T [\tilde{\sigma}_{\mathbf{k}, k_z}^m(\tau) \tilde{\sigma}_{-\mathbf{k}, -k_z}^n(0)] \rangle, \quad (2.72)$$

$$G^{mn}(\mathbf{k}, k_z, \omega) = \frac{\rho_s^0}{S^2} \chi^{mn}(\mathbf{k} + \mathbf{Q}, k_z + \pi, \omega) \delta_{mn}, \quad (2.73)$$

где $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$ — волновой вектор антиферромагнитной структуры в плоскости, для $N=3$ пропорциональны неоднородной динамической спиновой восприимчивости:

$$\chi^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, k_z, \omega) = \sum_i \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{R}_i + k_z R_i^z)] \langle \langle S_i^\alpha | S_i^\beta \rangle \rangle_\omega, \quad (2.74)$$

S_i^z — операторы спина, $\alpha, \beta = x, y, z$, \mathbf{R}_i — радиус-вектор i -го узла. Для определенности далее полагаем, что подрешеточная намагниченность ориентирована по N -му направлению, т.е. $\bar{\sigma}^m = \bar{\sigma} \delta_{mN}$. Тогда G^{NN} соответствует продольной функции Грина G_1 , в то время как другие диагональные компоненты соответствуют поперечной функции Грина G_\perp . Условие $S_i^2 = S(S+1)$ в указанных обозначениях выражается как

$$1 - \bar{\sigma}^2 = \frac{T}{\rho_s^0} \sum_n \sum_m \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{dk_z}{2\pi} G^{mm}(k, k_z, \omega_n). \quad (2.75)$$

После интегрирования по $\tilde{\sigma}$ производящий функционал принимает вид

$$Z[h] = \int D\lambda \exp(NS_{\text{eff}}[\lambda, h]), \quad (2.76)$$

$$S_{\text{eff}}[\lambda, h] = \frac{1}{2} \ln \det \hat{G}_0 + \frac{1}{2g} (1 - \bar{\sigma}^2) \text{Sp}(i\lambda) + \frac{1}{2g} \text{Sp} \left[\left(i\lambda \bar{\sigma} - \frac{h}{\rho_s^0} \right) \hat{G}_0 \left(i\lambda \bar{\sigma} - \frac{h}{\rho_s^0} \right) \right], \quad (2.77)$$

где

$$\hat{G}_0 = \left[\frac{\partial^2}{c_0^2} + \nabla^2 + \alpha \Delta_z \right]^{-1}, \quad (2.78)$$

$$\Delta_z \sigma_{i_z}(\mathbf{r}, \tau) = \sigma_{i_z+1}(\mathbf{r}, \tau) - \sigma_{i_z}(\mathbf{r}, \tau).$$

Поскольку N входит в действие (2.77) лишь как множитель в показателе экспоненты, предел $N \rightarrow \infty$ (сферическая модель (2.71)) соответствует приближению седловой точки функционала $S_{\text{eff}}[\lambda, h]$, в котором пренебрегается флуктуациями поля λ . При $T < T_N$ седловая точка имеет координаты $i\lambda = 0$ и $\bar{\sigma}^2 \neq 0$. При этом для поперечной спиновой функции Грина имеем

$$G_0(k, k_z, \omega_n) = [\omega_n^2 + k^2 + \alpha(1 - \cos k_z)]^{-1}. \quad (2.79)$$

Температура Нееля, определенная из (2.75), равна

$$T_N^0 = \frac{4\pi\rho_s^{N=\infty}}{N \ln(2T_N^2/\alpha c^2)}, \quad (2.80)$$

где $\rho_s^{N=\infty} = N(1/g - 1/g_c)$ — жесткость спиновых волн в нулевом порядке по $1/N$, $g_c = 2\pi^2/\Lambda$ — формальный параметр теории. Значение (2.80) в $N/(N-2)$ раз меньше результатов ССВТ (2.34) и РГ-подхода (2.62). Такое различие обусловлено недостатком приближения сферической модели, рассматривающей различные спиновые компоненты независимо друг от друга.

В первом порядке по $1/N$ учитываются наименьшие поправки к условию (2.71), обусловленные однократным обменом возбуждением поля λ , которое учитывает связь между различными компонентами спина на узле. Общий вид уравнения для намагниченности при $T \gg \alpha^{1/2}$ и $\ln(2T_N^2/\alpha c^2) \gg 1$ в первом порядке по $1/N$ приведен в работе [28]. В области температур, не слишком близких к точке магнитного перехода, где

$$\frac{(N-2)T}{4\pi\rho_s} \ll \frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}_0^2}, \quad (2.81)$$

уравнение для намагниченности имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} \right)^{1/\beta_2} [1 - I_2(x_{\bar{\sigma}})] &= \\ &= 1 - \frac{NT}{4\pi\rho_s} \left[\left(1 - \frac{2}{N} \right) \ln \frac{2T^2}{\alpha_r} + \frac{3}{N} \ln \frac{\bar{\sigma}_0^2}{\bar{\sigma}^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{N} \frac{\ln(2T^2/\alpha_r)}{\ln(2T^2/\alpha_r) + x_{\bar{\sigma}}} - I_1(x_{\bar{\sigma}}) \right]. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Здесь $I_{1,2}(x_{\bar{\sigma}})$ — некоторые функции (см. [28]),

$$x_{\bar{\sigma}} = \frac{4\pi\rho_s}{(N-2)T} \frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}_0^2}, \quad (2.83)$$

$\bar{\sigma}_0$ и ρ_s — подрешеточная намагниченность и спиновая жесткость основного состояния в нелинейной сигма-модели квантового двумерного антиферромагнетика [27],

$$\frac{\bar{\sigma}_0^2}{\rho_s} = \frac{g}{N} \left(1 - \frac{8}{3\pi^2 N} \ln \frac{N\Lambda}{16\rho_s} \right), \quad (2.84)$$

$$\rho_s = \rho_s^{N=\infty} \left(1 + \frac{32}{3\pi^2 N} \ln \frac{N\Lambda}{16\rho_s} \right), \quad (2.85)$$

α_r — перенормированный параметр межплоскостного обмена,

$$\alpha_r = \alpha \left(1 - \frac{8}{3\pi^2 N} \ln \frac{N\Lambda}{16\rho_s} \right). \quad (2.86)$$

Как и в РГ-подходе, намагниченность подрешетки, выраженная в терминах квантово-перенормированных величин ρ_s , $\bar{\sigma}_0$ и α , не зависит от параметра обрезания Λ , т.е. является универсальной величиной. Результат (2.82) отличается от результата ренормгруппы (2.62) лишь коэффициентом при субведущем члене $\ln(\bar{\sigma}_0/\bar{\sigma})$ ($6/N$ вместо $3/\beta_2$), что лежит за пределами точности первого порядка по $1/N$. Качественно правильно описывая двумерный режим, уравнение (2.82) позволяет также описать подрешеточную намагниченность в режиме, переходном к критическому.

Критический режим определяется условием, обратным (2.82):

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}_0^2} \ll \frac{(N-2)T}{4\pi\rho_s}, \quad (2.87)$$

при котором $x_{\bar{\sigma}} \ll 1$. В этом режиме результат $1/N$ -разложения для подрешеточной намагниченности имеет вид

$$\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} = \left[\frac{4\pi\rho_s}{(N-2)T_N} \right]^{(\beta_3/\beta_2-1)/2} \left[\frac{1}{1-A_0} \left(1 - \frac{T}{T_N} \right) \right]^{\beta_3}, \quad (2.88)$$

где β_3 — критический индекс намагниченности,

$$\beta_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{8}{\pi^2 N} \right), \quad (2.89)$$

$A_0 = 2,8906/N$. При $N = 3$ имеем $\beta_3 \approx 0,36$, что совпадает с результатом $1/N$ -разложения в модели ϕ^4 [68] при $d = 3$, в согласии с гипотезой универсальности. Уравнение для температуры Нееля T_N имеет вид

$$T_N = 4\pi\rho_s \left[(N-2) \ln \frac{2T_N^2}{\alpha_r} + 3 \ln \frac{4\pi\rho_s}{(N-2)T_N} - 0,0660 \right]^{-1}. \quad (2.90)$$

Результаты для намагниченности в низкотемпературной (2.82) и критической (2.88) областях плавно сшиваются друг с другом (см. раздел 2.6).

Спектр возбуждений в точке магнитного фазового перехода определяется собственно-энергетической частью $\Sigma(k, k_z, 0)$ при $T = T_N$. При $\alpha^{1/2} \ll k \ll T_N$ соответствующая функции Грина ($G = G_t = G_l$) выражается как

$$G(k, k_z, 0) = \frac{1}{k^2} \left[\frac{(N-2)T_N}{4\pi\rho_s} \ln \frac{2k^2}{\alpha} \right]^{1/(N-2)} \times \frac{N-1}{N} \left[1 - \eta \ln \frac{N\Lambda}{16\rho_s} \right]. \quad (2.91)$$

Этот результат отличается от ранее рассмотренных результатов спин-волновой теории нетривиальной логарифмической зависимостью $G(k, k_z, 0)$. Множитель $N-1$ в (2.91) имеет простой физический смысл — это число голдстоуновских мод в N -компонентной модели. При $k \ll \alpha^{1/2}$, $k_z \ll 1$ импульсная зависимость функции Грина изменяется:

$$G^{-1}(k, k_z, 0) = (1 + A_1) \alpha_c^{\eta/2} \left(k^2 + \frac{\alpha_c}{2} k_z^2 \right)^{1-\eta/2}, \quad (2.92)$$

$$k \ll \alpha^{1/2}, \quad k_z \ll 1,$$

где

$$A_1 = \eta \ln \frac{N\Lambda}{16\rho_s} + \frac{1}{N} \ln \ln \frac{2T^2}{\alpha} + \frac{0,4564}{N}, \quad (2.93)$$

η — трехмерный критический индекс для асимптотики корреляционной функции в точке перехода в первом порядке по $1/N$,

$$\eta = \frac{8}{3\pi^2 N}. \quad (2.94)$$

В этом режиме, как видно из (2.92), возбуждения имеют трехмерный характер и характеризуются индексом η (при $N = 3$ $\eta \approx 0,09$). Остальные критические индексы могут быть найдены из скейлинговых соотношений, которые сохраняются в рамках регулярного $1/N$ -разложения [68]. Величина

$$\alpha_c = \frac{\alpha(1 + A_2)}{1 + A_1}, \quad (2.95)$$

где $A_2 = -0,6122/N$, может интерпретироваться как перенормированный параметр межплоскостного обмена при $T = T_N$.

С учетом (2.95) находим соотношение между перенормированными параметрами обмена при низких температурах и $T = T_N$:

$$\alpha_c = \alpha_r \left(1 + \frac{1,0686}{N} \right) \left[\frac{(N-2)T_N}{4\pi\rho_s} \right]^{1/(N-2)}. \quad (2.96)$$

Так же, как в ССВТ (см. раздел 2.2), перенормированное значение параметра межплоскостного обмена при $T = T_N$ меньше, чем его низкотемпературное значение, но результат $1/N$ -разложения при $N = 3$ отличается от результата ССВТ численным множителем, равным примерно 1,3.

При наличии малой анизотропии типа "легкая ось" спектр возбуждений в нулевом порядке по $1/N$, определяемый полюсами невозмущенной продольной и поперечной функций Грина, содержит щель $\Delta = \Delta(\alpha_r, f_r)$ для всех компонент σ_m кроме σ_N :

$$G_t^0(k, \omega_n) = [\mathbf{k}^2 + \omega_n^2 + 2\alpha(1 - \cos k_z) + \Delta]^{-1}, \quad (2.97)$$

$$G_l^0(k, \omega_n) = [\mathbf{k}^2 + \omega_n^2 + 2\alpha(1 - \cos k_z)]^{-1}.$$

При достаточно низких температурах,

$$T \gg f_r^{1/2}, \quad (N-2)T \frac{\ln(T^2/f_r)}{4\pi\rho_s} \ll \frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}_0^2}, \quad (2.98)$$

для намагниченности в первом порядке по $1/N$ воспроизводится результат теории спиновых волн (2.39). При промежуточных температурах,

$$T(N-2) \frac{\ln(T^2/f_r)}{4\pi\rho_s} \gg \frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}_0^2} \gg \frac{T(N-2)}{4\pi\rho_s}, \quad (2.99)$$

имеем

$$\left(\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} \right)^{1/\beta_2} = 1 - \frac{T}{4\pi\rho_s} \left[(N-2) \ln \frac{T^2}{f_r c^2} + B_2 \ln \frac{\bar{\sigma}_0^2}{\bar{\sigma}^2} - 2 + 2 \frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}_0^2} + O \left(\frac{NT}{4\pi\rho_s} \frac{\bar{\sigma}_0^2}{\bar{\sigma}^2} \right) \right], \quad (2.100)$$

где

$$B_2 = 3 + \frac{f_r}{\sqrt{f_r^2 + 2\alpha_r f_r}}. \quad (2.101)$$

Температурно-зависимый параметр анизотропии может быть определен из выражения

$$[G_t(k, 0)]^{-1} = [G_t^0(k, 0)]^{-1} + \Sigma_t(k, 0) - \Sigma_t(0, 0) \propto \propto k^2 + f(T), \quad (2.102)$$

откуда находим

$$\frac{f(T)}{f_r} = \left(\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} \right)^{4/(N-2)}. \quad (2.103)$$

В критической области, определяемой неравенством $\bar{\sigma}^2/\bar{\sigma}_0^2 \ll T(N-2)/4\pi\rho_s$, имеет место поведение намагниченности изинговского типа и $1/N$ -разложение не применимо. Это проявляется, в частности, в том, что производная $\partial\bar{\sigma}/\partial T$ расходится при некоторой температуре \tilde{T}_M . Однако соответствующая критическая область очень мала (как и критическая область для трехмерных флуктуаций в изотропном квазидвумерном случае). Поэтому температура Нееля может быть оценена как $T_N \approx \tilde{T}_M$.

Суммируем результаты РГ-подхода и $1/N$ -разложения в практически важном случае $N = 3$. В спин-волновой и двумерной областях, т.е. при

$$\bar{\sigma}_r \gg \frac{T}{4\pi\rho_s}, \quad \Gamma \gg \Delta, \quad (2.104)$$

результат РГ для относительной (подрешеточной) намагниченности имеет вид

$$\bar{\sigma}_r = 1 - \frac{T}{4\pi\rho_s} \left[\ln \frac{2\Gamma(T)}{\Delta(f_t, \alpha_t)} + 2 \ln \frac{1}{\bar{\sigma}_r} + 2(1 - \bar{\sigma}_r) \right], \quad (2.105)$$

где функция $\Delta(f, \alpha)$ определена в (2.63), температурно-перенормированные значения межплоскостного обмена и параметра анизотропии

$$\frac{f_t}{f_r} = \left(\frac{\alpha_t}{\alpha_r} \right)^2 = \bar{\sigma}_r^2, \quad (2.106)$$

величины $\Gamma(T)$, $\bar{\sigma}_r$, f_r , α_r , ρ_s определены в табл. 1. Уравнение для T_M имеет вид

$$T_M = 4\pi\rho_s \left[\ln \frac{2\Gamma(T_M)}{\Delta(f_c, \alpha_c)} + 2 \ln \frac{4\pi\rho_s}{T_M} + \Phi \left(\frac{f}{\alpha} \right) \right]^{-1}, \quad (2.107)$$

где $\Phi(x)$ — некоторая (универсальная в квантовом случае) функция, принимающая значения порядка единицы, f_c и α_c — параметры межплоскостного обмена и анизотропии при $T = T_M$, причем

$$\frac{f_c}{f_r} = \left(\frac{\alpha_c}{\alpha_r} \right)^2 = \left(\frac{T_M}{4\pi\rho_s} \right)^2. \quad (2.108)$$

Так как $T_M/4\pi\rho_s \sim 1/\ln(1/\Delta) \ll 1$, температурные перенормировки важны для правильного описания экспериментальных данных. В частности, параметры межплоскостного обмена и анизотропии, измеренные при разных температурах, могут значительно различаться. Результаты ССВТ (2.31)–(2.40) в пределе нулевой анизотропии

Таблица 1. Параметры уравнений для подрешеточной намагниченности (2.105) и температуры магнитного перехода (2.107) для различных случаев, $Z_{L1} = Z_{L2} = Z_{L3} = 1 - T/8\pi\rho_s^0$

	$\Gamma(T)$	$\bar{\sigma}_r$	ρ_s	f_r	α_r
Квантовый АФМ	T^2/c^2	\bar{S}/\bar{S}_0	$\gamma S \bar{S}_0$	$f \bar{S}_0^2/S^2$	$\alpha \bar{S}_0/S$
Квантовый ФМ	T/JS	\bar{S}/S	ρ_s^0	f	α
Классический ФМ, АФМ	32	\bar{S}/S	$\rho_s^0 Z_{L1}$	$f Z_{L2}^{-1}$	αZ_{L3}^{-1}

(межплоскостного обмена) отличаются от (2.105) и (2.107) коэффициентами при $\ln(1/\bar{\sigma}_r)$ и $\ln(4\pi\rho_s/T_M)$ во втором члене в квадратных скобках, равными соответственно 2(1) в ССВТ и 4(3) в $1/N$ -разложении (с учетом температурной зависимости параметров межплоскостного обмена и анизотропии). Таким образом, роль поправок к ССВТ более важна в двумерном анизотропном магнетике, чем в изотропном квазидвумерном.

Результат $1/N$ -разложения в $O(N)$ -модели вне критической области, точнее, при

$$\bar{\sigma}_r^2 > \frac{T}{4\pi\rho_s}, \quad \Gamma \gg \Delta \quad (2.109)$$

в первом порядке разложения по $1/N$ имеет вид

$$\bar{\sigma}_r = 1 - \frac{T}{4\pi\rho_s} \left[\ln \frac{2\Gamma(T)}{\Delta(f_t, \alpha_t)} + 2B_2 \ln \frac{1}{\bar{\sigma}_r} + 2(1 - \bar{\sigma}_r^2) \right]. \quad (2.110)$$

В частных случаях $\alpha = 0$ и $f = 0$ коэффициент при втором члене в квадратных скобках в (2.110) вдвое больше, чем в РГ-результате (2.105), что обеспечивает более правильное описание температурной области, переходной к критическому поведению, и критической области. Уравнения для T_M имеют вид (2.107), одинаковый в обоих подходах. В изотропном случае ($f = 0$) результат $1/N$ -разложения для подрешеточной намагниченности в критической области выражается в виде

$$\bar{\sigma}_r = \left(\frac{4\pi\rho_s}{T_N} \right)^{(\beta_3-1)/2} \left[\frac{1}{1-A_0} \left(1 - \frac{T}{T_N} \right) \right]^{\beta_3}, \quad (2.111)$$

где $A_0 = 0,9635$ и $\beta_3 \approx 0,36$.

2.6. Теоретическое описание экспериментальных данных намагниченности и температур Нееля слоистых систем

Рассмотрим теперь применение теоретико-полевых методов для анализа экспериментальных данных. Одним из хорошо изученных слоистых соединений является La_2CuO_4 [9, 69]. Значение перенормированного параметра обмена для этого соединения $\gamma|J| \approx 1850$ К может быть определено из экспериментальных данных для спин-волнового спектра при низких температурах [70], в то время как значение межплоскостного обмена $\alpha_r = 10^{-3}$ может быть найдено из сравнения намагниченности в ССВТ с экспериментальной зависимостью $\bar{\sigma}_r(T)$ при низких температурах [28, 63]. На рисунке 4 представлены экспериментальная температурная зависимость намагниченности подрешетки в La_2CuO_4 [69], результаты спин-волновых приближений (СВТ, ССВТ и теории Тябликова) для этого соединения, РГ-подхода и $1/N$ -разложения. Результат для температуры Нееля $1/N$ -разложения первого порядка — $T_N = 345$ К — значительно ниже всех спин-волновых приближений, но хорошо согласуется с экспериментальным значением $T_N^{\text{exp}} = 325$ К.

Ренормгрупповой подход правильно описывает зависимость $\bar{\sigma}_r(T)$ в спин-волновой области ($T < 300$ К) и в области двумерных флуктуаций (которая очень невелика при вышеприведенном малом значении α_r), в то время как при более высоких температурах этот подход дает завышенные значения $\bar{\sigma}_r$. Кривая $1/N$ -разложения находится ближе всего к экспериментальным данным и

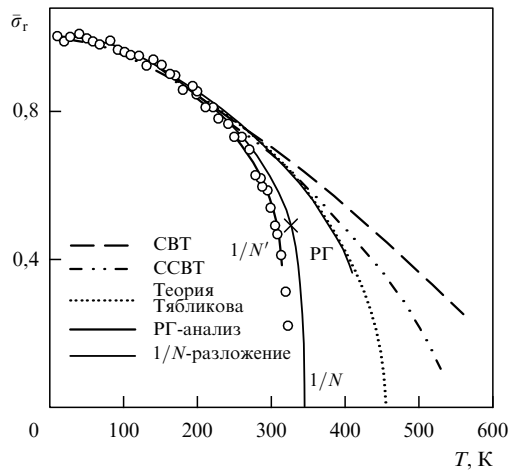


Рис. 4. Теоретические температурные зависимости относительной намагниченности подрешетки $\bar{\sigma}_r$ в различных приближениях: спин-волновых теориях, РГ-подходе (2.105) и $1/N$ -разложении в $O(N)$ -модели (уравнения (2.110) и (2.111)) и экспериментальные точки (кружки) для La_2CuO_4 [3]. Кривая РГ приведена вплоть до значения температуры, при котором производная $\partial\bar{\sigma}_r/\partial T$ расходится. Кривая, обозначенная как $1/N'$, ближе к экспериментальным данным в переходной температурной области благодаря включению анизотропии, определенной из условия равенства T_M ее экспериментальному значению (см. обсуждение в тексте).

правильно описывает критическое поведение. Результаты численного решения уравнения в температурной области (2.109) и зависимости (2.111) в критической области, совпадают в точке $T = 330$ К, отмеченной крестиком на рис. 4. Различие между теоретической и экспериментальной кривыми в области $320 < T < 340$ К может быть обусловлено влиянием анизотропии. При фиксированном Δ в (2.110) и B_2 , определенном из наилучшего совпадения с экспериментальными данными при промежуточных температурах (см. рис. 4), находим значения $\alpha_r = 10^{-4}$, $f_r = 5 \times 10^{-4}$. Таким образом, рассматриваемый подход дает возможность оценить относительную роль межплоскостного обмена и магнитной анизотропии в слоистых соединениях. Отметим, что альтернативное объяснение различия между теоретическим и экспериментальным результатами, основанное на рассмотрении четырехспинового взаимодействия, было предложено в работе [71].

В слоистых перовскитах K_2NiF_4 , Rb_2NiF_4 и K_2MnF_4 магнитная анизотропия, как известно, является более важной, чем межплоскостной обмен. Соединение K_2NiF_4 имеет спин $S = 1$, из данных нейтронного рассеяния следует $|J| = 102$ К и $T_N^{\text{exp}} = 97,1$ К [4]. На рисунке 5 показана экспериментальная зависимость $\bar{\sigma}(T)$ [1] и результаты спин-волновых подходов, РГ-подхода и численного решения уравнения (2.110). Значение $f_r = 0,0088$ было получено из сравнения результата намагниченности ССВТ с экспериментальными данными при низких температурах (это значение хорошо согласуется с экспериментальным $f_r = 0,0084$ [4]). В спин-волновом и двумерном флуктуационном температурных интервалах (2.104) ($T < 80$ К) кривые, соответствующие $1/N$ -разложению и РГ-подходу, располагаются несколько выше, чем экспериментальные точки, поскольку значения $T^2/f_r c^2$ в этой области невелики. В то же время кривая $1/N$ -разложения хорошо количественно согла-

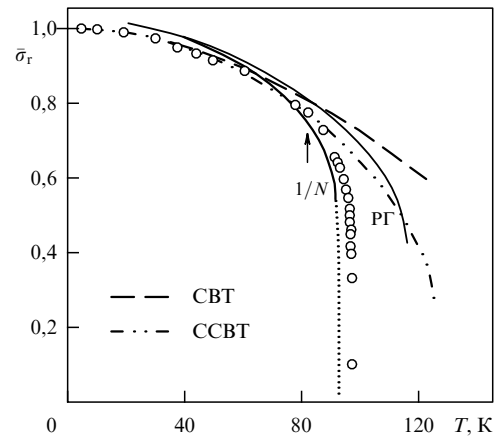


Рис. 5. Относительная намагниченность подрешетки $\bar{\sigma}_r(T)$ для K_2NiF_4 (кружки) по сравнению с относительной намагниченностью в стандартной спин-волновой теории (штриховая кривая), ССВТ (штрихпунктирная кривая), РГ-подходе и результатом решения уравнения в промежуточной температурной области (сплошная кривая). Пунктирной линией показана экстраполяция результата $1/N$ -разложения на изинговскую критическую область. Граница между областью с флуктуациями двумерного типа и поведения переходного к критическому отмечена стрелкой.

суется с экспериментальными данными. Процедура экстраполяции к изинговскому критическому поведению дает $T_N = 91,4$ К, причем ширина критической изинговской области составляет 1 К. Отметим, что учет членов порядка $1/x_{\bar{\sigma}}$ в (2.110) приводит к значению $T_N = 92,7$ К. В переходной к критическому поведению области $80 < T < 90$ К теоретическая $O(3)$ -кривая для K_2NiF_4 , в отличие от кривой для La_2CuO_4 , лежит немного ниже экспериментальной. Этот факт может быть приписан влиянию межплоскостного обмена. Определение соответствующих параметров в переходной области дает значения $\alpha_r = 0,0017$, $f_r = 0,0069$, которые соответствуют $T_N = 97$ К и затравочным параметрам $\alpha|J| = 0,1$ К, $\zeta|J| = 0,76$ К. Соответствующие экспериментальные результаты для α отсутствуют, поэтому сравнение с экспериментом в данном случае затруднительно.

Соединение Rb_2NiF_4 обладает сильной магнитной анизотропией: согласно [4] $|J| = 82$ К, $|J|f_r = 3,45$ К, $T_N^{\text{exp}} = 94,5$ К. Из сравнения экспериментальной зависимости $\bar{\sigma}_r(T)$ с результатами ССВТ при низких температурах можно определить значение параметра анизотропии $f_r = 0,046$, которое хорошо согласуется с вышеприведенным экспериментальным значением. Из (2.107) следует $T_N = 95,5$ К, что также близко к экспериментальным данным для температуры Нееля.

Соединение K_2MnF_4 имеет спин $S = 5/2$, поэтому на его примере может быть продемонстрирована промежуточная между квантовым и классическим случаями ситуация. Параметры обмена и анизотропии $|J| = 8,4$ К, $|J|f_r = 0,13$ К могут быть найдены из данных нейтронного рассеяния [4]. На рисунке 6 показано сравнение результатов различных подходов с экспериментальными данными для этого соединения. Можно видеть, что $1/N$ -разложение приводит к результатам, хорошо описывающим экспериментальную ситуацию во всем интервале температур. В то же время экспериментальные точки расположены между квантовой кривой и

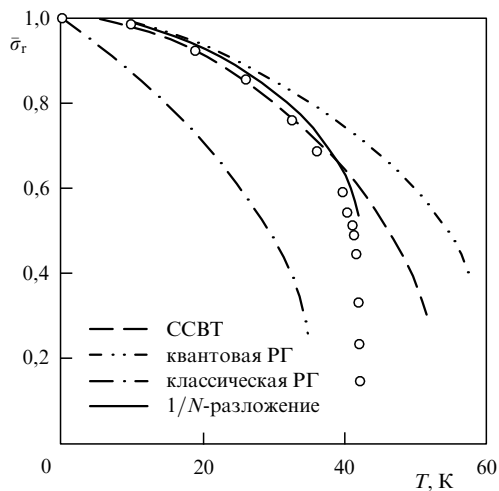


Рис. 6. Экспериментальная зависимость $\bar{\sigma}_r(T)$ для K_2MnF_4 (кружки) по сравнению с результатами для ССВТ (штриховая кривая), квантовым РГ-анализом (кривая "две точки-штрих"), классическим РГ-анализом (штрихпунктирная кривая) и решением уравнения в промежуточной температурной области (сплошная кривая).

классической РГ-кривой, причем квантовое приближение является более удовлетворительным. Это подтверждает квантовый характер поправок к намагниченности даже при относительно большой величине спина. В рассматриваемом случае ССВТ, правильно учитывающая возбуждения на масштабе постоянной решетки, приводит к лучшим результатам по сравнению с результатами РГ-подхода. Таким образом, аккуратное рассмотрение систем с большим спином в рамках континуальных моделей требует численного расчета интегралов по импульсам и суммирования по мацубаровским частотам.

На рисунке 7 показано сравнение результатов ССВТ и РГ-подхода для намагниченности классического магнетика с результатами вычислений методом Монте-Карло [72]. Можно видеть, что за исключением небольшой критической области, кривая РГ довольно точна, хотя при этом пренебрегается топологическими возбуждениями. Область применимости РГ-подхода в классическом случае шире, чем в квантовом, так что нет необходимости использовать $1/N$ -разложение для описания переходной и критической областей.

Результаты сравнения теоретических и экспериментальных данных по слоистым перовскитам, суммированные в табл. 2, показывают, что РГ-подход и $1/N$ -разложение в $O(N)$ -модели приводят к количественно правильным, хорошо согласующимся с экспериментальными данными результатам для температур магнитного перехода и намагниченности этих систем.

Таблица 2. Экспериментальные параметры и температуры магнитного перехода слоистых магнетиков и соответствующие теоретические значения T_M в стандартной спин-волновой теории, самосогласованной спин-волновой теории и $1/N$ -разложении

Соединение	S	J, K	J', K	η	T_{CBT}, K	T_{CCBT}, K	$T_{1/N}, K$	$T_{эксп}, K$
La_2CuO_4	1/2	1600	0,8	0	672	537	343	325
K_2NiF_4	1	102	0	0,0088	160	125	90,0	97,1
Rb_2NiF_4	1	82	0	0,046	180	118	88,4	94,5
K_2MnF_4	5/2	8,4	0	0,015	74,8	52,1	42,7	42,1
$CrBr_3$	3/2	12,4	1	0,024	79,2	51,2	39,0	40,0

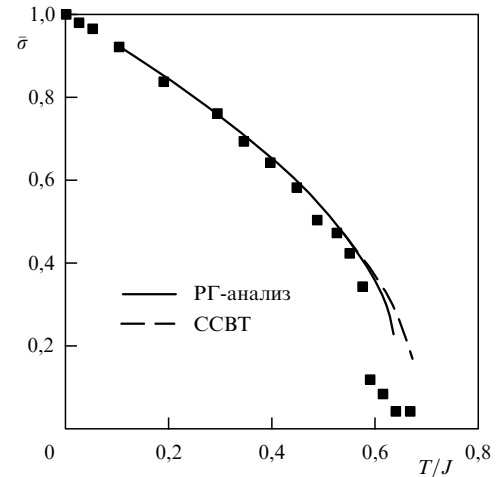


Рис. 7. Результаты ренормгруппового подхода (сплошная кривая) и ССВТ (штриховая кривая) для относительной намагниченности $\bar{\sigma}$ классического анизотропного двумерного магнетика ($\zeta = 0$, $\eta = 0,001$) в сравнении с результатом вычисления методом Монте-Карло [72]; РГ- и ССВТ-кривые показаны до значения температуры, при котором $\partial\bar{\sigma}/\partial T = \infty$.

3. Квазидвумерные магнетики с анизотропией типа "легкая плоскость"

Другой важный класс низкоразмерных систем — двумерные системы с анизотропией типа "легкая плоскость". Классическая двумерная xu -модель, соответствующая предельному случаю сильной легкоплоскостной анизотропии, была подробно изучена в ранних работах [73–75]. В этих работах было продемонстрировано, что элементарными возбуждениями в xu -модели являются топологические вихревые структуры и что существует переход Березинского–Костерлица–Таулеса, связанный с диссоциацией вихревых пар при температуре

$$T_{\text{ВКТ}} = \frac{\pi}{2} |J| S^2. \quad (3.1)$$

При этой же температуре степенная зависимость корреляционной функции спинов от расстояния заменяется экспоненциальной (в квантовой xu -модели ситуация более сложная, поскольку должны быть учтены не только поперечные, но и продольные компоненты спина).

Физически более реальная ситуация, однако, описывается двумерной моделью Гейзенберга (2.1) со слабой анизотропией типа "легкая плоскость" (рис. 8), т.е. η , $\zeta < 0$ и $|\eta|, |\zeta|, \alpha \ll 1$. В этом случае спин-волновые возбуждения при низких температурах играют определяющую роль в температурной зависимости намагниченности (подрешеточной). Как и в случае "легкая ось",

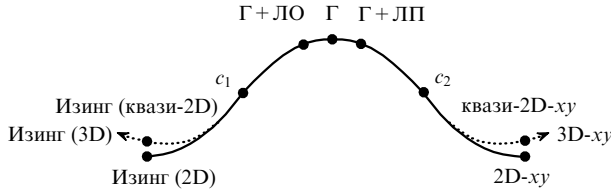


Рис. 8. Схематическая картина РГ-траекторий в слоистых магнетиках. В левой части рисунка: переход от двумерной модели Гейзенберга с анизотропией "легкая ось" (Г+ЛО) к двумерной модели Изинга (Изинг (2D)). В правой части: переход от двумерной модели Гейзенберга с анизотропией "легкая плоскость" (Г+ЛП) к двумерной xy -модели. Точки перегиба c_1, c_2 отмечают переходные области. Пунктирные линии — для соответствующих квазидвумерных моделей.

при температурах, не слишком низких по сравнению с температурой магнитного фазового перехода, необходимо правильный учет динамического взаимодействия спиновых волн.

Однако при слабой анизотропии "легкая плоскость" переход Березинского–Костерлица–Таулеса предшествует магнитному фазовому переходу. При этом благодаря существованию "квазидальнего" порядка при $T < T_{\text{ВКТ}}$ включение сколь угодно слабого межплоскостного обмена приводит к появлению магнитного перехода при $T > T_{\text{ВКТ}}$. Простое выражение для температуры Березинского–Костерлица–Таулеса, полученное в пределе малой анизотропии, имеет вид [76]

$$T_{\text{ВКТ}} = \frac{4\pi |J| S^2}{\ln(\pi^2/\eta)} \quad (3.2)$$

(для удобства дальнейшего изложения здесь и ниже в этом разделе сделана замена $\eta \rightarrow -\eta$, $\zeta \rightarrow -\zeta$). Как и в случае изотропных и легкоосных магнетиков, формулы (3.2) недостаточно для количественного описания экспериментальных данных.

Как и в случае с магнетиками, обладающими анизотропией типа "легкая ось", можно ожидать, что термодинамические свойства этих систем, за исключением малой окрестности $T_{\text{ВКТ}}$, определяются возбуждениями спин-волнового типа и для учета влияния взаимодействия спиновых волн при температурах, не принадлежащих критической области, также может быть применен метод ренормгруппы [77].

Ренормгрупповой анализ снова выполняется на основе функционала (2.47). В классическом случае (т.е. в пренебрежении динамической частью действия, содержащей производную по времени) имеется два типа возбуждений: поле n_y описывает бесщелевые возбуждения в плоскости, а поле n_z — возбуждения с поворотом спина поперек плоскости, обладающие щелью в энергетическом спектре. Разложение (2.47) по $n_{y,z}$ (предполагается, что ось квантования намагниченности (подрешеточной) направлена вдоль x) приводит в ведущем порядке по $1/S$ к действию

$$L_{\text{ст}} = \frac{1}{2} S^2 \int_0^{1/T} d\tau \sum_{\mathbf{k}} [(J_0 - J_{\mathbf{k}}) \pi_{y,\mathbf{k}} \pi_{y,-\mathbf{k}} + (J_0 - J_{\mathbf{k}} - \eta J_{\mathbf{k}}) \pi_{z,\mathbf{k}+\mathbf{Q}} \pi_{z,-\mathbf{k}-\mathbf{Q}}], \quad (3.3)$$

где \mathbf{Q} — волновой вектор магнитной структуры и вектор \mathbf{n} представлен в виде $\mathbf{n}_{\mathbf{k}}(\tau) = \{\sigma_{\mathbf{k}}(\tau), \pi_{y,\mathbf{k}}(\tau), \pi_{z,\mathbf{k}}(\tau)\}$.

При не слишком малых температурах возникают логарифмические вклады в намагниченность (подрешеточную намагниченность), суммирование которых является предметом РГ-подхода. Характерные энергетические масштабы возбуждений π_y и π_z , в отличие от таковых в случае "легкая ось", различны. В связи с этим в намагниченности возникают два типа логарифмических вкладов: логарифмы анизотропии и логарифмы межплоскостного обмена. Ситуация, при которой присутствуют два типа возбуждений с различными характерными масштабами, является типичной для систем, демонстрирующих переход (кроссовер) между двумя режимами с различными типами флуктуаций [67]. В рассматриваемой модели это соответствует переходу от гейзенберговского (почти изотропного) поведения к xy -поведению.

Для правильного описания этого перехода необходимо включить анизотропию во все параметры перенормировки [67]. Вследствие анизотропного характера модели имеется два параметра перенормировки поля π : Z_{xy} и Z_z , определяемые соотношениями $\pi_{xR}/\pi_x = \pi_{yR}/\pi_y = Z_{xy}$ и $\pi_{zR}/\pi_z = Z_z$. Для этих параметров, а также эффективной температуры и анизотропии находим следующую систему РГ-уравнений, определяющих изменение температуры, параметров анизотропии и межплоскостного обмена и параметра перенормировки поля π с изменением масштаба [77]:

$$\begin{aligned} A_R \frac{d(1/t_{A_R})}{dA_R} &= (1 + t_{A_R})f(\eta_{A_R}, A_R) + O(t_{A_R}^2), \\ A_R \frac{d \ln Z_{xy}}{dA_R} &= t_{A_R} [1 + f(\eta_{A_R}, A_R)] + O(t_{A_R}^3), \\ A_R \frac{d \ln \eta_{A_R}}{dA_R} &= 2t_{A_R}f(\eta_{A_R}, A_R) + O(t_{A_R}^2), \\ A_R \frac{d \ln \alpha_{A_R}}{dA_R} &= -t_{A_R} + O(t_{A_R}^2), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где A_R — параметр масштаба, $f(\eta_{A_R}, A_R) = \eta_{A_R} A_R^2 / (\eta_{A_R} A_R^2 + \eta)$, t_{A_R} — эффективная температура, $Z_z \equiv 1$.

Аналогично уравнениям (2.56)–(2.59), уравнения (3.4) описывают эволюцию параметров перенормированной модели с изменением масштаба. Выражение для эффективной температуры в этой модели имеет вид

$$\frac{1}{t_{A_R}} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \frac{A_R^2 t_{A_R}^2 + t^2 \eta}{A_0^2 t_{A_R}^2 + t^2 \eta} + \ln \frac{t}{t_{A_R}} + \Phi(A_R), \quad (3.5)$$

где t — безразмерная температура,

$$t = \begin{cases} \frac{T}{2\pi JS^2} & (\text{ФМ}), \\ \frac{T}{2\pi \rho_s} & (\text{АФМ}), \end{cases} \quad (3.6)$$

$\rho_s \approx S(S + 0,079)|J|$ — константа спиновой жесткости; функция $\Phi(A_R) = O(t_{A_R})$ соответствует вкладам более высокого порядка, $A_0 = q_0$ — начальный масштаб: $q_0 = \sqrt{T/JS}$ в ФМ-случае, $q_0 = T/c$ в АФМ-случае. В двумерном гейзенберговском режиме ($A_R \gg \sqrt{\eta}$) эффективная температура t_{A_R} мала, так что

$$\frac{t}{t_{A_R}} = \frac{1}{t} + \ln \frac{A_R t}{A_0 t_{A_R}}. \quad (3.7)$$

В то же время при $L_R \ll \sqrt{\eta}$ находим

$$\frac{1}{t_{AR}} = \frac{1}{t} - \ln \frac{A_0}{\sqrt{\eta}} + 2 \ln \frac{t}{t_{AR}} + \Phi(L_R). \quad (3.8)$$

В этом режиме t_{AR} зависит от L_R только через функцию $\Phi(L_R)$. Величина $1/\eta^{1/2}$ — характерный масштаб перехода (кроссовера) от гейзенберговского поведения к xu -поведению, так что (3.8) описывает поведение эффективной температуры t_{AR} в xu -режиме. Аналогично температуре магнитного перехода магнетиков с анизотропией типа "легкая ось", температура Березинского–Костерлица–Таулеса может быть оценена из условия перехода в режим сильной связи, $t_{AR} \sim 1$,

$$t_{\text{ВКТ}} = \left(\ln \frac{A_0}{\sqrt{\eta}} + 2 \ln \frac{2}{t_{\text{ВКТ}}} + C \right)^{-1}, \quad (3.9)$$

где C — универсальная постоянная.

Результат (3.9) может быть получен также из сравнения (3.8) с результатом решения РГ-уравнений эффективной классической xu -модели [74, 75]. Действительно, даже если исходная модель квантовая, то на масштабах $L_R \ll \sqrt{\eta} \ll L_\tau^{-1}$ эффективная xu -модель является классической, поскольку L_τ определяет характерный масштаб, отделяющий квантовые флуктуации от классических. В связи с этим стандартная система РГ-уравнений двумерной классической xu -модели [73–75]

$$\begin{aligned} L_R \frac{d(1/t_{AR})}{dL_R} &= 32\pi^2 y_{AR}^2, \\ L_R \frac{dy_{AR}}{dL_R} &= -y_{AR} \left(2 - \frac{1}{2t_{AR}} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

может быть использована для описания РГ-преобразования в xu -режиме. Необходимо отметить, что константой связи для системы вихрей является не t (как для спиновых волн), а $y = \exp(-E_0/T)$, где E_0 — энергия вихря. Выбирая масштаб $L'_R \ll \sqrt{\eta}$, на котором осуществляется переход от уравнений (3.6) к (3.10), и используя уравнение сепаратрисы

$$8\pi y_1 = \frac{1}{t_1} - 4, \quad t = t_{\text{ВКТ}}, \quad (3.11)$$

разделяющей низко- и высокотемпературные фазы ($t_1 \equiv t_{AR}$, $y_1 \equiv y_{AR}$), можно воспроизвести результат (3.9) для температуры Березинского–Костерлица–Таулеса.

Уравнения (3.4) позволяют также определить температурную зависимость корреляционной длины при температурах, превышающих температуру Березинского–Костерлица–Таулеса. В критической области, при $t > t_{\text{ВКТ}}$, т.е. при

$$\frac{1}{8\pi} (t_{\text{ВКТ}}^{-1} - t^{-1}) \ll 1, \quad (3.12)$$

выражение для корреляционной длины имеет вид

$$\xi \approx \frac{1}{\sqrt{\eta}} \exp \left(\frac{A}{2\sqrt{t_{\text{ВКТ}}^{-1} - t^{-1}}} \right), \quad (3.13)$$

где A — некоторая константа, сходный с результатом для классической xu -модели. При условии, обратном (3.12), имеет место стандартное гейзенберговское поведение

[46]:

$$\xi = \frac{C_\xi}{A_0} t \exp \frac{1}{t}. \quad (3.14)$$

При наличии межплоскостного обмена и достаточно низких температурах возникает магнитный порядок. Вследствие топологических эффектов температура перехода при малом межплоскостном обмене стремится, однако, к $T_{\text{ВКТ}}$, а не к нулю. Описание РГ-преобразования при температурах, близких к критической области, затруднительно из-за сложной геометрии вихревых петель в трехмерном пространстве. Вместо прямого вычисления РГ-траекторий можно использовать те же аргументы, что и в случае "легкая ось". Температура перехода определяется из требования, чтобы корреляционная длина модели без межплоскостного обмена ($\alpha = 0$) совпадала с характерным масштабом перехода от двумерной xu -модели к трехмерной. Тогда для критической температуры $t_c = T_C/(2\pi JS^2)$ (или $T_N/(2\pi\rho_s)$) при $\alpha \ll \eta$ находим [77]

$$t_c = \left[\ln \frac{A_0}{\sqrt{\eta}} + 2 \ln \frac{2}{t_{\text{ВКТ}}} + C - \frac{A^2}{\ln^2(\eta/\alpha)} \right]^{-1}. \quad (3.15)$$

Последний член в квадратных скобках в (3.15) определяет разницу между t_c и $t_{\text{ВКТ}}$. Так как этот член может быть не мал, разложение результата (3.15) по нему не производится.

Результат (3.15) качественно правилен вплоть до значений α порядка η (в этом случае последний член в квадратных скобках (3.15) приводит только к перенормировке константы C). В обратном пределе, $\alpha \gg \eta$, поправки к результату РГ для квазидвумерных магнетиков вследствие анизотропии "легкая плоскость" определяются как [77]

$$t_c = \left[\ln \frac{A_0}{\sqrt{\alpha}} + 2 \ln \frac{2}{t_c} + C' + O \left(\frac{\eta^{1/\psi}}{\alpha^{1/\psi}} \right) \right]^{-1}, \quad (3.16)$$

где $\psi = v_3(2 - \gamma_\eta)$ — критический индекс области, переходной между изотропным и анизотропным поведением, v_3 — соответствующий критический индекс трехмерной модели Гейзенберга, γ_η — аномальная размерность параметра анизотропии трехмерной модели Гейзенберга. Результат ε -разложения в анизотропной модели ϕ^4 размерностью $4 - \varepsilon$ при $\varepsilon = 1 - \psi \approx 0,83$ [67]. Для антиферромагнетика согласно (2.90) постоянная $C \approx -0,066$. В отличие от последнего члена в (3.15), последний член в правой части (3.16) имеет степенную зависимость от параметра анизотропии. Это является следствием того факта, что корреляционная длина в трехмерной модели Гейзенберга имеет степенную температурную зависимость вблизи температуры магнитного фазового перехода. По этой причине поправка в (3.16) мала и в случае незначительной анизотропии ею можно пренебречь.

Обратимся теперь к экспериментальной ситуации. Наиболее хорошо экспериментально исследованная система с анизотропией типа "легкая плоскость" — соединение K_2CuF_4 — является ферромагнетиком со спином $S = 1/2$, $T_{\text{ВКТ}} = 5,5$ К, $T_C = 6,25$ К и параметрами $J = 20$ К, $\eta = 0,04$, $\alpha = 6 \times 10^{-4}$ [4]. При подстановке этих значений в (3.9) и (3.15) получим $C \approx -0,5$ и

$A \approx 3,5$. Эти значения констант могут быть проверены на других системах.

Другой пример квазидвумерного ФМ с анизотропией "легкая плоскость" — соединение NiCl_2 с $S = 1$. Согласно [4] его параметры — $J = 20$ К, $\eta = 8 \times 10^{-3}$ и $\alpha = 5 \times 10^{-5}$. Используя значения A и C , определенные для K_2CuF_4 , находим $T_{\text{ВКТ}} = 17,4$ К и $T_C = 18,7$ К, которые согласуются с экспериментальными данными (оба значения, $T_{\text{ВКТ}}$ и T_C , лежат в области 18–20 К). В то же время вычисления с ведущей логарифмической точностью согласно (3.2) приводят к $T_{\text{ВКТ}} = 35,3$ К, что вдвое больше экспериментального значения.

Соединение $\text{BaNi}_2(\text{PO}_4)_2$ согласно [4] является антиферромагнетиком с $S = 1$, $|J| = 22,0$ К и анизотропией $\eta = 0,05$, $\alpha = 10^{-4}$. Вычисление дает [78] значение $T_{\text{ВКТ}} = 23,0$ К, совпадающее с экспериментальным, и $T_N = 24,3$ К, что снова хорошо согласуется с $T_N^{\text{exp}} = (24,5 \pm 1)$ К. Несмотря на то, что для данного соединения $T_{\text{ВКТ}} \sim |J|S$, этот случай также должен рассматриваться как квантовый в соответствии с критерием квантового режима $(T/JS)^2 \ll 32$ (см. раздел 2.2).

4. Квазиодномерные изотропные антиферромагнетики

4.1. Модель и ее бозонизация

Хотя физическая ситуация для квазиодномерных магнетиков существенно отличается от таковой в квазидвумерном случае, при теоретическом описании квазиодномерных магнетиков также может быть использована модель Гейзенберга (2.1). Ниже рассматривается простейший случай изотропных антиферромагнетиков ($\eta = \xi = 0$) со спином $S = 1/2$ и малым межцепочечным обменом, $|J'| \ll J$. При этом гамильтониан удобно записать в виде

$$H = J \sum_{n,i} \mathbf{S}_{n,i} \mathbf{S}_{n+1,i} + \frac{1}{2} J' \sum_{n,\langle ij \rangle} \mathbf{S}_{n,i} \mathbf{S}_{n,j}, \quad (4.1)$$

где n — номера узла в цепочке, i, j — индексы цепочек, $J > 0$ и J' — внутри- и межцепочечный обменные интегралы соответственно.

При исследовании элементарных возбуждений модели спиновые операторы в каждой цепочке могут быть представлены в терминах бозе-операторов $\varphi_i(x)$ (так называемая процедура "бозонизации"). В методе бозонизации спиновые операторы вначале представляются через ферми-операторы с помощью так называемого преобразования Йордана–Вигнера (см., например, [79]). Указанное преобразование позволяет свести модель Гейзенберга к системе взаимодействующих фермионов. При этом поперечная часть спинового обмена приводит к гамильтониану свободных фермионов, а продольная часть отвечает их взаимодействию. В свою очередь, ферми-операторы представляются через новые бозе-операторы φ_i с помощью соотношений, позволяющих воспроизвести коммутационные соотношения исходных ферми-операторов. В результате находим выражения для исходных спиновых операторов через бозонные [79]:

$$\mathbf{S}_{n,i} = \mathbf{J}_i(x) + (-1)^n \mathbf{n}_i(x), \quad (4.2)$$

здесь

$$\begin{aligned} J_i^z(x) &= \frac{\beta}{2\pi} \partial_x \varphi_i(x), \\ J_i^\pm(x) &= \frac{A}{\pi} \exp[\pm i\beta\theta_i(x)] \cos \beta\varphi_i(x), \end{aligned} \quad (4.3)$$

— так называемые однородные компоненты спиновых операторов,

$$\begin{aligned} n_i^z(x) &= \frac{A}{\pi} \cos \beta\varphi_i(x), \\ n_i^\pm(x) &= \frac{A}{\pi} \exp[\pm i\beta\theta_i(x)] \end{aligned} \quad (4.4)$$

— соответствующие подрешеточные компоненты, A — постоянная масштаба обратной постоянной решетки, $\beta = \sqrt{2\pi}$, θ_i удовлетворяет соотношению $\partial_x \theta_i = -\Pi_i$, где Π_i — импульс, канонически сопряженный с φ_i .

Гамильтониан (4.1), записанный в терминах бозе-операторов $\varphi_i(x)$, имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{v}{2} \sum_i \int dx [\Pi_i^2 + (\partial_x \varphi_i)^2] + g_u \sum_i \int dx \cos 2\beta\varphi_i - \\ &- \frac{J'A^2}{2\pi^2} \sum_{i,\delta_\perp} \int dx [\cos(\beta\varphi_i) \cos(\beta\varphi_{i+\delta_\perp}) + \\ &+ \cos \beta(\theta_{i+\delta_\perp} - \theta_i)], \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $v = \pi J/2$. Первые два члена в правой части (4.5) соответствуют системе отдельных цепочек и представляют собой гамильтониан стандартной модели синус-Гордона. Первый член описывает свободную бозе-систему, а второй — взаимодействие бозонов вдоль цепочек. Последнее возникает из-за рассеяния, сопровождающегося процессом переброса электрона (Umklapp-рассеяния), в системе фермионов, введенных преобразованием Йордана–Вигнера; это взаимодействие является маргинальным с ренормгрупповой точки зрения и дает логарифмические поправки к термодинамическим величинам [36, 80–84]. Численные оценки (см. [36, 80]) приводят к значению $g_u/(2\pi) \approx 0,25$. Последняя сумма в (4.5) описывает взаимодействие спинов между цепочками.

4.2. Приближение межцепочечного среднего поля для бозонизованного гамильтониана

Простейший способ рассмотрения межцепочечного обменного взаимодействия — так называемое межцепочечное приближение среднего поля [36]. Расцепляя член взаимодействия:

$$\cos(\beta\varphi_i) \cos(\beta\varphi_{i+\delta_\perp}) \rightarrow 2 \langle \cos(\beta\varphi_{i+\delta_\perp}) \rangle \cos(\beta\varphi_i), \quad (4.6)$$

находим

$$\begin{aligned} H_{\text{МФ}} &= \frac{v}{2} \sum_i \int dx [\Pi_i^2 + (\partial_x \varphi_i)^2] + \\ &+ g_u \sum_i \int dx \cos(2\beta\varphi_i) - \frac{A}{\pi} h_{\text{МФ}} \sum_i \int dx \cos(\beta\varphi_i), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$h_{\text{MF}} = \frac{z_{\perp} J' A \langle \cos(\beta \varphi_i) \rangle}{\pi}, \quad (4.8)$$

z_{\perp} — число ближайших соседей в поперечном к цепочке направлении ($z_{\perp} = 4$ для тетрагональной решетки). Приближение (4.6) дает возможность свести проблему многих цепочек к проблеме одной цепочки в эффективном подрешеточном магнитном поле. Вводя функцию

$$B(h; T) = \frac{A}{\pi} \langle \cos(\beta \varphi_i) \rangle_h, \quad (4.9)$$

вычисляемую при наличии магнитного поля (последний член в (4.7)), получаем самосогласованное уравнение для подрешеточной намагниченности \bar{S} :

$$\bar{S}_{\text{MF}} = B(z_{\perp} J' \bar{S}_{\text{MF}}, T). \quad (4.10)$$

Несмотря на то, что гамильтониан H_{MF} имеет одноцепочечную форму, вычисление функции $B(h, T)$ (являющейся аналогом функции Бриллюэна в обычной теории среднего поля гейзенберговских магнетиков) при произвольных температурах — достаточно сложная задача. Согласно размерной оценке $B(h, T) = h^{1/3} f(h^{2/3}/T)$ с некоторой функцией $f(x)$: $f(x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$ и $f(\infty) = \text{const}$. При $g_u = 0$ (в этом случае имеем стандартную модель синус-Гордона или, что эквивалентно, массивную модель Тирринга) $B(h, T)$ была определена с помощью бете-анзаца [85]. При $h \rightarrow 0$

$$B(h, T) = h \chi_0(T), \quad (4.11)$$

где $\chi_0(T)$ — подрешеточная восприимчивость системы в отсутствие поля h [36, 84],

$$\chi_0(T) = \frac{\tilde{\chi}_0}{T} L\left(\frac{AJ}{T}\right), \quad \tilde{\chi}_0 = \frac{\Gamma^2(1/4)}{4\Gamma^2(3/4)} \approx 2,1884, \quad (4.12)$$

$$L\left(\frac{AJ}{T}\right) = C \left[\ln \frac{AJ}{T} + \frac{1}{2} \ln \ln \frac{AJ}{T} + O(1) \right]^{1/2}, \quad (4.13)$$

здесь Γ — гамма-функция. Константы C и A могут быть определены на основании численных расчетов [86]: $C \approx 0,137$, $A \approx 5,8$.

Результат (4.11) дает возможность вычислить T_{N} в теории среднего поля, поскольку $h_{\text{MF}} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow T_{\text{N}}$. Уравнение для температуры Нееля имеет вид [36]

$$T_{\text{N}}^{\text{MF}} = z_{\perp} J' \tilde{\chi}_0 L\left(\frac{AJ}{T_{\text{N}}^{\text{MF}}}\right). \quad (4.14)$$

Таким образом, согласно межцепочечной теории среднего поля $T_{\text{N}} \propto |J'|$; подрешеточная намагниченность основного состояния $\bar{S}_0 \propto \sqrt{|J'|/J}$ также зависит степенным образом от J' , что означает возникновение дальнего порядка при произвольно малых $|J'|$. В то же время стандартная теория спиновых волн не делает различия между целыми и полуцелыми значениями спинов и предсказывает конечное критическое значение $J'_c \sim J \exp(-\pi S)$ [30, 53], так что при $|J'| < J'_c$ подрешеточная намагниченность \bar{S}_0 исчезает, а при $|J'| > J'_c$

$$\bar{S}_0 \propto \ln \left| \frac{J'}{J'_c} \right|, \quad T_{\text{N}} \propto \bar{S}_0 \sqrt{|J'|}. \quad (4.15)$$

Указанное противоречие было разрешено с помощью метода ренормгруппы [33–35], показавшего, что на масштабе обратной длины $\Lambda \gg J'_c/J$ стандартная спин-волновая теория действительно применима, причем перенормировочный фактор намагниченности $Z_{\Lambda}^{-1/2} \propto \ln \Lambda$. В то же время для полуцелых спинов при $\Lambda \ll J'_c/J$ имеет место зависимость $Z_{\Lambda}^{-1/2} \propto \Lambda^{1/2}$ [33, 34], означающая справедливость результатов теории межцепочечного среднего поля при $|J'| \ll J'_c$.

Значения температуры Нееля в межцепочечной теории среднего поля оказываются сильно завышенными по сравнению с экспериментальными данными, поскольку эта теория не принимает во внимание эффекты корреляций между спинами, расположенными на разных цепочках. В частности, значение температуры Нееля (4.14) не чувствительно к пространственной размерности системы, хотя в двумерном случае должно быть $T_{\text{N}} = 0$, в трехмерном случае значения T_{N} оказываются слишком высокими по сравнению с экспериментальными данными.

Корреляции между положениями спинов на разных цепочках выражаются в наличии коллективных возбуждений, вносящих вклад в термодинамические свойства. При этом недостатки межцепочечной теории среднего поля аналогичны недостаткам теории Стонера для зонных магнетиков, которая пренебрегает вкладом коллективных возбуждений, позднее учтенных в теории Мории [24]. Как и в теории Мории, коллективные возбуждения в модели Гейзенберга могут быть рассмотрены в рамках приближения случайных фаз (ПСФ), в котором они определяются полюсами спиновых восприимчивостей [36, 81]:

$$\chi^{\pm}(k_z, \omega) = \frac{\chi_0^{\pm}(k_z, \omega)}{1 - J'(k_x, k_y) \chi_0^{\pm}(k_z, \omega)/2}, \quad (4.16)$$

$$\chi^{zz}(k_z, \omega) = \frac{\chi_0^{zz}(k_z, \omega)}{1 - J'(k_x, k_y) \chi_0^{zz}(k_z, \omega)}, \quad (4.17)$$

где для тетрагональной решетки

$$J'(k_x, k_y) = 2J'(\cos k_x + \cos k_y), \quad (4.18)$$

$\chi_0(k, \omega)$ — динамическая подрешеточная восприимчивость в модели (4.7). При $h \rightarrow 0$ восприимчивость $\chi_0(k, \omega)$ также определяется простыми аналитическими выражениями [83, 84]:

$$\chi_0(k_z, \omega) = \frac{1}{T} L\left(\frac{AJ}{T}\right) \tilde{\chi}_0\left(\frac{k_z}{T}, \frac{\omega}{T}\right),$$

$$\tilde{\chi}_0(q, r) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(1/4 + ik_+) \Gamma(1/4 + ik_-)}{\Gamma(3/4 + ik_+) \Gamma(3/4 + ik_-)}, \quad k_{\pm} = \frac{r \pm q}{4\pi}. \quad (4.19)$$

$\chi_0^{zz}(k_z, \omega) = \chi_0^{\pm}(k_z, \omega)/2 = \chi_0(k_z, \omega)$. При этом $\chi_0(0, 0) = \chi_0(T)$.

Для определения поправок к межцепочечной теории среднего поля, связанных с вкладом коллективных возбуждений, можно использовать $1/z_{\perp}$ -разложение (z_{\perp} — число ближайших соседей в направлениях, поперечных к цепочкам) [78]. Этот подход, который подобен $1/z$ -разложению (или разложению по обратному радиусу взаимодействия), использовавшемуся много лет назад для улучшения стандартной теории среднего поля гей-

зенберговских магнетиков [87, 88], позволяет определить температуру Нееля квазиодномерных систем с большей точностью, чем в межцепочечном приближении среднего поля.

4.3. Поправки первого порядка по $1/z_{\perp}$

к межцепочечному приближению среднего поля

Рассмотрим теорию возмущений по $J'/\max(h_{MF}, T) \sim 1/z_{\perp}$, являющуюся аналогом разложения по $J'/\max(h_{MF}, T) \sim 1/z$ для трехмерных гейзенберговских магнетиков [88]. Для разложения подрешеточной намагниченности

$$\bar{S} = \frac{A \langle \cos(\beta\varphi_i) \rangle_h}{\pi}, \quad (4.20)$$

в ряд по J' удобно использовать выражение для \bar{S} в формализме континуального интеграла

$$\bar{S} = \frac{A}{\pi} \frac{\int D\varphi \cos(\beta\varphi_i(0)) \exp(-L[\varphi])}{\int D\varphi \exp(-L[\varphi])}, \quad (4.21)$$

где $L[\varphi]$ — функция Лагранжа, соответствующая гамильтониану (4.5). В нулевом порядке по J' (т.е. при $J' = 0$) имеем

$$\bar{S}_0 = B(h, T), \quad (4.22)$$

где функция B определена в (4.9). Разлагая (4.21) в ряд по J' , находим, что каждый член может быть представлен определенной диаграммой; диаграммная техника при этом совпадает с диаграммной техникой для спиновых операторов [87, 88].

Некоторые элементы этой техники показаны на рис. 9. Все диаграммы классифицируются согласно их порядку по $J'/\max(h_{MF}, T) \sim 1/z_{\perp}$. Диаграммы, представленные рис. 10, имеют нулевой порядок по $1/z_{\perp}$. Суммирование этих диаграмм приводит к сдвигу внешнего магнитного поля на величину среднего поля:

$$h \rightarrow \tilde{h} = h + h_{MF}, \quad h_{MF} = z_{\perp} J' \bar{S} \quad (4.23)$$

(тот же самый результат может быть получен исключением вклада среднего поля непосредственно из (4.21)). Диаграммы первого порядка по $1/z_{\perp}$ (рис. 11а) содержат одну линию взаимодействия ПСФ, являющегося суммой неприводимых диаграмм, показанных на рис. 11б. В аналитическом виде это взаимодействие определяется как

$$V^{+,zz}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{J'(k_x, k_y)}{1 + \delta - J'(k_x, k_y) \chi_0^{\pm,zz}(k_z, \omega)}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \odot &= \langle S^z \rangle & \text{---} \text{---} \text{---} &= \langle S_i^z S_i^z \rangle_{\text{irr}} \\ \text{---} \text{---} \text{---} &= J'_{ij} & \text{---} \text{---} \text{---} &= \langle S_i^z S_i^z \rangle_{\text{irr}} \\ \text{---} \text{---} \text{---} &= \langle S_i^z S_i^+ S_i^- \rangle_{\text{irr}} \end{aligned}$$

Рис. 9. Некоторые элементы диаграммной техники для спиновых операторов (см. детальное описание в [88]).

$$\begin{aligned} \bar{S}^{MF} &= \odot + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \\ &= \odot + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \\ &= \odot + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \end{aligned}$$

Рис. 10. Диаграммы для подрешеточной намагниченности в нулевом порядке по $1/z_{\perp}$ (приближение среднего поля).

$$\begin{aligned} \text{---} \text{---} \text{---} &= \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} &= \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \end{aligned}$$

Рис. 11. (а) Диаграммы первого порядка по $1/z_{\perp}$ для подрешеточной намагниченности. (б) Уравнения для ПСФ-линий взаимодействия.

где

$$\begin{aligned} \chi_0^{zz}(k_z, \omega) &= \frac{A^2}{\pi^2} \int d^2x \langle \cos \beta\varphi_i(0) \cos \beta\varphi_i(x) \rangle_{0, \text{irr}} \times \\ &\quad \times \exp(-ik_z x + i\omega_n \tau), \\ \chi_0^{\pm}(k_z, \omega) &= \frac{A^2}{\pi^2} \int d^2x \langle \exp\{i\beta[\theta_i(0) - \theta_i(x)]\} \rangle \times \\ &\quad \times \exp(-ik_z x + i\omega_n \tau), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$\langle AB \rangle_{\text{irr}}$ — неприводимое среднее двух операторов,

$$\langle AB \rangle_{\text{irr}} = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle. \quad (4.26)$$

По аналогии с теорией Мории [24] в знаменатель (4.24) введена поправка $\delta = z_{\perp} J' \chi_0^{\pm}(0, 0) - 1$, позволяющая удовлетворить теореме Голдстоуна, которая требует наличия полюса эффективного взаимодействия при $k = 0, \omega = 0$ и $T \leq T_N$.

С учетом (4.24) для намагниченности подрешетки получим

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{1}{T} h_{MF} \tilde{\chi}_0 L\left(\frac{A}{T}\right) \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{2T\tilde{\chi}_0} L\left(\frac{A}{T}\right) \int d^2r V(r) \times \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1}{8} F(r) + \frac{1}{2} G(r) \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \sum_n \sum_{k_x, k_y} \frac{\cos k_x + \cos k_y}{2\tilde{\chi}_0 - (\cos k_x + \cos k_y) \tilde{\chi}_0(k_z, 2\pi i n)} \times \\ &\quad \times \exp(ik_z r - 2\pi i n \tau), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\tilde{\chi}_0 = \frac{\pi}{2} \int d^2z \frac{1}{|\sinh(\pi z)|} \approx 2,1184, \quad (4.29)$$

функции $F(r)$, $G(r)$ определены в [78]. С использованием связи между средним полем и подрешеточной намагниченностью (4.23) после собирания всех поправок в знаменатель результат для температуры Нееля в первом порядке по $1/z_{\perp}$ принимает вид

$$T_N = rJ'z_{\perp}\tilde{\chi}_0 L\left(\frac{\Delta J}{T_N}\right). \quad (4.30)$$

Результат (4.30) отличается от результата теории среднего поля (4.14) множителем r , зависящим от структуры решетки в направлении, перпендикулярном к цепочкам. Численный расчет для тетрагональной решетки приводит к значению $r \approx 0,70$. Таким образом, уменьшение T_N благодаря флуктуационным эффектам составляет 25 % его среднеполевого значения, что хорошо согласуется с результатами численного анализа [89]. В двумерном случае $r = 0$, так что $T_N = 0$.

Поправки к подрешеточной намагниченности основного состояния могут быть вычислены аналогичным образом [78]. Для динамической восприимчивости одной цепочки при $T = 0$ имеем [36, 81]

$$\chi_0^{+-} = \frac{1}{4|J'|} \frac{\Delta^2}{\omega^2 + v^2k^2 + \Delta^2}, \quad (4.31)$$

$$\chi_0^{zz} = \frac{Z'/Z}{4|J'|} \frac{\Delta^2}{\omega^2 + v^2k^2 + 3\Delta^2}, \quad (4.32)$$

где $\Delta \approx 6,175|J'|$ — щель в спектре спиновых возбуждений; Z , Z' — спектральные веса продольных и поперечных одномагнитных возбуждений соответственно ($Z'/Z \approx 0,49$); $\tilde{S}_0 \approx 1,017|J'|$ — подрешеточная намагниченность в основном состоянии.

Вновь используя ПСФ для потенциала взаимодействия возбуждений на разных цепочках (4.27), находим

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \bar{S}_{MF} - \frac{\Delta}{4\pi} \frac{\partial \Delta}{\partial h_{MF}} I, \\ I &= \sum_k \left[\left(1 - \frac{\Gamma_k}{2}\right) \ln \frac{1}{1 - \Gamma_k} + \right. \\ &\quad \left. + \left(3 - \frac{Z'\Gamma_k}{2Z}\right) \ln \frac{1}{1 - Z'\Gamma_k/(3Z)} \right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

где $h_{MF} = z_{\perp}J'\tilde{S}_0$, $\Gamma_k = \cos k$ для двумерной решетки и $\Gamma_k = (\cos k_x + \cos k_y)/2$ для тетрагональной. Численное интегрирование приводит к результату [78]

$$\bar{S}_0 = (0,677 - I) h_{MF}^{1/3}. \quad (4.34)$$

Последний член в скобках (4.34) в представляет собой $1/z_{\perp}$ -поправку к намагниченности основного состояния,

$$I = \begin{cases} 0,011 & (3D), \\ 0,060 & (2D). \end{cases} \quad (4.35)$$

Из соотношения (4.34) следует, что намагниченность основного состояния уменьшается почти на 10 % по сравнению с ее значением в теории среднего поля для двумерной решетки и только на 2 % для трехмерной. Таким образом, флуктуационные поправки для подрешеточной намагниченности основного состояния гораздо менее важны, чем для температуры Нееля, и в трехмерном случае ими можно пренебречь.

4.4. Сравнение с экспериментальными данными

Рассмотрим применение приведенных теоретических результатов к описанию экспериментальных данных для магнитных квазиодномерных систем. Наиболее изученным квазиодномерным соединением является KCuF_3 , имеющее спин $S = 1/2$. Из экспериментов по нейтронному рассеянию [10] для этого соединения следуют значения параметра магнитного обмена вдоль цепочек $J = 406$ К и намагниченности основного состояния $\bar{S}_0/S = 0,25$. Как обсуждается в [36], эта величина \bar{S}_0/S соответствует $J'/J = 0,047$, так что $J' = 19,1$ К. Межцепочечное приближение среднего поля (4.14) при этих параметрах приводит к значению $T_N = 47$ К, что несколько выше экспериментального результата $T_N = 39$ К [10]. В то же время результат $1/z_{\perp}$ -разложения (4.30) $T_N = 37,7$ К находится гораздо ближе к экспериментальному значению. Таким образом, рассматриваемый подход слегка переоценивает влияние флуктуационных эффектов, но значительно улучшает межцепочечное приближение среднего поля. Вклад двойного логарифмического члена в (4.13), составляющий приблизительно 5 % от величины температуры Нееля, улучшает согласие с экспериментальными данными.

Другое соединение с $S = 1/2$, широко обсуждаемое в литературе, — Sr_2CuO_3 — имеет следующие параметры [11, 12]: $J = 2600$ К, $T_N = 5$ К. Надежные экспериментальные данные для J' отсутствуют, но, используя (4.30) и экспериментальное значение T_N , находим $J' = 1,85$ К. Тогда из (4.34) следует $\bar{S}_0/S = 0,042$, что согласуется с экспериментальными данными ($\bar{S}_0/S \lesssim 0,05$).

Для Ca_2CuO_3 экспериментальные параметры следующие [11, 12]: $S = 1/2$, $J = 2600$ К и $T_N = 11$ К, откуда находим $J' = 4,3$ К и $\bar{S}_0/S = 0,062$, что также хорошо согласуется с экспериментальными данными [12]: $\bar{S}_0(\text{Ca}_2\text{CuO}_3)/\bar{S}_0(\text{Sr}_2\text{CuO}_3) = 1,5 \pm 0,1$. Таким образом, результат (4.30) является достаточным для количественного описания реальных квазиодномерных магнитных систем.

5. Заключение

Квазиодномерные и слоистые магнетики представляют собой пример систем с сильными флуктуациями и необычным поведением термодинамических и магнитных свойств. Исследование этих систем — весьма нетривиальная проблема с точки зрения теоретической физики. Обычная спин-волновая теория (и даже ее усовершенствованный самосогласованный вариант — ССВТ), хотя и приводит к правильному результату для температуры перехода T_M в ведущем логарифмическом приближении, оказывается количественно применимой лишь при температурах $T \ll T_M$. В области более высоких температур необходим учет динамического взаимодействия спиновых волн, выходящий за рамки низшего (борновского) приближения, а также существенно не спин-волновых возбуждений.

Проблема описания термодинамических свойств квазиодномерных и слоистых магнетиков получила существенное развитие в рамках теоретико-полевых методов, примененных к широко распространенной модели магнетизма этих систем — модели Гейзенберга. Использование таких подходов позволяет получить простые аналитические результаты для температурной зависимо-

сти намагниченности и величины T_M , которые могут быть использованы при обработке экспериментальных данных. В квазидвумерных магнетиках в широкой области температур, меньших T_M , спин-волновая картина спектра возбуждений является адекватной и взаимодействие спиновых волн приводит к появлению поправочных слагаемых в выражениях для намагниченности и обратной величины температуры перехода $1/T_M$, что значительно улучшает согласие с экспериментальными данными. Малая критическая область вблизи T_M может быть описана с учетом неспинволновых возбуждений, в том числе в рамках $1/N$ -разложения. В квазиодномерных магнетиках переход к бозе-возбуждениям (неспинволновым) позволяет построить систематическое разложение по обратному координационному числу решетки в направлениях, перпендикулярных к цепочкам.

Таким образом, с теоретической точки зрения в последнее время достигнуто хорошее понимание физической картины спектра и свойств низкоразмерных магнетиков в широком интервале температур, дающее основу для количественного описания свойств реальных систем, и мы ставили одной из своих задач привлечь внимание экспериментаторов к этому факту. В то же время при детальном анализе магнетизма конкретных соединений необходим учет дипольного взаимодействия, релятивистских взаимодействий типа взаимодействия Дзялошинского–Мории и т.д. Несмотря на то, что уже имеются первые попытки описания систем с подобными взаимодействиями в рамках самосогласованного спин-волнового и теоретико-полевого подходов [90, 91], такое описание ждет своего дальнейшего развития. Наряду с этим интенсивно исследуемые в последнее время комплексные соединения со сложной кристаллической структурой, а также системы типа пленок и мультислоев, рассматривавшиеся ранее в рамках спин-волновой теории [92], требуют более конкретного изучения в рамках описанных подходов.

Интересные проблемы возникают при описании систем, имеющих фрустрированные магнитные структуры, на двумерной квадратной решетке с учетом обменных взаимодействий между соседями, следующими за ближайшими [93–97], двумерной треугольной решетке [98–103], решетках КагOME, пирохлора [104, 105] и т.д. Наличие спиновых фрустраций в таких системах приводит, как и в низкоразмерных соединениях, к подавлению дальнего магнитного порядка (при сохранении ближнего) и, следовательно, к очень необычным термодинамическим свойствам. Фрустрированные системы также рассматривались в рамках спин-волновых теорий [106–111].

Еще одна проблема, актуальная, в частности, при исследовании высокотемпературной сверхпроводимости и не затронутая в обзоре, — это взаимодействие носителей тока с магнитными моментами. Специфика низкоразмерных систем (сильный ближний магнитный порядок) приводит к соответствующим особенностям электронного спектра [112, 113]. Сильное электрон-электронное взаимодействие в этих условиях является дополнительным фактором, приводящим к формированию некогерентных электронных состояний и к возможности перехода металл–изолятор. В связи с этим сейчас ведется интенсивное теоретическое и экспериментальное исследование проводящих низкоразмерных систем, находящихся вблизи такого перехода [114–116]. Это

исследование требует развития существенно новых подходов, в которых, однако, могут быть использованы теоретические методы описания подсистемы локализованных моментов, изложенные в настоящем обзоре.

Авторы благодарны М.И. Кацнельсону за многократные ценные обсуждения и Ю.А. Изюмову за внимательное прочтение рукописи и ценные критические замечания.

Список литературы

1. Birgeneau R J, Guggenheim H J, Shirane G *Phys. Rev. B* **1** 2211 (1970)
2. de Jongh L J, Miedema A R *Experiments on Simple Magnetic Model Systems* (London: Taylor and Francis, 1974)
3. Birgeneau R J, Guggenheim H J, Shirane G *Phys. Rev. B* **8** 304 (1973)
4. de Jongh L J (Ed.) *Magnetic Properties of Layered Transition Metal Compounds* (Physics and Chemistry of Materials with Low-Dimensional Structures, Vol. 9) (Dordrecht: Kluwer Acad., 1990)
5. Lahti P M (Ed.) *Magnetic Properties of Organic Materials* (New York: Marcel Dekker, 1999)
6. Blundell S J, Pratt F L J *Phys.: Condens. Matter* **16** R771 (2004)
7. Allenspach R J *Magn. Magn. Mater.* **129** 160 (1994)
8. Elmers H-J *Int. J. Mod. Phys. B* **9** 3115 (1995)
9. Birgeneau R J et al. *Phys. Rev. B* **38** 6614 (1988)
10. Satija S K et al. *Phys. Rev. B* **21** 2001 (1980); Tennant D A *Phys. Rev. B* **52** 13381 (1995)
11. Keren A et al. *Phys. Rev. B* **48** 12926 (1993); Ami T et al. *Phys. Rev. B* **51** 5994 (1995)
12. Kojima K M et al. *Phys. Rev. Lett.* **78** 1787 (1997)
13. Kenzelmann M et al. *Phys. Rev. Lett.* **87** 017201 (2001); *Phys. Rev. B* **66** 024407 (2002)
14. Kadowaki H, Hirakawa K, Ubukoshi K J. *Phys. Soc. Jpn.* **52** 1799 (1983); Itoh S et al. *J. Phys.: Condens. Matter* **5** 6767 (1993)
15. Dagotto E, Rice T M *Science* **271** 618 (1996)
16. Anderson P W *Phys. Rev.* **86** 694 (1952)
17. Dyson F J *Phys. Rev.* **102** 1217, 1230 (1956)
18. Малеев С В *ЖЭТФ* **33** 1010 (1957)
19. Harris A B et al. *Phys. Rev. B* **3** 961 (1971)
20. Туç S, Halperin B I *Phys. Rev. B* **42** 2096 (1990)
21. Каганов М И, Чубуков А В *ВФН* **153** 537 (1987); Косевич Ю А, Чубуков А *ЖЭТФ* **91** 1105 (1986)
22. Барьяхтар В Г, Криворучко В Н, Яблонский Д А *ЖЭТФ* **85** 602 (1983)
23. Барьяхтар В Г, Криворучко В Н, Яблонский Д А *Функции Грина в теории магнетизма* (Киев: Наук. думка, 1984)
24. Мория Т *Спиновые флуктуации в магнетиках с коллективизированными электронами* (М.: Мир, 1988)
25. Паташинский А З, Покровский В Л *Флуктуационная теория фазовых переходов 2-е изд.* (М.: Наука, 1982)
26. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982)
27. Chubukov A V, Sachdev S, Ye J *Phys. Rev. B* **49** 11919 (1994)
28. Irkhin V Yu, Katanin A A *Phys. Rev. B* **55** 12318 (1997)
29. Haldane F D M *Phys. Lett. A* **93** 464 (1983); *Phys. Rev. Lett.* **50** 1153 (1983)
30. Affleck I J. *Phys.: Condens. Matter* **1** 3047 (1989)
31. Shelton D G, Nersisyan A A, Tsvelik A M *Phys. Rev. B* **53** 8521 (1996)
32. Hori H, Yamamoto S J. *Phys. Soc. Jpn.* **73** 549 (2004)
33. Affleck I, Gelfand M P, Singh R R P J. *Phys. A: Math. Gen.* **27** 7313 (1994)
34. Affleck I, Halperin B I J. *Phys. A: Math. Gen.* **29** 2627 (1996)
35. Wang Z *Phys. Rev. Lett.* **78** 126 (1997)
36. Schulz H J *Phys. Rev. Lett.* **77** 2790 (1996)
37. Маттис Д К *Теория магнетизма* (М.: Мир, 1967)
38. Arovas D P, Auerbach A *Phys. Rev. B* **38** 316 (1988)
39. Yoshioka D J. *Phys. Soc. Jpn.* **58** 3733 (1989)
40. Holstein T, Primakoff H *Phys. Rev.* **58** 1098 (1940)
41. Loly P D J. *Phys. C: Solid State Phys.* **4** 1365 (1971)
42. Bloch M *Phys. Rev. Lett.* **9** 286 (1962)
43. Rastelli E, Tassi A, Reatto L J. *Phys. C: Solid State Phys.* **7** 1735 (1974)

44. Sarker S et al. *Phys. Rev. B* **40** 5028 (1989)
45. Takahashi M *Phys. Rev. B* **40** 2494 (1989)
46. Chakravarty S, Halperin B I, Nelson D R *Phys. Rev. B* **39** 2344 (1989)
47. Koriety P, Chakravarty S *Phys. Rev. B* **40** 4858 (1989)
48. Irkhin V Yu, Katanin A A, Katsnelson M I *Phys. Lett. A* **157** 295 (1991); Ирхин В Ю, Катанин А А, Кашнелсон М И *ФММ* **79** (1) 65 (1995)
49. Koriety P *Phys. Rev. Lett.* **68** 3480 (1992)
50. Liu B-G J. *Phys.: Condens. Matter* **4** 8339 (1992)
51. Irkhin V Yu, Katanin A A, Katsnelson M I *Phys. Rev. B* **60** 1082 (1999)
52. Барабанов А Ф, Старых О А *Письма в ЖЭТФ* **51** 271 (1990)
53. Irkhin V Yu, Katanin A A, Katsnelson M I J. *Phys.: Condens. Matter* **4** 5227 (1992)
54. Xu J H, Ting C S *Phys. Rev. B* **42** 6861 (1990)
55. Oguchi T, Kitatani H J. *Phys. Soc. Jpn.* **59** 3322 (1990)
56. Nishimori H, Saika Y J. *Phys. Soc. Jpn.* **59** 4454 (1990)
57. Тябликов С В *Методы квантовой теории магнетизма 2-е изд.* (М.: Наука, 1975)
58. Irkhin V Yu, Katanin A A, Katsnelson M I *Phys. Rev. B* **54** 11953 (1996)
59. Chubukov A V, Sarykh O A *Phys. Rev. B* **52** 440 (1995)
60. Polyakov A M *Phys. Lett. B* **59** 79 (1975)
61. Brézin E, Zinn-Justin J *Phys. Rev. B* **14** 3110 (1976)
62. Nelson D R, Pelcovits R A *Phys. Rev. B* **16** 2191 (1977)
63. Irkhin V Yu, Katanin A A *Phys. Rev. B* **57** 379 (1998)
64. Нагаев Э Л *Магнетизм со сложными обменными взаимодействиями* (М.: Наука, 1988)
65. Klauder J R *Phys. Rev. D* **19** 2349 (1979)
66. Auerbach A *Interacting Electrons and Quantum Magnetism* (New York: Springer-Verlag, 1994)
67. Amit D J *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena* 2nd ed. (Singapore: World Scientific, 1984)
68. Ма Ш *Современная теория критических явлений* (М.: Мир, 1980)
69. Keimer B et al. *Phys. Rev. B* **45** 7430 (1992)
70. Aepli G et al. *Phys. Rev. Lett.* **62** 2052 (1989); Lyons K B et al. *Phys. Rev. B* **37** 2353 (1988)
71. Katanin A A, Kampf A P *Phys. Rev. B* **66** 100403 (2002)
72. Levanyuk A P, Garcia N J. *Phys.: Condens. Matter* **4** 10277 (1992); Serena P A, Garcia N, Levanyuk A *Phys. Rev. B* **47** 5027 (1993)
73. Березинский В Л *ЖЭТФ* **59** 907 (1970)
74. Kosterlitz J M, Thouless D J J. *Phys. C: Solid State Phys.* **6** 1181 (1973); Kosterlitz J M J. *Phys. C: Solid State Phys.* **7** 1046 (1974)
75. José J V et al. *Phys. Rev. B* **16** 1217 (1977)
76. Hikami S, Tsuneto T *Prog. Theor. Phys.* **63** 387 (1980)
77. Irkhin V Yu, Katanin A A *Phys. Rev. B* **60** 2990 (1999)
78. Irkhin V Yu, Katanin A A *Phys. Rev. B* **61** 6757 (2000)
79. Tselik A M *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995)
80. Affleck I et al. *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** 511 (1989)
81. Essler F H L, Tselik A M, Delfino G *Phys. Rev. B* **56** 11001 (1997)
82. Barzykin V, Affleck I J. *Phys. A: Math. Gen.* **32** 867 (1999)
83. Schulz H J *Phys. Rev. B* **34** 6372 (1986)
84. Barzykin V, cond-mat/9904250
85. Chung S G, Chang Y-C J. *Phys. A: Math. Gen.* **20** 2875 (1987)
86. Sarykh O A, Sandvik A W, Singh R R P *Phys. Rev. B* **55** 14953 (1997)
87. Вакс В Г, Ларкин А И, Пикин С А *ЖЭТФ* **53** 281 (1967)
88. Изюмов Ю А, Кассан-оглы Ф А, Скрябин Ю Н *Полевые методы в теории ферромагнетизма* (М.: Наука, 1974); Изюмов Ю А, Скрябин Ю Н *Статистическая механика магнитоупорядоченных систем* (М.: Наука, 1987)
89. Yasuda C et al. *Phys. Rev. Lett.* **94** 217201 (2005)
90. Grechnev A et al. *Phys. Rev. B* **71** 024427 (2005)
91. Benfatto L et al. *Physica B* **378–380** 449 (2006); Silva Neto M et al. *Phys. Rev. B* **73** 045132 (2006)
92. Irkhin V Yu, Katanin A A, Katsnelson M I J. *Magn. Magn. Mater.* **140–144** 1695 (1995)
93. Ballou R, Lacroix C, Nunez Regueiro M D *Phys. Rev. Lett.* **66** 1910 (1991)
94. Chattopadhyay T, Brückel Th, Burlet P *Phys. Rev. B* **44** 7394 (1991)
95. Chubukov A V J. *Phys.: Condens. Matter* **2** 4455 (1990)
96. Rastelli E, Tassi A *Phys. Rev. B* **44** 7135 (1991)
97. Ferrer J *Phys. Rev. B* **47** 8769 (1993)
98. Гехт П С *УФН* **159** 261 (1989)
99. Hirota K, Nakazawa Y, Ishikawa M, Technical Report ISSP Ser. A No. 2286 (Tokyo: Tokyo Univ., 1990)
100. Yoshizawa H et al., Technical Report ISSP Ser. A No. 2289 (Tokyo: Tokyo Univ., 1990)
101. Chubukov A V, Jolicoeur Th *Phys. Rev. B* **46** 11137 (1992)
102. Korshunov S E *Phys. Rev. B* **47** 6165 (1993)
103. Yang K, Warman L K, Girvin S M *Phys. Rev. Lett.* **70** 2641 (1993)
104. Reimers J N et al. *Phys. Rev. B* **43** 3387, 5692 (1991)
105. Gaulin B D et al. *Phys. Rev. Lett.* **69** 3244 (1992)
106. Xu J H, Ting C S *Phys. Rev. B* **42** 6861 (1990)
107. Nishimori H, Saika Y J. *Phys. Soc. Jpn.* **59** 4454 (1990)
108. Jolicoeur Th, Le Guillom J *Phys. Rev. B* **40** 2727 (1989)
109. Yoshioka D, Miyazaki J J. *Phys. Soc. Jpn.* **60** 614 (1991)
110. Hizi U, Sharma P, Henley C L *Phys. Rev. Lett.* **95** 167203 (2005); Hizi U, Henley C L *Phys. Rev. B* **73** 054403 (2006)
111. Del Maestro A G, Gingras M J P J. *Phys.: Condens. Matter* **16** 3339 (2004)
112. Irkhin V Yu, Katsnelson M I J. *Phys.: Condens. Matter* **3** 6439 (1991); *Phys. Rev. B* **62** 5647 (2000)
113. Irkhin V Yu, Katsnelson M I *Phys. Rev. B* **53** 14008 (1996); *Eur. Phys. J. B* **19** 401 (2001)
114. Maier Th A, Pruschke Th, Jarrell M *Phys. Rev. B* **66** 075102 (2002)
115. Sénéchal D, Tremblay A-M S *Phys. Rev. Lett.* **92** 126401 (2004)
116. Civelli M et al. *Phys. Rev. Lett.* **95** 106402 (2005)

Magnetic order and spin fluctuations in low-dimensional systems

A.A. Katanin

*Institute of Metal Physics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
ul. S. Kovalevskoi 18, 620041 Ekaterinburg, Russian Federation*

Tel. + 7 (343) 378-37 78. Fax + 7 (343) 374-52 44. E-mail: katanin@mail.ur.ru

Max-Planck Institut für Festkörperforschung, Heisenberg str. 1, 70569 Stuttgart, Germany

Tel. + 49 (0711) 689 15 36. Fax + 49 (0711) 689 17 02. E-mail: A.Katanin@fkf.mpg.de

V.Yu. Irkhin

*Institute of Metal Physics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
ul. S. Kovalevskoi 18, 620041 Ekaterinburg, Russian Federation*

Tel. + 7 (343) 378-37 78. Fax + 7 (343) 374-52 44. E-mail: Valentin.Irkhin@imp.uran.ru

Current theoretical and experimental situation is reviewed for low-dimensional insulating systems with a low magnetic transition temperature T_M and pronounced short-range magnetic order above this temperature. Both the standard and self-consistent spin-wave theories are shown to be insufficient to quantitatively describe the experimental data on these systems. Field-theoretical approaches are discussed that consider the contribution (ignored in spin-wave theories) that spin-fluctuation excitations make to the thermodynamic properties of ferro- and antiferromagnets.

PACS numbers: **75.10. - b**, 75.30.Ds, 75.40.Cx

Bibliography — 116 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **177** (6) 639–662 (2007)

*Received 13 December 2006
Physics – Uspekhi* **50** (6) (2007)